# Notes du mont Royal

www.notesdumontroyal.com

Cette œuvre est hébergée sur « *Notes du mont Royal* » dans le cadre d'un exposé gratuit sur la littérature.

SOURCE DES IMAGES

Google Livres

# EVCLIDIS POSTERIORES LIBRI IX.

*Acceßit XVI. de SOLIDORVM REGVLARIVM cuiuslibet intra quodlibet comparatione.*

Omnes perſpicuis DEMONSTRATIONIBVS, accuratisq; SCHOLIIS illuſtrati:

*Nunc tertiò editi, ac multarum rerum acceßione locupletati.*

Auctore
CHRISTOPHORO CLAVIO BAMBERGENSI, è Societate IESV.

COLONIAE,
Expenſis IOH. BAPTISTAE CIOTTI
clɔ Iɔ XCI.

R. 135. 668

EVCLIDIS

# ELEMENTVM SEPTIMVM.

## DEFINITIONES.

### I.

VNITAS est, secundùm quam vnumquodque eorum, quæ sunt, vnum dicitur.

ACTENVS egit Euclides de priori Geometriæ parte, ea scilicet, quæ circa plana versatur; restabat altera solidorum. Verùm antè ei necesse fuit de lineis commensurabilibus, & incommensurabilibus differere, quod ad proprietates corporum plurimorum, eorumq́, maximè, quæ regularia nominantur, demonstrandas, atq́, vt oportet, explicandas, harum cognitio linearum requiratur, idq́, adeò, vt absq́ eis solidorum tractatio imperfecta sit, neq́ suis numeris absoluta. Huc accedit, quòd absq́ eisdem lineis plurima latera tam planorum, quàm solidorum, si Geometriæ Theoria in opus conferatur, atq́ vsum, neq́ exprimi queant, neq́ intelligi. Nam non rarò pleraque laterum sunt illæ lineæ, quæ à Græcis ἄλογοι, à Latinis Irrationales appellantur: Vel, si non sunt Irrationales, longitudine certè inter se sunt incommensurabiles, atq́ adeò sub mensuram numerorum non cadunt. Et quia earundem linearum explicatio, atq́ intelligentia cum numeris est implicata, & coniuncta, vt absque his nullo modo cognoscantur; oportuit etiam numerorum explanationem, vt doctrinæ suus ordo, ratioq́ constaret, lineis illis anteponi. Quare hoc libro septimo, & duobus insequentibus, circa numerorum proprietates, affectionesq́, quantum ea rei Geometricæ inseruiunt, occupatur, vt in decimo deindè facilius, ac plenius demonstrationes linearum commensurabilium, & incommensurabilium exequatur.

INCIPIENS igitur more suo à principijs, definit initio vnitatem, docetq́ eam esse, secundùm quam vnumquodque eorum, quæ sunt, vnum esse dicitur. Nam secundùm vnitatem vnum lapidem, vnum animal, vnum corpus, &c. dicere solemus. Caterùm vnitas in numeris nullam suscipit diuisionem, quemadmodum nec punctum in magnitudinibus, vt libro primo docuimus.

### II.

NVMERVS autem ex vnitatibus composita multitudo.

CVM numerus sit multitudo quædam ex vnitatibus composita, manifestum est, numerũ quemlibet tot habere partes, quot sunt vnitates eum constituentes: Ita vt vnitas sit pars cuiusuis numeri denominata ab ipso numero, cuius est pars. Vt numerus 8. compositus ex 8. vnitatibus, diuiditur in totidem partes, nimirum in 8. vnitates, quarum qualibet octaua pars dicitur octonarij. Sic quoque numerus 100. ex centum vnitatibus compositus, in totidem distribuitur, quarum qualibet centesima ipsius pars est, &c.

EX his sequitur, omnes numeros, quotcunq́ sint, inter se commensurabiles esse, cùm eos vna eademq́ mensura, nimirum vnitas, vt dictum est, metiatur: Id quod omnibus magnitudinibus nulla potest ratione conuenire, cùm plurimæ earum mensuram communem non habeant. Sed prorsus sint incommensurabiles, vt clarissimè lib. 10. ostendetur.

### III.

PARS est numerus numeri, minor maioris, cùm minor metitur maiorem.

NON est dissimilis hæc definitio illi, qua Euclides lib. 5. partẽ quantitatis continuæ exposuit. Sicut enim ibi, ita & hic partem duntaxat aliquotam definit, cùm hæc solùm propriè dicatur metiri totum, vt ibidem latius explicauimus. Itaq́ numerus 6. dicetur pars omnium horum numerorum 12. 18. 24. 30. 60. 630, &c. quia ille singulos hos metitur. Similiter huius numeri 576. partes erunt omnes hi numeri 3. 4. 6. 8. cùm illum singuli hi metiantur, vt perspicuum est.

*OMNIS autẽ pars ab eo numero nomẽ sibi sumit, per quẽ ipsa numerũ, cuius pars est, metitur; vt 6. pars huius numeri 42. nomen trahit à 7. cum 6. metiatur 42. per 7. Itaq; 6. erit septima pars numeri 42. & in reliquis eodem modo.*

## IIII.

**PARTES** autem, cùm non metitur.

*VVLT Euclides, numerum minorem maioris numeri, quem non metitur, non partem, sed partes appellari: cuiusmodi est numerus 5. si conferatur cum hoc numero 18. Quamuis enim, cùm eum non metiatur, nisi per suas vnitates, pars ipsius dici non debeat; aptè tamen congruenterq; partes poterit appellari, quòd quinque contineat vnitates, quarum qualibet decimaoctaua pars est numeri 18. Vnde numerum 5. dicemus quinque partes decimasoctauas numeri 18. Ex quibus liquidò constat, Euclidem nomine partis intellexisse partem aliquotam tantùm, non autem & aliquantam, vt volunt nonnulli; alioquin superuacanea esset hæc definitio quarta, quæ partem aliquantam comprehendit.*

*CAETERVM partes quacunq; nomen accipiunt à duobus illis numeris, per quos cõmunis duorũ numerorum mensura vtrumq; eorum metitur, & eum scilicet qui partes dicitur, & eum, cuius ille partes appellatur: Ita vt si communis duorum numerorũ mensura metiatur minorem per 3. & maiorem per 5. dicatur minor maioris tres quintæ. Tales partes sunt 6. huius numeri 10. Nam communis eorum mensura 2 metitur 6. p 3. & 10. per 5. Eadem ratione eundem numerũ 6. dicemus sex decimas eiusdem numeri 10. cùm vnitas, eorum communis mensura, illum metiatur per 6. hunc verò per 10. Idem iudicium habeto & de reliquis.*

*QVOD si roges, cur Euclides hoc loco non solùm eum numerum minorem definiat, qui maioris pars est, verùm etiam illum, qui partes: non autẽ idipsum 5. lib. in magnitudinibus præstiterit? Neq; enim magnitudinem illam minorem, quæ maiorem non metitur, partes appellauit; sed tantũ eam, quæ maiorem metitur, partem. Respondemus, huius rei causam esse, quòd omnis numerus minor cuiuslibet maioris aut pars est, aut partes, vt propos. 4. huius lib. ostendetur; pars quidem, cùm ipsum metitur; partes verò, cùm non metitur. At in magnitudinibus longè aliter se res habet. Non enim, propositis duabus magnitudinibus inæqualibus, necessariò minor aut pars, aut partes est maioris, cũ ea persæpè sint incommensurabiles, vt apertè liber 10. demonstrabit, atq; adeò minor nullo modo contineat plures partes maioris. Nam solùm in magnitudinibus commensurabilibus, minor maioris partes plures comprehendit, si illum non metiatur. Rectè igitur Euclides 5. lib. partem duntaxat in magnitudinibus, hic autem in numeris & partem & partes explicauit.*

## V.

**MVLTIPLEX** verò maior minoris, cùm maiorem metitur minor.

*QVEMADMODVM ille solùm numerus minor, maioris pars dicitur, q maiorẽ metitur; ita quoq; ille tantummodò numerus maior, minoris appellatur multiplex, quẽ minor metitur; adeò vt numerus maior, cuius minor est pars, sit vicissim minoris multiplex. Vt numerus 6. pars est numeri 30. & hic illius multiplex est, &c. Si verò maiorẽ minor nõ metiatur, nullo modo erit maior minoris multiplex. Si enim maior minoris multiplex esset, metiretur minor maiorẽ per hanc definitionẽ. Et vicissim, si maior minoris non fuerit multiplex, minor maiorẽ non metietur. Nam si metiretur minor maiorẽ, esset per hanc defin. maior minoris multiplex.*

## VI.

**PAR** numerus est, qui bifariam diuiditur.

*VT omnes hi numeri 4. 10. 40. 100. 1000. pares vocantur, quoniam diuiduntur bifariam, siue in duas partes æquales, cùm eorum dimidia sint 2. 5. 20. 50. 500.*

## VII.

**IMPAR** verò, qui bifariam non diuiditur. Vel, qui vnitate differt à pari.

*OMNES hi numeri 5. 11. 15. 37. 101. 1001. impares nominantur, quia bifariam diuidi nequeunt. Vel certè, quia vnitate differunt ab his paribus, 4. 10. 14. 36. 100. 1000. vel etiam ab his 6. 12. 16. 38. 102. 1002. Ex hoc autem loco perspicuè colligi potest, vnitatem in numeris prorsus esse indiuiduam. Si enim diuideretur, omnis numerus impar haberet dimidium; atque adeò bifariam diuidi posset. Nam huius imparis 11. dimidia pars essent quinque vnitates & semis: cuius contrarium Euclides hac definitione docuit.*

## VIII.

**PARITER** par numerus est, quem par numerus metitur per numerum parem.

*QVIA numerus par est, qui bifariam diuiditur, fit vt quemlibet parem aliquis numerus par, saltem binarius, metiatur. Numerus igitur ille par, quem par numerus metitur per numerũ parem, pariter par nominatur. Cuiusmodi est numerus hic par 32. Metitur enim ipsum par numerus 8. per numerũ parem 4. Ita quoque par numerus 24. pariter par nuncupabitur, cùm eum par numerus 4. metiatur per numerũ parem 6. &c.*

## IX.

**PARITER** autẽ impar est, quem par numerus metitur per numerũ imparem.

*QVOD si numerum parem metiatur numerus par per imparem numerum, vocabitur is pariter impar. Qualis est par numerus 30. Metitur enim eum numerus par 2. per imparem numerum 15. Sic quoq; par numerus 6. metitur eundem per numerum imparem 5. &c.*

CAETERVM si rectè duæ proximæ definitiones expendantur, perspicuũ erit, fieri posse, vt vnus idemq; numerus par, sit & pariter par, & pariter impar. Nam par numerus 24. cùm eum metiatur par numerus 6. per numerum parem 4. pariter par erit. Rursus quia eundem numerus par 8. metitur per numerum imparem 3. pariter quoq; impar vocabitur. Vnde interpretes nonnulli, existimantes hoc esse absurdum, vt excluderent numeros eiusmodi pares, qui & pariter pares, & pariter impares videntur esse, addiderũt vtrique definitioni particulam, tantùm, ita vt numerus pariter par, secundùm eos, sit, quẽ par numerus metitur per numerum parem tantùm; Pariter autem impar, quem par numerus metitur per numerum imparem tantùm. Ita enim fit, vt propositus numerus par 24. ne quepariter par sit, cùm eum non tantùm metiatur par 6. per parem 4. sed etiam par 8. per imparem 3. Neq; pariter impar, quod eum metiatur non tantùm, vt dictum est, par 8. per imparem 3. verùm etiam par 6. per parem 4. Sed aptè vocari poterit pariter par, & pariter impar. Participat enim quodammodo naturam vtriusque, vt constat. Itaq; tria constituentur genera numeri paris inter se maximè diuersa: Pariter par; pariter impar; pariter par, & pariter impar, qui à quibusdam, pariter par & impariter appellatur. Veruntamen hæc omnia vera quidem sunt, & ex sententia Pythagoreorum, Nicomachi, Boëtij, & aliorum rectè explicata, sed aliena prorsus ab Euclidis instituto, vt perspicuum est, & ex definitionibus traditis, in quibus non reperitur dictio ista, tantum, quam illi apponunt, & ex propos. 32. 33 34. lib. 9. vbi manifestè omnem numerum parem, quem aliquis par per parem metitur, pariter parem appellat; illum verò, quem aliquis par metitur per imparem, pariter imparem: eum denique, quem par numerus metitur, & per parem numerum, & per imparem, vocat pariter parem, & pariter imparem; demonstratq; omnes numeros à binario duplos, quales sunt 2. 4. 8. 16. 32. 64. 128. &c. esse pariter pares tantùm, hoc est, pares numeros eos metiri per pares numeros tantùm; Numerus verò, qui dimidios impares habẽt, esse pariter impares tantùm, id est, pares numeros eos metiri per numeros impares duntaxat, cuiusmodi sunt 6. 10. 14. 18. 22. &c. Numeros deniq; nec à binario dupli sunt, nec dimidios habent impares, pariter pares esse, & pariter impares, vt sunt 12. 20. 24. 28. 36. &c. Itaq; vult Euclides in demonstrationibus illarum propositionum, hos postremos numeros alios q; similes, verè esse, secundùm traditas definitiones, pariter pares; rursus eosdem dici rectè pariter impares, quanq; nec tantũ pariter pares, nec tantũ pariter impares illi sint. Sed hæc planius ex lib. 9. intelligentur.

## X.

IMPARITER verò impar numerus est, quem impar numerus metitur per numerum imparem.

VT hic numerus impar 15. impariter impar dicitur, quoniam numerus impar 3. eum metitur per 5. numerum imparem. Sic quoq; hi numeri impares 9. 21. 25. 27. 33. 35. 39. 135. 2025. & alij infiniti, impariter impares nominantur.

## XI.

PRIMVS numerus est, quem vnitas sola metitur.

QVOD si numerum quempiam nullus numerus, sed sola vnitas metiatur, ita vt neq; pariter par, neque pariter impar, neq; impariter impar possit dici, appellabitur numerus Primus; quales sunt omnes isti 2. 3. 5. 7. 11. 13. 17. 19. 23. 29. 31. &c. Nam eos sola vnitas metitur.

## XII.

PRIMI inter se numeri sunt, quos sola vnitas, communis mensura, metitur.

SICVT numerus ille, quem sola vnitas metitur; Primus dicitur; ita quoq; duo, tres, quatuor, vel etiam plures numeri, quos præter vnitatem, nullus numerus, tanquam mensura communis metitur, quamuis singuli illorum habeant numeros, qui eos, præter vnitatem metiantur, appellantur inter se primi. Vt 15. 8. sunt numeri inter se primi, quia sola vnitas, mensura communis illos metitur: quamuis enim priorem metiantur hi numeri 3. & 5. posteriorem verò isti 2. 4. tamen nullus istorum vtrumque metitur, sed sola vnitas vtriusque est communis mensura. Sic etiam hi numeri 7. 10. 15. primi inter se dicentur, quòd præter vnitatem, nullum habeant numerum, mensuram communem, quanquam postremi duo habeant communẽ mensuram hunc numerum 5. Denique vnitas, & quiuis numerus, dici possunt, licèt impropriè, numeri inter se primi: quia sola vnitas vnitatem, & numerum quemuis metitur, tanquam mensura communis.

## XIII.

COMPOSITVS numerus est, quem numerus quispiam metitur.

NVMERVM, quem præter vnitatem aliquis alius numerus metitur, appellant Geometræ compositum, cuiusmodi est hic 15. Nam eum vterque horum numerorum 3. 5. metitur. Perspicuum autem est, omnes numeros pares, dempto binario, esse compositos, cùm eos omnes binarius metiatur. Ex quo fit, omnes numeros primos, præter binarium, esse impares, quandoquidem ex paribus, solus binarius primus est, vt diximus.

## XIIII.

COMPOSITI autem inter se numeri sunt, quos numerus aliquis, communis mensura, metitur.

DVO numeri, vel plures, quos præter vnitatem, aliquis alius numerus, tanquã mensura communis meti-

*tur, dicuntur inter se compositi, licèt non quilibet sit compositus numerus; quemadmodum & numerus ille, quem præter vnitatem, numerus quispiam metitur, compositus nominatur. Vt hi numeri 15. 24. compositi inter se sunt, quia eos hic numerus 3. tanquam communis mensura, metitur. Ita etiam inter se compositi erunt hi numeri 7. 21. 35. Nã primus eorũ & se ipsum, & reliquos duos metitur, licèt p se sumptus, Primus vocetur.*

## XV.

NVMERVS numerum multiplicare dicitur, cùm toties compositus fuerit is, qui multiplicatur, quot sunt in ipso multiplicante vnitates, & procreatus fuerit aliquis.

*VT numerus 6. multiplicare dicetur numerum 8. quando numerus 8. sexies fuerit compositus, toties nimirum, quot sunt in multiplicante 6. vnitates, procreatusq; fuerit numerus 48. Ita quoque vicissim numerus 8. multiplicare dicetur numerum 6. si numerũ 6. octies sumpserimus, toties scilicet, quot vnitates in multiplicante 8. continentur, procreauerimusq; eundem numerum 48. Eadem denique ratione hi numeri 100. 1000. 20. &c. dicentur multiplicare numerum 456. cùm hic sumptus fuerit centies, millies, aut vicies, &c. genitiq; fuerint hi numeri 45600. 456000. 9120. &c. Itaque numerus aliquis dicetur produci, gigni, procreariue ex duobus numeris, quando altero alterum multiplicante, productus fuerit. Vt numerus 63. gigni dicitur ex his numeris 7. 9. quia procreatur ex multiplicatione numeri 7. in numerum 9. vel è contrario. Et sic de reliquis.*

SEQVITVR ex his, productum ex multiplicatione numerum eandem habere proportionem ad alterutrum multiplicantium, quam alter multiplicantium habet ad vnitatem. Cùm enim ex definitione Euclidis alteruter multiplicantium toties componendus sit, vt faciat productum, quoties in altero multiplicantium est vnitas; continebit numerus productus toties alterutrum multiplicantium, quoties alter multiplicantium vnitatem continet: ac proinde eandem habebit proportionem numerus productus ad alterutrum multiplicantium, quàm alter multiplicantium ad vnitatem habet. Itaque Multiplicatio, siue ductus vnius numeri in alium ita quoque describi poterit.

MVLTIPLICATIO numeri in numerum, est inuentio numeri, qui ad alterutrum multiplicantium eandem proportionem habet, quam alter multiplicantium ad vnitatem.

*SIC vides, ex multiplicatione, siue ductu 6. in 8. gigni numerum 48. qui ita se habet ad 6. vt 8. ad 1. Vel ita ad 8. vt 6. ad 1.*

*HVIC definitioni addenda est hæc alia docens, quid sit numerum diuidere numerum: quippe quæ necessaria omnino sit ad ea, quæ nos in ijs, quæ sequuntur, sumus demonstraturi.*

NVMERVS numerum diuidere dicitur, cùm numerus acceptus fuerit, qui suis vnitatibus indicat, quoties diuidens numerus in diuiso continetur.

*VT numerus 6. diuidere dicetur numerũ 48. cùm sumptus fuerit numerus 8. qui octo suis vnitatibus indicat, diuidentem numerum 6. in diuiso 48. contineri octies. Ita quoque vicissim numerus 8. diuidere dicetur eundem numerum 48. si acceptus fuerit numerus 6. qui sex suis vnitatibus indicat, diuidentem numerum 8. in diuiso 48. contineri sexies.*

*HINC fit, numerum ex diuisione procreatum eandem habere proportionem ad vnitatem, quam numerus diuisus habet ad diuidentem. Cùm enim, vt in definitione diximus, procreatus numerus suis vnitatibus indicare debeat, quoties diuidens numerus in diuiso contineatur; continebit numerus productus vnitatem toties, quoties numerus diuisus diuidentem continet: ac proinde eandem proportionem habebit numerus ex diuisione genitus ad vnitatem, quàm diuisus numerus ad diuidentem. Itaque Diuisio vnius numeri per alium ita quoque poterit describi.*

DIVISIO numeri per numerum, est inuentio numeri, qui ad vnitatem habet eandem proportionem, quam numerus diuisus ad diuidentem.

*ITA vides ex diuisione numeri 48. per 6. procreari numerum 8. qui ita se habet ad 1. vt 48. ad 6. Item ex diuisione eiusdem numeri 48 per 8. produci numerum 6. qui ita se habet ad 1. vt 48. ad 8.*

*EX his quoque efficitur, diuiso numero per numerum, diuisum numerum gigni ex multiplicatione numeri per diuisionem inuenti in numerum diuidentem. Diuiso enim numero A, per B, procreetur numerus C. Dico numerum A gigni ex ductu numeri C, in numerum B. Quoniam enim ex definitione multiplicationis, numerus ex C, in B, procreatus ita se habet ad B, vt C, ad vnitatem D: Ex definitione autem diuisionu, ita quoque se habet A, ad B, vt C, ad vnitatem D; perspicuum est, numerũ ex C, in B, genitum esse numerum A; cùm tam ille genitus, quàm A, eandem proportionem habeat ad B, quam C, ad D, vnitatem.*

A, 48. B, 8. C, 6. D, 1.

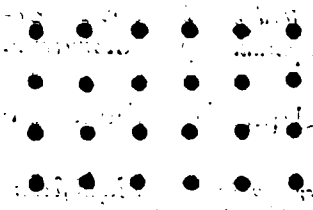
*HÆC omnia conueniunt quoque numeris fractis, & integris cum fractis: Id est, Numerus fractus numerum fractum, vel integer fractum, vel fractus integrum (siue fracti adhæreant integris, siue non) multiplicare dicitur, cùm toties compositus fuerit is, qui multiplicatur, quot sunt in ipso multiplicante vnitates, & procreatus fuerit aliquis: Diuidere autem, cùm numerus acceptus fuerit, qui indicet, quoties diuidens in diuiso continetur:*

*continetur: Ita vt in multiplicatione inueniatur quoq; numerus, qui ad alterutrum multiplicantium eandem proportionem habet, quam alter multiplicantium ad vnitatem: In diuisione autem procreetur numerus, qui ad vnitatem eandem proportionem habet, quã numerus diuisus ad diuidentem. Vt numerus $\frac{1}{2}$. multiplicare dicitur numerum 20. quando numerus 20. toties fuerit compositus, quot sunt in $\frac{1}{2}$. vnitates, procreatus q; fuerit numerus 10. Quia enim vnitas per sui semissem duntaxat est in $\frac{1}{2}$. sumendus est numerus 20. per semissem quoq; sui, quæ est 10. Ita quoque vicissim numerus 20. multiplicare dicetur numerum $\frac{1}{2}$. si $\frac{1}{2}$ sumptus fuerit vicies, toties scilicet, quoties vnitas est in 20. productus q; fuerit idem numerus 10. Vbi vides eandem esse proportionem procreati numeri 10. ad $\frac{1}{2}$. quam habet alter numerus multiplicans 20. ad 1. Vel ita esse 10 ad 20. vt $\frac{1}{2}$. ad 1. Sic etiam $\frac{1}{2}$. & $\frac{1}{5}$. se mutuò multiplicare dicentur, quando $\frac{1}{2}$. sumptus fuerit per tertiam sui partem, quemadmodum $\frac{1}{3}$. tertiam partem vnitatis tantum continet: Vel quando $\frac{1}{5}$. sumptus fuerit per sui semissem, quia & $\frac{1}{2}$. semissem tantum continet vnitatis. Vtroq; autem modo procreabitur $\frac{1}{10}$. qui numerus tertia pars est numeri $\frac{1}{2}$. siue $\frac{3}{10}$. & semissis numeri $\frac{1}{3}$. siue $\frac{2}{10}$. Quo pacto autem multiplicatio in numeris fractis facienda sit, in Arithmetica docuimus, demonstrabimus q; ad finem lib. 9.*

*Rvrsvs numerus $\frac{1}{2}$. diuidere dicetur numerum 10. cum sumptus fuerit numerus 20. indicans, diuidentem numerum $\frac{1}{2}$. vicies contineri in diuiso numero 10. ita vt eadem proportio sit procreati numeri 20. ad 1. quæ numeri diuisi 10. ad diuidentem $\frac{1}{2}$. Sic quoque $\frac{1}{2}$. diuidere dicetur $\frac{1}{5}$. quando sumptus fuerit numerus $\frac{1}{3}$. indicans, diuidentem numerum $\frac{1}{2}$. non totum contineri in diuiso $\frac{1}{5}$. sed tertiam eius partem. Nam cum numerus $\frac{1}{2}$. idem sit qui $\frac{3}{10}$. liquidò constat tertiam huius partem, nimirum $\frac{1}{10}$. contineri in $\frac{1}{10}$. Cæterum quo pacto fiat diuisio in numeris fractis, tradidimus in Arithmetica, & ad finem lib. 9. demonstrabimus. vbi omnia hæc, quæ de multiplicatione, diuisione q; fractorum diximus, planiora fient.*

## XVI.

Cvm autem duo numeri mutuo se se multiplicantes aliquem fecerint, qui factus erit, planus appellabitur. Qui verò numeri mutuo se se multiplicarint, latera illius dicentur.



*Omnis numerus procreatus ex multiplicatione mutua duorum numerorum, planus appellatur, quia secundum suas vnitates in longum, & latũ dispositas parallelogrammum rectangulum refert, cuius latera sunt duo numeri multiplicantes; qui idcirco latera numeri procreati vocantur, quòd ipsum contineant, non secus, ac recta linea angulum rectum ambientes, parallelogrammum rectangulum continere dicuntur, vt latius lib. 2. explicauimus. Vt numerus 24. productus ex multiplicatione mutua numerorum 4. & 6. planus appellatur, lateráque eius sunt 4. & 6. quia eius vnitates in longum, & latum dispositæ, prout latera exigunt, referũt parallelogrammum rectangulum, cuius vnum latus sex vnitates, alterum verò 4. complectitur. Eodem modo numerus 64. genitus ex mutua multiplicatione numerorum 8. & 8. planus dicitur, eiúsque latera 8. & 8.*

*Caeterum cum infinita sint genera numerorum planorum apud Arithmeticos, quemadmodum & figuræ planæ apud Geometras: Euclides solum definit planum quadrangularem rectangulum, qui videlicet sub duobus numeris, ex quorum mutua multiplicatione gignitur, continetur, quoniam de hoc solo in hisce libris numerorum disputat, quòd omni ex parte quadrato Geometricó, & figura altera parte longiori, similes sint, & æquales, siue ambitum, siue aream, capacitatémve spectes. Nihil autem dicit de numeris triangularibus, pentagonis, hexagonis, &c. quia hi licet conueniant triangulo Geometrico, pentagono, hexagono, &c. quod ad ambitum spectat: tamen si aream, seu capacitatem consideres, ab iisdem multum discrepant. Id quod perspicuum est cuilibet, qui diligenter hos Euclidis libros, & Arithmeticam Iordani perlegerit.*

*Potest autem vnus, idemq; numerus planus plura habere latera, cum ex pluribus multiplicationibus procreari possit, vt numerus 24. non solum latera habet 4. & 6. verum etiam 3. & 8. nec non 2. & 12. quia tam ex multiplicatione 3. in 8. quàm 2. in 12. producitur, quemadmodum & idem ex multiplicatione 4. in 6. est genitus. Ita quoque numerus planus 100. latera habet 5. & 20. 4. & 25. 2. & 50. 10. & 10. quod ex his omnibus numeris, si bini inter se multiplicentur, gignatur.*

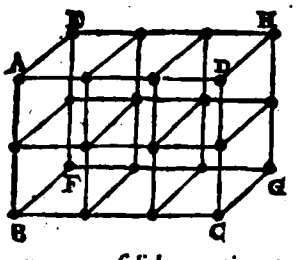
*Qvia verò omnem numerum planum metiuntur duo numeri multiplicantes se mutuo, quòd quilibet eorum toties sumptus, quot sunt in altero vnitates, ipsum procreet; liquido constat. omnem planum numerum esse compositum. Quod etiam de numero solido, qui iamiam definietur, dici potest. Verum est, vnitatem aliquando dici posse numerum planum, quamuis improprie; quia eius latera sunt duæ vnitates, quæ multiplicata mutuo ipsam vnitatem producunt.*

## XVII.

Cvm verò tres numeri mutuo se se multiplicantes aliquem fecerint, qui procreatus erit, solidus appellabitur: Qui autem numeri mutuo se se multiplicarint, latera illius dicentur.

*Vt quia tres hi numeri 2. 3. 4. mutuo sese multiplicantes, producunt 24. Nam ex 2. in 3. procreatur nu-*

merus 6. & ex 6. in 4. fit 24. Vel ex 2. in 4. gignitur numerus 8. & ex 8 in 3. efficitur 24. Vel denique ex 3. in 4. producitur numerus 12. & ex 12. in 2. generatur 24. appellabitur numerus 24. ſolidus, numeri verò 2. 3. 4. dicentur latera illius, quia eius vnitates in longum, latum atq; profundum diſpoſita referunt figuram quandam ſolidam, quæ Parallelepipedum nuncupatur, vt lib. 11. explicabimus, cuius omnes tres dimenſiones exprimunt tres numeri ſe mutuo multiplicantes; vnus quidem longitudinem, alius verò latitudinem, & altitudinem reliquus. Nam ſi primum multiplicetur numerus 2. in 4. efficietur numerus 8 baſis ſolidi numeri longa quatuor vnitates, & lata duas: Et ſi hæc baſis in 3. multiplicetur, hoc eſt, ſi accipiatur ter, exurget totus numerus ſolidus 24. altitudinem habens trium vnitatum. At ſi numerus 2. in 3. multiplicetur, habebitur baſis 6. vnitatum, quæ multiplicata in 4. facit totum ſolidum numerum 24. in altitudine habens 4. vnitates. Si denique numerus 3. multiplicetur in 4. procreabitur numerus 12. p baſe, quæ his ſumpta faciet numerum eundem ſolidum 24. cuius altitudo continet duas vnitates. Quæ omnia perſpicua ſunt in figura propoſita. Si enim baſis ſit B C G F, octo vnitatum, cuius longitudo B C, quatuor vnitates, & B F, latitudo, duas complectitur; ſuperponentur ei duæ aliæ baſes ſimiles, & æquales, vt totus numerus ſolidus contineat 24. vnitates, eius q altitudo B A, vnitates tres. Similiter, ſi baſis ſit A B F E, ſex vnitatum, cuius longitudo A B, tres, & latitudo B F, duas continet vnitates; ſuperponentur ei aliæ tres baſes ſimiles, & æquales, fietq totus ſolidus numerus rurſum 24. altitudinẽ B C, habens quatuor vnitatum. Si denique baſis ſit A B C D, 12. vnitatum, cuius longitudo B C, quatuor continet, & latitudo A B, tres; ſuperponetur illi alia baſis ſimilis, & æqualis E F G H, conſtabitq totus numerus ſolidus vnitatibus 24. quarum duæ altitudinem dabũt A E, vel B F. Idem hic numerus ſolidus 24. habet hæc latera 6. 2. 2. cum ex his mutuo multiplicatis producatur. Eodemq modo de aliis numeris ſolidis iudicandum erit.

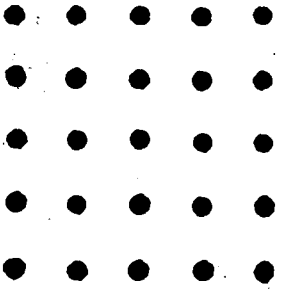



DENIQVE & vnitas interdum ſolidus appellabitur numerus, etſi non propriè, quia eius latera ſunt tres vnitates, ipſam vnitatem ex mutua earum multiplicatione procreantes.

DEFINIT autem & hic Euclides tantùm numerum ſolidum rectangulum, cuius baſes oppoſitæ ſunt parallelæ, & qui continetur ſub tribus numeris, omiſſis infinitis aliis, de quibus Iordanus, ob quam in præcedenti definitione datã; qa ſcilicet hi prorſus æquales ſunt, & ſimiles cubis, & parallelepipedis Geometricis.

## XVIII.

**QVADRATVS** numerus eſt, qui æqualiter æqualis. Vel qui ſub duobus æqualibus numeris continetur.

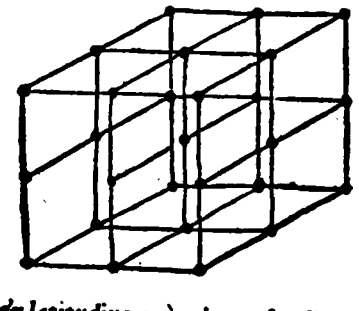


PLANVM illum numerum, qui æqualiter æqualis eſt, hoc eſt, qũi ſecundum vnitates ſuas in longum & latum diſpoſitas, refert parallelogrammum rectangulum, cuius longitudo latitudini eſt æqualis, ita vt omnia latera ſint æqualia, vel qui ex multiplicatione mutua duorum numerorum æqualium procreatur, atq; adeò ſub illis continetur, vocat quadratum. Huiuſmodi eſt numerus 25. contentus ſub numeris æqualibus 5. & 5. hoc eſt, ex eorum mutua multiplicatione genitus. Nam ſi eius vnitates in formam planam redigantur, referet perfectum quadratum Geometricum, in quolibet latere habens quinq vnitates, ideoq æqualiter æqualis erit.

ALTERVTER autem numerorum æqualium, ſub quibus quadratus numerus continetur, vel ex quorum multiplicatione producitur, latus quadrati à Geometris, radix verò ab Arithmeticis pleriſq; appellatur.

## XIX.

**CVBVS** verò, qui æqualiter æqualis æqualiter. Vel, qui ſub tribus æqualibus numeris continetur.



SOLIDVM quoq; illum numerum vocat cubum, qui eſt æqualiter æqualis æqualiter, id eſt, cuius vnitates in longum, latum, atq; profundum diſpoſitæ cubum Geometricum referunt, ita vt omnes eius dimenſiones, nimirum longitudo, latitudo, & altitudo, ſiue profunditas, æquales ſint; Vel qui ex multiplicatione mutua trium æqualium numerorum inter ſe producitur. Qualis eſt numerus 27. contentus ſub numeris æqualibus 3. 3. 3. ſiue ex eorum multiplicatione mutua procreatus, cum ex 3. in 3. fiat numerus 9. & ex 9. in 3. gignatur numerus cubus 27. Omnes enim illius vnitates in formam ſolidam redactæ referunt perfectum cubum Geometricum, exiſtuntq tam in longitudine, & latitudine, quàm in profunditate, tres vnitates. Quare ipſe numerus 27. eſt æqualiter æqualis æqualiter.

QVILIBET verò trium numerorum æqualium, ſub quibus cubus continetur, vel ex quorum mutua multiplicatione procreatur, Geometris latus cubi, pleriſq; autem Arithmeticis radix dicitur.

## XX.

NVMERI proportionales ſunt, cum primus ſecũdi, & tertius quarti, æquè multiplex eſt; vel eadem pars, vel eædem partes: Vel certè, cum primus ſecundum, & tertius quartũ, æqualiter continet, eandemq; inſuper illius partẽ, vel eaſdẽ partes.

*VT numeros proportionales in omni genere proportionis rationalis inæqualitatis (cuiuſmodi ſunt omnes numeri inæquales inter ſe collati) complecteremur, addidimus huic definitioni illa verba*; vel certè, cum primus ſecundum, & tertius quartum, æqualiter continet, eandemque inſuper illius partem, vel eaſdem partes. *Definitio etenim vulgata Euclidis, quam puto eſſe corruptam, cum manca ſit, atq; imperfecta, comprehendit ſolum proportionales numeros in proportione multiplici, ſubmultiplicive, & in proportionibus reliquis minoris inæqualitatis. Nam in proportione multiplici ſunt quatuor quilibet numeri proportionales, cum primus ſecundi, & tertius quarti, æquè multiplex eſt; in ſubmultiplici verò, cum primus ſecundi, & tertius quarti, eadem pars eſt; & in reliquis proportionibus minoris inæqualitatis, cum primus ſecundi, & tertius quarti, eadem partes fuerit, vt vult definitio Euclidis. At verò ex ea nequaquam deprehendere poſſumus, quinam numeri proportionales ſint in proportione ſuperparticulari, ſuperpartiente, multiplici ſuperparticulari, & multiplici ſuperpartiente. In his enim omnibus, primus numerus ſecundi, & tertius quarti, neq; æquè multiplex eſt, neq; eadem pars, neq; eadem partes; ſed primus ſecundum, & tertius quartum, æqualiter continet, puta vel ſemel, vel aliquoties, & eandem inſuper illius partem, eaſdémve partes; vt perſpicuum eſt ex iis, quæ docuimus ad defin. 4. lib. 5. vbi omnes proportiones rationales copiosè explicuimus. Itaq; hi numeri 1. 2. 4. 9. 3. proportionales ſunt, cũ primus ſecundi, & tertius quarti æquè multiplex ſit, nimirum triplus. Item hi 4. 12. 3. 9. eſt enim primus ſecundi, & tertius quarti, eadem pars, nimirum tertia. Rurſus proportionales ſunt hi numeri 6. 8. 9. 12. quod primus ſecundi, & tertius quarti eadem partes ſint, videlicet tres partes quartæ. Deniq; & 7. 6. 14. 12. & 7. 4. 14. 8. & 11. 5. 22. 10 & 12. 5. 24. 10. ſunt numeri proportionales. Nam in primo exemplo primus numerus ſecundum, & tertius quartum, ſemel, & inſuper eandem partem, videlicet ſextam; In ſecundo autem ſemel, & eaſdem partes, nimirum tres quartas; In tertio deinde bis, & adhuc partem eandem, videlicet quintam, continet; In vltimo denique primus ſecundum, & tertius quartum, bis, & præterea eaſdem partes complectitur, puta duas partes quintas. Quod ſi primus numerus ſecundi, & tertius quarti, non ſit æquè multiplex, vel eadem pars, vel eadem partes; vel denique primus ſecundum, & tertius quartum, non æqualiter contineat, eandemq; inſuper illius partem, vel eaſdem partes, nullo pacto dicendi erunt numeri propoſiti proportionales.*

QVOTIESCVNQVE *igitur quatuor numeri proportionales eſſe ponuntur, concedendum neceſſariò erit, ſi quidem maiores cum minoribus conferantur, quòd primus ſecundi, & tertius quarti, æquè multiplex ſit; Vel certè, quòd primus ſecundum, & tertius quartum, contineat æqualiter, & inſuper eandem partem, vel eaſdem partes: Et contra, ſi primus ſecundi, & tertius quarti, æquè multiplex concedatur: Vel certè primus ſecundum, & tertius quartum, æqualiter dicatur continere, & eandem adhuc partem, vel eaſdem partes, colligetur numeros eſſe proportionales. Quod ſi minores ad maiores referantur, dicanturq; eandem habere proportionem, fatendum erit, primum ſecundi, & tertium quarti, eſſe partem eandem, vel partes eaſdem; Et è contrario, ſi primus ſecundi, & tertius quarti, eadem concedatur pars, vel eadem partes, concludetur numeros ipſos eandem habere proportionem.*

DEFINIT *autem Euclides eos duntaxat numeros proportionales, qui proportionem eandem inæqualitatis habent. Nam ſi de proportione æqualitatis loquamur, perſpicuum eſt, primum ſecundo, & tertium quarto æqualem debere eſſe, vt proportionales numeri dicantur.*

EX *hac autem definitione apertè colligitur, æquales numeros ad eundem habere eandem proportionem. Et contra eundem ad æquales eandem quoq; habere proportionem. Item numeros ad eundem habentes eandem proportionem, vel ad quos idem eandem habet proportionem, æquales eſſe. Cum enim æquales numeri ſint eiuſdem, vel æque multiplices, vel eadem pars, vel eadem partes: Vel certè eundem æqualiter cõtineant, eandemq; inſuper illius partem, vel partes: Item cum idem numerus æqualium ſit vel æquè multiplex, vel eadem pars, vel eadem partes: Vel certè illos æqualiter contineat, eandemq; inſuper eorum partem, vel partes; perſpicuum eſt, æquales numeros ad eundem, vel eundem numerum ad æquales, eandem habere proportionem, iuxta hanc definitionem.*

RVRSVS *quia numeri ad eundem habentes eandem proportionem, ſunt illius vel æquemultiplices, vel eadem pars, vel eadem partes; Vel certè illum æqualiter continent, eandemq; inſuper eius partem, vel partes: Item quia idem numerus habens eandem proportionem ad aliquos, eſt illorum vel æque multiplex, vel eadem pars, vel eadem partes; Vel certe illos æqualiter continet, eandemq; inſuper illorum partem, vel partes, ſecundum hanc eandem definitionem; manifeſtum eſt, numeros, qui ad eundem eandem habent proportionem, vel ad quos idem eandem proportionem habet, æquales eſſe.*

PARI *ratione infertur, maioris numeri ad eundem, maiorem proportionem eſſe, quàm minoris. Et contra, eiuſdem ad minorem, maiorem eſſe proportionem, quàm ad maiorem. Item numerorum illum, qui ad eundem habet maiorem proportionem, maiorem eſſe: Ad quem autem idem habet maiorem proportionem, minorem eſſe. Quæ omnia perſpicua ſunt, ſi rectè hæc definitio intelligatur.*

*HAEC definitio conuenit etiam numeris fractis, siue integri numeri simul adsint, siue non. Nam quatuor hi numeri sunt proportionales; $\frac{3}{4}.\frac{3}{8}.\frac{1}{2}.\frac{1}{4}$. quia primus secundi, & tertius quarti, aequè multiplex est, nimirum duplus, vt patet. si priores duo ad eandem denominationem reuocentur, vt ad $\frac{6}{8}.\frac{3}{8}$. & posteriores quoq; ad eandem denominationem, vt ad $\frac{2}{4}.\frac{1}{4}$. Quo pacto autem fracti numeri ad eandem denominationem reducantur, docuimus in Arithmetica, & ad finem lib. 9. demonstrabimus. Eadem ratione quatuor hi numeri proportionales sunt $2\frac{3}{8}.4\frac{9}{12}.1\frac{1}{4}.2\frac{5}{10}$. cum primus secundi, & tertius quarti sit eadem pars, nimirum semissis, vt constat, si priores duo ad hos eiusdem denominationis reuocentur, $\frac{19}{8}.\frac{38}{8}$. & posteriores duo ad hos $\frac{5}{4}.\frac{10}{4}$. atq; ita de cæteris. Quo autem modo secundus $\frac{57}{12}$. ad hunc $\frac{38}{8}$. & quartus $\frac{25}{10}$. ad hunc $\frac{10}{4}$. reuocetur, ostendemus ad finem lib. 9. propos. 18. Minutiarum.*

## XXI.

**SIMILES** plani, & solidi sunt, qui proportionalia habent latera.

*VT planus numerus plano numero sit similis, non necesse est, qualibet duo illius latera quibusuis duobus lateribus huius esse proportionalia; sed satis est, illum habere aliqua duo latera, quæ sint proportionalia quibusdam duobus lateribus huius. Nam hac ratione erunt eorum latitudines longitudinibus proportionales, si secundum suas vnitates in formam planam redigantur, prout latera assumpta exigunt. Vt numeri plani 24. & 6. similes sunt, quoniam illius latera 6 4. proportionalia sunt lateribus huius 3.2. quamuis his eisdem non sint proportionalia alia illius latera, nempe 8.3 vel 12.2.*

EODEM *modo, vt duo numeri solidi similes sint, non requiritur, vt quæuis tria vnius latera proportionalia sint tribus quibuslibet lateribus alterius; sed sufficit, vt tria vnius reperiantur tribus alterius proportionalia, quia hac ratione, si secundùm vnitates in formam solidam reducantur, erunt eorum latitudines longitudinibus, & longitudines altitudinibus proportionales. Vt numeri solidi 192. & 24 sunt similes, quia latera illius 8.6.4. lateribus huius 4.3.2. sunt proportionalia, licet his eisdem nequaquam proportionalia sint alia latera illius, nimirum 12.8.2. vel 16.4.3.*

IT*AQVE possunt duo numeri plani, vel solidi, esse similes, licet lateribus aliquibus vnius acceptis nullo modo reperiri queant latera alterius proportionalia. Sunt enim hi numeri plani 24.6. similes, vt dictum est; & tamen si latera prioris sumantur 3. & 8. nulla reperientur in posteriori illis proportionalia. Sic etiam solidi similes sunt 192.24. cum tamē laterib. prioris assumptis 3.4.16. nulla reperiātur proportionalia in posterio. i.*

HAEC *porrò similitudo planorum, & solidorum reperitur quoq; in fractis numeris, siue in integris cum fractis. Nam si sumantur quatuor numeri nō integri proportionales, & tam duo priores, quàm duo posteriores inter se multiplicentur, procreabuntur plerunq; duo plani non integri similes, &c. Dixi, plerunq; quia fieri potest, vt interdum integri numeri gignātur. Nam si duo latera sint $\frac{2}{3}$.6, & alia duo $1\frac{1}{3}$.12. quæ eandem proportionem habent noncuplam, producent priora duo numerum planum 4. posteriora verò numerum 16.*

## XXII.

**PERFECTVS** numerus est, qui suis ipsius partibus est æqualis.

*NVMERVS ille, cui omnes suæ partes simul sumptæ (loquimur autem de partibus aliquotis, iuxta defin. 3. huius lib.) æquales sunt, Perfectus à Mathematicis nuncupatur. Cuiusmodi sunt hi numeri 6.28.496. Nam primus continet has partes aliquotas duntaxat 1.2.3. quæ simul sumptæ conficiunt numerum 6. Secundi autem numeri partes omnes aliquotæ sunt hæ 1.2.4.7.14. quarum summa constituit ipsum numerum 28. Tertius demum numerus has partes habet aliquotas, 1.2.4.8.16.31.62.124.248. quas omnes in vnam summā collectas componere numerum 496 perspicuum est. Qui autem numeri perfecti sint, & qua via, ac ratione procreentur, (sunt enim præter tres dictos innumerabiles alij) demonstrabitur ab Euclide propos. vlt. lib. 9.*

QVOD *si partes omnes aliquotæ alicuius numeri simul acceptæ maiores sint ipso numero, dici solet numerus ille, Abundans: si verò minores, Diminutus.*

LVCE *autem clarius ex hoc loco colligitur, partem ab Euclide sumi tantum pro parte aliquota. Nam alioquin omnis numerus esset perfectus, cum suis ipsius partibus sit æqualis, si quilibet numerus minor numeri maioris pars dici potest, siue eum metiatur, siue non metiatur.*

*His definitionibus ab Euclide propositis adiungenda mihi videntur ex Campano, aliisq; scriptoribus nonnullæ aliæ, quibus proximè succedent postulata, & communes animi notiones, præsertim eæ, quibus in demonstrandis numerorum proprietatibus & Euclides, & eius interpretes vti videntur.*

## XXIII.

**NVMERVS** numerum metiri dicitur per illum numerum, quem multiplicans, vel à quo multiplicatus, illum producit.

*VT numerus 4. metiri dicitur numerum 12. per 3. quia multiplicatus per 3. producit 12. Eademq; ratione numerus 3, eundem numerum 12. metietur per 4. cum ex multiplicatione 4. in 3. numerus 12. producatur. Hoc autem ita esse, hac ratione fiet perspicuum. Cum numerus 4. metiatur 12. per 3. faciet 4. ipsum 12. toties compositus, quoties est vnitas in 3. Quare per defin. 15. numerus 3. multiplicās numerum 4. producet 12. Quia verò vt propos. 16. huius lib. ostendemus, idem numerus producitur ex multiplicatione 4 in 3. qui ex 3. in 4. manifestum relinquitur, eundem numerum 12. procreari, si numerus 4. multiplicet numerum 3.*

HAEC

*HAEC quoq; definitio quadrat in numeros non integros. Nam numerus $2\frac{1}{3}$. metiri dicitur numerum $13\frac{1}{12}$. per $5\frac{1}{4}$. quia multiplicatus per $5\frac{1}{4}$. gignit $13\frac{1}{12}$.*

## XXIIII.

PROPORTIO numerorum est habitudo quædam vnius numeri ad alterum, secundum quod illius est multiplex, vel pars, partésve; vel certè illum continet semel, aut aliquoties, & aliquam insuper illius partem, vel partes.

*SI numerus 60. cum numero 4. conferatur ea ratione, qua illius multiplex est, nimirum quintuplus, dicetur hæc comparatio, habitudóve, Proportio. Sic etiam proportio erit ea habitudo, qua idem numerus 20. cum numero 60. confertur, secundum quod illius tertia pars est; & sic de reliquis.*

*QVAE cum ita sint, perspicuum est, tum demum quatuor numeros dici proportionales, cum primus secundi, & tertius quarti, æquè multiplex est; vel eadem pars, vel eadem partes: Vel certè, cum primus secundum, & tertius quartum, æqualiter continet, eandemq; insuper illius partem, vel easdem partes, vt suprà defin. 20. docuimus.*

## XXV.

TERMINI, siue radices proportionis dicuntur duo numeri, quibus in eadem proportione minores sumi nequeunt.

## XXVI.

CVM tres numeri proportionales fuerint; Primus ad tertium, duplicatam rationem habere dicitur eius, quam habet ad secundum. At cum quatuor numeri proportionales fuerint; Primus ad quartum, triplicatam rationem habere dicitur eius, quam habet ad secundum: Et semper deinceps vno amplius, quamdiu proportio extiterit.

*HAEC definitio, vt ad magnitudines pertinet, copiosè explicata est defin. 10. lib. 5. Vnde cum omnia, quæ ibi scripsimus, ad numeros huc transferri facilè possint, non est quòd iterum ea hic repetamus.*

## XXVII.

QVOTLIBET numeris ordine positis, proportio primi ad vltimum componi dicitur ex proportionibus primi ad secundum, & secundi ad tertium, & tertij ad quartum, & ita deinceps, donec extiterit proportio.

*HOC ita se habere, pluribus verbis à nobis demonstratum est ad defin. 5. lib. 6.*

*POSSVNT etiam huc referri definitiones illæ in quinto libro tradita de alterna ratione, inuersaq; de compositione, diuisione, & conuersione rationis; de ratione ex æqualitate; & de proportione ordinata, ac perturbata. Omnes enim hi modi argumentationum, quæ circa proportiones versantur, demonstrabuntur quoque hoc septimo libro proportionibus numerorum conuenire.*

# POSTVLATA, SIVE PETITIONES.

## I.

POSTVLetur, cuilibet numero quotlibet posse sumi æquales, vel multiplices.

## II.

QVOLIBET numero sumi posse maiorem.

*QVAMVIS enim numerus infinitè diminui nequeat, sed necessariò ad vnitatem indiuiduam diminutio deueniat; tamen augeri potest infinitè per additionem continuam vnitatis. Quare quolibet numero proposito maior exhiberi potest, ille videlicet, qui ex vnius vnitatis, vel etiam plurium additione consurgit.*

# AXIOMATA, SIVE PRONVNTIATA.

## I.

QVI numeri æqualium numerorum, vel eiusdem æquè multiplices sunt, inter se sunt æquales.

## II.

QVORVM idem numerus æquè multiplex est, vel æquè multiplices sunt æquales, inter se æquales sunt.

## III.

QVI numeri æqualium numerorum, vel eiusdem, eadem pars, vel eædem partes fuerint, æquales inter se sunt.

IIII.

QVORVM idem numerus, vel æquales, eadem pars, vel eadem partes fuerint, æquales inter se sunt.

V.

VNITAS omnem numerum per vnitates, quæ in ipso sunt, hoc est, per ipsummet numerum metitur.

*NAM vnitas sumpta toties, quot sunt in numero proposito vnitates, ipsum cõstituit. Quamobrem ipsum metitur per vnitatem, quæ in ipso sunt, hoc est, per ipsummet numerum ex suis vnitatibus constitutum.*

VI.

OMNIS numerus se ipsum metitur per vnitatem.

*CVM quilibet numerus semel sumptus sibi ipsi sit æqualis, manifestum est, omnem numerum seipsum metiri per vnitatem.*

VII.

SI numerus numerum multiplicans, aliquem produxerit, metietur multiplicãs productum per multiplicatum, multiplicatus autem eundem per multiplicantẽ.

*NVMERVS enim A, numerum B, multiplicans producat numerum C. Dico A, metiri ipsum C, per B; & B, eundem C, per A. Cum enim ex defin. 15. numerus B, toties compositum constituat ipsum C, quot sunt in A, vnitates; perspicuum est B, metiri ipsum C, per A, & eadem ratione A, ipsum eundem C, metiri per B, cum etiam B, ipsum A, multiplicans procreet numerum C, vt demonstrabitur propos. 16. huius lib.*

A.... B...
C.....

VIII.

SI numerus numerum metiatur, & ille, per quem metitur, eũdem metietur per eas, quæ in metiente sunt, vnitates, hoc est, per ipsum numerum metientem.

*VT quia numerus 6. metitur numerum 18. per 3. metietur & numerus 3. eundem numerum 18. per 6. hoc est, per vnitates, quæ in metiente numero 6. reperiuntur. Hoc autem ita esse, ad hunc modum confirmabimus. Quoniam numerus 6. metitur 18. per 3. fiet numerus 18. ex multiplicatione 6. in 3. vel 3. in 6. per defin. 23. Quare per axioma precedens numerus 3. numerum 18. metietur per 6.*

IX.

SI numerus numerum metiens, multiplicet eum, per quem metitur, vel ab eo multiplicetur, illum quem metitur, producet.

*METIATVR enim numerus A, numerum C, per B. Dico A, multiplicantem ipsum B, vel multiplicatum à B, producere ipsum C. Nam numerus A, numerum C, metiri dicitur per eum numerum, quem multiplicans, vel à quo multiplicatus, ipsum C, producit, per defin. 23. Cum ergo A, metiri ponatur ipsum C, per B; perspicuum est, numerum A, multiplicantem ipsum B, vel ab eo multiplicatum producere ipsum C.*

A.... B...
C.....

X.

NVMERVS quotcunq; numeros metiẽs, compositum quoq; ex ipsis metitur.

*METIATVR numerus A, numeros B C, C D. Dico eundem A, metiri quoq; ex ipsis compositum B D. Cum enim A, metiatur ipsos B C, C D; erit tam B C, quàm C D, ipsius A, multiplex. Diuiso ergo B C, in partes B E, E C, ipsi A, æquales, & ipso C D, in partes C F, F G, G D, eidem A, æquales; erit numerus B D, compositus ex omnibus partibus B E, E C, C F, F G, G D, ipsi A, æqualibus, multiplex ipsius A. Quare A, ipsum B D, metitur. Quod est propositum.*

A....
B....E....C....F....G....D

XI.

NVMERVS quemcunq; numerum metiens, metitur quoque omnem numerum, quem ille metitur.

*METIATVR numerus A, numerum B; & B, numerum C D. Dico eundem A, metiri quoq; numerum C D, quem B, metitur. Cum enim B, metiatur ipsum C D; erit C D, ipsius B, multiplex. Diuiso ergo C D, in partes C E, E D, ipsi B, æquales; metietur A, ipsos numeros C E, E D; quandoquidem numerum B, tot numero C E, quàm E D, æqualem, metiri ponitur. Igitur idem A, per prop. 10. metietur quoq; numerum C D, ex C E, E D, compositum. Quod est propositum.*

A...
B.....
C.....E.....D

XII.

NVMERVS metiens totum & ablatum, metitur & reliquum.

*METIATVR numerus A, totum B C, & ablatum B D. Dico eundem A, metiri quoq; reliquum D C. Cum enim A, metiatur & B C, & B D; erit tam B C, quàm B D, ipsius A, multiplex, aut certè B D, ipsi A, æqualis erit. Diuiso ergo tam B C, quàm B D, in partes ipsi A, æquales; Erit reliquus numerus D C,*

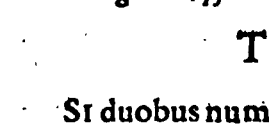
A...
B.....D... C
B.....D..... C
B... D..... C

vel vna

*vel vna pars numeri B C, ipſi A, æqualis, vel plures, atque adeò D C, æqualis erit ipſi A, vel eius multiplex. Metitur igitur A, ipſum D C. Quod eſt propoſitum.*

## THEOR. 1. PROPOS. 1.

Si duobus numeris inæqualib. propoſitis, detrahatur ſemper minor de maiore, alterna quadam detractione, neq; reliquus vnquam metiatur præcedentẽ, quoad aſſumpta ſit vnitas; qui principio propoſiti ſunt numeri, primi inter ſe erunt.



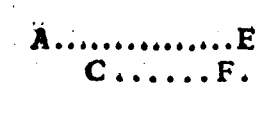

Sint duo numeri propoſiti inæquales A B, C D, quorum C D, minor ex maiore A B, quoties poteſt, detrahatur: & reliquus E B, ex C D, quoties etiam poteſt; & reliquus F D, ex E B: Et in hac alterna detractione nunquam numerus reliquus præcedentem, à quo fuit detractus, metiatur, donec ad vnitatem G B, quæ quidem præcedentem numerum F D, metitur, detractio perueniat. Dico numeros A B, C D, eſſe inter ſe primos, hoc eſt, ſolam vnitatem communi menſura eos metiri. Si enim non dicantur inter ſe primi, metietur eos aliquis numerus, qui ſit H, communi menſura, præter vnitatem. Quia ergo H, metitur numerum C D: & C D, numerum A E, (quod C D, vel pars ſit ipſius A E, vel certè ei æqualis, cum detractus ex A B, reliquerit numerum E B,) [a] metietur quoq; H, ipſum A E: At H, metitur quoq; totum A B. [b] Igitur & reliquum E B, metietur. Metitur autem E B, ipſum C F. [c] Igitur & H, ipſum C F, metietur: Ac propterea, cum & totum C D, metiatur, [d] metietur quoq; reliquum F D. Cum ergo F D, metiatur ipſum E G; [e] metietur etiam H, ipſum E G: Metiebatur autem & H, totum E B. [f] Reliquam igitur vnitatem quoque G B, numerus H, metietur, partem totum. Quod eſt abſurdum. Non igitur numerus aliquis, præter vnitatem, numeros A B, C D, metitur: Ac proinde primi inter ſe ſunt. Quamobrem, ſi duobus numeris inæqualibus propoſitis, &c. Quod erat demonſtrandum.

a 11. pron.
b 12. pron.
c 11. pron.
d 12. pron.
e 11 pron.
f 12. pron.

### SCHOLIVM.

*Conuertemvs cum Campano hanc propoſitionem, hoc modo.*

Si duobus numeris inter ſe primis propoſitis, detrahatur ſemper minor de maiore, alterna quadam detractione; nunquam reliquus metietur præcedentem, quoad aſſumpta ſit vnitas.




*Sint duo numeri inter ſe primi A B, C D, quorum minor C D, ex maiore A B, quoties poteſt, detrahatur; & reliquus E B, ex C D, quoties etiam poteſt; & reliquus F D, ex E B, relinquens G B. Dico in hac alterna detractione nunquam reliquum metiri præcedentem, quoad vnitas aſſumatur. Metiatur enim, antequam ad vnitatem detractio perueniat, ſi fieri poteſt, reliquus numerus G B, præcedentem F D, ex E B, ablatum. Quia igitur numerus G B, numerũ F D, metitur; & F D, ipſum E G, [a] metietur quoque G B, ipſum E G. Cum ergo G B, & ſe ipſum metiatur, [b] metietur quoque numerum E B, ex E G, G B, compoſitum: Metitur autem E B, ipſum C F. [c] Igitur & G B, eundem C F, metietur: Atque adeò cum & ipſum F D, poſitus ſit metiri; [d] metietur quoque ipſum C D, ex C F, F D, compoſitum. At verò C D, metitur ipſum A E. [e] Igitur & eundem A E, numerus G B, metietur: Ac proinde, cum & ipſum E B, metiatur, vt oſtenſum eſt; [f] metietur & ipſum A B, ex vtroque A E, E B, compoſitum. Quare cum numerus G B, metiatur numeros A B, C D, ipſi erunt inter ſe compoſiti. Quod eſt abſurdum, cum ponantur inter ſe primi. Nunquam ergo numerus aliquis reliquus præcedentem metietur, donec aſſumptæ ſit vnitas. Quod eſt propoſitum.*

a 11. pron.
b 10. pron.
c 11. pron.
d 10. pron.
e 11. pron.
f 10. pron.

*Eodem modo & hoc verum eſt.*

Si propoſitis duobus numeris inter ſe compoſitis, detrahatur ſemper minor de maiore, alterna quadam detractione; detractio ad vnitatem vſque non perueniet, ſed ad numerum, qui præcedentem detractum metiatur.

*Nam ſi detractio huiuſmodi ad vnitatem vſque perueniret, eſſent propoſiti numeri inter ſe primi,* [g] *vt Euclides demonſtrauit. Quod eſt abſurdum, cum ponantur inter ſe compoſiti.*

g 1. ſeptimi

*Ex his facilè dignoſcemus, an duo quicunque numeri propoſiti ſint inter ſe primi, nec ne. Nam detracto ſemper minore de maiore, alterna quadam detractione; ſi nunquam reliquus præcedentem metiatur, quoad aſſumpta ſit vnitas; ipſi erunt inter ſe primi,* [h] *vt Euclides demonſtrauit: Si verò reliquus aliquis numerus præcedentem metiatur, ipſi erunt inter ſe compoſiti, cum ille idem reliquus numerus vtrumque numerum propoſitum metiatur, vt perſpicuum eſt ex demonſtratione ſuperiori huius ſcholij. Ex eo enim, quòd reliquus numerus G B, metiri dicebatur præcedentem numerum F D, oſtenſum fuit, eundem reliquum G B, vtrumq; ipſum A B, & C D, metiri.*

h 1. ſeptimi

## 2. PROBL. 1. PROPOS. 2.

**DVOBVS numeris datis non primis inter ſe, maximam eorum communem menſuram reperire.**

DENTVR duo numeri AB, CD, non primi inter ſe, quorum maximam communem menſuram oporteat reperire. Detrahatur minor CD, ex maiore AB, quoties poteſt, relinquatq; EB, numerum, qui ex CD, ſubtractus relinquat FD, & ſic deinceps ſemper minor de maiore ſubtrahatur alterna quadam detractione; in qua quidem peruenietur ad numerum, qui præcedentem metiatur. Nam ſi ad vnitatem deueniretur, [a] numeri AB, CD, eſſent inter ſe primi; quod eſt contra hypotheſim. Peruentum ergo iam ſit ad reliquum numerum FD, qui detractus ex EB, nihil relinquat, ſed eum metiatur. Dico FD, eſſe maximam menſuram communem numerorum AB, CD. Quod enim vtrumque metiatur, ita oſtendemus. Quia FD, metitur ipſum EB; & EB, ipſum CF, [b] metietur quoq; FD, ipſum CF; atque adeò cum & ſeipſum metiatur, [c] metietur & totum CD, ex CF, FD, compoſitum. At CD, ipſum AE, metitur. [d] Igitur & FD, eundem AE, metietur. Ac propterea cum FD, metiatur quoque ipſum EB; [e] metietur etiam totum AB, ex vtroque AE, EB, compoſitum. Metitur igitur FD, vtrumque numerum AB, CD.

A.....E.....B
C.....F..D
G-----

a 1. ſeptimi.
b 11. pron.
c 10. pron.
d 11. pron.
e 10. pron.

QVOD autem FD, ſit maxima menſura communis illorum, ita probabimus. Si enim fieri poteſt, detur maior menſura communis G, quàm FD. Quoniam ergo G, metitur vtrumq; AB, CD; Et CD, metitur ipſum AE, [f] metietur quoq; G, ipſum AE. [g] Igitur & reſiduum EB: At verò EB, metitur CF. [h] Metietur ergo & G, eundem CF. [i] Igitur & reſiduum FD; maior minorem. Quod eſt abſurdum. Non ergo maior numerus, quàm FD, numeros AB, CD, metitur; Ac proinde FD, maxima eſt menſura numerorum, AB, CD.

f 11. pron.
g 12. pron.
h 11. pron.
i 12. pron.

A.....B
C.....D

QVOD ſi minor numerus CD, metiatur maiorem AB, ita vt detractus ex AB, nihil relinquat, erit ipſe maxima amborum menſura communis, cum & ſe ipſum metiatur, vt in hac figura apparet. Duobus igitur numeris datis non primis inter ſe, &c. Quod erat faciendum.

### COROLLARIVM.

*EX hoc manifeſtum eſt, numerum metientem duos numeros, metiri quoque maximam eorundem communem menſuram.*

*HOC elicitur ex ea parte demonſtrationis, qua oſtenſum fuit FD, eſſe maximam menſuram ipſorum AB, CD. Demonſtratum enim eſt ibi, numerum G, ſi metiatur numeros AB, CD, metiri quoque numerum FD, maximam eorum menſuram communem. Eademq; ratio eſt de cæteris.*

### SCHOLIVM.

A.....
B.....
C.....

*EX iis quæ dicta ſunt, facilè cum Campano experiemur, an quotlibet numeri propoſiti ſint inter ſe primi, nec ne. Sint enim tres numeri A, B, C. Primum ergo experior, per ea, quæ ad propoſ. 1. docuimus, an duo A, & B, ſint inter ſe primi: Qui ſi fuerint inter ſe primi, non erunt tres numeri A, B, C, inter ſe compoſiti, quod nullam poſſint habere menſuram communem, præter vnitatem, propter numeros A, & B, inter ſe primos.*

a 2. ſeptimi
A.....
B.....
C.....
D...

*SI verò A, & B, fuerint inter ſe compoſiti, [a] ſit eorum maxima menſura communis inuenta D; quæ ſi metiatur & numerum C, perſpicuum eſt, tres numeros A, B, C, eſſe inter ſe compoſitos. cum habeant numerum D, communem menſuram.*

*QVOD ſi D, maxima menſura numerorum A, & B, non metiatur numerum C; erunt C, & D, vel inter ſe primi, vel non. Si ſint inter ſe primi, non erunt tres numeri A, B, C, inter ſe compoſiti, ſed inter ſe primi. Si enim dicantur eſſe inter ſe compoſiti, ita vt habeant numerum communem menſuram, metietur eiuſmodi communis menſura numerum D, maximam menſuram numerorum A, & B, per corollarium huius propoſ. Quare cum eadem illa menſura metiatur quoque numerum C, non erunt inter ſe primi numeri C, & D. Quod eſt contra hypotheſim. Si autem C, & D, non ſint inter ſe primi, erunt tres numeri A, B, C, inter ſe compoſiti. [b] Inuenta enim numerorum C, & D, maxima menſura communi E; cum E, metiatur ipſum D; D, autem ipſos A, & B; [c] metietur quoque E, eoſdem A, & B. Quare cum idem E, metiatur quoque ipſum C; metietur E, tres numeros A, B, C; Ac propterea ipſi inter ſe erunt compoſiti. Quod eſt propoſitum.*

A.....
B.....
C.....
D....E..

b 2. ſeptimi
c 11. pron.

*SIMILI arte explorabimus, an plures numeri, quàm tres, ſint inter ſe primi, an potius inter ſe cõpoſiti.*

Nam ſi

*Nam si dati numeri fuerint quatuor, experiendum id erit primùm in tribus; si quinque, in quatuor, &c. Reliqua autem perficienda, vt de tribus numeris datis diximus.*

## PROBL. 2. PROPOS. 3. 3.

TRIBVS numeris datis non primis inter se, maximam eorum communem mensuram reperire.

DENTVR tres numeri A,B,C, non primi inter se, quorum maximam mensuram communem oporteat reperire. Sit D, maxima mensura numerorum A,& B; Si ergo D, metiatur quoq; ipsum C, perspicuum est D, esse maximam mensuram numerorum datorum A,B,C. Nam si maior numerus dicatur metiri numeros A,B,C, metietur idem, per corollarium propos. 2. huius lib. numerum D, maximam mensuram numerorum A,& B, maior numerus minorem. Quod est absurdum. Si verò D, non metiatur ipsum C; erunt saltem D,& C, inter se compositi. Cum enim sint A,B,C, inter se compositi, metietur quæcunque illorum mensura communis, per coroll. propos. 2. huius lib. numerum D, maximam mensurā numerorum A,& B. Cum ergo eadem illa mensura metiatur etiam ipsum C; erunt D,& C, inter se compositi. [a] Sit eorum maxima mensura E. Dico E, esse maximam mensuram communem datorum numerorum A,B, C. Quod enim sit eorum mensura communis, hac ratione demonstrabitur. Quoniam E, metitur, numeros C,& D; at D, ipsos A,& B; [b] metietur quoque E, ipsos A,& B; Ac proinde tres numeros A,B,C, metietur.

A.....
B.....D....
C.....E..F---

[a] 2. *septimi.*
[b] 11. *primi*

QVOD autem E, sit maxima eorum communis mensura, perspicuum est. Si enim fieri potest, sit F, maior quàm E, eorum mensura communis. Quia igitur F, metitur numeros A,& B; metietur quoque, per coroll. propos. 2. huius lib. numerum D, maximam eorum mensuram communem. Metitur autem & C. Igitur F, metiens D,& C, metietur quoque E, eorum mensuram maximam, ex eodem coroll. numerus maior minorem, quod est absurdum. Non ergo maior numerus, quàm E, numeros A,B,C, metitur; Atque adeò E, maxima mensura est ipsorum. Quamobrem tribus numeris datis non primis inter se, &c. Quod faciendum erat.

### COROLLARIVM.

*HINC perspicuum est, numerum metientem tres numeros, metiri quoque maximam eorum communem mensuram.*

*Hoc etiam colligitur ex vltima parte demonstrationis. Ostensum enim est ibi, numerum F, si metiatur numeros A, B, C, metiri quoque numerum E, maximam illorum mensuram communem: Eademq; in cæteris est ratio.*

*PARI ratione, pluribus numeris datis, quàm tribus, non primis inter se, maxima eorum communis mensura inuenietur; locumq; habebit hoc idem corollarium. Nam si dati numeri fuerint quatuor, inuenienda erit primùm maxima mensura communis trium numerorum: si quinq;, quatuor numerorum accipienda erit primùm maxima communis mensura, &c. Reliqua verò omnia peragenda, vt de tribus numeris dictū est.*

## THEOR. 2. PROPOS. 4. 4.

OMNIS numerus, omnis numeri, minor maioris, aut pars est, aut partes.

A.....
B.....

SINT duo numeri A, minor, & B, maior. Dico A, esse aut partem, aut partes ipsius B. Sint enim primùm A,& B, inter se primi. Quia igitur quælibet vnitas numeri A, pars est numeri B; perspicuum est, numerum A, esse partes numeri B, tot nimirum, quot sunt in A, vnitates.

A.....
B.....

SINT deinde A,& B, non primi inter se, sed inter se cōpositi,& metiatur A, ipsum B. Quo posito, manifestū est A, partē esse numeri B, ex defin. 3. huius lib.

A..D..E..F
B.....
C..

SED iam A, non metiatur ipsum B, [c] inuenta autem maxima eorum mensura communis sit C; diuidaturq; numerus A, in partes AD, DE, EF; quarum singulæ ipsi C, sint æquales. [d] Quia igitur C, pars est ipsius B, cum ipsum metiatur; erit quoque AD, pars eiusdem B: similiter & DE,& EF; Ac propterea totus numerus A, est partes numeri B, tot videlicet, quoties C, in AF, continetur. Omnis igitur numerus, omnis numeri, minor maioris, aut pars est, aut partes. Quod demonstrandum erat.

[c] 2. *septimi*
[d] 3. *defin.*

## THEOR. 3. PROPOS. 5. 5.

SI numerus numeri pars fuerit, & alter alterius eadem pars: Et simul vterque vtriusque simul eadem pars erit, quæ vnus vnius.

SIT numerus A, eadem pars numeri B C, quæ est numerus D, numeri E F. Dico vtrumque vtri-

merum A,& D ſimul vtriuſq; numeri B C,& E F,ſimul eandem eſſe partem,quæ eſt vel A, ipſius B C,vel D,ipſius E F. Diuiſis enim numeris B C, E F, in partes B G, G C; E H, H F, ipſis A, & D, æquales; erit multitudo partium numeri B C,æqualis multitudini partium numeri E F,propterea quòd eadem pars eſt A,ipſius B C,quæ D,ipſius E F. Quia igitur A, & B G, æquales ſunt; ſi illis addantur æquales D,& E H; erunt A,& D,ſimul æquales ipſis B G,& E H,ſimul. Eodem argumento erunt A, & D, ſimul ipſis G C,& H F,ſimul æquales: Et ſic deinceps,ſi plures partes fuerint in B C,E F; aggregatum numerorum A,& D,tot aggregatis partium numerorum B C, & E F, æquale erit, quoties A,in B C,vel D,in E F,continetur: Ac propterea eadem pars erit vterque A,& D,ſimul vtriuſque B C,& E F,ſimul,quæ eſt A,ipſius B C,vel D,ipſius E F. Si numerus ergo numeri pars fuerit; &c. Quod erat oſtendendum.

A..... | D....
B..... G..... C | E.... H .... F

## *SCHOLIVM.*

A, $\frac{2}{9}$ D, $\frac{3}{7}$
B, $\frac{2}{9}$ G, $\frac{2}{9}$ C E, $\frac{3}{7}$ H, $\frac{3}{7}$ F

*Idem hoc verum eſt in numeris fractis, eademq; prorſus demonſtratio adhibebitur: vt in hoc exemplo apparet,vbi numerus A,numeri B C, & numerus D, numeri E F, eadem pars eſt; ac proinde vterq; ſimul A,D,vtriuſque B C,E F, ſimul eadem pars oſtendetur,quæ A,ipſius B C: ſi nimirum B C, E F, diuidantur in partes B G,G C; E H,H F, ipſis A,D,æquales, &c.*

*Quod ſi quando contingat,numerum fractum diuidi non poſſe in partes æquales propoſitas, propterea quòd numerator in eas partes ſecari nequeat, multiplicandus erit tam numerator, quàm denominator per numerum partium. Procreabitur enim hac ratione alia fractio priori æquiualens, & cuius numerator in propoſitas partes diuidi poteſt. Vt ſi fractio $\frac{5}{9}$. ſecanda ſit in duas partes æquales, ducendus erit vterque eius numerus in 2. ſi in tres,in 3. ſi in quatuor,in 4. &c. vt gignantur fractiones $\frac{10}{18}$. $\frac{15}{27}$. $\frac{20}{36}$. quarum prima ſecabitur in has duas partes æquales $\frac{5}{18}$. $\frac{5}{18}$. ſecunda in has tres $\frac{5}{27}$. $\frac{5}{27}$. $\frac{5}{27}$. tertia verò in has quatuor, $\frac{5}{36}$. $\frac{5}{36}$. $\frac{5}{36}$. $\frac{5}{36}$.*

*Rvrsvs quando adſunt integra, reuocanda prius erunt vnà cum fractione ad vnam fractionem, deinde eodem modo tam numerator,quàm denominator multiplicandus per numerum partium, &c. Vt ſi numerus $4\frac{3}{7}$. ſecandus ſit in tres partes,reducemus eum prius ad hanc vnicam fractionem, $\frac{31}{7}$. deinde vtrumque eius numerum per 3. multiplicabimus,vt fiat fractio $\frac{93}{21}$. cuius tres partes æquales ſunt $\frac{31}{21}$. $\frac{31}{21}$. $\frac{31}{21}$. Atque hac in ſequentibus quoq; propoſitionibus obſeruanda ſunt,quando fractionibus accommodantur: Et ſemper nomine fractionum intelligendi quoq; ſunt numeri integri cum fractis: Item quando aliqui fracti ſunt, & alij integri.*

*Eodem modo demonſtrabimus & hoc, quod ſequitur.*

Si vnitas numeri pars fuerit,& altera vnitas,vel numerus alterius numeri eadem pars; Et ſimul vtraque vnitas,vel vnitas & numerus ſimul, vtriuſque numeri ſimul eadem pars erit,quæ vnitas numeri.

*Hoc autem perſpicuè in his appoſitis exemplis apparet. Eadem enim prorſus eſt demonſtratio.*

A. | D. || A. | D...
B. G. C | E. H. F || B. G. C | E... H... F

*Possvmvs etiam hanc propoſitionem ad quotcunque numeros transferre, hoc modo.*

Si ſint quotcunque numeri quotcunque numerorum æqualium numero,ſinguli ſingulorum,eadem pars; Et omnes omnium ſimul eadem pars erunt, quæ vnus vnius.

*Sint numeri A,B,C,numerorum D E, F G, H I, ſinguli ſingulorum eadem pars. Dico omnes numeros A,B,C,ſimul omnium numerorum D E,F G,H I, ſimul eandem eſſe partem,quæ eſt A,ipſius D E. Diuiſis enim numeris D E,F G,H I, in partes ipſis A, B, C, æquales; erit multitudo partium numeri D E, æqualis multitudini partium tam numeri F G, quàm numeri H I. Quia igitur A,& D K, æquales ſunt; ſi illis addantur æquales B,& F L, erunt A,B, ſimul æquales ipſis D K, F L, ſimul: quibus ſi rurſum addãtur æquales C, & H M; erunt quoq; A,B,C, ſimul æquales ipſis D K, F L, H M, ſimul. Simili ratione erunt A,B,C, ſimul æquales ipſis K E, L G, M I, ſimul; & ſic deinceps, ſi plures partes fuerint in D E,F G, H I, aggregatum numerorum A, B, C, tot aggregatis partium numerorum D E, F G, H I, æquale erit, quoties A, in D E, continetur. Quamobrem eadem pars erunt A,B,C, ſimul ipſorum D E, F G, H I, ſimul, quæ A, ipſius D E.*

A.... | F... L... G | H.. M.. I
D.... K.... E | B... | C..

*Idem ſequitur, ſi loco vnius numerorum A,B,C, ſumatur vnitas, vel loco pluriũm, vel etiam omnium, plures vnitates, vt de duobus dictum eſt. Id quod ſequentes figuræ indicant.*

A. | B.. | C... || A. | B. | C.
D. K. E. | F.. L.. G | H... M... I || D. K. E | F. L. G | H. M. I

HAEC

*HAEC etiam fractis numeris conueniunt. Nam si quotcunque fracti numeri, quotcunque fractorum numerorum æqualium numero, singuli singulorum, eadem pars fuerint; Et omnes omnium simul eadem pars erunt, quæ vnus vnius. Quod eodem modo demonstrabitur: etiamsi aliqui numerorum sint integri, vel vnitates, vt hic videre licet.*

A, 1. | B, $\frac{1}{2}$. | C, $\frac{3}{4}$.
D, 1 K, 1 E | F, $\frac{1}{2}$ L, $\frac{1}{2}$ G | H, $\frac{3}{4}$ M, $\frac{3}{4}$ I

*THEOREMATI quoque primo quinti lib. simile proponemus, in hunc modum.*

Si sint quotcunque numeri quotcunque numerorum æqualium numero, singuli singulorum, æquè multiplices: quàm multiplex est vnius vnus numerus, tam multiplices erunt & omnes omnium.

*DEMONSTRATIO eadem hic est, quæ in lib. 5. Quod tamen aliter ita etiam demonstrabimus. Sint A, B, C, numeri numerorum D, E, F, æquè multiplices, singuli singulorum. Dico & omnes A, B, C, simul omnium D, E, F, simul tam multiplices esse, quàm est A, multiplex ipsius D. Cum enim tam sit multiplex A, ipsius D, quàm est B, ipsius E & C, ipsius F; erit è contrario D, eadem pars ipsius A, quæ E, ipsius B, & F, ipsius C. Per ea igitur, quæ nuper à nobis demonstrata sunt, erunt D, E, F, simul eadem pars ipsorum A, B, C, simul, quæ D, ipsius A; Ac propterea è contrario tam multiplices erunt omnes A, B, C, simul, omnium D, E, F, simul, quàm est multiplex A, ipsius D.*

A..... B..... C....
D .... E ... F..

*SI numeri A, B, C, fracti sint, & ipsorum D, E, F, fractorum æquemultiplices; quàm multiplex est vnius vnus, tam multiplices erunt & omnes omnium. Vt ex demonstratione liquet.*

*QVOD si loco vnius numerorum D, E, F, assumatur vnitas, vel etiam loco plurium, vel omnium, plures vnitates, theorema eodem modo demonstrabitur, vt ex sequentibus figuris apparet.*

A.. B.... C..... | A.. B.. C..
D. E.. F... | D. E. F.

## THEOR. 4. PROPOS. 6. 6.

Si numerus numeri partes fuerit, & alter alterius eædem partes: Et simul vterque vtriusque simul eædem partes erit, quæ vnus vnius.

SIT numerus A B, eædem partes numeri C, quæ numerus D E, numeri F. Dico vtrumque numerum A B, & D E, simul vtriusque numeri C, & F, simul easdem partes esse, quæ est A B, ipsius C, vel D E, ipsius F. Diuisis enim numeris A B, D E, in partes A G, G B; D H, H E, numerorum C, & F, erit multitudo partium in numero A B, æqualis multitudini partium in numero D E; propterea quòd eædem partes est numerus A B, numeri C, quæ numerus D E, numeri F. Quia igitur, quæ pars est A G, numeri C, eadem est D H, numeri F; [a] erit vterque A G, D H, simul eadem pars vtriusque C, F, simul, quæ A G, ipsius C, vel D H, ipsius F. Eadem ratione erit vterque G B, H E, simul eadem pars vtriusque C, F, simul, quæ G B, ipsius C, vel H E, ipsius F: Et sic deinceps, si plures partes fuerint in A B, D E, erunt tot aggregata partium in numeris A B, D E, contenta, quorum quodlibet eadem pars est numerorum C, F, simul, quæ pars est A G, ipsius C; quot partes eędem est numerus A B, ipsius C, vel D E, ipsius F: Ac proindè eædem partes erit vterque numerus A B, D E, simul, vtriusque numeri C, F, simul, quæ A B, ipsius C, vel D E, ipsius F. Si numerus ergo numeri partes fuerit, &c. Quod erat demonstrandum.

A..G...B | D.... H .... E
C..... | F .....

[a] 5. septimi

### SCHOLIVM.

*EADEM hæc propositio locum habet in numeris fractis, vnà cum demonstratione: vt hoc exemplum demonstrat.*

A, $\frac{1}{9}$ G, $\frac{1}{9}$ B
C, $\frac{3}{9}$

D, $\frac{2}{7}$ H, $\frac{2}{7}$ E
F, $\frac{6}{7}$

*SED & hanc propositionem ad quotcunque numeros siue integros, siue fractos extendentes, hoc modo amplificabimus.*

Si sint quotcunque numeri quotcunque numerorum, singuli singulorum, eędem partes; Et omnes omnium simul eædem partes erunt, quæ vnus vnius.

*EADEM enim est demonstratio, si modò pro quinta propos. assumatur id, quod secundo loco demonstrauimus in scholio præcedenti; vt hic perspicuum est.*

A..K..B | C...L...D | E....M.... F
G..... | H..... | I.....

## 7. THEOR. 5. PROPOS. 7.

SI numerus numeri pars fuerit, qualis ablatus ablati: Et reliquus reliqui eadem pars erit, qualis totus totius.

SIT numerus AB, eadem pars numeri CD, quæ ablatus AE, ablati CF. Dico reliquum EB, eandem esse partem reliqui FD, quæ est totus AB, totius CD. Ponatur enim EB, numeri GC, eadem pars, quæ est AE, ipsius CF, vel totus AB, totius CD. Quia igitur AE, eadem est pars ipsius CF, quæ EB, ipsius GC; [a] erit vterque AE, EB, simul eadem pars vtriusque simul CF, GC, quæ AE, ipsius CF; hoc est, quæ totus AB, totius CD. Ac propterea cum AB, eadem sit pars vtriusque numeri FG, CD; erunt ipsi numeri FG, CD, inter se æquales. Dempto ergo communi CF, æquales remanebunt GC, FD. Eadem igitur pars erit EB, ipsius FD, quæ ipsius GC, hoc est, quæ totus AB, totius CD. Si igitur numerus numeri pars fuerit, &c. Quod erat ostendendum.

A....E..B
G....C.....F....D

[a] 5. septimi.

### SCHOLIVM.

A, 3/9. E, 2/5. B
G, 4/5. C, 6/8. F, 4/5. D

*LOCVM etiam habet hæc propositio, vnà cum eius demonstratione in numeris fractis, vt hic apparet.*

*IDEM hoc theorema verum est, tam in numeris integris, quàm in fractis, etiamsi ablata sit vnitas AE, vel reliqua fuerit vnitas EB; vel denique in integris et ablata, & reliqua sit vnitas, vt ex his exemplis apparet.*

| | | |
|---|---|---|
| A.E...B | A...E.B | A.E.B |
| G.....C..F.....D | G..C.....F..D | G..C..F..D |

*CAETERVM & ex his theorematis quinto lib. 5. simile hoc demonstrabimus, tam in numeris integris, quàm in fractis.*

SI numerus numeri æquè fuerit multiplex, atque ablatus ablati: Etiam reliquus reliqui ita multiplex erit, vt totus totius.

*QVOD quidem non aliter ostendemus, ac theorema illud quinti lib. Verùm idem ex demonstratis ita confirmabimus. Sit totus AB, totius CD, æquè multiplex, atque ablatus AE, ablati CF. Dico & reliquum EB, reliqui FD, ita esse multiplicem, vt est totus AB, totius CD. Cum enim AE, ipsius CD, sit æquè multiplex, atque AE, ipsius CF; erit è contrario totus CD, totius AB, eadem pars, quæ ablatus CF, ablati AE. [a] Quare & reliquus FD, reliqui EB, eadem pars erit, quæ totus CD, totius AB; Ac proinde è contrario EB, ita multiplex erit ipsius FD, vt AB, ipsius CD, est multiplex.*

A....E.....B
C.F..D

[a] 7. septimi

*QVOD si ex CD, ablata fuerit vnitas CF; vel reliqua sit vnitas FD: vel denique in integris & ablata sit vnitas CF, & alia reliqua FD; idem demonstrabitur, vt hæc exempla commonstrant.*

| | | |
|---|---|---|
| A...E.....B | A....E..B | A....E....B |
| C.F..D | C..F.D | C.F.D |

## 8. THEOR. 6. PROPOS. 8.

SI numerus numeri partes fuerit, quales ablatus ablati: Et reliquus reliqui eædem partes erit, quales totus totius.

SIT numerus AB, partes eædem numeri CD, quas ablatus AE, ablati CF. Dico reliquum EB, easdem esse partes reliqui FD, quæ totus AB, est totius CD. Sumpto enim numero GH, æquali ipsi AB; erit GH, eædem partes ipsius CD, quæ AB, eiusdem CD; hoc est, quas AE, ipsius CF. Diuiso ergo GH, in partes GI, IH, numeri CD; & AE, in partes AK, KE, numeri CF; erit multitudo partium GI, IH, multitudini partium AK, KE, æqualis, eademque pars tam GI, quàm IH, ipsius CD, quæ tam AK, quàm KE, ipsius CF. Cum ergo CD, numerus maior sit numero CF, erit & tam GI, quàm IH, pars ipsius CD, maior tam numero AK, quàm KE, parte ipsius CF. Sumptis igitur numeris GL, IM, æqualibus ipsis AK, KE; erit GL, eadem pars ipsius CF, quæ AK, eiusdem CF, hoc est, quæ GI, ipsius CD; Ac proinde cum totus GI, totius CD, sit eadem pars, quæ ablatus GL, ablati CF, [a] erit & reliquus LI, reliqui FD, eadem pars, quæ totus GI, totius CD. Eodemque argumento ostendemus MH, eandem esse partem ipsius FD, quæ est totus GI, vel IH, totius CD. Quoniam ergo tam GI, quàm IH, eadem est pars ipsius CD, quæ est tam LI, quàm MH, ipsius FD; erit vterque GI, IH, simul eædem partes ipsius CD, quæ vterque LI, MH, ipsius FD. Est autem GH, eædem partes ipsius CD, quæ AB, eiusdem CD, propter æqualitatem numerorum AB, GH. Igitur & vterque LI, MH, simul eædem partes erit ipsius FD, quæ AB, ipsius CD. Quia verò si ab æqualibus AB, GH, æquales auferantur AK, KE, & GL, IM, reliqui EB, & LI, MH, simul æquales sunt: Erit quoque EB, reliquus eædem partes reliqui FD, quæ AB, totus totius CD, nimi-

A....K.....E....B
C.....F.....D
G.....L..I.....M..H

[a] 7. septimi.

CD, nimirum eædem, quæ vterque LI, MH, simul erat eiusdem FD. Si numerus ergo numeri partes fuerit, &c. Quod erat ostendendum.

*SCHOLIVM.*

A, $\frac{2}{19}$. K, $\frac{2}{19}$. E, $\frac{6}{19}$. B
C, $\frac{6}{19}$. F, $\frac{9}{19}$. D
G, $\frac{2}{19}$. L, $\frac{3}{19}$. I, $\frac{2}{19}$. M, $\frac{3}{19}$. H

*In numeris fractis eadem hæc propositio eodem prorsus modo demonstrabitur, vt hic manifestum est.*

*Non demonstrauit Euclides hanc propositionẽ, quemadmodum præcedẽtem, quod nonnulli interpretes faciunt; quia non constabat hic, reliquum numerum EB, alicuius numeri easdem esse partes, quæ est numerus AE, numeri CF: ibi verò perspicuum erat, reliquum EB, alicuius numeri eandem esse partem, quæ est AE, ipsius CF. Licet enim ipsius EB, duplum assumere, triplum, quadruplum, &c. donec EB, sit ita submultiplex numeri assumpti GC, vt AE, est submultiplex ipsius CF.*

## THEOR. 7. PROPOS. 9.

9.

Si numerus numeri pars fuerit, & alter alterius eadem pars: Et vicissim quæ pars est, aut partes primus tertij, eadem pars erit, vel eædem partes, & secundus quarti.

Sit numerus A, numeri BC, eadem pars, quæ numerus D, numeri EF, sintque A, BC, minores ipsis D, EF, singuli singulis. De his enim propositio intelligenda est. Dico & vicissim eandem partem esse, aut eadem partes A, ipsius D, qualis est, aut quales BC, ipsius EF. Diuisis enim numeris BC, EF, in partes BG, GC, & EH, HF, ipsis A, & D, æquales; erit multitudo partium numeri BC, æqualis multitudini partium numeri EF. Quia verò BG, GC, inter se sunt æquales, & minores quàm EH, HF, quæ inter se etiam æquales sunt, quòd & totus BC, toto EF, minor ponatur; Erit BG, ipsius EH, eadem pars, aut partes, quæ GC, ipsius HF; [a] ac propterea & vterque BG, GC, simul, nimirum BC, secundus vtriusque EH, HF, simul, nimirum EF, quarti, eadem pars, vel partes, quæ BG, ipsius EH; hoc est, quæ A, primus ipsius D, tertij. Si numerus igitur numeri pars fuerit, &c. Quod demonstrandum erat.

A....
B.... G.... C
D.....
E..... H..... F

[a] 5. vel 6. sexti primi.

*SCHOLIVM.*

A, $\frac{3}{11}$.
B, $\frac{3}{11}$. G, $\frac{3}{11}$. C
D, $\frac{14}{22}$.
E, $\frac{14}{22}$. H, $\frac{14}{24}$. F

*In numeris fractis propositio hæc, vnà cum eius demonstratione locum etiam habet, vt hic perspicuum est.*

*Quod si loco primi numeri vnitas accipiatur, quæ numeri alicuius pars sit, quæ alter numerus alterius: Erit vicissim vnitas tertij numeri eadem pars, quæ secundus numerus quarti; id quod eodem argumẽto confirmabitur, si loco partium assumamus partem in demonstratione, vt ex hoc exemplo apparet.*

A.
B. G. C
D.....
E..... H..... F

## THEOR. 8. PROPOS. 10.

10.

Si numerus numeri partes fuerit, & alter alterius eædem partes: Et vicissim, quæ partes est primus tertij, aut pars, eædem partes erit & secundus quarti, aut pars.

Sit numerus AB, eædem partes numeri C, quæ numerus DE, numeri F, sintque AB, C, ipsis DE, F, minores, singuli singulis. De his enim etiam intelligenda est hæc propositio, sicut & antecedens. Dico & vicissim numerum AB, easdem partes esse, aut partem numeri DE, quæ numerus C, est numeri F. Diuisis enim numeris AB, DE, in partes AG, GB, & DH, HE, numerorum C, & F; erit multitudo partium in AB, æqualis multitudini partium in DE, & tam AG, quàm GB, eadem pars ipsius C, quæ tam DH, quàm HE, ipsius F. [b] Vicissim ergo eadem pars erit, aut partes AG, ipsius DH, & GB, ipsius HE, quæ C, ipsius F: Ac propterea eadem pars erit, vel partes AG, ipsius DH, quæ GB, ipsius HE. [c] Igitur & vterque AG, GB, simul, nimirum primus AB, eadem pars erit, aut partes vtriusque DH, HE, simul, nimirum DE, tertij, quæ AG, ipsius DH; hoc est, quæ C, secundus quarti F. Si numerus ergo numeri partes fuerit, & alter alterius, &c. Quod demonstrandum erat.

A.. G.. B
C.....
D..... H..... E
F.....

[b] 9. septimi.
[c] 5. vel 6. sexti primi.

A, $\frac{2}{15}$. G, $\frac{2}{15}$. B
C, $\frac{6}{15}$.
D, $\frac{3}{10}$. H, $\frac{3}{10}$. E
F, $\frac{9}{10}$.

*SCHOLIVM.*

*Numeris fractis conuenit etiam huius propositionis demonstratio, vt in hoc exemplo apparet.*

12. THEOR. 9. PROPOS. 11.

SI fuerit vt totus ad totum, ita ablatus ad ablatum: Et reliquus ad reliquum erit, vt totus ad totum.

SIT vt totus numerus AB, ad totum CD, ita ablatus AE, ad ablatum CF. Dico & reliquum EB, ad reliquum FD, esse, vt est totus AB, ad totum CD. Cùm enim sit, vt AB, ad CD, ita AE, ad CF; [a] erit AB, ipsius CD, & AE, ipsius CF, vel æquè multiplex, vel eadem pars, vel eædem partes: vel certè AB, ipsum CD, & AE, ipsum CF, æqualiter continebit, eandemque insuper illius partem, vel easdem partes. Sit primùm AB, ipsius CD, & AE, ipsius CF, æquè multiplex. Quo posito, erit è contrario CD, totus totius AB, eadem pars, quæ ablatus CF, ablati AE, propter AB, AE, æquè multiplices ipsorũ CD, CF. [b] Igitur & reliquus FD, reliqui EB, eadem pars erit, quæ totus CD, totius AB; Ac propterea è contrario AB, ipsius CD, & EB, ipsius FD, æquè multiplex erit. [c] Quare erit, vt totus AB, ad totum CD, ita EB, reliquus ad reliquum FD.

a 20. defin.

A..... E..... B
C..... F... D

b 7. septimi.

c 20. defin.

SIT deinde AB, ipsius CD, & AE, ipsius CF, eadem pars, vel eædem partes. Quo posito, [d] erit & reliquus EB, reliqui FD, eadem pars, vel partes, quæ totus AB, totius CD; [e] Ac proinde, erit vt totus AB, ad totum CD, ita EB, reliquus ad reliquum FD.

d 7. vel 8. septimi.

e 20. defin.

A... E.. B
C..... F.... D

A.... E.. B
C..... F... D

CONTINEBAT tertiò AB, ipsum CD, & AE, ipsum CF, æqualiter, eandemque insuper illius partem, vel partes. Quo posito, erit è contrario CD, totus totius AB, eædem partes, quæ ablatus CF, ablati AE, vt mox demonstrabimus. [f] Reliquus igitur FD, reliqui EB, eædem quoque partes erit, quæ totus CD, totius AB: Ac propterea, è contrario AB, ipsum CD, & EB, ipsum FD, æqualiter continebit, eandemque insuper illius partem, vel partes, vt mox ostendemus. [g] Quare erit, vt totus AB, ad totum CD, ita EB, reliquus ad reliquum FD.

f 8. septimi.

g 20. defin.

A..... E... B | A..... E..... B
C.... F.. D | C..... F..... D

QVOD si AB, totus toti CD, æqualis fuerit, & ablatus AE, ablato CF; perspicuum est reliquum EB, quoque esse æqualem reliquo FD. Nam si ab æqualibus æqualia demantur; quæ remanent, sunt æqualia. Itaque si fuerit, vt totus ad totũ, ita ablatus ad ablatũ, &c. Quod erat demõstrandũ.

A..... E... B
C..... F... D

## SCHOLIVM.

*EODEM modo demonstrabitur hoc in fractis numeris. Id quod liquidò constat in his exemplis, quæ exemplis tertij casus demonstrationis respondent.*

A, $\frac{6}{9}$. E $\frac{3}{10}$. B | A, $\frac{14}{21}$. E $\frac{28}{29}$. B
C, $\frac{4}{9}$. F $\frac{2}{10}$. D | C, $\frac{5}{21}$. F $\frac{10}{29}$. D

## LEMMA.

*QVOD autem, si AB, ipsum CD, & AE, ipsum CF, æqualiter contineat, eandemq; insuper partem illius vel partes; è contrario CD, ipsius AB, & CF, ipsius AE, sit eadem pars: Et si CD, ipsius AB, & CF, ipsius AE, sit eadem partes; è contrario AB, ipsum CD, & AE, ipsum CF, æqualiter contineat, eandemq; illius partem vel partes, tam in numeris fractis, quàm in integris; hoc modo demonstrabimus. Contineat primùm AB, ipsum CD, & AE, ipsum CF, æqualiter, nimirum semel, vel bis, vel ter, &c. eandemq; insuper partem GB, quidem ipsius CD, & HE, ipsius CF; ita vt numeri reliqui AG, AH, sint vel æquales ipsis CD, CF, vel eorum æquè multiplices. Diuisis igitur numeris CD, CF, in partes CI, IK, KD; & CL, LM, MF, ipsis GB, HE, æquales; erit multitudo partium numeri CD, multitudini partium numeri CF, æqualis, quòd GB, ipsius CD, sit eadem pars, quæ HE, ipsius CF. Similiter diuisis numeris AG, AH, in partes AN, NO, OG; & AP, PQ, QH, eisdem GB, HE, æquales; erit quoquè multitudo partium numeri AG, multitudini partium numeri AH, æqualis. Cùm enim AG, AH, vel æquales sint ipsis CD, CF, vel eorum æquè multiplices; erunt vel tot partes in AG, AH, quot in CD, CF; vel certè numerus partium numeri CD, toties continebitur in AG, quoties numerus partium numeri CF, in AH; propterea q; multitudo partium numeri AG, multitudini partium numeri AH, æqualis erit. Si igitur ipsis addantur*

A.. N.. O.. G.. B
C.. I.. K.. D
A... P... Q... H... E
C... L... M... F

partes

*partes GB, HE, erit & multitudo partium numeri AB, multitudini partium numeri AE, æqualis: Atque adeò vna pars numeri CD, eadem pars erit numeri AB, quæ vna pars numeri CF, est numeri AE. Quare cùm multitudo partium numeri CD, æqualis sit multitudini partium numeri CF; erit CD, eadem partes numeri AB, quæ CF, ipsius AE*

*Contineat deinde AB, ipsum CD, & AE, ipsum CF, æqualiter, videlicet semel, bis, ter, quaterve, &c. easdemq; insuper partes illius; numerus quidem AB, partes GB, numeri CD, & numerus AE, partes HE, numeri CF: ita vt reliqui numeri AG, AH, sint rursum vel æquales ipsis CD, CF, vel eorum æquè multiplices. Diuisis igitur numeris GB, HE, in*

A.. P.. Q.. G.. I.. B
C.. L.. M.. D
A... R... S... H... K... E
C... N... O... F

*partes GI, IB, & HK, KE, numerorum CD, CF, erit multitudo partium ipsius GB, multitudini partium ipsius HE, æqualis. Simili modo, diuisis numeris CD, CF, in partes CL, LM, MD, & CN, NO, OF, partibus GI, IB, & HK, KE, æquales, erit quoq; multitudo partium ipsius CD, multitudini partium ipsius CF, æqualis, propterea quòd quælibet partium numeri GB, eadem pars est numeri CD, quæ vnaquæque partium numeri HE, est numeri CF. Denique diuisis numeris AG, AH, in partes AP, PQ, QG, & AR, RS, SH, eisdem partibus GI, IB, & HK, KE, æquales; erit & multitudo partium numeri AG, æqualis multitudini partium numeri AH. Cùm enim AG, AH, vel æquales sint ipsis CD, CF, vel eorum æquè multiplices; erunt vel tot partes in AG, AH, quot in CD, CF, vel certè numerus partium ipsius CD, toties continebitur in AG, quoties numerus partium ipsius CF, in AH; propterea q; multitudo partium numeri AG, multitudini partium numeri AH, æqualis erit: Quibus si addantur æquales multitudines partium numerorum GB, HE, erit quoque multitudo partium numeri AB, multitudini partium numeri AE, æqualis; Atque adeò vna pars numeri CD, eadem pars erit numeri AB, quæ vna pars numeri CF, est numeri AE. Quare cùm multitudo partium numeri CD, æqualis sit multitudini partium numeri CF; erit CD, eadem partes numeri AB, quæ CF, ipsius AE. Quod est primò propositum.*

*Iam verò sit CD, ipsius AB, & CF, ipsius AE, eadem partes. Dico è contrario AB, ipsum CD, & AE, ipsum CF, æqualiter continere, eandemq; insuper illius partem, vel partes. Diuisis enim numeris CD, CF, in partes numerorum AB, AE, erunt ea multitudine inter se æquales. Item diuisis numeris AB, AE, in partes partibus numerorum CD, CF, æquales, erunt & hæ multitudine inter se æquales. Quare toties continebuntur omnes partes numeri CD, in AB, supereritq; eadem pars, vel partes ipsius CD, quoties omnes partes numeri CF, continentur in AE, & quæ pars, aut partes ipsius CF, supersunt, propter æquales multitudines partium numerorum CD, CF, & AB, AE. Ita enim fit, vt multitudines æquales partium numerorum AB, AE, contineant æqualiter æquales multitudines partium numerorum CD, CF, & insuper in duobus illis numerus superfint partes numerorum CD, CF, multitudine æquales. Quam ob rem AB, ipsum CD, & AE, ipsum CF, æqualiter continebit, eandemq; insuper illius partem, vel partes. Quod secundò est propositum.*

## THEOR. 10. PROPOS. 12. 13.

Si sint quotcunque numeri proportionales, erit quemadmodum vnus antecedentium ad vnum consequentium, ita omnes antecedentes ad omnes consequentes.

Sint quotcunque numeri proportionales A, B; C, D; E, F; hoc est, vt A, ad B; ita C, ad D, & E, ad F. Dico esse quoque omnes A, C, E, simul ad omnes B D, F, simul, vt est A, ad B. Sint enim primùm A, C, E, minores quàm B, D, F. Quoniam igitur propter eandem proportionem, [a] eadem pars est, aut partes A, ipsius B, quæ C, ipsius D, & E, ipsius F; [b] erit quoque vterque A, C, simul vtriusque B, D, simul eadem pars, aut partes, quæ A, ipsius B, vel E, ipsius F. Rursus quia vterque A, C, simul tanquam vnus, vtriusque B, D, simul, tanquam vnius, eadem pars est, aut partes, quæ E, ipsius F; [c] erunt & ambo A, C, tanquam vnus, & E, simul, amborum B, D, tanquam vnius, & F, simul eadem pars, vel partes, quæ A, ipsius B. [d] Quare eadem proportio est omnium A, C, E, simul ad omnes B, D, F, simul, quæ ipsius A, ad B.

A.... C.. E...
B..... D.... F.....

[a] 20. defin.
[b] 5. vel 6. septimi.
[c] 5. septimi.
[d] 20. defin.

Sint deinde A, C, E, maiores, & æquè multiplices numerorum B, D, F. Quo posito, erit è

a 5. *septimi.* contrario B, ipſius A, eadem pars, quæ D, ipſius C, & F, ipſius E; Atque adeò vt prius, [a] erunt omnes B, D, F, ſimul omnium A, C, E, ſimul, eadem pars, quæ B, ipſius A; ideoque & è contrario omnes A, C, E, ſimul omnium B, D, F, ſimul, & A, ipſius B, æquè multiplices. [b] Quare eadem eſt proportio omnium A, C, E, ſimul, ad omnes B, D, F, ſimul, quæ eſt A, ad B. Hoc idem verum eſt, etiamſi aliquæ proportiones multiplices, vel etiam omnes, ſint numerorum ad vnitatem. Eſt enim eadem ſemper demonſtratio, vt hìc apparet, adiuuante tamen ſcholio propoſ. 5. huius libri.

b 20. *defin.*

A..... C.... E.....
B.... D.. F...

A... C..... E.....
B. D.. F...

A... C... E.....
B. D. F..

A... C... E...
B. D. F.

c 20. *defin.* SINT tertiò A, C, E, maiores, quàm B, D, F, at non multiplices. [c] Quia igitur propter eandem proportionem, A, ipſum B, & C, ipſum D, & E, ipſum F, æqualiter continet, eandemque inſuper partem, vel partes: Erit per lemma præcedentis propoſitionis B, ipſius A, & D, ipſius C, & F, ipſius E, eædem partes. Igitur vt prius, [d] erunt omnes B, D, F, ſimul omnium A, C, E, ſimul eædem partes, quæ B, ipſius A; Atque adeò per idem lemma, è contrario continebunt omnes numeri A, C, E, ſimul, omnes numeros B, D, F, ſimul, & A, ipſum B, æqualiter, eandemque inſuper partem, vel partes. [e] Quare eadem proportio eſt omnium A, C, E, ſimul, ad omnes B, D, F, ſimul, quæ ipſius A, ad B.

d 6. *ſeptimi.*

A..... C.... E.....
B..... D... F.....

e 20. *defin.*

SINT quartò & vltimò A, C, E, ipſis B, D, F, æquales. Quoniam igitur ſi æqualibus A, & B, æquales addantur C, & D, fiunt A, C, ſimul æquales ipſis B, D, ſimul: quibus ſi rurſum addãtur æquales E, & F, fiunt & omnes A, C, E, ſimul, omnibus B, D, F, ſimul æquales; Erunt, vt A, ad B, ita omnes A, C, E, ſimul ad omnes B, D, F, ſimul, cùm vtrobique ſit proportio æqualitatis. Si ſint igitur quotcunque numeri proportionales, erit, &c. Quod erat demonſtrandum.

A.... C... E.....
B.... D... F.....

## *SCHOLIVM.*

*IN numeris quoq; fractis propoſitio hæc vera eſſe eodem modo conuincetur, vt patet, ſi pro numeris integris fracti aſſumantur.*

## 14. THEOR. 11. PROPOS. 13.

**SI quatuor numeri proportionales ſint: Et viciſſim proportionales erunt.**

A... C.....
B.... D.....

SIT enim A, ad B, vt C, ad D. Dico viciſsim eſſe A, ad C, vt B, ad D. Nam ſint primùm A, & C, minores quàm B, & D; & A, quoque minor, quàm C. Quo poſito, erit, propter eandem proportionem, A, ipſius B, & C, ipſius D, eadem pars, vel partes. [f] Viciſsim ergo & A, ipſius C, & B, ipſius D, eadem pars erit, vel partes: [g] Ac proinde erit, vt A, ad C, ita B, ad D.

f 9. *vel* 10. *ſeptimi.*

g 20. *defin.*

SINT deinde A, & C, minores quàm B, & D; at A, maior quàm C. Quo poſito, erit, ob eandem proportionem, C, ipſius D, & A, ipſius B, eadem pars, vel partes. [h] Viciſsim ergo & C, ipſius A, & D, ipſius B, eadem pars erit, vel partes: Atque adeò è contrario, vel A, ipſius C, & B, ipſius D, æquè multiplex erit, vel certè per lemma propoſ. 11. huius lib. A, ipſum C, & B, ipſum D, æqualiter continebit, eandemque inſuper partem, vel partes. [i] Quare erit vt A, ad C, ita B, ad D.

h 9. *vel* 10. *ſeptimi.*

A..... C...
B..... D....

i 20. *defin.*

SINT tertiò A, & C, maiores quàm B, & D; at A, minor quàm C. Quo poſito, erit ob eandem proportionem, vel A, ipſius B, & C, ipſius D, æquè multiplex; vel certè A, ipſum B, & C, ipſum D, continebit æqualiter, eandemque inſuper partem, vel partes; Atque adeò è contrario erit B, ipſius A, & D, ipſius C, vel eadem pars, vel certè per lemma propoſ. 11. huius lib. eædem partes. [k] Viciſsim ergo & B, ipſius D, & A, ipſius C, eadem pars erit, vel partes. [l] Ac proinde eadem proportio erit B, ad D, quæ A, ad C; hoc eſt, erit vt A, ad C, ita B, ad D.

A.... C.....
B... D.....

k 9. *vel* 10. *ſeptimi.*

l 20. *defin.*

SINT quartò A, & C, maiores quàm B, & D; & A, quoque maior quàm C. Quo poſito, erit C, ipſius D, & A, ipſius B, ob eandem proportionem, vel æquè multiplex, vel certè C, ipſum D, & A, ipſum B, æqualiter continebit, eandemq; inſuper partem, vel partes; Atque adeò è contrario, erit D, ipſius C, & B, ipſius A, vel eadem pars, vel certè per lemma propoſ. 11. huius lib. eædem partes. [m] Viciſsim ergo & D, ipſius B, & C, ipſius A, eadem pars erit, vel partes; Ac propterea è contrario vel B, ipſius D, & A, ipſius C, æquè multiplex erit, vel certè, per lemma propoſ. 11. huius lib. B, ipſum D, & A, ipſum C, continebit æqualiter, eandemque inſuper partem, vel partes. [n] Quare eadem proportio erit B, ad D, quę A, ad C; hoc eſt, erit vt A, ad C, ita B, ad D.

A..... C....
B..... D...

m 9. *vel* 10. *ſeptimi.*

n 20. *defin.*

A... C....
B... D....

SINT quintò A, & C, ipſis B, & D, æquales, & A, minor quàm C. Quoniam igitur æquales numeri A, & B, æqualium numerorum C, & D, vel eadem pars, vel eædem partes ſunt; [o] Erit vt A, ad C, ita B, ad D.

o 20. *defin.*

SINT

A.... C... SINT sexto A,& C,ipsis B, & D,æquales: at A,maior, quàm C. Quia igitur æ-
B.... D... quales numeri A,& B,æqualium numerorum C,& D, vel æquemultiplices sunt,
vel certè illi hos æqualiter continent,eandemque insuper partem, vel partes; [a] e- [a 20. defin.]
rit vt A,ad C,ita B,ad D.

SINT septimo ac vltimo A,& C,inter se æquales, siue ij maiores sint, quàm B,& D, siue mino-
res, siue æquales. [b] Quoniam igitur, ob eandem proportionem, A,ipsius B, & [b 20. defin.]
A..... C..... C, ipsius D,æquemultiplex est,vel eadem pars,vel eædem partes; vel certè A,
B... D... ipsum B, & C, ipsum D, æqualiter continet, eandemque insuper partem, vel
partes; suntque A, & C, æquales; æquales quoque erunt B,& D; Atque adeò
erit,vt A,ad æqualem C,ita B,ad æqualem D. Quocirca,si quatuor numeri proportionales sint,& vicissim proportionales erunt. Quod erat demonstrandum.

## SCHOLIVM.

*QVOD si pro numeris integris fractos numeros substituas, demonstrabis eodem modo propositionẽ hanc veram esse in numeris fractis.*

*MANIFESTVM quoque est, propositionem hanc non variari, etiamsi aliquis numerorum ponatur vnitas.*

*COACTI verò sumus in hac propositione, & duabus præcedentibus tot casus recensere, eosq; demonstrationibus certissimis confirmare, vnà cum lemmate propos. 11. vt earum veritas in omni genere proportionis rationalis appareret. Theon enim,& nonnulli alij interpretes,illas duntaxat ostendunt in proportionibus rationalibus minoris inæqualitatis, in quibus nimirum antecedentes numeri partes sunt consequentium, vt perspicuè ex eorundem auctorum demonstrationibus apparet; nisi maiorem numerum minoris numeri partes esse dicamus,vt nonnulli concedunt, inter quos etiam est (quod miror) Federicus Commandinus præstans Geometra: quod est absurdum, & ab Euclidis instituto alienum, cùm partes appellârit numerum numeri, minorem maioris, cùm minor non metiatur maiorem. Quod etiam ex definitione 20. Solis luce clarius constat, vbi numeros proportionales docuit esse, cùm primus secundi, & tertius quarti æquè multiplex est, vel eadem pars, vel eadem partes, &c. Nam si existimaret, maiorem numerum minoris partes esse, satis fuisset dicere, cùm primus secundi, & tertius quarti, eadem pars est, vel eadem partes. Ita enim numeros proportionales in omni genere proportionis comprehendisset,vt manifestum est: quare reliqua omnia verba definitionis superuacanea essent.*

# THEOR. 12. PROPOS. 14. 15

SI sint quotcunque numeri,& alij illis æquales multitudine,qui bini sumantur, & in eadem ratione: Etiam ex æqualitate in eadem ratione erunt.

SINT quotcunque numeri A,B,C, & alij totidem D,E,F, sitque vt A,ad B, ita D,ad E; & vt B,
ad C,ita E,ad F. Dico ex æqualitate quoque esse vt A,
A..... D..... ad C, ita D,ad F. Quoniam enim est, vt A,ad B,ita D,
B..... E..... ad E; [c] erit vicissim, vt A,ad D, ita B, ad E: Similiterq; [c 13. septim.]
C.... F... eandem ob causam, cùm sit,vt B,ad C,ita E, ad F; erit
G..... H..... vicissim, vt B,ad E,ita C,ad F. Igitur erit vt A,ad D,ita
C,ad F; (Cùm enim vtraque proportio A, ad D,& C,
ad F, eadem sit proportioni B,ad E,vt demonstratum est; & ipsæ inter se eædem erunt,vt mox ostendetur.) [d] Ac proinde vicissim, vt A, ad C,ita D,ad F. [d 13. septim.]

QVOD si fuerint plures numeri, quàm tres, ita vt sit etiam quemadmodum C,ad G,ita F,ad H; Dico adhuc esse,vt A,ad G,ita D,ad H. Cùm enim iam sit ostensum in tribus numeris,esse vt A,ad C,ita D,ad F; ponatur autem vt C, ad G, ita F, ad H; erunt tres numeri A,C,G, & alij tres D,F,H, qui bini in eadem ratione sumuntur. Ex æqualitate igitur in tribus numeris ostensa, rursus erit vt A,ad G,ita D,ad H. Eodemque modo idem ostendemus in quinque numeris, per quatuor; sicut id in quatuor numeris demonstratum fuit per tres, & sic de pluribus. Itaque si sint quotcunque numeri,& alij illis æquales multitudine,&c. Quod erat ostendendum.

## SCHOLIVM.

A. D... *PERSPICVVM autem est, hanc propositionem eodem modo demonstrari posse*
B.. E..... *in numeris fractis, si pro numeris integris assumantur fracti numeri.*
C... F..... *IDEM verum est, si loco vnius numeri vnitas assumatur, vel etiam loco plurium*
G. H... *plures vnitates, vt in hoc exemplo perspicuum est.*

## LEMMA.

A..... B..... C.... *QVOD autem duæ proportiones numerorum, quæ*
D..... E..... F... *eidem proportioni eadem sunt,inter se quoq; sint eadem,*

*quales sunt in demonstratione proportiones A, ad D, & C,ad F,quæ eadem ostensæ sunt pro-*

*portioni B, ad E, siue numeri sint integri, siue fracti; ita demonstrabitur. Propter eandem proportionem, erit B, ipsius E, & tam A, ipsius D, quàm C, ipsius F, æquè multiplex, vel eadem pars, vel eadem partes; vel certè B, ipsum E, & tam A, ipsum D, quàm C, ipsum F, continebit æqualiter, eandemq; insuper partem, vel partes.* [a] *Quare numeri A, D, C, F, proportionales sunt, vt quidem A, ad D, ita C, ad F. Quod est propositum.*

a 20. defin.

*Hoc idem demonstratum fuit ab Euclide libro 5. de proportionibus magnitudinum, propositione 11.*

16. ## THEOR. 13. PROPOS. 15.

Si vnitas numerum quempiam metiatur, æquè autem alter numerus alterum quendam numerum metiatur: Et vicissim æquè vnitas tertium numerum metietur, & secundus quartum.

METIATVR vnitas A, numerum B C, & numerus D, numerum E F, æquè. Dico vicissim vnitatem A, numerum D, & numerum B C, numerum E F, æquè metiri. Diuiso enim numero B C, in vnitates B G, G H, H C, & numero E F, in partes E I, I K, K F, ipsi D, æquales: erit multitudo vnitatum numeri B C, æqualis multitudini partium numeri E F, metieturque æquè vnitas A, numerum D, & vnitas B G, ipsum E I, atque vnitas G H, ipsum I K, & vnitas H C, ipsum K F: atque idcirco eadem pars erit vnitas A, numeri D, & vnitas B G, numeri E I, quæ vnitas G H, numeri I K, & vnitas H C, numeri K F. Quare per ea, quæ ad propos. 5. huius libri ostendimus, eadem pars erunt vnitates B G, G H, H C, simul numerorum E I, I K, K F, simul, quæ vnitas B G, numeri E I, hoc est, quæ vnitas A, numeri D; Ac proinde vnitas A, numerum D, & numerus B C, ex vnitatibus B G, G H, H C, compositus, numerum E F, ex numeris E I, I K, K F, compositum æquè metietur. Si vnitas igitur numerum quempiam metiatur, &c. Quod erat demonstrandum.

A. D..
B. G. H. C E.. I.. K.. F

### SCHOLIVM.

*Illvd idem, quod Euclides demonstrauit de numeris, propos. 13. ostendit hoc loco separatim de vnitate, & tribus numeris, propterea quòd vnitas non est numerus. Quod quidem breuius ita nos demonstrabimus. Quia vnitas A, numerum B C, æquè metitur, atque numerus D, numerum E F; erit vnitas A, eadem pars numeri B C, quæ numerus D, numeri E F. Per ea igitur, quæ ad propos. 9. demonstrauimus, erit vicissim vnitas A, eadem pars numeri D, quæ numerus B C, numeri E F; Ac propterea vnitas A, numerum D, & numerus B C, numerum E F, æquè metietur.*

*Hæc propositio fractis numeris conuenire non potest. Nam si vnitas numerum quempiam metiatur, æquè autem alter numerus fractus alterum quendam numerum fractum metiatur: non metietur vicissim æquè vnitas tertium numerum, qui fractus ponitur, & secundus integer quartum fractum;* [b] *sed solum eandem habebit rationem vnitas ad numerum tertium, quam secundus ad quartum.*

b 13. septimi.

17. ## THEOR. 14. PROPOS. 16.

Si duo numeri mutuò sese multiplicãtes fecerint aliquos; geniti ex ipsis æquales inter se erunt.

Dvo numeri A, & B, se mutuò multiplicantes faciant numeros C, & D, ita vt A, multiplicans ipsum B, faciat C, at B, ipsum A, multiplicans faciat D. Dico numeros C, & D, inter se æquales esse. Sumpta enim vnitate E; cum A, ipsum B, multiplicans faciat C; [a] erit C, ex B, toties compositus, quot sunt in A, vnitates; atque adeò vnitas E, numerum A, & numerus B, numerum C, æquè metietur. [b] Vicissim ergo & vnitas E, numerum B, & numerus A, numerum C, metietur æquè. Rursus eodem modo, quia B, multiplicans ipsum A, facit D; [c] erit D, ex A, toties compositus, quot sunt in B, vnitates; atque adeò vnitas E, numerum B, & numerus A, numerum D, æquè metietur: Metiebatur autem & eadem vnitas E, eundem numerum B, & numerus idem A, numerum C; æquè. Æquè igitur numerus A, vtrumque numerum C, & D, metietur; Ac proinde C, & D, inter se æquales erunt. Si duo igitur numeri mutuò sese multiplicantes fecerint aliquos, &c. Quod demonstrandum erat.

a 15. defin.
b 15. septimi.
c 15. defin.

E.
A, $\frac{2}{5}$. B, $4\frac{5}{7}$.
D, $3\frac{1}{7}$. C, $3\frac{1}{7}$.

### SCHOLIVM.

*In numeris fractis hæc propositio ita demonstranda est. Quoniam A, multiplicãs B, facit C, erit C, ad B, vt A, ad E, vnitatem, ex defin. multiplicationis. Ergo permutando, vt C, ad A, ita B, ad E, vnitatem. Sed ex eadem defin. vt B, ad E, vnitatem, ita quoque est D, ad A, quòd B, multiplicans A, facit D. Igitur erit, vt C, ad A, ita D, ad eundem A, ex lemmate propos. 14. ac proinde æquales inter se erunt C, & D. Quod erat ostendendum.*

POTEST

*Potest hæc eadem propositio cum Campano in hunc modum proponi.*

Si duo numeri se mutuò multiplicauerint, procreabitur vnus idemque numerus.

*Multiplicet enim A, ipsum B, faciatq; C. Dico eundem C, gigni, si B, ipsum A, multiplicet. Nam vt prius, cùm A, multiplicans ipsum B, faciat C, ostendemus vnitatem E, numerum B, & numerum A, numerum C, æquè metiri. At verò si numerus B, ipsum A, multiplicet,*

E.
A... B....
C.....

*etiam vnitas E, numerum B, & numerus A, numerum factum æquè metitur. Idem ergò numerus C, gignitur ex multiplicatione B, in A; quandoquidem ipsum numerus A, æquè metitur, atque vnitas E, ipsum B.* [a] 15. defin.

*Quod si numeri A, & B, sint fracti ambo, vel vnus eorum, demonstrabimus idem hoc modo. Quoniam A, multiplicans B, facit C; erit ex definit. 15. vt C, ad B, ita A, ad E, vnitatem: Et permutando, vt C, ad A, ita B, ad E, vnitatem. At si B, multiplicet A, erit ex eadem definitione 15. B, ad E, vnitatem, vt factus numerus ad A. Erit igitur C, ad A, vt numerus hic factus ad eundem A; ac proinde factus hic numerus idem erit, qui C. Quod est propositum.*

## THEOR. 15. PROPOS. 17. 18

Si numerus duos numeros multiplicans fecerit aliquos; Geniti ex ipsis eandem rationem habebunt, quam multiplicati.

F.
A....
B.. C....
D..... E.....

Numerus enim A, multiplicans numeros B, C, faciat D, E. Dico esse, vt B, ad C, ita D, ad E. Assumpta enim vnitate F, [a] erit D, ex B, compositus toties, quoties vnitas F, est in A: similiterque toties E, compositus erit ex C, quoties eadem vnitas F, est in eodem A: Atque adeò B, ipsum D, & C, ipsum E, æquè metietur. Quare B, ipsius D, & C, ipsius E, eadem pars erit; [b] Ac proinde, erit vt B, ad D, ita C, ad E, [c] & permutando, vt B, ad C, ita D, ad E. Si numerus igitur duos numeros multiplicans fecerit aliquos, &c. Quod ostendendum erat. [a] 15. *defin.* [b] 20. *defin.* [c] 13. *septimi.*

### SCHOLIVM.

*Si numeri A, B, C, sint fracti, vel vnus eorum, vel duo, idem ostendemus hoc modo. Quoniam A, multiplicans B, & C, facit D, & E; erit ex definitione 15. tam D, ad B, quam E, ad C, vt A, ad F, vnitatem; ac proinde ex lemmate propositionis 14. vt D, ad B, ita E, ad C. Igitur permutando, vt D, ad E, ita B, ad C. Quod est propositum.*

## THEOR. 16. PROPOS. 18. 19.

Si duo numeri numerum quempiam multiplicantes, fecerint aliquos: Geniti ex ipsis eandem rationem habebunt, quam multiplicantes.

A.... B.....
C...
D..... E.....

Numeri enim A, & B, multiplicantes numerum C, faciant D, & E. Dico esse vt A, ad B, ita D, ad E. Cùm enim ex A, in C, fiat D; [d] fiet quoque idem D, ex C, in A. Eadem ratione, cùm ex B, in C, fiat E; fiet idem E, ex C, in B. Quia igitur idem C, multiplicans ipsos A, & B, facit D, & E; [e] erit, vt A, ad B, ita D, ad E. Si duo ergo numeri numerum quempiam multiplicantes, fecerint aliquos, &c. Quod erat demonstrandum. [d] 16. *septimi.* [e] 17. *septimi.*

### SCHOLIVM.

*Liquido constat, eandem hanc propositionem eodem modo demonstrari, si numeri A, B, C, sint fracti, vel vnus eorum, vel duo.*

*Hanc autem propositionem, & præcedentem, ad quotcunque numeros cum Campano accommodabimus, siue numeri omnes sint integri, siue non; hac ratione.*

Si numerus quotcunque numeros multiplicet, vel quotcunque numeri numerum quempiam multiplicent; Habebunt producti numeri easdem rationes, quas numeri multiplicati, vel multiplicantes.

A...
B.. C... D....
E..... F..... G.....

*Fiant enim E, F, G, ex A, in B, C, D, vel ex B, C, D, in A. Dico easdem rationes habere numeros productos E, F, G, quas numeri multiplicantes, vel multiplicati B, C, D, habent: hoc est, esse, vt B, ad C, ita E, ad F; & vt C, ad D, ita F, ad G. Nam cùm ex A, in B, C, vel ex B, C, in A, fiant E, F; [a] erit vt B, ad C, ita E, ad F. Similiter quia ex A, in C, D, vel ex C, D, in A, fiunt F, G; erit quoq; vt C, ad D, ita F, ad G. Atq; ita de cæteris.* [a] 17. vel 18. septimi.

## THEOR. 17. PROPOS. 19. 20.

Si quatuor numeri proportionales fuerint; qui ex primo, & quarto fit, nume-

rus, æqualis erit ei, qui ex ſecundo, & tertio fit numero. Et ſi, qui ex primo, & quarto fit, numerus, æqualis fuerit ei, qui ex ſecundo & tertio fit, numero; ipſi quatuor numeri proportionales erunt.

A...
B..
C.....
D....
E.....
F.....
G.....

SINT quatuor numeri proportionales A, B, C, D, vt quidem A, ad B, ita C, ad D; fiatque E, ex A, primò in D, quartum: & F, ex B, ſecundò in C, tertium. Dico numeros E, F, æquales inter ſe eſſe. Fiat enim rurſus G, ex A, in C. Quia igitur ex A, in C, D, fiunt G, E; [a] erit, vt C, ad D; hoc eſt, vt A, ad B, ita G, ad E. Rurſus quia ex A, & B, in C, fiunt G, & F; [b] erit quoque vt idem A, ad B, ita G, ad F. Quare per lemma propoſitionis 14. habebit G, ad E, & F, eandem proportionem; eam videlicet, quam habet A, ad B; Ac proinde E, & F, numeri æquales erunt, ex iis, quæ ad defin. 20. ſcripſimus.

a 17. ſeptimi.

b 18. ſeptimi.

SED iam ſit E, ex A, primò in D, quartum genitus, æqualis ipſi F, producto ex B, ſecundò in C, tertium. Dico quatuor numeros A, B, C, D, proportionales eſſe, vt quidem A, ad B, ita C, ad D. Fiat enim rurſus G, ex A, in C. Quia ergo ex A, in C, D, fiunt G, E; [c] erit vt C, ad D, ita G, ad E, vel ad F, ipſi E, æqualem. Habet enim G, ad æquales E, F, eandem rationem, vt ad definitionem 20. docuimus. Rurſus quoniam ex A, & B, in C, fiunt G, & F; [d] erit quoque, vt A, ad B, ita idem G, ad eundem F. Quare proportiones A, ad B, & C, ad D, cùm eædem ſint proportioni G, ad F, eædem inter ſe erunt, per lemma propoſit. 14. Ac proinde erit, vt A, ad B, ita C, ad D. Si quatuor ergo numeri proportionales fuerint, &c. Quod erat oſtendendum.

c 17. ſeptimi.

d 18. ſeptimi.

## SCHOLIVM.

*LVCE clarius eſt, eandem demonſtrationem huius propoſitionis locum habere in numeris fractis, ſiue omnes fracti ſint, ſiue non.*

*POTERAT huius theorematis prima pars proponi etiam ad hunc modum, tam in numeris fractis, quàm in integris.*

SI duo numeri duos numeros eandem, quam illi, habentes rationem multiplicent, antecedens nimirum illorum conſequentem horum, & conſequens antecedentem; geniti ex ipſis, æquales inter ſe erunt.

*ITA enim oſtenſum eſt numerum E, qui fit ex A, antecedente in D, conſequentem, æqualem eſſe numero F, qui procreatur ex B, conſequente in C, antecedentem.*

*SED & ſequens theorema tam in fractis numeris, quàm in integris facilè ex hac propoſitione decimanona demonſtrabitur.*

SI maior fuerit proportio primi ad ſecundum, quàm tertij ad quartum; qui ex primo & quarto fit, numerus, maior erit eo, qui ex ſecundo & tertio fit, numero: Et ſi, qui ex primo & quarto fit, numerus, maior fuerit eo, qui ex ſecundo & tertio fit, numero; maior erit proportio primi ad ſecundum, quàm tertij ad quartum.

A..... E.....
B....
C.....
D.....

*SIT primum maior proportio primi A, ad B, ſecundum, quàm C, tertij ad D, quartum. Dico numerum ex A, in D, procreatum, eſſe maiorem eo, qui fit ex B, in C. Nam ſi intelligatur eſſe E, ad B, vt C, ad D; (ſiue E, numerus integer ſit, ſiue fractus; ſiue integer cum fracto: qui quidem reperietur, vt ad propoſ. 19. lib. 9. oſtendemus, ſi numerus ex B, in C, procreatus diuidatur per D.) erit quoque maior proportio A, ad B, quàm E, ad B: ac proinde A, maior erit, quàm E. Quare maior numerus fiet ex A, in D, quàm ex E, in eundem D: [a] At qui fit ex E, in D, æqualis eſt ei, qui fit ex B, in C. Igitur & numerus ex A, in D, genitus, maior erit, quàm numerus ex B, in C, procreatus. Quod eſt propoſitum.*

a 19. ſeptimi.

*FIAT deinde maior numerus ex A, in D, quàm ex B, in C. Dico maiorem proportionem eſſe A, primi ad B, ſecundum, quàm C, tertij ad D, quartum. Si namque intelligatur numerus E, ex quo in D, idem numerus fiat, qui ex B, in C; (ſiue E, numerus ſit integer, ſiue fractus, aut integer cum fracto) fiet quoque maior numerus ex A, in D, quàm ex E, in eundem D: ac proinde maior erit A, quàm E. Quare maior erit proportio A, ad B, quàm E, ad B: [b] At ita eſt E, ad B, vt C, ad D. Igitur maior erit quoque proportio A, ad B, quàm C, ad D. Quod eſt propoſitum.*

b 19. ſeptimi.

*QVOD ſi minor fuerit proportio primi ad ſecundum, quàm tertij ad quartum; qui ex primo & quarto fit, numerus, minor erit eo, qui ex ſecundo & tertio fit; numero: Et ſi, qui ex primo & quarto fit, numerus, minor fuerit eo, qui ex ſecundo & tertio fit, numero; minor erit proportio primi ad ſecundum, quàm tertij ad quartum. Eadem enim omnino demonſtratio erit, ſi modò vocẽ, maioris, mutes in vocẽ, minoris. Vt in hoc appoſito exemplo apparet. Quod tamẽ ita etiã oſtendi poteſt.*

A..... E.....
B....
C...
D..

*Quoniam minor eſt proportio A, ad B, quàm C, ad D: hoc eſt, maior eſt proportio C, primi ad D, ſecundum, q̃ A, tertij, ad B, quartum; maior fiet numerus ex C, primo in B, quartum, ſiue ex B,*

*ex B,in C,quàm ex D,ſecundo in A,tertium,ſiue ex A,in D,vt demonſtratum iam eſt: hoc eſt,minor numerus fiet ex A,in D,quàm ex B,in C.quod eſt propoſitum. Deinde ſi minor numerus fiat ex A,in D,quàm ex B, in C; hoc eſt,maior ex B,in C, ſiue ex C,in B,quàm ex A,in D, ſiue ex D, in A; erit maior proportio C,primi ad D, ſecundum,quàm A,tertij ad B,quartum, vt iam eſt demonſtratum: hoc eſt,minor proportio erit A,ad B,quàm C,ad D. Quod eſt propoſitum.*

## THEOR. 18. PROPOS. 20. 20.

SI tres numeri proportionales fuerint;qui ſub extremis continetur,æqualis eſt ei, qui à medio efficitur: Et ſi, qui ſub extremis continetur, æqualis fuerit ei, qui à medio deſcribitur; ipſi tres numeri proportionales erunt.

SINT tres numeri proportionales A,B,C,vt quidem A,ad B,ita B,ad C. Dico numerum qui fit ex A,primo in C,tertium,æqualem eſſe ei,qui ex B,medio procreatur. Sumpto enim D,qui ipſi B, ſit æqualis,erit vt B,ad C; hoc eſt,vt A,ad B,ita D,ad C; numeruſq; genitus ex B,in D,æqualis erit ei, qui ex B, in ſe procreatur. Quia igitur quatuor numeri A,B,D,C,proportionales ſunt, [a] erit numerus factus ex A, in C, æqualis ei,qui fit ex B, in D; hoc eſt,ei,qui ex B,in ſe producitur.

A.....
B..... D.....
C....

*a 19. ſeptimi.*

SED iam ſit numerus productus ex A, primo in C, tertium,æqualis ei, qui fit ex B, medio in ſe. Dico tres numeros A,B,C, proportionales eſſe. Sumpto enim rurſum D,æquali ipſi B; erit,vt B,ad C,ita D, ad C; & numerus, qui fit ex B, in D, æqualis erit ei,qui fit ex B,in ſe; hoc eſt,ei,qui fit ex A,in C. Quòniam igitur numerus,qui fit ex A, primo in C,quartum,æqualis eſt ei,qui fit ex B,ſecundo in D,tertium, [b] erunt quatuor numeri A, B,D,C,proportionales,vt quidem A,ad B,ita D,ad C,vel B,ad C. Si tres igitur numeri proportionales fuerint,&c. Quod demonſtrandum erat.

*b 19. ſeptimi.*

### *SCHOLIVM.*

*DEMONSTRATIO hæc non variabitur, etiamſi numeri A, B, C, ſint fracti,vel partim integri,partim fracti.*

*QVOD ſi maior fuerit proportio primi ad ſecundum, quàm ſecundi ad tertium; maior fiet numerus ex primo in tertium,quàm ex ſecundo in ſe: Et ſi maior numerus fiat ex primo in tertium, quàm ex ſecundo in ſe; maior erit proportio primi ad ſecundum,quàm ſecundi ad tertium. Item ſi minor fuerit proportio primi ad ſecundum, quàm ſecundi ad tertiũ; minor numerus fiet ex primo in tertium,quàm ex ſecundo in ſe. Et ſi minor numerus fiat ex primo in tertium,quàm ex ſecundo in ſe; minor proportio erit primi ad ſecundum,quàm ſecundi ad tertium. Id quod ex ſcholio antecedentis propoſitionis liquet, ſi ſecundo numero ſumatur alius æqualis, vt habeantur quatuor numeri. Tunc enim erit maior proportio primi ad ſecundum, q̃ tertij ad quartum, aut minor,&c. vt in appoſitis exemplis apparet, etiamſi numeri ſint fracti, vel partim fracti,partim integri.*

A.....
B..... D.....
C.....

A....
B..... D.....
C.....

## THEOR. 19. PROPOS. 21. 21.

MINIMI numeri omnium eandem cum eis rationem habentium, metiuntur æquè numeros eandem cum eis rationem habentes; maior quidem maiorem, minor verò minorem.

SINT numeri AB,CD,minimi in proportione eadem,quam habent alij duo numeri maiores E,F,ita vt ſit,quemadmodum AB,ad CD,ita E,ad F. Dico AB,CD,æquè metiri ipſos E,F; maiorẽ quidem AB,ipſum maiorem E,at minorem CD,ipſum minorem F: hoc eſt,antecedentem,ipſum antecedentem,& conſequentem,ipſum conſequentem. Cùm enim ſit,vt AB, ad CD, ita E,ad F; [c] erit viciſsim,vt AB, ad E, ita CD, ad F; Atque adeò cùm AB,CD, minores ſint,quàm E,F; [d] erit AB,ipſius E,& CD, ipſius F, eadem pars,vel partes. Partes quidem nequaquá. Diuiſis namque,ſi fieri poteſt, AB, CD, in partes AG, GB; CH, HD, numerorum E, F; erit multitudo partium AG, GB, æqualis multitudini partium CH, HD; Ac propterea AG,ipſius E,& CH,ipſius F,eadem pars. [e] Erit ergo vt AG,ad E,ita CH, ad F; [f] & viciſsim, vt AG, ad CH, ita E,ad F, vel AB, ad CD; Ac proinde numeri AG, CH, minores quàm AB,CD,eandem habebunt proportionẽ,quàm AB,CD. Quod eſt abſurdum; cùm AB, CD,in ſua proportione ponantur minimi. Non ergo AB,ipſius E,& CD,ipſius F,eædem partes ſunt. Quare eadẽ pars; Ac propterea AB,ipſum E,& CD, ipſum F, æqualiter metietur. Minimi ergo numeri omnium eandem cum eis rationem habentium,&c. Quod demonſtrandum erat.

AG.. GB
CH. HD
E.....
F.....

*c 13. ſeptimi.*
*d 20. defin.*
*e 20. defin.*
*f 13. ſeptimi.*

### *SCHOLIVM.*

*IDEM hoc verum eſt, ſi quis dicat tres numeros eſſe continuè proportionales, primosq; duos eſſe in ſua*

A-- G-- B
C...H...D
E.....
F.....

*proportione minimos. Hoc enim posito, ostendetur eodem modo primũ metiri secundum; & secundum, tertium, vt in hoc apposito exemplo apparet, vbi tertius numerus secundo aqualis est. Quamuis autẽ dari non possint tres numeri continuè proportionales, quorum duo primi in sua proportione sint minimi, nisi primus sit vnitas; idem tamen demonstratur in tribus, etiamsi primus ab aduersario non dicatur esse vnitas, vt diximus. Quod idcircò dixerim, vt propositio 12. lib. 9. demonstrari possit, in qua aduersarius cogitur cõcedere, tres numeros esse continuè proportionales, primosq; duos esse in sua proportione minimos, ac proinde primũ metiri secundum, ex hac propos. quod antè negauerat. Sed hoc planius fiet in propos. 12. lib. 9.*

*PARI ratione & hoc verum est, quod Campanus docet.*

QVOTLIBET numeri minimi in continuatione suarum proportionum, siue eædem sint diuersæ proportiones, metiuntur æquè totidem alios numeros, qui easdem cum eis proportiones habent: primus primum, secundus secundum, tertius tertium, &c.

*SINT enim plures, quàm duo numeri A B, C D, E F, minimi in continuatione suarum proportionum, siue eadem sit proportio A B, ad C D, quæ C D, ad E F, siue non; ita vt non possint reperiri alij numeri ipsis A B, C D, E F, minores, quorũ primus ad secundum sit, vt A B, ad C D; & secundus ad tertium, vt C D, ad E F, &c. (quamuis tales proportiones reperiantur seorsum in minoribus numeris non continuatis; nimirum proportio A B, ad C D, in numeris 4. ad 2. vel 2. ad 1. qui minores sunt ipsis A B, C D; quemadmodum & proportiones numerorum 16. 20. 25. qui minimi sunt in continuatione duarum proportionum subsesquiquartarum, cùm in minoribus numeris non possint continuari, reperiuntur seorsum in minoribus numeris; proportio quidem 16. ad 20. in 8. & 10. proportio verò 20. ad 25 in 4. & 5. vel in 12. & 15.) Sint deinde totidem numeri G, H, I, non minimi, continuati in eisdem proportionibus, nimirum G, ad H, vt A B, ad C D; & H, ad I, vt C D, ad E F. Dico A B, ipsum G, & C D, ipsum H, & E F, ipsum I, metiri æquè. Cùm enim*

A... K... B  C.. L. D  E.... M.... F
G.....  H.....  I.....

a 13. septimi. *sit vt A B, ad C D, ita G, ad H;* [a] *erit vicissim vt A B, ad G, ita C D, ad H. Eodem modo, cùm sit vt C D, ad E F, ita H, ad I;* [b] *erit quoque vicissim, vt C D, ad H, ita E F, ad I.* [c] *Quare A B, ipsius G, & C D, ipsius H, & E F, ipsius I, erit vel eadem pars, vel eadem partes. Partes quidem nequaquam. Diuisis enim, si fieri potest, A B, C D, E F, in A K, K B; C L, L D; E M, M F, partes numerorum G, H, I, erunt tot partes in A B, quot in C D, & in E F: atq; adeò A K, ipsius G, & C L, ipsius H, eadem pars.* [d] *Erit ergo vt A K, ad G, ita C L, ad H;* [e] *& vicissim vt A K, ad C L, ita G, ad H, vel A B, ad C D. Eodemq; modo erit, vt C L, ad E M, ita C D, ad E F. Quare continuantur numeri A K, C L, E M, in proportionibus numerorum A B, C D, E F, & minores quàm A B, C D, E F. Quod est absurdum, cùm hi ponantur in suarum proportionum continuatione minimi. Non ergo A B, C D, E F, eadem partes sunt numerorum G, H, I. Quare singuli singulorum eadem pars; Ac propterea A B, ipsum G, & C D, ipsum H, & E F, ipsum I, æquè metietur. Quod est propositum.*

b 13. septimi.
c 20. defin.
d 20. defin.
e 13. septimi.

*QVOD si tres numeri dati A, B, C, minimi sint in continuatione suarum proportionum, ita vt etiam quilibet duo minimi sint, facilius idem hoc modo demonstrabitur.*

A..  B.....  C...
D....  E.....  F.....

*Sint alij tres D, E, F, non minimi, qui eadem habeant proportiones, quas A, B, C. Dico A, B, C, ipsos D, E, F, æquè metiri. Nam per hanc propos. 21. A, B, cùm sint minimi in proportione A, ad B, æquè metientur ipsos D, E; eademq; ratione B, C, ipsos E, F. Quare cùm A, ipsum D, & C, ipsum F, æquè metiatur, ac B, ipsum E; metientur æquè omnes A, B, C, ipsos D, E, F.*

*CAETERVM hæc propositio cum suo scholio nullo modo conuenire potest numeris fractis: propterea quòd in numeris fractis dari non possunt minimi numeri in sua proportione, sed quibusuis datis, dari possunt alij minores in infinitum. Atque hoc idem intelligendum est in omnibus aliis propositionibus, in quibus minimorum numerorum mentio fit. Ea enim omnes de numeris tantùm integris sunt intelligenda. Sic etiam quando de numeris inter se primis agitur, excludendi sunt numeri fracti, cum hi non possint esse inter se primi, sed quoscunque metiri possit aliqua fractio, tanquam mensura communis. Nam si reducantur ad eandem denominationem, perspicuum est, eos habere vnam particulam, vel plures, eiusdem denominationis, mensuram communem. Aliæ autem omnes propositiones numerorum, in quibus minimi numeri in sua proportione, vel primi non adhibentur, æquè conueniunt & integris numeris, & fractis. quod satis est semel hoc loco monuisse.*

19.

## THEOR. 20. PROPOS. 22.

SI fuerint tres numeri, & alij ipsis multitudine æquales, qui bini sumantur, & in eadem ratione, fuerit autem perturbata eorum proportio; Etiam ex æqualitate in eadem ratione erunt.

SINT tres numeri A, B, C, & totidem D, E, F, qui bini sumantur, & in eadem ratione, sitque perturbata eorum proportio, vt quidem A, ad B, ita E, ad F; & vt B, ad C, ita D, ad E. Dico ex æqualitate

A..... H...
B... D....
C..... E.....
G..... F..

qualitate quoque esse vt A,ad C,ita D,ad F. Cùm enim sit vt A,ad B, ita E,ad F: [a] erit numerus ex A,in F, genitus æqualis numero, qui fit ex B,in E. Pari ratione cùm sit etiam vt B,ad C,ita D,ad E, [b] erit eidem numero, qui fit ex B, in E, æqualis numerus, qui fit ex C,in D; Atque adeò numerus genitus ex A,primo in F, quartum,æqualis erit numero ex C, secundo in D,tertiũ, producto. [c] Quare erit vt A,ad C,ita D,ad F.

a 19. septimi.
b 19. septimi.
c 19. septimi.

QVOD si fuerint plures numeri, quàm tres, ita vt sit etiam C, ad G, vt H, ad D; Dico adhuc esse, vt A,ad G, ita H,ad F. Cùm enim iam sit ostensum in tribus numeris, esse vt A, ad C, ita D,ad F; ponatur autem vt C, ad G, ita H, ad D; erunt tres numeri A, C, G, & alij tres H, D, F, qui bini in eadem ratione sumuntur, estque eorum proportio perturbata. Ex æqualitate igitur in tribus numeris ostensa, erit rursus, vt A, ad G, ita H, ad F. Eodemque modo idem ostendemus in quinque numeris, per quatuor, sicut id in quatuor numeris demonstratum fuit per tres, & sic de pluribus. Itaque si fuerint tres numeri, & alij ipsis multitudine æquales, qui bini sumantur, &c. Quod ostendendum erat.

## SCHOLIVM.

*EODEM modo demonstrabitur propositio in numeris fractis, vt constat.*

*QVONIAM verò Euclides ex illis sex modis argumentandi in proportionibus, quos in magnitudinibus lib. 5. & explicauit, & demonstrationibus confirmauit, duos tantùm hic in numeris ostendit; nimirum eum, qui à permutata proportione sumitur, propos. 13. & illum, qui ex aqualitate dicitur, propos. 14. & 22. huius libri: non alienum à nostro instituto erit, breuiter reliquos quatuor modos ostendere in numeris, & alia quædam quinti libri sequentibus theorematibus, quæ omnia conueniunt tam fractis numeris, quàm integris.*

## I.

Si quatuor numeri proportionales sint: Et inuersa ratione, siue conuertendo, proportionales erunt.

A..... C...
B.... D..

*SIT vt A, ad B, ita C, ad D. Dico & conuertendo, siue inuersa ratione, esse vt B, ad A, ita D, ad C. Cùm enim sit A, ad B, vt C, ad D, [a] erit vicissim A, ad C, vt B, ad D. Rursus quia est B, ad D, vt A, ad C, [b] erit vicissim B, ad A, vt D, ad C. Quod est propositum.*

a 13. septimi.
b 13. septimi.

## II.

Si compositi numeri proportionales sint: Hi quoque diuisi proportionales erunt.

A..... C... B
D.... F.. E

*SIT vt AB, ad CB, ita DE, ad FE. Dico & diuidendo esse, vt AC, ad CB, ita DF, ad FE. Cùm enim sit vt AB, ad CB, ita DE, ad FE; [c] erit vicissim, vt totus AB, ad totum DE, ita ablatus CB, ad ablatum FE: Ac proinde vt totus AB, ad totum DE, [d] ita reliquus AC, ad reliquum DF: hoc est, AC, ad DF, vt CB, ad FE. [e] Vicissim ergo erit quoq; AC, ad CB, vt DF, ad FE. Quod est propositum.*

c 13. septimi.
d 11. septimi.
e 13. septimi.

*EADEM ratione demonstrabimus Diuisionem rationis conuersam, & contrariam, vt in lib. 5. Sit enim primùm, vt AB, ad CB, ita DE, ad FE. Dico per diuisionem rationis conuersam esse quoque, vt CB, ad AC, ita FE, ad DF. Cùm enim sit, vt AB, ad CB, ita DE, ad FE; erit quoque diuidendo, vt AC, ad CB, ita DF, ad FE: Et conuertendo, vt CB, ad AC, ita FE, ad DF. Quod est propositum.*

*SIT deinde, vt AC, ad AB, ita DF, ad DE. Dico per diuisionem rationis contrariam, esse quoque, vt AC, ad CB, ita DF, ad FE. Quoniam enim est, vt AC, ad AB, ita DF, ad DE; erit conuertendo, vt AB, ad AC, ita DE, ad DF. Ergo diuidendo, vt CB, ad AC, ita FE, ad DF: Et conuertendo, vt AC, ad CB, ita DF, ad FE. Quod est propositum.*

## III.

Si diuisi numeri proportionales sint: Hi quoque compositi proportionales erunt.

A..... B... C
D.... E.. F

*SIT vt AB, ad BC, ita DE, ad EF. Dico & componendo esse, vt AC, ad BC, ita DF, ad EF. Cùm enim sit, vt AB, ad BC, ita DE, ad EF; [f] erit vicissim, vt AB, ad DE, ita BC, ad EF; [g] Ac proinde AB, BC, simul ad DE, EF, simul, vt BC, ad EF: [h] Et vicissim AB, BC, simul, hoc est, totus AC, ad BC, vt DE, EF, simul, hoc est, totus DF, ad EF. Quod est propositum.*

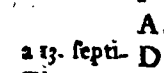
f 13. septimi.
g 12. septimi.
h 13. septimi.

*SIMILITER Compositio rationis conuersa, & contraria ostendetur hoc loco, vt in lib. 5. Sit enim primum, vt AB, ad BC, ita DE, ad EF. Dico per compositionẽ rationis conuersam esse quoq;, vt AC, ad AB, ita DF, ad DE. Quia enim est, vt AB, ad BC, ita DE, ad EF; erit conuertendo, vt BC, ad AB, ita EF, ad DE: Et componendo, vt AC, ad AB, ita DF, ad DE. Quod est propositum.*

*DEINDE sit rursus vt AB, ad BC, ita DE, ad EF. Dico per compositionem rationis contrariam esse quoq;, vt AB, ad AC, ita DE, ad DF. Cùm enim sit, vt AB, ad BC, ita DE, ad EF; erit conuertendo vt BC, ad AB, ita EF, ad DE: Et componendo ergo, vt AC, ad AB, ita DF, ad DE: Et conuertendo, vt AB, ad AC, ita DE, ad DF. Quod est propositum.*

IIII. A

Si compositi numeri proportionales sint: Hi quoque per conuersionem rationis proportionales erunt.




*Sit vt AB, ad CB, ita DE, ad FE. Dico, per conuersionem rationis esse quoq;* *vt AB, ad AC, ita DE, ad DF. Cùm enim sit, vt AB, ad CB, ita DE, ad FE;* [a] *erit vicißim, vt totus AB, ad totum DE, ita ablatus CB, ad ablatum FE;* [b] *Ac proinde vt totus AB, ad totum DE, ita erit reliquus AC, ad reliquum DF.* [c] *Vicißim igitur vt AB, ad AC, ita DE, ad DF. Quod est propositum.*

a 13. septimi.
b 11. septimi.
c 13. septimi.

*Rvrsvs ex his facilè demonstrabimus theorema illud in numeris, quod in magnitudinibus ostendit Euclides propos. 24. lib. 5. Videlicet.*

V.

Si primus ad secundum eandem habuerit rationem, quam tertius ad quartum; habuerit autem & quintus ad secundum eandem rationem, quam sextus ad quartum: Etiam compositus primus cum quinto ad secundum eandem habebit rationem, quam tertius cum sexto ad quartum.

*Sit vt AB, primus ad C, secundum, ita DE, tertius ad F, quartum: Item vt BG, quintus ad C, secundum, ita EH, sextus ad F, quartum. Dico ita esse AG, compositum ex primo & quinto, ad C, secundum, vt est DH, compositus ex tertio & sexto, ad F, quartum. Cùm enim sit, vt BG, ad C, ita EH, ad F; erit conuertendo vt C, ad BG, ita F, ad EH. Quoniam igitur est vt AB, ad C, ita DE, ad F; & vt C, ad BG, ita F, ad EH; erit ex æqualitate, vt AB, ad BG, ita DE, ad EH. Componendo igitur, vt AG, ad BG; ita DH, ad EH. Itaq; cùm rursus sit, vt AG, ad BG, ita DH, ad EH: & vt BG, ad C, ita EH, ad F; erit ex æqualitate, vt AG, ad C, ita DH, ad F. Quod est propositum.*

*Eodem modo & hoc Theorema ostendemus, qd ad propos. 24. lib. 5. in magnitudinibus demõstrauimus.*

VI.

Si duo numeri ad duos numeros eandem habeant rationem; & detracti quidam habeant ad eosdem eandem: Et reliqui ad eosdem eandem rationem habebunt.

*Sit vt totus AB, ad C, ita totus DE, ad F; Item vt detractus AG, ad C, ita detractus DH, ad F. Dico & reliquum GB, esse ad C, vt est reliquus HE, ad F. Cùm enim sit, vt AG, ad C, ita DH, ad F; erit conuertendo, vt C, ad AG, ita F, ad DH. Quia igitur est, vt AB, ad C, ita DE, ad F; & vt C, ad AG, ita F, ad DH; erit ex æqualitate vt AB, ad AG, ita DE, ad DH. Diuidendo ergo vt GB, ad AG, ita HE, ad DH. Itaq; cùm rursus sit, vt GB, ad AG, ita HE, ad DH; & vt AG, ad C, ita DH, ad F; erit ex æqualitate vt GB, ad C, ita HE, ad F. Quod est propositum.*

*Item & hoc demonstrabimus.*

VII.

Si primus ad secundum eandem habuerit rationem, quam tertius ad quartum; habuerit autem & primus ad quintum eandem, quam tertius ad sextum: Etiam primus ad compositum secundum cũ quinto eandem rationẽ habebit, quã tertius ad quartum cũ sexto.




*Sit vt primus A, ad secundum BC, ita tertius D, ad quartum EF; & vt primus A, ad quintum CG, ita tertius D, ad sextum FH. Dico ita esse A, primum ad BG, compositum ex secundo & quinto, vt est D, tertius ad EH, compositum ex quarto & sexto. Cùm enim sit, vt A, ad BC, ita D, ad EF; erit conuertendo, vt BC, ad A, ita EF, ad D. Quia igitur est vt BC, ad A, ita EF, ad D; & vt A, ad CG, ita D, ad FH; erit ex æqualitate vt BC, ad CG, ita EF, ad FH: & componendo, vt BG, ad CG, ita EH, ad FH; & conuertendo, vt CG, ad BG, ita FH, ad EH. Quoniam ergo est, vt A, ad CG, ita D, ad FH; & vt CG, ad BG, ita FH, ad EH; erit ex æqualitate, vt A, ad BG, ita D, ad EH. Quod est propositum.*

*Denique ex his omnibus inferemus hoc theorema.*

VIII.

Si quotcunque numeri ad eundem habuerint proportiones, quas alij illis multitudine æquales ad quendam alium eundem; Habebunt quoque illi omnes simul ad eundem, proportionem, quã alij omnes hi simul ad alium illum eundem. Et si idem numerus ad quotcunque numeros proportiones habuerit, quas idem alius numerus ad alios multitudine illis æquales; Habebit quoque idem numerus ad omnes illos simul proportionem, quam idem alius numerus ad hos omnes simul.

*HABEANT quotcunq; numeri A B, B C, C D, ad eundem E, proportiones, quas totidem F G, G H, H I, habent ad eandem K: Hoc eſt, ſit vt A B, ad E, ita F G, ad K; & vt B C, ad E, ita G H, ad K; & vt C D, ad E, ita H I, ad K. Dico omnes illos ſimul, hoc eſt, ipſum A D, ad E, eandem habere proportionem, quam hi omnes ſimul habent, hoc eſt, quam ipſe F I, habet ad K. Cùm enim ſit, vt A B, primus ad E, ſecundũ, ita F G, tertius ad K, quartum: Item vt B C, quintus ad E, ſecundum, ita G H, ſextus ad K, quartum; erit quoq; vt A C, primus cum quinto, ad E, ſecundum, ita F H, tertius cum ſexto, ad K, quartum. Rurſus quia eſt, vt A C, primus ad E, ſecundum, ita F H, tertius ad K, quartum: Item vt C D, quintus ad E, ſecundum, ita H I, ſextus ad K, quartum; erit etiam, vt A D, primus cum quinto, ad E, ſecundum, ita F I, tertius cum ſexto, ad K, quartum: Atq; ita de cæteris, ſi plures fuerint.*

A....B.....C.....D | F..G...H....I
E..... | K.....

*SED habeat iam idem numerus E, ad numeros quotcunque A B, B C, C D, proportiones eaſdem, quas idem alius numerus K, ad totidem F G, G H, H I; Hoc eſt, ſit vt E, ad A B, ita K, ad F G; & vt E, ad B C, ita K, ad G H; & vt E, ad C D, ita K, ad H I. Dico eſſe, vt E, ad omnes illos ſimul, nimirum ad A D, ita K, ad hos omnes ſimul, vtpote ad F I. Cùm enim ſit, vt E, primus ad A B, ſecundum, ita K, tertius ad F G, quartum: Item vt E, primus ad B C, quintum, ita K, tertius ad G H, ſextum; erit quoq; vt E, primus ad A C, ſecundum cum quinto, ita K, tertius ad F H, quartum cum ſexto. Rurſus quia eſt, vt E, primus ad A C, ſecundum; ita K, tertius ad F H, quartum: Item vt E, primus ad C D, quintum, ita K, tertius ad H I, ſextum; erit etiam, vt E, primus ad A D, ſecũdum cum quinto, ita K, tertius ad F I, quartũ cum ſexto. Atq; ita de reliquis, ſi plures fuerint.*

*IAM verò, his demonſtratis, oſtendentur nouem vltimæ propoſitiones lib. 5. à Campano adiectæ, eodem modo in numeris improportionalibus, quo in magnitudinibus demonſtratæ fuêre; ſi pro magnitudinibus intelligantur numeri ſiue integri, ſiue fracti, & pro modis argumentandi in proportionibus, qui libro 5. ſunt demonſtrati, aſſumantur iidem modi hoc lib. demonſtrati: Vt opus non ſit eas hic repetere. Satis enim eſt, vt dixi, ſi propoſitiones illæ quinti lib. in manus ſumantur, & magnitudines intelligantur eſſe numeri, eademq; prorſus demonſtrationes adhibeantur.*

## THEOR. 21. PROPOS. 23. 21.

**PRIMI inter ſe numeri, minimi ſunt omniũ eandem cum eis rationẽ habentiũ.**

SINT numeri A, B, inter ſe primi. Dico eos eſſe minimos omnium, qui eandem proportionem habent, quam ipſi A, & B. Nam ſi non ſunt minimi, erunt aliqui alij minores ipſis, minimi habentes proportionem, quam A, & B. Sint ergo, ſi fieri poteſt, C, D, minimi in proportione A, & B, minoresq; idcirco ipſis A, & B. Quoniam igitur C, D, minimi ſunt in proportione A, & B; [a] metietur C, ipſum A, & D, ipſum B, æquè; atque adeò ſecũdùm eundem numerum, qui ſit E, ita vt C, toties metiatur ipſum A, & D, ipſum B, quoties vnitas eſt in E. Itaque cùm vnitas numerum E, & numerus C, numerum A, æquè metiatur; [b] metietur & viciſsim æquè vnitas numerum C, & numerus E, numerum A. Rurſus quia vnitas numerum E, & numerus D, numerum B, æquè metitur; [c] metietur quoque viciſsim æquè vnitas numerum D, & numerus E, numerum B; Atque adeò, cùm idem numerus E, vtrumq; A, & B, metiatur, erit numerus E, eorum communis menſura. Quare A, & B, non ſunt primi inter ſe, ſed compoſiti. Quod eſt abſurdum, & cõtra hypotheſin. Non ſunt igitur alij numeri ipſis A, & B, minores, minimi in proportione A, ad B; Ac proinde A, & B, minimi ſunt. Primi ergo inter ſe numeri minimi ſunt, &c. Quod erat demonſtrandum.

A..... B....
C------ D---
E----

[a] 21. *ſeptimi*
[b] 15. *ſeptimi*
[c] 15. *ſeptimi*

## THEOR. 22. PROPOS. 24. 22.

**MINIMI numeri omniũ eandem cum eis rationẽ habentiũ, primi inter ſe ſunt.**

SINT numeri A, & B, minimi omnium eandem cum ipſis proportionem habentium. Dico eos eſſe inter ſe primos; hoc eſt, nullum numerum, præter vnitatem, communi menſura eos metiri. Si enim non ſunt inter ſe primi, ſed habent numerum communem mẽſuram; ſit numerus C, eorum menſura communis, metiaturq; C, numerus numerum quidem A, toties, quoties vnitas eſt in numero D; At verò ipſum B, toties, quoties vnitas eſt in E. Quia igitur C, toties compoſitus, quot in D, ſunt vnitates, procreat ipſum A; & idem C, toties compoſitus, quot ſunt vnitates in E, producit ipſum B; [d] fit, vt D, & E, ipſum C, multiplicantes, producant A, & B. [e] Quare eadem erit proportio A, ad B, quæ D, ad E; Atque adeò, cùm D, & E, partes ipſorum A, & B, minores ſint, quàm A, & B; non erunt A, & B, numeri minimi omnium eandem cum eis rationem habentium. Quod eſt abſurdum. Primi ergo inter ſe ſunt numeri A, & B; Ac proinde, minimi numeri omnium eandem cum eis rationem habẽtium, primi inter ſe ſunt. Quod oſtendendum erat.

A..... B.....
C-----
D----- E----

[d] 9. *pron.*
[e] 18. *ſeptimi*

### SCHOLIVM.

*HANC propoſitionem, & præcedentem cum Campano ad plures numeros extendemus, hoc modo.*

QVOTCVNQVE numeri inter ſe primi, minimi ſunt in continuatione ſuarum proportionum. Et quotcunque numeri in continuatione ſuarum proportionum minimi, ſunt inter ſe primi.

*SINT quotcunq; numeri inter ſe primi A,B,C. Dico eos minimos eſſe in continuatione ſuarum proportionum, ita vt in minoribus numeris continuari non poſſint, quamuis proportio duorum in minoribus numeris reperiatur. Si enim non ſunt minimi, erunt aliqui alij minores ipſis, nimirum D,E,F, minimi in continuatione illarum proportionum. Quia igitur D,E,F, minimi ſunt in proportione numerorum A, B, C; metietur D, ipſum A, & E, ipſum B, & F, ipſum C, æquè per ea, quæ ad propoſ. 21. huius libri demonſtrauimus; atq; adeò ſecundùm vnum eundem numerum, qui ſit G; ita vt D, toties metiatur ipſum A, & E, ipſum B, & F, ipſum C, quoties vnitas eſt in G. Quoniam igitur vnitas numerum G, & numerus D, ipſum A, æquè metitur;* [a] *metietur quoq; viciſſim æquè vnitas numerum D, & numerus G, numerum A: Eademq; ratione idem G, metietur & ipſum B, & ipſum C, æquè, atque vnitas ipſos E,F; Atq; idcirco A,B,C, cùm habeant numerum G, communem menſuram, non erunt inter ſe primi, ſed compoſiti. Quod eſt abſurdum, & contra hypotheſim. Non ſunt igitur alij numeri minores ipſis A, B, C, minimi in continuatione proportionum A, ad B, & B, ad C; ſed ipſi A, B, C, minimi ſunt.*

A.....B.....C....
D----E------F---
G-----

a 15. ſeptimi.

*IAM verò ſint A,B,C, in continuatione ſuarum proportionum minimi. Dico eos primos eſſe inter ſe. Si enim non ſunt inter ſe primi, metiatur eos communi menſura numerus G, ita vt G, toties metiatur ipſum A, quoties vnitas eſt in D; & ipſum B, toties, quoties vnitas eſt in E; & ipſum C, toties, quoties vnitas eſt in F. Quoniam igitur G, toties compoſitus facit numeros A,B,C, quoties vnitas eſt in D,E,F; ſit vt D, E, F, ipſum G, multiplicantes producant ipſos A,B,C. Quare D,E,F, eaſdem habent proportiones, quas A,B,C, per ea, quæ ad propoſ. 18. huius lib. oſtendimus; Atq; adeò, cum D,E,F, minores ſint quàm A,B,C; non erunt A,B,C, minimi in continuatione ſuarum proportionum. Quod eſt abſurdum. Primi igitur inter ſe ſunt A,B,C. Quod eſt propoſitum.*

24. ## THEOR. 23. PROPOS. 25.

SI duo numeri primi inter ſe fuerint; Qui vnum eorum metitur numerus, ad reliquum primus erit.

A.....B.....
C.... D----

SINT inter ſe primi A, & B; & ipſum A, metiatur numerus C. Dico C, ad reliquum B, eſſe primum. Si enim non ſunt inter ſe primi B, & C; metiatur eos communi menſura, ſi fieri poteſt, numerus D. Quoniam igitur D, metitur C; & C, ipſum A; [a] metietur etiam D, ipſum A: Metitur autem & ipſum B. Igitur A, & B, non ſunt inter ſe primi, cùm habeant menſuram communem numerum D. Quod eſt abſurdum, & contra hypotheſim. Eſt ergo C, ad B, primus. Eodem modo, ſi numerus quiſpiã metiatur ipſum B, erit is ad A, primus. Quapropter ſi duo numeri primi inter ſe fuerint, &c. Quod erat demõſtrandũ.

a 11. prop.

25. ## THEOR. 24. PROPOS. 26.

SI duo numeri ad quempiam primi fuerint; etiam ex illis genitus ad eundem primus erit.

A..... B...
C.....
D.....
E---- F----

SIT vterque numerus A,B, ad C, primus, producaturq; ex A, in B, vel ex B, in A, numerus D. Dico & D, ad eundem C, primum eſſe. Si enim C, & D, non ſunt inter ſe primi; ſit eorum communis menſura numerus E, metiẽs ipſum D, toties, quot vnitates ſunt in numero F. Quoniam igitur E, toties compoſitus facit ipſum D, quot ſunt vnitates in F; [b] fit vt F, ipſum E, multiplicans gignat ipſum D; [c] & contra E, ipſum F, multiplicans producat eundem D. Genitus eſt autem idem D, ex A, in B. Igitur cùm ex E, primo in F, quartum fiat idem numerus, qui ex A, ſecundo in B, tertium; [d] erit vt E, primus ad A, ſecundum, ita B, tertius ad F, quartum. Quia verò A, & C, primi inter ſe ſunt; & E, ipſum C, ponitur metiri; [e] erit E, ad A, primus; Atq; adeò E, & A, cùm ſint inter ſe primi, [f] in ſua proportione minimi erunt. [g] Æquè igitur metientur ipſos B, & F, eandem proportionem habentes, nimirum E, ipſum B, & A, ipſum F. Quare cum E, metiatur vtrumque B, & C; non erunt B, & C, inter ſe primi. Quod eſt abſurdum, & contra hypotheſim. Primus ergo erit D, ad ipſum C; Ac proinde, ſi duo numeri ad quempiam primi fuerint, &c. Quod erat demonſtrandum,

b 9. prop.
c 16. ſeptimi
d 19. ſeptimi
e 25. ſeptimi
f 23. ſeptimi
g 21. ſeptimi

26. ## THEOR. 25. PROPOS. 27.

SI duo numeri primi inter ſe fuerint: Etiam ex vno eorum genitus ad reliquum primus erit.

A.... B.....
C.....
D ....

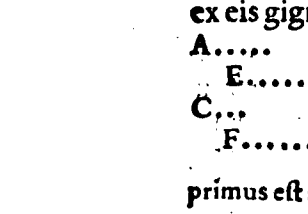
SINT inter ſe primi A, & B, gignaturq; C, ex A, in ſe ipſum. Dico C, ad reliquum B, eſſe primum. Sumpto enim D, æquali ipſi A, erit & D, ad B, primus. Quoniam igitur A, & D, ad B, primi ſunt, [b] erit numerus ex A, in D, hoc

b 16. ſeptimi

in D, hoc est, ex A, in se genitus, nimirum C, ad eundem B, primus. Eademq; arte ostendemus, numerum ex B, in se genitum, ad A, primum esse. Si duo ergo numeri primi inter se fuerint, &c. Quod demonstrandum erat.

## THEOR. 26. PROPOS. 28. 27.

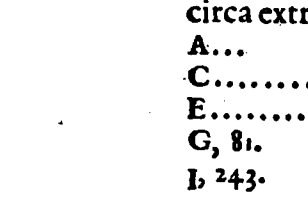
SI duo numeri ad duos numeros, vterque ad vtrumque, primi fuerint; Et qui ex eis gignentur, primi inter se erunt.




SIT vterque A, & B, ad vtrumque C, & D, primus, gignaturque E, ex A, in B: & F, ex C, in D. Dico E, & F, inter se primos esse. Cum enim vterq; A, & B, primus sit ad C; [a] erit quoque E, ex ipsis genitus, ad eundem C, primus. Rursus cum vterque A, & B, ad D, sit primus, erit eodem modo E, ipsis genitus, ad eundem D, primus. Quia igitur vterq; C, & D, primus est ad E; [b] erit quoque F, ex illis procreatus, ad E, primus. Si ergo duo numeri ad duos numeros, vterq; ad vtrumque, &c. Quod erat ostendendum. *a 26. septimi* *b 26. septimi*

## THEOR. 27. PROPOS. 29. 28.

SI duo numeri primi inter se fuerint, & multiplicans vterque se ipsum fecerit aliquem; Et geniti ex ipsis primi inter se erunt: Et si, qui in principio, genitos ipsos multiplicantes fecerint aliquos; Et hi quoque primi inter se erunt: Et semper circa extremos hoc eueniet.

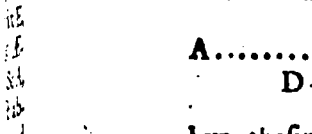



SINT primi inter se A, & B; & ex A, in se fiat C; at ex B, in se fiat D. Dico & C, D, primos inter se esse: Et si rursum fiat E, ex A; in C; & F, ex B, in D; Dico E, F, quoque esse inter se primos. Cum enim A, B, sint inter se primi, [c] erit C, factus ex A, in se, ad reliquum B, primus: Atque eodem modo cum B, & C, primi sint inter se, erit & D, factus ex B, in se, ad C, primus: atque adeò geniti duo C D, primi inter se erunt. *c 27. septimi*

RVRSVS, quia A, & B, sunt inter se primi, [d] erit & C, factus ex A, in se, ad B; & D, genitus ex B, in se, ad A, primus: Est autem & C, ostensus ad D, primus. Vterque igitur A, C, ad vtrumque B, D, primus erit; [e] Ac proinde E, factus ex A, in C, primus erit ad F, factum ex B, in D. Quod si adhuc ex A, in E, fiat G; & ex B, in F, fiat H; cum A, & C, primi sint ad B, [f] erit quoque E, ex ipsis genitus, ad B, primus: Eademque ratione & F, ad A, primus erit. Quia igitur vterque A, E, ad vtrumque B, F, primus est; [g] erit & G, factus ex A, in E, ad H, factum ex B, in F, primus. Et sic deinceps, si plures fuerint. Nam eodem modo cum A, & E, primi sint ad B, [h] erit & G, ex ipsis factus, ad B, primus: necnon & H, ad A. [i] Quare & I, genitus ex A, in G, ad K, genitum ex B, in H, primus erit, cum vterque A, G, ad vtrumque B, H, sit primus. Si duo itaque numeri primi inter se fuerint, &c. Quod ostendendum erat. *d 27. septimi* *e 28. septimi* *f 26. septimi* *g 28. septimi* *h 26. septimi* *i 28. septimi*

## THEOR. 28. PROPOS. 30. 29.

SI duo numeri primi inter se fuerint: Etiam vterque simul ad quemlibet illorum primus erit: Et si vterque simul ad vnum aliquem illorum primus fuerit; Etiam, qui in principio, numeri primi inter se erunt.




SINT inter se primi A B, B C. Dico & vtrumque simul A C, primum esse & ad A B, & ad B C. Si enim A C, A B, non sunt inter se primi; metiatur illos, si fieri potest, communi mensura numerus D. Quia igitur D, metitur totum A C, & ablatum A B; [k] metietur quoq; reliquum B C. Non igitur primi inter se sunt A B, B C, cum eos metiatur numerus D. Quod est absurdum, & contra hypothesim. Quare A C, ad A B, primus erit. Eodemque modo ad B C, ostendemus eundem esse primum. *k 12. pron.*

SED iam vterque A B, B C, simul, primus sit ad vnum aliquem illorum, videlicet ad A B. Dico & A B, B C, inter se primos esse. Si enim non sunt inter se primi, metiatur illos, si fieri potest, numerus D. Quia igitur D, metitur A B, & B C; [l] metietur quoque D, numerum A C, ex A B, B C, compositum; Ac proinde A C, A B, non sunt inter se primi, cum eos numerus D, metiatur. Quod est absurdum, & contra hypothesim. Sunt igitur A B, B C, inter se primi. Eodemque argumento ostendemus A B, B C, inter se primos esse, si A C, ad B C, primus esse ponatur. Si duo ergo numeri primi inter se fuerint, &c. Quod erat demonstrandum. *l 10. pron.*

COROLLARIVM.

*Ex hoc sequitur, numerum, qui ex duobus compositus ad vnum illorum primus est, ad reliquum quoq; primum esse. Si enim A C, ad A B, primus est, erunt A B, B C, inter se primi, per secundam partem huius propos. Igitur & A C, ad B C, primus erit, per primam partem eiusdem. Quod est propositum.*

32. ## THEOR. 29. PROPOS. 31.

OMNIS primus numerus, ad omnem numerũ, quem non metitur, primus est.

PRIMVS numerus A, non metiatur numerum B. Dico A, ad B, primum esse; hoc est; A, & B, esse inter se primos, licet B, compositus sit. Si enim A, & B, non sunt inter se primi, metiatur eos, præter vnitatem, si fieri potest, communi mensura numerus C. Non erit ergo C, idem, qui A; quòd A, ponatur non metiri ipsum B. Quia igitur numerũ A, alius numerus C, metitur, non erit A, primus. Quod est absurdum, & contra hypothesim. Primus igitur est A, ad B: Ac propterea, omnis primus numerus, ad omnem numerum, &c. Quod demonstrandum erat.

A..... B.....
C---

33. ## THEOR. 30. PROPOS. 32.

SI duo numeri sese mutuo multiplicantes fecerint aliquem: genitum autem ex ipsis metiatur aliquis primus numerus: is etiam vnum eorum, qui in principio, metietur.

DVO numeri A, & B, se mutuo multiplicantes faciant C, quam metiatur numerus primus D. Dico & D, metiri saltem vnum ipsorum A, & B, si non vtrumq; metitur. Non metiatur enim D, ipsum A; metiatur verò ipsum C, toties, quot sunt vnitates in numero E; ita vt C, fiat ex D, in E, qui idem factus est ex A, in B. Quia igitur numerus genitus ex D, primo in E, quartum, æqualis est numero genito ex A, secundo in B, tertium; [a] erit vt D, primus ad A, secundum; ita B, tertius ad E, quartum. [b] Quia verò primus D, ad A, primus est, cum eum non metiatur; [c] erunt D, & A, in sua proportione minimi. [d] Quare æquè metientur ipsos B, & E; nimirum D, ipsum B, & A, ipsum E; Ac proinde si D, non metitur ipsum A, metietur saltem ipsum B: Eodemq; modo si D, non metiatur ipsum B, metietur saltẽ ipsum A. Si duo ergo numeri se se mutuo multiplicantes fecerint aliquem, &c. Quod erat demõstrandum.

A.... B.....
C.....
D.... E.....

a 19. septimi
b 31. septimi
c 23. septimi
d 21. septimi

*SCHOLIVM.*

*EODEM modo & hoc theorema sequens demonstrabimus.*

SI duo numeri se se mutuo multiplicantes fecerint aliquem; genitum autem ex ipsis metiatur aliquis non primus numerus, vel certè ad ipsum sit compositus: is etiam ad vnum eorum, qui in principio, compositus erit.

*NAM ex A, in B, fiat C, quem vel metiatur numerus non primus D, vel certè compositus ad eum sit: hoc est, vel D, & C, compositi sint inter se. Dico D, quoq; ad vnum ipsorum A, B, compositum esse: id est, vel D, & A; vel D, & B esse quoque inter se compositos. Si enim D, ad neutrum eorum compositus est; erit vt erq; A, & B, ad D, primus. [a] Quare & C, ex illis genitus, ad eundem D, primus erit. Quod est absurdum, cum D, ponatur vel metiri ipsum C, vel certè ad eum esse compositus. Est igitur D, compositus ad A, vel ad B, cum non sit primus ad vtrumque.*

A...B....
C.....
D.....

a 26. septimi.

30. ## PROBL. 31. PROPOS. 33.

OMNEM compositum numerum, aliquis primus numerus metitur.

SIT numerus compositus A. Dico aliquem numerum primum eum metiri. Metiatur enim ipsum numerus B, qui si primus fuerit, habetur propositũ: Si verò compositus, metiatur eum numerus C, qui vel primus erit, vel compositus. Si primus, cum metiatur ipsum B; & B, ipsum A; [a] metietur quoque C, primus ipsum A. Si autem C, compositus fuerit, metietur eum alius numerus. Quia verò numerus non diminuitur infinitè, veniemus tandem ad aliquem numerum, quem nullus alius metiatur, atq; adeò ad primum; qui cum metiatur omnes præcedentes, [b] metietur quoq; compositum A. Quod est propositum.

A.....
B..... C...

a 11. pron.
b 11. pron.

ALITER. Quia numerus A, compositus est; metietur eum aliquis numerus, vel etiam plures. Sit omnium metientium eum minimus B; quem dico esse primum. Si enim B, non est primus, metiatur eum, si fieri potest, numerus C. Quoniam igitur C, metitur ipsum B, & B, ipsum A; [c] metietur quoq; C, minor ipso B, ipsum A. Quod est absurdum, cum B, ponatur omnium metientium minimus. Primus ergo est numerus B. Omnem igitur compositum numerum aliquis primus numerus metitur. Quod erat demonstrandum.

A.....
B... C--

c 11. pron.

THEOR.

## THEOR. 32. PROPOS. 34. 31.

OMNIS numerus aut primus eſt, aut eum aliquis primus metitur.

A..... SIT numerus quicunq; A. Dico eum vel eſſe primum, vel certè aliquem primũ eum metiri. Cum enim omnis numerus vel primus ſit, vel compoſitus; ſi quidem A, primus eſt, habetur propoſitum: Si verò compoſitus; [a] metietur eum aliquis primus. Omnis igitur numerus aut primus eſt, aut eum aliquis primus metitur. Quod erat oſtendendum. [a] 33. ſeptimi

## PROBL. 3. PROPOS. 35. 34.

NVMERIS datis quotcunque, reperire minimos omnium eandem rationem habentium cum ipſis.

SINT quotcunque numeri A,B,C, habentes quaſcunque proportiones, ſiue eadem ſit proportio A, ad B, quæ B, ad C, ſiue non; oporteatq; totidem reperire, qui in eiſdem proportionibus ſint minimi. Quoniam A,B,C, ſunt inter ſe aut primi, aut compoſiti: Si primi inter ſe ſunt; erunt ipſi in continuatione ſuarum proportionum minimi, per ea, quæ ad propoſ. 24. huius lib. demonſtrauimus.

A..... B.... C.....
D..
E... F.. G....
H---- I---- K----
L-----

Si verò non ſunt inter ſe primi, [b] inuenta ſit maxima eorum communis menſura numerus D, qui metiatur ipſos A,B,C, per numeros E,F,G. Dico E,F,G, minimos eſſe in proportionibus numerorum A,B,C. Quòd enim eaſdem habeant proportiones, quas numeri A,B,C, ſic oſtendetur. Quoniam D, ipſos A,B,C, metitur per E,F,G; [c] fit, vt D, ipſos E,F,G, multiplicans faciat A,B,C. Quare, per ea, quæ ad propoſ. 18. huius lib. oſtendimus, eaſdem rationes habebunt E,F,G, quas numeri A,B,C. [b] 3. ſeptimi. [c] 9. pron.

QVOD verò E,F,G, ſint minimi omnium eandem rationem habentium cum ipſis, hoc modo perſpicuum fiet. Si non ſunt minimi, erunt aliqui alij ipſis minores, minimi in eiſdem proportionibus. Sint ergo, ſi fieri poteſt, minimi H, I, K; qui quoniam ipſos A,B,C, metiuntur æquè, vt ad propoſ. 21. huius libri oſtendimus; metiantur eos per numerum L. Quo poſito, [d] fit, vt L, multiplicans numeros H,I,K, producat numeros A,B,C; [e] & viciſsim L, ipſos A,B,C, metiatur per H,I,K. Quoniam igitur E, primus multiplicans D, quartum facit A, & H, ſecundus multiplicans L, tertium facit eundem A; [f] erit, vt E, primus ad H, ſecundum, ita L, tertius ad D, quartum: Eſt autem E, maior quàm H. Igitur & L, maior erit, quàm D; Atque adeò, cum L, ipſos A,B,C, metiatur; non erit D, maxima menſura communis numerorum A,B,C. Quod eſt abſurdum, & contra hypotheſim. Non igitur erunt alij numeri minores ipſis E,F,G, minimi in continuatione proportionum A, ad B, & B, ad C; ſed ipſi E,F,G, minimi erunt. Quamobrem, numeris datis quotcunque, reperimus minimos, &c. Quod faciendum erat. [d] 9. pron. [e] 8. pron. [f] 19. ſeptimi

### COROLLARIVM.

*HINC fit, maximam menſuram quotlibet numerorum, metiri ipſos per numeros, qui minimi ſunt omnium eandem proportionem cum ipſis habentium. Oſtenſum enim eſt, numeros E,F,G, per quos D, maxima menſura numerorum A,B,C, ipſos A,B,C, metitur, minimos eſſe in continuatione proportionum A, ad B, & B, ad C: Eademq; eſt in cæteris ratio.*

### SCHOLIVM.

A,16. B,24. C,36. D,54. E,81.
I, 8.
F, 2, G,3.

*EX his facili via comperiemus duos minimos numeros, qui eandem habeant proportionem, quam quotcunq; numeri dati continuè proportionales. Vt ſi proponantur continuè proportionales A, B,C,D,E, ſiue illi ſint in continuatione proportionis A, ad B, minimi, ſiue non; reperiemus duos in eadem proportione minimos, ſi per hoc problema ſumamus F, & G, minimos in proportione duorum A, & B; nimirum illos, per quos I, maxima eorum cõmunis menſura eos metitur.*

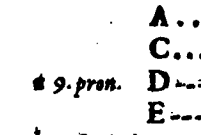
| | |
|---|---|
| A...B..... C..... | A.... B.. C..... |
| D... | D.. |
| E. F.. G... | E.. F. G... |

*CÆTERVM contingit interdum, vnum numerorum E,F,G, per hanc propoſitionẽ inuentorum eſſe vnitatem; quando ſcilicet D, maxima menſura vni ipſorum A,B,C, æqualis eſt, vt ex his exemplis apparet. Manifeſtum eſt autem, tunc inuentos E,F,G, eſſe minimos in continuatione ſuarum proportionum, cum minor numerus dari non poſſit, quàm vnitas.*

## PROBL. 4. PROPOS. 36. 36.

DVOBVS numeris datis, reperire, quem illi minimum metiantur, numerum.

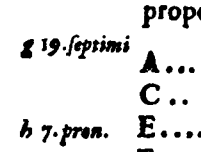
SIT reperiendus minimus numerus omnium, quos dati numeri A, & B, metiũtur. Sint primũ dati numeri A, & B, inter ſe primi, ſe ſeq; mutuo multiplicantes faciant C. Dico C, eſſe minimum, quem A, & B, metiuntur. Quod enim eum metiãtur, perſpicuum eſt. Nam cùm producatur C, ex A, in B, vel ex B, in A; [g] metietur A, ipſum C, per B; & B, eundem C, per A. Vterque igitur A, & B, ipſum C, metitur. Quod autẽ C, ſit minimus omnium, quos A, & B, metiũtur, ſic demõſtrabimus. [g] 7. pron.




Si C, non est minimus; metiantur, si fieri potest, A, & B, alium numerum D, ipso C, minorem; metiaturq; A, ipsum D, per E, at B, eundem D, per F. Quo posito, [a] tam ex A, in E, quàm ex B, in F, & è contrario, producetur numerus D. Quia igitur idem numerus D, fit ex A, primo in E, quartum, & ex B, secundo in F, tertium; [b] erit, vt A, primus ad B, secundum, ita F, tertius ad E, quartum. Igitur A, & B, (cum ponantur primi inter se, [c] & ob id in sua proportione minimi) [d] æquè metiẽtur ipsos F, & E; nimirum A, ipsum F, & B, ipsum E. Quoniam verò A, multiplicans B, & E, facit C, & D; [e] erit C, ad D, vt B, ad E: Ac propterea cùm B, metiatur ipsum E, vt ostensum est; metietur & C, numerus numerum D, maior minorem. Quod est absurdum. Non igitur A, & B, metientur alium numerum minorem ipso C; atque adeò C, minimus est omnium, quos metiuntur.

[a] 9. pron. [b] 19. septimi [c] 23. septimi. [d] 21. septimi [e] 17. septimi.

[f] 35. septimi. Sint deinde dati numeri A, & B, non primi inter se. [f] Inueniantur C, & D, minimi in eadem proportione, vt sint quatuor numeri proportionales, nimirum A, ad B, vt C, ad D. Quo posito,




[g] 19. septimi [h] 7. pron.

[g] fiet idem numerus ex A, primo in D, quartum, & ex B, secundo in C, tertium. Factus ergo sit E. Dico E, hac vìa procreatum esse minimum, quem A, & B, metiuntur. Quod enim eum metiantur, manifestum est. Nam cum tam A, multiplicatus à D, quàm B, multiplicatus à C, ipsum E, producat; [h] metietur tam A, quàm B, ipsum E. Quod verò E, sit minimus omnium, quos A, & B, metiuntur, ita probabitur. Si E, non est minimus, metiãtur, si fieri potest, A, & B, alium numerum F, ipso E, minorem: metiatur autem A, ipsum F, per G; & B, eundem F, per H. Quo posito, [i] fiet F, tam ex A, in G, quàm ex B, in H. Quia igitur idem numerus F, fit & ex A, primo in G, quartum, & ex B, secundo, in H, tertium; [k] erit, vt A, primus ad B, secundum, ita H, tertius ad G, quartum. Quare C, & D, cum sint minimi in proportione A, ad B, vel H, ad G; [l] metientur ipsos H, & G, æquè; nimirum C, ipsum H; & D, ipsum G. Quia verò A, multiplicans D, & G, facit E, & F; [m] erit E, ad F, vt D, ad G; Ac propterea cum D, metiatur ipsum G, vt ostensum est, metietur etiam E, numerus numerum F, maior minorem. Quod est absurdum. Non igitur A, & B, metientur alium numerum ipso E, minorem; atque adeò E, minimus est omnium, quos metiuntur. Quamobrem, duobus numeris datis, reperimus, quem illi minimum metiantur, numerum. Quod faciendum erat.

[i] 9. pron. [k] 19. septimi [l] 21. septimi [m] 17. septimi.

## COROLLARIVM.

*Hinc fit, si duo numeri multiplicent minimos eandem rationem habentes, maior minorem, & minor maiorem, produci numerum minimum, quem illi metiantur. Nam propositis C, & D, minimis in proportione A, ad B, demonstratum est, numerum E, factum ex A, minore in D, maiorem, & ex B, maiore in C, minorem, esse minimum, quem A, & B, metiuntur.*

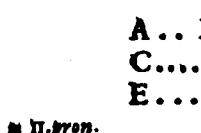
## SCHOLIVM.

*Hoc autem corollarium apud Campanum est propositio 35. huius libri septimi; Et sequens propositio apud eundem, corollarium est propositionis 35.*

## 35. THEOR. 33. PROPOS. 37.

Si duo numeri numerum quempiam metiantur: Etiam minimus, quem illi metiuntur, eundem metietur.

Metiantvr duo numeri A, & B, quemlibet numerum CD, sitq; alius numerus E, minimus, quem iidem A, & B, metiuntur. Dico & E, ipsum CD, metiri. Si enim E, ipsum CD, non metitur; ablato E, ex CD, quoties potest auferri, relinquetur numerus quidã minor, quàm E. Relinquat igitur E, ablatus ex CD, quoties potest, numerum, si fieri potest, FD, minorem se, ita vt E, metiatur ablatum CF. Quoniam igitur tam A, quàm B, ipsum E, metitur, & E, ipsum CF; [n] metietur quoque tam A, quàm B, ipsum CF. Itaq; A, & B, cum metiantur totum CD, & ablatum CF; [o] metiẽtur & reliquum FD. Est autẽ FD, minor quàm E. Non igitur E, minimus est numerus, quem A, & B, metiuntur. Quod est absurdum, & contra hypothesim. Quare E, ipsum CD, metitur. Si duo ergo numeri numerum quempiam metiãtur, &c. Quod erat demonstrandum.




[n] 11. pron. [o] 12. pron.

## 36. PROBL. 5. PROPOS. 38.

Tribvs numeris datis, reperire, quem illi minimum metiantur, numerum.

Sit inueniendus minimus numerus, quem dati tres numeri A, B, C, metiantur. [p] Inuento D, minimo, quem metiantur duo A, & B; metietur & eundem D, reliquus C, aut nõ metietur. Metiatur primũ C, ipsum D, ita vt omnes tres A, B, C, ipsum D, metiantur. Dico numerum D, minimum inuentum, quem A, & B, metiuntur, minimum quoq; esse, quem tres A, B, C, metiantur. Si enim D, non est minimus, metiantur, si fieri potest A, B, C, alium numerum E, ipso D, minorem.

[p] 36. septimi

Quo

Quoniam igitur A, & B, metiuntur ipsum E, minorem quàm D; non erit D, minimus, quem A, & B, metiuntur. Quod est absurdum, & contra hypothesim. Immò, cum A, & B, metiantur ipsum E; & D, sit minimus, quem ijdem A, & B, metiuntur; [a] metietur quoq; D, ipsum E, maior minorem. Quod est absurdum. [a] 37. septimi

Sed iam C, non metiatur ipsum D, inuentum. [b] Inuento igitur E, minimo, quem C, & D, metiantur; Dico E, esse minimum, quem A, B, C, metiantur. Quod enim eum metiantur, ita ostendetur. Cùm A, & B, metiantur ipsum D, & D, ipsum E; [c] metientur quoque A, & B, ipsum E. Metitur autem & C, eundem E. Igitur omnes tres A, B, C, ipsum E, metiuntur. Quod autem E, sit minimus, quem metiantur A, B, C, hoc modo probabitur. Si E, non est minimus; metiantur, si fieri potest, A, B, C, alium numerum F, ipso E, minorem. Quoniam igitur A, & B, ipsum F, metiuntur; [d] metietur quoq; eundem F, numerus D, nimirum minimus inuentus, quem numeri A, & B, metiuntur; Atque adeò cùm C, & D, metiantur ipsum F, minorem, quàm E; non erit E, minimus, quem C, & D, metiantur. Quod est absurdum, & contra hypothesim. Immo cum C, & D, metiantur ipsum F; [e] metietur quoque eundem F, numerus E, minimus, quem metiuntur iidem C, & D; maior minorem. Quod est absurdum. Non ergo A, B, C, alium numerum ipso E, minorem metientur; sed ipse E, erit minimus. Quapropter tribus numeris datis, reperimus, quem illi minimum metiantur, numerum. Quod erat faciendum.

A.. B... C....
D.....
E.....
F---------

[b] 36. septimi
[c] 11. pron.
[d] 37. septimi
[e] 37. septimi

## COROLLARIVM.

*Sequitur ex his, si tres numeri numerum quempiam metiantur; etiam minimum, quem illi metiuntur, eundem metiri. Nam in extrema huius demõstrationis parte, ex eo, quòd A, B, C, ponebantur metiri ipsum F, ostensum est, & E, minimum, quem A, B, C, metiuntur, eundem F, metiri.*

## SCHOLIVM.

*Hoc corollarium alio modo, non secus ac propos. 37. huius lib. ostendere poterimus. Metiantur enim A, B, C, quemcunq; numerum D E, sit q; F, minimus, quem iidem A, B, C, metiantur. Dico & F, ipsum D E, metiri. Si enim non metitur, metiatur eius partem D G, relinquat q; numerum G E, se minorem. Quoniam igitur A, B, C, ipsum F, metiuntur, & F, ipsum D G; [a] metientur quoque A, B, C, eundem D G; Ac proinde, cùm & totum D E, ponantur metiri; [b] metientur & reliquum G E, ipso F, minorem. Quare F, non erit minimus, quem A, B, C, metiuntur. Quod est absurdum, & contra hypothesim. Metitur igitur F, ipsum D E.*

A.. B... C.....
D.....G---- E
F.....

[a] 11. pron.
[b] 12. pron.

*Pari ratione; Pluribus numeris datis, quàm tribus, reperiemus, quem illi minimum metiantur, numerum; locum q; habebit hoc idem corollarium. Nam si dati numeri fuerint quatuor, inueniendus erit primùm minimus, quem tres metiantur. Si quinq; reperiendus erit minimus, quem quatuor metiantur, &c. Reliqua autem omnia peragenda, vt de tribus numeris dictum est.*

## THEOR. 34. PROPOS. 39. 37.

Si numerum quispiam numerus metiatur; ille, quem metitur, partem habebit à metiente denominatam.

A.....
B.... C...

Metiatvr numerum A, numerus B. Dico A, habere partem aliquam à B, denominatam. Metiatur enim B, ipsum A, toties, quot vnitates sunt in numero C. Quia igitur vnitas ipsum C, & B, ipsum A, æquè metitur; [a] & vicissim vnitas æquè ipsum B, & C, ipsum A, metietur; atq; adeò eadem pars erit vnitas ipsius B, quæ C, ipsius A: Est autem vnitas pars ipsius B, denominata ab ipso B, vt ad defin. 2. huius libri docuimus. Igitur & C, pars erit ipsius A, ab eodem B, denominata. Si numerum ergo quispiam numerus metiatur, &c. Quod ostendendum erat.

[a] 15. septimi.

## THEOR. 35. PROPOS. 40. 38.

Si numerus partem habuerit quamlibet; metietur illum numerus à parte denominatus.

A.....
B... C.....

Habeat numerus A, partem B, à qua numerus C, denominatur. Dico C, metiri ipsum A. Nam cùm B, pars denominetur à C; sit autem & vnitas pars ipsius C, ab eodẽ C, denominata; metietur vnitas ipsum C, & B, ipsum A, æquè. [b] Vicissim ergo & vnitas ipsum B, & C, ipsum A, metietur. Si numerus ergo partem habuerit quamlibet, &c. Quod demonstrandum erat.

[b] 15. septimi

39.

## PROBL. 6. PROPOS. 41.

NVMERVM reperire, qui minimus cùm sit, habeat datas partes.

SINT datæ partes A,B,C: Inueniendusq; sit minimus numerus datas partes habens. Sint a partibus A,B,C, numeri denominati, siue qui ipsas denominent, D,E,F; [a] minimusq; quem D, E,F, metiuntur, numerus G. Dico G, esse minimũ, qui habeat datas partes A,B,C. Quod enim eiusmodi partes habeat, ita ostendetur. Cùm D, E,F, ipsum G, metiantur, [b] habebit G, partes à D,E,F, denominatas, hoc est, partes A,B,C, cùm hæ denominentur à D,E,F. Quòd verò G, sit minimus illas partes habens, perspicuum est. Si enim non est minimus, habeat, si fieri potest, H, ipso G, minor eadem partes A, B, C. Quia igitur H, habet partes A, B, C, [c] metientur ipsum numeri D, E, F, à partibus A,B,C, denominati; Atq; adeò, cùm H, minor sit quàm G, nõ erit G, minimus, quem metiuntur D,E,F. Quod est absurdum, & contra hypothesim. Non igitur minor numerus, quàm G, datas partes A,B,C, habebit, sed ipse G, minimus erit. Quare numerum reperimus, qui minimus cùm sit, habet datas partes. Quod faciendum erat.

D.. A, Secunda
E... B, Tertia
F.... C, Quarta
G.....
H----------

a 38. *septimi*
b 39. *septimi*
c 40. *septimi*

*SCHOLIVM.*

A, Secunda D.. I.....
B, Tertia E... K....
C, Quarta F.... L...
G.....

*QVOD si sumantur numeri I, K, L, per quos numeri D, E, F, ipsum G, metiuntur; erunt numeri I,K,L, datæ partes A,B,C, ipsius G, denominatæ scilicet à D,E,F. Cùm enim D,E,F, ipsum G, metiantur per I,K, L; metietur æquè vnitas ipsos I,K,L, & numeri D,E,F, ipsum G.* [a] *Vicissim ergo metietur quoq; vnitas ipsos D,E,F, & numeri I,K,L, ipsum G; atq; adeò vnitas ipsorum D,E,F, eadem pars erit, quæ numeri I,K,L, ipsius G. Cùm ergo vnitas sit pars ipsorum D,E,F, ab ipsis denominata; erunt & I,K,L, ipsius G partes denominatæ à D,E,F.*

*EX his autem sequitur, minimum numerum, quem quotlibet numeri metiuntur, esse minimum habentem partes à numeris metientibus denominatas. Ostensum enim est, numerum G, quem minimũ metiuntur D,E,F, minimũ esse, qui habeat partes A,B,C, cuiusmodi sunt I,K,L, à metientib numeris D,E,F, denominatas.*

a 15. septimi.

*IAM verò, vt Campanus ait, si inuentus minimus numerus datas partes habens duplicetur, triplicetur, &c. habebitur secundus numerus post minimum, tertius, quartus, &c. easdem partes continens. Inuento enim G, minimo, qui habeat partes A,B,C, denominatas à D, E, F; sit illius duplus, numerus H; triplus verò I, &c. Dico H, esse secundum numerum, qui easdem partes A,B,C, à numeris D,E,F, denominatas habeat, & I, tertium, &c. ita vt neque inter G, minimum, & eius duplum H, neque inter H, duplum, & I, triplum, &c. cadat alius numerus habens easdem partes sed ipsi soli H,I, & cæteri multiplices ipsius G, dictas partes contineant. Quod enim H & I &c. partes A,B,C, habeant, denominatas scilicet à D,E,F, ita ostendemus. Quoniam D, E,F, metiuntur ipsum G, per constructionem; & G, ipsos H,I, & reliquos multiplices ipsius G.* [b] *metientur quoq; D,E,F, eosdem H I, & reliquos multiplices ipsius G.* [c] *Quare H,I, & reliqui numeri ipsius G, multiplices, partes habebunt à metientibus numeris D,E,F, denominatas, quales ponuntur partes A,B,C.*

G..... A,D..
H..... B,E...
I..... C,F....
K----------M-----L
N----------P-----O

b 11. pron.
c 39. septi.

*QVOD autem H, duplus ipsius G, minimi, sit secundus eas partes habens, hoc modo demonstrabimus. Si H, non est secundus sit si fieri potest, alius K L, ipso prior, qui nimirum maior sit, quàm G, minimus, et minor, quàm H, duplus ipsius G. Detracto autem G, ex K L, relinquatur M L, ipso G, minor. Quoniam igitur K L, partes habet A,B,C;* [d] *metientur ipsum numeri D,E,F, à partibus illis denominati; Ac propterea & G, minimus, quem D,E,F, metiuntur, metietur per coroll. propos. 38. huius lib. eundem K L: Metitur autem & G, ablatum K M, sibi æqualem.* [e] *Igitur & reliquum M L, metietur, maior minorem. Quod est absurdum. Non ergo alius numerus inter G, & H, cadens partes habet A,B,C; Ac proinde H, secundus est huiusmodi partes habens.*

d 40. septimi.
e 12. pron.

*NON aliter ostendemus numerum I triplum ipsius G, esse tertium dictas partes habentem. Si enim non est tertius, sit alius, si fieri potest. videlicet N O, ipso prior, qui videlicet maior sit, quàm H, duplus minor verò quàm I, triplus. Detracto autem H, duplo ex N O, relinquatur P O, minor ipso G. Quia igitur N O partes habet A,B,C,* [f] *metientur ipsum numeri D,E,F, à partibus illis denominati. Atque idcirco & G, minimus, quem D,E,F, metiuntur, eundem N O per coroll. propos. 38. huius lib. metietur: Metitur autem & G, ipsum N P, ablatum ipsi H, duplo æqualem.* [g] *Igitur & reliquum P O idem G, metietur minorem maior. Quod est absurdum. Non ergo alius numerus inter H, & I, cadens partes habet A,B,C datas; Ac propterea I, tertius est illas partes habens. Eademq; ratione quadruplus ipsius G, quartus erit; & quintuplus, quintus, &c.*

f 40. septimi.
g 12. pron.

*HVC quoque referri potest sequens problema.*

NVMERVM reperire, qui minimus cùm sit, habeat datas partes, hac lege, vt quælibet pars subsequentem partem contineat.

SINT

*Sint data partes A,B,C; inueniendus q̃ sit numerus minimus, qui eas habeat hoc ordine, vt pars A, contineat partem B, & pars B, partem C. Sint à partibus A,B,C, numeri denominati D,E,F; Fiat q̃ G ex E, in F: Item H, ex D, in G. Dico H, esse minimum numerum, qui quaeritur. Quod enim habeat datas partes ordine praedicto, facile demonstratur. Nam cùm ex D, in G, fiat H; erit G, toties in H, quoties vnitas in D: Est autem vnitas pars ipsius D denominata ab ipso D. Igitur & G, pars est ipsius H, ab eodem D, denominata; At q̃ adeò H, habet partem A, nimirum numerum G, à D, denominatam. Deinde quia ex E, in F, fit G; erit eadem ratione F, pars ipsius G, denominata ab E: At q̃ adeò A, pars ipsius H, nimirum numerus G, habet partem B, nimirum numerum F, ab E, denominatam. Deniq̃ cùm F, habeat vnitatem, tanquam partem ab ipso F, denominatam, perspicuum est B, partem ipsius G, partũ, nimirum numerum F, habere quoque partem C, ab F, denominatam, nimirum vnitatem. Quare numerus inuentus H, partem habet A; & pars A, partem B; & pars B, partem C. Quod autem H, sit minimus eas partes hoc ordine continens, hac ratione ostendetur. Si enim non est minimus, habeat minor numerus I, si fieri potest, easdem partes eodem ordine, ita vt K, sit ipsius I, pars A, à numero D, denominata; & L, ipsius K, pars B, ab E, denominata; & M, ipsius L, pars C, ab F, denominata. Quia igitur K, pars est ipsius I, à D, denominata; erit K, toties in I, quoties vnitas in D; [a] At q̃ adeò ex D, in K, fiet I. Eadẽ ratione ex E, in L, fiet K; & L, ex F, in M. Itaq̃ cùm D, ipsos G, & K, multiplicãs faciat H, & I; [b] erit, vt H, ad I, ita, G, ad K. Eadẽ ratione, cùm ex E, in F, & L, fiant G, & K; erit, vt G, ad K, ita F, ad L. Et cùm ex F, in vnitatẽ, & M, fiant F, & L; erit, vt F, ad L, ita vnitas ad M. Quoniam igitur est, vt H, ad I, ita G, ad K; & vt G, ad K, ita F, ad L; & vt F, ad L, ita vnitas ad M: Erit per lemma propos. 14. huius lib. vt H, ad I, ita vnitas ad M: Ponitur autem H, numerus numero I, maior. Vnitas igitur maior quoq; erit numero M, pars toto. Quod est absurdum. Non ergo alius numerus minor, quàm H, habet partes A,B,C, ordine praedicto, sed ipse H, minimus est. Quod est propositum.*

a 15. defin.

b 15. septimi.

A, Secunda. B, Tertia. C, Quarta.
D.. E... F....
G.....
H.....
. Vnitas
I----------
K----------
L----------
M----

H. G. F. Vnitas.
I. K. L. M.

*Si verò plures fuerint partes, quàm tres, eadem prorsus est via tenenda ac demonstratio. Vt si numeri 2. 3 4. 5. 6. sint denominatores partium, fient 30. ex 5. in 6. & 120. ex 4. in 30. & 360 ex 3. in 120. & tandem 720. ex 2. in 360. Nam numerus 720. habebit partem à 2. denominatam; & hac partem à 3. denominatam; & hac aliam à 4. & hac aliam à 5. & hac denique partem à 6. denominatam, vt manifestum est.*

*Quod si numerum H, inuentum duplicemus, triplicemus, &c. habebimus alios numeros, videlicet secundum, tertium, quartum, &c. qui eadem partes eodem ordine habeant, duplicatas tamen, vel triplicatas, &c. Nam G, duplicatus, vel triplicatus, &c. dimidiata pars erit, ipsius H, duplicati, vel triplicati, &c. quemadmodum & G, ipsius H. Eadem q̃ est ratio de cateris partibus.*

FINIS ELEMENTI SEPTIMI.

---

# EVCLIDIS ELEMENTVM OCTAVVM.

## THEOR. I. PROPOS. I. 1.

**Si fuerint quotcunq; numeri deinceps proportionales, extremi verò ipsorum primi inter se fuerint; ipsi minimi sunt omniũ eandem cum eis rationẽ habentiũ.**

VMERORVM deinceps proportionalium quotcunq; A,B,C,D, extremi A, & D, inter se primi sint. Dico A, B, C, D, minimos esse omniũ eandem cum eis proportionem habentium. Si enim non sunt minimi, erunt alij ipsis minores, in eadem proportione. Sint ergo ipsis minores in eadem ratione E,F,G,H, si fieri potest. Quoniam igitur quotcunque numeri sunt A,B,C,D, & alij illis æquales multitudine E,F,G,H, qui bini sumuntur, & in eadem

A,.....
B.....
C.....
D.....
E---
F-----
G--------
H----------

ratione, [c] erit, ex æqualitate, vt A, ad D, ita E, ad H: [b] Sunt autem A, & D, in sua proportione minimi, quòd inter se primi esse ponantur. [c] Igitur tam A, ipsum E, quàm D, ipsum H, æquè metietur, maior minorem. Quod est absurdum. Non ergo numeri minores ipsis A, B, C, D, sunt in eadem cum eis ratione, sed ipsimet minimi sunt; Ac propterea, si fuerint quotcunque numeri deinceps proportionales, &c. Quod erat demonstrandum.

a 14. *septimi*
b 23. *septimi*
c 21. *septimi*

## *SCHOLIVM.*

A.... E---
B..... F-----
C..... G------
D..... H--------

*PERSPICVVM autem est ex demonstratione, numeros A, B, C, D, esse minimos in continuatione suarum proportionum, si extremi A, & D, inter se primi sint, siue A, B, C, D, sint continuè proportionales, vt vult Euclides, siue non. Vt hoc exemplum ostendit, in quo proportiones omnes diuersa sunt, quemadmodum in superiori eadem semper proportio reperitur.*

## 2. PROBL. I. PROPOS. 2.

NVMEROS reperire deinceps proportionales minimos, quotcunque iusserit quispiam, in data ratione.

SINT minimi numeri datæ rationis A, & B, oporteatq; inuenire primùm tres numeros minimos in proportione data A, ad B. Multiplicans A, seipsum, & numerum B, faciat C, & D. Deinde B, multiplicans seipsum faciat E. Dico C, D, E, esse tres minimos in proportione A, ad B. Quòd enim proportionales sint in data proportione A, ad B, hoc est, sit vt C, ad D, ita D, ad E, sic ostendemus. Cùm ex A, in A, & B, fiant C, & D; [d] erit vt A, ad B, ita C, ad D. Rursus cùm ex B, in A, & B, fiant D, & E; [e] erit quoque, vt A, ad B, ita D, ad E. Quare proportionales sunt C, D, E, continuè in proportione data A, ad B. Quod verò in eadem ratione sint minimi, ita demonstrabitur. Quoniam extremi C, & E, procreati sunt ex A, & B, in se ipsos; [f] sunt autē A, & B, inter se primi, quòd minimi sint in sua proportione; [g] Erunt & C, E, extremi, inter se primi. [h] Quare C, D, E, minimi sunt in ratione A, ad B.

A.. B...
C....D..... E.....
F, 8. G, 12. H, 18. I, 27.
K, 16. L, 24. M, 36. N, 54. O, 81.

d 17. *septimi*
e 17. *septimi*
f 24. *septimi*
g 29. *septimi*
h 1. *octaui.*

IAM verò ex A in tres inuentos C, D, E, fiant F, G, H, & ex B, in vltimum E, fiat I. Dico quatuor numeros F, G, H, I, minimos esse in eadem ratione data A, ad B. Quod enim proportionales sint in ratione A, ad B, ita demonstrabimus. Quoniam A, multiplicans ipsos C, D, E, fecit F, G, H, habebunt, ex iis, quæ ad propos. 18. lib. 7. ostendimus, numeri F, G, H, easdem proportiones, quas C, D, E, hoc est, quam habet A, ad B. Rursus quia A, & B, ipsum E, multiplicantes, fecerunt H, & I; [i] erit quoque, vt A, ad B, ita H, ad I. Sunt igitur F, G, H, I, continuè proportionales in data proportione A, ad B. Quòd autem in data ratione minimi sint, ita perspicuum fiet. [k] Quoniam A, & B, minimi in sua proportione, sunt inter se primi; factiq; sunt C, & E, ex A, & B, in se ipsos; Item procreati sunt F, & I, ex A, B, in C, E; nimirum F, ex A, in C, & I, ex B, in E; [l] erunt & F, I, extremi, inter se primi. [m] Quare F, G, H, I, in sua proportione, quæ est A, ad B, minimi sunt.

i 18. *septimi*
k 24. *septimi*
l 29. *septimi*
m 1. *octaui.*

NON aliter, si ex A, in quatuor inuentos F, G, H, I, fiant K, L, M, N, & ex B, in vltimum I, fiat O; erunt K, L, M, N, O, quinque numeri minimi in data ratione A, ad B: Eademq; ratione inuenietur sex, septem, octo, &c. Quare numeros reperimus deinceps proportionales minimos, &c. Quod faciendum erat.

## *SCHOLIVM. I.*

*EODEM modo quatuor numeri minimi proportionales producentur ex multiplicatione B, in tres inuentos E, D, C, & ex multiplicatione A, in C. Fiant enim I, H, G ex B, in E, D, C: & F, ex A, in C. Quo peracto, [a] numeri F, G, eandem rationem habebunt, quam A, B; quòd A, B, multiplicantes C, ipsos F, G, fecerint: Item & G, H, I, ex iis, quæ ad propos. 18, huius lib. demonstrauimus, in eadem erunt ratione, in qua C, D, E, hoc est, in qua A, B; quòd B, multiplicans C, D, E, ipsos G, H, I, fecerit. Sunt ergo F, G, H, I, in eadem ratione, in qua A, B. Quod verò minimi sint, ostendetur, vt prius.*

a 18. *septimi.*

A.. B...
C....D..... E.....
F, 8. G, 12. H, 18. I, 27.
K, 16. L, 24. M, 36. N, 54. O, 81.

*NON aliter si ex B, in quatuor inuentos I, H, G, F, fiant O, N, M, L, & ex A, in F, fiat K; erunt K, L, M, N, O, quinque numeri minimi in data ratione A, ad B. Eademq; ratione inuenietur sex, septem, octo, &c. Itaq; siue A, multiplicetur in omnes inuentos, & B, in vltimum; siue B, in omnes inuentos, & A, in primum; producentur semper plures numeri in eadem ratione data A, ad B, minimi. Demonstrauit enim Euclides, quatuor F, G, H, I, produci ex A, in C, D, E, & ex B, in E: Nos autem eosdem ostendimus procreari ex B, in E, D, C, & ex A, in C.*

## COROLLARIVM I.

*HINC fit, si tres numeri minimi sint continuè proportionales, extremos quadratos esse: si autem*

*si autem quatuor fuerint, cubos. Nam trium minimorum C, D, E, extremi C, & E facti sunt ex A, & B, in seipsos, ideoq; æqualiter sunt æquales. Quare ex definitione 18. quadrati sunt. Eodem modo, cùm quatuor minimorum F, G, H, I, extremi F, & I, geniti sint ex A, & B, lateribus in C, & E, quadratos ipsorũ A, & B, hoc est, tam numerus F, ex mutua multiplicatione trium numerorum æqualium A, A, A, quàm numerus I, ex multiplicatione mutua triũ numerorum æqualium B, B, B, sit procreatus, ac propterea vterque sit æqualiter æqualis æqualiter; ipsi, ex defin 19. cubi erunt.*

*Sic etiam, si fuerint quinq; numeri minimi proportionales continuè; erunt extremi eorũ quadrati quadratorum; Et sic si fuerint plures, erunt eorũ extremi, numeri alij sub alijs denominationibus, quæ in Algebra solent explicari. Hæc autẽ omnia manifesta sunt ex multiplicationibus, quibus numeri proportionales, iuxta hanc propos. procreantur.*

*Neque verò dicere quis poterit, corollarium hoc verum quidem esse in tribus, quatuórve numeris minimis continuè proportionalibus inuentis arte in hac propos. tradita, non autem in quibusuis tribus, quatuórve numeris minimis continuè proportionalibus vtcunq; propositis: Dicere, inquam, nemo hoc poterit, quia dati quilibet tres numeri, vel quatuor minimi continuè proportionales æquales prorsus sunt iis, qui per hanc propos. inueniuntur. Si enim illi dati minores essent inuentis, non essent inuenti, minimi, quod est contra hanc propos. Si verò dati, maiores essent inuentis, non essent illi dati, minimi. quod est contra hypothesim. Quod clarissimè ita fiet perspicuum. Dati sint tres numeri A, B, C, minimi continuè proportionales: sumptis q; duobus minimis D, E, in proportione A, ad B, vel B, ad C, ex scholio propos. 35. lib. 7. inueniantur per hanc propos. ex his duobus minimis D, E, tres minimi F, G, H, in eadem proportione. Dico tres A, B, C, datos à tribus inuentis F, G, H, non differre. Nam necessariò A, ipsi F, æqualis erit; atque ita, cùm sit, vt A, ad B, ita F, ad G, erit quoq; permutando, vt A, ad F, ita B, ad G; ac proinde si A, æqualis est ipsi F, erit & B, ipsi G, æqualis: Eademq; ratione ostendemus C, æqualem esse ipsi H: ideoq; tres A, B, C, tribus F, G, H, singuli singulis, æquales erunt. Eademq; ratio est de quatuor, aut pluribus. Quod si A, dicatur minor, quàm F, ostendemus eodem argumento & B, C, minores esse, quàm G, H. Quare F, G, H, minimi non sunt. quod est absurdum, & contra hanc propos. Si verò A, concedatur maior, quàm F; erunt eodem argumento & B, C, maiores, quàm G, H: atq; idcirco A, B, C, minimi non sunt. quod est contra hypothesim. Cùm ergo A, minor non sit, aut maior, quàm F; æqualis omnino erit; ideoq; vt ostensum est, & B, C, ipsis G, H, æquales erunt. Quod est propositum.*

A --- B ----- C ------
D, 2. E, 3.
F, 4. G, 6. H. 9.

## COROLLARIVM II.

*Perspicvvm quoq; est, extremos numeros proportionaliũ quotcunq; secundùm hanc propositionem inuentorum in data ratione minimorũ, inter se primos esse. Quod quidẽ facile ostendemus ex multiplicationibus, quibus numeri proportionales producuntur, & ex propos. 29 lib. 7. quemadmodum id demonstratum fuit de numeris extremis C, E, & F, I, &c.*

## COROLLARIVM III.

*Constat etiam, duos numeros minimos in data ratione, metiri omnes medios quotcunq; minimorum in eadem ratione; quia scilicet producuntur ex illorum multiplicatione in alios quosdam numeros. Vt in dato exemplo D, medius producitur ex A, in B; & G, H, medij ex A, in D, & E, vel ex B, in C, & D; Item L, M, N, medij ex A, in G, H, I, vel ex B, in F, G, H; vt ex demonstratione Euclidis, & ea, quam in Scholio tradidimus, apparet.*

## SCHOLIVM II.

*Quoniam verò tam numeri A, C, F, K, quàm B, E, I, O, ex constructione, continuè proportionales sunt ab vnitate, quòd illorum quidem proportiones à numero A, horum verò à B, denominetur, vt clarius demonstrabitur propos. 9. huius lib. fit vt extremi numeri quotcunq; minimorum continuè proportionalium sint vltimi tot continuè proportionalium ab vnitate, quorum proportiones à minimis numeris datæ rationis denominantur, quot sunt propositi minimi continuè proportionales. Ita enim in superiori exemplo vides C, & F, extremos numeros trium minimorũ continuè proportionalium in proportione A, ad B, esse vltimos trium numerorum continuè proportionalium ab vnitate, quorum proportiones denominantur ab A, & B. At verò F, & I, extremos quatuor continuè proportionalium, esse vltimos quatuor numerorum ab vnitate continuè proportionalium, &c. Quamobrem si quis optet inuenire quotcunq; integros numeros minimos in data ratione non multiplici (in multiplici enim res facilis est, quippe quæ ab vnitate incipiat) continuè proportionales; id facilè hac via consequetur. Inuentis duobus minimis numeris in data ratione, sumantur ab vnitate tot numeri continuè proportionales in proportione, cuius denominator sit minor illorum, quot numeri mi-*

*nimi inueniendi proponuntur. Nam vltimus illorum ab vnitate continuè proportionalium erit primus continuè proportionalium inueniendorum, qui si per denominatorem datæ proportionis multiplicetur, habebitur secundus, & si hic rursum per denominatorem eundem multiplicetur, gignetur tertius, & sic deinceps. Vt si quis desideret octo minimos numeros in proportione sesquialtera: Inuentis minimis duobus numeris 3. & 2. in sesquialtera proportione, sumendi erunt octo numeri ab vnitate continuè proportionales in proportione dupla, quæ denominatur à 2. hoc modo 1. 2. 4. 8. 16. 32. 64. 128. Nam horum vltimus 128. erit primus octo numerorum inueniendorum, qui minimi sint in proportione 3. ad 2. vt hic patet, 128. 192. 288. 432. 648. 972. 1458. 2187. si maiores numeri ad minores referantur. Eademq; de reliquis est ratio.*

*Boetius autem, & alij regulam hanc ita explicant, vt & nos quinto lib. in tractatione proportionum declarauimus. Sumantur tot numeri continuè ab vnitate multiplices secundùm denominationem partis aliquotæ, cuius in data proportione fit mentio, quot numeros continuè proportionales oportet inuenire in data proportione. Nam vltimus numerus erit primus inueniendorum. Vt in dato exemplo, quia desiderantur octo numeri minimi in proportione sesquialtera, sumendi sunt octo numeri ab vnitate dupli, vt primus, qui minimum denominantur à denominatore partis secundæ, seu dimidiæ, cuius mentio fit in proportione sesquialtera, hoc est, à 2. Quod si optentur quinque numeri minimi in proportione sesquiquinta, sumendi erunt quinq; numeri ab vnitate quintupli; vt hic 1. 5. 25. 125. 625. Nam 625. est primus quinq; numerorũ in proportione sesquiquinta, vt hic apparet; 625. 750. 900. 1080. 1296. Atq; ita de cæteris. Porrò hac arte nõ possunt inueniri (quod mirum videri possit) plures numeri continuè proportionales, quàm propositi sunt. Neque enim post 1296. in vltimo exemplo alius numerus inuenietur, qui habeat ad 1296. proportionem sesquiquintam; sicut neq; in priori exemplo post 2187. alius potest reperiri, qui ad 2187. proportionem sesquialteram habeat. Ratio autem huius rei est, quòd extremi hac arte inuenti sint inter se primi, vt ex demonstratione liquet. Hinc enim fit, vt vltimus non possit esse ad alium quempiam numerum, vt primus ad secundum, veluti propos. 17. lib. 9. demonstrabitur.*

## 3. THEOR. 2. PROPOS. 3.

**Si sint quotcunq; numeri deinceps proportionales minimi omnium eandem cum eis rationem habentium; illorum extremi sunt inter se primi.**

Sint numeri A, B, C, D, minimi deinceps proportionales. Dico extremos A, & D, inter se primos esse. Inueniantur enim duo E, F, minimi in ratione A, ad B, vel B, ad C, vel C, ad D. Deinde iuxta viam præcedentis problematis, tres minimi G, H, I, in eadem ratione, nec non quatuor K, L, M, N, & sic deinceps, donec multitudo K. L. M. N, æqualis sit multitudini A, B, C, D. Quoniam igitur A, B, C, D, minimi sunt in sua proportione, & in eadem quoque proportione minimi sumpti sunt K, L, M, N, illis multitudine æquales; erunt singuli singulis æquales, ne minores minimis dentur in eadem proportione, nimirum A, ipsi K, & D, ipsi N. Id quod nos Geometricè demonstrauimus ad finem coroll. 1. superioris propos. Sunt autem per coroll. 2. propos. præcedentis K, & N, inter se primi. Primi ergo quoque sunt A, & D. Quocirca, si sint quotcunque numeri deinceps proportionales minimi omnium eandem cum eis, &c. Quod erat ostendendum.

A, 8. B, 12. C, 18. D 27.
E, 2. F. 3.
G, 4. H, 6. I, 9.
K, 8. L, 12. M, 18. N, 27.

### SCHOLIVM.

*Hæc propositio intelligenda est de numeris minimis continuè proportionalibus, vt ex eius demonstratione, & verbis Euclidis apparere potest. Nam si A, B, C, D, non essent proportionales continuè, inueniri non possent, ex præcedenti problemate, K, L, M, N, totidem minimi in eadem proportione. Immò si diuersæ sint proportiones, dabuntur aliquando minimi numeri deinceps proportionales, hoc est, continuati in suis proportionibus diuersis, quorum extremi non sunt inter se primi. Sunt enim hi numeri 6. 10. 13. 18, minimi in continuatione suarum proportionum, cùm tamen extremi 6. & 18. compositi sint inter se. Itaque hoc Theorema primi est conuersum, quoad numeros continuè proportionales. Etenim numeri quotcunque continuè proportionales, quorum extremi inter se sunt primi, minimi sunt in sua proportione, vt constat ex 1. theor. Et vicissim, numeri extremi quotcunque minimorum continuè proportionalium, inter se primi sunt, velut hic demonstratum est. At verò primum theorema, prout spectat ad numeros non continuè proportionales, conuerti nequit. Nam licet numeri quotcunque non continuè proportionales, quorum extremi sunt inter se primi, minimi sint in continuatione suarum proportionum, vt ex scholio propos. 1. huius libri liquet; Tamen non semper è contrario, numeri extremi quotcunque minimorum non continuè proportionalium, inter se primi sunt, vt manifestum est in exemplo nuper prolato 6. 10. 13. 18.*

## 4. PROBL. 2. PROPOS. 4.

**Rationibvs datis quotcunque in minimis numeris, reperire numeros deinceps minimos in datis rationibus.**

Sint primùm datæ duæ rationes in minimis numeris A, ad B, & C, ad D; oporteatque inueni-

re tres

re tres numeros minimos deinceps proportionales, in datis proportionibus. [a] Inuento numero E, minimo, quem metiantur B, & C, secundus & tertius; quoties B, ipsum E, metitur, toties A, metiatur ipsum F; & quoties C, eundem E, toties ipsum G, metiatur D. Dico F, E, G, minimos esse in proportionibus datis. Quòd enim deinceps datas proportiones habeant, ita ostendemus. Quoniam A, & B, æquè metiuntur ipsos F, & E; hoc est, per eundem numerum; metiantur p H. Quo posito, [b] A, & B, multiplicantes ipsum H, producent F, & E. [c] Quare erit vt A, ad B, ita F, ad E. Eadem ratione cùm C, & D, æquè metiantur ipsos E, & G; erit vt C, ad D, ita E, ad G. Igitur F, E, G, deinceps proportionales sunt in rationibus A, ad B, & C, ad D. Quòd autē minimi sint, sic manifestum erit. Si non sunt minimi, erunt aliqui illis minores, singulis singuli in eisdem rationibus: sint, si fieri potest, I, K, L. Quia igitur A, & B, minimi sunt in sua proportione; [d] ipsi æquè metientur I, & K, in eadē proportione existentes; nimirum B, ipsum K, consequens consequentem. Eademque ratione C, & D, æquè metientur K, & L; nimirum C, ipsum K, antecedens antecedentē. Quare cùm B, & C, ipsum K, metiantur; [e] metietur eundem K, numerus E, minimus, quē B, & C, metiuntur, minorē maior. Quod est absurdum. Non igitur erunt alij numeri minores ipsis F, E, G, in rationibus A, ad B, & C, ad D; Ac propterea ipsi F, E, G, minimi sunt in datis rationibus.

A, 6. B, 5. C, 4. D, 3.
H, 4. F, 24. E, 20. G, 15.
I------ K----- L----

a 36. sept.
b 9. pron.
c 18. sept.
d 21. sept.
e 37. sept.

Sint deinde datæ tres rationes in numeris minimis A, ad B; C, ad D; & E, ad F; inueniendique sint quatuor minimi deinceps proportionales in datis rationibus. [f] Inuento rursum numero G, minimo, quem metiantur B, secundus, & C, tertius; quoties B, ipsum G, metitur, toties metiatur A, ipsum H; & quoties C, ipsum G, toties D, ipsum I, metiatur. Quibus peractis, aut E, ipsum I, metitur, aut non. Metiatur primùm; Et quoties E, ipsum I, metitur, toties F, metiatur ipsum K. Dico H, G, I, K, minimos esse in datis rationibus. Quòd enim sint in datis rationibus deinceps proportionales, constat. Cùm enim A, & B, ipsos H, & G, æquè metiantur; erit vt prius, quemadmodum A, ad B, ita H, ad G. Eadem ratione erit, vt C, ad D, ita G, ad I: & vt E, ad F, ita I, ad K; quòd tam C, & D, ipsos G, & I, quàm E, & F, ipsos I, & K, metiantur æquè. Igitur H, G, I, K, deinceps proportionales sunt in datis rationibus. Quòd autem sint minimi, sic ostendemus. Si non sunt minimi, sint in eisdem rationibus minores ipsis, singuli singulis, si fieri potest L, M, N, O. Quia igitur A, & B, minimi sunt in sua proportione; [g] ipsi metientur æquè L, & M, eandem habētes rationem; nimirum B, consequens consequentem M. Eodem modo C, & D, æquè metientur M, & N; nimirum C, antecedens antecedentem M. Quocirca cùm B, & C, ipsum M, metiantur; [h] metietur eundem M, & numerus G, minimus, quem B, & C, metiuntur, minorem maior. Quod est absurdum. Non ergo erunt alij numeri deinceps proportionales in rationibus datis minores ipsis H, G, I, K; Ac proinde H, G, I, K, in datis rationibus minimi sunt.

A, 6. B, 5. C, 4. D, 3. E, 5. F, 7.
H, 24. G, 20. I, 15. K, 21.
L---- M------ N---- O-----

f 36. sept.
g 21. sept.
h 37. sept.

Sed iam E, non metiatur ipsum I. [i] Inuento ergo numero K, minimo, quem E, & I, metiantur; quoties I, ipsum K, metitur, toties quoque G, ipsum L, & H, ipsum M, metiatur: & quoties E, metitur K, toties metiatur F, ipsum N. Dico M, L, K, N, esse minimos in proportionibus datis. Cùm enim H, G, I, ipsos M, L, K, æquè metiantur; erit vt suprà, quemadmodum H, ad G, ita M, ad L; & vt G, ad I, ita L, ad K: Est autem eadem ratione, vt H, ad G, ita A, ad B; & vt G, ad I, ita C, ad D; quòd & A, B, ipsos H, G; & C, D, ipsos G, I, metiantur æquè. Igitur vt A, ad B, ita M, ad L; & vt C, ad D, ita L, ad K. Atqui vt E, ad F, ita quoq; est K, ad N, cùm E, F, æquè ipsos K, N, metiantur. Sunt ergo M, L, K, N, deinceps proportionales in datis rationibus. Dico & minimos eos esse in eisdē rationibus. Si namq; nō sunt minimi, dentur ipsis minores in rationibus eisdem O, P, Q, R, si fieri potest. Quoniā ergo A, B, in sua proportione minimi sunt; [k] ipsi æquè metiētur O, P, in eadem ratione existentes; nimirum B, consequens consequentem P. Eodem argumento C, D, ipsos P, Q, metientur æquè, videlicet antecedens C, antecedentem P; Atque adeò cùm B, & C, ipsum P, metiantur; [l] metietur quoque G, minimus, quem metiuntur B, & C, eundem P. Quia verò ostensum est, esse vt G, ad I, ita L, ad K, hoc est, ita P, ad Q; erit permutando, vt G, ad P, ita I, ad Q: Atque idcircò, cùm metiatur G, ipsum P, metietur & I, ipsum Q. Metitur autem & E, eundem Q; [m] quòd E, F, in sua proportione minimi æquè metiantur Q, R, eiusdem rationis; nimirum antecedens E, antecedentem Q. Ergo cùm metiantur I, E, ipsum Q; [n] metietur etiam K, quem minimum metiuntur I, E, eundem Q, maior minorem. Quod est absurdum. Non dabuntur ergo alij numeri deinceps proportionales in datis rationibus minores, quàm M, L, K, N; propterea q; ipsi M, L, K, N, minimi sunt.

A, 6. B, 5. C, 4. D, 3. E, 2. F, 7.
H, 24. G, 20. I, 15.
M, 48. L, 40. K, 30. N, 105.
O---- P---- Q---- R-----

k 21. sept.
l 37. sept.
m 21. sept.
n 37. sept.

Quod si quatuor rationes datæ fuerint; inueniendi prius erunt numeri deinceps proportionales in tribus prioribus rationibus; deinde cū quarta posteriori agendum, vt nuper cum tertia proportione data. Veluti si quarta proportio data sit in numeris minimis S, ad T; inueniemus primùm M, L, K, N, minimos deinceps proportionales in tribus proportionibus A, ad B; C, ad D; & E, ad F. Deinde si S, ipsum N, metiatur, accipiemus O, quem T, toties metiatur, quoties S, ipsum N,

A, 6. B, 5. C, 4. D, 3. E, 2. F, 7. S, 3. T, 2.
M, 48. L, 50. K, 30. N, 105. O, 70.

metitur. Nam M, L, K, N, O, erunt deinceps proportionales in datis rationibus minimi. Si verò S, ipsum N, non metiatur; *a* sumemus O, quem S, & N, minimum metiantur. Et quoties N, ipsum O, metitur, toties metiatur K, ipsum P; & L, ipsum Q; & M, ipsum R; quoties verò S, eundem O, metitur, toties T, ipsum V, metiatur. His enim peractis, erunt R, Q, P, O, V, deinceps proportionales minimi in rationibus A, ad B; C, ad D; E, ad F, & S, ad T. Quæ omnia eo argumento, quo prius, demonstrabimus. Eodem modo operabimur, si quinque, vel plures rationes datæ sint in minimis numeris. Itaque rationibus datis, quotcunque in minimis numeris, &c. Quod faciendum erat.

*a* 36. *septimi.*

A, 6. B, 5. C, 4. D, 3. E, 2. F, 7. S, 9. T, 2.
M, 48. L, 40. K, 30. N, 105.
R, 144. Q, 120. P, 90. O, 315. V, 70.

## *SCHOLIVM.*

*Si omnes rationes, vel aliquæ datæ fuerint in numeris non minimis, absoluemus nihilo minus problema propositum; sed prius exhibendæ erunt rationes datæ in minimis numeris, antequam ad inuentionem minimorum numerorum deinceps proportionalium aggrediamur, vt ex demonstratione manifestum est.*

*Differt autem hoc problema ab eo, quod propos. 35. lib. 7. demonstratum est, quòd hic non dantur numeri deinceps proportionales, ita vt quilibet intermedius sit & antecedens, & consequēs, licèt proportiones sint diuersæ, quemadmodum ibi.*

*Porro inuentis minimis numeris deinceps proportionalibus in datis rationibus, si ij multiplicentur quemcunque numerum eundem, procreabūtur alij in eisdem rationibus deinceps proportionales, vt constat ex ijs, quæ ad propos. 18. lib. 7. demonstrauimus.*

## 5. THEOR. 3. PROPOS. 5.

**Plani numeri rationem inter se habent ex lateribus compositam.**

Sint duo numeri plani A, B, & latera prioris quæcunq; C, D; posteriotis verò E, F. Dico proportionem A, ad B, compositam esse ex laterum proportionibus; nimirum ex proportionibus C, ad E, & D, ad F; vel ex proportionibus C, ad F, & D, ad E; ita vt latera vnius sint antecedentia, & alterius consequentia, quemadmodum propos. 23. lib. 6. docuimus. Faciant D, & E, se mutuò multiplicantes numerum G. Quoniam igitur D, multiplicans C, & E, fecit A, & G; *b* erit A, ad G, vt C, ad E. Eodemque modo, quia E, multiplicans D, & F, fecit G, & B; erit G, ad B, vt D, ad F. Quare A, G, B, sunt deinceps proportionales in proportionibus laterum C, ad E, & D, ad F. *c* Componitur autem proportio A, ad B, ex proportionibus A, ad G, & G, ad B. Eadem ergo proportio A, ad B, ex proportionibus laterum C, ad E, & D, ad F, componitur.

*b* 17. *septimi.*

*c* 27. *defin.*

A, 24. B, 48.
G, 18.
C, 4. D, 6. E, 3. F, 16.

Eodem argumento ostendemus, proportionem A, ad B, compositam esse ex proportionibus C, ad F, & D, ad E, si latera E, & F, loca inter se permurent, fiatque G, ex mutua D, & F, multiplicatione. Cùm enim D, multiplicans C, & F, faciat A, & G; *d* erit A, ad G, vt C, ad F. Similiter cùm F, multiplicans D, & E, faciat G, & B; erit G, ad B, vt D, ad E. Ac proinde rursum A, G, B, deinceps proportionales sunt in rationibus laterum C, ad F, & D, ad E. *e* Cùm ergo proportio A, ad B, componatur ex proportionibus A, ad G, & G, ad B; eadem ex proportionibus C, ad F, & D, ad E, componetur. Quare planinumeri rationem inter se habent ex lateribus compositam. Quod demonstrandum erat.

*d* 17. *septimi.*

*e* 27. *defin.*

A, 24. B, 48.
G, 96.
C, 4. D, 6. F, 16. E, 3.

## 6. THEOR. 4. PROPOS. 6.

**Si sint quotcunque numeri deinceps proportionales, primus autem secundum non metiatur; neque alius quisquam vllum metietur.**

Sint continuè proportionales A, B, C, D, E; & A, primus nō metiatur B, secundum. Dico neque alium quenquam illorum vllum metiri. Quòd enim nullus proximè insequentem metiatur, manifestum est. Nam cùm sit, vt A, ad B, ita B, ad C; C, ad D; & D, ad E; A, verò ipsum B, non metiatur; neque B, ipsum C, neque C, ipsum D, neque D, ipsum E, metietur. Quòd verò nec alius quisquam illorū vllum metiatur, sic demonstrabimus. *f* Sumptis tribus numeris minimis F, G, H, in ratione A, ad B; erit ex æquo, vt A, ad C, ita F, ad H. Quia verò est vt A, ad B, ita F, ad G; nō metitur autem A, ipsum B; neque F, ipsum G, metietur. Ac propterea F, non erit vnitas, aliàs F, ipsum G, metiretur, cùm vnitas omnem numerum metiatur. *g* Quare cùm F, & H, sint inter se primi, & F, non sit vnitas; non metietur F, ipsum H; Atque ob id neque A, ipsum C, metietur. Est enim ostensum esse A, ad C, vt F, ad H. Eadem ratione ostendemus, quòd nec B, tertium à se numerum D, nec C, tertium E, metiatur. Quòd si quatuor numeri minimi sumantur in ratione A, ad B, simili modo demonstrabimus, neque A, quartum D, neque B, quartum E, metiri. Atque ita de reliquis. Si itaque sint quotcunque numeri deinceps proportionales, &c. Quod erat ostendendum.

*f* 2. *octaui.*

A, 16. B, 24. C, 36. D, 54. E, 81.
F, 4. G, 6. H, 9.

*g* 3. *octaui.*

*SCHOLIVM.*

SCHOLIVM.

*Si maiores numeri ad minores referantur, proponi poterit hæc propositio ad hunc modum.*

Si sint quotcunque numeri deinceps proportionales, primus autem secundi non sit multiplex, neque alius quisquam vllius multiplex erit.

*SINT enim continuè proportionales A,B,C,D,E; & A, primus non sit multiplex secundi B. Dico neq; alium quenquam illorum vllius esse multiplicem. Quòd enim nullus proximè insequentis multiplex sit, constat. Nam cùm sit, vt A, ad B, ita B, ad C; C, ad D; & D, ad E: non sit autẽ A, ipsius B, multiplex; neq; B, ipsius C; neq; C, ipsius D: neq; D, ipsius E, multiplex erit. Quòd autẽ neque alius quisquam illorum vllius sit multiplex, hoc pacto confirmabitur. Quoniam D, ipsius E, non est multiplex: non metietur è contrario E, ipsum D, per ea, quæ in defin. 5. lib. 7. scripsimus. Quoniam igitur sunt numeri deinceps proportionales quotcunq; E, D, C, B, A; (Nam cùm sit D, ad E, vt C, ad D; B, ad C; & A, ad B; erit conuertendo E, ad D, vt D, ad C; C, ad B; & B, ad A.) Et E, primus secundum D, non metitur; [a] neq; alius quisquam illorum vllum metietur. Quare è contrario, si maiores ad minores referantur, neq; quisquam illorum vllius erit multiplex, per ea, quæ in defin. 5. lib. 7. scripsimus.*

a 6. octaui.

*SED & ex his sequens theorema demonstrabimus.*

Si sint quotcunq; numeri deinceps proportionales, primus verò secundum metiatur; & quicunque alius quemlibet sequentium metietur. Si primus autem secundi sit multiplex; & quicunque alius cuiuslibet sequentium multiplex erit.

*SINT deinceps proportionales quotcunque numeri A,B,C,D,E; & primus A, secundum B, metiatur. Dico & quemque illorum quemlibet sequentium metiri. Quòd enim quilibet proximè insequentem metiatur, perspicuum est. Nam cùm sit, vt A, ad B, ita B, ad C; C, ad D; & D, ad E; metiatur autẽ A, ipsum B; & B, ipsum C; & C, ipsum D; & D, ipsum E, metietur. Quòd autem quilibet illorum quemlibet sequẽtium metiatur, nempe B, ipsos D, & E, hoc modo ostendetur. Quia B, ipsum C, metitur, & C, ipsum D; [b] metietur quoq; B, ipsum D. Rursus quia D, ipsum E, metitur; [c] metietur quoque B, (ipsum D, metiens) eundem E. Et sic de reliquis.*

b 11. pron.
c 11. pron.

*SED iam primus A, multiplex sit B, secundi. Dico & quemque illorum cuiuslibet sequentium multiplicem esse. Cùm enim sit vt A, ad B, ita B, ad C; C, ad D; & D, ad E: sit autem A, ipsius B multiplex; erit & B, ipsius C; & C, ipsius D; & D, ipsius E, multiplex. Quilibet ergo cuiuslibet proximè insequẽtis multiplex est. Rursus quia D, ipsius E, est multiplex; metietur è contrario E, ipsum D: sunt autem, per inuersam rationem, E, D, C, B, A, continuè proportionales. Igitur & quilibet illorum quemlibet sequentium metietur, vt demonstratum est; Ac propterea è contrario, si maiores ad minores referantur, & quilibet cuiusque sequentium multiplex erit.*

A, 48. B, 24. C, 12. D, 6. E, 3.

*CONVERTEMVS etiam hanc propositionẽ 6. & theorema, quod primo loco in scholio demonstrauimus, hac ratione.*

Si sint quotcunque numeri deinceps proportionales, primus autẽ, vel alius quisquam nullum à secundo metiatur; neque primus secundũ metietur. Et si primus, vel alius quisquam nullius à secundo sit multiplex: neque primus secundi multiplex erit.

*SINT deinceps proportionales A,B,C,D,E; & primus A, vel alius quisq; nullum à secundo B, metiatur. Dico neq; A, primum, metiri B, secũdum. Si enim A, primus, secundum B, dicatur metiri; metietur quoq;, per ea, quæ secundo loco in hoc scholio ostendimus, quicunq; alius quemlibet sequentium. Quod est absurdum, cùm neq; primus, neq; alius quisquam vllum à secundo metiri ponatur. Non ergo A, ipsum B, metietur.*

A, 16. B, 24. C, 36. D, 54. E, 81.

*IAM verò A, primus, vel alius quisquam nullius à secundo B, sit multiplex. Dico neq; A, primum multiplicem esse B, secundi. Si namque A, primus multiplex esse dicatur B, secundi; multiplex quoque erit quicunque alius cuiuslibet sequentium, ex iis, quæ secundo theoremate huius scholij demonstrauimus. Quod est absurdum. Neq; enim primus, neque alius quisquam vllius à secundo multiplex esse ponitur. Non igitur A, ipsius B, multiplex erit.*

A, 81. D, 54. C, 36. D, 24. E, 16.

## THEOR. 5. PROPOS. 7. 7.

Si sint quotcunque numeri deinceps proportionales, primus autẽ extremum metiatur, is etiam metietur secundum.

SINT deinceps proportionales A,B,C,D,E; & A, primus extremũ E, metiatur. Dico & A, primum metiri B, secundum. Si enim A, ipsum B, non dicatur metiri: [a] neq; alius quisquam vllum metietur. Quare nec A, ipsum E. Quod est absurdum. Ponitur enim A, metiri E. Igitur A, primus B, secundum metietur; Atque idcircò, si sint quotcunque numeri deinceps proportionales, &c. Quod erat demonstrandum.

[a] 6. octaui. A,3. B,6. C,12. D,24. E,48.

*SCHOLIVM.*

*VT theorema, quod secundo loco in scholio precedentis propositionis demonstrauimus, conuertamus, amplificabimus hanc propositionem hoc modo.*

SI sint quotcunque numeri deinceps proportionales, primus autẽ, vel alius quisquam quemlibet à secundo metiatur; metietur & primus secundum. Et si primus, vel alius quisquam cuiuslibet à secundo sit multiplex; primus quoque secundi multiplex erit.

*QVOD eodem modo demonstrabimus. Si enim primus non dicatur metiri secundum, vel illius esse multiplex; neque alius quisquam vllum metietur; vel illius multiplex erit, ex propos. 6. & 1. theoremate scholij precedentis. quod est contra hypothesin.*

## 8. THEOR. 6. PROPOS. 8.

SI inter duos numeros medij continua proportione ceciderint numeri; quot inter eos medij continua proportione cadunt numeri: tot & inter alios eandem cum illis habentes rationem medij continua proportione cadent.

Cadant inter duos numeros A,B, medij proportionales continuè C,D; sitque vt A, ad B, ita E, ad F. Dico tot medios numeros continuè proportionales cadere inter E, & F, quot inter A, & B.

A,24. C,36. D,54. B,81.
[b] 3. octaui. G,8. H,12. I,18. K,27.
E,32. L,48. M,72. F,108.

[c] 23. septimi. A,40. C,20. D,10. B,5.
[d] 21. septimi. G,8. H,4. I,2. K,1.
E,8. L,4. M,2. F,1.

[e] 9. pron. A,27. C,9. D,3. B,1.
G,27. H,9. I,3. K,1.
E,108. L,36. M,12. F,4.

Sumptis enim totidem numeris G,H,I,K, minimis in ratione A, ad C, quot sunt numeri A,C,D,B; erit ex æquo, vt A, ad B, atque adeò vt E, ad F, ita G, ad K. [b] Quare cùm G, & K, inter se primi sint, quippe qui extremi sint minimorum numerorum; [c] ac propterea in sua proportione minimi; [d] æquè metietur G, ipsum E, & K, ipsum F. Quoties ergo G, & K, ipsos E, & F, metiuntur, toties H, & I, alios numeros L, & M, metiantur, ita vt numeri G,H,I,K, numeros E,L,M,F, æquè metiantur, singuli singulos. [e] Quia igitur G, H, I, K, multiplicantes numerum, per quẽ metiũtur numeros E,L,M,F, ipsos E,L,M,F, producũt; in eisdẽ rationibus erũt E,L,M,F, in quibus G,H,I,K, vt ad propos. 18. lib. 7. demonstrauimus. At G,H,I,K, sunt continuè proportionales. Igitur & E,L,M,F, continuè proportionales sunt; Atque idcircò, cùm multitudo E,L,M,F, æqualis sit multitudini A,C,D,B; tot cadent medij proportionales inter E, & F, quot inter A, & B. Si igitur inter duos numeros medij continua proportione ceciderint, &c. Quod demonstrandum erat.

*SCHOLIVM.*

*NON solùm ex demonstratione constat, totidem medios proportionales cadere inter E, & F, quot inter A, & B; verùm etiam eandem esse proportionem numerorum E,L,M,F, quæ est numerorum A,C,D,B. Ostensum enim est E,L,M,F, in eadem esse proportione, in qua G,H,I,K: Sed hi eandem habent, ex constructione, quam A,C,D,B. Igitur & E,L,M,F, eandem habent, quam A,C,D,B.*

*EADEM hac propositio vera est, si existentibus numeris A, & B, sumatur vel E, vel F, vnitas. Item si vel A, vel B, fuerit vnitas, existentibus E, & F, numeris; vt in exemplis apparet.*

*CONSTAT etiam ex hoc theoremate, inter numeros dupla proportionis, vel superparticularis cuiusuis, vel superbipartientis, non posse cadere numerum medium proportionalem. Cùm enim dupla proportio in minimis numeris reperiatur inter binarium, & vnitatem; superparticularis verò inter numeros sola vnitate differentes; superbipartiens denique inter numeros, quorum differentia est binarius: si inter duos numeros duplæ proportionis, vel superparticularis, vel superbipartientis, medius numerus caderet proportionalis; caderet quoque, per hoc theorema, numerus aliquis medius proportionalis inter binarium, & vnitatem; vel inter numeros sola vnitate differentes, vel etiam binario: nimirum inter numeros minimos, qui easdem cum illis proportiones habent: quod fieri nulla ratione potest. Nam neque inter binarium & vnitatem, neq; inter duos numeros sola vnitate differẽtes, vllus numerus interponitur, tantum abest, vt aliquem medium proportionalem ipsi recipiant. Similiter inter duos numeros binario inter se distantes interijcitur solùm numerus, qui ab vtroque vnitate differt; Quem nulla posse ratione esse inter illos medium proportionalem, in hunc modum demonstrabimus. Differant numeri A B, C D, (siue C D, vnitas sit, & A B, ternarius, siue non,) binario, inter quos cadat numerus E F, minor vnitate quàm A B, maior verò quàm C D, vnitate quoque. Dico E F,*

*non*

A.. G. B | A..... G. B
E. H. F | E..... H. F
C. D | C..... D

*non esse medium proportionalem inter A B, C D. Si enim dicatur esse A B, ad E F, vt E F, ad C D: ablato ex A B, numero A G, ipsi E F, æquali, vt reliqua sit vnitas G B; & ex E F, numero E H, ipsi C D, æquali, vt relinquatur etiam vnitas H F; erit quoq; vt A B, totus ad E F, totum, ita A G, ablatus ad E H, ablatum; cùm A G, E H, ipsis E F, C D, æquales sint, ex constructione. Igitur erit quoq; reliquus G B, ad reliquum H F, hoc est, vnitas ad vnitatem, vt totus A B, ad totum E F, maior ad minorem. Quod est absurdum. Non ergo E F, medius proportionalis est inter A B, & C D.*

*ITAQVE inter numeros triplæ proportionis medius proportionalis cadere non potest. Alioquin caderet etiam medius proportionalis, ex hoc theoremate, inter 3. & 1. minimos numeros proportionis triplæ, qui binario inter se differunt. quod fieri non posse, proximè demonstrauimus.*

*PARI ratione inter numeros quintuplæ proportionis cadere non potest medius proportionalis. Si enim cadere dicatur, cadet quoq;, ex hoc theoremate, medius proportionalis inter 5. & 1. minimos numeros proportionis quintuplæ. quod fieri non posse, ita demonstrabimus. Cadat primùm, si fieri potest,*

A..... B. E
D.. D...
C.

*inter quinarium A B, & vnitatem C, medius proportionalis binarius, vel ternarius D: ita vt sit A B, ad D, vt D, ad C: Et conuertendo C, ad D, vt D, ad A B. Et quoniam vnitas C, metitur D; metietur quoq; D, ipsum A B. At binarius, vel ternarius D, metitur quoq; senarium A E. Igitur D, metitur totum A E, & ablatum A B:* [a] *ac proinde & D, numerus metietur reliquam vnitatem B E. Quod est absurdum.* a 11 pron.

*CADAT deinde, si fieri potest, inter quinarium A B, & vnitatem C, medius proportionalis quaternarius D. Ostendemus ergo, vt prius, D, metiri quinarium A B: Metitur autem quaternarius D, quaternarium etiam A E. Igitur D, metitur totum A B, & ablatum A E:* [b] *ac proinde & D, numerus reliquam vnitatem E B, metietur. Quod est absurdum.* b 11. pron.

B.... E. B
D....
C.

*EX quibus fit, neq; illud interuallum Musicum, quod in dupla proportione consistit, vt Diapason, vel, vt vulgò dicitur, Octaua, neq; illud, quod in sesquioctaua proportione reperitur, cuiusmodi est Tonus, seu vulgò Secunda, bifariam posse secari, hoc est, in duas proportiones æquales. Illa enim proportio bifariam (quod ad propositum attinet) secari dicitur, inter cuius terminos medius proportionalis cadit: Vt quia inter hos terminos 24. & 6 proportionis quadruplæ cadit medius proportionalis numerus 12. hoc modo: 24. 12. 6. Idcircò proportio quadrupla bifariam diuisa esse dicitur in duas duplas proportiones. Cùm ergo ostensum sit, inter numeros duplæ proportionis, & superparticularis, qualis est sesquioctaua, nõ cadere medium numerum proportionalem; perspicuum est, Diapason, & Tonum, bifariam secari non posse. Vnde Diapason prima sui diuisione in Diapenten, & Diatessaron, quorum interuallorum illud in proportione sesquialtera, hoc verò in sesquitertia consistit, apud Musicos secatur, vt hic apparet, 2. 3. 4. Est enim hic proportio dupla diuisa in proportionem sesquialterã, & sesquitertiam, tanq; in maximas sui partes inter se inæquales. Ita quoq; Tonus in duo semitonia, quorũ alterũ maius, alterũ minus dicitur, secari solet. Sed de his plura apud Musicos reperies.*

*RVRSVM ex his demonstrari potest, proportionem diametri cuiusuis quadrati ad latus eiusdem, numeris non posse exprimi, sed esse irrationalem. Cùm enim per ea, quæ ad propos. 47. lib. 1. demonstrauimus, quadratum diametri duplum sit quadrati ex latere descripti; quadratorum verò proportio sit duplicata proportionis laterum; fit, vt proportio quadrati ex diametro descripti ad quadratum lateris duplicata sit proportionis diametri ad latus. Cùm ergo illa proportio, cuius duplicata est proportio dupla, numeris exprimi nequeat, q; inter numeros duplæ proportionis medius proportionalis nõ cadat, qui illam bifariam secet, vt ostendimus; manifestum est, nec proportionem diametri ad latus numeris exprimi posse, sed esse irrationalem, seu, quod idem est, diametrum esse lateri incommensurabilem. qua de re plura ad 9. & vltimam propos. lib. 10. scribemus.*

## THEOR. 7. PROPOS. 9. 9.

**SI duo numeri sint inter se primi, & inter eos medij cõtinua proportione ceciderint numeri; quot inter eos medij continua proportione cadunt numeri, totidem & inter vtrumque eorum, ac vnitatem medij continua proportione cadent.**

A, 8. C, 12. D, 18. B, 27.
Vnitas.
1.
E, 2. F, 3.
G, 4. H. 6. I, 9.
K, 8. L, 12. M, 18. N, 27.

*CADANT inter numeros A, B, inter se primos medij continuè proportionales C, D. Dico totidẽ cadere continuè proportionales inter vnitatem, & A, nec non inter vnitatem, & B, quot inter A, & B, cadunt. Inuentis enim duobus numeris E, & F, minimis in ratione A, ad C;* [a] *sumantur in eadem proportione tres minimi G, H, I, & quatuor K, L, M, N, & sic deinceps, donec multitudo assumptorũ æqualis sit multitudini A, C, D, B. Quoniã ergo A, B, extremi inter se, primi sunt;* [b] *erũt A, C, D, B, minimi in proportione E, ad F. Sunt autẽ & totidẽ K, L, M, N, ex constructione, in eadẽ proportione minimi. Igitur K, L, M, N, ipsis A, C, D, B, æquales sunt, singuli singulis, vt K, ipsi A; & N, ipsi* a 2. octaui. b 1. octaui.

A, 8. C, 12. D, 18. B, 27.
Vnitas.
1.
E, 2. F, 3.
G, 4. H. 6. I, 9.
K, 8. L, 12. M, 18. N, 27.

B, ne minores minimis dentur. Quia verò, vt cõstat ex demonstratione propos. 2. huius libri, E, seipsum multiplicans produxit G; multiplicans verò ipsum G, fecit K, [a] metietur E, ipsum G, per E; & G, ipsum K, per eundem E: [b] Metitur autem & vnitas ipsum E, per E. Æquè igitur metietur vnitas ipsum E, & E, ipsum G, & G, ipsum K; Ac propterea eadem pars erit vnitas ipsius E, & E, ipsius G, & G, ipsius K. [c] Proportionales ergo sunt deinceps, vnitas, & numeri E, G, K. Simili ratione, cùm manifestum sit ex eadem demonstratione propos. 2. huius lib. quòd F, seipsum multiplicans producat I, multiplicans verò ipsum I, faciat N; [d] metietur F, ipsum I, per F, & I, ipsum N, per eundem F; [e] Metitur autem & vnitas ipsum F, per F. Æquè igitur metietur vnitas ipsum F, & F, ipsum I, & I, ipsum N; Ac propterea eadem pars erit vnitas ipsius F, & F, ipsius I, & I, ipsius N. [f] Proportionales ergo sunt continuè, vnitas, & numeri F, I, N; Ac proinde cùm tam multitudo E, G, K, quàm F, I, N, vnà cum vnitate, æqualis sit multitudini K, L, M, N, vel A, C, D, B; (vt perspicuum est ex positione 2. huius libri. Nam duo E, F, sunt secundi ab vnitate: & tres G, H, I, tertij; & quatuor K, L, M, N, quarti, &c.) tot cadent medij continuè proportionales numeri inter vnitatem, & K, numerum, seu A, sibi æqualem; & inter vnitatem, & numerum N, siue B, sibi æqualem, quot inter numeros A, B. Si duo ergo numeri sint inter se primi, & inter eos medij, &c. Quod ostendendũ erat.

[a] 7. pron. [b] 5. pron. [c] 20. defin. [d] 7. pron. [e] 5. pron. [f] 20. defin.

## SCHOLIVM.

*PERSPICVVM autem est, numeros, qui in continua proportione cadunt inter numeros A, & B, atq; vnitatem, habere proportiones denominatas à minimis numeris proportionis A, ad C; hoc est, quas habent E, & F, numeri ad vnitatem; id quod in scholio propos. 2. huius lib. quoq; asseruimus.*

*CONSTAT etiam ex demonstratione hac, si numerus seipsum multiplicans aliquem fecerit; & rursum multiplicet productum, & sic deinceps: omnes productos esse continuè proportionales ab vnitate. Ostensum enim est & E, G, K, & F, I, N, qui hac ratione sunt procreati, ex demonstratione propos. 2. huius lib. continuè esse proportionales ab vnitate.*

## 10. THEOR. 8. PROPOS. 10.

SI inter duos numeros, & vnitatem, continuè proportionales ceciderint numeri; quot inter vtrunque ipsorum, & vnitatem deinceps medij continua proportione cadunt numeri, totidem & inter ipsos medij continua proportione cadent.

CADANT inter vtrumque numerorum A, B, & vnitatem, quotcunque numeri medij continuè proportionales; inter A, quidem & vnitatem, numeri C, D, E: At verò inter B, & vnitatem, numeri F, G, H, illis multitudine æquales. Dico totidem medios continuè proportionales cadere inter A, & B, quot inter vtrumque A, B, & vnitatem. Multiplicantes enim se mutuò C, & F, faciant I. Deinde C, multiplicans I, & G, faciat K, & L. Rursus idem C, multiplicans K, L, & H, faciat M, N, & O, totidem inter A, & B, quot sunt inter vtrumque A, B, & vnitatem. Quoniam igitur est, vt vnitas ad C, ita C, ad D; D, ad E; & E, ad A; æquè metietur vnitas ipsum C, & C, ipsum D, & D, ipsum E, & E, ipsum A: [g] Metietur autem vnitas ipsum C, per C. Igitur & C, ipsum D, & D, ipsum E, & E, ipsum A, per C, metietur. [h] Quare C, seipsum multiplicans fecit D; multiplicans autem D, fecit E, & multiplicans E, fecit A. Eadem ratione F, seipsum multiplicans fecit G, & multiplicans G, fecit H, & multiplicans H, fecit B. Itaque cùm C, multiplicans C, & F, fecerit D, & I; [i] erit, vt C, ad F, ita D, ad I. Similiter, quia F, multiplicans C, & F, fecit I, & G; [k] erit vt C, ad F, ita I, ad G. Sunt igitur tres D, I, G, continuè proportionales in ratione C, ad F. Rursus quia C, multiplicans D, I, G, fecit E, K, L; habebunt E, K, L, per ea, quæ ad propos. 18. lib. 7. ostendimus, eandẽ proportionem continuam, quam D, I, G, hoc est, quam C, ad E. Eodem modo, quia C, & F, multiplicantes G, fecerunt L, & H; [l] erit vt C, ad F, ita L, ad H. Quatuor ergo numeri E, K, L, H, continuè proportionales sunt in ratione C, ad F. Postremò, quia C, multiplicans E, K, L, H, fecit A, M, N, O, habebunt ex iis, quæ à nobis sunt demonstrata ad propos. 18. lib. 7. A, M, N, O, eandem continuam proportionem, quam E, K, L, H, hoc est, quam C, ad F. Eadem ratione, cùm C, & F, multiplicantes H, fecerint O, & B, [m] erit, vt C, ad F, ita O, ad B. Quinque igitur numeri A, M, N, O, B, continuè proportionales sunt in ratione C, ad F; Ac proinde tot medij proportionales cadunt inter A, & B, quot inter A, vel B, & vnitatem, cùm multitudo M, N, O, facta sit æqualis multitudini C, D, E, vel F, G, H. Quocirca si inter duos numeros, & vnitatem, continuè proportionales ceciderint numeri, &c. Quod erat demonstrandum.

A, 81. M, 162. N, 324. O, 648. B, 1296.
E, 27. K, 54. L, 108. H, 216.
D, 9. I, 18. G, 36.
C, 3. F, 6.
1.
Vnitas.

[g] 5. pron. [h] 9. pron. [i] 17. septimi. [k] 17. sept. [l] 18. sept. [m] 18. sept.

SCHOLIVM.

## SCHOLIVM.

*Ex his constat, numeros, qui medij proportionales cadunt inter A, & B, proportionem habere, quam duo numeri vnitati propinquiores, quales sunt C, & F, habent.*

*Patet etiam ex hac demonstratione, si quotquot numeri fuerint ab vnitate continuè proportionales, secundum ab vnitate in se multiplicatum producere tertium, & ex eodem in hunc fieri quartum; & ex eodem in hunc gigni quintum, & sic deinceps. Demonstratū enim est, ex eò quòd C, D, E, A, continuè proportionales sunt ab vnitate; D, tertium fieri ex C, secundo in se; & E, ex C, in D; & A, ex eodem C, in E, &c.*

*Liber hoc loco nonnulla alia theoremata demonstrare ad numeros continuè proportionales pertinentia, quæ tum ad ea, quæ sequuntur, tum ad alia multa erunt vtilia; hinc initium sumentes.*

### I.

Si sint ab vnitate duo ordines numerorum continuè proportionalium, & multitudine æqualium; habebunt tertij ab vnitate proportionem duplicatam eius, quam habent secundi ab vnitate; quarti verò eiusdem triplicatam; & quinti quadruplicatam; & semper deinceps vno amplius.

*Sint numeri A, B, C, D, continuè ab vnitate proportionales, & ab eadem totidem alij E, F, G, H. Dico proportionem B, tertij ab vnitate ad F, ab eadem tertium, duplicatam esse eius, quam habet A, secundus ad E, secundum, &c. Quoniam enim inter vtrumque numerorum E, F, & vnitatem cadit medius vnus proportionalis; inter B, quidem & vnitatem, numerus A; At inter F, & vnitatem numerus E; [a] cadet quoq; inter B, & F, vnus medius proportionalis: atq; adeò, per scholium huius propositionis in ratione A, ad E. Cadat igitur, & sit I. Eodem modo cadent inter C, & G, duo medij in eadem proportione A, ad E, qui sint K, L. quot nimirum cadunt inter vtrumque C, G, & vnitatem. Nec nō inter D, H, tres, qui sint M, N, O, in eadem ratione A, ad E, proportionales. Quoniam igitur ex definitione B, ad F, proportionem habet duplicatam eius, quam habet B, ad I; Est autem vt B, ad I, ita A, ad E; Habebit quoq; B, ad F, rationem duplicatam eius, quam habet A, ad E. Non aliter habebit C, ad G, rationem triplicatam rationis A, ad E; quia ratio C, ad G, triplicata est proportionis C, ad K; & est vt C, ad K, ita A, ad E. Sic etiam D, ad H, rationem habebit quadruplicatam rationis A, ad E, & sic de cæteris.*

[a] 10. octaui

D, 81. M, 108. N, 144. O, 192. H, 256.
C, 27. K, 36. L, 48. G, 64.
B, 9. I, 12. F, 16.
A, 3. E, 4.
1.
Vnitas.

*Hoc idem demonstrabimus, si fuerint duo ordines numerorum continuè proportionalium, ab aliquo numero eodem incipientes. Vnde hoc idem theorema ita proponemus.*

### II.

Si sint ab aliquo numero eodem duo ordines numerorū continuè proportionalium, & multitudine æqualium; Habebunt tertij ab illo numero proportionem duplicatam eius, quam habent secundi ab eodem; quarti verò eiusdem triplicatam; & quinti quadruplicatam; & semper deinceps vno amplius.

*Sint ab A, numero continuè proportionales B, C, D, E, & ab eodem totidem alij F, G, H, I. Dico rursum proportionis B, ad F, esse duplicatam proportionem C, ad G. & D, ad H, triplicatam: & E, ad I quadruplicatam. Ex A, in se fiat K, & ex A, in K, fiat L, & ex A, in L, fiat M. Similiter ex B, in se fiat N; & ex B, in N, fiat O; & ex B, in O, fiat P. Postremò ex F, quoque in se fiat Q; & ex F, in Q, fiat R & ex F, in R, fiat S Quibus peractis, erunt A, K, L, M, continuè proportionales ab vnitate, vt constat ex scholio propositionis 9. huius libri. Eademq; ratione erunt B, N, O, P, ab vnitate proportionales; necnon & F, Q, R, S. Quia igitur ratio N, ad K, duplicata est rationis B, ad A, ex theor. 1. huius scholij: Est autem ex definitione eiusdem rationis B, ad A, duplicata quoque ratio C, ad A, erit C, ad A, vt N, ad K. Eodem modo erit A, ad G, vt K, ad Q. Nam ex eodem primo theoremate est ratio K, ad Q, duplicata rationis A, ad F; & eiusdem, ex definitione duplicata est ratio A, ad G. Quare cùm sit C, ad A, vt N, ad K: & A, ad G, vt K, ad Q: erit ex æquo C, ad G, vt N, ad Q: Atqui ratio N, ad Q, duplicata est rationis B, ad F, ex theoremate primo huius scholij: quòd tam B, N, quam F, Q, sint ab vnitate continuè proportionales, ex scholio propositionis 9. huius libri. Igitur & ratio C, ad G, duplicata est rationis B, ad F. Eisdem argumentis erit ratio D, ad H, triplicata rationis B, ad F. Nam ratio O, ad L, ex primo theoremate, triplicata est rationis B, ad A: quòd tam B, N, O, quàm A, K, L, sint ab vnitate continuè proportionales, ex scholio propositionis 9. huius libri, & eiusdem triplicata est ratio D, ad A, ex de-*

E, 162. I, 512.
D, 54. Vnitas. H, 128.
C, 18. 1. G, 32.
B, 6. F, 8.
A, 2.
N, 36. K, 4. Q, 64.
O, 216. L, 8. R, 512.
P, 1296. M, 16. S, 4096.

E, 81. I, 1.
D, 54. Vnitas. H, 2.
C, 36. 1. G, 4.
B, 24. F, 8.
A, 16.
N, 576. K, 256. Q, 64.
O, 13824. L, 4096. R, 512.
P, 331776. M, 65536. S, 4096.

finitione. Igitur est D, ad A, vt O, ad L. Eodemq; modo est A, ad H, vt L, ad R: quòd vtraque proportio triplicata sit proportionis A, ad F: Proportio quidem A, ad H, ex defin. at proportio L, ad R, ex primo theoremate huius scholij propterea quòd tam A, K, L, quàm F, Q, R, continuè proportionales sunt ab vnitate, ex scholio propositionis 9. huius libri. Est ergo ex æquo D, ad H, vt O, ad R. Sed ratio O, ad R, triplicata est rationis B, ad F, eò quòd tam B, N, O, quàm F, Q, R, sunt continuè proportionales ab vnitate ex scholio propositionis 9. huius lib. Igitur & ratio D, ad H, triplicata est eiusdem rationis B, ad F. Non secus demonstrabimus rationem E, ad I, esse quadruplicatam rationis B, ad F. Atque ita deinceps.

IDEM omnino demonstrabitur, si numeri vnius ordinis desinant in vnitatẽ, vt ex secunda figura est manifestum, in qua I, est vnitas.

CÆTERVM theorema hoc demonstrabitur etiã in lineis ab vna & eadem linea proportionalibus, libro 14. propositione 28. licèt non in quotcunque lineis. Vnde multò generalius est hoc in numeris, quàm illud in lineis. Ex his autem in hunc modum demonstratis efficiemus propositionem hanc 10. Euclidis magis vniuersalem, hoc modo.

## III.

Si inter duos numeros, & aliquem alium numerũ assumptum, continuè proportionales ceciderint numeri; quot inter vtrumque ipsorum, & assumptum, deinceps medij continua proportione cadũt numeri, totidẽ & inter ipsos medij cõtinua proportione cadẽt.

CADANT inter vtrumque numerorum A, B, & assumptum numerum C, quotlibet numeri continuè proportionales; inter A, quidem & C, numeri D, E, F; inter B, verò & C, totidẽ numeri G, H, I. Dico tot quoque medios continuè proportionales cadere inter A, & B, quot inter A, & C, & inter B, & C. Item tot inter F, & I, quot inter F, & C, & inter I, & C. Et tot inter E, & H, quot inter E, & C, & inter H, & C. Sumptis enim tribus K, L, M, minimis in ratione D, ad G, erit ex defin. ratio K, ad M, duplicata rationis K, ad L, hoc est, D, ad G: Sed per theor. 2. huius scholij, ratio quoq; E, ad H, duplicata est eiusdem rationis D, ad G. Igitur est, vt K, ad M, ita E, ad H; Atq; adeò cũ inter K & M, cadat vnus medius proportionalis L; [a] cadet quoq; vnus medius: nimirum N, inter E, & H, quemadmodum & inter D, & C, & inter H, & C, vnus medius cadit. Simili modo, si in eadem proportione D, ad G, sumantur quatuor minimi numeri, ostendemus inter F, & I, duos medios cadere, sicut & inter F, & C & inter I, & C, duo medij cadunt. Et eadẽ ratione inter A, & B, tres medij cadent, si in eade proportione D, ad G, sumãtur quinq; numeri minimi.

A, 1048576 Q 32768 R, 1024 S, 32. B, 1.
F, 6553 O, 2048. P, 64. I, 2.
E, 4096. N, 128. H, 4.
D, 256. G, 8.
C, 16.
K, 1024. L, 32. M, 1.

a 8. octaui.

HOC etiam verum est, si loco alterius numeri, nimirum B, vnitas assumatur, veluti perspicuum est in hac secunda figura, in qua numerus B, vnitas est, caduntq; tam inter A, & C, quàm inter B, & C, tres numeri continuè proportionales, quot scilicet inter A, & B, cadunt, &c.

EX his etiã apparet, numeros, qui medij proportionales cadunt inter A, & B; necnon inter F, & I; atq; inter E, & H, proportionem habere, quàm duo numeri D, & G, numero assumpto C, propinquiores.

## 11. THEOR. 9. PROPOS. 11.

DVORVM quadratorum numerorum vnus medius proportionalis est numerus: Et quadratus ad quadratum duplicatam habet lateris ad latus rationem.

SINT quadrati numeri A, & B, quorum latera C, & D. Dico inter A, & B, vnum medium proportionalem numerum cadere: & proportionem A, & B, quadrati ad quadratum, esse duplicatam proportionis C, ad D, lateris ad latus. Multiplicantes enim se mutuò C, & D, faciant E. Quia igitur C, multiplicans seipsum fecit A, quadratũ, ex defin. quadrati; & ipsum D, multiplicans, fecit E, ex constructione [a] erit vt C, ad D, ita A, ad E. Rursus, quia D, multiplicãs C, fecit E, ex cõstructione; & multiplicãs seipsum, ex defin. quadrati, fecit B, quadratũ; [b] erit quoq; vt C, ad D, ita E, ad B. Quare A, E, B, continuè proportionales sunt in ratione laterũ C, & D. Ac proinde inter quadratos A, & B, medius continuè proportionalis cadit E. Quia verò ex eo qd A, E, B, continuè proportionales sunt, numerus A, & B, duplicatam rationẽ habet eius, quam habet A, ad E; duplicatam quoq; rationem habebit A, quadratus ad B, quadratum eius, quã habet C, latus ad latus D; cũ hæc proportio eadẽ

a 17. sept.

b 17. sept.

sit,

sit, quæ A, ad E. Duorum ergo quadratorum numerorum vnus medius proportionalis est, &c. Quod demonstrandum erat.

*SCHOLIVM.*

*PERSPICVVM est ex dictis, inter duos quadratos numeros cadere numerum medium proportionalem in continua proportione lateris ad latus. Nam eadem est proportio quadrati A, ad E, medium proportionalem, quæ lateris C, ad latus D, vt demonstratum est.*

*PARI ratione liquet, numerum medium proportionalem E, & vtrumlibet quadratorum A, B, esse inter se compositos. Cùm enim A, E, B, proportionales sint ostensi in ratione C, ad D; hoc est, esse A, ad E, & E, ad B, vt C, ad D; metiatur autem latus D, quadratum suum B, consequens consequentem, si de proportionibus E, ad B, & C, ad D, loquamur; metietur & C, ipsum E, antecedens antecedentem; quandoquidem est E, ad B, vt C, ad D. Metitur autem & latus C, quadratum suum A. Igitur E, & A, mensuram communem habent C; atq; adeò inter se sunt compositi. Similiter cùm sit A, ad E, vt C, ad D; & metiatur latus C, suum quadratum A, antecedens antecedentem; metietur quoque D, ipsum E, consequens consequentem. Quare cùm & latus D, metiatur suum quadratum B; habebunt E, & B, communem mensuram D; Ideoq; compositi erunt inter se. Perspicuum autem est ex hac demonstratione, priorum numerorum A, E, communem mensuram esse C, latus prioris quadrati A; posteriorum verò E, B, mensuram communem esse D, latus quadrati posterioris B.*

A, 9. E, 21. B, 49.
C, 3. D, 7.

## THEOR. 10. PROPOS. 12. 11.

DVORVM cuborum numerorum duo medij proportionales sunt numeri: Et cubus ad cubum triplicatam habet lateris ad latus rationem.

SINT numeri cubi A, & B, quorum latera C, & D. Dico inter A, & B, duos medios numeros continuè proportionales cadere: Et proportionem A, ad B, cubi ad cubum, triplicatam esse proportionis C, ad D, lateris ad latus. Multiplicans enim C, seipsum faciat E; & D, seipsum multiplicans faciat F; At C, & D, se mutuò multiplicantes faciant G; Multiplicantes verò G, faciant H, & I. Quoniam igitur C, seipsum, & D, multiplicans fecit E, & G; [a] erit, vt C, ad D, ita E, ad G. Eadem ratione, cùm D, multiplicans C, & seipsum, fecerit G, & F; [b] erit quoque vt C, ad D, ita G, ad F; propterea{que} E, G, F, continuè proportionales sunt in ratione C, ad D. Rursus quia ex definitione cubi, C, ipsum E, multiplicans fecit A; & ex constructione multiplicans ipsum G, fecit H; [c] erit vt E, ad G; hoc est, vt C, ad D, ita A, ad H. Similiter cùm D, ipsum G, multiplicans fecerit, ex constructione, numerum I; multiplicans verò ipsum F, ex definitione cubi, fecerit cubum B; [d] erit quoque, vt G, ad F; hoc est, vt C, ad D, ita I, ad B: [e] Est autem & H, ad I, vt C, ad D; quòd C, & D, ipsum G, multiplicantes fecerint ex constructione, H, & I. Igitur A, H, I, B, continuè sunt proportionales in ratione C, ad D; Atque adeò inter cubos A, & B, duo medij H, & I, cadunt continuè proportionales. Quoniam verò, ex eo quòd A, H, I, B, continuè sunt proportionales, numerus A, ad B, triplicatam habet rationem eius, quam habet A, ad H; triplicatam quoque rationem habebit A, ad B, cubus ad cubum, eius, quam habet C, ad D, latus ad latus, cùm sit C, ad D, vt A, ad H. Quam ob rem duorum cuborum numerorum duo medij proportionales sunt numeri, &c. Quod erat ostendendum.

A, 27. H, 36. I, 48. B, 64.
E, 9. G, 12. F, 16.
C, 3. D, 4.

[a] 17. septimi.
[b] 17. septimi.
[c] 17. septimi.
[d] 17. septimi.
[e] 18. septimi.

*SCHOLIVM.*

*HIC quoque manifestum est, inter duos cubos cadere duos numeros medios proportionales in continua proportione lateris ad latus. Ostensum enim est, ita esse A, ad H, & H, ad I, & I, ad B, vt C, ad D.*

*EODEM modo constat, duos numeros medios proportionales H, I, & vtrumlibet cuborum A, B, esse inter se compositos. Cùm enim A, H, I, B, ostensi sint proportionales in ratione C, ad D; hoc est, esse A, ad H, & I, ad B, vt C, ad D: Metiatur autem latus D, cubum suum B, consequens consequentem, si de proportionibus I, ad B, & C, ad D, loquamur; metietur quoque C, ipsum E, antecedens antecedentem; quandoquidem est I, ad B, vt C, ad D: Metitur autem & latus C, cubum suum A; immò & ipsum H, quòd H, factus sit ex multiplicatione C, in G, ex constructione. Igitur A, H, I, communem habent mensuram C; atq; adeò inter se compositi sunt. Similiter cùm sit A, ad H, vt C, ad D; metiatur autem latus C, cubum suum A, antecedens antecedentem; metietur quoque D, ipsum H, consequens consequentem: Metitur autem & latus D, cubum suum B; immò & ipsum I, quòd I, factus sit ex multiplicatione D, in G, ex constructione. Igitur H, I, B, communem mensuram habent D; Ac proinde sunt inter se compositi. Manifestum etiam hic est, priorum trium numerorum A, H, I, communem mensuram esse C, latus cubi prioris A; posteriorum verò trium H, I, B, mensuram communem esse D, latus posterioris cubi B.*

A, 27. H, 36. I, 48. B, 64.
E, 9. G, 12. F, 16.
C, 3. D, 4.

12. # THEOR. 11. PROPOS. 13.

**Si sint quotlibet numeri deinceps proportionales, & multiplicans quisque seipsum faciat aliquos; qui ab illis producti fuerint, proportionales erunt: Et si numeri primùm positi multiplicantes iam factos fecerint aliquos: ipsi quoque proportionales erunt: Et semper circa extremos hoc eueniet.**

SINT continuè proportionales A,B,C, qui seipsos multiplicantes faciant D,E,F; multiplicantes autem ipsos D,E,F, faciant G,H,I; & rursum multiplicantes ipsos G,H,I, faciant K,L,M, & ita deinceps. Dico quoque D,E,F, & G,H,I, & K,L,M, continuè esse proportionales. Multiplicantes enim A, & B, se mutuò faciant N; & B,C, se mutuò multiplicantes faciant O. Deinde A, multiplicans N,E, faciat P,Q. Item B, multiplicans O,F, faciat R,S. Simili modo A, multiplicans P,Q,H,

A, 2. B, 4. C, 8.
D, 4. N, 8. E, 16. O, 32. F, 64.
G, 8. P, 16. Q, 32. H, 64. R, 128. S, 256. I, 512.
K, 16. T, 32. V, 64. X, 128. L, 256. Y, 512. Z, 1024. a, 248. M, 4096.

faciat T,V,X; & B, multiplicans R,S,I, faciat Y,Z,a. Quoniam igitur A, multiplicãs seipsum, & B, fecit D, & N; [a] erit vt A, ad B, ita D, ad N. Eodem modo, quia B, multiplicãs A, & seipsum, fecit N, & E; erit etiam, vt A, ad B, ita N, ad E. Sunt igitur D,N,E, continuè proportionales in ratione A, ad B. Rursus, quia B, seipsum, & numerum C, multiplicans fecit E, & O; [b] erit vt B, ad C, ita E, ad O. Eademq; ratione, cùm C, multiplicans B, & seipsum, fecerit O, & F; erit vt B, ad C, ita O, ad F; propterea quę & E,O,F, continuè proportionales sunt in ratione B, ad C, seu A, ad B. Quare cùm D,N,E, in eadem ratione sint continuè proportionales, in qua E,O,F; erit ex æquo D, ad E, vt E, ad F; atque adeò D,E,F, continuè proportionales sunt.

a 17. sept.

b 17. sept.

DEINDE, quia A, multiplicans D,N,E, fecit G,P,Q; erunt ex iis, quæ ad propos. 18. lib. 7. ostendimus, G,P,Q, in eadem ratione, in qua D,N,E, hoc est, in ratione A, ad B, proportionales. Item quia A, & B, multiplicantes E, fecerunt Q, & H; [c] erit quoque vt A, ad B, ita Q, ad H. Sunt ergo G,P,Q,H, proportionales in ratione A, ad B. Similiter quia B, multiplicans E,O,F, fecit H,R,S; erũt ex demonstratis ad propos. 18. lib. 7. H,R,S, proportionales in ratione E,O,F, hoc est, B, ad C, seu A, ad B. Et eodem modo cùm B,C, multiplicantes F, fecerint S, & I; [d] erit vt B, ad C, hoc est, vt A, ad B, ita S, ad I; propterea quę & H,R,S,I, proportionales sunt in ratione A, ad B. Quocirca, cùm G,P,H,Q, eandem habeant proportionem continuam, quam H,R,S,I; erit ex æquo G, ad H, vt H, ad I; Ac proinde G,H,I, continuè sunt proportionales.

c 18. sept.

d 18. sept.

NON dissimili argumẽto demonstrabimus & K,L,M, esse continuè proportionales; & eodem modo in aliis procedemus. Igitur si sint quotlibet numeri deinceps proportionales, & multiplicans quisque seipsum, &c. Quod ostendendum erat.

## *SCHOLIVM.*

*SVNT autem, vt ex demonstratione liquet, numeri primo loco producti D,E,F, proportionales in dupla ratione datorum numerorum A,B,C. Nam D, ad E, habet proportionem duplicatam eius, quam habet D, ad N, hoc est, A, ad B, &c.*

*ITA quoq; numeri secundo loco geniti G,H,I, erunt in ratione triplicata A, ad B: Et numeri tertio loco procreati in quadruplicata, & sic deinceps semper vno amplius.*

*BREVIS propositionem totam demonstrabimus, hac ratione. Fiant ex A,B,C, continuè proportionalibus in seipsos, numeri D, E, F; & in hos ex eisdem numeri G,H,I; & rursum ex eisdem in hos numeri K, L,M. Dico D,E,F; & G,H,I; & K,L,M, esse quoq; continuè proportionales. Nam ex scholio propos. 9. huius lib. tam A,D,G,K, quàm B,E,H,L; & C,F,I,M, continuè sunt ab vnitate proportionales. Quare ex 1. theor. scholij propos. 10. huius lib. erit D, ad E, in duplicata ratione A, ad B, vel B, ad C. Sed eiusdem rationis B, ad C, duplicata est ratio E, ad F, per idem theorema. Igitur D,E,F, continuè sunt proportionales in duplicata ratione A, ad B, & B, ad C. Eodem modo ostendemus G,H,I, esse proportionales continuè in triplicata ratione rationis A, ad B, & B, ad C: At verò K,L,M, in quadruplicata, atq; ita de cæteris.*

A, 2. B, 4. C, 8.
D, 4. E, 16. F, 64.
G, 8. H, 64. I, 512.
K, 16. L, 256. M, 4096.

*EX quarursum demonstratione apparet, numeros primo loco productos, esse in duplicata ratione datorum numerorum; secundo verò loco procreatos, in triplicata, &c. Id quod luce clarius ex 1. theor. scholij propositionis 10. huius lib. elicitur.*

*QVAMVIS autem in vtraque demonstratione huius propos. 13. dati sint tantùm tres numeri continuè proportionales A,B,C; eandem tamen propositionem demonstrabimus, etiamsi plures fuerint, q̃ tres. Sint namque numeri plures, q̃ tres A,B,C,D, continuè proportionales, qui se ipsos multiplicantes faciant E,F,G,H postea verò multiplicantes ipsos E,F,G,H, faciant I,K,L,M, & sic deinceps. Quoniam igitur E,F,G, [a] ex demonstratis proportionales*

A, 2. B, 4. C, 8. D, 16.
E, 4. F, 16. G, 64. H, 256.
I, 8. K, 64. L, 512. M, 4096.

a 13. octaui.

*tionales sunt: Item F,G,H: cùm illi producti sint ex A,B,C, proportionalibus in se ipsos: hi verò ex B,C,D, proportionalibus quoq; in se ipsos: Erunt E,F,G,H, continuè proportionales. Non secus proportionales erunt L,K,L,M, & alij deinceps eodem modo producti.*

## PROBL. 12. PROPOS. 14. 13.

SI quadratus numerus quadratum numerum metiatur: & latus vnius metietur latus alterius. Et si vnius quadrati latus metiatur latus alterius; & quadratus quadratum metietur.

METIATVR quadratus A, cuius latus C, quadratum B, cuius latus D. Dico & latus C, latus D, metiri. Multiplicantes enim se mutuò C, & D, faciant E. Quoniam igitur, vt liquet ex demonstratione propos. 11. huius libri, A, E, B, continuè proportionales sunt in ratione C, ad D; Metitur autem A, primus extremum B: [a] metietur quoque A, primus secundum E. Quare cùm sit vt A, ad E, ita C, ad D; & C, latus, latus D, metietur. [a] 7. octaui.

A, 4. E, 12. B, 36. C, 2. D, 6.

METIATVR iam C, latus, latus D. Dico & quadratũ A, quadratum B, metiri. Eodem enim modo erit, vt C, ad D, ita A, ad E, propterea quòd A, E, B, continuè proportionales sunt in ratione C, ad D, vt demonstratum est propos. 11. huius lib. Quare cùm C, metiatur D, metietur quoque A, primus E, secundum; ac proinde & extremum B, metietur, ex theor. 2. scholij propos. 6. huius lib. Si quadratus ergo numerus quadratum numerum metiatur, &c. Quod erat ostendendum.

## THEOR. 13. PROPOS. 15. 14.

SI cubus numerus cubum numerum metiatur; & latus vnius metietur latus alterius. Et si latus vnius cubi latus alterius metiatur; & cubus cubum metietur.

METIATVR cubus A, cuius latus C, cubum B, cuius latus D. Dico & latus C, metiri latus D. Vterque enim C, & D, seipsum multiplicans faciat E, & F; multiplicantes autem se mutuò faciant G: Multiplicantes denique G, faciant H, I. Quoniam igitur, vt apparet ex demonstratione propos. 12. huius lib. tam E, G, F, quàm A, H, I, B, continuè sunt proportionales in ratione C, ad D; Metitur autem A, primus B, extremum; [b] metietur quoque idem A, primus H, secundum. Cùm ergo sit, vt A, ad H, ita C, ad D; metietur & C, latus, latus D. [b] 7. octaui.

A, 8. H, 24. I, 72. B, 216. E, 4. G, 12. F, 36. C, 2. D, 6.

METIATVR iam C, latus, latus D. Dico & A, cubum, metiri cubum B. Eodem enim argumento erit, vt C, ad D, ita A, ad H, propterea quòd A, H, I, B, continuè proportionales sunt in ratione C, ad D, vt ostensum est propos. 12. huius lib. Quapropter cùm latus C, metiatur latus D, metietur & A, ipsum H; atque idcircò & extremum B, cubus cubum, ex iis, quæ ad propos. 6. huius libri demonstrauimus. Itaq; si cubus numerus cubum numerũ metiatur, &c. Quod erat demonstrandũ.

## THEOR. 14. PROPOS. 16. 15.

SI quadratus numerus quadratum numerum nõ metiatur; neque latus vnius metietur alterius latus. Et si latus vnius quadrati non metiatur latus alterius, neque quadratus quadratum metietur.

SINT quadrati A, & B, quorũ latera C, & D; Non metiatur autem A, ipsum B. Dico neque C, latus metiri latus D. Si enim fieri potest, metiatur C, ipsum D. Quia igitur C, latus quadrati A, metitur D, latus quadrati B; [c] metietur & quadratus A, quadratum B. Quod est absurdum; Ponitur enim non metiri. Non ergo latus C, metitur latus D. [c] 14. octaui.

A, 16. B, 81. C, 4. D, 9.

SED iam latus C, non metiatur latus D. Dico quòd nec quadratus A, quadratum B, metietur. Si namque A, metiri dicatur ipsum B; [d] metietur quoque C, latus illius, latus huius D. Quod est absurdum. Ponitur enim non metiri. Igitur quadratus A, quadratum B, non metietur. Quapropter si quadratus numerus quadratum numerum non metiatur, &c. Quod erat ostendendum. [d] 14. octaui.

## THEOR. 15. PROPOS. 17. 15.

SI cubus numerus cubum numerum non metiatur: neque latus vnius latus alterius metietur. Et si latus cubi vnius latus alterius non metiatur: neque cubus cubum metietur.

SINT cubi A, & B, quorum latera C, & D; Non metiatur autem A, ipsum B. Dico quòd nec latus C, latus D, metietur. Si enim C, dicatur metiri D; [e] metietur quoque A, cubus cubum B. Quod est absurdum, cùm ponatur non metiri. Non ergo latus C, latus D, metietur. [e] 15. octaui.

A, 8. B, 27. C, 2. D, 3.

SED iam C, latus, non metiatur latus D. Dico quòd nec cubus A, cubũ B, metietur. Nam ſi metiri dicatur; [a] metietur etiam C, latus, latus D. Quod eſt abſurdum. Ponitur enim nõ metiri. Non igitur A, cubus, cubum B, metietur. Quocirca, ſi cubus numerus, cubum numerum non metiatur, &c. Quod demonſtrandum erat.

a 15. octaui.

## SCHOLIVM.

*PROXIME antecedentes, quatuor propoſitiones hoc etiam modo proponi poſſunt, ſi maiores numeri ad minores referantur.*

Si quadratus numerus quadrati numeri, & cubus cubi, ſit multiplex; & vnius latus lateris alterius multiplex erit. Et ſi vnius quadrati, & cubi latus lateris alterius ſit multiplex; & quadratus quadrati, & cubus cubi multiplex erit. Si verò quadratus quadrati, & cubus cubi nõ ſit multiplex; neq; latus lateris erit multiplex. Et ſi latus lateris non ſit multiplex; neque quadratus quadrati, neque cubus cubi erit multiplex.

*NAM ſi quadratus A, quadrati B, & cubus A, cubi B, ſit multiplex; metietur B, quadratus quadratum A, & cubus B, cubum A.* [a] *Igitur & latus D, latus C, metietur; ac proinde latus C, lateris D, multiplex erit.*

a 14. & 15. octaui.

A, 36. B, 9.
C, 6. D, 3.

*QVOD ſi latus C, lateris D, multiplex ſit, metietur latus D, latus C.* [b] *Igitur & B, ipſum A, quadratus quadratum, & cubus cubũ metietur; Ac propterea A, ipſius B, quadratus quadrati, & cubus cubi, erit multiplex.*

b 14. & 15. octaui.

A, 64. B, 8.
C, 4. D, 2.

*AT verò ſi A, ipſius B, quadratus quadrati, & cubus cubi, nõ ſit multiplex; non metietur B, ipſum A, quadratus quadratum, aut cubus cubum.* [c] *Igitur neque latus D, latus C, metietur. Quare C, latus lateris D, non erit multiplex.*

c 16. & 17. octaui.

A, 49. B, 9.
C, 7. D, 3 1.

*SIMILITER ſi C, latus lateris D, non ſit multiplex; non metietur D, latus, latus C.* [d] *Igitur nec B, ipſum A, quadratus quadratum, nec cubus cubum metietur. Arg, adeò A, ipſius B, quadratus quadrati, & cubus cubi, multiplex non erit.*

d 16. & 17. octaui.

A, 125. B, 8.
C, 5. D, 2.

## 16. THEOR. 16. PROPOS. 18.

DVORVM ſimilium planorum numerorum vnus medius proportionalis eſt numerus: Et planus ad planum duplicatam habet lateris homologi ad latus homologum rationem.

SINT plani numeri ſimiles A, B, & latera illius ſint C, D, huius verò illis proportionalia E, F; ita vt C, D, ſe mutuò multiplicãtes faciant A; & E, F, mutuò ſe multiplicãtes faciant B; ſitq; vt C, ad D, ita E, ad F. Dico inter A, & B, cadere vnum numerũ medium proportionalem, & proportionẽ A, ad B, eſſe duplicatam proportionis laterum homologorum C, E, vel D, F. Multiplicantes enim ſe mutuò D, E, faciant G. Quoniam igitur eſt C, ad D, vt E, ad F; erit permutando C, ad E, vt D, ad F. Et quia D, multiplicans C, & E, fecit A, & G; [a] erit A, ad G, vt C, ad E, hoc eſt, vt D, ad F. Similiter quia E, multiplicãs D, & F, fecit G, & B; [b] erit quoque G, ad B, vt D, ad F. Proportionales ergo ſunt A, G, B, in ratione C, ad E, vel D, ad F; Atque adeò inter A, & B, medius proportionalis cadit G.

A, 12. G, 18. B, 27.
C, 6. D, 2. E, 9. F, 3.

a 17. ſept.
b 17. ſept.

QVIA verò, cùm A, G, B, ſint continuè proportionales, A, ad B, duplicatam habet rationẽ eius, quam habet A, ad G, hoc eſt, C, ad E, vel D, ad F; perſpicuum eſt proportionem numeri plani A, ad planum B, eſſe duplicatam eius, quã habet C, ad E, vel D, ad F, latus homologum ad latus homologum. Duorum igitur ſimilium planorum numerorum, &c. Quod erat demonſtrandum.

## SCHOLIVM.

*QVIA oſtenſum eſt A, G, B, eſſe proportionales in ratione C, ad E, vel D, ad F; manifeſtum eſt, inter duos ſimiles planos A, & B, cadere medium proportionalem G, in ratione laterum homologorum C, E, vel D, F, aſſumptorum.*

*CONSTAT etiam ex dictis, medium proportionalem G, & vtrumlibet planorum A, B, eſſe inter ſe compoſitos. Cùm enim oſtenſi ſint A, G, B, proportionales in ratione C, ad E, vel D, ad F, id eſt, eſſe A, ad G, & G, ad B, vt C, ad E, vel D, ad F; metiantur autem E, F, latera numerum B, cuius ſunt latera, conſequentes conſequentem, ſi de proportionibus G, ad B, & C, ad E, vel D, ad F, loquamur; metientur quoque C, D, ipſum G, antecedentes antecedentem, quòd ſit G, ad B, vt C, ad E, vel D, ad F. Atqui & C, D, latera metiuntur numerum A, cuius ſunt latera. Igitur G, A, menſuram communem habent tam C, quàm D; Ac proinde compoſiti ſunt inter ſe. Rurſus cùm ſit A, ad G, vt C, ad E, vel D, ad F: metiantur autem C, D, latera ſuum planum A, antecedentes antecedentem; metientur etiam E, F, ipſum G, conſequentes conſequentem. Quare cùm & E, F, latera ſuum planum B, metiantur, habebunt G, B, communem menſuram tam E, quàm F, ideoq, erunt inter ſe compoſiti.*

*EX qua demonſtratione etiam manifeſtum relinquitur, priorum duorum numerorum A, G, communes menſuras eſſe C, D, latera prioris plani A; poſteriorum autem G, B, menſuras communes eſſe E, F, latera plani poſterioris B.*

THEORE-

## THEOR. 17. PROPOS. 18.

**DVORVM similium ſolidorum numerorum duo medij proportionales ſunt numeri: Et ſolidus ad ſolidum triplicatam rationem habet lateris homologi ad latus homologum.**

SINT ſolidi numeri ſimiles A, B, & latera illius ſint C, D, E, huius verò illis proportionalia F, G, H, ita vt ſit C, ad D, quemadmodum F, ad G; & D, ad E, ſicut G, ad H. Dico inter A, & B, cadere duos medios proportionales, & proportionem A, ad B, eſſe triplicatam eius, quam habent latera homologa C, F, vel D, G, vel E, H.

A,30. M,60. N,120. B,240.
I,6. L,12. K,24.
C,2. D,3. E,5. F,4. G,6. H,10.

Multiplicantes enim ſe mutuò C, D, faciant I; & F, G, ſe mutuò multiplicantes faciãt K. Item D, F, ſe mutuò multiplicãtes faciant L. Poſtremò E, H, ipſum L, multiplicantes faciant M, N. Quia igitur C, D, E, ipſis F, G, H, proportionales ſunt; erunt & permutando proportionales; nimirum vt C, ad F, ita D, ad G, & E, ad H. Quoniam verò D, multiplicans C, & F, fecit I, & L; [a] erit vt C, ad F, ita I, ad L. Simili modo, quia F, multiplicans D, & G, fecit L, & K; [b] erit quoque vt D, ad G, ita L, ad K. Sunt ergo I, L, K, continuè proportionales in ratione C, ad F, vel D, ad G, vel E, ad H. Et quoniam A, ſolidus factus eſt ex mutua multiplicatione laterum C, D, E; factus eſt autem I, ex multiplicatione mutua C, D; fit vt E, multiplicans I, faciat A. Eodem modo cùm B, ſolidus factus ſit ex mutua multiplicatione laterum F, G, H; & K, factus ex mutua multiplicatione F, G; numerus H, ipſum K, multiplicans faciet B. Quare cùm E, multiplicans I, & L, fecerit A, & M, [c] erit A, ad M, vt I, ad L, hoc eſt vt C, ad F, vel D, ad G, vel E, ad H. Eadẽ ratione, cùm H, multiplicans L, K, fecerit N, & B; [d] erit N, ad B, vt L, ad K, hoc eſt, vt C, ad F, vel D, ad G, vel E, ad H. [e] Eſt autem & M, ad N, vt E, ad H; quòd E, H, multiplicantes L, fecerint ipſos M, & N. Igitur A, M, N, B, continuè ſunt proportionales in ratione C, ad F, vel D, ad G, vel E, ad H; Atque idcirco inter A, B, ſolidos ſimiles duo medij M, N, continuè proportionales cadunt.

a 17. ſepti.
b 17. ſept.
c 17. ſept.
d 17. ſept.
e 18. ſept.

QVONIAM verò, cùm A, M, N, B, ſint proportionales continuè; proportio A, B, triplicata eſt eius, quam habet A, ad M; Eſt autem A, ad M, vt C, ad F, vel D, ad G, vel E, ad H; Habebit quoque A, ad B, ſolidus ad ſolidum, proportionem triplicatam eius, quam habet C, ad F, vel D, ad G, vel E, ad H, latus ad latus homologum. Quocirca, Duorum ſimilium ſolidorum numerorum duo medij, &c. Quod oſtendendum erat.

### SCHOLIVM.

*CVM demonſtratum ſit A, M, N, B, proportionales eſſe in ratione C, ad F, vel D, ad G, vel E, ad H; liquet inter duos ſimiles ſolidos A, & B, cadere duos medios proportionales M, & N, in ratione laterum homologorum C, F, vel D, G, vel E, H, aſſumptorum.*

*Ex ijs, quæ dicta ſunt, perſpicuum etiam eſt, duos medios proportionales M, N, & vtrumlibet ſolidorum A, B, inter ſe eſſe compoſitos. Cùm enim A, M, N, B, oſtenſi ſint proportionales in ratione C, ad F, vel D, ad G, vel E, ad H, hoc eſt, eſſe A, ad M, & M, ad N, & N, ad B, vt C, ad F, vel D, ad G, vel E, ad H; metiantur autem F, G, H, latera ſuum ſolidum B, conſequentes conſequentem. ſi de proportionibus N, ad B, & C, ad F, vel D, ad G, vel E, ad H, loquamur, metientur quoq; C, D, E, ipſum N, antecedentes antecedentem, quòd ſit N, ad B, vt C, ad F, vel D, ad G, vel E, ad H. Atqui & C, D, E, ipſum M, metiuntur; (Cùm enim M, factus ſit; per conſtructionem, ex E, in L, metietur E, ipſum M. Deinde quia M, N, B, proportionales ſunt ipſis I, L, K; metitur autem K; ipſum B, quòd B, factus ſit ex K, in H; metietur quoque I, ipſum M; Metiuntur autem & C, D, latera planum ſuum I.* [a] *Igitur & C, D, metientur ipſum M; Atq; adeò C, D, E, ipſum M, metientur.) Nec non & ipſum A, nimirum latera ſuum ſolidum. Ergo A, M, N, habent communem menſuram tam C, quàm D, quàm E; Ideoq; compoſiti inter ſe ſunt. Rurſus quia eſt A, ad M, vt C, ad F, vel D, ad G, vel E, ad H;*

a 11. prop.

A,30. M,60. N,120. B,240.
I,6. L,12. K,24.
C,2. D,3. E,5. F,4. G,6. H,10.

*metiuntur autem C, D, E, latera ſolidum ſuum A; antecedentes antecedentem; metientur quoq; F, G, H, ipſum M, conſequentes conſequentem. Metiuntur verò & F, G, H, ipſum N; (Cùm enim N, factus ſit ex H, in L, per conſtructionẽ; metietur H, ipſum N. Deinde quia A, M, N, ipſis I, L, K, proportionales ſunt: metitur autem I, ipſum A, quòd A, factus ſit ex I, in E; metietur etiam K, ipſum N. Cùm ergo & F, G, latera metiantur planum ſuum K; metientur quoque F, G, ipſum N; atque adeò F, G, H, ipſum N, metientur.) Nec non & ipſum B, nimirum latera ſuum ſolidum. Igitur M, N, B, communem habent menſurã tam F, quàm G; quàm H. Quare ſunt inter ſe compoſiti. Ex quibus liquidò conſtat, priorum trium numerorum A, M, N, communes eſſe menſuras C, D, E, latera prioris ſolidi A; At verò F, G, H, latera poſterioris ſolidi B, communes menſuras eſſe poſteriorum trium numerorum M, N, B.*

*QVIA verò ſolidus numerus tria latera habet, ex quorũ mutua multiplicatione gignitur, demonſtremus hoc loco, eundem numerũ ſolidũ procreari; ſiue primũ latus ducatur in ſecundũ, & numerus procreatus in tertium; ſiue primum in tertium, & numerus genitus in ſecundum; ſiue denique ſecundum in tertium,*

*& productus numerus in primum: Quin etiam, propositis quotuis numeris, eundem semper numerum gigni ex eorum multiplicatione mutua, quomodocunq; ordinem inter se permutent. Quæ quidem res magnum vsum habet in rebus Arithmeticis. Proponatur ergo eiusmodi theorema.*

DATIS quotlibet numeris, procreabitur ex eorum mutua multiplicatione idem semper numerus, quomodocunque ordinem inter se permutent.

*SINT primùm tres numeri dati A, B, C, & ex A, in B, fiat D; & ex D, in C, fiat E. Dico eundem E, procreari, si ex A, in C, fiat F, & F, in B, multiplicetur: Item si ex B, in C, fiat G, & G, in A, multiplicetur. Quoniam enim C, multiplicans D, facit E; [a] erit vt E, ad D, ita C, ad vnitatem: Sed vt C, ad vnitatem, [b] ita quoque est F, ad A; quòd A, multiplicans C, faciat F. Igitur erit vt E, ad D, ita F, ad A: Vt autem D, ad B, [c] ita est A, ad vnitatem; propterea quòd A, multiplicans B, facit D. Igitur ex aqualitate erit, vt E, ad B, ita F, ad vnitatem: [d] atque idcirco numerus ex E, in vnitatem factus, hoc est, ipsemet numerus E, æqualis erit numero facto ex B, in F, productum ex A, in C. Quemadmodum igitur numerus E, fit ex A, in B, & ex producto in C; ita idem E, fit ex A, in C, & ex producto in B. Quod est primum.*

A, 3. B, 5. C, 8.
D, 15. E, 120. F, 24. G, 40.
E, F,
D, A,
B, vnitas.

a 15. defin.
b 15. defin.
c 15. defin.
d 19. septi.

*RVRSVS quia ex C, in D, fit E; [e] erit vt E, ad D, ita C, ad vnitatem: Sed vt C, ad vnitatem, [f] ita etiam est G, ad B, eò quòd G, factus est ex B, in C. Igitur erit, vt E, ad D, ita G, ad B: Vt autem D, ad A, [g] ita est B, ad vnitatem, propterea quòd D, factus est ex A, in B. Igitur ex æquo erit vt E, ad A, ita G, ad vnitatem: [h] ac proinde numerus factus ex E, in vnitatem, id est, ipsemet numerus E, æqualis erit numero genito ex A, in G, productum ex B, in C. Quemadmodum igitur E, gignitur ex A, in B, & ex producto in C; ita idem E, procreatur ex B, in C, & ex producto in A. Quod est secundum.*

E, G,
D, B,
A, vnitas.

e 15. defin.
f 15. defin.
g 15. defin.
h 19. sept.

*SINT deinde quatuor numeri A, B, C, D: atque ex A, in B, & ex producto in C, & ex producto in D, fiat E. Dico eundem E, gigni ex A, in B, & ex producto in D, & ex producto in C: Item ex A, in C, & ex producto in B, & ex producto in D: Item ex A, in C, & ex producto in D, & ex producto in B: Item ex A, in D, & ex producto in B, & ex producto in C: Itẽ ex A, in D, & ex producto in C, & ex producto in B: Itẽ ex B, in C, & ex producto in A, & ex producto in D: Item ex B, in C, & ex producto in D, & ex producto in A: Itẽ ex B, in D, & ex producto in A, & ex producto in C: Item ex B, in D, & ex producto in C, & ex producto in A: Item ex C, in D, & ex producto in A, & ex producto in B: Item ex C, in D, & ex producto in B, & ex producto in A; ita vt præter primam multiplicationem, quæ omnes quatuor numeri ordinatim multiplicantur inter se, fiant 11. multiplicationes diuersa producentes eundem semper numerum. Quoniam enim, vt in tribus ostensum est, idem numerus fit, siue genitus numerus ex A, in B, ducatur prius in C, deinde hic productus in D; siue prius in D, deinde hic productus in C, constat id, quod primo loco proponitur.*

A, 2. B, 3. C, 4. D, 5.
E, 120.

*DEINDE, quia vt in tribus est ostensum, idem numerus fit ex A, in B, & ex producto in C, qui fit ex A, in C, & ex producto in B, perspicuum est, eundem numerum gigni tum ex A, in B, & ex producto in C, & ex producto in D, tum ex A, in C, & ex producto in B, & ex producto in D. quod est secundum.*

*TERTIO, quoniam, vt in tribus est ostensum, idem numerus procreatur, siue genitus ex A, in C, ducatur prius in B, deinde hic productus in D; siue prius in D, deinde hic productus in B, patet eundem generari numerum tum ex A, in C, & ex producto in B, & ex producto in D, tum ex A, in C, & ex producto in D, & ex producto in B. Cùm ergo ille sit æqualis proximè ostensus primo producto, erit & hic æqualis eidem. quod est tertium.*

*QVARTO, quia, vt in tribus ostensum est, idẽ numerus fit ex A, in B, & ex producto in D, qui ex A, in D, & ex producto in B; gignetur quoq; idẽ numerus ex A, in B, & ex producto in D, & ex producto in C, qui ex A, in D, & ex producto in B, & ex producto in C. Sed ille ostensus est primo loco æqualis ei, qui fit ex A, in B, & ex producto in C, & ex producto in D. Igitur & hic. Quod est quartum.*

*QVINTO, quoniam vt demonstratum est in tribus, idem numerus gignitur ex A, in C, & ex producto in D, qui ex A, in D, & ex producto in C producetur idem numerus ex A, in C, & ex producto in D, & ex producto in B, qui ex A, in D, & ex producto in C, & ex producto in B. Cũ ergo ille sit ostensus tertio loco æqualis ei, qui fit ex A, in B, & ex producto in C, & ex producto in D, erit & hic eidem æqualis. Quod est quintum.*

*SEXTO, quia, vt in tribus demonstrauimus, idem numerus fit ex A, in B, & ex producto in C, qui fit ex B, in C, & ex producto in A. liquet eundem procreari numerum tam ex A, in B, & ex producto in C, & ex producto in D, quam ex B, in C, & ex producto in A, & ex producto in D. Quod est sextum.*

*SEPTIMO, quia, vt in tribus ostendimus, idẽ numerus gignitur, siue productus ex B, in C, ducatur prius in A, deinde hic ꝓductus in D, siue prius in D, deinde hic ꝓductus in A; cõstat eundẽ numerũ fieri ex B, in C, & ex ꝓducto in D & ex ꝓducto in A qui fit ex B, in C, & ex ꝓducto in A. & ex ꝓducto in D. Sed hic ꝓximè ostensus est æqualis ei, q̃ fit ex A, in B, & ex ꝓducto in C, & ex ꝓducto in D. Igitur & ille. q̃ est septimum.*

*OCTAVO, quia, vt in tribus ostensum est, idem numerus procreatur ex A, in B, & ex producto in D, qui ex B, in D, & ex producto in A; gignetur quoq; idẽ numerus ex A, in B, & ex ꝓducto in D, & ex ꝓducto in C, qui*

*qui ex B,in D,& ex producto in A,& ex producto in C. Sed ille primo loco ostensus est æqualis ei, qui fit ex A, in B,& ex producto in C,& ex producto in D. Igitur & hic. Quod est octauum.*

*NONO, quia, vt demonstratum est in tribus, idem numerus fit ex B,in C,& ex producto in D, qui ex B; in D,& ex producto in C; procreabitur idem quoq; numerus ex B,in C, & ex producto in D, & ex producto in A qui ex B,in D & ex producto in C,& ex producto in A. Sed ille ostensus est septimo loco æqualis ei, qui fit ex A,in B,& ex producto in C,& ex producto in D. Ergo & hic. Quod est nonum.*

A,2. B,3. C,4. D,5. E,120. *DECIMO, quoniam, vt in tribus est demonstratum, idem gignitur numerus ex A,in C,& ex producto in D,qui ex C,in D,& ex producto in A; producetur quoque idem numerus ex A,in C, & ex producto in D,& ex producto in B, qui ex C in D, & ex producto in A, & ex producto in B. Sed ille, vt tertio loco est ostensum, æqualis est ei, qui fit ex A,in B, & ex producto in C,& ex producto in D. Igitur & hic. Quod est decimum.*

*POSTREMO, quoniam, vt ostensum est in tribus, idem numerus gignitur ex B,in C, & ex producto in D qui ex C,in D, & ex producto in B; procreabitur quoque idem numerus ex B, in C,& ex producto in D, & ex producto in A, qui ex C,in D,& ex producto in B,& ex producto in A. Sed ille septimo loco ostensus est æqualis ei, qui fit ex A,in B,& ex producto in C,& ex producto in D. Igitur & hic eidem æqualis erit. Quod est vndecimum.*

A. B. C. D. E.
A. B. C. E. D.
A. B. E. D. C.
B. C. A. D. E.

*EODEM argumentandi modo vtendum est in quinque vel pluribus numeris; dummodo interdum in quinque assumatur id, quod iam in quatuor demonstratum est; & in sex, quod in quinque, &c. Vt in quinque numeris A,B,C,D,E, apparet, quorum ordinem ter immutauimus, idemq; semper numerus ex continua eorum multiplicatione inter se procreatur. Nam productus ex A, in B, cum C,D,E, constituit quatuor numeros. Ergo quomodocunque inter se ordinem permutent, eundem semper gignent numerum: ac proinde tam secundus ordo, quàm tertius, eundem numerum producet, quem primus. Item quia tres numeri, A,B,C, quomodocunque ordinem commutent, eundem efficiunt numerum: fit vt quartus ordo eundem prorsus numerum procreet, quem primus, & sic de cæteris.*

## THEOR. 18. PROPOS. 20. 17.

Si inter duos numeros vnus medius proportionalis cadat numerus; Similes plani erunt illi numeri.

CADAT inter A, & B, medius proportionalis C. Dico A, & B, esse planos similes. Sumantur D,& E, minimi in ratione A,C,B. Quia igitur D,E, minimi sunt in ratione A,ad C; [a] metientur D, & E, ipsos A,& C, æquè: metiantur per F. Similiter æquè metiẽtur ipsos C, & B: metiantur per G. [b] Itaque F, multiplicans D, & E, faciet A,& C, [c] Item G, eosdem D, & E, multiplicans faciet C,& B. Quia ergo E, multiplicans F,& G, fecit C,& B; [d] erit, vt C,ad B, ita F,ad G: Vt autem C,ad B, ita erat D,ad E. Igitur erit vt D,ad E, ita F,ad G; & permutando vt D, ad F, ita E,ad G. Quoniam verò F, multiplicans D, fecit A; erit A, planus, cuius latera D,F. Simili modo, quia G, multiplicans E, fecit B; erit & B, planus cuius latera E, G. Cùm ergo hæc latera ostensa sint esse proportionalia, hoc est, D, ad F, vt E, ad G; erunt ex defin. A,B, plani similes. Quare si inter duos numeros vnus, &c. Quod demonstrandum erat.

A,18. C,24. B,32. D,3. E,4. F,6. G,8.

[a] 21. *septimi*
[b] 9. *pron.*
[c] 9. *pron.*
[d] 17. *septimi*

## THEOR. 19. PROPOS. 21. 19.

Si inter duos numeros duo medij proportionales cadant numeri; Similes solidi sunt illi numeri.

CADANT inter A,& B, duo medij proportionales C, D. Dico A,& B, esse similes solidos. Sumantur tres E,F,G, minimi in ratione A,C,D,B. Quoniam igitur inter E,& G, medius cadit proportionalis F; [e] erunt E,& G, plani similes: sint ipsius E, latera H, I; ipsius verò G, latera illis proportionalia K, L. Et quia E, F, G, cùm minimi sint in ratione A, C, D, [f] æquè metiuntur ipsos A,C,D, eiusdem rationis cum illis; metiantur per M. Eodemque modo, & quia E,F,G, minimi æquè metiuntur C,D,B, eandem habentes rationem cum illis; metiantur per N; [h] ita vt M, multiplicans E,F,G, faciat A,C,D; & N, multiplicans eosdem E, F, G, faciat C,D,B. Factus est autẽ E, ex multiplicatione mutua suorum laterum H, & I; nec non G, ex mutua multiplicatione suorum laterum K, & L. Igitur A, producitur ex mutua multiplicatione H,I,M; & B, ex mutua multiplicatione K,L,N; atq; adeò A, solidus est numerus, ex defin. latera habẽs H,I,M; & B, solidus etiã, latera habens K,L,N. Quia verò M,& N, multiplicãtes F, faciũt C,& D, vt ostẽdimus; [i] erit C,ad D, vt M,ad N: [k] Sunt autẽ C,& D, in eadẽ ratione, in qua E,& F; & N, multiplicãs E,& F, fecerit ipsos C,& D; Nec nõ & E,F, eandẽ habent rationẽ, quam H,K, vel I,L. Etenim inter planos similes E,G, cadit F, medius proportionalis, per coroll. propos. 19. huius lib. in ratione laterum ho-

A,24. C,72. D,216. B,648. E,1. F,3. G,9. H,1. I,1. M,24. K,3. L,3. N,72.

A,8. C,12. D,18. B,27. E,4. F,6. G,9. H,2. I,2. M,2. K,3. L,3. N,3.

[e] 20. *octaui.*
[f] 21. *septimi*
[g] 21. *septimi*
[h] 9. *pron.*
[i] 18. *septimi*
[k] 17. *septimi*

mologorum H,K, vel I,L. Igitur erit quoque H,ad K,& I, ad L,vt M, ad N; & permutando H, ad I, vt K,ad L; & I,ad M,vt L,ad N. Proportionalia ergo sunt latera H, I, M, lateribus K,L,N; ac propterea similes sunt numeri solidi A,& B. Quam ob rem,si inter duos numeros duo medij proportionales cadant numeri,&c. Quod erat demonstrandum.

*SCHOLIVM.*

*DVO exempla apposuimus,in quorum priori liquidò constat,vnitatem E,esse planum numerum,& vnitates H,I,eius latera,licet impropriè,vt in definitione numeri plani monuimus. Si enim vnitatem à numeris planis excludamus, non poterimus hac argumentatione Euclidis demonstrare, numeros A, & B, qui includunt duos medios proportionales C,& D,esse solidos similes. Quod idem continget in aliis omnibus numeris, qui habent duos medios proportionales in ratione multiplici, cuiusmodi sunt etiam A, B, in eodem priori exemplo. Hoc autem est absurdum,cùm Euclides propositionem generaliter proponat, eamq; sine vlla exceptione demonstret.*

## 20. THEOR. 20. PROPOS. 22.

SI tres numeri deinceps sint proportionales, primus autem sit quadratus; Et tertius quadratus erit.

A,9. B,54. C,324. SINT tres numeri A,B,C, continuè proportionales, sitque primus eorum A, quadratus. Dico & tertium C,quadratum esse. Nam cùm inter A, & C, cadat medius proportionalis; [a] erunt A, & C, plani similes. Quare existente A,quadrato, erit & C,ei similis, quadratus. Si igitur tres numeri deinceps sint proportionales,&c. Quod demonstrandum erat.

a 20. octaui.

## 21. THEOR. 21. PROPOS. 23.

SI quatuor numeri deinceps sint proportionales, primus autem sit cubus; Et quartus cubus erit.

A,27. B,45. C,75. D,125. SINT quatuor numeri A,B,C,D, proportionales continuè, & A,primus sit cubus. Dico & quartum D, cubum esse. Cum enim inter A,& D,cadant duo medij proportionales B,C; [b] erunt A,& D,solidi similes. Quare existente A,cubo, erit & D,illi similis,cubus. Quam ob rem, si quatuor numeri deinceps sint proportionales,&c. Quod erat ostendendum.

b 21. octaui.

*SCHOLIVM.*

*HAEC est apud omnes interpretes Euclidis,quos ego vidi,vulgata demonstratio præcedentium duarum propositionũ; quam qui diligenter examinare velit,inueniet sanè mancam esse,& imperfectam. Cùm enim ad defin. 21. lib. 7. tradiderimus,duos numeros planos, vel solidos posse similes esse,quamuis non quibuscunq; lateribus vnius exhiberi possint alia latera alterius proportionalia; dummodo quibusdam lateribus vnius proportionalia sint quadam alterius; Iure optimo quis inficiari poterit, si duorum planorum similium vnus fuerit quadratus,alterum quoq; quadratum esse: & si duorum similium solidorum vnus cubus fuerit, alterum etiam esse cubum: quod tamen in demonstratione pro concesso,atque omnibus perspicuo assumebatur. Nam positis duobus numeris planis 36. & 64. similibus,satis est, vt duobus lateribus prioris, qualia sunt 3. & 12. exhibeantur alia duo latera posterioris,nimirũ 4. & 16. proportionalia. Vnde etiamsi prior sit quadratus, habens duo latera æqualia 6. & 6. meritò dubitare quis possit,immò omnino negare, posteriorem habere alia duo latera his proportionalia,hoc est,inter se quoque æqualia, atque adeò esse quadratum: quemadmodum etiam manifestum est,hisce lateribus prioris 4. & 9. vel 2. & 18. non respondere alia latera in posteriori proportionalia. Si igitur his lateribus prioris numeri non reperiuntur alia latera in posteriori proportionalia, quanquam ipsi numeri sint similes; cur sine demonstratione vlla concedemus,his lateribus prioris æqualibus 6. & 6. assignari posse in posteriori alia duo proportionalia,videlicet & inter se æqualia? Idem dicendum est de solidis similibus. Quapropter vtramque propositionem Euclidis aliter demonstrabimus, ad hunc, qui sequitur,modum.*

*SINT tres numeri A, B, C, continuè proportionales, & primus A,quadratus. Dico & C,tertium esse quadratum. Sumpto enim D, latere quadrati A; cum D,ex defin. in se faciat A; erunt D, & A,ex scholio propos. 9,huius lib. ab vnitate continuè proportionales; eritq; conuertendo A, ad D,vt D,ad vnitatem; atque adeò cùm inter numerum A, eundem, & tam numerum C,quàm vnitatem,cadant medij proportionales multitudine æquales,nimirum vnus; cadent quoq; totidem,ex theor. 3. scholij propos. 10. huius libri,inter vnitatem,atque C,numerum,nimirum vnus, qui sit E. Quoniam igitur vnitas & E,C. numeri sunt cõtinuè proportionales; producetur C,ex E,in se ipsum, ex scholio propos. 10. huius lib. Ac proinde C,quadratus erit,ex defin. cuius latus E.*

A,36. B,48. C,64. D,6. E,8. vni-tas

*ALITER. Sumptis tribus numeris,D,E,F,minimis in ratione A, ad B, & B, ad C; metietur D, ipsum A, & F,ipsum C,aquè,ex iis,quæ ostendimus ad propos. 21. lib. 7. Et quoniam extremi D,F, minimorum trium numerorum,*

A,36. B,48. C,64. G,18. H,32. D,9. E,12. F,16. L.64. K,8. I,4.

numerorum, per coroll. 1. propos. 2. huius libri, sunt quadrati: Est autem & A, quadratus, ex hypothesi; [a] cadet inter A, & D, quadratos medius vnus proportionalis, vt G. Quia verò est, ex aquo, vt A, ad C, ita D, ad F: & permutando, vt A, ad D, ita C, ad F; [b] cadet quoq; inter C, & F, vnus proportionalis medius, nimirum H. Cùm ergo F, primus metiatur C, vltimum; [c] metietur idem & secundum H. Sumpto autem I, latere quadrati F; metiatur I, toties numerum K, quoties F, ipsum H, metitur; ita vt H, ad F; & K, ad I, eandem habeant proportionem multiplicem. Sit quoq; L, quadratus ipsius K. [d] Itaque quæ ratio L, ad F, quadrati ad quadratum, duplicata est rationis K, ad I, lateris ad latus, hoc est, H, ad F: Est autem & ratio C, ad F, eiusdem rationis H, ad F, ex defin. duplicata, quòd conuertendo sint proportionales etiam C, H, F; erit L, ad F, vt C, ad F; Ac proinde L, & C, æquales sunt. Existente ergo L, quadrato, ex constructione, & C, quadratus erit.

a 11. octaui. b 8 octaui. c 7. octaui. d 11. octaui.

ALITER. [e] Quoniam A, & C, similes plani sunt: sint eorum latera proportionalia, D, E, quidem ipsius A; at F, G, ipsius C; ita vt sit D, ad E, sicut F, ad G: assumatur q; H, latus quadrati A. Quoniam igitur idem numerus A, producitur ex D, in E, & ex H, in se, [f] erunt D, H, E, continuè proportionales. Cùm ergo sit F, ad G, vt D, ad E; cadat q; inter D, & E, medius proportionalis H, & cadet quoq; inter F, & G, vnus medius proportionalis qui sit I. Quare cùm F, I, G, sint continuè proportionales; [g] idem numerus fiet ex F, in G, qui ex I, in se ipsum. Fit autem C, ex F, in G. Igitur & idem C, fiet ex I, in se ipsum: At q; adeò C, quadratus erit, ex definitione, cuius latus I.

e 20. octaui. f 20. septimi. g 8. octaui. h 20. septimi.

A,36. B,48. C,64. H,6. I,8. D,3. E,12. F,4. G,16. A,36. B,48. C,64. H,6. I,8. D,6. E,6. F,8. G,8.

SINT rursum quatuor numeri A, B, C, D, continuè proportionales, & A, primus, sit cubus. Dico & D, quartum, cubum esse. Sumpto enim E, latere cubi A; fiat ex E, in seipsum numerus F, ac proinde, ex defin. ex E, in F, cubus A. Quia ergo E, in se facit F, & in F, facit A; erunt, ex scholio propos. 9. huius lib. E, F, A, continuè proportionales ab vnitate; atq; idcirco conuertendo proportionales quoq; erunt numeri A, F, E, & vnitas. Itaq; cùm tam inter numerum D, quàm vnitatem, ac eundem numerum A, cadant medij proportionales multitudine æquales, videlicet duo; cadent, ex theorem. 3. scholij propos. 10 huius lib. totidem medij inter vnitatem, & numerum D, qui sint G, H. Itaque quia vnitas, & numeri G, H, D, continuè sunt proportionales: fiet H, ex G, in se, & D, ex G, in productum H, vt ad propos. 10. huius lib. a nobis est demonstratum. Quare D, cubus est, ex definitione cuius latus G.

A,64. B,160. C,400. D,1000. F,16. H,100. E,4. G,10. vnitas

ALITER. Inuentis quatuor numeris minimis E, F, G, H, in ratione A, ad B, & B, ad C, & C, ad D, metietur E, ipsum A, & H, ipsum D, æque, per ea, quæ ad propos. 21 lib 7. demonstrauimus. Et quia E, H extremi quatuor minimorum, cubi sunt, ex 1. coroll. propos. 2 huius lib. Est autem & A, cubus, ex hypothesi; [i] cadent inter E, A, cubos duo medij proportionales qui sint I, K. Quoniam autem, ex æquo, est vt A, ad D, ita E, ad H; & permutando, vt A, ad E, ita D, ad H; [k] cadent quoq; inter H, D, duo medij proportionales, qui sint L, M. Cùm ergo H primus metiatur D, extremum, [l] metietur idem & L, secundum. Sumpto deinde N, latere cubi H; metiatur N, toties numerum O, quoties H, ipsum L, ita vt L, ad H, & O, ad N, eandem habeant proportionem multiplicem: sit quoque P, cubus ipsius O. [m] Itaque cùm ratio P, ad H, cubi ad cubum, triplicata sit rationis O, ad N, lateris ad latus, hoc est L, ad H: Sit autem & ratio D, ad H, eiusdem rationis L, ad H, ex defin. triplicata, quòd conuertendo proportionales etiam sint D, M, L, H, erit P, ad H vt D, ad H; Ac propterea P, & D, æquales erunt. Quare cùm P, cubus sit, ex constructione, cubus quoque erit D.

A,64. B,160. C,400. D,1000. K,32. M,500. I,16. L,250. E,8. F,20. G,50. H,125. P,1000. O,10. N,5.

i 11. octaui. k 8. octaui. l 7. octaui. m 33. octaui.

## THEOR. 22. PROPOS. 24. 22.

SI duo numeri rationem habeant inter se, quam quadratus numerus ad quadratum numerum; primus autem sit quadratus, & secundus quadratus erit.

SIT enim A, ad B, vt C, quadratus ad quadratum D; sitq; A, quadratus. Dico & B, esse quadratum. Cùm enim sit A, ad B, vt C, ad D; [a] cadat autem inter C, & D, quadratos vnus medius proportionalis, videlicet E; [b] cedet quoque inter A, & B, medius vnus, qui sit. F. Quia igitur tres numeri sunt continuè proportionales A, F, B; & A, primus est quadratus; [c] erit & B, tertius, quadratus. Quare si duo numeri rationem habeant inter se, quam quadratus numerus ad quadratum numerum, &c. Quod erat ostendendum.

A,36. F,48. B,64. C,9. E,12. D,16.

a 11. octaui. b 8. octaui. c 22. octaui.

### COROLLARIVM.

LIQVET ex his, proportionem cuiusuis numeri quadrati ad quemlibet numerum non

a 24.octaui *quadratum exhiberi nullo modo posse in duobus numeris quadratis. Si enim exhiberetur, & essent ambo priores numeri habentes proportionem, quam quadrati proportionis exhibitæ, etiam quadrati, cùm primus ponatur quadratus. Quod est absurdum. Ponitur enim secundus, non quadratus. Vnde numeri in dupla proportione, proportionem nõ habent, quam quadratus ad quadratum. Si enim haberent, essent omnes hi dupli numeri 4.8.16.32.64.128.&c.*

b 24.octaui *quadrati. Primò enim 4. existente quadrato, b esset & 8. quadratus. Igitur & 16. & 32. &c.*

c 11.octaui. *quod est absurdum. c Nam inter 4. & 8. & inter 8. & 16. & inter 16. & 32. &c. caderet medius proportionalis, si essent quadrati: cùm tamen in scholio propos. 8. huius lib. demonstratum sit, inter numeros duplæ proportionis quosuis non posse cadere medium proportionalem.*

*SIMILI modo numeri in quintupla proportione proportionem non habebunt, quam quadratus numerus ad numerum quadratum. Si enim haberent,* d 11.octaui. *d caderet inter eos medius*

e 8.octaui. *proportionalis. e Igitur & inter 5. & 1. minimos numeros quintuplæ proportionis. quod fieri non posse, demonstratum à nobis est in scholio propos. 8. huius lib.*

## 23. THEOR. 23. PROPOS. 25.

SI duo numeri rationem inter se habeant, quam cubus numerus ad cubum numerum, primus autem sit cubus, & secundus cubus erit.

SIT enim A, ad B, vt C, cubus ad D, cubum: sitque A, cubus. Dico & B, cubum esse. Cùm enim sit A, ad B, vt C, ad D; a cadunt autem inter C, & D, cubos duo medij proportionales, qui sint E, F; b cadent quoque inter A, & B, duo medij, qui sint G, H. Quia igitur quatuor numeri A, G, H, B, sunt continuè proportionales, & A, primus est cubus; c erit & B, quartus cubus. Quocirca, si duo numeri rationem inter se habeant, quam cubus numerus ad cubum numerum, &c. Quod demonstrandum erat.

a 12. octaui. b 8. octaui. c 23. octaui.

A, 8. G, 12. H, 18. B, 27.
C, 64. E, 96. F, 144. D, 216.

### COROLLARIVM.

*PATET etiam ex his, proportionem cuiusuis numeri cubi ad quemlibet numerum non cubum, non posse reperiri in duobus numeris cubis. Si enim reperiretur,* a 25.octaui *a essent ambo priores numeri habentes proportionem, quam cubi proportionis reperta, etiam cubi, cùm primus ponatur cubus. Quod est absurdum. Ponitur enim secundus, non cubus.*

## 24. THEOR. 24. PROPOS. 26.

SIMILES plani numeri rationem inter se habent, quam quadratus numerus ad quadratum numerum.

SINT plani similes A, & B. Dico esse vt A, ad B, ita aliquem numerum quadratum ad alium quendam quadratum. Cùm enim A, & B, sint plani similes; a cadet inter eos vnus medius proportionalis, videlicet C. Sumptis ergo tribus numeris D, E, F, minimis in ratione continua A, C, B; erunt extremi D, & F, quadrati, ex coroll. 1. propos. 2. huius lib. Quare cum sit, ex æquo A, ad B, vt D, ad F, manifestum est, ita esse A, ad B, vt est quadratus aliquis, videlicet D, ad quadratum alium, vt ad F. Ergo similes plani numeri rationem inter se habent, &c. Quod demonstrandum erat.

a 18. octaui.

A, 20. C, 30. B, 45.
D, 4. E, 6. F, 9.

A, 20. C, 30. B, 45.
D, 4. E, 6. F, 9.

### SCHOLIVM.

*FACILE etiam demonstrabimus conuersum huius, videlicet.*

NVMERI, qui proportionem habent, quam quadratus numerus ad quadratum numerum, similes plani sunt.

*HABEANT numeri A, B proportionem inter se, quam quadrati C, D. Dico A, B, esse planos similes. a Quoniam enim inter quadratos C, D, cadit vnus medius proportionalis: Et est, vt C, ad D, ita A, ad B; b cadet quoq; medius proportionalis inter A, & B. c Quare A, & B, plani similes sunt.*

a 11.octaui. b 8.octaui. c 20.octaui

A, 8. B, 18.
C, 16. D, 36.

*EX hoc perspicuum est, planos numeros, qui similes non sunt, proportionem non habere, quam quadratus ad quadratum. Si enim haberent; essent, vt modò demonstratum est, plani similes. quod est absurdum. ponuntur enim non similes.*

## 25. THEOR. 25. PROPOS. 27.

SIMILES solidi numeri rationem habent inter se, quam cubus numerus ad cubum numerum.

SINT

SINT similes solidi A,B. Dico esse,vt A,ad B,ita cubum quempiam numerum ad alium quendam cubum. Quia enim A,B,sunt solidi similes; [a] cadent inter eos duo medij proportionales,qui sint C,D. Sumptis autem quatuor numeris E, F, G, H, minimis in continua proportione A, C, D,B; erunt extremi E,H,ex coroll.1.propos.2. huius lib. cubi. Quare, cùm ex æquo sit A ,ad B,vt E, ad H; constat ita esse A, ad B,vt est cubus aliquis, nimirum E, ad alium cubum, videlicet ad H. Similes ergo solidi numeri rationem habent inter se,&c. Quod erat ostendendum. a 19.octaui.

A,140. C,360. D,540. B,810.
E,8. F,12. G,18. H,27.

## SCHOLIVM.

*CONVERSVM huius etiam demonstrabimus; scilicet.*

NVMERI,qui proportionem habent,quam cubus numerus ad cubum numerum,sunt solidi similes.

*NVMERI enim A,B, proportionem habeant inter se,quam cubi C, D Dico A, B, solidos esse similes. Nam cùm sit A,ad B, vt C, ad D, [a] cadant autem inter C, D, cubos duo medij proportionales; [b] cadent quoque inter A,B,duo medij . [c] Sunt ergo A, & B, solidi similes.* a 12.octaui. b 8. octaui. c 21.octaui.

A, 16. B, 54. C,64. D,216.

*EX his omnibus perspicuè infertur,nullos numeros habentes duplam proportionem,vel superparticularem,vel superbi partiētem, esse similes planos,vel solidos.Si enim essent similes plani, [d] caderet inter eos medius vnus proportionalis,quod fieri non posse, iam dudum ostensum est in scholio propos.8.huius lib. Eadem ratione non erunt similes solidi,cùm inter eos cadere non possint duo medij proportionales. [e] Nam aliàs caderent quoque duo medij inter minimos earundem proportionum numeros Quod fieri non potest,quòd hi vel sola vnitate,vel certè binario tantùm inter se distent,vt in scholio prædicto traditum est, inter quos certum est,non posse intercipi duos numeros,nedum duos medios proportionales.* d 18.octaui. e 8.octaui.

*SIMILITER nec duo quinis numeri primi esse possunt plani similes,vel solidi,cùm non possint habere latera proportionalia.Nam quilibet numerus planus, qui sit numerus primus , latera habet solummodo vnitatem,& seipsum,quamuis improprie. Vt bi numeri plani 19.& 23. latera habent 1. 19. & 1. 23. cùm ex horum mutua multiplicatione producantur, quæ constat non esse proportionalia. Quinis verò numerus solidus, qui numerus etiam primus sit, latera tantùm habet duas vnitates , & seipsum. Vt bi numeri solidi 29. & 47.latera habent 1. 1. 29. & 1. 1. 47.cùm ex mutua horum multiplicatione producantur.Perspicuum autem est ea non posse esse proportionalia.*

*RVRSVS neque duo quicunque numeri inter se primi,qui quadrati non sint,vel cubi, (quamuis neuter eorum primus sit) plani similes, vel solidi similes esse possunt. Si enim duo huiusmodi numeri inter se primi, dicantur esse plani vel solidi similes; [f] cadet inter illos vnus medius proportionalis, vel duo. Cùm ergo extremi duo ponantur inter se primi , erunt omnes tres , vel quatuor inter se primi , cùm nullus numerus illos omnes, tanquam communis mensura metiri possit, propter duos extremos inter se primos. Quare minimi erunt continuè proportionales,vt in scholio propos.24.lib.7.demonstrauimus.Ac propterea ex coroll.1.propos. 2.huius lib.extremi duo quadrati erunt,vel cubi.quod absurdū est.Ponuntur enim neq; quadrati, neq; cubi.* f 18.& 19.octaui.

*EX his sequitur.si duo numeri sint plani, vel solidi similes,quorum minor sit primus , minorem numerare maiorem.Nam si eum non numeraret; [g] essent duo propositi numeri inter se primi : ac proinde,vt proximè ostendimus, non possent esse plani,vel solidi similes , quod absurdum est , & contra hypothesim. Verùm hoc ostensiuè quoque ita demonstrabimus.Sint primùm duo numeri plani similes A, B, sitq; A, minor, primus. Dico A,ipsum B,metiri. Nam cùm A, & B, ponantur plani similes , habebunt latera proportionalia. Cùm ergo latera numeri primi A, sint C, vnitas, & numerus D,ipsi A, æqualis, quòd nullus alius numerus, præter C, vnitatem , & numerum D, ipsi A, æqualem metiatur primum numerum A: sint E, F,latera numeri B,lateribus C,D, proportionalia,ita vt sit C ad E,vt D,ad F. Erit igitur permutando C, ad D,vt E,ad F.* [h] *Igitur numerus factus ex C,primo in F,quartū æqualis erit ei,qui fit ex D,secūdo in E, tertio:* [i] *Fit autem ex C,vnitate in F, ipsemet numerus F. Idem ergo numerus F, fiet ex D, in E.* [k] *Quare D, ipsum F, metietur:* [l] *Metitur autem F,ipsum B,quòd B, gignatur ex E,in F,* [m] *Igitur & D,id est, A,illi æqualis,eundem B,metietur.quod est propositum.* g 31. septi. h 19. septi. i 4 pron. k 4. pron. l 11.pron.

A,3. B, 48. C,1. D,3. E,4. F,12.

*HINC perspicuū est, duos numeros inter se primos,quorū minor primus sit , non posse esse planos similes. Nam si essent similes, metiretur minor maiorem , vt proximè ostendimus. Cùm ergo & seipsum metiatur, non essent inter se primi,sed compositi.quod est contra hypothesim.*

*SINT deinde duo solidi similes A,B sitq; A, minor primus. Dico A, ipsum B,metiri. Nam cùm A, & B, sint solidi similes,habebunt latera proportionalia. Cùm ergo latera numeri primi A sint B, C, vnitates, & numerus D, ipsi A, æqualis,quòd nullus alius numerus, præter vnitatem , & numerum D,ipsi A, æqualem,metiatur numerum primum A,sint E, F, G,latera numeri B,lateribus B, C, D, proportionalia,ita vt sit B,ad E,vt C,ad F; & D,ad G.Quia igitur est G,ad F,*

A,3. B, 24. B,1. C,1. D,3. E,2. F,2. G,6.

a 19. sept. *vt D, ad G; erit permutando C, ad D, vt F, ad G.* [a] *Igitur numerus factus ex C, primo in G, quartum aequalis erit ei, qui fit ex D, secundo in F, tertium; Fit autem ex C, vnitate in G, ipsemet numerus G. Idem ergo numerus G, fiet ex D, in F.* b 4. pron. [b] *Quare D, ipsum G, metietur.* c 4. pron. [c] *Metitur autem G, ipsum B, quòd G, latus sit ipsius B.* d 11. pron. [d] *Igitur, & D, hoc est, A, illi aequalis, eundem B, metietur: quod est propositum.*

*AT QVE ex hoc etiam constat, duos numeros inter se primos, quorum minor primus sit, non posse esse solidos similes. Nam si essent similes, metiretur minor maiorem, vt proximè ostendimus. Cùm ergo & seipsum metiatur, non essent inter se primi, sed inter se compositi. quod est contra hypothesim.*

*ITAQVE facilis admodum est inuentio duorum planorum, vel solidorum non similium. Si enim accipiantur duo numeri habentes proportionem duplam, vel superparticularē, vel superbipartientem; vel certè duo numeri primi, vel duo inter se primi, quorum neuter quadratus sit, aut cubus; erūt illi ipsi per ea quae tradita sunt, plani seu solidi non similes.*

e 26. octaui *RVRSVS quilibet duo numeri, quorum alter quadratus sit, alter verò nō quadratus, plani sunt non similes; quales sunt 16. & 20. Si enim essent plani similes,* [e] *haberent proportionē, quam quadratus ad quadratū.* f 24. octaui *Existente igitur 16. quadrato,* [f] *esset & 20. quadratus, quod est absurdum. ponitur enim non quadratus.*

*PARI ratione quilibet duo numeri, quorum alter cubus sit, alter verò non cubus, solidi sunt non similes, vt 27. & 40. Si enim essent solidi similes,* g 27. octaui [g] *haberent proportionem, quam cubus ad cubum. Cùm igitur* h 25. octaui *27. cubus sit,* [h] *esset & 40. cubus. quod est absurdum. ponitur enim non cubus.*

FINIS ELEMENTI OCTAVI.

---

# EVCLIDIS ELEMENTVM NONVM.

## 1. THEOR. 1. PROPOS. 1.

SI duo similes plani numeri multiplicantes se mutuò faciant quendam; Productus quadratus erit.

DVO numeri plani similes A, B, se mutuò multiplicantes faciant C. Dico C, quadratum esse. Multiplicans enim A, seipsum faciat D, quadratum. Quoniam igitur A, multiplicans A, & B, produxit D, & C, [c] erit vt A, ad B, ita D, ad C. At inter A, & B, cùm sint plani similes, [b] vnus medius cadit proportionalis. [c] Igitur & inter D, & C, vnus medius proportionalis cadet.

A, 6. B, 54. C, 36. E, 108. C, 324.

a 17. septimi. b 18. octaui. c 8. octaui. d 22. octaui.

Cadat ergo E, vt sint continuè proportionales D, E, C. Itaq; cùm tres D, E, C, continuè sint proportionales, sitq; primus D, quadratus, ex constructione; [d] erit quoq; C, tertius, quadratus. Si duo ergo similes plani numeri multiplicātes se mutuò, &c. Quod erat demōstrandū.

## 2. THEOR. 2. PROPOS. 2.

SI duo numeri se mutuò multiplicātes faciant quadratum; similes plani erūt.

DVO numeri A, B, se mutuò multiplicātes faciant C, quadratum. Dico A, B, esse similes planos. Multiplicans enim A, seipsum faciat D, quadratum. Quoniam igitur A, multiplicans A, & B, fecit D, & C; [e] erit vt A, ad B, ita D, ad C. [f] At inter D, & C, quadratos vnus medius cadit proportionalis. [g] Igitur & inter A, & B, vnus medius proportionalis cadet; [h] Ac propterea A, & B, similes plani sunt. Quare si duo numeri se mutuò multiplicantes, &c. Quod demonstrandum erat.

A, 6. B, 54. D, 36. C, 324.

e 17. sept. f 11. octaui. g 8. octaui. h 20. octaui.

### SCHOLIVM.

*EX his demonstrabimus quatuor insequentia theoremata non inutilia.*

#### I.

SI duo numeri quadrati se mutuò multiplicātes faciāt quēpiā: Productus quadrat⁹ erit.

A, 4. B, 25. C, 100.

*DVO quadrati A, B, se mutuò multiplicantes faciant C. Dico C, esse quadratū. Cùm enim A, & B, sint similes plani, nimirum quadrati;* [a] *erit C, ex eis productus, quadratus.*

a 21. noni.

#### II.

SI duo numeri se mutuò multiplicantes faciant quadratum; alter autem sit quadratus; Et reliquus quadratus erit.

DVO

A,9. D,12. B,16. C,144. *Duo numeri A,B,se mutuò multiplicantes faciant C, quadratum: sit q. A, quadratus. Dico & B, quadratum esse. Cùm enim A, & B, se mutuò multiplicantes faciant C, quadratum:* [a] *erunt A, & B, similes plani:* [b] *atque adeò inter eos vnus medius cadet proportionalis, videlicet D.* [c] *Quare A, existente quadrato, erit & B, quadratus.*

a 2. noni.
b 18. octani
c 22. octaui

## III.

SI duo numeri se mutuò multiplicantes faciant non quadratum, alter autem sit quadratus; Reliquus non quadratus erit.

A, 4. B, 20. C, 80. *Duo numeri A,B, se mutuò multiplicantes faciant C, non quadratum; sit q. A, quadratus. Dico B, non quadratum esse. Si enim B, dicatur esse quadratus, erit & C, productus ex quadratis A, B, quadratus, per theor. 1. huius scholij; Quod est absurdum, & contra hypothesim. Non igitur quadratus est B, numerus.*

## IIII.

SI duo numeri, quadratus & non quadratus, se mutuò multiplicantes faciant aliquem; Productus non quadratus erit.

A, 9. B, 20. C, 180. *Duo numeri A, quadratus, & B, non quadratus, se mutuò multiplicantes faciant C. Dico C, non esse quadratum. Nam si C. foret quadratus, cùm producatur ex A, in B, sit q. A, quadratus; esset & B, ex theor. 2. huius scholij, quadratus: Quod est absurdum, & contra hypothesim. Non igitur C, quadratus erit.*

## THEOR. 3. PROPOS. 3.

3.

SI cubus numerus seipsum multiplicãs procreet aliquẽ; Productus cubus erit.

FACIAT cubus A, seipsum multiplicans numerum B. Dico B, esse cubum. Sit enim C, latus cubi A; & ex C, in se fiat D, & idcirco ex C, in D, ipse cubus A, gignatur.

A, 8. E, 16. F, 32. B, 64. D, 4. C, 2. Vni-. tas. Quia igitur C, seipsum multiplicans fecit D: [a] metietur C, ipsum D, per C: [b] Metitur autem & vnitas ipsum C, per C. Igitur eadem pars est vnitas ipsius C, quæ C, ipsius D, nimirum denominata à C; Ac proinde [c] vt vnitas ad C, ita C, ad D. Rursus quia C, multiplicans D, fecit A; [d] metietur D, ipsum A, per C. Metiebatur autem & C, ipsum D, per C. Eadem ergo pars est C, ipsius D, quæ D, ipsius A; [e] ideoq; vt C, ad D, ita D, ad A: sed vt C, ad D, ita erat vnitas ad C. Igitur vt vnitas ad C, ita C, ad D, & D, ad A; Atque adeò inter vnitatem & numerum A, duo medij proportionales cadunt numeri C, D. [f] At quia A, ipsum B, metitur per A, quòd A, seipsum multiplicãs fecerit B; [g] metitur verò & vnitas ipsum A, per A: Eadem erit pars vnitas ipsius A, quæ A, ipsius B; [h] Ac propterea erit vt vnitas ad A, ita A, ad B. Quare cùm inter vnitatem & numerum A, cadant duo medij proportionales C, & D; [i] cadent totidem inter A, & B, nimirum E, & F. Cùm ergo quatuor numeri A, E, F, B, sint continuè proportionales, & A, primus sit cubus, [k] erit quoq; B, quart⁹ cubus. Si cubus igitur numer⁹ seipsum multiplicãs, &c. Quod erat demõstrandũ.

a 7. pron.
b 5. pron.
c 20. defin.
d 7. pron.
e 20. defin.
f 7. pron.
g 5. pron.
h 10. defin.
i 8. octani.
k 23. octani.

## THEOR. 4. PROPOS. 4.

4.

SI cubus numerus cubũ numerũ multiplicans faciat aliquẽ; Factus cubus erit.

FIAT ex cubo A, in cubum B, numerus C. Dico C, cubum esse. Multiplicans enim A, seipsum faciat D; [l] eritque D, cubus. Quoniam verò A, multiplicans A, & B, fecit D, & C; [m] erit vt A, ad B, ita D ad C. [n] At inter A, & B, cubos duo medij proportionales cadunt. [o] Igitur & inter D, & C, duo medij proportionales cadent; [p] Ac propterea D, existente cubo, & C, cubus erit. Quocirca si cubus numerus cubum numerum multiplicans, &c. Quod erat ostendendum.

A, 8. B, 27. D. 64. C, 216.

l 3. noni.
m 17. septi.
n 12. octani.
o 8. octani.
p 23. octani.

## THEOR. 5. PROPOS. 5.

5.

SI cubus numerus numerum quendam multiplicans faciat cubum; Et multiplicatus cubus erit.

FIAT ex cubo A, in numerum B, numerus cubus C. Dico & B, cubum esse. Multiplicans enim A, seipsum faciat D, [q] qui cubus erit. Quoniam igitur A, multiplicans A, & B, fecit D, & C, [r] erit vt A, ad B, ita D, ad C; [s] At inter D, & C, cubos duo cadunt medij proportionales. [t] Totidem igitur & inter A, & B, cadent; [u] Ac proinde existente A, cubo, & B, cubus erit. Quamobrem si cubus numerus numerum quendam multiplicans, &c. Quod ostendendum erat.

A, 8. B, 27. D, 64. C, 216.

q 3. noni.
r 71. septimi
s 11. octani.
t 8. octani.
u 23. octani.

### SCHOLIVM.

*Ex his & hac, quæ sequuntur, facilè demonstrabuntur, videlicet.*

I.

SI cubus numerus non cubũ numerũ multiplicãs faciat aliquẽ; Factus non cubus erit.

A,8. B,20. *FIAT ex A,cubo in B,non cubum numerus C. Dico C, non esse cubum. Si enim C,sit*
a 5.noni. C,160. *cubus;* [a] *& multiplicatus B,cubus erit. quod non ponitur.*

II.

SI cubus numerus numerum quendam multiplicans faciat non cubum; Et multiplicatus non cubus erit.

A,8. B.17. *FIAT ex cubo A,in numerum B,non cubus C. Dico & B,non esse cubum. Si namque B,*
b 4.noni. C,136. *sit cubus,* [b] *& factus C,cubus erit. quod est contra hypothesim.*

## 6. THEOR. 6. PROPOS. 6.

SI numerus seipsum multiplicans cubum faciat: Et ipse cubus erit.

MVLTIPLICANS seipsum numerus A, faciat B, cubum. Dico & A,cubum esse. Fiat enim ex A, in B, numerus C, qui cubus erit, cùm A, in se faciat B, & ipse C, ex A, in
A,8. B,64. C,512. B,gignatur, atque adeò æqualis æqualiter æqualis sit, vt perspicuum est ex ijs, quæ ad definitionem cubi scripsimus. Quia igitur B,cubus mul-
a 5.noni. tiplicans numerum quempiam A, facit cubum C; [a] erit & A, cubus. Quare si numerus seipsum multiplicans cubum faciat, &c. Quod erat demonstrandum.

*SCHOLIVM.*

*ALIAM demonstrationem interpretes Euclidis hoc loco adducunt, & quidem longiorem. Postquam e-*
a 12. octaui *nim demonstrarunt C,factum ex A,in B,esse cubum: inferunt,* [a] *Ergo inter B,&*
b 17.sept. A,8. B,64. C,512. *C,cubos duo medij proportionales cadunt.* [b] *Quoniam verò est vt B, ad C, ita A,*
c 8. octaui. *ad B, quod A, multiplicans A,& B, ipsos B, & C, fecit;* [c] *cadent quoque inter A,*
d 23.octaui *& B,duo medij proportionales.* [d] *Atque adeò existente B,cubo, & A, cubum erit. Verùm nostra demonstratio breuior est,& planior, vt perspicuum est.*

## 7. THEOR. 7. PROPOS. 7.

SI compositus numerus numerum aliquem multiplicans, quempiam faciat: Factus solidus erit.

NVMERVS compositus A, multiplicãs numerum quemlibet B, faciat C. Dico C, esse solidum.
a 13. defin. Cùm enim A, sit compositus, [a] metietur eum, præter vnitatem, numerus
b 9. pron. A,6. B,11. C,66. aliquis; metiatur D, ipsum A, per E. Quo posito, [b] multiplicante D, ipsum
D,2. E,3. E, producetur A. Cùm ergo B, ipsum A, multiplicans fecerit C; procreabitur C, ex mutua multiplicatione trium numerorum D,E,B; Ac propterea solidus erit ex defin. cuius latera D,E,B. Quapropter si compositus numerus numerũ aliquem multiplicans, &c. Quod erat ostendendum.

## 8. THEOR. 8. PROPOS. 8.

SI ab vnitate quotcunque numeri deinceps proportionales fuerint: Tertius quidem ab vnitate quadratus est, & vnum intermittentes omnes: Quartus autem est cubus, & duos intermittentes omnes: Septimus verò cubus simul, & quadratus, & quinque intermittentes omnes.

SINT ab vnitate continuè proportionales numeri quotcunq; A,B,C,D,E,F,G,H,I,K,L,M. Di
co tertium quidẽ B, ab vnitate esse quaVnitas. A,3 B,9. C,27. D,81. E,243. F,729. G,2187. dratũ, & vnum intermittentes omnes,
H,6561. I,19683. H,59049. L,177147. M,531441. quales sunt D,F,H,K,M: Quartũ autem
C, cubũ, & duos intermittentes omnes
euiusmodi sunt F,I,M: septimum verò F, cubũ simul, & quadratũ, & quinq; intermittẽtes omnes,
nimirũ M. Quoniam enim est vnitas ad A, vt A, ad B; æquè metietur vnitas numerũ A, & numerus
a 5.pron. A, numerũ B: [a] Metitur aũt vnitas numerũ A, per A. Ergo & A, ipsum B, p A, metietur; [b] Atq; adeó
b 9. pron. A, multiplicãs A, ipsum B, producet. Quare B, quadratus est. Quia verò tres deinceps ꝓportiona-
c 22.octaui. les sunt B,C,D, & est B, quadratus; [c] erit & D, quadratus. Eadẽ ratione assumptis tribus deinceps
d 22.octaui. ꝓportionalibus D,E,F, cũ D, sit quadratus, [d] & F, quadratus erit; Nec nõ & oẽs vnũ intermittẽtes.

RVRSVS quia est vnitas ad A, vt B, ad C; æquè metietur vnitas numerum A, & numerus B, numerũ C; [e] Metitur autẽ vnitas ipsum A, per A. Igitur & B, ipsum C, per A, metietur; [f] atq; adeò B,
e 5. pron. ipsum A, multiplicans procreabit numerũ C. Quare cùm A, seipsum multiplicãs faciat B, multipli
f 9. pron. cãs verò B, faciat C, vt est ostẽsum; erit C, cubus. Quia verò quatuor deinceps proportionales sunt
g 23.octaui. C,D,E,F, & est C, cubus, [g] erit & F, cubus. Eodem argumẽto, assumptis quatuor deinceps propor
h 23. octaui. tionalibus F,G,H,I, cùm F, sit cubus; [h] & I, cubus erit; atq; omnes semper duos intermittentes.

POSTREMO quia F, septimus ab vnitate ostensus est & quadratus, & cubus: ipse erit cubus simul & quadratus: Atque eodem modo M, septimus ab F, intermissis nimirum quinq; G,H,I,K,L, cubus erit simul & quadratus; Nec nõ & omnes quinque intermittẽtes. Si igitur ab vnitate quotcunque numeri deinceps proportionales fuerint, &c. Quod erat demonstrandum.

SCHO-

## SCHOLIVM.

*Hoc theorema potest quoque hoc modo proponi.*

Si sint quotcunque numeri ab vnitate continuè proportionales, omnes positi in locis imparibus; nimirum in tertio, quinto, septimo, nono, vndecimo, &c. sunt quadrati. Omnes autem, qui sequuntur proximè numeros positos in locis, tertio, sexto, nono, duodecimo, decimoquinto, decimooctauo, & aliis, quæ ternarius metitur, cuiusmodi sunt numeri quartus, septimus, decimus, tertiusdecimus, decimussextus, decimusnonus, &c. sunt cubi. Omnes verò qui proximè sequuntur numeros positos in locis sexto, duodecimo, decimooctauo, vigesimoquarto, & aliis, quæ metitur senarius, quales sunt septimus, tertiusdecimus, decimusnonus, vigesimusquintus, &c. sunt cubi simul, & quadrati.

*Nam primi ordinis numeri omnes semper vnum intermittunt post tertium ab vnitate: At secundi ordinis numeri omittunt semper duos numeros post quartum ab vnitate. Numeri denique tertij ordinis quinque semper interponunt post septimum ab vnitate, quemadmodum in theoremate proponit Euclides.*

## THEOR. 9. PROPOS. 9. 9.

Si ab vnitate quotcunque numeri deinceps proportionales fuerint, qui verò post vnitatem sit quadratus, Et reliqui omnes quadrati erunt. At si qui post vnitatem, sit cubus; & reliqui omnes cubi erunt.

Sint ab vnitate continuè proportionales numeri quotcunq; A, B, C, D, E, F, sitq; primùm A, proximus vnitati quadratus. Dico & reliquos omnes quadratos esse. Quòd enim tertius ab vnitate, & omnes vnum intermittentes, quales sunt B, D, F, quadrati sint, [a] iam demonstratum est. Quod verò & reliqui intermedij C, & E, quadrati sint, ita perspicuum fiet. Cùm tres continuè proportionales sint A, B, C; sitque A, quadratus; [b] erit & C, quadratus. Eodemq; modo, assumptis tribus continuè proportionalibus C, D, E, cùm C, sit quadratus; [c] & E, quadratus erit. Omnes igitur A, B, C, D, E, F, quadrati sunt. Idem ostendemus, si plures numeri sint continuè proportionales.

Vnitas. A, 4. B, 16. C, 64. D, 256. E, 1024. F, 4096.

Vnitas. A, 4. B, 16. C, 64. D, 256. E, 1024. F, 4096.

[a] 8. noni. [b] 22. octaui. [c] 22. octaui.

Sit iam A, proximus vnitati cubus. Dico & reliquos cubos esse. Quod enim quartus ab vnitate, & omnes duos intermittentes, cuiusmodi sunt C, & F, sint cubi, [d] iam est demõstratum. Quòd autem & reliqui B, D, E, cubi sint, sic ostendemus. Cùm sit vnitas ad A, vt A, ad B; æquè metietur vnitas numerũ A, & numerus A, numerum B: [e] Metitur autem vnitas numerum A, per ipsummet A. Igitur, & A, ipsum B, per seipsum metietur; [f] Atque adeò cubus A, seipsum multiplicans numerum B, procreabit. [g] Quare B, cubus est. Quoniam verò quatuor continuè proportionales sunt A, B, C, D, estque A, cubus, [h] & D, cubus erit. Eademque ratione, assumptis quatuor deinceps proportionalibus B, C, D, E, cùm B, cubus sit; [i] & E, cubus erit. Omnes igitur A, B, C, D, E, F, cubi sunt. Non secus demonstrabimus, omnes cubos esse, si plures continuè proportionales fuerint. Quocirca, si ab vnitate quotcunq; numeri deinceps proportionales fuerint, &c. Quod demonstrandum erat.

Vnitas. A, 8. B, 64. C, 512. D, 4096. E, 32768. F, 262144.

[d] 8. noni. [e] 5. pron. [f] 9. pron. [g] 3. noni. [h] 23. octaui. [i] 23. octaui.

## SCHOLIVM.

*Non demonstrauit Geometra, si numerus, qui post vnitatem, sit cubus simul & quadratus, & reliquos omnes esse cubos simul, & quadratos; quia perspicuè hoc ipsum ex demonstratis colligitur. Nam si proximus vnitati sit cubus simul, & quadratus: qua parte est cubus, ea ratione omnes reliqui cubi erunt; qua verò parte est quadratus, ea ratione & reliqui omnes quadrati erunt, vt demonstratum est. Omnes igitur erunt cubi simul, & quadrati.*

*Verum tota propositio facilius ita poterit demonstrari. Sit primum A, proximus vnitati, quadratus. Dico & omnes quadratos esse. Quoniam enim ex scholio propos. 10. lib. 8. A, seipsum multiplicans facit B; erit ex defin. B, quadratus. Item quia ex eodem scholio, A, multiplicans B, facit C, sunt q$_3$ A, B, quadrati; erit & C, quadratus, ex scholio propos. 2. huius lib. Rursus quia ex eodem scholio propos. 10. lib. 8. A, multiplicans C, facit D, sunt q$_3$ A, C, quadrati; erit ex eodem scholio propos. 2. huius lib. & D, quadratus: Atq; ita deinceps: cùm ex illo scholio propos. 10. lib. 8. A, multiplicans D producat E; & multiplicans E, faciat F, &c.*

Vnitas. A, 4. B, 16. C, 64. D, 256. E, 1024. F, 4096.

*Sit deinde A, proximus vnitati, cubus. Dico & omnes esse cubos. Quia enim ex scholio propos. 10. lib. 8. cubus A, seipsum multiplicans facit B; [a] erit & B, cubus. Item quia ex eodem scholio, A, multiplicans B, facit C, sunt q$_3$ A, B, cubi; [b] erit & C, cubus. Rursus qa ex eodẽ scholio, A, multiplicãs C, facit D, sunt q$_3$ A, C, cubi; [c] erit quoq;*

Vnitas. A, 8. B, 64. C, 512. D, 4096. E, 32768. F, 262144.

[a] 3. noni. [b] 4. noni. [c] 4. noni.

*D, cubus. Atq; ita de cæteris, cùm ex eo scholio, A, multiplicãs D, gignat E; & multiplicans E, procreet F, &c.*

## 10. THEOR. 10. PROPOS. 10.

SI ab vnitate quotcunq; numeri deinceps proportionales fuerint, q verò post vnitatem, non sit quadratus, neq; alius vllus quadratus erit, præter tertium ab vnitate, & vnum intermittentes omnes. At si, qui post vnitatem, non sit cubus, neque alius vllus cubus erit, præter quartum ab vnitate, & duos intermittentes omnes.

SINT ab vnitate quotcunque numeri deinceps proportionales A, B, C, D, E, F, G, H, I, &c. & primum A, proximus vnitati non sit quadratus. Dico nec alium vllum esse quadratum, præter tertium ab vnitate, & vnum intermittentes omnes; hoc est, præter B, D, F, H, &c. Si enim præter hos

Vnitas. A, 2. B, 4. C, 8. D, 16. E, 32. F, 64. G, 128. H, 256. I, 512. K, 1024. L, 2048. M, 4096.

alius est quadratus, sit quadratus E. [a] Cùm ergo & D, sit quadratus; sitque vt D, ad E, vel E, ad F, ita A, ad B, & conuertendo vt E, ad D, vel F, ad E, ita B, ad A; habebit B, ad A, rationem, quam quadratus numerus E, ad quadratum numerum D, vel quadratus F, ad quadratũ E; [b] sed B, tertius ab vnitate est quadratus. [c] Igitur & A, primus ab vnitate quadratus erit. Quod est absurdum: ponitur enim A, non quadratus. Non ergo E, quadratus est. Eadem ratione ostendemus, nullum alium, præter dictos, quadratum esse.

[a] 8. noni. [b] 8. noni. [c] 24. octaui.

SED iam A, proximus vnitati non sit cubus. Dico nec alium vllum esse cubum, præter quartum ab vnitate, & duos intermittentes omnes, videlicet præter C, F, I, &c. Nam si præter hos alius potest esse cubus, sit D, cubus. [d] Cùm ergo & F, cubus sit, sitq; ex æquo vt D, ad F, ita A, ad C, (quòd tres D, E, F, eandem habeant rationem, quam tres A, B, C,) & conuertendo vt F, ad D, ita C, ad A; habebit C, ad A, rationem, quam cubus F, ad cubum D: [e] Sed C, est cubus, cùm sit quartus ab vnitate. [f] Igitur & A, primus ab vnitate cubus erit. quod est contra hypothesim. Non igitur D, cubus est. Quod si E, credatur esse cubus; [g] cùm & C, cubus sit, sitque ex æquo, vt C, cubus ad E, cubum, ita A, ad C, & conuertendo vt cubus E, ad cubum C, ita C, ad A; existente C, cubo, [h] erit, & A, cubus. quod non ponitur. Non ergo E, cubus est. Quemadmodum autem ostensum est, duos D, & E, inter duos cubos C, & F, cubos non esse; ita quoque eadem ratione ostendemus, neq; G, & H, inter cubos F, & I, neque vllos alios duos, inter duos cubos, esse cubos. Si igitur ab vnitate quotcunque numeri, &c. Quod demonstrandum erat.

[d] 8. noni. [e] 8. noni. [f] 25. octaui. [g] 8. noni. [h] 25. octaui.

*SCHOLIVM.*

*NON est autem necesse, si numerus, qui post vnitatem, non sit cubus simul, & quadratus, nullum alium esse cubum simul, & quadratum, præter septimum ab vnitate, & quinq; intermittentes omnes; cùm aliquando tertius ab vnitate, aliquando verò quartus possit esse cubus simul, & quadratus, non existente primo ab vnitate cubo simul, & quadrato.*

Vnitas A, 8, B, 64. *SIT enim primùm A, qui post vnitatem, cubus quidem, non autem simul & quadratus. Dico B, tertium esse cubum simul & quadratum; cubum quidem,* [a] *quòd primo existente cubo, omnes cubi sint,* [b] *quadratum verò, quòd tertius sit ab vnitate.*

[a] 9. noni. [b] 8. noni.

Vnitas. A, 4. B, 16. C, 64. *SIT deinde A, post vnitatem quadratus quidem, non autem simul & cubus. Dico quartum C, esse cubum simul & quadratum;* [c] *Cubum quidem, quòd quartus sit ab vnitate; quadratum verò,* [d] *quòd primo existente quadrato, omnes sint quadrati.*

[c] 8. noni. [d] 9. noni.

*SIT postremò A, post vnitatem neque cubus, neque quadratus. Dico nullum alium esse cubum simul & quadratum, præter septimum F, & quinq; intermittentes omnes. Cùm enim primo non existente quadrato,* [e] *nullus alius quadratus sit, præter tertium ab vnitate, & vnum intermittentes omnes, cuiusmodi sunt, vt in scholio propos. 8. huius lib. docuimus, tertius, quintus, septimus, nonus, vndecimus, decimustertius, decimusquintus, decimusseptimus, decimusnonus, &c. Primo autem non existente cubo,* [f] *nullus alius sit cubus, præter quartum ab vnitate, & duos intermittentes omnes, quales sunt, vt ex eodem scholio appareat, quartus, septimus, decimus, tertiusdecimus, decimussextus, decimusnonus, &c. perspicuum est, tantummodo septimum, tertiumdecimum, decimumnonum, qui quidem omnes quinque intermittunt, quadratos esse simul, & cubos, & sic de cæteris. Nam in hæc loca sola incidunt quadratus, & cubus simul, vt liquidò constat ei, qui rectè propositionem hanc & octauam huius libri expenderit.*

Vnitas. A, 6. B, 36. C, 216. D, 1296. E, 7776. F, 46656.

[e] 10. noni. [f] 10. noni.

## 12. THEOR. 11. PROPOS. 11.

SI ab vnitate quotcunq; numeri deinceps proportionales fuerint; Minor maiorem metitur per aliquem eorum, qui in proportionalibus sunt numeris.

SINT ab vnitate quotcunq; numeri continuè proportionales A, B, C, D, E, F, G. Dico quemlibet minorem, vt C, quemlibet maiorem, vt G, metiri per aliquem numerorum A, B, C, D, E, F, G. Cùm enim sit ex æquo vt C, ad G, ita vnitas ad D; (quòd quinque numeri C, D, E, F, G, eandem habeant

habeant rationem continuam, quam vnitas & quatuor numeri A,B,C,D,) [a] æquè metietur vnitas numerum D, atque numerus C, numerum G: [b] Sed vnitas metitur numerum D, per ipsum met D. Igitur & C, numerus numerum G, per D, metietur. Eadem ratione metietur E, ipsum F, per A, quòd sit vt E, ad F, ita vnitas ad A, &c. Sic quoque metietur A, ipsum G, per F, cùm sit ex æquo vt A, ad G, ita vnitas ad F, &c. Atque ita de reliquis eodem modo. Si igitur ab vnitate quotcunque numeri deinceps proportionales fuerint, &c. Quod erat ostendendum.

Vnitas. A, 3. B, 9. C, 27. D, 81. E, 243. F, 729. G, 2187.

[a] 20. defin.
[b] 5. pron.

## SCHOLIVM.

*PERSPICVVM autem est ex his, quantum abest maior numerus à minore metiente, tantùm distare ab vnitate eum numerum, per quem minor maiorem metitur; propterea quòd eadem esse debet proportio minoris ad maiorē, quæ vnitas ad eũ, per quem metitur minor maiorem, vt ex demonstratione apparet. Itaque B, metietur F, per D; Et C, metietur F, per C; nimirum per seipsum, &c. quia tam inter B, & F, quàm inter vnitatem & D, tres numeri interponuntur: Et tam inter C, & F, quàm inter vnitatem & C, duo interiecti sunt numeri.*

Vnitas. A, 3. B, 9. C, 27. D, 81. E, 243. F, 729. G, 2187.

*HINC rursus efficitur, quemlibet numerum, qui seipsum multiplicet, producere numerum, qui in numeris proportionalibus tantùm ab eo distat, quantum ipse ab vnitate: Si verò minor aliquis maiorē quempiam multiplicet, procreari numerum, qui tantùm à maiore distat, quantum minor ab vnitate, propterea quòd si numerus numerum metiens multiplicet eum, per quem metitur; [a] producatur ille, quem metitur. Ergo C, se ipsum multiplicans gignet F; cùm F, tantùm absit à C, quantum C, ab vnitate; ac propterea C, ipsum F, per C, metiatur, vt diximus. Sic quoq; B, multiplicans D, faciet eundem F; quòd D, ipsum F, metiatur per B, &c. & sic de reliquis.*

[a] 9. pron.

# THEOR. 12. PROPOS. 12. 11.

**SI ab vnitate quotcunq; numeri deinceps proportionales fuerint; quicunque primorum numerorum vltimum metiuntur, iidem & eum, qui vnitati proximus est, metientur.**

SINT ab vnitate deinceps proportionales quotcunque numeri A,B,C,D. Dico quoscunque primorum numerorum, qui metiuntur vltimum D, metiri quoq; A, proximum vnitati. Metiatur enim numerus primus E, ipsum D. Dico eundem E, primũ metiri etiam numerum A, vnitati proximum. Si namq; non metitur ipsum A; [a] erit E, cùm primus sit, ad A, primus: hoc est, A, & E, inter se primi erunt. Metiatur E, ipsum D, per F, [b] atque adeò E, multiplicans F, faciat D. Quia verò & A, ipsum D, metitur per C; ac proinde A, multiplicans C, facit D, vt in scholio præcedentis propos. ostendimus; producetur idem numerus D, ex A, primo in C, quartum, & ex E, secundo in F, tertium. [c] Quare erit vt A, primus ad E, secundum, ita F, tertius ad C, quartum. Cùm ergo A, & E, sint inter se primi; [d] ac proinde in sua proportione minimi; [e] metietur æquè A, ipsum F, & E, ipsum C. Metiatur E, ipsum C, per G, [f] atq; adeò E, multiplicãs G, faciat C. Quia verò & A, ex scholio eodem præcedentis propos. metitur C, per B, [g] atq; adeò A, multiplicans B, facit C; procreabitur idem numerus C, ex A, primo in B, quartum, & ex E, secundo in G, tertium. [h] Erit igitur vt A, primus ad E, secundũ, ita G, tertius ad B, quartũ. Quapropter cùm A, & E, sint inter se primi; [i] ac propterea in sua proportione minimi; [k] metietur æquè A, ipsum G, & E, ipsum B. Metiatur E, ipsum B, per H: [l] ita vt E, multiplicans H, faciat B. Metitur autem & A, ipsum B, per A, atq; idcirco A, se ipsum multiplicans facit B, vt ex eodem scholio præcedentis propos. apparet. Gignitur ergo idem numerus B, ex E, primo in H, tertium, & ex A, medio in seipsum. [m] Quare erit vt E, primus ad A, secundum, ita A, secundus ad H, tertium. Cùm ergo E, & A, inter se primi sint; [n] ac proinde in sua proportione minimi; [o] æquè metietur E, ipsum A, & A, ipsum H. Quod est cõtra hypothesim. ponitur enim E, ipsum A, non metiri. Quare falsum est E, ipsum A, non metiri. Nam ex eo quòd E, non dicatur metiri ipsum A, semper demonstrabitur E, ipsum A, metiri; Quod est absurdum. Metitur ergo E, ipsum A. Eodem argumento ostendemus, quoscunque alios numeros primos ipsum D, metientes, metiri quoque ipsum A; Eademque erit ratio, si C, vel B, vltimus numerus statuatur.

Vnitas. A, 10. B, 100. C, 1000. D, 10000. E, 5. H, 20. G, 200. F, 2000.

[a] 31. sept.
[b] 9. pron.
[c] 19. sept.
[d] 23. sept.
[e] 21. sept.
[f] 9. pron.
[g] 9. pron.
[h] 19. sept.
[i] 23. sept.
[k] 21. sept.
[l] 9. pron.
[m] 20. sept.
[n] 23. sept.
[o] 21. sept.

ALITER. Metiatur E, numerus primus vltimum D. Dico & E, ipsum A, metiri. Si enim non metiatur; [p] erit E, ad A, primus. Quia igitur A, & E, inter se primi sunt, & A, seipsum multiplicans facit B, vt ex scholio propos. præcedentis constat, [q] erit B, ad E, primus. Quia ergo A, & B, ad E, primi sunt; fit autem C, ex A, in B, per idem scholium præcedẽtis propositionis [r] erit C, ad E, primus. Rursus eodem modo quia A, & C, ad E, primi sunt & fit D, ex A, in C, ex eodem scholio præcedentis propos. [s] erit D, ad

Vnitas. A, 6. B, 36. C, 216. D, 1296. E, 3.

[p] 31. sept.
[q] 27. sept.
[r] 26. sept.
[s] 26. sept.

E, primus. Non igitur E, ipſum D, metitur. Quod eſt contra hypotheſin. Metitur ergo E, ipſum A. Si igitur ab vnitate quotcunque numeri deinceps proportionales fuerint, &c. Quod oſtendendum erat.

## COROLLARIVM.

*ITAQVE neq; vllus numerus primus, qui maior ſit eo, qui proximus eſt vnitati, neq; vllus minor proximum vnitati non metiens, metiri poteſt vltimum. Si namq; metiretur vltimum, metiretur quoq; vnitati proximum, vt demonſtratum eſt. quod non ponitur.*

## SCHOLIVM.

*EST autẽ admirabilis prima huius propoſ demonſtratio. Nam in ea Euclides ex eo, quòd E, dicatur non metiri ipſum A, oſtendit demonſtratione affirmatiua E, ipſum A, metiri: quod videtur fieri nõ poſſe. Nã ſi quis demonſtrare inſtituat, Socratem eſſe album, ex eo, q̃ non eſt albus, paradoxum aliquid, & inopinatũ in medium videatur afferre: Cui tamen nõ abſimile quid factum hic eſt in numeris ab Euclide, & in alijs nonnullis propoſitionibus, quæ ſequuntur. Cardanus quoque ſimile quid effecit in magnitudinibus, lib. 5. de propor. propoſ. 201. gloriaturq; ſe primùm omnium hanc rationem demonſtrandi reperiſſe: quod arbitror eum nõ dicturum fuiſſe, ſi diligentius vim huius demonſtrationis expendiſſet, vel certè ſi expendit, eã in memoriam revocaſſet; quandoquidem ipſo longè prior Euclides vſus eſt hoc etiã demonſtrandi modo, vt ex hoc theor. 12. eſt manifeſtum. Eodem genere demonſtrãdi vſus eſt Theodoſius lib. 1. Sphæricorum, propoſ. 12. vt ibid. monuimus.*

*CÆTERVM ex demonſtratis perſpicuum eſt, quemcunq; numerum primum, qui vltimum metitur,*
a 12. noni. *metiri etiam omnes alios ante ipſum.* [a] *Cùm enim metiatur proximum vnitati, hic autẽ omnes ſubſequentes,*
b 11. noni. [b] *quòd ſemper minor maiorem metiatur per aliquẽ eorum, qui in proportionalibus ſunt numeris;*
c 11. pron. [c] *manifeſtum eſt, quòd & ille omnes metiatur.*

## 13. THEOR. 13. PROPOS. 13.

**SI ab vnitate quotcunque numeri deinceps proportionales fuerint, qui verò poſt vnitatem, primus ſit; Maximum nullus alius metietur, præter eos, qui ſunt in numeris proportionalibus.**

SINT ab vnitate continuè proportionales quotcunq; numeri A, B, C, D, quorum A, proximus vnitati ſit primus. Diço nullum alium numerũ, præter ipſos A, B, C, metiri maximum D. Si enim fieri poteſt, metiatur numerus alius E, diuerſus ab A, B, C, ipſum D. Manifeſtum autem eſt, E, non
a 12. noni. eſſe numerum primũ. Si enim primus ſit, & metiatur extremum D; [a] metietur quoq; ipſum A, vnitati proximum, qui primus ponitur. Quod eſt abſurdum. Non igitur E, primus eſt, ſed compoſitus; [b] atque adeò eum aliquis numerus primus metietur.

b 33. ſept.

Vnitas. A, 5. B, 25. C, 125. D, 625.
E---- H---- G---- F----

quem dico alium eſſe non poſſe, præter primum A. Si enim alius primus q̃ A, metiatur E; cùm E, metiatur extremum
c 11. pron. D; [c] metietur quoq; ille alius primus eundẽ D, [d] atq; adeò
d 12. noni. & ipſum A, primum; nimirum vnitati proximum. Quod eſt abſurdum. Ergo non alius primus, q̃ A, ipſum E, metitur. Metiatur iam E, ipſum D, per F. Dico F, diuerſum eſſe ab A, B, C. Si enim F, ſit idem, qui aliquis ipſorum A, B, C; & E, metiatur D, per F; metietur vtique E, ipſum D, per aliquem
e 8. pron. ipſorum A, B, C; [e] & viciſſim aliquis ipſorum A, B, C, (nimirum is, per quem E, ipſum D, metitur,)
f 11. noni. metietur D, per E. [f] Cùm ergo quilibet ipſorum A, B, C, metiatur D, per aliquẽ ipſorum A, B, C; erit E, idem qui aliquis ipſorum A, B, C, quod eſt contra hypotheſim. ponitur enim E, non idem, qui aliquis ipſorum A, B, C. Non igitur F, idem eſt, qui aliquis ipſorum A, B, C, ſed diuerſus. Quo-
g 8. pron. niam verò E, metitur D, per F; [g] metietur viciſſim F, ipſum D, per E. Non erit autem F, primus: ſi
h 12. noni. enim ſit primus, & metiatur D, vltimum; [h] metietur & A, proximum vnitati, qui primus eſt. quod
i 23. ſept. eſt abſurdum. Igitur F, non primus eſt, ſed compoſitus; [i] atque adeò eum aliquis numerus primus metietur. quem rurſus diço nullum alium eſſe poſſe præter primum A. Si namque alius primus quàm A, metiatur F; cùm F, metiatur D, extremum; [k] metietur quoque ille alius primus eun-
k 11. pron. dem D; [l] atque adeò & ipſum A, proximum vnitati, qui primus eſt. quod eſt abſurdum. Ergo
l 12. noni. non alius primus, quàm A, ipſum F, metitur. Iam verò quoniam E, metitur D, per F; [m] fiet D, ex E,
m 9. pron. in F: Fit autem & D, ex A, in C, vt in ſcholio propoſitionis 11. huius libri docuimus. Idem igitur
n 19. ſept. numerus D, fit ex A, primo in C, quartum, & ex E, ſecundo in F, tertium; [n] Ac proinde erit vt A, primus ad E, ſecundum, ita F, tertius ad C, quartum: Metitur autem A, ipſum E, vt oſtenſum eſt. Ergo & F, ipſum C, metietur. Metiatur per G. Quoniam igitur F, diuerſus ab A, B, metitur C, vltimum (relinquimus enim iam numerum D,) per G; oſtendemus ſimiliter, G, diuerſum eſſe ab A, B, & non primum, ſed compoſitum, quem ſolus A, primus metiatur: quemadmodum id oſtenſum eſt de numero F, per quem E, diuerſus ab A, B, C, metiebatur D, vltimum.

SI enim G, ſit idem, qui aliquis ipſorum A, B; metiatur q̃ F, ipſum C, per G; metietur vtique F,
o 8. pron. ipſum C, per aliquẽ ipſorum A, B; [o] & viciſſim aliquis ipſorum A, B, (videlicet is, per quẽ F, ipſum
p 11. noni. C, metitur) metietur C, per F. [p] Cùm ergo quilibet ipſorũ A, B, metiatur C, per aliquẽ ipſorum A, B; erit F, idem qui aliquis ipſorum A, B. quod eſt abſurdum. oſtenſum eſt enim F, nõ eſſe eundem

quem

quẽm aliquem ipſorum A, B. Non ergo G, eſt idem qui aliquis ipſorum A, B, ſed diuerſus. Quoniam autem F, metitur C, per G; [a] metietur viciſsim G, ipſum C, per F. Non erit autem G, primus. Si enim primus ſit, metiaturq; vltimum C, [b] metietur quoq; numerum primum A, vnitati proximum. quod eſt abſurdum. Non ergo G, primus eſt, ſed compoſitus; [c] ac proinde eũ aliquis primus metietur. quem dico nullum alium poſſe eſſe præter A. Nam ſi alius primus quàm A, metiatur G, cùm G, metiatur C, vltimum; [d] metietur quoq; ille alius primus eundem C; [e] atque adeò & ipſum A, vnitati proximum, qui primus eſt. quod eſt abſurdum. Ergo non alius primus quàm A, ipſum G, metitur. [f] Iam verò quia C, ſit ex F, in G; quòd F, metiatur C, per G; Fit autem idem C, ex A, in B, vt docuimus in ſcholio propoſ. 11. huius lib. Fiet idem numerus C, ex A, primo in B, quartũ, & ex F, ſecundo in G, tertiũ. [g] Quare erit vt A, primus ad F, ſecundum, ita G, tertius ad B, quartum. Metitur autem A, ipſum F, vt demonſtratum eſt. Igitur & G, ipſum B, metietur. metiatur per H. Quia ergo G, diuerſus ab A, metitur B, vltimum (relinquimus enim iam numeros C, & D,) per H; oſtendemus ſimiliter H, diuerſum eſſe ab A; quemadmodum id oſtenſum eſt de numeris F, & G.

a 8. pron.
b 12. noni.
c 33. ſept.
d 11. pron.
e 12. noni.
f 9. pron.
g 19. ſept.

Nam ſi H, idem ſit qui A; metiaturque G, ipſum B, per H; metietur vtique G, ipſum B, per A; [h] Et viciſsim A, ipſum B, per G, metietur. Cùm igitur metiatur A, ipſum B, p A, vt conſtat ex ſcholio propoſ. 11. huius lib. erit G, idem qui A. quod eſt abſurdum. oſtenſum eſt enim G, non eſſe eundem, quem A. Non ergo H, idem eſt, qui A, ſed diuerſus. [i] Iam verò quia B, ſit ex G, in H; quòd G, ipſum B, metiatur per H: Fit autem & idem B, ex A, in ſe, vt in ſcholio propoſ. 11. huius lib. docuimus; Fiet idem numerus B, ex H, primo in G, tertiũ, & ex A, medio in ſe ipſum. [k] Quare erit vt H, primus ad A, ſecundum, ita A, ſecundus ad G, tertium: At A, metitur ipſum G, vt eſt demonſtratum. Igitur & H, ipſum A, metietur, numerum primum. Quod eſt abſurdum. Quare ſi A, primus eſt, maximũ D, nullus alius numerus metitur, præter ipſos A, B, C. Ac proinde ſi ab vnitate quotcunque numeri deinceps proportionales fuerint, &c. Quod erat oſtendendum.

h 8. pron.
i 9. pron.
k 20. ſept.

## THEOR. 14. PROPOS. 14. 14.

**Si minimum numerum primi numeri metiantur: Nullus alius numerus primus illum metietur, præter eos, qui à principio metiebantur.**

Sit numerus A, minimus, quẽ metiantur primi numeri B, C, D. Dico nullum alium primum præter ipſos B, C, D, metiri ipſum A. Metiatur enim, ſi fieri poteſt, primus numerus E, diuerſus à B, C, D, ipſum A, per numerum F. Quia igitur E, metitur A, per F; [l] multipli cans E, ipſum F, faciet A. [m] Quare ſinguli B, C, D, alterum ipſorum E, F, metientur: non quidem ipſum E, primum, & ab ipſis diuerſum: ergo ipſum F, qui minor eſt, quàm A. Quod eſt abſurdum. Ponitur enim A, minimus, quem primi B, C, D, metiantur. Si igitur minimum numerum primi numeri metiantur, &c. Quod demonſtrandum erat.

A.....
B.. C... D.....
E---- F------

l 9. pron.
m 32. ſept.

### *SCHOLIVM.*

*Addit hoc loco Campanus ſequens theorema ad ea, quæ ſequuntur, non inutile. Videlicet.*

Si quotcunque numeri deinceps proportionales, fuerint minimi omnium eandem rationem habentium cum ipſis: Numerus aliquem eorum metiens, metietur quoque alterum duorum numerorum, qui in eadem ratione ſumuntur minimi, vel certè ad alterum erit compoſitus.

*Sint quotcunque numeri continuè proportionales A, B, C, D, E, in ſua proportione minimi, in qua ſumantur etiam duo minimi F, G: Metiatur autem primò H, primum eorum, nimirum A. Dico H, metiri quoq; vel F, vel G, vel certè ad alterum eorum compoſitum eſſe. Sit enim H, non primus, ſed compoſitus:* [a] *Et ſumantur in eadem proportione tres numeri minimi I, K, L; & quatuor M, N, O, P; & ſic deinceps, donec habeantur tot, vno minus, quot ſunt ipſi A, B, C, D, E. Quoniam igitur, vt conſtat ex modo procreandi quotlibet minimos tradito in 2. propoſ. lib. 8. numerus A, fit ex F, in M; metitur autem H, ipſum A; erit H, compoſitus, ex ſcholio propoſ. 32. lib. 7. ad F, vel ad M. Si ad F, habemus propoſitum; ſi verò ad M, qui quidem fit ex F, in I, vt conſtat ex demonſtratione propoſ. 2. lib. 8. erit, ex ſcholio eiuſdem propoſ. 32. lib. 7. rurſus H, compoſitus vel ad F, vel ad I. Si ad F, habetur propoſitum: ſi verò ad I; cùm I, gignatur ex F, in ſe ipſum; erit H, compoſitus ad F, ex eodem ſcholio propoſ. 32. libri 7. Quòd ſi H, ſit primus, oſtendemus eodem modo, ex propoſ. 32. lib. 7. non autem ex ſcholio, eum metiri ipſum F.*

a 22. octauã.

A, 16, B, 24. C, 36. D, 54. E, 81.
M, 8. N, 12. O, 18. P, 27.
I, 4. K, 6. L, 9.
H---- F, 2. G, 3.

*Deinde metiatur H, non primus ſecundum B. Quia ergo B, ſit ex F, in N; erit vt prius H, cõpoſitus, vel ad F, vel ad N. Si ad F, habetur propoſitũ; ſi verò ad N, q quidem fit ex F, in K; erit H, eodẽ modo cõpoſitus vel ad F, vel ad K. Si ad F, habetur propoſitum; ſi verò ad K, cũ K, gignatur ex F, in G; erit quoq; H, compoſitus vel ad F, vel ad G. Quòd ſi H, ſit primus, demonſtrabimus eadem ratione eũ metiri vel F, vel G, ex propoſ. 32. lib. 7.*

*Rursvs metiatur H, non primus tertium C, qui cùm fiat ex F, in O; erit H, compoſitus vel ad F, vel ad O. Si ad F, habetur propoſitum; ſi verò ad O, qui quidem fit ex F, in L; erit H, compoſitus vel ad F, vel ad L.*

*Si ad F, habetur propositum; si verò ad L, cùm L, gignatur ex G, in se; compositus quoq; erit H, ad G. Quòd si H, sit primus, probabimus eodem modo ex propos. 32. lib. 7. eum metiri ipsum G.*

*PRAETEREA metiatur H, non primus quartum D; qui cùm fiat ex F, in P; erit H, compositus vel ad F, vel ad P. Si ad F, habetur propositū; si verò ad P, qui quidem fit ex G, in L; erit etiam H, compositus vel ad G, vel ad L. Si ad G, habetur propositum; si verò ad L; cùm L, producatur ex G, in se; erit quoq; H, ad G, compositus. Quòd si H, primus sit, ostendemus eodem modo ex propos. 32. lib. 7. eum metiri ipsum G.*

*EODEM modo si H, non primus metiatur vltimum E, ostendemus H, cōpositum esse ad G; Si verò H, primus sit, eum metiri ipsum G; atq; ita in cæteris eadem semper erit demonstratio.*

*ITAQVE si H, metiatur primum numerum A, metietur idem ipsum F, vel ad eum compositus erit: Si verò H, metiatur vltimum E, metietur idem ipsum G, vel ad eum compositus erit: Si deniq; H, metiatur aliquem, præter primum & vltimum, metietur idem vel ipsum F, vel ipsum G, aut ad alterutrum erit compositus. Id quod perspicuum est ex ipsa demonstratione.*

## DEMONSTRATIO IN NVMERIS EORVM, quæ in lineis 2. libro Euclides demonstrauit prioribus 10. theorematibus.

*QVONIAM ad theorema sequens demonstrandum Theon quædam assumit in numeris, quæ demonstrata sunt de lineis libro 2. perinde ac si eadem de numeris essent ostensa; nō alienum instituto nostro duximus, nonnulla ex ijs, quæ Geometricè ab Euclide libro 2. demonstrata sunt de lineis, hoc loco de numeris demonstrare. Quod idem & Barlaam monachum feciſſe à nonnullis est traditum. Sequemur autem eundem ordinem, quem Euclidem in 2. lib. tenuisse conspicimus.*

### I.

Si fuerint duo numeri, secetuŕque ipsorum alter in quotcunque partes: Numerus planus comprehensus sub illis duobus numeris æqualis est numeris, qui sub numero indiuiso, & qualibet parte numeri diuisi continentur.

*SINT duo numeri A B, & C, quorum A B, diuidatur in A D, D E, E B; Fiat q̄ F, ex C, in A B: Item G H, ex C, in A D; & H I, ex C, in D E; & I K, ex C, in E B. Dico F, æqualem esse numeris G H, H I, I K, hoc est, toti numero G K, ex G H, H I, I K, composito. Quoniam enim C, multiplicans A B,*

a 2. pron.

A... D.. E. B C..
F.....
G..... H.... I.. K

*fecit F; [a] metietur A B, ipsum F, per C, hoc est, A B, pars erit ipsius F, denominata à C. Eadem ratione A D, ipsius G H; & D E, ipsius H I; & E B, ipsius I K, pars erit à C, denominata, eadem nimirum, quæ A B, ipsius F. Quia verò per ea, quæ ad propos. 5. lib. 7. demonstrauimus, totus A B, totius G K, eadem pars*

b 4. pron.

*est, quæ A D, ipsius G H; erit quoq; A B, totus totius G K, pars eadem, quæ A B, ipsius F; [b] Ac proinde inter se æquales erunt F, & G K. Quod est propositum.*

### II.

Si numerus in duas partes diuidatur: Numeri plani sub toto, & singulis partibus comprehensi æquales sunt numero quadrato, qui à toto efficitur.

D.....
A.... C.. B

*NVMERVS enim A B, diuidatur in A C, C B. Dico numeros, qui fiunt ex A B, toto in partes A C, C B, simul æquales esse numero quadrato, qui ex toto A B, efficitur. Sumpto enim numero D, qui æqualis sit ipsi A B; erit per theor. 1. numerus factus ex D, hoc est, ex A B, in A B, nimirum quadratus ipsius A B, æqualis numeris, qui fiunt ex D, hoc est, ex A B, in A C, & in C B. quod est propositum.*

*IDEM demonstrabitur, si A B, in plures partes, quàm in duas secetur, vt ex apposita secunda figura apparere potest. Eadem enim ratione erit numerus factus ex*

E.....
A... C.. D. B

*E, hoc est, ex A B, in A B, nimirū quadratus ipsius A B, æqualis numeris, qui gignuntur ex E, hoc est, ex A B, in singulas partes A C, C D, D B.*

### III.

Si numerus in duas partes diuidatur: Numerus planus sub toto, & vna parte comprehensus æqualis est & illi, qui sub partibus continetur, numero, & illi, qui à prædicta parte efficitur, quadrato.

*SIT numerus A B, diuisus in A C, C B. Dico numerum, qui fit ex toto A B, in partem A C, æqualem esse & ei, qui sub partibus A C, C B, continetur, & quadrato dictæ partis A C. Sumpto enim numero D, qui dictæ parti A C, æqualis sit; erit ex 1. theoremate numerus factus ex D: hoc est, ex A C, in A B; vel (quod idem est) ex A B, in A C, æqualis numeris factis ex D; hoc est, ex A C, in C B, & ex D; hoc est, ex A C, in A C, quadrato scilicet ipsius A C. Quod est propositum.*

D....
A.... C..... B

Si nu-

## IIII.

SI numerus in duas partes diuidatur: Quadratus ex toto factus æqualis est quadratis, qui à partibus efficiuntur, vnà cum numero plano, qui bis sub partibus continetur.

*SIT numerus AB, diuisus in AC, CB. Dico numerum quadratum ex AB, factum æqualem esse quadratis partium AC, CB, vnà cum numero, qui fit bis ex parte AC, in partem CB. Nam ex 2. theoremate numerus quadratus ipsius AB, æqualis est numeris, qui fiunt ex AB, in AC, & in CB. Est autem numerus, qui fit ex AB, in AC, per tertium theorema, æqualis numero genito ex AC, in CB, vnà cum quadrato ipsius AC: Item numerus, qui fit ex AB, in CB, eodem modo æqualis numero producto ex AC, in CB, vnà cum quadrato ipsius CB. Igitur numerus quadratus ex AB, factus æqualis est quoq; numeris quadratis partium AC, CB, vnà cum numero bis, qui fit ex AC, in CB. Quod est propositum.*

A..... C.... B

## V.

SI numerus secetur in duas partes æquales, & non æquales: Numerus planus sub partibus inæqualibus contentus, vnà cum numero quadrato numeri inter duas sectiones medij, æqualis est quadrato, qui ex dimidio numero gignitur.

*NVMERVS enim AB, secetur in partes æquales AC, CB; & non æquales AD, DB. Dico numerum sub partibus inæqualibus AD, DB, contentum, vnà cum quadrato numeri intermedij CD, (qui quidem excessus est inter semissem AC, vel CB, & alterutram partium inæqualium AD, DB.) esse æqualem quadrato, qui ex dimidio numero CB, efficitur. Nam cùm numerus quadratus ipsius CB, per quartum theorema, æqualis sit quadratis partium CD, DB, vnà cum plano numero bis comprehenso sub CD, DB; numero verò comprehenso semel sub CD, DB, vnà cum quadrato ipsius DB, æqualis sit, per tertium theorema, numerus factus ex CB, in DB; fit, vt si hic numerus factus ex CB, in DB, sumatur pro quadrato ipsius DB, vnà cum numero facto ex CD, in DB; numerus quadratus ipsius CB, æqualis etiam sit reliquo quadrato ipsius CD, vnà cum reliquo numero facto ex CD, in DB, semel, & numero ex CB; hoc est, ex AC, in DB, producto. Atqui ex primo theoremate numeris, qui fiunt ex CD, in DB, & ex AC, in DB, æqualis est numerus, qui fit ex toto AD, in DB. Igitur quadratus ipsius CB, æqualis erit quadrato ipsius CD, vnà cum numero, qui fit ex AD, in DB; hoc est, numerus factus ex AD, in DB, vnà cum quadrato ipsius CD, æqualis erit quadrato ipsius CB. Quod est propositum.*

A..... C... D.. B

## VI.

SI numerus in duas partes æquales diuidatur, & illi aliquis alius numerus adiiciatur: Numerus qui fit ex toto cum adiecto in adiectum, vnà cum quadrato dimidij numeri, æqualis est quadrato eius numeri, qui ex dimidio & adiecto componitur.

*NVMERVS enim AB, secetur in partes æquales AC, CB, eiq; adijciatur numerus BD. Dico numerum factum ex toto AB, & adiecto BD, tanquam vno, nimirum ex AD, in adiectum BD, vnà cum quadrato dimidij numeri CB, æqualem esse quadrato, qui fit ex CB, dimidio & adiecto BD, tanquam vno; hoc est, quadrato ipsius CD. Cùm enim quadratus ipsius CD, per 4. theorema, æqualis sit quadratis partium CB, BD, vnà cum numero bis comprehenso sub CB, BD; hoc est, quadratis partium CB, BD, vnà cum numeris sub CB, BD, & sub AC, BD, comprehensis; numeris autem contentis sub CB, BD, & sub AC, BD, & sub BD, BD; hoc est, quadrato ipsius BD, æqualis sit, ex primo theoremate numerus factus ex AD, in BD; fit, vt si hic numerus factus ex AD, in BD, sumatur pro quadrato partis BD, vnà cum numeris factis ex CB, in BD, & ex AC, in BD, quadratus ipsius CD, æqualis etiam sit reliquo quadrato ipsius CB, vnà cum numero facto ex AD, in BD; hoc est, numerus factus ex AD, in BD, vnà cum quadrato ipsius CB, æqualis sit quadrato ipsius CD. Quod est propositum.*

A.... C.... B.. D

## VII.

SI numerus in duas partes diuidatur: Quadratus totius, vnà cum quadrato vnius partis, æqualis est numero, qui fit bis ex toto in dictam partẽ, vnà cũ quadrato reliquæ partis.

*DIVIDATVR numerus AB, in partes AC, CB. Dico quadratum totius AB, vnà cum quadrato partis CB, æqualem esse numero bis, qui fit ex toto AB, in dictam partem CB, vnà cum quadrato reliquæ partis AC. Cùm enim ex 4. theoremate quadratus totius AB, æqualis sit quadratis partium AC, CB, vnà cum numero, qui fit bis ex AC, in CB; si quadratus ipsius CB, addatur communis; erunt quadrati numerorum AB, CB, simul æquales quadratis numerorũ AC, CB, CB, vnà cum numero, qui fit bis ex AC, in CB. Atqui ei, q fit ex AC, in CB, vnà cũ quadrato ipsius CB, æqualis est, per 3. theor. numerus qui fit ex AB, in CB; Ac proinde ei, qui fit bis ex AC, in CB, vnà cũ quadrato ipsius CB, bis, æqualis est, q fit bis ex AB, in CB. Igitur*

A..... C.... B

*ſi pro numero, qui fit bis ex A C, in C B, vnà cum quadrato ipſius C B, bis, ſumatur numerus factus bis ex A B, in C B; erunt quadrati numerorum A B, C B, ſimul, æquales numero, qui fit bis ex A B, in C B, vnà cum quadrato reliquæ partis A C. Quod eſt propoſitum.*

## VIII.

Si numerus in duas partes diuidatur: Qui fit quater ex toto in vnam partem, vnà cum quadrato reliquæ partis, æqualis eſt quadrato numeri compoſiti ex toto & priori parte.

*Secetur numerus A B, in partes A C, C B. Dico numerum, qui fit quater ex toto A B, in partem C B, vnà cum quadrato reliquæ partis A C, æqualem eſſe quadrato numeri, qui ex toto A B, & prædicta parte C B, componitur. Addito enim numero B D, qui æqualis ſit dictæ parti C B; cùm quadratus totius A D, compoſiti ex A B, & B D, ſiue dicta parte C B, ſit æqualis per 4. theorema, quadratis numerorum A B, B D, vnà cum numero, qui fit bis ex A B, in B D, hoc eſt, quadratis numerorum A B, C B, vnà cum eo, qui fit bis ex A B, in C B; Sint autem, ex 7. theor. quadrati numerorum A B, C B, ſimul æquales numero bis comprehenſo ſub A B, C B, vnà cum quadrato numeri A C; fit, vt ſi pro quadratis numerorũ A B, C B, ſumatur numerus factus bis ex A B, in C B, vnà cum quadrato ipſius A C, quadratus factus ex A D, æqualis ſit numero, qui fit quater ex A B, in C B, vnà cum quadrato reliquæ partis A C. Quod eſt propoſitum.*

A.... C... B... D

## IX.

Si numerus ſecetur in duas partes æquales, & non æquales: Quadrati, qui ab inæqualibus partibus fiunt, dupli ſunt quadratorum, qui à dimidio numero, & ab intermedio efficiuntur.

*Diuisvs ſit numerus A B, in partes æquales A C, C B, & non æquales A D, D B. Dico quadratos partium inæqualium A D, D B, duplos eſſe quadratorũ, qui ex A C, dimidio, & ex C D, numero intermedio (qui quidem exceſſus eſt inter ſemiſſem A C, vel C B, & alterutram partium inæqualium A D, D B.) efficiuntur. Cùm enim quadratus numeri A D, æqualis ſit, ex 4. theor. quadratis numerorum A C, C D, vnà cum numero bis, qui fit ex A C, in C D; Si communis apponatur quadratus partis D B; erunt quadrati partium A D, D B, æquales quadratis partium A C, C D, D B, vnà cum numero bis, qui fit ex A C, hoc eſt ex C B, in C D. Atqui quadrato ipſius D B, vnà cum numero bis, qui fit ex C B, in C D, æquales ſunt ex 7. theor. quadrati, qui fiunt ex C B, hoc eſt, ex A C, & C D. Igitur ſi pro quadrato ipſius D B, vnà cum eo, qui fit bis ex C B, in C D, ſumantur quadrati ipſorum A C, C D, erunt quadrati partium A D, D B, æquales quadratis partium A C, C D, bis; Ac propterea quadrati partiũ A D, D B, dupli erunt quadratorũ, qui ex partibus A C, C D, fiunt. Quod eſt propoſitũ.*

A..... C... D.. B

## X.

Si numerus in duas partes æquales diuidatur, adiiciatur autem illi alius quiſpiam numerus: Quadratus compoſiti numeri ex toto & adiecto, & quadratus numeri adiecti, ſimul dupli ſunt eius quadrati, qui ex dimidio efficitur, & eius, qui fit à numero compoſito ex dimidio & adiecto.

*Sit numerus A B, diuiſus in partes duas æquales A C, C B, eiq; adiiciatur numerus B D. Dico quadratum numeri A D, compoſiti ex toto A B, & adiecto B D, & quadratum adiecti numeri B D, vtroſque ſimul, duplos eſſe quadratorũ, qui fiunt ex A C, dimidio, & ex C D, compoſito ex C B, dimidio, & adiecto B D. Cùm enim quadratus ipſius A D, æqualis ſit, ex 4. theor. quadratis partium A C, C D, vnà cum numero bis, qui fit ex A C, hoc eſt, ex C B, in C D; ſi communis addatur quadratus partis B D; erunt quadrati numerorũ A D, B D, æquales quadratis partium A C, C D, B D, vnà cum numero bis, qui fit ex C B, in C D. Sed per 7. theor. quadrato ipſius B D, vnà cum numero bis, qui fit ex C B, in C D, æquales ſunt quadrati numerorũ C B, C D, & quadrato ipſius C B, æqualis eſt quadratus ipſius A C. Igitur ſi pro quadrato ipſius B D, vnà cum numero, qui fit bis ex C B, in C D, ſumantur quadrati numerorum C B, C D, hoc eſt, numerorum A C, C D: erũt quadrati numerorum A D, B D, æquales quadratis numerorũ A C, C D, bis; Ac propterea quadrati numerorum A D, B D, dupli erunt quadratorum, qui ex A C, C D, efficiuntur. Quod eſt propoſitum.*

*Iam verò theor. 11. lib. 2. nõ poſſe numeris accommodari, hoc eſt, nullo modo fieri poſſe, vt numerus aliquis in duas partes diuidatur, ita vt numerus planus, qui ex toto in vnam partium fit, æqualis ſit quadrato reliquæ partis, vt ibi monuimus, ita demonſtrabimus.*

*Diuidatvr, ſi fieri poteſt, numerus A B, in C, ita vt numerus factus ex toto A B, in partem C B, æqualis ſit quadrato reliquæ partis A C. Quia igitur numerus contẽtus ſub extremis A B, C B, æqualis eſt quadrato numeri medij A C; [a] erit vt A B, ad A C, ita A C, ad C B: Eſt autem A B, maior quàm A C. Igitur & A C, maior eſt quàm C B. Ablato iam C D, ipſi C B, ſit æqualis, erit quoque vt A B, ad A C, ita A C, ad C D. Quoniam ergo totus A B, ad totum A C, eſt vt A C, ex toto A B, detractus ad C D, ex toto A C, detractum; [b] erit quoque vt totus A B, ad totum A C, vel vt detractus A C, ad detractum C D, ita C B, ex A B, reſiduum, hoc eſt, C D, ipſi C B,*

a 20. ſept.

A D E C B

b 11. ſept.

*C B, æqualis, ad A D, ex A C, reſiduum. Quia igitur eſt, vt A C, ad C D, ita C D, ad A D; & eſt A C, maior q̃ C D; erit quoq; C D, maior quàm A D. Ablato ergo D E, qui ipſi A D, ſit æqualis; erit etiam vt A C, ad C D, ita C D, ad D E. Itaq; quia eſt, vt totus A C, ad totum C D, ita C D, ex toto A C, detractus ad D E, ex toto C D, detractum; [a] erit quoq; vt totus A C, ad totum C D, vel vt detractus C D, ad detractum D E, ita A D, ex A C, reſiduus: hoc eſt, D E, ipſi A D, æqualis, ad E C, ex C D, reſiduum. Quare cùm ſit, vt C D, ad D E, ita D E, ad E C; ſit autem C D, maior, quàm D E; erit etiam D E, maior, quàm E C; Ac proinde ex E D, auferri poterit numerus ipſi E C, æqualis; & ſic deinceps, nec vnquam finis erit huius detractionis. Quod eſt abſurdum: cùm numerus non poſſit diuidi in infinitum. Non ergo numerus A B, diuidetur ita, vt planus numerus ex toto in vnam partium factus, æqualis ſit quadrato reliquæ partis. Quod eſt propoſitum.* [a] 11. ſept.

*ALITER. Quoniam numerus A B, in C, ita diuiſus eſt, vt is, qui fit ex A B, in C B, æqualis ſit quadrato reliquæ partis A C; erit numerus, qui quater fit ex A B, in C B, quadruplus quadrati ipſius A C; Ac proinde numerus, qui fit quater ex A B, in C B, vnà cum quadrato ipſius A C, quintuplus erit quadrati partis A C. Eſt*

A C B

*autem numerus contentus quater ſub A B, C B, vnà cum quadrato ipſius A C, quadratus; quippe cùm æqualis ſit quadrato numero, qui fit ex numero compoſito ex A B, & C B, per 8. theorema. Igitur duo numeri quadrati (nimirum is, qui quater continetur ſub A B, C B, vnà cum quadrato ex A C; & quadratus ex A C,) proportionem habent, quam 5. ad 1. vel 25. ad 5. Quod eſt abſurdum, vt conſtat ex coroll. propoſ. 24. lib. 8. Non ergo numerus A B, diuiditur ita in C, vt is, qui producitur ex A B, in C B, æqualis ſit quadrato ipſius A C. Quod eſt propoſitum.*

*VERVM hoc idem clariùs demonſtrabimus ad propoſ. 29. huius lib.*

## THEOR. 15. PROPOS. 15. 16.

**Si tres numeri deinceps proportionales, fuerint minimi omnium eandem cum ipſis rationem habentium; Duo quilibet compoſiti, ad reliquum primi erunt.**

SINT tres numeri A, B, C, minimi omnium eandem cum illis proportionem habentium. Dico quoslibet duos compoſitos, ad reliquum primos eſſe: nimirum A, B, ſimul ad C; & B, C, ſimul ad A; & A, C, ſimul ad B. Sumptis enim duobus D, E, in eadem cum illis proportione minimis, ex ſcholio propoſ. 35. lib. 7. manifeſtum eſt ex demonſtratione propoſ. 2. lib. 8. D, ſeipſum multiplicantem facere A; multiplicantem verò ipſum E, facere B; atque E, ſeipſum multiplicantem facere C. [a] Quia igitur D, E, minimi in ſua proportione inter ſe primi ſunt; [b] erit & vterque D, E, ſimul ad quemlibet illorum primus. Itaque cùm tam compoſitus ex D, E, quàm ipſe D, ad E, primus ſit; [c] erit quoq; numerus factus ex D, E, tanquá vno, in D, ad eundem E, primus: Qui autem fit ex D, E, tanquam vno, in D, æqualis eſt per 3. theor. ſcholij præcedentis, & numero A, facto ex D, in ſe, & numero B, facto ex D, in E. Igitur & A, B, compoſiti, primi ſunt ad E. [d] Ac proinde & ad C, qui factus eſt ex E, in ſe, primi ſunt A, B, ſimul compoſiti.

A, 9. B, 12. C, 16. D, 3. E, 4.

[a] 24 ſept. [b] 30. ſept. [c] 26. ſept. [d] 27. ſept.

DEINDE quia, vt prius, [e] vterque D, E, ſimul primus eſt ad quemlibet ipſorum D, E; efficitur, (cùm tam compoſitus ex D, E, quàm ipſe E, primus ſit ad D,) [f] numerum factum ex D, E, tanquam vno, in E, primum eſſe ad D: Qui autem fit ex D, E, tanquam vno, in E, æqualis eſt per 3. theor. ſcholij antecedentis, & numero C, facto ex E, in ſe, & numero B, facto ex D, in E. Igitur & B, C, ſimul compoſiti, ad D, primi ſunt, [g] atque adeò & ad ipſum A, qui factus eſt ex D, in ſe, primi ſunt B, & C, ſimul compoſiti.

B, 12. C, 16. A, 9. D, 3. E, 4.

[e] 30. ſept. [f] 26. ſept. [g] 27. ſept.

POSTREMO, quia, vt prius, [h] vterque D, & E, ſimul ad quemlibet ipſorum primus eſt; atque adeò è contrario, quilibet ipſorum D, E, primus eſt ad compoſitum ex D, E, [i] erit quoque qui fit ex D, in E, ad compoſitum ex D, E, primus; [k] Ac proinde & idem, qui fit ex D, in E, ad eum, qui fit ex D, E, tanquam vno, in ſe, primus erit. Qui autem fit ex D, E, tanquam vno, in ſe, æqualis eſt, per 4. theor. antecedentis ſcholij, eis qui fiunt ex D, & E, in ſe ipſos, vnà cum eo, qui ex D, in E, bis. Igitur & factus ex D, in E, primus erit ad eos, qui fiunt ex D, & E, in ſe ipſos, & ex D, in E, bis. Quoniam ergo duo numeri ſimul, videlicet compoſitus ex iis, qui fiunt ex D, & E, in ſe ipſos, & ex eo, qui fit ex D, in E, atque is, qui fit ex D, in E, primi ſunt ad aliquem ipſorum; nimirũ ad eum, qui fit ex D, in E, vt oſtenſum eſt. [l] Erunt etiam duo illi; nimirum compoſitus ex iis, qui fiunt ex D, & E, in ſe ipſos, & ex eo, qui fit ex D, in E, atque is, qui fit ex D, in E, inter ſe primi. Rurſus quia duo numeri ſimul, videlicet compoſitus ex iis, qui fiunt ex D, & E, in ſe ipſos, atque is, qui fit ex D, in E, ad aliquem ipſorum; nimirum ad eum, qui fit ex D, in E, primi ſunt, vt oſtenſum eſt; [m] erunt etiam duo illi; nimirum compoſitus ex iis, qui fiunt ex D, & E, in ſe ipſos, atque is, qui fit ex D, in E, inter ſe primi. Cùm igitur ex D, & E, in ſe ipſos fiant A, & C; Item ex D, in E, fiat B; erunt A, & C, ſimul compoſiti, primi ad B. Quam ob rem, ſi tres numeri deinceps proportionales, &c. Quod erat oſtendendum.

A, 9. C, 16. B, 12. D, 3. E, 4.

[h] 30. ſept. [i] 26. ſept. [k] 27. ſept. [l] 37. ſept. [m] 30. ſept.

### SCHOLIVM.

*CAMPANVS hoc theorema aliter, & quidem facilius demonſtrat de quotcunque numeris continuè proportionalibus minimis, hoc modo ipſum proponens.*

Si quotcunq; numeri deinceps proportionales, fuerint minimi omnium eandem cum ipsis rationẽ habentium: Ad quemlibet eorũ reliqui omnes simul compositi, erunt primi.

*Sint continuè proportionales minimi quotcunq; numeri A,B,C,D. Dico ad quemlibet eorum reliquos omnes simul compositos, esse primos; Videlicet A,B,C, simul ad D; & A,B,D, simul ad C; & A,C,D, simul ad B; & B,C,D, simul ad A. Si enim A,B,C, simul non sunt primi ad D, erunt A,B,C, simul atq; D, compositi inter se: atq; adeò eos aliquis numerus communis mensura metietur. Metiatur eos numerus E, si fieri potest; sumanturq; F, & G, duo minimi in ratione A,B,C,D, numerorum. Quoniam ergo A,B,C,D, continuè proportionales sunt, & minimi; metitur autem E, aliquem eorum; nimirum D, metietur quoq; E, alterum ipsorum F,G, vel certè compositus erit ad alterum ipsorum F,G, ex scholio propos. 14. huius lib. Atq; idcircò ipsum E, & alterũ ipsorum F,G, aliquis numerus metietur: Metiatur eos H. Itaq; cùm H, metiatur E; & E, ponatur metiri compositum ex A,B,C, & ipsum D; [a] metietur quoq; H, eundem compositum ex A,B,C, & ipsum D. Quia verò H, metitur quoq; alterum ipsorum F,G; & tam F, q̃ G, medios numeros B,C, metitur ex coroll. 3. propos. 2. lib. 8. [b] metietur quoq; H, medios B,C; [c] ac propterea & compositum ex B,C. Itaq; cùm H, metiatur totum compositum ex A,B,C, & detractum compositũ ex B,C, vt demonstrauimus; [d] metietur quoq; idem H, reliquum A: Metiebatur autem & ipsum D. Sunt ergo A,D, extremi minimorum A,B,C,D, inter se compositi. [e] Sed & primi inter se sunt. Quod fieri non potest. Non igitur compositi inter se sunt, compositus ex A,B,C, & numerus D. Ergo inter se primi.*

A, 8. B, 12. C, 18. D, 27.
E---- F, 2. G, 3. H----

a 11. pron.
b 11. pron.
c 10. pron.
d 12. pron.
e 3. octaui.

*Rvrsvs, si A,B,D, simul compositi non sunt primi ad C, metietur eos, vt prius, aliquis numerus. Metiatur eos E, qui rursum ex scholio propos. 14. huius lib. vel metietur alterum ipsorum F,G, vel compositus erit ad alterum ipsorum F,G. Metiatur ergo H, ipsum E, & alterum ipsorum F,G. Itaq; cùm H, metiatur E; & E, compositum ex A,B,D; [f] metietur etiam H, eundem compositum ex A,B,D. Quia verò H, metitur alterum ipsorum F,G, qui metiuntur, per coroll. 3. propos. 2. lib 8. medios B,C, [g] metietur quoq; H, ipsos B,C. Itaq; cùm H, metiatur totum compositum, ex A,B,D, & detractum B, [h] metietur quoque H, compositum ex A,D, reliquum. Et quia H, metitur alterum ipsorum F, G, quorum F, ipsum A, & G, ipsum D, metitur, vt constat ex demonstratione propos. 2. lib. 8. [i] metietur etiam H, alterum ipsorum A,D. [k] Igitur & reliquum. Sunt ergo A, D, extremi inter se compositi. [l] Sed & primi inter se sunt. Quod fieri nõ potest. Non igitur A,B,D, simul compositi, ad C, compositi sunt. Ergo primi. Quod est propositum.*

f 11. pron.
g 11. pron.
h 12. pron.
i 11. pron.
k 12. pron.
l 13. octaui.

*Non aliter ostendemus & A,C,D, compositos, esse ad B, primos; nec non & B,C,D; simul ad A. Eadem q̃ ratio est de quotlibet numeris continuè proportionalibus.*

17.

## THEOR. 16. PROPOS. 16.

Si duo numeri primi inter se fuerint: Non erit vt primus ad secundum, ita secundus ad alium quempiam.

Sint primi inter se A, & B. Dico non esse vt A, ad B, ita B, ad alium numerum. Si enim fieri potest, sit vt A, ad B, ita B, ad alium; nimirum ad C. Quoniam igitur A, & B, primi sunt inter se, [a] atque adeò in sua proportione minimi; [b] ipsi æquè metientur numeros B, & C, in eadem ratione existentes; nimirum A, ipsum B, & B, ipsum C: Metitur autem & A, se ipsum. Igitur A, metitur ipsos A,B, primos inter se. Quod est absurdum. Non ergo est vt A, ad B, ita B, ad alium numerum C. Eadem q̃ ratione non erit, vt B, ad A, ita A, ad alium. Quare si duo numeri, primi inter se fuerint, &c. Quod demonstrandum erat.

A.....
B.....
C----------

a 23. sept.
b 21. sept.

18.

## THEOR. 17. PROPOS. 17.

Si fuerint quotcunque numeri deinceps proportionales, extremi autẽ ipsorũ primi inter se sint: Non erit vt primus ad secundum, ita vltimus ad aliumquempiã.

Sint continuè proportionales quotcunque numeri A,B,C,D, quorum extremi A,D, inter se primi sint. Dico non esse vt A, ad B, ita D, ad alium numerum. Si enim fieri potest, sit vt A, ad B, ita D, ad alium; videlicet ad E. Erit igitur permutando vt A, ad D, ita B, ad E. Sunt autem A,D, cũ sint inter se primi, [c] minimi in sua proportione. [d] Igitur æquè metiẽtur ipsos B, & E; nimirũ A, ipsum B, & D, ipsum E. Atqui est vt A, ad B, ita B, ad C: Ergo cùm A, metiatur ipsum B; & B, ipsum C, metietur; [e] atque ob id & A, ipsum C, metietur. Et quia est vt B, ad C, ita C, ad D; metitur autem B, ipsum C; metietur & C, ipsum D. Quare A, metiens ipsum C, [f] metietur quoq; ipsum D. Metitur verò & A, se ipsum. Igitur A, metitur ipsos A,D, inter se primos. Quod est absurdum. Non ergo est vt A, ad B, ita D, ad alium numerũ E. Eodem quoq; argumento non erit vt D, ad C, ita A, ad alium. Quocirca si fuerint quotcunque numeri deinceps proportionales, &c. Quod erat ostendendum.

A,8. B,12. C,18. D,27. E----

c 23. sept.
d 21. sept.
e 11. pron.
f 11. pron.

19.

## PROBL. 1. PROPOS. 18.

Dvobvs numeris datis considerare, an possit ipsis tertius proportionalis inueniri.

Datis

DATI duo numeri sint A, & B, oporteatque considerare, an inueniri possit tertius ipsis proportionalis; hoc est, an sit B, ad alium quempiam numerum, vt A, ad B. Aut igitur A,4. B,7. A,B, primi inter se sunt, aut non. Si sunt inter se primi [a] perspicuum est ex demonstratis, non posse ipsis reperiri tertium proportionalem. *a 16. noni.* Si verò non sunt A, & B, inter se primi; multiplicans B, seipsum faciat C. Aut igitur A, metitur ipsum C, aut non. Metiatur primũ A, ipsum C, p D. Dico ipsis A,B, inueniri posse tertiũ proportionalem, immò ipsum D, esse tertiũ proportionalẽ. Cũ enim A, metiatur C, p D, [b] fiet C, ex A, in D: *b 9. pron.*
A,4. B,6. D,9. C,36. Fit autẽ ex constructione, idem C, ex B, in se ipsum. Igitur, qui continetur sub extremis A, D, æqualis est ei, qui ex medio B, describitur: [c] Ac proinde erit vt A, ad B, ita B, ad D. Quare D, inuentus est tertius proportionalis ipsis A,B. *c 20 sept.*

SED non metiatur A, ipsum C. Dico ipsis A,B, non posse reperiri tertium proportionalem. Si enim inueniri potest, inuẽtus sit D; ita vt sit A, ad B, quemadmodum B, ad D. Quoniam igitur est, vt A, ad B, ita B, ad D; [d] erit numerus contentus sub extremis A,D, æqualis ei, qui fit ex B, medio in *d 20. sept.*
se ipsum; hoc est, ipsi C. Quare cùm C, fiat ex A, in D; [e] metietur A, ipsum C, per D: sed & non metiri ponitur. Quod est absurdum. Non igitur inueniri potest ipsis A,B, tertius proportionalis, quando A, primus non metitur C, productum ex B, secundo in se ipsum. Eadem via considerabimus, an ipsis B, & A, inueniri possit alius tertius numerus, ad quem ita sit A, vt B, ad A. Duobus ergo numeris datis considerauimus, &c. Quod faciendum erat. *e 7. pron.*
A,6. B,4. D,--- C,16.

## PROBL. 2. PROPOS. 19. 20

TRIBVS numeris datis, considerare, an possit ipsis quartus proportionalis inueniri.

SINT dati tres numeri A,B,C, siue deinceps proportionales, siue non; oporteatque considerare, an possit reperiri quartus ipsis proportionalis; hoc est, an sit C, ad aliquem alium numerum, vt A, ad B. Multiplicans B, ipsum C, faciat D. Aut igitur A, ipsum D, metitur, aut non. Metiatur primùm A, ipsum D, per E. Dico ipsis A,B,C, inueniri posse
A,8. B,12. C,18. E,27. D,216. quartum proportionalem, immò ipsum E, esse quartum
A,4. B,8. C,9. E,18. D,72. proportionalem. Cùm enim A, metiatur D, per E; [f] fiet D, ex A, in E; Fit autem idem D, ex B, in C, per constructionem. Igitur qui sub extremis A,E, continetur, æqualis est ei, qui sub B, C, secundo, & tertio continetur; [g] Ac propterea erit, vt A, ad B, ita C, ad E. Quare inuentus est E, ipsis A, B, C, quartus proportionalis. *f 9. pron.* *g 19. sept.*

SED iam non metiatur A, ipsum D. Dico ipsis A,B,C, non posse inueniri quartum proportionalem. Sit enim, si fieri potest, inuentus quartus proportionalis E, ita vt sit quemadmodum A, ad B, ita C, ad E. Quia ergo quatuor numeri A,B,C,E, proportionales sunt, [h] erit numerus contentus sub extremis A,E, æqualis ei, qui ex B, secundo fit in C, *h 19. sept.*
A,4. B,6. C,9. E--- D,54. tertium; hoc est, ipsi D. Quare cùm D, fiat ex A, in E; [i] me-
A,3. B,4. C,10. E---- D,40. tietur A, ipsum D, per E: sed & ponitur non metiri. Quod est absurdum. Non igitur inueniri potest ipsis A,B,C, quartus proportionalis, quando A, primus nõ metitur D, productum ex B, secundo in C, tertium. Eadem methodo considerabimus, an ipsis C,B,A, inueniri possit aliquis quartus, ad quem ita se habeat A, vt C, ad B. Quocirca tribus numeris datis considerauimus, an possit, &c. Quod erat faciendum. *i 7. pron.*

### *SCHOLIVM.*

*HAEC, quæ proximis quatuor propositionibus, nimirũ 16.17.18. & 19. demonstrata sunt, intelligi debent de numeris integris. Nam si de fractis loquamur, potest quibuslibet duobus, vel tribus adiungi alius proportionalis, quamuis extremi inter se primi sint. Nam datis duobus, si quadratus numerus secundi diuidatur per primum, procreabitur tertius proportionalis. Vt duobus numeris datis 3, 8. si quadratus numerus secundi 8. nimirũ 64. diuidatur per 3. inuenietur tertius proportionalis $21\frac{1}{3}$. hoc modo, 3.8.$21\frac{1}{3}$. Quia enim diuisis 64. per 3. fit numerus $21\frac{1}{3}$. producetur numerus diuisus 64. ex multiplicatione Quotientis $21\frac{1}{3}$. per diuisorem 3. vt ad defin. 15. lib. 7. tradidimus. Cùm ergo idem numerus 64. factus sit ex medio numero 8. in se; [a] erunt 3.8. $21\frac{1}{3}$. continuè proportionales.* *a 20. sept.*

*DATIS autem tribus numeris, si numerus ex secundo in tertium genitus diuidatur per primum, procreabitur quartus proportionalis. Vt datis tribus numeris 9.6.20. si numerus 120. ex secundo in tertium genitus diuidatur per primum 9. reperietur quartus proportionalis $13\frac{1}{3}$. hoc modo, 9.6. 20.$13\frac{1}{3}$. Cùm enim diuisis 120. per 9. fiat $13\frac{1}{3}$. producetur numerus diuisus 120. ex multiplicatione Quotientis $13\frac{1}{3}$. per diuisorem 9. ex ijs, quæ in defin. 15. lib. 7. scripsimus. Fit autem idem numerus diuisus ex secundo in tertium. [b] Igitur quatuor numeri 9.6.20.$13\frac{1}{3}$. proportionales sunt.* *b 19. sept.*

*EX his facilè cognoscemus, propositis quotcunque numeris continuè proportionalibus, an possit ipsis alius proportionalis adiungi. Sumptis enim tribus vltimis, si ipsis alius potest inueniri, ille idem erit omnibus illis proportionalis.*

THEON, & qui illum sequuntur, inter quos etiam est Federicus Commandinus, quatuor membris hoc problema absoluunt. Aut enim (aiunt) tres dati numeri & deinceps proportionales sunt, & eorum extremi inter se primi; Aut nō deinceps quidem proportionales, sed eorum extremi primi inter se; Aut deinceps quidem proportionales, sed eorum extremi non primi inter se; Aut denique nec deinceps proportionales, nec eorum extremi inter se primi. Vbi mirari satis non possum, quonam modo diligentissimi Euclidis interprètes, & in alijs quidem demonstrationibus vigilantissimi, in secundo membro huius problematis demonstrādo dormitârint, & quasi sui obliti, ac de diligentia remittentes, in errorem, eumq; non leuem, incurrerint. Dicunt enim, si tres numeri dati non sint deinceps proportionales, sed eorū extremi inter se primi, non posse ipsis quartum proportionalem inueniri. Quod quidem & falsum est, & demonstratio, qua id ipsum comprobare nituntur, vitiosa. Nā falsitas huius rei perspicuè in his numeris non continuè proportionalibus, apparet 4.8.9. quorum extremi 4.9. sunt inter se primi, & nihilominus eis adiungi potest quartus proportionalis 18. Quis enim non videt, esse vt 4. ad 8. ita 9. ad 18. cùm vtrobique proportio sit subdupla? Idem videri potest in exemplis alijs infinitis, vt hic 2.4.7.14. Item 3.9.4.12. Item 2.10.3.15. Item 5.10.6.12. &c. In omnibus enim his numeris extremi priorū trium sunt inter se primi, cùm tamen ipsis adiungatur posterior quartus proportionalis. Falsum ergo est, illis dari non posse quartū proportionalem. Quòd autē vitiosa sit eorum demonstratio, qua hoc probare contendunt, perspicuū fiet, si demonstrationē ipsam in medium proferamus. Ita igitur ratiocinātur.

SINT trium numerorum A, B, C, non deinceps proportionalium, extremi A, C; inter se primi. Dico ipsis inueniri nullo modo posse quartum proportionalem. Si enim potest inueniri, sit ille D, ita vt sit quemadmodum A ad B, ita C, ad D; & vt B, ad C, ita fiat D, ad E. Erit igitur ex æquo, vt A, ad C, ita C, ad E: Sed sunt A, C, inter se primi, [a] & ob id minimi.

A, 3. B, 6. C, 8. D, 16. E----

[b] Igitur metientur æquè ipsos C, E, nimirum A, ipsum C; & C, ipsum E. At verò & A, seipsum metitur. Ergo A, metitur duos A, C, primos inter se. Quod fieri non potest. Ipsis igitur A, B, C, quartus proportionalis inueniri nequit.

a 23. septimi.

b 21. septimi.

HAEC est eorum demonstratio, in qua assumunt esse, vt B, ad C, ita D, ad alium quendam numerum, vi delicet ad E; quod quidem fieri posse, nusquam demonstrarunt. Immò hoc ipsum vertitur in dubium in hoc problemate. Non enim minus inquiritur, an tribus numeris B, C, D, quartus proportionalis possit inueniri, quàm tribus A, B, C; cùm non magis hoc constet in illis, quàm in his. Quapropter cùm ibi id pro concesso assumant, vt hic idem fieri non posse, ostendant; liquidò constat, eos petere principium (vt cum Dialecticis loquamur) in demonstrando. Quin etiam quotiescunque quatuor numeri dantur proportionales, sed non deinceps, quorum primus, & tertius, primi inter se sunt, quales ponuntur esse A, B, C, D; nulla ratione fieri potest, vt detur alius, ad quem ita se habeat quartus, sicut secundus ad tertium: quod tamen ipsi tanquam concessum, atq; probatū assumunt; quandoquidem sine probatione vlla exigunt, vt detur illis numerus E, ad quem ita se habeat quartus D, vt B, secundus ad C, tertium. Hoc verò non posse fieri, facilè demonstrabimus eodem argumento, quo ipsi vtuntur.

SINT enim quatuor numeri A, B, C, D, proportionales, nō tamen deinceps, sint q; A, & C, primus & tertius, inter se primi. Dico fieri non posse, vt sit D, ad alium numerum, quem admodum B, ad C. Sit enim, si potest fieri, vt B, ad C, ita D, ad E. Est ergo ex æquo, vt A, ad C, ita C, ad E; atque adeò, vt ipsi ostenderunt, metietur A, duos A, & C, primos inter se. Quod est absurdum. Non ergo fieri potest, vt D, ad E, sit, quemadmodū B, ad C. Quare apertissimè falsum in demonstratione secundi membri assumpserūt Theon, & alij Euclidis interpretes, qui Theonem sequuntur.

A, 4. B, 12. C, 3. D, 9. E----

PRIMVM verò membrum perspicuè & apertè ostendant. Nam si tres numeri deinceps proportionales sunt, & eorum extremi inter se primi; [c] manifestum est, ex demonstratis, non posse ipsis quartum proportionalem inueniri. Postrema tandem duo membra expediunt nōn aliter, ac nos totum problema absoluimus.

c 17. noni.

## 21. THEOR. 18. PROPOS. 20.

PRIMI numeri plures sunt, omni propositā multitudine primorū numerorū.

SINT propositi primi numeri quotcunque A, B, C. Dico ipsis A, B, C, plures esse primos numeros. [a] Sumpto enim numero DE, minimo, qui A, B, C, metiuntur; apponatur ei vnitas EF. Aut ergo totus DF, primus est, aut non primus. sit primùm primus. Sunt ergo primi numeri A, B, C, & DF, plures proposita multitudine A, B, C.

A, 2. B, 3. C, 5. 30. 1. D---------- E. F

a 38. sept.

SED iam nō sit primus DF. [b] Metietur ergo eum aliquis numerus primus, nimirum G. Dico G, primum nulli ipsorum A, B, C, eundem esse. Si namque G, sit idem, qui vnus ipsorum A, B, C; metiantur autem A, B, C, ipsum DE; & G, eundem DE, metietur. Quare G, metiēs totum DF, & detractum DE, [c] metietur quoque EF, reliquum, numerus vnitatem.

A, 3. B, 5. C, 7. 105. 1. D---------- E. F 53. G------

b 33. sept.

c 11. pron.

Quod

Quod est absurdum. Ergo G, primus non est idem, qui vnus ipsorum A, B, C; Ac proinde inuenti sunt primi numeri A, B, C, G, plures proposita multitudine primorum numerorum A, B, C. Eademque via plures inuenientur, quàm A, B, C, G, si sumatur minimus, quem ipsi metiantur, &c. Quocirca primi numeri plures sunt, &c. Quod demonstrandum erat.

## SCHOLIVM.

*Poterat idem hoc theorema instar problematis hoc modo proponi.*

Primis numeris quotcunque propositis, inuenire alium primum numerum ab illis diuersum.

*Nam si primi quotcunque propositi sint A, B, C, inueniemus eodem modo alium primum ab illis diuersum; videlicet D F, si primus est, vel certè G, qui ipsum D F, metitur. Atque eodem modo quatuor primis alium quintum, & quinque primis alium sextum inueniemus; & sic deinceps primos numeros, quotquot quis velit, inueniemus.*

## THEOR. 19. PROPOS. 21. 22.

Si pares numeri quotcunque componantur: totus par erit.

Componantvr quotcunque pares numeri A B, B C, C D. Dico & totum compositũ A D, parem esse. Cùm enim A B, B C, C D, sint pares, habebunt singuli singulas partes dimidias, ex definitione. Sit ergo E, dimidia pars ipsius A B; & E, ipsius B C; & G, ipsius C D. Quoniam igitur est vt A B, ad E, ita B C, ad F; & C D, ad G; (quòd semper sit proportio dupla,) [a] erit quoque vt A B, ad E, ita A D, ad E, F, G, simul. Est autẽ A B, ipsius E, duplus. Igitur & totus A D, compositi ex E, F, G, duplus erit; Ac propterea A D, dimidiam partem habens numerum ex E, F, G, compositum par erit, ex definitione. Si igitur pares numeri quotcunque, &c. Quod erat demonstrandum.

A..... B.... C..... D
E... F.. G....

[a] 12. *septi.*

## THEOR. 20. PROPOS. 22. 23.

Si impares numeri quotcunque componantur, multitudo autem ipsorum sit par: Totus par erit.

Componantvr quotcunque numeri impares, quorum multitudo par A B, B C, C D, D E. Dico & totum compositum A E, parem esse. Cùm enim A B, B C, C D, D E, sint impares; differet quilibet vnitate à pari, ex definitione. Quare detracta ab vnoquoque vnitate, quilibet reliquorum par erit. [b] Quare & compositus ex ipsis par erit. Est autem & multitudo vnitatum detractarum par. [c] Igitur & totus A E, compositus par erit. Si igitur impares numeri quotcunque, &c. Quod erat ostendendum.

A... B..... C..... D..... E

[b] 21. *noni.* [c] 21. *noni.*

## THEOR. 21. PROPOS. 23. 24.

Si impares numeri quotcunque componantur, multitudo autem ipsorum sit impar: & totus impar erit.

Qvotcvnqva numeri impares, quorum multitudo impar est, A B, B C, C D, componantur. Dico & totum A D, compositum, imparem esse. Cùm enim impar numerus differat vnitate à pari, ex definitione; ablata vnitate E D, ab impari C D, erit reliqua C E, par. [d] Est autẽ & A C, compositus ex imparibus A B, B C, multitudine paribus, par. [e] Igitur & A E, compositus ex paribus A C, C E, par erit. Quare addita vnitate E D, totus A D, impar erit, cùm impar à pari differat vnitate, ex definitione. Si igitur impares numeri quotcunque, &c. Quod ostendendum erat.

A..... B... C..... E D

[d] 22. *noni.* [e] 21. *noni.*

## SCHOLIVM.

*Pari ratione, impar numerus pari numero, vel pluribus paribus numeris additus faciet impare. Nam demptâ vnitate ex impare, reliquus erit par; cùm ex defin. Impar à pari differat vnitate.* [a] *Quare reliquus ille par cum alio pari dato, vel cum pluribus datis, conficiet parem. Addita ergo rursus illa vnitate, totus fiet impar; cùm à pari sola vnitate differat. Quod est propositum.*

[a] 21. noni.

## THEOR. 22. PROPOS. 24. 25.

Si à pari numero par detrahatur: Et reliquus par erit.

A..... C..... B

Ex pari numero A B, detrahatur par C B. Dico & reliquum A C, parem esse. Aut enim C B, par detractus dimidia pars est ipsius A B, aut maior, quàm dimidia pars, vel minor. Sit primùm dimidia pars. Cùm igitur ipsi C B, pari aequalis sit A C, reliqua pars dimidia; erit & A C, numerus par.

SED iam CB, par detractus maior sit, vel minor dimidia parte ipsius AB. Quoniam igitur AB, CB, pares numeri, dimidias partes habent, ex definitione; sit DB, dimidia pars ipsius AB; & EB, dimidia ipsius CB. Itaque cùm sit vt AB, ad DB, dimidiũ, ita CB, ad EB, dimidium; erit permutando vt AB, ad CB, ita DB, ad EB; & diuidendo vt AC, ad CB, ita DE, ad EB. Rursumque permutando, vt AC, ad DE, ita CB, ad EB.

A..... C.. D... E..... B
A.....D... C.. E.. B

Atqui CB, ipsius EB, duplus est: Igitur & AC, ipsius DE, duplus erit; Ac propterea AC, cùm bifariam diuidatur, (quòd DE, sit eius pars dimidia) par erit. Si ergo à pari numero par detrahatur, &c. Quod erat ostendendum.

*SCHOLIVM.*

A. D.... C..... B

*FACILIVS demonstrabimus hanc propositionem, ducendo ad impossibile, hoc modo: Si AC, reliquus non dicatur par, sed impar; detracta vnitate AD, erit reliquus DC, par.* [a] *Igitur compositus DB, par quoq; erit; ac proinde addita vnitate AD, totus AB, impar fiet. quod est absurdum, cùm par ponatur.*

a 21. noni.

## 26. THEOR. 23. PROPOS. 25.

SI à pari numero impar detrahatur: Et reliquus impar erit.

Ex pari numero AB, impar detrahatur CB. Dico & reliquum AC, imparem esse. Detracta enim vnitate CD, ex CB, reliquus sit numerus DB, par. Quia igitur

a 24. noni. A..... C. D.... B

& totus AB, ponitur par; [a] erit & reliquus AD, par. Dempta ergo vnitate CD, reliquus AC, impar erit. Si igitur à pari numero impar detrahatur, &c. Quod demonstrandum erat.

## 27. THEOR. 24. PROPOS. 26.

SI ab impari numero impar detrahatur: Reliquus par erit.

A..... C..... D.. B

Ex impari numero AB, impar detrahatur CB. Dico reliquũ AC, parem esse. Detracta enim DB, vnitate ex imparibus AB, CB; erunt reliqui AD, CD, pares. Quia ergo ex pari AD, par aufertur CD; [b] erit & reliquus AC, par. Quare si ab impari numero impar detrahatur, &c. Quod erat demonstrandum.

b 24. noni.

## 28. THEOR. 25. PROPOS. 27.

SI ab impari numero par detrahatur: Reliquus impar erit.

Ex impari AB, detrahatur par CB. Dico reliquum AC, imparem esse. Detracta enim AD, vnitate ex impare AB; erit reliquus DB, par: Ex quo cùm detrahatur

c 24. noni. A. D.... C..... B

CB, par; [c] reliquus DC, par quoque erit; Ac proinde addita vnitate AD, fiet AC, impar. Si ergo ab impari numero par detrahatur, &c. Quod demonstrandum erat.

## 29. THEOR. 26. PROPOS. 28.

SI impar numerus parem multiplicans fecerit aliquem: Factus par erit.

A... B....
C.....

FIAT ex A, impari in B, parem numerus C. Dico C, parem esse. Cùm enim C, fiat ex A, in B; componetur C, ex tot numeris ipsi B, æqualibus, quot in A, sunt vnitates. Quare cùm B, sit par, componetur C, ex tot paribus ipsi B, æqualibus, quot sunt vnitates in A; [d] Atque adeò par erit. Si ergo impar numerus parem multiplicans, &c. Quod ostendendum erat.

d 21. noni.

*SCHOLIVM.*

*EADEM demonstratione ostendemus & hoc.*

SI par numerus parem multiplicans fecerit aliquem; Factus par erit.

A.. B.....
C.....

*NAM rursus C, componetur ex tot paribus ipsi B, aqualibus, quot in A, continentur vnitates, &c.*

COROLLARIVM.

A.... B....
C.....

*CONSTAT quoq; ex his, Parem numerum in se multiplicatũ procreare parem: vt patet, si pares A, & B, ponantur æquales.*

## 30. THEOR. 27. PROPOS. 29.

SI impar numerus imparem numerum multiplicans fecerit aliquem: Factus impar erit.

Ex

Ex impari A, in imparem B, fiat C. Dico C, imparem esse. Cùm enim C, fiat ex A, in B; componetur C, ex tot numeris ipsi B, æqualibus, quot sunt vnitates in A. Quare cùm tam A, quàm B, sit impar; componetur C, ex imparibus ipsis B, æqualibus, quorum multitudo impar est, nimirum æqualis multitudini vnitatũ, quæ in A, impari continentur. [a] Igitur C, impar erit. Quocirca si impar numerus imparem numerum multiplicans, &c. Quod erat ostendendum.

A..... B.....
C.....

[a] 23. noni.

## COROLLARIVM.

*Hinc sequitur, Imparem numerum in se multiplicatum gignere imparem: vt constat, si impares A, & B, ponantur aquales.*

A... B...
C.....

## EX CAMPANO.

NVMERVS impar numerum parem metiens, per numerum parem eum metitur.

*METIATVR impar A, parem B, per C. Dico C, parem esse. Nam si impar sit;* [a] *erit B, factus ex A, impari in C, imparem impar. Quod est absurdum, cùm ponatur par. Est ergo C, par.*

A... C....
B.....

[a] 29. noni.

NVMERVS impar numerum imparem metiens, per numerum imparem eum metitur.

*METIATVR impar A, imparem B, per C. Dico C, imparem esse. Si enim sit par;* [b] *erit B factus ex A, impari in C, parem par. Quod est absurdum, cùm impar ponatur. Est ergo C, impar.*

A... C.....
B.....

[b] 28. noni.

## SCHOLIVM.

*Ex his clarissimè quoq; demonstrabimus theorema 11. lib. 2. numeris non posse accommodari: Id quod etiam in scholio propos. 14. huius lib. aliter ostendimus; recepimusq; nos hoc loco clarius demonstraturos. Secetur enim, si fieri potest, numerus A B, in partes A C, C B, ita vt numerus ex A B, in C B, factus, aqualis sit quadrato reliquæ partis A C. Aut igitur vtraq; pars A C, C B; impar est; aut maior A C, impar, & minor C B, par; aut contra, maior A C, par, & minor C B, impar; aut denique vtraq; pars A C, C B, par. Sit primum vtraque pars A C, C B, impar,* [c] *ideoq; totus numerus A B, par.* [d] *Igitur qui fit ex A B, in C B, par est: qui verò ex A C, in se fit, impar est, ex Coroll. huius propos. 29. Cùm ergo numerus ex A B, in C B, genitus ponatur aqualis ei, qui fit ex A C, in se; erit par numerus impari aqualis. quod fieri non potest.*

A------ C----B
D--- E--

[c] 22. noni.
[d] 28. noni.

*DEINDE, sit A C, impar, & C B, par, ideoq; ex scholio propos. 23. huius lib. totus A B, impar.* [e] *Quia ergo numerus ex A B, impare in parem C B, factus, par est: & numerus ex impare A C, in se genitus, impar, ex coroll. huius propos. 29. erit rursus ille par huic impari aqualis. quod est absurdum.*

[e] 28. noni.

*TERTIO, sit A C, par, & C B, impar; ideoq; ex scholio propos. 23. huius lib. totus A B, impar.* [f] *Quia ergo numerus ex A B, impare in imparem C B, factus, impar est: & numerus ex pare A C, in se genitus, par, ex coroll. propos. 28. huius lib. erit rursus ille impar huic pari aqualis. quod absurdum est.*

[f] 29. noni.

*QVARTO, sit vtraq; pars A C, C B, par. Inuentis igitur, ex scholio propos. 35. lib. 7. duobus numeris minimis D, E, in proportione A C, ad C B;* [g] *erunt D, E, inter se primi: ac proinde ambo pares non erunt, sed vel vterque impar, vel vnus impar, & alter par. Et quia est, vt A C, ad C B, ita D, ad E; erit conuertendo, vt C B, ad A C, ita E, ad D: Et componendo, vt A B, ad A C, ita totus D E, ad D:* [h] *Est autem, vt A B, ad A C, ita A C, ad C B; quòd numerus factus ex A B, in C B, aqualis ponatur quadrato medij A C. Igitur erit quoq; vt totus D E, ad D, ita D, ad E,* [i] *ac proinde numerus, qui fit ex toto D E, in E, aqualis erit quadrato ipsius D. Totus ergo numerus D E, sectus est in partes D, E, quarum vel vtraque impar est, vel vna impar, & altera par; ita vt numerus factus ex toto D E, in partem E, aqualis sit quadrato alterius partis D. quod fieri non posse, iam demonstratum est in numero A B, quando vtraq; pars A C, C B, vel impar est, vel vna impar, & altera par. Constat ergo propositum.*

[g] 24. septi.
[h] 20. septi.
[i] 20. septi.

## THEOR. 28. PROPOS. 30.

33.

SI impar numerus parem numerum metiatur; & illius dimidium metietur.

METIATVR impar A, parem B. Dico A, dimidium quoque ipsius B, metiri. Metiatur A, ipsum B, per C. Erit ergo, ex ijs, quæ in antecedente propos. ex Campano demonstrauimus, numerus C, par: Atque adeò dimidiam partem habebit. Itaque cùm A, metiatur B, per C,

A... C....
B.....

[a] metietur quoque C, ipsum B, per A; Ac proinde C, pars erit ipsius B, denominata ab A, vt ad 3. definitionem lib. 7. docuimus. Quoniam verò est vt C, ad dimidium sui, ita B, ad dimidiũ sui; & permutando vt C; ad B, ita dimidia pars ipsius C, ad dimidiam partem ipsius B. Est autem C, pars ipsius B, denominata ab A, vt ostensum est; erit & dimidium ipsius C, dimidij ipsius B, pars ab eodem A, denominata. [b] Ac propterea A, dimidium ipsius B, metietur. Si impar ergo numerus parem numerum metiatur, &c. Quod erat ostendendum.

[a] 8. pron.
[b] 40. sept.

34. ## THEOR. 29. PROPOS. 31.

SI impar numerus ad aliquem numerum primus sit: & ad illius duplum primus erit.

IMPAR numerus A, primus sit ad numerum B, cuius duplus sit C. Dico A, ad C, quoq; primum esse. Si enim A, C, non sunt inter se primi; metietur eos aliquis numerus, qui sit D: qui necessariò impar erit. Nam si sit par, cùm metiatur imparem A; [a] erit A, factus ex D, pari in eum numerum, per quem metitur, par. Quod est absurdum. ponitur enim A, impar. Quare D, impar parem C, metiẽs; (est enim C, par; cùm dimidium habeat B.) [b] metietur quoq; numerum B, eius dimidium: Metitur autem & A. Igitur D, ipsos A, B, primos inter se metitur. Quod est absurdum. Non igitur A, ad C, primus non est. Ergo primus. Quapropter si impar numerus ad aliquem numerum primus sit, &c. Quod erat ostendendum.

a 28. noni.

A.....B.....
C.....D----

b 30. noni.

### COROLLARIVM.

*SEQVITVR hinc, numerum imparem, qui ad aliquem numerum primus est, primum quoque esse non solum ad eius duplum, vt Euclides demonstrauit, sed etiam ad eius quadruplum, octuplum, sedecuplum, & sic deinceps per proportionem duplam progrediendo. Nam si primus est ad duplum, [a] primus quoque erit ad quadruplum, qui dupli duplus est: Et similiter ad octuplum, qui quadrupli duplus est, &c.*

a 31. noni.

35. ## THEOR. 30. PROPOS. 32.

NVMERORVM à binario duplorum vnusquisque pariter par est tantùm.

NVMERI à binario A, dupli quotcunque sint B, C, D, E. Dico B, C, D, E, esse pariter pares tantùm. Quòd enim sint pariter pares, perspicuum est. Nam exposita vnitate, cùm A, sit binarius, & B, C, D, E, à binario dupli; erunt A, B, C, D, E, ab vnitate deinceps proportionales, nimirum in proportione dupla. [a] Quare A, quemlibet ipsorũ B, C, D, E, & quilibet minor maiorem sequentem metietur per aliquem ipsorum A, B, C, D, E; qui cùm omnes sint pares, vt poté dupli à binario; metietur quemlibet ipsorum B, C, D, E, par numerus per numerum parem: Ac propterea quilibet pariter par erit, ex definitione.

Vnitas. A, 2. B, 4. C, 8. D, 16. E, 32.

a 11. noni.

QVOD autem iidem numeri sint pariter pares tantùm, liquidò etiam constat. Cùm enim A, B, C, D, E, sint ab vnitate continuè proportionales, sitque A, proximus vnitati numerus primus, nimirum binarius; [b] nullus alius quemlibet ipsorum metietur, præter ipsos A, B, C, D, E; qui cùm sint omnes pares; metietur quemlibet ipsorum par numerus per parem numerum tantùm: Ac propterea quilibet pariter par est tantùm. Numerorum igitur à binario duplorum, &c. Quod demonstrandum erat.

b 13. noni.

### *SCHOLIVM.*

*HINC cum Arithmeticis facilè colligemus artem, qua omnes numeros inueniamus, qui sint pariter pares tantùm. Sint enim A, B, C, D, E, F, à binario dupli, qui ex hîc demonstratis omnes sunt pariter pares tantùm. Dico nullum alium esse pariter parem tantùm, præter eos, qui in hoc ordine continentur; Atque adeò si ordo numerorum à binario duplorum infinitè augeatur, omnes numeros pariter pares tantum inueniri, nullo relicto. Si enim fieri potest, sit alius numerus G, extra ordinem numerorum à binario duplorum, pariter par tantùm, cuius pars dimidia sit H. Erit igitur H, numerus par: (Nam si dicatur impar, cùm sit ipsius G, pars dimidia; metietur binarius, numerus par, ipsum G, per H, numerum imparem; Atque adeò G, pariter impar erit. Quod est absurdum: ponitur namque pariter par tantùm) cuius rursum dimidia pars sit I. Erit igitur rursum I, par numerus: (Nam si dicatur impar, cùm sit ipsius G, pars quarta; metietur numerus par 4. ipsum G, per I, numerum imparem; Atq; ob id G, pariter impar erit; Quod est absurdum: ponitur enim pariter par tantùm.) Atq; ita deinceps erit semper dimidia pars numerus par, donec ad vnitatem veniamus. Sit ergo iam ipsius I, dimidia pars vnitas, ita vt sit I, binarius. Igitur H, G, sunt à binario I, dupli; Ac proinde G, erit aliquis ex ordine ipsorum A, B, C, D, E, F. ponitur autem, non esse. Quod est absurdum. Nullus ergo alius pariter par est tantùm, præter eos, qui à binario sunt dupli.*

A, 4. B, 8. C, 16. D, 32. E, 64. F, 128.
I----H----G-----

36. ## THEOR. 31. PROPOS. 33.

SI numerus dimidium habeat imparem: Pariter impar est tantùm.

HABEAT numerus A: dimidiam partem numerum imparem. Dico A, esse pariter imparem tantùm. Quòd enim sit pariter impar, ita perspicuum fiet. Quoniam A, dimidiũ habet imparem; metietur

A..... metietur binarius numerus par ipsum A, per illum dimidium imparem. Quare A, ex definitione, pariter impar est. Quòd autem idem A, sit pariter impar tantùm, hoc modo demonstrabimus. Sit B, dimidia pars ipsius A; & C, binarius. Si igitur A, non est pariter impar tantùm; ipse erit quoque pariter par. Quare eum metietur aliquis par numerus per parem numerum. Metiatur eum D, par per parem E. [a] Igitur fit A, ex D, in E; sed idem A; fit ex C, binario in B, eius dimidium. Ergo numerus factus ex, C, primo in B, quartum æqualis est ei, qui fit ex D, secundo in E, tertium, [b] Ac propterea erit vt C, ad D, ita E, ad B. Metitur autem C, binarius parem D. Igitur & E, ipsum B, metietur, par imparem. Quod est absurdum. Non est ergo A, pariter par. Ergo pariter impar tantùm. Quocirca si numerus dimidium habeat imparem, &c. Quòd demonstrandum erat.

A.....
B..... C..
D----- E----

[a] 29. prop.
[b] 19. septimi

SCHOLIVM.

Impares. 3. 5. 7. 9. 11. 13. 15.
Pariter impares tantùm. 6. 10. 14. 18. 22. 26. 30.

*Itaque si omnium numerorum imparium dupli sumantur, inuenientur omnes numeri, qui sunt pariter impares tantùm. Quod enim quilibet illorum sit pariter impar tantùm, constat ex hac propositione; quippe cùm quilibet dimidium habeat imparem. Quòd autem illi soli sint pariter impares tantùm, perspicuum erit ex sequenti theoremate, in quo demonstratur, omnes pares, qui nec à binario sunt dupli, neque dimidios habent impares, esse pariter pares, & pariter impares. Cum ergo nullus alius par habeat dimidium imparem præter duplos imparium numerorum; manifestum est, nullum alium, præter ipsos, esse pariter imparem tantũ; sed vel esse pariter parem tantũ, vel certè pariter parẽ & pariter imparẽ.*

## THEOR. 32. PROPOS. 34. 37.

SI par numerus neque à binario duplus sit, neque dimidium habeat imparem: Pariter par est, & pariter impar.

A..... PAR numerus A, neque sit à binario duplus, neque dimidium habeat imparem, sed parem. Dico A, & pariter parem esse, & pariter imparem. Quòd enim sit pariter par, liquet. Nam cùm dimidium habeat parem, metietur eum binarius par numerus, per parem, nempe per dimidium. Igitur ex definitione, pariter par est.

QVOD autem idem A, sit etiam pariter impar, ita ostendemus. Diuiso A, bifariam, & eius dimidio rursus bifariam, & ita deinceps; tandem incidemus in aliquem imparem. Nam si in binarium incideremus, esset A, à binario duplus; ponitur autem & non duplus. Quod est absurdum. Igitur cùm in imparem incidamus, metietur ille impar ipsum A, per numerum parem: Aliàs si per imparem metiretur, [c] cùm impar imparem multiplicans faciat imparem; esset A, factus ex illo impare in hunc imparem, impar. Quod est absurdum. ponitur enim par. Quare cùm impar metiatur A, per parem; atque adeò vicissim par per imparem; erit ex definitione A, pariter impar. Fuit autem & pariter par. Igitur est & pariter par, & pariter impar. Si par ergo numerus neque à binario duplus sit, &c. Quod ostendendum erat.

[c] 29. noni.

SCHOLIVM.

*Patet ex his inueniemus omnes numeros, qui & pariter pares sint, & pariter impares. Reliqui enim omnibus illis, qui à binario sunt dupli & omnibus, qui dimidios habent impares; erunt ex hac propos. omnes alij pares, & pariter pares & pariter impares.*

*PORRO ex proximis tribus theorematib. aperte intelligimus ea, quæ in definitionem 9. lib. 7. scripsimus.*

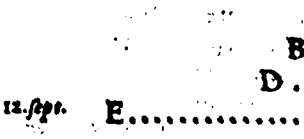
## THEOR. 33. PROPOS. 35. 38.

SI sint quotcunque numeri deinceps proportionales, detrahantur autem à secundo, & vltimo æquales ipsi primo: Erit vt secundi excessus ad primum, ita vltimi excessus ad omnes ipsum antecedentes.

A.....
B.... G..... C
D.....
E.....K.....I....H.....F

SINT quotcunque numeri continuè proportionales A, B C, D, E F; & ex B C, secundo, & E F, vltimo detrahantur G G, F H, primo A, æquales. Dico esse vt B G, ad A, ita E H, ad A, B C, & D, simul. Detrahatur F I, ipsi B C, & F K, ipsi D, æqualis. Quoniam igitur F I, æqualis est ipsi B C, & ablatus F H, ablato C G; erit & reliquus I H, reliquo B G, æqualis. Quia verò est vt A, ad B C, ita B C, ad D, & D, ad E F; conuertendoque vt E F, ad D, ita D, ad

A.
B..G.C
D.....
E.....K.....I..H.F




BC, & BC, ad A; Atque est KF, ipsi D, & IF, ipsi BC, & HF, ipsi A, æqualis: Erit igitur vt EF, ad KF, ita KF, ad IF, & IF, ad HF. Diuidendo igitur vt EK, ad KF, ita KI, ad IF, & IH, ad HF; [a] Ac proinde ita etiã erunt omnes EK, KI, IH, ad omnes KF, IF, HF, hoc est, totus EH, ad D, BC, A, simul, (quibus sumpti sunt æquales KF, IF, HF,) vt IH, ad HF, hoc est, vt BG, ad A: sunt enim BG, & A, ipsis IH, & HF, æquales. Quare si sint quotcunque numeri deinceps proportionales, &c. Quod demonstrandum erat.

a 12. sept.

## SCHOLIVM.

*Ex hoc theoremate veniemus in notitiam summæ quotcunq; numerorum continuè proportionalium, si modò primus, secundus, & vltimus fuerint noti. Cùm enim sit vt excessus secundi ad primum, ita excessus vltimi ad omnes ipsum antecedentes; Si primus à secundo, & vltimo demetur, fiatq; vt reliquus secundi ad primum, ita reliquus vltimi ad alium: Erit hic alius summa omnium numerorum proportionalium, quos vltimum antecedunt. Si igitur adiiciatur vltimus, habebitur tota summa.*

1. 3. 9. 27. 81. 243. 729. 2187.

*Inuenietur autem quartus ille proportionalis, si primus multiplicetur in excessum vltimi, & productus diuidatur in excessum secundi: vt liquet ex scholio propos. 19. huius lib. quandoquidem tres dati numeri, quibus quartus proportionalis inueniendus est, sunt, excessus secundi, primus, & excessus vltimi: Vt in exemplo appositio, si primus numerus, nimirum vnitas, detrahatur ex 3. secundo; & ex 2187. vltimo; erunt reliqui excessus, 2. 2186. Quoniam igitur debet esse vt 2. ad 1. ita 2186. ad summam omnium, excepto vltimo, si secundus numerus 1. multiplicetur per tertium 2186. fiet numerus 2186. qui si diuidatur in primum 2. orietur numerus 1093. Videlicet summa omnium, excluso vltimo 2187. qui si addatur summæ inuentæ 1093. procreabitur summa omnium 3280.*

## 39. THEOR. 34. PROPOS. 36.

SI ab vnitate quotcunque numeri deinceps exponantur in dupla proportione, quoad totus compositus fiat primus; & totus hic in vltimum multiplicatus faciat aliquem: Factus erit perfectus.

SINT ab vnitate quotcunque numeri A, B, C, D, dupli, quoad E, ex illis compositus sit primus & E, multiplicans D, vltimum faciat F. Dico F, esse numerum perfectum. Quot enim sunt numeri A, B, C, D, tot sumantur ab E, dupli, nimirum E, G, H, I. Quia igitur A, B, C, D, eandem rationem habent, quam E, G, H, I; erit ex æquo, vt A, ad D, ita E, ad I; [b] Ac propterea numerus factus ex A, primo in I, quartum æqualis est facto ex D, secundo in E, tertium: Factus est autem F, ex D, in E. Igitur idem F, fiet ex A, in I; [c] ideoq; I, ipsum F, metietur per A, binarium; & ob hoc F, ipsius I, duplus erit. Quare E, G, H, I, F, deinceps dupli sunt. Detrahantur ex G, secundo, & ex F, vltimo numeri K, L, primo E, æquales, sintq; reliqui excessus M, N. [d] Erit igitur vt M, ad E, ita N, ad E, G, H, I, simul: Est autem M, æqualis ipsi E. (Cùm enim G, duplus sit ipsius E, ablatusq; sit K, ipsi E, æqualis; erit & reliquus M, ipsi E, æqualis.) Ergo & N, æqualis est ipsis E, G, H, I, simul. Additis igitur æqualibus, nimirum numero L, (qui æqualis est ipsi E, ablatus) & numero composito ex vnitate, & A, B, C, D, numeris: (qui compositus eidem E, per constructionem, est æqualis) erit compositus ex L N, nimirum ipse F, æqualis vnitati, & numeris A, B, C, D, E, G, H, I, simul. Quare cùm vnitas, & omnes numeri A, B, C, D, E, G, H, I, metiantur ipsum F; (Cùm enim F, factus sit ex E, in D; [e] metietur D, ipsum F; [f] atque adeò eundem F, metietur vnitas, & numeri A, B, C, [g] qui ipsum D, metiuntur. Rursus cùm I, ipsum F, metiatur, vt ostensum est, [h] metientur quoque eundem F, numeri E, G, H, [i] qui ipsum I, propter proportionem duplam, metiuntur) & nullus alius numerus ipsum F, metiatur, vt mox ostendemus; Erunt vnitas & numeri A, B, C, D, E, G, H, I, omnes partes, quas F, habere potest: Quibus cùm æqualis ostensus sit ipse F; erit F, ex definitione, perfectus.

Vnitas. A, 2. B, 4. C, 8. D, 16.
E, 31. G------62. H, 124. I, 248. F------496.
K, 31. M, 31. L, 31. N, 465.
O----- P----

b 19. sept.
c 7. pron.
d 35. noni.
e 7. pron.
f 11. pron.
g 11. noni.
h 11. pron.
i 11. noni.

QVOD autem nullus alius numerus, præter A, B, C, D, E, G, H, I, ipsum F, metiatur, ita demonstrabimus. Metiatur, si fieri potest, alius numerus O, præter illos, ipsum F, per P; [k] atq; adeò F, fiat ex O, in P: Sed & idem F, factus est ex E, in D. Idem ergo numerus fit ex E, primo in D, quartum, & ex P, secundo in O, tertium; [l] ac propterea est vt E, ad P, ita O, ad D. Quoniam verò, cùm A, B, C, D, ab vnitate sint proportionales, & A, proximus vnitati primus, [m] vltimam D; nullus alius, præter A, B, C, metitur: & O, ponitur non idem, qui aliquis ipsorum A, B, C; non metietur O, ipsum D. Vt autem O, ad D, ita erat E, ad P; neque igitur E, ipsum P, metietur. Cùm ergo E, primus sit, [n] erunt E, & P, inter se primi; [o] ideoque in sua proportione minimi; [p] Ac proinde æquè metietur E, ipsum O, & P, ipsum D. [q] Nullus verò alius præter A, B, C, ipsum D, metitur. Igitur P, idem erit, qui aliquis ipsorum A, B, C. Sit ergo idem, qui B, & quot sunt B, C, D, tot ab E, sumantur dupli

k 9. pron.
l 19. septimi
m 13. octani.
n 31. septimi
o 23. septimi.
p 21. septimi
q 23. octani.

tur dupli E, G, H. Erit igitur ex æquo, vt B, ad D, ita E, ad H: [a] Ac proinde idem numerus fiet ex B, primo in H, quartum, qui ex D, secundo in E, tertium. Qui autem ex D, in E, æqualis fuit ei, qui ex P, in O. Idem ergo fiet ex P, in O, qui ex B, in H, [b] atque adeò erit, vt P, ad B, ita H, ad O. Erat autem P, idem qui B: Igitur & H, idem est, qui O. Quod est absurdum, ponitur enim O, diuersus ab omnibus A, B, C, D, E, G, H, I. Non igitur alius numerus O, ipsum F, metitur, sed ipsum soli A, B, C, D, E, G, H, I, metiuntur. Quam ob rem, si ab vnitate quotcunque numeri deinceps exponantur in dupla proportione, &c. Quod erat demonstrandum.

[a] 19. *septimi*

[b] 19. *septimi*

## *SCHOLIVM.*

*Ex hoc theoremate elicitur modus inueniendi omnes numeros perfectos, & earum partes aliquotas, quibus simul sumptis, iuxta definitionem numeri perfecti, ipsi æquales sunt. Si enim quotcunq; numeri ab vnitate dupli in vnam summam colligantur, donec compositus sit numerus primus; Erit numerus factus ex illo primo in vltimum duplorum, perfectus. Quod si ab illo primo, qui ex illis duplis componitur, sumantur tot continuè dupli (ipso primo etiam computato) quot sunt numeri illi dupli ab vnitate, exclusa vnitate; erunt hi numeri accepti, & illi ab vnitate dupli, vnà cum ipsa vnitate, omnes partes aliquotæ, quas perfectus numerus inuentus habere potest. Quæ omnia perspicua sunt ex demonstratione theorematis, & facilè ex subiectis exemplis percipi possunt. Vt quia numerus 3. compositus ex 1.2. primus est; erit propterea numerus 6. qui fit ex 3. in 2. vltimum duplorum, perfectus, cuius partes aliquotæ sunt 1, 2, 3. Item, quia compositus ex his 1.2.4. nimirum 7. primus est: idcirco 28. factus ex 7. in 4. est perfectus habens has partes aliquotas 1. 2. 4. 7. 14. At verò quia compositus ex his 1.2.4.8. hoc est, 15. non est primus; non erit 120. factus ex 15. in 8. perfectus.*

*Denique quia compositus ex his 1.2.4.8.16. nimirum 31. primus est; erit 496. factus ex 31. in 16. numerus perfectus, cuius partes aliquotæ sunt 1.2.4.8.16.31. 62. 124.248. Eodem modo & reliquos perfectos numeros inueniemus.*

*Libet hoc loco demonstrare proprietates quasdam proportionalitatis Geometricæ, qua nititur admirabilis illa proprietas, quam libro 5. septimo loco, cùm de proportionalitate Geometrica ageremus, exposuimus. hinc exordientes.*

### I.

Quolibet numero per duos quosuis numeros diuiso, erunt duo hi numeri Quotientibus conuerso ordine proportionales.

A, 48. B, 8. C, 3. D, 6. E, 16.

*Numerus enim A, diuisus per B, C, faciat quotientes D, E. Dico esse, vt B, ad C, ita E, ad D. Quoniam enim diuiso A, per B, fit Quotiens D; fiet A, ex B, in D, vt ad defin. 15. lib. 7. scripsimus. Eadem ratione idem A, fiet ex C, in E. Quia ergo idem numerus A, fit ex B, primo in D, quartum, & ex C, secundo in E, tertium; [a] erit vt B, primus ad C, secundum, ita E, tertius ad D, quartum. Quod est propositum.*

[a] 19. sept.

### II.

Quolibet numero per quotuis numeros diuiso, erunt bini numeri diuidentes binis Quotientibus respondentibus conuerso ordine proportionales.

A, 48. B, 3. C, 4. D, 8. E, 6. F, 16. G, 12. H, 6. I, 8.

*Diviso enim numero A, per B, C, D, E, sint Quotientes F, G, H, I. Dico esse, vt B, ad C, ita G, ad F: Et vt C, ad D, ita H, ad G: Et vt D, ad E, ita I, ad H. Hoc autem manifestum est ex theoremate 1. proximè demonstrato. Cùm enim duo B, C, diuidentes A, faciant F, G; erit vt B, ad C, ita G, ad F. Item cùm duo C, D, diuidentes A, faciant G, H; erit vt C, ad D, ita H, ad G. Item cùm duo D, E, diuidentes A, faciant H, I; erit vt D, ad E, ita I, ad H: Atq; ita deinceps, si plures fuerint. Quod est propositum.*

### III.

Quolibet numero per quotuis numeros continuè proportionales diuiso, erunt Quotientes conuerso ordine in eadem proportione continuè proportionales.

A, 15. B, 1. C, 2. D, 4. E, 8. F, 15. G, $7\frac{1}{2}$. H, $3\frac{3}{4}$. I, $1\frac{7}{8}$.

*Diviso enim numero A, per B, C, D, E, continuè proportionales, sint Quotientes F, G, H, I. Dico I, H, G, F, in eadem proportione B, ad C, continuè proportionales esse. Quoniam enim per 2. theorema est, vt D, ad E, ita I, ad H: Et vt C, ad D, hoc est, vt D, ad E, ita H, ad G; Et vt B, ad C, hoc est, vt C, ad D, & D, ad E, ita G, ad F; erunt I, H, G, F, continuè proportionales in proportione D, ad E, vel B, ad C. Quod est propositum.*

### IIII.

Si sint quotuis numeri quicunq;, & totidem alij in eisdem proportionibus; erit vt summa priorum ad quemlibet eorum, ita summa posteriorum ad eum, qui illi in posterioribus respondet.

A,3. B,6. C,20. D,29. E,6. F,12. G,40. H,58.

*SINT quotuis numeri A,B,C, quorum ſumma D: Et totidem alij E,F,G, quorum ſumma H; ſitq́ vt A, ad B, ita E, ad F; & vt B, ad C, ita F, ad G. Dico eſſe, vt D, ad A, B, C, ſigillatim, ita H, ad E, F, G, ſigillatim. Cùm enim ſit, vt A, ad B, ita E, ad F; erit componendo, vt A, B, ſimul ad B, ita E, F, ſimul ad F: Vt autem B, ad C, ita eſt F, ad G. Igitur ex æquo, vt A, B, ſimul ad C, ita erit E, F, ſimul ad G: Et componendo, vt A, B, C, ſimul, hoc eſt, vt D, ad C, ita E, F, G, ſimul, hoc eſt, H, ad G. quod eſt propoſitum.*

*QVIA igitur eſt, vt D, ad C, ita H, ad G: Et conuertendo, vt C, ad B, ita G, ad F; erit ex æquo, vt D, ad B, ita H, ad F. quod eſt propoſitum.*

*DENIQVE quia eſt, vt D, ad B, ita H, ad F: Et conuertendo, vt B, ad A, ita F, ad E; erit ex æquo, vt D, ad A, ita H, ad E. quod eſt propoſitum. Eademq́ ratio eſt de pluribus.*

## V.

SI ſint quotuis numeri quicunque, & totidem alij in eiſdem proportionibus; ſumma priorum per ipſos diuiſa ſigillatim, faciet eoſdem prorſus Quotientes, quos ſumma poſteriorum per ipſos diuiſa facit.

*NAM, vt in 4. theor. oſtenſum eſt, eadem proportio eſt ſummæ priorum ad primum, quæ ſummæ poſteriorum ad primum: ac proinde vtriuſq; proportionis idem denominator erit. Cùm ergo ex diuiſione antecedentis termini per conſequentem gignatur denominator proportionis; idem Quotiens omnino procreabitur, ſi vtraq; ſumma ſeorſum per primos numeros, quaq; per ſuum, diuidatur. Eademq́ ratio eſt, ſi per ſecundos, tertios, quartos, &c. diuiſio fiat. Conſtat ergo propoſitnm.*

## VI.

SI ſumma quotuis numerorum continuè proportionalium per eos ſigillatim diuidatur; Et Quotientum ſumma per ipſos Quotientes; Et horum ſecundorum Quotientum ſumma per eoſdem ſecundos Quotientes; & ſic deinceps in infinitum: procreabuntur alternis ſemper iidem primi Quotientes ordine conuerſo.

*SINT continuè proportionales quotuis numeri A,B,C,D, quorum ſumma E, per ipſos diuiſa faciat Quotientes F,G,H,I, & horum ſumma K, per eos diuiſa faciat Quotientes L,M,N,O. Dico hos Quotientes, & illos eſſe eoſdem alternis, ordine conuerſo, hoc eſt, F, & O, eoſdem eſſe; Item G, & N; H, & M; I, & L, &c.*

A,1. B,2. C,4. D,8. E,15. F,15. G,7½. H,3¾. I,1⅞. K,28⅛. L,1⅞. M,3¾. N,7½. O,15.

*Quoniam enim per 3. theor. Quotientes F,G,H,I, eandem continuam proportionem habent conuerſo ordine, quam numeri A,B,C,D: Et Quotientes L,M,N,O, conuerſo ordine eandem, quam Quotientes F,G,H,I, hoc eſt, eandem eodem ordine, quam numeri A,B,C,D: erit per 4. theorema, E, ad A, vt K, ad I. Quare cùm ex diuiſione antecedentis termini per conſequentem producatur denominator proportionis, fiet idem Quotiens ex diuiſione E, per A, qui ex diuiſione K, per I. Cùm ergo Quotientes ſint F, & O, æquales erunt F, & O. Eadem ratione æquales erunt G, & N; H, & M; I, & L, &c. quod eſt propoſitum.*

## VII.

SI ſumma quotuis numerorum continuè proportionalium per eos ſigillatim diuidatur: erit ſumma omnium Quotientum æqualis numero, qui gignitur ex multiplicatione primi in vltimum, vel ex mutua multiplicatione quorumlibet duorum mediorum ab extremis æqualiter diſtantium, vel denique (ſi Quotientum numerus fuerit impar) ex multiplicatione medij Quotientis in ſe.

*SINT primùm quotuis numeri multitudine pares continuè proportionales A,B,C,D,E,F, quorum ſumma G, per ipſos ſigillatim diuiſa faciat Quotientes H,I,K,L,M,N, quorum ſumma O. Dico ſummam O, æqualem eſſe numerum qui fit ex H, in N, vel ex I, in M, vel ex K, in L. Quia enim per 4. theor. Quotientes H,I,K, L,M,N, ſunt continuè proportionales conuerſo ordine in proportione A, ad B; erit N, ad M, vt I, ad H.*

A,1. B,2. C,4. D,8. E,16. F,32. G,63. H,63. I,31½. K,15¾. L,7⅞. M,3 1/16. N,1 3/32. O,124½.

[a] *Igitur idem numerus gignitur ex N, in H, qui ex M, in I; hoc eſt, idem ex H, in N, qui ex I, in M. Eademq́ ratione idem fiet ex I, in M, qui ex K, in L. Et quoniam per 6. theor. ſumma O, diuiſa per H,I,K,L,M,N, producit eoſdem Quotientes conuerſo ordine, hoc eſt, ſumma O, diuiſa per H, facit Quotientem N; producetur ſumma O, ex H, in N, per defin. ac proinde & ex I, in M, & ex K, in L.*

a 19. ſepti.

*SINT deinde quotuis numeri multitudine impares cõtinuè proportionales A,B,C,D,E, quorum ſumma F, per ipſos ſigillatim diuiſa faciat Quotientes G,H,I,K,L, quorum ſumma M. Dico ſummam M, æqualem eſſe numerum genitum ex G, in L; & ex H, in K; & ex I, in ſeipſum. Quòd enim æqualis ſit ei, qui fit ex G, in L, & ex H, in K, demonſtrabimus, vt prius. Deinde*

A,1. B,2. C,4. D,8. E,16. F,31. G,31. H,15½. I,7¾. K,3⅞. L,1 1/16. M,60 1/16.

Verò quia tres numeri H,I,K, continuè proportionales sunt; [a] erit numerus ex H,in K, genitus:id est,summa M,æqualis numero,qui ex I, in seipsum ducto generatur. quod est propositum. a 20. septi.

HINC fit, quando numerus terminorum est impar, summam Quotientum esse numerum quadratum, cuius latus, siue radix, est medius terminus.

ITAQVE si inueniendi sint quotcunque numeri cõtinuè proportionales in data proportione, quorum summa æqualis sit numero, qui ex primo in vltimum gignitur, vel ex quibusuis duobus, qui ab extremis æqualiter distant: accipiendi sunt in data proportione tot numeri quicunque continuè proportionales, quot inquiruntur. Nam si eorum summa per ipsos sigillatim diuidatur, erunt Quotientes quæsiti numeri, vt ex hoc 7. theor. perspicuum est. Quod si desiderentur quotuis numeri multitudine impares, quorum summa sit numerus quadratus, cuius latus, siue radix sit medius terminus: sumendi sunt in data proportione totidē numeri continuè proportionales, eorumq; summa per eos sigillatim diuidenda. Quotientes enim erunt numeri quæsiti, vt ex eodem hoc 7. theor. liquet. Atq; mirabile sanè est, posse reperiri quotcunq; numeros continuè proportionales in data proportione, etiam mille, aut plures, quorum omnium summa æqualis sit producto ex primo in vltimum; & ex quibuslibet duobus, qui ab extremis æqualiter distant, inter se multiplicatis; & denique, si terminorum numerus est impar, ex medio termino in seipsum multiplicato.

SIC etiam si quis optet duos numeros in data proportione, quorum summa æqualis sit numero producto ex vno in alterum, sumat duos numeros in data proportione quoscunq;, eorumq; summam per vtrumq; diuidat. Quotientes enim dabunt numeros quæsitos, vt ostensum est: quia videlicet eorum summa æqualis est numero, qui fit ex primo in vltimū, hoc est, in secundum. Exempli gratia. Sint inueniendi duo numeri in proportione sesquiquinta, quorum summa æqualis sit numero, qui ex multiplicatione vnius in alterum producitur. Sumantur duo numeri quicunq; in data proportione sesquiquinta, nimirum 6. & 5. eorumq; summa 11. per vtrumq; diuidatur. Nam Quotientes $1\frac{5}{6}$. & $2\frac{1}{5}$. sunt numeri quæsiti. Habent enim proportionem sesquiquintam datam, & tam eorum summa, quàm numerus ex multiplicatione eorū productus, est $4\frac{1}{30}$.

# MINVTIARVM SIVE NVMERORVM fractorum

## DEMONSTRATIONES.

### I.

DVAE minutiæ eundem habentes denominatorem, quarum vnius numerator sit vnitas, eandem proportionem habent, quam numeratores.

SINT duæ minutiæ A B, C B, eundem habentes denominatorē, & numerator C, sit vnitas. Dico ita esse minutiam A B, ad minutiam C B, vt est numerator A, ad numeratorem C. Quoties enim vnitas C, continetur in A, toties minutia C B, in minutia A B, includitur; propterea quòd minutia A B, diuiditur in tot minutias minutiæ C B, æquales, quot vnitates sunt in A, ita vt qualibet earum minutiarum habeat numeratorem C, & denominatorem B. [b] Igitur eadem pars est vnitas C, numeri A, quæ minutia C B, minutiæ A B, ac proinde est, vt vnitas C, ad A, ita minutia C B, ad minutiam A B: Et conuertendo, ita A, ad C, numerator ad numeratorem, vt minutia A B, ad minutiam C B. quod est propositum.

A, 6. C, 1.
B, 11. B, 11.

b 20. defin.

QVONIAM verò minutiæ sunt fractiones, siue particulæ vel vnitatis, vel alterius cuiusplam numeri, (Neque enim eorum sententiam probare possum, qui existimant, eas respectu solius vnitatis esse accipiendas; propterea quòd falsò putant, earum demonstrationes nō posse omnes explicari in numeris integris, sed solum in vnitate. Nos enim in hac tractatione omnes demonstrationes quibusuis etiam numeris integris accommodabimus.) conabimur omnes minutiarum demonstrationes numeris integris explicare, vt exemplis etiam studiosus lector addiscat, veras esse demonstrationes, quas afferimus.

SINT ergo datæ minutiæ $\frac{6}{11}$. & $\frac{1}{11}$. particulæ, verbi gratia, huius numeri integri 44. Et quia eius $\frac{1}{11}$. est 4. & $\frac{6}{11}$. sunt 24. perspicuum est, ita esse 4. ad 24. vt est numerator 1. ad numeratorem 6. Vel ita 24. ad 4. vt 6. ad 1.

HANC porrò propositionem demonstrabimus propos. 4. in vniuersum de quibuscunq; duabus minutiis eiusdem denominationis, etiamsi neutra numeratorem habeat vnitatem.

### II.

NVMERATOR cuiusuis minutiæ ad denominatorem eandem proportionē habet, quam minutia ad integrum, cuius est minutia.

SIT minutia quæcunque A B. Dico esse numeratorem A, ad denominatorem B, vt est minutia A B, ad suum integrum. Sumatur minutia C B, cuius numerator C, vnitas, & denominator idem B: Item alia minutia, cuius numerator D, æqualis sit eidem denominatori B, ita vt suo integro sit æqualis. Quando enim numerator denominatori est æqualis, minutia suo integro æquiualet; quippe quæ tot particulas integri contineat, in quot ipsum integrum diuisum est, ac proinde totum integrum contineat. [c] Quoniam igitur est, vt A, ad C, ita mi- c 1. huius.

A, 3. C, 1. D, 5.
B, 5. B, 5. B, 5.

*nutia A B, ad minutiam C B: Et vt C, ad D, ita minutia C B, ad minutiam D B; erit ex æquo vt A, ad D, hoc est, vt numerator A, ad denominatorem B, ipsi D, æqualem, ita minutia A B, ad minutiam D B, hoc est, ad integrum. quod est propositum.*

A, 1. C, 1. B, 5. C, 30.

*ALITER. Sit primùm data minutia A B, numerator A, vnitas, ita vt minutia sit pars aliquota integri C, siue C, sit vnitas, siue numerus, pars, inquam, aliquota à B, denominata, propterea quòd tot minutiæ ipsi A B, æquales integrum C, conficiunt, quoties vnitas est in B, denominatore. Cùm ergo & vnitas A, sit pars numeri B, ab ipso B, denominata, vt ad defin. 2. lib. 7. scripsimus;* a 20. defin. *eadem pars erit vnitas A, numeri B, quæ minutia A B, integri C.* a *Quare erit, vt A, numerator ad B, denominatorem, ita minutia A B, ad integrum C. quod est propositum.*

A, 3. D, 1. C, 1. B, 5. B, 5. C, 30.

*DEINDE non sit vnitas numerator A. Sumatur minutia D B, cuius numerator D, vnitas & denominator idem B, qui minutiæ A B.* b *Et quia est, vt A, ad D, numerator ad numeratorem, ita minutia A B, ad minutiam D B: Et vt D, ad B, ita minutia D B, ad integrum C, vt proximè demonstrauimus; erit ex æquo, vt A, ad B, numerator ad denominatorem, ita minutia A B, ad integrum C. quod est propositum.* b 1. huius.

*ITAQVE si data minutia $\frac{3}{5}$. sit huius numeri integri 30. erit eius $\frac{1}{5}$. numerus 6. ac proinde $\frac{3}{5}$. numerus 18. vbi vides ita esse 18. ad 30. vt est 3. ad 5. numerator ad denominatorem.*

## III.

MINVTIA quælibet, pars est numeratoris à denominatore denominata.

*SIT qualibet minutia A B. Dico eam esse partem numeratoris A, à denominatore B, denominatam.* c *Quoniam enim est, vt A, ad B, numerator ad denominatorem, ita minutia A B, ad suum integrum C; erit permutando, vt A, ad minutiam A B, ita B, ad integrum: Et conuertendo, vt minutia A B, ad A, ita integrum ad B. Cùm ergo integrum C, sit pars denominatoris B, (hoc est, integri toties accepti, quoties vnitas est in denominatore B.) ab ipso denominatore B, denominata; (Cùm enim æquè metiatur vnitas denominatorem, & integrum ipsum integrum toties acceptum, quoties vnitas est in denominatore; sit autem vnitas pars denominatoris à denominatore denominata, vt ad defin. 2. lib. 7. scripsimus; erit quoque integrum eadem pars integri toties accepti, quoties vnitas est in denominatore) erit quoque minutia A B, numeratoris A, (hoc est, integri toties accepti, quoties est vnitas in numeratore A.) eadem pars à denominatore B, denominata. quod est propositum.* c 2. huius.

A, 3. C, 1. B, 5. C, 30.

*PONATVR minutia $\frac{3}{5}$. esse huius integri 30. cuius $\frac{3}{5}$. sunt 18. Et quia numerator 3. numerat tria integra, hoc est, valet 90. & denominator 5. valet 150. (quemadmodum, cùm eadem minutia $\frac{3}{5}$. sumitur respectu vnitatis, numerator continet tres vnitates, & denominator quinque,) liquidò constat, 18. esse quintam partem numeratoris, hoc est, trium vnitatum, quarum qualibet numerum integrum 30. significat, quæ tres vnitates faciunt 90. partem, inquam, à denominatore 5. denominatam; quemadmodum & 30. datus numerus integer, quinta pars est denominatoris, hoc est, quinque vnitatum, quarum qualibet numerum integrum 30. significat, quæ quinque vnitates conficiunt 150. pars, inquam, à denominatore 5. denominata.*

## IIII.

DVAB minutiæ eundem habentes denominatorem, quarum neutra numeratorem habeat vnitatem, eandem proportionem habent, quam numeratores.

*QVOD prima propositione ostensum est de duabus minutiis, quarum altera numeratorem habet vnitatem, demonstratur hic de quibusuis minutiis. Habeant ergo duæ minutiæ A B, C B, eundem denominatorem B. Dico esse minutiam A B, ad minutiam C B, vt est A, ad C, numerator ad numeratorem.* d *Quia enim est, vt A, ad B, ita minutia A B, ad suum integrum: Et vt B, ad C, ita integrum ad minutiam C B; (Nam* e *cùm sit, vt C, ad B, ita minutia C B, ad integrum, erit conuertendo, vt B, ad C, ita integrum ad minutiam C B.) erit ex æquo, vt A, numerator ad C, numeratorem, ita minutia A B, ad minutiam C B. quod est propositum.* d 2. huius. e 2. huius.

A, 6. C, 3. B, 7. B, 7.

*DATÆ minutiæ $\frac{5}{7}$. $\frac{3}{7}$. sint huius integri 28. cuius $\frac{5}{7}$. sunt 24. & $\frac{3}{7}$. sunt 12. vbi perspicuum est, ita esse 24. ad 12. vt est numerator 6. ad numeratorem 3.*

## V.

SI duarum minutiarum numerator prioris in denominatorem posterioris, & posterioris numerator in denominatorem prioris ducatur, erit prior minutia ad posteriorem, vt prior numerus productus ad posteriorem.

F, 10. G, 12. A, 2. C, 4. B, 3. D, 5. H, 15.

F. AB. H. Integrum. G. CD.

*SINT duæ minutiæ A B, C D: Et ex A, in D, fiat F; & ex C, in B, fiat G. Dico esse minutiam A B, ad minutiam C D, vt est F, ad G. Fiat enim H, ex B, in D. Quia igitur A, B, multiplicantes D, faciunt F, H;* f *erit vt A, ad B, ita F, ad H. Vt autem A, ad B, ita est minutia A B, ad integrum.* g *Igitur erit quoque, vt minutia A B, ad integrum, ita F, ad H. Rursus quia C, D, multiplicantes B, faciunt G, H;* h *erit vt C, ad D, ita G, ad H: Et conuertendo, vt D, ad C, ita H, ad G. Vt autem D, ad C, ita est integrum ad minutiam C D. (Nam* i *cùm sit, vt C, ad D, ita minutia C D, ad integrum, erit cõuertendo, vt D, ad C, ita integrum ad minutiam C D.) Igitur erit quoq; vt H, ad G, ita integrũ ad minutiã C D. Ex æquo igitur erit, vt F, ad G, ita minutia A B, ad minutiã C D. & est propositũ.* f 18. sept. g 2 huius. h 18. sept. i 2. huius.

SI duæ

*Si duæ minutiæ $\frac{2}{3}.\frac{4}{5}$. sint particulæ numeri 30. erunt duæ tertiæ eius, 20. at quatuor quintæ eiusdem, 24. Perspicuum autem est, ita esse 20. ad 24. vt 10. ad 12. qui duo numeri procreati sunt ex numeratoribus in denominatores, permutato ordine.*

*Itaque si productus numerus F, æqualis fuerit numero producto G, erit quoque minutia A B, minutiæ C D, æqualis: si minor, minor: Et si maior, maior; propter eandem proportionem F, ad G, & minutiæ ad minutiam. Atque hæc est demonstratio regulæ, quam in Arithmetica dedimus ad dignoscendum, vtra duarum minutiarum maior sit.*

## VI.

INTEGRVM ad summam duarum minutiarum eandem proportionem habet, quam numerus ex multiplicatione mutua denominatorũ productus ad summam duorum productorum, quorum vnus ex numeratore prioris minutiæ in posterioris denominatorem, alter verò ex numeratore posterioris in denominatorem prioris gignitur.

F, 10. G, 12. A, 2. C, 4. B, 3. D, 5. H, 15.

AB, CD. F, G. CD. G. Integrum. H.

*SINT duæ minutiæ A B, C D. Et ex B, in D, fiat H: at ex A, in D, fiat F; & ex C, in B, fiat G. Dico ita esse integrum ad summam minutiarũ A B, C D, vt est H, ad summam numerorum F, G.* [a] *Quoniam enim est, vt minutia A B, ad minutiam C D, ita F, ad G; erit componendo, vt summa minutiarum A B, C D, ad minutiam C D, ita summa numerorum F, G, ad G. Vt autem minutia C D, ad integrum, ita est G, ad H,* (*Nam* [b] *vt minutia C D, ad integrum, ita est C, ad D.* [c] *Et vt C, ad D, ita est G, ad H: propterea quòd C, D, ipsum B, multiplicantes fecerunt G, & H.*) *Igitur ex æquo erit, vt summa minutiarum A B, C D, ad integrum, ita summa numerorum F, G, ad H: Et cõuertendo, vt integrum ad summam minutiarum A B, C D, ita H, ad summam numerorum F, G. quod est propositum.*

a 5. huius. b 2. huius. c 18. septi.

*SINT rursus duæ minutiæ $\frac{2}{3}.\frac{4}{5}$. particulæ numeri 30. cuius $\frac{2}{3}$, sunt 20. & $\frac{4}{5}$. eiusdem 24. ac proinde summa minutiarum 44. Vbi vides, ita esse integrum 30. ad hanc summam 44. vt est 15. ex denominatoribus productus ad 22. summã numerorũ 10. 12. ex numeratoribus in denominatores permutato ordine productorũ.*

## VII.

SI duæ minutiæ eundem habeant numeratorem, erit vt prior minutia ad posteriorem, ita posterioris denominator ad denominatorem prioris.

D, 105. E, 35. A, $\frac{5}{7}$. A, 5. B, $\frac{7}{}$. C, 21.

*HABEANT duæ minutiæ A B, A C, eundem numeratorem A. Dico ita esse minutiam A B, ad minutiam A C, vt est denominator C, ad denominatorem B. Fiat enim D, ex A, in C: & E, ex A, in B. Quia igitur A, multiplicans C, B, facit D, E;* [d] *erit vt D, ad E, ita C, ad B. Vt autem D, ad E,* [e] *ita est minutia A B, ad minutiam A C. Igitur erit quoque minutia A B, ad minutiam A C, vt C, ad B, quod est propositum.*

d 17. septi. e 5. huius.

*DVÆ minutiæ $\frac{5}{7}.\frac{5}{21}$. sint particulæ numeri integri 42. cuius $\frac{5}{7}$. sunt 30. & $\frac{5}{21}$. eiusdem 10. Manifestum autem est, ita esse 30. ad 10. vt posterior denominator 21. ad priorem 7.*

## VIII.

MINVTIAE, quarum numeratores ad denominatores eandem habent proportionem, æquales sunt: Et æqualium minutiarum numeratores ad denominatores eandem proportionem habent. Cuius autem numerator ad denominatorem habet maiorem proportionem, illa maior est: Et quæ maior est, eius numerator ad denominatorem habet proportionem maiorem.

A, $\frac{3}{}$. C, $\frac{9}{}$. B, 4. D, 12.

*SINT duæ minutiæ A B, C D, sitq; eadem proportio A, ad B, quæ C, ad D, numeratoris ad denominatorem. Dico minutias has æquales esse.* [f] *Quoniam enim est, vt A, ad B, ita minutia A B, ad integrum: Et vt C, ad D, ita minutia C D, ad idem integrũ: vt autem A, ad B, ita ponitur C, ad D; erit quoq; minutia A B, ad integrum, vt minutia C D, ad idem integrum. Æquales ergo sunt minutiæ A B, C D. quod est propositum.*

f 2. huius.

*SED sint iam æquales minutiæ A B, C D. Dico esse, vt A, ad B, ita C, ad D. Cùm enim æquales sint minutiæ, erit vt minutia A B, ad integrum, ita minutia C D, ad idem integrum.* [g] *Est autem, vt minutia A B, ad integrum, ita A, ad B; Et vt minutia C D, ad integrum, ita C, ad D. Igitur erit quoque, vt A, ad B, ita C, ad D. quod est propositum.*

g 2. huius.

A, 3. C, 2. B, 4. D, 3.

*DEINDE sit maior proportio A, ad B, quàm C, ad D. Dico maiorem esse minutiam A B, quàm C D.* [h] *Cùm enim sit, vt A, ad B, ita minutia A B, ad integrum; & vt C, ad D, ita minutia C D, ad idem integrum; ponatur autem maior proportio A, ad B, quàm C, ad D; erit quoque maior proportio minutiæ A B, ad integrum, quàm minutiæ C D, ad idem integrum. Maior ergo est minutia A B, quàm minutia C D quod est propositum.*

h 2. huius.

*VERVM sit iam minutia A B, maior, quàm minutia C D Dico maiorem esse proportionẽ A, ad B, quàm C, ad D. Erit enim maior proportio minutiæ A B, maioris ad integrum, quàm minutiæ C D, minoris ad idem integrum.* [i] *Cùm ergo sit, vt minutia A B, ad integrum, ita A, ad B; & vt minutia C D, ad integrum, ita C, ad D: erit quoque maior proportio A, ad B, quàm C, ad D. quod est propositum.*

i 2. huius.

*MINVTIARVM $\frac{3}{4}.\frac{9}{12}$. integer numerus sit 24. cuius tam $\frac{3}{4}$. quàm $\frac{9}{12}$. sunt 18. ac proinde æquales sunt minutiæ $\frac{3}{4}.\frac{9}{12}$. At $\frac{2}{3}$. eiusdem numeri 24. sunt 16. vbi manifestum est, numerum 18. maiorem esse numero 16. ideoq; minutiam $\frac{3}{4}$. maiorem esse minutia $\frac{2}{3}$.*

## IX.

MINVTIAE, quarum numeratores eandem proportionem habẽt, quam denominatores; sunt æquales: Et minutiarum æqualium numeratores eandem habent proportionẽ, quam denominatores. Cuius autẽ numerator maiorem proportionẽ habet, q̃ denominator, illa maior est: Et maioris numerator maiorẽ habet proportionem, quã denominator.

A, 6. C, 2. B, 9. D, 3.

*SINT duæ minutiæ A B, C D, sitq; eadem proportio A, ad C, quæ B, ad D. Dico minutias ipsas æquales esse. Erit enim permutando, vt A, ad B, ita C, ad D:* [a] *ac proinde minutiæ æquales erunt. quod est propositum.*

a 8. huius.

*SED sint iam minutiæ æquales A B, & C D. Dico ita esse A, ad C, vt B, ad D.* [b] *Erit enim vt A, ad B, ita C, ad D. Igitur permutando, vt A, ad C, ita B, ad D. quod est propositum.*

b 8. huius.

A, 6. C, 2. B, 9. D, 5.

*DEINDE sit maior proportio A, ad C, quàm B, ad D. Dico minutiam A B, maiorem esse minutia C D. Erit enim permutando quoque maior proportio A, ad B, quàm C, ad D,* [c] *ac propterea maior erit minutia A B, quàm C D. quod est propositum.*

c 8. huius.

*VERVM sit iam minutia A B, maior quàm C D. Dico maiorem proportionem esse A, ad C, quàm B, ad D.* [d] *Erit enim maior proportio A, ad B, quàm C, ad D: ideoq; & permutando maior proportio erit A, ad C, quàm B, ad D. quod est propositum.*

d 8 huius.

*SINT duæ minutiæ $\frac{6}{9}.\frac{2}{3}$. partes integri numeri 90. vbi vides minutiam $\frac{6}{9}$. hoc est, 60. æqualem esse minutiæ $\frac{2}{3}$. id est, numero 60. At verò minutiã eandem $\frac{6}{9}$. id est, 60. maiorẽ esse minutia $\frac{3}{5}$. hoc est, numero 54.*

## X.

DVAS minutias diuersarum denominationum ad alias duas eiusdem denominationis illis æquales reducere.

E, 10. F, 9. A, 2. C, 3. B, 3. D, 5. G, 15.

*DVAE minutiæ A B, C D, habeant dissimiles denominatores B, D. Fiat E, ex A, in D; & F, ex C, in B; & G, ex B, in D. Dico minutias E G, F G, quarum numeratores E, F, & denominator idem G, esse æquales minutiis A B, C D. Quoniam enim A, B, multiplicantes D, faciunt E, G;* [e] *erit vt A, ad B, ita E, ad G.* [f] *Quare minutiæ A B, E G, æquales erunt. Eodem modo, quia C, D, multiplicantes B, faciunt F, G,* [g] *erit vt C, ad D, ita F, ad G.* [h] *Igitur minutiæ C D, F G, æquales erunt. quod est propositum.*

e 18. sept. f 8. huius. g 18. sept. h 9. huius.

## XI.

INTEGRVM numerum quemcumque ad dati denominatoris minutiam reducere.

B, 6. A, 1. C, 6.

*SIT primùm A, integrum 1. reducendum ad minutiam, cuius denominator C. Sumatur numerator B, denominatori C, æqualis. Dico minutiam B C, vnitati A, æqualem esse.* [i] *Quia enim est, vt B, ad C, ita minutia B C, ad integrum A: Est autem B, ipsi C, æqualis. Igitur & minutia B C, integro A, id est, vnitati, erit æqualis. quod est propositum.*

i 2. huius.

*DEINDE sit integer numerus A, reuocandus ad minutiam, cuius denominator C. Ex A, in C, fiat B, numerator. Dico minutiam B C, integro A, æqualem esse. Supponatur enim integro A, vnitas D, vt fiat minutia A D, tot vnitatibus æqualis, quoties vnitas est in A. Quia igitur ex A, in C, fit B; erit ex defin. multiplicationis, ita B, ad C, vt A, ad D, vnitatem. Cùm ergo minutiarum A D, B C, numeratores A, B, ad denominatores D, C, eandem proportionem habeant,* [k] *ipsæ inter se æquales erunt. Quare cùm minutia A D, sit integro A, æqualis, ob denominatorem, qui est vnitas; erit quoq; minutia B C, eidem integro A, æqualis. quod est propositum.*

A, 7. B, 42. D, 1. C, 6.

k 8. huius.

## XII.

DATAM minutiam duplare, ac dimidiare.

*SIT primùm minutia A B, duplanda. Dupletur numerator A, vt fiat numerator C, manente eadem denominatore B: vel denominator B, quando par est, dimidietur, vt fiat denominator D, manente eodem numeratore A. Dico vtramq; minutiam C B, A D, duplum esse minutiæ A B. Cùm enim minutiæ A B, C B, eundem habeant denominatorem;* [l] *erit vt C, ad A, numerator ad numeratorem, ita C B, ad A B, minutia ad minutiam. Est autem C, ipsius A, duplus ex constructione. Igitur & minutia C B, minutiæ A B, dupla erit. quod est propositum.*

A, 3. C, 6. B, 8. B, 8. A, 3. D, 4.

l 4. huius.

*RVRSVS quia minutiæ A B, A D, eundem habent numeratorem;* [m] *erit vt B, ad D, denominator ad denominatorem, ita A D, ad A B, minutia ad minutiam. Est autem B, ipsius D, duplus, per constructionem. Igitur & minutia A D, minutiæ A B, dupla erit. quod est propositum.*

m 7. huius.

*DEINDE dimidianda sit minutia A B. Dupletur denominator B, vt fiat denominator C, manente eodem numeratore A: Vel numerator A, quando par est, dimidietur, vt fiat numerator D, manente eodem denominatore B. Dico vtramq; minutiam A B, D B, dimidium esse minutiæ A B. Cùm enim minutiæ A B, A C, eundem habeant numeratorem;*

A, 6. A, 6. D, 3. B, 11. C, 22. B, 11.

*meratorem*; [a] *erit vt B, ad C, denominator ad denominatorem, ita A C, ad A B, minutia ad minutiam. Cùm ergo B, ſit per conſtructionem ipſius C, dimidium; erit & minutia A C, minutiæ A B, dimidium. quod eſt propoſitum.* a 7. huius.

*Rvrsvs cùm minutia A B, D B, habeant eundem denominatorem;* [b] *erit vt D, ad A, numerator ad numeratorem, ita D B, ad A B, minutia ad minutiam. Cùm ergo D, ſit ipſius A, dimidium, ex conſtructione; erit & minutia D B, minutiæ A B, dimidium. quod eſt propoſitum.* b 4. huius.

*Eodem modo minutia data triplicabitur, quadruplicabitur, &c. ſi vel numerator triplicetur, quadruplicetur, &c. eodem manente denominatore; vel (quando fieri poteſt) ſi denominatoris accipiatur pars tertia, quarta, &c. manente eodem numeratore.*

*Sic etiam datæ minutiæ ſumetur pars tertia, quarta, &c. ſi denominator triplicetur, quadruplicetur, &c. manente eodem numeratore; vel (quando fieri poteſt) ſi numeratoris tertia pars, quarta, &c. ſumatur. Quod eodem modo demonſtrabitur.*

## XIII.

Minvtia minutiæ æqualis eſt minutiæ ſimplici, cuius numerator ex multiplicatione mutua numeratorum, denominator verò ex mutua denominatorum multiplicatione procreatur.

*Sit enim A B, minutia minutiæ C D, reſpectu integri numeri E, ſiue vnitatis E, & valorem huius minutiæ minutiæ exprimat ſimplex minutia K. Fiat F, ex A, in C; & G, ex B, in D. Dico datam minutiam minutiæ æqualem eſſe ſimplici minutiæ F G, reſpectu integri E, cuius videlicet numerator F, & denominator G.*

F, 6. H, 9.
A, 2. C, 3. E, 1.
B, 3. D, 4. E, 24.
G, 12. K, $\frac{1}{2}$.

*Fiat enim rurſus H, ex C, in B.* [c] *Et quoniam eſt, vt A, ad B, ita minutia A B, ad ſuum integrum, nimirũ ad minutiam C D, cuius integrum eſt E:* [d] *Item vt A, ad B, ita eſt F, ad H; quòd A, B, ipſum C, multiplicantes faciant F, H: Erit quoque, vt minutia A B, ad minutiam C D, ita F, ad H. Rurſus* [e] *quia eſt, vt C, ad D, ita minutia C D, ad ſuum integrum E:* [f] *Item vt C, ad D, ita eſt H, ad G; quòd B, ipſos C, D, multiplicans fecerit H, G; Erit quoq; vt C D, minutia ad ſuum integrum E, ita H, ad G. Quoniam igitur eſt, vt minutia A B, ad minutiã C D, ita F, ad H: Et vt minutia C D, ad E, integrum, ita H, ad G; erit ex æquo, vt A B, minutia minutiæ C D, ad integrum E, ita F, ad G. Vt autem A B, minutia minutiæ C D, ad integrum E, ita eſt ſimplex minutia K, ad idem integrum E; quòd ſimplex minutia K, æqualis poſita ſit datæ minutiæ A B, minutiæ C D; cùm eius valorem reſpectu integri E, exprimat. Igitur erit quoque, vt F, ad G, ita minutia ſimplex K, ad integrum E.* [g] *Cùm ergo quoque ſit, vt F, ad G, ita minutia F G, ad idem ſuum integrum E; æquales erunt minutiæ ſimplices K, & F G: ac proinde cùm minutia K, æqualis ſit datæ minutiæ minutiæ, erit quoque ſimplex minutia F G, æqualis datæ minutiæ A B, reſpectu minutiæ C D, cuius integrum E. quod eſt propoſitum.*

A B. F.
C D. H.
E. G.

c 2. huius. d 18. ſept. e 2. huius. f 17. ſept. g 2. huius.

*Sit $\frac{2}{3}$. minutia minutiæ $\frac{3}{4}$. reſpectu integri 24. Huius numeri $\frac{3}{4}$. ſunt 18. & huius numeri $\frac{2}{3}$. ſunt 12. qui numerus eſt $\frac{1}{2}$. dati integri numeri 24. Manifeſtum autem eſt, ſi tam numeratores 2. 3. inter ſe multiplicentur, quàm denominatores 3. 4. procreari minutiam $\frac{6}{12}$. quæ huic $\frac{1}{2}$. æquiualet, qualis nimirum erat numerus 12. reſpectu numeri integri 24.*

## XIIII.

Minvtiam minutiæ, aut minutiam minutiarum ad ſimplicem minutiam reducere.

E, 6.
A, 2. C, 3.
B, 3. D, 4.
F, 12.

*Sit primùm A B, minutia minutiæ C D. Ex A, in C, fiat E; & ex B, in D, fiat F.* [h] *Et quoniam minutia E F, exprimit valorem minutiæ A B, reſpectu minutiæ C D; reducta erit data minutia minutiæ ad ſimplicem minutiam E F. quod eſt propoſitum.* h 13. huius.

G, 6. I, 6.
A, 2. C, 3. E, 1.
B, 3. D, 4. F, 2.
H, 12. K, 24.

*Deinde ſit A B, minutia minutiarum C D, E F, ita vt C D, ſit minutia minutiæ E F; & A B, minutia minutiæ C D. Fiat G, ex A, in C; & H ex B, in D. Item I, ex G, in E; & K, ex H, in F; atq; ita deinceps, ſi plures ſint minutiæ, numeri vltimo loco producti I, K, in numeros ſequentis minutiæ ducantur. Dico minutiam I K, cuius numerator I, & denominator K, datæ minutiæ minutiarum æqualem eſſe.* [i] *Nam minutia G H, æqualis eſt minutiæ A B, minutiæ C D, reſpectu minutiæ E F, tanquam integri cuiuſdam.* [k] *Item minutia I K, æqualis eſt minutiæ G H, (hoc eſt, minutiæ A B, minutiæ C D.) minutiæ E F, reſpectu integri, cuius E F, eſt minutia; & ſic deinceps, ſi plures ſint minutiæ. Quare minutia I K, ex numeris vltimo loco productis conſtituta, æqualis eſt datæ minutiæ minutiarum. quod eſt propoſitum.*

i 13. huius. k 13. huius.

*Sit $\frac{2}{3}$. minutia minutiarum $\frac{3}{4}$. $\frac{4}{2}$. reſpectu integri 24. Huius numeri $\frac{1}{2}$. eſt numerus 12. & huius numeri $\frac{3}{4}$. ſunt 9. Huius denique $\frac{2}{3}$. ſunt 6. qui numerus eſt $\frac{1}{4}$. totius integri 24. Liquidò autem conſtat, ſi tam numeratores 2. 3. 1. inter ſe multiplicentur, quàm denominatores 3. 4. 2. gigni minutiam $\frac{6}{24}$. quæ æqualis eſt minutiæ $\frac{1}{4}$. qualis nimirum pars erat numerus 6. reſpectu integri 24.*

## XV.

DATIS duabus minutiis, alterutram earum ad aliam æqualem reducere, ita vt alterius numeri numeros huius inuentæ numerent per numeros ex numeratore datæ minutiæ reductæ in denominatorem alterius minutiæ datæ, & ex numeratore alterius huius minutiæ datæ in denominatorem illius reductæ, productos.

*SINT duæ minutiæ A B, C D, quarum A B, ad aliam æqualem reducenda sit, cuius numeratorem numerator C, metiatur per numerum ex A, in D, productum; denominatorem verò denominator D, metiatur per numerum ex C, in B, productum. Fiat F, ex C, in D; & ex F, in A, B, fiant G, H. Item ex A, in D, fiat K; & L, ex C, in B. Dico minutiam G H, minutiæ A B, æqualem esse; & C, metiri G, per K, ex A, in D, productum; & D, metiri H, per L, ex C, in B, productum. Quoniam enim F, multiplicans A B, facit G, H;* [a] *erit vt A, ad B, ita G, ad H,* [b] *ac proinde minutia A B, G H, æquales erunt. Deinde quia C, multiplicans D, facit F,* [c] *metietur C, ipsum F, per D:* [d] *Metitur autem & vnitas ipsum D, per D. Eadem igitur pars est C, ipsius F, quæ vnitas ipsius D. Cùm ergo vnitas sit ipsius D, pars à D, denominata, erit quoq; C, ipsius F, pars à D, denominata. Eadem ratione erit F, ipsius G, pars ab A, denominata; propterea, quòd G, fit ex F, in A. Quia igitur C, minutia est minutiæ F, respectu integri G, sunt q; numeratores, vnitates; & denominatores, numeri D, A, à quibus partes C, F, denominantur;* [e] *constituet C, minutia minutiæ F, respectu integri G, minutiam simplicem M, (quas minutias C, F, M, seorsum scripsimus) respectu eiusdem integri G; cuius nimirum numerator ex numeratoribus minutiarum C, F, & denominator ex earundem denominatoribus producitur. Quare cùm numeratores gignant vnitatem, & denominatores numerum K; (quòd numeratores sint vnitates, denominatores autem numeri D, A, à quibus partes C, F, denominantur, & ex quorum multiplicatione factus est numerus K,) constituet minutia C, minutiæ F, respectu integri G, minutiam simplicem eiusdem integri G, cuius numerator est vnitas, & denominator numerus K, qualis est minutia M: ac proinde C, numerator minutiæ datæ C D, qui constituit C, minutiam minutiæ F, respectu integri G, pars erit ipsius integri G, à numero K, denominata. Quocirca numerus C, ipsum G, metietur per K; toties nimirum sumptus, quoties vnitas est in K, numero. Eadem prorsus ratione demonstrabimus, D, metiri ipsum H, per L, numerum. Quod est propositum.*

G, 24. K, 8.
A, 2. / B, 3. F, 12. C, 3. / D, 4.
H, 36. L, 9.
C. 1/4. F, 1/2. M, 1/8.

## XVI.

DVAE minutiæ, quarum numeratores in denominatores vicissim ducti gignũt numeros æquales, æquales sunt: Et minutiarum æqualium numeratores in denominatores vicissim ducti gignunt æquales numeros. Cuius verò numerator in denominatorem alterius ductus maiorem numerum gignit, illa maior est: Et maioris minutiæ numerator in denominatorem alterius ductus maiorem numerum producit.

E, 24. F, 24.
A, 2. / B, 3. × C, 8. / D, 12.

*SINT duæ minutiæ A B, C D: & ex A, in D, fiat E; atque ex C, in B, fiat F: sint q; primùm numeri E, F, æquales. Dico minutias A B, C D, æquales esse. Quoniam enim numerus E, factus ex A, primo in D, quartum æqualis est numero F, facto ex C, secundo in B, tertium;* [f] *erit vt A, primus ad C, secundum, numerator ad numeratorem, ita B, tertius ad D, quartum, denominator ad denominatorem* [g] *Quare minutiæ A B, C D, æquales sunt. VEL sic.* [h] *Quoniam est, vt E, ad F, ita minutia A B, ad minutiam C D; Est autem E, ipsi F, æqualis; erit quoque minutia A B, minutiæ C D, æqualis. quod est propositum.*

*SED sint iam æquales minutiæ A B, C D. Dico numerum E, æqualem quoque esse numero F. Nam ob æqualitatem minutiarum* [i] *erit, vt A, ad C, numerator ad numeratorem, ita B, ad D, denominator ad denominatorem.* [k] *Quapropter idem numerus fiet ex A, primo in D, quartum, qui ex C, secundo in B, tertium; ac proinde æquales erunt E, & F, numeri. VEL sic.* [l] *Quoniam est, vt minutia A B, ad minutiam C D, ita E, ad F; ponuntur autem minutiæ æquales; erunt quoque numeri E, F, æquales. quod est propositum.*

*DEINDE sit E, numerus maior numero F. Dico minutiam quoq; A B, maiorem esse minutia C D. Cùm enim ex A, in D, fiat numerus E, maior quàm F; gignetur F, ex minore numero quàm A, in D, nimirum ex G, in D. Quia igitur idem numerus F, fit ex G, primo in D, quartum, & ex C, secundo in B, tertium,* [m] *erit vt G, primus ad C, secundum, ita B, tertius ad D, quartum: Est autem maior proportio A, ad C, quàm G, ad C; quòd A, maior sit quàm G. Igitur maior quoque erit proportio A, ad C, quàm B, ad D;* [n] *ac proinde minutia A B, maior erit, quàm minutia C D. VEL sic.* [o] *Quoniam est, vt E, ad F, ita minutia A B, ad minutiam C D; Est autem E, maior quàm F; erit quoque minutia A B, maior quàm minutia C D. quod est propositum.*

E, 24. F, 21.
G, 1 3/4 A, 2. / B, 3. × C, 7. / D, 12.

*VERVM sit iam minutia A B, maior quàm minutia C D. Dico & numerum E, numero F, esse maiorem. Cùm enim maior sit minutia A B, quàm minutia C D,* [p] *erit maior proportio A, ad C, quàm B, ad D. Minor ergo numerus, quam A, habebit ad C, eandem proportionem, quam B, ad D, qui sit G.* [q] *Idem ergo numerus fiet ex G, primo in D, quartum, qui ex C, secundo in B, tertium. Cùm ergo ex A, in D, maior fiat, q; ex G, in D propterea*

a 17. sept. b 8. huius. c 7. pron. d 5. pron. e 13. huius. f 19. sept. g 9 huius. h 5. huius. i 9. huius. k 19. sept. l 5. huius. m 19. sept. n 9. huius. o 5. huius. p 9. huius. q 19. sept.

*propterea quòd A, maior est quàm G; erit quoq; E, factus ex A, in D, maior, quàm F, ex C, in B, genitus.*

*VEL sic.* [a] *Quoniam est, vt minutia A B, ad minutiam C D, ita E, ad F: Est autem A B, minutia maior quàm minutia C D; erit quoq; E, maior quàm F. Quod est propositum.* a 25. huius.

*AT QVE hac est quoq; demõstratio eius regulæ, quam in Arithmetica præscripsimus ad dignoscendum, vtra duarum minutiarum propositarum maior sit. Id quod etiam ad 5. propositionem monuimus.*

## XVII.

DATAM minutiam ad minimos terminos reducere.

*SIT minutia A B, ad minimos reuocanda terminos. Si igitur A, & B, sint inter se primi, non poterit minutia A B, ad minores terminos reuocari, sed ipsa iam in minimis exist terminis constituta. Reducatur enim, si fieri potest, ad minores terminos C, D, ita vt minutia C D, minutia A B, sit æqualis.* [b] *Quoniam igitur est, vt A, ad B, ita C, ad D; sunt q; C, D, numeri minores numeris A B; non erunt A, B, minimi termini in sua proportione:* [c] *sunt autem & minimi, cùm primi inter se sint. quod est absurdum.* b 8. huius. c 23. sept.

A, 36. B, 48. C, 12. D, 3. E, 4.

*SI verò A, B, non sint inter se primi;* [d] *sit eorum maxima mensura C, quæ metiatur A, per D; & B, per E. Dico minutiam D E, cuius numerator D, & denominator E, æqualem esse datæ minutiæ A B, & in minimis terminis constitutam. Quoniam enim C, metitur A, B, per D, E;* [e] *producentur A, B, ex C, in D, E.* [f] *Quare erit vt A, ad B, ita D, ad E, & ac propterea minutia A B, D E, æquales erunt. Deinde quia C, maxima mensura numerorum A, B, metitur ipsos per D, E; erunt ex coroll. propos. 35. lib. 7. D, E, minimi in proportione A, ad B. Quod est propositum.* d 2. sept. e 9. pron. f 17. sept. g 8. huius.

## XVIII.

DATAM minutiam ad aliam æqualem datæ denominationis, quando id fieri potest, reuocare.

A, 3. B, 4. C, 12. D, 36. E, 9.

*SIT data minutia A B, reuocanda ad æqualẽ aliam, cuius denominator datus sit C. Ex A, numeratore in denominatorem datum C, fiat D, quem metiatur B, denominator datæ minutiæ per E. Dico minutiam E C, cuius numerator E, & denominator C, datus, æqualem esse minutiæ A B, datæ. Quia enim B, metitur D, per E,* [h] *fiet D, ex B, in E: Factus est autem idem D, ex A, in C.* [i] *Igitur erit, vt A, primus ad B, secundum, ita E, tertius ad C, quartum;* [k] *ideoq; minutia A B, E C, æquales erunt. quod est propositum.* h 9. pron. i 19. sept. k 8. huius.

A, 3. B, 4. C, 10. D, 30. E, ~

*QVOD si B, non metiatur D, ex A, in C, procreatũ, non poterit data minutia A B, reduci ad denominationem datam C. Reducatur enim, si fieri potest, ad minutiam E C. Quia ergo minutia A B, E C, æquales sunt;* [l] *erit vt A, ad B, ita E, ad C.* [m] *Idem igitur numerus fiet ex A, primo in C, quartum, qui ex B, secundo in E, tertium; videlicet numerus D, factus ex A, in C.* [n] *Igitur B, metietur D, per E. quod est absurdum. Ponitur enim B, ipsum D, non metiri.* l 8. huius. m 19. sept. n 7. pron.

## XIX.

QVANDO minor numerus per maiorem diuiditur, numerus Quotiens est minutia, cuius numerator est numerus minor diuisus; denominator verò maior numerus diuidens.

A, 6. B, 11. A, 6. B, 11.

*SIT minor numerus A, diuidendus per maiorem B. Dico Quotientem esse minutiam A B, cuius numerator A, & denominator B.* [o] *Quoniam enim est, vt A, ad B, numerus diuisus ad diuidentem: hoc est, vt numerator ad denominatorem, ita minutia A B, ad integrum: hoc est, ad vnitatem; erit ex defin. Diuisionis minutia A B, Quotiẽs diuisionis numeri A, per numerum B. quod est propositum.* o 2. huius.

*HINC fit, si diuiso numero integro maiore per integrum numerum minorem, aliquid superfit; Quotienti integro inuento addendam adhuc esse minutiam, cuius numerator sit numerus ex diuisione reliquus; denominator verò, numerus diuidens. Nam reliquus ille numerus, qui necessariò minor est numero diuidente, diuidendus adhuc est per eundem numerum diuidentem, qui maior est. Verbigratiâ. Diuiso numero 23. per 4. Quotiens integer est 5. & supersunt 3. adhuc diuidenda per 4.* [p] *Fit ergo minutia $\frac{3}{4}$. ita vt totus Quotiens sit $5\frac{3}{4}$.* p 19. huius.

## XX.

MINVTIAS plures in vnam summam colligere.

A, 3. B, 10. C, 4. B, 10. D, 7. B, 10.

*SINT primùm addenda duæ minutiæ A B, C B, eiusdem denominationis. Ex A, & C, numeratoribus fiat summa D, cui idem denominator B, supponatur. Dico minutiam D B, esse summam ex additione minutiarum A B, C B, collectam. Quoniam enim minutiæ eundem habẽt denominatorẽ;* [q] *erit vt A, ad C, ita minutia A B, ad minutiam C B:* q 4. huius.

a 4. huius. *Et componendo, vt A, C, simul ad C, ita minutiæ A B, C B, simul ad minutiam C B.* [a] *Vt autem C, ad D, ita quoq; est minutia C B, ad minutiam D B. Igitur ex æquo erit, vt A, C, simul ad D, ita minutiæ A B, C B, simul ad minutiam D B. Cùm ergo A, & C, simul æquales sint ipsi D, ex constructione; erunt quoq; minutiæ A B, C B, simul æquales minutiæ D B. Quod est propositum.*

*DEINDE sint addendæ duæ minutiæ A B, C D, diuersarum denominationum. Ducatur A, numerator prioris in D, denominatorem posterioris; & C, numerator posterioris in B, denominatorem prioris, collectaq; sit summa E, ex duobus illis productis, cui supponatur denominator F, ex multiplicatione mutua denominatorum B, D, procreatus. Dico minutiam E F, esse summam ex datis duabus minutijs A B, C D, collectam.* [b] *Quoniam enim est, vt integrum ad summam duarum minutiarum A B, C D, ita F, ex denominatoribus productus ad E, summam productorum ex numeratoribus in denominatores vicissim ductis; erit conuertendo, vt summa minutiarum A B, C D, ad integrum, ita E, ad F:* [c] *Vt autem E, ad F, ita quoq; est minutia E F, ad idem integrum. Igitur erit, vt summa minutiarum A B, C D, ad integrum, ita minutia E F, ad idem integrum. Quapropter summa minutiarum A B, C D, æqualis erit minutiæ E F: ac proinde minutia E F, summa erit ex minutijs A B, C D, collecta. quod est propositum.*

b 6. huius. A, 2. C, 3. E, 17. B, 3. D, 4. F, 12.

c 2. huius.

*VEL sic. Quoniam ex multiplicatione numeratorum in denominatores vicissim, & ex multiplicatione denominatorum inter se, fiunt duæ minutiæ eiusdem denominationis, minutijs A B, C D, æquales, vt ex demonstratione propositionis 10. constat: si summæ E, productorum ex numeratoribus in denominatores supponatur F, communis denominator ex denominatoribus procreatus, facta erit minutia E F, summa minutiarum A B, C D; hoc est, duarum illarũ eiusdem denominationis, ad quas A B, C D, reductæ sunt, vt initio huius propositionis est demonstratum.*

*IAM verò datis pluribus minutijs, addendæ primùm erunt duæ primæ: deinde hæc summa cũ tertia coniungenda, atq; hæc summa cum quarta, & sic deinceps, donec omnes absoluantur.*

*QVOD si dentur integra cum minutijs, addenda erunt integra seorsum, & minutiæ seorsum.*

*SINT verbi gratiâ, $\frac{2}{3}$. & $\frac{3}{4}$. minutiæ huius integri 60. cuius $\frac{2}{3}$. sunt 40. & $\frac{3}{4}$. sunt 45. Ex 40. & 45. fit summa 85. hoc est, totus numerus integer 60. & insuper 25. vnitates, quæ faciunt $\frac{5}{12}$. integri 60. quemadmodum ex $\frac{2}{3}$. & $\frac{3}{4}$. collecta est summa $\frac{17}{12}$. id est, semel 1. & insuper $\frac{5}{12}$.*

*ITA etiã summa minutiarũ $\frac{1}{3}$. $\frac{4}{9}$. est $\frac{21}{27}$. hoc est, in minimis terminis $\frac{7}{9}$. Si igitur illarũ minutiarum integrũ sit 36. erit $\frac{1}{3}$. ipsius 12. at $\frac{4}{9}$. eiusdem, 16. Vbi vides ex 12. & 16. confici 28. hoc est, $\frac{7}{9}$. ipsius integri 36.*

## XXI.

MINVTIAM minorem ex maiore detrahere.

*EX maiore minutia A B, detrahenda sit minor C B, sintq; primũ hæ minutiæ eiusdem denominationis. Detracto numeratore C, minoris minutiæ ex A, numeratore maioris, reliquus sit numerus D, cui idem denominator B, supponatur. Dico minutiã D B, reliquam esse post detractionem minutiæ C B, ex minutia A B. Quia enim C, ex A, subtractus relinquit D; componetur A, ex C, & D. Minutia ergo A B, cuius numerator A, ex numeratoribus C, D, collectus est, summa est duarum minutiarum C B, D B, vt in prima parte antecedentis propositionis ostensum est. Quare detracta minutia C B, ex minutia A B; reliqua fiet minutia D B. Quod est propositum.*

A, 7. C, 3. D, 4. B, 10. B, 10. B, 10.

*DEINDE minutiæ A B, C D, habeant diuersos denominatores, detrahendaq; sit minor C D, ex maiore A B. Ex C, numeratore minoris in B, denominatorẽ maioris fiat E; & ex A, numeratore maioris in D, denominatorem minoris fiat F: atq; E, ablatus ex F, relinquat G, cui supponatur denominator H, ex mutua multiplicatione denominatorum procreatus. Dico minutiam G H, esse reliquã post detractionem minutiæ C D, ex minutia A B. Quoniam enim D, multiplicans A, B, facit F, H:* [d] *erit vt A, ad B, ita F, ad H:* [e] *vt autẽ A, ad B, ita est minutia A B, ad integrum. Igitur erit quoq; vt F, ad H, ita minutia A B, ad integrum. Rursus quia B, multiplicãs C, D, facit E, H;* [f] *erit vt C, ad D, ita E, ad H,* [g] *Vt autem C, ad D, ita est minutia C D, ad integrum. Igitur erit quoq; vt E, ad H, ita minutia C D, ad integrum. Quia igitur est, vt E, primus ad H, secundum, ita minutia C D; tertius numerus ad integrũ, quartum numerũ;* [h] *Et vt G, quintus ad eundem secundum H, ita minutia G H, sextus numerus ad idem integrum, quartũ numerum; erit ex 5. theor. scholij propos. 22. lib. 7. vt E, G, primus & quintus simul, ad H, secundum, ita minutia C D, G H, tertius & sextus numerus simul, ad integrũ. Vt autem E, G, simul ad H, ita est F, ipsis E, G, æqualis, (Nam E, ex F, detractus reliquit G.) ad eundem H. Igitur erit quoq; vt F, ad H, ita minutia C D, G H, simul ad integrũ. Cũ ergo ostensum sit, vt est F, ad H, ita esse minutiam A B, ad integrũ; erit quoq; vt minutia A B, ad integrũ, ita minutia C D, G H, simul ad idem integrũ: ac propterea æquales erũt minutia A B, & minutiæ C D, G H, simul. Detracta igitur minutia C D, ex minutia A B, reliqua erit minutia G H. qd est propositũ. VEL sic. Quoniã ex multiplicatione numeratorũ in denominatores vicissim, & ex ductu denominatorũ inter se, gignũtur duæ minutiæ eiusdẽ denominatiõis minutijs datis æquales, vt ex demõstratione propos. 10. cõstat: si E, factus ex C, in B, detrahatur ex F, facto ex A, in D; et reliquo*

d 17. sept. e 2. huius. F, 15. E, 8.

f 17. sept. g 2. huius. A, 3. C, 2. G, 7. B, 4. D, 5. H, 20.

h 2. huius.

numero

numero G, supponatur communis denominator H, ex denominatoribus productus, fiet minutia G H, reliqua post detractionem minutiæ C D, ex minutia A B, veluti initio huius propositionis ostensum est.

IAM verò si dentur integra vnà cum minutijs, subtrahenda erunt integra seorsum ab integris, & minutia à minutia. Quòd si minutia detrahenda, maior sit, quàm ea, à qua fieri debet subtractio, [a] reducenda prius erit vnitas vnà numeri integri, à quo fit subtractio, ad minutiam denominatoris minutiæ adhærentis. Vt si subtrahenda sint $6\frac{2}{5}$. ex $10\frac{3}{4}$. subtractis 6. ex 10. supersunt 4. & subductis $\frac{2}{5}$. ex $\frac{3}{4}$. superest minutia $\frac{7}{20}$. Totus ergo numerus reliquus erit $4\frac{7}{20}$. At si subtrahenda sint $4\frac{6}{7}$. ex $20\frac{3}{4}$; faciemus ex vna vnitate numeri 20. minutiam $\frac{4}{4}$. quæ cum $\frac{3}{4}$. facit $\frac{7}{4}$. remanebunt q3 19. integra. Subtracto ergo integro numero 4. ex 19. supersunt 15. & subducta minutia $\frac{6}{7}$. ex minutia $\frac{7}{4}$. reliqua est minutia $\frac{2}{28}$. Totus ergo reliquus numerus erit $15\frac{2}{28}$. a 11. huius.

SINT verbi gratiâ $\frac{3}{4}$. & $\frac{2}{5}$. minutiæ huius numeri integri 40. Igitur si $\frac{2}{5}$. id est, 16. detrahantur ex $\frac{3}{4}$. hoc est, ex 30. supersunt 14. nimirum $\frac{7}{20}$. integri numeri 40. vt superior calculus docuit.

## XXII.

### MINVTIAM per minutiam multiplicare.

SIT minutia A B, per minutiam C D, multiplicanda. Ex multiplicatione numeratorum A, C, inter se fiat E, cui supponatur F, ex denominatoribus B, D, procreatus. Dico minutiam E F, gigni ex multiplicatione minutiarum A B, C D, inter se. Fiat enim G, ex E, in D; & H, ex C, in F: [b] Erit q3 vt minutia E F, ad minutiam C D, ita G, ad H. Quia verò C, multiplicans A, F, facit E, H; [c] erit vt A, ad F, ita E, ad H: Et permutando, vt A, ad E, ita F, ad H. Rursus quia D, multiplicans E, & B, facit G, & F; [d] erit vt E, ad B, ita G, ad F. Ex æqualitate igitur perturbata, vt hic apparet, erit vt A, ad B, ita G, ad H. Vt autem G, ad H, ita ostendimus esse minutiam E F, ad minutiam C D: [e] Et vt A, ad B, ita est minutia A B, ad integrum; hoc est, ad 1. Igitur erit quoque vt minutia E F, ad minutiam C D, ita minutia A B, ad 1. Quapropter ex definitione Multiplicationis, minutia E F, producitur ex multiplicatione minutiæ A B, in minutiam C D. Quod est propositum.

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| H, 60. | G, 40. | | | |
| A, 2. | C, 4. | ⋈ | E, 8. | |
| B, 3. | D, 5. | | F, 15. | |
| A. | G. | | | |
| E. | F. | | | |
| B. | H. | | | |

b 5. huius. c 17. sept. d 17. sept. e 2. huius.

QVOD si minutia per numerum integrum sit multiplicanda, supponenda erit integro numero vnitas, vt fiat quasi minutia, cuius numerator est numerus integer datus, denominator autem vnitas. Ex quo fit, satis esse, si tunc numerator propositæ minutiæ per datum numerum integrum multiplicetur, & producto numero supponatur eiusdem minutiæ propositæ denominator; propterea quòd vnitas integro numero suppositæ in denominatorem datæ minutiæ ducta eundem denominatorem datæ minutiæ nō auget. Vt si multiplicari debeat minutia $\frac{3}{4}$. per 5. fient $\frac{15}{4}$. vt hic apparet, $\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{1}$. Gignetur enim minutia $\frac{15}{4}$.

SI verò integris minutiæ adhæreant, [f] reuocanda erunt integra ad minutiam eiusdem denominationis cum minutia adhærente, atq3 ex numeratore huius minutiæ, & numeratore minutiæ adhærentis vnus numerator constitui. Vt si multiplicanda sint $7\frac{2}{3}$. per $4\frac{1}{2}$. fient hæ duæ minutiæ multiplicandæ $\frac{23}{3}\cdot\frac{9}{2}$. f 11. huius.

IAM vt multiplicationem minutiarum integris numeris accommodemus, non erit minutia producta cum integro numero assumpto conferenda, vt in additione, ac subtractione factum est, sed cum quadrato numeri integri assumpti: quia cùm comparatio inter similia fieri debeat, ex multiplicatione autem duorum numerorum inter se gignatur numerus planus, conferendus erit numerus productus cum plano totius numeri integri; hoc est, cum eius quadrato. Itaque sint $\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{5}$. minutiæ huius numeri integri 60. ex quarum multiplicatione gignitur minutia $\frac{8}{15}$. Necesse est ergo, vt $\frac{2}{3}$. numeri 60. in $\frac{4}{5}$. eiusdem faciant numerum, qui constituat $\frac{8}{15}$. quadrati, qui ex 60. in se producitur. Id quod liquidò constat. Nam $\frac{2}{3}$. numeri 60. sunt 40. & $\frac{4}{5}$. eiusdem sunt 48. At ex 40. in 48. fit numerus 1920. qui efficit $\frac{8}{15}$. numeri 3600, hoc est, quadrati ipsius 60.

## XXIII.

### MINVTIAM per minutiam diuidere.

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| A, 12. | C, 3. | E, 4. | | |
| B, 16. | D, 8. | F, 2. | | |
| A, 6. | C, 3. | E, 2. | | |
| B, 8. | D, 8. | F, 1. | | |
| A, 3. | C, 3. | E, 1. | | |
| B, 8. | D, 4. | F, 2. | | |

SIT diuidenda minutia A B, per minutiam C D, & primùm huius numeri C, D, metiantur illius numeros A, B, per E, F; ita vt diuiso A, per C, Quotiens sit E, & diuiso B, per D, Quotiens sit F. Dico minutiam E F, esse Quotientem diuisionis minutiæ A B, per minutiam C D. Quoniam enim C, metitur A, per E; & D, metitur B, per F; [g] gignetur A, ex C, in E; & B, ex D, in F. [h] Igitur minutia A B, producta est ex multiplicatione minutiæ E F, per minutiam C D: ac proinde ex definitione multiplicationis erit, vt minutia A B, ad minutiam C D, ita minutia E F, ad 1. Quocirca cùm sit, vt A B, minutia diuisa ad C D, minutiam diuidentem, ita minutia E F, ad 1. erit ex defin. Diuisionis minutia E F, Quotiens diuisionis minutiæ A B, per minutiam C D. Quod est propositum. g 9. pron. h 12. huius.

DEINDE numeri C, D, minutiæ C D, non metiantur numeros A, B, minutiæ A B. [i] Reducatur minutia i 15. huius.

E, 24. A, 2. K, 12. C, 3. G, 8.
F, 36. B, 3. D, 4. H, 9.

E, 90. A, 6. K, 15. C, 3. G, 30.
F. 135. B, 9. D, 5. H, 27.

*AB, ad aliam æqualem EF, cuius numeros E, F, numeri C, D, minutiæ CD, metiantur per numeros G, H, ex A, in D, & ex C, in B, productos: quod quidem fiet, si K, ex C, in D, procreatus ducatur in A, B, vt gignantur E, F, veluti propoſ. 15. oſtenſum eſt. Quoniam igitur C, D, metiuntur E, F, per G, H; erit minutia GH, Quotiens diuiſionis minutiæ EF, vel AB, illi æqualis, per minutiam CD, vt initio huius propoſitionis demonſtratum eſt. Quod eſt propoſitum.*

*QVIA verò G, H, numeri minutiæ Quotientis GH, gignuntur ex A, in D, & ex C, in B, vt dictum eſt, ſatis eſt ad diuiſionem cuiuſuis minutiæ per quamlibet minutiam, ſi numerator A, minutiæ diuidendæ in D, denominatorem minutiæ diuidentis; & C, numerator minutiæ diuidentis in B, denominatorem minutiæ diuidendæ ducatur. Prior enim numerus procreatus G, dabit numeratorem, & poſterior H, denominatorē Quotientis minutiæ GH. Atque hoc verum eſt in omnibus minutijs, ſiue numeri minutiæ diuidentis numeros minutiæ diuidendæ metiantur, ſiue non. Nam ſemper ex numeratore minutiæ diuidendæ in denominatorem minutiæ diuidentis, & ex numeratore minutiæ diuidentis in denominatorem minutiæ diuidendæ, procreantur duo numeri, per quos numeri minutiæ diuidentis metiuntur numeros minutiæ, ad quam minutia diuidenda ſecundùm doctrinam propoſ. 15. reuocatur, vt ex eius propoſ. demonſtratione liquet, atq; in hoc appoſito exemplo apparet, vbi numeri C, D, numeros A, B, metiuntur per G, H; & numeros E, F, procreatos ex AB, in K, productum ex C, in D, ijdem numeri C, D, metiuntur per L, M: atq; adeò tam minutia GH, q̄ LM, Quotiens eſt minutiæ AB, per minutiam CD, diuiſæ.*

E, 48. A, 8. K, 6. C, 2. G, 4. L, 24.
F, 54. B, 9. D, 3. H, 3. M, 18.

*IAM verò ſi numerus integer diuidendus ſit per minutiam, vel per numerum integrum minutia diuidenda, ſupponenda eſt ei vnitas, vt fiat quaſi minutia, cuius numerator eſt datus numerus integer, & denominator 1. Vt ſi numerus 8. diuidendus proponatur per $\frac{1}{2}$. fiet Quotiens $\frac{16}{1}$. vt in appoſito priori exemplo perſpicuum eſt. Si autem minutia $\frac{1}{2}$. diuidenda ſit per integrum numerum 8. fiet Quotiens $\frac{1}{16}$. vt in poſteriori exemplo apparet.*

$\frac{8}{1}$ $\frac{1}{2}$ $\frac{16}{1}$.

$\frac{1}{2}$ $\frac{8}{1}$ $\frac{1}{16}$.

*QVOD ſi minutiæ adhæreant integris, reducenda erunt integra ad minutiam eiuſdem denominationis cum minutia adhærente, veluti ad finem antecedentis propoſitionis diximus.*

*VERVM quia non facilè eſt memoriter tenere, ex numeratore minutiæ diuidendæ in denominatorem minutiæ diuidentis gigni numeratorem Quotientis minutiæ, denominatorē autem ex numeratore minutiæ diuidentis in denominatorem minutiæ diuidendæ; ſatius erit ad memoriam iuuandam, loca numerorum minutiæ diuidentis inter ſe permutare, vt in Arithmetica tradidimus, ac deinde regulam multiplicationis vſurpare. Vt ſi diuidenda proponatur minutia $\frac{3}{4}$. per $\frac{2}{7}$. permutandi erunt numeri minutiæ diuidentis hoc modo $\frac{7}{2}$. Vnde Quotiens erit $\frac{21}{8}$. vt hic vides. Nam hac ratione numerator minutiæ diuidendæ ſemper ducitur in denominatorē minutiæ diuidentis, iuxta regulam multiplicationis, quæ præcipit, numeratores eſſe multiplicandos inter ſe, vt fiat numerator, &c.*

$\frac{3}{4}$ $\frac{7}{2}$ $\frac{21}{8}$.

*SIT integer numerus 700. cuius minutia $\frac{3}{4}$. diuidenda ſit per eiuſdem $\frac{2}{7}$. hoc eſt, numerus 525. per 200. Perſpicuum autem eſt, diuiſis 525. per 200. Quotientem eſſe $2\frac{5}{8}$. id eſt, minutiam $\frac{21}{8}$. quæ proximè inuenta eſt. Sic etiam ſi integer numerus 10. acties ſumptus diuidatur per eius dimidium, nimirum per 5. Quotiens fiet 16. qui inuentus ſuprà fuit, ex diuiſione 8. per $\frac{1}{2}$.*

## XXIIII.

### MINVTIAM in minutiam inſerere.

*SIT minutia AB, in minutiam CD, inſerenda, ſit q̄ primùm ſenſus, addendam eſſe minutiam AB, vnius particulæ minutiæ CD, ad minutiam CD: hoc eſt, addendas eſſe $\frac{1}{4}$. vnius ſeptimæ ad $\frac{6}{7}$. Ex C. numeratore poſterioris minutiæ in B, denominatorem prioris minutiæ fiat F, cui addatur A, numerator prioris; & compoſito numero G, ſupponatur denominator H, ex multiplicatione denominatorum B, D, procreatus. Dico minutiam GH, procreari ex inſitione minutiæ AB, in minutiam CD, in eo ſenſu, quem diximus: hoc eſt, minutiam GH, æqualem eſſe minutiæ AB, reſpectu vnius particulæ minutiæ CD, additæ ad minutiam CD. Quoniam enim AB, minutia vnius particulæ minutiæ CD, [a] reducitur ad ſimplicem minutiam AH, cuius numerator idem eſt qui A, productus, nimirum ex vnitate in A; denominator autem numerus H, ex denominatoribus B, D, procreatus, vt in appoſito hoc exemplo apparet. Item minutia FH, minutiæ CD, æqualis eſt, habens eundem denominatorem H, ex denominatoribus B, D, productum; numeratorem verò E, ex C, numeratore poſterioris minutiæ in B, denominatorem prioris productum: (Cùm enim B, in C, D, faciat F, H; [b] erit vt C, ad D, ita F, ad H; [c] ac propterea*

F. 24.

A, 3. C, 6. G, 27.
B, 4. D, 7. H, 28.

a 14. huius.

A, 3. 1 A, 3.
B, 4. D, 7. H, 28.

b 17. ſept.

c 8. huius.

*propterea minutia C D, F H, æquales erunt.) efficitur, minutiam G H, cuius numerator G, ex numeratoribus F, A, minutiarum F H, A H, componitur, (nimirũ ex numero ex C, in B, producto, & ex A,) denominator autem H, idem, qui earundem minutiarum F H, A H; efficitur, inquam, minutiam G H, summam esse minutiarum F H, A H, vt initio propos. 20. ostensum est; hoc est, summam ex minutia A B, respectu vnius particulæ minutiæ C D, quæ minutia A H, ostensa est æqualis, & ex minutia C D, quæ ostensa est æqualis minutiæ F H, collectam. Minutia igitur G H, procreatur ex insitione minutiæ A B, in minutiam C D; id est, æqualis est minutiæ A B, vnius particulæ minutiæ C D, & minutiæ C D, simul. Quod est propositum.*

*IAM verò si plures minutiæ A B, C D, E F, G H, sint inserendæ; hoc est, si minutia A B, vnius particulæ minutiæ C D, vnius particulæ minutiæ E F, vnius particulæ minutiæ G H: & minutia C D, vnius particulæ minutiæ E F, vnius particulæ minutiæ G H: & minutia E F, vnius particulæ minutiæ G H, addi debeant ad minutiam G H, ita agendum erit. Ex G, numeratore postremæ minutiæ G H, in F, denominatorem penultimæ minutiæ E F, fiat numerus, cui addatur E, numerator eiusdem penultimæ minutiæ E F, vt fiat numerus K. Deinde producto ex K, in D, denominatorem antepenultimæ minutiæ C D, addatur C, numerator eiusdem minutiæ C D, vt fiat M. Producto quoque ex M, in B, denominatorem proximè antecedentis minutiæ A B, adiiciatur A, numerator eiusdem minutiæ A B, vt fiat P: Atque ita deinceps ducatur semper vltimus numerus conflatus in denominatorem proximè antecedentis minutiæ; productoq; numerator eiusdem proximè antecedentis minutiæ adiiciatur, donec nulla minutia supersit. Numero autem P, qui vltimo loco conflatus est, supponatur numerus Q, ex denominatoribus inter se multiplicatis procreatus, ducendo primùm H, in F, vt fiat L; deinde L, in D; vt fiat N; posti hæc N, in B, vt fiat Q, &c.*

P, 119. M, 59. K, 14. A, 1. C, 3. E, 2. G, 4. B, 2. D, 4. F, 3. H, 5. Q, 120. N, 60. L, 15.

*Dico minutiam P Q, ex insitione datarũ minutiarum produci in eo sensu, quẽ exposuimus. Nã vt in duabus minutijs ostensum est, minutia K L, producitur ex insitione minutiæ E F, in minutiã G H: hoc est, æqualis est summæ ex minutia E F, vnius particulæ minutiæ G H, & ex minutia G H, collectæ. Deinde minutia C D, vnius particulæ minutiæ E F, vnius particulæ minutiæ G H, [a] facit minutiã simplicem, cuius numerator C, (productus nimirum ex C, in vnitatẽ bis positam hoc modo, 3.1.1.) & denominator N, ex D, in L: hoc est, ex multiplicatione denominatorum H, F, D, procreatus: Minutia quoque, cuius numerator est numerus ex D, in K, productus, denominator autem idem numerus N, ex D, in L, productus, [b] æqualis est minutiæ K L: [c] quòd numeratores harum minutiarum ad denominatores eandem proportionem habeant; quippe cùm D, in K, L, gignat numeros alterius illius minutiæ. Igitur cùm per ea, quæ ad initium propositionis 20. demonstrauimus, minutia M N, cuius numerator M, ex numeratore C, & ex numero, qui fit ex D, in K, conflatur, æqualis sit summæ collectæ ex minutia, cuius numerator C, & denominator N, atque ex minutia, cuius numerator ex D, in K, producitur, denominator verò N; æqualis quoque erit eadem minutia M N, summæ collectæ ex minutia G H, & ex minutia E F, vnius particulæ minutiæ G H, atque ex minutia C D, vnius particulæ minutiæ E F, vnius particulæ minutiæ G H. Rursus minutia A B, vnius particulæ minutiæ C D, vnius particulæ minutiæ E F, vnius particulæ minutiæ G H, [d] facit minutiam simplicem, cuius numerator A, & denominator Q, ex B, in N; id est, ex multiplicatione denominatorum H, F, D, B, productus: Minutia quoque, cuius numerator est numerus ex B, in M, procreatus; denominator verò idem numerus Q, ex B, in N, productus, [e] æqualis est minutiæ M N, [f] quòd numeratores harum minutiarum ad denominatores eandem proportionem habeant, quippe cùm B, in M, N, gignat numeros alterius illius minutiæ. Cùm minutia igitur P Q, cuius numerator P, ex numeratore A, & ex numero, qui fit ex B, in M, conflatur, æqualis sit summæ collectæ ex minutia, cuius numerator A, & denominator Q, atque ex minutia, cuius numerator ex B, in M, gignitur, denominator verò Q, vt initio propositionis 20. monstratum est; æqualis quoque erit eadem minutia P Q, summæ collectæ ex minutia G H, & ex minutia E F, vnius particulæ minutiæ G H; & ex minutia C D, vnius particulæ minutiæ E F, vnius particulæ minutiæ G H; & ex minutia A B, vnius particulæ minutiæ C D, vnius particulæ minutiæ E F, vnius particulæ minutiæ G H. quod est propositum. Eademq; ratio est de pluribus.*

a 14. huius. b 8. huius. c 17. sept. d 14. huius. e 8. huius. f 17. sept.

*SIT deinde sensus, addendam esse minutiam A B, totius minutiæ C D, ad minutiam C D. Ex C, numeratore posterioris minutiæ in B, denominatorem prioris fiat F, cui addatur E, ex numeratoribus A, C, productus, conflatoq; numero G, supponatur H, ex denominatoribus B, D, procreatus. Dico minutiam G H, produci ex insitione minutiæ A B, in minutiam C D, in eo, quem diximus, sensu: hoc est, minutiam G H, æqualem esse summæ collectæ ex minutia C D, & ex minutia A B, minutiæ C D. Quoniam enim minutia A B, minutiæ C D, [g] reducitur ad minutiam simplicem E H, cuius numerator est E, ex numeratoribus A, C, procreatus; denominator autem H, ex denominatoribus B, D, productus, vt exemplum appositum demonstrat: [h] Minutia quoque F H, æqualis est minutiæ C D; [i] quòd numeratores ad denominatores eandem proportionem habeant; quippe cùm B, in C, D, faciat F, H. Erit minutia G H, (quæ ex iis, quæ ad initium propositionis 20. ostendimus, æqualis est*

E, 18. F, 24. A, 3. C, 6. G, 42. B, 4. D, 7. H, 28.

g 14. huius. h 8. huius. i 17. sept.

*ſumma minutiarum E H, F H,) æqualis ſummæ collectæ ex minutia C D, (hoc eſt, ex minutia F H,) & ex minutia A B, minutiæ C D, (id eſt, ex minutia E H,) atque ideò minutia G H, procreatur ex inſitione minutiæ A B, in minutiam C D, in hoc poſteriori ſenſu. Quod eſt propoſitum.*

*Quod ſi plures ſint minutiæ inferendæ A B, C D, E F, G H: hoc eſt, minutia A B, minutiæ C D, minutiæ E F, minutiæ G H; & minutia C D, minutiæ E F, minutiæ G H; & minutia E F, minutiæ G H, addendæ ſint ad minutiam G H, ita agendum erit: Ducatur G, in F, producto q; numero, addatur numerus ex E, in G, procreatus, vt fiat K. Deinde ducatur K, in D, numeroq; producto adjiciatur numerus ex C, E, G, factus, vt fiat M. Producto quoq; numero ex M, in B, addatur numerus ex A, C, E, G, procreatus, vt fiat P. Atq; ita deinceps ducatur ſemper numerus vltimo loco genitus in denominatorem antecedentis minutiæ, numeroq; procreato adjiciatur numerus ex omnibus numeratoribus minutiarum ad eum vſque locum aſſumptarum productus, donec nulla ſuperſit minutia. Numero autem P, qui vltimo loco procreatus eſt, ſupponatur numerus Q, ex omnibus denominatoribus productus, vt in priori ſenſu. Dico minutiam P Q, produci ex inſitione dictarum minutiarum, ſi inſitio intelligatur, vt dictum eſt. Nam, vt in duabus minutijs demonſtratum eſt, minutia K L, producitur ex inſitione minutiarum E F, G H, id eſt, æqualis eſt ſummæ collectæ ex minutia E F, totius minutiæ G H, & ex minutia G H. Deinde minutia C D, totius minutiæ E F, totius minutiæ G H, [a] facit minutiam ſimplicem, cuius numerator ex numeratoribus C, E G, producitur, denominator autem eſt N, ex denominatoribus H, F, D, procreatus. Minutia quoque, cuius numerator ex D, in K, gignitur, denominator autem eſt idem N, ex D, in L; hoc eſt, ex denominatoribus H, F, D, procreatus; [b] æqualis eſt minutia K L; [c] quòd numeratores harum minutiarum ad denominatores habeant proportionem eandem: quippe cùm D, in K, L, faciat numeros alterius huius minutiæ. Igitur cùm minutia M N, cuius numerator M, conſtatur ex numero, quem numeratores C, E, G, gignunt, & ex numero, quem D, in K, procreat, æqualis ſit per ea, quæ initio propoſ. 20. oſtenſa ſunt, ſummæ collectæ ex minutia, cuius numerator ex numeratoribus C, E, G, producitur, denominator autē N, ex denominatoribus H, F, D, procreatus, atque ex minutia, cuius numerator ex D, in K, gignitur, denominator verò eſt idem N; æqualis erit etiam eadem minutia M N, ſummæ collectæ ex minutia G H; & ex minutia E F, minutiæ G H; & ex minutia C D, minutiæ E F, minutiæ G H. Rurſus minutia A B, minutiæ C D, minutiæ E F, minutiæ G H, [d] facit minutiam ſimplicem, cuius numerator ex numeratoribus A, C, E, G, producitur, denominator autem Q, ex B, in N, procreatus, ſiue ex denominatoribus H, F, D, B. Minutia quoq; cuius numerator ex B, in M, producitur, denominator autem eſt idem Q, ex B, in N, procreatus, [e] æqualis eſt minutia M N; [f] quòd harum minutiarum numeratores eandem habeant ad denominatores proportionem, cùm B, in M, N, faciat numeros alterius huius minutiæ. Minutia ergo P Q, cuius numerator P, conflatur ex numero, quem numeratores A, C, E, G, gignunt, & ex numero, quem facit B, in M, cùm æqualis ſit, ex ijs, quæ initio propoſ. 20. demonſtrata ſunt, ſummæ collectæ ex minutia, cuius numerator ex numeratoribus A, C, E, G, producitur, denominator autem eſt Q, atq; ex minutia, cuius numerator ex B, in M, gignitur, denominator autem eſt idem Q; æqualis quoq; erit ſummæ collectæ ex minutia G H; & ex minutia E F, minutiæ G H; & ex minutia C D, minutiæ E F, minutiæ G H; & ex minutia A B, minutiæ C D, minutiæ E F, minutiæ G H. quod eſt propoſitum. Eademq; de pluribus eſt ratio.*

P, 232. M, 104. K, 20.
A, 1. C, 3. E, 2. G, 4.
B, 2. D, 4. F, 3. H, 5.
Q, 120. N, 60. L, 15.

a 14. huius.
b 8. huius.
c 17. ſept.
d 14. huius.
e 8. huius.
f 17. ſept.

## DE PROPORTIONVM COMPOSITIONE.

*Expeditis ijs, quæ ad fractorum numerorū demonſtrationes pertinent, reliquū eſt, vt compoſitionem proportionū explicemus: id quod ad defin. 10. lib. 5. et ad defin. 5. lib. 6. et ad propoſ. 23. lib. 6. nos hoc loco facturos recepimus. In primis igitur, compoſitionē illam proportionū, de qua Euclid. egit defin. 10. lib. 5. & defin. 5. lib. 6. & in ijs propoſitionibus, vbi duplicatam, triplicatā, aut compoſitam proportionem de magnitudinibus, vel numeris demonſtrat, non eſſe verè additionem proportionum, ita vt duplicata vel triplicata proportio ſit duplo, aut triplo maior ea proportione, cuius illa dicitur duplicata, triplicataue: Item vt proportio ex pluribus proportionibus compoſita ſit verè totum quippiam, cuius partes ſint proportiones, ex quibus componi dicitur, vt plerunque interpretes Euclidis exiſtimant, ex hoc perſpicuè confirmari poteſt: quòd pars eſſet vel æqualis, vel maior toto. Nam cùm hæc compoſitio intelligenda ſit, ſiue maior quantitas cum minore, ſiue minor cum maiore conferatur, vt ad defin. 10. lib. 5. oſtendimus, ſi, poſitis his tribus terminis continuè proportionalibus, 1. 10. 100. proportio 1. ad 100. non ſolùm duplicata diceretur proportionis 1. ad 10. vt vult defin. 10. lib. 5. ſed verè eſſet duplo maior, ita vt coaceruata foret ex duabus proportionibus 1. ad 10. & 10. ad 100. æqualibus, vt Euclidis interpretes putant, quis non videt, partem eſſe maiorem toto, nimirum proportionem 1. ad 10. quæ vna pars eſt, maiorem eſſe proportione 1. ad 100? Hic autem 4. 4. 4. partem æqualem eſſe toti? Sic etiam, ſi, poſitis his tribus terminis non continuè proportionalibus 4. 2. 8. proportio 4. ad 8. verè coaceruaretur ex proportionibus 4. ad 2. & 2. ad 8. tanquam ex partibus, vt ijdem auctores contendunt, eſſet quoq; pars maior, quàm totum, quòd proportio dupla 4. ad 2. maior ſit proportione ſubdupla 4. ad 8. Hic autem, 10. 5. 2. 5. pars toti foret æqualis, proportio videlicet 10. ad 5. primi termini ad ſecundum, proportioni 10. ad 5. primi termini ad vltimum. Id quod coguntur omnino concedere, velint nolint, ex propoſ. 5. lib. 8. Sint enim duo numeri*

meri plani 24. & 48. Prioris latera sint 12. & 2. Posterioris verò 3. & 16. Quoniam igitur Euclides ibi demonstrat, proportionem 24. ad 48. compositam esse ex proportionibus laterum: hoc est, ex proportione 12. ad 3. & ex proportione 2. ad 16. erit pars componens, (si hac compositio est vera additio.) nimirum proportio quadrupla 12. ad 3. maior toto, proportione videlicet subdupla 24. ad 48. Pari ratione, si proportio subdupla 24. ad 48. verè totum est, & eius partes componentes proportio quadrupla 12. ad 3. & proportio suboctupla 2. ad 16. si alterutra harum ab illa subtrahatur, reliqua erit altera. Igitur vt maius ex minore subtrahi potest; nimirum proportio quadrupla 12. ad 3. ex proportione subdupla 24. ad 48. & subtracta proportione suboctupla 2. ad 16. ex proportione subdupla 24. ad 48. reliqua erit proportio quadrupla 12. ad 3. maior quàm ea, à qua facta est subtractio. Quòd si posterioris numeri plani 48. latera sumantur 12. & 4. erit vna partium componentium nimirum proportio 2. ad 4. aequalis toti, proportioni videlicet 24. ad 48. Et subtracta proportione 2. ad 4. ex proportione aequali 24. ad 48. supereſſet adhuc proportio aequalis ei 12. ad 12. quæ maior est, quàm totum: hoc est, quàm proportio 24. ad 48. Rursus sequeretur, totum non augeri, etiamsi ei infinitæ partes adderentur.

24. 48.
12. 3. 16.
24. 48.
4 2. 12. 12 4.

Positis enim his quatuor terminis, 12. 4. 2. 1. si proportio 12. ad 1. verè coaceruatur ex proportionibus 12. ad 4. & 4. ad 2. & 2. ad 1. vtcunque ex partibus, ita vt hæ proportiones simul sumptæ proportioni 12. ad 1. sint aequales: si cum illis terminis continuentur adhuc alij tres termini hoc modo, 12. 4. 2. 1. 6. 3. 1. componetur eadem proportio 12. ad 1. ex sex proportionibus, quarum priores tres sunt eadem illæ, ex quibus prius componebatur. Tres ergo proportiones 1. ad 6. & 6. ad 3. & 3. ad 1. additæ tribus proportionibus 12. ad 4. & 4. ad 2. & 2. ad 1. non augent totum ex illis coaceruatum. Hæc autem omnia absurda sunt, & contra principia Mathematicorum. Hæ autem; quòd secundùm communem hominum sensum duæ proportiones triplæ constituant proportionem sexcuplam, non autem nonuplam, vt prædicti auctores volunt, quanquam nonupla proportio dicatur tripla duplicata, vt in hisce numeris apparet, 9. 3. 1. Nam quis non videat, si agens aliquod sit, vt 3. illud idem duplo potentius factum esse vt 6. non autem vt 9? Sic etiam communis intelligentia comprehendit ex proportione triplæ & quintuplæ confici proportionem octuplam, propterea quòd duo mouentia vt 3. & 5. moueant simul sumpta, vt 8. nã autem ex illis constitui proportionem 15. ad 1. quamuis hæc ex illis per continuationem composita esse dicatur, ex defin. 5. lib. 6. vt patet in his numeris, 15. 5. 1. His adde, multorum agentium vires non posse dimidiari, eo quòd inter duos numeros, qui proportionem agentis ad patiens exprimunt, nullus medius cadat proportionalis. Verbi gratiâ. Agens vt 6. non posset habere agens duplo minus, quòd inter 6. & 1. nullus medius proportionalis cadat numerus: quis autem non statim intelligat, agens vt 3. in dupla proportione minus esse, quàm agens vt 6?

LIQVET ergo, huiusmodi compositionem proportionum non esse additionem, sed proportionum continuationem, quæ per multiplicationem denominatorum fit, vt ad defin. 5. lib. 6. demonstrauimus, vbi etiam exposuimus, cur extremorum proportio dicatur ex medijs proportionibus composita propter terminorũ continuationem, quemadmodum & ad defin. 10. lib. 1. explicauimus, cur positis tribus, quatuor, aut pluribus terminis continuè proportionalibus, extremorum proportio appelletur duplicata, triplicata, aut quadruplicata, &c. eius proportionis, quam primi duo termini habent. Hæc autem planius percipientur ex ijs, quæ iam iam de veræ compositione proportionum dicturi sumus.

ITAQVE. omnes operationes Arithmeticæ in proportionibus; nimirum additio, subtractio, multiplicatio, ac diuisio, fieri debent per proportionum denominatores, vt rectè docet Volumnius Rodulphus in disputatione de proportione proportionum. Et quoniam denominatores proportionum sunt fractiones, siue minutiæ, vt libro quinto docuimus, (cùm denominatori cuiuslibet proportionis multiplicis, qui numerus integer est, fingi possit vnitas, vt ex eo fiat quasi minutia ab vnitate denominata.) quarum qualibet æqualis est fractioni, quam constituunt duo quicunque numeri in ea proportione, cuius illa fractio denominator est, si ex antecedente fiat numerator, & ex consequente denominator: manifestò colligitur, operationes Arithmeticas in proportionibus ab operationibus fractorum numerorum non differre, siue per proportionum denominatores; siue per numeros earundem proportionum quoscunque: positis tamen consequentibus terminis sub antecedentibus, instar minutiarum, instituantur; vt egregiè Cardanus præcipit in sua Arithmetica, vt iam apparebit.

3 × 9 12 × 40.
1 1. 4 8.
8 256
1. 32.

PRIMVM enim sint in vnam summã colligendæ duæ proportiones, tripla & quintupla. Quoniam denominatores sunt 3. & 5. ex quorum additione fit summa 8. coaceruabitur octupla proportio ex illis, quæ summa etiam colligitur, siue denominatores, suppositâ prius vnitate cuilibet illorum, instar minutiarum addantur, siue numeri 12. 4. & 40. 8. inter quas datæ proportiones reperiuntur, perinde ac si essent fracti numeri, positis terminis consequentibus sub antecedentibus, in vnã summam colligantur. Priori enim modo colligitur proportio 8. ad 1. posteriori autem 256. ad 32. quarum vtraque octupla est. Sic etiam ex proportione dupla superquadripartiente septimas, & sesquialtera, quarum denominatores sunt $2\frac{4}{7}$. & $1\frac{1}{2}$. & quæ inter numeros 54. 21. &

18 × 3 54 × 6
7 2 21 4.
57 342
14 84

6.4. reperiuntur, fit proportio quadrupla sesquidecimaquarta, qualem habent tam numeri 57.14. q̃ 342.84. Sed quãdo p denominatores instituitur operatio, reuocandi prius sunt denominatores ad vnicas fractiones, vt hic factum est. Nam $2\frac{4}{7}$. reuocauimus ad $\frac{18}{7}$. & $1\frac{1}{2}$. ad $\frac{3}{2}$. Quod in alijs etiã operationibus intelligendũ est.

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 8 | 3 | 256. | 12 | 57 | 3 | 342 | 6 |
| 1 | 1. | 32 | 4. | 14 | 2. | 84. | 4. |
| 5 | | 640 | | 72 | | 864 | |
| 1. | | 128. | | 28 | | 336. | |

DEINDE, si ex proportione octupla subtrahatur proportio tripla: Item ex proportione quadrupla sesquidecimaquarta deducatur proportio sesquialtera; reliquæ sient proportiones quintupla, & dupla superquadrupartiens septimas, vt hic perspicuum est.

| | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 3 | 2 | 6 | 12 | 10 | 120 | 3 | 8 | 24 | 9 | 16 | 144 |
| 1 | 1. | 1. | 4 | 5. | 20. | 2 | 5. | 10. | 6 | 10. | 60. |

TERTIO, si multiplicanda sit proportio tripla per 2. vel quod idem est, per proportionẽ duplam: Item proportio sesquialtera per supertripartientem quintas, instituenda erit operatio, vt hic videre, producetur q̃ ibi proportio sextupla, hic autem dupla superbipartiens quintas.

| | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 6 | 1 | 6 | 120 | 4 | 480 | 24 | 2 | 48 | 144 | 6 | 864 |
| 1 | 3. | 3. | 20 | 12. | 240. | 10 | 3. | 30. | 60 | 9. | 540. |

QVARTO et vltimo; si proportio sextupla dividenda proponatur p proportionem triplam: Item proportio dupla superbipartiens quintas per proportionem sesquialteram, si diuisoris termini permutentur, vt in diuisione minutiarum docuimus, ita instituetur operatio.

VIDES ergo operationes Arithmeticas proportionum ab operationibus minutiarum nulla in re discrepare, nisi quòd in proportionibus necesse non est interponere lineolam inter numeratorẽ & denominatorem, quemadmodum in minutijs.

IAM verò multiplicationem proportionum à nobis præscriptam, quam auctores additionem falsò nuncupant, cum proportionum compositione, de qua Euclides defin. 10. lib. 5. & defin. 5. lib. 6. egit, conuenire, atque adeò compositionem illam Euclidis verè esse multiplicationem, non autem additionem, vt diximus, hoc modo demõstrabimus. Sint duæ proportiones A, ad B, & C, ad D, siue æquales siue inæquales; ducatur q̃ A, antecedẽs in antecedentem C, & fiat E; ex consequente verò B, in consequentem D, fiat F. Dico proportionem E, ad F, quæ ex illa multiplicatione producitur, esse compositam ex proportionibus duabus A, ad B, & C, ad D: ita vt si proportiones hæ A, ad B, & C, ad D, fuerint æquales, proportio E, ad F, dicatur alterutrius earũ duplicata, vt vult defin. 10. lib. 5 si autem fuerint inæquales, dicatur ex illis composita, ex sententia defin. 5. lib. 6. Fiat enim G, ex B, in C. Et quia ex A, B, in C, fiunt E, & G; [a] erit vt A, ad B, ita E, ad G. Rursus quia ex B, in C, D, fiunt G, & F; [b] erit vt C, ad D, ita G, ad F. Componitur autem proportio E, ad F, ex proportionibus E, ad G, & G, ad F, ex defin. Euclidis. Igitur eadem proportio E, ad F, componitur ex proportionibus A, ad B, & C, ad D, cùm hæ eadem sint, quæ E, ad G, & G, ad F. Quod etiam patet ex demonstratione, quam ad defin. 5. lib. 6. ex Eutocio, & Vitellione attulimus. Cùm enim compositio proportionum ab Euclide descripta respondeat multiplicationi denominatorũ inter se, vt ibi demonstrauimus, nostra verò multiplicatio à multiplicatione denominatorum non differat, liquidò constat, compositionem illam proportionum esse multiplicationem, quam tradidimus.

| | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| A, 6. | C, 12. | | A, 3. | C, 6. | | | | | | | | |
| B, 2. | D, 4. | | B, 2. | D, 5. | | | | | | | | |
| E, 72. | F, 8. | | F, 18. | E, 10. | | | | | | | | |
| G, 24. | | | G, 12. | | | | | | | | | |

a 18. septimi.

b 17. septimi.

EADEM ratione ostendemus, subtractionem proportionum, quam ijdem auctores docent, nõ esse aliud, q̃ diuisionem à nobis explicatam, esseq̃ compositioni illi Euclidis contrariam. Sit enim ex proportione A, ad B, detrahenda proportio C, ad D, vt ipsi volunt. Ex A, in D, fiat E, & ex B, in C, fiat F. quod idem est, ac si termini proportionis C, ad D, permutent loca, & regula multiplicationis adhibeatur. Dico proportionẽ E, ad F, quæ ex diuisione proportionis A, ad B, per proportionem C, ad D, producitur, vt docuimus, esse eam, quæ relinquitur, sublata proportione C, ad D, ex proportione A, ad B; hoc est, proportionem A, ad B, compositam esse ex proportionibus C, ad D, & E, ad F. iuxta defin. Euclidis. Fiat enim G, ex A, in C. Quia igitur ex A, B, in C, fiũt G, F; [c] erit vt A, ad B, ita G, ad F. Rursus quia ex A, in C, D, fiunt G, E; [d] erit vt C, ad D, ita G, ad E. Cùm ergo proportio G, ad F, composita sit ex proportionibus G, ad E, & E, ad F, vt vult Euclides; erit quoq; proportio A, ad B, (quæ eadem est, quæ G, ad F,) composita ex eisdem proportionibus G, ad E; hoc est, C, ad D, & E, ad F: ac proinde subducta proportione C, ad D, ex proportione A, ad B, reliqua erit proportio E, ad F: quemadmodum si ex proportione G, ad F, (posito termino E, medio) dematur proportio G, ad E, reliqua est proportio E, ad F. Sed quis non videt, hoc potius esse dividi proportionem A, ad B, per proportionem C, ad D, q̃ proportionem C, ad D, ex proportione A, ad B, subtrahi, ne maius ex minore auferri dicatur, vt in posteriori exemplo accidit? Atq; hæc de proportionum compositione: qui plura desiderat, legat eruditissimum tractatum hac de re à Volumnio Rodulpho Spoletano conscriptũ.

| | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| A, 9. | C, 3. | | A, 4. | C, 6. | | | | | | | | |
| B, 1. | D, 1. | | B, 2. | D, 3. | | | | | | | | |
| E, 9. | F, 3. | | E, 8. | F, 12. | | | | | | | | |
| G, 27. | | | G, 24. | | | | | | | | | |

c 18. septimi.

d 17. septimi.

FINIS ELEMENTI NONI.

EVCLIDIS

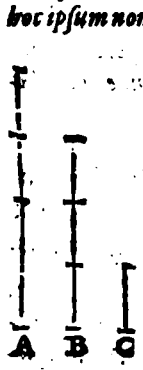
# ELEMENTVM DECIMVM.

## DEFINITIONES.

### I.

**COMMENSVRABILES** magnitudines dicũtur, quas eadem mensura metitur.

ABSOLVIT Euclides in antecedentibus tribus libris ea, quæ ad numeros spectant, quantum satis visum est ad res Geometricas intelligendas: Nunc in hoc decimo libro aggreditur ad disputationem linearum commensurabilium, & incommensurabilium, quarum causa numerorum tractationem ab eo susceptam esse superius diximus. Nam sine cognitione harum linearum complures magnitudines cùm solidæ tum planæ, neq; perfectè intelligi possunt, neq; cùm res tulerit, in opus atq; vsum conferri; propterea quòd plerunque latera earum incommensurabilia sunt: Id quod & de planis ipsis atq; solidis dici potest, quippe cùm & hæc incommensurabilia sæpenumero existant, vt ad finem huius libri demonstrabimus. Quoniam verò hic liber multis obstructus est difficultatibus, ob linearum, de quibus disserit, obscuritatem; omnes neruos industriæ meæ in eo contendam, vt ex his, quæ hactenus ab Euclide sunt demonstrata, ita planus reddatur, ac facilis, vt sine multo labore à quouis, qui præcedentium tamen librorum demonstrationes recte intellexerit, possit percipi. Neque enim in eorum possum sententiam ire, qui putant ad eius intelligentiam esse necessariam eam partem Arithmetices, quæ de radicibus numerorum, tam rationalibus quàm irrationalibus, vt vocant, sermonem instituit: Immò contra persuasum mihi prorsus habeo, cognitionem perfectam illius partis Arithmetices pendere ex hoc 10. lib. tantum abest, vt existimem, tractationem illam radicum requiri, vt facilius hic liber intelligatur. Non negarim tamen, eum, qui rationem radicum atq; calculum tenuerit, maiore cum voluptate hunc librum percepturum, quàm qui illarum omnino sit ignarus, propterea quòd ille demonstrationes ad vsum potest reuocare, hic verò nullo modo. Hæc enim de causa & nos prioxa decem theoremata secundi lib. numeris accommodauimus, vt oblectationem animi maiorem ex eo studiosus caperet, ac fructum; non autem vt ea, quæ in illo demonstrantur, facilius arbitraremur intelligi posse ex numeris. Cur ergo (dicet aliquis) vt in eo libro, non perinde etiam in hoc exempla numerorum, quibus Algebra vtitur, vsurpasti, vt ea res & maiori voluptati esset, & cõmodo legentibus? In promptu causa est, quare id omittendum putauimus. Cùm enim perpauci sint hoc tempore, quibus celeberrima illa Algebræ ars sit cognita, videbantur numeri illi, si adhiberentur, tenebras potius offusuri, quàm lucis aliquid maioris daturi, & perspicuitatis; quippe ita ingenia studiosorum pro adiumento, ac luce, quam his nostris commentarijs afferre laboramus, plus caperent incommodi, minus q; demonstrationes ipsas perciperent: Id quod in lib. 2. accidere non potuit, cùm additionem numerorum integrorum, ac multiplicationem, quæ sola necessariæ ibi fuerunt, nemo ferè sit, qui ignoret. Huc accedit, quòd qui in Algebræ sunt versati facili negotio demõstrationes huius lib. ad numeros accommodare possunt per se ipsos, quando volunt, præsertim cùm iam hoc ipsum non multò antè à Michaële Stifelio nobili Arithmetico in 2. lib. operis, quod de Arithmetica integra inscripsit, diligenter effectum sit, & accuratè.




ITAQVE, vt ad institutum redeamus, inchoans rem ipsam Euclides, more suo, ab explicationibus vocabulorum, quibus vtendum erit; declarat primo loco, quænam magnitudines dicantur commensurabiles, definiens eas esse, quas eadem mensura metitur. Vt duæ magnitudines A, B, quas eadem mensura C, metitur, (metitur enim C, ipsam A, quater repetita, & ter sumpta ipsam B,) dicuntur commensurabiles. Eodem modo commensurabiles sunt, linea 20. palmorum & linea 13. palmorum; quia eas linea tam vnius palmi, quàm dimidiati palmi, quàm tertiæ partis vnius palmi, &c. metitur. Similiter commensurabiles dicuntur superficies, quas vna, & eadem superficies metitur; Item corpora, solidaue commensurabilia, quæ metitur idem corpus, seu solidum.

II.

INCOMMENSVRABILES autem, quarum nullam communem mensuram contingit reperiri.

*TALES magnitudines sunt, diameter quadrati cuiusuis, & lateri eiusdem: quoniã nullam habent mensuram communem, vt propositione vltima huius libri demonstrabitur ab Euclide. Sunt etiam plurimæ aliæ lineæ incommensurabiles, quibus scilicet mensura aliqua communis dari nullo modo potest, quarum multas hoc libro Geometra explicat, docetq; quanam ratione inueniri possint. Rursus, superficies dicentur incommensurabiles, & solida incommensurabilia, quæ nullam admittunt mensuram communem.*

III.

RECTAE lineæ potentia commensurabiles sunt, cùm quadrata earum idem spatium metitur.

*LINEARVM rectarum quædam commensurabiles sunt longitudine, quæ nimirũ alia linea, tanquam mensura communi, metitur; cuiusmodi sunt illæ, quas in expositione defin. 1. commensurabiles simpliciter diximus: quædam verò longitudine incommensurabiles, quas scilicet nulla linea, tanquam mensura communis, metitur. Rursus linearum, quæ sunt incommensurabiles longitudine, aliæ sunt eiusmodi, vt earum quadrata sint commensurabilia; aliæ verò ita se habent, vt & quadrata earum incommensurabilia sint. Lineæ ergo illæ longitudine incommensurabiles, quarum quadrata sunt commensurabilia, appellantur hic ab Euclide potentia commensurabiles; quia videlicet secundùm earum potentias, hoc est, secundùm earum quadrata (est enim, vt ad propos. 47 lib. 1. diximus, potentia cuiusque lineæ, quadratum ab ea descriptum) commensurabiles sunt, licet ipsæ secundùm longitudinem sint prorsus incommensurabiles.*

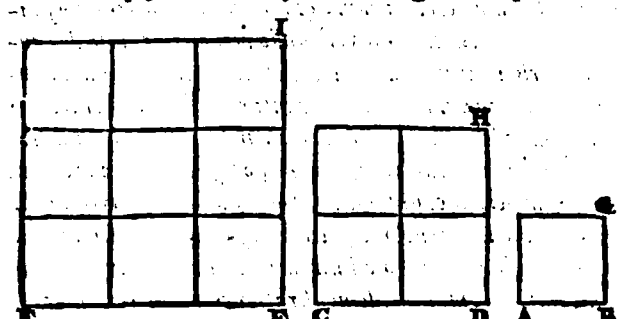
*QVOD si quis roget, cur Euclides definierit seorsum lineas potentia commensurabiles, non autem commensurabiles longitudine, respondendum est, lineas longitudine commensurabiles satis superq; esse explicatas in definitione commensurabilium magnitudinum, cùm huiusmodi lineas vna cõmunis mensura metiatur, vt dictum est: At verò quoniam lineas potentia commensurabiles nulla communis mensura metiri potest, sed tantummodò earum quadrata idem spacium metitur, ideò necessarium omnino fuit, vt ea propria definitione explicarentur.*

IIII.

INCOMMENSVRABILES autem, cùm quadratis earum nullum spacium, quod sit communis eorum mensura, contingit reperiri.

*LINEAS reliquas longitudine incommensurabiles, quarũ etiam quadrata incommensurabilia sunt, vocat incommensurabiles potentia.*

*HABENT autem lineæ commensurabiles tam longitudine, q̃ potentia, hãc quasi conuenientiam inter se, & connexionem, vt lineæ longitudine commensurabiles, sint etiam commensurabiles potentia, ita vt nulla linea dari possint commensurabiles longitudine, quin earum quadrata commensurabilia quoq; sint; quoniam quadratũ ex communi earum mensura descriptum metitur tanquam mensura communis earum quadrata, vt in subiecta figura apparet: sicut enim recta A B, metitur rectas C D, E F, ita quoq; quadratum A G, quadratum C H; E I, metitur: Non autem, vt omnes lineæ potentia commensurabiles, sint etiam commensurabiles longitudine; multæ enim lineæ sunt potentia commensurabiles; hoc est, quadrata habent commensurabilia, quæ tamen longitudine omnino incommẽsurabiles sunt, vt in hoc libro demonstrabitur. Rursus inter lineas incommensurabiles tam longitudine, quàm potentia, huiusmodi colligatio reperitur, vt omnes lineæ potentia incommensurabiles; sint etiã incommensurabiles longitudine; Non autem contrà, vt omnes lineæ longitudine incommensurabiles, sint quoq; incommensurabiles potentia, cùm multæ lineæ reperiantur longitudine inter se incommensurabiles, cùm tamen potentia, hoc est, secundùm earum quadrata, commensurabiles existant. Quæ quidem omnia perspicua erunt ex corollario propos. 9. huius libri.*




V.

HIS positis, ostenditur, cuicunque rectæ propositę rectas lineas multitudine infinitas & commensurabiles esse, & incommensurabiles: alias quidẽ longitudine, & potentia; alias verò potẽtia solùm. Vocetur autẽ proposita recta linea, Rationalis.

*SI proponatur aliqua recta linea nota magnitudinis, erunt omnium aliarũ, quæ cum ipsa comparantur, quædam illi commensurabiles longitudine ac potentia, quædam verò potentia tantùm: Item quædam illi in-*

*commensu-*

*commensurabiles longitudine tantùm; quadam verò longitudine, & potentia, vt hoc 10. libro demonstrabitur variis in locis. Non enim vult Euclides, ex dictu ostendi, seu colligi, (quanquam eius verba hoc sonare videantur) hæc ita se habere: sed solùm indicat nobis, & innuit quodam modo, linearum quasdam dici posse propositæ rectæ lineæ commensurabiles longitudine, & potentia, quasdam autẽ potentia tantùm, &c. Quod quidem ex dictis nullo modo sequitur, sed demonstrabitur in sequentibus, vt diximus.*

*LINEA autem illa proposita, ratione cuius aliæ commensurabiles sunt, vel incommensurabiles, dicitur Græcis ῥητὴ; Latinis verò Rationalis; quoniam ea ponitur semper certa; & nota, aliæ verò cum illa comparatæ non semper notæ sunt, quamuis singulæ seorsum sumptæ existant certæ quoque, ac notæ; cùm qualibet in quotcunque partes æquales possit diuidi.*

## VI.

ET huic commensurabiles siue longitudine & potentia, siue potentia tantùm, Rationales.

*DOCET lineas alias illi, quæ Rationalis dicitur, commensurabiles quomodocunque, appellari quoq; Rationales; non quidem ex positione, vt illa, sed quia cum illa comparatæ reperiuntur ei commensurabiles vel longitudine & potentia, vel potentia tantùm.*

*ITAQVE ex sententia Euclidis, radix quadrata huius numeri 20. vel 1000. &c. Seu quod idem est, linea recta, cuius quadratum est 20. vel 1000. &c. dicitur Rationalis; cùm potentia fit commensurabilis lineæ Rationali, (est enim tam numerus 20. quàm 1000. commensurabilis numero cuilibet quadrato, vt 16. vel 100. &c.) quamuis longitudine sit eidem incommensurabilis. Decipiuntur ergo Arithmetici non pauci, qui idcirco eam Irrationalem vocant, quòd numero non possit exprimi.*

## VII.

HVIC verò incommensurabiles, Irrationales vocentur.

*QVONIAM in antecedenti definitione Euclides lineas illas, quæ longitudine & potentia, vel quæ potentia tantùm sunt commensurabiles propositæ rectæ Rationali, appellauit Rationales; liquidò constat, eum hic eas dicere Irrationales, quæ propositæ rectæ Rationali incommensurabiles sunt vtroque modo; longitudine videlicet & potentia; non autem longitudine tantùm. Ex quibus etiam manifestum est, radicem quadratam huius numeri 20. vel 1000. &c. seu (quod idem est) lineam, cuius quadratum est 20. vel 1000. &c. non posse appellari Irrationalem, cùm non sit longitudine, & potentia, sed longitudine tantùm Rationali lineæ propositæ incommensurabilis.*

## VIII.

ET quadratum, quod à proposita recta fit dicatur Rationale.

*QVEMADMODVM linea illa, quæ certa ponitur, ac nota, Rationalis dicitur: Ita quoq; quadratum ab ea descriptum, Rationale vocatur, quia & ipsum certum est, ac notum, comparationeq; illius aliæ superficies, commensurabiles, incommensurabilésue dicuntur.*

## IX.

ET huic commensurabilia quidem, Rationalia.

*OMNES planæ superficies quadrato Rationalis lineæ propositæ commensurabiles, Rationales dicuntur; non quidem expositione, vt illud, sed quia cum eo collatæ reperiuntur ei vel commensurabiles, vel incommensurabiles: quemadmodum etiam lineæ, quæ Rationali lineæ quomodocunq; commensurabiles sunt, Rationales appellantur.*

*QVONIAM verò lineæ potentes ipsa spatia commensurabilia quadrato Rationalis lineæ propositæ, sunt saltem potentia commensurabiles lineæ Rationali, ex 3. definitione, perspicuum est, ipsas quoque appellari iuxta definitionem 6. Rationales.*

## X.

HVIC verò incommensurabilia, Irrationalia dicantur.

*NON aliter superficies plana quadrato à Rationali linea descripto incommensurabiles, Irrationales vocantur, ac lineæ, quæ Rationali propositæ prorsus incommensurabiles sunt, Irrationales sunt dictæ.*

## XI.

ET rectæ, quæ ipsa possunt, Irrationales: siquidem ea quadrata sint, ipsa latera; si verò alia quæpiam rectilinea, rectæ, quæ spatiis incommensurabilibus æqualia quadrata describunt.

*VOCAT lineas, quæ possunt spatia quadrato Rationalis lineæ incommensurabilia, Irrationales; quemadmodum & ipsa spatia dixit Irrationalia: Ita vt si incommensurabilia spatia fuerint quidem quadrata, latera ipsorum dicantur Irrationalia; si verò non fuerint quadrata, sed alia quæcunque figuræ rectilineæ, appellentur rectæ, quæ describunt quadrata æqualia illis spatijs incommensurabilibus, Irrationales.*

*COLLIGITVR autem, lineas potentes ſpatia incommenſurabilia quadrato Rationalis lineæ, dici debere Irrationales, ex 7. defin. quemadmodum ſuprà ex 6. defin. collegimus, lineas, quæ poſſunt ſpatia commenſurabilia eidem quadrato Rationalis lineæ, appellari debere Rationales. Nam lineæ, quæ poſſunt illa ſpatia incommenſurabilia, ſunt potentia incommenſurabiles lineæ Rationali, ex 4. defin. Cùm ergo omnes lineæ potentia incommenſurabiles, ſint quoq; incommenſurabiles longitudine, vt ad defin. 4. diximus, demonſtrabitur q; in coroll. propoſ. 9. manifeſtum eſt, ex 7. defin. lineas illas, quæ poſſunt ſpatia incommenſurabilia quadrato Rationalis lineæ, dici Irrationales.*

*PRAETEREVNDVM quoque non eſt, Euclidem & veteres Geometras has voces:* longitudine & potentia: atque potentia tantùm: *apponere ferè ſemper vocibus iſtis:* commenſurabiles, ac incommenſurabiles: *Vix autem, & rariſſimè his:* Rationales, & Irrationales: *Rectè enim dicuntur lineæ commenſurabiles longitudine & potentia, vel potentia tantùm; Item incommenſurabiles longitudine & potentia, vel longitudine tantùm: Minus verò rectè Rationales longitudine & potentia, vel potentia tantùm, aut Irrationales longitudine & potentia, vel longitudine tantùm. Quod quidem, quoniam Campanus non animaduertit, occaſionem multis præbuit, vt variè & obſcurè in hoc 10. lib. de lineis commenſurabilibus, incommenſurabilibus q;, nec non Rationalibus, Irrationabilibus q;, ſint locuti.*

*CAETERVM his definitionibus adiungemus poſtulatum vnum, & nonnulla pronunciata, quorum vſus in hoc libro reperitur.*

## POSTVLATVM, SIVE PETITIO.

POSTVLETVR, quamlibet magnitudinem toties poſſe multiplicari, donec quamlibet magnitudinem eiuſdem generis excedat.

*PROPOSITIS enim duabus magnitudinibus eiuſdem generis inæqualibus, cùm maior infinita nõ ſit, minor verò infinitè poſſit augeri; perſpicuum eſt, minorem toties poſſe multiplicari, donec ſuperet maiorem. Conſtat hoc etiam ex iis, quæ in defin. 5. lib. 5 ſcripſimus. Ibi enim eas magnitudines diximus tum demum eſſe eiuſdem magnitudinis, cùm alterutra ita poteſt multiplicari, vt alteram excedat. Atque ex huius conditionis defectu, angulum rectilineum, & angulum contingentiæ, diuerſi eſſe generis, docuimus.*

## AXIOMATA, SIVE PRONVNCIATA.

### I.

MAGNITVDO quotcunque magnitudines metiens, compoſitam quoque ex ipſis metitur.

### II.

MAGNITVDO quamcunque magnitudinem metiens, metitur quoque omnem magnitudinem, quam illa metitur.

### III.

MAGNITVDO metiens totam magnitudinẽ, & ablatam, metitur & reliquã.

*HAEC axiomata, vt ad numeros pertinent, oſtenſa ſunt à nobis in vltimis tribus pronunciatis libri 7. Quare cùm ſit eadem ratio in magnitudinibus, non eſt, quòd fruſtra eorum demonſtrationes hic repetamus, præſertim quòd ad verbum huc poſſint transferri, mutata ſolùm voce numeri in vocem magnitudinis.*

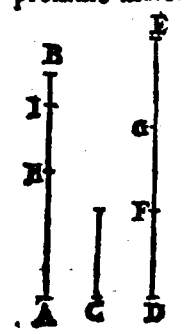
*CAETERVM quia hoc in libro diſcedendum nobis fuit à numero, quem Theon in propoſitionibus Euclidis ſequitur, vt ad propoſ. 13. dicemus, quemadmodum & in omnibus ſeriem Campani negleximus: vt deciuimus ad initium primi libri; curauimus vt duplex numerus in margine è regione propoſitionum apponeretur, quorum ſuperior ordinem Theonis, inferior autem Campani ſeriem demonſtraret. Quòd ſi vnus tantùm numerus reperiatur in margine, nullam tunc eſſe inter Theonem & Campanum diſcrepantiam, intelligas, quod ad numerum propoſitionum attinet.*

## 1. THEOR. 1. PROPOS. 1.

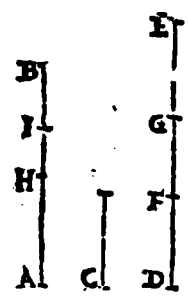
DVABVS magnitudinibus inæqualibus propoſitis, ſi à maiore auferatur maius quàm dimidium; & ab eo, quod reliquum eſt, rurſus detrahatur maius quàm dimidium; & hoc ſemper fiat: Relinquetur tandem quædam magnitudo, quæ minor erit propoſita minore magnitudine.

PROPOSITAE ſunt duæ magnitudines inæquales AB, & C, quarum AB, ſit maior. Dico ſi ex AB, auferatur maius quàm dimidium: & ab eo, quod reliquũ eſt, rurſum maius quàm dimidium: atque hoc ſemper fiat: relinqui tandem magnitudinem quandam, quæ minor ſit q; C. Multiplicetur enim C, toties, donec magnitudo facta DE, maior ſit q; AB, ita vt DE, ſit multiplex ipſius C, proximè

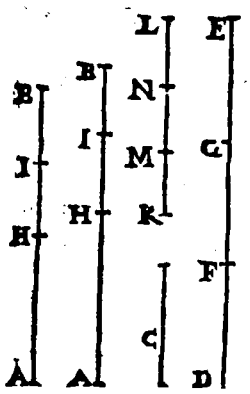
proximè maior quàm AB. Diuisa autem DE, in partes DF, FG, GE, ipsi C, æquales, detrahatur




ex AB, maius quàm dimidiũ AH, & ex reliqua HB, maius quàm dimidium HI; atque hoc semper fiat, donec partes ipsius AB, multitudine æquales sint partibus ipsius DE. Sint ergo iam partes AH, HI, IB, tot, quot sunt ipsæ DF, FG, GE. Quia igitur DE, maior est quàm AB; At ex DE, ablatum est DF, minus quàm dimidium, vel certè dimidium, si DE, ipsius C, sit duplex; ex AB, verò maius quàm dimidium AH: Erit reliquum FE, reliquo HB, maius. (Cùm enim DE, maior sit quàm AB; si ex DE, dimidium auferretur, necnon & ex AB, dimidium, esset quoque reliquum ex DE, maius reliquo ex AB. Si ergo ex DE, auferatur minus quàm dimidium, vel certè dimidium, & ex AB, maius quàm dimidium; erit reliquum ex DE, maius reliquo ex AB.) Rursus quoniam FE, maior est quàm HB, auferturq; ex FE, dimidium FG, vel certè minus quàm dimidium, si FE, maior sit quàm duplex ipsius C; at ex HB, maius quàm dimidiũ HI; erit eodem modo reliquum GE, maius reliquo IB: atque ita procedendo ostendemus tandem postremam partem ipsius DE, qualis hîc est GE, maiorem esse postrema parte ipsius AB, qualis hîc est IB. Dum ergo GE, postrema pars ipsius DE, æqualis sit ipsi C; erit quoq; C, maior quàm IB, postrema pars ipsius AB. Relicta igitur est IB, magnitudo, quæ minor est magnitudine C. Quare duabus magnitudinibus inæqualibus ꝓpositis, si à maiori auferatur maius, &c. Quod erat demonstrandum.




Idem demonstrabitur, si ex AB, auferatur dimidium AH, & ex reliquo HB, rursus dimidium HI, &c. Nam eadem ratione erit reliquum FE, maius reliquo HB, nec non & reliquum GE, maius reliquo IB; cùm ex maiori DE, ablatum sit DF, minus quàm dimidium, vel certè dimidium; & ex minori AB, dimidium AH, &c.



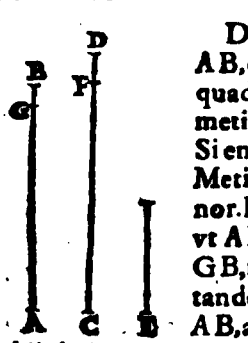

Aliter. Facta cõstructione, vt prius, sumatur KL, ita multiplex ipsius IB, vt est multiplex DE, ipsius C. Diuisa ergo KL, in partes KM, MN, NL, ipsi IB, æquales, erunt tot partes in KL, quot in DE. Quoniam verò AH, maior est quàm HB, vel certè illi æqualis, si ablatum sit dimidium ex AB; & HB, maior est, quàm IB; erit quoque AH, maior quàm IB, hoc est, quàm KM. Rursus quia HI, maior est quàm IB, vel certè illi æqualis; est autem IB, ipsi MN, æqualis: erit quoq; HI, maior quàm MN, vel illi æqualis; atque adeò tota AI, maior, quàm tota KN. Additis ergo æqualibus IB, NL, erit tota AB, maior quàm tota KL: Est autem DE, maior adhuc, quàm AB. Multò ergo maior erit DE, quàm KL. Quare cùm sit, vt DE, ad C, ita KL ad IB; (Sumpta enim fuit KL, ipsius IB, tam multiplex, quàm multiplex est DE, ipsius C,) [a] erit quoque C, maior quàm IB. Ac proinde relicta est IB, minor quàm C. Quod erat demonstrandum. *a 14. quinti.*

## SCHOLIVM.

*Lvce clarius ex demonstratione huius Theorematis apparet, duas quantitates inæquales propositas debere esse tales, vt minor multiplicata, tandem maiorem possit superare. Id quod ad propos. 16. lib. 5. monuimus, cùm de angulo contactus contra Iacobum Peletarium ageremus.*

## THEOR. 2. PROPOS. 2.

Si duabus magnitudinibus inæqualibus propositis, detrahatur semper minor de maiore, alterna quadam detractione, & reliqua minimè præcedentem metiatur: Incommensurabiles erunt ipsæ magnitudines.



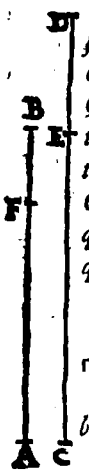

Dvabvs inæqualibus magnitudinibus propositis AB, CD, quarum minor AB, detrahatur ex maiore CD, & reliqua huius ex AB; & sic deinceps, alterna quadam detractione, auferatur semper minor de maiore, & nunquam reliqua metiatur præcedentem. Dico magnitudines AB, CD, incommensurabiles esse. Si enim non sunt incommensurabiles, metietur eas aliqua mẽsura communis. Metiatur eas si fieri potest, magnitudo E, quæ vel æqualis erit ipsi AB, vel minor. Detracta autem AB, ex CD, quoties potest, relinquat FD, se minorem, ita vt AB, ipsam CF, metiatur. Rursus detracta FD, ex AB, relinquat se minorem GB, ita vt FD, metiatur ipsam AG; atque hoc semper fiat. [b] Relinquetur ergo tandem ex CD, vel AB, magnitudo quædam minor quàm E. (Quoniam cùm AB, ablata ex CD, relinquat FD, se minorem, erit CF, ablata maior, quàm dimidia ipsius CD; aliàs si esset dimidia, vel minor quã dimidia, posset adhuc AB, detrahi ex CD. Eodem modo erit AG, ablata ex AB, maior quàm dimidia ipsius AB: Et sic deinceps semper fiet. *b 1. decimi.*

a 1. decimi. Quare cùm semper auferatur maius, quàm dimidium, [a] relinquetur tandem magnitudo quædam minor quàm E.) Sit ergo iam relicta G B, minor quàm E. Quoniam igitur E, metitur A B; & b 2. pron. A B; metitur C F; [b] metietur quoque E, ipsam C F: Metitur autem E, & totam C D. [c] Igitur E, c 3. pron. reliquam quoque F D, metietur. At F D, metitur A G: [d] quare & E, ipsam A G, metietur. Metitur d 2. pron. autem E, & totam A B: [e] ergo E, reliquam etiam G B, metietur, maior minorem. Quod est absurdum. e 3. pron. Non ergo A B, C D, magnitudines aliqua magnitudo metietur. Quare incommensurabiles sunt. Si igitur duabus magnitudinibus inæqualibus propositis, &c. Quod erat ostendendum.

## SCHOLIVM.

*Hoc Theorema conuertemus ad hunc modum.*

Si duabus magnitudinibus incommẽsurabilibus propositis, detrahatur semper minor de maiore, alterna quadam detractione: Nunquam reliqua præcedentem metietur.




*Sint incommensurabiles magnitudines A B, C D, detrahaturq; minor A B, ex C D, & reliqua sit E D. Item E D, ex A B, auferatur, relinquaturq; F B, & sic deinceps. Dico in hac alterna detractione nunquam reliquam metiri præcedentem. Si enim fieri potest, metiatur F B, præcedentem E D.* a 2 pron. *Quoniam igitur F B, metitur E D; & E D, metitur A F;* [a] *metietur quoque F B, ipsam A F: Metitur* b 1. pron. *autem & se ipsam:* [b] *Igitur F B, & totam A B, metietur: Metitur autem A B, ipsam C E.* [c] *Igi-* c 2. pron. *tur & F B, ipsam C E, metietur. Ponitur autem & F B, metiri ipsam E D:* [d] *Igitur & F B, totam* d 1. pron. *C D, metietur. Ostensa est autem & F B, ipsam A B, metiri. Quare F B, vtramq; A B, C D, metitur, quod est absurdum. ponuntur enim A B, C D, incommensurabiles. Nunquam ergo magnitudo aliqua reliqua præcedentem magnitudinem metitur. Quod est propositum.*

*Similiter & hoc demonstrabimus.*

Si duabus magnitudinibus commensurabilibus propositis, detrahatur semper minor de maiore, alterna quadã detractione: Metietur quædã reliqua præcedentẽ.

*Nam si nunquam reliqua metiretur præcedentem, essent propositæ magnitudines incõmensurabiles, vt demonstrauit hoc theoremate Euclides. Quod est absurdũ. ponuntur enim cõmensurabiles.*

*Ita quoque facile ex his dignoscemus, an duæ quæcunque magnitudines propositæ sint commensurabiles, nec ne. Nam detracta semper minore de maiore, alterna quadam detractione, si reliqua quæpiam metiatur præcedentem; erunt magnitudines propositæ commensurabiles, cùm illa eadem reliqua metiatur vtramque magnitudinem propositam, vt constat ex demonstratione primi theorematis huius scholij. Ex eo enim, quòd reliqua magnitudo F B, metiri dicebatur præcedentem E D, ostensum est, eandem reliquam F B, metiri vtramque magnitudinem A B, C D. Si verò nunquam reliqua magnitudo præcedentem metiatur, propositæ magnitudines incommensurabiles erunt, vt Euclides hoc loco demonstrauit.*

## 3. PROBL. 1. PROPOS. 3.

**DVABVS magnitudinibus commensurabilibus datis, maximam earum communem mensuram inuenire.**

DATAE duæ magnitudines commensurabiles sint A B, C D, quarum oporteat maximam mensuram inuenire. Quoniam A B, C D, commensurabiles sunt, fit vt si minor A B, ex maiore C D, detracta, quoties potest, relinquat E D; & E D, detracta ex A B, quoties potest, relinquat F B, & hoc semper fiat alterna quadam detractione: tandem reliqua quæpiam magnitudo præcedentem metiatur, per 2. theor. præcedentis scholij. Metiatur iam F B, reliqua præcedentem E D. Dico F B, esse maximam mẽsuram communem magnitudinum A B, C D. Quòd enim vtramque metiatur, ita ostendemus. Quoniam F B, metitur E D, & E D, metitur A F; [a] metietur quoque F B, ipsam A F: a 2. pron. At metitur F B, & se ipsam. [b] Igitur F B, totam A B, metietur; [c] atque adeò & ipsam b 1. pron. C E, quam A B, metitur. Cùm ergo, & ipsam E D, metiatur; [d] metietur quoq; F B, totam C D. Metitur ergo F B, vtramque A B, C D. Quare vtriusque A B, C D, communis mensura est F B. c 2. pron. d 1. pron.

QVOD autem F B, sit maxima earũm communis mensura, ita probabimus. Si non est maxima, erit aliqua alia communis earum mensura, maior quàm F B. Sit ergo, si fieri potest, G, illarum communis mensura, maior quàm F B. Quia igitur G, metitur vtramque A B, C D; metitur autem & A B, ipsam C E; [e] metietur quoq; G, ipsam C E: e 2. pron. At metitur quoq; totam C D. [f] Igitur G, reliquam quoque E D, metietur: Metitur f 3. pron. autem E D, ipsam A F. [g] Ergo & G, ipsam A F, metietur. Quare cùm G, totam etiam g 2. pron. A B, metiatur; [h] metietur quoque eadem G, reliquam F B, maior minorem. Quod est h 3. pron. absurdum. Non ergo maior magnitudo, quàm F B, communis mensura est ipsarum A B, C D. Quare F B, maxima earum communis mensura est.

QVOD si minor magnitudo A B, metiatur maiorem C D, ita vt detracta ex C D, nihil relinquat; erit ipsa A B, ambarum maxima mensura communis; cùm & se ipsam metiatur. Duabus ergo magnitudinibus commensurabilibus datis, &c. Quod faciendum erat.

COROL-

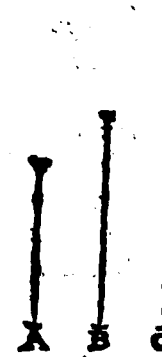
## COROLLARIVM.

*Ex hoc manifestum est, quòd magnitudo metiens duas magnitudines, metitur & maximam earum mensuram communem.*

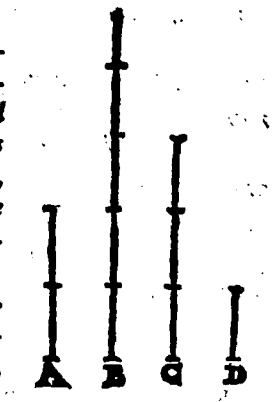
*ELICITVR hoc ex ea parte demonstrationis, qua ostensum est F B, esse maximam mensuram communem ipsarum A B, C D. Demonstratum enim est ibi, magnitudinem G, si metiatur magnitudines A B, C D, metiri quoque maximam mensuram F B. Eademq; est ratio de cæteris.*

## SCHOLIVM.

*Ex his, quæ dicta sunt, non erit difficile considerare, an quotlibet magnitudines propositæ sint cõmensurabiles, nec ne. Sint enim tres magnitudines A, B, C. Primùm experior per ea, quæ ad propos. 2. huius lib. docuimus, an duæ A, & B, commensurabiles sint, an non. Quæ si fuerint incommensurabiles, perspicuum est, omnes tres A, B, C, esse incommensurabiles, quòd nullam habere possint communem mensuram, propter incommensurabiles magnitudines A, & B.*

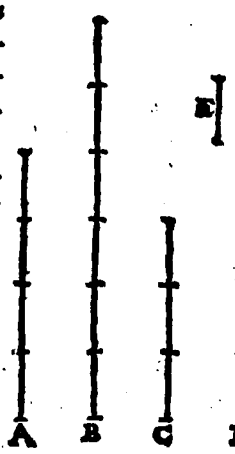



*Si verò A, & B, fuerint commensurabiles, sit earum maxima communis mensura inuenta D; quæ si metiatur quoq; magnitudinem C, manifestum est, tres magnitudines A, B, C, commensurabiles esse, cùm habeant communem mensuram D.*




*Quod si D, maxima mensura magnitudinum A, & B, non metiatur C; erunt C, & D, vel commensurabiles, vel non. Si sunt incommensurabiles, erunt quoq; omnes tres A, B, C, incommensurabiles. Si enim credantur esse commensurabiles, metietur earum maxima cõmunis mensura ipsam D, maximam mẽsuram magnitudinum A, & B, per coroll. huius propos. Cùm ergo eadem illa mensura metiatur quoque C, non erunt C, & D, incommensurabiles. Quod est contra hypothesim.*

*Si verò C, & D, sunt commensurabiles, erunt quoq; tres A, B, C, commensurabiles.* [a] *Inuenta enim E, maxima mensura ipsarum C, & D; cùm E, metiatur D; & D, ipsas A, & B;* [b] *metietur quoq; E, ipsas A, & B. Quare cùm eadem E, metiatur quoq; C; metietur E, tres magnitudines A, B, C; Ac propterea commensurabiles sunt. Quod est propositum.*



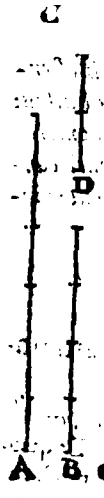

a 3. decimi.

b 2. prop.

*SIMILITER explorabimus, an plures datæ magnitudines, quàm tres, sint commensurabiles, nec ne. Nam si datæ sint quatuor, experiemur id primùm in tribus; si quinque, in quatuor, &c. Reliqua autem perficiemus, vt de tribus magnitudinibus est dictum.*

## PROBL. 2. PROPOS. 4.

TRIBVS magnitudinibus commensurabilibus datis, maximam earum mensuram communem inuenire.




SINT datæ tres magnitudines commensurabiles A, B, C, quarum maximam mensuram inuenire oporteat. [a] Sit D, maxima mensura ipsarum A, B, inuenta. Si ergo D, metiatur quoque C, perspicuum est D, maximam esse mensuram omnium trium A, B, C. Nam si maior magnitudo quàm D, metiri dicatur magnitudines A, B, C; metietur eadem, per coroll. propos. 3. huius lib. maximam mensuram ipsarum A, B, nempe ipsam D, maior magnitudo minorem. quod fieri non potest. Si verò D, non metiatur C, erunt saltem D, C, commensurabiles. Cùm enim A, B, C, sint commensurabiles, metietur quælibet mensura earum communis ipsam D, maximam mensuram ipsarum A, B, per coroll. præcedentis propos. Cùm ergo eadem illa mensura metiatur quoque ipsam C; erunt D, & C, commensurabiles. [b] Sit igitur E, maxima mensura ipsarum inuenta. Dico E, maximam mensuram esse datarum magnitudinum A, B, C. Quòd enim sit communis earum mensura, ita planum fiet. Quia E, metitur D, & C; & D, metitur A, & B; [c] metietur quoque E, ipsas A, & B. Metitur autem & ipsam C: Igitur E, mensura est communis ipsarum A, B, C, quemadmodum asseruimus.

a 3. decimi.

b 3. decimi.

c 2. prop.

QVOD autem E, sit earum maxima mensura, hoc modo confirmari potest. Si non est maxima, sit F, maior quàm E, si fieri potest, earum mensura communis. Quoniam igitur F, metitur A, & B, metietur quoque earum maximam mensuram D, per coroll.

præcedentis propoſ. Metitur autem & C: Igitur F, metiens D, & C, metietur quoque earum menſuram maximam E, ex eodem coroll. maior magnitudo minorem. Quod eſt abſurdum. Non ergo maior magnitudo q̃ E, magnitudines A, B, C, metitur; Ac propterea E, maxima eſt earũ cõmunis menſura. Quam ob rem tribus magnitudinib. cõmenſurabilibus datis, &c. Quod erat faciendum.

## COROLLARIVM.

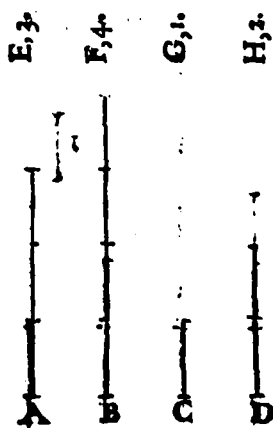
*APERTE quoque ex hoc colligitur, quòd magnitudo metiens tres magnitudines, metitur quoque maximam earum menſuram communem.*

*INFERTVR autem hoc ex vltima parte demonſtrationis. Oſtenſum enim eſt ibi, magnitudinem F, ſi metiatur ipſas A, B, C, metiri quoq; E, maximam illarum communem menſuram. Eademq; de cæteris eſt ratio.*

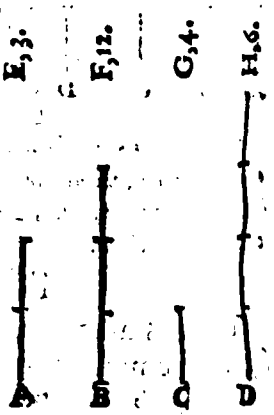
*SIMILI modo, pluribus magnitudinibus commenſurabilibus datis, quàm tribus, maximam earum menſuram communem inueniemus; locumq; habebit hoc idem corollarium. Nam ſi datæ magnitudines fuerint quatuor, inuenienda erit primùm maxima menſura communis trium magnitudinum; Si quinq;, accipienda erit quatuor magnitudinum menſura maxima, &c. Reliqua verò omnia abſoluenda erũt, vt de tribus magnitudinibus eſt dictum.*

## LEMMA.

SI ſint quotcunq; magnitudines, & totidem etiam numeri, qui bini in eadem ratione ſumantur, in qua binæ magnitudines: Et ex æqualitate in eadem ratione erunt magnitudines & numeri.




*SINT quotcunq; magnitudines A, B, C, D, in eiſdem rationibus, in quibus totidem numeri E, F, G, H: Vt quidem A, ad B, ita E, ad F; & vt B, ad C, ita F, ad G; & vt C, ad D, ita G, ad H. Dico ex æquo eſſe, vt A, ad D, ita E, ad H. Quoniam enim ex iis, quæ ad defin. 5. lib. 6. à nobis demonſtrata ſunt, tam proportio A, ad D, componitur ex proportionibus A, ad B; B, ad C; & C, ad D; quàm proportio E, ad H, ex proportionibus E, ad F; F, ad G; & G, ad H; perſpicuum eſt, cùm proportiones componẽtes proportionem A, ad D, æquales ponantur proportionibus, quæ proportionem E, ad H, componũt, & compoſitas proportiones, nempe A, ad D, & E, ad H, æquales eſſe, hoc eſt, eſſe vt A, ad D, ita E, ad H. Quod eſt propoſitum.*




*IDEM ſequitur, ſi magnitudinum, & numerorũ proportio fuerit perturbata, vt in hoc exemplo apparet, in quo eſt, vt A, ad B, ita G, ad H; & vt B, ad C, ita F, ad G; & vt C, ad D, ita E, ad F. Eadem enim prorſus eſt demonſtratio.*

## SCHOLIVM.

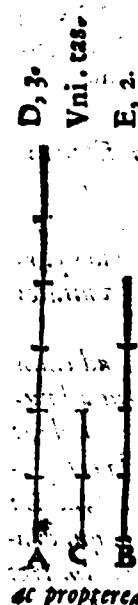
*QVONIAM præcedenti lemmate & in propoſitione, quæ ſequitur, & in aliis multis, vtendum nobis erit; placuit illud hoc loco breuiter demonſtrare, cùm non facilè videatur ex demonſtratis ſequi. Nam magnitudo & numerus diuerſa genera quantitatis conſtituunt: At proportio ex æqualitate in præcedentibus libris oſtenſa, tantùm eſt in quantitatibus eiuſdem generis. In numeris quidem lib. 7. Liber verò 5. in magnitudinibus: quanquam demonſtratio in quinto lib. facta, etiam ad hoc lemma transferri poſſit, cùm omnes demonſtrationes illius libri numeris quoq; conueniant. Vel certè demonſtratio facta in 7. lib. huic eidem lemmati congruet, cùm magnitudines A, B, C, D, quæ proportiones habent eaſdem, quas numeri E, F, G, H, rationem inituant numerorum.*

## THEOR. 3. PROPOS. 5.

COMMENSVRABILES magnitudines inter ſe rationem habent, quam numerus ad numerum.

SINT magnitudines commenſurabiles A, B. Dico eas habere proportionem inter ſe, quam
a 3. decimi. numerus aliquis habet ad alium numerũ. Sit enim earum maxima menſura mensura C. Et quoties ea repetita metitur A, toties vnitas repetita metiatur numerum D; Et quoties eadem C, repetita

petita metitur B, toties vnitas repetita metiatur numerum E. Quoniam igitur magnitudo C, magnitudinem A, & vnitas numerum D, æquè metitur; continebit æqualiter magnitudo A, magnitudinem C, atque numerus D, vnitatem. Quare erit vt A, ad C, ita numerus D, ad vnitatem: Est autem & vt C, ad B, ita vnitas ad numerum E; quòd C, ipsam B, atque vnitas numerum E, æquè metiatur. Igitur per lemma præcedens, erit ex æquo, vt A, magnitudo ad B, magnitudinem, ita D, numerus ad E, numerum. Commensurabiles ergo magnitudines inter se rationem habent, &c. Quod erat demonstrandum.

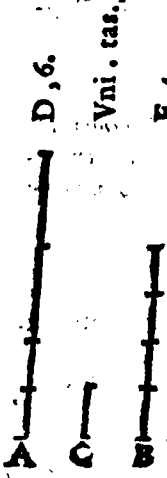



## SCHOLIVM.

*Cvm Euclides ad demonstrationem huius theorematis assumat maximam communem mensuram propositarum magnitudinum commensurabilium, qualis fuit C, ipsarum A, & B, perspicuum est, lineas debere esse longitudine, & ob id potentia quoque commensurabiles, vt rationem habeant inter se, quam numerus ad numerum. Ha enim sola communem recipiunt mensuram, atq; adeò in eis demonstratio locum habet.*

*Qvod si lineæ sint potentia tantùm commensurabiles, habebunt quidem earũ quadrata inter se rationem, quam numerus ad numerum, quia commensurabilia sunt, atq; idcirco mensuram habent communem, ipsisq; demonstratio huius theorematis conuenit: At ipsa lineæ nequaquam, quia longitudine incommensurabiles cùm sint, communis mensura sunt expertes, ac propterea huius theorematis demonstratio in ipsas conuenire nullo modo potest.*

*Ex demonstratione porrò eiusdem huius theorematis liquidò constat, commensurabilium magnitudinum proportionem esse eam, quam habent numeri, per quos eorum communis mensura maxima ipsas metitur. Ostensum enim est, eam habere proportionem magnitudines A, & B, quam habent numeri D, & E; per quos scilicet earum mensura communis maxima C, ipsas metitur.*



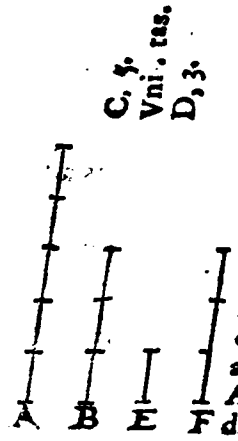

*Vnde si propositis duabus magnitudinibus commensurabilibus A, & B, libeat inuenire, quam proportionem habeant in numeris; sumendi erunt duo numeri D, & E, quos vnitas æquè, ac communis magnitudinum commensurabilium A, & B, mensura maxima C, ipsas magnitudines metitur. Nam vt demonstratum est, magnitudines A, & B, proportionem habent, quam numeri D, & E.*

*Qvod si loco maximæ mensuræ C, sumamus aliam quamcumque communem earum mensuram, nihilominus hoc theorema demonstrabimus eodem argumento. Quamuis enim numeri D, & E, maiores inueniantur in hac posteriori demonstratione, quàm in priori; habent tamen eandem proportionem cum illis, vt ex appositæ figura apparet. Quoniam verò in priori demonstratione numeri inuenti, sunt minimi omnium eandem cum ipsis proportionem habentium; propterea fortassis Euclides in demonstratione maximam communem mensuram assumpsit, & non quamlibet, licet id necessarium non sit.*

## THEOR. 4. PROPOS. 6.

6.

Si duæ magnitudines inter se proportionem habeant, quam numerus ad numerum: commensurabiles erunt magnitudines.




Habeant duæ magnitudines A, B, eam proportionem, quam numeri C, D. Dico A, B, magnitudines esse commensurabiles. Quoties enim vnitas continetur in numero C, in tot æquales partes diuisa intelligatur magnitudo A, quarũ partium vni æqualis sit magnitudo E. Deinde quoties vnitas repetita metitur numerum D, toties magnitudo E, repetita metiatur magnitudinem quandam aliam F. Quoniã igitur magnitudo E, toties in A, cõtinetur, quoties vnitas in C; cõtinebit æqualiter A, ipsam E, & C, numerus vnitatẽ. Quare erit A, ad E, vt C, ad vnitatem: Est autem & vt E, ad F, ita vnitas ad D, quòd E, ipsam F, & vnitas ipsum D, æquè metiatur. Igitur per lemma propos. 4. huius lib. erit ex æquo, vt A, ad F, ita C, ad D: Erat autem etiam vt C, ad D, ita A, ad B. Igitur erit vt A, ad B, ita A, ad F; [a] ac propterea B, & F, magnitudines æquales inter se sunt. Quocirca cùm E, ipsam F, metiatur, metietur quoq; eadem E, ipsam B: Metiebatur autem & ipsam A. Igitur magnitudo E, vtramque A, & B, metitur; [b] Ac proinde A, & B, magnitudines commensurabiles inter se sunt. Si igitur duæ magnitudines inter se proportionem habeant, &c. Quod erat demonstrandum.

[a] 9. quinti.

[b] 1. defin.

Aliter. Quot sunt vnitates in C, in tot partes æquales intelligatur diuisa magnitudo A, quarum partium vni æqualis sit magnitudo E. Quoniam igitur est vt E, ad A, ita vnitas ad C, quòd E, ipsam A, & vnitas ipsum C, æquè metiantur; ponitur q; vt A, ad B, ita C, ad D; erit per idem lem-

ma superius, ex æquo, vt E, ad B, ita vnitas ad D: Metitur autem vnitas numerum D. Igitur & magnitudo E, magnitudinem B, metitur: Metitur autem E, ipsam quoq; A. Igitur A, & B, habentes eandem communem mensuram E, [a] commensurabiles sunt. Quod est propositum.

a 1. defin.

## COROLLARIVM.

*Ex priori autem demonstratione theorematis aperta est nobis via, qua lineam rectam inueniamus, ad quam ita se habeat quauis alia data recta linea, vt numerus ad numerum. Nam (repetita priori figura huius propositionis) si inuenienda sit linea, ad quam ita se habeat linea data A, vt numerus C, ad numerum D; diuidenda erit linea A, in tot æquales partes, quot vnitates sunt in C; & sumenda alia linea F, tot earundem partium, quot vnitates sunt in D. Hoc enim si fiat, erit A, ad F, vt C, ad D, vt demonstratum est.*

C 2. D 3. A G. F

*HINC rursus apparet, quánam arte possit inueniri linea recta, ad cuius quadratum ita se habeat quadratum alterius datæ rectæ, vt numerus ad numerum. Si namque inuenienda sit linea, ad cuius quadratum ita se habeat quadratum lineæ datæ A, vt numerus C, ad numerum D, inuenienda erit primùm linea F, ex iis, quæ modò diximus, ad quam sic se habeat A, vt C, ad D:* [a] *Deinde accipienda inter A, & F, media proportionalis G. Erit enim quadratum ex A, ad quadratum ex G, vt C, numerus ad numerum D. Cùm enim tres rectæ A, G, F, sint continuè proportionales, erit ex coroll. propos. 20. lib. 6. vt A, ad F, atque adeò vt numerus C, ad numerum D, (cùm sit vt A, ad F, ita C, ad D,) sic quadratum ex A, ad quadratum ex G; cùm quadrata omnia sint similia simulterq; descripta.*

a 13. sexti.

## SCHOLIVM.

*IN hoc etiam theoremate manifestum est, lineas proportionem habentes, quam numerus ad numerum, commensurabiles esse longitudine & potentia, non autem potentia tantùm; quoniam habent, vt ex demonstratione constat, mensuram communem, quemadmodum & magnitudines A, & B, mensuram communem E, habere demonstratum est.*

## 7. THEOR. 5. PROPOS. 7.

**INCOMMENSVRABILES magnitudines inter se proportionem non habent, quam numerus ad numerum.**

SINT incommensurabiles magnitudines A, & B. Dico eas proportionem non habere, quam habet numerus ad numerum. Si enim A, & B, proportionem dicatur habere, quam numerus ad numerum: [a] erunt ipsæ commensurabiles. Quod est absurdum. ponuntur enim incommensurabiles. Non igitur A, & B, proportionem habent, quam numerus ad numerum. Quare incommensurabiles magnitudines, &c. Quod ostendendum erat.

a 6. decimi.

A B

## SCHOLIVM.

*QVOCVNQVE modo lineæ incommensurabiles sint, siue longitudine & potentia, siue longitudine tantùm, semper colligemus, eas proportionem non habere, quam numerus ad numerum, vt vult theorema. Nam aliàs, vt demonstratum est, essent longitudine commensurabiles. Quod non ponitur.*

## 8. THEOR. 6. PROPOS. 8.

**SI duæ magnitudines inter se proportionem non habeant, quam numerus ad numerum: Incommensurabiles erunt magnitudines.**

NON habeant magnitudines A, & B, inter se proportionem, quam numerus ad numerum. Dico eas incommensurabiles esse. Si enim A, & B, credantur esse commensurabiles: [b] erit earum proportio, quæ numeri ad numerum. Quod est absurdum. ponuntur enim non habere proportionem, quam numerus ad numerum. Non igitur commensurabiles sunt A, & B. Quocirca si duæ magnitudines inter se proportionem nõ habeant, &c. Quod erat ostendendum.

b 5. decimi.

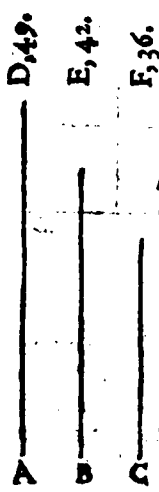
A B

## SCHOLIVM.

*QVOD si lineæ proportionem non habeant, quam numerus ad numerum, erunt ipsæ necessariò, ex hoc theoremate, longitudine incommensurabiles; alioquin proportionem haberent, quam numerus ad numerum, vt ad propos. 5. huius lib. demonstrauimus. quod est contra hypothesim. Non autem colligendum est ex hoc theoremate, lineas, quæ proportionem non habent, quam numerus ad numerum, necessariò & potentia*

*sentia incommensurabiles esse, vt manifestum est ex demonstratione. Non enim sequitur si potentia tantum sint commensurabiles, eas proportionem habere, quam numerus ad numerum, vt in demonstratione theorematis assumitur; immo nullo modo talem proportionem habere possunt, vt in scholio propos. 5. huius lib. docuimus. Solùm igitur infertur ex huius theorematis demõstratione, lineas proportionem non habentes, quam numerus ad numerum, longitudine esse incommensurabiles.*

## LEMMA.



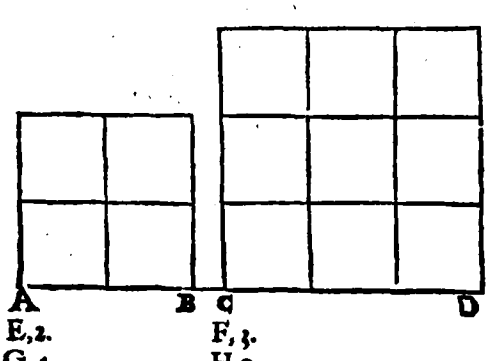

Si sint tres quantitates continuè proportionales, & aliæ tres continuè quoq; proportionales; sitq; vt prima illarum ad tertiam, ita prima harum ad tertiam: Erit & vt prima illarum ad secundam, ita prima harum ad secundam.

*Sint continuè proportionales tam quantitates A, B, C, quàm D, E, F; siue priores in eodem genere sint, in quo posteriores, siue non; sitq; vt A, ad C, ita D, ad F. Dico quoque esse vt A, ad B, ita D, ad E. Quoniã enim tam proportio A, ad C, proportionis A, ad B, quàm proportio D, ad F, proportionis D, ad E, duplicata est; ponunturq; proportiones A, ad C, & D, ad F, æquales; erunt quoq; proportiones A, ad B, & D, ad E, æquales; quandoquidem earum proportiones duplicatæ æquales sunt.*

*Idem sequitur, si plures quantitates sint, quàm tres; si tamen in quatuor assumamus triplicatam proportionem loco duplicatæ, ad demonstrationem: & in quinque, quadruplicatam, &c.*

## THEOR. 7. PROPOS. 9. 7.

Quae à rectis lineis longitudine commensurabilibus fiunt quadrata; inter se proportionem habent, quam quadratus numerus ad quadratum numerum: Et quadrata inter se proportionem habentia, quam quadratus numerus ad quadratum numerum; & latera habebunt longitudine commensurabilia. Quæ verò à rectis lineis longitudine incommensurabilibus fiunt quadrata; inter se proportionem non habent, quam quadratus numerus ad quadratum numerum: Et quadrata inter se proportionem non habentia, quam quadratus numerus ad quadratum numerum; neque latera habebunt longitudine commensurabilia.



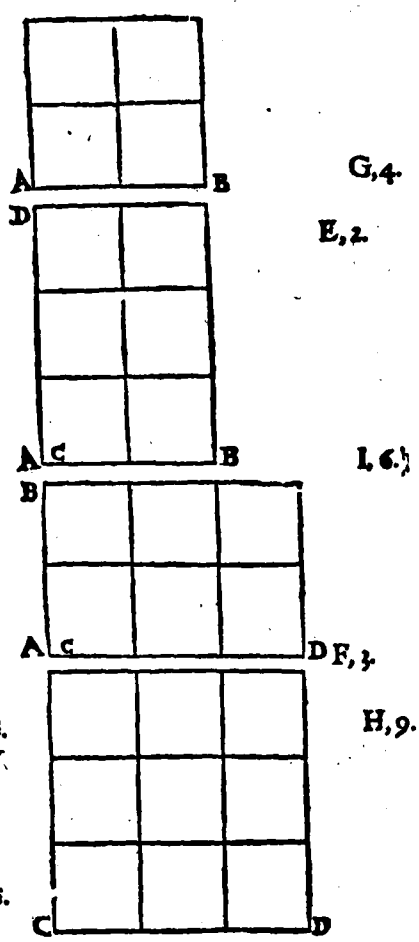

Sint primùm rectæ AB, CD, longitudine commensurabiles. Dico quadratum ex AB, ad quadratum ex CD, proportionem habere, quam numerus quadratus ad numerũ quadratum. Quoniam enim rectæ AB, CD, longitudine sunt commensurabiles; [a] erit AB, ad CD, vt numerus ad numerum: Sit vt E, numerus ad numerum F; quadrati autem ipsorum E. & F, sint G, & H. Quoniam igitur est AB, ad CD, vt E, numerus ad numerum F: [b] habet autem quadratum ex AB, ad quadratum ex CD, duplicatam proportionem lateris AB, ad latus CD: [c] Item & numerus quadratus G, ad quadratum H, proportionẽ habet duplicatam lateris E, ad latus F; Erit proportio quadrati ex AB, ad quadratum ex CD, eadem, quæ numeri quadrati G, ad numerum quadratum H; quãdoquidem ambæ hæ proportiones, duplicatæ sunt proportionum æqualium. Quod est propositum.

[a] 5. decimi.
[b] 20. sexti.
[c] 11. octaui.

Aliter. Posita eadem constructione, contineatur rectãgulum BD, sub rectis AB, CD. Et E, F, se mutuò multiplicantes faciant I, qui medius proportionalis erit inter quadratos G, H, vt constat ex demonstratione propos. 11. lib. 8. atq; adeò in proportione lateris E, ad latus F, vt diximus in scholio eiusdem propos. Quoniam igitur est AB, ad CD, vt E, ad F: [d] Vt autem AB, ad CD, ita est quadratum ex AB, ad rectangulum BD, ob eandem altitudinem AB, si CD, ponatur basis rectanguli; Item vt E, ad F, ita est G, ad I: Erit quoque quadratum ex AB, ad rectangulum BD, vt quadratus numerus G, ad numerum I. Rursus quia est AB, ad CD, vt E, ad F, [e] Vt autem AB, ad CD, ita est rectangulum BD, ad quadratum ex CD, ob eandem altitudinem CD, si AB, ponatur basis rectanguli; Item vt E, ad F, ita est I, ad H: Erit quoque rectangulum BD, ad quadratum ex CD, vt I, numerus ad numerum quadratum H. Quare tres magnitudines, nimirum

[d] 1. sexti.
[e] 1. sexti.

quadratum ex AB, rectangulum BD, & quadratũ ex CD, in eadem ratione continua ſunt, in qua tres numeri G, I, H. Igitur ex æquo, per lemma propoſ. 4. huius lib. erit quadratum ex AB, ad quadratum ex CD, vt numerus quadratus G, ad numerum quadratum H. Quod eſt propoſitum.




SIT ſecundò quadratũ ex AB, ad quadratũ ex CD, vt numerus quadratus G, ad numerũ quadratum H. Dico rectas AB, CD, eſſe longitudine commenſurabiles. Sint enim numeri E, & F, latera quadratorum numerorum G, & H, vt in priori figura. Quoniam igitur eſt quadratum ex AB, ad quadratum ex CD, vt quadratus numerus G, ad quadratum numerum H: [a] Habet autem quadratum ex AB, ad quadratum ex CD, proportionem duplicatam lateris AB, ad latus CD; [b] Item & quadratus numerus G, ad quadratum numerum H, proportionem habet duplicatam lateris E, ad latus F: Erit proportio lateris AB, ad latus CD, quæ lateris E, ad latus F; quandoquidem harum proportionum duplicatæ proportiones æquales ſunt. Quare cùm rectæ AB, CD, proportionem habeant quam numeri E, F, [c] ipſæ commenſurabiles erunt longitudine. Quod eſt propoſitum.

A. 20. ſexti. B. 11. octaui. C. 6. decimi.

ALITER. Repetatur conſtructio figuræ poſterioris. [d] Quia igitur eſt vt AB, ad CD, ita quadratum ex AB, ad rectangulum BD; Item vt AB, rurſum ad CD, ita rectangulum BD, ad quadratum ex CD, vt ſuprà diximus; erunt quadratum ex AB, rectangulum BD, & quadratum ex CD, continuè proportionalia in ratione lineæ AB, ad lineam CD: Sunt autem & numeri G, I, H, continuè proportionales in ratione numeri E, ad numerum F, vt ſuprà oſtendimus; ponitúrque quadratum ex AB, ad quadratum ex CD, vt quadratus numerus G, ad quadratum numerum H. Igitur erit per lemma præcedens AB, ad CD, vt G, ad I, hoc eſt, vt E, ad F; [e] ideóque AB, CD, rectæ, proportionem habentes, quam numeri E, F, commenſurabiles ſunt longitudine. Quod eſt propoſitum.

D. 1. ſexti. E. 6. decimi.

SINT tertiò rectę A, B, longitudine incommenſurabiles. Dico earum quadrata proportionem non habere, quam numerus quadratus ad numerum quadratum. Si enim quadratum ex A, ad quadratum ex B, proportionem dicatur habere, quam numerus quadratus ad numerum quadratum; erunt A, B, longitudine commenſurabiles, vt iam eſt demonſtratum. Quod eſt abſurdum. ponuntur enim longitudine incommenſurabiles. Non ergo quadratum ex A, ad quadratum ex B, proportionem habet, quam numerus quadratus ad numerum quadratum. Quod eſt propoſitum.

QVARTO ac poſtremò, quadratum ex A, ad quadratum ex B, non habeat proportionem, quam numerus quadratus ad numerum quadratum. Dico eas longitudine eſſe incommenſurabiles. Si enim longitudine commenſurabiles credantur; habebunt earum quadrata, vt eſt demonſtratum, proportionem, quam quadratus numerus ad quadratum numerum. Quod eſt abſurdum. ponuntur enim non habere. Non ergo longitudine commenſurabiles ſunt A, & B. Quod eſt propoſitum. Igitur quæ à rectis lineis longitudine commenſurabilibus fiunt quadrata, &c. Quod erat demonſtrandum.

## COROLLARIVM.

*Ex his manifeſtum eſt, rectas lineas, quæ longitudine ſunt commenſurabiles, omnino & potentia commenſurabiles eſſe: Quæ verò potentia commenſurabiles, non omnino & longitudine. Et quæ longitudine incommenſurabiles ſunt, non omnino & potentia incommenſurabiles: Quæ verò potentia incommenſurabiles, omnino & longitudine incommenſurabiles eſſe.*

QVONIAM

QVONIAM enim quadrata linearum longitudine commensurabilium proportionem habent, quam quadratus numerus ad quadratum numerum, vt in hoc theoremate demonstratum est, hoc est, simpliciter quam numerus ad numerum; [a] ipsa commensurabilia erunt; [b] Ac propterea & latera ipsorum potentia commensurabilia existent. Quare linea longitudine commensurabiles, omnino & potentia commensurabiles sunt.

a 6.decimi
b 3.defin.

DEINDE quia linea, quarum quadrata proportionem non habent, quam quadratus numerus ad quadratum numerum, sed tamen, quam numerus simpliciter ad numerum, [c] potentia quidem commensurales sunt, [d] cùm earum quadrata commensurabilia sint; at longitudine nequaquam, vt in hoc theoremate est ostensum; perspicuum est, lineas potentia commensurabiles, non omnino & longitudine commensurabiles esse. Solùm enim ea linea potentia commensurabiles, quarum quadrata proportionem habent, quam numerus quadratus ad numerum quadratum, longitudine quoque sunt commensurabiles, vt constat ex secunda parte huius theorematis.

c 3. defin.
d 6.decimi

RVRSVS quia linea, quarum quadrata proportionem non habent, quam numerus quadratus ad numerum quadratum, sed tamen, quam numerus ad numerum, incommensurabiles quidem sunt longitudine, at potentia commensurabiles, vt modò diximus; liquidò constat, lineas longitudine incommensurabiles, non omnino & potentia incommensurabiles esse. Solùm enim ea linea longitudine incommensurabiles, quarum quadrata proportionem non habent, quam numerus ad numerum; [e] potentia quoque incommensurabiles sunt, [f] cùm earum quadrata incommensurabilia sint.

e 4.defin.
f 8. decimi

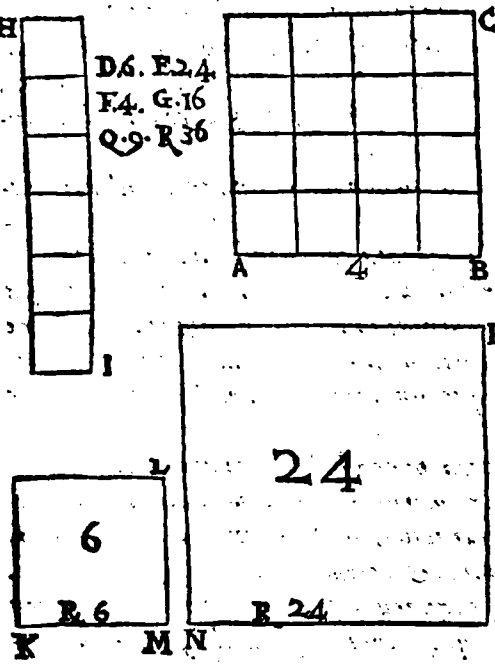
POSTREMO, lineas potentia incommensurabiles, esse omnino & longitudine incommensurabiles, perspicuum est. Nam si longitudine essent commensurabiles, omnino & potentia commensurabiles forent, vt patet ex prima parte corollarij. Quod est absurdum. Ponuntur enim potentia incommensurabiles. Quam ob rem linea potentia incommensurabiles, omnino & longitudine incommensurabiles sunt.

## SCHOLIVM.

VT autem scopus priorum duarum partium huius theorematis planius perfectiusq; percipiatur, diligenter considerandа sunt hac, quа sequuntur. Primùm lineas rectas longitudine commẽsurabiles, quarum quadrata, ex prima parte theorematis, proportionem habent, quam quadratus numerus ad quadratum numerum, non solùm esse eas, quæ numeris exprimi possunt, si cum linea Rationali proposita comparentur; quales sunt illæ, quæ in demonstratione sunt positæ: (est enim recta A B, 2. & C D, 3.) verùm etiam illas, quæ nullis possunt numeris efferri, si cum Rationali linea proposita conferantur: Deinde econtrariò, quadrata inter se proportionem habentia, quam quadratus numerus ad quadratum numerum, quorum linea, seu latera, ex secunda theorematis parte, longitudine sunt commensurabilia, non solùm ea esse intelligenda, quæ continent totidem quadratas mensuras æquales illis, in quas quadratum Rationalis linea resoluitur, quot sunt vnitates in numeris quadratis, eandem cum ipsis proportionem habentibus; cuiusmodi sunt quadrata in demonstratione descripta: (continet enim quadratum ex A B, quatuor mensuras quadratas, & quadratũ ex C D, nouem; quot nimirum vnitates sunt in quadratis numeris G, H.) Sed ea etiam, quæ vel pauciores, vel plures mensuras quadratas complectuntur, quàm sunt vnitates in numeris illis quadratis, si cum quadrato linea Rationalis conferantur. Sæpenumero enim lineæ datæ commensurabiles inter se sunt longitudine, sed numeris exprimi non possunt, propterea quòd Rationali linea proposita sunt longitudine incommensurabiles; Ac propterea quadrata illarum proportionem quidem habent, quam quadratus numerus ad quadratum numerum, vt in hoc theoremate est ostensum, at pauciores quadratas mensuras, vel plures continent, quàm sunt in quadratis illis numeris vnitates. Hæc autem omnia perspicua faciemus hac demonstratione.

EXPONATVR linea Rationalis A B, expressa numero 4. cuius quadratum A C, continebit mensuras quadratas 16. Sint quoque numeri D, E, plani similes non quadrati, habentes tamen proportionem, [g] vt in Arithmeticis est demonstratum, quam quadratus numerus F, ad quadratum numerum G, nempe 4. ad 16. Deinde sumatur rectangulum H I, constans ex sex quadratis mensuris quadrati A C, quot nimirum vnitates in D, numero continentur; [h] atq; ipsi H I, quadratum æquale constituatur K L, cuius latus K M. Posteremò per ea, quæ in coroll. propos. 6. huius lib. ostendimus, inueniatur recta N O, ad cuius quadratum N P, ita se habeat K L, quadratum recta K M, vt numerus D, ad numerum E, vel vt quadratus F, ad quadratum G. Quoniam igitur est vt quadratus numerus F, ad quadratum numerum G, vel vt numerus D, ad numerum E, videlicet 6. ad 24. ita quadratum K L, ad quadratum N P, per constructionem; Continet autem quadratum K L, 6. mensuras quadratas, qualium 16. continet quadratum Rationale A C: (constructum enim est quadratum K L, æquale rectangulo H I, constanti ex 6. huiusmodi quadratis mensuris.) continebit quadratum N P, earundem mensurarum quadratarum 24. ac propterea K M, N O, latera quadratorum K L, N P, erunt

g 16.octaui
h 14. secundi




*Rad. 6. & Rad. 24. quæ numeris exprimi nequeunt, cùm 6. & 24. non sint numeri quadrati, eruntq; linea Rationali A B, longitudine incommensurabilia, inter se autem commensurabilia longitudine, ex hoc theoremate, cùm eorum quadrata proportionem habeant, quam quadratus numerus F, ad quadratum numerum G. Quod etiam ex hoc constare potest. Nam cùm quadrata K L, N P, proportionem habeant, ex coroll. propos. 20. lib. 6. duplicatam laterum K M, N O, sit autem quadratorum proportio subquadrupla, nempe 1. ad 4. erit proportio laterum subdupla, videlicet 1. ad 2. huius cum illa duplicata est, vt hic apparet 1. 2. 4. [a] Quare longitudine cōmensurabiles sunt rectæ K M, N O, cùm proportionem habeant, quā numerus ad numerū. Intelligenda sunt ergo in hoc theoremate lineæ etiam illæ longitudine commensurabiles, quæ numeris non possunt exprimi si cum linea Rationali comparentur. Quod si considerentur eædem lineæ K M, N O, simpliciter, & absolutè, nulla habita ratione lineæ Rationalis A B, numeris poterunt efferri. Cùm enim proportionem habeant subduplam, si K M, diuidatur in duas partes æquales, diuidetur N O, in eiusdem magnitudinis partes 4. si illa in 3. secabitur hæc in 6. &c. At verò hæ partes nullo modo æquales sunt partibus lineæ Rationalis A B, immò illis omnino sunt longitudine incommensurabiles, vt diximus.*

*Rvrsvs, quia quadrata K L, N P, proportionem habentia, quam quadratus numerus F. ad quadratum numerum G, plures quadratas mensuras continent æquales illis in quas A C, quadratum Rationalis lineæ A E, resoluitur, quàm vnitates sunt in dictis numeris quadratis F, G; (Nam K L, æquale est sex huiusmodi mensuris, & N P, continet 24. At numerus quadratus F, componitur ex quatuor vnitatibus, & G, ex 16.) Et si maiores quadrati in eadem proportione sumantur Q, R, pauciores tales mensuras complectuntur quadrata K L, N P, quàm sunt vnitates in numeris quadratis Q, R, cùm alter ex 9. alter verò ex 36. vnitatibus constituatur; manifestum est, in hoc theoremate intelligenda quoq; esse quadrata proportionem habentia, quam numerus quadratus ad numerum quadratum, quæ pauciores quadratas mensuras, vel plures comprehendunt, quàm vnitates in illis quadratis numeris reperiuntur, si ea conferantur cum quadrato lineæ Rationalis propositæ. Quod si eadem quadrata K L, N P, considerentur absolutè, & simpliciter, nulla habita ratione quadrati A C, ex Rationali linea A B, descripti, resolui poterunt in totidem mensuras quadratas, quot vnitates in quadratis numeris F, G, vel Q, R, continentur. Nam si recta K M, diuidatur in duas partes, & N O, in quatuor, vt dictum est, continebit quadratum K L, quatuor mensuras quadratas, & quadratum N P, sexdecim, quot scilicet vnitates reperiuntur in quadratis numeris F, G. Item, si eadem lineæ secentur in partes tres, & sex, habebunt earum quadrata mensuras quadratas 9. & 36. quot nimirum vnitates comprehenduntur in numeris quadratis Q, R, &c. At huiusmodi mensuræ nullo modo æquales sunt quadratis mensuris, in quas quadratum A C, Rationalis lineæ A B, resoluitur.*

*Idem dicemus de omnibus aliis quadratis, eorumq; lateribus, quorum superficies non exprimuntur numeris quadratis, dummodo proportionem habeant inter se, quam numeri quadrati ad numeros quadratos; eiusmodi sunt quadrata, quorum superficies sint 12. & 3. habentes proportionem, quam quadratus numerus 16. ad quadratum numerum 4. &c.*

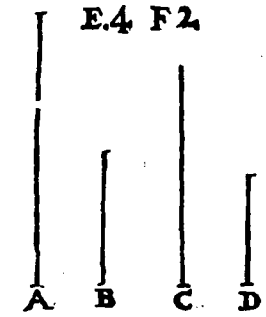
*Itaqve theorema hoc intelligendum est de lineis longitudine commensurabilibus inter se, quamuis interdum Rationali lineæ incommensurabiles sint, vt sit sensus. Quadrata quæ describuntur à rectis lineis longitudine inter se commensurabilibus, licet interdum longitudine sint incommensurabiles lineæ Rationali propositæ, proportionem inter se habent, quam quadratus numerus ad quadratum numerum, quamuis ipsa quadrata, si cum quadrato Rationalis lineæ conferantur, sæpenumero numeris quadratis nullo modo possint exprimi: Et quadrata inter se proportionem habentia, quam quadratus numerus ad quadratum numerum, siue hæc quadrata numeris quadratis possint exprimi, siue non, si comparentur cum quadrato Rationalis lineæ, latera habebunt longitudine inter se commensurabilia, etiamsi lineæ Rationali sint longitudine incommensurabilia, &c.*

*Colligit Campanus ex hoc theoremate, in figuris quadratis diametrum lateri incommensurabilem esse longitudine, hac ratione. Quoniam quadratum diametri duplum est quadrati lateris, vt ad propos. 47. lib. 1. demonstrauimus; Nulla autem proportio dupla eadem esse potest, quæ quadrati numeri ad quadratum numerum, quòd inter numeros duplam proportionē habentes nullus medius cadat proportionalis, vt in scholio propos. 8. lib. 8. ostendimus: Non habebunt quadratum diametri, & quadratum lateris proportionem, quam numerus quadratus ad numerum quadratum. Quare ex vltima parte huius theorematis eorum latera*

*nempe diameter, & latus in vno eodemq; quadrato, longitudine inter se sunt incommensurabilia. Hoc etiam nos demonstrauimus in scholio propos. 8. lib. 8. Quod tamen clarius ostendet Euclides propos. vltima huius lib.*

## THEOR. 8. PROPOS. 10. 11.

SI quatuor magnitudines proportionales fuerint, prima verò secundæ fuerit commensurabilis; & tertia quartæ commensurabilis erit. Et si prima secundę fuerit incommensurabilis; & tertia quartæ incommensurabilis erit. 10.




SINT proportionales quatuor magnitudines, A, B, C, D, sitq; A, prima secundæ B, commensurabilis. Dico & tertiam C, quartæ D, commensurabilem esse. Quoniam.n. A, & B, inter se commensurabiles sunt, [a] habebit A, ad B, proportionem quam numerus ad numerum, nempe quam E, ad F: Ponitur autem vt A, ad B, ita C, ad D: Igitur & C, ad D, proportionem habet quam numerus E, ad numerum F. [b] Quare C, & D, commensurabiles inter se sunt. a 5. decimi. b 6. decimi.

SED sit iam A, ipsi B, incōmensurabilis. Dico & C, ipsi D, esse incommensurabilem. Quoniam enim A, & B, incommensurabiles sunt, [c] non habebit A, ad B, proportionem, quam numerus ad numerum: Ponitur autem vt A, ad B, ita C, ad D. Igitur nec C, ad D, proportionem habet, quam numerus ad numerum. [d] Quare C, & D, incommensurabiles sunt inter se. Si quatuor ergo magnitudines proportionales fuerint, &c. Quod erat ostendendum. c 7. decimi. d 8. decimi.

### SCHOLIVM.

*QVOD si quatuor propositæ magnitudines fuerint lineæ, prima autem secundæ commensurabilis fuerit longitudine, erit & tertia quartæ lōgitudine commensurabilis, vt ex demonstratione huius theorematis apparet. Eodem enim modo ostendemus posteriores duas proportionem habere numeri ad numerum. Quare, vt in scholio propos. 5. huius lib. diximus, longitudine commensurabiles sunt.*

*SI autem prima secundæ fuerit cōmensurabilis potentia tantùm, erit & tertia quartæ potentia tantùm commensurabilis. Repetatur enim eadem figura. Quoniam igitur A, cōmensurabilis est potētia ipsi B, [a] erunt earum quadrata cōmensurabilia, [b] ac propterea proportionem habebunt, quā numerus ad numerum. [c] Est autem, vt quadratum ex A, ad quadratum ex B, ita quadratum ex C, ad quadratū ex D. (quod quatuor lineæ propositæ A, B, C, D, proportionales sint, & earum quadrata figuræ similes similiterq; descriptæ.) Igitur & quadrata ex C, D, proportionē habebunt, quam numerus ad numerum. [d] Quare commensurabilia erūt; [e] Ac propterea lineæ C, D, potentia commensurabiles. Quòd autem potentia tantùm sint commensurabiles, ita manifestum fiet. Quoniam rectæ A, B, cùm sint commensurabiles potentia tantùm, longitudine incommensurabiles sunt; non erit earum proportio, qua numeri ad numerum, vt in scholio propos. 7. huius lib. docuimus; Ac propterea neque C, D, proportionem habebunt, quam numerus ad numerum. Longitudine ergo incommensurabiles sunt C, D, ex scholio propos. 8. huius lib. Sunt autem potentia commensurabiles, vt ostendimus: Igitur potentia tantùm sunt commensurabiles. Quod est propositum.* a 3. defin. b 5. decimi c 22. sexti. d 6. decimi e 3. defin.

*EADEM ratione, si prima secunda sit incommensurabilis longitudine tantùm, erit & tertia quarta longitudine tantùm incommensurabilis. Nam si A, & B, sint longitudine tantùm incommēsurabiles; erunt ipsarum potentia commensurabiles; ac propterea ipsa potentia tantùm commensurabiles erunt. Igitur, vt nunc ostendimus, erunt quoq; rectæ C, D, potentia tantùm commensurabiles; Ac idcircò longitudine tantùm incommensurabiles erunt. Quod est propositum.*

*RVRSVS, si quatuor magnitudinum priores duæ fuerint lineæ, duæ verò reliquæ superficies, vel solida; sequetur nihilominus, si lineæ sint longitudine commensurabiles, vel incommensurabiles, & reliquas duas magnitudines commensurabiles, vel incommensurabiles esse. Si enim lineæ longitudine sint commensurabiles, erit earum proportio, qua numeri ad numerum, ex iis, quæ in scholio propos. 5. huius lib. docuimus. Cùm ergo habeant reliquæ duæ magnitudines proportionē eandem, quam lineæ, erit quoq; illarum proportio, qua numeri ad numerum; [f] atque adeò commensurabiles erunt. Si verò lineæ longitudine incommensurabiles sint, siue potentia commensurabiles existant, siue non; non erit earum proportio, qua numeri ad numerū, vt constat ex scholio propos. 7. huius lib. Igitur neq; reliquarū duarū magnitudinū eandem cum illis proportionem habentiū, proportio erit, qua numeri ad numerū. [g] Quare incōmensurabiles erunt. Quod est propositū.* f 6. decimi g 8. decimi

*EODEM modo, si priores duæ magnitudines fuerint superficies, vel solida, posteriores verò duæ, lineæ, demonstrabimus, si plana, vel solida commensurabilia sint, vel incōmensurabilia, lineas longitudine commensurabiles esse, vel incommensurabiles. Si enim plana, solidáve commensurabilia sint, [h] habebunt ipsa proportionem, quam numerus ad numerum. Igitur & lineæ eandem cum ipsis rationem habētes, proportionem habebunt, quam numerus ad numerum; ac propterea longitudine commensurabiles erunt, vt diximus in scholio propos. 6. huius lib. Si verò plana, vel solida sint incommensurabilia, non habebunt ea proportionem, quam numerus ad numerum. Igitur neq; lineæ eandem cum ipsis proportionem habentes, proportionem habebunt, quam numerus ad numerum. Ergo longitudine incommensurabiles erunt per ea, qua docuimus in scholio propos. 8. huius lib. Quod est propositum.* h 5. decimi.

## LEMMA.

Dvos numeros planos inuenire, qui proportionem non habeant, quam quadratus numerus ad quadratum numerum.

*INVENIANTVR duo plani numeri non similes, per ea, quæ ad finem lib. 8. docuimus. Nam huiusmodi numeri non habebunt proportionem, quam quadratus numerus ad quadratum numerum, vt in scholio propos. 26. lib. 8. demonstrauimus. Quod est propositum.*

*QVOD si plures numeros inuenire velimus, quorum quilibet duo proportionem non habeant, quam quadratus numerus ad quadratum numerum, sumemus quotcunque numeros primos, per ea, quæ in scholio propos. 20. lib. 9. tradidimus, A, B, C, D, E. Nulli enim horum primorum acceptorum proportionem inter se habent, ex scholio propos. 26. lib. 8. quam numeri quadrati ad numeros quadratos, cũ non sint plani similes, vt ad finẽ lib. 8. docuimus.*

A,3. B,5. C,7. D,11. E,13.

## SCHOLIVM.

PORRO *inuentionem numerorum planorum non similium, qui videlicet proportionem non habeant, quam quadratus numerus ad quadratum numerum, nõ rectè quidam tradiderunt hoc loco, inter quos etiam est* Federicus Commandinus. *Quod vt ostendamus, adducenda est eorum ratio, quæ dictos numeros inuenire conantur. Ita igitur rem expediunt.*

A, 2. B, 6. E, 12. C, 3. D, 16. F, 48.

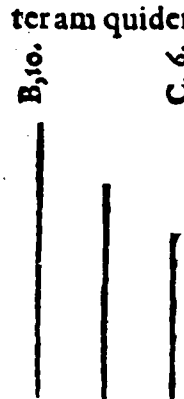
EXPONANTVR quatuor numeri A, B, C, D, ita vt non sit sicut A, ad C, ita B, ad D; & fiat ex A, B, numerus E; & ex C, D, numerus F. Perspicuum igitur est E, F, numeros planos esse, planos autem dissimiles; quoniam latera proportionalia non sunt. quod facere oportebat.

*HAEC est eorum ratio inueniendorum numerorum planorum non similium. Errant autem huiusmodi interpretes, quia sæpenumero inuenti numeri secundùm eorum doctrinam, plani similes sunt. Nam numeri ex eorum demonstratione inuenti, 12. & 48. sunt plani similes, cùm proportionem habeant, quam quadrati numeri 4 & 16. Itemq; prior numerus latera habeat 3. & 4. proportionalia lateribus posterioris 6. & 8. vt constat; quamuis latera prioris ab illis assumpta 2. & 6. non sint proportionalia lateribus posterioris acceptis 3. & 16. Satis enim est, vt duo numeri plani sint similes, aliqua duo latera vnius proportionalia esse quibusdam duobus lateribus alterius, non autem requiritur, vt quæcunq; duo latera vnius proportionalia sint quibuscunq; duob. laterib. alterius; qua de re plura scripsimus in defin. 21. lib. 7. & in scholio propos. 23. lib. 8.*

10. 11.

## PROBL. 3. PROPOS. 11.

PROPOSITAE rectæ lineæ inuenire duas rectas lineas incommensurabiles, alteram quidem longitudine tantùm, alteram verò etiam potentia.




SIT recta proposita A, cui primùm inuenienda sit linea incommensurabilis longitudine tantùm. Inueniantur, per lemma præcedens, duo numeri B, & C, proportionem non habentes, quam quadratus numerus ad quadratum numerum: Deinde ex corollario propos. 6. huius lib. reperiatur linea D, ad cuius quadratum sic se habeat quadratum ex A, vt numerus B, ad numerum C. Dico D, esse ipsi A, incommensurabilem longitudine tantùm. Quòd enim A, & D, longitudine sint incommensurabiles, ita probabitur. Quoniam est quadratum ex A, ad quadratum ex D, vt numerus B, ad numerum C; non est autem proportio B, ad C, quæ numeri quadrati ad numerũ quadratum; neq; quadratum ex A, ad quadratum ex D, proportionem habebit, quam numerus quadratus ad numerum quadratum. [a] Igitur rectæ A, & D, longitudine incommensurabiles sunt. Quòd autem tantùm longitudine sint incommensurabiles, patet. Cùm enim quadrata ex A, & D, proportionem habeant, quam numerus B, ad numerum C, [b] ipsa commensurabilia erunt. Sunt ergo rectæ A, & D, ex definitione, potentia commensurabiles. Quare longitudine tantùm incommensurabiles sunt.

a 9. decimi.

b 6. decimi.

SIT iam eidem rectæ propositæ A, inuenienda linea incommensurabilis longitudine, & potentia. [c] Inueniatur recta E, inter rectas A, & D, longitudine tantùm incommẽsurabiles, media proportionalis. Dico E, ipsi A, incommensurabilem esse longitudine, & potentia. Quoniam enim est quadratum ex A, ad quadratum ex E, per coroll. propos. 20. lib. 6. vt A, ad D; & A, incommensurabilis est longitudine ipsi D, vt iam est ostensum [d] erit & quadratum ex A, incommẽsurabile quadrato ex E. Quare rectæ A, E, ex definitione, potentia sunt incommensurabiles; ac proinde ex coroll. propos. 9. huius lib. & omnino longitudine incommensurabiles sunt. Est igitur E, ipsi A, incommensurabilis longitudine, & potentia. Quocirca propositæ rectæ lineæ inuenimus duas rectas, &c. Quod erat demonstrandum.

c 13. sexti.

d 10. decimi.

## SCHOLIVM.

*SI igitur recta A, proposita statuatur Rationalis, ita vt ab ea mensura cæterarum sumantur; erit & recta D, per defin. 6. Rationalis, quia potentia illi est commensurabilis, licet eidem longitudine incommensurabilis sit.*

*illis sit. At verò E, Irrationalis, ex defin. 7. cùm Rationali A, incommensurabilis sit longitudine, & potentia.*

*CAETERVM ex demõstratione huius theorematis liquidò constat, rectam mediã proportionalẽ inter duas rectas potentia tãtùm cõmensurabiles, vel q̃ idem est, inter duas longitudine tantũ incõmensurabiles, esse vtrilibet illarum incommensurabilẽ longitudine & potentia; atque adeò appellari Irrationalem, si alterutra illarum statuatur Rationalis. Ex eo enim quòd recta A, D, sunt longitudine tantùm incommensurabiles, vel commensurabiles potentia tantùm, demonstrauimus rectam E, inter illas mediam proportionalem, esse ipsi A, incommensurabilem longitudine, & potentia: Eodemq; argumento ostendemus eandem longitudine, & potentia ipsi D, esse incommensurabilem. Cùm enim recta D, E, A, sint continuè proportionales, erit ex corollario propos. 20. lib. 6. vt quadratum ex D, ad quadratum ex E, ita recta D, ad rectam A: Est autem recta D, recta A, incommensurabilis longitudine.* [a] *Igitur & quadratum ex D, quadrato ex E, incommensurabile erit. Quare recta D, & E, ex defin. incommensurabiles sunt potentia atque adeò & longitudine, per corollarium propos. 9. huius libri.* a 10. decimi.

*IN codicibus vulgatis preponitur hæc vndecima propositio à Theone propositioni decimæ precedenti: quod errore librariorum factum esse puto, cùm secunda pars huius ex precedenti propositione decima demonstretur, vt ex dictis apparet.*

12.

## THEOR. 9. PROPOS. 12. 8.

QVAE eidẽ magnitudini sunt cõmensurabiles, & inter se sunt cõmensurabiles.

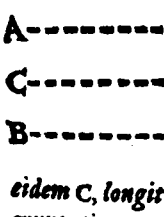
SIT vtraque magnitudo A, B, magnitudini C, commensurabilis. Dico & A, B, inter se esse commensurabiles. Cùm enim A, & C, sint commensurabiles, [a] habebit A, ad C, proportionem, quam numerus ad numerum: habeat quam numerus D, ad numerum E. Rursus quia C, B, commensurabiles sunt, habebit quoq; C, ad B, proportionem, quam numerus ad numerum: habeat quam numerus F, ad numerum G, [b] sumanturque tres numeri H, I, K, minimi deinceps proportionales in proportionibus D, ad E, & F, ad G; sitque H, ad I, vt D, ad E; hoc est, vt A, ad C; & I, ad K, vt F, ad G; hoc est, vt C, ad B. Quoniam igitur est A, ad C, vt H, ad I; & C, ad B, vt I, ad K; erit ex æquo A, ad B, vt H, ad K, numerus ad numerum. Quare A, B, proportionẽ habentes, quam numeri H, K, [c] inter se commensurabiles sunt. Quæ ergo eidem magnitudini commensurabiles sunt, &c. Quod demonstrãdum erat. a 5. decimi. b 4. octaui. c 6. decimi.

### SCHOLIVM.

*QVOD si magnitudines A, B, C, sint lineæ, atq; A, & B, ipsi C, longitudine commensurabiles existant, erunt quoque A, & B, inter se longitudine commensurabiles, vt constat ex demonstratione theorematis, quia eodem modo ostendemus, lineas A, & B proportionẽ habere, quam habet numerus H, ad numerũ K: Quare longitudine commensurabiles erunt, vt ad propos. 6. diximus. Si verò A, & B, fuerint ipsi C, potentia cõmensurabiles, licet eidem longitudine sint incommensurabiles, demonstrabuntur eodem modo & A, B, inter se commensurabiles potentia. Cùm enim A, & C, sint potentia commensurabiles,* [a] *erit quadratum ex A, ad quadratum ex C, vt numerus ad numerum, nempe, vt D, ad E, cùm quadrata ex A, C, per defin. sint commensurabilia. Eodem modo erit quadratum ex C, ad quadratum ex B, vt numerus ad numerum; nimirum vt F, ad G.* [b] *Sumptis ergo in eisdem rationibus D, ad E, & F, ad G, tribus numeris minimis H, I, K, deinceps proportionalibus; erit rursum ex æquo quadratum ex A, ad quadratum ex B, vt numerus H, ad numerum K.* [c] *Quare quadrata ex A, & B, commensurabilia sunt; atque adeò lineæ A, B, potentia commensurabiles. Non tamen ex hoc sequitur, A, & B, potentia tantùm esse commensurabiles. Possunt enim esse duæ lineæ longitudine inter se commensurabiles, licet vtraque cuipiam alteri lineæ potentia tantùm sit cõmensurabilis; quales sunt duæ Rationales lõgitudine inter se cõmensurabiles, potentia verò tantũ Rationali expositæ cõmensurabiles, quas quidẽ inueniemus postea in scholio secundo, propositionis 19. huius libri.* a 5. decimi. b 4. octaui. c 6. decimi.

*SED & conuersum quodammodo huius theorematis demonstrabimus, hoc modo.*

SI sint duæ magnitudines commensurabiles, altera verò sit vni cuipiam commensurabilis; erit & reliqua eidem commensurabilis.




*SINT enim A, & B, commensurabiles, sit q̃ A, ipsi C, commensurabilis. Dico & B, eidem C, commensurabilem esse. Cùm enim tam B, quàm C, ipsi A, sit commensurabilis; erunt quoq; B, & C, ex hoc theoremate, inter se commensurabiles. Quod est propositum.*

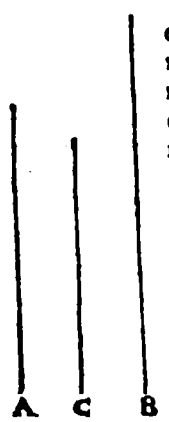
*QVOD si magnitudines A, B, C, sint lineæ, & A, B, commensurabiles longitudine, sit autem A, ipsi C, commensurabilis longitudine; erit & B, reliquæ eidem C, longitudine commensurabilis. Nam cùm tam B, quàm C, ipsi A, longitudine sit commensurabilis, erunt etiam B, C, inter se commensurabiles longitudine, vt ostendimus. At verò si lineæ A, & B, potentia tantùm sint commensurabiles, & A, ipsi C, commensurabilis, siue longitudine, & potentia, siue potentia tantùm, colligemus quidem eodẽ argumento, reliquam B, eidem C, potentia esse commensurabilem; quia vtraq; B, C, ipsi A, hac ratione potentia est commensurabilis ex hypothesi. Non autem colligere licebit, si A, ipsi C,*

*commensurabilis sit longitudine, reliquam B, eidem C, longitudine commensurabilem esse, quia non vtraque B, C, ipsi A, longitudine commensurabilis est, sed C, quidem longitudine; at verò B, potentia tantùm, vt ex hypothesi constat.*

12. 10.

## THEOR. 10. PROPOS. 13.

SI sint duæ magnitudines, & altera quidem eidem sit commensurabilis, altera verò incommensurabilis: Incommensurabiles erunt magnitudines.




SINT duæ magnitudines A, & B, quarum A, sit ipsi C, commensurabilis, & B, eidem C, incommensurabilis. Dico A, & B, inter se incommensurabiles esse. Si enim B, dicatur esse commensurabilis ipsi A; cùm eidem A, commensurabilis ponatur C; [a] erunt B, & C, inter se commensurabiles. quod est absurdum. ponitur enim B, ipsi C, incommensurabilis. Non ergo B, ipsi A, commensurabilis est. Quare si sint duæ magnitudines, & altera quidem, &c. Quod erat ostendendum.

a 12. decimi.

*SCHOLIVM.*

*SI magnitudines A, B, C, sint lineæ, & A, quidem ipsi C, longitudine commensurabilis, at B, eidem C, incommensurabilis longitudine: erunt A, & B, longitudine incommensurabiles. Si enim longitudine commensurabiles essent, [a] ostenderemus quoq; B, C, esse inter se longitudine commensurabiles. (cùm hoc posito, vtraque B, C, ipsi A, commensurabilis esset longitudine) quod non ponitur. Pari ratione, si A, ipsi C, potentia sit commensurabilis, siue tantùm, siue etiam longitudine, at verò B, eidem C, potentia incommensurabilis; erunt A, & B, potentia incommensurabiles. Si enim essent commensurabiles potentia, essent quoq; B, & C, potentia commensurabiles. (cùm hoc posito, vtraque B, C, ipsi A, potentia esset commensurabilis.) Quod est absurdum. Ponitur enim B, ipsi C, potentia incommensurabilis.*

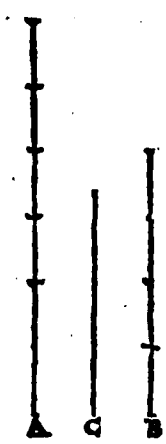
a 12. decimi.

*QVONIAM verò hæc propositio 13. apud Theonem lemma est, fit, vt posthac in nostra editione numerus propositionum Euclidis differat ab eo, quem Theon sequitur. Reliquimus enim dedita opera ordinem ac seriem Theonis hoc loco, quia à iunioribus, & peritioribus Geometris hoc theorema in numerum propositionum Euclidis iam est ascitum.*

13. 8.

## THEOR. 11. PROPOS. 14.

SI sint duæ magnitudines commensurabiles, altera autẽ ipsarum magnitudini cuipiam incommensurabilis fuerit: Et reliqua eidem incommensurabilis erit.




SINT duæ magnitudines commensurabiles A, & B, quarum A, incommensurabilis sit alteri cuipiam C. Dico & B, eidem C, esse incommensurabilem. Nam si B, dicatur esse commensurabilis ipsi C, ac propterea & C, ipsi B; cùm & A, ipsi B, ponatur commensurabilis; [a] erunt & A, C, inter se commensurabiles. Quod est absurdũ. Ponitur enim A, ipsi C, incommensurabilis. Non ergo B, ipsi C, commensurabilis est. Quare si sint duę magnitudines commensurabiles, &c. Quod demonstrandum erat.

a 12. decimi.

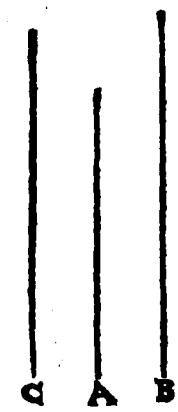
*SCHOLIVM.*

*HIC quoq;, si magnitudines A, B, C, sint lineæ, & A, B, commensurabiles longitudine, sit autem A, ipsi C, siue longitudine tantùm, siue longitudine & potentia incommensurabilis; erit & B, eidem C, longitudine incommensurabilis. Si enim B, & C, essent longitudine commensurabiles, [a] essent quoq; A, & C, commensurabiles longitudine. (Cùm hoc posito, vtraq; A, & C, ipsi B, longitudine esset commensurabilis.) Quod est absurdum. Ponitur enim A, ipsi C, longitudine incommensurabilis. Quòd si A, & B, commensurabiles sint potentia tantũ, & A, ipsi C, potentia incommensurabilis, colligemus eodem modo, & B, ipsi C, potentia incommensurabilem esse. Aliàs si B, C, potentia essent commensurabiles; [b] & A, C, potentia commensurabiles essent. (cùm hoc posito, vtraq; A, C, ipsi B, potentia esset commensurabilis.) Quod non ponitur.*

a 12. decimi.

b 12. decimi.

c 14. decimi.




COLLIGVNT *porrò ex hoc theoremate interpretes Euclidis sequens theorema, ad ea, quæ in hoc libro demonstrantur, perutile.*

QVÆ incommensurabilibus sunt commensurabiles; & inter se incommensurabiles erunt.

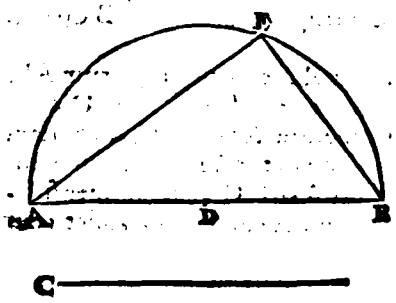
*SINT duæ magnitudines incommensurabiles A, B, quibus commensurabiles sint C, & D, nempe C, ipsi A, & D, ipsi B. Dico C, & D, inter se incommensurabiles esse. Quoniam enim A, & C, commensurabiles ponuntur, & est A, ipsi B, incommensurabilis; [c] erit quoque reliqua C, eidem B, incommensurabilis. Rursus quia D, & B, com-*

*B, commensurabiles ponuntur, & est B, ostensa ipsi C, incommensurabilis;* [a] *erit & D, reliqua eidem C, incommensurabilis. Quod est propositum.* a 14. decimi.

*Si autem magnitudines A, B, C, D, sint lineæ, & A, B, vel longitudine tantùm incommensurabiles, vel longitudine & potentia; sint autem C, D, ipsis A, B, longitudine commensurabiles; erunt C, & D, eodem argumento longitudine incommensurabiles. Si verò A, & B, incommensurabiles sint potentia, & ipsis potentia tantùm commensurabiles C, & D; ostendemus similiter C, & D, potentia esse incommensurabiles; vt perspicuum est.*

## LEMMA.

DVABVS datis rectis lineis inæqualibus, inuenire id, quo maior plus potest, q̃ minor.




*QVAMVIS id, quod lemma hoc proponit, ostenderimus antea ad propos. 47. lib. 1. tamen quia hîc breuius ex ijs, quæ tradita sunt in lib. 3. & 4. demonstratur, non inutile iudicauimus, idem hoc loco aliter efficere. Sint ergo data duæ rectæ lineæ inæquales, A B, & C, quarum A B, maior, oporteatq; inuenire, quo A B, plus possit, quàm C. Diuisa A B, bifariam in D, describatur ex centro D, & interuallo D A, vel D B, semicirculus A E B,* [b] *in quo aptetur recta A E, ipsi C, æqualis, iungaturq; recta E B. Dico rectam A B, plus posse, quàm C, quadrato rectæ E B.* [c] *Cum enim angulus E, in semicirculo rectus sit;* [d] *erit quadratum ex A B, æquale quadratis ex A E, E B; atq; idcirco A B, plus poterit, quàm A E, hoc est, quàm C, quadrato rectæ E B. Quod est propositum. Similiter.* b 1. quarti. c 31. tertij. d 47. primi.

DVABVS datis rectis lineis, siue æqualibus, siue inæqualibus, inuenire rectam, quæ illas potest.

*Hoc etiam tradidimus ad propos. 47. lib. 1. Sint ergo datæ duæ rectæ A E, E B, quæ si coniungantur ad angulum rectum E, poterit eas recta ducta A B,* [e] *quippe cùm quadratum ex A B, æquale sit quadratis ex A E, E B.* e 47. primi.

## THEOR. 12. PROPOS. 15. 14.

SI quatuor rectæ lineæ proportionales fuerint, prima verò tantò plus possit q̃ secunda, quantũ est quadratum rectæ lineæ sibi commensurabilis longitudine: Et tertia tantò plus poterit q̃ quarta, quantũ est quadratũ rectæ lineæ sibi longitudine commensurabilis. Quòd si prima tantò plus possit q̃ secunda, quantũ est quadratum rectæ lineæ sibi incommensurabilis longitudine: Et tertia tantò plus poterit q̃ quarta, quantũ est quadratũ rectæ lineæ sibi longitudine incommensurabilis. 12.

SINT quatuor rectæ lineæ proportionales A B, C D, possitq́ue A, prima plus q̃ B, secunda, quadrato rectæ E, & C, tertia plus possit, q̃ D, quarta, quadrato rectæ F. Dico, si E, commensurabilis sit longitudine ipsi A; & F, commensurabilẽ esse longitudine ipsi C: Si verò E, sit longitudine incõmensurabilis ipsi A; & F, ipsi C, longitudine incommensurabilem esse. Quoniam enim est, vt A, ad B, ita C, ad D; [a] erit quoque vt quadratum ex A, ad quadratum ex B, ita quadratum ex C, ad quadratum ex D. Est autem quadratum ex A, æquale quadratis ex B, E, per hypothesim; & quadratũ ex C, quadratis ex D, F. Igitur erunt quoque, vt quadrata ex B, E, ad quadratum ex B, ita quadrata ex D, F, ad quadratum ex D. Et diuidendo, vt quadratum ex E, ad quadratum ex B, ita quadratum ex F, ad quadratum ex D; [b] Ac propterea erit etiam vt recta E, ad rectam B, ita recta F, ad rectam D; conuertendoq́ue vt B, ad E, ita D, ad F. Quia igitur est vt A, ad B, ita C, ad D; & vt B, ad E, ita D, ad F, erit quoque ex æquo, vt A, ad E, ita C, ad F. Quare si A, est longitudine commensurabilis ipsi E, erit quoque C, ipsi F, longitudine commensurabilis: Et si A, longitudine est incommensurabilis ipsi E, erit & C, ipsi F, incommensurabilis longitudine, vt in scholio propos. 10. huius libri tradidimus. Si igitur quatuor rectæ lineæ proportionales fuerint, &c. Quod erat demonstrandum. a 22. sexti. b 22. sexti.

### SCHOLIVM.

EODEM *argumento ostendemus, si E, potentia tantùm commensurabilis fuerit ipsi A; & F, potentia tantùm ipsi C, esse commensurabilem, vt constat ex ijs, quæ in scholio propos. 10. huius libri scripsimus.*

15. 9.

## THEOR. 13. PROPOS. 16.

SI duæ magnitudines commensurabiles componantur; & tota magnitudo vtrique ipsarum commensurabilis erit. Quòd si tota magnitudo vni ipsarum commensurabilis fuerit; & quæ à principio magnitudines commensurabiles erunt.

COMPONANTVR duæ magnitudines commensurabiles A B, B C. Dico totam quoque magnitudinem A C, vtrique ipsarum A B, B C, commensurabilem esse. [a] Sit enim ipsarum A B, B C, communis mensura D. Quoniam igitur D, ipsas A B, B C, metitur, [b] metietur quoque D, totam A C, ex ipsis compositam. Cùm ergo D, metiatur A C, & A B; erunt A C, A B, commensurabiles. Similiter cùm D, metiatur A C, & B C; erunt & A B, B C, commensurabiles; Ac propterea A C, vtrique ipsarum A B, B C, commensurabilis erit.

a 3. decimi. b 1. pron.

SED iam tota A C, ex A B, B C, composita commensurabilis sit alteri ipsarum A B, B C, nempe ipsi A B. Dico & A B, B C, inter se commensurabiles esse. [c] Sit enim D, communis mensura ipsarum A C, A B. Quoniam igitur D, metitur totam A C, & ablatam A B; [d] metietur quoque D, reliquam B C. Quare cùm D, metiatur A B, B C; commensurabiles erunt A B, B C, inter se. Eodem argumento ostendemus A B, B C, esse commensurabiles, si A C, ipsi B C, fuerit commensurabilis. Si duæ igitur magnitudines commensurabiles componantur, &c. Quod ostendendum erat.

c 3. decimi. d 3. pron.

### COROLLARIVM.

*HINC sequitur, si tota magnitudo ex duabus composita, commensurabilis sit alteri ipsarum, eandem & reliquæ commensurabilem esse. Vt si A C, ipsi A B, sit commensurabilis, esse quoque eandem A C, reliquæ B C, commensurabilem. Nam vt in posteriori parte theorematis ostensum est, semper D, communis mensura totius A C, & ablatæ A B, cùm metiatur totam A C, & ablatam A B, metietur quoque reliquam B C, ex 3. pronunciato. Quare commensurabiles sunt A C, B C. Quod est propositum.*

16. 9.

## THEOR. 14. PROPOS. 17.

SI duæ magnitudines incommensurabiles componantur, & tota magnitudo vtrique ipsarum incommensurabilis erit. Quòd si tota magnitudo vni ipsarum incommensurabilis fuerit; & quæ à principio magnitudines incommensurabiles erunt.

COMPONANTVR duæ magnitudines incommensurabiles A B, B C. Dico totam quoque magnitudinem A C, vtrique ipsarum A B, B C, incommensurabilem esse. Si enim non est vtrique incommensurabilis, sit alteri commensurabilis, si fieri potest, nempe ipsi A B, [e] sitque D, communis mensura ipsarum A C, A B. Quoniam igitur D, metitur totam A C, & ablatam A B; [f] metietur quoque D, reliquam B C. Ac propterea cùm D, metiatur vtramque A B, B C, erunt A B, B C, commensurabiles. Quod est absurdum. ponuntur enim incommensurabiles. Non ergo commensurabilis est A C, ipsi A B; Eademque ratione neq; ipsi B C, commensurabilis erit. Quare vtrique ipsarum A B, B C, commensurabilis est.

e 3. decimi. f 3. pron.

SED iam tota A C, composita ex A B, B C, incommensurabilis sit vni ipsarum componentium, nempe ipsi A B. Dico quoque A B, B C, incommensurabiles esse. Si enim sint commensurabiles, [g] erit quoque tota A C, vtrique ipsarum A B, B C, commensurabilis. Quod est absurdum. Ponitur enim A C, alteri ipsarū, nempe ipsi A B, incommensurabilis. Non ergo commensurabiles sunt A B, B C. Eodem argumento ostendemus A B, B C, incommensurabiles esse, si A C, ipsi B C, incommensurabilis fuerit. Quapropter si duæ magnitudines incōmensurabiles componātur, &c. Quod erat ostendendū

g 16. decimi.

### COROLLARIVM.

*SEQVITVR ex his, si tota magnitudo ex duabus composita, incommensurabilis sit alteri ipsarum, eandem & reliquæ incommensurabilem esse. Nempe si A C, incommensurabilis sit ipsi A B, esse quoque eandem A C, reliquæ B C, incommensurabilem. Si enim A C, ipsi B C, foret commensurabilis, esset quoque A C, ex coroll. precedentis propos. reliquæ A B, commensurabilis. Quod est absurdum. ponitur enim incommensurabilis. Non est ergo A C, ipsi B C, commensurabilis, sed incommensurabilis. Quod est propositum.*

### SCHOLIVM I.

*PERSPICVVM est, in duabus proximis antecedentibus propositionibus, earumq; corollarijs, si de lineis agatur, intelligendas esse lineas longitudine commensurabiles, vel incommensurabiles. Assumitur enim*

ad

*ad vtriusque propositionis demonstrationem communis mensura D, &c. quam quidem solùm linea longitudine inter se commensurabiles habent, vt ex defin. apparet.*

## LEMMA I.

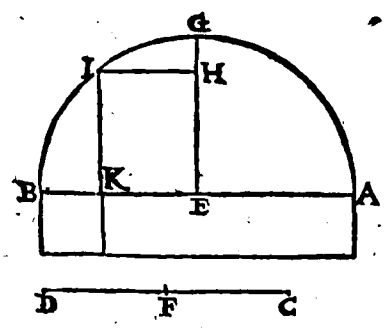
Si ad aliquam rectam lineam applicetur parallelogrammum deficiens figura quadrata; Parallelogrammum applicatum æquale est ei rectangulo, quod sub segmentis rectæ lineę ex applicatione factis continetur.

*Hoc lemma demonstrauimus nos in scholio propos. 28. lib. 6.*

## LEMMA II.

Dvabvs datis rectis lineis inæqualibus, quartam partem quadrati ex minore descripti ad maiorem applicare, ita vt deficiat figura quadrata.

*Qvamvis id, quod hoc lemmate proponitur, absolui possit ex propos. 28. libri 6. quòd quarta pars quadrati ex minore linea descripti, minor sit rectangulo ad dimidiam maioris lineæ applicato, deficienteq; figura quadrata, vt vult propos. illa 28. lib. 6. hoc est, quadratum ex dimidio minoris lineæ descriptũ, (quod quidẽ quarta pars est quadrati ex tota descripti, ex scholio propos. 4. libri 2.) minus sit quadrato ex dimidiata parte maioris descripto: (quod quidem applicatum est ad dimidium maioris, deficitq; figura quadrata.) Quamuis, inquam, absolui hoc possit per propos. 28. lib. 6. libet tamen idipsum hoc in loco cum alijs interpretibus exequi alia ratione faciliori. Sint igitur data rectæ inæquales A B, C D, quarum A B, maior sit, oporteatq; ad A B, applicare parallelogrammum deficiens figura quadrata, quod quidem parallelogrammum æquale sit quartæ parti quadrati ex recta C D, descripti. Sectis rectis A B, C D, bifariam in E, & F, describatur ex centro E, & interuallo E A, vel E B, semicirculus A G B; & ex E, perpendicularis ad A B, ducatur E G. Et quia tota A B, maior ponitur, quàm tota C D, erit quoq; A E, dimidia ipsius A B, hoc est, E G, ipsi A E, æqualis, maior quàm C F, dimidia ipsius C D. Posita igitur E H, æquali ipsi C F, agatur per H, ipsi A B, parallela H I, demittaturq; I K L, ad A B, perpendicularis, & sit K L, ipsi K B, æqualis; Ac tandem perficiantur rectangulum A L, & quadratum B L. Dico parallelogrammum A L, applicatum ad rectam A B, deficiens figura quadrata B L, æquale esse quartæ parti quadrati rectæ C D. Quoniam enim K I, media proportionalis est inter A K, K B, vt in scholio propos. 13. lib. 6. tradidimus; [a] erit rectangulum sub A K, K B, hoc est, rectangulum A L, æquale quadrato ex K I, hoc est, quadrato ex E H; [b] (est enim K I, ipsi E H, æqualis, ob parallelogrammum E I,) hoc est, quadrato ex C F: Est autem quadratum ex C F, quarta pars quadrati ex C D; quod quadratũ ex C D, per scholium propositionis 4. libri 2. quadruplum sit quadrati ex C F. Igitur parallelogrammum A L, ad rectum A B, applicatum, deficiensq; quadrato B L, æquale est quartæ parti quadrati ex C D, descripti. Quod est propositum.*




a 17. sexti.

b 34. primi.

## SCHOLIVM II.

*Ex hoc lemmate absoluemus & hoc problema, quod sequitur, in hunc modum.*

Datam rectam lineam ita secare, vt rectangulum sub partibus contentum, æquale sit dato rectilineo, quod tamen maius non sit, quàm quadratum à dimidia linea descriptum.

*Sit enim recta data A B, & rectilineum quodcunque, cui æquale ponatur quadratum ex C F, nõ maius quàm quadratum ex dimidia A E, ita vt latus C F, non maius sit latere A E. Educta ergo ad A B, perpendiculari E G, fiat E H, æqualis ipsi C F. Deinde acta H I, parallela ipsi A B, demittatur I K, perpendicularis ad A B. Quibus peractis, ostendemus, vt prius, rectangulum sub partibus A K, K B, æquale esse quadrato ex I K, hoc est, quadrato ex C F, atq; adeò & rectilineo dato, cui æquale est positum quadratum ex C F. Quod est propositum. Diximus autem, rectilineum datum non debere esse maius, q̃ quadratum ex dimidia linea descriptum; quia si maius esset, esset quoq; recta C F, maior quàm recta E G. Quare ex E G, abscindi non posset recta ipsi C F, æqualis: quod tamen ad problema efficiendum requiritur, vt ex demonstratione manifestum est.*

## LEMMA III.

Si sint duæ rectæ inæquales, & ad maiorem applicetur quarta pars quadrati ex minore descripti, deficiens figura quadrata; Non erunt segmenta, quæ ex applicatione fiunt, æqualia.

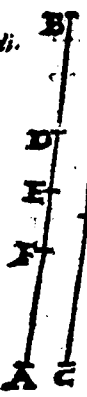
*SINT dua rectæ inæquales A B, & C; & ad maiorem A B, applicetur parallelogrammum deficiens quadrato, sitq; illud æquale quartæ parti quadrati ex minore C, descripti, ita vt D B, latus sit quadrati, quo parallelogrammum applicatum deficit. Dico segmenta A D, D B, inæqualia esse. Si enim A D, D B, segmenta dicantur esse æqualia; cùm ex 1. lemmate parallelogrammum applicatum ad A B, deficiensq; figura quadrata ex D B, descripta, æquale sit rectangulo sub A D, D B; sit autem quod sub æqualibus A D, D B, quadratum; erit dictum parallelogrammum, quadratum ex A D, dimidio ipsius A B, descriptum; atq; adeò ex scholio propos. 4. lib. 2. quadratum ex A B, quadruplum erit ipsius parallelogrammi: Est autem & quadratũ ex C, per hypothesim, quadruplũ eiusdẽ parallelogrammi applicati, nempe quartæ partis quadrati ex C. Igitur quadrata rectarum ex A B, & C, æqualia sunt, atq; rectæ A B, & C, æquales. Quod est absurdum. ponuntur enim inæquales, & A B, maior. Inæqualia igitur sunt segmenta A D, D B. Quod est propositum.*

*Hoc facilè etiam apparet ex constructione problematis in antecedente lemmate. Cùm enim abscissa sit per constructionem E H, æqualis dimidiatæ parti ipsius C D, nempe ipsi C F, ductaq; H I, parallela ipsi A B, & tandem demissa perpendicularis I K, vt partes factæ ex applicatione sint A K, K B; manifestum est A K, K B, segmenta esse inæqualia, cùm A B, in E, secta sit bifariam. Immò hinc constat, prius segmentũ maius esse, & posterius, quod latus est quadrati, quo parallelogrammum applicatum deficit, minus.*

17. 13. # THEOR. 15. PROPOS. 18.

SI fuerint duæ rectæ lineæ inæquales, quartæ autem parti quadrati, quod fit à minori, æquale parallelogrammum ad maiorem applicetur, deficiens figura quadrata, & in partes longitudine commensurabiles ipsam diuidat; maior tantò plus poterit quàm minor, quantum est quadratum rectæ lineæ sibi longitudine commensurabilis. Quòd si maior tantò plus possit quàm minor, quantum est quadratum rectæ lineæ sibi longitudine commensurabilis, quartæ autem parti quadrati, quod fit à minori, æquale parallelogrammum ad maiorem applicetur, deficiens figura quadrata; in partes longitudine commensurabiles ipsam diuidet.

SINT duæ rectæ inæquales A B, & C, quarum maior A B; quartæ autem parti quadrati ex minore C, descripti, per lemma secundum præcedentis propositionis applicetur ad A B, parallelogrammum æquale, & deficiens figura quadrata, contentum sub A D, B D, faciatq; segmenta A D, D B, longitudine commensurabilia. Dico A B, plus posse, quàm C, quadrato lineæ longitudine sibi commensurabilis. Quoniam enim per tertium lemma præcedentis propositionis A D, maior est, quàm D B; diuidatur A B, bifariam in E, & ipsi E D, æqualis sumatur E F. Quo facto, cùm totæ E A, E B, æquales sint, & ablatæ quoque E F, E D; erunt & reliquæ A F, B D, æquales.




a 5. secundi. Et quia recta A B, diuisa est bifariam in E, & non bifariam in D; [a] erit rectangulum sub A D, D B, vnà cum quadrato ex E D, æquale quadrato ex E B; Ac propterea quadruplum rectanguli sub A D, D B, & quadrati ex E D, æquale erit quadruplo quadrati ex E B: Est autem quadruplo rectanguli sub A D, D B, æquale quadratum ex C; (Ponitur enim rectangulum sub A D, D B, æquale quartæ parti quadrati ex C,) & quadruplo quadrati ex E D, æquale est quadratum ex F D; (quadratum enim ex F D, quadruplum est ex scholio propos. 4. lib. 2. quadrati ex E D, cùm F D, dupla sit ipsius E D,) & quadruplo quadrati ex E B, æquale est quadratum ex A B. (quòd quadratum ex A B, quadruplum sit per scholium propos. 4. lib. 2. quadrati ex E B, dimidiata parte ipsius A B.) Igitur & quadrata ex C, & F D, æqualia sunt quadrato ex A B; Ac proinde recta A B, plus potest, quàm recta C, quadrato rectæ F D. Hanc igitur F D, demonstrare oportet longitudine commensurabilem esse ipsi A B. Quoniam rectæ A D, D B, longitudine ponuntur commensurabiles; b erit quoque tota A B, parti D B, commensurabilis longitudine. Est autem & ipsi D B, composita ex D B, A F, longitudine commensurabilis: (quòd composita ex D B, A F, dupla sit ipsius D B.) Igitur cùm vtraque A B, & composita ex D B, A F, longitudine sit commensurabilis ipsi D B; c erunt quoq; A B, & composita ex D B, A F, longitudine inter se commensurabiles; Ac propterea cùm A B, composita ex A F, D B, tanquam vna, & ex F D, commensurabilis sit longitudine compositæ ex A F, D B; erit eadem A B, ex corollario propos. 16. huius lib. commensurabilis longitudine reliquæ F D. Ergo A B, plus potest, quàm C, quadrato rectæ F D, longitudine sibi commensurabilis.

b 16. decimi.

c 12. decimi.

SED iam A B, plus possit, quàm C, quadrato lineæ sibi longitudine commensurabilis; & quartæ parti quadrati ex C, æquale parallelogrammum applicetur ad A B, deficiens figura quadrata, faciatque

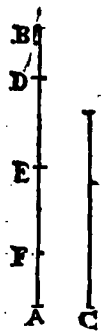
riatque segmenta A D, D B. Dico & rectas A D, D B, longitudine esse commensurabiles. Iisdem enim constructis, similiter demonstrabimus A B, plus posse, quàm C, quadrato rectæ F D. Quare cùm A B, ponatur plus posse, quàm C, quadrato rectæ longitudine sibi commensurabilis; erit recta A B, ipsi F D, longitudine commensurabilis. Igitur cùm tota A B, composita ex F D, & ex A F, D B, tanquam vna, commensurabilis sit longitudine ipsi F D; erit eadem A B, longitudine commensurabilis reliquæ compositæ ex A F, D B, per corollarium propos. 16. huius libri. Est autem & composita ex A F, D B, ipsi D B, longitudine commensurabilis, cùm ipsius sit dupla: Igitur cùm vtraque A B, D B, longitudine sit commensurabilis compositæ ex A F, D B; [a] erunt quoque A B, D B, longitudine inter se commensurabiles: Atq; adeò cùm tota A B, composita ex A D, D B, commensurabilis sit longitudine ipsi D B; [b] erunt ipsæ A D, D B, longitudine quoq; inter se commensurabiles. Quocirca si fuerint duæ rectæ lineæ inæquales, &c. Quod erat demonstrandum.

[a] 12. decimi. [b] 16. decimi

## THEOR. 16. PROPOS. 19. 18. 14.

SI fuerint duæ rectæ lineæ inæquales quartæ autem parti quadrati, quod fit à minore, æquale parallelogrammum ad maiorem applicetur deficiens figura quadrata, & in partes incommensurabiles longitudine ipsam diuidat; maior tantò plus poterit, quàm minor, quantum est quadratū rectæ lineæ sibi longitudine incommensurabilis. Quòd si maior tantò plus possit, quàm minor, quantum est quadratum rectæ lineæ sibi longitudine incommensurabilis, quartæ autem parti quadrati, quod fit à minore, æquale parallelogrammum ad maiorem applicetur deficiēs figura quadrata; in partes longitudine incommensurabiles ipsam diuidet.

SINT duæ rectæ inæquales A B, & C, quarum maior A B; quartæ autem parti quadrati ex C, minore descripti applicetur ad A B, per secundum lemma propositionis præcedentis, parallelogrammum æquale deficiens figura quadrata, quod faciat in recta A B, partes A D, D B, longitudine incommensurabiles. Dico A B, plus posse, quàm C, quadrato rectæ sibi longitudine incommensurabilis. Iisdem enim, quæ suprà constructis, similiter ostendemus A B, plus posse, quàm C, quadrato rectæ F D. Hanc igitur demonstrare oportet ipsi A, longitudine esse incommensurabilem. Quoniam rectæ A D, D B, ponuntur longitudine incommensurabiles; [c] erit quoque tota A B, parti D B, longitudine incommensurabilis. Sed D B, longitudine commensurabilis est compositæ ex D B, A F, cùm hæc illius sit dupla. Igitur cùm duarum linearum commensurabilium D B, & quæ componitur ex D B, A F, ipsa D B, longitudine sit incommensurabilis rectæ A B: [d] erit quoque reliqua composita ex D B, A F, eidem A B, longitudine incommensurabilis: Ac propterea cùm A B, composita ex A F, D B, tanquam vna, & ex F D, incommensurabilis sit longitudine compositæ ex A B, D B, erit eadem A B, per corollarium propos. 17. huius lib. & reliquæ F D, longitudine incommensurabilis. Ergo A B, plus potest, quàm C, quadrato rectæ F D, longitudine sibi incommensurabilis.




[c] 17. decimi. [d] 14. decimi.

IAM verò A B, plus possit, q̄ C, quadrato lineæ longitudine sibi incommensurabilis; & quartæ parti quadrati ex C, æquale parallelogrammum applicetur ad A B, deficiens figura quadrata, faciatque in recta A B, partes A D, D B. Dico & rectas A D, D B, esse incommensurabiles longitudine. Iisdem enim constructis, ostendemus vt prius, rectam A B, plus posse, quàm C, quadrato rectæ F D. Quare cùm A B, ponatur plus posse, quàm C, quadrato rectæ longitudine sibi incommensurabilis; erit A B, ipsi F D, incommensurabilis longitudine. Igitur cùm tota A B, composita ex F D, & ex A F, D B, tanquam vna, longitudine incommensurabilis sit ipsi F D; erit eadem A B, per corollarium propositionis 17. huius libri, & reliquæ compositæ ex A F, D B, longitudine incommensurabilis: Est autem composita ex A F, D B, ipsi D B, longitudine commensurabilis, cùm illa huius sit dupla. Igitur cùm duarum linearum commensurabilium, nempe quę ex A F, D B, componitur, & D B, ipsa composita ex A F, D B, longitudine incommensurabilis sit rectæ A B; [e] erit & reliqua D B, eidem A B, longitudine incommensurabilis; Ac proinde cùm tota A B, composita ex A D, D B, incommensurabilis sit ipsi D B, longitudine; [f] erunt & ipsę A D, D B, longitudine inter se incommensurabiles. Quam ob rem si fuerint duæ rectæ lineæ inæquales, quartæ autem parti quadrati, &c. Quod erat demonstrandum.

[e] 14. decimi. [f] 17. decimi.

### SCHOLIVM I.

*EGIT hactenus Euclides de magnitudinibus commensurabilibus, & incommensurabilibus; nunc ad Rationales & Medias transit in sequentibus.*

### LEMMA I.

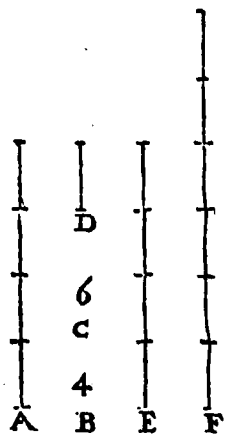
*QVONIAM demonstratum est, lineas longitudine commensurabiles, omnino & potentia commensurabiles esse, potentia verò commensurabiles, non omnino & longitudine, sed posse & longitudine commensurabiles esse, & incommensurabiles; manifestum est, si exposita Rationali aliqua linea commensurabilis fuerit longitudine, illam Rationalem vocari, &*

*ipſi commenſurabilem, non ſolùm longitudine, ſed etiam potentia: longitudine enim commenſurabiles, omnino & potentia commenſurabiles ſunt. Si verò expoſitæ Rationali aliqua linea fuerit potentia commenſurabilis, ſiquidem & longitudine, dicetur & ſic Rationalis, & commenſurabilis ipſi longitudine, & potentia. Quòd ſi expoſitæ Rationali rurſus aliqua linea commenſurabilis exiſtens potentia, longitudine fuerit incommenſurabilis; dicetur & ſic Rationalis, potentia tantùm ipſi commenſurabilis.*

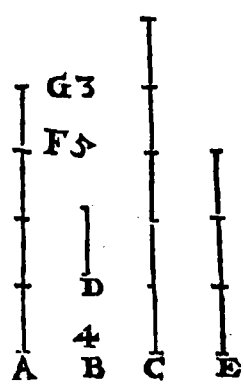
## LEMMA II.

*Ex Proclo. Rationales vocat eas lineas, quæ expoſitæ Rationali vel longitudine & potentia commenſurabiles ſunt, vel potentia ſolùm. Sunt autem & aliæ lineæ, quæ longitudine quidem expoſitæ Rationali incommenſurabiles ſunt, potentia autem ſolùm commenſurabiles; atque ob id rurſus dicuntur Rationales, & commenſurabiles inter ſe, quatenus Rationales; commenſurabiles, inquam, inter ſe vel longitudine & potentia, vel potentia ſolùm: Et ſiquidem longitudine, dicuntur & ipſæ Rationales longitudine inter ſe commenſurabiles, vt intelligatur, etiam potẽtia commenſurabiles eſſe; Si verò potentia inter ſe ſolùm ſunt commenſurabiles: dicuntur ipſæ quoq; Rationales, potentia ſolùm inter ſe commenſurabiles.*

## SCHOLIVM.




*Itaque ex his colligere licebit tria genera linearum Rationalium longitudine inter ſe commenſurabilium. Aut enim duarum linearum Rationalium longitudine inter ſe commenſurabilium, altera æqualis eſt expoſitæ Rationali; ac proinde vtraque Rationali commenſurabilis quoq; longitudine: Aut neutra Rationali expoſitæ æqualis eſt, longitudine tamen ei vtraque eſt commenſurabilis: Aut denique vtraque expoſitæ Rationali commenſurabilis eſt ſolùm potentia. Hæc autem tria genera inueniemus hoc modo: Sit expoſita Rationalis A, diuiſa in quatuor partes; quot nimirum vnitates ſunt in numero B. Sumpto deinde quolibet alio numero C, ſit D, recta vna partium rectæ A; & quoties D, metitur lineam A, toties metiatur quandam aliam E. Item quoties vnitas eſt in C, toties eadem D, metiatur quampiam aliam lineam F. Quoniam igitur A, & E, componũtur ex partibus multitudine æqualibus, quæ quidem magnitudine æquales ſunt ipſi D; ipſæ æquales erunt. Rurſus quia D, metitur omnes tres, A, E, & F, erunt omnes tres A, E, & F, longitudine commenſurabiles. Quare E, & F, Rationali A, commenſurabiles longitudine, Rationales ſunt: Sunt autem & oſtenſæ longitudine inter ſe commenſurabiles, cùm habeant D, communem menſuram. Inuentæ ergo ſunt duæ Rationales E, F, longitudine commenſurabiles & inter ſe, & expoſitæ Rationali A, & quarum vna, nempe E, æqualis eſt Rationali expoſitæ A.*

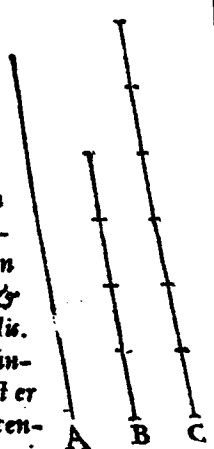



*Iam verò D, metiatur duas lineas quaſdam C, E, per duos numeros F, G, quorum neuter idem ſit qui B, ita vt vtraque linea C, & E, inæqualis ſit ipſi A. Erunt igitur vt prius, tres rectæ A, C, E, menſuram habentes communẽ D, longitudine commenſurabiles. Quare C, E, Rationali A, longitudine commenſurabiles, Rationales ſunt. Cùm ergo & inter ſe ſint longitudine commenſurabiles; inuentæ erunt duæ Rationales C, E, longitudine commenſurabiles & inter ſe, & expoſitæ Rationali A, quarum neutra æqualis eſt Rationali expoſitæ A.*

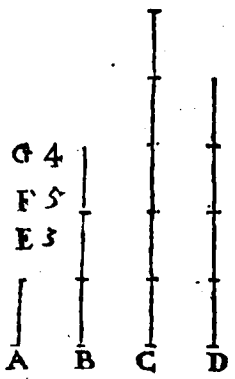
a 11. decimi. *Postremo, expoſitæ Rationali A,[a] inueniatur recta B, longitudine tantùm incommenſurabilis, quæ ſecetur in quotcunque partes æquales, & ſumatur C, compoſita ex aliis quotcunque partibus, quæ magnitudine æquales ſint partibus rectæ B. Quo facto, erunt B, & C, longitudine commenſurabiles. Dico eaſdem expoſitæ Rationali A, potentia ſolùm eſſe commenſurabiles. Quoniam enim A, B, potentia ſunt commenſurabiles; erit quadratum ex A, quadrato ex B, commenſurabile: Eſt autem eidem quadrato ex B, commenſurabile quadratum ex C: quòd B, C, longitudine ſint commenſurabiles, atque adeò & potentia;*

b 15. decimi. *[b] Igitur quadrata rectarum A, & C, commenſurabilia quoque inter ſe ſunt. Quare C, ipſi A, potentia eſt commenſurabilis. Et quia duarũ rectarum B, C, longitudine commenſurabilium B, eſt ipſi A, longitudine in-*

c 14. decimi. *commenſurabilis; [c] erit quoque reliqua C, eidem A, longitudine incommenſurabilis. Eſt ergo C, ſolùm potentia ipſi A, commenſurabilis. Et quia B, & C, Rationali expoſitæ A, potentia commenſurabiles, Rationales ſunt; Inuentæ erũt duæ Rationales B, C, longitudine quidem inter ſe commenſurabiles, potentia verò tantùm commenſurabiles expoſitæ Rationali A. Quod erat propoſitum.*




Qv




*Quod si quis optet inuenire quotcunque lineas Rationales longitudine inter se commensurabiles, id efficiet hoc modo: Sumpta mensura quauis A, componantur quotlibet lineæ B, C, D, ex tot partibus ipsi A, æqualibus, quot sunt vnitates in totidem numeris inæqualibus E, F, G. Nam lineæ B, C, D, habentes communem mensuram A, longitudine commensurabiles erunt.*

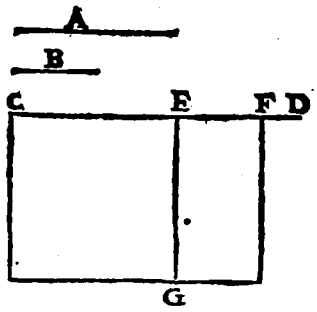
*Caeterum & omnes lineas Rationales, non solùm expositæ Rationali, sed etiã inter se esse commensurabiles, facilè hoc modo demonstrabimus.* [a] *Quoniã Rationales lineæ sunt, quæ expositæ Rationali sunt commensurabiles vel longitudine & potentia, vel potentia tantùm;* [b] *quæ autem eidem commensurabiles, & inter se commensurabiles sunt; manifestum est, Rationales lineas quascunque inter se commensurabiles esse.*

a 6. defin.

b 12. decimi.

## LEMMA III.

Si sint duæ rectæ lineæ, erit vt prima ad secundam, ita quadratum, quod fit à prima, ad rectangulum, quod sub duabus illis rectis lineis continetur: Et vt secunda ad primam, ita rectangulum sub ipsis, ad quadratum ex prima.



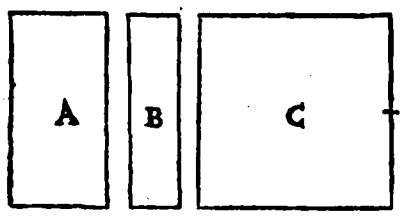

*Sint duæ rectæ A, & B. Dico esse vt A, ad B, ita quadratum ex A, ad rectangulum sub A, & B, comprehensum. Ex quantacunque enim linea recta C D, abscindatur C E, ipsi A, æqualis, & E F, ipsi B. Deinde super C E, describatur quadratum C G, perficiaturq; rectangulum G F, contentum sub C E, & E F, hoc est, sub A, & B.* [c] *Quoniam igitur est vt C E, ad E F, hoc est, vt A, ad B, ita parallelogrammũ C G, hoc est, quadratum ex A, ad parallelogrammum G F, sub A, & B, comprehensum; perspicuum est, si sint duæ rectæ lineæ, esse primam ad secundam, vt quadratum ex prima descriptum, ad rectangulum sub ipsis comprehensum.*

c 1. sexti.

*Eodem modo erit, vt B, ad A, ita rectangulũ F G, ad quadratũ G C. Quod est propositũ.*

## LEMMA IIII.

Spatium Rationali spatio commensurabile, & ipsum Rationale est.




*Sit spatium A, commensurabile Rationali spatio B. Dico & A, Rationale esse. Sit namque C, quadratũ Rationale, ratione cuius reliqua Rationalia dicuntur, vel irrationalia; quod nimirum ab exposita Rationali describitur. Quoniam igitur B, Rationale est,* [d] *erit ipsum Rationali C, commensurabile: Est autem & A, ipsi B, commensurabile. Igitur A, & C, cùm commensurabilia sint ipsi B,* [e] *inter se quoque commensurabilia erunt; ac proinde spatium A, Rationali quadrato C, ex Rationali linea expositæ descripto commensurabile,* [f] *Rationale est. Quod erat demonstrandum.*

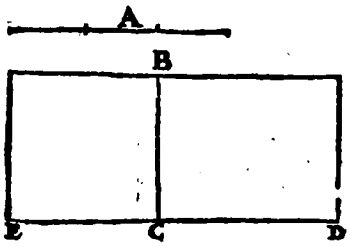
d 9. defin.

e 12. decimi.

f 9. defin.

## THEOR. 17. PROPOS. 20. 19.

Quod sub Rationalibus longitudine commensurabilibus rectis lineis, secundùm aliquem prædictorum modorum, continetur rectangulum; Rationale est. 15.




Sit expositæ Rationalis A, & spatium rectangulum B D, contentum sub Rationalibus longitudine commensurabilibus B C, C D, secundùm aliquem prædictorum modorum. (hoc est, secundùm aliquem trium modorum, quos in scholio 2. antecedentis propositionis explicuimus; ita vt vel altera ipsarum B C, C D, Rationali expositæ A, sit æqualis, vel neutra: sed tamẽ ei vtraque commensurabilis sit aut longitudine, aut potentia tantùm. Dico B D, rectangulum Rationale esse. Describatur enim ex altera earum; nempe ex B C, quadratum B E. Quoniam igitur B C, Rationalis Rationali expositæ A, commensurabilis est vel longitudine & potentia, vel potentia solùm; [a] erit quoque quadratum B E, ex B C, descriptum quadrato ex A, commensurabile: [b] Est autem quadratum ex A, Rationale, ratione cuius reliqua Rationalia vocantur, vel Irrationalia. [c] Igitur & B E, illi comensurabile, Rationale est. Quia verò B C, hoc est, E C, & C D, longitudine commensurabiles sunt; (ponuntur enim B C, C D, Rationales inter se longitudine cõmensurabiles.)

a 3. defin.

b 8. defin.

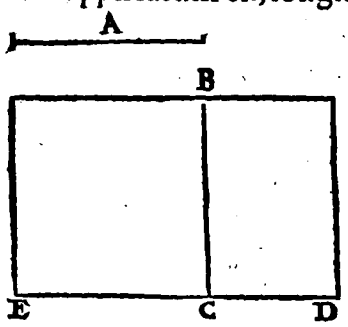
c 9. defin.

a 1. sexti. & est vt E C, ad C D, ita E B, ad B D; b erunt quoque E B, B D, commensurabilia. Quare ex lem-
b 10. decimi. mate 4. antecedentis propos. B D, Rationali B E, commensurabile, Rationale est. Quod igitur sub Rationalibus longitudine commensurabilibus rectis, &c. Quod erat demonstrandum.

20.
16.

## THEOR. 18. PROPOS. 21.

SI Rationale ad Rationalem applicetur, latitudinem efficit Rationalem, & ei, ad quam applicatum est, longitudine commensurabilem.




SIT rursum exposita Rationalis A, & alia Rationalis B C, secundùm aliquē modorum, quos in scholio 2. propos. 19. exposuimus, hoc est, siue B C, æqualis sit Rationali expositæ A, siue non, commensurabilis tamen ei vel longitudine & potentia, vel potentia tantùm. Applicetur autem ad B C, Rationale B D, latitudinem faciens C D. Dico C D, Rationalem esse, & ipsi B C, commensurabilem longitudine. Describatur enim ex B C, quadratum B E; quod similiter, vt in antecedenti propositione ostendemus Rationale esse. Quia igitur B E, B D, Rationalia sunt, c ipsa commensurabilia erunt quadrato ex linea
c 9. defin. Rationali exposita A, descripto; d Ac propterea & commensu-
d 12. decimi. rabilia inter se erunt: e Est autem vt B E, ad B D, ita E C, hoc est, B C, ad C D. Igitur & B C, C D,
e 1. sexti. commēsurabiles sunt longitudine, vt in scholio propos. 10. huius lib. docuimus. Est ergo C D, ipsi
f 6. defin. B C, commensurabilis longitudine: f sed & Rationalis, quippe quę Rationali B C, atq; idcircò Rationali expositæ A, commensurabilis sit, vt in scholio propos. 12. huius lib. demonstrauimus. Quare latitudo C D, Rationalis est, & longitudine commensurabilis ipsi B C. Si igitur Rationale ad Rationalem applicetur, latitudinem efficit, &c. Quod erat demonstrandum.

### LEMMA I.

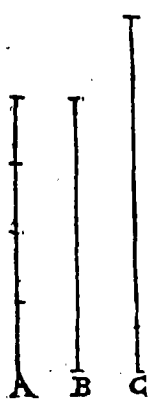
RECTA linea potens spatium Irrationale, Irrationalis est.

*POSSIT recta A, spatium Irrationale, hoc est, quadratum ex A, æquale sit spatio cuipiam Irrationali. Dico A, Irrationalem esse. Si enim dicatur Rationalis; erit eius quadratum Rationale quoque, vt in demonstratione propos. 20. huius libri ostensum est. quod est absurdum. ponitur enim Irrationale. Non ergo A, Rationalis est. Igitur Irrationalis.*

*HOC idem constat ex defin. 11. huius lib. Vbi lineæ potentes spatia Irrationalia, vocantur Irrationales.*

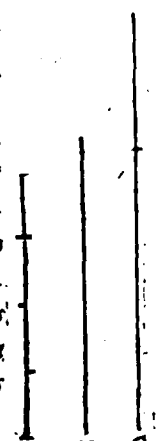
### LEMMA II.

DVAS rectas Rationales potentia solùm commensurabiles inuenire.



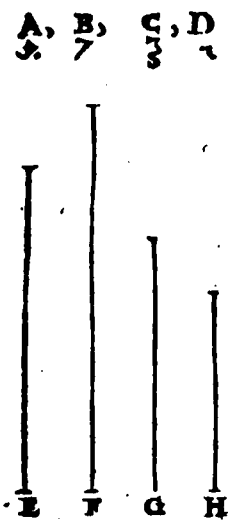

*DVO genera sunt linearum Rationalium potentia tantū inter se commensurabilium. Aut enim altera earū est æqualis expositæ Rationali, aut neutra. Prioris generis lineas ita inueniemus: Sit exposita Rationalis A, cui æqualis sumatur B. Deinde ipsi B,*
a 11. decimi. *a inueniatur C, longitudine tantū incommēsurabilis, seu (quod idem est) potētia tantū commensurabilis. Quoniam igitur B, C, ipsi A, commensurabiles sunt, (B, quidem, q ei sit æqualis; at C, ex constructione, q inuenta sit potētia tantū commensurabilis ipsi B, atq; adeò ipsi A.) Rationales erunt B, & C: Sunt autē & potentia solùm cōmensurabiles. Inuentæ ergo sunt duæ Rationales B, C, potentia tantū commensurabiles, quarū altera, nempe B, expositæ Rationali A, æqualis est.*

*POSTERIORIS autē generis lineas hac arte reperiemus:*
b 11. decimi. *Sit rursus exposita Rationalis A, cui longitudine tantū incommensurabilis b inueniatur B: & huic rursum longitudine tantū incommēsurabilis C, maior aut minor q̄ A. Dico B, C, esse Rationales potentia tantū commensurabiles. Quòd enim sint solùm commensurabiles potentia, patet ex constructione. Quòd autem sint Rationales, ita ostendemus. Quoniam A, C, ipsi B, potentia sunt commensurabiles; erunt & A, C, commensurabiles potentia, vt in scholio propos. 12. huius lib. demonstrauimus. Quare cùm vtraq; B, C, expositæ Rationali A, sit potentia*
c 6. defin. *commensurabilis; c erūt B, C, Rationales. Inuentæ ergo sunt B, & C, Rationales potentia tantùm commensurabiles.*




### SCHOLIVM.

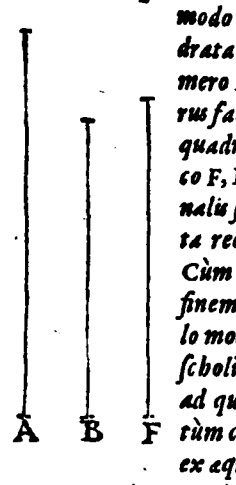
*QVOD si inueniendæ sunt quotcunq; lineæ Rationales potentia tantū inter se commensurabiles, exequemur id hac ratione.*




*SVMANTVR per ea, quæ in ſcholio propoſ. 20. lib. 9. docuimus, tot numeri primi, quot lineæ Rationales quæruntur; nempe A, B, C, D. Deinde ſumpta linea Rationali E, fiat vt A, ad B, ita quadratũ ex E, ad quadratum ex F, vt in corollario propoſitionis 6. huius libri oſtendimus. Item vt B, ad C, ità quadratum ex F, ad quadratum ex G; & denique vt C, ad D, ita quadratum ex G, ad quadratum ex H. Dico rectas E, F, G, H, Rationales eſſe, & potẽtia tantùm commenſurabiles inter ſe. Quòd enim Rationales ſint, manifeſtum eſt. Cùm enim earum quadrata proportionem habeant, quam numeri A, B, C, D, (nempe quadratum ex E, ad quadratum ex F, vt numerus A, ad numerum B, ex conſtructione; ſimiliterq; quadratum ex F, ad quadratum ex G, vt B, ad C, & quadratum ex G, ad quadratum ex H, vt C, ad D. At verò ex æquo quadratum ex E, ad quadratum ex G, vt A, ad C; ſimiliterq; quadratum ex E, ad quadratum ex H, vt A, ad D; & denique quadratum ex F, ad quadratum ex H, vt B, ad D.)* [a] *erunt ipſa inter ſe commenſurabilia, ac propterea & recta ipſa potentia ſaltem commenſurabiles. Exiſtente ergo E, Rationali, erunt & reliquæ F, G, H, Rationales. Quòd autem potentia tantùm ſint commenſurabiles, ita oſtendemus. Quoniam earum quadrata proportionalia ſunt numeris primis A, B, C, D: numeri autem primi proportionem nõ habent, quam quadrati numeri, vt ad finem libri 8. docuimus; non habebunt etiam quadrata rectarum E, F, G, H, proportionem, quam numeri quadrati.* [b] *Quare recta E, F, G, H, longitudine incommenſurabiles ſunt. Oſtenſæ ſunt autem Rationales, & potentia commenſurabiles. Rationales igitur ſunt, & potentia tantùm commenſurabiles. Quod eſt propoſitum.*

a 6. decimi.

b 9. decimi.



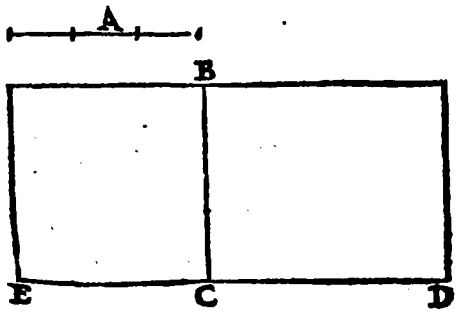

*QVOD ſi propoſitis quotcunque Rationalibus potentia ſolùm commenſurabilibus, inuenienda ſit adhuc alia, quæ omnibus illis commenſurabilis ſit potentia tantùm, fiet id hoc modo: Sint propoſitæ duæ Rationales potentia tantùm commenſurabiles A, B, quarũ quadrata proportionem habeant, quam numerus C, ad numerum D: Sumpto autem alio numero E, qui ad quemlibet ipſorum C, D, primus ſit; (Inuenietur autem huiuſmodi numerus facilè, ſi ſumatur primus, qui neutrum ipſorum C, D, metiatur.) fiat vt D, ad E, ita quadratum lineæ B, ad quadratum lineæ F, per corollarium propoſitionis 6. huius libri. Dico F, Rationalem eſſe, & ipſis A, B, potentia ſolùm commenſurabilem. Quòd enim Rationalis ſit, ex eo patet, quòd commenſurabilis ſit Rationali B, ſaltem potentia, cùm quadrata rectarum B, F, proportionem habentia, quam numerus D, E,* [c] *commenſurabilia ſint. Cùm ergo proportio D, ad E, non ſit, quæ numeri quadrati ad numerum quadratum, vt ad finem libri 8. oſtendimus; (quòd D, & E, qui ambo non ſunt quadrati, cùm E, primus nullo modo quadratus ſit, ſint inter ſe primi, ideoq; plani non ſimiles, ac proinde ex ijs, quæ in ſcholio propoſitionis 26. libri 8. oſtendimus, proportionem non habeant, quam quadratus ad quadratum)* [d] *erunt rectæ B, F, longitudine incommenſurabiles. Ergo potentia tantùm commenſurabiles. Eadem ratione erũt A, & F, potentia ſolùm commenſurabiles. Nam ex æquo erit quadratum ex A, ad quadratum ex F, vt C, numerus ad numerum E. Cùm ergo hi numeri proportionem non habeant, quam quadratus ad quadratum; (quod oſtendemus perinde, vt idem demonſtrauimus de numeris D, & E,) erunt A, F, longitudine incommenſurabiles, &c.*

c 6. decimi.

d 9. decimi.

## THEOR. 19. PROPOS. 22. 21. 19.

QVOD ſub Rationalibus potentia ſolùm commenſurabilibus rectis lineis continetur rectangulum; Irrationale eſt: Et recta linea ipſum potens, Irrationalis eſt. Vocetur autem Media.




SIT expoſita Rationalis A, & rectangulum B D, contentum ſub Rationalibus B C, C D, potentia tantùm commenſurabilibus ſecundùm aliquem modorum, quos in lemmate 2. præcedentis propoſ. diximus. (hoc eſt, ſiue altera illarum æqualis ſit Rationali expoſitæ A, ſiue non.) Dico rectangulum B D, eſſe Irrationale; & rectam, cuius quadratum ipſi B D, æquale eſt, Irrationalem quoque, quæ vocetur Media. Deſcribatur enim ex altera illarum, vt ex B C, quadratum B E, quod erit Rationale, vt in demonſtratione propoſ. 20. diximus. [a] Et quoniam eſt vt E C, hoc eſt, B C, ad C D, vt B E, ad B D. Eſt autem B C, ipſi C D, longitudine incommenſurabilis, ex hypotheſi; erit ex iis, quæ in ſcholio propoſ. 10. huius libri tradidimus, B E, ipſi B D, incommenſurabile. [b] Quare cùm B E, commenſurabile ſit quadrato ex Rationali expoſita A: ſit autem B E,

a 1. ſexti.

b 9. defin.

ipſi B D, incõmenſurabilis; [a] erit quoq; quadratũ ex Rationali expoſita A, eidem B D, incommenſurabile; Ac propterea B D, quadrato Rationalis expoſitæ incõmenſurabile exiſtens, [b] Irrationale eſt. Quamobrem & recta potens ipſum B D, Irrationalis eſt, ex 1. lemmate propoſ. antecedentis.

a 14. decimi.

b 10. defin.

c 17. ſexti.

VOCETVR autem hæc linea potens ipſum B D, Media, [c] propterea quòd media proportionalis eſt inter duas B C, C D, Rationales potẽtia tantùm inter ſe commenſurabiles, quippe cùm eius quadratum æquale ſit rectangulo B D, ſub ipſis B C, C D, comprehenſo. Quod igitur ſub Rationalibus potentia ſolùm commenſurabilibus, &c. Quod demonſtrandum erat.

## SCHOLIVM.

*ITAQVE omnis linea media proportionalis inter duas Rationales potentia tantùm inter ſe commenſurabiles, Media vocabitur.* [a] *Cùm enim eius quadratum æquale ſit rectangulo ſub talibus Rationalibus comprehenſo, quod quidem in hoc theoremate oſtenſum eſt, eſſe Irrationale, erit latus ipſius, nempe media proportionalis inter dictas Rationales, linea Irrationalis, qua Media appellatur. Ex quo lineam Mediam facilè deſcribemus, ſi dicamus eam eſſe lineam Irrationalem, quæ medio loco proportionalis eſt inter duas lineas Rationales potentia tantùm inter ſe commenſurabiles. Vel quæ poteſt rectangulum ſub duabus Rationalibus potentia tantùm inter ſe commenſurabilibus contentum. Nam ſola hæc linea Media hoc loco appellatur.*

a 17. ſexti.

*VT autem rectè hoc loco monet Campanus, non ſolùm recta potens rectangulum Irrationale ſub duabus rectis Rationalibus potentia tantùm commenſurabilibus contentum, Irrationalis eſt, vocaturq; Media: Vtrùm etiam quadratum ipſius, vel rectangulum illud medium dicitur, quia medio loco proportionale eſt inter quadrata illarum rectarum Rationalium potentia ſolùm commenſurabilium, quemadmodum & recta ipſa media proportionalis eſt inter dictas Rationales. Nam ſi tres lineæ ſint continuè proportionales, quales ſunt B C, & recta Irrationalis, quæ Media dicitur, & C D; erunt quoque rectilinea ſimilia, ſimiliterq; deſcripta ſuper ipſas, cuiuſmodi ſunt earum quadrata proportionalia, vt in ſcholio propoſ. 22. lib. 6. demonſtrauimus. Quare quadratum ex Media deſcriptum proportionale eſt inter quadrata rectarum B C, C D, ideoq; Medium appellari poteſt.*

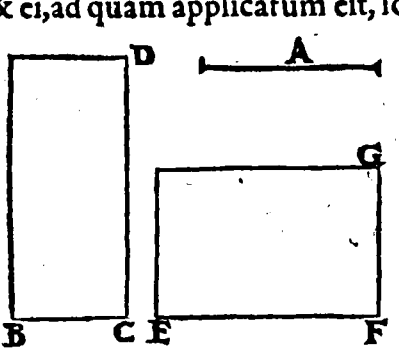
*HOC autem non ita intelligas, vt putes omne rectangulum Medium contineri ſub duabus rectis Rationalibus potentia tantùm commenſurabilibus, quale eſt Medium B D. Hoc enim falſum eſt, cùm & ſpatium Medium contineri poſſit ſub duabus Irrationalibus, nempe Medijs longitudine, vel potentia tantùm inter ſe commenſurabilibus, vt ex propoſ. 25. & 26. huius lib. conſtabit. Itaque non reciprocantur, rectangulum ſub duabus Rationalibus potentia tantùm inter ſe commenſurabilibus contentum, & ſpatium Medium. Omne ſiquidem rectangulum ſub duabus Rationalibus potentia tantùm commenſurabilibus contentum, Medium eſt, vt oſtendimus: At non omne ſpatium Medium ſub duabus Rationalibus potentia tantùm commenſurabilibus continetur. Vniuersè tamen omne ſpatium Medium, æquale eſt alteri cuipiam Medio ſub duabus Rationalibus potentia tantùm commenſurabilibus contento. Nam aliàs recta ipſum potens, non eſſet dicenda Media, quia non poſſet rectangulum ſub duabus Rationalibus potentia tantùm commenſurabilibus comprehenſum; vel non eſſet proportionalis inter duas Rationales potentia tantùm commenſurabiles.*

*VNDE Medium deſcribi ſic poterit, vt dicamus, illud eſſe rectangulum ſub duabus Rationalibus potentia tantùm commenſurabilibus contentũ: Vel certè rectangulum, quod alteri cuipiam rectangulo ſub duabus Rationalibus potentia ſolùm commenſurabilibus comprehenſo æquale eſt, ita vt ipſum poſſit linea recta, quæ Media in hoc theoremate eſt vocata. Omne enim Medium nõ contentum ſub duabus huiuſmodi Rationalibus reuocari poteſt ad aliud Medium, cuius latera ſunt duæ lineæ Rationales potentia tantùm commenſurabiles, vt in ſcholio ſequentis theorematis oſtendemus.*

22. 20.

## THEOR. 20. PROPOS. 23.

QVOD à Media fit, ad Rationalem applicatum, latitudinẽ efficit Rationalem, & ei, ad quam applicatum eſt, longitudine incommenſurabilem.




SIT linea Media A, & Rationalis B C, ſiue ea ſit expoſita, ſiue expoſitæ commenſurabilis longitudine & potentia, vel potentia tantũ; [a] appliceturq; ad B C, rectangulum B D, æquale quadrato ex Media A, vel rectangulo, quod huic quadrato æquale eſt, faciatq; latitudinẽ C D. Dico C D, Rationalem eſſe, & ipſi B C, longitudine incommenſurabilẽ. Quoniam enim A, Media eſt, ipſa poterit rectangulũ ſub duabus rectis Rationalibus potentia tantũ inter ſe commenſurabilibus contentum; aliàs nõ poſſet dici Media. Sit igitur illud rectangulum E G, ſub Rationalibus E F, F G, potentia tantùm commenſurabilibus contentũ. Et quia A, ex hypotheſi, poteſt etiam ipſum B D; æqualia erunt B D, & E G, [b] lateraq; idcircò habebunt reciproca circa æquales angulos; nempe erit vt B C, ad E F, ita F G, ad C D: [c] Ac propterea quoq; vt quadratũ ex B C, ad quadratum ex E F, ita quadratum ex F G, ad quadratum ex C D: Sed quadratũ ex B C, commenſurabile eſt quadrato ex E F. (quòd rectæ B C, E F, ponantur Rationales; atque adeò inter ſe commenſurabiles vel longitudine & potentia, vel potẽtia tantùm.)

a 45. primi.

b 14. ſexti.

c 22. ſexti.

tantùm.) [a] Igitur & quadratum ex F G, commensurabile erit quadrato ex C D; propterea quę & rectæ F G, C D, commensurabiles erunt saltem potentia. Ergo cùm F G, Rationalis expositæ Rationali sit commensurabilis, si ipsa non est exposita Rationalis; erit quoque C D, expositæ Rationali commensurabilis, vt ostendimus in scholio propos. 12. huius lib. atq; adeò C D, ex definitione, Rationalis erit. Dico quòd & longitudine incommensurabilis ipsi B C. Quoniam enim E F, F G, Rationales sunt potentia tantùm commensurabiles, hoc est, longitudine incommensurabiles; & est vt E F, ad F G, ita quadratum ex E F, ad rectangulum E G, sub E F, F G, contentum, ex lemmate 3. propos. 19. huius lib. [b] erit quadratum ex E F, incommensurabile rectangulo E G, atque adeò rectangulo B D, quod huic æquale est. Atqui quadratum ex E F, commensurabile est quadrato ex C D. (quòd E F, C D, Rationales sint, atque idcirco saltem potentia commensurabiles.) Igitur cùm quadratum ex C D, commensurabile sit quadrato ex E F; at rectangulum B D, eidem quadrato ex E F, incommensurabile; [c] incommensurabilia erunt quadratum ex C D, & rectangulum B D. Est autem ex lemmate 3. propos. 19. huius lib. quadratum ex C D, ad rectangulum B D, vt recta C D, ad rectam B C. [d] Incommensurabiles ergo sunt longitudine C D, & B C. Rationalis ergo est C D, & Rationali B C, longitudine incommensurabilis. Quamobrem, quod à Media fit, ad Rationalem applicatum, &c. Quod demonstrandum erat.

a 10. decimi
b 10. decimi
c 13. decimi.
d 10. decimi

## SCHOLIVM.

*FACILIVS quàm ex propos 45. lib. 1. applicabimus ad B C, rectangulum quadrato ex A, æquale, si ipsis B C, & A, [a] sumatur tertia proportionalis pro latere C D. Cùm enim B C, A, & C D, proportionales sint; [b] erit rectangulum B D, sub extremis B C, C D, contentum, æquale quadrato mediæ proportionalis A.*

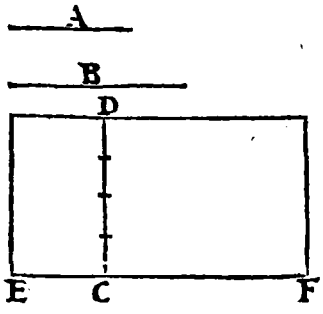
a 11. sexti.
b 17. sexti.

*HAC arte vtendum erit & in sequentibus, quando ad aliquam rectam applicandum erit rectangulum æquale quadrato cuiuspiam lineæ rectæ.*

*PORRO ex hoc theoremate manifestum est, omne Medium, hoc est, spatium, quod linea Media potest, æquale esse cuidam alteri rectangulo contento sub duabus Rationalibus potentia tantùm commensurabilibus. Nam si illi Medio ad Rationalem lineam applicetur æquale rectangulum, faciet id, per hoc theorema, alterum latus Rationale, longitudine lineæ Rationali incommensurabile. Quare rectangulum hoc applicatum Medio æquale, Medium erit sub duabus Rationalibus potentia solùm commensurabilibus contentum. Atq; hoc modo quodcunque Medium reduci poterit ad Medium contentum sub duabus Rationalibus potentia tantùm commensurabilibus.*

## THEOR. 21. PROPOS. 24. 23. 21.

MEDIAE commensurabilis, Media est.




SIT Mediæ A, recta B, commensurabilis siue longitudine & potentia, siue potẽtia tantùm. Dico & B, Mediam esse. Exposita enim sit Rationalis C D, [a] ad quam applicetur rectangulum D E, æquale quadrato ex A, Media. Quoniam igitur D E, Medium ad Rationalem C D, applicatum, facit C E, latitudinem; [b] erit C E, Rationalis ipsi C D, longitudine incommensurabilis. Rursus ad C D, Rationalem [c] applicetur rectangulum D F, quadrato ex B, æquale. Et quia rectæ A, B, ponuntur commensurabiles, erunt quoque eorum quadrata, hoc est, rectangula ipsis æqualia, D E, D F, commensurabilia. [d] Est autem vt D E, ad D F, ita recta E C, ad rectam C F. [e] Igitur E C, C F, longitudine sunt commensurabiles: Sed E C, ostensa est Rationalis, & longitudine ipsi C D, incommensurabilis. [f] Igitur & C F, longitudine eidem C D, incommensurabilis est. Cùm ergo & Rationalis sit, propterea quòd Rationali expositæ C D, sit commensurabilis; (Nam cùm E C, C F, sint longitudine ostensæ commensurabiles, & E C, ipsi C D, commensurabilis saltem potentia, quòd Rationalis sit; erit & C F, eidem C D, commensurabilis potentia, ex iis, quæ in scholio propos. 12. huius lib. scripsimus.) erunt C D, C F Rationales potentia tantùm commensurabiles. [g] Ac proinde recta B, potens rectangulum D F, sub Rationalibus potentia tantùm commensurabilibus C D, C F, Media est. Mediæ igitur commensurabilis, Media est. Quod ostendendum erat.

a 45. primi.
b 23. decimi
c 45. primi.
d 1. sexti.
e 10. decimi
f 14. decimi
g 22. decimi

## COROLLARIVM.

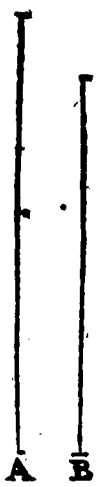
*EX hoc manifestum est, spatium Medio spatio commensurabile, Medium esse. Postquam enim demonstratum est D F, commensurabile esse Medio D E, ostensum ex eo mox fuit D F, esse quoque Medium: nimirum sub Rationalibus potentia tantùm commensurabilibus C D, C F, contentum. Eademq; ratio est in cæteris. Quod tamẽ hoc etiam modo potest demonstrari.*

*SIT spatium D F, spatio Medio D E, commẽsurabile. Dico & D F, Medium esse. Possit enim A, Media ipsum D E, Medium. (Nam cùm D E, Medium sit, poterit ipsum recta, quæ Media dicitur, vt in scholio propos. 22. huius libri tradidimus.) & B, ipsum D F. Quoniam igitur D E, D F, commensurabilia sunt, erunt quoque quadrata ex A, B, ipsis æqualia, commensurabilia. Quare A, B, rectæ potentia saltem sunt commensurabiles; Atque idcirco existente A,*

*Media, erit & B, illi commensurabilis Media, vt in hoc theoremate ostensum est. Igitur & D F, Medium erit. Omne enim spatium, quod potest Media, Medium appellatur, vt in scholio propos. 22. huius lib. docuimus.*

## LEMMA I.

*QVEMADMODVM autem in lemmate 1. propos. 19. huius lib. de Rationalibus dictum est, ita & hîc de Mediis dicemus. Nimirum rectam lineam Mediæ longitudine commensurabilem, dici Mediam, & ipsi commensurabilem non solùm longitudine, sed & potentia; Vniuersè enim quæ longitudine commensurabiles sunt, etiam potentia sunt commensurabiles. Si verò recta quædam linea Mediæ potentia fuerit commensurabilis, si quidem & longitudine, dicetur & sic Media, & ipsi commensurabilis longitudine & potentia. Quod si Mediæ rursus aliqua linea commensurabilis existens potentia, longitudine fuerit incommensurabilis, dicetur & sic Media ipsi potentia solùm commensurabilis.*




## LEMMA II.

DVAS rectas Medias longitudine commensurabiles; Item duas potentia tantùm commensurabiles inuenire.

*SIT Media aliqua linea A, cui si inueniantur duæ rectæ commensurabiles B, C; illa quidem longitudine, hæc verò potentia tantùm;* [a] *erit vtraque B, C, Media A, commensurabilis, Media. Cùm ergo A, B, sint longitudine cõmensurabiles; & A, C, potẽtia tantùm; erũt inuentæ A, B, Mediæ longitudine cõmensurabiles; & A, C, Mediæ potentia solùm cõmensurabiles. Quod est propositum.*

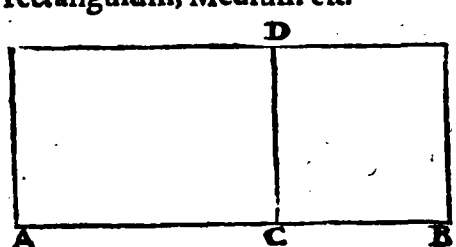
a 24. decimi.

## SCHOLIVM.

*QVAMVIS omnis linea recta Mediæ commensurabilis, Media sit; non tamen omnis Media cuilibet Mediæ est commensurabilis; cùm duæ Mediæ dari possint prorsus incommensurabiles, longitudine videlicet, & potentia, vt ex propos. 36. huius lib. apparebit. Vbi etiam docebimus, quánam via inueniẽdæ sint duæ Mediæ longitudine et potẽtia incõmensurabiles.*

## 24. THEOR. 22. PROPOS. 25.

23. QVOD sub Mediis longitudine commensurabilibus rectis lineis continetur rectangulum, Medium est.




CONTINEATVR rectãgulum A D, sub Mediis A C, C D, longitudine commensurabilibus. Dico A D, Medium esse. Describatur ex C D, Media quadratum B D, quod erit Medium. [a] Et quoniam est vt A C, ad C B, ita A D, ad D B: Sunt autem A C, C B, hoc est, A C, C D, longitudine commẽsurabiles; [b] erunt A D, D B, cõmensurabilia. Quare spatium A D, Medio D B, commensurabile, Medium est, ex coroll. præcedentis propos. Quod ergo sub Mediis longitudine commensurabilibus, &c. Quod erat ostendendum.

a 1. sexti.

b 10. decimi.

## 25. THEOR. 23. PROPOS. 26.

23. QVOD sub Mediis potentia tantùm commensurabilibus rectis lineis continetur rectangulum, vel Rationale est, vel Medium.

SIT rectangulum A C, comprehensum sub Mediis A B, B C, potentia tantùm commensurabilibus. Dico A C, esse vel Rationale, vel Medium. Describantur ex A B, B C, quadrata A D, C E, quæ Media erunt, vt in scholio propos. 22. huius lib. docuimus; cùm rectæ A B, B C, Mediæ ponantur. Exponatur Rationalis F G, [c] ad quam applicetur rectangulum F H, quadrato A D, ex A B, descripto æquale; & ad H I, rectangulum I K, rectangulo A C, æquale; & denique ad K L, rectangulum L M, æquale quadrato C E, ex B C, descripto; eritq; totum F M, vnum rectangulum, quemadmodum propos. 45. lib. 1. est ostensum. Quia verò A D, C E, Media sunt, erunt & F H, L M, illis æqualia, Media: quæ cùm applicentur ad Rationales F G, K L, ([d] est enim & K L, Rationali F G, æqualis, ob parallelogrammum F K, Rationalis.) faciantque latitudines G H, K M, [e] erunt rectæ G H, K M, Rationales, ipsi F G, seu K L, longitudine incommensurabiles. Et quia rectæ A B, B C, potentia inter se sunt commensurabiles, erunt & earum quadrata A D, C E, atque adeò & ipsis æqualia rectangula F H, L M, commensurabilia: [f] Vt autem F H, ad L M, ita est recta G H, ad K M. [g] Igitur G H, K M, longitudine inter se commensurabiles sunt. Quare G H, K M, Rationales ostensæ, sunt longitudine inter se commensurabiles, Rationali verò F G, solùm commensurabiles potentia, cùm ei ostensæ sint longitudine incommensurabiles; [h] Ac propterea rectangulum sub ipsis

c 45. primi.

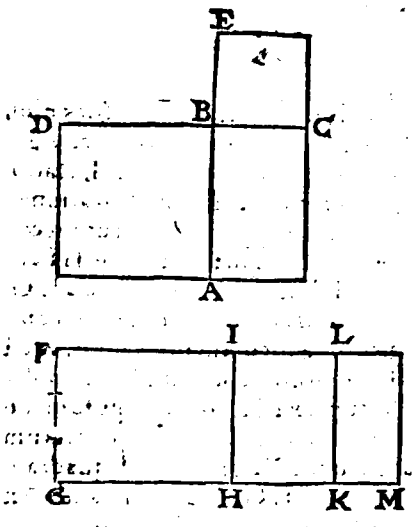
d 34. primi.

e 23. decimi.

f 1. sexti.

g 10. decimi.

h 20. decimi




ipſis GH, KM, Rationale eſt. Et quoniam eſt, vt DB, ad BC, ita AB, ad BE; (quòd DB, BC, ipſis AB, BE, ſint æquales, vtraque vtriq;.) [a] & vt DB, ad BC, ita AD, ad AC; & vt AB, ad BE, ita AC, ad CE; erit quoq; vt AD, ad AC, ita AC, ad CE; atque adeò AD, AC, CE, proportionalia ſunt. Igitur & illis æqualia FH, HL, LM, proportionalia erunt: [b] Habent autem rectæ GH, HK, KM, eaſdem proportiones, quas rectangula FH, HL, LM. Igitur & rectæ GH, HK, KM, proportionales ſunt; [c] propterea q; rectangulum ſub GH, KM, quadrato ex HK, æquale eſt. Eſt autem rectangulum ſub GH, KM, oſtenſum Rationale. Igitur & quadratū ex HK, Rationale eſt; ideoq; & recta HK, Rationalis erit; [d] & ob hoc ipſi FG, Rationali expoſitę, hoc eſt, ipſi HI, commenſurabilis vel longitudine, & potentia, vel ſolùm potentia. Et ſi quidem HK, ipſi HI, longitudine ſit commenſurabilis; [e] rectangulum HL, ſub Rationalibus HI, HK, longitudine commenſurabilibus contentum, hoc eſt, AC, illi æquale, erit Rationale. Si verò HK, ipſi HI, potentia ſolùm commenſurabilis ſit; [f] erit rectangulum HL, ſub Rationalibus HI, HK, potentia tantùm commenſurabilibus contentum, hoc eſt, AC, illi æquale, Medium. Eſt ergo AC, rectangulum ſub Mediis AB, BC, potentia tantùm commenſurabilibus contentum, vel rationale, vel Mediū. Quocirca, quod ſub Mediis potentia tantū cōmenſurabilibus, &c. Quod erat oſtendendū.

a 1. ſexti.
b 1. ſexti.
c 17. ſexti.
d 6. defin.
e 20. decimi
f 21. decimi

## SCHOLIVM.

*FACILIVS quàm ex 45. propoſ. lib. 1. applicabimus ad HI, rectangulum ipſi AC, æquale,* [a] *ſi tribus rectis HI, AB, BC, quarta proportionalis ſumatur pro latere HK.* [b] *Nam rectangulum ſub extremis HI, HK, æquale erit rectangulo ſub mediis AB, BC.*

a 12. ſexti.
b 16. ſexti.

*HAC eadem arte vtemur in ſequentibus, quando ad aliquam rectam applicandum erit rectangulum æquale alteri rectangulo.*

*QVONIAM verò in hoc theoremate demonſtratur, rectangulum contentum ſub duabus rectis Mediis potentia tantùm commenſurabilibus eſſe vel Rationale, vel Medium; docebit Euclides propoſ. 28. quánam ratione inueniendæ ſint duæ Mediæ potētia tantùm commenſurabiles, quæ Rationale comprehendant: Propoſ. verò 29. duas Medias potentia ſolùm commenſurabiles inquiret, quæ ſpatium Medium contineant.*

*ITAQVE habemus ex his,* [c] *rectangulum contentum ſub duabus Rationalibus longitudine commenſurabilibus eſſe Rationale;* [d] *Sub duabus verò Rationalibus potentia tantùm commenſurabilibus contentum rectangulum eſſe Irrationale, appellariq; Medium, & rectam quæ ipſum poteſt, Mediam. Rurſus ex demonſtratis conſtat,* [e] *rectangulum comprehenſum ſub duabus Mediis longitudine commenſurabilibus eſſe Medium;* [f] *Rectangulum autem ſub duabus Mediis potentia ſolùm commenſurabilibus comprehenſum eſſe vel Rationale, vel Medium.*

c 20. decimi.
d 22. decimi.
e 25. decimi.
f 26. decimi.

*QVOD ſi quis roget, qualénam rectangulum ſit illud, q; ſub duabus Mediis longitudine & potētia incōmenſurabilibus cōtinetur; Reſpondemus illud nec Rationale eſſe, nec Medium, ſed tertiū quoddā genus conſtituere; nēpe æquale eſſe rectangulo, q; cōtinetur ſub linea Rationali, & Irrationali, quæ Media appellatur.*

*SIT enim rectangulum AC, comprehenſum ſub duabus Mediis AB, BC, longitudine & potentia incommenſurabilibus. Dico AC, neq; Rationale eſſe, neq; Medium. &c. Conſtructis enim eiſdem, vt in theoremate, oſtendemus ſimiliter, rectas GH, KM, Rationales eſſe, & ipſi FG, longitudine incommenſurabiles. Et quia rectæ AB, BC, ponuntur incommenſurabiles longitudine & potentia; erunt & earum quadrata AD, CE, atque adeò ipſis æqualia rectangula FH, LM, incommēſurabilia:* [g] *Vt autem FH, ad LM, ita eſt recta GH, ad rectam KM.* [h] *Igitur rectæ GH, KM, longitudine inter ſe ſunt incommenſurabiles. Quare GH, KM, oſtenſæ Rationales, ſunt potentia tantùm inter ſe commenſurabiles;* [i] *Ac propterea rectangulum ſub ipſis GH, KM, Irrationale eſt, quod Medium appellatur, & recta ipſum potens, Irrationalis, quæ dicitur Media.* [k] *Poteſt autem rectangulum ſub ipſis GH, KM, recta HK: (Nam, vt prius, oſtendemus tres GH HK, KM, eſſe proportionales.) Igitur HK, Irrationalis eſt, & Media. Quare IK, Rationale non eſt: ſi enim Rationale eſſet,* [l] *faceret ipſum ad Rationalem HI, applicatum latitudinem HK, Rationalem, & ipſi HI, longitudine commenſurabilem. Quod eſt abſurdum. oſtenſa enim eſt HK, Irrationalis, ac Media. Eodem modo neq; IK, Medium eſt; Si enim eſſet Medium,* [m] *faceret ipſum applicatum ad Rationalem HI, latitudinem HK, Rationalem, & ipſi HI, longitudine incommenſurabilem. quod eſt abſurdum. oſtenſa eſt enim HK, Irrationalis, & Media. Itaque cùm IK, neq; Rationale ſit, neq; Medium: neceſſariò neq; AC, illi æquale, Rationale erit, nèque Medium, ſed tertium quoddam genus conſtituet, nempe æquale erit ipſi IK, quod ſub Rationali, & Media, continetur, cùm HI, Rationalis ſit, & HK, oſtenſa Media. Ex quibus efficitur, rectam quæ poteſt ſpatiū ſub duabus Mediis longitudine & potentia incommēſurabilib. (quales ponuntur AB, BC,) comprehenſum, poſſe quoq; rectangulum ſub Rationali, & Irrationali, quæ Media vocatur, cōtentum. Quod eſt propoſitum.*

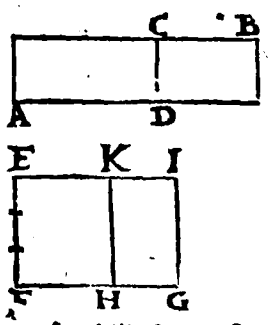
g 1. ſexti.
h 10. decimi.
i 22. decimi.
k 17. ſexti.
l 21. decimi
m 23. decimi.

26. 22.

## THEOR. 24. PROPOS. 27.

MEDIVM non superat Medium Rationali.

SVPERET Medium AB, Medium AC, rectangulo DB. Dico DB, nõ esse Rationale. Sit enim, si fieri potest, DB, Rationale. Exposita ergo Rationali linea EF; [a] ad ipsam applicetur rectangulum EG, Medio AB, æquale; & Medio AC, rectangulum EH, æquale, vt sit reliquum HI, Rationali DB, æquale. Erunt igitur EG, EH, æqualia Mediis AB, AC, Media; & HI, æquale Rationali DB, Rationale. Quoniam ergo Media EG, EH, ad Rationalem EF, sunt applicata; [b] erunt rectæ FG, FH, Rationales, & ipsi EF, incommensurabiles longitudine. Rursus, quia Rationale HI, applicatum est ad Rationalem HK; ([c] est enim recta HK, Rationali EF, æqualis) [d] erit recta HG, Rationalis, & ipsi EF, longitudine commensurabilis. Quare cùm HG, EF, longitudine sint commensurabiles; & EF, ipsi FH, longitudine incommensurabilis, vt est ostensum; [e] erit & HG, eidem FH, longitudine incommensurabilis. Est autem vt FH, ad HG, ita quadratum ex FH, ad rectangulum sub FH, HG, ex tertio lemmate propos. 19. huius lib. [f] Igitur quadratum ex FH, incommensurabile est rectangulo sub FH, HG. Sed quadrato ex FH, commensurabile est quadratum ex HG; (quòd sint amborex lineis Rationalibus FH, HG, descripta) & atque adeò & duo quadrata ex FH, HG, simul, quadrato ex FH, commensurabilia sunt: Et rectangulo sub FH, HG, commensurabile est id, quod bis continetur sub FH, HG, (quia hoc illius est duplum.) Igitur per ea, quæ in scholio propos. 14. huius lib. ostendimus, & duo quadrata ex FH, HG, simul incommensurabilia sunt rectangulo sub FH, HG, bis. [h] Quare & compositum ex quadratis rectarum FH, HG, & ex rectangulo bis sub FH, HG, incommensurabile est composito ex quadratis rectarum FH, HG. [i] At quadratis ex FH, HG, vnà cum rectangulo bis sub FH, HG, æquale est quadratum ex FG. Igitur & quadratum FG, incommensurabile est composito ex quadratis rectarum FH, HG: Est autem compositum hoc Rationale, ex lemmate 4. propos. 19. huius lib. quòd ostensum sit commensurabile quadrato Rationali ex FH. Igitur cùm huic composito, quod Rationale est, incommensurabile sit quadratum ex FG, [k] erit quadratum ex FG. Irrationale; [l] ac propterea & recta FG, Irrationalis erit. Quod est absurdum. ostensa enim est FG, Rationalis longitudine ipsi EF, incommensurabilis. Non ergo DB, quo Medium AB, superat Medium AC, Rationale est. Quam ob rem Medium non superat Medium Rationali. Quod erat ostendendum.

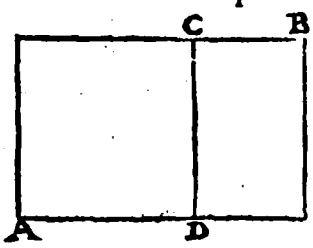



a 45. primi. b 23. decimi c 34. primi. d 21. decimi. e 14. decimi. f 10. decimi. g 16. decimi h 17. decimi. i 4. secundi. k 10. defin. l 11. defin.

### SCHOLIVM.

*Ex dictis & hoc demonstrabimus.*

RATIONALE superat rationale Rationali.



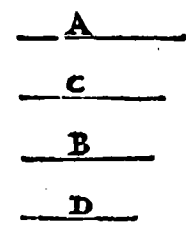

*RATIONALE enim AB superet Rationale AC, spatio DB. Dico DB, quoq; esse Rationale. Quoniã enim AB, AC, Rationalia sunt;* [a] *erunt AB, AC, commensurabilia quadrato Rationalis expositæ;* [b] *atq; adeò & inter se commensurabilia. Quare cùm totum AB, cõpositum ex AC, DB, commensurabile sit ipsi AC; erit quoq; idem AB, reliquo DB, commẽsurabile, ex coroll. propos. 16. huius lib. Est autẽ AB, Rationale. Igitur & DB, ex lemmate 4. propos. 19. huius lib. Rationale est. Quod est propositum.*

a 29. defin. b 12. decimi.

27. 0.

## PROBL. 4. PROPOS. 28.

MEDIAS inuenire potentia tantùm commensurabiles, quæ Rationale comprehendant.



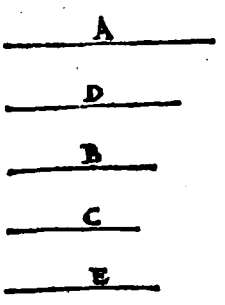

EXPONANTVR per lemma 2. propos. 21. huius lib. duæ Rationales A, B, potentia tantùm cõmensurabiles [a] inter quas media proportionalis sumatur C; [b] fiatq; vt A, ad B, ita C, ad D. Dico C, D, esse Medias potẽtia tantùm commẽsurabiles, quæ Rationale comprehendant. Quoniam enim A, B, Rationales ponuntur potentia tantùm commensurabiles; [c] erit rectangulum sub ipsis contentum, Irrationale, quod Medium vocatur; atq; adeò [d] cùm ipsum possit recta C, erit C, Media. Et quoniam est vt A, ad B, ita C, ad D; suntq; A, B, potentia tantùm commensurabiles; erunt quoque C, D, solùm commensurabiles potentia, vt in scholio propos. 10. huius lib. ostendimus. [e] Est ergo & D, Mediæ C, commẽsurabilis, Media. Quare inuentæ sunt Mediæ C, D, potentia tantùm commensurabiles. Dico iam ipsas continere Rationale. Quoniam enim est vt A, ad B, ita C, ad D; & permutando vt A, ad C, ita B, ad D; Vt autem A, ad C, ita est C, ad B; erit quoque vt C, ad B, ita B, ad D; ideoq; B, media proportionalis inter C, & D, [f] poterit rectangulum sub ipsis C, D, comprehensum. Est autem quadratum ex B, linea Rationali, Rationale. Igitur & rectangulum sub C, D, Rationale est. Medias ergo inuenimus C, D, potenta tantùm cõmensurabiles, quæ Rationale comprehendunt. Quod faciendum erat.

a 13. sexti. b 12. sexti. c 22. decimi. d 17. sexti. e 24. decimi f 17. sexti.

PROBL. 5.

## PROBL. 5. PROPOS. 29. 28.

**MEDIAS inuenire potentia tantùm cõmensurabiles, quæ Medium contineãt.**




EXPONANTVR per ea, quę in scholio propos. 21. huius lib. demonstrauimus, tres Rationales A, B, C, potentia tantùm commensurabiles; [a] & inter A, B, media proportionalis inueniatur D. [b] Deinde fiat vt B, ad C, ita D, ad E. Dico D, E, Medias esse, potentia tantùm commensurabiles, quæ Medium contineant. Quoniam enim A, B, Rationales sunt potentia solùm commensurabiles; erit rectangulum sub A, B, atque adeò & quadratum ex D; [c] quod illi æquale est, [d] Irrationale, quod Medium dicitur; & ipsa recta D, Media. Et quia est vt B, ad C, ita D, ad E; sunt autem B, C, Rationales, & potentia solùm commensurabiles; erunt quoq; D, E, potentia solùm commensurabiles, vt in scholio propos. 10. huius lib. demonstratum est. Cùm ergo D, Media sit, [e] erit & E, illi potentia solùm commensurabilis, Media; Ac propterea D, E, Mediæ sunt potentia tantùm commensurabiles. Dico iam ipsas continere Medium. Quoniam enim est vt B, ad C, ita D, ad E; & permutando vt B, ad D, ita C, ad E: Vt autem B, ad D, ita D, ad A; erit quoque vt D, ad A, ita C, ad E. [f] Rectangulum igitur sub D, E, æquale est ei, quod sub A, C: Est autem quod sub A, C, Rationalibus potentia solùm commensurabilibus, [g] Irrationale, & Medium. Igitur & rectangulum sub D, E, Medium est. Medias ergo inuenimus D, E, potentia tantùm commensurabiles, quæ Medium continent. Quod faciendum erat.

a 13. sexti. b 12. sexti. c 17. sexti. d 22. decimi e 14. decimi. f 16. sexti. g 22. decimi

### SCHOLIVM I.

*IN iis quæ sequuntur, indigemus hoc problemate.*

DVOS numeros planos similes inuenire.

A, 6. C, 12. B, 4. D, 8. E, 24. F, 96.

*SVMANTVR quatuor quicunq; numeri proportionales, A, B, C, D, vt quidem A, ad C, ita B, ad D. Multiplicantes autem se mutuò A, & B, faciant E; Item C, & D, se multiplicantes faciant F. Erunt ergo E, & F, numeri plani similes, quandoquidem latera habent proportionalia, vt ex constructione est manifestum.*

*QVONIAM autem in lib. 9.* [a] *ostensum est, si impar numerus, vel par parem multiplicet, procreari numerum parem; Imparem verò, si impar multiplicet imparem; perspicuum est, quonam modo inueniri possint duo plani similes, quorum vterq; par sit, vel impar; Vel vnus quidem par, alter verò impar. Si enim latera sumpta, sint numeri pares, erunt eorum plani pares etiam: si autem numeri sint impares, erunt & plani eorum impares. Quod si vnius latera sint impares numeri, alterius autem pares, erit illorum quidem planus, impar; horum verò par: Similiter pares erunt plani, si quilibet habeat vnum latus numerum parem, alterum verò imparem, &c.*

a 28. & 29. noni.

### LEMMA I.

DVOS numeros quadratos inuenire, ita vt compositus ex ipsis quadratus etiam sit.

*INVENIANTVR per ea, quæ in scholio proximo dicta sunt, duo plani similes A B, & C, quorum vterque vel par sit, vel impar.* [b] *Et quoniam, siue à pari par auferatur, siue ab impari impar, reliquus par est; detracto B D, ex A B, qui æqualis sit ipsi C, erit reliquus A D, par. Quo diuiso bifariam in E; Dico numerum factum ex A B, in B D,* [c] *qui quidem quadratus est, compositum cum quadrato numeri E D, facere quadratum. Quoniam enim numerus A D, bifariam est diuisus in E, & ei additus D B; erit ex 6. theoremate eorum, quæ ad propos. 14. lib. 9. demonstrauimus, numerus qui fit ex A B, in B D, vnà cum quadrato numeri D E, æqualis quadrato numeri E B. Quare duo quadrati, nempe qui fit ex A B, in B D, & quadratus numeri D E, compositi faciunt quadratum, eum videlicet, qui ex B E, gignitur. quod est propositum.*

A.....E.....D.....B
C.....

b 24. & 26. noni. c 1. noni.

### COROLLARIVM.

*Ex his manifestum est, quando A B, & C, similes sunt, inuentos esse eadem arte duos numeros quadratos numerorum B E, E D, quorum excessus, nimirum numerus ex A B, in B D, factus, etiam numerus quadratus sit.*

*QVOD si numeri sumantur A B, & C, non similes, vterq; tamen par, vel impar; inuenti erunt eodem modo duo quadrati numerorum B E, E D, quorum excessus, numerus scilicet, qui fit ex A B, in B D, non est quadratus. Si enim quadratus esset,* [d] *numeri A B, B D, hoc est, A B, & C, plani similes essent. Quod est absurdum. ponuntur enim non similes.*

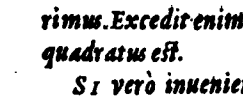
d 2. noni.

### SCHOLIVM II.

*IT A QVE si iubeamur inuenire duos quadratos numeros, quorũ excessus etiam sit numerus quadratus;*

*sumemus vt prius, duos planos similes, quorum vterq; par, vel impar sit, nempe A B, & C, & reliqua perficiemus, vt in proximo lemmate est dictum. Nam quadrati numeri ex B E, E D, descripti sunt illi, quos quærimus. Excedit enim quadratus ex B E, quadratum ex E D, numero, qui producitur ex A B, in B D, qui etiam quadratus est.*

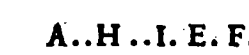
*Si verò inueniendi sint duo quadrati, quorum excessus non sit quadratus: sumendi erunt duo numeri plani A B, & C, non similes, quorum vterque par sit, vel impar, & reliqua peragenda, vt prius. Nam similiter ostendemus quadratum ex B E, æqualem esse quadrato ex D E, vnà cum eo qui ex A B, in B D, fit; Quare excessus quadratorum ex B E, E D, est numerus factus ex A B, in B D, qui cùm non sit quadratus; (Si enim esset quadratus, essent A B, B D, plani similes. quod non ponitur) constat propositum.*




*Hoc posterius facilius absoluemus, si quemcunque quadratum numerum diuidamus in duos numeros, quorum alter sit quadratus, alter verò non. Vt si quadratus 36. diuidatur in quadratum 16. & non quadratum 20. excedet quadratus 36. quadratum 16. numero 20 non quadrato. Sic quoque si idem quadratus 36. diuidatur in quadratum 25. & non quadratum 11. superabit quadratus 36. quadratum 25. numero non quadrato 11. & sic de cæteris.*

## LEMMA II.

**Dvos numeros quadratos inuenire, ita vt compositus ex ipsis non sit quadratus.**




*Sint duo numeri plani similes A B, & C, pares, vel impares, vt in lemmate præcedenti, fiatq; eadem constructio, ita vt rursus quadratus, qui fit ex multiplicatione similium numerorum A B, D B, inter se, vnà cum quadrato ex D E, æqualis sit quadrato ex B E. Auferatur deinde ex D E, vnitas E F. Erit ergo quadratus ex D F, minor quadrato ex D E, quòd & latus D F, latere D E, minus sit. Dico quadratos numeros, quorum alter ex A B, in B D, alter verò ex D F, in se fit, compositos non efficere numerum quadratum. Nam si compositus ex ipsis est quadratus, erit is vel maior quadrato ex B F, vel æqualis, vel minor: quod fieri non posse, in hunc modum demonstrabimus. Sit enim primùm maior, quàm quadratus ex B F; ac propterea latus ipsius maius latere B F. Erit ergo latus ipsius vel æquale numero B E, vel maius. (Minus enim non erit, quoniam inter numeros B E, B F, sola vnitate inter se distantes nullus medius est numerus, ne vnitas ipsa secetur; Esset autem dictum latus inter ipsos medium, si maius poneretur quàm B F, minus verò quàm B E.) Si dicatur æquale, ita vt quadrato ex B E, æqualis sit quadratus numerus compositus ex quadrato, qui fit ex A B, in B D, & ex quadrato numeri D F; cùm eidem quadrato ex B E, sit ostensus in præcedenti lemmate æqualis numerus, qui fit ex A B, in B D, vnà cum quadrato ex D E; erit, qui fit ex A B, in B D, vnà cum quadrato ex D F, æqualis ei, qui fit ex A B, in B D, vnà cum quadrato ex D E. Ablato ergo communi, eo scilicet qui fit ex A B, in B D; erit reliquus quadratus ex D F, æqualis reliquo quadrato ex D E; Ideoq; & latus D F, lateri D E, æquale, pars toti. Quod est absurdum. Non ergo latus quadrati compositi ex quadratis, quorum alter ex A B, in B D, alter verò ex D F, in se fit, æquale est numero B E. Sed neque maius. Sit enim, si fieri potest, latus illius æquale numero B I, qui maior sit, quàm B E, ita vt quadrato ex B I, æqualis sit quadratus ille compositus. Quoniam igitur quadratus ex B I, latere maiore, maior est quadrato ex B E, latere minore: erit quoque compositus ex quadratis, quorum alter ex A B, in B D, alter verò ex D F, in se fit, (cùm hic compositus æqualis ponatur quadrato ex B I,) maior quadrato ex B E. Est autem quadrato ex B E, ostensus in lemmate præcedenti æqualis numerus, qui fit ex A B, in B D; vnà cum quadrato ex D E: Ablato ergo communi, qui fit ex A B, in B D; erit reliquus quadratus ex D F, reliquo quadrato ex D E, maior; ac proinde latus D F, latere D E, maius, pars toto. Quod est absurdum. Non ergo latus quadrati compositi ex quadratis, quorum alter sit ex A B, in B D, alter verò ex D F, in se, maius est latere B E. Sed neq; æquale, neque minus ostensum est. Non igitur quadratus ille compositus maior est quadrato ex B F.*

*Sit iam, si fieri potest, numerus qui fit ex A B, in B D, vnà cum quadrato ex D F, æqualis quadrato ex B F; & ponatur numerus A H, duplus vnitatis E F. Quia igitur totus A D, totius E D, duplus est, (diuisus enim est A D, in E, bifariam) & ablatus A H, ablatæ vnitatis E F; erit & reliquus H D, reliqui F D, duplus, ex iis, quæ ad propos. 7. lib. 7. ostendimus; atque*

*id circo*

*idcirco HD, in F, bifariam diuiditur. Quare ex 6. theorem. eorum, quæ ad propoſ. 14. lib. 9. demonſtrauimus, erit numerus qui fit ex HB, in BD, vnà cum quadrato ex DF, æqualis quadrato ex BF. Sed eidem quadrato ex BF, æqualis ponitur numerus, qui fit ex AB, in BD, vnà cum quadrato ex DF: Igitur qui fit ex HB, in BD, vnà cum quadrato ex DF, æqualis eſt ei, qui fit ex AB, in BD, vnà cum quadrato ex DF: & detracto communi quadrato ex DF, relinquetur, qui fit ex HB, in BD, ei qui fit ex AB, in BD, æqualis. Quare cum HB, AB, multiplicantes eundem BD, producant æquales numeros; [a] habeant autem multiplicantes eandem proportionem, quam producti; erit HB, ipſi AB, æqualis, pars toti. Quod eſt abſurdum. Non eſt ergo, qui ex AB, in BD, vnà cum quadrato ex DF, quadrato ex BF, æqualis.* [a] 18. ſeptimi.

*SIT tandem, ſi poteſt fieri, numerus qui ex AB, in BD, vnà cum quadrato ex DF, minor quadrato ex BF, ac propterea & latus eius latere BF, minus, quòd ſit BG, ita vt qui ex AB, in BD, vnà cum quadrato ex DF, æqualis ſit quadrato ex BG. Sumatur autem ipſius EG, duplus AI. Quoniam igitur totus AD, totius FD, duplus eſt, & ablatus AI, ablati EG; erit rurſus & reliquus ID, reliqui GD, duplus; ac propterea ID, in G, diuidetur bifariam. Quare ex eodem theorem. 6. eorum, quæ ad propoſ. 14. lib. 9. demonſtrata ſunt, erit numerus qui fit ex IB, in BD, vnà cum quadrato ex DG, æqualis quadrato ex BG: ponitur autem eidem quadrato ex BG, æqualis qui fit ex AB, in BD, vnà cum quadrato ex DF. Igitur qui fit ex IB, in BD, vnà cum quadrato ex DG, æqualis eſt ei, qui ex AB, in BD, vnà cum quadrato ex DF. Ablatis igitur quadratis ex DG, & DF, quorum qui ex DG, minor eſt, remanebit qui ex IB, in BD, maior eo, qui ex AB, in BD, pars toto. Quod eſt abſurdum. Non eſt ergo qui ex AB, in BD, vnà cum quadrato ex DF, minor quadrato ex BF. Sed neque maior eſt oſtenſus, neque æqualis. Non igitur quadratus eſt, qui ex AB, in BD, vnà cum quadrato ex DF. Quod eſt propoſitum.*

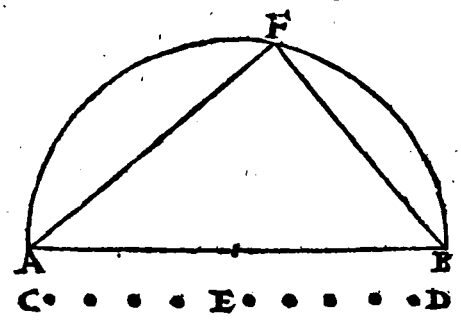
### SCHOLIVM III.

*EX hoc facilè inueniemus duos numeros, ita vt ex illis compoſitus ad neutrum ipſorum proportionem habeat, quam quadratus ad quadratum. Si enim per lemma præcedens inueniantur duo quadrati, ita vt compoſitus ex ipſis non ſit quadratus; habebit hic compoſitus non quadratus ad neutrum ipſorum quadratorum proportionem, quam quadratus ad quadratum.*

*IDEM obtinebimus, ſi quemlibet numerum quadratum in duos non quadratos partiti fuerimus. Ita enim quadratus totus ad neutrum eorum, in quos diuiſus eſt, proportionẽ habebit, q̃ quadratus ad quadratũ.*

## PROBL. 6. PROPOS. 30. 29. 17.

**INVENIRE** duas Rationales potentia tantùm commenſurabiles, ita vt maior, quàm minor, plus poſſit quadrato rectæ lineæ longitudine ſibi commenſurabilis.




EXPONATVR linea Rationalis AB, & inueniantur ex iis, quæ in ſcholio 2. propoſ. præcedentis tradidimus, duo numeri quadrati CD, CE, quorum exceſſus DE, non ſit quadratus. Deinde per coroll. propoſ. 6. huius lib. fiat vt CD, numerus ad numerum DE, ita quadratum ex AB, ad aliud quadratum, nimirum ad id, quod ex AF; accommodeturq; AF, in ſemicirculo AFB, circa diametrum AB, deſcripto: ac denique connectatur recta FB. [a] Quoniam ergo angulus F, rectus eſt in ſemicirculo; [b] erit quadratum ex AB, æquale duobus quadratis ex AF, & FB; hoc eſt, recta AB, plus poterit quàm AF, quadrato rectæ FB. Et quia eſt quadratum ex AB, ad quadratum ex AF, vt numerus CD, ad numerum DE; [c] erunt quadrata ex AB, AF, commenſurabilia; atque adeò cùm quadratum ex AB, ſit Rationale, nempe ex linea Rationali AB, deſcriptum; erit & quadratũ ex AF, Rationale, propterea q; & recta AF, ipſum deſcribens, Rationalis. Rationales ergo ſunt AB, AF; atque adeò commenſurabiles ſaltem potentia. Quia verò quadratum ex AB, ad quadratum ex AF, proportionem non habet, quam quadratus numerus ad quadratum numerum; (cùm neque quadratus numerus CD, ad non quadratum DE, proportionem habeat, quam quadratus ad quadratum; aliàs & DE, quadratus eſſet, [d] vt in Arithmeticis eſt demonſtratum. quod non ponitur) [e] erunt rectæ AB, AF, longitudine incommenſurabiles: Sunt autem commenſurabiles potentia, vt oſtenſum eſt. Igitur AB, AF, Rationales ſunt potentia tantùm commenſurabiles.

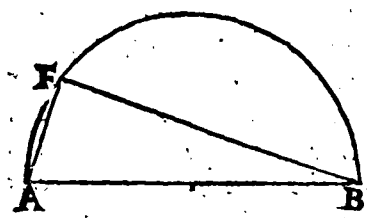
[a] 31. tertij. [b] 47. primi. [c] 6. decimi. [d] 24. decimi. [e] 9. decimi.

IAM verò quoniam eſt vt CD, ad DE, ita quadratum ex AB, ad quadratum ex AF; erit per conuerſionem rationis, vt quadratus numerus CD, ad quadratum numerum CE, ita quadratum ex AB, ad quadratũ ex FB, (ſicut enim CD, ſuperat DE, quadrato CE, ita etiam quadratũ ex AB,

a 9. decimi. superat quadratũ ex AF, quadrato ex FB.) a Quare rectæ AB, FB, longitudine commẽsurabiles sunt. Inuenimus ergo duas Rationales AB, AF, potentia tantũ cõmensurabiles, ita vt maior AB, plus possit, q̃ minor AF, quadrato lineæ FB, sibi lõgitudine cõmensurabilis. Quod faciendũ erat.

30. 18. ## PROBL. 7. PROPOS. 31.

INVENIRE duas Rationales potentia tantùm commensurabiles, ita vt maior, quàm minor, plus possit quadrato rectæ lineæ sibi longitudine incõmensurabilis.

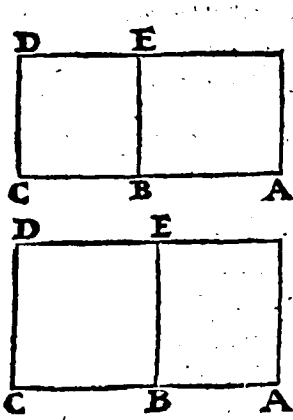



b 24. octaui CI44. EI6. D C, 60 D
C • • • • • E • • D

EXPONATVR Rationalis linea AB, inueniantur q̃; per lemma 2. propos. 29. huius lib. duo numeri quadrati CE, ED, ita vt ex illis compositus CD, non sit quadratus, vel certè numerus aliquis quadratus CD, secetur in duos numeros non quadratos CE, ED: Vtrumuis enim horum fiat, totus CD, ad neutrũ ipsorum CE, ED, proportionem habebit, quam quadratus ad quadratum, aliàs secundùm priorem modum, esset totus CD, etiam quadratus: iuxta posteriorẽ verò, quilibet ipsorum CE, ED, quadratus quoque, b vt in Arithmeticis ostẽsum est. quod non ponitur. Fiat deinde per coroll. propos. 6. huius lib. vt CD, ad DE, ita quadratum ex AB, ad aliud quadratum, vt adid, quod ex AF; accommodeturq; AF, in semicirculo AFB, circa AB, descripto. Denique connectatur recta FB. Poterit igitur, vt in præcedenti, AB, plus quàm AF, quadrato rectæ FB; Eruntque AB, AF, Rationales potentia solùm commensurabiles: Eadem enim hìc est demonstratio, quæ in præcedenti propos. Quoniam verò rursus, vt prius, est per conuersionem rationis, vt CD, ad CE, ita quadratum ex AB, ad quadratum ex FB: Non habet autem CD, ad CE, proportionem quam quadratus ad quadratum; Non habebit quoque quadratum ex AB, ad quadratum ex FB, proportionem, quam quadratus numerus ad numerum quadratum. c Quare rectæ AB, FB, longitudine incommensurabiles sunt. Inuenimus ergo duas Rationales AB, AF, potentia tantùm commensurabiles, ita vt maior AB, plus possit quàm minor AF, quadrato lineæ FB, sibi longitudine incommensurabilis. Quod erat faciendum.

c 9. decimi.

### LEMMA.




SI sint duæ rectæ lineæ inæquales, erit vt maior ad minorem, ita rectangulum sub ipsis contentum, ad quadratum minoris.

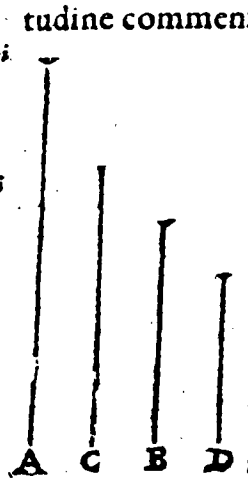
*SINT duæ rectæ inæquales AB, BC, in rectum constitutæ, quarum AB, maior sit. Dico esse, vt AB, ad BC, ita rectangulum sub AB, BC, ad quadratũ ex BC. Describatur enim ex BC, quadratum BD, compleaturq; rectangulum AD; eritq; rectangulum AE, sub AB, BC, contentum; quod BE, ipsi BC, sit æquale: a perspicuum autem est, esse vt AB, ad BC, ita AE, ad BD.*

a 1. sexti.

*EODEM modo erit, vt minor ad maiorem, ita rectangulum sub ipsis contentum, ad quadratum maioris, vt in secunda figura est manifestum, in qua AB, minor est, quàm BC.*

31. 24. 25. ## PROBL. 8. PROPOS. 32.

INVENIRE duas Medias potentia tantùm commensurabiles, quæ Rationale contineant, ita vt maior plus possit quàm minor, quadrato rectæ lineæ sibi longitudine commensurabilis.




a 30. decimi
b 22. decimi
c 24. decimi
d 17. sexti.

a REPERTAE sint duę Rationales A, B, potentia tantùm commensurabiles, ita vt A, maior plus possit quàm B, minor quadrato lineæ longitudine sibi commensurabilis; sitq; C, media proportionalis inter A, & B; & fiat vt A, ad B, ita C, ad D. Quoniã igitur A, B, sunt Rationales potẽtia solùm commensurabiles; b erit rectangulum sub A, B, Irrationale, & recta C, ipsum potens, linea Media. Et quia est vt A, ad B, ita C, ad D; sunt autem A, & B, potentia tantùm commẽsurabiles, erunt quoque C, & D, potentia solùm commensurabiles, vt in scholio propos. 10. huius libri ostendimus. c Quare D, Mediæ C, commensurabilis, Media quoque est. Inuentæ ergo sunt duæ Mediæ C, D, potentia tantùm commensurabiles. Dico eas Rationale comprehendere. Cùm enim sit vt A, ad B, ita C, ad D; & permutando vt A, ad C, ita B, ad D; sit autem vt A, ad C, ita C, ad B; erit quoque vt C, ad B, ita B, ad D; d Ac propterea rectangulum sub C, & D, æquale erit quadrato ex B. Quam ob rem, cùm quadratum ex B, Rationali Rationale sit; erit & rectangulum sub C, D, illi æquale, Rationale. Continent ergo Mediæ C, D, potentia tantùm com-

tùm commensurabiles, Rationale. Quoniam verò est vt A, ad B, ita C, ad D: potest autem A, plus quàm B, quadrato lineæ longitudine sibi commensurabilis, ex constructione; [a] poterit quoq; C, plus quàm D, quadrato lineæ longitudine sibi commensurabilis. Inuenimus igitur duas Medias C, D, potentia tantùm commensurabiles, quæ Rationale continent, ita vt maior C, plus possit quã minor D, quadrato rectæ lineæ sibi longitudine commensurabilis. Quod faciendum erat. [a] 15. decimi.

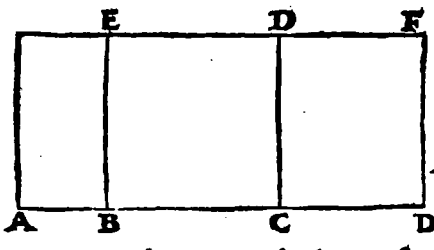
QVOD si repertæ sint A, B, Rationales potentia tantùm commensurabiles, ita vt A, plus possit quàm B, quadrato lineę sibi longitudine incommensurabilis; reliqua autem fiant, vt prius, ostendemus eodem modo, inuentas esse duas Medias C, D, potentia tantùm commensurabiles, quæ Rationale contineant, ita vt maior C, plus possit quàm minor D, quadrato lineæ longitudine sibi incommensurabilis.

## SCHOLIVM.

*ALII hoc problema demonstrant per lemma antecedens: Nos autem breuiùs ac faciliùs idem sine ipso ostendimus, vt facilè iudicabunt, qui cum eorum demonstratione hanc nostram contulerint. Immo rectas C, D, Medias esse potentia solùm commensurabiles, quæ Rationale contineant, non aliter hic ostendimus, ac in propos. 28. huius lib.*

## LEMMA.

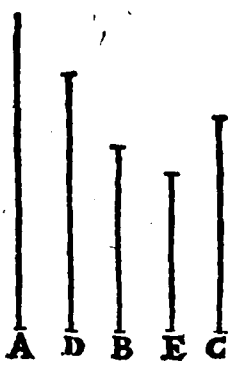
SI sint tres lineæ rectæ, erit vt prima ad tertiam, ita rectangulum sub prima & secunda contentum, ad id, quod sub secunda & tertia continetur.




*SINT tres recta AB, BC, CD, in rectum constituta. Dico esse vt AB, ad CD, ita rectangulum sub AB, BC, ad rectangulum sub BC, CD. Describatur enim ex BC, quadratum BCDE, perficiaturq; rectangulum AF; Eritq; AE, contentum sub AB, BC; & CF, sub BC, CD; quòd BE, CD, ipsi BC, æquales sint.* [a] *Perspicuum autem est esse AB, ad CD, vt AE, ad CF. Quod est propositum.* [a] 1. sexti.

## PROBL. 9. PROPOS. 33. 32. 26.

INVENIRE duas Medias potentia solùm commensurabiles, quæ Medium contineant, ita vt maior plus possit quàm minor, quadrato rectæ lineæ sibi longitudine commensurabilis.




SINT inuentæ tres Rationales A, B, C, potentia tantùm commensurabiles, ita vt A, plus possit quàm C, quadrato lineæ sibi longitudine commensurabilis. (Hoc autem fiet in hunc modum. [a] Repertis duabus Rationalibus A, C, potentia tantùm commensurabilibus, ita vt A, plus possit quàm C, quadrato lineæ sibi commensurabilis longitudine; inueniatur alia B, vtriq; A, & C, potentia solùm commensurabilis, per ea, quæ in scholio propos. 21. huius lib. demonstrauimus.) [b] Et ipsarum A, B, sumatur media proportionalis D; [c] fiatq; vt D, ad B, ita C, ad E. Quoniam igitur ex lemmate antecedenti, est vt A, ad C, ita rectãgulum sub A, B, ad rectangulum sub B, C: [d] Est autem rectangulo sub A, B, æquale quadratum ex D; [e] & rectangulo sub B, C, æquale rectangulum sub D, E, quòd proportionales sint D, B, C, E; Erit quoque vt A, ad C, ita quadratum ex D, ad rectangulum sub D, E: Sed vt quadratum ex D, ad rectangulum sub D, E, ita est per lemma 3. propos. 19. huius lib. recta D, ad rectam E. Igitur erit vt A, ad C, ita D, ad E: Sunt autem A, C, potentia solùm commensurabiles. Ergo & D, E, potentia solùm commensurabiles sunt, vt in scholio propos. 10. huius lib. ostendimus. [f] Quia verò D, potens spatium sub A, B, Rationalibus potentia tantùm commensurabilibus, Irrationalis est, & Media; [g] erit quoque E, ipsi ostensa commensurabilis, Media. Inuentæ ergo sunt duæ Mediæ D, E, potentia solùm commensurabiles. Et quia ostensum est rectangulo sub B, C, [h] quod Medium est, (quòd B, C, sint Rationales potentia tantùm cõmensurabiles,) æquale esse rectangulum sub D E; erit rectangulũ sub D, E, Medium. Deniq; quia ostendimus esse vt A, ad C, ita D, ad E; potest autẽ A, plus quã C, quadrato lineæ sibi longitudine commensurabilis, ex constructione; [i] poterit etiã D, plus quàm E, quadrato lineæ longitudine sibi commensurabilis. Inuenimus ergo duas Medias D, E, potentia solùm commensurabiles, quæ Medium continent, ita vt maior D, plus possit quàm minor E, quadrato lineæ rectæ longitudine sibi commensurabilis. Quod erat faciendum.

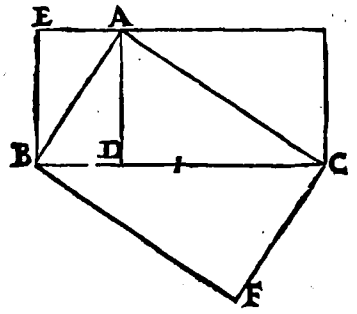
[a] 30. decimi. [b] 13. sexti. [c] 12. sexti. [d] 17. sexti. [e] 16. sexti. [f] 22. decimi. [g] 24. decimi. [h] 22. decimi. [i] 15. decimi.

QVOD si repertæ fuerint A, B, C, Rationales potentia tantùm commensurabiles, ita vt A, plus possit quàm C, quadrato lineæ sibi longitudine incommensurabilis, reliqua autem construantur, vt prius, demõstrabimus similiter, inuentas esse duas Medias D, E, potentia tantùm commen-

ſurabiles, quæ Medium contineant, ita vt maior D, plus poſsit quàm minor E, quadrato lineæ ſibi longitudine incommenſurabilis. Id quod facilè apparere poteſt ex adducta demonſtratione.

## LEMMA I.

SIT triangulum rectangulum A B C, angulum rectum habens B A C, à quo perpendicularis demittatur A D. Dico rectangulum contentum ſub C B, B D, æquale eſſe quadrato ex A B: contentum autem ſub B C, C D, æquale quadrato ex A C: & contentum ſub B D, D C, æquale quadrato ex A D: contentũ deniq; ſub B C, A D, æquale cõtento ſub A B, A C.




a 17. ſexti. *QVONIAM ex coroll. propoſ. 8. lib. 6. recta A B, media proportionalis eſt inter C B, B D;* [a] *erit rectangulum ſub C B, B D, quadrato ex A B, æquale.*

*EADEM ratione erit rectangulum ſub B C, C D, æquale quadrato ex A C; quoniam per idem coroll. A C, media proportionalis eſt inter B C, C D.*

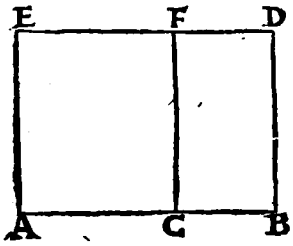
*RVRSVS, quia ex eodem coroll. A D, inter B D, D C, media eſt proportionalis, erit eodem modo rectangulum ſub B D, D C, æquale quadrato ex A D.*

b 8. ſexti. c 16. ſexti. *POSTREMO,* [b] *quia triangula A B C, A B D, ſimilia ſunt; erit vt B C, ad A C, ita A B, ad A D.* [c] *Quare rectangulum ſub B C, A D, æquale eſt rectangulo ſub A B, A C. Quod etiam ita oſtendetur. Compleatur rectangulum C E, contentum ſub B C, A D: Item rectangulum*

d 41. primi *A F, ſub A B, A C, contentum.* [d] *Quoniam igitur rectangulum C E, duplum eſt trianguli A B C, necnon & rectangulum A F, eiuſdem trianguli eſt duplum; erunt inter ſe æqualia rectangula C E, A F. quod eſt propoſitum.*

## LEMMA II.

SI recta linea ſecetur in duas partes inæquales, erit vt maior pars ad minorem, ita rectangulum ſub tota & maiore parte, ad rectangulum ſub tota & minore parte contentum.

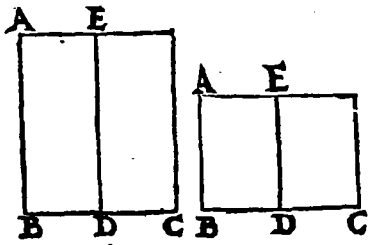



e 1. ſexti. *SECETVR recta A B, non bifariam in C, ſitq; maior pars A C. Dico eſſe vt A C, ad C B, ita rectangulum ſub A B, A C, ad rectangulum ſub A B, C B. Deſcribatur enim ipſius A B, quadratum A B D E, ducaturq; C F, ipſi A E, parallela; eritq; A F, contentum ſub A B, A C, & C D, contentum ſub A B, C B; quòd A E, C F, ipſi A B, æquales ſint.* [e] *Quoniam igitur eſt vt A C, ad C B, ita A F, ad C D; conſtat propoſitum.*

*EADEM ratione erit, vt minor pars B C, ad maiorem C A, ita B F, contentum ſub A B, B C, tota, & minore parte, ad C E, contentum ſub A B, C A, tota, & maiore parte.*

## LEMMA III.

SI ſint duæ rectæ lineæ inæquales, minor autem ſecetur bifariam; erit rectangulũ ſub ipſis contentũ duplum rectanguli, q; ſub maiori linea & dimidia parte minoris cõtinetur.




f 1. ſexti. *SINT duæ rectæ inæquales A B, B C, angulum rectum conſtituentes A B C, ſecetur q; minor B C, bifariam in D. Dico rectangulũ ſub A B, B C, duplum eſſe rectãguli ſub A B, B D. Compleatur enim rectangulũ A C, ſub A B, B C; ducaturq; D E, ipſi A B, parallela; eritq; B E, contentũ ſub A B, et B D, dimidia minoris.* [f] *Quoniam igitur A C, ipſius B E, duplum eſt, q; & baſis B C, dupla ſit baſis B D; conſtat propoſitũ.*

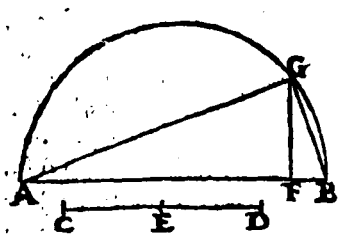
*EODEM modo, ſi B C, ſecta bifariam, ſit maior, erit quod ſub A B, B C, continetur, duplum eius, q; cõtinetur ſub A B, minore & B D, dimidia maioris, vt ex ſecũda figura apparet.*

33. 27. ## PROBL. 10. PROPOS. 34.

INVENIRE duas rectas lineas potẽtia incõmenſurabiles, q̃ faciant cõpoſitum quidẽ ex ipſarũ quadratis, Rationale; Rectangulũ verò ſub ipſis contentũ, Mediũ.

a 31. decimi. [a] REPERIANTVR duæ Rationales A B, C D, potentia ſolùm commenſurabiles, ita vt maior A B, plus poſsit, quàm minor C D, quadrato lineæ longitudine ſibi incommẽſurabilis: ſecetur q; C D, bifariam in E. Deinde per lemma 2. propoſ. 17. huius lib. ad A B, applicetur quadrato ex C E, hoc eſt, quartæ parti quadrati ex C D, æquale rectangulum deficiens figura quadrata, & ſit illud, quod ſub A F, F B, continetur. Poſtremò, deſcripto ſemicirculo A G B, circa A B, erigatur F G, ad

AB,




AB, perpendicularis, connectanturq; rectæ AG, GB. Quoniam igitur AB, plus potest, quàm CD, quadrato lineæ sibi longitudine incommensurabilis, applicatumq; est ad AB, rectangulum sub AF, FB, æquale quartæ parti quadrati ex CD, deficiens figura quadrata: [a] erit AF, ipsi FB, longitudine incommensurabilis. Est autem vt AF, ad FB, ita per lemma 2. propositionis antecedentis, rectangulum sub AB, AF, ad rectangulum sub AB, FB; Rectangulum verò sub AB, AF, quadrato ex AG, & rectangulum sub AB, FB, quadrato ex GB, est æquale, per lemma 1. eiusdem antecedentis propositionis; [b] quòd angulus AGB, rectus sit in semicirculo AGB. Igitur quoque erit vt AF, ad FB, ita quadratum ex AG, ad quadratum ex GB; ac propterea cùm AF, FB, longitudine sint incommensurabiles, [c] erunt quadrata ex AG, GB, incommensurabilia. [d] Igitur rectæ AG, GB, potentia incommensurabiles sunt. Et quia quadratum ex Rationali AB, Rationale est, [e] æqualeq; quadratis ex AG, GB; erit etiam compositum ex quadratis rectarum AG, GB, Rationale. Rursus, quia ex 1. lemmate propositionis præcedentis, rectangulum sub AF, FB, quod quadrato ex CE, æquale est factum, [f] æquale est quadrato ex FG; (propterea quòd angulus AGB, rectus est, & FG, ad AB, perpendicularis) erunt quadrata ex FG, CE, æqualia; ac proinde & rectæ FG, CE, æquales. Quare CD, dupla existens ipsius CE, dupla etiã erit ipsius FG. Igitur per lemma 3. antecedentis propositionis, rectangulum sub AB, CD, duplum erit rectanguli sub AB, FG. (cùm FG, dimidia sit minoris CD.) [g] Sed rectangulum sub AB, CD, Rationalibus potentia tantùm commensurabilibus contentum, Medium est. Igitur & rectangulum sub AB, FG, illi commensurabile, cùm sit eius dimidium, Medium est, per coroll. propos. 24. huius lib. Atqui rectangulo sub AB, FG, per 1. lemma propositionis præcedentis, æquale est rectangulum sub AG, GB. Contentum igitur sub AG, GB, Medium quoque est: Ostensum autem est compositum ex earum quadratis, Rationale. Inuentæ ergo sunt duæ rectæ AG, GB, potentia incommensurabiles, quæ faciunt compositum quidem ex ipsarum quadratis, Rationale; Rectangulum verò sub ipsis contentum; Medium. Quod faciendum erat.

[a] 19. decimi

[b] 31. tertij.

[c] 10. decimi.

[d] 4. defin.

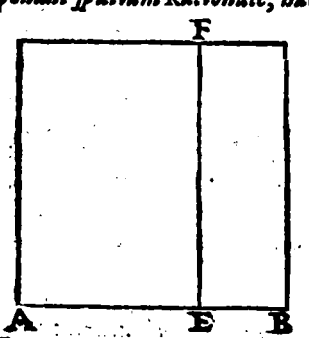
[e] 47. primi.

[f] 17. sexti.

[g] 22. decimi.

## SCHOLIVM.

*DEMONSTRATVR hoc loco in scholio quodam antiquo, fieri posse, vt duo spatia Irrationalia componant spatium Rationale, hac ferè ratione.*




*EXPONATVR Rationalis linea AB, & duo numeri C, D, quorum C, maior sit, non habentes proportionem, quam quadratus ad quadratum; fiatq; vt C, ad D, ita quadratum ex AB, ad quadratum ex AE; & tandem descripto quadrato ex AB, educatur EF, ad AB, perpendicularis. Quoniam igitur est vt C, ad D, ita quadratum ex AB, ad quadratum ex AE; Non habet autem C, ad D, proportionem quam quadratus ad quadratum;* [a] *erunt latera AB, AE, dictorum quadratorum proportionem nõ habentium, quam quadratus ad quadratum, longitudine incommensurabilia; Ac propterea cùm AB, tota longitudine sit incommensurabilis parti AE, erit eadem AB, & reliqua EB, longitudine incommensurabilis, ex coroll. propos. 17. huius lib.* [b] *Vt autem AB, ad AE, ita est quadratum ex AB, ad AF. Igitur cùm AB, AE, incommensurabiles sint longitudine,* [c] *erunt quadratum ex AB, & rectangulum AF, incommensurabilia. Quare quadrato ex AB, existente Rationali, quòd & AB, Rationalis ponatur; erit AF, dicto quadrato incommensurabile, Irrationale. Eodemq; argumento ostendemus EF, Irrationale esse. Quia verò AF, BF, componunt quadratum Rationale ex AB; perspicuum est, ex duobus Irrationalibus confici posse Rationale. Quod est propositum.*

[a] 9. decimi

[b] 1. sexti.

[c] 10. decimi

*AT verò si AF, FB, Rationalia sint, ostendemus & totum AFB, ex ipsis compositum Rationale esse. Cùm enim vtrumq; AF, FB, Rationale sit; erunt ipsa inter se commensurabilia.* [d] *Igitur & totum AFB, ex ipsis compositum vtrique eorum commensurabile erit. Quare AFB, totum commensurabile vtrique Rationali AF, FB,* [e] *Rationale quoq; est. Quod est propositum.*

[d] 16. decimi.

[e] 9. defin.

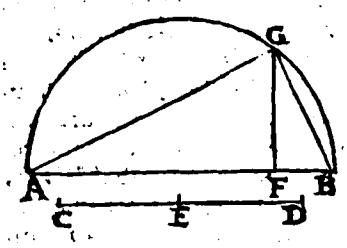
## PROBL. 11. PROPOS. 35. 34. 28.

INVENIRE duas rectas lineas potentia incommensurabiles, quæ faciant compositum quidem ex ipsarum quadratis, Medium; Rectangulum verò sub ipsis contentum, Rationale.

[a] REPERIANTVR duæ Mediæ AB, CD, potentia tantùm commensurabiles, quæ Rationale contineant, ita vt maior AB, plus possit quàm minor CD, quadrato lineæ sibi lõgitudine incommensurabilis; fiantq; reliqua, vt in præcedenti propos. Ostendemus igitur similiter, vt in propos. antecedenti, rectas AG, GB, potentia esse incommensurabiles. Et quia quadratum ex Media AB, [b] æquale existens quadratis rectarum AG, GB, Medium est; erit quoque compositum ex quadratis rectarum AG, GB, Medium. Rursus vt in antecedenti propositione, ostendemus rectan-

[a] 32. decimi

[b] 47. primi.



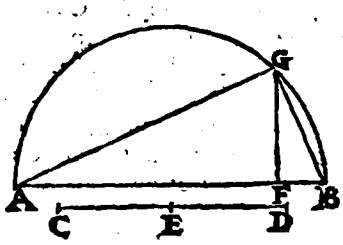

gulum ſub AB,CD,duplum eſſe rectanguli ſub AB,FG; atq; adeò illud eſſe huic commẽſurabile. Quare cùm rectangulum ſub AB,CD,Rationale ſit,ex conſtructione; erit & rectangulum ſub AB,FG, illi commenſurabile, Rationale: Sed per 1. lemma propoſ. 33. huius lib. rectangulo ſub AB, FG, æquale eſt rectangulum ſub AG,GB.Igitur & rectangulum ſub AG, GB,Rationale eſt. Oſtenſum autem eſt, compoſitum ex quadratis ipſarum AG,GB,eſſe Medium. Igitur duæ rectæ AG, GB, quæ oſtenſæ ſunt potentia incommenſurabiles, faciunt compoſitum ex earum quadratis Medium,& rectangulum ſub eiſdem comprehenſum, Rationale.Inuentæ ergo ſunt duæ rectæ AG,GB,potentia incommẽſurabiles,quæ faciunt compoſitum quidem ex ipſarum quadratis Medium,Rectangulum verò ſub ipſis cõtentum, Rationale. Quod erat faciendum.

55. 29.

## PROBL. 12. PROPOS. 36.

INVENIRE duas rectas lineas potentia incommenſurabiles, quæ faciant & compoſitum ex ipſarum quadratis Medium, & rectangulum ſub ipſis contentum Medium,incommenſurabileque compoſito ex ipſarum quadratis.

a 53. decimi.




b 47. primi.

a REPERIANTVR duæ Mediæ AB, CD, potentia tantùm commenſurabiles, quæ Medium contineant, ita vt maior AB, plus poſsit quàm minor CD, quadrato lineæ ſibi longitudine incommẽſurabilis; fiantq; reliqua, vt in propoſ.34. Oſtendemus igitur ſimiliter,rectas AG, GB, potentia incommenſurabiles eſſe.Et quia quadratum ex Media AB,Medium eſt, b & quadratis rectarum AG,GB,æquale; erit & compoſitum ex quadratis rectarum AG,GB,Medium.Rurſus,vt in 34. demonſtrabimus,rectangulum ſub AB, CD, duplum eſſe rectanguli ſub AB,FG, atque adeò illud eſſe huic commenſurabile.Quare cùm ex conſtructione, rectangulum ſub AB, CD,Medium ſit: erit quoq; rectangulum ſub AB,FG,hoc eſt, ſub AG,GB, quod illi per 1. lemma propoſ.33.huius lib.æquale eſt,Medium, ex coroll. propoſ.24. huius lib. Quoniam verò AB, longitudine incommenſurabilis ponitur ipſi CD; Eſt autem eidem CD, ipſa CE, longitudine commenſurabilis, quòd illa huius ſit dupla; c erunt AB, CE,longitudine incommenſurabiles: Sed vt AB,ad CE.ita eſt per lemma 3. propoſ.19. huius lib. quadratum ex AB, ad rectangulum ſub AB,CE hoc eſt,ad rectangulum ſub AB, FG, hoc eſt, ſub AG, GB, (ſunt enim rectangula ſub AB,FG, & ſub AG,GB, per 1. lemma propoſ.33. huius lib. æqualia) d Igitur quadratum ex AB,incommenſurabile eſt rectangulo, ſub AG,GB. Inuentæ ſunt ergo duæ rectæ lineæ AG, GB,potentia incommenſurabiles, quæ faciunt & compoſitum ex ipſarum quadratis Medium, & rectangulum ſub ipſis contentum Medium, incommenſurabileq; compoſito ex ipſarum quadratis. Quod faciendum erat.

c 13. decimi.

d 10. decimi

### SCHOLIVM.

*Ex hoc verò problemate facilè illud abſoluemus, quod ad propoſ.24. huius lib. nos demonſtraturos recepimus, nimirum.*

INVENIRE duas Medias longitudine,& potentia incommenſurabiles.

*QVONIAM oſtenſum eſt tam compoſitum ex quadratis rectarum AG, GB, quàm rectangulum ſub ipſis,eſſe Medium, & hoc illi compoſito incommenſurabile; erunt quoq; lineæ potentes illud compoſitum Medium,& hoc rectangulum Medium.Mediæ,incommenſurabiles tam longitudine,quàm potẽtia. Si enim potentia eſſent commẽſurabiles,eſſent & earum quadrata,hoc eſt,compoſitum ex quadratis rectarum AG, GB,& rectangulum ſub AG,GB,cõmenſurabilia.quod non ponitur Quocirca ſi ſumatur AB potens compoſitum ex quadratis rectarum AG,GB,& alia recta potens rectangulum ſub AG, GB, id eſt, media proportionalis inter AG,GB; inuenta erunt duæ Mediæ & longitudine, & potentia incommenſurabiles.Quod eſt propoſitum.*

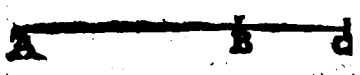
## PRINCIPIVM SENARIORVM PER compoſitionem.

56. 30.

## THEOR. 25. PROPOS. 37.

SI duæ Rationales potentia tantùm commenſurabiles componantur; tota Irrationalis erit. Vocetur autem ex binis nominibus.

COMPONANTVR duæ Rationales AB,BC, potentia ſolùm commenſurabiles,inuentæ per 2. lemma propoſ.21 huius lib.Dico totam AC, Irrationalem eſſe. Quoniam enim AB, longitudine incommẽſurabilis eſt ipſi BC; & vt AB,ad BC,ita eſt rectangulum ſub AB,BC, ad quadratũ ex BC,per




B C, per lemma propoſ.31 huius libri. [a] erit rectangulum ſub A B,B C,quadrato ex B C,incommenſurabile. Sed rectangulo ſub A B,B C,commenſurabile eſt eius duplũ, nempe quod bis ſub A B,B C,cõtinetur; & quadrato ex B C,commenſurabile eſt quadratum rectæ A B; (omnia enim ſunt Rationalia) [b] atq; adeò & compoſitum ex quadratis rectarum A B,B C,eidem quadrato ex B C,commenſurabile eſt. Igitur per ea, quæ in ſcholio propoſ.14 huius libri oſtendimus, & quod bis ſub A B,B C,continetur, incommenſurabile eſt compoſito ex quadratis rectarum A B,B C. Quamobrem & compoſitum ex eo, quod bis ſub A B, B C, & ex compoſito quadratorum rectarum A B,B C, hoc eſt,quadratũ ex tota A C. ([c] Eſt enim hoc quadratum æquale quadratis rectarum A B,B C, vnà cum rectangulo ſub A B,B C,bis) compoſito ex quadratis rectarum A B,B C, [d] incommenſurabile erit: Eſt autem compoſitum ex quadratis rectarum A B, B C, Rationale, quòd commenſurabile ſit oſtenſum quadrato Rationali ex B C, Rationali. Igitur quadratum ex A C, quadrato Rationali ex B C, incommenſurabile, [e] Irrationale eſt; atque adeò & recta ipſa A C,Irrationalis erit. Vocetur autem ex binis nominibus, ſeu, vt alij loquuntur,Binomium,quia ex duobus nominibus, nempe ex duabus Rationalibus lineis, A B,B C,potentia ſolùm commenſurabilibus componitur. Si duæ igitur Rationales potentia tantùm commenſurabiles componantur,tota Irrationalis erit,&c. Quod oſtendendum erat.

a 10. decimi

b 16. decimi

c 4. ſecundi.

d 17. decimi.

e 10. defin.

## SCHOLIVM.

*Itaque ex duabus Rationalibus potentia ſolùm commenſurabilibus procreantur duæ lineæ Irrationales. Nam recta, quæ inter eas eſt medio loco proportionalis,* [a] *Irrationalis eſt, quæ Media vocatur. At verò compoſita ex ipſis,* [b] *Irrationalis eſt, quæ ex binis nominibus dicitur.*

a 22. decimi.

b 37. decimi.

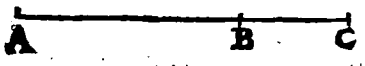
## THEOR. 26. PROPOS. 38.

37.

31.

SI duæ Mediæ potentia tantùm commenſurabiles componantur, quæ Rationale contineant; tota Irrationalis erit. Vocetur autem ex binis Mediis prima.

COMPONANTVR duæ Mediæ, [a] ſuperius inuentæ A B, B C, potentia tantùm commenſurabiles, quæ Rationale contineant. Dico totam A C,Irrationalem eſſe. Quia enim A B,eſt ad B C,vt rectangulum ſub A B,B C,ad quadratum ex B C, vt in lemmate propoſ.31. huius lib.eſt oſtenſum; ſunt autem A B,B C,longitudine incommenſurabiles; [b] erunt rectangulum ſub A B, B C,& quadratum ex B C,incommenſurabilia: Sed rectangulo ſub A B,B C, commenſurabile eſt,quod ſub A B,B C,bis; & quadrato ex B C,commenſurabile eſt compoſitũ ex quadratis rectarum A B,B C.




(Nam cùm A B,B C, potentia ſint commenſurabiles, erũt ipſarum quadrata commenſurabilia, [c] atque adeò & compoſitum ex ipſarum quadratis quadrato ex B C, commenſurabile erit.) Igitur & rectangulum ſub A B,B C,bis, & compoſitum ex quadratis rectarum A B,B C,incommenſurabilia inter ſe ſunt, per ea,quæ in ſcholio propoſ.14.huius lib.ſunt demonſtrata. Ergo compoſitum ex quadratis rectarum A B,B C,vnà cum rectangulo bis ſub A B,B C, hoc eſt, quadratùm ex A C, [d] quod huic compoſito æquale eſt, [e] incommenſurabile quoq; eſt rectangulo ſub A B,B C,bis: Eſt autem eidem rectangulo bis ſub A B,B C, commenſurabile rectangulum ſemel ſub A B, B C, cùm hoc ſit illius dimidium. [f] Igitur quadratum ex A C, incommenſurabile eſt rectangulo ſub A B,B C: Ponitur autem rectangulum ſub A B,B C,Rationale. [g] Irrationale ergo eſt quadratum ex A C, [h] & ob id recta quoq; A C,Irrationalis erit. Vocetur autem ex binis Mediis prima, vel,vt alij loquuntur, Bimediale prius. Si duæ ergo Mediæ potentia tantùm commenſurabiles componantur, &c. Quod erat oſtendendum.

a 28. decimi

b 10. decimi

c 16. decimi

d 4. ſecundi.

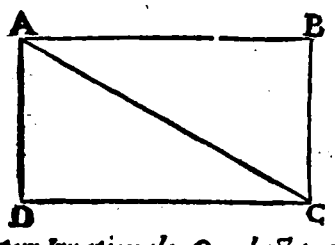
e 17. decimi.

f 13. decimi.

g 10. defin.

h 11. defin.

## LEMMA.




QVOD ſub linea Rationali & Irrationali cõtinetur rectangulum, Irrationale eſt.

*CONTINEATVR rectangulum A B C D, ſub Rationali A B, & Irrationali B C. Dico ipſum Irrationale eſſe. Si enim dicatur eſſe Rationale,* [a] *faciet ipſum ad Rationalem A B, applicatum latitudinem B C, Rationalem. Quod eſt abſurdum. ponitur enim B C, Irrationalis. Non ergo A C, Rationale eſt. Igitur Irrationale. Quod eſt propoſitum.*

a 21. decimi.

## THEOR. 27. PROPOS. 39.

38.

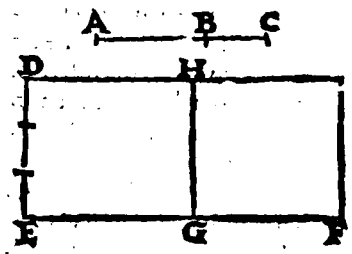
32.

SI duę Mediæ potentia tantùm commenſurabiles componantur, quæ Medium contineant; tota Irrationalis erit. Vocetur autem ex binis Mediis ſecunda.

COMPONANTVR duæ Mediæ [a] ſuperius inuentæ A B,B C, potentia tantùm commenſurabiles, quæ Medium contineãt. Dico totam A C, Irrationalem eſſe. Exponatur enim Rationalis D E,

a 29. decimi

a 45. primi. ad quã applicetur rectangulum D F, æquale quadrato A C; & compoſito ex quadratis rectarum A B, B C, æquale alterum ad eandem D E, applicetur D G. Et quia quadratũ ex A C, hoc eſt, rectangulum D F, b æquale eſt duobus quadratis ex A B, B C, vnà cum rectangulo bis ſub A B, B C; erit reliquum H F, æquale reliquo rectangulo, quod bis ſub A B, B C, continetur. Quoniam verò ex hypotheſi, rectangulum ſub A B, B C, Medium eſt; erit & rectangulum bis ſub A B, B C, ei commenſurabile: hoc eſt, H F, Medium, ex coroll. propoſ. 24. huius libri. Rurſus quia quadrata Mediarum A B, B C, potentia commenſurabilium, commenſurabilia ſunt; c erit & compoſitum ex ipſis, nimirum rectangulum D G, vtriuis ipſorum commenſurabile: Sed vtrumq; quadratorum ex Mediis A B, B C, Medium eſt. Igitur & D G, ex coroll. propoſ. 24. huius lib. Medium erit. Quia igitur Media D G, H F, applicantur ad Rationalem D E; (d eſt enim G H, Rationali D E, æqualis.) e erunt eorũ latitudines E G, G F, Rationales ipſi D E, longitudine incommenſurabiles. Rurſus quia A B, B C, longitudine incommẽſurabiles ſunt; & eſt vt A B, ad B C, ita quadratum ex A B, ad rectangulum ſub A B, B C, ex lemmate 3. propoſ. 19. huius lib. erit quadratũ ex A B, incommenſurabile rectangulo ſub A B, B C, vt in ſcholio propoſ. 10. huius lib. oſtenſum eſt: Atqui quadrato ex A B, oſtenſum eſt commenſurabile compoſitũ ex quadratis rectarũ A B, B C; & rectangulo ſub A B, B C, commenſurabile eſt, quod cõtinetur bis ſub A B, B C, cùm hoc illius ſit duplum. Igitur & ea, quæ in ſcholio propoſ. 14. huius lib. diximus, erit & compoſitũ ex quadratis rectarum A B, B C, hoc eſt, rectangulum D G, incommẽſurabile rectangulo bis ſub A B, B C, hoc eſt, rectangulo H F.




c 16. decimi.
d 34. primi.
e 23. decimi.

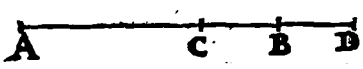
f Cùm ergo ſit vt D G, ad H F, ita E G, ad G F; f 1. ſexti.
g erit E G, ipſi G F, longitudine incommẽſurabilis; g 10. decimi.
oſtenſum autẽ iam fuit E G, G F, eſſe Rationales. Rationales igitur ſunt E G, G F, potentia tantùm
h commenſurabiles, h ac propterea & tota E F, compoſita, Irrationalis eſt. Quare, per lemma antece- h 37. decimi
dens, D F, contentum ſub Rationali D E, & Irrationali E F, Irrationale eſt; Ac propterea & quadratum ex A C, ipſi D F, æquale, Irrationale eſt. Quare & recta A C, Irrationalis eſt. Vocetur autem ex binis Mediis ſecunda, ſeu vt aliis placet, Bimediale ſecundum. Si duæ ergo Mediæ potentia tantùm commenſurabiles, &c. Quod erat demonſtrandum.

## SCHOLIVM.

*VOCAVIT Euclides in precedenti propoſ. lineam Irrationalem A C, quæ componitur ex duabus Medijs potentia tantùm commenſurabilibus, quæ Rationale contineant, ex binis Medijs primam: Hic verò lineam Irrationalem A C, quæ componitur ex duabus Medijs potentia tantũ commenſurabilibus, quæ Medium contineant, ex binis Medijs ſecundam, quoniam Rationale & natura, & cognitione prius eſt Medio, quod Irrationale eſt, ex propoſ. 22. huius libri.*

## LEMMA.

SI recta linea non bifariam ſecetur, erit compoſitũ ex quadratis partium maius, q̃ rectangulũ ſub partibus bis cõprehenſum, quadrato eius lineæ, qua maior pars minorẽ ſuperat.




*SECETVR recta A D, in B, non bifariam, ſitq; maior pars A B; in qua ſumatur B C, minori parti B D, æqualis, vt ſit A C, exceſſus, quo A B, ſuperat B D, hoc eſt, B C, ipſi B D, æqualem. Dico quadrata rectarum A B, B D, ſimul maiora eſſe rectangulo bis ſub A B, B D,*
a 7. ſecũdi. *quadrato rectæ A C. Quoniam enim quadrata ex A B, B C, a æqualia ſunt rectangulo bis ſub A B, B C, vnà cum quadrato ex A C; eſtq; B C, ipſi B D, æqualis: erũt quoq; quadrata ex A B, B D, æqualia rectangulo bis ſub A B, B D, vnà cũ quadrato ex A C. Quare quadrata ex A B, B D, maiora ſunt, q̃ rectangulum bis ſub A B, B D, quadrato rectæ A C. Quod eſt propoſitum.*

## COROLLARIVM.

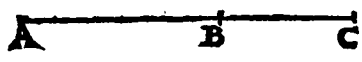
*Ex hoc ſequitur, quadrata partium inæqualium ſimpliciter eſſe maiora rectangulo, quod bis ſub partibus inæqualibus continetur.*

## 39. 33. THEOR. 28. PROPOS. 40.

SI duæ rectæ lineæ potentia incommenſurabiles componantur; quæ faciant compoſitum quidem ex ipſarum quadratis, Rationale; quod autem ſub ipſis continetur, Medium: tota recta linea Irrationalis erit. Vocetur autem Maior.

a 34. decimi. COMPONANTVR duæ rectæ a ſuperius inuentæ A B, B C, potẽtia incommenſurabiles, facientes quidem compoſitum ex ipſarum quadratis Rationale; rectangulum verò ſub ipſis contẽtum, Medium. Dico totam A C, eſſe Irrationalem. Quoniam enim rectangulum ſub A B, B C, Medium ponitur, erit & rectangulum bis ſub A B, B C, illi commenſurabile, Medium, ex coroll. propoſ. 24. huius lib. atq; adeò Irrationale. Ponitur autẽ compoſitum ex quadratis rectarum A B, B C, Rationale. b Incommenſurabile ergo eſt rectangulum bis ſub A B, B C, cõpoſito ex quadratis rectarum
b 10. defin.

A B, B C,




AB,BC. [a] Igitur & rectangulum bis sub AB,BC, vnà cũ quadratis ex AB,BC, hoc est, quadratũ ex AC, incommensurabile est composito ex quadratis rectarum AB, BC. Cùm ergo hoc compositum ponatur Rationale; [b] erit quadratũ ex AC, illi incommensurabile, Irrationale; [c] Ac propterea recta AC, Irrationalis est. Vocetur autẽ Maior, quia [d] cùm posit duo quadrata ex AB, BC, & rectangulum bis sub AB,BC; compositũ ex quadratis rectarum AB,BC, p lemma antecedens, maius est rectangulo bis sub AB,BC. Quare cùm compositum ex quadratis rectarũ AB,BC, Rationale sit, rectangulum verò bis sub AB,BC, Medium; rectè vocabitur AC, Maior, siquidem à Rationali, quod maius est, nomẽ conuenit imponere. Si duæ ergo rectæ lineæ potentia incommensurabiles componantur, &c. Quod erat ostendendum.

[a] 17. decimi.
[b] 10. defin.
[c] 11. defin.
[d] 4. secundi.

## THEOR. 29. PROPOS. 41.

40.
34.

SI duæ rectæ lineæ potentia incommensurabiles componantur, quæ faciant compositum quidem ex ipsarum quadratis, Medium; quod autem sub ipsis continetur, Rationale: tota recta linea Irrationalis erit. Vocetur autem Rationale ac Medium potens.

COMPONANTVR duæ rectę [e] superius inuentæ AB,BC, potẽtia incommensurabiles, facientes compositum quidem ex quadratis ipsarum, Medium; rectangulum verò sub ipsis contentum, Rationale. Dico totam AC, Irrationalem esse. Quoniam enim compositum ex quadratis rectarum AB,BC, Medium est; quod verò continetur bis sub AB,BC, Rationale, quòd eius dimidiũ, nempe quod sub AB, BC, semel continetur, Rationale ponatur; [f] erit compositũ ex quadratis rectarum AB,BC, incommensurabile rectangulo bis sub AB,BC. [g] Igitur & compositũ ex quadratis rectarum AB,BC, vnà cum rectangulo bis sub AB, BC, hoc est, quadratum ex AC, incommensurabile est rectangulo bis sub AB,BC. Cùm ergo rectangulum bis sub AB,BC, vt diximus, sit Rationale; [h] erit quadratum ex AC, illi incommensurabile, Irrationale; [i] Ac proinde & recta AC, Irrationalis erit. Vocetur autẽ Rationale ac Medium potens, quia potest Medium, nempe compositum ex quadratis rectarum AB,BC, & Rationale, rectangulum scilicet bis contentum sub AB,BC. Conuenit autem Rationale Irrationali anteponi. Si duæ ergo rectæ lineæ potentia incommensurabiles, &c. Quod demonstrandum erat.

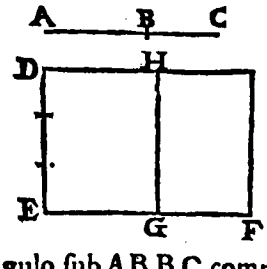
[e] 35. decimi.
[f] 10. defin.
[g] 17. decimi
[h] 10 defin.
[i] 11. defin.

## THEOR. 30. PROPOS. 42.

41.
35.

SI duæ rectæ lineæ potentia incommensurabiles componantur, quæ faciant & compositum ex ipsarum quadratis, Medium, & quod sub ipsis cõtinetur, Medium; incommensurabileque composito ex quadratis ipsarum: tota recta linea Irrationalis erit. Vocetur autem bina Media potens.

COMPONANTVR duæ rectæ [k] superius inuentæ AB, BC, potentia incommensurabiles, facientes compositum ex ipsarum quadratis Medium, & rectangulum sub eisdem Medium, incommensurabileque composito ex quadratis ipsarum. Dico totam AC, Irrationalem esse. Exponatur enim Rationalis DE, [l] ad quam applicetur rectangulum DF, æquale quadrato ex AC; Et compositò ex quadratis rectarum AB,BC, alterum æquale applicetur DG. Et quia quadratum ex AC, hoc est, rectangulum DF, [m] æquale est compositò ex quadratis rectarum AB, BC, vnà cum rectangulo bis sub AB, BC, erit reliquum HF, æquale rectangulo bis sub AB, BC. Quoniam verò tam compositum ex quadratis rectarum AB, BC, hoc est, rectangulum DG, quàm rectangulum sub AB,BC, atque adeò ex corollario 24. huius libri, quod bis sub AB,BC, nempe ipsum HF, (cùm illi sit commensurabile) Medium ponitur, [n] facient DG, HF, ad Rationalem DE, applicata latitudines EG, GF, Rationales ipsi DE, longitudine incommensurabiles. Rursus quia compositum ex quadratis rectarum AB, BC, id est, rectangulum DG, incommensurabile ponitur rectangulo sub AB,BC: Eidem autem rectangulo sub AB,BC, commensurabile est ipsius duplum, nempe quod bis continetur sub AB, BC, hoc est, ipsum HF; [o] erunt & DG, HF, incommensurabilia. Quare [p] cùm sit vt DG, ad HF, ita EG, ad GF; [q] erunt EG, GF, longitudine incommensurabiles: Atqui EG, GF, ostensæ sunt Rationales. Igitur EG, GF, Rationales sunt potentia solùm commensurabiles; [r] Ac propterea tota EF, ex ipsis composita Irrationalis est. Quare DF, contentum sub Rationali DE, & Irrationali EF, ex lemmate propos. 38. huius lib. Irrationale est. Igitur & quadratum ex AC, illi æquale, Irrationale est; [s] ideoque & recta ipsa AC, Irrationalis. Vocetur autem bina Media potens, nimirum & compositum ex quadratis rectarum AB,BC; & rectangulum bis sub AB,BC. Si duæ ergo rectæ lineæ potentia incommensurabiles componantur, quæ faciant & compositũ ex ipsarum quadratis Medium, &c. Quod erat demonstrandum.



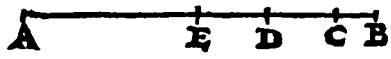

[k] 36. decimi
[l] 45. primi.
[m] 4. secũdi.
[n] 23. decimi.
[o] 13. decimi.
[p] 1. sexti.
[q] 10. decimi
[r] 37. decimi.
[s] 11. defin.

## LEMMA.

Si recta linea in partes inæquales secetur, & rursus in alias partes inæquales; erunt quadrata partium magis inæqualium simul maiora quadratis partium minus inæqualium simul.

*Secetur recta AB, inæqualiter in C, & rursus inæqualiter in D, sintq; priores partes AC, CB, magis inæquales, quàm posteriores AD, DB. Dico quadrata ex AC, CB, simul maiora esse quadratis ex AD, DB, simul. Diuisa enim AB, bifariam in E, cadet punctum D, vel inter E, C, vel inter A, E. Cadat primùm inter E, C. Quoniam igitur rectangulum sub AC,*

a 5. secũdi.



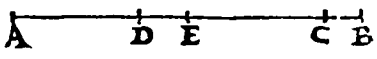

*CB, vnà cum quadrato ex EC, [a] æquale est quadrato ex EB: Item rectangulum sub AD, DB, vnà cum quadrato ex ED, æquale est eidem quadrato ex EB; erit rectangulum sub AC, CB, vnà cum quadrato ex EC, æquale rectangulo sub AD, DB, vnà cũ quadrato ex ED. Ablatis igitur quadratis inæqualibus rectarum inæqualium EC, ED, cùm quadratum ex EC, maius sit quadrato ex ED; erit reliquum rectangulum sub AC, CB, minus reliquo rectangulo sub AD, DB; ac propterea & rectangulum bis sub AC, CB, minus erit rectangulo bis sub AD, DB. Quoniã verò quadratum ex AB,*

b 4. secũdi.

*[b] æquale est tam rectangulo bis sub AC, CB, vnà cũ quadratis ex AC, CB, quàm rectangulo bis sub AD, DB, vnà cum quadratis ex AD, DB; erit rectangulum bis sub AC, CB, vnà cum quadratis ex AC, CB, æquale rectangulo bis sub AD, DB, vnà cum quadratis ex AD, DB. Quare cùm rectangulum bis sub AC, CB, ostensum sit minus rectangulo bis sub AD, DB, erũt reliqua quadrata ex AC, CB, maiora reliquis quadratis ex AD, DB. Quod est propositum.*

*Sed cadat iam D, inter A, E. Quoniam igitur partes AC, CB, magis inæquales ponũtur, quàm partes AD, DB; erit AD, (quæ minor est posteriorũ) maior quàm CB; (quæ priorum minor est) ac proinde cùm AE, EB, æquales sint, erit reliqua EC, maior quã reliqua DE. Itaq; quia rectangulum*

c 5. secũdi.



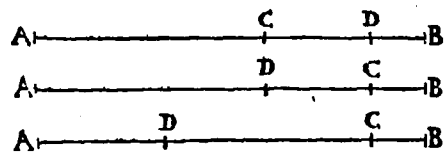

*sub AC, CB, vnà cũ quadrato ex EC, [c] æquale est quadrato ex EB: Item rectangulum sub AD, DB, vnà cum quadrato ex DE, æquale est quadrato ex AE, hoc est, eidem quadrato ex EB; erit rectangulum sub AC, CB, vnà cum quadrato ex EC, æquale rectangulo sub AD, DB, vnà cum quadrato ex DE. Igitur vt prius, demonstrabimus quadrata ex AC, CB, maiora esse quadratis ex AD, DB. Quod est propositum.*

42. 36.

## THEOR. 31. PROPOS. 43.

Qvae ex binis nominibus, ad vnum duntaxat punctum diuiditur in nomina.

Sit ex binis nominibus AB, diuisa ad punctum C, in sua nomina, ita vt AC, CB, sint Rationales potentia tantũ commensurabiles, vt vult propos. 37. huius lib. Dico AB, ad aliud punctum diuidi non posse in alia nomina, quæ scilicet sint etiam Rationales lineæ potentia tantũ commensurabiles. Si enim fieri potest, diuidatur iterum in sua nomina ad D. Constat ergo AB, in C, non diuidi bifariam. Nam si bifariam diuideretur, essent AC, CB, longitudine commensurabiles. quod est absurdũ. ponuntur enim Rationales potentia tantùm commensurabiles. Eodem modo neq; ad D, bifariam secabitur AB, cùm & AD, DB, Rationales sint potentia tantùm commensurabiles. Secatur ergo AB, tam ad C, q̃ ad D, inæqualiter; ac propterea partes AC, CB, vel minus inæquales sunt q̃ partes AD, DB, vel magis inæquales; Ac propterea per lemma antecedens, quadrata ex AC, CB, vel minora sunt quadratis ex AD, DB, vel maiora. (Neq; enim partes AD, DB, vbicunq; punctum D, extiterit, partibus AC, CB, æquales erunt, vtraque vtrique, nempe maior maiori, & minor minori. Nam hac ratione secaretur AB, secunda diuisione in eadem nomina, in quæ secta est diuisione prima. quod non ponitur.) Quia verò si ab æqualibus inæqualia demantur, residuorum excessus excessui ablatorum æqualis est, vt in pron. 16. lib. 1. docuimus: Sunt autem quadrata ex AC, CB, vnà cum rectangulo bis sub AC, CB, æqualia quadratis ex AD, DB, vnà cum rectangulo bis sub AD, DB, [a] quòd tam illa, quàm hæc æqualia sint quadrato ex AB; fit, vt qui excessus fuerit ablati compositi ex quadratis rectarum AC, CB, & ablati compositi ex quadratis rectarum AD, DB, idem sit reliqui rectanguli bis sub AC, CB, & reliqui rectanguli bis sub AD, DB. Sed excessus compositi ex quadratis rectarum AC, CB, & compositi ex quadratis rectarũ AD, DB, spatium Rationale est. (cùm enim rectæ AC, CB, Rationales sint, & ob id earum quadrata, Rationalia; erit & compositum




a 4. secundi.

ex ea-

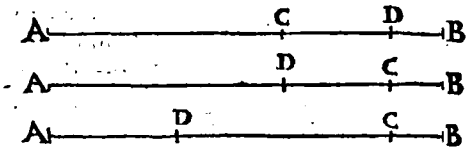
ex earum quadratis, Rationale, ex iis, quæ in ſcholio propoſitionis 34. huius libri oſtendimus: eademque ratione erit & compoſitum ex quadratis rectarum A D, D B, Rationale. Quare cùm Rationale ſuperet Rationale Rationali, vt in ſcholio propoſ. 27. huius libri demonſtrauimus; manifeſtum eſt, exceſſum compoſiti ex quadratis rectarum A C, C B, & compoſiti ex quadratis rectarum A D, D B, ſpatium eſſe Rationale.) Igitur & exceſſus rectanguli bis ſub A C, C B, & rectanguli bis ſub A D, D B, ſpatium Rationale eſt. [a] Quoniam verò rectangulum ſub A C, C B, Medium eſt, erit & quod bis ſub A C, C B, illi commenſurabile, ex coroll. propoſ. 24. huius lib. Medium; Atque eodem modo rectangulum bis ſub A D, D B, Medium erit. [b] Quare cùm Medium non ſuperet Medium Rationali; non erit exceſſus rectanguli bis ſub A C, C B, & rectanguli bis ſub A D, D B, ſpatium Rationale: Oſtendimus autem & Rationale eſſe. Quod eſt abſurdum. Non igitur A B, ex binis nominibus ad aliud punctum, quàm ad C, in ſua nomina diuiditur. Quare ad vnum duntaxat punctum diuiditur in nomina. Quod erat demonſtrandum.

[a] 22. decimi.
[b] 27. decimi.

## THEOR. 32. PROPOS. 44. 43. 37.

QVAE ex binis Mediis prima, ad vnũ duntaxat punctum diuiditur in nomina.

SIT ex binis Mediis prima A B, diuiſa ad punctum C, in ſua nomina, ita vt A C, C B, ſint Mediæ potentia ſolùm commenſurabiles, quæ Rationale contineant, vt vult propoſitio 38. huius libri. Dico A B, ad aliud punctum diuidi non poſſe in alia nomina, quæ ſcilicet ſint etiam Mediæ lineæ potentia tantùm commenſurabiles, continentesque Rationale. Diuidatur enim, ſi fieri poteſt, in alia nomina A D, D B. Igitur vbicunque punctum D, exiſtat, ſimiliter probabimus, vt in præcedenti



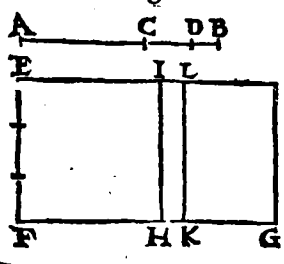

propoſ. exceſſum rectanguli bis ſub A C, C B, & rectanguli bis ſub A D, D B, eundem eſſe, qui eſt compoſiti ex quadratis rectarum A C, C B, & compoſiti ex quadratis rectarum A D, D B: Sed exceſſus rectanguli bis ſub A C, C B, & rectanguli bis ſub A D, D B, ſpatium eſt Rationale. (Cùm enim A C, C B, ponantur commenſurabiles, erit & quod bis ſub A C, C B, ei, quod continetur ſemel ſub A C, C B, commenſurabile. Rationale. Eodemq; modo Rationale erit, quod bis ſub A D, D B. Quare cùm Rationale ſuperet Rationale Rationali, vt in ſcholio propoſ. 27. huius lib. oſtendimus; perſpicuum eſt, exceſſum rectanguli bis ſub A C, C B, & rectanguli bis ſub A D, D B, ſpatiũ eſſe Rationale.) Igitur & exceſſus compoſiti ex quadratis rectarum A C, C B, & compoſiti ex quadratis rectarum A D, D B, ſpatium Rationale eſt. Quia verò rectæ A C, C B, Mediæ ſunt, & potentia commenſurabiles, erunt earũ quadrata Media quoq;, & commenſurabilia. [c] Quare & compoſitum ex ipſis vtrique ipſorum commenſurabile erit. Igitur cùm vtrumque ſit Medium, erit & compoſitum ex ipſis, per corollarium propoſ. 24. huius libri, Medium. Eodem modo Medium oſtendemus compoſitum ex quadratis rectarũ A D, D B. [d] Cùm ergo Medium nõ ſuperet Medium Rationali; non erit exceſſus compoſiti ex quadratis rectarum A C, C B, & compoſiti ex quadratis rectarum A D, D B, ſpatium Rationale. Oſtendimus autem & Rationale eſſe. Quod eſt abſurdum. Non igitur A B, ex binis Mediis prima ad aliud punctum, quàm ad C, in ſua nomina diuiditur. Quam ob rem ad vnum duntaxat punctum diuiditur in nomina. Quod demonſtrandum erat.

[c] 16. decimi.
[d] 27. decimi

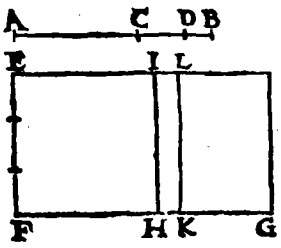
## THEOR. 33. PROPOS. 45. 44. 38.

QVAE ex binis Mediis ſecunda, ad vnũ duntaxat punctũ diuiditur in nomina.

SIT ex binis Mediis ſecunda A B, diuiſa ad punctum C, in ſua nomina, ita vt A C, C B, Mediæ ſint potentia tantũ commenſurabiles, quæ Medium contineant, vt vult propoſ. 39. huius lib. Dico A B, ad aliud punctum diuidi nõ poſſe in alia nomina, quæ ſcilicet ſint etiam lineæ Mediæ potentia tantùm commenſurabiles, continentesq; Medium. Diuidatur enim, ſi poteſt fieri, in alia nomina A D, D B. Igitur vbicunq; punctum D, exiſtat, ſimiliter oſtendemus, vt in propoſ. 43. quadrata ex A C, C B, vel maiora eſſe quadratis ex A D, D B, vel minora. Exponatur Rationalis E F, [e] ad quam applicetur rectangulum E G, æquale quadrato ex A B. Item E H, æquale quadratis ex A C, C B. Erit igitur reliquum I G, æquale ei, quod continetur bis ſub A C, C B, quandoquidem quadratum ex A B, [f] æquale eſt quadratis ex A C, C B, & rectangulo bis ſub A C, C B. Eodem modo ſi ad E F, applicetur E K, quadratis ex A D, D B, æquale; erit reliquum L G, æquale rectangulo bis ſub A D, D B, comprehenſo. Et quia quadrata ex A C, C B, inæqualia ſunt quadratis ex A D, D B; erunt quoque rectangula E H, E K, quæ illis æqualia ſunt, inæqualia; ac propterea & rectangulum F H, F K, inæquales erunt. Rurſus quia quadrata ex A C, C B, maiora ſunt, per lemma propoſ. 39. huius libri, rectangulo bis ſub A C, C B; erit & E H, maius quàm I G; ac propterea E H, maius quàm dimidium ipſius E G, ideoq; & recta F H, maior quàm dimidium ipſius F G. Eadem ratione oſtendemus F K, maiorem eſſe dimidio ipſius F G. Inæquales ergo ſunt partes F H, H G, partibus F K, K G, ſingulæ ſingulis.




[e] 45. primi.
[f] 4. ſecundi.



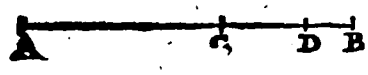

Quoniam verò A C, C B, Mediæ ſunt, & potentia commenſurabiles: erunt & earum quadrata Media, & commenſurabilia. [a] Igitur & compoſitum ex ipſis vtrique ipſorum commenſurabile erit. Cùm ergo vtrumque ipſorum ſit Medium, erit quoq; compoſitum ex ipſis, hoc eſt, E H, per coroll. propoſ. 24. huius libri, Medium. Eademque ratione Medium erit E K. [b] Quare E H, E K, ad Rationalem E F, applicata faciunt latitudines F H, F K, Rationales ipſi E F, longitudine incommenſurabiles. Eodem modo cùm rectangulum ſub A C; C B, ponatur Medium, erit & quod bis ſub A C, C B, hoc eſt, I G, illi commenſurabile, Medium, ex coroll. propoſ. 24. huius libri. Quare cùm applicetur ad Rationalem H I, [c] erit H G, Rationalis ipſi H I, longitudine incommenſurabilis. Non aliter oſtendemus L G, Medium eſſe, & K G, Rationalem ipſi K L, longitudine incommenſurabilem. Rurſus quia A C, C B, longitudine ſunt incommenſurabiles; & eſt vt A C, ad C B, ita per lemma 3. propoſ. 19. huius libri, quadratum ex A C, ad rectangulum ſub A C, C B, [d] erit quadratum ex A C, rectangulo ſub A C, C B, incommenſurabile. Sed quadrato ex A C, commenſurabile eſt compoſitum ex quadratis rectarum A C, C B: (cùm enim A C, C B, potentia ſint commenſurabiles, atque adeò ipſarum quadrata commenſurabilia; [e] erit & compoſitum ex ipſis vtrilibet ipſorum, nimirum quadrato ex A C, commenſurabile.) Rectangulo verò ſub A C, C B, commenſurabile eſt, quod bis ſub A C, C B. Igitur & compoſitum ex quadratis rectarum A C, C B, hoc eſt, rectangulum E H, incommenſurabile eſt, per ſcholium propoſ. 14. huius libri, rectangulo bis ſub A C, C B, hoc eſt, ipſi I G. Quocirca [f] cùm ſit, vt E H, ad I G, ita F H, ad H G, [g] erunt F H, H G, longitudine incommenſurabiles. Oſtenſæ ſunt autem & Rationales. Rationales ergo ſunt F H, H G, potentia ſolùm commenſurabiles. [h] Igitur F G, tota Irrationalis eſt, quæ ex binis nominibus appellatur, diuiſaque in nomina ad punctum H. Eodem modo oſtendemus & F G, ex binis nominibus diuiſam eſſe in alia nomina ad aliud punctum K. Quod fieri non poteſt, [i] vt demonſtratum eſt in præcedentibus. Igitur A B, ex binis Mediis ſecunda non diuiditur in ſua nomina ad aliud punctum, quàm ad C. Quare ad vnum duntaxat punctum diuiditur in nomina. Quod erat oſtendendum.

a 16. decimi. b 23. decimi. c 23. decimi. d 10. decimi. e 16. decimi. f 1. ſexti. g 10. decimi. h 37. decimi i 43. decimi.

## 45. THEOR. 34. PROPOS. 46.

39. MAIOR ad vnum duntaxat punctum diuiditur in nomina.

SIT Maior A B, diuiſa in ſua nomina ad punctum C, ita vt A C, C B, potentia ſint incommenſurabiles, facientes quidem compoſitum ex ipſarum quadratis Rationale; rectangulum verò ſub ipſis Medium, vt vult propoſ. 40. huius libri. Dico A B, non poſſe diuidi ad aliud punctum in alia nomina, quæ ſcilicet lineæ incommenſurabiles quoque ſint potentia, facientes compoſitum ex ipſarum quadratis Rationale, & rectangulũ ſub ipſis Medium.



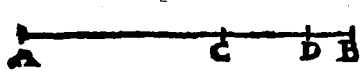

Si enim fieri poteſt, diuidatur in alia nomina ad D. Vbicunq; ergo punctum D, extiterit, demonſtrabimus ſimiliter, vt in propoſ. 43. exceſſum compoſiti ex quadratis rectarũ A C, C B, & compoſiti ex quadratis rectarum A D, D B, eum eſſe, qui rectanguli bis ſub A C, C B, & rectanguli bis ſub A D, D B. Sed exceſſus compoſiti ex quadratis rectarũ A C, C B, & compoſiti ex quadratis rectarum A D, D B, ſpatium eſt Rationale: (quia cùm vtrumque compoſitum ex hypotheſi ſit Rationale, erit quoque eorum exceſſus ſpatium Rationale, vt in ſcholio propoſ. 27. huius libri oſtendimus.) Igitur & exceſſus rectanguli bis ſub A C, C B, & rectanguli bis ſub A D, D B, ſpatium eſt Rationale. Quoniam verò rectangulum ſub A C, C B, ponitur Medium, erit & rectangulum bis ſub A C, C B, Medium, ex coroll. propoſ. 24. huius libri, cùm ei ſit commenſurabile. Atque eodem modo Medium erit rectangulum bis ſub A D, D B. [k] Igitur cùm Medium non ſuperet Medium Rationali; non erit exceſſus rectanguli bis ſub A C, C B, ſpatium Rationale: Oſtendimus autem & Rationale eſſe. Quod eſt abſurdum. Non igitur Maior A B, ad aliud punctum, quàm ad C, in ſua nomina diuiditur. Quapropter ad vnum duntaxat punctum diuiditur in nomina. Quod erat demonſtrandum.

k 27. decimi

## 46. THEOR. 35. PROPOS. 47.

40. RATIONALE ac Medium potens, ad vnum duntaxat punctum diuiditur in nomina.

SIT linea Rationale ac Medium potens A B, diuiſa in ſua nomina in puncto C, ita vt A C, C B, incommenſurabiles ſint potentia, facientes compoſitum quidem ex ipſarum quadratis Medium; rectangulum verò ſub ipſis Rationale, vt vult propoſ. 41. huius libri. Dico A B, non poſſe diuidi in alio puncto in alia nomina, quæ nimirum ſint lineæ quoque incommenſurabiles potentia, facientes compoſitum quidem ex ipſarum quadratis Medium, & rectangulum ſub ipſis Rationale. Diuidatur enim, ſi fieri poteſt, in alia nomina ad D. Vbicunque ergo punctum D, exiſtat, oſtendemus non aliter, ac in propoſ. 43. huius libri, exceſſum



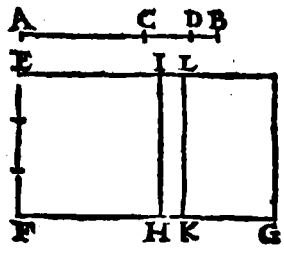

rectanguli

rectanguli bis ſub AC, CB, & rectanguli bis ſub AD, DB, eundem eſſe, qui eſt compoſiti ex quadratis rectarum AC, CB, & compoſiti ex quadratis rectarum AD, DB. Sed exceſſus rectanguli bis ſub AC, CB, & rectanguli bis ſub AD, DB, ſpatium Rationale eſt, quod oſtendemus, vt in propoſ. 44. Igitur & exceſſus compoſiti ex quadratis rectarum AC, CB, & compoſiti ex quadratis rectarum AD, DB, ſpatium eſt Rationale. Quia verò compoſita ex his quadratis ponuntur eſſe Media: [a] Medium autem non ſuperat Medium Rationali; nõ erit eorum exceſſus ſpatium Rationale. Sed & Rationale oſtendimus. Quod eſt abſurdum. Non igitur AB, Rationale ac Medium potens, ad aliud punctum, quàm ad C, in ſua nomina diuiditur. Quam ob rem ad vnũ duntaxat punctum diuiditur in nomina. Quod oſtendendum erat. [a] 27. decimi

## THEOR. 36. PROPOS. 48. 47. 41.

BINA Media potens, ad vnum duntaxat punctum diuiditur in nomina.

SIT linea potens bina Media AB, diuiſa in ſua nomina ad C, ita vt AC, CB, potentia incommenſurabiles ſint, facientes & compoſitum ex ipſarum quadratis Medium, & rectangulum ſub ipſis Medium, incommenſurabileq; compoſito ex earum quadratis, vt vult propoſ. 42. huius libri. Dico AB, diuidi non poſſe ad aliud punctum in alia nomina, quæ videlicet ſint etiam lineæ potentia incommenſurabiles, facientes & compoſitum ex ipſarum quadratis Medium, & rectangulum ſub ipſis Medium, incommenſurabileque compoſito ex earum quadratis. Nam, ſi poteſt fieri, diuidatur in alia nomina ad punctum D, vbicunq; hoc punctum D, exiſtat. Conſtructio autem eadem fiat, quæ in propoſitione quadrageſimaquinta; oſtendemusque, vt ibi, partes FH, HG, partibus FK, KG, inæquales eſſe ſingulas ſingulis. Quoniam igitur compoſitum ex quadratis rectarum AC, CB, Medium ponitur, erit & EH, illi compoſito æquale, Medium. Item quia rectangulum ſub AC, CB, ponitur etiam Medium, erit & IG, eius duplo æquale, Medium, ex corollario propoſ. 24. huius lib. quia illi commenſurabile eſt. Igitur Media EH, IG, applicata ad Rationalé EF, (eſt enim IH, ipſi EF, æqualis) [b] faciunt latitudines FH, HG, Rationales, longitudine ipſi EF, incommenſurabiles. Eadem quoque ratione probabimus, & rectas lineas FK, KG, Rationales eſſe, longitudine incommenſurabiles ipſi EF. Quia verò compoſitum ex quadratis rectarum AC, CB, deſcriptis, hoc eſt, rectangulum EH, incommenſurabile eſt, ex hypotheſi, rectangulo bis ſub AC, CB, nempe rectangulo IG, [c] eſtq; vt EH, ad IG, ita FH, ad HG; erunt FH, HG, longitudine incommenſurabiles, vt in ſcholio propoſ. 10. huius libri oſtendimus: Sed oſtenſæ ſunt Rationales. Rationales ergo ſunt FH, HG, potentia ſolùm commenſurabiles. Igitur tota FG, Irrationalis eſt, quæ ex binis nominibus appellatur, diuiſaque in nomina ad punctum H. Non ſecus demonſtrabimus & FG, ex binis nominibus diuiſam eſſe in alia nomina, ad aliud punctum K. Quod fieri non poſſe, [d] iam ante demonſtratum eſt. Igitur AB, bina Media poteris non diuiditur ad aliud punctum quàm ad C, in ſua nomina. Quocirca ad vnum duntaxat punctum diuiditur in nomina. Quod oſtendendum erat.




[b] 23. decimi
[c] 1. ſexti.
[d] 43. decimi

## DEFINITIONES SECVNDAE.

EXPOSITA Rationali, & quæ ex binis nominibus, diuiſa in nomina, cuius maius nomen plus poſſit, quàm minus, quadrato rectæ lineę ſibi longitudine commenſurabilis,

I.

SI quidem maius nomen expoſitæ Rationali commenſurabile ſit longitudine; Vocetur tota ex binis nominibus prima.

II.

SI verò minus nomen expoſitæ Rationali longitudine ſit commenſurabile; Vocetur ex binis nominibus ſecunda.

III.

QVOD ſi neutrum ipſorum nominum ſit longitudine commenſurabile expoſitæ Rationali; Vocetur ex binis nominibus tertia,

RVRSVS ſi maius nomen plus poſſit, quàm minus, quadrato rectæ lineæ ſibi longitudine incommenſurabilis.

IIII.

SI quidem maius nomen expoſitæ Rationali commenſurabile ſit longitudine; Vocetur ex binis nominibus quarta.

V.

SI verò minus nomen; Vocetur quinta.

VI.

QVOD ſi neutrum ipſorum nominum; Vocetur ſexta.

## SCHOLIVM.

*NVMERVS dictarum sex linearum, quæ ex binis nominibus appellantur, colligitur hac ratione. Quoniam nomina linearum, quæ ex binis nominibus dicitur, sunt lineæ Rationales potentia tantùm commensurabiles, non poterit vtrumque nomen expositæ Rationali commensurabile esse longitudine; (aliàs enim nomina ipsa essent quoque lineæ longitudine inter se commensurabiles, vt in scholio propos. 12. huius libri docuimus, quod non ponitur.) Sed vel vnum tantùm, nempe maius, aut minus; vel neutrum: Atque ita tria genera consurgunt linearum, quæ ex binis nominibus vocantur. Rursus quia nomina inæqualia sunt; (aliàs enim essent lineæ inter se longitudine commensurabiles. quod nõ ponitur.) poterit maius nomen plus, quàm minus, quadrato lineæ sibi longitudine commensurabilis, vel incommensurabilis: Et si quidem plus posit quadrato lineæ longitudine sibi commensurabilis; constituentur vnà cum tribus dictis generibus, tres diuersæ lineæ ex binis nominibus, nimirum prima, secunda, & tertia ex binis nominibus: Si verò plus posit quadrato lineæ longitudine sibi incommensurabilis, efficientur vnà cum eisdem tribus generibus aliæ tres diuersæ lineæ ex binis nominibus, videlicet quarta ex binis nominibus, quinta, & sexta, vt ex definitionibus hic ab Euclide traditis perspicuum est. Sunt igitur sex diuersæ lineæ ex binis nominibus appellatæ.*

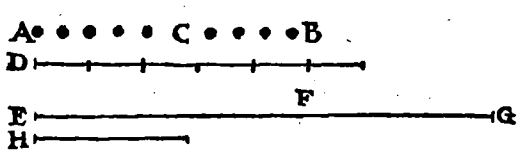
*PVLCHRE autem Euclides primas ordine facit tres, in quibus maius nomen plus potest, quàm minus, quadrato rectæ lineæ sibi longitudine commensurabilis; Secundas verò tres reliquas, in quibus maius nomen plus potest, quàm minus, quadrato rectæ lineæ sibi incommensurabilis longitudine; propterea quòd commensurabile antecedit incommensurabile, vt manifestum est.*

*RVRSVS rectè adhuc inter lineas ex binis nominibus, primam omnium ponit, in qua maius nomẽ commensurabile est longitudine expositæ lineæ Rationali; & secundam, in qua minus nomen eidem Rationali lineæ expositæ longitudine est commensurabile. quoniam maius natura antecedit minus, cùm minus à maiori contineatur; tertiam verò, in qua neutrum ipsorum nominũ expositæ Rationali longitudine est commensurabile; Et in reliquis tribus eodem modo, primam dicti secundi ordinis quartam appellans; secundam, quintam; & tertiam, sextam.*

## 48. PROBL. 13.° PROPOS. 49.

42. INVENIRE ex binis nominibus primam.

REPERTIS duobus numeris quadratis AB, CB, ex iis, quæ in scholio 2. propos. 29. hùius libri scripsimus, quorum excessus AC, non sit quadratus, ita vt AB, CB, proportionem quidem habeant, quam quadratus ad quadratum; at AB, AC, proportionem non habeant, quam quadratus ad quadratũ: Exponatur Rationalis quæpiam D, cui longitudine commensurabilis sumatur EF. Erit ergo & EF, Rationali D, commensurabilis, Rationalis. Fiat deinde vt numerus AB, ad AC, ita per coroll. propos. 6. huius lib. quadratum ex EF, ad quadratum ex FG. Dico EG, esse ex binis nominibus primam. Quoniam enim quadrata ex EF, FG, cùm proportionem habeant, quam numeri AB, AC, [a] commensurabilia sunt; erunt & rectæ EF, FG, commensurabiles, saltem potẽtia: Ostensa autem est EF, Rationalis. Igitur & FG, Rationalis est. Quia verò AB, ad AC, proportionem non habet, quã quadratus ad quadratum, nõ habebunt quoq; quadrata ex EF, FG, proportionem, quam numerus quadratus ad quadratum. [b] Incommensurabiles ergo sunt longitudine rectæ EF, FG. Sunt igitur EF, FG, Rationales potentia solùm cõmensurabiles; [c] Atq; idcirco tota EG, Irrationalis est, quæ ex binis nominibus dicitur. Dico & primam esse. Cùm enim sit vt numerus AB, ad numerum AC, ita quadratum ex EF, ad quadratum ex FG; sit autem AB, maior, quàm AC; erit quoque quadratum ex EF, maius quàm quadratum ex FG. Sit maius, ex lemmate propos. 14 huius libri, quadrato rectæ H. Quoniam igitur est, vt AB, numerus ad AC, ita quadratum ex EF, ad quadratum ex FG; erit quoque, per conuersionẽ rationis, vt AB, ad CB, videlicet ad excessum, quo antecedens AB, superat consequentem AC, ita quadratum ex EF, ad quadratum ex H, nimirum ad excessum, quo antecedens quadratum ex EF, superat consequens quadratum ex FG. Habet autem AB, ad CB, proportionem, quam quadratus ad quadratum. Igitur & quadrata ex EF, & H, proportionem habebunt, quam numerus quadratus ad numerum quadratum; [d] ac proinde rectæ EF, H, longitudine commensurabiles sunt. Quoniam igitur maius nomen EF, plus potest, quàm minus FG, quadrato rectæ H, sibi longitudine commensurabilis; estque idem maius nomen EF, expositæ Rationali D, commensurabile longitudine; erit EG, per definitionem, ex binis nominibus prima. Inuenimus ergo ex binis nominibus primam. Quod faciendum erat.




a 6. decimi.
b 9. decimi.
c 37. decimi.
d 9. decimi.

## 49. PROBL. 14. PROPOS. 50.

43. INVENIRE ex binis nominibus secundam.

REPERTIS duobus numeris quadratis AB, CB, vt in præcedenti propositione, expositaque Rationali

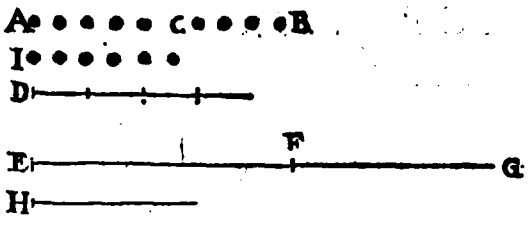
Rationali quadam D; ſumatur ei longitudine commenſurabilis F G. Erit ergo & F G, Rationali D, commenſurabilis, Rationalis. Fiat deinde, vt numerus A C, ad numerum A B, ita p corollarium propoſ. 6. huius libri, quadratum ex F G, ad quadratum ex E F. Dico E G, eſſe ex binis nominibus ſecundam. Quoniam enim quadrata ex F G, E F, proportionem habentia, quam numeri A C, A B, [a] commenſurabilia ſunt; erunt & rectæ F G, E F, commenſurabiles, ſaltem potentia: Oſtenſa eſt autem F G, Rationalis. Igitur & E F, Rationalis eſt. Quia verò A C, A B, proportionẽ non habent, quam quadrati numeri; neque quadrata ex F G, E F, proportionem habebũt, quam numeri quadrati. [b] Incommenſurabiles ergo ſunt longitudine rectæ F G, E F. Sunt igitur E F, F G, Rationales potentia tantùm commenſurabiles; [c] Atque idcircò tota E G, Irrationalis eſt, quæ ex binis nominibus dicitur. Dico & ſecundam eſſe. Cùm enim ſit vt numerus A C, ad numerum A B, ita quadratum ex F G, ad quadratũ ex E F: Et conuertendo vt A B, ad A C, ita quadratum ex E F, ad quadratum ex F G; ſit autem A B, maior quàm A C; erit & quadratum ex E F, maius, quàm quadratum ex F G. Sit, per lemma propoſ. 14. huius lib. maius quadrato rectæ H. Oſtendemus iam, vt in præcedenti propoſ. H, ipſi E F, longitudine commenſurabilem eſſe. Quoniam igitur maius nomen E F, plus poteſt, quàm minus F G, quadrato rectæ H, ſibi longitudine commenſurabilis; eſtq; minus nomen F G, expoſitæ Rationali D, commenſurabile longitudine; erit E G, per definitionem, ex binis nominibus ſecunda. Inuenimus ergo ex binis nominibus ſecundã. Quod erat faciẽdum.

[a] 6. decimi. [b] 9. decimi. [c] 37. decimi.

## PROBL. 15. PROPOS. 51. 50. 44.

INVENIRE ex binis nominibus tertiam.

REPERTIS duobus numeris quadratis A B, C B, vt in propoſ. 49. Sumatur alius numerus I, qui ad neutrum ipſorum A B, A C, proportionem habeat, quam quadratus ad quadratum. quod quidem fiet, ſi ſumatur I, non quadratus numerus proximè maior, quàm A C. Ita enim, cùm nõ ſit quadratus, non habebit ad quadratum A B, proportionem, quam quadratus ad quadratũ. Rurſus cùm ſit nõn quadratus proximè maior, q̃ A C, differet vel ſola vnitate ab A C, vel binario. (Vnitate quidem, quando A C, numerus fuerit, cui addita vnitas non facit quadratum: binario verò, quando vnitas addita ad A C, quadratum facit. Vt ſi A C, ſit 8. erit non quadratus proximè maior 10. differens ab 8. binario. quia vnitas addita ad 8. facit quadratum 9. At ſi A C, ſit 5. erit non quadratus proximè maior 6. differens à 5. vnitate, quia vnitas addita ad 5. non facit quadratum, &c.) Quare vt in ſcholio propoſ. 8. lib. 8. oſtendimus, non cadet inter I, & A C, medius proportionalis. Igitur non erunt ſimiles plani; ac propterea neq; proportionem habebunt, quam numeri quadrati. Exſita iam Rationali quapiam D, fiat p corollarium propoſ. 6. huius lib. vt I, ad A B, ita quadratum ex D, ad quadratum ex E F. [d] Erunt ergo quadrata ex D, & E F, proportionẽ habentia, quam numerus I, ad numerum A B, commenſurabilia; atque adeò & lineæ D, E F, commenſurabiles, ſaltem potentia. Exiſtente igitur D, Rationali, erit & E F, Rationalis. Quia verò I, ad A B, hoc eſt, quadratũ ex D, ad quadratum ex E F, proportionẽ non habet, quam numerus quadratus ad numerum quadratum; [e] erunt D, & E F, rectæ inter ſe longitudine incommenſurabiles. Rurſus per dictum coroll. fiat vt A B, ad A C, ita quadratum ex E F, ad quadratum ex F G. [f] Erunt ergo quadrata ex E F, F G, proportionem habẽtia, quam numerus ad numerum, commenſurabilia; Ideoq; & lineæ E F, F G, commenſurabiles ſaltem potentia. Igitur cùm E F, oſtenſa ſit Rationalis; erit & F G, Rationalis. Et quia A B, ad A C, hoc eſt, quadratum ex E F, ad quadratum ex F G, proportionem non habet, quam numerus quadratus ad numerũ quadratum; [g] erunt E F, F G, longitudine incommenſurabiles. Sunt ergo E F, F G, Rationales potentia tantùm commenſurabiles; [h] Atq; idcircò tota E G, Irrationalis eſt ex binis nominibus appellata. Dico & tertiam eſſe. Quoniam enim eſt, vt I, ad A B, ita quadratum ex D, ad quadratum ex E F; Et vt A B, ad A C, ita quadratum ex E F, ad quadratũ ex F G; erit ex æqualitate vt I, ad A C, ita quadratum ex D, ad quadratũ ex F G: Non habet autem I, ad A C, proportionem, quã numerus quadratus ad numerum quadratum. Igitur nec quadrata ex D, & F G, proportionem habebũt, quam quadratus numerus ad numerum quadratum; [i] ac propterea rectæ D, & F G, longitudine incommenſurabiles ſunt. Quoniam autem eſt vt A B, ad A C, ita quadratum ex E F, ad quadratũ ex F G; Eſt autem A B, maior q̃ A C; erit & quadratum ex E F, maius q̃ quadratum ex F G. Sit ergo maius, per lemma propoſ. 14. huius lib. quadrato rectæ H. Oſtendemus iam ſimiliter, vt in 49. propoſ. H, ipſi E F, longitudine commenſurabilem eſſe. Quoniam igitur maius nomen E F, plus poteſt, q̃ minus F G, quadrato rectæ H, ſibi longitudine commenſurabilis; & neutra ipſarum E F, F G, longitudine commenſurabilis eſt expoſitæ Rationali D, vt demonſtratũ eſt; Erit E G, p definitionem, ex binis nominibus tertia. Inuenimus ergo ex binis nominibus tertiam. Quod erat faciendum.

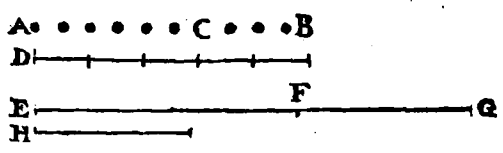



[d] 6. decimi. [e] 9. decimi. [f] 6. decimi. [g] 9. decimi. [h] 37. decimi. [i] 9. decimi.

## PROBL. 16. PROPOS. 52. 51. 45.

INVENIRE ex binis nominibus quartam.

REPERTIS duobus numeris, A C, C B, ita vt compositus ex ipsis A B, ad neutrum ipsorũ prõportionem habeat, quam quadratus ad quadratum, ex iis, quæ in scholio 3. propos. 29. huius lib. tradidimus; exponatur Rationalis quædam D, cui longitudine commensurabilis sumatur E F. Erit ergo & E F, Rationalis, cùm Rationali D, commensurabilis sit. Quòd si reliqua construantur, vt in propos. 49. ostẽdemus similiter, vt ibi, totam E G, ex binis nominibus esse. Dico & quartam esse. Erit enim rursus, vt in 49. propos. quadratũ ex E F, maius q̃ quadratum ex F G. Sit ergo maius, quadrato rectæ H. Quoniam igitur eodem modo, vt in 49. propos. per conuersionem rationis est, vt A B, ad C B, ita quadratum ex E F, ad quadratum ex H: Non est autem A B, ad C B, vt quadratus ad quadratum; neq; quadratum ex E F, ad quadratum ex H, erit vt numerus quadratus ad numerũ quadratum. [c] Longitudine ergo incommensurabiles sunt rectæ E F, & H. Itaq; cùm maius nomẽ E R, plus possit, q̃ minus F G, quadrato rectæ H, sibi longitudine incommensurabilis, & maius rursus nomen E F, longitudine commensurabile expositæ Rationali D; erit E G, per defin. ex binis nominibus quarta. Inuenimus ergo ex binis nominibus quartam. Quod faciendum erat.



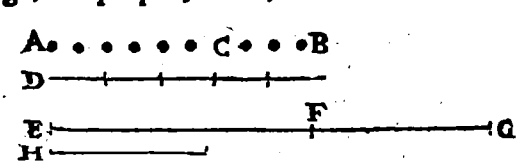

c 9. decimi.

52. 46.

## PROBL. 17. PROPOS. 53.

INVENIRE ex binis nominibus quintam.

REPERTIS duobus numeris A C, C B, vt in præcedenti propos. fiat constructio, vt in propos. 50. hoc est, sumatur F G, longitudine commensurabilis expositæ Rationali D, &c. Ostendemus ergo, vt in propos. 50. E G, esse ex binis nominibus. Dico & quintá esse. Demonstrabimus enim eodem modo, vt in 50. propos. quadratum ex E F, maius esse, q̃ quadratum ex F G. Sit ergo maius, quadrato rectæ H. Quoniam verò, vt in propos. 49. ostensum est, per conuersionem rationis, est vt A B, ad C B, ita quadratum ex E F, ad quadratũ ex H. Ostendemus, vt in propos. antecedenti, rectas E F, & H, longitudine incommensurabiles esse. Quare cùm maius nomẽ E F, plus possit, quàm minus F G, quadrato rectæ H, sibi longitudine incommensurabilis, & minus nomen F G, longitudine commensurabile expositæ Rationali D; erit per definitionem E G, ex binis nominibus quinta. Inuenimus ergo ex binis nominibus quintam. Quod faciendum erat.

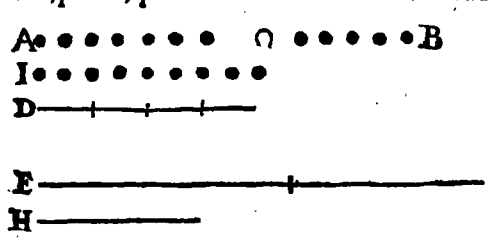



53. 47.

## PROBL. 18. PROPOS. 54.

INVENIRE ex binis nominibus sextam.

REPERTIS duobus numeris AC, C B, planis non similibus, quorum neuter sit quadratus, & compositus ex ipsis A B, non sit quoq; quadratus, habeatq; ad neutrum ipsorum proportionem, quam quadratus numerus ad quadratum numerum; (quod quidem fiet, si numerus quilibet non quadratus diuidatur in duos numeros inter se primos. [b] Nam hac ratione & totus ad vtrumque ipsorum primus erit; atq; idcirco proportionem ad illos nõ habebit, quam quadratus ad quadratum, per ea, quæ ad finem lib. 8. demonstrauimus. Sumatur alius numerus quicunq; I, qui nec ad A B, nec ad A C, habeat proportionem, quam quadratus ad quadratum; qualis est quiuis numerus quadratus. Hic enim, ad A B, & A C, nõ quadratos, proportionem non habebit, quam quadratus ad quadratum. Exponatur deinde Rationalis aliqua D; & vt I, ad A B, ita fiat quadratum ex D, ad quadratum ex E F, per coroll. propos. 6. huius libri, & reliqua fiant, vt in propos. 51. ostendemus q; vt ibi, rectas D, & E F, esse longitudine incommensurabiles, atq; totam E G, ex binis esse nominibus. Dico & sextam esse. Demonstrabimus enim similiter, vt in 51. propos. D, & F G, longitudine esse incommensurabiles, esseq; quadratum ex E F, maius, quàm quadratum ex F G. Sit ergo maius, quadrato rectæ H. Ostendemus quoq;, vt in propos 49. per conuersionem rationis, esse vt A B, ad C B, ita quadratum ex E F, ad quadratum ex H. Cùm igitur A B, ad C B, atq; adeò quadratum ex E F, ad quadratum ex H, proportionem nõ habeat, quam quadratus numerus ad quadratum; [c] erunt rectæ E F, & H, longitudine incommensurabiles. Itaque cùm maius nomen E F, plus possit, quàm minus F G, quadrato rectæ H, sibi longitudine incommensurabilis, & neutrum ipsorũ nominum E F, F G, longitudine sit commensurabile expositæ Rationali D; erit E G, per definitionem, ex binis nominibus sexta. Inuenimus ergo ex binis nominibus sextam. Quod faciendum erat.



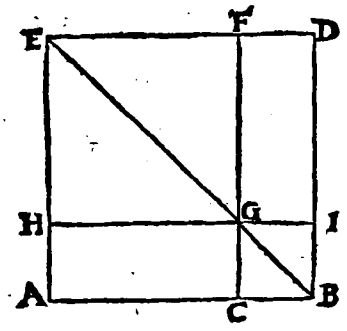

b 30. sept.

c 9. decimi.

### LEMMA.

SI recta linea secta sit vtcunque; erit rectangulum sub partibus contentum, medium proportionale inter earum quadrata: Item rectangulum contentum sub tota, & vna parte, medium proportionale inter quadratum totius lineæ, & quadratum dictæ partis.

SECTA




*SECTA sit recta A B, vtcunque in C. Describatur ex A B, quadratum A B D E, in quo diameter ducatur B E: Ducta autem ex C, recta C F, ipsi B D, parallela, quæ diametrum secet in G, agatur per G, ipsi A B, parallela H I. Erunt igitur per coroll. propos. 4. lib. 2. F H, C I, quadrata partium A C, C B; vtrumque autem rectangulorum D G, G A, comprehensum sub eisdē partibus: At verò rectangula C D, A I, sub tota, A B, & parte C B, contenta. Dico D G, mediū proportionale esse inter quadrata F H, C I: At C D, medium esse proportionale inter quadrata A D, C I. Quoniam enim* [a] *vt H G, ad G I, ita est tam F H, ad D G, quàm A G, ad C I; erit vt F H, ad D G, ita A G, ad C I:* [b] *Est autem A G, ipsi D G, æquale. Igitur erit quoque, vt F H, ad D G, ita D G, ad C I; Atque adeò D G, medium proportionale est inter quadrata F H, C I.*

a 1. sexti.

b 43. primi.

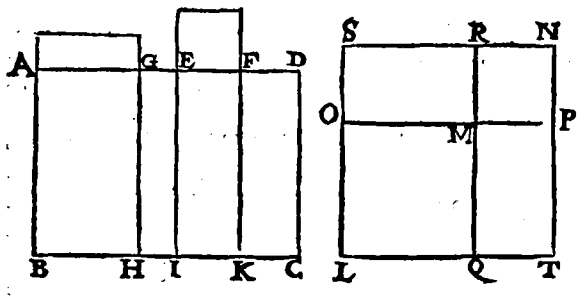
*RVRSVS quia est* [c] *vt A B, ad C B, ita tam A D, ad C D, quàm A I, ad C I; erit vt A D, ad C D, ita A I, ad C I: Est autem A I, ipsi C D, æquale. Igitur erit vt A D, ad C D, ita quoque C D, ad C I. Quare C D, medium proportionale est inter quadrata A D, C I. Eodem modo erit A F, medium proportionale inter quadrata A D, F H.*

c 1. sexti.

## THEOR. 37. PROPOS. 55. 54. 48.

SI spatium contineatur sub Rationali, & ex binis nominibus prima; Recta linea spatium potens Irrationalis est, quæ ex binis nominibus appellatur.

CONTINEATVR spatium A C, sub Rationali A B, & ex binis nominibus prima A D. Dico rectam lineam, quæ potest spatium A C, Irrationalem esse, quæ ex binis nominibus appellatur. Sit enim ipsius A D, maius nomen A E. Erunt igitur ex defin. A E, E D, Rationales potentia tantùm commensurabiles; & A E, plus poterit, q̄ E D, quadrato rectæ sibi longitudine commensurabilis; & denique A E, expositæ Rationali A B, longitudine commensurabilis erit. Secetur E D, bifariam in F. Quia igitur A E, plus potest q̄ E D, quadrato rectæ sibi longitudine commensurabilis, si quartę parti quadrati ex E D, hoc est, quadrato ex E F, æquale parallelogrammū sub A G, G E, contentum, per 2. lemma propos. 17. huius libri, applicetur deficiēs figura quadrata; [a] in partes longitudine commensurabiles ipsam diuidet. Quare A G, G E, partes inter se longitudine commensurabiles sunt. Ducantur iam per puncta G, E, F, ipsis A B, D C, parallelæ G H, E I, F K. [b] Et parallelogrammo A H, æquale quadratū fiat L M: At parallelogrammo G I, æquale fiat quadratum M N; coniunganturq; quadrata L M, M N, ita ad angulum M, vt latera M O, M P, vnam rectam lineam constituant O P. Facient ergo & latera M Q, M R, vnam rectam Q R, vt demonstratū est à nobis ex Proclo ad propos. 15. lib. 1. propterea quòd anguli O M Q, P M R, ad verticem M, sunt æquales, nempe recti. Completo autem rectangulo L N, cùm rectæ O M, M P, rectis Q M, M R, æquales sint, ideoq; & tota O P, toti Q R; [c] sit autem O P, ipsis S N, L T; & Q R, ipsis L S, T N, æqualis; æquilaterum erit rectangulum L N; ideoque quadratum.




a 18. decimi

b 14. secūdi.

c 34. primi.

QVONIAM verò rectangulum sub A G, G E, æquale est, per constructionem, quadrato ex E F; [d] erit vt A G, ad E F, ita E F, ad G E; [e] Ac propterea & vt A H, ad E K, ita E K, ad G I. Quare E K, medium proportionale est inter A H, G I, hoc est, inter quadrata L M, M N, illis æqualia: Sed inter eadem quadrata L M, M N, medium proportionale est T M, ex antecedenti lemmate. Æquale igitur est T M, ipsi E K. [f] Cùm ergo ipsi T M, æquale sit M S, & ipsi E K, æquale sit F C; erit & M S, ipsi F C, æquale. Quocirca totum quadratum L N, toti rectangulo A C, æquale est; atque adeò recta O P, potest spatium A C, contentum sub A B, Rationali, & A D, ex binis nominibus prima. Dico O P, esse Irrationalem, quæ ex binis nominibus dicitur.

d 17. sexti.

e 1. sexti.

f 43. primi.

g 36. primi.

QVONIAM enim A G, G E, ostensæ sunt longitudine commēsurabiles; [h] erit & tota A E, vtriq; ipsarum longitudine commensurabilis: Est autem A E, cùm sit maius nomen ipsius A D, ex binis nominibus primæ, Rationali A B, commensurabilis longitudine. Igitur & A G, G E, eidem A B, ex scholio propos. 12. huius lib. longitudine commensurabiles sunt; Atq; adeò cùm A B, sit Rationalis, erunt & A G, G E, Rationales. [i] Quare rectangula A H, G I, sub Rationalibus longitudine commensurabilibus contenta Rationalia sunt; Ideoq; & quadrata L M, M N, ipsis æqualia, Rationalia erunt; Ac proinde & rectæ O M, M P, Rationales erunt.

h 16. decimi

i 20. decimi.

ET quoniam A E, ipsi E D, longitudine incommensurabilis est; Est autem ipsi A E, longitudine ostensa commensurabilis A G, & ipsi E D, commensurabilis est longitudine E F, eius dimidia; erūt

ex ſcholio propoſ.14.huius lib. & AG,EF,inter ſe longitudine incommenſurabiles. Quare & AH, EK, [a] eandem proportionẽ habẽtia,quam AG,EF, [b] incommenſurabilia ſunt,ac proinde & LM, MT, illis æqualia, ſunt incommenſurabilia. [c] Igitur & rectæ OM,MP, longitudine ſunt incommenſurabiles, [d] cùm eandem habeant proportionem,quam LM,MT: Sunt autẽ & OM,MP,Rationales oſtenſæ. Igitur OM, MP, Rationales ſunt potentia ſolùm commenſurabiles. [e] Quapropter tota OP,potens ſpatium AC,Irrationalis eſt,quæ ex binis nominibus dicitur. Si ſpatium ergo contineatur ſub Rationali,& ex binis nominibus prima,&c. Quod demonſtrandum erat.

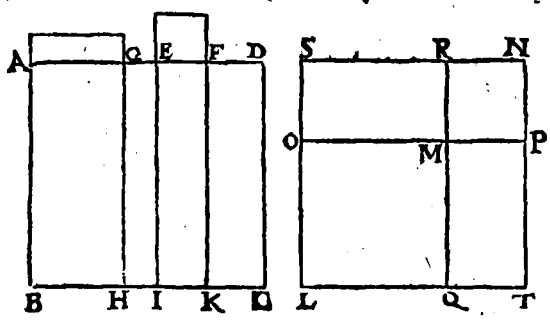
[a] 1. ſexti. [b] 10.decimi. [c] 10.decimi. [d] 1. ſexti. [e] 37.decimi.

55. 49.

## THEOR. 38. PROPOS. 56.

Si ſpatium contineatur ſub Rationali, & ex binis nominibus ſecunda; Recta linea ſpatium potens Irrationalis eſt,quæ ex binis Mediis prima appellatur.

Continebatvr ſpatium AC,ſub Rationali AB,& ex binis nominibus ſecunda AD.Dico rectam lineã,quæ poteſt ſpatium AC,Irrationalem eſſe,quæ ex binis Mediis prima dicitur. Sit enim ipſius AD,maius nomen AE.Erunt igitur ex defin. AE,ED,Rationales potentia tantũ commenſurabiles; & AE,plus poterit, q̃ ED, quadrato rectæ lineæ ſibi longitudine commenſurabilis; Et denique ED, Rationali expoſitę AB,longitudine commenſurabilis. Secetur ED,bifariam in F; & reliqua conſtruantur,vt in antecedenti propoſitione. Quo facto,demonſtrabimus ſimiliter,vt ibi, rectam OP, poſſe ſpatium AC,contentum ſub Rationali AB,& ex binis nominibus ſecunda AD, Dico iam OP,Irrationalem eſſe,quæ ex binis Mediis prima vocatur.




Qvoniam enim AE,longitudine incommenſurabilis eſt ipſi ED; & ED, minus nomẽ exiſtẽs ipſius AD, ex binis nominibus ſecundæ,longitudine commẽſurabilis eſt Rationali AB; [f] erũt AE, AB,longitudine incommenſurabiles. Et quia AG,GE, oſtenſæ ſunt in antecedenti propoſ.longitudine commenſurabiles; [g] Erit quoq; tota AE, vtriq; ipſarum commenſurabilis. Quare cùm AE, maius nomen exiſtens ipſius AD,ex binis nominibus ſecundæ,linea ſit Rationalis; erunt & AG,GE,Rationales:quòd cùm vtraque AG,GE,ipſi AE, ſit longitudine commenſurabilis; at verò AE, Rationali AB,longitudine incommenſurabilis; [h] erit vtraque AG,GE, eidem AB, incommenſurabilis longitudine. Ac proinde tam AB,AG, quàm AB,GE,Rationales ſunt potentia ſolùm commenſurabiles. [i] Igitur rectangula AH, GI, Media ſunt, propterea q̃que & quadrata LM,MN, ipſis æqualia,Media ſunt. Ergo & rectæ OM,MP,ſunt Mediæ.

[f] 13.decimi. [g] 16.decimi. [h] 14.decimi. [i] 22.decimi.

Qvia verò AG,GE, longitudine ſunt commenſurabiles; [k] erunt & AH,GI,eandem cum illis proportionẽ habẽtia,commenſurabilia,atq; idcircò & quadrata LM,MN,ipſis æqualia,commenſurabilia ſunt.Igitur & rectæ OM,MP,commenſurabiles ſunt, ſaltẽ potentia. Et quoniã AE,ED, longitudine incommenſurabiles ſunt; Ipſi verò AE, oſtenſa eſt longitudine commẽſurabilis AG; & ipſi ED, longitudine commenſurabilis eſt EF,eius dimidia; erunt p ſcholium propoſ.14.huius lib. AG,EF, longitudine incommenſurabiles; Ac proinde AH,EK, eandem habẽtia proportionẽ cum ipſis, [l] incommenſurabilia ſunt. Igitur & LM,MT, ipſis AH,& EK, æqualia,incommenſurabilia ſunt. [m] Ideoq; & rectæ OM,MP, longitudine ſunt incommenſurabiles. [n] cùm eandẽ habeãt proportionem,quã LM,MT. Cùm ergo oſtenſum ſit OM,MP, Medias eſſe,& commenſurabiles, erunt OM, MP, Mediæ potentia ſolùm commenſurabiles. Quoniam deniq; ED, minus nomen ipſius AD, ex binis nominibus ſecundæ, linea eſt longitudine commenſurabilis ipſi AB, hoc eſt, ipſi EI: Eſt autẽ EF,ipſi ED,quoq; longitudine commenſurabilis; [o] erunt etiam EI,EF,longitudine commenſurabiles; Ac propterea cũ EI, Rationalis ſit, erit & EF,Rationalis. [p] Quare EK,rectangulum,Rationale eſt: Eſt autẽ MT,ſub OM,MP,contentum ipſi EK,æquale. Igitur & MT, Rationale eſt. Quapropter OM,MP, Mediæ ſunt potentia tantũ commenſurabiles, Rationaleq; continentes; [q] atq; adeò OP, Irrationalis eſt, quæ ex binis Mediis prima appellatur. Si ergo ſpatium contineatur ſub Rationali,& ex binis nominibus ſecunda,&c. Quod oſtendendum erat.

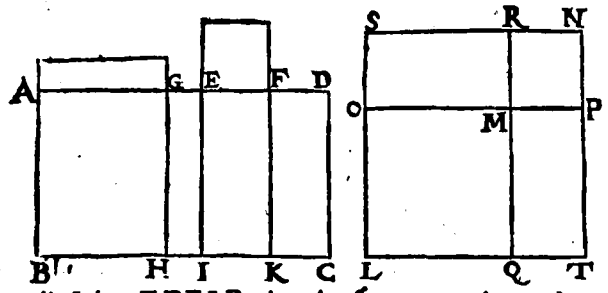
[k] 10. decimi [l] 10. decimi. [m] 10.decimi [n] 1. ſexti. [o] 12.decimi. [p] 20.decimi [q] 38. decimi

56. 50.

## THEOR. 39. PROPOS. 57.

Si ſpatium contineatur ſub Rationali, & ex binis nominibus tertia; Recta linea ſpatium potens Irrationalis eſt,quæ ex binis Mediis ſecunda dicitur;

Continevatvr ſpatiũ AC,ſub Rationali AB,& ex binis nominibus tertia AD.Dico rectam, quæ poteſt ſpatiũ AC,Irrationalem eſſe,quę dicitur ex binis Mediis ſecunda. Sit enim ipſius AD, maius nomen AE. Erunt ergo AE, ED, ex defin. Rationales potentia tantùm commenſurabiles & AE, plus poterit, q̃ ED,quadrato rectæ ſibi longitudine commenſurabilis; Et deniq; neutra ipſarum AE,ED,Rationali expoſitę AB,longitudine commenſurabilis erit. Secta ED,bifariam in F,reliqua omnia fiant,vt in propoſ.55. Similiter ergo,vt ibi, oſtendemus rectam OP, poſſe ſpatium AC: Et vt in antecedenti propoſ.56.rectas OM,MP, eſſe Medias potentia tantũ commenſurabiles; propterea quòd AE, Rationali AB, ponitur longitudine incommenſurabilis, quemadmodum &




dum & ibi eadem AE, ipſi AB, longitudine erat incommenſurabilis. Quoniam verò ED, EF, ſunt commenſurabiles longitudine; eſtque ED, ipſi AB, Rationali, hoc eſt, ipſi EI, longitudine incommenſurabilis; [c] erit quoque EF, eidem EI, longitudine incommenſurabilis: Sunt autem EF, EI, Rationales, quòd EF, dimidia ſit ipſius ED, Rationalis; & EI, expoſitæ Rationali AB, æqualis. Igitur EF, EI, Rationales ſunt potentia tantùm commenſurabiles; [b] Ac propterea EK, Medium eſt; ideoq; & MT, æquale ipſi EK, Medium eſt, quod ſub Mediis OM, MP, continetur. Itaque cùm OM, MP, Mediæ ſint potentia ſolùm commenſurabiles, contineantque ſpatium Medium; [c] erit OP, Irrationalis, quæ ex binis Mediis ſecunda appellatur. Si igitur ſpatium contineatur ſub Rationali, & ex binis nominibus tertia, &c. Quod erat demonſtrandum.

*a* 14. *decimi*

*b* 22. *decimi*

*c* 22. *decimi*

## THEOR. 40. PROPOS. 58. 57. 51.

SI ſpatium contineatur ſub Rationali, & ex binis nominibus quarta; Recta linea ſpatium potens Irrationalis eſt, quæ vocatur Maior.

CONTINEATVR ſpatium AC, ſub Rationali AB, & ex binis nominibus quarta AD. Dico rectam lineam, quæ poteſt ſpatium AC, eſſe Irrationalem, quæ Maior vocatur. Sit enim AE, ipſius AD, maius nomen. Erunt ergo ex defin. AE, ED, Rationales potentia tantùm commenſurabiles; & AE, plus poterit, quàm ED, quadrato rectæ lineæ longitudine ſibi incommenſurabilis, & denique AE, ipſi AB, commenſurabilis erit longitudine. Secta ED, bifariam in F, fiant reliqua omnia, vt in propoſ. 55. [d] Erunt ergo AG, GE, longitudine incommenſurabiles. Demonſtrabimus iam eodem modo, vt ibi, OP, poſſe ſpatium AC. Dico OP, Irrationalem eſſe, quæ vocatur Maior. Quoniam enim AG, GE, longitudine incommenſurabiles ſunt; [e] erunt & rectangula AH, GI, eandem cum illis habentia proportionem, incommenſurabilia; atq; adeò & quadrata LM, MN, ipſis AH, GI, æqualia, incommenſurabilia erunt. Quare rectæ OM, MP, potentia ſunt incommenſurabiles. Quia verò AE, maius nomen ipſius AD, ex binis nominibus quartæ, linea eſt longitudine commenſurabilis Rationali AB; erit & AE, Rationalis; [f] & rectangulum AI, ſub ipſis contentum, Rationale. Eſt autem AI, æquale compoſito ex quadratis LM, MN: Compoſitum ergo ex quadratis LM, MN, Rationale eſt.

*d* 19. *decimi*

*e* 10. *decimi*.

*f* 20. *decimi*

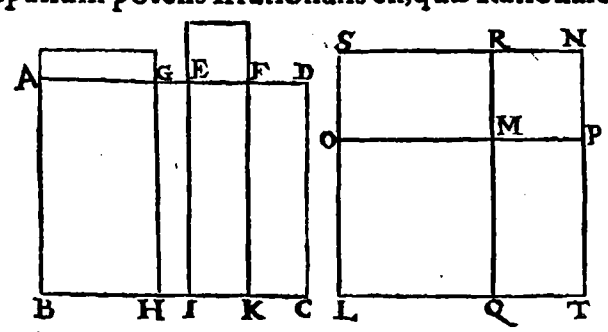
ET quoniam ED, minus nomen ipſius AD, ex binis nominibus quartæ, linea eſt longitudine incommenſurabilis Rationali AB, erit & EF, ipſius dimidia eidem AB, longitudine incommenſurabilis; Et eſt EF, Rationalis, cùm ſit Rationali ED, commenſurabilis. Igitur EF, & AB, Rationales ſunt potentia ſolùm cõmenſurabiles. [g] Quare EK, Medium eſt, ſub ipſis cõtentum; ideoq; & MT, illi æquale, contentumq; ſub OM, MP, Medium eſt. Quocirca cùm OM, MP, ſint potentia incommenſurabiles, faciantque compoſitum quidem ex ipſarum quadratis LM, MN, Rationale: Rectangulũ verò ſub ipſis MT, Mediũ; [h] Irrationalis erit tota OP, quæ maior nominatur. Si ſpatiũ ergo cõtineatur ſub Rationali, & ex binis nominibus quarta, &c. Quod erat oſtendendũ.

*g* 22. *decimi*

*h* 40. *decimi*

## THEOR. 41. PROPOS. 59. 58. 52.

SI ſpatium cõtineatur ſub Rationali, & ex binis nominibus quinta; Recta linea ſpatium potens Irrationalis eſt, quæ Rationale & Medium potens appellatur.




CONTINEATVR ſpatium AC, ſub Rationali AB, & ex binis nominibus quinta AD. Dico rectam lineam, quæ poteſt ſpatium AC, eſſe Irrationalem, quæ dicitur potens Rationale & Medium. Sit enim ipſius AD, maius nomen AE. Sunt ergo ex defin. AE, ED, Rationales potentia tantùm commenſurabiles; & AE, plus poteſt, quàm ED, quadrato rectæ longitudine ſibi incommenſurabilis; & deniq; ED, longitudine commẽſurabilis eſt expoſitæ Rationali AB. Secta ED, bifariam, fiant reliqua eadem, quæ in propoſ. 55. [i] Erunt igitur rurſus AG, GE, longitudine incommenſurabiles. Simili autem modo, vt in propoſ. 55. conſtabit rectam OP, poſſe ſpatium AC. Dico OP, Irrationalem eſſe, quæ potens Rationale & Medium appellatur. Erunt enim, vt in propoſ. antecedenti, rectæ OM, MP, potentia incommenſurabiles. Et quia AE, maius nomen ipſius AD, ex binis nominibus quintæ, linea eſt Rationalis & longitudine incommenſurabilis Rationali AB; erunt AE, AB, Rationales potentia tantùm commenſurabiles. [k] Quare rectangulum AI, ſub ipſis contentum, Medium eſt. Eſt autem AI, æquale compoſito ex quadratis LM, MN. Igitur & compoſitum hoc, Medium erit. Rurſus quia ED, Rationalis ponitur longitudine commenſurabilis Rationali AB, cùm ſit minus nomẽ ipſius AD, ex binis

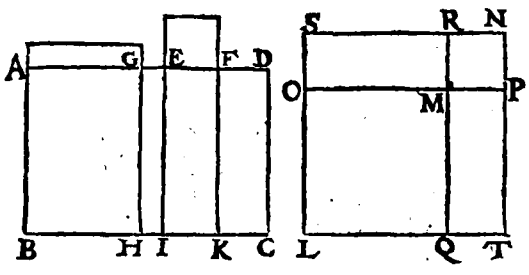
*i* 19. *decimi*.

*k* 22. *decimi*

nominibus quintæ; erit & EF, ipſius dimidia, eidem AB, commenſurabilis longitudine, & Ra-
a 20.decimi tionalis. a Quare EK, ſub Rationalibus EI, EF, longitudine commenſurabilibus, Rationale eſt; atque ideirco & MT, ſub OM, MP, contentum Rationale erit, cùm ipſi EK, ſit æquale. Quamobrem cùm rectæ OM, MP, potentia incommenſurabiles ſint, faciantque compoſitum quidem ex ipſarum quadratis LM, MN, Medium; Rectangulum verò MT, ſub ipſis contentum, Rationale;
b 41.decimi b Irrationalis erit tota OP: quæ dicitur potens Rationale, & Medium. Si igitur ſpatium cõtineatur ſub Rationali, & ex binis nominibus quinta, &c. Quod erat demonſtrandum.

59. 53. ## THEOR. 42. PROPOS. 60.

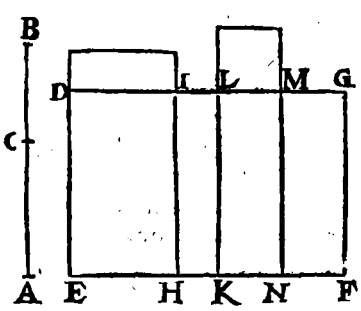
**SI ſpatium contineatur ſub Rationali, & ex binis nominibus ſexta; Recta linea ſpatium potens Irrationalis eſt, quæ bina Media potens nominatur.**




CONTINEATVR ſpatium AC, ſub Rationali AB, & ex binis nominibus ſexta AD. Dico rectam, quæ ſpatium AC, poteſt, Irrationalem eſſe, quæ dicitur potẽs bina Media. Sit enim ipſius AD, maius nomen AE. Sunt ergo AE, ED, ex defin. Rationales potentia tantùm commenſurabiles; & AE, plus poterit, quàm ED, quadrato rectæ ſibi longitudine incommenſurabilis; & denique neutra ipſarum AE, ED, longitudine erit cõmenſurabilis Rationali AB. Fiant om-
c 19.decimi. nia, quæ in ſuperioribus; c eruntque AG, GE, longitudine incommẽſurabiles. Iam verò oſtendemus ſimiliter, vt in propoſ. 55. rectam OP, poſſe ſpatium AC. Item vt in propoſ. 58. rectas OM, MP, potentia eſſe incommenſurabiles. Rurſus, vt in antecedenti propoſ. erit compoſitum ex quadratis LM, MN, Medium. Vt autem in propoſ. 58. erit quoque MT, ſub OM, MP, comprehenſum, Medium. Et quia duarum rectarum AE, EF, illa quidem incommenſurabilis eſt longitudine
d 13. decimi ipſi ED; hæc verò eidem commenſurabilis; d erunt AE, EF, longitudine incommenſurabiles.
e 10.decimi e Igitur & AI, EK, incommenſurabilia ſunt. f cùm eandem rationem habeant, quam AE, EF.
f 1. ſexti. Quare & compoſitum ex quadratis LM, MN, quod ipſi AI, æquale eſt, & rectangulum MT, quod ipſi EK, eſt æquale, incommenſurabilia ſunt. Quapropter cùm rectæ OM, MP, ſint potentia incommenſurabiles, faciantq; & compoſitum ex ipſarum quadratis LM, MN, Medium, &
g 42.decimi MT, ſub ipſis contentum, Medium, incommenſurabileq; compoſito ex ipſarum quadratis; g erit tota OP, Irrationalis, quæ bina Media potens vocatur. Si ergo ſpatium contineatur ſub Rationali, & ex binis nominibus ſexta, &c. Quod oſtendendum erat.

60. 54. ## THEOR. 43. PROPOS. 61.

**QVADRATVM eius, quæ eſt ex binis nominibus, ad Rationalem applicatum, latitudinem facit ex binis nominibus primam.**




h 45.primi. SIT ex binis nominibus AB, cuius maius nomen AC; h & ad Rationalem expoſitam DE, applicetur rectangulum DE, æquale quadrato ex AB, latitudinem faciens DG. Dico DG, ex binis nominibus eſſe primam. Applicetur enim ad eandem Rationalem DE, rectangulum DH, æquale quadrato ex AC; & ad HI, aliud IK, æquale quadrato ex CB. Erit igitur reliquum
i 4.ſecundi. LF, æquale ei, quod bis ſub AC, CB, continetur, cùm quadrata ex AC, CB, vnà cum rectangulo bis ſub AC, CB, i æqualia ſint quadrato ex AB, quemadmodũ & eidem quadrato ex AB, æquale eſt, per cõſtructionem, rectangulum DF. Secetur LG, bifariam in M, puncto, per quod ipſis LK, GF, parallela agatur
k 37.decimi MN: eritque vtrumq; rectangulũ LN, MF, æquale ei, quod ſub AC, CB, continetur. k Et quoniã AC, CB, Rationales ſunt potentia ſolùm commenſurabiles, quòd tota AB, ſit ex binis nomini-
l 16.decimi. bus; erunt quadrata ex AC, CB, Rationalia, & ob id commenſurabilia; l quorum vtrique cùm etiam commenſurabile ſit compoſitum ex ipſis; erit quoque compoſitum quadratorum ex AC, CB, Rationale. Eſt autem huic compoſito æquale, per conſtructionem, rectangulum DK. Igitur
m 21.decimi & DK, Rationale erit; quod cum applicatum ſit ad Rationalem DE, m faciet latitudinem DL, Rationalem, & ipſi DE, longitudine commenſurabilem.

n 22.decimi RVRSVS quia AC, CB, Rationales ſunt ſolùm potentia commenſurabiles, n erit rectangulum ſub ipſis, Medium, atq; adeò, & quòd bis ſub ipſis, cùm ſit ei commenſurabile, hoc eſt, ipſum
o 23.decimi. LF, Medium erit, per coroll. propoſ. 24. huius lib. Quare LF, applicatum ad LK, Rationalem. o facit LG, latitudinem Rationalem, & ipſi LK, hoc eſt, ipſi DE, longitudine incommenſurabilem.
p 13. decimi. Eſt autem DL, oſtenſa eidem DE, commenſurabilis longitudine. p Igitur DL, LG, longitudine incommenſurabiles ſunt. Sunt ergo DL, LG, Rationales potentia tantùm commenſurabiles;
q 37.decimi q Ac propterea DG, ex binis nominibus eſt. Dico & primam eſſe.

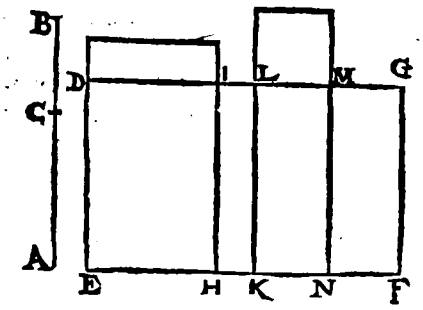
QVONIAM.

QVONIAM enim ex lemmate propoſ. 54. huius lib. rectangulum ſub A C, C B, medium proportionale eſt inter quadrata ex A C, C B, erit quoque L N, medium proportionale inter D H, I K, atque adeò [a] cùm rectæ D I, L M, I L, eandem rationem habeant, quam D H, L N, I K; erit quoque recta L M, media proportionalis inter D I, I L. [b] Quare rectangulum ſub D I, I L, æquale eſt quadrato ex L M. Et quia quadrata ex rectis A C, C B, commenſurabilia ſunt, quòd A C, C B, ponuntur potentia commenſurabiles; erunt & D H, I K, ipſis æqualia, commenſurabilia. [c] Igitur & rectæ D I, I L, eandem cum illis habentes rationem, longitudine commenſurabiles ſunt. Quoniam autem D K, maius eſt, quàm L F, quòd & quadrata ex A C, C B, maiora ſint, per lemma propoſ. 39. huius libri, quàm rectangulum bis ſub A C, C B; erit & recta D L, maior quàm L G, [d] cùm D L, L G, eandem rationem habeant, quam D K, L F. Itaque quoniam D L, maior eſt, quàm L G, & ad D L, applicatur rectangulum ſub D I, I L, deficiens figura quadrata, æquale quadrato ex L M, hoc eſt, quartæ parti quadrati ex minore L G, deſcripti; (oſtenſum enim eſt rectangulum ſub D I, I L, æquale quadrato ex L M.) diuiditurq; D L, ad I, in partes D I, I L, longitudine commenſurabiles, vt eſt demonſtratum; [e] poterit D L, maior plus quàm L G, minor, quadrato rectæ ſibi longitudine commenſurabilis. Quare cùm D G, oſtenſa ſit ex binis nominibus, & D L, maius nomen plus poſſe, quàm L G, minus nomen, quadrato rectæ ſibi longitudine commenſurabilis, atque idem maius nomen D L, longitudine commenſurabile Rationali expoſitæ D E; erit ex defin. D G, ex binis nominibus prima. Quadratũ ergo eius, q̃ eſt ex binis nominibus, &c. Quod oſtẽdendũ erat.

[a] 1. ſexti. [b] 17. ſexti. [c] 10. decimi [d] 1. ſexti. [e] 18. decimi.

## THEOR. 44. PROPOS. 62. 61.

QVADRATVM eius, quæ eſt ex binis Mediis prima, ad Rationalem applicatum, latitudinem facit ex binis nominibus ſecundam. 55.

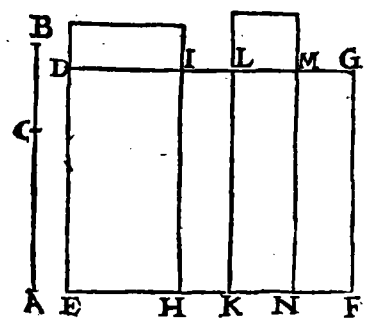



SIT ex binis Mediis prima A B, cuius maius nomẽ A C; [f] & ad Rationalẽ D E, applicetur rectãgulum D F, æquale quadrato ex A B, latitudinem faciens D G. Dico D G, ex binis nominibus eſſe ſecundam. Conſtituátur enim eadẽ, quæ in propoſ. præcedenti, ita vt rurſus D H, I K, æqualia ſint quadratis ex A C, C B, & vtrumque ipſorum L N, M F, ei quod ſub A C, C B, cõtinetur. Quoniam igitur A C, C B, ex binis Mediis primam A B, componentes [g] Mediæ ſunt potentia tantùm commenſurabiles, quæ Rationale continent; erunt quadrata ex A C, C B, atq; adeò rectãgula ipſis æqualia D H, I K, commenſurabilia, atque Media. [h] Cùm ergo propterea & totum D K, vtriq; ipſorum D H, I K, ſit commẽſurabile; erit quoq; ex coroll. propoſ. 24. huius lib. D K, Medium; quod cùm applicatum ſit ad Rationalem D E: [i] erit eius latitudo D L, Rationalis ipſi D E, longitudine incommenſurabilis. Rurſus quoniam rectangulum ſub A C, C B, Rationale eſt; erit & eius duplum, nempe L F, Rationale; quod cum applicatum ſit ad Rationalem L K; [k] erit eius latitudo L G, Rationalis ipſi L K, hoc eſt, ipſi D E, longitudine commenſurabilis. Quare cùm duarum rectarum D L, L G, ipſa L G, ſit ipſi D E, commenſurabilis longitudine, at D L, longitudine incommenſurabilis, [l] erunt D L, L G, longitudine incommenſurabiles. Quòd cum D L, L G, oſtenſæ ſint Rationales; erunt ipſæ Rationales potentia ſolùm cõmenſurabiles; [m] ac propterea tota D G, ex binis nominib. eſt. Iam verò vt in antecedenti propoſ. demonſtrabimus D L, maius nomẽ eſſe, & poſſe plus, q̃ minus L G, quadrato rectæ ſibi lõgitudine cõmenſurabilis. Quocirca cùm ipſius D G, maius nomẽ D L, plus poſſit, q̃ minus nomen L G, quadrato rectæ ſibi longitudine cõmenſurabilis, & minus nomẽ L G, oſtenſum ſit longitudine cõmenſurabile Rationali expoſitæ D E; erit ex defin. D G, ex binis nominibus ſecũda. Quadratũ ergo eius, q̃ eſt ex binis Mediis prima, &c. Quod erat oſtendendũ.

[f] 45. primi. [g] 38. decimi [h] 16. decimi [i] 23. decimi. [k] 21. decimi. [l] 13. decimi. [m] 37. decimi

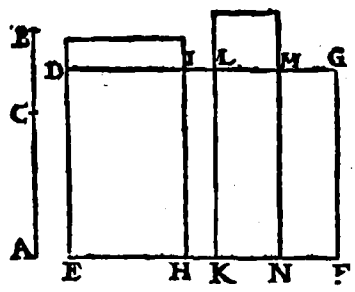
## THEOR. 45. PROPOS. 63. 62.

QVADRATVM eius, quę ex binis Mediis ſecunda, ad Rationalem applicatum, latitudinem facit ex binis nominibus tertiam. 56.




SIT ex binis Mediis ſecunda A B, cuius maius nomen A C, [n] & ad Rationalem D E, applicetur rectangulum D F, æquale quadrato ex A B, latitudinem faciens D G. Dico D G, eſſe ex binis nominibus tertiam. Conſtructis enim iiſdem, quę in propoſ. 61. quoniam A C, C B, ex binis Mediis ſecundam A B, componentes, [o] Mediæ ſunt potentia ſolùm commenſurabiles, quæ Medium continent; Erunt quadrata ex A C, C B, atque adeò rectangula ipſis æqualia D H, I K, commenſurabilia, & Media. [p] Cùm ergo propterea & totum D K, vtrique ipſorum D H, I K, ſit commenſurabile; erit & ex coroll. propoſ. 24. huius libri D K, Medium; quod cùm applicatum ſit ad Rationalem D E; [q] erit eius latitudo D L, Rationalis ipſi D E, longitudine incommenſurabilis. Rurſus quia rectangulum ſub A C, C B, Medium eſt; erit & eius duplum L F, Medium; quod cum applicatum ſit ad Rationalem L K; [r] erit latitudo L G, Rationalis

[n] 45. primi. [o] 39. decimi [p] 16. decimi [q] 23. decimi [r] 23. decimi

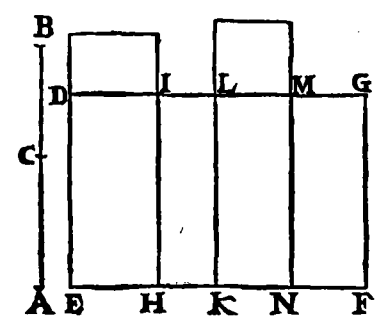



ipſi L K, hoc eſt, ipſi D E, longitudine incommenſurabilis. Et quia A C, ipſi C B, longitudine eſt incommenſurabilis; eſtque vt A C, ad C B, ita per lemma 1. propoſ. 19. huius libri, quadratũ ex A C, ad rectangulum ſub A C, C B, [a] erit quoq; quadratum ex A C, rectangulo ſub A C, C B, incommenſurabile. [b] Eſt autem quadrato ex A C, commenſurabile compoſitum ex quadratis rectarum A C, C B, quòd quadrata ex A C, C B, commenſurabilia ſint, quippe cùm rectæ ipſæ potentia ponantur commenſurabiles; & rectangulo ſub A C, C B, commenſurabile eſt eius duplum, nimirum rectangulum bis ſub A C, C B. Igitur compoſitum ex quadratis rectarum A C, C B, hoc eſt, rectangulum D K, incommenſurabile eſt rectangulo bis ſub A C, C B, hoc eſt, rectangulo L F, per ea, quæ in ſcholio propoſ. 14. huius libri conſcripſimus. Quare rectæ D L, L G, eandem rationem cum D K, L F, habentes [c] longitudine ſunt incomenſurabiles: Sunt autem oſtenſæ & Rationales. Rationales ergo ſunt potentia tantùm commenſurabiles; [d] ac propterea tota D G, ex binis nominibus eſt. Iam verò, vt in propoſ. 61. oſtendemus D L, eſſe maius nomen, poſſeq; plus, q̃ minus L G, quadrato rectæ ſibi longitudine commenſurabilis. Quamobrẽ cùm D L, maius nomen plus poſsit, quã L G, minus, quadrato rectæ ſibi longitudine cõmenſurabilis, & neutra ipſarũ D L, L G, Rationali expoſitæ D E, ſit oſtenſa longitudine cõmenſurabilis; erit ex defin. D G, ex binis nominibus tertia. Quadratũ ergo eius, quæ ex binis Mediis ſecunda, ad Rationalem applicatum, latitudinẽ facit ex binis nominibus tertiam. Quod erat demonſtrandũ.

a 10. decimi
b 16. decimi
c 10. decimi.
d 37. decimi

## 63. THEOR. 46. PROPOS. 64. 57.

QVADRATVM Maioris ad Rationalem applicatum, latitudinem facit ex binis nominibus quartam.




SIT Maior AB, cuius maius nomen A C, [e] & ad Rationalem D E, applicetur rectangulum D F, æquale quadrato ex A B, latitudinem faciens D G. Dico D G, ex binis nominibus eſſe quartam. Conſtruátur enim eadem prorſus, quæ in propoſ. 61. Et quia A C, C B, Maiorem A B, componentes, [f] potentia incommenſurabiles ſunt, faciuntq; compoſitum quidem ex quadratis rectarum A C, C B, Rationale, rectãgulum verò ſub ipſis, Medium; erit quoque D K, compoſito ex quadratis rectarum A C, C B, æquale exiſtens, Rationale; At verò L F, duplum eius, quod ſub A C, C B, continetur, Medium. Quoniam igitur rationale D K, ad Rationalem D E, eſt applicatum: [g] erit D L, Rationalis ipſi D E, longitudine commenſurabilis. Item cùm L F, Medium ſit applicatum ad Rationalem L K; [h] erit L G, Rationalis ipſi L K, hoc eſt, ipſi D E, longitudine incommenſurabilis. Quare cùm duarum rectarum D L, L G, illa quidem ipſi D E, commenſurabilis ſit longitudine; hæc verò eidem D E, longitudine incommenſurabilis; [i] incommenſurabiles erunt longitudine D L, L G: Oſtenſæ ſunt autem & Rationales. Sunt igitur D L, L G, Rationales potentia tantùm commenſurabiles; [k] ideoq; D G, ex binis nominibus eſt. Iam verò, vt in propoſ. 61. demonſtrabimus rectãgulum ſub ſub D I, I L, æquale eſſe quadrato ex L M. Quia autem quadrata ex A C, C B, incommenſurabilia ſunt, quòd rectæ A C, C B, potentia incommenſurabiles ſint; Erunt etiam illis æqualia D H, I K, incommenſurabilia; [l] atque adeò & rectæ D I, I L, eandem cum illis habentes proportionem, longitudine incommenſurabiles. Quoniam verò, vt in propoſ. 61. oſtendimus, D L, maior eſt, quàm L G, & ad D L, applicatum eſt rectangulum ſub D I, I L, quadrato ex L M, hoc eſt, quartæ parti quadrati ex L G, æquale, deficiens figura quadrata, quod diuidit ipſam D L, ad I, in partes longitudine incommenſurabiles; [m] poterit D L, plus quàm L G, quadrato rectæ ſibi longitudine incommenſurabilis. Quam ob rem cùm & ipſa D L, (maius nomen ipſius D G, quæ eſt ex binis nominibus.) oſtenſa ſit longitudine commenſurabilis expoſitæ Rationali D E; erit ex defin. D G, ex binis nominibus quarta. Quadratum ergo maioris ad Rationalem applicatum, &c. Quod erat demonſtrandum.

e 45. primi.
f 40. decimi
g 21. decimi
h 23. decimi.
i 13. decimi.
k 37. decimi
l 10. decimi.
m 19. decimi

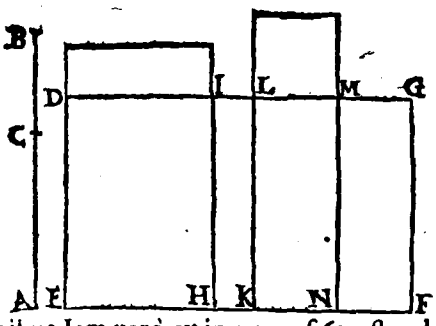
## 64. THEOR. 47. PROPOS. 65. 58.

QVADRATVM eius, quæ Rationale ac Medium poteſt, ad Rationalem applicatum, latitudinem facit ex binis nominibus quintam.

SIT recta potens Rationale ac Medium A B, cuius maius nomẽ A C; [n] & ad Rationalem D E, rectangulum D F, applicetur æquale quadrato ex A B, latitudinem faciens D G. Dico D G, ex binis nominibus quintam eſſe. Fiant enim eadem omnino, quæ in propoſ. 61. Quoniam igitur rectæ A C, C B, componentes A B, potentem Rationale ac medium, [o] potentia incommenſurabiles ſunt, facientes quidem compoſitum ex ipſarum quadratis Medium, at rectãgulum ſub ipſis contentũ, Rationale; erit D K, æquale compoſito ex quadratis rectarum A C, C B, Medium; & L N, æquale ei, quod ſub A C, C B, continetur, atque adeò ipſius duplum L F, Rationale. Igitur Medium D K,

n 45. primi.
o 41. decimi.

applicatum

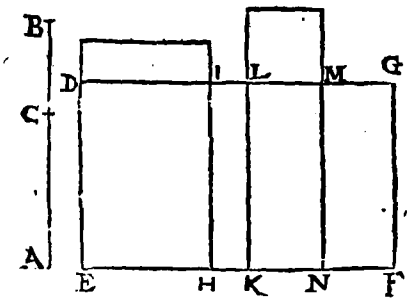



applicatum ad Rationalem DE, [a] facit latitudinem DL, Rationalē, & longitudine Rationali DE, incommensurabilem: At verò Rationale LF, ad Rationalem LK, applicatum, [b] facit latitudinem LG, Rationalem longitudine ipsi LK, hoc est, ipsi DE, commensurabilem. Quia igitur duarum rectarum DL, LG, hæc quidem longitudine commensurabilis est Rationali DE, illa verò longitudine incommensurabilis; [c] erunt DL, LG, longitudine incommensurabiles. Quare DL, LG, Rationales sunt potentia solùm commensurabiles; [d] Ac propterea DG, est ex binis nominibus. Iam verò, vt in propos. 61. ostendemus rectangulum sub DI, IL, æquale esse quadrato ex LM; & vt in antecedente propos. DL, maius nomen esse, atque posse plus, quàm LG, quadrato rectæ sibi longitudine incommensurabilis. Quapropter cùm & minus nomen LG, ostensum sit expositæ Rationali DE, longitudine commensurabile; erit ex defin. DG, ex binis nominibus quinta. Quadratum igitur eius, quę Rationale ac Medium potest, &c. Quod demonstrādum erat.

[a] 23. decimi.
[b] 21. decimi
[c] 13. decimi.
[d] 37. decimi

## THEOR. 48. PROPOS. 66. 65.

QVADRATVM eius, quæ bina Media potest, ad Rationalem applicatum, latitudinem facit ex binis nominibus sextam. 59.

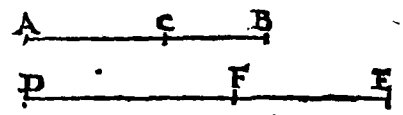



SIT bina Media potens recta AB, cuius maius nomen AC, [e] & ad Rationalem DE, applicetur rectangulum DF, æquale quadrato ex AB, latitudinem faciens DG. Dico DG, esse ex binis nominibus sextam. Constructis enim iisdem, quæ in propos. 61. quoniam rectæ AC, CB, componentes ipsam AB, potentem bina Media, [f] potentia incommensurabiles sunt, faciuntq; & compositum ex ipsarum quadratis Medium, & quod sub ipsis continetur, Medium, & incommensurabile composito ex quadratis ipsarum; erit tam DK, illi composito æquale, quàm LF, rectangulo bis sub AC, CB, æquale, Medium. Et quia Media DK, LF, applicata sunt ad Rationalem DE; [g] erunt eorum latitudines DL, LG, Rationales ipsi DE, longitudine incommensurabiles. [h] Quoniam verò compositum ex quadratis rectarum AC, CB, incommensurabile est rectangulo sub AC, CB; eidem verò rectangulo sub AC, CB, commensurabile est rectangulum bis sub AC, CB, cùm hoc illius sit duplum; [i] Erit compositum ex dictis quadratis, hoc est, DK, incommensurabile rectangulo bis sub AC, CB, hoc est, ipsi LF; [k] propterea rectæ DL, LG, eandem rationem habentes cum DK, LF, longitudine incommensurabiles sunt. Rationales ergo sunt DL, LG, potentia solùm commensurabiles; [l] Ac proinde DG, est ex binis nominibus. Iam verò, vt in præcedenti propos. demonstrabimus DL, esse maius nomen; possęq; plus quàm LG, quadrato rectæ sibi longitudine incommensurabilis. Cùm ergo ostensum sit neutram ipsarum DL, LG, longitudine commensurabilem esse expositæ Rationali DE; erit ex defin. DG, ex binis nominibus sexta. Quadratum igitur eius, quæ bina Media potest, ad Rationalē applicatū, latitudinē facit ex binis nominib. sextam. Quod erat ostendendū.

[e] 45. primi.
[f] 42. decimi
[g] 23. decimi
[h] 42. decimi
[i] 13. decimi.
[k] 10. decimi
[l] 37. decimi.

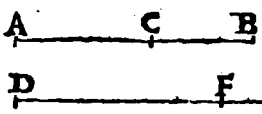
## THEOR. 49. PROPOS. 67. 66.

ET, quæ est ex binis nominibus, longitudine commensurabilis, & ipsa ex binis nominibus est, atque ordine eadem. 60.




SIT ex binis nominibus quęcunque AB, diuisa in sua nomina, quorum maius AC, & CB, minus, sitq; recta DE, ipsi AB, longitudine commensurabilis. Dico DE, quoq; esse ex binis nominibus, & ordine eandem ipsi AB. [m] Fiat enim vt tota AB, ad totam DE, ita ablata AC, ad ablatam DF. [n] Erit ergo & reliqua CB, ad reliquam FE, vt tota AB, ad totam DE. Et quoniam ipsi AB, longitudine commensurabilis ponitur DE; [o] erit & DF, ipsi AC, & FE, ipsi CB, longitudine commensurabilis: [p] Sunt autem AC, CB, cùm sint nomina eius, q ex binis nominibus, Rationales. Igitur & DF, FE, Rationales sunt. Rursus quia est vt AC, ad DF, ita CB, ad FE; & permutādo vt AC, ad CB, ita DF, ad FE: Sunt autē AC, CB, potentia solū cōmensurabiles; [q] erunt & DF, FE, potētia solū cōmensurabiles. Igitur DF, FE, Rationales sunt potētia tantū commēsurabiles; [r] Ac propterea DE, ex binis est nominibus. Dico & ipsi AB, ordine eandem esse. Aut enim AC, plus potest q CB, quadrato rectæ lineæ sibi longitudine cōmensurabilis, aut incōmensurabilis. Si quidem AC, plus potest q CB, quadrato rectæ sibi longitudine cōmensurabilis; [s] poterit & DF, plus q FE, quadrato rectę sibi longitudine cōmensurabilis. Quod si AC, cōmensurabilis sit lōgitudine Rationali expositæ, ita vt AB, sit ex binis nominib. prima; [t] erit & DF, eidē Rationali lōgitudine cōmēsurabilis, cū vtraq;, & Rationalis, & DF,

[m] 12. sexti.
[n] 19. quinti
[o] 10. decimi.
[p] 37. decimi
[q] 10. decimi
[r] 37. decimi
[s] 15. decimi.
[t] 12. decimi.




eidem A C, sit commensurabilis longitudine. Quare & D E, ex defin. est ex binis nominibus prima, hoc est, ordine eadē. Si verò C B, expositæ Rationali sit longitudine commensurabilis, vt A B, sit ex binis nominibus secunda; erit eodem modo & F E, Rationali expositæ longitudine commensurabilis. Quare & D E, ex defin. est ex binis nominibus secunda. Si denique neutra ipsarum A C, C B, longitudine sit commensurabilis expositæ Rationali, ita vt A B, sit ex binis nominibus tertia; [a] erit & neutra ipsarum D F, F E, longitudine cōmensurabilis expositę Rationali. Quare & D E, ex defin. est ex binis nominibus tertia.

a 12. decimi.

[b] At si A C, plus possit, quàm C B, quadrato rectæ sibi longitudine incommensurabilis; [b] poterit & D F, plus quàm F E, quadrato rectæ sibi longitudine incommensurabilis. Quare vt prius, ostendemus D E, ex binis nominibus quartam esse, vel quintam, vel sextam, prout & A B, fuerit ex binis nominibus quarta, vel quinta, vel sexta. Ei igitur, quę ex binis nominibus, longitudine commensurabilis, &c. Quod erat ostendendum.

b 15. decimi.

## SCHOLIVM.

*Quod si recta D E, potentia tantùm commensurabilis sit ipsi A B, quæ est ex binis nominibus, ostendemus quidem eodem modo, (si loco: Commensurabilis longitudine: in demonstratione reponamus vbique: commensurabilis potentia tantùm:) & D E, esse ex binis nominibus: At eam esse ordine eandem ipsi A B, cui commensurabilis est, nullo modo concludemus. Non enim sequitur, si A C, maius nomen longitudine sit commensurabile expositæ Rationali; & D F, maius nomen eidem esse commensurabile longitudine; propterea quòd non vtraque, nempe expositæ Rationali, & D F, eidem A C, longitudine commensurabilis est, sed Rationalis quidem commensurabilis longitudine; At verò D F, potentia tantùm, ex hypothesi. Immo verò, si A B, sit ex binis nominibus prima, secunda, quarta, vel quinta, fieri nulla ratione potest, vt D E, illi potentia tantùm commensurabilis sit ex binis nominibus ordine eadem.*

*Sit enim A B, ex binis nominibus prima, secunda, quarta, vel quinta, diuisa in sua nomina ad C: sitq; ei commensurabilis potentia tantùm D E, quam quidem, vt in theoremate, demonstrabimus esse ex binis nominibus, diuisamq; esse in sua nomina ad F; & partes A C, C B, partibus D F, F E, proportionales esse, nimirū illas ad has eandem habere rationem, quam tota A B, ad totam D E. Dico nullo modo fieri posse, vt D E, ex binis nominibus sit eadem ordine ipsi A B. Nam si potest fieri, sit vtraque ex binis nominibus prima. Erit ergo vtrumque maius nomen A C, D F, ex defin. Rationali expositæ commensurabilis longitudine.* [a] *Quare & inter se longitudine commensurabiles erunt. Et quoniam est vt A C, ad D F, ita A B, ad D E;* [b] *erunt propterea & A B, D E, longitudine commensurabiles. Quod est absurdum. Ponitur enim D E, ipsi A B, potentia solùm commensurabilis. Non ergo vtraq; A B, D E, ex binis nominibus prima est. Eodem modo neq; vtraq; ex binis nominibus quarta erit. Sed neq; secunda vel quinta. Esset enim vtrumq; nomen minus C B, F E, ex defin. longitudine commensurabile Rationali expositæ, atq; adeò & inter se. Igitur & totæ A B, D E, longitudine forent commensurabiles. quod non ponitur.*

a 12. decimi.

b 10. decimi.

*Semper tamen verum est, si A B, est ex binis nominibus prima, vel secunda, vel tertia, rectam D E, ipsi A B, potentia solùm commensurabilem, esse quoque vnam ex illis tribus, licet ordine non eadem sit. Nam hoc posito, poterit A C, plus quàm C B, quadrato rectæ sibi longitudine commensurabilis. Cùm ergo sit, vt A C, ad C B, ita D F, ad F E;* [c] *poterit quoque D F, plus quàm F E, quadrato rectæ sibi longitudine commensurabilis. Quare ex defin. erit D E, ex binis nominibus prima, vel secunda, vel tertia. Eodem modo si A B, est ex binis nominibus quarta, vel quinta, vel sexta, ita vt A C, plus possit, quàm C B, quadrato rectæ sibi longitudine incommensurabilis;* [d] *poterit quoque D F, plus quàm F E, quadrato rectæ sibi longitudine incommensurabilis, cùm sit, vt A C, ad C B, ita D F, ad F E. Igitur ex defin. erit D E, ex binis nominibus etiam quarta, vel quinta, vel sexta, licet non eadem ordine ipsi A B.*

c 15. decimi

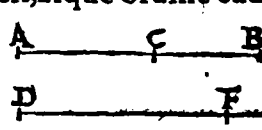
d 15. decimi

*In sequentibus autem quatuor propositionibus necessariò erit D E, eadem ordine ipsi A B, quanquam potentia tantùm illi commensurabilis sit.*

67. 61.

## THEOR. 50. PROPOS. 68.

Ei, quæ est ex binis Mediis, longitudine commensurabilis, & ipsa ex binis Mediis est, atque ordine eadem.




Sit ex binis Mediis A B, quæcunq; diuisa in sua nomina, quorum A C, maius, & C B, minus, sitque ei recta D E, longitudine commensurabilis. Dico D E, quoque ex binis Mediis esse, & ipsi A B, ordine eandem. [a] Fiat enim vt tota A B, ad totam D E, ita ablata A C, ad ablatam D F. [b] Erit ergo & reliqua C B, ad reliquam F E, vt tota A B, ad totam D E. Et quoniam ipsi A B, ponitur longitudine commensurabilis D E; [c] erit & D F, ipsi A C, & F E, ipsi C B, longitudine commensurabilis. Sunt autem A C, C B, Mediæ. [d] Igitur & D E, F E, illis commensurabiles, Mediæ sunt. Rursus quia est vt A C, ad D F, ita C B, ad F E; & permutando vt A C, ad C B, ita D F, ad F E; [e] Sunt autem A C, C B, potentia solùm commensurabiles; [f] erunt & D F, F E, solùm commēsurabiles potentia. Cùm ergo & ostensæ sint Mediæ, erunt D F, F E, Mediæ

a 12. sexti.

b 19. quinti.

c 10. decimi.

d 24. decimi

e 38. decimi.

f 10. decimi.

FE, Mediæ potentiâ tantùm commensurabiles; [a] Atque idcirco DE, erit ex binis mediis. Dico & ipsi AB, eandem esse ordine. Quoniam enim est vt AC, ad CB, ita DF, ad FE: Est autem vt AC, ad CB, ita quadratum ex AC, ad rectangulum sub AC, CB, & vt DF, ad FE, ita quadratum ex DF, ad rectangulum sub DF, FE, ex lemmate 3. propos. 19. huius libri; erit quoque vt quadratum ex AC, ad rectangulum sub AC, CB, ita quadratum ex DF, ad rectangulum sub DF, FE; & permutando vt quadratum ex AC, ad quadratum ex DF, ita rectangulum sub AC, CB, ad rectangulum sub DF, FE. Commensurabile est autem quadratum ex AC, quadrato ex DF; quòd rectæ AC, DF, commensurabiles ostensæ sint longitudine. [b] Igitur & rectangulum sub AC, CB, rectangulo sub DF, FE, commensurabile est. Quare si rectangulum sub AC, CB, fuerit Rationale, ita vt AB, sit ex binis Mediis prima; erit & rectangulum sub DF, FE, Rationale, cùm illi sit commensurabile; [c] atque adeò & DE, ex binis Mediis prima erit. Si verò rectangulum sub AC, CB, fuerit Medium, ita vt AB, sit ex binis Mediis secunda: erit & rectangulum sub DF, FE, ei commensurabile, Mediũ, ex corollario propos. 24. huius lib. [d] Ac propterea & DE, erit ex binis Mediis secunda. Quare ei, quę ex binis Mediis lôgitudine cõmensurabilis, &c. Quod demonstrandũ erat.

[a] 38. vel 39. decimi.
[b] 10. decimi
[c] 38. decimi.
[d] 39. decimi

## SCHOLIVM.

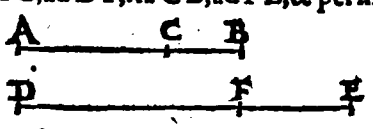
*Eodem prorsus modo demonstrabimus, rectam lineam DE, si potentia tantùm fuerit commensurabilis ipsi AE, quæ est ex binis Mediis, ex binis Mediis esse, atque ordine eandem ipsi AB, cui commensurabilis est; si modò loco: commensurabilis longitudine: in demonstratione dicamus vbique: commensurabilis potentia tantùm, &c. vt manifestum est.*

## THEOR. 51. PROPOS. 69.

68.
62.

### MAIORI commensurabilis, & ipsa Maior est.

SIT linea maior AB, diuisa in sua nomina ad C, eiq; commensurabilis sit DE, siue longitudine & potentia, siue potentia tantùm. Dico & DE, Maiorem esse. Fiant enim eadem, quæ superius; ita vt partes AC, CB, ad partes DF, FE, eandem habeant rationem, quam tota AB, ad totam DE. Quoniam igitur AB, DE, cõmensurabiles sunt vel longitudine & potentia, vel potentia tantùm; [e] erunt quoque tam AC, DF, quàm CB, FE, eodem modo commensurabiles. Rursus quia est vt AC, ad DF, ita CB, ad FE, & permutando vt AC, ad CB, ita DF, ad FE; [f] erit vt quadratum ex




AC, ad quadratum ex CB, ita quadratũ ex DF, ad quadratum ex FE; & componẽdo vt compositum ex quadratis rectarum AC, CB, ad quadratum ex CB, ita compositum ex quadratis rectarum DF, FE, ad quadratum ex FE; Et conuertendo, vt quadratum ex CB, ad compositum ex quadratis rectarum AC, CB, ita quadratum ex FE, ad compositum ex quadratis rectarum DF, FE; Et permutãdo vt quadratum ex CB, ad quadratum ex FE, ita compositum ex quadratis rectarum AC, CB, ad compositum ex quadratis rectarum DF, FE. Commensurabile est autem quadratum ex CB, quadrato ex FE, quòd rectæ CB, FE, ostensæ sint commensurabiles vel longitudine & potentia vel potentia tantùm. [g] Igitur & compositum ex quadratis rectarum AC, CB, commensurabile est composito ex quadratis rectarum DF, FE. [h] Est autem compositum illud Rationale, cùm rectæ AC, CB, componant Maiorem AB. [i] Igitur & hoc Rationale est.

[e] 10. decimi
[f] 22. sexti.
[g] 10. decimi
[h] 40. decimi
[i] 9. defin.

RVRSVS quia est vt AC, ad CB, ita DF, ad FE; Vt autem AC, ad CB, ita est quadratum ex AC, ad rectangulum sub AC, CB, & vt DF, ad FE, ita quadratum ex DF, ad rectangulum sub DF, FE, ex lemmate 3. propos. 19. huius libri; Erit quoque vt quadratum ex AC, ad rectangulum sub AC, CB, ita quadratum ex DF, ad rectangulum sub DF, FE: Et permutando vt quadratum ex AC, ad quadratum ex DF, ita rectangulum sub AC, CB, ad rectangulum sub DF, FE. Est autem quadratum ex AC, quadrato ex DF, commẽsurabile, quòd rectæ AC, DF, ostensæ sint commensurabiles vel longitudine & potentia, vel potentia tantùm. [k] Igitur & rectangulum sub AC, CB, rectangulo sub DF, FE, commensurabile est. [l] Est autem rectangulum sub AC, CB, Medium. Igitur & rectangulum sub DF, FE, illi commensurabile, Medium est, ex coroll. propos. 24. huius libri. Quoniam verò est vt AC, ad CB, ita DF, ad FE; [m] suntque AC, CB, potentia incommensurabiles, cùm componant Maiorem AB; [n] Erunt quoque DF, FE, potentia incommensurabiles. Itaq; cùm DF, FE, sint potentia incommensurabiles, faciantque compositum quidem ex ipsarum quadratis Rationale; quod autem sub ipsis continetur, Medium, vt ostensum est; [o] erit tota DE, Maior. Maiori ergo commensurabilis, & ipsa Maior est. Quod demonstrandum erat.

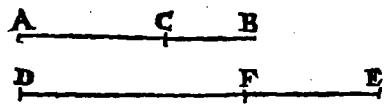
[k] 10. decimi
[l] 40. decimi
[m] 40. deci.
[n] 10. decimi
[o] 40. deci.

## THEOR. 52. PROPOS. 70.

69.
63.

### RATIONALE ac Medium potenti commensurabilis, & ipsa Rationale ac Medium potens est.

SIT recta AB, potens Rationale ac Medium, diuisa in sua nomina ad C, eiq; commensurabilis DE, siue longitudine & potentia, siue potentia tantùm. Dico & DE, esse potentem Rationale ac Medium. Constructis enim iisdem, quæ suprà, ostendemus, vt in præcedenti propos. compo-



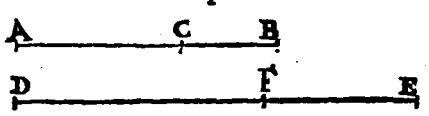

situm ex quadratis rectarum A C, C B, commensurabile esse compositio ex quadratis rectarum D F, F E. [a] Est autem illud compositum Medium, cùm rectæ A C, C B, componant ipsam A B, potentem Rationale ac Medium. Igitur per coroll. propos. 24. huius libri, & hoc compositum illi commensurabile, Medium est. Eodem modo, vt in eadem propos. antecedenti, erit rectangulum sub A C, C B, [b] quod Rationale est, commensurabile rectangulo sub D F, F E; atque adeò & rectangulum sub D F, F E, Rationale est, ex 9. defin. Deniq; vt in eadem superiori propos. erunt D F, F E, potentia incommensurabiles. Quare cùm D F, F E, sint potentia incommensurabiles, faciantque compositum quidem ex ipsarum quadratis Medium; quod autem sub ipsis continetur, Rationale, vt demõstratum est; [c] erit tota D E, Rationale ac Medium potens. Igitur Rationale ac Medium potenti commensurabilis, &c. Quod erat demonstrandum.

a 41. decimi.
b 41. decimi
c 41. decimi

70. 64.

## THEOR. 53. PROPOS. 71.

**BINA Media potenti commensurabilis, & ipsa bina Media potens est.**



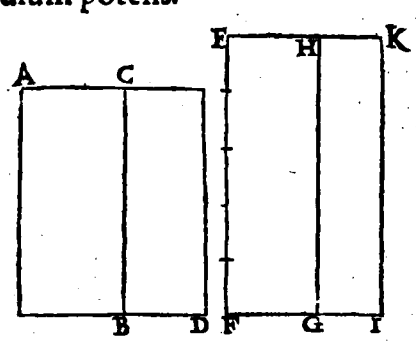

SIT bina Media potens A B, diuisa in sua nomina ad C, eiq; commensurabilis D E, siue longitudine & potentia, siue potentia tantùm. Dico & D E, esse bina Media potentem. Constructis enim iisdem, quæ suprà, ostendemus, vt in propos. 69. compositum ex quadratis rectarum A C, C B, composito ex quadratis rectarum D F, F E, commensurabile esse: Nec non & rectangulum sub A C, C B, esse commensurabile rectangulo sub D F, F E. [d] Cùm ergo tam compositum ex quadratis rectarum A C, C B, quàm rectangulum sub A C, C B, Medium sit; erit etiam ex coroll. propos. 24. huius libri, tam compositũ ex quadratis rectarum D F, F E, quàm rectangulum sub D F, F E, Medium. Sed & D F, F E, potentia incommensurabiles sunt, vt prius. Postremò, [e] quia compositum ex quadratis rectarum A C, C B, & rectangulum sub A C, C B, incommensurabilia sunt, ex hypothesi, propterea quòd A B, bina Media potest: Est autem composito ex quadratis rectarum A C, C B, commensurabile ostensum compositum ex quadratis rectarum D F, F E; & rectangulo sub A C, C B, probauimus commensurabile rectangulum sub D F, F E; Erunt quoque ex scholio propos. 14. huius lib. compositũ ex quadratis rectarum D F, F E, & rectangulum sub D F, F E, incommensurabilia. Quare cùm rectæ D F, F E, potentia sint incommensurabiles, faciantq; compositum ex ipsarum quadratis Medium; & quod sub ipsis continetur, Medium; incommensurabileq; composito ex quadratis ipsarum; [f] erit D E, bina Media potens. Itaq; bina Media potenti commensurabilis, & ipsa bina Media potens est. Quod erat ostendendum.

d 42. decimi
e 42. decimi
f 42. decimi

71. 65.

## THEOR. 54. PROPOS. 72.

**SI Rationale & Medium componantur, quatuor Irrationales fiunt; vel ea, quæ ex binis nominibus, vel quæ ex binis Mediis prima, vel Maior, vel Rationale ac Medium potens.**

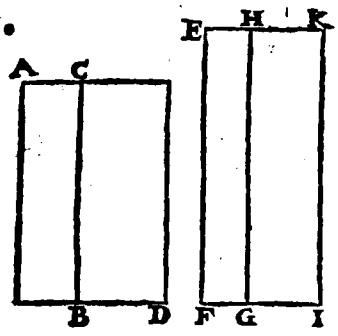



SIT Rationale spatium A B, cum quo componatur Medium C D. Dico rectam, quæ totum spatium A D, potest, esse vel ex binis nominibus, vel ex binis Mediis primam, vel Maiorem, vel Rationale ac Medium potentem. Erit enim A B, vel maius quàm C D, vel minus: Æquale siquidem nõ erit; aliàs cùm A B, sit Rationale, esset & illi æquale C D, Rationale. quod non ponitur. Sit primò maius, & exposita Rationali E F, [g] applicetur ad eam rectangulum E G, æquale ipsi A B; & ad H G, aliud H I, æquale ipsi C D, vt totum E I, toti A D, sit æquale. Et quoniam A B, Rationale est, & C D, Medium; erit quoque E G, Rationale, & H I, Medium: quæ cùm applicentur ad Rationalem E F; [h] erit E H, Rationalis, & ipsi E F, longitudine commensurabilis; [i] At verò H K, Rationalis, & eidem E F, longitudine incommensurabilis. Rursus quia E G, H I, incommensurabilia sunt, vt constat ex definitionibus: quòd E G, Rationale sit, at H I, Irrationale, nempe Medium; [k] erunt E H, H K, eandem cum illis habentes rationem, incommensurabiles longitudine. Rationales ergo sunt E H, H K, potentia solùm commensurabiles; [l] Ac propterea E K, ex binis nominibus est. Et quoniam maius ponitur A B, quàm C D, hoc est, E G, quàm H I; erit quoque E H, maior quàm H K, [m] cùm E H, H K, eandem rationẽ habeant, quam E G, H I. Iam verò maius nomen E H, plus poterit quàm minus H K, quadrato rectæ sibi longitudine commensurabilis, vel incommensurabilis. Si plus possit E H, quàm H K, quadrato rectæ sibi commensurabilis longitudine; erit E K, ex defin. ex binis nominibus prima, cùm E H, maius nomen ostensum sit longitudine commensurabile Rationali E F. Quare recta potens spatium E I, contentum sub Rationali E F, & ex binis nominibus prima E K, atque adeò & spatium A D, compositum ex Rationali A B, & Medio C D, [n] Irrationalis est, quæ ex binis nominibus appellatur.

g 45. primi.
h 21. decimi
i 23. decimi.
k 10. decimi
l 37. decimi.
m 1. sexti.
n 55. decimi

SI verò

Si verò EH, plus posit quàm HK, quadrato rectæ sibi longitudine incommensurabilis; erit EA, ex binis nominibus quarta, ex defin. cùm EH, maius nomen ostensum sit longitudine commensurabile Rationali EF. Quare recta potens spatium EI, contentum sub Rationali EF, & ex binis nominibus quarta EK, atque adeò & spatium AD, [a] Irrationalis est, quæ vocatur Maior. [a] 58. decimi

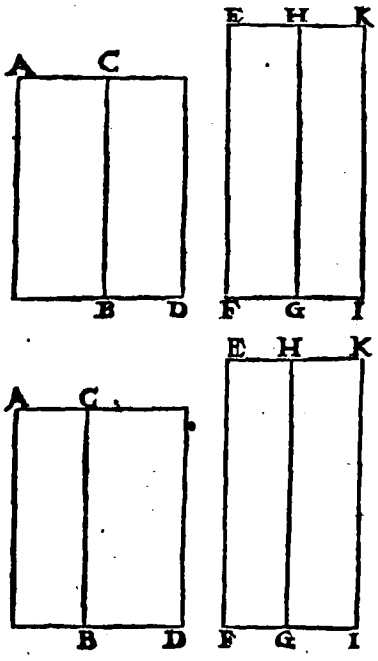



Sit deinde AB, minus quàm CD; & eadem construantur, quæ prius. Erit ergo, vt prius, EK, ex binis nominibus, & EH, ipsi EF, longitudine commensurabilis. Et quia AB, minus est, quàm CD, hoc est, EG, quàm HI; erit quoque recta EH, minor quàm HK. Poterit igitur rursus HK, maius nomen ipsius EK, quæ est ex binis nominibus, plus quàm EH, minus nomen, quadrato rectæ longitudine sibi commensurabilis, vel incommensurabilis. Si plus posit HK, quàm EH, quadrato rectæ longitudine sibi commensurabilis; erit EK, ex binis nominibus secunda, cùm EH, minus nomen commensurabile sit longitudine Rationali EF, vt ostensum est. Quare recta potens spatium EI, contentum sub Rationali EF, & ex binis nominibus secunda EK, atq; adeò & spatium AD, ex Rationali AB, & Medio CD, compositum, [b] Irrationalis est, quæ dicitur ex binis Mediis prima. [b] 58. decimi

Si verò HK, plus posit quàm EH, quadrato rectæ lineæ sibi longitudine incommensurabilis, erit EK, ex binis nominibus quinta, cùm EH, minus nomen ostensum sit longitudine commensurabile Rationali EF. Quare recta potens spatium EI, contentum sub Rationali EF, & ex binis nominibus quinta EK, atque adeò & spatium AD, [c] Irrationalis est, quæ Rationale & Medium potens appellatur. Si igitur Rationale, & Medium componantur, quatuor Irrationales fiunt, &c. Quod demonstrandum erat. [c] 59. decimi

## THEOR. 55. PROPOS. 73. 72. 66.

Si duo Media inter se incommensurabilia componãtur, duæ reliquæ Irrationales fiunt, vel ex binis Mediis secunda, vel bina Media potens.




Componantvr duo Media incommensurabilia AB, CD. Dico rectam, quæ potest totum spatium AD, esse vel ex binis Mediis secundam, vel binã Media potentem. Erit enim rursus AB, vel maius, quàm CD, vel minus: Æquale siquidem non erit; aliàs essent AB, CD, commensurabilia. quod non ponitur. Sit primò maius, & omnia fiant, quæ in præcedenti propositione. Et quia spatia AB, CD, ponuntur Media, & incommensurabilia; erunt & spatia EG, HI, Media & incommensurabilia; cùm illis sint æqualia. [d] Igitur [d] 10. decimi.
rectæ EH, HK, eandem cum illis habentes rationem, longitudine incommensurabiles sunt; & vtraquè (cùm EG, HI, Media sint, applicenturq; ad Rationalem EF.) [e] Rationalis [e] 23. decimi.
est, ipsi EF, longitudine incommensurabilis. Rationales ergo sunt EH, HK, potentia solùm commensurabiles; [f] ac [f] 37. decimi.
propterea EK, ex binis nominibus est. Quoniam verò AB, maius ponitur quàm CD; erit vt in antecedenti propos. EH, maius nomen ipsius EK. Poterit ergo plus quàm HK, quadrato rectæ sibi longitudine commẽsurabilis, vel incommensurabilis. Si plus posit EH, quàm HK, quadrato rectæ sibi commensurabilis longitudine, cùm vtrumque nomen EH, HK, ostensum sit longitudine incommensurabile Rationali EF; erit EK, ex defin. ex binis nominibus tertia. Quare recta potens spatium EI, contentum sub Rationali EF, & ex binis nominibus tertia EK, atque adeò & spatium AD, [g] Irrationalis est, quæ ex binis Mediis secunda dicitur. [g] 57. decimi

Si verò EH, plus posit quàm HK, quadrato rectæ longitudine sibi incommensurabilis, cùm vtrumque nomen EH, HK, longitudine sit incommensurabile Rationali EF; erit EK, ex binis nominibus sexta, vt constat ex defin. Recta igitur potens spatium EI, siue spatium AD, [h] Irratio- [h] 60. decimi
nalis est, quæ bina Media potens nominatur.

Qvod si AB, minus sit, quàm CD; non aliter propositum concludemus, vt ex figura constat. Quapropter si duo Media inter se incommensurabilia componantur, duæ reliquæ Irrationales fiunt, &c. Quod ostendendum erat.

### COROLLARIVM.

*Ex his omnibus facilè colligitur, eam, quæ ex binis nominibus, & reliquas ipsam subsequentes Irrationales lineas, neque Media, neque inter se easdem esse.*

a 23. decimi. *NAM quadratum Mediæ, ad Rationalem lineam applicatum, [a] latitudinem efficit Rationalem, ipſi Rationali longitudine incommenſurabilem.*

b 61. decimi. *AT quadratum eius, quæ ex binis nominibus, ad Rationalem applicatum, [b] latitudinem efficit ex binis nominibus primam.*

c 62. decimi. *ET quadratum eius, quæ eſt ex binis Mediis prima, ad Rationalem applicatum, [c] latitudinem facit ex binis nominibus ſecundam.*

d 63. decimi. *QVADRATVM deinde eius, quæ ex binis Mediis ſecunda, ad Rationalem applicatum, [d] latitudinem facit ex binis nominibus tertiam.*

e 64. decimi. *AT verò quadratum Maioris ad Rationalem applicatum, [e] latitudinem facit ex binis nominibus quartam.*

f 65. decimi. *QVADRATVM autem eius, quæ Rationale ac Medium poteſt, ad Rationalem applicatum, [f] latitudinem facit ex binis nominibus quintam.*

g 66. decimi. *POSTREMO, quadratum eius, quæ bina Media poteſt, ad Rationalem applicatum, [g] latitudinem facit ex binis nominibus ſextam.*

*ITAQVE cùm hæ latitudines differant & à latitudine Mediæ, & inter ſe; à latitudine quidem Mediæ, quòd hæc Rationalis ſit, illæ verò Irrationales; Inter ſe autem, quòd ordine non ſint eædem ex binis nominibus; perſpicuum eſt, omnes Irrationales lineas, de quibus hactenus eſt dictum, inter ſe differentes eſſe.*

## SCHOLIVM.

HACTENVS egit Euclides de ſeptem ſenariis.

IN primo, qui continetur propoſ. 37. 38. 39. 40. 41. & 42. tradidit ortum ſex linearum Irrationalium, nimirum eius, quæ ex binis nominibus; & eius, quæ ex binis Mediis prima; & eius, quæ ex binis Mediis ſecunda; & Maioris; & eius, quæ Rationale ac Medium poteſt; & denique eius, quæ poteſt bina Media.

IN ſecundo, quem continent propoſ. 43. 44. 45. 46. 47. & 48. egit de earum diuiſionibus, docens ſingulas in ſingulis duntaxat punctis diuidi poſſe in ſua nomina.

IN tertio deinde, contento propoſ. 49. 50. 51. 52. 53. & 54. docuit inuentionem ſex linearum, quæ ex binis nominibus dicuntur, videlicet primæ, ſecundæ, tertiæ, quartæ, quintæ, & ſextæ.

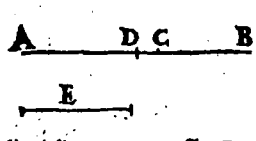
IN quarto, quem abſoluunt propoſ. 55. 56. 57. 58. 59. & 60. oſtendit, quo modo hæ ſex lineæ Irrationales, quæ in primo ſenario explicantur, inter ſe differant, docens, quænam linea Irrationalis ſit illa, quæ poteſt ſpatium contentum ſub Rationali, & ex binis nominibus prima, vel ex binis nominibus ſecunda, vel tertia, vel quarta, vel quinta, vel ſexta.

IN quinto autem, quem reperies in propoſ. 61. 62. 63. 64. 65. & 66. docuit, quáſnam latitudines Irrationales faciant quadrata linearum Irrationalium in primo ſenario explicatarum, ad Rationalem lineam applicata.

IN ſexto verò, qui quinque propoſ. nempe 67. 68. 69. 70. & 71. abſoluitur, demonſtrauit lineam quamcunque commenſurabilem alicui dictarum ſex Irrationalium in primo ſenario, eſſe Irrationalem eandem illi, cui commenſurabilis eſt.

IN ſeptimo denique, contento duabus propoſitionibus, nimirum 72. & 73. explicauit rurſus differentiam aliam ſex prædictarum Irrationalium.

REPERITVR autem in his ſex lineis Irrationalibus, de quibus in primo ſenario, Analogia ſeu proportionalitas Arithmetica, quæ quidem conſiſtit in exceſſu eodem. Et recta media proportionalis, ſecundùm Analogiam Arithmeticam, inter duo nomina cuiuſuis lineæ Irrationalis, eſt quoque Irrationalis eadem illi, inter cuius nomina media exiſtit.




SIT enim quæcunq; Irrationalis, nempe ex binis nominibus A B, cuius maius nomen A C; & diuidatur A B, bifariam in D; & eius dimidia A D, vel D B, æqualis ſumatur E. Dico E, mediam eſſe, ſecundùm Analogiam Arithmeticam, inter A C, C B: & E, eſſe quoque ex binis nominibus. Quoniam enim A C, ſuperat dimidiam A D, recta D C; & dimidia D B, ſuperat ipſam C B, eadem recta D C; perſpicuum eſt, dimidiam ipſius A B, nempe E, eſſe mediam proportionalem inter A C, C B, in Analogia Arithmetica.

RVRSVS quia E, commenſurabilis eſt longitudine toti A B, cùm hæc illius ſit dupla; erit & E, Irrationalis eadem ipſi A B, vt in ſexto ſenario eſt demonſtratum.

IDEM oſtendemus non aliter in cæteris lineis Irrationalibus contingere.

SEQVENTVR iam ſeptem alij ſenarij, in quibus eadem Euclides demonſtrat de ſex aliis lineis Irrationalibus, quæ per detractionem generantur, quæ in præcedentibus ſeptem ſenariis de Irrationalibus, quæ per compoſitionem fiunt, eum oſtendiſſe docuimus.

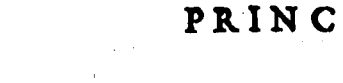
PRINCI-

## PRINCIPIVM SENARIORVM per detractionem.

## THEOR. 56. PROPOS. 74. 73. 68.

SI à Rationali Rationalis auferatur, potentia tantùm commensurabilis existens toti; Reliqua Irrationalis est. Vocetur autem Apotome.

DETRAHATVR à Rationali AB, Rationalis AC, potentia solùm commensurabilis ipsi AB. Dico reliquam BC, Irrationalem esse. Quoniam enim per lemma 3. propos. 19. huius lib. est vt AB, ad AC, ita quadratum ex AB, ad rectangulum sub AB, AC: Et sunt AB, AC, longitudine incommensurabiles; [a] erunt incommensurabilia quadratum ex AB, & rectangulum sub AB, AC. Sed quadrato ex AB, commensurabile est compositum ex quadratis rectarum AB, AC; (cùm enim AB, AC, potentia ponantur commensurabiles, erunt quadrata ex AB, AC, commensurabilia. [b] Igitur & compositum ex ipsis commensurabile erit quadrato ex AB,) rectangulo verò sub AB, AC, commensurabile est rectangulum sub AB, AC, bis. Igitur compositum ex quadratis rectarum AB, AC, & rectangulum sub AB, AC, bis contentum, incommensurabilia sunt, vt in scholio propos. 14. huius libri demonstrauimus. [c] Est autem compositum ex quadratis rectarum AB, AC, æquale rectangulo bis sub AB, AC, vnà cum quadrato ex BC. Igitur & compositum ex quadratis rectarum AB, AC, per coroll. propos. 17. huius lib. reliquo quadrato ex BC, incommensurabile est. Cùm ergo compositum ex quadratis rectarum AB, AC, sit Rationale; (propterea quòd commensurabile est quadrato Rationali ex AB, linea Rationali descripto;) erit quadratum ex BC, Irrationale; atque adeò & recta ipsa BC, Irrationalis. Vocetur autem Apotome. Iuniores dicunt Residuum. Si igitur à Rationali Rationalis auferatur potentia tantùm commensurabilis existens toti; Reliqua Irrationalis est, &c. Quod ostendendum erat.




[a] 10. decimi

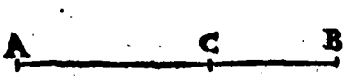
[b] 16. decimi

[c] 7. secundi

### SCHOLIVM.

*POTVISSET Euclides proponere quoque hanc propositionem hoc modo.*

SI à maiori nomine eius, quæ ex binis nominibus, minus nomen auferatur; Reliqua Irrationalis est. Vocetur autem Apotome.



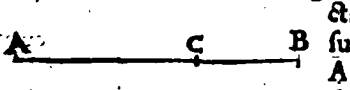

*NAM cùm AB, AC, sint Rationales potentia tantùm commensurabiles;* [d] *erit composita ex ipsis Irrationalis, quæ ex binis nominibus dicitur, cuius maius nomẽ AB, & minus AC. Auferatur igitur AC, minus nomen ex maiori nomine AB, vt relinquatur Apotome BC.*

[d] 37. decimi

## THEOR. 57. PROPOS. 75. 74. 69.

SI à Media Media auferatur potentia tantùm commensurabilis existens toti, quæ cum tota Rationale contineat; Reliqua Irrationalis est. Vocetur autem Mediæ Apotome prima.

DETRAHATVR à Media AB, Media AC, potentia solùm commensurabilis ipsi AB. sitque rectangulum sub AB, AC, Rationale. Dico reliquam BC, esse Irrationalem. Quoniam enim AB, AC, potentia sunt commensurabiles: erunt quadrata ex AB, AC, commensurabilia; [a] atq; adeò & compositum ex ipsis commensurabile erit quadrato ex AC. Est autem quadratum ex AC, Media, Irrationale, & Medium. Igitur ex coroll. propos. 24. huius lib. & compositum ex quadratis rectarum AB, AC, Irrationale erit, ac Medium. Et quia rectangulum sub AB, AC, ponitur Rationale; erit & rectangulum bis sub AB, AC, Rationale. Igitur incommensurabile est compositum ex quadratis rectarum AB, AC, rectangulo bis sub AB, AC. [b] Cùm ergo compositum ex quadratis rectarum AB, AC, æquale sit rectangulo bis sub AB, AC, vnà cum quadrato ex BC; erit quoque rectangulum bis sub AB, AC, vnà cum quadrato ex BC, incommensurabile rectangulo bis sub AB, AC. [c] Quare & rectangulum bis sub AB, AC, & quadratum ex BC, incommensurabilia sunt. Existente ergo rectangulo bis sub AB, AC, Rationali; erit quadratum ex BC, Irrationale; ideoque & recta BC, Irrationalis erit. Vocetur autem Mediæ Apotome prima, quia videlicet relinquitur post detractionem minoris nominis lineæ ex binis Mediis primæ, à maiori nomine, vt in scholio sequenti patebit. Si igitur à Media Media auferatur potentia tantùm commensurabilis existens toti, quæ cum tota Rationale contineat; Reliqua Irrationalis est. Vocetur autem Mediæ Apotome prima. Quod ostendendum erat.




[a] 16. decimi

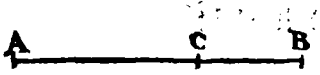
[b] 7. secundi

[c] 17. decimi

### SCHOLIVM.

*POTVISSET hæc propositio proponi hoc modo.*

SI à maiori nomine eius, quæ ex binis Mediis prima, minus nomen auferatur; Reliqua Irrationalis est. Vocetur autem Mediæ Apotome prima.

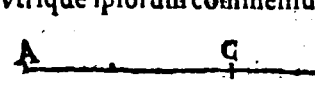



a 38. deci. *Cvm enim AB, AC, sint Media potentia solùm commensurabiles, contineantq; Rationale;* [a] *erit composita ex ipsis Irrationalis, quæ ex binis Mediis prima dicitur, cuius maius nomen AB, & minus AC. Auferatur igitur AC, minus nomen ex maiori AB, vt relinquatur BC, Mediæ Apotome prima.*

## 75. THEOR. 58. PROPOS. 76.
## 70.

Si à Media Media auferatur potentia tantùm commensurabilis existens totî, quæ cum tota Medium contineat; Reliqua Irrationalis est. Vocetur autem Mediæ Apotome secunda.

Detrahatvr à Media AB, Media AC, potentia solùm commensurabilis ipsi AB, sitque rectangulum sub AB, AC, Medium. Dico reliquam BC, esse Irrationalem. Quoniam enim quadrata ex AB, AC, potentia commensurabilibus commensurabilia sunt; [a] erit & compositum ex ipsis vtrique ipsorum commensurabile: Est autem vtrumque ipsorum Medium, quòd & rectæ AB, AC, Mediæ ponantur. Igitur & compositum ex ipsis, vtrique commensurabile, Medium est, ex coroll. propos. 24. huius libri. Rursus quia rectangulum sub AB, AC, Medium ponitur: erit & eius duplum, rectangulum, videlicet bis sub AB, AC, ex coroll. propos. 24. huius lib. Medium.




b 7. *secundi* [b] Cùm ergo compositum ex quadratis rectarum AB, AC, æquale sit rectangulo bis sub AB, AC, vnà cum quadrato ex BC; superabit compositũ ex quadratis rectarum AB, AC, quod Medium

c 27. *decimi* est, rectangulum bis sub AB, AC, quod etiam Medium est, quadrato ex BC. [c] Medium autem non superat Medium Rationali. Non ergo quadratum ex BC, Rationale est. Ergo Irrationalis, & ipsa recta BC, Irrationalis. Vocetur autem Mediæ Apotome secunda, quoniam relinquitur post detractionem minoris nominis eius, quæ ex binis Mediis secunda, à maiori nomine, vt ex scholio sequenti apparebit. Si igitur à Media Media auferatur, &c. Quod erat ostendendum.

### SCHOLIVM.

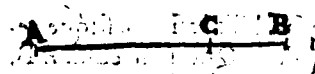
*Hoc etiam theorema ita potuisset proponi.*

Si à maiori nomine eius, quæ ex binis Mediis secunda, minus nomen auferatur; Reliqua Irrationalis est. Vocetur autem Mediæ Apotome secunda.

a 39. deci. *Quoniam enim AB, AC, Media sunt potentia tantùm commensurabiles, continentq; Medium;* [a] *erit composita ex ipsis Irrationalis, quæ ex binis Mediis secunda appellatur, cuius maius nomen AB, & minus AC. Auferatur igitur AC, minus nomen ex maiori AB, vt relinquatur BC, Mediæ Apotome secunda.*

## 76. THEOR. 59. PROPOS. 77.
## 71.

Si à recta linea recta auferatur potentia incommensurabilis existens toti, quæ cum tota faciat compositum quidem ex ipsarum quadratis Rationale, quod autem sub ipsis continetur, Medium: Reliqua Irrationalis est. Vocetur autem Minor.




Detrahatvr à recta AB, recta AC, potentia ipsi AB, incommensurabilis; Sit autem compositum ex quadratis rectarum AB, AC, Rationale; rectangulum verò sub AB, AC, Medium. Dico reliquam BC, Irrationalem esse. Quoniam enim compositum ex quadratis rectarum AB, AC, Rationale est; rectangulum verò sub AB, AC, atque adeò, ex coroll. propos. 24. huius lib. & ei commensurabile, hoc est, rectangulum bis sub AB, AC, Medium, hoc est, Irrationale;

a 10. *defin.* [a] erit compositum ex quadratis rectarum AB, AC, incommensurabile rectangulo bis sub AB, AC.

b 7. *secundi* [b] Est autem compositum ex quadratis rectarum AB, AC, æquale rectangulo bis sub AB, AC, vnà cum quadrato ex BC. Igitur & compositum ex quadratis rectarum AB, AC, per coroll. propos. 17. huius lib. reliquo quadrato ex BC, incommensurabile erit. Ponitur autem compositum ex quadratis rectarum AB, AC, Rationale.

c 10. *defin.* [c] Igitur quadratum ex BC, illi incommensurabile, Irrationale est, & linea BC, Irrationalis. Vocetur autem Minor, quoniam relinquitur post detractionem minoris nominis lineæ Maioris, à maiori nomine, vt in scholio sequenti dicemus. Si igitur à recta linea recta auferatur, &c. Quod erat demonstrandum.

### SCHOLIVM.

*Sic etiam theorema hoc poterat proponi.*

Si à maiori nomine lineæ Maioris minus nomen auferatur; Reliqua Irrationalis est. Vocetur autem Minor.

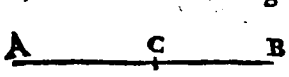
a 40. deci. *Nam cùm AB, AC, sint potentia incommensurabiles, quæ faciunt compositum quidem ex ipsarum quadratis Rationale, quod autem sub ipsis continetur, Medium;* [a] *erit compositum ex ipsis Irrationalis, quæ vocatur Maior, eiusq; maius nomen AB, minus autem AC. Auferatur igitur AC, minus nomen ex maiori AB, vt relinquatur Minor BC.*

THEOR.

## THEOR. 60. PROPOS. 78. 77. 72.

SI à recta recta auferatur potentia incommensurabilis existens toti, quæ cùm tota faciat compositum quidem ex ipsarum quadratis Medium; quod autem sub ipsis continetur, Rationale: Reliqua Irrationalis est. Vocetur autem cum Rationali Medium totum efficiens.

DETRAHATVR ex recta A B, recta A C, potentia ipsi A B, incommensurabilis; sit autem compositum ex ipsarum quadratis Medium, & rectangulum sub ipsis, Rationale. Dico reliquam B C, esse Irrationalem. Quoniam enim compositum ex quadratis rectarum A B, A C, Medium est, hoc est, Irrationale; at rectangulum sub A B, A C, atq; adeò & eius duplum, nempe quod bis sub A B, A C, Rationale; [a] erit compositum ex quadratis rectarum A B, A C, incommensurabile rectangulo bis sub A B, A C, [b] Est autem compositum ex quadratis rectarum A B, A C, æquale rectangulo bis sub A B, A C, vnà cum quadrato ex B C. Igitur & rectangulum bis sub A B, A C, vnà cum quadrato ex B C, incommensurabile est rectangulo bis sub A B, A C. [c] Sunt ergo & rectangulum bis sub A B, A C, & quadratum ex B C, incommensurabilia. Cùm ergo rectangulum bis sub A B, A C, Rationale sit; [d] erit quadratum ex B C, Irrationale, & recta B C, Irrationalis. Vocetur autem cum Rationali Medium totum efficiens: quia eius quadratum additum rectangulo bis sub A B, A C, quod Rationale est, facit totum compositũ ex quadratis rectarum A B, A C, quod Medium existit. Si igitur à recta recta auferatur potentia incommensurabilis existens toti, quæ cũ tota faciat compositum quidem ex ipsarum quadratis Medium; quod autem sub ipsis continetur, Rationale: Reliqua Irrationalis est, &c. Quod ostendendum erat.




[a] 10. defin. [b] 7. secundi. [c] 17. decimi. [d] 10. defin.

### SCHOLIVM.

*Hoc etiam modo Euclides theorema hoc potuisset proponere.*

SI à maiori nomine eius, quæ Rationale ac Medium potest, minus nomen auferatur; Reliqua Irrationalis est. Vocetur autem cum Rationali Medium totum efficiens.

*CVM enim A B, A C, sint potentia incommensurabiles, quæ faciunt compositũ quidem ex ipsarum quadratis, Medium; quod autem sub ipsis continetur, Rationale;* [a] *erit composita ex ipsis Irrationalis, quæ nominatur Rationale ac Medium potens, cuius maius nomen est A B, minus autem A C. Aufertur igitur minus nomen A C, à maiori A B, vt B C, cum Rationali Medium totum efficiens relinquatur.*

[a] 14. decimi.

## THEOR. 61. PROPOS. 79. 78. 73.

SI à recta recta auferatur potentia incommensurabilis existens toti, quæ cum tota faciat & compositum ex ipsarum quadratis, Medium; & quod sub ipsis continetur, Medium, incommensurabileque composito ex quadratis ipsarum: Reliqua Irrationalis est. Vocetur autem cum Medio Medium totum efficiens.

DETRAHATVR ex recta A B, recta A C, potentia ipsi A B, incommensurabilis; Sitq; tam compositum ex ipsarum quadratis, q̃ rectangulum sub ipsis Medium, incommẽsurabileq; composito ex ipsarum quadratis. Dico reliquam B C, esse Irrationalem. [a] Quoniam enim compositũ ex quadratis rectarum A B, A C, æquale est rectangulo bis sub A B, A C, vnà cum quadrato ex B C, superabit compositum ex quadratis rectarum A B, A C, quod Medium ponitur, rectangulum bis sub A B, A C, quod ex coroll. propos. 24. huius lib. Medium etiam est, (cùm Medio, quod sub A B, A C, continetur, sit commensurabile) quadrato ex B C. [b] Medium autẽ non superat Medium Rationali. Non ergo quadratum ex B C, Rationale est. Ergo Irrationale, & recta ipsa B C, Irrationalis. Vocetur autẽ cum Medio Medium totum efficiens, quia eius quadratũ cum rectangulo bis sub A B, A C, quod Medium est, facit totum compositũ ex quadratis rectarum A B, A C, quod Medium etiam est. Si igitur à recta recta auferatur, &c. Quod ostendendum erat.

[a] 7. secundi. [b] 27. decimi.

### SCHOLIVM.

*IN hunc modum proponi quoque potuisset hoc theorema.*

SI à maiori nomine eius, quæ bina Media potest, minus nomen auferatur; Reliqua Irrationalis est. Vocetur autem cum Medio Medium totum efficiens.

*QVONIAM cùm A B, A C, sint potentia incommensurabiles, faciantq; & compositũ ex ipsarum quadratis Medium, & rectangulum sub ipsis Medium, incommẽsurabileq; compositũ ex quadratis ipsarũ;* [a] *erit composita ex illis Irrationalis, quæ bina Media potens dicitur, cuius maius nomen A B, & minus A C. Auferatur igitur minus nomen A C, ex maiori A B, vt relinquatur B C, cum Media Medium totum efficiens.*

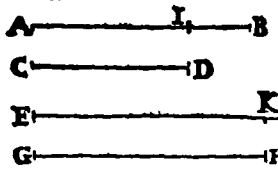
[a] 42. decimi.

### LEMMA.

SI idem excessus sit inter primam magnitudinem, & secundam, qui inter tertiam ma-

gnitudinem, & quartam; erit & vicissim idem excessus inter primam magnitudinem, & tertiam, qui inter secundam magnitudinem & quartam.

*Sint quatuor magnitudines A B, C D, E F, G H, sitq; I B, excessus inter A B, C D, æqualis excessui K F, inter E F, G H. Dico eundem esse excessum inter A B, E F, qui est inter C D, G H.*




*Quoniam enim I B, excessus est inter A B, & C D; erit A I, ipsi C D, æqualis. Eodem modo æqualis erit E K, ipsi G H. Idem igitur excessus erit inter A I, & E K, qui inter C D, & G H; cũ hæ magnitudines illis sint æquales, singulæ singulis. Est autẽ totorum A B, E F, ex pronunciato 16. lib. 1. idem excessus, qui inter A I, E K; quòd I B, K F, æquales ponantur. Igitur idem quoque excessus erit inter A B, & E F, qui inter C D, & G H. quod est propositum.*

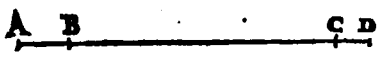
## COROLLARIVM.

*Ex his constat, quatuor magnitudines Arithmeticam Analogiam habentes, habere quoq; vicissim Arithmeticam Analogiam. quoniam huiusmodi Analogia consistit in eodem excessu, quem ostendimus eundem esse inter primam, & tertiam magnitudines, qui inter secundam & quartam magnitudines reperitur, si idem sit excessus inter primam magnitudinem, & secundam, qui inter tertiam magnitudinem, & quartam, hoc est, si quatuor magnitudines Analogiam Arithmeticam habeant.*

79. ## THEOR. 62. PROPOS. 80.

74. APOTOMAE vna tantùm congruit recta linea Rationalis, potẽtia solùm commensurabilis existens toti.

SIT Apotome A B; congruẽs autem ei Rationalis B C, potentia solùm toti A C, commensurabilis. Dico ipsi A B, aliam Rationalem nõ congruere, quæ toti sit potentia tantũ commensurabilis. Si enim fieri potest, congruat alia Rationalis B D, ita vt B D, ipsi A D, sit potentia solùm commensurabilis. Et quia B C, Rationalis est; erit A C, illi solùm potentia commensurabilis, Rationalis. Rationales ergo sunt A C, B C, potentia tantũ commensurabiles. Eodem modo erunt & A D, B D, Rationales potentia solùm commensurabiles. Quoniam verò idem excessus est inter compositũ ex quadratis rectarum A C, B C, & rectangulum bis sub A C, B C, qui inter compositum ex quadratis rectarum A D, B D, & rectangulum bis sub A D, B D; (superat enim compositũ ex quadratis rectarum A C, B C, rectangulum bis sub A C, B C, quadrato ex A B; [a] q̃ compositum ex quadratis rectarum A C, B C, æquale sit rectangulo bis sub A C, B C, vnà cum quadrato ex A B. Et eodem modo compositũ ex quadratis rectarum A D, B D, superat rectangulum bis sub A D, B D, quadrato eodẽ ex A B, [b] cùm & compositũ ex quadratis rectarũ A D, B D, æquale sit rectangulo bis sub A D, B D, vnà cũ quadrato ex A B.) erit quoq; permutando, ex lemmate ántecedẽti, idem excessus inter compositũ ex quadratis rectarum A C, B C, & compositum ex quadratis rectarum A D, B D, qui inter rectangulum bis sub A C, B C, & rectangulum bis sub A D, D B. Est autẽ excessus inter illa composita, spatium Rationale, ex scholio propos. 27. huius lib. q̃ vtrumq; Rationale sit. (Nam cùm A C, B C, sint Rationales potentia solùm commensurabiles; erunt earum quadrata, Rationalia, & commensurabilia. [c] Igitur & compositum ex ipsis vtriq; illorum commensurabile est, atq; adeò & Rationale; ex 9. defin. Non aliter Rationale ostendemus compositũ ex quadratis rectarum A D, B D.) Igitur & excessus inter rectangulũ bis sub A C, B C, & rectangulum bis sub A D, B D, spatiũ Rationale est. [d] Et quia rectangulum sub A C, B C, Rationalibus potẽtia solùm commensurabilibus Medium est; erit ex coroll. propos. 24. huius lib. & eius duplum, nempe rectangulum bis sub A C, B C, Medium. Eademq; ratione Medium erit rectangulum bis sub A D, B D. [e] Medium autẽ non superat Medium Rationali. Igitur excessus inter rectangulum bis sub A C, B C, & rectangulum bis sub A D, B D, Rationale spatium nõ est. Sed & Rationale ostensum est. Quod est absurdũ. Ergo ipsi A B, alia Rationalis non congruit, præter B C, q̃ toti sit potẽtia tantũ commẽsurabilis. Apotomæ igitur vna tantũ cõgruit, &c. Quod erat ostendendũ.




a 7. secundi.

b 7. secundi.

c 61. decimi

d 22. decimi.

e 27. decimi.

80. ## THEOR. 63. PROPOS. 81.

75. MEDIAE Apotomæ primæ vna tantùm congruit recta linea Media, potentia solùm commensurabilis existens toti, & cum tota Rationale continens.

SIT Mediæ Apotomæ prima A B, & ipsi congruat B C, Media toti A C, potẽtia solùm commensurabilis, & rectangulum sub A C, B C, sit Rationale. Dico ipsi A B, aliam Mediam non congruere, quæ toti sit potentia tantùm commensurabilis, contineatq; cum tota, Rationale. Si enim fieri potest, congruat alia B D, Media toti A D, potentia tantùm commensurabilis, sitq; rectangulum sub A D, B D, Rationale. Et quia B C, Media est potẽtia solùm ipsi A C, commensurabilis; [f] erit & A C, Media,

f 24. decimi

Media, cùm illi sit commensurabilis. Mediæ ergò sunt A C, B C, potentia tantũ commensurabiles. Quoniam verò idem excessus est inter compositum ex quadratis rectarũ A C, C B, & compositũ ex quadratis rectarũ A D, B D, qui inter rectangulum bis sub A C, B C, & rectangulum bis sub A D, B D, vt in propos. præcedẽti ostensum est: Est autẽ excessus inter hæc rectangula, ex scholio propos. 27. huius lib. spatium Rationale; quòd vtrumq; sit Rationale, (cùm enim rectangulum sub A C, B C, ponatur Rationale; erit rectangulum bis sub A C, B C, illi commensurabile, Rationale. Atq; eadẽ ratione Rationale erit rectangulũ bis sub A D, B D.) Igitur & excessus inter compositũ ex quadratis rectarum A C, B C, & compositũ ex quadratis rectarum A D, B D, spatium Rationale est. Et quoniam rectę A C, B C, Mediæ sunt potentia solùm commensurabiles; erunt & ipsarũ quadrata Media, & commensurabilia. [a] Igitur & compositũ ex ipsis vtriq; ipsorum commensurabile est, atq; adeò & Medium, ex coroll. propos. 24. huius lib. Non aliter quoq; Medium erit compositum ex quadratis rectarum A D, B D. [b] Medium autem non superat Medium Rationali. Igitur excessus inter compositum ex quadratis rectarum A C, B C, & compositum ex quadratis rectarum A D, B D, spatium Rationale non est. Sed & Rationale ostensum est. Quod est absurdum. Ergo ipsi A B, alia Media non congruit, præter B C, quæ toti sit potentia solùm commensurabilis, contineatq́ue cum tota Rationale. Mediæ igitur Apotomæ primæ vna tantùm congruit, &c. Quod erat demonstrandum.

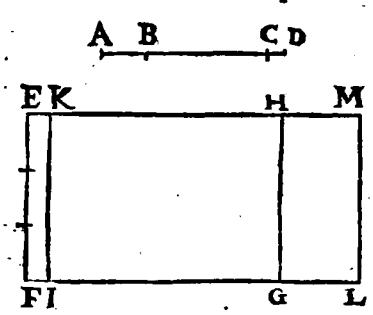
[a] 16. decimi

[b] 27. decimi

## THEOR. 64. PROPOS. 82. 81. 76.

MEDIAE Apotomæ secundę vna tantùm congruit recta linea, Media potentia solùm commensurabilis existens toti, & cum tota Medium continens.

SIT Mediæ Apotomæ secunda A B, cui congruat Media B C, toti A C, potentia tantũ commensurabilis, & rectangulum sub A C, B C, sit Medium. Dico ipsi A B, aliá mediam nõ congruere, quæ toti sit potentia tantũ commensurabilis, contineatq; cum tota Medium. Si enim fieri potest, congruat ipsi alia B D, media toti A D, potentia tantũ commẽsurabilis, sitq; rectangulũ sub A D, B D, Medium. Exponatur Rationalis E F, [c] ad quã applicetur rectangulum E G, æquale composito ex quadratis rectarũ A C, B C, & ad eandẽ E F, aliud E I, applicetur æquale ~~quadrato ex A B. Et deni~~que aliud E L, æquale composito ex quadratis rectarũ A D, B D. [d] Quoniam igitur compositũ ex quadratis rectarum A C, B C, æquale est rectangulo bis sub A C, B C, vnà cũ quadrato ex A B; erit K G, æquale ei, quod bis cõtinetur sub A C, B C. Eodemq; modo erit K L, æquale ei, quod bis continetur sub A D, B D. Et quoniam A C, B C, Mediæ sunt, & potẽtia commensurabiles; (cùm enim B C, Media ponatur, [e] erit & A C, ipsi potẽtia commensurabilis, Media) erunt & earum quadrata Media, & commensurabilia. [f] Ergo & compositũ ex ipsis, commensurabile est vtrique eorũ; atq; idcircò & Medium, ex coroll. propos. 24. huius libri. Igitur & E G, quod illi composito æquale est, Medium est; qđ cũ applicetur ad Rationalẽ E F, [g] erit E H, Rationalis ipsi E F, longitudine incommẽsurabilis. Rursus quia rectangulum sub A C, B C, Medium est; erit ex corol. propos. 24. huius lib. & eius duplum, nempe K G, Medium: quod cũ applicetur ad Rationalem K I, [h] erit K H, Rationalis ipsi K I, hoc est, ipsi E F, longitudine incõmensurabilis. Et quia A C, B C, longitudine incommensurabiles sunt, estq; vt A C, ad B C, ita quadratũ ex A C, ad rectangulum sub A C, B C, vt ostendimus lemmate 3. ad propos. 19. huius lib. [i] erit quadratũ ex A C, incommẽsurabile rectangulo sub A C, B C. Est autẽ quadrato ex A C, commensurabile compositũ ex quadratis rectarum A C, B C, hoc est, rectangulum E G. (cùm enim rectæ A C, B C, ponantur potẽtia commensurabiles; erũt & earũ quadrata commensurabilia. [k] Igitur & compositũ ex ipsis commensurabile est vtrique ipsorum, nempe quadrato ex A C.) & rectangulo sub A C, B C, commensurabile est eius duplũ; videlicet K G. Igitur & E G, ipsi K G, incommensurabile est, ex iis, quæ in scholio propos. 14. huius lib. docuimus. [l] Rectæ igitur E H, K H, eandem habentes rationẽ cum E G, K G, longitudine incommensurabiles sunt: Sed & Rationales sunt ostensæ. Rationales ergo sunt potentia tantũ commensurabiles. Quapropter cũ ex Rationali E H, auferatur Rationalis K H, potentia solùm commensurabilis ipsi E H, [m] erit E K, Apotome, & illi congruẽs K H. Similiter demonstrabimus E K, Apotomen esse, & illi congruentẽ K M. Non igitur Apotomæ vna tantũ congruit recta linea Rationalis potentia solùm commensurabilis existens toti. quod est absurdum. Vnam enim tantùm congruere, [n] demonstratum est. Igitur mediæ Apotomæ secundæ vna tantùm congruit, &c. Quod erat demonstrandum.




[c] 45. primi.

[d] 7. secundi.

[e] 24. decimi

[f] 16. decimi.

[g] 23. decimi

[h] 23. decimi

[i] 10. decimi.

[k] 16. decimi

[l] 10. decimi.

[m] 74. decimi.

[n] 80. decimi

## THEOR. 65. PROPOS. 83. 82. 77.

MINORI vna tantũ congruit recta linea potentia incommensurabilis existens toti, & cum tota faciens compositum quidem ex ipsarum quadratis Rationale; quod autem sub ipsis continetur, Medium.

Sit minor A B, & illi congruens B C, toti A C, potentia incommensurabilis, faciensque compositum ex quadratis rectarum A C, B C, Rationale, & rectangulum sub A C, B C, Medium. Dico ipsi A B, aliam nō congruere, quæ eadem præstet. Sit enim, si fieri potest, alia congruens B D, toti A D, potentia incommensurabilis, faciensque compositum quidem ex quadratis rectarum A D, B D, Rationale, at rectangulum sub A D, B D, Medium. Quoniam igitur, vt in propositione 80. demonstratum est, idem excessus est inter compositum ex quadratis rectarum A C, B C, & compositum ex quadratis rectarum A D, B D, qui inter rectangulum bis sub A C, B C, & & rectangulum bis sub A D, B D: Est autem excessus inter alia composita, spatium Rationale. ex scholio propos. 27. huius libri; quòd vtrumque Rationale ponatur. Igitur & excessus inter rectangulum bis sub A C, B C, & rectangulum bis sub A D, B D, spatium est Rationale, sed & non Rationale est. (Cùm enim rectangulum sub A C, B C, ponatur Medium, erit quoque ex coroll. propositionis 24. huius lib. eius duplum, nempe rectangulum bis sub A C, B C, Medium. Similiterq; Medium erit rectangulum bis sub A D, B D. [a] Quare vnum non superabit alterum Rationali.) Quod est absurdum. Ergo ipsi A B, alia recta præter B C, non congruit potentia toti incommensurabilis, &c. Minori ergo vna tantùm congruit, &c. Quod erat demonstrandum.

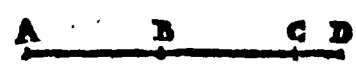
a 27. decimi

83. 78.

## PROBL. 66. PROPOS. 84.

Ei, quæ cum Rationali Medium totum facit, vna tantùm congruit recta linea, potentia incommensurabilis existens toti, & cum tota faciens compositum quidem ex ipsarum quadratis, Medium; quod autem sub ipsis continetur, Rationale.

Sit recta cum Rationali Medium totum faciens A B, cui congruat recta B C, toti A C, potentia incommensurabilis, faciensque compositū quidem ex quadratis rectarum A C, B C, Medium, rectangulum verò sub A C, B C, Rationale. Dico ipsi A B, aliam rectam non congruere, quæ hæc eadem faciat. Si enim fieri potest, congruat ipsi alia recta B D, toti A D, potentia incommensurabilis, faciensque compositum quidem ex quadratis rectarum A D, B D, Medium, rectangulum verò sub A D, B D, Rationale. Quoniam igitur, vt in propos. 80. ostensum est, idem excessus est inter compositum ex quadratis rectarum A C, B C, & compositum ex quadratis rectarum A D, B D, qui inter rectangulum bis sub A C, B C, & rectangulum bis sub A D, B D. Est autem excessus inter hæc rectangula, spatium Rationale, vt in propos. 81. demonstrauimus. Igitur & excessus inter illa composita, spatium Rationale est: sed & non Rationale est; cùm vtrumque sit Medium. [b] Medium enim Medium non superat Rationali. Quod est absurdum. Non ergo ipsi A B, alia recta, quàm B C, congruet potentia toti incommensurabilis, &c. Quare ei, quę cũ Rationali Medium totũ facit, vna tantũ congruit, &c. Quod erat demonstrandũ.



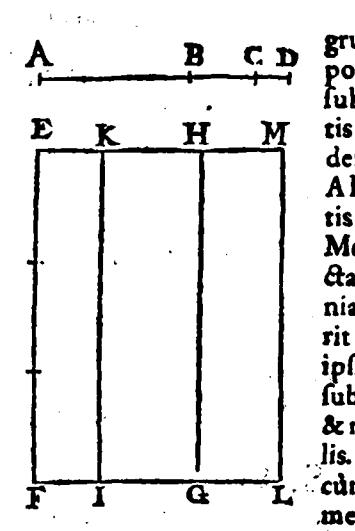

b 27. decimi

84. 79.

## PROBL. 67. PROPOS. 85.

Ei, quæ cum Medio Medium totum facit, vna tantùm congruit recta linea, potentia incommẽsurabilis existens toti, & cum tota faciens & compositum ex ipsarum quadratis Medium, & quod sub ipsis continetur Medium, incommensurabileque composito ex ipsarum quadratis.

Sit recta A B, cum Medio Medium totum faciens, ipsi verò congruens B C, toti A C, potentia incommensurabilis, faciensq; & compositum ex quadratis rectarum A C, B C, Medium, & rectangulum sub A C, B C, Medium, incommensurabileq; composito ex quadratis rectarum A C, B C. Dico ipsi A B, aliam non congruere, quæ eadem hæc faciat. Si enim fieri potest, congruat ipsi recta alia B D, toti A D, potentia incommensurabilis, ita vt & compositum ex quadratis rectarum A D, B D, Medium sit, & rectangulum sub A D, B D, Medium quoque, ac incommensurabile composito ex quadratis rectarum A D, B D. Constructis autem iisdem, quæ in propos. 82. quoniam compositum ex quadratis rectarum A C, B C, Medium est; erit etiam E G, illi æquale, Medium: [c] Recta igitur E H, Rationalis est, ipsi E F, longitudine incommensurabilis. Rursus quia rectangulum sub A C, B C, Medium est; erit & eius duplum K G, Medium. [d] Igitur & recta K H, Rationalis est, longitudine ipsi E F, incommensurabilis. Et quoniam K G, commensurabile est rectangulo sub A C, B C, cùm illud huius sit duplum; at rectangulum sub A C, B C, incommensurabile ponitur composito ex quadratis rectarum A C, B C; [e] erit quoque K G, eidem composito, hoc est, ipsi E G, incommensurabile; ac propterea rectæ E H, K H, eandem habentes cum E G, K G, rationem, [f] longitudine incommensurabiles sunt. Sed & ostensæ sunt Rationales. Rationales ergo sunt potentia solùm commensurabiles. Quare cùm ex




c 23. decimi.
d 23. decimi.
e 14. decimi.
f 10. decimi.

Rationali

Rationali E H, auferatur Rationalis K H, potentia solùm commensurabilis ipsi E H; [a] erit E K, Apotome, & ei congruens K H. Non aliter ostendemus E K, esse Apotomen, & ei congruentem esse K M. Non igitur Apotomæ vna tantùm recta congruit, &c. Quod est absurdum. [b] Vnam enim tantùm congruere demonstratum est. Igitur ei, quæ cum Medio Medium totum facit, vna tantùm congruit, &c. Quod erat ostendendum. [a] 74. decimi [b] 80. decimi

## DEFINITIONES TERTIAE.

EXPOSITA Rationali, & Apotoma; si tota plus possit, quàm congruens, quadrato rectæ lineæ sibi longitudine commensurabilis,

I.

SI quidem tota expositæ Rationali sit longitudine commensurabilis; Vocetur Apotome prima.

II.

SI verò congruens expositæ Rationali sit longitudine commensurabilis; Vocetur Apotome secunda.

III.

QVOD si neque tota, neque congruens expositę Rationali sit longitudine commensurabilis; Vocetur Apotome tertia.

RVRSVS si tota plus possit, quàm congruens, quadrato rectæ lineæ sibi longitudine incommensurabilis,

IIII.

SI quidem tota expositæ Rationali sit longitudine commensurabilis; Vocetur Apotome quarta.

V.

SI verò congruens expositæ Rationali sit longitudine commensurabilis; Vocetur Apotome quinta.

VI.

QVOD si neque tota, neque congruēs expositæ Rationali sit longitudine commensurabilis; Vocetur Apotome sexta.

### SCHOLIVM.

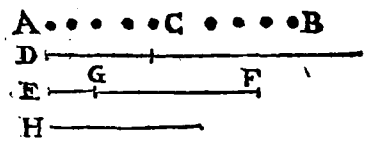
NON *aliter colligitur numerus harum sex Apotomarum, ac superius numerus sex linearum ex binis nominibus fuit collectus. Sunt enim sex hæ Apotomæ, rectæ lineæ, quæ relinquuntur post detractionem minorum nominum ex maioribus nominibus sex linearum, quæ ex binis nominibus dicuntur, vt ex definitionibus est perspicuum.*

## PROBL. 19. PROPOS. 86.

85.
80.

INVENIRE primam Apotomen.

REPERTIS duobus numeris quadratis A B, C B, vt in scholio 2. propos. 29. huius libri docuimus, quorum excessus A C, non sit quadratus; ita vt A B, C B, proportionem quidem habeant, quam quadratus ad quadratum, at A B, A C, non. Exponatur Rationalis quæpiam D, cui longitudine commensurabilis sit E F. Eritque E F, cùm commensurabilis sit Rationali D, Rationalis. Fiat deinde vt numerus A B, ad numerum A C, ita per coroll. propos. 6. huius lib. quadratum ex E F, ad quadratum ex G F. Dico E G, esse primam Apotomen. [c] Quoniam enim quadrata ex E F, G F, proportionem habentia, quam numeri A B, A C, commensurabilia sunt; Erunt & rectæ E F, G F, commensurabiles, saltem potentia. Cùm ergo E F, ostensa sit Rationalis, erit & G F, Rationalis. Quia verò A B, A C, proportionē non habent, quam quadrati numeri; neque quadrati ex E F, G F, proportionem habebunt, quam quadrati numeri. [d] Incommensurabiles ergo sunt longitudine rectę E F, G F. Rationales ergo sunt E F, G F, potentia tantùm commensurabiles; [e] atque idcircò reliqua E G, Apotome est. Dico & primam esse. Posit enim recta E F, plus quàm recta G F, quadrato H. Et quia est, vt numerus A B, ad numerum A C, ita quadratum ex E F, ad quadratum ex G F; erit per conuersionem rationis, vt A B, ad C B, ita quadratum ex E F, ad quadratum ex H. Habent autem A B, C B, proportionem, quam numeri quadrati. Igitur & quadrata ex E F, & H, proportionem habent, quam numeri quadrati; [f] Ac propterea rectæ E F, & H, longitudine commensurabiles sunt. Quoniã igitur tota E F, plus potest, quàm congruens G F, quadrato rectæ H, sibi longitudine commensurabilis; estque tota eadem E F, expositæ Rationali D, commensurabilis longitudine; erit E G, ex defin. prima Apotome. Inuenimus ergo primam Apotomen. Quod faciendum erat.



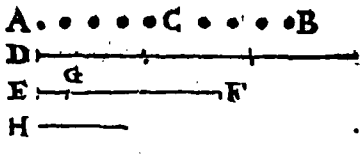

[c] 6. decimi. [d] 9. decimi. [e] 74. decimi [f] 9. decimi.

86. 81.

## PROBL. 20. PROPOS. 87.

INVENIRE ſecundam Apotomen.

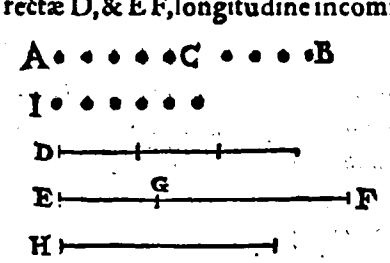
REPERTIS duobus numeris quadratis AB, CB, vt in propoſitione præcedenti; expoſitaque Rationali D, ſumatur ei longitudine commenſurabilis GF; eritque GF, Rationali D, commenſu-
a 6. decimi. rabilis, Rationalis quoque. Fiat deinde vt numerus AC, ad numerum AB, ita quadratum ex GF, ad quadratum ex EF, per coroll. propoſ. 6. huius lib. Dico EG, eſſe ſecundam Apotomen. a Quoniam enim quadrata ex GF, EF, proportionem habentia, quam numeri AC, AB, commenſurabilia ſunt: Erunt & rectæ GF, EF, commenſurabiles, ſaltem potentia. Cùm ergo GF, ſit oſtenſa Rationalis; erit quoque EF, Rationalis. Quia verò numeri AC, AB, atque adeò & quadrata ex GF, EF, proportionem non habẽt, quam numeri quadrati; b erunt GF, EF, longitu-
b 9. decimi. dine incommenſurabiles. Rationales ergo ſunt GF, EF, potentia ſolùm commenſurabiles; c Ideoque EG, reliqua, Apo-
c 74. decimi tome eſt. Dico & ſecundam eſſe. Poſsit enim recta EF, plus quàm GF, quadrato ex H. Quoniam ergo eſt, vt AC, ad AB, ita quadratum ex GF, ad quadratum ex EF; & conuertendo, vt AB, ad AC, ita quadratum ex EF, ad quadratum ex GF: Oſtendemus iam, vt in antecedẽti propoſitione rectam H, ipſi EF, longitudine eſſe commenſurabilem. Quam ob rem cùm tota EF, plus poſsit, quàm congruens GF, quadrato rectæ H, ſibi longitudine commenſurabilis, ſitq; congruens GF, expoſitæ Rationali D, longitudine commenſurabilis; erit EG, ex defin. ſecunda Apotome. Inuenimus ergo ſecundam Apotomen. Quod erat faciendum.




87. 82.

## PROBL. 21. PROPOS. 88.

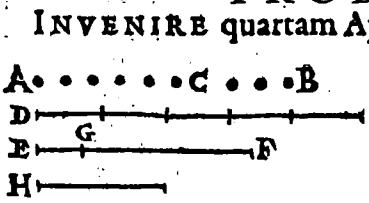
INVENIRE tertiam Apotomen.

REPERTIS duobus numeris quadratis AB, CB, vt in propoſ. 86. ſumatur alius numerus I, vt in propoſ. 51. huius lib. docuimus, qui ad neutrum ipſorum AB, AC, proportionem habeat, quam quadratus ad quadratum. Expoſita deinde Rationali D, fiat vt I, ad AB, ita quadratum ex D, ad
d 6. decimi. quadratum ex EF, per coroll. propoſ. 6. huius libri. d Eruntque quadrata ex D, & EF, proportionem habentia, quam numeri I, & AB, commenſurabilia; atque adeò & rectæ D, & EF, commenſurabiles, ſaltem potentia. Exiſtente ergo D, Rationali, erit & EF, Rationalis. Et quia numeri I, &
e 9. decimi. AB, ac propterea quadrata ex D, & EF, proportionẽ non habent, quam numeri quadrati; e erunt rectæ D, & EF, longitudine incommenſurabiles. Rurſus fiat, vt AB, ad AC, ita quadratũ ex EF, ad quadratum ex GF, ex eodem coroll. propoſ. 6. huius libri.
f 6. decimi. Dico EG, eſſe tertiam Apotomen. f Quoniam enim quadrata ex EF, GF, proportionẽ habentia, quam numeri AB, AC, commenſurabilia ſunt; erunt & rectæ EF, GF, commenſurabiles, ſaltem potentia. Cùm ergo EF, oſtenſa ſit Rationalis, erit & GF, Rationalis, cùm illi hæc ſit commenſurabilis, vt demonſtrauimus. Et quia AB, AC, atque adeò & quadrata ex EF, GF, proportionem nõ habent, quam numeri quadrati; g Erunt rectæ EF, GF, longitudine incõmenſurabiles. Ra-
g 9. decimi. tionales ergo ſunt EF, GF, potentia ſolùm commenſurabiles; Ac propterea cùm ex EF, auferatur
b 74. decimi GF, potentia illi ſolùm commenſurabilis; b reliqua EG, Apotome erit. Dico & tertiam eſſe. Quoniam enim eſt vt I, ad AB, ita quadratum ex D, ad quadratum ex EF; & vt AB, ad AC, ita quadratum ex EF, ad quadratum ex GF; erit ex æquo vt I, ad AC, ita quadratum ex D, ad quadratum ex GF; Non habent autem numeri I, & AC, proportionem, quam numeri quadrati. Neque igitur
i 9. decimi. quadrata ex D, & GF, proportionem habebunt, quam numeri quadrati. i Sunt ergo rectæ D, & GF, longitudine incommenſurabiles. Igitur neutra ipſarum EF, GF, longitudine commenſurabilis eſt expoſitæ Rationali D. Poſsit iam EF, plus quàm GF, quadrato rectæ H; Oſtendemusq;, vt in propoſ. 86. rectam H, eſſe ipſi EF, longitudine commenſurabilem. Quapropter cùm tota EF, plus poſsit quàm congruens GF, quadrato rectæ H, longitudine ſibi commenſurabilis, & neutra ipſarum EF, GF, longitudine commenſurabilis ſit Rationali D, expoſitæ; erit ex defin. EG, tertia Apotome. Inuenimus ergo tertiam Apotomen. Quod faciendum erat.

88. 83.

## PROBL. 22. PROPOS. 89.

INVENIRE quartam Apotomen.

REPERTIS duobus numeris AC, CB, *ita vt* AB, *ex illis* compoſitus ad neutrum ipſorum proportionem habeat, quam quadratus ad quadratũ, per ea, quæ *in* ſcholio 3. propoſitionis 29. huius lib. docuimus: exponatur Rationalis D, cui longitudine commenſurabilis ſit EF; eritque propterea & EF, Rationalis. Quòd ſi reliqua fiant, quæ *in* propoſ. 86. oſtendemus, vt ibi, EG, eſſe Apotomen. Dico & quartam eſſe. Poſsit enim EF, plus q̃ GF, quadra-



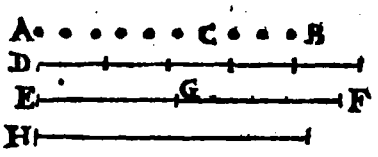

to re-

to rectæ H. Et quia est vt AB, ad AC, ita quadratum ex EF, ad quadratum ex GF; erit per conuersionem rationis, vt AB, ad CB, ita quadratum ex EF, ad quadratum ex H. Cùm ergo AB, & CB, proportionem non habeant, quam numeri quadrati; [a] erunt rectæ EF, & H, longitudine incommensurabiles. Quoniam igitur tota EF, plus potest, quàm congruens GF, quadrato rectæ H, sibi longitudine incommensurabilis, estq; eadē tota EF, commensurabilis longitudine Rationali D; erit ex defin. EG, quarta Apotome. Inuenimus ergo quartam Apotomen. Quod erat faciendum. [a] 49. decimi.

## PROBL. 23. PROPOS. 90. 89. 84.

INVENIRE quintam Apotomen.

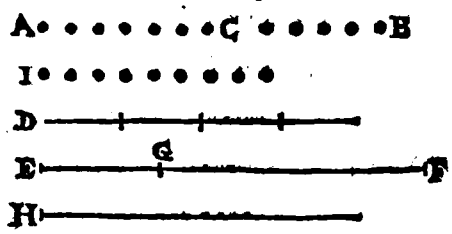
REPERTIS duobus numeris AC, CB, vt in propositione præcedenti, fiat constructio, vt in propos. 87. hoc est, sumatur GF, longitudine commensurabilis Rationali D, &c. Ostendemus ergo, vt in propos. 87. EG, esse Apotomen. Dico & quintam esse. Posit enim EF, plus quàm GF, quadrato rectæ H. Et quia similiter, vt in propos. 86. ostendemus, per conuersionem rationis, esse vt AB, ad CB, ita quadratum EF, ad quadratum ex H; erunt rursus, vt in propositione antecedenti, rectæ EF, & H, longitudine incommensurabiles; estque congruens GF, Rationali D, commensurabilis longitudine; erit ex defin. EG, quinta Apotome. Inuenimus ergo quintam Apotomen. Quod faciendum erat.




## PROBL. 24. PROPOS. 91. 90. 85.

INVENIRE sextam Apotomen.

REPERTIS tribus numeris AC, CB, & I, vt in propos. 54. ita vt AB, ad neutrum ipsorum AC, CB; & I, ad neutrum ipsorum AB, AC, proportionem habeat, quam quadratus ad quadratum: exponatur Rationalis D, & reliqua fiant, vt in propositione 88. Ostendemus ergo similiter, vt ibi, D, & EF, longitudine incommensurabiles esse; & EG, Apotomen esse. Dico & sextam esse. Nam vt in propos. 88. erūt D, & GF, longitudine quoq; incommensurabiles; Atque adeò neutra ipsarum EF, GF, longitudine commensurabilis est expositæ Rationali D. Posit iam EF, plus quàm GF, quadrato rectæ H, quam ostendemus, vt in propos. 89. longitudine incommensurabilem esse ipsi EF. Igitur cùm tota EF, plus possit, quàm congruens GF, quadrato rectæ H, sibi longitudine incommensurabilis, & neutra ipsarum EF, GF, longitudine sit commensurabilis Rationali D; erit ex defin. EG, sexta Apotome. Inuenimus ergo sextam Apotomen. Quod erat faciendum.




### SCHOLIVM.

*SED & expeditius sex dictas Apotomas inueniemus hac ratione, vt Theon docet hoc loco.*

*SIT inuenienda exempli gratia, prima Apotome.* [a] *Reperiatur prius ex binis nominibus prima AB, cuius maius nomen AC, & minus CB. Abscissa igitur ex AC, recta CD, quæ æqualis sit ipsi CB: Dico AD, esse primam Apotomen. Quoniam enim AC, CB, Rationales sunt potentia tantùm commensurabiles; erūt etiam AC, DC, Rationales potentia tantùm commēsurabiles.* [b] *Est ergo AD, Apotome. Et quia AC, plus potest, quàm CB, hoc est, quàm DC, quadrato rectæ lineæ sibi longitudine commensurabilis: & est AC, Rationali expositæ longitudine commensurabili; ex definitione eius, quæ ex binis nominibus prima dicitur; erit ex definitione Apotomæ primæ, AD, prima Apotome. Eadem ratione ex cæteris, quæ ex binis nominibus dicuntur, & alias Apotomas inueniemus, vt ex secunda secundam, ex tertia tertiam, ex quarta quartam, ex quinta quintam, & ex sexta sextam, si minora nomina ex maioribus auferamus.* [a] 49. decimi. [b] 74. decimi.

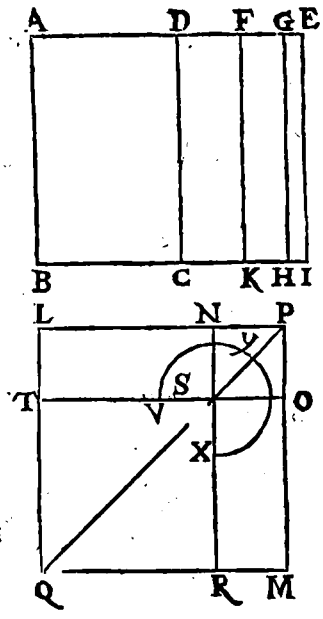
## THEOR. 68. PROPOS. 92. 91. 86.

SI spatium contineatur sub Rationali, & Apotomæ prima; Recta linea spatium potens Apotome est.

CONTINEATVR spatium AC, sub Rationali AB, & Apotomæ prima AD. Dico rectam lineam, quæ potest spatium AC, Apotomen esse. Sit ipsi AD, congruens DE. Erunt igitur AE, DE, ex defin. Apotomæ primæ, Rationales potentia solùm commensurabiles; & tota AE, longitudine commensurabilis Rationali AB; & denique eadem AE, tota plus poterit, quàm congruens DE, quadrato rectæ sibi longitudine commensurabilis. Secetur DE, bifariam in F, & quadrato ex FE, hoc est, quartæ parti quadrati ex DE, applicetur ad AE, rectangulum æquale sub AG, GE, deficiens figura quadrata, per lemma 2. propos. 17. huius lib. Et quia AE, plus potest, quàm DE, quæ-

drato rectæ ſibi longitudine commenſurabilis; [a] erunt rectæ AG, GE, longitudine commenſurabiles; [b] Ac propterea & vtraque toti AE, longitudine commenſurabilis erit: Eſt autem AE, Rationali AB, longitudine commenſurabilis. [c] Igitur & vtraque AG, GE, ipſi AB, longitudine eſt commenſurabilis; atq; ex definitione 6. Rationalis. Quare ductis GH, EI, ipſi AB, parallelis, quæ ipſi BC, productæ occurrant in H, I; [d] erit vtrumque rectangulum AH, GI, contentum ſub duabus rationalibus longitudine commenſurabilibus, Rationale. Rurſus quia vtraque DF, FE, longitudine commenſurabilis eſt ipſi DE; & DE, longitudine incommenſurabilis eſt Rationali AB; (Nam ſi cõmenſurabilis eſſet longitudine, cùm & AE, ſit eidem AB, longitudine commenſurabilis; [e] eſſent AE, DE, longitudine quoq; commenſurabiles. Quod eſt abſurdum. ponuntur enim ſolùm potentia commenſurabiles:) [f] erit etiam vtraq; ipſarum DF, FE, ipſi AB, longitudine incommenſurabilis. Et quoniam vtraque DF, FE, Rationali DE, commẽſurabilis, Rationalis eſt; Erunt propterea tam AB, DF, quàm AB, FE, Rationales potentia tantũ commenſurabiles. Quare ducta FK, ipſi AB, parallela, [g] erit vtrumque rectangulum DK, FI, contentũ ſub Rationalibus potentia tantùm commenſurabilibus, Medium.

[a] 18. decimi. [b] 16. decimi. [c] 12. decimi. [d] 20. decimi. [e] 12. decimi. [f] 14. decimi. [g] 22. decimi.




IAM verò ipſi AH, [h] fiat quadratũ æquale LM, & ipſi GI, æquale fiat quadratum NO, cõmunẽ habens cum LM, angulum LPM. [i] Erunt igitur quadrata LM, NO, circa eandem diametrum, quæ ſit PQ. Perficiatur autem figura, vt vides. Quoniam igitur rectangulum ſub AG, GE, per conſtructionem, æquale eſt quadrato ex FE; [k] erunt tres rectæ AG, FE, GE, proportionales; [l] Ac propterea cùm AH, FI, GI, eandem cum ipſis habeant rationem; erit FI, medium proportionale inter AH, GI, hoc eſt, inter quadrata LM, NO, illis æqualia. Eſt autem inter eadem LM, NO, per lemma propoſ. 14. huius lib. medium quoq; proportionale LO. Igitur rectangula FI, LO, æqualia ſunt: [m] Sed ipſi FI, æquale eſt DK, & ipſi LO, æquale eſt MN. Eſt ergo totum DI, toti gnomoni VYX, cum quadrato NO, æquale. Eſt autem & totum AI, per conſtructionem, æquale quadratis LM, NO. Igitur & reliquum AC, reliquo quadrato TR, eſt æquale: Ac propterea recta TS, poteſt ſpatiũ AC. Dico TS, Apotomẽ eſſe.

[h] 14. ſecũdi. [i] 26. ſexti. [k] 17. ſexti. [l] 1. ſexti. [m] 36. primi.

QVONIAM enim ſpatia AH, GI, oſtenſa ſunt Rationalia; & eis æqualia ſunt LM, NO, erunt quoq; quadrata LM, NO, Rationalia; atq; adeò & rectę TO, SO, Rationales. Rurſus quia FI, Medium eſt oſtenſum; erit & LO, illi æquale, Mediũ. Incommenſurabilia ergo ſunt LO, & NO, cùm vnum ſit Irrationale, alterum verò Rationale. Igitur rectæ TO, SO, [n] eandem rationem habẽtes cum LO, NO, [o] longitudine incommenſurabiles ſunt; [p] Atque idcirco reliqua TS, Apotome eſt. Si ſpatium ergo contineatur ſub Rationali, & Apotoma prima, &c. Quod demonſtrandum erat.

[n] 1. ſexti. [o] 10. decimi. [p] 74. decimi

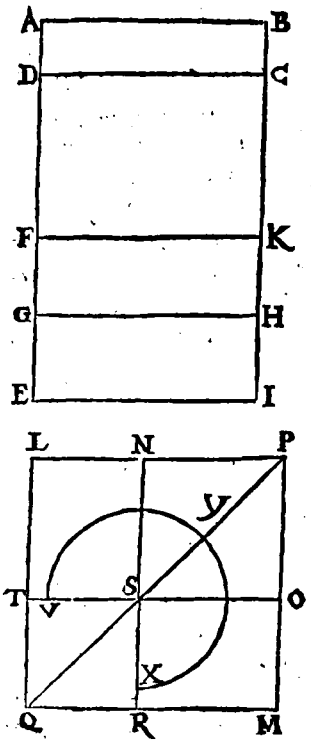
92.
87.

## THEOR. 69. PROPOS. 93.

SI ſpatium contineatur ſub Rationali, & Apotoma ſecunda; Recta linea ſpatium potens, Mediæ eſt Apotome prima.

CONTINEATVR ſpatium AC, ſub Rationali AB, & Apotoma ſecunda AD. Dico rectam, quæ ſpatium AC, poteſt, Mediæ Apotomen eſſe primam. Sit ipſi AD, congruens recta DE. Erunt ergo AE, DE, ex definitione Apotomę ſecundæ, Rationales potentia tantùm commenſurabiles, & congruens DE, longitudine commenſurabilis Rationali AB; Et denique AE, plus poterit quàm DE, quadrato rectæ ſibi commenſurabilis longitudine. Secetur DE, biſariam in F, & reliqua omnia conſtruantur, vt in propoſitione præcedenti. [q] Eruntque rurſus, vt in antecedenti propoſ. AG, GE, longitudine commenſurabiles; [r] Ac propterea & vtraque toti AE, longitudine commenſurabilis. Eſt autem AE, Rationali AB, longitudine incommenſurabilis: (Si enim commenſurabilis eſſet ipſi AB, longitudine, cùm DE, eidem AB, ponatur longitudine commenſurabilis; [s] eſſent AE, DE, inter ſe quoque commenſurabiles longitudine. Quod eſt abſurdum. ponuntur enim potentia tantùm commenſurabiles.) [t] Igitur & vtraque ipſarum AG, GE, longitudine incommenſurabilis eſt eidem AB. Eſt autem vtraque AG, GE, Rationali AE, commenſurabilis, Rationalis. Rationales ergo ſunt tam AB, AG, quàm AB, GE, potentia ſolùm commenſurabiles; [u] Atque idcirco rectangulum vtrumque AH, GI, contentum ſub Rationalibus potentia tantùm commenſurabilibus, Medium eſt. Rurſus quia vtraque DF, FE, ipſi DE, longitudine commenſurabilis eſt; & ponitur

[q] 18. decimi. [r] 16. decimi. [s] 12. decimi. [t] 14. decimi. [u] 22. decimi.

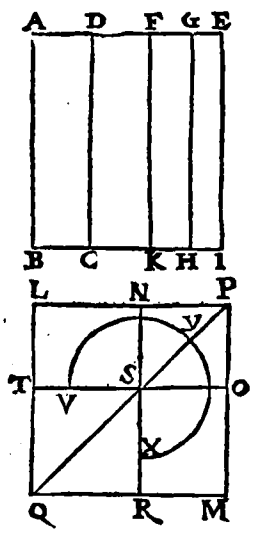


nitur D E, Rationali A B, longitudine commensurabilis; erit quoq; vt in scholio propos. 12. huius libri ostendimus, eidem A B, Rationali longitudine commensurabilis vtraque D F, F E; atq; adeò & Rationalis. [a] Vtrumque ergo rectangulum D K, F I, contentum sub Rationalibus longitudine commensurabilibus, Rationale est. Iam verò, vt in præcedenti propositione, demonstrabimus rectam T S, posse spatium A C. Dico T S, Mediæ Apotomen esse primam. [a 20. decimi]

QVONIAM enim A G, G E, longitudine sunt commensurabiles, [b] erunt & A H, G I, eandem cum illis habentia rationem, commensurabilia; atq; adeò & L M, N O, quadrata illis æqualia, commensurabilia erunt. Igitur & latera eorum, nempe rectæ T O, S O, saltem potentia erunt commensurabiles. Sunt autem & Mediæ, quòd quadrata L M, N O, Mediis A H, G I, æqualia, (ostensa enim sunt A H, G I, Media esse.) Media sint. Et quoniam F I, atque adeò sibi æquale L O, Rationale est, propterea quæ Medio N O, incommensurabile; [c] erunt rectæ T O, S O, eandem cum illis rationem habentes, longitudine incommensurabiles. Cùm ergo & Mediæ sint ostensæ, & commensurabiles; erunt T O, S O, Mediæ potentia tantùm commensurabiles. Cùm ergo contineant L O, quod Rationale est ostensum; [d] erit T S, Mediæ Apotome prima. Si ergo spatiũ contineatur sub Rationali, & Apotoma secunda, &c. Quod demonstrandum erat. [b 10. decimi] [c 10. decimi] [d 75. decimi]

## THEOR. 70. PROPOS. 94. 93. 88.

SI spatium contineatur sub Rationali, & Apotoma tertia; Recta linea spatium potens, Mediæ est Apotome secunda.



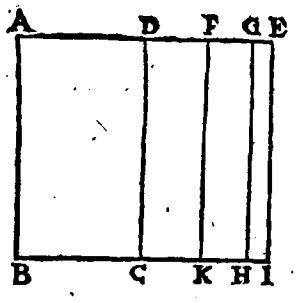

CONTINEATVR spatium A C, sub Rationali A B, & Apotoma tertia A D. Dico rectam, quæ spatium A C, potest, esse Mediæ Apotomen secundam. Sit enim ipsi A D, congruens D E. Erunt ergo, ex definitione Apotomæ tertiæ, A E, D E, Rationales potentia tantùm commensurabiles, & neutra ipsarum A E, D E, longitudine commensurabilis Rationali A B; Et denique A E, plus poterit, quàm D E, quadrato rectę sibi longitudine commensurabilis. Secetur D E, bifariam in F, & cætera fiant, vt in propos. 92. eruntque rursus, vt ibi, A G, G E, longitudine inter se commensurabiles; [e] Ac propterea & vtraque totius A E, longitudine commensurabilis erit. Est autẽ A E, posita incommensurabilis longitudine Rationali A B, [f] Igitur & vtraq; A G, G E, eidem A B, longitudine erit incommensurabilis. Cùm ergo vtraque A G, G E, Rationali A E, commensurabilis, Rationalis sit; erunt tam A B, A G, quàm A B, G E, Rationales potentia solùm commensurabiles; [g] Ac propterea vtrumque rectangulum A H, G I, Medium erit. Rursus quia D E, longitudine ponitur incommensurabilis Rationali A B; erit quoque vtraque D F, F E, ipsi D E, longitudine commensurabilis existẽs, [h] eidem A B, longitudine incommensurabilis. Cùm ergo vtraque D F, F E, Rationali D E, commensurabilis, sit Rationalis; erunt tam A B, D F, quàm A B, F E, Rationales potentia tantùm commensurabiles; [i] atq; propterea vtrumque rectangulum D K, F I, Medium erit. Similiter iam demonstrabimus, vt in propositione 92. rectam T S, posse spatium A C. Dico T S, esse Mediæ Apotomen secundam. [e 16. decimi.] [f 14. decimi.] [g 22. decimi] [h 14. decimi.] [i 21. decimi.]

QVONIAM enim A H, G I, Media sunt ostensa; erunt & quadrata L M, N O, illis æqualia, Media; Ac propterea & rectæ T O, S O, Mediæ. Et quia A H, G I, eandem habentia rationem, quam A G, G E, quas ostendimus commensurabiles esse, [k] commensurabilia sunt; Erunt & quadrata L M, N O, commensurabilia. Igitur & rectæ T O, S O, commensurabiles sunt saltem potentia. At verò quia A E, D E, potentia solùm sunt commensurabiles, hoc est, longitudine incommensurabiles, estque ipsi A E, longitudine ostensa commensurabilis G E, ipsi verò D E, commensurabilis est longitudine F E; erunt ex scholio propos. 14. huius lib. & G E, F E, longitudine incommensurabiles; [l] ac propterea G I, F I, eandem rationem habentia, quam G E, F E, hoc est, illis æqualia N O, L O, incommensurabilia. Quare T O, S O, eandem rationem habentes, quam L O, N O, longitudine incommensurabiles sunt. Ostensæ sunt autem Mediæ, & commensurabiles. Mediæ ergo sunt T O, S O, potentia solùm commensurabiles. Et quoniã continent L O, Medium; (cùm enim L O, æquale sit ipsi F I, vt constat ex propos. 92. quod Medium esse ostendimus; erit & L O, Medium.) [m] erit T S, Mediæ Apotome secunda. Si ergo spatium contineatur sub Rationali, & Apotoma tertia, &c. Quod erat demonstrandum. [k 10. decimi] [l 10. decimi.] [m 76. decimi.]

## THEOR. 71. PROPOS. 95. 94. 89.

SI spatium contineatur sub Rationali, & Apotoma quarta; recta linea spatium potens, Minor est.

CONTINEATVR spatium A C, sub Rationali A B, & Apotoma quarta A D. Dico rectã lineam, quæ potest spatium A C, Minorem esse. Sit ipsi A D, congruens D E. Erunt ergo A E, D E, Rationales potentia solùm commensurabiles, ex definitione Apotomæ quartæ; & A E, longitudine



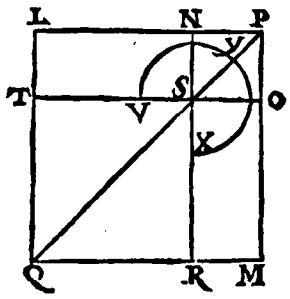

commensurabilis Rationali AB, & eadē AE, plus poterit, quàm DE, quadrato rectæ sibi longitudine incommensurabilis. Secetur DE, bifariam in F, & reliqua omnia fiant, vt prius. [a] Erunt ergo AG, GE, incommensurabiles longitudine, quandoquidem AE, plus potest, quàm DE, quadrato rectæ sibi longitudine incommensurabilis; & ad AE, applicatum est rectangulum sub AG, GE, æquale quartæ parti quadrati ex DE, deficiensque figura quadrata. Et quia AE, Rationalis est, & Rationali AB, longitudine commēsurabilis; [b] erit rectangulum AI, Rationale. Rursus quia DE, Rationalis est, & Rationali AB, longitudine incommensurabilis; [c] erit DI, atque adeò & eius dimidium FI, Medium. Amplius cùm AG, GE, sint longitudine incommensurabiles; [d] incommensurabilia erunt AH, GI, eandem cum illis proportionem habentia. Iam verò similiter demonstrabimus, vt in propositione 92. rectam TS, posse spatium AC. Dico TS, esse Minorem.

a 19. decimi

b 20. decimi

c 22. decimi.

d 10. decimi.



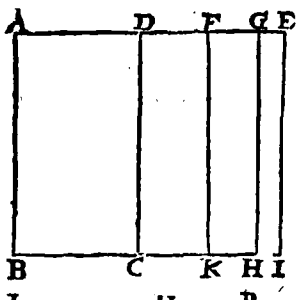

QVONIAM enim ex constructione, rectāgulo AI, æquale est compositum ex quadratis LM, NQ, rectarum TO, SO: Est autem illud ostensum Rationale; erit & compositum ex quadratis rectarum TO, SO, Rationale. Item quia FI, Medium est ostensum; erit & LO, contentum sub TO, SO, illi æquale, Medium. Denique quoniam AH, GI, incōmensurabilia sunt demonstrata; erūt & quadrata LM, NO, illis æqualia, incommensurabilia; Atq; adeò rectæ TO, SO, potentia incommensurabiles. Quapropter cùm TO, SO, potentia sint incommensurabiles, sitq; compositum ex quadratis ipsarum, Rationale: rectangulum verò sub ipsis, Medium; [e] erit reliqua TS, Minor. Si igitur spatium contineatur sub Rationali, & Apotoma quarta, &c. Quod demonstrandum erat.

e 77. decimi

95. 90.

## THEOR. 72. PROPOS. 96.

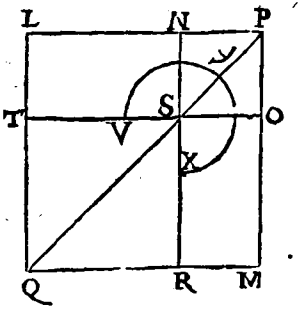
SI spatium contineatur sub Rationali, & Apotoma quinta; Recta linea spatium potens est, quæ cum Rationali Medium totum efficit.




CONTINEATVR spatium AC, (repetita figura proximè antecedentis propositionis) sub Rationali AB, & Apotoma quinta AD. Dico rectam lineam, quæ spatium AC, potest, esse eam, quæ cum Rationali Medium totum efficit. Sit ipsi AD, congruens DE. Erunt ergo ex definitione Apotomæ quintæ AE, DE, Rationales potentia tantùm commensurabiles, & DE, Rationali AB, commensurabilis longitudine; Et denique AE, plus poterit, quàm DE, quadrato rectæ sibi longitudine incommensurabilis. Secetur DE, bifariam in F, & reliqua construantur, vt prius. Erunt ergo rursus, vt in antecedenti propositione, AG, GE, longitudine incommensurabiles. Et quia AE, Rationalis longitudine incommensurabilis est Rationali AB, vt in propos. 93. diximus; [f] erit rectangulum AI, Medium. Item quia DE, Rationalis est, & Rationali AB, longitudine commensurabilis; [g] erit DI, atque idcircò & eius dimidium FI, Rationale. Rursus erūt, vt in præcedenti propositione AH, GI, incōmensurabilia; poteritq;, vt ostensum est in propos. 92. recta TS, spatium AC. Dico TS, esse eam, quæ cum Rationali Medium totum efficit.

f 22. decimi.

g 20. decimi




QVONIAM enim ostensum est AI, Medium esse; erit & compositum ex quadratis LM, NO, rectarum TO, SO, illi æquale, Medium. Item quia demonstrauimus FI, Rationale esse; erit & LO, rectangulum sub TO, SO, contentum, cùm illi sit æquale, Rationale. Sunt autem & TO, SO, potentia incommensurabiles, vt in propositione antecedenti est demonstratum. Igitur cùm TO, SO, potentia incommensurabiles sint, & compositum ex ipsarum quadratis, Medium; rectāgulum verò sub ipsis, Rationale; [h] erit reliqua TS, ea, quæ cum Rationali Medium totū efficit. Quocirca si spatium contineatur sub Rationali, & Apotoma quinta, &c. Quod erat demonstrandum.

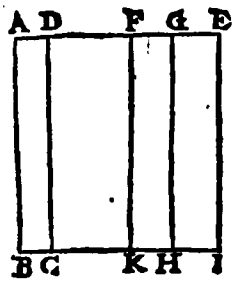
h 78. decimi

96. 91.

## THEOR. 73. PROPOS. 97.

SI spatium contineatur sub Rationali, & Apotoma sexta; Recta linea spatium potens est, quæ cum Medio Medium totum efficit.

CONTINEATVR spatium AC, sub Rationali AB, & Apotoma sexta AD. Dico rectam, quæ potest spatium AC, esse eam, quæ cum Medio Medium totū efficit. Sit enim ipsi AD, congruens DE. Erunt ergo ex definitione Apotomæ sextæ, AE, DE, Rationales potentia tantùm commensurabiles,

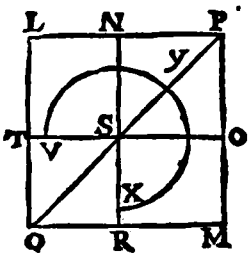



surabiles, & neutra ipsarum A E, D E, Rationali A B, commensurabilis longitudine: Et denique A E, plus poterit, quàm D E, quadrato rectæ sibi longitudine incommensurabilis. Secetur D E, bifariam in F, & reliqua construantur, vt suprà. Erunt ergo rursus, vt in propositione 95. A G, G E, longitudine incommensurabiles. Et quia tam A E, quàm D E, Rationalis est, & Rationali A B, longitudine incommensurabilis; [a] erit tam A I, quàm D I, atque adeò & huius dimidium F I, Medium. Eruntque, vt in propositione 95. A H, G I, incommensurabilia. Et quoniam A E, D E, potentia solùm sunt commensurabiles; [b] Erunt A I, D I, eandem habentia cum illis proportionem, incommensurabilia: Atque adeò cùm D I, F I, commensurabilia sint; [c] erit F I, ipsi A I, incommensurabile. Iam verò demonstrabimus, vt in propos. 92. rectam T S, posse spatium A C. Dico T S, esse eam, quę cum Medio Medium totum efficit.

[a] 22. decimi

[b] 10. decimi

[c] 14. decimi.

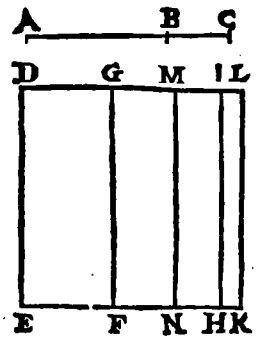



QVONIAM enim A I, Medium ostendimus, erit & compositum ex quadratis L M, N O, rectarum T O, S O, illi æquale, Medium. Item quia F I, Medium ostensum est; erit & L O, illi æquale, contentumque sub T O, S O, Medium. Rursus quoniam F I, ipsi A I, est incommensurabile, vt ostendimus; erit quoque L O, sub T O, S O, contentum, incommensurabile composito ex quadratis rectarum T O, S O; propterea quòd L O, ipsi F I, & compositum ex quadratis rectarum T O, S O, ipsi A I; est æquale. Denique T O, S O, potentia incommensurabiles sunt, vt in propos. 95. est demonstratum. Quamobrem cùm T O, S O, sint potentia incommensurabiles, & compositum ex ipsis quadratis, Medium; necnon & rectangulum sub ipsis Medium, & adhuc composito ex quadratis ipsarũ incommensurabile; [d] erit reliqua T S, ea, quæ cum Medio Medium totum efficit. Si igitur spatium contineatur sub Rationali, & Apotoma sexta, &c. Quod erat ostendendum.

[d] 79. decimi

## THEOR. 74. PROPOS. 98. 97. 92.

QVADRATVM Apotomæ ad Rationalem applicatum, latitudinem facit Apotomen primam.




SIT Apotome A B, & ipsi congruens B C, ita vt A C, B C, sint Rationales potentia solùm commensurabiles: [e] & ad Rationalem D E, applicetur rectangulum D E, æquale quadrato ex A B, latitudinẽ faciens D G. Dico D G, esse Apotomen primam. Ad eandem enim D E, applicetur rectangulum D H, æquale quadrato ex A C; & ad I H, aliud I K, æquale quadrato ex B C; ita vt totum D K, æquale sit composito ex quadratis rectarum A C, B C. [f] Et quoniam compositum ex quadratis rectarum A C, B C, æquale est rectangulo bis sub A C, B C; vnà cum quadrato ex A B; si auferatur quadratum ex A B, & rectangulum D F; relinquetur G K, rectangulo bis sub A C, B C, æquale; atque adeò diuisa G L, bifariam in M, ductaque M N, ipsi D E, parallela, erit M K, æquale rectangulo sub A C, B C. Et quoniam A C, B C, Rationales sunt; erunt quoque quadrata ex A C, B C, Rationalia; ideoque commensurabilia. [g] Cùm ergo & compositum ex quadratis rectarum A C, B C, vtrique ipsorum sit commensurabile; erit & illud compositum, hoc est, illi æquale D K, Rationale. Quod cùm applicetur ad Rationalem D E, [h] erit D L, Rationalis ipsi D E, longitudine commensurabilis. Rursus quia A C, B C, Rationales sunt potentia tantùm commensurabiles; erit rectangulum sub ipsis, atque adeò & eius duplum G K, Medium. Quod cùm applicetur ad Rationalem G F, [i] erit G L, Rationalis ipsi G F, hoc est, ipsi D E, longitudine incommensurabilis. Et quoniam D K, Rationale, & G K, Medium, hoc est, Irrationale, incommensurabilia sunt; [k] erunt rectæ D L, G L, eandem habentes proportionem, quam D K, G K, longitudine incommensurabiles. Quare cùm & Rationales sint demonstratæ; erunt D L, G L, Rationales potentia tantùm commensurabiles; [l] Ac propterea reliqua D G, Apotome erit. Dico & primam esse.

[e] 45. primi.

[f] 7. secundi.

[g] 16. decimi.

[h] 21. decimi.

[i] 23. decimi.

[k] 10. decimi

[l] 74. decimi

QVONIAM enim per lemma propositionis 54. huius libri, rectangulum sub A C, B C, hoc est, M K, medium est proportionale inter quadrata rectarum A C, B C, hoc est, inter D H, I K; erunt D H, M K, I K, continuè proportionalia; atque adeò & rectæ D I, M L, I L, eandem cum illis habentes proportionem, continuè proportionales sunt. [m] Quare rectangulum sub D I, I L, æquale est quadrato ex M L, hoc est, quartæ parti quadrati ex G L. Et quoniam quadrata ex A C, B C, hoc est, illis æqualia D H, I K, commensurabilia sunt, [n] erunt rectæ D I, I L, eandem cum illis habentes proportionem, longitudine commensurabiles. Itaq; cùm duæ rectæ D L, G L, inæquales sint, & ad maiorem D L, applicatum rectangulum sub D I, I L, æquale quartæ parti quadrati ex G L, minore, deficiensque figura quadrata; atque sit ostensa D I, ipsi I L, longitudine commensurabilis; [o] poterit D L, plus quàm G L, quadrato rectæ sibi commensurabilis longitudine. Quare cùm sit ostensum D G, esse Apotomen, & totam D L, plus posse, quàm G L, congruẽtem, quadrato re-

[m] 17. sexti.

[n] 10. decimi.

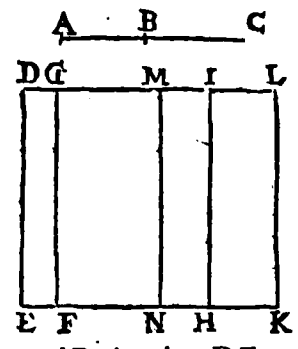
[o] 18. decimi.

ctæ sibi longitudine commensurabilis, atque eandem totam commensurabilem esse longitudine Rationali D E; erit ex defin. D G, Apotome prima. Quadratum ergo Apotomæ ad Rationalem applicatum, latitudinem facit Apotomen primam. Quod ostendendum erat.

98. 93.

## THEOR. 75. PROPOS. 99.

QVADRATVM Mediæ Apotomæ primæ ad Rationalem applicatum, latitudinem facit Apotomen secundam.



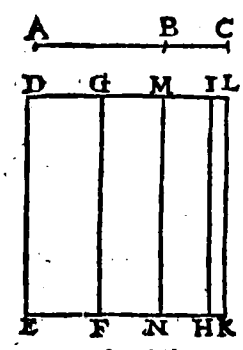

SIT Mediæ Apotome prima AB, & ipsi congruens B C, ita vt AC, B C, sint Mediæ potentia solùm commensurabiles, contineantq; Rationale: [a] Et ad Rationalem D E, quadrato ex AB, æquale applicetur rectangulum D F, latitudinem faciens D G. Dico D G, Apotomen secundam esse. Construantur enim eadem, quæ in antecedenti propositione, ita vt rursus D H, I K, æqualia sint quadratis ex A C, B C; & G K, æquale ei, quod sub A C, B C, bis continetur; ac proinde M K, ei, quod sub A C, B C, continetur semel. Quoniam igitur A C, B C, Mediæ sunt potentia commensurabiles; erunt & earum quadrata, hoc est, illis æqualia, D H, I K, Media, & commensurabilia; [b] ac proinde & totum D K, vtrique illorum commensurabile erit; Igitur & Medium, per coroll. propos. 24. huius lib. Cùm ergo D K, applicetur ad Rationalem D E, [c] erit D L, Rationalis ipsi D E, longitudine incommensurabilis. Rursus quia rectangulum sub AC, B C, Rationale ponitur, erit quoq; eius duplum G K, Rationale. Quod cùm applicetur ad Rationalem D E, [d] erit G L, Rationalis longitudine commensurabilis ipsi D E. Quia verò D K, Medium, id est, Irrationale, & G K, Rationale, incommensurabilia sunt; [e] erunt rectæ D L, G L, eandem habentes cum illis rationem, longitudine incommensurabiles. Cùm ergo Rationales sint ostensæ, erunt D L, G L, Rationales potentia tantùm commensurabiles; [f] Ac propterea reliqua D G, Apotome est. Dico & secundam esse. Nam similiter, vt in præcedenti propositione, demonstrabimus totam D L, plus posse, quàm congruentem G L, quadrato rectæ sibi longitudine commensurabilis. Quare cùm congruens G L, ostensa sit longitudine commensurabilis Rationali D E, erit ex defin. D G, Apotome secunda. Quadratum ergo Mediæ Apotomæ primæ ad Rationalem applicatum, latitudinem facit Apotomen secundam. Quod ostendendum erat.

a 45. primi. b 16. decimi. c 23. decimi. d 21. decimi. e 10. decimi f 74. decimi

99. 94.

## THEOR. 76. PROPOS. 100.

QVADRATVM Mediæ Apotomæ secundę ad Rationalem applicatum, latitudinem facit Apotomen tertiam.




SIT Mediæ Apotome secunda A B, & ipsi congruēs B C, ita vt A C, B C, sint Mediæ potentia tantùm commensurabiles: contineantque Medium: [g] Et ad Rationalem D E, applicetur D F, æquale quadrato ex A B, latitudinem faciens D G. Dico D G, esse tertiam Apotomen. Eadem enim fiant, quæ suprà Ostendemus iam, vt in propositione præcedenti, D K, Medium esse; [h] atque adeò rectam D L, Rationalem ipsi D E, longitudine incommensurabilem. Et quia rectangulum sub A C, B C, Medium est, atque ob id, & eius duplum G K; [i] erit quoque G L, Rationalis ipsi D E, longitudine incommensurabilis. Quia verò A C, B C, longitudine sunt incommensurabiles, estque vt A C, ad B C, ita per lemma 3. propos. 19. huius libri, quadratum ex A C, ad rectangulum sub A C, B C; [k] erit quadratum ex A C, incommensurabile rectangulo sub A C, B C. [l] Est autem quadrato ex A C, commensurabile compositum ex quadratis rectarum AC, B C; quòd quadrata ex rectis A C, B C, potentia commensurabilibus descripta, commensurabilia sint; rectangulo verò sub A C, B C, commensurabile est rectangulum bis sub A C, B C. Igitur ex scholio propos. 14. huius lib. compositum ex quadratis rectarum A C, B C, hoc est, D K, incommensurabile est rectangulo bis sub A C, B C, hoc est, ipsi G K; [m] Atque adeò rectæ D L, G L, eandem habentes rationem, quam D K, G K, longitudine incommensurabiles sunt. Sunt autem ostensæ & Rationales. Rationales ergo sunt D L, G L, potentia solùm commensurabiles; [n] Ac proinde reliqua D G, Apotome est. Dico esse & tertiam. Similiter enim, vt in propos. 98. demonstrabimus D L, totam plus posse, quàm G L, congruentem, quadrato rectæ sibi longitudine commensurabilis. Cùm ergo neutra ipsarum D L, G L, Rationali D E, longitudine sit commensurabilis, vt demonstratum est; erit ex definitione D G, Apotome tertia. Quadratum igitur Mediæ Apotomæ secundæ ad Rationalem applicatum, &c. Quod erat ostendendum.

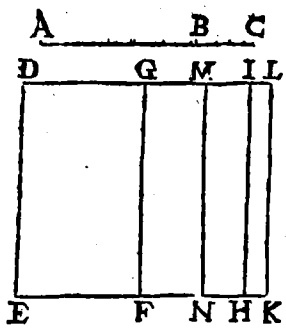
g 45. primi. h 23. decimi i 23. decimi. k 10. decimi l 16. decimi. m 10. decimi n 74. decimi.

100. 95.

## THEOR. 77. PROPOS. 101.

QVADRATVM Minoris ad Rationalem applicatum, latitudinem facit Apotomen quartam.

SIT



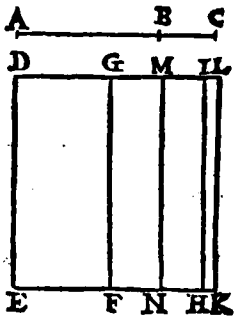

SIT Minor AB, & ipsi congruens BC, ita vt AC, BC, potentia incommensurabiles sint, faciantesq; compositum quidem ex quadratis rectarum AC, BC, Rationale: rectangulum verò sub AC, BC, Medium: [a] & ad Rationalem DE, applicetur spatium DF, quadrato ex AB, æquale, latitudiné faciens DG. Dico DG, Apotomen esse quartam. Fiant enim omnia, vt in præcedentibus. Quoniam igitur compositum ex quadratis rectarum AC, BC, hoc est, illi æquale DK, Rationale est: [b] erit DL, Rationalis ipsi DE, longitudine commensurabilis. Item quia rectangulum sub AC, BC, atque adeò & eius duplum GK, Medium est: [c] erit GL, Rationalis ipsi DE, longitudine incommensurabilis. Rursus quoniam DK, Rationale, & GK, Irrationale, nempe Medium, incommensurabilia sunt: [d] erunt DL, GL, eandem cum ipsis habentes rationem longitudine incommensurabiles. Ostensæ sunt autem Rationales. Rationales ergo sunt DL, GL, potentia tantùm commensurabiles: [e] Ac propterea reliqua DG, Apotome est. Dico & quartam esse. Quoniam enim AC, BC, potentia sunt incommensurabiles; Erunt etiam quadrata, hoc est, ipsis æqualia, DH, IK, incommensurabilia: [f] Ac propterea rectæ DI, IL, longitudine incommensurabiles. Cùm ergo rectangulum sub DI, IL, æquale sit quadrato ex ML, id est, quartæ parti quadrati ex GL, vt in propos. 98. est demonstratum: [g] poterit DL, plus quàm GL, quadrato rectæ sibi longitudine incommensurabilis; quandoquidem ad DL, maiorem, applicatum est rectangulum sub DI, IL, æquale quartæ parti quadrati ex GL, minore, deficiens figura quadrata, diuidensq; maiorem DL, in partes DI, IL, longitudine incommensurabiles. Itaq; cùm tota DL, plus possit, quàm congruens GL, quadrato rectæ sibi longitudine incommensurabilis; sitque eadem tota DL, Rationali DE, longitudine ostensa commensurabilis; erit ex defin. DG, Apotome quarta. Quadratum igitur Minoris ad Rationalem applicatum, &c. Quod erat demonstrandum.

[a] 45. primi.
[b] 21. decimi.
[c] 23. decimi
[d] 10. decimi
[e] 74. deci.
[f] 10. decimi
[g] 19. decimi

## THEOR. 78. PROPOS. 102.

101. 96.

QVADRATVM eius, quæ cum Rationali Medium totum efficit, ad Rationalem applicatum, latitudinem facit Apotomen quintam.




SIT recta cum Rationali Medium totum efficiens AB, & ipsi congruens BC, ita vt AC, BC, potentia sint incommensurabiles, faciantque compositum quidem ex quadratis rectarum AC, BC, Medium; rectangulum verò sub iisdem AC, BC, Rationale: [h] Et ad Rationalem DE, applicetur DF, æquale quadrato ex AB, latitudinem faciens DG. Dico DG, Apotomen quintam esse. Constituantur enim eadem, quæ suprà. Quoniam igitur compositum ex quadratis rectarum AC, BC, atque adeò & illi æquale DK, Medium est: [i] erit DL, Rationalis ipsi DE, longitudine incommensurabilis. Item quia rectangulum sub AC, BC, atque adeò & eius duplum GK, Rationale est: [k] erit GL, Rationalis ipsi DE, longitudine commensurabilis. Et quia DK, Medium seu Irrationale, & GK, Rationale, incommensurabilia sunt: [l] erunt DL, GL, eandem cum ipsis habentes rationem, longitudine incommensurabiles. Sunt autem & Rationales ostensæ. Rationales ergo sunt DL, GL, potentia solùm commensurabiles: [m] Atque idcirco reliqua DG, Apotome est. Dico & quintam esse. Eodem enim modo, vt in antecedenti propos. demonstrabimus DL, totam plus posse quàm GL, congruentem, quadrato sibi longitudine incommensurabilis. Quare cùm congruens GL, demonstrata sit longitudine commensurabilis Rationali DE; erit ex defin. DG, Apotome quinta. Quadratum ergo eius, quæ cum Rationali Medium totum efficit, &c. Quod demonstrandum erat.

[h] 45. primi.
[i] 23. decimi.
[k] 21. decimi
[l] 10. decimi.
[m] 74. deci.

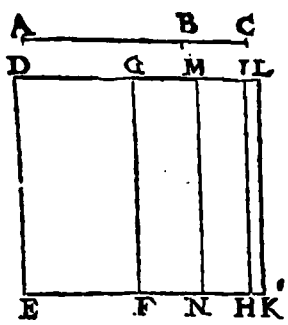
## THEOR. 79. PROPOS. 103.

102. 97.

QVADRATVM eius, quæ cùm Medio Medium totum efficit, ad Rationalem applicatum, latitudinem facit Apotomen sextam.

SIT recta cum Medio Medium totum efficiens AB, & ipsi congruens BC, ita vt AC, BC, potentia sint incommensurabiles, faciantq; & compositum ex quadratis rectarū AC, BC, Medium, & rectangulum sub iisdem AC, BC, Medium, incommensurabileq; composito ex quadratis ipsarum: [n] Et ad Rationalem DE, applicetur quadrato ex AB, spatium æquale DF, latitudinem faciens DG. Dico DG, esse sextam Apotomen. Eadem enim fiant, quæ suprà. Quoniam igitur tam compositum ex quadratis rectarum AC, BC, hoc est, illi æquale DK, quàm rectangulum sub AC, BC, atq; adeò & eius duplum GK, Medium est: [o] Erit tam DL, quàm GL, Rationalis ipsis DE, longitudine incommensurabilis. Et quia rectangulum sub AC, BC, incommensurabile est composito ex quadratis rectarum AC, BC: Et sunt rectangulum sub AC, BC, & eius duplum

[n] 45. primi.
[o] 23. decimi



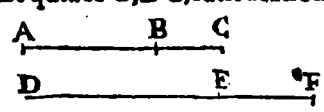

a 14.decimi. b 10.decimi c 74.deci.

GK, commensurabilia; [a] Erit & GK, eidem composito, hoc est, ipsi DK, incommensurabile; [b] propterea quæ rectæ DL, GL, eandem habentes rationem, quam DK, GK, longitudine incommensurabiles. Ostensæ sunt autem & Rationales. Rationales ergo sunt DL, GL, potentia solùm commensurabiles; [c] Atque idcirco reliqua DG, Apotome est. Dico esse & sextam. Ostendemus enim similiter, vt propos. 101. totam DL, plus posse, quàm congruentem GL, quadrato rectæ sibi longitudine incommensurabilis. Cùm igitur neutra ipsarum DL, GL, commẽsurabilis sit longitudine Rationali DE; erit ex defin. DG, Apotome sexta. Quadratum ergo eius, quæ cum Medio Medium totum efficit, &c. Quod erat ostendendum.

## 103. THEOR. 80. PROPOS. 104.

98. RECTA linea Apotomæ longitudine commensurabilis; & ipsa Apotome est, atque ordine eadem.

SIT Apotome AB, & ipsi congruens BC, ita vt AC, BC, sint Rationales potentia solùm commensurabiles. Sit autem ipsi AB, longitudine commensurabilis DE. Dico & DE, Apotomen esse, atque ordine eandem ipsi AB. [d] Fiat enim vt AB, ad DE, ita BC, ad EF. [e] Erit ergo tota AC, ad totam DF, vt AB, ad DE, vel vt BC, ad EF. Quoniam igitur AB, DE, longitudine ponuntur commensurabiles; [f] Erunt quoque AC, DF, necnon & BC, EF, commensurabiles longitudine. Et quia AC, BC, sunt Rationales, erunt etiam illis commensurabiles DF, EF, Rationales. Rursus




quia est vt AC, ad DF, ita BC, ad EF; & permutando, vt AC, ad BC, ita DF, ad EF: & sunt AC, BC, potentia solùm commensurabiles; erunt quoque ex iis, quæ ad propos. 10. huius libri demonstrauimus, DF, EF, potentia tantùm commẽsurabiles. Quare cùm & Rationales sint ostensæ, [g] reliqua DE, Apotome est. Dico & ipsi AB, ordine eandem esse. Posit enim primùm AC, plus quàm BC, quadrato rectæ sibi longitudine commensurabilis. Quo posito, [h] poterit & DF, plus quàm EF, quadrato rectæ sibi longitudine commensurabilis. Si igitur AC, longitudine sit commensurabilis Rationali expositæ, vt AB, sit Apotome prima; [i] erit quoq; DF, longitudine commensurabilis Rationali expositæ, cùm tam Rationalis exposita, quàm DF, eidem AC, sit longitudine commensurabilis. Igitur ex defin. erit quoque DE, Apotome prima, nempe ordine eadem ipsi AB. Si verò BC, sit longitudine commẽsurabilis Rationali; erit eodem modo EF, Rationali longitudine commensurabilis; Atque adeò vtraque AB, DE, ex defin. erit Apotome secunda. Si denique neutra ipsarum AC, BC, commensurabilis sit longitudine expositæ Rationali; [k] erit quoque neutra ipsarum DF, EF, eidem Rationali longitudine commensurabilis. Quare vtraque AB, DE, ex defin. erit Apotome tertia.

d 12. sexti. e 12. quinti. f 10. decimi. g 74. decimi h 15. decimi i 12. decimi. k 14. decimi

POSSIT iam AC, plus quàm BC, quadrato rectæ sibi longitudine incommensurabilis. Quo posito, [l] poterit & DF, plus quàm EF, quadrato rectæ sibi longitudine incõmensurabilis. Quare vt prius, ostẽdemus DE, esse Apotomen quartam, quintam, vel sextam, &c. Recta ergo linea Apotomæ longitudine commensurabilis, &c. Quod ostendendum erat.

l 15. decimi.

### SCHOLIVM.

*IDEM hic dicemus de Apotomis, quod ad propos. 67. huius lib. de lineis ex binis nominibus scripsimus. Nimirum, si recta DE, commensurabilis sit ipsi AB, potentia tantùm, eodem modo demonstrari posse, (si loco vocis: longitudine commensurabilis: vtamur voce: potentia tantùm commẽsurabilis:) & DE, Apotomen esse: At non posse inferri, illam esse ordine eandem ipsi AB. Non enim sequitur, si tota AC, longitudine sit commensurabilis Rationali expositæ, & DF, eidem esse commensurabilem longitudine, propterea quòd non vtraque; nempe Rationalis exposita, & DF; eidem AC, longitudine commensurabilis est; sed Rationalis quidem commensurabilis longitudine; At verò DF, potentia tantùm ex hypothesi. Immo verò, si AB, sit Apotome prima, secunda, quarta, vel quinta, fieri nullo modo potest, vt DE, illi potentia tantùm commensurabilis, sit Apotome eadem ordine.*

*SIT enim AB, prima Apotome, secunda, quarta, vel quinta, eiq; congruens BC; & sit DE, ipsi AB, potentia tantùm commensurabilis, quam quidem, vt in theoremate, ostendemus Apotomen esse, eiq; congruentem EF; & partes AB, BC, ad partes DE, EF, eandem proportionem habere cum totis AC, DF. Dico nulla ratione DE, Apotomen esse ordine eandem ipsi AB. Nam si fieri potest, sit vtraque Apotome prima. Quo posito, erit tam AC, tota, quàm tota DF, ex definitione Apotomæ primæ, Rationali expositæ commensurabilis longitudine; [a] atque adeò & inter se longitudine commensurabiles erunt AC, & DF. Quare cùm sit vt AC, ad DF, ita AB, ad DE; [b] erunt quoque AB, DE, longitudine commensurabiles. Quod est absurdum, ponitur enim DE, ipsi AB, potentia solùm commensurabilis. Non ergo vtraque AB, DE, Apotome prima est. Eodem modo neq; quarta Apotome erit. Sed neque secunda, vel quinta. Esset enim vtraq; congruens BC, EF, ex defin. longitudine commensurabilis Rationali expositæ, atque adeò & ipsa inter se. Quocirca & AB, DE, inter se longitudine forent commensurabiles. quod non ponitur.*

a 12. deci. b 10. deci.

SEMPER

*SEMPER tamen verum eſt, ſi AB, eſt Apotome prima, vel ſecunda, vel tertia, rectam DE, quæ ipſi AB, potentia ſolùm eſt commenſurabilis, eſſe quoq; vnam ex illis tribus, licet ordine non eadem ſit. Nam hoc poſito, poterit AC, plus quàm BC, quadrato rectæ ſibi longitudine commenſurabilis. Cùm ergo ſit vt AC, ad BC, ita DF, ad EF; [a] poterit quoque DF, plus quàm EF, quadrato rectæ longitudine ſibi commenſurabilis. Quare ex defin. erit DE, Apotome prima, vel ſecunda, vel tertia. Eodem modo ſi AB, eſt Apotome quarta, vel quinta, vel ſexta, ita vt AC, plus poſſit, quàm BC, quadrato rectæ ſibi longitudine incommenſurabilis; erit quoq; DE, Apotome quarta, vel quinta, vel ſexta, quamuis ordine non eadem ipſi AB: quia rurſus, cùm ſit vt AC, ad BC, ita DF, ad EF, [b] poterit quoque DF, plus quàm EF, quadrato rectæ ſibi longitudine incommenſurabilis. Quare ex defin. erit AB, Apotome quarta, vel quinta, vel ſexta.*

a 15. decimi

b 15. decimi

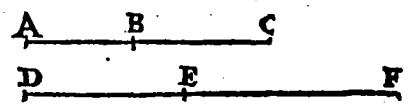
*IN ſequentibus autem quatuor propoſitionibus neceſſariò erit DE, eadem ordine ipſi AB, licet potentia ſolùm illi fuerit commenſurabilis.*

## THEOR. 81. PROPOS. 105. 104. 99.

RECTA linea Mediæ Apotomæ commenſurabilis; & ipſa Mediæ Apotome eſt, atque ordine erit.

SIT Mediæ Apotome quæcunq; AB, eiq́ue congruens BC, ita vt AC, BC, ſint Mediæ potentia ſolùm commenſurabiles: Sit autem ipſi AB, commenſurabilis DE, ſiue longitudine & potentia, ſiue potentia tantùm. Dico & DE, Mediæ Apotomen eſſe, & ipſi AB, ordine eandem. [a] Fiat enim vt AB, ad DE, ita BC, ad EF. [b] Erit ergo tota AC, ad totam DF, vt AB, ad DE, & vt BC, ad EF.

a 12. ſexti. b 12. quinti.



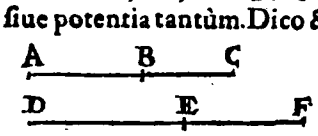

Quoniam igitur AB, DE, commenſurabiles ponuntur vel longitudine & potentia, vel potentia tantùm; [c] erunt quoque BC, EF, & AC, DF, eodem modo commenſurabiles. Et quia AC, BC, Mediæ ſunt, [d] erunt quoque DF, EF, illis cõmenſurabiles, Mediæ. Rurſus, quia eſt vt AC, ad DF, ita BC, ad EF; & permutando vt AC, ad BC, ita DF, ad EF: Sunt autem AC, BC, potentia ſolùm commenſurabiles, erunt etiam, ex ſcholio propoſ. 10. huius lib. DF, EF, ſolùm potentia commenſurabiles. Quare cùm DF, EF, Mediæ ſint oſtenſæ; [e] erit reliqua DE, Mediæ Apotome. Dico & eandem eſſe ordine ipſi AB. Quoniam enim eſt AC, ad BC, ita DF, ad EF; & vt AC, ad BC, ita eſt quadratum ex AC, ad rectangulum ſub AC, BC, ex lemmate 3. propoſ. 19. huius lib. & vt DF, ad EF, ita quadratũ ex DF, ad rectangulum ſub DF, EF; erit quoque vt quadratum ex AC, ad rectangulum ſub AC, BC, ita quadratũ ex DF, ad rectangulum ſub DF, EF; Et permutãdo, vt quadratum ex AC, ad quadratum ex DF, ita rectangulum ſub AC, BC, ad rectangulum ſub DF, EF. Igitur cùm quadratum ex AC, commenſurabile ſit quadrato ex DF, quòd rectæ AC, DF, oſtenſæ ſint commenſurabiles; [f] erit & rectangulum ſub AC, BC, rectangulo ſub DF, EF, commenſurabile. Quare ſi rectangulum ſub AC, BC, ſit Rationale, ita vt AB, ſit Mediæ Apotome prima; Erit etiam rectangulum ſub DF, EF, Rationale, cùm illi ſit commenſurabile; [g] atq; adeò & DE, Mediæ Apotome prima erit. Si verò rectangulum ſub AC, BC, ſit Medium, ita vt AB, ſit Mediæ Apotome ſecunda; erit quoq; rectangulum ſub DF, EF, ei commenſurabile, Medium, ex coroll. propoſ. 24. huius lib. [h] Ac propterea & DE, Mediæ Apotome ſecunda erit. Recta ergo linea Mediæ Apotomæ commenſurabilis, &c. Quod erat oſtendendum.

c 10. decimi d 24. decimi e 75. vel 76. decimi. f 10. decimi g 75. decimi h 76. decimi

## THEOR. 82. PROPOS. 106. 105. 116. 100.

RECTA linea Minori commenſurabilis; & ipſa Minor eſt.

SIT Minor AB, ipſiq́; congruens BC, ita vt AC, BC, potentia ſint incommenſurabiles, facientesq́ue compoſitum quidem ex quadratis rectarum AC, BC, Rationale; rectangulum verò ſub iiſdem AC, BC, Medium. Sit autem DE, ipſi AB, commenſurabilis ſiue longitudine & potentia, ſiue potentia tantùm. Dico & DE, Minorem eſſe. Fiant enim eadem, quæ ſuprà, ita vt rurſus AB, BC, ad DE, EF, eandem habeant rationem, quã AC, ad DF. Erunt ergo rurſus, vt in antecedenti propoſ. DF, EF, ipſis AC, BC, commenſurabiles ſiue longitudine & potentia, ſiue potentia tantùm. Et quoniam eſt, vt AC, ad DF, ita BC, ad EF; & permutando vt AC, ad BC, ita DF, ad EF; [i] erit vt quadratum ex AC, ad quadratum ex BC, ita quadratum ex DF, ad quadratum ex EF; & componendo, vt compoſitum ex quadratis rectarum AC, BC, ad quadratum ex BC, ita compoſitum ex quadratis rectarum DF, EF, ad quadratum ex EF; & permutando vt compoſitum ex quadratis rectarum AC, BC, ad compoſitum ex quadratis rectarũ DF, EF, ita quadratum ex BC, ad quadratum ex EF. Eſt autem quadratum ex BC, commenſurabile quadrato ex EF; quòd rectas BC, EF, oſtenderimus commenſurabiles eſſe. [k] Igitur & compoſitum ex quadratis rectarum AC, BC, compoſito ex quadratis rectarum DF, EF, commenſurabile eſt. Eſt autem compoſitum ex quadratis rectarum AC, BC, ex hypotheſi, Rationale. Igitur & compoſitum ex quadratis rectarum DF, EF, ex 9. defin. Rationale eſt. Rurſus quoniam, vt in antecedenti propoſ. demonſtrabimus rectangulum ſub AC, BC, rectangulo ſub DF, EF, eſſe commenſurabile: ponitur autem rectangulum ſub AC, BC, Medium; Erit quoq; rectangulum ſub DF, EF, ex coroll. propoſ. 24. huius lib. Medium. Et quia eſt vt AC, ad BC, ita DF, ad EF, ſuntq́;

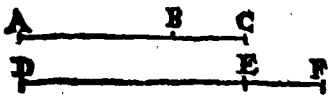



i 22. ſexti. k 10. decimi

a 10. decimi AC, BC, potentia incommensurabiles; a erunt etiam DF, EF, potentia incommensurabiles. Quam ob rem cùm DF, EF, potentia sint incommensurabiles, faciantq; compositum quidem ex
b 77. decimi quadratis rectarum DF, EF, Rationale, rectangulum verò sub iisdem DF, EF, Medium; b erit
106. 117. DE, Minor. Recta ergo linea Minori commensurabilis, &c. Quod erat demonstrandum.

101. ## PROBL. 83. PROPOS. 107.

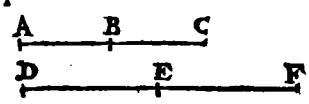
RECTA linea commensurabilis ei, quæ cum Rationali Medium totum efficit; & ipsa cum Rationali Medium totum efficiens est.




SIT recta AB, cum Rationali Medium totum efficiens, & ipsi congruens BC, ita vt AC, BC, sint potentia incommensurabiles, facientesque compositum quidem ex quadratis rectarum AC, BC, Medium; at rectangulum sub AC, BC, Rationale: Sit autem DE, ipsi AB, commensurabilis quocunque modo. Dico & DE, esse, quæ cum Rationali Medium totum efficit. Constructis enim iisdem, quæ suprà, ostendemus vt in antecedenti propos. compositum ex quadratis rectarum AC, BC, commensurabile esse composito ex quadratis rectarum DF, EF. Cùm ergo illud ponatur Medium, erit & hoc, ex coroll. propos. 24. huius lib. Medium. Rursus, vt in propos. 105. demonstrabimus rectangulum sub AC, BC, cõmensurabile esse rectangulo sub DF, EF. Cùm ergo illud Rationale ponatur, erit & hoc Rationale, ex defin. 9. Sunt denique eodem modo, vt in præcedenti propos. est probatum, rectę DF, EF, potentia incommensurabiles. Igitur cùm DF, EF, incommensurabiles sint potentia, faciantque compositum quidem ex
c 78. decimi ipsarum quadratis, Medium, rectangulum verò sub ipsis, Rationale; c erit DE, quæ cum Rationali Medium, &c. Quod demonstrandum erat.

107. ## THEOR. 84. PROPOS. 108.

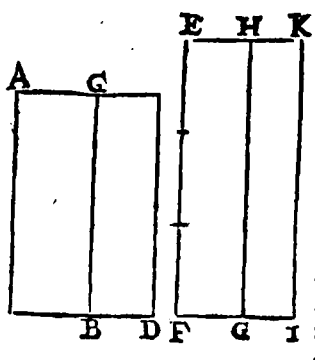
102. RECTA linea commensurabilis ei, quæ cum Medio Medium totum efficit; & ipsa cum Medio Medium totum efficiens est.




SIT recta AB, cum Medio Medium totum efficiens, & ipsi congruens BC, ita vt AC, BC, sint potentia incommẽsurabiles, facientesq; compositum ex quadratis ipsarum Medium, & rectangulum sub ipsis Medium quoque, & adhuc incommensurabile composito ex ipsarum quadratis: Sit autem DE, ipsi AB, quomodolibet commensurabilis. Dico & DE, esse, quæ cum Medio Medium totum efficit. Constructis enim iisdem, quæ suprà, probabimus similiter, vt in propos. 106. compositum ex quadratis rectarum AC, BC, commensurabile esse composito ex quadratis rectarum DF, EF. Cùm ergo illud Medium ponatur, erit & hoc ex coroll. propos. 24. huius lib. Medium. Rursus vt in propos. 105. ostendemus, rectangulum sub AC, BC, commensurabile esse rectangulo sub DF, EF. Cùm ergo illud sit Medium, erit & hoc Medium, ex eodem coroll. Item vt in propos. 106. erunt quoque DF, EF, potentia incommensurabiles. Postremò, quia compositum ex quadratis rectarum AC, BC, commensurabile est compositum ex quadratis rectarum DF, EF, vt dictum est; & rectangulo sub AC, BC, commensurabile rectangulum sub DF, EF: Sunt autem compositum ex quadratis rectarum AC, BC, & rectangulum sub AC, BC, per hypothesin, incommensurabilia; erunt quoque, ex scholio propos. 14. huius lib. compositum ex quadratis rectarum DF, EF, & rectangulum sub DF, EF, incommẽsurabilia. Quocirca cùm DF, EF, potentia sint incommensurabiles, & compositum ex ipsarum quadratis, Medium; necnon & rectangulum sub ipsis, Medium; incommensurabileque composito ex ipsarum quadratis; d erit
d 79. deci. DE, quæ cum Medio Medium totum efficit. Recta igitur linea commensurabilis ei, quæ cum Medio, &c. Quod erat ostendendum.

108. ## THEOR. 85. PROPOS. 109.

103. MEDIO à Rationali detracto; Recta linea, quæ reliquum spatium potest, vna ex duabus Irrationalibus fit, vel Apotome, vel Minor.

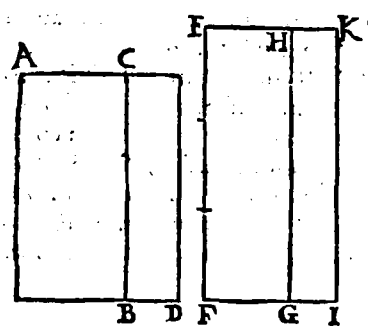



DETRAHATVR à Rationali AD, Medium CD. Dico rectam, quę potest spatium reliquum AB, esse vel Apotomen, vel Minorem. Exponatur enim Rationalis EF, e ad quam applicetur rectangulum
e 45. primi. EG, æquale ipsi AB, & ad GH, aliud HI, æquale ipsi CD, ita vt totũ EI, toti AD, sit æquale. Quoniam igitur EI, æquale Rationali AD, Rationale est; f erit EK, Rationalis, Rationali EF, lõgitudine com-
f 21. decimi. mensurabilis. Rursus quia HI, Medio CD, æquale Medium est, g erit
g 23. decimi HK, Rationalis, ipsi EF, longitudine incommensurabilis. Itaq; cùm EK, quidem sit longitudine commensurabilis ipsi EF; at HK, eidem
h 13. decimi EF, longitudine incommensurabilis, h erunt EK, HK, longitudine incommensurabiles. Sed & Rationales. Rationales ergo sunt potentia tantùm commensurabiles: i propterea q; reliqua EH, Apotome
i 74. decimi est, & ei congruens HK. Aut igitur EK, plus potest quàm HK, quadrato

drato rectæ ſibi longitudine commenſurabilis, aut incommenſurabilis. Si plus poteſt E K, quàm H K, quadrato rectæ lineæ commenſurabilis ſibi longitudine, cùm tota E K, oſtenſa quoque ſit longitudine commenſurabilis Rationali E F; erit ex defin. E H, Apotome prima. Quare recta potens ſpatium E G, contentum ſub Rationali E F, & Apotoma prima E H, hoc eſt, ſpatium A B, ſibi æquale, [a] Apotome eſt. Si verò E K, plus poteſt, quàm H K, quadrato rectæ ſibi longitudine incommenſurabilis, cùm tota E K, ſit oſtenſa commenſurabilis longitudine Rationali E F; erit ex definitione E H, Apotome quarta. Quapropter recta potens ſpatium E G, contentum ſub Rationali E F, & Apotoma quarta E H, hoc eſt, ſpatium A B, illi æquale, [b] Minor eſt. Medio ergo à Rationali detracto, &c. Quod oſtendendum erat. [a] 92. decimi [b] 95. quinti

## THEOR. 86. PROPOS. 110. 109. 104.

RATIONALI à Medio detracto; aliæ duæ Irrationales fiunt, vel Mediæ Apotome prima, vel cum Rationali Medium totum efficiens.

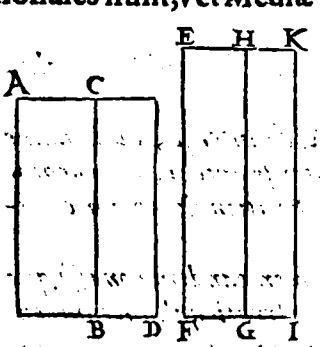



DETRAHATVR à Medio A D, Rationale C D. Dico rectam, quæ reliquum ſpatium A B, poteſt, eſſe vel Mediæ Apotomen primam, vel eam, quæ cum Rationali Medium totum efficit. Eadem enim conſtruantur, quæ ſuprà. Et quia E I, Medio A D, æquale, Medium eſt; [c] erit E K, Rationalis ipſi E F, longitudine incommenſurabilis. Item quia H I, æquale Rationali C D, Rationale eſt; [d] erit H K, Rationalis ipſi E F, longitudine commenſurabilis. Itaque cùm H K, quidem ipſi E F, ſit commenſurabilis longitudine, at E K, eidem E F, longitudine incommenſurabilis; [e] erunt H K, E K, longitudine incommenſurabiles. Sed & Rationales. Rationales ergo ſunt potentia ſolùm commenſurabiles; [f] Ac proinde reliqua E H, Apotome eſt, & ei cõgruens H K. Aut igitur E K, plus poteſt, quàm H K, quadrato rectæ ſibi longitudine commenſurabilis, aut incommenſurabilis. Si E K, plus poteſt, quàm H K, quadrato rectæ ſibi longitudine commenſurabilis, cùm congruens H K, oſtenſa ſit longitudine commenſurabilis Rationali E F; erit ex defin. E H, Apotome ſecunda. Recta igitur potens ſpatium E G, contentum ſub Rationali E F, & Apotoma ſecunda E H, hoc eſt, ſpatium A B, illi æquale, [g] Mediæ eſt Apotome prima. Si verò E K, plus poteſt, quàm H K, quadrato rectæ ſibi longitudine incommenſurabilis, cùm congruens H K, ſit oſtenſa commenſurabilis longitudine Rationali E F; erit E H, Apotome quinta, ex defin. Recta igitur potens ſpatium E G, contentum ſub Rationali E F, & Apotoma quinta E H, hoc eſt, ſpatium illi æquale A B, eſt ea, quæ cum Rationali Medium totum efficit. Quamobrem Rationali à Medio detracto, &c. Quod oſtendendum erat.

[c] 23. decimi [d] 21. decimi. [e] 13. decimi. [f] 74. primi. [g] 93. decimi

## THEOR. 87. PROPOS. 111. 110. 105.

MEDIO à Medio detracto, quod ſit incommenſurabile toti; reliquæ duæ Irrationales fiunt, vel Mediæ Apotome ſecunda, vel cum Medio Medium totũ efficiẽs.



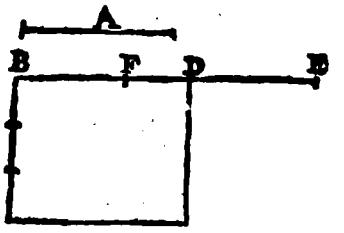

DETRAHATVR à Medio A D, Medium C D, quod incommenſurabile ſit toti A D. Dico rectam, quæ reliquum ſpatium A B, poteſt, eſſe vel Mediæ Apotomen ſecundam, vel eam, quæ cum Medio Medium totum efficit. Conſtructis enim iiſdem, quæ ſuprà; quoniam E I, H I, Mediis A D, C D, æqualia, Media ſunt; [h] erunt E K, H K, Rationales ipſi E F, longitudine incommenſurabiles. Et quia A D, C D, hoc eſt, E I, H I, ponuntur incommenſurabilia; [i] erunt E K, H K, eandem cum illis habentes rationem, longitudine incommenſurabiles. Sed & Rationales. Rationales ergo ſunt potentia tantùm commenſurabiles; [k] Ac propterea reliqua F H, Apotome eſt, & ei congruens H K. Aut igitur E K, plus poteſt, quàm H K, quadrato rectæ ſibi longitudine commenſurabilis, aut incommenſurabilis. Si plus poteſt E K, quàm H K, quadrato rectæ ſibi longitudine commenſurabilis, cùm neutra ipſarum E K, H K, Rationali E F, longitudine commenſurabilis ſit oſtenſa; erit ex defin. E H, Apotome tertia. Quocirca recta potens ſpatium E G, contentum ſub Rationali E F, & Apotoma tertia E H, hoc eſt, ſpatium A B, illi æquale; [l] Mediæ Apotome eſt ſecunda. Si verò E K, plus poteſt, quàm H K, quadrato rectæ ſibi longitudine incommenſurabilis, cùm neutra ipſarum E K, H K, Rationali E F, ſit longitudine commenſurabilis, vt demonſtrauimus; erit ex defin. E H, Apotome ſexta. Quam ob rem recta potens ſpatium E G, contentum ſub Rationali E F, & Apotoma ſexta E H, hoc eſt, ſpatium A B, illi æquale, [m] eſt ea, quæ cum Medio Medium totum efficit. Medio ergo à Medio detracto, &c. Quod demonſtrandum erat.

[h] 23. decimi. [i] 10. decimi. [k] 74. decimi [l] 94. decimi [m] 97. deci.

## THEOR. 88. PROPOS. 112. 111. 116.

APOTOME non eſt eadem, quæ ex binis nominibus.

SIT Apotome A, quæcunque. Dico A, non esse eandem, quæ ex binis nominibus. Sit enim, si
a 45. primi. fieri potest, A, aliqua ex binis nominibus. Expositа autem Rationali B C, a applicetur ad B C, re-
b 98. decimi ctangulum C D, æquale quadrato ex A. Quoniam igitur A, Apotome est; b erit latitudo B D, Apo-
tome prima. Sit ergo ei congruens D E. Erunt igitur ex defin. Apotomæ primæ B E, D E, Ratio-
nales potentia tantùm commensurabiles, poteritq; B E, plus quàm D E, quadrato rectæ sibi lon-
gitudine commensurabilis, & ipsa B E, Rationali B C, commensurabilis erit longitudine. Rursus
c 61. decimi quia A, ponitur esse quoque ex binis nominibus; c erit latitudo eadem B D, ex binis nominibus
prima. Sit ergo maius ipsius nomen B F. Erunt igitur ex defin.
eius, quæ ex binis nominibus prima est, B F, F D, Rationales
potentia solùm commensurabiles, poteritque B F, plus quàm
F D, quadrato rectæ commensurabilis sibi longitudine, & ipsa
B F, Rationali B C, longitudine commensurabilis erit. Itaque
cùm tam B E, quàm B F, longitudine sit cõmensurabilis eidem
d 12. decimi. B C; d erunt quoq; B E, B F, inter se commensurabiles longi-
tudine. Igitur cùm tota B E, sit longitudine commensurabilis
parti B F, erit & eadem B E, reliquæ parti F E, longitudine com-




mensurabilis, ex coroll. propos. 16. huius libri; Atque adeò cùm B E, Rationalis sit, & F E, Ratio-
nalis erit. Quoniam verò duarum linearum B E, F E, longitudine commensurabilium, ipsa B E,
longitudine incõmensurabilis est ipsi D E; (quòd B E, D E, Rationales sint potentia solùm com-
e 14. decimi mensurabiles) e erit quoque altera F E, eidem D E, incommensurabilis longitudine. Sed & vtra-
que F E, D E, Rationalis est ostensa. Rationales ergo sunt F E, D E, potentia solùm commensura-
f 74. decimi biles. Quare reliqua F D, f Apotome est; Atque adeò Irrationalis. Ostensa est autem & Ratio-
nalis. Quod est absurdum. Non ergo A, Apotome existens eadem est, quæ ex binis nominibus.
Quod demonstrandum erat.

## COROLLARIVM.

*EX demonstratis quoque facilè colligere licebit, Apotomen, & cæteras ipsam consequentes Irrationales lineas, neque Mediæ, neque inter se esse easdem.*

a 23. decimi. *QVADRATVM enim Mediæ ad Rationalem lineam applicatum, a latitudinem efficit Rationalem, ipsi Rationali longitudine incommensurabilem.*

b 98. decimi. *AT quadratũ Apotomæ ad Rationalem applicatũ, b latitudinẽ efficit Apotomen primã.*

c 99. decimi. *ET quadratum Mediæ Apotomæ primæ ad Rationalem applicatum, c latitudinem efficit Apotomen secundam.*

d 100. decimi. *QVADRATVM verò Mediæ Apotomæ secundæ ad Rationalem applicatum, d latitudinem efficit Apotomen tertiam.*

e 101. decimi. *QVADRATVM deinde Minoris ad Rationalem applicatum, e latitudinem efficit Apotomen quartam.*

*AT verò quadratum eius, quæ cum Rationali Medium totum efficit, ad Rationalem applicatum,* f 102. decimi. *f latitudinem efficit Apotomen quintam.*

*QVADRATVM denique eius, quæ cum Medio Medium totum efficit, ad Rationalem*
g 103. decimi. *applicatum, g latitudinem efficit Apotomen sextam.*

*ITAQVE cùm hæ latitudines differant & à latitudine Mediæ, & inter se; à latitudine quidem Mediæ, quòd hæc Rationalis sit, illæ verò Irrationales; inter se autem, quòd ordine non sint eadem Apotomæ: Manifestum est, Apotomen, & reliquas Irrationales ipsam consequentes, & à Media, & inter se se differre.*

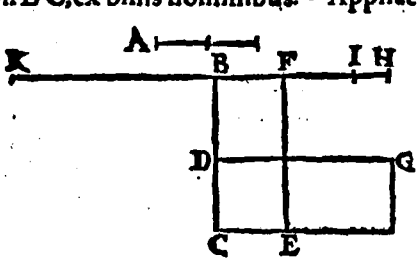
*QVONIAM verò in hoc theoremate demonstrauimus, Apotomen eandem non esse, quæ ex binis nominibus: Et quadrata Apotomæ, & cæterarum quinque Irrationalium eam consequentium, ad Rationalem applicata, latitudines efficiunt Apotomen primam, secundam, tertiam, quartam, quintam, & sextam: At verò quadrata eius, quæ ex binis nominibus, & reliquarum quinque Irrationalium, quæ ipsam sequuntur, ad Rationalem applicata, latitudines efficiunt ex binis nominibus primam, secundam, tertiam, quartam, quintam, ac sextam; liquidò cõstat, latitudines Apotomæ, & aliarum Irrationalium, quæ post ipsam, easdem nõ esse latitudinibus eius, quæ ex binis nominibus, & reliquarum post ipsam Irrationalium; quandoquidem nulla Apotome eadem est, quæ ex binis nominibus aliqua. Igitur & Apotome, & quæ ipsam sequuntur, differũt ab ea, quæ ex binis nominibus, & quæ post ipsam. Quam obrem cùm & tam illa, quàm hæ à Media differant; efficitur, Rationali quapiam expositа tredecim numero esse lineas Irrationales inter se se differentes, de quibus hactenus disputauimus; Hæ scilicet.*

1. Media.
2. Ex binis nominibus, cuius ſex ſunt ſpecies inuentæ.
3. Ex binis Mediis prima.
4. Ex binis Mediis ſecunda.
5. Maior.
6. Rationale ac Medium potens.
7. Bina Media potens.
8. Apotome, cuius etiam ſpecies ſex ſunt repertæ.
9. Mediæ Apotome prima.
10. Mediæ Apotome ſecunda.
11. Minor.
12. Cum Rationali Medium totum efficiens.
13. Cum Medio Medium totum efficiens.

## THEOR. 89. PROPOS. 113. 112.

QVADRATVM Rationalis ad eam, quæ ex binis nominibus, applicatum, latitudinem facit Apotomen, cuius nomina commenſurabilia ſunt nominibus eius, quæ eſt ex binis nominibus, & in eadem proportione; & adhuc Apotome, quæ fit, eundem habet ordinem, quem ea, quæ eſt ex binis nominibus. 90.

SIT Rationalis A, & ex binis nominibus B C, cuius maius nomen B D, [a] & ad B C, applicetur rectangulum B E, æquale quadrato ex A, latitudinem faciens B F. Dico B F, eſſe Apotomen, cuius nomina, hoc eſt, tota linea, & ipſi congruens, commenſurabilia ſunt nominibus B D, D C, ipſius B C, ex binis nominibus; & in eadem proportione; & adhuc Apotomen B F, eſſe ordine eandem ipſi B C, ex binis nominibus. [b] Applicetur enim rurſus ad D C, minus nomen, rectangulum C G, æquale eidem quadrato ex A; atq; adeò rectangulo B E, latitudinem faciens D G; ſitque ipſi D G, æqualis B H. Et quoniá æqualia ſunt B E, C G; [c] erit vt B C, ad D C, ita D G, hoc eſt, ſibi æqualis B H, ad B F. Et diuidendo vt B D, ad D C, ita H F, ad F B: Eſt autem B D, maior, quàm D C. Igitur & H F, maior eſt, quàm F B. Ponatur F I, ipſi F B, æqualis; [d] & fiat vt H I, ad I F, ita F B, ad B K. Erit ergo componendo vt H F, ad I F, hoc eſt, ad ſibi æqualem B F, ita F K, ad B K. Oſtenſum eſt autem eſſe vt H F, ad B F, ita B D, ad D C. Igitur erit quoque vt B D, ad D C, ita F K, ad B K. At B D, D C, (cùm ſint nomina ipſius B C, ex binis nominibus) Rationales ſunt potentia tantùm commenſurabiles. [e] Igitur & F K, B K, potentia ſolùm commenſurabiles ſunt.




a 45. primi

b 45. primi.

c 14. vel 16. ſexti.

d 12. ſexti.

e 10. decimi.

RVRSVS quia eſt vt H F, ad B F, ita F K, ad B K, [f] erunt quoque H F, F K, antecedentes ſimul, nempe tota H K, ad B F, & B K, conſequentes ſimul, hoc eſt, ad totam F K, vt F K, ad B K. Ac propterea F K, media proportionalis eſt inter H K, B K. Quare vt H K, prima ad B K, tertiam, ita erit, per coroll. propoſ. 20. lib. 6. quadratum ex H K, prima ad quadratum ex F K, ſecunda. Quia verò C G, cùm Rationale ſit, (eſt enim quadrato Rationalis A, æquale) ad Rationalem D C, applicatũ, [g] facit D G, latitudinem Rationalem, ipſi D C, longitudine commenſurabilem; Erit quoque H B, ipſi D G, æqualis, Rationalis & longitudine commenſurabilis ipſi D C. Et quoniam oſtenſum eſt, eſſe vt B D, ad D C, ita F K, ad B K: Vt autem F K, ad B K, ita H K, ad F K; erit quoque vt B D, ad D C, ita H K, ad F K. [h] Igitur vt quadratum ex B D, ad quadratum ex D C, ita quadratum ex H K, ad quadratum ex F K. At quadratum ex B D, commenſurabile eſt quadrato ex D C, (quòd rectæ B D, D C, ſint Rationales potentia commenſurabiles, cùm ſint nomina ipſius B C, ex binis nominibus.) [i] Commenſurabile igitur erit quoque quadratum ex H K, quadrato ex F K. Sed fuit vt quadratum ex H K, ad quadratum ex F K, ita recta H K, ad B K. [k] Igitur longitudine commenſurabilis eſt H K, ipſi B K; atque adeò & reliquæ B H, ex coroll. propoſ. 16. huius lib. Oſtenſa eſt autem B H, Rationalis. Igitur & H K, illi commenſurabilis, Rationalis eſt; ac propterea & B K, ipſi H K, cõmenſurabilis, Rationalis exiſtit. Cùm ergo oſtenſa ſit F K, ipſi B K, potentia ſolùm commenſurabilis, erit quoq; F K, Rationalis. Quare cùm F K, B K, Rationales ſint, & potentia tantùm oſtenſæ commenſurabiles, [l] erit reliqua B F, Apotome, & ei congruens B K. Quod eſt primum.

f 12. quinti.

g 21. decimi.

h 22. ſexti.

i 10. decimi

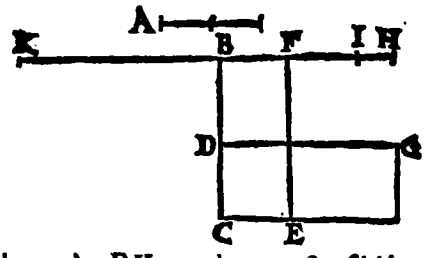
k 10. decimi

l 74. decimi

QVONIAM verò oſtenſum eſt, eſſe rectam H K, totam parti B K, longitudine commenſurabilem, [m] erunt propterea & B K, B H, longitudine inter ſe commenſurabiles. Cùm ergo B H, oſtenſa ſit longitudine cõmenſurabilis ipſi D C; erit quoque B K, ex ſcholio propoſ. 12. huius lib. eidem

m 16. decimi

D C, longitudine commensurabilis. Rursus quia demonstratum est, esse vt B D, ad D C, ita F K, ad B K; & permutando vt B D, ad F K, ita D C, ad B K: Sunt autem modò D C, B K, ostensæ longi-
a 10. decimi. tudine commensurabiles; a Erunt quoque B D, F K, commensurabiles longitudine. Itaque cùm F K, ipsi B D, & B K, ipsi D C, longitudine sit commensurabilis, erunt ipsius Apotomæ B F, nomina F K, B K, nominibus B D, D C, ipsius B C, ex binis nominibus, longitudine commensurabilia. Quod est secundum.



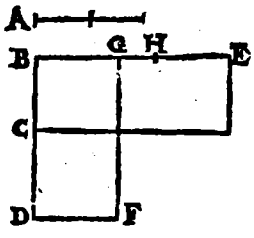

Item quia demonstrauimus esse vt B D, ad D C, ita F K, ad B K; erunt idcirco Apotomæ nomina F K, B K, in eadem ratione cum B D, D C, nominibus ipsius B C, quæ est ex binis nominibus. Quod est tertium.

Postremo, vel B D, plus potest, quàm D C, quadrato rectæ sibi longitudine commensurabilis, vel incommensurabilis. Si plus potest B D, quàm D C, quadrato rectæ sibi longitudine commensurabilis; cùm
b 15. decimi. sit vt B D, ad D C, ita F K, ad B K; b poterit quoq; F K, plus quàm B K, quadrato rectæ sibi longitudine commensurabilis: Et si B D, plus potest quàm D C, quadrato rectæ sibi longitudine incommensurabilis; poterit & F K, plus quàm B K, quadrato rectæ sibi longitudine incommensurabilis. Et si quidem B D, expositæ Rationali fuerit longitudine commensurabilis; erit & F K, quæ longitudine ostensa est commensurabilis ipsi B D, commensurabilis longitudine eidem Rationali, per ea, quæ in scholio propos. 12. huius lib. demonstrauimus. Si verò D C, sit Rationali commensurabilis longitudine; erit & eadem ratione B K, eidem Rationali longitudine commensurabilis. Si deniq; neutra ipsarum B D, D C, sit Rationali longi-
c 14. decimi. tudine commensurabilis; c erit quoque neutra ipsarum F K, B K, commensurabilis longitudine Rationali. Igitur eadem ordine est Apotome B F, ipsi B C, ex binis nominibus, vt constat ex definitionibus secundis, atque tertiis. Quod est quartum. Quadratum ergo Rationalis ad eam, quæ ex binis nominibus, &c. Quod demonstrandum erat.

## 113. THEOR. 90. PROPOS. 114.

Quadratvm Rationalis ad Apotomen applicatum, latitudinem facit eam, quæ ex binis nominibus, cuius nomina commensurabilia sunt Apotomę nominibus, & in eadem proportione; & adhuc, quę ex binis nominibus fit, eundem habet ordinem, quem ipsa Apotome.

d 45. primi. Sit Rationalis A, & Apotome B C, cui congruat C D, d & ad B C, applicetur rectangulũ C E, æquale quadrato ex A, latitudinem faciens B E. Dico B E, esse ex binis nominibus, cuius nomina commensurabilia sunt nominibus B D, C D, Apotomæ B C, & in eadem proportione; & adhuc
e 45. primi. ipsam B E, ex binis nominibus, esse ipsi B C, Apotomæ ordine eandem. e Applicetur enim rursus ad B D, totam, rectangulum B F, æquale eidem quadrato ex A, hoc est, ipsi C E, latitudinẽ faciens
f 14. vel 16. sexti. B G: Et quoniam B F, C E, æqualia sunt; f erit vt B E, ad B G, ita B D, ad B C; & per conuersionem rationis, vt B E, ad G E, ita B D, ad C D. Secetur quoque E G, ad H, secundùm proportionem B E, ad G E, ex iis, quæ in schol. propos. 10. lib. 6. conscripsimus; vt sit E H, ad H G, quemadmodum B E, ad G E. Quia igitur est vt B E, tota ad G E, totam, ita E H, ex B E, ablata ad H G, ex G E, ablatam; erit quoque B H, reliqua ipsius B E; ad H E, reliquam ipsius G E, vt tota B E, ad totam G E: Erat autem vt B E, ad G E; ita E H, ad H G. Erit igitur quoque vt B H, ad H E, ita E H, ad G H; atque adeò H E, media proportionalis est inter B H, G H. Quare erit vt B H, prima ad G H, tertiam, ita quadratum ex B H, prima ad quadratum ex H E, secundæ, per coroll. propos. 20. lib. 6. Quia verò fuit vt B D, ad C D, ita B E, ad G E, hoc est, B H, ad H E: & sunt B D, C D, cùm sint nomina Apotomæ B C, Rationales potentia tantùm commensurabiles:
g 10. decimi & Erunt quoq; B H, H E, potentia solùm commensurabiles; Ac propterea quadrata ex B H, H E, commensurabilia. Igitur rectæ B H, G H, eandem habentes rationem cum quadratis ex B H, H E,
h 10. decimi vt demonstrauimus, h longitudine sunt commensurabiles; Ac propterea tota B H, longitudine commensurabilis existens parti G H, commensurabilis quoque longitudine erit parti reliquæ B G, ex coroll. propos. 16. huius libri. At verò cùm B D, Rationalis sit, nempe maius nomen Apo-
i 21. decimi. tomæ B C; & rectangulum B F, quadrato ex Rationali linea A, æquale, Rationale; i erit latitudo B G, Rationalis commensurabilis longitudine ipsi B D. Igitur ex scholio propos. 12. huius lib. & B H, eidem B D, Rationali commensurabilis est longitudine, atque adeò Rationalis existit; quandoquidem B H, B G, longitudine commẽsurabiles sunt ostensæ. Quia verò B H, H E, ostensæ sunt commensurabiles potentia tantùm, & B H, Rationalis; erit quoque H E, illi commensurabilis,
k 37. decimi Rationalis. Rationales ergo sunt B H, H E, potentia solùm commensurabiles; k Ac propterea B E, ex binis nominibus est. Quod est primum.




Quoniam verò ostendimus esse B H, ad H E, vt B D, ad C D; atque adeò permutando B H,
l 10. decimi. ad B D, vt H E, ad C D; Ostensa est autem B H, ipsi B D, longitudine commensurabilis; l erit

quoque

quoque HE, ipſi CD, commenſurabilis longitudine. Quare BH, HE, nomina ipſius BE, ex binis nominib⁹, cómenſurabilia ſunt lógitudine nominib⁹ BD, CD, Apotomę BC. Quod eſt ſecundũ.

IMMO & in eadem proportione, cùm demonſtratum ſit eſſe BH, ad HE, vt BD, ad CD. Quod eſt tertium.

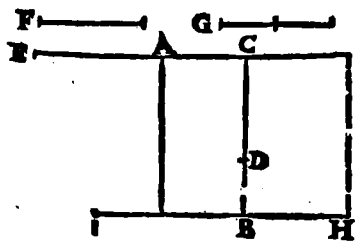
POSTREMO vel BD, plus poteſt quàm CD, quadrato rectæ ſibi longitudine commenſurabilis, vel incommenſurabilis. Si plus poteſt quadrato rectæ ſibi longitudine commenſurabilis, [a] poterit quoq; BH, plus quàm HE, quadrato rectæ ſibi commẽſurabilis longitudine: Et ſi BD, plus poteſt, quàm CD, quadrato rectæ ſibi longitudine incommenſurabilis; poterit etiam BH, plus quàm HE, quadrato rectæ longitudine ſibi incommenſurabilis. Et ſi quidem BD, Rationali expoſitæ longitudine ſit commenſurabilis; erit quoque BH, commenſurabilis exiſtens longitudine ipſi BD, eidem Rationali longitudine commenſurabilis, ex ſcholio propoſ. 12. huius lib. Si verò CD, longitudine ſit commenſurabilis Rationali; erit & eadem ratione HE, eidem Rationali longitudine commenſurabilis. Si verò neutra ipſarum BD, CD, commenſurabilis ſit longitudine Rationali expoſitæ; [b] erit quoq; neutra ipſarum BH, HE, eidem Rationali longitudine commenſurabilis. Igitur ex ſecundis, atque tertiis definitionibus, ipſa BE, ex binis nominibus, ordine eadem eſt ipſi Apotomæ BC. Quod eſt quartum. Quadratum ergo Rationalis ad Apotomen applicatum, latitudinem facit eam, quæ ex binis nominibus, cuius nomina commenſurabilia ſunt Apotomæ nominibus, & in eadem proportione, &c. Quod erat demonſtrandum.

[a] 15. decimi

[b] 14. decimi

## THEOR. 91. PROPOS. 115. 114. 0.

SI ſpatium contineatur ſub Apotoma, & ea, quæ ex binis nominibus, cuius nomina commenſurabilia ſunt nominibus Apotomæ, & in eadem proportione; Recta linea ſpatium potens, eſt Rationalis.




CONTINEATVR ſpatiũ AB, ſub Apotoma AC, & ſub CB, ex binis nominibus, cuius nomina CD, DB, commenſurabilia ſint nominibus CE, AE, Apotomæ AC, & in eadem ratione, nempe CD, ad DB, vt CE, ad AE. Poſsit autem recta F, ſpatiũ AB. Dico F, eſſe Rationalem. Expoſita enim Rationali G, [c] applicetur ad CB, quæ ex binis nominibus, rectangulum CH, æquale quadrato ex G. [d] Erit ergo latitudo BH, Apotome, cuius nomina HI, BI, longitudine commenſurabilia ſunt nominibus CD, DB, & in eadem ratione, nimirum HI, ad BI, vt CD, ad DB; atque adeò vt CE, ad AE, & permutando, vt tota HI, ad totam CE, ita ablata BI, ad ablatam AE. [e] Erit ergo & reliqua BH, ad reliquam AC, vt tota HI, ad totam CE: [f] Commenſurabilis autem eſt longitudine HI, ipſi CE, quòd vtraque HI, CE, commenſurabilis fuerit longitudine ipſi CD. [g] Igitur & BH, ipſi AC, longitudine eſt commenſurabilis; [h] Atque idcirco & HC, ipſi BA, commenſurabile erit, [i] cùm ſit vt HB, ad AC, ita HC, ad BA: Sed HC, quadrato Rationalis G, æquale, Rationale eſt. Igitur & BA, illi commenſurabile, Rationale erit, propterea{que} & recta F, ipſum BA, potens, Rationalis erit. Quapropter ſi ſpatium contineatur ſub Apotoma, & ea, quæ ex binis nominibus, cuius nomina cómenſurabilia ſunt nominibus Apotomæ, & in eadem proportione; Recta linea ſpatiũ potẽs, eſt Rationalis. Quod erat demonſtrandũ.

[c] 45. primi.

[d] 113. decimi

[e] 19. quinti.

[f] 12. decimi

[g] 10. decimi

[h] 10. decimi

[i] 1. ſexti.

### COROLLARIVM.

*Ex hoc manifeſtum eſt, fieri poſſe, vt ſpatium Rationale contineatur ſub duabus rectis Irrationalibus. Nam ſpatium AB, contentum ſub AC, CB, Apotoma, & ex binis nominibus, quæ Irrationales ſunt, oſtenſum eſt Rationale eſſe.*

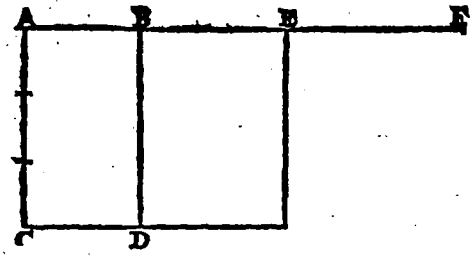
### SCHOLIVM.

*IN proximis autem tribus propoſitionibus intelligenda ſunt nomina Apotomæ nominibus eius, quæ ex binis nominibus, commenſurabilia eſſe longitudine. In prioribus enim duabus, longitudine oſtenſa ſunt eſſe commenſurabilia; In poſteriori verò, nempe in hac 115. nihil colligetur, ſi nomina CD, DB, nominibus CE, AE, potentia tantùm commenſurabilia ponantur. Id quod facile ex demonſtrationibus harum trium propoſitionum apparet.*

## THEOR. 92. PROPOS. 116. 115. 107.

A MEDIA infinitæ Irrationales fiunt, & nulla alicui antecedentium eſt eadem.

SIT Media AB. Dico ex illa fieri Irrationales infinitas, quarum nulla eadem ſit alicui illarum tredecim antecedentium, de quibus in coroll. propoſ. 112. huius lib. Expoſita enim Rationali AC, contineatur ſub AB, Media, & Rationali AC, ſpatium AD. Eſt ergo AD, ſpatium ſub Rationali AC, & Irrationali AB, contentum, Irrationale, ex lemmate propoſ. 38. huius lib. Poſsit ipſum recta BE, quæ ex defin. 11. Irrationalis erit. Dico BE, non eſſe eandem alicui tredecim illarum, quas in coroll. propoſ. 112. huius lib. collegimus. Nam cùm quadratum Mediæ ad Rationalem AC, appli-




a 23. decimi catum, a latitudinem faciat Rationalem ipsi AC, longitudine incommensurabilem: Et quadrata reliquarum duodecim Irrationalium, ad eâdem Rationalem AC, applicata, faciant latitudines vel ex binis nominibus, vel Apotomas, vt constat ex propos. 61.62.63. 64.65.66.98.99.100.101.102.& 103. huius lib. At verò quadratum huius Irrationalis BE, ad eandem Rationalem AC, applicatum, faciat AB, latitudinem Mediam; perspicuum est, Irrationalem BE, ab omnibus illis tredecim differre; quandoquidem eius quadratum ad Rationalem lineam applicatum, latitudinem facit differentem à latitudinibus, quas quadrata illarum tredecim linearum ad eandem Rationalem applicata efficiunt.

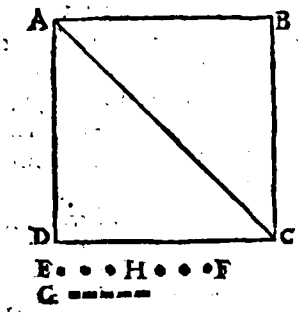
QVOD si compleatur rectangulum DE; erit & hoc contentum sub Rationali BD, & Irrationali BE, Irrationale, ex dicto lemmate propos. 38. Possit ergo ipsum recta EF, quæ ex defin. 11. Irrationalis erit. Dico rursus EF, non esse eandem alicui illarum tredecim, vel etiam ipsi BE. Hoc autem manifestum est, cùm quadratum ipsius EF, ad Rationalem applicatum, latitudinem faciat BE. At quadrata illarum tredecim, & quadratum etiam ipsius BE, latitudines faciant, si ad eandem Rationalem applicentur, differentes à BE, vt demonstratum est. Eodem modo & aliæ Irrationales infinitæ inuenientur & inter se, & à dictis differentes. Quocirca à Media infinitæ Irrationales fiunt, &c. Quod demonstrandum erat.

118. 7.

## THEOR. 93. PROPOS. 117.

PROPOSITVM sit nobis ostendere, in quadratis figuris diametrum lateri incommensurabilem esse longitudine.

SIT quadratum ABCD, in quo diameter AC. Dico diametrum AC, longitudine incommensurabilem esse lateri AB. Si enim non est incommensurabilis, commensurabilis erit longitudine;
b 5. decimi. b ac propterea AC, AB, proportionem habebunt, quam numerus ad numerum. Habeat AC, ad AB, proportionem, quam numerus EF, ad numerum G; sintque numeri EF, & G, minimi omnium eandem proportionem habentium. Quoniam ergo est vt AC, ad AB, ita numerus EF, ad numerum G; Erit quoque vt quadratum ex AC, ad quadratum ex AB, ita quadratus numerus
c 20. sexti, & 11. octani ex EF, ad quadratum numerum ex G, (c Cùm enim quadrata habeant suorum laterum proportionem duplicatam; latera autem æquales habeant proportiones; erunt proportiones quadratorum æquales etiam, cùm sint æqualium duplicatæ.) Sed quadratū ex AC, duplum est quadrati ex AB, per ea, quæ in scholio propos. 47. lib. 1. ostendimus. Igitur & quadratus numerus ex EF, duplus erit quadrati numeri ex G; Ac propterea quadratus numerus ex EF, cùm dimidium habeat, atque adeò bifariam possit diuidi, par erit, ex defin.




Igitur & ipse EF, illum producens, par erit. (Si namque impar esset, cùm se ipsum multiplicans producat suum quadratum, esset & quadratus ipse impar;
d 29. noni. d eo quòd impar imparem multiplicans imparem procreat. Quod est absurdum. ostensus est enim par.) Quia verò EF, & G, in sua proportione minimi,
e 24. septimi e inter se primi sunt; & EF, ostensus est par, erit G, impar. (Si enim par etiam esset, metiretur vtrumq; EF, & G, binarius; atque adeò non essent inter se primi. Quod est absurdum.) Diuidatur iam par numerus EF, bifariam in H. Quia igitur numerus EF, duplus est
f 11. octani. numeri EH; f & quadrati habent proportionem laterum duplicatam; erit quadratus ex EF, quadruplus quadrati ex EH. (Quadrupla enim proportio duplicata est proportionis duplæ, vt in his numeris apparet, 4.2.1.) Itaq; cùm quadratus ex EF, duplus sit quadrati ex G; & quadruplus quadrati ex EH; qualium partium 4. est quadratus ex EF, talium 2. erit quadratus ex G; & talium 1. quadratus ex EH. Quadratus igitur ex G, duplus est quadrati ex EH, cùm illius ad hunc proportio sit, quæ 2. ad 1. ac proinde, vt suprà de numero EF, diximus, erit quadratus ex G, dimidium habens par, & ipse quoque G, par. Sed & impar est ostensus. quod est absurdum. Non ergo longitudine commensurabilis est diameter AC, lateri AB. Igitur incommensurabilis longitudine.

ALITER. Sit, si potest fieri, diameter AC, commensurabilis longitudine lateri AB; habeantq; AC, AB, proportionem, quam numeri EF, & G, qui minimi sint in sua proportione; atque adeò inter se primi. Non erit igitur G, vnitas. (Cùm enim quadratum ex AC, duplum sit quadrati ex AB; sit autem vt quadratum ex AC, ad quadratum ex AB, ita quadratus numerus ex EF, ad quadratum numerum ex G, vt in priori demonstratione diximus; erit quoque quadratus ex EF, duplus quadrati ex G. Si ergo G, est vnitas, atque adeò & quadratus ex ea, vnitas; erit quadratus ex EF, binarius. Quod est absurdum.) Ergo numerus. Et quia, vt iam est demonstratum, quadra-
g 14. octani. tus ex EF, duplus est quadrati ex G; metietur quadratus ex G, quadratum ex EF; g ac propterea & G, latus, metietur latus EF. Cùm ergo & G, se ipsum metiatur; erunt numeri EF, & G, inter se compositi, habentes mensuram communem, numerum G; Sed & inter se primi sunt. Quod est absurdum,

absurdum. Non ergo commensurabilis est diameter AC, longitudini lateri AB. Quare ostendimus, in quadratis figuris diametrum lateri incommensurabilem esse longitudine. Quod erat demonstrandum.

## SCHOLIVM.

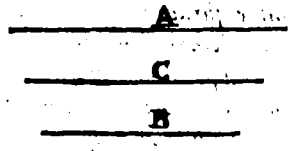
SED & affirmatiuè hoc idem theorema demonstrabimus, hoc modo. Quoniam ex iis, quæ in scholio propos. 47. lib. 1. demonstrata à nobis sunt, quadratum diametri duplum est quadrati ex latere descripti; habebit quadratum ex diametro ad quadratum ex latere proportionem, 2. ad 1. vel 4. ad 2. vel 8. ad 4. &c. Et quia sumptis in proportione dupla quotcunque numeris ab vnitate 1. 2. 4. 8. 16. 32. 64. &c.

1. 2. 4. 8. 16. 32. 64. [a] solùm tertius ab vnitate quadratus est, & cæteri omnes vnum intermittentes; quòd primus ab vnitate, nempe 2. quadratus non sit; erunt solùm hi numeri 4. 16. 64. quadrati; reliqui verò 2. 8. 32. non quadrati. Quare cùm 4. quadratus sit, & 2. non quadratus, non habebit 4. ad 2. proportionem, quam quadratus ad quadratum; ([b] aliàs & 2. quadratus esset.) ac propterea neque quadratum ex diametro ad quadratum lateris proportionem habebit, quam numerus quadratus ad numerum quadratum. [c] Incommensurabilis ergo est diameter longitudine ipsi lateri. Quod est propositum.

a 10. noni.
b 24. octaui
c 9. decimi

HOC etiam theorema aliter demonstrauimus ad finem defin. 8. lib. 5. & in scholio propos. 8. lib. 8. & in scholio propos. 9. huius libri.

CÆTERVM in exemplaribus Græcis reperitur hoc loco appendix quædam, cuius intelligentia ex sequentibus Stereometriæ libris pendet, vt meritò omitti posset. Verùm quia in ea cõtinetur doctrina non contemnenda ad commensuralitatem omnium magnitudinum, & incommensurabilitatem pertinens; visum est, eam paucis explicare, assignando more nostro solito in margine loca Stereometriæ, quæ ad demonstrationem eorum, quæ hic dicuntur, necessaria sunt. Est igitur appendix hæc.




INVENTIS lineis rectis longitudine incommẽsurabilibus, inueniuntur & aliæ quam plurimæ magnitudines, planæ scilicet, atq; solidæ incommensurabiles inter se. Sint enim rectæ A, B, longitudine inter se incommensurabiles, inter quas media proportionalis sit C. Quoniam igitur ex coroll. propos. 20. lib. 6. vt A, ad B, ita est figura rectilinea quæuis super A, constituta ad figuram rectilineam sibi similem, similiterq; positam super C; & sunt A, & B, longitudine incommensurabiles; [d] erunt rectilineæ illæ figuræ super A, & C, incommensurabiles.

d 10. deci.

RVRSVS [e] quoniam circuli, quorum diametri A, C, proportionem habent, quam quadrata ex A, & C, descripta: Quadrata autem hæc, cùm sint figuræ rectilineæ similes, similiterq; posita, proportionem habent, quam rectæ A, & B, ex coroll. propos. 20. lib. 6. [f] Habebunt quoque circuli diametrorum A, C, eandem proportionem, quam rectæ A, B: Sed rectæ A, B, incommensurabiles sunt longitudine. [g] Igitur & circuli diametrorum A, C, incommensurabiles sunt.

e 2. duodecimi.
f 11. quinti.
g 10. deci.

IAM verò si constituantur solida, nempe pyramides, vel prismata eiusdem altitudinis, quorum bases sint figuræ rectilineæ similes, similiterq; descriptæ super A, C, [h] habebunt pyramides, atque prismata eandem proportionem, quam bases, hoc est, quam rectilineæ illæ figuræ. Quare cùm rectilineæ illæ figuræ incommensurabiles sint, vt modò est demonstratum; [i] incommensurabilia etiam erunt ipsa solida, nimirum pyramides, & prismata.

h 5. 6. vel 7. duodecimi
i 10. decimi

QVOD si coni, vel cylindri æquè alti fabricentur, quorum bases circuli sint diametrorum A, C, [k] habebunt huiusmodi coni, & cylindri eandem proportionem cum basibus, hoc est, cum illis circulis. Cùm ergo circuli ostensi sint incommensurabiles; [l] Erunt quoque incommensurabiles dicti coni, & cylindri. Inuenta sunt igitur non solùm lineæ, & superficies incommensurabiles, verùm etiam & corpora, siue solida incommensurabilia. Quod est propositum.

k 11. duodecimi.
l 10. decimi

EADEM autem ratione, si rectæ A, & B, longitudine commensurabiles sint, [m] ostendemus earum figuras rectilineas similes, similiterq; descriptas, necnon & ipsarum circulos, commensurabiles esse, [n] atque adeò & earundem pyramides, & prismata; ac denique conos, & cylindros; si modò eandem habeant altitudinem, vt perspicuum est.

m 10. deci.
n 5. 6. 7. & 11. duodecimi.

FINIS ELEMENTI DECIMI.

EVCLIDIS

# ELEMENTVM VNDECIMVM:

## & Solidorum primum.

## DEFINITIONES.

### I.

SOLIDVM est, quod longitudinem, latitudinem, & crassitudinem habet.

POSTQVAM Euclides in prioribus sex libris abundè de ea Geometriæ parte disseruit, quæ circa plana versatur, sibiq; nomen Geometriæ, tanquam propriam, vsurpauit; in subsequentibus verò tribus diligenter ea de passionibus numerorum docuit, quæ necessaria videbantur ad intelligendam doctrinam linearum commensurabilium, atque incommensurabilium, quas idcirco luculentissimè in libro decimo deinde exposuit, vt constructio, atque natura quinque corporũ regularium, de quibus in postremis tribus libris, nimirum in 13 14. & 15. subtilissimè disseritur, perfectius posset cognosci: Nunc tandem aggreditur in hoc libro vndecimo, eam partem Geometriæ, quæ corpora, siue solida considerat proprioq; vocabulo Stereometria est appellata.

EXPLICAT autem prius, more suo, voces ad eam rem pernecessarias, quarum prima est: Solidum, siue corpus: nempe tertium genus quantitatis. Docet igitur eam quantitatem, quæ præter longitudinem latitudinemq; sortita est crassitudinem, seu profunditatem, ita vt tres dimensiones possideat, vnam quidem secundùm longitudinem, aliam verò secundùm latitudinem, & tertiam secundùm profunditatem, seu crassitudinem, altitudinemue, appellari solidum, siue corpus: quemadmodum quantitas longitudinem tantùm habens, linea; quæ verò longitudini latitudinem adiicit, superficies vocatur, vt in primo lib. diximus.

PORRO quemadmodum Mathematici, vt rectè intelligamus lineam, præcipiunt, vt imaginemur punctum aliquod è loco in locum moueri; hoc enim describit vestigium quoddam longum tantùm, hoc est, lineam, propterea quòd punctum omne est magnitudinis expers; vt autem percipiamus superficiem, monent, vt intelligamus lineam aliquam in transuersum moueri; hæc enim describet vestigium longum & latum duntaxat; longum quidem propter longitudinem lineæ, latum verò propter motum illum, qui in transuersum est factus; carens autem profunditate, quòd & linea illius sit expers: Ita quoque, vt nobis ob oculos ponant corpus, seu solidum, hoc est, quantitatem trina dimensione præditam, consultum, vt concipiamus superficiem aliquam æqualiter eleuari; siue in transuersum moueri; hac enim ratione describetur vestigium quoddam longum, latum, atque profundum; longum quidem & latum, ob superficiem, quæ longa & lata existit; profundum verò seu crassum, propter eleuationem illam, seu motum superficiei. Hæc ergo quantitas, solidum siue corpus vocatur. Neque verò alia quantitas quarta distincta à linea, superficie, & corpore reperiri potest, propterea quòd triplex tantùm dimensio possit assignari, vt perspicuè in cõmentariis, quos in Sphæram Ioannis de Sacro Bosco conscripsimus, à nobis fuit demonstratũ ex Ptolemæo in libello de Analemate.

### II.

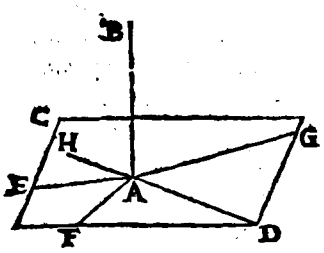
SOLIDI autem extremum, est superficies.

QVEMADMODVM linea finita in extremitatibus puncta, superficies verò lineas recipit, vt in 1. lib. docuit; ita nunc ait Solidi finiti extremum esse superficiem. Cùm enim solidum, siue corpus efficiatur ex illo motu imaginario superficiei; perspicuum est extremas partes illius esse superficies.

### III.

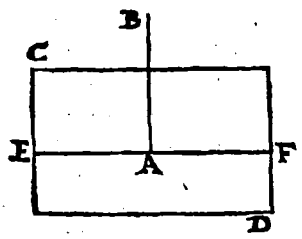
LINEA recta est ad planum recta, cùm ad rectas omnes lineas, à quibus illa tangitur, quæque in proposito sunt plano, rectos angulos efficit.

VT linea recta A B, plano C D, insistens, ita vt B, punctum sit in sublimi extra planum C D, at punctum A, in ipso plano, tùm demum dicetur recta, seu perpendicularis ad planum C D, cùm rectos effecerit angulos cum lineis A E, A F, A D, A G, & cum omnibus aliis, quæ in eodem existentes plano ipsam tangunt in puncto A. Hac enim ratione fiet, vt A B, æqualiter insistat plano C D, & non magis in vnam partem, quam in aliam



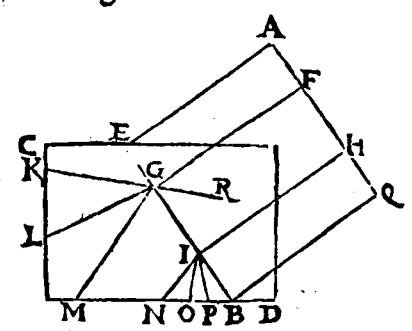

*in aliam inclinet. Nam producta recta D A, ad H, cùm angulus B A D, ponatur rectus, erit quoque ei deinceps B A H, rectus, ideóque illi æqualis. Eadémque ratione protractæ qualibet linea in plano C D, faciet A B, cum illa duos angulos æquales. Ac propterea æquabiliter ipsi plano insistet. Quòd si fieri posset, vt A B, cum vna linea ex A, in plano C D, ducta, non efficeret angulum rectum, etiamsi cum aliis omnibus rectum angulum constitueret, non diceretur A B, recta ad planum C D. Itaque quando conceditur linea aliqua ad planum recta, concedendum quoque erit, eam cum omnibus in eodem plano ductis, quæ ipsam tangunt, rectos constituere angulos. Et è contrario, vt rectè concludatur, lineam quampiam esse ad planum datum rectam, demonstrandum erit prius, eam cum omnibus in eodem plano ductis, quæ ipsam tanguns, rectos angulos conficere.*

*Vt autem recta quæpiam plano cuicunque insistens rectos constituat angulos cum omnibus rectis in eodem plano ductis, ipsamq; tangentibus, satis est, vt cum duabus non efficientibus lineam vnam, sed se mutuò secantibus, si producantur, rectos angulos conficiat. Nam ex hoc rectè colligitur, eam cum omnibus aliis rectos quoque angulos efficere, vt perspicuum fiet ex propositione 4. huius lib. Dixi: cum duabus non efficientibus lineam vnam: quia si duæ linea componant vnam rectam lineam, non necessariò efficitur, lineam, quæ cum ipsis rectos angulos constituit, cum omnibus aliis rectos conficere angulos. Recta enim A B, insistat plano C D, efficiatq; rectos angulos cum duabus in eodem plano ductis A E, A F, quæ rectam vnam lineam componant. Dico A B, non propterea cum omnibus aliis rectos angulos constituere; atque idcircò non esse rectam ad planum C D. Hoc autem perspicuum est, cùm A B, circa E F, veluti axem, circumuerti queat, ita vt punctum B, modò sit plano propinquius, modò ab eodem remotius; nihilominus tamen ipsa cum E F, semper eosdem rectos angulos, & æquales conficiat. Quòd si eadem A B, cum duabus angulum componentibus, quales sunt A G, A D, in priori figura, rectos constituat angulos, tum demum cum omnibus aliis rectos angulos efficiet, vt diximus. Id quod dilucidè demonstrabitur propos. 4. huius libri.*




## IIII.

PLANVM ad planum rectum est, cùm rectæ lineæ, quæ communi planorum sectioni ad rectos angulos in vno planorum ducuntur, alteri plano ad rectos sunt angulos.

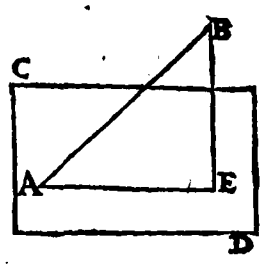



*Insistat planum A B, plano C D, ita vt linea A Q, sit in sublimi, hoc est, extra planum subiectum C D, at E B, in ipso eodem plano: Sit autem horum planorum communis sectio E B, quæ, vt demonstrabitur propositione 3. huius libri, recta erit linea. In hac autem sumptis quotcunque punctis G, I; ex ipsis in plano A B, ducantur G F, I H, perpendiculares ad communem sectionem E B. Si igitur linea F G, H I, ad planum alterum C D, rectæ fuerint, hoc est, rectos angulos effecerint cum lineis G K, G L, G M; I N, I O, I P, & cum aliis omnibus in plano C D, à punctis G, & I, ductis; dicetur planum A B, ad planum C D, rectum; quia hoc modo non magis in vnam partem inclinabit, quàm in alteram, sed æquabiliter illi insistet. Si enim K G, producatur ad R, cùm angulus F G K, ponatur rectus: erit & angulus ei deinceps F G R, rectus; ideoq; illi æqualis. Eademq; ratione, protracta qualibet alia linea in plano C D, fient vtrobique à lineis F G, H I, anguli æquales. Quare planum A B, æquabiliter plano C D, insistet. Quotiescunque igitur planum aliquod rectum esse conceditur ad planum aliud, concedendum quoque erit, lineas perpendiculares in vno eorum ad communem sectionem deductas, rectas quoq; esse ad alterũ planum. Et contrà, vt colligatur planum quodpiam ad aliud esse rectum, ostendendum prius erit, lineas perpendiculares in vno eorum ad communem sectionem ductas, rectas esse ad reliquum planum.*

## V.

RECTAE lineæ ad planum inclinatio est, cùm à sublimi termino rectæ illius lineæ ad planum deducta fuerit perpendicularis, atque à puncto, quod perpendicularis in ipso plano fecerit, ad propositæ illius lineæ extremum', quod in eodem est plano, altera recta linea fuerit adiuncta; est, inquam, angulus acutus insistente linea, & adiuncta comprehensus.

*Insistat recta A B, plano C D, non ad angulos rectos, sed inclinata, ita vt punctum B, sit extra pla-*

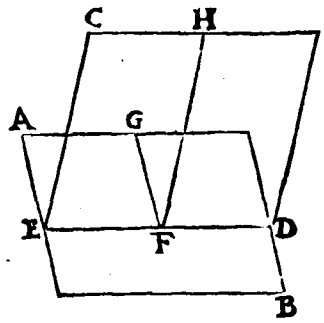



*num in ſublimi, punctum verò A, in plano. Deinde ex B, termino ſublimi recta A B, intelligatur ad idem planum deducta perpendicularis B E, faciens in plano punctum E; atq; ab E, ad A, adiungatur recta E A; erit q; neceſſariò angulus B A E, acutus,* [a] *cùm in triangulo A B E, duo anguli B A E, B E A, duobus ſint rectis minores, & angulus B E A, rectus. Angulus igitur acutus B A E, comprehenſus lineâ inſiſtente A B, & adiuncta A E, dicitur inclinatio recta A B, ad dictum planum C D; Ita vt tanta dicatur recta eſſe inclinatio lineæ A B, ad planum C D, quantus eſt dictus angulus acutus B A E.*

a 17. primi.

## V I.

**PLANI** ad planum inclinatio, eſt angulus acutus rectis lineis contentus, quæ in vtroque planorum ad idem communis ſectionis punctum ductę, rectos cum ſectione angulos efficiunt.




*PLANO namque A B, inſiſtat planum C D, ita vt pars ad C, ſit in ſublimi extra planum A B, & pars ad D, in ipſo plano A B, ſit q; C D, inclinatum ad A B; & communis eorum ſectio ſit D E. Si igitur ad D E, communem ſectionem ex eius puncto F, duæ perpendiculares ducantur; F G, quidem in plano A B, & F H, in plano C D; dicetur angulus acutus G F H, dictis rectis comprehenſus, inclinatio plani C D, ad planum A B, ita vt tanta eſſe dicatur inclinatio plani ad planum, quantus eſt dictus angulus acutus.*

*INTERDVM Geometra angulum G F H, dicunt angulum inclinationis plani C D, ad planum A B, ſiue is acutus ſit, ſiue rectus, obtuſúsve: quamquã propriè ſolùm angulus acutus inclinationem vnius plani ad alterum oſtendat, vt Euclides docet hoc loco: Rectus enim indicat potius æquabilem eleuationem vnius plani ſupra aliud, quàm inclinationẽ vnius ad alterum; obtuſus verò receſſum quodammodo vnius ab altero. Veruntamen quia quilibet horum angulorum commonſtrat ſitum, ſeu eleuationem vnius plani ſupra alterum, generaliter dici conſueuit à pleriſque angulus inclinationis omnis ille, qui comprehenditur duabus rectis lineis, quæ in vtroque plano ad aliquod vnum punctum communi illorum ſectionis ducuntur perpendiculares, cuiuſmodi eſt angulus G F H, ſiue is rectus ſit, ſiue acutus, ſiue obtuſus.*

## V I I.

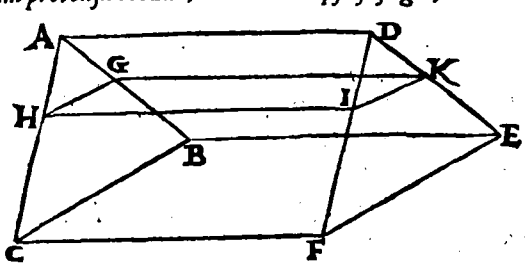
**PLANVM** ad planum ſimiliter inclinatum eſſe dicitur, atque alterum ad alterum, cùm dicti inclinationum anguli inter ſe fuerint æquales.

*NON obſcura eſt hæc definitio, præcedenti bene intellecta. Vnde planum ad planum magis inclinatum eſſe dicetur, cuius angulus inclinationis minor extiterit, atq; adeò à recto magis receſſerit.*

## V I I I.

**PARALLELA** plana ſunt, quæ inter ſe non conueniunt.

*INTELLIGE, in quamcunque partem, etiam infinitè, producantur; hoc eſt, ſiue ad dexteram, ſiue ad ſiniſtram, & ſiue ſurſum, ſiue deorſum, &c. Sunt enim quædam plana, quæ nec ad dexterã, nec ad ſiniſtram producta conueniunt; nec tamen ob id parallela ſunt dicenda; quia nimirum vel ſurſum, vel deorſum protracta, tandem coëunt. Nam ſi ſumatur tectum aliquod, cuius faſtigium intelligatur abſciſſum; remanentia duo plana non conuenient, quamuis producantur infinitè ad dexteram, & ad ſiniſtram: Sed tamen quia ſurſum protenſa coëunt, nimirum in ipſo faſtigio, idcircò non dicentur parallela.*




*SIT enim tectum quodpiam A B C D E F, contentum duobus planis A B E D, A C F D, cuius baſis B C F E; auferatur q; faſtigium A G H D K I. Quo facto, perſpicuũ eſt, reliqua plana G B E K, H C F I, non conuenire inter ſe, ſi ad partes G B, H C, vel ad partes K E, I F, producantur; nec tamen idcircò parallela dicentur, cùm producta ad partes G H, K I, conueniant in faſtigio A D. Vt igitur plana aliqua dicantur parallela, neceſſe eſt, vt in nullam partem producta inter ſe conueniant. Sicut autè lineæ in eodem plano exiſtentes, ad duas duntaxat partes produci poſſunt, nempe ad ſiniſtram, & ad dexteram; ita duo plana in quatuor partes intelligi poſſunt protracta, nempe ſiniſtrorſum, dextrorſum, ſurſum, atq; deorſum. Itaque duo plana quæcunque, vel ſunt parallela, vel ad aliquam partem producta coëunt; lineæ verò rectæ, vel ſunt parallelæ, vel ad alteram partem protracta conueniunt, ſi nimirum in eodem exiſtant plano, vel tandem nec ſunt parallelæ, neq; vnquã conueniunt, ſi videlicet in diuerſis ſint planis, & in tranſuerſum poſitæ. Vnde in definitione linearum parallelarum in 1. lib. additum fuit: quæ cùm in eodem ſint plano: Hic autem ſimpliciter dicitur: quæ nunquam conueniunt.*

SIMILES

## IX.

SIMILES solidæ figuræ sunt, quæ similibus planis continentur multitudine æqualibus.

*PORVISEE Euclides similes figuras solidas definire per angulos æquales, & proportionalitatem laterum circa æquales angulos, vti fecit in figuris planis similibus definiendis: Satius tamen esse iudicauit, vt breuitati consulens, eas ex similibus planis multitudine æqualibus describeret; præsertim quòd ex similitudine planorum statim consequatur & angulorum solidorum æqualitas, vt ex defin. 11. patebit, cùm illos constituant anguli plani & multitudine, & magnitudine æquales; & proportionalitas laterum circum angulos æquales, propter planorum similitudinem.*

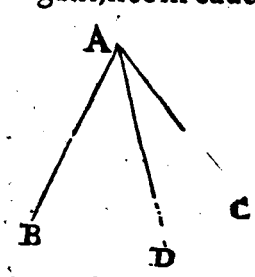
## X.

AEQVALES, & similes solidæ figuræ sunt, quæ similibus planis, multitudine, & magnitudine æqualibus continentur.

*QVOD si plana similia, quibus corpora similia ex præcedenti definitione circumscribuntur, fuerint æqualia, singula singulis, dicentur eiusmodi figuræ solidæ non solùm similes, verùm etiam æquales. Nam si animo concipiantur sese penetrare mutuò huiusmodi solida, neutrū alterum excedet, propter æqualitatem, ac similitudinem planorum. Ex similitudine enim planorum infertur angulorum solidorum æqualitas, vt in præcedenti definitione docuimus; ex eorundem verò æqualitate, laterum proportionalium æqualitas, vt in lemmate propos. 22. lib. 6. demonstrauimus. Quare solida illa omni ex parte sibi mutuò congruent; ac propterea inter sese existent æqualia.*

## XI.

SOLIDVS angulus est plurium, quàm duarum linearum, quæ se mutuò contingant, nec in eadem sint superficie, ad omnes lineas inclinatio.




*DVÆ linea in eodem existentes plano, quæ non in directum iacentes ad vnum punctum conueniunt, efficiunt angulum planum, vt lib. 1. exposuimus, qualis est angulus B A C, contentus duabus lineis A B, A C, in eodem plano constitutis. Si igitur accedat tertia quædam linea A D, quæ non in eodem cum illis plano existat, sed punctum D, sit in sublimi extra illarum planum, efficietur ad punctum A, angulus solidus, siue corporeus. Idem contingeret, si quarta linea, vel quinta, vel denique plures adiungerentur, licet anguli quantitas variaretur. Dixit autem Euclides, lineas angulum solidum constituentes, non debere in eadem superficie existere, quoniam videlicet, si tres lineæ A B, A C, A D, in eadem consisterent superficie, non efficeretur angulus solidus ad punctum A, sed planus duntaxat ex duobus planis B A D, D A C, compositus. Quòd si A D, sit in sublimi, hoc est, extra planum, in quo sunt A B, A C, iam non componeretur angulus planus totus ex B A D, D A C; immò circa punctum A, tres plani consistent anguli B A D, D A C, C A B, qui, vt mox dicetur, solidum constituunt angulum. Idem dices, si plures fuerint lineæ, & idcircò plures quoq; anguli plani.*

### ALITER.

SOLIDVS angulus est, qui pluribus, quàm duobus planis angulis in eodē non consistentibus plano, sed ad vnum punctum constitutis, continetur.

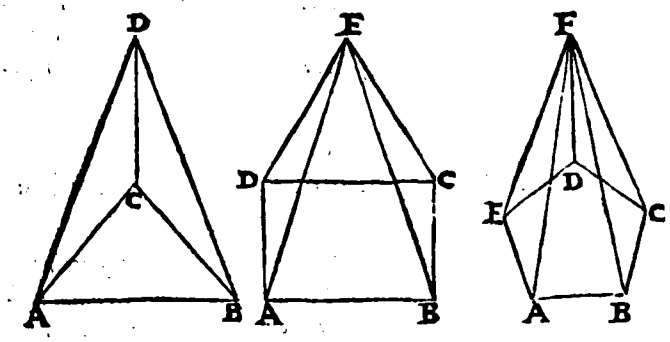
*HÆC definitio secunda anguli solidi facilis est, præcedenti rectè intellecta. Cùm enim saltem tres lineæ in eodem non existentes plano necessariæ sint ad anguli solidi constitutionem, perspicuum est, cùm minimum tres planos angulos requiri, vt angulus solidus efficiatur, vt ex superiori figura apparet. Angulus enim B A D, in plano est, in quo rectæ A B, A D; & angulus D A C, in plano, in quo rectæ A D, A C; angulus denique C A B, in plano, in quo rectæ A C, A B; atque ita ex ipsis angulus solidus ad punctum A, constituitur. Quòd si tres, vel plures anguli plani ad vnum punctum consistant, in eodem tamen plano, non constituetur ex ipsis angulus solidus, sed totus quidam angulus planus, vt suprà diximus de lineis in eadem superficie existentibus. Neque verò satis sunt duo anguli plani ad constituendum angulum solidum, etiamsi in diuersis sint planis. Hiabit enim semper ex altera parte. Vnde necesse est, vt tertia saltem superficies accedat, in qua tertius angulus planus consistat. Anguli porrò solidi exemplum clarissimū nobis præbent duo parietes cum pauimento domus, vel laqueari, ad vnum punctum conuenientes. In eo enim puncto, in quo coëunt, constituitur angulus solidus ex tribus angulis planis. Vbi manifestum est, si vna earum superficierum tollatur, destrui angulum solidum, remanere q; tantùm duas superficies ad inuicem inclinatas, & hiantes.*

*EX his verò perspicuum cuiuis erit, illos angulos solidos inter se esse æquales, qui continentur angulis plano & multitudine, & magnitudine æqualibus. Nam huiusmodi anguli sibi mutuò congruent, si sese penetrare intelligantur. Quemadmodum autem in primo libro, Euclides ex omnibus angulis planis solùm rectilineum assumpsit, ita hic ex omnibus eum duntaxat definit, quem plures lineæ rectæ quàm duæ, vel plures anguli plani rectilinei comprehendunt. Non enim comprehenditur hac definitione angulus coni, qui vnica su-*

*perficie curua continetur; neque is, qui continetur duabus superficiebus, vna quidem plana, altera verò curua; qualis est, qui fit, si conus per verticem secetur.*

## XII.

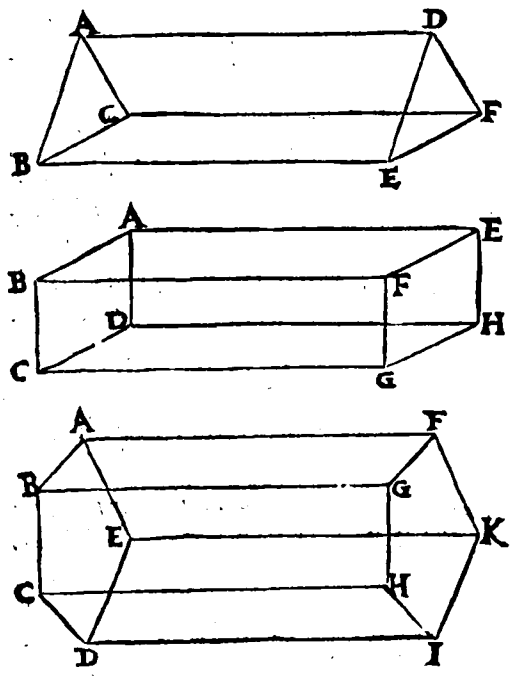
**PYRAMIS** est figura solida, quæ planis continetur, ab vno plano ad vnum punctum constituta.




*VIDELICET figuræ solidæ à planis ABC, ABCD, ABCDE, ad puncta D, E, F, constitutæ, appellantur pyramides. Perspicuum autem est, omnia plana, quibus pyramis continetur, esse triangula, cùm omnia ad vnũ punctum tendant; excepto plano, à quo omnia tendunt, quodq; puncto illi est oppositum. Hoc enim potest esse vel triangulum, vel quadrangulum, vel pentagonum, &c. à quo quidem tota pyramis denominationem sumit; vt videlicet dicatur pyramis triangula, quadrangula, pentagona, hexagona, &c. Tot enim triangulis qualibet pyramis comprehenditur, quot angulos, seu latera planum dictum continet. Vnde & planum huiusmodi, basis pyramidis nuncupari solet. Vt pyramidis triangularis, præter basin, triangula sunt ABD, ACD, BCD: Quadrangula verò ABE, ADE, BCE, CDE: Pentagona denique ABF, AEF, BCF, CDF, EDF.*

## XIII.

**PRISMA** est figura solida, quæ planis continetur, quorum aduersa duo sunt & æqualia, & similia, & parallela, alia verò parallelogramma.




*FIGVRÆ scilicet solidæ, quarum plana aduersa, & æqualia, & similia, & parallela sunt triangula ABC, DEF: vel quadrangula ABCD, EFGH: vel pentagona ABCDE, FGHIK, &c. Parallelogramma verò ACFD, ABED, CBEF: vel ABFE, ADHE, CDHG, CBFG: vel ABGF, AEKF, DEKI, DCHI, BCHG; dicuntur prismata. Itaque prisma nil aliud erit, quàm columna quædam laterata æqualis crassitudinis, cuius bases oppositæ sunt æquales, similes, & parallelæ, siue hæ sint triangula, siue quadrangula, siue pentagona, &. Vnde tot parallelogramma continebit prisma quotlibet, quot latera, siue anguli, in vno quoque oppositorum planorum reperiuntur, vt figuræ indicant.*

*EX his manifestum est, quantum hallucinentur ij, inter quos est & Campanus, qui prisma intelligunt esse eam figuram solidam duntaxat, cuius duo plana aduersa parallela, æqualia, similiáque, triangula sunt; reliqua verò tria parallelogramma. Quam quidem figurã solidam Campanus vocat Corpus seratile. Cùm enim hæc figura sit solùm vna species prismatis, definitio autem tradita infinita alia genera prismatis amplectatur, vt constat; præsertim quòd plurima demonstrationes in hoc libro, & duodecimo sequenti, ex æquo omnibus prismatibus conueniunt; perspicuum est eos hallucinari, qui vnum tantùm prismatis genus ex hac definitione colligunt. Sumpserunt autem fortasse hi auctores occasionem errandi, quòd Euclides & in propositione vltima huius libri, & in tertia, quarta, & quinta propositione, libri duodecimi, solùm de eo prismate loquatur, quòd duo aduersa plana habet triangula. Non autem animaduerterunt, septimam propositionem libri duodecimi illis aduersari, in qua Euclides loquens de prismate, mentionem facit duorum triangulorum oppositorum, eo quòd tali prismati solùm demonstratio illa conuenit. Quòd si sola ea figura, vt ipsi volunt, prisma appellaretur ab Euclide, frustrà dixisset: Omne prisma trigonam habens basin, &c. cùm nullum aliud prisma daretur. Immò in corollario dictæ propositionis septimæ infert Theon, Pyramidem esse tertiam partem prismatis eandem cum illa basin habentis, & altitudinem æqualem, licet duo plana prismatis aduersa non sint triangula, sed alia quauis rectilinea, æqualia tamen & similia,*

*similia, vt vult definitio. Ex quo loco luce clarius colligitur, infinita esse prismatum genera secundùm Theonem, atq; adeò secundùm Euclidem, cùm communi omnium sententia demonstrationes Theoni ascriptæ, sint Euclidis. Accedit etiam, quòd à Theone in demonstratione propos. 10. lib. 12. apertissimè appellantur prismata omnia solida, quæ habent duo plana aduersa & æqualia, & similia, siue ea sint triangula, & quadrata, siue multangula, reliqua verò parallelogramma.*

## XIIII.

SPHAERA est, quando, semicirculi manente diametro, circumductus semicirculus in seipsum rursus reuoluitur, vnde moueri cœperat, circumassumpta figura.

*SICVT linea recta circa alterum eius extremum quiescens reuoluta describit circulum; ita & semicirculus circa alterum eius extremum, nempe circa diametrum, circumductus figuram describit, quam Geometræ Sphæram appellant. Vnde quemadmodum in circulo punctum assignatur, extremum videlicet illud quiescẽs, à quo omnes lineæ rectæ in peripheriam cadentes sunt æquales; propterea quòd omnes æquales existunt illi lineæ circumuolutæ: Ita quoque in sphæra punctum reperitur, nempe medium diametri quiescentis, hoc est, centrum semicirculi circumducti, à quo omnes rectæ cadentes in peripheriam sunt æquales; eo quòd omnes sunt semidiametro dicti semicirculi æquales. Quapropter ad similitudinem definitionis circuli, sphæra definiri poterit hoc etiam modo.*

SPHAERA est figura solida, vna superficie comprehẽsa, ad quam ab vno puncto eorum, quæ intra figuram sunt posita, cadentes omnes rectæ lineæ inter se sunt æquales.

*CICERO in libro de Vniuersitate de mundo loquens, eleganter hanc definitionem expressit, his verbis: Ergo globosus est fabricatus, quod σφαιροειδὲς Græci vocant, cuius omnis extremitas paribus à medio radiis attingitur.*

## XV.

AXIS autem sphæræ, est quiescens illa recta linea, circum quam semicirculus conuertitur.

## XVI.

CENTRVM sphæræ est idem, quod & semicirculi.

## XVII.

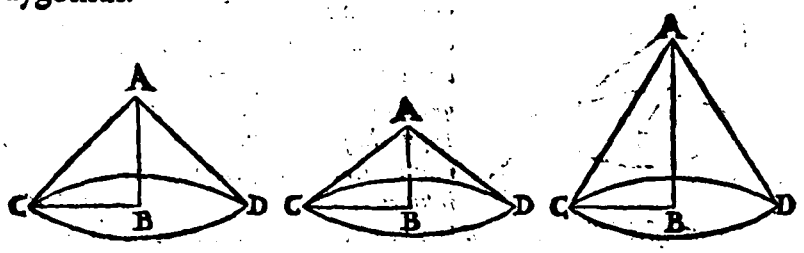
DIAMETER autem sphærę, est recta quædam linea per centrum ducta, & vtrinque à sphæræ superficie terminata.

*HAE tres definitiones non egent expositione; dummodò hoc solùm notetur, omnem diametrum sphæræ posse esse axem, si nimirum circum eam sphæra reuoluatur. Vnde quia in descriptione sphæræ circa diametrum semicirculi factus est motus ipsius sphæræ; propterea eam solam Euclides axem sphæræ nominauit.*

## XVIII.

CONVS est, quando rectanguli trianguli manente vno latere eorum, quæ circa rectum angulum, circumductum triangulum in se ipsum rursus reuoluitur, vnde moueri cœperat, circumassumpta figura.

ATQVE si quiescens recta linea æqualis sit reliquæ, quæ circa rectum angulum conuertitur, Orthogonius erit conus: Si verò minor, Amblygonius: Si verò maior, Oxygonius.




*VT si triangulum rectangulum A B C, circa latus quiescens A B, quod est circum rectum angulum, circumducatur, donec integram reuolutionẽ expleat, describetur solida quædam figura, quæ continetur duabus superficiebus, circulari vna, ac plana, quam B C, latus alterum circa angulum rectum, suo motu describit; & curua alia, eaq; conuexa, quam latus A C, recto angulo oppositum delineat. Hæc igitur figura solida, conus nuncupatur. Campanus autem pyramidem rotundam appellat.*

*QVOD si latus quiescens A B, æquale fuerit circumducto B C, vt in prima figura, dicetur conus descriptus* Orthogonius, *seu rectangulus, quia videlicet angulus prope verticem A, rectus est. Cùm enim latera A B, B C, ponantur æqualia; [a] erunt & anguli B A C, B C A, æquales; qui cùm æquiualeant vni recto, eo quòd A B C, rectus est; erit angulus B A C, semirectus. Eodémque modo angulus B A D, ex parte oppositæ*

a 5. primi.

*ſemirectus erit. Quare totus angulus C A D, rectus erit. Si verò quieſcens latus A B, minus fuerit circumducto B C, vt in ſecunda figura, vocabitur deſcriptus conus Amblygonius, ſeu obtuſangulus; quoniam ſcilicet an-*
a 18. primi. *gulus ad verticem A, obtuſus exiſtit. Cùm enim B C, latus latere A B, ſit maius;* [a] *erit angulus B A C, maior angulo B C A. Quare cùm hi duo æquipolleant vni recto, propterea quòd angulus A B C, ponitur rectus, erit B A C, ſemirecto maior. Similiter B A D, maior erit ſemirecto; atque adeò totus C A D, recto maior erit. Si denique quieſcens latus A B, maius fuerit circumducto B C, vt in tertia figura, appellabitur conus deſcriptus Oxygonius, ſeu acutangulus; quia nimirum angulus ad verticem A, acutus eſt. Cùm enim latus A B, maius ſit*
b 18. primi. *latere B C,* [b] *erit & angulus B C A, angulo B A C, maior. Quapropter cũ hi duo vni recto æquiualeant, quòd angulus A B C, rectus ponatur, erit B C A, ſemirecto maior, ideoq; reliquus B A C, ſemirecto minor. Non ſecus oſtendetur angulus B A D, minor eſſe ſemirecto. Igitur totus C A D, recto erit minor.*

## X I X.

**AXIS** autem coni, eſt quieſcens illa linea, circa quam triangulum vertitur.

*VT in quolibet cono ſuperius deſcripto, axis eſt recta quieſcens A B.*

## X X.

**BASIS** verò coni eſt circulus, qui à circumducta linea recta deſcribitur.

*NIMIRVM circulus, qui deſcribitur ab altero latere circa rectum angulum, quale eſt B C, in ſuperioribus conis. Itaq; huius circuli ſemidiameter eſt ipſum latus circumductum.*

*QVONIAM verò Euclides ſolùm definiuit conum rectum, cuius videlicet axis rectus eſt ad baſin; Non autem inclinatum, cuius axis ad baſim rectus non eſt; placuit ex Apollonio Pergæo adducere generalem coni deſcriptionem, quæ & rectum, & inclinatum comprehendat; propterea quòd in 12. lib. eadem ferè demonſtrari poſſunt de cono inclinato, quæ Euclides de recto cono oſtendit, vt ibi docebimus. Ita igitur ſcribit Apollonius ad initium conicorum elementorum.*

Si ab aliquo puncto ad circumferentiam circuli, qui nõ ſit in eodem plano, in quo punctum, coniuncta recta linea in vtramque partem producatur; & manente puncto, conuertatur circa circuli circumferentiam, quouſque ad eum locum redeat, à quo cœpit moueri: Superficiem à recta linea deſcriptam, conſtantemq; ex duabus ſuperficiebus ad verticem inter ſeſe aptatis, quarum vtraque in infinitum augetur, nimirum recta linea, quæ eam deſcribit, in infinitum producta, voco conicam ſuperficiem.

VERTICEM ipſius, manens punctum.

AXEM, rectam lineam, quæ per punctum, & centrum circuli ducitur.

CONVM autem voco figuram contentam circulo, & conica ſuperficie, quæ inter verticem, & circuli circumferentiam interiicitur.

VERTICEM coni, punctum, quod & ſuperficiei conicæ vertex eſt.

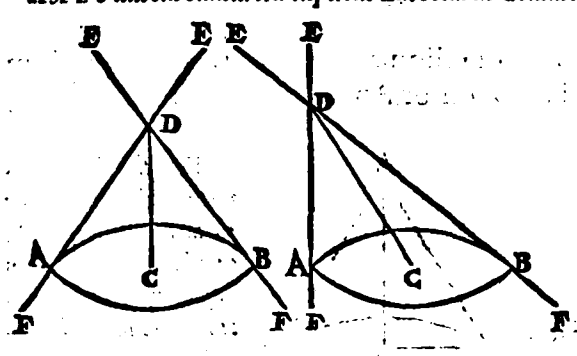
AXEM, rectam lineam, quæ à vertice ad circuli centrum producitur.

BASIM, circulum ipſum.

CONORVM, Rectos quidem voco, qui axes habent ad rectos angulos ipſis baſibus.

SCALENOS verò, qui non ad rectos angulos ipſis baſibus axes habent.

*HÆC autem omnia ita explicat Eutocius in Commentarijs, quos in Apollonium ſcripſit.*

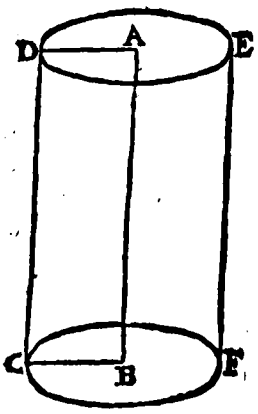



*SIT circulus A B, cuius centrum C, & punctum aliquod ſublime D; iunctaq; D B, in infinitum ex vtraque parte producatur ad puncta E, F. Si igitur recta linea D B, feratur eouſque in circuli A B, circumferentia, quouſque punctum B, rurſus in eum locum reſtituatur, à quo cœpit moueri: deſcribet ſuperficiem quandam, quæ quidem conſtat ex duabus ſuperficiebus ad D, punctũ ſeſe tangentibus. Eam vocat Apollonius conicam ſuperficiem, quæ & augetur in infinitũ, cùm recta linea D B, ipſam deſcribens in infinitum producitur. Verticem ſuperficiei dicit punctum D. Axem, rectam D C. Conum verò appellat figuram contentam circulo A B, & ea ſuperficie, quam D B, ſola deſcribit. Coni verticem, punctum D, Axem D C. Baſim A B, circulum. Quòd ſi D C, ad circulum fuerit perpendicularis, Rectum vocat conum: Sin minus, Scalenum.*

## X X I.

**CYLINDRVS** eſt, quando rectanguli parallelogrammi manẽte vno latere eorum, quæ circa rectum angulum, circumductum parallelogrammum in ſe ipſum rurſus reuoluitur, vnde cœperat moueri, circumaſſumpta figura.

VELUTI




*VELVTI si rectangulum parallelogrammum A B C D, circa latus quiescēs A B, circumuoluatur, donec integram expleat reuolutionem, appellabitur figura descripta cylindrus, quæ quidem tribus superficiebus continetur, duabus videlicet planis circularibus, quas latera A D, B C, describūt; & altera curua, eaq; conuexa, quam latus C D, describit, instar columnæ alicuius rotundæ. Vnde factum est, vt Campanus cylindrum appellauerit columnam rotundam.*

## XXII.

AXIS autem cylindri, est quiescens illa recta linea, circum quam parallelogrammum conuertitur.

*NEMPE recta A B, in superiori figura, dicetur axis cylindri.*

## XXIII.

BASES verò cylindri sunt circuli à duobus aduersis lateribus, quæ circumaguntur, descripti.

*QVALES sunt circuli à lateribus A D, B C, oppositis descripti.*

*EVCLIDES porrò solùm cylindrum rectum hoc loco definit, cuius videlicet axis rectus est ad vtramque basim; atq; de hoc solùm in lib. 12. est disputaturus. Cùm igitur nos eadem ferè theoremata, ex alijs Geometris simus proposituri in eodem 12. lib. de cylindro inclinato, quæ Euclides de cylindro recto demonstrauit, visum est prius ex Sereno Antinsensi definire cylindrum vniuersè, vt complectitur tam rectum, quàm inclinatum. Sic igitur scribit Serenus ad initium primi libri de Sectione cylindri.*

SI duorum circulorum æqualium, & æquidistantium diametri semper inter sese æquidistantes & ipsæ in circulorum planis circa manens centrum circumferantur, & simul circumferatur recta linea, diametrorum terminos ex eadem parte coniungens, quoſque rursus in eum locum restituatur, à quo moueri cœpit: Superficies, quæ à circumlata rectà linea describitur, cylindrica superficies vocetur; quæ quidem & in infinitum augeri potest, linea ipsa describente in infinitum producta.

CYLINDRVS est figura, quæ circulis æquidistantibus, & cylindrica superficie inter ipsos interiecta continetur.

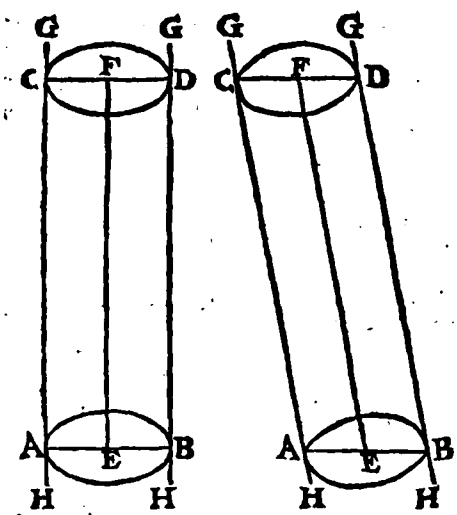
CYLINDRI bases sunt circuli ipsi.

AXIS, recta linea, quæ per circulorum centra ducitur.

LATVS autem cylindri, linea, quæ cùm recta sit, & in superficie ipsius cylindri, bases vtraſque contingit; quam & circumlatam, cylindri superficiem describere antea diximus.

CYLINDRORVM, Recti quidem dicantur, qui axem habent ad rectos angulos existentem ipsis basibus.

SCALENI autem, qui non ad rectos angulos existentem ipsis basibus axem habent.

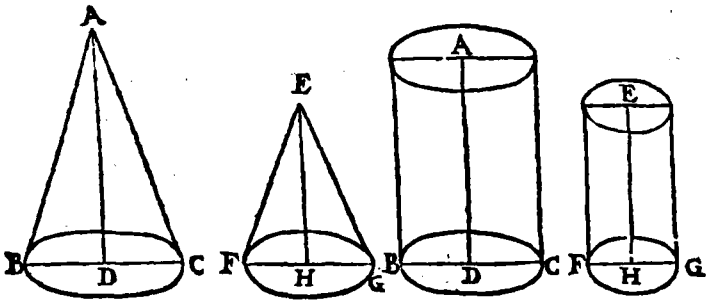



*SINT duo circuli æquales, & æquidistātes A B, C D, quorum centra E, F, & diametri æquidistantes quoque A B, C D: Iunctaq; recta A C, in infinitum ex vtraque parte producatur ad puncta G, H. Si igitur diametri A B, C D, circa centra E, F, in planis circulorū semper æquidistantes, vnà cum recta A C, circumducantur, donec ad eum locum restituantur, vnde moueri cœperunt; describetur à linea A C, superficies quædam rotunda, quam Serenus cylindricam vocat; quæ & augetur in infinitum, cùm recta A C, ipsam describens in infinitum producitur. Cylindrum verò appellat figuram A B D C, circulis A B, C D, & cylindrica superficie inter ipsos interiecta, quam videlicet sola A C, describit, comprehensam. Bases cylindri dicit esse circulos A B, C D. Axem, rectam E F, quæ circulorum centra coniungit. Latus cylindri, rectam A C. Quòd si axis E F, perpendicularis fuerit ad bases, rectum vocat cylindrum: Sin minus, Scalenum.*

## XXIIII.

SIMILES coni & cylindri sunt, quorum & axes, & basium diametri proportionales sunt.

RECTE *Euclides similitudinem conorum, atque cylindrorum ab eorum axibus, & basium diametris sumit. Diametri enim basium indicant conos & cylindros secundùm duas dimensiones esse similes, longitudinem scilicet ac latitudinem; Axes verò eosdem secundùm profunditatem, seu altitudinem similes esse de-*



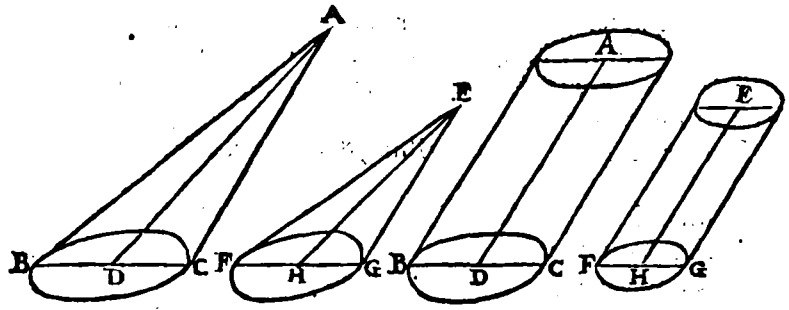

*monſtrant. Sint enim duo coni A B C, E F G; Item duo cylindri, in conis autem axes A D, E H, & baſium diametri B C, F G; ſimiliter & in cylindris. Itaque ſi fuerit, vt axis A D, ad axem E H, ita B C, diameter baſis ad F G, diametrum baſis, dicentur tam coni, quàm cylindri ſimiles inter ſe; quia videlicet hac ratione tam ſecundùm longitudinem et latitudinẽ ſimiles ſunt, quàm ſecundùm profunditatem, vt diximus, nempe omnes eorum tres dimenſiones proportionales ſunt: Vel etiam, quia triangula A D B, E H F, ex quorum reuolutione deſcripti ſunt coni, nec non rectangula A B, E F, quorum conuerſiones cylindros effecerunt, hac ratione ſimilia inter ſe erunt. Cùm enim ſit vt A D, ad E H, ita*

a 15. quinti. *B C, ad F G: Sit autem vt B C, ad F G, [a] ita dimidia B D, ad dimidiam F H; erit quoque vt A D, ad E H, ita D B, ad H F: & permutando vt A D, ad D B, ita E H, ad H F. Quare tam in triangulis, quàm in rectangulis latera, circum æquales angulos, nempe rectos, proportionalia ſunt: ac propterea & triangula & rectangula*

b 6. ſexti. *ſimilia inter ſe erunt: Triangula quidem, [b] propterea quòd triangula vnum angulum vni angulo habentia æqualem, & circum æquales angulos latera proportionalia, æquiangula ſunt, [c] ideoq; latera omnia circa angulos æquales habent proportionalia, atque adeò inter ſe ſimilia exiſtunt: Rectangula verò, [d] eo quòd*

c 5. ſexti.

d 34. primi. *reliqua duo latera duobus lateribus A D, D B, ſunt æqualia, oppoſita oppoſitis, ac propterea eandem cum his proportionem habent.*




*Quod ſi coni, vel cylindri fuerint inclinati, (de rectis enim duntaxat Euclides verba fecit.) dicentur ij tum demum ſimiles, quando eorum axes, et diametri baſium erunt proportionales, angulique inclinationum, quos axes efficiunt, æquales: qui quidem anguli accipiendi ſunt, vt in defin. 5. dictum eſt. Sint enim coni inclinati, ſimiliter & cylindri A B C, E F G: In conis autẽ axes ſint A D, E H, & baſium diametri B C, F G; ſimiliter & in cylindris. Itaq; ſi fuerit tam in conis, quàm in cylindris, vt A D, ad E H, ita B C, ad F G, extiterint q; anguli inclinationum A D B, E H F, tam in conis, quàm in cylindris, æquales inter ſe; dicentur & coni inter ſe, & cylindri quoque inter ſeſe ſimiles; quoniam nimirum hac ratione & tres eorum dimenſiones ſunt proportionales, vt ſuprà diximus, & rurſus tam triangula A D B, E H F, quàm rectangula A B, E F, quorum conuerſiones conos, & cylindros effecerunt, inter ſe ſimilia ſunt, veluti in rectis conis, cylindris q; demonſtrauimus. Eſt enim prorſus eadem demonſtratio, cùm anguli A D B, E H F, ponantur æquales, licèt non ſint recti.*

## XXV.

CVBVS eſt figura ſolida, ſub ſex quadratis æqualibus contenta.

## XXVI.

TETRAEDVM eſt figura ſolida, ſub quatuor triangulis æqualibus, & æquilateris contenta.

## XXVII.

OCTAEDRVM eſt figura ſolida, ſub octo triangulis æqualibus, & æquilateris contenta.

## XXVIII.

DODECAEDRVM eſt figura ſolida, ſub duodecim pentagonis æqualibus, & æquilateris, & æquiangulis contenta.

## XXIX.

ICOSAEDRVM eſt figura ſolida, ſub viginti triangulis æqualibus, & æquilateris contenta.

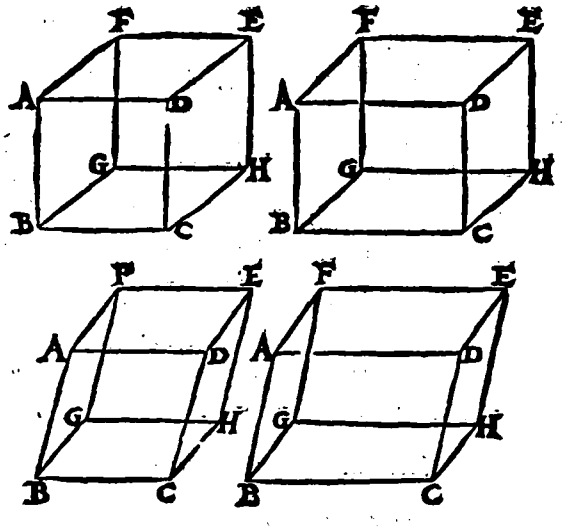
*HÆC ſunt quinque corpora, quæ regularia vocantur, quòd omnia plana, quibus continentur, æqualia ſint,*

*sint, æquilatera, & æquiangula, vt ex eorum definitionibus constat, & nonnullis corpora Platonica dicuntur, propterea quòd Plato in Timæo quinque mundi corpora; quæ simplicia à Philosophis nuncupantur, nempe Cœlum, Ignem, Aërem, Aquam, atque Terram, quinque hisce corporibus assimilat; vt in sphæra Ioannis à Sacro Bosco latius explicauimus. Horum omnium constructio tradetur lib. 13. Cubi quidem propos. 15. Tetraëdri verò propos. 13. Octaëdri deinde propos. 14. Dodecaëdri autem propos. 17. Icosaëdri denique propos. 16. Vbi planius perfectiusq; definitiones horum corporum intelligentur. In plano enim difficillimum est, ea ita depingere, vt veram eorum effigiem, atque formam quis intueatur. Trademus tamen proprijs in locis praxes adinodum faciles, quibus ea quilibet secundùm eorum soliditatem posit conficere. Neque verò aliud corpus regulare, præter quinque illa, dari potest, vt demonstrabimus ad finem lib. 13.*

*Quoniam verò frequens hoc lib. 11. fit mentio Parallelepipedi, & lib. 15. agitur de mutua inscriptione, circumscriptioneq; corporum regularium; necessarium esse duximus, tribus definitionibus explicare, quidnam sit Parallelepipedum, quidq; sit figuram solidam in figura solida inscribi, vel circa eandem describi.*

## XXX.

PARALLELEPIPEDVM est figura solida sex figuris quadrilateris, quarum, quæ ex aduerso, parallelæ sunt, contenta.




*Velut i solida figura comprehensa sex quadrilateris A B C D, D E F A, A B G F, F G H E, E D C H, H C B G, quarum oppositæ A C, F H; Item D F, C G; Item A G, D H, sunt parallelæ, nominantur parallelepipeda, quasi parallelis planis comprehensa: quæ quidem plana parallela opposita, sunt & æqualia, & similia, & parallelogramma, vt demonstrabitur propos. 24. huius libri.*

*Sunt autem tot parallelepipedorum genera, quot parallelogrammorum. Si enim sex parallelogramma fuerint æquilatera, & rectangula, hoc est, quadrata, dicetur parallelepipedum illud, tubus, respondebitq; quadrato in planis figuris: Si autem sex parallelogramma fuerint quidem rectangula, at non omnia æquilatera, sed altera parte longiora, quamuis duo sint æquilatera, appellabitur parallelepipedum altera parte longius. Quòd si sex parallelogramma extiterint, æquilatera quidem, sed non omnia rectangula, quamuis duo sint rectangula, vocabitur parallelepipedum illud, Rhombus. Si denique sex parallelogramma neq; rectangula fuerint omnia, neque omnia æquilatera, quamuis duo sint rectangula, & æquilatera, vel rectangula tantùm, vel æquilatera tantùm, fuerint tamen parallelogramma, qua ex aduerso, æqualia; parallelepipedum tale Rhomboides nuncupabitur. Cæterùm quodcunq; parallelepipedum vocari etiã poterit Prisma, vt ex defin. prismatis constat.*

## XXXI.

SOLIDA figura in solida figura dicitur inscribi, quando omnes anguli figuræ inscriptæ constituuntur vel in angulis, vel in lateribus, vel denique in planis figuræ, cui inscribitur.

## XXXII.

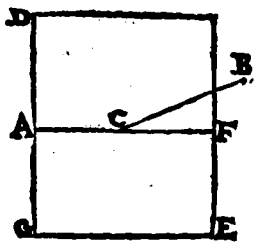
SOLIDA figura solidæ figuræ vicissim circumscribi dicitur, quando vel anguli, vel latera, vel denique plana figuræ circumscriptæ tangunt omnes angulos figuræ, circum quam describitur.

*Non est necesse, vt anguli interioris figuræ constituantur in omnibus vel angulis, vel lateribus, vel planis exterioris figuræ, cùm interdum figura exterior plures, interdum pauciores angulos contineat, vel latera, vel plana, quàm interior: sed satis est, vt omnes anguli figuræ interioris tangant vel aliquot angulos, vel aliquot latera, vel denique aliquot plana exterioris figuræ; ita vt nullus angulus figuræ interioris intactus relinquatur vel ab angulis, vel à lateribus, vel denique à planis figuræ exterioris.*

*Verum duæ hæ postremæ definitiones planius percipientur ex lib. 15. in quo de inscriptionibus, circumscriptionibusq; mutuis corporum regularium copiosè agetur.*

# THEOR. 1. PROPOS. 1.

RECTAE lineæ pars quædam non est in subiecto plano, quædam verò in sublimi.



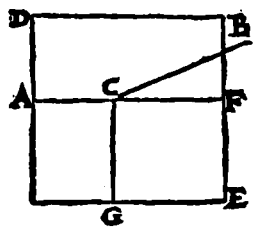

SIT enim, si fieri potest, rectæ lineæ AB, pars quidem AC, in subiecto plano DE, pars verò CB, in sublimi, ita vt omnia puncta partis AC, in plano DE, iaceant, puncta verò omnia partis CB, supra planum DE, existant, vel infra. Erit igitur in plano DE, ipsi AC, rectæ lineæ continua quædam recta linea in directum posita, nempe CF. Quamobrem duæ rectæ AB, AF, commune habent segmentum AC. quod est absurdum, vt in pronunciato 10. libri 1. demonstrauimus. Rectæ igitur lineæ pars quædam non est in subiecto plano, quædam verò in sublimi. Quod erat demonstrandum.

## SCHOLIVM.

*HAEC est communis demonstratio interpretum. Sed fortasse dicet aliquis, in ea aliquid desiderari, nempe vt ostendatur, rectæ AC, esse aliquam rectam in plano DE, in directum, & continuum positam. Qui enim concedit, rectæ AB, partem quidem AC, esse in plano DE, partem verò CB, in sublimi, vtique negabit, rectæ AC, in plano DE, dari posse aliam rectam in continuum, & directum, quandoquidem rectam CB, in rectum & continuum positam esse fatetur ipsi AC. Verumtamen ei, qui sic dubitat, respondendum est, rectam quamlibet finitam a quouis plano datam, posse in eodem vlterius produci in rectum & continuũ, cum plana superficies sit illa, quæ ex æquali suas interiacet lineas, hoc est, quæ recte & æqualiter semper extenditur, vt & linea recta. Quamobrem si AC, in plano DE, producatur vsque ad F, erit CF, recta rectæ AC, in continuum & directum posita. Verùm demonstremus iam id ipsum Geometricè, in plano videlicet DE, ipsi AC, dari posse aliam rectam, quæ cum ipsa vnam rectum lineam constituat, quamuis quis dicat, AB, esse quoque rectam, eiusq; partem AC, in plano DE, partem verò CB, in sublimi esse positam.* [a] *Ducatur enim in plano DE, ipsi AC, perpendicularis CG; & in eodem plano ipsi CG, perpendicularis CF. Dico CF, esse ipsi AC, positam in continuum & rectum. Cùm enim AC, & FC, in eodem plano DE, cum recta CG, duos rectos angulos constituant ACG, FCG, ex constructione;* [b] *erunt AC, & FC, in directum & continuum positæ. Quamobrem etiamsi quis contendat, AB, esse rectam, cuius quidem pars AC, in plano DE, subiecto, pars autem CB, in sublimi sit constituta; tamen in eodem plano DE, erit alia recta, nempe CF, quæ cum AC, vnam rectam constituunt lineam; atque adeò duæ rectæ AB, AF, segmentum commune habebunt AC. Quod est absurdum.*

a 11. primi.

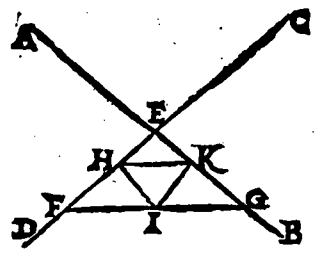
b 14. primi.




*HINC fit, omnes partes cuiusuis rectæ lineæ, hoc est, totam rectam lineam, in vno existere plano.*

## 2. THEOR. 2. PROPOS. 2.

SI duæ rectæ lineæ se mutuò secent, in vno sunt plano. Atque triangulum omne in vno est plano.




RECTAE lineæ AB, CD, se mutuò secent in E, & in EB, ED, sumptis punctis F, & G, vtcumque; ducatur recta FG, vt fiat triangulum EFG. Dico triangulum EFG, in vno esse plano; Item rectas AB, CD, in vno quoq; plano existere. Si enim trianguli EFG, pars quædam, nimirum EHIG, in plano vno existat, & pars quædam, nempe reliqua FHI, in sublimi, vel contrà; Existent quoque rectarum EF, GF, partes quidẽ EH, GI, in vno plano, partes verò HF, IF, in sublimi, vel contrà. quod fieri non posse, iam suprà [a] demonstratum est. Quòd si eiusdem trianguli pars quidem EFIK, in vno plano credatur esse, pars autem GIK, in sublimi, vel contrà; erunt eadem ratione rectarum EG, FG, partes quidem EK, FI, in vno plano, partes verò KG, IG, in sublimi, vel contrà. Si deniq; eiusdem trianguli pars quidem FHKG, in vno concedatur esse plano, pars verò EHK, in sublimi, vel contrà erunt quoque rectarum FE, GE, partes quidem FH, GK, in vno plano, partes autem HE, KE, in sublimi, vel contrà. Quæ omnia absurda sunt, [b] vt est demonstratum. Quare triangulum EFG, in vno plano existit; eademque est ratio in omni alio triangulo.

a 1. vndec.

b 1. vndec.

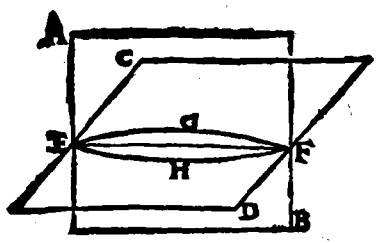
QVIA verò, in quo plano est triangulum EFG, in eodem existunt eius latera EF, EG: In quo autem sunt rectæ EF, EG, [c] in eodem sunt rectæ totæ CD, AB, ne partes quædam in plano, partes verò aliæ in sublimi dicantur esse; Erunt propterea rectæ AB, CD, in vno plano, in quo nimirum triangulum EFG, consistere demõstrauimus. Quocirca si duæ rectæ lineæ se mutuò secent, in vno sunt plano. Atque triangulum omne in vno est plano. Quod erat demonstrandum.

c 1. vndec.

## 3. THEOR. 3. PROPOS. 3.

SI duo plana se mutuò secent, communis eorum sectio est linea recta.

SECENT se mutuò plana AB, CD, sitque communis eorum sectio EF. Dico EF, esse lineam rectam.

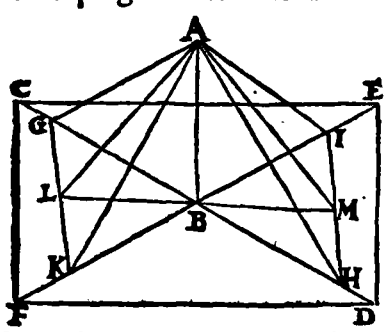



rectam. Si enim nõ credatur esse recta, ducatur in plano AB, recta EGF, & in plano CD, recta EHF. Rectæ igitur EGF, EHF, cùm eosdem habeant terminos E, & F, superficiem includent. Quod fieri non potest, vt in 14. pronunciato 1. libri ostendimus. Communis ergo sectio EF, recta erit linea; Ac proinde si duo plana se mutuò secent, communis eorum sectio est linea recta. Quod erat ostendendum.

ALITER. Secent se rursus plana AB, CD, sintque termini sectionis communis E, & F, puncta, quæ connectantur recta EF. Si igitur recta EF, in vtroque plano existit, constat propositum: Ipsa enim erit communis sectio. Si verò EF, recta in neutro eorum dicatur esse, tunc si in alterutro eorum recta ducatur EGF, concludent rursus duæ rectæ EF, EGF, superficiem, cùm eosdem habeant terminos E, & F. Si denique recta EF, in altero tantùm plano esse credatur, tunc si in altero ducatur recta EGF; includent iterum duæ rectæ EF, EGF, superficiem. Quod est absurdum. Est ergo recta EF, in vtroque plano AB, CD; atque adeò communis eorum sectio est.

## THEOR. 4. PROPOS. 4. 4.

SI recta linea rectis duabus lineis se mutuò secantibus, in communi sectione ad rectos angulos insistat: Illa ducto etiam per ipsas plano ad angulos rectos erit.




RECTA linea AB, insistat duabus rectis CD, EF, ad rectos angulos in communi earum sectione B. Dico rectam AB, ad angulos quoq; rectos esse plano, quod per ipsas ducitur, seu in quo existunt. Cùm enim se mutuò secent in B, [a] erunt ipsę in vno plano, quod sit CEDF. Sumantur inter se æquales rectæ BG, BH; Item rectæ BI, BK; ducanturq; rectæ GK, IH; & in eodem plano per B, ducatur recta LM, secans rectas GK, IH, in punctis L, & M. Demittantur quoque ex A, puncto in sublimi ad idem planũ rectæ AG, AL, AK, AH, AM, AI. Quoniam igitur latera BG, BK, trianguli BGK, lateribus BH, BI, trianguli BHI, ex constructione sunt æqualia; [b] & anguli quoque ipsis contenti GBK, HBI, cùm sint ad verticem B, oppositi, æquales: [c] Erunt bases GK, HI, inter se, & anguli BKG, BIH, inter se quoque æquales.

*a* 2. vndec.
*b* 15. primi.
*c* 4. primi.

RVRSVS [d] cùm anguli KBL, IBM, ad verticem B, oppositi sint æquales; erunt duo anguli KBL, BKL, trianguli BKL, duobus angulis IBM, BIM, trianguli BIM, æquales; Sunt autem & latera BK, BI, quibus adiacent, æqualia, ex constructione. [e] Igitur & reliqua latera KL, LB, reliquis lateribus IM, MB, æqualia erunt.

*d* 15. primi.
*e* 26. primi.

PRAETEREA cùm latera AB, BG, trianguli ABG, æqualia sint lateribus AB, BH, trianguli ABH, ex constructione; & anguli ipsis contenti ABG, ABH, æquales, nempe recti, ex hypothesi, [f] erunt & bases AG, AH, æquales. Simili argumento æquales erunt rectæ lineæ AI, AK.

*f* 4. primi.

AMPLIVS quia latera AI, IH, trianguli AIH, lateribus AK, KG, triãguli, AKG, æqualia sunt; & basis AH, basi AG, ex hactenus demonstratis; [g] erunt etiam anguli AIH, AKG, dictis lateribus comprehensi, æquales.

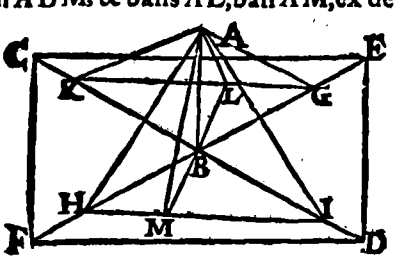
*g* 8. primi.

ITAQVE cùm latera AK, KL, trianguli AKL, æqualia sint lateribus AI, IM, trianguli AIM; & anguli ipsis contenti AKL, AIM, æquales etiam, vt hactenus demonstrauimus; [h] erunt quoque bases AL, AM, æquales.

*h* 4. primi.

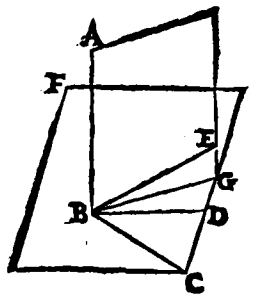
QVONIAM denique latera AB, BL, trianguli ABL, æqualia sunt lateribus AB, BM, trianguli ABM; & basis AL, basi AM, ex demonstratis; [i] erunt quoque anguli ABL, ABM, dictis lateribus comprehẽsi, æquales; qui cùm sint deinceps, recti erũt, ex definitione 10. lib. 1. Quare recta AB, rectos angulos efficit, cum recta LM, quæ in plano subiecto ipsam tangit in B: Eademque ratione ostenderetur, rectam AB, cum omnibus rectis, quæ in eodem plano ipsam tangent in B, angulos rectos constituere, etiamsi inter puncta G, I, & K, H, ductę sint, dummodò rectæ GI, KH, iungantur: vel certè literæ dispo nantur, vt prius, quemadmodum in hac figura apparet, vbi eædem sunt literæ, & tamen LM, non ducitur à sinistra in dextram, vt in priori figura, sed à superiori parte versus inferiorem. Quocirca recta AB, plano CEDF, quod per rectas CD, EF, ducitur, ad rectos angulos erit, ex defin. 3. huius lib. Si recta igitur linea rectis duabus lineis se mutuò secantibus, &c. Quod demonstrandum erat.

*i* 8. primi.




## THEOR. 5. PROPOS. 5. 5.

SI recta linea rectis tribus lineis se mutuò tangentibus, in communi sectione ad rectos angulos insistat: Illæ tres rectæ in vno sunt plano,

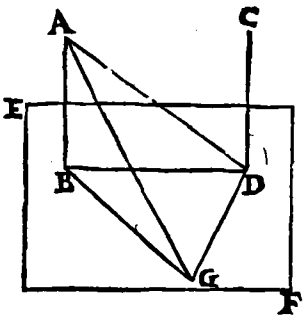



*a* 2. *vndec.* *b* 2. *vndec.* *c* 3. *vndec.* *d* 4. *vndec.*

INSISTAT recta linea AB, tribus rectis lineis BC, BD, BE, se tangentibus in B, ad rectos angulos in communi earum sectione, seu tactu B. Dico tres rectas BC, BD, BE, in vno plano esse. [a] Cùm enim quælibet duæ in vno sint plano, propterea quòd productæ ad partes B, se mutuò secent in B; sint BC, BD, in plano FC; Et si fieri potest, recta BE, non ponatur in eodem plano, sed in sublimi. [b] Quoniam verò duæ rectæ AB, BE, in vno sunt plano, cùm se mutuò secent in B; sint ambæ in plano AE. Et quia plana FC, AE, sibi mutuò occurrunt in B; necessariò producta se mutuò secabunt. [c] Sit ergo eorum communis sectio recta BG. Quia verò recta AB, ad angulos rectos ponitur rectis BC, BD; [d] erit propterea & plano FC, per ipsas ducto ad rectos angulos; ac proinde ad rectos angulos erit rectæ BG, quæ ipsam in B, tangit, ex defin. 3. huius libri. Quare recti anguli ABE, ABG, existentes in plano AG, per rectas AB, BE, ducto, æquales inter se erunt, pars & totum. Quod est absurdum. Duabus igitur rectis BC, BD, in vno plano FC, existentibus, non erit BE, in sublimi, sed in eodem cum ipsis plano. Quocirca si recta linea rectis tribus lineis se mutuò tangentibus, &c. Quod erat ostendendum.

## 6. THEOR. 6. PROPOS. 6.

SI duæ rectæ lineæ eidem plano ad rectos sint angulos; Parallelæ erunt illæ rectæ lineæ.




*e* 4. *primi.* *f* 8. *primi.*

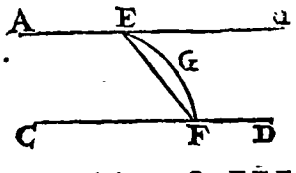
SINT duæ rectæ lineæ AB, CD, eidem plano EF, ad angulos rectos in punctis B, & D. Dico illas esse parallelas. Ducta enim recta BD, in plano EF, erunt anguli ABD, CDB, recti, ex defin. 3. huius libri. Iam in eodem plano EF, ducatur DG, ad BD, perpendicularis, ponanturq; æquales AB, DG. Connectãtur deinde rectæ BG, GA, AD. Quoniam igitur latera AB, BD, trianguli BAD, æqualia sunt lateribus GD, DB, trianguli GDB, ex constructione; & anguli quoque ipsis contenti ABD, GDB, æquales, nempe recti; [e] erunt bases æquales AD, GB. Rursus quia latera AB, BG, trianguli ABG, æqualia sunt lateribus GD, DA, trianguli GDA; Est autem & basis communis AG; [f] Erunt anguli ABG, GDA, æquales: Est autem ABG, rectus, ex defin. 3. huius lib. Igitur & GDA, rectus erit. Quoniam verò ex eadem defin. angulus quoque GDC, rectus est; erit recta GD, tribus rectis DB, DA, DC, ad angulos rectos.

*g* 5. *vndec.* *h* 2. *vndec.* *i* 28. *primi.*

[g] Quare rectę DB, DA, DC, in vno erunt plano; hoc est, CD, erit in plano per rectas DB, DA, ducto: [h] Est autem AB, in eodem plano, in quo DB, DA. Recta igitur CD, in eodem erit cum AB, plano. Quocirca cùm anguli interni ABD, CDB, sint recti, [i] erunt rectæ AB, CD, parallelæ. Si duæ itaque rectæ lineæ eidem plano ad rectos sint angulos, &c. Quod erat demonstrandum.

## 7. THEOR. 7. PROPOS. 7.

SI duæ sint parallelæ rectæ lineæ, in quarum vtraque sumpta sint quælibet puncta: Illa linea, quæ ad hæc puncta adiungitur, in eodem est cum parallelis plano.




*k* 3. *vndec.*

IN parallelis AB, CD, sumantur vtcunque duo puncta E, & F, quę recta connectãtur EF. Dico rectam EF, in eodem esse plano, in quo, per definitionem parallelarum, sunt parallelæ AB, CD. Si enim recta EF, non concedatur esse in eodem plano parallelarum, sed extrà: secet iam aliud planum superficiem parallelarum per puncta E, & F, sitque communis sectio horum planorum EGF, [k] quæ recta linea erit. Duæ igitur rectæ EF, EGF, cùm habeant eosdem terminos E, & F, superficiẽ claudent. Quod est absurdum. Non ergo extra planum parallelarum AB, CD, erit recta EF. Quare si duæ sint parallelæ rectæ lineæ, in quarum vtraque sumpta sint quælibet puncta: Illa linea, quæ ad hæc puncta adiungitur, in eodem est cum parallelis plano. Quod erat demonstrandum.

### *SCHOLIVM.*

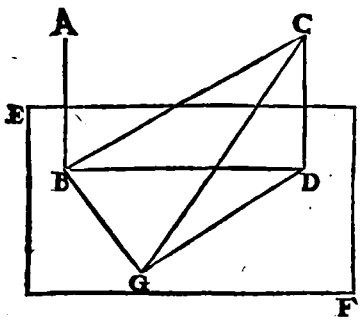
*HAEC eadem propositio vera est, etiamsi duæ rectæ AB, CD, parallelæ non sint, dummodò in eodem plano existant, vt manifestum est ex demonstratione.*

## 8. THEOR. 8. PROPOS. 8.

SI duæ sint parallelæ rectæ lineæ, quarum altera ad rectos cuidam plano sit angulos: Et reliqua eidem plano ad rectos angulos erit.

SINT parallelæ rectæ AB, CD; sitque CD, plano EF, ad angulos rectos. Dico & AB, eidem plano EF, esse ad rectos angulos. Ducta enim recta BD, in plano EF; erit per defin. 3. huius libri,

angulus



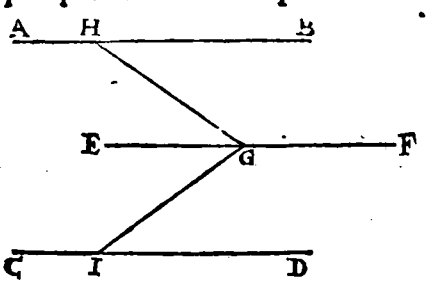

angulus CDB,rectus: [a] Sunt autem duo CDB,ABD,duobus rectis æquales. Igitur & ABD, rectus erit. Iam in plano EF,ducatur BG,perpendicularis ad BD; ponanturq; æquales BG,CD. Coniungátur deinde rectæ DG,GC,CB. Quoniam igitur latera CD,DB,trianguli CDB, æqualia sunt lateribus GB,BD,trianguli GBD,ex constructione; & anguli quoque ipsis contenti,CDB, GBD, æquales, nimirum recti; [b] Erunt bases CB,GD,æquales. Rursus quia latera CD, DG,trianguli CDG,æqualia sunt lateribus GB, BC, trianguli GBC; & basis est cómunis CG; [c] Erunt anguli CDG, GBC,dictis lateribus cóprehensi æquales. Est autem CDG, rectus ex defin.3. huius lib. Igitur & GBC, rectus erit. Quare recta GB, duabus rectis BD,BC, se mutuò secantibus in B, (Si namque producerentur DB, CB,secarent sese in B, ob angulum CBD.)ad rectos angulos existit; [d] ac proinde ad rectos angulos erit plano per BD, BC,ducto: Est autem in hoc eodem plano recta AB; [e] propterea quòd rectæ BD,BC,in eodem sunt plano, in quo parallelæ AB,CD; cùm puncta B,C,D,existát in parallelis AB,CD. Igitur & GB, recta rectæ BA,ad rectos erit angulos ex defin.3.huius lib. Quare cùm AB,recta sit ad rectas BG, BD; [f] erit quoque AB,recta ad planum per BG, BD, ductum, hoc est, ad planum EF. Si duæ igitur sint parallelæ rectæ lineæ,quarum altera ad rectos cuidam plano sit angulos: Et reliqua eidem plano ad rectos angulos erit. Quod erat ostendendum.

*a* 29. *primi.*
*b* 4. *primi.*
*c* 8. *primi.*
*d* 4. *vndec.*
*e* 7. *vndec.*
*f* 4. *vndec.*

## THEOR. 9. PROPOS. 9.

9.

QVAE eidem rectæ lineæ sunt parallelæ,sed non in eodem cum illa plano: Hæ quoque sunt inter se parallelæ.




SINT rectæ AB,CD,ipsi EF,parallelæ; non sint autem in eodem cum EF, plano. Dico AB, CD, parallelas quoq; esse. Nam à quolibet pũcto G, rectæ EF, ad ipsam EF, ducantur duæ perpendiculares; GH, quidem in plano parallelarum AB,EF; at GI,in plano parallelarũ CD,EF. Quoniam igitur EG, recta est ad duas rectas GH,GI,se tangentes mutuò in G; [g] erit recta quoque ad planum per ipsas GH, GI, ductũ. Quamobrem cùm sint parallelæ AB, EF; & EF, sit recta ad planum per GH,GI,ductum; [h] erit quoq; AB, ad idem planum recta. Similiter cùm sint parallelæ CD,EF; sit autem EF, recta ad planum per GH, HI, ductum; [i] erit etiam CD,recta ad idem planum; [k] Atque proinde rectæ AB,CD,cùm rectæ sint ad idem planum per GH,GI,ductum,parallelæ erunt. Quæ igitur eidem rectæ lineæ sunt parallelæ, sed non in eodem cum illa plano: hæ quoque sunt inter se parallelæ. Quod erat demonstrandum.

*g* 4. *vndec.*
*h* 8 *vndec.*
*i* 8. *vndec.*
*k* 6. *vndec.*

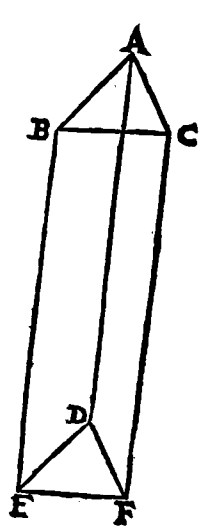
### SCHOLIVM.

*DATA opera Euclides voluit,duas rectas AB,CD,non esse in eodem plano cum recta EF, cui sunt parallelæ. Nam si forent in eodem plano cum ipsa EF; essent AB,CD,inter se parallelæ, ex 30.propos.1.lib. Superuacaneum ergo esset,hic idem demonstrare.*

## THEOR. 10. PROPOS. 10.

10.

SI duæ rectæ lineæ se mutuò tangentes, ad duas rectas se mutuò tangentes sint parallelæ,non autem in eodem plano: Illæ angulos æquales comprehendent.

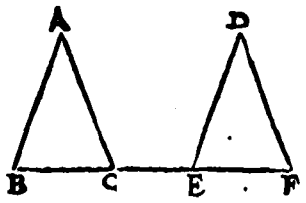



SINT rectæ AB,AC,se tangentes in A,parallelæ rectis DE,DF,se tangentibus in D; non sint autem AB,AC,in eodem plano, in quo DE, DF. Dico angulos BAC,EDF,ab ipsis comprehẽsos esse æquales. Ponantur enim AB, DE,inter se æquales,& AC,DF,inter se; ducanturq; rectæ BC,EF,BE,AD, CF. Quoniam igitur AB,DE,parallelæ sunt & æquales; [l] erunt quoq; BE, AD,parallelæ & æquales. Simili argumento parallelæ erunt & æquales CF, AD. Quare cùm BE,CF,parallelæ & æquales sint eidem AD; [m] erũt etiam BE,CF,inter se parallelæ,& æquales: [n] Ac propterea parallelæ & æquales erunt rectæ BC,EF. Quia ergo latera AB,AC,trianguli ABC,æqualia sunt lateribus DE,DF,trianguli DEF,ex constructione; & basis BC, basi EF,æqualis,vt modò demonstrauimus; [o] Erunt & anguli BAC,EDF, dictis lateribus comprehensi,æquales. Si igitur duæ rectæ lineæ se mutuò tangentes, &c. Quod erat ostendendum.

*l* 33. *primi.*
*m* 9. *vndec.*
*n* 33. *primi.*
*o* 8. *primi.*

### SCHOLIVM.

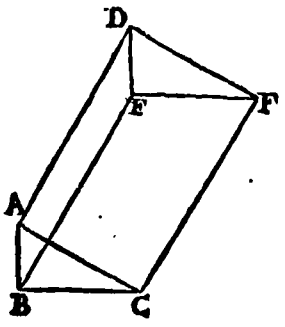
CONCLVSIO *huius theorematis vera etiam est, quando priores duæ*




*linea in eodem ſunt plano cum duabus poſterioribus. Sint enim quatuor lineæ A B, A C, D E, D F, in eodem plano, ſitq; A B, ipſi D E, & A C, ipſi D F, parallelæ. Dico angulos B A C, E D F, eſſe æquales. Nam ponantur æquales A B, D E, & A C, D F; ducanturq; rectæ B C, E F, quæ aut in vna recta linea erunt conſtitutæ, aut non. Sint prius in vna recta B F. Quoniã igitur parallelæ ſunt A B, D E,* [a] *æquales erunt anguli A B C, D E F, internus & externus. Similiter æquales erunt anguli A C B, D F E; Sunt enim & A C, D F, parallelæ. Quare duo anguli A B C, A C B, trianguli A B C, æquales ſunt duobus angulis D E F, D F E, trianguli D E F.* [b] *Igitur anguli quoque reliqui B A C, E D F, æquales erunt. Quod eſt propoſitum.*

a 29. primi

b 32. primi




*Non ſint iam B C, E F, in vna recta linea conſtitutæ. Ductæ rectæ A D, B E, C F, cùm A B, D E, ſint parallelæ & æquales;* [c] *erunt & A D, B E, parallelæ & æquales. Eadem ratione A D, C F, parallelæ erunt & æquales, eò quòd A C, D F, parallelæ ponuntur, & æquales. Quare & B E, C F, eidem A D, parallelæ exiſtentes & æquales,* [d] *inter ſe parallelæ erunt & æquales:* [e] *ac proinde parallelæ & æquales quoq; erunt B C, E F. Itaque cùm duo latera A B, A C, trianguli A B C, æqualia ſint duobus lateribus D E, D F, trianguli D E F; & baſis B C, baſi E F,* [f] *erunt anguli B A C, E D F, contenti dictis lateribus, æquales. Quod eſt propoſitum.*

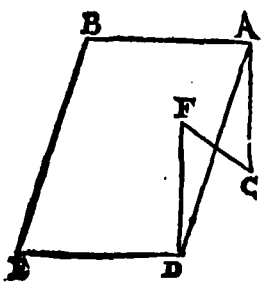
c 33. primi.

d 30. primi

e 33. primi

f 8. primi.

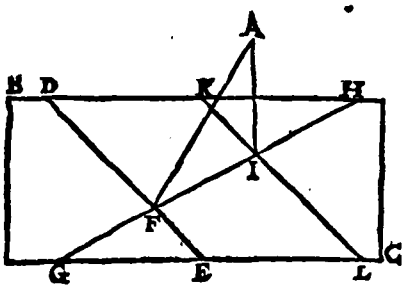
*Caeterum vt concluſio huius theorematis rectè ex data hypotheſi colligatur, neceſſe eſt, rectas lineas parallelas ita eſſe poſitas, (ſiue omnes ſint in eodem plano, ſiue non,) vt tres rectæ A D, B E, C F, nullatenus ſe mutuò ſecent; vt ex prima & vltima figura apparet. Nam aliàs concluſio vera non erit.*




*Sunt enim rectæ A B, A C, rectis D E, D F, parallelæ in hac figura: & tamen anguli B A C, E D F, quos comprehendunt, non ſunt æquales, cùm ille ſit acutus, hic verò obtuſus. Hoc autem ideò euenit, quòd A D, C F, ſe mutuò ſecant. Vnde quamuis A C, D F, ſint parallelæ & æquales, non tamen propterea A D, C F, quæ eas coniungunt, parallelæ ſunt & æquales, propterea quòd eas non coniungunt ad eaſdem partes, vt vult propoſ. 33. lib. 1. Quare demonſtratio huius theorematis locum non habet, deficiente hac conditione; quæ tamen in ſuperioribus figuris ſeruatur.*

## 11. PROBL. 1. PROPOS. 11.

**A dato puncto in ſublimi, ad ſubiectum planum perpendicularem rectam lineam ducere.**




*Sit à puncto A, in ſublimi ad ſubiectum planum B C, ducenda perpendicularis. Ducatur in plano B C, recta vtcunque D E;* [a] *ad quam ex A, deducatur perpendicularis A F:* [b] *Et in plano B C, per F, ad D E, perpendicularis ducatur G H;* [c] *ad quam ex A, perpendicularis demittatur A I. Dico A I, eſſe perpendicularem ad planum ſubiectum B C.* [d] *Ducta enim in plano B C, per I, ipſi D E, parallela K L; cùm D F, ad rectos angulos ſit duabus F A, F H, ex conſtructione,* [e] *ac proinde recta ad planum per F A, F H, ductum;* [f] *erit quoque K I; ad idem planum per F A, F H, ductum recta.* [g] *Quoniam verò A I, in eodem eſt cum rectis F A, F H, plano, tangitque rectam K I, in I; erit per definitionem 3. huius lib. angulus K I A, rectus; atque adeò A I, ad rectos angulos erit duabus K I, I F.* [h] *Igitur A I, ad planum B C, recta erit. A dato ergo puncto in ſublimi, ad ſubiectum planum perpendicularem rectam lineam duximus. Quod faciendum erat.*

a 12. primi.

b 11. primi.

c 12. primi.

d 31. primi.

e 4. vndec.

f 8. vndec.

g 2. vndec.

h 4. vndec.

### SCHOLIVM.

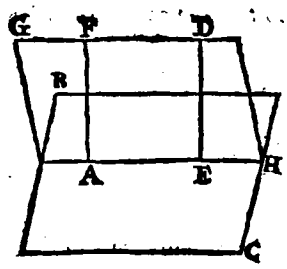
*Quod ſi quando A I, ad G H, ducta perpendicularis cadat in punctum F, ita vt eadem ſit, quæ A F, ad D E, ducta perpendicularis;* [a] *erit ipſa A F, ab initio ad D E, ducta perpendicularis ad ſubiectum planum B C, perpendicularis, cùm perpendicularis ſit ad vtramque D E, G H.*

a 4. vndec.

## 12. PROBL. 2. PROPOS. 12.

**Dato plano à puncto, quod in illo datum eſt, ad rectos angulos rectam lineam excitare.**

Sit

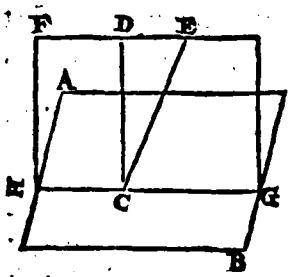



SIT à dato puncto A, in plano B C, ducenda perpendicularis ad datum planum B C. [a] Ex quouis puncto D, in sublimi demittatur ad planum B C, perpendicularis D E, quæ si ceciderit in A, punctum, factum erit, quod proponitur: Si verò ceciderit in aliud punctum E, extensa recta per E, & A, [b] ducatur per A, ipsi D E, parallela A F, in plano G H, per D E, E A, ducto. Dico A F, rectam esse ad planum datum B C. Cùm enim D E, A F, parallelæ sint; & D E, recta ad planum B C, ex constructione; [c] erit quoq; A F, ad idem planum B C, recta. Itaque dato plano, à puncto, quod in illo datum est, &c. Quod faciendum erat.

[a] 11. vndec.
[b] 31. primi.
[c] 8. vndec.

## THEOR. 11. PROPOS. 13. 13.

DATO plano, à puncto, quod in illo datum est, duæ rectæ lineæ ad rectos angulos non excitabuntur, ad easdem partes.



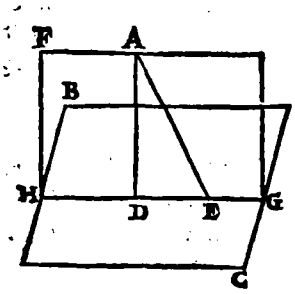

SIT datum planum A B. Dico à dato eius puncto C, ad easdem partes non posse educi duas perpendiculares ad planum A B. Ducantur enim, si potest fieri, duæ perpendiculares C D, C E, ad planum A B; & per C D, C E, [a] quæ in vno, eodemque plano sunt, ducatur planum F G, secans planum A B, per rectam lineam G H. Cùm igitur E C, D C, rectæ sint ad planum A B; erunt per defin. 3. huius lib. anguli E C G, D C G, recti, ac proinde æquales; pars & totum. Quod est absurdum. Dato igitur plano, à puncto, quod in illo datum est, duæ rectæ lineæ ad rectos angulos non excitabuntur, ad easdem partes. Quod erat demonstrandum.

[a] 2. vndec.

ALITER. Ducantur, si fieri potest, ex C, ad planum A B, duæ perpendiculares C D, C E. Cùm igitur duæ D C, E C, rectæ sint ad idem planum A B; [b] erunt ipsæ inter se parallelæ, cùm tamen conueniant in puncto C. Quod est absurdum.

[b] 6. vndec.

### SCHOLIVM.




*EODEM modo à puncto in sublimi ad subiectum planum duæ rectæ lineæ ad angulos rectos non demittentur. Ducantur enim ex A, puncto in sublimi ad subiectum planum B C, si fieri potest, duæ perpendiculares A D, A E. Ducatur per A D, A E [a] quæ in vno plano sunt, planum F G, secans planum B C, per rectam G H. Cùm igitur A D, A E, rectæ sint ad planum B C, erunt per defin. 3. huius lib. duo anguli A D E, A E D, recti interni in triangulo A D E. Quod est absurdum; [b] cùm sint duobus rectis minores quilibet duo anguli in triangulo quouis assumpti.*

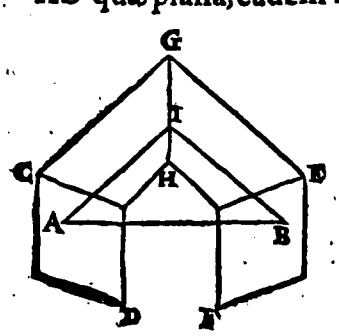
[a] 2. vndec.
[b] 17. primi.

*ALITER. Si A D, A E, rectæ sunt ad planum B C; [c] ipsæ erunt inter se parallelæ, cùm tamen conueniant in puncto A. Quod est absurdum.*

[c] 6. vndec.

## THEOR. 12. PROPOS. 14. 14.

AD quæ plana, eadem recta linea recta est; illa sunt parallela.




SIT recta A B, ad plana C D, E F, recta. Dico parallela esse plana C D, E F. Si enim non credantur esse parallela, producta inter se conuenient. Conueniant ad partes C, E; [a] & faciant communem sectionem rectam lineam G H: In qua sumpto puncto vtcunque I, ducantur rectæ I A, I B, in planis G C D, G E F. Quia igitur A B, recta ponitur ad plana G C D, G E F; erunt per defin. 3. huius lib. duo anguli I A B, I B A, recti, in triangulo A B I. [b] Sed & minores duobus rectis sunt. Quod est absurdum. Igitur plana C D, E F, producta nunquam inter se conueniunt. Parallela ergo sunt. Ad quæ igitur plana, eadé recta linea recta est, &c. Quod erat demonstrandum.

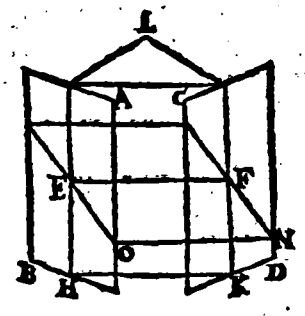
[a] 3. vndec.
[b] 17. primi.

### SCHOLIVM.

*FACILE etiam demonstrari poterit conuersum huius, videlicet.*

Si fuerint duo plana parallela, recta linea, quæ ad vnum eorum recta fuerit, ad reliquum quoque recta erit.

*SINT duo plana parallela A B, C D, ad quorum alterum A B, recta sit linea recta E F. Dico E F, rectam quoq; esse ad planum reliquum C D. Secet enim planum aliquod, nempe G K, plana A B, C D, per lineam rectam E F, incedens, faciatq; communes sectiones cum dictis planis rectas G H, I K: eruntq; anguli G E F, H E F, recti, per definitionem 3. huius libri. Ac proinde recti etiam erunt anguli I F E, K F E. (Si enim*



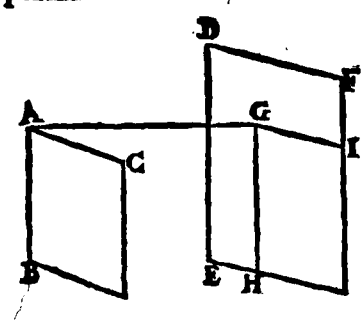

a 1. vndec.

b 4. vndec.

*alter eorum, nempe I F E, dicatur acutus; erunt duo anguli G E F, I F E, duobus rectis minores. Quare rectæ E G, F I, ad partes G, I, in plano G I, conuenient, nimirum in puncto L; atque adeò & plana A B, C D, in quibus existunt, ad eásdem partes conuenient ad punctum L;* [a] *cùm tota recta H G L, sit in vno plano, nempe in A B, producto; item tota recta K I L, in vno quoque plano, nimirum in C D, protracto. Quod est absurdum, cùm ponantur parallela. Recti ergo sunt anguli I F E, K F E.) Eodem modo si aliud planum, videlicet M N, eadem plana secet per E F, faciens alias rectas, communes cum ipsis sectiones M O, P N; erunt anguli P F E, N F E, recti. Itaque cùm E F, sit recta ad duas rectas I K, P N,* [b] *recta quoque erit E F, ad planum C D, per ipsas ductum. Quod est propositum.*

## 15. THEOR. 13. PROPOS. 15.

**Si duæ rectæ lineæ se mutuò tangentes, ad duas rectas se mutuò tangentes sint parallelæ, non in eodem consistentes plano: Parallela sunt, quæ per illa ducuntur, plana.**




a 11. vndec.

b 31. primi.

c 9. vndec.

d 29. primi.

e 4. vndec.

f 14. vndec.

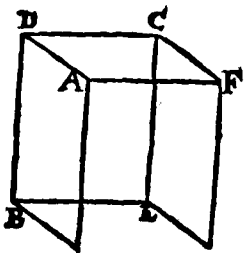
Sint duæ rectæ lineæ A B, A C, se tangentes in A, parallelæ duabus rectis lineis D E, D F, se tangentibus in D, existentibus q; in alio cum illis plano. Dico & plana B C, E F, per ipsas ducta, esse parallela. [a] Ex A, enim deducatur ad planũ E F, perpendicularis A G, occurrens plano E F, in puncto G. [b] Deinde in plano E F, per G, ducantur G H, G I, ipsis D E, D F, parallelæ. Quoniam igitur rectæ A B, G H, parallelę sunt ipsi D E, [c] erunt & A B, G H, inter se parallelæ; [d] Ac proinde anguli B A G, A G H, duobus rectis æquales: Est autem A G H, rectus, ex defin. 3. huius lib. Rectus ergo erit & angulus B A G. Simili argumento concludes, angulum C A G, rectum esse. Itaque cùm recta G A, sit recta duabus A B, A C; [e] recta quoque erit G A, ad planum B C, per ipsas ductum. Est autem & recta ad planum E F, ex constructione. [f] Igitur parallela sunt plana B C, E F. Si ergo duę rectæ lineæ se mutuò tangentes, &c. Quod erat demonstrandum.

### SCHOLIVM.

*Quod si perpendicularis ex A, ad planum E F, ducta cadat in ipsummet punctum D, concludetur idem, hoc excepto, quòd in plano E F, non sunt ducenda aliæ parallelæ. Vt si lineæ G H, G I, ponantur parallelæ rectis A B, A C, ita vt A G, ad planum H I, per G H, G I, ductum perpendicularis, cadat in G; ostendemus, vt prius, G A, esse rectam ad planum B C, per rectas A B, A C, ductum, &c.*

*Ex hoc theoremate non difficilè erit problema subsequens: Videlicet.*

**Dato plano, per datum punctum, quod in eo non est, parallelum planum ducere.**



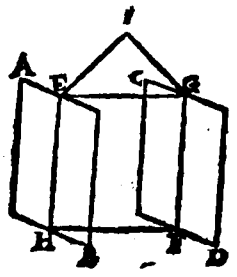

a 31. primi.

b 15. vndec.

*Datum planum sit A B, punctum q; extra ipsum sit C, per quod ducendum sit planum, plano A B, parallelum. In plano A B, ducantur vtcunque duæ rectæ D B, D A, se tangentes in D, puncto, à quo ad C, recta ducatur D C. Deinde in plano B C, per rectas D B, D C, ducto,* [a] *agatur C E, ipsi D B, parallela; Et in plano A C, per rectas D A, D C, ducto, fiat quoque C F, ipsi D A, parallela. Dico planum E F, per rectas C E, C F, ductum, parallelum esse plano dato A B. Cùm enim duæ rectæ D B, D A, se tangentes in D, duabus rectis C E, C F, se tangentibus in C, existentibus q; in alio cum illis plano, parallelæ sint;* [b] *parallela erunt plana A B, E F, per ipsas ducta. Quod est propositum.*

## 16. THEOR. 14. PROPOS. 16.

**Si duo plana parallela plano quopiam secentur: communes illorum sectiones sunt parallelæ.**




a 1. vndec.

Secentur plana A B, C D, parallela plano E F, per rectas E H, G F. Dico communes sectiones eorum E H, G F, esse lineas parallelas. Si enim non sunt parallelæ, productæ inter se conuenient, cùm sint in plano E F, secante. Conueniant igitur in puncto I. [a] Quia ergo tota recta H E I, in vno est plano, nimirum in A B, producto; Item tota recta F G I, in vno quoq; est plano, videlicet in C D, producto; conuenient etiam plana A B, C D, producta ad I. Quod est absurdum, cùm ponantur parallela. Sunt igitur rectæ E H, G F, parallelæ. Quare si duo plana parallela plano quopiam secentur, &c. Quod erat demonstrandum.

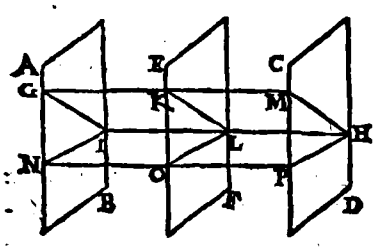
SCHO-

## SCHOLIVM.

*Hoc theorema nulla ratione potest conuerti. Quamuis enim communes sectiones planorum parallelorum, facta ab alio plano secante, sint parallelæ, vt hîc demonstratum est; Non tamen omnia illa plana, quorum communes sectiones factæ ab alio plano secante sunt parallelæ, parallela sunt, cùm per duas lineas rectas parallelas infinita plana possint duci, quorum duo tantùm sunt parallela, alia verò omnia in aliquam partem producta conueniunt.*

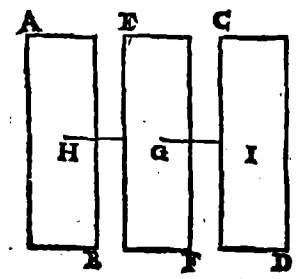
*Porro ex hoc theoremate colligimus aliud simile theoremati 30. lib. 1.*

Qvæ eidem plano parallela, & inter se sunt parallela.



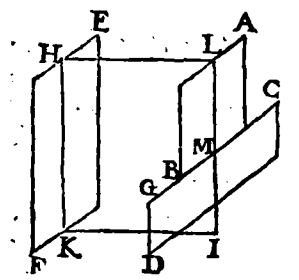

*Sint duo plana AB, CD, plano EF, parallela. Dico & AB, CD, parallela esse. Secentur enim omnia tria plana plano GH, sintq; communes eorum sectiones rectæ GI, KL, MH. Secentur rursus alio plano NH, sintq; communes eorum sectiones rectæ NI, OL, PH, hac tamen lege, vt duo plana secantia GH, NH, se quoque mutuò secent, quorum sectio communis sit linea recta HI. Quia igitur parallela plana AB, EF, secantur plano GH,* [a] *erunt communes sectiones GI, KL, parallelæ. Eodem modo parallelæ erunt MH, KL;* [b] *atque adeò parallelæ erunt inter se GI, MH. Non aliter ostendemus, parallelas esse NI, PH. Itaque cùm IG, IN, se mutuò tangentes in I, parallelæ sint rectis HM, HP, se tangentibus in H, existentibusq; in alio plano;* [c] *erunt plana AB, CD, per ipsas ducta, parallela. Quod est propositum.*

a 16. vndecimi.
b 9. vndecimi.
c 15 vndecimi.




*Aliter. Sumatur in tertio plano EF, punctum quodlibet G, à quo in vtramque partem educatur ad planum EF, linea recta perpendicularis, occurrens plano AB, in puncto H, & plano CD, in puncto I. Quoniam igitur linea HG, recta est ad planum EF, recta quoq; erit ad planum AB, sibi parallelum, per ea, quæ in scholio propositionis 14. huius lib. demonstrauimus. Eadem ratione GI, recta erit ad planum CD. Quamobrem cùm recta HI, sit recta ad plana AB, CD;* [d] *parallela inter se erunt plana AB, CD. Quod est propositum.*

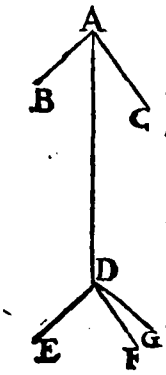
d 14. vndecimi.




*Quod si duo plana fuerint alteri plano parallela, non tamen inter se, sed conueniant, tunc idem efficient planum; quemadmodum duæ rectæ, quæ alteri rectæ sunt parallelæ, si conueniant, vnam rectam constituunt lineam, veluti ad propos. it. 30. lib. 1. demonstrauimus. Sint enim plana AB, CD, plano EF, parallela, conueniantq; producta secundùm rectam CG. Dico plana AB, CD, vnum planum constituere. Secet enim planum quodpiam HI, omnia tria plana per lineas rectas HK, LM, MI. Quoniam igitur parallela sunt plana AB, EF;* [e] *erunt & communes sectiones LM, HK, parallelæ. Eadem ratione parallelæ erunt IM, HK. Quamobrem cùm rectæ LM, IM, parallelæ sint ipsi HK, existantq; in eodem plano secante HI, & conueniant in M; ipsæ erunt in rectum & cõtinuum positæ, per ea, quæ ad 30. propos. lib. 1. ostendimus. Ac proinde plana AB, CD, vnum planum efficiẽt;* [f] *propterea quòd recta LI, in vno iaceat plano. Quod est propositum.*

e 16. vndecimi.
f 1. vndecimi.

*Itaque duo plana, quæ parallela sint alteri plano, vel inter se parallela erunt, vel certè, si producta conueniant, vnum planum conficient.*




*Porro conuersum quoq; propositionis 10. facilè demonstrabimus, hoc loco; videlicet.*

*Si in planis parallelis duo anguli sint æquales, & linea vna vnius anguli lineæ vni alterius anguli parallela; erit quoque altera linea alteri lineæ parallela, si modò ductæ sint ex eadem parte plani, per priores parallelas ducti.*

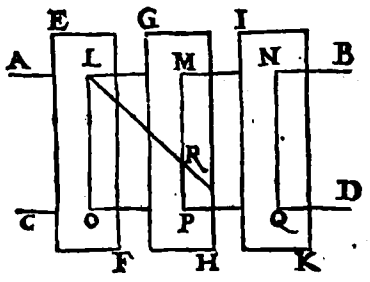
*In planis enim parallelis sint anguli æquales BAC, EDF. sitq; AB, ipsi DE, parallela, & AC, DF, sint ad easdem partes plani per AB, DE, ducti. Dico AC, DF, parallelas quoque esse: hoc est, ducta recta AD, planum per AC, AD, ductum, transire etiam per rectam DF; ita vt AC, DF, sint communes sectiones factæ à plano per AC, AD, ducto, in planis parallelis per AB, AC, & DE, DF, ductis. Hinc enim efficitur,* [g] *sectiones AC, DF, parallelas esse. quod est propositum. Si namq; planum per AC, AD, ductum, non facit in illis planis parallelis sectiones AC, DF, faciat sectiones AC, DG,* [h] *quæ parallelæ erunt.* [i] *Igitur angulus EDG, angulo BAC, hoc est, angulo EDF, æqualis erit: quod est absurdum, cùm vnus sit totũ, & alter pars.*

g 16. vndecimi.
h 16. vndecimi.
i 10. vndecimi.

## THEOR. 15. PROPOS. 17.

17.

**Si duæ rectæ lineæ parallelis planis secentur; In easdem rationes secabuntur.**




RECTAE lineæ AB, CD, (siue eæ parallelæ sint, vt in figura, siue non, existentes tamen in eodem plano; siue in transuersum positæ, in diuersis existentes planis) secentur planis parallelis EF, GH, IK, in punctis L, M, N, O, P, Q. Dico eas secari proportionaliter, hoc est, segmenta earum inter dicta plana intercepta, esse proportionalia, vt quidem LM, ad MN, ita esse OP, ad PQ. Ducantur enim rectæ LO, NQ, in planis EF, IK, & coniungatur recta LQ, occurrés plano GH, in R, puncto, à quo ad puncta M, P, rectæ ducantur RM, RP, in eodem plano GH; [a] Eritque triangulum LNQ, in vno plano: similiter triangulum LOQ, in vno plano. Quoniam verò plana parallela GH, IK, secantur plano trianguli LNQ, [b] erunt communes sectiones eorum MR, NQ; parallelæ. Pari ratione parallelæ erunt RP, LO. [c] Quam ob rem erit vt LR, ad RQ, ita LM, ad MN: Item vt LR, ad RQ, ita OP, ad PQ; Ac proinde vt LM, ad MN, ita OP, ad PQ. Siigitur duæ rectæ lineæ parallelis planis secentur, &c. Quod erat demonstrandum.

a 2. vndec.

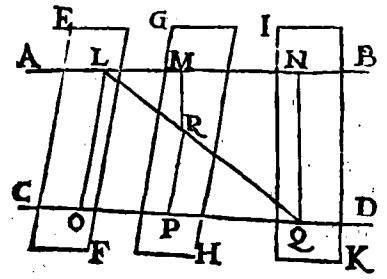
b 16. vndec.

c 2. sexti.

## SCHOLIVM.

*QVOD si datæ duæ rectæ AB, CD, sint in vno eodemq; plano, efficient duæ rectæ RM, RP, vnam lineam rectam, vt in superiori figura apparet. Nam tunc planum per rectas AB, CD, ductum secabit tria plana parallela in punctis L, O, M, P, N, Q, & per rectas LO, MP, NQ, [a] quæ inter se parallelæ erunt, punctumq; R, in recta MP, existet, cùm sit & in plano per rectas AB, CD, ducto (propter puncta L, Q, in eodem illo plano existentia, vt in scholio propos. 7. huius lib. diximus) & in plano GH, atq; adeò in MP, communi eorum planorum sectione. Quare RM, RP, vnam rectam lineam MP, constituent, nimirum communem sectionem planorum LOQN, GH.*

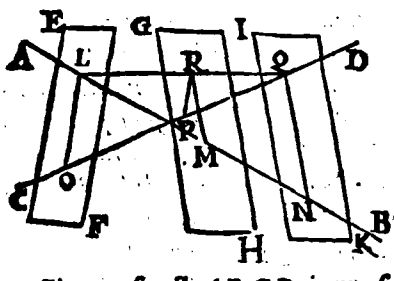
a 16. vndecimi.




*SI verò duæ rectæ AB, CD, non sint in eodem plano, non efficient RM, RP, vnam rectam lineam, vt in hisce duabus figuris apparet: quia [b] cùm triangulum LOQ, sit in vno plano, & triangulum LNQ, in vno etiam plano, quod ab illo diuersum est, (Si namq; duo illa triangula in vno eodemq; plano existerent, essent duæ rectæ AB, CD, in eodem illo plano, quod ex ipsis constituitur, quod est contra hypothesim.) erunt rectæ RM, RP, in diuersis illis planis triangulorum; ac proinde vnam rectam non constituent; [c] aliàs in vno essent plano. quod est absurdum.*

b 2. vndec.

c 1. vndec.

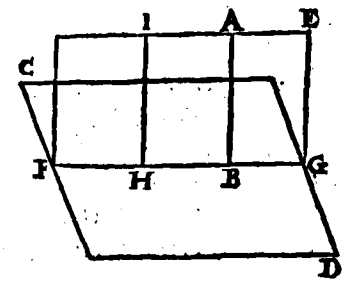



*EADEM hæc propositio locum habet, si duæ rectæ AB, CD, in eodem plano existentes, non sint parallelæ, vt in eisdem hisce duabus figuris apparet: sed tunc MRP, semper erit vna linea recta, vt ad initium huius scholij demonstratum est, quãdo AB, CD, in vno plano ponebantur. Eadem enim demonstratio hic adhiberi potest.*

*NON secus, si plura plana parallela, quàm tria, rectas AB, CD, secent, erunt earum partes proportionales, & communes sectiones mediorum planorum & triangulorum LOQ, LNQ, rectas lineas constituent, si rectæ AB, CD, in vno sint plano, non rectas autem, si non sint in vno plano: quemadmodum de rectis MR, RP, dictum est.*

## 18. THEOR. 16. PROPOS. 18.

SI recta linea plano cuipiam ad rectos sit angulos: Et omnia, quæ per ipsam, plana eidem plano ad rectos angulos erunt.




SIT recta AB, ad planum CD, recta. Dico omnia plana per rectam AB, ducta, esse recta ad idem planum CD. Ductum enim sit per AB, planum EF, secans planum CD, per rectam lineam FG. Sumpto deinde puncto H, vtcunq; in recta FG, [a] ducatur in plano EF, ipsi AB, parallela HI. Quoniam igitur AB, IH, parallelæ sunt, & AB, ponitur recta ad planum CD; [b] erit quoque IH, ad idem planum CD, recta: ac proinde per defin. 3 huius libri, ad communem sectionẽ FG, perpendicularis. Eadem ratione omnes lineæ, quæ in plano EF, ipsi AB, ducentur parallelæ, erunt ad planum CD, rectæ; ac proinde per defin. 3. huius lib. ad communem sectionem FG, perpendiculares. Quare rectum erit planum EF, ad planum CD, per defin. 4. huius libri. Similique argumento ostendentur omnia alia plana per rectam AB, ducta, ad planum CD, esse recta. Si igitur recta linea plano cuipiam ad rectos sit angulos, &c. Quod erat demonstrandum.

a 31. primi.

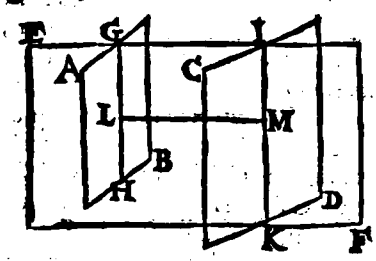
b 8. vndec.

SCHOLIVM.

## SCHOLIVM.

*Ex his aliud hoc theorema licebit demonstrare. Videlicet.*

Duo plana ad idem planum recta, in quo faciant communes sectiones parallelas, parallela sunt: Et duorum planorum parallelorum, si vnum cuipiam plano ad rectos sit angulos, erit & alterum ad idem rectum.




*Sint plana AB, CD, ad planum EF, recta, facientia sectiones GH, IK, parallelas. Dico ea parallela esse. In plano enim EF, ducatur ad GH, perpendicularis LM, quæ ex defin. 4. huius lib. ad planum AB, recta erit:* [a] *eademq; perpendicularis erit ad IK; ac propterea ex defin. 4. huius lib. ad planum quoque CD, recta erit. Quia igitur LM, ad vtrumque planum AB, CD, recta est,* [b] *ipsa parallela erunt.*

a 29. primi

b 14 vndec.

*Sed iam parallela sint plana AB, CD; sitq; AB, rectum ad planum EF. Dico & CD, rectum esse ad idem planum EF. Sint enim communes sectiones plani EF, & planorum AB, CD, recta GH, IK;* [c] *quæ parallela erunt. Ducta quoq; in plano EF, ad rectam GH, linea perpendiculari LM; erit hæc, ex defin. 4. huius lib. ad AB, planum recta. Igitur ex scholio propos. 14. huius lib. eadem LM, ad planum CD, recta quoque erit.* [d] *Quare planum EF, per rectam LM, ductum ad planum CD, erit rectum; ideoq; vicissim planum CD, ad planum EF, erit quoq; rectum. Quod est propositum.*

c 16 vndec.

d 18 primi.

*Hinc etiam problema hoc absoluetur.*

Per rectam in plano quouis datam planum ducere, quod ad ipsum planum sit rectum.

*Sit data recta FG, in plano CD, vt in figura huius propos. oporteat q; per FG, planum ducere, quod ad planum CD, rectum sit. Ex quouis puncto B, rectæ FG,* [e] *erigatur ad planum CD, perpendicularis BA, & per rectas AB, FG, planum ducatur EF.* [f] *quod ad planum CD, rectum erit. Quod est propositum.*

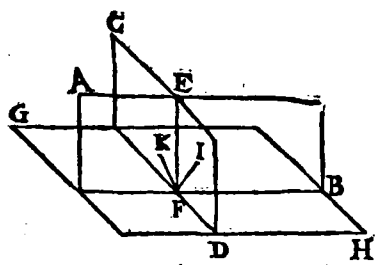
e 12 vndec.

f 18. vndec.

## THEOR. 17. PROPOS. 19.

19.

Si duo plana se mutuò secantia, plano cuidam ad rectos sint angulos; communis etiam illorum sectio ad rectos eidem plano angulos erit.




Sint duo plana AB, CD, se mutuò secantia per lineam rectam EF, ad planum GH, recta. Dico communem illorum sectionem EF, rectam quoque esse ad idem planum GH. Aut enim EF, ad BF, DF, communes sectiones planorum AB, CD, cum plano GH, recta est, aut non. Si recta est EF, ad BF, DF, [a] recta quoq; erit ad planum GH, quod per ipsas ducitur. Si verò EF, concedatur recta ad alteram rectarum BF, DF, tantùm, sit ea recta ad BF. Quoniam igitur planum AB, ad planum GH, ponitur rectum; erit EF, quæ in plano AB, ad BF, communem eius sectionem cum plano GH, ducitur perpendicularis, ad planum GH, recta, ex 4. defin. huius lib. Idem cõcludes, si EF, concedatur recta ad DF. Erit enim & tunc EF, ad planum GH, recta ex defin. 4. huius lib. cùm perpendicularis ponatur ad DF, communem sectionem plani CD, cum plano GH, ducaturque in plano CD, ad planum GH, recto. Si denique EF, ad neutram BF, DF, esse credatur recta; [b] ducatur ex F, in plano AB, ad BF, communem eius sectionem cum plano GH, perpendicularis FI; Item in plano CD, ad DF, communem eius sectionem cum plano GH, perpendicularis FK. Quoniam igitur planum AB, rectum ponitur ad planum GH, erit quoque perpendicularis IF, quæ in plano AB, ad BF, communem eius sectionem cum plano GH, ducitur, recta ad planum GH, ex 4. defin. huius lib. Eadem ratione erit KF, ad idem planum GH, recta; Ac proinde à puncto F, ad planum GH, duæ perpendiculares sunt excitatæ. Quod fieri non posse suprà [c] demonstratum est. Quare EF, recta erit ad planum GH. Si duo igitur plana se mutuò secantia plano cuidam ad rectos sint anguli, &c. Quod erat demonstrandum.

a 4. vndec.

b 11. primi.

b 13. vndec.

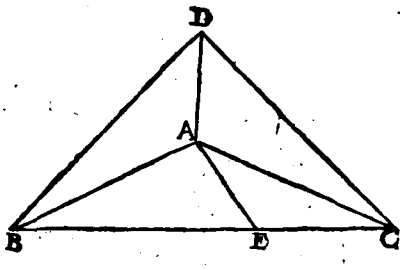
## THEOR. 18. PROPOS. 20.

20.

Si solidus angulus tribus angulis planis contineatur: Ex his duo quilibet vtut assumpti, tertio sunt maiores.

Continetvr angulus solidus ad A, tribus angulis planis BAC, CAD, DAB. Dico quoslibet duos reliquo esse maiores. Si enim omnes tres sint æquales, perspicuum est, quosuis duos maiores esse reliquo: Si verò duo tantùm sint æquales, & tertius vtrouis minor, constat quoque quoslibet duos reliquo maiores esse. Quod si vnus, videlicet BAC, sit maximus, reliqui autem siue æquales, siue inæquales, manifestum etiam est, quemlibet horum cum maximo illo BAC, reliquo esse maiorem. Dico iam hoc angulo maximo BAC, maiores quoque esse angulos duos

c 23. primi.

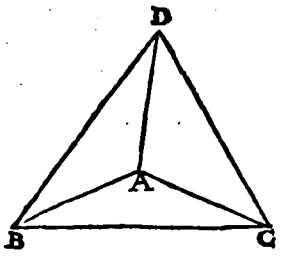



BAD, DAC. In plano enim per AB, AC, ducto c fiat angulus BAE, angulo BAD, æqualis; & recta AE, æqualis rectæ AD. Deinde in eodem plano per E, extendatur recta BC, secans rectas AB, AC, in B, & C; coniunganturque rectæ BD, DC. Quoniam igitur latera AD, AB, trianguli BAD, æqualia sunt lateribus AE, AB, trianguli BAE; & anguli quoque ipsis contenti, per constructionem, æquales; b erunt bases BD, BE, æquales. c Quia verò latera DB, DC, maiora sunt latere BC; si demantur æquales rectæ BD, BE, relinquetur recta CD, maior quàm CE. Cùm igitur latera AD, AC, trianguli DAC, æqualia sint lateribus AE, AC, trianguli EAC; & basis CD, maior base CE; d erit angulus CAD, angulo CAE, maior. Additis ergo æqualibus angulis BAD, BAE, erunt duo anguli CAD, BAD, maiores duobus angulis CAE, BAE, hoc est, toto angulo BAC, qui maximus omnium ponebatur. Ac proinde duo quilibet multò maiores erunt reliquo non maximo. Quocirca si solidus angulus tribus angulis planis contineatur, &c. Quod erat ostendendum.

b 4. primi.
c 20. primi.
d 25. primi.

21. THEOR. 19. PROPOS. 21.

OMNIS solidus angulus sub minoribus, quàm quatuor rectis angulis planis continetur.




SIT angulus solidus A, contentus tribus planis angulis BAC, CAD, DAB. Dico hos tres angulos minores esse quatuor rectis. Ductis enim rectis BC, CD, DB, erunt constituti tres anguli solidi, B, C, D, quorum quilibet sub tribus angulis planis continetur, nempe B, sub CBA, ABD, DBC. At C, sub BCA, ACD, DCB: D, verò sub CDA, ADB, BDC. e Quoniam verò duo anguli CBA, ABD, maiores sunt angulo CBD; similiterque duo anguli BCA, ACD, maiores angulo BCD; & duo anguli CDA, ADB, maiores angulo CDB: erunt sex anguli CBA, ABD, BCA, ACD, CDA, ADB, tribus angulis CBD, BCD, CDB, maiores. f Hi autem tres æquales sunt duobus rectis. Illi ergo sex duobus rectis erunt maiores. Cùm igitur sex illi, vnà cũ tribus ad A, æquales sint sex rectis propter triangula tria BAC, CAD, DAB, (g sunt enim anguli cuiuslibet trianguli duobus rectis æquales.) si auferantur sex illi duobus rectis maiores, relinquentur tres ad A, solidum angulum constituentes, quatuor rectis minores. Omnis ergo solidus angulus, &c. Quod erat demonstrandum.

e 20. vndec.
f 32. primi.
g 32. primi.

*SCHOLIVM.*

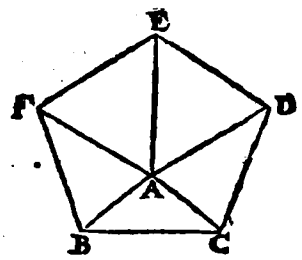
*QVONIAM hæc demonstratio ab interpretibus accommodatur soli illi angulo solido, quem tres plani anguli constituunt; idcirco nos eam ad omnes angulos solidos extendemus, hoc modo.*

*SIT angulus solidus quicunq; contentus quotcunq; angulis planis. Dico omnes illos esse quatuor rectis quoq; minores. Nam si omnibus angulis planis rectæ subtendantur, ordine in eodem plano existentes; constituetur pyramis, cuius vertex datus angulus solidus, tot laterum, angulorumúe, sub quot angulis planis solidus angulus comprehenditur; ac proinde totidem triangula pyramidem ambient. Vnde omnes anguli horum triangulorum, (a cùm anguli cuiuslibet trianguli duobus sint rectis æquales.) bis tot rectis erunt æquales, quot angulos continet basis: Sed omnes anguli basis æquales sunt quoque bis tot rectis, demptis quatuor, per ea, quæ ad 32. propos. 1. lib. demonstrauimus ex Proclo. Igitur omnes anguli dictorum triangulorum superabunt omnes angulos basis, quatuor rectis. Quæ cùm omnes anguli horum triangulorum prope basin maiores sint angulis basis; (propterea, quòd prope basin constituantur anguli solidi, quorum quilibet tribus planis angulis continetur, b & horum quilibet duo reliquo, nempe eo, qui in basi, sint maiores.) superabunt omnes anguli horum triangulorum, angulos eorundem prope basin, minoribus quàm quatuor rectis. Cùm ergo omnes anguli omnium triangulorum superent illos eorundem, qui prope basin, angulis solidum angulum constituentibus; erunt anguli, qui angulum solidum componunt, quatuor rectis minores. Quod est propositum.*

a 32. primi.
b 20. vnde.

*VERVM vt res melius percipiatur, sit gratia exempli angulus solidus A, contentus quinque angulis planis BAC, CAD, DAE, EAF, FAB, quibus subtendantur ordine rectæ BC, CD, DE, EF, FB, in vno eodemq; plano, in eo videlicet, quod rectas AB, AC, AD, AE, AF, secat in punctis B, C, D, E, F; ita vt constituatur pyramis pentagona, habens videlicet basin pentagonam, & in ambitu quinque triangula, tot videlicet,*

*quot*



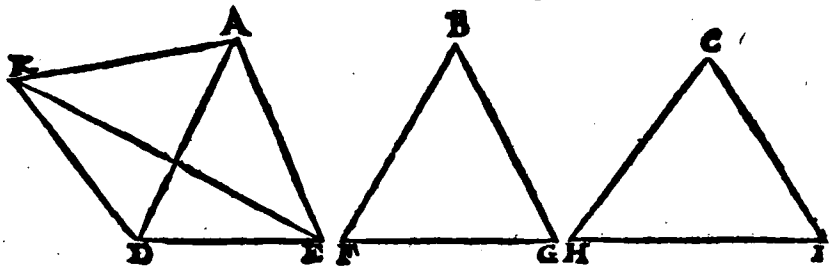

*quot anguli plani componunt angulum ſolidum A.* [a] *Quia verò omnes anguli quinque triangulorum B A C, C A D, D A E, E A F, F A B, æquales ſunt decem rectis: Anguli autem quinque baſis B C D E F, æquales ſunt ſex rectis, nempe decem, minus quatuor; ſuperabunt anguli triangulorum angulos baſis, quatuor rectis. Cùm igitur decem anguli triangulorum prope baſin maiores ſint angulis baſis; (Cùm enim angulus ſolidus B, tribus planis angulis A B C, A B F, C B F, contineatur;* [b] *erunt duo C B A, A B F, qui ſunt in triangulis, maiores angulo C B F, qui eſt in baſi: Eademq; ratione maiores erunt reliqui anguli triangulorum prope baſin, reliquis angulis in baſi.) Maiores erunt anguli triangulorum iuxta baſin, ſex rectis. Reliqui igitur quinque angulum ſolidum A, conſtituentes, minores erunt quatuor rectis; quandoquidem hi cum illis æquales ſunt decem rectis; vt dictum eſt. Eadem demonſtratio adhibenda eſt in aliis omnibus angulis ſolidis.*

[a] 32. primi.

[b] 20. huius.

## THEOR. 20. PROPOS. 22.

**Si fuerint tres anguli plani, quorum duo vt libet aſſumpti reliquo ſint maiores: comprehendant autem ipſos rectæ lineæ æquales: fieri poteſt, vt ex lineis æquales illas rectas connectentibus triangulum conſtituatur.**




SINT tres anguli plani A, B, C, contenti rectis æqualibus A D, A E, B F, B G, C H, C I, hactamen lege, vt duo quilibet reliquo ſint maiores. Dico ex tribus rectis D E, F G, H I, quæ rectas illas æquales connectunt, triangulum poſſe conſtitui; hoc eſt, trium rectarum D E, F G, H I, quaslibet duas reliqua eſſe maiores. Nam hoc poſito, [a] ex ipſis triangulum facilè conficietur. Quòd enim duæ D E, F G, maiores ſint, quàm H I, ita oſtendetur. [b] Fiat angulus D A K, angulo B, æqualis, cadatq; primùm A K, ad partes A D, ita vt fiat totus quidam angulus E A K, ex duobus E A D, D A K, compoſitus; quod quidem continget, quando duo anguli D A E, & B, duobus rectis ſunt minores. Ponatur A K, ipſi A D, æqualis, connectanturq; rectæ K D, K E. Quoniam igitur latera A K, A D, trianguli A K D, æqualia ſunt lateribus B F, B G, trianguli B F G; & anguli ipſis contenti D A K, & B, æquales; [c] erunt & baſes K D, F G, æquales. Rurſus quia latera A K, A E, trianguli A K E, æqualia ſunt lateribus C H, C I; & angulus E A K, maior angulo C; propterea quòd duo anguli D A E, & B, maiores ponuntur angulo C; [d] erit & baſis E K, maior baſe H I: [e] Sunt autem rectæ E D, D K, maiores recta E K. Igitur multò maiores erunt E D, D K, quàm H I. Cùm ergo D K, oſtenſa ſit æqualis rectæ F G; erunt quoq; D E, F G, maiores q̃ H I. Quod eſt propoſitũ.

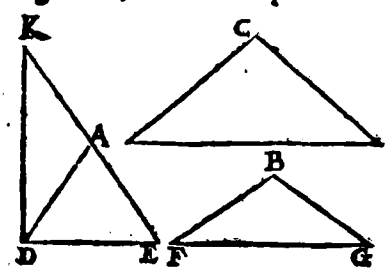
[a] 21. primi.

[b] 23. primi.

[c] 4. primi.

[d] 24. primi.

[e] 20. primi.

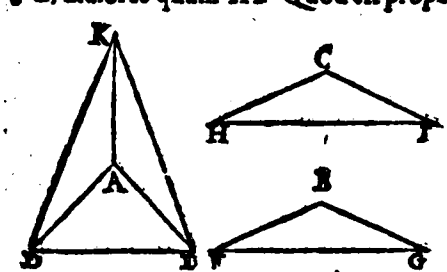



CADAT deinde A K, in rectum & continuum ipſi A E, quod quidem accidet, quando duo anguli D A E, & B, duobus rectis ſunt æquales. Ponaturq; A K, ipſi A D, æqualis rurſum, & connectatur recta K D. [f] Erit igitur, vt prius, K D, ipſi F G, æqualis. [g] Quoniam verò rectæ E D, D K, maiores ſunt recta K E; & K E, æqualis eſt rectis C H, C I, ex hypotheſi, & conſtructione; erunt quoque E D, D K, maiores duabus C H, C I: [h] Hæ autem maiores ſunt, quàm H I. Igitur multò maiores erunt E D, D K, quàm H I. Cùm ergo D K, oſtenſa ſit æqualis ipſi F G; erunt quoque D E, F G, maiores quàm H I. Quod eſt propoſitum.

[f] 4. primi.

[g] 20. primi.

[h] 20. primi.



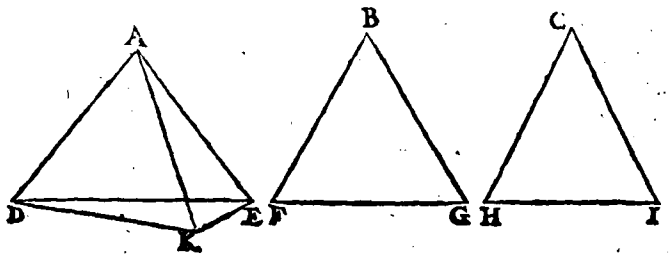

CADAT poſtremò A K, ad partes A E, ita vt nec angulus totus componatur ex angulis E A D, D A K, nec recta ſit E A K; quod demum eueniet, quando duo anguli D A E, & B, duobus rectis ſunt maiores. Ponaturq; rurſum A K, ipſi A D, æqualis, & ducantur rectæ K D, K E. [i] Erit igitur, vt prius, K D, ipſi F G, æqualis. [k] Quoniam verò duæ D E, D K, maiores ſunt duab. A E, A K; & A E, A K, æquales duabus C H, C I, ex hypotheſi & conſtructione; erunt quoque D E, D K, maiores quàm C H, C I: [l] Hæ autem maiores ſunt, quàm H I. Igitur multò maiores erunt maiores D E, D K, quàm H I. Cùm ergo D K, oſtenſa ſit æqualis ipſi F G; erunt quoq; D E, F G, maiores quàm H I. quod eſt propoſitum. Eodem modo concludemus D E, H I, maiores eſſe,

[i] 4. primi.

[k] 21. primi.

[l] 20. primi.

quàm FG, si angulus DAK, angulo C, fiat æqualis: Item FG, HI, maiores, quàm DE, si angulo
a 22. primi. C, ad FB, constituatur angulus æqualis, &c. a Quare ex tribus rectis DE, FG, HI, triangulum constitui potest. Si igitur fuerint tres anguli plani, &c. Quod erat demonstrandum.

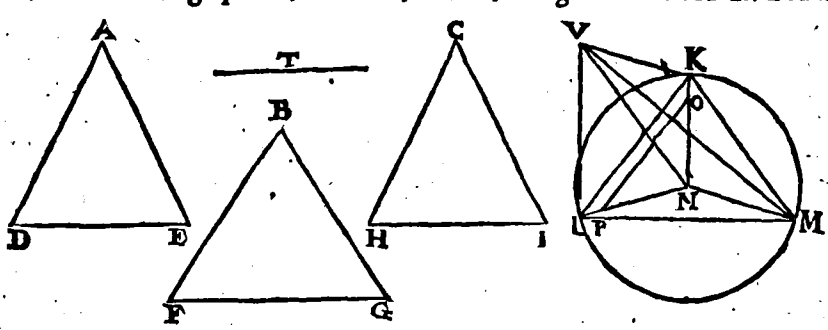



b 4. primi. ALITER. Si tres anguli A, B, C, sunt æquales; b erunt quoque bases DE, FG, HI, æquales; Ac proinde quælibet duæ reliqua maiores. Si verò duo tantùm anguli sunt æquales, & tertius minor;
c 4. primi. c erunt quoque duæ illorum bases æquales, d & basis tertij vtraq; minor: Quare rursus quælibet
d 24. primi. duæ, maiores erunt reliqua. Quod si vnus eorum, nempe A, sit maximus, siue reliqui B, & C, sint inter se æquales, siue inæquales;
e 24. primi. e erit quoque basis DE, omnium maxima. Quare DE, FG, maiores erunt quàm HI: Item DE,
f 23. primi. HI, maiores, quàm FG. Dico iam & rectas FG, HI, maiores esse recta DE. f Fiat enim angulus DAK, æqualis angulo B, ponaturque AK, ipsi AD, æqualis. Cadet ergo punctum K, infra DE; propterea quòd per puncta D, K, E, transit circumferẽtia circuli ex A, ad interuallum AD, descripta, ob æqualitatem rectarum AD, AK, AE. Connectantur deinde rectæ DK, KE. Quoniam igitur duo anguli B, & C, maiores ponuntur angulo DAE; & B, æqualis est angulo DAK, per constructionem; erit angulus C, maior reliquo angulo KAE. Et quia latera AD, AK, triãguli ADK, æqualia sunt lateribus BF, BG, trianguli BFG; & anguli ipsis contenti DAK, & B, æquales;
g 4. primi. g erit basis DK, basi FG, æqualis. Rursus quia latera CH, CI, trianguli CHI, æqualia sunt lateri-
h 24. primi. bus AK, AE, trianguli AKE; & angulus C, ostensus maior angulo KAE; h erit & basis HI, maior basi KE. Quare cùm DK, ostẽsa sit æqualis ipsi FG: erunt FG, HI, maiores quàm DK, KE:
i 20. primi. i Sed DK, KE maiores sunt, q̃ DE. Igitur multò maiores erũt FG, HI, q̃ DE. Quod est ꝓpositũ.

## 23. PROBL. 3. PROPOS. 23.

Ex tribus angulis planis, quorum duo quomodocunque assumpti reliquo sunt maiores, solidum angulum cõstituere. Oportet autem illos tres angulos quatuor rectis minores esse.

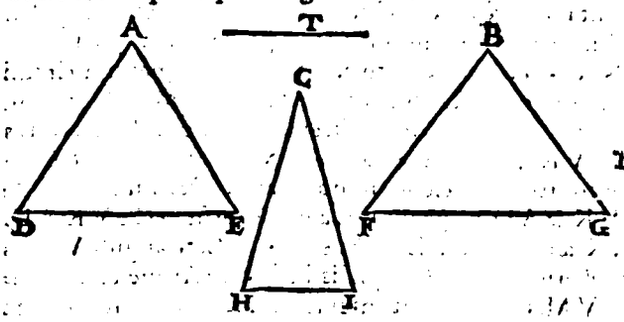
SINT tres anguli A, B, C, quatuor rectis minores, hac conditione, vt quilibet duo sint maiores reliquo. Oportet iam ex tribus angulis A, B, C, angulum solidum conficere, qui nimirum contineatur tribus angulis planis, qui dictis tribus angulis sint æquales. Ponantur sex lineæ angulos dictos comprehendentes, nempe AD, AE, BF, BG, CH, CI, æquales; subtendanturq; bases DE,
k 22. vndec. FG, HI. k Fieri ergo potest, vt ex DE, FG, HI, triangulũ constituatur. Constituatur ex ipsis igitur




l 5. quarti. triangulum KLM, sitque latus KL, rectæ DE; latus LM, rectæ FG; & latus KM, rectæ HI, æquale. l Describatur circa triãgulum KLM, circulus, cuius cẽtrum N, à quo ducãtur rectæ NK, NL, NM. Eritque quælibet rectarum angulos planos comprehendentium, nempe AD, AE, &c. maior qualibet ductarum ex centro N. Quod ita ostendetur. Cadat primò centrum N, intra triangulum KLM, quod quidem fiet, quando triangulum est oxygonium, vt ex coroll. propos. 5. lib. 4. constat. Si igitur AD, AE, maiores mõ credantur, quàm NK, NL, erunt vel æquales, vel minores. Sint ergo æquales. Quoniam igitur latera AD, AE, trianguli ADE, æqualia sunt lateribus NK, NL, trianguli NKL; & basis DE, basi
m 8. primi. KL, æqualis: m erit angulus A, angulo KNL, æqualis. Eodem argumento erit angulus B, angulo LNM; & angulus C, angulo MNK, æqualis. Cùm igitur tres anguli circa N, æquales sint quatuor rectis ex coroll. propos. 15. lib. 1. erunt quoq; tres anguli A, B, C, quatuor rectis æquales. Quod est absurdum. ponuntur enim quatuor rectis minores. Nõ igitur æquales sunt AD, AE, ipsis NK, NL. Dico quòd neq; minores. Si enim minores sint AD, AE, quàm NK, NL, abscindantur NO, NP, ipsis AD, AE, ęquales, ducaturq; recta OP. Quoniã igitur est vt NK, ad NO, ita NL, ad NP,
n 2. sexti. cùm & antecedentia inter se, & consequentia sint inter se æqualia; erunt latera NK, NL, trian-
o 29. primi. guli NKL, secta proportionaliter: n ac proinde OP, ipsi KL, parallela erit. o Quare anguli
p 4. sexti. NOP, NPO, angulis NKL, NLK, æquales erunt, & triangulum NOP, triangulo NKL, æquiangulum. p Igitur erit vt NK, ad KL, ita NO, ad OP. Est autem NK, maior quàm NO.
q 14. quinti. q Igitur & KL, hoc est, DE, quæ æqualis est ipsi KL, maior erit, quàm OP. Quocirca cùm latera

AD, AE,

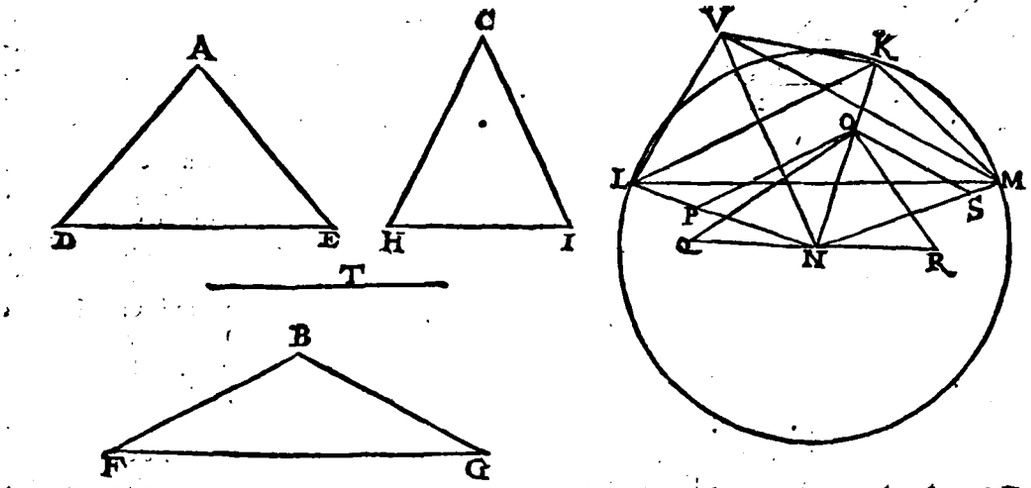
AD,AE,trianguli ADE, sint æqualia lateribus NO, NP, trianguli NOP, & basis DE, maior basi OP; [a] erit & angulus A, maior angulo ONP. Eadem ratione angulus B, angulo LNM; & angulus C, angulo MNK, maior esse ostendetur. Cùm igitur tres anguli ad N, quatuor sint rectis æquales, ex coroll. propos. 15. lib. 1. erunt tres anguli A,B,C, maiores quatuor rectis. Quod est absurdum. ponuntur enim quatuor rectis minores. Non igitur minores sunt AD, AE, quàm NK, NL; sed neque æquales. Igitur maiores. [a] 25. primi.




CADAT deinde centrum N, in latus LM; & tum continget, quàdo triángulũ KLM, angulũ LKM, habuerit rectũ, vt ex eodẽ coroll. propos. 5. lib. 4. manifestum est.

Si igitur AD, AE, dicátur esse æquales ipsis NK, NL; erunt quoq; BF, BG, æquales eisdem NK, NL. Cùm ergo NK, æqualis sit ipsi NM; æquales erunt BF, BG, rectæ LM: Posita autem fuit LM, æquális ipsi FG. Igitur BF, BG, æquales quoque sunt rectæ FG. [b] Sunt autem & maiores BF, BG, quàm FG. Quod est absurdum. Non igitur æquales sunt AD, AE, ipsis NK, NL. Quod si AD, AE, minores credantur, quàm NK, NL; erunt quoque BF, BG, minores quàm NK, NL. Cùm ergo NK, æqualis sit ipsi NM; minores erunt BF, BG, quàm recta LM: posita autem fuit LM, ipsi FG, æqualis. Igitur BF, BG, minores quoque sunt recta FG. Quod est absurdum, [c] cùm sint maiores. Non ergo minores sunt AD, AE, quàm NK, NL; sed neq; æquales: Igitur maiores. [b] 20. primi. [c] 20. primi.

CADAT postremò centrum N, extra triangulum KLM, infra latus LM, quod demum accidet, quando angulus LKM, fuerit obtusus, vt ex coroll. dicto propos. 5. lib. 4 liquet. Si igitur dicantur AD, AE, esse æquales ipsis NK, NL; cùm & basis DE, basi KL, ponatur æqualis; [d] erit angulus A, angulo KNL, æqualis. Eadem ratione angulus C, angulo KNM, æqualis erit. Quare totus angulus LNM, angulis A, & C, æqualis erit. Sed hi duo maiores sunt ex hypothesi, angulo B. Igitur & angulus LNM, angulo B, erit maior. Rursus quia latera NL, NM, triáguli NLM, æqualia sunt lateribus BF, BG, triáguli BFG, & basis LM, basi FG, æqualis; [e] erit angulus LNM, angulo B, [d] 8. primi. [e] 8. primi.



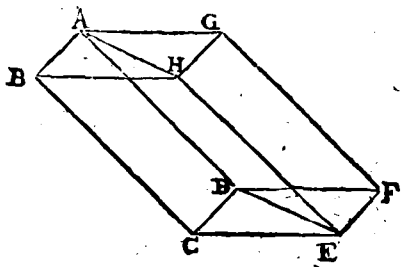

æqualis: Sed & maiorem ostẽdimus esse. Quod est absurdum. Non igitur æquales sunt AD, AE, ipsis NK, NL. Quod si AD, AE, credantur esse minores, quàm NK, NL; si abscindátur NO, NP, ipsis AD, AE, æquales, & ducatur recta OP; demonstrabitur, vt in primo casu, angulus A, maior angulo ONP; & eadem ratione angulus C, maior angulo KNM. [f] Fiat angulus ONQ, angulo A; & angulus ONR, angulo C, æqualis, ponanturq; NQ, NR, æquales ipsis AD, AE, & connectantur OQ, OR; cadetq; OQ, infra OP, propterea quòd p puncta O,P,Q, transit circumferentia circuli ex N, ad interuallũ NO, descripta, cùm æquales sint rectæ NO, NP, NQ. [g] Quare cùm angulus PON, æqualis sit angulo LKN, externus interno; erit angulus QON, minor angulo LKN. Eadem ratione ostendetur angulus NOR, minor angulo NKM, si ducatur OS, parallela ipsi KM. Cadet enim similiter OR, infra OS. Igitur totus angulus LKM, toto angulo QOR, maior erit. Quoniam verò latera NO, NQ, trianguli NOQ, æqualia sunt lateribus AD, AE, trianguli ADE; Est autem & angulus ONQ, angulo A, æqualis, per cõstructionem; [h] erit OQ, ipsi DE, hoc est, ipsi KL, æqualis. Eodem modo erit OR, ipsi KM, æqualis. Connexa iam recta QR, cũ latera KL, KM, trianguli LKM, æqualia sint lateribus OQ, OR, triáguli OQR; & angulus LKM, maior angulo QOR, vt ostendimus: [i] erit basis LM, hoc est, FG, maior basi [f] 23. primi. [g] 29. primi. [h] 4. primi. [i] 24. primi.

QR. Quoniam igitur latera BF, BG, trianguli BFG, æqualia sunt lateribus NQ, NR, trianguli
a 25. primi. NQR; & basis FG, maior basi QR; a erit angulus B, maior angulo QNR. Rursus quia angulus ONQ angulo A; & angulus ONR, angulo C, factus est æqualis, erit angulus totus QNR, duobus A, & C, æqualis: Sed A, & C, maiores ponuntur angulo B. Igitur & angulus QNR, maior erit angulo B. Quod est absurdum, cùm B, ostensus sit maior angulo QNR. Non ergo minores sunt AD, AE, quàm NK, NL; sed neque æquales: Igitur maiores.

IAM verò, cùm rectæ AD, AE, maiores sint rectis NK, NL, vbicunq; centrum N, existat; possit recta AD, plus quàm recta NK, quadrato lineæ T, per lemma propos. 14. lib. 10. ita vt quadratum
b 12. vndec. rectæ AD, æquale sit quadratis rectarum NK, & T, b Ex centro N, excitetur ad planum circuli KLM, perpendicularis NV, rectæ T, æqualis; connectanturq; rectæ KV, LV, MV. Quoniam igitur NV, recta est ad planum circuli KLM, recta quoq; eadem erit, ex defin. 3. huius lib. ad rectas
c 47. primi. NK, NL, NM; c ac proinde quadratũ rectæ VK quadratis rectarum KN, NV, æquale erit. Cùm ergo & quadratum rectæ AD, æquale sit ex constructione, eisdem quadratis rectarum KN, NV; æqualia erunt inter se quadrata rectarum VK, & AD. Ac propterea æquales erũt rectæ VK, AD. Rursus quia latera VN, NK, trianguli VNK, æqualia sunt lateribus VN, NL, trianguli VNL;
d 4. primi. & anguli ipsis contenti VNK, VNL, recti; d erit basis VK, æqualis basi VL; Atque eadem ratione rectæ VM. Quare tres rectæ VK, VL, VM, æquales sunt inter se: Ostensa est autem recta VK, æqualis rectæ AD. Tres ergo rectæ VK, VL, VM, æquales sunt rectæ AD, & ob id, rectis AB,
e 8. primi. BF, BG, CH, CI. Quamobrem, cùm latera VK, VL, trianguli VKL, æqualia sint lateribus AD, AE, trianguli ADE; & basis KL, basi DE; e erit angulus KVL, angulo A, æqualis. Non secus demonstrabimus, angulum LVM, angulo B; & angulum KVM, angulo C, esse æqualem. Quare angulus solidus V, continetur tribus angulis planis KVL, LVM, MVK, qui æquales sunt datis tribus angulis planis A, B, C. Ex tribus itaque angulis planis, &c. Quod erat faciendum.

## 24. THEOR. 21. PROPOS. 24.

SI solidum parallelis planis cõtineatur; aduersa illius plana, parallelogramma sunt, similia, & æqualia.




SIT parallelepipedum ABEF, (de hoc enim intelligenda est propositio) contentum, iuxta defin. 30. huius lib. sex figuris quadrilateris AC, CF, FH, HA, AF, BE, quarum aduersæ quælibet sint parallelæ. Dico quæuis opposita plana esse parallelogramma, similia, & æqualia. Cùm enim parallela plana BG, CF, secentur plano AC; f Erunt communes sectiones AB, CD, parallelæ. Similiter, cùm plana parallela AF, BE, secentur plano AC; erunt communes sectiones AD, BC, parallelæ; Ac proinde parallelogrammum est
f 16. vndec. figura quadrilatera ABCD. Non aliter ostendemus, reliquas figuras quadrilateras esse parallelogramma. Dico iam opposita parallelogramma esse similia, & æqualia. Cùm enim rectæ AB, BH,
g 10. vndec. parallelæ sint rectis DC, CE, & non in eodem plano, sed in oppositis; g erunt anguli ABH, DCE æquales; eodemque argumento reliqui anguli parallelogrammi BG, æquales erunt reli-
h 34. primi. quis angulis parallelogrammi CF. h Quoniam verò AB, ipsi DC, in parallelográmo AC; & BH, ipsi CE in parallelográmo BE, æqualis est; erit vt AB, ad BH, ita DC, ad CE; Ac propterea vt BH, ad HG, ita CE, ad EF, &c. eadem de causa: Erunt latera parallelográmorum BG, CF, circa angulos æquales, proportionalia; ac proinde parallelogramma ipsa similia. Ductis iam diametris
i 34. primi. AH, DE; cùm latera AB, BH, triãguli ABH, æqualia sint lateribus DC, CE, trianguli DCE; &
k 10. vndec. angulus ABH, angulo DCE, æqualis, vt ostẽsum est; l erunt triágula ABH, DCE, æqualia inter
l 4 primi. se. m Quare cùm triangula ABH, DCE, dimidia sint parallelogrammorũ BG, CF; erunt paral-
m 34. primi. lelogramma BG, CF, inter se æqualia. Similiter demonstrabimus similia & æqualia esse parallelogramma opposita AC, GE; & AF, BE. Si solidum ergo parallelis planis contineatur, aduersa illius plana, parallelogramma sunt, similia, & æqualia. Quod erat demonstrandum.

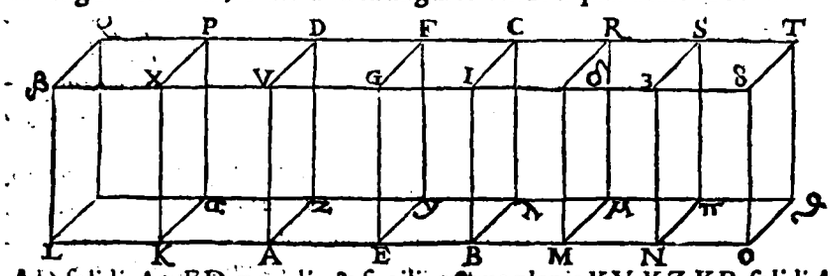
## 25. THEOR. 22. PROPOS. 25.

SI solidum parallelepipedũ plano secetur, aduersis planis parallelo: Erit quemadmodum basis ad basim, ita solidum ad solidum.

SECATVR parallelepipedum ABCD, plano EF, parallelo oppositis planis AD, BC. Dico vt est basis AG, ad basin BG, ita esse solidum AEFD, ad solidũ BEFC. Intelligatur enim parallelepipedum ABCD, productum in vtramque partem quantumlibet, sumnaturáque in AB, protracta quotcunque rectæ AK, KL, ipsi AE; & quotcunque rectæ BM, MN, NO, ipsi EB, æquales. Deinde per puncta K, L, M, N, O, ducantur plana KP, LQ, MR, NS, OT, parallela planis AD, EF, BC, per scholium propos. 15. huius lib. Quoniam igitur solidum AEFD, contine-
n 24. vndec. tur planis parallelis, ex hypothesi; ipsum parallelepipedum erit, ex definitione, n habebitq; plana opposita, parallelogramma similia, & æqualia. Eodem modo erunt parallelepipeda AKPD, KLQP; EBCF, BMRC, MNSR, NOTS; ELQF, EOTF; habebuntque plana opposita,
o 36. primi. parallelogramma similia, & æqualia. o Quoniam verò parallelogramma AG, KV, LX, cùm sint

ſuper æquales baſes A E, A K, K L, æqualia ſunt; & ſimilia quoque, [a] cùm anguli vnius ſint æquales angulis aliorum, & latera circa angulos vnius æqualia lateribus circa angulos aliorum, ideoq; proportionalia. Eademq; ratione æqualia, & ſimilia ſunt parallelogrãma AY, KZ, Lα. Cùm igitur æqualia quoq; ſint, & ſimilia parallelogramma AD, KP, LQ: Eruntq; tria plana AG, AY, AD, ſolidi AEFD, æqualia, & ſimilia tribus planis KV, KZ, KP, ſolidi AKPD; & tribus planis LX, Lα, LQ, ſolidi KLQP: [b] Sunt autẽ tria in vnoquoq; ſolido æqualia, & ſimilia tribus reliquis oppoſitis in eodẽ, nempe AG, ipſi ZF; & AY, ipſi VF; & AD, ipſi EF, &c. Igitur [c] defin. 10. huius libri, æqualia ſunt ſolida AEFD, AKPD, KLQP. Eodẽ argumento æqualia oſtendentur ſolida EBCF, BMRC, MNSR, NOTS. Quare quàm multiplex eſt baſis LG, baſis AG, tam multiplex erit ſolidum LEFQ, ſolidi AEFD; Et quàm multiplex eſt baſis OG, baſis BG, tam multiplex erit ſolidum OEFT, ſolidi BEFC. Quoniam verò ſi baſis LG, (multiplex baſis AG, primæ magnitudinis,) æqualis eſt baſi OG, (multiplici baſis BC, ſecundæ magnitudinis,) æquale quoq; eſt ſolidum LEFQ, (multiplex ſolidi AEFD, tertiæ magnitudinis) ſolido OEFT, (multiplici ſolidi BEFC, quartæ magnitudinis,) propterea quòd baſibus LG, OG, æqualibus exiſtentibus, æqualia quoque ſunt & ſimilia ſex parallelogramma ſolidi LEFQ, ſex parallelogrammis ſolidi OEFT: Si autem baſis maior eſt baſe, ſolidum quoque ſolido maius eſt; & ſi minor, minus; in quacunque hoc fiat multiplicatione: Erit per defin. 6. lib. 5. vt baſis AG, prima magnitudo, ad baſin BG, ſecundam magnitudinẽ, ita ſolidum AEFD, tertia magnitudo, ad ſolidum BEFC, quartam magnitudinẽ. Eadem ratione demonſtrabitur, eſſe ſolidum ad ſolidum, vt eſt baſis DY, ad baſin CY; & vt baſis AY, ad baſin BY; & vt baſis DG, ad baſin CG. Si ſolidum igitur parallelepipedum plano ſecetur, &c. Quod erat oſtendendum,

[a] 29. primi,



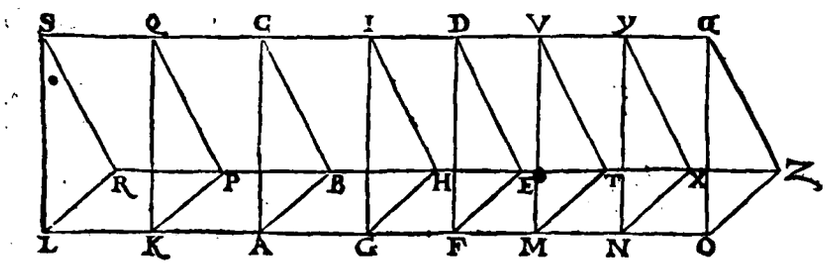

[b] 24. vndec.

## SCHOLIVM.

*HAEC propoſitio accommodari etiã poteſt omni priſmati. Nam ſi priſma quodcunq; plano ſecetur, aduerſis planis parallelo; erit quemadmodum baſis ad baſim, ita ſolidum ad ſolidum. Sit enim primò priſma ABCDEF, cuius plana aduerſa ſint triangula ABC, DEF; ſecetur q; plano GHI, aduerſis planis parallelo. Dico vt eſt baſis AI, ad baſin FI, ita eſſe ſolidum ABCIHG, ad ſolidum FEDIHG. Intelligatur enim priſma ABCDEF, in vtramque partem quantumlibet productum, & ex AF, protracta vtrinque capiantur quotcunque rectæ AK, KL, ipſi AG; & quotcunq; rectæ FM, MN, NO, ipſi FG, æquales. Deinde per punctã K, L, M, N, O, ducantur plana KPQ, LRS; MTV, NXY, OZα, parallela planis ABC, GHI, FED, per ſchol. propoſ. 15. huius lib. Quoniam igitur plana parallela ABC, GHI, ſecantur plano AI; [a] erunt communes ſectiones AC, GI, parallelæ: Sunt autem & AG, CI, parallelæ ex hypotheſi, ob parallelogrammum AD. Igitur parallelogrammũ eſt AI. Rurſus quia plana parallela ABC, GHI, ſecantur plano AH; [b] erunt communes ſectiones AB, GH, parallelæ: Sunt autem & AG, BH, parallelæ, ob parallelogrammum AE. Igitur parallelogrammũ eſt AH. Eodem modo parallelogrammum oſtendetur CH. Quoniam verò latera AC, AB, trianguli ABC, æqualia ſunt lateribus GI, GH, trianguli GHI; [c] cùm AC, ipſi GI, & AB, ipſi GH, ſit æquale; [d] & anguli CAB, IGH, ſunt quoq; æquales, eò quòd rectæ CA, AB, parallelæ ſunt rectis IG, GH, & non in eodem plano: [e] Erunt triangula ABC, GHI, æqualia inter ſe, & æquiangula. [f] Quare latera circum æquales angulos proportionalia habebunt; Atque idcircò ſimilia erunt. Igitur ſolidum ABCIHG, contentum duobus planis oppoſitis ABC, GHI, æqualibus & ſimilibus, at q; parallelogrammis AI, IB, BG. priſma eſt. Eadem ratione priſmata erunt ABCQPK, KPQSRL; FEDIHG, FEDVTM, MTVTXN, NXYαZO, LRSIHG, OZαIHG. Quoniam verò parallelogramma AI, KC, LQ, æqualia ſunt & ſimilia; necnon AH, KB, LP; & CH, QB, SP; erunt omnia plana priſmatis ABCIHG, æqualia & ſimilia omnibus planis priſmatũ ABCQPK, KPQSRL. Quare per defin. 10. huius libri, æqualia erunt priſmata ABCIHG, ABCQPK, KPQSRL. Eadem ratione æqualia erunt priſmata FEDIHG, FEDVTM, MTVTXN, NXYαZO. Quare ã multiplex eſt baſis LI, baſis AI, tam multiplex erit priſma LRSIHG, priſmatis ABCIHG; & ã multiplex eſt baſis OI, baſis FI, tã multiplex erit priſma PZαIHG, priſmatis FEDIHG. Quia verò ſi baſis LI, (multiplex baſis AI, primæ magnitudinis) æqualis eſt baſi OI, (multiplici baſis FI, ſecundæ magnitudinis) æquale quoq; eſt priſma LRSIHG, (multiplex priſmatis ABCIHG, tertiæ magnitudinis) priſmati OZα-*

[a] 16. vnde.

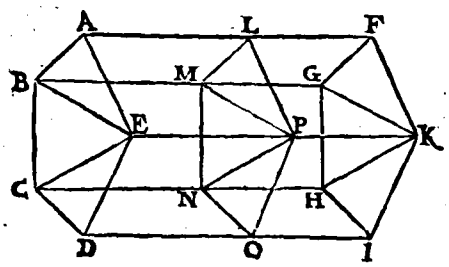
[b] 16. vnde.




[c] 34. primi.
[d] 10. vnde.
[e] 4. primi.
[f] 4. ſexti.

*IHG, (multiplici prismatis FEDIHG, quartæ magnitudinis) propterea quòd basibus LI, OI, existentibus æqualibus, æqualia quoque sunt & similia omnia plana prismatis LRSIHG, omnibus planis prismatis OZαIHG: Si autem basis LI, maior est basi OI, prisma quoque prismate maius est; & si minor, minus, in quacunque multiplicatione hoc fiat. Erit, per defin. 6. lib. 5. vt basis AI, prima magnitudo ad basin FI, secundam magnitudinem, ita prisma ABCIHG, tertia magnitudo ad prisma FEDIHG, quartam magnitudinem. Eodem modo ostendetur esse prisma ad prisma, vt est basis AH, ad basin FH: & vt basis CH, ad basin DH. Quod est propositum.*

*SIT deinde prisma ABCDEFGHIK, cuius opposita plana sint polygona, nempe pentagona, secetúrq; plano LMNOP. Dico rursus, vt est basis CM, ad basin NG, ita esse solidũ ABCDELMNOP, ad solidum LMNOPFGHIK. Si enim plana opposita parallela resoluantur in triangula, erit quoque prisma in totidem prismata, quorum plana opposita sunt triangula, resolutum. Quare erit vt basis BP, ad basin MK, ita prisma ABEPML, ad prisma LMPKGF, per ea, quæ demonstrata sunt. Eodem modo erit vt basis CP, ad basin NK, ita prisma BCEPMN, ad prisma MNPKGH; & prisma CDEPNO, ad prisma NOPKHI.* a *Vt autẽ BP, ad MK, & CP, ad NK, ita est recta EP, ad rectã PK, hoc est, vt CN, ad NH; & vt CN, ad NH, ita est CM, ad NG. Igitur prismata ABEPML, BCEPMN, CDEPNO, ad prismata LMPKGF, MNPKGH, NOPKHI, eandem habent proportionem ei, quam habet CM, ad NG; ac proinde eandem inter se.* b *Vt autem vnum ad vnum, ita se habent omnia ad omnia. Igitur erit vt prisma BCEPMN, ad prisma MNPKGH hoc est vt basis CM, ad basin NG; ita prisma ABCDELMNOP, ex tribus compositũ ad prisma LMNOPFGHIK, ex tribus conflatum. Quod est propositum. Eadem prorsus erit demonstratio in quocunq; alio prismate.*




a 1. sexti.

b 12. quinti

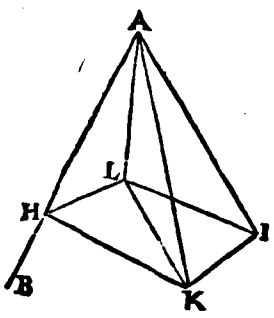
*POTEST tamen hoc idem in omni prismate ostendi, demonstratione, qua vsi sumus in prismate habente plana opposita, triangula similia. Si enim eadem fiat constructio, producto prismate in vtramq; partem, e-*
c 16. vnde. *runt omnia plana parallela secantia, inter se æqualia, & similia;* c *propterea quòd latera eorum sunt paral-*
d 10. vnde. *lela, nempe communes sectiones parallelorum planorum;* d *ac proinde angulos æquales comprehendunt &c. Vnde, vt prius, ostendentur prismata ex vna parte inter se æqualia, necnon & prismata ex altera parte, &c.*

## COROLLARIVM.

*EX his infertur, si prisma quodcunque secetur plano oppositis planis æquidistante, sectionem esse figuram æqualem & similem planis oppositis: Veluti demonstratum est in priori prismate, triangulum GHI, æquale esse & simile triangulo ABC, atq; adeò triangulo DEF. Eadem enim in omnibus est demonstratio. Idem dices de parallelepipedo.*

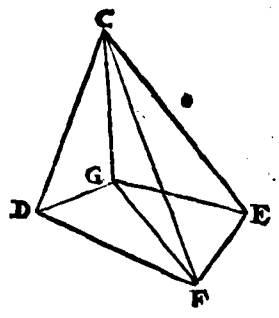
## 26. PROBL. 4. PROPOS. 26.

AD datam rectam lineam, eiusque punctum angulum solidum constituere, solido angulo dato æqualem.




a 11. vndec.

b 23. primi.



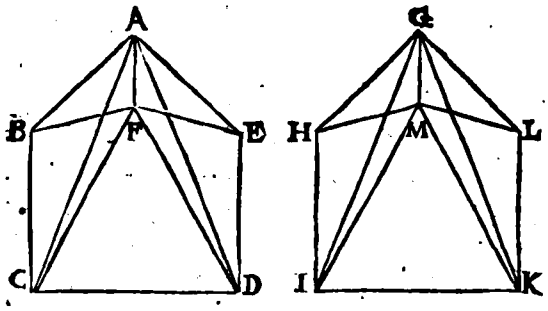

SIT ad punctũ A, in data recta AB, constituẽdus angulus solidus, æqualis angulo solido C, contento tribus angulis planis DCE, DCF, FCE, non in eodẽ plano existentibus. a Ducatur ex F, ad planum p CD, CE, ductum, perpendicularis FG; connectãturq; rectæ DF, DG, EF, EG, CG. Deinde abscindatur AH, æqualis ipsi CD, b fiatq; angulus HAI, angulo DCE, æqualis; & recta AI, rectæ CE, æqualis. Rursus in plano per AH, AI, ductum constituatur angulus HAL, æqualis angulo DCG, qui in plano per
c 12. vndec. CD CE, ducto existit; & rectæ AL, rectæ CG, æqualis. c Ex L, verò ad planum, in quo sunt tres AH, AL AI, erigatur perpendicularis LK, quæ ipsi FG, æqualis ponatur. & coniungantur rectæ KA Dico angulum solidum A, contentum tribus planis angulis HAI, HAK, KAI, æqualem esse dato angulo solido C. Connexis enim rectis HK, HL, IK, IL; cũ latera AH, AL, trianguli AHL, æqualia sint lateribus CD, CG, trianguli CDG, & anguli HAL, DCG, æquales, p constructio-
d 4. primi. nem; d Erunt bases HL, DG, æquales. Rursus quia ablatis angulis æqualibus HAL, DCG, ab æqualibus HAI, DCE, reliqui æquales sunt LAI, GCE: Cùm igitur & latera AL, AI, trianguli
e 4. primi. ALI, æqualia sint lateribus CG, CE, trianguli CGE, per constructionem; e æquales quoque erunt LI, GE. Quia igitur latera LH, LK, æqualia sunt lateribus GD, GF; & anguli HLK, DGF,

DGF, recti, ex defin. 3. huius lib. [a] erunt & baſes HK, DF, æquales. Quare cùm & latera AH, AK, trianguli AHK, ſint æqualia lateribus CD, CF, triãguli CDF, ex conſtructione. (cùm enim AL, LK, latera lateribus CG, GF, æqualia ſint ex conſtructione, comprehendantq; angulos æquales; nimirũ rectos, ex defin. 3. huius lib. [b] erunt baſes AK, CF, æquales.) [c] Erunt quoq; anguli HAK, DCF, æquales. Deniq; quia latera LI, LK, ſunt æqualia lateribus GE, GF; & anguli ILK, EGF, recti, ex defin. 3. huius libri. [d] Erunt baſes IK, EF, æquales: Cùm igitur & latera AI, AK, trianguli AIK, lateribus CE, CF, trianguli CEF, ſint æqualia ex conſtructione; [e] Erunt quoque anguli IAK, ECF, æquales. Sunt ergo tres anguli plani HAI, HAK, KAI, ſolidum angulum A, componentes, æquales tribus angulis planis DCE, DCF, FCE, angulum ſolidum C, componentibus; Atq; proinde ſolidus angulus A, ſolido angulo C, æqualis. Ad datam itaque rectam lineam, eiusq; punctum, angulum ſolidum conſtituimus, ſolido angulo dato æqualem. Quod erat faciendum.

[a] 4. primi.
[b] 4. primi.
[c] 8. primi.
[d] 4. primi.
[e] 4 primi.

## SCHOLIVM.

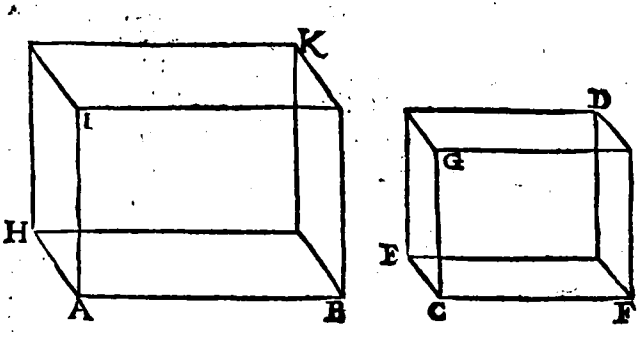
*QVOD ſi angulus ſolidus datus contineatur pluribus angulis planis, q̃ tribus, ſubtendendæ erunt omnibus angulis planis recta in vno eodemq; exiſtentes plano (in eo ſcilicet, quod omnes rectas lineas planorum angulorum ſecet) ita vt figuram planam polygonam conſtituant, pyramisq; quadam multilatera efficiatur. Si enim figura polygona in triangula reſoluatur, habebuntur tot pyramides trilateræ, quot triangula in figura polygona continentur. Si igitur angulis ſolidis omnium pyramidum triangularium æquales ſolidi anguli conſtituantur, quorum quilibet tribus angulis planis continetur; conſtitutus erit totus angulus ſolidus toti angulo ſolido æqualis.*




*VT ſi angulo ſolido A, contento quinque angulis planis BAC, CAD, DAE, EAF, FAB, conſtituendus ſit ſolidus angulus æqualis, ſubtendẽdæ ſunt angulis planis rectæ BC, CD, DE, EF, FB, vt fiat pentagonum BCDEF, quòd in tria triangula reſoluatur BCF, FCD, DEF. Deinde ſolido angulo A, contento tribus planis angulis BAC, CAF, FAB, conſtituendus ſolidus angulus æqualis G, contentus tribus angulis planis HGI, IGM, MGH. Et ſolido angulo A, contẽto tribus planis angulis CAF, FAD, DAC, æqualis ſolidus angulus G, contentus tribus angulis planis IGM, MGK, KGI. Et denique angulo ſolido A, contento tribus angulis planis DAE, EAF, FAD, æqualis ſolidus angulus G, contentus tribus planis angulis KGL, LGM, MGK. Ita enim fiet totus angulus ſolidus G, toti angulo ſolido A, æqualis. Atq; in hunc modum cuilibet angulo ſolido æqualis angulus ſolidus conſtituetur.*

## PROBL. 5. PROPOS. 27. 27.

AD DATA recta linea, dato ſolido parallelepipedo ſimile & ſimiliter poſitum ſolidum parallelepipedum deſcribere.



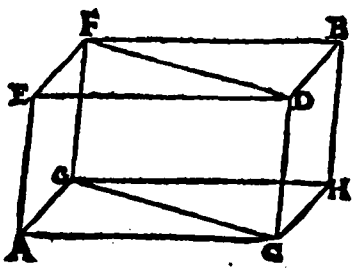

SIT à data recta AB, deſcribendum parallelepipedum ſimile, ſimiliterq; poſitum parallelepipedo CD. [f] Fiat ad rectam AB, eiusq; punctum A, angulus ſolidus æqualis angulo ſolido C, ita vt tres anguli plani HAI, IAB, BAH, æquales ſint tribus angulis planis ECG, GCF, FCE Deinde vt eſt CF, ad CG, [g] ſic fiat AB, ad AI, & vt CG, ad CE, ita AI, ad AH; eritq; ex æquo, vt CF, ad CE, ita AB, ad AH. Poſthæc, perficiatur parallelepipedum AK, completis nimirum parallelogrammis BH, HI, IB, & per I, B, H, ductis planis IK, BK, HK, quæ parallela ſint parallelográmis BH, HI, IB. Dico parallelepipedũ AK, parallelepipedo CD, ſimile eſſe ſimiliterq; poſitum. Cùm enim anguli BAH, FCE, ſint æquales, & latera circa ipſos proportionalia, nempe vt BA, ad AH, ita FC, ad CE, ex conſtructione; erunt parallelogramma HB, EF, ſimilia, ſimiliterq; poſita. Eadem ratione ſimilia erunt, ſimiliterq; poſita parallelogramma HI, EG; & IB, GF. Tria igitur plana BH, HI, IB, ſolidi AK, ſimilia ſunt, ſimiliterq; poſita tribus planis FE, EG, GF, ſolidi CD. [h] Sunt autem tria cuiuslibet æqualia & ſimilia tribus reliquis oppoſitis. Quare ſex plana ſolidi AK, ſimilia ſunt, ſimiliterq; poſita ſex planis ſolidi CD; Ac proinde ex defin. 9. huius lib. ſimilia ſunt, ſimiliterq; poſita, ſolida AK, CD. A data ergo recta linea, dato ſolido parallelepipedo ſimile, & ſimiliter poſitũ ſolidum parallelepipedum deſcripſimus. Quod erat faciendum.

[f] 26. vndec.
[g] 12. ſexti.
[h] 24. vndec.

28.

## THEOR. 23. PROPOS. 28.

SI solidum parallelepipedum plano secetur per diagonios aduersorum planorum: Bifariam secabitur solidum ab ipso plano.




a 34. primi.
b 9. vndec.
c 33. primi.
d 34. vndec.

SIT parallelepipedũ AB, in quo plana opposita sint AH, EB, quorum diagonij, seu diametri, sint rectæ lineæ CG, DF. Quoniam igitur vtraque CD, GF, parallela est, [a] & æqualis ipsi AE, cùm sint parallelogramma CE, GE; [b] erunt & inter se parallelæ, & æquales CD, GF. [c] Ac proinde, quæ ipsas coniungunt CG, DF, parallelæ erunt, & æquales, ideoque in vno plano. Dico planum, quod per CG, DF, ducitur, secare bifariam parallelepipedum AB. [d] Cùm enim plana AH, EB, sint parallelogramma æqualia, & similia; erunt & eorum dimidia, nimirum triangula AGC, GCH; EFD, FDB, æqualia inter

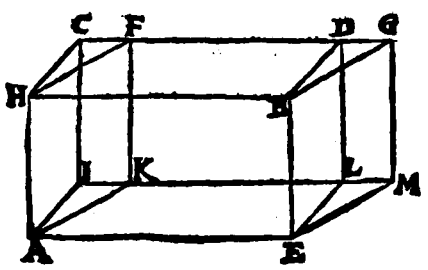
e 6. sexti.
f 24. vndec.

se: Sunt autem & latera circa angulos æquales GAC, CHG; FED, DBF, proportionalia. [e] Igitur similia quoque erunt dicta triangula. [f] Cùm igitur & parallelogrammum AF, æquale sit & simile parallelogrãmo CB; & AD, ipsi GB; & CF, commune: Erunt duo triangula AGC, EFD, & parallelogramma AF, AD, CF, prismatis ACGFED, æqualia & similia duobus triangulis HCG, BDF, & parallelogrammis CB, BG, CF, prismatis HGCDBF; propterea quæ prismata æqualia erunt, ex definitione 10. huius libri. Quæ cùm componant parallelepipedum AB, sectum erit parallelepipedum AB, bifariam. Itaque si solidum parallelepipedum plano secetur, &c. Quod erat demonstrandum.

29.

## THEOR. 24. PROPOS. 29.

SOLIDA parallelepipeda super eandem basin constituta, & in eadem altitudine, quorũ insistentes lineæ in iisdem collocantur rectis lineis: sunt inter se æqualia.




g 35. primi.
h 34. primi.

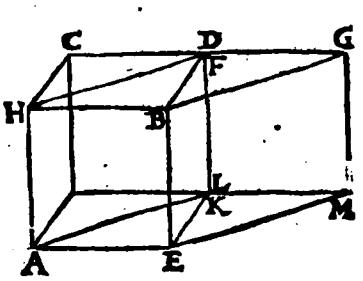
SVPER basin AB, in eadem altitudine, hoc est, inter eadem plana parallela, sint constituta duo parallelepipeda ACDE, AFGE, quorum insistentes lineæ ex quatuor angulis basis exeuntes in iisdem collocentur lineis, nempe AI, AK, EL, EM, in recta IM; & HC, HF, BD, BG, in recta CG. Dico parallelepipeda ACDE, AFGE, esse inter se æqualia. [g] Cùm enim æqualia sint parallelogramma AL, AM, super eadem basi AE, & in eisdem parallelis constituta; erunt, ablato communi trapezio AELK, æqualia quoque triangula AIK, ELM. [h] Quoniam verò omnia latera trianguli AIK, æqualia sunt omnibus lateribus trianguli HCF; erit triangulum AIK, triangulo HCF, æquiangulum, & æquale, per ea, quæ ad 8. propos. libri 1. ostendimus

i 4. sexti.
k 24. vndec.
l 36. primi.
m 34. primi.

[i] Ac propterea latera circa æquales angulos habebũt proportionalia, ideoque inter se erunt similia. Eadem ratione triangulum ELM, triangulo BDG, æquale erit, & simile. [k] Rursus parallelogrammum AC, æquale est, & simile parallelogrammo ED; & eadem ratione parallelogrammum AF, parallelogrammo EG; [l] Sed & IF, ipsi LG, cùm bases IK, LM, sint æquales. (= Nam cùm rectæ IL, KM, æquales sint ipsi AE, erunt quoque inter se æquales; quare communi dempta KL, æquales erunt IK, LM.) Erunt ergo omnia plana prismatis AIKFCH, æqualia & similia omnibus planis prismatis ELMGDB. Igitur ex definitione 10. huius lib. æqualia erunt dicta prismata; Ac propterea addito communi solido AHFKLDBE, æqualia fient parallelepipeda super eandem basin, &c. Quod erat demonstrandum.

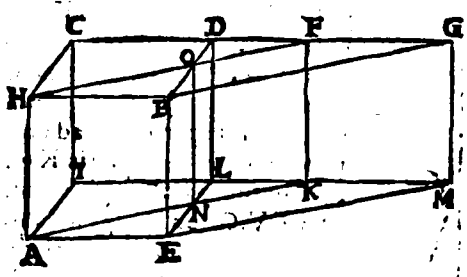
### *SCHOLIVM.*

*HAEC propositio perſimilis eſt propoſitioni 35. libri 1. Quod enim ibi de parallelogrammis, hoc de parallelepipedis demonſtratur hoc loco, eiſdem ferè mediis, dummodò loco triangulorum aſſumantur priſmata, vt ex demonſtratione liquet. Vnde reliqui duo caſus, quando nimirum punctum K, in punctum L, cadit, vel vltra L, eodem modo demonſtrabuntur, vt in his figuris apparet. Nam in ſecundo caſu, ſi ex parallelogrammis æqualibus AL, AM, auferatur triangulum cõmune ALE, erunt reliqua triangula AIK, ELM, æqualia. Vnde, vt prius, æqualia erunt priſmata AIKFCH, ELMGDB. Addito ergo priſmate communi AKEBHD, æqualia fient parallelepipeda ACDE, AFGE.*




*IN tertio verò caſu, ſi ex parallelogrammis æqualibus AL, AM, demat̃ur triangulum cõmune ANE, erunt reliqua trapezia AILN, NKME, æqualia; quibus ſi addatur triangulum commune KLN, tota triangula AIK, ELM, æqualia fient.*

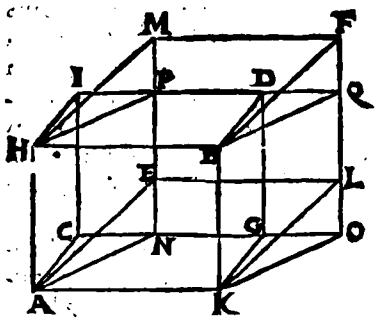
*Vnde,*




*Vnde, vt prius, æqualia erunt prismata AIKFCH, ELMGDB; à quibus si auferatur prisma cõmune KLNODF; (Nam communis sectio planorum AF, DE, est recta NO.) remanebit solidum comprehẽsum planis AILN, NOHA, AICH, HCDO, CDLI, DLNO, æquale solido contento planis ENKM, MKFG, GFOB, FKNO, BGME, EBON. Si igitur addatur vtrique prisma commune AENOBH; fient parallelepipeda ACDE, AFGE, inter se æqualia.*

## THEOR. 25. PROPOS. 30. 30.

SOLIDA parallelepipeda super eandem basin constituta, & in eadẽ altitudine, quorũ insistentes lineæ nõ in iisdem collocãtur rectis lineis: inter se sunt æqualia.




SVPER basin AB, in eadem altitudine, hoc est, inter eadem plana parallela, sint constituta parallelepipeda AIDK, AMFK, quorum insistentes lineę ex quatuor angulis basis exeuntes AC, AE, KG, KL; HI, HM, BD, BF, non sint in eisdem rectis, hoc est, neque CI, GD, protractę transeant per puncta M, E, F, L, neque CG, ID, productæ, &c. Dico parallelepipeda AIDK, AMFK, esse æqualia. Cùm enim plana CD, EF, opposita basi AB, sint in eodem plano, ob eandẽ altitudinem parallelepipedorum; producãtur in eo plano rectæ CG, ID, quarum CG, secet EM, LF, protractas in punctis N, O; Et ID, easdem in punctis P, Q; adiunganturque rectę AN, KO, HP, BQ. [a] Quia igitur rectæ PQ, MF, sunt æquales, cùm opponantur in parallelogrammo FP; & MF, ipsi HB, est æqualis; erunt & PQ, HB, æquales: Sunt autem & parallelæ, propter parallelogrammum HIDB. [b] Igitur & HP, BQ, parallelæ sunt & æquales, ideoque parallelogrammum est HPQB. Eadem ratione parallelogramma erunt HPNA, ANOK, KOQB: Est autem & parallelogrammum NOQP. Igitur parallelepipedum est APQK. [c] Quamobrem parallelepipedum AIDK, æquale est parallelepipedo APQK, cùm vtriusque eadem sit basis AB, & insistentes lineæ sint in rectis eisdem CO, IQ. Eodem modo eidem parallelepipedo APQK, æquale erit parallelepipedum AMFK, cùm vtriusque eadem sit basis AB, & insistentes lineæ sint in rectis eisdem NM, OF. Quare parallelepipeda AIDK, AMFK, inter se sunt æqualia. Solida igitur parallelepipeda super eandem basin, &c. Quod erat demonstrandum.

[a] 34. primi.
[b] 33. primi.
[c] 29. vndec.

### SCHOLIVM.

*CONVERTATVR hæc propositio, atq; præcedens, in hunc modum.*

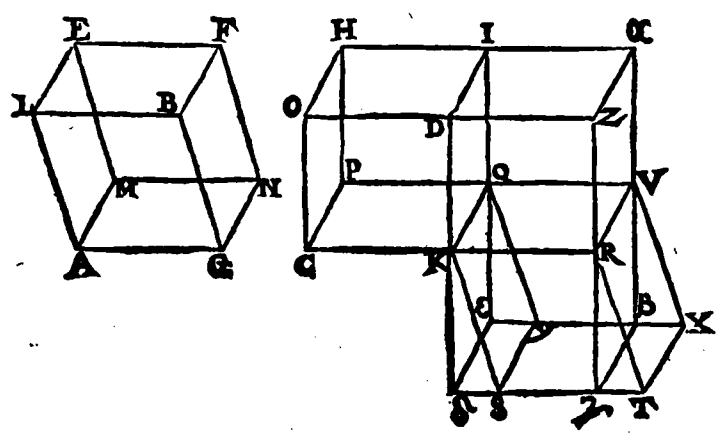
SOLIDA parallelepipeda æqualia super eandem basin, siue insistentes lineæ in eisdem collocentur rectis, siue non; in eadem sunt altitudine.

*NAM si vnum dicatur altius; si ab eo abscindatur parallelepipedum in eadem cum reliquo altitudine; erunt æqualia abscissum, & reliquum.* [a] *Cùm igitur & totum huic reliquo ponatur æquale; æquale erit abscissum toti. Quod est absurdum.*

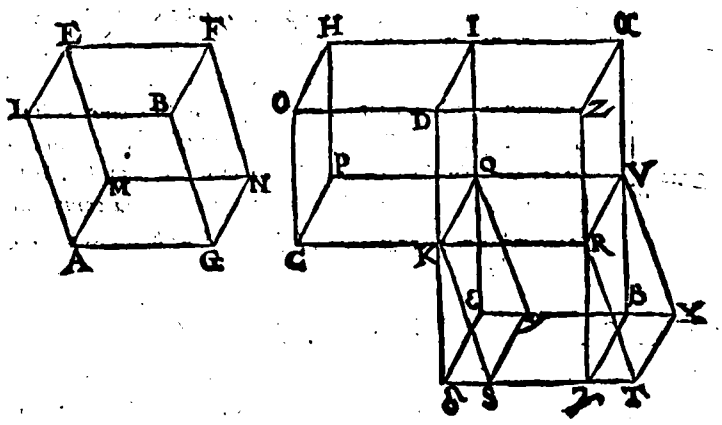
[a] 29. vel 30 vndec.

## THEOR. 26. PROPOS. 31. 31. 32.

SOLIDA parallelepipeda super æquales bases constituta, & in eadem altitudine: æqualia sunt inter se.




SVPER æquales bases AB, CD, in eadẽ altitudine sint constituta parallelepipeda AEFG, CHIK. Dico hæc parallelepipeda esse æqualia inter se. Sint enim primùm insistentes lineæ AM, GN, LE, BF, ad basin AB; & insistentes CP, KQ, OH, DI, ad basin CD, perpendiculares. Quo posito, erunt omnes dictæ perpendiculares inter se æquales, propter eandem parallelepipedorum altitudinẽ. Producatur CK, in rectum, sitque KR, æqualis ipsi LB, & fiat an-




gulus RKS, in plano OK, extenſo, æqualis angulo BLA, ponanturq; KS, æqualis ipſi LA; & perficiatur parallelogrammum KT, ſuper quod, ad altitudinem perpẽdicularis KQ, cõſtruatur parallelepipedum QSTV. Quoniam igitur latera KR, KS, æqualia ſunt lateribus LB, LA, & anguli RKS, BLA, æquales; erunt parallelogramma KT, LG, æqualia & ſimilia. Rurſus quia latera KQ, KS, æqualia ſunt lateribus LE, LA, & anguli QKS, ELA, recti, per defin. 3. huius lib. eò q; KQ, LE, rectæ ponantur ad plana KT, LG; erunt & parallelogramma QS, EA, æqualia & ſimilia. Eodem modo cùm latera KR, KQ, æqualia ſint lateribus LB, LE, & anguli QKR, ELB, recti, ex eàdem definitione 3. huius lib. erunt quoque parallelogramma KV, LF, æqualia & ſimilia. [a] Quare cùm tria plana KT, QS, KV, parallelepipedi QSTV, æqualia ſint & ſimilia tribus planis LG, EA, LF, parallelepipedi AEFG; [b] tam autem illa, quàm hæc æqualia ſint & ſimilia tribus reliquis oppoſitis: Erunt per defin. 10. huius lib. parallelepipeda QSTV, EAGF, inter ſe æqualia.

*a* 24. *vndec.*

*b* 24. *vndec.*

CONVENIANT rectæ DK, TS, productæ in *d*; & IQ, XY, in *γ*, compleaturq; parallelepipedum Q*d*, *γ*V. Item HI, *β*V, protractæ conueniant in *α*; & OD, *γ*R, in Z, perficiaturq; parallelepipedum IKR*α*. Quoniam igitur parallelepipeda QSTV, Q*d γ*V, eandẽ habent baſin KV, ſuntq; in eadem altitudine, nempe inter eadem plana parallela KV, *d*X, & inſiſtentes ipſorum lineæ KS, K*d*, RT, R*γ*; QY, Q*β*, VX, V*β*, collocantur in eiſdem rectis *d*T, *β*X; [c] ipſa inter ſe æqualia erunt. Eſt autem parallelepipedum QSTV, parallelepipedo EAGF, æquale. Igitur eidem parallelepipedo EAGF, æquale erit parallelepipedum Q*d γ*V.

*c* 29. *vndec.*

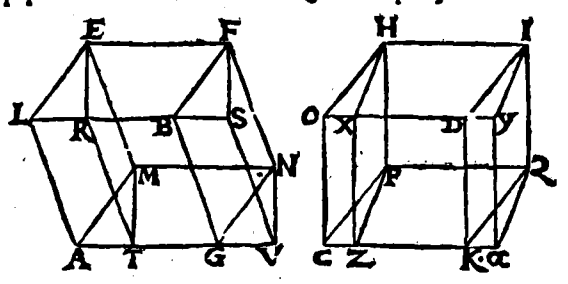
*d* 35. *primi.*

*e* 7. *quinti.*

*f* 25. *vndec.*

*g* 9. *quinti.*

[d] QVONIAM verò parallelogramma KT, K*γ*, æqualia ſunt inter ſe; & KT, æquale eſt ipſi LG; erit & K*γ*, ipſi LG, hoc eſt, ipſi CD, æquale; cùm baſes LG, CD, ponantur æquales. [e] Quare erit, vt CD, ad DR, ita K*γ*, ad DR; [f] Vt autem CD, baſis ad baſin DR, ita eſt ſolidum CHIK, ad ſolidum KI*α*R; cùm parallelepipedum CH*α*R, ſecetur plano IK, planis oppoſitis CH, *α*R, parallelo: Et eadem ratione, vt K*γ*, ad DR, ita eſt ſolidum Q*d γ*V, ad ſolidum IKR*α*; cùm & parallelepipedum I*d γα*, ſecetur plano KV, oppoſitis planis D*α*, *d β*, parallelo. [g] Igitur æqualia erunt parallelepipeda CHIK, Q*d γ*V; cùm eandem habeant proportionem ad idem ſolidum IKR*α*; nimirum eandem, quam habent baſes æquales CD, K*γ*, ad eandem baſin DR. Quare cùm parallelepipedum Q*d γ*V, ſit oſtenſum æquale parallelepipedo AEFG: æqualia quoque erunt parallelepipeda AEFG, CHIK. Quod eſt propoſitum.




*h* 11. *vndec.*

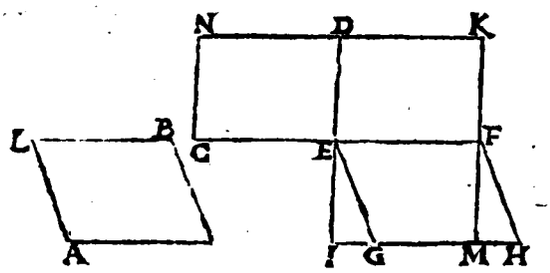
SINT iam neque inſiſtentes lineæ AM, GN, LE, BF, ad baſin AB; neq; CP, KQ, OH, DI, ad baſin CD, perpendiculares: [h] Et à punctis E, F, M, N, demittantur ER, FS, MT, NV, ad planum, in quo baſis AB, perpendiculares; Item à punctis, H, I, P, Q, ad planum, in quo baſis CD, perpendiculares HX, IY, PZ, Q*α*. Erũt autem omnes hæ perpendiculares inter ſe æquales, cùm ſint altitudines dictorum parallelepipedorum æquales. Ducantur rectæ RS, SV, VT, TR: Item rectæ XY, Y*α*, *α*Z, ZX, vt fiant parallelepipeda ETVF, HZ*α*I, quæ cùm ſint eiuſdem altitudinis, habeantq; inſiſtentes lineas perpendiculares, erunt inter ſe æqualia, vt oſtenſum eſt. [i] Sed parallelepipedum ETVF, æquale eſt parallelepipedo AEFG, cùm hoc eandem cum illo habeat baſin EN, eandemq; altitudinem; Et parallelepipedum HZ*α*I, æquale eſt eadem ratione parallelepipedo CHIK, cùm hoc eandem cum illo baſin HQ, eandemq; altitudinem poſſideat. Igitur & inter ſe æqualia ſunt parallelepipeda AEFG, CHIK. Idemq; oſtenderetur, ſi vnius parallelepipedi inſiſtentes lineæ ſint perpendiculares ad baſin, alterius verò non. Quocirca ſolida parallelepipeda ſuper æquales baſes conſtituta, &c. Quod demonſtrandum erat.

*i* 29. *vel* 30. *vndec.*

## SCHOLIVM.

POTEST *cum Campano expeditius fortaſſe demonſtrari, duo parallelepipeda ſuper æquales baſes conſtituta, & in eadem altitudine, quorum inſiſtentes lineæ ad baſes ſunt perpendiculares, inter ſe eſſe æqualia; Nimirum ex ſolis baſibus, ſine conſtructione tot parallelepipedorum, quamuis eadem ſit demonſtratio illius,*

qua




*qua noſtra. Sint enim duæ baſes æquales, nempe duo parallelogramma A B, C D. Dico parallelepipeda ſuper ipſas conſtituta, in eadem altitudine, quorum inſiſtentes lineæ ad baſes A B, C D, ſunt perpendiculares, inter ſe eſſe æqualia. Protrahantur enim duo latera D E, C E, ad partes E. Deinde fiat angulus F E G, æqualis angulo L; & recta E F, rectæ L B; & recta E G, rectæ L A, ponatur æqualis; perficiaturq; parallelogrammum E H, quod æquale erit, & ſimile parallelogrammo A B. Conueniat autem H G, producta cum D E, producta in I, & compleatur parallelogrammum I K. Iam verò intelligantur ſuper baſes E H, I F, E K, conſtituta parallelepipeda eiuſdem altitudinis cum parallelepipedis ſuper A B, C D, conſtructis; ſintq; inſiſtentes lineæ perpendiculares ad dictas baſes. Perſpicuum eſt igitur, ſolidum ſuper E H, æquale eſſe ac ſimile ſolido ſuper A B, ex defin. 10. huius lib. cùm plana illius æqualia ſint & ſimilia planis huius, per conſtructionem:* [a] *Sunt autem & æqualia parallelepipeda ſuper E H, I F, cùm habeant baſin eandem, cuius infimum latus E F, erectum ſuper planum I K; Item plana baſi oppoſita, quorum latera infima G H, I M, in eodem plano, cuius infimum latus I H; atque inſiſtentes lineas E G, F H, E I, F M, &c. in eiſdem rectis lineis I H, &c. Igitur æquale erit parallelepipedum ſuper I F, parallelepipedo ſuper A B.* [b] *Quoniam verò parallelogramma E H, I F, æqualia ſunt; & E H, æquale eſt ipſi C D: æqualia erunt I F, C D.* [c] *Erit igitur, vt I F, ad E K, ita C D, ad E K:* [d] *Eſt autem vt I F, ad E K, ita ſolidum ſuper I F, ad ſolidum ſuper E K, quòd ſolidum ſuper I K, ſecetur plano ſuper E F, erecto parallelo planis ſuper D K, I M, erectis. Et eadem ratione, vt C D, ad E K, ita ſolidum ſuper C D, ad ſolidum ſuper E K, cùm ſolidum ſuper C K, ſecetur plano ſuper D E, erecto parallelo planis ſuper C N, F K, erectis. Quare erit vt ſolidum ſuper I F, ad ſolidum ſuper E K, ita ſolidum ſuper C D, ad ſolidum ſuper E K;* [e] *Ac proinde æqualia erunt parallelepipeda ſuper I F, & C D. Oſtenſum eſt autem parallelepipedum ſuper I F, æquale parallelepipedo ſuper A B. Æqualia ergo erunt & parallelepipeda ſuper A B, C D. Quod eſt propoſitum.*

a 29. vnde.
b 35. primi.
c 7. quinti.
d 25. vndec.
e 9. quinti.

CONVERTETVR *quoque hæc propoſ. 31. in hunc modum.*

SOLIDA parallelepipeda æqualia ſuper æquales baſes, in eadem ſunt altitudine. Et parallelepipeda æqualia in eadem altitudine, ſuper æquales ſunt baſes, ſi non habuerint eandem baſin:

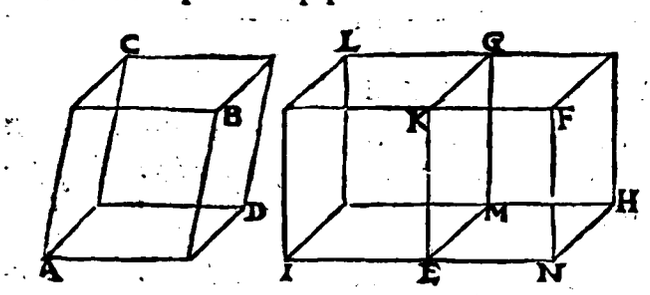
*SI enim vnum altero credatur altius, ſi ab eo abſcindatur parallelepipedum in eadem cum altero altitudine,* [f] *fient æqualia abſciſſum, & alterum. Cùm ergo & totũ ponatur æquale alteri; æquale erit abſciſſum toti. Quod eſt abſurdum.*

f 31. vndec.

*QVOD ſi in eadem ſint altitudine, & baſis vnius credatur maior baſe alterius, ſi ab ea abſcindatur baſis æqualis alteri, & ſuper abſciſſam intelligatur parallelepipedum eiuſdem altitudinis, demonſtrabimus eodem modo, partem toti eſſe æqualem. Quod eſt abſurdum.*

## THEOR. 27. PROPOS. 32. 33.

SOLIDA parallelepipeda ſub eadem altitudine; inter ſe ſunt, vt baſes.




SINT duo parallelepipeda A B C D, E F G H, eiuſdem altitudinis ſuper baſes A B, E F. Dico eſſe ſolidum ad ſolidum, vt eſt baſis ad baſin. [a] Super rectam enim E K, conſtruatur parallelogrammum I K, æquale parallelogrammo A B, in angulo I E K, qui ſit æqualis angulo E N F. Conſtituent autem parallelogramma E F, I K, totum parallelogrammum vnum F I, vt in 45. propoſitione lib. 1. demonſtratum eſt. Si igitur alia plana parallelepipedi E F G H, producãtur ad partes E G, perficiaturque totum vnum parallelepipedum I F L H; [b] erunt parallelepipeda A B C D, I K L M, æqualia, cùm habeãt æquales baſes, per conſtructionem A B, I K; & eandem altitudinem, ex hypotheſi. [c] Quare erit vt ſolidum I K L M, ad ſolidum E F G H, ita ſolidum A B C D, ad idem ſolidum E F G H: [d] Eſt autẽ ſolidum I K L M, ad ſolidum E F G H, vt baſis I K, hoc eſt, illi æqualis baſis A B, ad baſin E F. Igitur & ſolidũ A B C D, erit ad ſolidum E F G H, vt baſis A B, ad baſin E F. Solida ergo parallelepipeda ſub eadẽ altitudine inter ſe ſunt, vt baſes. Quod erat demonſtrandũ.

a 45. primi.
b 31. vndec.
c 7. quinti.
d 25. vndec.

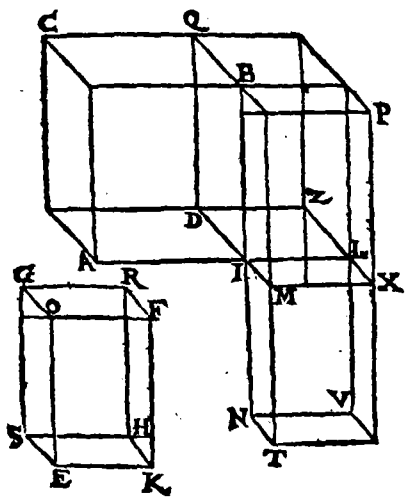
### SCHOLIVM.

CONVERSO *modo, ſi ſolida parallelepipeda inter ſe ſint, vt baſes; ipſa erunt ſub eadem altitudine. Si enim non eadem credatur altitudo; ex maiori abſcindatur minori æqualis, & ducatur planum baſi*

a 32. vnde. b 9. quinti. *parallelum*; [a] *erit q̃ vt basis ad basin, ita parallelepipedum ad parallelepipedum abscissum: sed sic quoque erat ad totum.* [b] *Abscissum ergo æquale est toti. Quod est absurdum.*

## 36. THEOR. 28. PROPOS. 33.

SIMILIA solida parallelepipeda, inter se sunt in triplicata ratione homologorum laterum.




a 15. primi.

SINT similia parallelepipeda A B C D, E F G H, super bases similes A B, E F, in quibus latera homologa sint A I, E K. Dico proportionem parallelepipedi A B C D, ad parallelepipedum E F G H, esse triplicatam proportionis laterum homologorũ A I, E K. Producatur enim A I, ad L, & sit I L, æqualis ipsi E K, vel G R; Item D I, ad M, & sit I M, æqualis ipsi H K, vel G O; Item B I, ad N, & sit I N, æqualis ipsi K F, vel G S. Deinde completis parallelogrãmis L M, L N, I T, perficiatur parallelepipedum T X I V. Quoniam verò latera I L, I M, æqualia sunt lateribus G R, G O, [a] & anguli contenti æquales, cùm angulus L I M, sit æqualis angulo A I D, qui ob similitudinem parallelepipedorum æqualis est angulo E K H, seu R G O; erũt parallelogramma I X, G F, similia & æqualia. Eadem ratione similia erũt, & æqualia L N, R S; item I T, G E. Quare tria plana I X, L N, I T, parallelepipedi T X I V, similia sunt & æqualia tribus planis G F, R S, G E, parallelepipedi E F G H. [b] Sũt autem tria cuiusque similia & æqualia tribus reliquis opposita. Igitur æqualia sunt & similia parallelepipeda T X I V, E F G H, ex defin. 10. huius lib. Rursus completis parallelogrammis M B, B L, L M, perficiatur parallelepipedum M P B L; Item completis parallelogrammis I Y, D L, I Q, perficiatur parallelepipedum I Y Q Z. Quoniam igitur ob similitudinem parallelepipedorum A B C D. E F G H, est vt A I, ad E K, hoc est, ad I L, ita D I, ad H K, hoc est, ad I M; & B I, ad F K, hoc est, ad I N. [c] Vt autem A I, ad I L, ita est parallelogrammum A D, ad D L; Et vt D I, ad I M, ita parallelogrammum D L, ad L M; & vt B I, ad I N, ita parallelogrammum B L, ad L N. Igitur erit vt A D, ad D L, ita D L, ad L M; & B L, ad L N. [d] Sed vt A D, basis ad D L, basin, ita est parallelepipedum A D C B, ad parallelepipedum D L Y Q; & vt basis D L, ad basin L M, ita parallelepipedum D L Y Q, ad parallelepipedum L M B P; & vt basis B L, ad basin L N, ita parallelepipedum L M B P, ad parallelepipedum L N T X. Quare erit, vt parallelepipedum A D C B, ad parallelepipedum D L Y Q, ita parallelepipedum D L Y Q, ad parallelepipedum L M B P, & parallelepipedum L M B P, ad parallelepipedum L N T X. Ac proinde quatuor quantitates sunt continuè proportionales A D C B. D L Y Q, L M B P, L N T X, ideoque proportio primæ A D C B, ad quartam L N T X, hoc est, ad E F G H, erit triplicata proportionis primæ A D C B, ad secundam D L Y Q, ex defin. 10. lib. 5. [e] Vt autẽ A D C B, ad D L Y Q, ita est basis A D, ad basin D L; [f] Et vt A D, ad D L, ita est recta A I, ad I L, hoc est, ad E K. Igitur proportio parallelepipedi A D C B, ad parallelepipedum E F G H, est triplicata proportionis homologorum laterum, nimirum A I, ad E K. Quapropter similia solida parallelepipeda, inter se sunt in triplicata ratione homologorum laterum. Quod erat demonstrandum.

b 24. vndec.

c 1. sexti.

d 32. vndec.

e 32. vndec.

f 1. sexti.

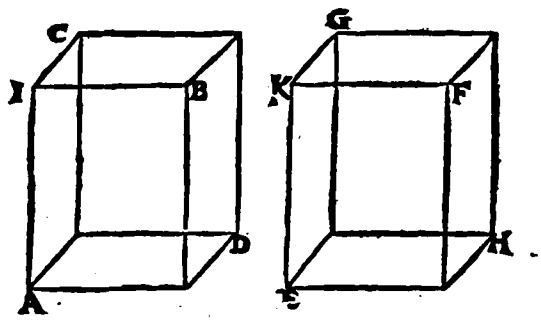
### COROLLARIVM

*EX hoc perspicuum est, si fuerint quatuor lineæ rectæ continuè proportionales, vt est prima ad quartam, ita esse parallelepipedum super primam descriptum ad parallelepipedum simile, similiterq̃ descriptum super secundam. Quia tam parallelepipedum ad parallelepipedum; vt demonstratum est, quàm prima linea ad quartam, ex definitione 10. libri 5. habet proportionem triplicatam proportionis primæ lineæ ad secundam, nimirum laterum homologorum.*

## 34. 35. THEOR. 29. PROPOS. 34.

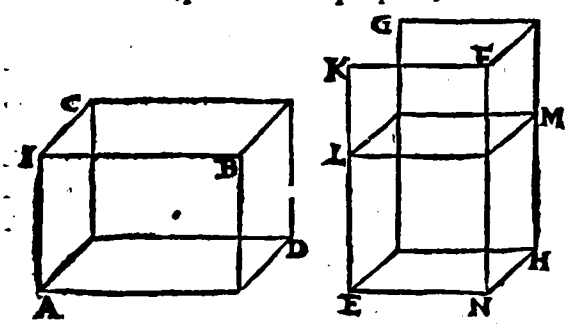
AEQVALIVM solidorum parallelepipedorum bases, & altitudines reciprocantur; Et quorum solidorum parallelepipedorum bases, & altitudines reciprocantur; Illa sunt æqualia.

SINT æqualia parallelepipeda A D C B, E H G F, super bases A D, E H. Dico bases A D, E H, & altitudines parallelepipedorum A D C B, E H G F, esse reciprocas, hoc est, esse vt A D, ad E H, ita altitudinem solidi E H G F, ad altitudinem A D C B. Sint enim primùm insistentes lineæ A I, E K,




EK, perpendiculares ad baſes AD, EH, ita vt AI, EK, ſint per defin. 4. lib. 6. altitudines parallelepipedorum. Si igitur altitudines AI, EK, ſunt æquales; cùm & parallelepipeda æqualia ponantur; erunt & baſes AD, EH, æquales, per ea, quæ ad finem propoſitionis 31. huius lib. oſtendimus. Quare erit, vt baſis AD, ad baſin EH, ita altitudo EK, ad altitudinem AI: Ac proinde baſes & altitudines ſunt reciprocæ.

QVOD ſi altitudines AI, EK, inæquales fuerint; ſit EK, maior, ex qua abſcindatur EL, ipſi AI, æqualis; & per L, ducatur planum LM, parallelum baſi EH, per ſcholium propoſ. 15. huius libri. Quoniam igitur æqualia ſunt ſolida ADCB, EHGF; [a] erit vt ADCB, ad ſolidũ EHML, ita EHGF, ad idem ſolidũ EHML: [b] Vt autem ſolidum ADCB, ad ſolidum EHML, ita eſt baſis AD, ad baſin EH, cũ æquales ponantur altitudines AI, EL; Et vt ſolidum EHGF, ad ſolidum EHML, ita eſt eadem ratione, baſis KN, ad baſin LN, cùm hac ratione ſolida EHGF, EHML, eandẽ habeãt altitudinem, ſi nimirum baſes ponantur KN, LN; erunt enim inter eadem plana parallela KN, GH. Igitur erit vt baſis AD, ad baſin EH, ita baſis KN, ad baſin LN: [c] Sed vt KN, ad LN, ita eſt recta EK, ad rectam EL, hoc eſt, ad AI, ipſi EL, æqualem. Quare erit vt baſis AD, ad baſin EH, ita altitudo EK, ad altitudinem AI; Ac propterea reciprocæ ſunt baſes & altitudines.



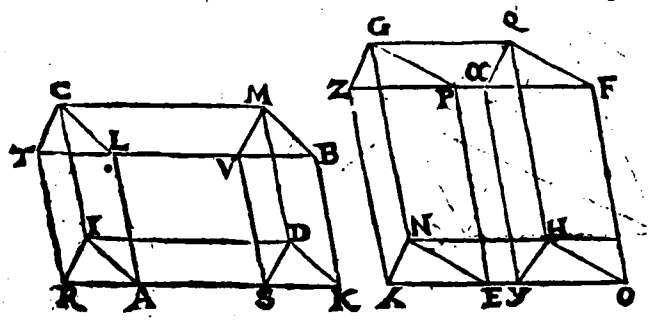

[a] 7. quinti.
[b] 32. vndec.
[c] 1. ſexti.

SINT iam baſes & altitudines reciprocæ. Dico parallelepipeda eſſe æqualia. Si enim altitudines EK, AI, ſunt æquales; cùm ſit baſis AD, ad baſin EH, vt altitudo EK, ad altitudinem AI, ex hypotheſi; erunt & baſes AD, EH, æquales. [d] Quare parallelepipeda ADCB, EHGF, cùm æquales habeant baſes, & altitudinem eandem, inter ſe æqualia erunt.

[d] 31. vndec.

QVOD ſi altitudo EK, maior fuerit, abſcindatur EL, ipſi AI, æqualis, & per L, ducatur planum LM, parallelum baſi EH. Quia igitur ex hypotheſi eſt, vt baſis AD, ad baſin EH, ita altitudo EK, ad altitudinem AI, hoc eſt, ad EL, ipſi AI, æqualem; [e] Vt autem baſis AD, ad baſin EH, ita eſt ſolidum ADCB, ad ſolidum EHML; cùm altitudines AI, EL, æquales ponantur; [f] Et vt EK, ad EL, ita eſt KN, ad LN; [g] Vt autem baſis KN, ad baſin LN, ita eſt ſolidum EHGF, ad ſolidum EHML, cùm ſolida EHGF, EHML, eandem habeant altitudinem, ſi baſes ponantur KN, LN; erunt enim hac ratione inter plana parallela KN, GH; Erit vt ſolidũ ADCB, ad ſolidũ EHML, ita ſolidum EHGF, ad idem ſolidum EHML; [h] ideoq; æqualia erunt ſolida ADCB, EHGF.

[e] 32. vndec.
[f] 1. ſexti.
[g] 32. vndec.
[h] 9. quinti.




SED proponantur iam parallelepipeda ABCD, EFGH, æqualia, quorum inſiſtentes lineæ AI, KD, BM, LC; EN, OH, FQ, PG; nõ ſint perpendiculares ad baſes AB, EF. Demittantur autem à punctis I, D, M, C, ad planum baſis AB, perpendiculares IR, DS, MV, CT; Item à punctis N, H, Q, G, ad planum baſis EF, perpendiculares NX, HY, Qα, GZ, connectanturque rectæ RS, TV, RT, SV; XY, Zα, XZ, Yα: Eruntque perpendiculares RI, XN, parallelepipedorum altitudines, ex defin. 4. lib. 6. Dico rurſus, vt baſis AB, ad baſin EF, ita eſſe altitudinem XN, ad altitudinem RI. [i] Cùm enim æqualia ſint ſolida ABCD, EFGH, ex hypotheſi, ſit autem ABCD, æquale ſolido RV-CD, quòd habeant eandem baſin CD, eandemq; altitudinem RI; & EFGH, eadem ratione, æquale ſolido Xα GH. Erunt & parallelepipeda RVCD, Xα GH, æqualia. Quare cũ habeant inſiſtentes lineas perpendiculares ad baſes CD, GH; erit, vt iam demonſtratum eſt, vt baſis CD, ad baſin GH, hoc eſt, vt baſis AB, ad baſin EF, ita altitudo XN, ad altitudinem RI. Ac propterea baſes & altitudines ſunt reciprocæ.

[i] 29. vel 30. vndec.

SINT iam baſes atque altitudines reciprocæ. Dico parallelepipeda eſſe æqualia. Conſtructa enim figura, vt prius; Cùm ſit vt baſis AB, ad baſin EF, ita altitudo XN, ad altitudinẽ RI; [k] Sit autem AB, ipſi CD, & EF, ipſi GH, æqualis; erit quoque vt baſis CD, ſolidi RVCD, ad baſin GH, ſolidi Xα GH, ita altitudo XN, ad altitudinem RI. Quare cùm XN, RI, ſint inſiſtentes lineæ, perpendiculares ad baſes CD, GH; erunt, vt iam oſtenſum eſt, æqualia parallelepipeda RVCD, Xα GH. [l] Sunt autem hæc parallelepipeda parallelepipedis ABCD, EFGH, æqualia. Igitur

[k] 24. vndec.
[l] 29. vndec. vndec.

æqualia quoque erunt parallelepipeda A B C D, E F G H: Idemque ostendetur si insistentes lineę vnius parallelepipedi fuerint perpendiculares ad basin, alterius verò non. Quam ob rem, Æqualium solidorum parallelepipedorũ bases, & altitudines reciprocãtur, &c. Quod erat ostendendũ.

## *SCHOLIVM.*

*OMNIA hæc, quæ demonstrata sunt in sex proximis propositionibus, nimirum 29. 30. 31. 32. 33. & 34. conueniunt quoq; prismatis, quæ habent duo plana opposita triangularia, si prædicta hypotheses seruentur. Nam si duobus prismatis eiusmodi eiusdem altitudinis, & super eandem basin, vel super æquales bases constitutis, apponantur duo alia prismata illis æqualia & similia, conficientur duo parallelepipeda eiusdem altitudinis,*

a 29. 30. vel 31. vndec. *& super eandem, vel æquales bases existentia.* [a] *Quare æqualia erunt eiusmodi parallelepipeda; ac proinde & data prismata, eorum videlicet dimidia.*

*RVRSVS, si duobus prismatis prædictis eiusdem altitudinis, & super diuersas bases constitutis adijciantur duo alia prismata illis æqualia & similia, conficientur iterum duo parallelepipeda eiusdem altitudinis.*

b 32. vndec. c 15. quinti. [b] *Quare erit parallelepipedum ad parallelepipedum, vt basis ad basin;* [c] *Atq; adeò prisma ad prisma, nempe dimidium vnius parallelepipedi, ad dimidium alterius, vt eadem basis ad basin, si prismatũ bases fuerint parallelogramma, vel certè vt triangulum ad triangulum, dimidium scilicet vnius basis ad dimidium alterius, si bases prismatum fuerint triangula.*

*PRÆTEREA, si duobus prismatis præfatis similibus addantur alia duo prismata illis æqualia & similia, constituentur duo parallelepipeda similia,*

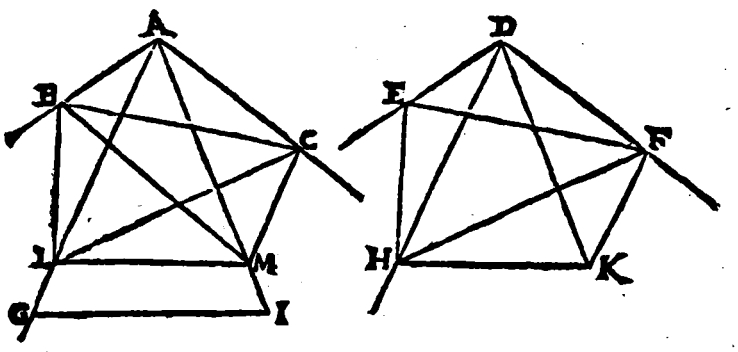
d 33. vndec. e 15. quinti. [d] *quæ inter se habent proportionem triplicatam proportionis laterum homologorum.* [e] *Igitur & prismata, eorum nimirum dimidia, cùm eandem habeant proportionem cum parallelepipedis, proportionem habebunt triplicatam proportionis eorundem laterum homologorum, quæ quoq; sunt latera homologa prismatum.*

*DENIQVE si dictis duobus prismatis æqualibus adiungantur alia duo prismata illis æqualia & similia, componentur duo parallelepipeda æqualia eorundem altitudinum cũ prismatis.*

f 34. vndec. g 15. quinti. [f] *Quare cùm bases, & altitudines parallelepipedorum sint reciprocæ; & bases prismatum eadem sint, vel certè triangula eorum dimidia, & eandem habentia proportionem: Erunt quoq; bases prismatum & eorum altitudines reciprocæ.*

37. # THEOR. 30. PROPOS. 35.

SI fuerint duo plani anguli æquales, quorum verticibus sublimes rectæ lineæ insistant, quæ cum lineis primò positis angulos contineant æquales, vtrumque vtrique; In sublimibus autem lineis quælibet sumpta fuerint puncta, & ab his ad plana, in quibus consistunt anguli primùm positi, ductæ fuerint perpendiculares; à punctis verò, quæ in planis à perpendicularibus fiunt, ad angulos primùm positos adiunctæ fuerint rectæ lineæ: Hæ cũ sublimibus æquales angulos cõprehendẽt,




SINT duo anguli plani æquales B A C, E D F, quorum verticibus A, & D, insistant extra ipsorum plana, sublimes rectæ lineæ A G, D H, ita vt angulus B A G, angulo E D H, & angulus C A G, angulo F D H, sit æqualis: à sumptis autẽ punctis G, H, in rectis A G, D H, demittantur ad plana, in quibus anguli B A C, E D F, existunt, perpendiculares G I, H K, incidentes in puncta I, K, & adiungantur rectæ I A, K D. Dico angulos G A I, H D K, esse æquales inter se. Nam si A G, D H, sunt inæquales, auferatur à maiori A G, ipsi D H, æqualis linea A L; & ex L, in plano trianguli A G I, ducatur ipsi G I, parallela

a 8. vndec. L M. Quoniam igitur parallelæ sunt G I, L M; & est G I, ad planũ anguli B A C, recta, [a] erit quoq; L M, ad idem planum recta. Ducantur autem ex punctis M, K, ad rectas A B, A C, D E, D F, perpendiculares M B, M C, K E, K F; & connectantur rectæ B C, B L, L C, E F, E H, H F. Et quia L M, recta est ad planum anguli B A C, ipsa rectum angulum efficiet cum recta A M; in eodem plano ductã, p

b 47. primi. defin. 3. huius libri. [b] Quare quadratum rectæ A L, æquale erit quadratis rectarum A M, M L: [c] Est

c 47. primi. autem quadratum rectæ A M, æquale quadratis rectarum A C, C M, cùm & angulus A C M, rectus sit, ex constructione. Quadratum ergo rectæ A L, æquale est quadratis rectarum A C, C M,

d 47. primi. M L: [d] At quadratis rectarum C M, M L, æquale est quadratum rectæ C L, cùm angulus C M L,

e 48. primi. rectus sit, per definitionem 3. huius libri. Igitur quadratum rectæ A L, æquale est quadratis rectarum A C, C L; [e] Ac proinde angulus A C L, rectus erit. *f* Rursus quia quadratum rectæ A L, æquale est quadratis rectarum A M, M L: [g] Est autem quadratum rectæ A M, æquale quadratis rectarum

f 47. primi. g 47. primi.

ctarum AB,BM, cùm angulus ABM, per conſtructionem, ſit rectus. Igitur quadratum rectæ AL, æquale eſt quadratis rectarum AB,BM,ML: [a] At quadratis rectarum BM, ML, æquale eſt quadratum rectæ BL, quòd & angulus BML, ſit rectus, ex defin. 3. huius lib. Quadratum ergo rectæ AL, æquale eſt quadratis rectarum AB, BL; [b] propterea quę angulus ABL, erit rectus. Non aliter oſtendentur recti anguli DFH, DEH. Quoniam igitur anguli ABL, LAB, trianguli ABL, æquales ſunt angulis DEH, HDE, trianguli DEH; ſuntque latera AL, DH, æqualia; [c] Erunt & reliqua latera AB, BL, reliquis lateribus DE, EH, æqualia. Eodem argumento æquales erunt rectæ AC, CL, rectis DF, FH. Quare cùm latera AB, AC, trianguli ABC, æqualia ſint lateribus DE, DF, trianguli DEF; & anguli contenti BAC, EDF, æquales, ex hypotheſi; [d] erunt & baſes BC, EF, inter ſe, & anguli ABC, ACB, angulis DEF, DFE, æquales: Sunt autem & toti anguli ABM, ACM, totis angulis DEK, DFK, æquales, cùm omnes ſint recti. Igitur & reliqui anguli MBC, MCB, reliquis angulis KEF, KFE, æquales erunt. Ac propterea cùm & latera BC, EF, ſint oſtenſa æqualia; [e] erunt latera BM, CM, lateribus EK, FK, æqualia. Quia igitur latera AC, CM, trianguli ACM, æqualia ſunt oſtenſa lateribus DF, FK, trianguli DFK; & anguli ACM, DFK, ſunt recti; [f] erunt & baſes AM, DK, inter ſe æquales. Cùm autem æquales ſint oſtenſæ rectæ BL, EH, erunt etiam earum quadrata æqualia: [g] Quia verò quadratum rectæ BL, æquale eſt quadratis rectarum BM, ML; & quadratum rectæ EH, quadratis rectarum EK, KH, quòd anguli BML, EKH, recti ſint, ex definitione 3. huius lib. Erunt & quadrata rectarum BM, ML, æqualia quadratis rectarum EK, KH. Ablatis ergo quadratis rectarum BM, EK, quæ æqualia ſunt, & rectæ BM, EK, oſtenſæ ſint æquales; reliqua quadrata rectarũ LM, HK, æqualia erunt, ac proinde rectæ LM, HK, æquales. Quam ob rem cùm latera AL, AM, trianguli ALM, æqualia ſint lateribus DH, DK, trianguli DHK, & baſis LM, baſi HK, æqualis; [h] erunt & anguli LAM, HDK, æquales. Si igitur fuerint duo anguli plani æquales, quorum verticibus ſublimes rectæ lineæ inſiſtant, &c. Quod oſtendendum erat.

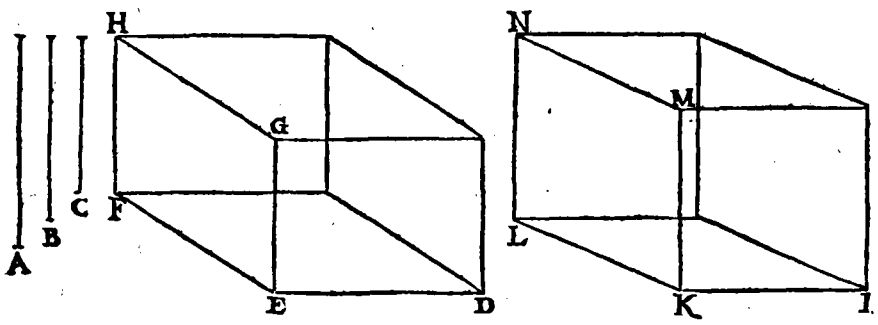
a 47. primi.
b 48. primi.
c 26. primi.
d 4. primi.
e 26. primi.
f 4. primi.
g 47. primi.
h 8. primi.

## COROLLARIVM.

*ITAQVE, ſi fuerint duo anguli plani æquales, quorũ verticibus ſublimes rectæ lineæ æquales inſiſtant, quæ cum lineis primò poſitis angulos contineãt æquales, vtrumque vtrique. Erunt à punctis extremis linearum ſublimium ad plana angulorum primò poſitorum demiſſæ perpendiculares inter ſe æquales. Nam propterea quòd anguli plani BAC, EDF, ponuntur æquales, & ſublimes æquales AL, DH, conſtituunt angulos æquales LAB, HDE; Item LAC, HDF; demonſtratum fuit, demiſſas perpendiculares LM, HK, eſſe æquales.*

## THEOR. 31. PROPOS. 36. 38.

SI tres rectæ lineæ proportionales fuerint: Quod ex his tribus fit ſolidum parallelepipedum, æquale eſt deſcripto à media linea ſolido parallelepipedo, quod æquilaterum quidem ſit, æquiangulum verò prædicto.




SINT continuè proportionales rectæ A, B, C. Cõſtituatúrque angulus ſolidus E, ex tribus angulis planis quibuſcunq; DEF, DEG, FEG, ita vt recta DE, ipſi A, & EF, ipſi B; & EG, ipſi C, ſit æqualis. Completis autem parallelogrammis DF, FG, GD, perficiatur parallelepipedum DH; quod ſub tribus rectis A, B, C, dicitur cõtineri, aut ex ipſis fieri. [i] Deinde ad rectam IK, eiuſq; punctum K, fiat ſolidus angulus K, æqualis ſolido angulo E, ex tribus angulis planis IKL, IKM, LKM, qui æquales ſint tribus DEF, DEG, FEG; ita vt rectæ IK, KL, KM, æquales ſint mediæ lineæ B. Completis verò parallelogrammis IL, LM, MI, perficiatur parallelepipedum IN; quod contineri dicitur ſub linea B, ſeu ex ipſa deſcribi. Dico ſolidum DH, æquale eſſe ſolido IN. Cùm enim ſit vt DE, ad IK, ita KM, ad EG, (& DE, ipſi A; & IK, KM, ipſi B; & EG, ipſi C, ſumpta ſit æqualis,) & anguli DEG, IKM, æquales: [k] Erũt parallelogramma DG, IM, æqualia, propterea & latera habent circa æquales angulos reciproca. Quoniam verò anguli plani DEG, IKM, ſunt æquales, quorũ verticibus inſiſtunt ſublimes lineæ æquales EF, KL, quæ æquales angulos comprehendunt cũ lineis primò poſitis, ex cõſtructione, vtrumq; vtriq;; Erunt perpendiculares ex F, L, ad plana baſium DG, IM, demiſſæ, nimirũ altitudines parallelepipedorum DH, IN, ſi baſes ſint DG, IM, inter ſe æquales, per coroll. propoſ. præcedentis. [l] Quare parallelepipeda DH, IN, cùm habeant baſes DG, IM, æquales, & æquales quoq; altitudines, inter ſe æqualia erunt. Si tres igitur rectæ lineæ proportionales fuerint, &c. Quod erat demonſtrandum.

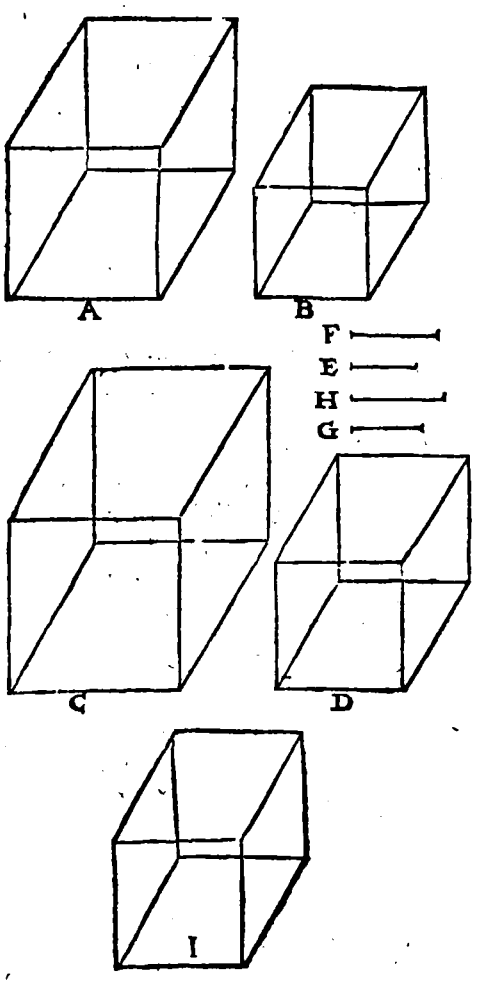
i 26. vndec.
k 14. ſexti.
l 31. vndec.

*SCHOLIVM.*

*VICISSIM quoq;, si parallelepipedum ex tribus lineis rectis descriptum, æquale fuerit parallelepipedo sibi æquiangulo à media linea descripto: erunt tres rectæ continuè proportionales. Sit enim parallelepipedum* D H, *descriptum ex rectis* A, B, C, *vt dictum est, æquale sibi æquiangulo parallelepipedo* I N, *descripto à media* B. *Dico tres* A, B, C, *esse continuè proportionales. Nam veluti prius, ostendentur eorum altitudines ex* F, I, *demissæ, esse æquales. Quare cùm & ipsa ponantur æqualia; erunt eorum bases* D H, I M, *æquales per ea, quæ ad finem propos. 31. huius lib. demonstrauimus. Quæ bases, cùm angulos habeant æquales* D E G, I K M, *ex*
214. sexti. *constructione;* [a] *habebũt latera circa illos æquales angulos reciproca; hoc est, vt* D E, *ad* I K, *ita* K M, *ad* E G. *Quapropter cùm* D E, *ipsi* A; *&* I K, K M, *ipsi* B; *&* E G, *ipsi* C, *sumpta sit æqualis; Erit quoq; vt* A, *ad* B, *ita* B, *ad* C. *Quod est propositum.*

39. # THEOR. 32. PROPOS. 37.

**SI quatuor rectæ lineæ proportionales fuerint: & solida parallelepipeda, quæ ab ipsis & similia, & similiter describuntur, proportionalia erunt. Et si solida parallelepipeda, quæ & similia, & similiter describuntur, fuerint proportionalia: Et ipsæ rectæ lineæ proportionales erunt.**




SINT quatuor rectę proportionales A, B, C, D; vt quidē A, ad B, ita C, ad D; constituanturq; super A, & B, duo parallelepipeda A, & B, similia, similiterq; descripta; itē super C, & D, alia duo C, & D, similia similiterque posita, siue hæc sint illis similia, siue nō. Dico esse quoque solida A, B, C, D, proportionalia: Vt quidem solidum A, ad solidum B, ita solidum C, ad solidum D. Inueniantur enim, per scholium propositionis 11. lib. 6. duabus rectis A, B, aliæ duæ continuè proportionales E, F; Item duabus C, D, aliæ G, H. Quoniam igitur sunt quatuor lineæ A, B, E, F, & quatuor lineæ aliæ C, D, G, H, quę bīnæ in eadem ratione sumuntur; erit ex æquo, vt A, ad F, ita C, ad H. Vt autē A, ad F, ita est solidum A, ad solidum B; Et vt C, ad H, ita solidū C, ad solidum D, ex coroll. propos. 33. huius lib. Igitur erit vt solidum A, ad solidum B, ita solidum C, ad solidum D. Quod est propositum.

SINT iam e contrario solida A, B, C, D, proportionalia. Dico rectas A, B, C, D, esse quoq; proportionales. [a] Tribus enim rectis A, B, C, inueniatur quarta proportionalis I, [b] super quā describatur parallelepipedum ipsi D, vel C, simile, similiterq; positū. Quoniam igitur est, vt recta A, ad rectam B, ita recta C, ad rectam I; erit quoq;, vt iam est ostensum, vt solidum A, ad solidum B, ita solidum C, ad solidum I. Vt autē solidum A, ad solidum B, ita ponitur quoq; solidum C, ad solidum D: Igitur erit vt solidū C, ad solidum I, ita idem solidum C, ad solidum D. [c] Atque idcircò æqualia erunt solida I, & D. Quæ cùm sint similia, similiterque descripta, continebuntur planis æqualibus, per defin. 10. huius lib. Sed plana æqualia, & similia, habent latera homologa æqualia, per lemma propos. 22. lib. 6. Igitur rectæ I, & D, æquales sunt. Ac propterea erit, vt recta C, ad I, rectam, ita eadem C, ad rectam D. Posita est autē C, ad I, vt recta A, ad B. Quarē erit vt recta A, ad rectā B, ita recta C, ad rectam D. Itaq; si quatuor rectæ lineæ proportionales fuerint, &c. Quod erat demonstrandum.

a 12. sexti.
b 27. vndec.
c 9. quinti.

BREVIS tota hæc propositio demonstrabitur cū Theone, hoc modo. Ponatur primùm vt recta A, ad rectam B, ita recta C, ad rectam D. Dico esse quoq; vt solidū A, ad solidum B, ita solidum C, ad solidum D. [d] Cùm enim sit proportio solidi A, ad solidum B, triplicata proportionis rectæ A, ad rectam B; Item proportio solidi C, ad solidum D, triplicata proportionis rectæ C, ad rectam D: erunt proportiones solidi A, ad solidū B, & solidi C, ad solidum D, æquales; quandoquidem triplicatæ sunt proportionū æqualium, nempe rectæ A, ad rectam B, & rectæ C, ad rectam D. Quod est primum. Rursus ponatur secundò esse vt solidum A, ad solidum B, ita solidum C, ad solidū D. Dico esse quoq;, vt rectā A, ad rectam B, ita rectam C, ad rectam D. [e] Cùm enim sit proportio solidi A, ad solidum B, triplicata proportionis rectæ A, ad rectam B; Item proportio solidi C, ad solidum D, triplicata proportionis rectæ C, ad rectam D: erunt proportiones rectarum A, ad B, & C, ad D,

d 33. vndec.
e 33. vndec.

ad D, æquales; quandoquidem earum proportiones triplicatæ, nimirum solidi A, ad solidum B; & solidi C, ad solidum D, æquales ponuntur. Quod est secundum.

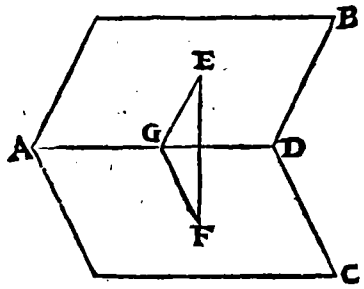
*SCHOLIVM.*

*EODEM modo, si fuerint tres rectæ proportionales, erunt & parallelepipeda similia similiterq; descripta ex eis, proportionalia, &c. Si enim media linea, eiusq; solidū sumatur bis, habebuntur quatuor rectæ proportionales. Igitur & quatuor solida proportionalia, vt demonstratū est. Cùm igitur solidū secundæ lineæ æquale sit solido tertiæ lineæ; & linea secunda æqualis tertiæ lineæ; perspicuum est, quod proponitur.*

*TOTA verò hæc propositio cōuenit etiam prismatis, quorum duo plana aduersa æqualia, sunt vel triangula, vel parallelogramma, vt Campanus ait. Nam additis prismatis, quæ singula singulis sint æqualia, exurgent parallelepipeda, quæ, vt hic est demonstratum, proportionalia erunt.* [a] *Cùm igitur prismata, eorum dimidia, eandem habeant cum ipsis proportionem; perspicuum est, quod proponitur.* a 15. quin.

## THEOR. 33. PROPOS. 38. 13.

SI planum ad planum rectum fuerit; & ab aliquo puncto eorū, quæ in vno sunt planorum, ad alterum planum perpendicularis ducta fuerit: in communē sectionem cadet planorum ducta perpendicularis.



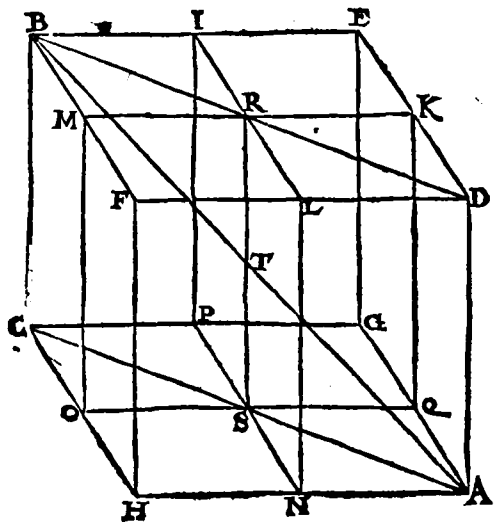

PLANVM. n. AB, rectum sit ad planum AC, sitque eorum communis sectio recta AD; Et ab E, puncto plani AB, ad planum AC, perpendicularis demittatur: quam dico cadere in communem sectionem AD. Nam si fieri potest, cadat extra ad punctum F, [a] & ab F, in plano AC, ducatur ad rectā AD, perpēdicularis FG, connectaturq; recta EG, in plano AB. Quoniam igitur FG, perpēdicularis est ad communem sectionem AD; erit quoque perpendicularis ad planum AB, ex defin. 4. huius lib. atq; adeò & ad rectam GE, per 3. defin. huius lib. Est autem & EF, recta ad FG, per eandem 3. defin. Igitur in triangulo EFG, duo anguli EFG, EGF, recti sunt. quod est absurdum; [b] cùm duobus rectis sint minores. Perpendicularis ergo ex E, demissa ad planum AC, nō extra communem sectionem AD, cadet. ergo in ipsam cadat, necesse est. Quamobrem, si planum ad planum rectum fuerit, &c. Quod erat demonstrandum. a 12. primi. b 17. primi.

*SCHOLIVM.*

*HAEC est demonstratio Theonis. Nos tamen idem demonstrabimus breuius, hoc modo. Si ex puncto E, dato in plano AB, demissa perpendicularis ad planum AC, non cadit in communem sectionem AD, sed in punctum F, extra sectionē;* [a] *ducatur ex E, ad rectam AD, perpendicularis EG; quæ ex 4. defin. recta erit ad planum AC. Quare ex puncto E, extra planum AC, ductæ sunt ad ipsum planum AC, duæ perpendiculares EF, FG. Quod fieri nequit, vt in scholio propos. 13. huius lib. demonstrauimus.* a 12. primi.

## THEOR. 34. PROPOS. 39. 40.

SI solidi parallelepipedi eorum, quæ ex aduerso, planorum latera bifariam secta sint; per sectiones autem plana sint extensa: communis sectio planorum, & solidi parallelepipedi diameter, bifariam se mutuò secabunt.




SINT parallelepipedi AB, plana opposita AC, BD, quorū omnia latera bifariā secta sint in punctis I, K, L, M, N, O, P, Q; per quæ extensa sint duo plana IN, KO, quorum sectio communis sit recta RS: Ducatur item diameter AB. Dico rectam RS, & diametrum AB, se mutuò secare bifariam. Connexis enim rectis RB, RD, SA, SC; considerentur duo triangula AQS, COS. Quoniam igitur latera AQ, QS, trianguli AQS, æqualia sunt lateribus CO, OS, triāguli COS; (Sunt enim AQ, CO, dimidia rectarū æqualiū AG, CH; [a] & QS, OS, duabus æqualib. AN, HN, æquales, cùm sint parallelogrāma AS, HS.) [b] & angulus AQS, æqualis alterno angulo COS: [c] Erunt & bases AS, CS, æquales; & anguli ASQ, CSO, æquales. [d] Atqui anguli ASQ, ASO, æquales sunt duobus rectis. Igitur & CSO, ASO, duob. sunt rectis æquales. [e] Ac propterea AS, CS, vnam rectā lineam constituent. Eodem modo ostendētur esse æquales BR, DR, & vnam ex eis componi lineā rectam. Rursus quia vtraq; AD, BC, parallela est, & æqualis rectæ FH, ob parallelogramma AF, FC, [f] ipsæ quoque a 34. primi. b 29. primi. c 4. primi. d 13. primi. e 14. primi. f 9. vndec.

a 33. primi. inter se parallelæ erũt, & æquales.[a] Quare & rectæ A C, B D, earum extrema coniungentes, parallelæ sunt, & æquales; Ac proinde ipsarũ dimidiæ A S, B R, æquales sunt. Quia verò A C, B D, parallelæ sunt;[b] erunt rectę A B, R S, in eodem cum ipsis plano, ideoq; se mutuò secabunt, in puncto videlicet T. [c] Cùm autem duo anguli A S T, A T S, trianguli A S T, æquales sint duobus angulis B R T, B T R, trianguli B R T; & latus A S, lateri B R: [d] Erunt reliqua latera T A, T S, reliquis lateribus T B, T R, æqualia; Ac propterea A B, R S, se mutuò secant bifariam in T. Si igitur solidi parallelepipedi eorum, quæ ex aduerso, &c. Quod erat ostendendum.

b 7. vndec.
c 29. & 15. primi.
d 26. primi.

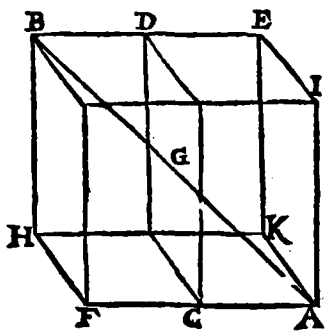
## COROLLARIVM.

*HINC efficitur, in omni parallelepipedo diametros omnes se mutuò bifariã secare in vno puncto; nimirum in puncto T, in quo bifariam diuidunt, vt hîc demonstratũ est, rectam R S.*

## SCHOLIVM.

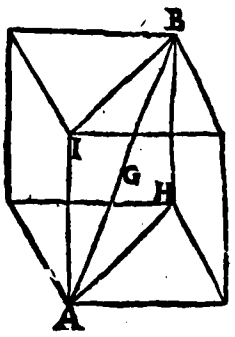
*HVIC theoremati addi potest aliud non dissimile illi, quod ad propos. 34. 1. lib. demõstrauimus, videlicet.*

Si solidum parallelepipedum plano secetur per centrum: bifariam secabitur solidum ab ipso plano. Et si solidum parallelepipedum plano secetur bifariam: per centrum transibit ipsum planum.




a 17. vndec.
b 25. vnde.

*SECETVR parallelepipedũ A B, plano C D, per centrũ, hoc est, per punctũ mediũ diametri A B, quod sit G. Dico parallelepipedũ bifariã secari. Sit enim primò planũ C D, oppositis planis A E, B F, parallelum.*[a] *Et quia plana parallela B F, D C, E A, secãt rectas quascunq; proportionaliter; secatur autẽ B A, bifariã in G; secabuntur quoq; latera aduersorum planorum A H, B I, atq; adeò & bases A H, B I, bifariam.*[b] *Cùm igitur sit vt basis K C, ad basim C H; ita solidũ A D, ad solidum C B; erit parallelepipedum A B, sectum bifariam plano C D, per centrum G, ducto.*

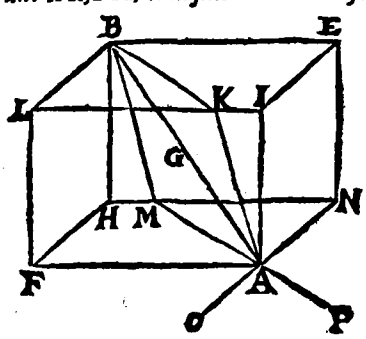



c 7. vndec.
d 28. vnde.

TRANSEAT *secundò planum secãs A I B H, per diametros B I, A H, planorum oppositorum; quoniam & sic secatur parallelepipedum per centrum G, immo per totam diametrum A B;*[c] *cùm A B, in plano sit parallelarum A H, B I.*[d] *Demonstratum autem est antea, parallelepipedũ secari plano per diametros oppositorum planorum ducto bifariam.*

TERTIO, *planum secans A K B M, neq; sit aduersis planis parallelum, neq; per diametros oppositorum planorum ductum, sed tantùm per angulos A, & B, planorum A H, B I. Quoniam igitur plana parallela A H, B I, secantur plano A K B M;*[e] *erunt communes sectiones A M, B K, parallelæ. Similiter parallelæ erunt A K, B M, cùm sint communes sectiones planorum parallelorum A L, B N,*

e 16. vnde.

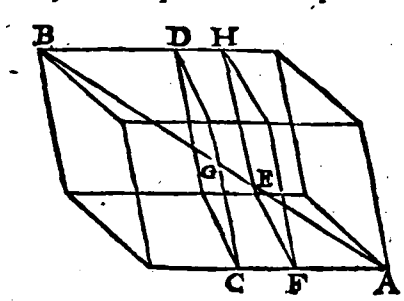



f 34. primi.
g 16. vnde.
h 15. primi.
i 4. primi.
k 4. sexti.

*facta à plano A K B M. Quare parallelogrammum est A K B M;*[f] *ideoq; tam rectæ A K, B M, quam rectæ A M, B K, inter se erunt æquales. Quia ergo latera B K, B L, trianguli B K L, æqualia sunt lateribus A M, A N, trianguli A M N; & angulus K B L, angulo M A N, æqualis. (Productis enim N A, M A, ad O, P, erunt A O, A P, rectis B L, B K, parallelæ;*[g] *& ut proinde æquales anguli erũt O A P, L B K.*[h] *Cùm igitur O A P, æqualis sit angulo M A N; æquales quoq; erũt anguli K B L, M A N.)*[i] *Erũt bases K L, M N, inter se, & anguli B K L, B L K, angulis A M N, A N M, æquales; & triangulũ triangulo æquale. Quare & similia erunt triãgula B K L, A M N;*[k] *cùm latera habeant circa æquos angulos proportionalia. Quoniam verò recta K L, rectæ M N; & angulus B K L, angulo A M N; & angulus K B L, angulo M A N, est æqualis, vt ostendimus; erit & reliqua I K, reliquæ H M; & reliquus angulus B K I, reliquo A M H; & reliquus K B E, reliquo M A F, æqualis. (Est enim tota L I, toti N H, æqualis; & tam anguli B K L, B K I, quàm anguli A M N, A M H, duobus rectis æquales; & totus angulus L B E, toti angulo N A F, æqualis, ob similitudinem parallelogrammorũ L E, F N.) Sunt autem & latera B E, E I, lateribus, A F, F H, æqualia; & anguli B E I, E I K, angulis A F H, F H M, ob parallelogramma L E, F N. Igitur quadrilaterum B K I E, & æquilaterum, & æquiangulum est quadrilatero A M H F; Ac propterea æquale & simile, cùm singula singulis conueniant, latera nimirum lateribus, & anguli angulis. Eodem modo æqualia erunt & similia triãgula B H M, A I K; & quadrilatera A K L F, B M N E; cùm inter se sint & æquilatera & æquiangula. Quapropter solidum contentum planis A K L F, F H M A, A K B M, M H B, B K L, L B H F, æquale erit solido contento planis B M N E, E I K B, B M A K, K I A, A M N, N A I E, per 10. defin. huius libri, cùm his planis illa sint similia & æqualia, vt demonstratum est. Parallelepipedum ergo A B, sectũ est plano A K B M, per centrum G, bifariam.*

POSTREMO *planum secans C D, neque aduersis planis parallelum sit, neque per diametros planorum op-*

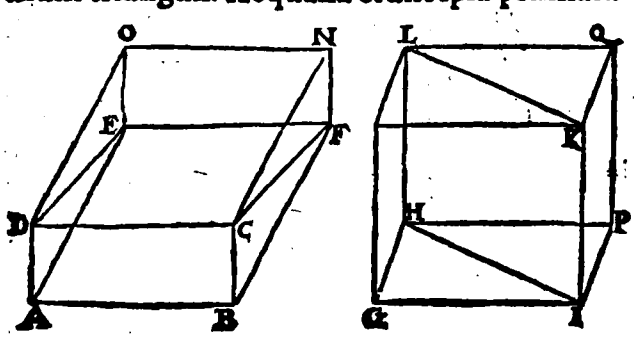
*rum oppoſitorum, neque per vllos angulos eorum ductum, ſed vtcunque ſecet plana oppoſita AH, BI. Oſtendemus autem, vt prius, planum ſecans CD, eſſe parallelogrammũ, & tam rectas CK, DM, quàm rectas CM, DK, eſſe æquales. Ducantur in parallelogrammo CD, diametri CD, KM; connectantur q; rectæ AM, BK. Quoniam igitur AF, BE, parallelæ ipſi LI, ob parallelogramma AL, LE,* [a] *inter ſe ſunt parallelæ;* [b] *Erunt AB, GD, in eodem cum illis plano; ac propterea ſe mutuò ſecabunt in centro G. In ſolo enim centro G, rectæ AB, per hypotheſim, ſecat planum CD, in quo exiſtit recta CD.* [c] *Et quoniam angulus BDC, angulo alterno ACD, æqualis eſt:* [d] *Eſt autẽ & angulus BGD, angulo AGC, ad verticem æqualis; & latus BG, lateri AG, æquale, quòd AB, bifariã ſecetur in G, centro;* [e] *Erit & latus DG, lateri CG, æquale. Cùm ergo per ea, quæ ad propoſ. 34. lib. 1. oſtendimus, diametri CD, KM, ſe mutuò bifariam ſecent, tranſibit KM, per punctum G, ibiq; diametrũ AB, ſecabit. Quia ergo latera BG, GD, trianguli BGD, æqualia ſunt lateribus AG, GC, trianguli AGC;* [f] *& angulus BGD, æqualis angulo AGC. &* [g] *Erit & baſis BD, æqualis baſi AC. Eodem argumento æquales erunt rectæ BK, AM. Quocirca cùm tria latera BD, DK, KB, triãguli BDK, æqualia ſint tribus lateribus AC, CM, MA, trianguli ACM; Erunt, per ea, quæ ad propoſ. 8. l. 1. docuimus, anguli illius, angulis huius æquales: Eſt autem totus DBL, toti CAN, æqualis, ob ſimilitudinem parallelogrammorum BI, AH. Igitur & reliquus KBL, reliquo MAN, erit æqualis. Quoniam igitur latera BK, BL, trianguli BKL, æqualia ſunt lateribus AM, AN, trianguli AMN; & angulus KBL, angulo MAN, æqualis;* [h] *Erit & baſis KL, baſi MN; & reliqui anguli reliquis angulis æquales. Si igitur æqualibus angulis BKL, AMN, æquales addantur anguli BKD, AMC, fient toti anguli DKL, CMN, æquales. Quare quadrilaterum BDKL, quadrilatero ACMN, & æquilaterum eſt, & æquiãgulum; Ac propterea æquale & ſimile, cùm ſingula conueniant ſingulis, nempe latera lateribus, & anguli angulis. Rurſus quia tota LI, toti NH, eſt æqualis, erit & reliqua IK, reliquæ HM, æqualis. Eademq; ratione reliqua DE, reliquæ CF, æqualis erit; Ac propterea quadrilaterum DEIK, æquilaterum eſt quadrilatero CFHM: Sed & æquiangulum; cùm anguli DEI, EIK, æquales ſint angulis CFH, FHM, propter ſimilitudinẽ parallelogrammorũ BI, AH; & anguli EDK, IKD, angulis FCM, HMC, æquales, quòd æquales oſtenſi ſint eorum anguli alterni LKD, BDK, angulis NMC, ACM. Igitur quadrilatera DEIK, CFHM, æqualia ſunt & ſimilia. Non aliter oſtendemus, æqualia eſſe & ſimilia quadrilatera ACKI, BDMH; Item DENM, CFLK, cùm & latera lateribus, & anguli angulis conueniant; vt perſpicuum eſt. Quamobrem ſolidum contentum planis CKLF, FHMC, CKDM, MHBD, DKLB, BHFL, per 10. defin. huius lib. æquale eſt ſolido cõtento planis DMNE, EIKD, DMCK, KIAC, CMNA, AIEN; cùm hiſce illa ſint demonſtrata & æqualia & ſimilia. Parallelepipedum igitur AB, ſectum eſt per centrum G, plano CD, bifariam.*




*SED ſecetur iam parallelepipedum AB, plano CD, bifariam. Dico planum CD, per centrum parallelepipedi tranſire, hoc eſt, punctum G, in quo planum CD, ſecat diametrũ AB, diuidere diametrum AB, bifariam. Si enim diameter AB, in G, non diuiditur bifariam, diuidatur bifariam in E, vt ſit E, centrum parallelepipedi. Si igitur per E, ducatur planum FH, plano CD, parallelum, ſecabitur parallelepipedum AB, bifariam plano FH, vt demonſtratum eſt. Ponitur autem & bifariam ſecari plano CD; Igitur ſolida CB, FB, cùm ſint dimidia parallelepipedi AB, inter ſe æqualia ſunt, pars & totũ. Quod eſt abſurdũ. Non ergo aliud punctũ, præter G, diuidet diametrũ AB, bifariam; Ac proinde G, centrũ erit parallelepipedi. Quod demonſtrandũ erat.*

## THEOR. 35. PROPOS. 40. 41.

SI fuerint duo priſmata æqualis altitudinis, quorum hoc quidem habeat baſin, parallelogrammum; illud verò, triangulum; duplum autem fuerit parallelogrammum trianguli: Aequalia erunt ipſa priſmata.




SINT duo priſmata æqualis altitudinis ABCDEF, GHIKLM, quorum illud baſim habeat parallelogrammum ABCD, hoc verò, triangulũ GHL; ſitq; parallelogrammũ AC, trianguli GHI, duplũ. Dico hæc priſmata eſſe æqualia. Perficiantur enim parallelepipeda AN, GQ. Quod quidem fiet, ſi plana triangulorũ extendantur, perficianturq; parallelográma BN, AO, GP, MQ. Si enim cõnectantur rectæ NO, PQ, cõſtituta erũt

a 9. vndec.
b 7. vndec.
c 29. primi
d 15. primi.
e 26. primi
f 15. primi.
g 4. primi.
h 4. primi.

duo parallelepipeda AN, GQ, eiuſdem altitudinis cum priſmatis. Nam plana horum ſolidorũ
a 34. primi. oppoſita eſſe parallela, facilè colligetur ex propoſ. 15. huius lib. [a] Quoniam igitur parallelogrãmum GP, duplum eſt trianguli GHI; Ponitur autem & parallelogrammũ AC, eiuſdem trian-
b 31. vndec. guli GHI, duplum: æqualia erunt parallelográma AC, GP. [b] Quare parallelepipeda AN, GQ, eiuſdem altitudinis ſuper æquales baſes AC, GP, inter ſe ſunt æqualia: Atque propterea eorum
c 32. vnde. dimidia, nimirum priſmata ABCDEF, GHI, KLM, ([c] Nam parallelepipeda AN, GQ, per diametros CF, DE, HI, LK, planorum aduerſorum ſecantur bifariam, in bina ſcilicet priſmata) æqualia quoque ſunt inter ſe. Itaque ſi fuerint duo priſmata æqualis altitudinis, &c. Quod erat demonſtrandum.

## SCHOLIVM.

*PERSPICVVM autem eſt ex demonſtratione, propoſitionem hanc intelligi de illis duntaxat priſmatis, quæ duo triangula habent oppoſita; cùm imperet parallelepipeda cõpleri; quod fieri non poſſet, ſi priſma ſuper parallelogrammum ABCD, conſtitutum non haberet duo triangula, nempe ADE, BCF. Eſſet enim iam parallelepipedum completum.*

FINIS ELEMENTI VNDECIMI.

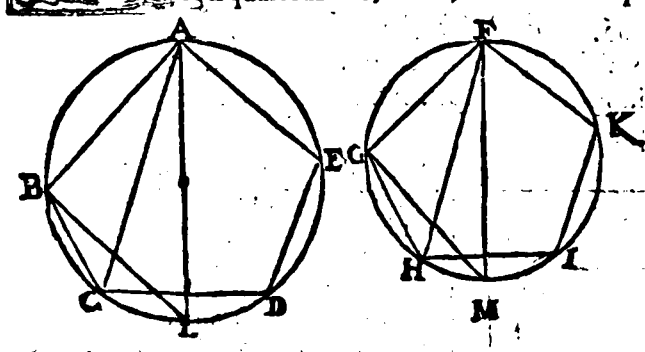
---

# EVCLIDIS ELEMENTVM DVODECIMVM: & Solidorum ſecundum.

## 1. THEOR. 1. PROPOS. 1.

**QVÆ in circulis polygona ſimilia; inter ſe ſunt, vt à diametris quadrata.**

SINT duo polygona ſimilia ABCDE, FGHIK, deſcripta in circulis, quorum diametri AL, FM. Dico ita eſſe polygonum ABCDE, ad polygonum FGHIK, vt quadratum diametri AL, ad quadratum diametri FM. Subtendantur enim angulis æqualibus ABC, FGH, rectæ AC, FH, & connectantur rectæ BL, GM. Quoniam igitur ob ſimilitudinem polygonorũ eſt vt AB, ad BC, ita FG, ad GH; [d] erunt triangula ABC, FGH, æquiangula, cùm circa angulos
d 6. ſexti. æquales ABC, FGH, habeant latera proportionalia: [e] Eſt autẽ angulus ALB,
e 21. tertij. angulo ACB; & angulus FMG, angulo FHG, æqualis. Igitur & anguli ALB, FMG, æquales erunt. Cùm ergo & anguli ABL, FGM, æquales ſint, [f] nempe recti in ſemicirculis exiſtentes; [g] erũt & reliqui BAL, GFM, æquales. [h] Quare erit vt AL, ad AB, ita FM, ad FG; & permutando, vt AL, ad FM, ita AB, ad FG. [i] Igitur eſt vt quadratum ex AL, ad quadratum ex FM, ita polygonũ ABCDE, ſuper AB, ad polygonum FGHIK, ſuper FG; cùm tam quadrata, quàm polygona ſint figuræ ſimiles, ſimiliterque deſcriptæ. Quæ itaque in circulis polygona ſimilia; inter ſe ſunt, vt à diametris quadrata. Quod erat demonſtrandum.




f 31. tertij.
g 23. primi.
h 4. ſexti.
i 22. ſexti.

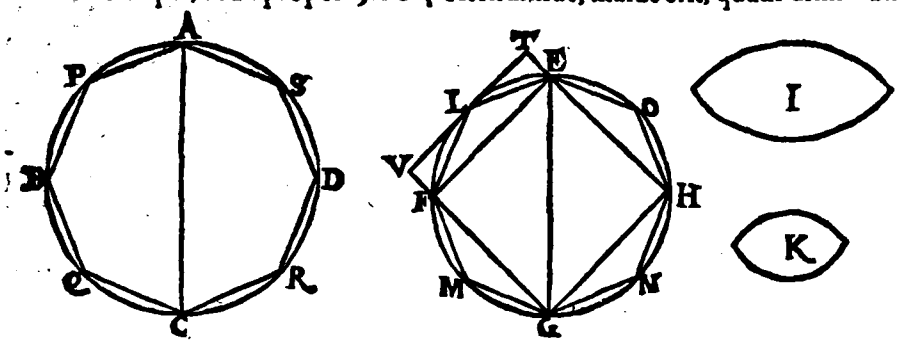
THEOR.

# THEOR. 2. PROPOS. 2. 2.

**CIRCVLI inter se sunt, quemadmodum à diametris quadrata.**

SINT duo circuli ABCD, EFGH, quorum diametri AC, EG. Dico esse, vt quadratum diametri AC, ad quadratum diametri EG, ita circulum ABCD, ad circulum EFGH. Si enim res non ita se habet; Sit vt quadratum diametri AC, ad quadratum diametri EG, ita circulus ABCD, ad aliquam magnitudinem, nempe ad I, quæ vel minor erit, vel maior circulo EFGK. Si enim esset æqualis, [a] haberet circulus ABCD, ad circulum EFGH, & ad I, eãdem proportionem; ac propterea esset circulus ABCD, ad circulum EFGH, vt quadratum diametri AC, ad quadratum diametri EG, quod non conceditur. Sit ergo primùm I, minor, quàm circulus EFGH, magnitudine scilicet K, ita vt circulus EFGH, æqualis sit manitudinibus I, & K, simul. Inscribatur in circulo EFGH, quadratum EFGH; quod quia dimidium est quadrati circa eundem circulum descripti, vt ad propos. 9. lib. 4. ostendimus, maius erit, quàm dimidium circuli EFGH.

[a] 7. quinti.




Secentur bifariã peripheriæ EF, FG, GH, HE, in punctis L, M, N, O, adiungãturque rectæ LE, LF, MF, MG, NG, NH, OH, OE. Ducatur per L, recta TV, tangens circulũ in L, quæ parallela erit ipsi EF, vt ad propos. 27. lib. 3. ostendimus, occurratque rectis HE, GF, productis in T, & V. [b] Quia ergo triangulum ELF, dimidium est parallelogrammi TEFV; maius erit triangulum ELF, quàm dimidium segmenti circuli ELF. Eadem ratione erunt reliqua triangula maiora, quàm dimidia segmentorum, in quibus sunt. Omnia igitur triangula simul maiora sunt, quàm dimidium omnium segmentorum simul. Quod si rursus peripheriæ EL, LF, &c. secentur bifariam, & adiungantur rectæ lineæ, constituentur eodem modo triangula, quæ maiora erunt simul, quàm dimidium omnium segmentorum simul, in quibus sunt; & sic deinceps. Quoniam verò, si à circulo EFGH, auferatur plus quàm dimidium, nempe quadratum EFGH; & à reliquis segmentis plus quàm dimidium, nempe triangula ELF, FMG, &c. atque in hunc modum semper fiat detractio; [c] relinquitur tandem minor magnitudo, quàm K, excessus inter circulum EFGH, & magnitudinem I. Sint iam circuli segmenta relicta EL, LF, FM, &c. simul sumpta minora, quàm magnitudo K. Cùm igitur circulus EFGH, æqualis ponatur magnitudinibus I, & K, simul; si ex circulo detrahantur dicta segmenta, & ex I, & K, ipsa magnitudo K, quæ maior est præfatis circuli segmẽtis; erit reliquum polygonum ELFMGNHO, maius reliqua magnitudine I. Inscribatur in circulo ABCD, polygonum APBQCRDS, simile polygono ELFMGNHO. Quòd quidem facilè fiet, si semicirculi ABC, ADC, bifariam secentur in B, & D; & rursus circumferentiæ AB, BC, CD, DA, bifariam in P, Q, R, S; & sic deinceps, donec in tot partes æquales diuisa sit circumferentia ABCD, in quot distributa est circumferentia EFGH. Nam iunctis rectis AP, PB, BQ, &c. erit figura inscripta similis figuræ ELFMGNHO, vt patet. [d] Quoniam igitur est polygonum APBQCRDS, ad polygonum ELFMGNHO, vt quadratum diametri AC, ad quadratum diametri EH, hoc est, per hypothesim, vt circulus ABCD, ad I: Est autem polygonum APBQCRDS, minus circulo ABCD. [e] Igitur & polygonũ ELFMGNHO, minus erit quàm I. Ostensum autem est & maius. Quod est absurdum. Non igitur minor est magnitudo I, circulo EFGH.

[b] 41. primi.

[c] 1. decimi

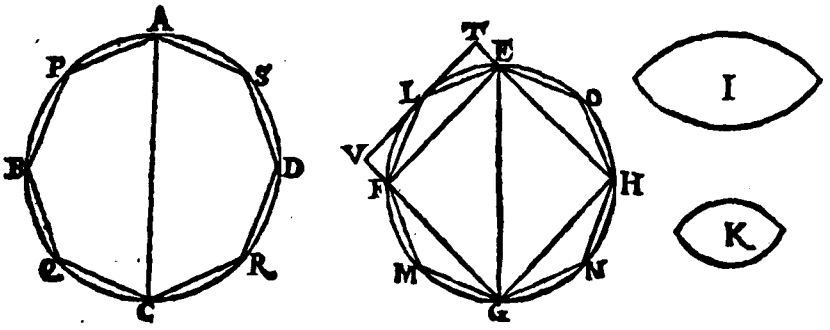
[d] 1. duodec.

[e] 14. quinti

QVAMQVAM autem in figura confertur maior circulus cum minore; eodẽ tamen modo demonstrabimus, minorem circulum EFGH, non posse ad magnitudinem, quæ minor sit, quàm maior circulus ABCD, habere eandem proportionem, quam habet quadratum diametri minoris EG, ad quadratum maioris diametri AC; Ita vt generaliter & vniuersè demonstratum sit, nunquam quadratum diametri alicuius circuli ad quadratum diametri alterius circuli eandem habere posse proportionem, quam habet prior circulus ad magnitudinem posteriore circulo minorem: siue prior circulus maior sit posteriore, siue minor.

SIT deinde magnitudo I, maior circulo EFGH. Cùm ergo ponatur circulus ABCD, ad I, esse vt quadratum diametri AC, ad quadratum diametri EG; erit & conuertendo I, ad circulum ABCD, vt quadratum diametri EG, ad quadratum diametri AC. Ponatur vt I, ad circulũ ABCD, ita circulus EFGH, ad magnitudinem aliquam, nẽpe ad K. Et quia I, maior ponitur circulo EFGH, [f] maior quoq; erit circulus ABCD, magnitudine K. Quare erit vt quadratũ diametri EG, ad quadratum diametri AC, ita circulus EFGH, ad magnitudinem K, quæ minor est circulo ABCD. Quod est absurdũ. Ostensum enim est iam in priori parte generaliter, non posse esse vt quadratũ diametri ad quadratũ diametri, ita circulum ad magnitudinẽ circulo minorẽ: siue prior circulus

[f] 14. quinti




circulus maior sit posteriore, siue minor. Quamuis autē circulus AB CD, maior est, & EFGH, minor: eadem tamen ratione ostēdemus, quadratū diametri circuli EFGH, ad quadratū diametri circuli, AB CD, non posse habere eandem proportionem, quam habet circulus E F G H, ad magnitudinem circulo A B C D, maiorem: quia eodem modo probabimus, (si illud cōcedatur) quadratrum diametri A C, ad quadratum diametri E G, eandem habere proportionem, quam habet circulus AB CD, ad magnitudinem circulo E F G H, minorem. quod falsum esse iam in priori parte generaliter demonstratum est: Ita vt generaliter & vniuersē quoque demonstratum sit, nunquā quadratum diametri alicuius circuli ad quadratum diametri alterius circuli eandē habere posse proportionem, quam habet prior circulus ad magnitudinem posteriore circulo maiorem: siue prior circulus maior sit posteriore, siue minor. Non ergo maior est magnitudo I, circulo E F G H: Sed neque minor est ostensa. æqualis igitur est. Quare cùm ponatur, vt quadratum diametri A C, ad quadratum diametri E G, ita circulus A B C D, ad I; [a] sit autem vt circulus A B C D, ad I, ita idem circulus A B C D, ad circulum E F G H, qui æqualis est magnitudini I; Erit quoq; vt quadratum diametri A C, ad quadratum diametri E G, ita circulus A B C D, ad circulum E F G H, siue circulus A B C D, circulo E F G H, maior sit, siue minor. Circuli igitur inter se sunt, quemadmodum à diametris quadrata. Quod erat ostendendum.

*a* 7. quinti.

## COROLLARIVM.

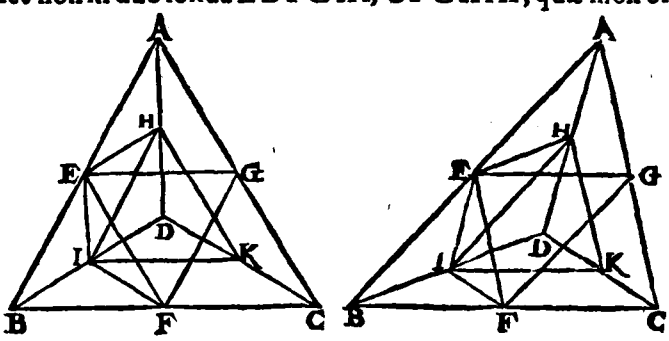
*Hinc fit, ita esse circulum ad circulum, vt polygonum in illo descriptum ad polygonum simile in hoc descriptum. Quoniam* [a] *tam circulus ad circulum,* [b] *quàm polygonum ad polygonum est, vt quadratum diametri ad quadratum diametri, veluti demonstratum est.*

*a* 2. duode. *b* 1. duode.

## 3. THEOR. 3. PROPOS. 3.

**OMNIS pyramis triangularem habens basim, diuiditur in duas pyramides æquales, & similes inter se, triangulares habentes bases, & similes toti; Et in duo prismata æqualia, quæ duo prismata maiora sunt dimidio totius pyramidis.**

SIT pyramis, cuius basis triangulum A B C, vertex D. Secentur omnia eius latera bifariam in E, F, G, H, I, K, cōnectanturque rectæ E F, F G, G E, H I, I K, K H, H E, E I, I F. Diuisa itaq; est pyramis in duas pyramides A E G H, H I K D, quarum bases triangula A E G, H I K, & vertices H, D; nec non in duo solida E B F G H I, C F G H I K, quæ mox ostendemus esse prismata, quorum




illius basis est parallelográmum E B F G, & triangula opposita E H G, B I F; huius verò basis est triāgulum C F G, cui opponitur triangulum K I H, habentq; hæc prismata terminum communē, parallelogrammum F G H I; & cum duabus illis pyramidibus componunt totam pyramidem, vt constat, si rectè concipiatur pyramidis vertex D, in sublimi, necnon eius triangula circumiacentia. Dico igitur duas illas pyramides esse æquales, & similes inter se, & similes toti; Item duo hæc prismata esse inter se æqualia, & maiora dimidio totius pyramidis Cùm enim latera A D, B D, trianguli A D B, secta sint bifariam, ac proinde proportionaliter; [a] erunt H I, A B, parallelæ. Eadē ratione parallelæ erunt I K, B C; & H K, A C; & E G, B C; & E F, A C; & F G, A B; & E H, B D; & E I, A D; & I F, D C; & H G, D C. [b] Sunt autē & rectæ F G, H I, cùm parallelę sint ipsi A B, inter se parallelæ; Atq; eadē ratione parallelæ sunt G H, F I, cùm sint parallelæ ipsi D C. Quare parallelogramma sunt A E I H, H E B I, I D H E, E B F G, G H K C, C K I F, F G H I. Quoniam verò rectæ H E, H G, rectis D B, D C, sunt parallelæ, [c] erunt anguli E H G, B D C, æquales: Ac eadem rōne æquales erunt anguli H E G, D B C; & H G E, D C B. [d] Proportionalia igitur sunt latera triāguli H E G, lateribus trianguli D B C, circa æquales angulos; ac proinde simile est triāgulum H E G, triangulo D B C. Sunt autem & triangula H A E, H A G, A E G, triangulis D A B, D A C, A B C, similia, per coroll. propos. 4. lib. 6. Pyramis ergo A E G H, pyramidi A B C D, similis est,

*a* 2. sexti. *b* 9. vndec. *c* 10. vndec. *d* 4. sexti.

per

per defin.9.huius lib. Rursus quia rectæ HI, HK, rectis AB, AC, sunt parallelæ; [a] erunt anguli IHK, BAC, æquales. Eadem ratione æquales erunt anguli HIK, ABC; & HKI, ACB. [b] Quare latera trianguli HIK, lateribus triãguli ABC, circa æquales angulos sunt proportionalia; ac propterea triangulum HIK, triangulo ABC, simile est: Sunt autem & triangula DHI, DIK, DKH, triangulis DAB, DBC, DCA, similia, per idem coroll. propos.4. lib.6. Pyramis ergo HIKD, similis est quoque eidem pyramidi ABCD, per defin.9. huius lib. Quoniam autem triãgula AHE, HDI, similia sunt triangulo ADB, vt ostensum est ex coroll. propos.4. lib.6. [c] ipsa quoque inter se similia erunt. Cùm igitur sint super rectas æquales AH, HD, constituta; ipsa erunt æqualia, per lemma propos.22. lib.6. Simili argumento æqualia erunt & similia triangula AHG, HDK, cùm similia sint ostensa triangulo ADC, & constituta super æquales rectas AH, HD. Pari ratione æqualia, & similia erunt triangula AEG, HIK, cùm similia sint ostensa triangulo ABC, & super rectas posita AE, HI, [d] quæ æquales sunt, ob parallelogrammum AEIH. Non secus æqualia erũt & similia triangula EHG, IDK, cùm sint ostensa similia triangulo BDC, & habeant rectas HE, DI, [e] quæ æquales sunt, ob parallelogrammum HEID. Pyramides igitur AEGH, HIKD, æquales sunt & similes, per 10. defin.11. lib. quandoquidem omnia triangula vnius æqualia sunt & similia omnibus triangulis alterius, vt demonstratum est.

a 10. vndec.
b 4. sexti.
c 21. sexti.
d 34. primi.
e 34. primi.

Rvrsvs, [f] quia rectæ EH, HG, GE, æquales sunt, & parallelæ rectis BI, IF, FB, ob parallelogrãma EHIB, FGHI, BFGE; erunt triangula EHG, BIF, æquiãgula inter se, & æqualia, per coroll. propositt.8. lib.1. Ac propterea & similia; [g] Sunt autem & parallela; cùm EH, HG, per quas ducitur planum EHG, parallelę sint rectis BI, IF, per quas planum BIF, ducitur. Igitur solidum BIFGHE, contentum duobus triangulis EHG, BIF, ex aduerso æqualibus & similibus, & parallelis; & tribus parallelogrammis EGFB, BEHI, IFGH, prisma est, ex definitione. Eodẽ modo prisma ostendetur solidum CFGHIK. [h] Cùm enim rectæ FC, CG, GF, æquales sint, & parallelæ rectis IK, KH, HI, ob parallelogramma CFIK, CGHK, FGHI; erunt triangula CFG, HIK, æqualia, & æquiangula inter se, ac propterea similia: [i] Sunt autem & parallela, quòd rectæ CF, CG, per quas ducitur planum CFG, parallelæ sint rectis KI, KH, per quas planũ KIH, ducitur. Igitur solidum CFGHIK, contentum duobus triangulis CFG, KIH, ex aduerso æqualibus & similibus, & parallelis; atq; tribus parallelogrammis CFIK, KHGC, IFGH, prisma est. Quoniam verò prismata EBFGHI, CFGHIK, sunt eiusdem altitudinis, nempe inter plana parallela BCGE, HIK; & parallelogrammum EBFG, basis illius, duplum est trianguli CFG, basis huius, per scholium propos.41. lib.1. [k] Ipsa inter se æqualia erunt.

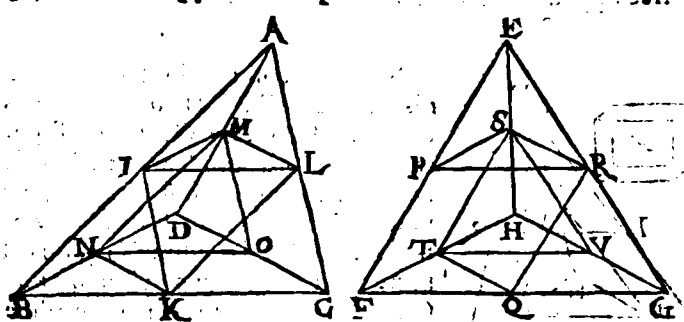
f 34. primi.
g 15. vndec.
h 34. primi.
i 15. vndec.
k 40. vndec.

Denique quia prisma EBFGHI, maius est pyramide EBFI, totum parte; Est autem pyramis EBFI, æqualis & similis pyramidi AEGH, necnon pyramidi HIKD, vt perspicuum est ex æqualitate & similitudine triangulorum: Maiora erunt prismata EBFGHI, CFGHIK, pyramidibus AEGH, HIKD. Ac proinde illa quidem dimidium pyramidis ABCD, excedent, hæ verò à dimidio eiusdem deficient. Quando enim totum in duas partes inæquales secatur, maior dimidium eius superat, minor verò à dimidio deficit. Omnis igitur pyramis triangularem habens basin, &c. Quod erat ostendendum.

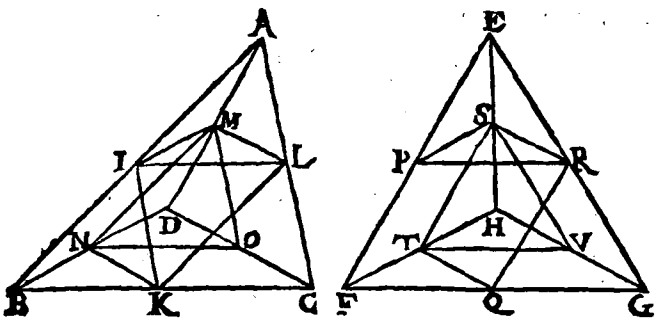
## THEOR. 4. PROPOS. 4.

4.

Si fuerint duæ pyramides eiusdem altitudinis, triangulares habentes bases; sit autem illarum vtraque diuisa & in duas pyramides æquales inter se, & similes toti; & in duo prismata æqualia; Ac eodem modo diuisa sit vtraq; pyramidum, quæ ex superiore diuisione natæ sunt, idq; semper fiat; erit vt vnius pyramidis basis ad alterius pyramidis basim, ita & omnia, quæ in vna pyramide, prismata ad omnia, quæ in altera pyramide, prismata multitudine æqualia.




Sint super bases triangulares ABC, EFG, duæ pyramides ABCD, EFGH, eiusdem altitudinis, quarum latera bifariam diuidantur in punctis I, K, L, M, N, O, P, Q, R, S, T, V, connectanturq; rectæ IL, LK, KN, NO, OM, MN, LM, MI, PR, RQ, QT, TV, VS, ST, RS, SP, ita vt pyramis vtraq; secta sit in binas pyramides æquales inter se, & similes toti, nimirum in AILM, MNOD; EPRS, STVH; & in bina prismata æqualia IBKLMN, CKLMNO, PFQRST, GQRSTV; vt vult propositio præcedens: eodemq; modo intelligantur esse diuisæ pyramides factæ AILM, MNOD; EPRS, STVH; & sic deinceps. Dico ita esse omnia prismata facta in pyramide ABCD, ad omnia prismata generata in pyramide EFGH, illis multitudine æqualia, vt est basis ABC, ad basin EFG. Cùm enim sit vt BC, ad CK, ita FG, ad GQ, eo quòd vtraq; linea diuisa est bifariam; sint autem triangula ABC, LKC, similia similiterque posita; Item trian-




a 22. sexti. gula EFG, RQG, ex coroll. propos. 4. lib. 6. a Erit quoque vt triangulum ABC, ad triangulum LKC, ita triangulum EFG, ad triangulum RQG. Et permutando, vt ABC, ad EFG, ita LKC, ad RQG. Vt autem LKC, ad RQG, ita est prisma CKLMNO, ad prisma GQRSTV, vt mox ostendemus, atque adeò ita prisma IBKLMN, ad prisma PFQRST, cùm hæc illis sint æqualia: Et vt vnum prisma, videlicet IBKLMN, ad vnum prisma PFQRST,

b 12. quinti. b ita sunt duo prismata IBKLMN, CKLMNO, ad duo prismata PFQRST, GQRSTV. Igitur erunt quoque, vt basis ABC, ad basin EFG, ita duo prismata in pyramide ABCD, ad duo prismata in pyramide EFGH. Simili argumento ostendemus, ita esse bina prismata in pyramidibus AILM, MNOD, factis in pyramide ABCD, ad bina prismata in pyramidibus EPRS, STVH, factis in pyramide EFGH, vt sunt bases AIL, MNO, illarum pyramidum ad bases EPR, STV, harum pyramidum; & sic deinceps, eadem semper facta diuisione. Sed vt illæ bases ad has, ita est LKC, basis quæ illis est æqualis & similis, ad basin RQG, quæ his est æqualis, & similis, vt in præcedenti est demonstratum, hoc est, ita est basis ABC, ad basin EFG. Igitur erunt quoque, vt basis ABC, ad basin EFG, ita prismata cuiuslibet pyramidis factæ in pyramide ABCD, ad prismata cuiuslibet pyramidis factæ in pyramide EFGH: Ac propterea erunt quoque, vt prismata pyramidis ABCD, ad prismata pyramidis EFGH, ita prismata tam pyramidis AILM, ad prismata pyramidis EPRS, quàm prismata pyramidis MNOD, ad prismata pyramidis STVH; & ita deinceps. Quare cùm sint, vt duo prismata pyramidis ABCD, ad duo prismata

c 12. quinti. pyramidis EFGH. c ita omnia prismata in pyramidibus ABCD, AILM, MNOD, &c. simul ad omnia prismata in pyramidibus EFGH, EPRS, STVH, &c. simul, si hæc illis multitudine sint æqualia; Erunt quoque, vt basis ABC, ad basin EFG, ita omnia prismata in pyramide ABCD, ad omnia prismata in pyramide EFGH. Quocirca si fuerint duæ pyramides eiusdem altitudinis, triangulares habentes bases, &c. Quod erat demonstrandum.

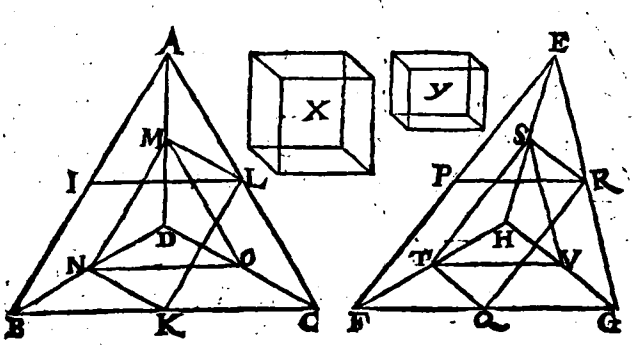
## LEMMA.

*QVOD autem sit LKC, ad RQG, ita prisma CKLMNO, ad prisma GQRSTV, ita ostendemus. Intelligantur ex verticibus D, H, ad bases ABC, EFG, demissæ perpendiculares, quæ erunt altitudines æquales pyramidum ABCD, EFGH. Quoniam igitur plana*

a 17. vndec. *parallela ABC, MNO, a secant duas rectas, nempe DC, & perpendicularem ex D, demissam proportionaliter; secatur autem DC, bifariam in O; secabitur quoque perpendicularis ex D, demissa bifariam in puncto, cui planum MNO, occurrit. Eadem ratione perpendicularis ex H, demissa bifariam secabitur à plano STV. Quare cùm totæ perpendiculares ponantur æquales, erunt & dimidiæ, nempe prismatum altitudines, æquales; Ac proinde prismata CKLMNO, GQRSTV, cùm habeant altitudines æquales, inter se erunt, vt bases LKC, RQG, per ea, quæ ad propos. 34. lib. 11. demonstrauimus.*

## 5. THEOR. 5. PROPOS. 5.

SVB eadem altitudine existentes pyramides, & triangulares habentes bases; inter se sunt, vt bases.




SINT pyramides eiusdem altitudinis ABCD, EFGH, quarum bases triangula ABC, EFG. Dico esse pyramidem ad pyramidem, vt est basis ad basin. Si enim non ita sit, ponatur vt basis ABC, ad basin EFG, ita pyramis ABCD, ad solidum X; quod vel minus erit, vel maius pyramide EFGH. Sit primò minus, magnitudine Y. Diuidatur pyramis EFGH, in duas pyramides æquales, & duo prismata æqualia, iuxta propos. 3. huius lib. Rursus eodem modo factæ pyramides in pyramide EFGH, in binas pyramides æquales, & in bina prismata æqualia, & sic deinceps. Quoniam igitur, si à pyramide EFGH, auferatur plus quàm

a 3. duodec. dimidiũ, nempe duo prismata PFQRST, GQRSTV, a quæ maiora sunt dimidio pyramidis EFGH:

EFGH. Item à reliquis pyramidibus EPRS, STVH, plus quàm dimidium, earum ſcilicet priſmata, & ſic deinceps: [a] relinquetur tandem minor magnitudo quàm Y, exceſſus pyramidis EFGH, ſupra ſolidum X. Sit ergo iam relicta magnitudo minor. Cùm autem pyramis EFGH, æqualis ponatur ſolidis X, Y; erunt reliqua priſmata in pyramide EFGH, maiora ſolido X. Diuidatur pyramis ABCD, in duas pyramides æquales, & duo priſmata æqualia, & eodem modo factæ pyramides AILM, MNOD, in binas pyramides æquales, & bina priſmata æqualia; Atque hoc toties fiat, quoties id factum fuit in pyramide EFGH. [b] Quoniam igitur ſunt omnia priſmata in pyramide ABCD, ad omnia priſmata numero æqualia in pyramide EFGH, vt baſis ABC, ad baſin EFG, hoc eſt, vt pyramis ABCD, ad ſolidum X: Sunt autem omnia priſmata in pyramide ABCD, minora, quàm tota pyramis ABCD; [c] erunt quoque omnia priſmata in pyramide EFGH, minora quàm ſolidum X. Oſtenſa verò ſunt & maiora. Quod eſt abſurdum. Non ergo minus eſt ſolidum X, pyramide EFGH.

[a] 1. decimi.

[b] 4. duode.

[c] 14. quinti.

SIT deinde ſolidum X, pyramide EFGH, maius. Quoniam igitur ponitur pyramis ABCD, ad ſolidum X, vt baſis ABC, ad baſin EFG; erit conuertendo ſolidũ X, ad pyramidem ABCD, vt baſis EFG, ad baſin ABC. Ponatur, vt ſolidum X, ad pyramidem ABCD, ita pyramis EFGH, ad ſolidum Y. Et quia ſolidũ X, maius ponitur pyramide EFGH; [d] erit & pyramis ABCD, maior ſolido Y. Quare erit, vt baſis EFG, ad baſin ABC, ita pyramis EFGH, ad ſolidũ Y, quod minus eſt pyramide ABCD. Quod eſt abſurdum. Oſtenſum enim eſt iam, non poſſe eſſe, vt eſt baſis ad baſin, ita pyramidem ad ſolidum pyramide minus. Non ergo maius eſt ſolidum X, pyramide EFGH; ſed neq; minus eſt oſtenſum. Igitur æquale eſt. Quare cùm ponatur vt baſis ABC, ad baſin EFG, ita pyramis ABCD, ad ſolidum X; [e] Sit autem pyramis ABCD, ad ſolidũ X, vt ad pyramidẽ EFGH, ſolido X, æqualem: Erit quoq; vt baſis ABC, ad baſin EFG, ita pyramis ABCD, ad pyramidẽ EFGH. Sub eadem ergo altitudine exiſtẽtes pyramides, &c. Quod erat oſtendendũ.

[d] 14. quinti.

[e] 7. quinti.

## SCHOLIVM.

*CONVERSO modo, ſi pyramides triangulares inter ſe ſint, vt baſes; ipſæ erunt ſub eadem altitudine. Si enim vnius altitudo maior credatur, abſcindatur ab ea æqualis minori, & à puncto abſciſionis ad omnes angulos baſis ducantur rectæ lineæ; Erit q; vt baſis ad baſin, ita pyramis ad pyramidem modò conſtitutam; Sed ſic quoq; erat ad totam pyramidem.* [a] *Pyramis ergo conſtituta æqualis erit toti pyramidi, pars toti. Quod eſt abſurdum.*

[a] 9. quinti.

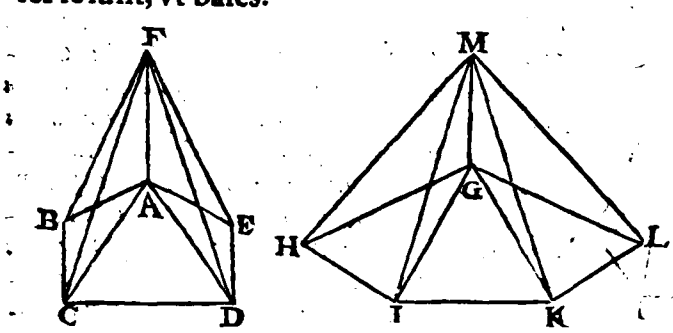
## COROLLARIVM.

*HINC fit, pyramides eiuſdem altitudinis ſuper eandem, vel æquales baſes triangulares conſtitutas, eſſe inter ſe æquales; propterea quod eandem proportionem habent cum baſibus, quæ æquales ponuntur, vel certè vna & eadem.*

*ITEM ſequitur, è conuerſo pyramides triangulares æquales ſuper eandẽ, vel æquales baſes, eandem habere altitudinem. Et pyramides triangulares æquales eandemq; habentes altitudinem, baſes habere æquales, ſi non eandem habuerint. Quæ quidem duo ex prima parte corollarij eodem argumento oſtendemus, quo in conuerſo propoſ. 30. & 31. lib. 11. demonſtrando vſi ſumus: ſi tam in altitudine, quàm in baſi abſciſſa conſtituatur alia pyramis, &c.*

## THEOR. 6. PROPOS. 6. 6.

SVB eadem altitudine exiſtentes pyramides, & polygonas habentes baſes, inter ſe ſunt, vt baſes.




SINT pyramides ABCDEF, GHIKLM, quarum baſes polygonę ABCDE, GHIKL, latera multitudine æqualia habentes. Dico eſſe pyramidem ad pyramidem, vt eſt baſis ad baſin. Reſolutis enim baſibus in triangula numero æqualia; erit quælibet pyramis in totidem pyramides triangulares diuiſa. [a] Quia verò eſt, vt baſis ABC, ad baſin ACD, ita pyramis ABCF, ad pyramidem ACDF; erit componendo vt baſis ABCD, ad baſin ACD, ita pyramis ABCDF, ad pyramidem ACDF: [b] Sed rurſus eſt vt baſis ACD, ad baſin ADE, ita pyramis ACDF, ad pyramidẽ ADEF. Igitur ex æquo vt baſis ABCD, ad baſin ADE, ita pyramis ABCDF, ad pyramidem ADEF. Componendo ergo erit vt baſis ABCDE, ad baſin ADE, ita pyramis ABCDEF, ad pyramidem ADEF. Simili argumento erit vt baſis GHIKL, ad baſin GKL, ita pyramis GHIKLM, ad pyramidem GKLM; & conuertendo vt baſis GKL, ad baſin GHIKL, ita pyramis GKLM, ad pyramidem GHIKLM. [c] Rurſus quoniam eſt, vt baſis ADE, ad baſin GKL, ita

[a] 5. duode.

[b] 5. duode.

[c] 5. duode.

| | |
|---|---|
| ABCDE. | ABCDEF. |
| ADE. | ADEF. |
| GKL. | GKLM. |
| GHIKL. | GHIKLM |

pyramis A D E F, ad pyramidem G K L M; Erunt quatuor baſes ABCDE, ADE, GKL, GHIKL, in eiſdem proportionibus cum quatuor pyramidibus ABCDEF, ADEF, GKLM, GHIKLM, vt in hac formula vides; manifeſtumque eſt ex demonſtratione. Quare ex æquo, erit vt baſis ABCDE, ad baſin GHIKL, ita pyramis ABCDEF, ad pyramidem GHIKLM: ac propterea, ſub eadem altitudine exiſtentes pyramides, &c. Quod erat demonſtrandum.

## SCHOLIVM.

*QVAMVIS huius propoſitionis demonſtratio de illis duntaxat pyramidibus eiuſdem altitudinis loquatur, ſecundùm interpretes, quorum baſes polygona latera habent multitudine æqualia; facilè tamen idem etiam demonſtrabimus de pyramidibus eiuſdem altitudinis, quarum vnius baſis plura continet latera, quàm baſis alterius. Sint enim primùm duæ pyramides eiuſdē altitudinis A B C D E F, G H I K, quarū illius baſis ſit polygona, nempe pentagona, huius verò triangularis. Dico eſſe pyramidem ad pyramidē, vt eſt baſis ad baſin. Reſoluto enim pentagono in triangula, erit & pyramis in pyramides numero æquales diuiſa.* [a] *Quoniam verò eſt, vt baſis A B C, prima quantitas, ad baſin G H I ſecundam quantitatem, ita pyramis A B C F, tertia quantitas, ad pyramidem G H I K, quartam quantitatem; & eodem modo, vt baſis A C D, quinta quantitas, ad baſin G H I, ſecundam quantitatem, ita pyramis A C D F, ſexta quantitas, ad pyramidem G H I K, quartam quantitatem:* [b] *Erit vt baſis A B C D, prima quantitas cum quinta, ad baſin G H I, ſecundam quantitatem, ita pyramis A B C D F, tertia quantitas cum ſexta, ad pyramidē G H I K, quartam quantitatē. Rurſus quia eſt vt baſis A B C D, prima quantitas, ad baſin G H I, ſecundā quantitatem, ita pyramis A B C D F, tertia quantitas, ad pyramidem G H I K, quartam quantitatem, vt modò eſt oſtenſum:* [c] *& vt baſis A D E, quinta quantitas, ad baſin G H I, ſecundam quantitatem, ita pyramis A D E F ſexta quantitas ad pyramidem G H I K, quartam quantitatem* [d] *Erit etiam baſis A B C D E prima quantitas cum quinta, ad baſin G H I, ſecundam quātitatem, ita pyramis A B C D E F, tertia quātitas cum ſexta, ad pyramidem G H I K, quartam quantitatem. Quod eſt propoſitum. Eodem modo ſemper procedendum eſt. ſi plura fuerint triangula in baſi polygona. Cùm autem vt demonſtratum eſt, ſit vt baſis polygona A B C D E, ad baſin triangularem G H I, ita pyramis A B C D E F, ad pyramidem G H I K; Erit quoque conuertendo, vt baſis G H I, ad baſin A B C D E, ita pyramis G H I K, ad pyramidem A B C D E F. Quamobrem duæ pyramides quælibet, quarum vnius baſis eſt polygona, alterius triangularis, ſuis baſibus ſunt proportionales, vndecunque incipias. Quamuis enim demonſtratio incipiat à polygono, eius q3 pyramide, vt ex demonſtratione conſtat, tamen conuertendo licebit initium quoq3 ſumere à triangulo, eius q3 pyramide, vt dictum eſt.*

*SED iam ſint duæ pyramides eiuſdem altitudinis A B C D E F, G H I K L, quarum baſes ſint polygona, ſintq3 plura latera in vna baſe, quam in altera. Dico rurſus eſſe pyramidem ad pyramidem, vt eſt baſis ad baſin. Reſoluto enim polygono A B C D E, in triangula A B C, A C D, A D E, erit pyramis eius in totidem diuiſa pyramides. Quia verò, vt iam oſtenſum eſt demonſtratum, eſt vt baſis A B G, triangularis prima quantitas, ad baſin G H I K, polygonam, ſecundam quantitatem ita pyramis A B C F, tertia quantitas ad pyramidem G H I K L, quartam quantitatem; & vt baſis A C D, quinta quantitas, ad baſin G H I K, ſecundam quantitatem, ita pyramis A C D F, ſexta quantitas, ad pyramidem G H I K L, quartam quantitatem* [e] *Erit etiam vt baſis A B C D, prima quantitas cum quinta, ad baſin G H I K ſecundam quantitatem, ita pyramis A B C D F, tertia quantitas cum ſexta, ad pyramidem G H I K L, quartam quantitatem Rurſus quia eſt, vt baſis A B C D, prima quantitas, ad baſin G H I K ſecundam quantitatem, ita pyramis A B C D F, tertia quantitas, ad pyramidem G H I K L, quartam quantitatem, vt proximè demonſtratum eſt; Et eſt quoq3, vt baſis A D E, quinta quantitas, ad baſin G H I K, ſecundam quantitatem, ita pyramis A D E F, ſexta quantitas, ad pyramidem G H I K L, quartam quantitatem, vt antè eſt oſtenſum;* [f] *Erit etiam vt baſis A B C D E, prima quantitas cum quinta, ad baſin G H I K, ſecundam quantitatem, ita pyramis A B C D E F, tertia quantitas cum ſexta, ad pyramidem G H I K L, quartam quantitatem. Quod eſt propoſitum. Non aliter procedendum erit, ſi plura triangula fuerint in baſi A B C D E.*

a 5. duode.

b 24. quin.

e 5. duode.

d 24 quin.

e 24 quin.

f 24. quin.

*HANC autem propositionem 6. & ea, quæ in hoc scholio demonstrata sunt, conuertemus hoc modo.*

PYRAMIDES quarumlibet basium, quæ inter se sunt, vt bases; eandem habēt altitudinem.

*QVOD non secus ostendemus, ac ea, quæ in scholio propos. 5. huius lib. diximus, ostensa sunt.*

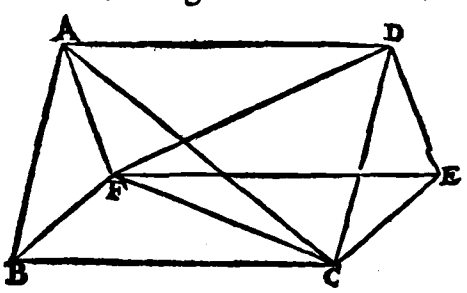
## COROLLARIVM.

*PERSPICVVM quoq; inde efficitur, pyramides eiusdem altitudinis super æquales bases multangulas, vel eandem constitutas, esse inter se æquales; cùm eandem habeant proportionem cum basibus, quæ æquales ponuntur, vel certè vna & eadem.*

*RVRSVS contrà fit, pyramides multangulas æquales, & super æquales bases, vel super eandem constructas, eandem habere altitudinem. Et pyramides multangulas æquales, eandemq; habentes altitudinem, æquales habere bases, si non habuerint eandem. Hæc autem duo demonstrabuntur, vt in coroll. propos. 5. huius lib. diximus.*

## THEOR. 7. PROPOS. 7. 6.

OMNE prisma triangularem habens basim, diuiditur in tres pyramides æquales inter se, triangulares bases habentes.

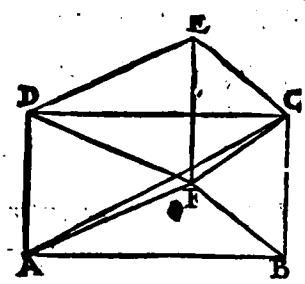



SIT prisma A B C D E F, cuius duo triágula opposita, æqualia, ac similia A B F, D C E. Dico ipsum prisma secari in tres pyramides triangulares inter se æquales. Ducantur enim in tribus parallelogrammis tres diametri, nempe A C, in A B C D; C F, in B C E F; F D, in A D E F. [a] Quoniam igitur triangula A B C, A D C, æqualia sunt; [b] estq; vt basis A B C, ad basin A D C, ita pyramis A B C F, ad pyramidem A D C F, cùm hæ pyramides eandē habeant altitudinem, nempe perpendicularem ex F, vertice ad planum A B C D, demissam; Erunt & pyramides A B C F, A D C F, inter se æquales. Eadem ratione æquales erunt pyramides A D F C, E F D C, super æquales bases A D F, E F D, constitutæ, & sub eadem altitudine, nempe perpendiculari à vertice C, ad planum A D E F, demissa. Est autē pyramis A D C F, eadem pyramidi A D F C, cùm illa contineatur quatuor planis, nempe basi A D C, & triangulis A D F, A C F, D C F; hæc verò eisdem quatuor planis, nimirum basi A D F, & triangulis A D C, A C F, D C F. Igitur tres pyramides A B C F, A D C F, E F D C, seu C D E F, (quæ eadem est pyramidi E F D C, cùm tam E F D C, quàm C D E F, contineatur planis C D E, E F D, D C F, F C E, totum prisma componentes, vt perspicuum est) æquales sunt inter se; Ac propterea prisma A B C D E F; in tres pyramides æquales est diuisum. Quocirca omne prisma triangularem habens basin, &c. Quod erat demonstrandum.

[a] 34. primi.
[b] 5. duodec.

## COROLLARIVM I.

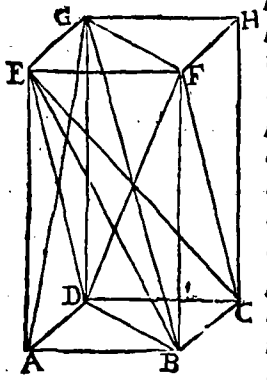
*HINC colligitur, quamlibet pyramidem esse tertiam partem prismatis, quod eandē cum illa habet & basim, & altitudinem: Siue prisma quodlibet triplum esse pyramidis, quæ eandem cum ipso habet & basin, & altitudinem.*




*SIT enim primùm pyramis A B F C, triangularem habens basin A B F; & prisma A B C D E F: sub eadem altitudine eandem habens basin triangularem A B F. Dico pyramidem esse tertiā partem prismatis. Nam si ducatur recta D F, erit prisma diuisum in tres pyramides æquales A B C F, A D C F, C D E F; [a] vt demonstratum est; Ac propterea pyramis A B C F, hoc est, pyramis A B F C, (cùm hæc illi sit æqualis, immo eadem, quòd eisdem planis comprehendatur A B F, F C A, A B C, C B F,) tertia pars erit prismatis A B C D E F. Cùm igitur pyramis A B F C, æqualis sit cuicunq; alteri pyramidi sub eadem altitudine, & super eandem basin A B F, cōstitutæ, ex coroll. propos. 5. huius lib. manifestum est, quamlibet pyramidem esse tertiam partem prismatis, quod eandem cum illa habet basin triangularem, & altitudinem; ac propterea prisma è contrario esse pyramidis triplum,*

[a] 7. duode.

*SIT deinde pyramis A B C D E, cuius basis rectilineum quodcunq; A B C D, quotlibet laterum; & prisma A B C D E F G H, sub eadem altitudine eandem habens basim. Dico rursus pyramidem esse prismatis partem tertiam. Resoluta enim basi A B C D, & plano opposito E F G H, in triangula numero æqualia A D B, B C D; E H F, F G H; erit prisma in totidem prismata bases habentia triangulares diuisum. Ductis ergo rectis A H, B H, D F, C F; erit, vt demonstratū est, pyramis A D B H, tertia pars prismatis A B P E H D; Itē pyramis B C D F, tertia pars prismatis C D H G F B. Quare erit, vt pyramis A D B H, ad prisma A B F E H D, ita pyramis B C D F, ad*




a 12.quinti

*prisma CDHGFB;* [a] *Ac propterea vt vna pyramis ad suum prisma, ita omnes pyramides ad omnia prismata, hoc est, ad prisma ABCDEFGH. Igitur pyramides ADBH, BCDF, simul tertiam partem constituent prismatis ABCDEFGH. Sunt autem pyramides ADBH, BCDF, æquales pyramidi ABCDE; propterea quòd pyramides ADBH, ADBE, super eandem basin, & sub eadem altitudine, nimirum inter plana parallela, sunt æquales, ex coroll. propos. 5. huius lib. Eademq; ratione æquales sunt pyramides BCDF, BCDE, super eandem basim, & sub eadem altitudine. Quapropter cùm pyramides ADBE, BCDE, componãt totam pyramidem ABCDE; erit & pyramis ABCDE, tertia pars prismatis ABCDEFGH. Cùm igitur pyramis ABCDE, æqualis sit cuicunque alteri pyramidi sub eadem altitudine, & super eandem basim ABCD, constitutæ, per corollarium propos. 5. huius lib. perspicuum est, quamlibet pyramidem esse tertiam partem prismatis, quod eandem cum illa habet basim multilateram, eandemq; altitudinem.*

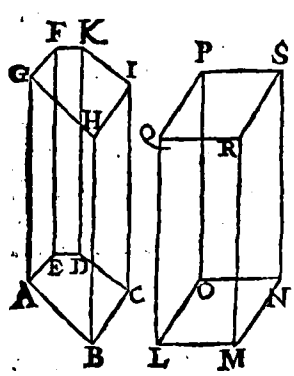
*QVOD si basis pyramidis, ac prismatis plura habeat latera, eodem modo ostendetur, pyramidem esse prismatis partem tertiam. Nam diuisis polygonis in triangula, sectum erit prisma in totidem prismata basis habentia triangulares. Vnde singulæ pyramides triangulares horum prismatum erunt tertiæ partes singulorum prismatum. Cùm igitur omnes hæ pyramides æquales sint pyramidi basim habenti polygonum prismatis propositi, constat propositum.*

*EODEM modo pyramis tertia pars est prismatis habentis basem basi, & altitudinem altitudini pyramidis æqualem. Nam eiusmodi pyramis æqualis est pyramidi illi, quæ eandem cum prismate habet & basem, & altitudinem, per coroll. propos. 6. huius lib. Quam quidem iam ostendimus tertiam esse prismatis partem.*

## SCHOLIVM I.

*Ex dictis facilè demonstrabimus hanc propositionem, videlicet.*

SVB eadem altitudine existentia prismata, quascumque habeant bases, inter se sunt, vt bases.




*QVAMVIS enim hoc demonstratum sit in lib. 11. de prismatis, quorum duo plana opposita, parallela, & æqualia, sunt triangula, licet eorum bases sint parallelogramma, vertices verò lineæ rectæ; necnon de parallelepipedis, quæ nomine prismatum contineri diximus: Nunc tamen idipsum demonstrabimus vniuersè de omnibus prismatis, quorum duo plana aduersa, siue bases, sunt polygona, quamuis plura latera, seu anguli in vnius basi reperiantur, quàm in basi alterius. Sint igitur duo prismata eiusdem altitudinis ABCDEFGHIK, LMNOPQRS, quorum bases sint figuræ multilatera. Dico vt est basis ABCDE, ad basim LMNO, ita esse prisma ad prisma. Si enim ex omnibus angulis vtriusque basis ad vnum punctum superioris plani, quod basi opponitur, lineæ rectæ ducantur, consurgent duæ pyramides sub eadem altitudine cum prismatis habentes easdem bases: Ac proinde per coroll. prædictum huius propos. qualibet pyramis tertia pars erit sui prismatis.* [b] *Quam ob rem erit, vt pyramis ad pyramidem, ita prisma ad prisma: Sed pyramis ad pyramidem est, vt basis ad basin, vt ostensum est propos. 6. eiusq; scholio. Igitur erit quoque vt basis ad basin, ita prisma ad prisma. Quod est propositum.*

b 15.quinti

CONVERSO modo, *si prismata quarumcunque basium inter se sint, vt bases, ipsa erunt sub eadem altitudine. Quod quidem eodem modo ostendemus, quo scholium propos. 5. demonstratum est.*

## COROLLARIVM II.

*VNDE prismata eiusdem altitudinis super eandem, vel æquales bases quascunque, inter se sunt æqualia. Quia nimirum eandem habent proportionem, quam bases, quæ æquales ponuntur, vel certè vna & eadem.*

*ECONTRARIO, Prismata æqualia super æquales bases, vel eandem, in eadem sunt altitudine. Et prismata æqualia eiusdem altitudinis, bases habent æquales, si non habuerint eandem. Quod quidem non aliter ostendes, ac conuersum propos. 31. lib. 11. fuit demonstratum.*

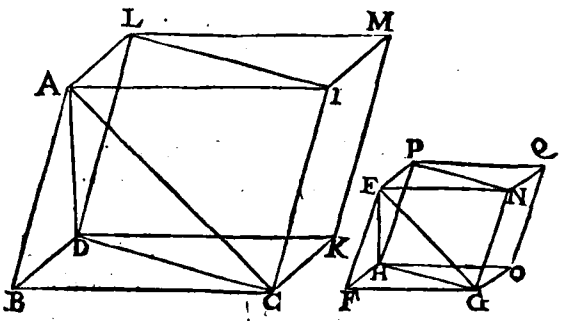
## SCHOLIVM II.

*CÆTERVM tam ea, quæ in priori corollario, quàm illa, quæ in scholio proximo demonstrata sunt, intelliguntur tantummodò de prismatis, quæ in vertice habẽt plana basi parallela, æqualia, & similia. Quod dixerim,*

*dixerim. ne hallucineris in prismate constante duobus triangulis parallelis, æqualibus, & similibus, & tribus parallelogrammis, quod videlicet Campanus cum alijs putat tantummodò prisma dici ab Euclide, vt in definitione prismatis diximus. Nam si in huiusmodi prismate intelligatur quidem basis vnum illorum triangulorum, erit necessariò pyramis eiusdem altitudinis, eandemq; habens basim, tertia pars ipsius prismatis, vt in coroll. 1. demonstratum est. Item ipsum prisma ad quodlibet aliud prisma proportionem habebit, quam basis ad basin, vt in scholio ostendimus. At verò si in prismate tali basis concipiatur vnum parallelogrammorum, ita vt in vertice sit linea recta, nõ erit pyramis eandem habens basim, eandemq; altitudinem, tertia eius pars, sed duæ tertiæ partes; hoc est, prisma ad pyramidem proportionem habebit sesquialteram, quam videlicet habent 3. ad 2. Si enim huic prismati addatur aliud æquale & simile, vt parallelepipedum efficiatur, erit pyramis tertia pars constituti parallelepipedi, ex corollario prædicto, cùm parallelepipedum sit prisma eandem & altitudinem, & basin habens cum pyramide. Quare si pyramis ponatur 2. erit parallelepipedum 6. Ablato ergo dimidio, erit reliquum prisma propositum 3. Ac propterea ad pyramidem proportionem habebit, quam 3. ad 2. nimirũ sesquialteram. Ex quo efficitur, pyramidem super dimidium parallelogrammum constitutam, quæ eandem cum tali prismate habeat altitudinẽ, cùm sit dimidium prioris pyramidis, esse tertiam partem prismatis. Quæ cùm ita sint, non habebit tale prisma ità constitutum ad aliud prisma eiusdem altitudinis, eandem proportionem, quam basis ad basin, nisi hoc aliud prisma in vertice lineam rectam habeat quoq;, & basin parallelogrammum. Itaque ea, quæ ostendimus in scholio, intelligenda sunt de prismatis eiusdem altitudinis, quorum vertices vel linea recta sunt, & bases parallelogramma, vel certè, quæ in verticibus plana habeant basibus parallela, æqualia atq; similia. Hac enim ratione, si vertices prismatum fuerint linea recta, erunt pyramides in eisdem basibus, eiusdemq; altitudinis, duæ tertiæ partes prismatũ, vt modò demonstrauimus. Quare eandem habebunt rationem, quam prismata, &c.*

## THEOR. 8. PROPOS. 8.

SIMILES pyramides, quæ triangulares habent bases, in triplicata sunt homologorum laterum ratione.




SINT pyramides similes triangulares A B C D, E F G H, ita vt bases A B C, E F G, sint similes, & reliqua triangula vnius similia reliquis triangulis alterius. Dico proportionem pyramidum esse triplicatam proportionis, quam habent latera homologa, nempe B C, F G. Extendantur enim plana triangulorum A B C, C B D, D A B, perficianturque parallelogramma B I, B K, B L. Deinde ducantur L M, I M, rectis A I, A L, parallelæ, conuenientes in M, connectatúrque recta K M. Erit igitur completum parallelepipedum B M, eiusdem cum pyramide altitudinis, cùm plana solidi B M, sint parallela, vt facilè colligitur ex propos. 15. lib. 11. Rursus eodẽ modo perficiatur parallelepipedum F Q. Quoniam igitur ob similitudinẽ pyramidum, anguli plani A B C, E F G, sunt æquales, estque vt A B, ad B C, ita E F, ad F G; erunt parallelogramma B I, F N, similia. Eodem modo cùm anguli A B D, E F H, sint æquales, sitque vt A B, ad B D, ita E F, ad F H; Item anguli D B C, H F G, æquales, & vt D B, ad B C, ita H F, ad F G; erunt & parallelogramma B L, B K, parallelogrammis F P, F O, similia. [a] Sed tam tria B I, B K, B L, parallelepipedi B M, reliquis tribus oppositis D M, A M, C M; quàm tria F N, F O, F P, parallelepipedi F Q, reliquis oppositis tribus H Q, E Q, G Q, [b] sunt æqualia, & similia. Igitur sex plana circumscribentia solidum B M, similia sunt sex planis solidum F Q, ambientibus; Ac propterea ex defin. 9. lib. 11. similia sunt parallelepipeda B M, F Q. Quoniam verò ductis rectis L I, P N, [c] prismata D B C I L A, H F G N P E, habent eandem proportionem, quam parallelepipeda B M, F Q, eorum dupla; & pyramides A B C D, E F G H, eandem quam prismata dicta, earum tripla; [d] habebunt quoque pyramides eandem proportionem, quam parallelepipeda. [e] Cùm igitur proportio parallelepipedi B M, ad parallelepipedum F Q, sit triplicata proportionis homologorum laterum B C, F G; erit quoque proportio pyramidis A B C D, ad pyramidem E F G H, proportionis B C, ad F G, triplicata. Similes itaque pyramides, quæ triangulares habent bases, &c. Quod erat demonstrandum.

[a] 24. vndec.
[b] 24. vndec.
[c] 15. quinti.
[d] 11. quinti.
[e] 33. vndec.

### COROLLARIVM.

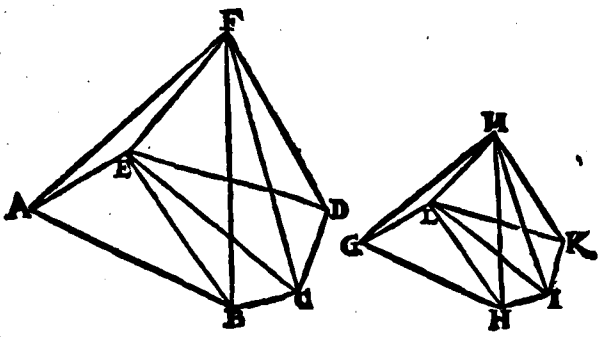
*Ex hoc quoque est manifestum, similes pyramides, quarum bases plura latera, quàm tria, continent, habere proportionem homologorum laterum triplicatam.*

*SINT pyramides similes, quarum bases rectilinea similia plurium laterum A B C D E, G H I K L. Dico proportionem pyramidum esse triplicatam proportionis, quam habent latera homologa A B, G H. Nam si ex angulis E, L, ducantur ad angulos oppositos rectæ E B, E C; L H, L I, [a] diuisa erunt bases similes in trian-*

[a] 20. sexti.

*gula numero æqualia, & similia; nimirum triangula ABE, EBC, CDE, similia erunt triangulis GHL, LHI, IKL. Quoniam ergo ob pyramidum similitudinem, triangula AEF, GLM, similia sunt, & angulus FEA, angulo MLG, æqualis; erit vt FE, ad EA, ita ML, ad LG. Vt autem EA, ad EB, ita LG, ad LH, propter similitudinem triangulorum AEB, GLH. Igitur ex æquo erit, vt FE, ad EB, ita ML, ad LH. Rursus quia est, vt EB, ad BA, ita LH, ad HG, ob triangula similia ABE, GHL; Et vt BA, ad BF, ita HG, ad HM, cùm ob pyramidum similitudinem similia sint triangula ABF, GHM: Erit quoque ex æquo, vt EB, ad BF, ita LH, ad HM; Ac propterea cùm sit, vt FE, ad EB, ita ML, ad LH; & vt EB, ad BF, ita LH, ad HM; erit etiam ex æquo, vt FE, ad FB, ita ML, ad MH.* [a] *Quare æquiangula, atque adeò & similia sunt triangula FEB, MLH. Sunt autē & triangula FEA, FAB, ABE, triangulis MLG, MGH, GHL, similia. Igitur pyramides ABEF, GHLM, ex definitione 9. libri 11. similes sunt. Eadem ratione similes erunt pyramides EBCF, LHIM; Item CDEF, IKLM.* [b] *Quapropter, vt demonstratum est, pyramides ABEF, EBCF, CDEF, ad pyramides GHLM, LHIM, IKLM, singula ad singulas, triplicatam proportionem habebunt laterum homologorum AB, BC, CD, ad GH, HI, IK, singulorum ad singula. Cùm igitur AB, BC, CD, ad GH, HI, IK, habeant vnam & eandem proportionem, ob similitudinem basium ABCDE, GHIKL; habebunt quoque pyramides ABEF, EBCF, CDEF, ad pyramides GHLM, LHIM, IKLM, vnam eandemq; proportionem, triplicatam scilicet illius;* [c] *Atque idcirco erit, vt vna pyramis ABEF, ad vnam pyramidem GHLM, ita omnes pyramides, nempe pyramis ABCDEF, ad omnes pyramides, nimirum ad pyramidem GHIKLM. Quam ob rem,* [d] *cùm pyramis ABEF, ad pyramidem GHLM, habeat triplicatam proportionem homologorum laterum AB, GH; habebit quoque pyramis ABCDEF, ad pyramidem GHIKLM, triplicatam proportionem eorundem laterum homologorum AB, GH. Quod est propositum.*

a 5. sexti.




b 8. duodecimi.

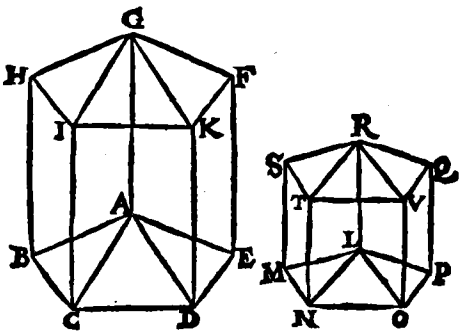
c 12. quinti.

d 8. duodecimi.

## SCHOLIVM.

*EADEM ratione prismata similia habebunt triplicatam proportionem homologorum laterum. Sint enim duo prismata similia ABCDEFGHIK, LMNOPQRSTV. Dico eorum proportionem, esse triplicatam proportionis homologorum laterum. Nam si ex angulis A, & L, ducantur rectæ AC, AD; LN, LO,* [e] *erunt, vt de pyramidibus dictum est, triangula ABC, CAD, DEA, triangulis LMN, NLO, OPL, similia. Similiter, si ex angulis G, & R, ducantur rectæ GI, GK; RT, RV, erunt triangula GHI, IGK, KFG, & triangulis RST, TRV, VQR, & triangulis antè dictis, similia, cùm omnia plana prismatum opposita similia existant, per definitionem prismatis. Quoniam verò ob similitudinem prismatum, parallelogramma CH, NS, similia sunt; erit vt IC, ad CB, ita TN, ad NM: Vt autem CB, ad CA, ita quoque est NM, ad NL, ob similitudinem triangulorum BCA, MNL. Igitur ex æquo erit, vt IC, ad CA, ita TN, ad NL. Rursus quoniam angulus solidus N, æqualis est solido angulo C, ob similitudinem prismatum; si ille huic superponatur, omnia inter se conuenient, nimirum angulus MNO, angulo BCD, & angulus TNM, angulo ICB, & angulus TNO, angulo ICD: Conuenit autem & recta NL, rectæ CA, eò quòd anguli MNL, BCA, sunt æquales. Igitur anguli ICA, TNL, æquales sunt; Ac propterea cùm latera circa ipsos ostensa sint esse proportionalia, erunt parallelogramma CG, NR, similia. Atqui & parallelogramma CH, HA, parallelogrammis NS, SL; & triangula ABC, GHI, triangulis LMN, RST, similia sunt. Igitur prismata ABCIGH, LMNTRS, similia sunt, ex definitione solidorum similium. Non aliter ostendentur esse similia prismata CDAGIK, NOLRTV; nec non prismata AEDKGF, LPOVRQ. Quapropter prismata ABCIGH, CDAGIK, AEDKGF, ad prismata LMNTRS, NOLRTV, LPOVRQ, per ea, quæ demonstrauimus ad propositionem 34. libri 11. triplicatam habent proportionem, singula ad singula, laterum homologorū BC, CD, DE, ad MN, NO, OP, singulorum ad singula. Ac propterea eodem modo demonstrabimus, prismata ABCDEFGHIK, LMNOPQRSTV, proportionē habere homologorum laterum BC, MN, triplicatam, quo paulò antè vsi sumus ad idem demonstrandum in pyramidibus multangulis.*

e 20. sexti.



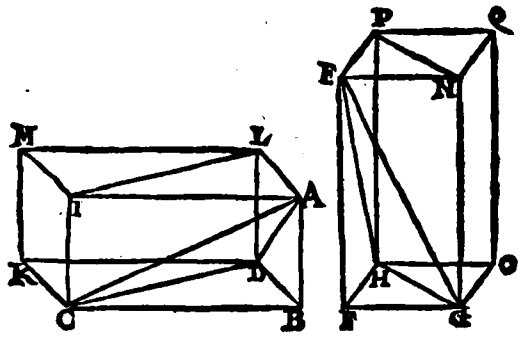

*EX quibus omnibus colligitur, pyramides multangulas similes diuidi in pyramides triangulares similes, & numero*

*numero æquales, & homologas totis. Hoc enim manifestum est ex demonstratione præcedentis corollarij.*

*Eodem modo infertur, prismata multangula similia diuidi in prismata similia triangulares bases habentia, & numero æqualia, & homologa totis. Vt apparet ex huius scholij demonstratione.*

## THEOR. 9. PROPOS. 9. 7.

**Aequalium pyramidum, & triangulares bases habentium, reciprocantur bases & altitudines. Et quarum pyramidum triangulares bases habentium recipro cantur bases & altitudines; illæ sunt æquales.**




Sint æquales pyramides triangulares A B C D, E F G H. Dico earum bases A B C, E F G, & altitudines esse reciprocas, hoc est, esse vt A B C, ad E F G, ita altitudinem pyramidis E F G H, ad altitudinem pyramidis A B C D. Si enim perficiantur, vt in præcedenti propositione dictum est, parallelepipeda B M, F Q; eorundem altitudinũ cum pyramidibus, connectanturque rectæ L I, P N; erunt prismata D B C I L A, H F G N P E, cùm sint tripla pyramidum, quæ æquales pòruntur, inter se æqualia; Ac proinde parallelepipeda B M, F Q, cùm sint prismatum dupla, æqualia quoq; erunt. [a] Quare bases eorum & altitudines reciprocabũtur, hoc est, erit vt basis B I, ad basin F N, ita altitudo solidi F Q, ad altitudinẽ solidi B M: [b] Vt autem basis B I, ad basim F N, ita est triangulum A B C, ad triangulum E F G. Igitur erit quoque vt basis A B C, ad basin E F G, ita altitudo pyramidis E F G H, ad altitudinem pyramidis A B C D, cùm altitudines pyramidum eædem sint, quæ parallelepipedorum; Ac propterea bases, & altitudines pyramidum æqualium reciprocantur.

[a] 34. vndec.

[b] 15. quinti.

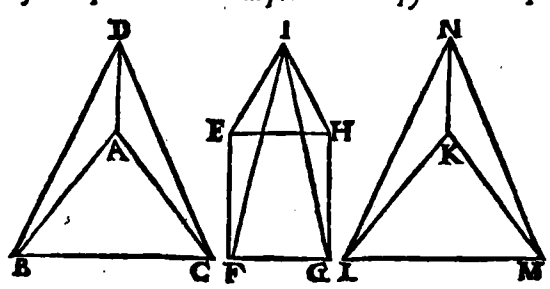
Sint iam bases & altitudines reciprocæ. Dico pyramides esse æquales. Constructa enim figura, vt prius; [c] cùm sit vt A B C, ad E F G, ita parallelogrammũ B I, ad parallelogrammũ F N; sintq; eædem altitudines parallelepipedorum, & pyramidum; erunt quoque bases parallelepipedorum & altitudines eorundem reciprocæ; [d] Ac propterea inter se æqualia erunt parallelepipeda B M, F Q. Quare & prismata D B C I L A, H F G N P E, eorum dimidia, æqualia erunt: Atq; propterea pyramides quoque, prismatũ tertiæ partes, æquales erunt. Æqualium igitur pyramidum, & triangulares bases habentium, &c. Quod erat demonstrandum.

[c] 15. quinti.

[d] 34. vndec.

### *SCHOLIVM.*

*Eadem ratione Aequalium pyramidum, quarum bases non sint triangulares, reciprocantur bases atq; altitudines. Et quarum pyramidum triangulares bases non habentium reciprocantur bases & altitudines, illæ sunt æquales. Sint enim primùm duæ pyramides æquales, quarum quidem A B C D, basin habeat triangularem; at verò E F G H I, non triangularem. Fiat basi non triangulari E F G H, æquale triangulum K L M. Quod quidem fiet, si basis multilatera reuocetur ad parallelogrammum, per propos. 45. lib. 1. Nam hoc parallelogrammum facilè ad triangulum reducetur, per ea, quæ demonstrauimus ad propos. 42. lib. 1. Deinde super K L M, fiat pyramis K L M N, eiusdem altitudinis cum pyramide E F G H I. Quoniã ergo pyramides E F G H I, K L M N, æquales habent bases, & eandem altitudinem; ipsæ erunt æquales, per ea, quæ in scholio propos. 6. huius libri ostendimus: Ponitur autẽ pyramis E F G H I, æqualis pyramidi A B C D. Igitur & pyramis K L M N, pyramidi A B C D, æqualis erit. Quamobrem, cùm habeant pyramides A B C D, K L M N, bases triangulares; [a] erit vt basis A B C, ad basin K L M, hoc est, ad huic æqualem basin E F G H, ita altitudo pyramidis K L M N, hoc est, altitudo pyramidis E F G H, (ponuntur enim hæ altitudines æquales) ad altitudinem pyramidis A B C D. Ac proinde pyramidum A B C D, E F G H I, æqualium bases & altitudines reciprocantur.*

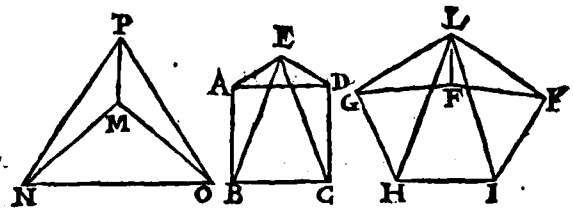



[a] 29. duodecimi.

*Sed reciprocentur iam harum pyramidum bases atq; altitudines. Dico ipsas esse æquales. Constructa enim figura eodem modo; cũ basis K L M, æqualis sit basi E F G H, & altitudo pyramidis K L M N, eadem, quæ pyramidis E F G H I; ponatur autem esse vt A B C, ad E F G H, ita altitudo pyramidis E F G H I, ad pyramidis A B C D, altitudinem; erit quoq; vt basis A B C, ad basim K L M, ita altitudo pyramidis K L M N, ad altitudinem pyramidis A B C D. [b] Quamobrem æquales sunt pyramides A B C D, K L M N. Cùm ergo pyramis K L M N, æqualis sit pyramidi E F G H I, per ea, quæ ostensa sunt in scholio propos. 6. huius lib. Erit & pyramis A B C D, pyramidi E F G H I, æqualis. Quod est propositum.*

[b] 9. duodecimi.

*Sint deinde pyramides æquales A B C D E, F G H I K L, quarũ bases sint multangula. Fiat rursus trian-*




*gulum MNO, æquale baſi ABCD, & pyramis MNOP, eiuſdem altitudinis cum pyramide ABCDE: Eritq; ex ſcholio propoſ. 6. huius libri, pyramis MNOP, æqualis pyramidi ABCDE: Sed hæc æqualis ponitur pyramidi FGHIKL. Igitur & pyramis MNOP, æqualis eſt pyramidi FGHIKL. Quare, vt nunc demonſtrauimus, erit vt baſis MNO, hoc eſt, baſis ABCD, ſibi æqualis, ad baſim FGHIK, ita altitudo pyramidis FGHIKL, ad altitudinẽ pyramidis MNOP, hoc eſt, ad altitudinem pyramidis ABCDE; (ponuntur enim hæ altitudines æquales.) Ac propterea pyramidum æqualium ABCDE, FGHIKL, baſes & altitudines reciprocantur.*

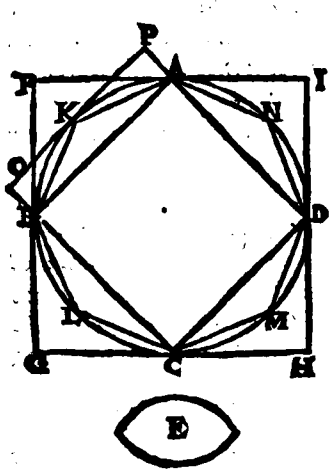
*SED reciprocentur iam baſes harum pyramidum atque altitudines. Dico ipſas eſſe æquales. Conſtituta enim eodem modo figura, cùm baſis MNO; æqualis ſit baſi ABCD, & altitudo pyramidis MNOP, eadem quæ pyramidis ABCDE: ponatur autem vt ABCD, ad FGHIK, ita altitudo pyramidis FGHIKL, ad altitudinem pyramidis ABCDE; Erit quoque vt MNO, ad FGHIK, ita altitudo pyramidis FGHIKL, ad altitudine pyramidis MNOP. Quare, vt antè oſtendimus, æquales erũt pyramides MNOP, FGHIKL: Eſt autem pyramis MNOP, pyramidi ABCDE, æqualis, ex ſcholio propoſ. 6. huius libri. Igitur & pyramis ABCDE, pyramidi FGHIKL, æqualis erit. Quod eſt propoſitum.* 4

*OMNIA hæc facilè quoq; demonſtrabuntur conuenire priſmatis quibuſcunque. Nam ſi priſmata fuerint æqualia, erunt & eorum pyramides earundem altitudinum cum ipſis, & ſuper eaſdem baſes, æquales; cùm ſint eorum tertiæ partes, ex coroll. propoſ. 7. huius libri. Vel certè duæ tertiæ, ſi nimirum priſmatum baſes fuerint parallelogramma, & eorum vertices, lineæ rectæ, vt in ſcholio eiuſdem propoſitionis oſtenſum eſt: Quare, vt modò demonſtrauimus, baſes harum pyramidum, atq; altitudines reciprocantur. Cùm ergo hæ baſes & altitudines eædem ſint, quæ priſmatum; reciprocabuntur quoque baſes priſmatum atque altitudines.*

*RVRSVS, ſi priſmatum baſes, & altitudines reciprocentur, reciprocabuntur quoque baſes, & altitudines pyramidum, eaſdem baſes & altitudines cum priſmatis habẽtium. Quare, vt demonſtratum eſt, pyramides æquales ſunt; Ac propterea priſmata, cùm earum ſint triplæ, vel certè ſeſquialteræ, æqualia quoque ſunt. Quod eſt propoſitum.*

## 9. THEOR. 10. PROPOS. 10.

OMNIS conus tertia pars eſt cylindri eandem cum ipſo baſin habentis, & altitudinem æqualem.




HABEANT conus & cylindrus baſin eandẽ circulum ABCD, & altitudinem eandem. Dico conum cylindri eſſe tertiam partem. Si enim conus non credatur eſſe tertia pars cylindri, non erit cylindrus coni triplus, ſed vel maior, vel minor triplo coni. Sit primùm maior quàm triplus coni, magnitudine E, ita vt cylindrus ſit æqualis triplo coni, & magnitudini E, ſimul. Inſcribatur in circulo quadratũ ABCD, & circa eundẽ, quadratũ FGHI; intelligãturq; ſuper hæc quadrata ſub altitudine coni, & cylindri, erecta duo parallelepipeda. Quoniã igitur quadratũ ABCD, dimidiũ eſt quadrati FGHI, vt ad propoſ. 9. lib. 4. oſtendimus; eſtq; vt baſis ad baſin, ita parallelepipedũ ad parallelepipedũ eiuſdem altitudinis; Erit & parallelepipedum baſis ABCD, dimidium parallelepipedi baſis FGHI. Ac proinde parallelepipedũ baſis ABCD, maius erit, q̃ dimidium cylindri, cuius baſis circulus ABCD. Secentur bifariam peripheriæ AB, BC, CD, DA, in punctis K, L, M, N, adiunganturq; rectæ KA, KB, LB, LC, MC, MD, ND, NA. Ducatur quoq; per K, recta OP, tangens circulum in K, quæ parallela erit ipſi AB, vt ad propoſ. 27. lib. 3. oſtendimus, occurratq; rectis DA, CB, productis in P, & O; & ſuper AKB, ABOP, intelligantur priſmata ſub altitudine coni & cylindri. Quia ergo triangulum AKB, dimidium eſt parallelogrammi ABOP; erit quoque priſma baſis AKB, dimidium priſmatis, ſeu parallelepipedi baſis ABOP: cùm ſit priſma ad priſma, vt baſis ad baſim, quemadmodum ad propoſ. 7. huius lib. demonſtrauimus; Ac propterea priſma baſis AKB, maius erit, quàm dimidium ſegmenti cylindri, cuius baſis figura contenta linea recta AB, & peripheria AKB. Eadem ratione erũt priſmata, quorũ baſes reliqua triangula BLC, CMD, DNA, & altitudo eadem, quæ coni & cylindri, maiora, quàm dimidia ſegmentorum cylindri, quorum baſes circuli ſegmenta. Omnia igitur hæc priſmata ſimul maiora ſunt, quàm dimidia omnium ſegmentorum cylindri ſimul. Quòd ſi rurſus peripheriæ AK, KB, &c. ſecentur bifariam, & adiungantur rectæ lineæ, conſtituentur eodem modo priſmata eiuſdem altitudinis cum cono & cylindro, quæ maiora erunt ſimul, quàm dimidia omnium ſegmentorum cylindri ſimul,

a 32. vndec.

b 41. primi.

simul, quorum bases circuli segmenta, & sic deinceps. Quoniam verò si à cylindro, cuius basis circulus A B C D, auferatur plus q̃ dimidium, nempe parallelepipedum basis A B C D; & à reliquis segmentis plus q̃ dimidium, nimirum prismata basium A K B, B L C, &c. atq; in hunc modũ semper fiat detractio; [a] relinquitur tandem minor magnitudo, q̃ E, excessus cylindri supra triplum coni: Sint iam segmenta cylindri relicta basium A K, K B, B L, &c. (quæ quidem bases sunt circuli segmenta,) simul sumpta, minora q̃ E. Cùm igitur cylindrus æqualis ponatur triplo coni & magnitudini E, simul; Si ex cylindro auferantur segmenta dicta, & ex triplo coni vnà cum magnitudine E, ipsa magnitudo E, quæ maior est dictis cylindri segmentis, erit reliquum prisma basis multangulæ A K B L C M D N, eandem habens altitudinem cum cono & cylindro, maius q̃ reliquum triplum coni; ideoq; conus minor erit, q̃ tertia pars prismatis. Quare cùm dicti prismatis sit tertia pars pyramis, cuius eadem cum ipso basis & altitudo, ex coroll. propos. 7. huius lib. Erit conus minor dicta pyramide, totum parte. Quod est absurdum. Non igitur maior est cylindrus triplo coni. [a] 1. decimi.

Sit deinde cylindrus minor triplo coni, ac proinde conus maior, q̃ tertia pars cylindri. Sit ergo conus maior q̃ tertia pars cylindri, magnitudine E; ita vt conus æqualis sit tertiæ parti cylindri, & magnitudini E, simul. Inscribatur rursus in circulo quadratũ A B C D, & circa eundẽ quadratum F G H I; intelliganturq; super hæc quadrata, pyramides sub altitudine coni & cylindri. Quoniam igitur quadratũ A B C D, dimidium est quadrati F G H I, vt ad propos. 9. lib. 4. demonstrauimus, [b] estque vt basis ad basin, ita pyramis ad pyramidem eiusdem altitudinis. Erit quoque pyramis super A B C D, dimidium pyramidis super basin F G H I; ac proinde pyramis super basin A B C D, maior erit dimidio coni, cuius basis circulus A B C D. Secẽtur peripheriæ A B, B C, C D, D A, bifariam in K, L, M, N, adiunganturq; rectæ A K, K B, B L, L C, C M, M D, D N, N A. Ducatur quoque per K, recta O P, tangens circulum in K, quæ parallela erit ipsi A B, vt ad propos. 27. lib. 3. demonstrauimus, occurratq; rectis D A, C B, productis in P, & O, & super A K B, A B O P, intelligantur pyramides sub altitudine coni & cylindri. [c] Quia ergo triangulum A K B, dimidium est parallelogrammi A B O P, erit quoq; pyramis super basin A K B, dimidium pyramidis super basin A B O P, [d] cùm pyramides habeãt proportionem eandem, quam bases; ac proinde pyramis super basin A K B, maior erit dimidio segmenti coni, cuius basis figura contenta linea recta A B, & peripheria A K B. Eadẽ ratione erunt pyramides, quarũ bases reliqua triangula B L C, C M D, D N A, & altitudo eadem cum cono & cylindro, maiores q̃ dimidia segmentorum coni, quorum bases circuli segmenta. Omnes igitur hæ pyramides simul maiores sunt, q̃ dimidia omnium segmẽtorum coni simul. Quòd si rursus peripheriæ A K, K B, B L, L C, C M, M D, D N, N A, secentur bifariam, & adiungantur rectæ lineæ in eodem circulo, constituentur eodem modo pyramides eiusdem altitudinis cum cono & cylindro, quæ maiores erunt simul, q̃ dimidia omnium segmentorum coni simul, quorum bases circuli segmẽta; & sic deinceps. Quoniam verò si à cono, cuius basis circulus A B C D, auferatur plus q̃ dimidium, nempe pyramis super basin A B C D, quam maiorem esse ostendimus, q̃ dimidium coni, cuius basis est circulus A B C D; & à reliquis segmẽtis plus q̃ dimidium, nimirum pyramides basium A K B, B L C, C M D, D N A; atq; in hunc modum semper fiat detractio; [e] relinquitur tandem minor magnitudo, q̃ E, excessus coni supra tertiam partem cylindri: Sint iam segmenta coni relicta basium A K, K B, B L, L C, C M, M D, D N, N A, (quæ quidem bases sunt circuli segmenta,) simul sumpta minora, q̃ E. Cùm igitur conus æqualis ponatur tertiæ parti cylindri, & magnitudini E, simul; si ex cono detrahantur segmẽta prædicta, & ex tertia parte cylindri, vnà cum magnitudine E, ipsa magnitudo E, quæ maior est, præfatis coni segmentis; erit reliqua pyramis, cuius basis polygonum A K B L C M D N, eandem habens altitudinem cum cono & cylindro, maior quàm tertia pars cylindri reliqua; ac proinde triplum dictæ pyramidis maius erit cylindro. Quocirca, cùm prisma eandem habens basim cum dicta pyramide, eandemque altitudinem cum cono & cylindro, triplum sit ipsius pyramidis, vt suprà in corollario propositionis septimæ huius libri à nobis est demonstratum, erit huiusmodi prisma maius cylindro, pars toto. Quod est absurdum. Non ergo cylindrus minor est triplo coni: Sed neque maior triplo est ostensus. Igitur æqualis est triplo coni, propterea q̃ conus tertia pars est cylindri. Omnis igitur conus tertia pars est cylindri, eandem cum ipso basim habentis, & altitudinẽ æqualem. Quod erat demonstrandum. [b] 6. duodec. [c] 41. primi. [d] 6. duodec. [e] 1. decimi.

## SCHOLIVM.

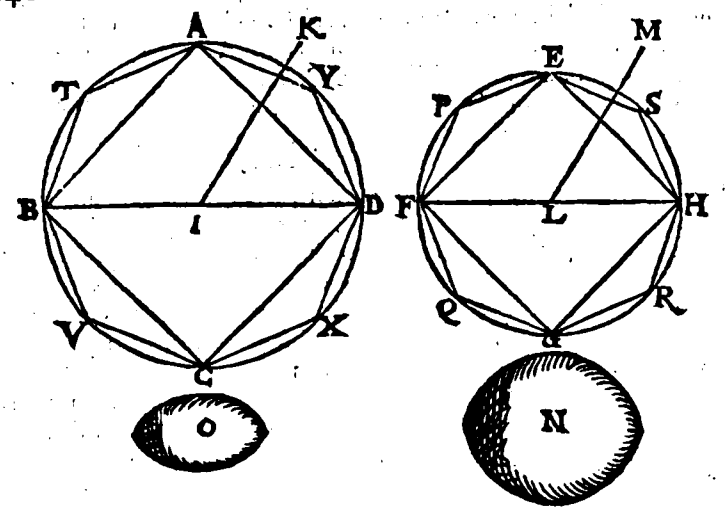
*Qvamvis propositio hæc solùm intelligatur de conis & cylindris rectis, cùm hos duntaxat Euclides definierit lib. 11. omnibus tamen conis & cylindris tam rectis, quàm scalenis conuenit, vt perspicuum est eius demonstrationem diligenter intuenti. Itaque propositio vniuersè ita proponi poterit.*

Omnis conus, siue rectus, siue scalenus, tertia pars est cuiuslibet cylindri, siue recti, siue scaleni, eandem cum ipso & basim, & altitudinem habentis, licèt non sit idem axis coni & cylindri.

## THEOR. 11. PROPOS. 11. 11.

Sub eadem altitudine existentes coni & cylindri, inter se sunt, vt bases.

Sint sub eadem altitudine coni & cylindri, quorũ bases circuli A B C D, E F G H, altitudines




verò æquales IK, LM. Dico vt eſt baſis ad baſim, ita eſſe conum ad conum, & cylindrum ad cylindrũ. Si enim hoc non credatur, ſit vt baſis ABCD, ad baſim EFGH, ita conus ABCDK, ad aliquam magnitudinem, nempe ad N, quæ vel maior erit, vel minor cono EFGHM. Si enim eſſet æqualis, [a] haberet conus ABCDK, ad conum EFGHM, & ad N, proportionem eandem: ac propterea eſſet conus ad conum, vt baſis ad baſim: quod non conceditur. Sit ergo primùm N, minor quàm conus EFGHM, magnitudine O, ita vt conus EFGHM, æqualis ſit magnitudinibus N, & O, ſimul. Inſcribatur in circulo EFGH, quadratum EFGH, diuidanturque peripheriæ EF, FG, GH, HE, bifariam in P, Q, R, S, & adiungantur rectæ EP, PF, FQ, &c. Quoniam igitur ſi ex cono EFGHM, detrahatur pyramis ſuper baſin EFGH, eiuſdẽ altitudinis, & à reliquis ſegmẽtis auferantur pyramides eiuſdem altitudinis baſium EPF, FQG, &c. atq; in hunc modũ ſemper fiat detractio, ſemper plus dimidio ſubtrahitur, vt in poſteriore parte præcedentis propoſitionis oſtenſum eſt: [b] relinquetur tandem minor magnitudo, quàm O, exceſſus coni EFGHM, ſuper N. Sint ergo iam ſegmenta coni relicta baſium EP, PF, FQ, &c. (quæ quidem baſes ſunt circuli ſegmenta) ſimul ſumpta, minora quàm O. Cùm igitur conus EFGHM, ponatur æqualis magnitudinibus N, & O, ſimul; ſi ex cono detrahantur dicta coni ſegmenta, & ex N, & O, ipſa magnitudo O, quæ prædicti coni ſegmentis maior eſt, erit reliqua pyramis, cuius baſis polygonum EPFQGRHS, eiuſdem altitudinis cũ cono, maior quàm N, reliqua magnitudo. Inſcribatur in circulo ABCD, polygonum ATBVCXDY, ſimile polygono EPFQGRHS, vt in propoſ. 2. huius lib. docuimus, ducanturque circulorum diametri BD, FH. Quoniam igitur, per coroll. propoſ. 2. huius libri, eſt vt circulus ABCD, ad circulum EFGH, ita polygonum ATBVCXDY, ad polygonum EPFQGRHS: Vt autem circulus ABCD, ad circulum EFGH, ita ponitur conus ABCDK, ad magnitudinem N, [c] & vt polygonum, ad polygonũ, ita eſt pyramis ad pyramidem eiuſdem altitudinis cum conis; Erit quoque vt pyramis ATBVCXDYK, ad pyramidem EPFQGRHSM, vt conus ABCDK, ad N. Cùm igitur pyramis ATBVCXDYK, minor ſit cono ABCDK, pars toto, [d] erit & pyramis EPFQGRHSM, minor quàm N: Oſtenſa autem fuit & maior. Quod eſt abſurdum. Non igitur minor eſt magnitudo N, cono EFGHM.

a 7. quinti.
b 1. decimi.
c 6. duodec.
d 14. quinti.

Sit ſecundò N, maior cono EFGHM. Cùm igitur ponatur vt circulus ABCD, ad circulum EFGH, ita conus ABCDK, ad N; Erit & conuertendo vt circulus EFGH, ad circulũ ABCD, ita N, ad conum ABCDK. Ponatur vt N, ad conum ABCDK, ita conus EFGHM, ad magnitudinẽ O. Et quia N, maior ponitur cono EFGHM; [e] maior quoq; erit conus ABCDK, quàm O. Quare erit vt circulus EFGH, ad circulum ABCD, ita conus EFGHM, ad magnitudinem O, quæ minor eſt cono ABCDK. Quod eſt abſurdum. Oſtenſum enim eſt iam, non poſſe eſſe conum ad magnitudinem minorem alio cono, vt eſt baſis illius coni ad baſin huius coni. Non ergo maior eſt N, magnitudo cono EFGHM; Sed neq; minor eſt oſtenſa; Æqualis igitur eſt. Quapropter cùm ponatur, vt baſis ABCD, ad baſin EFGH, ita conus ABCDK, ad N; [f] Sit autem, vt conus ABCDK, ad N, ita idem conus ABCDK, ad conum EFGHM; erit quoque vt baſis ABCD, ad baſin EFGH, ita conus ABCDK, ad conum EFGHM.

e 14. quinti.
f 7. quinti.

[g] QVONIAM autem, vt conus ABCDK, ad conum EFGHM, ita eſt cylindrus ABCDK, (qui triplus eſt coni ABCDK;) ad cylindrum EFGHM; (qui triplus eſt coni EFGHM.) Erit quoque vt baſis ABCD, ad baſin EFGH, ita cylindrus ABCDK, ad cylindrum EFGHM. Quod tamen eodem modo confirmari poteſt, quo vſi ſumus in conis, ſi loco conorum, & pyramidum, concipiantur cylindri, & priſmata. Sub eadem ergo altitudine exiſtentes coni & cylindri, inter ſe ſunt, vt baſes. Quod erat demonſtrandum.

g 15. quinti.

## SCHOLIVM.

*PERSPICVVM quoq; eſt, hanc propoſitionem, quam Euclides de conis, & cylindris ſolis rectis propoſuit, ob rationem ſuperius traditam, extendi etiam poſſe ad conos, & cylindros ſcalenos, vt eius demonſtratio manifeſtè indicat, ita vt propoſitio vniuersè proponatur in hunc modum.*

SVB eadem altitudine exiſtentes coni & cylindri, ſiue ambo recti ſint, ſiue ſcaleni, ſiue vnus rectus, & alter ſcalenus; inter ſe proportionem habent, quam baſes.

CONVERTETVR *hæc propoſitio quoq; hoc modo,*

Si

**Si coni & cylindri inter se sint, vt bases; ipsi sub eadem altitudine erunt.**

*Quod quidem demonstrabis eo modo, quo conuersum propos. 32. lib. 11. ostendimus.*

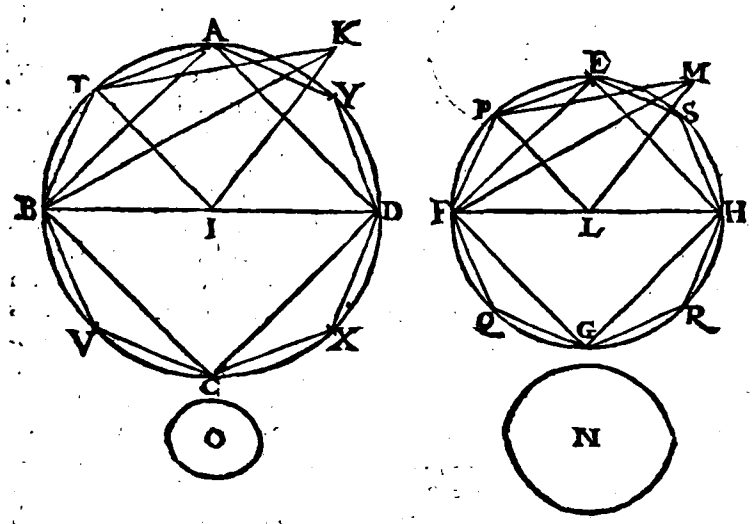
## COROLLARIVM.

*Hinc fit, conos & cylindros eiusdem altitudinis super eandem, vel æquales bases constitutos, siue ambo sint recti, vel scaleni, siue vnus rectus, & alter scalenus, esse inter se æquales; propterea quòd eandem proportionem habent, quam bases, quæ æquales ponuntur, vel certè vna & eadem.*

*Item sequitur, conos & cylindros æquales super eandem, vel æquales bases, in eadem esse altitudine: Et conos & cylindros æquales in eadem altitudine, super æquales bases esse, si non habuerint eandem. Quod ostendemus non aliter, ac conuersum propos. 31. lib. 11. demonstratum fuit.*

## THEOR. 12. PROPOS. 12. 10.

**Similes coni, & cylindri, in triplicata ratione sunt diametrorum, quæ in basibus.**

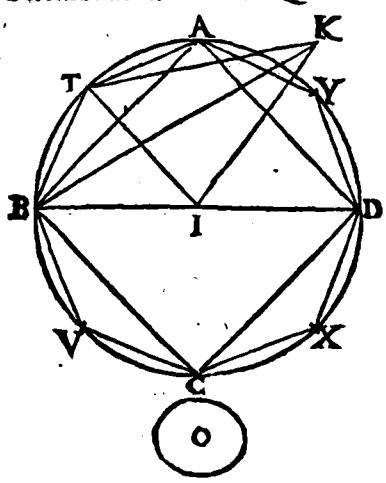


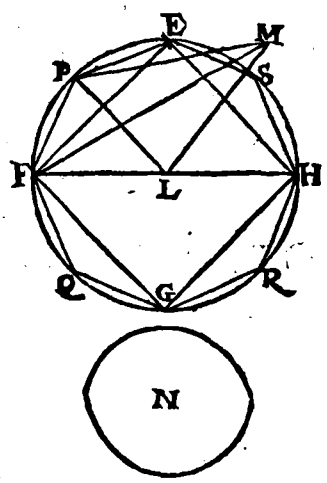

Sint similes coni & cylindri, quorum bases circuli ABCD, EFGH, axes verò LK, LM, & diametri basium BD, FH. Dico conum ad conum, & cylindrum ad cylindrum, habere proportionem triplicatam diametri ad diametrum. Si enim hoc nõ credatur, habeat conus ABCDK, ad aliquam magnitudinem N, proportionem triplicatam diametri BD, ad diametrum FH. Eritque N, vel minor, vel maior cono EFGHM. Si enim esset æqualis, [a] haberet conus ABCDK, ad conum EFGHM, & ad N, proportionẽ eandem; Ac proinde proportio coni ABCDK, ad conum EFGHM, esset quoq; triplicata proportionis diametri BD, ad diametrum FH; quod nõ conceditur. Sit ergo primùm N, minor, q̃ conus EFGHM, magnitudine O; Fiatque eadem prorsus constructio figuræ, quæ in præcedenti propositione, ita vt rursus pyramis EPFQGRHSM, maior ostendatur, q̃ N. Ducantur deinde rectæ KB, KT, MF, MP, vt habeantur duo triangula BKT, EMP, pyramidum ATBVCXDYK, EPFQGRHSM; & connectantur rectæ TI, PL. Quoniam igitur coni ABCDK, EFGHM, similes ponuntur, erit, ex 24. defin. lib. 11. vt diameter BD, ad diametrum FH, [b] ac propterea vt semidiameter BI, ad semidiametrum FL, ita axis IK, ad axem LM; Ac permutãdo vt BI, ad IK, ita FL, ad LM. Cùm igitur anguli BIK, FLM, recti sint, ex defin. 3. lib. 11. quòd coni recti ponantur, propterea q; axes recti ad eorum bases; [c] Erunt triangula BIK, FLM, æquiangula; [d] Ac propterea vt KB, ad BI, ita erit MF, ad FL. Vt autem BI, ad BT, ita FL, ad FP, ob similitudinem triangulorum BIT, FLP. (Cùm enim anguli BIT, FLP, insistentes similibus arcubus BT, FP, sint æquales, vt in scholio propos. 22. lib. 3. ostensum est; sitq; vt BI, ad IT, ita FL, ad LP, ob æqualitatem tam linearum BI, IT, q̃ FL, LP; [e] erunt triangula BIT, FLP, similia.) Igitur ex æquo, vt KB, ad BT, ita MF, ad FP. Rursus quia latera KI, IB, trianguli KIB, æqualia sunt lateribus KI, IT, trianguli KIT, & anguli dictis lateribus comprehensi, recti, ex defin. 3. lib. 11. cùm axis IK, rectus ponatur ad circulum ABCD, [f] erunt bases KB, KT, æquales. Eodem modo, æquales erunt rectæ MF, MP; Ac propterea rectæ KB, KT, rectis MF, MP, proportionales erunt, cùm vtrobique sit proportio æqualitatis. [g] Quoniam verò vt KB, ad BT, ita KT, ad eandem BT; Item vt MF, ad FP, ita MP, ad eandem FP: Erat autem vt KB, ad BT, ita MF, ad FP; Erit quoq; vt KT, ad BT, ita MP, ad FP; Et conuertẽdo vt BT, ad TK, ita FP, ad PM. Quare cùm sit vt TK, ad KB, ita PN, ad MF; & vt KB, ad BT, ita MF, ad FP; Et vt BT, ad TK, ita FP, ad PM, vt iuti ostensum est; habebunt triangula BKT, FMP, latera proportionalia, [h] ideoq; æquiangula erunt; Ac proinde similia, ex definitione. Non aliter ostendẽtur reliqua triangula ambientia pyramides ATBVCXDYK, EPFQGRHSM, inter se similia esse: Quæ cùm sint multitudine æqualia, erunt dictæ pyramides similes, ex defin. 9. lib. 11. Quocirca in triplicata proportione erunt homologorum laterum BT, FP, ex coroll. propos. 8. huius lib. Vt autem BT, ad FP, ita est BI, ad FL, ob similitudinem triangulorum BIT, FLP; [i] Et vt BI, ad FL, ita BD, ad FH. Igitur pyramis ad py-

a 7. quinti.
b 15. quinti.
c 6. sexti.
d 4. sexti.
e 6. sexti.
f 4. primi.
g 7. quinti.
h 6. sexti.
i 15. quinti.

ramidem habebit quoq; proportionẽ triplicatam diametrorũ B D, F H: Ponebatur autem & proportio coni A B C D K, ad N, earundem diametrorũ triplicata. Igitur erit vt pyramis A T B V C X D Y K, ad pyramidem E P F Q G R H S M, ita conus A B C D K, ad N. Quare cũ pyramis A T B V C X D Y K, minor ſit cono A B C D K, pars toto; [a] erit & pyramis E P F Q G R H S M, minor q̃ N. Oſtenſa aũt eſt & maior. Quod eſt abſurdũ. Non igitur minor eſt magnitudo N, cono E F G H M.

a 14. quinti.




SIT deinde N, maior cono E F G H M. Cùm ergo ponatur conus A B C D K, ad N, habere proportionẽ triplicatam diametri B D, ad diametrum F H; Habeat autẽ & pyramis A T B V C X D Y K, ad pyramidem E P F Q G R H S M, triplicatam proportionem earundẽ diametrorum vt proximè oſtẽdimus: Erit vt conus A B C D K, ad N, ita pyramis A T B V C X D Y K, ad pyramidem E P F Q G R H S M; & conuertendo vt N, ad conũ A B C D K, ita pyramis E P F Q G R H S M, ad pyramidem A T B V C X D Y K. Quare cùm ex coroll. propoſ. 8. huius lib. pyramis E P F Q G R H S M, ad pyramidem A T B V C X D Y K, habeat proportionem triplicatam homologorum laterum P F, ad T B, hoc eſt, diametri F H, ad diametrum B D; habebit quoq; N, ad conum A B C D K, proportionem triplicatam diametri F H, ad diametrũ B D. Ponatur vt N, ad conum A B C D K, ita conus E F G H M, ad magnitudinem O. Habebit igitur & conus E F G H M, ad O, proportionem triplicatam diametri F H, ad diametrum B D. Et quia N, maior ponitur q̃ conus E F G H M, [b] erit quoq; conus A B C D K, maior q̃ O. Quapropter conus E F G H M, ad magnitudinem O, minorem cono A B C D K, proportionem habet triplicatam diametri F H, ad diametrum B D. Quod eſt abſurdum. Oſtenſum enim eſt, non poſſe conum ad magnitudinẽ alio cono minorem, proportionem habere triplicatam eius, quam habent baſium diametri. Non ergo maior eſt magnitudo N, cono E F G H M: Sed neq; minor eſt oſtenſa. Æqualis igitur eſt; [c] ac proinde conus A B C D K, eandem habet proportionem ad conum E F G H M, & ad N. Cùm ergo ponatur conus A B C D K, ad N, in triplicata proportione diametrorũ B D, & F H; erit quoq; conus A B C D K, ad conũ E F G H M, in earundem diametrorum proportione triplicata.

b 14. quinti.

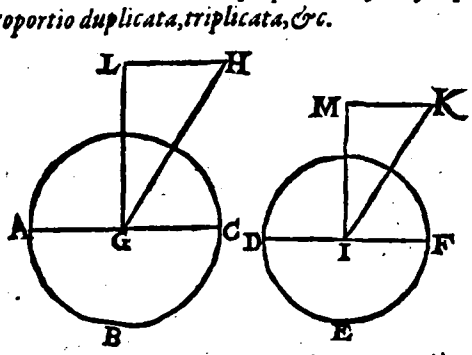
c 7. quinti.

[d] QVONIAM verò, quam proportionẽ habent coni, eandem quoque obtinent cylindri, eorum tripli; habebit quoque cylindrus ad cylindrum proportionem diametrorum in baſibus triplicatam. Quod tamen eodem modo demonſtrabitur, quo vſi ſumus in conis, ſi modò loco conorum, & pyramidum aſſumantur cylindri, atque priſmata. Similes igitur coni, & cylindri in triplicata ratione ſunt diametrorum, quæ in baſibus. Quod oſtendendum erat.

d 15. quinti.

## *SCHOLIVM.*

*QVOD ſi maior conus, & cylindrus cum minore conferatur, perſpicuum eſt, in ſecunda parte huius propoſitionis, Euclidem aſſumere, demonſtratum eſſe propoſ. 8. huius lib. minorẽ pyramidem ad maiorem habere proportionem laterum homologorum triplicatam. Id quod ad defin. 10. lib. 5. monuimus contra Federicum Commandinum, & alios, qui putant referri ſemper debere maiorem quantitatem ad minorem, vt habeatur proportio duplicata, triplicata, &c.*




*HAEC porrò propoſitio, quamuis etiam extendatur ad ſimiles conos & cylindros ſcalenos: tamen hic demonſtratur in ſolis rectis conis & cylindris ſimilibus, cùm in demonſtratione aſſumãtur axes recti ad baſes. Quocirca eam hac ratione oſtendemus in ſimilibus conis & cylindris ſcalenis. Sint ſimiles coni, & cylindri ſcaleni, quorũ baſes circuli A B C, D E F, axes verò G H, I K. Dico tam conum ad conum, q̃ cylindrũ ad cylindrum habere proportionem diametri ad diametrum triplicatam. Intelligantur enim ſuper eaſdem baſes duo coni, & cylindri recti earundem cum ſcalenis altitudinum, quorũ axes G L, I M. Ducanturq; per rectas G H, G L; Item per I K, I M, plana ſecantia baſes lineis rectis A C, D F, quæ diametri baſium erunt. Quoniam igitur axes G L, I M, recti ſunt baſibus A B C, D E F; [a] erunt & plana per G H, G L; & per I K, I M, ad eaſdem recta. [b] Ac propterea perpendiculares lineæ ex H, K, ad baſes demiſſæ cadent in A C, D F, cõmunes ſectiones; & proinde erunt an-*

a 18. vnde.

b 38. vnde.

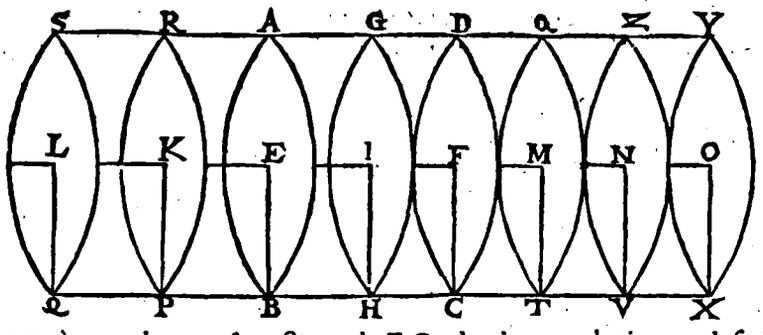
*guli*

*guli C G H, F I K, anguli inclinationum, qui æquales inter se erunt, cùm coni & cylindri scaleni similes ponantur: Sunt autem & anguli C G L, F I M, æquales, nempe recti, ex defin. 3. libri 11.* [a] *Reliqui igitur H G L, K I M, æquales quoq; erunt. Quoniam verò coni A B C H, A B C L, ponuntur esse eiusdem altitudinis; erit recta H L, per axium vertices ducta ipsi A C, parallela,* [b] *ideoq; angulus L, rectus. Eodemq; argumẽto rectus erit angulus M, cùm & anguli C G L, F I M, recti sint. Non aliter & reliqui anguli H, K, æquales erunt, cùm sint æquales eorũ alterni anguli C G H, F I K. Triangula igitur G H L, I K M, æquiangula sunt;* [c] *atq; idcirco erit vt G H, ad G L, ita I K, ad I M; & permutando, vt G H, ad I K, ita G L, ad I M. Vt autem axis G H, ad axem I K, ita est A C, diameter ad D F, diametrum; & coni & cylindri scaleni ponantur similes. Igitur & G L, axis ad I M, axem erit, vt diameter A C, ad D F, diametrum; Et proinde coni & cylindri recti A B C L, D E F M, similes erunt, ex definitione.* [d] *Quare proportionem habebunt diametrorum triplicatam. Quia verò tam conus & cylindrus A B C L, cono & cylindro A B C H, (cùm eandem habeant basim, & altitudinem,) quàm conus & cylindrus D E F M, cono & cylindro D E F K, (ob eandem rationẽ,) est æqualis, vt constat ex corollario propos. 11. huius lib.* [e] *Erit vt conus & cylindrus A B C L, ad conum & cylindrum D E F M, ita conus & cylindrus A B C H, ad conum & cylindrum D E F K: ideoq; proportio coni & cylindri A B C H, ad conum & cylindrum D E F K, triplicata quoq; erit diametri A C, ad diametrum D F. Quod est propositum.*

a 32. primi.
b 29. primi
c 4. sexti.
d 12. duodecimi.
e 7. quinti.

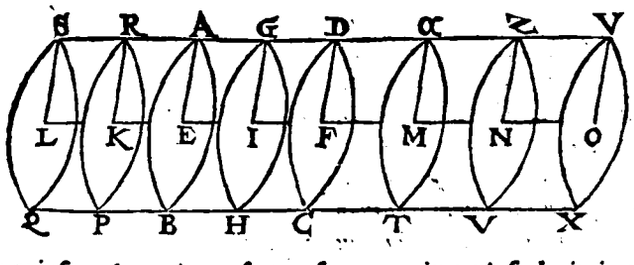
## THEOR. 13. PROPOS. 13. 11.

**Si cylindrus plano secetur aduersis planis parallelo: Erit vt cylindrus ad cylindrum, ita axis ad axem.**




SECETVR cylindrus A B C D, plano G H, parallelo aduersis planis A B, C D, quod quidem secet axem E F, in I. Dico vt est cylindrus A B H G, ad cylindrũ G H C D, ita esse axem E I, ad axem I F. Intelligatur enim cylindrus A B C D, in vtramque partem, vnà cum eius axe & rectangulo E C, ad cuius reuolutionem descriptus est cylindrus, protractus quantumlibet; Sumanturque in axe producto quotcunque rectæ E K, K L, æquales ipsi E I; Item quotcunque rectæ F M, M N, N O, æquales ipsi F I. Deinde per puncta I, K, L, M, N, O, ducantur rectæ I H, K P, L Q, M T, N V, O X, parallelæ, & æquales rectis E B, F C; quæ quidem ad reuolutionem rectanguli E C, describẽt circulos G H, P R, Q S, T α, V Z, X Y, parallelos & æquales circulis A B, C D, ob æqualitatem semidiametrorum, quæ semper inter se æquidistantes circunferuntur. Ac propterea cylindri erunt S P, P A, A H, H D, D T, T Z, Z X, ex definitione, componentes totũ cylindrum S Q X Y. Quoniam verò tam cylindri S P, P A, A H, super bases æquales Q S, P R, B A, & sub altitudinibus æqualibus K L, E K, I E, æquales sunt, quàm cylindri X Z, Z T, T D, D H, super æquales bases X Y, V Z, T α, C D, & sub altitudinibus æqualibus N O, M N, F M, I F, ex corollario propositionis 11. huius lib. Erit tam multiplex cylindrus S H, cylindri A H, quàm multiplex est axis I L, ipsius axis I E; Item tam multiplex cylindrus X G, cylindri C G, quàm multiplex est axis I O, ipsius axis I F. Quoniam autem si axis I L, (multiplex I E, primæ magnitudinis) æqualis est axi I O, (multiplici axis I F, secundæ magnitudinis) æqualis quoq; est cylindrus S H, (multiplex cylindri A H, tertiæ magnitudinis) cylindro X G, (multiplici cylindri C G, quartę magnitudinis) vt ex propositione 11. huius libri liquet. Si verò axis maior est axe, cylindrus quoque cylindro maior est; Et si minor, minor, in quacunque hoc contingat multiplicatione: Erit, per definitionem 6. lib. 5. ita axis I E, prima magnitudo ad axem I F, secundam magnitudinem, vt cylindrus A H, tertia magnitudo ad cylindrum C G, quartam magnitudinem. Si cylindrus igitur plano secetur aduersis planis parallelo; erit vt cylindrus ad cylindrum, ita axis ad axem. Quod erat demonstrandum.

### *SCHOLIVM.*

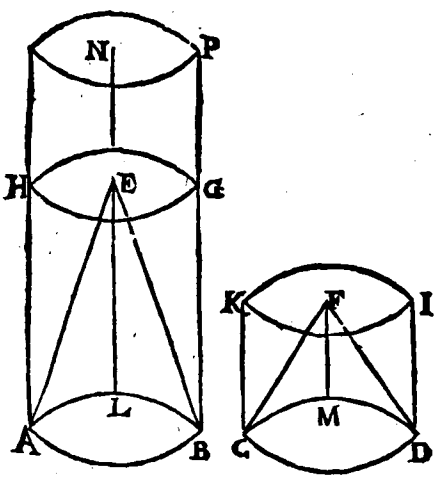



*ET si hanc propositionem Euclides de solo cylindro recto demonstrat; tamẽ eius demonstrationem cylindro scaleno facilè accommodabis, si modò adhibeas descriptionem cylindri scaleni, sicut in demonstratione Euclidis assumpta fuit cylindri recti descriptio; ita vt quemadmodum in conis rectis rectangulum circa quiescens latus circumfertur, sic quoque in conis scalenis circumferantur semidiametri L S, K R, E A, &c.*

*semper æquidistantes circa centra L,K,E,&c. vnà cum recta SY, semidiametros coniungente. Hac enim ratione semper cylindri describentur, vt constat ex ijs, quæ scribit Serenus in lib. 1. de Sectione cylindri.*

11. # THEOR. 14. PROPOS. 14.

**SVPER æqualib⁹ basibus existentes coni, & cylindri; inter se sunt, vt altitudines.**




SINT super bases æquales AB, CD, duo coni ABE, CDF, & duo cylindri ABGH, CDIK, quorum axes, seu altitudines (Nam in conis & cylindris rectis, axes ipsi sunt altitudines) LE, MF. Dico esse conum ABE, ad conum CDF, & cylindrum ABGH, ad cylindrum CDIK, vt est altitudo LE, ad altitudinem MF. Extendatur enim cylindrus ABGH, ad partes GH, vnà cũ eius axe LE, & rectangulo AG; abscindaturque axis EN, æqualis axi MF, & circa centrum N, intelligatur circulus OP, æqualis & parallelus circulo GH, vt fiat cylindrus GHOP, eiusdem altitudinis cum cylindro CDIK. Quoniam igitur cylindri HP, CI, cùm habeãt æquales bases & altitudines, æquales sunt, ex coroll. propos. 11. huius lib. [a] cylindrus AG, ad ipsos eandem habebit proportionem: [b] Est autem cylindrus AG, ad cylindrum HP, vt axis, seu altitudo LE, ad axem, seu altitudinem EN, hoc est, ad altitudinẽ MF, sibi æqualem. Igitur & cylindrus AG, ad cylindrum CI, erit quoque, vt altitudo LE, ad altitudinem MF.

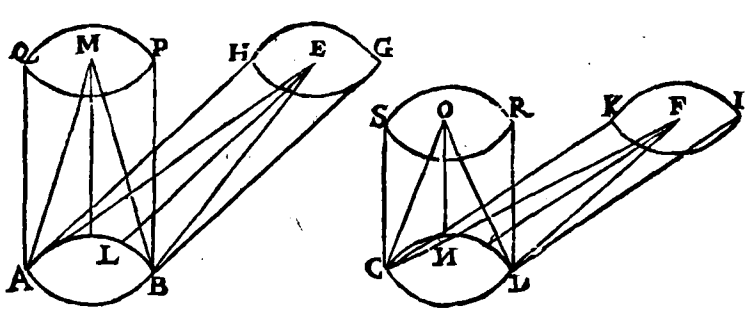
a 7. quinti.
b 13. duodec.

[c] Quia verò coni ABE, CDF, sunt tertiæ partes cylindrorum AG, CI; [d] ipsi habebunt eandem cum cylindris proportionem; Ac proinde erit quoque conus ABE, ad conum CDF, vt altitudo LE, ad altitudinem MF. Super æqualibus igitur basibus existentes coni & cylindri, inter se sunt, vt altitudines. Quod ostendendum erat.

c 10. duodec.
d 15. quinti.

## *SCHOLIVM.*

*Hoc idem conuenire conis scalenis, hoc modo demonstrabimus. Sint super bases æquales AB, CD, coni ABE, CDF, & cylindri ABGH, CDIK, scaleni, quorum altitudines LM, NO. Dico conum ABE, ad conum CDF, & cylindrum ABGH, ad cylindrum CDIK, esse, vt est altitudo LM, ad altitudinem NO. Super basin enim AB, construatur cylindrus rectus ABPQ, sub altitudine LM; Item super basin CD, cylindrus CDRS, sub altitudine NO.*




a 14. duodecimi.

*[a] Quoniam igitur est cylindrus rectus ABPQ, ad cylindrum rectum CDRS, vt altitudo LM, ad altitudinem NO: Est autem cylindro ABPQ, cylindrus ABGH: Item cylindro CDRS, cylindrus CDIK, æqualis, ex corollario propos. 11. huius lib. Erit quoq; cylindrus ABGH, ad cylindrum CDIK, vt altitudo LM, ad altitudinem NO. Quod est propositum.*

*QVONIAM autem coni, [b] cùm sint tertiæ partes cylindrorum, [c] eandem habẽt proportionem, quam cylindri; Erit quoque conus ABE, ad conum CDF, vt altitudo LM, ad altitudinem NO. Quod tamen eodem argumento, quo vsi sumus in cylindris, confirmari potest, vt perspicuum est, si super bases AB, CD, fiant coni recti ABM, CDO, earundem altitudinum cum cylindris ABPQ, CDRS.*

b 10. duodecimi.
c 15. quinti.

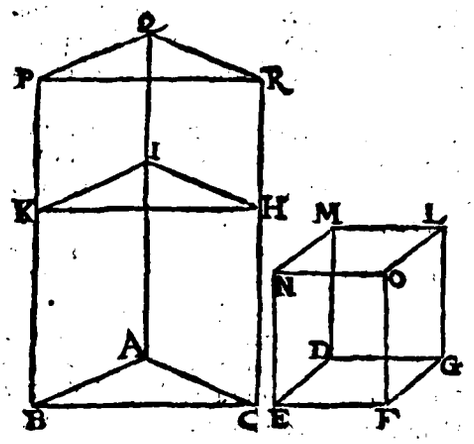
*IDEM concludetur, quamuis vnus conorum, & cylindrorum, nempe conus ABE, & cylindrus ABGH, fuerit scalenus, alter verò, nimirum conus CDO, & cylindrus CDRS, rectus. Nam cùm cylindrus scalenus ABGH, æqualis sit cylindro recto ABPQ; sit autem cylindrus rectus ABPQ, ad cylindrum rectum CDRS, vt altitudo LM, ad altitudinem NO, vt Euclides demonstrauit: Erit quoq; cylindrus scalenus ABGK, ad cylindrum rectum CDRS, vt altitudo LM, ad altitudinem NO. Quod est propositum.*

*[d] QVONIAM verò coni eandem habent proportionem, quam cylindri, [e] cùm illi horum sint tertiæ partes; Erit etiam conus scalenus ABE, ad conum rectum CDO, vt altitudo LM, ad altitudinẽ NO. Quod nihilominus ostendetur eadem ratione, qua vsi sumus in cylindris, vt manifestum est.*

d 15. quinti
e 10. duodecimi.

*EADEM quoque hæc propositio conuenit prismatis, parallelepipedis, & pyramidibus super æquales bases constitutis. Sint enim super bases æquales ABC, DEFG, prismata ABCHIK, DEFGLMNO, &*

*pyramides*




*pyramides ſub eiſdem altitudinibus. Dico eſſe priſma ad priſma, & pyramidem ad pyramidem, vt eſt altitudo ad altitudinem. Sint namque inſiſtentes lineæ AI, CH, BK, priſmatis ABCHIK, ad baſin ABC, perpendiculares, ita vt BK, ſit altitudo priſmatis ABCHIK; Productis autem rectis AI, CH, BK, ſumãtur IQ, HR, KP, æquales altitudini priſmatis EL; & ductis rectis PQ, QR, RP, compleatur priſma HIKPQR, eiuſdem altitudinis cum priſmate EL. Eruntq; priſmata HIKPQR, EL, cùm habeant & baſes, & altitudines æquales, inter ſe æqualia, ex coroll. 2. propoſ. 7. huius lib.* [a] *Ac propterea priſma ABCHIK, ad vtrumq; eandem habebit proportionem. Quia verò ex ſcholio propoſitionis 25. lib. 11. priſma ABCHIK, ad priſma HIKPQR,* a 7. quinti.

*eſt vt planum BI, ad planum KQ;* [b] *Et vt planum BI, ad planum KQ, ita eſt recta BK, ad KP; erit priſma ABCHIK, ad priſma HIKPQR, hoc eſt, ad priſma EL, vt BK, altitudo priſmatis ABCHIK, ad KP, altitudinem priſmatis HIKPQR, hoc eſt, priſmatis EL. Quod eſt propoſitum.* b 1. ſexti.

*QVOD ſi inſiſtentes lineæ AI, CH, BK, non ſint perpendiculares ad baſin ABC, conſtituendum erit ſuper baſin ABC, aliud priſma, cuius inſiſtentes ſint perpendiculares ad baſin, & æquales altitudini priſmatis ABCHIK. Nam cùm ex 2. coroll. propoſ. 7. huius lib. hæc duo priſmata eandem habentia altitudinem, & baſin, ſint æqualia, ſitq; priſma conſtitutum ad priſma EL, vt illius altitudo ad huius altitudinem: erit & priſma ABCHIK, ad priſma EL, vt altitudo illius, ad altitudinem huius.*

[c] *QVONIAM verò pyramides eandem habent proportionem cum priſmatis,* [d] *quòd illa ſint horum tertiæ partes: Perſpicuum eſt, ita quoque eſſe pyramidem ad pyramidem, vt eſt altitudo ad altitudinem.* c 15. quin. d 7. duode.

*EADEM prorſus eſt ratio habenda de parallelepipedis, cùm parallelepipeda comprehendantur etiam nomine priſmatum, vt dictum eſt; atq; ob id eadem illis demonſtratio poſſit accommodari.*

*HÆC omnia eodem ferè modo demonſtrabuntur de conis, & cylindris, nec non de pyramidibus, & priſmatis eandem habentibus baſem.*

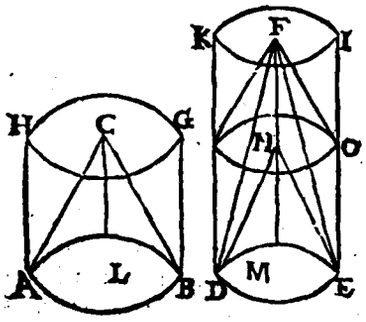
*OMNIA quoq; hæc facilè conuerti poſſunt, hoc modo.*

CONI & cylindri tam recti, quàm ſcaleni; Item priſmata, parallelepipeda, & pyramides, proportionem habentes eandem, quam altitudines, baſes habebunt æquales.

*NAM alioquin pars æqualis foret toti, vt in conuerſo propoſ. 31. lib. 11. oſtenſum eſt.*

## THEOR. 15. PROPOS. 15. 12.

**AEQVALIVM conorum, & cylindrorum reciprocantur baſes & altitudines: & quorum conorum, & cylindrorum reciprocantur baſes & altitudines, illi ſunt æquales.**

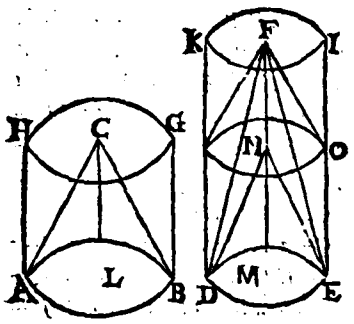



SINT æquales coni ABC, DEF, & æquales cylindri ABGH, DEIK, quorum baſes AB, DE; axes, altitudines ſue LC, MF. Dico baſes & altitudines eſſe reciprocas, hoc eſt, eſſe vt AB, ad DE, ita MF, ad LC. In cylindris quidem ſic propoſitum oſtendetur. Si altitudines LC, MF, ſint æquales, cùm cylindri ponantur quoque æquales; erunt & baſes æquales, ex coroll. propoſ. 11. huius lib. Quare erit vt baſis AB, ad baſin æqualem DE, ita altitudo MF, ad altitudinem æqualem LC. Ac proinde baſes atque altitudines ſunt reciprocæ.

QVOD ſi altitudines LC, MF, inæquales fuerint, ſit MF, maior, ex qua abſcindatur MN, ipſi LC, æqualis; & per N, ducatur planum ON, baſi DE, parallelum, vt in ſcholio propoſ. 15. lib. 11. docuimus, vt fiant duo cylindri DO, OK. Quoniam igitur æquales ponũtur cylindri ABGH, DEIK; [a] erit vt cylindrus ABGH, ad cylindrum DO, ita cylindrus DEIK, ad eundem cylindrum DO. [b] Eſt autem vt cylindrus ABGH, ad cylindrum DO, ita baſis AB, ad baſin DE, cùm æquales ſint altitudines: [c] Item vt cylindrus DEIK, ad cylindrum DO, ita altitudo MF, ad altitudinem MN, cùm baſes ſint æquales, immo vna & eadem DE. Igitur erit quoque vt baſis AB, ad baſin DE, ita altitudo MF, ad altitudinem MN, hoc eſt, ad huic æqualem LC; Ac propterea reciprocæ ſunt baſes & altitudines. a 7. quinti. b 11. duodec. c 14. duodec.

IN conis verò ita concludemus propoſitum. Si coni ABC, DEF, ſint æquales; erunt & cylindri ABGH, DEIK, æquales, [d] cùm coni ſint cylindrorum tertiæ partes. Quare vt oſtenſum d 10. duod.

est, ex æqualitate cylindrorum sequetur, bases & altitudines esse reciprocas; Ac propterea ex æqualitate conorum etiam sequetur, bases & altitudines reciprocas esse. Quod tamen eodem prorsus modo demonstrari potest, quo vsi sumus in cylindris, si modò sub altitudinibus M N, N F, constituantur duo coni, vt in figura.




a 11. duode.

b 14. duode.

SED iam bases atque altitudines reciprocentur. Dico conos & cylindros esse æquales. Quod quidem in cylindris confirmabitur hac ratione. Si altitudines L C, M F, sint æquales, cùm sit vt basis A B, ad basin D E, ita altitudo M F, ad altitudinem æqualem L C; erunt & bases A B, D E, æquales: Ac propterea cylindri super æquales bases A B, D E, & sub altitudinibus æqualibus L C, M F, æquales erunt, ex coroll. propos. 11. huius lib. QVOD si altitudines fuerint inæquales, fiat constructio vt prius. Quia igitur ponitur vt basis A B, ad basin D E, ita altitudo M F, ad altitudinē L C, hoc est, ad huic æqualem M N; *b* Est autem vt basis A B, ad basin D E, ita cylindrus A B G H, ad cylindrum D O, cùm altitudines sint æquales: *b* Item vt altitudo M F, ad altitudinem M N, ita cylindrus D E I K, ad cylindrum D O, cùm bases sint æquales; erit vt cylindrus A B G H, ad cylindrum D O, ita cylindrus D E I K, ad eundem cylindrum D O; *c* Ideoque cylindrus A B G H, cylindro D E I K, æqualis erit.

c 9. quinti.

AT verò in conis hæc erit demonstratio. Si conorum A B C, D E F, bases & altitudines reciprocentur, reciprocabuntur quoque bases, & altitudines cylindrorum A B G H, D E I K, cùm eædem sint bases, altitudinesq; conorum, & cylindrorum. Quam ob rem, vt ostensum fuit, cylindri, ideoq; coni, eorum tertiæ partes, æquales erunt. Demonstrari tamen potest eodem modo, conos esse æquales, quo ostendimus cylindros æquales esse. Æqualium igitur conorum & cylindrorum reciprocantur bases & altitudines, &c. Quod erat demonstrandum.

## SCHOLIVM.

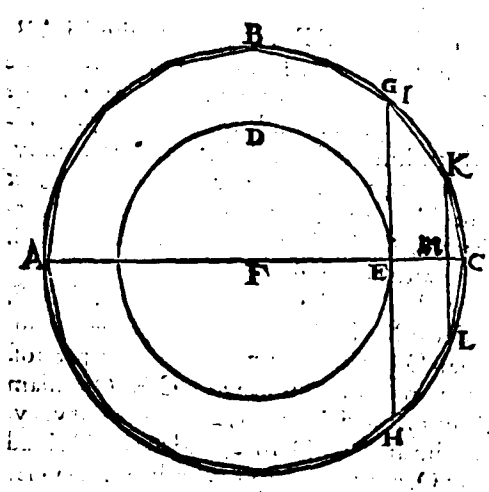
*NON difficile erit idem ostendere de conis, & cylindris scalenis. Si enim æquales sint coni & cylindri scaleni, erunt quoq; recti, eadem cum illis bases & altitudines habentes, æquales, ex coroll. propos. 11. huius libri. Quare, vt ostensum est, bases & altitudines reciprocabuntur. Quòd si bases, & altitudines conorum & cylindrorum scalenorum reciprocentur, reciprocabuntur quoq; bases & altitudines conorum & cylindrorum rectorum, si eadem sint bases, & altitudines rectorum & scalenorum. Quare, vt demonstratum est, coni & cylindri recti æquales erunt; Ac propterea coni & cylindri scaleni, cùm sint rectis æquales, ex coroll. propos. 11. huius libri, inter se quoq; erunt æquales.*

*IDEM facilè concludetur, licet vnus conorum & cylindrorū sit rectus, & alter scalenus, vt perspicuum est ex ijs, quæ in scholio propos. 14. huius lib. docuimus.*

13.

## PROBL. I. PROPOS. 16.

DVOBVS circulis circa idem centrum existentibus, in maiori circulo polygonum æquilaterum, & parium laterū inscribere, quod nō tangat minorē circulum.




d 1. decimi.

SINT duo circuli A B C, D E, circa idem centrū F, oporteatque in maiori A B C, inscribere polygonum æquilaterum, cuius latera numero pari continentur, non tangens minorem D E. Extendatur per centrum F, recta A C, secans circulum D E, in E, puncto, & p E, ducatur G H, ad A C, perpendicularis, quæ tanget circulum D E, in E, ex corollario propos. 16. lib. 3. Quoniam igitur arcus A G C, maior est arcu G C, si ex A G C, auferatur dimidiū A B, & ex residuo B C, dimidium B I, & ex residuo I C, dimidium I K, & sic deinceps; *d* relinquetur tandem minor arcus, quàm C G. Sit igitur iam arcus C K, arcu C G, minor, & subtendatur recta C K. Dico rectam C K, esse vnum latus polygoni inscribendi. Si enim arcus B I, diuidatur in partes numero & magnitudine æquales partibus arcus C I; & quadrans A B, in totidem partes æquales diuidatur, in quot diuisus est quadrans B C; nec non semicirculus A H C, in totidem partes, quot continet semicirculus A B C; deinde omnibus arcubus rectæ lineæ subtendantur, *e* quæ æquales quidem erunt ipsi rectæ C K, eò quòd arcus arcui C K, æquales subtendant: Descriptum erit polygonum in circulo A B C, & æquilaterum, & parium laterum. Quod quidem non tangere circulum minorem D E, ita ostendetur. Ex K, ad A C, demittatur perpendicularis K L, secans ipsam A C, in M. Quoniā igitur anguli G E M, K M E, recti sunt; *f* erunt

e 29. tertij.

f 28. primi.

rectæ

rectæ G H, K L, parallelo. Quare cùm recta G H, tangat circulum D E, in solo puncto E; recta K L, erit tota extra dictum circulum, nec vnquam ipsum continget, quòd nunquam cum recta G H, conueniat. Multò igitur minus recta C K, quæ longius à circulo D E, abest, quàm K L, circulum D E, tanget. Ac propterea neq; alia latera polygoni inscripti, cùm æqualia sint lateri C K: [a] ideoq; æqualiter cum C K, à centro F, distent, circulum D E, contingent. Duobus itaque circulis circa idem centrum existentibus, in maiori circulo, &c. quod erat faciendum. [a] 14. tertij.

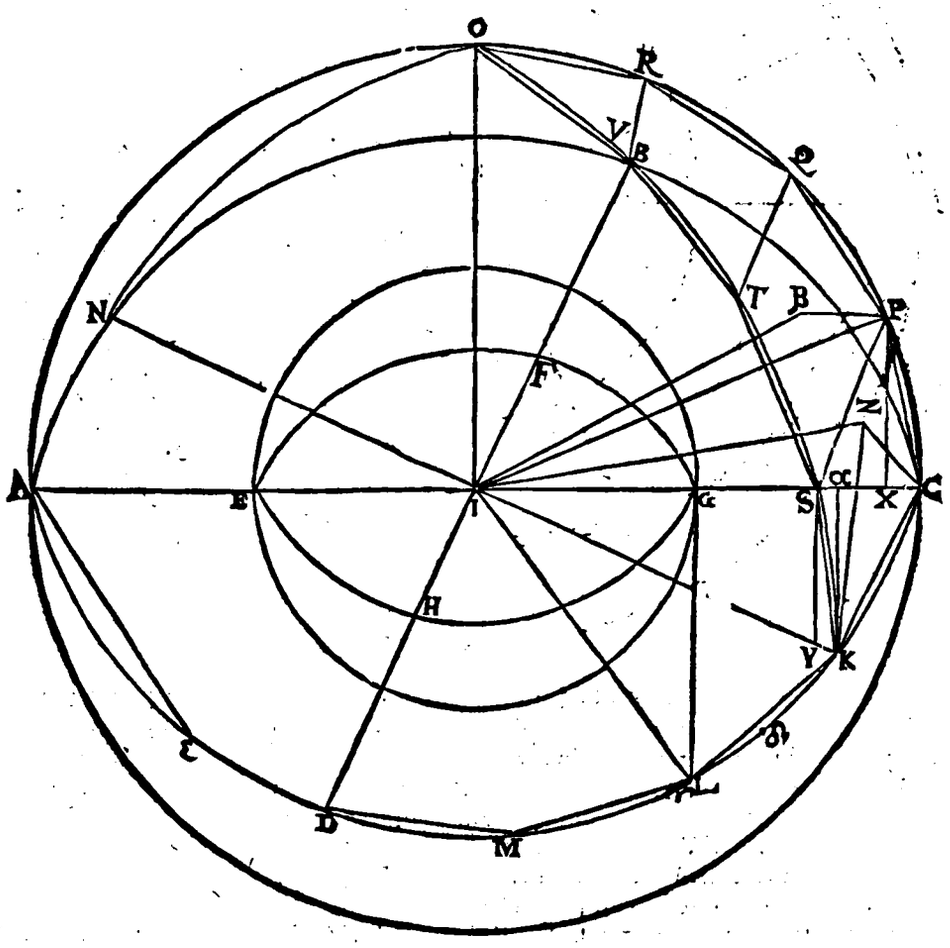
## COROLLARIVM.

*Hinc est manifestum, si ab extremitate lateris polygoni inscripti, quod cum diametro conuenit, ad diametrum ducatur perpendicularis, hãc nullo modo circulum minorem posse contingere, sed totam extra ipsum cadere. Huiusmodi enim est linea K L, quæ cùm ducatur ab extremo puncto K, lateris C K, cum diametro A C, conuenientis, ad A C, diametrum perpendicularis, ostensa est non tangere circulum D E.*

## PROBL. 2. PROPOS. 17. 141

DVABVS sphæris circa idem centrum existentibus, in maiori sphæra solidum polyedrum inscribere, quod non tangat minoris sphæræ superficiem.

SINT duæ sphæræ A B C D, E F G H, circa idem centrum I, oporteatque in maiori A B C D, inscribere solidum polyedrum, seu multilaterum, quod non tangat minorem sphæram E F G H. Secentur ambæ sphæræ plano aliquo per centrum, sintq; communes sectiones factæ in sphæris plana A B C D, E F G H, quæ circuli erunt, ex descriptione sphæræ, habentes idem centrum sphærarum I. Nam semicirculi, ad quorum circumuolutionem sphæræ describuntur, circumducti, congruent sectionibus A B C D, E F G H. Quare dictæ sectiones circuli erunt. Vel certè, quia omnes



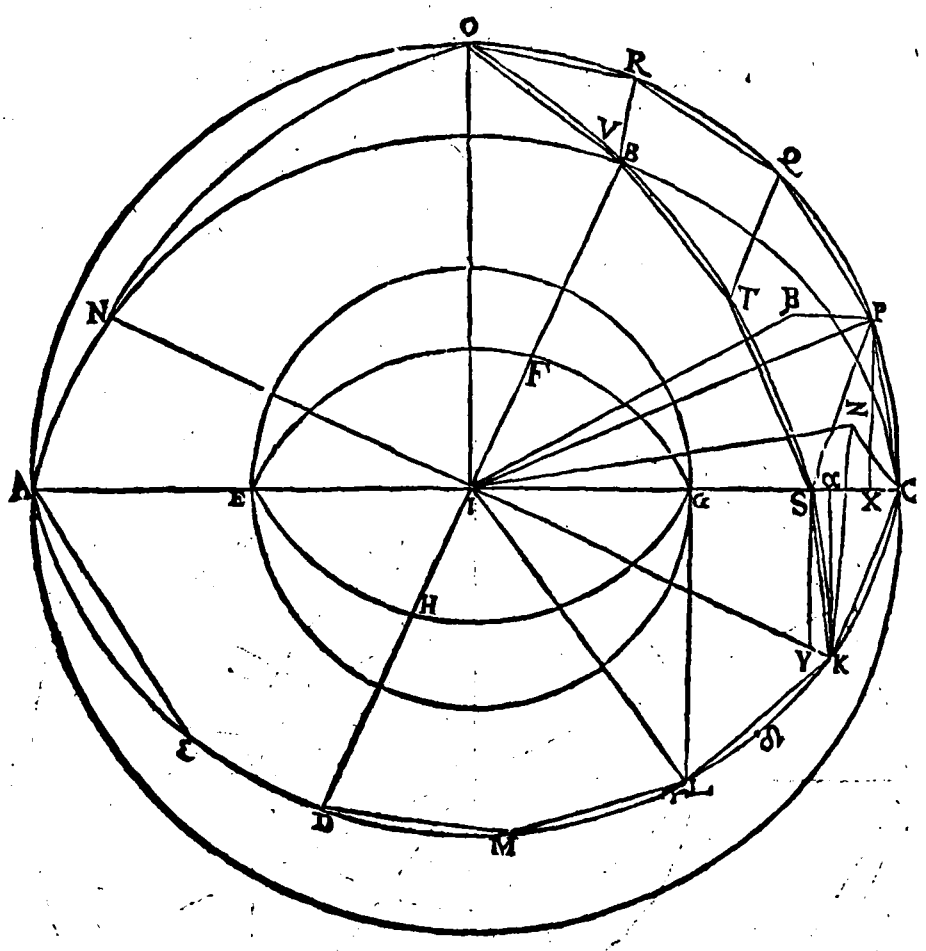

lineæ rectæ cadentes ex I, ad peripherias sectionum sunt æquales, cùm ducantur ex centro sphærarum ad earum superficiem; erunt ipsæ sectiones, circuli, ex definitione circuli. Ducantur in his circulis diametri A C, B D, sese in centro I, secantes ad angulos rectos, vt sint quadrantes A B, B C, C D, D A, &c. Deinde in maiori circulo A B C D, inscribatur polygonum non tangens minorem circulum E F G H. Quod quidem, vt facilius omnia demonstrentur, in hunc modum efficiatur. Ex G, ad E G, ducatur perpendicularis G γ, ad circumferentiam vsq; circuli A B C D, quæ circulum E F G H, tanget in G, ex coroll. propos. 16. lib. 3. Et rectæ G γ, [c] applicetur in circulo A B C D, recta [b] 16. duodecimi. [c] 1. quarti.

*a 19. primi.* æqualis A ι. Quia verò si arcui C γ, intelligatur subtendi recta, vt fiat triangulum G C γ, [a] latus C γ, oppositum maiori angulo, nempe recto, maius est latere G γ, quod minori angulo opponitur, nimirum acuto; erit quoq; recta C γ, maior recta A ι; ac proinde arcus C γ, arcu A ι, maior erit, vt constat ex scholio propos. 28. lib. 3. Abscindatur ergo arcus C δ, arcui A ι, æqualis. Quod si ex quadrante C D, dimidium auferatur D L, & ex reliquo C L, dimidium L K, & sic deinceps, [b] relinquetur tandem arcus minor arcu C δ, seu arcu A ι. Sit ergo iam arcus C K, minor; Eritque recta C K, subtensa, minor quàm recta A ι, hoc est, quàm G γ, ex scholio propos. 29. lib. 3. Dico igitur, rectam C K, esse vnum latus polygoni æquilateri inscribendi. Nam cùm recta subtendés arcum C δ, minorem arcu C γ, non tangat circulum E F G H, vt ex demonstratione præcedentis propos. patet, multò minus recta C K, subtendens arcum minorem arcu C δ, eundem circulum tanget. Rursùs ducta diametro K N, [c] erigatur ex centro I, ad plana circulorum A B C D, E F G H, perpendicularis I O, occurrens superficiei sphæræ maioris in O; Et per rectas O I, A C, & O I, K N, plana ducantur, [d] quæ ad circulum A B C D, recta erunt, efficientq; communes sectiones, circulos, vt iam dictum est, quorum semicirculi sint A O C, N O K. Quia verò anguli O I C, O I K, recti sunt,

*b 1. decimi.*

*c 12. vndec.*

*d 18. vndec.*




*e schol. 22. tertij.* ex defin. 3. lib. 11. [e] quadrantes erunt O C, O K, atque adeò cùm circuli A B C D, A O C, N O K, æquales sint, quòd eorum diametri sint & sphæræ maioris diametri, erunt quoq; quadrantes C D, O C, O K, æquales. Si igitur arcus D L, in tot partes æquales distribuatur, in quot diuisus fuit arcus C L; & quadrantes O C, O K, in arcus numero & magnitudine æquales arcubus quadrantis

*f 29. tertij.* C D; [f] Erunt rectæ his omnibus arcubus æqualibus subtensæ, nimirum C K, K L, L M, M D; C P, P Q, Q R, R O; K S, S T, T V, V O, æquales. Coniunctis autem rectis P S, Q T, R V, demittantur

*g 38. vndec.* ex P, & S, ad planum circuli A B C D, perpendiculares P X, S Y, [g] quæ in communes sectiones

*h 6. vndec.* A C, N K, cadent; [h] eruntque inter se parallelæ.

Qvoniam igitur triangulorum P C X, S K Y, anguli P X C, S Y K, recti sunt, ex defin. 3. lib. 11.

*i 27. tertij.* [i] & anguli P C X, S K Y, æquales, quòd & æquales sint peripheriæ A O P, N O S, quibus insistũt (Nam si ex semicirculis A O C, N O K, æqualibus, demantur arcus æquales C P, K S, reliqui arcus A O P, N O S, æquales quoq; erũt.) Erunt duo anguli P C X, P X C, trianguli P C X, æquales duobus angulis S K Y, S Y K, trianguli S K Y: Sunt autem & latera P C, S K, rectis angulis op-

*k 26. primi.* posita, æqualia. [k] Igitur reliqua latera P X, X C, reliquis lateribus S Y, Y K, æqualia erunt. Quare

*l 33. primi.* cùm rectæ P X, S Y, æquales sint & parallelæ; si connectatur recta X Y; [l] æquales quoque erunt

*m 2. sexti.* & parallelæ P S, X Y, inter se. [m] At quia & rectæ C K, X Y, parallelæ sunt, quòd latera I C, I K, proportionaliter secta sint. (Si enim ex semidiametris I C, I K, æqualibus demantur æquales rectę C X, K Y,

CX,KY,relinquentur & IX,IY,æquales; Ac proinde erit,vt IX,ad XC,ita IY, ad YK.) [a] Erunt parallelæ quoq; PS,CK,inter ſe,cùm vtraq; parallela, ſit ipſi XY; [b] ideoq; eas coniungentes rectæ CP,KS, in eodem cum ipſis plano exiſtent. Totum igitur quadrilaterum CKSP, in vno erit plano. Quod ſi ex Q, & T, demittantur ad planum circuli ABCD, perpediculares, & connectantur rectæ QC,TK, oſtendemus ſimiliter CK,QT, eſſe parallelas; atque adeò ipſas PS,QT, inter ſe parallelas eſſe, cùm eidem CK, ſint parallelę; totumq; quadrilaterum PSTQ, in vno eſſe plano. Eadem ratione in vno erit plano quadrilaterum QTVR. [c] Eſt autem & triangulum RVO, in vno plano. Si igitur eadem conſtructio exhibeatur ſuper reliqua latera KL, LM, MD, ductis ſcilicet quadrantibus OL, OM, OD; necnon in reliquis tribus quartis, ac reliquo hemiſphærio, vt tota ſphæra maior repleatur quadrilateris, & triangulis, quæ ſimilia ſint prædictis inter quadrantes OC, OK, ſuper latus CK, conſtructis; inſcriptum erit in ſphæra maiori ſolidum polyedrum circumſcriptum dictis quadrilateris atque triangulis. Hoc ergo dico non tangere ſphæram minorem EFGH.

[a] 9 vndec. [b] 7. vndec. [c] 2. vndec.

DVCATVR enim ex I, ad planum CKSP, perpendicularis IZ, connectanturq; rectæ ZC, ZK. Cadere autē perpendicularem IZ, intra quadrilaterum CKSP, in ſcholio ſequēti oſtendemus. Quoniam igitur, ex defin. 3. lib. 11. anguli IZC, IZK, recti ſunt; [d] erit quadratum rectæ IC, quadratis rectarum IZ, ZC, & quadratum rectæ IK, quadratis rectarum IZ, ZK, æquale. Cùm ergo quadrata rectarum æqualium IC, IK, æqualia ſint, erunt & quadrata rectarum IZ, ZC, quadratis rectarum IZ, ZK, æqualia; Ac proinde dempto communi quadrato IZ, reliqua quadrata rectarum ZC, ZK, æqualia erunt, ideoq; & ipſæ rectæ ZC, ZK, æquales. Similiter oſtendemus rectas, quæ ex Z, ad PS, ducentur, æquales eſſe & inter ſe & rectis ZC, ZK. Quare circulus ex Z, ad interuallum ZC, deſcriptus per quatuor puncta C, K, S, P, tranſibit. Eademq; ratione circa reliqua quadrilatera PSTQ, QTVR, & triangulum RVO, circulos deſcribi poſſe, demonſtrabimus. Quoniam verò, vt poſtea oſtendemus, angulus CZK, obtuſus eſt; erit quadratum rectæ CK, maius quadratis rectarum ZC, ZK; ideoque cùm hæc quadrata æqualia ſint, maius erit quadratum rectæ CK, duplo quadrati rectæ ZC.

[d] 47. primi.

DVCATVR ex K, ad rectam AC, perpendicularis Kα. Cùm igitur AC, dupla ſit ipſius AI, & Aα, maior ſit, quàm AI, erit AC, minor duplo ipſius Aα. Quamobrem cùm ſit, [e] vt AC, ad Aα, ita rectangulum ſub AC, αC, ad rectangulum ſub Aα, αC, quòd baſes horum rectangulorum ſint AC, Aα, & eadem altitudo αC; erit quoque rectangulum ſub AC, αC, minus duplo rectanguli ſub Aα, αC. [f] Eſt autem rectangulum ſub AC, αC, æquale quadrato rectæ CK; & rectangulum ſub Aα, αC, æquale quadrato rectæ Kα; quòd recta CK, inter AC, αC, ſit media proportionalis; & recta Kα, inter Aα, αC, ex coroll. propoſ. 8. lib. 6. (ſi enim connecteretur recta AK, fieret triangulum rectangulum ACK.) Igitur & quadratum rectæ CK, minus erit duplo quadrati rectæ Kα. Ac propterea cùm quadratum rectæ CK, oſtenſum ſit maius eſſe duplo quadrati rectæ ZC; erit quadratum rectæ Kα, maius quadrato rectæ ZC. [g] Quoniam verò quadratum rectæ IC, æquale eſt quadratis rectarum IZ, ZC; & quadratum rectæ IK, quadratis rectarum Iα, αK: Suntq; æqualia quadrata rectarum æqualium IC, IK; Erunt & quadrata rectarum IZ, ZC, æqualia quadratis rectarum Iα, αK. Si ergo ex his demātur quadratum maius, nempe rectæ αK; & ex illis minus, videlicet rectæ ZC, erit reliquum quadratum rectæ IZ, maius quadrato reliquo rectæ Iα; ideoq; recta IZ, maior quàm recta Iα. Quapropter cùm punctum α, non tangat ſphæram minorem EFGH, quòd, per coroll. propoſ. præcedentis, recta Kα, tota ſit extra dictam ſphæram; multò minus punctum Z, longius diſtans, eandem ſphæram continget. Ac proinde cùm omnia alia puncta plani CKSP, longius abſint à ſphæra EFGH, quàm punctum Z, vt mox oſtendemus, non tanget planum CKSP, ſphæram EFGH.

[e] 1. ſexti. [f] 17. ſexti. [g] 47. primi.

SED & expeditius ex ipſa fere conſtructione figuræ oſtendemus, planum CKSP, non tangere ſphæram minorem FFGH, ſi prius ducatur recta Iγ, hoc modo. Quoniam ex cōſtructione oſtenſum fuit, rectam CK, minorem eſſe recta Cγ: [h] Eſt autem CK, maior quàm ZC, quòd angulus CZK, obtuſus ſit, vt mox demonſtrabitur; Multò maior erit Gγ, quàm ZC; Ac proinde quadratum rectæ Gγ, maius quadrato rectæ ZC. [i] Quia verò quadratum rectæ Iγ, æquale eſt quadratis rectarum IG, Gγ; & quadratum rectæ IC, quadratis rectarum IZ, ZC; ſunt autem quadrata rectarum Iγ, IC, æqualium æqualia; erunt & quadrata rectarum IG, Gγ, quadratis rectarū IZ, ZC, æqualia. Dempto ergo illinc quadrato rectæ Gγ, & hinc quadrato rectæ ZC; relinquetur quadratum rectæ IG, minus quadrato rectæ IZ; Ac propterea recta IG, minor, quàm IZ. Quam ob rem, cùm IG, ſit ſphæræ minoris EFGH, ſemidiameter; exiſtet punctum Z, extra eandem ſphæram; Et proinde, vt prius, planum CKSP, ſphæram EFGH, nequaquam continget.

[h] 19. primi. [i] 47. primi.

DVCATVR rurſus ex I, ad planum PSTQ, perpendicularis Iβ, eritq; β, centrum circuli circa PSTQ, deſcripti, vt demonſtratum eſt: Connexis autem rectis βP, IP, cùm angulus IβP, rectus ſit, ex tertia definitione libri vndecimi, [k] erit quadratū rectæ IP, æquale quadratis rectarū Iβ, βP. Quia verò & quadratum rectæ IC, (quod æquale eſt quadrato rectæ IP, ob æqualitatem rectarum IC, IP,) æquale eſt quadratis rectarum IZ, ZC; erunt quadrata rectarum Iβ, βP, quadratis rectarum IZ, ZC, æqualia; Eſt autem quadratum rectæ ZC, maius quadrato rectę βP, quòd & linea ZC, maior ſit, quàm linea βP, vt poſtea oſtendemus. Reliquum igitur quadratum rectæ Iβ, reliquo quadrato rectæ IZ, maius erit; ideoq; & linea Iβ, maior quàm linea IZ: Ac proinde multò magis punctum β, extra ſphæram EFGH, exiſtet, quàm punctum Z, propterea q;

[k] 47. primi.

multò minus planum P S T Q, quàm C K S P, tanget ſphæram minorem E F G H. Eodem modo demonſtrabimus, quòd neque reliqua plana ſphæram dictam contingere poſsint. Quocirca, duabus ſphæris circa idem centrum exiſtentibus, in maiori ſphæra ſolidum polyedrum inſcripſimus, quod non tangat minoris ſphæræ ſuperficiem. Quod erat faciendum.

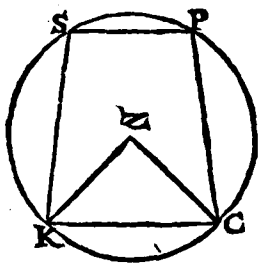
## COROLLARIVM.

*Ex iis, quæ demonſtrata ſunt, manifeſtum eſt, ſi in quauis alia ſphæra deſcribatur ſolidum polyedrum ſimile prædicto ſolido polyedro, proportionem polyedri in vna ſphæra ad polyedrum in altera ſphæra eſſe triplicatam eius, quam habent ſphærarum diametri. Nam ſi ex centris ſphærarum ad omnes angulos baſium dictorum polyedrorum rectæ linea ducantur, diſtribuentur polyedra in pyramides numero æquales, & ſimiles, quarum homologa latera ſunt ſemidiametri ſphærarum; vt conſtat, ſi intelligatur harum ſphærarum minor intra maiorem circa idem centrum deſcripta. Congruent enim ſibi mutuò lineæ rectæ ductæ à centris ad baſium angulos, ob ſimilitudinem baſium; Ac propterea pyramides efficientur ſimiles. Quare cùm ſingulæ pyramides in vna ſphæra ad ſingulas pyramides illis ſimiles in altera ſphæra habeant proportionem triplicatam laterum homologorum, hoc eſt, ſemidiametrorum ſphærarum, vt conſtat ex coroll. propoſ. 8. huius lib. Sint autem, vt vna pyramis ad vnam pyramidem, ita omnes pyramides, hoc eſt, ſolidum polyedrum ex ipſis compoſitum, ad omnes pyramides, id eſt, ad ſolidum polyedrum ex ipſis conſtitutum. Habebit quoq; polyedrum vnius ſphæræ ad polyedrum alterius ſphæræ proportionem triplicatam ſemidiametrorum, atque adeò diametrorũ ſphærarum,* [a] *cùm ſemidiametri atq; diametri eandem habeãt proportionẽ.*

a 15. quinti.

## SCHOLIVM.

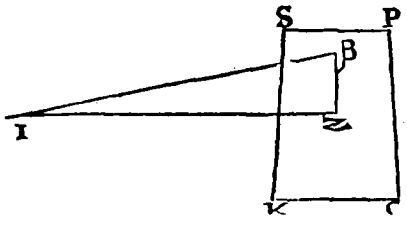
*QVONIAM verò ne nimis longa demonſtratio fieret, nonnulla in ea aſſumpta fuerunt, vt vera; quæ tamen nondum ſunt demonſtrata; idcirco ea nunc breuiter à nobis erunt demonſtranda.*




b 14. quinti

c 28. tertij.

PRIMVM itaq; oſtendendum eſt, punctum Z, cadere intra quadrilaterum C K S P, & angulum C Z K, eſſe obtuſum. Quod vt commodius fiat, deſcribatur circa dictum quadrilaterum ex centro Z, circulus. Quoniam igitur in figura ſuperiori, eſt vt I K, ad K C, ita I Y, ad Y X, (quòd per coroll. propoſ. 4. lib. 6. triangula I C K, I X Y, ſimilia ſint.) Eſt autem I K, maior quã I Y; [b] erit & K C, maior quàm Y X. Cùm igitur Y X, æqualis ſit oſtenſæ ipſi S P, erit quoq; K C, maior quàm S P; Ac propterea in hac figura, arcus C K, maior erit arcu S P, ex ſcholio propoſ. 28. lib. 3. [c] Quare cùm arcus C P, K S, arcui C K, ſint æquales, quòd & lineæ C P, K S, ipſi K C, lineæ ſint æquales demonſtratæ; (ſubtenduntur enim arcubus circulorum æqualibus, vt ex conſtructione figuræ ſuperioris conſtat) erunt quoque arcus C P, K S, arcu P S, maiores; Atq; idcirco quilibet arcuum C K, C P, K S, quadrantem circuli C K S P, excedet; atque à ſemicirculo ſuperabitur, ac proinde multò magis ſegmentum S P, minus erit ſemicirculo. Ex quo fit, centrum Z, non eſſe in illis ſegmentis, ſed extra, nimirum intra quadrilaterum C K S P. Eadem ratione oſtendemus, perpendiculares ex I, ad plana aliorum quadrilaterorum demiſſas, qualis eſt I B, cadere intra quadrilatera; necnon & perpendicularem ex I, ad triangulum O R V, ductam, cadere intra ipſum. Quia igitur arcus C K, quadrante maior eſt; angulus C Z K, obtuſus erit, nempe recto maior, cùm angulo recto in centro ſubtendatur quadrans circuli, vt perſpicuum eſt ex ſcholio propoſ. 27. lib. 3.




d 19. primi

SECVNDO demonſtrandum eſt, omnia alia puncta quadrilateri C K S P, longius à centro I, abeſſe, quàm punctum Z. Sumatur enim quodcunque aliud punctum θ, in quadrilatero C K S P, & adiungantur rectæ I θ, Z θ. Quoniam ergo angulus I Z θ, rectus eſt, ex defin. 3. lib. 11. [d] Erit latus illi oppoſitum I θ, maius latere I Z, quod minori angulo I θ Z, nimirum acuto, opponitur; Ac propterea punctum θ, longius à centro I, diſtat, quàm punctum Z. Simili argumento concludemus, omnia alia puncta longius diſtare.

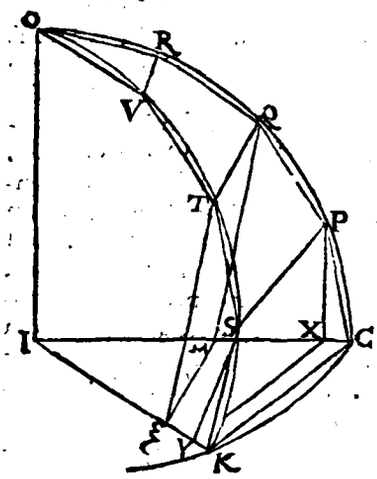
TERTIO, ac vltimo probandum eſt, rectam Z C, maiorem eſſe recta B P. Quod vt aptius fiat, demonſtrandum prius erit, rectam P S, maiorem eſſe recta Q T. Deſcribatur igitur pars ſuperioris figuræ, ea videlicet, quæ continetur ſemidiametris I C, I K, I O, & quadrantibus O C, O K, &c. Demittantur deinde ex Q, & T, ad planum circuli A B C D, in quo eſt triangulum I C K, perpendiculares Q μ, T ξ, [e] quæ in communes ſectiones I C, I K, cadent, [f] eruntq; inter ſe ſe parallelæ, vt de rectis P X, S Y, dictum eſt. Quod ſi adiungatur recta μ ξ, erunt Q T, μ ξ, parallelæ & æquales, quemadmodum oſtenſum fuit,

e 38. vndecimi.

f 6. vndec.

*fuit, parallelas esse & æquales PS, XT.* [a] *Quia verò μξ, ipsi CK, parallela est; quòd latera IC, IK, proportionaliter sint sectа in μ, & ξ, veluti diximus de rectа XT;* [b] *erunt quoque μξ, XT, parallelæ. Quare erit, ex corollario propos. 4. lib. 6. vt IY, ad IX, ita Iξ, ad ξμ: Est autem IY, maior quàm Iξ.* [c] *Igitur & YX, maior erit quàm ξμ; Ac proinde & PS, quæ æqualis est ipsi XT, maior erit quàm QT, quæ æqualis est ipsi ξμ.*

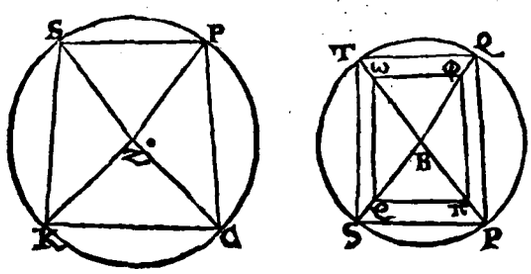
a 2. sexti.
b 30. primi
c 14. quinti




*Hoc ergo demonstrato, describantur ex centris Z, β, circa quadrilatera CKSP, PSTQ, circuli, egrediantur q3 è centris rectæ ZC, ZK, ZS, ZP; βP, βS, βT, βQ. Si igitur ZC, non credatur maior, quàm βP, erit vel æqualis, vel minor. Sit primùm æqualis. Quia ergo latera ZK, ZC, æqualia ponuntur lateribus βS, βP, & basis KC, maior est basi PS;* [d] *erit angulus KZC, maior angulo SβP: Eadem ratione maior erit angulus SZP, angulo TβQ. At quoniam bases KS, CP, basibus ST, PQ, sunt æquales;* [e] *erunt anguli KZS, CZP, angulis SβT, PβQ, æquales. Igitur quatuor anguli ad Z, maiores erunt quatuor angulis ad β: Sunt autem & æquales, cùm tam hi, quàm illi quatuor rectis sint æquales, ex coroll. 2. propos. 15. lib. 1. quod est absurdum. Non igitur æqualis est recta ZC, rectæ βP.*

d 25. primi
e 8. primi.

*Sit deinde ZC, minor, quàm βP. Et abscindantur βπ, βρ, βω, βφ, ipsis ZC, ZK, ZS, ZP, æquales, connectantur q3 rectæ πρ, ρω, ωφ, φπ,*

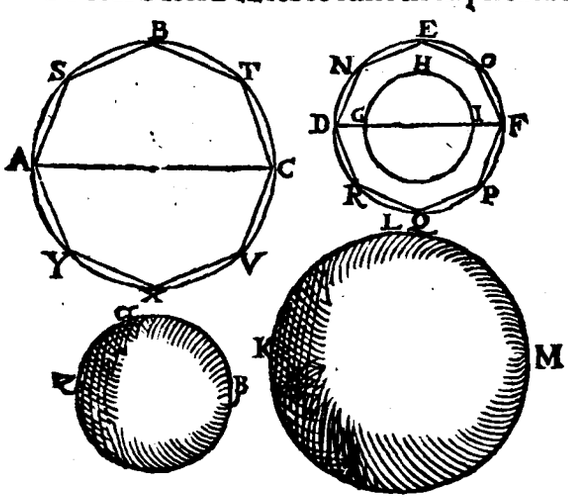



[f] *quæ parallelæ erunt rectis PS, ST, TQ, QP, eò quòd recta ex centris sectæ sunt proportionaliter; ac proinde, ex coroll. propos. 4. lib. 6. erit vt βS, ad SP, ita βρ ad ρπ. Cùm ergo βS, maior sit quàm βρ, & erit & SP, maior quàm ρπ. Eademq3 ratione maiores erunt ST, TQ, QP, rectis ρω, ωφ, φπ; Ac propterea cùm PS, minor sit, quàm CK, & ST, PQ, æquales rectis KS, CP; & TQ, minor quàm PS, erunt rectæ πρ, ρω, ωφ, φπ, minores rectis CK, KS, SP, PC. Quare cùm rectæ βπ, βρ, βω, βφ, rectis ZC, ZK, ZS, ZP, sint æquales;* [h] *erunt anguli ad Z, maiores angulis ad β: Sunt autem & æquales. quòd tam illi, quàm hi sint quatuor rectis æquales, ex coroll. 2. propos. 15. lib. 1. Quod est absurdum. Non igitur minor est recta ZC, quàm βP: Sed neque æqualis est ostensa; Maior igitur est. Quod erat ostendendum.*

f 2. sexti.
g 14 quinti
h 25. primi.

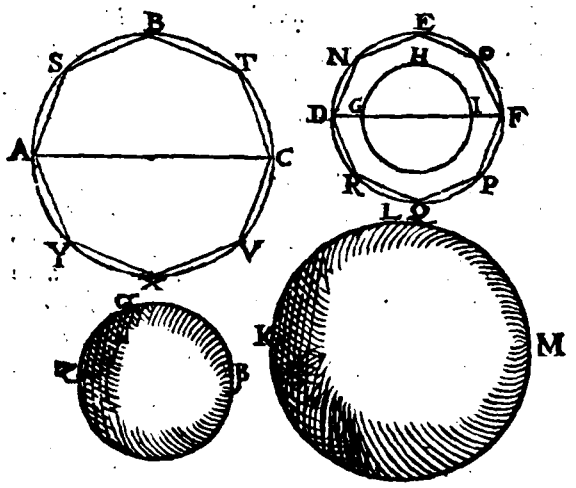
## THEOR. 16. PROPOS. 18. 15.

**SPHAERAE inter se sunt in triplicata ratione suarum diametrorum.**




SINT duæ sphæræ ABC, DEF, quarum diametri AC, DF. Dico sphæram ABC, ad sphæram DEF, habere proportionem triplicatam diametri AC, ad diametrum DF. Si enim hoc non concedatur, habebit sphæra ABC, ad aliam sphęram GHI, minorem, vel KLM, maiorem, quàm DEF, triplicatam proportionem diametri AC, ad diametrum DF. Habeat primùm sphæra ABC, ad sphæram GHI, minorem sphæra DEF, proportionem triplicatam diametri AC, ad diametrum DF: intelligaturque sphæra GHI, concentrica sphæræ DEF. [a] Inscribatur in sphæra maiori DEF, polyedrum DNEOFPQR, non tangens minorem sphæram GHI; Atque huic simile polyedrum ASBTCVXY, inscribatur in sphæra ABC. Quoniam igitur ponitur proportio sphæræ ABC, ad sphæram GHI, triplicata proportionis diametri AC, ad diametrum DF: Est autem, per coroll. præcedentis propos. & proportio polyedri ASBTCVXY, ad polyedrum DNEOFPQR, triplicata proportionis diametri AC, ad diametrum DF; Erit vt sphæra ABC, ad sphæram GHI, ita polyedrum ASBTCVXY, ad polyedrum DNEOFPQR. Quare cùm sphæra ABC, maior sit polyedro ASBTCVXY, [b] erit & sphæra GHI, maior polyedro DNEOFPQR, pars toto. Quod est absurdum. Non igitur habebit sphęra ABC, ad sphæram GHI, minorem sphæra DEF, proportionem triplicatam diametri AC, ad diametrum DF.

a 17. duodecimi.
b 14. quinti.




HABEAT ſecundò ſphęra ABC, ad ſphęram KLM, maiorem ſphæra DEF, proportionem triplicatam diametri AC, ad diametrum DF. Cùm igitur, ex coroll. præcedentis propoſ. & polyedrum ASBTCVXY, ad polyedrum DNEOFPQR, habeat proportionem triplicatam diametri AC, ad diametrum DF; Erit vt ſphæra ABC, ad ſphæram KLM, ita polyedrum ASBTCVXY, ad polyedrum DNEOFPQR: Et conuertendo, vt ſphæra KLM, ad ſphæram ABC, ita polyedrum DNEOFPQR, ad polyedrum ASBTCVXY: Eſt autem ex dicto coroll. præcedentis propoſitionis polyedrum DNEOFPQR, ad polyedrum ASBTCVXY, in triplicata proportione diametri DF, ad diametrum AC. Igitur & ſphæra KLM, ad ſphæram ABC, erit in triplicata proportione diametri DF, ad diametrum AC. Ponatur vt ſphæra KLM, ad ſphæram ABC, ita ſphæra DEF, ad aliam ſphæram Z. α. β. Habebit igitur & ſphæra DEF, ad ſphæram Z. α. β, proportionem triplicatam diametri DF, ad diametrum AC. Et quia ſphæra KLM, maior ponitur, quàm ſphæra DEF, erit quoque ſphæra ABC, maior, quàm ſphæra Z. α. β. Quapropter ſphæra DEF, ad ſphæram Z. α. β, minorem ſphæra ABC, proportionem habet triplicatam diametri DF, ad diametrum AC. Quod eſt abſurdum. Oſtenſum enim eſt, non poſſe ſphæram ad ſphæram alia ſphæra minorem, proportionem habere triplicatam diametrorum. Non ergo habebit ſphæra ABC, ad ſphæram KLM, maiorem ſphæra DEF, proportionem triplicatam diametri AC, ad diametrum DF. Sed neque ad minorem habet, vt demonſtratum eſt: Igitur habebit ad ſphæram DEF, proportionem triplicatam diametri AC, ad diametrum DF. Sphæræ itaque inter ſe ſunt in triplicata ratione ſuarum diametrorum. Quod erat oſtendendum.

## COROLLARIVM.

*HINC fit, ita eſſe ſphæram ad ſphæram, vt polyedrum in illa deſcriptum ad polyedrum ſimile in hac deſcriptum. Quia tam ſphæra ad ſphæram, quàm polyedrum ad polyedrum habet triplicatam diametrorum proportionem, vt demonſtratum eſt.*

FINIS ELEMENTI DVODECIMI.

---

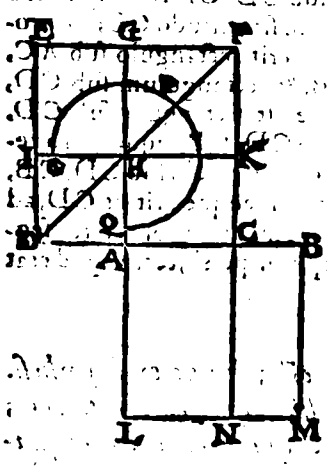
EVCLIDIS

# EVCLIDIS ELEMENTVM TERTIVMDECIMVM:

## & Solidorum tertium.

## THEOR. 1. PROPOS. 1.

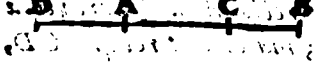
**Si recta linea secundum extremam & mediam rationem secetur, maius segmentum assumens dimidiam totius, quintuplum potest eius, quod à dimidia totius describitur, quadrati.**




Secetur recta AB, in C, extrema ac media ratione, sitq; maius segmentum AC. Producta autem BA, ad D, sit AD, dimidia totius AB. Dico quadratum rectæ CD, quintuplum esse quadrati rectæ AD. Describatur enim super CD, quadratum CE, in quo ducta diametro DF, ducatur AG, ipsi DE, parallela, secans diametrum in H, puncto, per quod ducatur IK, parallela ipsi CD. Producta deinde GA, perficiatur quadratũ AM, protrahaturq; FC, ad N. erunt; ex coroll. propos. 4. lib. 2. AI, KG, quadrata rectarum AD, AC. [a] Quia ergo est vt AB, ad AC, ita AC, ad CB; [b] erit rectangulum CM, sub AB, CB, æquale ipsi KG, quadrato rectæ AC. Deinde cùm ponatur AB, dupla ipsius AD, sitque AL, ipsi AB; & AH, ipsi AD, æqualis; erit quoque AL, ipsius AH, dupla; [c] Est autem vt AL, ad AH, ita rectangulum AN, ad AK, rectangulum. Duplum igitur est AN, ipsius AK. [d] Quoniam autem AK, ipsi IG, est æquale: erit AN, æquale duobus AK, IG. Additis igitur æqualibus CM, KG; erit quadratum AM, gnomoni OPQ, æquale. Quare cùm quadratum AM, quadruplum sit quadrati AI, ex scholio propos. 4. lib. 2. quòd linea AB, dupla ponatur lineæ AD; erit & gnomon OPQ, eiusdem quadrati AI, quadruplus; Ac propterea, si gnomoni OPQ, addatur ipsum quadratum AI, quintuplum efficietur quadratum CE, quadrati AI.

[a] 3. defin. sexti.
[b] 17. sexti.
[c] 1. sexti.
[d] 43. primi.

Aliter. Ex scholio propos. 4. lib. 2. quadratum rectæ AB, quadruplum est quadrati rectæ AD, quòd linea AB, dupla lineæ AD, ponatur. [e] Est autem quadratum rectæ AB, æquale rectangulis sub AB, AC, & sub AB, BC, comprehensis; Et rursus, quod sub AB, AC, æquale est ei, quod sub AD, AC, bis. (sicut enim AB, ipsius AD, est dupla, [f] ita quoque erit rectangulum sub AB, AC, rectanguli sub AD, AC, duplum, cùm vtriusq; rectanguli eadem sit altitudo AC. Ac propterea rectangulum sub AD, AC, bis sumptum æquale erit rectangulo sub AB, AC.) [g] Quod verò sub AB, BC, æquale est quadrato rectæ AC, cùm sit vt AB, ad AC, ita AC, ad CB. Igitur quadratum rectæ AC, vnà cum rectangulo sub AD, AC, bis; quadruplum quoq; erit quadrati rectæ AD; Ac proinde quadrata rectarum AC, AD, vnà cum rectangulo sub AD, AC, bis, quintupla erunt quadrati eiusdem rectæ AD. [h] Quocirca cùm quadratum rectæ CD, æquale sit quadratis rectarum AC, AD, vnà cum rectangulo sub AD, AC, bis; Erit & quadratum rectæ CD, quadrati rectæ AD, quintuplum. Si recta igitur linea secundùm extremam & mediam rationem secetur, &c. Quod erat demonstrandum.

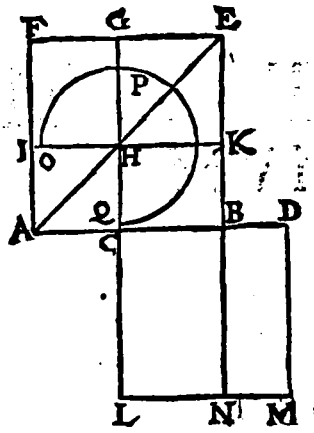



[e] 2. secundi.
[f] 1. sexti.
[g] 17. sexti.
[h] 4. secundi

## THEOR. 2. PROPOS. 2.

**Si recta linea sui ipsius segmenti quintuplum possit; Duplæ prædicti segmenti extrema ac media ratione sectæ, maius segmentum reliqua pars est eius, quæ à principio, rectæ.**

Divisa sit recta AB, in C, positq; quintuplum segmenti AC; sumatur autem ipsius AC, dupla CD, quæ, vt post ostendemus, maior erit reliquo segmento BC. Dico si CD, secetur extrema




ac media ratione, maius segmentum esse CB, reliquam partem prioris lineæ. Describatur enim super AB, quadratum BF, in quo ducta diametro AE, ex C, ducatur ipsi AF, parallela CG, secans diametrum in puncto H, per quod agatur IK, parallela ipsi AB. Producta deinde GC, perficiatur quadratum CM, protrahaturq; EB, ad N. Erunt ex coroll. propos. 4. lib. 2. CI, KG, quadrata rectarum AC, CB. Quia igitur quadratum BF, quintuplum ponitur quadrati CI; Si tollatur quadratum CI, relinquetur gnomon OPQ, eiusdem quadrati CI, quadruplus. Est autem & quadratum CM, quadruplum quadrati CI, ex scholio propos. 4. lib. 2. quòd recta CD, dupla sit rectæ AC. Igitur gnomon OPQ, quadrato CM, æqualis erit. Rursus quoniam CD, ponitur ipsius AC, dupla; estq; LC, ipsi CD; & CH, ipsi AC, æqualis; erit & LC, ipsius CH, dupla. [a] Cùm igitur sit vt LC, ad CH, ita rectangulum LB, ad rectangulum CK; erit quoque illud huius duplum: [b] Est autem CK, ipsi HF, æquale. Æquale igitur est LB, ipsis CK, HF; Ac proinde & reliquum quadratum KG, reliquo rectangulo BM. Quoniam ergo sunt tres rectæ CD, CB, BD, estque rectangulum BM, sub CD, BD, comprehensum æquale ipsi KG, quadrato rectæ CB: [c] Erit vt CD, ad CB, ita CB, ad BD. Quamobrem, ex definitione, recta CD, secta est in B, extrema ac media ratione, estque maius segmentum CB.

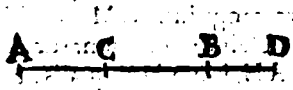
a 1. sexti.

b 43. primi.

c 17. sexti.

ALITER. Quoniam quadratum rectæ AB, quintuplum ponitur quadrati rectæ AC; [d] estq; quadratum rectæ AB, æquale quadratis rectarum CB, AC, vnà cum rectangulo sub AC, CB, bis. Erunt & quadrata rectarum CB, AC, vnà cùm rectangulo sub AC, CB, bis, quintuplum quadrati rectæ AC. Dempto igitur quadrato rectæ AC, relinquetur quadratum rectæ CB, & rectangulum sub AC, CB, bis, quadruplum eiusdem quadrati rectæ AC; Est autem & quadratum rectæ CD, eiusdem quadrati rectæ AC, quadruplum, ex scholio propos. 4. lib. 2. Æquale igitur est quadratum rectæ CB, & rectangulum sub AC, CB, bis, quadrato rectæ CD. Cùm ergo rectangulum sub AC, CB, bis, æquale sit rectangulo sub CD, CB; (sicut enim recta CD, dupla est rectæ AC, [e] ita quoq; duplum erit rectangulum sub CD, CB, rectanguli sub AC, CB; cùm vtriusque rectanguli eadem sit altitudo CB; Ac propterea rectangulum sub CD, CB, æquale erit rectangulo sub AC, CB, bis.) Erit & quadratum rectæ CB, & rectangulum sub CD, CB, quadrato rectæ CD, æquale; [f] At quadratum rectæ CD, æquale est rectangulis sub CD, CB, & sub CD, BD. Igitur quadratum rectæ CB, & rectangulum sub CD, CB, æquale erit rectangulis sub CD, CB, & sub CD, BD. Ac proinde dempto communi rectangulo sub CD, CB, relinquetur quadratum rectæ CB, æquale rectangulo sub CD, BD; [g] ideoque erit vt CD, ad CB, ita CB, ad DB. Quare ex defin. recta CD, secta est in B, extrema ac media ratione, estq; segmentum maius CB. Si igitur recta linea suiipsius segmenti quintuplum possit, &c. Quod erat demonstrandum.

d 4. secundi




e 1. sexti.

f 2. secundi

g 17. sexti.

## LEMMA.

*QVOD autem recta CD, maior sit necessariò, quàm CB, ita ostendemus ex hypothesi. Quia quadratum rectæ CD, quadruplum est, ex scholio propos. 4. lib. 2. quadrati rectæ AC; Addito quadrato rectæ AC, erunt duo quadrata rectarũ CD, AC, quintupla eiusdem quadrati rectæ AC. Est autem quadratum rectæ AD, maius quadratis rectarũ AC, CD,* [a] *cum æquale sit quadratis rectarum AC, CD, vnà cùm rectangulo sub AC, CD, bis. Igitur quadratum rectæ AD, maius quoque erit quintuplo quadrati rectæ AC; Ac propterea maius quadrato rectæ AB, quod quintuplum ponitur eiusdem quadrati rectæ AC. Quare recta AD, maior erit, quàm recta AB; ideoq; dempta communi AC; maior erit reliqua CD, quàm reliqua CB. Quod est propositum.*

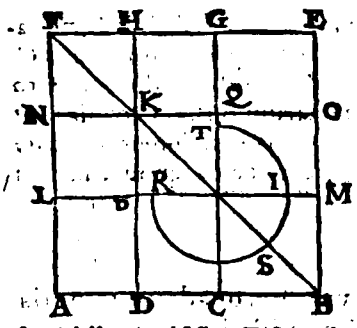
a 4. secundi.

## 3. THEOR. 3. PROPOS. 3.

SI recta linea secundùm extremam & mediam rationem secetur; minus segmentum assumens dimidiam maioris segmenti, quintuplum potest eius, quod à dimidia maioris segmenti describitur, quadrati.

SECETVR recta AB, in C, extrema ac media ratione, cuius maius segmentum AC, bifariam diuidatur in D. Dico quadratum rectæ BD, quintuplum esse quadrati rectæ CD. Describatur enim super AB, quadratum AE, in quo diameter BF. Deinde ex C, D, ducantur ipsis AF, BE, parallelæ CG, DH, secantes diametrum in I, K, punctis, per quæ agãtur ipsis AB, EF, parallelæ LM, NO, quæ secent rectas CG, DH, in P, Q. Eruntq; ex coroll. propos. 4. lib. 2. LG, PQ, DO, quadrata rectarum AC, CD, BD. Quoniam igitur recta AC, dupla est rectæ CD, erit ex scholio eiusdem propos. quadratum LG, quadruplum quadrati PQ. Est autem rectangulum CE, æquale

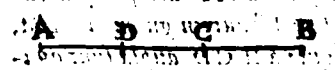
quadrato




quadrato L G. (Nam cùm sit vt A B, ad A C, ita A C, ad C B, [a] erit rectángulum sub A B, C B, nempe C E, æquale quadrato rectæ A C, nimirum ipsi L G.) Igitur & C E, quadruplum erit quadrati P Q. Quia verò æqualia sunt quadrata N H, P Q, ob æqualitatem rectarum A D, C D; erunt earum latera H K, I Q, æqualia; [b] ac proinde rectæ E O, O M, ipsis oppositæ æquales erunt. [c] Quare rectangula I O, Q E, æqualia erunt: [d] Est autem I O, ipsi I D, æquale, Ergo & Q E, eidem I D, æquale erit; Ac proinde, addito communi rectangulo C O; totus gnomon R S T, rectángulo C E, erit æqualis. Cùm igitur C E, ostensum sit quadruplum quadrati P Q; erit etiá gnomon R S T, eiusdem quadrati P Q, quadruplus: Ac propterea addito quadrato P Q, erit quadratú D O, ex recta B D, quintuplú quadrati P Q, ex recta C D.

[a] 17. sexti. [b] 34. primi. [c] 36. primi. [d] 43. primi.

ALITER. Cùm A C, diuisa sit bifariam in D, & ei addita C B; [e] erit rectangulum sub A B, B C, vnà cum quadrato rectæ C D, æquale quadrato rectæ B D. At rectangulum sub A B, B C, quadruplum est quadrati rectæ C D; (Nam cùm sit, vt A B, ad A C, ita A C, ad C B; [f] erit rectangulum sub A B, B C, æquale quadrato rectæ A C: quod cùm, ex scholio propos. 4. lib. 2. quadruplum sit quadrati rectæ C D; erit & rectangulum sub A B, B C, quadruplum eiusdé quadrati rectę C D.) Ac propterea rectangulum sub A B, B C, vnà cum quadrato rectæ C D, quintuplum quadrati rectæ C D. Igitur & quadratum rectæ B D; quintuplum erit quadrati rectæ C D. Si recta ergo linea secundùm extremam & mediam rationem secetur; minus segmentum assumens dimidiam maioris segmenti, quintuplum potest eius, quod à dimidia maioris segmenti describitur, quadrati. Quod erat ostendendum.




[e] 6. secundi. [f] 17. sexti.

## SCHOLIVM.

*CONVERSVM huius theorematis demonstrabimus quoque cum Campano, ad hunc modum.*

Si recta inæqualiter secetur, & minus segmentum assumens dimidium maioris segmenti quintuplum possit eius, quod à dimidia maioris segmenti describitur, quadrati; Recta illa linea secta erit extrema & media ratione.

*SIT recta A B, diuisa inæqualiter in C, cuius maius segmentum A C, bifariam sectum sit in D; sitq; quadratũ rectæ B D, quintuplum quadrati rectæ C D. Dico rectam A B, diuisam esse in C, extrema ac media ratione. Repetita enim figura priore huius propos. erit quadratum L G, rectæ A C, quadruplum quadrati P Q, rectæ C D, ex scholio propos. 4. lib. 2. Est autem & gnomon R S T, eiusdem quadrati P Q, quadruplus. (cùm enim quadratum D O, rectæ B D, quintuplum ponatur quadrati P Q, ex recta C D; dempto quadrato P Q, relinquetur gnomon R S T, eiusdem quadrati P Q, quadruplus) Igitur gnomon R S T, æqualis erit quadrato L G: At gnomoni R S T, æquale est rectangulum C E, vt suprà ostensum est. Ergo & quadrato L G, rectæ A C, æquale erit idem rectangulum C E, sub A B, B C, comprehensum:* [a] *Ac proinde erit, vt A B, ad A C, ita A C, ad C B. Quocirca, ex definitione, secta erit A B, in C, extrema ac media ratione. Quod est propositum.*

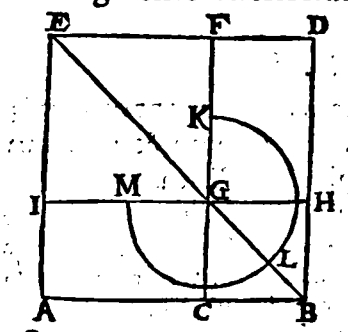
[a] 17. sexti.

*ALITER. Cùm A C, diuisa sit bifariam in D, & ei addita C B;* [b] *erit rectangulum sub A B, B C, vnà cũ quadrato rectæ C D, æquale quadrato rectæ B D; Ac propterea cùm quadratũ ex recta linea B D, descriptũ, quintuplum ponatur quadrati ex recta C D, descripti; erit & rectangulũ sub rectis lineis A B, B C, descriptũ, vnà cum quadrato rectæ C D, quintuplum eiusdem quadrati rectæ C D. Quare ablato quadrato rectæ C D; rectangulum sub A B, B C, quadruplum erit quadrati rectæ C D: Est autem eiusdem quadrati rectæ C D, quadruplum quadratum rectæ A C, ex scholio propos. 4. lib. 2. Igitur quadrato rectæ A C, æquale est rectangulum sub A B, B C.* [c] *Quamobrem erit, vt A B, ad A C, ita A C, ad C B; Ac proinde secta A B, in C, extrema ac media ratione, ex definitione.*

[b] 6. secundi. [c] 17. sexti.

## THEOR. 4. PROPOS. 4. 5.

Si recta linea secundùm extremam & mediam rationem secetur; Quod à tota, quodq; à minore segmento, simul vtraque quadrata, tripla sunt eius, quod à maiore segmento describitur quadrati.




SECETVR recta A B, in C, extrema ac media ratione, sitq; segmentum maius A C, & minus C B. Dico quadrata rectarum A B, B C, simul tripla esse quadrati rectæ A C. Describatur enim super A B, quadratum A D, in quo ducta diametro B E, ducatur ex C, ipsi B D, parallela C F, secans diametrum in puncto G, per quod agatur H I, parallela ipsi A B. Eruntq; C H, I F, quadrata rectarum B C, A C, ex coroll. propos. 4. lib. 2. Quoniam igitur est, vt A B, ad A C, ita A C, ad C B; [a] erit rectangulum sub A B, B C, nempe A H, æquale ipsi I F, quadrato rectæ A C. Cùm ergo A H, æquale sit ipsi C D; erit gnomon K L M, vnà cum quadrato C H, duplus quadrati I F; Ac proinde, addito quadrato I F, erit quadratum A D, rectæ A B, vnà cum quadrato C H, rectæ B C, eiusdem quadrati I F, rectæ A C, triplum.

[a] 17. sexti.

a 17. sexti. ALITER. Quoniam est, vt AB, ad AC, ita AC, ad CB: a erit rectangulum sub AB, BC, æquale quadrato rectæ AC: Atq; adeò rectangulum sub AB, BC, bis, vnà cum quadrato rectæ AC, b 7. secundi triplum quadrati rectæ AC. b Sunt autem quadrata rectarum AB, BC, simul æqualia quadrato rectæ AC, vnà cum rectangulo sub AB, BC, bis. Igitur & quadrata rectarum AB, BC, tripla sunt quadrati rectæ AC. Quocirca si recta linea secundùm extremam & mediam rationem secetur: Quod à tota, quodq; à minore segmento, simul vtraque quadrata, tripla sunt eius, quod à maiori segmento describitur, quadrati. Quod erat demonstrandum.

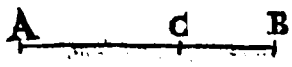
*SCHOLIVM.*

*CONVERSVM etiam huius verum est, videlicet.*

SI recta linea inæqualiter secetur, sitque quadratum totius, vnà cum quadrato minoris segmenti, triplum quadrati ex maiore segmento descripti; Recta illa linea extrema ac media ratione secabitur.

*SECTA sit recta AB, inæqualiter in C, ita vt quadratum totius AB, & quadratum minoris segmenti BC, vtraq; simul tripla sint quadrati maioris segmenti AC. Dico rectam AB, sectam esse extrema ac media ratione. Constructa enim figura, vt prius; cùm quadrata AD, CE, tripla sint quadrati IF; dempto quadrato IF, erit gnomon KLM, vnà cum quadrato CH, duplus eiusdem quadrati IF. Est autem gnomon KLM, vnà cum quadrato CH, æqualis duobus rectangulis AH, CD. Igitur & rectangula AH, CD, dupla sunt quadrati IF; Ac propterea cùm æqualia sint AH, & CD; erit AH, ipsi IF, æquale. Quapropter cùm rectan-*
a 17. sexti. *gulum AH, sub AB, BC, æquale sit quadrato IF, rectæ AC; a erit vt AB, ad AC, ita AC, ad CB; Ac proinde AB, diuisa erit in C, extrema & media ratione.*

b 7. secũdi. *ALITER. Cùm quadrata rectarum AB, BC, tripla sint quadrati rectæ AC; b Sint verò quadrata rectarum AB, BC, æqualia quadrato rectæ AC, & rectangulo sub AB, BC, bis;*

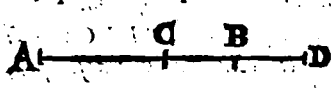



*erit & quadratum rectæ AC, vnà cum rectangulo sub AB, BC, bis, triplum quadrati rectæ AC. Dempto ergo quadrato rectæ AC, relinquetur rectangulum sub AB, BC, bis, duplum quadrati rectæ AC; Et proinde rectangulum sub AB, BC, semel, æquale qua-*
c 17. sexti. *drato rectæ AC. c Quare, vt prius, erit vt AB, ad AC, ita AC, ad CB; ideoq; AB, in C, secta erit extrema ac media ratione.*

*Ex Francisco Maurolyco demonstrabimus quoquè theorema, quod sequitur.*

SI recta linea secundùm extremam & mediam rationem secetur, tota linea assumens minus segmentum, quintuplum potest eius, quod à maiori segmento describitur quadrati. Et si recta linea inæqualiter secetur, totaque assumens minus segmentum possit quintuplum eius, quod à maiori segmento describitur, quadrati: Recta illa linea secundùm extremam & mediam rationem secta est.

*SIT primùm recta AB, secta in C, extrema ac media ratione, cui addatur recta BD, minori segmento*
d 8. secũdi. *BC, æqualis. Dico quadratum ex AD, quintuplum esse quadrati ex AC, maiore segmẽto. d Quoniam enim*




e 17. sexti. *quadratum ex AD, æquale est rectangulo sub AB, BC, quater contento, vnà cum quadrato ex AC: e Rectangulum autem sub AB, BC, æquale est quadrato ex AC; (quòd AB, AC, CB, sint cõtinuè proportionales.) erit rectangulum sub AB, BC, quater, quadruplum quadrati ex AC; atque adeò rectangulum sub AB, BC, quater vnà cum quadrato ex AC, quintuplum quadrati ex AC. Igitur & quadratum ex AD, (quod æquale ostensum est rectangulo sub AB, BC, quater, vnà cum quadrato ex AC,) eiusdem quadrati ex AC, quintuplum erit. quod est propositum.*

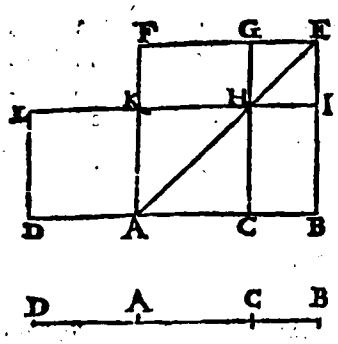
*SIT deinde recta AB, secta inæqualiter in C, cui addatur recta BD, minori segmento BC, æqualis, sitq; quadratum ex AD, quadrati ex AC, maiori segmento quintuplum. Dico AB, in C, sectam esse extrema ac*
f 8. secũdi. *media ratione. f Quoniam enim quadratũ ex AD, æquale est rectangulo sub AB, BC, quater, vnà cùm quadrato ex AC; erit quoque rectangulum sub AC, BC, quater, vnà cum quadrato ex AC, quintuplum quadrati ex AC; ac propterea rectangulum sub AB, BC, quater, quadruplum quadrati ex AC; hoc est, rectan-*
g 17. sexti. *gulum sub AB, BC, æquale quadrato ex AC. g Igitur erit vt AB, ad AC, ita AC, ad CB: Ac proinde AB, in C, secta est extrema & media ratione. Quod est propositum.*

## 4. THEOR. 5. PROPOS. 5.

SI recta linea secundùm extremam & mediam rationem secetur; apponaturq; ei æqualis maiori segmento: Tota recta linea secundùm extremam & mediam rationem secatur, & maius segmentum est, quæ à principio recta linea.

SECETVR recta AB, in C, extrema ac media ratione, sitq; maius segmentum AC, & adiiciatur ei in rectum AD, æqualis maiori segmento AC. Dico rectam BD, secari in A, extrema ac media ratione, essèq; maius segmentum AB. Describatur enim super AB, quadratum BF, in quo ducta diametro AE, ducatur ex C, ipsi BE, parallela CG, secans diametrum in H, puncto, per quod agatur ipsi BD, parallela IK, & ex D, ducatur ipsi AF, parallela DL, occurrens ipsi IK, productæ in L. Eruntque ex coroll. propos. 4. lib. 2. CK, IG, quadrata rectarum AC, BC. Quoniam igitur est

vt AB,




vt AB, ad AC, ita AC, ad CB; [a] Erit rectangulum IF, contentum sub AB, BC, æquale quadrato CK, rectæ AC. [b] Est autem CK, ipsi AL, æquale. Igitur IF, æquale erit ipsi AL; additoq; communi BK, erit rectangulum BL, contentum sub BD, DA, æquale quadrato BF, rectæ AB; [c] Ac proinde erit vt BD, ad AB, ita AB, ad DA. Quare BD, secatur in A, extrema ac media ratione, estque maius segmentum AB. a 17. sexti. b 36. primi. c 17. sexti.




ALITER. Quoniam est vt AB, ad AC, hoc est, ad AD, ita AC, ad CB; Erit conuertendo vt DA, ad AB, ita BC, ad CA; & componendo vt DB, ad AB, ita AB, ad CA, hoc est, ad AD. Secta igitur est BD, in A, extrema ac media ratione. Itaque si recta linea secundùm extremam & mediam rationem secetur, apponaturq; ei æqualis maiori segmento: tota recta linea, &c. Quod erat demonstrandum.

## SCHOLIVM.

*SIMILITER cum Campano & hoc demonstrabimus.*

Si recta linea secetur extrema ac media ratione, detrahaturq; ex maiori segmento segmentum minus; erit maius segmentum sectum extrema ac media ratione, & maius segmentum est illa linea, quæ prioris lineæ minus segmentum erat.

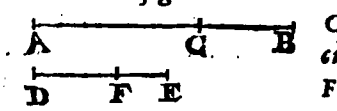
*RECTA enim linea BD, extrema ac media ratione secetur in A, cuius maius segmentum AB, minus autem segmentum AD; & ex maiori segmento AB, detrahatur recta AC, æqualis minori segmento AD. Dico maius segmentum AB, diuisum esse in C, extrema ac media ratione, & maius segmentum esse rectam AC, quæ æqualis est minori segmento AD. Facta enim prioris figura constructione, cùm sit vt BD, ad AB, ita AB, ad AD; [a] erit rectangulum BL, contentum sub BD, AD, æquale quadrato BF, rectæ AB; & ablato communi BK, erit AL, æquale ipsi IF; [b] Est autem AL, ipsi CK, æquale. Aequale igitur est IF, contentũ sub AB, CB, quadrato CK, rectæ AC; [c] Ac proinde erit vt AB, ad AC, ita AC, ad CB. Quare AB, secta est in C, extrema ac media ratione, cuius segmentũ maius est AC, minus verò segmentũ recta CB. Quod est propositũ.* a 17. sexti. b 36. primi. c 17. sexti.

*ALITER. Quoniam est vt tota BD, ad totam AB, ita AB, detracta ex BD, ad AD, hoc est, ad AC, detractam ex AB; [d] erit quoq; ita AD, reliqua ipsius BD, hoc est, AC, ad CB, reliquam ipsius AB, vt tota DB, ad totam AB, hoc est, vt AB, ad AC; Ac propterea diuisa erit AB, in C, extrema & media ratione. Quod est propositum.* d 19. quint.

*RVRSVS & hoc demonstrabimus, quod sequitur.*

Si linea secetur extrema ac media ratione, atque ex dimidio illius auferatur dimidia maioris segmenti: Erit quoque dimidia totius diuisa extrema ac media ratione, maiusq; segmentum erit dimidium maioris segmenti totius lineæ.

*DIVIDATVR enim AB, extrema ac media ratione in C, sitq; DE, dimidium totius, & DF, dimidium maioris segmenti AC. Dico DE, in F, secari extrema ac media ratione, maiusq; segmentum esse DF.*

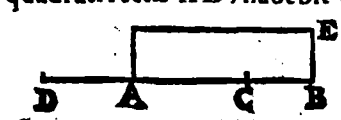



*Cùm enim sit vt AB, tota ad DE totam, ita AC, ablata ad DF, ablatam, cùm vtrobiq; sit proportio dupla; [e] erit quoque reliqua CB, ad reliquam FE, vt tota ad totam: Ac proinde & CB, dupla erit ipsius FE. [f] Quoniam verò est, vt AB, ad AC, ita DE, dimidia illius, ad DF, dimidiam huius: Item vt AC, ad CB, ita DF, dimidia illius, ad FE, dimidiam huius; Est autem ex defin. linea secta extrema ac media ratione, AB, ad AC, vt AC, ad CB; erit quoque DE, ad DF, vt DF, ad FE; Ac proinde ex eadem defin. DE, secta erit in F, extrema ac media ratione. Quod est propositum.* e 19. quinti. f 15. quinti.

## THEOR. 6. PROPOS. 6. 6.

Si recta linea Rationalis extrema ac media ratione secetur; Vtrumq; segmentorum Irrationalis linea est, quæ vocatur Apotome.

SECETVR recta Rationalis AB, in C, extrema & media ratione. Dico vtrumque segmentum AC, CB, esse lineam Irrationalem, quæ Apotome dicitur. Addatur enim maiori segmento AC, recta AD, æqualis dimidiæ totius AB. [a] Quoniam igitur quadratum rectæ CD, quintuplum est quadrati rectæ AD; habebit quadratum rectæ CD, ad quadratum rectæ AD, proportionem, quam numerus ad numerum. [b] Quare commensurabilia erunt quadrata rectarum CD, AD; propterea q; ipsæ rectæ CD, AD, commensurabiles quoque existent, saltem potentia: Est autem AD, Rationalis, cùm sit dimidia lineæ Rationalis AB. Igitur & CD, Rationalis erit. Quia verò quadrata rectarum CD, AD, non habent proportionem, quam numerus quadratus ad numerum quadratum, (vt cõstat ex coroll. propos. 24. lib. 8. Habent enim proportionem quam 5. ad 1. vel 25. ad 5.) [c] erunt rectæ CD, AD, longitudine incommensurabiles: Ac proinde Rationales potentia tantùm commensurabiles. Quare si ex CD, Rationali detrahatur AD, Rationalis potentia tantùm commensurabilis; [d] erit reliqua AC, Irrationalis, quæ appellatur Apotome. a 1. tertiædecimi. b 6. decimi. c 9. decimi. d 74. decimi



RVRSVS applicato ad AB, rectangulo AE, contento ſub AB, CB; cùm ſit vt AB, ad AC, ita AC, ad CB; [a] erit rectangulum AE, æquale quadrato rectæ AC. Quam ob rem quadratum Apotomæ AC, nimirum rectangulum AE, applicatum ſecundùm lineam Rationalem AB, [b] facit alterum latus BE, hoc eſt, rectam CB, illi æqualem, Apotomen primam. Si recta ergo linea Rationalis extrema ac media ratione ſecetur, &c. Quod erat demonſtrandum.

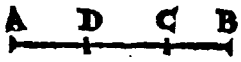
a 17. ſexti.
b 98. deci.

## SCHOLIVM.

*SED & hoc theorema cum Campano oſtendemus.*

Si recta linea ſecundùm extremam & mediam rationem ſecetur, ſitque maius ſegmentum linea Rationalis; erit minus ſegmentum, Apotome.

*SIT recta AB, extrema ac media ratione diuiſa in C, ſitq; maius ſegmentum AC, linea Rationalis. Dico minus ſegmentum CB, eſſe Apotomen. Diuiſa enim AC, bifariam in D; erit CD, dimidia ipſius Rationalis AC, Rationalis, cùm ſit ipſi AC, commenſurabilis.* [a] *Quoniam autem quadratum rectæ BD, quintuplum eſt quadrati rectæ CD; habebunt quadrata rectarum BD, CD, proportionẽ, quam numerus ad numerum;* [b] *ac propterea commenſurabilia exiſtent. Quare & ipſæ rectæ BD, CD, commenſurabiles erunt, ſaltem potentia. Cùm igitur CD, ſit rationalis, erit quoque BD, Rationalis. Quia verò quadrata rectarum BD, CD, non habent proportionem, quam numerus quadratus ad numerum quadratum; (vt conſtat ex coroll. propoſ. 24. lib. 8. Habent enim proportionem, quam 5. ad 1. vel 25. ad 5.) erunt rectæ BD, CD, longitudine incommenſurabiles; Ac proinde ſi à Rationali BD, detrahatur CD, Rationalis potentia tantùm commenſurabilis;* [c] *erit reliqua CB, Irrationalis, quæ vocatur Apotome.*

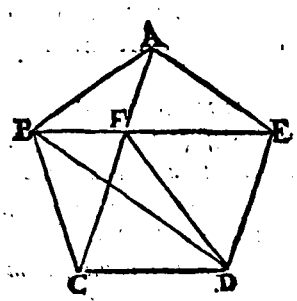



a 3. tertij decimi.
b 6. decimi
c 74. deci.

## 7. THEOR. 7. PROPOS. 7.

SI pentagoni æquilateri tres anguli, ſiue qui deinceps, ſiue qui non deinceps ſint, æquales fuerint: Aequiangulum erit ipſum pentagonum.

SINT in pentagono æquilatero ABCDE, tres anguli, qui primùm deinceps ſint æquales A, B, C. Dico ipſum pentagonum eſſe æquiangulum. Subtendantur enim dictis angulis æqualibus rectæ BE, AC, BD; & ex puncto F, vbi ſe interſecant rectæ BE, AC, recta ducatur FD. Quoniã igitur latera AB, AE, trianguli ABE, æqualia ſunt lateribus CB, CD, trianguli CBD; & anguli quoq; ipſis contenti æquales, ex hypotheſi; [a] erunt & baſes BE, BD, & anguli AEB, CDB, æquales. [b] Sunt autẽ & anguli BED, BDE, æquales, cùm æqualia ſint oſtenſa latera BE, BD; Toti igitur anguli AED, CDE, æquales erunt. Rurſus quia latera AB, AE, trianguli ABE, æqualia ſunt lateribus BA, BC, trianguli BAC; & anguli quoque ipſis contenti æquales, ex hypotheſi: [c] Erit & baſis BE, baſi AC, æqualis, & anguli ABE, AEB, angulis BAC, BCA, æquales. Cùm ergo æquales ſint anguli ABE, BAC, trianguli ABF; [d] erunt quoq; latera BF, AF, æqualia: Ac propterea ſi ipſa demantur ex rectis æqualibus BE, AC, erunt reliquæ lineæ FE, FC, æquales. Itaque cùm latera FE, ED, trianguli FED, æqualia ſint lateribus FC, CD, trianguli FCD; & baſis communis FD; [e] erunt & anguli dictis lateribus contenti FED, FCD, æquales: Sunt autem & anguli AEB, BCA, oſtenſi æquales. Æquales igitur ſunt toti anguli AED, BCD; Ac proinde cùm angulo AED, oſtenſus ſit æqualis angulus CDE, & angulo BCD, æquales ponantur anguli ABC, BAE; erunt omnes anguli pentagoni æquales, ideoque æquiangulum erit ipſum pentagonum.




a 4. primi.
b 5. primi.
c 4. primi.
d 6. primi.
e 8. primi.

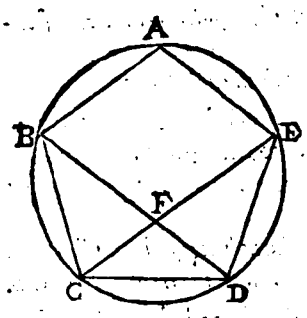
SINT ſecundò tres anguli non deinceps æquales A, C, D. Quoniam igitur latera AB, AE, trianguli ABE, æqualia ſunt lateribus CB, CD, trianguli CBD; & anguli quoque ipſis contenti, æquales, ex hypotheſi; [f] Erunt & baſes BE, BD, & anguli AEB, CDB, æquales; [g] Sunt autem & anguli BED, BDE, æquales, quòd æqualia oſtenſa ſint latera BE, BD. Igitur toti anguli AED, CDE, æquales erunt. Quare cùm æquales ponantur anguli BAE, CDE; erunt tres anguli deinceps æquales A, E, D; Ac proinde, vt iam demonſtratum eſt, pentagonum æquiangulum erit. Si pentagoni igitur æquilateri tres anguli, &c. Quod erat demonſtrandum.

f 4. primi.
g 5. primi.

## 11. THEOR. 8. PROPOS. 8.

SI pentagoni æquilateri, & æquianguli duos angulos, qui deinceps ſint, ſubtendant rectæ lineæ: hæ extrema & media ratione ſe mutuò ſecant, & maiora ipſarum ſegmenta æqualia ſunt pentagoni lateri.

SVBTENDANTVR in pentagono æquilatero & æquiangulo ABCDE, duobus angulis, qui ſunt deinceps C, D, rectę DB, CE, ſe mutuò ſecãtes in F; Dico ipſas ſecari extrema ac media ratione, maio-




ne, maiorâq; earũ segmenta FB, FE, æqualia esse lateri cuilibet pentagoni. [a] Descripto enim circulo circa pentagonum: [b] erunt quinque arcus AB, BC, CD, DE, EA, æquales. Quia verò latera CD, CB, trianguli CDB, æqualia sunt lateribus DC, DE, trianguli DCE: & anguli quoque ipsis contenti æquales, ex hypothesi: [c] Erunt & bases DB, CE, & anguli CDB, DCE, æquales: Ac proinde cùm in triangulo CDF, duo anguli FCD, FDC, sint æquales, [d] & ipsis æqualis sit externus angulus BFC: erit angulus BFC, duplus anguli DCE: [e] Est autem & angulus BCE, eiusdem anguli DCE, duplus, quòd & arcus BAE, arcus DE, sit duplus. Igitur anguli BFC, BCF, æquales sunt: [f] Ideoque recta BF, lateri pentagoni BC, æqualis. [g] Quoniam autem anguli DBC, ECD, arcubus æqualibus insistentes, æquales sunt: erunt duo anguli DBC, CDB, trianguli BCD, æquales duobus angulis DCF, FDC, trianguli CFD: [h] Ac proinde æquiangula erunt triangula BCD, CFD. [i] Quare erit vt BD ad DC, hoc est, ad BF, æqualẽ ipsi DC, ita CD, hoc est, sibi æqualis BF, ad FD: Ac propterea BD, secta est in F, extrema ac media ratione, estque maius segmentum BF, lateri pentagoni æquale, vt ostensum est. Simili ratione ostendemus, rectam CE, secari in F, extrema ac media ratione, maiusque illius segmentum EF, æquale esse lateri pentagoni DE. Itaque si pentagoni æquilateri & æquianguli duos angulos, &c. Quod erat ostendendum.

[a] 14. quarti. [b] 28. tertij. [c] 4. primi. [d] 32. primi. [e] 33. sexti. [f] 6. primi. [g] 27. tertij. [h] 32. primi. [i] 4. sexti.

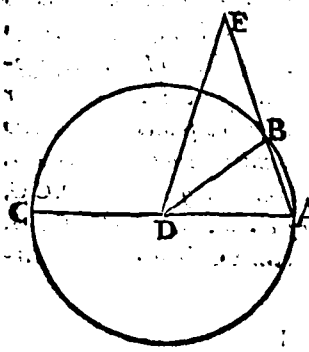
## SCHOLIVM.

*FACILE etiam demonstrabimus, rectam, quæ angulum pentagoni æquilateri & æquianguli subtendit, parallelam esse opposito lateri: hoc est, BD, parallelam esse lateri AE; & CE, lateri AE. Descripto enim circulo circa pentagonum: [a] Quoniam tam duo anguli A, & BCE, quàm duo ABC, AEC, duobus rectis æquales sunt: Sunt autem A, & ABC, inter se æquales in pentagono æquiangulo: erunt & reliqui anguli BCE, AEC, æquales. Cùm ergo A, & BCE, duobus sint rectis æquales; erunt etiam A, & AEC, duobus rectis æquales: [b] ac proinde AB, CE, parallelæ erunt. Quod est propositum.*

[a] 28. tertij. [b] 28. primi

## THEOR. 9. PROPOS. 9.

SI hexagoni latus, & decagoni, in eodem circulo descriptorum, componantur: Tota recta linea extrema ac media ratione secatur, & maius eius segmentum est hexagoni latus.




IN circulo ABC, sit latus decagoni AB, cui in rectum addatur BE, æqualis semidiametro circuli, ac proinde lateri hexagoni eidem circulo inscripti. Dico EA, rectam sectam esse in B, extrema ac media ratione, maiusque segmentum esse EB, latus hexagoni. Ducatur enim ex A, per centrum D, diameter AC, coniunganturque rectæ DB, DE. Quoniam igitur AB, arcus, est decima pars totius peripheriæ circuli: continebit arcus semicirculi arcum AB, quinquies: Ac proinde arcus BC, quadruplus erit arcus AB. [a] Quare & angulus BDC, anguli ADB, quadruplus erit. Rursus quia latera BD, BE, sunt æqualia, nempe latera hexagoni: (est enim BE, latus hexagoni semidiametro BD, æquale, ex coroll. propos. 15. libri 4.): [b] erunt & anguli BDE, BED, æquales: [c] quibus cũ æqualis fit externus ABD: erit angulus ABD, duplus anguli BED: [d] Est aũt angulus ABD, æqualis angulus BAD, ob æqualitatẽ laterum DA, DB. Igitur & angulus BAD, duplus erit anguli BED: ac proinde duo anguli DAB, DBA, simul quadrupli erunt anguli BED. [e] Cùm ergo angulis DAB, DBA, æqualis sit externus BDC: erit angulus BDC, quadruplus eiusdem anguli BED: Atqui idem angulus BDC, ostensus fuit quadruplus anguli ADB. Igitur æquales sunt anguli AED, ADB. Quocirca cũ duo anguli AED, DAE, trianguli ADE, æquales sint duobus angulis ADB, BAD, trianguli ABD: [f] erunt triangula ADE, ABD, æquiangula. [g] Igitur erit vt EA, ad AD, hoc est, ad EB, ipsi AD, æqualem, ita AD, hoc est, EB, sibi æqualis ad BA: Atque idcircò recta EA, secta est in B, extrema & media ratione, estque maius segmentum EB, latus hexagoni. Itaque si hexagoni latus, & decagoni, in eodem circulo descriptorum, componantur: Tota recta linea extrema ac media ratione secatur, & maius eius segmentum est hexagoni latus. Quod erat demonstrandum.

[a] 33. sexti. [b] 5. primi. [c] 32. primi. [d] 5. primi. [e] 32. primi. [f] 32. primi. [g] 4. sexti.

## SCHOLIVM.

*QVIA verò demonstrauimus ad propos. 5. huius libri, si minus segmentum lineæ diuisæ extrema ac media ratione ex maiori segmento detrahatur; maius segmentum secari quoque extrema & media ratione, eiusq; segmentum maius esse minus segmentum detractum. Hic autem ostensum est, latus hexagoni compositum cum latere decagoni, secari extrema ac media ratione: Fit, si latus hexagoni secetur extrema & media ratione, maius illius segmentum esse latus decagoni. Nam si hoc detrahatur ex latere hexagoni, quod est*

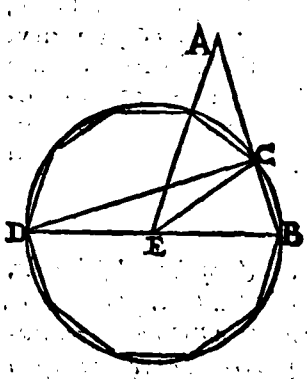
*maius ſegmentum, diuiſum erit hexagoni latus extrema ac media ratione, vt ad propoſ. 5. huius libri oſtendimus. Hoc tamen aliter demonſtrabimus lib. 14. propoſ. 4.*

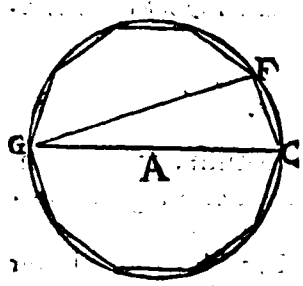
*CONVERSVM quoq; huius theorematis facilè cum Campano demonſtrabimus: Videlicet.*

SI lineæ diuiſæ extrema ac media ratione maius ſegmentum fuerit latus hexagoni alicuius circuli; Erit minus ſegmentum latus decagoni eiuſdem circuli. Quòd ſi minus ſegmentum fuerit latus decagoni alicuius circuli; Erit maius ſegmentum latus hexagoni eiuſdem circuli.

*SIT enim AB, diuiſa in C, extrema & media ratione, ſitq; primùm AC, latus hexagoni circuli BCD. Dico minus ſegmentum CB, eſſe eiuſdem circuli latus decagoni. Coaptetur enim BC, in circulo, ita vt CA, extra circulum cadat. Et ducta ex B, per centrum E, diametro BED, connectantur rectæ EA, EC. Quia ergo eſt vt AB, ad AC, ita AC, ad CB; & eſt AC, latus hexagoni æquale ſemidiametro EB, ex coroll. propoſ. 15. libri 4. Erit quoque vt AB, ad BE, ita EB, ad BC,* [a] *ideoq; triangula ABE, EBC, æquiangula erunt; cùm habeant latera circa communem angulum E, proportionalia: eritq; angulus A, angulo BEC, æqualis. Rurſus quia latera CA, CE, æqualia ſunt, nempe latera hexagoni;* [b] *erunt anguli CAE, CEA, æquales;* [c] *quibus cùm æqualis ſit externus BCE, erit BCE, duplus anguli A:* [d] *Eſt autem angulo BCE, angulus CBE, ob æqualitatem laterum EB, EC, æqualis. Igitur & CBE, duplus erit anguli A; Ac proinde duo anguli BCE, CBE, ſimul quadrupli erunt eiuſdem anguli A.* [e] *Cùm ergo angulis BCE, CBE, æqualis ſit externus CED; erit quoque angulus CED, eiuſdem anguli A, & propterea anguli BEC, qui æqualis oſtenſus eſt angulo A, quadruplus.* [f] *Quare & arcus CD, quadruplus erit arcus BC; Ac proinde arcus ſemicirculi BCD, eiuſdem arcus BC, quintuplus exiſtet, ideoq; tota peripheria circuli decupla erit arcus BC. Quapropter recta BC, latus eſt decagoni.*

a 6. ſexti.
b 5. primi.
c 32. primi.
d 5. primi.
e 32. primi.
f 33. ſexti.



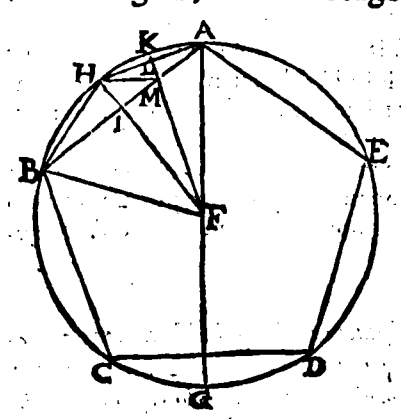




*SIT deinde CB, minus ſegmentum, latus decagoni circuli BCD. Dico maius ſegmentum AC, eſſe eiuſdem circuli latus hexagoni. Coaptetur enim rurſus BC, in circulo BCD, ducaturq; diameter BED. Deinde interuallo AC, deſcribatur circulus CFG, cuius diameter CAG; eritq; ex corollario propoſ. 14. lib. 4. AC, latus hexagoni circuli CF. Quoniam igitur AB, ſecta eſt in C, extrema ac media ratione, eſtq; maius ſegmentum AC, latus hexagoni circuli CFG; erit; vt iam oſtenſum eſt, minus ſegmentum CB, latus decagoni eiuſdem circuli CFG. Deſcribatur ergo in circulo CFG, decagonum æquilaterum & æquiangulum CFG; Item in circulo BCD, decagonum æquilaterum, & æquiangulum BCD; eruntq; latera BC, CF, inter ſe æqualia. Quoniam verò, ſi connectantur rectæ CD, FG, anguli CDB, FGC, ſunt æquales, vt in ſcholio propoſ. 22. lib. 3. oſtendimus, quòd inſiſtant arcubus ſimilibus BC, CF, nempe decimis partibus peripheriarum;* [g] *& ſunt quoq; anguli BCD, CFG, in ſemicirculis æquales, & nimirum recti:* [h] *Erunt quoq; latera BD, CG, inter ſe æqualia. Quam ob rem cùm diametri BD, CG, ſint æquales, æquales quoq; erunt circuli BCD, CFG. Ac proinde, cùm recta AC, ſit latus hexagoni circuli CFG, erit quoq; eadem recta AC, latus hexagoni circuli BCD. Quod eſt propoſitum.*

g 31. tertij.
h 26. primi

## 10. THEOR. 10. PROPOS. 10.

SI in circulo pentagonum æquilaterum deſcribatur; Pentagoni latus poteſt & latus hexagoni, & latus decagoni, in eodem circulo deſcriptorum.




IN circulo ABCDE, cuius centrũ F, deſcriptũ ſit pentagonum æquilaterum. Dico quadratũ lateris AB, æquale eſſe quadrato lateris hexagoni, vnà cũ quadrato lateris decagoni eiuſdem circuli. Ducatur enim diameter AFG, & connectatur recta FB. Diuiſo deinde arcu AB, bifariam in H, connectantur rectæ AH, BH, & FH, ſecans rectam AB, in I; eritq; recta AH, latus decagoni, & BF, latus hexagoni. Rurſus diuiſo arcu AH, bifariã in K, adiungatur recta FK, ſecans rectã AH, in L; & rectam AB, in M, puncto, ad quod recta ducatur HM. Quoniã igitur arcus AH, BH, æquales ſunt; [a] *erunt & anguli ipſis inſiſtẽtes AFH, BFH, æquales.* Quare cũ latera AF, FI, trianguli AFI, æqualia ſint lateribus BF, FI, trianguli BFI, & anguli ipſis contenti æquales quoq;: [b] *erunt & baſes AI, BI, æquales, & anguli AIF, BIF, ideoq; recti: Eademq; ratione æquales erũt rectæ AL, HL, & anguli ALF, HLF, recti. Deinde ſi ex ſemicirculis æqualib. ABCG, AEDG, demãtur æquales arcus ABC, AED, relinquẽtur arcus CG, DG,*

a 27. tertij.
b 4. primi.

DG, inter ſeſe æquales, ideoq; erit arcus CG, dimidium arcus CD. Eſt autem & arcus AH, dimidium arcus AB. Igitur cùm arcus AB, CD, æquales ſint; erunt quoq; eorum dimidij arcus CG, AH, æquales; Ac proinde cùm arcus AH, duplus ſit arcus HK, erit & arcus CG, duplus eiuſdem arcus HK. Eodem modo, quia arcus AB, BC, æquales ſunt, & eſt arcus AB, duplus arcus BH, erit etiam arcus BC, eiuſdem arcus BH, duplus. Quare arcus CG, BC, æquemultiplices ſunt, nempe dupli, arcuum HK, BH; [a] Ac propterea totus arcus BG, duplus quoque erit totius arcus BK; [b] & idcircò angulus quoque BFG, duplus anguli BFK: [c] Sed quia idem angulus BFG, ad centrum duplus eſt quoque anguli FAB; erunt idcircò anguli BFM, FAB, æquales; [d] Ac propterea triangula ABF, FBM, cùm habeant angulos FAB, MFB, æquales, & angulum ABF, communem, æquiangula erunt. [e] Quocirca erit vt AB, ad BF, ita BF, ad BM; [f] ideoque rectangulum ſub AB, BM, æquale erit quadrato rectæ BF.

a 1. quinti.
b 33. ſexti.
c 20. tertij.
d 32. primi.
e 4. ſexti.
f 17. ſexti.

RVRSVS quia latera AL, LM, triãguli ALM, æqualia ſunt lateribus HL, LM, triãguli HLM, & anguli quoque ipſis contenti æquales, nempe recti: [g] erunt & baſes AM, HM, & anguli LAM, LHM, æquales. [h] Eſt autem angulus LAM, angulo HBA, æqualis, [i] & latera HA, HB, æqualia ſint. Igitur & angulus LHM, eidem angulo HBA, æqualis erit; [i] Ac propterea triangula ABH, AHM, cùm habeãt angulos ABH, AHM, æquales, & angulum HAM, communem, æquiangula erunt. [k] Quam ob rem erit vt AB, ad AH, ita AH, ad AM; [l] ideoq; rectangulum ſub AB, AM, æquale erit quadrato rectæ AH: Oſtenſum eſt autem & rectangulum ſub AB, BM, æquale quadrato rectæ BF. Igitur rectangula ſub AB, BM, & ſub AB, AM, ſimul æqualia ſunt quadratis rectarum BF, AH: [m] At verò rectangula ſub AB, BM, & ſub AB, AM, æqualia ſunt quadrato rectæ AB. Quadratum ergo rectæ AB, nempe lateris pentagoni, æquale eſt quadratis rectarũ BF, AH, lateris videlicet hexagoni, & lateris decagoni. Si igitur in circulo pentagonum æquilaterum deſcribatur, &c. Quod erat demonſtrandum.

g 4. primi.
h 5. primi.
i 32. primi.
k 4. ſexti.
l 17. ſexti.
m 2. ſecũdi.

## COROLLARIVM I.

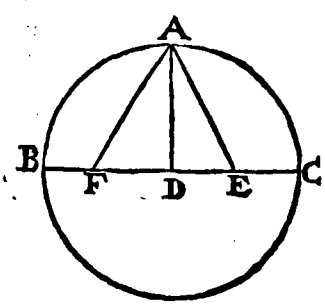
*HINC ſequitur, lineam rectam, quæ ex centro diuidit arcum quempiam bifariam, diuidere quoq; rectam illi arcui ſubtenſam bifariam, & ad angulos rectos. Oſtenſum enim eſt, rectam FH, propterea quòd arcum AB, diuidit bifariam, diuidere quoq; rectam AB, bifariam in I, & ad angulos rectos. Eademq; in cæteris eſt demonſtratio.*

## COROLLARIVM II.

*PERSPICVVM quoq; eſt, diametrum circuli ex angulo quouis pentagoni ductam diuidere & arcum, quem latus pentagoni illi angulo oppoſitũ ſubtendit, & latus ipſum oppoſitum bifariam, & ad angulos rectos. Demonſtratum enim eſt, diametrum AG, ex puncto A, ductam, diuidere arcum CD, quem latus oppoſitum CD, ſubtendit, bifariam. Quare ex præfato corollario, cùm tranſeat per centrum, ſecabit quoque latus CD, bifariam, & ad angulos rectos. Eadem demonſtratio erit in omni polygono æquilatero in circulo deſcripto, ſi numerus laterum fuerit impar, vt conſtat.*

## SCHOLIVM.

*QVONIAM ad finẽ lib. 4. praxim quandam ex Ptolemæo tradidimus, qua vna eademq; opera in dato circulo & pentagonum, & decagonum æquilaterũ deſcribitur, eiusq; demonſtrationem in hunc locum diſtulimus; paucis nunc à nobis ea demonſtranda eſt. Sit igitur datus circulus ABC, cuius centrũ D. Ducta autem diametro BC, erigatur DA, perpendicularis ad BC. Deinde diuiſa ſemidiametro CD, bifariã in E, ducatur recta EA, cui æqualis abſcindatur EF, adiungaturq; recta AF. Dico rectam AF, eſſe latus pentagoni, & DF, latus decagoni. Cùm enim CD, ſecta ſit bifariam in E, eiq; addita DF; [a] erit rectangulum ſub CF, DF, vnà cum quadrato rectæ DE, æquale quadrato rectæ EF, ideoq; quadrato rectæ EA, quæ ipſi EF, eſt æqualis. [b] Eſt autem quadratum rectæ EA, æquale quadratis rectarũ AD, DE. Igitur rectangulum ſub CF, DF, vnà cum quadrato rectæ DE, æquale eſt quadratis rectarũ AD, DE; Ac proinde, dempto communi quadrato rectæ DE, relinquetur rectangulum ſub CF, DF, æquale quadrato rectæ AD, hoc eſt, quadrato rectæ CD. [c] Quam ob rem erit vt CF, ad CD, ita CD, ad DF; propterea q; recta CF, diuiſa erit in D, extrema ac media ratione. Cùm igitur maius ſegmẽtum CD, ſit latus hexagoni circuli ABC, ex coroll. propoſ. 15. lib. 4. erit minus ſegmẽtum DF, latus decagoni eiuſdem circuli, vt demonſtrauimus ad propoſ. 9. huius lib. [d] Rurſus quoniã quadrato lateris hexagoni AD, vnà cum quadrato lateris decagoni DF, æquale eſt quadratum lateris pentagoni eiuſdem circuli; [e] Eſt autem eiſdem quadratis rectarum AD, DF, æquale quadratum rectæ AF; erit quadratum lateris pentagoni æquale quadrato rectæ AF; ac propterea recta AF, lateri pentagoni æqualis. Quod eſt propoſitum.*



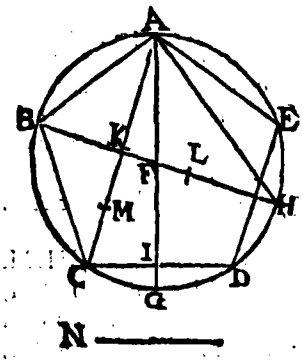

a 6. ſecũdi.
b 47. primi
c 17. ſexti.
d 10. tertij decimi.
e 47. primi

## THEOR. II. PROPOS. II. 12.

SI in circulo, Rationalem habente diametrum, pentagonum æquilaterum de-

ſcribatur: Pentagoni latus Irrationalis eſt linea, quæ vocatur Minor.

In circulo A B C D E, habente diametrum Rationalem, deſcribatur pentagonũ æquilaterum A B C D E. Dico eius latus A B, eſſe lineam Irrationalem, quę dicitur Minor. Ducantur enim per centrum F, diametri A G, B H, ſecetq; A G, latus C D, in I, connectanturq; rectæ A C, A H, quarum A C, ſecet diametrum B H, in K. Abſcindatur quoq; ex ſemidiametro F H, quarta eius pars F L; Item ex recta A C, quarta eius pars C M. Quia igitur diameter B H, ponitur Rationalis; erunt quoque F L, B F, illi commenſurabiles, cùm ſint eius partes aliquotæ, Rationales; Atq; idcircò & tota B L, compoſita, [a] cùm ſit commenſurabilis vtriq; F L, B F, Rationalis erit.




a 16. decimi.

Rvrsvs quoniam recta F B, ex centro ducta ſecat arcum A C, bifariam in B; ſecabit quoq; rectam A C, bifariam in L, & ad angulos rectos, ex coroll. 1. præcedentis propoſ. Secat autem & recta A G, rectam C D, in I, bifariam, & ad angulos rectos, ex coroll. 2. eiuſdem propoſ. Triangula ergo A C I, A F K, cũ habeãt angulos A I C, A K F, rectos, & angulum C A I, communẽ, [b] æquiangula inter ſe erũt. [c] Quamobrem erit vt C I, ad C A, ita F K, ad F A; & permutando vt C I, ad F K, ita C A, ad F A, ſiue ad F H, ipſi F A, æqualem: [d] Vt autem C A, ad F H, ita eſt C M, quarta pars ipſius C A, ad F L, quartam partẽ ipſius F H. Erit igitur vt C I, ad F K, ita C M, ad F L; & permutando vt C I, ad C M, hoc eſt, vt C D, dupla ipſius C I, ad C K, duplam ipſius C M, ita F K, ad F L; Atq; componẽdo, vt C D, C K, ſimul ad C K, ita F K, F L, ſimul, nimirum recta K L, ad F L; [e] Ac proptereа erit, vt quadratũ rectæ compoſitæ ex C D, C K, ad quadratum rectæ C K, ita quadratum rectæ K L, ad quadratũ rectę F L. Quia verò ſi A C, ſecetur extrema ac media ratione, (ducta videlicet recta B D,) [f] maius eius ſegmentum æquale eſt lateri pentagoni, nimirum ipſi C D; [g] Erit quadratum rectæ compoſitæ ex C D, maiori ſegmento, & C K, dimidia totius, quintuplum quadrati rectæ C K, dimidiæ ſcilicet totius. Quare & quadratum rectæ K L, quintuplum erit quadrati rectæ F L; [h] ideoq; quadratũ rectæ K L, commenſurabile erit quadrato rectæ F L; Ac proinde rectæ K L, F L, commenſurabiles quoque erunt, ſaltem potentia: Eſt autem F L, oſtenſa Rationalis. Igitur & K L, Rationalis erit.

b 32. primi. c 4. ſexti. d 15. quinti. e 22. ſexti. f 8. tertijdecimi. g 1. tertijdecimi. h 6. decimi.

Deinde quia qualium partium 4. eſt B F, talium 1. eſt F L; ac proptereа qualium 5. eſt B L, talium 1. eſt F L; erit quadratũ rectæ B L, talium partium 25. qualium 1. eſt quadratũ rectæ F L, (vt in his numeris patet 1. 5. 25.) [i] habent enim quadrata proportionẽ laterum duplicatam.) Qualium verò partium 1. eſt quadratũ rectæ F L, talium 5. oſtenſum eſt quadratum rectæ K L. Qualium igitur 25. eſt quadratũ rectæ B L, talium 5. eſt quadratũ rectæ K L; ac proinde quadratũ rectæ B L, quintuplum erit quadrati rectæ K L. Quia ergo quadrata rectarum B L, K L, proportionẽ non habent, quam numerus quadratus ad numerum quadratũ, (vt patet ex coroll. propoſ. 24. lib. 8. Eſt enim eorum proportio, quæ 25. ad 5. vel 5. ad 1,) [k] Erũt rectæ B L, K L, longitudine incommenſurabiles; ideoq; cùm oſtenſæ ſint Rationales, erunt Rationales potentia tantũ commenſurabiles. Quare ſi ex Rationali B L, demat̃ur Rationalis K L, potentia tantùm commenſurabilis; [l] erit reliqua B K, Irrationalis, quæ dicitur Apotome, ei verò congruens erit K L.

i 20. ſexti. k 9. decimi. l 74. decimi

Iam verò recta B L, poſsit plus q̃ recta K L, quadrato rectæ N. Quoniam igitur quadratũ rectæ B L, æquale eſt quadratis rectarum K L, & N; Qualium autẽ partium 5. fuit quadratũ rectæ B L, talium 1. fuit quadratum rectæ K L; Erit reliquum quadratũ rectæ N, talium partium 4. qualium 5. eſt quadratum rectæ B L; Ac proptereа quadrata rectarum B L, & N, proportionem habebunt, quam numerus ad numerum. [m] Quare commenſurabilia erunt; proptereaq; rectę ipſæ B L, & N, commenſurabiles, ſaltem potentia: Eſt autem B L, oſtenſa Rationalis. Rationalis igitur erit & N. Quia verò quadrata rectarum B L, & N, proportionem non habent, quam numerus quadratus ad numerum quadratum; (vt perſpicuum eſt ex coroll. propoſ. 24. lib. 8. quòd proportio eorum ſit, quæ 5. ad 4.) [n] Erunt rectæ B L, & N, longitudine incommenſurabiles; Ac proinde Rationales potentia tantùm commenſurabiles. Quapropter cùm tota recta B L, Rationalis, longitudine ſit commenſurabilis Rationali B H; (Qualium enim partium 8. eſt B H, talium 5. eſt B L,) poſsitq; plus, quàm congruens K L, quadrato rectæ N, ſibi longitudine incommenſurabilis, vt oſtenſum eſt; Erit B K, Apotome quarta, ex definitione.

m 6. decimi. n 9. decimi.

Postremo, quia recta A B, eſt media proportionalis inter B H, B K, ex coroll. propoſ. 8. lib. 6. (quòd triangulum A B H, [o] habeat angulum B A H, rectum, à quo ducta eſt A K, ad baſin perpendicularis) [p] erit quadratũ rectæ A B, æquale rectangulo ſub B H, B K. Quocirca cùm ſuperficiem contentam ſub Rationali B H, & Apotoma quarta B K, poſsit recta linea A B. [q] Erit A B, linea Minor. Si igitur in circulo Rationalem habente diametrum, &c. Quod erat demonſtrandum.

o 31. tertij. p 17. ſexti. q 95. decimi

## 8. THEOR. 12. PROPOS. 12.

Si in circulo triangulum æquilaterum deſcribatur; Trianguli latus, potentia triplum eſt eius lineæ, quæ ex centro circuli ducitur.

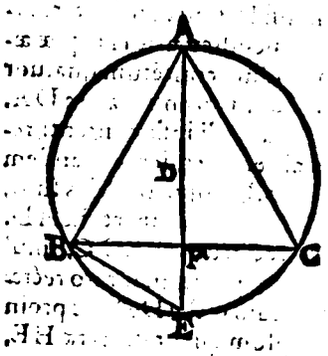
In circulo A B C, cuius centrum D, triangulum æquilaterum inſcribatur A B C. Dico quadratum lateris A B, triplum eſſe quadrati ex ſemidiametro. Ducta enim diametro A E, quæ ſecet, ex

corollario

corollario 2. propoſ. 10. huius lib. arcum B C, bifariam in E, & rectam B C, bifariam quoque & ad angulos rectos in puncto F; cùm arcus B C, ſit tertia pars totius peripheriæ; erit arcus B E, eiuſdem peripheriæ ſexta pars, ideoque coniuncta recta B E, latus erit hexagoni, & æqualis ſemidiametro circuli, ex corollario propoſ. 15. libri 4. Quod etiam ita probabitur. Semicirculus A B E, continet tres ſextas partes totius circuli; arcus verò A B, cùm ſit tertia pars totius circuli, duas ſextas comprehendit eiuſdem circuli. Igitur arcus B E, ſexta pars eſt eiuſdem, ac proinde recta B E, latus eſt hexagoni, & æqualis ſemidiametro D E, ex corollario propoſ. 15. lib. 4. [a] Quoniam igitur quadratum rectæ A E, æquale eſt quadratis rectarum A B, B E, [b] quòd angulus A B E, in ſemicirculo rectus ſit; Eſt autem quadratum rectæ A E, quadruplum quadrati rectæ B E, ex ſcholio propoſ. 4. lib. 2. quòd linea A E, dupla ſit lineæ B E; erunt quadrata rectarum A B, B E, ſimul, quadrupla quoque quadrati eiuſdem rectæ B E; Ac propterea qualium partium 4. ſunt quadrata rectarum A B, B E, talium partium 1. erit quadratum rectæ B E; & idcirco talium partium 3. erit quadratum rectæ A B. Quare quadratum rectæ A B, triplum eſt quadrati rectæ B E, quæ æqualis eſt ſemidiametro. Si igitur in circulo triangulum æquilaterum deſcribatur, &c. Quod erat oſtendendum.

[a] 47. primi.
[b] 31. tertij.

## COROLLARIVM I.




*SEQVITVR ex his, diametrum circuli potentia eſſe ſeſquitertiam lateris trianguli æquilateri in eo circulo deſcripti. Nam cùm latus A B, oſtenſum ſit potentia triplum ſemidiametri A D; poſito quadrato ex A B, 3. erit quadratum ex A D, 1. atq; adeò quadratum ex A E, quod ex ſcholio propoſitionis 4. libri 2. quadruplum eſt quadrati ex A D, erit 4. Quare quadratũ ex A E, quadrati ex A B, ſeſquitertium eſt, hoc eſt, proportionem habet, quam 4. ad 3.*

*ET quia ex corollario propoſitionis 8. libri 6. vt eſt A E, ad A B, ita ſe habet A B, ad A F; erit quoque latus trianguli æquilateri A B, perpendicularis A F, ex vno angulo ad baſim demiſſa potentia ſeſquitertium: quod tamen aliter demonſtrabitur ab Euclide lib. 14. propoſ. 12.*

## COROLLARIVM II.

*HINC facile etiam colligi poteſt, ſemidiametrum D E, bifariam ſecari in F, à latere trianguli B C. Cùm enim quadratum rectæ A B, triplum ſit quadrati rectæ B E; ſi ponatur quadratum rectæ A B, partium 12. erit quadratum rectæ B E, talium partium 4. [a] Eſt autem quadratum rectæ B E, æquale quadratis rectarum B F, F E. Igitur & talium partium 4. erunt quadrata rectarum B F, F E. Eſt autem talium partium 3. quadratum rectæ B F, (quòd quadratum rectæ A B, quadruplum ſit quadrati rectæ B F, ex ſcholio propoſitionis 4. lib. 2. Eſt enim A B, dupla ipſius B F.) Igitur talium 1. erit quadratum rectæ F E; Ac proinde quadratum rectæ B E, hoc eſt, quadratum rectæ D E, ſibi æquale, quadruplum erit quadrati rectæ F E. Quare ex ſcholio propoſ. 4. lib. 2. recta D E, dupla erit ipſius F E. Quocirca D E, bifariam ſecatur in F.*

[a] 47. primi.

## SCHOLIVM.

*HOC tamen corollarium aliter demonſtrabitur, hoc theoremate propoſito:*

SI in circulo triangulum æquilaterum deſcribatur; Diameter ex vno angulo ducta, diuidet & angulum bifariam, & latus oppoſitum, ac inſuper ad angulos rectos; Semidiameter quoque viciſsim bifariam, & ad angulos rectos ſecabitur à latere oppoſito.

*IN circulo A B C, cuius centrum D, triangulum æquilaterum inſcribatur A B C. Dico rectam A E, per centrum D, ductam, hoc eſt, diametrum, ſecare bifariam & angulum B A C, & latus B C, nec non ad angulos rectos; Semidiametrum quoque D E, ſecari à latere B C, bifariam, & ad angulos rectos. Ductis enim rectis B D, C D, B E; cùm latera A B, A D, æqualia ſint lateribus A C, A D, trianguli C A D; & baſes B D, C D, æquales quoque: [b] Erunt anguli B A D, C A D, æquales. Quod eſt primum. Deinde, cùm latera A B, A F, trianguli B A F, æqualia ſint lateribus A C, A F, trianguli C A F, & anguli ipſis contenti æquales oſtenſi [c] Erũt & baſes B F, C F, & anguli ad F, æquales, ideoq; recti. Quod eſt ſecundum. Poſtremò, cũ anguli B A E, C A E, demõſtrati ſint eſſe æquales; [d] erũt & arcus B E, C E, æquales. Quare cũ B E C, arcus ſit tertia pars circumferẽtiæ, erit B E, ſexta pars eiuſdẽ; Ac propterea recta B E, latus hexagoni, atq; ſemidiametro proinde B D,*

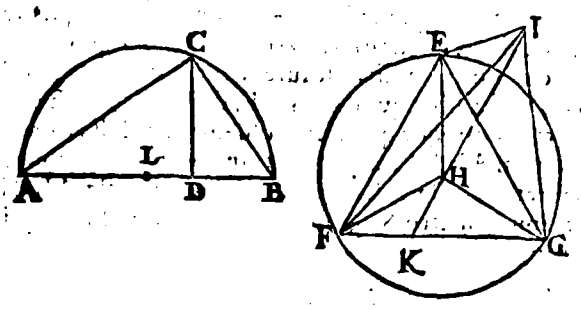
[b] 8. primi.
[c] 4. primi.
[d] 26. tertij.

a 5. primi. b 26. primi

*æquales, ex coroll. propos 15. lib. 4.* [a] *Igitur anguli B D E, B E D, æquales erunt. Quoniam ergo anguli B D F, B F D, trianguli D B F, æquales sunt angulis B E F, B F E, trianguli E B F, & latus B E, commune:* [b] *Erunt & latera D F, E F, æqualia. Quod est tertium.*

13. # PROBL. 1. PROPOS. 13.

PYRAMIDEM constituere; & data sphæra complecti; & demonstrare, quòd sphæræ diameter potentia sit sesquialtera lateris ipsius pyramidis.







SIT datæ sphæræ diameter A B, circa quam semicirculus describatur A B C; & ex A B, auferatur tertia pars B D, vt sit A D, ipsius D B, dupla; at verò A B, eiusdem D B, tripla; & ipsius A D, sesquialtera. Deinde ducta D C, perpendicularis ad A B, connectantur rectæ A C, B C. Adinteruallum rectæ H E, quæ æqualis sit ipsi D C, describatur circulus E F G, cuius centrum H, in quo triangulum æquilaterum inscribatur E F G, adiunganturque rectæ H F, H G, quæ singulæ æquales erunt ipsi D C, cùm æquales sint ipsi H E, ad cuius interuallum descriptus est circulus. Erigatur deinde ex H, ad planum circuli perpendicularis H I, quæ æqualis ponatur rectæ A D, & ex I, demittantur rectæ I E, I F, I G. Dico solidum comprehensum quatuor triangulis F E G, I E F, I F G, I E G, esse Pyramidem, siue Tetraedrum. Quoniam enim latera D A, D C, trianguli A D C, æqualia sunt lateribus H I, H E, trianguli I H E, & anguli ipsis contenti, recti, ex hypothesi, & 3. defin. lib. 11. [c] erit basis A C, basi I E, æqualis. Non aliter ostendemus eandem rectam A C, æqualem esse rectis I F, I G. Rursus quia tres lineæ A D, D C, D B, proportionales sunt, ex coroll. propos. 8. lib. 6. erit, ex coroll. propos. 20. lib. 6. vt A D, ad D B, ita quadratum rectæ A D, ad quadratum rectæ D C; & componendo, vt A B, ad D B, ita quadrata rectarum A D, D C, simul ad quadratum rectæ D C: [b] Sunt autem quadrata rectarum A D, D C, æqualia quadrato rectæ A C. Igitur erit quoq; vt A B, ad D B, ita quadratum rectæ A C, ad quadratum rectæ D C. Ac proinde cùm A B, sit ipsius D B, tripla; erit quoque quadratum rectæ A C, triplum quadrati rectæ H E, cùm H E, æqualis sit ipsi D C: [c] Atqui & quadratum rectæ E F, triplum quoque est eiusdem quadrati rectæ H E. Quadratum ergo rectæ A C, quadrato rectæ E F, æquale erit; & propterea recta A C, rectæ E F. Quare cùm recta A C, ostensa quoque sit æqualis rectis I E, I F, I G, erunt quatuor triangula E F G, E F I, F G I, G E I, æquilatera & æqualia inter se. Constituta igitur iam est pyramis, seu Tetraedrum, cuius basis E F G, vertex verò I. Dico pyramidem hanc comprehendi sphæra data, cuius diameter A B; & diametrum sphæræ A B, potentia sesquialteram esse lateris E F, vel A C.

a 4. primi. c 12. vndec.

EXTENDATVR perpendicularis I H, vsque ad K, vt sit H K, ipsi D B, & tota I K, toti A B, æqualis. Quia ergo tres rectæ A D, D C, D B, proportionales sunt, quibus æquales existũt tres I H, H E, H K; erunt quoque I H, H E, H K, proportionales. Quare cùm H E, sit ad I K, perpendicularis, & media proportionalis inter I H, H K, semicirculus circa I K, descriptus in plano rectarum I K, H E, transibit per E, vt mox ostendetur; Eodemque argumento tam semicirculus circa eandem rectam I K, descriptus in plano rectarum I K, H F, transibit per F, quàm semicirculus circa eandem I K, descriptus in plano rectarum I K, H G, per G. Igitur quilibet horum semicirculorum circumductus, manente fixa diametro, sphæram describet, quæ constitutum Tetraedrum complectitur, cùm per omnes illius angulos E, F, G, I, incedat. Cùm ergo hæc sphæra descripta æqualis sit sphæræ datæ, quòd diameter I K, æqualis ponatur diametro A B, comprehendetur idem Tetraedrum sphæra data.

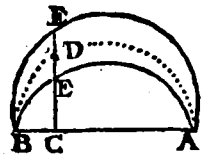
QVONIAM verò tres rectæ A B, A C, A D, proportionales sunt, ex coroll. propos. 8. lib. 6. erit vt A B, ad A D, ita quadratum rectæ A B, ad quadratum rectæ A C, ex coroll. propos. 20. lib. 6. Est autem recta A B, sesquialtera rectæ A D, quòd qualium partium 3. est A B, talium 2. sit A D. Igitur & quadratum rectæ A B, sesquialterum erit quadrati rectæ A C; Ac propterea cùm A B, sit diameter sphæræ, & A C, recta lateri pyramidis E F, æqualis; perspicuum est, diametrum sphæræ potentia sesquialteram esse lateris Tetraedri, seu pyramidis. Pyramidem ergo constituimus, & data sphæra complexi sumus, &c. Quod erat faciendum.

## LEMMA.

*QVOD autem semicirculus circa I K, in plano rectarum I K, H E, descriptus, transeat per E, facilè demonstrabitur, hoc proposito theoremate.*

SI ad lineã rectam perpendicularis ducatur, quæ sit media proportionalis inter segmenta lineæ; semicirculus circa illam lineam rectam descriptus, transibit per extremum punctum lineæ perpendicularis.

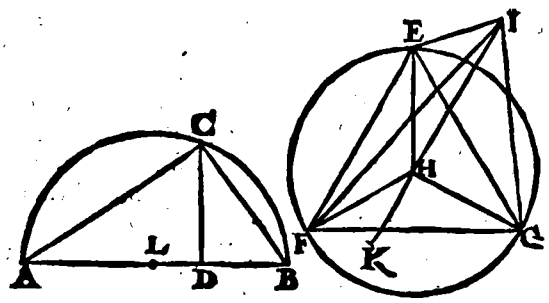
SIT




*Sit enim ad AB, perpendicularis CD, & media proportionalis inter AC, & CB. Dico ſemicirculum circa AB, deſcriptum, tranſire per D. Nam ſi tranſeat citra D, vel vltra, nimirũ per punctum E; erit quoque CE, media proportionalis inter AC, & CB, ex coroll. propoſ. 13. lib. 6. Quare tam quadratum rectæ CD, quàm quadratum rectæ CE,* [a] *æquale erit rectangulo ſub AC, CB; Ac proinde quadrata rectarũ CD, CE, inter ſe æqualia, & ipſæ rectæ CD, CE, æquales erunt, pars & totum. Quod eſt abſurdum. Tranſibit ergo ſemicirculus per D.* a 17. ſexti.

*Hinc manifeſtum eſt, ſemicirculum in ſuperiori figura deſcriptum circa IK, in plano rectarum IK, HE, tranſire per E, cùm HE, ſit ad IK, perpendicularis, & media proportionalis inter IH, HK.*

## COROLLARIVM I.




*Hinc facilè colligemus, diametrum ſphæræ eſſe potentia quadruplam ſeſquialteram ſemidiametri circuli circa baſim pyramidis deſcripti. Cùm enim diameter ſphæræ AB, oſtenſa ſit potentia ſeſquialteram lateris pyramidis EF, erit quadratum rectæ EF, talium partium 6. qualium 9. eſt quadratũ rectæ AB: At qualium partium 6. eſt quadratũ rectæ EF, talium partium 2. eſt quadratum rectæ HE,* [b] *quòd quadratum rectæ EF, triplum ſit quadrati rectæ HE. Qualium igitur partium 9. eſt quadratum rectæ AB, talium partium 2. erit quadratum rectæ HE; Ac propterea diameter ſphæræ AB, potentia eſt quadrupla ſeſquialtera ſemidiametri HE, cùm proportio quadratorum ſit, qua 9. ad 2.* b 12. tertij decimi.

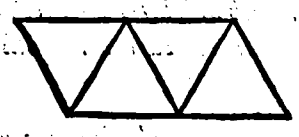
## COROLLARIVM II.

*Rvrsvs perpendicularis ex centro ſphæræ ad planum baſis pyramidis demiſſa, ſexta pars erit diametri ſphæræ, & tertia pars ſemidiametri. Sit enim L, centrũ ſemicirculi ACB, eritq; L, centrum quoque ſphæræ. Dico rectam LD, (quæ nimirum ex centro ſphæræ ad baſin EFG, ducitur perpendicularis; cùm AD, æqualis ſit ipſi IH, & ideò punctum D, idem quod H, quemadmodum & L, idem eſt, quod centrum ſphæræ) eſſe ſextam partem diametri ſphæræ, nempe rectæ AB, & tertiam partem ſemidiametri AL. Quoniam enim AD, dupla eſt ipſius DB; Qualium partium 4. eſt AD, talium 2. erit DB; ac proinde talium 6. tota AB, & ſemidiameter AL, talium 3. Quare ſi AD, eſt 4. & AL, 3. erit LD, 1. & idcircò LD, ſexta pars erit rectæ AB, quæ fuit partium earundem 6. & tertia pars rectæ AL, quæ fuit earundem partium 3.*

*Similiter, altitudo pyramidis HI, duas tertias partes continebit ipſius diametri. Eſt enim HI, eadem, quæ AD, continens duas tertias diametri, ex conſtructione.*

*Rvrsvs, qualium partium 9. ponetur quadratum diametri, talium 4. erit quadratum altitudinis pyramidis. Nam proportio 9. ad 4. eſt duplicata proportionis 3. ad 2. vt hic apparet 9. 6. 4.*

## SCHOLIVM.



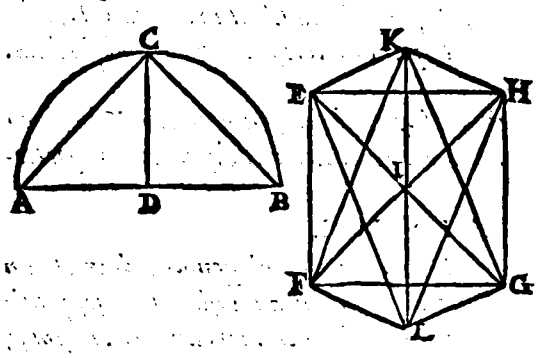
*Qvod ſi ex materia aliqua conficiantur quatuor triangula æquilatera æqualia, diſponanturq;, vt hæc figura indicat, facile ex ipſis ritè inter ſe complicatis componetur Tetraedrum, ſecundum totam ſoliditatem. Hanc verò praxim, & ſequentes quatuor, quibus reliqua quatuor ſolida regularia in materia quauis ſenſibili conficiuntur, deſumpſimus ex Alberto Durero, non ignobili ſcriptore.*

## PROBL. 2. PROPOS. 14. 15.

OCTAEDRVM conſtituere, & ſphæra complecti, qua & pyramidem; & demonſtrare, quòd ſphæræ diameter potentia ſit dupla lateris ipſius octaedri.

Sit ſphæræ, quę conſtitutam pyramidem comprehendit, diameter AB, circa quam ſemicirculus deſcribatur ACB, & ex centro D, ad AB, perpendicularis ducatur DC, connectanturq; rectæ

a 4. primi. AC, BC, a quæ æquales inter se erunt. Sumpta iam recta EF, quæ æqualis sit ipsi AC, vel BC, describatur super eam quadratum EFGH, in quo ducantur diametri EG, FH, se mutuò secantes in I: eruntq; rectæ IE, IF, IG, IH, æquales, cùm sint semidiametri circuli circa quadratum descripti, vt in 4. lib. demonstratum est. Deinde ex I, in vtramque partem ad planum quadrati erigatur perpendicularis KL, ponanturque IK, IL, æquales ipsi IE: Et denique ex K, & L, deducantur ad angulos quadrati rectæ KE, KF, KG, KH, LF, LE, LH, LG. Dico solidum contentum octo triangulis, KEF, KFG, KGH, KEH; LFE, LEH, LHG, LFG, esse octaedrum, quod quæritur.




b 8. primi. Quoniam enim latera EI, IK, trianguli EIK, æqualia sunt lateribus EI, IH, trianguli EIH; & anguli ipsis contenti, recti; (ipse quidè EIK, ex defin. 3. lib. 11. At verò EIG, b eò quòd sit æqualis angulo GIH, sibi deinceps, ob æqualitatem laterum EI, IH, GI, IH, & basium EH, GH.) c Erit & basis EK, basi EH, æqualis. Eodemque modo eidem EH, æqualis erit KH; ideoque triangulum æquilaterum erit KEH.

c 4. primi. Simili argumento concludemus, reliqua triangula esse æquilatera: atque adeò æqualia triangulo KEH, cùm illorum latera æqualia sint lateribus quadrati EFGH, singula singulis. Constitutum igitur iam est octaedrum ex octo triangulis æquilateris & æqualibus. Quòd octaedrum dico comprehendi sphæra diametri AB, qua nimirum & pyramis constructa comprehenditur; & diametrum sphæræ AB, potentia duplam esse lateris EF, vel AC.

QVONIAM enim IE, perpendicularis est ad KL, ex 3. defin. lib. 11. & media proportionalis inter segmenta KI, IL; (quòd tres rectæ KI, IE, IL, æquales sint, ideòque eandem habeant proportionem.) Semicirculus circa KL, in plano rectarum KL, IE, descriptus, transibit per punctum E, ex lemmate præcedentis propositionis. Eadem ratione semicirculus descriptus circa eandem KL, in plano rectarum KL, IF, incedet per punctum F. Idemque dicendum est de punctis G, H. Igitur quilibet horum semicirculorum circumductus, manente fixa diametro KL, describet sphæram, quę complectitur octaedrum constitutum, cùm per omnes illius angulos incedat. Cùm ergo hæc sphæra æqualis sit datæ sphæræ, cuius diameter AB; (Nam cũ rectæ AC, EF, æquales sint, ideoq; ipsarum quadrata æqualia; Sit autem tam quadratum rectæ AC, duplum quadrati rectæ AD, q̃ quadratum rectæ EF, quadrati rectæ EI; Erunt & rectæ AD, EI, hoc est, KI, semidiametri æquales. Quare & totæ diametri AB, KL, æquales erũt, ac proinde sphæræ ipsarum æquales existent.) comprehendetur idem octaedrum data sphæra.

d 47. primi. QVIA verò quadratum rectæ AB, d æquale est quadratis rectarum AC, BC, quę æqualia sunt; erit quadratum rectæ AB, duplum quadrati rectæ AC. Quamobrem cùm AB, sit diameter sphæræ, & AC, recta æqualis lateri octaedri EF, manifestum est, diametrum sphæræ potentia duplam esse lateris octaedri. Itaque octaedrum constituimus, & sphæra complexi sumus; qua & pyramidem, &c. Quod erat faciendum.

## COROLLARIVM I.

*Ex dictis manifestum est, in octaedro tres diametros se mutuò ad angulos rectos secare in centro sphæræ: quales sunt KL, EG, FH, secantes sese in I. Omnes enim anguli ad I, ostensi*
a 4. vndec. *sunt recti. Atque proinde, cùm KI, recta sit ad lineas EG, HF; a recta quoque erit ad planum*
b 18. vndec. *EFGH, per ipsas ductum; b ideoq; & plana KFLH, ELGK, per KI, ducta, recta erunt ad planũ EFGH. Immò eadem ratione, vt paucis rem complectar, tria plana EFGH, KFLH, ELGK, se mutuò ad angulos rectos secabunt; Quæ quidem plana sunt quadrata, cùm omnia eorum latera sint ipsius octaedri latera, ac proinde æqualia existant inter se, comprehendantq; angulos rectos; eò quòd (cùm quadratum diametri sphæræ duplum sit quadrati lateris octaedri, vt ostendimus,) quadratũ diametri HF, æquale existit quadratis lateruũ octaedri*
c 48. primi *FK, KH. c Ita enim efficitur, vt angulus FKH, rectus sit. Eademq; est ratio de cæteris angulis.*

## COROLLARIVM II.

*OCTAEDRVM diuiditur in duas pyramides similes & æquales, quarum basis communis, est quadratum EFGH, vertices verò K, & L; altitudines denique, semidiametri IK, IL: cuiusmodi sunt pyramides EFGHK, EFGHL. Nam plana vnius sunt similia & æqualia planis alterius, vt constat, cùm sint triangula æquilatera, & æqualia, præter basin communem, quæ est quadratum subduplum quadrati diametri sphæræ, vt est demonstratum.*

## COROLLARIVM III.

*SI tetraedrum, & octaedrum in eadem sphæra describantur, erit tetraedri latus potentia sesquiter-*

*ſeſquitertium lateris octaedri. Ponatur enim quadratum diametri ſphæræ diuiſum in ſex partes.* [a] *Quoniam igitur diameter ſphæræ eſt potentia ſeſquialtera lateris tetraedri, erit quadratum lateris tetraedri talium partium 4. qualium 6. eſt quadratū diametri ſphæræ.* [b] *Rurſus quia diameter ſphæræ eſt potentia dupla lateris octaedri, erit quadratum lateris octaedri talium partium 3. qualium 6. eſt quadratum diametri ſphæræ. Igitur cùm talium partium 4. ſit quadratum lateris tetraedri, qualium 3. eſt quadratum lateris octaedri; perſpicuum eſt, latus tetraedri potentia ſeſquitertium eſſe lateris octaedri.*

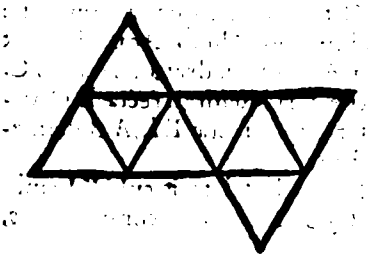
a 13. tertij decimi.

b 14. tertij decimi.

## COROLLARIVM IIII.

*DENIQVE, quia in quadrato EFGH, recta EH, parallela eſt rectæ FG; & in quadrato ELGK, rectæ EK, rectæ GL:* [c] *Erit planum EHK, per EH, EK, ductum plano FGL, per FG, GL, ductо, parallelum. Cùm igitur eadem ſit ratio de cæteris baſibus octaedri, efficitur, baſes octaedri oppoſitas inter ſe parallelas eſſe.*

c 15. vndec.

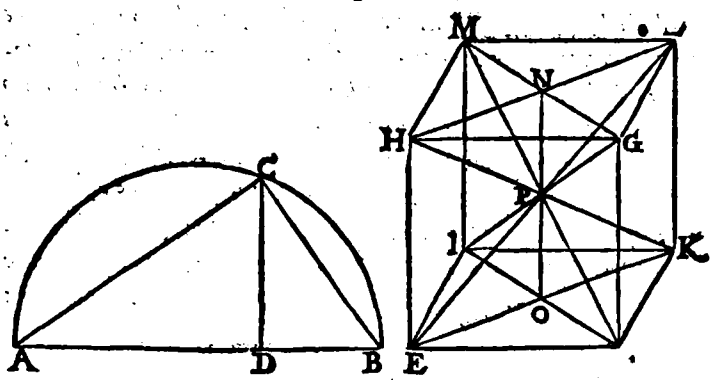


## SCHOLIVM.

*QVOD ſi ex materia aliqua conficiantur octo triangula æquilatera, inter ſe æqualia, diſponanturq́, vt hæc figura indicat, facilè ex ipſis ritè inter ſeſe complicatis, componetur octaedrum, ſecundùm tetam ſoliditatem, vt ait Albertus Durerus.*

## PROBL. 3. PROPOS. 15. 141

**CVBVM conſtituere; & ſphæra complecti, qua & priores figuras; & demonſtrare, quòd ſphæræ diameter potentia ſit tripla lateris ipſius cubi.**




SIT ſphæræ, quæ prædictas figuras comprehendit, diameter AB, circa quam ſemicirculus deſcribatur ACB: & ex AB, auferatur tertia pars BD, vt ſit AB, ipſius BD, tripla. Deinde ducta DC, perpendiculari ad AB, connectatur rectę AC, BC. Super rectâ EF, quę rectæ BC, ſit æqualis, quadratum conſtituatur EFGH, ſuper quod erigantur perpẽdiculares EI, FK, GL, HM, æquales quoque ipſi BC, quarum extremâ coniungantur rectis IK, KL, LM, MI. Quoniam ergo rectæ EI, FK, ad planum EFGH, rectæ ſunt; [a] erunt rectæ EI, FK, parallelæ: Sunt autem & æquales, [b] vtraq; æqualis poſita ſit ipſi BC, hoc eſt, ipſi EF. [b] Igitur & EF, IK, parallelæ ſunt & æquales; & ideò parallelogrammum eſt EFKI. In quo, cùm lineæ EI, IK, KF, æquales ſint ipſi EF, omnes quatuor lineę æquales exiſtunt: [c] Sunt autem & omnes quatuor anguli recti, cùm EIK, FKI, æquales ſint oppoſitis angulis rectis KFE, IEF. Igitur EFKI, quadratũ eſt. Eadem ratione quadrata erunt FKLG, GLMH, HMIE; Atq; idcircò & IKLM, quadratum erit, [d] cùm ſimile ſit & æquale quadrato oppoſito EFGH. Eſt enim EL, ſolidum parallelepipedum, [e] quòd eius plana oppoſita ſint parallela, nimirum per lineas parallelas ſe mutuò tangẽtes ducta. Quare cubus erit EL. Quem dico comprehendi ſphęra diametri AB. Sint enim planorum oppoſitorum EFKI, GHML, diametri EK, FI, GM, HL, per quas ducãtur plana EKLH, FIMG. [f] Quia igitur tam planum EKLH, quàm FIMG, cubum bifariam ſecat; vtrumque per centrum cubi tranſibit, ex ſcholio propoſ. 39. lib. 11. per punctum videlicet P, in quo ex coroll. eiuſdem propoſ. ſe mutuò quoque bifariam diuident omnes diametri cubi; Ac propterea communis planorum ſectio, recta ſcilicet NO, per idem punctum P, incedet. Quia verò plana EKLH, FIMG, rectangula ſunt, (Cùm enim HE, perpendicularis ſit duabus rectis EI, EF, ob quadrata EM, EK; [g] perpendicularis quoque erit ad planum EK, ideoque & ad rectam EK, ex defin. 3. lib. 11. Rectus ergo angulus eſt HEK. Eadem ratione recti erunt reliqui anguli in plano EKLH, necnon & anguli in plano FIMG. Rectangula ergo ſunt plana EKLH, FIMG.) & æqualia, quòd latera vnius æqualia ſint lateribus alterius; erunt quoque eorum diametri EL, HK, FM, GI, æquales, vt conſtat ex ſcholio propoſitionis 34. libri 1. Ac proinde & ſemidiametri PE, PL, PH, PK, PF, PM, PG, PI, æquales erunt. Quare ſemicirculus circa EL, ex centro P, deſcriptus, & circumductus, fixa manente diametro EL, ſphæram deſcribet per omnes cubi angulos tranſeuntem; quam quidem æqualem eſſe ſphæræ diametri AB, ita demonſtrabitur.

a 6. vndec.

b 33. primi.

c 34. primi.

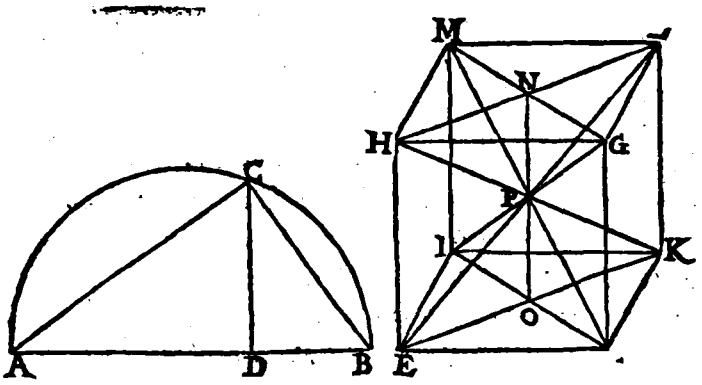
d 24. vndec.

e 15. vndec.

f 28. vndec.

g 4. vndec.

c 47. primi.




b 47. primi.

Cvm quadratum rectæ EK, a æquale sit quadratis æqualium rectarum æqualium EF, FK, ac proinde duplũ quadrati rectæ EF, hoc est, quadrati rectæ KL: Erunt quadrata rectarum EK, KL, tripla quadrati rectæ KL. b Est autẽ quadratis rectarum EK, KL, æquale quadratum rectæ EL, quòd angulus EKL, sit rectus in rectangulo EKLH. Igitur & quadratum rectę EL, triplum erit quadrati rectę KL, hoc est, quadrati rectę BC: At verò eiusdem quadrati rectæ BC, triplum est quadratum rectæ AB. (Nam tres rectæ AB, BC, BD, proportionales sunt, ex coroll. propos. 8. lib. 6. Ac proinde ex coroll. propos. 20. lib. 6. vt est AB, ad BD, ita erit quadratum rectæ AB, ad quadratum rectæ BC. Cùm ergo AB, ipsius BD, sit tripla: erit quoque quadratum rectæ AB, quadrati rectæ BC, triplum.) Igitur quadrata rectarum EL, AB, æqualia sunt: ac propterea ipsæ rectæ EL, AB, diametri nimirum sphærarum, ideoque & ipsarum sphærę, æquales existunt.

Qvia verò ostensum est, quadratum diametri EL, triplum esse quadrati lateris cubi KL: manifestum est, diametrum sphærę potẽtia triplam esse lateris cubi. Quocirca cubum constituimus, & sphæra complexi sumus, &c. Quod erat faciendum.

## COROLLARIVM I.

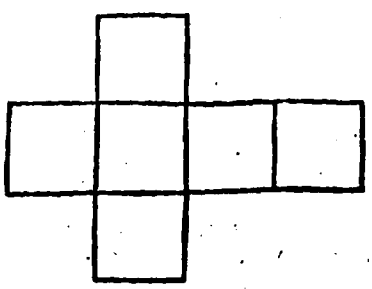
*Ex demonstratione huius problematis manifestum est, omnes diametros cubi inter se esse æquales, seseq; mutuò bifariam in centro sphæræ secare. Atque eadem ratione rectas lineas, quæ centra quadratorum oppositorum coniungunt, bifariam diuidi in eodem centro. Demonstratum enim est, diametros cubi EL, HK, FM, GI, æquales esse, seseq; mutuò bifariam secare in centro P. Quòd verò & recta NO, coniungens centra N, & O, quadratorum oppositorum GHML, EFKI, in eodem centro P, bifariam diuidatur, hac ratione ostendetur. Duo anguli OFP, OPF, trianguli OFP, æquales sunt duobus angulis NMP, NPM, trianguli NMP: (a Nam angulus OFP, æqualis est alterno NMP, inter lineas FI, GM, b quæ parallelæ sunt, cùm sint communes sectiones planorum parallelorum EFKI, GHML; c & angulus OPF, æqualis est opposito ad verticem NPM.) Sunt autem & latera PF, PM, quibus adiacent, æqualia, cùm sint semidiametri. Igitur & latera PO, PN, æqualia erunt; ac proinde recta NO, bifariam secabitur in P. Eademq; est ratio de cæteris lineis coniungentibus centra aliorum quadratorum oppositorum.*

a 29. primi
b 16. vnde.
c 15. primi.

## COROLLARIVM II.

*Rvrsvs potentia diametri sphæræ, seu cubi, æqualis est potentiis laterum tetraedri & cubi simul sumptis. d Nam qualium partium 9. est quadratum diametri, talium 6. est quadratum lateris tetraedri: e Qualium verò partium 9. est idem quadratum diametri, talium 3. est quadratum lateris cubi. Igitur quadratum lateris tetraedri, & quadratum lateris cubi simul sunt partium 9. quemadmodum & quadratum diametri; Ac proinde quadratum diametri æquale est quadratis dictorum laterum. Hoc etiam manifestum est ex semicirculo circa diametrum sphæræ descripto, in quo latus tetraedri est AC, cubi verò BC. f Perspicuum autem est, diametrum sphæræ AB, posse & rectã AC, & rectam BC, cùm angulus ACB, sit rectus.*

d 13. tertij decimi.
e 15. tertij decimi.



f 47. primi.

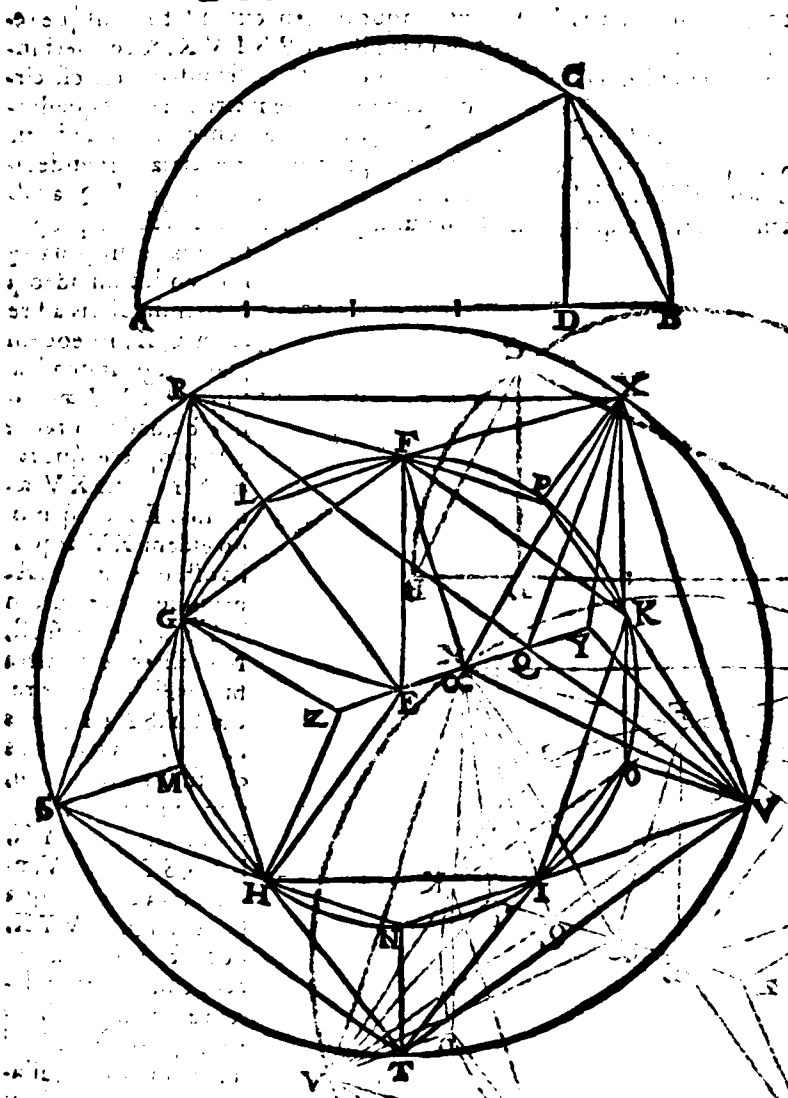
## SCHOLIVM.

*Qvod si ex aliqua materia conficiãtur sex quadrata inter se æqualia, disponanturq;, vt hæc figura indicat, facilè comperitur cubus secundùm totam soliditatẽ, si dicta quadrata rite complicentur inter se. Efficietur enim ex illis figura quædam solida, octo angulos solidos continens instar tessaræ cuiuspiam, vt con-*

## 16. PROBL. 4. PROPOS. 16.

**Icosaedrvm** constituere; & sphæra complecti, qua & ante dictas figuras: & demonstrare, quòd Icosaedri latus Irrationalis est linea, quæ vocatur Minor.

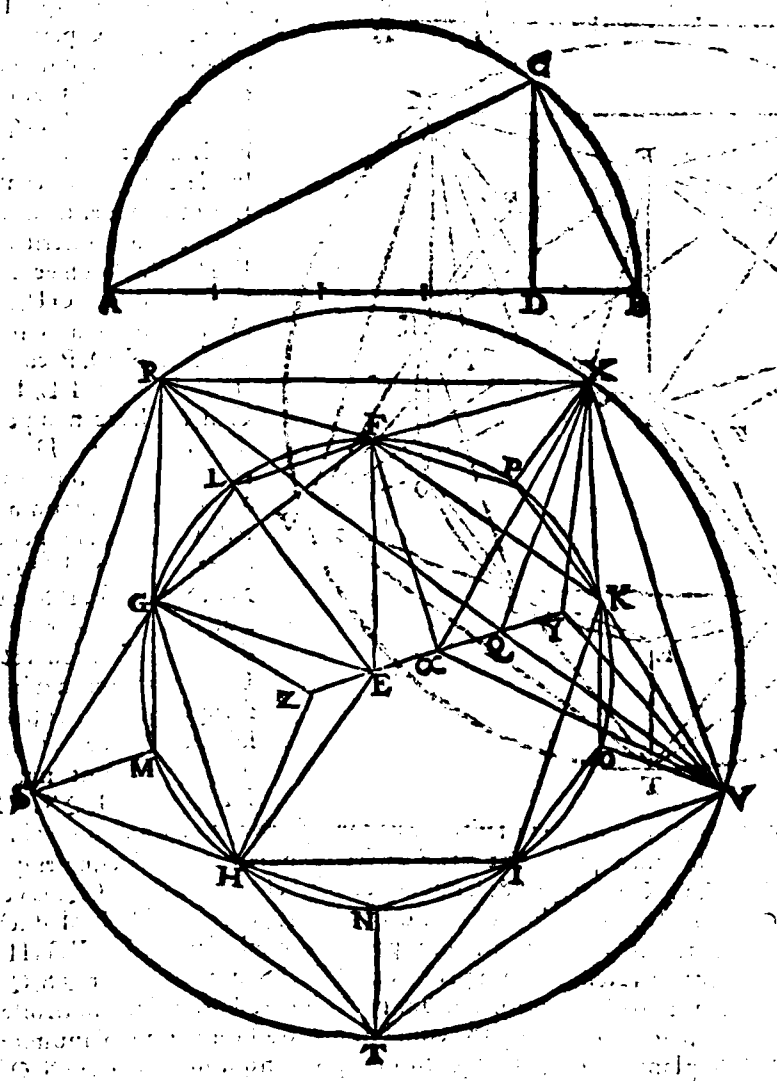
Sit




SIT sphærę, quæ prædictas figuras comprehendit, diameter AB, circa quam semicirculus describatur ACB: Et ex AB, abscindatur quinta pars BD; vt AB, ipsius BD, sit quintupla; & ipsius AD, sesquiquarta: At verò AD, ipsius BD, quadrupla. Deinde ducta DC, perpendiculari ad AB, connectantur rectæ AC, BC. Ad interuallum rectæ EF, quæ ipsi BC, sit æqualis, circulus describatur ex centro E; [a] in quo pentagonum æquilaterum inscribatur FGHIK. Post hæc diuisis arcubus FG, GH, HI, IK, KF, bifariam in punctis L, M, N, O, P, connectantur rectæ FL, LG, GM, MH, &c. nempe latera decagoni. Deinde ex centro E, & punctis L, M, N, O, P, ad planum circuli FGHIK, perpendiculares erigatur EQ, LR, MS, NT, OV, PX, quæ æquales ponantur semidiametro EF, seu rectæ BC. Eruntq; omnes inter se æquales; [b] sed & parallelæ sunt. Igitur rectæ, quę illas coniungunt, nempe EL, QR; EM, QS; EN, QT; EO, QV; EP, QX. (quas tamen omnes, vt vitaremus confusionem, non duximus.) [c] binæ inter se æquales erũt. Ac proinde cùm æquales sint EL, EM, &c. semidiametro EF, æquales quoque erunt QR, QS, QT, QV, QX, & inter se, & semidiametro EF, seu rectæ BC. [d] Quia verò planum per rectas QR, QS, ductum parallelum est plano FGHIK, per rectas EL, EM, ducto: eademque ratione planum per rectas QS, QT, ductum, parallelum est plano eidem FGHIK, per rectas EM, EN, ducto, conuenit autem planum per rectas QR, QS, cum plano per QS, QT, in recta QS. Igitur efficient hæc duo plana vnum planum, per ea, quæ ad propos. 16. lib. 11. ostendimus. Non aliter ostendemus planum per QT, QV, cum hoc plano efficere vnum planum; necnon planum per QV, QX; & planum per QX, QR. Sunt ergo quinque lineæ QR, QS, QT, QV, QX, in eodem plano; Ac proinde si ex Q, ad interuallum QR, in eo plano circulus describatur, is per reliqua puncta S, T, V, X, transibit, eritque æqualis circulo FGHIK. Coniungantur puncta R, S, T, V, X, rectis RS, ST, TV, VX, XR: Quia igitur LR, PX, æquales sunt, [e] & parallelæ; si concipiatur duci recta LP; [f] erunt quoque LP, RX, æquales & parallelæ; [g] Ac proinde ex circulis æqualibus æquales arcus auferent: Aufert autem LP, quintam partem circuli FGHIK, nempe duas decimas partes FL, EP. Igitur & RX, quintam partem auferet circuli RSTVX. Simili prorsus argumento concludemus, reliquas rectas RS, ST, TV, VX, quintas partes auferre. Quamobrem pentagonum æquilaterum est RSTVX, omnia latera æqualia habens lateribus pentagoni FGHIK. Demittantur ex angulis pentagoni RSTVX, ad angulos pentagoni FGHIK, rectæ RE, RG, SG, SH, TH, TI, VI, VK, XK, XF. Quia igitur perpendicularis LR, æqualis ponitur semidiametro EF, hoc est, lateri hexagoni circuli FGHIK; & est LF, latus decagoni; [h] erit quadratum lateris pentagoni eiusdem circuli æquale quadratis rectarum LR, LP. [i] Est autem eisdem quadratis æquale quadratum rectæ FR; quòd angulus FLR, rectus sit, ex 3. definitione libri 11. Igitur quadratum rectæ FR, æquale est quadrato lateris pentagoni; ideoque recta FR, lateri pentagoni LP, seu FG, hoc est, ipsi RX, æqualis erit. Eademque ratione erunt reliquæ lineæ RG, SG, SH, &c. reliquis lateribus vtriusque pentagoni æquales. Ac propterea decem triangula RFX, RFG, RGS, SGH, SHT, THI, TIV, VIK, VKX, XKF, æquilatera erunt, & inter se æqualia, cùm eorum omnia latera æqualia sint lateribus pen-

a 11. quarti.
b 6. vndec.
c 33. primi.
d 15. vndec.
e 6. vndec.
f 33. primi.
g 28. tertij.
h 10. tertiidecimi.
i 47. primi.

tagoni æquilateri. Post hæc, perpendicularis EQ, in vtramque partem extendatur, sintque rectæ QY, EZ, æquales singulæ, lateri decagoni circuli FGHIK, vel RSTVX; & connectantur rectæ VQ, VY, XQ, XY, GE, GZ, HE, HZ. Quoniam ergo QX, semidiameter est circuli RSTVX, hoc est, latus hexagoni, & QY, latus est decagoni eiusdem circuli; [a] erit quadratum lateris pentagoni XV, æquale quadratis rectarum QX, QY; [b] Est autem eisdem quadratis æquale quadratum rectæ XY, quòd angulus XQY, rectus sit, ex definitione tertia libri vndecimi. (Nam cùm plana circulorum FGHIK, RSTVX, parallela sint ostensa, sitque EQ, ad illius planum recta, ex constructione, erit quoque EQ, ad huius planum recta, ex scholio propositionis decimequartæ libri vndecimi, ideoq; perpendicularis ad rectam QX, in eodem plano.) Igitur quadratum rectæ XY, æquale est quadrato rectæ XV, propterea quæ recta XY, recta XV, æqualis. Eodemq; modo eidem XV, æqualis ostenditur VY; Ac proinde triangulum VYX, æquilaterum est, Non aliter demonstrabimus, si ducantur rectæ RY, SY, TY, (quas tamen, vt vitaremus confusionem linearum, non duximus.) quatuor triangula RYX, RYS, SYT, TYV, æquilatera esse, & æqualia triangulo VYX, hoc est, prioribus decem, cùm omnium latera æqualia sint lateribus pentagoni. Simili argumento æquilaterum erit triangulum GZH, (cùm EG, sit latus hexagoni, nempe semidiameter, & EZ, latus decagoni, angulusq; GEZ, rectus, ex tertia definitione libri vndecimi,) necnon quatuor triangula HZI, IZK, KZE, FZG, (quorum tamen lineas, ne pareremus confusionem, nõ duximus,) quæ omnia prioribus quindecim æqualia erunt, eandem ob causam. Cùm igitur omnia hæc triangula viginti æquilatera sint, & æqualia, copulenturq; singula singulis per lineas rectas, nempe per eorum latera; constitutũ erit ex ipsis Icosaedrum. Quod dico comprehendi sphæra diametri AB.




[a] 10. tertij decimi.

[b] 47. primi.

DIVISA enim recta EQ, bifariam in α, ducantur rectæ αF, αX, αV. Quoniam igitur latera αQ, QV, trianguli αQV, æqualia sunt lateribus αQ, QX, trianguli αQX, cùm QV, QX, sint semidiametri circuli RSTVX: Sunt autem & anguli αQV, αQX, æquales, nempe recti, ex definitione tertia libri vndecimi, [c] Erunt & bases αV, αX, æquales. Eademque ratione, si ducantur rectæ ex α, Q, ad R, S, T, ostendentur rectæ αR, αS, αT, æquales & inter se, & ipsis αV, αX. Rursus quia latera αQ, QX, trianguli αQX, æqualia sunt lateribus αE, EF, trianguli αEF, cùm QX, EF, sint semidiametri circulorum æqualium, & EQ, diuisa sit bifariam in α; Sunt autem & anguli αQX, αEF, æquales, nimirum recti, ex definitione tertia libri vndecimi, [d] Erunt quoque bases αX, αE, æquales: eodemque modo si ex α, E, ad G, H, I, K, rectæ ducantur, ostendentur αG, αH, αI, αK, æquales ipsi αX; Ac proinde decem lineæ ductæ ad decem angulos F, G, H, I, K, R, S, T, V, X, æquales sunt. Quoniam verò QE, semidiameter est, hoc est, latus hexagoni circuli FGHIK; & EZ, latus decagoni eiusdem circuli, [e] erit QZ, diuisa in E, extrema ac media

[c] 4. primi.

[d] 4. primi.

[e] 9. tertij decimi.

die ratione, maiusque segmentum erit QE. Quare minus segmentum ZE, assumens Eα, dimidium maioris segmenti, hoc est, recta ιZ, [a] quintuplum potest eius, quod ex Eα, describitur, quadrati. Potest autem & recta αF, quintuplum eiusdem quadrati rectæ Eα. (Nam cùm quadratum rectæ EF, quadruplum sit quadrati rectæ αE, ex scholio propositionis quartæ libri secundi, quòd recta EF, dupla sit ipsius Eα; erunt quadrata rectarum EF, Eα, simul quintupla quadrati rectæ Eα. [b] Cùm ergo quadratis rectarum EF, Eα, æquale sit quadratum rectæ AF; erit quoque quadratum rectæ αF, quintuplum quadrati rectæ Eα.) Igitur æqualia sunt quadrata rectarum, αZ, αF, ac proinde rectæ ipsæ αZ, αF, æquales erunt. Cùm igitur ZY, bifariam secetur in α, (propterea quòd si æqualibus αE, αQ, æquales rectæ addantur EZ, QY, totæ Zα, Yα, æquales fiunt.) Erunt omnes rectæ ductæ ad α, ad omnes angulos Icosaedri æquales. Quocirca sphæra descripta circa diametrum ZY, ex centro α, per omnes angulos Icosaedri cõstituti transibit. Hanc ergo sphæram dico æqualem esse sphærę diametri AB.

[a] 65. tertiidec.

[b] 47. primi.

[c] Cvm enim sit vt αZ, ad αE, ita YZ, dupla ipsius αZ, ad QE, duplam ipsius αE; [d] Ac propterea vt quadratum rectæ αZ, ad quadratum rectæ αE, ita quadratum rectæ YZ, ad quadratum rectæ QE; sit autem quadratum rectæ αZ, ostensum quintuplum quadrati rectæ αE; Erit quoque quadratum rectæ YZ, quintuplum quadrati rectæ QE, hoc est, quadrati rectæ BC; quòd recta QE, æqualis sit posita semidiametro EF, hoc est, rectæ BC; Est autem & eiusdem quadrati rectæ BC, quintuplum quadratum rectæ AB; (Nam cùm, ex coroll. propos. 8. lib. 6. sit vt AB, ad BC, ita BC, ad BD; erit vt AB, ad BD, ita quadratum rectæ AB, ad quadratum rectæ BC, ex coroll. propos. 20. lib. 6. Ac proinde existente AB, quintupla ipsius BD, erit etiam quadratum rectæ AB, quintuplum quadrati rectæ BC.) Quadrata igitur rectarum YZ, AB, æqualia sunt, ideoque & rectæ YZ, AB; ac propterea & sphæræ circa ipsas, æquales erunt.

[c] 15. quinti.

[d] 22. sexti.

Qvoniam denique diameter sphærę AB, Rationalis ponitur; (Nam comparatione ipsius ostendendum est, latus Icosaedri esse lineam Irrationalem, quæ Minor vocatur.) potestq; quintuplum quadrati rectæ BC, hoc est, rectæ illi æqualis EF; erit quoq; semidiameter EF, circuli FGHIK, Rationalis. (Nam quadrata rectarum AB, EF, cùm habeant proportionem, quam numerus ad numerum, nempe quam 5. ad 1. vel 10. ad 2. [e] erunt commensurabilia; Ac propterea & rectæ AB, EF, commensurabiles erunt, saltem potentia. Cùm ergo AB, sit Rationalis, erit & EF, Rationalis.) Quare & tota diameter circuli FGHIK, Rationalis erit; Ac propterea FG, latus pentagoni, hoc est, latus Icosaedri, [f] Irrationalis erit linea, quæ vocatur Minor. Icosaedrum igitur constituimus, & sphæra sumus complexi, qua & antedictas figuras, & demonstrauimus, quòd Icosaedri latus Irrationalis est linea, quæ vocatur Minor. quod erat faciendum.

[e] 6. decimi.

[f] 11. tertiidecimi.

## COROLLARIVM I.

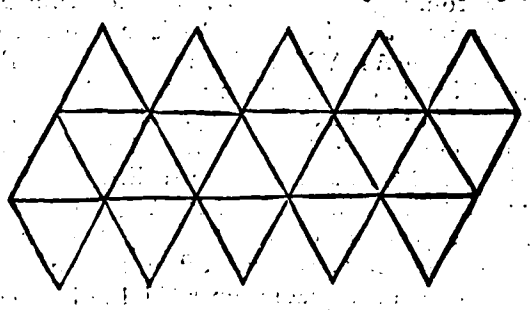
*Ex dictis infertur, sphæræ diametrum esse potentia quintuplam semidiametri circuli quinque latera Icosaedri ambientis, ex quo scilicet Icosaedrum constitutum est, & qui per quinque Icosaedri angulos incedit. Ostensum enim est quadratum diametri AB, quintuplum esse quadrati rectæ BC, hoc est, semidiametri EF.*

## COROLLARIVM II.

*Item manifestum est sphæræ diametrum esse compositam ex latere hexagoni, hoc est, ex semidiametro, & duobus lateribus decagoni eiusdem circuli: Nam YZ, diameter sphæræ componitur ex EQ, latere hexagoni, & ex QY, EZ, lateribus decagoni circuli FGHIK.*

## COROLLARIVM III.

*Constat denique latera Icosaedri opposita, qualia sunt RX, HL esse parallela. Nam recta RX, ostensa est parallela rectæ, quæ ex L, in P, duceretur. Cùm igitur eidem rectæ LP, sit quoque parallela recta HI, vt in scholio propositionis 27. lib. 3. demonstrauimus; (eò quòd æquales sunt arcus HL, IP; continet enim vterque tres decimas partes totius circumferentiæ;) perspicuum est, rectas RX, HI, esse parallelas. Eademq; est ratio de cæteris lateribus oppositis.*



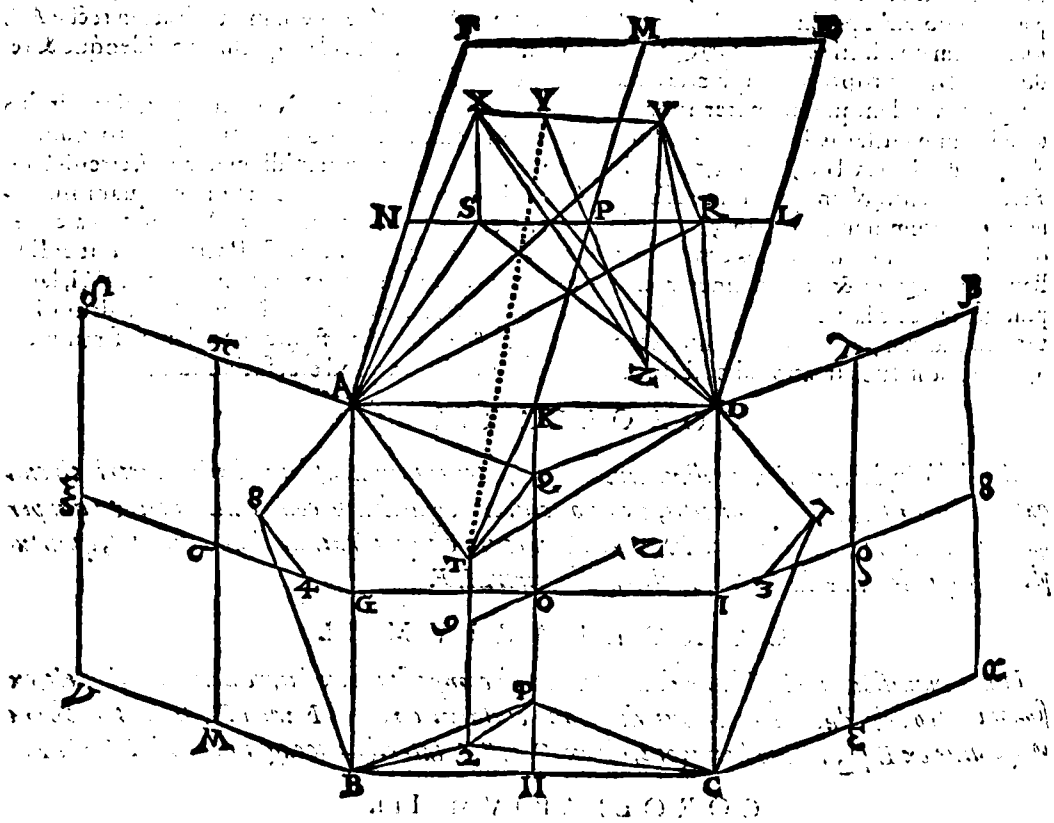
## SCHOLIVM.

*Quod si ex aliqua materia conficiantur viginti triangula æquilatera inter se æqualia, disponanturque, vt hæc figura indicat, componetur Icosaedrum secundùm totam soliditatem, si rectè inter sese aptentur.*

## PROBL. 5. PROPOS. 17.

DODECAEDRVM constituere; & sphęra complecti, qua & prędictas figuras; & demonstrare, q; Dodecaedri latus Irrationalis est linea, quæ vocatur Apotome.

SIT vna basis cubi data sphæra comprehensi, quadratum A B C D, cui insistat aliud æquale ad rectos angulos A D E F, vt sit communis horum sectio recta A D. (Insistunt enim omnes bases cubi sibi mutuò ad angulos rectos. Nam in præcedentibus, vt cubus constitueretur, erectæ sunt ex angulis basis E F G H, quatuor lineę E I, F K, G L, H M, ipsi basi E F G H, perpendiculares. Id quod
a 18. vndec. facilè apparere potest ex figura propositionis 15. huius lib. a Quare & bases cubi per ipsas ductæ, rectæ erunt ad eandem basin E F G H.) Diuisis itaq; cunctis lateribus bifariam in punctis G, H, I, K, L, M, N, quæ rectis cõnectantur secantibus sese in O, P, centris quadratorum, vt constat ex demonstratione octaui problematis lib. 4. Secentur O K, P L, P N, extrema ac media ratione in punctis Q, R, S, ex quibus ad plana quadratorum educantur extra cubum perpendiculares Q T, R V, S X, æquales segmentis maioribus O Q, P R, P S. Coniunctis deinde rectis A T, A X, D T, D V, V X, Dico A T D V X, esse vnum ex duodecim pentagonis æquilateris, & æquiangulis Dodecaedri constituendi. Quod enim pentagonum A T D V X, sit in vno plano, ita ostendetur. Cum
b 6. vndec. R V, S X, sint ad quadratum A D E F, rectæ, b ipsæ erunt parallelæ: Ac proinde, cùm sint æqua-




les, (quia segmenta maiora P R, P S, quibus æquales sunt posita, æqualia sunt, cùm & lineæ sectæ
c 33. primi. P L, P N, æquales sint.) c erunt quoque coniungentes rectæ R S, V X, æquales & parallelæ: d Est
d 33. primi. autem & A D, eidem R S, siue L N, parallela, eò quòd A N, D L, parallelæ sunt & æquales. e Ipsis
e 9. vndec. & A D, V X, parallelæ sunt: f Ac propterea rectæ coniungentes A X, D V, in eodem cum ipsis
f 7. vndec. erunt plano; ideoque trapezium A D V X, in vno existet plano: Est autem & triangulum A T D, in vno plano. Dico quòd & in eodem plano cum trapezio A D V X. Ex P, namque ducatur P Y, parallela ipsi R V, & quæ erit recta ad quadratum A D E F, quòd ad idem recta sit R V: Et con-
g 8. vndec. nectantur rectæ K T, K Y. Quoniam igitur est vt O K, ad O Q, ita O Q, ad Q K, ob sectionem rectæ O K: Est autem K P, ipsi O K, æqualis; (sunt enim dimidia latera cubi;) & P Y, ipsi O Q, (cùm æqualis sit ipsi R V, quæ posita fuit æqualis ipsi O Q, maiori segmento;) Erit quoque vt K P, ad P Y, ita O Q, hoc est, Q T, illi æqualis, ad Q K. Quare cùm triangula P K Y, Q T K, duo la-
h 6. vndec. tera habeant duobus lateribus proportionalia, sintque ad vnum angulum K, composita, h ita vt homologa latera sint parallela, nempe P K, & Q T, inter se, quòd vtrumque rectum sit ad quadratum A B C D, & P Y, Q K, inter se, quòd vtrumque rectum sit ad quadratum A D E F: i Eruntre-
i 32. sexti. k 1. vndec. liqua latera K Y, K T, in rectam lineam collocata: k Ac propterea recta T Y, in vno erit plano, ideoq; planum A T D, & planum A D V X, vnum planum constituent, per rectas T Y, A D, ductum. Quocirca pentagonum A T D V X, in vno existit plano.

QVOD

QVOD verò sit æquilaterum, ita docebitur. Cùm latera AN, NS, trianguli ANS, æqualia sint lateribus AK, KQ, trianguli AKQ; (Sunt enim AN, AK, dimidia latera cubi, & NS, KQ, segmenta minora rectarum æqualium sectarum.) & anguli ANS, AKQ, recti; si ducatur recta AQ, erunt bases AS, AQ, æquales. Rursus cùm latera AS, SX, trianguli ASX, sint æqualia lateribus AQ, QT, trianguli AQT; (Nam rectæ AS, AQ, ostensæ sunt æquales, & SX, QT, sunt segmenta maiora rectarũ æqualium sectarum) & anguli ASX, AQT, recti, ex defin. 3. lib. 11. Erunt quoque bases AX, AT, æquales. Quod si ducatur recta DQ, ostendemus eodem argumento, rectam DT, rectæ AT; si verò ducatur recta DR, rectam DV, rectæ DT, esse æqualem. Sunt igitur pentagoni quatuor latera XA, AT, TD, DV; æqualia; quibus etiam æquale ostendemus reliquum VX, hac ratione. Quadrata rectarum PN, NS, simul tripla sunt quadrati rectæ PS, hoc est, quadrati rectæ SX; Est autem quadrato rectæ PN, æquale quadratum rectæ AN. Igitur & quadrata rectarum AN, NS, simul tripla sunt quadrati rectæ SX. Cùm ergo quadratis rectarũ AN, NS, æquale sit quadratũ rectæ AS; erit quoq; quadratũ rectæ AS, triplum quadrati rectæ SX; Ac proinde quadrata rectarum AS, SX, simul, quadrupla eiusdem quadrati rectæ SX. Est autem quadratis rectarum AS, SX, æquale quadratum rectæ AX. Quadratum ergo rectæ AX, quadruplum quoque erit quadrati rectæ SX, hoc est, quadrati rectæ PS, hoc est, quadrati rectæ XY; Sunt enim rectæ PS, XY, æquales. Cùm igitur & quadratum rectæ VX, quadruplum sit eiusdem quadrati rectæ XY, ex scholio propos. 4. lib. 2. quòd VX, dupla sit ipsius XY; Erunt quadrata rectarum AX, VX, æqualia; Ac proinde rectæ ipsæ æquales. Quare cùm & XA, AT, TD, DV, ostensæ sint esse æquales; æquilaterum est pentagonum ATDVX.

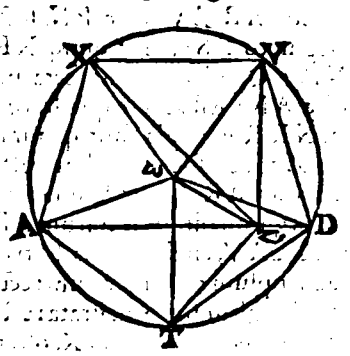
QVOD autem & æquiangulum sit, ita perspicuum fiet. Ductis rectis AR, AV; cùm PN, secta sit in S, extrema ac media ratione, eiq; addita PR, æqualis maiori segmẽto PS; erit quoq; NR, recta in P, extrema ac media ratione, maiusque segmentum erit NP. Quadrata igitur rectarum NR, RP, simul tripla sunt quadrati rectæ NP, hoc est, quadrati rectæ AN: Est autem quadratum rectæ RV, æquale quadrato rectæ RP. Ergo & quadrata rectarum NR, RV, tripla sunt quadrati rectæ AN; Ac proinde quadrata rectarum NR, RV, AN, quadrupla, sunt eiusdem quadrati rectæ AN. Sunt autem quadrata rectarum NR, AN, æqualia quadrato rectæ AR. Igitur & quadrata rectarum RV, AR, quadrupla sunt quadrati rectæ AN. Cùm ergo quadratis rectarum AR, RV, æquale sit quadratum rectæ AV; Erit quoque quadratum rectæ AV, eiusdem quadrati rectæ AN, quadruplum. At verò eiusdem quadrati rectæ AN, quadruplum est quadratum rectæ AD, ex scholio propos. 4. lib. 2. quòd AD, dupla sit ipsius AN. Æqualia igitur sunt quadrata rectarum AV, AD, ideoq; & rectæ AV, AD, æquales. Simili argumento, ductis rectis DS, DX, ostendemus DX, DA, æquales esse; ac propterea tres rectas AD, AV, DX, inter se esse æquales. Quoniam igitur latera TA, TD, trianguli TAD, æqualia sunt lateribus DV, VX, trianguli DXV; & bases AD, DX, æquales quoque: Erunt & anguli ATD, DVX, æquales. Non secus ostendetur angulus DVX; æqualis angulo AXV. Ac proinde, cũ in pentagono æquilatero ATDVX, tres habeantur anguli æquales ATD, DVX, AXV, ipsum erit æquiangulum.

QVOD si sumantur alia duo cubi quadrata Cα, Bγ, recta ad quadratum ABCD, in communibus sectionibus CD, AB, quorum singula latera bifariam secẽtur in ι, λ, I, μ, ν, G, punctis, quæ rectis iungãtur se mutuò secantibus in quadratorum centris ρ, σ. Secentur deinde OH, OK, ρI, σG, extrema ac media ratione in punctis φ, Q, 3, 4, ex quibus ad plana quadratorum educantur ad partes cubi exteriores, perpendiculares φ2, QT, 37, 48, æquales segmentis maioribus φO, QO, 3ρ, 46, coniungantur; rectæ T2, 2C, C7, 7D, DT, TA, A8, 8B, B2, demonstrabimus eadem ratione, pentagona T2C7D, T2B8A, æquilatera esse & æquiangula, & æqualia priori ATDVX, ob communia latera TD, TA. Constructa igitur iam sunt tria pentagona tangentia cubi tria latera AD, DC, AB, & sibi mutuò cohærentia lateribus communibus TD, TA. Si igitur eadem methodo fabricentur alia nouem similia pentagona, tangentia reliqua nouem cubi latera; constitutum erit Dodecaedrum. Quod quidem sphæra comprehendi, qua & cubus, & præcedentes figuræ comprehenduntur, hac arte demonstrabimus.

INTELLIGANTVR plana cubi opposita secari planis, quæ per rectas planorum latera bifariam secantes ducuntur, nempe planum ADEF, & eius oppositum, planis ductis per rectas KM, LN. Item planum ABCD, & eius oppositum, planis per rectas GI, HK, ductis, &c. Quoniam igitur plana secantia recta sunt ad dicta plana cubi, quòd parallela sint basibus cubi, quæ rectæ sunt ad plana ADEF, ABCD. Erunt & communes eorum sectiones ad eadem cubi plana rectę. Quare cùm YP, recta sit ad planum ADEF, ipsa producta versus Z, erit communis sectio planorum per rectas KM, LN, ductorum. Eodem pacto si ex O, ad planum ABCD, erigatur perpendicularis 9OZ; erit ipsa communis sectio planorum, quæ per rectas GI, HK, ducuntur. Quia verò dictæ communes sectiones & diametri cubi se mutuò bifariam secant; secent se mutuò bifariam in Z: Secant autem sese diametri cubi bifariam in centro sphæræ cubum complectentis, ex corollario primo, propositionis decimæquintæ huius libri. Punctum igitur Z, centrum erit sphæræ circa cubum descriptæ; Ac proinde omnes rectæ ex Z, ad omnes angulos cubi ductæ inter se æquales erunt: Quibus omnibus æquales quoque esse omnes rectas ex Z, ad omnes angulos Dodecaedri ductas, sic fiet perspicuum, ducta recta ZX. Quoniam parallelæ sunt KP, OZ, quòd vtraq; recta sit ad planum ABCD; Item parallelæ sunt OK, ZP, quòd vtraq; recta sit ad planum ADEF; erit PKOZ, (debent enim duo puncta Z, intelligi esse cõiuncta) parallelo-

a 4. primi.
b 4. primi.
c 4. tertij decimi.
d 47. primi.
e 47. primi.
f 34. primi.
g 5. tertij decimi.
h 4. tertij decimi.
i 47. primi.
k 47 primi.
l 8. primi.
m 7. tertij decimi.
n 19. vndec.
o 39. vndec.
p 6. vndec.

a 34. primi. grammum: a ac propterea P Z, æqualis erit ipsi K O, hoc est, ipsi N P, dimidio lateri cubi: Est autem & P Y, ipsi P R, æqualis. Tota ergo Z Y, toti N R, æqualis erit. b Quare cùm quadrata rectarũ
b 4. tertiidecimi. N R, P R, simul tripla sint quadrati rectæ N P, quòd N R, in P, secta sit extrema & media ratione; erunt quoq; quadrata rectarum Z Y, P Y, hoc est, quadrata rectarũ Z Y, Y X, simul tripla quadrati
c 47. primi. rectæ P Z: (Est enim Y X, æqualis ipsi P S, hoc est, ipsi P Y;) c Est autem quadratis rectarum Z Y, Y X, æquale quadratum rectæ Z X. Igitur & quadratum rectæ Z X, triplum erit quadrati rectæ Z P, hoc est, quadrati dimidij lateris cubi. At quia eiusdem quadrati dimidij lateris cubi triplum,
d 15. quinti. est quoque quadratum semidiametri sphæræ cubum comprehendentis. (d Nam vt diameter ad
e 22. sexti. latus cubi, ita est semidiameter ad dimidium lateris; e Ac proinde vt quadratũ diametri ad quadratum lateris, ita quadratum semidiametri ad quadratum dimidij lateris. f Cùm ergo quadratum diametri triplum sit quadrati lateris, erit quoque quadratum semidiametri triplum quadrati
f 15. tertiidecimi. dimidij lateris.) Æquale igitur est quadratum rectæ Z X, quadrato semidiametri sphæræ, seu cubi; Ac propterea Z X, æqualis semidiametro. Eadem ratione erit ducta recta Z V, semidiametro æqualis; Vel certè quia cùm latera Z Y, Y X, trianguli Z Y X, æqualia sint lateribus Z Y, Y V, trianguli Z Y V, & anguli contenti recti. (cùm enim P Y, sit perpendicularis ad L N, erit quoque eadem
g 4. primi. ad sibi parallelam V X, perpendicularis.) g Erunt bases Z X, Z V, æquales: Sunt autem & Z A, Z D, ad angulos cubi, semidiametro sphæræ æquales, vt dictum est. Sunt ergo iam quatuor rectæ ductæ ex Z, centro sphæræ ad quatuor angulos pentagoni A, D, V, X, æquales semidiametro sphæræ. Vt autem ostendatur & recta ducta Z T, ad quintum angulum T, semidiametro æqualis, describatur circa pentagonum, cùm sit æquilaterum & æquiangulum, circulus A T D V X, & in planum ipsius ex Z, centro sphæræ perpendicularis demittatur Z ω, connectanturque rectæ ω A, ω T, ω D, ω V, ω X. h Quoniam igitur quadratum rectæ Z A, æquale est quadratis rectarum Z ω, ω A; & quadratum rectæ Z X, quadratis rectarum Z ω, ω X: Sunt autem quadrata rectarum Z A, Z X, æqualia, quòd rectæ Z A, Z X, ostensæ sint æquales; Igitur & quadrata rectarum Z ω, ω A, quadratis rectarum Z ω, ω X, æqualia; Ac proinde dempto communi quadrato rectæ Z ω, æqualia relinquẽtur quadrata rectarum ω A, ω X, ideoq; rectæ ipsæ ω A, ω X, æquales erunt. Non aliter ostendentur rectæ ω V, ω D, & inter se, & ipsis ω A, ω X, æquales, quòd & rectæ Z V, Z D, æquales sint ostensę rectis Z A, Z X. Quare cùm ex ω, cadant in circumferentiam plures rectæ lineæ æquales, quam duæ, i punctum ω, centrum erit circuli; Ac proinde ω T, reliquis ex centro ductis æqualis: ideoq; quadrata rectarum Z ω, ω A, æqualia erunt quadratis rectarum Z ω, ω T. k Cùm ergo illis duobus æquale sit quadratum rectæ Z A; his verò quadratum rectæ Z T; Erunt æqualia quadrata rectarum Z A, Z T: propterea q; & rectæ Z A, Z T, æquales. Quare sphæra complectens cubum, ex centro Z, descripta, comprehendet pentagonum quoque A T D V X: Eodemque modo & reliqua pentagona Dodecaedri; Ac propterea eadem sphæra comprehendetur Dodecaedrum, qua cubus.




h 47. primi.

i 9. tertij.

k 47. primi.

l 15. quinti. POSTREMO cùm sit vt N P, ad P S, ita P S, ad S N: l erit quoque vt N L, dupla ipsius N P, ad R S, duplam ipsius P S, ita R S, dupla ipsius P S, ad rectam compositam ex S N, R L, nimirum ad duplam ipsius S N. Si igitur cubi latus N L, secetur extrema ac media ratione, maius segmentum erit S R: Sed N L, tota ita secta, Rationalis est. (Nam eius quadratum commensurabile est quadrato diametri sphæræ, quæ Rationalis ponitur; cùm sit illud tertia pars huius.)
m 6. tertiidecimi. m Igitur maius segmentum S R, hoc est, dodecaedri latus X V, illi æquale, Irrationalis est linea, quæ vocatur Apotome. Dodecaedrum ergo constituimus, & sphæra cõplexi sumus, qua & prædictas figuras: & demõstrauimus, q Dodecaedri latus Irrationalis est linea, q vocatur Apotome. Quod erat faciendũ.

## COROLLARIVM I.

*CVM ergo demonstratum sit; recta L N, extrema ac media ratione secta, maius segmentum esse rectam R S: Sit autem L N, æqualis lateri cubi, & R S, lateri Dodecaedri; Perspicuum est, si latus cubi secetur extrema ac media ratione, maius segmentum esse latus Dodecaedri in eadem sphæra descripti.*

## COROLLARIVM II.

*SIC quoq; latus cubi æquale est linea rectæ subtendenti angulum pentagoni Dodecaedri eadem sphæra comprehensi. Nam A D, latus cubi subtendit angulum T, pentagoni, estq; ostensum æquale rectis A V, D X, subtendentibus angulos X, & V, eiusdem pentagoni.*

*QVONIAM verò recta subtendens dictum angulum pentagoni secta extrema ac media ratione,* a *facit maius segmentũ latus pentagoni;* b *ac propterea recta cõposita ex dicta recta subtendente angulum pentagoni, hoc est, ex latere cubi, & ex maiori segmento, id est, ex latere Dodecaedri, similiter diuiditur, facitq; minus segmentum latus Dodecaedri, & maius segmentum latus cubi: Efficitur, si recta linea secetur extrema ac media ratione, cuius minus segmentum sit latus Dodecaedri, maius segmentum esse latus cubi eiusdem sphæræ.*

a 8. tertiidecimi.

b 5. tertiidecimi.

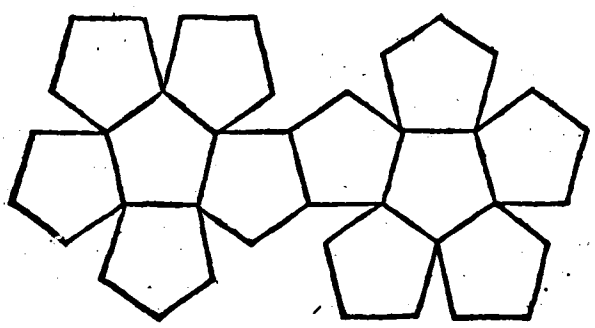
COROL-

## COROLLARIVM III.

*CONSTAT etiam ex dictis, in Dodecaedro esse sex latera, quorum bina opposita sunt parallela, bifariamq; secãtur, & ad angulos rectos à tribus lineis rectis æqualibus sese in centro Dodecaedri bifariam quoque, & ad angulos rectos secantibus. Nam duo ex dictis lateribus sunt VX, T2, quæ videlicet parallela sunt lateribus cubi EF, AB; aliaq; quatuor reperiuntur super reliquas quatuor bases cubi, quorum, quæ super bases cubi oppositas existunt, parallela sunt, cùm parallela sint cubi lateribus parallelis & oppositis, secanturq;, ex demonstratis, bifariam & ad rectos angulos, à lineis rectis, quæ centra basium cubi oppositarum coniungunt; quales sunt rectæ TZ, 9Z, &c. quæ, vt demonstratum est, se mutuò intersecant in centro Z. Dico se mutuò secare bifariam & ad angulos rectos: bifariam quidem, quoniam cùm rectæ PZ, OZ, æquales sint dimidio lateri cubi; & TP, 9O, æquales maioribus segmentis æqualibus PS, O2; Erunt totæ TZ, 9Z, æquales; Eademq; ratione reliquæ lineæ ex Z, ad sectiones oppositorum laterum ductæ, æquales erunt. Quare totæ tres lineæ æquales sunt, seq; bifariam in centro Z, mutuò secant: Ad angulos rectos verò, quia in parallelogrammo KOZP, angulus OZP, rectus est, cùm opponatur recto OKP. Non aliter ostendentur reliquæ lineæ rectæ centra basium coniungentes, efficere angulos rectos. Omnes enim parallelæ sunt lateribus cubi parallelis rectos angulos constituentibus, vt perspicuum est.*

## COROLLARIVM IIII.

*DENIQVE constat, si recta diuidens opposita latera Dodecaedri bifariam, & ad angulos rectos, vt dictum est, secetur extrema ac media ratione, maius segmentum esse latus cubi, minus verò, latus Dodecaedri eadem sphæra comprehensi. Cùm enim quadrata rectarum ZY, YP, tripla ostensa sint quadrati rectæ PZ; erit ZY, secta in P, extrema ac media ratione, maiusq; segmentum erit PZ, ex scholio propos. 4. huius lib. Ac proinde erit vt ZY, ad ZP, ita ZP, ad PY; * ideoq; vt dupla ipsius ZY, nempe recta diuidens latera opposita Dodecaedri bi-* a 15. quint. *fariã, ad duplam ipsius ZP, nimirũ ad latus cubi, ita eadem dupla ipsius ZP, ad duplam ipsius PY, hoc est, ad latus Dodecaedri. Quare recta diuidens latera opposita Dodecaedri bifariam, secta extrema ac media ratione, facit maius segmentũ, latus cubi, minus verò, latus Dodecaedri eiusdẽ sphæræ.*

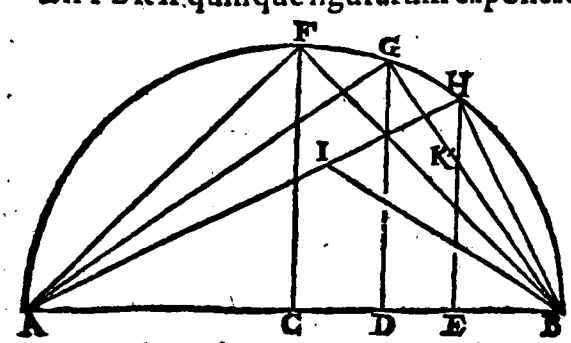


### SCHOLIVM.

*QVOD si ex aliqua materia conficiantur duodecim pentagona æquilatera, & æquiangula, inter se æqualia, disponanturq;, vt hæc figura indicat, componetur Dodecaedrum secundùm totam soliditatem, si ritè inter se complicentur.*

## PROBL. 6. PROPOS. 18. 18.

**LATERA quinque figurarum exponere, & inter se comparare.**




SIT sphæræ diameter AB, quæ in C, secetur bifariã; In D, verò ita, vt BD, sit ipsius pars tertia; In E, denique ita, vt BE, sit quinta pars eiusdem Descripto deinde circa AB, semicirculo, ducantur ad eius circumferentiam ex C, D, E, ipsi AB, perpendiculares CF, DG, EH; connectanturq; rectæ AF, BF, AG, BG, AH, BH. Post hæc ex HA, abscindatur HI, æqualis lateri Decagoni in eo circulo descripti, cuius semidiameter, seu latus Hexagoni est BH: connectaturq; recta BI. Postremò BG, secetur extrema ac media ratione in K, sitq; maius segmentum BK.

QVOD igitur attinet ad expositionem laterum prædictarum figurarum, dico AG, esse latus Pyramidis, seu Tetraedri; AF, latus Octaedri; BG, latus cubi; BI, latus Icosaedri; BK, denique latus Dodecaedri. Quoniam.n. AG, media ꝓportionalis est inter BA, AD, ex coroll. propos. 8. lib. 6.

Erit ex coroll. propoſ. 20. eiuſdem lib. vt B A, ad A D, ita quadratum rectæ B A, ad quadratum rectæ A G: Eſt autem B A, ipſius A D, ſeſquialtera; cùm talium partium 2. ſit A D, qualium 3. eſt B A. Igitur & quadratum rectæ B A, ſeſquialterum eſt quadrati rectæ A G; [a] Ac proinde cùm diameter ſphæræ ſit potentia ſeſquialtera lateris Tetraedri; erit A G, latus Tetraedri.

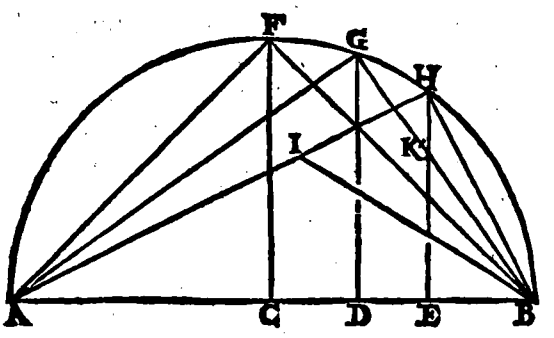
[a] 13. tertij decimi.

RVRSVS quoniam A F, eſt media proportionalis inter B A, A C, ex eodem coroll. propoſ. 8. lib. 6. Ac proinde vt B A, ad A C, ita quadratum rectæ B A, ad quadratum rectæ A F, ex adducto coroll. propoſ. 20. lib. 6. Eſt autem B A, ipſius A C, dupla: Erit quadratum rectæ B A, duplum quadrati rectæ A F. [b] Quare cùm diameter ſphæræ potentia ſit dupla lateris Octaedri; erit A F, latus Octaedri. Eodem modo erit B F, latus Octaedri.

[b] 14. tertij decimi.

DEINDE cùm B G, ſit media proportionalis inter A B, B D, ideoq; vt A B, ad B D, ita quadratum rectæ A B, ad quadratum rectæ B G, ex prefatis duobus corollariis lib. 6. Sit autem A B, ipſius B D, tripla, ex conſtructione: Erit quadratum rectæ A B, triplum quadrati rectæ B G. [c] Quocirca cùm ſphæræ diameter potentia ſit tripla lateris cubi; Erit B G, latus cubi.

[c] 15. tertij decimi.




PRAETEREA quia, ex eiſdem corollariis, B H, eſt media proportionalis inter *AB, BE*, atque idcircò vt A B, ad B E, ita quadratum rectæ A B, ad quadratum rectæ B H: Eſt autem, ex conſtructione, A B, ipſius B E, quintupla: Erit quadratum rectæ A B, quintuplum quadrati rectæ B H. Cùm igitur diameter ſphæræ potentia ſit quintupla ſemidiametri circuli quinque latera Icoſaedri ambientis, ex coroll. 1. propoſ. 16. huius lib. Erit B H, ſemidiameter, hoc eſt, latus hexagoni dicti circuli: Eſt autem H I, latus decagoni eiuſdem circuli, ex cõſtructione. [d] Igitur latus pentagoni poterit & B H, & H I, ſimul; Ac proinde [e] cùm quadratum rectæ B I, æquale ſit quadratis rectarum B H, H I; erit B I, latus pentagoni circuli eiuſdem. [f] Quam ob rem B I, latus eſt Icoſaedri.

[d] 10. tertij decimi
[e] 47. primi.
[f] 16. tertij decimi.

DENIQVE, cùm B G, latus cubi ſectum ſit in K, extrema & media ratione, erit B K, maius ſegmentum, latus Dodecaedri in eadem ſphæra deſcripti, ex coroll. 1. propoſ. 17. huius lib. Expoſita ergo ſunt latera quinque figurarum regularium in eadem ſphæra deſcriptarum.

QVOD verò ad comparationem laterum iam inuentorum ſpectat; cùm demonſtratum ſit, diametrum ſphærę eſſe potentia ſeſquialterã lateris pyramidis; potentia verò duplam lateris Octaedri, & potentia triplam lateris cubi; perſpicuum eſt, qualium partium 6. fuerit quadratum diametri, talium 4. eſſe quadratum lateris Tetraedri; talium verò 3. quadratum lateris Octaedri; & denique quadratum lateris cubi, talium 2. Ac propterea latus pyramidis, ſeu Tetraedri, eſſe potentia ſeſquitertium lateris Octaedri; potentia verò duplum lateris cubi. Item latus Octaedri potentia eſſe ſeſquialterum lateris cubi. Quapropter quadrata ex lateribus harum trium figurarum, Tetraedri nimirum, Octaedri, & cubi, nec non ex ſphæræ diametro deſcripta, proportionem inter ſe habent, qui numerus ad numerum; [g] Ac propterea diameter ſphæræ, & latera dictarum figurarũ lineæ ſunt commenſurabiles; atque adeò cùm diameter ſphæræ ponatur eſſe Rationalis, erunt quoque prędicta latera Rationalia. Quia verò dicta quadrata nõ habent proportionem, quam numerus quadratus ad numerum quadratum, vt conſtat ex coroll. propoſ. 24. lib. 8. [h] Erunt huiuſmodi lineæ, nimirum diameter ſphæræ, latus Tetraedri, latus Octaedri, & latus cubi, longitudine incommenſurabiles, ac proinde Rationales potentia tantùm commenſurabiles.

| | | |
|---|---|---|
| *Diamet.* | 6. | |
| *Tetraed.* | 4. | |
| *Octaed.* | 3. | |
| *Cub.* | 2. | |

[g] 6. decimi.
[h] 9. decimi.

AT verò latera Icoſaedri, & Dodecaedri, quoniam ſunt lineę Irrationales, illud quidem, Minor hoc verò Apotome, vt demonſtratum eſt, nullo modo, hoc eſt, nec longitudine, nec potentia cõmenſurabilia ſunt lateribus prædictis. Si enim commenſurabilia eſſent latera harum poſteriorum figurarum lateribus priorum, cùm latera priorum ſint diametro ſphærę commenſurabilia; eſſent quoque latera poſteriorum eidem diametro commenſurabilia; Ac proinde, exiſtente diametro Rationali, forent quoque ipſa latera Rationalia. Quod eſt abſurdum. oſtenſum enim eſt, ipſa eſſe Irrationalia.

SED neque inter ſe vllo pacto commenſurabilia ſunt dicta latera Icoſaedri, & Dodecaedri. Si namque credantur eſſe commenſurabilia longitudine inter ſe, cùm latus Dodecaedri ſit Apotome, [i] erit quoque latus Icoſaedri, Apotome. Item cùm latus Icoſaedri ſit linea Minor, [k] erit & latus Dodecaedri linea Minor. Quod ſi dicantur commenſurabilia eſſe potentia tantùm, ſequetur eodem modo, latus Dodecaedri eſſe lineam Minorem, ex eo, [l] quòd latus Icoſaedri Minor eſt. Quod eſt abſurdum. Nam ex ſcholio propoſ. 112. lib. 10. Apotome, & Minor ſunt lineæ Irrationales prorſus inter ſe differentes, ita vt neutra ſit eadem alteri.

[i] 104. deci.
[k] 106. deci.
[l] 16. tertij decimi.

ITAQVE quamuis ex lateribus expoſitis quinque figurarum regularium, tria quidem priora ſint commenſurabilia & inter ſe, & diametro ſphæræ, ideoq; Rationalia exiſtant, duo verò poſteriora incommenſurabilia & inter ſe, & diametro, reliquisq; lateribus; ac proinde Irrationalia ſint:

Cernitur

Cernitur tamen inter omnia latera prædicta hic ordo, vt latus Tetraedri maius sit latere Octaedri; Octaedri latus maius latere cubi; Latus cubi maius latere Icosaedri; Latus denique Icosaedri maius latere Dodecaedri; Hoc est, eo ordine se mutuò excedunt dicta latera, quo præfatas figuras construximus. Quæ fortè causa fuit, cur Euclides non eodem ordine huiusmodi figuras fuerit fabricatus, quo eas definiuit.

NAM latus Tetraedri maius esse latere Octaedri, perspicuum est. Cùm enim A G, latus Tetraedri subtendat maiorem arcum, quàm A F, latus Octaedri; maior erit recta A G, quàm A F, ex scholio propos. 28. lib. 3.

EODEM modo ostendemus latus Octaedri maius esse latere cubi. Nam B F, latus Octaedri maiorem arcum subtendit, quàm B G, cubi latus.

LATVS autem cubi B G, maius esse latere Icosaedri B I, hac arte demonstrabimus. Quoniam A B, tripla ponitur ipsius B D; [a] & quadrata habent proportionem laterum duplicatam; erit quadratum rectæ A B, noncuplum quadrati rectæ B D, cùm noncupla proportio sit duplicata proportionis triplæ, vt hîc apparet 1. 3. 9. Ac propterea qualium partium 9. ponetur quadratum rectæ A B, talium 1. erit quadratum rectæ B D. Qualium autem partium 9. est quadratum rectæ A B, talium 3. est quadratum rectæ B G; [b] quod illud huius triplum sit. Ac proinde talium quoque 3. sunt quadrata rectarum G D, B D, cùm æqualia sint quadrato rectæ B G. Igitur si auferatur quadratum rectæ B D, talium partium 1. relinquetur talium partium 2. quadratum rectæ G D. Quoniam verò quadratum rectæ A B, quintuplum est quadrati rectæ B H, erit quadratum rectæ B H, minus quàm talium partium 2. Nam cùm 9. ad 2. minorem habeant proportionem quintupla, quòd 10. ad 2. quintuplam proportionem habeant; [c] erit numerus, ad quem 9. habent proportionem quintuplam, minor quàm 2. Quare quadratum rectæ G D, maius est quadrato rectæ B H, ideoq; recta G D, maior quàm recta B H. Rursus quia diameter sphæræ A B, componitur ex B H, semidiametro circuli, ex quo Icosaedrum constituitur, & ex linea dupla lateris decagoni H I, eiusdem circuli, per coroll. 2. propos. 16. huius lib. constat latus decagoni H I, minus esse tertia parte rectæ A B, hoc est, minus recta B D. Nam si H I, recta æqualis credatur tertiæ parti rectæ A B; erit dupla illius, æqualis duabus tertiis partibus, nempe ipsi A D; Ac propterea B H, reliquæ tertiæ parti erit æqualis, nimirum ipsi B D; Atque adeò, cùm quadratum rectæ A B, noncuplum sit ostensum quadrati rectæ B D, erit idem quadratum rectæ A B, noncuplum quadrati rectæ B H. Quod est absurdum. quintuplum enim est demonstratum. Non ergo H I, tertia pars est ipsius A B: Sed neque maior tertia parte. Si enim recta H I, dicatur maior tertia parte rectæ A B, & proinde dupla ipsius H I, maior quàm duæ tertiæ, hoc est, quàm A D, erit B H, minor quàm tertia pars B D. Quare quadratum rectæ A B, maius erit, quàm noncuplum quadrati rectæ B D. Quod magis est absurdum. Non igitur maior est H I, tertia parte ipsius A B: Sed neque æqualis tertiæ parti, vt ostendimus. Minor ergo est quàm tertia pars, hoc est, quàm B D. Itaque cùm rectæ G D, D B, maiores sint rectis B H, H I, vt demonstratum est, erunt quoque quadrata illarum quadratis harum maiora: [d] Est autem quadratum rectæ B G, æquale quadratis rectarum G D, D B; & quadratum rectæ B I, quadratis rectarum B H, H I. Quadratum ergo rectæ B G, maius quoque erit quadrato rectæ B I; Ac proinde recta B G, nempe latus cubi, maior erit quâ recta B I, latus scilicet Icosaedri.

MAIVS denique esse latus Icosaedri B I, latere Dodecaedri B K, hac ratione patefiet. Cùm rectæ B G, diuisæ extrema ac media ratione, maius segmentum sit B K, & minus G K; erit rectangulum sub B G, B K, maius rectangulo sub B G, G K; atque adeò rectangula sub B G, B K, & sub B G, G K, simul maiora duplo rectanguli sub B G, G K: [e] Est autem rectangulis sub B G, B K, & sub B G, G K, æquale quadratum rectæ B G; Et duobus rectangulis sub B G, G K, æqualia sunt duo quadrata rectæ B K. (Nam cùm sit, vt B G, ad B K, ita B K, ad G K; [f] erit quadratum rectæ B K, æquale rectangulo sub B G, G K, ideoque duo quadrata rectæ B K, æqualia duobus rectangulis sub B G, G K.) Maius igitur quoque est quadratum rectæ B G, duobus quadratis rectæ B K. Atque idcirco maiora erunt tria quadrata rectæ B G, sex quadratis rectæ B K: Atqui tribus quadratis rectæ B G, æqualia sunt quinque quadrata rectæ B H. (Cùm enim quadratum rectæ A B, triplum sit quadrati rectæ B G, & quintuplum quadrati rectæ B H; erunt tam tria quadrata rectæ B G, quàm quinque quadrata rectæ B H, æqualia eidem quadrato rectæ A B, ideoque tria illa bis, quinque æqualia.) Igitur & quinque quadrata rectæ B H, maiora erunt sex quadratis rectæ B K. Ac proinde vnum quadratum rectæ B H, maius erit vno quadrato rectæ B K. (Si namq; æquale esset quadratum rectæ B H, quadrato rectæ B K, vel minus; forent quinque quadrata rectæ B H, minora sex quadratis rectæ B K. quod est absurdum, cùm illa quinq; hisce sex maiora sint demonstrata.) Quam ob rem & recta B H, maior erit quàm recta B K; Ac propterea cùm B I, maior sit quàm B H, multò maior erit B I, latus videlicet Icosaedri, quàm B K, latus Dodecaedri. Latera igitur quinque figurarum exposuimus, & inter se comparauimus. Quod erat faciendum.

[a] 20. sexti.
[b] 15. tertiidecimi.
[c] 10. quinti.
[d] 47. primi.
[e] 2. secundi.
[f] 17. sexti.

## SCHOLIVM.

*INTERPRETES hoc loco demonstrant, præter dictas quinq; figuras, non posse aliam constitui figuram solidam, quæ planis & æquilateris & æquiangulis contineatur, inter se æqualibus, hac ferè ratione.*

*Ex duobus triangulis, vel ex duabus figuris alijs, solidus angulus constitui non potest, cùm saltem tres anguli plani requirantur ad solidi anguli constitutionem.*

*Ex tribus autem triangulis æquilateris, constat pyramidis angulus.*

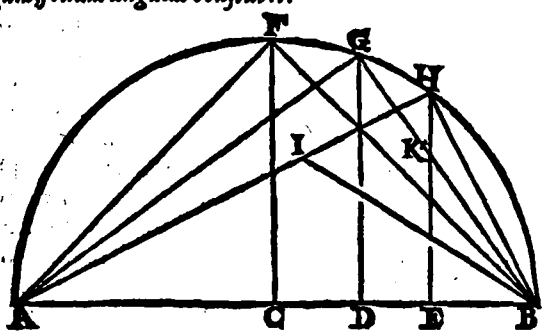
*Ex quatuor, Octaedri angulus;*

*Ex quinque, angulus Icosaedri;*

*Ex sex autem huiusmodi triangulis ad idem punctum coeuntibus fieri non potest angulus solidus. Cùm enim trianguli æquilateri angulus contineat duas tertias partes vnius recti, ex coroll. 3. propos. 32. lib. 1. Erunt eiusmodi anguli sex, duodecim tertiæ partes vnius recti, hoc est, erunt quatuor rectis æquales. Quare ex ipsis nullus angulus solidus constituetur.* [a] *Nam solidus omnis angulus, minoribus quàm quatuor rectis angulis continetur. Multò ergo minus ex pluribus, quàm sex planis eiusmodi angulis, solidus angulus constabit.*

a 20. vndecimi.

*Ex tribus deinde quadratis, cubi angulus conficitur. Ex quatuor autem quadratis nullus angulus solidus constitui potest. Rursus enim recti quatuor erunt. Multò ergo minus ex pluribus, quàm quatuor eiusmodi angulis, solidus angulus constabit.*




*Ex tribus denique pentagonis æquilateris, & æquiangulis, Dodecaedri angulus componitur. Cùm enim quinq; anguli pentagoni æquales sint sex rectis, vt ostendimus ad propos. 32. lib. 1. Ac proinde vnus angulus contineat vnum rectum, & præterea quintam partem vnius recti; continebunt tres eiusmodi anguli tres rectos, & insuper tres quintas partes vnius recti. Quare minores erunt quatuor rectis, ideoq; ex ipsis angulus solidus constituetur. Sed ex quatuor huiusmodi angulis, nullus solidus angulus confici potest. Cùm enim vnus, vt dictum est, maior sit recto, eò quòd continet vnum rectum, & insuper recti quintam partem; erunt quatuor maiores quatuor rectis. Quare nullus angulus solidus ex ipsis cõstituetur; Ac propterea multò minus ex pluribus, quàm quatuor eiusmodi angulis, solidus angulus constabit. Nec sanè ex aliis figuris æquilateris, & æquiangulis constitui poterit angulus solidus. Nam cùm sex anguli hexagoni æquales sint octo rectis, vt ad propos. 32. lib. 1. est demonstratum; Ac proinde vnius angulus contineat vnum rectum, ac præterea duas partes sextas vnius recti; continebunt tres anguli eiusmodi tres rectos, & sex sextas partes recti, hoc est, quatuor rectos. Quare ex ipsis nullo modo componetur angulus solidus; Atque idcircò multò minus ex pluribus eiusmodi angulis, quàm tribus, angulus solidus conficietur; neque propterea ex aliis polygonis. Quilibet enim tres maiores sunt quatuor rectis. Quam ob rem perspicuum est, præter dictas quinque figuras, aliam figuram solidam non posse constitui, quæ planis æquilateris, & æquiangulis inter se æqualibus contineatur.*

*Nam si tria triangula æquilatera & æqualia coeant in vnum punctum ad constitutionem anguli solidi, constituetur Pyramidis contenta quatuor huiusmodi triangulis.*

*Si verò quatuor eiusmodi triangula conueniant ad angulum solidum componendum, efficietur Octaedrum octo triangulis eiusmodi comprehensum.*

*Si denique assumantur quinque talia triangula ad efformandum angulum solidum, conficietur Icosaedrum viginti triangulis eiusmodi contentum.*

*Quod si tria quadrata æqualia coeant in vnum punctum, vt constituant angulum solidum, fabricabitur cubus ex sex huiusmodi quadratis.*

*Postremo, si tria pentagona æquilatera, & æquiangula, inter se æqualia, conueniant ad constitutionem anguli solidi, componetur Dodecaedrum duodecim eiusmodi pentagona continens.*

*Hoc etiam loco apponere libet modum quendam ex Hypsicle Alexandrino, quo expeditè numerus laterum, & angulorum cuiuslibet figuræ regularis habeatur.*

*Si enim quis interrogauerit, quotnam latera quoduis Regularium Solidorum habeat; Multiplicanda sunt omnes bases in vnius basis latera, vt habeantur omnium basium latera: Quia verò bina semper latera basium in vnum conueniunt, ad constitutionem vnius lateris Regularis solidi, sumendum est dimidium omnium laterum, vt numerus laterum Regularis solidi appareat.*

*Exemplvm. Si quatuor triangula Pyramidis, siue Tetraedri, multiplicentur in numerum laterum vnius trianguli, vt in 3. fiunt 12. quorum dimidium est 6. numerus scilicet laterum Pyramidis. Ad eundem modum & in reliquis. Si enim sex quadrata cubum componentia multiplicentur in vnius quadrati latera, nempe in 4. fiunt 24. quorum dimidium est 12. numerus videlicet laterum cubi. Si autem octo triangula Octaedri multiplicentur in 3. numerum laterum vnius trianguli, fiunt 24. quorum dimidium est rursus 12. numerus laterum Octaedri. Si rursus 20. triangula Icosaedri multiplicentur in 3. numerum laterum vnius trianguli, fiunt 60. quorum dimidium est 30. numerus laterum Icosaedri. Si denique 12. pentagona Dodecaedrum constituentia multiplicentur in 5. numerum laterum vnius pentagoni, fiunt 60. quorum dimidium est rursus 30. numerus laterum Dodecaedri.*

*Quod si quis rursus interrogauerit, quotnam angulos solidos quoduis Regularium Solidorum habeat; Multiplicanda sunt omnes bases in vnius basis angulos, vt habeantur omnium basium anguli: Quia verò tres, quatuor,*

*quatuor, vel quinq; semper anguli basium in vnum conueniunt, ad constitutionem vnius anguli solidi, diuidendi sunt omnes anguli in numerum angulorum, qui simul coeunt ad angulum solidum constituendum, vt numerus angulorum solidorum Regularis solidi appareat.*

*EXEMPLVM. Si quatuor triangula Pyramidis multiplicentur in 3. numerũ angulorum vnius trianguli, fiunt 12. anguli, qui si diuidantur in 3. (Tot enim anguli constituunt vnum solidum angulum Pyramidis) faciunt 4. angulos solidos Pyramidis. Si verò 6. quadrata cubi multiplicẽtur in 4. numerum angulorum vnius quadrati, fiunt 24. anguli, qui diuisi in 3. (Tot enim anguli conficiunt vnum angulum solidum cubi.) faciunt 8. angulos solidos cubi. Si quoque octo triangula Octaedri multiplicentur in 3. numerum angulorum vnius trianguli, fiunt 24. anguli, qui diuisi in 4. (Tot enim anguli componunt solidum angulum Octaedri.) conficiunt 6. angulos solidos Octaedri. Si rursus 20. triangula Icosaedri multiplicentur in 3. numerum angulorum vnius trianguli, fiunt 60. anguli, qui diuisi in 5. (Tot enim anguli constituunt angulum solidum Icosaedri.) producunt 12. angulos solidos Icosaedri. Si denique 12. pentagona Dodecaedri multiplicentur in 5. numerum angulorum vnius pentagoni, fiunt 60. anguli, qui diuisi in 3. (Tot enim anguli conueniunt ad constituendum angulum solidum Dodecaedri.) efficiunt 20. angulos solidos Dodecaedri.*

*DENIQVE consideratione etiam dignum est, cubum & octaedrum reciproca esse, quod ad bases attinet, & ad angulos solidos. Nam quot bases in vno continentur, tot anguli solidi in altero reperiuntur, & contrà. Vt cubus habet sex bases, & octo angulos solidos, octaedrum verò octo continet bases, & sex angulos solidos. Sic etiã reciproca sunt Icosaedrum, & Dodecaedrum. Nam Icosaedrum habet viginti bases, & duodecim solidos angulos, at Dodecaedrũ duodecim bases possidet, & viginti angulos solidos. Solum Tetraedrũ, (hoc est Pyramis) cum nullo reciprocatur, nisi cũ seipso. Habet enim quatuor bases totidemq; solidos angulos.*

FINIS ELEMENTI DECIMITERTII.

---

# EVCLIDIS ELEMENTVM QVARTVMDECIMVM:

## & Solidorum quartum,

## vt quidam arbitrantur: Vt alij verò, Hypsiclis Alexandrini de quinq; corporibus,

## *LIBER PRIMVS.*

## PROOEMIVM HYPSICLIS ALEXANDRINI ad Protarchum.

*BASILIDES Tyrius, Protarche, Alexandriam profectus, patriq; nostro ab disciplinæ societatem commendatus, longissimo peregrinationis tempore cum eo versatus est. Cumq; dissererent aliquando de scripta ab Apollonio comparatione Dodecaedri & Icosaedri eidem sphæræ inscriptorum, quam hæc inter se habeant rationem, censuerunt eu non recte tradidisse Apollonium; quæ à se emendata, vt pater meus dicebat, literis prodiderunt. Ego autem postea incidi in alterum librum ab Apollonio editum, qui demonstrationem accuratè complectebatur de re proposita, ex eiusq; problematis indagatione magnam equidem cæpi voluptatem. Illud certè ab omnibus perspici potest, quòd scripsit Apollonius, cùm sit in omnium manibus. Quod autem diligenti, quantum coniicere licet, studio nos postea scripsisse videmur, id monimentis consignatum tibi dedicandum duximus; vt qui feliciter cùm in omnibus disciplinis, tum vel maximè in Geometria versatus, scitè ac prudenter iudices ea, quæ dicturi sumus: Ob eam verò, quæ tibi cum patre fuit, vitæ consuetudinem, quaq; nos complecterũ*

*beneuolentiam, tractationem ipſam libenter audias. Sed iam tempus eſt, vt prooemio finem imponentes id, quod propoſitum eſt, aggrediamur.*

TREDECIM *libri hactenus expoſiti ab omnibus Euclidi aſcribuntur: Duo verò ſubſequentes à plerisq; Hypſicli Alexandrino & rectè, meo iudicio, tribui ſolent; in quorum quidem priori inter ſe comparantur Icoſaedrum, & Dodecaedrum, tam ſecundùm ſuperficies, quàm ſoliditates: In poſteriori verò exponuntur deſcriptiones aliquot figurarum regularium vnius intra aliam; vt hi duo libri ſint inſtar appendicis cuiuſdam elementorum Euclidis. Verùm quia plurima omittuntur ab Hypſicle ſcitu non iniucunda, quæ ſpectant ad comparationes dictorum quinque corporum regularium, eorumq; mutuas inſcriptiones vnius in alio; quatuor enim propoſitionibus duntaxat liber hic quartusdecimus, quinq; verò problematibus decimusquintus abſoluitur: Viſum eſt, vt aliquam lucem huic tractationi afferremus, paulò vberius de dictis figuris regularibus in vniuerſum diſſerere, proponendo varia theoremata, atque problemata, quibus & predicta corpora regularia inter ſe comparantur, & ſibi mutuò inſcribuntur. Qua in re maximo nobis adiumento fuiſſe Campanum, & Franciſcum Fluſſatem Candallam, qui diligentem operam, & ſedulam in hoc negotio collocauit, non negamus. Hic enim non ſolùm inſequentes duos libros quamplurimis theorematibus, problematibusq; locupletauit; verumetiam integrum librum, qui ordine decimusſextus eſt, adiunxit, in quo proprietates illuſtres de dictis corporibus proponit. Cæterum præcipuum fuiſſe Hypſiclis inſtitutum, in hoc lib. 14. diſputare de comparatione mutua Icoſaedri & Dodecaedri, facilè intelligi poteſt ex eius prooemio ad Protarchum, quod ſuperius eſt poſitum.*

QVONIAM *verò in hiſce duobus libris Hypſicles, & Campanus tam in numero propoſitionum, quàm in earundem ordine, & inter ſe, & à Franciſco Fluſſate, ideoq; & à nobis diſcrepant; annotauimus in margine ordinem vtriuſque duobus numeris, quorum ſuperior ordinem Hypſiclis, inferior verò Campani ſericm indicat. Quando autem in margine vnicus tantùm numerus reperitur, nullam eſſe tunc differentiam inter Campanum & Hypſiclem, ſignificatur; Quod ſi aliquando loco ſuperioris numeri apponatur hæc nota 0, intelligendum eſt, in Hypſicle dictam propoſitionem deſiderari. Idemq; in Campano intellige, ſi fortè loco numeri inferioris eadem nota poſita fuerit. Quando denique nihil in margine deprehenditur, indicio eſt, tam apud Hypſiclem, quam apud Campanum, illam propoſitionem deeſſe.*

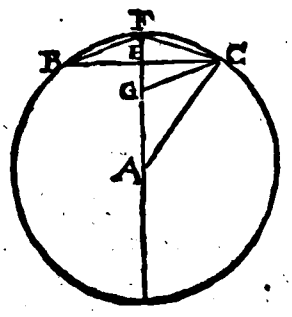
1.

## THEOR. 1. PROPOS. 1.

QVAE ex centro circuli cuiuſpiam in pentagoni eidem circulo inſcripti latus perpendicularis ducitur, dimidia eſt vtriuſque lineæ ſimul, & lateris hexagoni, & lateris decagoni eidem circulo inſcripti.

Ex centro A, circuli B C D, ducatur A E, perpendicularis ad B C, latus pentagoni in dicto circulo deſcripti. Dico A E, dimidium eſſe lineæ compoſitæ ex latere hexagoni & decagoni eiuſdem circuli. Extenſa enim A E, in vtramque partem, vt perficiatur tota diameter D F, ſumptaque E G,

*a 3. tertij.* æquali ipſi E F; connectantur rectæ A C, C G, C F, B F. [a] Quoniam igitur perpendicularis A E, ſecat rectam B C, bifariam; erunt latera B E, E F, trianguli B E F, æqualia lateribus C E, E F, trianguli C E F; Cùm igitur & anguli contenti ſint æquales, nempe recti; [b] erunt baſes C F, B F, æquales; [c] ideoq; & arcus C F, B F, æquales; Ac proinde exiſtente arcu B C, quinta parte totius circumferentiæ, erit C F, eiuſdem pars decima; atq; adeò recta C F, latus erit decagoni. Rurſus quia latera C E, E F, trianguli C E F, æqualia ſunt lateribus C E, E G, trianguli C E G, ſuntque anguli contenti recti; [d] erunt & baſes C F, C G, & anguli C F G, C G F, æquales. Quia verò arcus C F, quinta pars eſt ſemicircumferentiæ D C F, cùm ſit totius circumferentiæ decima pars; Erit talium partium 1. arcus C F, qualium 4. eſt arcus D C, hoc eſt, arcus D C, quadruplus erit arcus C F. [e] Quare & angulus D A C, quadruplus erit anguli C A F: [f] Eſt autem angulus C F D, dimidium anguli D A C, cùm illius ad circumferentiam, & huius ad centrũ eadem ſit baſis D C. Igitur angulus C F D, atq; adeò illi æqualis oſtenſus C G F, duplus erit anguli C A F: [g] Atqui angulus C G F, externus, æqualis eſt internis G A C, G C A, in triangulo G A C. Cùm igitur G A C, ſit dimidium anguli C G F, vt oſtenſum eſt, erit G C A, reliquum dimidium eiuſdem anguli C G F, ideoq; æquales erunt anguli G A C, G C A; [h] ac proinde & latera A G, C G, æqualia: Eſt autem C G, recta oſtenſa æqualis rectæ C F. Igitur & A G, recta æqualis erit eidem C F. Quare additis æqualibus G E, E F, fiet A E, æqualis duabus E F, F C, ſimul: Ac proinde tres ſimul A E, E F, F C, hoc eſt, duæ ſimul A F, F C, duplæ erunt ipſius A E, atque idcircò è contrario erit A E, ducta videlicet perpendicularis in pentagoni latus, dimidia duarum ſimul A F, F C, nempe lateris hexagoni, & decagoni. Quæ ergo ex centro circuli cuiuſpiam in pentagoni eidem circulo inſcripti latus, &c. Quod erat demonſtrandum.




*d 4. primi.*

*e 33. ſexti.*

*f 20. tertij.*

*g 32. primi.*

*h 6. primi.*

COROL-

## COROLLARIVM I.

*Ex his sequitur, lineam perpendicularem ductam ex centro circuli ad lineam rectam in eodem circulo aptatam, secare arcum, quem dicta haec linea recta subtendit, bifariam. Demonstratum enim est rectam A E, quae ex centro perpendicularis est ad B C, diuidere arcum B C, bifariam in F.*

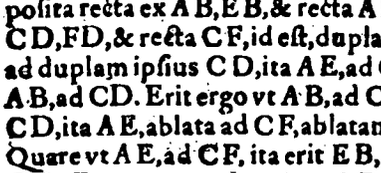
## COROLLARIVM II.

*Hinc quoque fit, perpendicularem ex centro ad latus pentagoni ductam, aequalem esse vtrique lineae simul, & ei, quae ex centro ad latus trianguli aequilateri eidem circulo inscripti ducitur, perpendiculari, & dimidiae lateris decagoni. Quoniam enim, vt in hac propositione ostensum est, perpendicularis ad latus pentagoni aequalis est dimidio lateris hexagoni, & dimidio lateris decagoni simul; Est autem perpendicularis ad latus trianguli aequilateri, ex coroll. propos. 12. lib. 13. aequalis dimidio semidiametri, seu lateris hexagoni: perspicuum est, eandem perpendicularem ad latus pentagoni esse aequalem perpendiculari ad latus trianguli, & dimidio lateris decagoni simul.*

## THEOR. 2. PROPOS. 2. 4. 2.

SI binae rectae lineae extrema ac media ratione secentur; ipsae similiter secabuntur, in easdem scilicet proportiones.

SECENTVR binae rectae A B, C D, extrema ac media ratione in E, & F. Dico ipsas in easdem proportiones secari, hoc est, esse vt A B, ad C D, ita A E, ad C F, & E B, ad F D; Item vt A E, ad E B, ita C F, ad F D, &c. Cùm enim sit, vt A B, ad A E, ita A E, ad E B; & vt C D, ad C F, ita C F, ad F D; [a] erit rectangulum sub A B, E B, aequale quadrato rectae A E; & rectangulum sub C D, F D, aequale quadrato rectae C F. Quamobrem erit vt rectangulum sub A B, E B, ad quadratum rectae A E, ita rectangulum sub C D, F D, ad quadratum rectae C F; (est enim vtrobique aequalitatis proportio.) Ac propterea, per ea, quę demonstrauimus in scholio propos. 22. lib. 5. vt quadruplum rectanguli sub A B, E B, ad quadratum rectae A E, ita quadruplum rectanguli sub C D, F D, ad quadratum rectae C F: & componendo, vt quadruplũ rectanguli sub A B, E B, & quadratum rectae A E, ad quadratum rectae A E, ita quadruplum rectanguli sub C D, F D, & quadratũ rectae C F, ad quadratum rectae C F: [b] Sed quod quater continetur sub A B, E B, vnà cum quadrato rectae A E, aequale est quadrato lineae compositae ex A B, E B; Et quod quater continetur sub C D, F D, vnà cum quadrato rectae C F, aequale est quadrato lineae compositae ex C D, F D. Igitur erit quoque, vt quadratum lineae compositae ex A B, E B, ad quadratum rectae A E, ita quadratum lineae compositae ex C D, F D, ad quadratum rectae C F; [c] Ac proinde, vt recta composita ex A B, E B, ad rectam A E, ita recta composita ex C D, F D, ad rectam C F: Et cõponendo vt composita recta ex A B, E B, & recta A E, hoc est, dupla ipsius A B, ad rectam A E, ita recta composita ex C D, F D, & recta C F, id est, dupla ipsius C D, ad rectam C F; Et permutando, vt dupla ipsius A B, ad duplam ipsius C D, ita A E, ad C F; [d] Vt autem dupla ipsius A B, ad duplam ipsius C D, ita est A B, ad C D. Erit ergo vt A B, ad C D, ita A E, ad C F; Ac propterea, cùm sit vt tota A B, ad totam C D, ita A E, ablata ad C F, ablatam; [e] erit quoque reliqua E B, ad reliquam F D, vt tota ad totam. Quare vt A E, ad C F, ita erit E B, ad F D, cùm vtraque proportio eadem sit proportioni A B, ad C D: Et permutando, erit vt A E, ad E B, sic C F, ad F D; & sic denique iuxta omnes modos arguendi ex proportionalitate, ostendemus & totas lineas, & earundem partes esse proportionales inter se. Si binae itaq; rectae lineae extrema ac media ratione secentur, &c. Quod erat ostendendũ.




[a] 17. sexti.

[b] 8. secundi

[c] 22. sexti.

[d] 15. quinti.

[e] 19. quinti.

### SCHOLIVM.

*FACILE hoc loco demonstrabimus hoc sequens theorema.*

LATVS hexagoni ad latus decagoni in eodem circulo descriptorum eandem proportionem habet; quam recta subtendens angulum pentagoni aequilateri & aequianguli ad latus ipsius pentagoni.

*QVONIAM enim [a] latus hexagoni cum latere decagoni efficit lineam media & extrema ratione sectam; [b] & recta subtendens pentagoni angulum secta extrema ac media ratione facit maius segmentum, latus ipsum pentagoni: [c] fit vt eadem sit proportio lateris hexagoni ad latus decagoni, maioris segmenti ad minus, quae maioris segmenti rectae angulum pentagoni subtendentis ad minus. Cùm ergo sit, vt maius segmentum ad minus, ita tota ad maius segmentum; erit quoque latus hexagoni ad latus decagoni, vt recta subtendens angulum pentagoni aequilateri & aequianguli ad latus pentagoni. quod est propositum.*

[a] 9. tertij decimi.

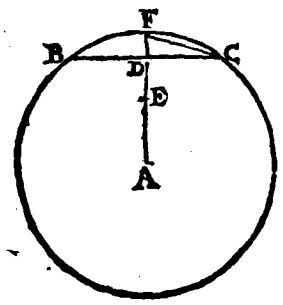
[b] 8. tertij decimi.

[c] 2. quarti decimi.

*Ex hac quoque propositione & praecedenti inferemus hoc alterum theorema.*

SI linea perpendicularis ex centro circuli ad latus pentagoni in eodem circulo descripti ducta secetur extrema ac media ratione, maius segmentum aequale est perpendiculari

ex eodem centro ad latus trianguli æquilateri ductæ, minus verò æquale est dimidio lateris decagoni eidem circulo inscriptorum.




*Ex centro enim A, circuli B C, ducta perpendicularis A D, ad latus B C, pentagoni eidem circulo inscripti, secetur in E, extrema ac media ratione. Dico maius segmentum A E, esse æquale perpendiculari ex A, ad latus trianguli æquilateri eiusdem circuli ducta; minus verò segmentum E D, æquale esse dimidio lateris decagoni eiusdem circuli. Extensa namque recta A D, ad F, & connexa recta F C; erit F C, latus decagoni, cùm ex coroll. 1. propos. 1. huius libri, arcus B C, nempe quinta pars totius circumferentiæ, bifariam secetur in F;* [a] *Ac proinde recta composita ex A F, latere hexagoni, & F C, latere decagoni, secta erit extrema ac media ratione, cuius maius segmentum A F, latus hexagoni, minus verò segmentum F C, latus decagoni. Quare, vt in hac propos. ostensum est, erit vt tota A D, diuisa secundùm extremam ac mediam rationem, ad totam compositam ex A F, F C, similiter diuisam, ita A E, maius segmentum ad A F, maius segmentum; & E D, minus segmentum ad F C, minus segmentum:* [b] *Est autem tota A D, dimidium totius compositæ ex A F, F C. Igitur & A E, ipsius A F, semidiametri, & E D, ipsius F C, lateris decagoni dimidium erit. Cùm ergo, per corollarium propositionis 12. lib. 13. perpendicularis ex centro ad latus trianguli æquilateri ducta, æqualis sit dimidio semidiametri; perspicuum est, maius segmentum A E, æquale esse dictæ perpendiculari, minus verò E D, dimidio lateris decagoni. Quod est propositum.*

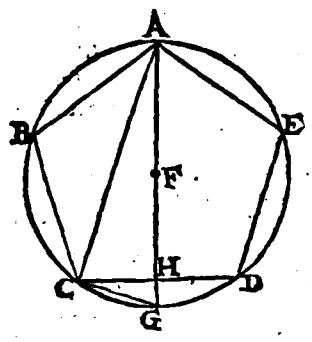
a 29. tertii decimi.

b 1. quarti decimi.

2. 4.

## THEOR. 3. PROPOS. 3.

SI in circulo pentagonum æquilaterum describatur, quod ex latere pentagoni, & quod ex ea, quæ binis lateribus pentagoni subtenditur, recta linea, vtraque simul quadrata, quintula sunt eius, quod ex semidiametro describitur, quadrati.




DESCRIBATVR in circulo A B C D E, cuius centrum F, pentagonum A B C D E, subtendatq; recta A C, bina latera A B, B C. Dico quadrata rectarum C D, A C, simul quintupla esse quadrati ex semidiametro circuli descripti. Ducta enim ex A, per centrum recta A F G, quæ p coroll. 2. propos. 10. lib. 13. diuidat & arcum C D, & latus C D, bifariam in G, & H; erit arcus C G, decima pars totius circumferentiæ, ideoq; recta subtensa C G, latus decagoni. Quoniam igitur recta A G, dupla est rectæ F G; erit ex scholio propos. 4. lib. 2. quadratum rectæ A G, quadruplum quadrati rectæ F G: [a] Sunt autem quadrato rectæ A G, æqualia quadrata rectarum A C, C G. Igitur & quadrata rectarum A C, C G, quadrupla sunt quadrati rectæ F G; Atque adeò tria quadrata rectarum A C, C G, F G, quintupla quadrati eiusdem rectæ F G; [b] Cùm ergo quadratis rectarum F G, C G, nempe lateris hexagoni, & lateris decagoni, æquale sit quadratum rectæ C D, lateris videlicet pentagoni; Erunt quoq; quadrata rectarum A C, C D, quintupla quadrati rectæ F G, nimirum semidiametri. Si in circulo igitur pentagonum æquilaterum describatur; quod ex latere pentagoni, & quod ex ea, quæ binis lateribus pentagoni subtenditur, recta linea, vtraque simul quadrata, quintupla sunt eius, quod ex semidiametro describitur, quadrati. Quod erat demonstrandum.

a 47. primi.

b 10. tertiædecimi.

### COROLLARIVM.

*INFERTVR ex his theorema huiusmodi.*

SI in sphæra eadem cubus, & dodecaedrum inscribantur; quadratum lateris cubi & quadratum lateris Dodecaedri, vtraque simul, quintupla sunt quadrati semidiametri circuli pentagonum Dodecaedri circumscribentis.

*CIRCVMSCRIBAT enim circulus A B C D E, pentagonum vnum Dodecaedri in quapiam sphæra descripti; eritq; ex corollario secundo, propositionis decimæ septimæ, libri decimitertij, recta A C, subtendens pentagoni angulum B, latus cubi in eadem sphæra descripti.* [a] *Perspicuum est autem, quadrata rectarum A C, C D, lateris scilicet cubi, & lateris Dodecaedri, quintupla esse quadrati semidiametri F G, &c.*

a 3. quarti decimi.

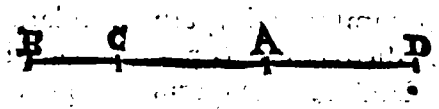
0. 3.

## THEOR. 4. PROPOS. 4.

SI latus hexagoni alicuius circuli secetur extrema ac media ratione; maius illius

illius ſegmentum erit latus decagoni eiuſdem circuli.

SECETVR enim AB, latus hexagoni alicuius circuli extrema ac media ratione in C, ſitque maius ſegmentum AC. Dico AC, eſſe latus decagoni eiuſdem circuli. Sit enim AD, latus decagoni eiuſdem circuli, adiungaturque in rectum ipſi AB; [a] eritque tota compoſita BD, ex latere hexagoni, & latere decagoni, diuiſa in A, extrema ac media ratione, cuius maius ſegmentum BA: Ponitur autem & AB, ſecta in C, ſimiliter. [b] Igitur erit vt BD, tota ad maius ſui ſegmentum AB, ita AB, tota ad maius ſui ſegmentum AC: Sed eſt quoque vt BD, tota ad maius ſui ſegmentum AB, ita AB, maius ſegmentum ad AD, ſegmentum minus, per definitionem lineæ ſectæ extrema ac media ratione. Igitur erit vt AB, ad AC, ita eadem AB, ad AD; Ac propterea AC, AD, æquales erunt. Cùm ergo AD, ponatur latus decagoni illius circuli, cuius latus hexagoni eſt AB; erit & AC, eiuſdem circuli latus decagoni.




[a] 9. terti. cimi.

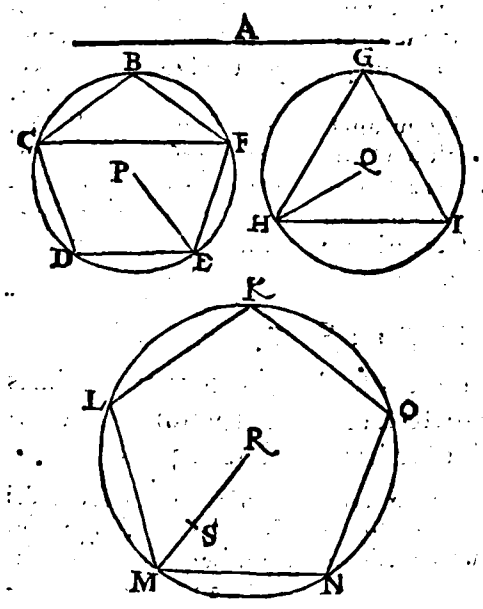
[b] 2. quarti. decimi.

ALITER. Adiungatur ipſi AB, in rectum recta AD, æqualis maiori ſegmento AC; [c] eritque tota recta BD, diuiſa in A, extrema ac media ratione. Cùm igitur AB, maius ſegmentum ipſius, ponatur latus hexagoni alicuius circuli, erit per ea, quæ demonſtrauimus ad propoſ. 9. lib. 13. AD, minus ſegmentum eiuſdem circuli latus decagoni; Ac propterea & AC, æqualis ipſi AD, latus erit decagoni in eodem circulo deſcripti, cuius AB, latus hexagoni ponitur. Si ergo latus hexagoni alicuius circuli, &c. Quod erat oſtendendum.

[c] 5. terti. cimi.

## THEOR. 5. PROPOS. 5.

IDEM circulus comprehendit & Dodecaedri pentagonum, & Icoſaedri triangulum, eidem ſphæræ inſcriptorum.




IN ſphæra, cuius diameter A, intelligatur deſcriptum & Dodecaedrum, cuius vnũ pentagonum BCDEF, & Icoſaedrum, cuius vnum triangulum GHI. Dico eundem circulũ circumſcribere & pentagonum BCDEF, & triangulum GHI, hoc eſt, circulos BCDEF, GHI, ipſa circumſcribentes eſſe æquales. Circumſcribat enim circulus KLMNO, pentagonum KLMNO, [d] ex quo Icoſaedrum ſphæræ inſcribitur, ita vt quinque latera huius pentagoni ſint latera Icoſaedri, ideoq; quodlibet ipſorum æquale cuiuis lateri trianguli GHI. Deinde ex centris P, Q, R, ducantur rectæ PE, QH, RM; Seceturque RM, extrema ac media ratione in S; [e] eritq; maius ſegmentum RS, latus decagoni in circulo KLMNO, in quo RM, eſt latus hexagoni. Subtendat quoq; recta CF, angulum B, pentagoni Dodecaedri, quæ erit per corollarium ſecũdum, propoſ. 17. lib. 13. latus cubi in eadẽ ſphæra deſcripti. Quoniam igitur ex coroll. 1. eiuſdẽ propoſ. BF, latus Dodecaedri eſt maius ſegmentum lateris cubi CF, ſecti extrema ac media ratione; [f] erit vt tota CF, ad totam RM, ita BF, maius ſegmẽtum ad RS, maius ſegmentum; [g] Ac propterea vt quadratũ rectæ CF, ad quadratum rectæ RM, ita quadratũ rectæ BF, ad quadratũ rectæ RS; Atq; adeò, per ea, quæ demonſtrata ſunt in ſcholio propoſ. 22. lib. 5. vt triplum quadrati rectę CF, ad quintuplum quadrati rectę RM, ita triplum quadrati rectæ BF, ad quintuplum quadrati rectę RS: Eſt autẽ triplum quadrati rectæ CF, æquale quintuplo quadrati rectæ RM, (quia tam triplum quadrati lateris cubi CF, ex propoſ. 15. lib. 13. q̃ quintuplum quadrati ſemidiametri RM, ex coroll. 1. propoſ. 16. lib. 13. æquale eſt quadrato ex A, diametro ſphæræ.) Igitur & triplum quadrati rectæ BF, æquale erit quintuplo quadrati rectæ RS: [h] Quia verò quadratum rectæ MN, lateris pentagoni, æquale eſt quadrato lateris RM, hexagoni, & quadrato rectæ RS, lateris decagoni; erunt quoque quinque quadrata rectæ MN, æqualia quinque quadratis rectæ RM, & quinque quadratis rectæ RS. Igitur & quinque quadrata rectæ MN, æqualia ſunt tribus quadratis rectæ CF, (cùm hæc oſtenſa ſint æqualia quinque quadratis rectæ RM,) & tribus quadratis rectæ BF, quæ æqualia fuerunt quinque quadratis rectæ RS. Sed quoniam, ([i] cùm quadrata rectarũ CF, BF, quinque quadratis ſemidiametri PE, ſint æqualia;) tria quadrata rectæ CF, & tria quadrata rectæ BF, æqualia ſunt quindecim quadratis rectæ PE, & quinque quadrata rectæ MN, æqualia ſunt quindecim quadratis ſemidiametri QH; (Nam cũ MN, æqualis ſit oſtenſa ipſi GH, lateri Icoſaedri, ſeu trianguli æquilateri; [k] ſit autem quadratum ipſius GH, æquale tribus quadratis ſemidiametri QH; Erunt quinque quadrata rectæ GH, hoc eſt, rectæ MN, æqualia quindecim quadratis rectæ QH.) erunt quoque

[d] 16. terti. cimi.

[e] 4. quarti. decimi.

[f] 2. quarti. decimi.

[g] 22. ſexti.

[h] 10. terti. cimi.

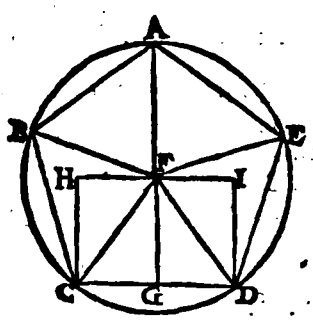
[i] 13. quarti. cimi.

[k] 15. terti. cimi.

quindecim quadrata rectæ PE, æqualia quindecim quadratis rectæ QH: ac propterea vnũ quadratum rectæ PE, vni quadrato rectæ QH: & ideircò semidiameter PE, semidiametro QH, æqualis erit. Quare circuli BCDEF, GHI, æquales sunt. Idem ergo circulus comprehẽdit, &c. Quod erat demonstrandum.

## THEOR. 6. PROPOS. 6.

3. 6. SI ex centro circuli pentagonum Dodecaedri circumscribẽtis, perpendicularis ducatur ad vnum latus pentagoni. Erit, quod sub dicto latere, & perpendiculari comprehenditur, rectangulum trigesies sumptum, Dodecaedri superficiei æquale.




IN centro F, circuli circumscribentis pentagonum Dodecaedri ABCDE, ducatur ad latus CD, perpendicularis FG. Dico rectangulum sub FG, & CD, trigesies sumptum, esse æquale toti superficiei Dodecaedri. Ductis enim rectis ex F, ad omnes angulos pentagoni, resoluetur pentagonum in quinque triangula æqualia, ex corollario propos. 8. lib. 1. cùm bina latera vnius æqualia sint binis lateribus aliorum, & basis quoque vnius basibus aliorum æqualis. Ducatur quoque per F, recta HI, parallela ipsi CD, occurrens duabus perpendicularibus CH, DI, ductis ex C, D, ad CD, in punctis H, & I. Eritque rectangulum CI, contentum sub HC, hoc est, sub FG, & CD. [a] Quoniam verò rectangulum CI, duplum est trianguli FCD, atque adeò cuiuslibet reliquorum quatuor triangulorum ipsi FCD, æqualium: erit rectangulum CI, quinquies sumptum, æquale decem huiusmodi triangulis, hoc est, duobus pentagonis Dodecaedri, cùm quinque triangula æqualia sint vni pentagono: Atq; adeò sextuplum rectanguli CI, quinquies sumpti, nimirum rectangulum CI, sumptum trigesies, æquale quoque erit sextuplo duorum pentagonorum, id est, duodecim pentagonis, hoc est, toti superficiei Dodecaedri. Si igitur ex centro circuli pentagonum Dodecaedri, &c. Quod erat demonstrandum.

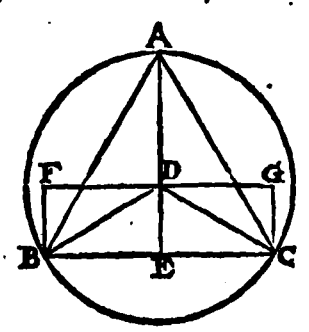
a 41. primi.

ALITER. Facta eadem figurę constructione, [b] cùm rectangulum CI, duplũ sit *trianguli* FCD, hoc est, æquale triangulo FCD, bis sumpto; Erit rectangulum CI, trigesies sumptũ æquale triangulo FCD, bis sumpto trigesies, hoc est, sumpto sexagesies: ac proinde toti superficiei Dodecaedri. Cùm enim vnum pentagonum Dodecaedri constet quinque huiusmodi triangulis, constabunt duodecim pentagona, nempe tota superficies Dodecaedri, sexaginta huiusmodi triangulis. Atque idcircò triangulum FCD, sumptum sexagesies æqualis erit superficiei Dodecaedri.

b 41. primi.

## THEOR. 7. PROPOS. 7.

3. 7. SI ex centro circuli triangulum Icosaedri circumscribentis, perpendicularis ducatur ad vnũ latus trianguli; Erit, quod sub dicto latere, & perpendiculari comprehenditur, rectangulum trigesies sumptum Icosaedri superficiei æquale.




EX centro D, circuli circumscribentis triangulum Icosaedri ABC, ducatur ad latus perpendicularis DE. Dico rectangulum contentum sub DE, & BC, trigesies sumptum, æquale esse toti superficiei Icosaedri. Ductis namque rectis ex D, ad omnes trianguli angulos, resoluetur triangulum in tria triangula æqualia, ex corollario propositionis 8. libri 1. Sunt enim bina latera vnius binis lateribus aliorum æqualia, & basis vnius basibus aliorum æqualis. Ducatur quoque per D, recta FG, parallela ipsi BC, occurrens in F, & G, duabus perpendicularibus BF, CG, ex B, C, ductis ad BC, eritque rectangulum BG, contentum sub FB, hoc est, sub DE, & BC. [c] Quoniam verò rectangulum BG, duplum est trianguli BDC; atque adeò cuiuslibet reliquorum duorum triangulorum ipsi DBC, æqualium: Erit rectangulum BG, ter sumptum æquale sex huiusmodi triangulis, hoc est, duobus triangulis Icosaedri, cùm tria talia triangula æqualia sint vni triangulo Icosaedri; Atque adeò idem rectangulum trigesies sumptum, nempe decuplum rectanguli BG, ter sumpti, æquale erit viginti triangulis Icosaedri, hoc est, toti superficiei Icosaedri, nimirum decuplo duorum triangulorum Icosaedri. Si ergo ex centro circuli triangulum Icosaedri, &c. Quod erat ostendendum.

c 41. primi.

ALITER. Facta eadem constructione figuræ, [d] cùm rectangulum BG, duplum sit trianguli DBC, id est, æquale dicto triangulo bis sumpto; Erit rectangulum BG, trigesies sumptum, æquale triangulo DBC, sumpto sexagesies: Atqui sexaginta huiusmodi triangula conficiunt viginti triangula Icosaedri, eò quòd tria conficiunt vnum. Igitur rectangulum BG, trigesies sumptum, æquale est toti superficiei Icosaedri.

d 41. primi.

COROL.

## COROLLARIVM.

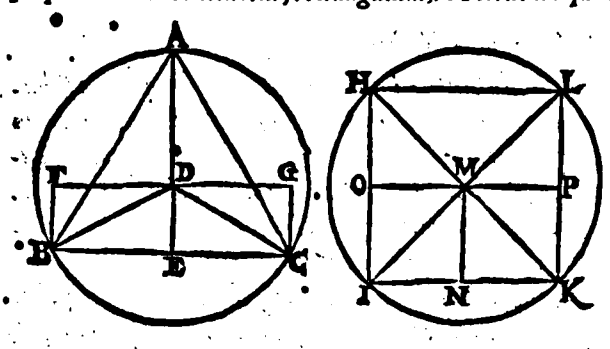
*ITAQVE superficies cuiuslibet Dodecaedri ad superficiem cuiuscunque Icosaedri, etiamsi non describantur ambæ figuræ in eadem sphæra, est sicut rectangulum contentum sub latere Dodecaedri, & perpendiculari ducta ex centro pentagoni Dodecaedri in latus dictum, ad rectangulum contentum sub latere Icosaedri, & perpendiculari ducta ex centro trianguli Icosaedri in dictum latus.* [a] *Cùm enim superficies Dodecaedri æqualis sit illi rectangulo trigesies sumpto;* [b] *Item superficies Icosaedri æqualis huic rectangulo trigesies quoque sumpto: Erit tàm illud rectangulum trigesima pars superficiei Dodecaedri, quàm hoc rectangulum, superficiei Icosaedri.* [c] *Quare erit superficies Dodecaedri ad superficiem Icosaedri, vt rectangulum illud, trigesima videlicet pars Dodecaedri, ad rectangulum hoc, trigesimam scilicet partem Icosaedri. Quod est propositum.*

a 18. quartidecimi.
b 7. quartidecimi.
c 19. quintiſ.

## SCHOLIVM.

*NON dissimili argumento indagabimus superficies reliquorum trium corporum regularium, Tetraedri videlicet, octaedri, & cubi. Nam si ex centro circuli triangulum Tetraedri, vel Octaedri, siue quadratum cubi, circumscribentis perpendicularis ducatur ad vnum aliquod eorum latus; Erit, quod sub dicto latere & perpendiculari continetur, rectangulum, in Tetraedro quidem sumptum sexies, superficiei Tetraedri; In Octaedro verò & cubo duodecies sumptum, superficiei Octaedri, & cubi æquale. Sit enim primò triangulum Tetraedri A B C, circumscriptum à circulo, cuius centrum D, à quo perpendicularis ducatur D E, ad latus B C, & reliqua fiant, vt de triangulo Icosaedri dictum est. Dico rectangulum B G, sexies sumptum, æquale esse superficiei Tetraedri.* [d] *Quoniam enim rectangulum B G, duplum est trianguli D B C, hoc est, æquale duobus eiusmodi triangulis: erit ipsum sexies sumptum æquale duodecim talibus triangulis. Cùm igitur duodecim talia triangula constituant totam superficiem Tetraedri, nempe quatuor triangula æquilatera ipsi A B C, æqualia, eò quòd tria conficiunt vnum; Erit rectangulum B G, sexies sumptum, superficiei Tetraedri, seu Pyramidis æquale.*

d 41. primi.




*SIT deinde idem triangulum A B C, Octaedri, &c. Dico rectangulum B G, duodecies sumptũ, æquale esse superficiei Octaedri.* [e] *Cùm enim rectangulum B G, duplum sit trianguli D B C, hoc est, æquale duobus eiusmodi triangulis, erit idem rectangulum duodecies sumptũ æquale vigintiquatuor huiusmodi triangulis: Sed vigintiquatuor talia triangula constituunt octo triangula Octaedri, id est, totam superficiem Octaedri, propterea q; tria conficiunt vnum. Igitur rectangulum B G, duodecies sumptũ, æquale est superficiei Octaedri.*

e 41. primi.

*SIT tertiò quadratum cubi H I K L, circa quod circulus ex centro M, describatur, & deducta M N, perpendiculari ad I K, ducantur ex M, ad omnes angulos quadrati recta linea, vt quadratum resoluatur in quatuor triangula æqualia; Atque per M, agatur O P, ipsi I K, parallela. Dico rectangulum I P, contentum sub O I, hoc est, sub M N, & I K, sumptum duodecies, æquale esse superficiei cubi.* [f] *Quoniam enim rectangulum I P, duplum est trianguli M I K, hoc est, æquale duobus talibus triangulis; Erit idem duodecies sumptum æquale vigintiquatuor eiusmodi triangulis. Quare cùm vigintiquatuor talia triangula constituant sex quadrata, id est, totam superficiem cubi, quòd quatuor talia triangula vnum quadratum conficiant; Erit rectangulum I P, duodecies sumptum æquale superficiei cubi. Quod est propositum.*

f 41. primi.

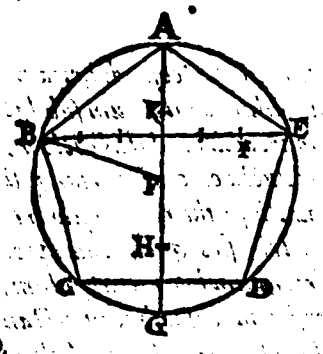
*ALITER. Cùm duo rectangula I P, conficiant quadratum H I K L; (sunt enim I P, P H, æqualia, cùm recta O I, sit dimidium lateris H I, nempe æqualis ipsi M N,) constituent duodecim talia rectangula sex quadrata eiusmodi, hoc est, totam superficiem cubi.*

# THEOR. 8. PROPOS. 8.

4.
8.

RECTANGVLVM contentum sub tribus quartis partibus diametri alicuius circuli, & quinque sextis partibus lineæ subtendentis angulum pentagoni æquilateri in eodem circulo descripti; æquale est dicto pentagono.

IN circulo, cuius centrum F, describatur pentagonum æquilaterum A B C D E, & ducta diameter A G, diuidatur in quatuor æquales partes, quarum tres sint A H: Angulum verò A, subtendens recta B E, secetur in sex partes æquales, quarum quinque sint B I, & vna I E, ita vt B I, sit quintupla ipsius I E. Dico rectangulum comprehensum sub A H, B I, æquale esse pentagono A B C D E. Ducta enim recta B F; quoniam A H, continet tres quartas partes diametri, & A F, duas, cũ sit semidia-




meter, erit AH, ipsius AF, sesquialtera. Quia verò recta FA, diuidens arcũ BAE, bifariam, diuidit quoq; rectam BE, bifariam, per coroll. 1. propos. 10. lib. 13. in puncto K continebit tam KB, q̃ KE, tres sextas rectæ BE: atq; adeò cùm BI, contineat quinque, cõtinebit KI, duas: Ac proinde & KB, ipsius KI, erit sesquialtera. Quamobrem erit vt AH, ad AF, ita KB, ad KI; [a] atque idcirco rectangulum sub extremis AH, KI, æquale erit rectangulo sub mediis AF, KB. [b] Est autem rectangulum sub AF, KB, duplum trianguli ABE, cùm rectangulum, & triangulum eandem habeant basin AE, & eandem altitudinem BK, hoc est, inter easdem sint parallelas constituta. Igitur & rectangulum sub AH, KI, duplum erit eiusdẽ trianguli ABE: [c] Est autem & rectangulum sub AH, KI, duplum rectanguli sub AH, IE: propterea quòd & basis KI, dupla est basis IE, (continet enim KI, duas sextas partes ipsius BE, & IE, vnam.) eademq; semper altitudo AH. Igitur æqualia sunt triangulum ABF, & rectangulum sub AH, IE: ideoque & eorum quintupla æqualia erunt. At verò pentagonum ABCDE, quintuplum est trianguli ABF, quòd pentagonũ in quinque huiusmodi triangula resoluatur, ductis rectis è centro F, vt propos. 6. huius lib. docuimus. [d] Rectangulum verò sub AH, BI, quintuplum est rectanguli sub AH, IE; quòd & basis BI, quintupla sit basis IE, eademq; semper altitudo AH. Igitur pentagonum ABCDE, & rectangulum sub AH, BI, æqualia sunt. Rectangulum ergo contentum sub tribus, &c. Quod erat demonstrandum.

a 16. sexti.
b 41. primi.
c 1. huius.
d 1. huius.

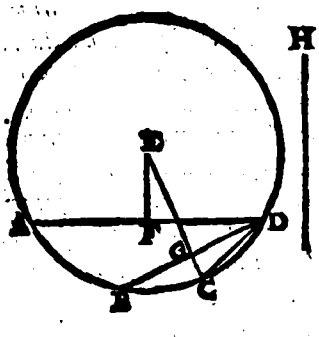
## COROLLARIVM.

*QVONIAM verò, si pentagonũ ABCDE, statuatur basis Dodecaedri in aliqua sphæra descripti, BE, est latus cubi in eadem sphæra descripti, ex coroll. 2. propos. 17. lib. 13. & vnum latus trianguli Icosaedri in eadem sphæra constituti, (a comprehensi videlicet eodem circulo, quo & pentagonum Dodecaedri,) secat Diametrum AG, in H, (cùm ex coroll. propos. 12. lib. 13. secet semidiametrum FG, bifariam, quemadmodum & punctum H, eandem semidiametrum FG, bifariam diuidit.) Manifestum est, rectangulum comprehensum sub perpendiculari ab angulo trianguli Icosaedri ad vnum eius latus ducta, nempe sub AH, & sub quinque sextis partibus lateris cubi eidem sphæræ, in qua Icosaedrum, inscripti, nimirum sub BI, æquale esse pentagono Dodecaedri in eadem sphæra constituti.*

a 15. quartidecimi.

## THEOR. 9. PROPOS. 9.

SVPERFICIES Dodecaedri ad superficiem Icosaedri in eadem sphæra descripti, eandem proportionem habet, quam latus cubi ad latus Icosaedri.



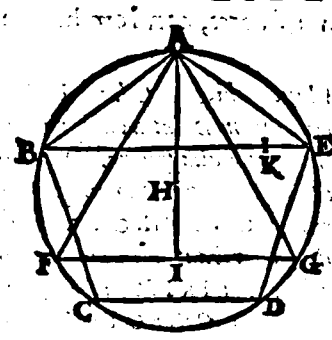

In circulo ABCD, [a] circumscribente & pentagonum Dodecaedri, & triangulum Icosaedri, sit latus pentagoni BD, & trianguli AD; & ex centro E, ducantur ad AD, BD, perpendiculares EF, EG: Sit denique H, latus cubi in eadem sphæra cum Dodecaedro, & Icosaedro descripti. Dico esse vt H, latus cubi, ad AD, latus Icosaedri, ita superficiem Dodecaedri ad superficiem Icosaedri. Quoniam enim lateris cubi H, secti extrema ac media ratione, maius segmentum est BD, latus Dodecaedri, ex coroll. 2. propos. 17. lib. 13. Rectæ autem EG, sectæ quoque extrema ac media ratione, maius segmentum est EF, ex scholio propos. 2. huius libri. [b] Erit vt H, tota ad BD, maius sui segmentum, ita EG, tota ad EF, maius sui segmentum; [c] Ac proinde rectangulum sub extremis H, EF, æquale erit rectangulo sub mediis BD, EG. [d] Quia verò est, vt H, ad AD, ita rectangulum sub H, EF, ad rectangulum sub AD, EF, cùm bases sint H, AD, altitudo verò semper eadem EF; Erit quoque vt H, ad AD, ita rectangulum sub BD, EG, (quod est æquale rectangulo sub H, EF,) ad idem rectangulum sub AD, EF. Quare cùm ex coroll. propos. 7. huius lib. sit, vt rectangulum sub BD, EG, ad rectangulum sub AD, EF, ita superficies Dodecaedri ad superficiem Icosaedri; Erit, quoque, vt H, latus cubi, ad AD, latus Icosaedri, ita superficies Dodecaedri ad superficiem Icosaedri. Superficies itaque Dodecaedri ad superficiem Icosaedri, &c. Quod ostendendum erat.

a 5. quartid.
b 2. quartid.
c 16. sexti.
d 1. sexti.

ALITER. [e] Circumscribat pentagonũ Dodecaedri ABCDE, & triangulum Icosaedri AFG, circulus idem, cuius centrum H. Ducatur deinde ex A, per centrum H, recta AI, quæ per coroll. 2. propos. 10. lib. 13. diuidet latus FG, bifariam, & ad angulos rectos. Connectatur denique recta BE, quæ latus erit cubi, ex coroll. 2. propos. 17. lib. 13. cuius quinque sextæ partes sint BK. Dico rursus esse, vt BE, latus cubi ad FG, latus Icosaedri, ita superficiem Dodecaedri ad superficiem Icosaedri. Quoniá enim rectangulum sub AI, BK, æquale est pentagono ABCDE, ex coroll. propos. 8. huius lib. Item rectangulum sub AI, IF, æquale est triãgulo AFG, ex scholio propos. 41. lib. 1. cùm

e 5. quartid.

FG,




FG, basis trianguli dupla sit ipsius IF, basis rectanguli: Erit vt rectangulum sub AI, BK, ad rectangulum sub AI, IF, ita pentagonum ABCDE, ad triangulum AFG; [a] Est autem vt rectangulum sub AI, BK, ad rectangulum sub AI, IF, ita BK, ad IF, cùm bases sint BK, IF, & altitudo eadem semper AI. Erit igitur quoque vt pentagonum ABCDE, ad triangulum AFG, ita BK, ad IF. Ac proinde, (si primum, & tertium, nimirū pentagonum ABCDE, & recta BK, æquè multiplicentur per numerū 12. Item secundum, & quartum, nempe triangulum AFG, & recta IF, æquè multiplicentur per numerum 20. [b] erit quoq; vt pentagonum ABCDE, duodecies sumptum, hoc est, superficies Dodecaedri, ad triangulum AFG, vigesies sumptum, nempe ad superficiem Icosaedri, ita recta BK, duodecies sumpta ad rectam IF, vigesies sumptam: Atqui recta BK, duodecies sumpta æquialet lateri cubi BE, decies sumpto: (Nam cùm BK, contineat quinque sextas partes ipsius BE; continebit eadem BK, duodecies sumpta sexaginta partes sextas eiusdem BE, quæ efficiunt decem integras rectas BE.) Recta verò IF, vigesies sumpta æqualis est lateri Icosaedri FG, decies sumpto; (eò quòd FG, est ipsius IF, dupla.) Erit igitur superficies Dodecaedri ad superficiem Icosaedri, vt latus cubi BE, decies sumptū ad latus Icosaedri FG, decies sumptum: Ac propterea, [c] cùm eandem proportionem habeant decem latera cubi ad decem latera Icosaedri, quam vnum latus cubi ad vnum latus Icosaedri; perspicuum est, ita esse superficiem Dodecaedri ad superficiem Icosaedri; vt latus cubi ad latus Icosaedri. Quod est propositum.

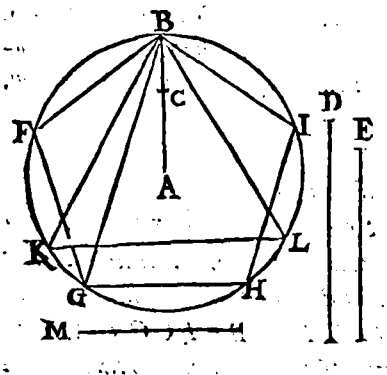
[a] 1. sexti.

[b] schol. 22. quinti.

[c] 15. quinti.

## THEOR. 10. PROPOS. 10.

SI recta linea secetur extrema ac media ratione; Erit vt recta potens id, quod à tota, & id quod à maiori segmento, ad rectam potentē id, quod à tota, & id, quod à minori segmento, ita latus cubi ad latus Icosaedri eidem sphæræ cū cubo inscripti.




SECETVR recta AB, in C, extrema ac media ratione, sitque maius segmentum AC. Sit quoq; D, latus cubi, & E, latus Icosaedri in sphæra eadem cū cubo descripti. Ex A, centro, ad interuallum AB, circulus describatur, in quo cōstituatur & pentagonum æquilaterum BFGHI, & triangulum æquilaterum BKL. Si igitur BF, ponatur latus Dodecaedri alicuius sphæræ, erit ducta recta BG, latus cubi in eadem sphæra descripti, ex coroll. 2. propos. 17. lib. 13. Quoniam verò AC, maius segmentum semidiametri AB, sectæ extrema ac media ratione, [d] est latus Decagoni in circulo BFGHI, in quo nimirum AB, latus est Hexagoni; [e] poterit BF, latus pentagoni & totam AB, latus videlicet hexagoni, & maius segmentum AC, latus scilicet Decagoni in eodem circulo. Possit iam & recta M, totā AB, & minus segmentum BC, per ea, quæ ad propos. 47. lib. 1. demonstrauimus. Dico sic esse D, latus proposito cubi ad E, latus propositū Icosaedri, vt est BF, potens totā AB, & maius segmentum AC, ad M, potentē totam AB, & minus segmentum BC. [f] Quoniam enim quadratum lateris trianguli æquilateri BK, triplum est quadrati semidiametri AB: [g] Item quadrata rectarum AB, BC, tripla sunt quadrati rectæ AC; Erit vt quadratum rectæ BK, ad quadratum rectæ AB, ita quadrata rectarum AB, BC, hoc est, quadratum rectæ M, ipsis æquale, ad quadratum rectæ AC. Vtrobique enim proportio est tripla. Permutando ergo erit, vt quadratum rectæ BK, ad quadratū rectæ M, ita quadratum rectæ AB, ad quadratum rectæ AC. Est autē vt quadratum rectæ AB, ad quadratum rectæ AC, ita quadratum rectæ BG, ad quadratū rectæ BF. (Nam cùm rectæ BG, sectæ extrema ac media ratione, maius segmentum sit BF, ex coroll. 1. propos. 17. lib. 13. eò q; BG, est latus cubi, & BF, latus Dodecaedri eiusdem sphæræ; [h] Erit vt tota AB, ad maius segmentum AC, ita tota BG, ad maius segmentum BF: [i] Ac proinde vt quadratum rectæ AB, ad quadratū rectæ AC, ita quadratum rectæ BG, ad quadratum rectæ BF.) Igitur erit quoq; vt quadratum rectæ BG, ad quadratum rectæ BF, ita quadratum rectæ BK, ad quadratū rectæ M. Et permutando, vt quadratum rectæ BG, ad quadratum rectæ BK, ita quadratum rectæ BF, ad quadratum rectæ M; [k] Ac propterea erit, vt recta BG, ad rectam BK, ita recta BF, potens totam AB, & maius segmentum AC, ad rectam M, potentem totam AB, & minus segmentum BC. Cùm igitur proposita latera D, E, cubi, & Icosaedri, eandem habeāt proportionē, quam rectæ BG, BK, vt mox ostendemus; perspicuum est, vt se habet recta BF, potens totam AB, & maius segmentum AC, ad rectam M, potentem totam AB, & minus segmentū BC, ita se habere propositum cubi latus D, ad Icosaedri propositum latus E. Si recta itaq; linea secetur extrema, ac media ratione, &c. Quod erat ostendendum.

[d] 4. quartidecimi.

[e] 10. tertiædecimi.

[f] 12. tertiædecimi.

[g] 4. tertiædecimi.

[h] 2. quartidecimi.

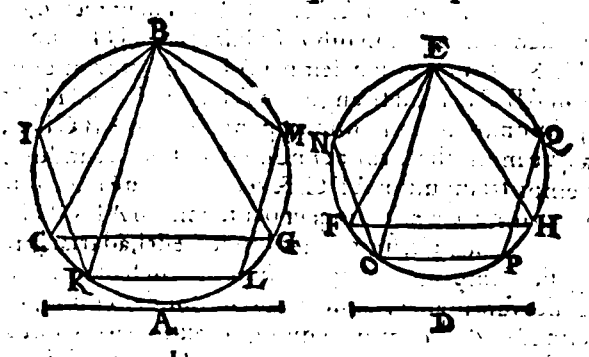
[i] 22. sexti.

[k] 22. sexti.

### SCHOLIVM.

*QVOD verò proposita latera cubi & Icosaedri D, & E, eiusdem sphæra eandem habeant proportionem, quam recta BG, BK; demonstrabimus, hoc proposito theoremate.*

QVAM proportionẽ habent latera cubi, & Icoſaedri eiuſdem ſphæræ, eandem habent latera cubi & Icoſaedri in quauis alia ſphæra deſcriptorum.




a 5. quarti decimi.

*SIT enim A, latus cubi, & B C, latus Icoſaedri eiuſdem ſphæræ: Item D, latus cubi, & E F, latus Icoſaedri in quauis alia ſphæra. Dico eſſe vt A, ad B C, ita D, ad E F. Perfectis namq; triangulis Icoſaedrorum B C G, E F H, & circa ipſa deſcriptis circulis, deſcribantur in his circulis pentagona æquilatera B I K L M, E N O P Q, connectanturq; rectæ B K, C K, E O, F O.* [a] *Quoniam ergo idem circulus comprehendit & Dodecaedri pentagonum, & Icoſaedri triangulum eiuſdem ſphæræ; & ponitur B C G, triangulum Icoſaedri in eadem ſphæra deſcripti, in qua cubus lateris A: Erit B I K L M, pentagonum Dodecaedri in eadem cum ipſis ſphæra deſcripti; Ac propterea, ex corollario 2. propoſ. 17. lib. 13. recta B K, latus erit cubi eiuſdem ſphæræ, ideoq; ipſi A, æqualis. Simili argumento æqualis erit recta E O, lateri cubi D. Rurſus quia arcus B I K, E N O, ſimiles ſunt; (Nam vterque continet duas quintas partes ſuæ circunferentiæ.) Item arcus B G C, E H F; (vterque enim duas tertias partes totius circunferentiæ comprehendit.) Erunt tam anguli B C K, E F O, ex definitione ſegmentorum ſimilium, æquales inter ſe, quàm anguli B K C, E O F; interſe, cùm tam illi, quàm hi, in ſegmentis circulorum ſimilibus exiſtant: Ac proinde, ex coroll. 1. propoſ. 32. lib. 1. reliquus angulus C B K, trianguli B C K, reliquo angulo F E O, trianguli E F O, æqualis erit, & totum triangulum B C K, toti triangulo E F O, æquiangulum.* [b] *Quare erit, vt B K, hoc eſt, recta A, illi æqualis, nempe latus cubi, ad B C, latus Icoſaedri, ita E O, hoc eſt, recta D, illi æqualis, latus ſcilicet alterius cubi, ad E F, latus Icoſaedri. Quod eſt propoſitum.*

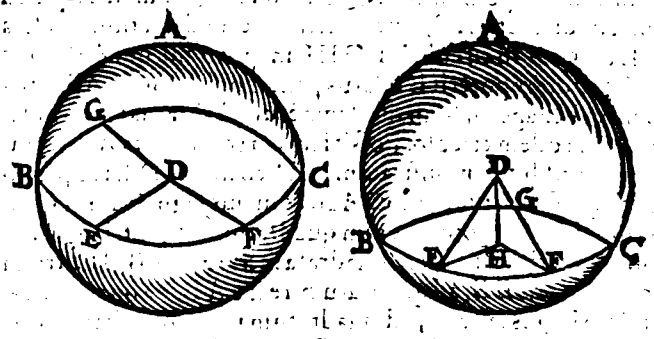
b 4. ſexti.

PERSPICVVM eſt igitur id, q; in demonſtratione aſſumebatur, nimirũ eandem habere proportionẽ D, & E, latera cubi & Icoſaedri in vna ſphæra, quam habẽt B G, B K, latera cubi & Icoſaedri in alia ſphæra.

*EX hoc quoq; elicitur, Superficiem Dodecaedri ad ſuperficiem Icoſaedri non ſolùm habere eandem proportionem, quam latus cubi ad latus Icoſaedri in eadem ſphæra cũ ipſis, vt vult propoſ. 9. huius lib. Sed etiam, quam obtinet latus cubi ad latus Icoſaedri in quacunque alia ſphæra.*

## LEMMA I.

Si ſphæra plano quopiam ſecetur, communis ſectio circulus erit.




*SECETVR ſphæra A B C, cuius centrũ D, plano aliquo faciente communẽ ſectionem planum B E F C G. Dico B E F C G, eſſe circulum. Tranſeat enim primò planũ ſecans per centrum ſphæræ, ita vt centrum D, ſit in plano, ſeu communi ſectione B E F C G; ducanturq; ex D, centro ſphæræ ad extremitatem communis ſectionis, lineæ rectæ quotcunque D E, D F, D G. Quoniam igitur omnes hæ lineæ ductæ, quotcunque fuerint, æquales ſunt, ex definitione ſphæræ, cùm ex eius centro ad ſuperficiem cadant; erit, ex definitione circuli, figura plana B E F C G, vnica lineæ contenta, circulus, eiusq; centrum D, idem cum centro ſphæræ.*

*TRANSEAT ſecundò planum ſecans non per centrum ſphæræ: Ducatur autem ex D, centro ſphæræ ad planum ſecans perpendicularis D H; emittanturq; ex H, rectæ vtcunque H E, H F, ad extremitatẽ vſque communis ſectionis; & connectantur rectæ D E, D F. Quoniam igitur anguli D H E, D H F, ex defin. 3. lib. 11. recti ſunt;* [c] *erit tam quadratum rectæ D E, quadratis rectarum D H, H E, quàm quadratum rectæ D F, quadratis rectarum D H, H F, æquale: Sunt autem quadrata rectarum D E, D F, æqualium ex centro ſphæræ ad eam ſuperficiem cadentium, æqualia. Igitur & quadrata rectarum D H, H E, quadratis rectarum D H, H F, æqualia erunt; & proinde, dempto communi quadrato rectæ D H, reliquum quadratum rectæ H E, reliquo quadrato rectæ H F, æquale erit. Quare & rectæ H E, H F, æquales erunt. Eodem argumento oſtendemus, omnes lineas ex H, ad extremitatem communis ſectionis cadentes eſſe æquales & inter ſe, & dictis duabus H E, H F. Figura igitur plana B E F C G,*

c 47. primi.

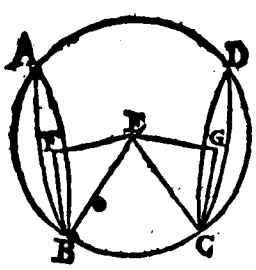
*BEFCG, vnica linea contenta, ex definitione circuli, circulus erit; eiusq; centrum, punctum H, in quod perpendicularis DH, cadit. Quod est propositum.*

## COROLLARIVM.

*ITAQVE si planum secans transierit per centrum sphæræ, efficietur circulus idem centrum habens, quod sphæra. Si verò planum secans per sphæræ centrum non transierit, efficietur circulus habens aliud centrum, quàm sphæra; illud videlicet punctum, in quod cadit perpendicularis ex centro sphæræ ad planum secans ducta. Nam semper demonstrabuntur lineæ rectæ cadentes ex hoc puncto in circumferentiam circuli esse æquales, vt perspicuum est.*

## LEMMA II.

CIRCVLI in sphæra æquales, æqualiter distant à centro sphæræ: & circuli æqualiter distantes à centro sphæræ, æquales sunt.




*IN sphæra ABCD, cuius centrum E, sint circuli æquales AB, DC. Dico ipsos æqualiter à centro E, distare. Ducantur enim ex E, ad eorum plana perpendiculares EF, EG, quæ per corollarium præcedentis lemmatis in ipsorum centra cadent, ex quibus ducantur rectæ FB, GC, ad circumferentias circulorum vtcunque, connectanturq; rectæ EB, EC. Quoniam igitur anguli EFB, EGC, recti sunt, ex definitione 3. libri 11. [a] Erit tam quadratum rectæ EB, quadratis rectarum EF, FB, quàm quadratum rectæ EC, quadratis rectarum EG, GC, æquale: Sunt autem quadrata rectarum EB, EC, æqualium, cũ cadant ex centro sphæræ ad eius superficiem, æqualia. [b] Igitur & quadrata rectarum EF, FB, quadratis rectarum EG, GC, æqualia erunt. Et proinde demptis quadratis æqualibus rectarum æqualium FB, GC, cùm sint semidiametri circulorum æqualium, erit reliquum quadratum rectæ EF, reliquo quadrato rectæ EG, æquale; Atque adeò æquales erunt rectæ perpendiculares EF, EG. Quam ob rem circuli AB, DC, æqualiter distant à centro E.*

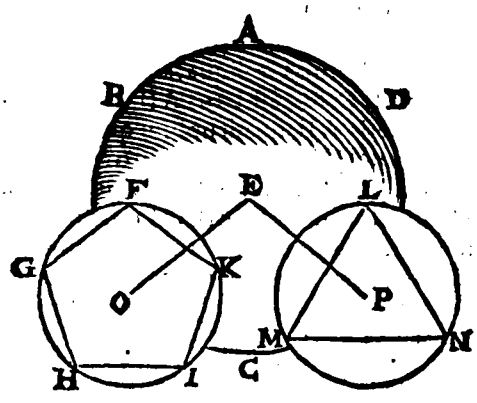
[a] 47. primi.

[b] 47. primi

*SED iam æqualiter distent circuli AB, DC, à centro sphæræ E. Dico ipsos esse æquales. Constructa enim figura, vt prius, ostendemus eodem modo, quadrata rectarum EF, FB, æqualia esse quadratis rectarum EG, GC; Ac proinde, demptis quadratis æqualibus rectarum æqualium EF, EG, cùm circuli æqualiter ponantur distare à centro, reliquum quadratum rectæ FB, reliquo quadrato rectæ GC, æquale erit; atq; adeò æquales erunt rectæ FB, GC, semidiametri scilicet circulorũ AB, DC. Circuli igitur AB, DC, æquales sunt. Quod est propositũ.*

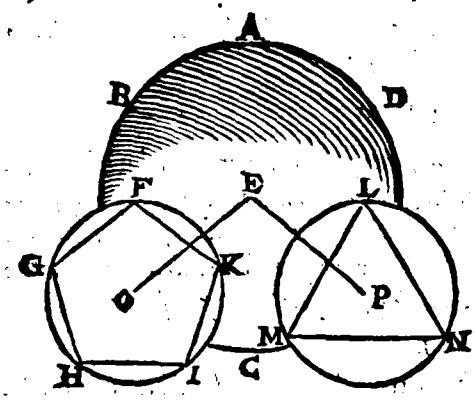
## THEOR. 11. PROPOS. 11. 4. 10.

DODECAEDRVM ad Icosaedrum in eadem cum ipso sphæra descriptum, est vt cubi latus ad latus Icosaedri, in vna eademque sphæra.




IN sphæra ABCD, cuius centrum E, inscriptum sit Dodecaedrum, cuius vnũ pentagonũ FGHIK: Item Icosaedrum, cuius vnum triangulum LMN. Dico esse Dodecaedrum ad Icosaedrum, vt latus cubi ad latus Icosaedri, in vna eademq; sphæra, siue hæc eadem sit, quæ sphæra ABCD, siue non. Quoniam omnes anguli tam pentagoni, quàm trianguli, superficiem sphæræ tangunt; si per pentagonum, & triangulum plana ducantur, efficientur, per 1. lemma præcedens, duo circuli in sphæra FGHIK, LMN, comprehendentes pentagonum, & triangulum. [a] Quis verò idem circulus comprehẽdit & Dodecaedri pentagonum, & Icosaedri triangulum; æquales erunt idcircò circuli FGHIK, LMN: Ac propterea, per lemma 2. præcedens, æqualiter ab E, centro sphæræ distabunt, ideoque perpendiculares ex E, in plana circulorum deductæ, & in eorum centra, per coroll. lemmatis 1. cadentes, quales sunt EO, EP, æquales erunt. Non aliter ostendentur perpendiculares ex E, ad omnia pentagona Dodecaedri, & ad omnia triangula Icosaedri, deductæ æquales. Quare si ex omnibus angulis Dodecaedri ad E, ducantur rectæ lineæ, resoluetur Dodecaedrum in duodecim pyramides æqualium altitudi-

[a] 5. quartidecimi.




a 6. duodec.

dinum: Ac proinde cùm & baſes ipſarũ æquales ſint, nempe pentagona Dodecaedri, æquales inter ſe, ex coroll. propoſ. 6. lib. 12. Eodemq; modo, ſi ex omnibus angulis Icoſaedri ad E, lineæ rectæ ducantur, reſoluetur Icoſaedrum in 20. pyramides inter ſe æquales, quarum altitudines æquales erunt altitudinibus pyramidum Dodecaedri. [a] Quoniam autem eſt, vt baſis FGHIK, ad baſin LMN, ita pyramis FGHLKE, ad pyramidem LMNE, cùm vtriuſque eadem ſit altitudo; Erunt quoque, per ea, quæ in ſcholio propoſ. 22. lib. 5. demõſtrauimus, vt duodecim baſes Dodecaedri, tota videlicet ſuperficies Dodecaedri, ad baſin LMN, ita duodecim pyramides Dodecaedri, hoc eſt, totum ſolidum Dodecaedri, ad pyramidem LMNE. Rurſus quia eſt (ſicut modò diximus) vt tota ſuperficies Dodecaedri, ad Icoſaedri baſin LMN, ita Dodecaedrũ ad pyramidem LMNE; erit, per idem ſcholium, vt tota ſuperficies Dodecaedri ad 20. baſes Icoſaedri, id eſt, ad totam ſuperficiem Icoſaedri, ita Dodecaedrum ad 20. pyramides Icoſaedri, nempe ad totum ſolidum Icoſaedri: [b] Atqui ita eſt Dodecaedri ſuperficies ad Icoſaedri ſuperficiem, vt cubi latus ad Icoſaedri latus eiuſdem cum ipſis ſphæræ; atq; adeò, ex ſcholio propoſ. 10. huius lib. vt latus cubi ad latus Icoſaedri cuiuſcunque alterius ſphæræ vnius. Igitur erit quoq; Dodecaedrum ad Icoſaedrum, vt latus cubi ad latus Icoſaedri cuiuſcunque ſphæræ. Quapropter Dodecaedrum ad Icoſaedrum, &c. Quod erat demonſtrandum.

b 9. quartidecimi.

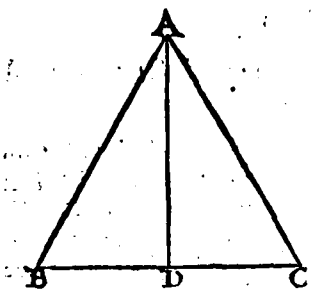
## COROLLARIVM.

*QVONIAM verò oſtenſum eſt quoq; [a] ita eſſe ſuperficiẽ Dodecaedri ad ſuperficiem Icoſaedri eiuſdem ſphæræ, vt latus cubi ad latus Icoſaedri in eadem cũ ipſis ſphæra: [b] Item ita eſſe cubi latus ad latus Icoſaedri vnius eiuſdemq; ſphæræ, vt eſt linea potens totã diuiſam quamcunque extrema ac media ratione, & maius ſegmentum illius, ad lineam potentem totam diuiſam eandem, & minus illius ſegmentum: [c] Item ita eſſe Dodecaedrum ad Icoſaedrũ eiuſdem ſphæræ, vt latus cubi ad latus Icoſaedri in vna eademq; ſphæra; Perſpicuum eſt, has quatuor proportiones, nimirum lateris cubi ad latus Icoſaedri; & ſuperficiei Dodecaedri ad ſuperficiem Icoſaedri; & lineæ potentis totam quamcunque ſectam extrema ac media ratione, & eius ſegmentum maius, ad potentem totam eandem, & minus ſegmentum illius; & Dodecaedri ad Icoſaedrum eiuſdem ſphæræ, eſſe inter ſe æquales.*

a 9. quartidecimi.
b 10. quartidecimi.
c 11. quartidecimi.

## THEOR. 12. PROPOS. 12.

LATVS trianguli æquilateri potentia ſeſquitertium eſt lineæ perpendicularis ab vno angulo ad latus oppoſitum deductæ.




a 5. primi.
b 26. primi.
c 47. primi.

IN triangulo æquilatero A B C, ducatur ex angulo A, ad latus oppoſitum B C, perpendicularis A D. Dico quadratum lateris A B, ſeſquitertium eſſe quadrati perpendicularis A D. Quoniam enim ob æqualitatem laterum A B, A C, [a] anguli B, & C, æquales ſunt; & anguli ad D, recti: Erunt duo anguli B, & D, trianguli A D B, æquales duobus angulis C, & D, trianguli A D C; habent autẽ & latus A D, commune, vel A B, A C, æqualia. [b] Igitur & reliqua latera B D, C D, æqualia ſunt; ac propterea latus B C, hoc eſt, latus A B, duplum rectæ B D; & idcireò quadratũ lateris A B, quadruplum quadrati rectæ B D, ex ſcholio propoſ. 4. lib. 2. [c] Cùm igitur quadrato rectæ A B, æqualia ſint quadrata rectarum A D, B D; erunt quoque quadrata rectarum A D, B D, quadrupla quadrati rectæ B D; Ac proinde, qualium partium 4. eſt quadratum rectæ A B, vel quadrata rectarum A D, B D, talium 1. erit quadratum rectæ B D, ideoque talium 3. quadratum reliquum rectæ A D. Quare quadratum rectæ A B, partium 4. ſeſquitertium eſt quadrati rectæ A D, partium 3. Latus igitur trianguli æquilateri potentia ſeſquitertium eſt, &c. Quod oſtendendum erat.

## COROLLARIVM.

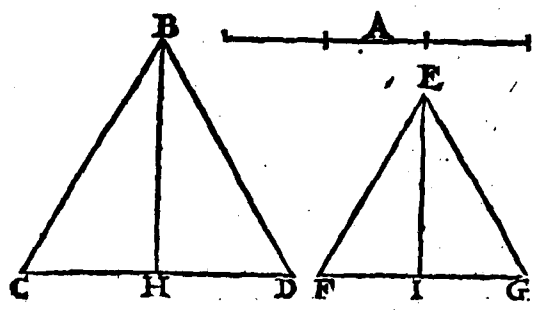
*HINC manifeſtum eſt, lineam perpendicularem ex vno angulo trianguli æquilateri ad latus oppoſitũ demiſſam, ſecare & angulum & latus bifariam. Demonſtratum enim eſt B D, & C D, rectas æquales eſſe, hoc eſt, latus B C, ſecari bifariam à perpendiculari A D. Quare cùm latera A B, A D, trianguli A B D, æqualia ſint lateribus A C, A D, trianguli A C D; & baſis B D, baſi C D, æqualis; [a] Erunt & anguli B A D, C A D, æquales, id eſt, angulus B A C, bifariam ſecabitur ab eadem perpendiculari A D.*

a 8. primi.

THEOR.

## THEOR. 13. PROPOS. 13.

SI ſphæræ diameter fuerit Rationalis; Erit tam ſuperficies Tetraedri, quàm Octaedri in ea ſphæra, Media. 13.




SIT ſphæræ diameter Rationalis A. Dico tam ſuperficiem Tetraedri, quàm Octaedri in dicta ſphæra, eſſe Mediam. Sit enim B C D, vnum triangulum Tetraedri, & E F G, Octaedri illius ſphæræ, ducáturq; ex angulis B, & E, ad latera oppoſita C D, F G, perpendiculares B H, E I. [a] Quoniam igitur quadratum diametri A, ſeſquialterum eſt quadrati lateris Tetraedri B C, [b] & duplum quadrati lateris Octaedri E F; habebunt quadrata rectarum A, B C, E F, proportionem, quam numeri 6. 4. 3. [c] ideóque commenſurabilia erunt. Quare lineæ ipſæ A, B C, E F, commenſurabiles exiſtent, ſaltem potentia; Atque adeò, cùm A, ponatur Rationalis, erunt quoque Rationales B C, E F, & idcircò & earum dimidiæ Rationales erunt C H, F I. [a] 13. tertij de cimi. [b] 14. tertij de cimi. [c] 6. decimi.

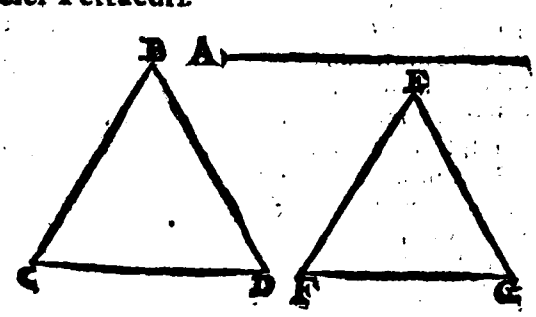
RVRSVS, [d] quia tam quadratũ rectæ B C, quadrati rectæ B H, q̃ quadratũ rectæ E F, quadrati rectæ E I, ſeſquitertium eſt; habebũt tam quadrata rectarũ B C, B H, q̃ quadrata rectarũ E F, E I, proportionem inter ſe, quam numeri 4. 3. [e] ideóq; tam illa, q̃ hæc inter ſe commenſurabilia erunt. Quare & tam lineæ ipſæ B C, B H, q̃ lineæ E F, E I, commenſurabiles exiſtent. Eſt autẽ & tam C H, ipſi B C, q̃ F I, ipſi E F, dimidia videlicet toti, commenſurabilis. [f] Igitur & tam B H, C H, q̃ E I, F I, commenſurabiles inter ſe erunt; Ac proinde cùm C H, & F I, oſtenſæ ſint Rationales, erunt quoq; B H, E I, Rationales. [g] Quoniam verò tam C H, B H, q̃ F I, E I, longitudine ſunt incommenſurabiles, [g] earum quadrata nõ habeant proportionẽ, quam numerus quadratus ad numerum quadratum; (vt conſtat ex coroll. propoſ. 24. lib. 8. Habẽt enim proportionẽ, quam 1. ad 3. [h] cùm oſtenſum ſit talium partium 1. eſſe tam quadratũ C H, q̃ F I, quadratum, qualium 3. eſt tam quadratum B H, q̃ quadratum E I.) Erunt tam C H, B H, q̃ F I, E I, Rationales potentia tantũ commenſurabiles: [i] Ac proinde tam rectangulum ſub C H, B H, Rationalibus potentia tantùm commenſurabilibus, q̃ rectangulum ſub F I, E I, Rationalibus potentia tantùm commenſurabilibus contẽtum, Medium erit. Sunt autem triangula B C D, E F G, æqualia rectangulis ſub C H, B H, & ſub F I, E I, ex ſcholio propoſ. 41. lib. 1. cùm baſes triangulorum C D, F G, duplæ ſint baſium rectangulorum C H, F I. Igitur & triangula B C D, E F G, Media erũt. Quocirca cùm tota ſuperficies Tetraedri triangulo B C D, ſit commenſurabilis; (eſt enim triangulum B C D, totius ſuperficiei quarta pars.) Item tota ſuperficies Octaedri triangulo E F G, commenſurabilis; (Eſt enim triangulum E F G, totius ſuperficiei octaua pars.) Erunt quoque, ex coroll. propoſ. 24. lib. 10. ſuperficies Tetraedri, & Octaedri, Mediæ. Si igitur ſphæræ diameter fuerit Rationalis; Erit tam ſuperficies Tetraedri, q̃ Octaedri in ea ſphæra, Media. Quod erat oſtendendum. [d] 12. quarti decimi. [e] 6. decimi. [f] 12. decimi. [g] 9. decimi. [h] 12. quarti decimi. [i] 22. decimi.

### COROLLARIVM.

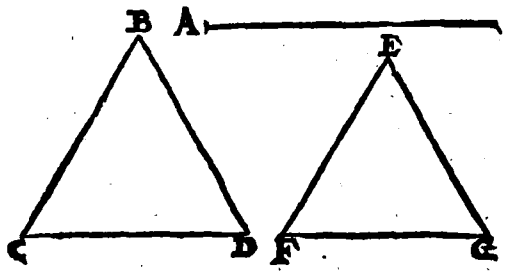
*SEQVITVR ex demonſtratione huius propoſ. omne triangulum æquilaterũ, cuius latus fuerit Rationale, eſſe ſuperficiem Mediam. Nam ex eo, q̃ latera B C, E F, & ob id eorum dimidia C H, F I, Rationalia ſunt oſtenſa, demonſtratum eſt, tam rectas C H, B H, quàm F I, E I, eſſe Rationales potentia tantùm commenſurabiles; Ac propterea rectangula ſub C H, B H, & ſub F I, E I, hoc eſt, triangula B C D, E F G, ipſis æqualia, eſſe Media. Cùm igitur eadem ſit ratio de omni triangulo æquilatero, cuius vnum latus ſit Rationale; perſpicuum eſt, quod infertur.*

## THEOR. 14. PROPOS. 14.

SI Tetraedrum, atq; Octaedrum eidem ſphæræ inſcribantur; erit baſis Tetraedri ſeſquitertia baſis Octaedri: Superficies autem Octaedri ſeſquialtera ſuperficiei Tetraedri. 14.




SIT ſphæræ diameter A, in qua deſcripti Tetraedri baſis ſit triangulũ B C D; Octaedri verò baſis triangulum E F G. Dico triangulum B C D, ſeſquitertium eſſe trianguli E F G. At verò ſuperficiem Octaedri eſſe ſeſquialteram ſuperficiei Tetraedri. [k] Quoniam enim quadratũ diametri A, ſeſquialterum eſt quadrati lateris Tetraedri C D; [l] duplum verò quadrati lateris Octaedri F G; fit vt qualium partium 6. fuerit quadratũ diametri A, talium 4. ſit quadratum [k] 13. tertij de cimi. [l] 14. tertij de cimi.



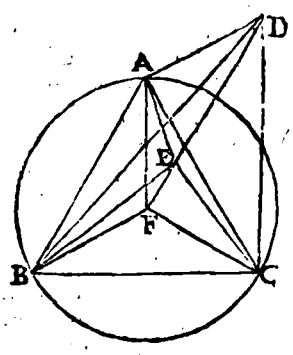

lateris C D, & talium 3. quadratum lateris F G. Quare quadratũ rectæ C D, seſquitertium eſt quadrati rectæ F G: Vt autem quadratum rectæ C D, ad quadratum rectæ F G, ita eſt triangulum B C D, ad triangulũ E F G. (*a* quia tam quadrata, quàm triangula proportionem inter ſe habent laterum C D, F G, duplicatã, cùm ſint ſimilia.) Igitur & triangulum B C D, ſeſquitertium eſt trianguli E F G.

*a* 20. & 19. *ſexti.*

RVRSVS, quoniam oſtenſum eſt triangulũ B C D, ſeſquitertium eſſe trianguli E F G; Ac propterea qualium partium 4. fuerit triangulum B C D, talium 3. eſſe triangulum E F G: Efficitur, vt triangulum E F G, octies ſumptum, hoc eſt, tota ſuperficies Octaedri, ſit earundem partium 24: At triangulum B C D, quater ſumptum, id eſt, tota ſuperficies Tetraedri, earundem partium 16. Quam ob rem ſuperficies Octaedri ſeſquialtera eſt ſuperficiei Tetraedri eiuſdem ſphæræ. Si igitur Tetraedrum, atque Octaedrum eidem ſphæræ inſcribantur, &c. Quod erat oſtendendum.

## THEOR. 15. PROPOS. 15.

**RECTA linea ex angulo quouis Tetraedri in ſphæra deſcripti per centrũ ſphæræ ducta, cadit in centrum baſis oppoſitæ, eſtq; perpendicularis ad dictam baſim.**




SIT Tetraedrum A B C D, contẽtum quatuor triangulis æquilateris & æqualibus A B C, D A B, D B C, D C A, in ſphæra, cuius centrum E; ducaturq; ex angulo D, per E, centrum ſphæræ, recta D E F, incidens in baſim A B C, circulo inſcriptam ad punctum F. Dico F, eſſe centrum baſis A B C, & D F, perpendiculare eſſe ad eandem baſin. Ductis enim ex E, & F, ad angulos dictæ baſis rectis E A, E B, E C; F A, F B, F C; quoniam rectæ E A, E B, E C, ductæ ex centro ſphæræ ad eius ſuperficiem æquales ſunt; erũt duo latera E A, E D, trianguli E A D, æqualia duobus lateribus E C, E D, trianguli C E D; Sunt autem & baſes A D, C D, æquales, cùm ſint latera triangulorũ æquilaterorum æqualium. *b* Igitur anguli A E D, C E D, æquales erunt; Ac proinde & reliqui A E F, C E F, æquales erũt, *c* eò q; tam A E D, A E F, q̃ C E D, C E F, duobus rectis æquiualent. Eadem ratione æquales erunt anguli B E F, C E F, ſi conſiderentur triangula B E D, C E D. Quoniam igitur latera E A, E F, trianguli E A F, æqualia ſunt lateribus E C, E F, trianguli E C F; & anguli ipſis contenti, oſtenſi æquales; *d* Erunt baſes F A, F C, æquales. Sic quoque æquales erunt F B, F C, ſi conſiderentur triangula E B F, E C F. Quare cùm tres rectæ F A, F B, F C, ex F, in circumferentiam circuli cadentes ſint æquales; *e* erit F, centrum baſis A B C, ſeu circuli eam circumſcribentis.

*b* 8. *primi.*
*c* 13. *primi.*
*d* 4. *primi.*
*e* 9. *tertij.*

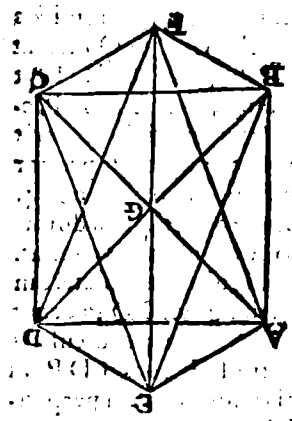
QVIA verò ex coroll. lemmatis 1. propoſ. 10. huius lib. linea perpendicularis ex E, centro ſphæræ ad planum circuli A B C, demiſſa, in centrum circuli cadit; efficitur, vt recta D E, per centrum ducta, & in centrum circuli F, cadens, perpendicularis ſit ad planũ circuli, ſeu baſis Tetraedri A B C. Nam ſi alia duceretur perpendicularis, caderet ea in centrũ circuli, per dictum coroll. Quare cùm F, quoq; ſit demonſtratum centrum eiuſdem circuli, haberet vnus idemque circulus duo centra quod eſt abſurdum. Recta igitur linea ex angulo quouis, &c. Quod demonſtrandum erat.

## THEOR. 16. PROPOS. 16.

**OCTAEDRVM in ſphæra deſcriptum, diuiditur in duas pyramides æquales, & ſimiles æqualium altitudinum; baſis verò vtriuſque eſt quadratum ſubduplum quadrati diametri ſphæræ.**

SIT Octaedrum A B C D E F, contentũ octo triangulis æquilateris & æqualibus E A D, E A B, E B C, E C D, F B C, F B A, F A D, F D C, & in ſphæra deſcriptũ, cuius centrum G. Dico ipſum diuidi in duas pyramides æquales & ſimiles æqualium altitudinum, quarũ baſis communis eſt quadratum ſubduplum quadrati diametri ſphæræ. Ductis enim ex G, centro ſphæræ ad omnes angulos rectis lineis G A, G B, G C, G D, G E, G F, quæ ~~æquales ſunt, cùm ſint ſemidiametri ſphæræ~~, ductæ videlicet è centro ad ſuperficiem ſphæræ: *f* quoniam quadratũ diametri ſphæræ, duplum eſt quadrati lateris Octaedri A B; & quadruplum quadrati ſemidiametri, A G, ex ſcholio propoſ. 4. lib. 2. Qualium partium 4. ponetur quadratũ diametri ſphæræ, talium partium 2. erit quadratum rectæ A B, & talium partium 1. quadratum rectæ A G; Ac proinde quadratum rectæ A B, duplum erit quadrati rectæ A G. Cùm ergo quadratum rectæ A G, æquale ſit quadrato rectæ B G; erit quadratum rectæ A B, æquale duobus quadratis rectarum A G, B G; *g* Ac propterea angulus A G B, rectus erit. Non aliter oſtendẽtur reliqui anguli A G D, B G C, C G D, recti. *h* Quam ob rem A G, C G, & B G, D G, in rectum erunt coniunctę; *i* atq; adeò rectæ A C, B D, ſeſe ſecantes in G, in vno exiſtent

*f* 14. *tertij de cimi.*
*g* 4 8 *primi.*
*h* 14. *primi.*
*i* 2. *vndec.*



existent plano: [a] Ac propterea rectæ earũ extrema connectentes A B, B C, C D, D A, in eodem plano erunt cum ipsis. Quare quadrilaterum A B C D, in vno plano est situm. Diuisum est ergo Octaedrum in duas pyramides A B C D E, A B C D F, quarũ basis communis A B C D, vertices verò E, & F; quę pyramides æquales sunt, & similes, ex defin. 10. lib. 11. cùm quælibet constet ex quatuor triangulis æquilateris Octaedri, quę æqualia sunt, & similia, & basi communi A B C D. Dico iam earum altitudines esse æquales, & basin A B C D, esse quadratum subduplum quadrati diametri sphæræ. Quoniam enim ostensum est, quadratum lateris Octaedri A B, æquale esse duobus quadratis semidiametrorum A G, B G: erit quoq; quadratum lateris A E, æquale duobus quadratis semidiametrorum A G, E G; [b] Ac propterea angulus A G E, rectus erit. Eadem ratione rectus erit angulus D G E. Quoniam igitur recta E G, duabus rectis A G, D G, se mutuò secãtibus in G, ad rectos angulos insistit, [c] ipsa recta erit ad planum A B C D, per rectas A G, D G, ductum, nempe ad basin pyramidũ. Quare E G, altitudo est pyramidis A B C D E. Similiter ostendemus F G, altitudinem esse pyramidis A B C D F. Cùm ergo E G, F G, sint semidiametri sphæræ æquales, perspicuum est, dictas pyramides esse æqualium altitudinum. Rursus quia A C, est diameter sphæræ: [d] erit eius quadratum duplum quadrati lateris A D; Ac propterea æquale duobus quadratis laterũ A D, D C. [e] Quare angulus A D C rectus est: Eodem modo recti erũt anguli D A B, A B C, B C D. Quare quadrilaterum A B C D, rectangulum est: Sed & æquilaterũ, cùm eius latera sint latera Octaedri. Igitur quadratum est; quod cùm sit descriptum ex latere Octaedri A B; [f] constat ipsum esse subduplum quadrati diametri sphæræ. Octaedrum ergo in sphæra descriptum, &c. Quod erat ostendendum.

[a] 7. vndec.
[b] 48. primi.
[c] 4. vndec.
[d] 14. tertijdecimi.
[e] 48. primi.
[f] 12. tertijdecimi.

*SCHOLIVM.*

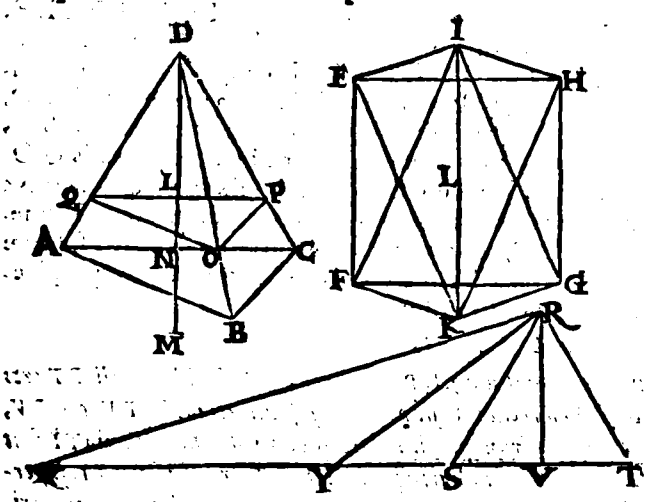
*Mvlto breuius hanc propositionem demonstrauimus in coroll. 2. propos. 14. lib. 13. ex ipsa videlicet constructione Octaedri. Veruntamen quia hic demonstratur à Campano, non habita ratione constructionis Octaedri, visum est eius demonstrationem hoc etiam loco conscribere.*

## THEOR. 17. PROPOS. 17.

TETRAEDRVM sphæræ impositum ad Octaedrum in eadem sphæra descriptum se habet, vt rectangulum sub linea potente vigintiseptem sexagesimas quartas partes quadrati lateris Tetraedri, & sub linea continẽte octo nonas partes eiusdem lateris, comprehensum ad quadratum diametri sphæræ. 17.

*VEL, vt Campanus loquitur.*

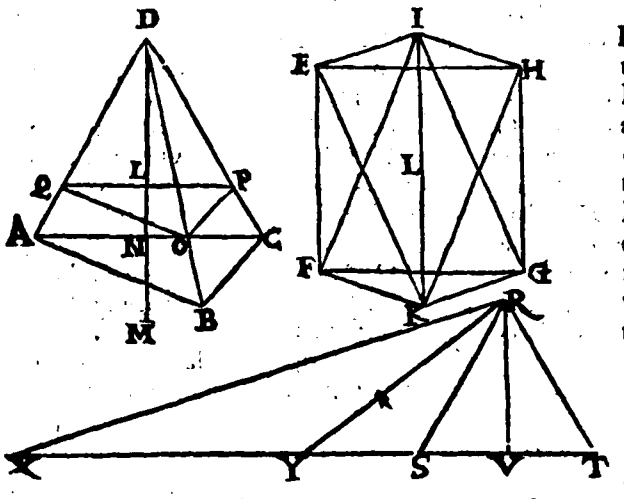
TETRAEDRVM sphæræ impositum ad Octaedrum in eadem sphæra descriptum se habet, vt rectangulum sub linea, quæ potentia est subsesquitertia trium quartarum partium lateris Tetraedri, & sub linea superquintupartiente vigesimas septimas partes earundem trium quartarũ partium lateris Tetraedri contentum, ad quadratum diametri sphæræ.



SIT Tetraedrum A B C D, & Octaedrũ E F G H I K, in vna eademq; sphæra, cuius centrum L. Ducatur ex angulo D, per centrum L, diameter sphæræ D M, incidens in basin A B C, ad punctum N. [g] Erit igitur N, centrum basis A B C, & D N, perpendicularis ad eandem basin. Quia verò pars diametri L N, inter centrum sphæræ & basin Tetraedri, est sexta pars diametri, & tertia semidiametri, [p] corol. 2. propos. 13. lib. 13. Erit D L, semidiameter talium partium 3. qualium 1. est L N; Ac propterea D N, talium 4. Ducatur deinde, ex scholio propos. 15. lib. 11. per centrum L, planum O P Q, parallelum plano A B C; [h] Eruntq; rectæ Q O, O P, P Q, parallelæ rectis A B, B C, C A; Ac propterea triangulum Q O P, æquiangulum erit triangulo æquilatero A B C, cùm anguli illius æquales sint angulis huius, singuli singulis: At A B C, est æquiangulum, [i] ex coroll. propos. 5. lib. 1. Igitur & Q O P, æquiangulum erit; Ac propterea & æquilaterum, ex corollario propos. 6. lib. 1. ideoque simile ipsi A B C: Sunt autem & triangula D Q O, D O P, D Q P,

[g] 15. quarti decimi.
[p] 21. huius.
[h] 16. vndec.
[i] 10. vndec.

triangulis D A B, D B C, D A C, æquilateris similia, ex corollario propos. 4. lib. 6. Igitur pyramides
a 17. vndec. A B C D, Q O P D, similes sunt, ex defin. 9. lib. 11. a Rursus, quia plana parallela A B, C, Q O P, secãt rectas D N, D C, proportionaliter: erit vt D N, ad D L, ita D C, ad D P: Erat autem D N, ad D L, vt 4. ad 3. (cùm ostensum sit D N, esse talium partium 4. qualium 3. est D L.) Igitur & D C, ad D P, e-
b 8. duodec. rit vt 4. ad 3. Ac proinde, b cùm pyramides similes habeant proportionem laterum triplicatã, erit pyramis A B C D, ad pyramidem Q O P D, vt 64. ad 27. hæc enim proportio triplicata est proportionis 4. ad 3. vt cõstat in his numeris 64. 48. 36. 27. Nam hi numeri sunt minimi in proportione 4.
c 20. sexti. ad 3. vt constat ex propos. 2. libri 8. Rursus c quia quadrata habent laterum proportionem duplicatam: erit quadratũ rectæ D C, ad quadratũ rectæ D P, vt 64. ad 36. vt in isdem numeris constat.




d 12. quarti decimi. Sit iam triangulum æquilaterum R S T, æquale triangulo D Q P: demittaturq; ex R, ad S T, perpendicularis R V. d Eritq; latus R T, hoc est, D P, illi æquale, potẽtia sesquitertium perpendicularis R V. Ac proinde qualium partium 36. fuit quadratum rectæ D P, talium 27. erit quadratũ rectæ R V: Erat autem earundẽ partium 64. quadratũ rectæ D C. Igitur linea R V, est potens viginti septem sexagesimas quartas partes quadrati lateris Tetraedri.

Rursvs, extensa T S, fiat T X, ad T S, vt 64. ad 27. ex coroll. propos. 6. libri 10. diuidaturq; T K, bifariam in Y; vt sit T Y, talium partiũ 32. qualium 27. est T S, seu illi æqualis D P. Quoniam verò proportio D C, ad D P, erat, vt 4. ad 3. nempe sesquitertia, erit D C, talium partiũ 36. qualium D P, est 27. (proportio enim 36. ad 27. est sesquitertia.) ac propterea qualium partium T Y, est 32. Quare linea T Y, continet octo nonas partes lateris Tetraedri D C. Dico igitur ita esse Tetraedrũ A B C D, ad Octaedrum E F G H I K, vt rectangulum contentũ sub recta R V, (quæ potest viginti septem sexagesimas quartas partes quadrati lateris D C.) & sub recta T Y, (quæ continet octo nonas partes eiusdem lateris.) ad quadratum diametri sphæræ.

e 1. sexti. Cvm enim ductis rectis R X, R Y, e triangulũ R T X, duplum sit trianguli R T Y, g & basis T X,
f 41. primi. dupla sit basis T Y: f Est autẽ & rectangulum sub R V, T Y, duplum eiusdem trianguli R T Y. Erit
g 7. quinti. triangulum R T X, æquale rectangulo sub R V, T Y. g Ac propterea erit, vt triangulum R T X, ad
h 1. sexti. triangulum R S T, ita rectangulum sub R V, T Y, ad idem triangulũ R S T: h Est autẽ triangulum R T X, ad triangulum R S T, vt basis T X, ad basin S T, nimirũ vt 64. ad 27. Igitur & rectangulum sub R V, T Y, ad triangulum R S T, hoc est, ad triangulum D Q P, siue Q O P, sibi æquale, erit vt 64. ad 27. Fuit autẽ & pyramis A B C D, ad pyramidem Q O P D, vt 64. ad 27. Erit ergo vt rectangulum sub R V, T Y, ad triangulum Q O P, ita pyramis A B C D, ad pyramidem Q O P D: At verò vt triangulum Q O P, ad quadratum diametri sphæræ D M, ita est pyramis Q O P D, ad Octaedrum E F G H I K. (Nam cùm D N, recta sit ad planũ A B C, recta quoq; erit ad planum Q O P, at
i 16. quarti decimi. scholio propos. 14. lib. 11. ideoq; sphæræ semidiameter D L, altitudo erit pyramidis seu Tetraedri Q O P D: i Octaedrũ aũt E F G H I K, diuiditur in duas pyramides æquales E F G H I, E F G H K, quarum basis cõmunis quadratũ E F G H, dimidium quadrati diametri sphæræ; & altitudines æquales semidiametri sphæræ L I, L K. Pyramides ergo Q O P D, E F G H I, æquales habent altitudines. Quare, ex scholio propos. 5. lib. 12. erit vt basis Q O P, ad basin E F G H, ita pyramis Q O P D, ad pyramidem E F G H I: Ac propterea per ea, quæ in scholio propos. 22. lib. 5. ostendimus, vt basis Q O P, ad duplum basis E F G H, hoc est, ad quadratum diametri sphæræ D M, ita pyramis Q O P D, ad duplum pyramidis E F G H I, hoc est, ad Octaedrum E F G H I K.) Ex æquo igitur erit, vt rectangulum sub R V, potente viginti septem sexagesimas quartas partes quadrati lateris Tetraedri D C, & sub T Y, octo nonis eiusdem lateris D C, contentum ad quadratum diametri sphæræ D M, ita pyramis, seu Tetraedrum A B C D, ad Octaedrum E F G H I K. Tetraedrum ergo sphæræ impositum ad Octaedrum, &c. Quod erat demonstrandum.

## SCHOLIVM.

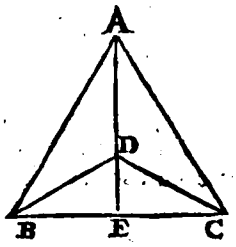
a 12. quarti decimi. *Quoniam verò D C, talium partium 4. fuit, qualium 3. D P: continebit D P, seu illi æqualis R T, tres quartas partes lateris Tetraedri D C: ac proinde,* a *cũ recta R T, sit potentia sesquitertia rectæ R V; erit R V, potentia subsesquitertia ipsius R T, nempe trium quartarum partium lateris Tetraedri. Rursus quia T Y, fuit talium partium 32. qualium 27. S T, seu D P: (tres videlicet quartæ partes lateris Tetraedri.) erit T Y, superquintupartiens vigesimas septimas partes ipsius S T, nimirum trium quartarum partium lateris Tetraedri. Quare constat, esse quoq; Tetraedrum A B C D, ad Octaedrum E F G H I K, vt rectangulum sub R V, quæ potentia subsesquitertia est trium quartarum partium lateris Tetraedri, & sub T Y, quæ superquintupartiens est vigesimas septimas partes earundem trium quartarum partium lateris Tetraedri, vt volebat Campanus.*

THEOR.

## THEOR. 18. PROPOS. 18.

0. 17.

LINEA perpendicularis ex quolibet angulo trianguli æquilateri ad basin oppositam demissa; tripla est eius perpendicularis, quæ ex centro trianguli ad eandem basin deducitur.




SIT triangulum equilaterũ A B C, cuius centrũ D, Ducatur ex A, per D, recta A E, q̃ perpendicularis erit ad B C, eamq; bifariam diuidet, ex coroll. 2. propos. 10. lib. 1. Dico A E, triplã esse rectæ D E, quæ scilicet perpendicularis est è centro ad basin ducta. Ductis enim rectis B D, C D, cũ latera D A, D B, trianguli A D B, æqualia sint lateribus D B, D C, trianguli B D C; (è centro enim ducuntur;) sit autem & basis A B, basi B C, æqualis: Erunt triangula A B D, B D C, æqualia, ex coroll. propos. 8. lib. 1. Atque eadem ratione æqualia erunt triangula A D B, A D C. Quare ob æqualitatem trium triangulorum A D B, B D C, C D A, triangulum A B C, triplum est trianguli B D C. Quoniam verò rectangulum sub A E, E B, triangulo A B C; & rectangulum sub D E, E B, triangulo B D C, æquale est, ex scholio propos. 41. lib. 1. cùm basis trianguli B C, dupla sit basis B E, vtriusq; rectanguli: Erit quoque rectangulum sub A E, E B, triplum rectanguli sub D E, E B: [a] Est autem vt rectangulum sub A E, E B, ad rectangulum sub D E, E B, eiusdem altitudinis E B, ita basis A E, ad basin D E. Igitur & A E, tripla est ipsius D E. Linea ergo perpendicularis ex quolibet angulo, &c. Quod erat ostendendum.

[a] 1. sexti.

### COROLLARIVM.

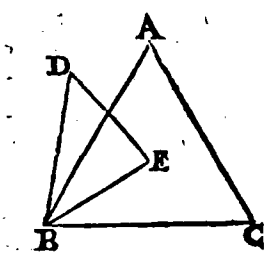
*ITAQVE eadem perpendicularis A E, sesquialtera erit reliquæ rectæ A D, inter angulum & centrum comprehensæ. Cùm enim A E, triplа sit ipsius D E; qualium partium 3. ponetur A E, talium 1. erit D E; Reliqua igitur A D, earundem partium 2. continebit: Ac propterea A E, sesquialtera erit ipsius A D.*

*Ex quibus rursus fit, rectam A D, rectæ D E, duplam esse.*

## THEOR. 19. PROPOS. 19.

0. 17.

SI Octaedrum sphæræ inscribatur; erit semidiameter sphæræ potentia triplа eius perpendicularis, quæ ex centro sphæræ in basin quamcunq; Octaedri ducitur.




SIT basis aliqua octaedri in sphera, cuius centrum D, descripti, triangulum æquilaterum A B C, in quod è centro sphæræ D, perpendicularis demittatur D E; ducaturque semidiameter sphæræ D B. Dico semidiametrum D B, potentia triplam esse perpendicularis D E. Cùm enim, ex coroll. lemmatis 1. propos. 10. huius lib. perpendicularis D E, in centrum circuli sphæræ, qui triangulum A B C, circumscribit, cadat, erit E, centrum trianguli. Ducta igitur recta B E; [b] quoniam quadratum diametri sphæræ duplum est quadrati lateris octaedri A B; & quadruplum quadrati semidiametri sphæræ D B, ex scholio propos. 4. lib. 2. Si ponatur quadratum diametri partium 12. erit quadratum lateris A B, 6. & quadratum semidiametri sphæræ D B, 3. [c] Quia verò quadratum lateris A B, triplum est quadrati semidiametri circuli triangulum ambientis, rectæ scilicet B E; Erit quadratum rectæ B E, talium partium 2. qualium 6. fuit quadratum lateris A B. Quare [d] cùm quadratum rectæ D B, æquale sit quadratis rectarum B E, D E, sit autem quadratum rectæ D B, ostensum partium 3. Erit reliquum quadratum perpendicularis D E, talium partium 1. Ac proinde quadratum rectæ D B, triplum est quadrati rectæ D E. Si igitur octaedrum sphæræ inscribatur, &c.

[b] 14. tertij. dec.

[c] 12. tertij. dec.

[d] 47. primi.

## THEOR. 20. PROPOS. 20.

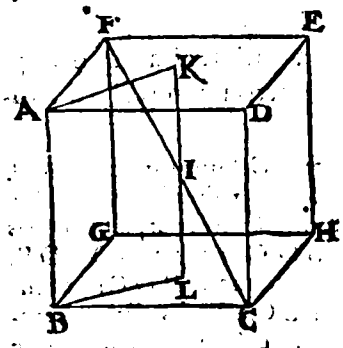
0. 18.

DVPLVM quadrati ex diametro cuiuslibet sphæræ descripti, æquale est superficiei cubi in illa sphera collocati: Perpendicularis autem à centro sphæræ in aliquam basin cubi demissa, æqualis est dimidio lateris cubi.

SIT cubus A B C D E F G H, in sphæra descriptus, cuius centrum I, ex quo I K, perpendicularis ducatur ad vnam basin cubi, nempe ad A D E F. Dico duplum quadrati diametri sphæræ æquale esse superficiei cubi; & perpendicularẽ I K, æqualem esse dimidio lateris cubi. [e] Cùm enim quadratum diametri sphæræ triplum sit quadrati lateris cubi, hoc est, æquale tribus quadratis cubi; Erit duplum eiusdem quadrati ex diametro sphæræ descripti æquale sex quadratis cubi, id est, toti superficiei cubi.

[e] 15. tertij. dec.

PRODVCTA autem K I, ad basin oppositam B C H G, vsque in punctum L; cùm K L, recta sit ad planum A E, recta quoque erit ad planum B H, illi parallelum, per scholium propos. 14. lib. 11.




a 6. vndec.

b 16. vndec.

Rursus, [a] quia AB, KL, parallelæ sunt, quòd rectę sint ad planum AE; ducatur per ipsas planum faciens in planis oppositis parallelis AE, BH, communes sectiones, lineas rectas AK, BL, [b] quæ parallelæ quoque erunt inter se: Ac propterea parallelogrammum erit ABLK: atque adeò recta KL, æqualis lateri cubi AB. Quoniam verò perpendicularis KL, è centro sphæræ I, cadit in bases AE, BH, ad puncta K, & L, erunt K, & L, centra circulorum dictas bases ambientium in sphæra, per coroll. lemmatis 1. propos. 10. huius lib. Quare KL, in centro I, bifariam secabitur à dicta diametro CF, vt in coroll. 1. propos. 15. lib. 13. ostendimus: Ac propterea cùm KL, ostensa sit æqualis lateri cubi, erit IK, dimidium eiusdem lateris cubi. Duplum igitur quadrati ex diametro cuiuslibet sphæræ descripti, &c. Quod ostendendum erat.

## COROLLARIVM.

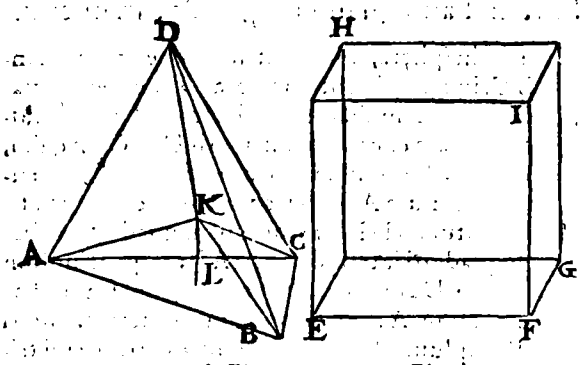
*Ex dictis colligitur, solidum, quod fit ex dimidio lateris cubi in duas tertias partes quadrati diametri sphæræ dictum cubum comprehendentis, æquale esse cubo.* [a] *Cùm enim quadratum diametri sphæræ triplum sit quadrati lateris cubi, erunt duo quadrata AE, BH, duæ tertiæ partes quadrati diametri sphæræ;* [b] *Perspicuum autem est, solidum, quod fit ex IK, dimidio lateris cubi in AE, tertiam partem quadrati diametri sphæræ, æquale esse solido, quod fit ex IL, dimidio lateris cubi in BH, tertiam partem quadrati diametri sphæræ, eò quòd dicta solida habeant & bases, & altitudines æquales. Itaque cùm dicta duo solida compleant totum cubum, manifestum est, id, quod fit ex dimidio lateris cubi, in duas tertias partes quadrati diametri sphæræ, æquale esse toti cubo. Quod est propositum.*

a 15. tertii decimi.

b 31. vndecimi.

*ALITER proponi potest hoc corollarium, vt dicamus, solidum, quod fit ex latere cubi in tertiam partem quadrati diametri sphæræ, æquale esse cubo. Nam cubus BE, producitur ex BA, latere cubi in quadratum AE, quod est tertia pars quadrati diametri sphæræ: Vt perspicuum est.*

## SCHOLIVM.




*VNIVERSE autem solidũ, quod fit ex perpendiculari è centro cuiuscunque corporis regularis ad aliquam eius basim ducta in tertiam partem superficiei ipsius corporis, æquale est opposito corpori regulari. Sit enim corpus regulare quodcunque ABCD, contentum planis ABC, ABD, ACD, BCD, solidum autem EFGH, contentum sub EI, tertia parte superficiei corporis ABCD, & sub altitudine FG, quæ æqualis sit perpendiculari KL, ductæ ex centro K, ad basin ABC. Dico solidum EFGH, æquale esse dato corpori regulari ABCD. Nam ductis ex centro K, rectis KA, KB, KC, KD, ad omnes angulos corporis, resoluetur corpus regulare in pyramides æquales, cùm æquales habeãt bases & altitudines. Cùm enim circuli dictas bases ambientes, æquales sint; ipsi æqualiter à centro distabunt, per lemma 2. propos. 10. huius lib. Ac propterea perpendiculares ex K, centro ad ipsorum plana ductæ, nempe altitudines pyramidum, æquales erunt. Quoniam verò prisma contentum sub basi ABC, & altitudine KL, triplum est pyramidis ABCK, per coroll. 1. propos. 7. lib. 12. Atque eadem ratione prismata contenta sub reliquis basibus, & eadem altitudine KL, tripla sunt suarum pyramidum; Erit prisma contentum sub tota superficie corporis regularis, & altitudine KL, (nimirum compositum ex omnibus illis prismatis) triplum corporis regularis ABCD. Quam ob rem cùm idem prisma triplum sit prismatis EFGH, quòd & illius basis tripla ponatur basis huius, per ea, quæ ad propos. 7. lib. 12. demonstrauimus, erunt solida EFGH, ABCD, æqualia. Quod est propositum.*

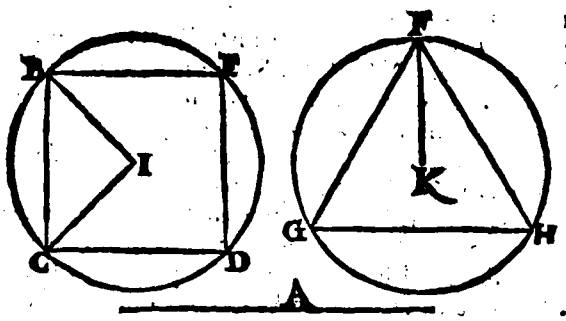
# THEOR. 21. PROPOS. 21.

*IDEM circulus comprehendit & cubi quadratum, & Octaedri triangulum, eiusdem sphæræ.*

In sphæra, cuius diameter A, intelligatur descriptus cubus, cuius vnum quadratum BCDE, & Octaedrum, cuius vnum triãgulum FGH. Dico eundem circulum circumscribere & quadratum BCDE, & triangulũ FGH, hoc est, circulos BCDE, FGH, ipsa circumscribẽtes, esse æquales. Sint enim rectæ è cẽtris IB, KF. [a] Quia igitur quadratũ diametri A, triplũ est quadrati lateris cubi BC, & quadratũ lateris BC, duplũ quadrati rectæ BI; (Nã ducta recta IC, fiet angulus BIC, rectus,

a 15. tertiædecimi.

b 47. primi.




rectus, cùm ſubtendat quadrantem; [a] Ac proinde quadratum rectæ B C, æquale erit quadratis rectarum B I, I C. Quare cùm rectarum æqualium B I, I C, æqualia ſint quadrata: duplum erit quadratum rectæ B C, quadrati rectę B I.) qualium partium 6. ponetur quadratum diametri A, talium 2. erit quadratum lateris B C, & talium 1. quadratum rectæ B I. Rurſus [b] quia quadratum diametri A, duplum eſt quadrati lateris Octaedri F G; [c] & quadratum lateris F G, tripluum quadrati rectæ F K, ex centro ductæ; qualium partium 6. ponetur quadratum diametri A, talium 3. erit quadratum lateris F G, & talium 1. quadratum rectæ F K. Cùm igitur & talium partium 1. oſtenſum ſit quadratum rectæ B I; æqualia erunt quadrata rectarum B I, F K: Ac propterea & rectæ ipſæ, & circuli ex ipſis deſcripti B C D E, F G H, æquales erunt. Idem ergo circulus comprehendit, &c. Quod erat oſtendendum.

[a] 47. primi.

[b] 14. tertiædecimi.

[c] 12. tertiædecimi.

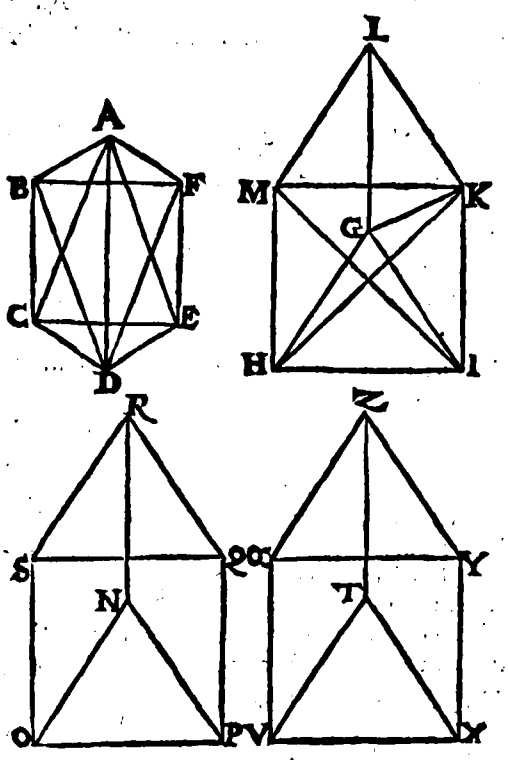
## COROLLARIVM.

*HINC fit, lineas perpendiculares cõiungentes centra circulorum, qui baſes oppoſitas tam cubi, quàm Octaedri circumſcribunt, æquales eſſe. Si enim ex centro ſphæræ ad baſes cubi & Octaedri perpendiculares ducantur, cadent hæ in centra circulorum ipſas circumſcribentium, ex coroll. lemmatis 1. propoſ. 10. huius lib. [a] qui cùm ſint æquales oſtenſi, æqualiter diſtabunt à centro ſphæræ, ex lemmate 2. eiuſdem propoſ. Ac proinde æquales erunt dictæ perpendiculares. Quæ cùm ſint dimidiatæ partes rectarum, quæ centra oppoſitarum baſium connectunt; (Nam ſi producantur, perpendiculares quoque erunt ad oppoſitas baſes, ex ſcholio propoſ. 14. lib. 11. propterea quòd parallelæ ſunt oppoſitæ baſes in Octaedro, ex coroll. 4. propoſ. 14. lib. 13. quemadmodum & oppoſitæ baſes cubi parallelæ ſunt.) æquales erunt perpendiculares centra oppoſitarum baſium coniungentes tam in cubo, quàm in Octaedro. quod eſt propoſitum.*

[a] 21. quarti decimi.

## THEOR. 22. PROPOS. 22.

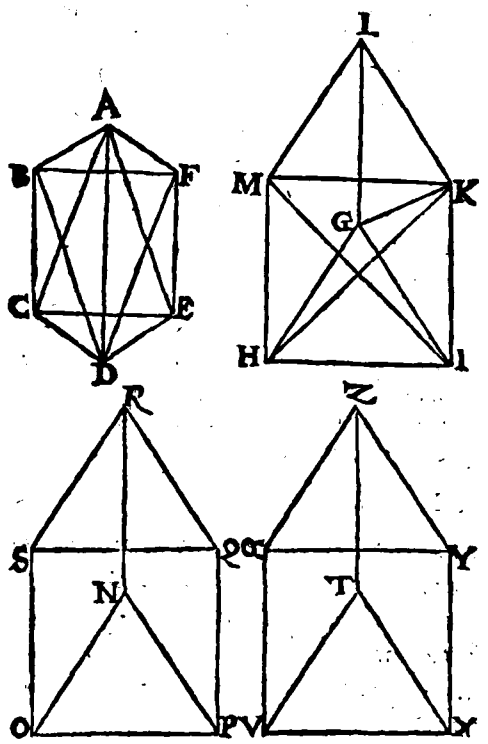
**SI Octaedrum, atq; Tetraedrum eidem ſphæræ inſcribantur; Erit Octaedrum ad triplum Tetraedri, vt latus Octaedri ad latus Tetraedri.**




IN eadem ſphæra inſcriptum ſit & Octaedrum A B C D E F, & Tetraedrum G H I K. Dico ita eſſe, Octaedrum ad triplum Tetraedri, vt latus B F, ad latus H I. Ducta enim in Octaedro diametro A D, diuidetur Octaedrum in quatuor pyramides, quarum latus commune eſt ipſa diameter A D, & vertex communis A, nempe in B C D A, cuius baſis B C D; in B D F A, cuius baſis B D F; in C D E A, cuius baſis C D E; & in D E F A, cuius baſis D E F; quæ quidem omnes baſes infra quadratum B C E F, exiſtunt, cõtinentes cum ipſo dimidiatam partem Octaedri. Quoniam verò quælibet harum pyramidum conſtat duobus triãgulis æquilateris Octaedri, & duobus aliis triangulis, quæ quoniam latus ipſorum commune eſt A D, diameter; & reliqua latera, ipſius Octaedri latera exiſtunt, [a] inter ſe æqualia ſunt; efficitur has quatuor pyramides æquales eſſe inter ſe, cùm contineantur planis & multitudine, & magnitudine æqualibus. Conſtituatur ſuper G H I, baſin Tetraedri, priſma G H I K L M, eiuſdem cum Tetraedro altitudinis; quod ipſius Tetraedri triplum erit, per corollarium primum, propoſitionis ſeptimæ, libri duodecimi. Rurſus, ſuper baſin octaedri N O P, & T V X, baſi Tetraedri æqualem, cõſtituantur duo priſmata N O P Q R S, T V X Y Z a, eiuſdem cum Octaedro, ſeu pyramide A C D E, altitudinis. [b] Quoniam igitur G H I, hoc eſt, T V X, baſis Tetraedri ſeſquitertia eſt ipſius N O P, baſis Octaedri: Erit quoq; priſma T V X Y Z a, priſmatis N O P Q R S, ſeſquitertium, cùm priſmata eiuſdem altitudinis ſint, vt

[a] 8 primi.

[b] 14. quintidecimi.




baſes, ex iis, quæ ad propoſ. 7. lib. 12. demonſtrauimus. Eſt autẽ & Octaedrum ABCDEF, eiuſmodi priſmatis NOPQRS, ſeſquitertium; (Nam priſma æquale eſt tribus pyramidibus, ex coroll. 2. propoſ. 7. lib. 12. qualium quatuor cõtinere diximus Octaedrũ.) Igitur æquale eſt Octaedrum priſmati TVXYZ. Quia verò priſma TVXYZ *a*, ad priſma GHIKLM, proportionem habet, quam altitudo illius ad altitudinem huius, ex ſcholio propoſ. 14. libri 12. Eſt autem altitudo priſmatis TVXYZ *a*, quod Octaedro æquale eſt, eadẽ quæ Octaedri, ex conſtructione: Erit quoque Octaedrum ad priſma GHIKLM, hoc eſt, ad triplum Tetraedri GHIK, vt altitudo Octaedri ad altitudinẽ Tetraedri: Eſt autem altitudo Octaedri, nempe perpendicularis centra baſium oppoſitarum coniungens, æqualis lateri cubi, nimirum perpendiculari centra baſium oppoſitarum connectenti, per coroll. propoſ. 21. huius lib. Atque vt latus cubi ad altitudinem Tetraedri, ita eſt latus Octaedri ad latus Tetraedri. (Nam tam quadratum lateris cubi ad quadratum altitudinis Tetraedri, quàm quadratum lateris Octaedri ad quadratũ lateris Tetraedri, eſt, vt 3. ad 4. Poſito enim quadrato diametri ſphæræ 9. erit quadratum lateris cubi 3. ex propoſ. 15. lib. 13. & quadratum altitudinis Tetraedri 4. ex coroll. 2. propoſ. 13. lib. 13. ideoq; quadratum lateris cubi ad quadratum altitudinis Tetraedri, eſt vt 3. ad 4. Rurſus poſito quadrato diametri ſphæræ 6. *a* erit quadratum lateris Octaedri 3. & quadratum lateris Tetraedri 4. &c.) Eſt igitur Octaedrum ad triplum Tetraedri, vt latus Octaedri ad latus Tetraedri. Si itaq; Octaedrum, atq; Tetraedrum eidem ſphæræ inſcribantur, &c. quod demonſtrandũ erat.

*a* 18. *tertiidecimi.*

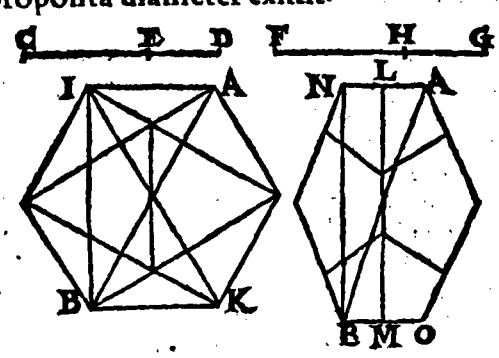
## COROLLARIVM.

*Ex dictis infertur, ita eſſe altitudinem Octaedri ad altitudinẽ Tetraedri, vt latus Octaedri ad latus Tetraedri. Oſtenſum enim eſt, ita eſſe latus cubi, quod quidem æquale eſt altitudini Octaedri, ad altitudinem Tetraedri, vt latus Octaedri ad latus Tetraedri. Item colligitur, ita eſſe diametrum ſphæræ ad latus Tetraedri, vt latus Octaedri ad latus cubi.* [a] *Nam & quadratum diametri ad quadratum lateris Tetraedri, & quadratum lateris Octaedri ad quadratum lateris cubi, proportionem habet ſeſquialteram.*

*a* 18. *tertiidecimi.*

## THEOR. 23. PROPOS. 23.

Si recta linea propoſita potuerit totam aliquã lineam ſectam extrema ac media ratione, & maius eius ſegmentum; Item totam aliam ſimiliter ſectam & minus eius ſegmentum: Erit maius ſegmentum prioris lineæ latus Icoſaedri; minus autem ſegmentum poſterioris lineæ latus Dodecaedri eius ſphæræ, cuius recta linea propoſita diameter exiſtit.




Possit recta AB, rectam CD, & eius ſegmẽtum maius CE; Item rectam FG, & eius ſegmentum minus HG. Dico CE, eſſe latus Icoſaedri, & HG, latus Dodecaedri, eius ſphæræ, cuius AB, diameter exiſtit. Intelligatur enim in ſphæra, cuius diameter AB, deſcriptũ Icoſaedrum AIBK, & Dodecaedrũ ANBO. Latera deinde Icoſaedri oppoſita AI, BK, connectantur recta IB, quæ ſubtẽdet vnum angulum pentagoni ex Icoſaedri lateribus cõpoſiti, vt conſtat ex propoſ. 16. lib. 13. (Nam in ea figura, ducta recta ZF, erit RSHZF, pentagonum, ob quinque latera Icoſaedri æqualia GR, GS, GH, GZ, GF, cadentia ex G, in ſuperficiẽ ſphæræ, in quo recta RH, latera oppoſita RX, HL, coniungens angulum RSH, ſubtendit) clariusq; patebit ex cõſtructione Icoſaedri, quam ad finem libri 16. ex Pappo afferemus: quod etiã videre licet in aliquo Icoſaedro materiali. Quia verò AI, BK, latera oppoſita parallela ſunt, per coroll. 3. propoſ. 16. lib. 13. *a* erunt anguli AIB, IBK, æqua-

*a* 29. *primi.*

IBK, æquales duobus rectis; Ac proinde, cùm sint inter se æquales; (Ducta enim alia diametro IK; cùm latera AI, IB, trianguli AIB, æqualia sint lateribus KB, BI; & bases quoque AB, IK, æquales; [a] Erunt anguli AIB, IBK, æquales.) recti erunt; [b] ideoque quadratum rectæ propositæ AB, æquale erit quadratis rectarum AI, IB: Erat autem idem quadratum rectæ AB, æquale, ex hypothesi, quadratis rectarum CD, CE: Igitur quadrata rectarum IB, IA, æqualia sunt quadratis rectarum CD, CE; Ac propterea cùm CE, sit maius segmentum ipsius CD, diuisæ extrema ac media ratione; Item IA, maius segmentum ipsius IB, similiter diuisæ; (Nam IB; subtendit angulum pentagoni, cuius latus est IA, latus Icosaedri. Constat autem, rectæ subtendentis angulum pentagoni, si secetur extrema ac media ratione, [c] maius segmentum esse æquale lateri eiusdem pentagoni.) æquale erit CE, maius segmentum ipsi IA, lateri Icosaedri. [d] Cùm enim sit vt CD, ad CE, ita IB, ad IA; [e] erit quoque vt quadratum rectæ CD, ad quadratum rectæ CE, ita quadratum rectæ IB, ad quadratum rectæ IA; Ac componendo, vt quadrata rectarum CD, CE, ad quadratum rectæ CE, ita quadrata rectarum IB, IA, ad quadratum rectæ IA: Ostensa sunt autem quadratis rectarum CD, CE, æqualia quadrata rectarum IB, IA; [f] Igitur & quadrato rectæ CE, æquale est quadratum rectæ IA; ideoq; rectæ CE, IA, æquales sunt. Quod est propositum.

a 8. primi. b 47. primi. c 8. tertiædecimi. d 2. quartædecimi. e 22. sexti. f 14. quinti.

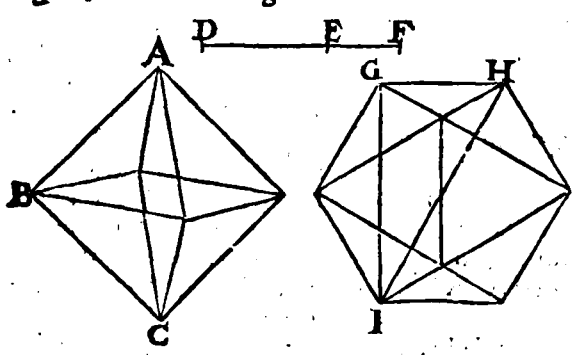
RVRSVS, latera Dodecaedri opposita AN, BO, secentur bifariam in L, & M, punctis quæ recta LM, & ipsa latera recta NB, coniungantur. Quoniam igitur NL, BM, æquales, parallelæ sunt, per coroll. 3. propos. 17. lib. 13. [g] erunt quoque LM, NB, æquales & parallelæ: Est autem recta LM, secans latera opposita bifariam, perpendicularis ad ipsa latera opposita, per idem coroll. Igitur & NB, ad eadem perpendicularis erit. [h] Ac proinde quadratum rectæ propositæ AB, æquale erit quadratis rectarum NB, NA. Quare cùm idem quadratũ rectæ AB, æquale sit positum quadratis rectarum FG, HG; æqualia erunt quadrata rectarum NB, NA, quadratis rectarum FG, HG: Ac propterea, cùm HG, sit minus segmentum ipsius FG, sectæ extrema ac media ratione: Item NA, minus segmentum ipsius NB, hoc est, ipsius LM, similiter diuisæ, per coroll. 4. propos. 17. lib. 13. æquale erit HG, minus segmentum ipsi NA, lateri Dodecaedri. Quod quidem non aliter ostendemus, ac suprà demõstrauimus CE, maius segmentũ æquale esse ipsi IA, lateri Icosaedri. Si recta ergo linea proposita potuerit totam aliquam lineam sectã extrema ac media ratione, & maius eius segmentum; Item totam aliam similiter sectam, & minus eius segmentum: Erit maius segmentũ prioris lineæ latus Icosaedri; minus autem segmentum posterioris, &c. Quod erat ostendendũ.

g 33. primi. h 47. primi.

## THEOR. 24. PROPOS. 24.

**SI latus Octaedri potuerit maius & minus segmentum rectæ lineæ extrema ac media ratione sectæ: Poterit latus Icosaedri in eadem sphæra descripti duplum minoris segmenti.**

POSSIT latus AB, Octaedri ABC, & maius segmentum DE, & minus EF, rectæ DF, sectæ extrema ac media ratione. Sit quoque eidem sphæræ inscriptum Icosaedrum GHI, cuius latus GH, & subtendẽs angulum pentagoni ex lateribus Icosaedri compositi GI, & diameter HI. Dico quadratum lateris GH, duplum esse quadrati minoris segmẽti EF. Cùm enim GH, sit latus pentagoni, cuius vnum angulum subtendit recta GI; [i] erit GH, maius segmentum ipsius GI, diuisæ extrema ac media ratione; [k] Ac proinde composita recta ex GI, GH, secabitur similiter in G, puncto extrema ac media ratione. [l] Quia verò quadratum diametri HI, æquale est quadratis rectarum GI, GH, quòd angulus IGH, rectus sit, vt in præcedenti propos. ostensum est; & quadratum lateris AB, æquale quadratis rectarum DE, EF, ponitur; Erunt, vt quadratum diametri HI, ad quadratum lateris AB, ita quadrata rectarũ GI, GH, ad quadrata rectarum DE, EF: [m] Est autem quadratũ diametri HI, duplum quadrati lateris Octaedri AB. Igitur & quadrata rectarum GI, GH, dupla sunt quadratorum rectarũ DE, EF. Atqui vt quadrata rectarum GI, GH, ad quadrata rectarum DE, EF, ita est quadratum rectæ GH, ad quadratum rectæ EF. ([n] Nam cùm sit vt GI, ad GH, ita DE, ad EF. [o] Erit quoq; vt quadratum rectæ GI, ad quadratum rectæ GH, ita quadratum rectæ DB, ad quadratum rectę EF; & componendo, vt quadrata rectarum GI, GH, ad quadratum rectę GH, ita quadrata rectarum DE, EF, ad quadratum rectæ EF: Et permutando, vt quadrata rectarum GI, GH, ad quadrata rectarum DE, EF, ita quadratum rectæ GH, ad quadratum rectæ EF.) Quadratum igitur rectæ GH, duplum quoque est quadrati rectæ EF. Quare si latus Octaedri potuerit maius, & minus segmentum, &c. Quod erat ostendendum.

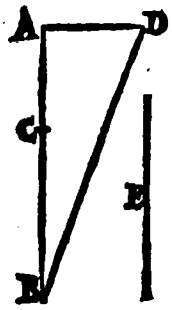



i 8. tertiædecimi. k 5. tertiædecimi. l 47. primi. m 14. tertiædecimi. n 2. quartædecimi. o 22. sexti.

## THEOR. 25. PROPOS. 25.

**SI recta linea diuisa extrema ac media ratione cum minore segmento angu-**

tum rectum constituat, cui recta subtendatur: Erit recta linea, quę potentia sit subdupla ipsius rectæ subtensæ, latus octaedri eius sphæræ, in qua dictum minus segmentum latus existit Dodecaedri.




LINEA recta A B, secta in C, extrema ac media ratione constituat cum recta A D, quę æqualis sit minori segmento A C, angulum rectum A, cui recta subtendatur B D, sitq; recta E, potentia subdupla ipsius B D. Dico E, latus esse Octaedri illius sphęræ, in qua A D, vel A C, latus est Dodecaedri. Cùm enim per coroll. 2. propos. 17. lib. 13. maius segmentum B C, latus sit cubi illius sphæræ, cuius minus segmentum A C, vel A D, latus est Dodecaedri; erit diameter illius sphæræ potentia tripla maioris segmenti B C, nempe lateris cubi: [a] Sunt autem & quadrata rectarum A B, A D, nempe totius lineæ, & minoris segmẽti, tripla eiusdem quadrati maioris segmenti B C. Quadratum igitur diametri sphæræ, æquale erit quadratis rectarum A B, A D, hoc est, quadrato rectæ B D: Aoproinde recta B D, diameter est sphæræ. [b] Quare cùm diameter sphæræ potentia sit dupla lateris Octaedri; Posit autem recta B D, duplum rectæ E, quòd recta E, ponatur potentia subdupla ipsius B D; Erit E, latus Octaedri eiusdem sphæræ, cuius A D, latus Dodecaedri ponitur. Si igitur recta linea diuisa, &c. Quod erat demonstrandum.

[a] 4. tertiidecimi.

[b] 14. tertiidecimi.

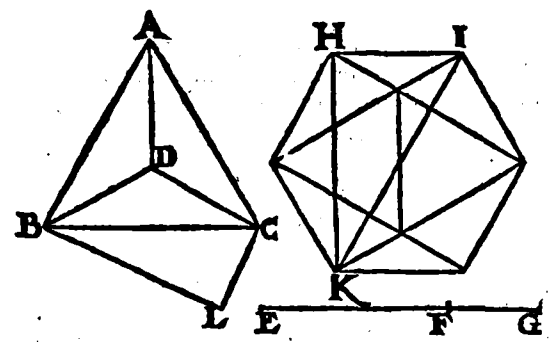
## COROLLARIVM.

[a] 18. tertiidecimi.

[a] *QVONIAM verò latus Octaedri E, potentia sesquialterum est lateris cubi B C, cuius maius segmentum est A D, latus Dodecaedri, vt constat ex iis, quæ ostendimus ad propos. 4. lib. 13. cùm B C, sit maius segmentum, & A D, minus rectæ A B, extrema ac media ratione diuisæ: Perspicuum est, si linea quæuis recta (nimirum B C,) secetur extrema ac media ratione, & alia linea (verbi gratia E,) potentia huius sesquialtera sit latus Octaedri, maius segmentum (nimirum A D,) esse latus Dodecaedri eiusdem sphæræ, in qua Octaedrum descriptum fuerit.*

## THEOR. 26. PROPOS. 26.

Si latus Tetraedri possit maius & minus segmentum lineæ rectæ extrema ac media ratione sectæ: latus Icosaedri eidem sphæræ inscripti potentia sesquialterum est minoris segmenti.




POSSIT Tetraedri A B C D, latus B C, maius segmentum E F, & minus F G, rectæ E G, diuisæ extrema ac media ratione; Sit quoq; H I, latus Icosaedri H I K, eiusdem sphæræ. Dico H I, rectam potentia esse sesquialterã minoris segmenti F G. Subtendat enim recta H K, vnum angulum pentagoni ex Icosaedri lateribus compositi, connectaturq; recta I K, diameter. [a] Quia igitur H I, est maius segmentum rectæ H K, diuisæ extrema ac media ratione; [b] Erit quoque composita K H I, diuisa eodem modo in H, maiusq; segmentum H K, & minus H I. [c] Fiat ex rectis B C, E F, F G, triangulum B C L, ita vt B L, recta ipsi E F, & C L, ipsi F G, sit æqualis; [d] Eritq; angulus L, rectus, quòd recta B C, ponatur posse rectas B L, C L, hoc est, rectas E F, F G: Est autem & angulus I H K, rectus, vt propos. 23. huius lib. ostendimus; [e] Estque vt B L, ad L C, ita K H, ad H I. [f] Igitur triangula B L C, K H I, æquiangula sunt. [g] Ac propterea vt K I, ad I H, ita B C, ad C L; & permutando, vt K I, ad B C, ita H I, ad C L: [h] Atqui I K, diameter est potentia sesquialtera lateris Tetraedri B C. Ergo & H I, latus Icosaedri erit potentia sesquialterum ipsius C L, hoc est, minoris segmenti F G. Si latus itaque Tetraedri possit maius, & minus segmentum, &c. Quod ostendendum erat.

[a] 8. tertiidecimi.

[b] 5. tertiidecimi.

[c] 22. primi.

[d] 48. primi.

[e] 2. quartidecimi.

[f] 6. sexti.

[g] 4. sexti.

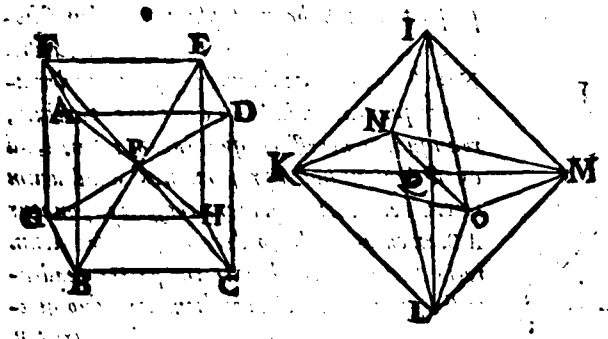
[h] 13. tertiidecimi.

## THEOR. 27. PROPOS. 27.

CVBVS ad Octaedrum in eadem cum ipso sphæra descriptum, est, vt superficies cubi ad Octaedri superficiem. Item vt latus cubi ad semidiametrum sphæræ.

SINT in eadem sphæra cubus A B C D E F G H, & Octaedrum I K L M N O, quorum centra P, & Q. Dico eam esse proportionem cubi ad Octaedrum, quam habet superficies cubi ad superficiem Octaedri; nec non, quam habet cubi latus ad semidiametrum sphæræ. Ductis enim ex centris P, & Q, ad omnes angulos tam cubi, quàm Octaedri, rectis lineis, resoluetur cubus in sex pyramides æquales, quòd habeant & bases æquales, & altitudines. (Cùm enim circuli descripti circa pyramidum, seu cubi bases æquales, sint æquales, ac propterea æqualiter à centro sphæræ distent

erunt



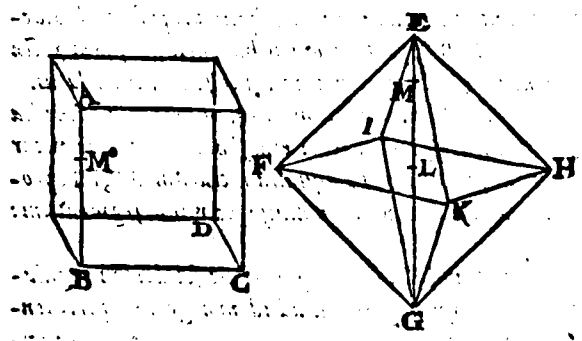

erunt lineæ perpendiculares ex centro P, ad plana circulorum, seu basium dictarum ductæ, nempe altitudines pyramidum, æquales, per lemma 2. propos. 10. lib. 14.) Atque Octaedrum in octo pyramides æquales; eandem ob causam. [a] Quoniam autē idem circulus complectitur & cubi quadratum, & Octaedri triangulum; æqualiter distabunt bases pyramidum cubi, & Octaedri à centro sphæræ, per lemma præfatum: Ac propterea æquales erūt altitudines pyramidum cubi, & Octaedri. Quam ob rem erit, vt vna pyramis cubi ad vnam pyramidem Octaedri, ita basis pyramidis cubi ad basim pyramidis Octaedri, ex scholio propos. 6. lib. 12. Ac proinde, ex iis, quæ in scholio propos. 22. lib. 5. demonstrauimus, vt sextuplum pyramidis cubi, nempe cubus ipse, ad pyramidem Octaedri, ita sextuplum basis pyramidis cubi, superficies videlicet tota cubi, ad basim pyramidis Octaedri; Ideoq; rursus, ex eodē scholio, vt cubus ad octuplum pyramidis Octaedri, nimirum ad ipsum Octaedrum, ita superficies cubi ad octuplum basis pyramidis Octaedri, ad ipsam scilicet superficiem Octaedri. Quod primo loco ostendendum proponebatur.

[a] 21. quartidecimi.

SINT rursus in eadem sphæra cubus A B C D, & Octaedrum E F G H I K, sitq; diameter sphæræ, seu Octaedri E G, & centrum L. Auferatur autem ex A B, latere cubi tertia pars A M; Item ex semidiametro E L, tertia pars E N. Quoniam verò quadratum I F K H, lateris Octaedri, basis existens duarum pyramidum, in quas Octaedrum secari diximus propos. 16. huius lib. [b] sesquialterum est quadrati B D, lateris cubi B C: Est autem & recta A B, rectæ B M, sesquialtera, ex constructione; reciprocabuntur bases I F K H, B D, & altitudines A B, B M: [c] Ac propterea parallelepipedum super basim I F K H, & sub altitudine B M, æquale erit parallelepipedo super basim B D, & sub altitudine A B, nimirum cubo A B C D. Rursus quia recta E L, rectæ E N, tripla est; erit & parallelepipedum super basim I F K H, & sub altitudine E L, triplum parallelepipedi super eandem basim, & sub altitudine E N, vt in scholio propos. 14. lib. 12. ostendimus: Sed & idem parallelepipedum super basim I F K H, & sub altitudine E L, triplū est pyramidis I F K H E, ex coroll. 1. propos. 7. lib. 12. Igitur pyramis I F K H E, æqualis erit parallelepipedo super basim I F K H, & sub altitudine E N: Atqui huius parallelepipedi duplum est parallelepipedum super eandem basim, & sub altitudine L N, ex scholio propos. 14. lib. 12. quod & altitudo L N, dupla sit altitudinis E N: [d] Item Octaedrum E F G H I K, duplum est pyramidis I F K H E. Æquale igitur erit parallelepipedum super basim I F K H, & sub altitudine L N, Octaedro E F G H I K. Cæterum quia parallelepipedum super basim I F K H, & sub altitudine B M, est ad parallelepipedum super eandem basim, & sub altitudine L N, vt altitudo B M, ad altitudinem L N, ex scholio propos. 14. lib. 12. Vt autem B M, ad L N, ita est A B, ad E L. (Cùm enim sit vt A M, ad M B, ita E N, ad N L; & componendo, vt A B, ad B M, ita E L, ad L N; erit quoque permutando, vt A B, ad E L, ita B M, ad L N.) Et parallelepipedum super basim I F K H, & sub altitudine B M, æquale est ostensum cubo A B C D; Et parallelepipedum super eandem basim, & sub altitudine L N, æquale est Octaedro E F G H I K. Igitur erit quoq; vt cubus A B C D, ad Octaedrum E F G H I K, ita A B, latus cubi ad E L, semidiametrum sphæræ. Quod secundo loco demonstrandum proponebatur. Quocirca cubus ad Octaedrum in eadem cum ipso sphæra descriptum, &c. Quod erat ostendendum.

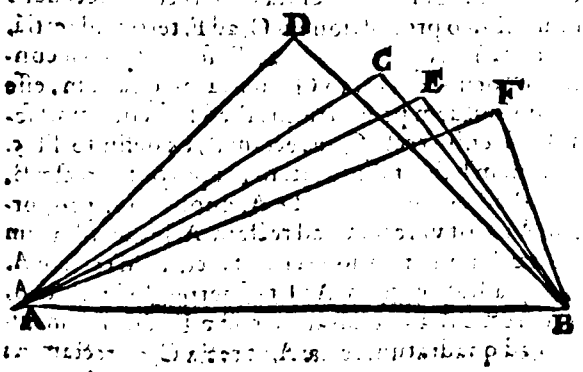
[b] 18. tertiidecimi.

[c] 34. vndec.



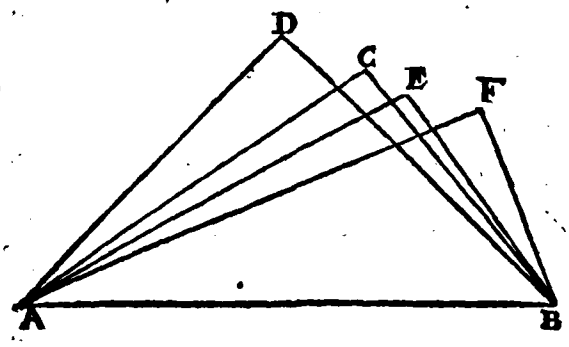

[d] 16. quartidecimi.

## SCHOLIVM.




*QVIA demonstratum est,* [a] *diametrum sphæræ, in qua omnia quinq; corpora regularia describuntur, esse sesquialteram potentia lateris Tetraedri, ita vt, si quadratum diametri ponatur 3. partium, earundem 2. sit quadratum lateris Tetraedri; perspicuum est, si ex quadrato diametri data auferatur quadratum duas tertias illius partes continens, vt in scholio propos. 33. lib. 6. ostendimus, latus huiusce quadrati esse Tetraedri latus. Vel etiam, si quadrato diametri constituantur duo quadrata æqualia, quæ*

[a] 13. tertiidecimi.




*proportionem habeant duplam, & eodem ſcholio; maioris quadrati latus eſſe latus Tetraedri. Nam ſi ex quadrato diametri 3. partium detrahatur quadratum lateris Tetraedri 2. partium, relinquatur neceſſe eſt quadratum 1. partis, ad quod duplam habet proportionem quadratum lateris Tetraedri. Vt ſi diameter ſphæræ ponatur A B, ex cuius quadrato detrahatur quadratum rectæ A C, continens duas tertias partes, quadrati diametri A B; Vel ſi conſtituantur duo quadrata rectarũ A C, B C, quadrato diametri A B, æqualia, ita vt quadratum rectæ A C, duplum ſit quadrati rectæ B C; Erit recta A C, latus Tetraedri.*

a 14. tertiidecimi. *Rvrsvs,* [a] *cùm oſtenſum ſit, diametrum ſphæræ potentia duplam eſſe lateris Octaedri; Fit, ſi ex quadrato diametri A B, dematur quadratum rectæ A D, quod dimidium ſit quadrati diametri A B; Vel ſi conſtituantur duo quadrata rectarum A D, E D, quadrato diametri A B, æqualia, & inter ſe proportionem habentia æqualitatis, ſecundùm doctrinam ſcholij propoſ. 33. lib. 6. rectam A D, latus eſſe Octaedri.*

b 15. tertiidecimi. *Deinde,* [b] *quoniam docuimus, diametrũ ſphæræ potẽtia eſſe triplam lateris cubi; Efficitur, ſi ex quadrato diametri A B, auferatur quadratum rectæ B C, quod tertia pars ſit quadrati diametri A B; Vel ſi quadrato diametri A B, conſtruantur duo quadrata æqualia rectarum A C, B C, ita vt quadratum rectæ A C, duplum ſit quadrati rectæ B C, iuxta doctrinam eiuſdem ſcholij propoſ. 33. lib. 6. Lineam rectam B C, cubi latus exiſtere. Vel certè cùm diameter A B, poſsit & latus Tetraedri, & latus cubi, ex coroll. 2. propoſ. 15. lib. 13. manifeſtum eſt, ſi ex quadrato diametri A B, auferatur quadratum lateris Tetraedri A C, relinqui quadratum lateris cubi B C: Quemadmodum è contrario, ſi ex quadrato diametri A B, tollatur quadratum lateris cubi B C, remanet quadratum lateris Tetraedri A C.*

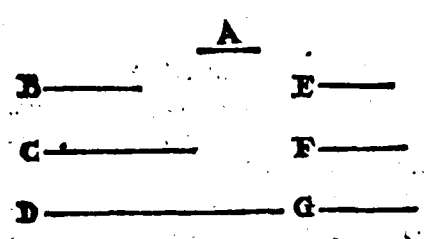
*Praeterea, quia ſi recta aliqua potuerit totam quamplam rectam extrema ac media ratione ſectam, & maius ipſius ſegmentum;* c 23. quartidecimi. [c] *Maius ſegmentum eſt latus Icoſaedri illius ſphæræ, cuius diameter eſt recta prior linea; Conſtat, ſi quadrato diametri A B, exhibeantur, iuxta ea, quæ in ſcholio propoſ. 33. lib. 6. demonſtrata ſunt à nobis, duo quadrata æqualia rectarum A E, E E, proportionem habentium, quam recta quauis extrema ac media ratione diuiſa ad maius ſegmentum; Rectam minorem B E, eſſe Icoſaedri latus.*

*Postremo, quoniam ſi recta quæpiam potuerit totam aliquam rectam diuiſam extrema ac media ratione, & minus illius ſegmentum;* d 23. quarti decimi. [d] *Minus ſegmentum latus eſt Dodecaedri eius ſphæræ, cuius diameter prior linea: Liquet, ſi quadrato diametri A B, conſtituantur duo quadrata æqualia rectarum A F, B F, proportionem habentium, quam quacunq; recta linea extrema ac media ratione diuiſa ad maius ſegmentum: Minorem lineam B F, latus eſſe Dodecaedri.*

*Hactenvs ergo Hypſicles, Campanus, & Franciſcus Candalla de comparatione ſolidorum regularium eidem ſphæræ impoſitorum ſcripſerunt: Sequentes autem quinq; propoſ. ad idem negotium pertinentes collegi ex Cardano lib. 5. de Proportionibus, ad hunc, qui ſequitur, modum. Ad finem deinde lib. 16. nonnulla alia adiiciemus, quæ ad eorundem quinq; corporum Regularium in ſphæra deſcriptionem, eorundemq; comparationem ſpectant.*

## THEOR. 28. PROPOS. 28.

Si ſint quatuor lineæ rectæ continuè proportionales, nec non & aliæ quatuor, ita vt ſit eadem antecedens omnium. Erit proportio tertiæ ad tertiam proportionis ſecundæ ad ſecundam duplicata; & proportio quartæ ad quartam eiuſdem proportionis ſecundæ ad ſecundam triplicata.




Sint quatuor rectæ A, B, C, D, continuè proportionales; necnon quatuor A, E, F, G, ita vt A, recta antecedens ſit omnium. Dico proportionem C, ad F, tertiæ ad tertiã, eſſe duplicatam proportionis B, ad E, ſecundæ ad ſecundam, & proportionem D, ad G, quartæ ad quartam, eſſe triplicatam eiuſdem proportionis B, ad E, ſecundæ ad ſecundam. Cùm enim recta C, ad rectam A, ex defin. 10. lib. 5. proportionem habeat duplicatam proportionis rectæ B, ad rectam A; a 20. ſexti. [a] habeat autem & quadratum rectæ B, ad quadratum rectæ A, duplicatam proportionem eiuſdem proportionis rectæ B, ad rectam A: Erit vt recta C, ad rectam A, ita quadratum rectæ B, ad quadratum rectæ A. Eadem ratione erit, vt recta F, ad rectam A, ita quadratum rectæ E, ad quadratum rectæ A: Et cõuertendo, vt recta A, ad rectam F, ita quadratum rectæ A, ad quadratum rectæ E. Quoniam igitur eſt quadratum rectæ B, ad quadratum rectæ A, vt recta C, ad rectam A; & quadra-

quadr. B. Recta C.
quadr. A. Recta A.
quadr. E. Recta F.

& quadratum rectæ A, ad quadratum rectæ E, vt recta A, ad rectam F; Erit ex æquo quadratum rectæ B, ad quadratum rectæ E, vt recta C, ad rectam F: [a] Est autem proportio quadrati rectæ B, ad quadratum rectæ E, duplicata proportionis rectæ B, ad rectam E. Igitur & proportio rectæ C, ad rectam F, duplicata est proportionis rectæ B, ad rectam E. Quod est primum. [a] 20 sexti.

RVRSVS, cùm recta D, ad rectam A, ex defin. 10. lib. 5. proportionem habeat triplicatam proportionis rectæ B, ad rectam A; [b] habeat autem & cubus rectæ B, ad cubum rectę A, triplicatam proportionem eiusdem proportionis rectæ B, ad rectam A; Erit vt recta D, ad rectam A, ita cubus rectæ B, ad cubum rectæ A. Eadem ratione erit vt recta G, ad rectam A, ita cubus rectæ E, ad cubum rectæ A; Et conuertendo, vt recta A, ad rectam G, ita cubus rectæ A, ad cubum rectæ E. Quia ergo est cubus rectæ B, ad cubum rectæ A, vt recta D, ad rectam A; & cubus rectæ A, ad cubum rectæ E, vt recta A, ad rectam G; Erit ex æquo, cubus rectæ B, ad cubum rectæ E, vt recta D, ad rectam G: [c] Est autem proportio cubi rectæ B, ad cubum rectæ E, triplicata proportionis rectæ B, ad rectam E. Igitur & proportio rectæ D, ad rectá G, triplicata est proportionis rectæ B, ad rectam E. Quod est secundũ. Itaq; si sint quatuor lineæ rectæ, &c. Quod demonstrandũ erat. [b] 33. vndec. [c] 33. vndec.

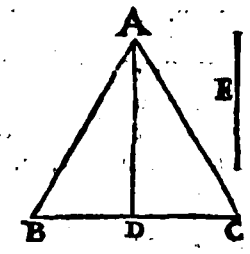
Cubus B. Recta D.
Cubus A. Recta A.
Cubus E. Recta G.

## SCHOLIVM.

*Hoc idem demonstrauimus ad propos. 10. lib. 8. de quotcunque numeris continuè proportionalibus duorum ordinum ab vno aliquo, eodemq; numero incipientium.*

# THEOR. 29. PROPOS. 29.

QVADRATVM lateris trianguli æquilateri ad ipsum triangulum habet proportionem duplicatam proportionis lateris trianguli ad lineam medio loco proportionalem inter perpendicularem ab vno angulo ad latus oppositum ductam, & dimidium ipsius lateris.



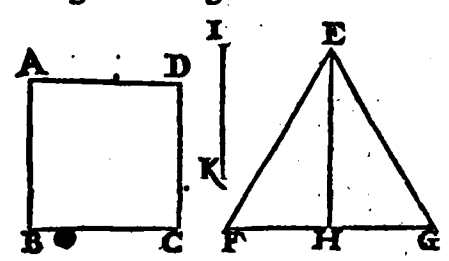

IN triangulo æquilatero A B C, ducatur ex angulo A, ad latus oppositũ B C, recta perpendicularis A D, quæ bifariam secabit latus B C, vt in coroll. propos. 12. huius lib. demonstratum est; Ac propterea B D, dimidium est lateris A B. [d] Inueniatur ergo recta E, media proportionalis inter A D, & B D. Dico quadratum lateris A B, ad triangulum A B C, habere proportionem duplicatam lateris A B, ad rectam E. Cùm enim rectangulo sub A D, B D, æquale sit triangulum A B C, vt perspicuum est ex scholio propos. 41. lib. 1. [e] Sit autem eidem rectangulo sub A D, B D, æquale quadratum rectæ E; Æqualia erunt triangulum A B C, & quadratum rectæ E. [f] Quoniam verò quadratum lateris A B, ad quadratum rectæ E, proportionem habet duplicatam lateris A B, ad rectam E; Constat, quadratum lateris A B, ad triangulum A B C, proportionem habere quoque duplicatam lateris A B, ad rectam E. Quam ob rem, quadratum lateris trianguli æquilateri, &c. Quod erat demonstrandum. [d] 13. sexti. [e] 17. sexti. [f] 20. sexti.

## COROLLARIVM.

*ITAQVE, si in triangulo æquilatero perpendicularis ducatur ex vno angulo ad latus oppositum; quadratum rectæ, quæ medio loco proportionalis est inter dictam perpendicularem, & dimidium lateris, æquale est ipsi triangulo. Ostensum enim est, quadratum rectæ E, quæ media proportionalis est inter A D, D B, æquale esse triangulo A B C.*

# THEOR. 30. PROPOS. 30.

SI cubus, & Tetraedrum in eadem sphæra describantur: erit quadratum cubi ad triangulum Tetraedri, vt latus Tetraedri ad lineam perpendicularem, quæ ex vno angulo trianguli Tetraedri ad latus oppositum deducitur.




SIT quadratum cubi cuiusuis A B C D, & Tetraedri in eadem sphæra descripti triangulum E F G, in quo perpendicularis E H, ex angulo E, ad latus oppositum F G, deducta, diuidens F G, latus bifariam, ex coroll. propos. 12. huius lib. Dico, esse quadratum A C, ad triangulum E F G, vt latus trianguli E F, ad perpẽdicularem E H. Posita enim inter E H, F H, media proportionali I K; [g] cùm quadratum lateris Tetraedri E F, duplum sit quadrati lateris cubi A B, [h] sit autem & duplum rectanguli sub latere E F, & dimidio eius F H, eò quòd dictum quadratum, & rectangulum eandem habeant altitudinem, nempe E F: Erit rectangulum sub E F, F H, æquale quadrato lateris A B; [i] Ac propterea A B, media proportionalis erit inter E F, F H, hoc est, tres rectæ F H, A B, E F, continuè erunt proportionales: Sunt autẽ & tres rectæ F H, I K, E H, continuè [g] 18. sexti decimi. [h] 1. sexti. [i] 17. sexti.

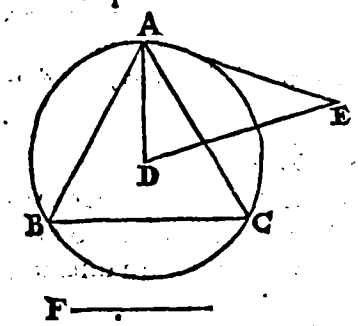
FH. AB. IK. EF. EH. proportionales, ex conſtructione. Igitur cùm omnium antecedens ſit FH, [a] erit prædictorum AB. IK. portio rectæ EF, ad rectam EH, tertiæ ad tertiam, proportionis rectæ AB, ad rectam IK, ſecundæ ad ſecundam duplicata. Quare cùm & quadratum AC, rectæ AB, ad quadratum rectæ IK, hoc eſt, ad triangulum EFG, (eſt enim, ex coroll. propoſ. 19. huius libri, quadratum rectæ IK, æquale triangulo EFG.) [b] proportionem habeat duplicatam proportionis rectæ AB, ad rectam IK; Erit quadratum cubi AC, ad triangulum Tetraedri EFG, vt latus EF, ad perpendicularem EH. Quocirca ſi cubus & Tetraedrum in eadem ſphæra deſcribantur, &c. Quod erat demonſtrandum.

[a] 8. quartidecimi.

[b] 20. ſexti.

## THEOR. 31. PROPOS. 31.

LATVS Tetraedri potentia ſeſquialterum eſt axis, ſeu altitudinis ipſius: Axis verò, ſiue altitudo Tetraedri potentia ſeſquitertia eſt lateris cubi in eadem ſphæra deſcripti.




SIT Tetraedri triangulum ABC, & altitudo, ſeu axis Tetraedri DE, latusque cubi eiuſdem ſphæræ F. Dico latus Tetraedri AB, eſſe potentia ſeſquialterum axis DE: Axem verò DE, potentia ſeſquitertium lateris cubi F. Nam circa triangulum, [c] in ſcripto circulo ABC; ad centrum D, in quod videlicet cadit axis DE, vt conſtat ex propoſ. 15. huius lib. ducatur AD, ſemidiameter, & AE, latus Tetraedri. Quia igitur quadratum lateris AE, hoc eſt, lateris AB, [d] æquale eſt quadratis rectarum AD, DE, [e] & triplum quadrati ſemidiametri AD; Fit, vt poſito quadrato lateris AB, ſeu AE, partium 6. quadratum rectæ AD, ſit earundem partium 2. Ac proinde reliquum quadratum axis DE, talium partium 4. Quapropter quadratum lateris Tetraedri ſeſquialterum eſt quadrati axis Tetraedri.

[c] 15. quarti.

[d] 47. primi.

[e] 12. tertiædecimi.

QVONIAM verò latus Tetraedri AB, [f] potentia duplum eſt lateris cubi F; Erit quadratum lateris F, talium partium 3. qualium 6. poſitum eſt quadratum lateris AB. Oſtenſum eſt autem earundem 4. eſſe quadratum axis DE. Igitur quadratum axis DE, ſeſquitertium eſt quadrati lateris cubi F. Latus itaque Tetraedri potentia ſeſquialterum eſt, &c. Quod erat oſtendendum.

[f] 18. tertiædecimi.

### COROLLARIVM I.

*QVIA verò, poſito quadrato lateris AB, partium 6. quadratum diametri ſphæræ talium partium eſt 9. [a] quòd diameter potentia ſit ſeſquialtera lateris Tetraedri: Earundem verò partium 4. oſtenſum eſt quadratum axis DE; perſpicuum eſt, diametrum ſphæræ potentia eſſe duplam ſeſquiquartam axis Tetraedri; Ac proinde, [b] cùm quadrata habeant proportionem laterum duplicatam, manifeſtum eſt, diametrum eſſe ſeſquialteram axis Tetraedri. Seſquialteræ enim proportionis duplicata eſt proportio dupla ſeſquiquarta, vt in his numeris 4. 6. 9. apparet. Id quod etiam docuimus in coroll. 2. propoſ. 13. lib. 13.*

[a] 13. tertiædecimi.

[b] 20. ſexti.

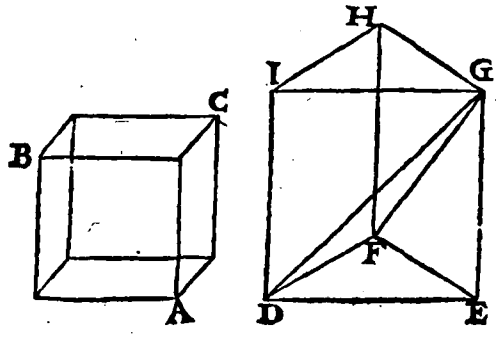
### COROLLARIVM II.

*CONSTAT quoque, ita eſſe axem, ſeu altitudinem Tetraedri ad latus cubi eidem ſphæræ inſcripti, vt latus Tetraedri ad perpendicularem ex vno angulo baſis ad latus oppoſitum ductam. Quia videlicet [c] tam latus trianguli æquilateri, hoc eſt, latus Tetraedri, potentia ſeſquitertium eſt perpendicularis ex vno angulo ad latus oppoſitum deducta, quàm ex hac propoſ. ipſe axis Tetraedri lateris cubi.*

[c] 12. quartidecimi.

## THEOR. 32. PROPOS. 32.

CVBVS triplus eſt Tetraedri eidem ſphæræ inſcripti.




DESCRIBANTVR in eadem ſphæra cubus ABC, & Tetraedrum DEFG. Dico cubum Tetraedri eſſe triplum. Conſtituatur ſuper DEF, baſim Tetraedri priſma DEFGHI, eandem habens cum Tetraedro altitudinem. [a] Quoniam igitur eſt baſis priſmatis, ſeu cubi ABC, ad baſim priſmatis, ſeu Tetraedri DEF, vt latus Tetraedri ad perpendicularem ductam ex angulo quouis baſis DEF, ad latus oppoſitum. Vt autem latus Tetraedri ad perpendicularem dictam, ita eſt, per coroll. 2. propoſ. 31. huius lib. altitudo Tetraedri, ac proinde priſma-

[a] 30. quartidecimi.

tis DEFGHI, ad latus cubi, ideoq; ad altitudinem cubi, seu prismatis ABC; Erit basis prismatis ABC, ad basim prismatis DEFGHI, vt huius altitudo ad illius altitudinem. Quare, per ea, quæ ad propos. 9. lib. 12. demonstrauimus, æqualia erunt prismata ABC, DEFGHI, cùm ipsorum bases & altitudines reciprocentur. Atqui prisma DEFGHI, triplum est pyramidis, seu Tetraedri DEFG; ex coroll. 1. propos. 7. lib. 12. Cubus ergo ABC, triplus quoq; erit eiusdem Tetraedri DEFG. Quapropter cubus triplus est Tetraedri eidem sphæræ inscripti. Quod ostendendũ erat.

COROLLARIVM.

*VNDE prisma eandem habens & basim, & altitudinem cum Tetraedro, æquale est cubo in eadem sphæra, in qua Tetraedrum, descripto. Ostensum enim est, cubum ABC, æqualem esse prismati DEFGHI, &c.*

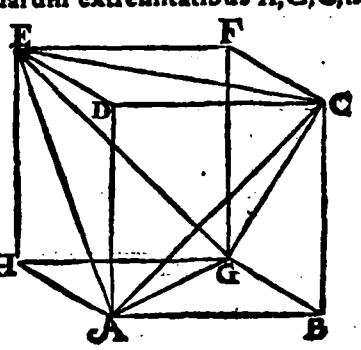
FINIS ELEMENTI DECIMIQVARTI.

---

# EVCLIDIS
# ELEMENTVM QVINTVMDECIMVM:
## & Solidorum quintum,
## vt nonnulli putant: Vt verò alij, Hypsiclis Alexandrini de quinq; corporibus,
## *LIBER SECVNDVS.*

### PROBL. 1. PROPOS. 1.
### In dato cubo Pyramidem describere.

IN cubo dato ABCDEFGH, oporteat describere pyramidem, seu Tetraedrum. Ab vno eius angulo, nempe ab E, ducãtur in basibus tribus ipsum constituentibus tres diametri EA, EG, EC, ex quarum extremitatibus A, G, C, similiter diametri ducantur AG, GC, CA, in reliquis tribus basibus, quæ extrema priorũ trium diametrorum connectant. Quoniam igitur diametri quadratorum æqualium æquales sunt, quòd potẽtia duplæ sint laterũ æqualium quadratorum, vt in scholio propos. 47. lib. 1. demonstrauimus, perspicuum est, quatuor triangula ACE, GAC, GAE, GCE, ex dictis diametris composita, æquilatera esse, & inter se æqualia; Ac propterea pyramidem, seu Tetraedrum constitui ex ipsis. Quia verò omnes anguli Tetraedri in angulis cubi collocantur; manifestum est, ipsum in cubo esse inscriptum, ex definitione trigesima prima, libri vndecimi. Quare in dato cubo Pyramidem descripsimus. Quod faciendum erat.

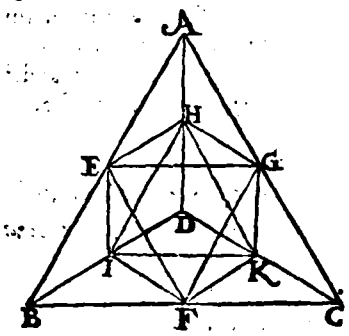



### PROBL. 2. PROPOS. 2.
### In data Pyramide Octaedrum describere.

SIT in pyramide, seu Tetraedro ABCD, describendum Octaedrum. Diuisis omnibus lateribus bifariam in E, F, G, H, I, K, & ductis duodecim rectis EF, FG, GE, HI, IK, KH, EI, IF, FK, KG, GH, HE, constituentur octo triangula, quorum quidem quatuor EHI, IHK, KHG, GHE, supra planum EIKG; quatuor autem IFE, EFG, GFK, KFI, infra idem planum consistunt.

Quoniam verò latera AE, AH, trianguli AEH, æqualia sunt lateribus AG, AH, trianguli AGH, quòd sint dimidia rectarum æqualium AB, AD, AC; Item & anguli contenti EAH, GAH, æquales, quòd sint anguli triangulorum æquilaterorum, ABD, ACD: a æquales erunt bases EH, GH. Eademq; ratione æquales erunt rectæ EH, HI, & reliquæ eodem modo. Quare dicta octo triangula æquilatera sunt, & æqualia inter se: ideoque Octaedrum componunt EIKGHF; quod quidem ex definitione 31. lib. 11. intra Tetraedrum descriptum est; cùm omnes eius anguli tangant omnia latera Tetraedri, ex constructione. In data igitur pyramide Octaedrum descripsimus. Quod erat faciendum.

a 4. primi.




## COROLLARIVM.

*Quoniam verò trin plana EIKG, GHIF, FKHE, quadrata sunt æqualia, sese mutuò ad angulos rectos secantia, vt in coroll. 1. propos. 14. lib. 13. demonstrauimus; quorum quodlibet pyramidem ABCD, secat bifariam. (Nam quadratum EIKG, ipsam diuidit in pyramidem HIKD, & prisma HIKGAE; necnon in pyramidem EBFI, & prisma EFCGKI; Constat autem pyramidem pyramidi esse æqualem, & prisma prismati:* a *Eodemq; modo reliqua quadrata GHIF, FKHE, diuidunt bifariam eandem pyramidem ABCD.) Manifestum est, si in Tetraedro Octaedrum inscribatur, Tetraedrum bifariam secari, tribus quadratis æqualibus, quæ Octaedrum bifariam quoque, & sese ad angulos rectos intersecant.*

a 3. duodecimi.

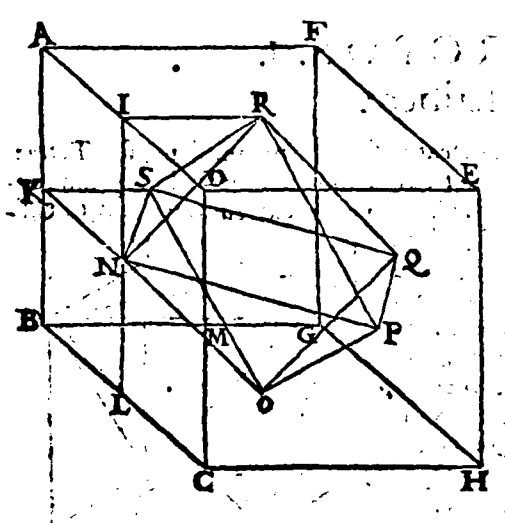
## 3. PROBL. 3. PROPOS. 3.

### IN dato cubo Octaedrum describere.

DESCRIBENDVM sit Octaedrum in cubo dato AH. Diuidantur latera basis ABCD, bifariam in punctis I, K, L, M, quæ connectantur rectis IL, KM, secantibus sese in N, puncto, quod quidem centrum est quadrati ABCD, vt constat ex demonstratione propositionis octauæ, lib. 4. Deinde eadem ratione inueniantur reliquarum basium centra O, P, Q, R, S. Erunt igitur omnes rectæ, ex dictis centris ductæ ad media puncta basium, cuiusmodi sunt NI, RI, NK, SK, &c. æquales dimidiis lateribus cubi, seu quadratorum, vt perspicuum est ex prædicta demonstratione propos. 8. lib. 4. Postremò, si præfata centra coniungantur duodecim rectis NO, OP, PQ, QR, RS, SN, NP, PR, RN, SO, OQ, QS; constituta erunt octo triangula, quorum quidem quatuor NSR, RSQ, QSO, OSN, supra planum NOQR; quatuor autem OPQ, QPR, RPN, NPO, infra idem planum consistunt. Quoniam verò latera IN, IR, triãguli INR, æqualia sunt lateribus KN, KS, trianguli KNS, quod omnia sint dimidia laterum cubi æqualium, vt dictum est; Item & anguli contenti, æquales; propterea quòd, cùm NI, IR, parallelæ sint rectis BA, AF; a angulus NIR, æqualis sit recto angulo KAF, in quadrato AG, eademque ratione angulus NKS, angulo recto IAF, in quadrato AE; b Erunt bases NR, NS, æquales. Non aliter ostendemus, reliquas lineas omnes & inter se, & his duabus æquales esse; si nimirum è centris ducantur rectæ ad dimidia laterum, hac lege, vt quælibet duæ ducantur ad dimidium illius lateris, quod commune est duobus cubi quadratis, quorum duo illa puncta, è quibus videlicet rectæ egrediuntur, centra existunt. Ita enim vides duas rectas NI, RI, ductas esse ad I, dimidium lateris AD, quod commune est quadratis AC, AE, quorum centra sunt puncta N, & R: Ita quoque duæ rectæ NK, SK, ductæ sunt ad K, dimidium lateris AB, quod commune est quadratis AC, AG, quorum centra existunt puncta N, & S, &c. Quam ob rem, constituta octo triangula & æquilatera sunt, & æqualia inter se; ideoque Octaedrum constituunt NOQRSP; Quòd quidem ex defin. 31. lib. 11. intra cubum est descriptum, cùm omnes eius sex anguli tangant cubi omnes sex bases in earum centris. Quamobrem in dato cubo Octaedrum inscripsimus. Quod faciendum erat.

a 10. vndec.

b 4. primi.




ALITER. c In cubo dato inscribatur pyramis: d In hac deinde pyramide Octaedrum figuretur, factumque erit, quod proponitur. Cùm enim ex demonstratione propositionis 2. huius lib. 15. anguli Octaedri tangant latera pyramidis: Latera verò pyramidis, ex demonstratione propositionis

c 1. quintidecimi.

d 2. quintidecimi.

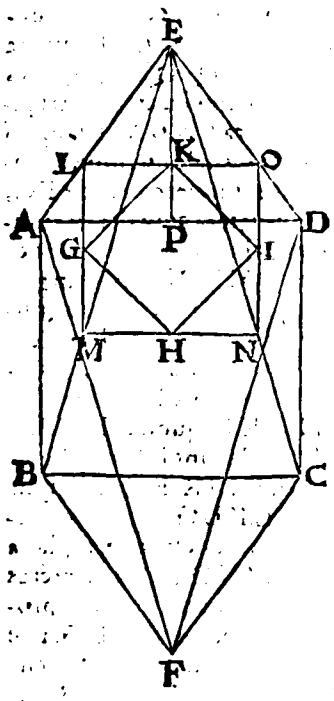
huius lib. existant in planis basium cubi, cùm sint harum basium diametri perspicuum est, angulos Octaedri tangere quoque bases cubi; atque adeò Octaedrum cubo esse inscriptum.

## COROLLARIVM.

*QVIA verò diametri Octaedri in cubo descripti N Q, R O, si ducerentur, se mutuò secant ad angulos rectos, ex coroll. 1. propos. 14. lib. 13. quæ quidem coniungunt centra basium cubi oppositarum: Manifestum est, rectas lineas centra basium cubi oppositarum connectentes non solùm sese mutuò bifariam, vt docuimus coroll. 1. propos. 15. lib. 13. sed etiam ad angulos rectos, vt hîc ostendimus, diuidere.*

## PROBL. 4. PROPOS. 4. 4.

### IN dato Octaedro cubum inscribere.

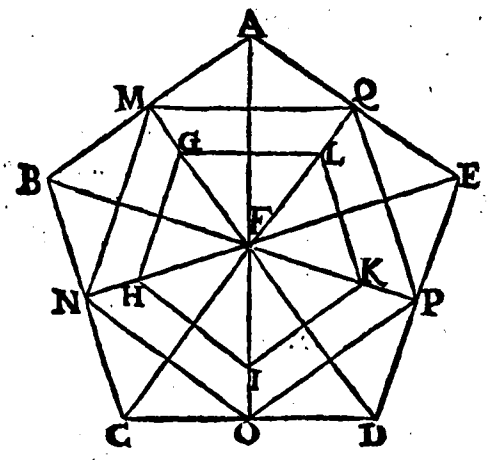



DATVM Octaedrum sit A B C D E F, in quo oporteat describere cubum. Quoniam in Octaedro sex pyramides quadrangulę continentur; quarum videlicet vertices sunt sex anguli Octaedri, & quælibet duæ Octaedrum constituunt; sit vna earum pyramis, A B C D E, cuius basis A B C D, quadratum, triangula verò æquilatera A B E, E B C, C E D, D E A, sintq; horum triangulorum centra G, H, I, K, per quæ ducantur rectæ L M, M N, N O, O L, parallelæ lateribus A B, B C, C D, D A. Erunt igitur & triangula L M E, E M N, N E O, O E L, æquilatera, cùm similia sint triangulis æquilateris A B E, E B C, C E D, D E A, ex coroll. propos. 4. lib. 6. atque adeò inter se æqualia, propterea quòd latera habeant communia. Est enim E M, latus commune triangulis L M E, E M N; Et E N, cõmune triangulis E M N, N E O; & deniq; E O, cõmune triãgulis N E O, O E L. Hinc enim fit, triangulum L M E, triangulo E M N; hoc verò ipsi N E O; & hoc ipsi O E L, æquale esse. Conueniunt enim rectæ L M, M N, N O, O L, in punctis L, M, N, O, vt mox ostendemus. Quocirca & quatuor rectæ L M, M N, N O, O L, inter se æquales sunt. [a] Quia verò ducta recta E K P, tripla est rectæ K P; [b] Est autem vt E P, ad K P, ita E A, ad L A; Erit quoque E A, tripla rectæ L A. Eademque ratione E B, E C, E D, triplę erunt rectarum M B, N C, O D. Quocirca rectæ L M, M N, N O, O L, conuenient in punctis L, M, N, O, in quibus latera ea proportione secantur, quadrilaterumque constituent L M N O. Rursus quia L O, L M, parallelæ sunt rectis A D, A B, nõ in eodem cum ipsis existentibus plano; [c] æqualis erit angulus M L O, angulo B A D, qui rectus est, cùm A B C D, quadratum sit, vt ostendimus in coroll. 1. propos. 14. lib. 13. & in propos. 16. lib. 14. Ac propterea & angulus M L O, rectus erit. Non secus demonstrabimus & reliquos angulos L M N, M N O, N O L, rectos esse. Quoniam verò tam planum per L O, L M, quàm per N M, N O, ductum, [d] parallelum est plano A B C D; ipsa quoque inter se parallela erunt, atque adeò, cùm conueniant in punctis M, & O, vnum planum efficient, ex scholio propos. 16. lib. 11. Quocirca L M N O, quadratum erit, cùm habeat & latera æqualia, & angulos rectos. Deinde; cùm latera E L, E K, trianguli E L K, æqualia sint lateribus E O, E K, trianguli E O K, & anguli quoque ipsis contenti, æquales, quòd recta E K, ex angulo E, per centrum K, trianguli æquilateri E A D, ducta bifariam secet angulum A E D, per corollarium propositionis 12. libri 13. [e] Erunt & bases K L, K O, æquales, hoc est, recta L O, bifariam secabitur in K. Eadem ratione L M, M N, N O, bifariam secabuntur in G, H, I. Ac propterea rectæ G L, G M, H M, H N, I N, I O, K O, K L, cùm sint laterum quadrati L N, dimidia, æquales inter se erunt; Ideoque, cùm & angulos contineant æquales, nimirum rectos, [f] æquales erunt & rectæ G H, H I, I K, K G, centra G, H, I, K, connectentes. Quia verò hæ rectæ in plano existunt quadrati L N, angulosque comprehendunt rectos; ([g] cùm enim anguli L K G, G K I, I K O, duobus sint rectis æquales; Sint autem L K G, I K O, per corollarium 2. propositionis 32. libri 1. semirecti; rectus erit angulus G K I; Eademque ratione recti erunt anguli K G H, G H I, H I K.) quadratum erit G H I K, cùm habeat & latera æqualia, & angulos rectos. Quòd si eadem arte in reliquis quinque pyramidibus Octaedri centra triangulorum rectis coniungãtur, describentur similiter quadrata: quæ cùm latera habeant communia, æqualia inter se erunt. Quare sex huiusmodi quadrata cubum component: qui quidem ex definitione 21. libri 11. intra Octaedrum descriptus erit, cùm octo eius anguli tangant octo Octaedri bases in earum centris. Quare in dato Octaedro cubum descripsimus. Quod faciendum erat.

[a] 18. quarti decimi.
[b] 2. sexti.
[c] 10. vndec.
[d] 15. vndec.
[e] 4. primi.
[f] 4. primi.
[g] 13. primi.

## PROBL. 5. PROPOS. 5. 5.

### IN dato Icosaedro, Dodecaedrum inscribere. 6.




SIT ex duodecim pyramidibus pentagonis, quæ in Icoſaedro continẽtur, quarũ videlicet baſes ſunt pentagona ex quinque Icoſaedri lateribus compoſita, vertices verò, duodecim anguli Icoſaedri, vna pyramis A B C D E F, cuius baſis pentagonũ A B C D E, triangula verò æquilatera A B F, B C F, C D F, D E F, E A F, ſintq; horum triangulorum centra G, H, I, K, L, quæ rectis connectãtur lineis G H, H I, I K, K L, L G. Rurſus ex vertice F, per centra triangulorum rectæ demittantur F M, F N, F O, F P, F Q; quæ, ex ſcholio propoſ. 12. lib. 13. bifariam ſecabunt latera A B, B C, C D, D E, E A, in M, N, O, P, Q: ita vt decẽ rectæ M A, M B, N B, N C, O C, O D, P D, P E, Q E, Q A, æquales ſint, quæ cũ angulos comprehendant æquales, nempe angulos pentagoni, [a] æquales quoque erunt rectæ M N, N O, O P, P Q, Q M, puncta M, N, O, P, Q, connectentes; [b] Ac proinde & anguli M F N, N F O, O F P, P F Q, Q F M, æquales erũt, quòd & latera F M, F N, F O, F P, F Q, æqualia ſint, nempe perpendiculares ex angulis triangulorum æquilaterorũ æqualiũ ad baſes oppoſitas demiſſæ. Cùm enim latera F B, B M, trianguli F B M, lateribus F B, B N, trianguli F B N, æqualia ſint, contineãtq; angulos æquales, nempe triangulorum æquilaterorũ; [c] erũt baſes F M, F N, æquales; & ſic de reliquis. Quoniá verò & rectæ F G, F H, F I, F K, F L, nimirũ ſemidiametri circulorũ æqualium triangula æquilatera æqualia circumſcribentium æquales ſunt, & angulos comprehendunt æquales, vt demonſtratum eſt; [d] Erunt & rectæ G H, H I, I K, K L, L G, æquales. [e] Rurſus quia tam anguli A M Q, Q M N, N M B, q̃ anguli B N M, M N O, O N C, æquales ſunt duobus rectis. [f] Sunt autẽ anguli A M Q, N M B, angulis B N M, O N C, æquales; Erunt reliqui anguli Q M N, M N O, æquales; Eademque ratione reliqui anguli N O P, O P Q, P Q M, & inter ſe, & hiſce æquales erunt. Quare pentagonum erit æquilaterum & æquiangulum M N O P Q, in plano pentagoni A B C D E, exiſtens. Denique cùm rectæ F M, F N, F O, F P, F Q, æquales, proportionaliter ſecentur in G, H, I, K, L, quòd & F G, F H, F I, F K, F L, ex centris, æquales ſint; Vel certè quia F G, F H, F I, F K, F L, duplę ſunt ipſarum G M, H N, I O, K P, L Q, ex corollario propoſ. 18. lib. 14. [g] parallelæ erunt G H, H I, I K, K L, L G, ipſis M N, N O, O P, P Q, Q M; [h] Ac propterea anguli L G H, G H I, H I K, I K L, K L G, angulis æqualibus Q M N, M N O, N O P, O P Q, P Q M, ideoque & inter ſe, æquales erunt. [i] Quia verò plana per rectas G H, H I, & per H I, I K, ducta, parallela ſunt plano pentagoni M N O P Q, per rectas M N, N O, O P, ducto, conueniuntque in recta H I; ipſa vnum planum efficient, ex ſcholio propoſitionis 16. libri vndecimi. Eodemq; modo oſtendemus plana per I K, K L, & per K L, L G, nec non per L G, G H, ducta, idem planum conſtituere cum plano per G H, H I, I K, ducto. Quocirca G H I K L, pentagonum eſt æquilaterum & æquiangulum, cùm & latera habeat æqualia & angulos. Quòd ſi eadem arte in reliquis vndecim pyramidibus Icoſaedri centra triangulorum rectis connectantur lineis, deſcribentur ſimiliter pentagona æquilatera & æquiangula: quæ cùm latera habeant communia, æqualia inter ſe erunt. Quamobrem duodecim huiuſmodi pentagona Dodecaedrum conſtituẽt: quod quidem ex defin. 31. lib. 11. in Icoſaedro erit deſcriptum, cùm viginti anguli Dodecaedri in centris viginti baſium Icoſaedri conſiſtant. Quapropter in dato Icoſaedro Dodecaedrum deſcripſimus. Quod erat faciendum.

[a] 4. primi.
[b] 8. primi.
[c] 4. primi.
[d] 4. primi.
[e] 13. primi.
[f] 4. primi.
[g] 2. ſexti.
[h] 10. vndec.
[i] 15. vndec.

## COROLLARIVM.

*ITAQVE cùm omnes rectæ è centro Icoſaedri ad centra baſium, hoc eſt, ad angulos Dodecaedri ſibi inſcripti, ſint æquales; (Cùm enim ex coroll. lemmatis 1. propoſ. 10. lib. 14 perpendiculares ſint ad plana circulorum æqualium baſes Icoſaedri circumſcribentium, atq; adeò eorundem diſtantiæ exiſtant à centro ſphæræ, ſeu Icoſaedri; æquales erunt inter ſe, ex lemmate ſecundo eiuſdem propoſitionis 10. lib. 14.) Idem erit centrum Icoſaedri, atque ſibi inſcripti Dodecaedri.*

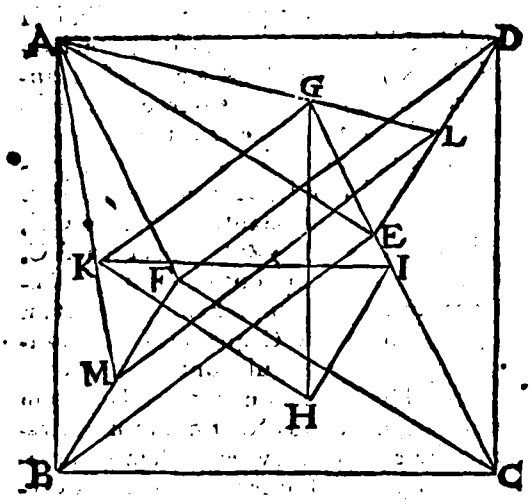
## PROBL. 6. PROPOS. 6.

### IN dato Octaedro Pyramidem deſcribere.

PYRAMIS deſcribenda ſit in Octaedro A B C D E F. In pyramide Octaedri ſuperiori A B C D E, ſumantur G, & H, centra triangulorum ex aduerſo ſibi reſpondentium A E D, B E C; Item in pyramide inferiori A B C D F, capiantur I, & K, centra triangulorum ex aduerſo quoque ſibi correſpondentium C F D, A F B: quæ quidẽ centra coniungantur ſex rectis G H, G I, G K, H I, H K, I K, vt fiat pyramis H I K G. Deinde ex A, demittantur per centra G, K, rectæ A L, A M, ſecantes latera oppoſita Octaedri D E, B F, bifariam in L, & M, per ſcholium propoſitionis 12. libri 13. coniungaturque recta L M, [k] quæ ipſi B E, vel F D, æqualis & parallela erit: cùm E L, B M; Item D L, F M, rectæ æquales ſint, & parallelę, nimirum dimidia laterum D E, B F, oppoſitorum in quadrato E F.

[k] 33. primi.

Quoniam




Quoniam verò rectæ A L, A M, sectæ sunt proportionaliter in G, & K, punctis, quòd A G, A K, duplæ sint ipsarum G L, K M, ex corollario propositionis 18. libri 14. [a] Erunt G K, L M, parallelæ; [a] 2. sexti. Ac propterea, per corollarium propositionis 4. libri 6. triangula A L M, A G K, similia. [b] Quare erit, vt A L, ad L M, ita A G, ad G K; & permutando, vt A L, ad A G, ita L M, ad G K: Est autem A L, ipsius A G, sesquialtera: [c] quòd G L, sit tertia pars ipsius A L, ideoque A G, eiusdem A L, duæ tertiæ: Igitur & L M, hoc est, ipsi æqualis, D F, sesquialtera erit ipsius G K. Hac eadem arte ostendemus, & reliquarum linearum centra G, H, I, K, coniungentium sesquialtera esse latera Octaedri. Ac proinde rectas pyramidê H I K G, componentes inter se esse æquales, hoc est, triágula æquilatera æqualia ex ipsis confici, ideoq; Tetraedrũ constituiqd', cùm habeat angulos omnes in centris quatuor basium Octaedri, descriptũ erit, ex defin. 9. libri 11. in Octaedro. Quocirca in dato Octaedro pyramidem descripsimus. Quod erat faciẽdum. [b] 4. sexti. [c] 18. quarti decimi.

ALITER. [d] In Octaedro dato inscribatur cubus, [e] & in cubo pyramis, factumque erit, quod proponitur. Cùm enim cubi anguli, consistant in centris basium Octaedri; & in angulis cubi collocentur quoque anguli pyramidis, perspicuum est, pyramidis angulos tangere bases Octaedri in earum centris; Ac propterea pyramidem ipsi Octaedro esse inscriptam. [d] 4. quinti decimi. [e] 1. quinti decimi.

## COROLLARIVM I.

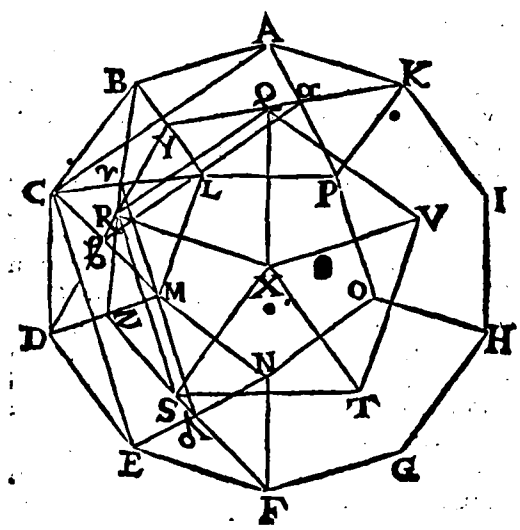
*QVIA verò ostensum est, vtramque G K, D F, parallelam esse ipsi L M; [a] ac propterea & G K, ipsi D F, atq; adeò ipsi B E, parallelam esse; Atque eadem ratione K H, ipsis F C, E A, parallelam esse; [b] Atque idcirco planum G K H, per G K, K H, ductum, parallelum esse plano D F C, per D F, F C, nec non & plano B E A, per B E, E A, ducto; Eodemq; modo reliqua triangula pyramidis reliquis triangulis Octaedri esse parallela, binis nimirum singula; Constat, si Tetraedrum Octaedro inscribatur, quatuor bases Tetraedri, octo basibus Octaedri parallelas esse, singula videlicet binis oppositis.* [a] 9. vndec. [b] 15. vndec.

## COROLLARIVM II.

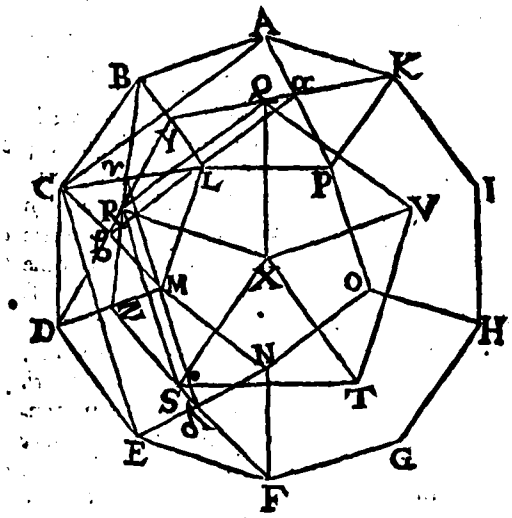
*PRAETEREA, cùm Octaedrum circumscribat & cubum, & Tetraedrum in cubo descriptum, quòd Tetraedri anguli in angulis cubi, & huius anguli in centris basium Octaedri cõstituantur; Atque adeò recta coniungens centra basium Octaedri opposita, sit diameter cubi, hoc est, sphæræ circumscribentis & cubum, & Tetraedrum in cubo descriptum, vt constat ex 4 propos. huius lib. Sit autem diameter sphæræ sesquialtera axis Tetraedri in ea sphæra descripti, per coroll. 1 propos. 31. lib 14. vel per coroll. 2 propos. 13. lib 13. Manifestum est, si in Octaedro Tetraedrũ inscribatur, rectã, qua centra basiũ Octaedri oppositarũ coniũgit, sesquialterã esse axis Tetraedri, h.e. perpẽdicularis ab angulo Tetraedri ad basin oppositã deductæ.*

## PROBL. 7. PROPOS. 7.

IN dato Dodecaedro Icosaedrum describere.




SIT dimidium Dodecaedri, in quo describendum est Icosaedrum, contentum sex pentagonis A B L P K, P K I H O, O H G F N, N F E D M, M D C B L, L M N O P, quorum centra Q, R, S, T, V, X, quælibet duo proxima rectis iungantur Q R, R S, S T, T V, V Q, Q X, R X, S X, T X, V X: Et ex angulis K, D, quos subtendant rectæ A P, C M, per centra Q, R, rectæ ducantur K Y, D Y, quę per corollarium 2. propositionis 10 libri 13. bifariam diuident latus oppositum B L, & ad angulos rectos, ideoque in puncto Y, conuenient: Diuidunt autem & rectæ eædem Y K, Y D, rectas A P, C M, bifariam, & ad angulos rectos in α, β ex 1. coroll. eiusdem propos. 9. & arcus A K P, C D M, circulorum circa pentagona descriptorum bifariam diuidant. ([a] constat enim rectas A K, P K; Item C D, M D, arcus subtendere æquales.) [b] Igitur A α, C β, parallelæ sunt rectæ B Y; [c] atque adeò & inter se [a] 28. tertij. [b] 28. primi. [c] 9. vndec.

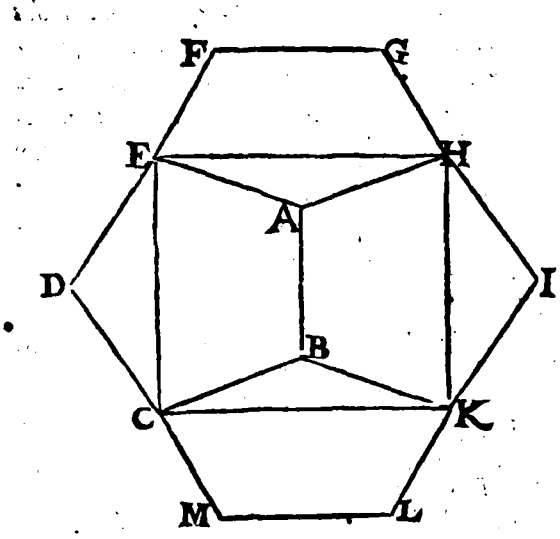



parallelæ: Sunt autem & æquales, nempe dimidia rectarum AP, CM: [a] quæ æquales sunt, cùm latera KA, KP, lateribus DC, DM, æqualia sint, angulósque contineant æquales. [b] Rectæ ergo ipsas connectentes AC, αβ, æquales erunt, & parallelæ. Non aliter ostendemus, si ex angulis B, F, quos subtendant rectæ CL, EN, per centra R, S, rectæ ducantur BZ, FZ, connectanturque rectæ CE, γδ, æquales esse ipsas CE, γδ: [c] Sunt autem AC, CE, inter se æquales, cùm contineant angulos æquales æqualibus lineis comprehensos: (quia tam latera Dodecaedri AB, BC, quàm CD, DE, angulum pentagoni æquianguli continent, vt constat ex aliquo Dodecaedro materiali. Hi autem anguli non vergunt versus X, vt figura monstrare videtur, sed extrorsum, vt ex eodem materiali Dodecaedro patet.) Igitur & αβ, γδ, æquales erunt. Quapropter cùm & rectæ Yα, Yβ, Zγ, Zδ, æquales sint, (Nam YQ, YR, ZR, ZS, perpendiculares, distantiæ sunt æqualium rectarum BL, DM, à centris Q, R, S, circulorum æqualium, qui nimirum pentagona æqualia circumscribunt, [d] atque adeò æquales. Item Qα, Rβ, Rγ, Sδ, distantiæ sunt rectarum æqualium AP, CM, CL, EN, [e] à centris eorundem circulorum æqualium, [e] ideoque æquales; Ac proinde & totæ Yα, Yβ, Zγ, Zδ, æquales erunt.) [f] Erunt quoq; anguli αYβ, γZδ, æquales; Ac propterea, cùm & rectæ YQ, YR, ZR, ZS, æquales sint; [g] æquales quoque erunt rectæ QR, RS, centra Q, R, S, connectentes. Eadem prorsus arte æquales demonstrabuntur omnes rectæ centra pentagonorum copulantes. Quare triangula QXR, RXS, SXT, TXV, VXQ, sub quinque angulis solidis Dodecaedri L, M, N, O, P, constituta, æquilatera erunt, & æqualia. Quòd si simili modo sub reliquis quindecim angulis solidis Dodecaedri, similia triangula construantur: (Habet enim Dodecaedrum viginti angulos solidos.) quæ quidem latera habent communia, descriptum erit Icosaedrum intra Dodecaedrum, cùm duodecim anguli solidi Icosaedri consistant in centris duodecim basium Dodecaedri. In dato ergo Dodecaedro Icosaedrum descripsimus. Quod faciendum erat.

a 4. primi.
b 33. primi.
c 4. primi.
d 14. tertij.
e 14. tertij.
f 8. primi.
g 4. primi.

## PROBL. 8. PROPOS. 8.

### IN dato Dodecaedro cubum describere.




PROPONANTVR quatuor pentagona Dodecaedri, cui inscribendus sit cubus AB. CDE, EFGHA, AHIKB, BKLMC. conuenientia ad latus AB; duo quidem ABCDE, ABKIH, secundùm latus idem commune AB; alia autem duo AEFGH, BCMLK, secundùm angulos EAH, CBK. In his verò pentagonis subtendátur angulis A, B, D, I, rectæ EH, CK, CE, HK, quadrilaterum efficientes EHKC quod æquilaterum erit. Cùm enim omnia latera AE, AH, DE, DC, BC, BK, IH, IK, æqualia sint, angulósque contineant æquales, ex hypothesi; [h] æquales erũt bases EH, HK, KC, CE. [i] Quoniam igitur rectæ AE, BC, æquales, auferũt x circulo pentagonum ABCDE, circumscribente arcus æquales; Erunt, ex scholio propositionis 27. libri 3. rectæ AB, CE, parallelæ. Eademque ratione parallelę erunt AB, HK. [k] Quare & EC, HK, inter se parallelæ erunt; [l] Ac propterea rectæ EH, CK, quę ipsas connectunt, parallelæ erunt, [m] in eodemq; cum ipsis plano; ideoque parallelogrammum erit EHKC; quod ostendimus esse æquilaterum. Quia verò planum ECKH, productum communem sectionem in sphæra facit circulum, per lemma. propos. 10. lib. 14. circa quadrilaterum EK, descriptum; [n] Erunt tam anguli oppositi E, K, quàm C, H, duobus rectis æquales. [o] Ac propterea cùm oppositi E, & K, sint æquales, nec non & oppositi C, & H; erunt omnes quatuor anguli E, C, K, H, recti. Quare EK, quadratum erit, collocans suos angulos in quatuor angulis Dodecaedri, & latera in planis quatuor pentagonorum Dodecaedri. Si igitur in reliquis octo pentagonis similiter octo angulis octo aliæ rectæ subtendantur eodem ordine; constitutum erit solidum sex quadratis contentum; quæ cùm sint æqualia, [p] eò quòd eorum

h 4. primi.
i 28. tertij.
k 9. vndec.
l 33. primi.
m 7. vndec.
n 22. tertij.
o 34. primi.
p 4. primi.

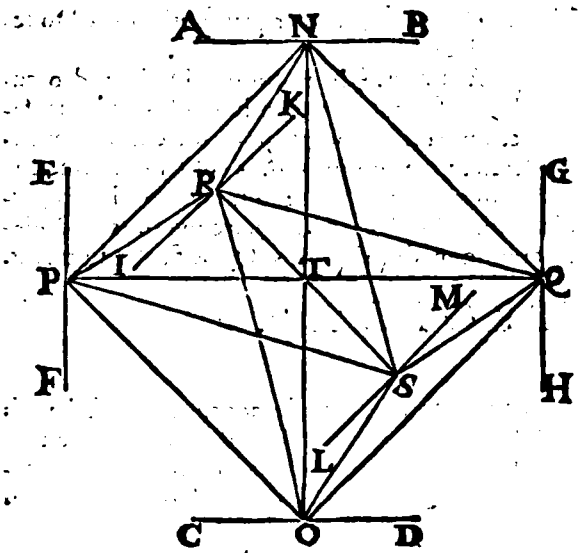
rum latera æquales angulos pentagonorum æqualibus rectis comprehẽsos subtendentia æqualia sunt: cubum constituent intra Dodecaedrum descriptum, propterea quòd duodecim eius latera iacent in planis duodecim pentagonorum Dodecaedri, eiusq; octo anguli in octo Dodecaedri angulis resident. In dato ergo Dodecaedro cubum descripsimus. Quod erat faciendum.

## COROLLARIVM.

*HINC fit, rectam, quæ subtendit vnũ angulum pentagoni æquilateri, & æquianguli, parallelam esse opposito lateri. Ostensum enim est, CE, ipsi AB, esse parallelam.*

## PROBL. 9. PROPOS. 9. 0. 9.

IN dato Dodecaedro Octaedrum describere.

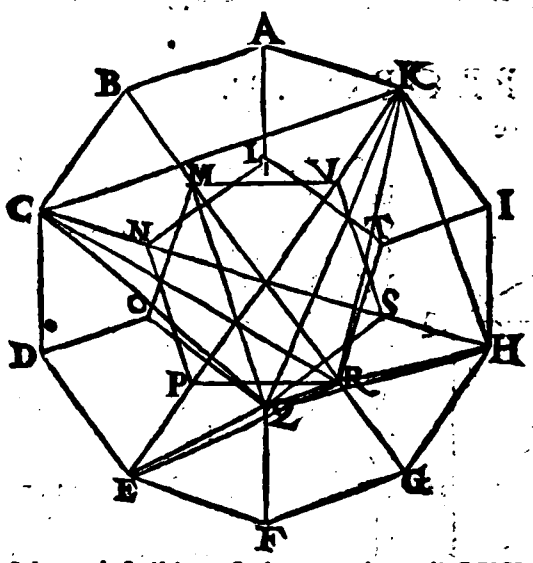



SVMANTVR in Dodecaedro, cui inscribendum sit Octaedrum, sex illa latera, quæ opposita esse diximus in corollario 3. propositionis 17. lib. 13. nimirum AB, CD, EF, GH, IK, LM, quæ bifariam secentur in N, O, P, Q, R, S. Rectæ igitur NO, PQ, RS, sectiones oppositorum laterum coniungentes æquales erunt, seque mutuò in T, centro sphæræ bifariam, & ad angulos rectos diuident, per coroll. 3. propos. 17. lib. 13. atque adeò æquales quoque erunt earum dimidiatæ partes NT, OT, PT, QT, RT, ST. [a] Quocirca duodecim rectæ subtendentes duodecim angulos rectos NTP, PTO, OTQ, QTN, NTR, RTP, PTS, STQ, QTR, RTO, OTS, STN, quales sunt NP, PO, OQ, QN, NR, RP, PS, SQ, QR, RO, OS, SN, æquales erunt, cùm dicti anguli æqualibus rectis contineantur: Ac proinde octo triangula NRP, PRQ, ORQ, QRN, QSP, PSN, NSQ, QSO, æquilatera, & æqualia erunt, constituentque Octaedrum intra Dodecaedrum descriptum, cùm sex anguli Octaedri tangant sex latera Dodecaedri opposita, ex constructione. In dato igitur Dodecaedro Octaedrum descripsimus. Quod faciendum erat.

[a] 4. primi.

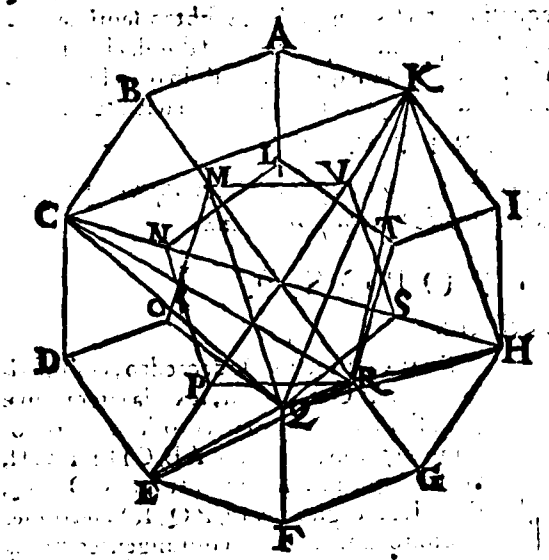
## PROBL. 10. PROPOS. 10. 0. 10.

IN dato Dodecaedro, Pyramidem describere.




SIT Dodecaedrum contentum duodecim pentagonis ABCNL, CDEPN, EFGRP, GHITR, IKALT, MOQSV, BCDOM, DEFQO, FGHSQ, HIKVS, KABMV, LNPRT, in quo describenda sit pyramis, siue Tetraedrum. Sumantur tria pentagona ABCNL, LAKIT, TLNPR, angulum solidum L, componentia, in quibus tres anguli C, R, K, (quorum quidem C, opponitur lateri AL, communi pentagonis CAL, ALI: At verò K, lateri LT, communi pentagonis KLT, LTP: Denique R, lateri LN, communi pentagonis RLN, LNB,) rectis connectantur CK, CR, KR: & ex punctis C, K, R, ad angulum Q, ipsi L, oppositum, rectæ ducantur CQ, KQ, RQ, vt sit pyramis cõstructa CKRQ. Ductis autem tribus diametris Dodecaedri, seu sphæræ, CH, KE, RM, & connexis rectis KH, RH, RE, QE, QM, QH: [b] quoniam Dodecaedrũ in sphæra describitur: si planum trianguli CHK, extendatur, fiet communis eius sectio cũ sphæra circulus, per lemma 1. propos. 10. lib. 14. [c] Ac propterea angulus CKH, in semicirculo existens, rectus erit. Non secus ostendemus rectos esse angulos CRH, KRE, KQE, RQM, CQH. [d] Quocirca cùm in omni triangulo rectangulo quadratum lateris recto angulo oppositi æquale sit quadratis laterum circa rectum angulum: sint autem quadrata diametrorum æqualium CH, KE, RM, æqualia: Æqualia erunt quadrata rectarum CK, KH, quadratis rectarum CR, RH, & quadratis rectarum KR, RE, & quadratis rectarum KQ, QE, & quadratis rectarum RQ, QM, nec non &

[b] 17. tertij decimi.
[c] 31. tertij.
[d] 47. primi.




quadratis rectarum CQ, QH. Ablatis ergo quadratis æqualibus, rectarū æqualium KH, RH, RE, QE, QM, & QH: (Hæ enim rectæ cùm subtendant angulos pentagonorum æquales æqualibus rectis comprehẽsos, [a] æquales sunt.) æqualia remanebũt quadrata rectarum CK, CR, RK, KQ, RQ, & CQ. Ac proinde & ipsæ rectæ æquales erunt. Quare quatuor triangula CKR, CKQ, KRQ, RCQ, æquilatera sunt, & æqualia, ideoque Tetraedrum componunt CKRQ: quod cũ habeat quatuor angulos C, K, R, Q, in quatuor angulis Dodecaedri, inscriptum erit intra Dodecaedrum.

a 4. primi.

ALITER. [b] In proposito Dodecaedro cubus describatur; [c] & in hoc cubo pyramis, factumq; erit, quod proponitur. Cùm enim anguli pyramidis in angulis cubi, nec non & anguli cubi in angulis Dodecaedri resideãt; perspicuum est, angulos pyramidis sedem habere in angulis Dodecaedri. Quare pyramis in Dodecaedro descripta erit. Itaq; in dato Dodecaedro pyramidem descripsimus. Quod faciendum erat.

b 8. quintidecimi.

c 1. quintidecimi.

## PROBL. 11. PROPOS. 11.

### IN dato Icosaedro cubum describere.

DESCRIBATVR in dato Icosaedro Dodecaedrum; [d] & in hoc Dodecaedro cubus, factumq; erit, quod proponitur. Cùm enim anguli cubi resideant in angulis Dodecaedri; anguli verò Dodecaedri in centris basium Icosaedri collocentur; tangent anguli cubi eadem centra basium Icosaedri: Ac propterea cubus in Icosaedro descriptus erit. Quam ob rem in dato Icosaedro cubum descripsimus. Quod faciendum erat.

d 7. quintidecimi.

e 8. quintidecimi.

## PROBL. 12. PROPOS. 12.

### IN dato Icosaedro Pyramidem describere.

IN dato Icosaedro [f] cubus describatur, [g] & in hoc cubo pyramis; factumque erit, quod proponitur. [h] Cùm enim anguli cubi tangant centra basium Icosaedri; [i] & anguli pyramidis angulis cubi congruant, manifestum est, angulos pyramidis attingere centra earundem basium Icosaedri. Ac proinde pyramidem in Icosaedro esse descriptam. In dato igitur Icosaedro pyramidem descripsimus. Quod erat faciendum.

f 11. quintidecimi.

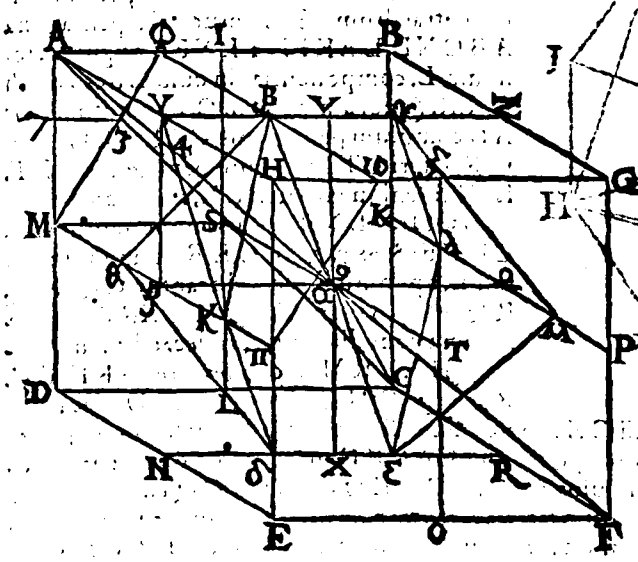
g 1. quintidecimi.

h 11. quintidecimi.

i 1. quintidecimi.

## PROBL. 13. PROPOS. 13.

### IN dato cubo Dodecaedrum describere.




SIT in cubo proposito AF, describendum Dodecaedrũ. Secentur singula latera bifariam in I, K, L, M, N, O, P, R, ϖ, ϱ, Z, Y, coniunctis rectis IL, YZ, ϱO, MϖKP, NR, nusquam inter se coeuntibus, ita vt ductæ in basibus oppositis sint inter se parallelæ, & à nullo puncto duæ lineæ ducãtur, sed vna duntaxat, quæ rursus bifariam secentur in S, V, T, ϕ, Q, X, connexis rectis ST, VX, ϱQ, quæ se mutuò centro ω, bifariam secant, & ad angulos rectos, vt in coroll. propos. 3. huius libri docuimus, sunt̃que lateribus cubi, sicut & priores sex, æquales. Iam dimidia rectarum YZ, Mϖ, secentur extrema ac media ratione in β, γ, δ, ε, vt sint maiora segmenta, Yβ, Zγ, Mδ, ϖε, ductis rectis Yγ, Yε, βδ, βε. Quoniam ergo Yϱ, YV, dimidio lateris cubi sunt æquales: & ϱω, ϱV, segmenta minora rectarum æqualium YV, ϱϖ, æqualia quoque: [k] Sunt autem quadrata rectarum YV, ϱV, tripla quadrati rectæ Yϱ, & re-

k 4. tertijd.

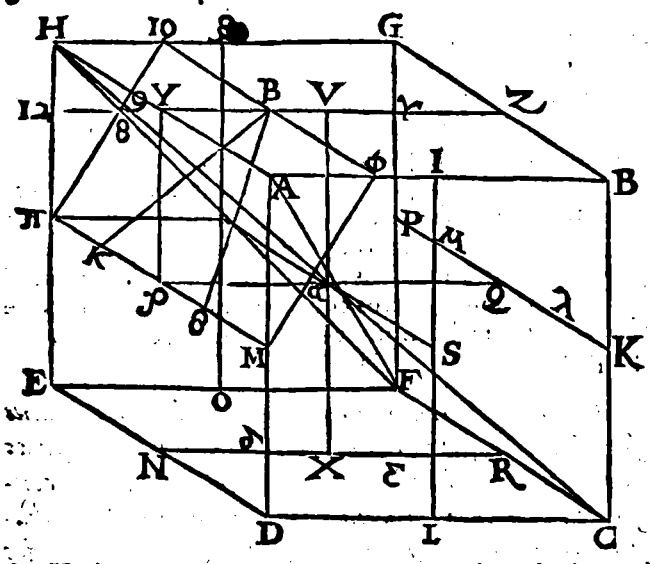
ruct

runt & quadrata rectarum Y ρ, ρκ, tripla eiusdem quadrati rectæ Y β. Quare, [a] cùm quadratis rectarum Y ρ, ρκ, æquale sit quadratum rectæ Y κ, [b] quòd angulus Y ρ κ, rectus sit; Erit & quadratum rectæ Y κ, triplum quadrati rectæ Y β. Rursus, quia V Y, perpendicularis ad A Y, Y ρ, [c] recta est ad planum A E, per rectas A Y, Y ρ, ductum, rectus erit angulus β Y κ, ex defin. 3. lib. 11. [d] Ac propterea quadratum rectæ β κ, æquale quadratis rectarum Y κ, Y β, existens, quadruplum erit quadrati rectæ Y β. (quia nimirum quadrata rectarum Y κ, Y β, quadrupla etiã sunt quadrati rectæ Y β, cùm quadratum rectæ Y κ, triplum sit ostensum quadrati rectæ Y β.) Ideoq; [e] cùm quadrata proportionem habeãt laterum duplicatam, dupla erit recta β κ, rectæ Y β. Quadrupla enim proportio duplicata est duplæ proportionis, vt in his numeris 1. 2. 4. apparet: Est autẽ & ∂ κ, dupla ipsius ρ κ, quòd minora segmenta ∂ ρ, κ ρ, rectarum æqualium M ρ, ϖ ρ, æqualia sint. [f] Erit igitur vt Y β, ad ρ κ, ita β κ, dupla ipsius Y β, ad ∂ κ, duplam ipsius ρ κ. Est autem Y β, maius segmentum ad ρ κ, rectam minori segmento β V, æqualem, vt tota ad maius segmentũ. Ergo & β κ, ad ∂ κ, erit vt tota ad maius segmentum; Ac proinde ∂ κ, erit maius segmentũ rectæ β κ, sectæ extrema ac media ratione. Eadem ratione ostendemus ∂ κ, maius esse segmentum rectæ β ∂, extrema ac media ratione sectæ, si nimirum ducatur recta Y ∂. Quare æquales erunt β ∂, β κ, constituentes triangulum Isosceles β ∂ κ, simile illi, quod ab Euclide constructum est propos. 10. lib. 4. vt postea demonstrabimus; Ac proinde ∂ κ, erit latus pentagoni in circulo triangulum β ∂ κ, circumscribente descripti, vt perspicuum est ex 11. propos. lib. 4.

[a] 47 primi. [b] 29 primi. [c] 4 vndec. [d] 47 primi. [e] 20. sexti. [f] 15. quinti.

INTELLIGATVR iam planum trianguli β ∂ κ, extendi, (ducta per β, recta β φ, ipsi M ϖ, parallela.) per parallelas M ϖ, φ 10. vt sit planum extensum φ ϖ, occurrens diametro A C, quadrati A B C D, in puncto 3. cubi verò diametro A F, in puncto 4. & per 3. ducatur 37. recta ipsi A φ, parallela, connectaturque M S, ς quæ parallela est vtrique A φ, 73. Quoniam igitur, per corollariũ propos. 4. lib. 6. triangulum A 73. simile est triangulo A M S; [b] ac proinde vt A M, ad M S, ita est A 7. ad 73. Sunt autem A M, M S, æquales, nempe dimidia cubi latera; Erunt quoque A 7. 73. æquales. Eadem ratione erit, vt M A, ad A φ, ita M 7. ad 73. Est autem A φ, maius segmentum rectæ M A, diuisæ extrema ac media ratione. ([i] quòd æquales sint A φ, Y β, nec non & M A, Y V, dimidia cubi latera.) Igitur & 73. hoc est, 7 A, maius segmentum erit rectæ M 7. extrema ac media ratione sectæ; [k] Ac propterea tota M A, diuisa erit extrema ac media ratione in 7. maiusque segmentum erit M 7. [l] Atqui vt M 7. ad 7 A, ita est S 3. ad 3 A. Secta est ergo & S A, extrema ac media ratione in 3. maiusq; segmentum est S 3. [m] Quia verò S κ T, parallela est ipsi M ϖ; quòd & recta ducta ϖ T, æqualis & parallela sit ipsi M S; si per S κ T, planum ducatur parallelum plano φ ϖ, ducto per M ϖ, [n] secabuntur rectæ A S, A κ, in easdem rationes, in punctis 3. & 4. cùm planum φ ϖ, rectas A S, A κ, secet in 3. & 4. at planum per S κ T, ductũ plano φ ϖ, parallelum easdem secet in S, & κ. Atque idcircò, cùm A S, secta sit in 3. extrema ac media ratione, secta erit eodem modo A κ, semidiameter cubi, in 4. maiusque segmentum erit κ 4.

[i] 34 primi. [k] 5. tertiæ. [l] 12. sexti. [m] 33 primi. [n] 17. vndec.

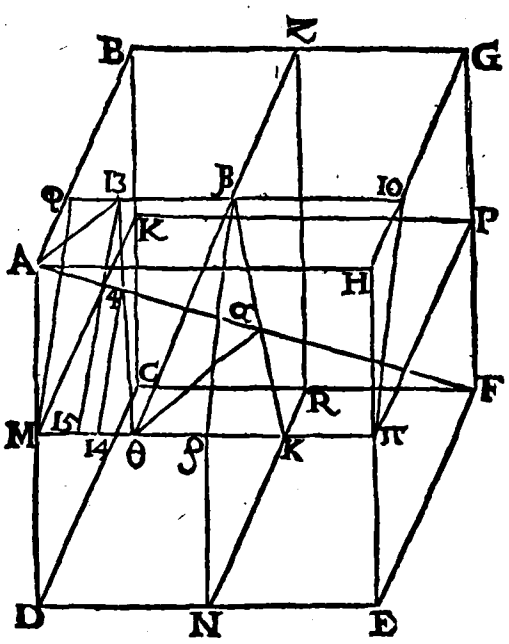



ISDEM argumentis ostendemus, ducta diametro H F, quadrati E F G H, & diametro cubi H C, semidiametrum cubi secari in 9. puncto extrema ac media ratione à plano φ ϖ, vt perspicuum est, si cubus inuertatur, vt in hac figura secunda apparet. Sunt enim lineamenta omnino similia lineamentis prioris figuræ, licèt bases cubi sedes mutauerint, ita vt quadratum A C, locum quadrati H F; & quadratũ H F, locum quadrati A C, obtineat in hac secunda figura. Quod tamen in prima figura, sine hac inuersione, probabitur etiam hoc modo. Ducta diametro cubi H C, in ea figura, quam planum φ ϖ, secet in 9. prope punctum A, intelligatur que per rectam A H, planum plano φ ϖ, parallelum. Quoniam igitur rectæ A κ, H κ, in centro κ, conueniunt, secanturque planis parallelis in punctis A, H, & 4. 9; (Nam planum φ ϖ, eas secat in 4. & 9. planum verò per A H, ductũ plano φ ϖ, parallelum easdem secat in A, & H;) [o] erit vt κ 4. ad 4 A, ita κ 9, ad 9 H. Cùm ergo κ A, secta sit in 4, extrema & media ratione; erit quoq; κ H, similiter secta. quæ quidem demonstratio locum etiam habet in hac cubi inuersione in secunda figura. Ostendamus nunc, si rectæ iungantur ∂ 4, β 4, β 9, κ 9, rectilineum β 4 ∂ κ 9, in plano φ ϖ, existens, pentagonum esse æquilaterum, & æquiangulum.

[o] 17. vndec.

INVERTATVR rursum cubus, vt quadrata A D E H, A B G H, quæ nimirum continent triangulum β ∂ κ, siue planum φ ϖ, hunc situm habeant, quem monstrat tertia hæc figura. Deinde in plano φ ϖ, recta coniuncta ∂ 4. extendatur vsque ad rectam φ 10. in punctum 13. Quoniam igitur ducta recta K P, & iunctis rectis M K, ϖ P, ρ planum M P, parallelum est plano A G, (quòd & rectæ P K, K M, parallelæ sint rectis G B, B A,) [p] secatque cubum bifariam; ideoque per centrum κ, transit, [q]

[p] 15. vndec. [q] 32. vndec.




d 16. vndec.

b 4. sexti.

e 15. vndec.

d 17. vndec.

e 2. sexti.

ea, quæ in scholio propos. 39. lib. 11. ostensa sunt si p rectas α 4 A, ∂ 4. 13. planũ extendatur, [a] fient α ∂, A 13. communes sectiones planorũ M P, A G, parallelæ: Ac proinde triangula α ∂ 4, A 13 4. æquiangula erunt; [b] Eritq; vt α 4. ad 4. A, ita ∂ 4. ad 4. 13. Quare cùm α A, in 4. secta sit extrema ac media ratione, vt ostẽdimus; eodem modo erit secta ∂ 13. in 4. Rursus plano N Z, per centrum α, transeunti, parallelum ducatur planum p punctum 4. ex scholio propos. 15. lib. 11. secans planũ φ π, recta 4. 14. [c] Est autem eidem plano N Z, parallelum planum D B. [d] Rectæ igitur α A, φ M, in easdem rationes secabuntur in punctis 4. & 14. Quocirca & φ M, in 14. secta erit extrema ac media ratione, minusq; erit segmẽtum 14. M, ideóque æquale minori φ ∂, ipsius M φ. Quare cùm ex φ 14. maiori segmento ipsius φ M, auferatur φ ∂, minus segmentum; Erit, vt demonstrauimus ad propos. 5. lib. 13. φ 14. diuisa in ∂, extrema ac media ratione, maiusque segmentum erit φ ∂. Postremò, acta per 13. recta 13. 15. rectæ 4. 14. parallela, [e] secabuntur rectæ ∂ 13, ∂ 15. proportionaliter Ac propinde & ∂ 15. secta erit in 14. extrema ac media ratione, maiusque segmentum erit ∂ 14. [f] Quapropter erit vt φ ∂, maius segmentum ad ∂ 14. minus, ita ∂ 14. maius ad 14. 15. minus: Vt autem ∂ 14. ad 14. 15. ita est tota ∂ 15. ad ∂ 14. maius segmentum. Igitur erit vt φ ∂, ad ∂ 14. ita ∂ 15. ad eandem ∂ 14. Ac propterea rectæ φ ∂, vel φ π, & ∂ 15. æquales erunt. Quoniam verò planum N Z, & planum illi parallelum per 4. 14. ductum, secantur plano φ π, [g] erunt communes sectiones β φ, 4. 14. parallelæ, ideoq; & 13 15, β φ, parallelæ erunt; [h] angulusq; externus β φ π, interno 13. 15 ∂, æqualis. Cũ igitur & latera β φ, φ π, lateribus 13. 15. 15 ∂, sint æqualia, [i] æquales erunt quoq; rectæ β π, 13 ∂; Ac proinde & earũ segmenta maiora ∂ π, ∂ 4, (Ostensum enim est ∂ π esse maius segmentum ipsius β π.) æqualia erunt. Eadem arte & β 4. ipsi β γ, in prima figura ostenditur æqualis, si simili situ triangulum Isosceles formetur super basim β γ, cuius vertex consistat in puncto, quod rectam I S, diuidit extrema ac media ratione. Eodemq; modo eisdem ∂ π β γ, æquales erunt π 9. β 9. Æquilaterũ ergo est pentagonum β 4 ∂ π 9; quandoquidẽ β γ, ∂ π, rectæ æquales sunt, cùm componantur ex minoribus segmentis linearum æqualium extrema ac media ratione sectarum, quales sunt Y V, Z V, π φ, M φ. Sed & æquiangulũ, vt mox ostendemus. Si igitur hac arte duodecim triangula, nimirum ad singulas rectas M π, Y Z, N R, I L, ξ O, K P, bina ipsi β ∂ π, similia, & æqualia construantur, (Ita enim ad M π, duo huiusmodi triangula vides β ∂ π, ∂ ∂ π.) & ipsorũ officio duodecim pentagona ipsi β 4. ∂ π 9, similia & æqualia fabricentur, constituetur Dodecaedrũ, cuius duodecim quidẽ anguli in sex rectis lineis M π, Y Z, N R, I L, ξ O, K P, bini nimirũ in singulis, octo verò reliqui in octo semidiametris cubi consistũt, nempe in punctis, q̃ ipsas extrema ac media ratione diuidũt, qualia sunt puncta 4. & 9. in semidiametris A α, & H α, secundæ figuræ; Ac ꝓpterea quodammodo inscriptũ esse dicetur cubo huiusmodi Dodecaedrũ, quamuis non ꝓpriè, cùm non omnes eius anguli vel in angulis, vel lateribus, vel deniq; in planis cubi constituãtur, sed 12. quidẽ in sex planis cubi, octo verò in punctis, quæ octo semidiametros cubi extrema ac media ratione secant, resideant. Quocirca in dato cubo Dodecaedrum descripsimus. Quod erat faciendum.

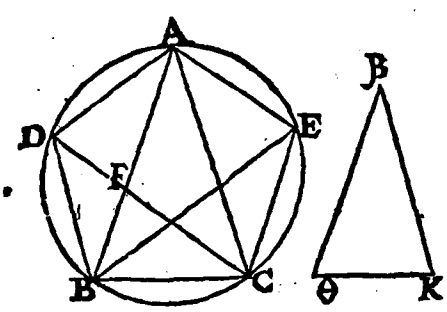
f 2. quartidecimi.

g 16. vndec.

h 29. primi.

i 4. primi.

## LEMMA

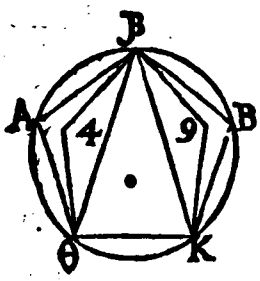



*QVOD autẽ triangulũ β ∂ π. cuius basis ∂ π. maius segmẽtum existit vtriusq; lateris β ∂, β π, extrema ac media ratione diuisi simile sit illi, quod Euclides construxit propos. 10. lib. 4. ita demonstrabimus. Describatur circa triangulum Isosceles A B C, quale Euclides construere docet propos. 10. lib. 4. circulus A D B C E, cui insisq; angulis A B C, A C B, bifariã rectis B E, C D, perficiatur pentagonũ aquilaterũ & aquiangulũ A D B C E, vt propos. 11. lib. 4. tradimus, secentq; se mutuò rectæ A B, C D, in F.* [a] *Quoniã ergo A B, in F, secatur extrema ac media ratione, maiusq; eius segmentum est A F, æquale lateri B C.* [b] *Erit vt A B, tota ad maius suũ segmentũ B C, ita C θ, tota ad maius suum segmentũ ∂ π; Eodemq; modo, vt tota A C, ad maius segmentum C B, ita β π, tota ad maius segmentũ π θ: Est autẽ quoq; vt A B, ad A C, ita β θ, ad β π, vtrobiq; enim est proportio æqualitatis. Triangula igitur β θ π, A B C, proportionalia habentia latera, æquiangula sunt, æqualesq; erunt anguli θ, B; Item π, C, & β, A; propterea q; vterq; angulorum θ, π, duplus erit anguli β; & triangula β θ π, A B C, similia.*

a 8. tertij decimi.

b 2. quartidecimi.

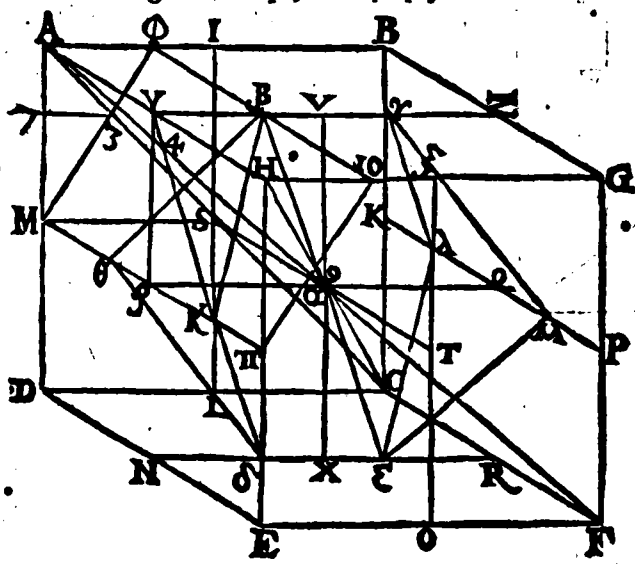
PLANE




*PENTAGONVM verò β 4 ϑ κ 9, æquilaterum, esse quoq; æquiangulum, hac ratione ostendemus. Describatur circa triangulum β ϑ κ, circulus β A ϑ κ B; qui si transeat per puncta 4, & 9, perspicuum est ex ijs, quæ ad propos. 16. lib. 4. docuimus, pentagonum, æquiangulum esse. Si verò non incedat per puncta 4, & 9. describatur in circulo dicto, iuxta doctrinam propos. 11. lib. 4. pentagonum æquilaterum & æquiangulum β A ϑ κ B. Quoniam igitur tam recta A ϑ, A β, quàm recta 4 ϑ, 4 β, æquales sunt rectæ ϑ κ, cùm & β 4 ϑ κ 9, & β A ϑ κ B, pentagonum sit æquilaterum; Erunt tam duæ rectæ ϑ A, ϑ 4, quàm duæ β A, β 4, æquales: quod fieri nõ posse demonstratum est propos. 7. lib. 1. Transit ergo circulus triangulo β ϑ κ, circumscriptus per puncta 4, & 9. Ac proinde pentagonum β 4 ϑ κ 9, æquiangulum est.*

## SCHOLIVM.

*EX his colligere licebit sequentes propositiones.*




### I.

DIAMETER Dodecaedri duplatera potest, ipsius scilicet Dodecaedri & cubi, in quo Dodecaedrum describitur.

*DVCATVR enim in prima figura diameter Dodecaedri β υ, intelligatur q; cõiuncta recta γ υ, [a] æqualis existens & parallela lateri cubi V X, q & V γ, X υ, æquales sint, & parallelæ. Quoniam igitur angulus β V X, rectus est; [b] rectus quoq; erit angulus β γ υ, ad γ, constitutus; [c] Ac proinde quadratũ diametri β υ, æquale erit quadratis laterum β γ, γ υ, nempe Dodecaedri, & cubi.*

a 33. primi.
b 29. primi
c 47. primi.

### II.

SI latus cubi secetur extremæ ac media ratione, minus segmentum latus est Dodecaedri in cubo descripti: Maius verò segmentum latus cubi in hoc Dodecaedro descripti.

*IN eadem enim prima figura, [d] cùm sit vt Υ V, ad β V, ita Υ Z, dupla ipsius Υ V, ad β γ, duplam ipsius β V; Sit autẽ β V, minus segmentum ipsius Υ V, secta extrema ac media ratione: Erit & β γ, minus segmentum lateris cubi Υ Z, secti extrema ac media ratione; composita verò ex Υ β, γ Z, hoc est, recta β υ, (quæ dupla fuit ostensa ipsius Υ β, ideoq; compositæ ex Υ β, γ Z, æqualis) maius segmentum. Constat autem ex constructione β γ, esse latus Dodecaedri, [e] & β υ, seu β ϑ, esse latus cubi in dicto Dodecaedro descripti, cùm subtendat angulum pentagoni β ϑ κ, vel β 4 ϑ.*

d 15. quinti
e 8. quinti-decimi.

### III.

LATVS cubi æquale est duobus lateribus, Dodecaedri videlicet in ipso descripti, & Dodecaedri circa eundem cubum descripti.

*NAM in prima rursus figura, latus cubi Υ Z, componitur ex latere Dodecaedri β γ, in ipso descripti, & ex recta composita ex Υ β, γ Z; quã constat esse latus Dodecaedri eidem cubo circumscripti. Cùm enim Υ Z, cubi latus subtendat angulum pentagoni Dodecaedri circa cubum descripti, vt perspicuum est ex 8. propos. huius lib. [f] Sit autem latus illius pentagoni maius segmentum lateris Υ Z, secti extrema ac media ratione: Erit β ϑ, existens quoq; maius segmentum eiusdem lateris Υ Z, & æqualis duabus Υ β, γ Z, simul, vt iam demonstrauimus, latus Dodecaedri cubo lateris Υ Z, circumscripti.*

f 8. tertij d.

### IIII.

RECTA duos angulos pentagonorum Dodecaedri communi lateri oppositos connectens est æqualis lateri cubi, cui Dodecaedrum inscribitur.

*IN prima enim figura, recta connectens puncta β, A, in quibus constituuntur duo anguli pentagonorum communi lateri β κ, oppositi, æqualis est rectæ V X, (quòd & β V, A X, æquales sint, & parallelæ) hoc est, lateri cubi, in quo Dodecaedrum describitur.*

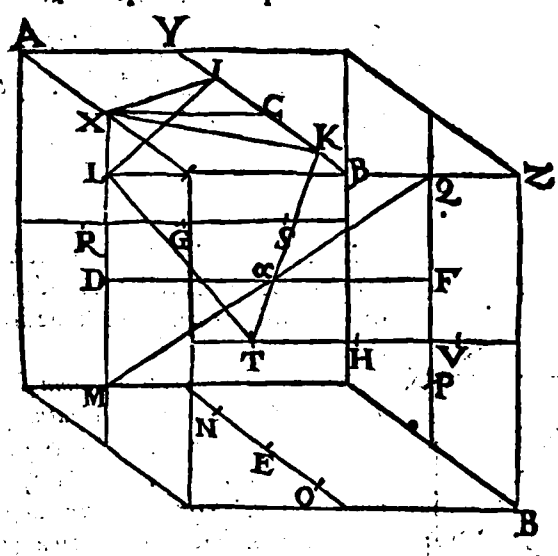
g 33. primi.

## PROBL. 14. PROPOS. 14.

IN dato cubo Icosaedrum describere.

CVBVS datus, in quo describendum sit Icosaedrum, sit AB, p cuius basium centra C, D, E, F, G, H, lateribus cubi rectæ lineæ parallelæ agantur nusquá inter se conuenientes, & harum medietates extrema ac media ratione secentur, ita vt maiora segmenta prope centra sint in punctis I, K, L, M, N, O, P, Q, R, S, T, V; quorũ quodlibet cum quatuor vicinioribus connectatur, vt L, cum I, K, T, & R: R, cũ L, M, I, & N, &c. vt constituátur viginti triangula IKL, IKQ, LMR, LMT, NOM, NOP, PQV, PQS, RSI, RSN, TVK, TVO, ILR, ISQ, KTL, KQV, OPV, OTM, NSP, NMR; quorum priora duodecim subtenduntur duodecim cubi lateribus, posteriora vero octo eiusdem cubi octo angulis substernuntur. Connectantur iam rectę X C, X I, X K. Quoniam igitur
a 29. primi. latera X C, C I, trianguli X C I, æqualia sunt lateribus X C, C K, trianguli X C K; a & anguli con-
b 4. primi. tenti, recti, q X C, parallela sit ipsi A Y; b Erunt & bases X I, X K, æquales. Deinde quia linea L X, recta est ad planum A Z, per defin. 4. lib. 11. recta quoq; erit ad lineas X I, X K; Ac propterea cũ latera L X, X I, trianguli L X I, æqualia sint lateribus L X, X K, trianguli L X K, & anguli contenti, recti; c æquales erũt bases L I, L K. Rursus d quoniam quadratũ rectæ L I, æquale est quadratis rectarum L X, X I. Et quadratũ rectæ L X, quadrato rectę I Y; quadratum verò rectę X I, quadratis rectarum X C, C I, est æquale: Æquale erit quadratum rectæ L I, tribus quadratis rectarũ X C, C I, I Y: Sunt autem & quadrata rectarum X C, C Y, æqualia, q eorum latera sint dimidia cubi latera. Igitur quadratũ rectæ L I, æquale est tribus quadratis rectarũ C Y, C I, I Y; Sed hæc tria quadrata quadrupla sunt quadrati rectę C I; (e Cùm enim quadrata rectarum C Y, I Y, totius, & minoris segmenti, tripla sint quadrati rectæ C I, maioris segmenti; Addito quadrato rectæ C I, illis duobus; erũt tria quadrata rectarum C Y, C I, I Y, quadrupla eiusdem quadrati rectæ C I.) Quadratum ergo rectæ L I, quadruplum est quoq; quadrati rectæ C I; Ac propterea, cùm eiusdem quadrati rectæ C I, quadruplum sit quadratum rectæ K I, ex scholio propos. 4. lib. 2. Æqualia erunt quadrata rectarum L I, I K, ideoque & rectæ ipsæ æquales. Æquilaterum igitur est triangulum I K L, lateri cubi A G, substratum.

c 4. primi.
d 47. primi.
e 4. tertij.




NON aliter ostendemus, reliqua vndecim triangula, vndecim reliquis lateribus cubi suppositis, esse æquilatera; Atq; adeò inter se æqualia, cùm eorũ latera I K, L M, N O, P Q, R S, T V, æqualia sint. Quoniam verò latera reliquorum octo triangulorũ, octo angulis cubi suppositorum, communia sunt dictis duodecim triangulis; vt in triangulo K T L, latus K L, cõmune est triangulo I K L, & latus K T, triangulo T V K; & latus T L, triangulo L M T; perspicuũ est, ea quoq; esse æqualia & inter se, & dictis duodecim triangulis. Quare omnia viginti huiusmodi triangula Icosaedrum component cubo inscriptum, cùm eius anguli omnes duodecim in sex cubi basibus consistant, bini nimirum in singulis. Itaque in dato cubo Icosaedrum descripsimus. Quod erat faciendum.

## SCHOLIVM.

COLLIGIMVS ex hoc, propositiones sequentes.

### I.

DIAMETER Icosaedri potest & latus Icosaedri, & cubi Icosaedrum ambientis.

a 33. primi. DVCTA enim recta L Q, a quæ lateri cubi D F, parallela est, & æqualis, q & D L, F Q, parallelæ sint, &
b 47. primi æquales; b manifestum est, quadratũ diametri Q M, æquale esse quadratis rectarum L M, lateris Icosaedri, &
c 29. primi. L Q, lateris cubi, in quo Icosaedrum descriptũ est, c cum angulus M L Q, sit rectus, quod & L D F, rectus sit.

### II.

BIFARIAE sectiones sex oppositorum laterum Icosaedri coniunguntur tribus rectis æqualibus, sese in centro Icosaedri bifariam, & ad angulos rectos secantibus.

NAM huiusmodi tres lineæ, nimirum D F, C E, G H, cùm coniungant centra basium cubi oppositarum, æquales sunt lateribus cubi, sesecq; per coroll. propos. 3. huius lib. bifariam, & ad angulos rectos in centro cubi, quod sit α, diuidunt. Quod quidem & centrum esse Icosaedri, ita ostendetur, ducta recta α P. Quoniam latera α F, F Q, trianguli α F Q, æqualia sunt lateribus α F, F P, trianguli α F P, angulosq; comprehendũt rectos,
d 4. primi. d æquales erunt rectæ α Q, α P. Eademq; ratione æquales erunt omnes rectæ ex α, ad angulos Icosaedri prodeuntes. Igitur α, centrum est Icosaedri.

### III.

SI latus cubi extrema ac media ratione secetur, maius segmentum latus est Icosaedri in dicto cubo descripti.

CVM

*Cum enim CI, sit maius segmentum rectæ CY: [a] sitq; vt CI, ad CY, ita KI, dupla ipsius CI, ad ST, duplam ipsius CY; [b] erit quoq; KI, latus Icosaedri, segmentum maius lateris cubi ST.* [a] 15. quinti. [b] 2. quartidecimi.

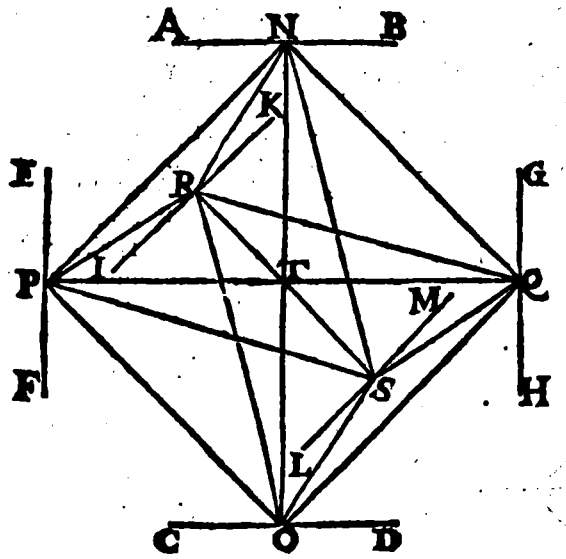
## IIII.

ICOSAEDRI tam latera, quàm triangula opposita, inter se sunt parallela.

*Si enim quorumlibet duorum laterum oppositorum extrema puncta duabus diametris connectantur, fient duo triangula inter se æqualia, angulos q; alternos habentia æquales, ex 4. propos. lib. 1. quæ quidem in centro conueniunt. Quare quælibet latera opposita parallela erunt; [c] Atq; idcirco, & triangulorum plana, per ipsa latera parallela ducta, inter se erunt parallela.* [c] 15. vndec.

# PROBL. 15. PROPOS. 15.

IN dato Icosaedro Octaedrum describere.




EXPONANTVR dati Icosaedri, cui inscribendum est Octaedrum, sex latera opposita, AB, CD, EF, GH, IK, LM, quorum bifarias sectiones N, O, P, Q, R, S, iungant tres rectæ NO, PQ, RS, æquales, sese in centro T, bifariam, & ad angulos rectos secantes, per ea, quæ in scholio propos. præcedentis ostensa sunt; ducanturq; rectæ NP, NR, NS, NQ; OP, OR, OS, OQ; PR, PS; QR, QS, constituentes octo triangula SNP, SPO, SOQ, SQN; RNP, RPO, ROQ, RQN. Quia igitur latera TN, TS, trianguli TNS, æqualia sunt lateribus TN, TP, trianguli TNP; (cùm sint rectarũ æqualium dimidia.) angulosq; continent rectos, vt dictũ est; [a] Æquales erũt bases NS, NP: Eodemq; modo reliquæ bes lineæ æquales erũt & hisce duab², & inter se. Octo ergo dicta triangula æquilatera sunt, & inter se æqualia; Ideoq; Octaedrum constituunt. [a] 4. primi.

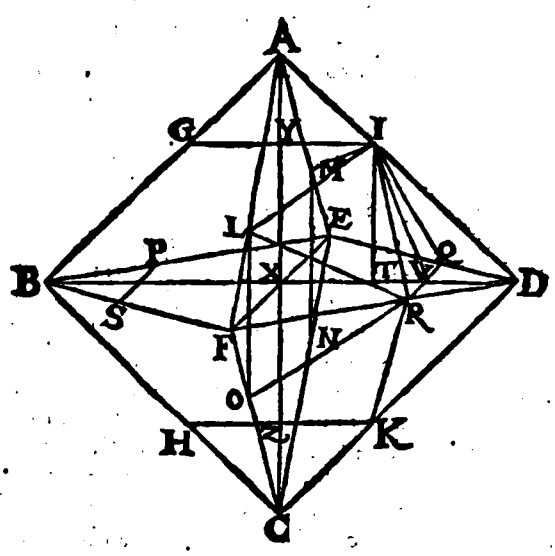
Quod in Icosaedro descriptũ est, cùm eius anguli resideant in bifariis sectionibus sex laterum Icosaedri oppositorum. In dato itaque Icosaedro Octaedrum descripsimus. Quod faciendum erat.

## COROLLARIVM.

*SEQVITVR hinc, idem esse centrum Icosaedri, & Octaedri in eo descripti. Quoniam scilicet rectæ NO, PQ, RS, per T, centrũ Icosaedri incedentes, diametri sunt Octaedri NPOQRS, sibi inscripti. Quare T, centrũ Icosaedri, vbi se intersecant, centrũ quoq; est Octaedri.*

# PROBL. 16. PROPOS. 16.

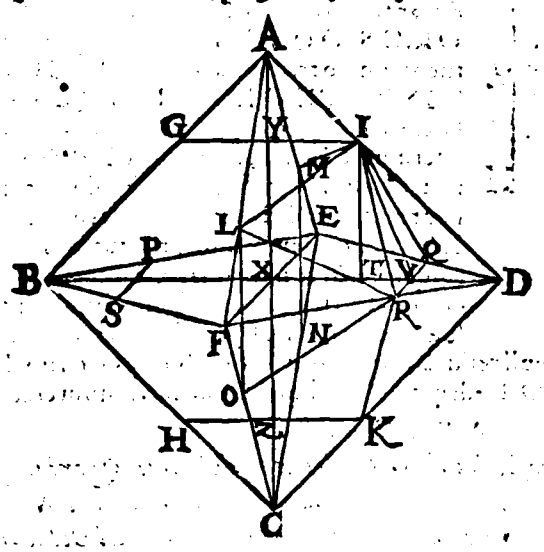
IN dato Octaedro Icosaedrum describere.




DATVM Octaedrum, in quo describẽdum est Icosaedrum, sit ABCDEF. Cùm à quolibet angulo quatuor latera exeant, sumantur à singulis bina non proxima, sed sibi è regione respondentia, hoc est, quę ad angulos quadratorum Octaedri oppositos cadunt, sumendo semper bina iuxta angulos oppositos eiusdem quadrati, qualia sunt BA, BC; DA, DC, iuxta angulos oppositos B, D, quadrati ABCD; AF, AE; CE, CF, iuxta angulos oppositos A, C, quadrati AECF: (Nam à quolibet angulo sumenda sunt tantùm duo latera; at verò latera AB, AD; CB, CD, quadrati ABCD, iuxta eosdem angulos A, C, iam sumpta fuêre.) EB, ED; FD, FB, iuxta angulos oppositos E, F, quadrati EBFD; (Nam latera EA, EC; FC, FA, quadrati AECF, iuxta eosdem angulos, E, F, iam accepta sunt.) quæ omnia secentur extrema ac media ratione, hac lege, vt maiora segmẽta sint prope angulos, à quibus egrediuntur, in duodecim punctis G, H, I, K, L, M, N, O, P, Q, R, S, & à singulis ad quinque proximas sectiones quinque lineæ rectæ ducantur, vt ex R, rectæ RQ, RI, RL, RO, RK. Et ex L, rectæ LQ, IR, IM, IL, IG, & sic de cæteris, quamuis non omnes ductæ sint

in figura, ad euitandam linearũ confusionem. Quę autẽ sint hæc quinq; puncta proxima, pulchrè indicat Octaedrum materiale. Sunt enim tria in lateribus reliquis tribus, quę cum eo, in quo punctum acceptũ est, pyramidem constituunt; alia autẽ duo sunt in duobus lateribus duorum triangulorum Octaedri, quæ habẽt cõmune illud latus, in quo punctum acceptũ est. Vt quia punctum acceptum est R, in latere D F, quod cum tribus D E, D A, D C, pyramidem constituit in vertice D, & est cõmune triangulis Octaedri D F A, D F C: propterea ex R, ad quinq; puncta horũ quinque laterũ ductę sunt lineę rectæ, & sic de cæteris. Post hæc, ductis tribus Octaedri diametris A C, B D, E F, sese in centro X, secantibus bifariam, & ad angulos rectos, ex coroll. 1. propos. 14. lib. 13. quarum A C, B D, secant rectas G I, R Q, in Y, & V; connectaturq; recta I V, agaturq; I T, parallela ipsi Y X. Quoniam ergo latera D Q, D I, trianguli D Q I, æqualia sunt lateribus D R, D I, trianguli D R I (Sunt enim D Q, D R, minora segmẽta rectarũ æqualium D E, D F.) & angulos comprehendunt æquales, nempe triangulorũ Octaedri A D E, A D F; [a] Erunt bases I Q, I R, æquales. Deinde cùm sit, [b] vt B G, ad G A, ita D I, ad I A; [c] erit G I, rectæ B D, parallela. Eademq; ratione Q R, ipsi E F, parallela; [d] Ac proinde vt D I, ad I A, ita X Y, ad Y A. Recta igitur X A, secta erit in Y, extrema ac media ratione. Rursus, quia est vt A X, ad X D, ita A Y, ad Y I, (quòd triangulum A Y I, simile sit triangulo A X D, p coroll. propos. 4. lib. 6.) Est autẽ A X, ipsi X D, æqualis; Erit & A Y, ipsi Y I, æqualis. Quare Y I, minus segmẽtum est rectæ X A. Non aliter ostendemus A Y, ipsi Y G, esse æqualem; ideoq; G I, rectam, bifariam in Y; similiterque Q R, in V, secari. Cùm verò latera A G, A I, trianguli A G I, æqualia sint lateribus D Q, D R, trianguli D Q R, (nimirũ, minora segmenta minoribus segmentis æqualium rectarum) angulosq; comprehendant rectos, nempe quadratorum A B C D, D E B F.

[a] 4. primi.
[b] 2. quarti decimi.
[c] 2. sexti.
[d] 4. sexti.
[e] 4. primi.




[e] Æquales erũt bases G I, Q R. Eadem ratione his æquales ostendentur rectæ H K, P S, M N, L Q, quę nimirũ subtendunt reliquos quadratorum A B C D, D E B F, A E C F, angulos, in singulis videlicet quadratis binos oppositos, complectunturq; duo segmenta laterũ minora. Deinde quia Y I, minus segmentum ipsius X A, ostensum, maius est segmentum maioris segmenti X Y, diuisi extrema ac media ratione, vt demonstrauimus ad propos. 5. lib. 13. Est autem X Y, rectæ X V, æqualis, (cùm ambæ sint maiora segmẽta æqualium rectarũ X A, X D.) [f] & Y I, rectæ X T; erit X T, maius segmentum ipsius X V, & idcirco T V, segmentum minus eiusdem X V. Quare quadrata rectarum X V, totius, hoc est, ipsius I T, ([g] cùm & recta I T, æqualis sit ipsi X Y.) & T V, minoris segmenti, [h] tripla sunt quadrati rectæ X T, maioris segmenti. Atq; adeò quadratũ rectæ I V, [i] æquale existens quadratis rectarum I T, T V, triplum est eiusdem quadrati rectæ X T, hoc est, rectę R V, quæ æqualis est ipsi X T, seu ipsi Y I, ex demonstratis, cùm R V, Y I, dimidia sint æqualium rectarum R Q, G I. Addito igitur quadrato rectæ R V, ipsi quadrato rectæ I V; erunt quadrata rectarum I V, V R, quadrupla quadrati rectę R V; [k] At quadratis rectarum I V, V R, æquale est quadratum rectæ I R, [l] quòd anguli I V R, I V Q, comprehensi lateribus æqualibus I V, V R; I V, V Q, & subtensi basibus æqualibus I R, I Q, æquales sint, ideoq; recti. Ergo & quadratũ rectæ I R, quadruplum est quadrati rectæ V R; Ac propterea cùm eiusdem quadrati rectæ V R, quadruplum quoq; sit, per scholium propos. 4. lib. 2. quadratũ rectæ Q R; Æquales erunt quadrata rectarum I R, Q R, ideoque & rectæ ipsæ æquales: Erat autem I Q, ipsi I R, æqualis. Triangulum igitur æquilaterum est I Q R. Non secus demonstrabimus, æquilatera esse triangula similem situm cum I Q R, habentia, nempe K Q R; G I L, G I M; G P S, H P S; N H K, O H K; R L O, S L O; P M N, Q M N; atque adeò triangulo I Q R, æqualia, cùm latera omnium sint æqualia inter se. quod tamen hac etiam ratione demonstrabimus. Cùm enim in quolibet horum triangulorũ vnum latus subtendat angulum rectum quadrati, comprehensum duobus segmentis minoribus laterum Octaedri; duo verò reliqua subtendant duos æquales angulos triangulorum æquilaterorũ, contentos singulos duobus segmentis laterũ Octaedri, maiore & minore: Erunt latera vnius trianguli lateribus aliorum æqualia; ac propterea & ipsa triangula æqualia, per corollarium propositionis 8. lib. 1. Vt in triangulis I Q R, G I L, latera R Q, G I, subtendentia angulos rectos Q D R, G A I, quadratorum D E B F, A B C D, comprehensos minoribus segmentis D Q, D R; A G, A I, æqualia sunt. Eodem modo latera I Q, I L, æqualia erunt, cùm subtendant angulos æquales I D Q, I A L, triangulorum æquilaterorum A D E, A D F, quorum illę continetur segmentis laterum Octaedri D I, D Q, maiore & minore; hic verò segmentis A L, A I, maiore & minore quoque. Non secus latera I R, G L, æqualia erunt. Æqualia igitur sunt triangula I Q R, G I L, per corollarium propositionis 8. libri 1. Atqui I Q R, ostensum est esse æquilaterum; Ergo & G I L, æquilaterum est. Eademq; est ratio de cæteris habenda. Atq; hæc quidem duodecim triangula supponuntur sex angulis Octaedri, bina

[f] 34. primi.
[g] 34. primi.
[h] 4. tertij d.
[i] 47. primi.
[k] 47. primi.
[l] 8. primi.

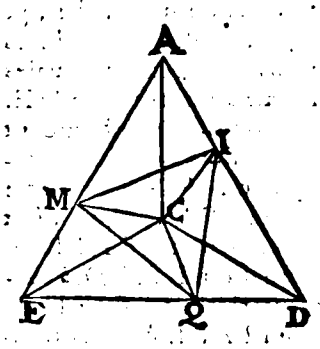
videlicet

videlicet singulis. Ex his cõsequitur reliqua octo triãgula, octo basibus Octaedri imposita, videlicet GMP, in AEB; HNP, in BEC; KNQ, in CED; IMQ, in AED; GLS, in AFB; HOS, in BFC; KOR, in CFD; ILR, in AFD, æquilatera quoq; esse, & prædictis æqualia, cùm horum latera cum illorum lateribus communia sint. Viginti ergo hæc triangula, quorum quina in singulis sectionibus laterum Octaedri conueniunt ad constitutionem anguli solidi, (vt vides in quinque RQI, RIL, RLO, ROK, RKQ, solidum angulum R, componentibus.) Icosaedrum componunt Octaedro inscriptum, cùm Icosaedri duodecim anguli, duodecim sectiones laterum Octaedri possideant. In dato itaque Octaedro, &c. Quod faciendum erat.

## COROLLARIVM I.

*COLLIGITVR ex demonstratis, si duo latera trianguli æquilateri secentur extrema ac media ratione, ita vt vnius maius segmẽtum, alterius verò minus, sit prope angulum ab ipsis comprehensum; Rectam connectentem dictas sectiones duplum posse minoris segmenti. Cùm enim in triangulo æquilatero A D E, maius segmentum lateris A D, sit D I, & D Q, minus lateris D E; sit autem recta I Q. ostensa æqualis rectæ G I, quæ duplum potest minoris segmenti A I, [a] cùm quadratum rectæ G I, æquale sit duobus quadratis æqualibus rectarum æqualium A G, A I: Perspicuũ est, & rectam I Q, duplum posse eiusdem segmẽti minoris A I.* a 47. primi

## COROLLARIVM II.




*RVRSVS fit, cùm octo Icosaedri bases collocatæ sint in octo basibus Octaedri, idem esse centrum basis Octaedri, & Icosaedri. Suscipiatur namque Octaedri superioris triangulum A E D, in quo collocatum est triangulum Icosaedri I M Q, sitq; C, centrum trianguli A E D, ex quo rectæ educantur C A, C E, C D; C I, C M, C Q. Quoniam igitur latera C A, A M, trianguli C A M, æqualia sunt lateribus C E, E Q, trianguli C E Q, (quòd hæc latera sint ex centro, & maiora segmenta æqualium rectarum.) angulosq; comprehendunt æquales, nempe dimidios angulorum trianguli æquilateri, vt in scholio propos. 12. lib. 13. ostendimus; Erunt bases C M, C Q, æquales. Non secus demonstrabimus C I, æqualem esse lineis C M, C Q. Quare C, centrum erit trianguli I M Q.*

## COROLLARIVM III.

*NON difficile est denique ex dictis colligere, idem centrum esse Octaedri, atque sibi inscripti Icosaedri. Ductis enim ex X, centro Octaedri, duabus rectis ad quoscunque duos angulos Icosaedri, nimirum rectis X G, X O, ad angulos G, & O; cùm latera X A, A G, trianguli X A G, æqualia sint lateribus X F, F O, trianguli X F O, (Nam X A, X F, semidiametri sunt Octaedri, & A G, F O, segmenta minora laterum æqualium Octaedri, sectorum extrema ac media ratione.) angulosq; complectantur æquales, semirectos videlicet; (cùm A C, E F, diametri sint quadratorum A B C D, E A F C; ac proinde, per demonstrata in scholio propos. 34. lib. 1. angulos quadratorum bifariam secent.) [b] Æquales erunt & bases X G, X O. Eodemq; argumento ostendentur omnes aliæ rectæ ex X, ductæ ad angulos Icosaedri æquales. Igitur X, centrum Octaedri, centrum quoque est Icosaedri.* b 4. primi

# PROBL. 17. PROPOS. 17.

IN dato Octaedro Dodecaedrum describere.

[a] INSCRIBATVR dato Octaedro Icosaedrum; [b] & in hoc Icosaedro Dodecaedrum, factúmque erit, quod iubetur. Cùm enim Dodecaedri anguli constituantur in centris basium Icosaedri, quarum octo concentricæ sunt basibus Octaedri, ex coroll. 2. propos. 16. huius lib. Manifestum est, Dodecaedri octo angulos in eisdem centris octo basium Octaedri, reliquos autem duodecim in centris duodecim basium Icosaedri, quarum binæ singulis sex angulis Octaedri supponuntur, residere; Ac propterea Dodecaedrum Octaedro inscriptum esse dicetur, quanquam non propriè, vt ex defin. 31. lib. 11. apparere potest. Quapropter in dato Octaedro Dodecaedrum descripsimus. Quod erat faciendum.

a 16. quintidecimi.
b 5. quintidecimi.

# PROBL. 18. PROPOS. 18.

IN data Pyramide cubum describere.

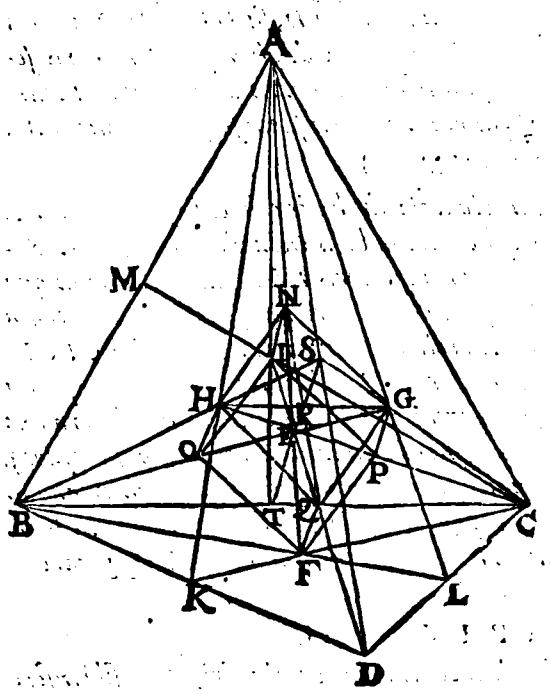
DATVR pyramis A B C D, in qua cubus iubetur describi, sitque eius centrum E, per quod ex

quatuor angulis Pyramidis rectæ educantur AEF, BEG, CEH, DEI, [a] quæ cadent in centra
[a] 15. quartidecimi.
basium oppositarum F,G,H,I, eruntque perpendiculares ad easdem bases BCD, ACD, ABD, ABC. Per hæc centra porrò ex angulis A,B,C, rectæ ducantur AHK, AGL, AIT, BFL, BHS, CIM, CFK, CGS; secantes bases oppositas BD, CD, AB, AD, BC, bifariam, & ad angulos rectos, ex scholio propos. 12. lib. 13. in punctis K, L, M, S, T. Secentur quoque rectæ ex solidis angulis per centrum E, demissæ AF, BG, CH, DI, bifariam in N, O, P, Q, punctis, quorum quodlibet cum tribus proximis centris basium (centris, inquam, basium ipsam lineam, in qua punctum est, circumstantium, ita vt relinquatur centrum illius basis, in quam perpendicularis cadit.) rectis lineis coniungantur, vt N, cum G, H, I; O, cum F, H, I; P, cum F, G, I; & Q, cum F, G, H. Dico solidum NF, contentum quadrilateris NO, NP, NQ, FG, FH, FI, cubum esse. Cùm enim latera AF, FK, trianguli AFK, æqualia sint lateribus AF, FL, trianguli AFL, (quòd FK, FL, cùm perpendiculares sint ad BD, CD, ex centro F, ductæ, ostendant æquales distantias rectarum æqualium BD, CD, à centro F.) angulosque contineant rectos, ex 3. defin. lib. 11. [b] Æquales erunt & bases AK, AL, & anguli KAF, LAF. Rursus, quia latera AN, AH, trianguli ANH, æqualia sunt lateribus AN, AG, trianguli ANG, (sunt enim AH, AG, semidiametri triangulorum æquilaterorũ æqualium ABD, ACD.) angulos item comprehendunt æquales, vt demonstrauimus; [c] Æquales erunt bases NH, NG. Haud secus ostendentur æquales rectæ QG, QH, si rectæ ducantur DG, DH, necnon & reliquæ, cùm omnes subtendant æquales angulos æqualibus lateribus comprehensos; vt perspicuum est. Si enim recta ducatur FT, cùm latera AF, FT, æqualia sint lateribus AF, FK, (Sunt namque FT, FK, distantiæ rectarum æqualium BC, BD, à centro.) & anguli contenti recti, ex defin. 3. lib. 11. Æquales erunt anguli TAF, KAF. Ac proinde cùm latera AN, AI, æqualia sint lateribus AN, AH; (Sunt enim AI, AH, semidiametri triangulorum æquilaterorũ æqualium ABC, ABD;) angulosq; contineant æquales: [d] Æquales erũt bases NI, NH, &c. Sunt igitur sex dicta quadrilatera, æquilatera. Ostendamus iam, ipsa plana esse, atque rectangula, vt tandem quadrata esse concludamus, atque adeò componere cubum NF.

[b] 4. primi.

[c] 4. primi.

[d] 4 primi.




Assvmatvr quadrilaterum NQ, ductis rectis GH, NQ. Quoniam in pyramide latera BC, AD, opposita sunt, hoc est, non coeuntia in aliquo puncto; si eorum puncta media S, & T, coniungantur recta ST, erit ea diameter Octaedri in pyramide descripti, vt constat ex figura propos. 2. huius lib. Nam punctum S, huius figuræ respondet puncto H, illius, & punctum T, puncto F, cùm & in illa sint latera opposita, siue non coeuntia BC, AD. Quocirca cùm idem sit centrum pyramidis & Octaedri in ipsa descripti, vt mox demonstrabimus, transibit ST, per E, centrum Pyramidis, æqualesq; erunt ES, ET, nempe semidiametri Octaedri. Deinde quia BS, CS, perpendiculares sunt ad AD, per scholium propos. 12. lib. 13. [e] erunt HS, GS, ex centris H, & G, tertiæ partes perpendicularium BS, CS. Quare latera BS, CS, trianguli BSC, proportionaliter secantur, [f] atque idcirco HG, parallela est lateri BC, secatq; latera TS, CS, trianguli TSC, (quod quidem pars est trianguli BSC.) proportionaliter; ideoque & SR, tertia pars est ipsius ST; Ac proinde duæ tertiæ partes dimidiæ SE. Rursus, [g] quia DI, perpendicularis est ad triangulum ABC; erit EI, tertia pars semidiametri DE, ex coroll. 2. propos. 13. lib. 13. hoc est, qualium partium 3. ponetur DE, talium 1. erit EI, ac proinde talium 4, recta DI, ideoq; eius dimidium DQ, earundem partium 2. Quam ob rem reliqua EQ, talium partium erit 1. atque idcirco EQ, tertia pars erit ipsius DE. Eadem ratione EN, tertia pars erit ipsius AE; Ac propterea, cùm latera DE, AE, trianguli AED, proportionaliter secentur, [h] recta NQ, parallela erit lateri AD, secabitque latera ES, ED, trianguli DES, (quod quidem pars est trianguli AED.) proportionaliter, ideoque, cùm EQ, sit tertia pars ipsius DE; tertia pars erit ER, ipsius SE; Ac proinde SR, duæ tertiæ partes eiusdem SE. Quoniam igitur vtraque HG, NQ, ex SE, duas tertias partes abstulit, in eodem puncto R, secabitur SE, à rectis HG, NQ; Atque idcirco & ipsæ HG, NQ, in eodem sese puncto [i] intersecabunt. Quare in eodem sunt plano, propterea q; & rectæ HQ, QG, GN, NH, in eodem cum ipsis plano. Planum igitur est quadrilaterum NQ. Eademque est ratio de cæteris quinque. Quod autem & rectangulum sit, nunc demonstremus.

[e] 18. quartidecimi.

[f] 2. sexti.

[g] 15. quartidecimi.

[h] 2. sexti.

[i] 2. vndec.

Cvm ostensa sit HG, ipsi BC, parallela, atq; adeò triangulum SHG, simile triangulo SBC, ex
[k] 2. sexti.
coroll. propos. 4. lib. 6. [k] Erit vt SH, ad HG, ita SB, ad BC; & permutãdo, vt SH, ad SB, ita HG, ad BC:

ad B C: Est autem S H, tertia pars ipsius S B: Igitur & H G, tertia pars erit lateris B C. Haud secus ostendemus N Q, tertiam esse partem lateris A D. Cùm ergo latera B C, A D, sint æqualia, erunt & eorum tertiæ partes H G, N Q, æquales. Ac proinde cùm subtendantur æqualibus lateribus H N, G N; G Q, H Q; N G, Q G; N H, Q H; [a] Æquales erunt quatuor anguli, H N G, N G Q, G Q H, Q H N. Quocirca cùm ipsi sint quatuor rectis æquales, vt ostendimus ad propos. 32. lib. 1. recti erunt; ideoq; quadratum erit N Q. Eademq; ratione quadrata erunt reliqua quadrilatera: Ac propterea cubum constituent; qui ideò pyramidi dicetur inscriptus, licet impropriè, quòd quatuor eius anguli F, G, H, I, in centris quatuor basium pyramidis, quatuor verò reliqui N, O, P, Q, in bifariis sectionibus perpendicularium ex angulis pyramidis ad eius bases ductarum resideant, vt constat. [a] 8. primi.

ALITER. In data pyramide describatur Octaedrum, & in hoc Octaedro cubus; factumq; erit, quod iubetur. Quoniam enim octo anguli cubi statuuntur in centris octo basium Octaedri, quarum quatuor sunt in quatuor basibus pyramidis, vt constat ex propos. 2. huius lib. habentque eadem centra cum ipsis, vt mox ostendemus: fit, vt quatuor anguli cubi resideát in centris quatuor basium pyramidis, quemadmodum etiam in priori demonstratione dictum est. Rursus, quia reliquæ quatuor bases Octaedri parallelæ sunt basibus pyramidis, vt constat ex figura propos. 2. huius lib. ([b] cùm enim rectæ G, E H, parallelę sint rectis B C, B D; [c] erunt quoq; triangula E G H, B C D, per illas rectas ducta, inter se parallela, & sic de cæteris.) fit, vt perpendiculares ab angulis pyramidis in bases oppositas demissæ, sint quoque ad illas quatuor reliquas bases Octaedri perpendiculares, ex scholio propos. 14. lib. 11. Quare cùm prædictæ bases abscindant ex pyramide pyramides similes toti, cadent illæ perpendiculares in centra dictarum basium, quemadmodum & in centra basium totius pyramidis cadunt. [d] Et quia dictæ quatuor bases Octaedri diuidunt illas perpendiculares proportionaliter cum lateribus pyramidis, hoc est, bifariam: efficitur, vt reliqui quatuor anguli cubi statuantur in mediis punctis quatuor perpendicularium, veluti prior demonstratio docuit. Constat ergo cubum in pyramide esse descriptum, vt prius. In data itaque pyramide cubum descripsimus. Quod faciendum erat. [b] 2. sexti. [c] 15. vndec. [d] 17. vndec.

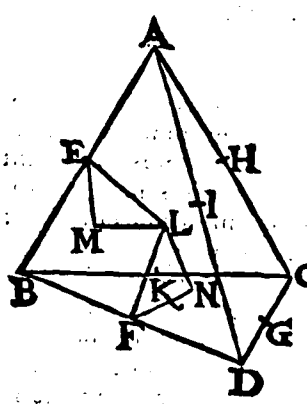
## COROLLARIVM I.

*CONSTAT ex his, idem esse centrum pyramidis, & cubi in ea descripti. Nam diametri cubi N F, O G, P H, Q I, cùm sint dimidiæ partes perpendicularium ex angulis pyramidis per eius centrum ad bases demissarum, per E, centrum pyramidis transeunt.*

## COROLLARIVM II.

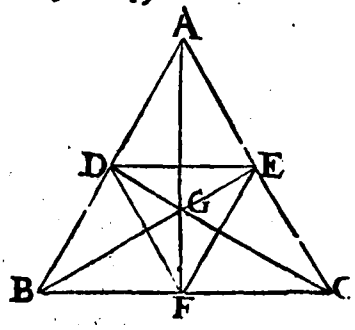
*INFERTVR quoque, rectam, quæ coniungit bifarias sectiones oppositorum laterum pyramidis, transire per cētrum pyramidis, triplamq; esse lateris cubi in pyramide descripti. Cùm enim E R, ex E, centro cubi, in R, centrum basis G N H Q, ducta, dimidium sit lateris cubi, vt constat; Recta R S, dupla ipsius E R, æqualis erit lateri cubi. Cùm igitur R S, ostensa sit tertia pars ipsius S T; perspicuum est, rectam S T, coniungentem S, & T, bifarias sectiones laterum oppositorum pyramidis A D, B C, transire per centrū pyramidis, triplamq; esse lateris cubi R S.*

## LEMMA.




*IDEM autem esse centrum Pyramidis, & Octaedri in ea descripti, idemq; centrum basis pyramidis, & basis Octaedri in ea descripti, ita demonstrabimus. Sit primùm pyramis A B C D, cuius omnia sex latera bifariam secentur in E, F, G, H, I, K; & ex L, centro Pyramidis in bases A B D, B C D, perpendiculares demittantur L M, L N, quæ in centra circulorum dictas bases circumscribentium cadent, ex corollario lemmatis primi, propositionis decimæ, libri decimiquarti. Coniunctis autem rectis L E, E M, L F, F N; quoniam latera L M, M E, trianguli L M E, æqualia sunt lateribus L N, N F, trianguli L N F, (cùm enim circuli bases A B D, B C D, circumscribentes sint æquales, æqualiter distabunt ipsi à centro L, per lemma secundū, propositionis 10. lib. 14. Ac propterea eorum distantiæ L M, L N, æquales erunt. Sic quoque æquales erunt M E, N F, distantiæ rectarum æqualium A B, B D, à centris M, & N, circulorum æqualium) angulosq; comprehendunt rectos, per defin. 3. lib. 11. [a] Æquales erunt rectæ L E, L F. Eademq; ratione hisce æquales erunt, & inter se rectæ L G, L H, L I, L K. Quare cùm anguli Octaedri in pyramide descripti constituantur in punctis E, F, G, H, I, K, vt ex 2. propos. huius lib. constat: Erit L, centrum* [a] 4. primi.

*Octaedri, cùm ab eo omnes lineæ cadentes in eius angulos sint æquales. Cùm igitur & L, centrum fuerit pyramidis; idem erit centrum pyramidis & Octaedri in ea descripti.*



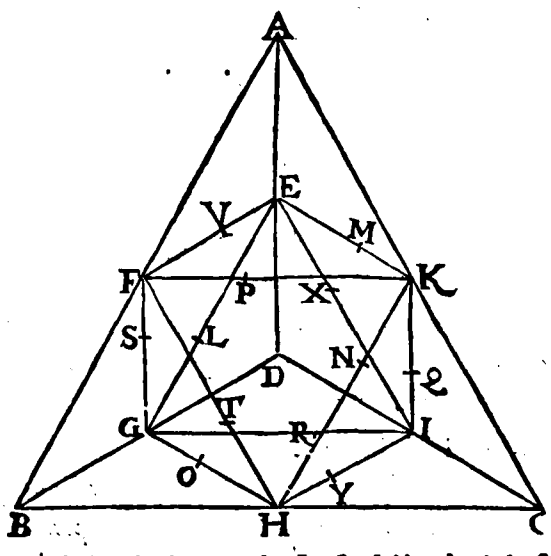

2 4. primi.

*Sit deinde in basi pyramidis A B C, basis Octaedri D E F, quæ secabit illius latera bifariam, vt patet ex propos. 2. huius lib. sit autem G, centrum trianguli A B C, à quo ad angulos vtriusque basis rectæ ducantur. Quia igitur latera A G, A D, lateribus B G, B F, æqualia sunt, angulosq; continent æquales, nimirum semisses angulorum æqualium trianguli æquilateri, erunt & bases G D, G F, æquales: Eademq; ratione erit G E, vtrique G D, G F, æqualis. Igitur G, centrum est trianguli D E F. quod est propositum.*

## PROBL. 19. PROPOS. 19.

### In data Pyramide Icosaedrum describere.

a 2. quinti decimi.




Datæ Pyramidi A B C D, [a] inscribatur Octaedrum E F G H I K, cuius omnia duodecim latera secentur extrema ac media ratione, hac lege, vt bina sumantur ex singulis angulis sibi respondentia, hoc est, in angulos oppositos quadratorũ Octaedri cadentia, vt in propos. 16. huius lib. diximus, qualia sunt E G, E K; H K, H G; K F, K I; G I, G F; F H, F E; I E, I H, in punctis L, M, N, O, P, Q, R, S, T, V, X, Y. Nam si quodlibet horum punctorum cum quinq; proximis coniunxerimus lineis rectis, vt M, cum V, L, X, P, & Q, &c. descriptum erit Icosaedrum in dicto Octaedro, vt constat ex propos. 16. huius lib. habens omnes duodecim angulos in duodecim præfatis sectionibus duodecim laterum Octaedri. Cùm ergo hæc ipsa latera Octaedri in planis basium Pyramidis sint ducta; manifestum est, duodecim angulos Icosaedri in planis basium pyramidis constitui, ternos scilicet in singulis, quòd & terna latera Octaedri in singulis basibus pyramidis ducta sint. Nam in basi A B C, existũt latera F H, H K, K F; In A B D, latera E F, F G, G E; In B D C, latera G H, H I, I G; In A D C, denique latera I K, K E, E I. Quare dictum Icosaedrum in Pyramide descriptum erit, per defin. 11. lib. 11. cuius quidem quatuor bases M X Q, R O Y, L S V, N P T, in quatuor basibus Pyramidis existunt, vt constat: In data igitur Pyramide Icosaedrum descripsimus. Quod erat faciendum.

## PROBL. 20. PROPOS. 20.

### In data Pyramide Dodecaedrum describere.

b 19. quinti decimi. c 5. quinti decimi.

Pyramidi datæ [b] inscribatur Icosaedrum, [c] & in hoc Dodecaedrum habeas, viginti suos angulos in centris viginti basium Icosaedri; Factumque erit, quod iubetur. Cùm enim quatuor bases Icosaedri existant in quatuor basibus pyramidis, vt in præcedenti propos. diximus; consistent quatuor anguli Dodecaedri dicto Icosaedro inscripti in quatuor basibus pyramidis, nempe in earum centris. Sunt enim dictæ quatuor bases Icosaedri quatuor basibus Pyramidis concentricæ, vt

d 8. quinti decimi. e 18. quinti decimi.

constat ex 2. coroll. propos. 16. huius lib. Deinde, [d] quia cubus Dodecaedro inscriptus octo suos angulos in octo angulis Dodecaedri collocat: Item cubus pyramidi inscriptus, [e] quatuor angulos in centris basium pyramidis, de quibus iam dictum est, quatuor autem reliquos in bifariis sectionibus perpendicularium ex angulis pyramidis in bases demissarum constituit; collocabuntur quatuor anguli Dodecaedri, cum his quatuor angulis cubi conuenientes, in eisdem bifariis sectionibus perpendicularium dictarum: supersunt autem duodecim anguli Dodecaedri, quorum bini singulis lateribus Pyramidis supponentur; Atque adeò dictum Dodecaedrum descriptum esse dicetur in pyramide proposita, etiam si non propriè. Quam ob rem in data Pyramide Dodecaedrum descripsimus. Quod faciendum erat.

13.

## PROBL. 21. PROPOS. 21.

### In dato solido regulari sphæram describere.

Ex cen-

Ex centro sphærę datum solidum complectentis ad singulas bases perpendiculares demittantur, quæ ex coroll. lemmatis 1. propos. 10. lib. 14. cadent in centra circulorum bases circumscribentium, ideoque æquales erunt, quòd dicti circuli, æquales cùm sint, æqualiter à centro distent, ex lemmate 2. eiusdem propos. Quapropter sphæra, cuius semidiametri sunt præfatæ perpendiculares æquales, in solido descripta erit, cùm eius superficies conuexa singulas bases in earum centris contingat.

## SCHOLIVM.

*ITAQVE, cùm quodlibet quinque solidorum regularium in quatuor reliquis inscribatur, vt sint in vniuersum viginti inscriptiones; vnum duntaxat Dodecaedrum improprie describitur in cubo, Octaedro, atque Pyramide, vt perspicuum est ex propos. 13. 17. & 20. huius lib. Similiter vnus tantummodo cubus non proprie in Pyramide describitur, vt ex propos. 18. huius lib. est manifestum. Nam, vt propriè solidum aliquod in solido dicatur describi, necesse est, omnes angulos solidi inscripti constitui vel in angulis, vel in lateribus, vel denique in planis, siue basibus solidi, cui inscribitur, vt defin. 31. lib. 11. exposuimus: quæ quidem conditio Dodecaedro si describatur in cubo, Octaedro, & Pyramide; nec non & cubo, si describatur in Pyramide, non conuenit.*

*CAETERVM inter omnia quinque solida regularia, vnum Octaedrum reliqua quatuor mutuò sibi inuicem suscipit inscripta. [a] In Octaedro enim describitur Icosaedrum constituens duodecim suos angulos in duodecim punctis, quibus duodecim latera Octaedri extrema ac media ratione secantur. Deinde [b] Icosaedro imponitur Dodecaedrum, quod eidem Octaedro inscriptum est, vt constat ex propos. 17. huius lib. Post hæc in Dodecaedro [c] describitur cubus, cuius octo anguli, cum octo angulis Dodecaedri conuenientes, centra basium Octaedri possident; ac propterea & cubus ipse in Octaedro descriptus est. [d] Denique in cubo Pyramis includitur, quæ ideò in Octaedro dicetur esse descripta, quòd eius anguli quatuor, cum quatuor angulis cubi conuenientes, in centris quatuor basium Octaedri resideant. Hoc autem priuilegium reliquis solidis regularibus denegari, perspicuum est ex dictis.*

a 16. quintidecimi.
b 5. quintidecimi.
c 8. quintidecimi.
d 1. quintidecimi.

*NEQVE verò prætereundum est, Dodecaedrum, sibiq; inscriptum cubum, & huic cubo inscriptam pyramidem, eadem sphæra comprehendi. [e] Cùm enim quatuor anguli pyramidis ex octo angulis cubi quatuor possideant, [f] conueniantq; omnes anguli cubi cum octo angulis Dodecaedri; liquidò constat, sphæram Dodecaedro circumscriptam complecti quoq; cubum atque Pyramidem, cùm sphæra illius superficies per horum solidorum angulos incedat.*

e 1. quintidecimi.
f 8. quintidecimi.

*PARI ratione ex dictis manifestum est, Dodecaedrum, cubum, atque Pyramidem similiter inscribi Icosaedro, Octaedro, & Pyramidi. Illorum enim anguli in horum basium centris constituuntur, vt demonstratum est: In centris quidem, basium Icosaedri, propos. 5. 11. & 12. In centris verò basium Octaedri, propos. 17. 4. & 6. In centris denique basium pyramidis propos 20. & 18. huius lib.*

*VIGINTI porrò prioribus huius lib propositionibus omnes delineationes inscriptionesve quinque solidorum regularium, vnius in alio, quotquot excogitari possunt, absoluimus, cùm in quolibet reliqua quatuor designauerimus. In Pyramide enim Octaedrum, cubum, Icosaedrum, atque Dodecaedrum, propos. 2. 18. 19. 20. In Octaedro verò, Pyramidem, cubum, Icosaedrum, & Dodecaedrum, propos 6. 4. 16. 17. In cubo deinde Pyramidem, Octaedrum, Icosaedrum, ac Dodecaedrum, propos. 1. 3. 14 13. In Icosaedro autem, Pyramidem, Octaedrum, cubum, atque Dodecaedrum, propos. 12. 15. 11. 5. In Dodecaedro denique, Pyramidem, Octaedrum, cubum, & Icosaedrum, propos. 10. 9 8. 7. descripsimus. At verò posteriori vnica propositione, qua arte in quouis solido regulari sphæra depingatur, docuimus.*

FINIS ELEMENTI QVINTIDECIMI.

# ELEMENTVM SEXTVMDECIMVM:

## Quo variæ ſolidorum regularium ſibi mutuò inſcriptorum, & laterum eorundem comparationes explicantur, à Franciſco Fluſſate Candalla adiectum; & de quinque corporibus,

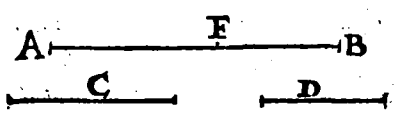
## LIBER TERTIVS.

*VEMADMODVM libro 14. tradita ſunt comparationes quam plurimæ figurarum regularium, & laterum earundem in eadem ſphæra deſcriptarum, quarum quidem deſcriptionem libro 13. expoſuit Euclides; ita etiam Franciſcus Fluſſas Candalla hoc lib. 16. inter ſe comparat eaſdem figuras regulares ſibi mutuò inſcriptas, nec non & earundem latera, quam quidem inſcriptionem præcedenti lib. 15. tradidimus. Itaque cum connexionem habet hic liber 16. cum præcedenti 15. quam quartusdecimus cum tertiodecimo habuit; vt imperfecta quodammodo videri poſſit tractatio hac quinque corporum regularium, ſi liber hic decimuſextus non adiungatur.*

### THEOR. 1. PROPOS. 1.

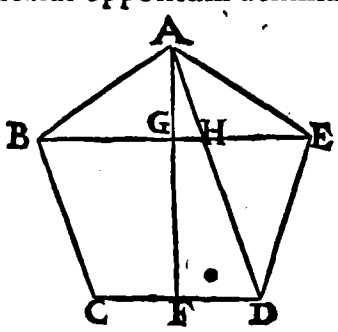
SI in Dodecaedro cubus deſcribatur, & in hoc cubo aliud Dodecaedrum: erit proportio Dodecaedri exterioris ad Dodecaedrum interius proportionis, q̃ habet maius ſegmentũ ad minus rectę lineæ diuiſæ extrema ac media ratione, triplicata.

LATVS cubi in Dodecaedro, cuius latus C, deſcripti ſit: A B, & latus Dodecaedri in cubo lateris A B, deſcripti ſit D; diuidaturq; A B, latus cubi in E, extrema ac media ratione. Dico Dodecaedrum lateris C, ad Dodecaedrum lateris D, proportionem habere triplicatam proportionis, quã habet A E, maius ſegmentum ad E B, minus. Cùm enim, vt in ſcholio vltimæ propoſ. lib. 15. docuimus, Dodecaedrum, cubusq; in illo deſcriptus, eadem comprehendantur ſphęra; Diuiſo autem latere cubi extrema ac media ratione, maius ſegmentum ſit latus Dodecaedri in eadẽ ſphæra cum cubo deſcripti, ex coroll. 1. propoſ. 17. lib. 13. erit A E, maius ſegmentum lateris cubi æquale lateri C, Dodecaedri in eadem ſphæra, & circa cubum illum deſcripti. Rurſus quia ex demonſtratis in ſcholio propoſ. 13. lib. 15. ſi diuidatur latus cubi extrema ac media ratione, minus ſegmentum eſt latus Dodecaedri in cubo illo deſcripti; erit E B, minus ſegmẽtum lateris cubi æquale lateri D, Dodecaedri, quod in illo cubo deſcribitur; Ac propterea erit vt C, latus Dodecaedri cubo circumſcripti ad D, latus Dodecaedri eidem cubo inſcripti, vt A E, maius ſegmẽtum ad E B, minus: Atqui Dodecaedrum lateris C, ad Dodecaedrum lateris D, proportionem habet triplicatam lateris C, ad latus D, ex coroll. propoſ. 17. lib. 12. Igitur idem Dodecaedrum lateris C, ad Dodecaedrum lateris D, proportionem quoque habet triplicatam maioris ſegmenti A E, ad minus ſegmentum E B. Quocirca ſi Dodecaedro cubus inſcribatur, &c. Quod erat demonſtrandum.




### THEOR. 2. PROPOS. 2.

LINEA perpendicularis ex quouis angulo pentagoni æquilateri & æquianguli in latus oppoſitum demiſſa, ſecatur à recta illum angulum ſubtendente, extrema ac media ratione.




IN pentagono æquilatero, & æquiangulo A B C D E, ex angulo A, ad latus oppoſitum C D, perpendicularis demittatur A F. Dico A F, à recta B E, ſubtendente angulum A, ſecari in G, extrema ac media ratione. Ducta enim recta A D, quæ ſecet B E, in H; quoniam B E, recta lateri C D, ex ſcholio propoſ. 8. lib. 4. eſt parallela, [a] ſecabuntur rectæ A F, A D, proportionaliter: [b] Atqui A D, in H, ſecta eſt extrema ac media ratione, eſtq; maius ſegmentum D H. Igitur & A F, in G, ſimiliter erit ſecta. Quocirca linea perpendicularis ex quouis angulo, &c. Quod erat demonſtrandum.

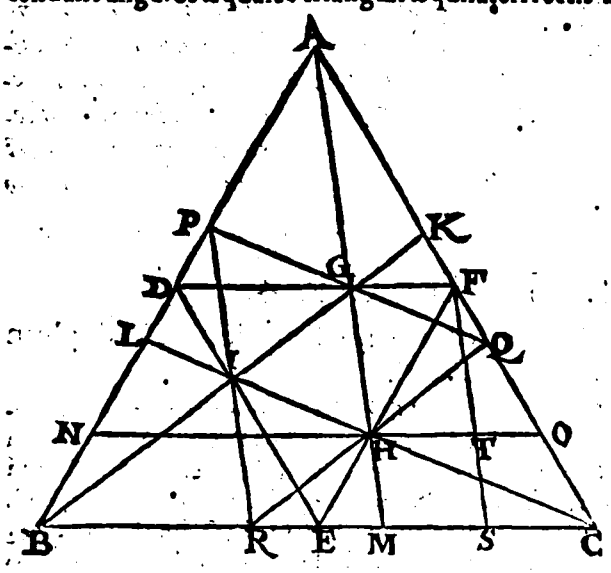
*a 2. ſexti.*
*b 18. tertiædecimi.*

THEOR

# THEOR. 3. PROPOS. 3.

SI ab angulis trianguli Pyramidis ducantur rectæ oppoſita latera ſecantes extrema ac media ratione, ita vt prope quemuis angulum ſit maius ſegmentũ vnius lateris, & minus alterius: Hæ ſectionibus ſuis in medio producent baſin Icoſaedri in dicta Pyramide deſcripti, inſcriptam quidem alij triangulo æquilatero, cuius anguli latera trianguli Pyramidis ſecant extrema ac media ratione, & latera ipſa bifariam ſecantur ab angulis baſis Icoſaedri.

TRIANGVLVM Pyramidis ſit A B C, cuius latera ſecẽtur bifariam in D, E, F, iunctis rectis D E, E F, F D, quibus rurſum ſectis extrema ac media ratione in G, H, I, iungantur rectæ G H, H I, I G, conſtituentes G H I, triangulum Icoſaedri in dicta Pyramide deſcripti, vt conſtat ex propoſ. 19. lib. 15. Secentur deinde latera trianguli A B C, extrema ac media ratione in K, L, M, iunctis rectis B K, C L, A M. Dico has rectas ſuis ſectionibus producere triangulum Icoſaedri G H I, hoc eſt, rectam B K, tranſire per puncta G, I; & rectam C L, per puncta H, I; & rectã A M, per puncta G, H. Ducta enim per H, recta N O, ipſi B C, parallela; erit triangulum F H O, triangulo F E C, ſimile, ex coroll. propoſ. 4. lib. 6. ideoq; & æquilaterum, cùm & F E C, æquilaterum ſit, quippe quòd ſimile ſit triangulo A B C, per idem coroll. Quare H O, recta æqualis eſt rectæ F H, maiori ſegmento rectæ F E, ſeu D F, ipſi æqualis: (Eſt enim & D E F, triangulum æquilaterum, cùm eius latera ſubtendant angulos æquales trianguli æquilateri rectis æqualibus, dimidiis ſcilicet æqualium laterũ eiuſdem trianguli comprehenſos; [a] ideoq; æqualia ſint.) [b] Eſt autẽ & N H, æqualis toti D F, in parallelogrammo D H, [c] propterea quòd F H, D F, parallelæ ſunt rectis A B, B C, ſeu N O. Igitur recta N O, compoſita ex N H, tota, & H O, maiori ſegmento; [d] ſecta erit in H, extrema ac media ratione; Ac proinde, cùm tres parallelæ B C, N O, D F, ſimiliter ſint ſectæ in M, H, G, nimirum extrema ac media ratione; Recta autem A M, ex iis, quæ demonſtrauimus ad propoſ. 4. lib. 6. ſecet eaſdem ſimiliter; liquidò conſtat, ipſam A M, tranſire per puncta G, H. Haud ſecus oſtendemus B K, per puncta G, I, & C L, per puncta H, I, tranſire, ſi per G, & I, rectæ ducantur parallelæ lateribus A C, A B; Atque idcirco rectæ B K, C L, A M, ſuis ſectionibus producent triangulum Icoſaedri G H I.

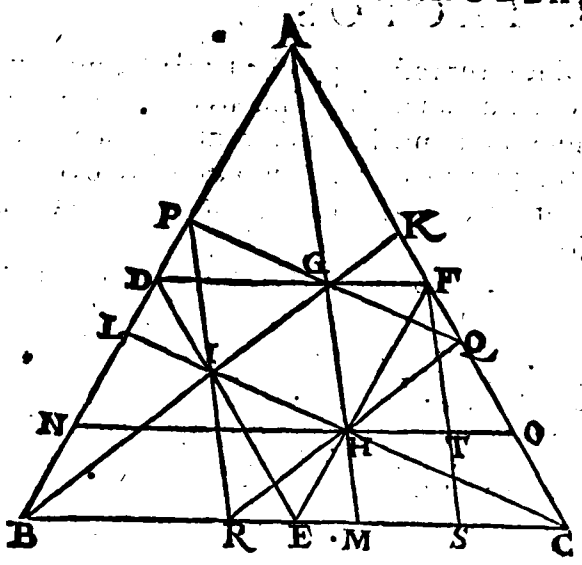



[a] 4 primi.
[b] 34. primi.
[c] 2. ſexti.
[d] 5. tertiædecimi.

AGATVR iam per G, recta P Q, rectæ C L, parallela. Quoniam igitur A F, æqualis eſt rectæ D F, ſeu rectæ F E, cuius maius ſegmentum fuit F H, hoc eſt, F O, illi æqualis; Erit quoq; F O, maius ſegmentum rectæ A F; [e] ac proinde tota A O, ſecta in F, extrema ac media ratione; [f] Eſt autem vt A F, ad F O, ita A G, ad G H, ob triangulum A H O; & vt A G, ad G H, ita A Q, ad Q C, & A P, ad P L, ob triangula A H C, A H L. Igitur & rectæ A H, A C, A L, ſecantur in G, Q, P, extrema ac media ratione, ſuntque maiora ſegmenta A G, A Q, A P. Rectæ ergo A Q, A L, ſegmenta maiora rectarum æqualium A C, A B, æquales erunt. Quia verò eſt [g] vt A Q, maius ſegmentum, ad Q C, minus, ita A L, tota ad A P, maius ſegmentum; Et eſt A Q, recta rectæ A L, æqualis: Erit & Q C, recta æqualis rectæ A P. Quare & recta A P, minus ſegmentum erit lateris A B, maiusque reliqua B P; ac propterea recta P Q, ſecabit latera B A, A C, extrema ac media ratione. Eadem ratione recta P R, quæ per I, ducitur, parallela rectæ A M, ſecabit latera C B, B A, extrema ac media ratione, ideoque in punctum P, cadet. Non aliter recta R Q, per H, ducta parallela rectæ B K, latera A C, C B, ſecabit extrema ac media ratione, atque adeò in puncta R, Q, cadet. Quoniam verò ſingula latera trianguli P Q R, cùm ſubtendant angulos æquales trianguli æquilateri æqualibus lineis comprehenſos, nimirum maiore & minore ſegmento ſingulos, [h] æqualia inter ſe ſunt; erit triangulum P Q R, ex ipſis compoſitum, æquilaterum, cuius quidem latera bifariam ſecantur ab angulis trianguli Icoſaedri G H I: (Cùm enim in triangulo A C L, recta P Q, parallela ſit lateri C L, ſecabuntur P Q, L C, in eaſdem rationes, ex iis, quæ ad propoſ. 4. lib. 6. demonſtrauimus: Diuidatur autem C L, bifariam in H, ob triangulum A C L, in quo F H, parallela eſt lateri A L, [i] ſecans proportionaliter latera C A, C L. Igitur & P Q, bifariam ſecatur in G. Eademque eſt ratio de reliquis Q R, R P.) Ac propterea triangulum Icoſaedri G H I, inſcriptum eſt triangulo æquilatero P Q R, cuius anguli diuidunt latera baſis pyramidis extrema ac media ratione, & latera ipſa bifariam ſecantur in G, H, I, ab angulis baſis Icoſaedri G H I. Quapropter, ſi ab angulis trianguli Pyramidis, &c. Quod oſtendendum erat.

[e] 5. tertiædecimi.
[f] 2. ſexti.
[g] 2. quartidecimi.
[h] 4 primi.
[i] 2. ſexti.

COROLLARIVM.

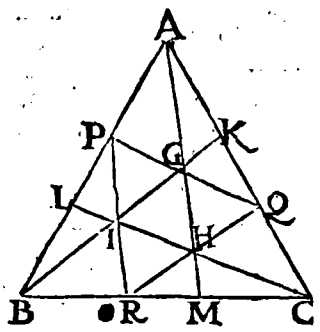



*Ex his facilè colligi potest, latus Icosaedri Octaedro inscripti, maius esse segmentum rectæ diuisæ extrema ac media ratione, quæ ab vno angulo basis Octaedri ducta secat latus oppositum extrema quoque ac media ratione. Cùm enim, vt constat ex propos. 16 lib. 15. G H I, triangulum sit Icosaedri in Octaedro, cuius basis D E F, descripti; ducatur ex angulo F, trianguli F E C, quod triangulo D E F, est æquale, recta F S, parallela rectæ A M, secans M C, H O, in S, & T.* [a] *Cùm igitur M C, bifariam secetur in S, ob triangulum A M C;* [b] *sitq; M S; ipsi G F, æqualis, ob parallelogrammũ G S; Erit & S C, æqualis eidem G F, minori segmento rectæ D F; Ac propterea cùm tota D F, E C, æquales sint; erit quoque reliqua E S, reliquæ D G, maiori segmento æqualis: Idcoq; E C, in S, secta erit extrema ac media ratione.* [c] *Deinde quia F E, F S, similiter secantur; secatur autem F E, extrema ac media ratione; secabitur & F S, in T, extrema ac media ratione, maiusq; segmentum erit F T, recta* [d] *æqualis existens lateri Icosaedri G H, ob parallelogrammum G T. Igitur F T, latus Icosaedri Octaedro inscripti, maius est segmentum rectæ F S, quæ diuidit E C, latus Octaedri extrema ac media ratione, ex angulo F, demissa. Quod est propositum.*

a 2. sexti.
b 34. primi
c 2. sexti.
d 34. primi

## THEOR. 4. PROPOS. 4.

MINVS segmentum lateris Pyramidis extrema ac media ratione sectæ, duplum est potentia lateris Icosaedri in ea Pyramide descripti.




BASIS Pyramidis sit A B C, cuius latera extrema ac media ratione secentur in K, L, M, & ductis rectis B K, C L, A M, producentibus G H I, basim Icosaedri in illa pyramide descripti, inscriptâ triangulo æquilatero P Q R, cuius anguli latera trianguli A B C, secent extrema ac media ratione in P, Q, R, & ipsa latera P Q, Q R, R P, bifariam diuidantur in G, H, I, vt in propos. præcedenti demonstratum est. Dico A P, minus segmentum lateris Pyramidis duplum esse potentia lateris Icosaedri H I. Cùm enim P Q, dupla sit potentia minoris segmenti A P, ex coroll. 1. propos. 16. lib. 15. quadrupla verò potentia rectæ H I, ex scholio propos. 4. lib. 2. quòd P Q, recta dupla sit rectæ P G, hoc est, sibi æqualis H I, ob parallelogrammum P H; Erit P Q, potentia 4. & A P, 1. & H I, 1. Quamobrem A P, dupla erit potentia rectæ H I. Minus ergo segmentum lateris, &c. Quod erat demonstrandum.

COROLLARIVM.

*SEQVITVR ex his, latus Icosaedri in Pyramide descripti, esse Apotomen.* [e] *Cùm enim diameter sphæræ potentia sesquialtera sit lateris Pyramidis; si diameter ponatur Rationalis, erit & latus Pyramidis Rationale,* [f] *cùm diametro potentia sit commensurabile.* [g] *Quare minus segmentum lateris Pyramidis extrema ac media ratione secti Apotome erit; Atque adeò* [h] *cùm minori segmento lateris Pyramidis latus Icosaedri potentia sit commensurabile; (ostendimus enim minus segmentum potentia esse duplum lateris Icosaedri.) Erit & latus Icosaedri, ex scholio propos. 104. lib. 10. Apotome.*

e 13. tertiidecimi.
f 6. decimi
g 6. tertiidecimi.
h 6. decimi

## THEOR. 5. PROPOS. 5.

LATVS cubi potentia dimidium est lateris Pyramidis in eo descriptæ: Latus verò Pyramidis duplum est longitudine lateris Octaedri sibi inscripti: latus denique cubi duplum est potentia lateris sibi inscripti Octaedri.

CVM

CVM enim latus Pyramidis in cubo descriptæ diameter sit basis cubi, vt constat ex propos.1. lib.15. Sit autem quadratum huius diametri duplum basis cubi, hoc est, quadrati lateris cubi, ex scholio propos. 47. lib. 1. Manifestum est, latus cubi dimidium esse potentia lateris Pyramidis in cubo illo descriptæ.

RVRSVS, quia rectæ coniungentes bifarias sectiones laterum Pyramidis constituunt Octaedrum in Pyramide descriptum, vt liquet ex propos.2. lib.15. Est autem latus trianguli æquilateri duplum rectæ coniungentis bifarias eius sectiones, cùm ea recta æqualis sit dimidio lateris trianguli, vt constat ex coroll. propos.4. lib.6. [a] Nam cùm sit parallela tertio lateri, auferet triangulũ æquilaterũ, &c. Perspicuũ est latus pyramidis duplũ esse longitudine lateris Octaedri sibi inscripti. [a] 2. sexti.

DENIQVE [b] quia diameter sphæræ, seu Octaedri potentia est dupla lateris Octaedri; Est autem latus cubi æquale diametro Octaedri sibi inscripti, cùm diameter Octaedri coniungat centra basium cubi oppositarum, vt in coroll. propos.3. lib.15. diximus: patet, latus cubi potentia esse duplum lateris Octaedri in eo descripti. Quocirca latus cubi potentia dimidium est lateris Pyramidis, &c. Quod erat ostendendum. [b] 14. tertiædecimi.

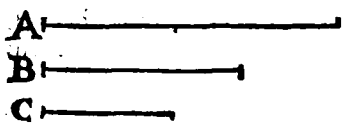
## THEOR. 6. PROPOS. 6.

LATVS Dodecaedri maius segmentum est rectæ, quæ potentia est dimidia lateris Pyramidis sibi inscriptæ.

CVM enim Pyramis inscripta cubo, descripta sit quoque in Dodecaedro, cui ille cubus inscribitur, vt docuimus propos.10. lib.15. Sit autem latus Dodecaedri maius segmentum, ex coroll.1. propos.17. lib.13. lateris cubi, qui in eo describitur; [c] existat denique latus cubi dimidium potentia lateris Pyramidis sibi inscriptæ: Apertè colligitur, latus Dodecaedri maius esse segmentum rectæ, quæ potentia dimidia est lateris Pyramidis sibi inscriptæ. Quod erat demonstrandum. [c] 5. sextædecimi.

## THEOR. 7. PROPOS. 7.

SI in cubo describatur & Icosaedrum, & Dodecaedrum: Latus Icosaedri medium proportionale erit inter latus cubi, & Dodecaedri.




SIT latus cubi A, & latus Icosaedri in eo descripti B, latus denique Dodecaedri in eodem cubo descripti C. Dico B, latus Icosaedri medio loco esse proportionale inter A, latus cubi, & C, latus Dodecaedri. Cùm enim, ex iis, quę in scholio propos.14. lib.15. demonstrata sunt, B, latus Icosaedri maius segmentum sit lateris cubi A; & C, latus Dodecaedri, per ea, quæ in scholio propos.13. eiusdem lib. ostendimus, minus segmentum sit eiusdem lateris cubi: Planum fit, ita esse A, totam ad B, maius segmentum, vt B, maius segmentum ad C, minus. Si in cubo itaque describatur & Icosaedrum, &c. Quod ostendendum erat.

## THEOR. 8. PROPOS. 8.

LATVS Pyramidis potentia Octodecuplum est lateris cubi in ea descripti.

CVM enim, per ea, quæ propos.18. lib.15. sunt demõstrata, latus Pyramidis longitudine triplum sit diametri basis cubi in ea descripti, (ostensum enim est ibi, G H, diametrum basis cubi inscripti, tertiam esse partem lateris Pyramidis B C.) [d] Et quadrata proportionem habeant laterum duplicatam: Erit quadratum lateris Pyramidis noncuplum quadrati diametri basis cubi in ea descripti, cùm noncupla proportio sit triplæ duplicata, vt in his numeris 1.3.9. apparet. Quare, cùm quadratum diametri basis cubi duplum sit ipsius basis cubi, ex scholio propos.47. lib.1. fit, vt si ponatur basis cubi, hoc est, quadratum lateris cubi 1. quadratum eiusdem basis diametri sit 2. & quadratum lateris pyramidis 18. Quamobrem latus Pyramidis potentia octodecuplum est lateris cubi in ea descripti. Quod erat ostendendum. [d] 20. sexti.

## THEOR. 9. PROPOS. 9.

LATVS Pyramidis potentia octodecuplum est rectæ extrema ac media ratione sectæ, cuius maius segmentum latus est Dodecaedri in pyramide descripti.

CVM enim cubus in Dodecaedro descriptus, inscriptus quoque sit Pyramidi, cui illud Dodecaedrum inscribitur, vt docuimus in scholio propos. vlt. lib. 15. [e] Erit latus Pyramidis potentia octodecuplum lateris cubi sibi, & Dodecaedro inscripti: Huius autem lateris cubi extrema ac media ratione secti maius segmentum est, ex coroll.1. propos.17. lib.13. latus Dodecaedri in pyramide descripti, in quo nimirum cubus est descriptus. Igitur latus Pyramidis potentia octodecuplum est rectæ extrema ac media ratione sectæ, cuius maius segmentum latus est Dodecaedri in Pyramide descripti. Quod demonstrandum erat. [e] 8. sextædecimi.

## THEOR. 10. PROPOS. 10.

SI in Octaedro Icosaedrum describatur: Erit latus Icosaedri potentia duplum minoris segmenti lateris Octaedri extrema ac media ratione diuisi.

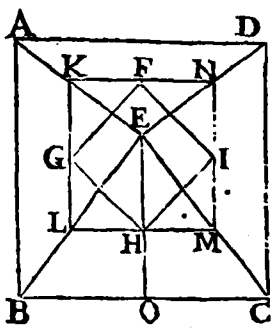
VT enim constat ex propos.16.lib.15.recta coniungens duas sectiones duorum laterum Octaedri rectum angulum continentium prope minora segmenta, (qualis fuit ibi recta G I, subtendens angulum rectum G A I, minoribus segmentis A G, A I, comprehẽsum;) latus est Icosaedri in Octaedro descripti. Quare, [a] cùm hoc ipsum latus Icosaedri possit duo illa minora segmenta æqualia; duplum poterit vnius minoris segmenti. Si in Octaedro ergo Icosaedrum describatur, &c. Quod erat demonstrandum.

a 47.primi.

## THEOR. 11. PROPOS. 11.

LATVS Octaedri potentia quadruplum sesquialterum est lateris cubi in ipso descripti.

SIT vna sex pyramidum Octaedri A B C D E, cuius basis quadratum A B C D, triangula verò ad E, verticem, A B E, E B C, C E D, D E A, sintq; horum triangulorum centra F, G, H, I, per quæ rectæ ducantur K L, L M, M N, N K, rectis A B, B C, C D, D A, parallelæ. Quod si coniungantur rectæ F G, G H, H I, I F; erit F G H I, quadratum cubi in Octaedro descripti, vt demonstrauimus propos. 4. lib. 15. Quoniam autem ducta recta E H O, sesquialtera est rectæ E H, per coroll. propos. 18. lib. 14. qualium partium 3. ponetur E O, talium 2. erit E H: [b] Atqui vt E O, ad E H, ita est E B, ad E L. Igitur qualium partium 3. continet E B, talium 2. erit E L, seu L M, sibi æqualis; Ac propterea quadratum lateris Octaedri E B, partium erit 9. & quadratum rectæ L M, nimirum K L M N, partium 4. ideoq; & quadratũ lateris cubi G H, videlicet F G H I, talium partium 2. cùm quadratum L N, duplum sit quadrati G I, sibi inscripti, per ea, quæ in scholio propos. 47. lib. 1. demonstrauimus. Est enim L N, quadratum ex diametro quadrati G I, descriptum; [c] cùm G I, diameter (si ducatur) æqualis *sit lateri* L M. Quapropter latus Octaedri E B, potentia quadruplum sesquialterum est lateris cubi G H, cùm eorum quadrata proportionem habeant, quam 9. 2. Latus igitur Octaedri potentia quadruplum sesquialterum est lateris cubi in eo descripti. Quod erat demonstrandum.




b 2. sexti.

c 33.primi.

### COROLLARIVM

*QVIA verò latus cubi extrema ac media ratione diuisum, efficit maius segmentum latus Dodecaedri, cui inscribitur, per coroll. 2. propos. 13. lib. 15. Inscribunturq; Dodecaedrum, & cubus sibi inscriptus, eidem Octaedro, vt docuimus in scholio propos. vltima, lib. 15. Perspicuum fit, Octaedri latus esse potentia quadruplum sesquialterum eius rectæ extrema ac media ratione diuisæ, cuius maius segmentum latus est Dodecaedri Octaedro inscripti. Est enim eiusmodi recta latus cubi eidem Octaedro inscripti, cuius quadruplum sesquialterum potentia esse ostendimus latus Octaedri.*

## THEOR. 12. PROPOS. 12.

LATVS Icosaedri maius segmentum est eius rectæ extrema ac media ratione sectæ, quæ potentia dupla est lateris Octaedri in Icosaedro descripti.

QVONIAM Icosaedri in cubo descripti sex latera opposita in sex basibus cubi collocata sunt, quorum bifarias sectiones cõiungunt tres rectæ lateri cubi æquales, vt constat ex propos. 14. lib. 15. eiusq; scholio. Et in bifariis sectionibus dictorum sex laterum Icosaedri residentsex anguli Octaedri in Icosaedro descripti, ex propos. 15. eiusdem lib. 15. Fit diametrum Octaedri in dicto Icosaedro descripti æqualem esse lateri cubi, in quo Icosaedrum describitur. Quare cùm, per ea, quæ ad propos. 14. lib. 15. ostendimus, latus Icosaedri sit maius segmentum lateris cubi prædicti extrema ac media ratione diuisi; Erit quoque idem latus Icosaedri maius segmentum diametri Octaedri in illo Icosaedro descripti. [d] Atqui diameter sphæræ, seu Octaedri dupla est potentia lateris Octaedri. Igitur latus Icosaedri maius segmentum est eius rectæ extrema ac media ratione sectæ, quæ potentia dupla est lateris Octaedri in Icosaedro descripti. Quod ostendendum erat.

d 14. tertij decimi.

## THEOR. 13. PROPOS. 13.

LATVS cubi ad latus Dodecaedri in ipso descripti proportionem habet duplicatam eius, quam habet maius segmentum ad minus rectæ lineæ diuisæ extre-

ma

ma ac media ratione. Latus verò Dodecaedri ad latus cubi in ipso descripti proportionem habet, quam minus segmentum ad maius eiusdem rectæ lineæ.

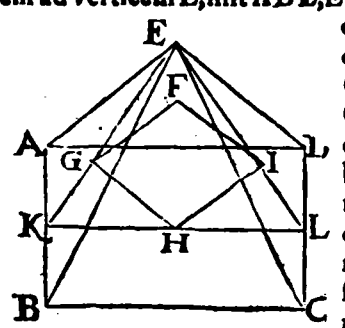
OSTENSVM est in scholio propos. 13. lib. 15. minus segmentum lateris cubi extrema ac media ratione secti, esse latus Dodecaedri in cubo illo descripti. Cùm ergo tota linea extrema ac media ratione diuisa ad minus segmentum proportionem habeat duplicatam proportionis totius lineæ ad maius segmentum, vel maioris segmenti ad minus, (quòd tota linea, maius segmentum, atque minus, sint tres rectæ continuè proportionales:) liquidò constat, proportionem lateris cubi ad latus Dodecaedri in ipso descripti esse quoq; proportionis maioris segmenti ad minus duplicatã.

PRAETEREA, cùm constet ex coroll. 1. propos. 17. lib. 13. maius segmentum lateris cubi extrema ac media ratione diuisi latus esse Dodecaedri, cui cubus inscribitur; manifestum est esse vt latus Dodecaedri, hoc est, maius segmentum, ad latus cubi in ipso descripti, hoc est, ad totam lineam extrema ac media ratione sectam, ita minus segmentum ad maius. Cùm enim sit, vt tota linea ad maius segmentum, ita maius segmentum ad minus; Erit quoque conuertendo, vt maius segmentum ad totam lineam, ita segmentum minus ad maius. Latus ergo cubi ad latus Dodecaedri, &c. Quod erat demonstrandum.

## THEOR. 14. PROPOS. 14.

LATVS Octaedri sesquialterum est lateris sibi inscriptæ Pyramidis.

SIT vna sex pyramidum Octaedri A B C D E, cuius basis quadratum A B C D, triangula autem ad verticem E, sint A B E, E B C, C E D, D E A, sintq; horum triangulorum centra F, G, H, I, quæ rectis iungantur F G, G H, H I, I F, quadratum cubi in Octaedro descripti constituentibus, vt docuimus in propos. 4. lib. 15. Quoniam verò Pyramis in cubo descripta, describitur quoque in Octaedro, cui cubus imponitur, vt in scholio propos. vltimę lib. 15. exposuimus; Estque latus pyramidis in cubo descriptæ diameter basis cubi, vt constat ex propos. 1. lib. 15. Erit ducta diameter G I, latus Pyramidis in Octaedro dicto descriptæ. Dico igitur latus Octaedri B C, sesquialterum esse lateris Pyramidis G I. Ductis enim rectis E G K, E I L, diuidentur latera A B, C D, bifariam in K, L, ex scholio propos. 12. lib. 13. ipsæque E K, E L, sesquialteræ erunt rectarum E G, E I, per coroll. propos. 18. lib. 14. [a] Ac propterea G I, parallela erit rectæ K L, auferens, per corollarium propositionis quartæ, libri sexti, triãgulum E G I, simile triangulo E K L. Quare erit, vt E K, ad K L, ita E G, ad G I; & permutando, vt E K, ad E G, ita K L, ad G I; ideoque cùm E K, sesquialtera sit ipsius E G, erit & K L, sesquialtera ipsius G I. [b] Cùm ergo B C, æqualis sit ipsi K L, quòd & B K, C L, æquales sint, & parallelæ; Erit B C, latus Octaedri sesquialterum lateris Pyramidis G I, sibi inscriptæ. Quod erat demonstrandum.

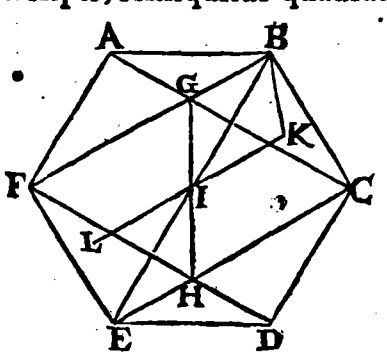


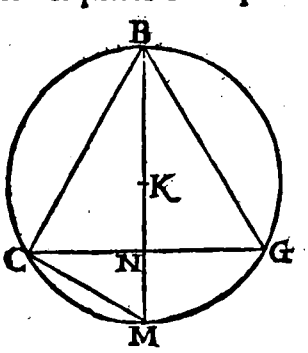

[a] 2. sexti.

[b] 33. primi.

## THEOR. 15. PROPOS. 15.

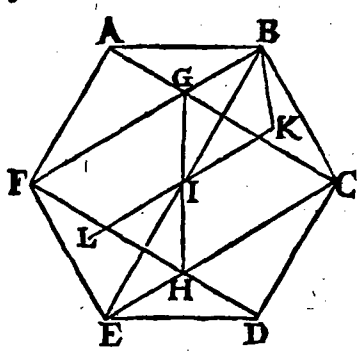
SI ex quadrato diametri Icosaedri auferatur triplum quadrati lateris cubi in eo descripti; relinquitur quadratum sesquitertium quadrati lateris Icosaedri.

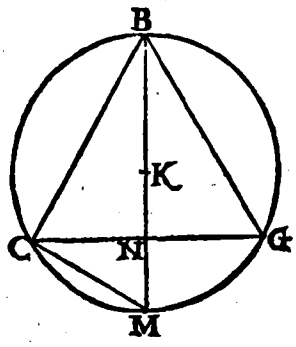



SIT Icosaedrum A B C D E F G H, cuius diameter B E, & centrum I; triangula verò opposita & parallela, per corollarium quartum, propositionis decimæquartæ, lib. 13. B C G, E F G, quorum centra K, L. Ducatur ex centro I, ad planum B C G, perpendicularis I K, cadens, ex corollario lemmatis 1. propos. 10. lib. 14. in centrum K. Producta igitur K I, perpendicularis quoque erit ad planum E F H, parallelum plano B C G, per scholium propos. 14. lib. 11. cadetque idcirco in centrum L, per coroll. præfati lemmatis. Quam ob rem, cùm cubus in Icosaedro descriptus statuat suos angulos in centris basium Icosaedri, vt constat ex propos. 11. lib. 15. atque adeò angulos oppositos in centris basium oppositarum; Erit K L, diameter cubi in Icosaedro descripti, transiens per I, centrum Icosaedri. Cùm ergo eadem ratione reliquæ diametri cubi per idem centrum I, transeant, erit I, quoq; centrum cubi inscripti, ideoq; I K, I L, semidiametri æquales: Coniuncta autem K B, semidiametro circuli triangulum B C G, circumscribentis, erit angulus B K I, rectus, ex defin. 3. lib. 11. [c] Ac proinde quadratum rectæ B I, æquale quadratis rectarum

[c] 47 primi.




BK, KI. Igitur & quadratum diametri BE, quadruplum existens quadrati semidiametri BI, vt in scholio propos. 4. lib. 2. ostendimus, æquale erit quadratis duarum rectarum, nempe diametri circuli triãgulum BCG, circumscribẽtis, & KL. Sunt enim & hæc quadrata, per idem scholium, quadrupla quadratorum ex semidiametris BK, KI, descriptorum. Ablato ergo quadrato diametri cubi KL, (a quod triplum est quadrati lateris cubi.) ex quadrato diametri Icosaedri BE; remanet quadratum diametri circuli triangulum BCG, circumscribentis. Hoc igitur dico sesquitertium esse quadrati lateris Icosaedri BC. Describatur enim ex centro K, circa triangulum æquilaterum BCG, circulus, extensaq; BK, vsque ad M, quæ secet CG, in N, ducatur quoque recta CM. Quoniam igitur BN, per centrum K, ducta, perpendicularis est ad CG, per ea, quæ ostendimus in schol. propos. 12. lib. 13. b erit recta BC, potentia sesquitertia rectæ BN: Vt autem BC, ad BN, ita est BM, ad BC, quòd BC, sit media proportionalis inter BM, & BN, ex coroll. propos. 8. lib. 6. c cùm angulus BCM, rectus sit in semicirculo existens. Recta igitur BM, potentia quoq; sesquitertia est rectæ BC; Ac propterea quadratum diametri BM, sesquitertium est quadrati lateris BC. Quapropter si ex quadrato diametri Icosaedri, &c. Quod erat demonstrandum.

a 15. tertiædecimi.

b 12. quartædecimi.

c 31. tertij.

## COROLLARIVM.

*HINC fit, diametrum Icosaedri binas rectas posse, diametrum scilicet cubi in ipso descripti, & diametrum circuli triangulum Icosaedri ambientis. Ostensum siquidem est, quadratum diametri Icosaedri BE, æquale esse quadratis diametri cubi KL, & diametri circuli triangulum BCG, circumscribentis.*

## THEOR. 16. PROPOS. 16.

LATVS Dodecaedri minus segmentum est rectæ lineæ extrema ac media ratione diuisæ, quæ duplum potest lateris Octaedri in eo descripti.

QVONIAM diameter Octaedri in Dodecaedro descripti d duplum potens lateris Octaedri, coniungit bifarias sectiones laterum oppositorum Dodecaedri, vt manifestum est ex propos. 9. lib. 15. Est autem rectæ dictas sectiones coniungentis diuisæ extrema ac media ratione minus segmẽtum latus Dodecaedri, ex coroll. 4. propos. 17. lib. 13. Liquet, latus Dodecaedri minus segmentum esse eius rectæ extrema ac media ratione diuisæ, quæ duplum potest lateris Octaedri in eo descripti, cùm huiusmodi recta coniungat bifarias sectiones laterum Dodecaedri oppositorum, cuius quidem minus segmentum est latus Dodecaedri, ex prædicto coroll. Itaque latus Dodecaedri minus segmentum est rectæ lineæ extrema ac media ratione, &c. Quod erat demonstrandum.

d 14. tertiædecimi.

## THEOR. 17. PROPOS. 17.

DIAMETER Icosaedri potest & sui ipsius lateris sesquitertium, & lateris Pyramidis in eo descriptæ sesquialterum.

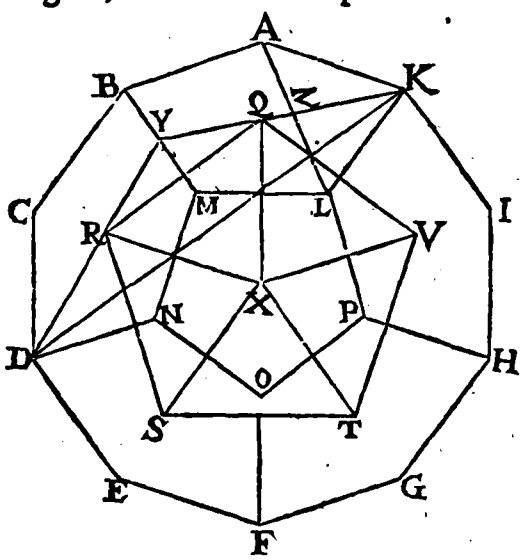
CVM cubus & Pyramis in eo descripta, in eodem Icosaedro describantur, vt docuimus in scholio propos. vltimæ lib. 15. eademq; sphæra comprehendantur; eadem erit diameter cubi, & diameter sphæræ pyramidem circundantis: e potest autem diameter sphæræ sesquialterum lateris Pyramidis. Igitur & diameter cubi in Icosaedro descripti, in quo & Pyramis describitur, sesquialterum poterit lateris pyramidis in ipso cubo, & Icosaedro descriptæ; Atqui diameter circuli basim Icosaedri circumscribentis sesquitertium potest lateris Icosaedri, vt in demonstratione propos. 15. huius libri demonstrauimus. Igitur diameter Icosaedri potens & diametrum cubi in ipso descripti, & diametrum circuli basin Icosaedri circumdantis, ex coroll. propos. 15. huius libri, potest suiipsius lateris sesquitertium, nimirum diametrum circuli circa basim Icosaedri descripti, & lateris Pyramidis in eo descriptæ sesquialterum, nempe diametrum cubi. Quod erat demonstrandũ.

e 13. tertiædecimi.

## THEOR. 18. PROPOS. 18.

LATVS Dodecaedri ad sibi inscripti Icosaedri latus se habet, vt minus segmentum lineæ perpendicularis ab vno angulo pentagoni ad latus oppositum ductæ, atque

atque extrema ac media ratione diuisæ, ad partem eiusdem lineæ inter centrum pentagoni, & latus eiusdem positæ.

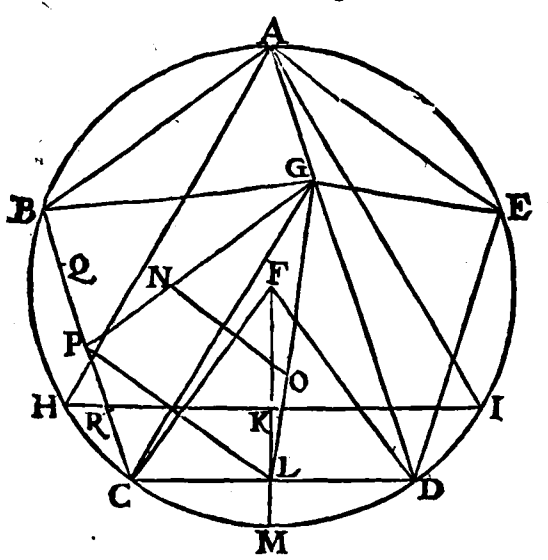



SIT dimidium Dodecaedrum contẽtum sex pentagonis ABMLK, LKIHP, PHGFO, OFEDN, NDCBM, LMNOP, quorum centra Q, R, S, T, V, X, (quælibet videlicet duo proxima) iungãtur rectis QR, RS, ST, TV, VQ, QX, RX, SX, TX, VX. Constituta sunt igitur quinque triangula Icosaedri in Dodecaedro descripti, componentia angulum solidum X, in centro pentagoni LMNOP, vt ostensum est in demonstratione propos. 7. lib. 15. A duobus angulis pentagonorum D, K, in communem basim BM, p centra R, Q, rectæ demittantur DY, KY, quæ quoniam bifariam, & ad rectos angulos secant latus BM, per coroll. 2. propos. 10. libri 13. conuenient in puncto Y. Quod si subtendatur recta AL, angulo K; secabitur [a] perpendicularis KY, in Z, extrema ac media ratione. Dico ita esse latus Dodecaedri LM, ad latus Icosaedri sibi inscripti QR, vt KZ, minus segmẽtum perpendicularis KY, ad rectam QY, inter centrũ Q, & latus BM, interceptam. Subtensa enim recta DK, quæ, p demonstrata in scholio propos. 13. lib. 15. latus est cubi, in quo Dodecaedrum propositũ describitur; erit LM, latus Dodecaedri, minus segmentum ipsius DK, si extrema ac media ratione secetur, ex eodem scholio propos. 13. lib. 15. Quoniam verò latera YD, YK, trianguli YDK, proportionaliter secantur in R, & Q; (sunt enim RD, QK, semidiametri circulorũ æqualium æquales; necnon & YR, YQ, distantiæ nimirum rectæ BM, à centris R, & Q, eorundem circulorum æqualium.) [b] parallela erit QR, ipsi DK; Ideoq; triangulum YRQ, triangulo YDK, simile, p coroll. propos. 4. lib. 6. [c] Quam ob rem erit, vt DK, ad KY, ita QR, ad QY. [d] Vt autẽ DK, tota ad totã KY, ita est LM, minus segmentum ad minus KZ. Vt igitur LM, ad KZ, ita erit QR, ad QY; Et permutando, vt LM, latus Dodecaedri ad QR, latus Icosaedri sibi inscripti, ita KZ, minus segmentũ perpendicularis KY, ad QY, inter centrum Q, & latus BM, interpositam. Latus ergo Dodecaedri ad sibi inscripti Icosaedri latus, &c. Quod erat demonstrandum.

[a] 12. sexto decimi.
[b] 2. sexti.
[c] 4. sexti.
[d] 2. quarto decimi.

## THEOR. 19. PROPOS. 19.

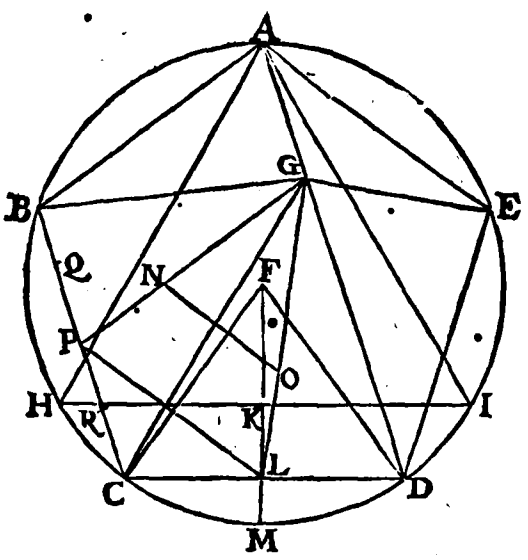
SI dimidium lateris Icosaedri extrema ac media ratione sectum fuerit, minusq; eius segmentum à toto latere Icosaedri sublatum; à reliqua quoque recta pars tursum tertia detracta: Relinquetur latus Dodecaedri in Icosaedro descripti.




CIRCA pentagonum ABCDE, ex quinque lateribus Icosaedri compositum, circulus describatur, cuius centrũ F, & super quinque latera pentagoni quinque triangula æquilatera excitentur, constituẽtia angulum solidum Icosaedri G, ex iis, quę in propos. 16. lib. 13. sunt demonstrata. In dicto deindo circulo triangulum æquilaterum inscribatur AHI. Quoniam igitur arcus ABC, AED, æquales sunt, cùm quilibet duas quintas partes totius circumferentiæ contineat, necnon & duo arcus ABH, AEI, cũ sint tertiæ partes eiusdẽ circumferentiæ; erunt reliqui arcus HC, ID, æquales; propterea q; rectæ HI, CD, parallelæ, p scholium propos. 27. lib. 3. Ad quas ex centro F, perpendicularis deducatur FKL, [e] secans rectas HI, CD, bifariam in K, & L; coniunganturque rectæ FC, FD. Suscipiantur insuper triangulorum æquilaterorum GBC, GCD, centra N, & O, per quæ rectæ ducantur GNP, GOL, diuidentes, per scholium propositionis 12. libri 13. latera opposita BC, CD, bifariam, & ad angulos rectos. Itaque recta GO, in punctum L, in quo diuisa est CD, bifariam, cadet. Iungantur autem centra N, O, recta NO, quæ, vt constat ex demonstratis in propositione 5. lib. 15. latus erit Dodecaedri in Icosaedro descripti. Denique BP, dimidium lateris Icosaedri secetur in Q, extrema ac media ratione; & ablato minori segmento BQ,

[e] 3. tertij.

ex toto latere BC, reliquæ CQ, tertia pars detrahatur CR. Dico reliquam QR, æqualem esse lateri Dodecaedri NO. Cùm enim FL, perpendicularis à latere trianguli æquilateri HI, secetur in K, extrema ac media ratione; (quòd FL, hac ratione secta faciat maius segmentum æquale perpendiculari FK, per coroll. propos. 2. libri 14.) sit autem maiori segmento FK, æqualis recta KM, p coroll. propos. 12. lib. 13. Erit ex iis, quę demonstrauimus ad propos. 5. lib. 13. maius segmentum KM, sectum quoque in L, à minori segmento KL, extrema ac media ratione; Ac proinde recta FM, excedit rectam FL, minore dimidiæ suiipsius segmento LM. Quoniam verò iuncta PL, est latus pentagoni æquilateri, & æquianguli in pentagono ABCDE, descripti, idemque centrum F, habentis, ex scholio vltimo, lib. 4. ideoque similis illi; erunt triangula FCD, FPL, (si recta duceretur FP.) similia, per scholium propos. 20. lib. 6. [a] Quare vt FC, ad CD, ita erit FL, ad LP; & permutando, vt FC, ad FL, ita CD, ad LP: Atqui FC, hoc est, sibi æqualis FM, excedit rectam FL, minore segmento dimidij ipsius FM, nempe minore segmento rectæ KM, vt ostendimus. Recta igitur CD, vel sibi æqualis BC, excedet quoque rectam LP, minore segmento dimidij ipsius BC, nimirum minore segmento rectæ BP, quod fuit BQ; ideoque reliqua CQ, rectæ PL, æqualis erit. Rursus, quia GP, GL, proportionaliter secantur in centris N, O; (quòd GN, GO, duplæ sint ipsarum NP, OL, per corollarium propos. 18. lib. 14.)




a 4. sexti.

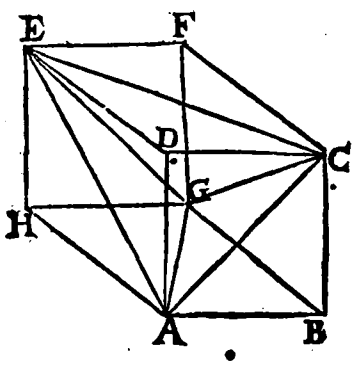
[b] parallelæ erunt PL, NO; ac proinde triangulum GNO, triangulo GPL, simile, ex corollario propos. 4. libri 6. [c] Igitur erit, vt GP, ad PL, ita GN, ad NO; & permutando, vt GP, ad GN, ita PL, ad NO: Est autem GP, ipsius GN, sesquialtera, per corollarium propos. 18. lib. 14. Quare & PL, hoc est, sibi æqualis CQ, sesquialtera erit ipsius NO; Ac proinde, cùm CQ, sesquialtera quoque sit rectæ QR; (Nam qualium partium 3. est CQ, talium 1. est CR; per constructionem; Ac propterea earundem 2. QR.) æqualis erit QR, ipsi NO, lateri Dodecaedri in Icosaedro descripti. Si dimidium itaque lateris Icosaedri extrema ac media ratione sectum fuerit, &c. Quod erat demonstrandum.

b 2. sexti. c 4. sexti.

## THEOR. 20. PROPOS. 20.

**CVBVS sibi inscriptæ pyramidis triplus est.**

IN cubo AF, descripta sit pyramis ACEG. Dico cubum pyramidis triplum esse. Cùm enim inscriptam pyramidem æquilateram circumstêt 4. pyramides, fundatæ super 4. bases ipsius, vertices verò habentes reliquos 4. angulos cubi, in quibus non resident 4. anguli pyramidis æquilateræ inscriptæ: (Nam super basin ACE, fundatur pyramis ACED; super basin AEG, pyramis AEGH, super basin CEG, pyramis CEGF; & super basin ACG, pyramis ACGB: quæ quidem quatuor pyramides æquales sunt, ex 10. definitione libri 11. cùm contineantur planis similibus æqualibusque & multitudine & magnitudine. Quælibet enim constat tribus æqualibus & similibus triangulis, dimidiis scilicet quadratorum cubi, vt patet, & vno triangulo pyramidis æquilateræ inscriptæ.) Sit autem cubus cuiuslibet harum pyramidum sextuplus; (Nam, exempli causa, pyramis ABCG, basim habens ABC, dimidium basis cubi BD, altitudinem verò eandem, quam cubus, rectam videlicet BG, tertia pars est, per corollarium 1. propositionis 7. lib. 12. prismatis eandé basin, & altitudinem habentis. [d] Cùm igitur cubus duplus sit eiusmodi prismatis, quòd & basis cubi dupla sit basis prismatis; manifestum est pyramidem ABCG, sextam partem esse cubi, propterea que cubum pyramidis illius esse sextuplum.) Efficitur, quatuor illas pyramides circumstantes, quatuor esse sextas partes, id est, duas tertias partes cubi: Ac proinde reliquam pyramidem æquilateram ACEG, cubo inscriptam eiusdem cubi tertiam esse partem. Cubus igitur sibi inscriptæ pyramidis triplus est. Quod erat demonstrandum.




d 32. vndec.

ALITER. Cùm cubus, & in eo descripta pyramis eadem sphæra comprehendantur, vt docuimus in scholio propositionis vltimæ, lib. 15. [e] Cubus verò triplus sit pyramidis in eadem sphæra descriptæ, vt demonstratum est, perspicuè colligitur, cubum triplum esse sibi inscriptę pyramidis, quandoquidem hæc in eadem sphæra, in qua cubus, continetur.

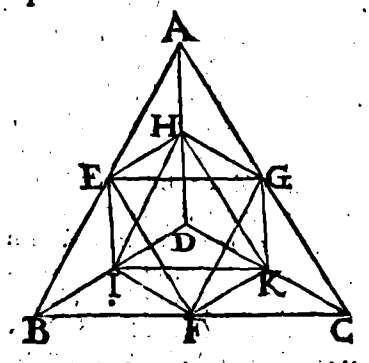
e 32. quarti decimi.

THEOR.

## THEOR. 21. PROPOS. 21.

**PYRAMIS** ſibi inſcripti Octaedri dupla eſt.

IN pyramide ABCD, deſcriptum ſit octaedrum EIKGHF. Dico pyramidem octaedri eſſe duplam. Cùm enim octaedrum circumſtent quatuor pyramides pyramidi ABCD, ſimiles, vt




prop. 3. lib. 12. demonſtratum eſt, fundatæ ſuper quatuor baſes octaedri EGH, EFI, EGK, HIK; quales ſunt pyramides EGHA, EFIB, FGKC, HIKD: (quæ quidem æquales inter ſe ſunt, ex defin. 10. lib. 11. cùm contineantur triangulis ſimilibus, æqualibuſque numero & magnitudine, quippe quæ ſimilia ſint baſibus pyramidis æquilaterę ABCD, per coroll. propoſ. 4. lib. 6. lateraque habeant æqualia, nempe dimidia laterum æqualium eiuſdem pyramidis ABCD, ex conſtructione propoſ. 2. lib. 15.) [a] Habeant autem pyramides ſimiles proportionem homologorum laterum triplicatam; Erit pyramis ABCD, octupla cuiuslibet illarum quatuor pyramidum octaedro circumpoſitarum, (cùm octupla proportio, ſit proportionis duplæ, qualem habent latera pyramidis ABCD, ad latera dictarum quatuor pyramidum, triplicata, vt in his numeris 1. 2. 4. 8. perſpicuè apparet.) hoc eſt, quælibet illarum quatuor pyramidum pars erit octaua pyramidis ABCD; Atque idcirco omnes quatuor dictæ pyramides quatuor partes octauas, id eſt, dimidium pyramidis ABCD, conficient. Quare & reliquum octaedrum EIKGHF, reliqua erit dimidiata pars eiuſdem pyramidis ABCD. Pyramis igitur ſibi inſcripti octaedri dupla eſt. Quod erat demonſtrandum.

[a] 8. duodec.

## THEOR. 22. PROPOS. 22.

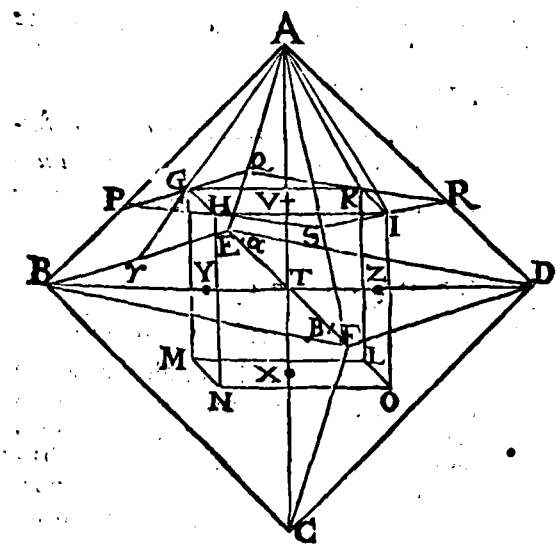
**CVBVS** ſibi inſcripti Octaedri ſextuplus eſt.

QVONIAM ſi pyramis in cubo deſcribatur, & in pyramide octaedrum; octaedrum in cubo quoque inſcriptum eſt, vt conſtat ex ſecunda demonſtratione propoſ. 3. lib. 15. [b] Eſt autem cubus pyramidis in eo deſcriptæ triplus, [c] & pyramis octaedri ſibi inſcripti dupla: Fit, vt qualium partium 6. ponatur cubus, taliũ 2. ſit pyramis, & earundem 1. contineat octaedrum; atq; adeò cubus octaedri ſit ſextuplus. Quare cubus ſibi inſcripti octaedri ſextuplus eſt. Quod erat demõſtrandũ.

[b] 20. ſextidecimi. [c] 21. ſextidecimi.

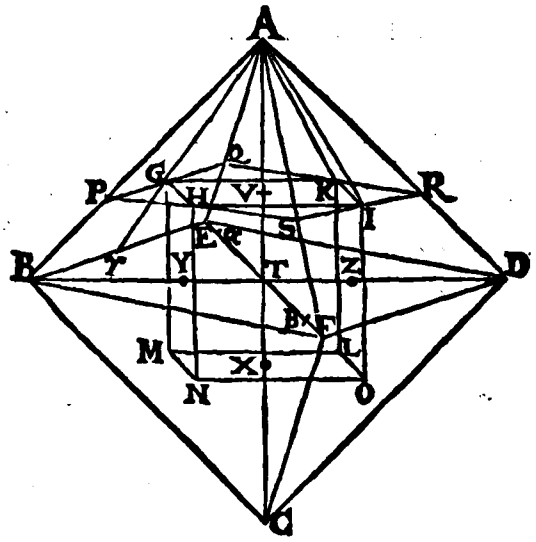
## THEOR. 23. PROPOS. 23.

**OCTAEDRVM** ſibi inſcripti cubi quadruplum ſeſquialterum eſt.




IN octaedro ABCDEF, cubus deſcriptus ſit GHIKLMNO, angulos ſuos ſtatuens in centris baſium octaedri. Dico octaedrum cubi eſſe quadruplum ſeſquialterum. Aſſumpta n. pyramide octaedri BEDFA, ducantur per G, K, I, H, cẽtra quatuor baſiũ octaedri, rectæ PQ, QR, RS, SP, lateribus BE, ED, DF, FB, parallelæ, quadratũ conſtituẽtes PQRS, vt in propoſ. 4. lib. 15. eſt demõſtratum; [d] quod quidem parallelum erit quadrato BEDF. Ducatur quoq; octaedri diameter AC, perpendicularis exiſtens ad quadratum BEDF, in centro T, per ea, quæ oſtendimus in coroll. 1. propoſ. 14. lib. 13. Ac proinde perpendicularis ad baſes cubi GI, MO, in punctis V, X, per ſcholium propoſ. 14. lib. 11. Eſt autem V, centrum quadrati PQRS: (cùm n. plana BEDF, PQRS, parallela ſecent rectas æquales AB, AE, AD, AF, proportionaliter; erunt & AP, AQ, AR, AS, æquales. Intelligantur ductæ rectæ VP, VQ, VR, VS. [f] Quoniam igitur æqualia quadrata rectarum æqualium AP, AQ, æqualia ſunt quadratis rectarum AV, VP; AV, VQ, quòd anguli AVP, AVQ, recti ſint, per defin. 3. lib. 11. dempto communi quadrato rectæ AV; æqualia erunt reliqua quadrata rectarum VP, VQ, propterea & rectæ ipſæ VP, VQ, æquales. Non aliter oſtendemus & hiſce, & inter ſe æquales eſſe rectas VR, VS. Quare V, centrum eſt quadrati PQRS.) Igitur & centrum erit quadrati GHIK, in illo deſcripti, per ſcholium vltimum lib. 4. Secantur enim latera PQ, QR, RS, SP, bifariam in G, K, I, H, vt conſtat ex demonſtratis in propoſ. 4. lib. 15. Eodem argumento concludemus X, centrum eſſe baſis LMNO; Nec non & alias diametros ductas BD, EF, per Y, Z, α, β, centra reliquarum baſium tranſire. Ducta

[d] 15. vndec. [e] 17. vndec. [f] 47. primi.




a 17. vndec.

iam recta Aγ, per G, centrum trianguli æquilateri ABE; erit AG, dupla ipsius Gγ, per coroll. propos. 18. lib. 14. [a] Cùm ergo plana PR, BD, parallela secent rectas Aγ, AT, proportionaliter; dupla quoque erit AV, ipsius VT. Eodem modo dupla probabitur CX, ipsius XT; Ac proinde cùm æquales AT, CT, similiter secentur in V, & X; æquales erunt AV, CX: nec non VT, XT. Recta igitur VX, coniungens cétra basium cubi oppositarum, bifariam secatur in T. Quare cùm ad eundem modum YZ, αβ, bifariam secentur in T, erit T, centrum cubi; cùm, per coroll. 1. propos. 15. lib. 13. rectæ céntra basium cubi oppositarum connectentes sese bifariá secent in centro. Iam verò, quoniam VX, ipsius VT, dupla est; dupla autē fuit & AV, eiusdem VT; æqualis erit AV, ipsi VX, nempe altitudini cubi. Quare pyramis GHIKA, ductis rectis AI, AK, AH, tertia pars est cubi, seu prismatis GO, per coroll. 1. prop. 7. lib. 12. cùm vtriusq; eadem sit basis GI, & altitudines æquales AV, VX: [b] Est autem pyramis PQRSA, pyramidis GHIKA, dupla, quòd & basis PQRS, dupla sit basis GHIK, illi inscriptæ. Igitur pyramis PQRSA, duas tertias partes cubi GO, continet. Quia verò pyramides BEDFA, PQRSA, similes existentes, per defin. 9. lib. 11. (cùm triangula huius similia sint, ex coroll. propos. 4. lib. 6. triangulis illius.) [c] proportionem habent laterum homologorum triplicatam; Est autem latus AB, lateris AP, sesquialterum, quòd & recta Aγ, [d] proportionaliter secta ipsi AB, sesquialtera sit ipsius AG; Erit pyramis BEDFA, ad pyramidem PQRSA, vt 27. ad 8. hæc enim proportio triplicata est proportionis sesquialteræ 3. ad 2. vt in his numeris 8. 12. 18. 27. constat; Ac proinde totum octaedrum ABCDEF, duplum existens pyramidis BEDFA, proportionem habebit ad eandem pyramidem PQRSA, quam 54. ad 8. At qualium partium 8. ponitur pyramis PQRSA, talium 12. esse cubum GO, iam demonstratum est. (Nam numerus 8. duas tertias continet numeri 12.) Igitur octaedrum ABCDEF, ad cubum GO, proportionem habet, quam 54. ad 12. hoc est, in minimis numeris, per 35. propos. lib. 7. repertis, quam 9. ad 2. quæ quidem proportio quadrupla sesquialtera est. Octaedrum itaque sibi inscripti cubi quadruplum sesquialterum est. Quod erat ostendendum.

b 6. duodec.

c 8. duodec.
d 2. sexti.

## COROLLARIVM I.

*IDEM ergo centrum est octaedri, atque cubi sibi inscripti. ostendimus enim T, vtriusque esse centrum.*

## COROLLARIVM II.

*PERSPICVE etiam hinc inferemus, Octaedrum ad sibi inscriptum cubum eandem habere proportionem, quam eorum laterum quadrata habent.* [a] *Nam quadrata ipsorum laterum proportionem habent quadruplam sesquialteram, qualem videlicet demonstrauimus habere octaedrum ad sibi inscriptum cubum.*

a 11. sexti-dec.

# THEOR. 24. PROPOS. 24.

## OCTAEDRVM sibi inscriptæ Pyramidis tredecuplum sesquialterum est.

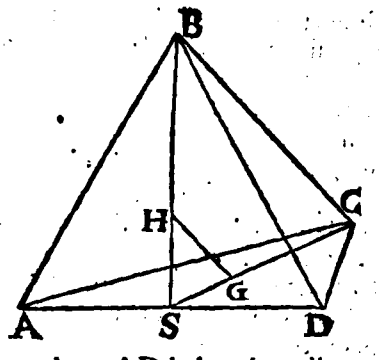
QVONIAM, vt ostendimus ad finem lib. 15. cubus, sibiq; inscripta pyramis in eodem octaedro describuntur; [a] Est autem octaedrum cubi in eo descripti quadruplum sesquialterum; & cubus sibi, ac proinde octaedro, inscriptæ pyramidis [b] triplus: qualium partium 2. ponetur pyramis, talium 6. erit cubus, & earundem 27. octaedrum. Habent enim 27. ad 6. proportionem quadruplam sesquialteram, & 6. ad 2. triplam. Igitur octaedrum ad sibi inscriptam pyramidem proportionem habet, quam 27. ad 2. hoc est, tredecuplam sesquialteram. Ac propterea octaedrum sibi inscriptæ pyramidis, &c. Quod erat ostendendum.

a 23. sexti-dec.
b 20. sexti-dec.

# THEOR. 25. PROPOS. 25.

## PYRAMIS sibi inscripti cubi noncupla est.

IN pyramide ABDC, cubus intelligatur descriptus. Dico pyramidem cubi esse noncuplam. Assumantur enim GH, centra duarum basium ACD, ABD, commune latus AD, habentium, per quæ ex angulis C, B, ad latus commune oppositum AD, rectæ ducantur CGS, BHS, diuidentes latus AD, bifariam, & ad angulos rectos, per scholium propos. 12. lib. 13. ac propterea conuenientes in medio puncto S. Connexa verò recta GH, cùm BH, CG, duplæ sint rectarum HS, GS, ex




GS, ex coroll. propoſ. 18. lib. 14. ac proinde proportionaliter ſecentur B S, C S, [a] parallelæ erunt B C, H G, & per coroll. propoſ. 4. lib. 6. triangulum H G S, triangulo B C S, ſimile. [b] Erit ergo vt B C, ad C S, ita H G, ad G S; & permutando, vt B C, ad H G, ita C S, ad G S: [c] Eſt autem C S, ipſius G S, tripla. Igitur & B C, tripla erit ipſius H G. Quoniam autem latus pyramidis deſcriptæ in cubo diameter eſt baſis cubi, vt in propoſ. 1. lib. 15. demonſtratum eſt; Recta verò connectens duo centra baſium pyramidis commune latus habentium diameter eſt baſis cubi in pyramide deſcripti, vt perſpicuum eſt ex demonſtratis in propoſ. 18. lib. 15. (Ibi enim recta G H, iungens centra G, H, baſium A C D, A B D, commune latus A D, habentium, diameter fuit baſis G N H Q, cubi deſcripti in pyramide.) Erit latus pyramidis B C, diameter baſis cubi pyramidem A B D C, circumſcribentis; G H, verò diameter baſis cubi in eadem pyramide deſcripti. Cùm ergo eandem habeant proportionem diametri quadratorum, quam latera; (Eſt enim vt diameter vnius quadrati ad ſuum latus, ita diameter alterius quadrati ad ſuum latus, quòd proportio vtraque ſit potentia dupla: Permutando ergo, vt diameter ad diametrum, ita latus ad latus.) habeat autem B C, diameter baſis cubi circũſcripti ad G H, diametrum baſis cubi inſcripti proportionem triplam, vt oſtendimus; habebit quoque latus cubi circumſcripti ad latus cubi inſcripti proportionem triplam. At verò cubi, cùm ſint parallelepipeda ſimilia, [d] proportionem habent laterum homologorum triplicatam. Cubus igitur circumſcriptus ad cubum inſcriptum pyramidi A B D C, proportionem habet, quam 27. ad 1. Hæc enim proportio triplicata eſt triplæ proportionis, vt hîc 1. 3. 9. 27. videre licet. Quam ob rem, [e] cùm cubus ad pyramidem inſcriptam proportionem habeat quam 27. ad 9. videlicet triplam; Habebit pyramis A B D C, ad cubum ſibi inſcriptum proportionem, quam 9. ad 1. nimirum noncuplam; Atque adeò pyramis ſibi inſcripti cubi noncupla eſt. Quod erat demonſtrandum.

[a] 2. ſexti.
[b] 4. ſexti.
[c] 18. quarti decimi.
[d] 33. vndec.
[e] 20. ſexti decimi.

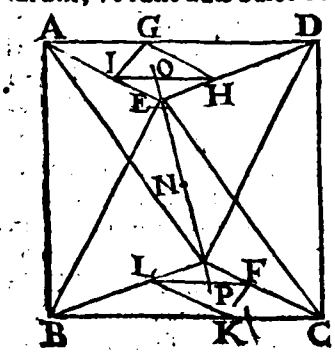
## COROLLARIVM

*IGITVR cubus ad cubum deſcriptum in pyramide, quæ in priori cubo deſcribitur, proportionem habet, quam 27. ad 1. Hoc enim demonſtratum eſt ex propoſ. 33. lib. 11. in demõſtratione huius propoſitionis.*

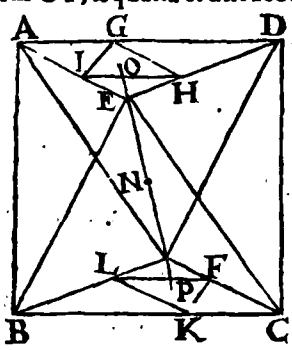
## THEOR. 26. PROPOS. 26.

**OCTAEDRVM ad ſibi inſcriptum Icoſaedrum proportionem habet, quam duæ baſes Octaedri ad quinque baſes Icoſaedri.**

IN octaedro A B C D E F, concipiatur deſcriptum Icoſaedrum. Dico octaedrum eſſe ad Icoſaedrum, vt ſunt duæ baſes octaedri ad quinque baſes Icoſaedri. Cùm enim, vt ex demonſtratis in propoſ. 16. lib. 15. liquet, octo baſes Icoſaedri in octo baſibus octaedri reponãtur; ſint duæ baſes Icoſaedri G H I, K L M, in duabus baſibus oppoſitis octaedri A D E, B C F; atque ex N, centro octaedri, nec non & Icoſaedri (idẽ enim vtriuſq; eſt centrũ, per coroll. 3. propoſ. 16. lib. 15.) ad baſim A D E, perpendicularis ducatur N O, cadens in centrum O, trianguli A D E, ſeu circuli ipſum ambientis, ex coroll. lemm. 1. prop. 10. lib. 14. quod quidem O, centrum quoque eſt trianguli G H I, per coroll. 2. propoſ. 16. lib. 15. Cùm ergo plana oppoſita A D E, B C F, parallela ſint; ex corollario 4. propoſitionis 14. lib. 13. Recta O N, producta, perpendicularis quoque erit, per ſcholium propoſitionis 14. lib. 11. ad planum B C F, in eiuſque propterea centrum P, commune etiam triangulo K L M, cadet. Quare O P, recta, altitudo eſt & octaedri & Icoſaedri ſibi inſcripti. Quia verò octaedrum in octo pyramides, ductis rectis ex centro N, ad omnes angulos octaedri, æquales diuiditur, quarum altitudo eſt N O, dimidium altitudinis octaedri; Similiterque Icoſaedrum in 20. pyramides æquales eiuſdem altitudinis N O: Eſt autem priſma triplum pyramidis eandem cum ipſo & baſim, & altitudinem habentis, per coroll. 1. propoſ. 7. lib. 12. Erit priſma, cuius baſis A D E, & altitudo O N, æquale tribus pyramidibus octaedri: At verò priſma, cuius eadem baſis A D E, altitudo autem O P, dupla altitudinis O N, duplum eſt priſmatis, cuius baſis eadem A D E, altitudo verò O N, per ea, quæ in ſcholio propoſ. 14. lib. 12. oſtendimus. Priſma igitur, cuius baſis A D E, & altitudo O P, æquale eſt ſex pyramidibus octaedri; Ac proinde reliquis duabus octaedri pyramidibus, quæ tertiam partem illarum ſex conſtituunt, æqualis erit tertia pars priſmatis ſuper baſim A D E, & ſub altitudine O P, conſtituti; priſma videlicet, cuius baſis tertia pars eſt trianguli A D E, altitudo verò eadem O P. Hoc enim priſma tertia pars eſt priſmatis ſuper baſem A D E, & ſub altitudine O P; cùm, per ea, quæ docuimus ad prop. 7. lib. 12. priſmata eiuſdem altitudinis inter ſe ſint, vt baſes. Quare duo priſmata, quorum vnius baſis A D E, & altitudo O P, alterius autem baſis tertia pars baſis A D E, & altitudo eadem O P, æqualia ſunt octaedro A B C D E F. Non ſecus demonſtra-



bimus prisma, cuius basis G H I, altitudo verò O P, æquale esse sex pyramidibus Icosaedri: propterea; triplum huius prismatis, nempe prisma, cuius basis tripla sit basis G H I, altitudo autem eadem O P, æquales esse 18. pyramidibus Icosaedri. Reliquis igitur duabus Icosaedri pyramidibus, quæ tertiam partem sex pyramidum eiusdem Icosaedri constituunt, æqualis erit tertia pars prismatis super basem G H I, & sub altitudine O P, cõstituti; prisma scilicet, cuius basis tertia pars est trianguli G H I, altitudo verò eadem O P; Atque idcircò duo prismata, quorum vnius basis tripla sit trianguli G H I, altitudo autẽ O P, alterius verò basis tertia pars basis G H I, & altitudo eadem O P, æqualia erunt Icosaedro in dicto Octaedro descripto. Iam verò cùm duo illa prismata,



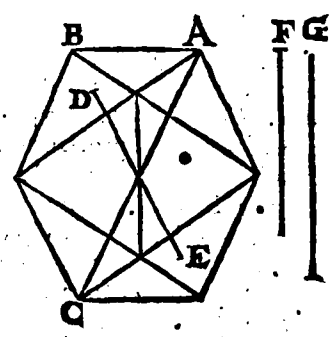

Octaedro æqualia, ad duo hæc prismata, Icosaedro æqualia sint, ea, quæ ostendimus ad propos. 7. lib. 12. vt bases prismatum Octaedro æqualium, quatuor tertias partes trianguli A D E, continentes, (cùm vnius basis sit A D E, nempe tres tertiæ partes ipsius A D E, complectens, alterius verò basis tertia pars ipsius A D E.) ad bases prismatum Icosaedro æqualium, decem tertias partes trianguli G H I, comprehendentes; (cùm vnius basis tripla sit trianguli G H I, nimirum nouem tertias partes ipsius G H I, continens, alterius verò basis tertia pars ipsius G H I.) Sint autem, vt quatuor tertiæ partes trianguli A D E, ad decem partes tertias trianguli G H I; [a] ita duæ tertiæ partes ipsius A D E, nempe dimidiũ quatuor tertiarum, ad quinque tertias partes ipsius G H I, hoc est, ad dimidium decem tertiarum: Et vt duæ tertiæ partes ipsius A D E, ad quinque tertias partes ipsius G H I, ita quoq; sint, per ea, quæ demonstrauimus in scholio propos. 22. lib. 5. sex tertiæ partes ipsius A D E, (hoc est, duæ bases octaedri triplum duarum tertiarum vnius basis constituentes, cùm sex tertias contineant.) ad quindecim tertias partes ipsius G H I; (id est, ad quinque bases Icosaedri, triplum quinque tertiarum vnius basis complectentes, cùm quindecim tertias complectantur.) Erunt quoque duo illa prismata, octaedro æqualia, hoc est, ipsummet octaedrum, ad duo hæc prismata Icosaedro æqualia, nempe ad ipsummet Icosaedrum, vt duæ bases octaedri ad quinque bases Icosaedri. Quocirca octaedrum ad sibi inscriptum Icosaedrum, proportionem habet, quam duæ bases octaedri ad quinque bases Icosaedri. Quod erat demonstrandum.

[a] 15. quinti.

## THEOR. 27. PROPOS. 27.

ICOSAEDRVM ad sibi inscriptum Dodecaedrum proportionem habet compositam ex proportione lateris Icosaedri ad latus cubi in eadem cum Icosaedro sphæra descripti, & ex proportione triplicata eius, quam habet diameter Icosaedri ad rectam centra basium Icosaedri oppositarum coniungentem.

EXHIBEATVR Icosaedrum A B C, in quo recta D E, coniungat centra basium oppositarum, diameter autem eius sit A C; & F, sit latus Icosaedri, & G, latus cubi in eadem sphæra cum Icosaedro descripti. Dico proportionem Icosaedri A B C, ad sibi inscriptum Dodecaedrum componi ex proportione F, lateris Icosaedri ad G, latus cubi, & ex proportione triplicata diametri A C, ad



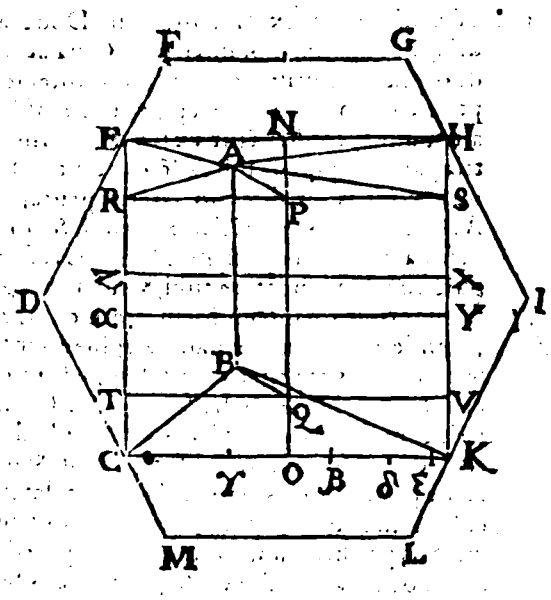

rectam D E. Cùm enim, ex demonstratis propos. 5. lib. 15. Dodecaedrum in Icosaedro descriptum statuat angulos suos in centris basium Icosaedri, atque adeò oppositos angulos in centris basium oppositarum; Erit D E, diameter dodecaedri in Icosaedro A B C, descripti, cùm copulet angulos ipsius oppositos in D, & E, centris basium Icosaedri oppositarum residentes. Propositis iam tribus magnitudinibus, Icosaedro scilicet A B C; Dodecaedro diametri A C, hoc est, in eadem sphæra, in qua Icosaedrum A B C, descripto, cùm vtriusq; eadem sit diameter; & Dodecaedro diametri D E, intra Icosaedrum videlicet, A B C, constructo; Proportio primæ magnitudinis, nempe Icosaedri A B C, ad tertiam, videlicet ad Dodecaedrum diametri D E, sibi inscriptum, componetur ex proportionibus primæ ad secundam, & secundæ ad tertiam, per ea, quæ ad defin. 5. lib 6. à nobis sunt demonstrata, nimirum ex proportionibus Icosaedri A B C, ad Dodecaedrum diametri A C, in eadem sphæra cum ipso descriptum, & Dodecaedri eiusdem diametri A C, ad Dodecaedrum diametri D E, in Icosaedro A B C, descriptum. Cùm ergo Icosaedri A B C, ad Dodecaedrum diametri A C, eadem sphæra comprehensum, sit vt F, latus Icosaedri ad G, latus cubi: ([b] Nam Dodecaedrum diametri A C, ad Icosaedrũ A B C, eiusdem diametri, est vt G, latus cubi ad F, latus Icosaedri. Conuertendo igitur, erit Icosaedrum A B C, ad Dodecaedrum diametri A C, vt F, latus Icosaedri ad G, latus cubi.) At verò Dodecaedrum eiusdem diametri A C, ad Dodecaedrum diametri D E, in Icosaedro videlicet A B C, descriptum, proportionem habeat triplicatam diametri A C, ad diametrum D E, id est, ad rectam centra basium Icosaedri oppositarum coniungentem, ex coroll. propos. 17. lib. 12. Manifestum est, proportionem Icosaedri A B C, ad sibi inscriptum Dodecaedrum diametri D E, componi quoque ex proportione F, lateris Ico-

[b] 11. quarti.

sis Icosaedri, ad G, latus cubi, & ex proportione triplicata proportionis diametri AC, ad rectam DE. Quare Icosaedrum ad sibi inscriptum Dodecaedrum proportionem habet compositam, &c. Quod erat demonstrandum.

## THEOR. 28. PROPOS. 28.

DODECAEDRVM excedit cubum sibi inscriptum parallelepipedo, cuius quidem basis à quadrato cubi deficit rectangulo contento sub latere cubi, tertiaque parte minoris segmenti eiusdem lateris cubi: At verò altitudo ab altitudine, siue latere cubi, minore segmento eius lineæ, quæ dimidiati lateris cubi segmentum minus existit.

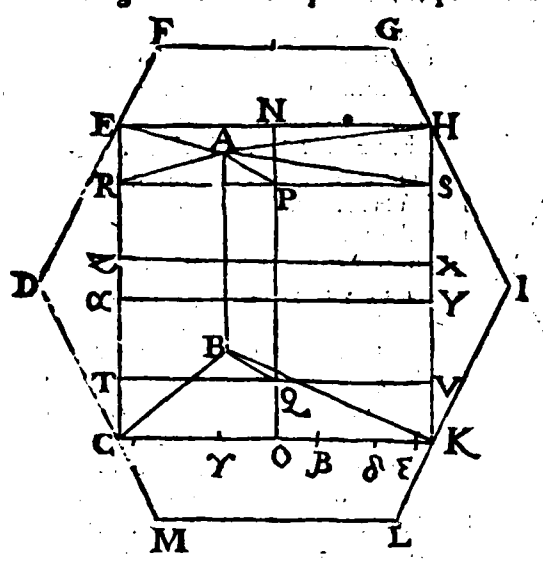



QVONIAM ex demonstratis propos. 8. lib. 15. quatuor latera basis cubi in Dodecaedro descripti subtendunt quatuor angulos quatuor basium Dodecaedri ad vnum latus conuenientium: sint huiusmodi pentagona ABCDE, EFGHA, AHIKB, BKLMC, conuenientia ad latus AB; duo quidem ABCDE, AHIKB, secundùm latus idem commune AB, alia autem duo AEFGH, BCMLK, secundùm angulos EAH, CBK. His verò pentagonis inscriptum sit quadratum cubi ECKH, super quod consistat pars Dodecaedri cubum circumscribentis, solidum scilicet CBKHAE, constans quinque planis CBK, EAH, ABCE, ABKH, ECKH, quorũ duo CBK, EAH, [a] triangula sunt æqualia, cùm latera pentagoni BC, BK, æqualia sint lateribus pentagoni AE, AH, angulosque comprehendant æquales pentagonorũ EAH, CBK. Duo verò ABCE, ABKH, trapezia sunt æqualia quoque: (cùm enim & pentagona ABCDE, ABKIH, per hypothesin, & triangula ex ipsis ablata CDE, HIK, [b] æqualia existant; æqualia erunt & reliqua trapezia ABCE, ABKH,) Quintum denique est basis cubi inscripti ECKH. Simili modo reperientur alia quinque solida huic similia & æqualia, per 10. definitionem libri 11. super reliquas quinque cubi bases; ita vt Dodecaedrum superet cubum sibi inscriptum sex huiusmodi solidis. Dico igitur hunc totum excessum, ex sex illis solidis cubum inscriptũ circumstantibus conflatum, æqualem esse parallelepipedo, cuius quidem basis deficit à CEHK, base cubi, rectangulo contento sub latere cubi CK, tertiaque parte minoris segmenti eiusdem lateris cubi; at verò altitudo ab altitudine, seu latere cubi, minore segmento eius lineæ, quæ dimidiati lateris cubi segmentum minus existit. Sectis enim lateribus EH, CK, bifariam in N, O, iunctaque recta NO, quæ parallela est lateri pentagoni AB, & in quam cadunt perpendiculares AP, BQ, demissæ in planum EK, vt constat ex demonstratis propos. 17. lib. 11. (Exprimunt enim lineæ NO, AB, AP, BQ, huius figuræ lineas LN, VX, VR, XS, figuræ propos. 17. lib. 13.) Erit vtraque recta AB, PQ, maius segmentum lateris cubi NO, vel HK, & vtraque AP, BQ, æqualis dimidio lateris pentagoni AB, seu maioris segmenti lateris cubi, vt liquet ex eadem propositione 17. libri 13. Ac propterea si per P, Q; ducantur rectæ RS, TV; rectis EH, CK, parallelæ; erunt quoque TR, SV, maiora segmenta laterum EC, HK; atq; adeò ER, CT, simul, & HS, KV, simul minora eorundem laterum segmenta. Ductis deinde rectis AR, AS, BT, BV, constituantur duæ pyramides ERSHA, CTVKB, quæ per corollarium propositionis 6. libri 12. æquales inter se erunt, cùm & earum bases ERSH, TCKV, & altitudines PA, QB, æquales sint; consistentque extra solidum ABTVSR. [c] Quoniam autem AS, ipsi BV, & AR, ipsi BT, æqualis est, & parallela; cùm coniungant æquales rectas, & parallelas AB, SV, RT, [d] parallela erunt plana triangulorum ARS, BTV; atque adeò inter se æqualia, ex corollario propositionis 8. libri 11. cùm latera vnius lateribus alterius sint æqualia. Quare solidum ABTVSR, contentum duobus aduersis triangulis æqualibus, similibus, & parallelis ARS, BTV, & tribus parallelogrammis RV, AT, AV, prisma est, ex definitione.

IAM verò, cùm ostensum sit, rectas HS, KV, minus segmentum efficere lateris HK, fiat illis æqualis VX, dupla nimirum vtriusque HS, & KV; & ipsius VX, minoris segmẽti lateris HK, duas tertias partes contineat VY, tertia verò pars sit XY, ducanturque XZ, Yα, rectæ TV, parallelæ. Quoniam igitur pyramides ERSHA, CTVKB, æquales sunt ostensæ; [e] vtriusque verò earum dupla est pyramis super basem TX, & sub eadem altitudine PA, vel QB, constituta, [f] quòd & basis TX, dupla sit basis CV, vel RH. Æqualis erit pyramis TVXZB, vtrique pyramidi ERSHA, CTVKB, simul. At pyramis TVXZB, duas tertias partes cõtinet prismatis, cuius basis eadem

a 4. primi.
b 4. primi.
c 33 primi.
d 15. vndec.
e 6. duodec.
f 1. sexti.

T X, & altitudo eadē Q B, vertex verò linea recta, pars videlicet rectæ A B, quę æqualis sit ipsi V X, vt demonstrauimus in scholio propos. 7. lib. 12. Item eiusdem prismatis, cuius basis T X, & altitudo Q B, vertex verò pars rectæ A B, æqualis ipsi V X, duas tertias partes continet prisma, cuius basis T Y, & altitudo eadē Q B, vertex verò pars rectæ A B, æqualis ipsi V Y, ex scholio propos. 25. lib. 11. [a] quòd & basis T Y, duas partes tertias complectatur basis T X. Igitur & prisma, cuius basis T Y, & altitudo Q B, vertex verò pars rectæ A B, æqualis ipsi V Y, æquale erit duabus pyramidibus E R S. H A, C T V K B: Ac proinde hoc prisma appositum prismati A B T V S R, efficiet prisma æquale solido C B K H A E, habens basin rectangulum contentum sub latere cubi T V, & sub recta composita ex V Y, duas tertias partes minoris segmēti V X, comprehendēte, & ex V S, maiore segmento, ideoq; à base cubi deficientē rectangulo [α] X, contento sub latere cubi [α] Y, & sub X Y, tertia parte minoris segmenti V X. Non dissimili ratione inuestigabimus alia similia quinque prismata æqualia & proximè dicto prismati, & reliquis quinque solidis super reliquas quinque cubi bases constitutis. Sex igitur huiusmodi prismata æqualia erunt sex illis solidis, excessui nimirum Dodecaedri supra cubum sibi inscriptū. Quia autem duo quælibet prismata illiusmodi inter se aptata componūt parallelepipedum eiusdem altitudinis; constructur ex sex illis prismatis tria parallelepipeda sub eadē altitudine Q B, quæ æqualis est dimidio lateris pentagoni A B, seu maioris segmēti lateris cubi, & super bases à base cubi deficientes singulas rectangulo contēto sub latere cubi, & sub tertia parte minoris segmenti eiusdem lateris cubi; Ac proinde ex tribus his parallelepipedis inter se compositis exurget parallelepipedum excessui eidem Dodecaedri supra cubū sibi inscriptum æquale, cuius basis à base cubi deficit rectangulo contēto sub latere cubi, & sub tertia parte minoris segmenti eiusdem lateris cubi; altitudo verò æqualis est tribus altitudinibus predictorum trium parallelepipedorum, hoc est, altitudini Q B, quæ æqualis fuit dimidio maioris segmenti lateris cubi, ter sumptæ. Hanc igitur altitudinem dico ab altitudine, seu latere cubi deficere minore segmento eius lineæ, quæ dimidiati lateris cubi segmentū minus existit. Diuidatur enim C K, latus cubi extrema ac media ratione in [β]: Item[q]; C [β], maius segmentum, & [β] K, minus bifariam in [γ], [Δ]; atque ex [β] K, abscindatur [β] [ι], æqualis ipsi [β] [γ], seu C [γ], ita vt C [γ], vel [γ] [β], vel [β] [ι], dimidia pars maioris segmenti C [β], æqualis sit ipsi Q B, & C [ι], toti altitudini præfati parallelepipedi. Potest autem ex minori segmento [β] K, abscindi recta æqualis ipsi C [γ], dimidio maioris segmenti; quia [β] K, maior est, quàm dimidium maioris segmenti C [β]. Cùm enim sit, vt C K, ad C [β], ita C [β], ad [β] K; sit autem C K, minor, quàm dupla ipsius C [β], quòd C [β], sit ipsius maius segmentum; erit quoque C [β], minor, quàm dupla ipsius [β] K, hoc est, erit [β] K, maior, quàm dimidium ipsius C [β]. Quoniam igitur est, vt tota C K, ad maius segmentum C [β], ita maius segmētum C [β], ad minus [β] K; [b] erit quoq; vt C O, dimidia ipsius C K, ad C [γ], vel [β] [ι], dimidia ipsius C [β], ita C [γ], vel [β] [ι], ad [β] [Δ], dimidiam ipsius [β] K; Ac proinde si C O, secetur extrema ac media ratione, erit maius illius segmentum C [γ], vel [β] [ι], & minus [β] [Δ]. Quare & [β] [Δ], minus segmentum secabit [β] [ι], maius segmentum extrema ac media ratione, vt demonstrauimus ad propos. 5. lib. 13. eritq; maius segmentum [β] [Δ], minus autē [Δ] [ι]. Ac propterea rursus [Δ] [ι], minus segmentum secabit rectam [Δ] K, maiori segmento [β] [Δ], æqualem, extrema ac media ratione, minusque segmentum erit [ι] K. Deficit igitur C [ι], altitudo præfati parallelepipedi ab altitudine, seu latere cubi C K, minore segmēto [ι] K, rectæ [Δ] K, vel sibi æqualis rectæ [β] [Δ], quæ dimidiati lateris cubi fuit segmentū minus ostensa. Constat ergo basem parallelepipedi, quo Dodecaedrum excedit sibi inscriptum cubum à base cubi deficere rectangulo contento sub latere cubi, tertiaq; parte minoris segmēti eiusdem lateris cubi; altitudinē verò ab altitudine cubi deficere minore segmento eius lineæ, quæ dimidiati lateris cubi segmentum minus existit. Quocirca Dodecaedrum excedit cubum sibi inscriptū parallelepipedo, &c. Quod erat demonstrandum.




[a] 1. sexti.

[b] 15. quinti.

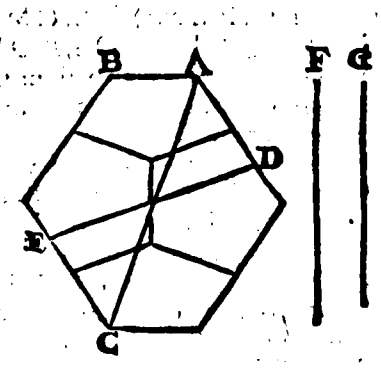
## COROLLARIVM.

*VNDE elicitur, Dodecaedrum à duplo cubi sibi inscripti deficere duobus parallelepipedis, quorū vnius longitudo lateri cubi est æqualis, latitudo autē tertiæ parti minoris segmēti eiusdem lateris cubi, altitudo denique à latere cubi deficit minore segmēto eius lineæ, quæ dimidiati lateris cubi minus segmentū existit; Alterius verò et longitudo, et latitudo lateri cubi æqualis est, altitudo autē minus segmētū eius lineæ, quæ dimidiati lateris cubi segmētū minus existit, ita vt amborū altitudines simul altitudini, siue lateri cubi sint æquales. Nā si prius parallelepipedū addatur illi parallelepipedo, quo cubū à Dodecaedro superari docuimus, conficietur parallelepipedum,*

*lelepipedum, cuius & longitudo, & latitudo lateri cubi æqualis est, basin nimirum eandem habens, quam cubus, altitudo verò à latere cubi deficit minore segmento eius lineæ, quæ dimidiati lateris cubi minus est segmentum, hoc est, altitudine posterioris parallelepipedi. Quare si confecto iam parallelepipedo adiungatur posterius parallelepipedum, compositum erit parallelepipedum prorsus æquale cubo intra Dodecaedrum descripto, siquidem & basis, & altitudo parallelepipedi, æqualis est & basi & altitudini cubi. Atque idcirco, vt Dodecaedrum cubi inscripti duplum existat, desunt prædicta duo parallelepipeda; cùm his accedentibus ad excessum Dodecaedri supra cubum inscriptum, constituatur parallelepipedum cubo inscripto æquale, immò verò alter cubus, vt demonstratum est.*

## THEOR. 29. PROPOS. 29.

DODECAEDRVM ad sibi inscriptum Icosaedrum proportionem habet compositam ex proportione triplicata eius, quam habet diameter Dodecaedri ad rectam centra basium Dodecaedri oppositarum copulantem, & proportione lateris cubi ad latus Icosaedri in eadem sphæra cum cubo descripti.




IN Dodecaedro A B C, diameter sit A C, & recta coniungens centra basium oppositarum D E; At verò F, latus cubi, & G, latus Icosaedri in eadem sphæra cum cubo descripti. Dico proportionem Dodecaedri A B C, ad sibi inscriptum Icosaedrum componi ex proportione triplicata proportionis diametri A C, ad rectam D E; & ex proportione F, lateris cubi ad G, latus Icosaedri. Cùm enim anguli Icosaedri in Dodecaedro descripti reponantur in centris basium Dodecaedri, atque adeò anguli oppositi in centris basium oppositarum; erit recta D E, centra basium Dodecaedri oppositarum connectens, diameter Icosaedri inscripti; Ac propterea Dodecaedrum, cuius diameter D E, in eadem sphæra cum Icosaedro intra Dodecaedrum A B C, collocato describetur, cùm eandem habeant diametrum D E. Intellectis iam tribus magnitudinibus, Dodecaedro scilicet A B C, Dodecaedro diametri D E; & Icosaedro eiusdem diametri D E, intra Dodecaedrum videlicet A B C, descripto; Proportio Dodecaedri A B C, primæ magnitudinis ad Icosaedrum sibi inscriptum, tertiam magnitudinē, componetur, per ea, quæ ad definitionem 5. libri 6. à nobis sunt demonstrata, ex proportionibus Dodecaedri A B C, primæ magnitudinis, ad Dodecaedrum diametri D E, secundam magnitudinem, & Dodecaedri ex diametro D E, descripti secundæ magnitudinis ad Icosaedrum in Dodecaedro A B C, descriptum, tertiam magnitudinem. Cùm ergo Dodecaedrum A B C, ad Dodecaedrum diametri D E, proportionem habeat triplicatam diametri A C, ad diametrum D E, ex corollario propositionis 17. lib. 12. Dodecaedrum verò diametri D E, ad Icosaedrum eiusdem diametri D E, quod nimirum in Dodecaedro A B C, describitur, proportionem habeat, quam F, latus cubi ad G, latus Icosaedri; liquidò constat proportionem Dodecaedri A B C, ad Icosaedrum sibi inscriptum, cuius scilicet diameter D E, componi quoque ex triplicata proportione proportionis diametri A C, ad diametrum D E, rectam videlicet centra oppositarum Dodecaedri copulantem, & ex proportione F, lateris cubi, ad G, latus Icosaedri, in eadem sphæra cum cubo descripti. Dodecaedrum itaq; ad sibi inscriptū Icosaedrum proportionē habet compositam, &c. Quod erat demonstrandū. *a 11. quarti decimi.*

## THEOR. 30. PROPOS. 30.

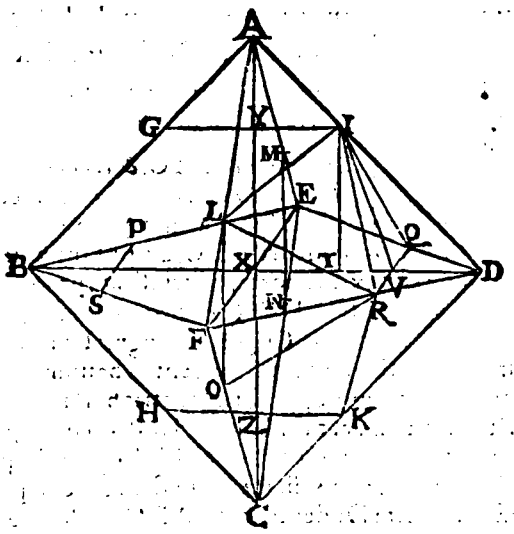
DODECAEDRVM Pyramidis, in qua describitur, duas nonas partes continet, minus duobus parallelepipedis, quorum vnius longitudo lateri cubi in eadem pyramide descripti æqualis est, latitudo verò tertiæ parti minoris segmenti lateris eiusdem cubi, altitudo denique à latere eiusdem cubi deficit minore segmento eius lineæ, quæ dimidiati lateris cubi eiusdem minus segmentum existit; Alterius autem & longitudo, & latitudo lateri cubi prædicti est æqualis, altitudo verò minus segmentum eius lineæ, quæ dimidiati lateris cubi eiusdem segmentum minus existit, ita vt amborum altitudines simul altitudini, siue lateri eiusdem cubi sint æquales.

QVONIAM si in Dodecaedro intra Pyramidem descripto cubus describatur, hic idem cubus in eadem pyramide est descriptus, vt ad finem lib. 15. tradidimus; Cubus autem pyramidis, in quā describitur, nona pars est, [b] cùm pyramis cubi sibi inscripti sit noncupla. Fit, vt magnitudo dicti cubi dupla contineat duas partes nonas pyramidis Dodecaedrum, seu cubum ambientis. Quare, *b 15. huius decimi.*

cùm Dodecaedrũ cubi sibi inscripti duplum sit, ex coroll. propos. 18. huius lib. minus duobus illis parallelepipedis, quorũ mentio facta est in verbis propositionis huius; non obscurè colligitur, Dodecaedrum pyramidi inscriptum duas nonas partes cõtinere ipsius pyramidis, minus dictis duobus parallelepipedis: adeò vt si dicta duo parallelepipeda addantur Dodecaedro, tum demũ magnitudo exurgat duas partes nonas pyramidis complectens. Quamobrem Dodecaedrum Pyramidis, in qua describitur, duas nonas partes cõtinet, minus duobus parallelepipedis, quorũ vnius longitudo lateri cubi in eadem pyramide descripti æqualis est, &c. Quod erat demonstrandum.

## THEOR. 31. PROPOS. 31.

OCTAEDRVM excedit sibi inscriptum Icosaedrum Parallelepipedo, cuius basis est quadratum lateris Icosaedri, altitudo verò maius segmentum semidiametri Octaedri extrema ac media ratione sectæ.




OCTAEDRVM, cui inscriptum est Icosaedrũ, sit A B C D E F, repetita figura propos. 16. libri 15. vbi demonstratum est, viginti triangula Icosaedrum inscriptum componentia esse I Q R, K Q R, G I L, G I M, G P S, H P S, N H K, O H K, R L O, S L O, P M N, Q M N, G M P, H N P, K N Q, I M Q, G L S, H O S, K O R, I L R, quorum octo postrema octo basibus Octaedri sunt imposita, segmentia videlicet omnia eius latera extrema ac media ratione; Item rectam I T, perpendicularem ad B D, æqualem esse maiori segmẽto X Y, semidiametri A X. Dico Octaedrum A B C D E F, superare Icosaedrum sibi inscriptum parallelepipedo, cuius basis est quadratum lateris Icosaedri Q R, altitudo verò I T, maius segmẽtum semidiametri A X. Cùm enim in quatuor basibus Octaedri D E A, D F A, D E C, D F C, angulum solidum Octaedri D, constituentibus, positæ sint quatuor bases Icosaedri I M Q, I L R, K N Q, K O R; remanebunt iuxta angulum solidum D, in eisdem quatuor basibus Octaedri quatuor triangula I Q D, I R D, K Q D, K R D, quibus si accedant duo triangula Icosaedri, Q I R, K Q R, & commune triangulum D Q R, constituentur duæ pyramides super communẽ basem D Q R, nempe I D Q R, K D Q R, inter se æquales, p. coroll. propos. 5. lib. 12. cùm earum altitudo sit recta eadem I T, maius videlicet segmentum semidiametri Octaedri. (Nam quemadmodum A X, secta est à recta G I, in Y, extrema ac media ratione, ita quoq; secta est C X, à recta H K, in Z. Quare si ex K, ad B D, perpendicularis ducatur, altitudo nimirum pyramidis K D Q R; erit ea æqualis rectæ Z X, maiori segmento semidiametri C X, hoc est, ipsi I T.) Quæ quidem pyramides extra Icosaedrum in Octaedro descriptum consistunt. Simili modo prope singulos reliquos quinque angulos Octaedri constituentur binæ pyramides & inter se & dictis duabus æquales, extra Icosaedrum prædictum: Ita vt Octaedrum superet Icosaedrum sibi inscriptum duodecim illis pyramidibus æqualibus. Quia verò triangulum D Q R, dimidium est quadrati lateris D Q; (Cùm D Q, D R, rectæ æquales sint, minora scilicet segmenta laterum Octaedri, angulumq; contineant rectum.) erit recta Q R, diameter illius quadrati; Ac proinde quadratum ipsius Q R, duplum erit quadrati lateris D Q, ideoq; quadruplum trianguli D Q R. Prisma itur, siue parallelepipedum, cuius basis quadratũ rectæ Q R, & altitudo I T, quadruplum quoq; erit prismatis, cuius basis triangulum D Q R, & altitudo eadem I T, per ea, quæ demonstrauimus ad propos. 7. lib. 12. Prisma autem, cuius basis D Q R, & altitudo I T, triplum existens, ex coroll. 1. propos. 7. lib. 12. pyramidis I D Q R, æquale est tribus pyramidibus earum duodecim, quas circa Icosaedrum consistere diximus. Prisma ergo, vel parallelepipedũ, cuius basis quadratũ rectæ Q R, & altitudo I T, quadruplum quoq; est trium illarũ pyramidum. Quare cùm earundem trium pyramidum quadruplæ sint omnes duodecim pyramides simul Icosaedrũ ambientes; Æquale quoque erit prisma, seu parallelepipedum, cuius basis quadratum rectæ Q R, lateris nimirum Icosaedri, & altitudo I T, maius segmentum semidiametri A X, duodecim illis pyramidibus, hoc est, excessui Octaedri supra Icosaedrum sibi inscriptum; Ac proinde Octaedrum superabit Icosaedrum dicto prismate, vel parallelepipedo. Octaedrum ergo excedit sibi inscriptum Icosaedrum parallelepipedo, cuius basis est quadratum lateris Icosaedri, &c. Quod erat ostendendum.

*34. primi.

### COROLLARIVM.

*HINC infertur, Pyramidem excedere duplum Icosaedri sibi inscripti parallelepipedo, cuius basis quadratum lateris Icosaedri, altitudo verò recta linea bifarias sectiones oppositorũ laterum Icosaedri coniungens. Cùm enim ex demonstratis propos. 19. lib. 15. constet, si Pyramidi Octaedrum*

*Octaedrum, & huic Octaedro Icosaedrum imponatur, Icosaedrum eidem Pyramidi esse inscriptum;* [a] *Octaedrum autem superet Icosaedrum sibi inscriptũ parallelepipedo, cuius basis quadratum lateris Icosaedri, nempe recta Q R, altitudo verò maius segmentum semidiametri Octaedri, recta videlicet I T, seu Y X: Fit, vt Octaedrum bis sumptum, nempe pyramis, cui inscribitur, (*[b] *quòd Pyramis dupla sit sibi inscripti Octaedri) superet idem Icosaedrũ in Octaedro, ideoq; & in Pyramide descriptum, duplo illius parallelepipedi, nimirum parallelepipedo cuius basis idem quadratum lateris Icosaedri, altitudo verò recta Y Z, coniungens bifarias sectiones laterum Icosaedri oppositorum G I, H K. Hoc enim parallelepipedum illius duplum est, per demonstrata à nobis in scholio propos. 14. lib. 12. cùm altitudines duplam habeant proportionem. Quare hoc eodem parallelepipedo, cuius basis quadratum lateris Icosaedri, altitudo verò recta linea bifarias sectiones oppositorum laterum Icosaedri copulans, Pyramis duplum Icosaedri sibi inscripti excedit.*

a 31. sexti decimi.

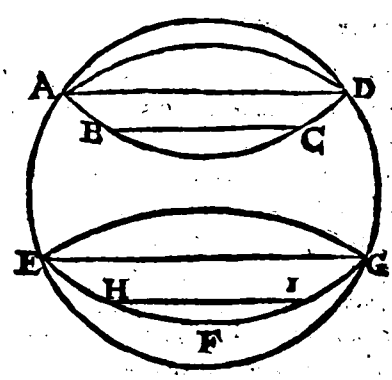
b 21. sexti decimi.

## DE QVINQVE CORPORVM REGVLARIVM descriptione in data sphæra, ex Pappo Alexandrino.

*QVONIAM Euclides lib. 13. quinque corpora Regularia seorsum extra sphæram construxit, deinde verò eadem à sphæra comprehendi, noua demonstratione confirmauit; non erit abs re docere, qua ratione Pappus Alexandrinus eadem quinque corpora in data sphæra describat: præsertim cùm eius ratio multò clarior videatur, & facilior, q̃ constructio illa, ab Euclide præscripta. Sed prius ex eodem Pappo lemmata nonnulla præmittenda sunt, quorum aliqua etsi per elementa sphærica Theodosii demonstrantur, non tamẽ propterea ordinem Euclidis peruertere censeri possumus: quippe cùm propositiones Sphæricorum elementorũ, quibus hic indigemus, ex solis 19. prioribus propos. lib. 11. Euclidis pendeant; vt commodè antè lib. 12. atq; adeò multò magis ante hãc corporũ Regularium constructionem percipi possint. In citandis autem Theodosii propositionibus, sequemur ordinem nostrorum commentariorum, quos in eadem elementa conscripsimus. Hinc ergo initium sumamus.*

### LEMMA I.

**DATIS duobus circulis in sphæra parallelis, dataque in vno eorum linea recta; ducere in altero diametrum huic rectæ datæ parallelam.**




*IN sphæra sint duo circuli paralleli A B C D, E F G; sitq; primũ in A B C D, data diameter A D, cui in E F G, ducẽda sit diameter parallela. Ducatur, vt in scholio propos. 18. lib. 11. docuimus, per diametrum A D, planũ rectum ad circulum A B C D,* [c] *faciens in sphæra superficie circulum A E G D. Quoniam igitur circulus A E G D, circulum A B C D, bifariam, & ad angulos rectos secat, erit circulus A E G D, maximus, transibitq; per polos circuli A B C D, ex scholio propos. 15. lib. 1. Theod. ac proinde & per polos circuli E F G,* [d] *cùm paralleli eosdem polos habeant:* [e] *ideoq; eum bifariam secabit: Communis ergo sectio E G, eius diameter erit:* [f] *quæ cùm sit ipsi A D, parallela, patet propositum.*

c 1. 1. Theodosij.

d 1. 2. Theodosij.

e 15. 1 Theodosij.

f 16. vndec.

*DEINDE in circulo A B C D, data recta B C, non sit eius diameter, cui ducenda sit diameter parallela in circulo E F G.* [g] *Ducatur ipsi B C, per centrum circuli A B C D, diameter parallela A D; cui in circulo E F G, ducatur diameter parallela E G, vt proximè ostendimus. Quoniam igitur vtraque B C, E G, eidem A D, parallela est, ex constructione,* [h] *ipsa quoque B C, E G, inter se parallelæ erunt. Quod est propositum.*

g 31. primi.

h 19. vndec.

*EADEM ratione recta B C, ducetur in circulo E F G, parallela H I, à diametro E G, diuersa, quæ ipsi B C, æqualis sit, si modò B C, maior non sit diametro E G. Nam si in circulo E F G, ducatur ipsi B C, parallela H I, & æqualis, vt ad propos. 1. lib. 4. tradidimus, factum erit, quod iubetur.*

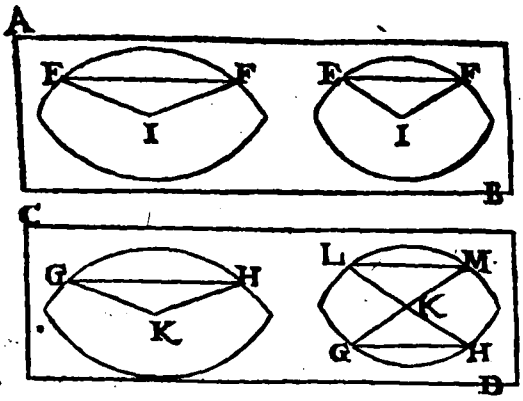
### LEMMA II.

**SI in planis parallelis descripti sint duo circuli, in quibus duæ rectæ parallelæ abscindant arcus similes; erunt duæ rectæ coniungentes extrema vtriusq; rectę cum centro, parallelæ duabus rectis, quæ extrema alterius rectæ cum centro coniungunt.**

*IN planis parallelis A B, C D, descripti sint duo circuli, in quibus rectæ E F, G H, primùm parallelæ sint, ad easdem partes centrorum I, K; auferantq; arcus similes E F, G H, ac tandem iungantur ad centra rectæ E I, F I, G K, H K. Dico tam E I, G K, quàm F I, H K, parallelas esse. Quoniam enim arcus E F, G H, similes sunt, erunt anguli I, K, æquales, ex scholio propositionis 22. libri 3.* [i] *Igitur reliqui anguli E, F, reliquis angulis G, H, æquales erunt.* [k] *Cùm ergo tam illi, quàm hi, sint inter se æquales; erit tam angulus E, angulo G, quàm*

i 32. primi.

k 5. primi.



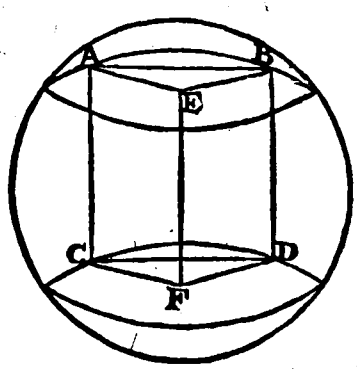

angulum F, angulo H, æqualis. Quoniam igitur in planis parallelis recta E F, G H, parallelæ sunt, & rectæ E I, G K, ad easdem partes plani per E F, G H, ductæ efficiunt cum ipsis æquales angulos E, G; erunt, ex ijs, quæ in scholio propos. 16. lib. 11. demonstrauimus, E I, G K, parallelæ: Eademq; ratione F I, H K, parallelæ erunt.

a 15. primi. b 4. primi. c 28. tertij. d 27. primi. e 9. vndec.

DEINDE sint E F, G H, parallelæ, non ad easdem partes centrorum I, K. Dico tam E I, H K, quàm F I, G K, esse parallelas. Producti enim G K, H K, in-gatur recta L M. Et quia latera G K, H K, lateribus L K, M K, sunt æqualia, [a] angulos quoq; ad verticem K, æquales continent; [b] erũt & bases G H, L M, & anguli H, L, æquales, & anguli G, M. [c] Igitur arcus G H, L M, æquales sunt, [d] & rectæ G H, L M, inter se parallelæ: Atproinde cùm vtraq; E F, L M, ipsi G H, sit parallela, [e] erũt & E F, L M, parallelæ inter se. Quia igitur E F, L M, parallelæ sunt, abscindentes ad easdem partes centrorũ arcus similes E F, L M; (Nam cùm arcus G H, sit arcui E F, similis, erit quoq; arcus L M, qui arcui G H, æqualis est, eidem arcui E F, similis.) erunt tam E I, L K, hoc est, E I, H K, quàm F I, M K, hoc est, F I, G K, parallelæ. Quod est propositum.

## LEMMA III.

Si in sphæra sint duo circuli paralleli, & æquales, in quibus ductæ sint duæ rectæ parallelæ & æquales, ad easdem partes centrorum; rectæ harum parallelarum extrema puncta ad easdem partes coniungẽtes, æquales quoque & parallelæ sunt, & ad plana circulorum perpendiculares.




IN sphæra sint duo circuli paralleli & æquales A B, C D, in quibus sint duæ rectæ æquales, & parallelæ A B, C D, ad easdem partes centrorum, quarũ extrema iungantur ad easdem partes rectis A C, B D. Dico rectas A C, B D, æquales quoq; esse, ac parallelas, & ad plana circulorũ perpendiculares. Quoniam enim A B, C D, parallelæ sunt; [f] erunt A C, B D, in eodem cum ipsis plano. Quare cùm A B, C D, sint etiam æquales; [g] æquales quoq; erunt, ac parallelæ A C, B D, quod est primum.

f 7. vndec. g 33. primi.

EX centris deinde E, F, ductis rectis E A, E B; F C, F D, iunctâque recta E F; erunt tam A E, C F, quàm B E, D F, parallelæ, ex secundo lemmate: Sunt autem & æquales ob circulorum æqualitatem. [h] Igitur & A C, E F, & B D, E F, parallelæ erunt, & æquales. [i] Quoniam verò circuli A B, C D, paralleli circa eosdem polos sunt, [k] recta per eorum polos ducta transibit per eorundem centra, & per centrum sphæræ, & ad plana eorundem recta erit. Quocirca recta E F, eorundem centra coniungens, per eorum polos, & centrum sphæræ incedet, ne duæ rectæ per eorum centra dicantur transire, nimirum recta E F, & recta per eorum polos extensa. quod est absurdum. Haberent enim illæ rectæ segmentum commune E F. [l] Igitur E F, ad plana circulorum A B, C D, recta est: [m] Ac propterea & vtraque A C, B D, ipsi E F, parallela, ad eadem plana erit recta. Quod est secundum.

h 33. primi. i 1. 2. Theodosij. k 10. 1. Theodosij. l 10. 1. Theodosij. m 8. vndecimi.

HAEC demonstratio locum etiam habet, quando parallelæ A B, C D, sunt circulorum diametri, sed tũc E A, E B, F C, F D, erunt partes diametrorum, vt patet.

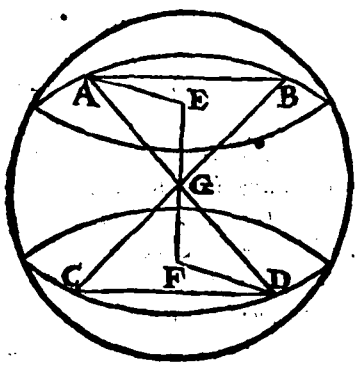
## LEMMA IIII.

Si in sphæra sint duo circuli paralleli & æquales, in quibus ductæ sint duæ rectæ parallelæ & æquales, non ad easdem partes centrorum: rectæ harũ parallelarum extrema puncta non ad easdem partes coniungentes, in centro sphæræ se intersecant, ac proinde diametri sphæræ erunt, & inter se æquales: Rectæ verò earundem parallelarum extrema puncta ad easdem partes connectentes, & æquales ac parallelæ inter se sunt, & cum parallelis rectos angulos constituunt.

IN sphæra sint duo circuli paralleli & æquales A B, C D, & in iis duæ rectæ parallelæ & æquales A B, C D, non ad easdem partes centrorum, quarum puncta extrema primùm non ad easdem partes iungantur rectis A D, B C. Dico rectas A D, B C, in centro sphæræ se intersecare, ideoq; diametros esse sphæræ inter se æquales. Quoniam enim A B, C D, parallelæ sunt; [n] erunt A D, B C, in eodem cum ipsis plano; ac proinde se mutuò intersecabunt, vt in puncto G: quod dico esse centrũ sphæræ. Connectantur enim circulorũ centra E, F, rectis

n 2. vndec.

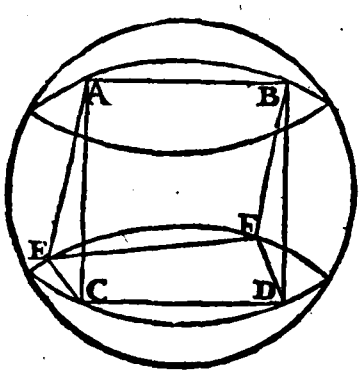
E A, E G,




*EA, EG, FD, FG.* [a] *Et quia anguli AGB, CGD, ad verticem aequales sunt:* [b] *Item tam alterni anguli BAD, CDA, quàm alterni ABC, DCB; aquiangula erunt triangula ABG, CDG.* [c] *Igitur erit vt AB, ad BG, ita DC, ad CG: Item vt AB, ad AG, ita DC, ad DG. Cùm ergo AB, CD, ponantur aequales,* [d] *erunt quoque tam BG, CG, quàm AG, DG, inter se aequales. Rursus quia AE, DF, semidiametri circulorum aequalium aequales sunt; sunt autem ex 2. lemmate & parallelæ,* [e] *ideoq; anguli alterni EAD, FDA, aequales; erunt duo latera EA, AG, duobus lateribus FD, DG, aequalia, angulosq; comprehendent aequales.* [f] *Igitur & baſes EG, FG, & anguli AGE, DGF, aequales ſunt.* [g] *Et quia AD, in eodem plano eſt, in quo parallelæ AE, DF;* [h] *& EG, FG, in eodem plano, in quo AD, AE, DF; erunt EG, FG, in rectum & continuum conſtituta, propter aequales angulos AGE, DGF, vt ex Proclo ad propoſ. 15. lib. 1. oſtendimus. Quare EF, recta coniungens centra circulorum parallelorum per centrum ſphæræ tranſibit, vt in præcedenti lemmate demonſtrauimus,* [i] *perpendicularisq; ad eorum plana erit. Cùm ergo EG, FG, aequales ſint oſtenſæ, erit G, centrum ſphæræ,* [k] *propterea quòd circuli æquales AB, CD, æqualiter à centro ſphæræ abſunt; inæqualiter verò abeſſent, ſi centrum ſphæræ in rectâ EF, diceretur aliud punctum quàm G. Quocirca AD, BC, diametri ſphæræ ſunt, & inter ſe propterea æquales. quod eſt primum.*

a 15. primi.
b 29. primi.
c 4. ſexti.
d 14. quinti.
e 29. primi.
f 4. primi.
g 7. vndec.
h 2. vndec.
i 10. 1. Theodoſij.
k 6. 1. Theodoſij.

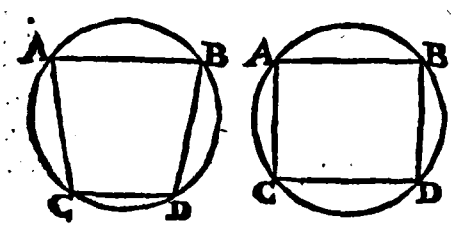
*SED iam puncta extrema parallelarum æqualium AB, CD, ad eaſdem partes iungantur rectis AC, BD. Dico rectas AC, BD, & æquales ac parallelas inter ſe eſſe, & angulos CAB, ABD, BDC, DCA, eſſe rectos. Quòd enim ſint parallelæ & æquales,* [l] *manifeſtum eſt, cùm extrema puncta parallelarum æqualium coniungant. Quòd autem ad AB, CD, ſint perpendiculares, ita oſtendetur. In circulo CD, ad rectam CD, excitentur perpendiculares CE, DF, iungaturq; EF, AE, BF. Quia igitur anguli ECD, FDC, recti ſunt, erit* [m] *ex ſcholio propoſ. 31. lib. 3. arcus ECD, FDC, ſemicirculi, ac proinde & reliqui arcus EFD, CEF, ſemicirculi erunt,* [n] *& anguli EFD, CEF, recti. Quare in parallelogrammo rectangulo DE, rectæ CD, EF, æquales ſunt,* [o] *ideoq; & AB, EF, parallelæ erunt, & æquales. Igitur ex 3. lemmate AE, BF, ad plana circulorum rectæ erunt, ac proinde, ex defin. 3. lib. 11. anguli AEC, BFD, recti erunt. Recta igitur EF, perpendicularis ad vtramque EC, EA, & ad vtrãq; FD, FB, vt oſtendimus,* [p] *perpendicularis erit & ad planum trianguli AEC, per EC, EA, ductii, & ad planum trianguli BFD, per FD, FB, ductii: ac propterea & CD, AB, ipſi EF, parallelæ, ad eadem plana triangulorum perpendiculares erunt; ideoq; ex defin. 3. lib. 11. anguli CAB, ABD, BDC, DCA, recti erunt. Quod eſt ſecundum.*




l 33. primi.
m 31. tertii.
n 9. vndec.
o 4. vndec.
p 8. vndec.

## LEMMA V.

**SI in ſphæra ſint duæ rectæ parallelæ, rectæ earum puncta extrema ad eaſdem partes coniungentes, æquales inter ſe erunt. Et ſi parallelæ fuerint æquales, coniungentes non ſolùm æquales, ſed & parallelæ erunt, rectosq; cum ipſis angulos conficient.**



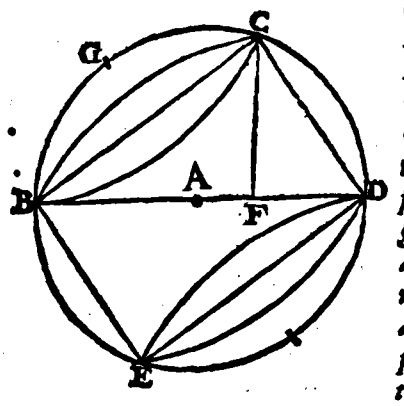

*SINT in ſphæra duæ parallelæ AB, CD, quarum extrema puncta ad eaſdem partes connectantur rectis AC, BD. Dico AC, BD, æquales eſſe. Quia enim parallelæ ſunt AB, CD;* [q] *erunt AC, BD, in eodẽ cũ ipſis plano. Ducto igitur per ipſas plano,* [r] *fiat in ſphæra circulus AEDC, in quo cùm parallelæ ſint AB, CD; erunt, ex ſcholio propoſ. 27. lib. 3. arcus AC, BD, æquales:* [s] *ideoq; & rectæ AC, BD, æquales erunt. Quod ſi parallelæ AB, CD, fuerint æquales, ita vt quadrilaterum ABDC, in circulo habeat duo oppoſita latera AB, CD, parallela, & æqualia; erit ex ſcholio propoſ. 31. lib. 3. ABDC, parallelogrammum rectangulum; ac proinde anguli A, B, D, C, recti erunt. Quod eſt propoſitum.*

q 7. vndec.
r 11. 1. Theodoſij.
s 29. tertii.

## LEMMA VI.

**IN data ſphæra duos circulos æquales, ac parallelos deſcribere, ita vt diameter ſphæræ ſit vtriuſque diametri potentia ſeſquialtera.**

*SIT ſphæra centrum A, per quod planũ ductum faciat circulum maximũ BCDE, cuius diameter BD, ex coroll. 1. prop. 1. lib. 1. Theod. Secta autem BD, in F, vt BF, ipſius FD, dupla ſit; erit BD, talium partium 3.*




a 29 primi
b 31. tertij.
c 34. primi
d 2 2. Theodosij.
e 15 1. Theodosij.

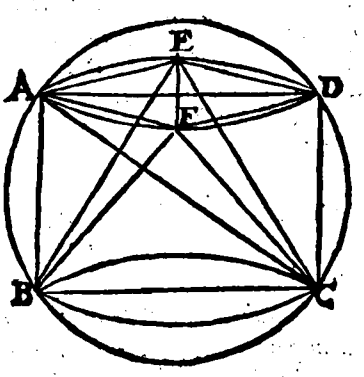
*qualium 2. est BF; ac proinde BD, ipsius BF, sesquialtera est. Ducta quoque FC, ad BD, perpendiculari, iungantur rectæ BC, DC, ductaq; DE, ipsi BC, parallela, connectatur recta BE.* [a] *Et quoniam tam duo anguli BCD, EDC, quàm duo BED, CBE, duobus rectis æquales sunt.* [b] *estq; tam BCD, quàm BED, rectus; erit quoq; & EDC, & CBE, rectus. Igitur ex scholio prop. 34. lib. 1. quadrilaterum rectangulum BCDE, parallelogrammum est;* [c] *ideoq; rectæ BC, DE, æquales sunt. Diuisoiam arcu BC, bifariam in G, erit quoque arcus EGD, diuisus bifariam in G, quòd ex scholio propos. 27. lib. 3. arcus quoque BE, CD, æquales sint. Polo igitur G, & intervallis GB, GE, circuli in superficie sphæræ describantur transeuntes per C, D, ob æqualitatem tam arcuum GB, GC, quàm GE, GD;* [d] *qui paralleli erunt, cum eosdem habeant polos.* [e] *Et quia circulus maximus BCDE, per polos secat circulos BC, ED, bifariam; erunt BC, ED, diametri ipsorum, quæ cùm æquales sint ostensa, erunt & circuli BC, ED, æquales. Dico diametrum sphæræ BD, ad vtramque diametrum BC, ED, proportionem habere potentia sesquialteram. Quoniam enim, ex coroll propos. 8. lib. 6. tres rectæ DB, BC, BF, continuè proportionales sunt; erit ex coroll. propos. 20. lib. 6. vt BD, ad BF, ita quadratum ex BD, ad quadratum ex BC: Est autem BD, ipsius BF, sesquialtera, vt ostensum est. Igitur & quadratum ex BD, quadrati ex BC, atque adeò & quadrati ex DE, sesquialterum est: atque idcirco diameter sphæræ BD, vtriusque diametri BC, DE, potentia sesquialtera est. quod est propositum.*

*His demonstratis, hoc modo in sphæra data describemus quinq; corpora regularia.*

## PROBL. 1. PROPOS. 1.

### IN data sphæra Pyramidem describere.

*DESCRIBANTVR in data sphæra, ex lemmate 6. duo circuli AD, BC, æquales, & paralleli, quorum diametrorum potentia sit sesquialtera diameter sphæræ: & per eorum polos maximus circulus ducatur ABCD,* [f] *qui eos ad angulos rectos, ac bifariam secabit, ac proinde cum eis communes sectiones faciet diametros AD, BC. Ducatur in circulo AD, alia diameter EF, secans AD, ad angulos rectos in centro, & rectæ ducantur EB, EC, FB, FC. Dico EBCF, esse pyramidem, hoc est, quatuor triangula EBC. BCF, CFE, EFB, esse æquilatera & æqualia. Iunctis enim rectis AE, ED, DF, FA, AB, CD, CA; erit AC, diameter sphæræ, ex lemmate 4. & AB, DC, æquales erunt, & ad plana circulorum rectæ, ex 3. lemmate. Denique AEDF, quadratum erit in circulo AD, descriptum, vt constat ex prop. 6. lib. 4. Itaque quoniam, ex constructione, quadratum ex diametro sphæræ AC, sesquialterum est quadrati ex AD, diametro circuli; si ponatur quadratum ex AC, 3. erit quadratum ex AD, 2. Cùm ergo quadratum ex AC,* [g] *æquale sit quadratis ex AD, DC, quòd angulus ADC, rectus sit, ex defin. 3. lib. 11. erit quadratum ex DC, 1. ac proinde quadratum ex AD, quadrati ex DC, duplum erit: Est autem & quadratum ex AD, quadrati ex DF, duplum, ex scholio prop. 47. lib. 1. Æqualia ergo sunt quadrata ex DC, DF;* [h] *quibus cùm æquale sit quadratum ex CF, quòd angulus CDF, ex defin. 3. lib. 11. rectus sit; erit quadratum ex CF, quadrati ex DF, quoque duplum, propterea quadrato ex AD, æquale. Recta igitur CF, rectæ AD, hoc est, ipsi BC, æqualis est. Eodem modo ostendetur BF, eidem BC, æqualis; ideoq; BCF, triangulum est æquilaterum.*




f 15. 1. Theodosij.
g 47. primi
h 47. primi

*RVRSVS quia quadratum ex AD, quadrati ex DC, duplum est ostensum; est autem, ex scholio prop. 47. lib. 1. & duplum quadrati ex DE: æqualia erunt quadrata ex DC, DE:* [i] *quibus cùm æquale sit quadratum ex CE; quòd angulus CDE; ex defin. 3. lib. 11. rectus sit; duplum quoque erit quadratum ex CE, quadrati ex DE. Æqualia ergo sunt quadrata ex CE, AD, propterea quæ recta CE, rectæ AD, hoc est, rectis BC, EF, æqualis est, atque adeò & rectæ CF, quæ ipsi BC, ostensa est æqualis. Triangulum igitur CEF, æquilaterum etiam est; & ipsi BCF, æquale, ob laterum æqualitatem. Non aliter demonstrabimus, triangulum BEF, esse æquilaterum, & ipsis BCF, FCE, æquale. Ex quo sequitur & BCE, triangulum æquilaterum esse, & aliis tribus æquale: quippe cùm latera BE, CE, ipsi BC, ostensa sint æqualia. Pyramis ergo est EBCF, ex defin. 26. lib. 11. & in data sphæra descripta, cùm eius anguli solidi E, B, C, F, in superficie sphæræ consistant. quod est propositum.*

i 47. primi

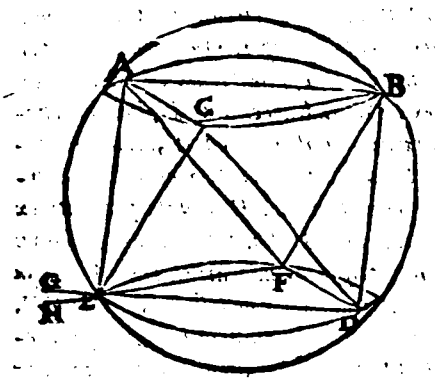
COROL-

## COROLLARIVM.

*HINC sequitur, diametrum sphæræ potentia esse sesquialteram lateris pyramidis in ea sphæra descriptæ. Nam latus pyramidis est æquale diametro AD, vt ostendimus, & ex constructione, diameter sphæræ potentia est sesquialtera diametri AD.*

## PROBL. 2. PROPOS. 2.

**IN data sphæra Octaedrum describere.**




*DESCRIBANTVR ex lemmate 6. in data sphæra duo circuli æquales & paralleli ABC, DEF, ita vt sphæræ diameter diametri cuiuslibet eorum potentia sit sesquialtera. [a] Descripto autem triangulo æquilatero ABC, in circulo ABC, ducatur, per primum lemma, recta AB, in circulo DEF, parallela & æqualis DE, ad diuersas partes centrorum: quæ latus etiam erit trianguli æquilateri in circulo DEF, descripti, ob circulorum æqualitatem. Completo ergo triangulo æquilatero DEF, erunt singula eius latera singulis lateribus trianguli ABC, æqualia & parallela: æqualia quidem, ob laterum AB, DE, æqualitatem; parallela verò, ex schol. propos. 16. lib. 11. Cùm enim parallelæ sint AB, DE, & anguli ABC, DEF, æquales; producti rectis DE, FE, ad G, H, erunt quoque anguli ABC, GEH, æquales. Cùm ergo parallelæ sint AB, GE, & BC, EH, ad easdem partes plani per AB, GE, ducti: erunt quoque BC, HE, hoc est, BC, EF, parallelæ, ex illo scholio propos. 16. lib. 11. Eadem ratione parallela erit DF, ipsi AC. Connectantur denique AE, EC, CD, DB, BF, FA, vt in figura. Dico AD, octaedrum esse, hoc est, octo triangula ABC, CAE, ECD, DCB, BFA, AFE, EFD, DFB, æquilatera esse, & æqualia. Quoniam enim in circulis parallelis & æqualibus sphæræ, rectæ AB, DE, æquales sunt & parallelæ ad diuersas partes centrorum, erunt, per 4. lemma, rectæ iunctæ AD, BE, (quas tamen confusionis vitandæ gratia non duximus.) diametri sphæræ, & rectæ AE, BD, æquales etiam erunt, ac perpendiculares ad ipsas AB, DE. [b] Quadratum igitur ex BE, duobus quadratis ex BD, DE, æquale erit: Posito autem quadrato ex diametro sphæræ BE, 6. quadratum ex DE, est 3. (Nam cùm per constructionem diameter sphæræ potentia sit sesquialtera diametri circuli DEF: posito quadrato ex BE, 6. erit quadratum diametri circuli DEF, 4. At posito quadrato diametri circuli DEF, 4. quadratum lateris trianguli æquilateri DE, est 3. quòd, ex coroll. 1. prop. 12. lib. 13. diameter circuli potentia sit sesquitertia lateris trianguli æquilateri.) Igitur & quadratum ex BD, est 3. ac proinde quadrata ex DE, BD, æqualia sunt, & rectæ ipsæ DE, BD, æquales. Est autem DE, ipsi AB, per constructionem, & BD, ipsi AE, per 4. lemma, æqualis. Quatuor ergo rectæ AB, BD, DE, EA, æquales erunt, constituentq; quadratum ABDE, cùm anguli ad A, B, D, E, recti sint, ex eodem 4. lemmate.*

[a] 2. quarti

[b] 47. primi

*RVRSVS quia BC, EF, parallelæ sunt & æquales ad diuersas partes centrorum; erunt quoque iunctæ rectæ BE, CF, non ad easdem partes, diametri sphæræ, ex 4. lemmate, & rectæ BF, CE, æquales inter se, atq; ad BC, EF, perpendiculares, erit q; rursus, vt prius, quadratum BCEF. Non aliter ostendemus, ACDF, quadratũ esse; cùm iunctæ rectæ AD, CF, sint quoq; sphæræ diametri, ex 4. lemmate, &c. Cùm ergo tria quadrata AD, BE, CF, constructa sint super latera æqualia AB, BC, CA, nimirum super latera trianguli æquilateri, cùm AB, latus sit quadrati AD, & BC, quadrati BE, & CA, quadrati CF: erunt omnia triangula octo ABC, CAE, ECD, DCB, BFA, AFE, EFD, DFB, æquilatera, & inter se æqualia. Octaedrum ergo est AD, ex defin. 27. lib. 11. & in data sphæra descriptũ, cùm eius anguli solidi, A, B, D, E, C, F, sphæræ superficiem attingant. quod est propositum.*

## COROLLARIVM.

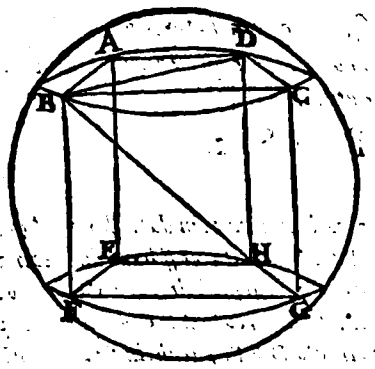
*COLLIGITVR ex his, sphæræ diametrũ potentia duplam esse lateris octaedri in ea sphæra descripti. Demonstratum enim est, quadratum ex BE, diametro sphæræ duplum esse quadrati ex DE, latere octaedri.*

## PROBL. 3. PROPOS. 3.

**IN data sphæra cubum describere.**

*DESCRIBANTVR ex lemmate 6. in data sphæra duo circuli æquales ac paralleli ABCD, EFGH, quorum diametrorum potentia sit sesquialtera diameter sphæræ. [c] Descripto autem quadrato ABCD, in circulo ABCD, ducatur, per 1. lemma, recta AD, in circulo EFGH, parallela EH, & æqualis ex eadem parte centrorum, quæ latus quoque erit quadrati in circulo EFGH, descripti, ob circulorum æqualitatem. Completo ergo quadrato EFGH, erunt singula eius latera singulis lateribus quadrati ABCD, æqualia, & parallela: æqualia quidem, ob laterum AD, EH, æqualitatem; parallela verò ex scholio*

[c] 6. quarti




*propoſ.16. lib.11. Nam quia parallela ſunt A D, E H, ſunt q; anguli æquales A D C, E H G, nimirum recti; erunt quoq; D C, H G, parallela, cùm ſint ad eaſdem partes plani per A D, E H, ducti, & ſic de cæteris. Iungantur denique ad eaſdem partes centrorum rectæ A E, B F, C G, D H, quæ, per lemma 3. ad plana circulorũ rectæ erũt, & inter ſe parallelæ. Dico A G, eſſe cubum, hoc eſt, ſex quadrilatera A B C D, E F G H, A D H E, B C G F, A B E E, C D H G, eſſe quadrata & æqualia. Ductis enim rectis B H, B D, erit, ex lemmate 4. B H, diameter ſphæræ; at B D, diameter circuli A B C D, quippe quæ diameter ſit quadrati circulo inſcripti. Quoniam igitur, per conſtructionem, quadratum ex B H, ſeſquialterum eſt quadrati ex B D; quadratum autem ex B D, quadrati ex B C duplum, ex ſcholio propoſ.47. lib.1. ſi ſtatuatur quadratum ex B H 3. erit quadratum ex B D, 2. & quadratum ex D C, 1. atque adeò quadratum ex B H, quadrati ex D C, triplum erit. Rurſus quia quadratum ex B H, eſt 3. & quadratum ex B D, 2. [a] eſt q; quadratum ex B H, æquale quadratis ex B D, D H, quòd angulus B D H, ex defin.3. lib.11. rectus ſit, erit quadratum ex D H, 1. Quadratum igitur ex B H, triplum eſt quadrati ex D H. Fuit autem idem quadratum ex B H, triplum quadrati ex D C. Æqualia ergo ſunt quadrata ex D C, D H, ac proinde rectæ D C, D H, æquales. Cùm ergo oppoſitis lateribus G H, C G, æquales ſint; erunt omnia quatuor latera æqualia in parallelogrammo C H. Cùm igitur & anguli recti ſint, ex defin.3. lib.11. quadratum erit C H. Eadem ratione & B E, A H, B G, quadrata oſtendentur: Sed & A C, E G, quadrata ſunt, ex conſtructione. Sunt ergo omnia ſex quadrilatera quadrata, & inter ſe æqualia, ob laterum æqualitatem. Cubus igitur eſt A G, ex defin.25. lib.11. & in data ſphæra deſcriptus, cùm eius anguli ſolidi A, B, C, D, E, F, G, H, ſuperficiem ſphæræ contingant. quod eſt propoſitum.*

a 47. primi

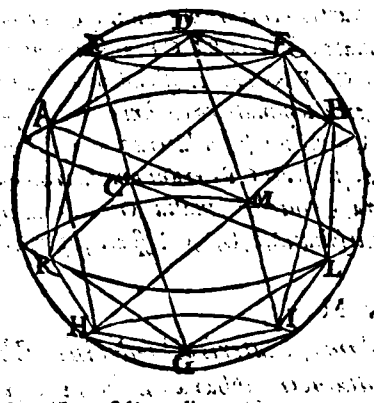
## COROLLARIVM

*CONSTAT ex his, diametrum ſphæræ potentia triplam eſſe lateris cubi in ea ſphæra deſcripti. Demonſtratum enim eſt, quadratum ex diametro ſphæræ B H, triplum eſſe quadrati lateris cubi D C, vel D H, vel A D, &c.*

*MANIFESTVM quoque eſt, eundem circulum comprehendere & quadratum cubi, & triangulum Octaedri in eadem ſphæra deſcriptorum: quia videlicet circulus A B C D, huius figuræ æqualis eſt circulo A B C, figuræ antecedentis propoſitionis. Id quod demonſtratum quoque eſt lib.14. propoſ.21.*

# PROBL. 4. PROPOS. 4.

## IN data ſphæra Icoſaedrum deſcribere.




b 12. ſexti.

c 1. quarti.

d 1.1. Theodoſij.

e 12. ſexti.

f 1.1. Theodoſij.

g 2. quarti.

*REPERIATVR [b] recta linea, ad quam ſic ſe habeat diameter ſphæræ datæ, vt pentagoni latus ad latus hexagoni in eodem circulo cum pentagono deſcripti: Fiat q; ex coroll. propoſ.6. lib.10. vt numerus 3. ad 1. ita quadratum rectæ inuentæ ad quadratum alterius cuiuſdam linea, ad cuius interuallum, veluti ſemidiametri, circulus in data ſphæra deſcribatur. Hoc autem facili negotio fiet. Deſcripto maximo circulo in ſphæra data, [c] accommodetur in eo recta, quæ inuenta ſemidiametri ſit dupla, cùm hæc recta minor ſit diametro ſphæræ, ſiue illius circuli maximi, vt infrà probabitur. Nam ſi per eam rectam planum ducatur rectũ ad circulum illum maximum, [d] faciet id circulum A B C, in ſphæra, cuius ſemidiameter, ex conſtructione, potentia ſubtripla eſt rectæ mixtæ inuentæ. Deinde [e] inueniatur rurſus recta linea, ad quam ea ſic habeat data ſphæræ diameter, vt pentagoni latus ad latus decagoni in eodem circulo cum pentagono deſcripti; Fiat q; vt 3. ad 1. ita, per coroll. propoſ.6. lib.10. quadratum rectæ inuentæ ad quadratum alterius linea, ad cuius interuallum alter circulus in ſphæra deſcribatur priori circulo A B C, parallelus: quod fiet, ſi in eodem illo circulo maximo accommodetur recta æqualis duplæ ſemidiametri inuentæ, & parallela prioris circuli diametro; ex iis, quæ ad propoſ.1. lib.4. demonſtrauimus. & per eam rectam planum extendatur priori circulo parallelum, hoc eſt, ad dictum circulum maximum rectum, ex ſcholio propoſ.18. lib.11. Nam per idem ſcholium, planum hoc erit circulo A B C, parallelum; [f] faciet q; in ſphæra circulum D E F, cuius ſemidiameter ſemidiametro inuentæ æqualis eſt. His duobus circulis ex altera parte centri ſphæræ alij duo æquales ac paralleli deſcribantur G H I, K L M: quod facile fiet, ſi illorum diametris æquales rectæ, & parallelæ eodem illo circulo maximo ducantur, &c. [g] Deſcripto autem in circulo D E F, triangulo æquilatero D E F,*

*ducatur*

*ducatur Lateri EF, in parallelo circulo ABC, ex lemmate primo, recta linea AB, ex altera parte centri, parallela, quæ æqualis sit vni lateri trianguli æquilateri in circulo ABC, descripti: Item huic AB, agatur ex altera parte centri, parallela KL, in circulo KLM, & æqualis: Ac denique huic KL, in circulo GHI, ducatur ex altera parte centri, parallela HI, & æqualis ipsi EF, hoc est, lateri trianguli æquilateri in circulo GHI, descripti. Completis ergo triangulis æquilateris ABC, KLM, GHI, erunt singula latera singulis lateribus trianguli DEF, parallela; nimirum AC, ML, GH, ipsi DF; at BC, MK, GI, ipsi DE: quod probabitur ex scholio propos. 16. lib. 11. vt in problemate secundo ostendimus, parallelas esse BC, EF, ad diuersas partes centrorum ductas. In figura non descripsimus ea triangula in circulis ABC, KLM, ne multitudo linearum confusionem pareret, sed tantùm laterum extrema puncta notauimus. Postremò, ex quolibet 12. punctorum quatuor triangulorum æquilaterorum ad viciniora quinque puncta ducantur quinque lineæ rectæ; videlicet ex puncto D, rectæ DE, DA, DM, DB, DF: ex G, rectæ GH, GK, GC, GL, GI, &c. vt in figura apparet. Ex quoslibet enim puncto quinque rectas lineas emissas esse cernis. Dico DG, esse Icosaedrum, hoc est, viginti triangula DEF, DEA, DAM, DMB, DFB, &c. esse æquilatera, & æqualia. Quod vt demonstretur, ostendendum prius est, Icosaedrum in sphæra descriptum (posse autem in sphæra data describi Icosaedrum, Euclides docuit propos. 16. lib. 13.) suos 12. angulos constituere in quatuor circulis parallelis, quos descripsimus, nimirum ternos angulos in singulis circulis, atque eo situ, quo eadem puncta notauimus.*

*SIT igitur in sphæra descriptum Icosaedrum DG, duodecim angulos statuens in punctis D, E, A, K, H, G, I, L, B, F, M, C. Et quia quinque rectæ DE, DA, DM, DB, DF, æquales sunt, cùm sint latera triangulorum æquilaterorum æqualium; si ex polo D, per E, in sphæra circulus describatur, transibit is per reliqua puncta A, M, B, F: ac propterea pentagonum EAMBF, in vno plano erit, nimirum in plano illius circuli. Cùm ergo eius latera sint æqualia, vtpote latera Icosaedri, erit illud pentagonum etiam æquiangulum, ex iis, quæ ad finem lib. 4. demonstrata sunt à nobis. Eadem ratione pentagonum æquilaterum, & æquiangulum erit AKCFD, ob quinque rectas æquales EA, EK, EC, EF, ED: Et KHMDE, ob quinque latera Icosaedri inter se æqualia AK, AH, AM, AD, AE: Et HGCEA, ob quinque latera Icosaedri æqualia KH, KG, KC, KE, KA: Et GIMAK, ob latera quinque Icosaedri æqualia HG, HI, HM, HA, HK: Et ILCKH, ob quinque rectas æquales GI, GL, GC, GK, GH: Et LBMHG, ob rectas quinque æquales IL, IB, IM, IH, IG: Et BFCGI, ob quinque rectas æquales LB, LF, LC, LG, LI: Et FDMIL, ob quinque rectas æquales BF, BD, BM, BI, BL: Et DECLB, ob rectas quinque æquales FD, FE, FC, FL, FB: Et DAHIB, ob quinque latera Icosaedri æqualia MD, MA, MH, MI, MB: Ac tandem GLFEK, ob quinque Icosaedri latera æqualia CG, CL, CF, CE, CK; ita vt 12. pentagona æquilatera, æquiangulaque inter se æqualia constituantur. Quoniam verò recta subtendens angulum pentagoni æquilateri, & æquianguli oppositò lateri æquidistat, vt in scholio propos. 8. lib. 13. demonstrauimus; erit iuncta recta AB, ipsi EF, parallela in pentagono EAMBF: & AC, iuncta ipsi DF, parallela in pentagono AKCFD: Et BC, iuncta parallela ipsi DE, in pentagono DECLB.* [a] *Plana ergo per rectas DE, EF, & CB, BA, ducta parallela sunt,* [b] *faciuntque circulos parallelos in sphæra DEF, ABC. Eodem modo erit iuncta KL, ipsi HI, parallela in pentagono ILCKH: Et iuncta KM, ipsi GI, in pentagono GIMAK: Et LM, iuncta ipsi GH, in pentagono LBMHG: Ac propterea circuli in sphæra paralleli erunt GHI, KLM. Non aliter erit AB, iuncta ipsi HI, parallela in pentagono DAHIB: Et iuncta KL, ipsi EF, in pentagono GLFEK.* [c] *Igitur EF, HI, cùm sint eidem iunctæ AB, vel KL, parallelæ, inter se parallelæ sunt. Eademque ratione DE, GI, cùm sint eidem iunctæ BC, vel KM, parallelæ, inter se parallelæ erunt; propterea quæ plana circulorum DEF, GHI, per rectas DE, EF, & HI, GI, ducta parallela erunt. Omnes ergo quatuor circuli in sphæra DEF, ABC, KLM, GHI, paralleli inter se sunt; & tam circuli DEF, GHI, inter se æquales, ob triangula æquilatera in illis descripta æqualia, quàm circuli ABC, KLM, inter se etiam æquales, ob triangula æquilatera æqualia in ipsis, quæ ex iunctis AB, BC, CA; & KL, LM, MK, constituuntur: quippe cùm latera hæc sint rectæ subtendentes angulos pentagonorum æqualium.*

*QVIA verò iuncta recta KB, quæ connectit non ad easdem partes extrema K, B, parallelarum KL, AB, in parallelis circulis non ad easdem partes centrorum ductarum, sphæræ diameter est, & angulus BAK, rectus, ex 4. lemmate, quòd KA, connectat ad easdem partes extrema K, A, earundem parallelarum;* [d] *erit quadratum diametri KB, æquale duobus quadratis ex AB, AK. Rursus quia in pentagono EAMBF, recta iuncta AB, angulum AMB, subtendit: Vt autem recta angulum pentagoni subtendens ad latus pentagoni, ita est hexagoni latus ad latus decagoni in eodem circulo descriptorum, ex scholio propositionis secundæ, libri decimiquarti, erit AB, iuncta ad EF, vel AK, ipsi EF, æqualem, vt hexagoni latus ad latus decagoni: Atque idcirco* [e] *cùm latus pentagoni possit & latus hexagoni, & latus decagoni in eodem circulo descriptorum; erit diameter sphæræ KB, (quæ ambas AB, AK, potest, vt ostendimus.) latus pentagoni in eo circulo, in quo AB, latus est hexagoni, & AK, vel EF, latus decagoni. Quare sphæræ diameter KB, ad iunctam AB, proportionem habet, quam pentagoni latus ad latus hexagoni, at verò ad EF, eam, quam latus pentagoni habet ad latus decagoni:* [f] *Ac proinde cùm tam AB, latus trianguli æquilateri in circulo ABC, quàm EF, latus trianguli æquilateri in circulo DEF, potentia triplum sit semidiametri sui circuli; erunt circuli DEF, ABC, ac proinde & GHI, KLM, qui illis æquales sunt, illi,*

a 15. vndec.
b 1. 1. Theodosij.
c 9. vndec.
d 47. primi
e 10. tertiidecimi.
f 12. tertiidecimi.

quos in principio propositionis descripsimus. Ex quo patet, rectam, quæ dupla est semidiametri inicio inuentæ, minorem esse diametro sphæræ, vt suprà diximus.

His demonstratis, facili negotio concludemus, solidam figuram à nobis descriptam D G, esse Icosaedrũ, cum Icosaedro in sphæra descripto, cuius basis triangulum D E F, omnes eius anguli solidi cadant in terna puncta aliorum trium circulorum parallelorum, è quibus latera triangulorum eduximus; ac proinde singula horum latera singulis lateribus illius Icosaedri congruant.

## COROLLARIVM I.

Constat ex his, sphæra diametrum ad latus Icosaedri in ea descripti habere proportionem, quam latus pentagoni ad latus decagoni in eodem circulo descriptorum: adeò vti si diameter sphæræ fuerit latus pentagoni in aliquo circulo, latus Icosaedri sit latus decagoni in eodem illo circulo. Nam descripto Icosaedro D G, in sphæra, ostensum est esse diametrum sphæræ K B, ad E F, latus Icosaedri, vt latus pentagoni ad latus decagoni.

Ex quo fit, latus Icosaedri maius esse semidiametro sphæræ: quemadmodum & latus decagoni maius est semisse lateris pentagoni, quippe cùm duo latera decagoni cum vno latere pentagoni triangulum Isosceles constituant: [a] ac propterea duo latera decagoni maiora sint latere pentagoni, ideoq; vnum latus decagoni maius dimidio lateris pentagoni.

a 20. primi

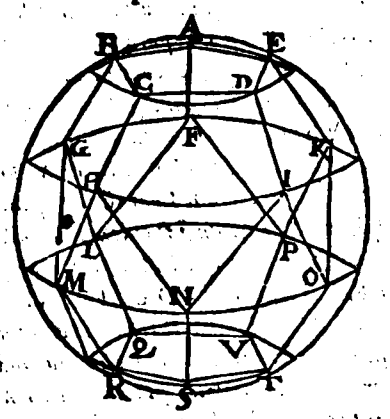
## COROLLARIVM II.

Colligitur etiam ex demonstratis, diametrum sphæræ esse potentia triplam lateris pentagoni in circulo A B C, descripti. Quoniam enim est, vt latus pentagoni ad latus hexagoni in eodem circulo A B C, descriptorum, ita diameter sphæræ K B, ad iunctam A B, ex constructione; erit permutando, vt latus pentagoni ad diametrum sphæræ, ita latus hexagoni ad iunctam A B. [b] Est autem latus hexagoni in circulo A B C, (hoc est, semidiameter) potentia subtriplum rectæ iunctæ A B, quòd A B, sit latus trianguli æquilateri. Igitur & latus pentagoni in eodem circulo A B C, potentia subtriplum est diametri sphæræ, hoc est, diameter sphæræ potentia tripla est lateris pentagoni in circulo A B C, descripti.

b 12. tertii decimi.

# PROBL. 5. PROPOS. 5.

## In data sphæra Dodecaedrum describere.




Describantur in data sphæra quatuor circuli parralleli, vt in antecedenti propos. A B C D E, F G H I K, L M N O P, Q R S T V, ita vt semidiametri circulorum A B C D E, Q R S T V, sint potentia subtriplæ duarum rectarum, ad quas diameter ita se habeat, vt pentagoni latus ad latus decagoni: semidiametri verò circulorum F G H I K, L M N O P, potentia sint subtriplæ duarum rectarum, ad quas diameter sphæræ sic se habeat, vt pentagoni latus ad latus hexagoni. Descripto autem in circulo A B C D E, pentagono A B C D E, æquilatero, & æquiangulo, ducantur eius lateri C D, ad easdem partes centrorum parallelæ H I, in circulo F G H I K, & æquales lateri pentagoni eiusdem circuli, ex 1. lemmate: Recta autem H I, ad diuersas partes centrorum agatur eodem modo parallela L P, in circulo L M N O P: Huicitadem L P, ad easdem centrorum partes ducatur parallela Q V, in circulo Q R S T V. Completis autem pentagonis in hisce tribus circulis, (quorum tamẽ latera, vt confusionem vitaremus, non duximus, sed eorum tantùm extrema puncta notauimus.) erunt singula latera eorum singulis lateribus pentagoni A B C D E, parallela, eo ordine, quo lateri C D, parallela ducta sunt: quod demonstrabitur, vt in probl. 2. ostendimus, parallelas esse B C, E F, nimirum H G, P O, T V, latera iuncta, parallela erunt ipsi B C, &c. Postremò, ex quolibet 20. punctorum quatuor pentagonorum ad viciniora tria puncta ducantur tres rectæ, vt in figura apparet. Ex quolibet enim puncto tres rectas vides esse emissas. Dico A S, Dodecaedrum esse, hoc est, duodecim pentagona A B C D E, D E K O L, O I N S T, S T V Q R, Q R M G L, G L F A B, A F P K E, K P V T O, R S N H M, F L Q V P, C D I N H, B C H M G, æquilatera esse, æquiangula, & æqualia. Quod vt ostendatur, demonstrandum prius est, Dodecaedrum in sphæra descriptum (posse autem in data sphæra Dodecaedrum describi, docuit Euclides propos. 17. lib. 13.) suos 20. angulos statuere in quatuor circulis parallelis, quos descripsimus, quinos videlicet in singulis circulis, atque in eo situ, quo eadem 20. puncta notauimus.

Sit ergo in sphæra descriptum Dodecaedrum A S, viginti angulos statuens in punctis A, B, C, D, E, F, G, H, I, K, L, M, N, O, P, Q, R, S, T, V. Et quoniam recta subtendens angulum pentagoni æquilateri & æquianguli opposito lateri æquidistat, vt in scholio propos. 8. lib. 13. demonstrauimus, erit iuncta G H, lateri B C, parallela in penta-

in pentagono B C H M G; & iuncta H I, lateri C D, in pentagono C D I N H; & I K, lateri D E, in pentagono D E K O I; & K F, ipsi A E, in pentagono A E K P F, & F G, ipsi A B, in pentagono A B G L F; & sic de cæteris. Quia igitur rectæ A B, A E, rectis F G, F K, parallelæ sunt; [a] erit & planum per F G, F K, ductum plano pentagoni A B C D E, per A B, A E, ducto parallelum. Eadem ratione eidem plano pentagoni parallelum erit planum per F G, G H, ductum; quòd hæ rectæ rectis A B, B C, sint parallelæ. Igitur, ex scholio propos. 16. lib. 11. plana per F G, F K, & per F G, G H, ducta, inter se parallela sunt, cùm eidem plano pentagoni A B C D E, sint parallela; atque adeò, ex eodem scholio, cùm conueniant in recta F G, vnum planum efficient. Non aliter ostendemus, planum quoque per F K, K I, & planum per K I, I H, & planum per I H, H G, cum plano per F K, F G, ducto, vnum planũ efficere. Plana igitur per puncta A, B, C, D, E, & per puncta F, G, H, I, K, ducta in sphæra [b] efficient duos circulos parallelos A B C D E, F G H I K. Eodemq; modo plana per puncta Q, R, S, T, V, & per puncta L, M, N, O, P, ducta, circulos parallelos efficient Q R S T V, L M N O P. Eruntq; tam duo circuli A B C D E, Q R S T V, quàm duo F G H I K, L M N O P, inter se æquales, ob pentagona æqualia A B C D E, Q R S T V, & ob rectas F G, G H, H I, I K, K F; L M, M N, N O, O P, P L, [c] quæ omnes æquales sunt, cùm subtendant angulos æquales in pentagonis æqualibus.

a 15. vndec.

b 1. 1. Theodosij.

c 4. primi.

DEINDE, quia ex scholio propos. 8. lib. 13. rectæ iunctæ N D, M B, lateri C H, parallelæ sunt in pentagonis C H N I D, B G M H C; [d] erunt quoq; ipsæ iunctæ N D, M B, parallelæ: Sunt autem & æquales, q; æquales angulos in pentagonis æqualibus subtendant. [e] Igitur & iunctæ N M, B D, æquales erunt ac parallelæ. Eodem modo æquales erunt & parallelæ, iunctæ N O, C E, cùm connectant duas N C, O E, æquales ac parallelas, quòd vtraq; lateri D I, sit parallela. [f] Circulus igitur L M N O P, circulo A B C D E, parallelus est, cùm ille ducatur per rectas N M, N O, hic verò per rectas B D, C E, quibus illa parallelæ sunt ostensa. Non secus ostendentur paralleli circuli Q R S T V, F G H I K. Omnes ergo quatuor circuli paralleli sunt.

d 9. vndec.

e 33. primi.

f 15. vndec.

RVRSVS, quoniam iunctæ rectæ E F, O V, cùm, ex scholio propos. 8. lib. 13. lateri P K, in pentagonis A E K P F, T V P K O, æquidistent, [g] parallelæ sunt; nec non & inter se æquales, quòd angulos æquales in pentagonis æqualibus subtendant, [h] erunt & rectæ iunctæ E O, F V, parallelæ & æquales. Quadrilaterum ergo E F V O, in vno plano est, [i] cùm E F, O V, in eodem sint plano cum parallelis E O, F V. Est autem & in circulo, [k] propterea quòd planum, in quo existit, in sphæra circulum efficit. Igitur, ex iis, quæ ad propos. 31. lib. 3. demõstrauimus, cùm in eo quadrilatero opposita latera æqualia sint, quadrilaterũ rectangulum est E F V O; ac proinde cùm omnia latera æqualia sint, subtendentia angulos æquales in pentagonis æqualibus, quadratum erit. Iuncta ergo eius diameter F O, duplum potest lateris F E, ex scholio propos. 47. lib. 1. hoc est, rectæ iunctæ F G, quòd æquales sint F G, F E, subtendentes angulos pentagonorum æqualium: ideoq; qualium partium 1. statuetur quadratum rectæ F G, talium 2. erit quadratum rectæ F O, & ambo quadrata simul earundem partium 3. Quibus [l] cùm æquale sit quadratum iunctæ rectæ O G, quæ diameter sphæræ est; (Nam cùm æquales sint iunctæ F G, O N, subtendentes æquales angulos pentagonorum, & inter se parallelæ, quòd duabus parallelis A B, S T, parallelæ sint, ex scholio propos. 8. lib. 13. erit, ex lemmate 4. iuncta recta O F, ad F G, perpendicularis, & O G, diameter sphæræ.) erit quoq; quadratum diametri sphæræ 3. qualium 1. est quadratum rectæ F G, hoc est, quadratum diametri sphæræ quadrati rectæ F G, triplum erit. [m] Est autem & quadratum lateris trianguli æquilateri triplum quadrati semidiametri, hoc est, lateris hexagoni. Igitur erit, vt quadratum diametri sphæræ ad quadratum rectæ F G, ita quadratum lateris trianguli ad quadratum lateris hexagoni; [n] atq; adeò vt diameter sphæræ ad rectam F G, ita latus trianguli æquilateri ad latus hexagoni: Vt autem recta F G ad latus trianguli in eodem circulo F G H I K, ita est latus pentagoni eiusdem circuli ad latus trianguli, quòd F G, sit latus pentagoni. Igitur ex æqualitate perturbata erit, vt diameter sphæræ ad latus trianguli æquilateri in circulo F G H I K, ita latus pentagoni ad latus hexagoni, vt in apposita formula apparet. Cùm ergo in figura præcedentis propos. sit quoq; vt diameter sphæræ ad latus trianguli, hoc est, ad iunctam rectam A B, in illa figura, ita latus pentagoni ad latus hexagoni; erit vterque circulus A B C, K L M, illius figuræ vtriq; circulo F G H I K, L M N O P, huius figuræ æqualis.

l 47. primi.

m 12. tertiidecimi.

n 22. sexti.

| Diam. sphæræ. | Latus pentag. |
|---|---|
| Recta F G. | Lat. triang. |
| Lat. triang. | Lat. hexag. |

PRÆTEREA quia, ex scholio propos. 2. lib. 14. est, vt iuncta recta F G, subtendens angulum pentagoni A B G L F, ad A B, latus pentagoni, ita latus hexagoni ad latus decagoni: Et vt F G, latus pentagoni in circulo F G H I K, ad A B, latus pentagoni in circulo A B C D E, ita latus trianguli in circulo F G H I K, ad latus trianguli in circulo A B C D E; erit quoque vt latus trianguli in circulo F G H I K, ad latus trianguli in circulo A B C D E, ita hexagoni latus ad latus decagoni in eodem circulo cum hexagono descripti. Vt autem diameter sphæræ ad latus trianguli in circulo F G H I K, ita est latus pentagoni ad latus hexagoni in eodem circulo cum pentagono descripti, vt proximè demõstratum est. Igitur ex æquo erit, vt diameter sphæræ ad latus trianguli in circulo A B C D E, ita latus pentagoni ad latus decagoni in eodem circulo cum pentagono descripti, vt in hac altera formula apparet. Cùm ergo in figura præcedentis propos. sit quoq; vt diameter

| Diam. sphæræ. | Lat. pẽtagoni. |
|---|---|
| Lat. triang. in circulo F G H I K. | Lat. hexagoni. |
| Lat. triang. in circulo A B C D E. | Lat. decagoni. |

*ſphæra ad E F, latus trianguli in circulo D E F, ita latus pentagoni ad latus decagoni; erit vterque circulus D E F, G H I, figuræ antecedentis propoſ. vtriq; circulo A B C D E, Q R S T V, huius figuræ æqualis. Quare circuli A B C D E, F G H I K, L M N O P, Q R S T V, ſunt illi, quos in propoſ. antecedenti, & in hac deſcripſimus.*

*Q V I B V S demonſtratis, nullo negotio probabimus, ſolidam figuram A S, à nobis deſcriptam, eſſe Dodecaedrum: quippe cum Dodecaedro in ſphæra deſcripto, cuius baſis pentagonum A B C D E, omnes eius anguli ſolidi cadant in quina puncta aliorum trium circulorum parallelorum, è quibus latera pentagonorum eduximus; ac proinde ſingula horum latera ſingulis lateribus illius Dodecaedri congruant.*

## COROLLARIVM.

*PERSPICVE colligitur ex his, eundem circulum comprehendere & triangulum Icoſaedri, & pentagonum Dodecaedri in eadem ſphæra deſcriptorũ: quia videlicet circulus D E F, figuræ antecedentis propoſ. æqualis eſt circulo A B C D E, figuræ huius propoſ. Id quod demonſtratum quoque eſt lib. 14 propoſ. 5.*

*MANIFESTVM quoq; eſt, eoſdem prorſus circulos ſuſtinere & angulos ſolidos Icoſaedri, & angulos ſolidos Dodecaedri.*

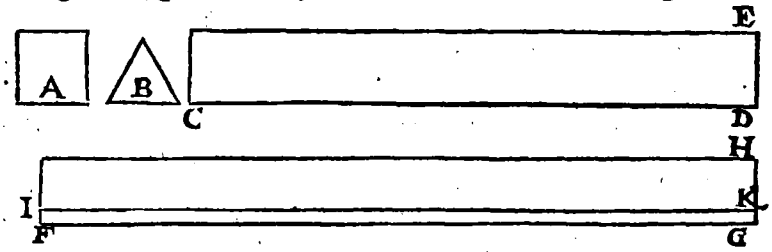
## SCHOLIVM.

*EX his, quæ hoc loco, & lib. 13. & 14. demonſtrauimus, facilè etiam oſtendemus, ſi omnia quinque corpora regularia in vna eademq; ſphæra deſcribantur, maximum omnium eſſe Dodecaedrum: Deinde Icoſaedrum maius reliquis tribus: Tertiò, cubum maiorem reliquis duobus: Octaedrum denique Tetraedro eſſe maius. Ex quo conſtabit, Euclidem recto ordine quinque hæc corpora conſtruxiſſe, cùm poſt Tetraedrum ſtatim Octaedrum, non autem cubum, conſtituerit. Ita enim ſemper à minoribus ad maiora progreſſus eſt. Sed prius alia nonnulla demonſtranda ſunt. Hinc ergo exordiamur.*

### I.

Si quadratum, & triangulum æquilaterum æqualia habeant latera; erunt viginti triangula ſimul maiora, quàm octo quadrata ſimul.

*HABEANT quadratum A, & triangulum æquilaterum B, latera æqualia. Dico viginti triangula octo quadratis eſſe maiora. Sit enim rectangulum C E, cuius vnum latus C D, octuplum ſit lateris quadrati A, & latus D E, lateri eiuſdem quadrati æquale: Erit q; rectangulum C E, octuplum quadrati A,* [a] *cùm ſit, vt C D, ad latus quadrati A, ita rectangulum C E, ad quadratum A, ob æqualem altitudinem. Sit quoq; rectangulum F H, cuius vnum latus F G, decuplum ſit lateris trianguli B, & latus G H, æquale perpendiculari ex vno angulo trianguli ad eius baſem demiſſæ, hoc eſt, altitudini trianguli B. Et quoniam triangulum rectangulum, cuius vnum latus eſt vigecuplum lateris trianguli B, & alterum latus æquale ipſi G H, hoc eſt, altitudini trianguli B,* [b] *vigecuplum eſt trianguli B; Ei autem triangulo rectangulo æquale eſt, ex ſcholio propoſ. 41. lib. 1. rectangulum F H, quippe cùm baſis F G, dimidium ſit baſis illius trianguli; erit quoque rectangulum F H, vigecuplum trianguli B. Probandum igitur eſt, rectangulum F H, maius eſſe rectangulo C E.*




a 1. ſexti.

b 1. ſexti.

c 12. quartidecimi. [c] *Quoniam latus trianguli B, hoc eſt, latus D E, potentia ſeſquitertium eſt eius perpendicularis, hoc eſt, lateris G H: Latus autem F G, ad latus C D, potentia proportionem habet, quam 25. ad 16. quòd F G, ſit 10. & C D, 8. hoc eſt, F G, 5. & C D, 4. Erit maior proportio F G, ad C D, quàm D E, ad G H. Eſt enim maior proportio 25. ad 16. ſuperuncupartiens ſextaſdecimas, quàm 4. ad 3. ſeſquitertia, quòd maior ſit fractio $\frac{9}{16}$. quàm*

d 12. ſexti. $\frac{1}{3}$. [d] *Fiat vt F G, ad C D, ita D E, ad H K; erit q; maior quoque proportio D E, ad H K, quàm ad G H;* [e] *ac*

e 10. quinti proinde maior erit G H, quàm H K. Ducta ergo K I, ipſi F G, parallela, erit vt I K, ipſi F G, æqualis ad C D, ita

f 14. vel 16. ſexti. D E, ad H K. [f] *Igitur erit I H, rectangulum rectangulo C E, æquale: ideoq; F H, maius, quàm C E. Quod eſt propoſitum.*

### II.

Octo quadrata ex ſemidiametro ſphæræ deſcripta æqualia ſunt ſuperficiei cubi in ea ſphæra deſcripti.

g 20. quartidec. [g] *QVONIAM duo quadrata ex diametro ſphæræ deſcripta ſuperficiei cubi in ea ſphæra deſcripti æqualia ſunt: Duo verò eadem quadrata æqualia ſunt octo quadratis ex ſemidiametro ſphæræ deſcripti, quòd quadratum diametri quadruplum ſit quadrati ſemidiametri, ex ſcholio propoſ. 4. lib. 2. efficitur, octo quadrata ſemidiametri ſphæræ æqualia quoque eſſe ſuperficiei cubi eiuſdem ſphæræ. Quod eſt propoſitum.*

### III.

Si Octaedrum, cubus, & Icoſaedrum in eadẽ ſphæra deſcribãtur, erit perpendicularis è centro

centro sphæræ ad vnam basim Icosaedri ducta, maior perpendiculari ex eodem centro sphæræ ad vnam basim Octaedri, & cubi ducta.

*NAM* [a] *quia latus Octaedri maius est latere Icosaedri in eadem sphæra; erit vnum triangulum Octaedri maius quoque vno triangulo Icosaedri. Quare si vtrumque solidum ita intra sphæram constituantur, vt triangulum vnius triangulo alterius sit parallelum, longius à centro aberit Icosaedri triangulum, quàm triangulum Octaedri; cùm vtrumque tribus angulis superficiem sphæræ attingat: Ac proinde perpendicularis è centro sphæræ ad basim Icosaedri deducta maior erit perpendiculari ex eodem centro ad basim Octaedri. Cùm ergo perpendicularis Octaedri æqualis sit perpendiculari cubi;* [b] *quòd basis cubi, & basis Octaedri eodem circulo circumscribantur, ideóque æqualiter à centro distent; erit quoque perpendicularis Icosaedri perpendiculari cubi maior. Quod est propositum.*

a 18. tertiidecimi.

b 21. quartidec.

IIII.

SI Cubus & Icosaedrum in eadem sphæra describantur, superficies Icosaedri superficie cubi maior est.

*QVONIAM viginti triangula æquilatera super semidiametro sphæræ maiora sunt octo quadratis ex eadem sphæra semidiametro descriptis, vt theoremate 1. demonstrauimus: Sunt autem viginti triangula Icosaedri maiora viginti triangulis æquilateris super semidiametro sphæræ constructis, quòd latus Icosaedri semidiametro sphæræ maius sit, ex coroll. 1. problematis 4. superioris. Igitur & viginti triangula Icosaedri multò maiora sunt octo quadratis ex sphæræ semidiametro descriptis. Quam ob rem, cùm viginti triangula Icosaedri totam superficiem Icosaedri conficiant, at octo quadrata ex semidiametro sphæræ descripta, superficiei cubi æqualia sint, ex theoremate 2. paulò antè demonstrato; erit quoque Icosaedri superficies maior superficie cubi. Quod est propositum.*

## *DE COMPARATIONE SOLIDITATVM quinque corporum Regularium in eadem sphæra descriptorum.*

*HIS præmissis, demonstremus iam, Dodecaedrum maius esse Icosaedro: Icosaedrum maius cubo: Cubum maiorem Octaedro: Octaedrum denique maius Tetraedro. quod hunc in modum fiet.*

I.

DODECAEDRVM Icosaedro maius est.

*QVONIAM est,* [c] *vt cubi latus ad latus Icosaedri, ita Dodecaedrum ad Icosaedrum:* [d] *est autem latus cubi latere Icosaedri maius; maius quoq; erit Dodecaedrum Icosaedro. Quod est propositum.*

c 11. quartidec.

d 18. tertiidecimi.

II.

ICOSAEDRVM cubo maius est.

*QVONIAM perpendicularis ex centro sphæræ in vnam basim Icosaedri cadens, maior est perpendiculari ex eodem centro in vnam basim cubi demissa, vt in 3. theoremate præmisso ostensum est: Item ex 4. theoremate, superficies Icosaedri superficie cubi maior quoque est; Erit solidum contentum sub perpendiculari ex centro sphæræ in vnam basim Icosaedri cadente, & tertia parte superficiei Icosaedri contẽtum, maius solido, quod sub perpendiculari ex eodem centro sphæræ in vnam basim cubi cadente, & tertia parte superficiei cubi continetur. Cùm ergo, vt in scholio propos. 20. lib. 14. demonstrauimus, illud solidum Icosaedro sit æquale, & hoc cubo; maius quoq; erit Icosaedrum, quàm cubus. Quod est propositum.*

III.

CVBVS Octaedro maior est.

*QVONIAM est,* [e] *vt latus cubi ad semidiametrum sphæræ, ita Cubus ad Octaedrum: Est autem latus cubi semidiametro sphæræ maius. (Nam* [f] *cùm latus cubi maius sit latere Icosaedri; & latus Icosaedri, ex coroll. 1. problematis 4. superioris, maius semidiametro sphæræ: erit latus cubi multò maius semidiametro sphæræ.) Igitur & cubus maior erit Octaedro. Quod est propositum.*

e 27. quartidec.

f 18. tertiidecimi.

IIII.

OCTAEDRVM Tetraedro maius est.

*QVONIAM basis Octaedri minor est basi Tetraedri,* [g] *& quòd basis Tetraedri ad basem Octaedri proportionem habeat sesquitertiam; erit perpendicularis ex centro sphæræ ad vnam basim Octaedri demissa, maior perpendiculari ex eodem sphæræ centro ad vnam basim Tetraedri cadente: quod probabitur non aliter, quàm suprà theoremate 3. ostẽdimus, perpendicularem in Icosaedro maiorẽ esse perpẽdiculari in Octaedro, & cubo. Est autem & superficies Octaedri superficie Tetraedri maior,* [h] *cùm illa huius sit sesquialtera. Igitur solidum contentum sub perpẽdiculari ex cẽtro sphæræ in vnã basim Octaedri cadente, & tertia parte superficiei Octaedri, maius est solido contẽto sub perpendiculari ex eodẽ centro sphæræ in vnã basim Tetraedri deducta, & tertia parte superficiei Tetraedri. Quocirca cùm, ex scholio propos. 20. lib. 14. illud solidũ Octaedro sit æquale, hoc verò Tetraedro; erit quoq; Octaedrum Tetraedro maius. Quod est propositum.*

g 14. quartidec.

h 14. quartidec.

*ALITER. Quoniam est,* [i] *vt latus Octaedri ad latus Tetraedri, ita Octaedrum ad triplum Tetraedri:*

i 22. quartidec.

*Vt autem latus Tetraedri ad eius tertiam partem, ita est triplum Tetraedri ad tertiam eius partem, id est, ad ipsum Tetraedrum. Igitur ex aequalitate erit quoque, vt latus Octaedri ad tertiam partem lateris Tetraedri, ita Octaedrum ad Tetraedrum. Cùm ergo latus Octaedri maius sit tertia parte lateris Tetraedri;*

a 18. tertij decimi. b 10. quin.

*(Nam [a] quia quadratum lateris Tetraedri sesquitertiũ est quadrati lateris Octaedri; habebit latus Tetraedri ad latus Octaedri proportionẽ minorem sesquitertia, ideoq; multò minorem tripla; [b] ac proinde tertia pars lateris Tetraedri minor erit latere Octaedri.) Erit quoq; Octaedrũ Tetraedro maius. Quod est propositũ.*

c 17. quartidec.

*ALITER. [c] Quoniam Tetraedrum ad Octaedrum se habet, vt rectangulum sub linea potente $\frac{27}{64}$. quadrati lateris Tetraedri, & sub linea continente $\frac{9}{8}$. lateris Tetraedri, ad quadratum diametri sphæræ; Est autem rectangulum illud minus quadrato diametri sphæræ, quòd eius latera minora sint sphæra diametro; quippe quæ singula minora sint latere Tetraedri. Igitur & Tetraedrum Octaedro minus erit, hoc est, Octaedrum Tetraedro erit maius. Quod est propositum.*

d 32 quartidecimi. e 27. quartidecimi.

*ALITER. [d] Quoniam cubus triplus est Tetraedri; minor verò quàm triplus Octaedri: (Nam [e] cubus ad Octaedrum est, vt latus cubi ad semidiametrum sphæræ; & latus cubi minus est, quàm triplum semidiametri sphæræ, quòd & tota diameter, quæ cubi latere maior est, minorem proportionem habeat ad semidiametrum, quàm triplam.) Erit Octaedrum maius, quàm Tetraedrum. Quod est propositum.*

*EODEM prorsus ordine se mutuò superant cõuexa superficies eorundem corporum Regularium: hoc est, superficies conuexa Dodecaedri maior est superficie conuexa Icosaedri: Superficies conuexa Icosaedri maior superficie conuexa cubi: Conuexa superficies cubi superficie Octaedri maior: Octaedri deniq; superficies conuexa maior est conuexa superficie Tetraedri.*

f 9. quartidecimi. g 18. tertij decimi.

*QVONIAM enim [f] est superficies Dodecaedri ad superficiem Icosaedri, vt latus cubi ad latus Icosaedri: Est autem cubi latus latere Icosaedri maius, & vt suprà demonstratum est: Erit & superficies Dodecaedri superficie Icosaedri maior.*

*SVPERFICIEM verò Icosaedri maiorem esse superficie Cubi, demonstratum est paulò antè theoremate quarto, ante comparationem soliditatum quinq; corporum Regularium.*

h 27. quartidec.

*DEINDE [h] quoniam est superficies cubi ad Octaedri superficiem, vt latus cubi ad semidiametrũ sphæræ: Est autem latus cubi semidiametro sphæra maius, vt in theoremate tertio, quo ostendimus, cubum Octaedro maiorem esse, demonstratum est; Erit quoq; superficies cubi superficie Octaedri maior.*

i 14. quartidec.

*DENIQVE [i] quia superficies Octaedri sesquialtera est superficiei Tetraedri; perspicuũ est, Octaedri superficiem maiorem esse Tetraedri superficie.*

k 18. tertij decimi.

*Vides igitur superficies & soliditates corporũ Regularium contrario ordine respondere eorundem lateribus: ita vt quò maius fuerit corpus, eò maiorem quidem habeat etiam superficiẽ, at eò minus latus. Nam [k] vt suprà demonstratum est, Tetraedri latus est omnium maximum, eius verò superficies atq; soliditas, vt hic demonstrauimus, omniũ minima est: Item Dodecaedri latus omniũ est minimũ, eius verò cõuexa superficies & soliditas omnium maxima. Deniq; quemadmodum, si Tetraedrum, Octaedrum, Cubus, Icosaedrum, & Dodecaedrum in eadem sphæra descripta sint, latera eorum, eo ordine, quo proposita sunt, atq; ab Euclide descripta, se mutuò superant,*

l 18. tertij decimi.

*[l] vt suprà ostensum est; ita contrario ordine eorundem superficies conuexæ, atque soliditates se mutuò superant, vt hoc loco demonstrauimus.*

*CAETERVM pretereundum non est hoc loco id, quod à Pappo demonstratum est lib. 5. Mathematicarum collectionum; soliditates videlicet quinq; corporum Regularium, si Isoperimetra sint, atq; idcirco non in eadem sphæra constructa, longè aliter se habere, quàm à nobis demonstratum est. Nam corpus, quæ plures habet bases, maius semper est corpore pauciorum basium: Ita vt Icosaedrum superet Dodecaedrum, Dodecaedrum maius sit Octaedro, Octaedrum superet Cubum, Cubus deniq; Tetraedro maius sit.*

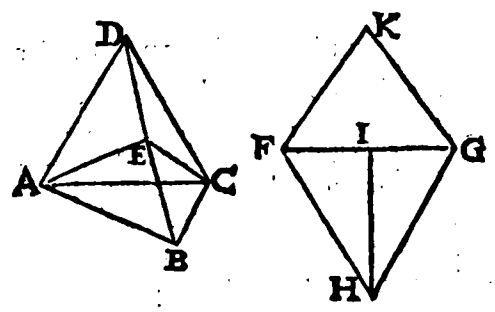
## *INVENTIO ANGVLI INCLINATIONIS DVArum basium cuiuscunq; solidi Regularis, vnius ad alteram, ex Isidoro Hypsiclis præceptore.*

### I.

ANGVLVM inclinationis duarum Pyramidis basium, vnius ad alteram, inuenire.

SIT Pyramis ABCD, cuius latere BD, bifariam secto in E, ex angulis A, & C, lateri BD, oppositis rectæ ducantur AE, & CE; quæ cùm perpendiculares sint ad BD, communem sectionem planorum ABD, CBD, in quibus existunt. (a Sunt enim in triangulis AEB, AED, anguli ad E, æquales, &c.) angulum inclinationis AEC, basium ABD, CBD, continebunt, ex defin. 6. lib. 11. Huic ergo æqualem exhibebimus in quolibet plano, hac ratione. Assumatur FGH, triangulum æquilaterum super rectam FG, lateri pyramidis æqualem constructum, atq; idcirco triangulo cuicunque pyramidis propositæ, ipsi nimirũ ABD, æquale, in quo ducta HI, perpendiculari ad FG, constituatur super FG, trian-

a 8. primi.




triangulum F G K, habens vtrumque latus F K, G K, æquale perpendiculari H I, hoc est, vtrique perpendiculari A E, C E, cùm perpendiculares H I, A E, C E, sint æquales in triangulis æqualibus. Dico angulum F K G, æqualem esse angulo inclinationis A E C, basium A B D, C B D. Cùm enim latera K F, K G, æqualia sint lateribus E A, E C; & basis F G, basi A C: [a] Æquales erunt anguli F K G, A E C. Dico insuper angulum inclinationis A E C, acutũ esse [b]. Cùm enim latus A D, [c] vel illi æquale A C, sesquitertium sit potentia vtriusque perpendicularis A E, C E; qualium partium 4. ponetur quadratum rectæ A C, talium 3. erit quadratum vtriusque rectæ A E, C E; ideoque earundem partium 6. erunt ambo simul quadrata rectarum A E, C E. Quare cùm in triangulo A B C, quadratum lateris A C, minus sit quadratis simul laterum A E, C E, acutus erit angulus A E C, vt in scholio propos. 13. lib. 2. demonstrauimus.

[a] 8. primi.
[b] 12. quartidecimi.

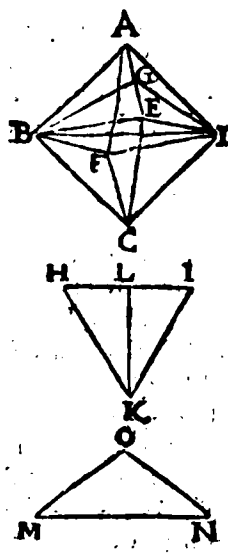
## COROLLARIVM

*Facile hinc colligemus, omnes inclinationes basium pyramidis aquales esse. Cùm enim singuli anguli inclinationum contineantur binis perpendicularibus ab angulis triangulorum ad bases oppositas ductis, cuiusmodi sint A E, C E, subtendanturq; à lateribus pyramidis, quale fuit A C; [a] omnes erunt inter se aquales, quòd & omnes illæ perpendiculares, quæ ipsos continent, aquales sint, nec non & latera pyramidis eosdem subtendentia, sint aqualia.*

[a] 8. primi.

## II.

ANGVLVM inclinationis duarũ Octaedri basium, vnius ad alteram, reperire.




EXHIBEATVR Octaedrum A B C D E F, cuius diameter B D. Ex angulis B, & D, ad latus A E, triangulis A B E, A D E, commune, bifariamque sectum in G, rectæ ducantur B G, D G; quæ cùm perpendiculares sint ad A E, communem sectionem planorum A B E, A D E, in quibus existunt, (quòd in triangulis B G A, B G E, anguli ad G, æquales sint, &c.) continebunt angulum B G D, inclinationis basium A B E, A D E, per defin. 6. lib. 11. Huic igitur æqualem exhibebimus in plano, quolibet hac via. Sumatur H I K, triangulum æquilaterum super rectam H I, lateri Octaedri æqualem fabricatum, ideóque triangulo cuicunque Octaedri proposito, triangulo scilicet A B E, æquale, in quo ducta K L, perpendiculari ad H I, constituatur super recta M N, quæ æqualis sit diametro Octaedri B D; hoc est, diametro quadrati A B C D, ex A B, latere Octaedri descripti, triangulum O M N, habens vtrumque latus M O, N O, perpendiculari K L, æquale, hoc est, vtrique perpendiculari B G, D G, cùm perpendiculares K L, B G, D G, in triangulis æqualibus æquales sint. Dico angulum M O N, æqualem esse angulo inclinationis B G D, basium A B E, A D E. Cùm enim latera O M, O N, æqualia sint lateribus G B, G D; & basis M N, basi B D, [b] Æquales erunt anguli M O N, B G D. Dico præterea, angulum inclinationis B G D, esse obtusum. [c] Cùm enim diameter Octaedri B D, dupla sit potentia lateris A B; [d] latus verò A B, potentia sesquitertium rectæ B G: qualium partium 8. ponetur quadratum diametri B D, talium 4. erit quadratum lateris A B, eatundemque 3. quadratum rectæ B G; ideoque ambo simul quadrata rectarum B G, D G, talium partium 6. erũt. Quare quadratũ lateris B D, in triangulo G B D, maius est quadratis simul laterũ G B, G D; Ac propterea angulus B G D, obtusus erit, vt in scholio prop. 12. lib. 2. ostẽdimus.

[a] 8. primi.
[b] 8. primi.
[c] 14. tertiædecimi.
[d] 12. quartidecimi.

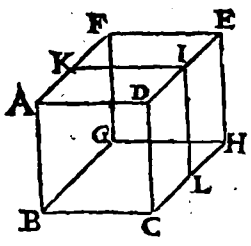
## COROLLARIVM.

*Hinc fit, omnes inclinationes basium Octaedri aquales esse. Cùm enim singuli anguli inclinationum contineantur binis perpendicularibus ab angulis triangulorum ad bases oppositas ductis, quales sunt B G, D G, subtendanturq; ab Octaedri diametris, cuiusmodi est B D; [a] omnes inter se aquales erunt, quòd & omnes illæ perpendiculares, quæ ipsos continent, aquales sint, nec non & diametri Octaedri eosdem subtendentes, sint aquales.*

[a] 8. primi.

## III.

**ANGVLVM inclinationis duarum cubi basium, vnius ad alteram, inuenire.**




SIT cubus A B C D E F G H, in quo secetur latus D E, bifariam in I, necnon & latera illi opposita in quadratis A E, E C, commune latus illud D E, habentibus, in punctis K, L. Deinde rectæ ducantur I K, I L; [a] quæ cùm æquales, ac parallelæ sint lateribus E F, E H, (quòd & K F, I E, inter se, nec non & I E, L H, inter se æquales existant, & parallelæ.) [b] ideoque angulos rectos ad latus D E, efficiãt, continebunt K I L, angulum inclinationis basium A E, E C, ex defin. 6. lib. 11. Quoniam verò rectæ I K, I L, parallelæ existentes [c] rectis E F, E H, & non in eodem cum illis plano, [c] angulum K I L, æqualem continent angulo recto F E H; Rectus erit angulus inclinationis basiũ cubi. Quare vt angulo inclinationis basium cubi æqualis in aliquo plano exhibeatur, cõstituendus erit angulus rectus. Hic enim; vt modò demonstrauimus, æqualis erit angulo inclinationis basium cubi.

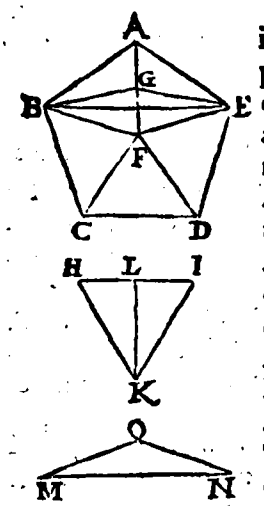
a 33. primi.
b 29. primi.
c 10. vndec.

### COROLLARIVM.

*QVOCIRCA, cùm eodem argumento demonstrari possit, quarumlibet duarum basium cubi angulum inclinationis esse rectum; perspicuè concluditur, omnes inclinationes basium cubi æquales inter se esse.*

## IIII.

**ANGVLVM inclinationis duarum basium Icosaedri, vnius ad alterã, inuenire.**










ESTO pyramis A B C D E F, vna ex 12. pyramidibus Icosaedri, cuius basis pentagonum A B C D E, ex quinque Icosaedri lateribus cõpositum, vertex autem F. Diuiso itaque latere A F, bifariam in G, ducantur ex triangulorum A B F, A E F, latus A F, commune habẽtium, angulis B, & E, lateri A F, oppositis rectæ B G, E G, quæ cùm, ex demonstratis in problemate 2. huius scholij, perpendiculares sint ad A F, communem sectionem planorum A B F, A E F, in quibus ducuntur, comprehendent B G E, angulum inclinationis basium A B F, A E F; per 6. defin. lib. 11. Huic igitur in plano quouis exhibebimus æqualem, hac arte. Accipiatur triangulum æquilaterũ H I K, super rectam H I, lateri Icosaedri æqualem fabricatum, hoc est, cuiuis trianguIo Icosaedri, ipsi videlicet A B F, æquale, in quo ducta recta K L, ad H I, perpendiculari, constituatur super recta M N, quæ rectæ B E, angulum pentagoni A, subtendenti sit æqualis, triangulum O M N, habẽs vtrumque latus M O, N O perpendicularẽ K L, æquale, hoc est, vtrique perpendiculari B G, E G, cùm perpendiculares K L, B G, E G, in triangulis æqualibus sint æquales. Dico angulum M O N, angulo B G E, inclinationis basium A B F, A E F, æqualem esse. Cùm enim latera O M, O N, æqualis [d] sint lateribus G B, G E, & basis M N, basi B E; [d] Æquales erunt anguli M O N, B G E. Dico hunc eciã angulũ inclinationis B G E, esse obtusum. Cùm enim B G, angulũ rectũ faciat [e] A G B; [e] erit recta A B, maior quã recta B G; ad eundemq; modũ A E, maior erit quàm E G. Quare rectæ A B, A E, maiores quoq; erũt rectis O M, O N, cũ hæ rectis G B, G E, ponitæ sint æquales. Si itaq; recta B E, super recta sibi æqualem M N, intelligatur poni; cadet angulus [f] A, extra triangulũ M O N, ita vt rectæ A B, A E, rectas O M, O N, prorsus includant. [f] Angulus ergo O, maior erit angulo B A E: At hic obtusus est. (cùm enim quinq; anguli pẽtagoni sex rectis sint æquales, per ea, quæ à nobis sunt demonstrata in scolio propos. 32. lib. 1. comprehendet quilibet illorũ rectũ, ac insuper vnius recti partẽ quintã. obtusus ergo erit, cũ recto sit maior.) Multò igitur magis obtusus erit angulus M O N, hoc est, sibi æqualis B G E.

d 8. primi.
e 19. primi.
f 21. primi.

### COROLLARIVM

*NON obscurè quoq; ex his consequitur, omnes basium Icosaedri inclinationes inter se æquales esse. Nam cùm singuli anguli inclinationum contineantur binis perpendicularibus, ab angulis triangulorum ad bases oppositas ductis, quales sunt B G, E G, subtendanturq; à rectis, angulos pentagonorum subtẽdentibus, cuiusmodi est B E:* [g] *omnes inter se erũt æquales, quòd & illæ omnes perpẽdiculares, quæ ipsos continẽt, æquales sint, nec nõ & rectæ illæ omnes, quæ pentagonorum angulos subtendunt æquales æqualibus rectis comprehensos,* [h] *æquales erunt.*

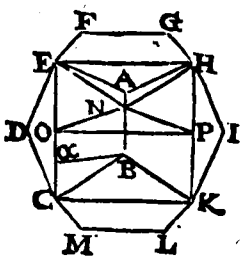
g 8. primi.
h 4. primi.

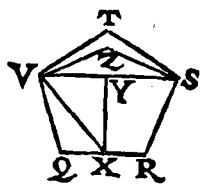
## V.

**ANGVLVM inclinationis duarũ basiũ Dodecaedri, vnius ad alterã, reperire.**

CVM,

CVM, per ea, quæ oſtendimus in propoſ.8.libri 15. quatuor latera cubi in Dodecaedro deſcripti, ſubtendant quatuor angulos quatuor baſium Dodecaedri ad vnum latus coëuntium; ſint huiuſmodi pentagona ABCDE, EFGHA, AHIKB, BKLMC, ad latus AB, conuenientia; duo quidem ABCDE, AHIKB, ſecundùm idem latus commune AB; alia autē duo AEFGH, BCMLK, ſecundùm angulos EAH, CBK. His porrò pentagonis inſcriptum ſit quadratum cubi ECKH, cuius quatuor latera ſubtendant quatuor angulos pentagonorum D, B, I, A. Diuiſo autem latere AB, bifariam in N, ducantur ex N, in planis pentagonorum ABCDE, ABKIH, ad AB, perpendiculares NO, NP, ſecantes latera EC, HK, in O, & P, ad angulos quoque rectos, cùm rectæ EC, HK, ipſi AB, ſint parallelæ, ex ſcholio propoſ.8.lib.13. Comprehendūt igitur NO, NP, angulum ONP, inclinationis baſium ABCDE, ABKIH. Cui æqualem in quouis plano hac arte conſtruemus. Super rectam QR, lateri Dodecaedri AB, æqualem, conſtituatur pentagonum æquilaterum & æquiangulum QRSTV, hoc eſt, cuiuis pentagono Dodecaedri, nimirū ipſi ABCDE, æquale, cuius angulo T, recta ſubtendatur VS, [a] æqualis exiſtens rectæ EC, cùm & latera TV, TS, lateribus DC, DE, æqualia ſint, angulosq; contineāt æquales. Diuiſa deinde recta QR, bifariam in X, ducatur à puncto X, ad QR, perpendicularis XY; propterea q; perpendicularis ad VS, cùm VS, ſint parallela ipſi QR, ex ſcholio propoſ.8.lib.13. Ac poſtremò, ſuper recta VS, trianguli fabricetur VZS, habens vtrumq; latus ZV, ZS, perpendiculari XY, æquale. Dico angulum VZS, æqualem eſſe angulo inclinationis ONP. Ductis enim rectis NE, NH, VX; cùm latera EA, AN, æqualia ſint lateribus HA, AN: Item lateribus VQ, QX, angulosq; comprehendant æquales; [b] Æquales erunt & baſes NE, NH, VX, & anguli ANE, ANH, QXV; ideoq; & reſidui ex rectis, anguli videlicet ENO, HNP, VXY, æquales erunt. Quoniā igitur anguli ENO, EON, trianguli ENO, æquales ſunt angulis HNP, HPN, trianguli HNP; necnon & angulis VXY, VYX, trianguli VXY; (ſunt enim EON, HPN, VYX, oſtenſi recti.) Et latus NE, lateribus NH, VX, æquale demonſtratum; [c] Æqualia erunt reliqua latera NO, OE, reliquis lateribus NP, PH; Item lateribus XY, YV. Quare rectæ ZV, ZS, æquales exiſtentes ipſi XY, rectis NO, NP, æquales erunt. Iam verò, quia OE, PH, æquales ſunt, ac parallelæ; [d] erit quoq; recta cōiuncta OP, æqualis & parallela ipſi EH, ideoq; æqualis ipſi EC, hoc eſt, rectæ VS. Quā ob rē, cùm latera ZV, ZS, lateribus NO, NP, æqualia ſint; baſis item VS, baſi OP; [e] æqualis erit angulus VZS, angulo inclinationis ONP. Dico etiam angulum hunc ONP, inclinationis, eſſe obtuſum. Nam ducta recta Bα, ipſi NO, parallela; cùm ſit quoq; NB, ipſi Oα, parallela, ex ſcholio propoſ. 8.lib.13. Parallelogrammum erit NOαB, [f] ideoque recta Bα, ipſi NO, æqualis. Quia verò BC, latus pentagoni oppoſitum angulo CαB, qui rectus eſt, ([g] æqualis nimirum interno CON.) maius eſt latere Bα, hoc eſt, recta NO, vel vtraque ZV, ZS, quæ ipſi NO, oſtenſæ ſunt æquales; Erunt duæ rectæ TV, TS, maiores duabus rectis ZV, ZS. Cadit igitur punctum Z, intra triangulum TVS, ita vt rectæ TV, TS, recta ZV, ZS, includant omnino; Atque proinde angulus VZS, ideoque illi æqualis ONP, maior eſt angulo pentagoni T: Hic verò, cùm ſit pentagoni angulus, paulò antè, cùm de inclinatione baſium Icoſaedri ageremus, demonſtratus eſt maior recto. Multò igitur maior recto erit angulus inclinationis ONP, ideoque obtuſus.




[a] 4.primi.

[b] 4.primi.

[c] 26.primi.

[d] 33.primi.

[e] 8.primi.

[f] 34.primi.

[g] 29.primi.

## COROLLARIVM.

*PATET igitur ex his, omnes inclinationes baſium Dodecaedri æquales eſſe inter ſe. Cùm enim ſinguli anguli inclinationum contineantur binis perpendicularibus à medio puncto lateris Dodecaedri ad duo latera cubi in Dodecaedro deſcripti ductis; quales ſunt NO, NP, ſubtendanturq; à rectis, quæ cubi inſcripti lateribus ſunt æquales, vel certè, quæ rectis ſubtendentibus angulos pentagonorum æquales ſunt, cuiuſmodi eſt recta OP, lateri cubi inſcripti EH, quod angulum pentagoni EAH, ſubtendit, æqualis;* [a] *Erunt omnes inter ſe æquales, cùm & omnes illæ perpendiculares, quæ ipſos continent, æquales ſint, necnon & rectæ illæ omnes, quæ eoſdem ſubtendunt, latera videlicet cubi, inter ſe etiam ſint æquales.*

[a] 8.primi.

ELEMENTI DECIMISEXTI FINIS.

# INDEX PROBLEMATVM, QVAE HISCE COMMENTARIIS CONTINENTVR:

QVORVM ea, quæ Euclidis ſunt, eodem charactere ſunt expreſſa, quo in propoſitionum demonſtrationibus vſi ſumus: quæ verò adiecta à nobis, charactere, quo ſcholia notauimus. Litera porrò A, primũ tomum, & litera B, ſecundum ſignificat. Vt autẽ faciliùs quiſque inueniat problemata, quæ cupit, digeſſimus ea ſecundùm materias, de quibus proponuntur.


ACVTANGVLVM triangulum. Vide Triangulum.

ÆQVIANGVLA, & æquilatera figura. Vide Figura intra & extra circulum, &c.

ÆQVILATERA, & æquiangula figura. Vide Figura intra & extra circulum, &c.

ÆQVILATERVM triangulum. Vide Triangulum.

ANGVLI proportionales. Vide Figuræ, anguli, & lineæ proportionales.

## ANGVLVS.

Angulum datum rectilineum bifariam ſecare. pag. 29. A

*Angulum datum rectilineum in quotuis partes æquales diuidere.* 29.30. & 352. A

*Angulum rectum datum in tres angulos æquales partiri.* 61. A

Angulum rectum ad punctum in data recta linea datum conſtituere. 31. A

*Angulum rectum ad extremum punctum lineæ rectæ conſtituere.* 31.32. & 57. A

Angulum rectũ in data recta p lineã ex puncto extra rectam dato ductam conſtiuere. 32. A

*Angulum rectum in data recta conſtituere per lineam ductã ex puncto extra rectam dato, quando punctum vicinum eſt datæ rectæ, vel prope extremum plani cuiuſpiam, vel quando recta data prope extremũ plani eſt, vel denique quando & datum punctum eſt vicinum extremo plani, & recta data eſt prope aliud extremum plani.* 33. & 57. A

*Angulus propoſitus, rectúsne ſit, an obtuſus, acutúsve, cognoſcere.* 6. A

Angulum dato angulo rectilineo æqualem ad datam rectam lineam, datumque in ea punctum conſtituere. 42. & 43. A

*Angulos rectilineos, & arcus circulorũ reperire incommenſurabiles.* 359. A

Ex tribus angulis planis, quorum duo quomodocunque aſſumpti reliquo ſunt maiores, ſolidum angulum conſtituere. Oportet autem illos tres angulos quatuor rectis minores eſſe. 208. B

Ad datam rectam lineam, eiuſq; punctum angulum ſolidum cõſtituere, ſolido angulo dato æqualem. 212. B

ARCVS. Vide Circulus.

## CIRCVLVS.

Circuli dati centrum reperire. 122. A

*Per datum punctum in circumferentia rectam, quæ circulum tangat, ducere.* 132. A

A dato puncto rectam lineam ducere, quæ datum circulum tangat. 145.146. & 167. A

*Circulis duobus datis, quorum neuter alterum includat, rectam lineam ducere, quæ vtrumque circulum tangat.* 146. A

*Circulum per datum punctum deſcribere, qui alium datum circulum tangat.* 148. A

*Lineæ rectæ, quæ circulum ſecat, lineam parallelam ducere, quæ eundem circulum tangat.* 150. A

Circuli ſegmento dato, deſcribere circulum, cuius eſt ſegmentum. 157. A

*Circulum per tria puncta non exiſtentia, in linea recta deſcribere.* 158. & 178. A

Arcum datum ſecare bifariam. 164. A

Circuli ſegmentum ſuper datam rectam deſcribere, in quo angulus exiſtens ſit æqualis dato angulo rectilineo. 168. A

A dato circulo ſegmentum abſcindere, capiens angulum, angulo dato rectilineo æqualem. 169. A

*Circulis duobus datis, quorum vnus non ſit totus intra alium circulum, qui vtrumque tangat, deſcribere.* 149. A

In circulo dato rectam accommodare datæ rectæ, quæ diametro maior non ſit, æqualem. 175. A

*In circulo rectam accommodare æqualem datæ rectæ, quæ circuli diametro maior non ſit, & alteri rectæ parallelam.* 175. A

*Dato circulo, & duobus punctis, ſiue extra circulum, ſiue intra, dummodò neutrum ſit in circumferẽtia; per ea puncta duas rectas ducere ad aliquod vnum punctum circumferentiæ, ita vt recta coniungens duo puncta, quibus duæ illæ rectæ circumferentiam ſe-*

*eant, parallela ſit rectæ data duo puncta connectenti.* 347. *A*

*Datum arcum circuli in datam proportionem diuidere.* 351. *A*

*Datum arcum, vel angulum rectilineum in quotuis partes æquales partiri.* 352. *A*

*Dato arcui circuli, ex cuius quadrante quadratrix deſcripta eſt, rectam lineam inuenire æqualem.* 353. & 354. *A*

*Dato circulo quadratum æquale conſtituere.* 355. *A*

*Dato quadrato, circulum æqualem deſcribere.* 356. *A*

*Circulum cuicunque rectilineo æqualem deſcribere: Et circulo figuram rectilineã æqualem conſtituere, quæ cuicunque alteri ſimilis ſit.* 356. *A*

*Datæ rectæ lineæ circumferentiam circuli æqualem reperire.* 356. & 357. *A*

*Datis duobus circulis inæqualibus, datoq; arcu in vno eorum; ex altero arcum æqualem abſcindere.* 357. *A*

*Arcus circulorum, & angulos rectilineos inuenire incommenſurabiles.* 359. *A*

CIRCVMFERENTIA. Vide Circulus.

COMMENSVRABILES, & incommenſurabiles magnitudines.

*An duæ quæcunque magnitudines propoſitæ ſint commenſurabiles, nécne, explorare.* 104. *B*

Duabus magnitudinibus commenſurabilibus datis, maximam earum communem menſuram inuenire. 104. B

*An quotlibet magnitudines propoſitæ ſint commenſurabiles, nécne, conſiderare.* 105. *B*

Tribus magnitudinibus commenſurabilibus datis, maximam earum menſuram communem inuenire. 105. B

*Propoſitis duabus magnitudinibus commẽſurabilibus, quam proportionem habeant in numeris, inuenire.* 107. *B*

Rectam inuenire, ad quam ita ſe habeat quæuis alia data recta, vt numerus ad numerũ. 108 B

Rectam inuenire, ad cuius quadratum ita ſe habeat quadratum alterius datæ rectæ, vt numerus ad numerum. 108. B

Propoſitæ rectæ lineæ inuenire duas rectas incommenſurabiles, alteram quidem longitudine tantùm, alteram verò etiam potentia. 114. B

COMPOSITI inter ſe numeri. Vide Numerus par, &c.

COMPOSITVS numerus. Vide Numerus par, &c.

CONVS, & Cylindrus. Vide Parallelepipedum, &c.

CORPVS Regulare. Vide Figura intra & extra circulum, &c.

CVBVS numerus. Vide Numerus planus, &c.

CYLINDRVS, & Conus. Vide Parallelepipedum, &c.

DIAMETER circuli. Vide Circulus.

FIGVRA intra, & extra circulum, ſphæram, atque aliam figuram.

In circulo dato triangulũ deſcribere dato triangulo æquiangulum. 176. A

Circa datum circulum triangulum deſcribere dato triangulo æquiangulum. 176. A

In dato triangulo circulum deſcribere. 176. & 177. A

*Trianguli lateribus cognitis, inuenire puncta, in quibus circulus inſcriptus ipſa latera tangere debet.* 177. & 178. *A*

Circulum circa datum triangulum deſcribere. 178. A

In dato circulo quadratum deſcribere. 179. A

Circa datum circulum quadratum deſcribere. 179. A

In dato quadrato circulum deſcribere. 179. A

Circa datum quadratum circulum deſcribere. 179. & 180. A

In dato circulo pentagonum æquilaterum & æquiangulum inſcribere. 181. A

*Super datam rectam pentagonum æquilaterum, & æquiangulum deſcribere.* 181. *A*

Circa datum circulum, pentagonum æquilaterum, & æquiangulum deſcribere. 182 A

*Circa circulum deſcribere quamcunque figuram regularem, quæ circulo inſcribi poteſt.* 182. *A*

In dato pentagono æquilatero & æquiangulo circulum inſcribere. 183. A

*In quacunque figura regulari circulum deſcribere.* 184. *A*

*Circa pentagonum æquilaterum & æquiangulum circulum deſcribere.* 184. *A*

*Circa quamcunque figuram regularem circulum deſcribere.* 184. *A*

In circulo hexagonum æquilaterum, & æquiangulum deſcribere. 184. & 185. A

In circulo quintidecagonum æquilaterum & æquiangulum deſcribere. 185. & 186. A

*Figura quacunque regulari circulo inſcripta, deſcribere ſimilem circa circulum, & in ea circulum inſcribere, & circa eandem circulum deſcribere.* 190. *A*

*Figura quacunque regulari circulo inſcripta, inſcribere aliam duplo plurium laterum.* 190. *A*

*Figuras regulares imparium laterum circulo inſcribere beneficio Iſoſcelium, quorũ anguli ad baſim angulorum ad verticem multiplices ſunt.* 191. *A*

*Figuras regulares parium laterum circulo inſcribere beneficio Iſoſcelium, quorũ anguli ad baſim angulorum ad verticem multiplices ſeſquialteri ſunt.* 191. *A*

*Figuram quamcunque regularem abſque beneficio Iſoſcelium circulo practicè inſcribere.* 191. *A*

*Figuram quamcunque regularem ſuper datam rectam practicè deſcribere.* 192. *A*

*Latus pentagoni, & decagoni in eodem circulo, ex Ptolemæo inuenire.* 192. *A.* & 261. *B*

*Quadratricem lineam intra quadrãtem, & quadratum deſcribere.* 349. & 350. *A*

Duobus circulis circa idem centrum exiſtentibus, in maiori circulo polygonum æquilaterum & parium laterum inſcribere, quod non tangat minorem circulum. 246. B

Ex quo fit, perpendicularem ad diametrum ductam, ab extremitate lateris polygoni inscripti, quod cum diametro conuenit, totam extra minorem circulum cadere. 247. B

Duabus sphæris circa idem centrum existentibus, in maiori sphæra solidum polyedrũ inscribere, quod nõ tangat minoris sphæræ superficiem. 247. B

Ex quo fit, si in quauis alia sphæra describatur solidum polyedrum simile prædicto polyedro, proportionem polyedri in vna sphæra ad polyedrũ in altera sphæra esse triplicatam eius, quã habent sphærarum diametri. 250. B

Pyramidem constituere, & data sphęra complecti. 264. & 344. B

Octaedrum constituere, & sphæra complecti, qua & pyramidem. 265. & 345. B

Cubum constituere, & sphæra complecti, qua priores figuras. 267. & 345. B

Icosaedrum constituere, & sphæra complecti, qua & ante dictas figuras. 268. & 346. B

Dodecaedrum constituere, & sphæra complecti, qua & prædictas figuras. 272. & 348. B

Latera quinque corporum Regularium exponere, & inter se comparare. 275. B

*Numerum laterum, & angulorum solidorum cuiusque corporis Regularis expeditè cognoscere.* 278. B

In dato cubo pyramidem describere. 305. B

In data pyramide octaedrum describere. 305. B

In dato cubo octaedrum describere. 306. B

In dato octaedro cubum inscribere. 307. B

In dato Icosaedro dodecaedrũ inscribere. 307. B

*In dato octaedro pyramidem describere.* 308. B

*In dato Dodecaedro Icosaedrum describere.* 309. B

*In dato Dodecaedro cubum describere.* 310. B

*In dato Dodecaedro octaedrum describere.* 311. B

*In dato Dodecaedro Pyramidem describere.* 311. B

*In dato Icosaedro cubum describere.* 312. B

*In dato Icosaedro Pyramidem describere.* 312. B

*In dato cubo Dodecaedrum describere.* 312. B

*In dato cubo Icosaedrum describere.* 315. B

*In dato Icosaedro octaedrum describere.* 317. B

*In dato octaedro Icosaedrum describere.* 317. B

*In dato octaedro Dodecaedrum describere.* 319. B

*In data pyramide cubum describere.* 319. B

*In data pyramide Icosaedrum describere.* 322. B

*In data pyramide Dodecaedrum describere.* 322. B

*In dato solido Regulari sphæram describere.* 322. B

*Datis duobus circulis in sphæra parallelis, datã in vno eorum linea rectã, ducere in altero diametrũ huic rectæ datæ parallelam: vel etiã aliam rectam, quæ datæ rectæ sit æqualis & parallela, dummodò recta data maior non sit diametro posterioris circuli.* 341. B

*In data sphæra duos circulos æquales, ac parallelos describere, ita vt diameter sphæræ sit vtriusque diametri potentia sesquialtera.* 343. B

*Angulum inclinationis duarum basium cuiusque corporis Regularis inuenire.* 352. 353. & seq.

FIGVRAE, anguli, & lineæ proportionales.

A data recta linea imperatã partẽ auferre. 298. A

*Datam rectam lineam similiter secare, vt data altera recta secta fuerit.* 298. A

*Datam rectam in quotuis partes æquales secare.* 29. 30. & 299. A

*Datam rectam secare in duas partes datã proportionem habentes.* 300. A

*Datam rectam in quotuis partes Arithmeticè proportionales secare.* 301. A

Datis duabus rectis, tertiam proportionalem inuenire. 302. A

*Quotuis rectas in data proportione continuè proportionales reperire.* 302. & 303. A

Datis tribus rectis, quartam proportionalem inuenire. 303. A

*Datis duabus rectis, alias duas in eadem cum illis proportione reperire.* 303. A

*Datis tribus rectis, quartã inuenire, quæ sit ad tertiam, vt prima ad secundam.* 303. A

Datis duabus rectis, mediam proportionalem inuenire. 304. A

*Data recta, aliam rectam (quæ minor non sit, quàm dupla illius) ita secare, vt data recta sit media proportionalis inter segmenta huius.* 304. A

*Secta recta in duas partes vtcunque alterutram earum ita rursus partiri in duas partes, vt omnes tres partes sint continuè proportionales.* 307. A

*Datis duabus rectis, mediã proportionalem in Arithmetica proportionalitate inuenire.* 307. A

*Datis duabus rectis, minorẽ extremitatem in Arithmetica proportionalitate inuenire.* 308. A

*Datis duabus rectis, maiorem extremitatem in proportionalitate Arithmetica inuenire.* 308. A

*Datis duabus rectis, mediam proportionalem in Geometrica proportionalitate inuenire.* 308. A

*Datis duabus rectis, minorem extremitatem in Geometrica proportionalitate inuenire.* 308. A

*Datis duabus rectis, maiorem extremitatem in Geometrica proportionalitate inuenire.* 308. A

*Datis duabus rectis, mediam proportionalem in Harmonica proportionalitate inuenire.* 308, & 309. A

*Datis duabus rectis, minorem extremitatem in Harmonica medietate inuenire.* 309. A

*Datis duabus rectis, maiorem extremitatem in proportionalitate Harmonica inuenire.* 309. A

A data recta dato rectilineo simile, similiterque positum rectilineum describere. 314. A

Dato rectilineo simile, similiterq; positum, & alteri dato æquale idem constituere. 327. A

Ad datam rectam, dato rectilineo, quod maius non sit parallelogrammo ad dimidiam applicato, æquale parallelogrammum applicare deficiens figura parallelogramma, quæ similis sit alteri parallelogrammo dato. 330. A

Ad datam rectam, dato rectilineo æquale parallelogrammum applicare, excedens figura parallelogramma, quę similis sit parallelogrammo alteri dato. 331. A

Datam rectam terminatam extrema ac media ratione secare. 332. A

*A dato rectilineo imperatam partem auferre, ita tamẽ, vt & ablatum, & id, quod relinquitur, simile sit cuiuis rectilineo dato, similiterq; positum.* 338. A

*Datis duobus rectilineis, tertium proportionale inuenire.* 339. A

*Datis tribus rectilineis, quartum proportionale inuenire.* 339. A

*Datis duobus rectilineis, medium proportionale inuenire.* 339. A

*Dato rectilineo, duo rectilinea æqualia constituere, quæ similia sint, similiterq; descripta cuicunq; rectilineo, habeantq; datam proportionem inter se.* 340. A

*Dato rectilineo, duo rectilinea æqualia exhibere, quæ cuiuis rectilineo similia sint, similiterq; descripta, latera q; eorum homologa habeant inter se datam proportionem.* 340. A

*Datis duobus rectilineis, æquale rectilineum constituere, quod simile sit, similiterq; positum dato rectilineo.* 341. A

*A dato puncto in latere trianguli rectam ducere, quæ triangulum diuidat in duo segmenta, secundùm datam proportionem.* 343. A

*Dato rectilineo simile, similiterq; positum rectilineum describere, maius vel minus, secundùm datam proportionem.* 343. A

*In dato quadrato aliud quadratũ describere in data proportione, quæ dupla maior non sit.* 345. A

*Datum arcum circuli in datam proportionem diuidere.* 351. A

*Isosceles triangulum constituere, cuius vterque angulorum æqualium ad reliquum habeat proportionem datam.* 352. A

FIGVRAE planæ quadrilateræ. Vide Parallelogrammum, &c.

FRACTIONES numerorum. Vide Minutiæ numerorum.

FRACTVS numerus. Vide Minutię numerorũ.

IMPAR numerus. Vide Numerus par, &c.

INCOMMENSVRABILES magnitudines. Vide Commensurabiles, & incommensurabiles magnitudines.

IRRATIONALES magnitudines. Vide Rationales, & irrationales magnitudines.

ISOSCELES. Vide Triangulum.

LINEA perpendicularis. Vide Recta linea.

LINEA recta. Vide Recta linea.

LINEAE parallelæ. Vide Recta linea.

LINEAE proportionales. Vide Figuræ, Anguli, & lineæ proportionales.

MAGNITVDINES commẽsurabiles, & incommensurabiles. Vide Commẽsurabiles, & incommensurabiles magnitudines.

MAGNITVDINES proportionales in cõmuni.

*Proportionem ex duabus, vel pluribus proportionibus componere.* 323. A

*Proportionem minorem ex maiore auferre.* 323. A

MINVTIAE numerorum.

*Duas minutias diuersarũ denominationũ ad alias duas eiusdem denominationis illis æquales reducere.* 88. B

*Integrum numerum quemcunque ad dati denominatoris minutiam reducere.* 88. B

*Datam minutiam duplare, ac dimidiare.* 88. B

*Minutiam minutiæ, aut minutiam minutiarũ ad simplicem minutiam reducere.* 89. B

*Datis duabus minutijs, alterutram earum ad aliam æqualem reducere, ita vt alterius numeri numeros huius inuentæ numerent, per numeros ex numeratore datæ minutiæ reductæ in denominatorẽ alterius minutiæ datæ, & ex numeratore alterius huius minutiæ datæ in denominatorem illius reductæ, productos.* 90. B

*Datam minutiam ad minimos terminos reducere.* 91. B

*Datam minutiam ad aliam æqualem datæ denominationis, quando id fieri potest, reuocare.* 91. B

*Minutias plures in vnam summam colligere.* 91. B

*Minutiam minorem ex maiore detrahere.* 92. B

*Minutiam per minutiam multiplicare.* 93. B

*Minutiam per minutiam dividere.* 93. B

*Minutiam in minutiam inferere.* 94. B

NVMERI proportionales in communi.

*Ex datis duobus numeris, tres numeros Harmonicè proportionales inuenire, quorum extremi eandem proportionem habeant, quam dati duo numeri.* 310. A

*Datis duobus numeris, medium Harmonicè proportionalem inuenire.* 311. A

*Datis duobus numeris, minorem extremitatem in proportionalitate Harmonica inuenire.* 311. A

*Datis duobus numeris, maiorem extremitatem in Harmonica proportionalitate inuenire* 312. A

Datis numeris quotcunque, reperire minimos omnium eandem rationẽ habentium cum ipsis. 35. B

*Duos minimos numeros reperire in proportione quotuis numerorum continuè proportionalium.* 35. B

Numeros reperire deinceps proportionales minimos quotcunque quis iusserit in data ratione. 40. B

*Numeros quotcunque integros, & minimos continuè proportionales aliter reperire, in proportione data nõ multiplici.* 41. B

Datis quotcunque rationibus in minimis numeris, reperire numeros deinceps minimos in datis rationibus. 42. B

Duobus numeris datis, considerare, an possit ipsis tertius proportionalis inueniri. 74. B

Tribus numeris datis, considerare, an ipsis quartus proportionalis possit inueniri. 75. B

*Datis quotlibet numeris, considerare, an ipsis possit alius proportionalis adiungi.* 75. B

*Summam quotcunque numerorum continuè proportionalium inuenire.* 82. B

*Inuenire quotcunque numeros continuè proportionales in data proportione, quorum summa æqualis sit numero, qui ex primo in vltimum gignitur, vel ex quibuslibet duobus, qui ab extremis æqualiter distant.* 85. B

*Item quorum summa sit numerus quadratus, cuius radix sit medius terminus.* 85. B

*Duos numeros in data proportione inuenire, quorũ summa æqualis sit numero producto ex vno in alium.* 85. B

NVMERVS fractus. Vide Minutiæ numerorũ.

NVMERVS Par, Impar, Primus, Pariter par, Pariter par & impariter: Pariter impar, Perfectus.

*Dati duo numeri an ſint primi inter ſe, nécne, conſiderare.* 13. B

Datis duobus numeris non primis inter ſe, maximam eorum communem menſuram reperire. 14. B

*Dati quotuis numeri ſintne primi inter ſe, an non, conſiderare.* 14. B

Datis tribus numeris non primis inter ſe, maximam eorum communem menſuram reperire. 15. B

Datis duobus numeris, minimũ numerum ab eis numeratum reperire. 35. B

Tribus numeris datis, reperire minimũ ab eis numeratum. 36. B

*Datis quotuis numeris, inuenire minimum ab eis numeratum.* 37. B

Numerum reperire, q̃ minimus cùm ſit, habeat datas partes. 38. B.

*Numerum reperire, qui minimus cùm ſit, habeat datas partes, hac lege, vt quælibet pars contineat partẽ ſubſequentem.* 38. & 39. B

*Primis numeris datis quotcunque, inuenire alium primum numerum ab illis diuerſum.* 77. B

*Omnes pariter pares tantùm reperire.* 80. B

*Omnes pariter impares tantùm inuenire.* 81. B

*Omnes pariter pares, & pariter impares inuenire.* pag. 82. B

*Omnes numeros perfectos inuenire.* 83. B

NVMERVS Planus, Solidus, Quadratus, Cubus, ſimiles plani, ac ſolidi numeri.

*Quadratum numerum inuenire, cum quo datus quinis numerus quadratum quoq; numerum conſtituat: Et à quo idem datus numerus ſubtractus relinquat quadratum.* 98. 99. 100. & 103. A

*Planos numeros, vel ſolidos duos non ſimiles reperire.* 62. B

*Planos, vel ſolidos numeros quotcunque non ſimiles inuenire.* 114. B

*Duos numeros plenos ſimiles inuenire, pares, vel impares, vel vnum parem, & alterum imparem.* 131. B

Duos numeros quadratos inuenire, ita vt compoſitus ex ipſis quadratus etiam ſit. 131. B

*Duos numeros quadratos inuenire, ita vt exceſſus eorum quadratus etiam ſit.* 131. & 132. B

*Duos numeros quadratos inuenire, quorum exceſſus non ſit quadratus.* 132. B

Duos numeros quadratos inuenire, ita vt compoſitus ex ipſis non ſit quadratus. 132. B

*Duos numeros inuenire, ita vt cõpoſitus ex ipſis ad neutrum ipſorum proportionem habeat, quam quadratus ad quadratum.* 133. B

ORTYSANGVLVM triangulum. Vide Triangulum.

PARALLELAE lineæ. Vide Recta linea.

PARALLELEPIPEDVM, & plana parallela.

*Dato plano, per datum punctum, quod in eo non eſt, parallelum planum ducere.* 202. B

A data recta linea, dato ſolido parallelepipedo ſimile & ſimiliter poſitum ſolidum parallelepipedum deſcribere. 213. B

PARALLELOGRAMMVM, & aliæ figuræ planæ quadrilateræ.

*Parallelogrammum conſtruere, cuius vnus angulorum æqualis ſit dato angulo rectilineo, lateraq; circa illum angulum datis duabus rectis æqualia.* 56. A

*Parallelogrammum ſecare bifariã per rectam per quodvis punctum ductam, quod non ſit in diametro, niſi quando diametrum ſecat bifariam.* 64. A

Parallelogrammum dato triangulo æquale conſtituere in dato angulo rectilineo. 78. A

*Parallelogrammo dato æquale triangulum conſtituere in dato angulo rectilineo.* 79. A

Parallelogrammum dato triangulo æquale cõſtituere ſuper datam rectam, & in dato angulo rectilineo. 80. A

*Parallelogrammo dato æquale triangulũ conſtituere ſuper datam rectam, & in dato angulo rectilineo.* 81. A

Parallelogrammũ dato rectilineo æquale conſtituere ſuper datam rectam, & in dato angulo rectilineo. 81. A

*Parallelogrammum datis quotcunque rectilineis æquale conſtituere ſuper datam rectam, et in dato angulo rectilineo.* 82. A

*Rectilineis duobus inæqualibus datis, exceſſum maioris ſupra minus inquirere.* 82. A

Quadratum ſupra datã rectam cõſtruere. 82. A

*Quadratis duobus inæqualibus datis, inuenire alia duo quadrata, quæ et æqualia inter ſe ſint, & ſimul ſumpta æqualia duobus datis ſimul ſumptis.* 86. A

*Quadratis quotlibet datis, ſiue æqualibus, ſiue inæqualibus, inuenire quadratum omnibus illis æquale.* 87. A

*Quadratis duobus datis, alteri illorũ adiungere figuram, quæ reliquo quadrato ſit æqualis, ita vt tota figura compoſita ſit etiam quadrata.* 87. A

*Quadratum dato rectilineo æquale conſtituere.* 117. A

*Dato exceſſu diametri alicuius quadrati ſupra latus eiuſdem: Inuenire latus ipſius quadrati.* 118. A

*Dato circulo quadratum æquale conſtituere.* 355. A

*Dato quadrato, circulum æqualem deſcribere.* 356. A

PAR, & impar numerus. Vide Numerus par, &c.

PARITER par, pariter par & impariter, ac pariter impar. Vide Numerus par, &c.

PERFECTVS numerus. Vide Numerus par, &c.

PERPENDICVLARIS linea. Vide Recta linea.

PLANA figura intra, & extra circulum, atque aliam figuram. Vide Figura intra & extra circulum, &c.

PLANAE figuræ quadrilateræ. Vide Parallelogrammum, &c.

PLANA parallela. Vide Parallelepipedum, &c.

PLANI numeri fimiles. Vide Numerus planus, Solidus, Quadratus, &c.

PLANVS angulus. Vide Angulus.

PLANVS numerus. Vide Numerus planus.

PORTIO circuli. Vide Circulus.

PRIMI inter ſe numeri. Vide Numerus par, &c.

PRIMVS numerus. Vide Numerus par, &c.

PRISMA. Vide Parallelepipedum, &c.

PROPORTIO Figurarum, Angulorum, & Linearum. Vide Figuræ, Anguli, & lineæ proportionales.

PROPORTIO magnitudinum in communi. Vide Magnitudines proportionales in communi.

PROPORTIONALES magnitudines in communi. Vide Magnitudines proportionales in communi.

PROPORTIONALES numeri in communi. Vide Numeri proportionales in communi.

PROPORTIO numerorum in communi. Vide Numeri proportionales in communi.

PYRAMIS. Vide Parallelepipedum, &c.

QVADRATVM. Vide Parallelogrammum, &c.

QVADRATVS numerus. Vide Numerus Planus, Solidus, &c.

QVADRILATERAE figuræ planæ. Vide Parallelogrammum.

RATIONALES, & Irrationales magnitudines.

*Duas Rationales longitudine & inter ſe, & expoſitæ Rationali commenſurabiles inuenire, quarũ vna Rationali expoſitæ ſit æqualis.* 122. B

*Duas Rationales longitudine & inter ſe, & expoſitæ Rationali commenſurabiles inuenire, quarum neutra Rationali expoſitæ æqualis ſit.* 122. B

*Duas Rationales longitudine quidem inter ſe, potentia verò tantùm expoſitæ Rationali commenſurabiles inuenire.* 122. B

*Rationales quotcunque longitudine inter ſe commenſurabiles inuenire.* 123. B

*Duas Rationales potentia tantùm inter ſe commenſurabiles inuenire, quarum altera expoſitæ Rationali ſit æqualis.* 124. B

*Duas Rationales potentia tantùm inter ſe commenſurabiles inuenire, quarum neutra ſit expoſitæ Rationali æqualis.* 124. B

*Rationales quotcunque potentia tantùm inter ſe commenſurabiles reperire.* 124. & 125. B

*Datis quotcunq; Rationalibus potentia ſolùm commenſurabilibus, inuenire aliam Rationalem illis omnibus potentia tantùm commenſurabilem.* 125. B

Duas Medias rectas longitudine commenſurabiles: Item duas potentia tantùm commenſurabiles inuenire. 128. B

Medias inuenire potẽtia tantùm commenſurabiles, quæ Rationale comprehendant. 130. B

Medias inuenire potentia tantùm commenſurabiles, quæ Medium contineant. 131. B

Duas Rationales inuenire potentia tantũ commenſurabiles, ita vt maior, quàm minor, plus poſsit quadrato rectæ longitudine ſibi commenſurabilis. 133. B

Duas Rationales inuenire potentia tantũ commenſurabiles, ita vt maior, quàm minor plus poſsit quadrato rectæ ſibi longitudine incommenſurabilis. 134. B

Duas Medias inuenire potentia tantùm commenſurabiles, quæ Rationale contineant, ita vt maior plus poſsit, quàm minor, quadrato rectæ ſibi longitudine commenſurabilis, vel incommenſurabilis. 134. B

Duas Medias inuenire potẽtia ſolùm commenſurabiles, quæ Medium contineant, ita vt maior plus poſsit, quàm minor, quadrato rectæ ſibi longitudine commẽſurabilis, vel incommenſurabilis. 135. B

Duas rectas inuenire potentia incommenſurabiles, quæ faciãt compoſitũ quidem ex ipſarum quadratis, Rationale, rectangulum verò ſub ipſis contentum, Medium. 136. B

Duas rectas inuenire potentia incommenſurabiles, quæ faciant compoſitum quidem ex ipſarum quadratis Medium; Rectangulum verò ſub ipſis contentum, Rationale. 137. B

Duas rectas inuenire potentia incommenſurabiles, quæ faciant & compoſitum ex ipſarum quadratis Medium, & rectangulum ſub ipſis contentum, Medium, incommenſurabile compoſito ex ipſarum quadratis. 138. B

*Duas Medias inuenire longitudine, & potentia incommenſurabiles.* 138. B

Sex genera linearum Irrationalium, quæ ex binis nominibus dicuntur, inuenire. 146. B

Sex genera linearum Irrationalium, quæ Apotomæ dicuntur, inuenire. 167. B

## RECTA LINEA

Rectæ datæ lineæ æqualem rectam lineam ad datum punctum ponere. 21. A

Rectam lineam æqualem datæ minori ex maiore detrahere. 22. A

Rectam lineam datam finitam bifariam ſecare. 30. A

Rectam perpendicularem ad rectam lineam ex puncto in ea dato educere. 31. A

*Rectam perpendicularem ad rectam in puncto extremo erigere.* 32. & 33. A

Rectam perpendicularem ad rectam ducere ex puncto extra eam dato. 32. & 33. A

*Rectam perpendicularẽ ad rectam ducere ex puncto extra eam dato, quando punctum datum est vicinum datæ rectæ, vel prope extremũ plani cuiuspiã, vel quando recta data prope extremũ plani est, vel deniq; quãdo & datũ punctum est vicinũ extremo plani, & recta data est prope aliud extremum plani. 33. & 57. A*

Rectæ datæ parallelam rectam à dato puncto ducere. 55. A

*Rectam lineam à puncto extra datam rectam lineã proposito ducere, quæ cũ data recta angulum efficiat dato angulo rectilineo æqualem. 56. A*

*Rectam lineam datæ rectæ parallelam ducere per punctum datæ rectæ vicinum. 57. A*

*Inter duas rectas infinitas angulum facientes lineam rectam datæ lineæ æqualem collocare, quæ cum vtralibet eurũ faciat angulum dato angulo æqualem, dummodò datus angulus, & angulus comprehensus datis rectis minores sint duobus rectis. 64. A*

*Rectam datam lineam finitam, in quotlibet partes æquales secare. 75. & 299. A*

*Rectis duabus inæqualibus datis, inuenire id, quo plus potest maior, quam minor. 86. 87. A. & 117. B*

*Datis duabus rectis, sinæ æqualibus, sine inæqualibus, inuenire rectam, quæ illas potest. 86. A. & 117. B*

Rectam lineam datam secare, vt rectangulum sub tota, & altero segmento æquale sit quadrato reliqui segmenti. 106. A

*Datis duabus rectis, alterutri earum rectam adiungere, vt rectangulum sub tota composita, & adiuncta, æquale sit quadrato alterius. 173. A*

*Rectam lineam cuilibet arcui circuli, ex cuius quadrante Quadratrix linea describitur, æqualem inuenire. 353. & 354. A*

Duabus datis rectis inæqualibus quartam partem quadrati ex minore descripti ad maiorem applicare, ita vt deficiat figura quadrata. 119. B

*Datam rectam lineam ita secare, vt rectangulum sub segmentis contentum æquale sit dato rectilineo, quod tamen maius non sit, quàm quadratum à dimidia linea descriptum. 119. B*

A dato puncto in sublimi ad subiectum planũ perpendicularem rectam ducere. 200. B

Dato plano, à puncto, quod in illo datum est, perpendicularẽ rectam excitare. 200. & 201.

*Per rectam in plano quouis datam planum ducere, quod ad ipsum planum sit rectum. 205. B*

RECTANGVLVM parallelogrammum. Vide Parallelogrammum, &c.

RECTANGVLVM triangulum. Vide Triangulum.

REGVLARIS figura. Vide Figura intra & extra circulum, sphæram, &c.

SCALENVM triangulum. Vide Triangulum.

SEGMENTVM circuli. Vide Circulus.

SIMILES plani ac solidi numeri. Vide Numerus planus, &c.

SOLIDA Figura intra, & extra sphæram, atque aliam figuram. Vide Figura intra, & extra circulum, &c.

SOLIDI numeri similes. Vide Numerus planus, &c.

SOLIDVM Regulare. Vide Figura intra, & extra circulum, &c.

SOLIDVS angulus. Vide Angulus.

SOLIDVS numerus. Vide Numerus plan⁹, &c.

SPHAERA. Vide Figura intra & extra circulũ, sphæram, &c.

TRAPEZIVM. Vide Parallelogrammum, &c.

## TRIANGVLVM.

Triangulum æquilaterum super data recta linea terminata constituere. 19. A

*Isosceles super data recta constituere. 20. A*

*Scalenum super data recta constituere. 20. & 21. A*

Triangulum ex tribus rectis lineis, quæ sunt tribus datis rectis lineis æquales, quarũ quælibet duę reliqua sint maiores, cõstituere. 41. A

*Triangulum alteri dato triangulo æquilaterum, & æquiangulum constituere. 42. A*

*In scaleno, & Isoscele, cuius basis minor non sit vtrouis latere, duas rectas intra triangulum ducere, quarum vtraq; simul vtriq; lateri simul sit æqualis. 65. A*

*In æquilatero, vel Isoscele, cuius basis vtrouis latere minor sit, quælibet duæ lineæ intra triangulum ductæ, sunt simul minores duob. lateribus simul. 65. & 66. A*

*In scaleno, & Isoscele, cuius basis minor non sit vtrouis latere, duas rectas intra triangulum ducere, quarum vtraq; vtriq; lateri sit æqualis, vel maior. 66. A*

*Triangulum bifariam secare per lineam à quouis puncto in vno latere dato ductam. 71. A*

Triangulo dato æquale parallelogrammũ constituere in dato angulo rectilineo. 78. A

*Triangulum dato parallelogrammo æquale constituere in dato angulo rectilineo. 79. A*

Triangulo dato parallelogrammũ æquale constituere super datam rectam, & in dato angulo rectilineo. 80. A

*Triangulum dato parallelogrammo constituere æquale super datã rectam, & in dato angulo rectilineo. 81. A*

*Trianguli rectanguli cognitis duobus lateribus, in cognitionem reliqui lateris peruenire. 87. A*

*Amblygonium triangulũ constituere, in quo propos. 12. lib. 2. numeris possit accommodari. 108. A*

*Oxygonium triangulum construere, in quo propos. 13. libri 2. numeris possit accommodari. 112. & 113. A*

*Trianguli cuiusuis aream cognoscere. 116. A*

Isosceles constituere, quod habeat vtrumq; angulorum ad basim reliqui duplum. 180. A

*Isosceles oxygonium construere, cuius tertium latus vtrouis æqualium sit maius. 185. A*

*In dato triangulo quocunque quadratum describere. 344. & 345. A*

FINIS.

# INDEX THEOREMATVM, QVAE HISCE COMMENTARIIS CONTINENTVR:

QVORVM ea, quæ ab Euclide demonſtrantur, eodem charactere ſunt notata, quo in propoſitionum demonſtrationibus vſi ſumus: quæ verò à nobis adiecta, charactere, quo ſcholia excuſimus. Litera porrò A, primum tomum, & litera B, ſecundum ſignificat. Vt autem faciliùs quiſque inueniat theoremata, quæ cupit, digeſsimus ea ſecundùm materias, de quibus demonſtrantur.


ACVTANGVLVM triangulum. Vide Triangulum.

ÆQVIANGVLA, & æquilatera figura. Vide Figura intra & extra circulum, &c.

ÆQVILATERA, & æquiangula figura. Vide Figura intra & extra circulum, &c.

ÆQVILATERVM triangulum. Vide Triangulum.

ANGVLI proportionales. Vide Figuræ, anguli, & lineæ proportionales.

## ANGVLVS.

*Anguli recti omnes ſunt inter ſe æquales.* 16. A
Anguli oppoſiti ad verticem duarum rectarum ſe interſecantium ſunt æquales. 34. A
*Anguli quatuor à duabus rectis ſe interſecantibus facti, ſunt quatuor rectis æquales.* 35. A
*Anguli quotcunque circa idem punctum quatuor rectis ſunt æquales.* 35. A
Angulus externus trianguli maior eſt vtrouis interno oppoſito. 36. A
*Angulus externus figuræ quadrilateræ maior eſſe poteſt quouis interno oppoſito.* 36. A
Anguli duo trianguli quomodocunque ſumpti duobus rectis ſunt minores. 37. A
*Anguli duo trianguli orthogonij, & amblygonij ſunt acuti.* 37. A
*Anguli omnes trianguli æquilateri, & duo Iſoſcelis ſupra baſem, acuti ſunt.* 37. A
*Anguli tres cuiuſcunque trianguli æquales ſunt duobus rectis: Et externus æqualis eſt duobus internis oppoſitis ſimul.* 57. A
*Anguli omnes interni cuiuſcunq; figuræ rectilineæ quot rectis angulis æquiualeant.* 58. & 59. A
*Anguli omnes externi cuiuſcunque figuræ rectilineæ, productis ſingulis lateribus ordinatim verſus eandem partem, quatuor rectis ſunt æquales.* 59. A
*Anguli quinque, qui fiunt ex concurſu binorum laterum pentagoni productorum æquales ſunt duobus rectis.* 60. A
*Angulus contactus verè angulus eſt, contra Peletarium, vbi eius ſophiſmata diſſoluuntur.* 133. vſq; ad 145. A
*Angulo quouis contactus dari poteſt alius minor, & hoc alius minor vſque in infinitum: Item maior, & hoc alius maior in infinitum.* 135. A
*Anguli contactus, quo modo inter ſe ſint æquales, et qui æquales ſint.* 136. A
*Anguli contactus, quotquot ſint, efficiunt aggregatum omni rectilineo acuto angulo minus.* 137. A
*Anguli contactus Apologia aduerſus Peletarium.* 137. vſq; ad 145. A
*Angulus quiſpiam poteſt in infinitũ augeri, & alius in infinitũ minui: & tamen augmentũ illius, quantumcunque ſit, minus ſemper erit decremẽto huius.* 145. A
*A minori angulo tranſitur ad maiorẽ, & per omnes intermedios, nunquã tamen per æqualem.* 145. & 166. A
Anguli oppoſiti in quadrilatero intra circulum deſcripto æquales ſunt duobus rectis. 154. A
*Angulus externus quadrilateri in circulo, æqualis eſt ei, qui opponitur angulo ei deinceps.* 156. A
*Angulus rectus in centro inſiſtit quadranti; acutus verò arcui quadrante minoris & obtuſus maiori. Et contrà, angulus in centro quadranti inſiſtens, rectus eſt; inſiſtens verò arcui quadrante minori, acutus; & maiori, obtuſus.* 161. A
*Angulus curuilineus angulo rectilineo æqualis eſſe poteſt.* 245. A
Si duę rectę ſe mutuò tangentes, ad duas rectas ſe mutuò tangentes ſint parallelæ, nõ autem in eodem plano; illæ angulos æquales comprehendent. 199. B
*Idem eueniet, ſi omnes illæ rectæ ſint in vno plano.* 199. & 200. B
Si ſolidus angulus tribus angulis planis contineatur; Ex his duo quilibet vtut aſſumpti tertio ſunt maiores. 205. B
Omnis ſolidus angulus ſub minoribus, q̃ quatuor rectis angulis planis continetur. 206. B
Si fuerint tres anguli plani, quorũ duo vtlibet aſſumpti reliquo ſint maiores, cõprehendant autem ipſos rectæ lineę æquales; fieri poteſt, vt ex lineis æquales illas rectas connectentibus triangulum conſtituatur. 207. B
Si fuerint duo plani anguli æquales, quorũ verticibus ſublimes rectæ lineæ inſiſtant, quæ cum lineis primò poſitis angulos contineãt æquales, vtrumq; vtrique; in ſublimibus autem lineis quælibet ſumpta fuerint puncta, & ab his ad plana, in quibus conſiſtunt anguli primùm poſiti, ductæ fuerint perpendiculares; à punctis verò, quæ in planis à perpendicularibus fiunt, ad angulos primũ poſitos adiunctæ fuerint rectæ lineæ: Hæ cum ſublimibus æquales angulos cõprehendẽt. 220. B

Si fuerint duo anguli plani æquales, quorũ verticibus ſublimes rectæ æquales cum lineis primùm poſitis angulos continentes æquales, vtrumque vtrique: Erunt à punctis extremis linearũ ſublimium ad plana angulorum primùm poſitorum demiſſæ perpendiculares, inter ſe æquales. 221. B

ARCVS. Vide Circulus.

## CIRCVLVS.

*Circulus à diametro bifariam diuiditur.* 8. A

*Circulus à recta, quæ diameter non ſit, diuiditur non bifariam.* 8. A

Si in circulo recta aliqua linea rectá quampiam bifariam ſecet, & ad angulos rectos; in ſecante centrum erit circuli. 122. A

Si in circuli peripheria duo puncta coniungantur linea recta; cadet hæc recta intra circulum. 122. & 123. A

Recta circulum in vno tantùm puncto tangit, ſi ita tangat, vt eum non ſecet. 123. A

Si in circulo recta linea per centrum ducta ſecet aliam nõ per centrum ductam bifariam; & ad angulos rectos ipſam ſecabit. Et ſi ad angulos rectos eam ſecet; bifariam quoque eam ſecabit. 123. A

*Duobus circulis ex eodem centro deſcriptis, ſi ab aliquo puncto circumferentiæ exterioris recta ducatur interiorem circumferentiam ſecans: erunt eius ſegmẽta inter vtramq; circumferentiam æqualia.* 124. A

In circulo duę rectę non per centrum extenſæ, ſe mutuò bifariam non ſecant. 124. A

Duo circuli ſe mutuò ſecantes nõ habent idem centrum. 124. A

Duo circuli ſe mutuò interius tangentes, nõ habent idem centrum. 124. & 125. A

Si in diametro circuli à puncto, quod centrum non ſit, plurimæ rectæ cadant: maxima omnium erit, in qua centrum, minima verò reliqua: aliarum autem propinquior ei, quę per centrum, remotiore ſemper maior eſt: Duæ autem ſolùm rectæ æquales ab eodem puncto in circulum cadunt ad vtraſque partes minimæ vel maximæ. 125. A

*Si intra circulum punctum ſumatur, ab eoq; in circulũ rectarũ cadentiũ, vna quidem ſit maxima, vna verò minima, & reliquarũ aliæ ſint inæquales, aliæ æquales: Maxima quidẽ per centrũ tranſibit, minima verò erit reliqua pars diametri; & aliarũ maiores quidem erunt maximæ propinquiores, æquales autem à minima vel maxima, æqualiter diſtabunt.* 126. A

Si extra circulum ſumatur punctũ quodpiam, ab eoque puncto ad circulum deducantur rectæ quædam lineæ, quarum vna quidem per centrum protendatur, reliquæ verò vt libet: In eauam peripheriam cadẽtium rectarum, maxima quidem eſt illa, quæ per centrum ducitur; aliarum autem propinquior ei, quæ per centrum tranſit, remotiore ſemper maior eſt, &c. 126. A

*Ex puncto extra circulum ſumpto, in peripheriam concauam duæ tantùm lineæ rectæ æquales cadunt, ad vtraſque partes maximæ linęæ.* 127. A

*Si ex puncto extra circulum ducatur recta tangens circulum, erit ea minor omnibus ex eodem puncto in concauam peripheriam cadentibus, maior verò omnibus in conuexam peripheriam cadentibus.* 127. A

Punctum in circulo, à quo plures quàm duæ rectę æquales ad peripheriam ducuntur, centrum circuli eſt. 127. A

Circulus circulum in pluribus punctis, quàm duobus, non ſecat. 128. A

Recta per centra duorũ circulorum ſe interius tangentium ducta, cadit in circulorum contactum. 128. A

Recta per centra duorũ circulorum ſe exterius tangentium ducta, tranſit per circulorũ contactum. 129. A

Circulus circulum non tangit in pluribus punctis, quàm vno. 129. A

*Si in ſemidiametro circuli producta punctum vltra centrum ſumatur, circulus ex eo puncto, vt centro, per extremum ſemidiametri punctum deſcriptus, tanget priorem circulum in eo puncto extremo, totus q; extra eundem cadet.* 130. A

In circulo æquales rectæ æqualiter à centro diſtant. Et quæ æqualiter à centro diſtãt, ſunt æquales. 130. & 131. A

In circulo maxima quidem linea eſt diameter; aliarum autẽ propinquior centro, remotiore ſemper maior. 131. A

*Ex puncto circumferẽtiæ in concauam peripheriam duæ tantùm rectæ æquales cadunt ad vtraſq; partes diametri.* 131. A

Quæ ab extremitate diametri cuiuſque circuli ad angulos rectos ducitur, extra ipſum circulum cadet; & in locum inter ipſam rectam, & peripheriam comprehenſum, altera recta non cadet: Et ſemicirculi quidem angulus quouis acuto rectilineo angulo maior eſt, reliquus autem minor. 132. A

Recta ad extremum diametri perpendicularis circulum tangit. 132. A

Si circulum recta tangat; recta ad contactum ducta, perpendicularis eſt ad tangentem lineam. 150. A

*Circulis duobus ex eòdem centro deſcriptis; rectæ interiorem tangentes, & vſque ad exteriorem extenſæ, inter ſe æquales ſunt, bifariam q; in punctis contactuũ ſecantur.* 151. A

Si circulum tetigerit recta, perpendicularis ad tangentem in puncto cõtactus, per centrum tranſit. 151. A

In circulo, angulus ad centrum duplus eſt anguli ad peripheriam, ſi fuerit eadem peripheria baſis angulorum. 151. A

*In circulo ſpatium ad centrum, duplum eſt anguli ad peripheriam, cùm fuerit eadem peripheria baſis ſpatij, & anguli.* 152. A

In circulo, qui in eodem ſegmento ſunt, anguli ſunt inter ſe æquales. 152. & 153. A

*Si à duobus punctis quatuor rectæ ducantur, ex ſingulis binæ, quæ in concurſu contineant duos angulos æquales: circulus per duo illa puncta, & alterutrum illorum angulorum deſcriptus, per alterum quoque angulum tranſibit.* 153. A

In circulo quadrilaterũ quodcunq; habet angulos oppoſitos duobus rectis æquales. 154. A

*Si in quadrilatero anguli oppoſiti ſint duobus rectis æquales; circulus circa ipſum deſcribi poteſt.* 154. *A*

*Si ex ſemicirculis, aut circulis ſimilia ſegmenta detrahantur; reliqua ſegmenta ſimilia etiam ſunt.* 154. *A*

*Arcus, quibus anguli æquales, ſiue ad centra, ſiue ad peripherias inſiſtunt, ſimiles ſunt: Et anguli arcubus ſimilibus inſiſtentes, ſiue ad centra, ſiue ad peripherias, æquales ſunt.* 155. *A*

*Si duo aut plures circuli idem habeant centrum: Rectæ ex centro ductæ abſcindũt arcus ſimiles.* 155. *et* 337. *A*

*Si duo aut plures circuli ſe mutuò tangant interiùs; Rectæ à puncto contactus ductæ abſcindunt arcus ſimiles.* 155. *A*

*Si vnum latus quadrilateri in circulo producatur; angulus externus æqualis eſt angulo, qui opponitur angulo ei deinceps.* 156. *A*

Segmenta ſimilia, & inæqualia non conſtituentur ſuper eadem recta linea. 156. A

Segmenta ſimilia ſuper æqualibus rectis, ſunt æqualia. 156. A

*Segmenta ſimilia, & æqualia, ſunt conſtituta ſuper æquales rectas, vel ſuper eandem rectam.* 157. *A*

In circulis æqualibus, vel eodem anguli æqualibus peripheriis inſiſtunt, ſiue ad centra, ſiue ad peripherias. 158. A

*In circulis æqualibus, vel eodem maior angulus, maiori peripheriæ inſiſtet.* 159. *A*

In circulis æqualibus, vel eodem anguli æqualibus peripheriis inſiſtentes, ſunt æquales. 159. & 160. A

*In circulis æqualibus, vel eodem angulus maiori peripheriæ inſiſtens, maior eſt.* 160. *A*

*In circulo, duæ rectæ ſe non interſecantes & intercipientes arcus æquales, parallelæ ſunt: Et parallelæ intercipiunt arcus æquales.* 160. *A*

*Rectæ, quæ ex medio puncto arcus alicuius ducitur tangens circulũ, parallela eſt chordæ illius arcus.* 160. *A*

*Angulus rectus in centro inſiſtit quadranti; acutus verò, arcui minori quadrante; & obtuſus, maiori. Et contrà, angulus in centro inſiſtens quadranti, rectus eſt: inſiſtens verò arcui quadrãte minori, acutus; et maiori obtuſus.* 161. *A*

*Recta è centro ſecans rectam aliã bifariam, ſecat quoq; arcum bifariam. Et ſecans arcũ bifariam, ſecat quoq; chordam bifariam.* 161. *A. & 261. 281. B*

In circulis æqualibus, vel eodem rectæ æquales, auferunt arcus æquales. 162. A

*In circulis æqualibus, vel eodem, maior linea maiorem arcum aufert, ſi de arcubus ſemicirculo minoribus ſermo fiat; minorem verò, ſi de ſegmentis maioribus agatur.* 162. *A*

In circulis æqualibus, vel eodem, ſi arcus ſint æquales, erunt & rectæ æquales. 162. A

*In circulis æqualibus, vel eodem maior arcus habet chordam maiorem, ſi de arcubus ſemicirculo minoribus loquamur: minorem verò, ſi de maioribus.* 162. *A*

*Circuli, è quibus æquales rectæ auferunt ſimiles arcus, æquales ſunt.* 163. *A*

*Ex circulis inæqualibus rectæ æquales auferunt arcus diſſimiles.* 163. *A*

*Ex circulis inæqualibus lineæ rectæ auferentes arcus ſimiles, inæquales ſunt.* 163. *A*

*Rectæ lineæ auferentes arcus ſimiles inæquales ex quæ buſuis circulis, inæquales ſunt.* 163. *A*

*Si in diametro circuli præter centrum ſumatur punctum, ab eoq; in peripheriam duæ rectæ nõ in eaſdem partes cadentes, efficiant ad diametrũ angulos æquales; rectæ illæ æquales erunt, & arcus abſcindent æquales. Et ſi lineæ ſint æquales, conſtituent ad diametrum angulos æquales, abſcindentq; arcus æquales. Si denique abſcindant arcus æquales, erunt rectæ illæ æquales, angulosq; ad diametrum æquales conſtituent.* 163. *A*

*Si in diametro circuli præter centrũ ſumatur punctum, à quo ad eaſdẽ partes duo anguli æquales conſtituantur, inſiſtent hi anguli arcubus inæqualibus, maiorq; erit ille, qui à minori portione diametri remotior eſt.* 164. *A.*

In ſemicirculo angulus rectus eſt: In maiore ſegmento acutus. Et in minore obtuſus. Angulus item maioris ſegmenti recto maior: minoris verò ſegmenti recto minor. 164. A

*Segmentum circuli, in quo angulus rectus eſt, eſt ſemicirculus, in quo verò acutus, ſegmẽtum maius eſt: & in quo obtuſus, ſegmẽtum minus. Et ſegmentum, cuius angulus eſt recto maior, eſt maius; cuius verò angulus eſt recto minor, eſt minus.* 166. *A*

*Circulus ex puncto medio lateris recto angulo oppoſiti in triangulo rectangulo deſcriptus per vnum angulum, tranſit quoq; per reliquos.* 167. *A*

*Si per centrum circuli alius circulus deſcribatur, & per vtriuſque centrum recta ejiciatur: à puncto verò, vbi hæc recta poſteriorem circulum ſecat, ducatur recta vtcunque, ſecabitur eius portio intra priorem circulum bifariam.* 167. *A*

Si circulum tangat recta, & à contactu ducatur linea vtcunque ſecans: anguli ad contingentem æquales ſunt angulis in alternis ſegmentis. 168 A

*Si recta ducta ad extremitatem rectæ circulum ſecantis faciat cum ea angulos æquales angulis in alternis ſegmentis; recta illa ducta circulum tangit.* 168. *A*

Si in circulo duæ rectæ ſe ſecent: rectangulum ſub ſegmentis vnius, æquale eſt rectangulo ſub ſegmentis alterius. 169. A

*Si duæ rectæ ita ſe ſecent, vt rectangulum ſub ſegmentis vnius æquale ſit rectangulo ſub ſegmentis alterius: deſcribi poterit per quatuor earum puncta extremus circulus.* 170. *A*

Si extra circulum ſumatur punctum, à quo ducatur recta tangens, & altera ſecans: erit quadratum tangentis æquale rectangulo ſub tota ſecante, & eius ſegmento exteriore. 170. A

*Si à puncto extra circulum ducantur plures rectæ ſecantes; rectangula ſub totis ſecantibus, & ſegmentis exterioribus, æqualia ſunt.* 171. *A*

*Duæ rectæ tangentes circulum ab eodem puncto ductæ, ſunt æquales.* 171. *A*

*Ab eodem puncto duæ tantùm rectæ circulum tangentes duci poſſunt.* 171. *A*

*Si duæ rectæ æquales ducantur ab eodem puncto ad circulum, vna autem earum ſit tangens, erit & altera tangens.* 172. *A*

*Si à puncto duæ rectæ egredientes ita ſecentur in binas partes ſingulæ, vt rectangula ſub totis, & ſegmentis propè punctũ, æqualia ſint: deſcribi poterit circulus p*

*extrema*

*extrema reliquorum segmentorum.* 172.A

Si extra circulum punctum sumatur, à quo ducatur recta secans, & altera incidens, vsq; ad circumferentiam connexam: sit autem quadratũ incidentis æquale rectangulo sub tota secante, & eius segmẽto exteriore: Incidens circulum tanget. 173.A

*Si à puncto duæ tangentes ad circulum ducantur, aut duæ secantes æquales: Recta ab eodem puncto per centrum ducta diuidit angulum ab eis comprehẽsum, bifariam. Et contrà, Recta secans angulum bifariam, per centrum circuli transit.* 173.A

*Æquales rectæ ex circulis inæqualibus auferunt arcus inæquales, maiorq; est arcus minoris circuli, quàm vt similis sit arcui circuli maioris* 337.A

*Æquales rectæ ex circulis inæqualibus auferunt arcus simpliciter inæquales, maiorq; est arcus circuli minoris simpliciter, & non solùm maior, quàm vt similis sit arcui circuli maioris.* 337.A

*Si in circulo, ductis duabus diametris sese ad angulos rectos secantibus, altera earum producatur, eiq; ex vna parte quotquot parallelæ agantur diuidentes vtrumque quadrantem in partes æquales, ac denig; ex puncto extremo alterius diametri per extremum punctũ proximæ parallelæ recta ducatur, cõueniens cum diametro producta: Erit tota recta inter punctum concursus, & concauam peripheriam circuli, omnibus parallelis, vnà cum diametro, quæ producta est, simul sumptis, æqualis.* 161.A

*Si ad diametrum circuli in extremis punctis duæ perpendiculares excitẽtur, & ab eisdem extremis per vnum idemq; punctum duæ aliæ rectæ circulum secantes ducantur, occurrentes duabus perpendicularibus; erit rectangulum sub vtralibet secantiũ, & eius segmento interiore comprehẽsum, quadrato diametri æquale* 346.A

*Si in circulo duæ diametri sese ad rectos angulos secent, & ab vnius extremo recta ducatur vtcunq; secans circumferentiam, & alteram diametrum siue productam, siue intra circulum; erit rectangulum sub duobus segmentis huius lineæ ductæ, quorum vnum inter extremum prioris diametri, & secundam diametrum, alterum verò inter idem punctum extremum, & circumferentiam interiicitur, æquale quadrato intra circulum descripto.* 346.A

*Circumferentia circuli ad eius diametrum quam proportionem plus minus, habeat.* 354.A

CIRCVMFERENTIA. vide Circulus.

COMMENSVRABILES & incommensurabiles magnitudines.

Duabus magnitudinibus inæqualibus propositis, si à maiore auferatur maius quàm dimidium; & ab eo quod reliquum est, rursus detrahatur maius quàm dimidium: & hoc semper fiat: relinquetur tandem quædam magnitudo, quæ minor erit proposita minore magnitudine. 102.B

*Idem eueniet, si dimidium auferatur, &c.* 103.B

Si duabus magnitudinibus inæqualibus propositis, detrahatur semper minor de maiore, alterna quadam detractione, & reliqua minorem præcedentem metiatur: incommensurabiles erunt ipsæ magnitudines. 103.B

*Si duabus magnitudinibus incommensurabilibus propositis, detrahatur semper minor de maiore, alterna quadam detractione: nunquam reliqua præcedentem metietur.* 104.B

*Si duabus magnitudinibus commensurabilibus propositis, detrahatur semper minor de maiore, alterna quadam detractione: nunquam reliqua præcedẽtem metietur.* 104.B

*Si duabus magnitudinibus commensurabilibus propositis, detrahatur semper minor de maiore, alterna quadam detractione, metietur quædam reliqua præcedentem.* 104.B

Magnitudo metiens duas magnitudines, metitur & maximam earum mensuram communem. 105.B

Magnitudo metiens tres aut quotcunq; magnitudines, metitur quoque maximam earum mensuram communem. 106.B

*Si sint quotcunq; magnitudines, & totidem numeri, qui bini in eadem ratione sumantur, in qua binæ magnitudines: & ex æqualitate in eadem ratione erunt magnitudines & numeri.* 106.B

Commensurabiles magnitudines inter se rationem habent, quam numerus ad numerum. 106.B

*Commensurabiles magnitudines proportionem habent eandem, quam numeri, per quos earum mensura communis maxima ipsas metitur.* 107.B

Si duæ magnitudines inter se proportionem habeant, quam numerus ad numerum, commensurabiles erunt magnitudines. 107.B

Incommẽsurabiles magnitudines inter se proportionem non habent, quam numerus ad numerum. 108.B

Si duæ magnitudines inter se proportionẽ non habeant, quam numerus ad numerum: incommẽsurabiles erunt magnitudines. 108.B

*Si sint tres quantitates continuè proportionales, & aliæ tres continuè quoq; proportionales, sitq; vt prima illarum ad tertiam, ita prima harum ad tertiam; erit & vt prima illarum ad secundam, ita prima harum ad secundam.* 109.B

*Idem sequitur si plures quantitates sint, quàm tres, &c.* 109.B

Quæ à rectis lineis longitudine commensurabilibus fiunt quadrata, inter se proportionẽ habent, quam quadratus numerus ad quadratum numerum: Et quadrata inter se proportionem habentia, quam quadratus numerus ad quadratum numerum; & latera habebunt longitudine commensurabilia. Quæ verò à rectis lineis longitudine incommensurabilibus fiunt quadrata, inter se proportionem non habent, quam quadratus numerus ad quadratum numerum: Et quadrata inter se proportionem nõ habentia, quam quadratus numerus ad quadratum numerũ, neq; latera habebunt longitudine commensurabilia. 109.B

Rectæ longitudine commensurabiles, omnino & potentia sunt commensurabiles: quæ verò potentia commensurabiles sunt, non om-

nino & longitudine commenſurabiles ſunt. Et quæ longitudine ſunt incommenſurabiles, non omnino & potentia incommenſurabiles ſunt, quæ verò potentia incommenſurabiles ſunt, omnino & longitudine incommenſurabiles ſunt. 110.B

Si quatuor magnitudines ſint ꝓportionales, prima verò ſecundæ ſit commenſurabilis; & tertia quartæ commenſurabilis erit. Et ſi prima ſecundæ ſit incommenſurabilis, & tertia quartæ incommenſurabilis erit. 113.B

*Recta media proportionalis inter duas rectas potentia tantùm commenſurabiles, vtrilibet illarum incommenſurabilis eſt longitudine & potentia, ac proinde appellabitur Irrationalis, ſi alterutra illarum ſtatuatur Rationalis.* 115.B

Quæ eidem magnitudini ſunt commenſurabiles, & inter ſe ſunt commenſurabiles. 115.B

*Si ſint duæ magnitudines commenſurabiles, altera verò ſit vni cuipiam commenſurabilis; erit & reliqua eidem commenſurabilis.* 115.B

Si ſint duæ magnitudines, & altera quidem eidem ſit commenſurabilis, altera verò incommenſurabilis; incommenſurabiles erunt magnitudines. 116.B

Si ſint duę magnitudines commenſurabiles, altera autem ipſarũ magnitudini cuipiam incommẽſurabilis fuerit; Et reliqua eidem incommenſurabilis erit. 116.B

*Quæ incommenſurabilibus ſunt commenſurabiles; & inter ſe incommenſurabiles erunt.* 116.B

Si quatuor rectæ proportionales fuerint, prima verò tantò plus poſſit, quàm ſecunda, quantum eſt quadratum rectæ ſibi commenſurabilis longitudine; Et tertia tantò plus poterit quàm quarta, quãtum eſt quadratum rectæ ſibi longitudine commẽſurabilis. Quod ſi prima tantò plus poſſit quã ſecũda, quantum eſt quadratum rectæ ſibi incommenſurabilis longitudine; Et tertia tantò plus poterit quàm quarta, quantum eſt quadratum rectæ ſibi longitudine incommenſurabilis. 117.B

Si duæ magnitudines commenſurabiles componantur; & tota magnitudo vtriq; ipſarum commenſurabilis erit. Quod ſi tota magnitudo vni ipſarum commenſurabilis fuerit, & quæ à principio magnitudines commenſurabiles erunt. 118.B

Si tota magnitudo ex duabus compoſita, commenſurabilis ſit alteri ipſarum; eadem & reliquæ commenſurabilis eſt. 118.B

Si duæ magnitudines incommẽſurabiles componantur; & tota magnitudo vtrique ipſarũ incommenſurabilis erit. Quod ſi tota magnitudo vni ipſarum incommenſurabilis fuerit, & quæ à principio magnitudines incommẽſurabiles erunt. 118.B

Si tota magnitudo ex duabus cõpoſita incommenſurabilis ſit alteri ipſarum; eadem & reliquæ incommenſurabilis eſt. 118.B

Si ſint duæ rectæ inæquales, quartæ autem parti quadrati; quod fit à minore, æquale parallelogrammum ad maiorem applicetur, deficiens figura quadrata, & in partes longitudine commenſurabiles ipſam diuidat: Maior tantò plus poterit quàm minor, quantum eſt quadratum rectæ ſibi longitudine commenſurabilis. Quod ſi maior tãtò plus poſſit quã minor, quantum eſt quadratũ rectæ ſibi longitudine commenſurabilis, quartæ autem parti quadrati, quod fit à minore, æquale parallelogrammũ ad maiorem applicetur, deficiens figura quadrata; In partes longitudine commenſurabiles ipſam diuidet. 120.B

Si ſint duæ rectæ inæquales, quartæ autem parti quadrati, quod fit à minore, æquale parallelogrammum ad maiorem applicetur deficiens figura quadrata, & in partes incommẽſurabiles longitudine ipſam diuidat; Maior tantò plus poterit quàm minor, quantum eſt quadratum rectæ ſibi longitudine incõmenſurabilis. Quod ſi maior tantò plus poſſit, quantum eſt quadratum rectæ ſibi longitudine incommenſurabilis, quartæ autem parti quadrati quod fit à minore, æquale parallelogrammum ad maiorem applicetur deficiens figura quadrata; In partes longitudine incommenſurabiles ipſam diuidet. 121.B

Diameter quadrati longitudine incommenſurabilis eſt lateri. 253.254.A. & 47.184.B

*Inuentis rectis lineis longitudine incommenſurabilibus; inuenientur & aliæ quam plurimæ magnitudines, planæ ſcilicet, atq; ſolidæ incommenſurabiles inter ſe.* 185.B

COMPOSITI inter ſe numeri. vide Numerus par, &c.

COMPOSITVS nũmerus. vide Numerus par, &c.

CONVS, & Cylindrus. vide Parallelepipedum, &c.

CORPVS Regulare. vide Figura intra & extra circulum, &c.

CVBVS numerus. vide Numerus planus, &c.

CYLINDRVS, & Conus. vide Parallelepipedum, &c.

DIAMETER circuli. vide Circulus.

FIGVRA intra, & extra circulum, ſphæram, atque aliam figuram.

Quadrilaterum in circulo habet oppoſitos angulos duobus rectis æquales. 154.A

*Si in quadrilatero anguli oppoſiti ſint duobus rectis æquales; circulus circa ipſum deſcribi poteſt.* 154.A

*Quadrilateri in circulo angulus externus æqualis eſt ei, qui opponitur ei deinceps.* 156.A

*Quadrilaterum in circulo, cuius duo latera oppoſita ſunt parallela, & æqualia, parallelogrammum eſt rectangulum.* 167.A

*In omni triangulo, cui circulus inſcribitur, duo quæuis latera*

*latera ſuperant reliquum recta linea, cuius quadratum quadruplum eſt rectanguli comprehenſi ſub recta ab angulo illis lateribus comprehenſo in cauam peripheriam ducta, & ſub ſegmento eius exteriore. Quod ſi angulus comprehenſus ſit rectus, ſuperabunt duo illa latera latus recto angulo oppoſitum diametro circuli triangulo inſcripti. Vel duo quæuis latera ſuperant reliquum duabus rectis tangentibus inter angulum illorum laterum, & circulum interpoſitis.* 177.A

*Si centrum circuli triangulo circumſcripti cadit intra triangulum, omnes eius anguli acuti ſunt: Si in vnũ latus, angulus oppoſitus rectus eſt: Si denique extra vnum latus, angulus oppoſitus obtuſus eſt.* 178.A

*In triangulo acutangulo centrum circuli circumſcripti cadit intra: In rectangulo, in latus recto angulo oppoſitum: In obtuſangulo denique extra latus angulo obtuſo oppoſitum.* 178.A

*Quadratum circulo circumſcriptum duplum eſt quadrati eidem circulo inſcripti.* 180.A

*Pentagoni circulo inſcripti, hoc eſt, æquilateri, & æquianguli, angulus quilibet cõtinet tres quintas duorum rectorum, vel ſex quintas vnius recti.* 181.A

*Si in circulo figura quæuis æquilatera & æquiangula deſcribatur, & ad extrema ſemidiametrorum excitentur perpendiculares, conſtituent hæ perpendiculares ſimilem figuram circulo circumſcriptam.* 182.A

Hexagoni circulo inſcripti latus, æquale eſt ſemidiametro circuli. 185.A

*Si in circulo ab eodem punctо inſcribantur latera duarum figurarum regularium; continebit arcus inter illa incluſus tot latera alterius figuræ inſcribendæ in eodem circulo, quot vnitatibus inter ſe differunt denominatores eorundem laterum: Figura autem inſcribenda continebit tot latera, quot vnitates ſunt in numero ex multiplicatione denominatorum producto.* 186.& 187.A

*Omnis figura æquilatera circulo inſcripta, eſt quoque æquiangula: at non omnis figura æquilatera circulo circumſcripta, æquiangula quoque eſt, niſi quando numerus angulorum ipſius eſt impar, &c.* 187.A

*Omnis figura æquiangula circulo circumſcripta, eſt quoque æquilatera: at non omnis figura æquiangula circulo inſcripta, æquiangula quoque eſt, niſi quando numerus laterum, &c.* 189.A

*Si bifariæ ſectiones laterum regularis figuræ rectis coniungantur, inſcripta erit ſimilis figura, idem centrum habens.* 193.A

*Solum triangulum æquilaterum, quadratum, & Hexagonum æquilaterum atq; æquiangulum, ex omnibus figuris regularibus, locum replent.* 193.A

*In figura æquilatera, & æquiangula, ſi quidem angulorum numerus impar eſt, recta linea ex quouis angulo demiſſa ſecans oppoſitum latus bifariam, diuidit quoque angulum bifariam: Et contrà, recta linea diuidens angulum bifariam, ſecat quoque latus oppoſitum bifariam. Si verò numerus angulorum eſt par, recta linea ex ex quouis angulo ad oppoſitum angulum ducta ſecat vtrumque angulum bifariam: Et cõtrà, recta linea ſecans quemuis angulum bifariam, cadit in oppoſitum angulum, eumque bifariam etiam diuidit.* 183.A

*Si baſis quadratricis intra quadrantem & quadratum deſcriptæ, ſtatuatur ſemidiameter alicuius circuli; eius latus, ſiue ſemidiameter quadrantis æquabitur quadranti illius circuli, &c.* 354.A

Quæ in circulis polygona ſimilia; inter ſe ſunt, vt à diametris quadrata. 226.B

Si pentagoni æquilateri tres anguli, ſiue qui deinceps, ſiue qui non deinceps ſint, æquales fuerint; æquiangulum erit ipſum pentagonum. 258.B

Si pentagoni æquilateri, & æquianguli duos angulos, qui deinceps ſint, ſubtendant lineæ rectæ; hæ extrema ac media ratione ſe mutuò ſecant, & maiora ipſarum ſegmẽta æqualia ſunt pentagoni lateri. 258.B

*Recta ſubtendens vnum angulum pentagoni æquilateri & æquianguli, parallela eſt oppoſito lateri.* 259. & 311.B

Si hexagoni latus, & decagoni, in eodem circulo deſcriptorum componantur; tota recta linea extrema atque media ratione ſecatur, & maius eius ſegmentum eſt hexagoni latus. 259.B

*Si latus hexagoni ſecetur extrema ac media ratione; maius illius ſegmentum eſt latus decagoni.* 259.B

*Si lineæ diuiſæ extrema ac media ratione maius ſegmentum fuerit latus hexagoni alicuius circuli; erit minus ſegmentum latus decagoni eiuſdem circuli. Quod ſi minus ſegmentum fuerit latus decagoni alicuius circuli; erit maius ſegmentum latus hexagoni eiuſdem circuli.* 260.B

Si in circulo pentagonum æquilaterum deſcribatur; pentagoni latus poteſt & latus hexagoni, & latus decagoni, in eodem circulo deſcriptorum. 260.B

*Diameter circuli ex angulo quouis pentagoni, vel alterius figuræ æquilateræ impariũ laterum, diuidit & latus oppoſitum bifariam, & ad angulos rectos, & arcum, quem illud latus ſubtendit.* 261.B

Si in circulo triangulum æquilaterum deſcribatur; Trianguli latus potentia triplum eſt eius lineæ, q̃ ex centro circuli ducitur. 262.B

Diameter circuli potentia eſt ſeſquitertia lateris trianguli æquilateri in eo circulo deſcripti. 263.B

*Si in circulo triangulum æquilaterum deſcribatur; diameter ex vno angulo ducta diuidit & angulum bifariam, & latus oppoſitum, ac inſuper ad angulos rectos: Semidiameter quoque viciſſim bifariam, & ad angulos rectos ſecabitur à latere oppoſito.* 263.B

Sphæræ diameter potentia eſt ſeſquialtera lateris pyramidis in ea deſcriptæ. 264. & 345.B

*Diameter ſphæræ potentia eſt quadrupla ſeſquialtera ſemidiametri circuli circa baſem pyramidis in ea ſphæra exiſtentis deſcripti.* 265.B

*Perpendicularis ex centro ſphæræ ad baſim pyramidis in ea ſphæra exiſtentis demiſſa, ſexta pars eſt diametri ſphæræ, & tertia pars ſemidiametri.* 265.B

*Altitudo pyramidis intra ſphæram continet duas tertias partes diametri. Et diameter potentia eſt dupla ſeſquiquarta altitudinis pyramidis.* 265.B

Sphæræ diameter potentia eſt dupla lateris Octaedri in ea deſcripti. 265.& 345.B

*In octaedro tres diametri se mutuò ad angulos rectos secant. pag.* 266.B

*Octaedrum diuiditur in duas pyramides similes & æquales; quarum basis communis quadratum lateris octaedri, altitudo verò semidiameter sphæræ vel octaedri.* 266. & 292.B

Si tetraedrum, & octaedrum in eadem sphæra describantur, erit tetraedri latus potētia sesquitertium lateris octaedri. 266. 267. & 297.B

*Octaedri bases oppositæ sunt inter se parallelæ.* 267. & 345.B

Sphæræ diameter potentia est tripla lateris cubi in ea descripti. 267. & 346.B

*Omnes diametri cubi æquales sunt, seseq; bifariam secant in centro sphæræ. Item rectæ coniungentes centra basium oppositarum se mutuò bifariam secant in eodem centro.* 268.B

*Potentia diametri sphæræ, seu cubi æqualis est potentiis laterum tetraedri & cubi simul.* 268.B

Si diameter sphæræ sit Rationalis linea; latus Icosaedri in ea est Irrationalis linea, quæ vocatur Minor. 268.B

*Sphæræ diameter potentia est quintupla semidiametri circuli quinque latera Icosaedri ambientis.* 271.B

*Diameter sphæræ composita est ex latere hexagoni, & duobus lateribus decagoni eiusdem circuli.* 271.B

*Icosaedri latera opposita sunt parallela.* 271. & 346.B

Si diameter circuli sit Rationalis linea; latus Dodecaedri in ea descripti est Irrationalis linea, quæ vocatur Apotome. 272.B

*Si latus cubi secetur extrema ac media ratione, maius segmentum est latus Dodecaedri eiusdem sphæræ.* 274.B

*Latus cubi æquale est rectæ subtendenti angulum pentagoni Dodecaedri eiusdem sphæræ.* 274.B

*Si recta secetur extrema ac media ratione, minusq; segmentum sit latus Dodecaedri; maius segmentum erit latus cubi eiusdem sphæræ.* 274.B

*In Dodecaedro sunt sex latera, quorū bina opposita sunt parallela, bifariamq; secantur, & ad angulos rectos à tribus lineis rectis æqualibus sese in centro Dodecaedri bifariam quoque, & ad angulos rectos secantibus.* 275.B

*Si recta diuidens opposita latera Dodecaedri bifariam, & ad angulos rectos, secetur extrema ac media ratione; maius segmentum est latus cubi, minus verò, latus Dodecaedri eiusdem sphæræ.* 275.B

*Plura corpora Regularia, quàm quinque, constitui non possunt.* 277.B

*Cubus & octaedrum: Item Icosaedrum & Dodecaedrū, reciprocantur, quod ad numerum basium & angulorum attinet. Solùm tetraedrum tot bases habet, quot angulos solidos.* 279.B

Quæ ex centro circuli cuiuspiam in pentagoni eidem circulo inscripti latus perpendicularis ducitur, dimidia est vtriusque lineę simul, & lateris hexagoni, & lateris decagoni eidem circulo inscripti. 280.B

*Perpendicularis ex centro ad latus pentagoni ducta æqualis est vtriq; rectæ simul, & ei, quæ ex centro ad latus trianguli æquilateri eiusdem circuli ducitur, perpendiculari, & dimidio lateris decagoni.* 281.B

*Latus hexagoni ad latus decagoni eiusdem circuli eandem proportionem habet, quam recta subtendens angulum pentagoni, ad latus ipsius pentagoni.* 281.B

*Si linea perpendicularis ex centro circuli ad latus pentagoni ducta secetur extrema ac media ratione, maius segmentum æquale est perpendiculari ex eodem centro ad latus trianguli æquilateri ductæ, minus verò æquale est dimidio lateris decagoni eiusdem circuli.* 281. & 282.B

Si in circulo pentagonum æquilaterum describatur, quod ex latere pentagoni, & quod ex ea, quæ binis lateribus pentagoni subtenditur, recta linea, vtraque simul quadratæ, quintupla sunt eius, quod ex semidiametro describitur, quadrati. 282.B

*Si in sphæra eadem cubus, & Dodecaedrum inscribantur; quadratum lateris cubi, & quadratum lateris Dodecaedri, vtraq; simul, quintupla sunt quadrati semidiametri circuli pentagonum dodecaedri circumscribentis.* 282.B

Si latus hexagoni alicuius circuli secetur extrema ac media ratione; maius illius segmentū erit latus decagoni eiusdem circuli. 282. & 283.B

Idem circulus comprehendit & Dodecaedri pentagonum, & Icosaedri triāgulum, eidem sphæræ inscriptorum. 283. & 350.B

Si ex centro circuli pentagonum Dodecaedri circumscribentis, perpendicularis ducatur ad vnum latus pentagoni; erit, quod sub dicto latere, & perpendiculari comprehēditur, rectāgulum trigesies sumptum, Dodecaedri superficiei æquale. 284.B

Si ex centro circuli triangulū Icosaedri circumscribentis, perpendicularis ducatur ad vnum latus trianguli; erit quod sub dicto latere, & perpendiculari comprehenditur, rectangulum trigesies sumptum, Icosaedri superficiei æquale. 284.B

*Superficies cuiuslibet Dodecaedri ad superficiem Icosaedri cuiuscunq;, etiamsi non describantur ambæ figuræ in eadem sphæra, est sicut rectāgulum sub latere Dodecaedri, & perpendiculari ex centro pentagoni Dodecaedri in latus illud ducta contentum ad rectangulum contentum sub latere Icosaedri, & perpendiculari ducta ex centro trianguli Icosaedri in illud latus.* 285.B

*Si ex centro circuli triangulum Tetraedri, vel Octaedri, siue quadratum cubi, circumscribentis perpendicularis ducatur ad vnum latus; Erit quod sub dicto latere & perpendiculari cōtinetur, in Tetraedro quidem sumptum sexies, superficiei Tetraedri: In Octaedro verò & cubo, duodecies sumptum superficiei Octaedri, & cubi æquale.* 285.B

Rectangulum contentum sub tribus quartis partibus diametri alicuius circuli, & quinq; sextis partibus linēæ subtendentis angulum pentagoni æquilateri in eodem circulo descripti, æquale est dicto pentagono. 285.B

*Rectangulum contentum sub perpendiculari ex angulo trianguli Icosaedri ad vnum eius latus ducta, & sub quinq; sextis partibus lateris cubi in eadem sphæra cum Icosaedro descripti, æquale est pentagono Dodecaedri eiusdem sphæræ.* 286.B

Superficies Dodecaedri ad superficiem Icosaedri in eadem sphæra descripti, eandem proportionem

portionem habet, quam latus cubi ad latus Icoſaedri. 286.B

Si recta linea ſecetur extrema ac media ratione: erit vt recta potẽs id, quod à tota, & id, quod à maiori ſegmento, ad rectam potentem id, quod à tota, & id, quod à minore ſegmento, ſita latus cubi ad latus Icoſaedri eidem ſphæræ cum cubo inſcripti. 287.B

*Quam proportionem habẽt latera cubi & Icoſaedri eiuſdem ſphæræ, eandem habent latera cubi & Icoſaedri in quauis alia ſphæra deſcriptorum.* 288.B

*Si ſphæra plano quopiam ſecetur, communis ſectio circulus erit.* 288.B

*Si planum ſecans tranſit per centrum ſphæræ, fit circulus idem centrum habens cum ſphæra: Si verò non tranſit per centrum, fit circulus, cuius centrum punctum eſt, in quod cadit perpendicularis ex cẽtro ſphæræ ad circulum ducta.* 289.B

*Circuli in ſphæra æquales æqualiter diſtãt à cẽtro ſphæræ: Et circuli æqualiter diſtantes à centro ſphæræ, æquales ſunt.* 289.B

Dodecaedrum ad Icoſaedrum in eadem cum ipſo ſphæra deſcriptum, eſt vt cubi latus ad latus Icoſaedri, in vna eademq; ſphæra. 289.B

*Eadem proportio eſt lateris cubi ad latus Icoſaedri, quæ ſuperficiei Dodecaedri ad ſuperficiem Icoſaedri, & lineæ potentis totam quamcunque ſectam extrema ac media ratione, & eius ſegmentum maius, ad potentẽ totam eandem, & eius ſegmentum minus; & Dodecaedri ad Icoſaedrum eiuſdem ſphæræ.* 290.B

*Baſis Tetraedri ſeſquitertia eſt baſis Octaedri eiuſdem ſphæræ: Superficies autem octaedri ſeſquialtera ſuperficiei Tetraedri.* 291.B

*Recta ex angulo Tetraedri per centrum ſphæræ ducta, cadit in centrum baſis oppoſitæ, eſtq; perpendicularis ad baſim* 292.B

*Tetraedrum ad Octaedrum eiuſdem ſphæræ ſe habet, vt rectangulum ſub linea potente vigintiſeptem ſexageſimasquartas partes lateris Tetraedri, & ſub linea continente octo nonas partes eiuſdem lateris comprehenſum, ad quadratum diametri ſphæræ.* 293.B

*Sphæræ ſemidiameter potentia tripla eſt eius perpendicularis, quæ ex centro ſphæræ in baſim octaedri eiuſdem ſphæræ cadit.* 295.B

*Duplum quadrati ex diametro ſphæræ deſcripti, æquale eſt ſuperficiei cubi eiuſdem ſphæræ: perpendicularis autem à centro ſphæræ in baſim cubi demiſſa, æqualis eſt dimidio lateris cubi.* 295.B

*Solidum, quod fit ex dimidio lateris cubi in duas tertias partes quadrati diametri ſphæræ dictum cubum comprehendentis, æquale eſt cubo. Item quod fit ex latere cubi in tertiam partem eius quadrati.* 296.B

*Solidum, quod fit ex perpendiculari è centro cuiuſcunq; corporis Regularis in baſim demiſſa, in tertiam partem ſuperficiei ipſius corporis, æquale eſt propoſito corpori Regulari.* 296.B

*Idem circulus comprehendit & cubi quadratũ, & octaedri triangulum eiuſdem ſphæræ.* 296. & 346.B

*Rectæ coniungentes centra baſium oppoſitarum tam in cubo, quàm in Octaedro, æquales ſunt.* 297.B

*Octaedrum ad triplum Tetraedri eiuſdem ſphæræ eſt, vt latus Octaedri ad latus Tetraedri.* 297.B

*Altitudo Octaedri ad altitudinem Tetraedri eiuſdem ſphæræ eſt, vt latus Octaedri ad latus Tetraedri:*

*Item diameter ſphæræ ad latus Tetraedri, vt latus Octaedri ad latus cubi.* 298.B

*Si recta propoſita potuerit totam aliquam rectam extrema ac media ratione ſectam, & maius eius ſegmẽtum: Item totam aliam ſimiliter ſectam, & minus eius ſegmentum; Erit maius ſegmentum prioris lineæ latus Icoſaedri; minus autem ſegmentum poſterioris lineæ latus dodecaedri eius ſphæræ, cuius recta propoſita diameter eſt.* 298.B

*Si latus Octaedri potuerit maius & minus ſegmentum rectæ extrema ac media ratione ſectæ; poterit latus Icoſaedri eiuſdem ſphæræ duplum minoris ſegmentii* 299.B

*Si recta diuiſa extrema ac media ratione, cum minore ſegmento angulum rectum conſtituat, cui recta ſubtendatur; erit recta, quæ potentia ſit ſubdupla eius rectæ ſubtenſæ, latus Octaedri eius ſphæræ, in quã dictum minus ſegmentum latus eſt Dodecaedri.* 299. & 300.B

*Si recta ſecetur extrema ac media ratione, & alia recta potentia huius ſeſquialtera ſit latus Octaedri, maius ſegmentum erit latus Dodecaedri eiuſdem cum octaedro ſphæræ.* 300.B

*Cubus ad Octaedrum eiuſdem ſphæræ eſt, vt ſuperficies cubi ad Octaedri ſuperficiem. Item vt latus cubi ad ſemidiametrum ſphæræ.* 300.B

*Alia inuentio laterum quinq; corporum Regularium in eadem ſphæra deſcriptorum.* 301. & 302.B

*Quadratum cubi ad triangulum Tetraedri eiuſdẽ ſphæræ eſt, vt latus Tetraedri ad perpendicularem ex vno angulo, trianguli Tetraedri ad latus oppoſitum ductam.* 303.B

*Latus Tetraedri potentia ſeſquialterum eſt axis, vel altitudinis ipſius: Axis verò Tetraedri potentia ſeſquitertium eſt lateris cubi eiuſdem ſphæræ.* 304.B

*Diameter ſphæræ ſeſquialtera eſt axis Tetraedri illius ſphæræ.* 304.B

*Axis Tetraedri ad latus cubi eiuſdem ſphæræ eſt, vt latus Tetraedri ad perpendicularem ex vno angulo baſis ad latus oppoſitum ductam.* 304.B

*Cubus triplus eſt Tetraedri eidem ſphæræ inſcripti.* 304.B

*Priſma eandem habens & baſim, & altitudinem cum Tetraedro, æquale eſt cubo eiuſdem ſphæræ.* 305.B

*Si in Tetraedro Octaedrum inſcribatur; Tetraedrum bifariam ſecatur tribus quadratis æqualibus, quæ Octaedrum bifariam quoque, & ſeſe ad angulos rectos interſecant.* 306.B

*Rectæ connectentes centra baſium cubi oppoſitarum ſe mutuò ſecant & bifariã, & ad angulos rectos.* 307.B

*Idem eſt centrum Icoſaedri, atq; ſibi inſcripti Dodecaedri.* 308.B

*Si Tetraedrum Octaedro inſcribatur, erunt quatuor baſes Tetraedri octo baſibus Octaedri parallelæ, ſingulæ binis.* 309.B

*Item recta centra baſium octaedri oppoſitarum coniungens, ſeſquialtera eſt axis Tetraedri.* 309.B

*Diameter Dodecaedri duo latera poteſt, ipſius ſcilicet Dodecaedri & cubi, in quo Dodecaedrum inſcribitur.* 315.B

*Si latus cubi ſecetur extrema ac media ratione; minus ſegmentum latus eſt Dodecaedri in cubo deſcripti: Maius verò ſegmentum latus cubi in hoc Dodecaedro deſcripti.* 315.B

*Latus cubi æquale est duobus lateribus, Dodecaedri videlicet in ipso descripti, & Dodecaedri circa eundem cubum descripti.* 315.B

*Recta duos angulos pentagonorum Dodecaedri communi lateri oppositos connectens, est æqualis lateri cubi, cui Dodecaedrum inscribitur.* 315.B

*Diameter Icosaedri potest & latus Icosaedri & cubi Icosaedri ambientis.* 316.B

*Bifariæ sectiones sex oppositorũ laterum Icosaedri coniunguntur tribus rectis æqualibus, sese in centro Icosaedri bifariam, & ad angulos rectos secãtibus.* 316.B

*Si latus cubi extrema ac media ratione secetur; maius segmentum latus est Icosaedri in eo cubo descripti.* 316.B

*Icosaedri tam latera, quàm triangula opposita sunt parallela.* 317.B

*Idem est centrum Icosaedri, & Octaedri in eo descripti.* 317.B

*Idem est centrum basis octaedri, & basis Icosaedri in eo descripti. quod intelligendum est de octo basibus Icosaedri in octo basibus octaedri collocatis.* 319.B

*Idem est centrum octaedri, & Icosaedri in eo descripti.* 319.B

*Idem est cẽtrum pyramidis, & cubi in ea descripti.* 321.B

*Recta coniungens bifarias sectiones oppositorum laterũ pyramidis, transit per centrum pyramidis, estq; tripla lateris cubi in pyramide descripti.* 321.B

*Idem est centrum pyramidis, & octaedri in ea descripti.* 321.B

*Idem est centrum basis pyramidis, & basis octaedri in ea descripti. quod intelligendum est de quatuor basibus octaedri in quatuor basibus pyramidis incentibus.* 321.B

*Quæ solida Regularia, in quibus propriè describantur, & quæ non: Et alia de hac inscriptione mutua.* 323.B

*Si in Dodecaedro cubus describatur, & in hoc cubo aliud Dodecaedrum: erit proportio Dodecaedri exterioris ad interius Dodecaedrum triplicata proportionis, quam habet maius segmentum ad minus rectæ lineæ extrema ac media ratione diuisæ.* 324.B

*Si ab angulis trianguli pyramidis ducantur rectæ secantes opposita latera extrema ac media ratione, ita vt prope quemuis angulum sit maius segmentum minus lateris, & minus alterius; Hæ sectionibus suis in medio producent basim Icosaedri in ea pyramide descripti, inscriptam quidem alij triangulo æquilatero, cuius anguli latera trianguli pyramidis secant extrema ac media ratione, & latera ipsa bifariam secantur ab angulis basis Icosaedri productæ.* 325.B

*Latus Icosaedri octaedro inscripti, maius segmentum est rectæ diuisæ extrema ac media ratione, quæ ab vno angulo basis octaedri ducta secat latus oppositum extrema quoq; ac media ratione.* 326.B

*Minus segmentum lateris pyramidis extrema ac media ratione secti, potentia duplum est lateris Icosaedri in ea descripti.* 326.B

*Latus cubi potentia dimidium est lateris pyramidis in eo descriptæ: Latus verò pyramidis duplum est longitudine lateris octaedri sibi inscripti: Latus denique cubi duplum est potentia lateris sibi inscripti octaedri.* 326.B

*Latus Dodecaedri maius segmentum est rectæ, quæ potentia dimidium potest lateris pyramidis sibi inscriptæ.* 327.B

*Si in cubo describatur & Icosaedrum, & Dodecaedrum; Latus Icosaedri medium proportionale erit inter latus cubi, & latus Dodecaedri.* 327.B

*Latus pyramidis potentia octodecuplum est lateris cubi in ea descripti.* 327.B

*Latus pyramidis potentia octodecuplum est rectæ extrema ac media ratione sectæ, cuius maius segmentum latus est Dodecaedri in pyramide descripti.* 327.B

*Si in octaedro Icosaedrum describatur; erit latus Icosaedri potentia duplum minoris segmenti lateris octaedri extrema ac media ratione diuisi.* 328.B

*Latus octaedri potentia est quadruplum sesquialterum lateris cubi in ipso descripti.* 328.B

*Latus octaedri potentia est quadruplum sesquialterum rectæ extrema ac media ratione sectæ, cuius maius segmentum latus est Dodecaedri Octaedro inscripti.* 328.B

*Latus Icosaedri maius segmentum est rectæ extrema ac media ratione sectæ, quæ potentia dupla est lateris Octaedri in Icosaedro descripti.* 328.B

*Latus cubi ad latus Dodecaedri in ipso descripti proportionem habet duplicatam eius, quam habet maius segmentum ad minus rectæ extrema ac media ratione sectæ. Latus verò Dodecaedri ad latus cubi in ipso descripti proportionem habet, quam minus segmentum ad maius eiusdem rectæ lineæ.* 328.& 329.B

*Latus octaedri sesquialterum est lateris sibi inscriptæ pyramidis.* 329.B

*Si ex quadrato diametri Icosaedri auferatur triplum quadrati lateris cubi in eo descripti; relinquitur quadratum sesquitertiũ quadrati lateris Icosaedri.* 329.B

*Diameter Icosaedri binas rectas potest, diametrum scilicet cubi in eo descripti, & diametrum circuli trianguli Icosaedri ambientis.* 330.B

*Latus Dodecaedri minus segmentum est rectæ extrema ac media ratione sectæ, quæ duplum potest lateris Icosaedri in eo descripti.* 330.B

*Diameter Icosaedri potest & suiipsius lateris sesquitertium, & lateris pyramidis in eo descriptæ sesquialterum.* 330.B

*Latus Dodecaedri ad sibi inscripti Icosaedri latus habet, vt minus segmentum lineæ perpendicularis ab vno angulo pentagoni ad latus oppositum ducte, atq; extrema ac media ratione sectæ, ad partem eiusdem lineæ inter centrum pentagoni, & latus eiusdem positæ.* 330.& 331.B

*Si dimidium lateris Icosaedri extrema ac media ratione secetur, minusq; eius segmentum, à toto latere Icosaedri detrahatur; à reliqua quoque recta pars rursum tertia dematur; relinquetur latus Dodecaedri in Icosaedro descripti.* 331.B

*Cubus sibi inscriptæ pyramidis triplus est.* 332.B

*Pyramis sibi inscripti octaedri dupla est.* 333.B

*Cubus sibi inscripti octaedri sextupla est.* 333.B

*Octaedrum sibi inscripti cubi quadruplum sesquialterum est.* 333.B

*Idem est cẽtrum Octaedri, atq; cubi in eo descripti.* 334.B

*Octaedrum ad sibi inscriptum cubum est, vt quadratum lateris Octaedri ad quadratum lateris cubi in eo descripti.* 334.B

*Octaedrum sibi inscriptæ pyramidis tredecuplum sesquialterum est.* 334.B

*Pyramis sibi inscripti cubi noncupla est.* 334.B

*Cubus ad cubum descriptum in pyramide, quæ in priori cubo*

cubo describitur, est vt 27. ad 1. 335.B
Octaedrum ad sibi inscriptum Icosaedrum proportionẽ habet, quam duæ bases Octaedri ad quinq; bases Icosaedri. 335.B
Icosaedrum ad sibi inscriptum Dodecaedrum proportionem habet compositam ex proportione lateris Icosaedri ad latus cubi in eadem cum Icosaedro sphæra descripti, & ex proportione triplicata eius, quam habet diameter Icosaedri ad rectam centra basium Icosaedri oppositarum coniungentem. 336.B
Dodecaedrum excedit cubum sibi inscriptum parallelepipedo, cuius quidem basis à quadrato cubi deficit rectangulo contento sub latere cubi, tertiæq; parte minoris segmenti eiusdem lateris cubi: at verò altitudo ab altitudine, siue latere cubi, minore segmento eius lineæ, quæ dimidiati lateris cubi segmentum minus existit. 337.B
Dodecaedrum à duplo cubi sibi inscripti deficit duobus parallelepipedis, quorum vnius longitudo lateri cubi est æqualis, latitudo autem tertiæ parti minoris segmenti eiusdem lateris cubi, altitudo denique à latere cubi deficit minore segmento eius lineæ, quæ dimidiati lateris cubi minus segmentum existit: alterius verò & longitudo, & latitudo lateri cubi æqualis est, altitudo autem minus segmentum eius lineæ, quæ dimidiati lateris cubi segmentum minus existit; ita vt amborum altitudines simul altitudini, siue lateri cubi sint æquales. 338.B
Dodecaedrum ad sibi inscriptum Icosaedrum proportionem habet compositã ex proportione triplicata eius, quam habet diameter Dodecaedri ad rectam centra basium Dodecaedri oppositarum copulantem, & proportione lateris cubi ad latus Icosaedri in eadẽ sphæra cum cubo descripti. 339.B
Dodecaedrum pyramidis, in qua describitur, duas nonas partes continet, minus duobus parallelepipedis, quorũ vnius longitudo lateri cubi in eadem pyramide descripti æqualis est, latitudo verò tertiæ parti minoris segmenti lateris eiusdem cubi, altitudo deniq; à latere eiusdem cubi deficit minore segmento eius lineæ, quæ dimidiati lateris cubi eiusdem minus segmentum existit: alterius autem & longitudo, & latitudo lateri cubi prædicti est æqualis, altitudo verò minus segmentum eius lineæ, quæ dimidiati lateris cubi eiusdem segmentum minus existit, ita vt amborum altitudines simul altitudini, siue lateri eiusdem cubi sint æquales. 339.B
Octaedrum excedit sibi inscriptum Icosaedrum parallelepipedo, cuius basis est quadratum lateris Icosaedri, altitudo verò maius segmentum semidiametri octaedri extrema ac media ratione sectæ. 340.B
Pyramis excedit duplum Icosaedri sibi inscripti parallelepipedo, cuius basis quadratum lateris Icosaedri, altitudo verò recta bifarias sectiones oppositorum laterum Icosaedri coniungens. 340.B
Si in sphæra sint duo circuli paralleli, & æquales, in quibus ductæ sint duæ rectæ parallelæ & æquales, ad easdem partes centrorum; rectæ harum parallelarum extrema puncta ad easdem partes cõiungentes, æquales quoq; & parallelæ sunt, & ad plana circulorum perpendiculares. 342.B
Si in sphæra sint duo circuli paralleli & æquales, in quibus ductæ sint duæ rectæ parallelæ & æquales, non ad easdem partes centrorum; rectæ harum parallelarum extrema puncta non ad easdem partes coniungentes, in centro sphæræ se intersecãt, ac proinde diametri sphæræ erunt, & inter se æquales: rectæ verò earundem parallelarum extrema puncta ad easdem partes connectentes, & æquales ac parallelæ inter se sunt, & cum parallelis rectos angulos constituunt. 342.B
Si in sphæra sint duæ rectæ parallelæ; rectæ earum puncta extrema ad easdem partes coniungentes, æquales inter se erunt. Et si parallelæ fuerint æquales, coniungentes non solùm æquales, sed & parallelæ erunt, rectosq; cum ipsis angulos conficient. 343.B
Sphæræ diameter ad latus Icosaedri in ea descripti est, vt latus pentagoni ad latus decagoni eiusdem circuli cuiuslibet. 348.B
Latus Icosaedri maius est semidiametro sphæræ, in qua describitur. 348.B
Sphæræ diameter potentia est tripla lateris pentagoni descripti in circulo, qui per tres angulos Icosaedri eius sphæræ incedit, parallelusq; est vni triangulo Icosaedri. 348.B
Iidem circuli sphæræ sustinent & angulos Icosaedri, & angulos Dodecaedri in ea sphæra descriptorũ. 350.B
Si quadratum, & triangulum æquilaterum æqualia haberent latera; erunt viginti triangula simul maiora, quàm octo quadrata simul. 350.B
Octo quadrata ex semidiametro sphæræ descripta, æqualia sunt superficiei cubi in ea sphæra descripti. 350.B
Si octaedrum, cubus, & Icosaedrum in eadem sphæra describantur; erit perpendicularis ex centro sphæræ ad vnam basim Icosaedri ducta maior perpendiculari ex eodem centro sphæræ ad vnam basim octaedri, & cubi ducta. 350. & 351.B
Icosaedri superficies maior est superficie cubi in eadem sphæra descripti. 351.B
Dodecaedrum Icosaedro maius est. 351.B
Icosaedrum cubo maius est. 351.B
Cubus Octaedro maior est. 351.B
Octaedrum Tetraedro maius est. 351.B
Superficies Dodecaedri superficiem Icosaedri superat, & hæc superficiem cubi, & hæc superficiem Octaedri, atque hæc deniq; superficiem Tetraedri. 352.B
Latus Tetraedri maius est latere Octaedri, & hoc maius latere cubi, & hoc maius latere Icosaedri, atq; hoc deniq; maius latere Dodecaedri. 352.B
Si corpora regularia sint Isoperimetra; illud, quod plures habet bases, maius est: Vt Icosaedrum maius Dodecaedro, & hoc maius Octaedro, & hoc maius Cubo, atq; hoc deniq; maius Tetraedro. 352.B
Omnes inclinationes duarum basium cuiusque corporis Regularis æquales sunt. 353. & 354.B

## FIGVRAE, anguli, & lineæ proportionales.

Triangula & parallelogramma, quorum eadem est altitudo, ita se habent inter se, vt bases. 292.A
Triangula & parallelogramma, quæ ita se habent inter se, vt bases, æquales habent altitudines, vel eandem. 292.A
Triangula & parallelogramma, quorum æquales sunt bases, vel eadem, ita se habent inter se, vt altitudines. 293.A
Triangula & parallelogramma, quæ ita se habent inter

*ſe, vt altitudines, æquales habent baſes, ſi vnam & eandem non habeant.* 293.A

Si ad vnum trianguli latus parallela ducta ſit, hæc ſecabit duo latera reliqua proportionaliter. Et ſi duo latera ſecta ſint proportionaliter; recta linea ſectiones iungens, parallela erit reliquo lateri. 293.A

Si trianguli angulus bifariam ſectus ſit, ſecans autem angulum recta linea ſecet & baſim: baſis ſegmenta ita ſe habebunt inter ſe, vt reliqua duo latera. Et ſi baſis ſegmenta ita ſe habeant, vt reliqua duo latera: recta à vertice ad ſectionem ducta, bifariam ſecabit angulum trianguli. 294.A

Æquiangulorum triangulorum proportionalia ſunt latera circa æquales angulos, & homologa ſunt latera, quæ æqualibus angulis ſubtenduntur. 294.A

*Recta linea vni lateri trianguli parallela, aufert triangulum toti triangulo ſimile.* 295.A

*Si ex duobus punctis rectæ, quorum alterum ſit extremum, alterum verò intra lineam, duæ parallelæ inter ſe educantur ad eaſdem partes, ita vt habeant eandem proportionem, quam rectæ inter ipſas, & alterum punctum extremum incluſæ: Recta coniungens extremum vnius earum, cum extremo prioris lineæ tranſibit per extremum alterius lineæ.* 295.A

*Si in triangulo parallela vni lateri agatur, recta ex angulo oppoſito ducta ſecat parallelam, & latus illud in eaſdem rationes.* 295.A

Si duo triangula latera proportionalia habeãt; æquiangula erunt, & æquales habebunt eos angulos, ſub quibus homologa latera ſubtenduntur. 296.A

Si duo triangula vnum angulum vni angulo æqualem, & circa æquales angulos latera proportionalia habeant; æquiangula erunt, æqualesq; habebunt angulos, ſub quibus latera homologa ſubtenduntur. 296.A

Si duo triangula vnum angulum vni angulo æqualem, circa autem alios angulos latera proportionalia habeant; reliquorum verò ſimul vtrumq; aut minorem, aut non minorem recto: æquiangula erunt, & æquales habebunt eos angulos, circa quos proportionalia ſunt latera. 296.A

Si in triangulo rectangulo ab angulo recto in baſim perpendicularis ducta ſit: quæ ad perpendicularem triangula tum toti triangulo, tum ipſa inter ſe ſimilia ſunt. 297.A

Item tam perpendicularis eſt media proportionalis inter duo baſis ſegmenta, quàm vtrumlibet laterum circa rectum angulum inter totam baſim, & ſegmentum baſis ei lateri adiacens. 298.A

*Si duæ rectæ ſecentur in binis punctis proportionaliter: Erunt quoq; intermediæ ſectiones in eadem proportione cum quibuſlibet ſegmentis duobus.* 300.A

*Si recta in quotcunque partes Arithmeticè proportionales ſecta ſit, & alia recta ſecetur in totidem partes, quæ eaſdem inter ſe, quas illæ, proportiones habeant: Erunt quoq; partes huius lineæ Arithmeticè proportionales.* 301.A

*Si duæ rectæ inæquales ad alias duas eandem habeant proportionem, minor ad minorem, & maior ad maiorem: Erit quoque exceſſus priorum ad exceſſum poſteriorum, vt prior vna ad vnam poſteriorũ.* 301.A

*Recta à quouis puncto diametri ducta perpendicularis vſq; ad circumferentiam ſemicirculi, media proportionalis eſt inter diametri ſegmenta.* 304.A

Æqualium, & vnum vni æqualem habentium angulum, parallelogrammorum, reciproca ſunt latera circa æquales angulos. Et quorũ reciproca ſunt latera circum æquales angulos, illa ſunt æqualia. 305.A

Æqualium & vnum vni æqualem habentium angulum, triangulorum, reciproca ſunt latera circum æquales angulos. Et quorum reciproca ſunt latera circa æquales angulos, illa ſunt æqualia. 305.A

Si quatuor rectæ proportionales ſint; rectangulum ſub extremis æquale eſt rectangulo ſub mediis. Et ſi rectangulum ſub extremis æquale ſit rectangulo ſub mediis, illæ quatuor rectæ proportionales ſunt. 305.A

*Idem eueniet, ſi parallelogramma non ſint rectangula, ſed tantùm æquiangula.* 306.A

Si tres rectæ ſint proportionales; rectangulum ſub extremis quadrato mediæ æquale eſt. Et ſi rectangulum ſub extremis quadrato mediæ ſit æquale; illæ tres proportionales ſunt. 306.A

*Recta, cuius quadratum æquale eſt rectangulo ſub duabus rectis quibuſcunque, media proportionalis eſt inter eas duas rectas.* 306.A

*Idem eueniet, ſi parallelogramma non ſint rectangula, æquiangula tamen.* 306.A

Triangula ſimilia inter ſe ſunt in duplicata ratione homologorum laterum. 316.A

Si tres rectæ ſint proportionales; vt eſt prima ad tertiam, ita eſt triangulum ſuper primam ad triangulum ſuper ſecundam ſimile, ſimiliterq; deſcriptum. 316.A

Similia polygona in ſimilia triangula diuiduntur, & numero æqualia, & homologa totis: Et polygona duplicatam habent rationem homologorum laterum. 317.A

Si tres rectæ ſint proportionales; vt eſt prima ad tertiam, ita eſt polygonum ſuper primã ad polygonum ſuper ſecundam ſimile ſimiliterq; deſcriptum. 318.A

*Similia polygona æquilatera, & æquiangula, diuidantur in ſimilia triangula, & numero æqualia, & homologa totis; ductis rectis à centris circulorum ipſa circumſcribentium ad omnes angulos.* 319.A

Quæ eidem rectilineo ſunt ſimilia, & inter ſe ſunt ſimilia. 319.& 320.A

Si quatuor rectæ ſint proportionales: Et ab eis rectilinea ſimilia ſimiliterque deſcripta, proportionalia ſunt. Et ſi à rectis ſimilia ſimiliterque deſcripta rectilinea, proportionalia ſint: ipſæ etiam rectæ proportionales erunt. 320.A

*Æqualia rectilinea ſimilia, ſimiliterq; deſcripta, ſunt ſuper æquales rectas.* 320.& 321.A

*Si tres rectæ ſint proportionales; erunt quoq; rectilinea ſimilia ſimiliterq; deſcripta ab eis proportionalia, &c.* 321.A


Æquian-

Æquiangula parallelogramma inter se rationẽ habent ex lateribus compositam. 321.A

*Triangula vnum angulum vni angulo æqualem habentia proportionem habent ex lateribus circa æqualem angulum compositam.* 323.A

*Triangula vnum angulum vni angulo æqualem habentia, eandem proportionem habent, quam rectangula sub lateribus circa angulum æqualem contenta.* 323.A

*Parallelogramma æquiangula eandem rationem habẽt, quam rectangula sub lateribus circa angulum æqualem contenta.* 324.A

*Triangula & parallelogramma inter se rationem habẽt compositam ex proportione basium, & proportione altitudinum.* 324.A

In parallelogrammo parallelogrãma circa diametrum, & toti, & inter se sunt similia. 325.A

*Datis duobus parallelogrammis æquiangulis, sed non similibus: ex quouis illorum alteri simile resecare.* 326.A

Si à parallelogrammo parallelogrammum ablatum sit simile toti, & similiter positũ, communem cum eo habens angulum: hoc circa eandem cum toto diametrum cõsistit. 327.A

*Idem eueniet, si angulum habeant non communem.* 328.A

Parallelogrammorum secundum eandem rectam lineam applicatorum, deficientiumque figuris parallelogrammis similibus, similiterque positis ei, quod à dimidia describitur; maximum id est, quod ad dimidium applicatur, parallelogrammum simile existens defectui. 329.A

In rectangulis triangulis, figura quæuis à latere rectum angulum subtendente descripta, æqualis est figuris, quæ priori illi similes, & similiter positæ à lateribus rectum angulum continentibus describuntur. 332.A

*Si figura, quæ ab vno latere trianguli describitur, æqualis sit eis, quæ à reliquis duobus lateribus describuntur, figuris similibus similiterq; positis: angulus sub reliquis bis lateribus comprehensus, rectus est.* 333.A

Si duo triangula, quæ duo latera duobus lateribus proportionalia habeant, secundùm vnum angulum composita fuerint, ita vt homologa eorum latera sint parallela: tum reliqua latera in rectam lineam collocata reperientur. 333.& 334.A

In circulis æqualibus, anguli eandem habent rationem cum peripheriis, quibus insistunt, siue ad centra, siue ad peripherias constituti insistant: Insuper verò & sectores, quippe qui ad centra consistunt. 334.A

In circulis æqualibus, est sector ad sectorem, vt angulus ad angulum in centro. 335.A

Vt est angulus in centro ad quatuor rectos, ita est arcus illi angulo subtensus ad totam circumferentiam. Et contrà. 335.A

*Similia circulorum segmenta eandem habent proportionem ad totas circumferentias.* 336.A

*Si duo aut plures circuli idem habeant centrum: Rectæ ex centro ductæ abscindunt arcus similes.* 155. & 337.A

*Si in circulo duæ rectæ se mutuò secent: erunt segmenta vnius segmentis alterius reciproca.* 341.A

*Si extra circulum sumatur punctum aliquod, ab eoq; in circulum cadant duæ rectæ circulum secantes; erunt totæ, & segmenta extra circulum reciproca. Quod si ab eodem puncto recta ducatur circulum tangens; erit hæc media proportionalis inter quamlibet rectam, quæ circulum secet, & eius segmentũ exterius.* 341.A

*Si duæ rectæ se mutuò secent, & à duobus earum terminis perpendiculares sibi mutuò demittantur: erunt duæ lineæ, quarum vna inter vnum terminorum, & sectionem, altera verò inter sectionem, & prioris lineæ assumptæ perpendicularem interiicitur, aliis duabus eodem modo inclusis reciprocæ.* 341.A

*In parallelogrammo duæ rectæ lateribus parallelæ se mutuò secantes, diuidunt parallelogrammum in quatuor parallelogramma proportionalia.* 342.A

*Omne quadrilaterum à duabus diametris diuiditur in quatuor triangula proportionalia.* 342.A

*In triangulo rectangulo, in quo perpendicularis ab angulo recto demissa secat basim extrema ac media ratione; tria latera sunt continuè proportionalia. Et si tria latera trianguli rectanguli sint continuè proportionalia; perpendicularis ad basim ex angulo recto demissa, secat basim extrema ac media ratione.* 342.A

*Si ex centro per quæuis puncta lineæ Quadratricis ducantur rectæ vsq; ad peripheriam quadrantis ex eodem centro descripti, & ex eisdem punctis ad basim demittantur perpendiculares, & aliæ rectæ eidem basi parallelæ: Erunt arcus quadrantis inter semidiametros interiecti, perpendicularibus, vel segmentis semidiametri intra parallelas positis, proportionales.* 350.& 351.A

*Si quadrantis & Quadratricis idem centrum sit; erunt arcus quadrantis, semidiameter, & basis Quadratricis, continuè proportionales.* 353.A

*Circumferentia circuli ad eius diametrum, proportio in numeris plus minus, quæ sit.* 354.A

Si sint duæ rectæ, erit vt prima ad secundam, ita quadratum primæ ad rectangulum sub illis duabus contentum. Et vt secunda ad primã, ita rectangulum sub ipsis, ad quadratum primæ. 123.B

Si sint duæ rectæ inæquales, erit vt prima ad secundam, ita rectangulum sub ipsis ad quadratum secundæ. 134.B

Si sint tres rectæ, erit vt prima ad tertiam, ita rectangulum sub prima & secunda cõtentum, ad id, quod sub secunda & tertia continetur. 135.B

Si recta linea secetur in partes duas inæquales, erit vt alterutra pars ad alteram, ita rectangulum sub tota & priore parte assumpta, ad rectangulum sub tota, & altera parte contentum. 136.B

Si recta sit secta vtcunque: erit rectangulum sub partibus contentum, medium proportionale inter earum quadrata. Item rectangulum sub tota, & vna parte contentum, medium proportionale inter quadratum totius lineæ, & quadratum dictæ partis. 148.B

Si duæ rectæ parallelis planis secentur; In easdem rationes secabuntur. 203.& 204.B

Si solidum parallelepipedum plano secetur, aduersis planis parallelo: Erit quemadmodum basis ad basim, ita solidum ad solidum. 210.B

*Idem conuenit in omne prisma.* 211.B
*Si prisma quodcunq; secetur plano oppositis planis æquidistante, sectio est figura æqualis, & similis planis oppositis.* 212.B
Solida parallelepipeda sub eadem altitudine; inter se sunt, vt bases. 217.B
*Si parallelepipeda inter se sint, vt bases; ipsa erunt sub eadem altitudine.* 217.B
Similia solida parallelepipeda, inter se sunt in triplicata ratione homologorum laterum. 218.B
Si sint quatuor rectæ continuè proportionales, vt est prima ad quartam, ita est parallelepipedum super primam descriptum, ad parallelepipedum simile, similiterq; descriptū super secundam. 218.B
Æqualium solidorum parallelepipedorum bases & altitudines reciprocantur. Et quorum solidorum parallelepipedorum bases & altitudines reciprocātur; illa sunt æqualia. 218.B
*Hæc quinq; quæ proximè de parallelepipedis dicta sunt, conueniunt etiam prismatis, in quibus duo plana opposita sunt triangula.* 220.B
Si tres rectæ sint proportionales; quod ex illis fit solidum parallelepipedum, æquale est descripto à media linea solido parallelepipedo, quod æquilaterum quidem sit, æquiangulum verò prædicto. 221.B
*Si parallelepipedum ex tribus rectis descriptum, æquale sit parallelepipedo sibi æquiangulo à media recta descripto; erunt tres rectæ continuè proportionales.* 222.B
Si quatuor rectæ lineæ proportionales fuerint; & solida parallelepipeda, quæ ab ipsis & similia, & similiter describuntur, proportionalia erunt. Et si solida parallelepipeda, quæ & similia, & similiter describuntur, fuerint proportionalia; & ipsæ rectæ lineæ proportionales erunt. 222.B
*Eodem modo si fuerint tres rectæ proportionales, erunt & parallelepipeda similia, similiterq; descripta ex eis, proportionalia, &c.* 223.B
*Idem quoque quadrat in prismata triangularium planorum oppositorum ex quatuor rectis, vel tribus, continuè proportionalibus descripta, si similia, similiterq; posita sint.* 223.B
Circuli inter se sunt, quemadmodum à diametris quadrata. 227.B
Circulus ad circulum est, vt polygonum in illo descriptum ad polygonum simile in hoc descriptum. 228.B
Sub eadem altitudine existentes pyramides, & triangulares habentes bases; inter se sunt, vt bases. 230.B
*Si pyramides triangulares inter se sint, vt bases; ipsæ erunt sub eadem altitudine.* 231.B
Sub eadem altitudine existentes pyramides, & polygonas habentes bases, inter se sunt, vt bases. 231.B
*Idem verum est de pyramidib. eiusdem altitudinis, quarum vna basim habet plurium angulorum, quàm altera.* 232.B
*Pyramides quarumlibet basium, quæ inter se sunt, vt bases; eandem habent altitudinem.* 233.B
Pyramis quælibet tertia pars est prismatis, & eandem cum illa habet & basim, & altitudinem. Siue prisma quodlibet triplum est pyramidis, quæ eandem cum ipso habet & basim & altitudinem. 233.B
*Eodem modo pyramis tertia pars est prismatis habentis basem basi, & altitudinem altitudini æqualem.* 234.B
*Prismata eiusdem altitudinis super quascunque bases, inter se sunt, vt bases.* 234.B
*Si prismata quarumcunque basium inter se sint, vt bases; ipsa erunt sub eadem altitudine.* 234.B
*Quæ de prismatis dicta sunt, intelligi debent de iis, quæ habent plana opposita basibus æqualia, & similia.* 234.B
Similes pyramides, quæ triangulares habent bases, in triplicata sunt homologorum laterum ratione. 235.B
Similes pyramides, quarum bases plura latera, quàm tria continent, habent proportionem homologorum laterum triplicatam. 235.B
*Similia prismata triplicatam proportionem habent laterum homologorum.* 236.B
*Pyramides multangulæ similes diuiduntur in pyramides triangulares similes, & numero æquales, & homologas totis.* 236.& 237.
*Prismata multangula similia diuiduntur in prismata similia triangulares bases habētia, & numero æqualia, & homologa totis.* 237.B
Æqualium pyramidum, & triangulares bases habentium, reciprocantur bases & altitudines. Et quarum pyramidum triangulares bases habentium reciprocantur bases, & altitudines; illæ sunt æquales. 237.B
*Æqualium pyramidum, quarum bases non sunt triangulares, reciprocantur bases & altitudines. Et quarum pyramidum triangulares bases non habentium reciprocantur bases & altitudines, illæ sunt æquales.* 237.B
*Idem conuenit prismatibus.* 238.B
Sub eadem altitudine existentes coni & cylindri, inter se sunt, vt bases. 239.B
*Atque hoc verum est, siue coni & cylindri recti sint, siue scaleni.* 240.B
*Si coni & cylindri quicunq; inter se sint, vt bases, ipsi sub eadem altitudine erunt.* 240.B
Coni & cylindri similes, in triplicata ratione sunt diametrorum, quæ in basibus. 241.B
*Idem hoc locum habet in conis & cylindris scalenis.* 242.B
Si cylindrus plano secetur aduersis planis parallelo; erit vt cylindrus ad cylindrum, ita axis ad axem. 243.B
*Idem intelligatur de cylindro scaleno.* 243.B
Super æqualibus basibus existentes coni, & cylindri, inter se sunt, vt altitudines. 244.B
*Idem conuenit conis & cylindris scalenis.* 244.B
*Item prismatis, parallelepipedis, & pyramidibus super æquales bases constitutis.* 244.B
*Coni & cylindri tam recti, quàm scaleni: Item prismata, parallelepipeda, & pyramides, proportionem habentes eandem, quam altitudines, bases habebunt æquales.* 245.B
Æqualium conorum, & cylindrorum reciprocantur

dantur baſes, & altitudines. Et quorum conorum & cylindrorum reciprocantur baſes & altitudines, illi ſunt æquales. 245.B

*Idem conuenit conis & cylindris ſcalenis.* 246.B

Sphæræ inter ſe ſunt in triplicata ratione ſuarum diametrorum. 251.B

Ex quo fit, ita eſſe ſphæram ad ſphæram, vt polyedrum in illa deſcriptum, ad polyedrum ſimile in hac deſcriptum. 252.B

Si recta linea ſecundùm extremam & mediam rationem ſecetur; maius ſegmentum aſſumens dimidiam totius, quintuplum poteſt eius, quod à dimidia totius deſcribitur, quadrati. 253.B

Si recta linea ſuiipſius ſegmenti quintuplum poſsit; Duplæ prædicti ſegmenti extrema ac media ratione ſectæ, maius ſegmentum reliqua pars eſt eius, quæ à principio, rectæ. 253.B

Si recta linea ſecundùm extremam & mediam rationem ſecetur; minus ſegmentum aſſumens dimidiam maioris ſegmenti, quintuplum poteſt eius, quod à dimidia maioris ſegmenti deſcribitur, quadrati. 254.B

*Si recta inæqualiter ſecetur, & minus ſegmentum aſſumens dimidium maioris ſegmenti quintuplum poſsit eius, quod à dimidia maioris ſegmenti deſcribitur, quadrati: Recta illa linea ſecta erit extrema & media ratione.* 255.B

Si recta linea ſecundùm extremam & mediam rationem ſecetur; quod à tota, quodq; à minore ſegmento, ſimul vtraque quadrata, tripla ſunt eius, quod à maiore ſegmento deſcribitur, quadrati. 255.B

*Si recta inæqualiter ſecetur, ſitq; quadratum totius, vnà cum quadrato minoris ſegmenti, triplum quadrati ex maiore ſegmento deſcripti: Recta illa linea extrema ac media ratione ſecabitur.* 256.B

*Si recta ſecundùm extremam & mediam rationem ſecetur, totæ linea aſſumens minus ſegmentum, quintuplum poteſt eius, quod à maiori ſegmento deſcribitur, quadrati. Et ſi recta inæqualiter ſecetur, totaq; aſſumens minus ſegmentum poſsit quintuplum eius, quod à maiori ſegmento deſcribitur, quadrati; Recta illa ſecundùm extremam & mediam rationem ſecta eſt.* 256.B

Si recta linea ſecundùm extremam & mediam rationem ſecetur; apponaturque ei æqualis maiori ſegmento: Tota recta linea ſecundùm extremam & mediam rationem ſecatur, & maius ſegmentum eſt, quæ à principio, recta linea. 256.B

*Si recta ſecetur extrema ac media ratione, detrahaturq; ex maiori ſegmento ſegmentum minus; erit maius ſegmentum ſectum extrema ac media ratione, & maius ſegmentum eſt illa linea, quæ prioris lineæ minus ſegmentum erat.* 257.B

*Si recta ſecetur extrema ac media ratione, atq; ex dimidio illius auferatur dimidia maioris ſegmenti; erit quoq; dimidia totius diuiſa extrema ac media ratione, maiusq; ſegmentum erit dimidium maioris ſegmenti totius lineæ.* 257.B

*Si ad rectam perpendicularis ducatur, quæ ſit media proportionalis inter ſegmenta lineæ; ſemicirculus circa illam lineam rectam deſcriptus tranſibit per extremum punctum lineæ perpendicularis.* 264.B

Si binæ rectæ extrema ac media ratione ſecentur; ipſæ ſimiliter ſecabuntur, in eaſdem ſcilicet proportiones. 281.B

*Si ſint quatuor rectæ continuè proportionales, necnon & aliæ quatuor, ita vt eadem ſit antecedens omnium; erit proportio tertiæ ad tertiam proportionis ſecundæ ad ſecundam duplicata; & proportio quartæ ad quartam eiuſdem proportionis ſecundæ ad ſecundam triplicata.* 302.B

*Si duo latera trianguli æquilateri ſecentur extrema ac media ratione, ita vt vnius maius ſegmentum, alterius verò minus ſit prope angulum ab ipſis comprehenſum; recta connectens puncta ſectionum duplum poteſt minoris ſegmenti.* 319.B

*Perpendicularis ex angulo pentagoni æquilateri & æquianguli in latus oppoſitum demiſſa, ſecatur à recta illum angulum ſubtendente, extremâ ac media ratione.* 324.B

FIGVRAE planæ quadrilateræ. vide Parallelogrammum, &c.

FRACTIONES numerorum. vide Minutię numerorum.

FRACTVS numerus. vide Minutię numerorũ.

IMPAR numerus. vide Numerus par, &c.

INCOMMENSVRABILES magnitudines. vide Commenſurabiles, & incommenſurabiles magnitudines.

IRRATIONALES magnitudines. vide Rationales, & irrationales magnitudines.

ISOSCELES. vide Triangulum.

LINEA perpendicularis. vide Recta linea.

LINEA recta. vide Recta linea.

LINEAE parallelæ. vide Recta linea.

LINEAE proportionales. vide Figuræ, Anguli, & lineæ proportionales.

MAGNITVDINES commenſurabiles, & incommenſurabiles. vide Commenſurabiles, & incommenſurabiles magnitudines.

MAGNITVDINES proportionales in cõmuni.

*Si ſint tres rectæ Arithmeticè proportionales: rectangulum ſub extremis, vnà cum quadrato exceſſus, æquale erit quadrato lineæ mediæ.* 100.A

*Proportionum rationalium genera, & inuentio: Et proportionalitatis Arithmeticæ, Geometricæ, atq; Harmonicæ, ſiue Muſicæ, proprietates variæ.* à 195.196. &c. vſq; ad 244.A

*Euclides cur in defin. 6. & 8. lib. 5. quatuor magnitudines proportionales, & non proportionales per earum*

*æquè multiplicia definierit.* 249.A

Si sint quotcunq; magnitudines quotcunq; magnitudinum æqualium numero, singulæ singularum, æquè multiplices; quàm multiplex est vnius vna magnitudo, tam multiplices erunt & omnes omnium. 261.A

Si prima secundæ æquè fuerit multiplex, atque tertia quartæ, fuerit autem & quinta secundę æquè multiplex, atque sexta quartæ: erit & composita prima cum quinta, secundę æquè multiplex, atq; tertia cum sexta quartę. 261.A

*Idem sequitur, si prima & tertia, æquales sint secundæ & quartæ; at quinta & sexta, æquè multiplices secundæ & quartæ: Vel prima & tertia, æquè multiplices secundæ & quartæ; at quinta & sexta, æquales secundæ ac quartæ: Vel denique si tam prima & tertia, quàm quinta ac sexta, æquales sint secundæ ac quartæ.* 261.& 262.*A*

Si sit prima secundæ æquè multiplex, atq; tertia quartæ: sumantur autem æquè multiplices primæ ac tertię: Erit & ex æquo, sumptarum vtraque vtriusq; æquè multiplex, altera quidem secundæ, altera autem quartæ. 262.A

Si prima ad secundam habeat eandem rationē, quam tertia ad quartam: Etiam æquè multiplices primæ & tertię, ad æquè multiplices secundæ & quartæ, iuxta quamuis multiplicationem eandem habebunt rationem, si prout inter se respondent, ita sumptę fuerint. 262. A

Magnitudines quatuor proportionales, conuertendo quoq; proportionales sunt. 263.A

Si magnitudo magnitudinis æquè fuerit multiplex, atq; ablata ablatæ: Etiam reliqua reliquæ ita multiplex erit, vt tota totius. 264.A

Si duæ magnitudines duarum magnitudinum sint æquè multiplices, & detractæ quædam sint earundem æquè multiplices: Et reliquę eisdem aut æquales sunt, aut æquè ipsarum multiplices. 265.A

Æquales ad eandem, eandem habēt rationem: Et eadem ad æquales. 265.A

*Eodem modo, æquales ad æquales eandem habent rationem.* 266.*A*

Inęqualium magnitudinum maior ad eandem, maiorem rationem habet, quàm minor: Et eadem ad minorem, maiorem rationem habet, quàm ad maiorem. 266.A

Quæ ad eandem, eandem habent rationem, æquales sunt: Et ad quas eadem eandem habet rationem, eæ æquales quoq; sunt. 267.A

Ad eandem magnitudinem rationem habentium, quæ maiorem rationem habet, illa maior est: Ad quam autem eadem maiorem rationem habet, illa minor est. 268.A

Quę eidem sunt eędem rationes, & inter se sunt eædem. 268.A

*Quæ eisdem sunt eædem rationes, & inter se sunt eædem.* 268.*A*

Si sint magnitudines quotcunq; proportionales: quemadmodum se habuerit vna antecedentium ad vnam consequentium, ita se habebunt omnes antecedentes ad omnes consequentes. 269.A

Si prima ad secundam, eandem habuerit rationem, quam tertia ad quartam, tertia verò ad quartam maiorem rationem habuerit, quàm quinta ad sextam: Prima quoque ad secundam, maiorem rationē habebit, quàm quinta ad sextam. 269.A

*Si prima ad secundam, eandem habuerit rationem, quàm tertia ad quartam; tertia verò ad quartam, minorem rationem habuerit, quàm quinta ad sextam: Prima quoq; ad secundam, minorem rationem habebit quàm quinta ad sextam.* 269.*A*

*Si prima ad secundam, maiorem habuerit rationem, quā tertia ad quartam; tertia item ad quartam, maiorem habuerit, quàm quinta ad sextam: Prima quoque ad secūdam, maiorem habebit, quàm quinta ad sextam. Quod si prima ad secundam, minorem habuerit rationem, quàm tertia ad quartam; tertia item ad quartam, minorem, quàm quinta ad sextam: Prima quoque ad secundam, minorem rationem habebit, quàm quinta ad sextam.* 269.*A*

Si prima ad secundam sit, vt tertia ad quartam; sit autem prima maior, quàm tertia: erit & secunda maior quàm quarta. Et si æqualis, æqualis: Et si minor, minor. 270.A

*Eodem modo, si secunda maior fuerit quàm quarta; erit & prima maior quàm tertia: Et si æqualis, æqualis: Et si minor, minor.* 270.*A*

Partes cum pariter multiplicibus in eadē sunt ratione, si prout sibi mutuò respondent, ita sumantur. 271.A

Magnitudines quatuor proportionales; vicissim quoque proportionales sunt. 271.A

*Si sint quatuor magnitudines proportionales, sit autem prima maior quàm secunda: erit quoq; tertia maior quàm quarta: Et si æqualis, æqualis: Et si minor, minor.* 271.*A*

Si compositæ magnitudines fuerint proportionales, hæ quoq; diuisę proportionales erunt. 272. A

Si diuisæ magnitudines sint proportionales, hę quoq; compositæ proportionales erūt. 272.A

Si sit, vt totum ad totum, ita ablatum ad ablatū: erit quoq; reliquum ad reliquum, vt totum ad totum. 274.A

Si sint quatuor magnitudines proportionales; hæ quoque per conuersionem rationis proportionales erunt. 274.A

Si sint tres magnitudines, & aliæ tres, quæ binę & in eadem ratione sumantur; sit autem ex æquo prima maior, quàm tertia; erit & quarta maior quàm sexta; Et si æqualis, æqualis: Et si minor, minor. 274.A

Si sint tres magnitudines, & aliæ tres, quæ binæ & in eadem ratione sumantur, fueritque perturbata earum proportio; ex æquo autem prima maior fuerit quā tertia: Erit & quarta maior quàm sexta: Et si æqualis, æqualis: Et si minor, minor. 275.A

Si sint quotcunq; magnitudines, & aliæ ipsis æquales numero, quæ binæ in eadem ratione sumantur: Et ex æqualitate in eadem ratione erunt. 275.A

*Si sit prima ad secundam, vt tertia ad quartam: habebunt æquemultiplices primæ ac tertiæ ad secundam & quar-*

*& quartam, eandem rationem: Item æquemultiplices ſecundæ & quartæ ad primam ac tertiam. Et contrà, eandem rationem habebunt ſecunda & quarta ad æquè multiplices primæ ac tertiæ: Item prima ac tertia, ad æquè multiplices ſecundæ & quartæ.* 276. A

**Si ſint tres magnitudines, aliæque ipſis æquales numero, quæ binæ in eadem ratione ſumantur, fuerit autem perturbata earum proportio: Etiam ex æqualitate in eadem ratione erunt.** 277. A

**Si ſit prima ad ſecundam, vt tertia ad quartam: Item quinta ad ſecundam, vt ſexta ad quartam: Etiam compoſita prima cum quinta ad ſecundam erit, vt compoſita tertia cum ſexta ad quartam.** 277. A

*Si duæ magnitudines ad duas eandem habeãt rationem, & detractæ ex prioribus ad eaſdem poſteriores eandem quoq; habeant rationem: Et reliquæ ad eaſdem poſteriores eandem rationem habebunt.* 278. A

**Si quatuor magnitudines ſint proportionales: Maxima & minima reliquis duabus maiores erunt.** 278. A

*Si tres magnitudines ſint proportionales: Maxima & minima maiores erunt, quàm dupla reliquæ.* 278. A

*Si prima ad ſecundam habeat maiorem rationem, q̃ tertia ad quartam: habebit conuertendo ſecunda ad primam, minorem rationem, q̃ quarta ad tertiam.* 279. A

*Si prima ad ſecundam habeat minorem proportionem, quàm tertia ad quartam: habebit conuertendo ſecundæ ad primam, maiorem rationem, quàm quarta ad tertiam.* 279. A

*Si prima ad ſecundam habeat maiorem rationem, quàm tertia ad quartam: habebit quoq; vicißim prima ad tertiam, maiorẽ rationẽ, quàm ſecunda ad quartam.* 279. A

*Si prima ad ſecundam habeat minorem rationẽ, quàm tertia ad quartam: habebit quoq; vicißim prima ad tertiam, minorem rationem, quàm ſecunda ad quartam.* 279. A

*Si prima ad ſecundam habeat maiorem rationem, quàm tertia ad quartam: habebit quoq; compoſita prima cũ ſecunda, ad ſecundam maiorem rationem, quàm compoſita tertia cum quarta, ad quartam,* 280. A

*Si prima ad ſecundam habeat minorem rationem, quàm tertia ad quartam: habebit quoque compoſita prima cum ſecunda, ad ſecundam minorem rationem, quàm compoſita tertia cum quarta, ad quartam.* 280. A

*Si compoſita prima cum ſecunda ad ſecundam, maiorem habeat rationem, quàm compoſita tertia cum quarta ad quartam: habebit quoq; diuidendo prima ad ſecundam maiorem rationem, quàm tertia ad quartam.* 280. A

*Si prima cum ſecunda ad ſecundam minorem rationem habeat, quàm tertia cum quarta ad quartam: habebit quoq; diuidendo prima ad ſecundam minorem rationem, quàm tertia ad quartam.* 280. A

*Si compoſita prima cum ſecunda ad ſecundam habeat maiorem rationem, quàm compoſita tertia cũ quarta ad quartam, habebit per conuerſionem rationis, prima cum ſecunda ad primam, minorem rationẽ, quàm tertia cum quarta, ad tertiam.* 281. A

*Si prima cum ſecunda ad ſecundam, minorem habeat rationem, quàm tertia cum quarta ad quartam: habebit per conuerſionem rationis, prima cum ſecunda ad primam, maiorẽ rationem, quàm tertia & quarta ad tertiam.* 281. A

*Si ſint tres magnitudines, & aliæ ipſis æquales numero, ſitq; maior proportio primæ priorum ad ſecundam, q̃ primæ poſteriorum ad ſecundam: Item ſecundæ priorum ad tertiam maior, quàm ſecundæ poſteriorum ad tertiam: Erit quoq; ex æqualitate, maior proportio primæ priorum ad tertiam, quàm primæ poſteriorum ad tertiam.* 281. A

*Idem eueniet, ſi proportio primæ ad ſecundam eadem fuerit, quæ primæ ad ſecundam; at ſecundæ ad tertiam maior, quàm ſecundæ ad tertiam: Vel contrà, ſi proportio primæ ad ſecundam fuerit maior, quàm primæ ad ſecundam; at ſecundæ ad tertiam eadem, quæ ſecundæ ad tertiam.* 281. & 282. A

*Quòd ſi proportiones priorum magnitudinum minores fuerint: erit quoq; ex æqualitate minor proportio primæ ad tertiam, quàm primæ ad tertiam.* 282. A

*Idem eueniet, ſi proportio primæ ad ſecundam fuerit eadem, quæ primæ ad ſecundam; at ſecundæ ad tertiam minor, quàm ſecundæ ad tertiam: Vel contrà, ſi proportio primæ ad ſecundam fuerit minor, quàm primæ ad ſecundam; at proportio ſecundæ ad tertiã eadem, quæ ſecundæ ad tertiam.* 282. A

*Quòd ſi plures ſint magnitudines tribus, ſiue omnes proportiones in vno ordine magnitudinum ſint maiores, vel minores omnibus proportionibus in alio ordine magnitudinum; ſiue vna tantùm maior, quàm vna, vel duæ, &c. Erit maior vel minor proportio primæ ad vltimam in vno ordine, quàm primæ ad vltimam in alio ordine.* 282. A

*Si ſint tres magnitudines, & aliæ ipſis æquales numero, ſitq; maior proportio primæ priorum ad ſecundam, quàm ſecundæ poſteriorum ad tertiam; Item ſecundæ priorum ad tertiam maior, quàm primæ poſteriorum ad ſecundam: Erit quoque ex æqualitate, maior proportio primæ priorum ad tertiam, quàm primæ poſteriorum ad tertiam.* 282. A

*Idem eueniet, ſi proportio primæ priorum ad ſecundam ſit, quæ ſecundæ poſteriorum ad tertiam; at ſecundæ priorum ad tertiam maior, quàm primæ priorum ad ſecundam: Vel contrà, ratio primæ priorum ad ſecundam maior, quàm ſecundæ poſteriorum ad tertiam; at ſecundæ priorum ad tertiam eadem, quæ primæ poſteriorum ad ſecundam.* 283. A

*Quòd ſi in primis magnitudinibus aliquæ proportiones, vel omnes ſint minores; erit minor proportio primæ ad tertiam, quàm primæ ad tertiam.* 283. A

*Quòd ſi plures ſint magnitudines quàm tres in quolibet ordine: erit quoq; maior vel minor proportio primæ ad vltimam, quàm primæ ad vltimam.* 283. A

*Si fuerit maior proportio totius ad totum, quàm ablati ad ablatum: Erit & reliqui ad reliquum maior proportio quàm totius ad totum.* 283. A

*Si fuerit minor ratio totius ad totum, quàm ablati ad ablatum: Erit etiam minor ratio reliqui ad reliquum, quàm totius ad totum.* 283. A

*Si ſint quotcunque magnitudines, & aliæ ipſis æquales numero, ſitque maior ratio primæ priorum, ad primam poſteriorum, quàm ſecundæ ad ſecundam; & hæc maior, quàm tertiæ ad tertiam, & ſic deinceps: Habebunt omnes priores ſimul ad omnes poſteriores ſimul, maiorem rationem, quàm omnes priores, relicta prima, ad omnes poſteriores, relicta quoq; prima;*

minorem autem, quàm prima priorum ad primam posteriorum; maiorẽ denique etiam, quàm vltima priorum ad vltimam posteriorum. 283. A

Propositis quotcunque magnitudinibus, proportio primæ ad vltimam componitur ex omnibus proportionibus intermedijs, vt ex proportione primæ ad secundam, secundæ ad tertiam, &c. 288. A

Si quatuor magnitudines sint Arithmeticè proportionales, hoc est, idem excessus sit inter primam & secundam, qui inter tertiam & quartam; hæ vicissim quoq; erunt Arithmeticè proportionales, hoc est, idem excessus erit inter primam & tertiam, qui inter secundam & quartam. 163. & 164. B

MAGNITVDINES rationales, & irrationales. Vide Rationales, & irrationales magnitudines.

MINVTIAE numerorum.

Nullus numerus fractus, aut compositus ex integro & fracto, in se multiplicatus procreat quadratum numerum integrum. 254. A

Duæ minutiæ eundem habentes denominatorem, quarum vnius numerator sit vnitas, eandem proportionem habent, quam numeratores. 85. B

Numerator cuiusuis minutiæ ad denominatorem eandem proportionẽ habet, quam minutia ad integrum, cuius est minutia. 85. B

Minutia quælibet, pars est numeratoris à denominatore denominata. 86. B

Duæ minutiæ eundem habentes denominatorem, quarum neutra numeratorem habeat vnitatem, eandem proportionem habent, quàm numeratores. 86. B

Si duarum minutiarum numerator prioris in denominatorem posterioris, & posterioris numerator in denominatorem prioris ducatur; erit prior minutia ad posteriorem, vt prior numerus productus ad posteriorem. 86. B

Integrum ad summam duarum minutiarũ eandem proportionem habet, quam numerus ex multiplicatione mutua denominatorum productus ad summam duorum productorum, quorum vnus ex numeratore prioris minutiæ in posterioris denominatorem, alter verò ex numeratore posterioris in denominatorẽ prioris gignitur. 87. B

Si duæ minutiæ eundem habeant numeratorem, erit vt prior minutia ad posteriorem, ita posterioris denominator ad denominatorem prioris. 87. B

Minutiæ, quarum numeratores ad denominatores eandem habent proportionem, æquales sunt: Et æqualium minutiarum numeratores ad denominatores eandem proportionem habent. Cuius autem numerator ad denominatorem habet maiorem proportionem, illa maior est: Et quæ maior est, eius numerator ad denominatorem habet proportionem maiorem. 87. B

Minutiæ, quarum numeratores eandem proportionem habent, quam denominatores, sunt æquales: Et minutiarum æqualium numeratores eandem habent proportionem, quam denominatores. Cuius autem numerator maiorem proportionem habet, quàm denominator, illa maior est: Et maioris numerator maiorem habet proportionem, quàm denominator. 88. B

Minutia minutiæ æqualis est minutiæ simplici, cuius numerator ex multiplicatione mutua numeratorum, denominator verò ex mutua denominatorũ multiplicatione procreatur. 89. B

Duæ minutiæ, quarum numeratores in denominatores vicissim ducti gignunt numeros æquales, æquales sunt: & minutiarum æqualium numeratores in denominatores vicissim ducti, gignunt æquales numeros. Cuius verò numerator in denominatorem alterius ductus maiorem numerum gignit, illa maior est: & maioris minutiæ numerator in denominatorem alterius ductus maiorem numerum producit. 90. B

Quando minor numerus per maiorem diuiditur, numerus Quotiens est minutia, cuius numerator est numerus minor diuisus, denominator verò maior numerus diuidens. 91. B

NVMERI proportionales in communi.

Propositis quatuor numeris proportionalibus, sumptiq; primi ac tertij æquè multiplicibus iuxta quãuis multiplicationem, item secundi & quarti æquè multiplicibus iuxta quamcunque etiam multiplicationem: si multiplex primi maior sit multiplice secundi, erit & multiplex tertij maior multiplice quarti: Et si æqualis, æqualis: Et si minor, minor. 251. A

Propositis quatuor numeris non proportionalibus, ita vt maior sit proportio primi ad secundum, quàm tertij ad quartum; si sumantur æquè multiplices primi, ac tertij, item æquè multiplices secundi ac quarti, fieri potest, vt multiplex primi maior sit multiplice secundi, multiplex autem tertij non maior multiplice quarti. 251. & 252. A

Propositis quatuor numeris, sumptiq; æquè multiplicibus primi ac tertij iuxta quamuis multiplicationem, item æquè multiplicibus secundi ac quarti iuxta quamuis etiam multiplicationem; si multiplex primi existente maiore, quàm multiplex secundi, multiplex tertij maior quoq; sit necessariò, quàm multiplex quarti; Et si æqualis, æqualis; Et si minor, minor: Erit eadem proportio primi ad secundum, quæ tertij ad quartum. 252. A

Propositis quatuor numeris, sumptiq; primi ac tertij æquè multiplicibus, item secundi & quarti æquè multiplicibus; si quando contingat, multiplicem primi maiorem esse multiplice secundi, multiplicem verò tertij non maiorẽ multiplice quarti: Maior erit proportio primi ad secundum, quàm tertij ad quartum. 253. A

Datis tribus terminis Geometricè proportionalibus, siue æqualibus, siue inæqualibus: Summa ex primo semel, secundo bis, & tertio semel collecta; ac summa conflata ex secundo & tertio semel; ac tertius semel, sunt etiam Geometricè proportionales. pag. 313. A

Datis tribus terminis, siue æqualibus, siue inæqualibus, Geometricè proportionalibus: Summa ex primo bis, secundo bis, & tertio semel collecta; ac summa ex primo, secundo, & tertio semel conflata; ac denique tertius semel, sunt Arithmeticè proportionales. 313. A

Datis tribus terminis, siue æqualibus, siue inæqualibus, Geometricè proportionalibus: Summa collecta ex primo

*ex primo bis, ex secundo ter, & tertio semel; ac summa conflata ex secundo bis, & tertio semel; & denique summa ex secundo semel, & tertio semel coacervata, Harmonicè proportionales sunt.* 314. A

*Numerus ex multiplicatione duorum numerorum productus, ita se habet ad alterutrum multiplicantium, vt alter multiplicantium ad vnitatem.* 6. B

*Numerus ex diuisione duorum numerorum procreatus, ita se habet ad vnitatem, vt diuisus numerus ad diuidentem.* 6. B

Si numerus numeri pars fuerit, & alter alterius eadem pars: Et simul vterque vtriusque simul eadem pars erit, quæ vnus vnius. 15. B

*Idem conuenit numeris fractis.* 16. B

*Si vnitas numeri pars fuerit, & altera vnitas, vel numerus, alterius numeri eadem pars: Et simul vtraque vnitas, vel vnitas & numerus simul, vtriusque numeri simul eadem pars erit, quæ vnitas numeri.* 16. B

*Si sint quotcunque numeri quotcunque numerorum æqualium numero, singuli singulorum, eadem pars: Et omnes omnium simul eadem pars erũt, quæ vnus vnius.* 16. B

*Idem numeris fractis conuenit.* 17. B

*Si sint quotcunque numeri quotcunque numerorum æqualium numero, singuli singulorum, æquè multiplices: quàm multiplex est vnius vnus numerus, tam multiplices erunt & omnes omnium.* 17. B

*Idem verum est de numeris fractis.* 17. B

Si numerus numeri partes fuerit, & alter alterius eædem partes: Et simul vterque vtriusque simul eædem partes erit, quæ vnus vnius. 17. B

*Idem locum habet in numeris fractis.* 17. B

*Si sint quotcunque numeri quotcunque numerorum, singuli singulorum, eædem partes: Et omnes omnium simul eædem partes erunt, quæ vnus vnius.* 17. B

Si numerus numeri pars fuerit, qualis ablatus ablati: Et reliquus reliqui eadem pars erit, qualis totus totius. 18. B

*Idem locum habet in numeris fractis.* 18. B

*Si numerus numeri æquè fuerit multiplex, atq; ablatus ablati: Etiam reliquus reliqui ita multiplex erit, vt totus totius.* 18. B

*Idem verum est de numeris fractis.* 18. B

Si numerus numeri partes fuerit, quales ablatus ablati: & reliquus reliqui eædem partes erit, quales totus totius. 18. B

*Idem in fractis numeris verum est.* 19. B

Si numerus numeri pars fuerit, & alter alterius eadem pars: Et vicissim, quæ pars est, aut partes primus tertij, eadem pars erit, vel eædem partes & secundus quarti. 19. B

*In fractis numeris idem concludes.* 19. B

Si numerus numeri partes fuerit, & alter alterius eædem partes: Et vicissim quæ partes est primus tertij, aut pars, eædem partes erit & secundus quarti, aut pars. 19. B

*Numeris fractis hoc idem conuenit.* 19. B

Si fuerit vt totus ad totum, ita ablatus ad ablatum: Et reliquus ad reliquum erit, vt totus ad totum. 20. B

*Idem in fractis numeris verum est.* 20. B

*Si primus secundum, & tertius quartum æqualiter contineat, eandemq; insuper partẽ, aut partes; erit secundus primi, & quartus tertij eædem partes. Et si secundus primi, & quartus tertij eædem partes sit; continebit primus secundum, & tertius quartum æqualiter, eandemq; insuper partem, aut partes.* 20. B

*Idem verum est in numeris fractis.* 20. B

Si sint quotcunque numeri proportionales; erit quemadmodum vnus antecedentium ad vnum consequentium, ita omnes antecedentes ad omnes consequentes. 21. B

*Verum quoq; hoc est in numeris fractis.* 22. B

Si quatuor numeri proportionales sint; Et vicissim proportionales erunt. 22. B

*In fractis idem cernitur.* 23. B

Si sint quotcunque numeri, & alij illis æquales multitudine, qui bini sumantur & in eadem ratione: Etiam ex æqualitate in eadem ratione erunt. 23. B

*Idem in numeris fractis verum est.* 23. B

*Duæ proportiones numerorum, quæ eidem proportioni eædem sunt; inter se quoque sunt eædem.* 23. & 24. B

Si vnitas numerum quempiam metiatur, æquè autem alter numerus alterum quendam numerum metiatur: Et vicissim æquè vnitas tertium numerũ metietur, & secundus quartum. 24. B

Si numerus duos numeros multiplicãs fecerit aliquos: geniti ex ipsis eandem rationem habebunt, quam multiplicati. 25. B

*In fractis numeris idem verum est.* 25. B

Si duo numeri numerum quempiam multiplicantes fecerint aliquos: geniti ex ipsis eandẽ rationem habebunt, quam multiplicantes. 25. B

*In fractis idem habet locum.* 25. B

*Si numerus quotcunq; numeros multiplicet, vel quotcunque numeri numerum quempiam multiplicent, habebunt producti numeri easdem rationes, quas numeri multiplicantes.* 25. B

Si quatuor numeri sint proportionales; q̃ ex primo & quarto fit, numerus, æqualis est ei, qui ex secundo & tertio fit, numero. Et si, qui ex primo & quarto fit, numerus, æqualis sit ei, q̃ ex secundo & tertio fit, numero; ipsi quatuor numeri proportionales erunt. 25. & 26. B

*Verum est idem in numeris fractis.* 26. B

*Si duo numeri duos numeros eandem, quam illi, habentes rationem, multiplicent, antecedens nimirum illorum consequentem horum, & consequens antecedentem; geniti ex ipsis æquales erunt.* 26. B

*Idem conuenit numeris fractis.* 26. B

*Si maior sit proportio primi ad secundum, quàm tertij ad quartum; qui ex primo & quarto fit, numerus, maior est eo, qui ex secundo & tertio fit, numero: Et contrà; tam in fractis numeris, quàm integris.* 26. B

Si tres numeri sint proportionales; qui sub extremis continetur, æqualis est ei, qui à medio efficitur: Et si qui sub extremis continetur, æqualis sit ei, qui à medio describitur; ipsi tres numeri proportionales erunt. 27. B

*In fractis idem verum est.* 27. B

*Si maior sit proportio primi ad secundum, quàm secundi ad tertium; maior fiet numerus ex primo in tertium, quàm ex secundo in se: Et contrà, tam in numeris fractis, quàm integris.* 27. B

Minimi numeri omnium eandem cum eis rationem habentium, metiuntur æquè numeros eandem cum eis rationē habentes, maior quidem maiorē, minor verò minorem. 27.B

*Si tres numeri ſint continuè proportionales, & primi duo dicantur in ſua proportione minimi; metietur primus ſecundum, & ſecundus tertium.* 27.& 28.B

*Quotlibet numeri minimi in continuatione ſuarum proportionum, ſiue eædem ſint, ſiue diuerſæ proportiones, metiuntur æquè totidem alios numeros, qui eaſdem cum eis proportiones habent, primus primum, ſecundus ſecundum, & tertius tertium, &c.* 28. B

Si ſint tres numeri, & alij ipſis multitudine æquales, qui bini ſumantur, & in eadem ratione, fuerit autem perturbata eorum proportio: etiam ex æqualitate in eadem ratione erunt. 28. B

*Idem verum eſt in numeris fractis.* 29. B

*Si quatuor numeri tam integri, quàm fracti, proportionales ſint; & conuertendo proportionales erūt.* 29.B

*Si compoſiti numeri, ſiue integri, ſiue fracti, proportionales ſint; & diuiſi proportionales erunt.* 29.B

*Si diuiſi numeri proportionales ſint, ſiue integri, ſiue fracti; & diuiſi propartionales erunt.* 29. B

*Si compoſiti numeri tam fracti quàm integri, proportionales ſint; & per conuerſionem rationis proportionales erunt.* 30. B

*Si primus ad ſecundum eandem habeat rationem, quam tertius ad quartum: habeat autem & quintus ad ſecundum eandem rationem, quam ſextus ad quartum, tam in fractis numeris, quàm integris: Etiam compoſitus primus cum quinto ad ſecundum eandem habebit rationem, quam tertius cum ſexto ad quartum.* 30. B

*Si duo numeri ad duos numeros eandem habeant rationem; & detracti quidam habeant ad eoſdem eandem, tam in numeris fractis, quàm integris: Et reliqui ad eoſdem eandem rationem habebunt.* 30. B

*Si primus ad ſecundum eandem habeat rationem, quam tertius ad quartum; habeat autē & primus ad quintum eandem, quam tertius ad ſextum, tam in integris, quàm fractis numeris: Etiam primus ad compoſitum ſecundum cum quinto eandem rationem habebit, quam tertius ad quartum cum ſexto.* 30. B

*Si quotcunque numeri ad eundem habeant proportiones, quas alij illis multitudine æquales ad quendam aliū eundem, tam in fractis, quàm integris numeris: habebunt quoq; omnes illi ſimul ad eundem, proportionē, quam hi alij omnes ſimul ad alium illum eundem. Et ſi idem numerus ad quotcunque numeros proportiones habeat, quas idem alius numerus ad alios multitudine illis æquales: habebit quoq; idem numerus ad omnes illos ſimul proportionem, quam idem alius numerus ad hos omnes ſimul.* 30. B

*Vltimæ nouem propoſ. lib. 5. à Campano adiectæ, qua ratione eodem modo demonſtrentur in numeris improportionalibus.* 31. B

Maxima menſura quotlibet numerorum metitur ipſos per numeros minimos eandē cum ipſis proportionem habentes. 35.B

Si duo numeri multiplicent minimos eandem rationem habentes, maior minorē, & minor maiorem; producetur minimus numerus ab illis numeratus. 36. B

Si fuerint quotcunq; numeri deinceps proportionales, extremi verò ipſorum primi inter ſe ſint; ipſi minimi ſunt omnium eandem cum eis rationem habentium. 39. B

*Si ſint quotuis numeri non continuè proportionales, extremi verò ipſorum ſint inter ſe primi; ipſi minimi ſunt in continuatione ſuarum proportionum.* 40. B

Si tres numeri ſint minimi cōtinuè proportionales; extremi quadrati ſunt: Si autem quatuor cubi, &c. 40.& 41.B

Extremi numeri continuè proportionalium quotcunq; minimorum primi ſunt inter ſe. 41.& 42.B

Duo numeri minimi in ſua proportione metiuntur omnes medios quotcunque minimorū in eadem ratione. 41. B

Si ſint quotcunque numeri deinceps proportionales, primus autem ſecundum non metiatur, neq; alius quiſquam vllum metietur. 44. B

*Si ſint quotcunque numeri deinceps proportionales, primus autem ſecundi nō ſit multiplex; neq; alius quiſquam vllius multiplex erit.* 45. B

*Si ſint quotcunque numeri deinceps proportionales, primus verò ſecundum metiatur; & quicunque alius quemlibet ſequentium metietur: Si primus autem ſecundi ſit multiplex; & quicunque alius cuiuslibet ſequentium multiplex erit.* 45. B

*Si ſint quotcunque numeri deinceps proportionales, primus autem, vel alius quiſquā nullum à ſecundo metiatur, neq; primus ſecundum metietur. Et ſi primus vel alius quiſquam nullius à ſecundo ſit multiplex; neq; primus ſecundi multiplex erit.* 45. B

Si ſint quotcunque numeri deinceps proportionales, primus autem extremum metiatur is etiam metietur ſecundum. 45. B

*Si ſint quotcunque numeri deinceps proportionales, primus autem, vel alius quiſquam quemlibet à ſecundo metiatur; metietur & primus ſecundum. Et ſi primus, vel alius quiſquam cuiuslibet à ſecundo ſit multiplex; primus quoq; ſecundi multiplex erit.* 46. B

Si inter duos numeros medij continua proportione ceciderint numeri; quot inter eos medij continua proportione cadūt numeri, tot & inter alios eandem cum illis habentes rationem medij continua proportione cadent. 46. B

*Inter duos numeros duplæ, triplæ, aut quintuplæ proportionis, vel ſuperparticularis, vel ſuperbipartientis nō poteſt cadere medius numerus proportionalis.* 46.& 47. B

*Item neque inter duos numeros ſola vnitate, aut binario differentes.* 46.& 47. B

*Ex quo fit, neq; Diapaſon, neq; Tonum in Muſicis diuidi poſſe bifariam.* 47. B

Si duo numeri ſint inter ſe primi, & inter eos medij continua proportione ceciderint numeri; quot inter eos medij continua proportione cadunt numeri, totidem inter vtrumq; eorum, & vnitatem medij continua proportione cadent. 47. B

*Si numerus ſeipſum multiplicans fecerit aliquē, & rurſum multiplicet productum, &c. omnes producti ſunt continuè proportionales ab vnitate.* 48. B


Si

Si inter duos numeros & vnitatẽ continuè proportionales ceciderint numeri; quot inter vtrumque ipſorum, & vnitatem deinceps medij continua proportione cadunt numeri, totidem & inter ipſos medij continua proportione cadent. 48. B

*Si quotquot numeri ſint ab vnitate continuè proportionales, ſecundus ab vnitate in ſe multiplicatus producet tertium, & ex eodem in hunc fiet quartus, & ſic deinceps.* 49. B

*Si ſint ab vnitate duo ordines numerorum continuè proportionalium, & multitudine æqualium; habebunt tertij ab vnitate proportionem duplicatã eius, quam habent ſecundi ab vnitate; quarti verò eiuſdem triplicatam, & quinti quadruplicatam: & ſemper deinceps vno amplius.* 49. B

*Si ſint ab aliquo numero eodem duo ordines numerorum continuè proportionaliũ, & multitudine æqualium; habebunt tertij ab illo numero proportionem duplicatam eius, quam habent ſecundi ab eodem; quarti verò eiuſdem triplicatam, &c.* 49. B

*Si inter duos numeros, & aliquẽ alium numerum aſſumptũ, continuè proportionales ceciderint numeri; quot inter vtrumque ipſorum, & aſſumptũ deinceps medij continua proportione cadunt numeri, totidem & inter ipſos medij continua proportione cadent.* 50. B

Si ſint quotlibet numeri deinceps proportionales, & multiplicans quiſque ſeipſum faciat aliquos; qui ab illis producti fuerint, proportionales erunt: Et ſi numeri primùm poſiti multiplicantes iam factos fecerint aliquos; ipſi quoque proportionales erunt: Et ſemper circa extremos hoc eueniet. 52. B

*Primi autem numeri producti, ſunt in duplicata ratione proportionis datorum numerorum: & ſecundo loco geniti in triplicata, &c.* 52. B

Si ab vnitate quotcunque numeri ſint deinceps proportionales; minor quicunque maiorem quemlibet metitur per aliquẽ eorum, qui in proportionalibus ſunt numeris. 66. B

*In numeris ab vnitate continuè proportionalibus, quantum abeſt maior quilibet à minore quouis eũ metiente, tantùm ab vnitate diſtat numerus, per quem minor maiorẽ metitur. Item quilibet numerus ſeipſum multiplicans, producit numerum tantùm ab eo diſtantem, quantum ipſe ab vnitate abeſt. Si verò minor aliquis maiorem quempiam multiplicet, procreatur numerus tantùm à maiore diſtans, quantum minor ab vnitate.* 67. B

Si ab vnitate quotcunq; numeri deinceps proportionales ſint; quicunque primorum numerorum vltimũ metiuntur, iidem & eum, q vnitati proximus eſt, metientur. 67. B

*Itaque neq; vllus numerus primus, qui maior ſit eo, qui proximus eſt vnitati, neque vllus minor proximum vnitati non metiens, metiri poteſt vltimum.* 68. B

Si ab vnitate quotcunq; numeri deinceps proportionales ſint, qui verò poſt vnitatem, primus ſit; Maximum nullus alius metietur, præter eos, qui ſunt in numeris proportionalibus. 68. B

*Si quotcunque numeri continuè proportionales, ſint minimi omnium eandem rationem habentium cũ ipſis; Numerus aliquem eorum metiens, metietur quoque alterum duorum numerorum, qui in eadem ratione ſunt minimi; vel certè ad alterum erit compoſitus.* 69. B

Si tres numeri ſint deinceps proportionales, & minimi omnium eandem cũ ipſis rationem habẽtium; Duo quilibet ſimul, ad reliquum primi erunt. 73. A

*Si quotcunque numeri deinceps proportionales, ſint minimi omnium eandem cum illis rationem habentium; ad quemlibet eorum reliqui omnes ſimul collecti, erũt primi.* 74. B

Si duo numeri primi inter ſe fuerint; non erit vt primus ad ſecundum, ita ſecundus ad aliũ quempiam. 74. B

Si fuerint quotcunque numeri deinceps proportionales, extremi autem ipſorum primi inter ſe ſint; nõ erit vt primus ad ſecundum, ita vltimus ad alium quempiam. 74. B

Si ſint quotcunque numeri deinceps proportionales, detrahantur autem à ſecundo, & vltimo æquales ipſi primo; Erit vt ſecundi exceſſus ad primum, ita vltimi exceſſus ad omnes ipſum antecedentes. 81. B

*Quolibet numero per duos quoſuis numeros diuiſo, erunt duo hi numeri Quotientibus, conuerſo ordine proportionales.* 83. B

*Quolibet numero per quotuis numeros diuiſo, erunt bini numeri dividentes binis Quotientibus reſpondentibus conuerſo ordine proportionales.* 83. B

*Quolibet numero per quotuis numeros continuè proportionales diuiſo, erũt Quotientes conuerſo ordine in eadem proportione continuè proportionales.* 83. B

*Si ſint quotuis numeri quicunque, & totidem alij in eiſdem proportionibus; erit vt ſumma priorũ ad quemlibet eorum, ita ſumma poſteriorum ad eum, qui illi in poſterioribus reſpondet.* 83. B

*Si ſint quotuis numeri quicunque, & totidem alij in eiſdem proportionibus; ſumma priorum per ipſos diuiſa ſigillatim, faciet eoſdem prorſus Quotiẽtes, quos ſumma priorum per ipſos diuiſa facit.* 84. B

*Si ſumma quotuis numerorũ continuè proportionalium per eos ſigillatim diuidatur; & quotientum ſumma per ipſos Quotientes; Et horum ſecundorum Quotientum ſumma per eoſdem ſecundos Quotientes, & ſic deinceps in infinitum; procreabuntur alternis ſemper iidem primi Quotientes ordine conuerſo.* 84. B

*Si ſumma quotuis numerorũ continuè proportionalium per eos ſigillatim diuidatur; erit ſumma omniũ quotientum æqualis numero, qui gignitur ex multiplicatione primi in vltimum, vel ex mutua multiplicatione quorumlibet duorum mediorũ ab extremis æqualiter diſtantium, vel denique (ſi quotientum numerus fuerit impar) ex multiplicatione medij Quotientis in ſe.* 84. B

*Itaque quando numerus terminorum eſt impar, ſumma Quotientum eſt numerus quadratus, cuius radix eſt medius Quotiens.* 85. B

*Proportionum compoſitio, de qua Euclides defin. 10. lib. 5. & defin. 5. lib. 6. non eſt verè additio proportionũ, vt plerique falsò exiſtimant.* 96. B

*Additio proportionum, ſubtractio, multiplicatio, atq; diuiſio, quomodo fiant.* 97. B

NVMERVS fractus. Vide Minutiæ numerorũ.

NVMERVS Par, Impar, Primus, Pariter par, Pariter par & impariter: Pariter impar, Perfectus.

*Numeros, quotquot iusserit quis, qui inter se multiplicati datum numerum gignant, reperire.* 290. & 291. A

*Numero per numerum diuiso; diuisus numerus gignitur ex multiplicatione numeri per diuisionẽ inuenti in numerum diuidentem.* 6. B

Si duobus numeris inæqualibus datis, detrahatur semper minor de maiore, alterna quadã detractione, neque reliquus vnquam metiatur præcedentem, quoad assumpta sit vnitas: qui principio dati sunt numeri, primi inter se erunt. 13. B

*Si duobus numeris inter se primis datis, detrahatur semper minor de maiore, alterna quadã detractione: nunquam reliquus metietur præcedentem, quoad assumpta sit vnitas.* 13. B

*Si datis duobus numeris inter se compositis, detrahatur semper minor de maiore, alterna quadam detractione: detractio ad vnitatem vsq; non perueniet, sed ad numerum, qui præcedentem detractum metiatur.* 13. B

Numerus duos numeros metiẽs: metitur quoque maximam eorundem mensuram. 14. B

Numerus tres numeros metiens, vel plures: metitur etiam maximam eorum mensuram communem. 15. B

Omnis numerus, omnis numeri, minor maioris, aut pars est, aut partes. 15. B

Si duo numeri mutuò se multiplicantes fecerint aliquos: geniti ex ipsis æquales inter se erunt. 24. B

*Idem in fractis numeris concludes.* 24. B

*Si duo numeri se mutuò multiplicauerint; procreabitur vnus, idemq; numerus.* 25. B

*Verum hoc etiam est in numeris fractis.* 25. B

Primi inter se numeri, minimi sunt omnium eandem cum eis rationem habentium. 31. B

Minimi numeri omnium eandem cum eis rationem habentium, primi inter se sunt. 31. B

*Quotcunque numeri inter se primi, minimi sunt in continuatione suarum proportionum. Et quotcunque numeri in continuatione suarum proportionum minimi, sunt inter se primi.* 32. B

Si duo numeri primi inter se fuerint; qui vnum eorum metitur numerus, ad reliquũ primus erit. 32. B

Si duo numeri ad quempiam primi fuerint; etiam ex illis genitus ad eundem primus erit. 32. B

Si duo numeri primi inter se fuerint: Etiam ex vno eorum genitus ad reliquum primus erit. 32. B

Si duo numeri ad duos numeros, vterque ad vtrumque primi fuerint: Et qui ex eis gignentur, primi inter se erunt. 33. B

Si duo numeri primi inter se fuerint; & multiplicans vterque se ipsum fecerit aliquem; Et geniti ex ipsis primi inter se erunt: Et si, qui in principio, genitos ipsos multiplicantes fecerint aliquos; Et hi quoque primi inter se erũt: Et semper circa extremos hoc eueniet. 33. B

Si duo numeri primi inter se fuerint; etiam vterque simul ad quemlibet illorum primus erit. Et si vterque simul ad vnum illorum primus fuerit; etiam qui in principio, numeri primi inter se erunt. 33. B

Numerus, qui ex duobus compositus ad vnum illorum primus est, ad reliquum quoque primus erit. 34. B

Omnis primus numerus, ad omnẽ numerum, quem non metitur, primus est. 34. B

Si duo numeri se mutuò multiplicantes fecerint aliquem; genitum autem ex ipsis metiatur aliquis primus numerus: is etiam vnum eorum, qui in principio, metietur. 34. B

*Si duo numeri se mutuò multiplicantes fecerint aliquẽ: genitum autem ex ipsis metiatur aliquis non primus numerus, vel certè ad ipsum sit compositus: is etiam ad vnum eorũ, qui in principio, compositus erit.* 34. B

Omnem compositũ numerum, aliquis primus numerus metitur. 34. B

Omnis numerus aut primus est, aut eum aliquis primus metitur. 35. B

Si duo numeri numerum quempiam metiantur: Etiam minimus, quẽ illi metiuntur, eundem metietur. 36. B

Si tres numeri numerum quempiam metiantur; Etiam minimus ab eis numeratus eundem metietur. 37. B

*Idem eueniet in pluribus numeris.* 37. B

Si numerum quispiam numerus metiatur; ille, quem metitur, partẽ habebit à metiente denominatam. 37. B

Si numerus partem habuerit quamlibet; metietur illum numerus à parte denominatus. 37. B

*Minimus numerus, quem quotlibet numeri metiuntur; minimus est, habẽs partes à numeris metientibus denominatas.* 38. B

*Datis quotlibet numeris, idem semper numerus procreabitur ex eorũ mutua multiplicatione, quomodocunq; ordinem inter se permutent.* 56. B

Si minimum numerum primi numeri metiantur; Nullus alius numerus primus illum metietur, præter eos, qui à principio metiebantur. 69. B

*Demonstratio priorum* 10. *propositionum lib.* 2. *in numeris.* 70. B

*Nullus numerus ita diuidi potest, vt productus ex toto in vnam partem, sit æqualis quadrato alterius partis.* 72. 73. & 79. B

Primi numeri plures sunt, omni proposita multitudine primorum numerorum. 76. B

Si pares numeri quotcunque componantur; totus par erit. 77. B

Si impares numeri quotcunque componantur, multitudo autem ipsorum sit par, totus par erit. 77. B,

Si impares numeri quotcunque componãtur multitudo autem ipsorum sit impar, & totus impar erit. 77. B

*Impar numerus pari numero, vel pluribus paribus additus, facit imparem.* 77. B

Si à pari numero par detrahatur; & reliquus par erit. 77. B


Si

Si à pari numero impar detrahatur, & reliquus impar erit. 78. B

Si ab impari numero impar detrahatur, reliquus par erit. 78. B

Si ab impari numero par detrahatur, reliquus impar erit. 78. B

Si impar numerus parem multiplicans fecerit aliquem, factus par erit. 78. B

*Si par numerus parem multiplicans fecerit aliquem, factus par erit.* 78. B

*Par in se multiplicatus facit parem.* 78. B

Si impar numerus imparem numerum multiplicans fecerit aliquem, factus impar erit. 78. B

*Impar numerus in se multiplicatus gignit imparem.* 79. B

*Numerus impar numerũ parem metiens, per numerum parem eum metitur.* 79. B

*Numerus impar numerum imparem metiens, per numerum imparem eum metitur.* 79. B

Si impar numerus parem numerum metiatur, & illius dimidium metietur. 79. B

Si impar numerus ad aliquẽ numerum primus sit, & ad illius duplum primus erit. 80. B

*Immò & ad quadruplum, octuplum, sedecuplum, & sic deinceps in proportione dupla.* 80. B

Numerorum à binario duplorum vnusquisque pariter par est tantùm. 80. B

Si numerus dimidium habeat imparem, pariter impar est tantùm. 80. B

Si par numerus neque à binario duplus sit, neque dimidium habeat imparem, pariter par est, & pariter impar. 81. B

Si ab vnitate quotcunq; numeri deinceps exponantur in dupla proportione, quoad totus compositus fiat primus, & totus hic in vltimum multiplicetur: Factus erit Perfectus. 82. B

NVMERVS Planus, Solidus, Quadratus, Cubus, similes plani, ac solidi numeri.

*Nullus numerus compositus ex integro & fracto, vel numerus fractus in se multiplicatus procreat numerum quadratum integrum.* 254. A

Plani numeri rationem inter se habent ex lateribus compositam. 44. B

Duorum quadratorum numerorum vnus medius est proportionalis numerus: Et quadratus ad quadratum duplicatam habet lateris ad latus rationem. 50. B

*Medio proportionali cadente inter duos quadratos, erit is ad vtrumuis quadratorum compositus.* 51. B

Duorum cuborum numerorũ duo medij proportionales sunt numeri: Et cubus ad cubum triplicatam habet lateris ad latus rationem. 51. B

*Duobus medijs proportionalibus cadentibus inter duos cubos, erunt ij, & vterlibet cuborum inter se compositi.* 51. B

Si quadratus numerus quadratum numerum metiatur, & latus vnius metietur latus alterius. Et si vnius quadrati latus metiatur latus alterius, & quadratꝰ quadratũ metietur. 53. B

Si cubus numerus cubum numerum metiatur, & latus vnius metietur latus alterius. Et si latus vnius cubi latus alterius metiatur, & cubus cubum metietur. 53. B

Si quadratus numerus quadratum numerum non metiatur, neque latus vnius metietur latus alterius. Et si latus vnius quadrati non metiatur latus alterius, neq; quadratus quadratum metietur. 53. B

Si cubus numerus cubum numerum non metiatur, neque latus vnius latus alterius metietur. Et si latus cubi vnius latus alterius non metiatur, neque cubus cubum metietur. 53. B

*Si quadratus numerus quadrati numeri, & cubus cubi, sit multiplex, & vnius latus lateris alterius multiplex erit. Et si vnius quadrati, & cubi latus lateris alterius sit multiplex, & quadratus quadrati, & cubus cubi multiplex erit. Si verò quadratus quadrati, & cubus cubi non sit multiplex, neque latus lateris multiplex erit. Et si latus lateris non sit multiplex, neque quadratus quadrati, neq; cubus cubi erit multiplex.* 54. B

Duorum similium planorum numerorum vnus medius proportionalis est numerus: Et planus ad planum duplicatam habet lateris homologi ad latus homologum rationem. 54. B

*Medius numerus proportionalis inter duos planos similes, ad vtrumlibet compositus est.* 54. B

Duorum similium solidorum numerorũ duo medij proportionales sunt numeri: Et solidus ad solidum triplicatam rationem habet lateris homologi ad latus homologum. 55. B

*Duo numeri medij proportionales inter duos solidos similes, & vterus solidorum, sunt compositi inter se.* 55. B

Si inter duos numeros vnus medius proportionalis cadat numerus, similes plani erunt illi numeri. 57. B

Si inter duos numeros duo medij proportionales cadant numeri, similes solidi sunt illi numeri. 57. B

Si tres numeri deinceps sint proportionales, primus autem sit quadratus, Et tertius quadratus erit. 58. B

Si quatuor numeri deinceps sint proportionales, primus autem sit cubus, Et quartus cubus erit. 58. B

Si duo numeri rationem habeãt inter se, quam quadratus ad quadratum, primus autem sit quadratus, & secundus quadratus erit. 59. B

*Proportio quadrati numeri ad non quadratum exhiberi non potest in duobus numeris quadratis.* 59. & 60. B

*Duo numeri in quintupla proportione proportionẽ non habent, quam quadratus ad quadratum.* 60. B

Si duo numeri rationem inter se habeãt, quam cubus ad cubum, primus autem sit cubus, & secundus cubus erit. 60. B

*Proportio cubi ad non cubum, reperiri non potest in duobus numeris cubis.* 60. B

Similes plani numeri rationem inter se habẽt, quam quadratus ad quadratum. 60. B

*Numeri proportionẽ habẽtes, quam quadratus ad quadratum, ſimiles plani ſunt.* 60. B

Similes ſolidi numeri rationem habent inter ſe, quam cubus ad cubum. 60. B

*Numeri proportionem habentes, quam cubus ad cubum, ſimiles ſolidi ſunt.* 61. B

*Nulli numeri habentes duplam proportionẽ, vel ſuperparticularem, vel ſuperbipartientem: vel duo numeri primi, vel primi inter ſe, quamuis neuter primus ſit, dummodò quadrati non ſint, aut cubi; ſimiles plani ſunt, aut ſolidi.* 61. B

*Si ſint duo numeri plani, aut ſolidi ſimiles, ſitq; minor primus; metietur minor maiorem.* 61. B

*Duo numeri inter ſe primi, quorũ minor primus ſit, non poſſunt eſſe plani, vel ſolidi ſimiles.* 61. B

Si duo ſimiles plani numeri multiplicantes ſe mutuò faciant quendam; productus quadratus erit. 62. B

Si duo numeri ſe mutuò multiplicantes faciãt quadratum; ſimiles plani erunt. 62. B

*Duo numeri quadrati ſe mutuò multiplicantes producũt quadratum.* 62. B

*Si duo numeri ſe mutuò multiplicantes faciant quadratum, alter autem ſit quadratus; Et reliquus quadratus erit.* 62. B

*Si duo numeri ſe mutuò multiplicantes faciant non quadratum, alter autem ſit quadratus, reliquus non quadratus erit.* 63. B

*Quadratus multiplicans non quadratum producit non quadratum.* 63. B

Si cubus numerus ſeipſum multiplicans procreet aliquem; productus cubus erit. 63 B

Si cubus numerus cubum numerum multiplicans faciat aliquem; factus cubus erit. 63. B

Si cubus numerus numerum quendam multiplicans faciat cubum; Et multiplicatus cubus erit. 63. B

*Cubus non cubum multiplicans facit non cubum.* 63. B

*Si cubus numerum quendam multiplicans faciat non cubum; Et multiplicatus non cubus erit.* 64. B

Si numerus ſeipſum multiplicãs faciat cubum; Et ipſe cubus erit. 64. B

Si compoſitus numerus numerum aliquẽ multiplicans quempiam faciat; Factus ſolidus erit. 64. B

Si ab vnitate quotcunq; numeri deinceps proportionales ſint; tertius quidem ab vnitate quadratus eſt, & vnũ intermittentes omnes; quartus autẽ eſt cubus, & duos intermittentes omnes; ſeptimus verò cubus ſimul, & quadratus, & quinq; intermittẽtes omnes. 64 B

*Si ſint quotcunq; numeri ab vnitate continuè proportionales, omnes poſiti in locis imparibus, nimirum in tertio, quinto, ſeptimo, &c. ſunt quadrati. Omnes autem, qui ſequuntur proximè poſitos in locis, tertio, ſexto, nono, & alijs, quæ ternarius metitur, cuiuſmodi ſunt numeri, quartus, ſeptimus, decimus, &c. ſunt cubi. Omnes verò, qui proximè ſequuntur poſitos in locis, ſexto, duodecimo, decimooctauo, & alijs, quæ metitur ſenarius, quales ſunt, ſeptimus, tertiusdecimus, decimusnonus, &c. ſunt cubi ſimul & quadrati.* 65. B

Si ab vnitate quotcunq; numeri ſint deinceps proportionales, qui verò poſt vnitatem, ſit quadratus; Et reliqui omnes quadrati erunt. At ſi qui poſt vnitatem, ſit cubus; & reliqui omnes cubi erunt. 65. B

Si ab vnitate quotcunq; numeri deinceps ſint proportionales, qui verò poſt vnitatem, non ſit quadratus, neq; alius vllus quadratus erit, præter tertium ab vnitate, & vnum intermittentes omnes. At ſi, qui poſt vnitatem, nõ ſit cubus; neque alius vllus cubus erit, præter quartum ab vnitate, & duos intermittentes omnes. 66. B

*Quando in numeris ab vnitate proportionalibus continuè, qui poſt vnitatem, non eſt cubus ſimul & quadratus; non neceſſe eſt, nullum alium eſſe quadratum ſimul & cubum, præter ſeptimum ab vnitate, & quinque intermittentes omnes: quia aliquando etiam quartus, eſt quadratus ſimul ac cubus, non exiſtente primo ab vnitate quadrato ac cubo ſimul.* 66. B

OBTVSANGVLVM triangulum. Vide Triangulum.

PARALLELAE lineæ. Vide Recta linea.

PARALLELEPIPEDVM, & aliæ figuræ ſolidæ non Regulares, ac plana parallela.

Ad quæ plana, eadem recta linea recta eſt; illa ſunt parallela. 201. B

*Si ſint duo plana parallela; recta linea, quæ ad vnũ eorum recta eſt, ad reliquum quoq; recta erit.* 201. B

Si duæ rectæ ſe mutuò tangẽtes, ad duas rectas ſe mutuò tangentes ſint parallelę, non in eodem conſiſtentes plano; Parallela ſunt, quæ per illa ducuntur, plana. 202. B

Si duo plana parallela plano quopiam ſecentur; communes illorum ſectiones ſunt parallelæ. 202 B

*Quæ eidem plano parallela, & inter ſe ſunt parallela; vel ſi conueniunt, vnum planum efficient.* 203. B

*Si in planis parallelis duo anguli ſint æquales, & lineæ vna vnius, lineæ vni alterius parallela; erit quoque altera linea alteri lineæ parallela, ſi modo ductæ ſint ex eadem parte plani per priores parallelas ductæ.* 203. B

*Duo plana ad idem planum recta, in quo faciant communes ſectiones parallelas, parallela ſunt: Et duorum planorum parallelorum, ſi vnum cuipiam plano ad rectos ſit angulos, erit & alterum ad idem, rectum.* 205. B

Si ſolidum parallelis planis contineatur; aduerſa illius plana parallelogramma ſunt ſimilia, & æqualia. 210. B

Si ſolidum parallelepipedum plano ſecetur p diagonios aduerſorum planorum; bifariam ſecabitur ſolidum ab ipſo plano. 214. B

Solida parallelepipeda ſuper eandẽ baſin conſtituta, & in eadem altitudine, quorum inſiſtentes lineæ in iiſdem collocantur rectis lineis, ſunt inter ſe æqualia. 214. B

Solida parallelepipeda ſuper eandẽ baſim conſtituta, & in eadem altitudine, quorum inſiſtentes lineæ non in iiſdem collocantur rectis lineis; inter ſe ſunt æqualia. 215. B

*Solida parallelepipeda æqualia ſuper eandem baſim, ſunt inſiſtentes*

*insistentes lineæ in eisdem collocentur rectis, siue nõ; in eadem sunt altitudine.* 215.B

Solida parallelepipeda super æquales bases constituta, & in eadem altitudine; æqualia sunt inter se. 215.B

*Solida parallelepipeda æqualia super æquales bases, in eadem sunt altitudine. Et parallelepipeda æqualia in eadem altitudine, super æquales sunt bases, si non habuerint eandem basim.* 217.B

*Hæc quinque, quæ proximè dicta sunt de parallelepipedis, conueniunt etiam in prismata, in quibus duo plana opposita sunt triangula.* 220.B

Si solidi parallelepipedi eorum, quæ ex aduerso, planorum latera bifariam secta sint; per sectiones autem plana sint extensa: Communis sectio planorum, & solidi parallelepipedi diameter, bifariam se mutuò secabunt. 223.B

In omni parallelepipedo diametri se mutuò bifariam diuidunt in vno puncto. 224.B

*Si solidum parallelepipedum plano secetur per centrum; bifariã secabitur solidum ab ipso plano. Et si solidum parallelepipedum plano secetur bifariam; per centrũ transibit ipsum planum.* 224.B

Si fuerint duo prismata planorũ triangularium oppositorum æqualis altitudinis, quorũ hoc quidem basim habeat, triangulum, illud verò parallelogrammum, duplum autem fuerit parallelogrammum trianguli: Æqualia erunt ipsa prismata. 225.B

Omnis pyramis triangularem habens basim diuiditur in duas pyramides æquales & similes inter se, triangulares habentes bases, & similes toti; Et in duo prismata æqualia, quæ duo prismata maiora sunt dimidio totius pyramidis. 228.B

Si fuerint duæ pyramides eiusdem altitudinis, triangulares habentes bases; sit autẽ illarum vtraque diuisa & in duas pyramidas æquales inter se, & similes toti; & in duo prismata æqualia: Ac eodem modo diuisa sit vtraq; pyramidum, quæ ex superiore diuisione natæ sunt, idque semper fiat: Erit vt vnius pyramidis basis ad alterius pyramidis basim, ita & omnia, quę in vna pyramide, prismata ad omnia, quæ in altera pyramide, prismata multitudine æqualia. 229.B

Pyramides eiusdem altitudinis super eandem, vel æquales bases triangulares, sunt inter se æquales. 231.B

*Pyramides triangulares æquales super eandem, vel æquales bases, eandem habent altitudinem. Et pyramides triangulares æquales, eiusdemq; altitudinis, habent bases æquales, vel eandem.* 231.B

Pyramides eiusdem altitudinis super æquales bases quascunque, vel eandem, sunt inter se æquales. 233.B

*Pyramides multangulæ æquales, & super æquales bases, vel super eandem; habent eandem altitudinem. Et pyramides multangulæ æquales, eandemq; habentes altitudinem; bases habent æquales, vel eandem.* 233.B

Omne prisma triangulam basim habens, diuiditur in tres pyramides æquales inter se, triangulares bases habentes. 233.B

*Prismata eiusdem altitudinis super eandem, vel æquales bases quascunque, inter se sunt æqualia. Et prismata æqualia super æquales bases, vel eandem, in eadem sunt altitudine. Et prismata æqualia eiusdem altitudinis, bases habent æquales, vel eandem.* 234.B

*Quæ de prismatis dicta sunt, intelligi debent de ijs, quæ habent plana opposita basibus æqualia, & similia.* 234. & 235.B

Omnis conus tertia pars est cylindri eandem cum ipso basim habentis, & altitudinem æqualem. 238.B

*Atque hoc verum est, siue coni & cylindri sint recti, siue scaleni, licèt non sit idem axis conorum, & cylindrorum.* 239.B

Coni & cylindri eiusdem altitudinis super eandem, vel æquales bases constituti, siue ambo sint recti, vel scaleni, siue vnus rectus, & alter scalenus, inter se sunt æquales. 241.B

Coni & cylindri æquales super eandẽ vel æquales bases, in eadem sunt altitudine. Et coni ac cylindri æquales in eadem altitudine, super æquales bases sunt, vel eandem. 241.B

*Si in planis parallelis descripti sint duo circuli, in quibus duæ rectæ abscindant arcus similes; erunt duæ rectæ coniungentes extrema vnius rectæ cum centro, parallelæ duabus rectis, quæ extrema alterius rectæ cũ centro coniungunt.* 341.B

## PARALLELOGRAMMVM, & aliæ figuræ planæ quadrilateræ.

Parallelogrammi cuiusque æqualia sunt & latera opposita, & anguli oppositi, atque ipsum diameter secat bifariam. 61.A

*Quadrilaterum habens latera opposita æqualia, parallelogrammum est.* 62.A

*Quadrilaterum habens angulos oppositos æquales, parallelogrammum est.* 62.A

*Rhombus, & Rhomboides parallelogramma sunt.* pag. 62.A

*Quadratum & altera parte longius, parallelogramma sunt.* 62.A

*Quadrilaterum diuisum bifariam ab vna diametro, non semper est parallelogrammum.* 62.A

*Quadrilaterum habens omnes angulos rectos, est parallelogrammum.* 62.A

*Quadrati, & Rhombi angulos secat diameter qualibet bifariam.* 62. & 63.A

*Rhomboidis, & altera parte longioris angulos secat diameter non bifariam.* 63.A

*Quadrati, & altera parte longioris diametri sunt æquales.* 63.A

*Rhombi, & Rhomboidis diametri non sunt æquales.* 63.A

*Parallelogrammi cuiusque diametri se mutuò secant bifariam.* 63.A

*Quadrilaterum, in quo diametri se mutuò bifariam secant, parallelogrammum est.* 63.A

*Parallelogrammum bifariam diuiditur à recta, quæ diametrum bifariam secat: Et recta dirimens parallelogrammum bifariam, secat diametrũ quoq; bifariam.* 64.A

Parallelogramma super eadẽ basi, & in eisdem parallelis constituta sunt æqualia. 67.A

*Parallelogramma æqualia super eandem basim, ad eas-*

*demq́ue partes conſtituta, ſunt inter eaſdem parallelas.* 68. *A*

Parallelogramma ſuper æqualibus baſibus, & in eiſdem parallelis conſtituta, ſunt æqualia. 68. A

*Parallelogramma æqualia ſuper baſes æquales, & ad eaſdem partes conſtituta, in eiſdem ſunt parallelis: Et parallelogramma æqualia in eiſdem parallelis, ſi non habuerint eandem baſim, ſuper æquales baſes ſunt conſtituta.* 68. *A*

*Parallelogrammorum inter eaſdem parallelas, quod maiorem baſim habet, maius eſt: Et quod maius eſt, maiorem habet baſim.* 69. *A*

*Quadrilaterum, quod ab vtraque diametro diuiditur bifariam, parallelogrammum eſt.* 72. *A*

*Trapezia in eiſdem parallelis, & ſuper eadem baſi, quorum oppoſitæ baſes ſunt æquales, ſunt æqualia. Et trapezia æqualia in eiſdem parallelis, & ſuper eadem baſi, habent baſes oppoſitas æquales.* 73. *A*

*Trapeziorum in eiſdem parallelis, & ſuper eadem baſi, quod maiorem habet baſim oppoſitam, maius eſt: Et quod maius eſt, habet baſim oppoſitam maiorẽ.* 73. *A*

*Trapezia in eiſdem parallelis, & ſuper æqualibus baſibus, quorũ oppoſitæ baſes ſint æquales, æqualia ſunt. Et trapezia æqualia in eiſdem parallelis, & ſuper æqualibus baſibus, habent baſes oppoſitas æquales.* 73. *A*

*Trapeziorum in eiſdem parallelis, & ſuper æqualibus baſibus, quod maiorem habet oppoſitam baſim, maius eſt: Et quod maius eſt, maiorem habet baſim oppoſitam.* 74. *A*

Parallelogrammum duplum eſt trianguli eandem cum eo baſim habentis, & in eiſdem parallelis conſtituti. 76. & 77. A

*Parallelogrammum æquale eſt triangulo duplam habenti baſim, & in eiſdem parallelis conſtituto.* 77. *A*

*Parallelogrammum duplum eſt trianguli æqualem cum eo baſim habentis, & in eiſdem parallelis conſtituti.* 77. *A*

*Si parallelogrammũ duplum fuerit trianguli, eandemq́ habuerint baſim, vel æquales, & ad eaſdem partes conſtituta; in eiſdem erunt parallelis: Et ſi parallelogrammum duplum fuerit trianguli, in eiſdemq́ parallelis; erunt baſes æquales, ſi non ſit eadem.* 77. *A*

*Si trapezium & triangulum ſuper eadem baſi, & in eiſdem fuerint parallelis, maior autem linea parallela trapezij, ſit baſis trianguli; erit trapezium minus duplo trianguli: Si verò minor linea parallela trapezij baſis ſit trianguli; erit trapezium maius duplo trianguli.* 78. *A*

*Trapezium habens duo latera oppoſita parallela, duplum eſt trianguli, quòd baſim habet vnũ latus trapezij, coniungẽs duas parallelas, vertice verò in medio puncto lateris oppoſiti.* 78. *A*

In parallelogrammo, complemẽta circa diametrum æqualia ſunt. 79. A

*Si parallelogrammo diuiſo in quatuor parallelogramma, duo aduerſa ſint æqualia, conſiſtent reliqua duo circa diametrum.* 79. *A*

*Quadrata linearum æqualium ſunt æqualia: Et quadratorum æqualium æquales ſunt lineæ.* 82. *A*

*Quadratum ex diametro quadrati deſcriptum, duplum eſt ipſius quadrati.* 86. *A*

*Quadratum diametri figuræ alterà parte longioris, æquale eſt duobus quadratis laterum inæqualium.* 86. *A*

*Parallelogrammum, cuius vnus tantùm angulus eſt rectus, habet omnes angulos rectos.* 91. *A*

*Rectangulum quodcunque æquale eſt alteri rectangulo ſub duabus rectis contento, quæ duobus lateribus illius ſint æquales.* 92. *A*

*Parallelogramma circa diametrum quadrati, ſunt quadrata.* 97. *A*

*Quadratum cuiuſque rectæ quadruplum eſt quadrati rectæ, cuius illa dupla eſt. Et ſi quadratum quadrati ſit quadruplum, latus lateris duplum eſt.* 97. *&* 319. *A*

*Parallelogrammum ad rectam applicatum deficiẽs quadrato, æquale eſt rectangulo ſub ſegmentis per applicationem factis comprehenſo.* 331. *A*

PAR & impar numer⁹. Vide Numerus par, &c.

PARITER par, pariter par & impariter, ac pariter impar. Vide Numerus par, &c.

PERFECTVS numerus. Vide Numerus par, &c.

PERPENDICVLARIS linea. Vide Recta linea.

PLANA figura intra, & extra circulum, atque aliam figuram. Vide Figura intra & extra circulum, &c.

PLANAE figuræ quadrilateræ. Vide Parallelogrammum, &c.

PLANA parallela. Vide Parallelepipedum, &c.

PLANI numeri ſimiles. Vide Numerus planus, Solidus, Quadratus, &c.

PLANVS angulus. Vide Angulus.

PLANVS numerus. Vide Numerus planus.

PORTIO circuli. Vide Circulus.

PRIMI inter ſe numeri. Vide Numerus par, &c.

PRIMVS numerus. Vide Numerus par, &c.

PRISMA. Vide Parallelepipedum, &c.

PROPORTIO Figurarum, Angulorum, & Linearum. Vide Figuræ, Anguli, & lineæ proportionales.

PROPORTIO magnitudinum in communi. Vide Magnitudines proportionales in communi.

PROPORTIONALES magnitudines in communi. Vide Magnitudines proportionales in communi.

PROPORTIONALES numeri in communi. Vide Numeri proportionales in communi.

PROPORTIO numerorum in communi. Vide Numeri proportionales in communi.

PYRAMIS. Vide Parallelepipedum, &c.

QVADRATVM. Vide Parallelogrammum, &c.

QVADRATVS numerus. Vide Numerus Planus, Solidus, &c.

QVADRILATERAE figuræ planæ. Vide Parallelogrammum.

RATIONALES, & Irrationales magnitudines.

*Omnes Rationales lineæ non solùm expositæ Rationali, sed etiam inter se sunt commensurabiles.* 123.B
Spatium Rationali spatio commensurabile, & ipsum Rationale est. 123.B
Quod sub Rationalibus longitudine commensurabilibus rectis (quomodocunque commensurabiles sint expositæ Rationali) continetur Rectangulum; Rationale est. 123.B
Si Rationale ad Rationalem applicetur, latitudinem efficit Rationalem, & ei, ad quam applicatum est, longitudine commensurabilem. 124.B
Quod sub Rationalibus potentia solùm commensurabilibus rectis continetur rectangulum Irrationale est: Et recta ipsum potens, Irrationalis. Vocetur autem Media. 125.B
*Recta media proportionalis inter duas Rationales potentia tantùm commensurabiles, Irrationalis est, quæ vocatur Media.* 126.B
*Rectangulum sub duabus Rationalibus potẽtia tantùm commensurabilibus contentum, Medium dici potest.* 126.B
*Non omne rectangulum Medium continetur sub duabus Rationalibus potẽtia solùm commensurabilibus.* 126.B
Quod à media fit, ad Rationalem applicatum, latitudinẽ efficit Rationalem, & ei, ad quam applicatum est, longitudine incommensurabilem. 126.B
*Omne spatium Medium æquale est rectangulo sub duabus Rationalibus potentia tantùm commensurabilibus contento.* 126.& 127.B
Mediæ commensurabilis, Media est. 127.B
Medio spatio commensurabile, Medium est. 127.B
*Non omnis Media recta cuilibet Mediæ est commensurabilis.* 128.B
Quod sub Mediis longitudine commensurabilibus rectis cõtinetur rectangulum, Medium est. 128.B
Quod sub Mediis potentia tantùm commensurabilibus rectis continetur rectangulum; vel Rationale est, vel Medium. 128.B
*Quod sub Mediis longitudine & potentia incommensurabilibus continetur, nec Rationale est, nec Medium, sed Irrationale aliud, quod æquale est rectangulo sub lineis Rationali, & Irrationali, quæ Media appellatur, contento.* 129.B
Medium non superat Medium Rationali. 130.B
*Rationale superat Rationale Rationali.* 130.B
*Duo spatia Irrationalia componere possunt spatium Rationale.* 137.B
*Duo spatia Irrationalia componant semper spatium Rationale.* 137.B
Si duæ Rationales potentia tantùm commensurabiles componantur; tota Irrationalis erit. Vocetur autem ex binis nominibus. 138.B
Si duæ Mediæ potentia tantùm commensurabiles componantur, quæ Rationale contineant; tota Irrationalis erit. Vocetur autem ex binis Mediis prima. 139.B
Quod sub linea Rationali, & Irrationali continetur rectangulum, Irrationale est. 139.B
Si duæ Mediæ potentia tantùm commensurabiles componantur, quę Medium contineant; tota Irrationalis erit. Vocetur autem ex binis Mediis secunda. 139.B
Si duæ rectę potentia incommensurabiles componantur, quæ faciant compositum quidem ex ipsarum quadratis Rationale, quod autẽ sub ipsis continetur, Medium; tota recta Irrationalis erit. Vocetur autem Maior. 140.B
Si duę rectæ potentia incommensurabiles componantur, quæ faciant compositum quidem ex ipsarum quadratis Medium, quod autem sub ipsis continetur, Rationale; tota recta Irrationalis erit. Vocetur autem Rationale ac Medium potens. 141.B
Si duę rectæ potentia incommensurabiles componantur, quæ faciant & compositũ ex ipsarum quadratis Mediũ, & quod sub ipsis continetur, Medium, incommensurabileq; compositio ex quadratis ipsarum; tota recta Irrationalis erit. Vocetur autem bina Media potens. 141.B
Sex lineæ Irrationales compositæ, vt ea, quę ex binis nominibus, quę ex binis Mediis prima, quæ ex binis Mediis secunda, Maior, Rationale, ac Medium potens, & bina Media potens, ad vnum duntaxat punctum diuiduntur in nomina, singulæ. à pag. 142. vsque ad 145. B
Sex genera linearum Irrationalium, quæ ex binis nominibus dicuntur. 145.B
Si sex spatia contineantur sub Rationali, & ex binis nominibus prima, secunda, tertia, quarta, quinta, ac sexta; Rectæ ea potentes Irrationales sunt hæ ordine; ex binis Mediis prima, ex binis Mediis secunda, Maior, Rationale, ac Medium potens, & bina Media potens. 149. vsque ad 152.B
Quadrata sex harum linearum Irrationalium; eius quæ ex binis nominibus, ex binis Mediis primæ, ex binis Mediis secundæ, Maioris, Rationale, ac Medium potentis, & bina Media potentis: ad Rationalem applicata, latitudines faciunt ordine sex lineas ex binis nominibus. 152. vsque ad 155.B
Rectæ longitudine commensurabiles sex lineis Irrationalibus prædictis, sunt quoque eiusdem ordinis, & nominis Irrationales. 155. vsque ad 158.B
*Idem euenit, si potentia tantùm sint commensurabiles,*

*præterquam in ea, quæ ex binis nominibus dicitur.* 156. B

Si Rationale & Medium componantur, quatuor Irrationales fiunt; vel ea, quæ ex binis nominibus, vel quæ ex binis Mediis prima, vel Maior, vel Rationale, ac Medium potens. 158. B

Si duo Media inter se incommensurabilia componantur; duæ reliquæ Irrationales fiunt; vel ex Mediis secunda, vel bina Media potés. 159. B

Ea, quæ ex binis nominibus, & aliæ quinque Irrationales eam sequentes, & inter se, & à Media differunt. 159. & 160. B

*Recta linea media proportionalis secundùm Analogiam Arithmeticam inter duo nomina cuiusuis lineæ Irrationalis, per compositionem factæ, est quoq; Irrationalis eiusdem ordinis.* 160. B

Si à Rationali Rationalis auferatur potẽtia tantùm commensurabilis existens toti: (*Vel si à maiori nomine eius, quæ ex binis nominibus, minus auferatur.*) Reliqua Irrationalis est. Vocetur autem Apotome. 161. B

Si à Media auferatur Media potentia tantùm commensurabilis existens toti, quæ cum tota Rationale contineat; (*Vel si à maiori nomine eius, quæ ex binis medijs prima, minus nomen auferatur.*) Reliqua Irrationalis est. Vocetur autẽ Mediæ Apotome prima. 161. B

Si à Media auferatur Media potentia tantùm commensurabilis existens toti, quæ cùm tota Medium contineat; (*Vel si à maiori nomine eius, quæ ex binis Medijs secunda, minus nomen auferatur.*) Reliqua Irrationalis est. Vocetur autem Mediæ Apotome secunda. 162. B

Si à recta linea auferatur recta potentia incommensurabilis existens toti, quæ cum tota faciat compositũ quidem ex ipsarum quadratis Rationale; quod autem sub ipsis continetur Medium; (*Vel si à maiori nomine lineæ Maioris minus nomen auferatur.*) Reliqua Irrationalis est. Vocetur autem Minor. 162. B

Si à recta auferatur recta potentia incommensurabilis existens toti, quæ cũ tota faciat compositum quidem ex ipsarum quadratis Medium; quod autem sub ipsis continetur, Rationale; (*Vel si à maiori nomine eius, quæ Rationale ac Medium potest, minus nomen auferatur.*) Reliqua Irrationalis est. Vocetur autem cum Rationali Medium totum efficiens. 163. B

Si à recta auferatur recta potentia incommensurabilis existens toti, quę cũ tota faciat & compositum ex ipsarum quadratis, Medium; & quod sub ipsis continetur, Medium, incommensurabileq; composito ex quadratis ipsarum; (*Vel si à maiori nomine eius, quæ bina Media potest, minus nomen auferatur.*) Reliqua Irrationalis est. Vocetur autẽ cum Medio Medium totum efficiens. 163. B

Apotomæ vna tantùm congruit recta Rationalis, potentia solùm commensurabilis existẽs toti. 164. B

Mediæ Apotomæ primæ vna tantùm congruit recta Media, potentia solùm commensurabilis existens toti, & cum tota Rationale continens. 164. B

Mediæ Apotomæ secundæ vna tantũ congruit recta Media, potentia solùm commensurabilis existens toti, & cum tota Medium continens. 165. B

Minori vna tantùm congruit recta, potentia incommensurabilis existens toti, & cum tota faciens compositũ quidem ex ipsarum quadratis Rationale; quod autem sub ipsis continetur, Medium. 165. B

Ei, quæ cum Rationali Medium totum facit, vna tantùm congruit recta potentia incommensurabilis existens toti, & cum tota faciẽs compositum quidem ex ipsarum quadratis Medium; quod autem sub ipsis continetur, Rationale. 166. B

Ei, quæ cum Medio Medium totum facit, vna tantùm congruit recta, potentia incommensurabilis existens toti, & cum tota faciens & compositum ex ipsarum quadratis Medium, & quod sub ipsis continetur, Mediũ, incommensurabileque composito ex ipsarum quadratis. 166. B

Sex genera linearum Irrationalium, quæ Apotomæ dicuntur. 167. B

Si sex spatia contineantur sub Rationali, & Apotoma prima, secunda, tertia, quarta, quinta, & sexta; Rectæ ea potentes Irrationales sunt hæ ordine; Apotome, Mediæ Apotome prima, Mediæ Apotome secunda, Minor, ea quæ cum Rationali Medium totum efficit, & ea quæ cum Medio Medium totum efficit. 169. vsque ad 172. B

Quadrata harum sex linearum Irrationalium, Apotomæ, Mediæ Apotomæ primæ, Mediæ Apotomæ secundæ, Minoris, eius quæ cum Rationali Medium totum efficit, & eius, quæ cum Medio Medium totum efficit, ad Rationalem applicata, latitudines faciunt ordine sex Apotomas. 173. vsque ad 175. B

Rectæ longitudine commensurabiles sex lineis Irrationalibus prædictis, quæ per detractionem fiunt, sunt quoq; Irrationales eiusdem ordinis & nominis. 176. vsque ad 178. B

*Idem eueniet, si potentia tantùm eis sint commensurabiles, præterquam in Apotoma.* 176. B

Medio à Rationali detracto; Recta, quæ reliquũ spatiũ potest, vna ex duabus Irrationalibus fit, vel Apotome, vel Minor. 178. B

Rationali à Medio detracto; aliæ duæ Irrationales fiunt, vel Mediæ Apotome prima, vel cum Rationali Medium totũ efficiens. 179. B

Medio à Medio detracto, quod sit incommensurabile toti; reliquæ duæ Irrationales fiunt, vel Mediæ Apotome secunda, vel cum Medio Medium totum efficiens. 179. B

Apotome non est eadem, quæ ex binis nominibus. 179. B

Apotome, & aliæ quinque Irrationales eam sequentes, & inter se, & à Media differunt. 180. B

Tredecim lineæ Irrationales inter se, diuersæ. 180. & 181. B

Quadratum

Quadratum Rationalis ad eam, quæ ex binis nominibus, applicatum, latitudinem facit Apotomen, cuius nomina commensurabilia sunt nominibus eius, quæ est ex binis nominibus, & in eadem proportione; & adhuc Apotome quę fit, eundem habet ordinem, quę ea, quæ est ex binis nominibus. 181.B

Quadratum Rationalis ad Apotomen applicatum, latitudinem facit eam, quæ ex binis nominibus, cuius nomina commensurabilia sunt Apotomæ nominibus, & in eadem proportione; & adhuc, quæ ex binis nominibus fit, eundem habet ordinem, quem ipsa Apotome. 182.B

Si spatium cõtineatur sub Apotoma, & ea, quæ ex binis nominibus, cuius nomina commensurabilia sunt nominibus Apotomæ, & in eadem proportione; Recta spatium potens, est Rationalis. 183.B

Rationale spatium contineri potest sub duabus rectis Irrationalibus. 183.B

A Media infinitæ Irrationales fiunt, & nulla alicui antecedentium est eadem. 183.B

Si recta linea Rationalis extrema ac media ratione secetur; vtrumque segmentorum Irrationalis linea est, quæ vocatur Apotome. 257.B

*Si recta secundùm extremam & mediam rationem secetur, sitq; maius segmentum linea Rationalis; erit minus segmentum Apotome.* 258.B

Si in circulo Rationalem habente diametrum, pentagonum æquilaterum describatur; pentagoni latus Irrationalis est linea, quæ vocatur Minor. 262.B

*Si sphæræ diameter fuerit Rationalis; erit tam superficies Tetraedri, quàm Octaedri in ea sphæra, Media.* 291.B

*Triangulum æquilaterum, cuius latus est Rationale, superficies Media est.* 291.

*Latus Icosaedri in pyramide descripti est Apotome.* 326.B

## RECTA LINEA.

*Rectæ duæ lineæ non habent vnum, & idem segmentum commune.* 15.A

*Rectæ duæ in vno puncto concurrentes, si producantur ambæ, necessariò se mutuò in eo puncto intersecabunt.* 15.A

*Rectæ duæ lineæ spatiũ non comprehendunt.* 16. & 17.A

Rectæ duæ lineæ duabus eisdem rectis lineis super eadem recta linea æquales, vtraque vtrique, non constituentur ad aliud atq; aliud punctum, ad easdem partes, eosdemque terminos cum duabus initio ductis rectis lineis habentes. 26.A

Recta linea alteri insistẽs facit cum ea aut duos rectos angulos, aut duobus rectis æquales. 33.A

Rectæ duæ ad vnum punctum coniunctæ faciunt vnam rectam, quando alia recta ex illo puncto educta cum illis facit duos angulos non ad easdem partes duobus rectis æquales. 34.A

*Rectæ duæ ad vnum punctum coniunctæ non faciunt vnam rectam, quando alia recta ex illo puncto educta cum illis facit duos angulos ad easdem partes duobus rectis æquales.* 34.A

Rectæ duæ se intersecantes faciunt angulos ad verticem oppositos æquales. 34.A

*Rectæ duæ se intersecantes faciũt quatuor angulos quatuor rectis æquales.* 35.A

Rectæ quotcunque ad vnum punctum conuenientes faciunt omnes angulos quatuor rectis æquales. 35.A

*Rectæ duæ facientes cum alia recta in eodem puncto, non ad easdem partes, angulos ad verticem æquales, in directum sunt coniunctæ.* 35.A

*Rectæ quatuor in eodem puncto facientes binos oppositos angulos æquales, constituunt duas rectas lineas.* 35.A

*Rectæ lineæ inter se æquales ex vno puncto ad rectam lineam plures quàm duæ, duci non possunt.* 36.A

*Rectæ lineæ ad eandem rectam perpendiculares, plures quàm vna, duci non possunt.* 37.A

*Recta linea faciente cum alia angulos inæquales, perpendicularis ex vno illius puncto ad hanc demissa, cadit ad partes anguli acuti.* 37.A

*Rectarum omnium ex vno puncto ad aliam rectam demissarum, minima est perpendicularis.* 38.A

Rectæ duæ lineæ ab extremitatibus vnius lateris trianguli interius cõstitutæ, reliquis trianguli duobus lateribus minores quidem sunt, maiorem verò angulum continent. 40.A

*Rectæ duæ lineæ intra triangulum, quarum vna ab extremo vnius lateris, altera verò non ab extremo ducitur, maiores esse possunt reliquis trianguli duobus lateribus, minorem q; angulum comprehendere.* 41.A

Rectæ duæ lineæ parallelæ sunt, si recta in eas incidens faciat alternos angulos æquales. 47.

Rectæ duæ lineæ parallelæ sunt, si recta in eas incidens faciat externum angulum interno ad easdem partes opposito, æqualem; aut internos ad easdem partes duobus rectis æquales. 47.A

*Rectas duas lineas concurrere productas, si recta in eas incidens faciat duos internos angulos ad easdem partes duobus rectis minores: quo modo à Proclo demonstretur.* 49.A

*Rectas easdem duas concurrere, qua ratione à nobis demonstretur.* 53.A

*Rectarum linearum angulum constituentium distantia, si in infinitum producantur, omnem finitam magnitudinem excedet.* 48. & 50.A

*Recta linea secans vnam duarum parallelarum, producta secat & alteram.* 48.A

*Linea, cuius omnia puncta à recta linea, quæ in eodem cum ea plano existit, æqualiter distant, recta est.* 50.A

*Recta linea super aliam rectam in transuersum mota, constituens q; in suo extremo cum ea angulos semper rectos, describet altero suo extremo lineam quoque rectam.* 51.A

*Si ad rectam lineam duæ perpendiculares rectæ erigantur inter se æquales, quarum extrema puncta per lineam rectam coniungantur; erit perpendicularis ex quouis puncto huius rectæ ad priorem rectam demissa, vtrilibet priorum perpendicularium æqualis.* 52.A

*Si ad rectam lineam duæ perpendiculares rectæ linea*

*erigantur inter ſe æquales, quarum extrema puncta per lineam rectam coniungantur: efficiet hæc recta cum vtraque perpendiculari angulum rectum.* 52.A

*Si in duas rectas lineas alia recta incidens faciat cum vna earum angulum internum rectum, & cum altera ex eadem parte acutum: duæ illæ rectæ minus ſemper inter ſe diſtabunt ad eas partes, vbi eſt angulus acutus, ex altera verò parte ſemper inter ſe magis diſtabunt.* 52.A

Recta incidens in duas parallelas facit & angulos alternos æquales, & externum interno ad eaſdem partes æqualem, & internos duos ad eaſdem partes duobus rectis æquales. 54.A

Rectæ lineæ, eidem parallelæ, & inter ſe ſunt parallelæ. 55.A

*Rectæ lineæ, eidem parallelæ, ſi inter ſe coeant, conſtituunt vnam lineam rectam.* 55.A

Rectæ lineæ, quæ parallelas ad eaſdem partes connectunt, æquales ſunt, & parallelæ. 61.A

*In figura æquilatera, & æquiangula parium laterum, oppoſita quælibet duo latera ſunt parallela.* 66.A

*Recta ſecans duo trianguli latera bifariam, reliquo lateri eſt parallela.* 72.A

Si fuerint duæ rectæ, ſeceturque ipſarum altera in quotuis ſegmenta: Rectangulum comprehenſum ſub illis duabus rectis lineis, æquale eſt eis quæ ſub inſecta, & quolibet ſegmentorum comprehenduntur, rectangulis. 93.A

*Si fuerint duæ rectæ lineæ, ſecenturq; ambæ in quotuis ſegmenta: Rectangulum comprehenſum ſub illis duabus rectis, æquale eſt eis, quæ ſub ſingulis ſegmentis vnius, & quolibet ſegmentorum alterius continentur, rectangulis.* 94.A

*Si ſint duæ rectæ lineæ, ſecenturq; ambæ vtcunq;: Rectangulum comprehenſum ſub illis duabus lineis, vna cum rectangulo ſub vna parte vnius, & vna parte alterius comprehenſo, æquale eſt eis, quæ ſub totis lineis, & dictis partibus mutuò continentur, rectangulis, vnà cum rectangulo ſub reliquis partibus comprehenſo.* 94.A

Si recta linea ſecta ſit vtcunq;, vel etiam in plura ſegmenta: Rectangula, quæ ſub tota, & quolibet ſegmentorũ comprehenduntur, æqualia ſunt ei, quod à tota fit, quadrato. 94. & 95.A

*Si linea recta ſecetur in quotuis ſegmenta: quadratum, quod à tota fit, æquale eſt eis, quæ ſub ſingulis ſegmentis, & quolibet ſegmento comprehenduntur, rectangulis.* 95.A

Si recta linea ſecta ſit vtcunq;: Rectangulum ſub tota, & vno ſegmentorum comprehenſum, æquale eſt & illi, quod ſub ſegmentis comprehenditur, rectangulo, & illi, quod à prædicto ſegmento deſcribitur, quadrato. 95.A

Si recta linea ſecta ſit vtcunq;: Quadratum totius æquale eſt quadratis ſegmentorum, & rectangulo comprehenſo bis ſub ſegmentis. 96.A

Si recta linea ſecetur bifariam, & non bifariam: rectangulum ſub inæqualibus ſegmentis totius comprehenſum, vnà cum quadrato intermediæ ſectionum, æquale eſt quadrato ex dimidia deſcripto. 98.A

Si recta linea bifariam ſecetur, & illi recta quædam linea in rectum adiiciatur: rectangulum comprehenſum ſub tota cum adiecta, & adiecta, vnà cum quadrato dimidiæ, æquale eſt quadrato rectæ compoſitæ ex dimidia, & adiecta. 99.A

Si recta linea ſecetur vtcunque: Quadratum totius, & quadratum vnius ſegmenti, ſimul æqualia ſunt rectangulo ſub tota & illo ſegmento bis contento vnà cum quadrato alterius ſegmenti. 101.A

*Si recta linea inæqualiter ſecetur: Erunt quadrata ſegmentorum æqualia rectangulo bis ſub ſegmentis comprehenſo, vnà cum quadrato exceſſus, quo maius ſegmentum ſuperat minus.* 101.A

Si recta linea ſecetur vtcunque: rectangulum quater comprehenſum ſub tota, & vno ſegmentorum, cum quadrato reliqui ſegmenti, æquale eſt quadrato rectæ compoſitæ ex tota, & priore ſegmento. 102.A

VEL.

Si linea recta ſecetur vtcunque: eiq; in rectum adiiciatur alia recta vni ſegmentorum æqualis: Quadratum totius lineæ compoſitæ æquale eſt rectangulo quater comprehenſo ſub data linea, & adiecta, ſiue dicto ſegmento, vnà cum quadrato alterius ſegmẽti. 102.A

VEL.

Si linea recta ſecetur bifariam, eique in rectum adiiciatur recta alia quantacunq;: Quadratum totius compoſitæ lineæ æquale eſt rectangulo quater comprehẽſo ſub linea compoſita ex dimidia, & adiecta, & dimidia, vnà cum quadrato adiectæ. 102. & 103.A

Si recta linea ſecetur bifariam, & non bifariam: quadrata ſegmentorum inæqualium, ſimul dupla ſunt quadrati ex dimidia, & quadrati ex intermedia ſectionum. 103.A

Si recta linea ſecetur bifariam, adiiciatur autem ei in rectum quæpiam recta linea: Quod à tota cum adiecta, & quod ab adiecta, vtraque ſimul quadrata dupla ſunt quadrati ex dimidia, & quadrati ex compoſita ex dimidia & adiecta. 104.A

*Perpendicularis linea ex puncto aliquo ad rectã quampiam eadens, eſt omnium ex eodem puncto ad eandem rectam cadentium breuiſſima.* 120.A

*Si recta ſecetur extrema ac media ratione: Iſoſceles, cuius baſis maiori ſegmento ſit æqualis, vtrumuis verò laterum æqualium ſectæ lineæ, habet vtrumque angulorum ad baſim duplum reliqui.* 180.A

*Si ſint duæ rectæ inæquales, & ad maiorem applicetur quarta pars quadrati ex minore deſcripti, deficiens figura quadrata: Non erunt ſegmenta, quæ ex applicatione fiunt, æqualia.* 127.B

Si ſint duæ rectæ inæquales, erit rectangulum ſub ipſis contentum, duplum rectanguli ſub alterutra earum, & dimidio alterius contenti. 136.B

Si recta

Si recta linea non bifariam ſecetur; erit compoſitum ex quadratis partium maius, quàm rectangulum ſub partibus bis comprehenſum, quadrato eius lineæ, qua maior pars minorem ſuperat. 140.B

Si recta non bifariam ſecetur, & rurſus non bifariam in alio puncto; erunt quadrata partium magis inæqualium ſimul maiora quadratis partiũ minus inæqualiũ ſimul. 142.B

Rectæ lineæ pars quædam non eſt in ſubiecto plano, quædam verò in ſublimi. 195.B

Si duæ rectæ ſe mutuò ſecent, in vno ſunt plano. Atque triangulum omne in vno eſt plano. 196.B

Si duo plana ſe mutuò ſecent, cõmunis eorum ſectio eſt linea recta. 196.B

Si recta linea rectis duabus ſe mutuò ſecãtibus, in communi ſectione ad rectos angulos inſiſtat: Illa ducto etiam per ipſas plano ad angulos rectos erit. 197.B

Si recta linea rectis tribus ſe mutuò ſecantibus, in communi ſectione ad rectos angulos inſiſtat; Illæ tres rectæ in vno ſunt plano. 197.B

Si duæ rectæ eidem plano ad rectos ſint angulos; parallelæ erunt illæ rectæ lineæ. 198.B

Si duæ ſint parallelæ rectæ, in quarum vtraque ſumpta ſint quælibet puncta: Illa recta, quæ ad hæc puncta adiungitur, in eodem eſt cum parallelis plano. 198.B

*Idem euenit, ſi rectæ non ſint parallelæ, in eodem tamen exiſtant plano.* 198.B

Si duæ ſint parallelæ rectæ, quarum altera ad rectos cuidam plano ſit angulos: Et reliqua eidem plano ad rectos angulos erit. 198.B

Quæ eidem rectæ lineæ ſunt parallelæ, ſed non in eodem cum illa plano; hæ quoq; ſunt inter ſe parallelæ. 199.B

Dato plano, à puncto, quod in illo datum eſt, duæ rectæ ad rectos angulos non excitabuntur, ad eaſdem partes. 201.B

*Item neq; à puncto in ſublimi ad ſubiectum planum duæ perpendiculares demittentur.* 201.B

Si recta plano cuipiam ad rectos ſit angulos; & omnia, quæ per ipſum, plana eidem plano ad rectos angulos erunt. 204.B

Si duo plana ſe mutuò ſecantia plano cuidam ad rectos ſint angulos, communis etiam illorum ſectio ad rectos eidem plano angulos erit. 205.B

Si planum ad planum rectum fuerit; & ab aliquo puncto eorum, quæ in vno ſunt, planorum, ad alterum planum perpendicularis ducta fuerit; In communem ſectionem cadet planorum ducta perpendicularis 223.B

RECTANGVLVM parallelogrammum. vide Parallelogrammum, &c.

RECTANGVLVM triangulũ. vide Triangulũ.

REGVLARIS figura. vide Figura intra & extra circulum, ſphæram, &c.

SCALENVM triangulum. vide Triangulum.

SEGMENTVM circuli. vide Circulus.

SIMILES plani ac ſolidi numeri. vide Numerus planus, &c.

SOLIDA Figura intra, & extra ſphæram, atque aliam figuram. vide Figura intra, & extra circulum, &c.

SOLIDI numeri ſimiles. vide Numerus planus, &c.

SOLIDVM Regulare. vide Figura intra, & extra circulum, &c.

SOLIDVS angulus. vide Angulus.

SOLIDVS numer⁹. vide Numerus planus, &c.

SPHAERA. vide Figura intra & extra circulum, ſphæram, &c.

TRAPEZIVM. vide Parallelogrammum, &c.

## TRIANGVLVM.

Triangula duo habẽt & baſes, & angulos æquales, ipſaq; æqualia ſunt, ſi duo latera vnius æqualia ſint duobus lateribus alterius, vtrumque vtrique, angulosque contentos habeant æquales. 22.A

Iſoſcelium triangulorum anguli tam ſupra baſem, quam infra, æquales ſunt. 23. & 24.A

*Æquilaterum triangulum habet tres angulos æquales.* 24.A

Triangulum, cuius duo anguli ſupra baſem æquales ſunt, habet duo latera angulis illis oppoſita æqualia. 25.A

*Triangulum, cuius omnes anguli æquales ſunt, æquilaterum eſt.* 25.A

*Triangulum, cuius duo anguli infra baſem æquales ſunt, Iſoſceles eſt.* 25.A

Triangula duo habent vnum angulum vni angulo æqualem, ſi duo latera vnum ambientia æqualia ſint duobus lateribus alterum ambientibus, & baſis baſi. 27.A

*Triangula duo æqualia ſunt, & inter ſe æquiangula, ſi duo latera vnius ſint æqualia duobus lateribus alterius, & baſis baſi.* 28.A

Trianguli externus angulus maior eſt vtrouis interno oppoſito. 36.A

Trianguli duo quilibet anguli duobus rectis minores ſunt. 37.A

*Trianguli orthogonij, vel amblygonij duo reliqui anguli ſunt acuti.* 37.A

*Trianguli æquilateri omnes anguli, & Iſoſcelis duo ſupra baſem, acuti ſunt.* 37.A

Trianguli maius latus maiorem angulum ſubtendit. 37.& 38.A

*Scalenum habet omnes tres angulos inæquales.* 38.A

Trianguli maior angulus maiori lateri ſubtenditur. 38.A

*Trianguli angulo bifariam ſecto, ſi recta ſecans partiatur baſem inæqualiter, latera circa illum angulũ inæ*

qualia ſunt, maiusq; eſt illud, quod maiori ſegmento baſis adiacet. 38.& 39.A

Trianguli angulo inæqualibus lateribus comprehenſo bifariam ſecto, recta ſecans diuidit baſim inæqualiter, maiusq; ſegmentum maiori lateri adiacet. 39.A

Trianguli angulo bifariam ſecto, ſi recta ſecans diuidat baſem bifariam, latera circa eum angulum æqualia ſunt: Et ſi æqualia ſint, recta ſecans angulum bifariam, ſecat & baſim bifariam. 39.A

Trianguli duo latera quomodocunq; ſumpta, reliquo ſunt maiora. 40.A

Triangula habentia duo latera duobus lateribus æqualia, vtrumq; vtrique, angulum verò comprehenſum angulo maiorem, habent & baſem baſe maiorem. 43.A

Triangula habentia duo latera duobus lateribus æqualia, vtrumque vtrique, baſem verò baſe maiorem, habent & angulum comprehenſum angulo maiorem. 44.A

Triangula habentia duos angulos duobus angulis æquales, vtrumq; vtriq;, vnumq; latus vni lateri æquale, ſiue quod æqualibus adiacet angulis, ſiue quod vni æqualium angulorum ſubtenditur; habeant & reliqua latera reliquis lateribus æqualia, vtrumq; vtrique, & reliquum angulum reliquo angulo æqualem. 45.A

Triangula habentia eaſdem conditiones, de quibus proximè dictum eſt, ſunt inter ſe æqualia. 46.A

In triangulo æquilatero, vel Iſoſcele, recta linea ab angulo duobus lateribus æqualibus comprehenſo ducta, diuidens vel angulum, vel baſem bifariam, perpendicularis eſt ad baſem; & ſi quidem angulum bifariã diuidat, ſecabit quoq; baſem bifariam. Si verò baſem ſecet bifariam, diuidet quoque angulum bifariam. Et contrà, linea perpendicularis ad baſem ducta diuidit & baſem, & angulum bifariam. 46.A

Triangulum, in quo linea recta ab vno angulorum ducta ad baſem perpendicularis diuidit vel baſin, vel angulum bifariam, habet duo latera circa illum angulum æqualia: Et ſi quidem baſis diuidatur bifariam, angulus quoq; bifariam ſecabitur: ſi verò angulus bifariam ſecetur baſis quoque diuidetur bifariam. 46.A

Si duo triangula habeant duos angulos duobus angulis æquales, vtrumque vtrique, & vnum latus vni lateri æquale, quod tamen neque æqualibus adiacet angulis, neque vni æqualium angulorum opponitur; nihil colligi poteſt. 56.A

Trianguli externus angulus duobus internis oppoſitis eſt æqualis: Et omnes tres anguli duobus rectis æquales ſunt. 57.B

Trianguli cuiuſlibet omnes tres anguli ſimul æquales ſunt tribus angulis ſimul cuiuſcunq; alterius trianguli. 60.A

Iſoſceles duo anguli ſupra baſim ſemirecti ſunt, quando reliquus angulus rectus eſt. 60.A

Æquilateri trianguli quilibet angulus cõtinet duas tertias partes vnius recti, vel vnam tertiam partem duorum rectorum. 60.A

Æquilaterum triangulum à perpendiculari ex angulo ad baſim ducta diuiditur in duo ſcalena orthogonia, &c. 60.A

Triangula ſuper eadem baſi conſtituta, & in eiſdem parallelis, ſunt æqualia. 69.A

Triangula, quorum duo latera vnius æqualia ſint duobus lateribus alterius, vtrumq; vtriq;, angulum verò contentum angulo maiorem, quo pacto poſſint æqualia eſſe, & inæqualia. 69.A

Triangula ſuper æqualibus baſibus conſtituta, & in eiſdem parallelis, inter ſe ſunt æqualia. 70.A

Triangulum à recta ex angulo ad medium punctum lateris oppoſiti ducta ſecatur bifariam. 71.A

Triangula æqualia ſuper eadem baſi, & ad eaſdem partes conſtituta, in eiſdem ſunt parallelis. 71.A

Triangula æqualia ſuper æqualibus baſibus, & ad eaſdem partes conſtituta, in eiſdem ſunt parallelis. 72.A

Triangula æqualia inter eaſdem parallelas, ſi non habuerint eandem baſim, ſuper æquales baſes ſunt conſtituta. 72.A

Triangulorum inter eaſdem parallelas, quod maiorem habet baſim, maius eſt: Et quod maius eſt, maiorem habet baſim. 73.A

Si in triangulo linea recta vni laterum parallela ducatur; Recta ex angulo oppoſito ducta, diuidensq; alterutram parallelarum bifariam, diuidit quoq; alteram bifariam. 74.A

In rectangulis triangulis, quadratum lateris anguli recto oppoſiti, æquale eſt duobus quadratis ſimul reliquorum duorum laterum. 83.A

Si fuerint duo triangula rectangula, quorum latera rectis angulis oppoſita, ſint æqualia; erunt duo quadrata, reliquorum duorum laterum vnius trianguli, æqualia duobus quadratis reliquorũ duorum laterum alterius. 86.A

Si ex angulo à duobus lateribus inæqualibus trianguli cuiuſuis comprehenſo ad baſim perpendicularis ducatur, cadens intra triangulum; ſecabitur baſis inæqualiter, maiorq; pars iuxta maius latus erit. Et contrà, ſi baſis à perpendiculari ſecetur inæqualiter, erũt duo latera inæqualia, maiusq; erit prope maiorem partem baſis. 88.A

In omni triangulo, parallelogramma quæcunq; duorum laterum æqualia ſunt parallelogrammo reliqui lateris, cuius alterum latus æquale ſit, & parallelum rectæ ductæ ab angulo, quem duo illa latera continent, ad punctum, in quo conueniunt latera parallelogrammorum lateribus trianguli oppoſita, ſi ad partes anguli illius producantur. 88.A

Si quadratum vnius lateris trianguli æquale ſit duobus quadratis reliquorum duorum laterum; angulus ſub his comprehẽſus, rectus erit. 89.A

Triangulorum comparationes variæ, & quo modo fiant. 89.A

In amblygoniis triangulis, quadratum lateris angulo obtuſo oppoſiti quanto maius ſit quadratis reliquorũ duorum laterum. 106.A

In amblygoniis triangulis perpendicularis ex alterutro angulorum acutorum ad latus oppoſitum demiſſa, cadit extra triangulum ad partes anguli obtuſi. 107.A

Si in triangulo quadratum vnius lateris maius ſit quadratis aliorum duorum laterum: angulus illi lateri oppoſitus, obtuſus erit. 107.A


Si in

*Si in triangulo quadratum vnius lateris maius ſit quadratis reliquorum duorum laterum, rectangulo bis comprehenſo ſub alterutro horum laterum, & ſub exteriore linea, quam ex illo latere producto recta linea ab oppoſito angulo demiſſa abſcindit: demiſſa hæc linea ad latus productum perpendicularis erit, & angulus propoſiti trianguli priori illi lateri oppoſitus, obtuſus.* 107.A

In oxygoniis triangulis, quadratum lateris angulo acuto oppoſiti, quanto minus ſit quadratis aliorum duorum laterum. 109. & 110. A

*In quolibet triangulo perpendicularis in latus duobus acutis angulis adiacens ex oppoſito angulo demiſſa, cadit intra triangulum.* 110.A

*Si in triangulo quadratum vnius lateris minus ſit quadratis reliquorum duorum laterum; angulus illi lateri oppoſitus, eſt acutus.* 111.A

*Si in triangulo quadratum vnius lateris minus ſit quadratis reliquorum duorum laterum, rectangulo bis comprehenſo ſub alterutro horum laterum, & ſub recta linea inter angulum priori lateri oppoſitum, & rectam lineam ab angulo alteri illi lateri oppoſito demiſſam: Linea hæc demiſſa ad alterum illud latus perpendicularis erit, & angulus propoſiti trianguli priori illi lateri oppoſitus, acutus.* 111.A

*Si in triangulo à quouis angulo recta linea ducatur ſecans latus oppoſitum bifariam, erunt duo quadrata laterum circa illum angulum, ſimul dupla duorum quadratorum, quorum vnum ex linea ducta, alterum verò ex dimidiato latere deſcribitur.* 115.A

*Trianguli angulus, qui reliquis duobus eſt æqualis, rectus eſt.* 166.A

*Iſoſceles trianguli, cuius vterq; angulorum ad baſim duplus eſt reliqui, angulus reliquus continet quintam partem duorum rectorum, vel duas quintas vnius recti; vterq; verò ad baſim cõtinet duas quintas duorum rectorũ, vel quatuor quintas vnius recti.* 180.A

*Si recta ſecetur extrema ac media ratione; Iſoſceles, cuius baſis maiori ſegmento ſit æqualis, vtrumuis verò laterum æqualium datæ lineæ ſectæ, habet vtrumque angulorum ad baſim duplum reliqui.* 180.A

Si in triangulo rectangulo ab angulo recto demittatur perpendicularis ad baſim; erit rectangulũ ſub baſe, & alterutro baſis ſegmento, æquale quadrato lateris illi ſegmento adiacentis; Rectangulũ verò ſub baſis ſegmentis æquale quadrato perpẽdicularis; Rectangulum deniq; ſub baſe, & perpendiculari æquale rectangulo ſub lateribus circa angulum rectum. 136.B

Triangulum omne in vno eſt plano. 196.B

Latus trianguli æquilateri potentia ſeſquitertium eſt perpendicularis ex vno angulo ad baſim demiſſæ. 263. & 290.B

*Perpendicularis ex angulo trianguli æquilateri ad baſim oppoſitam demiſſa; tripla eſt eius perpendicularis, quæ ex centro trianguli ad eandem baſim deducitur: ſeſquialtera verò ſemidiametri circuli triangulum circumſcribentis.* 295.B

*Quadratum lateris trianguli æquilateri ad ipſum triangulum habet proportionem duplicatam proportionis lateris trianguli ad lineam medio loco proportionalem inter perpendicularem ab vno angulo ad latus oppoſitum ductam, & dimidium ipſius lateris.* 303.B

*Quadratum rectæ mediæ proportionalis inter dimidium latus trianguli æquilateri, & eius perpendicularem; æquale eſt ipſi triangulo.* 303.B

FINIS.