Notes du mont Royal

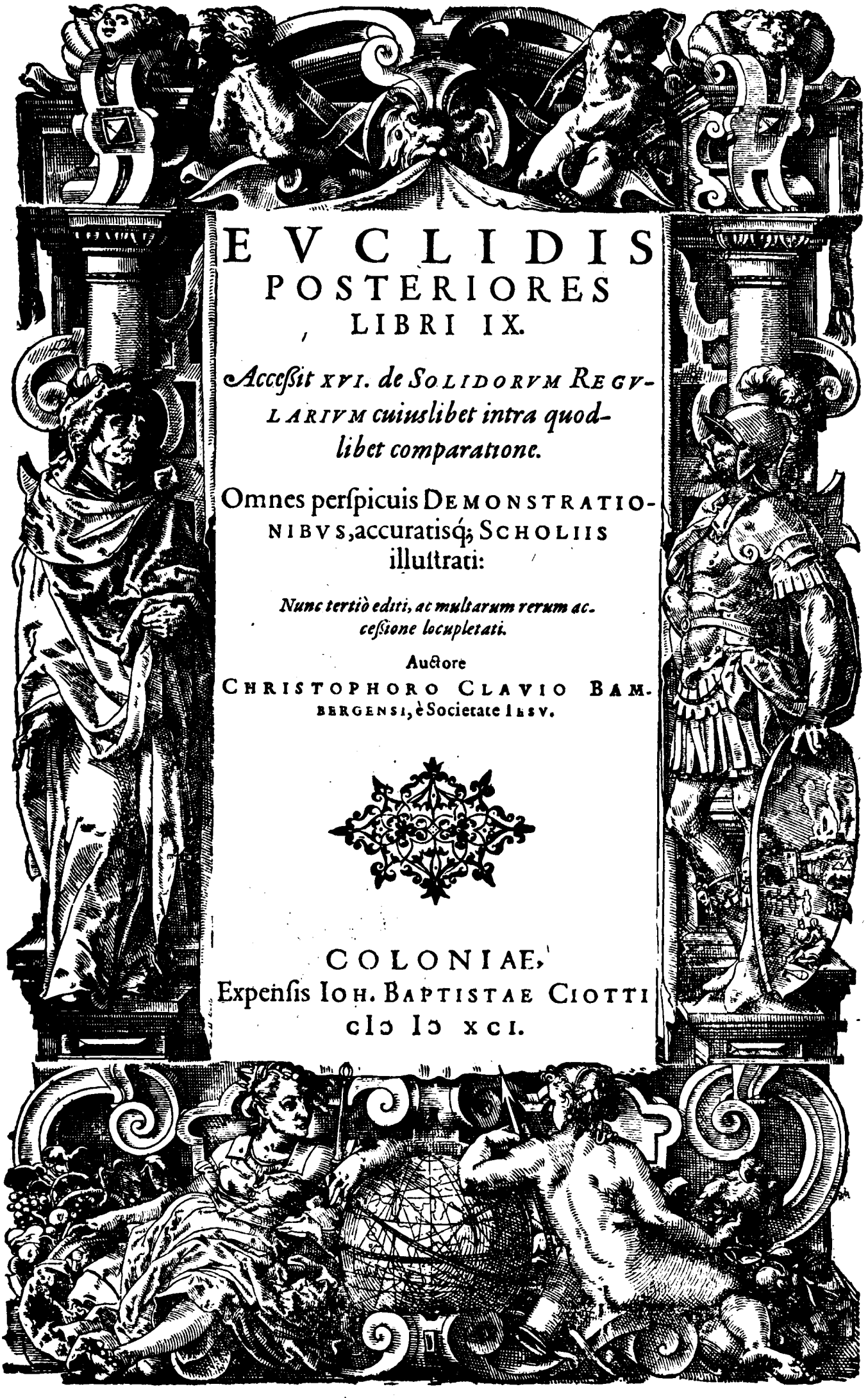
www.notesdumontroyal.com

Cette œuvre est hébergée sur « *Notes du mont Royal* » dans le cadre d'un exposé gratuit sur la littérature.

SOURCE DES IMAGES

Google Livres

Acc.



EVCLIDIS POSTERIORES, LIBRI IX.

Accessit XVI. de SOLIDORVM REGVLARIVM cuiuslibet intra quodlibet comparatione.

Omnes perspicuis DEMONSTRATIONIBVS, accuratisq; SCHOLIIS illustrati:

Nunc tertiò editi, ac multarum rerum accessione locupletati.

Auctore
CHRISTOPHORO CLAVIO BAMBERGENSI, è Societate IESV.

COLONIAE,
Expensis IOH. BAPTISTAE CIOTTI
CIↃ IↃ XCI.

LIBRARY
OF THE
MASSACHUSETTS
HORTICULTURAL
SOCIETY

EVCLIDIS

ELEMENTVM SEPTIMVM.

DEFINITIONES.

I.

VNITAS eſt, ſecundùm quam vnumquodque eorum, quæ ſunt, vnum dicitur.

HACTENVS egit Euclides de priori Geometriæ parte, ea ſcilicet, quæ circa plana verſatur; reſtabat altera ſolidorum. Verùm antè ei neceſſe fuit de lineis commenſurabilibus, & incommenſurabilibus diſſerere, quod ad proprietates corporum plurimorum, eorumq; maximè, quæ regularia nominantur, demonſtrandas, atq; vt oportet, explicandas, harum cognitio linearum requiratur, idq; adeò, vt abſq; eis ſolidorum tractatio imperfecta ſit, neq; ſuis numeris abſoluta. Huc accedit, quòd abſq; eiſdem lineis plurima latera tam planorum, quàm ſolidorum, ſi Geometriæ Theoria in opus conferatur, atq; vſum, neq; exprimi queant, neq; intelligi. Nam non rarò pleraque laterum ſunt illæ lineæ, quæ à Græcis ἄλογοι, à Latinis Irrationales appellantur: Vel, ſi non ſunt Irrationales, longitudine certè inter ſe ſunt incommenſurabiles, atq; adeò ſub menſuram numerorum non cadunt. Et quia earundem linearum explicatio, atq; intelligentia cum numeris eſt implicata, & coniuncta, vt abſque his nullo modo cognoſcantur; oportuit etiam numerorum explanationem, vt doctrinæ ſuum ordo, ratioq; conſtaret, lineis illis anteponi. Quare hoc libro ſeptimo, & duobus inſequentibus, circa numerorum proprietates, affectionesq;, quantum ea rei Geometricæ inſeruiunt, occupatur, vt in decimo deinde facilius, ac plenius demonſtrationes linearum commenſurabilium, & incommenſurabilium exequatur.

INCIPIENS igitur more ſuo à principijs, definit initio vnitatem, docetq; eam eſſe, ſecundùm quam vnumquodque eorum, quæ ſunt, vnum eſſe dicitur. Nam ſecundùm vnitatem vnum lapidem, vnum animal, vnum corpus, &c. dicere ſolemus. Cæterùm vnitas in numeris nullam ſuſcipit diuiſionem, quemadmodum nec punctum in magnitudinibus, vt libro primo docuimus.

II.

NVMERVS autem ex vnitatibus compoſita multitudo.

CVM numerus ſit multitudo quædam ex vnitatibus compoſita, manifeſtum eſt, numerũ quemlibet tot habere partes, quot ſunt vnitates eum conſtituentes: Ita vt vnitas ſit pars cuiuſuis numeri denominata ab ipſo numero, cuius eſt pars. Vt numerus 8. compoſitus ex 8. vnitatibus, diuiditur in totidem partes, nimirum in 8. vnitates, quarum quælibet octaua pars dicitur octonary. Sic quoque numerus 100. ex centum vnitatibus compoſitus, in totidem diſtribuitur, quarum quælibet centeſima ipſius pars eſt, &c.

EX his ſequitur, omnes numeros, quotcunq; ſint, inter ſe commenſurabiles eſſe, cùm eos vna eademq; menſura, nimirum vnitas, vt dictum eſt, metiatur: Id quod omnibus magnitudinibus nulla poteſt ratione conuenire, cùm plurimæ earum menſuram communem non habeant, ſed prorſus ſint incommenſurabiles, vt clariſſimè lib. 10. oſtendetur.

III.

PARS eſt numerus numeri, minor maioris, cùm minor metitur maiorem.

NON eſt diſſimilis hæc definitio illi, qua Euclides lib. 5. partẽ quantitatis continuæ expoſuit. Sicut enim ibi, ita & hic partem dunaxat aliquotam definit, cùm hæc ſolùm propriè dicatur metiri totum, vt ibidem latius explicauimus. Ita q; numerus 6. dicatur pars omnium horum numerorum 12. 18. 24. 30. 60. 630, &c. quia ille ſingulos hos metitur. Similiter huius numeri 576. partes erunt omnes hi numeri 3. 4. 6. 8. cùm illum ſinguli hi metiantur, vt perſpicuum eſt.

OMNIS autẽ pars ab eo numero nomẽ sibi sumit, per quẽ ipsa numerũ, cuius pars est, metitur; vt 6. pars huius numeri 42. nomen trahit à 7. cum 6. metiatur 42. per 7. Itaq; 6. erit septima pars numeri 42. & in reliquis eodem modo.

IIII.

PARTES autem, cùm non metitur.

VVLT Euclides, numerum minorem maioris numeri, quem non metitur, non partem, sed partes appellari: cuiusmodi est numerus 5. si conferatur cum hoc numero 18. Quamuis enim, cùm eum non metiatur, nisi per suas vnitates, pars ipsius dici non debeat; aptè tamen congruenterq; partes poterit appellari, quòd quinque contineat vnitates, quarum quilibet decimaoctaua pars est numeri 18. Vnde numerum 5. dicemus quinque partes decimasoctauas numeri 18. Ex quibus liquidò constat, Euclidem nomine partis intellexisse partem aliquotam tantum, non autem & aliquantam, vt volunt nonnulli; alioquin superuacanea esset hac definitio quarta, quæ partem aliquantam comprehendit.

CAETERVM partes quacunq; nomen accipiunt à duobus illis numeris, per quos cõmunis duorũ numerorum mensura vtrumq; eorum metitur, & eum scilicet qui partes dicitur, & eum, cuius ille partes appellatur: Ita vt si communis duorum numerorũ mensura metiatur minorem per 3. & maiorem per 5. dicatur minor maioris tres quintæ. Tales partes sunt 6. huius numeri 10. Nam communis eorum mensura 2 metitur 6. p 3. & 10. per 5. Eadem ratione eundem numerũ 6. dicemus sex decimas eiusdem numeri 10. cùm vnitas, eorum communis mensura, illum metiatur per 6. hunc verò per 10. Idem iudicium habeto & de reliquis.

QVOD si roges, cur Euclides hoc loco non solùm eum numerum minorem definiat, qui maioris pars est, verùm etiam illum, qui partes: non autẽ idipsum 5. lib. in magnitudinibus præstiterit? Neq; enim magnitudinem illam minorem, quæ maiorem non metitur, partes appellauit; sed tantũ eam, quæ maiorem metitur, partem. Respondemus, huius rei causam esse, quòd omnis numerus minor cuiuslibet maioris aut pars est, aut partes, vt propos. 4. huius lib. ostendetur; pars quidem, cùm ipsum metitur; partes verò, cùm non metitur. At in magnitudinibus longè aliter se res habet. Non enim, propositis duabus magnitudinibus inæqualibus, necessariò minor aut pars, aut partes est maioris, cũ eæ persæpè sint incommensurabiles, vt apertè liber 10. demonstrabit, atq; adeò minor nullo modo contineat plures partes maioris. Nam solùm in magnitudinibus commensurabilibus, minor maioris partes plures comprehendit, si illum non metiatur. Rectè igitur Euclides 5. lib. partem duntaxat in magnitudinibus, hic autem in numeris & partem & partes explicauit.

V.

MVLTIPLEX verò maior minoris, cùm maiorem metitur minor.

QVEMADMODVM ille solùm numerus minor, maioris pars dicitur, q maiorẽ metitur; ita quoq; ille tantummodò numerus maior, minoris appellatur multiplex, quẽ minor metitur; adeò vt numerus maior, cuius minor est pars, sit vicissim minoris multiplex. Vt numerus 6. pars est numeri 30. & hic illius multiplex est, &c. Si verò maiorẽ minor nõ metiatur, nullo modo erit maior minoris multiplex. Si enim maior minoris multiplex esset, metiretur minor maiorẽ, per hanc definitionẽ. Et vicissim, si maior minoris non fuerit multiplex, minor maiorẽ non metietur. Nam si metiretur minor maiorẽ, esset per hanc defin. maior minoris multiplex.

VI.

PAR numerus est, qui bifariam diuiditur.

VT omnes hi numeri 4. 10. 40. 100. 1000. pares vocantur, quoniam diuiduntur bifariam, siue in duas partes æquales, cùm eorum dimidia sint 2. 5. 20. 50. 500.

VII.

IMPAR verò, qui bifariam non diuiditur. Vel, qui vnitate differt à pari.

OMNES hi numeri 3. 11. 15. 37. 101. 1001. impares nominantur, quia bifariam diuidi nequeunt. Vel certè, quia vnitate differunt ab his paribus, 4. 10. 14. 36. 100. 1000. vel etiam ab his 6. 12. 16. 38. 102. 1002. Ex hoc autem loco perspicuè colligi potest, vnitatem in numeris prorsus esse indiuiduam. Si enim diuideretur, omnis numerus impar haberet dimidium; atque adeò bifariam diuidi posset. Nam huius imparis μ. dimidia pars essent quinque vnitates & semis: cuius contrarium Euclides hac definitione docuit.

VIII.

PARITER par numerus est, quem par numerus metitur per numerum parem.

QVIA numerus par est, qui bifariam diuiditur, fit vt quemlibet parem aliquis numerus par, saltem binarius, metiatur. Numerus igitur ille par, quem par numerus metitur per numerũ parem, pariter par nominatur. Cuiusmodi est numerus hic par 32. Metitur enim ipsum par numerus 8. per numerũ parem 4. Ita quoque par numerus 24. pariter par nuncupabitur, cùm eum par numerus 4. metiatur per numerũ parem 6. &c.

IX.

PARITER autẽ impar est, quem par numerus metitur per numerũ imparem.

QVOD si numerum parem metiatur numerus par per imparem numerum, vocabitur is pariter impar. Qualis est par numerus 30. Metitur enim eum numerus par 2. per imparem numerum 15. Sic quoq; par numerus 6. metitur eundem per numerum imparem 3. &c.

CAETERVM

CAETERVM si rectè duæ proximæ definitiones expendantur, perſpicuũ erit, fieri poſſe, vt vnus idemq; numerus par, ſit & pariter par, & pariter impar. Nam par numerus 24. cùm eum metiatur par numerus 6. per numerum parem 4. pariter par erit. Rurſus quia eundem numerus par 8. metitur per numerum imparem 3. pariter quoq; impar vocabitur. Vnde interpretes nonnulli, exiſtimantes hoc eſſe abſurdum, vt excluderent numeros eiuſmodi pares, qui & pariter pares, & pariter impares videntur eſſe, addiderũt vtrique definitioni particulam, tantùm, ita vt numerus pariter par, ſecundùm eos, ſit, quẽ par numerus metitur per numerum parem tantùm; Pariter autem impar, quem par numerus metitur per numerum imparem tantùm. Ita enim ſit, vt propoſitus numerus par 24. ne quepariter par ſit, cùm eum non tantùm metiatur par 6. per parem 4. ſed etiam par 8. per imparem 3. Neq; pariter impar, quod eum metiatur non tantùm, vt dictum eſt, par 8. per imparem 3. verùm etiam par 6. per parem 4. Sed aptè vocari poterit pariter par, & pariter impar. Participat enim quodammodo naturam vtriuſque, vt conſtat. Itaq; tria conſtituentur genera numeri paris inter ſe maximè diuerſa: Pariter par; pariter impar; pariter par, & pariter impar, qui à quibuſdam, pariter par & impariter appellatur. Veruntamen hæc omnia vera quidem ſunt, & ex ſententia Pythagoreorum, Nicomachi, Boëtij, & aliorum rectè explicata, ſed aliena prorſus ab Euclidis inſtituto, vt perſpicuum eſt, & ex definitionibus traditis, in quibus non reperitur dictio iſta, tantum, quam illi apponunt, & ex propoſ. 32. 33. 34. lib. 9. vbi manifeſtè omnem numerum parem, quem aliquis par per parem metitur, pariter parem appellat; illum verò, quem aliquis par metitur per imparem, pariter imparem: eum denique, quem par numerus metitur, & per parem numerum, & per imparem, vocat pariter parem, & pariter imparem; demonſtratq; omnes numeros à binario duplos, quales ſunt 2. 4. 8. 16. 32. 64. 128. &c. eſſe pariter pares tantùm, hoc eſt, pares numeros eos metiri per pares numeros tantùm; Numerus verò, qui dimidios impares habẽt, eſſe pariter impares tantùm, id eſt, pares numeros eos metiri per numeros impares duntaxat, cuiuſmodi ſunt 6. 10. 14. 18. 22. &c. Numeros deniq; nec à binario dupli ſunt, nec dimidios habent impares, pariter pares eſſe, & pariter impares, vt ſunt 12. 20. 24. 28. 36. &c. Itaq; vult Euclides in demonſtrationibus illarum propoſitionum, hos poſtremos numeros alios q; ſimiles, verè eſſe, ſecundùm traditas definitiones, pariter pares; rurſus eoſdem dici rectè pariter impares, quanq; nec tantũ pariter pares, nec tantũ pariter impares illi ſint. Sed hæc planius ex lib. 9. intelligentur.

X.

IMPARITER verò impar numerus eſt, quem impar numerus metitur per numerum imparem.

VT hic numerus impar 15. impariter impar dicitur, quoniam numerus impar 3. eum metitur per 5. numerum imparem. Sic quoq; hi numeri impares 9. 21. 25. 27. 33. 35. 39. 135. 2025. & alij infiniti, impariter impares nominantur.

XI.

PRIMVS numerus eſt, quem vnitas ſola metitur.

QVOD ſi numerum quempiam nullus numerus, ſed ſola vnitas metiatur, ita vt neq; pariter par, neque pariter impar, neq; impariter impar poſſit dici, appellabitur numerus Primus; quales ſunt omnes iſti 2. 3. 5. 7. 11. 13. 17. 19. 23. 29. 31. &c. Nam eos ſola vnitas metitur.

XII.

PRIMI inter ſe numeri ſunt, quos ſola vnitas, communis menſura, metitur.

SICVT numerus ille, quem ſola vnitas metitur; Primus dicitur; ita quoq; duo, tres, quatuor, vel etiam plures numeri, quos præter vnitatem, nullus numerus, tanquam menſura communis metitur, quamuis ſinguli illorum habeant numeros, qui eos, præter vnitatem metiantur, appellantur inter ſe primi. Vt 15. 8. ſunt numeri inter ſe primi, quia ſola vnitas, menſura communis illos metitur: quamuis enim priorem metiantur hi numeri 3. & 5. poſteriorem verò iſti 2. 4. tamen nullus iſtorum vtrumque metitur, ſed ſola vnitas vtriuſque eſt communis menſura. Sic etiam hi numeri 7. 10. 15. primi inter ſe dicentur, quòd præter vnitatem, nullum habeant numerum, menſuram communem, quanquam poſtremi duo habeant communẽ menſuram hunc numerum 5. Denique vnitas, & quiuis numerus, dici poſſunt, licèt impropriè, numeri inter ſe primi: quia ſola vnitas vnitatem, & numerum quemuis metitur, tanquam menſura communis.

XIII.

COMPOSITVS numerus eſt, quem numerus quiſpiam metitur.

NVMERVM, quem præter vnitatem aliquis alius numerus metitur, appellant Geometræ compoſitum, cuiuſmodi eſt hic 15. Nam eum vterque horum numerorum 3. 5. metitur. Perſpicuum autem eſt, omnes numeros pares, dempto binario, eſſe compoſitos, cùm eos omnes binarius metiatur. Ex quo fit, omnes numeros primos, præter binarium, eſſe impares, quandoquidem ex paribus, ſolus binarius primus eſt, vt diximus.

XIIII.

COMPOSITI autem inter ſe numeri ſunt, quos numerus aliquis, communis menſura, metitur.

DVO numeri, vel plures, quos præter vnitatem, aliquis alius numerus, tanquã menſura communis meti-

tur, dicuntur inter se compositi, licèt non quilibet sit compositus numerus; quemadmodum & numerus ille, quem præter vnitatem, numerus quispiam metitur, compositus nominatur. Vt hi numeri 15. 24. compositi inter se sunt, quia eos hic numerus 3. tanquam communis mensura, metitur. Ita etiam inter se compositi erunt hi numeri 7. 21. 35. Nã primus eorũ & se ipsum, & reliquos duos metitur, licèt p se sumptus, Primus vocetur.

XV.

NVMERVS numerum multiplicare dicitur, cùm toties compositus fuerit is, qui multiplicatur, quot sunt in ipso multiplicante vnitates, & procreatus fuerit aliquis.

VT numerus 6. multiplicare dicetur numerum 8. quando numerus 8. sexies fuerit compositus, toties nimirum, quot sunt in multiplicante 6. vnitates, procreatusq; fuerit numerus 48. Ita quoque vicissim numerus 8. multiplicare dicetur numerum 6. si numerũ 6. octies sumpserimus, toties scilicet, quot vnitates in multiplicante 8. continentur, procreauerimusq; eundem numerum 48. Eadem denique ratione hi numeri 100. 1000. 20. &c. dicentur multiplicare numerum 456. cùm hic sumptus fuerit centies, millies, aut vicies, &c. genitiq; fuerint hi numeri 45600. 456000. 9120. &c. Itaque numerus aliquis dicetur produci, gigni, procreariue ex duobus numeris, quando altero alterum multiplicante, productus fuerit. Vt numerus 63. gigni dicitur ex his numeris 7. 9. quia procreatur ex multiplicatione numeri 7. in numerum 9. vel è contrario. Et sic de reliquis.

SEQVITVR ex his, productum ex multiplicatione numerum eandem habere proportionem ad alterutrum multiplicantium, quam alter multiplicantium habet ad vnitatem. Cùm enim ex definitione Euclidis alteruter multiplicantium toties componendus sit, vt faciat productum, quoties in altero multiplicantium est vnitas; continebit numerus productus toties alterutrum multiplicantium, quoties alter multiplicantium vnitatem continet: ac proinde eandem habebit proportionem numerus productus ad alterutrum multiplicantium, quàm alter multiplicantium ad vnitatem habet. Itaque Multiplicatio, siue ductus vnius numeri in alium ita quoque describi poterit.

MVLTIPLICATIO numeri in numerum, est inuentio numeri, qui ad alterutrum multiplicantium eandem proportionem habet, quam alter multiplicantium ad vnitatem.

SIC vides, ex multiplicatione, siue ductu 6. in 8. gigni numerum 48. qui ita se habet ad 6. vt 8. ad 1. Vel ita ad 8. vt 6. ad 1.

HVIC definitioni addenda est hæc alia docens, quid sit numerum diuidere numerum: quippe quæ necessaria omnino sit ad ea, quæ nos in ijs, quæ sequuntur, sumus demonstraturi.

NVMERVS numerum diuidere dicitur, cùm numerus acceptus fuerit, qui suis vnitatibus indicat, quoties diuidens numerus in diuiso continetur.

VT numerus 6. diuidere dicetur numerũ 48. cùm sumptus fuerit numerus 8. qui octo suis vnitatibus indicat, diuidentem numerum 6. in diuiso 48. contineri octies. Ita quoque vicissim numerus 8. diuidere dicetur eundem numerum 48. si acceptus fuerit numerus 6. qui sex suis vnitatibus indicat, diuidentem numerum 8. in diuiso 48. contineri sexies.

HINC fit, numerum ex diuisione procreatum eandem habere proportionem ad vnitatem, quam numerus diuisus habet ad diuidentem. Cùm enim, vt in definitione diximus, procreatus numerus suis vnitatibus indicare debeat, quoties diuidens numerus in diuiso contineatur; continebit numerus productus vnitatem toties, quoties numerus diuisus diuidentem continet: ac proinde eandem proportionem habebit numerus ex diuisione genitus ad vnitatem, quàm diuisus numerus ad diuidentem. Itaque Diuisio vnius numeri per alium ita quoque poterit describi.

DIVISIO numeri per numerum, est inuentio numeri, qui ad vnitatem habet eandem proportionem, quam numerus diuisus ad diuidentem.

ITA vides ex diuisione numeri 48. per 6 procreari numerum 8. qui ita se habet ad 1. vt 48. ad 6. Item ex diuisione eiusdem numeri 48 per 8. produci numerum 6. qui ita se habet ad 1. vt 48. ad 8.

EX his quoque efficitur, diuiso numero per numerum, diuisum numerum gigni ex multiplicatione numeri per diuisionem inuenti in numerum diuidentem. Diuiso enim numero A, per B, procreetur numerus C. Dico numerum A gigni ex ductu numeri C, in numerum B. Quoniam enim ex definitione multiplicationis, numerus ex C, in B, procreatus ita se habet ad B, vt C, ad vnitatem D: Ex definitione autem diuisionis, ita quoque se habet A, ad B, vt C, ad vnitatem D; perspicuum est, numerũ ex C, in B, genitum esse numerum A; cùm tam ille genitus, quàm A, eandem proportionem habeat ad B, quam C, ad D, vnitatem.

A, 48. B, 8. C, 6. D, 1.

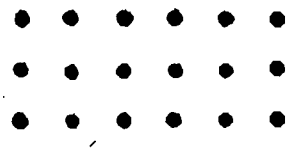
HÆC omnia conueniunt quoque numeris fractis, & integris cum fractis: Id est, Numerus fractus numerum fractum, vel integer fractum, vel fractus integrum (siue fracti adhæreant integris, siue non) multiplicare dicitur, cùm toties compositus fuerit is, qui multiplicatur, quot sunt in ipso multiplicante vnitates, & procreatus fuerit aliquis: Diuidere autem, cùm numerus acceptus fuerit, qui indicet, quoties diuidens in diuiso continetur:

tinetur: Ita vt in multiplicatione inueniatur quoq; numerus, qui ad alterutrum multiplicantium eandem proportionem habet, quam alter multiplicantium ad vnitatem: In diuiſione autem procreetur numerus, qui ad vnitatem eandem proportionem habet, quã numerus diuiſus ad diuidentem. Vt numerus $\frac{1}{2}$. multiplicare dicitur numerum 20. quando numerus 20. toties fuerit compoſitus, quot ſunt in $\frac{1}{2}$. vnitates, procreatusq; fuerit numerus 10. Quia enim vnitas per ſui ſemiſſem duntaxat eſt in $\frac{1}{2}$. ſumendus eſt numerus 20. per ſemiſſem quoq; ſui, quæ eſt 10. Ita quoque viciſſim numerus 20. multiplicare dicetur numerum $\frac{1}{2}$. ſi $\frac{1}{2}$ ſumptus fuerit vicies, toties ſcilicet, quoties vnitas eſt in 20. productusq; fuerit idem numerus 10. Vbi videt eandem eſſe proportionem procreati numeri 10. ad $\frac{1}{2}$. quam habet alter numerus multiplicans 20. ad 1. Vel ita eſſe 10 ad 20. vt $\frac{1}{2}$. ad 1. Sic etiam $\frac{1}{2}$. & $\frac{1}{3}$. ſe mutuò multiplicare dicentur, quando $\frac{1}{2}$. ſumptus fuerit per tertiam ſui partem, quemadmodum $\frac{1}{3}$. tertiam partem vnitatis tantum continet: Vel quando $\frac{1}{3}$. ſumptus fuerit per ſui ſemiſſem, quia & $\frac{1}{2}$. ſemiſſem tantum continet vnitatis. Vtroq; autem modo procreabitur $\frac{1}{6}$. qui numerus tertia pars eſt numeri $\frac{1}{2}$. ſiue $\frac{3}{6}$. & ſemiſſis numeri $\frac{1}{3}$. ſiue $\frac{2}{6}$. Quo pacto autem multiplicatio in numeris fractis facienda ſit, in Arithmetica docuimus, demonſtrabimusq; ad finem lib. 9.

RVRSVS numerus $\frac{1}{2}$. diuidere dicetur numerum 10. cum ſumptus fuerit numerus 20. indicans, diuidentem numerum $\frac{1}{2}$. vicies contineri in diuiſo numero 10. ita vt eadem proportio ſit procreati numeri 20. ad 1. quæ numeri diuiſi 10. ad diuidentem $\frac{1}{2}$. Sic quoque $\frac{1}{2}$. diuidere dicetur $\frac{1}{6}$. quando ſumptus fuerit numerus $\frac{1}{3}$. indicans, diuidentem numerum $\frac{1}{2}$. non totum contineri in diuiſo $\frac{1}{6}$. ſed tertiam eius partem. Nam cum numerus $\frac{1}{2}$. idem ſit qui $\frac{3}{6}$. liquidò conſtat tertiam huius partem, nimirum $\frac{1}{6}$. contineri in $\frac{1}{6}$. Cæterùm quo pacto fiat diuiſio in numeris fractis, tradidimus in Arithmetica, & ad finem lib. 9. demonſtrabimus. vbi omnia hæc, quæ de multiplicatione, diuiſione q; fractorum diximus, planiora fient.

XVI.

CVM autem duo numeri mutuo ſe ſe multiplicantes aliquem fecerint, qui factus erit, planus appellabitur. Qui verò numeri mutuo ſe ſe multiplicarint, latera illius dicentur.



OMNIS numerus procreatus ex multiplicatione mutua duorum numerorum, planus appellatur, quia ſecundum ſuas vnitates in longum, & latũ diſpoſitas parallelogrammum rectangulum refert, cuius latera ſunt duo numeri multiplicantes; qui idcirco latera numeri procreati vocantur, quòd ipſum contineant, non ſecus, ac rectæ lineæ angulum rectum ambientes, parallelogrammum rectangulum continere dicuntur, vt latius lib. 2. explicauimus. Vt numerus 24. productus ex multiplicatione mutua numerorum 4. & 6. planus appellatur, lateráque eius ſunt 4. & 6. quia eius vnitates in longum, & latum diſpoſitæ, prout latera exigunt, referũt parallelogrammum rectangulum, cuius vnum latus ſex vnitates, alterum verò 4. complectitur. Eodem modo numerus 64. genitus ex mutua multiplicatione numerorum 8 & 8. planus dicitur, eiúſque latera 8. & 8.

CÆTERVM cum infinitæ ſint genera numerorum planorum apud Arithmeticos, quemadmodum & figuræ planæ apud Geometras: Euclides ſolum definit planum quadrangulare rectangulum, qui videlicet ſub duobus numeris, ex quorum mutua multiplicatione gignitur, continetur, quoniam de hoc ſolo in hiſce libris numerorum diſputat, quòd omni ex parte quadrato Geometrico, & figuræ altera parte longiori, ſimiles ſint, & æquales, ſiue ambitum, ſiue aream, capacitatémve ſpectes. Nihil autem dicit de numeris triangularibus, pentagonis, hexagonis, &c. quia hi, licet conueniant triangulo Geometrico pentagono, hexagono, &c. quod ad ambitum ſpectat: tamen ſi aream ſeu capacitatem conſideres, ab iiſdem multum diſcrepant. Id quod perſpicuum eſt cuilibet, qui diligenter hos Euclidis libros, & Arithmeticam Iordani perlegerit.

POTEST autem vnus, idemq; numerus planus plura habere latera, cum ex pluribus multiplicationibus procreari poſſit, vt numerus 24. non ſolum latera habet 4. & 6. verum etiam 3. & 8. nec non 2. & 12. quia tam ex multiplicatione 3. in 8. quàm 2. in 12. producitur, quemadmodum & idem ex multiplicatione 4. in 6. eſt genitus. Ita quoque numerus planus 100. latera habet 5. & 20: 4. & 25: 2. & 50: 10. & 10. quod ex his omnibus numeris, ſi bini inter ſe multiplicentur, gignatur.

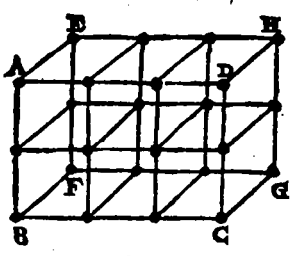
QVIA verò omnem numerum planum metiuntur duo numeri multiplicantes ſe mutuo, quòd quilibet eorum toties ſumptus, quot ſunt in altero vnitates, ipſum procreet; liquido conſtat, omnem planum numerum eſſe compoſitum: Quod etiam de numero ſolido, qui iamiam definietur, dici poteſt. Verum eſt, vnitatem aliquando dici poſſe numerum planum, quamuis improprie; quia eius latera ſunt duæ vnitates, quæ multiplicatæ mutuo ipſam vnitatem producunt.

XVII.

CVM verò tres numeri mutuo ſe ſe multiplicantes aliquem fecerint, qui procreatus erit, ſolidus appellabitur: Qui autem numeri mutuo ſe ſe multiplicarint, latera illius dicentur.

VT quia tres hi numeri 2. 3. 4. mutuo ſeſe multiplicantes, producunt 24. Nam ex 2. in 3. procreatur nu-

merus 6. & ex 6. in 4. fit 24. Vel ex 2. in 4. gignitur numerus 8. & ex 8. in 3. efficitur 24. Vel denique ex 3. in 4. producitur numerus 12. & ex 12. in 2. generatur 24. appellabitur numerus 24 solidus, numeri verò 2. 3. 4. dicentur latera illius, quia eius vnitates in longum, latum atq; profundum disposita referunt figuram quandam solidam, quæ Parallelepipedum nuncupatur, vt lib. 11. explicabimus, cuius omnes tres dimensiones exprimunt tres numeri se mutuo multiplicantes; vnus quidem longitudinem, alius verò latitudinem, & altitudinem reliquus. Nam si primum multiplicetur numerus 2. in 4. efficietur numerus 8 basis solidi numeri longa quatuor vnitates, & lata duas: Et si hæc basis in 3. multiplicetur, hoc est, si accipiatur ter, exurget totus numerus solidus 24. altitudinem habens trium vnitatum. At si numerus 2. in 3. multiplicetur, habebitur basis 6. vnitatum, quæ multiplicata in 4. facit totum solidum numerum 24. in altitudine habens 4. vnitates. Si denique numerus 3. multiplicetur in 4. procreabitur numerus 12. p basę, quæ bis sumpta faciet numerum eundem solidum 24. cuius altitudo continet duas vnitates. Quæ omnia perspicua sunt in figura proposita. Si enim basis sit B C G F, octo vnitatum, cuius longitudo B C, quatuor vnitates, & B F, latitudo, duas complectitur; superponentur ei duæ aliæ bases similes, & æquales, vt totus numerus solidus contineat 24. vnitates, eius q; altitudo B A, vnitates tres. Similiter, si basis sit A B F E, sex vnitatum, cuius longitudo A B, tres, & latitudo B F, duas continet vnitates; superponentur ei aliæ tres bases similes, & æquales, fiet q; totus solidus numerus rursum 24. altitudinẽ B C, habens quatuor vnitatum. Si denique basis sit A B C D, 12. vnitatum, cuius longitudo B C, quatuor continet, & latitudo A B, tres; superponetur illi alia basis similis, & æqualis E F G H, constabit q; totus numerus solidus vnitatibus 24. quarum duæ altitudinem dabũt A E, vel B F. Idem hic numerus solidus 24. habet hac latera 6. 2. 2. cum ex his mutuo multiplicatis producatur. Eodem q; modo de aliis numeris solidis iudicandum erit.

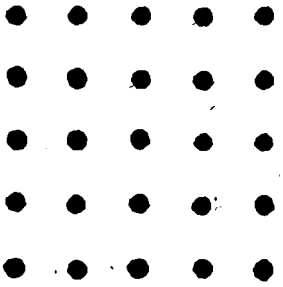


DENIQVE & vnitas interdum solidus appellabitur numerus, etsi non propriè, quia eius latera sunt tres vnitates, ipsam vnitatem ex mutua earum multiplicatione procreantes.

DEFINIT autem & hîc Euclides tantùm numerum solidum rectangulum, cuius bases oppositæ sunt parallelæ, & qui continetur sub tribus numeris, omissis infinitis aliis, de quibus Iordanus, ob causam in præcedenti definitione datã; qa scilicet hi prorsus æquales sunt, & similes cubis, & parallelepipedis Geometricis.

XVIII.

QVADRATVS numerus est, qui æqualiter æqualis. Vel qui sub duobus æqualibus numeris continetur.

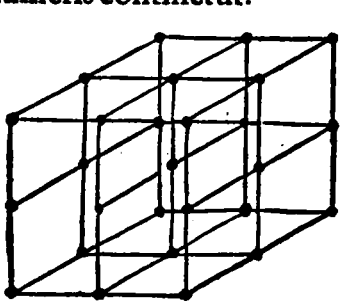


PLANVM illum numerum, qui æqualiter æqualis est, hoc est, qui secundum vnitates suas in longum & latum dispositas, refert parallelogrammum rectangulum, cuius longitudo latitudini est æqualis, ita vt omnia latera sint æqualia, vel qui ex multiplicatione mutua duorum numerorum æqualium procreatur, atq; adeò sub illis continetur, vocat quadratum. Huiusmodi est numerus 25. contentus sub numeris æqualibus 5. & 5. hoc est, ex eorum mutua multiplicatione genitus. Nam si eius vnitates in formam planam redigantur, referet perfectum quadratum Geometricum, in quolibet latere habens quinq; vnitates, ideoq; æqualiter æqualis erit.

ALTERVTER autem numerorum æqualium, sub quibus quadratus numerus continetur, vel ex quorum multiplicatione producitur, latus quadrati à Geometris, radix verò ab Arithmeticis plerisq; appellatur.

XIX.

CVBVS verò, qui æqualiter æqualis æqualiter. Vel, qui sub tribus æqualibus numeris continetur.



SOLIDVM quoq; illum numerum vocat cubum, qui est æqualiter æqualis æqualiter, id est, cuius vnitates in longum, latum, atq; profundum disposita cubum Geometricum referunt, ita vt omnes eius dimensiones, nimirum longitudo, latitudo, & altitudo, siue profunditas, æquales sint; Vel qui ex multiplicatione mutua trium æqualium numerorum inter se producitur. Qualis est numerus 27. contentus sub numeris æqualibus 3. 3. 3. siue ex eorum multiplicatione mutua procreatus, cum ex 3. in 3. fiat numerus 9. & ex 9. in 3. gignatur numerus cubus 27. Omnes enim illius vnitates in formam solidam redactæ referunt perfectum cubum Geometricum, existuntq; tam in longitudine, & latitudine, quàm in profunditate, tres vnitates. Quare ipse numerus 27. est æqualiter æqualis æqualiter.

QVILIBET verò trium numerorum æqualium, sub quibus cubus continetur, vel ex quorum mutua multiplicatione procreatur, Geometris latus cubi, plerisq; autem Arithmeticis radix dicitur.

XX. NVMERI

XX.

NVMERI proportionales ſunt, cum primus ſecũdi, & tertius quarti, æquè multiplex eſt; vel eadem pars, vel eædem partes: Vel certè, cum primus ſecundum, & tertius quartũ, æqualiter continet, eandemq́; inſuper illius partẽ, vel eaſdẽ partes.

VT numeros proportionales in omni genere proportionis rationalis inæqualitatis (cuiuſmodi ſunt omnes numeri inæquales inter ſe collati) complecteremur, addidimus huic definitioni illa verba; vel certè, cum primus ſecundum, & tertius quartum, æqualiter continet, eandemque inſuper illius partem, vel eaſdem partes. *Definitio etenim vulgata Euclidis, quam puto eſſe corruptam, cum manca ſit, atq; imperfecta, comprehendit ſolum proportionales numeros in proportione multiplici, ſubmultiplicive, & in proportionibus reliquis minoris inæqualitatis. Nam in proportione multiplici ſunt quatuor quilibet numeri proportionales, cum primus ſecundi, & tertius quarti, æquè multiplex eſt; in ſubmultiplici verò, cum primus ſecundi, & tertius quarti, eadem pars eſt; & in reliquis proportionibus minoris inæqualitatis, cum primus ſecundi, & tertius quarti, eadem partes fuerit, vt vult definitio Euclidis. At verò ex ea nequaquam deprehendere poſſumus, quinam numeri proportionales ſint in proportione ſuperparticulari, ſuperpartiente, multiplici ſuperparticulari, & multiplici ſuperpartiente. In his enim omnibus, primus numerus ſecundi, & tertius quarti, neq; æquè multiplex eſt, neq; eadem pars, neq; eadem partes; ſed primus ſecundum, & tertius quartum, æqualiter continet, puta vel ſemel, vel aliquoties, & eandem inſuper illius partem, eaſdémve partes; vt perſpicuum eſt ex iis, quæ docuimus ad defin. 4. lib. 5. vbi omnes proportiones rationales copiosè explicuimus. Itaq; hi numeri 1. 2. 4. 9. 3. proportionales ſunt, cũ primus ſecundi, & tertius quarti æquè multiplex ſit, nimirum triplus. Item hi 4. 12. 3. 9. eſt enim primus ſecundi, & tertius quarti, eadem pars, nimirum tertia. Rurſus proportionales ſunt hi numeri 6. 8. 9. 12. quod primus ſecundi, & tertius quarti eadem partes ſint, videlicet tres partes quartæ. Denig; & 7. 6. 14. 12. & 7. 4. 14. 8. & 11. 5. 22. 10 & 12. 5. 24. 10. ſunt numeri proportionales. Nam in primo exemplo primus numerus ſecundum, & tertius quartum, ſemel, & inſuper eandem partem, videlicet ſextam; In ſecundo autem ſemel, & eaſdem partes, nimirum tres quartas; In tertio deinde bis, & adhuc partem eandem, videlicet quintam, continet; In vltimo dẽnique primus ſecundum, & tertius quartum, bis, & præterea eaſdem partes complectitur, puta duas partes quintas. Quod ſi primus numerus ſecundi, & tertius quarti, non ſit æquè multiplex, vel eadem pars, vel eadem partes; vel denique primus ſecundum, & tertius quartum, non æqualiter contineat, eandemq́; inſuper illius partem, vel eaſdem partes; nullo pacto dicendi erunt numeri propoſiti proportionales.*

QVOTIESCVNQVE igitur quatuor numeri proportionales eſſe ponũntur, concedendum neceſſariò erit, ſi quidem maiores cum minoribus conferantur, quòd primus ſecundi, & tertius quarti, æquè multiplex ſit; Vel certè, quòd primus ſecundum, & tertius quartum, contineat æqualiter, & inſuper eandem partem, vel eaſdem partes: Et contra, ſi primus ſecundi, & tertius quarti, æquè multiplex concedatur: Vel certè primus ſecundum, & tertius quartum, æqualiter dicatur continere, & eandem adhuc partem, vel eaſdem partes, colligetur numeros eſſe proportionales. Quod ſi minores ad maiores referantur, dicanturq́; eandem habere proportionem, fatendum erit, primum ſecundi, & tertium quarti, eſſe partem eandem, vel partes eaſdem; Et è contrario, ſi primus ſecundi, & tertius quarti, eadem concedatur pars, vel eadem partes, concludetur numeros ipſos eandem habere proportionem.

DEFINIT autem Euclides eos duntaxat numeros proportionales, qui proportionem eandem inæqualitatis habent. Nam ſi de proportione æqualitatis loquamur, perſpicuum eſt, primum ſecundo, & tertium quarto æqualem debere eſſe, vt proportionales numeri dicantur.

EX hac autem definitione apertè colligitur, æquales numeros ad eundem habere eandem proportionem. Et contra eundem ad æquales eandem quoq; habere proportionem. Item numeros ad eundem habentes eandem proportionem, vel ad quos idem eandem habet proportionem, æquales eſſe. Cum enim æquales numeri ſint eiuſdem, vel æque multiplices, vel eadem pars, vel eadem partes: Vel certè eundem æqualiter cõtineant, eandemq́; inſuper illius partem, vel partes; Item cum idem numerus æqualium ſit vel æquè multiplex, vel eadem pars, vel eadem partes: Vel certè illos æqualiter contineat, eandemq́; inſuper eorum partem, vel partes; perſpicuum eſt, æquales numeros ad eundem, vel eundem numerum ad æquales, eandem habere proportionem, iuxta hanc definitionem.

RVRSVS quia numeri ad eundem habentes eandem proportionem, ſunt illius vel æquemultiplices, vel eadem pars, vel eadem partes; Vel certè illum æqualiter continent, eandemq́; inſuper eius partem, vel partes: Item quia idem numerus habens eandem proportionem ad aliquos, eſt illorum vel æque multiplex, vel eadem pars, vel eadem partes; Vel certe illos æqualiter continet, eandemq́; inſuper illorum partem, vel partes, ſecundum hanc eandem definitionem; manifeſtum eſt, numeros, qui ad eundem eandem habent proportionem, vel ad quos idem eandem proportionem habet, æquales eſſe.

PARI ratione infertur, maioris numeri ad eundem, maiorem proportionem eſſe, quàm minoris. Et contra, eiuſdem ad minorem, maiorem eſſe proportionem, quàm ad maiorem. Item numerorum illum, qui ad eundem habet maiorem proportionem, maiorem eſſe: Ad quem autem idem habet maiorem proportionem, minorem eſſe. Quæ omnia perſpicua ſunt, ſi recte hæc definitio intelligatur.

HÆC definitio conuenit etiam numeris fractis, siue integri numeri simul adsint, siue non. Nam quatuor hi numeri sunt proportionales; $\frac{3}{4}.\frac{3}{8}.\frac{1}{2}.\frac{1}{4}$. quia primus secundi, & tertius quarti, aequè multiplex est, nimirum duplus, vt patet, si priores duo ad eandem denominationem reuocentur, vt ad $\frac{6}{8}.\frac{3}{8}$. & posteriores quoq; ad eandem denominationem, vt ad $\frac{2}{4}.\frac{1}{4}$. Quo pacto autem fracti numeri ad eandem denominationem reducantur, docuimus in Arithmetica, & ad finem lib. 9. demonstrabimus. Eadem ratione quatuor hi numeri proportionales sunt $2\frac{3}{8}.4\frac{9}{12}.1\frac{1}{4}.2\frac{5}{10}$. cum primus secundi, & tertius quarti sit eadem pars, nimirum semissis, vt constat, si priores duo ad hos eiusdem denominationis reuocentur, $\frac{19}{8}.\frac{38}{8}$. & posteriores duo ad hos $\frac{5}{4}.\frac{10}{4}$. atq; ita de cæteris. Quo autem modo secundus $\frac{57}{12}$. ad hunc $\frac{38}{8}$. & quartus $\frac{25}{10}$. ad hunc $\frac{10}{4}$, reuocetur, ostendemus ad finem lib. 9. propos. 18. Minutiarum.

XXI.

SIMILES plani, & solidi sunt, qui proportionalia habent latera.

VT planus numerus plano numero sit similis, non necesse est, qualibet duo illius latera quibusuis duobus lateribus huius esse proportionalia; sed satis est, illum habere aliqua duo latera, quæ sint proportionalia quibusdam duobus lateribus huius. Nam hac ratione erunt eorum latitudines longitudinibus proportionales, si secundum suas vnitates in formam planam redigantur, prout latera assumpta exigunt. Vt numeri plani 24. & 6 similes sunt, quoniam illius latera 6 4. proportionalia sunt lateribus huius 3.2. quamuis his eisdem non sint proportionalia alia illius latera, nempe 8.3 vel 12.2.

EODEM modo, vt duo numeri solidi similes sint, non requiritur, vt quauis tria vnius latera proportionalia sint tribus quibuslibet lateribus alterius; sed sufficit, vt tria vnius reperiantur tribus alterius proportionalia, quia hac ratione, si secundùm vnitates in formam solidam reducantur, erunt eorum latitudines longitudinibus, & longitudines altitudinibus proportionales. Vt numeri solidi 192. & 24 sunt similes, quia latera illius 8.6.4. lateribus huius 4.3.2. sunt proportionalia, licet his eisdem nequaquam proportionalia sint alia latera illius, nimirum 12.8.2. vel 6.4.3.

IT AQVE possunt duo numeri plani, vel solidi, esse similes, licet lateribus aliquibus vnius acceptis nullo modo reperiri queant latera alterius proportionalia. Sunt enim hi numeri plani 24.6. similes, vt dictum est; & tamen si latera prioris sumantur 3. & 8. nulla reperientur in posteriori illis proportionalia. Sic etiam solidi similes sunt 192.24. cum tamē laterib. prioris assumptis 3.4.16. nulla reperiatur proportionalia in posterio. i.

HÆC porrò similitudo planorum, & solidorum reperitur quoq; in fractis numeris, siue in integris cum fractis. Nam si sumantur quatuor numeri nō integri proportionales, & tam duo priores, quàm duo posteriores inter se multiplicentur, procreabuntur plerunq; duo plani non integri similes, &c. Dixi, plerunq;, quia fieri potest, vt interdum integri numeri gignātur. Nam si duo latera sint $\frac{2}{3}.6$, & alia duo $1\frac{1}{3}.12$. quæ eandem proportionem habent noncuplam, producent priora duo numerum planum 4. posteriora verò numerum 16.

XXII.

PERFECTVS numerus est, qui suis ipsius partibus est æqualis.

NVMERVS ille, cui omnes suæ partes simul sumptæ (loquimur autem de partibus aliquotis, iuxta defin. 3. huius lib.) æquales sunt, Perfectus à Mathematicis nuncupatur. Cuiusmodi sunt hi numeri 6.28.496. Nam primus continet has partes aliquotas duntaxat 1.2.3. quæ simul sumptæ conficiunt numerum 6. Secundi autem numeri partes omnes aliquotæ sunt hæ 1.2.4.7.14. quarum summa constituit ipsum numerum 28. Tertius demum numerus has partes habet aliquotas, 1.2.4.8.16.31.62.124.248. quas omnes in vnam summā collectas componere numerum 496. perspicuum est. Qui autem numeri perfecti sint, & qua via, ac ratione procreentur, (sunt enim præter tres dictos innumerabiles alij) demonstrabitur ab Euclide propos. vlt. lib. 9.

QVOD si partes omnes aliquotæ alicuius numeri simul acceptæ maiores sint ipso numero, dici solet numerus ille, Abundans: si verò minores, Diminutus.

LVCE autem clarius ex hoc loco colligitur, partem ab Euclide sumi tantum pro parte aliquota. Nam alioquin omnis numerus esset perfectus, cum suis ipsius partibus sit æqualis, si quilibet numerus minor numeri maioris pars dici posset, siue eum metiatur, siue non metiatur.

His definitionibus ab Euclide propositis adiungenda mihi videntur ex Campano, aliisq; scriptoribus nonnulla alia, quibus proximè succedent postulata, & communes animi notiones, præsertim ea, quibus in demonstrandis numerorum proprietatibus & Euclides, & eius interpretes vti videntur.

XXIII.

NVMERVS numerum metiri dicitur per illum numerum, quem multiplicans, vel à quo multiplicatus, illum producit.

VT numerus 4. metiri dicitur numerum 12. per 3. quia multiplicatus per 3. producit 12. Eademq; ratione numerus 3, eundem numerum 12. metietur per 4. cum ex multiplicatione 4. in 3 numerus 12. producatur. Hoc autem ita esse, hac ratione fiet perspicuum. Cum numerus 4. metiatur 12. per 3. faciet 4 ipsum 12 toties compositum, quoties est vnitas in 3. Quare per defin. 15. numerus 3. multiplicās numerum 4. producet 12. Quia verò vt propos. 16. huius lib. ostendemus, idem numerus producitur ex multiplicatione 4 in 3. qui ex 3. in 4. manifestum relinquitur, eundem numerum 12 procreari, si numerus 4. multiplicet numerum 3.

HÆC

HAEC quoq; definitio quadrat in numeros non integros. Nam numerus $2\frac{1}{4}$. metiri dicitur numerum $13.\frac{5}{12}$. per $5.\frac{3}{4}$. quia multiplicatus per $5\frac{3}{4}$. gignit $13\frac{5}{12}$.

XXIIII.

PROPORTIO numerorum est habitudo quædam vnius numeri ad alterum, secundum quod illius est multiplex, vel pars, partésve; vel certè illum continet, seu continetur aliquoties, & aliquam insuper illius partem, vel partes.

SI numerus 20. cum numero 4. conferatur ea ratione, qua illius multiplex est, nimirum quintuplus, dicetur hac comparatio, habitudóve, Proportio. Sic etiam proportio erit ea habitudo, qua idem numerus 20. cum numero 60. confertur, secundum quod illius tertia pars est; & sic de reliquis.

QVANDO tum ita fuerit, ut primus sit alterius, qualis tertius quarti, aut æque multiplex, vel eadem pars, vel eadem partes: Vel certè, cum primus secundum, & tertius quartum, æqualiter continet, eandémq; insuper illius partem, vel eásdem partes, vt suprà definitum est.

XXV.

TERMINI, siue radices proportionis dicuntur duo numeri, quibus in eadem proportione minores sumi nequeunt.

XXVI.

CVM tres numeri proportionales fuerint; Primus ad tertium, duplicatam rationem habere dicitur eius, quam habet ad secundum. At cum quatuor numeri proportionales fuerint; Primus ad quartum, triplicatam rationem habere dicitur eius, quam habet ad secundum: Et semper deinceps vno amplius, quamdiu proportio extiterit.

HAEC definitio, vt ad magnitudines pertinet, copiosè explicata est defin. 10. lib. 5. Vnde cum omnia, quæ ibi scripsimus, ad numeros huc transferri facilè possint, non est quòd iterum ea hic repetamus.

XXVII.

QVOTLIBET numeris ordine positis, proportio primi ad vltimum componi dicitur ex proportionibus primi ad secundum, & secundi ad tertium, & tertij ad quartum, & ita deinceps, donec extiterit proportio.

HOC ita se habere, pluribus verbis à nobis demonstratum est ad defin. 5. lib. 6.

POSSVNT etiam huc referri definitiones illæ in quinto libro traditæ de alterna ratione, inuersa; de compositione, diuisione, & conuersione rationis; de ratione ex æqualitate; & de proportione ordinata, ac perturbata. Omnes enim hi modi argumentationum, quæ circa proportiones versantur, demonstrabuntur quoque hoc septimo libro proportionibus numerorum conuenire.

POSTVLATA, SIVE PETITIONES.

I.

POSTVLetur, cuilibet numero quotlibet posse sumi æquales, vel multiplices.

II.

QVOLIBET numero sumi posse maiorem.

QVANDOQVIDEM enim numerus infinitè diminui nequeat, sed necessariò ad vnitatem indiuiduam diminutio deueniat; tamen augeri potest infinitè per additionem continuam vnitatis. Quare quolibet numero proposito maior exhiberi potest, ille videlicet, qui ex vnius vnitatis, vel etiam plurium additione consurgit.

AXIOMATA, SIVE PRONVNTIATA.

I.

QVI numeri æqualium numerorum, vel eiusdem æquè multiplices sunt, inter se sunt æquales.

II.

QVORVM idem numerus æquè multiplex est, vel æquè multiplices sunt æquales, inter se æquales sunt.

III.

QVI numeri æqualium numerorum, vel eiusdem, eadem pars, vel eædem partes fuerint, æquales inter se sunt.

IIII.

QVORVM idem numerus, vel æquales, eadem pars, vel eadem partes fuerint, æquales inter se sunt.

V.

VNITAS omnem numerum per vnitates, quæ in ipso sunt, hoc est, per ipsummet numerum metitur.

NAM vnitas sumpta toties, quot sunt in numero proposito vnitates, ipsum cõstituit. Quamobrem ipsum metitur per vnitates, quæ in ipso sunt, hoc est, per ipsummet numerum ex suis vnitatibus constitutum.

VI.

OMNIS numerus se ipsum metitur per vnitatem.

CVM quilibet numerus semel sumptus sibi ipsi sit æqualis, manifestum est, omnem numerum seipsum metiri per vnitatem.

VII.

SI numerus numerum multiplicans, aliquem produxerit, metietur multiplicas productum per multiplicatum, multiplicatus autem eundem per multiplicantẽ.

NVMERVS enim A, numerum B, multiplicans producat numerum C. Dico A, metiri ipsum C, per B; & B, eundem C, per A. Cum enim ex defin. 15. numerus B, toties compositus constituat ipsum C, quot sunt in A, vnitates; perspicuum est B, metiri ipsum C, per A, & eadem ratione A, ipsum eundem C, metiri per B, cum etiam B, ipsum A, multiplicans procreet numerum C, vt demonstrabitur propos. 16. huius lib.

A .... B ...
C .....
4 3 12

VIII.

SI numerus numerum metiatur, & ille, per quem metitur, eũdem metietur per eas, quæ in metiente sunt, vnitates, hoc est, per ipsum numerum metientem.

VT quia numerus 6. metitur numerum 18. per 3. metietur & numerus 3. eundem numerum 18. per 6. hoc est, per vnitates, quæ in metiente numero 6. reperiuntur. Hoc autem ita esse, ad hunc modum confirmabimus. Quoniam numerus 6 metitur 18. per 3. fiet numerus 18. ex multiplicatione 6. in 3. vel 3. in 6 per defin. 23. Quare per axioma præcedens numerus 3. numerum 18. metietur per 6.

IX.

SI numerus numerum metiens, multiplicet eum, per quem metitur, vel ab eo multiplicetur, illum quem metitur, producet.

METIATVR enim numerus A, numerum C, per B. Dico A, multiplicantem ipsum B, vel multiplicatum à B producere ipsum C. Nam numerus A, numerum C, metiri dicitur per eum numerum, quem multiplicans, vel à quo multiplicatus, ipsum C, producit, per defin. 23. Cum ergo A, metiri ponatur ipsum C, per B; perspicuum est, numerum A, multiplicantem ipsum B, vel ab eo multiplicatum producere ipsum C.

A .... B ...
C .....
4 3 12

X.

NVMERVS quotcunq; numeros metiẽs, compositum quoq; ex ipsis metitur.

METIATVR numerus A, numeros B C, C D. Dico eundem A, metiri quoq; ex ipsis compositum B D. Cum enim A, metiatur ipsos B C, C D; erit tam B C, quàm C D, ipsius A, multiplex. Diuiso ergo B C, in partes B E, E C, ipsi A, æquales, & ipso C D, in partes C F, F G, G D, eidem A, æquales; erit numerus B D, compositus ex omnibus partibus B E, E C, C F, F G, G D, ipsi A, æqualibus, multiplex ipsius A. Quare A, ipsum B D, metitur. Quod est propositum.

A ....
B ....E ....C ....F ....G ....D
4 4 4 4 4 4 4

XI.

NVMERVS quemcunq; numerum metiens, metitur quoque omnem numerum, quem ille metitur.

METIATVR numerus A, numerum B; & B, numerum C D. Dico eundem A, metiri quoq; numerum C D, quem B, metitur. Cum enim B, metiatur ipsum C D; erit C D, ipsius B, multiplex. Diuiso ergo C D, in partes C E, E D, ipsi B, æquales; metietur A, ipsos numeros C E, E D; quandoquidem numerum B, tam numero C E, quam E D, æqualem, metiri ponitur. Igitur idem A, per pron. 10. metietur quoq; numerum C D, ex C E, E D, compositum. Quod est propositum.

A ....
B .....
C .....E .....D
3 9 0 10 9

XII.

NVMERVS metiens totum & ablatum, metitur & reliquum.

METIATVR numerus A, totum B C, & ablatum B D. Dico eundem A, metiri quoq; reliquum D C. Cum enim A, metiatur & B C, & B D; erit tam B C, quàm B D, ipsius A, multiplex, aut certè B D, ipsi A, æqualis erit. Diuiso ergo tam B C, quàm B D, in partes ipsi A, æquales; Erit reliquus numerus D C,

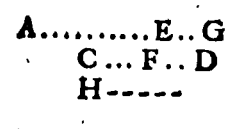
A ....
B ..... D C
B ..... D C
B ... D C

vel vna

vel vna pars numeri B C, ipſi A, æqualis, vel plures, atque adeò D C, æqualis erit ipſi A, vel eius multiplex. Metitur igitur A, ipſum D C. Quod eſt propoſitum.

THEOR. 1. PROPOS. 1. 1.

Si duobus numeris inæqualib. propoſitis, detrahatur ſemper minor de maiore, alterna quadam detractione, neq; reliquus vnquam metiatur præcedentẽ, quoad aſſumpta ſit vnitas; qui principio propoſiti ſunt numeri, primi inter ſe erunt.



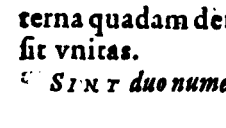
Sint duo numeri propoſiti inæquales A B, C D, quorum C D, minor ex maiore A B, quoties poteſt, detrahatur: & reliquus E B, ex C D, quoties etiam poteſt; & reliquus F D, ex E B: Et in hac alterna detractione nunquam numerus reliquus præcedentem, à quo fuit detractus, metiatur, donec ad vnitatem G B, quæ quidem præcedentem numerum F D, metitur, detractio perueniat. Dico numeros A B, C D, eſſe inter ſe primos, hoc eſt, ſolam vnitatem communi menſura eos metiri. Si enim non dicantur inter ſe primi, metietur eos aliquis numerus, qui ſit H, communi menſura, præter vnitatem. Quia ergo H, metitur numerum C D: & C D, numerum A E, (quod C D, vel pars ſit ipſius A E, vel certè ei æqualis, cum detractus ex A B, reliquerit numerum E B,) [a] metietur quoq; H, ipſum A E: At H, metitur quoq; totum A B. [b] Igitur & reliquum E B, metietur. Metitur autem E B, ipſum C F. [c] Igitur & H, ipſum C F, metietur: Ac propterea, cum & totum C D, metiatur, [d] metietur quoq; reliquum F D. Cum ergo F D, metiatur ipſum E G; [e] metietur etiam H, ipſum E G: Metiebatur autem & H, torum E B. [f] Reliquam igitur vnitatem quoque G B, numerus H, metietur, partem totum. Quod eſt abſurdum. Non igitur numerus aliquis, præter vnitatem, numeros A B, C D, metitur: Ac proinde primi inter ſe ſunt. Quamobrem, ſi duobus numeris inæqualibus propoſitis, &c. Quod erat demonſtrandum.

a 11. pron.
b 12. pron.
c 11. pron.
d 12. pron.
e 11. pron.
f 12. pron.

SCHOLIVM.

Conuertemvs cum Campano hanc propoſitionem, hoc modo.

Si duobus numeris inter ſe primis propoſitis, detrahatur ſemper minor de maiore, alterna quadam detractione; nunquam reliquus metietur præcedentem, quoad aſſumpta ſit vnitas.



Sint duo numeri inter ſe primi A B, C D, quorum minor C D, ex maiore A B, quoties poteſt, detrahatur; & reliquus E B, ex C D, quoties etiam poteſt; & reliquus F D, ex E B, relinquens G B. Dico in hac alterna detractione nunquam reliquum metiri præcedentem, quoad vnitas aſſumatur. Metiatur enim, antequam ad vnitatem detractio perueniat, ſi fieri poteſt, reliquus numerus G B, præcedentem F D, ex E B, ablatum. Quia igitur numerus G B, numerũ F D, metitur; & F D, ipſum E G, [a] metietur quoque G B, ipſum E G. Cum ergo G B, & ſe ipſum metiatur, [b] metietur quoque numerum E B, ex E G, G B, compoſitum: Metitur autem E B, ipſum C F. [c] Igitur & G B, eundem C F, metietur: Atque adeò cum & ipſum F D, poſitus ſit metiri; [d] metietur quoque ipſum C D, ex C F, F D, compoſitum. At verò C D, metitur ipſum A E. [e] Igitur & eundem A E, numerus G B, metietur: Ac proinde, cum & ipſum E B, metiatur, vt oſtenſum eſt; [f] metietur & ipſum A B, ex vtroque A E, E B, compoſitum. Quare cum numerus G B, metiatur numeros A B, C D, ipſi erunt inter ſe compoſiti. Quod eſt abſurdum, cum ponantur inter ſe primi. Nunquam ergo numerus aliquis reliquus præcedentem metietur, donec aſſumpta ſit vnitas. Quod eſt propoſitum.

a 11. pron.
b 10. pron.
c 11. pron.
d 10. pron.
e 11. pron.
f 10. pron.

Eodem modo & hoc verum eſt.

Si propoſitis duobus numeris inter ſe compoſitis, detrahatur ſemper minor de maiore, alterna quadam detractione; detractio ad vnitatem vſque non perueniet, ſed ad numerum, qui præcedentem detractum metiatur.

Nam ſi detractio huiuſmodi ad vnitatem vſque perueniret, eſſent propoſiti numeri inter ſe primi, [g] *vt Euclides demonſtrauit. Quod eſt abſurdum, cum ponantur inter ſe compoſiti.*

g 1. ſeptimi

Ex his facilè dignoſcemus, an duo quicunque numeri propoſiti ſint inter ſe primi, nec ne. Nam detractio ſemper minore de maiore, alterna quadam detractione; ſi nunquam reliquus præcedentem metiatur, quoad aſſumpta ſit vnitas; ipſi erunt inter ſe primi, [h] *vt Euclides demonſtrauit: Si verò reliquus aliquis numerus præcedentem metiatur, ipſi erunt inter ſe compoſiti, cum ille idem reliquus numerus vtrumque numerum propoſitum metiatur, vt perſpicuum eſt ex demonſtratione ſuperiori huius ſcholij. Ex eo enim, quòd reliquus numerus G B, metiri dicebatur præcedentem numerum F D, oſtenſum fuit, eundem reliquum G B, vtrumq; A B, & C D, metiri.*

h 1. ſeptimi

PROBL. 1. PROPOS. 2.

DVOBVS numeris datis non primis inter ſe, maximam eorum communem menſuram reperire.

DENTVR duo numeri AB, CD, non primi inter ſe, quorum maximam communem menſuram oporteat reperire. Detrahatur minor CD, ex maiore AB, quoties poteſt, relinquatq; EB, numerum, qui ex CD, ſubtractus relinquat FD, & ſic deinceps ſemper minor de maiore ſubtrahatur alterna quadam detractione; in qua quidem peruenietur ad numerum, qui præcedentem metiatur. Nam ſi ad vnitatem deueniretur, [a] numeri AB, CD, eſſent inter ſe primi; quod eſt contra hypotheſim. Peruentum ergo iam ſit ad reliquum numerum FD, qui detractus ex EB, nihil relinquat, ſed eum metiatur. Dico FD, eſſe maximam menſuram communem numerorum AB, CD. Quod enim vtrumque metiatur, ita oſtendemus. Quia FD, metitur ipſum EB; & EB, ipſum CF, [b] metietur quoq; FD, ipſum CF; atque adeò cum & ſeipſum metiatur, [c] metietur & totum CD, ex CF, FD, compoſitum. At CD, ipſum AE, metitur. [d] Igitur & FD, eundem AE, metietur. Ac propterea cum FD, metiatur quoque ipſum EB; [e] metietur etiam totum AB, ex vtroque AE, EB, compoſitum. Metitur igitur FD, vtrumque numerum AB, CD.

A.....E.....B
C.....F..D
G------

a 1. ſeptimi.
b 11. pron.
c 10. pron.
d 11. pron.
e 10. pron.

QVOD autem FD, ſit maxima menſura communis illorum, ita probabimus. Si enim fieri poteſt, detur maior menſura communis G, quàm FD. Quoniam ergo G, metitur vtrumq; AB, CD; Et CD, metitur ipſum AE, [f] metietur quoq; G, ipſum AE. [g] Igitur & reſiduum EB: At verò EB, metitur CF. [h] Metietur ergo & G, eundem CF. [i] Igitur & reſiduum FD; maior minorem. Quod eſt abſurdum. Non ergo maior numerus, quàm FD, numeros AB, CD, metitur; Ac proinde FD, maxima eſt menſura numerorum, AB, CD.

f 11. pron.
g 12. pron.
h 11. pron.
i 12. pron.

A.....B
C.....D

QVOD ſi minor numerus CD, metiatur maiorem AB, ita vt detractus ex AB, nihil relinquat, erit ipſe maxima amborum menſura communis, cum & ſe ipſum metiatur, vt in hac figura apparet. Duobus igitur numeris datis non primis inter ſe, &c. Quod erat faciendum.

COROLLARIVM.

Ex hoc manifeſtum eſt, numerum metientem duos numeros, metiri quoque maximam eorundem communem menſuram.

HOC elicitur ex ea parte demonſtrationis, qua oſtenſum fuit FD, eſſe maximam menſuram ipſorum AB, CD. Demonſtratum enim eſt ibi, numerum G, ſi metiatur numeros AB, CD, metiri quoque numerum FD, maximam eorum menſuram communem. Eademq; ratio eſt de cæteris.

SCHOLIVM.

A..... 10
B..... 7
C..... 5

Ex iis quæ dicta ſunt, facilè cum Campano experiemur, an quotlibet numeri propoſiti ſint inter ſe primi, nec ne. Sint enim tres numeri A, B, C. Primum ergo experior, per ea, quæ ad propoſ. 1. docuimus, an duo A, & B, ſint inter ſe primi: Qui ſi fuerint inter ſe primi, non erunt tres numeri A, B, C, inter ſe compoſiti, quod nullam poſſint habere menſuram communem, præter vnitatem, propter numeros A, & B, inter ſe primos.

A..... 10
B..... 15
C..... 9
D... 5

a 2. ſeptimi

SI verò A, & B, fuerint inter ſe compoſiti, [a] ſit eorum maxima menſura communis inuenta D; quæ ſi metiatur & numerum C, perſpicuum eſt, tres numeros A, B, C, eſſe inter ſe compoſitos. cum habeant numerum D, communem menſuram.

QVOD ſi D, maxima menſura numerorum A, & B, non metiatur numerum C; erunt C, & D, vel inter ſe primi, vel non. Si ſint inter ſe primi, non erunt tres numeri A, B, C, inter ſe compoſiti, ſed inter ſe primi. Si enim dicantur eſſe inter ſe compoſiti, ita vt habeant numerum communem menſuram, metietur eiuſmodi communis menſura numerum D, maximam menſuram numerorum A, & B, per corollarium huius propoſ. Quare cum eadem illa menſura metiatur quoque numerum C, non erunt inter ſe primi numeri C, & D. Quod eſt contra hypotheſim. Si autem C, & D, non ſint inter ſe primi, erunt tres numeri A, B, C, inter ſe compoſiti. [b] Inuenta enim numerorum C, & D, maxima menſura communi E; cum E, metiatur ipſum D; D, autem ipſos A, & B; [c] metietur quoque E, eoſdem A, & B. Quare cum idem E, metiatur quoque ipſum C; metietur E, tres numeros A, B, C; Ac propterea ipſi inter ſe erunt compoſiti. Quod eſt propoſitum.

A..... 9
B..... 6
C..... 5
D... 5

b 2. ſeptimi

A..... 15
B..... 12
C..... 10
D.... E.. 2

c 11. pron.

SIMILI arte explorabimus, an plures numeri, quàm tres, ſint inter ſe primi, an potius inter ſe cõpoſiti.

Nam ſi

Nam ſi dati numeri fuerint quatuor, experiendum id erit primùm in tribus; ſi quinque, in quatuor, &c. Reliqua autem perficienda, vt de tribus numeris datis diximus.

PROBL. 2. PROPOS. 3. 3.

TRIBVS numeris datis non primis inter ſe, maximam eorum communem menſuram reperire.

DENTVR tres numeri A, B, C, non primi inter ſe, quorum maximam menſuram communem oporteat reperire. Sit D, maxima menſura numerorum A, & B; Si ergo D, metiatur quoq; ipſum C, perſpicuum eſt D, eſſe maximam menſuram numerorum datorum A, B, C. Nam ſi maior numerus dicatur metiri numeros A, B, C, metietur idem, per corollarium propoſ. 2. huius lib. numerum D, maximam menſuram numerorum A, & B, maior numerus minorem. Quod eſt abſurdum. Si verò D, non metiatur ipſum C; erunt ſaltem D, & C, inter ſe compoſiti. Cum enim ſint A, B, C, inter ſe compoſiti, metietur quæcunque illorum menſura communis, per coroll. propoſ. 2. huius lib. numerum D, maximam menſuram numerorum A, & B. Cum ergo eadem illa menſura metiatur etiam ipſum C; erunt D, & C, inter ſe compoſiti. [a] Sit eorum maxima menſura E. Dico E, eſſe maximam menſuram communem datorum numerorum A, B, C. Quòd enim ſit eorum menſura communis, hac ratione demonſtrabitur. Quoniam E, metitur, numeros C, & D; at D, ipſos A, & B; [b] metietur quoque E, ipſos A, & B; Ac proinde tres numeros A, B, C, metietur.

A.....6
B.....D....4
C..9..E..F---

[a] 2. *ſeptimi*

[b] 11. *primi*

QVOD autem E, ſit maxima eorum communis menſura, perſpicuum eſt. Si enim fieri poteſt, ſit F, maior quàm E, eorum menſura communis. Quia igitur F, metitur numeros A, & B; metietur quoque, per coroll. propoſ. 2. huius lib. numerum D, maximam eorum menſuram communem. Metitur autem & C. Igitur F, metiens D, & C, metietur quoque E, eorum menſuram maximam, ex eodem coroll. numerus maior minorem, quod eſt abſurdum. Non ergo maior numerus, quàm E, numeros A, B, C, metitur; Atque adeò E, maxima menſura eſt ipſorum. Quamobrem tribus numeris datis non primis inter ſe, &c. Quod faciendum erat.

COROLLARIVM.

HINC perſpicuum eſt, numerum metientem tres numeros, metiri quoque maximam eorum communem menſuram.

HOC etiam colligitur ex vltima parte demonſtrationis. Oſtenſum enim eſt ibi, numerum F, ſi metiatur numeros A, B, C, metiri quoque numerum E, maximam illorum menſuram communem: Eademq; in cæteris eſt ratio.

PARI ratione, pluribus numeris datis, quàm tribus, non primis inter ſe, maxima eorum communis menſura inuenietur; locumq; habebit hoc idem corollarium. Nam ſi dati numeri fuerint quatuor, inuenienda erit primùm maxima menſura communis trium numerorum: ſi quinq;, quatuor numerorum accipienda erit primùm maxima communis menſura, &c. Reliqua verò omnia peragenda, vt de tribus numeris dictũ eſt.

THEOR. 2. PROPOS. 4. 4.

OMNIS numerus, omnis numeri, minor maioris, aut pars eſt, aut partes.

A..... 7
B..... 10

SINT duo numeri A, minor, & B, maior. Dico A, eſſe aut partem, aut partes ipſius B. Sint enim primùm A, & B, inter ſe primi. Quia igitur quælibet vnitas numeri A, pars eſt numeri B; perſpicuum eſt, numerum A, eſſe partes numeri B, tot nimirum, quot ſunt in A, vnitates.

A..... 5
B..... 10

SINT deinde A, & B, non primi inter ſe, ſed inter ſe cõpoſiti, & metiatur A, ipſum B. Quo poſito, manifeſtũ eſt A, partẽ eſſe numeri B, ex defin. 3. huius lib.

SED iam A, non metiatur ipſum B, [c] inuenta autem maxima eorum menſura communis ſit C; diuidaturq; numerus A, in partes A D, D E, E F, quarum ſingulæ ipſi C, ſint æquales. [d] Quia igitur C, pars eſt ipſius B, cum ipſum metiatur; erit quoque A D, pars eiuſdem B: ſimiliter & D E, & E F; Ac propterea totus numerus A, eſt partes numeri B, tot videlicet, quoties C, in A F, continetur. Omnis igitur numerus, omnis numeri, minor maioris, aut pars eſt, aut partes. Quod demonſtrandum erat.

A..D..E..F, 6
B..... 10
C.. 2

[c] 2. *ſeptimi*

[d] 3. *defin.*

THEOR. 3. PROPOS. 5. 5.

SI numerus numeri pars fuerit, & alter alterius eadem pars: Et ſimul vterque vtriuſque ſimul eadem pars erit, quæ vnus vnius.

SIT numerus A, eadem pars numeri B C, quæ eſt numerus D, numeri E F. Dico vtrumque nu-

merum A,& D ſimul vtriuſq; numeri B C,& E F,ſimul eandem eſſe partem,quæ eſt vel A, ipſius B C,vel D,ipſius E F. Diuiſis enim numeris B C, E F, in partes B G, G C; E H, H F, ipſis A, & D, æquales; erit multitudo partium numeri B C,æqualis multitudini partium numeri E F,propterea quòd eadem pars eſt A,ipſius B C,quæ D,ipſius E F. Quia igitur A, & B G, æquales ſunt; ſi illis addantur æquales D,& E H; erunt A,& D, ſimul æquales ipſis B G,& E H,ſimul. Eodem argumento erunt A, & D, ſimul ipſis G C,& H F,ſimul æquales: Et ſic deinceps,ſi plures partes fuerint in B C, E F; aggregatum numerorum A,& D, tot aggregatis partium numerorum B C, & E F, æquale erit, quoties A,in B C,vel D,in E F,continetur: Ac propterea eadem pars erit vterque A,& D,ſimul vtriuſque B C,& E F,ſimul, quæ eſt A,ipſius B C, vel D, ipſius E F. Si numerus ergo numeri pars fuerit: &c. Quod erat oſtendendum.

A . . . . . 6 | D 4
B . . . . . G . . . . . C | E . . . H . . . . F
6 12 6 4 8 4

SCHOLIVM.

A, 2/9 D, 1/7
B, 2/9 G, 2/9 C E, 1/7 H, 1/7 F

Idem hùc verum eſt in numeris fractis, eademq; prorſus demonſtratio adhibebitur: vt in hoc exemplo apparet, vbi numerus A, numeri B C, & numerus D, numeri E F, eadem pars eſt; ac proinde vterq; ſimul A, D, vtriuſque B C, E F, ſimul eadem pars oſtendetur, quæ A, ipſius B C: ſi nimirum B C, E F, diuidantur in partes B G, G C; E H, H F, ipſis A, D, æquales, &c.

Quod ſi quando contingat numerum fractum diuidi non poſſe in partes æquales propoſitas, propterea quòd numerator in eas partes ſecari nequeat, multiplicandus erit tam numerator, quàm denominator per numerum partium. Procreabitur enim hac ratione alia fractio prioris æquiualens, & cuius numerator in propoſitas partes diuidi poteſt. Vt ſi fractio 5/9. ſecandæ ſit in duas partes æquales, ducendus erit vterque eius numerus in 2. ſi in tres, in 3. ſi in quatuor, in 4. &c. vt gignantur fractiones 10/18. 15/27. 20/36. quarum prima ſecabitur in has duas partes æquales 5/18. 5/18. ſecunda in has tres 5/27. 5/27. 5/27. tertia verò in has quatuor, 5/36. 5/36. 5/36. 5/36.

Rvrsvs quando adſunt integra, reuocanda prius erunt vnà cum fractione ad vnam fractionem, deinde eodem modo tam numerator, quàm denominator multiplicandus per numerum partium, &c. Vt ſi numerus 4 3/7. ſecandus ſit in tres partes; reducemus eum prius ad hanc vnicam fractionem, 31/7. deinde vtrumque eius numerum per 3. multiplicabimus, vt fiat fractio 93/21. cuius tres partes æquales ſunt 31/21. 31/21. 31/21. Atque hac in ſequentibus quoq; propoſitionibus obſeruanda ſunt, quando fractionibus accommodantur: Et ſemper nomine fractionum intelligendi quoq; ſunt numeri integri cum fractis: Item quando aliqui fracti ſunt, & alij integri.

Eodem modo demonſtrabimus & hoc, quod ſequitur.

Si vnitas numeri pars fuerit,& altera vnitas,vel numerus alterius numeri eadem pars; Et ſimul vtraque vnitas,vel vnitas & numerus ſimul, vtriuſque numeri ſimul eadem pars erit,quæ vnitas numeri.

Hoc autem perſpicuè in his appoſitis exemplis apparet. Eadem enim prorſus eſt demonſtratio.

A. D. | A. D...
B. G. C | E, H. F | B. G. C | E...H...F

Possvmvs etiam hanc propoſitionem ad quotcunque numeros transferre, hoc modo.

Si ſint quotcunque numeri quotcunque numerorum æqualium numero, ſinguli ſingulorum, eadem pars; Et omnes omnium ſimul eadem pars erunt, quæ vnus vnius.

Sint numeri A, B, C, numerorum D E, F G, H I, ſinguli ſingulorum eadem pars. Dico omnes numeros A, B, C, ſimul omnium numerorum D E, F G, H I, ſimul eandem eſſe partem, quæ eſt A, ipſius D E. Diuiſis enim numeris D E, F G, H I, in partes ipſis A, B, C, æquales; erit multitudo partium numeri D E, æqualis multitudini partium tam numeri F G, quàm numeri H I. Quia igitur A, & D K, æquales ſunt; ſi illis addantur æquales B, & F L, erunt A, B, ſimul æquales ipſis D K, F L, ſimul: quibus ſi rurſum addatur æquales C, & H M; erunt quoq; A, B, C, ſimul æquales ipſis D K, F L, H M, ſimul. Simili ratione erunt A, B, C, ſimul æquales ipſis K E, L G, M I, ſimul; & ſic deinceps, ſi plures partes fuerint in D E, F G, H I, aggregatum numerorum A, B, C, tot aggregatis partium numerorum D E, F G, H I, æquale erit, quoties A, in D E, continetur. Quamobrem eadem pars erunt A, B, C, ſimul ipſorum D E, F G, H I, ſimul, quæ A, ipſius D E.

A . . . .
D . . . . K . . . . E | F . . . L . . . G | H . . M . . I
B . . . | C . .

Idem ſequitur, ſi loco vnius numerorum A, B, C, ſumatur vnitas, vel loco plurium, vel etiam omnium, plures vnitates, vt de duobus dictum eſt. Id quod ſequentes figuræ indicant.

A. B.. C...
D. K. E. | F.. L.. G | H ... M ... I | D. K. E | F. L. G | H. M. I

Hæc etiam fractis numeris conueniunt. Nam si quotcunque fracti numeri, quotcunque fractorum numerorum æqualium numero, singuli singulorum, eadem pars fuerint; Et omnes omnium simul eadem pars erunt, quæ vnus vnius. Quod eodem modo demonstrabitur: etiamsi aliqui numerorum sint iutegri, vel vnitates, vt hic videre licet.

A, 1. | B, $\frac{1}{2}$. | C, $\frac{3}{4}$.
D, 1 K, 1 E | F, $\frac{1}{2}$ L, $\frac{1}{2}$ G | H, $\frac{3}{4}$ M, $\frac{3}{4}$ I

Theorematı quoque primo quinti lib. simile proponemus, in hunc modum.

Si sint quotcunque numeri quotcunque numerorum æqualium numero, singuli singulorum, æquè multiplices: quàm multiplex est vnius vnus numerus, tam multiplices erunt & omnes omnium.

Demonstratio eadem hic est, quæ in lib. 5. Quod tamen aliter ita etiam demonstrabimus. Sint A, B, C, numeri numerorum D, E, F, æquè multiplices, singuli singulorum.

A..... B..... C....
D.... E... F..

Dico & omnes A, B, C, simul omnium D, E, F, simul tam multiplices esse, quàm est A, multiplex ipsius D. Cum enim tam sit multiplex A, ipsius D, quàm est B, ipsius E & C, ipsius F; erit è contrario D, eadem pars ipsius A, quæ E, ipsius B, & F, ipsius C. Per ea igitur, quæ nuper à nobis demonstrata sunt, erunt D, E, F, simul eadem pars ipsorum A, B, C, simul, quæ D, ipsius A; Ac propterea è contrario tam multiplices erunt omnes A, B, C, simul, omnium D, E, F, simul, quàm est multiplex A, ipsius D.

Si numeri A, B, C, fracti sint, & ipsorum D, E, F, fractorum æquemultiplices; quàm multiplex est vnius vnus, tam multiplices erunt & omnes omnium. Vt ex demonstratione liquet.

Quod si loco vnius numerorum D, E, F, assumatur vnitas, vel etiam loco plurium, vel omnium, plures vnitates, theorema eodem modo demonstrabitur, vt ex sequentibus figuris apparet.

A.. B.... C..... | A.. B.. C..
D. E.. F... | D. E. F.

THEOR. 4. PROPOS. 6.

Si numerus numeri partes fuerit, & alter alterius eædem partes: Et simul vterque vtriusque simul eædem partes erit, quæ vnus vnius.

Sit numerus AB eædem partes numeri C, quæ numerus DE, numeri F. Dico vtrumque numerum AB, & DE, simul vtriusque numeri C, & F, simul easdem partes esse, quæ est AB, ipsius C, vel DE, ipsius F. Diuisis enim numeris AB, DE, in partes AG, GB; DH, HE, numerorum C, & F; erit multitudo partium in numero AB, æqualis multitudini partium in numero DE; propterea quòd eædem partes est numerus AB, numeri C, quæ numerus DE, numeri F. Quia igitur, quæ pars est AG, numeri C, eadem est DH, numeri F; [a] erit vterque AG, DH, simul eadem pars vtriusque C, F, simul, quæ AG, ipsius C, vel DH, ipsius F. Eadem ratione erit vterque GB, HE, simul eadem pars vtriusque C, F, simul, quæ GB, ipsius C, vel HE, ipsius F: Et sic deinceps, si plures partes fuerint in AB, DE, erunt tot aggregata partium in numeris AB, DE, contenta, quorum quodlibet eadem pars est numerorum C, F, simul, quæ pars est AG, ipsius C; quot partes eædem est numerus AB, ipsius C, vel DE, ipsius F: Ac proinde eædem partes erit vterque numerus AB, DE, simul, vtriusque numeri C, F, simul, quæ AB, ipsius C, vel DE, ipsius F. Si numerus ergo numeri partes fuerit, &c. Quod erat demonstrandum.

A.... G... B | D.... H.... E
C..... | F.....

[a] 5. septimi

SCHOLIVM.

Eadem hæc propositio locum habet in numeris fractis, vnà cum demonstratione: vt hoc exemplum demonstrat.

A, $\frac{1}{9}$ G, $\frac{1}{9}$ B D, $\frac{2}{7}$ H, $\frac{2}{7}$ E
C, $\frac{1}{9}$ F, $\frac{2}{7}$

Sed & hanc propositionem ad quotcunque numeros siue integros, siue fractos extendentes, hoc modo amplificabimus.

Si sint quotcunque numeri quotcuntque numerorum, singuli singulorum, eædem partes; Et omnes omnium simul eædem partes erunt, quæ vnus vnius.

Eadem enim est demonstratio, si modò pro quinta propos. assumatur id, quod secundo loco demonstrauimus in scholio præcedenti; vt hic perspicuum est.

A.. K.. B | C... L... D | E.... M.... F
G..... | H..... | I.....

7. THEOR. 5. PROPOS. 7.

SI numerus numeri pars fuerit, qualis ablatus ablati: Et reliquus reliqui eadem pars erit, qualis totus totius.

SIT numerus AB, eadem pars numeri CD, quæ ablatus AE, ablati CF. Dico reliquum EB, eandem esse partem reliqui FD, quæ est totus AB, totius CD. Ponatur enim EB, numeri GC, eadem pars, quæ est AE, ipsius CF, vel totus AB, totius CD. Quia igitur AE, eadem est pars ipsius CF, quæ EB, ipsius GC; [a] erit vterque AE, EB, simul eadem pars vtriusque simul CF, GC, quæ AE, ipsius CF; hoc est, quæ totus AB, totius CD. Ac propterea cum AB, eadem sit pars vtriusque numeri FG, CD; erunt ipsi numeri FG, CD, inter se æquales. Dempto ergo communi CF, æquales remanebunt GC, FD. Eadem igitur pars erit EB, ipsius FD, quæ ipsius GC, hoc est, quæ totus AB, totius CD. Si igitur numerus numeri pars fuerit, &c. Quod erat ostendendum.

A.... E.... B
G.... C.... F.... D

[a] 5. septimi.

SCHOLIVM.

A, 3. E, 2. B
G, 4. C, 6. F, 4. D

LOCVM etiam habet hæc propositio, vbi cum eius demonstratione in numeris fractis, vt hic apparet.

IDEM hoc theorema verum est, tam in numeris integris, quàm in fractis, etiamsi ablata sit vnitas AE, vel reliqua fuerit vnitas EB; vel denique in integris et ablata, & reliqua sit vnitas, vt ex his exemplis apparet.

A. E... B	A... E. B	A. E. B
G..... C.. F..... D	G.. C..... F.. D	G.. C.. F.. D

CAETERVM ex his theoremati quinto lib. 5. simile hoc demonstrabimus, tam in numeris integris, quàm in fractis.

SI numerus numeri æquè fuerit multiplex, atque ablatus ablati: Etiam reliquus reliqui ita multiplex erit, vt totus totius.

QVOD quidem non aliter ostendemus, ac theorema illud quinti lib. Verùm idem ex demonstratis ita confirmabimus. Sit totus AB, totius CD, æquè multiplex, atque ablatus AE, ablati CF. Dico & reliquum EB, reliqui FD, ita esse multiplicem, vt est totus AB, totius CD. Cum enim AE, ipsius CD, sit æquè multiplex, atque AE, ipsius CF, erit è contrario totus CD, totius AB, eadem pars, quæ ablatus CF, ablati AE. [a] Quare & reliquus FD, reliqui EB, eadem pars erit, quæ totus CD, totius AB; Ac proinde è contrario EB, ita multiplex erit ipsius FD, vt AB, ipsius CD, est multiplex.

A.... E.... B
C.. F.. D

[a] 7. septimi

QVOD si ex CD, ablata fuerit vnitas CF; vel reliqua sit vnitas FD: vel denique in integris & ablata sit vnitas CF, & alia reliqua FD; idem demonstrabitur, vt hæc exempla commonstrant.

A... E..... B	A.... E.. B	A.... E.... B
C. F.. D	C.. F. D	C. F. D

8. THEOR. 6. PROPOS. 8.

SI numerus numeri partes fuerit, quotes ablatus ablati: Et reliquus reliqui eædem partes erit, quales totus totius.

SIT numerus AB, partes eædem numeri CD, quotes ablatus AE, ablati CF. Dico reliquum EB, eosdem esse partes reliqui FD, quotes totus AB, est totius CD. Sumpto enim numero GH, æquali ipsi AB; erit GH, eædem partes ipsius CD, quotes AB, eiusdem CD; hoc est, quotes AE, ipsius CF. Diuiso ergo GH, in partes GI, IH, numeri CD; & AE, in partes AK, KE, numeri CF; erit multitudo partium GI, IH, multitudini partium AK, KE, æqualis, eademque pars tam GI, quàm IH, ipsius CD, quæ tam AK, quàm KE, ipsius CF. Cum ergo CD, numerus maior sit numero CF, erit & tam GI, quàm IH, pars ipsius CD, maior tam numero AK, quàm KE, parte ipsius CF. Sumptis igitur numeris GL, IM, æqualibus ipsis AK, KE; erit GL, eadem pars ipsius CF, quæ AK, eiusdem CF, hoc est, quæ GI, ipsius CD; Ac proinde cum totus GI, totius CD, sit eadem pars, quæ ablatus GL, ablati CF, [a] erit & reliquus LI, reliqui FD, eadem pars, quæ totus GI, totius CD. Eodemque argumento ostendemus MH, eandem esse partem ipsius FD, quæ est totus GI, vel IH, totius CD. Quoniam ergo tam GI, quàm IH, eadem est pars ipsius CD, quæ est tam LI, quàm MH, ipsius FD: erit vterque GI, IH, simul eædem partes ipsius CD, quæ vterque LI, MH, ipsius FD. Est autem GH, eædem partes ipsius CD, quotes AB, eiusdem CD, propter æqualitatem numerorum AB, GH. Igitur & vterque LI, MH, simul eædem partes erit ipsius FD, quotes AB, ipsius CD. Quia verò si ab æqualibus AB, GH, æquales auferantur AK, KE, & GL, IM, reliqui EB, & LI, MH, simul æquales sunt: Erit quoque EB, reliquus eædem partes reliqui FD, quotes AB, totus totius CD, nimi-

A.... K..... E.... B
C..... F..... D
G..... L.. I..... M.. H

[a] 7. septimi

CD, nimirum eædem, quæ vterque LI, MH, simul erat eiusdem FD. Si numerus ergo numeri partes fuerit, &c. Quod erat ostendendum.

SCHOLIVM.

A, $\frac{2}{19}$. K, $\frac{2}{19}$. E, $\frac{6}{19}$. B
C, $\frac{6}{19}$. F, $\frac{9}{19}$. D
G, $\frac{2}{19}$. L, $\frac{3}{19}$. I, $\frac{2}{19}$. M, $\frac{3}{19}$. H

In numeris fractis eadem hac propositio eodem prorsus modo demonstrabitur, vt hic manifestum est.

Non demonstrauit Euclides hanc propositionẽ, quemadmodum præcedẽtem, quod nonnulli interpretes faciunt; quia non constabat hic, reliquum numerum EB, alicuius numeri easdem esse partes, quas est numerus AE, numeri CF: ibi verò perspicuum erat, reliquum EB, alicuius numeri eandem esse partem, quam est AE, ipsius CF. Licet enim ipsius EB, duplum assumere, triplum, quadruplum, &c. donec EB, sit ita submultiplex numeri assumpti GC, vt AE, est submultiplex ipsius CF.

THEOR. 7. PROPOS. 9.

9.

Si numerus numeri pars fuerit, & alter alterius eadem pars: Et vicissim quæ pars est, aut partes primus tertij, eadem pars erit, vel eædem partes, & secundus quarti.

Sit numerus A, numeri BC, eadem pars, quæ numerus D, numeri EF, sintque A, BC, minores ipsis D, EF, singuli singulis. De his enim propositio intelligenda est. Dico & vicissim eandem partem esse, aut easdem partes A, ipsius D, qualis est, aut quales BC, ipsius EF. Diuisis enim numeris BC, EF, in partes BG, GC, & EH, HF, ipsis A, & D, æquales; erit multitudo partium numeri BC, æqualis multitudini partium numeri EF. Quia verò BG, GC, inter se sunt æquales, & minores quàm EH, HF, quæ inter se etiam æquales sunt, quòd & totus BC, toto EF, minor ponatur; Erit BG, ipsius EH, eadem pars, aut partes, quæ GC, ipsius HF; ac propterea & vterque BG, GC, simul, nimirum BC, secundus vtriusque EH, HF, simul, nimirum EF, quarti, eadem pars, vel partes, quæ BG, ipsius EH: hoc est, quæ A, primus ipsius D, tertij: Si numerus igitur numeri pars fuerit, &c. Quod demonstrandum erat.

A 1 ...
B 2 ... G 4 ... C
D 3 ...
E 6 ... H 12 ... F

a 5. vel 6. septimi.

SCHOLIVM.

A, $\frac{3}{11}$.
B, $\frac{3}{11}$. G, $\frac{3}{11}$. C
D, $\frac{14}{22}$.
E, $\frac{14}{22}$. H, $\frac{14}{24}$. F

In numeris fractis propositio hæc, vnà cum eius demonstratione locum etiam habet, vt hìc perspicuum est.

Quod si loco primi numeri vnitas accipiatur, quæ numeri alicuius pars sit, quæ alter numerus alterius: Erit vicissim vnitas tertij numeri eadem pars, quæ secundus numerus quarti; id quod eodem argumẽto confirmabitur, si loco partium assumamus partem in demonstratione, vt ex hoc exemplo apparet.

A.
B. G. C
D.....
E..... H..... F

THEOR. 8. PROPOS. 10.

10.

Si numerus numeri partes fuerit, & alter alterius eædem partes: Et vicissim, quæ partes est primus tertij, aut pars, eædem partes erit & secundus quarti, aut pars.

Sit numerus AB, eædem partes numeri C, quæ numerus DE, numeri F, sintque AB, C, ipsis DE, F, minores, singuli singulis. De his enim etiam intelligenda est hæc propositio, sicut & antecedens. Dico & vicissim numerum AB, easdem partes esse, aut partem numeri DE, quæ numerus C, est numeri F. Diuisis enim numeris AB, DE, in partes AG, GB, & DH, HE, numerorum C, & F; erit multitudo partium in AB, æqualis multitudini partium in DE; & tam AG, quàm GB, eadem pars ipsius C, quæ tam DH, quàm HE, ipsius F. Vicissim ergo eadem pars erit, aut partes AG, ipsius DH, & GB, ipsius HE, quæ C, ipsius F: Ac propterea eadem pars erit, vel partes AG, ipsius DH, quæ GB, ipsius HE. Igitur & vterque AG, GB, simul, nimirum primus AB, eadem pars erit, aut partes vterque DH, HE, simul, nimirum DE, tertij, quæ AG, ipsius DH, hoc est, quæ C, secundus quarti F. Si numerus ergo numeri partes fuerit, & alter alterius, &c. Quod demonstrandum erat.

A, $\frac{2}{15}$. G, $\frac{2}{15}$. B
C, $\frac{6}{15}$.
D, $\frac{3}{10}$. H, $\frac{3}{10}$. E
F, $\frac{9}{10}$.

b 9. septimi.

c 5. vel 6. septimi.

SCHOLIVM.

Numeris fractis conuenit etiam huius propositionis demonstratio, vt in hoc exemplo apparet.

12. # THEOR. 9. PROPOS. 11.

SI fuerit vt totus ad totum, ita ablatus ad ablatum: Et reliquus ad reliquum erit, vt totus ad totum.

SIT vt totus numerus AB, ad totum CD, ita ablatus AE, ad ablatum CF. Dico & reliquum EB, ad reliquum FD, esse, vt est totus AB, ad totum CD. Cùm enim sit, vt AB, ad CD, ita AE, ad CF; [a] erit AB, ipsius CD, & AE, ipsius CF, vel æquè multiplex, vel eadem pars, vel eædem partes: vel certè AB, ipsum CD, & AE, ipsum CF, æqualiter continebit, eandemque insuper illius partem, vel easdem partes. Sit primùm AB, ipsius CD, & AE, ipsius CF, æquè multiplex. Quo posito, erit è contrario CD, totus totius AB, eadem pars, quæ ablatus CF, ablati AE, propter AB, AE, æquè multiplices ipsorũ CD, CF. [b] Igitur & reliquus FD, reliqui EB, eadem pars erit, quæ totus CD, totius AB: Ac propterea è contrario AB, ipsius CD, & EB, ipsius FD, æquè multiplex erit. [c] Quare erit, vt totus AB, ad totum CD, ita EB, reliquus ad reliquum FD.

a 20. defin.

A ..... E ..... B
C ..... F ... D

b 7. septimi.

c 20. defin.

SIT deinde AB, ipsius CD, & AE, ipsius CF, eadem pars, vel eædem partes. Quo posito, [d] erit & reliquus EB, reliqui FD, eadem pars, vel partes, quæ totus AB, totius CD: [e] Ac proinde, erit vt totus AB, ad totum CD, ita EB, reliquus ad reliquum FD.

d 7. vel 8. septimi.

e 20. defin.

A .... E .. B
C ..... F .... D

A .... E .. B
C ..... F ... D

CONTINEAT tertiò AB, ipsum CD, & AE, ipsum CF, æqualiter, eandemque insuper illius partem, vel partes. Quo posito, erit è contrario CD, totus totius AB, eædem partes, quæ ablatus CF, ablati AE, vt mox demonstrabimus. [f] Reliquus igitur FD, reliqui EB, eædem quoque partes erit, quæ totus CD, totius AB: Ac propterea, è contrario AB, ipsum CD, & EB, ipsum FD, æqualiter continebit, eandemque insuper illius partem, vel partes, vt mox ostendemus. [g] Quare erit, vt totus AB, ad totum CD, ita EB, reliquus ad reliquum FD.

f 8. septimi.

g 20. defin.

A ..... E ... B
C .... F .. D

A ..... E ..... B
C ..... F ..... D

QVOD si AB, totus toti CD, æqualis fuerit, & ablatus AE, ablato CF; perspicuum est reliquum EB, quoque esse æqualem reliquo FD. Nam si ab æqualibus æqualia demantur; quæ remanent, sunt æqualia. Itaque si fuerit, vt totus ad totũ, ita ablatus ad ablatũ, &c. Quod erat demõstrandũ.

A ..... E ... B
C ..... F ... D

SCHOLIVM.

EODEM modo demonstrabitur hoc in fractis numeris. Id quod liquidò constat in his exemplis, quæ exemplis tertij casus demonstrationis respondent.

A, $\frac{6}{9}$. E $\frac{3}{10}$. B | A, $\frac{14}{21}$. E $\frac{25}{29}$. B
C, $\frac{4}{9}$. F $\frac{2}{10}$. D | C, $\frac{5}{21}$. F $\frac{10}{29}$. D

LEMMA.

QVOD autem, si AE, ipsum CD, & AE, ipsum CF, æqualiter contineat, eandemq; insuper partem illius vel partes; è contrario CD, ipsius AB, & CF, ipsius AE, sit eadem pars: Et si CD, ipsius AB, & CF, ipsius AE, sit eadem pars; è contrario AB, ipsum CD, & AE, ipsum CE, æqualiter contineat, eandemq; illius partem vel partes, tam in numeris fractis, quàm in integris; hoc modo demonstrabimus. Contineat primùm AB, ipsum CD, & AE, ipsum CF, æqualiter, nimirum semel, vel bis, vel ter, &c. eandemq; insuper partem; GB, quidem ipsius CD, & HE, ipsius CF; ita vt numeri reliqui AG, AH, sint vel æquales ipsis CD, CF, vel eorum æquè multiplices. Diuisis igitur numeris CD, CF, in partes CI, IK, KD; & CL, LM, MF, ipsis GB, HE, æquales; erit multitudo partium numeri CD, multitudini partium numeri CF, æqualis, quòd GB, ipsius CD, sit eadem pars, quæ HE, ipsius CF. Similiter diuisis numeris AG, AH, in partes AN, NO, OG; & AP, PQ, QH, eisdem GB, HE, æquales; erit quoque multitudo partium numeri AG, multitudini partium numeri AH, æqualis. Cùm enim AG, AH, vel æquales sint ipsis CD, CF, vel eorum æquè multiplices; erunt vel tot partes in AG, AH, quot in CD, CF; vel certè numerus partium numeri CD, toties continebitur in AG, quoties numerus partium numeri CF, in AH; propterea q; multitudo partium numeri AG, multitudini partium numeri AH, æqualis erit. Si igitur ipsis addantur

A .. N .. O .. G .. B
C .. I .. K .. D
A ... P ... Q ... H ... E
C ... L ... M ... F

partes

partes GB, HE, erit & multitudo partium numeri AB, multitudini partium numeri AE, æqualis: Atque adeò vna pars numeri CD, eadem pars erit numeri AB, quæ vna pars numeri CF, est numeri AE. Quare cùm multitudo partium numeri CD, æqualis sit multitudini partium numeri CF; erit CD, eadem partes numeri AB, quæ CF, ipsius AE

Contineat deinde AB, ipsum CD, & AE, ipsum CF, æqualiter, videlicet semel, bis, ter, quaterve, &c. easdemq; insuper partes illius; numerus quidem AB, partes GB, numeri CD, & numerus AE, partes HE, numeri CF: ita vt reliqui numeri AG, AH, sint rursum vel æquales ipsis CD, CF, vel eorum æquè multiplices. Diuisis igitur numeris GB, HE, in partes GI, IB, & HK, KE, numerorum CD, CF, erit multitudo partium ipsius GB, multitudini partium ipsius HE, æqualis. Simili modo, diuisis numeris CD, CF, in partes CL, LM, MD, & CN, NO, OF, partibus GI, IB, & HK, KE, æquales, erit quoq; multitudo partium ipsius CD, multitudini partium ipsius CF, æqualis, propterea quòd quælibet partium numeri GB, eadem pars est numeri CD, quæ vnaquæque partium numeri HE, est numeri CF. Denique diuisis numeris AG, AH, in partes AP, PQ, QG, & AR, RS, SH, eisdem partibus GI, IB, & HK, KE, æquales; erit & multitudo partium numeri AG, æqualis multitudini partium numeri AH. Cùm enim AG, AH, vel æquales sint ipsis CD, CF, vel eorum æquè multiplices; erunt vel tot partes in AG, AH, quot in CD, CF, vel certè numerus partium ipsius CD, toties continebitur in AG, quoties numerus partium ipsius CF, in AH; propterea q; multitudo partium numeri AG, multitudini partium numeri AH, æqualis erit: Quibus si addantur æquales multitudines partium numerorum GB, HE, erit quoque multitudo partium numeri AB, multitudini partium numeri AE, æqualis; Atque adeò vna pars numeri CD, eadem pars erit numeri AB, quæ vna pars numeri CF, est numeri AE. Quare cùm multitudo partium numeri CD, æqualis sit multitudini partium numeri CF; erit CD, eadem partes numeri AB, quæ CF, ipsius AE. Quod est primò propositum.

A.. P.. Q.. G.. I.. B
C.. L.. M.. D
A... R... S... H... K... E
C... N... O... F

Iam verò sit CD, ipsius AB, & CF, ipsius AE, eadem partes. Dico è contrario AB, ipsum CD, & AE, ipsum CF, æqualiter continere, eandemq; insuper illius partem, vel partes. Diuisis enim numeris CD, CF, in partes numerorum AB, AE, erunt ea multitudine inter se æquales. Item diuisis numeris AB, AE, in partes partibus numerorum CD, CF, æquales, erunt & hæ multitudine inter se æquales. Quare toties continebuntur omnes partes numeri CD, in AB, superitq; eadem pars, vel partes ipsius CD, quoties omnes partes numeri CF, continentur in AE, & quæ pars, aut partes ipsius CF, supersunt, propter æquales multitudines partium numerorum CD, CF, & AB, AE. Ita enim fit, vt multitudines æquales partium numerorum AB, AE, contineant æqualiter æquales multitudines partium numerorum CD, CF, & insuper in duobus illis numeris supersint partes numerorum CD, CF, multitudine æquales. Quam ob rem AB, ipsum CD, & AE, ipsum CF, æqualiter continebit, eandemq; insuper illius partem, vel partes. Quod secundò est propositum.

THEOR. 10. PROPOS. 12. 13.

SI sint quotcunque numeri proportionales, erit quemadmodum vnus antecedentium ad vnum consequentium, ita omnes antecedentes ad omnes consequentes.

SINT quotcunque numeri proportionales A, B; C, D; E, F; hoc est, vt A, ad B, ita C, ad D, & E, ad F. Dico esse quoque omnes A, C, E, simul ad omnes B D, F, simul, vt est A, ad B. Sint enim primùm A, C, E, minores quàm B, D, F. Quoniam igitur propter eandem proportionem, [a] eadem pars est, aut partes A, ipsius B, quæ C, ipsius D, & E, ipsius F; [b] erit quoque vterque A, C, simul vtriusque B, D, simul eadem pars, aut partes, quæ A, ipsius B, vel E, ipsius F. Rursus quia vterque A, C, simul tanquam vnus, vtriusque B, D, simul, tanquam vnius, eadem pars est, aut partes, quæ E, ipsius F; [c] erunt & ambo A, C, tanquam vnus, & E, simul, amborum B, D, tanquam vnius, & F, simul eadem pars, vel partes, quæ A, ipsius B. [d] Quare eadem proportio est omnium A, C, E, simul ad omnes B, D, F, simul, quæ ipsius A, ad B.

A.... C.. E...
B..... D.... F.....

[a] 20. *defin.*
[b] 5. *vel* 6. *septimi.*
[c] 5. *septimi.*
[d] 20. *defin.*

SINT deinde A, C, E, maiores, & æquè multiplices numerorum B, D, F. Quo posito, erit è

contrario B, ipſius A, eadem pars, quæ D, ipſius C, & F, ipſius E; Atque adeò vt prius, [a] erunt omnes B, D, F, ſimul omnium A, C, E, ſimul, eadem pars, quæ B, ipſius A; ideoque & è contrario omnes A, C, E, ſimul omnium B, D, F, ſimul, & A, ipſius B, æquè multiplices. [b] Quare eadem eſt proportio omnium A, C, E, ſimul, ad omnes B, D, F, ſimul, quæ eſt A, ad B. Hoc idem verum eſt, etiamſi aliquæ proportiones multiplices, vel etiam omnes, ſint numerorum ad vnitatem. Eſt enim eadem ſemper demonſtratio, vt hîc apparet, adiuuante tamen ſcholio propoſ. 5. huius libri.

a 5. *ſeptimi.*

b 20. *defin.*

A..... C.... E.....
B.... D.. F...

A... C..... E..... | A... C... E..... | A... C... E...
B. D.. F... | B. D. F.. | B. D. F.

Sint tertiò A, C, E, maiores, quàm B, D, F, at non multiplices. [c] Quia igitur propter eandem proportionem, A, ipſum B, & C, ipſum D, & E, ipſum F, æqualiter continet, eandemque inſuper partem, vel partes: Erit per lemma præcedentis propoſitionis B, ipſius A, & D, ipſius C, & F, ipſius E, eædem partes. Igitur vt prius, [d] erunt omnes B, D, F, ſimul omnium A, C, E, ſimul eædem partes, quæ B, ipſius A; Atque adeò per idem lemma, è contrario continebunt omnes numeri A, C, E, ſimul, omnes numeros B, D, F, ſimul, & A, ipſum B, æqualiter, eandemque inſuper partem, vel partes. [e] Quare eadem proportio eſt omnium A, C, E, ſimul, ad omnes B, D, F, ſimul, quæ ipſius A, ad B.

c 20. *defin.*

d 6. *ſeptimi.*

e 20. *defin.*

A.... C... E.....
B.... D... F.....

Sint quartò & vltimò A, C, E, ipſis B, D, F, æquales. Quoniam igitur ſi æqualibus A, & B, æquales addantur C, & D, fiunt A, C, ſimul æquales ipſis B, D, ſimul: quibus ſi rurſum addãtur æquales E, & F, fiunt & omnes A, C, E, ſimul, omnibus B, D, F, ſimul æquales; Erunt, vt A, ad B, ita omnes A, C, E, ſimul ad omnes B, D, F, ſimul, cùm vtrobique ſit proportio æqualitatis. Si ſint igitur quotcunque numeri proportionales, erit, &c. Quod erat demonſtrandum.

SCHOLIVM.

In numeris quoq; fractis propoſitio hæc vera eſſe eodem modo conuincetur, vt patet, ſi pro numeris integris fracti aſſumantur.

14. THEOR. 11. PROPOS. 13.

Si quatuor numeri proportionales ſint: Et viciſſim proportionales erunt.

A... C.....
B.... D.....

Sit enim A, ad B, vt C, ad D. Dico viciſsim eſſe A, ad C, vt B, ad D. Nam ſint primùm A, & C, minores quàm B, & D; & A, quoque minor, quàm C. Quo poſito, erit, propter eandem proportionem, A, ipſius B, & C, ipſius D, eadem pars, vel partes. [f] Viciſsim ergo & A, ipſius C, & B, ipſius D, eadem pars erit, vel partes: [g] Ac proinde erit, vt A, ad C, ita B, ad D.

f 9. *vel* 10. *ſeptimi.*

g 20. *defin.*

Sint deinde A, & C, minores quàm B, & D; at A, maior quàm C. Quo poſito, erit, ob eandem proportionem, C, ipſius D, & A, ipſius B, eadem pars, vel partes. [h] Viciſsim ergo & C, ipſius A, & D, ipſius B, eadem pars erit, vel partes: Atque adeò è contrario, vel A, ipſius C, & B, ipſius D, æquè multiplex erit, vel certè per lemma propoſ. 11. huius lib. A, ipſum C, & B, ipſum D, æqualiter continebit, eandemque inſuper partem, vel partes. [i] Quare erit vt A, ad C, ita B, ad D.

h 9. *vel* 10. *ſeptimi.*

i 20. *defin.*

A..... C...
B..... D....

Sint tertiò A, & C, maiores quàm B, & D; at A, minor quàm C. Quo poſito, erit ob eandem proportionem, vel A, ipſius B, & C, ipſius D, æquè multiplex; vel certè A, ipſum B, & C, ipſum D, continebit æqualiter, eandemque inſuper partem, vel partes; Atque adeò è contrario erit B, ipſius A, & D, ipſius C, vel eadem pars, vel certè per lemma propoſ. 11. huius lib. eædem partes. [k] Viciſsim ergo & B, ipſius D, & A, ipſius C, eadem pars erit, vel partes. [l] Ac proinde eadem proportio erit B, ad D, quæ A, ad C; hoc eſt, erit vt A, ad C, ita B, ad D.

k 9. *vel* 10. *ſeptimi.*

l 20. *defin.*

A.... C.....
B... D.....

Sint quartò A, & C, maiores quàm B, & D; & A, quoque maior quàm C. Quo poſito, erit C, ipſius D, & A, ipſius B, ob eandem proportionem, vel æquè multiplex, vel certè C, ipſum D, & A, ipſum B, æqualiter continebit, eandemq; inſuper partem, vel partes; Atque adeò è contrario, erit D, ipſius C, & B, ipſius A, vel eadem pars, vel certè per lemma propoſ. 11. huius lib. eædem partes. [m] Viciſsim ergo & D, ipſius B, & C, ipſius A, eadem pars erit, vel partes; Ac propterea è contrario vel B, ipſius D, & A, ipſius C, æquè multiplex erit, vel certè, per lemma propoſ. 11. huius lib. B, ipſum D, & A, ipſum C, continebit æqualiter, eandemque inſuper partem, vel partes. [n] Quare eadem proportio erit B, ad D, quę A, ad C; hoc eſt, erit vt A, ad C, ita B, ad D.

m 9. *vel* 10. *ſeptimi.*

n 20. *defin.*

A... C....
B... D....

Sint quintò A, & C, ipſis B, & D, æquales, & A, minor quàm C. Quoniam igitur æquales numeri A, & B, æqualium numerorum C, & D, vel eadem pars, vel eædem partes ſunt; [o] Erit vt A, ad C, ita B, ad D.

o 20. *defin.*

Sint

A.... C... SINT ſexto A,& C,ipſis B, & D,æquales: at A,maior, quàm C. Quia igitur æ-
B.... D... quales numeri A,& B,æqualium numerorum C,& D, vel æquemultiplices ſunt,
vel certè illi hos æqualiter continent,eandemque inſuper partem, vel partes; [a] erit vt A,ad C,ita B,ad D. [a] 20. defin.

SINT ſeptimo ac vltimo A,& C,inter ſe æquales, ſiue ij maiores ſint, quàm B,& D, ſiue mino-
res, ſiue æquales. [b] Quoniam igitur, ob eandem proportionem, A,ipſius B, & [b] 20.defin.
A.... C.... C, ipſius D,æquemultiplex eſt,vel eadem pars,vel eædem partes; vel certè A,
B... D... ipſum B, & C, ipſum D, æqualiter continet, eandemque inſuper partem, vel
partes; ſuntque A, & C, æquales; æquales quoque erunt B,& D; Atque adeò
erit,vt A,ad æqualem C,ita B,ad æqualem D. Quocirca,ſi quatuor numeri proportionales ſint,& viciſsim proportionales erunt. Quod erat demonſtrandum.

SCHOLIVM.

QVOD ſi pro numeris integris fractos numeros ſubſtituas, demonſtrabis eodem modo propoſitionẽ hanc veram eſſe in numeris fractis.

MANIFESTVM quoque eſt, propoſitionem hanc non variari, etiamſi aliquis numerorum ponatur vnitas.

COACTI verò ſumus in hac propoſitione, & duabus præcedentibus tot caſus recenſere, eosq; demonſtrationibus certiſsimis confirmare, vnà cum lemmate propoſ.11. vt earum veritas in omni genere proportionis rationalis appareret. Theon enim, & nonnulli alij interpretes, illas duntaxat oſtendunt in proportionibus rationalibus minoris inæqualitatis, in quibus nimirum antecedentes numeri partes ſunt conſequentium, vt perſpicuè ex eorundem auctorum demonſtrationibus apparet; niſi maiorem numerum minoris numeri partes eſſe dicamus, vt nonnulli concedunt, inter quos etiam eſt (quod miror) Federicus Commandinus præſtans Geometra: quod eſt abſurdum, & ab Euclidis inſtituto alienum, cùm partes appellárit numerum numeri, minorem maioris, cùm minor non metitur maiorem. Quod etiam ex definitione 20. Solis luce clarius conſtat, vbi numeros proportionales docuit eſſe, cùm primus ſecundi, & tertius quarti æquè multiplex eſt, vel eadem pars, vel eadem partes, &c. Nam ſi exiſtimaret, maiorem numerum minoris partes eſſe, ſatis fuiſſet dicere, cùm primus ſecundi, & tertius quarti, eadem pars eſt, vel eadem partes. Ita enim numeros proportionales in omni genere proportionis comprehendiſſet, vt manifeſtum eſt: quare reliqua omnia verba definitionis ſuperuacanea eſſent.

THEOR. 12. PROPOS. 14. 15

SI ſint quotcunque numeri,& alij illis æquales multitudine,qui bini ſumantur, & in eadem ratione: Etiam ex æqualitate in eadem ratione erunt.

SINT quotcunque numeri A,B,C, & alij totidem D,E,F, ſitque vt A,ad B, ita D,ad E; & vt B,
ad C,ita E,ad F. Dico ex æqualitate quoque eſſe vt A,
A..... D..... ad C, ita D,ad F. Quoniam enim eſt, vt A,ad B,ita D,
B..... E..... ad E; [c] erit viciſsim, vt A,ad D, ita B, ad E: Similiterq; [c] 13.ſeptim.
C.... F... eandem ob cauſam, cùm ſit,vt B,ad C,ita E, ad F; erit
G..... H..... viciſsim, vt B,ad E,ita C,ad F. Igitur erit vt A,ad D,ita
C,ad F; (Cùm enim vtraque proportio A, ad D,& C,
ad F, eadem ſit proportioni B,ad E,vt demonſtratum eſt; & ipſæ inter ſe eædem erunt,vt mox oſtendetur.) [d] Ac proinde viciſsim, vt A, ad C,ita D,ad F. [d] 13.ſeptimi.

QVOD ſi fuerint plures numeri, quàm tres, ita vt ſit etiam quemadmodum C,ad G,ita F,ad H; Dico adhuc eſſe,vt A,ad G,ita D,ad H. Cùm enim iam ſit oſtenſum in tribus numeris,eſſe vt A,ad C,ita D,ad F; ponatur autem vt C, ad G, ita F, ad H; erunt tres numeri A,C,G, & alij tres D,F,H, qui bini in eadem ratione ſumuntur.Ex æqualitate igitur in tribus numeris oſtenſa, rurſus erit vt A,ad G,ita D,ad H. Eodemque modo idem oſtendemus in quinque numeris, per quatuor; ſicut id in quatuor numeris demonſtratum fuit per tres, & ſic de pluribus. Itaque ſi ſint quotcunque numeri,& alij illis æquales multitudine,&c. Quod erat oſtendendum.

SCHOLIVM.

A. D... *PERSPICVVM autem eſt, hanc propoſitionem eodem modo demonſtrari poſſe*
B.. E..... *in numeris fractis, ſi pro numeris integris aſſumantur fracti numeri.*
C... F..... *IDEM verum eſt, ſi loco vnius numeri vnitas aſſumatur, vel etiam loco plurium*
G. H... *plures vnitates, vt in hoc exemplo perſpicuum eſt.*

LEMMA.

A..... B..... C.... *QVOD autem duæ proportiones numerorum, quæ*
D..... E..... F... *eidem proportioni eadem ſunt, inter ſe quoq; ſint eadem,*

quales ſunt in demonſtratione proportiones A, ad D, & C, ad F, quæ eadem oſtenſæ ſunt pro-

portioni B, ad E, siue numeri sint integri, siue fracti; ita demonstrabitur. Propter eandem proportionem, erit B, ipsius E, & tam A, ipsius D, quàm C, ipsius F, æquè multiplex, vel eadem pars, vel eadem partes; vel certè B, ipsum E, & tam A, ipsum D, quàm C, ipsum F, continebit æqualiter, eandemq; insuper partem, vel partes. a *Quare numeri A, D, C, F, proportionales sunt, vt quidem A, ad D, ita C, ad F. Quod est propositum.*

a 20. defin.

Hoc idem demonstratum fuit ab Euclide libro 5. de proportionibus magnitudinum. propositione 11.

16.

THEOR. 13. PROPOS. 15.

Si vnitas numerum quempiam metiatur, æquè autem alter numerus alterum quendam numerum metiatur: Et vicissim æquè vnitas tertium numerum metietur, & secundus quartum.

METIATVR vnitas A, numerum B C, & numerus D, numerum E F, æquè. Dico vicissim vnitatem A, numerum D, & numerum B C, numerum E F, æquè metiri. Diuiso enim numero B C, in vnitates B G, G H, H C, & numero E F, in partes E I, I K, K F, ipsi D, æquales: erit multitudo vnitatum numeri B C, æqualis multitudini partium numeri E F, metieturque æquè vnitas A, numerum D, & vnitas B G, ipsum E I, atque vnitas G H, ipsum I K, & vnitas H C, ipsum K F: atque idcirco eadem pars erit vnitas A, numeri D, & vnitas B G, numeri E I, quæ vnitas G H, numeri I K, & vnitas H C, numeri K F. Quare per ea, quæ ad propos. 5. huius libri ostendimus, eadem pars erunt vnitates B G, G H, H C, simul numerorum E I, I K, K F, simul, quæ vnitas B G, numeri E I, hoc est, quæ vnitas A, numeri D: Ac proinde vnitas A, numerum D, & numerus B C, ex vnitatibus B G, G H, H C, compositus, numerum E F, ex numeris E I, I K, K F, compositum æquè metietur. Si vnitas igitur numerum quempiam metiatur, &c. Quod erat demonstrandum.

A. D.
B. G. H. C E.. I.. K.. F

SCHOLIVM.

Illvd idem, quod Euclides demonstrauit de numeris, propos. 13. ostendit hoc loco separatim de vnitate, & tribus numeris, propterea quòd vnitas non est numerus. Quod quidem breuius ita nos demonstrabimus. Quia vnitas A, numerum B C, æquè metitur, atque numerus D, numerum E F; erit vnitas A, eadem pars numeri B C, quæ numerus D, numeri E F. Per ea igitur, quæ ad propos. 9. demonstrauimus, erit vicissim vnitas A, eadem pars numeri D, quæ numerus B C, numeri E F; Ac propterea vnitas A, numerum D, & numerus B C, numerum E F, æquè metietur.

Hæc propositio fractis numeris conuenire non potest. Nam si vnitas numerum quempiam metiatur, æquè autem alter numerus fractus alterum quendam numerum fractum metiatur: non metietur vicissim æquè vnitas tertium numerum, qui fractus ponitur, & secundus integer quartum fractum; b *sed solùm eandem habebit rationem vnitas ad numerum tertium, quam secundus ad quartum.*

b 13. septimi.

17.

THEOR. 14. PROPOS. 16.

Si duo numeri mutuò sese multiplicãtes fecerint aliquos; geniti ex ipsis æquales inter se erunt.

DVO numeri A, & B, se mutuò multiplicantes faciant numeros C, & D, ita vt A, multiplicans ipsum B, faciat C, at B, ipsum A, multiplicans faciat D. Dico numeros C, & D, inter se æquales esse. Sumpta enim vnitate E; eum A, ipsum B, multiplicans faciat C; a erit C, ex B, toties compositus, quot sunt in A, vnitates; atque adeò vnitas E, numerum A, & numerus B, numerum C, æquè metietur. b Vicissim ergo & vnitas E, numerum B, & numerus A, numerum C, metietur æquè. Rursus eodem modo, quia B, multiplicans ipsum A, facit D; c erit D, ex A, toties compositus, quot sunt in B, vnitates; atque adeò vnitas E, numerum B, & numerus A, numerum D, æquè metietur: Metiebatur autem & eadem vnitas E, eundem numerum B, & numerus idem A, numerum C, æquè. Æquè igitur numerus A, vtrumque numerum C, & D, metietur; Ac proinde C, & D, inter se æquales erunt. Si duo igitur numeri mutuò sese multiplicantes fecerint aliquos, &c. Quod demonstrandum erat.

a 15. defin.
b 15. septimi.
c 15. defin.

E.
A... B....
D..... C.....

SCHOLIVM.

In nnumeris fractis hæc propositio ita demonstranda est. Quoniam A, multiplicãs B, facit C, erit C, ad B, vt A, ad E, vnitatem, ex defin. multiplicationis. Ergo permutando, vt C, ad A, ita B, ad E, vnitatem. Sed ex eadem defin. vt B, ad E, vnitatem, ita quoque est D, ad A, quòd B, multiplicans A, facit D. Igitur erit, vt C, ad A, ita D, ad eundem A, ex lemmate propos. 14. ac proinde æquales inter se erunt C, & D. Quod erat ostendendum.

A, $\frac{2}{3}$. B, $4\frac{5}{7}$.
D, $3\frac{1}{7}$. C, $3\frac{1}{7}$.

POTEST hæc eadem propositio cum Campano in hunc modum proponi.

SI duo numeri se mutuò multiplicauerint, procreabitur vnus idemque numerus.

MVLTIPLICET enim A, ipsum B, faciatq; C. Dico eundem C, gigni, si B, ipsum A, multiplicet. Nam vt prius, cùm A, multiplicans ipsum B, faciat C, ostendemus vnitatem E, numerum B, & numerum A, numerum C, æquè metiri. At verò si numerus B, ipsum A, multiplicet,

E.
A... B....
C.....

etiam vnitas E, numerum B, & numerus A, numerum factum æquè metitur. [a] *Idem ergo numerus C, gignitur ex multiplicatione B, in A; quandoquidem ipsum numerus A, æquè metitur, atque vnitas E, ipsum B.* [a] 15. defin.

QVOD si numeri A, & B, sint fracti ambo, vel vnus eorum, demonstrabimus idem hoc modo. Quoniam A, multiplicans B, facit C; erit ex definit. 15. vt C, ad B, ita A, ad E, vnitatem: Et permutando, vt C, ad A, ita B, ad E, vnitatem. At si B, multiplicet A, erit ex eadem definitione 15. B, ad E, vnitatem, vt factus numerus ad A. Erit igitur C, ad A, vt numerus hic factus ad eundem A; ac proinde factus hic numerus idem erit, qui C. Quod est propositum.

THEOR. 15. PROPOS. 17. 18

SI numerus duos numeros multiplicans fecerit aliquos; Geniti ex ipsis eandem rationem habebunt, quam multiplicati.

F.
A...
B.. C....
D..... E.....

NVMERVS enim A, multiplicans numeros B, C, faciat D, E. Dico esse, vt B, ad C, ita D, ad E. Assumpta enim vnitate F; [a] erit D, ex B, compositus toties, quoties vnitas F, est in A: similiterque toties E, compositus erit ex C, quoties eadem vnitas F, est in eodem A: Atque adeò B, ipsum D, & C, ipsum E, æquè metietur. Quare B, ipsius D, & C, ipsius E, eadem pars erit; [b] Ac proinde, erit vt B, ad D, ita C, ad E, [c] & permutando, vt B, ad C, ita D, ad E. Si numerus igitur duos numeros multiplicans fecerit aliquos, &c. Quod ostendendum erat. [a] 15. *defin.* [b] 20. *defin.* [c] 13. *septimi.*

SCHOLIVM.

SI numeri A, B, C, sint fracti, vel vnus eorum, vel duo, idem ostendemus hoc modo. Quoniam A, multiplicans B, & C, facit D, & E; erit ex definitione 15. tam D, ad B, quàm E, ad C, vt A, ad F, vnitatem; ac proinde ex lemmate propositionis 14. vt D, ad B, ita E, ad C. Igitur permutando, vt D, ad E, ita B, ad C. Quod est propositum.

THEOR. 16. PROPOS. 18. 19.

SI duo numeri numerum quempiam multiplicantes, fecerint aliquos: Geniti ex ipsis eandem rationem habebunt, quam multiplicantes.

A.... B.....
C...
D..... E.....

NVMERI enim A, & B, multiplicantes numerum C, faciant D, & E. Dico esse vt A, ad B, ita D, ad E. Cùm enim ex A, in C, fiat D; [d] fiet quoque idem D, ex C, in A. Eademq; ratione, cùm ex B, in C, fiat E; fiet idem E, ex C, in B. Quia igitur idem C, multiplicans ipsos A, & B, facit D, & E; [e] erit, vt A, ad B, ita D, ad E. Si duo ergo numeri numerum quempiam multiplicantes, fecerint aliquos, &c. Quod erat demonstrandum. [d] 16. *septimi.* [e] 17. *septimi.*

SCHOLIVM.

LIQVIDO constat, eandem hanc propositionem eodem modo demonstrari, si numeri A, B, C, sint fracti, vel vnus eorum, vel duo.

HANC autem propositionem, & præcedentem, ad quotcunque numeros cum Campano accommodabimus, siue numeri omnes sint integri, siue non; hac ratione.

SI numerus quotcunque numeros multiplicet, vel quotcunque numeri numerum quempiam multiplicent; Habebunt producti numeri easdem rationes, quas numeri multiplicati, vel multiplicantes.

A...
B.. C... D....
E..... F..... G.....

FIANT enim E, F, G, ex A, in B, C, D, vel ex B, C, D, in A. Dico easdem rationes habere numeros productos E, F, G, quas numeri multiplicantes, vel multiplicati B, C, D, habent: hoc est, esse, vt B, ad C, ita E, ad F; & vt C, ad D, ita F, ad G. Nam cùm ex A, in B, C, vel ex B, C, in A, fiant E, F; [a] erit vt B, ad C, ita E, ad F. Similiter quia ex A, in C, D, vel ex C, D, in A, fiunt F, G; erit quoq; vt C, ad D, ita F, ad G. Atq; ita de cæteris. [a] 17. vel 18. *septimi.*

THEOR. 17. PROPOS. 19. 20.

SI quatuor numeri proportionales fuerint; qui ex primo, & quarto fit, nume-

rus, æqualis erit ei, qui ex secundo, & tertio fit numero. Et si, qui ex primo, & quarto fit, numerus, æqualis fuerit ei, qui ex secundo & tertio fit, numero; ipsi quatuor numeri proportionales erunt.

A...
B..
C.....
D....
E.....
F.....
G.....

SINT quatuor numeri proportionales A, B, C, D, vt quidem A, ad B, ita C, ad D; fiatque E, ex A, primò in D, quartum: & F, ex B, secundò in C, tertium. Dico numeros E, F, æquales inter se esse. Fiat enim rursus G, ex A, in C. Quia igitur ex A, in C, D, fiunt G, E; [a] erit, vt C, ad D; hoc est, vt A, ad B, ita G, ad E. Rursus quia ex A, & B, in C, fiunt G, & F; [b] erit quoque vt idem A, ad B, ita G, ad F. Quare per lemma propositionis 14. habebit G, ad E, & F, eandem proportionem; eam videlicet, quam habet A, ad B; Ac proinde E, & F, numeri æquales erunt, ex iis, quæ ad defin. 20. scripsimus.

a 17. septimi.

b 18. septimi.

SED iam sit E, ex A, primò in D, quartum genitus, æqualis ipsi F, producto ex B, secundò in C, tertium. Dico quatuor numeros A, B, C, D, proportionales esse, vt quidem A, ad B, ita C, ad D. Fiat enim rursus G, ex A, in C. Quia ergo ex A, in C, D, fiunt G, E; [c] erit vt C, ad D, ita G, ad E, vel ad F, ipsi E, æqualem. Habet enim G, ad æquales E, F, eandem rationem, vt ad definitionem 20. docuimus. Rursus quoniam ex A, & B, in C, fiunt G, & F; [d] erit quoque, vt A, ad B, ita idem G, ad eundem F. Quare proportiones A, ad B, & C, ad D, cùm eædem sint proportioni G, ad F, eædem inter se erunt, per lemma propos. 14. Ac proinde erit, vt A, ad B, ita C, ad D. Si quatuor ergo numeri proportionales fuerint, &c. Quod erat ostendendum.

c 17. septimi.

d 18. septimi.

SCHOLIVM.

LVCE clarius est, eandem demonstrationem huius propositionis locum habere in numeris fractis, siue omnes fracti sint, siue non.

POTERAT huius theorematis prima pars proponi etiam ad hunc modum, tam in numeris fractis, quàm in integris.

SI duo numeri duos numeros eandem, quam illi, habentes rationem multiplicent, antecedens nimirum illorum consequentem horum, & consequens antecedentem; geniti ex ipsis, æquales inter se erunt.

ITA enim ostensum est numerum E, qui fit ex A, antecedente in D, consequentem, æqualem esse numero F, qui procreatur ex B, consequente in C, antecedentem.

SED & sequens theorema tam in fractis numeris, quàm in integris facilè ex hac propositione decimanona demonstrabitur.

SI maior fuerit proportio primi ad secundum, quàm tertij ad quartum; qui ex primo & quarto fit, numerus, maior erit eo, qui ex secundo & tertio fit, numero: Et si, qui ex primo & quarto fit, numerus, maior fuerit eo, qui ex secundo & tertio fit, numero; maior erit proportio primi ad secundum, quàm tertij ad quartum.

SIT primum maior proportio primi A, ad B, secundum, quàm C, tertij ad D, quartum. Dico numerum ex A, in D, procreatum, esse maiorem eo, qui fit ex B, in C. Nam si intelligatur esse E, ad B, vt C, ad D; (siue E, numerus integer sit, siue fractus; siue integer cum fracto: qui quidem reperietur, vt ad propos. 19. lib. 9. ostendemus, si numerus ex B, in C, procreatus diuidatur per D.) erit quoque maior proportio A, ad B, quàm E, ad B: ac proinde A, maior erit, quàm E. Quare maior numerus fiet ex A, in D, quàm ex E, in eundem D: [a] At qui fit ex E, in D, æqualis est ei, qui fit ex B, in C. Igitur & numerus ex A, in D, genitus, maior erit, quàm numerus ex B, in C, procreatus. Quod est propositum.

A..... E.....
B....
C.....
D.....

a 19. septimi.

FIAT deinde maior numerus ex A, in D, quàm ex B, in C. Dico maiorem proportionem esse A, primi ad B, secundum, quàm C, tertij ad D, quartum. Si namque intelligatur numerus E, ex quo in D, idem numerus fiat, qui ex B, in C; (siue E, numerus sit integer, siue fractus, aut integer cum fracto) fiet quoque maior numerus ex A, in D, quàm ex E, in eundem D: ac proinde maior erit A, quàm E. Quare maior erit proportio A, ad B, quàm E, ad B: [b] At ita est E, ad B, vt C, ad D. Igitur maior erit quoque proportio A, ad B, quàm C, ad D. Quod est propositum.

b 19. septimi.

QVOD si minor fuerit proportio primi ad secundum, quàm tertij ad quartum; qui ex primo & quarto fit, numerus, minor erit eo, qui ex secundo & tertio fit; numero: Et si, qui ex primo & quarto fit, numerus, minor fuerit eo, qui ex secundo & tertio fit, numero; minor erit proportio primi ad secundum, quàm tertij ad quartum. Eadem enim omnino demonstratio erit, si modò vocē, maioris, mutes in vocē, minoris. Vt in hoc appositio exemplo apparet. Quod tamē ita etiā ostendi potest. Quoniam minor est proportio A, ad B, quàm C, ad D: hoc est, maior est proportio C, primi ad D, secundum, q̄ A, tertij, ad B, quartum; maior fiet numerus ex C, primo in B, quartum, siue

A..... E.....
B....
C...
D..

ex B,

ex B, in C, quàm ex D, ſecundo in A, tertium, ſiue ex A, in D, vt demonſtratum iam eſt: hoc eſt, minor numerus fiet ex A, in D, quàm ex B, in C, quod eſt propoſitum. Deinde ſi minor numerus fiat ex A, in D, quàm ex B, in C; hoc eſt, maior ex B, in C, ſiue ex C, in B, quàm ex A, in D, ſiue ex D, in A; erit maior proportio C, primi ad D, ſecundum, quàm A, tertij ad B, quartum, vt iam eſt demonſtratum: hoc eſt, minor proportio erit A, ad B, quàm C, ad D. Quod eſt propoſitum.

THEOR. 18. PROPOS. 20. 20.

SI tres numeri proportionales fuerint; qui ſub extremis continetur, æqualis eſt ei, qui à medio efficitur: Et ſi, qui ſub extremis continetur, æqualis fuerit ei, qui à medio deſcribitur; ipſi tres numeri proportionales erunt.

SINT tres numeri proportionales A, B, C, vt quidem A, ad B, ita B, ad C. Dico numerum qui fit ex A, primo in C, tertium, æqualem eſſe ei, qui ex B, medio procreatur. Sumpto enim D, qui ipſi B, ſit æqualis, erit vt B, ad C; hoc eſt, vt A, ad B, ita D, ad C; numerus ſ. genitus ex B, in D, æqualis erit ei, qui ex B, in ſe procreatur. Quia igitur quatuor numeri A, B, D, C, proportionales ſunt, [a] erit numerus factus ex A, in C, æqualis ei, qui fit ex B, in D, hoc eſt, ei, qui ex B, in ſe producitur.

A.....
B..... D.....
C....

a 19. ſeptimi.

SED iam ſit numerus productus ex A, primo in C, tertium, æqualis ei, qui fit ex B, medio in ſe. Dico tres numeros A, B, C, proportionales eſſe. Sumpto enim rurſum D, æquali ipſi B; erit, vt B, ad C, ita D, ad C; & numerus, qui fit ex B, in D, æqualis erit ei, qui fit ex B, in ſe; hoc eſt, ei, qui fit ex A, in C. Quoniam igitur numerus, qui fit ex A, primo in C, quartum, æqualis eſt ei, qui fit ex B, ſecundo in D, tertium, [b] erunt quatuor numeri A, B, D, C, proportionales, vt quidem A, ad B, ita D, ad C, vel B, ad C. Si tres igitur numeri proportionales fuerint, &c. Quod demonſtrandum erat.

b 19. ſeptimi.

SCHOLIVM.

DEMONSTRATIO hac non variabitur, etiamſi numeri A, B, C, ſint fracti, vel partim integri, partim fracti.

QVOD ſi maior fuerit proportio primi ad ſecundum, quàm ſecundi ad tertium; maior fiet numerus ex primo in tertium, quàm ex ſecundo in ſe: Et ſi maior numerus fiat ex primo in tertium, quàm ex ſecundo in ſe; maior erit proportio primi ad ſecundum, quàm ſecundi ad tertium. Item ſi minor fuerit proportio primi ad ſecundum, quàm ſecundi ad tertiũ; minor numerus fiet ex primo in tertium, quàm ex ſecundo in ſe. Et ſi minor numerus fiat ex primo in tertium, quàm ex ſecundo in ſe; minor proportio erit primi ad ſecundum, quàm ſecundi ad tertium. Id quod ex ſcholio antecedentis propoſitionis liquet, ſi ſecundo numero ſumatur alius æqualis, vt habeantur quatuor numeri. Tunc enim erit maior proportio primi ad ſecundum, q̃ tertij ad quartum, aut minor, &c. vt in appoſitis exemplis apparet, etiamſi numeri ſint fracti, vel partim fracti, partim integri.

A.....
B..... D.....
C.....

A....
B..... D.....
C.....

THEOR. 19. PROPOS. 21. 21.

MINIMI numeri omnium eandem cum eis rationem habentium, metiuntur æquè numeros eandem cum eis rationem habentes; maior quidem maiorem, minor verò minorem.

SINT numeri A B, C D, minimi in proportione eadem, quam habent alij duo numeri maiores E, F, ita vt ſit, quemadmodum A B, ad C D, ita E, ad F. Dico A B, C D, æquè metiri ipſos E, F; maiorẽ quidem A B, ipſum maiorem E, at minorem C D, ipſum minorem F: hoc eſt, antecedentem, ipſum antecedentem, & conſequentem, ipſum conſequentem. Cùm enim ſit, vt A B, ad C D, ita E, ad F; [c] erit viciſsim, vt A B, ad E, ita C D, ad F. Atque adeò cùm A B, C D, minores ſint, quàm E, F; [d] erit A B, ipſius E, & C D, ipſius F, eadem pars, vel partes. Partes quidem nequaquã. Diuiſis namque, ſi fieri poteſt, A B, C D, in partes A G, G B; C H, H D, numerorum E, F; erit multitudo partium A G, G B, æqualis multitudini partium C H, H D. Ac propterea A G, ipſius E, & C H, ipſius F, eadem pars. [e] Erit ergo vt A G, ad E, ita C H, ad F; [f] & viciſsim, vt A G, ad C H, ita E, ad F, vel A B, ad C D. Ac proinde numeri A G, C H, minores quàm A B, C D, eandem habebunt proportionẽ, quam A B, C D. Quod eſt abſurdum; cùm A B, C D, in ſua proportione ponantur minimi. Non ergo A B, ipſius E, & C D, ipſius F, eædem partes ſunt. Quare eadẽ parte. Ac propterea A B, ipſum E, & C D, ipſum F, æqualiter metietur. Minimi ergo numeri omnium eandem cum eis rationem habentium, &c. Quod demonſtrandum erat.

A... G.. B
C.. H. D
E.....
F.....

c 13. ſeptimi.
d 20. defin.
e 20. defin.
f 13. ſeptimi.

SCHOLIVM.

IDEM hoc verum eſt, ſi quis dicat tres numeros eſſe continuè proportionales, primoſq; duos eſſe in ſua

A -- G -- B
C ... H ... D
E .....
F .....

proportione minimos. Hoc enim posito, ostendetur eodem modo primũ metiri secundum; & secundum, tertium, vt in hoc apposito exemplo apparet, vbi tertius numerus secundo æqualis est. Quamuis autẽ dari non possint tres numeri continuè proportionales, quorum duo primi in sua proportione sint minimi, nisi primus sit vnitas; idem tamen demonstratur in tribus, etiamsi primus ab aduersario non dicatur esse vnitas, vt diximus. Quod idcircò dixerim, vt propositio 12. lib. 9. demonstrari possit, in qua aduersarius cogitur cõcedere, tres numeros esse continuè proportionales, primos q; duos esse in sua proportione minimos, ac proinde primũ metiri secundum, ex hac propos. quod antè negauerat. Sed hoc planius fiet in propos. 12. lib. 9.

PARI ratione & hoc verum est, quod Campanus docet.

QVOTLIBET numeri minimi in continuatione suarum proportionum, siue eædem sint diuersæ proportiones, metiuntur æquè totidem alios numeros, qui easdem cum eis proportiones habent: primus primum, secundus secundum, tertius tertium, &c.

SINT enim plures, quàm duo numeri A B, C D, E F, minimi in continuatione suarum proportionum, siue eadem sit proportio A B, ad C D, quæ C D, ad E F, siue non; ita vt non possint reperiri alij numeri ipsis A B, C D, E F, minores, quorũ primus ad secundum sit, vt A B, ad C D; & secundus ad tertium, vt C D, ad E F, &c. (quamuis tales proportiones reperiantur seorsum in minoribus numeris non continuatis, nimirum proportio A B, ad C D, in numeris 4. ad 2. vel 2. ad 1. qui minores sunt ipsis A B, C D; quemadmodum & proportiones numerorum 16. 20. 25. qui minimi sunt in continuatione duarum proportionum subsesquiquartarum, cùm in minoribus numeris non possint continuari, reperiuntur seorsum in minoribus numeris; proportio quidem 16. ad 20. in 8. & 10. proportio verò 20. ad 25 in 4. & 5. vel in 12. & 15.)

A ... K ... B
C .. L .. D
E .... M .... F
G .....
H .....
I .....

Sint deinde totidem numeri G, H, I, non minimi, continuati in eisdem proportionibus, nimirum G, ad H, vt A B, ad C D; & H, ad I, vt C D, ad E F. Dico A B, ipsum G, & C D, ipsum H, & E F, ipsum I, metiri æquè. Cùm enim sit vt A B, ad C D, ita G, ad H; [a] erit vicissim vt A B, ad G, ita C D, ad H. Eodem modo, cùm sit vt C D, ad E F, ita H, ad I; [b] erit quoque vicissim, vt C D, ad H, ita E F, ad I. [c] Quare A B, ipsius G, & C D, ipsius H, & E F, ipsius I, erit vel eadem pars, vel eadem partes. Partes quidem nequaquam. Diuisis enim, si fieri potest, A B, C D, E F, in A K, K B; C L, L D; E M, M F, partes numerorum G, H, I, erunt tot partes in A B, quot in C D, & in E F: atq; adeò A K, ipsius G, & C L, ipsius H, eadem pars. [d] Erit ergo vt A K, ad G, ita C L, ad H; [e] & vicissim vt A K, ad C L, ita G ad H, vel A B, ad C D. Eodemq; modo erit, vt C L, ad E M, ita C D, ad E F. Quare continuantur numeri A K, C L, E M, in proportionibus numerorum A B, C D, E F, & minores quàm A B, C D, E F. Quod est absurdum, cùm hi ponantur in suarum proportionum continuatione minimi. Non ergo A B, C D, E F, eadem partes sunt numerorum G, H, I. Quare singuli singulorum eadem pars; Ac propterea A B, ipsum G, & C D, ipsum H, & E F, ipsum I, æquè metietur. Quod est propositum.

a 13. septimi.
b 13. septimi.
c 20. defin.
d 20. defin.
e 13. septimi.

QVOD si tres numeri dati A, B, C, minimi sint in continuatione suarum proportionum, ita vt etiam quilibet duo minimi sint, facilius idem hoc modo demonstrabitur.

A ..
D ....
B .....
E .....
C ...
F .....

Sint alij tres D, E, F, non minimi, qui easdem habeant proportiones, quas A, B, C. Dico A, B, C, ipsos D, E, F, æquè metiri. Nam per hanc propos. 21. A, B, cùm sint minimi in proportione A, ad B, æquè metientur ipsos D, E; eademq; ratione B, C, ipsos E, F. Quare cùm A, ipsum D, & C, ipsum F, æquè metiatur, ac B, ipsum E; metientur æquè omnes A, B, C, ipsos D, E, F.

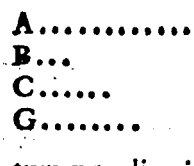
CAETERVM hæc propositio cum suo scholio nullo modo conuenire potest numeris fractis: propterea quòd in numeris fractis dari non possint minimi numeri in sua proportione, sed quibuslibet datis, dari possint alij minores in infinitum. Atque hoc idem intelligendum est in omnibus aliis propositionibus, in quibus minimorum numerorum mentio fit. Ea enim omnes de numeris tantùm integris sunt intelligenda. Sic etiam quando de numeris inter se primis agitur, excludendi sunt numeri fracti, cùm hi non possint esse inter se primi, sed quoscunque metiri possit aliqua fractio, tanquam mensura communis. Nam si reducantur ad eandem denominationem, perspicuum est, eos habere vnam particulam, vel plures, eiusdem denominationis, mensuram communem. Aliæ autem omnes propositiones numerorum, in quibus minimi numeri in sua proportione, vel primi non adhibentur, æquè conueniunt & integris numeris, & fractis. quod satis est semel hoc loco monuisse.

19.

THEOR. 20. PROPOS. 22.

SI fuerint tres numeri, & alij ipsis multitudine æquales, qui bini sumantur, & in eadem ratione, fuerit autem perturbata eorum proportio; Etiam ex æqualitate in eadem ratione erunt.

SINT tres numeri A, B, C, & totidem D, E, F, qui bini sumantur, & in eadem ratione, sitque perturbata eorum proportio, vt quidem A, ad B, ita E, ad F; & vt B, ad C, ita D, ad E. Dico ex æqualitate



qualitate quoque esse vt A, ad C, ita D, ad F. Cùm enim sit vt A, ad B, ita E, ad F; [a] erit numerus ex A, in F, genitus æqualis numero, qui fit ex B, in E. Pari ratione cùm sit etiam vt B, ad C, ita D, ad E, [b] erit eidem numero, qui fit ex B, in E, æqualis numerus, qui fit ex C, in D; Atque adeò numerus genitus ex A, primo in F, quartum, æqualis erit numero ex C, secundo in D, tertiũ, producto. [c] Quare erit vt A, ad C, ita D, ad F.

a 19. septimi.
b 19. septimi.
c 19. septimi.

QVOD si fuerint plures numeri, quàm tres, ita vt sit etiam C, ad G, vt H, ad D; Dico adhuc esse, vt A, ad G, ita H, ad F. Cùm enim iam sit ostensum in tribus numeris, esse vt A, ad C, ita D, ad F; ponatur autem vt C, ad G, ita H, ad D; erunt tres numeri A, C, G, & alij tres H, D, F, qui bini in eadem ratione sumuntur, estque eorum proportio perturbata. Ex æqualitate igitur in tribus numeris ostensa, erit rursus, vt A, ad G, ita H, ad F. Eodemque modo idem ostendemus in quinque numeris, per quatuor, sicut id in quatuor numeris demonstratum fuit per tres, & sic de pluribus. Itaque si fuerint tres numeri, & alij ipsis multitudine æquales, qui bini sumantur, &c. Quod ostendendum erat.

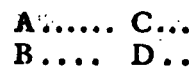
SCHOLIVM.

EODEM modo demonstrabitur propositio in numeris fractis, vt constat.

QVONIAM verò Euclides ex illis sex modis argumentandi in proportionibus, quos in magnitudinibus lib. 5. & explicauit, & demonstrationibus confirmauit, duos tantùm hic in numeris ostendit; nimirum eum, qui à permutata proportione sumitur, propos. 13. & illum, qui ex æqualitate dicitur, propos. 14. & 22. huius libri: non alienum à nostro instituto erit, breuiter reliquos quatuor modos ostendere in numeris, & alia quædam quinti libri sequentibus theorematibus, quæ omnia conueniunt tam fractis numeris, quàm integris.

I.

Si quatuor numeri proportionales sint: Et inuersa ratione, siue conuertendo, proportionales erunt.

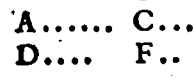


SIT vt A, ad B, ita C, ad D. Dico & conuertendo, siue inuersa ratione, esse vt B, ad A, ita D, ad C. Cùm enim sit A, ad B, vt C, ad D, [a] erit vicissim A, ad C, vt B, ad D. Rursus quia est B, ad D, vt A, ad C, [b] erit vicissim B, ad A, vt D, ad C. Quod est propositum.

a 13. septimi.
b 13. septimi.

II.

Si compositi numeri proportionales sint: Hi quoque diuisi proportionales erunt.



SIT vt AB, ad CB, ita DE, ad FE. Dico & diuidendo esse, vt AC, ad CB, ita DF, ad FE. Cùm enim sit vt AB, ad CB, ita DE, ad FE; [c] erit vicissim, vt totus AB, ad totum DE, ita ablatus CB, ad ablatum FE: Ac proinde vt totus AB, ad totum DE, [d] ita reliquus AC, ad reliquum DF: hoc est, AC, ad DF, vt CB, ad FE. [e] Vicissim ergo erit quoq; AC, ad CB, vt DF, ad FE. Quod est propositum.

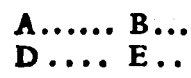
c 13. septimi.
d 11. septimi.
e 13. septimi.

EADEM ratione demonstrabimus Diuisionem rationis conuersam, & contrariam, vt in lib. 5. Sit enim primùm, vt AB, ad CB, ita DE, ad FE. Dico per diuisionem rationis conuersam esse quoque, vt CB, ad AC, ita FE, ad DF. Cùm enim sit, vt AB, ad CB, ita DE, ad FE; erit quoque diuidendo, vt AC, ad CB, ita DF, ad FE: Et conuertendo, vt CB, ad AC, ita FE, ad DF. Quod est propositum.

SIT deinde, vt AC, ad AB, ita DF, ad DE. Dico per diuisionem rationis contrariam, esse quoque, vt AC, ad CB, ita DF, ad FE. Quoniam enim est, vt AC, ad AB, ita DF, ad DE; erit conuertendo, vt AB, ad AC, ita DE, ad DF. Ergo diuidendo, vt CB, ad AC, ita FE, ad DF: Et conuertendo, vt AC, ad CB, ita DF, ad FE. Quod est propositum.

III.

Si diuisi numeri proportionales sint: Hi quoque compositi proportionales erunt.



SIT vt AB, ad BC, ita DE, ad EF. Dico & componendo esse, vt AC, ad BC, ita DF, ad EF. Cùm enim sit, vt AB, ad BC, ita DE, ad EF; [f] erit vicissim, vt AB, ad DE, ita BC, ad EF; [g] Ac proinde AB, BC, simul ad DE, EF, simul, vt BC, ad EF: [h] Et vicissim AB, BC, simul, hoc est, totus AC, ad BC, vt DE, EF, simul, hoc est, totus DF, ad EF. Quod est propositum.

f 13. septimi.
g 12. septimi.
h 13. septimi.

SIMILITER Compositio rationis conuersa, & contraria ostendetur hoc loco, vt in lib. 5. Sit enim primùm, vt AB, ad BC, ita DE, ad EF. Dico per compositionẽ rationis conuersam esse quoq;, vt AC, ad AB, ita DF, ad DE. Quia enim est, vt AB, ad BC, ita DE, ad EF; erit conuertendo, vt BC, ad AB, ita EF, ad DE: Et componendo, vt AC, ad AB, ita DF, ad DE. Quod est propositum.

DEINDE sit rursus vt AB, ad BC, ita DE, ad EF. Dico per compositionem rationis contrariam esse quoq;, vt AB, ad AC, ita DE, ad DF. Cùm enim sit, vt AB, ad BC, ita DE, ad EF; erit conuertendo vt BC, ad AB, ita EF, ad DE: Et componendo ergo, vt AC, ad AB, ita DF, ad DE: Et conuertendo, vt AB, ad AC, ita DE, ad DF. Quod est propositum.

IIII.

Si compositi numeri proportionales sint: Hi quoque per conuersionem rationis proportionales erunt.

A..... C... B
D.... F.. E

Sit vt A B, ad C B, ita D E, ad F E. Dico, per conuersionem rationis esse quoq; vt A B, ad A C, ita D E, ad D F. Cùm enim sit, vt A B, ad C B, ita D E, ad F E; [a] *erit vicissim, vt totus A B, ad totum D E, ita ablatus C B, ad ablatum F E;* [b] *Ac proinde vt totus A B, ad totum D E, ita erit reliquus A C, ad reliquum D F.* [c] *Vicissim igitur vt A B, ad A C, ita D E, ad D F. Quod est propositum.*

a 13. septimi.
b 11. septimi.
c 13. septimi.

Rvrsvs ex his facilè demonstrabimus theorema illud in numeris, quod in magnitudinibus ostendit Euclides propos. 24. lib. 5. Videlicet.

V.

Si primus ad secundum eandem habuerit rationem, quam tertius ad quartum; habuerit autem & quintus ad secundum eandem rationem, quam sextus ad quartum: Etiam compositus primus cum quinto ad secundum eandem habebit rationem, quam tertius cum sexto ad quartum.

Sit vt A B, primus ad C, secundum, ita D E, tertius ad F, quartum: Item vt B G, quintus ad C, secundum, ita E H, sextus ad F, quartum. Dico ita esse A G, compositum ex primo & quinto, ad C, secundum, vt est D H, compositus ex tertio & sexto, ad F, quartum.

A..... B.. G | D..... E... H
C.... | F.....

Cùm enim sit, vt B G, ad C, ita E H, ad F; erit conuertendo vt C, ad B G, ita F, ad E H. Quoniam igitur est vt A B, ad C, ita D E, ad F; & vt C, ad B G, ita F, ad E H; erit ex æqualitate, vt A B, ad B G ita D E, ad E H. Componendo igitur, vt A G, ad B G; ita D H, ad E H. Itaq; cùm rursus sit, vt A G, ad B G, ita D H, ad E H: & vt B G, ad C, ita E H, ad F; erit ex æqualitate, vt A G, ad C, ita D H, ad F. Quod est propositum.

Eodem modo & hoc Theorema ostendemus, quod ad propos. 24. lib. 5. in magnitudinibus demõstrauimus.

VI.

Si duo numeri ad duos numeros eandem habeant rationem; & detracti quidam habeant ad eosdem eandem: Et reliqui ad eosdem eandem rationem habebunt.

Sit vt totus A B, ad C, ita totus D E, ad F; Item vt detractus A G, ad C, ita detractus D H, ad F. Dico & reliquum G B, esse ad C, vt est reliquus H E, ad F. Cùm enim sit, vt A G, ad C, ita D H, ad F; erit conuertendo, vt C, ad A G, ita F, ad D H. Quia igitur est, vt A B, ad C, ita D E, ad F; & vt C, ad A G, ita F, ad D H; erit ex æqualitate vt A B, ad A G, ita D E, ad D H. Diuidendo ergo vt G B, ad A G, ita H E, ad D H. Itaq; cùm rursus sit, vt G B, ad A G, ita H E, ad D H; & vt A G, ad C, ita D H, ad F; erit ex æqualitate vt G B, ad C, ita H E, ad F. Quod est propositum.

A..... G.. B | D..... H... E
C.... | F.....

Item & hoc demonstrabimus.

VII.

Si primus ad secundum eandem habuerit rationem, quam tertius ad quartum; habuerit autem & primus ad quintum eandem, quam tertius ad sextum: Etiam primus ad compositum secundum cũ quinto eandem rationẽ habebit, quã tertius ad quartum cũ sexto.

Sit vt primus A, ad secundum B C, ita tertius D, ad quartum E F; & vt primus A, ad quintum C G, ita tertius D, ad sextum F H. Dico ita esse A, primum ad B G, compositum ex secundo & quinto, vt est D, tertius ad E H, compositum ex quarto & sexto. Cùm enim sit, vt A, ad B C, ita D, ad E F; erit conuertendo, vt B C, ad A, ita E F, ad D. Quia igitur est vt B C, ad A, ita E F, ad D; & vt A, ad C G, ita D, ad F H; erit ex æqualitate vt B C, ad C G, ita E F, ad F H; & componendo, vt B G, ad C G, ita E H, ad F H; & conuertendo, vt C G, ad B G, ita F H, ad E H. Quoniam ergo est, vt A, ad C G, ita D, ad F H; & vt C G, ad B G, ita F H, ad E H; erit ex æqualitate, vt A, ad B G, ita D, ad E H. Quod est propositum.

A..... D.....
B.... C.. G E..... F.... H

Denique ex his omnibus inferemus hoc theorema.

VIII.

Si quotcunque numeri ad eundem habuerint proportiones, quas alij illis multitudine æquales ad quendam alium eundem; Habebunt quoque illi omnes simul ad eundem, proportionem, quã alij omnes hi simul ad alium illum eundem. Et si idem numerus ad quotcunque numeros proportiones habuerit, quas idem alius numerus ad alios multitudine illis æquales; Habebit quoque idem numerus ad omnes illos simul proportionem, quam idem alius numerus ad hos omnes simul.

HABEANT quotcunq; numeri A B, B C, C D, ad eundem E, proportiones, quas totidem F G, G H, H I, habent ad eundem K: Hoc eſt, ſit vt A B, ad E, ita F G, ad K; & vt B C, ad E, ita G H, ad K; & vt C D, ad E, ita H I, ad K. Dico omnes illos ſimul, hoc eſt, ipſum A D, ad E, eandem habere proportionem, quam hi omnes ſimul habent, hoc eſt, quam ipſe F I, habet ad K. Cùm enim ſit, vt A B, primus ad E, ſecundũ, ita F G, tertius ad K, quartum: Item vt B C, quintus ad E, ſecundum, ita G H, ſextus ad K, quartum; erit quoq; vt A C, primus cum quinto, ad E, ſecundum, ita F H, tertius cum ſexto, ad K, quartum. Rurſus quia eſt, vt A C, primus ad E, ſecundum, ita F H, tertius ad K, quartum: Item vt C D, quintus ad E, ſecundum, ita H I, ſextus ad K, quartum; erit etiam, vt A D, primus cum quinto, ad E, ſecundum, ita F I, tertius cum ſexto, ad K, quartum: Atq; ita de cæteris, ſi plures fuerint.

A...B.....C.....D
E.....
F..G...H....I
K.....

SED habeat iam idem numerus E, ad numeros quotcunque A B, B C, C D, proportiones eaſdem, quas idem alius numerus K, ad totidem F G, G H, H I; Hoc eſt, ſit vt E, ad A B, ita K, ad F G; & vt E, ad B C, ita K, ad G H; & vt E, ad C D, ita K, ad H I. Dico eſſe, vt E, ad omnes illos ſimul, nimirum ad A D, ita K, ad hos omnes ſimul, vtpote ad F I. Cùm enim ſit, vt E, primus ad A B, ſecundum, ita K, tertius ad F G, quartum: Item vt E, primus ad B C, quintum, ita K, tertius ad G H, ſextum; erit quoq; vt E, primus ad A C, ſecundum cum quinto, ita K, tertius ad F H, quartum cum ſexto. Rurſus quia eſt, vt E, primus ad A C, ſecundum, ita K, tertius ad F H, quartum: Item vt E, primus ad C D, quintum, ita K, tertius ad H I, ſextum; erit etiam, vt E, primus ad A D, ſecũdum cum quinto, ita K, tertius ad F I, quartũ cum ſexto. Atq; ita de reliquis, ſi plures fuerint.

IAM verò, his demonſtratis, oſtendentur nouem vltimæ propoſitiones lib. 5. à Campano adiectæ, eodem modo in numeris improportionalibus, quo in magnitudinibus demonſtratæ fuêre; ſi pro magnitudinibus intelligantur numeri ſiue integri, ſiue fracti, & pro modis argumentandi in proportionibus, qui libro 5. ſunt demonſtrati, aſſumantur iidem modi hoc lib. demonſtrati: Vt opus non ſit eas hîc repetere. Satis enim eſt, vt dixi, ſi propoſitiones illæ quinti lib. in manus ſumantur, & magnitudines intelligantur eſſe numeri, eædemq; prorſus demonſtrationes adhibeantur.

THEOR. 21. PROPOS. 23. 21.

PRIMI inter ſe numeri, minimi ſunt omniũ eandem cum eis rationẽ habentiũ.

SINT numeri A, B, inter ſe primi. Dico eos eſſe minimos omnium, qui eandem proportionem habent, quam ipſi A, & B. Nam ſi non ſunt minimi, erunt aliqui alij minores ipſis, minimi habentes proportionem, quam A, & B. Sint ergo, ſi fieri poteſt, C, D, minimi in proportione A, & B, minoresq; idcirco ipſis A, & B. Quoniam igitur C, D, minimi ſunt in proportione A, & B; [a] metietur C, ipſum A, & D, ipſum B, æquè; atque adeò ſecũdum eundem numerum, qui ſit E, ita vt C, toties metiatur ipſum A, & D, ipſum B, quoties vnitas eſt in E. Itaque cùm vnitas numerum E, & numerus C, numerum A, æquè metiatur; [b] metietur & viciſsim æquè vnitas numerum C, & numerus E, numerum A. Rurſus quia vnitas numerum E, & numerus D, numerum B, æquè metitur; [c] metietur quoque viciſsim æquè vnitas numerum D, & numerus E, numerum B; Atque adeò, cùm idem numerus E, vtrumq; A, & B, metiatur, erit numerus E, eorum communis menſura. Quare A, & B, non ſunt primi inter ſe, ſed compoſiti. Quod eſt abſurdum, & cõtra hypotheſin. Non ſunt igitur alij numeri ipſis A, & B, minores, minimi in proportione A, ad B; Ac proinde A, & B, minimi ſunt. Primi ergo inter ſe numeri minimi ſunt, &c. Quod erat demonſtrandum.

A.....B....
C------D---
E----

[a] 21. ſeptimi
[b] 15 ſeptimi
[c] 15. ſeptimi

THEOR. 22. PROPOS. 24. 22.

MINIMI numeri omniũ eandem cum eis rationẽ habentiũ, primi inter ſe ſunt.

SINT numeri A, & B, minimi omnium eandem cum ipſis proportionem habentium. Dico eos eſſe inter ſe primos; hoc eſt, nullum numerum, præter vnitatem, communi menſura eos metiri. Si enim non ſunt inter ſe primi, ſed habent numerum communem mẽſuram; ſit numerus C, eorum menſura communis, metiaturq; C, numerus numerum quidem A, toties, quoties vnitas eſt in numero D; At verò ipſum B, toties, quoties vnitas eſt in E. Quia igitur C, toties compoſitus, quot in D, ſunt vnitates, procreat ipſum A; & idem C, toties compoſitus, quot ſunt vnitates in E, producit ipſum B; [d] fit, vt D, & E, ipſum C, multiplicantes, producant A, & B. [e] Quare eadem erit proportio A, ad B, quæ D, ad E; Atque adeò, cùm D, & E, partes ipſorum A, & B, minores ſint, quàm A, & B; non erunt A, & B, numeri minimi omnium eandem cum eis rationem habentium. Quod eſt abſurdum. Primi ergo inter ſe ſunt numeri A, & B; Ac proinde, minimi numeri omnium eandem cum eis rationem habẽtium, primi inter ſe ſunt. Quod oſtendendum erat.

A.....B.....
C-----
D-----E---

[d] 9. pron.
[e] 18. ſeptimi

SCHOLIVM.

HANC propoſitionem, & præcedentem cum Campano ad plures numeros extendemus, hoc modo.

QVOTCVNQVE numeri inter ſe primi, minimi ſunt in continuatione ſuarum proportionum. Et quotcunque numeri in continuatione ſuarum proportionum minimi, ſunt inter ſe primi.

SINT quotcunq; numeri inter ſe primi A,B,C. Dico eos minimos eſſe in continuatione ſuarum proportionum, ita vt in minoribus numeris continuari non poſſint, quamuis proportio duorum in minoribus numeris reperiatur. Si enim non ſunt minimi, erunt aliqui alij minores ipſis, nimirum D,E,F, minimi in continuatione illarum proportionum. Quia igitur D,E,F, minimi ſunt in proportione numerorum A, B, C; metietur D, ipſum A, & E, ipſum B, & F, ipſum C, æquè per ea, quæ ad propoſ. 21. huius libri demonſtrauimus; atq; adeò ſecundùm vnum eundem numerum, qui ſit G; ita vt D, toties metiatur ipſum A, & E, ipſum B, & F, ipſum C, quoties vnitas eſt in G. Quoniam igitur vnitas numerum G, & numerus D, ipſum A, æquè metitur, [a] *metietur quoq; viciſſim æquè vnitas numerum D, & numerus G, numerum A: Eademq; ratione idem G, metietur & ipſum B, & ipſum C, æquè, atque vnitas ipſos E,F; Atq; idcirco A,B,C, cùm habeant numerum G, communem menſuram, non erunt inter ſe primi, ſed compoſiti. Quod eſt abſurdum, & contra hypotheſim. Non ſunt igitur alij numeri minores ipſis A, B, C, minimi in continuatione proportionum A, ad B, & B, ad C; ſed ipſi A, B, C, minimi ſunt.*

A.....B.....C....
D----E------F---
G-----

a 15. ſeptimi.

IAM verò ſint A,B,C, in continuatione ſuarum proportionum minimi. Dico eos primos eſſe inter ſe. Si enim non ſunt inter ſe primi, metiatur eos communi menſura numerus G, ita vt G, toties metiatur ipſum A, quoties vnitas eſt in D; & ipſum B, toties, quoties vnitas eſt in E; & ipſum C, toties, quoties vnitas eſt in F. Quoniam igitur G, toties compoſitus facit numeros A,B,C, quoties vnitas eſt in D,E,F; fit vt D, E, F, ipſum G, multiplicantes producant ipſos A,B,C. Quare D,E,F, eaſdem habent proportiones, quas A,B,C, per ea, quæ ad propoſ. 18. huius lib. oſtendimus; Atq; adeò, cùm D,E,F, minores ſint quàm A,B,C; non erunt A,B,C, minimi in continuatione ſuarum proportionum. Quod eſt abſurdum. Primi igitur inter ſe ſunt A,B,C. Quod eſt propoſitum.

24.

THEOR. 23. PROPOS. 25.

SI duo numeri primi inter ſe fuerint; Qui vnum eorum metitur numerus, ad reliquum primus erit.

A.....B.....
C.... D----

SINT inter ſe primi A, & B; & ipſum A, metiatur numerus C. Dico C, ad reliquum B, eſſe primum. Si enim non ſunt inter ſe primi B, & C; metiatur eos communi menſura, ſi fieri poteſt, numerus D. Quoniam igitur D, metitur C; & C, ipſum A; [a] metietur etiam D, ipſum A: Metitur autem & ipſum B. Igitur A, & B, non ſunt inter ſe primi, cùm habeant menſuram communem numerum D. Quod eſt abſurdum, & contra hypotheſim. Eſt ergo C, ad B, primus. Eodem modo, ſi numerus quiſpiã metiatur ipſum B, erit is ad A, primus. Quapropter ſi duo numeri primi inter ſe fuerint, &c. Quod erat demõſtrandũ.

a 11. pron.

25.

THEOR. 24. PROPOS. 26.

SI duo numeri ad quempiam primi fuerint; etiam ex illis genitus ad eundem primus erit.

A..... B...
C.....
D.....
E---- F----

SIT vterque numerus A,B, ad C, primus, producaturq; ex A, in B, vel ex B, in A, numerus D. Dico & D, ad eundem C, primum eſſe. Si enim C, & D, non ſunt inter ſe primi; ſit eorum communis menſura numerus E, metiẽs ipſum D, toties, quot vnitates ſunt in numero F. Quoniam igitur E, toties compoſitus facit ipſum D, quot ſunt vnitates in F; [b] fit vt F, ipſum E, multiplicans gignat ipſum D; [c] & contra E, ĩpſum F, multiplicans producat eundem D. Genitus eſt autem idem D, ex A, in B. Igitur cùm ex E, primo in F, quartum fiat idem numerus, qui ex A, ſecundo in B, tertium; [d] erit vt E, primus ad A, ſecundum, ita B, tertius ad F, quartum. Quia verò A, & C, primi inter ſe ſunt; & E, ipſum C, ponitur metiri; [e] erit E, ad A, primus; Atq; adeò E, & A, cùm ſint inter ſe primi, [f] in ſua proportione minimi erunt. [g] Æquè igitur metientur ipſos B, & F, eandem proportionem habentes, nimirum E, ipſum B, & A, ipſum F. Quare cum E, metiatur vtrumque B, & C; non erunt B, & C, inter ſe primi. Quod eſt abſurdum, & contra hypotheſim. Primus ergo erit D, ad ipſum C; Ac proinde, ſi duo numeri ad quempiam primi fuerint, &c. Quod erat demonſtrandum.

b 9. pron.
c 16. ſeptimi
d 19. ſeptimi
e 25. ſeptimi
f 23. ſeptimi
g 21. ſeptimi

26.

THEOR. 25. PROPOS. 27.

SI duo numeri primi inter ſe fuerint: Etiam ex vno eorum genitus ad reliquum primus erit.

A.... B.....
C.....
D ....

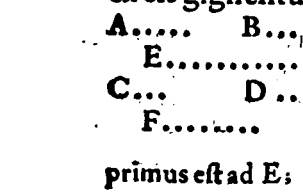
SINT inter ſe primi A, & B, gignaturq; C, ex A, in ſe ipſum. Dico C, ad reliquum B, eſſe primum. Sumpto enim D, æquali ipſi A, erit & D, ad B, primus. Quoniam igitur A, & D, ad B, primi ſunt, [b] erit numerus ex A, in D, hoc

b 26. ſeptimi

in D, hoc eſt, ex A, in ſe genitus, nimirum C, ad eundem B, primus. Eademq; arte oſtendemus, numerum ex B, in ſe genitum, ad A, primum eſſe. Si duo ergo numeri primi inter ſe fuerint, &c. Quod demonſtrandum erat.

THEOR. 26. PROPOS. 28. 27.

SI duo numeri ad duos numeros, vterque ad vtrumque, primi fuerint; Et qui ex eis gignentur, primi inter ſe erunt.



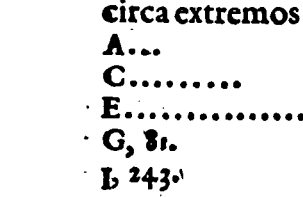
SIT vterque A, & B, ad vtrumque C, & D, primus, gignaturque E, ex A, in B: & F, ex C, in D. Dico E, & F, inter ſe primos eſſe. Cum enim vterq; A, & B, primus ſit ad C; [a] erit quoque E, ex ipſis genitus, ad eundem C, primus. Rurſus cum vterque A, & B, ad D, ſit primus, erit eodem modo E, ipſis genitus, ad eundem D, primus. Quia igitur vterq; C, & D, primus eſt ad E; [b] erit quoque F, ex illis procreatus, ad E, primus. Si ergo duo numeri ad duos numeros, vterq; ad vtrumque, &c. Quod erat oſtendendum.

[a] 26. ſeptimi

[b] 26. ſeptimi

THEOR. 27. PROPOS. 29. 28.

SI duo numeri primi inter ſe fuerint, & multiplicans vterque ſe ipſum fecerit aliquem; Et geniti ex ipſis primi inter ſe erunt; Et ſi, qui in principio, genitos ipſos multiplicantes fecerint aliquos; Et hi quoque primi inter ſe erunt: Et ſemper circa extremos hoc eueniet.



SINT primi inter ſe A, & B; & ex A, in ſe fiat C; at ex B, in ſe fiat D. Dico & C, D, primos inter ſe eſſe: Et ſi rurſum fiat E, ex A; in C; & F, ex B, in D; Dico E, F, quoque eſſe inter ſe primos. Cum enim A, B, ſint inter ſe primi, [c] erit C, factus ex A, in ſe, ad reliquum B, primus: Atque eodem modo cum B, & C, primi ſint inter ſe, erit & D, factus ex B, in ſe, ad C, primus: atque adeò geniti duo C D, primi inter ſe erunt.

[c] 27. ſeptimi

RVRSVS, quia A, & B, ſunt inter ſe primi, [d] erit & C, factus ex A, in ſe, ad B; & D, genitus ex B, in ſe, ad A, primus: Eſt autem & C, oſtenſus ad D, primus. Vterque igitur A, C, ad vtrumque B, D, primus erit; [e] Ac proinde E, factus ex A, in C, primus erit ad F, factum ex B, in D. Quod ſi adhuc ex A, in E, fiat G; & ex B, in F, fiat H; cum A, & C, primi ſint ad B, [f] erit quoque E, ex ipſis genitus, ad B, primus: Eademque ratione & F, ad A, primus erit. Quia igitur vterque A, E, ad vtrumque B, F, primus eſt; [g] erit & G, factus ex A, in E, ad H, factum ex B, in F, primus. Et ſic deinceps, ſi plures fuerint. Nam eodem modo cum A, & E, primi ſint ad B, [h] erit & G, ex ipſis factus, ad B, primus: necnon & H, ad A. [i] Quare & I, genitus ex A, in G, ad K, genitum ex B, in H, primus erit, cum vterque A, G, ad vtrumque B, H, ſit primus. Si duo itaque numeri primi inter ſe fuerint, &c. Quod oſtendendum erat.

[d] 27. ſeptimi

[e] 28. ſeptimi

[f] 26. ſeptimi

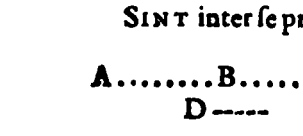
[g] 28. ſeptimi

[h] 26. ſeptimi

[i] 28. ſeptimi

THEOR. 28. PROPOS. 30. 29.

SI duo numeri primi inter ſe fuerint: Etiam vterque ſimul ad quemlibet illorum primus erit: Et ſi vterque ſimul ad vnum aliquem illorum primus fuerit; Etiam, qui in principio, numeri primi inter ſe erunt.



SINT inter ſe primi A B, B C. Dico & vtrumque ſimul A C, primum eſſe & ad A B, & ad B C. Si enim A C, A B, non ſunt inter ſe primi; metiatur illos, ſi fieri poteſt, communi menſura numerus D. Quia igitur D, metitur totum A C, & ablatum A B; [k] metietur quoq; reliquum B C. Non igitur primi inter ſe ſunt A B, B C, cum eos metiatur numerus D. Quod eſt abſurdum, & contra hypotheſim. Quare A C, ad A B, primus erit. Eodemque modo ad B C, oſtendemus eundem eſſe primum.

[k] 12. pron.

SED iam vterque A B, B C, ſimul, primus ſit ad vnum aliquem illorum, videlicet ad A B. Dico & A B, B C, inter ſe primos eſſe. Si enim non ſunt inter ſe primi, metiatur illos, ſi fieri poteſt, numerus D. Quia igitur D, metitur A B, & B C; [l] metietur quoque D, numerum A C, ex A B, B C, compoſitum; Ac proinde A C, A B, non ſunt inter ſe primi, cum eos numerus D, metiatur. Quod eſt abſurdum, & contra hypotheſim. Sunt igitur A B, B C, inter ſe primi. Eodemque argumento oſtendemus A B, B C, inter ſe primos eſſe, ſi A C, ad B C, primus eſſe ponatur. Si duo ergo numeri primi inter ſe fuerint, &c. Quod erat demonſtrandum.

[l] 10. pron.

COROLLARIVM.

Ex hoc ſequitur, numerum, qui ex duobus compoſitus ad vnum illorum primus eſt, ad reliquum quoq; primum eſſe. Si enim A C, ad A B, primus eſt, erunt A B, B C, inter ſe primi, per ſecundam partem huius propoſ. Igitur & A C, ad B C, primus erit, per primam partem eiuſdem. Quod eſt propoſitum.

32. ## THEOR. 29. PROPOS. 31.

OMNIS primus numerus, ad omnem numerũ, quem non metitur, primus eſt.

PRIMVS numerus A, non metiatur numerum B. Dico A, ad B, primum eſſe; hoc eſt, A, & B, eſſe inter ſe primos, licet B, compoſitus ſit. Si enim A, & B, non ſunt inter ſe primi, metiatur eos, præter vnitatem, ſi fieri poteſt, communi menſura numerus C. Non erit ergo C, idem qui A; quòd A, ponatur non metiri ipſum B. Quia igitur numerũ A, alius numerus C, metitur, non erit A, primus. Quòd eſt abſurdum, & contra hypotheſim. Primus igitur eſt A, ad B; Ac propterea, omnis primus numerus, ad omnem numerum, &c. Quod demonſtrandum erat.

A..... B.....
C---

33. ## THEOR. 30. PROPOS. 32.

SI duo numeri ſeſe mutuo multiplicantes fecerint aliquem: genitum autem ex ipſis metiatur aliquis primus numerus: is etiam vnum eorum, qui in principio, metietur.

DVO numeri A, & B, ſe mutuo multiplicantes faciant C, quam metiatur numerus primus D. Dico & D, metiri ſaltem vnum ipſorum A, & B, ſi non vtrumq; metitur. Non metiatur enim D, ipſum A; metiatur verò ipſum C, toties, quot ſunt vnitates in numero E; ita vt C, fiat ex D, in E, qui idem factus eſt ex A, in B. Quia igitur numerus genitus ex D, primo in E, quartum, æqualis eſt numero genito ex A, ſecundo in B, tertium; [a] erit vt D, primus ad A, ſecundum; ita B, tertius ad E, quartum. [b] Quia verò primus D, ad A, primus eſt, cum eum non metiatur; [c] erunt D, & A, in ſua proportione minimi. [d] Quare æquè metientur ipſos B, & E; nimirum D, ipſum B, & A, ipſum E; Ac proinde ſi D, non metitur ipſum A, metietur ſaltem ipſum B: Eodemq; modo ſi D, non metiatur ipſum B, metietur ſaltẽ ipſum A. Si duo ergo numeri ſeſe mutuo multiplicantes fecerint aliquem, &c. Quod erat demõſtrandum.

A.... B.....
C.....
D... E.....

a 19. *ſeptimi*
b 31. *ſeptimi*
c 23. *ſeptimi*
d 21. *ſeptimi*

SCHOLIVM.

EODEM modo & hoc theorema ſequens demonſtrabimus.

SI duo numeri ſeſe mutuo multiplicantes fecerint aliquem; genitum autem ex ipſis metiatur aliquis non primus numerus, vel certè ad ipſum ſit compoſitus: is etiam ad vnum eorum, qui in principio, compoſitus erit.

NAM ex A, in B, fiat C, quem vel metiatur numerus non primus D, vel certè compoſitus ad eum ſit: hoc eſt, vel D, & C, compoſiti ſint inter ſe. Dico D, quoq; ad vnum ipſorum A, B, compoſitum eſſe: id eſt, vel D, & A; vel D, & B, eſſe quoque inter ſe compoſitos. Si enim D, ad neutrum eorum compoſitus eſt; erit vterq; A, & B, ad D, primus. [a] *Quare & C, ex illis genitus, ad eundem D, primus erit. Quod eſt abſurdum, cum D, ponatur vel metiri ipſum C, vel certè ad eum eſſe compoſitus. Eſt igitur D, compoſitus ad A, vel ad B, cum non ſit primus ad vtrumque.*

A... B....
C.....
D.....

a 26. *ſeptimi.*

30. ## PROBL. 31. PROPOS. 33.

OMNEM compoſitum numerum, aliquis primus numerus metitur.

SIT numerus compoſitus A. Dico aliquem numerum primum eum metiri. Metiatur enim ipſum numerus B, qui ſi primus fuerit, habetur propoſitũ: Si verò compoſitus, metiatur eum numerus C, qui vel primus erit, vel compoſitus. Si primus, cum metiatur ipſum B; & B, ipſum A; [a] metietur quoque C, primus ipſum A. Si autem C, compoſitus fuerit, metietur eum alius numerus. Quia verò numerus non diminuitur infinitè, veniemus tandem ad aliquem numerum, quem nullus alius metiatur, atq; adeò ad primum; qui cum metiatur omnes præcedentes, [b] metietur quoq; compoſitum A. Quod eſt propoſitum.

A.....
B..... C...

a 11. *pron.*
b 11. *pron.*

ALITER. Quia numerus A, compoſitus eſt; metietur eum aliquis numerus, vel etiam plures. Sit omnium metientium eum minimus B; quem dico eſſe primum. Si enim B, non eſt primus, metiatur enim, ſi fieri poteſt, numerus C. Quoniam igitur C, metitur ipſum B, & B, ipſum A; [c] metietur quoq; C, minor ipſo B, ipſum A. Quod eſt abſurdum, cum B, poſſatur omnium metientium minimus. Primus ergo eſt numerus B. Omnem igitur compoſitum numerum aliquis primus numerus metitur. Quod erat demonſtrandum.

A.....
B... C--

c 11. *pron.*

THEOR.

THEOR. 32. PROPOS. 34. 31.

OMNIS numerus aut primus eſt, aut eum aliquis primus metitur.

A..... SIT numerus quicunq; A. Dico eum vel eſſe primum, vel certè aliquem primũ eum metiri. Cum enim omnis numerus vel primus ſit, vel compoſitus; ſi quidem A, primus eſt, habetur propoſitum: Si verò compoſitus; [a] metietur eum aliquis primus. Omnis igitur numerus aut primus eſt, aut eum aliquis primus metitur. Quod erat oſtendendum. [a] 33. ſeptimi

PROBL. 3. PROPOS. 35. 34.

NVMERIS datis quotcunque, reperire minimos omnium eandem rationem habentium cum ipſis.

SINT quotcunque numeri A,B,C, habentes quaſcunque proportiones, ſiue eadem ſit proportio A, ad B, quæ B, ad C, ſiue non; oporteatq; totidem reperire, qui in eiſdem proportionibus ſint minimi. Quoniam A,B,C, ſunt inter ſe aut primi, aut compoſiti; Si primi inter ſe ſunt; erunt ipſi in continuatione ſuarum proportionum minimi, per ea, quæ ad propoſ. 24. huius lib. demonſtrauimus.

A..... B.... C.....
D..
E... F.. G....
H---- I---- K----
L-----

Si verò non ſunt inter ſe primi, [b] inuenta ſit maxima eorum communis menſura numerus D, qui metiatur ipſos A,B,C, per numeros E,F,G. Dico E,F,G, minimos eſſe in proportionibus numerorum A,B,C. Quòd enim eaſdem habeant proportiones, quas numeri A,B,C, ſic oſtendetur. Quoniam D, ipſos A,B,C, metitur per E,F,G; [c] fit, vt D, ipſos E,F,G, multiplicans faciat A,B,C. Quare, per ea, quæ ad propoſ. 18. huius lib. oſtendimus, eaſdem rationes habebunt E,F,G, quas numeri A,B,C. [b] 3. ſeptimi. [c] 9. pron.

QVOD verò E,F,G, ſint minimi omnium eandem rationem habentium cum ipſis, hoc modo perſpicuum fiet. Si non ſunt minimi, erunt aliqui alij ipſis minores, minimi in eiſdem proportionibus. Sint ergo, ſi fieri poteſt, minimi H, I, K; qui quoniam ipſos A,B,C, metiuntur æquè, vt ad propoſ. 21. huius libri oſtendimus; metiantur eos per numerum L. Quo poſito, [d] fit, vt L, multiplicans numeros H,I,K, producat numeros A,B,C; [e] & viciſsim L, ipſos A,B,C, metiatur per H,I, K. Quoniam igitur E, primus multiplicans D, quartum facit A, & H, ſecundus multiplicans L, tertium facit eundem A; [f] erit, vt E, primus ad H, ſecundum, ita L, tertius ad D, quartum: Eſt autem E, maior quàm H. Igitur & L, maior erit, quàm D; Atque adeò, cum L, ipſos A,B,C, metiatur; non erit D. maxima menſura communis numerorum A,B,C. Quod eſt abſurdum, & contra hypotheſim. Non igitur erunt alij numeri minores ipſis E,F,G, minimi in continuatione proportionum A, ad B, & B, ad C; ſed ipſi E,F,G, minimi erunt. Quamobrem, numeris datis quotcunque, reperimus minimos, &c. Quod faciendum erat. [d] 9. pron. [e] 8. pron. [f] 19. ſeptimi

COROLLARIVM.

HINC fit, maximam menſuram quotlibet numerorum, metiri ipſos per numeros, qui minimi ſunt omnium eandem proportionem cum ipſis habentium. Oſtenſum enim eſt, numeros E,F,G, per quos D, maxima menſura numerorum A,B,C, ipſos A,B,C, metitur, minimos eſſe in continuatione proportionum A, ad B, & B, ad C: Eademq; eſt in cæteris ratio.

SCHOLIVM.

A,16. B,24. C,36. D,54. E,81.
I, 8.
F, 2, G,3.

EX his facili via comperiemus duos minimos numeros, qui eandem habeant proportionem, quam quotcunq; numeri dati continuè proportionales. Vt ſi proponantur continuè proportionales A, B,C,D,E, ſiue illi ſint in continuatione proportionis A, ad B, minimi, ſiue non; reperiemus duos in eadem proportione minimos, ſi per hoc problema ſumamus F, & G, minimos in proportione duorum A, & B; nimirum illos, per quos I, maxima eorum cõmunis menſura eos metitur.

A...B..... C.....
D...
E. F.. G...

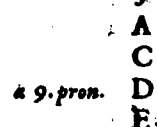
A.... B.. C.....
D..
E.. F. G...

CAETERVM contingit interdum, vnum numerorum E,F,G, per hanc propoſitionẽ inuentorum eſſe vnitatem; quando ſcilicet D, maxima menſura vni ipſorum A,B,C, æqualis eſt, vt ex his exemplis apparet. Manifeſtum eſt autem, tunc inuentos E,F,G, eſſe minimos in continuatione ſuarum proportionum, cum minor numerus dari non poſſit, quàm vnitas.

PROBL. 4. PROPOS. 36. 36.

DVOBVS numeris datis, reperire, quem illi minimum metiantur, numerum.

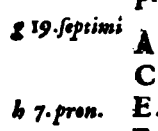
SIT reperiendus minimus numerus omnium, quos dati numeri A, & B, metiũtur. Sint primũ dati numeri A, & B, inter ſe primi, ſe ſeq; mutuo multiplicantes faciant C. Dico C, eſſe minimum, quem A, & B, metiuntur. Quod enim eum metiãtur, perſpicuum eſt. Nam cùm producatur C, ex A, in B, vel ex B, in A; [g] metietur A, ipſum C, per B; & B, eundem C, per A. Vterque igitur A, & B, ipſum C, metitur. Quod autẽ C, ſit minimus omnium, quos A, & B, metiũtur, ſic demõſtrabimus. [g] 7. pron.



Si C, non est minimus; metiantur, si fieri potest, A, & B, alium numerum D, ipso C, minorem; metiaturq; A, ipsum D, per E, at B, eundem D, per F. Quo posito, [a] tam ex A, in E, quàm ex B, in F, & è contrario, producetur numerus D. Quia igitur idem numerus D, fit ex A, primo in E, quartum, & ex B, secundo in F, tertium; [b] erit, vt A, primus ad B, secundum, ita F, tertius ad E, quartum. Igitur A, & B, (cum ponantur primi inter se, [c] & ob id in sua proportione minimi) [d] æquè metiętur ipsos F, & E; nimirum A, ipsum F, & B, ipsum E. Quoniam verò A, multiplicans B, & E, facit C, & D; [e] erit C, ad D, vt B, ad E: Ac propterea cùm B, metiatur ipsum E, vt ostensum est; metietur & C, numerus numerum D, maior minorem. Quod est absurdum. Non igitur A, & B, metientur alium numerum minorem ipso C; atque adeò C, minimus est omnium, quos metiuntur.

a 9. pron. b 19. septimi c 23. septimi. d 21. septimi e 17. septimi.

SINT deinde dati numeri A, & B, non primi inter se. [f] Inueniantur C, & D, minimi in eadem proportione, vt sint quatuor numeri proportionales, nimirum A, ad B, vt C, ad D. Quo posito, [g] fiet idem numerus ex A, primo in D, quartum, & ex B, secundo in C, tertium.



Factus ergo sit E. Dico E, hac via procreatum esse minimum, quem A, & B, metiuntur. Quod enim eum metiantur, manifestum est. Nam cum tam A, multiplicatus à D, quàm B, multiplicatus à C, ipsum E, producat; [h] metietur tam A, quàm B, ipsum E. Quod verò E, sit minimus omnium, quos A, & B, metiuntur, ita probabitur. Si E, non est minimus, metiatur, si fieri potest, A, & B, alium numerum F, ipso E, minorem: metiatur autem A, ipsum F, per G; & B, eundem F, per H. Quo posito, [i] fiet F, tam ex A, in G, quàm ex B, in H. Quia igitur idem numerus F, fit & ex A, primo in G, quartum, & ex B, secundo, in H, tertium; [k] erit, vt A, primus ad B, secundum, ita H, tertius ad G, quartum. Quare C, & D, cum sint minimi in proportione A, ad B, vel H, ad G; [l] metientur ipsos H, & G, æquè; nimirum C, ipsum H; & D, ipsum G. Quia verò A, multiplicans D, & G, facit E, & F; [m] erit E, ad F, vt D, ad G: Ac propterea cum D, metiatur ipsum G, vt ostensum est metietur etiam E, numerus numerum F, maior minorem. Quod est absurdum. Non igitur A, & B, metientur alium numerum ipso E, minorem; atque adeò E, minimus est omnium, quos metiuntur. Quamobrem, duobus numeris datis, reperimus, quem illi minimum metiantur, numerum. Quod faciendum erat.

f 35. septimi. g 19. septimi h 7. pron. i 9. pron. k 19. septimi l 21. septimi m 17. septimi.

COROLLARIVM.

HINC fit, si duo numeri multiplicent minimos eandem rationem habentes, maior minorem, & minor maiorem, produci numerum minimum, quem illi metiantur. Nam positis C, & D, minimis in proportione A, ad B, demonstratum est, numerum E, factum ex A, minore in D, maiorem, & ex B, maiore in C, minorem, esse minimum, quem A, & B, metiuntur.

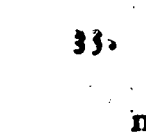
SCHOLIVM.

Hoc autem corollarium apud Campanum est propositio 35. huius libri septimi; Et sequens propositio apud eundem, corollarium est propositionis 35.

33. THEOR. 33. PROPOS. 37.

Si duo numeri numerum quempiam metiantur: Etiam minimus, quem illi metiuntur, eundem metietur.

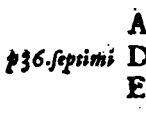
METIANTVR duo numeri A, & B, quemlibet numerum CD, sitq; alius numerus E, minimus, quem iidem A, & B, metiuntur. Dico & E, ipsum CD, metiri. Si enim E, ipsum CD, non metitur; ablato E, ex CD, quoties potest auferri, relinquetur numerus quidá minor, quàm E. Relinquat igitur E, ablatus ex CD, quoties potest, numerum, si fieri potest, FD, minorem se, ita vt E, metiatur ablatum CF. Quoniam igitur tam A, quàm B, ipsum E, metitur, & E, ipsum CF; [n] metietur quoque tam A, quàm B, ipsum CF. Itaq; A, & B, cum metiantur totum CD, & ablatum CF; [o] metiętur & reliquum FD. Est autè FD, minor quàm E. Non igitur E, minimus est numerus, quem A, & B, metiuntur. Quod est absurdum, & contra hypothesim. Quare E, ipsum CD, metitur. Si duo ergo numeri numerum quempiam metiátur, &c. Quod erat demonstrandum.



n 11. pron. o 12. pron.

36. PROBL. 5. PROPOS. 38.

TRIBVS numeris datis, reperire, quem illi minimum metiantur, numerum.



SIT inueniendus minimus numerus, quem dati tres numeri A, B, C, metiantur. [p] Inuento D, minimo, quem metiantur duo A, & B; metietur & eundem D, reliquus C, aut nō metietur. Metiatur primū C, ipsum D, ita vt omnes tres A, B, C, ipsum D, metiantur. Dico numerum D, minimum inuentum, quem A, & B, metiuntur, minimum quoq; esse, quem tres A, B, C, metiantur. Si enim D, non est minimus, metiantur, si fieri potest A, B, C, alium numerum E, ipso D, minorem.

p 36. septimi

Quo

Quoniam igitur A, & B, metiuntur ipſum E, minorem quàm D; non erit D, minimus, quem A, & B, metiuntur. Quod eſt abſurdum, & contra hypotheſim. Immò, cum A, & B, metiantur ipſum E; & D, ſit minimus, quem ijdem A, & B, metiuntur; [a] metietur quoq; D, ipſum E, maior minorem. Quod eſt abſurdum. [a] 37. ſeptimi

Sed iam C, non metiatur ipſum D, inuentum. [b] Inuento igitur E, minimo, quem C, & D, metiantur; Dico E, eſſe minimum, quem A, B, C, metiantur. Quod enim eum metiantur, ita oſtendetur. Cùm A, & B, metiantur ipſum D, & D, ipſum E; [c] metientur quoque A, & B, ipſum E. Metitur autem & C, eundem E. Igitur omnes tres A, B, C, ipſum E, metiuntur. Quod autem E, ſit minimus, quem metiantur A, B, C, hoc modo probabitur. Si E, non eſt minimus; metiantur, ſi fieri poteſt, A, B, C, alium numerum F, ipſo E, minorem. Quoniam igitur A, & B, ipſum F, metiuntur; [d] metietur quoq; eundem F, numerus D, nimirum minimus inuentus, quem numeri A, & B, metiuntur; Atque adeò cùm C, & D, metiantur ipſum F, minorem, quàm E; non erit E, minimus, quem C, & D, metiantur. Quod eſt abſurdum, & contra hypotheſim. Immo cum C, & D, metiantur ipſum F; [e] metietur quoque, eundem F, numerus E, minimus, quem metiuntur iidem C, & D; maior minorem. Quod eſt abſurdum. Non ergo A, B, C, alium numerum ipſo E, minorem metientur; ſed ipſe E, erit minimus. Quapropter tribus numeris datis, reperimus, quem illi minimum metiantur, numerum. Quod erat faciendum.

A.. B... C....
D.....
E.....
F--------

[b] 36. ſeptimi
[c] 11. pron.
[d] 37. ſeptimi
[e] 37. ſeptimi

COROLLARIVM.

Sequitur ex his, ſi tres numeri numerum quempiam metiantur; etiam minimum, quem illi metiuntur, eundem metiri. Nam in extrema huius demõſtrationis parte, ex eo, quòd A, B, C, ponebantur metiri ipſum F, oſtenſum eſt, & E, minimum, quem A, B, C, metiuntur, eundem F, metiri.

SCHOLIVM.

Hoc corollarium alio modo, non ſecus ac propoſ. 37. huius lib. oſtendere poterimus. Metiantur enim A, B, C, quemcunq; numerum D E, ſit q; F, minimus, quem iidem A, B, C, metiantur. Dico & F, ipſum D E, metiri. Si enim non metitur, metiatur eius partem D G, relinquat q; numerum G E, ſe minorem. Quoniam igitur A, B, C, ipſum F, metiuntur, & F, ipſum D G; [a] metientur quoque A, B, C, eundem D G; Ac proinde, cùm & totum D E, ponantur metiri; [b] metientur & reliquum G E, ipſo F, minorem. Quare F, non erit minimus, quem A, B, C, metiuntur. Quod eſt abſurdum, & contra hypotheſim. Metitur igitur F, ipſum D E.

A.. B... C.....
D.....G---E
F.....

[a] 11. pron.
[b] 12. pron.

Pari ratione; Pluribus numeris datis, quàm tribus, reperiemus, quem illi minimum metiantur, numerum; locumq; habebit hoc idem corollarium. Nam ſi dati numeri fuerint quatuor, inueniendus erit primùm minimus, quem tres metiantur. Si quinq; reperiendus erit minimus, quem quatuor metiantur, &c. Reliqua autem omnia peragenda, vt de tribus numeris dictum eſt.

THEOR. 34. PROPOS. 39. 37.

Si numerum quiſpiam numerus metiatur; ille, quem metitur, partem habebit à metiente denominatam.

A.....
B.... C...

Metiatur numerum A, numerus B. Dico A, habere partem aliquam à B, denominatam. Metiatur enim B, ipſum A, toties, quot vnitates ſunt in numero C. Quia igitur vnitas ipſum C, & B, ipſum A, æquè metitur; [a] & vicißim vnitas æquè ipſum B, & C, ipſum A, metietur; atq; adeò eadem pars erit vnitas ipſius B, quæ C, ipſius A: Eſt autem vnitas pars ipſius B, denominata ab ipſo B, vt ad defin. 2. huius libri docuimus. Igitur & C, pars erit ipſius A, ab eodem B, denominata. Si numerum ergo quiſpiam numerus metiatur, &c. Quod oſtendendum erat.

[a] 15. ſeptimi.

THEOR. 35. PROPOS. 40. 38.

Si numerus partem habuerit quamlibet; metietur illum numerus à parte denominatus.

A.....
B... C.....

Habeat numerus A, partem B, à qua numerus C, denominatur. Dico C, metiri ipſum A. Nam cùm B, pars denominetur à C; ſit autem & vnitas pars ipſius C, ab eodē C, denominata; metietur vnitas ipſum C, & B, ipſum A, æquè. [b] Vicißim ergo & vnitas ipſum B, & C, ipſum A, metietur. Si numerus ergo partem habuerit quamlibet, &c. Quod demonſtrandum erat.

[b] 15. ſeptimi.

39. # PROBL. 6. PROPOS. 41.

NVMERVM reperire, qui minimus cùm sit, habeat datas partes.

SINT datæ partes A,B,C; Inueniendusq; sit minimus numerus datas partes habens. Sint a partibus A,B,C, numeri denominati, siue qui ipsas denominent, D,E,F; [a] minimusq; quem D, E,F, metiuntur, numerus G. Dico G, esse minimũ, qui habeat datas partes A,B,C. Quod enim eiusmodi partes habeat, ita ostendetur. Cùm D, E,F, ipsum G, metiantur, [b] habebit G, partes à D,E,F, denominatas, hoc est, partes A,B,C, cùm hæ denominentur à D,E,F. Quòd verò G, sit minimus illas partes habens, perspicuum est. Si enim non est minimus, habeat, si fieri potest, H, ipso G, minor eadem partes A, B, C. Quia igitur H, habet partes A, B, C, [c] metientur ipsum numeri D, E, F, à partibus A,B,C, denominati; Atq; adeò, cùm H, minor sit quàm G, non erit G, minimus, quem metiuntur D,E,F. Quod est absurdum, & contra hypothesim. Non igitur minor numerus, quàm G, datas partes A,B,C, habebit, sed ipse G, minimus erit. Quare numerum reperimus, qui minimus cùm sit, habet datas partes. Quod faciendum erat.

D.. A, Secunda
E... B, Tertia
F.... C, Quarta
G.....
H----------

a 38. *septimi*
b 39. *septimi*
c 40. *septimi*

SCHOLIVM.

A, Secunda D.. I.....
B, Tertia E... K....
C, Quarta F.... L...
G.....

QVOD si sumantur numeri I, K, L, per quos numeri D, E, F, ipsum G, metiantur; erunt numeri I, K, L, datæ partes A, B, C, ipsius G, denominatæ scilicet à D, E, F. Cùm enim D, E, F, ipsum G, metiantur per I, K, L; metietur æquè vnitas ipsos I, K, L, & numeri D, E, F, ipsum G. [a] *Vicissim ergo metietur quoq; vnitas ipsos D, E, F, & numeri I, K, L, ipsius G; atq; adeò vnitas ipsorum D, E, F, eadem pars erit, quæ numeri I, K, L, ipsius G. Cùm ergo vnitas sit pars ipsorum D, E, F, ab ipsis denominata; erunt & I, K, L, ipsius G partes denominatæ à D, E, F.*

a 15. septimi.

EX his autem sequitur, minimum numerum, quem quotlibet numeri metiuntur, esse minimum habentem partes à numeris metientibus denominatas. Ostensum enim est, numerum G, quem minimũ metiuntur D, E, F, minimũ esse, q̃ habeat partes A, B, C, cuiusmodi sunt I, K, L, à metientib. numeris D, E, F, denominatas.

IAM verò, vt Campanus air, si inuentus minimus numerus datas partes habens duplicetur, triplicetur, &c. habebitur secundus numerus post minimum, tertius, quartus, &c. easdem partes continens. Inuento enim G, minimo, qui habeat partes A, B, C, denominatas à D, E, F; sit illius duplus, numerus H; triplus verò I, &c. Dico H, esse secundum numerum, qui easdem partes A, B, C, à numeris D, E, F, denominatas habeat, & I, tertium, &c. ita vt neque inter G, minimum, & eius duplum H, neque inter H, duplum, & I, triplum, &c. cadat alius numerus habens easdem partes sed ipsi soli H, I, & cæteri multiplices ipsius G, dictas partes contineant. Quod enim H, & I, &c. partes A, B, C, habeant, denominatas scilicet à D, E, F, ita ostendemus. Quoniam D, E, F, metiuntur ipsum G per constructionem, & G, ipsos H, I, & reliquos multiplices ipsius G. [b] *metientur quoq; D, E, F, eosdem H, I, & reliquos multiplices ipsius G.* [c] *Quare H, I, & reliqui numeri ipsius G, multiplices, partes habebunt à metientibus numeris D, E, F, denominatas, quales ponuntur partes A, B, C.*

G..... A, D..
H..... B, E...
I..... C, F....
K---------- M------ L
N---------- P------ O

b 11. pron.
c 39. septi.

QVOD autem H duplus ipsius G, minimi, sit secundus eas partes habens, hoc modo demonstrabimus. Si H, non est secundus, sit si fieri potest, alius K L, ipso prior, qui nimirum maior sit, quàm G, minimus, et minor, quàm H, duplus ipsius G. Detracto autem G, ex K L, relinquatur M L, ipso G, minor. Quoniam igitur K L, partes habet A, B, C; [d] *metientur ipsum numeri D, E, F, à partibus illis denominati; Ac propterea & G, minimus, quem D, E, F, metiuntur, metietur per coroll. propos. 38. huius lib. eundem K L. Metitur autem & G, ablatum K M, filii æqualem.* [e] *Igitur & reliquum M L, metietur, maior minorem. Quod est absurdum. Non ergo alius numerus inter G, & H, cadens partes habet A, B, C; Ac proinde H, secundus est huiusmodi partes habens.*

d 40. septimi.
e 12. pron.

NON aliter ostendemus numerum I, triplum ipsius G, esse tertium dictas partes habentem. Si enim non est tertius, sit alius, si fieri potest, videlicet N O, ipso prior, qui videlicet maior sit, quàm H, duplus minor verò quàm I, triplus. Detracto autem H, duplo ex N O, relinquatur P O, minor ipso G. Quia igitur N O, partes habet A, B, C, [f] *metientur ipsum numeri D, E, F, à partibus illis denominati. Atque idcirco & G, minimus, quem D, E, F, metiuntur, eundem N O per coroll. propos. 38. huius lib. metietur: Metitur autem & G, ipsum N P, ablatum ipsi H, duplo æqualem.* [g] *Igitur & reliquum P O, idem G, metietur, minorem maior. Quod est absurdum. Non ergo alius numerus inter H, & I, cadens partes habet A, B, C, datas; Ac propterea I, tertius est illas partes habens. Eadem q̃ ratione quadruplus ipsius G, quartus erit; & quintuplus, quintus, &c.*

f 40. septimi.
g 12. pron.

HVC quoque referri potest sequens problema.

NVMERVM reperire, qui minimus cùm sit, habeat datas partes, hac lege, vt quælibet pars subsequentem partem contineat.

SINT

Sint data partes A,B,C; inueniendus q̃ſ fit numerus minimus, qui eas habeat hoc ordine, vt pars A, contineat partem B, & pars B, partem C. Sint à partibus A,B,C, numeri denominati D,E,F; Fiatq̃ſ G ex E, in F: Item H, ex D, in G. Dico H, eſſe minimum numerum, qui quæritur. Quod enim habeat datas partes ordine prædicto, facilè demonſtratur. Nam cùm ex D, in G, fiat H; erit G, toties in H, quoties vnitas in D: Eſt autem vnitas pars ipſius D, denominata ab ipſo D. Igitur & G, pars eſt ipſius H, ab eodem D, denominata; Atq̃ſ adeò H, habet partem A, nimirum numerum G, à D, denominatam. Deinde quia ex E, in F, fit G; erit eadem ratione E, pars ipſius G, denominata ab E: Atq̃ſ adeò A, pars ipſius H, nimirum numerus G, habet partem B, nimirum numerum F, ab E, denominatam. Deniq̃ſ cùm F, habeat vnitatem, tanquam partem ab ipſo F, denominatam, perſpicuum eſt B, partem ipſius G, partiu, nimirum numerum F, habere quoque partem C, ab F, denominatam, nimirum vnitatem. Quare numerus inuentus H, partem habet A; & pars A, partem B; & pars B, partem C. Quod autem H, ſit minimus eas partes hoc ordine continens, hac ratione oſtendetur. Si enim non eſt minimus, habeat minor numerus I, ſi fieri poteſt, eaſdem partes eodem ordine, ita vt K, ſit ipſius I, pars A, à numero D, denominata; & L, ipſius K, pars B, ab E, denominata; & M, ipſius L, pars C, ab E, denominata. Quia igitur K, pars eſt ipſius I, à D, denominata; erit K, toties in I, quoties vnitas in D; [a] Atq; adeò ex D, in K, fiet I. Eadē ratione ex E, in L, fiet K; & L, ex F, in M. Itaq̃ſ cùm D, ipſos G, & K, multiplicãs faciat H, & I; [b] erit, vt H, ad I, ita, G, ad K. Eadē ratione, cùm ex E, in F, & L, fiant G, & K; erit, vt G, ad K, ita F, ad L. Et cùm ex F, in vnitatē, & M, fiant F, & L; erit, vt F, ad L, ita vnitas ad M. Quoniam igitur eſt, vt H, ad I, ita G, ad K; & vt G, ad K, ita F, ad L; & vt F, ad L, ita vnitas ad M: Erit per lemma propoſ. 14. huius lib. vt H, ad I, ita vnitas ad M: Ponitur autem H, numerus numero I, maior. Vnitas igitur maior quoq; erit numero M, pars toto. Quod eſt abſurdum. Non ergo alius numerus minor, quàm H, habet partes A,B,C, ordine prædicto, ſed ipſe H, minimus eſt. Quod eſt propoſitum.

A, Secunda. B, Tertia. C, Quarta.
D.. E... F....
G.....
H.....
. Vnitas
I----------
K----------
L----------
M----

H. G. F. Vnitas.
I. K. L. M.

[a] 15. defin.
[b] 15. ſeptimi.

Si verò plures fuerint partes, quàm tres, eadem prorſus eſt via tenenda ac demonſtratio. Vt ſi numeri 2. 3. 4. 5. 6. ſint denominatores partium, fient 30. ex 5. in 6. & 120. ex 4. in 30. & 360. ex 3. in 120. & tandem 720. ex 2. in 360. Nam numerus 720. habebit partem à 2. denominatam; & hæc partem à 3. denominatam; & hæc aliam à 4. & hæc aliam à 5. & hæc denique partem à 6. denominatam, vt manifeſtum eſt.

Quod ſi numerum H, inuentum duplicemus, triplicemus, &c. habebimus alios numeros, videlicet ſecundum, tertium, quartum, &c. qui eaſdem partes eodem ordine habeant, duplicatas tamen, vel triplicatas, &c. Nam G, duplicatus, vel triplicatus, &c. dimidiata pars erit, ipſius H, duplicati, vel triplicati, &c. quemadmodum & G, ipſius H. Eademq̃ſ eſt ratio de cæteris partibus.

FINIS ELEMENTI SEPTIMI.

EVCLIDIS ELEMENTVM OCTAVVM.

THEOR. 1. PROPOS. 1.

SI fuerint quotcunq; numeri deinceps proportionales, extremi verò ipſorum primi inter ſe fuerint; ipſi minimi ſunt omniũ eandem cum eis rationẽ habentiũ. 1.



VMERORVM deinceps proportionalium quotcunq; A,B,C,D, extremi A, & D, inter ſe primi ſint. Dico A, B, C, D, minimos eſſe omniũ eandem cum eis proportionem habentium. Si enim non ſunt minimi, erunt alij ipſis minores, in eadem proportione. Sint ergo ipſis minores in eadem ratione E,F,G,H, ſi fieri poteſt. Quoniam igitur quotcunque numeri ſunt A,B,C,D, & alij illis æquales multitudine E,F,G,H, qui bini ſumuntur, & in eadem

A.....
B.....
C.....
D.....
E---
F-----
G-------
H---------

a 14. *septimi* b 23. *septimi* c 21. *septimi*

ratione, a erit ex æqualitate, vt A, ad D, ita E, ad H: b Sunt autem A, & D, in sua proportione minimi, quòd inter se primi esse ponantur. c Igitur tam A, ipsum E, quàm D, ipsum H, æquè metietur, maior minorem. Quod est absurdum. Non ergo numeri minores ipsis A, B, C, D, sunt in eadem cum eis ratione, sed ipsimet minimi sunt; Ac propterea, si fuerint quotcunque numeri deinceps proportionales, &c. Quod erat demonstrandum.

SCHOLIVM.

A.... E---
B..... F-----
C..... G------
D..... H--------

PERSPICVVM autem est ex demonstratione, numeros A, B, C, D, esse minimos in continuatione suarum proportionum, si extremi A, & D, inter se primi sint, siue A, B, C, D, sint continuè proportionales, vt vult Euclides, siue non. Vt hoc exemplum ostendit, in quo proportiones omnes diuersæ sunt, quemadmodum in superiori eadem semper proportio reperitur.

2. PROBL. I. PROPOS. 2.

NVMEROS reperire deinceps proportionales minimos, quotcunque iusserit quispiam, in data ratione.

SINT minimi numeri datæ rationis A, & B, oporteatq; inuenire primùm tres numeros minimos in proportione data A, ad B. Multiplicans A, seipsum, & numerum B, faciat C, & D. Deinde B, multiplicans seipsum faciat E. Dico C, D, E, esse tres minimos in proportione A, ad B. Quòd enim proportionales sint in data proportione A, ad B, hoc est, sit vt C, ad D, ita D, ad E, sic ostendemus. Cùm ex A, in A, & B, fiant C, & D; d erit vt A, ad B, ita C, ad D. Rursus cùm ex B, in A, & B, fiant D, & E; e erit quoque, vt A, ad B, ita D, ad E. Quare proportionales sunt C, D, E, continuè in proportione data A, ad B. Quod verò in eadem ratione sint minimi, ita demonstrabitur. Quoniam extremi C, & E, procreati sunt ex A, & B, in se ipsos; f sunt autē A, & B, inter se primi, quòd minimi sint in sua proportione; g Erunt & C, E, extremi, inter se primi. h Quare C, D, E, minimi sunt in ratione A, ad B.

A.. B...
C....D..... E.....
F, 8. G, 12. H, 18. I, 27.
K, 16. L, 24. M, 36. N, 54. O, 81.

d 17. *septimi* e 17. *septimi* f 24. *septimi* g 29. *septimi* h 1. *octaui.*

IAM verò ex A, in tres inuentos C, D, E, fiant F, G, H, & ex B, in vltimum E, fiat I. Dico quatuor numeros F, G, H, I, minimos esse in eadem ratione data A, ad B. Quod enim proportionales sint in ratione A, ad B, ita demonstrabimus. Quoniam A, multiplicans ipsos C, D, E, fecit F, G, H, habebunt, ex iis, quæ ad propos. 18. lib. 7. ostendimus, numeri F, G, H, easdem proportiones, quas C, D, E, hoc est, quam habet A, ad B. Rursus quia A, & B, ipsum E, multiplicantes, fecerunt H, & I; i erit quoque, vt A, ad B, ita H, ad I. Sunt igitur F, G, H, I, continuè proportionales in data proportione A, ad B. Quòd autem in data ratione minimi sint, ita perspicuum fiet. k Quoniam A, & B, minimi in sua proportione, sunt inter se primi; factiq; sunt C, & E, ex A, & B, in se ipsos; Item procreati sunt F, & I, ex A, B, in C, E; nimirum F, ex A, in C, & I, ex B, in E; l erunt & F, I, extremi, inter se primi. m Quare F, G, H, I, in sua proportione, quæ est A, ad B, minimi sunt.

i 18. *septimi* k 24. *septimi* l 29. *septimi* m 1. *octaui.*

NON aliter, si ex A, in quatuor inuentos F, G, H, I, fiant K, L, M, N, & ex B, in vltimum I, fiat O; erunt K, L, M, N, O, quinque numeri minimi in data ratione A, ad B: Eademq; ratione inuenietur sex, septem, octo, &c. Quare numeros reperimus deinceps proportionales minimos, &c. Quod faciendum erat.

SCHOLIVM I.

EODEM modo quatuor numeri minimi proportionales producentur ex multiplicatione B, in tres inuentos E, D, C, & ex multiplicatione A, in C. Fiant enim I, H, G, ex B, in E, D, C: & F, ex A, in C. Quo peracto, a numeri F, G, eandem rationem habebunt, quam A, B; quòd A, B, multiplicantes C, ipsos F, G, fecerint: Item & G, H, I, ex iis, quæ ad propos. 18, huius lib. demonstrauimus, in eadem erunt ratione, in qua C, D, E, hoc est, in qua A, B; quòd B, multiplicans C, D, E, ipsos G, H, I, fecerit. Sunt ergo F, G, H, I, in eadem ratione, in qua A, B. Quod verò minimi sint, ostendetur, vt prius.

a 18. *septimi.*

A.. B...
C....D..... E.....
F, 8. G, 12. H, 18. I, 27.
K, 16. L, 24. M, 36. N, 54. O, 81.

NON aliter si ex B, in quatuor inuentos I, H, G, F, fiant O, N, M, L, & ex A, in F, fiat K; erunt K, L, M, N, O, quinque numeri minimi in data ratione A, ad B. Eademq; ratione inuenietur sex, septem, octo, &c. Itaq; siue A, multiplicetur in omnes inuentos, & B, in vltimum; siue B, in omnes inuentos, & A, in primum; producentur semper plures numeri in eadem ratione data A, ad B, minimi. Demonstrauit enim Euclides, quatuor F, G, H, I, produci ex A, in C, D, E, & ex B, in E: Nos autem eosdem ostendimus procreari ex B, in E, D, C, & ex A, in C.

COROLLARIVM I.

HINC fit, si tres numeri minimi sint continuè proportionales, extremos quadratos esse; si autem

ſi autem quatuor fuerint, cubos. Nam trium minimorum C, D, E, extremi C, & E, facti ſunt ex A, & B, in ſeipſos, ideoq; æqualiter ſunt æquales. Quare ex definitione 18. quadrati ſunt. Eodem modo, cùm quatuor minimorum F, G, H, I, extremi F, & I, geniti ſint ex A, & B, lateribus in C, & E, quadratos ipſorũ A, & B, hoc eſt, tam numerus F, ex mutua multiplicatione trium numerorum æqualium A, A, A, quàm numerus I, ex multiplicatione mutua triũ numerorum æqualium B, B, B, ſit procreatus, ac propterea vterque ſit æqualiter æqualis æqualiter; ipſi, ex defin. 19. cubi erunt.

SIC etiam, ſi fuerint quinq; numeri minimi proportionales continuè; erunt extremi eorũ quadrati quadraterum; Et ſic ſi fuerint plures, erunt eorũ extremi, numeri alij ſub alijs denominationibus, quæ in Algebra ſolent explicari. Hæc autẽ omnia manifeſta ſunt ex multiplicationibus, quibus numeri proportionales, iuxtà hanc propoſ. procreantur.

NEQVE verò dicere quis poterit, corollarium hoc verum quidem eſſe in tribus, quatuórve numeris minimis continuè proportionalibus inuentis arte in hac propoſ. tradita, non autem in quibuſuis tribus, quatuórve numeris minimis continuè proportionalibus vtcunq; propoſitis: Dicere, inquam, nemo hoc poterit, quia dati quilibet tres numeri, vel quatuor minimi continuè proportionales æquales prorſus ſunt iis, qui per hanc propoſ. inueniuntur. Si enim illi dati minores eſſent inuentis, non eſſent inuenti, minimi, quod eſt contra hanc propoſ. Si verò dati, maiores eſſent inuentis, non eſſent illi dati, minimi. quod eſt contra hypotheſim. Quod clariſſimè ita fiet perſpicuum. Dati ſint tres numeri A, B, C, minimi continuè proportionales: ſumptiq; duobus minimis D, E, in proportione A, ad B, vel B, ad C, ex ſcholio propoſ. 3. lib. 7. inueniantur per hanc propoſ. ex his duobus minimis D, E, tres minimi F, G, H, in eadem proportione. Dico tres A, B, C, datos à tribus inuentis F, G, H, non differre. Nam neceſſariò A, ipſi F, æqualis erit; atque ita, cùm ſit, vt A, ad B, ita F, ad G, erit quoq; permutando, vt A, ad F, ita B, ad G; ac proinde ſi A, æqualis eſt ipſi F, erit & B, ipſi G, æqualis: Eademq; ratione oſtendemus C, æqualem eſſe ipſi H: ideoq; tres A, B, C, tribus F, G, H, ſinguli ſingulis, æquales erunt. Eademq; ratio eſt de quatuor, aut pluribus. Quòd ſi A, dicatur minor, quàm F, oſtendemus eodem argumento & B, C, minores eſſe, quàm G, H. Quare F, G, H, minimi non ſunt. quod eſt abſurdum, & contra hanc propoſ. Si verò A, concedatur maior, quàm F; erunt eodem argumento & B, C, maiores, quàm G, H: atq; idcirco A, B, C, minimi non ſunt. quod eſt contra hypotheſim. Cùm ergo A, minor non ſit, aut maior, quàm F; æqualis omnino erit; ideoq; vt oſtenſum eſt, & B, C, ipſis G, H, æquales erunt. Quod eſt propoſitum.*

A---B-----C------
D, 2. E, 3.
F, 4. G, 6. H. 9.

COROLLARIVM II.

PERSPICVVM quoq; eſt, extremos numeros proportionaliũ quotcunq; ſecundùm hanc propoſitionem inuentorum in data ratione minimorũ, inter ſe primos eſſe. Quod quidẽ facilè oſtendemus ex multiplicationibus, quibus numeri proportionales producuntur, & ex propoſ. 29. lib. 7. quemadmodum id demonſtratum fuit de numeris extremis C, E, & F, I, &c.

COROLLARIVM III.

CONSTAT etiam, duos numeros minimos in data ratione, metiri omnes medios quotcunq; minimorum in eadem ratione; quia ſcilicet producuntur ex illorum multiplicatione in alios quoſdam numeros. Vt in dato exemplo D, medius producitur ex A, in E; & G, H, medij ex A, in D, & E, vel ex B, in C, & D; Item L, M, N, medij ex A, in G, H, I, vel ex B, in F, G, H; vt ex demonſtratione Euclidis, & ea, quam in Scholio tradidimus, apparet.

SCHOLIVM II.

QVONIAM verò tam numeri A, C, F, K, quàm B, E, I, O, ex conſtructione, continuè proportionales ſunt ab vnitate, quòd illorum quidem proportiones à numero A, horum verò à B, denominentur, vt clarius demonſtrabitur propoſ. 9. huius lib. fit vt extremi numeri quotcunq; minimorum continuè proportionalium ſint vltimi tot continuè proportionalium ab vnitate, quorum proportiones à minimis numeris datæ rationis denominantur, quot ſunt propoſiti minimi continuè proportionales. Ita enim in ſuperiori exemplo vides C, & E, extremos numeros trium minimorũ continuè proportionalium in proportione A, ad B, eſſe vltimos trium numerorum continuè proportionalium ab vnitate, quorum proportiones denominantur ab A, & B. At verò F, & I, extremos quatuor continuè proportionalium, eſſe vltimos quatuor numerorum ab vnitate continuè proportionalium, &c. Quamobrem ſi quis optet inuenire quotcunq; integros numeros minimos in data ratione non multiplici (in multiplici enim res facilis eſt, quippe quæ ab vnitate incipiat) continuè proportionales; id facilè hac via conſequetur. Inuentis duobus minimis numeris in data ratione, ſumantur ab vnitate tot numeri continuè proportionales in proportione, cuius denominator ſit minor illorum, quot numeri mi-

nimi inueniendi proponuntur. Nam vltimus illarum ab vnitate continuè proportionalium erit primus continuè proportionalium inueniendorum, qui ſi per denominatorem datæ proportionis multiplicetur, habebitur ſecundus, & ſi hic rurſum per denominatorem eundem multiplicetur, gignetur tertius, & ſic deinceps. Vt ſi quis deſideret octo minimos numeros in proportione ſeſquialtera: Inuentis minimis duobus numeris 3. & 2. in ſeſquialtera proportione, ſumendi erunt octo numeri ab vnitate continuè proportionales in proportione dupla, qua denominatur à 2. hoc modo 1. 2. 4. 8. 16. 32. 64. 128. Nam horum vltimus 128. erit primus octo numerorum inueniendorum, qui minimi ſint in proportione 3. ad 2. vt hic patet, 128. 192. 288. 432. 648. 972. 1458. 2187. ſi maiores numeri ad minores referantur. Eademq; de reliquis eſt ratio.

Boetivs autem, & alij regulam hanc ita explicant, vt & nos quinto lib. in tractatione proportionum declarauimus. Sumantur tot numeri continuè ab vnitate multiplices ſecundùm denominationem partis aliquotæ, cuius in data proportione ſit mentio, quot numeros continuè proportionales oportet inuenire in data proportione. Nam vltimus numerus erit primus inueniendorum. Vt in dato exemplo, quia deſiderantur octo numeri minimi in proportione ſeſquialtera, ſumendi ſunt octo numeri ab vnitate dupli, vt primus, qui nimirum denominantur à denominatore partis ſecundæ, ſeu dimidiæ, cuius mentio fit in proportione ſeſquialtera, hoc eſt, à 2. Quod ſi optentur quinque numeri minimi in proportione ſeſquiquinta, ſumendi erunt quinq; numeri ab vnitate quintupli; vt hic 1. 5. 25. 125. 625. Nam 625. eſt primus quinq; numerorũ in proportione ſeſquiquinta, vt hic apparet; 625. 750. 900. 1080. 1296. Atq; ita de cæteris. Porrò hac arte nõ poſſunt inueniri (quod mirum videri poſſit) plures numeri continuè proportionales, quàm propoſiti ſunt. Neque enim poſt 1296. in vltimo exemplo alius numerus inuenietur, qui habeat ad 1296. proportionem ſeſquiquintam; ſicut neq; in priori exemplo poſt 2187. alius poteſt reperiri, qui ad 2187. proportionem ſeſquialteram habeat. Ratio autem huius rei eſt, quòd extremi hac arte inuenti ſint inter ſe primi, vt ex demonſtratione liquet. Hinc enim fit, vt vltimus non poſſit eſſe ad alium quempiam numerum, vt primus ad ſecundum, veluti propoſ. 17. lib. 9. demonſtrabitur.

3. THEOR. 2. PROPOS. 3.

SI ſint quotcunq; numeri deinceps proportionales minimi omnium eandem cum eis rationem habentium; illorum extremi ſunt inter ſe primi.

SINT numeri A, B, C, D, minimi deinceps proportionales. Dico extremos A, & D, inter ſe primos eſſe. Inueniantur enim duo E, F, minimi in ratione A, ad B, vel B, ad C, vel C, ad D. Deinde iuxta viam præcedentis problematis, tres minimi G, H, I, in eadem ratione, nec non quatuor K, L, M, N, & ſic deinceps, donec multitudo K, L, M, N, æqualis ſit multitudini A, B, C, D. Quoniam igitur A, B, C, D, minimi ſunt in ſua proportione, & in eadem quoque proportione minimi ſumpti ſunt K, L, M, N, illis multitudine æquales; erunt ſinguli ſingulis æquales, ne minores minimis dentur in eadem proportione, nimirum A, ipſi K, & D, ipſi N. Id quod nos Geometricè demonſtrauimus ad finem coroll. 1. ſuperioris propoſ. Sunt autem per coroll. 2. propoſ. præcedentis K, & N, inter ſe primi. Primi ergo quoque ſunt A, & D. Quocirca, ſi ſint quotcunque numeri deinceps proportionales minimi omnium eandem cum eis, &c. Quod erat oſtendendum.

A, 8. B, 12. C, 18. D 27.
E, 2. F, 3.
G, 4. H, 6. I, 9.
K, 8. L, 12. M, 18. N, 27.

SCHOLIVM.

Hæc propoſitio intelligenda eſt de numeris minimis continuè proportionalibus, vt ex eius demonſtratione, & verbis Euclidis apparere poteſt. Nam ſi A, B, C, D, non eſſent proportionales continuè, inueniri non poſſent, ex præcedenti problemate, K, L, M, N, totidem minimi in eadem proportione. Immò ſi diuerſæ ſint proportiones, dabuntur aliquando minimi numeri deinceps proportionales, hoc eſt, continuati in ſuis proportionibus diuerſis, quorum extremi non ſunt inter ſe primi. Sunt enim hi numeri 6. 10. 13. 18. minimi in continuatione ſuarum proportionum, cùm tamen extremi 6. & 18. compoſiti ſint inter ſe. Itaque hoc Theorema primi eſt conuerſum, quoad numeros continuè proportionales. Etenim numeri quotcunque continuè proportionales, quorum extremi inter ſe ſunt primi, minimi ſunt in ſua proportione, vt conſtat ex 1. theor. Et viciſſim, numeri extremi quotcunque minimorum continuè proportionalium, inter ſe primi ſunt, velut hic demonſtratum eſt. At verò primum theorema, prout ſpectat ad numeros non continuè proportionales, conuerti nequit. Nam licet numeri quotcunque non continuè proportionales, quorum extremi ſunt inter ſe primi, minimi ſint in continuatione ſuarum proportionum, vt ex ſcholio propoſ. 1. huius libri liquet; Tamen non ſemper è contrario, numeri extremi quotcunque minimorum non continuè proportionalium, inter ſe primi ſunt, vt manifeſtum eſt in exemplo nuper prolato 6. 10. 13. 18.

4. PROBL. 2. PROPOS. 4.

RATIONIBVS datis quotcunque in minimis numeris, reperire numeros deinceps minimos in datis rationibus.

SINT primùm datæ duæ rationes in minimis numeris A, ad B, & C, ad D; oporteatque inuenire tres

re tres numeros minimos deinceps proportionales, in datis proportionibus. [a] Inuento numero E, minimo, quem metiantur B, & C, ſecundus & tertius; quoties B, ipſum E, metitur, toties A, metiatur ipſum F; & quoties C, eundem E, toties ipſum G, metiatur D. Dico F, E, G, minimos eſſe in proportionibus datis. Quòd enim deinceps datas proportiones habeant, ita oſtendemus. Quoniam A, & B, æquè metiuntur ipſos F, & E; hoc eſt, per eundem numerum; metiantur g H. Quo poſito, [b] A, & B, multiplicantes ipſum H, producent F, & E. [c] Quare erit vt A, ad B, ita F, ad E. Eadem ratione cùm C, & D, æquè metiantur ipſos E, & G; erit vt C, ad D, ita E, ad G. Igitur F, E, G, deinceps proportionales ſunt in rationibus A, ad B, & C, ad D. Quòd autē minimi ſint, ſic manifeſtum erit. Si non ſunt minimi, erunt aliqui illis minores, ſingulis ſinguli in eiſdem rationibus: ſint, ſi fieri poteſt, I, K, L. Quia igitur A, & B, minimi ſunt in ſua proportione [d] ipſi æquè metientur I, & K, in eadē proportione exiſtentes; nimirum B, ipſum K, conſequens conſequentem. Eademque ratione C, & D, æquè metientur K, & L; nimirum C, ipſum K, antecedens antecedentē. Quare cùm B, & C, ipſum K, metiantur; [e] metietur eundem K, numerus E, minimus, quē B, & C, metiuntur, minorē maior. Quod eſt abſurdum. Non igitur erunt alij numeri minores ipſis F, E, G, in rationibus A, ad B, & C, ad D; Ac propterea ipſi F, E, G, minimi ſunt in datis rationibus.

A, 6. B, 5. C, 4. D, 3.
H, 4. F, 24. E, 20. G, 15.
I----- K----- L----

[a] 36. ſept. [b] 9. prop. [c] 18. ſept. [d] 21. ſept. [e] 37. ſept.

Sint deinde datæ tres rationes in numeris minimis A, ad B; C, ad D; & E, ad F; inueniendique ſint quatuor minimi deinceps proportionales in datis rationibus. [f] Inuento rurſum numero G, minimo, quem metiantur B, ſecundus, & C, tertius; quoties B, ipſum G, metitur, tōties metiatur A, ipſum H; & quoties C, ipſum G, toties D, ipſum I, metiatur. Quibus peractis, aut E, ipſum I, metitur, aut non. Metiatur primùm; Et quoties E, ipſum I, metitur, toties F, metiatur ipſum K. Dico H, G, I, K, minimos eſſe in datis rationibus. Quòd enim ſint in datis rationibus deinceps proportionales, conſtat. Cùm enim A, & B, ipſos H, & G, æquè metiantur; erit vt prius, quemadmodum A, ad B, ita H, ad G. Eadem ratione erit, vt C, ad D, ita G, ad I: & vt E, ad F, ita I, ad K; quòd tam C, & D, ipſos G, & I, quàm E, & F, ipſos I, & K, metiantur æquè. Igitur H, G, I, K, deinceps proportionales ſunt in datis rationibus. Quòd autem ſint minimi, ſic oſtendemus. Si non ſunt minimi, ſint in eiſdem rationibus minores ipſis, ſinguli ſingulis, ſi fieri poteſt L, M, N, O. Quia igitur A, & B, minimi ſunt in ſua proportione; [g] ipſi metientur æquè L, & M, eandem habētes rationem; nimirum B, conſequens conſequentem M. Eodem modo C, & D, æquè metientur M, & N; nimirum C, antecedens antecedentem M. Quocirca cùm B, & C, ipſum M, metiantur; [h] metietur eundem M, & numerus G, minimus, quem B, & C, metiuntur, minorem maior. Quod eſt abſurdum. Non ergo erunt alij numeri deinceps proportionales in rationibus datis minores ipſis H, G, I, K; Ac proinde H, G, I, K, in datis rationibus minimi ſunt.

A, 6. B, 5. C, 4. D, 3. E, 5. F, 7.
H, 24. G, 20. I, 15. K, 21.
L----- M----- N---- O-----

[f] 36. ſept. [g] 21. ſept. [h] 37. ſept.

Sed iam E, non metiatur ipſum I. [i] Inuento ergo numero K, minimo, quem E, & I, metiantur, quoties I, ipſum K, metitur, toties quoque G, ipſum L; & H, ipſum M, metiatur: & quoties E, metitur K, toties metiatur F, ipſum N. Dico M, L, K, N, eſſe minimos in proportionibus datis. Cùm enim H, G, I, ipſos M, L, K, æquè metiantur; erit vt ſuprà, quemadmodum H, ad G, ita M, ad L; & vt G, ad I, ita L, ad K: Eſt autem eadem ratione, vt H, ad G, ita A, ad B; & vt G, ad I, ita C, ad D; quòd & A, B, ipſos H, G; & C, D, ipſos G, I, metiantur æquè. Igitur vt A, ad B, ita M, ad L; & vt C, ad D, ita L, ad K. Atqui vt E, ad F, ita quoq; eſt K, ad N, cùm E, F, æquè ipſos K, N, metiantur. Sunt ergo M, L, K, N, deinceps proportionales in datis rationibus. Dico & minimos eos eſſe in eiſdē rationibus. Si namq; nō ſunt minimi, dentur ipſis minores in rationibus eiſdem O, P, Q, R, ſi fieri poteſt. Quoniā ergo A, B, in ſua proportione minimi ſunt; [k] ipſi æquè metiētur O, P, in eadem ratione exiſtentes; nimirum B, conſequens conſequentem P. Eodem argumento C, D, ipſos P, Q, metientur æquè, videlicet antecedens C, antecedentem P; Atque adeo cùm B, & C, ipſum P, metiantur; [l] metietur quoque G, minimus, quem metiuntur B, & C, eundem P. Quia verò oſtenſum eſt, eſſe vt G, ad I, ita L, ad K, hoc eſt, ita P, ad Q; erit permutando, vt G, ad P, ita I, ad Q: Atque idcircò, cùm metiatur G, ipſum P, metietur & I, ipſum Q. Metitur autem & E, eundem Q; [m] quòd E, F, in ſua proportione minimi æquè metiantur Q, R, eiuſdem rationis; nimirum antecedens E, antecedentem Q. Ergo cùm metiantur I, E, ipſum Q; [n] metietur etiam K, quem minimum metiuntur I, E, eundem Q, maior minorem. Quod eſt abſurdum. Non dabuntur ergo alij numeri deinceps proportionales in datis rationibus minores, quàm M, L, K, N; propterea quòd ipſi M, L, K, N, minimi ſunt.

A, 6. B, 5. C, 4. D, 3. E, 2. F, 7.
H, 24. G, 20. I, 15.
M, 48. L, 40. K, 30. N, 105.
O----- P---- Q---- R-----

[i] 36. ſept. [k] 21. ſept. [l] 37. ſept. [m] 21. ſept. [n] 37. ſept.

Quod ſi quatuor rationes datæ fuerint; inueniendi prius erunt numeri deinceps proportionales in tribus prioribus rationibus; deinde cū quarta poſteriori agendum, vt nuper cum tertia proportione data. Veluti ſi quarta proportio data ſit

A, 6. B, 5. C, 4. D, 3. E, 2. F, 7. S, 3. T, 2.
M, 48. L, 50. K, 30. N, 105. O, 70.

in numeris minimis S, ad T; inueniemus primùm M, L, K, N, minimos deinceps proportionales in tribus proportionibus A, ad B; C, ad D; & E, ad F. Deinde ſi S, ipſum N, metiatur, accipiemus O, quem T, toties metiatur, quoties S, ipſum N,

metitur. Nam M, L, K, N, O, erunt deinceps proportionales in datis rationibus minimi. Sive rò S, ipſum N, non metiatur: a ſumemus O, quem S, & N, minimum metiantur. Et quoties N, ipſum O, metitur, toties metiatur K, ipſum P: & L, ipſum Q; & M, ipſum R; quoties verò S, eundem O, metitur, toties T, ipſum V, metiatur. His enim peractis, erunt R, Q, P, O, V, deinceps proportionales minimi in rationibus A, ad B; C, ad D; E, ad F, & S, ad T. Quæ omnia eo argumento, quo prius, demonſtrabimus. Eodem modo operabimur, ſi quinque, vel plures rationes datæ ſint in minimis numeris. Itaque rationibus datis, quotcunque in minimis numeris, &c. Quod faciendum erat.

a 36. ſeptimi.

A, 6. B, 5. C, 4. D, 3. E, 2. F, 7. S, 9. T, 2.
M, 48. L, 40. K, 30. N, 105.
R, 144. Q, 120. P, 90. O, 315. V, 70.

SCHOLIVM.

Si omnes rationes, vel aliquæ datæ fuerint in numeris non minimis, abſoluemus nihilo minus problema propoſitum; ſed prius exhibendæ erunt rationes datæ in minimis numeris, antequam ad inuentionem minimorum numerorum deinceps proportionalium aggrediamur, vt ex demonſtratione manifeſtum eſt.

Differt autem hoc problema ab eo, quod propoſ. 35. lib. 7. demonſtratum eſt, quòd hic non dantur numeri deinceps proportionales, ita vt quilibet intermedius ſit & antecedens, & conſequēs, licèt proportiones ſint diuerſæ, quemadmodum ibi.

Porro inuentis minimis numeris deinceps proportionalibus in datis rationibus, ſi ij multiplicentur quemcunque numerum eundem, procreabũtur alij in eiſdem rationibus deinceps proportionales, vt conſtat ex ijs, quæ ad propoſ. 18. lib. 7. demonſtrauimus.

5. THEOR. 3. PROPOS. 5.

Plani numeri rationem inter ſe habent ex lateribus compoſitam.

Sint duo numeri plani A, B, & latera prioris quæcunq; C, D; poſterioris verò E, F. Dico proportionem A, ad B, compoſitam eſſe ex laterum proportionibus; nimirum ex proportionibus C, ad E, & D, ad F; vel ex proportionibus C, ad F, & D, ad E; ita vt latera vnius ſint antecedentia, & alterius conſequentia, quemadmodum propoſ. 23. lib. 6. docuimus. Faciant D, & E, ſe mutuò multiplicantes numerum G. Quoniam igitur D, multiplicans C, & E, fecit A, & G; b erit A, ad G, vt C, ad E. Eodemque modo, quia E, multiplicans D, & F, fecit G, & B; erit G, ad B, vt D, ad F. Quare A, G, B, ſunt deinceps proportionales in proportionibus laterum C, ad E, & D, ad F. c Componitur autem proportio A, ad B, ex proportionibus A, ad G, & G, ad B. Eadem ergo proportio A, ad B, ex proportionibus laterum C, ad E, & D, ad F, componitur.

b 17. ſeptimi.
c 27. defin.

A, 24. B, 48. G, 18. C, 4. D, 6. E, 3. F, 16.

Eodem argumento oſtendemus, proportionem A, ad B, compoſitam eſſe ex proportionibus C, ad F, & D, ad E, ſi latera E, & F, loca inter ſe permutent, fiatque G, ex mutua D, & F, multiplicatione. Cùm enim D, multiplicans C, & F, faciat A, & G, d erit A, ad G, vt C, ad F. Similiter cùm F, multiplicans D, & E, faciat G, & B, erit G, ad B, vt D, ad E. Ac proinde rurſum A, G, B, deinceps proportionales ſunt in rationibus laterum C, ad E, & D, ad E. e Cùm ergo proportio A, ad B, componatur ex proportionibus A, ad G, & G, ad B. Eadem ex proportionibus C, ad F, & D, ad E, componetur. Quare plani numeri rationem inter ſe habent ex lateribus compoſitam. Quod demonſtrandum erat.

d 17. ſeptimi.
e 27. defin.

A, 24. B, 48. G, 96. C, 4. D, 6. F, 16. E, 3.

6. THEOR. 4. PROPOS. 6.

Si ſint quotcunque numeri deinceps proportionales, primus autem ſecundum non metiatur; neque alius quiſquam vllum metietur.

Sint continuè proportionales A, B, C, D, E, & A, primus nõ metiatur B, ſecundum. Dico neque alium quenquam illorum vllum metiri. Quòd enim nullus proximè inſequentem metiatur, manifeſtum eſt. Nam cùm ſit, vt A, ad B, ita B, ad C; C, ad D, & D, ad E: A, verò ipſum B, non metiatur; neque B, ipſum C; neque C, ipſum D, neque D, ipſum E, metietur. Quòd verò nec alius quiſquam illorũ vllum metiatur, ſic demonſtrabimus. f Sumptis tribus numeris minimis F, G, H, in ratione A, ad B, erit ex æquo, vt A, ad C, ita F, ad H. Quia verò eſt vt A, ad B, ita F, ad G; nõ metitur autem A, ipſum B; neque F, ipſum G, metietur. Ac propterea F, non erit vnitas, alias F, ipſum G, metiretur, cùm vnitas omnem numerum metiatur. g Quare cùm F, & H, ſint inter ſe primi, & F, non ſit vnitas; non metietur F, ipſum H; Atque ob id neque A, ipſum C, metietur. Eſt enim oſtenſum eſſe A, ad C, vt F, ad H. Eadem ratione oſtendemus, quòd nec B, tertium à ſe numerum D, nec C, tertium E, metiatur. Quòd ſi quatuor numeri minimi ſumantur in ratione A, ad B, ſimili modo demonſtrabimus, neque A, quartum D, neque B, quartum E, metiri. Atque ita de reliquis. Si itaque ſint quotcunque numeri deinceps proportionales, &c. Quod erat oſtendendum.

f 2. octaui.
g 3. octaui.

A, 16. B, 24. C, 36. D, 54. E, 81.
F, 4. G, 6. H, 9.

SCHOLIVM.

SCHOLIVM.

Si maiores numeri ad minores referantur, proponi poterit hæc propoſitio ad hunc modum.

Si ſint quotcunque numeri deinceps proportionales, primus autem ſecundi non ſit multiplex, neque alius quiſquam vllius multiplex erit.

Sint enim continuè proportionales A,B,C,D,E; & A, primus non ſit multiplex ſecundi B. Dico neq; alium quenquam illorum vllius eſſe multiplicem. Quòd enim nullus proximè inſequentis multiplex ſit, conſtat. Nam cùm ſit, vt A, ad B, ita B, ad C; C, ad D; & D, ad

A, 81. B, 54. C, 36. D, 24. E, 16.

E: non ſit autẽ A, ipſius B, multiplex; neq; B, ipſius C; neq; C, ipſius D; neq; D, ipſius E, multiplex erit. Quòd autẽ neque alius quiſquam illorum vllius ſit multiplex, hoc pacto confirmabitur. Quoniam D, ipſius E, non eſt multiplex: non metietur è contrario E, ipſum D, per ea, quæ in defin. 5. lib. 7. ſcripſimus. Quoniam igitur ſunt numeri deinceps proportionales quotcunq; E, D, C, B, A; (Nam cùm ſit D, ad E, vt C, ad D; B, ad C; & A, ad B; erit conuertendo E, ad D, vt D, ad C; C, ad B; & B, ad A.) Et E, primus ſecundum D, non metitur; [a] neq; alius quiſquam illorum vllum metietur. Quare è contrario, ſi maiores ad minores referantur, neq; quiſquam illorum vllius erit multiplex, per ea, quæ in defin. 5. lib. 7. ſcripſimus. a 26. octaui.

Sed & ex his ſequens theorema demonſtrabimus.

Si ſint quotcunq; numeri deinceps proportionales, primus verò ſecundum metiatur; & quicunque alius quemlibet ſequentium metietur. Si primus autem ſecundi ſit multiplex; & quicunque alius cuiuslibet ſequentium multiplex erit.

Sint deinceps proportionales quotcunque numeri A,B,C,D,E; & primus A, ſecundum B, metiatur. Dico & quemque illorum quemlibet ſequentium metiri. Quòd enim quilibet proximè inſequentem metiatur, perſpicuum eſt. Nam cùm ſit, vt A, ad B, ita B, ad C; C,

A, 3. B, 6. C, 12. D, 24. E, 48.

ad D; & D, ad E; metiatur autẽ A, ipſum B; & B, ipſum C; & C, ipſum D; & D, ipſum E, metietur. Quòd autem quilibet illorum quemlibet ſequẽtium metiatur, nempe B, ipſos D, & E, hoc modo oſtendetur. Quia B, ipſum C, metitur, & C, ipſum D; [b] metietur quoq; B, ipſum D. Rurſus quia D, ipſum E, metitur; [c] metietur quoque B, (ipſum D, metiens) eundem E. Et ſic de reliquis. b 11. prou. c 11. prou.

Sed iam primus A, multiplex ſit B, ſecundi. Dico & quemque illorum cuiuslibet ſequentium multiplicem eſſe. Cùm enim ſit vt A, ad B, ita B, ad C; C, ad D; & D, ad E: ſit autem A, ipſius B, multiplex; erit & B, ipſius C; & C, ipſius D; & D, ipſius E, multiplex. Quilibet ergo cuiuslibet proximè inſequẽtis multiplex eſt. Rur

A, 48. B, 24. C, 12. D, 6. E, 3.

ſus quia D, ipſius E, eſt multiplex; metietur è contrario E, ipſum D: ſunt autem, per inuerſam rationem, E, D, C, B, A, continuè proportionales. Igitur & quilibet illorum quemlibet ſequentium metietur, vt demonſtratum eſt; Ac propterea è contrario, ſi maiores ad minores referantur, & quilibet cuiuſque ſequentium multiplex erit.

Conuertemvs etiam hanc propoſitionẽ 6. & theorema, quod primo loco in ſcholio demonſtrauimus, hac ratione.

Si ſint quotcunque numeri deinceps proportionales, primus autẽ, vel alius quiſquam nullum à ſecundo metiatur; neque primus ſecundũ metietur. Et ſi primus, vel alius quiſquam nullius à ſecundo ſit multiplex: neque primus ſecundi multiplex erit.

Sint deinceps proportionales A,B,C,D,E; & primus A, vel alius quiſq; nullum à ſecundo B, metiatur. Dico neq; A, primum, metiri B, ſecũdum. Si enim A, primus, ſecundum B, dicatur metiri: metietur quoq; per ea,

A, 16. B, 24. C, 36. D, 54. E, 81.

quæ ſecundo loco in hoc ſcholio oſtendimus, quicunq; alius quemlibet ſequentium. Quod eſt abſurdum, cùm neq; primus, neq; alius quiſquam vllum à ſecundo metiri ponatur. Non ergo A, ipſum B, metietur.

Iam verò A, primus, vel alius quiſquam nullius à ſecundo B, ſit multiplex. Dico neq; A, primum multiplicem eſſe B, ſecundi. Si namque A, primus multiplex

A, 81. D, 54. C, 36. D, 24. E, 16.

eſſe dicatur B, ſecundi; multiplex quoque erit quicunque alius cuiuslibet ſequentium, ex ijs, quæ ſecundo theoremate huius ſcholij demonſtrauimus. Quod eſt abſurdum. Neq; enim primus, neque alius quiſquam vllius à ſecundo multiplex eſſe ponitur. Non igitur A, ipſius B, multiplex erit.

THEOR. 5. PROPOS. 7. 7.

Si ſint quotcunque numeri deinceps proportionales, primus autẽ extremum metiatur, is etiam metietur ſecundum.

SINT deinceps proportionales A,B,C,D,E; & A, primus extremũ E, metiatur. Dico & A, primum metiri B, ſecundum. Si enim A, ipſum B, non dicatur metiri: [a] neq; alius quiſquam vllum metietur. Quare nec A, ipſum E. Quod eſt abſurdum. Ponitur enim A, metiri E. Igitur A, primus B, ſecundum metietur; Atque idcircò, ſi ſint quotcunque numeri deinceps proportionales, &c. Quod erat demonſtrandum.

[a] 6. eſtani. A, 3. B, 6. C, 12. D, 24. E, 48.

SCHOLIVM.

VT theorema, quod ſecundo loco in ſcholio precedentis propoſitionis demonſtrauimus, conuertamus, amplificabimus hanc propoſitionem hoc modo.

SI ſint quotcunque numeri deinceps proportionales, primus autẽ, vel alius quiſquam quemlibet à ſecundo metiatur; metietur & primus ſecundum. Et ſi primus, vel alius quiſquam cuiuslibet à ſecundo ſit multiplex; primus quoque ſecundi multiplex erit.

QVOD eodem modo demonſtrabimus. Si enim primus non dicatur metiri ſecundum, vel illius eſſe multiplex; neque alius quiſquam vllum metietur; vel illius multiplex erit, ex prop. 6. & 1. theoremate ſcholij precedentis. quod eſt contra hypotheſin.

8. THEOR. 6. PROPOS. 8.

SI inter duos numeros medij continua proportione cecidẽrint numeri; quot inter eos medij continua proportione cadunt numeri: tot & inter alios eandem cum illis habentes rationem medij continua proportione cadent.

Cadant inter duos numeros A,B, medij proportionales continuè C,D; ſitque vt A, ad B, ita E, ad F. Dico tot medios numeros continuè proportionales cadere inter E, & F, quot inter A, & B. Sumptis enim totidem numeris G,H,I,K, minimis in ratione A, ad C, quot ſunt numeri A,C,D,B; erit ex æquo, vt A, ad B, atque adeò vt E, ad F, ita G, ad K. [b] Quare cùm G, & K, inter ſe primi ſint, quippe qui extremi ſint minimorum numerorum; [c] ac propterea in ſua proportione minimi; [d] æquè metietur G, ipſum E, & K, ipſum F. Quoties ergo G, & K, ipſos E, & F, metiuntur, toties H, & I, alios numeros L, & M, metiantur, ita vt numeri G,H,I,K, numeros E,L,M,F, æquè metiantur, ſinguli ſingulos. [e] Quia igitur G, H, I, K, multiplicantes numerum, per quẽ metiũtur numeros E,L,M,F, ipſos E,L,M,F, producũt; in eiſdẽ rationibus erũt E,L,M,F, in quibus G,H,I,K, vt ad propoſ. 18. lib. 7. demonſtrauimus. At G,H,I,K, ſunt continuè proportionales. Igitur & E,L,M,F, continuè proportionales ſunt: Atque idcircò, cùm multitudo E,L,M,F, æqualis ſit multitudini A,C,D,B; tot cadent medij proportionales inter E, & F, quot inter A, & B. Si igitur inter duos numeros medij continua proportione cecidẽrint, &c. Quod demonſtrandum erat.

[b] 3. eſtani. A, 24. C, 36. D, 54. B, 81. G, 8. H, 12. I, 18. K, 27. E, 32. L, 48. M, 72. F, 108.

[c] 23. ſeptimi. A, 40. C, 20. D, 10. B, 5.

[d] 21. ſeptimi. G, 8. H, 4. I, 2. K, 1. E, 8. L, 4. M, 2. F, 1.

[e] 9. pron. A, 27. C, 9. D, 3. B, 1. G, 27. H, 9. I, 3. K, 1. E, 108. L, 36. M, 12. F, 4.

SCHOLIVM.

NON ſolùm ex demonſtratione conſtat, totidem medios proportionales cadere inter E, & F, quot inter A, & B; verùm etiam eandem eſſe proportionem numerorum E,L,M,F, quæ eſt numerorum A,C,D,B. Oſtenſum enim eſt E,L,M,F, in eadem eſſe proportione, in qua G,H,I,K: Sed hi eandem habent, ex conſtructione, quam A,C,D,B. Igitur & E,L,M,F, eandem habent, quam A,C,D,B.

EADEM hæc propoſitio vera eſt, ſi exiſtentibus numeris A, & B, ſumatur vel E, vel F, vnitas. Item ſi vel A, vel B, fuerit vnitas, exiſtentibus E, & F, numeris; vt in exemplis apparet.

CONSTAT etiam ex hoc theoremate, inter numeros dupla proportionis, vel ſuperparticularis cuiuſuis, vel ſuperbipartientis, non poſſe cadere numerum medium proportionalem. Cùm enim dupla proportio in minimis numeris reperiatur inter binarium, & vnitatem; ſuperparticularis verò inter numeros ſola vnitate differentes; ſuperbipartiens denique inter numeros, quorum differentia eſt binarius: ſi inter duos numeros dupla proportionis, vel ſuperparticularis, vel ſuperbipartientis, medius numerus caderet proportionalis; caderet quoque, per hoc theorema, numerus aliquis medius proportionalis inter binarium, & vnitatem; vel inter numeros ſola vnitate differentes, vel etiam binario: nimirum inter numeros minimos, qui eaſdem cum illis proportiones habent: quod fieri nulla ratione poteſt. Nam neque inter binarium & vnitatem, neq; inter duos numeros ſola vnitate differẽtes, vllus numerus interponitur, tantum abeſt, vt aliquem medium proportionalem ipſi recipiant. Similiter inter duos numeros binario inter ſe diſtantes interijcitur ſolùm numerus, qui ab vtroque vnitate differt. Quem nulla poſſe ratione eſſe inter illos medium proportionalem, in hunc modum demonſtrabimus. Differant numeri A B, C D, (ſiue C D, vnitas ſit, & A B, ternarius, ſiue non,) binario, inter quos cadat numerus E F, minor vnitate quàm A B, maior verò quàm C D, vnitate quoque. Dico E F,

non

A.. G. B
E. H. F
C. D

A..... G. B
E..... H. F
C..... D

non esse medium proportionalem inter AB, CD. Si enim dicatur esse AB, ad EF, vt EF, ad CD: ablato ex AB, numero AG, ipsi EF, aquali, vt reliqua sit vnitas GB; & ex EF, numero EH, ipsi CD, aquali, vt relinquatur etiam vnitas HF; erit quoq; vt AB, totus ad EF, totum, ita AG, ablatus ad EH, ablatum; cùm AG, EH, ipsis EF, CD, æquales sint, ex constructione. Igitur erit quoq; reliquum GB, ad reliquum HF, hoc est, vnitas ad vnitatem, vt totus AB, ad totum EF, maior ad minorem. Quod est absurdum. Non ergo EF, medius proportionalis est inter AB, & CD.

THEOR. 6. PROPOS. 8. 8.

INTER numeros tripla proportionis medius proportionalis cadere non potest. Alioquin caderet etiam medius proportionalis, ex hoc theoremate, inter 3. & 1. minimos numeros proportionis triplæ, qui binario inter se differunt, quod fieri non posse, proximè demonstrauimus.

POSSIT rursus inter numeros quintuplæ proportionis cadere non potest medius proportionalis. Si enim cadere dicatur, cadet quoq; ex hoc theoremate, medius proportionalis inter 5. & 1. minimos numeros proportionis quintuplæ: quod fieri non posse, ita demonstrabimus. Cadat primùm, si fieri potest, inter quinarium AB, & vnitatem C, medius proportionalis binarius, vel ternarius D. Ita vt sit AB, ad D, vt D, ad C: Et conuertendo C, ad D, vt D, ad AB. Et quoniam vnitas C, metitur D; metietur quoq; D, ipsum AB. At binarius, vel ternarius D, metitur quoq; senarium AE. Igitur D, metitur totum AE, & ablatum AB: [a] ac proinde & D, numerus metietur reliquam vnitatem BE. Quod est absurdum.

A..... B. E
D.. D...
C.

a 11. pron.

CADAT, deinde, si fieri potest, inter quinarium AB, & vnitatem C, medius proportionalis quaternarius D. Ostendemus ergo, vt prius, D, metiri quinarium AB. Metitur autem quaternarius D, quaternarium etiam AE. Igitur D, metitur totum AB, & ablatum AE: [b] ac proinde & D, numerus reliquam vnitatem EB, metietur. Quod est absurdum.

B..... E, B
D....
C.

b 11. pron.

EX quibus fit, neq; illud interuallum Musicum, quod in dupla proportione consistit, vt Diapason, vel, vt vulgò dicitur, Octaua, neq; illud, quod in sesquioctaua proportione reperitur, cuiusmodi est Tonus, seu vulgò Secunda, bifariam posse secari, hoc est, in duas proportiones æquales. Illa enim proportio bifariam (quod ad propositum attinet) secari dicitur, inter cuius terminos mcdius proportionalis cadit: Vt quia inter hos terminos 24. & 6. proportionis quadruplæ cadit medius proportionalis numerus 12. hoc modo: 24. 12. 6. Idcircò proportio quadrupla bifariam diuisa esse dicitur in duas duplas proportiones. Cùm ergo ostensum sit, inter numeros duplæ proportionis, & superparticularis, qualis est sesquioctaua, nõ cadere medium numerum proportionalem; perspicuum est, Diapason, & Tonum, bifariam secari non posse. Vnde Diapason prima sui diuisione in Diapenten, & Diatessaron, quorum interuallorum illud in proportione sesquialtera, hoc verò in sesquitertia consistit, apud Musicos secatur, vt hic apparet, 2, 3, 4. Est enim hic proportio dupla diuisa in proportionem sesquialteram, & sesquitertiam, tanq; in maximas sui partes inter se inæquales. Ita quoq; Tonus in duo semitonia, quarũ alterũ maius, alterũ minus dicitur, secari solet. Sed de his plura apud Musicos reperies.

RVRSVM ex his demonstrari potest, proportionem diametri cuiusuis quadrati ad latus eiusdem, numeris non posse exprimi, sed esse irrationalem. Cùm enim per ea, quæ ad propos. 47. lib. 1. demonstrauimus, quadratum diametri duplum sit quadrati ex latere descripti; quadratorum verò proportio sit duplicata proportionis laterum; fit, vt proportio quadrati ex diametro descripti ad quadratum lateris duplicata sit proportionis diametri ad latus. Cùm ergo illa proportio, cuius duplicata est proportio dupla, numeris exprimi nequeat, q; inter numeros duplæ proportionis medius proportionalis nõ cadat, qui illam bifariam secet, vt ostendimus; manifestum est, nec proportionem diametri ad latus numeris exprimi posse, sed esse irrationalem, seu, quod idem est, diametrum esse lateri incommensurabilem. quæ de re plura ad 9. & vltimam propos. lib. 10. scribemus.

THEOR. 7. PROPOS. 9. 9.

SI duo numeri sint inter se primi, & inter eos medij cõtinua proportione cecidérint numeri; quot inter eos medij continua proportione cadunt numeri, totidem & inter vtrumque eorum, ac vnitatem medij continua proportione cadent.

A, 8. C, 12. D, 18. B, 27.
Vnitas.
1.
E, 2. F, 3.
G, 4. H. 6. I, 9.
K, 8. L, 12. M, 18. N, 27.

CADANT inter numeros A, B, inter se primos medij continuè proportionales C, D. Dico totidẽ cadere continuè proportionales inter vnitatem, & A, nec non inter vnitatem, & B, quot inter A, & B, cadunt. Inuentis enim duobus numeris E, & F, minimis in ratione A, ad C; [a] sumantur in eadem proportione tres minimi G, H, I, & quatuor K, L, M, N, & sic deinceps, donec multitudo sumptorũ æqualis sit multitudini A, C, D, B. Quoniã ergo A, B, extremi inter se, primi sunt, erũt A, C, D, B, minimi in proportione E, ad F. Sunt autẽ & totidẽ K, L, M, N, ex constructione, in eadẽ proportione minimi. Igitur K, L, M, N, ipsis A, C, D, B, æquales sunt, singuli singulis, vt K, ipsi A, & N, ipsi

a 2. octani.

b 1. octaui.

A, 8. C, 12. D, 18. B, 27.
Vnitas.
1.
E, 2. F, 3.
G, 4. H. 6. I, 9.
K, 8. L, 12. M, 18. N, 27.

B, ne minores minimis dentur. Quia verò, vt cõstat ex demonstratione propos. 2. huius libri, E, seipsum multiplicans produxit G; multiplicans verò ipsum G, fecit K, [a] metietur E, ipsum G, per E; & G, ipsum K, per eundem E: [b] Metitur autem & vnitas ipsum E, per E. Æquè igitur metietur vnitas ipsum E, & E, ipsum G, & G, ipsum K; Ac propterea eadem pars erit vnitas ipsius E, & E, ipsius G, & G, ipsius K. [c] Proportionales ergo sunt deinceps, vnitas, & numeri E, G, K. Simili ratione, cùm manifestum sit ex eadem demonstratione propos. 2. huius lib. quòd F, seipsum multiplicans producat I, multiplicans verò ipsum I, faciat N; [d] metietur F, ipsum I, per F, & I, ipsum N, per eundem F: [e] Metitur autem & vnitas ipsum F, per F. Æquè igitur metietur vnitas ipsum F, & F, ipsum I, & I, ipsum N; Ac propterea eadem pars erit vnitas ipsius F, & F, ipsius I, & I, ipsius N. [f] Proportionales ergo sunt continuè, vnitas, & numeri F, I, N; Ac proinde cùm tam multitudo E, G, K. quàm F, I, N, vnà cum vnitate, æqualis sit multitudini K, L, M, N, vel A, C, D, B; (vt perspicuum est ex propositione 2. huius libri. Nam duo E, F, sunt secundi ab vnitate: & tres G, H, I, tertij: & quatuor K, L, M, N, quarti, &c.) tot cadent medij continuè proportionales numeri inter vnitatem, & K, numerum, seu A, sibi æqualem; & inter vnitatem, & numerum N, siue B, sibi æqualem, quot inter numeros A, B. Si duo ergo numeri sint inter se primi, &c. Quod ostendendũ erat.

a 7. pron.
b 5. pron.
c 20. defin.
d 7. pron.
e 5. pron.
f 20. defin.

SCHOLIVM.

PERSPICVVM autem est, numeros, qui in continua proportione cadunt inter numeros A, & B, atq; vnitatem, habere proportiones denominatas à minimis numeris proportionis A, ad C; hoc est, quas habent E, & F, numeri ad vnitatem; id quod in scholio propos. 2. huius lib. quoq; asseruimus.

CONSTAT etiam ex demonstratione hac, si numerus seipsum multiplicans aliquem fecerit; & rursum multiplicet productum, & sic deinceps: omnes productos esse continuè proportionales ab vnitate. Ostensum enim est & E, G, K, & F, I, N, qui hac ratione sunt procreati, ex demonstratione propos. 2. huius lib. continuè esse proportionales ab vnitate.

10. THEOR. 8. PROPOS. 10.

SI inter duos numeros, & vnitatem, continuè proportionales ceciderint numeri; quot inter vtrunque ipsorum, & vnitatem deinceps medij continua proportione cadunt numeri, totidem & inter ipsos medij continua proportione cadent.

CADANT inter vtrumque numerorum A, B, & vnitatem, quotcunque numeri medij continuè proportionales; inter A, quidem & vnitatem, numeri C, D, E: At verò inter B, & vnitatem, numeri F, G, H, illis multitudine æquales. Dico totidem medios continuè proportionales cadere inter A, & B, quot inter vtrumque A, B, & vnitatem. Multiplicantes enim se mutuò C, & F, faciant I. Deinde C, multiplicans I, & G, faciat K, & L. Rursus idem C, multiplicans K, L, & H, faciat M, N, & O, totidem inter A, & B, quot sunt inter vtrumque A, B, & vnitatem. Quoniam igitur est, vt vnitas ad C, ita C, ad D; D, ad E, & E, ad A; æquè metietur vnitas ipsum C, & C, ipsum D, & D, ipsum E, & E, ipsum A; [g] Metietur autem vnitas ipsum C, per C. Igitur & C, ipsum D, & D, ipsum E, & E, ipsum A, per C, metietur. [h] Quare C, seipsum multiplicans fecit D; multiplicans autem D, fecit E, & multiplicans E, fecit A. Eadem ratione F, seipsum multiplicans fecit G, & multiplicans G, fecit H, & multiplicans H, fecit B. Itaque cùm C, multiplicans C, & F, fecerit D, & I; [i] erit vt C, ad F, ita D, ad I. Similiter, quia F, multiplicans C, & F, fecit I, & G; [k] erit vt C, ad F, ita I, ad G. Sunt igitur tres D, I, G, continuè proportionales in ratione C, ad F. Rursus quia C, multiplicans D, I, G, fecit E, K, L; habebunt E, K, L, per ea, quæ ad propos. 18. lib. 7. ostendimus, eandẽ proportionem continuam, quam D, I, G, hoc est, quam C, ad F. Eodem modo, quia C, & F, multiplicantes G, fecerunt L, & H; [l] erit vt C, ad F, ita L, ad H. Quatuor ergo numeri E, K, L, H, continuè proportionales sunt in ratione C, ad F. Postremò, quia C, multiplicans E, K, L, H, fecit A, M, N, O, habebunt ex iis, quæ à nobis sunt demonstrata ad propos. 18. lib. 7. A, M, N, O, eandem continuam proportionem, quam E, K, L, H, hoc est, quam C, ad F. Eadem ratione, cùm C, & E, multiplicantes H, fecerint O, & B, [m] erit, vt C, ad F, ita O, ad B. Quinque igitur numeri A, M, N, O, B, continuè proportionales sunt in ratione C, ad F. Ac proinde tot medij proportionales cadunt inter A, & B, quot inter A, vel B, & vnitatem, cùm multitudo M, N, O, facta sit æqualis multitudini C, D, E, vel F, G, H. Quocirca si inter duos numeros, & vnitatem, continuè proportionales ceciderint numeri, &c. Quod erat demonstrandum.

A, 81. M, 162. N, 324. O, 648. B, 1296.
E, 27. K, 54. L, 108. H, 216.
D, 9. I, 18. G, 36.
C, 3. F, 6.
1.
Vnitas.

g 5. pron.
h 9. pron.
i 17. septimi.
k 17. sept.
l 18. sept.
m 18. sept.

SCHOLIVM.

SCHOLIVM.

Ex his constat, numeros, qui medij proportionales cadunt inter A, & B, proportionem habere, quam duo numeri vnitati propinquiores, quales sunt C, & F, habent.

PATET etiam ex hac demonstratione, si quotquot numeri fuerint ab vnitate continuè proportionales, secundum ab vnitate in se multiplicatum producere tertium, & ex eodem in hunc fieri quartum; & ex eodem in hunc gigni quintum, & sic deinceps. Demonstratio enim est, ex eò quòd C, D, E, A, continuè proportionales sunt ab vnitate; D, tertium fieri ex C, secundo in se; & E, ex C, in D; & A, ex eodem C, in E, &c.

LIBET hoc loco nonnulla alia theoremata demonstrare ad numeros continuè proportionales pertinentia, quæ tam ad ea, quæ sequuntur, tum ad alia multa erunt vtilia; hinc initium sumentes.

I.

Si sint ab vnitate duo ordines numerorum continuè proportionalium, & multitudine æqualium; habebunt tertij ab vnitate proportionem duplicatam eius, quam habent secundi ab vnitate; quarti verò eiusdem triplicatam; & quinti quadruplicatam; & semper deinceps vno amplius.

SINT numeri A, B, C, D, continuè ab vnitate proportionales, & ab eadem totidem alij E, F, G, H. Dico proportionem B, tertij ab vnitate ad F, ab eadem tertium, duplicatam esse eius, quam habet A, secundus ad A, secundum, &c. Quoniam enim inter vtrumque numerorum B, F, & vnitatem cadit medius vnus proportionalis; inter B, quidem & vnitatem, numerus A; at inter F, & vnitatem numerus E; cadet 210. octaui *quoq; inter B, & F, vnus medius proportionalis: atq; adeo, per scholium huius propositionis in ratione A, ad E. Cadat igitur, & sit I. Eodem modo cadent inter C, & G, duo medij in eadem proportione A, ad E, qui sint K, L, quot nimirum cadunt inter vtrumque C, G, & vnitatem. Nec nō inter D, H, tres, qui sint M, N, O, in eadem ratione A, ad E, proportionales. Quoniam igitur ex definitione B, ad F, proportionem habet duplicatam eius, quam habet B, ad I; Est autem vt B, ad I, ita A, ad E; Habebit quoq; B, ad F, rationem duplicatam eius, quam habet A, ad E. Non aliter habebit C, ad G, rationem triplicatam rationis A, ad E; quia ratio C, ad G, triplicata est proportionis C, ad K; & est vt C, ad K, ita A, ad E. Sic etiam D, ad H, rationem habebit quadruplicatam rationis A, ad E, & sic de cæteris.*

D, 81. M, 108. N, 144. O, 192. H, 256.
C, 27. K, 36. L, 48. G, 64.
B, 9. I, 12. F, 16.
A, 3. E, 4.
1.
Vnitas.

HOC idem demonstrabimus, si fuerint duo ordines numerorum continuè proportionalium, ab aliquo numero eodem incipientes. Vnde hoc idem theorema ita proponemus.

II.

Si sint ab aliquo numero eodem duo ordines numerorum continuè proportionalium, & multitudine æqualium; Habebunt tertij ab illo numero proportionem duplicatam eius, quam habent secundi ab eodem; quarti verò eiusdem triplicatam; & quinti quadruplicatam; & semper deinceps vno amplius.

SINT ab A, numero continuè proportionales B, C, D, E, & ab eodem totidem alij F, G, H, I. Dico rursum proportionis B, ad F, esse duplicatam proportionem C, ad G, & D, ad H, triplicatam: & E, ad I, quadruplicatam. Ex A, in se fiat K, & ex A, in K, fiat L, & ex A, in L, fiat M. Similiter ex B, in se fiat N; & ex B, in N, fiat O; & ex B, in O, fiat P. Postremò ex E, quoque in se fiat Q; & ex F, in Q, fiat R, & ex F, in R, fiat S. Quibus peractis, erunt A, K, L, M, continuè proportionales ab vnitate, vt constat ex scholio propositionis 9. huius libri. Eadem ratione erunt B, N, O, P, ab vnitate proportionales; necnon & F, Q, R, S. Quia igitur ratio N, ad K, duplicata est rationis B, ad A, ex theor. 1. huius scholij; Est autem ex definitione eiusdem rationis B, ad A, duplicata quoque ratio C, ad A, nempe C, ad A, vt N, ad K. Eadem modo erit A, ad G, vt K, ad Q. Numeroq; dem primo theoremate est ratio K, ad Q, duplicata rationis A, ad E, & eiusdem, ex definitione duplicata est ratio A, ad G. Quare cùm sit C, ad A, vt N, ad K; & A, ad G, vt K, ad Q; erit ex æquo C, ad G, vt N, ad Q. Æquiuatio N, ad Q, duplicata est rationis B, ad F, ex theoremate primo huius scholij; quòd tam B, N, quam N, Q, sint ab vnitate continuè proportionales, ex scholio propositionis 9. huius libri. Igitur & ratio C, ad G, duplicata est rationis B, ad F. Eisdem argumentis erit ratio D, ad H, triplicata rationis B, ad F. Nam ratio C, ad L, ex primo theoremate, triplicata est rationis B, ad A, quòd tam B, N, O, quàm A, K, L, sint ab vnitate continuè proportionales, ex scholio propositionis 9. huius libri, & eiusdem triplicata est ratio D, ad A, ex de-

E, 81. I, 1.
D, 54. Vnitas. H, 2.
C, 36. 1. G, 4.
B, 24. F, 8.
A, 16.
N 576. K, 256. Q 64.
O, 13824. L, 4096. R, 512.
P, 331776. M, 65536. S, 4096.

sitione. Igitur est D, ad A, vt O, ad L. Eodemq; modo est A, ad H, vt L, ad R: quod vtraque proportio triplicata sit proportionis A, ad F: Proportio quidem A, ad H, ex defin. at proportio L, ad R, ex primo theoremate huius scholij propterea quòd tam A, K, L, quàm F, Q, R, continuè proportionales sunt ab vnitate, ex scholio propositionis 9. huius libri. Est ergo ex æquo D, ad H, vt O, ad R. Sed ratio O, ad R, triplicata est rationis B, ad F, eò quòd tam B, N, O, q̃ F, Q, R, sunt continuè proportionales ab vnitate ex scholio propositionis 9. huius lib. Igitur & ratio D, ad H, triplicata est eiusdem rationis B, ad F. Non secus demonstrabimus rationem E, ad I, esse quadruplicatam rationis B, ad F. Atque ita deinceps.

EADEM omnino demonstrabitur, si numeri vnius ordinis desinant in vnitatẽ, ve ex secunda figura est manifestum, in qua I, est vnitas.

CAETERVM theorema hoc demonstrabitur etiã in lineis, ab vna & eadem linea proportionalibus, libro 14. propositione 28. licèt non in quotcunque lineis. Vnde multo generalius est hoc in numeris, quam illud in lineis. Ex his autem in hunc modum demonstratis efficiemus propositionem hanc 10. Euclidis magis vniuersalem, hoc modo.

III.

Inter duos numeros, & aliquem alium numerũ assumptum, continuè proportionales cecíderint numeri; quot inter vtrumque ipsorum, & assumptum, deinceps medij continua proportione cadũt numeri, totidẽ & inter ipsos medij cõtinua proportione cadẽt.

CADANT inter vtrumque numerorum A, B, & assumptum numerum C, quotlibet numeri continuè proportionales: inter A, quidem & C, numeri D, E, F; inter B, verò & C, totidẽ numeri G, H, I. Dico tot quoque medios continuè proportionales cadere inter A, & B, quot inter A, & C, & inter B, & C. Item tot inter F, & I, quot inter F, & C, & inter I, & C. Et tot inter E, & H, quot inter E, & C, & inter H, & C. Sumptis enim tribus K, L, M, minimis in ratione D, ad G erit ex defin. ratio K, ad M, duplicata rationis K, ad L, hoc est, D, ad G: Scd p theor. 2. huius scholij, ratio quoq; E, ad H, duplicata est eiusdem rationis D, ad G. Igitur est, vt K, ad M, ita E, ad H; Atq; adeò cũ inter K & M, cadat vnus medius pro-

A, 162. Q, 216. R, 288. S, 384. B, 512.
F, 54. O, 72. P, 96. I, 128.
E, 18. N, 24. H, 32.
D, 6. G, 8.
C, 2.
K, 9. L, 12. M, 16.

8. octaui. *portionalis L; * cadet quoq; vnus medius; nimirum N, inter E, & H; quemadmodum & inter L, & C, & inter H, & C, vnus medius cadit. Simili modo, si in eadem proportione D, ad G, sumantur quatuor minimi numeri, ostendemus inter F, & I, duos medios cadere, ficut & inter F, & C, & inter I, & C, duo medij cadunt. Et eadem ratione inter A, & B, tres medij cadent, si in eade proportione D, ad G, sumãtur quinq; numeri minimi.*

HOC etiam verum est, si loco alterius numeri, nimirum B, vnitas assumatur; veluti perspicuum est in hac secunda figura, in qua numerus B, vnitas est, caduntq; tam inter A, & C, quàm inter B, & C, tres numeri continuè proportionales, quot scilicet inter A, & B, cadunt, &c.

A, 1048576. Q, 32768. R, 1024. S, 32. B, 1.
F, 65536. O, 2048. P, 64. I, 2.
E, 4096. N, 128. H, 4.
D, 256. G, 8.
C, 16.
K, 1024. L, 32. M, 1.

Ex his etiã apparet, numeros, qui medij proportionales cadunt inter A, & B; necnon inter F, & I; atq; inter E, & H, proportionem habere quam duo numeri D, & G, numero assumpto C, propinquiores.

11. THEOR. 9. PROPOS. 11.

DVORVM quadratorum numerorum vnus medius proportionalis est numerus: Et quadratus ad quadratum duplicatam habet lateris ad latus rationem.

SINT quadrati numeri A, & B, quorum latera C, & D. Dico inter A, & B, vnum medium proportionalem numerum cadere: & proportionem A, & B, quadrati ad quadratum, esse duplicatam proportionis C, ad D, lateris ad latus. Multiplicantes enim se mutuò C, & D, faciant E. Quia igitur C, multiplicans seipsum fecit A, quadratũ, ex defin. quadrati; & ipsum D, multiplicans, fecit E, ex constructione; a erit vt C, ad D, ita A, ad E. Rursus, quia D, multiplicãs C, fecit E, ex cõstructione; & multiplicãs seipsum, ex defin. quadrati, fecit B, quadratũ; b erit quoq; vt C, ad D, ita E, ad B. Quare A, E, B, continuè pportionales sunt in ratione laterũ C, & D. Ac pinde inter quadratos A, & B, vnus medius continuè proportionalis cadit E. Quia verò ex eo qd A, E, B, continuè pportionales sunt, numerus A, & B, duplicatam rationẽ habet eius, quam habet A, ad E; duplicatam quoq; rationem habebit A, quadratus ad B, quadratum eius, quã habet C, latus ad latus D; cũ hæc proportio eadẽ

a 17. sept. A, 9. E, 21. B, 49.
C, 3. D, 7.
b 19. sept.

sit,

sit, quæ A, ad E. Duorum ergo quadratorum numerorum vnus medius proportionalis est, &c. Quod demonstrandum erat.

SCHOLIVM.

PERSPICVVM est ex dictis, inter duos quadratos numeros cadere numerum medium proportionalem in continua proportione lateris ad latus. Nam eadem est proportio quadrati A, ad E, medium proportionalem, quæ lateris C, ad latus D, vt demonstratum est.

PARI ratione liquet, numerum medium proportionalem E, & vtrumlibet quadratorum A, B, esse inter se compositos. Cùm enim A, E, B, proportionales sint ostensi in ratione C, ad D; hoc est, esse A, ad E, & E, ad B, vt C, ad D; metiatur autem latus D, quadratum suum B, consequens consequentem, si de proportionibus E, ad B, & C, ad D, loquamur; metietur & C, ipsum E, antecedens antecedentem; quandoquidem est E, ad B, vt C, ad D. Metitur autem & latus C, quadratum suum A. Igitur E, & A, mensuram communem habent C; atq; adeò inter se sunt compositi. Similiter cùm sit A, ad E, vt C, ad D; & metiatur latus C, suum quadratum A, antecedem antecedentem; metietur quoque D, ipsum E, consequens consequentem. Quare cùm & latus D, metiatur suum quadratum B; habebunt E, & B, communem mensuram D; Ideoq; compositi erunt inter se. Perspicuum autem est ex hac demonstratione, priorum numerorum A, E, communem mensuram esse C, latus prioris quadrati A; posteriorum verò E, B, mensuram communem esse D, latus quadrati posterioris B.

A, 9. E, 21. B, 49. C, 3. D, 7.

THEOR. 10. PROPOS. 12. 11.

DVORVM cuborum numerorum duo medij proportionales sunt numeri; Et cubus ad cubum triplicatam habet lateris ad latus rationem.

SINT numeri cubi A, & B, quorum latera C, & D. Dico inter A, & B, duos medios numeros continuè proportionales cadere: Et proportionem A, ad B, cubi ad cubum, triplicatam esse proportionis C, ad D, lateris ad latus. Multiplicans enim C, seipsum faciat E; & D, seipsum multiplicans faciat F; At C, & D, se mutuò multiplicantes faciant G; Multiplicantes verò G, faciant H, & I. Quoniam igitur C, seipsum, & D, multiplicans fecit E, & G; [a] erit, vt C, ad D, ita E, ad G. Eadem ratione, cùm D, multiplicans C, & seipsum, fecerit G, & F; [b] erit quoque vt C, ad D, ita G, ad F; propterea{que} E, G, F, continuè proportionales sunt in ratione C, ad D. Rursus quia ex definitione cubi, C, ipsum E, multiplicans fecit A; & ex constructione multiplicans ipsum G, fecit H; [c] erit vt E, ad G; hoc est, vt C, ad D, ita A, ad H. Similiter cùm D, ipsum G, multiplicans fecerit, ex constructione, numerum I; multiplicans verò ipsum F, ex definitione cubi, fecerit cubum B; [d] erit quoque, vt G, ad F; hoc est, vt C, ad D, ita I, ad B: [e] Est autem & H, ad I, vt C, ad D: quòd C, & D, ipsum G, multiplicantes fecerint ex constructione, H, & I. Igitur A, H, I, B, continuè sunt proportionales in ratione C, ad D: Atque adeò inter cubos A, & B, duo medij H, & I, cadunt continuè proportionales. Quoniam verò, ex eo quòd A, H, I, B, continuè sunt proportionales, numerus A, ad B, triplicatam habet rationem eius, quam habet A, ad H, triplicatam quoque rationem habebit A, ad B, cubus ad cubum, eius, quam habet C, ad D, latus ad latus, cùm sit C, ad D, vt A, ad H. Quam ob rem duorum cuborum numerorum duo medij proportionales sunt numeri, &c. Quod erat ostendendum.

A, 27. H, 36. I, 48. B, 64. E, 9. G, 12. F, 16. C, 3. D, 4.

[a] 17. *septimi.*
[b] 17. *septimi.*
[c] 17. *septimi.*
[d] 17. *septimi.*
[e] 18. *septimi.*

SCHOLIVM.

HIC quoque manifestum est, inter duos cubos cadere duos numeros medios proportionales in continua proportione lateris ad latus. Ostensum enim est, ita esse A, ad H, & H, ad I, & I, ad B, vt C, ad D.

EODEM modo constat, duos numeros medios proportionales H, I, & vtrumlibet cuborum A, B, esse inter se compositos. Cùm enim A, H, I, B, ostensi sint proportionales in ratione C, ad D; hoc est, esse A, ad H, & H, ad B, vt C, ad D: Metiatur autem latus D, cubum suum B, consequens consequentem, si de proportionibus I, ad B, & C, ad D, loquamur; metietur quoque C, ipsum E, antecedens antecedentem; quandoquidem est I, ad B, vt C, ad D: Metitur autem & latus C, cubum suum A; immò & ipsum H, quòd H, factus sit ex multiplicatione C, in G, ex constructione. Igitur A, H, I, communem habent mensuram C; atq; adeò inter se compositi sunt. Similiter cùm sit A, ad H, vt C, ad D; metiatur autem latus C, cubum suum A, antecedens antecedentem; metietur quoque D, ipsum H, consequens consequentem: Metitur autem & latus D, cubum suum B; immò & ipsum I, quòd I, factus sit ex multiplicatione D, in G, ex constructione. Igitur H, I, B, communem mensuram habent D; Ac proinde sunt inter se compositi. Manifestum etiam hic est, priorum trium numerorum A, H, I, communem mensuram esse C, latus cubi prioris A; posteriorum verò trium H, I, B, mensuram communem esse D, latus posterioris cubi B.

A, 27. H, 36. I, 48. B, 64. E, 9. G, 12. F, 16. C, 3. D, 4.

THEOR. 11. PROPOS. 13.

SI ſint quotlibet numeri deinceps proportionales, & multiplicans quiſque ſeipſum faciat aliquos; qui ab illis producti fuerint, proportionales erunt: Et ſi numeri primùm poſiti multiplicantes iam factos fecerint aliquos: ipſi quoque proportionales erunt: Et ſemper circa extremos hoc eueniet.

SINT continuè proportionales A,B,C, qui ſeipſos multiplicantes faciant D,E,F: multiplicantes autem ipſos D,E,F, faciant G,H,I; & rurſum multiplicantes ipſos G,H,I, faciant K,L,M, & ita deinceps. Dico quoque D,E,F, & G,H,I, & K,L,M, continuè eſſe proportionales. Multiplicantes enim A, & B, ſe mutuò faciant N; & B,C, ſe mutuò multiplicantes faciant O. Deinde A, multiplicans N,E, faciat P,Q. Item B, multiplicans O,F, faciat R,S. Simili modo A, multiplicans P,Q,H,

A, 2. B, 4. C, 8.
D, 4. N, 8. E, 16. O, 32. F, 64.
G, 8. P, 16. Q, 32. H, 64. R, 128. S, 256. I, 512.
K, 16. T, 32. V, 64. X, 128. L, 256. Y, 512. Z, 1024. a, 248. M, 4096.

faciat T,V,X; & B, multiplicans R,S,I, faciat Y,Z,a. Quoniam igitur A, multiplicãs ſeipſum, & B, fecit D, & N; [a] erit vt A, ad B, ita D, ad N. Eodem modo, quia B, multiplicãs A, & ſeipſum, fecit N, & E; erit etiam, vt A, ad B, ita N, ad E. Sunt igitur D,N,E, continuè proportionales in ratione A, ad B. Rurſus, quia B, ſeipſum, & numerum C, multiplicans fecit E, & O; [b] erit vt B, ad C, ita E, ad O. Eademq; ratione, cùm C, multiplicans B, & ſeipſum, fecerit O, & F; erit vt B, ad C, ita O, ad F; propterea aque & E,O,F, continuè proportionales ſunt in ratione B, ad C, ſeu A, ad B. Quare cùm D,N,E, in eadem ratione ſint continuè proportionales, in qua E,O,F; erit ex æquo D, ad E, vt E, ad F; atque adeò D,E,F, continuè proportionales ſunt.

a 17. ſept.

b 17. ſept.

DEINDE, quia A, multiplicans D,N,E, fecit G,P,Q; erunt ex iis, quæ ad propoſ. 18. lib. 7. oſtendimus, G,P,Q, in eadem ratione, in qua D,N,E, hoc eſt, in ratione A, ad B, proportionales. Item quia A, & B, multiplicantes E, fecerunt Q, & H; [c] erit quoque vt A, ad B, ita Q, ad H. Sunt ergo G,P,Q,H, proportionales in ratione A, ad B. Similiter quia B, multiplicans E,O,F, fecit H,R,S; erũt ex demonſtratis ad propoſ. 18. lib. 7. H,R,S, proportionales in ratione E,O,F, hoc eſt, B, ad C, ſeu A, ad B. Et eodem modo cùm B,C, multiplicantes F, fecerint S, & I; [d] erit vt B, ad C, hoc eſt, vt A, ad B, ita S, ad I; proptereaque & H,R,S,I, proportionales ſunt in ratione A, ad B. Quocirca, cùm G,P,H,Q eandem habeant proportionem continuam, quam H,R,S,I; erit ex æquo G, ad H, vt H, ad I. Ac proinde G,H,I, continuè ſunt proportionales.

c 18. ſept.

d 18. ſept.

NON diſſimili argumẽto demonſtrabimus & K,L,M, eſſe continuè proportionales; & eodem modo in aliis procedemus. Igitur ſi ſint quotlibet numeri deinceps proportionales, & multiplicans quiſque ſeipſum, &c. Quod oſtendendum erat.

SCHOLIVM.

SVNT autem, vt ex demonſtratione liquet, numeri primo loco producti D,E,F, proportionales in duplicata ratione datorum numerorum A,B,C. Nam D, ad E, habet proportionem duplicatam eius, quam habet D, ad N, hoc eſt, A, ad B, &c.

ITA quoq; numeri ſecundo loco geniti G,H,I, erunt in ratione triplicata A, ad B: Et numeri tertio loco procreati in quadruplicata, & ſic deinceps ſemper vno amplius.

BREVIVS propoſitionem totam demonſtrabimus, hac ratione. Fiant ex A,B,C, continuè proportionalibus in ſeipſos, numeri D, E, F; & in hos ex eiſdem numeri G,H,I; & rurſum ex eiſdem in hos numeri K, L,M. Dico D,E,F; & G,H,I; & K,L,M, eſſe quoq; continuè proportionales. Nam ex ſcholio propoſ. 9. huius lib. tam A,D,G,K, quàm B,E,H,L; & C,F,I,M, continuè ſunt ab vnitate proportionales. Quare ex 1. theor. ſcholij propoſ. 10. huius lib. erit D, ad E, in duplicata ratione A, ad B, vel B, ad C. Sed eiuſdem rationis B, ad C, duplicata eſt ratio E, ad F, per idem theorema. Igitur D,E,F, continuè ſunt proportionales in duplicata ratione A, ad B, & B, ad C. Eodem modo oſtendemus G,H,I, eſſe proportionales continuè in triplicata ratione rationis A, ad B, & B, ad C: At verò K,L,M, in quadruplicata, atq; ita de cæteris.

A, 2. B, 4. C, 8.
D, 16.
E, 4. F, 16. G, 64.
H, 256.
I, 8. K, 64. L, 512. M, 4096.

EX qua rurſum demonſtratione apparet, numeros primo loco productos, eſſe in duplicata ratione datorum numerorum; ſecundo verò loco procreatos, in triplicata, &c. Id quod luce clarius ex 1. theor. ſcholij propoſitionis 10. huius lib. elicitur.

QVAMVIS autem in vtraque demonſtratione huius propoſ. 13. dati ſint tantùm tres numeri continuè proportionales A,B,C; eandem tamen propoſitionem demonſtrabimus, etiamſi plures fuerint, q̃ tres. Sint namque numeri plures, q̃ tres A,B,C,D, continuè proportionales, qui ſe ipſos multiplicantes faciant E,F,G,H; poſtea verò multi-

a 13. octaui. *plicantes ipſos E,F,G,H, faciant I,K,L,M, & ſic deinceps. Quoniam igitur E,F,G, [a] ex demonſtratis proportionales*

tionales sunt: Item F,G,H; cùm illi producti sint ex A,B,C, proportionalibus in se ipsos: hi verò ex B,C,D, proportionalibus quoq; in se ipsos: Erunt E,F,G,H, continuè proportionales. Non secus proportionales erunt I,K,L,M; & alij deinceps eodem modo producti.

PROBL. 12. PROPOS. 14. 13.

Si quadratus numerus quadratum numerum metiatur: & latus vnius metietur latus alterius. Et si vnius quadrati latus metiatur latus alterius; & quadratus quadratum metietur.

METIATVR quadratus A, cuius latus C, quadratum B, cuius latus D. Dico & latus C, latus D, metiri. Multiplicantes enim se mutuò C, & D, faciant E. Quoniam igitur, vt liquet ex demonstratione propos. 11. huius libri, A, E, B, continuè proportionales sunt in ratione C, ad D; Metitur autem A, primus extremum B: [a] metietur quoque A, primus secundum E. Quare cùm sit vt A, ad E, ita C, ad D; & C, latus, latus D, metietur.

A, 4. E, 12. B, 36. C, 2. D, 6.

[a] 7. octani.

METIATVR iam C, latus, latus D. Dico & quadratũ A, quadratum B, metiri. Eodem enim modo erit, vt C, ad D, ita A, ad E, propterea quòd A, E, B, continuè proportionales sunt in ratione C, ad D, vt demonstratum est propos. 11. huius lib. Quare cùm C, metiatur D, metietur quoque A, primus E, secundum; ac proinde & extremum B, metietur, ex theor. 2. scholij propos. 6. huius lib. Si quadratus ergo numerus quadratum numerum metiatur, &c. Quod erat ostendendum.

THEOR. 13. PROPOS. 15. 14.

Si cubus numerus cubum numerum metiatur; & latus vnius metietur latus alterius. Et si latus vnius cubi latus alterius metiatur; & cubus cubum metietur.

METIATVR cubus A, cuius latus C, cubum B, cuius latus D. Dico & latus C, metiri latus D. Vterque enim C, & D, seipsum multiplicans faciat E, & F; multiplicantes autem se mutuò faciant G: Multiplicantes denique G, faciant H, I. Quoniam igitur, vt apparet ex demonstratione propos. 12. huius lib. tam E, G, F, quàm A, H, I, B, continuè sunt proportionales in ratione C, ad D; Metitur autem A, primus B, extremum; metietur quoque idem A, primus H, secundum. Cùm ergo sit, vt A, ad H, ita C, ad D; metietur & C, latus, latus D.

A, 8. H, 24. I, 72. B, 216. E, 4. G, 12. F, 36. C, 2. D, 6.

[b] 7. octani.

METIATVR iam C, latus, latus D. Dico & A, cubum, metiri cubum B. Eodem enim argumento erit, vt C, ad D, ita A, ad H, propterea quòd A, H, I, B, continuè proportionales sunt in ratione C, ad D, vt ostensum est propos. 12. huius lib. Quapropter cùm latus C, metiatur latus D, metietur & A, ipsum H; atque idcirco & extremum B, cubus cubum, ex iis, quæ ad propos. 6. huius libri demonstrauimus. Itaq; si cubus numerus cubum numerũ metiatur, &c. Quod erat demonstrandũ.

THEOR. 14. PROPOS. 16. 15.

Si quadratus numerus quadratum numerum nõ metiatur; neque latus vnius metietur alterius latus. Et si latus vnius quadrati non metiatur latus alterius, neque quadratus quadratum metietur.

SINT quadrati A, & B, quorũ latera C, & D; Non metiatur autem A, ipsum B. Dico neque C, latus metiri latus D. Si enim fieri potest, metiatur C, ipsum D. Quia igitur C, latus quadrati A, metitur D, latus quadrati B; [c] metietur & quadratus A, quadratum B. Quod est absurdum; Ponitur enim non metiri. Non ergo latus C, metitur latus D.

A, 16. B, 81. C, 4. D, 9.

[c] 14. octani.

SED iam latus C, non metiatur latus D. Dico quòd nec quadratus A, quadratum B, metietur. Si namque A, metiri dicatur ipsum B; [d] metietur quoque C, latus illius, latus huius D. Quod est absurdum. Ponitur enim non metiri. Igitur quadratus A, quadratum B, non metietur. Quapropter si quadratus numerus quadratum numerum non metiatur, &c. Quod erat ostendendum.

[d] 14. octani.

THEOR. 15. PROPOS. 17. 15.

Si cubus numerus cubum numerum non metiatur: neque latus vnius latus alterius metietur. Et si latus cubi vnius latus alterius non metiatur: neque cubus cubum metietur.

SINT cubi A, & B, quorum latera C, & D; Non metiatur autem A, ipsum B. Dico quòd nec latus C, latus D, metietur. Si enim C, dicatur metiri D; [e] metietur quoque A, cubus cubum B. Quod est absurdum, cùm ponatur non metiri. Non ergo latus C, latus D, metietur.

A, 8. B, 27. C, 2. D, 3.

[e] 15. octani.

Sed iam C, latus, non metiatur latus D. Dico quòd nec cubus A, cubũ B, metietur. Nàm si metiri dicatur; [a] metietur etiam C, latus, latus D. Quod eſt abſurdum. Ponitur enim nõ metiri. Non igitur A, cubus, cubum B, metietur. Quocirca, ſi cubus numerus, cubum numerum non metiatur, &c. Quod demonſtrandum erat.

a 15. octaui.

SCHOLIVM.

Proxime antecedentes quatuor propoſitiones hoc etiam modo proponi poſſunt, ſi maiores numeri ad minores referantur.

Si quadratus numerus quadrati numeri, & cubus cubi, ſit multiplex; & vnius latus lateris alterius multiplex erit. Et ſi vnius quadrati, & cubi latus lateris alterius ſit multiplex; & quadratus quadrati, & cubus cubi multiplex erit. Si verò quadratus quadrati, & cubus cubi nõ ſit multiplex; neq; latus lateris erit multiplex. Et ſi latus lateris non ſit multiplex; neque quadratus quadrati, neque cubus cubi erit multiplex.

Nam ſi quadratus A, quadrati B, & cubus A, cubi B, ſit multiplex; metietur B, quadratus quadratum A, & cubus B, cubum A. [a] *Igitur & latus D, latus C, metietur; ac proinde latus C, lateris D, multiplex erit.*

a 14. & 15. octaui.

A, 36. B, 9.
C, 6. D, 3.

Quod ſi latus C, lateris D, multiplex ſit, metietur latus D, latus C. [b] *Igitur & B, ipſum A, quadratus quadratum, & cubus cubũ metietur; Ac propterea A, ipſius B, quadratus quadrati, & cubus cubi, erit multiplex.*

b 14. & 15. octaui.

A, 64. B, 8.
C, 4. D, 2.

At verò ſi A, ipſius B, quadratus quadrati, & cubus cubi, nõ ſit multiplex; non metietur B, ipſum A, quadratus quadratum, aut cubus cubum. [c] *Igitur neque latus D, latus C, metietur. Quare C, latus lateris D, non erit multiplex.*

c 16. & 17. octaui.

A, 49. B, 9.
C, 7. D, 3 1.

Similiter ſi C, latus lateris D, non ſit multiplex; non metietur D, latus, latus C. [d] *Igitur nec B, ipſum A, quadratus quadratum, nec cubus cubum metietur. Atq; adeò A, ipſius B, quadratus quadrati, & cubus cubi, multiplex non erit.*

d 16. & 17. octaui.

A, 125. B, 8.
C, 5. D, 2.

16. THEOR. 16. PROPOS. 18.

Dvorvm ſimilium planorum numerorum vnus medius proportionalis eſt numerus: Et planus ad planum duplicatam habet lateris homologi ad latus homologum rationem.

Sint plani numeri ſimiles A, B, & latera illius ſint C, D, huius verò illis proportionalia E, F ita vt C, D, ſe mutuò multiplicãtes faciant A; & E, F, mutuò ſe multiplicãtes faciant B; ſitq; vt C, ad D, ita E, ad F. Dico inter A, & B, cadere vnum numerũ medium proportionalem, & proportionẽ A, ad B, eſſe duplicatam proportionis laterum homologorum C, E, vel D, F. Multiplicantes enim ſe mutuò D, E, faciant G. Quoniam igitur eſt C, ad D, vt E, ad F; erit permutando C, ad E, vt D, ad F. Et quia D, multiplicans C, & E, fecit A, & G; [a] erit A, ad G, vt C, ad E, hoc eſt, vt D, ad F. Similiter quia E, multiplicãs D, & F, fecit G, & B; [b] erit quoque G, ad B, vt D, ad F. Proportionales ergo ſunt A, G, B, in ratione C, ad E, vel D, ad F. Atque adeò inter A, & B, medius proportionalis cadit G.

A, 12. G, 18. B, 27.
C, 6. D, 2. E, 9. F, 3.

a 17. ſept.
b 17. ſept.

Quia verò, cùm A, G, B, ſint continuè proportionales, A, ad B, duplicatam habet rationẽ eius, quam habet A, ad G, hoc eſt, C, ad E, vel D, ad F; perſpicuum eſt proportionem numeri plani A, ad planum B, eſſe duplicatam eius, quã habet C, ad E, vel D, ad F, latus homologum ad latus homologum. Duorum igitur ſimilium planorum numerorum, &c. Quod erat demonſtrandum.

SCHOLIVM.

Quia oſtenſum eſt A, G, B, eſſe proportionales in ratione C, ad E, vel D, ad F; manifeſtum eſt, inter duos ſimiles planos A, & B, cadere medium proportionalem G, in ratione laterum homologorum C, E, vel D, F, aſſumptorum.

Constat etiam ex dictis, *medium proportionalem G, & vtrumlibet planorum A, B, eſſe inter ſe compoſitos. Cùm enim oſtenſi ſint A, G, B, proportionales in ratione C, ad E, vel D, ad F, id eſt, eſſe A, ad G, & G, ad B, vt C, ad E, vel D, ad F; metiantur autem E, F, latera numerum B, cuius ſunt latera, conſequentes conſequentem, ſi de proportionibus G, ad B, & C, ad E, vel D, ad F, loquamur; metientur quoque C, D, ipſum G, antecedentes antecedentem, quòd ſit G, ad B, vt C, ad E, vel D, ad F. Atqui & C, D, latera metiuntur numerum A, cuius ſunt latera. Igitur G, A, menſuram communem habent tam C, quàm D; Ac proinde compoſiti ſunt inter ſe. Rurſus cùm ſit A, ad G, vt C, ad E, vel D, ad F: metiantur autem C, D, latera ſuum planum A, antecedentes antecedentem; metientur etiam E, F, ipſum G, conſequentes conſequentem. Quare cùm & E, F, latera ſuum planum B, metiantur, habebunt G, B, communem menſuram tam E, quàm F, ideoq; erunt inter ſe compoſiti.*

Ex qua demonſtratione etiam manifeſtum relinquitur, priorum duorum numerorum A, G, communes menſuras eſſe C, D, latera prioris plani A; poſteriorum autem G, B, menſuras communes eſſe E, F, latera plani poſterioris B.

THEORE-

THEOR. 17. PROPOS. 18.

18.

DVORVM ſimilium ſolidorum numerorum duo mèdij proportionales ſunt numeri: Et ſolidus ad ſolidum triplicatam rationem habet lateris homologi ad latus homologum.

SINT ſolidi numeri ſimiles A, B, & latera illius ſint C, D, E, huius verò illis proportionalia F, G, H, ita vt ſit C, ad D, quemadmodum F, ad G; & D, ad E, ſicut G, ad H. Dico inter A, & B, cadere duos medios proportionales, & proportionem A, ad B, eſſe triplicatam eius, quam habent latera homologa C, F, vel D, G, vel E, H. Multiplicantes enim ſe mutuò C, D, faciant I; & F, G, ſe mutuò multiplicantes faciãt K. Item D, F, ſe mutuò multiplicãtes faciant L. Poſtremò E, H, ipſum L, multiplicantes faciant M, N. Quia igitur C, D, E, ipſis F, G, H, proportionales ſunt; erunt & permutando proportionales: nimirum vt C, ad F, ita D, ad G, & E, ad H. Quoniam verò D, multiplicans C, & F, fecit I, & L; [a] erit vt C, ad F, ita I, ad L. Simili modo, quia F, multiplicans D, & G, fecit L, & K; [b] erit quoque vt D, ad G, ita L, ad K. Sunt ergo I, L, K, continuè proportionales in ratione C, ad F, vel D, ad G, vel E, ad H. Et quoniam A, ſolidus factus eſt ex mutua multiplicatione laterum C, D, E; factus eſt autem I, ex multiplicatione mutua C, D; fit vt E, multiplicans I, faciat A. Eodem modo cùm B, ſolidus factus ſit ex mutua multiplicatione laterum F, G, H; & K, factus ex mutua multiplicatione F, G; numerus H, ipſum K, multiplicans faciet B. Quare cùm E, multiplicans I, & L, fecerit A, & M, [c] erit A, ad M, vt I, ad L, hoc eſt vt C, ad F, vel D, ad G, vel E, ad H. Eadẽ ratione, cùm H, multiplicans L, K, fecerit N, & B; [d] erit N, ad B, vt L, ad K, hoc eſt, vt C, ad F, vel D, ad G, vel E, ad H. [e] Eſt autem & M, ad N, vt E, ad H; quòd E, H, multiplicantes L, fecerint ipſos M, & N. Igitur A, M, N, B, continuè ſunt proportionales in ratione C, ad F, vel D, ad G, vel E, ad H; Atque idcirco inter A, B, ſolidos ſimiles duo medij M, N, continuè proportionales cadunt.

a 17. ſepтimi
b 17. ſept.
c 17. ſept.
d 17. ſept.
e 18. ſept.

QVONIAM verò, cùm A, M, N, B, ſint proportionales continuè; proportio A, B, triplicata eſt eius, quam habet A, ad M. Eſt autem A, ad M, vt C, ad F, vel D, ad G, vel E, ad H; Habebit quoque A, ad B, ſolidus ad ſolidum, proportionem triplicatam eius, quam habet C, ad F, vel D, ad G, vel E, ad H, latus ad latus homologum. Quocirca, Duorum ſimilium ſolidorum numerorum duo medij, &c. Quod oſtendendum erat.

SCHOLIVM.

CVM demonſtratum ſit A, M, N, B, proportionales eſſe in ratione C, ad F, vel D, ad G, vel E, ad H; liquet inter duos ſimiles ſolidos A, & B, cadere duos medios proportionales M, & N, in ratione laterum homologorum C, F, vel D, G, vel E, H, aſſumptorum.

EX iis, quæ dicta ſunt, perſpicuum etiam eſt, duos medios proportionales M, N, & vtrumlibet ſolidorum A, B, inter ſe eſſe compoſitos. Cùm enim A, M, N, B, oſtenſi ſint proportionales in ratione C, ad F, vel D, ad G, vel E, ad H, hoc eſt, eſſe A, ad M, & M, ad N, & N, ad B, vt C, ad F, vel D, ad G, vel E, ad H; metiantur autem F, G, H, latera ſuum ſolidum B, conſequentes conſequentem, ſi de proportionibus N, ad B, & C, ad F, vel D, ad G, vel E, ad H, loquamur; metientur quoq; C, D, E, ipſum N, antecedentes antecedentem, quòd ſit N, ad B, vt C, ad F, vel D, ad G, vel E, ad H. Atqui & C, D, E, ipſum M, metiuntur; (Cùm enim M, factus ſit, per conſtructionem, ex E, in L, metietur E, ipſum M. Deinde quia M, N, B, proportionales ſunt ipſis I, L, K; metitur autem K, ipſum B, quòd B, factus ſit ex K, in H; metietur quoque I, ipſum M; Metiuntur autem & C, D, latera planum ſuum I. [a] *Igitur & C, D, metientur ipſum M; Atq; adeò C, D, E, ipſum M, metientur.)* a 11. pron. *Nec non & ipſum A, nimirum latera ſolidum ſolidum. Ergo A, M, N, habent communem menſuram tam C, quàm D, quàm E; Ideoq; compoſiti inter ſe ſunt. Rurſus quia eſt A, ad M, vt C, ad F, vel D, ad G, vel E, ad H; metiuntur autem C, D, E, latera ſolidum ſuum A; antecedentes antecedentem metientur quoq; F, G, H, ipſum M, conſequentes conſequentem. Metiuntur verò & F, G, H, ipſum N; (Cùm enim N, factus ſit ex H, in L, per conſtructionẽ; metietur H, ipſum N. Deinde quia A, M, N, ipſis I, L, K, proportionales ſunt: metitur autem I, ipſum A, quòd A, factus ſit ex I, in E; metietur etiam K, ipſum N. Cùm ergo & F, G, latera metiantur planum ſuum K; metientur quoque F, G, ipſum N; atque adeò F, G, H, ipſum N, metientur.) Nec non & ipſum E, nimirum latera ſuum ſolidum. Igitur M, N, B, communem habent menſurã tam F, quàm G, quàm H. Quare ſunt inter ſe compoſiti. Ex quibus liquidò conſtat, priorum trium numerorum A, M, N, communes eſſe menſuras C, D, E, latera prioris ſolidi A; At verò F, G, H, latera poſterioris ſolidi B, communes menſuras eſſe poſteriorum trium numerorum M, N, B.*

A, 30. M, 60. N, 120. B, 240.
I, 6. L, 12. K, 24.
C, 2. D, 3. E, 5. F, 4. G, 6. H, 10.

QVIA verò ſolidus numerus tria latera habet, ex quorũ mutua multiplicatione gignitur, demonſtremus hoc loco, eandem numerũ ſolidũ procreari, ſiue primũ latus ducatur in ſecundũ, & numerus procreatus in tertium; ſiue primum in tertium, & numerus genitus in ſecundum; ſiue denique ſecundum in tertium.

& productus numerus in primum: Quin etiam propoſitis quotuis numeris, eundem ſemper numerum gigni ex eorum multiplicatione mutua, quomodocunq; ordinem inter ſe permutent. Quæ quidem res magnum vſum habet in rebus Arithmeticis. Proponatur ergo eiuſmodi theorema.

DATIS quotlibet numeris, procreabitur ex eorum mutua multiplicatione idem ſemper numerus, quomodocunque ordinem inter ſe permutent.

SINT primùm tres numeri dati A, B, C, & ex A, in B, fiat D; & ex D, in C, fiat E. Dico eundem E, procreari, ſi ex A, in C, fiat F, & F, in B, multiplicetur: Item ſi ex B, in C, fiat G, & G, in A, multiplicetur. Quoniam enim C, multiplicans D, facit E; [a] erit vt E, ad D, ita C, ad vnitatem: Sed vt C, ad vnitatem, [b] ita quoque eſt F, ad A; quòd A, multiplicans C, faciat F. Igitur erit vt E, ad D, ita F, ad A: Vt autem D, ad B, [c] ita eſt A, ad vnitatem; propterea quòd A, multiplicans B, facit D. Igitur ex æqualitate erit, vt E, ad B, ita F, ad vnitatem: [d] atque idcirco numerus ex E, in vnitatem factus, hoc eſt, ipſemet numerus E, æqualis erit numero facto ex B, in F, productum ex A, in C. Quemadmodum igitur numerus E, fit ex A, in B, & ex producto in C; ita idem E, fit ex A, in C, & ex producto in B. Quod eſt primum.

a 15. defin.
b 15. defin.
c 15. defin.
d 19. ſepti.

E, E,
D, A,
B, vnitas.

RVRSVS quia ex C, in D, fit E; [e] erit vt E, ad D, ita C, ad vnitatem: Sed vt C, ad vnitatem, [f] ita etiam eſt G, ad B, eò quòd G, factus eſt ex B, in C. Igitur erit, vt E, ad D, ita G, ad B: Vt autem D, ad A, [g] ita eſt B, ad vnitatem, propterea quòd D, factus eſt ex A, in B. Igitur ex æquo erit vt E, ad A, ita G, ad vnitatem: [h] ac proinde numerus factus ex E, in vnitatem, id eſt, ipſemet numerus E, æqualis erit numero genito ex A, in G, producto ex B, in C. Quemadmodum igitur E, gignitur ex A, in B, & ex producto in C; ita idem E, procreatur ex B, in C, & ex producto in A. Quod eſt ſecundum.

e 15. defin.
f 15. defin.
g 15. defin.
h 19. ſept.

E, G,
D, B,
A, vnitas.

SINT deinde quatuor numeri A, B, C, D: atque ex A, in B, & ex producto in C, & ex producto in D, fiat E. Dico eundem E, gigni ex A, in B, & ex producto in D, & ex producto in C: Item ex A, in C, & ex producto in B, & ex producto in D: Item ex A, in C, & ex producto in D, & ex producto in B: Item ex A, in D, & ex producto in B, & ex producto in C: Itẽ ex A, in D, & ex producto in C, & ex producto in B: Itẽ ex B, in C, & ex producto in A, & ex producto in D: Item ex B, in C, & ex producto in D, & ex producto in A: Itẽ ex B, in D, & ex producto in A, & ex producto in C: Item ex B, in D, & ex producto in C, & ex producto in A: Item ex C, in D, & ex producto in A, & ex producto in B: Item ex C, in D, & ex producto in B, & ex producto in A; ita vt prater primam multiplicationem, qua omnes quatuor numeri ordinatim multiplicantur inter ſe, fiant 11. multiplicationes diuerſa producentes eundem ſemper numerum. Quoniam enim, vt in tribus oſtenſum eſt, idem numerus ſit, ſiue genitus numerus ex A, in B, ducatur prius in C, deinde hic productus in D; ſiue prius in D, deinde hic productus in C, conſtat id, quod primo loco proponitur.

A, 2. B, 3. C, 4. D, 5.
E, 120.

DEINDE, quia vt in tribus eſt oſtenſum, idem numerus ſit ex A, in B, & ex producto in C, qui ſit ex A, in C, & ex producto in B, perſpicuum eſt, eundem numerum gigni tum ex A, in B, & ex producto in C, & ex producto in D, tum ex A, in C, & ex producto in B, & ex producto in D. quod eſt ſecundum.

TERTIO, quoniam, vt in tribus eſt oſtenſum, idem numerus procreatur, ſiue genitus ex A, in C, ducatur prius in B, deinde hic productus in D; ſiue prius in D, deinde hic productus in B, patet eundem generari numerum tum ex A, in C, & ex producto in B, & ex producto in D, tum ex A, in C, & ex producto in D, & ex producto in B. Cùm ergo ille ſit æqualis proximè oſtenſus prime producto, erit & hic æqualis eidem. quod eſt tertium.

QVARTO, quia, vt in tribus oſtenſum eſt, idẽ numerus ſit ex A, in B, & ex producto in D, qui ex A, in D, & ex producto in B; gignetur quoq; idẽ numerus ex A, in B, & ex producto in D, & ex producto in C, qui ex A, in D, & ex producto in B, & ex producto in C. Sed ille oſtenſus eſt primo loco æqualis ei, qui ſit ex A, in B, & ex producto in C, & ex producto in D. Igitur & hic. Quod eſt quartum.

QVINTO, quoniam vt demonſtratum eſt in tribus, idem numerus gignitur ex A, in C, & ex producto in D, qui ex A, in D, & ex producto in C; producetur idem numerus ex A, in C, & ex producto in D, & ex producto in B, qui ex A, in D, & ex producto in C, & ex producto in B. Cũ ergo ille ſit oſteſus tertio loco æqualis ei, qui ſit ex A, in B, & ex producto in C, & ex producto in D, erit & hic eidem æqualis. Quod eſt quintum.

SEXTO, quia, vt in tribus demonſtrauimus, idem numerus ſit ex A, in B, & ex producto in C, qui ſit ex B, in C, & ex producto in A liquet eundem procreari numerum tam ex A, in B, & ex producto in C, & ex producto in D, quàm ex B, in C, & ex producto in A, & ex producto in D. Quod eſt ſextum.

SEPTIMO, quia, vt in tribus oſtendimus, idẽ numerus gignitur, ſiue productus ex B, in C, ducatur prius in A, deinde hic ꝓductus in D, ſiue prius in D deinde hic ꝓductus in A; cõſtat eundẽ numerũ fieri ex B, in C, & ex ꝓducto in D. & ex ꝓducto in A qui ſit ex B in C, & ex ꝓducto in A, & ex ꝓducto in D. Sed hic ꝓximè oſteſus eſt æqualis ei, q ſit ex A, in B, & ex ꝓducto in C, & ex ꝓducto in D. Igitur & ille ꝓ eſt ſeptimum.

OCTAVO, quia, vt in tribus oſtenſum eſt, idem numerus procreatur ex A, in B, & ex producto in D, qui ex B, in D, & ex producto in A; gignetur quoq; idẽ numerus ex A, in B, & ex ꝓducto in D, & ex ꝓducto in C,

qui-

qui ex B,in D,& ex producto in A,& ex producto in C. Sed ille primo loco oſtenſus eſt æqualis ei, qui fit ex A, in B,& ex producto in C,& ex producto in D. Igitur & hic. Quod eſt octauum.

NONO, quia, vt demonſtratum eſt in tribus, idem numerus fit ex B,in C,& ex producto in D, qui ex B, in D,& ex producto in C; procreabitur idem quoq; numerus ex B,in C, & ex producto in D, & ex producto in A,qui ex B,in D,& ex producto in C,& ex producto in A. Sed ille oſtenſus eſt ſeptimo loco æqualis ei, qui fit ex A,in B,& ex producto in C,& ex producto in D. Ergo & hic. Quod eſt nonum.

A,2. B,3. C,4. D,5. E,120. *DECIMO, quoniam, vt in tribus eſt demonſtratum, idem gignitur numerus ex A,in C,& ex producto in D,qui ex C,in D,& ex producto in A; producetur quoque idem numerus ex A,in C,& ex producto in D,& ex producto in B, qui ex C in D, & ex producto in A, & ex producto in B. Sed ille, vt tertio loco eſt oſtenſum, æqualis eſt ei, qui fit ex A,in B, & ex producto in C,& ex producto in D. Igitur & hic. Quod eſt decimum.*

POSTREMO, quoniam, vt oſtenſum eſt in tribus, idem numerus gignitur ex B,in C, & ex producto in D. qui ex C,in D,& ex producto in B; procreabitur quoque idem numerus ex B, in C,& ex producto in D, & ex producto in A,qui ex C,in D,& ex producto in B,& ex producto in A. Sed ille ſeptimo loco oſtenſus eſt æqualis ei, qui fit ex A,in B,& ex producto in C,& ex producto in D. Igitur & hic eidem æqualis erit. Quod eſt vndecimum.

EODEM argumentandi modo vtendum eſt in quinque vel pluribus numeris; dummodo interdum in quinque aſſumatur id, quod iam in quatuor demonſtratum eſt; & in ſex, quod in quinque, &c. Vt in quinque numeris A,B,C,D,E, apparet, quorum ordinem ter immutauimus, idemq; ſemper numerus ex continua eorum multiplicatione inter ſe procreatur. Nam productus ex A, in B, cum C,D,E, conſtituit quatuor numeros. Ergo quomodocunque inter ſe ordinem permutent, eundem ſemper gignent numerum: ac proinde tam ſecundus ordo, quàm tertius, eundem numerum producet, quem primus. Item quia tres numeri, A,B,C, quomodocunque ordinem commutent, eundem efficiunt numerum: fit vt quartus ordo eundem prorſus numerum procreet, quem primus, & ſic de cæteris.

A. B. C. D. E.
A. B. C. E. D.
A. B. E. D. C.
B. C. A. D. E.

THEOR. 18. PROPOS. 20. 17.

SI inter duos numeros vnus medius proportionalis cadat numerus; Similes plani erunt illi numeri.

CADAT inter A, & B, medius proportionalis C. Dico A, & B, eſſe planos ſimiles. Sumantur D,& E, minimi in ratione A,C,B. Quia igitur D,E, minimi ſunt in ratione A,ad C; [a] metientur D, & E, ipſos A,& C, æquè: metiantur per F. Similiter æquè metiẽtur ipſos C, & B: metiantur per G. [b] Itaque F, multiplicans D, & E, faciet A,& C, [c] Item G, eoſdem D, & E, multiplicans faciet C,& B. Quia ergo E, multiplicans F,& G, fecit C,& B; [d] erit, vt C,ad B, ita F,ad G: Vt autem C,ad B ita erat D,ad E. Igitur erit vt D,ad E, ita F,ad G; & permutando vt D, ad F, ita E,ad G. Quoniam verò F, multiplicans D, fecit A; erit A, planus, cuius latera D,F. Simili modo, quia G, multiplicans E, fecit B; erit & B, planus cuius latera E, G. Cùm ergo hæc latera oſtenſa ſint eſſe proportionalia, hoc eſt, D, ad F, vt E, ad G; erunt ex defin. A,B, plani ſimiles. Quare ſi inter duos numeros vnus, &c. Quod demonſtrandum erat.

A,18. C,24. B,32.
D,3. E,4. F,6. G,8.

[a] 21. *ſeptimi*
[b] 9. *pron.*
[c] 9. *pron.*
[d] 17. *ſeptimi*

THEOR. 19. PROPOS. 21. 19.

SI inter duos numeros duo medij proportionales cadant numeri; Similes ſolidi ſunt illi numeri.

CADANT inter A,& B, duo medij proportionales C, D. Dico A, & B, eſſe ſimiles ſolidos. Sumantur tres E,F,G, minimi in ratione A,C,D,B. Quoniam igitur inter E,& G, medius cadit proportionalis F, [e] erunt E,& G, plani ſimiles: ſint ipſius E, latera H, I; ipſius verò G, latera illis proportionalia K, L. Et quia E, F, G, cùm minimi ſint in ratione A, C, D, [f] æquè metiuntur ipſos A,C,D, eiuſdem rationis cum illis; metiantur per M. Eodemque modo, [g] quia E,F,G, minimi æquè metiuntur C,D,B, eandem habentes rationem cum illis; metiantur per N; [h] ita vt M, multiplicans E,F,G, faciat A,C,D; & N, multiplicans eoſdem E, F, G, faciat C,D,B. Factus eſt autẽ E, ex multiplicatione mutua ſuorum laterum H, & I: nec non G, ex mutua multiplicatione ſuorum laterum K, & L. Igitur A, producitur ex mutua multiplicatione H,I,M; & B, ex mutua multiplicatione K,L,N; atq; adeò A, ſolidus eſt numerus, ex defin. latera habẽs H,I,M; & B, ſolidus etiã, latera habens K,L,N. Quia verò M,& N, multiplicãtes F, faciũt C,& D, vt oſtẽdimus; [i] erit C,ad D, vt M,ad N: [k] Sunt autẽ C,& D, in eadẽ ratione, in qua E,& F; & N, multiplicãs E,& F, fecerit ipſos C,& D; Nec nõ & E,F, eandẽ habent rationẽ, quam H,K, vel I,L. Etenim inter planos ſimiles E,G, cadit F, medius proportionalis, per coroll. propoſ. 19. huius lib. in ratione laterum ho-

A,24. C,72. D,216. B,648.
E,1. F,3. G,9.
H,1. I,1. M,24. K,3. L,3. N,72.

A,8. C,12. D,18. B,27.
E,4. F,6. G,9.
H,2. I,2. M,2. K,3. L,3. N,3.

[e] 20. *octaui.*
[f] 21. *ſeptimi*
[g] 21. *ſeptimi*
[h] 9. *pron.*
[i] 18. *ſeptimi*
[k] 17. *ſeptimi*

mologorum H,K, vel I,L. Igitur erit quoque H, ad K, & I, ad L, vt M, ad N; & permutando H, ad I, vt K, ad L; & I, ad M, vt L, ad N. Proportionalia ergo ſunt latera H, I, M, lateribus K, L, N; ac propterea ſimiles ſunt numeri ſolidi A, & B. Quam ob rem, ſi inter duos numeros duo medij proportionales cadant numeri, &c. Quod erat demonſtrandum.

SCHOLIVM.

DVO exempla appoſuimus, in quorum priori liquidò conſtat, vnitatem E, eſſe planum numerum, & vnitates H, I, eius latera, licet impropriè, vt in definitione numeri plani monuimus. Si enim vnitatem à numeris planis excludamus, non poterimus hac argumentatione Euclidis demonſtrare, numeros A, & B, qui includunt duos medios proportionales C, & D, eſſe ſolidos ſimiles. Quod idem continget in aliis omnibus numeris, qui habent duos medios proportionales in ratione multiplici, cuiuſmodi ſunt etiam A, B, in eodem prioris exemplo. Hoc autem eſt abſurdum, cùm Euclides propoſitionem generaliter proponat, eamq; ſine vlla exceptione demonſtret.

20. THEOR. 20. PROPOS. 22.

SI tres numeri deinceps ſint proportionales, primus autem ſit quadratus; Et tertius quadratus erit.

A,9. B,54. C,324. SINT tres numeri A, B, C, continuè proportionales, ſitque primus eorum A, quadratus. Dico & tertium C, quadratum eſſe. Nam cùm inter A; & C, cadat medius proportionalis; [a] erunt A, & C, plani ſimiles. Quare exiſtente A, quadrato, erit & C, ei ſimilis, quadratus. Si igitur tres numeri deinceps ſint proportionales, &c. Quod demonſtrandum erat.

a 20. octaui.

21. THEOR. 21. PROPOS. 23.

SI quatuor numeri deinceps ſint proportionales, primus autem ſit cubus; Et quartus cubus erit.

A,27. B,45. C,75. D,125. SINT quatuor numeri A, B, C, D, proportionales continuè, & A, primus ſit cubus. Dico & quartum D, cubum eſſe. Cum enim inter A, & D, cadant duo medij proportionales B, C; [b] erunt A, & D, ſolidi ſimiles. Quare exiſtente A, cubo, erit & D, illi ſimilis, cubus. Quam ob rem, ſi quatuor numeri deinceps ſint proportionales, &c. Quod erat oſtendendum.

b 21. octaui.

SCHOLIVM.

HAEC eſt apud omnes interpretes Euclidis, quos ego vidi, vulgata demonſtratio precedentium duarum propoſitionũ; quam qui diligenter examinare velit, inueniet ſanè mancam eſſe, & imperfectam. Cùm enim ad defin. 21. lib. 7. tradiderimus, duos numeros planos, vel ſolidos poſſe ſimiles eſſe, quamuis non quibuſcunq; lateribus vnius exhiberi poſſint alia latera alterius proportionalia; dummodo quibuſdam lateribus vnius proportionalia ſint quædam alterius; Iure optimo quis inficiari poterit, ſi duorum planorum ſimilium vnus fuerit quadratus, alterum quoq; quadratum eſſe: & ſi duorum ſimilium ſolidorum vnus cubus fuerit, alterum etiam eſſe cubum: quod tamen in demonſtratione pro conceſſo, atque omnibus perſpicuo aſſumebatur. Nam poſitis duobus numeris planis 36. & 64. ſimilibus, ſatis eſt, vt duobus lateribus prioris, qualia ſunt 3. & 12. exhibeantur alia duo latera poſterioris, nimirũ 4. & 16. proportionalia. Vnde etiamſi prior ſit quadratus, habens duo latera æqualia 6. & 6. meritò dubitare quis poſſit, immò omnino negare, poſteriorem habere alia duo latera his proportionalia, hoc eſt, inter ſe quoque æqualia, atque adeò eſſe quadratum: quemadmodum etiam manifeſtum eſt, hiſce lateribus prioris 4. & 9. vel 2. & 18. non reſpondere alia latera in poſteriori proportionalia. Si igitur his lateribus prioris numeri non reperiuntur alia lateta in poſteriori proportionalia, quanquam ipſi numeri ſint ſimiles; cur ſine demonſtratione vlla concedemus, his lateribus prioris æqualibus 6. & 6. aſſignari poſſe in poſteriori alia duo proportionalia, videlicet & inter ſe æqualia? Idem dicendum eſt de ſolidis ſimilibus. Quapropter vtramque propoſitionem Euclidis aliter demonſtrabimus, ad hunc, qui ſequitur, modum.

SINT tres numeri A, B, C, continuè proportionales, & primus A, quadratus. Dico & C, tertium eſſe quadratum. Sumpto enim D, latere quadrati A; cum D, ex defin. in ſe faciat A; erunt D, & A, ex ſcholio propoſ. 9. huius lib. ab vnitate continuè proportionales; eritq; conuertendo A, ad D, vt D, ad vnitatem; atque adeò cùm inter numerum A, eundem, & tam numerum C, quàm vnitatem, cadant medij proportionales multitudine æquales, nimirum vnus; cadent quoq; totidem; ex theor. 3. ſcholij propoſ. 10. huius libri, inter vnitatem, atque C, numerum, nimirum vnus, qui ſit E. Quoniam igitur vnitas & E, C. numeri ſunt cõtinuè proportionales; producetur C, ex E, in ſe ipſum, ex ſcholio propoſ. 20. huius lib. Ac proinde C, quadratus erit, ex defin. cuius latus E.

A,36. B,48. C,64. D,6. E,8. vni-tas

ALITER. Sumptis tribus numeris, D, E, F, minimis in ratione A, ad B; & B, ad C; metietur D, ipſum E, & F, ipſum C, æquè, ex iis, quæ oſtendimus ad propoſ. 21. lib. 7. Et quoniam extremi D, F, minimorum trium numerorum,

A,36. B,48. C,64. numerorum, per coroll. 1. propos. 2. huius libri, sunt quadrati: Est autem & A,
G,18. H,32. quadratus, ex hypothesi; [a] cadet inter A, & D, quadratos medius vnus pr. por- a 11. octaui.
D,9. E,12. F,16. tionalis, vt G. Quia verò est, ex æquo, vt A, ad C, ita D, ad F: & permutando, vt
L.64. K,8. I,4. A, ad D, ita C, ad F; [b] cadet quoq; inter C, & F, vnus proportionalis medius, b 8 octaui.
nimirum H. Cùm ergo F, primus metiatur C, vltimum; [c] metietur idem & se- c 7. octaui.
cundum H. Sumpto autem I, latere quadrati F; metiatur I, toties numerum K, quoties F, ipsum H, metitur;
ita vt H, ad F; & K, ad I, eandem habeant proportionem multiplicem. Sit quoq; L, quadratus ipsius K. [d] Ita- d 11. octaui
que quia ratio L, ad F, quadrati ad quadratum, duplicata est rationis K, ad I, lateris ad latus, hoc est, H, ad F:
Est autem & ratio C, ad F, eiusdem rationis H, ad F, ex defin. duplicata, quòd conuertendo sint proportionales etiam C, H, F; erit L, ad F, vt C, ad F; Ac proinde L, & C, æquales sunt. Existente ergo L, quadrato, ex con-
structione, & C, quadratus erit.

ALITER. [e] Quoniam A, & C, similes plani sunt; sint eorum latera proportionalia, D, E, quidem ipsius e 20. octaui
A; at F, G, ipsius C; ita vt sit D, ad E, sicut F, ad G: assumatur q; H, latus quadrati A. Quoniam igitur idem numerus A, producitur ex D, in E, & ex H, in se,
A,36. B,48. C,64. [f] erunt D, H, E, continuè proportionales. Cùm ergo sit F, ad G, vt D, ad E; cadat f 20. septi-
H,6. I,8. [g] inter D & E, medius proportionalis H, & cadet quoq; inter F, & G, vnus mi.
D,3. E,12. F,4. G,16. medius proportionalis, qui sit I. Quare cùm F, I, G sint continuè proportionales; g 8. octaui.
A,36. B,48. C,64. [h] idem numerus fiet ex F, in G, qui ex I, in se ipsum. Fit autem C, ex F, in G. Igi- h 20. septi-
H,6. I,8. tur & idem C, fiet ex I, in se ipsum: At q; adeò C, quadratus erit, ex definitione, mi.
D,6. E,6. F,8. G,8. cuius latus I.

SINT rursum quatuor numeri A, B, C, D, continuè proportionales, & A, primus, sit cubus. Dico & D, quartum, cubum esse. Sumpto enim E, latere cubi A; fiat ex E, in seipsum numerus F, ac proinde, ex defin. ex
E in F, cubus A. Quia ergo E, in se facit F, & in F facit A erunt, ex
A,64. B,160. C,400. D,1000. scholio propos. 9. huius lib. E, F, A, continuè proportionales ab vni-
F,16. H,100. tate; at q; idcirco conuertendo proportionales quoq; erunt numeri
E,4. G,10. A F, E, & vnitas. Itaq; cùm tam inter numerum D, quam vnitatem,
vnitatem ac eundem numerum A cadant medij proportionales multitudine
æquales, videlicet duo; cadent, ex theorem. 3. scholij propos. 10. hu-
ius lib. totidem medij inter vnitatem, & numerum D, qui sint G, H. Itaque quia vnitas, & numeri G, H, D,
continuè sunt proportionales: fiet H, ex G, in se, & D, ex G in productum H, vt ad propos. 10. huius lib. à nobis
est demonstratum. Quare D, cubus est, ex definitione cuius latus G.

ALITER. Inuentis quatuor numeris minimis E, F G H, in ratione A, ad B, & B, ad C, & C, ad D, me-
tietur E, ipsum A, & H, ipsum D, æque, per ea, quæ ad propos. 21 lib. 7. demonstrauimus. Et quia E, H, extremi
quatuor minimorum, cubi sunt, ex 1. coroll. propos. 2. huius lib. Est
A,64. B,160. C,400. D,1000. autem & A, cubus, ex hypothesi; [i] cadent inter E, A, cubos duo me- i 12. octaui.
K,32. M.500. dij proportionales qui sint I, K. Quoniam autem, ex æquo, est vt A,
I,16. L,250. ad D, ita E, ad H; & permutando, vt A, ad E, ita D, ad H; [k] cadent k 8. octaui.
E,8. F,20. G,50. H,125. quoq; inter H D, duo medij proportionales, qui sint L, M. Cùm ergo
P,1000. O,10. N,5. H primus metiatur D, extremum, [l] metietur idem & L secundum. l 7. octaui.
Sumpto deinde N, latere cubi H; metiatur N, toties numerum O,
quoties H, ipsum L, ita vt L, ad H & O, ad N, eandem habeant proportionem multiplicem: fit quoque P, cu-
bus ipsius O. [m] Itaque cùm ratio P, ad H, cubi ad cubum, triplicata sit rationis O, ad N, lateris ad latus, hoc m 12. octaui
est L ad H: Sit autem & ratio D, ad H, eiusdem rationis L, ad H, ex defin. triplicatæ, quòd conuertendo pro-
portionales etiam sint D, M, L H, erit P, ad H, vt D, ad H; At propterea P, & D, æquales erunt. Quare cùm P,
cubus sit, ex constructione, cubus quoque erit D.

THEOR. 22. PROPOS. 24. 22.

SI duo numeri rationem habeant inter se, quam quadratus numerus ad quadratum numerum; primus autem sit quadratus, & secundus quadratus erit.

SIT enim A, ad B, vt C, quadratus ad quadratum D; sitq; A, quadratus. Dico & B, esse quadra-
tum. Cùm enim sit A, ad B, vt C, ad D; [a] cadat autem inter C, & D, qua- a 11. octaui.
A,36. F,48. B,64. dratos vnus medius proportionalis, videlicet E; [b] cedet quoque inter A, b 8. octaui.
C,9. E,12. D,16. & B, medius vnus, qui sit F. Quia igitur tres numeri sunt continuè pro-
portionales A, F, B; & A, primus est quadratus; [c] erit & B, tertius, quadra- c 22. octaui.
tus. Quare si duo numeri rationem habeant inter se, quam quadratus numerus ad quadratum numerum, &c. Quod erat ostendendum.

COROLLARIVM.

LIQVET ex his, proportionem cuiusuis numeri quadrati ad quemlibet numerum non

a 24. octaui *quadratum exhiberi nullo modo posse in duobus numeris quadratis. Si enim exhiberentur,* a *essent ambo priores numeri habentes proportionem, quam quadrati proportionis exhibita, etiam quadrati, cùm primus ponatur quadratus. Quod est absurdum. Ponitur enim secundus, non quadratus. Vnde numeri in dupla proportione, proportionem nō habent, quam quadratus ad quadratum. Si enim haberent, essent omnes hi dupli numeri 4. 8. 16. 32. 64. 128. &c.*

b 24. octaui *quadrati. Primò enim 4. existente quadrato,* b *esset & 8. quadratus. Igitur & 16. & 32. &c.*

c 11. octaui. *quod est absurdum.* c *Nam inter 4. & 8: & inter 8. & 16. & inter 16. & 32. &c. caderet medius proportionalis, si essent quadrati: cùm tamen in scholio propos. 8. huius lib. demonstratum sit, inter numeros duplæ proportionis quosuis non posse cadere medium proportionalem.*

Simili modo numeri in quintupla proportione proportionem non habebunt, quam quadratus numerus ad numerum quadratum. Si enim haberent, d *caderet inter eos medius*

d 11. octaui.

e 8. octaui. *proportionalis.* e *Igitur & inter 5. & 1. minimos numeros quintuplæ proportionis. quod fieri non posse, demonstratum à nobis est in scholio propos 8. huius lib.*

23. THEOR. 23. PROPOS. 25.

Si duo numeri rationem inter se habeant, quam cubus numerus ad cubum numerum, primus autem sit cubus, & secundus cubus erit.

Sit enim A, ad B, vt C, cubus ad D, cubum; sitque A, cubus. Dico & B, cubum esse. Cum enim sit A, ad B, vt C, ad D; a cadant autem inter C, & D, cubos duo

a 12. octaui.

b 8. octaui. A, 8. G, 12. H, 18. B, 27. C, 64. E, 96. F, 144. D, 216. medij proportionales, qui sint E, F; b cadent quoque inter A, & B, duo medij, qui sint G, H. Quia igitur quatuor numeri A, G, H, B, sunt continuè proportionales, & A, primus est cubus; c erit

c 23. octaui. & B, quartus cubus. Quocirca, si duo numeri rationem inter se habeant, quam cubus numerus ad cubum numerum, &c. Quod demonstrandum erat.

COROLLARIVM.

Patet etiam ex his, proportionem cuiusuis numeri cubi ad quemlibet numerum non

a 25. octaui *cubum, non posse reperiri in duobus numeris cubis. Si enim reperiretur,* a *essent ambo priores numeri habentes proportionem, quam cubi proportionis reperta, etiam cubi, cùm primus ponatur cubus. Quod est absurdum. Ponitur enim secundus, non cubus.*

24. THEOR. 24. PROPOS. 26.

Similes plani numeri rationem inter se habent, quam quadratus numerus ad quadratum numerum.

A, 20. C, 30. B, 45. D, 4. E, 6. F, 9. Sint plani similes A, & B. Dico esse vt A, ad B, ita aliquem numerum quadratum ad alium quendam quadratum. Cùm enim A, & B, sint plani similes; a cadet inter eos vnus medius proportionalis, videlicet C.

a 18. ellabii

A, 20. C, 30. B, 45. D, 4. E, 6. F, 9. Sumptis ergo tribus numeris D, E, F, minimis in ratione continua A, C, B; erunt extremi D, & F, quadrati, ex coroll. 1. propos. 2. huius lib. Quare cum sit, ex æquo A, ad B, vt D, ad F, manifestum est, ita esse A, ad B, vt est quadratus aliquis, videlicet D, ad quadratum alium, vt ad F. Ergo similes plani numeri rationem inter se habent, &c. Quod demonstrandum erat.

SCHOLIVM.

Facile etiam demonstrabimus conuersum huius, videlicet.

Numeri, qui proportionem habent, quam quadratus numerus ad quadratum numerum, similes plani sunt.

A, 8. B, 18. C, 16. D, 36. *Habeant numeri A, B, proportionem inter se, quam quadrati C, D. Dico A, B, esse*

a 11. octaui. *planos similes.* a *Quoniam enim inter quadratos C, D, cadit vnus medius proportionalis*

b 8. octaui. *Et est, vt C, ad D, ita A, ad B;* b *cadet quoq; medius proportionalis inter A, & B.* c *Quare*

c 20. octaui *A, & B, plani similes sunt.*

Ex hoc perspicuum est, planos numeros, qui similes non sunt, proportionem non habere, quam quadratus ad quadratum. Si enim haberent; essent, vt modò demonstratum est, plani similes. quod est absurdum. pronuntur enim non similes.

25. THEOR. 25. PROPOS. 27.

Similes solidi numeri rationem habent inter se, quam cubus numerus ad cubum numerum.

Sint

SINT similes solidi A,B. Dico esse,vt A,ad B,ita cubum quempiam numerum ad alium quendam cubum. Quia enim A,B,sunt solidi similes: [a] cadent inter eos duo medij proportionales,qui sint C, D. Sumptis autem quatuor numeris E, F, G, H, minimis in continua proportione A, C, D,B; erunt extremi E,H,ex coroll.1.propos.2. huius lib. cubi. Quare, cùm ex æquo sit A ,ad B,vt E, ad H; constat ita esse A, ad B;vt est cubus aliquis, nimirum E, ad alium cubum, videlicet ad H. Similes ergo solidi numeri rationem habent inter se,&c. Quod erat ostendendum. a 19.octaui.

A,240. C,360. D,540. B,810.
E, 8. F, 12. G, 18. H, 27.

SCHOLIVM.

CONVERSVM huius etiam demonstrabimus; scilicet.

NVMERI,qui proportionem habent,quam cubus numerus ad cubum numerum, sunt solidi similes.

NVMERI enim A,B, proportionem habeant inter se,quam cubi C, D Dico A, B, solidos esse similes. Nam cùm sit A,ad B, vt C, ad D, [a] cadant autem inter C, D, cubos duo medij proportionales; [b] cadent quoque inter A,B,duo medij . [c] Sunt ergo A, & B, solidi similes.

a 12.octaui. b 8. octaui. c 21.octaui.

EX his omnibus perspicuè infertur,nullos numeros habentes duplam proportionem,vel superparticularem,vel superbi partiẽtem, esse similes planos,vel solidos.Si enim essent similes plani, [d] caderet inter eos medius vnus proportionalis,quod fieri non posse, iam dudùm ostensum est in scholio propos.8.huius lib. Eadem ratione non erunt similes solidi,cùm inter eos cadere non possint duo medij proportionales. [e] Nam aliàs caderent quoque duo medij inter minimos earundem proportionum numeros Quod fieri non potest,quòd hi vel sola vnitate,vel certè binario tantùm inter se distent,vt in scholio praedicto traditum est, inter quos certum est,non posse intercipi duos numeros ,nedum duos medios proportionales.

d 18.octaui. e 8. octaui.

SIMILITER nec duo quinis numeri primi esse possunt plani similes,vel solidi ,cùm non possint habere latera proportionalia.Nam quilibet numerus planus, qui sit numerus primus , latera habet solummodo vnitatem,& seipsum,quamuis impropriè. Vt bi numeri plani 19.& 23. latera habent 1. 19. & 1. 23. cùm ex horum mutua multiplicatione producantur, quæ constat non esse proportionalia. Quinis verò numerus solidus, qui numerus etiam primus sit, latera tantùm habet duas vnitates , & seipsum. Vt bi numeri solidi 29. & 47.latera habent 1. 1. 29. & 1. 1. 47.cùm ex mutua horum multiplicatione producantur.Perspicuum autem est ea non posse esse proportionalia.

RVRSVS neque duo quicunque numeri inter se primi,qui quadrati non sint, vel cubi, (quamuis neuter eorum primus sit) plani similes, vel solidi similes esse possunt. Si enim duo huiusmodi numeri inter se primi, dicantur esse plani vel solidi similes; [f] cadet inter illos vnus medius proportionalis, vel duo.Cùm ergo extremi duo ponantur inter se primi , erunt omnes tres , vel quatuor inter se primi , cùm nullus numerus illos omnes, tanquam communis mensura metiri possit, propter duos extremos inter se primos. Quare minimi erunt continuè proportionales,vt in scholio propos.24.lib.7.demonstrauimus.Ac propterea ex coroll.1. propos. 2.huius lib. extremi duo quadrati erunt,vel cubi.quod absurdũ est.Ponuntur enim neq; quadrati, neq; cubi.

f 18.& 19.octaui.

EX his sequitur,si duo numeri sint plani, vel solidi similes ,quorum minor sit primus , minorem numerare maiorem.Nam si eum non numeraret; [g] essent duo propositi numeri inter se primi : ac proinde,vt proximè ostendimus, non possent esse plani,vel solidi similes , quod absurdum est , & contra hypothesim. Verùm hoc ostensiuè quoque ita demonstrabimus. Sint primùm duo numeri plani similes A, B, sit q; A, minor, primus. Dico A,ipsum B,metiri. Nam cùm A, & B, ponantur plani similes , habebunt latera proportionalia. Cùm ergo latera numeri primi A, sint C, vnitas,& numerus D,ipsi A, æqualis, quòd nullus alius numerus, præter C, vnitatem , & numerum D, ipsi A, æqualem metiatur primum numerum A: sint E, F,latera numeri B lateribus C,D proportionalia,ita vt sit C,ad E,vt D,ad F. Erit igitur permutando C, ad D,vt E,ad F. [h] Igitur numerus factus ex C,primo in F,quartũ æqualis erit ei,qui fit ex D,secũdo in E, tertiũ: [i] Fit autem ex C,vnitate in F, ipsemet numerus F. Idem ergo numerus F, fiet ex D, in E. [j] Quare D,ipsum F, metietur: [k] Metitur autem F,ipsum B,quòd B, gignatur ex E,in F, [l] Igitur & D,id est, A,illi æqualis,eundem B,metietur.quod est propositum.

g 31. septi. h 19. septi. i 4 pron. k 4. pron. l 11.pron.

A,3. B,48.
C,1. D,3. E,4. F,12.

HINC perspicuũ est, duos numeros inter se primos,quorũ minor primus sit , non posse esse planos similes. Nam si essent similes, metiretur minor maiorem , vt proximè ostendimus. Cùm ergo & seipsum metiatur, non essent inter se primi,sed compositi.quod est contra hypothesim.

SINT deinde duo solidi similes A,B; sit q; A, minor primus. Dico A, ipsum B,metiri. Nam cùm A, & B, sint solidi similes,habebunt latera proportionalia. Cùm ergo latera numeri primi A, sint B, C, vnitates, & numerus D, ipsi A, æqualis,quòd nullus alius numerus, præter vnitatem , & numerum D, ipsi A, æqualem,metiatur numerum primum A: sint E, F, G, latera numeri B,lateribus B, C, D, proportionalia,ita vt sit B,ad E,vt C,ad F, & D,ad G. Quia igitur est C, ad F,

A,3. B,24.
B,1. C,1. D,3. E,2. F,2. G,6.

a 19. sept. *vt D, ad G; erit permutando C, ad D, vt F, ad G.* [a] *Igitur numerus factus ex C, primo in G, quantum æqualis erit ei, qui fit ex D, secundo in F, tertium; Fit autem ex C, vnitate in G, ipsemet numerus G. Idem ergo numerus G, fiet ex D, in F.* [b] *Quare D, ipsum G, metietur.* [c] *Metitur autem G, ipsum B, quòd G, latus sit ipsius B.* [d] *Igitur, & D, hoc est, A, illi æqualis, eundem B, metietur: quod est propositum.*

b 4. pron. c 4. pron. d 11. pron.

AT QVE ex hoc etiam constat, duos numeros inter se primos, quorum minor primus sit, non posse esse solidos similes. Nam si essent similes, metiretur minor maiorem, vt proximè ostendimus. Cùm ergo & seipsum metiatur, non essent inter se primi, sed inter se compositi. quod est contra hypothesim.

ITAQVE facilis admodum est inuentio duorum planorum, vel solidorum non similium. Si enim accipiantur duo numeri habentes proportionem duplam, vel superparticularē, vel superbipartientem; vel certè duo numeri primi, vel duo inter se primi, quorum neuter quadratus sit, aut cubus; erūt illi ipsi per ea quæ tradita sunt, plani seu solidi non similes.

RVRSVS quilibet duo numeri, quorum alter quadratus sit, alter verò nō quadratus, plani sunt non similes; quales sunt 16. & 20. Si enim essent plani similes, [e] *haberent proportionē, quam quadratus ad quadratū. Existente igitur 16. quadrato,* [f] *esset & 20. quadratus, quod est absurdum. ponitur enim non quadratus.*

e 26. octaui f 24. octaui

PARI ratione quilibet duo numeri, quorum alter cubus sit, alter verò non cubus, solidi sunt non similes, vt 27. & 40. Si enim essent solidi similes, [g] *haberent proportionem, quam cubus ad cubum. Cùm igitur 27. cubus sit,* [h] *esset & 40. cubus. quod est absurdum. ponitur enim non cubus.*

g 27. octaui h 25. octaui

FINIS ELEMENTI OCTAVI.

EVCLIDIS ELEMENTVM NONVM.

1. THEOR. 1. PROPOS. 1.

SI duo similes plani numeri multiplicantes se mutuò faciant quendam; Productus quadratus erit.



DVO numeri plani similes A, B, se mutuò multiplicantes faciant C. Dico C, quadratum esse. Multiplicans enim A, seipsum faciat D, quadratum. Quoniam igitur A, multiplicans A, & B, produxit D, & C, [a] erit vt A, ad B, ita D, ad C. At inter A, & B, cùm sint plani similes, [b] vnus medius cadit proportionalis. [c] Igitur & inter D, & C, vnus medius proportionalis cadet.

A, 6. B, 54. C, 36. E, 108. C, 324.

Cadat ergo E, vt sint continuè proportionales D, E, C. Itaq; cùm tres D, E, C, continuè sint proportionales, sitq; primus D, quadratus, ex constructione; [d] erit quoq; C, tertius, quadratus. Si duo ergo similes plani numeri multiplicātes se mutuò, &c. Quod erat demōstrandū.

a 17. septimi b 18. octaui. c 8. octaui. d 22. octaui.

2. THEOR. 2. PROPOS. 2.

SI duo numeri se mutuò multiplicātes faciant quadratum; similes plani erūt.

DVO numeri A, B, se mutuò multiplicātes faciant C, quadratum. Dico A, B, esse similes planos. Multiplicans enim A, seipsum faciat D, quadratum. Quoniam igitur A, multiplicans A, & B, fecit D, & C; [e] erit vt A, ad B, ita D, ad C. [f] At inter D, & C, quadratos vnus medius cadit proportionalis. [g] Igitur & inter A, & B, vnus medius proportionalis cadet. [h] Ac propterea A, & B, similes plani sunt. Quare si duo numeri se mutuò multiplicantes, &c. Quod demonstrandum erat.

A, 6. B, 54. D, 36. C, 324.

e 17. sept. f 11. octaui. g 8. octaui. h 20. octaui.

SCHOLIVM.

EX his demonstrabimus quatuor insequentia theoremata non inutilia.

I.

SI duo numeri quadrati se mutuò multiplicātes faciāt quēpiā: Productus quadrat[us] erit.

A, 4. B, 25. C, 100.

DVO quadrati A, B, se mutuò multiplicantes faciant C. Dico C, esse quadratū. Cùm enim A, & B, sint similes plani, nimirum quadrati; [a] *erit C, ex eis productus, quadratus.*

a 21. noni.

II.

SI duo numeri se mutuò multiplicantes faciant quadratum; alter autem sit quadratus; Et reliquus quadratus erit.

DVO

A,9. D,12. B,16. C,144. *Duo numeri A,B,se mutuò multiplicantes faciant C, quadratum: sit quadratus A, quadratus. Dico & B, quadratum esse. Cùm enim A, & B, se mutuò multiplicantes faciant C, quadratum:* [a] *erunt A, & B, similes plani:* [b] *atque adeò inter eos vnus medius cadet proportionalis, videlicet D.* [c] *Quare A, existente quadrato, erit & B, quadratus.*

a 2.noni. b 18.octaui c 22. octaui

III.

SI duo numeri se mutuò multiplicantes faciant non quadratum, alter autem sit quadratus; Reliquus non quadratus erit.

A, 4. B, 20. C, 80. *Duo numeri A, B, se mutuò multiplicantes faciant C, non quadratum: sit quadratus A, quadratus. Dico B, non quadratum esse. Si enim B, dicatur esse quadratus, erit & C, productus ex quadrato A, B, quadratus, per theor. 1. huius scholij; Quod est absurdum, & contra hypothesim. Non igitur quadratus est B, numerus.*

IIII.

SI duo numeri, quadratus & non quadratus, se mutuò multiplicantes faciant aliquem; Productus non quadratus erit.

A, 9. B, 20. C, 180. *Duo numeri A, quadratus, & B, non quadratus, se mutuò multiplicantes faciant C. Dico C, non esse quadratum. Nam si C. foret quadratus, cùm producatur ex A, in B, sit quadratus A, quadratus; esset & B, ex theor. 2. huius scholij, quadratus: Quod est absurdum, & contra hypothesim. Non igitur C, quadratus erit.*

THEOR. 3. PROPOS. 3.

3.

SI cubus numerus seipsum multiplicãs procreet aliquẽ; Productus cubus erit.

A, 8. E, 16. D, 4. F, 32. C, 2. B, 64. Vni-. tas. FACIAT cubus A, seipsum multiplicans numerum B. Dico B, esse cubum. Sit enim C, latus cubi A; & ex C, in se fiat D, & idcirco ex C, in D, ipse cubus A, gignatur. Quia igitur C, seipsum multiplicans fecit D: [a] metietur C, ipsum D, per C: [b] Metitur autem & vnitas ipsum C, per C. Igitur eadem pars est vnitas ipsius C, quæ C, ipsius D, nimirum denominata à C; Ac proinde [c] vt vnitas ad C, ita C, ad D. Rursus quia C, multiplicans D, fecit A; [d] metietur D, ipsum A, per C. Metiebatur autem & C, ipsum D, per C. Eadem ergo pars est C, ipsius D, quæ D, ipsius A; [e] ideoq; vt C, ad D, ita D, ad A: sed vt C, ad D, ita erat vnitas ad C. Igitur vt vnitas ad C, ita C, ad D, & D, ad A; Atque adeò inter vnitatem & numerum A, duo medij proportionales cadunt numeri C, D. [f] At quia A, ipsum B, metitur per A, quòd A, seipsum multiplicãs fecerit B; [g] metitur verò & vnitas ipsum A, per A; Eadem erit pars vnitas ipsius A, quæ A, ipsius B; [h] Ac propterea erit vt vnitas ad A, ita A, ad B. Quare cùm inter vnitatem & numerum A, cadant duo medij proportionales C, & D; [i] cadent totidem inter A, & B, nimirum E, & F. Cùm ergo quatuor numeri A, E, F, B, sint continuè proportionales, & A, primus sit cubus, [k] erit quoq; B, quartus cubus. Si cubus igitur numerus seipsum multiplicãs, &c. Quod erat demõstrandũ.

a 7. pron. b 5. pron. c 20. defin. d 7. pron. e 20. defin. f 7. pron. g 5. pron. h 10. defin. i 8. octaui. k 23. octaui.

THEOR. 4. PROPOS. 4.

4.

SI cubus numerus cubũ numerũ multiplicans faciat aliquẽ; Factus cubus erit.

A, 8 B, 27. D. 64. C, 216. FIAT ex cubo A, in cubum B, numerus C. Dico C, cubum esse. Multiplicans enim A, seipsum faciat D; [l] eritque D, cubus. Quoniam verò A, multiplicans A, & B, fecit D, & C; [m] erit vt A, ad B, ita D ad C. [n] At inter A, & B, cubos duo medij proportionales cadunt. [o] Igitur & inter D, & C, duo medij proportionales cadent; [p] Ac propterea D, existente cubo, & C, cubus erit. Quocirca si cubus numerus cubum numerum multiplicans, &c. Quod erat ostendendum.

l 13. noni. m 17. septi. n 12. octaui. o 8. octaui. p 23. octaui.

THEOR. 5. PROPOS. 5.

5.

SI cubus numerus numerum quendam multiplicans faciat cubum; Et multiplicatus cubus erit.

A, 8. B, 27. D, 64. C, 216. FIAT ex cubo A, in numerum B, numerus cubus C. Dico & B, cubum esse. Multiplicans enim A, seipsum faciat D, [q] qui cubus erit. Quoniam igitur A, multiplicans A, & B, fecit D, & C, [r] erit vt A, ad B, ita D, ad C; [s] At inter D, & C, cubos duo cadunt medij proportionales. [t] Totidem igitur & inter A, & B, cadent; [u] Ac proinde existente A, cubo, & B, cubus erit. Quamobrem si cubus numerus numerum quendam multiplicans, &c. Quod ostendendum erat.

q 23. noni. r 7. septimi s 12. octaui. t 8. octaui. u 23. octaui.

SCHOLIVM.

Ex his & hac, quæ sequuntur, facilè demonstrabuntur, videlicet.

I.

SI cubus numerus non cubũ numerũ multiplicãs faciat aliquẽ; Factus non cubus erit.

A, 8. B, 20. C, 160. *FIAT ex A, cubo in B, non cubum numerus C. Dico C, non esse cubum. Si enim C, sit cubus;* [a] *& multiplicatus B, cubum erit. quod non ponitur.*

a 5. noni.

I I.

SI cubus numerus numerum quendam multiplicans faciat non cubum; Et multiplicatus non cubus erit.

A, 8. B. 17. C, 136. *FIAT ex cubo A, in numerum B, non cubus C. Dico & B, non esse cubum. Si namque B, sit cubus,* [b] *& factus C, cubus erit. quod est contra hypothesim.*

b 4. noni.

6. THEOR. 6. PROPOS. 6.

SI numerus seipsum multiplicans cubum faciat: Et ipse cubus erit.

MVLTIPLICANS seipsum numerus A, faciat B, cubum. Dico & A, cubum esse. Fiat enim ex A, in B, numerus C, qui cubus erit, cùm A, in se faciat B, & ipse C, ex A, in B, gignatur, atque adeò æqualis æqualiter æqualis sit, vt perspicuum est ex ijs, quæ ad definitionem cubi scripsimus. Quia igitur B, cubus multiplicans numerum quempiam A, facit cubum C; [a] erit & A, cubus. Quare si numerus seipsum multiplicans cubum faciat, &c. Quod erat demonstrandum.

A, 8. B, 64. C, 512.

a 5. noni.

SCHOLIVM.

ALIAM demonstrationem interpretes Euclidis hoc loco adducunt, & quidem longiorem. Postquam enim demonstrarunt C, factum ex A, in B, esse cubum: inferunt, [a] *Ergo inter B, & C, cubos duo medij proportionales cadunt.* [b] *Quoniam verò est vt B, ad C, ita A, ad B, quod A, multiplicans A, & B, ipsos B, & C, fecit;* [c] *cadent quoque inter A, & B, duo medij proportionales.* [d] *Atque adeò existente B, cubo, & A, cubus erit. Verùm nostra demonstratio breuior est, & planior, vt perspicuum est.*

a 12. octaui. b 17. sept. c 8. octaui. d 23. octaui.

7. THEOR. 7. PROPOS. 7.

SI compositus numerus numerum aliquem multiplicans, quempiam faciat: Factus solidus erit.

NVMERVS compositus A, multiplicãs numerum quemlibet B, faciat C: Dico C, esse solidum. Cùm enim A, sit compositus, [a] metietur eum, præter vnitatem, numerus aliquis; metiatur D, ipsum A, per E. Quo posito, [b] multiplicante D, ipsum E, producetur A. Cùm ergo B, ipsum A, multiplicans fecerit C; procreabitur C, ex mutua multiplicatione trium numerorum D, E, B; Ac propterea solidus erit ex defin. cuius latera D, E, B. Quapropter si compositus numerus numerũ aliquem multiplicans, &c. Quod erat ostendendum.

A, 6. B, 11. C, 66. D, 2. E, 3.

a 13. defin. b 9. pron.

8. THEOR. 8. PROPOS. 8.

SI ab vnitate quotcunque numeri deinceps proportionales fuerint: Tertius quidem ab vnitate quadratus est, & vnum intermittentes omnes: Quartus autem est cubus, & duos intermittentes omnes: Septimus verò cubus simul, & quadratus, & quinque intermittentes omnes.

SINT ab vnitate continuè proportionales numeri quotcunq; A, B, C, D, E, F, G, H, I, K, L, M. Dico tertium quidẽ B, ab vnitate esse quadratũ, & vnum intermittentes omnes, quales sunt D, F, H, K, M: Quartũ autem C, cubũ, & duos intermittentes omnes euiusmodi sunt F, I, M: septimum verò F, cubũ simul, & quadratũ, & quinq; intermittẽtes omnes, nimirũ M. Quoniam enim est vnitas ad A, vt A, ad B; æquè metietur vnitas numerũ A, & numerus A, numerũ B: [a] Metitur aũt vnitas numerũ A, per A. Ergo & A, ipsum B, p A, metietur; [b] Atq; adeò A, multiplicãs A, ipsum B, producet. Quare B, quadratus est. Quia verò tres deinceps ꝓportionales sunt B, C, D, & est B, quadratus; [c] erit & D, quadratus. Eadẽ ratione assumptis tribus deinceps ꝓportionalibus D, E, F, cũ D, sit quadratus, [d] & F, quadratus erit; Nec nõ & oẽs vnũ intermittẽtes.

Vnitas. A, 3 B, 9. C, 27. D, 81. E, 243. F, 729. G, 2187. H, 6561. I, 19683. H, 59049. L, 177147. M, 531441.

a 5. pron. b 9. pron. c 22. octaui. d 22. octaui.

RVRSVS quia est vnitas ad A, vt B, ad C; æquè metietur vnitas numerum A, & numerus B, numerũ C; [e] Metitur autẽ vnitas ipsum A, per A. Igitur & B, ipsum C, per A, metietur; [f] atq; adeò B, ipsum A, multiplicans procreabit numerũ C. Quare cùm A, seipsum multiplicãs faciat B, multiplicãs verò B, faciat C, vt est ostẽsum: erit C, cubus. Quia verò quatuor deinceps proportionales sunt C, D, E, F, & est C, cubus, [g] erit & F, cubus. Eodem argumẽto, assumptis quatuor deinceps proportionalibus F, G, H, I, cùm F, sit cubus; [h] & I, cubus erit; atq; omnes semper duos intermittentes.

e 5. pron. f 9. pron. g 23. octaui. h 23. octaui.

POSTREMO quia F, septimus ab vnitate ostensus est & quadratus, & cubus: ipse erit cubus simul & quadratus: Atque eodem modo M, septimus ab F, intermissis nimirum quinq; G, H, I, K, L, cubus erit simul & quadratus; Nec nõ & omnes quinque intermittẽtes. Si igitur ab vnitate quotcunque numeri deinceps proportionales fuerint, &c. Quod erat demonstrandum.

SCHOLIVM.

Hoc theorema potest quoque hoc modo proponi.

Si sint quotcunque numeri ab vnitate continuè proportionales, omnes positi in locis imparibus; primum in tertio, quinto, septimo, nono, undecimo, &c. sunt quadrati. Omnes autem, qui sequuntur proximè numeros positos in locis, tertio, sexto, nono, duodecimo, decimoquinto, decimooctauo, & aliis, quæ ternarius metitur, cuiusmodi sunt numeri quartus, septimus, decimus, tertiusdecimus, decimus sextus, decimusnonus, &c. sunt cubi. Omnes verò qui proximè sequuntur numeros positos in locis sexto, duodecimo, decimooctauo, vigesimoquarto, & aliis, quæ metitur senarius, quales sunt septimus, tertiusdecimus, decimusnonus, vigesimusquintus, &c. sunt cubi simul, & quadrati.

NAM primi ordinis numeri omnes semper vnum intermittunt post tertium ab vnitate: At secundi ordinis numeri omittunt semper duos numeros post quartum ab vnitate. Numeri denique tertij ordinis quinque semper interponunt post septimum ab vnitate, quemadmodum in theoremate proponit Euclides.

THEOR. 9. PROPOS. 9. 9.

Si ab vnitate quotcunque numeri deinceps proportionales fuerint, qui verò post vnitatem sit quadratus, Et reliqui omnes quadrati erunt. At si qui post vnitatem, sit cubus; & reliqui omnes cubi erunt.

SINT ab vnitate continuè proportionales numeri quotcunq; A, B, C, D, E, F, sitq; primum A, proximus vnitati quadratus. Dico & reliquos omnes quadratos esse. Quòd enim tertius ab vnitate, & omnes vnum intermittentes, quales sunt B, D, F, quadrati sint, [a] iam demonstratum est. Quod verò & reliqui intermedij C, & E, quadrati sint, ita perspicuum fiet. Cùm tres continuè proportionales sint A, B, C; sitque A, quadratus erit & C, quadratus. Eodemq; modo, assumptis tribus continuè proportionalibus C, D, E, cùm C, sit quadratus; [b] & E, quadratus erit. Omnes igitur A, B, C, D, E, F, quadrati sunt. Idem ostendemus, si plures numeri sint continuè proportionales.

Vnitas. A, 4. B, 16. C, 64. D, 256. E, 1024. F, 4096.

Vnitas. A, 4. B, 16. C, 64. D, 256. E, 1024. F, 4096.

SIT iam A, proximus vnitati cubus. Dico & reliquos cubos esse. Quod enim quartus ab vnitate, & omnes duos intermittentes, cuiusmodi sunt C, & F, sint cubi, [d] iam est demõstratum. Quòd autem & reliqui B, D, E, cubi sint, sic ostendemus. Cùm sit vnitas ad A, vt A, ad B, æquè metietur vnitas numerũ A, & numerus A, numerum B: [e] Metitur autem vnitas numerum A, per ipsummet A. Igitur, & A, ipsum B, per seipsum metietur: [f] Atque adeò cubus A, seipsum multiplicans numerum B, procreabit. [g] Quare B, cubus est. Quoniam verò quatuor continuè proportionales sunt A, B, C, D, estque A, cubus, [h] & D, cubus erit. Eademque ratione, assumptis quatuor deinceps proportionalibus B, C, D, E, cùm B, cubus sit; [i] & E, cubus erit. Omnes igitur A, B, C, D, E, F, cubi sunt. Non secus demonstrabimus, omnes cubos esse, si plures continuè proportionales fuerint. Quotcirca, si ab vnitate quotcunq; numeri deinceps proportionales fuerint, &c. Quod demonstrandum erat.

Vnitas. A, 8. B, 64. C, 512. D, 4096. E, 32768. F, 262144.

Vnitas. A, 8. B, 64. C, 512. D, 4096. E, 32768. F, 262144.

[a] 8. noni. [b] 22. octaui. [c] 22. octaui. [d] 8. noni. [e] 5. pron. [f] 9. pron. [g] 3. noni. [h] 23. octaui. [i] 23. octaui.

SCHOLIVM.

NOTA *demonstrauit Geometra, si numerus, qui post vnitatem, sit cubus simul & quadratus, & reliquos omnes esse cubos simul, & quadratos; quia perspicuè hoc ipsum ex demonstratis colligitur. Nam si proximus vnitati sit cubus simul, & quadratus: qua parte est cubus, ea ratione omnes reliqui cubi erunt; qua verò parte est quadratus, ea ratione & reliqui omnes quadrati erunt, vt demonstratum est. Omnes igitur erunt cubi simul, & quadrati.*

VBRVM *hæc propositio facilius ita poterit demonstrari. Sit primum A, proximus vnitati, quadratus. Dico & omnes quadratos esse. Quoniam enim ex scholio propos. 10. lib. 8. A, seipsum multiplicans facit B; erit ex defin. B, quadratus. Item quia ex eodem scholio, A, multiplicans B, facit C, sunt q; A, B, quadrati; erit & C, quadratus, ex scholio propos. 2. huius lib. Rursus quia ex eodem scholio propos. 10. lib. 8. A, multiplicans C, facit D, sunt q; A, C, quadrati; erit ex eodem scholio propos. 2. huius lib. & D, quadratus: Atq; ita deinceps: tum ex illo scholio propos. 10. lib. 8. A, multiplicans D, producat E; & multiplicans E, faciat F, &c.*

Vnitas. A, 4. B, 16. C, 64. D, 256. E, 1024. F, 4096.

SIT *deinde A, proximus vnitati, cubus. Dico & omnes esse cubos. Quia enim ex scholio propos. 10. lib. 8. cubus A, seipsum multiplicans facit B; [a] erit & B, cubus. Item quia ex eodem scholio, A, multiplicans B, facit C, sunt q; A, B, cubi; [b] erit & C, cubus. Rursus quia ex eodẽ scholio, A, multiplicãs C, facit D, sunt q; A, C, cubi; [c] erit quoq;*

[a] 23. noni. [b] 4. noni. [c] 4 noni.

D, cubum. Atq; ita de cæteris, cùm ex eo scholio, A, multiplicãs D, gignat E; & multiplicans E, procreet F, &c.

10. THEOR. 10. PROPOS. 10.

SI ab vnitate quotcunq; numeri deinceps proportionales fuerint, q verò post vnitatem, non sit quadratus, neq; alius vllus quadratus erit, præter tertium ab vnitate, & vnum intermittentes omnes. At si, qui post vnitatem, non sit cubus, neque alius vllus cubus erit, præter quartum ab vnitate, & duos intermittentes omnes.

SINT ab vnitate quotcunque numeri deinceps proportionales A, B, C, D, E, F, G, H, I, &c. & primum A, proximus vnitati non sit quadratus. Dico nec alium vllum esse quadratum, præter tertium ab vnitate, & vnum intermittentes omnes: hoc est, præter B, D, F, H, &c. Si enim præter hos

Vnitas. A, 2. B, 4. C, 8. D, 16. E, 32. F, 64. G, 128. H, 256. I, 512. K, 1024. L, 2048. M, 4096.

a 8.noni. alius est quadratus, sit quadratus E. a Cùm ergo & D, sit quadratus; sitque vt D, ad E, vel E, ad F, ita A, ad B, & conuertendo vt F, ad D, vel F, ad E, ita B, ad A; habebit B, ad A, rationem, quam
b 8.noni. quadratus numerus E, ad quadratum numerum D, vel quadratus F, ad quadratũ E; b sed B, ter-
c 24. octau. tius ab vnitate est quadratus. c Igitur & A, primus ab vnitate quadratus erit. Quod est absurdum: ponitur enim A, non quadratus. Non ergo E, quadratus est. Eadem ratione ostendemus, nullum alium, præter dictos, quadratum esse.

SED iam A, proximus vnitati non sit cubus. Dico nec alium vllum esse cubum, præter quartum ab vnitate, & duos intermittentes omnes, videlicet præter C, F, I, &c. Nam si præter hos alius po-
d 8.noni. test esse cubus, sit D, cubus. d Cùm ergo & F, cubus sit, sitq; ex æquo vt D, ad F, ita A, ad C, (quòd tres D, E, F, eandem habeant rationem, quam tres A, B, C,) & conuertendo vt F, ad D, ita C, ad A;
e 8.noni. habebit C, ad A, rationem, quam cubus F, ad cubum D: e Sed C, est cubus, cùm sit quartus ab
f 25. octau. vnitate. f Igitur & A, primus ab vnitate cubus erit. quod est contra hypothesim. Non igitur D, cubus est. Quod si E, credatur esse cubus; g cùm & C, cubus sit, sitque ex æquo, vt C, cubus ad E,
g 8.noni. cubum, ita A, ad C, & conuertendo vt cubus E, ad cubum C, ita C, ad A; existente C cubo, h erit,
h 25. octau. & A, cubus. quod non ponitur. Non ergo E, cubus est. Quemadmodum autem ostensum est, duos D, & E, inter duos cubos C, & F, cubos non esse; ita quoque eadem ratione ostendemus, neq; G, & H, inter cubos F, & I, neque vllos alios duos, inter duos cubos, esse cubos. Si igitur ab vnitate quotcunque numeri, &c. Quod demonstrandum erat.

SCHOLIVM.

NON est autem necesse, si numerus, qui post vnitatem, non sit cubus simul, & quadratus, nullum alium esse cubum simul, & quadratum, præter septimum ab vnitate, & quinq; intermittentes omnes; cùm aliquando tertius ab vnitate, aliquando verò quartus possit esse cubus simul, & quadratus, non existente primo ab vnitate cubo simul, & quadrato.

Vnitas A, 8, B, 64. *SIT enim primùm A, qui post vnitatem, cubus quidem, non autem simul & quadratus. Dico B, tertium esse cubum simul & quadratum; cubum quidem,*
a 9.noni. *a quòd primo existente cubo, omnes cubi sint,*
b 8.noni. *b quadratum verò, quòd tertius sit ab vnitate.*

Vnitas. A, 4. B, 16. C, 64. *SIT deinde A, post vnitatem quadratus quidem, non autem simul & cubus. Dico quartum C, esse cubum simul & quadratum;*
c 8.noni. *c Cubum quidem,*
d 9.noni. *quòd quartus sit ab vnitate; quadratum verò, d quòd primo existente quadrato, omnes sint quadrati.*

SIT postremò A, post vnitatem neque cubus, neque quadratus. Dico nullum alium esse cubum simul & quadratum, præter septimum F, & quinq; intermittentes omnes. Cùm enim primo non existente quadra-
e 10. noni. *to, e nullus alius quadratus sit, præter tertium*

Vnitas. A, 6. B, 36. C, 216. D, 1296. E, 7776. F, 46656. *ab vnitate, & vnum intermittentes omnes, cuiusmodi sunt, vt in scholio propos. 8. huius lib. docuimus, tertius, quintus, septimus, nonus, vndecimus, decimustertius, decimusquintus, decimusseptimus,*
f 10.noni. *decimusnonus, &c. Primo autem non existente cubo, f nullus alius sit cubus, præter quartum ab vnitate, & duos intermittentes omnes, quales sunt, vt ex eodem scholio apparet, quartus septimus, decimus, tertiusdecimus, decimussextus, decimusnonus, &c. perspicuum est, tantummodo septimum, tertiumdecimum, decimumnonum, qui quidem omnes quinque intermittunt, quadratos esse simul, & cubos, & sic de cæteris. Nam in hac loca sola incidunt quadratus, & cubus simul, vt liquidò constat ei, qui rectè propositionem hanc & octauam huius libri expenderit.*

12. THEOR. 11. PROPOS. 11.

SI ab vnitate quotcunq; numeri deinceps proportionales fuerint; Minor maiorem metitur per aliquem eorum, qui in proportionalibus sunt numeris.

SINT ab vnitate quotcunq; numeri continuè proportionales A, B, C, D, E, F, G. Dico quemlibet minorem, vt C, quemlibet maiorem, vt G, metiri per aliquem numerorum A, B, C, D, E, F, G. Cùm enim sit ex æquo vt C, ad G, ita vnitas ad D; (quòd quinque numeri C, D, E, F, G, eandem habeant

habeant rationem contiguam, quam vnitas & quatuor numeri A,B,C,D,) [a] æquè metietur vnitas numerum D, atque numerus C, numerum G: [b] Sed vnitas metitur numerum D, per ipsummet D. Igitur & C, numerus numerum G, per D, metietur. Eadem ratione metietur E, ipsum F, per A, quòd sit vt E, ad F, ita vnitas ad A, &c. Sic quoque metietur A, ipsum G, per F, cùm sit ex æquo vt A, ad G, ita vnitas ad F, &c. Atque ita de reliquis eodem modo. Si igitur ab vnitate quotcunque numeri deinceps proportionales fuerint, &c. Quod erat ostendendum.

Vnitas. A, 3. B, 9. C, 27. D, 81. E, 243. F, 729. G, 2187.

[a] 20. defin.
[b] 5. pron.

SCHOLIVM.

Perspicuum autem est ex his, quantum abest maior numerus à minore metiente, tantùm distare ab vnitate eum numerum, per quem minor maiorem metitur; propterea quòd eadem esse debet proportio minoris ad maiorē, quæ vnitas ad eū per quem metitur minor maiorem, vt ex demonstratione apparet. Itaque B, metietur F, per D; Et C, metietur F, per C; nimirum per seipsum, &c. quia tam inter B, & F, quàm inter vnitatem & D, tres numeri interponuntur: Et tam inter C, & F, quàm inter vnitatem & C, duo intersecti sunt numeri.

Vnitas. A, 3. B, 9. C, 27. D, 81. E, 243. F, 729. G, 2187.

Hinc rursus efficitur, quemlibet numerum, qui seipsum multiplicet, producere numerum, qui in numeris proportionalibus tantùm ab eo distat, quantum ipse ab vnitate: Si verò minor aliquis maiorē quempiam multiplicet, procreari numerum, qui tantùm à maiore distat, quantum minor ab vnitate, propterea quòd si numerus numerum metiens multiplicet eum, per quem metitur, producatur ille, quem metitur. Ergo C, se ipsum multiplicans gignet F; cùm F, tantùm absit à C, quantum C, ab vnitate: ac propterea C, ipsum F, per C, metiatur, vt diximus. Sic quoq; B, multiplicans D, faciet eundem F; quòd D, ipsum F, metiatur per B, &c. & sic de reliquis.

[a] 9. pron.

THEOR. 12. PROPOS. 12. 11.

Si ab vnitate quotcunq; numeri deinceps proportionales fuerint; quicunque primorum numerorum vltimum metiuntur, iidem & eum, qui vnitati proximus est, metientur.

Sint ab vnitate deinceps proportionales quotcunque numeri A,B,C,D. Dico quoscunque primorum numerorum, qui metiuntur vltimum D, metiri quoq; A, proximum vnitati. Metiatur enim numerus primus E, ipsum D. Dico eundem E, primū metiri etiam numerum A, vnitati proximum. Si namq; non metitur ipsum A; [a] erit E, cùm primus sit, ad A, primus: hoc est, A, & E, inter se primi erunt. Metiatur E, ipsum D, per F, [b] atque adeò E, multiplicans F, faciat D. Quia verò & A, ipsum D, metitur per C; ac proinde A, multiplicans C, facit D, vt in scholio præcedentis propos. ostendimus; producetur idem numerus D, ex A, primo in C, quartum, & ex E, secundo in F, tertium. [c] Quare erit vt A, primus ad E, secundum, ita F, tertius ad C, quartum. Cùm ergo A, & E, sint inter se primi; [d] ac proinde in sua proportione minimi; [e] metietur æquè A, ipsum F, & E, ipsum C. Metiatur E, ipsum C, per G, [f] atq; adeò E, multiplicās G, faciat C. Quia verò & A, ex scholio eodem præcedentis propos. metitur C, per B, [g] atq; adeò A, multiplicans B, facit C; procreabitur idem numerus C, ex A, primo in B, quartum; & ex E, secundo in G, tertium. [h] Erit igitur vt A, primus ad E, secundū, ita G, tertius ad B, quartū. Quapropter cùm A, & E, sint inter se primi; [i] ac propterea in sua proportione minimi; [k] metietur æquè A, ipsum G, & E, ipsum B. Metiatur E, ipsum B, per H: [l] ita vt E, multiplicans H, faciat B. Metitur autem & A, ipsum B, per A, atq; idcirco A, se ipsum multiplicans facit B, vt ex eodem scholio præcedentis propos. apparet. Gignitur ergo idem numerus B, ex E, primo in H, tertium, & ex A, medio in seipsum. [m] Quare erit vt E, primus ad A, secundum, ita A, secundus ad H, tertium. Cùm ergo E, & A, inter se primi sint; [n] ac proinde in sua proportione minimi; [o] æquè metietur E, ipsum A, & A, ipsum H. Quod est cōtra hypothesim. ponitur enim E, ipsum A, non metiri. Quare falsum est E, ipsum A, non metiri. Nam ex eo quòd E, non dicatur metiri ipsum A, semper demonstrabitur E, ipsum A, metiri. Quod est absurdum. Metitur ergo E, ipsum A. Eodem argumento ostendemus, quoscunque alios numeros primos ipsum D, metientes, metiri quoque ipsum A; Eademque erit ratio, si C, vel B, vltimus numerus statuatur.

Vnitas. A, 10. B, 100. C, 1000. D, 10900. E, 5. H, 20. G, 200. F, 2000.

[a] 31. sept.
[b] 9. pron.
[c] 19. sept.
[d] 23. sept.
[e] 21. sept.
[f] 9. pron.
[g] 9. pron.
[h] 19. sept.
[i] 23. sept.
[k] 21. sept.
[l] 9. pron.
[m] 20. sept.
[n] 23. sept.
[o] 21. sept.

Aliter. Metiatur E, numerus primus vltimum D. Dico & E, ipsum A, metiri. Si enim non metiatur; [p] erit E, ad A, primus. Quia igitur A, & E, inter se primi sunt, & A, seipsum multiplicans facit B, vt ex scholio propos. præcedentis constat, [q] erit B, ad E, primus. Quia ergo A, & B, ad E, primi sunt; fit autem C, ex A, in B, per idem scholium præcedētis propositionis [r] erit C, ad E, primus. Rursus eodem modo quia A, & C, ad E, primi sunt & fit D, ex A, in C, ex eodem scholio præcedentis propos. [s] erit D, ad

Vnitas. A, 6. B, 36. C, 216. D, 1296. E, 3.

[p] 31. sept.
[q] 27. sept.
[r] 26. sept.
[s] 26. sept.

E, primus. Non igitur E, ipsum D, metitur. Quod est contra hypothesim. Metitur ergo E, ipsum D. Si igitur ab vnitate quotcunque numeri deinceps proportionales fuerint, &c. Quod ostendendum erat.

COROLLARIVM.

Itaque, nec vllius numerus primus, qui maior sit eo, qui proximus est vnitati, metietur vllum minor proximum vnitati numerum metiens. Si namq; metiretur vltimum, metiretur quoq; vnitati proximum, vt demonstratum est. quod non ponitur.

SCHOLIVM.

Est autem admirabilis prima huius propos. demonstratio. Nam in ea Euclides ex eo, quòd E, dicatur non metiri ipsum A, ostendit demonstrationem affirmatiuam E, ipsum A, metiri: quod videtur fieri nō posse. Nā si quis demonstrare instituat, Socratem esse album, ex eo, q̄ non est albus, paradoxum aliquid, & inopinatū in medium videatur afferre. Cui tamen nō absimile quid factum hic est in numeris ab Euclide, & in alijs nonnullis propositionibus, quæ sequuntur. Cardanus quoque simile quid effecit in magnitudinibus, lib. 5. de propor. propos. 20. gloriaturq́, se primum omnium hanc rationem demonstrandi reperisse: quod arbitror eum nō dictum fuisse, si diligentius vim huius demonstrationis expendisset, vel certè, si expendit, eā in memoriam reuocasset; quandoquidem ipso longè prior Euclides vsus est hoc etiā demonstrandi modo, vt ex hoc theor. 12. est manifestum. Eodem genere demonstrandi vsus est Theodosius lib. 1. Sphæricorum, propos. 12. vt ibid. monuimus.

Caeterum ex demonstratis perspicuum est, quemcunq; numerum primum, qui vltimum metitur, [a] *metiri etiam omnes alios ante ipsum. Cum enim metiatur proximum vnitati, hic autē omnes subsequentes,* [b] *quòd semper minor maiorem metiatur per aliquē eorum, qui in proportionalibus sunt numeris;* [c] *manifestum est, quòd & ille omnes metiatur.*

a 12. noni.
b 11. noni.
c 11. pron.

13. THEOR. 13. PROPOS. 13.

Si ab vnitate quotcunque numeri deinceps proportionales fuerint, qui verò post vnitatem, primus sit; Maximum nullus alius metietur, præter eos, qui sunt in numeris proportionalibus.

Sint ab vnitate continuè proportionales quotcunq; numeri A, B, C, D, quorum A, proximus vnitati sit primus. Dico nullum alium numerū, præter ipsos A, B, C, metiri maximum D. Si enim fieri potest, metiatur numerus alius E, diuersus ab A, B, C, ipsum D. Manifestum autem est, E, non esse numerum primū. Si enim primus sit, & metiatur extremum D; [c] metietur quoq; ipsum A, vnitati proximum, qui primus ponitur. Quod est absurdum. Non igitur E, primus est, sed compositus; [b] atque adeò eum aliquis numerus primus metietur.

Vnitas. A, 5. B, 25. C, 125. D, 625.
E---- H---- G---- F----

quem dico alium esse non posse, præter primum A. Si enim alius primus q̄ A, metiatur E; cùm E, metiatur extremum D; [c] metietur quoq; ille alius primus eundē D, [d] atq; adeò & ipsum A, primum: nimirum vnitati proximum. Quod est absurdum. Ergo non alius primus, q̄ A, ipsum E, metitur. Metiatur iam E, ipsum D, per F. Dico F, diuersum esse ab A, B, C. Si enim F, sit idem, qui aliquis ipsorum A, B, C, & E, metiatur D, per F; metietur vtique E, ipsum D, per aliquem ipsorum A, B, C, [e] & vicissim aliquis ipsorum A, B, C, (nimirum is, per quem E, ipsum D, metitur,) metietur D, per E. [f] Cùm ergo quilibet ipsorum A, B, C, metiatur D, per aliquē ipsorum A, B, C; erit E, idem qui aliquis ipsorum A, B, C, quod est contra hypothesim. ponitur enim E, non idem, qui aliquis ipsorum A, B, C. Non igitur F, idem est, qui aliquis ipsorum A, B, C, sed diuersus. Quoniam verò E, metitur D, per F; [g] metietur vicissim F, ipsum D, per E. Non sit autem F, primus: si enim sit primus, & metiatur D, vltimum; [h] metietur & A, proximum vnitati, qui primus est. quod est absurdum. Igitur F, non primus est, sed compositus; [i] atque adeò eum aliquis numerus primus metietur. quem rursus dico nullum alium esse posse præter primum A. Si namque alius primus quàm A, metiatur F; cùm F, metiatur D, extremum, [k] metietur quoque ille alius primus eundem D; [l] atque adeò & ipsum A, proximum vnitati, qui primus est. quod est absurdum: Ergo non alius primus, quàm A, ipsum F, metitur. Iam verò quotiam E, metitur D, per F; [m] fiet D, ex E, in F: Fit autem & D, ex A, in C, vt in scholio propositionis 19. huius libri docuimus. Idem igitur numerus D, fit ex A, primo in C, quartum, & ex E, secundo in F, tertium. [n] Ac proinde erit vt A, primus ad E, secundum, ita F, tertius ad C, quartum: Metitur autem A, ipsum E, vt ostensum est. Ergo & F, ipsum C, metietur. Metiatur per G. Quoniam igitur F, diuersus ab A, B, metitur C, vltimum (relinquimus enim iam numerum D,) per G, ostendemus similiter G, diuersum esse ab A, B, & non primum, sed compositum, quem solus A, primus metiatur: quemadmodum id ostensum est de numero F, per quem E, diuersus ab A, B, C, metiebatur D, vltimum.

Si enim G, sit idem, qui aliquis ipsorum A, B, metiatur q̄ F, ipsum C, per G; metietur vtique F, ipsum C, per aliquē ipsorum A, B, [o] & vicissim aliquis ipsorum A, B, (videlicet is, per quē F, ipsum C, metitur) metietur C, per F. [p] Cùm ergo quilibet ipsorū A, B, metiatur C, per aliquē ipsorum A, B; erit F, idem qui aliquis ipsorum A, B. quod est absurdum. ostensum est enim F, nō esse eundem

quem

a 3. sept.
b 33. sept.
c 11. pron.
d 12. noni.
e 8. pron.
f 11. noni.
g 8. pron.
h 12. noni.
i 23. sept.
k 11. pron.
l 12. noni.
m 9. pron.
n 19. sept.
o 8. pron.
p 11. noni.

quem aliquem ipſorum A, B. Non ergo G, eſt idem qui aliquis ipſorum A, B, ſed diuerſus. Quoniam autem F, metitur C, per G; [a] metietur viciſsim G, ipſum C, per F. Non erit autem G, primus. Si enim primus ſit, metiaturq; vltimum C, [b] metietur quoq; numerum primum A, vnitati proximum. quod eſt abſurdum. Non ergo G, primus eſt, ſed compoſitus; [c] ac proinde eũ aliquis primus metietur. quem dico nullum alium poſſe eſſe præter A. Nam ſi alius primus quàm A, metiatur G, cùm G, metiatur C, vltimum; [d] metietur quoq; ille alius primus eundem C; [e] atque adeò & ipſum A, vnitati proximum, qui primus eſt. quod eſt abſurdum. Ergo non alius primus quàm A, ipſum G, metitur. [f] Iam verò quia C, fit ex F, in G; quòd F, metiatur C, per G; Fit autem idem C, ex A, in B, vt docuimus in ſcholio propoſ. 11. huius lib. Fiet idem numerus C, ex A, primo in B, quartũ, & ex F, ſecundo in G, tertiũ. [g] Quare erit vt A, primus ad F, ſecundum, ita G, tertius ad B, quartum. Metitur autem A, ipſum F, vt demonſtratum eſt. Igitur & G, ipſum B, metietur. metiatur per H. Quia ergo G, diuerſus ab A, metitur B, vltimum (relinquimus enim iam numeros C, & D,) per H; oſtendemus ſimiliter H, diuerſum eſſe ab A; quemadmodum id oſtenſum eſt de numeris F, & G.

a 8. pron.
b 12. noni.
c 33. ſept.
d 11. pron.
e 12. noni.
f 9. pron.
g 19. ſept.

Nam ſi H, idem ſit qui A; metiaturque G, ipſum B, per H; metietur vtique G, ipſum B, per A; [h] Et viciſsim A, ipſum B, per G, metietur. Cùm igitur metiatur A, ipſum B, p A, vt conſtat ex ſcholio propoſ. 11. huius lib. erit G, idem qui A. quod eſt abſurdum. oſtenſum eſt enim G, non eſſe eundem, quem A. Non ergo H, idem eſt, qui A, ſed diuerſus. [i] Iam verò quia B, fit ex G, in H; quòd G, ipſum B, metiatur per H: Fit autem & idem B, ex A, in ſe, vt in ſcholio propoſ. 11. huius lib. docuimus; Fiet idem numerus B, ex H, primo in G, tertiũ, & ex A, medio in ſe ipſum. [k] Quare erit vt H, primus ad A, ſecundum, ita A, ſecundus ad G, tertium: At A, metitur ipſum G, vt eſt demonſtratum. Igitur & H, ipſum A, metietur, numerum primum. Quod eſt abſurdum. Quare ſi A, primus eſt, maximũ D, nullus alius numerus metitur, præter ipſos A, B, C. Ac proinde ſi ab vnitate quotcunque numeri deinceps proportionales fuerint, &c. Quod erat oſtendendum.

h 8. pron.
i 9. pron.
k 20. ſept.

THEOR. 14. PROPOS. 14. 14.

Si minimum numerum primi numeri metiantur: Nullus alius numerus primus illum metietur, præter eos, qui à principio metiebantur.

Sit numerus A, minimus, quẽ metiantur primi numeri B, C, D. Dico nullum alium primum præter ipſos B, C, D, metiri ipſum A. Metiatur enim, ſi fieri poteſt, primus numerus E, diuerſus à B, C, D, ipſum A, per numerum F. Quia igitur E, metitur A, per F; [l] multipli cans E, ipſum F, faciet A. [m] Quare ſinguli B, C, D, alterum ipſorum E, F, metientur: non quidem ipſum E, primum, & ab ipſis diuerſum: ergo ipſum F, qui minor eſt, quàm A. Quod eſt abſurdum. Ponitur enim A, minimus, quem primi B, C, D, metiantur. Si igitur minimum numerum primi numeri metiantur, &c. Quod demonſtrandum erat.

A.....
B.. C... D.....
E---- F------

l 9. pron.
m 32. ſept.

SCHOLIVM.

Addit hoc loco Campanus ſequens theorema ad ea, quæ ſequuntur, non inutile. Videlicet.

Si quotcunque numeri deinceps proportionales, fuerint minimi omnium eandem rationem habentium cum ipſis: Numerus aliquem eorum metiens, metietur quoque alterum duorum numerorum, qui in eadem ratione ſumuntur minimi, vel certè ad alterum erit compoſitus.

Sint quotcunque numeri continuè proportionales A, B, C, D, E, in ſua proportione minimi, in qua ſumantur etiam duo minimi F, G: Metiatur autem primò H, primum eorum, nimirum A. Dico H, metiri quoq; vel F, vel G, vel certè ad alterum eorum compoſitum eſſe. Sit enim H, non primus, ſed compoſitus: [a] Et ſumantur in eadem proportione tres numeri minimi I, K, L; & quatuor M, N, O, P; & ſic deinceps, donec habeantur tot, vno minus, quot ſunt ipſi A, B, C, D, E. Quoniam igitur, vt conſtat ex modo procreandi quotlibet minimos tradito in 2. propoſ. lib. 8. numerus A, fit ex F, in M; metitur autem H, ipſum A; erit H, compoſitus, ex ſcholio propoſ. 32. lib. 7. ad F, vel ad M. Si ad F, habemus propoſitum; ſi verò ad M, qui quidem fit ex F, in I, vt conſtat ex demonſtratione propoſ. 2. lib. 8. erit, ex ſcholio eiuſdem propoſ. 32. lib. 7. rurſus H, compoſitus vel ad F, vel ad I. Si ad F, habetur propoſitum: ſi verò ad I; cùm I, gignatur ex F, in ſe ipſum; erit H, compoſitus ad F, ex eodem ſcholio propoſ. 32. libri 7. Quòd ſi H, ſit primus, oſtendemus eodem modo, ex propoſ. 32. lib. 7. non autem ex ſcholio, cum metiri ipſum F.

a 2. octaui.

A, 16, B, 24. C, 36. D, 54. E, 81.
M, 8. N, 12. O, 18. P, 27.
I, 4. K, 6. L, 9.
H---- F, 2. G, 3.

Deinde metiatur H, non primus ſecundum B. Quia ergo B, fit ex F, in N; erit vt primus H, cõpoſitus, vel ad F, vel ad N. Si ad F, habetur propoſitũ; ſi verò ad N, q. quidem fit ex F, in K; erit H, eodẽ modo cõpoſitus vel ad F, vel ad K. Si ad F, habetur propoſitum; ſi verò ad K, cũ K, gignatur ex F, in G; erit quoq; H, compoſitus vel ad F, vel ad G. Quòd ſi H, ſit primus, demonſtrabimus eadem ratione eũ metiri vel F, vel G, ex propoſ. 32. lib. 7.

Rursvs metiatur H, non primus tertium C, qui cùm fiat ex F, in O; erit H, compoſitus vel ad F, vel ad O. Si ad F, habetur propoſitum; ſi verò ad O, qui quidem fit ex F, in L; erit H, compoſitus vel ad F, vel ad L.

Si ad F, habetur propositum; si verò ad L, cùm L, gignatur ex G, in se; compositus quoq; erit H, ad G. Quòd si H, sit primus, probabimus eodem modo ex propos. 32. lib. 7. eum metiri ipsum G.

PRÆTEREA metiatur H, non primus quartum D; qui cùm fiat ex F, in P; erit H, compositus vel ad F, vel ad P. Si ad F, habetur propositũ; si verò ad P, qui quidem fit ex G, in L; erit etiam H, compositus vel ad G, vel ad L. Si ad G, habetur propositum; si verò ad L; cùm L, producatur ex G, in se; erit quoq; H, ad G, compositus. Quòd si H, primus sit, ostendemus eodem modo ex propos. 32. lib. 7. eum metiri ipsum G.

EODEM modo si H, non primus metiatur vltimum E, ostendemus H, compositum esse ad G; Si verò H, primus sit, eum metiri ipsum G; atq; ita in cæteris eadem semper erit demonstratio.

ITAQVE si H, metiatur primum numerum A, metietur idem ipsum F, vel ad eum compositus erit: Si verò H, metiatur vltimum E, metietur idem ipsum G, vel ad eum compositus erit: Si deniq; H, metiatur aliquem, præter primum & vltimum, metietur idem vel ipsum F, vel ipsum G, aut ad alterutrum erit compositus. Id quod perspicuum est ex ipsa demonstratione.

DEMONSTRATIO IN NVMERIS EORVM, quæ in lineis 2. libro Euclides demonstrauit prioribus 10. theorematibus.

QVONIAM ad theorema sequens demonstrandum Theon quadam assumit in numeris, quæ demonstrata sunt de lineis libro 2. perinde ac si eadem de numeris essent ostensa; nõ alienum instituto nostro duximus, nonnulla ex ijs, quæ Geometricè ab Euclide libro 2. demonstrata sunt de lineis, hoc loco de numeris demonstrare. Quod idem & Barlaam monachum feciſſe à nonnullis est traditum. Sequemur autem eundem ordinem, quem Euclidem in 2. lib. tenuisse conspicimus.

I.

Si fuerint duo numeri, seceturque ipsorum alter in quotcunque partes: Numerus planus comprehensus sub illis duobus numeris æqualis est numeris, qui sub numero indiuiso, & qualibet parte numeri diuisi continentur.

SINT duo numeri A B, & C, quorum A B, diuidatur in A D, D E, E B; Fiatq; F, ex C, in A B: Item G H, ex C, in A D; & H I, ex C, in D E; & I K, ex C, in E B. Dico F, æqualem esse numeris G H, H I, I K, hoc est, toti numero G K, ex G H, H I, I K, composito. Quoniam enim C, multiplicans A B, fecit F; [a] *metietur A B, ipsum F, per C, hoc est, A B, pars erit ipsius F, denominata à C. Eadem ratione A D, ipsius G H; & D E, ipsius H I; & E B, ipsius I K, pars erit à C, denominata, eadem nimirum, quæ A B, ipsius F. Quia verò per ea, quæ ad propos. 5. lib. 7. demonstrauimus, totus A B, totius G K, eadem pars est, quæ A D, ipsius G H; erit quoq; A B, totus totius G K, pars eadem, quæ A B, ipsius F;* [b] *Ac proinde inter se æquales erunt F, & G K. Quod est propositum.*

a 2. pron.

b 4. pron.

A... D.. E. B C..
F.....
G..... H.... I.. K

II.

Si numerus in duas partes diuidatur: Numeri plani sub toto, & singulis partibus comprehensi æquales sunt numero quadrato, qui à toto efficitur.

NVMERVS enim A B, diuidatur in A C, C B. Dico numeros, qui fiunt ex A B, toto in partes A C, C B, simul æquales esse numero quadrato, qui ex toto A B, efficitur. Sumpto enim numero D, qui æqualis sit ipsi A B; erit per theor. 1. numerus factus ex D, hoc est, ex A B, in A B, nimirum quadratus ipsius A B, æqualis numeris, qui fiunt ex D, hoc est, ex A B, in A C, & in C B. quod est propositum.

D.....
A.... C.. B

IDEM demonstrabitur, si A B, in plures partes, quàm in duas secetur, vt ex apposita secunda figura apparere potest. Eadem enim ratione erit numerus factus ex E, hoc est, ex A B, in A B, nimirũ quadratus ipsius A B, æqualis numeris, qui gignuntur ex E, hoc est, ex A B, in singulas partes A C, C D, D B.

E.....
A... C.. D. B

III.

Si numerus in duas partes diuidatur: Numerus planus sub toto, & vna parte comprehensus æqualis est & illi, qui sub partibus continetur, numero, & illi, qui à prædicta parte efficitur, quadrato.

SIT numerus A B, diuisus in A C, C B. Dico numerum, qui fit ex toto A B, in partem A C, æqualem esse & ei, qui sub partibus A C, C B, continetur, & quadrato dictæ partis A C. Sumpto enim numero D, qui dictæ parti A C, æqualis sit; erit ex 1. theoremate numerus factus ex D: hoc est, ex A C, in A B; vel (quod idem est) ex A B, in A C, æqualis numeris factis ex D; hoc est, ex A C, in C B, & ex D; hoc est, ex A C, in A C, quadrato scilicet ipsius A C. Quod est propositum.

D....
A .... C..... B

Si nu-

IIII.

Si numerus in duas partes diuidatur: Quadratus ex toto factus æqualis est quadratis, qui à partibus efficiuntur, vnà cum numero plano, qui bis sub partibus continetur.

Sit numerus AB, diuisus in AC, CB. Dico numerum quadratum ex AB, factum æqualem esse quadratis partium AC, CB, vnà cum numero, qui fit bis ex parte AC, in partem CB. Nam ex 2. theoremate numerus quadratus ipsius AB, æqualis est numeris, qui fiunt ex AB, in AC, & in CB. Est autem numerus, qui fit ex AB, in AC, per tertium theorema, æqualis numero genito ex AC, in CB, vnà cum quadrato ipsius AC: Item numerus, qui fit ex AB, in CB, eodem modo æqualis numero producto ex AC, in CB, vnà cum quadrato ipsius CB. Igitur numerus quadratus ex AB, factus æqualis est quoq; numeris quadratis partium AC, CB, vnà cum numero bis, qui fit ex AC, in CB. Quod est propositum.

A..... C.... B

V.

Si numerus secetur in duas partes æquales, & non æquales: Numerus planus sub partibus inæqualibus contentus, vnà cum numero quadrato numeri inter duas sectiones medij, æqualis est quadrato, qui ex dimidio numero gignitur.

Numerus enim AB, secetur in partes æquales AC, CB; & non æquales AD, DB. Dico numerum sub partibus inæqualibus AD, DB, contentum, vnà cum quadrato numeri intermedij CD, (qui quidem excessus est inter semissem AC, vel CB, & alterutram partium inæqualium AD, DB.) esse æqualem quadrato, qui ex dimidio numero CB, efficitur. Nam cùm numerus quadratus ipsius CB, per quartum theorema, æqualis sit quadratis partium CD, DB, vnà cum plano numero bis comprehenso sub CD, DB; numero verò comprehenso semel sub CD, DB, vnà cum quadrato ipsius DB, æqualis sit, per tertium theorema, numerus factus ex CB, in DB; fit, vt si hic numerus factus ex CB, in DB, sumatur pro quadrato ipsius DB, vnà cum numero facto ex CD, in DB: numerus quadratus ipsius CB, æqualis etiam sit reliquo quadrato ipsius CD, vnà cum reliquo numero facto ex CD, in DB, semel, & numero ex CB; hoc est, ex AC, in DB, producto. Atqui ex primo theoremate numeris, qui fiunt ex CD, in DB, & ex AC, in DB, æqualis est numerus, qui fit ex toto AD, in DB. Igitur quadratus ipsius CB, æqualis erit quadrato ipsius CD, vnà cum numero, qui fit ex AD, in DB; hoc est, numerus factus ex AD, in DB, vnà cum quadrato ipsius CD, æqualis erit quadrato ipsius CB. Quod est propositum.

A..... C... D.. B

VI.

Si numerus in duas partes æquales diuidatur, & illi aliquis alius numerus adiiciatur: Numerus qui fit ex toto cum adiecto in adiectum, vnà cum quadrato dimidij numeri, æqualis est quadrato eius numeri, qui ex dimidio & adiecto componitur.

Numerus enim AB, secetur in partes æquales AC, CB, eiq; adiiciatur numerus BD. Dico numerum factum ex toto AB, & adiecto BD, tanquam vno, nimirum ex AD, in adiectum BD, vnà cum quadrato dimidij numeri CB, æqualem esse quadrato, qui fit ex CB, dimidio & adiecto BD, tanquam vno; hoc est, quadrato ipsius CD. Cùm enim quadratus ipsius CD, per 4. theorema, æqualis sit quadratis partium CB, BD, vnà cum numero bis comprehenso sub CB, BD; hoc est, quadratis partium CB, BD, vnà cum numeris sub CB, BD, & sub AC, BD, comprehensis; numeris autem contentis sub CB, BD, & sub AC, BD, & sub BD, BD; hoc est, quadrato ipsius BD, æqualis sit, ex primo theoremate numerus factus ex AD, in BD; fit, vt si hic numerus factus ex AD, in BD, sumatur pro quadrato partis BD, vnà cum numeris factis ex CB, in BD, & ex AC, in BD, quadratus ipsius CD, æqualis etiam sit reliquo quadrato ipsius CB, vnà cum numero facto ex AD, in BD; hoc est, numerus factus ex AD, in BD, vnà cum quadrato ipsius CB, æqualis sit quadrato ipsius CD. Quod est propositum.

A..... C.... B.. D

VII.

Si numerus in duas partes diuidatur: Quadratus totius, vnà cum quadrato vnius partis, æqualis est numero, qui fit bis ex toto in dictam partem, vnà cũ quadrato reliquæ partis.

Diuidatur numerus AB, in partes AC, CB. Dico quadratum totius AB, vnà cum quadrato partis CB, æqualem esse numero bis, qui fit ex toto AB, in dictam partem CB, vnà cum quadrato reliquæ partis AC. Cùm enim ex 4. theoremate quadratus totius AB, æqualis sit quadratis partium AC, CB, vnà cum numero, qui fit bis ex AC, in CB; si quadratus ipsius CB, addatur communis; erunt quadrati numerorum AB, CB, simul æquales quadratis numerorũ AC, CB, CB, vnà cum numero, qui fit bis ex AC, in CB. Atqui ei, q fit ex AC, in CB, vnà cũ quadrato ipsius CB, æqualis est, per 3. theor. numerus qui fit ex AB, in CB; Ac proinde ei, qui fit bis ex AC, in CB, vnà cũ quadrato ipsius CB, bis, æqualis est, q fit bis ex AB, in CB. Igitur

A..... C.... B

si pro numero, qui fit bis ex A C, in C B, vnà cum quadrato ipsius C B, bis, sumatur numerus factus bis ex A B, in C B; erunt quadrati numerorum A B, C B, simul, æquales numero, qui fit bis ex A B, in C B, vnà cum quadrato reliquæ partis A C. Quod est propositum.

VIII.

Si numerus in duas partes diuidatur: Qui fit quater ex toto in vnam partem, vnà cum quadrato reliquæ partis, æqualis est quadrato numeri compositi ex toto & priori parte.

Sectvr numerus A B, in partes A C, C B. Dico numerum, qui fit quater ex toto A B, in partem C B, vnà cum quadrato reliquæ partis A C, æqualem esse quadrato numeri, qui ex toto A B, & predicta parte C B, componitur. Addito enim numero B D, qui æqualis sit dictæ parti C B; cùm quadratus totius A D, compositi ex A B, & B D, siue dicta parte C B, sit æqualis per 4. theorema, quadratis numerorum A B, B D, vnà cum numero, qui fit bis ex A B, in B D, hoc est, quadratis numerorum A B, C B, vnà cum eo, qui fit bis ex A B, in C B; Sint autem, ex 7. theor. quadrati numerorum A B, C B, simul æquales numero bis comprehenso sub A B, C B, vnà cum quadrato numeri A C; sit, vt si pro quadratis numerorū A B, C B, sumatur numerus factus bis ex A B, in C B, vnà cum quadrato ipsius A C, quadratus factus ex A D, æqualis sit numero, qui fit quater ex A B, in C B, vnà cum quadrato reliquæ partis A C. Quod est propositum.

A.... C... B... D

IX.

Si numerus secetur in duas partes æquales, & non æquales: Quadrati, qui ab inæqualibus partibus fiunt, dupli sunt quadratorum, qui à dimidio numero, & ab intermedio efficiuntur.

Divisvs sit numerus A B, in partes æquales A C, C B, & non æquales A D, D B. Dico quadratos partium inæqualium A D, D B, duplos esse quadratorū, qui ex A C, dimidio, & ex C D, numero intermedio (qui quidem excessus est inter semissem A C, vel C B, & alterutram partium inæqualium A D, D B.) efficiuntur. Cùm enim quadratus numeri A D, æqualis sit, ex 4. theor. quadratis numerorum A C, C D, vnà cum numero bis, qui fit ex A C, in C D; Si communis apponatur quadratus partis D B; erunt quadrati partium A D, D B, æquales quadratis partium A C, C D, D B, vnà cum numero bis, qui fit ex A C, hoc est ex C B, in C D. Atqui quadrato ipsius D B, vnà cum numero bis, qui fit ex C B, in C D, æquales sunt ex 7. theor quadrati, qui fiunt ex C B, hoc est, ex A C, & C D. Igitur si pro quadrato ipsius D B, vnà cum eo, qui fit bis ex C B, in C D, sumantur quadrati ipsorum A C, C D, erunt quadrati partium A D, D B, æquales quadratis partium A C, C D, bis; Ac propterea quadrati partiū A D, D B, dupli erunt quadratorū, qui ex partibus A C, C D, fiunt. Quod est propositū.

A.... C... D.. B

X.

Si numerus in duas partes æquales diuidatur, adiiciatur autem illi alius quispiam numerus: Quadratus compositi numeri ex toto & adiecto, & quadratus numeri adiecti, simul dupli sunt eius quadrati, qui ex dimidio efficitur, & eius, qui fit à numero composito ex dimidio & adiecto.

Sit numerus A B, diuisus in partes duas æquales A C, C B, eiq; adiiciatur numerus B D. Dico quadratum numeri A D, compositi ex toto A B, & adiecto B D, & quadratum adiecti numeri B D, vtrosque simul, duplos esse quadratorū, qui fiunt ex A C, dimidio, & ex C D, composito ex C B, dimidio, & adiecto B D. Cùm enim quadratus ipsius A D, æqualis sit, ex 4. theor. quadratis partium A C, C D, vnà cum numero bis, qui fit ex A C, hoc est, ex C B, in C D; si communis addatur quadratus partis B D; erunt quadrati numerorū A D, B D, æquales quadratis partium A C, C D, B D, vnà cum numero bis, qui fit ex C B, in C D. Sed per 7. theor. quadrato ipsius B D, vnà cum numero bis, qui fit ex C B, in C D, æquales sunt quadrati numerorū C B, C D; & quadrato ipsius C B, æqualis est quadratus ipsius A C. Igitur si pro quadrato ipsius B D, vnà cum numero, qui fit bis ex C B, in C D, sumantur quadrati numerorum C B, C D, hoc est, numerorum A C, C D: erūt quadrati numerorum A D, B D, æquales quadratis numerorū A C, C D, bis; Ac propterea quadrati numerorum A D, B D, dupli erunt quadratorum, qui ex A C, C D, efficiuntur Quod est propositum.

Iam verò theor. 11. lib. 2. nō posse numeris accommodari, hoc est, nullo modo fieri posse, vt numerus aliquis in duas partes diuidatur, ita vt numerus planus, qui ex toto in vnam partium fit, æqualis sit quadratò reliquæ partis, vt ibi monuimus, ita demonstrabimus.

Dividatvr, si fieri potest, numerus A B, in C, ita vt numerus factus ex toto A B, in partem C B, æqualis sit quadrato reliquæ partis A C. Quia igitur numerus contentus sub extremis A B, C B, æqualis est quadrato numeri medij A C; [a] *erit vt A B, ad A C, ita A C, ad C B: Est autem A B, maior quàm A C. Igitur & A C, maior est quàm C B. Ablato iam C D, qui ipsi C B, sit æqualis, erit quoque vt A B, ad A C, ita A C, ad C D. Quoniam ergo totus A B, ad totum A C, est vt A C, ex toto A B, detractus ad C D, ex toto A C, detractum;* [b] *erit quoque vt totus A B, ad totum A C, vel vt detractus A C, ad detractum C D, ita C B, ex A B, residuum, hoc est, C D, ipsi C B,*

a 20. sept.

A D EC B

b 11. sept.

C B, æqualis, ad A D, ex A C, reſiduum. Quia igitur eſt, vt A C, ad C D, ita C D, ad A D; & eſt A C, maior quàm C D; erit quoq; C D, maior quàm A D. Ablato ergo D E, qui ipſi A D, ſit æqualis; erit etiam vt A C, ad C D, ita C D, ad D E. Itaq; quia eſt, vt totus A C, ad totum C D, ita C D, ex toto A C, detractus ad D E, ex toto C D, detractum; [a] erit quoq; vt totus A C, ad totum C D, vel vt detractus C D, ad detractum D E, ita A D, ex A C, reſiduus: hoc eſt, D E, ipſi A D, æqualis, ad E C, ex C D, reſiduum. Quare cùm ſit, vt C D, ad D E, ita D E, ad E C; ſit autem C D, maior, quàm D E; erit etiam D E, maior, quàm E C; Ac proinde ex E D, auferri poterit numerus ipſi E C, æqualis; & ſic deinceps, nec vnquam finis erit huius detractionis. Quod eſt abſurdum: cùm numerus non poſſit diuidi in infinitum. Non ergo numerus A B, diuidetur ita, vt planus numerus ex toto in vnam partium factus, æqualis ſit quadrato reliquæ partis. Quod eſt propoſitum. [a] 11. ſept.

ALITER. Quoniam numerus A B, in C, ita diuiſus eſt, vt is, qui fit ex A B, in C B, æqualis ſit quadrato reliquæ partis A C; erit numerus, qui quater fit ex A B, in C B, quadruplus quadrati ipſius A C; Ac proinde numerus, qui fit quater ex A B, in C B, vnà cum quadrato ipſius A C, quintuplus erit quadrati partis A C. Eſt autem numerus contentus quater ſub A B, C B, vnà cum quadrato ipſius A C, quadratus; quippe cùm æqualis ſit quadrato numero, qui fit ex numero compoſito ex A B, & C B, per 8. theorema. Igitur duo numeri quadrati (nimirum is, qui quater continetur ſub A B, C B, vnà cum quadrato ex A C; & quadratus ex A C,) proportionem habent, quam 5. ad 1. vel 25. ad 5. Quod eſt abſurdum, vt conſtat ex coroll. propoſ. 24. lib. 8. Non ergo numerus A B, diuiditur ita in C, vt is, qui producitur ex A B, in C B, æqualis ſit quadrato ipſius A C. Quod eſt propoſitum.

A C B

VERVM hoc idem clariùs demonſtrabimus ad propoſ. 29. huius lib.

THEOR. 15. PROPOS. 15. 16.

SI tres numeri deinceps proportionales, fuerint minimi omnium eandem cum ipſis rationem habentium; Duo quilibet compoſiti, ad reliquum primi erunt.

SINT tres numeri A, B, C, minimi omnium eandem cum illis proportionem habentium. Dico quoslibet duos compoſitos, ad reliquum primos eſſe; nimirum A, B, ſimul ad C; & B, C, ſimul ad A; & A, C, ſimul ad B. Sumptis enim duobus D, E, in eadem cum illis proportione minimis, ex ſcholio propoſ. 35. lib. 7. manifeſtum eſt ex demonſtratione propoſ. 2. lib. 8. D, ſeipſum multiplicantem facere A; multiplicantem verò ipſum E, facere B; atque E, ſeipſum multiplicantem facere C. [a] Quia igitur D, E, minimi in ſua proportione inter ſe primi ſunt; [b] erit & vterque D, E, ſimul ad quemlibet illorum primus. Itaque cùm tam compoſitus ex D, E, quàm ipſe D, ad E, primus ſit; [c] erit quoq; numerus factus ex D, E, tanquá vno, in D, ad eundem E, primus: Qui autem fit ex D, E, tanquam vno, in D, æqualis eſt per 3. theor. ſcholij præcedentis, & numero A, facto ex D, in ſe, & numero B, facto ex D, in E. Igitur & A, B, compoſiti, primi ſunt ad E; [d] Ac proinde & ad C, qui factus eſt ex E, in ſe, primi ſunt A, B, ſimul compoſiti.

A, 9. B, 12. C, 16. D, 3. E, 4.

[a] 24. ſept. [b] 30. ſept. [c] 26. ſept. [d] 27. ſept.

DEINDE quia, vt prius, [e] vterque D, E, ſimul primus eſt ad quemlibet ipſorum D, E; efficitur, (cùm tam compoſitus ex D, E, quàm ipſe E, primus ſit ad D,) [f] numerum factum ex D, E, tanquam vno, in E, primum eſſe ad D: Qui autem fit ex D, E, tanquam vno, in E, æqualis eſt per 3. theor. ſcholij antecedentis, & numero C, facto ex E, in ſe, & numero B, facto ex D, in E. Igitur & B, C, ſimul compoſiti, ad D, primi ſunt, [g] atque adeò & ad ipſum A, qui factus eſt ex D, in ſe, primi ſunt B, & C, ſimul compoſiti.

B, 12. C, 16. A, 9. D, 3. E, 4.

[e] 30. ſept. [f] 26. ſept. [g] 27. ſept.

POSTREMO, quia, vt prius, [h] vterque D, & E, ſimul ad quemlibet ipſorum primus eſt; atque adeò è contrario, quilibet ipſorum D, E, primus eſt ad compoſitum ex D, E, [i] erit quoque qui fit ex D, in E, ad compoſitum ex D, E, primus; [k] Ac proinde & idem, qui fit ex D, in E, ad eum, qui fit ex D, E, tanquam vno, in ſe, primus erit. Qui autem fit ex D, E, tanquam vno, in ſe, æqualis eſt, per 4. theor. antecedentis ſcholij, eis qui fiunt ex D, & E, in ſe ipſos, vnà cum eo, qui ex D, in E, bis. Igitur & factus ex D, in E, primus erit ad eos, qui fiunt ex D, & E, in ſe ipſos, & ex D, in E, bis. Quoniam ergo duo numeri ſimul, videlicet compoſitus ex iis, qui fiunt ex D, & E, in ſe ipſos, & ex eo, qui fit ex D, in E, atque is, qui fit ex D, in E, primi ſunt ad aliquem ipſorum; nimirũ ad eum, qui fit ex D, in E, vt oſtenſum eſt. [l] Erunt etiam duo illi; nimirum compoſitus ex iis, qui fiunt ex D, & E, in ſe ipſos, & ex eo, qui fit ex D, in E, atque is, qui fit ex D, in E, inter ſe primi. Rurſus quia duo numeri ſimul, videlicet compoſitus ex iis, qui fiunt ex D, & E, in ſe ipſos, atque is, qui fit ex D, in E, ad aliquem ipſorum; nimirum ad eum, qui fit ex D, in E, primi ſunt, vt oſtenſum eſt; [m] erunt etiam duo illi; nimirum compoſitus ex iis, qui fiunt ex D, & E, in ſe ipſos, atque is, qui fit ex D, in E, inter ſe primi. Cùm igitur ex D, & E, in ſe ipſos fiant A, & C; Item ex D, in E, fiat B; erunt A, & C, ſimul compoſiti, primi ad B. Quam ob rem, ſi tres numeri deinceps proportionales, &c. Quod erat oſtendendum.

A, 9. C, 16. B, 12. D, 3. E, 4.

[h] 30. ſept. [i] 26. ſept. [k] 27. ſept. [l] 37. ſept. [m] 30. ſept.

SCHOLIVM.

CAMPANVS hoc theorema aliter, & quidem facilius demonſtrat de quotcunque numeris continuè proportionalibus minimis, hoc modo ipſum proponens.

SI quotcunq; numeri deinceps proportionales, fuerint minimi omnium eandem cum ipsis rationẽ habentium: Ad quemlibet eorũ reliqui omnes simul compositi, erunt primi.

SINT continuè proportionales minimi quotcunq; numeri A,B,C,D. Dico ad quemlibet eorum reliquos omnes simul compositos, esse primos; Videlicet A,B,C, simul ad D; & A,B,D, simul ad C; & A,C,D, simul ad B; & B,C,D, simul ad A. Si enim A,B,C, simul non sunt primi ad D, erunt A,B,C, simul atq; D, compositi inter se; atq; adeò eos aliquis numerus communis mensura metietur. Metiatur eos numerus E, & fieri potest; sumantur q; F, & G, duo minimi in ratione A,B,C,D, numerorum. Quoniam ergo A,B,C,D, continuè proportionales sunt, & minimi; metitur autem E, aliquem eorum; nimirum D, metietur quoq; E, alterum ipsorum F,G, vel certè compositus erit ad alterum ipsorum F,G, ex scholio propos. 14. huius lib. Atq; idcircò ipsum E, & alterũ ipsorum F,G, aliquis numerus metietur: Metiatur eos H. Itaq; cùm H, metiatur E; & E, ponatur metiri compositum ex A,B,C, & ipsum D; [a] *metietur quoq; H, eundem compositum ex A,B,C, & ipsum D. Quia verò H, metitur quoq; alterum ipsorum F,G; & tam F, q̃ G, medios numeros B,C, metitur ex coroll. 3. propos. 2. lib. 8.* [b] *metietur quoq; H, medios B,C;* [c] *ac propterea & compositum ex B,C. Itaq; cùm H, metiatur totum compositum ex A,B,C, & detractum compositũ ex B,C, vt demonstrauimus;* [d] *metietur quoq; idem H, reliquum A: Metiebatur autem & ipsum D. Sunt ergo A,D, extremi minimorum A,B,C,D, inter se compositi.* [e] *Sed & primi inter se sunt. Quod fieri non potest. Non igitur compositi inter se sunt, compositus ex A,B,C, & numerus D. Ergo inter se primi.*

A, 8. B, 12. C, 18. D, 27.
E ---- F, 2. G, 3. H ----

a 11. pron.
b 11. pron.
c 10. pron.
d 12. pron.
e 3. octaui.

RVRSVS, si A,B,D, simul compositi non sunt primi ad C, metietur eos, vt prius, aliquis numerus. Metiatur eos E, qui rursum ex scholio propos. 14. huius lib. vel metietur alterum ipsorum F,G, vel compositus erit ad alterum ipsorum F,G. Metiatur ergo H, ipsum E, & alterum ipsorum F,G. Itaq; cùm H, metiatur E; & E, compositum ex A,B,D; [f] *metietur etiam H, eundem compositum ex A,B,D. Quia verò H, metitur alterum ipsorum F,G, qui metiuntur, per coroll. 3. propos. 2. lib. 8. medios B,C,* [g] *metietur quoq; H, ipsos B,C. Itaq; cùm H, metiatur totum compositum, ex A,B,D, & detractum B,* [h] *metietur quoque H, compositum ex A,D, reliquum. Et quia H, metitur alterum ipsorum F, G, quorum F, ipsum A, & G, ipsum D, metitur, vt constat ex demonstratione propos. 2. lib. 8.* [i] *metietur etiam H, alterum ipsorum A,D.* [k] *Igitur & reliquum. Sunt ergo A, D, extremi inter se compositi.* [l] *Sed & primi inter se sunt. Quod fieri nõ potest. Non igitur A,B,D, simul compositi, ad C, compositi sunt. Ergo primi. Quod est propositum.*

f 11. pron.
g 11. pron.
h 12. pron.
i 11. pron.
k 12. pron.
l 13. octaui.

NON aliter ostendemus & A,C,D, compositos, esse ad B, primos; nec non & B,C,D; simul ad A. Eadem q̃ ratio est de quotlibet numeris continuè proportionalibus.

17.

THEOR. 16. PROPOS. 16.

SI duo numeri primi inter se fuerint: Non erit vt primus ad secundum, ita secundus ad alium quempiam.

Sint primi inter se A, & B. Dico non esse vt A, ad B, ita B, ad alium numerum. Si enim fieri potest, sit vt A, ad B, ita B, ad alium; nimirum ad C. Quoniam igitur A, & B, primi sunt inter se, [a] atque adeò in sua proportione minimi; [b] ipsi æquè metientur numeros B, & C, in eadem ratione existentes; nimirum A, ipsum B, & B, ipsum C: Metitur autem & A, se ipsum. Igitur A, metitur ipsos A,B, primos inter se. Quod est absurdum. Non ergo est vt A, ad B, ita B, ad alium numerum C. Eademque ratione non erit, vt B, ad A, ita A, ad alium. Quare si duo numeri, primi inter se fuerint, &c. Quod demonstrandum erat.

A .....
B .....
C ----------

a 23. sept.
b 21. sept.

18.

THEOR. 17. PROPOS. 17.

SI fuerint quotcunque numeri deinceps proportionales, extremi autẽ ipsorũ primi inter se sint: Non erit vt primus ad secundum, ita vltimus ad aliumquempiã.

SINT continuè proportionales quotcunque numeri A,B,C,D, quorum extremi A,D, inter se primi sint. Dico non esse vt A, ad B, ita D, ad alium numerum. Si enim fieri potest, sit vt A, ad B, ita D, ad alium; videlicet ad E. Erit igitur permutando vt A, ad D, ita B, ad E. Sunt autem A,D, cũ sint inter se primi, [c] minimi in sua proportione. [d] Igitur æquè metiẽtur ipsos B, & E; nimirũ A, ipsum B, & D, ipsum E. Atqui est vt A, ad B, ita B, ad C: Ergo cùm A, metiatur ipsum B; & B, ipsum C, metietur; [e] atque ob id & A, ipsum C, metietur. Et quia est vt B, ad C, ita C, ad D; metitur autem B, ipsum C; metietur & C, ipsum D. Quare A, metiens ipsum C, [f] metietur quoq; ipsum D. Metitur verò & A, se ipsum. Igitur A, metitur ipsos A,D, inter se primos. Quod est absurdum. Non ergo est vt A, ad B, ita D, ad alium numerũ E. Eodem quoq; argumento non erit vt D, ad C, ita A, ad alium. Quocirca si fuerint quotcunque numeri deinceps proportionales, &c. Quod erat ostendendum.

A, 8. B, 12. C, 18. D, 27. E ----

c 23. sept.
d 21. sept.
e 11. pron.
f 11. pron.

19.

PROBL. 1. PROPOS. 18.

DVOBVS numeris datis considerare, an possit ipsis tertius proportionalis inueniri.

DATI

DATI duo numeri sint A, & B, oporteatque considerare, an inueniri possit tertius ipsis proportionalis; hoc est, an sit B, ad alium quempiam numerum, vt A, ad B. Aut igitur A, 4. B, 7. A, B, primi inter se sunt, aut non. Si sunt inter se primi [a] perspicuum est ex demonstratis, non posse ipsis reperiri tertium proportionalem. Si verò non sunt A, & B, inter se primi; multiplicans B, seipsum faciat C. Aut igitur A, metitur ipsum C, aut non. Metiatur primũ A, ipsum C, p D. Dico ipsis A, B, inueniri posse tertiũ proportionalem, immò ipsum D, esse tertiũ proportionalẽ. Cũ enim A, metiatur C, p D, [b] fiet C, ex A, in D: A, 4. B, 6. D, 9. C, 36. Fit autẽ ex constructione, idem C, ex B, in se ipsum. Igitur, qui continetur sub extremis A, D, æqualis est ei, qui ex medio B, describitur; [c] Ac proinde erit vt A, ad B, ita B, ad D. Quare D, inuentus est tertius proportionalis ipsis A, B.

[a] 16. noni.
[b] 9. pron.
[c] 20 sept.

SED non metiatur A, ipsum C. Dico ipsis A, B, non posse reperiri tertium proportionalem. Si enim inueniri potest, inuẽtus sit D, ita vt sit A, ad B, quemadmodum B, ad D. Quoniam igitur est, vt A, ad B, ita B, ad D; [d] erit numerus contentus sub extremis A, D, æqualis ei, qui fit ex B, medio in se ipsum; hoc est, ipsi C. Quare cùm C, fiat ex A, in D; [e] metietur A, ipsum C, per D: sed & non metiri ponitur. Quod est absurdum. Non igitur inueniri potest ipsis A, B, tertius proportionalis, quando A, primus non metitur C, productum ex B, secundo in se ipsum. Eadem via considerabimus, an ipsis B, & A, inueniri possit alius tertius numerus, ad quem ita sit A, vt B, ad A. Duobus ergo numeris datis considerauimus, &c. Quod faciendum erat.

A, 6. B, 4. D ---- C, 16.

[d] 20. sept.
[e] 7. pron.

PROBL. 2. PROPOS. 19. 20

TRIBVS numeris datis, considerare, an possit ipsis quartus proportionalis inueniri.

SINT dati tres numeri A, B, C, siue deinceps proportionales, siue non; oporteatque considerare, an possit reperiri quartus ipsis proportionalis; hoc est, an sit C, ad aliquem alium numerum, vt A, ad B. Multiplicans B, ipsum C, faciat D. Aut igitur A, ipsum D, metitur, aut non. Metiatur primùm A, ipsum D, per E. Dico ipsis A, B, C, inueniri posse quartum proportionalem, immò ipsum E, esse quartum proportionalem. Cùm enim A, metiatur D, per E; [f] fiet D, ex A, in E; Fit autem idem D, ex B, in C, per constructionem. Igitur qui sub extremis A, E, continetur, æqualis est ei, qui sub B, C, secundo, & tertio continetur; [g] Ac propterea erit, vt A, ad B, ita C, ad E. Quare inuentus est E, ipsis A, B, C, quartus proportionalis.

A, 8. B, 12. C, 18. E, 27. D, 216.
A, 4. B, 8. C, 9. E, 18. D, 72.

[f] 9. pron.
[g] 19. sept.

SED iam non metiatur A, ipsum D. Dico ipsis A, B, C, non posse inueniri quartum proportionalem. Sit enim, si fieri potest, inuentus quartus proportionalis E; ita vt sit quemadmodum A, ad B, ita C, ad E. Quia ergo quatuor numeri A, B, C, E, proportionales sunt, [h] erit numerus contentus sub extremis A, E, æqualis ei, qui ex B, secundo fit in C, tertium; hoc est, ipsi D. Quare cùm D, fiat ex A, in E; [i] metietur A, ipsum D, per E: sed & ponitur non metiri. Quod est absurdum. Non igitur inueniri potest ipsis A, B, C, quartus proportionalis, quando A, primus nõ metitur D, productum ex B, secundo in C, tertium. Eadem methodo considerabimus, an ipsis C, B, A, inueniri possit aliquis quartus, ad quem ita se habeat A, vt C, ad B. Quocirca tribus numeris datis considerauimus, an possit, &c. Quod erat faciendum.

A, 4. B, 6. C, 9. E ---- D, 54.
A, 3. B, 4. C, 10. E ---- D, 40.

[h] 19. sept.
[i] 7. pron.

SCHOLIVM.

HAEC, quæ proximis quatuor propositionibus, nimirũ 16. 17. 18. & 19. demonstrata sunt, intelligi debent de numeris integris. Nam si de fractis loquamur, potest quibuslibet duobus, vel tribus adiungi alius proportionalis, quamuis extremi inter se primi sint. Nam datis duobus, si quadratus numerus secundi diuidatur per primum, procreabitur tertius proportionalis. Vt duobus numeris datis 3. 8. si quadratus numerus secundi 8. nimirũ 64. diuidatur per 3. inuenietur tertius proportionalis 21 1/3. hoc modo, 3. 8. 21 1/3. Quia enim diuisis 64. per 3. fit numerus 21 1/3. producetur numerus diuisus 64. ex multiplicatione Quotientis 21 1/3. per diuisorem 3. vt ad defin. 15. lib. 7. tradidimus. Cùm ergo idem numerus 64. factus sit ex medio numero 8. in se; [a] erunt 3. 8. 21 1/3. continuè proportionales.

[a] 20. sept.

DATIS autem tribus numeris, si numerus ex secundo in tertium genitus diuidatur per primum, procreabitur quartus proportionalis. Vt datis tribus numeris 9. 6. 20. si numerus 120. ex secundo in tertium genitus diuidatur per primum 9. reperietur quartus proportionalis 13 1/3. hoc modo, 9. 6. 20. 13 1/3. Cùm enim diuisis 120. per 9. fiat 13 1/3. producetur numerus diuisus 120. ex multiplicatione Quotientis 13 1/3. per diuisorem 9. ex ijs, quæ in defin. 15. lib. 7. scripsimus. Fit autem idem numerus diuisus ex secundo in tertium. [b] Igitur quatuor numeri 9. 6. 20. 13 1/3. proportionales sunt.

[b] 19. sept.

EX his facilè cognoscemus, propositis quotcunque numeris continuè proportionalibus, an possit ipsis alius proportionalis adiungi. Sumptis enim tribus vltimis, si ipsis alius potest inueniri, ille idem erit omnibus illis proportionalis.

THEON, & qui illum sequuntur, inter quos etiam est Federicus Commandinus, quatuor membris hoc problema absoluunt. Aut enim (aiunt) tres dati numeri & deinceps proportionales sunt, & eorum extremi inter se primi; Aut nō deinceps quidem proportionales, sed eorum extremi primi inter se; Aut deinceps quidem proportionales, sed eorum extremi non primi inter se; Aut denique nec deinceps proportionales, nec eorum extremi inter se primi. Vbi mirari satis non possum, quonam modo diligentissimi Euclidis interpretes, & in alijs quidem demonstrationibus vigilantissimi, in secundo membro huius problematis demonstrādo dormitârint, & quasi sui obliti, ac de diligentia remittentes, in errorem, eumq; non leuem, incurrerint. Dicunt enim, si tres numeri dati non sint deinceps proportionales, sed eorū extremi inter se primi, non posse ipsis quartum proportionalem inueniri. Quod quidem & falsum est, & demonstratio, qua id ipsum comprobare nituntur, vitiosa. Nā falsitas huius rei perspicuè in his numeris non continuè proportionalibus, apparet 4.8.9. quorum extremi 4.9. sunt inter se primi, & nihilominus eis adiungi potest quartus proportionalis 18. Quis enim non videt, esse vt 4. ad 8. ita 9. ad 18. cùm vtrobique proportio sit subdupla? Idem videri potest in exemplis alijs infinitis, vt hic 2.4.7.14. Item 3.9.4.12. Item 2.10.3.15. Item 5.10.6.12. &c. In omnibus enim his numeris extremi priorū trium sunt inter se primi, cùm tamen ipsis adiungatur posterior quartus proportionalis. Falsum ergo est, illis dari non posse quartū proportionalem. Quòd autē vitiosa sit eorum demonstratio, qua hoc probare contendunt, perspicuū fiet, si demonstrationē ipsam in medium proferamus. Ita igitur ratiocinātur.

SINT trium numerorum A, B, C, non deinceps proportionalium, extremi A, C; inter se primi. Dico ipsis inueniri nullo modo posse quartum proportionalem. Si enim potest inueniri, sit ille D, ita vt sit quemàdmodum A, ad B, ita C, ad D; & vt B, ad C, ita fiat D, ad E. Erit igitur ex æquo, vt A, ad C, ita C, ad E: Sed sunt A, C, inter se primi, [a] & ob id minimi.

A, 3. B, 6. C, 8. D, 16. E----

a 23. septimi.

[b] Igitur metientur æquè ipsos C, E, nimirum A, ipsum C, & C, ipsum E. At verò & A, seipsum metitur. Ergo A, metitur duos A, C, primos inter se. Quod fieri non potest. Ipsis igitur A, B, C, quartus proportionalis inueniri nequit.

b 21. septimi.

HAEC est eorum demonstratio, in qua assumunt esse, vt B, ad C, ita D, ad alium quendam numerum, videlicet ad E; quod quidem fieri posse, nusquam demonstrârunt. Immò hoc ipsum vertitur in dubium in hoc problemate. Non enim minus inquiritur, an tribus numeris B, C, D, quartus proportionalis possit inueniri, quàm tribus A, B, C; cùm non magis hoc constet in illis, quàm in his. Quapropter cùm ibi id pro concesso assumant, vt hic idem fieri non posse, ostendant: liquidò constat, eos petere principium (vt cum Dialecticis loquamur) in demonstrando. Quin etiam quotiescunque quatuor numeri dantur proportionales, sed non deinceps, quorum primus, & tertius, primi inter se sunt, quales ponuntur esse A, B, C, D; nulla ratione fieri potest, vt detur alius, ad quem ita se habeat quartus, sicut secundus ad tertium: quod tamen ipsi tanquam concessum, atq; probatū assumunt; quandoquidem sine probatione vlla exigunt, vt detur illis numerus E, ad quem ita se habeat quartus D, vt B, secundus ad C, tertium. Hoc verò non posse fieri, facilè demonstrabimus eodem argumento, quo ipsi vtuntur.

SINT enim quatuor numeri A, B, C, D, proportionales, nō tamen deinceps, sintq; A, & C, primus & tertius, inter se primi. Dico fieri non posse, vt sit D, ad alium numerum, quemadmodum B, ad C. Sit enim, si potest fieri, vt B, ad C, ita D, ad E. Est ergo ex æquo, vt A, ad C, ita C, ad E; atque adeò, vt ipsi ostenderunt, metietur A, duos A, & C, primos inter se. Quod est absurdum. Non ergo fieri potest, vt D, ad E, sit, quemadmodū B, ad C. Quare apertissimè falsum in demonstratione secundi membri assumpserūt Theon, & alij Euclidis interpretes, qui Theonem sequuntur.

A, 4. B, 12. C, 3. D, 9. E----

PRIMVM verò membrum perspicuè & apertè ostendunt. Nam si tres numeri deinceps proportionales sunt, & eorum extremi inter se primi; [c] manifestum est, ex demonstratis, non posse ipsis quartum proportionalem inueniri. Postrema tandem duo membra expediunt non aliter, ac nos totum problema absoluimus.

c 17. noni.

21. THEOR. 18. PROPOS. 20.

PRIMI numeri plures sunt, omni proposita multitudine primorū numerorū.

A, 2. B, 3. C, 5.
30. 1.
D---------- E. F

SINT propositi primi numeri quotcunque A, B, C. Dico ipsis A, B, C, plures esse primos numeros. [a] Sumpto enim numero D E, minimo, quē A, B, C, metiuntur; apponatur ei vnitas E F. Aut ergo totus D F, primus est, aut non primus. sit primùm primus. Sunt ergo primi numeri A, B, C, & D F, plures proposita multitudine A, B, C.

a 38. sept.

A, 3. B, 5. C, 7.
105. 1.
D---------- E. F
53.
G-------

SED iam nō sit primus D F. [b] Metietur ergo eum aliquis numerus primus: nimirum G. Dico G, primum nulli ipsorum A, B, C, eundem esse. Si namque G, sit idem, qui vnus ipsorum A, B, C; metiantur autem A, B, C, ipsum D E; & G, eundem D E, metietur. Quare G, metiēs totum D F, & detractum D E, [c] metietur quoque E F, reliquum, numerus vnitatem.

b 33. sept.

c 11. pron.

Quod

Quod eſt abſurdum. Ergo G, primus non eſt idem, qui vnus ipſorum A, B, C; Ac proinde inuenti ſunt primi numeri A, B, C, G, plures propoſita multitudine primorum numerorum A, B, C. Eademque via plures inuenientur, quàm A, B, C, G, ſi ſumatur minimus, quem ipſi metiantur, &c. Quocirca primi numeri plures ſunt, &c. Quod demonſtrandum erat.

SCHOLIVM.

POTERAT idem hoc theorema inſtar problematis hoc modo proponi.

PRIMIS numeris quotcunque propoſitis, inuenire alium primum numerum ab illis diuerſum.

NAM ſi primi quotcunque propoſiti ſint A, B, C, inueniemus eodem modo alium primum ab illis diuerſum; videlicet D F, ſi primus eſt, vel certè G, qui ipſum D F, metitur. Atque eodem modo quatuor primis alium quintum, & quinque primis alium ſextum inueniemus; & ſic deinceps primos numeros, quotquot quis volet, inueniemus.

THEOR. 19. PROPOS. 21. 22.

SI pares numeri quotcunque componantur: totus par erit.

COMPONANTVR quotcunque pares numeri A B, B C, C D. Dico & totum compoſitũ A D, parem eſſe. Cùm enim A B, B C, C D, ſint pares, habebunt ſinguli ſingulas partes dimidias, ex definitione. Sit ergo E, dimidia pars ipſius A B; & E, ipſius B C; & G, ipſius C D. Quoniam igitur eſt vt A B, ad E, ita B C, ad F; & C D, ad G; (quòd ſemper ſit proportio dupla.) [a] erit quemadmodum vt A B, ad E, ita A D, ad E, F, G, ſimul. Eſt autẽ A B, ipſius E, duplus. Igitur & totus A D, compoſiti ex E, F, G, duplus erit; Ac propterea A D, dimidiam partem habens numerum ex E, F, G, compoſitum par erit, ex definitione. Si igitur pares numeri quotcunque, &c. Quod erat demonſtrandum.

A..... B.... C..... D
E... F.. G....

[a] 12. ſept.

THEOR. 20. PROPOS. 22. 23.

SI impares numeri quotcunque componantur, multitudo autem ipſorum ſit par: Totus par erit.

COMPONANTVR quotcunque numeri impares, quorum multitudo par A B, B C, C D, D E. Dico & totum compoſitum A E, parem eſſe. Cùm enim A B, B C, C D, D E, ſint impares; differet quilibet vnitate à pari, ex definitione. Quare detracta ab vnoquoque vnitate, quilibet reliquorum par erit. [b] Quare & compoſitus ex ipſis par erit. Eſt autem & multitudo vnitatum detractarum par. [c] Igitur & totus A E, compoſitus par erit. Si igitur impares numeri quotcunque, &c. Quod erat oſtendendum.

A... B..... C..... D..... E

[b] 21. noni. [c] 21. noni.

THEOR. 21. PROPOS. 23. 24.

SI impares numeri quotcunque componantur, multitudo autem ipſorum ſit impar: & totus impar erit.

QVOTCVNQVE numeri impares, quorum multitudo impar eſt, A B, B C, C D, componantur. Dico & totum A D, compoſitum, imparem eſſe. Cùm enim impar numerus differat vnitate à pari; ex definitione; ablata vnitate E D, ab impari C D; erit reliquus C E, par. [d] Eſt autẽ & A C, compoſitus ex imparibus A B, B C, multitudine paribus, par. [e] Igitur & A E, compoſitus ex paribus A C, C E, par erit. Quare addita vnitate E D, totus A D, impar erit, cùm impar à pari differat vnitate, ex definitione. Si igitur impares numeri quotcunque, &c. Quod oſtendendum erat.

A..... B... C..... E. D

[d] 22. noni. [e] 21. noni.

SCHOLIVM.

PARI ratione, Impar numerus pari numero, vel pluribus paribus numeris additus faciet imparẽ. Nam dempta vnitate ex impare, reliquus erit par; cùm ex defin. Impar à pari differat vnitate. [a] Quare reliquus ille par cum alio pari dato; vel cum pluribus datis, conficiet parem. Addita ergo rurſus illa vnitate, totus fiet impar; cùm à pari ſola vnitate differat. Quod eſt propoſitum.

[a] 21. noni.

THEOR. 22. PROPOS. 24. 25.

SI à pari numero par detrahatur: Et reliquus par erit.

Ex pari numero A B, detrahatur par C B. Dico & reliquum A C, parem eſſe. Aut enim C B, par detractus dimidia pars eſt ipſius A B, aut maior, quàm dimidia pars, vel minor. Sit primum dimidia pars. Cùm igitur ipſi C B, pari æqualis ſit A C, reliqua pars dimidia; erit & A C, numerus par.

A..... C..... B

SED iam CB, par detractus maior sit, vel minor dimidia parte ipsius AB. Quoniam igitur AB, CB, pares numeri, dimidias partes habent, ex definitione; sit DB, dimidia pars ipsius AB; & EB, dimidia ipsius CB. Itaque cùm sit vt AB, ad DB, dimidiũ, ita CB, ad EB, dimidium; erit permutando vt AB, ad CB, ita DB, ad EB; & diuidendo vt AC, ad CB, ita DE, ad EB. Rursumque permutando, vt AC, ad DE, ita CB, ad EB.

A..... C.. D... E..... B
A.....D... C.. E.. B

Atqui CB, ipsius EB, duplus est: Igitur & AC, ipsius DE, duplus erit; Ac propterea AC, cùm bifariam diuidatur, (quòd DE, sit eius pars dimidia) par erit. Si ergo à pari numero par detrahatur, &c. Quod erat ostendendum.

SCHOLIVM.

FACILIVS demonstrabimus hanc propositionem, ducendo ad impossibile, hoc modo: Si AC, reliquus non dicatur par, sed impar; detracta vnitate AD, erit reliquus DC, par. [a] *Igitur compositus DB, par quoq; erit; ac proinde addita vnitate AD, totus AB, impar fiet. quod est absurdum, cùm par ponatur.*

A. D.... C..... B

a 21. noni.

26. THEOR. 23. PROPOS. 25.

SI à pari numero impar detrahatur: Et reliquus impar erit.

Ex pari numero AB, impar detrahatur CB. Dico & reliquum AC, imparem esse. Detracta enim vnitate CD, ex CB, reliquus sit numerus DB, par. Quia igitur & totus AB, ponitur par; [a] erit & reliquus AD, par. Demptâ ergo vnitate CD, reliquus AC, impar erit. Si igitur à pari numero impar detrahatur, &c. Quod demonstrandum erat.

A..... C. D.... B

a 24. noni.

27. THEOR. 24. PROPOS. 26.

SI ab impari numero impar detrahatur: Reliquus par erit.

Ex impari numero AB, impar detrahatur CB. Dico reliquũ AC, parem esse. Detracta enim DB, vnitate ex imparibus AB, CB; erunt reliqui AD, CD, pares. Quia ergo ex pari AD, par aufertur CD; [b] erit & reliquus AC, par. Quare si ab impari numero impar detrahatur, &c. Quod erat demonstrandum.

A.... C..... D. B

b 24. noni.

28. THEOR. 25. PROPOS. 27.

SI ab impari numero par detrahatur: Reliquus impar erit.

Ex impari AB, detrahatur par CB. Dico reliquum AC, imparem esse. Detracta enim AD, vnitate ex impare AB; erit reliquus DB, par: Ex quo cùm detrahatur CB, par; [c] reliquus DC, par quoque erit; Ac proinde addita vnitate AD, fiet AC, impar. Si ergo ab impari numero par detrahatur, &c. Quod demonstrandum erat.

A. D.... C..... B

c 24. noni.

29. THEOR. 26. PROPOS. 28.

SI impar numerus parem multiplicans fecerit aliquem: Factus par erit.

A... B....
C.....

FIAT ex A, impari in B, parem numerus C. Dico C, parem esse. Cùm enim C, fiat ex A, in B; componetur C, ex tot numeris ipsi B, æqualibus, quot in A, sunt vnitates. Quare cùm B, sit par, componetur C, ex tot paribus ipsi B, æqualibus, quot sunt vnitates in A; [d] Atque adeò par erit. Si ergo impar numerus parem multiplicans, &c. Quod ostendendum erat.

d 21. noni.

SCHOLIVM.

EADEM demonstratione ostendemus & hoc.

SI par numerus parem multiplicans fecerit aliquem; Factus par erit.

A.. B.....
C.....

NAM rursus C, componetur ex tot paribus ipsi B, æqualibus, quot in A, continentur vnitates, &c.

COROLLARIVM.

A.... B....
C.....

CONSTAT quoq; ex his, Parem numerum in se multiplicatũ procreare parem: vt patet, si pares A, & B, ponantur æquales.

30. THEOR. 27. PROPOS. 29.

SI impar numerus imparem numerum multiplicans fecerit aliquem: Factus impar erit.

Ex

Ex impari A, in imparem B, fiat C. Dico C, imparem esse. Cùm enim C, fiat ex A, in B; componetur C, ex tot numeris ipsi B, æqualibus, quot sunt vnitates in A. Quare cùm tam A, quàm B, sit impar; componetur C, ex imparibus ipsis B, æqualibus, quorum multitudo impar est, nimirum æqualis multitudini vnitatũ, quæ in A, impari continentur. [a] Igitur C, impar erit. Quocirca si impar numerus imparem numerum multiplicans, &c. Quod erat ostendendum.

A... B.....
C.....

a 23. noni.

COROLLARIVM.

HINC sequitur, Imparem numerum in se multiplicatum gignere imparem: vt constat, si impares A, & B, ponantur æquales.

A... B...
C.....

EX CAMPANO.

NVMERVS impar numerum parem metiens, per numerum parem eum metitur.

METIATVR impar A, parem B, per C. Dico C, parem esse. Nam si impar sit; [a] erit B, factus ex A, impari in C, imparem impar. Quod est absurdum, cùm ponatur par. Est ergo C, par.

A... C...
B.....

a 29. noni.

NVMERVS impar numerum imparem metiens, per numerum imparem eum metitur.

METIATVR impar A, imparem B, per C. Dico C, imparem esse. Si enim sit par; [b] erit B, factus ex A, impari in C, parem par. Quod est absurdum, cùm impar ponatur. Est ergo C, impar.

A... C.....
B.....

b 28. noni.

SCHOLIVM.

EX his clarissimè quoq; demonstrabimus theorema 11. lib. 2. numeris non posse accommodari: Id quod etiam in scholio propos. 14. huius lib. aliter ostendimus; recepimusq; nos hoc loco clariùs demonstraturos. Secetur enim, si fieri potest, numerus A B, in partes A C, C B, ita vt numerus ex A B, in C B, factus, æqualis sit quadrato reliquæ partis A C. Aut igitur vtraq; pars A C, C B, impar est; aut maior A C, impar, & minor C B, par; aut contra, maior A C, par, & minor C B, impar; aut denique vtraq; pars A C, C B, par. Sit primùm vtraque pars A C, C B, impar, [c] ideoq; totus numerus A B, par. [d] Igitur qui fit ex A B, in C B, par est: qui verò ex A C, in se fit, impar est, ex Coroll. huius propos. 29. Cùm ergo numerus ex A B, in C B, genitus ponatur æqualis ei, qui fit ex A C, in se; erit par numerus impari æqualis. quod fieri non potest.

A------C----B
D---E--

c 22. noni.
d 28. noni.

DEINDE, sit A C, impar, & C B, par, ideoq; ex scholio propos. 23. huius lib. totus A B, impar. [e] Quia ergo numerus ex A B, impare in parem C B, factus, par est: & numerus ex impare A C, in se genitus, impar, ex coroll. huius propos. 29. erit rursus ille par huic impari æqualis. quod est absurdum.

e 28. noni.

TERTIO, sit A C, par, & C B, impar; ideoq; ex scholio propos. 23. huius lib. totus A B, impar. [f] Quia ergo numerus ex A B, impare in imparem C B, factus, impar est: & numerus ex pare A C, in se genitus, par, ex coroll. propos. 28. huius lib. erit rursus ille impar huic pari æqualis. quod absurdum est.

f 29. noni.

QVARTO, sit vtraq; pars A C, C B, par. Inuentis igitur, ex scholio propos. 35. lib. 7. duobus numeris minimis D, E, in proportione A C, ad C B; [g] erunt D, E, inter se primi: ac proinde ambo pares non erunt, sed vel vterque impar, vel vnus impar, & alter par. Et quia est, vt A C, ad C B, ita D, ad E; erit conuertendo, vt C B, ad A C, ita E, ad D: Et componendo, vt A B, ad A C, ita totus D E, ad D: [h] Est autem, vt A B, ad A C, ita A C, ad C B; quòd numerus factus ex A B, in C B, æqualis ponatur quadrato medij A C. Igitur erit quoq; vt totus D E, ad D, ita D, ad E, [i] ac proinde numerus, qui fit ex toto D E, in E, æqualis erit quadrato ipsius D. Totus ergo numerus D E, factus est in partes D, E, quarum vel vtraque impar est, vel vna impar, & altera par; ita vt numerus factus ex toto D E, in partem E, æqualis sit quadrato alterius partis D. quod fieri non posse, iam demonstratum est in numero A B, quando vtraq; pars A C, C B, vel impar est, vel vna impar, & altera par. Constat ergo propositum.

g 24. septi.
h 20. septi.
i 20. septi.

THEOR. 28. PROPOS. 30. 33.

SI impar numerus parem numerum metiatur; & illius dimidium metietur.

METIATVR impar A, parem B. Dico A, dimidium quoque ipsius B, metiri. Metiatur A, ipsum B, per C. Erit ergo, ex iis, quæ in antecedente propos. ex Campano demonstrauimus, numerus C, par: Atque adeò dimidiam partem habebit. Itaque cùm A, metiatur B, per C, [a] metietur quoque C, ipsum B, per A; Ac proinde C, pars erit ipsius B, denominata ab A, vt ad 3. definitionem lib. 7. docuimus. Quoniam verò est vt C, ad dimidium sui, ita B, ad dimidiũ sui; & permutando vt C; ad B, ita dimidia pars ipsius C, ad dimidiam partem ipsius B. Est autem C, pars ipsius B, denominata ab A, vt ostensum est; erit & dimidium ipsius C, dimidij ipsius B, pars ab eodem A, denominata. [b] Ac propterea A, dimidium ipsius B, metietur. Si impar ergo numerus parem numerum metiatur, &c. Quod erat ostendendum.

A... C....
B.....

a 8. *pron.*
b 40. *sept.*

34. ## THEOR. 29. PROPOS. 31.

Si impar numerus ad aliquem numerum primus sit: & ad illius duplum primus erit.

IMPAR numerus A, primus sit ad numerum B, cuius duplus sit C. Dico A, ad C, quoq; primum esse. Si enim A, C, non sunt inter se primi; metietur eos aliquis numerus, qui sit D: qui necessariò impar erit. Nam si sit par, cùm metiatur imparem A; [a] erit A, factus ex D, pari in eum numerum, per quem metitur, par. Quod est absurdum. ponitur enim A, impar. Quare D, impar parem C, metiēs: (est enim C, par; cùm dimidium habeat B.) [b] metietur quoq; numerum B, eius dimidium: Metitur autem & A. Igitur D, ipsos A, B, primos inter se metitur. Quod est absurdum. Non igitur A, ad C, primus non est. Ergo primus. Quapropter si impar numerus ad aliquem numerum primus sit, &c. Quod erat ostendendum.

a 28. noni.

A..... B.....
C..... D----

b 30. noni.

COROLLARIVM.

SEQVITVR hinc, numerum imparem, qui ad aliquem numerum primus est, primum quoque esse non solum ad eius duplum, vt Euclides demonstrauit, sed etiam ad eius quadruplum, octuplum, sedecuplum, & sic deinceps per proportionem duplam progrediendo. Num si primus est ad duplum, [a] primus quoque erit ad quadruplum, qui dupli duplus est: Et similiter ad octuplum, qui quadrupli duplus est, &c.

a 31. noni.

35. ## THEOR. 30. PROPOS. 32.

NVMERORVM à binario duplorum vnusquisque pariter par est tantùm.

NVMERI à binario A, dupli quotcunque sint B, C, D, E. Dico B, C, D, E, esse pariter pares tantùm. Quòd enim sint pariter pares, perspicuum est. Nam exposita vnitate, cùm A, sit binarius, & B, C, D, E, à binario dupli; erunt A, B, C, D, E, ab vnitate deinceps proportionales, nimirum in proportione dupla. [a] Quare A, quemlibet ipsorū B, C, D, E, & quilibet minor maiorem sequentem metietur per aliquem ipsorum A, B, C, D, E; qui cùm omnes sint pares, vtpote dupli à binario; metietur quemlibet ipsorum B, C, D, E, par numerus per numerum parem: Ac propterea quilibet pariter par erit, ex definitione.

Vnitas. A, 2. B, 4. C, 8. D, 16. E, 32.

a 11. noni.

QVOD autem iidem numeri sint pariter pares tantùm, liquidò etiam constat. Cùm enim A, B, C, D, E, sint ab vnitate continuè proportionales, sitque A, proximus vnitati numerus primus, nimirum binarius; [b] nullus alius quemlibet ipsorum metietur, præter ipsos A, B, C, D, E; qui cùm sint omnes pares; metietur quemlibet ipsorum par numerus per parem numerum tantùm: Ac propterea quilibet pariter par est tantùm. Numerorum igitur à binario duplorum, &c. Quod demonstrandum erat.

b 13. noni.

SCHOLIVM.

HINC cum Arithmeticis facilè colligemus artem, qua omnes numeros inueniamus, qui sint pariter pares tantùm. Sint enim A, B, C, D, E, F, à binario dupli, qui ex hic demonstratis omnes sunt pariter pares tantùm. Dico nullum alium esse pariter parem tantùm, præter eos, qui in hoc ordine continentur; Atque adeò si ordo numerorum à binario duplorum infinitè augeatur, omnes numeros pariter pares tantum inueniri, nullo relicto. Si enim fieri potest, sit alius numerus G, extra ordinem numerorum à binario duplorum, pariter par tantùm, cuius pars dimidia sit H. Erit igitur H, numerus par: (Nam si dicatur impar, cùm sit ipsius G, pars dimidia; metietur binarius, numerus par, ipsum G, per H, numerum imparem; Atquè adeò G, pariter impar erit. Quod est absurdum: ponitur namque pariter par tantùm) cuius rursum dimidia pars sit I. Erit igitur rursum I, par numerus: (Nam si dicatur impar, cùm sit ipsius G, pars quarta; metietur numerus par 4. ipsum G, per I, numerum imparem; Atq; ob id G, pariter impar erit; Quod est absurdum: ponitur enim pariter par tantùm.) Atq; ita deinceps erit semper dimidia pars numerus par, donec ad vnitatem veniamus. Sit ergo iam ipsius I, dimidia pars vnitas, ita vt sit I, binarius. Igitur H, G, sunt à binario I, dupli; Ac proinde G, erit aliquis ex ordine ipsorum A, B, C, D, E, F. ponitur autem, non esse. Quod est absurdum. Nullus ergo alius pariter par est tantùm, præter eos, qui à binario sunt dupli.

A, 4. B, 8. C, 16. D, 32. E, 64. F, 128.
I---H---G----

36. ## THEOR. 31. PROPOS. 33.

SI numerus dimidium habeat imparem: Pariter impar est tantùm.

HABEAT numerus A: dimidiam partem numerum imparem. Dico A, esse pariter imparem tantùm. Quòd enim sit pariter impar, ita perspicuum fiet. Quoniam A, dimidiū habet imparem: metietur

A..... metietur binarius numerus par ipsum A, per illum dimidium imparem. Quare A, ex definitione, pariter impar est. Quòd autem idem A, sit pariter impar tantùm, hoc modo demonstrabimus. Sit B, dimidia pars ipsius A; & C, binarius. Si igitur A, non est pariter impar tantùm; ipse erit quoque pariter par. Quare eum metietur aliquis par numerus per parem numerum. Metiatur eum D, par per parem E. [a] Igitur fit A, ex D, in E: sed idem A, fit ex C, binario in B, eius dimidium. Ergo numerus factus ex C, primo in B, quartum æqualis est ei, qui fit ex D, secundo in E, tertium, [b] Ac propterea erit vt C, ad D, ita E, ad B. Metitur autem C, binarius parem D. Igitur & E, ipsum B, metietur, par imparem. Quod est absurdum. Non est ergo A, pariter par. Ergo pariter impar tantùm. Quocirca si numerus dimidium habeat imparem, &c. Quòd demonstrandum erat.

A.....
B..... C..
D----- E----

[a] 9. prom.
[b] 19. septimi

SCHOLIVM.

Impares. 3. 5. 7. 9. 11. 13. 15.

Pariter impares tantùm. 6. 10. 14. 18. 22. 26. 30.

ITAQVE si omnium numerorum imparium dupli sumantur, inuenientur omnes numeri, qui sunt pariter impares tantùm. Quod enim quilibet illorum sit pariter impar tantùm, constat ex hac propositione; quippe cùm quilibet dimidium habeat imparem. Quòd autem illi soli sint pariter impares tantùm, perspicuum erit ex sequenti theoremate, in quo demonstratur, omnes pares, qui nec à binario sunt dupli, neque dimidios habent impares, esse pariter pares, & pariter impares. Cùm ergo nullus alius par habeat dimidium imparem, præter duples imparium numerorum; manifestum est, nullum alium, præter ipsos, esse pariter imparem tantũ; sed vel esse pariter parem tantũ, vel certè pariter parẽ & pariter imparẽ.

THEOR. 32. PROPOS. 34. 37.

SI par numerus neque à binario duplus sit, neque dimidium habeat imparem: Pariter par est, & pariter impar.

A..... PAR numerus A, neque sit à binario duplus, neque dimidium habeat imparem, sed parem. Dico A, & pariter parem esse, & pariter imparem. Quòd enim sit pariter par, liquet. Nam cùm dimidium habeat parem, metietur eum binarius, par numerus, per parem, nempe per dimidium. Igitur ex definitione, pariter par est.

QVOD autem idem A, sit etiam pariter impar, ita ostendemus. Diuiso A, bifariam, & eius dimidio rursus bifariam, & ita deinceps; tandem incidemus in aliquem imparem. Nam si in binarium incideremus, esset A, à binario duplus; ponitur autem & non duplus. Quod est absurdum. Igitur cùm in imparem incidamus, metietur ille impar ipsum A, per numerum parem: Aliàs si per imparem metiretur, [c] cùm impar imparem multiplicans faciat imparem; esset A, factus ex illo impare in hunc imparem, impar. Quod est absurdum. ponitur enim par. Quare cùm impar metiatur A, per parem; atque adeò vicissim par per imparem; erit ex definitione A, pariter impar. Fuit autem & pariter par. Igitur est & pariter par, & pariter impar. Si par ergo numerus neque à binario duplus sit, &c. Quod ostendendum erat.

[c] 29. noni

SCHOLIVM.

FACILE ex his inuenietur omnes numeros, qui & pariter pares sint, & pariter impares. Relictis enim omnibus illis, qui à binario sunt dupli, & omnibus, quis dimidio habent impares; erunt ex hac propos. omnes alij pares, & pariter pares & pariter impares.

PORRO ex proximis tribus theorematib. apertè intelliguntur ea, quæ in definitionem 9. lib. 7 scripsimus.

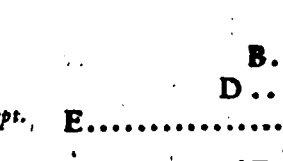
THEOR. 33. PROPOS. 35. 38.

SI sint quotcunque numeri deinceps proportionales, detrahantur autem à secundo, & vltimo æquales ipsi primo: Erit vt secundi excessus ad primum, ita vltimi excessus ad omnes ipsum antecedentes.

A.....
B.... G..... C
D.....
E.....K.....I....H.....F

A.
B.. G. C
D.....
E.....K.....I..H. F

SINT quotcunque numeri continuè proportionales A, B C, D, E F; & ex B C, secundo, & E F, vltimo detrahantur C G, F H, primo A, æquales. Dico esse vt B G, ad A, ita E H, ad A, B C, & D, simul. Detrahatur F I, ipsi B C, & F K, ipsi D, æqualis. Quoniam igitur F I, æqualis est ipsi B C, & ablatus F H, ablato C G; erit & reliquus I H, reliquo B G, æqualis. Quia verò est vt A, ad B C, ita B C, ad D, & D, ad E F; conuertendoque vt E F, ad D, ita D, ad



BC,& BC,ad A; Atque eſt KF,ipſi D,& IF,ipſi BC, & HF,ipſi A,æqualis: Erit quoque vt EF,ad KF,ita KF,ad IF,& IF, ad HF. Diuidendo igitur vt EK,ad KF,ita KI,ad IF,& IH,ad HF; [a] Ac proinde ita etiã erunt omnes EK,KI,IH,ad omnes KF,IF, HF, hoc eſt,totus EH,ad D,BC,A,ſimul,(quibus ſumpti ſunt æquales KF, IF, HF,) vt IH, ad HF, hoc eſt, vt BG,ad A; ſunt enim BG,& A,ipſis IH,& HF,æquales. Quare ſi ſint quotcunque numeri deinceps proportionales,&c. Quod demonſtrandum erat.

[a] 12. ſept.

SCHOLIVM.

Ex hoc theoremate veniemus in notitiam ſummæ quotcunq; numerorum continuè proportionalium, ſi modò primus, ſecundus, & vltimus fuerint noti. Cùm enim ſit vt exceſſus ſecundi ad primum, ita exceſſus vltimi ad omnes ipſum antecedentes; Si primus à ſecundo, & vltimo dematur, fiatq; vt reliquus ſecundi ad primum, ita reliquum vltimi ad alium: Erit hic alius ſumma omnium numerorum proportionalium, quinti-timum antecedunt. Si igitur adiiciatur vltimus, habebitur tota ſumma.

1. 3. 9. 27. 81. 243. 729. 2187.

Inuenietur autem quartus ille proportionalis, ſi primus multiplicetur in exceſſum vltimi, & productus diuidatur in exceſſum ſecundi: vt liquet ex ſcholio propoſ. 19. huius lib. quandoquidem tres dati numeri, quibus quartus proportionalis inueniendus eſt, ſunt, exceſſus ſecundi, primus, & exceſſus vltimi: Vt in exemplo appoſito, ſi primus numerus, nimirum vnitas, detrahatur ex 3. ſecundo; & ex 2187. vltimo; erunt reliqui exceſſus, 2. 2186. Quoniam igitur debet eſſe vt 2. ad 1. ita 2186. ad ſummam omnium, excepto vltimo, ſi ſecundus numerus 1. multiplicetur per tertium 2186, fiet numerus 2186. qui ſi diuidatur in primum 2. exurget numerus 1093. Videlicet ſumma omnium, excluſo vltimo 2187. qui ſi addatur ſummæ inuentæ 1093. procreabitur ſumma omnium 3280.

39.

THEOR. 34. PROPOS. 36.

SI ab vnitate quotcunque numeri deinceps exponantur in dupla proportione, quoad totus compoſitus fiat primus; & totus hic in vltimum multiplicatus faciat aliquem: Factus erit perfectus.

SINT ab vnitate quotcunque numeri A,B,C,D, dupli, quoad E, ex illis compoſitus ſit primus; & E, multiplicans D, vltimum faciat F. Dico F, eſſe numerum perfectum. Quot enim ſunt numeri A,B,C,D, tot ſumantur ab E, dupli, nimirum E,G,H,I. Quia igitur A, B, C, D, eandem rationem habent, quam E,G,H,I; erit ex æquo, vt A, ad D, ita E, ad I; [b] Ac propterea numerus factus ex A, primo in I, quartum æqualis eſt facto ex D, ſecundo in E, tertium: Factus eſt autem F, ex D, in E. Igitur idem F, fiet ex A, in I; [c] ideoq; I, ipſum F, metietur per A, binarium; & ob hoc F, ipſius I, duplus erit. Quare E,G,H,I,F, deinceps dupli ſunt. Detrahantur ex G, ſecundo, & ex F, vltimo numeri K,L, primo E, æquales, ſintq; reliqui exceſſus M,N. [d] Erit igitur vt M, ad E, ita N, ad E,G,H,I, ſimul: Eſt autem M, æqualis ipſi E. (Cùm enim G, duplus ſit ipſius E, ablatusq; ſit K, ipſi E, æqualis; erit & reliquus M, ipſi E, æqualis.) Ergo & N, æqualis eſt ipſis E,G,H,I, ſimul. Additis igitur æqualibus, nimirum numero L, (qui æqualis eſt ipſi E, ablatus) & numero compoſito ex vnitate, & A,B,C,D, numeris; (qui compoſitus eidem E, per conſtructionem, eſt æqualis) erit compoſitus ex L N, nimirum ipſe F, æqualis vnitati, & numeris A,B,C,D,E,G,H,I, ſimul. Quare cùm vnitas, & omnes numeri A,B,C,D,E,G,H,I, metiantur ipſum F; (Cùm enim F, factus ſit ex E, in D; [e] metietur D, ipſum F; [f] atque adeò eundem F, metietur vnitas, & numeri A,B,C, [g] qui ipſum D, metiuntur. Rurſus cùm I, ipſum F, metiatur, vt oſtenſum eſt, [h] metientur quoque eundem F, numeri E,G,H, [i] qui ipſum I, propter proportionem duplam, metiuntur) & nullus alius numerus ipſum F, metiatur, vt mox oſtendemus; Erunt vnitas & numeri A,B,C,D, E,G,H,I, omnes partes, quas F, habere poteſt: Quibus cùm æqualis oſtenſus ſit ipſe F; erit F, ex definitione, perfectus.

Vnitas. A,2. B,4.. C,8. D,16.
E,31. G------62. H,124. I, 248. F------496.
K,31. M,31. L,31. N,465.
O----- P----

[b] 19. ſept.
[c] 7. pron.
[d] 35. noni.
[e] 7. pron.
[f] 11. pron.
[g] 11. noni.
[h] 11. pron.
[i] 11. noni.

QVOD autem nullus alius numerus, præter A,B,C,D,E,G,H,I, ipſum F, metiatur, ita demonſtrabimus. Metiatur, ſi fieri poteſt, alius numerus O, præter illos, ipſum F, per P; & atq; adeò F, fiat ex O, in P: Sed & idem F, factus eſt ex E, in D. Idem ergo numerus fit ex E, primo in D, quartum, & ex P, ſecundo in O, tertium; [l] ac propterea eſt vt E, ad P, ita O, ad D. Quoniam verò, cùm A,B, C,D, ab vnitate ſint proportionales, & A, proximus vnitati primus, [m] vltimum D, nullus alius, præter A B, C, metitur: & O, ponitur non idem, qui aliquis ipſorum A,B,C; non metietur O, ipſum D. Vt autem O, ad D, ita erat E, ad P; neque igitur E, ipſum P, metietur. Cùm ergo E, primus ſit, [o] erunt E, & P, inter ſe primi; [p] ideoque in ſua proportione minimi: [q] Ac proinde æquè metietur E, ipſum O, & P, ipſum D. [r] Nullus verò alius præter A,B,C, ipſum D, metitur. Igitur P, idem erit, qui aliquis ipſorum A,B,C. Sit ergo idem, qui B, & quot ſunt B,C,D, tot ab E, ſumantur dupli

[k] 9. pron.
[l] 19. ſeptimi
[m] 13. octani.
[n] 31. ſeptimi
[o] 23. ſeptimi.
[p] 21. ſeptimi
[q] 23. octani.

tur dupli E, G, H. Erit igitur ex æquo, vt B, ad D, ita E, ad H: [a] Ac proinde idem numerus fiet ex B, primo in H, quàrtum, qui ex D, ſecundo in E, tertium. Qui autem ex D, in E, æqualis fuit ei, qui ex P, in O. Idem ergo fiet ex P, in O, qui ex B, in H, [b] atque adeò erit, vt P, ad B, ita H, ad O. Erat autem P, idem qui B: Igitur & H, idem eſt, qui O. Quod eſt abſurdum, ponitur enim O, diuerſus ab omnibus A, B, C, D, E, G, H, I. Non igitur alius numerus O, ipſum F, metitur, ſed ipſum ſoli A, B, C, D, E, G, H, I, metiuntur. Quam ob rem, ſi ab vnitate quotcunque numeri deinceps exponantur in dupla proportione, &c. Quod erat demonſtrandum.

[a] 19. ſeptimi

[b] 19. ſeptimi

SCHOLIVM.

Ex hoc theoremate elicitur modus inueniendi omnes numeros perfectos, & earum partes aliquotas, quibus ſimul ſumptis, iuxta definitionem numeri perfecti, ipſi æquales ſunt. Si enim quotcunq; numeri ab vnitate dupli in vnam ſummam colligantur, donec compoſitus ſit numerus primus; Erit numerus factus ex illo primo in vltimum duplorum, perfectus. Quod ſi ab illo primo, qui ex illis duplis componitur, ſumantur tot continuè dupli (ipſo primo etiam computato) quot ſunt numeri illi dupli ab vnitate, excluſa vnitate; erunt hi numeri accepti, & illi ab vnitate dupli, vnà cum ipſa vnitate, omnes partes aliquotæ, quas perfectus numerus inuentus habere poteſt. Quæ omnia perſpicua ſunt ex demonſtratione theorematis, & facilè ex ſubiectis exemplis percipi poſſunt. Vt quia numerus 3. compoſitus ex 1. 2. primus eſt; erit propterea numerus 6. qui fit ex 3. in 2. vltimum duplorum, perfectus, cuius partes aliquotæ ſunt 1, 2, 3. Item, quia compoſitus ex his 1. 2. 4. nimirum 7. primus eſt: idcirco 28. factus ex 7. in 4. eſt perfectus habens has partes aliquotas 1. 2. 4. 7. 14. At verò quia compoſitus ex his 1. 2. 4. 8. hoc eſt, 15. non eſt primus; non erit 120. factus ex 15. in 8. perfectus.

Denique quia compoſitus ex his 1. 2. 4. 8. 16. nimirum 31. primus eſt; erit 496. factus ex 31. in 16. numerus perfectus, cuius partes aliquotæ ſunt 1. 2. 4. 8. 16. 31. 62. 124. 248. Eodem modo & reliquos perfectos numeros inueniemus.

Lvbet hoc loco demonſtrare proprietates quaſdam proportionalitatis Geometricæ, qua nititur admirabilis illa proprietas, quam libro 5. ſeptimo loco, cùm de proportionalitate Geometrica ageremus, expoſuimus. hinc exordientes.

I.

Qvolibet numero per duos quoſuis numeros diuiſo, erunt duo hi numeri Quotientibus conuerſo ordine proportionales.

A, 48. B, 8. C, 3. D, 6. E, 16.

Nvmervs enim A, diuiſus per B, C, faciat quotientes D, E. Dico eſſe, vt B, ad C, ita E, ad D. Quoniam enim diuiſo A, per B, fit Quotiens D; fiet A, ex B, in D, vt ad defin. 15. lib. 7. ſcripſimus. Eadem ratione idem A, fiet ex C, in E. Quia ergo idem numerus A, fit ex B, primo in D, quartum, & ex C, ſecundo in E, tertium; [a] *erit vt B, primus ad C, ſecundum, ita E, tertius ad D, quartum. Quod eſt propoſitum.*

[a] 19. ſept.

II.

Qvolibet numero per quotuis numeros diuiſo, erunt bini numeri diuidentes binis Quotientibus reſpondentibus conuerſo ordine proportionales.

A, 48. B, 3. C, 4. D, 8. E, 6. F, 16. G, 12. H, 6. I, 8.

Diviso enim numero A, per B, C, D, E, ſint Quotientes F, G, H, I. Dico eſſe, vt B, ad C, ita G, ad F: Et vt C, ad D, ita H, ad G: Et vt D, ad E, ita I, ad H. Hoc autem manifeſtum eſt ex theoremate 1. proximè demonſtrato. Cùm enim duo B, C, diuidentes A, faciant F, G; erit vt B, ad C, ita G, ad F. Item cùm duo C, D, diuidentes A, faciant G, H; erit vt C, ad D, ita H, ad G. Item cùm duo D, E, diuidentes A, faciant H, I; erit vt D, ad E, ita I, ad H: Atq; ita deinceps, ſi plures fuerint. Quod eſt propoſitum.

III.

Qvolibet numero per quotuis numeros continuè proportionales diuiſo, erunt Quotientes conuerſo ordine in eadem proportione continuè proportionales.

A, 15. B, 1. C, 2. D, 4. E, 8. F, 15. G, $7\frac{1}{2}$. H, $3\frac{3}{4}$. I, $1\frac{7}{8}$.

Diviso enim numero A, per B, C, D, E, continuè proportionales, ſint Quotientes F, G, H, I. Dico I, H, G, F, in eadem proportione B, ad C, continuè proportionales eſſe. Quoniam enim per 2. theorema eſt, vt D, ad E, ita I, ad H: Et vt C, ad D, hoc eſt, vt D, ad E, ita H, ad G; Et vt B, ad C, hoc eſt, vt C, ad D, & D, ad E, ita G, ad F; erunt I, H, G, F, continuè proportionales in proportione D, ad E, vel B, ad C. Quod eſt propoſitum.

IIII.

Si ſint quotuis numeri quicunq;, & totidem alij in eiſdem proportionibus; erit vt ſumma priorum ad quemlibet eorum, ita ſumma poſteriorum ad eum, qui illi in poſterioribus reſpondet.

A,3. B,6. C,20. D,29. E,6. F,12. G,40. H,58.

SINT quotuis numeri A,B,C, quorum ſumma D: Et totidem alij E,F,G, quorum ſumma H; ſitq́ vt A, ad B, ita E, ad F; & vt B, ad C, ita F, ad G. Dico eſſe, vt D, ad A, B, C, ſigillatim, ita H, ad E, F, G, ſigillatim. Cùm enim ſit, vt A, ad B, ita E, ad F; erit componendo, vt A, B, ſimul ad B, ita E, F, ſimul ad F: Vt autem B, ad C, ita eſt F, ad G. Igitur ex æquo, vt A, B, ſimul ad C, ita erit E, F, ſimul ad G: Et componendo, vt A, B, C, ſimul, hoc eſt, vt D, ad C, ita E, F, G, ſimul, hoc eſt, H, ad G. quod eſt propoſitum.

QVIA igitur eſt, vt D, ad C, ita H, ad G: Et conuertendo, vt C, ad B, ita G, ad F; erit ex æquo, vt D, ad B, ita H, ad F. quod eſt propoſitum.

DENIQVE quia eſt, vt D, ad B, ita H, ad F: Et conuertendo, vt B, ad A, ita F, ad E; erit ex æquo, vt D, ad A, ita H, ad E. quod eſt propoſitum. Eademq́ ratio eſt de pluribus.

V.

SI ſint quotuis numeri quicunque, & totidem alij in eiſdem proportionibus; ſumma priorum per ipſos diuiſa ſigillatim, faciet eoſdem prorſus Quotientes, quos ſumma poſteriorum per ipſos diuiſa facit.

NAM, vt in 4. theor. oſtenſum eſt, eadem proportio eſt ſummæ priorum ad primum, quæ ſummæ poſteriorum ad primum: ac proinde vtriuſq́ proportionis idem denominator erit. Cùm ergo ex diuiſione antecedentis termini per conſequentem gignatur denominator proportionis; idem Quotiens omnino procreabitur, ſi vtraq́ ſumma ſeorſum per primos numeros, quaq́ per ſuum, diuidatur. Eademq́ ratio eſt, ſi per ſecundos, tertios, quartos, &c. diuiſio fiat. Conſtat ergo propoſitum.

VI.

SI ſumma quotuis numerorum continuè proportionalium per eos ſigillatim diuidatur; Et Quotientum ſumma per ipſos Quotientes; Et horum ſecundorum Quotientum ſumma per eoſdem ſecundos Quotientes; & ſic deinceps in infinitum: procreabuntur alternis ſemper iidem primi Quotientes ordine conuerſo.

SINT continuè proportionales quotuis numeri A,B,C,D, quorum ſumma E, per ipſos diuiſa faciat Quotientes F,G,H,I, & horum ſumma K, per eos diuiſa faciat Quotientes L,M,N,O. Dico hos Quotientes, & illos eſſe eoſdem alternis, ordine conuerſo, hoc eſt, F, & O, eoſdem eſſe; Item G, & N; H, & M; I, & L, &c.

A,1. B,2. C,4. D,8. E,15. F,15. G,7½. H,3¾. I,1⅞. K,28⅛. L,1⅞. M,3¾. N,7½. O,15.

Quoniam enim per 3. theor. Quotientes F,G,H,I, eandem continuam proportionem habent conuerſo ordine, quam numeri A,B,C,D: Et Quotientes L,M,N,O, conuerſo ordine eandem, quam Quotientes F,G,H,I, hoc eſt, eandem eodem ordine, quam numeri A,B,C,D: erit per 4. theorema, E, ad A, vt K, ad I. Quare cùm ex diuiſione antecedentis termini per conſequentem producatur denominator proportionis, fiet idem Quotiens ex diuiſione E. per A, qui ex diuiſione K, per I. Cùm ergo Quotientes ſint F, & O, æquales erunt F, & O. Eadem ratione æquales erunt G, & N; H, & M; I, & L, &c. quod eſt propoſitum.

VII.

SI ſumma quotuis numerorum continuè proportionalium per eos ſigillatim diuidatur: erit ſumma omnium Quotientum æqualis numero, qui gignitur ex multiplicatione primi in vltimum, vel ex mutua multiplicatione quorumlibet duorum mediorum ab extremis æqualiter diſtantium, vel denique (ſi Quotientum numerus fuerit impar) ex multiplicatione medij Quotientis in ſe.

SINT primùm quotuis numeri multitudine pares continuè proportionales A,B,C,D,E,F, quorum ſumma G, per ipſos ſigillatim diuiſa faciat Quotientes H,I,K,L,M,N, quorum ſumma O. Dico ſummam O, æqualem eſſe numerum qui fit ex H, in N, vel ex I, in M, vel ex K, in L. Quia enim per 4. theor. Quotientes H,I,K, L,M,N, ſunt continuè proportionales conuerſo ordine in proportione A, ad B; erit N, ad M, vt I, ad H.

A,1. B,2. C,4. D,8. E,16. F,32. G,63. H,63. I,31½. K,15¾. L,7⅞. M,3 1/16. N,1 3/32. O,124½.

* *Igitur idem numerus gignitur ex N, in H, qui ex M, in I; hoc eſt, idem ex H, in N, qui ex I, in M. Eademq́ ratione idem fiet ex I, in M, qui ex K, in L. Et quoniam per 6. theor. ſumma O, diuiſa per H,I,K,L,M,N, producit eoſdem Quotientes conuerſo ordine, hoc eſt, ſumma O, diuiſa per H, facit Quotientem N; producetur ſumma O, ex H, in N, per defin. ac proinde & ex I, in M, & ex K, in L.*

219. ſepti.

A,1. B,2. C,4. D,8. E,16. F,31. G,31. H,15½. I,7¾. K,3⅞. L,1 1/16. M,60 1/16.

SINT deinde quotuis numeri multitudine impares cõtinuè proportionales A,B,C,D,E, quorum ſumma F, per ipſos ſigillatim diuiſa faciat Quotientes G,H,I,K,L, quorum ſumma M. Dico ſummam M, æqualem eſſe numerum genitum ex G, in L; & ex H, in K; & ex I, in ſeipſum. Quòd enim æqualis ſit ei, qui fit ex G, in L, & ex H, in K, demonſtrabimus, vt prius. Deinde

verò quia tres numeri H, I, K, continuè proportionales sunt, [a] erit numerus ex H, in K, genitus: id est, summa H, æqualis numero, qui ex I, in seipsum ducto generatur. quod est propositum. a 20. septi.

HINC fit, quando numerus terminorum est impar, summam Quotientum esse numerum quadratum, cuius latus, siue radix, est medius terminus.

ITAQVE si inueniendi sint quotcunque numeri cõtinuè proportionales in data proportione, quorum summa æqualis sit numero, qui ex primo in vltimum gignitur, vel ex quibuslibet duobus, qui ab extremis æqualiter distant: accipiendi sunt in data proportione tot numeri quotcunque continuè proportionales, quot inquiruntur. Nam si eorum summa per ipsos figillatim diuidatur, erunt Quotientes quæsiti numeri, vt ex hoc 7. theor. perspicuum est. Quod si desiderentur quotuis numeri multitudine impares, quorum summa sit numerus quadratus, cuius latus, siue radix sit medius terminus: sumendi sunt in data proportione totidẽ numeri continuè proportionales, eorumq; summa per eos figillatim dividenda. Quotientes enim erunt numeri quæsiti, vt ex eodem hoc 7. theor. liquet. Atq; mirabile sanè est, posse reperiri quotcunq; numeros continuè proportionales in data proportione, etiam mille, aut plures, quorum omnium summa æqualis sit producto ex primo in vltimum; & ex quibuslibet duobus, qui ab extremis æqualiter distant, inter se multiplicatis; & denique, si terminorum numerus est impar, ex medio termino in seipsum multiplicato.

SIC etiam si quis optet duos numeros in data proportione, quorum summa æqualis sit numero producto ex vno in alterum, sumat duos numeros in data proportione quoscunq;, eorumq; summam per vtrumq; diuidat. Quotientes enim dabunt numeros quæsitos, vt ostensum est: quia videlicet eorum summa æqualis est numero, qui fit ex primo in vltimũ, hoc est, in secundum. Exempli gratia. Sint inueniendi duo numeri in proportione sesquiquinta, quorum summa æqualis sit numero, qui ex multiplicatione vnius in alterum producitur. Sumantur duo numeri quicunq; in data proportione sesquiquinta, nimirum 6. & 5. eorumq; summa 11. per vtrumq; diuidatur. Nam Quotientes $1\frac{1}{6}$. & $2\frac{1}{5}$. sunt numeri quæsiti. Habent enim proportionem sesquiquintam datam, & tam eorum summa, quàm numerus ex multiplicatione eorũ productus, est $4\frac{1}{30}$.

MINVTIARVM SIVE NVMERORVM fractorum DEMONSTRATIONES.

I.

DVAE minutiæ eundem habentes denominatorem, quarum vnius numerator sit vnitas, eandem proportionem habent, quam numeratores.

SINT duæ minutiæ A B, C B, eundem habentes denominatorẽ, & numerator C, sit vnitas. Dico ita esse minutiam A B, ad minutiam C B, vt est numerator A, ad numeratorem C. Quoties enim vnitas C, continetur in A, toties minutia C B, in minutia A B, includitur; propterea quòd minutia A B, diuiditur in tot minutias minutiæ C B, æquales, quot vnitates sunt in A, ita vt qualibet earum minutiarum habeat numeratorem C, & denominatorem B. [b] Igitur eadem pars est vnitas C, numeri A, quæ minutia C B, minutia A B; ac proinde est, vt vnitas C, ad A, ita minutia C B, ad minutiam A B: Et conuertendo, ita A, ad C, numerator ad numeratorem, vt minutia A B, ad minutiam C B. quod est propositum.

A, 6. C, 1.
B, 11. B, 11.

b 20. defin.

QVONIAM verò minutiæ sunt fractiones, siue particulæ vel vnitatis, vel alterius cuiuspiam numeri, (Neque enim eorum sententiam probare possum, qui existimant, eas respectu solius vnitatis esse accipiendas; propterea quòd falsò putant, earum demonstrationes nõ posse omnes explicari in numeris integris, sed solum in vnitate. Nos enim in hac tractatione omnes demonstrationes quibuslibet etiam numeris integris accommodabimus.) conabimur omnes minutiarum demonstrationes numeris integris explicare, vt exemplis etiam studiosus lector addiscat, veras esse demonstrationes, quas afferimus.

SINT ergo data minutia $\frac{6}{11}$. & $\frac{1}{11}$. particulæ, verbi gratia, huius numeri integri 44. Et quia eius $\frac{1}{11}$. est 4. & $\frac{6}{11}$. sunt 24. perspicuum est, ita esse 4. ad 24. vt est numerator 1. ad numeratorem 6. Vel ita 24. ad 4. vt 6. ad 1.

HANC porrò propositionem demonstrabimus propos. 4. in vniuersum de quibuscunq; duabus minutiis eiusdem denominationis, etiamsi neutra numeratorem habeat vnitatem.

II.

NVMERATOR cuiusuis minutiæ ad denominatorem eandem proportionẽ habet, quam minutia ad integrum, cuius est minutia.

SIT minutia quæcunque A B. Dico esse numeratorem A, ad denominatorem B, vt est minutia A B, ad suum integrum. Sumatur minutia C B, cuius numerator C, vnitas, & denominator idem B: Item alia minutia, cuius numerator D, æqualis sit eidem denominatori B, ita vt suo integro sit æqualis. Quando enim numerator denominatori est æqualis, minutia suo integro æquiualet; quippe quæ tot particulas integri contineat, in quot ipsum integrum diuisum est, ac proinde totum integrum contineat. [c] Quoniam igitur est, vt A, ad C, ita mi-

A, 3. C, 1. D, 5.
B, 5. B, 5. B, 5.

c 1. huius.

nutia A B, ad minutiam C B: Et vt C, ad D, ita minutia C B, ad minutiam D B; erit ex æquo vt A, ad D, hoc est, vt numerator A, ad denominatorem B, ipsi D, æqualem, ita minutia A B, ad minutiam D B, hoc est, ad integrum. quod est propositum.

A, 1. C, 1. B, 5. C, 30.

ALITER. Sit primùm data minutia A B, numerator A, vnitas, ita vt minutia sit pars aliquota integri C, siue C, sit vnitas, siue numerus, pars, inquam, aliquota à B, denominata, propterea quòd tot minutiæ ipsi A B, æquales integrum C, conficiunt, quoties vnitas est in B, denominatore. Cùm ergo & vnitas A, sit pars numeri B, ab ipso B, denominata, vt ad defin. 2. lib. 7. scripsimus; eadem pars erit vnitas A, numeri B, quæ minutia A B, integri C. [a] *Quare erit, vt A, numerator ad B, denominatorem, ita minutia A B, ad integrum C. quod est propositum.*

a 20. defin.

A, 3. D, 1. C, 1. B, 5. B, 5. C, 30.

DEINDE non sit vnitas numerator A. Sumatur minutia D B, cuius numerator D, vnitas & denominator idem B, qui minutiæ A B. [b] *Et quia est, vt A, ad D, numerator ad numeratorem, ita minutia A B, ad minutiam D B: Et vt D, ad B, ita minutia D B, ad integrum C, vt proximè demonstrauimus; erit ex æquo, vt A, ad B, numerator ad denominatorem, ita minutia A B, ad integrum C. quod est propositum.*

b 1. huius.

ITAQVE si data minutia $\frac{3}{5}$. sit huius numeri integri 30. erit eius $\frac{1}{5}$. numerus 6. ac proinde $\frac{3}{5}$. numerus 18. vbi vides ita esse 18. ad 30. vt est 3. ad 5. numerator ad denominatorem.

III.

MINVTIA quælibet, pars est numeratoris à denominatore denominata.

SIT qualibet minutia A B. Dico eam esse partem numeratoris A, à denominatore B, denominatam. [c] *Quoniam enim est, vt A, ad B, numerator ad denominatorem, ita minutia A B, ad suum integrum C; erit permutando, vt A, ad minutiam A B, ita B, ad integrum: Et conuertendo, vt minutia A B, ad A, ita integrum ad B. Cùm ergo integrum C, sit pars denominatoris B, (hoc est, integri toties accepti, quoties vnitas est in denominatore B.) ab ipso denominatore B, denominata; (Cùm enim æquè metiatur vnitas denominatorem, & integrum ipsum integrum toties acceptum, quoties vnitas est in denominatore; sit autem vnitas pars denominatoris à denominatore denominata, vt ad defin. 2. lib. 7. scripsimus; erit quoque integrum eadem pars integri toties accepti, quoties vnitas est in denominatore) erit quoque minutia A B, numeratoris A, (hoc est, integri toties accepti, quoties est vnitas in numeratore A.) eadem pars à denominatore B, denominata. quod est propositum.*

c 2. huius.

A, 3. C, 1. B, 5. C, 30.

PONATVR minutia $\frac{2}{5}$. esse huius integri 30. cuius $\frac{2}{5}$. sunt 18. Et quia numerator 3. numerat tria integra, hoc est, valet 90. & denominator 5. valet 150. (quemadmodum, cùm eadem minutia $\frac{3}{5}$. sumitur respectu vnitatis, numerator continet tres vnitates, & denominator quinque,) liquidò constat, 18. esse quintam partem numeratoris, hoc est, trium vnitatum, quarum qualibet numerum integrum 30. significat, quæ tres vnitates faciunt 90. partem, inquam, à denominatore 5. denominatam; quemadmodum & 30. datus numerus integer, quinta pars est denominatoris, hoc est, quinque vnitatum, quarum qualibet numerum integrum 30. significat, quæ quinque vnitates conficiunt 150. pars, inquam, à denominatore 5. denominata.

IIII.

DVAE minutiæ eundem habentes denominatorem, quarum neutra numeratorem habeat vnitatem, eandem proportionem habent, quam numeratores.

QVOD prima propositione ostensum est de duabus minutiis, quarum altera numeratorem habet vnitatem, demonstratur hic de quibusuis minutiis. Habeant ergo duæ minutiæ A B, C B, eundem denominatorem B. Dico esse minutiam A B, ad minutiam C B, vt est A, ad C, numerator ad numeratorem. [d] *Quia enim est, vt A, ad B, ita minutia A B, ad suum integrum: Et vt B, ad C, ita integrum ad minutiam C B; (Nam* [e] *cùm sit, vt C, ad B, ita minutia C B, ad integrum, erit conuertendo, vt B, ad C, ita integrum ad minutiam C B.) erit ex æquo, vt A, numerator ad C, numeratorem, ita minutia A B, ad minutiam C B. quod est propositum.*

d 2. huius. e 2. huius.

A, 6. C, 3. B, 7. B, 7.

DATÆ minutiæ $\frac{6}{7}$. $\frac{3}{7}$. sint huius integri 28. cuius $\frac{6}{7}$. sunt 24. & $\frac{3}{7}$. sunt 12. vbi perspicuum est, ita esse 24. ad 12. vt est numerator 6. ad numeratorem 3.

V.

SI duarum minutiarum numerator prioris in denominatorem posterioris, & posterioris numerator in denominatorem prioris ducatur, erit prior minutia ad posteriorem, vt prior numerus productus ad posteriorem.

F, 10. G, 12. A, 2. C, 4. B, 3. D, 5. H, 15.

SINT duæ minutiæ A B, C D: Et ex A, in D, fiat F; & ex C, in B, fiat G. Dico esse minutiam A B, ad minutiam C D, vt est F, ad G. Fiat enim H, ex B, in D. Quia igitur A, B, multiplicantes D, faciunt F, H; [f] *erit vt A, ad B, ita F, ad H. Vt autem A, ad B,* [g] *ita est minutia A B, ad integrum. Igitur erit quoque, vt minutia A B, ad integrum, ita F, ad H. Rursus quia C, D, multiplicantes B, faciunt G, H;* [h] *erit vt C, ad D, ita G, ad H: Et conuertendo, vt D, ad C, ita H, ad G. Vt autem D, ad C, ita est integrum ad minutiam C D. (Nam* [i] *cùm sit, vt C, ad D, ita minutia C D, ad integrum, erit cõuertendo, vt D, ad C, ita integrum ad minutiam C D.) Igitur erit quoq;, vt H, ad G, ita integrũ ad minutiã C D. Ex æquo igitur erit, vt F, ad G, ita minutia A B, ad minutiã C D. quæ est propositũ.*

f 18. sept. g 2 huius. h 18. sept. i 2. huius.

F. A B. H. Integrum. G. C D.

SI duæ

Si duæ minutiæ $\frac{2}{3}$. $\frac{4}{7}$. sint particulæ numeri 30. erunt duæ tertiæ eius, 20. at quatuor quintæ eiusdem, 24. Perspicuum autem est, ita esse 20. ad 24. vt 10. ad 12. qui duo numeri procreati sunt ex numeratoribus in denominatores, permutato ordine.

Itaque si productus numerus F, æqualis fuerit numero producto G, erit quoque minutia A B, minutiæ C D, æqualis: si minor, minor: Et si maior, maior; propter eandem proportionem F, ad G, & minutiæ ad minutiam. Atque hæc est demonstratio regulæ, quam in Arithmetica dedimus ad dignoscendum, vtra duarum minutiarum maior sit.

VI.

INTEGRVM ad summam duarum minutiarum eandem proportionem habet, quam numerus ex multiplicatione mutua denominatorũ productus ad summam duorum productorum, quorum vnus ex numeratore prioris minutiæ in posterioris denominatorem, alter verò ex numeratore posterioris in denominatorem prioris gignitur.

F, 10. G, 12. A, 2. C, 4. B, 3. D, 5. H, 15. AB, CD. F, G, CD. G. Integrum. H.

SINT duæ minutiæ A B, C D. Et ex B, in D, fiat H: at ex A, in D, fiat F; & ex C, in B, fiat G. Dico ita esse integrum ad summam minutiarũ A B, C D, vt est H, ad summam numerorum F, G. [a] Quoniam enim est, vt minutia A B, ad minutiam C D, ita F, ad G; erit componendo, vt summa minutiarum A B, C D, ad minutiam C D, ita summa numerorum F, G, ad G. Vt autem minutia C D, ad integrum, ita est G, ad H, (Nam [b] vt minutia C D, ad integrum, ita est C, ad D. [c] Et vt C, ad D, ita est G, ad H; propterea quòd C, D, ipsum B, multiplicantes fecerunt G, & H.) Igitur ex æquo erit, vt summa minutiarum A B, C D, ad integrum, ita summa numerorum F, G, ad H: Et cõuertendo, vt integrum ad summam minutiarum A B, C D, ita H, ad summam numerorum F, G. quod est propositum. a 5. huius. b 2. huius. c 18. septi.

SINT rursus duæ minutiæ $\frac{2}{3}$. $\frac{4}{7}$. particulæ numeri 30. cuius $\frac{2}{3}$. sunt 20. & $\frac{4}{7}$. eiusdem 24. ac proinde summa minutiarum 44. Vbi vides, ita esse integrum 30. ad hanc summam 44. vt est 15. ex denominatoribus productus ad 22. summã numerorũ 10. 12. ex numeratoribus in denominatores permutato ordine productorũ.

VII.

SI duæ minutiæ eundem habeant numeratorem, erit vt prior minutia ad posteriorem, ita posterioris denominator ad denominatorem prioris.

D, 105. E, 35. A, 5. A, 5. B, 7. C, 21.

HABEANT duæ minutiæ A B, A C, eundem numeratorem A. Dico ita esse minutiam A B, ad minutiam A C, vt est denominator C, ad denominatorem B. Fiat enim D, ex A, in C: & E, ex A, in B. Quia igitur A, multiplicans C, B, facit D, E; [d] erit vt D, ad E, ita C, ad B. Vt autem D, ad E, [e] ita est minutia A B, ad minutiam A C. Igitur erit quoque minutia A B, ad minutiam A C, vt C, ad B. quod est propositum. d 17. septi. e 5. huius.

DVAE minutiæ $\frac{5}{7}$. $\frac{5}{21}$. sint particulæ numeri integri 42. cuius $\frac{5}{7}$. sunt 30. & $\frac{5}{21}$. eiusdem 10. Manifestum autem est, ita esse 30. ad 10. vt posterior denominator 21. ad priorem 7.

VIII.

MINVTIAE, quarum numeratores ad denominatores eandem habent proportionem, æquales sunt: Et æqualium minutiarum numeratores ad denominatores eandem proportionem habent. Cuius autem numerator ad denominatorem habet maiorem proportionem, illa maior est: Et quæ maior est, eius numerator ad denominatorem habet proportionem maiorem.

A, 3. C, 9. B, 4. D, 12.

SINT duæ minutiæ A B, C D. sitq; eadem proportio A, ad B, qua C, ad D, numeratoris ad denominatorem. Dico minutias has æquales esse. [f] Quoniam enim est, vt A, ad B, ita minutia A B, ad integrum: Et vt C, ad D, ita minutia C D, ad idem integrũ: vt autem A, ad B, ita ponitur C, ad D; erit quoq; minutia A B, ad integrum, vt minutia C D, ad idem integrum. Æquales ergo sunt minutiæ A B, C D. quod est propositum. f 2. huius.

SED sint iam æquales minutiæ A B, C D. Dico esse, vt A, ad B, ita C, ad D. Cùm enim æquales sint minutiæ, erit vt minutia A B, ad integrum, ita minutia C D, ad idem integrum. [g] Est autem, vt minutia A B, ad integrum, ita A, ad B; Et vt minutia C D, ad integrum, ita C, ad D. Igitur erit quoque, vt A, ad B, ita C, ad D. quod est propositum. g 2. huius.

A, 3. C, 2. B, 4. D, 3.

DEINDE sit maior proportio A, ad B, quàm C, ad D. Dico maiorem esse minutiam A B, quàm C D. [h] Cùm enim sit, vt A, ad B, ita minutia A B, ad integrum; & vt C, ad D, ita minutia C D, ad idem integrum; ponatur autem maior proportio A, ad B, quàm C, ad D; erit quoque maior proportio minutiæ A B, ad integrum, quàm minutiæ C D, ad idem integrum. Maior ergo est minutia A B, quàm minutia C D. quod est propositum. h 2. huius.

VERVM sit iam minutia A B, maior quàm minutia C D. Dico maiorem esse proportionẽ A, ad B, quàm C, ad D. Erit enim maior proportio minutiæ A B, maioris ad integrum, quàm minutiæ C D, minoris ad idem integrum. [i] Cùm ergo sit, vt minutia A B, ad integrum, ita A, ad B; & vt minutia C D, ad integrum, ita C, ad D: erit quoque maior proportio A, ad B, quàm C, ad D. quod est propositum. i 2. huius.

MINVTIARVM $\frac{3}{4}.\frac{9}{12}$. integer numerus sit 24. cuius tam $\frac{3}{4}$. quàm $\frac{9}{12}$. sunt 18. ac proinde æquales sunt minutiæ $\frac{3}{4}.\frac{9}{12}$. At $\frac{2}{3}$. eiusdem numeri 24. sunt 16. vbi manifestum est, numerum 18. maiorem esse numero 16. ideoq; minutiam $\frac{3}{4}$. maiorem esse minutia $\frac{2}{3}$.

IX.

MINVTIAE, quarum numeratores eandem proportionem habẽt, quam denominatores; sunt æquales: Et minutiarum æqualium numeratores eandem habent proportionẽ, quam denominatores. Cuius autẽ numerator maiorem proportionẽ habet, q̃ denominator, illa maior est: Et maioris numerator maiorẽ habet proportionem, quã denominator.

A, 6. C, 2.
B, 9. D, 3.

SINT duæ minutiæ A B, C D, sitq; eadem proportio A, ad C, quæ B, ad D. Dico minutias ipsas æquales esse. Erit enim permutando, vt A, ad B, ita C, ad D: [a] *ac proinde minutiæ æquales erunt. quod est propositum.*

a 8. huius.

SED sint iam minutiæ æquales A B, & C D. Dico ita esse A, ad C, vt B, ad D. [b] *Erit enim vt A, ad B, ita C, ad D. Igitur permutando, vt A, ad C, ita B, ad D. quod est propositum.*

b 8. huius.

A, 6. C, 3.
B, 9. D, 5.

DEINDE sit maior proportio A, ad C, quàm B, ad D. Dico minutiam A B, maiorem esse minutia C D. Erit enim permutando quoque maior proportio A, ad B, quàm C, ad D, [c] *ac propterea maior erit minutia A B, quàm C D. quod est propositum.*

c 8. huius.

VERVM sit iam minutia A B, maior quàm C D. Dico maiorem proportionem esse A, ad C, quàm B, ad D. [d] *Erit enim maior proportio A, ad B, quàm C, ad D: ideoq; & permutando maior proportio erit A, ad C, quàm B, ad D. quod est propositum.*

d 8 huius.

SINT duæ minutiæ $\frac{9}{9}.\frac{2}{3}$. partes integri numeri 90. vbi vides minutiam $\frac{9}{9}$. hoc est, 60. æqualem esse minutiæ $\frac{2}{3}$. id est, numero 60. At verò minutiã eandem $\frac{9}{9}$. id est, 60. maiorẽ esse minutia $\frac{3}{5}$. hoc est, numero 54.

X.

DVAS minutias diuersarum denominationum ad alias duas eiusdem denominationis illis æquales reducere.

E, 10. F, 9.
A, 2. C, 3.
B, 3. D, 5.
G, 15.

DVAE minutiæ A B, C D, habeant dissimiles denominatores B, D. Fiat E, ex A, in D; & F, ex C, in B; & G, ex B, in D. Dico minutias E G, F G, quarum numeratores E, F, & denominator idem G, esse æquales minutiis A B, C D. Quoniam enim A, B, multiplicantes D, faciunt E, G; [e] *erit vt A, ad B, ita E, ad G.* [f] *Quare minutiæ A B, E G, æquales erunt. Eodem modo, quia C, D, multiplicantes B, faciunt F, G,* [g] *erit vt C, ad D, ita F, ad G.* [h] *Igitur minutiæ C D, F G, æquales erunt. quod est propositum.*

e 18. sept. f 8. huius. g 18. sept. h 9. huius.

XI.

INTEGRVM numerum quemcumque ad dati denominatoris minutiam reducere.

B, 6.
A, 1. C, 6.

SIT primùm A, integrum 1. reducendum ad minutiam, cuius denominator C. Sumatur numerator B, denominatori C, æqualis. Dico minutiam B C, vnitati A, æqualem esse. [i] *Quia enim est vt B, ad C, ita minutia B C, ad integrum A: Est autem B, ipsi C, æqualis. Igitur & minutia B C, integro A, id est, vnitati, erit æqualis. quod est propositum.*

i 2. huius.

DEINDE sit integer numerus A, reuocandus ad minutiam, cuius denominator C. Ex A, in C, fiat B, numerator. Dico minutiam B C, integro A, æqualem esse. Supponatur enim integro A, vnitas D, vt fiat minutia A D, tot vnitatibus æqualis, quoties vnitas est in A. Quia igitur ex A, in C, fit B; erit ex defin. multiplicationis, ita B, ad C, vt A, ad D, vnitatem. Cùm ergo minutiarum A D, B C, numeratores A, B, ad denominatores D, C, eandem proportionem habeant, [k] *ipsæ inter se æquales erunt. Quare cùm minutia A D, sit integro A, æqualis, ob denominatorem, qui est vnitas; erit quoq; minutia B C, eidem integro A, æqualis. quod est propositum.*

A, 7. B, 42.
D, 1. C, 6.

k 8. huius.

XII.

DATAM minutiam duplare, ac dimidiare.

SIT primùm minutia A B, duplanda. Dupletur numerator A, vt fiat numerator C, manente eodem denominatore B: vel denominator B, quando par est, dimidietur, vt fiat denominator D, manente eodem numeratore A. Dico vtramq; minutiam C B, A D, duplum esse minutiæ A B. Cùm enim minutiæ A B, C B, eundem habeant denominatorem; [l] *erit vt C, ad A, numerator ad numeratorem, ita C B, ad A B, minutia ad minutiam. Est autem C, ipsius A, duplus ex constructione. Igitur & minutia C B, minutiæ A B, dupla erit. quod est propositum.*

A, 3. C, 6. A, 3.
B, 8. B, 8. D, 4.

l 4. huius.

RVRSVS quia minutiæ A B, A D, eundem habent numeratorem; [m] *erit vt B, ad D, denominator ad denominatorem, ita A D, ad A B, minutia ad minutiam. Est autem B, ipsius D, duplus, per constructionem. Igitur & minutia A D, minutiæ A B, dupla erit. quod est propositum.*

m 7. huius.

DEINDE dimidianda sit minutia A B. Dupletur denominator B, vt fiat denominator C, manente eodem numeratore A: Vel numerator A, quando par est, dimidietur, vt fiat numerator D, manente eodem denominatore B. Dico vtramq; minutiam A B, D B, dimidium esse minutiæ A B. Cùm enim minutiæ A B, A C, eundem habeant numeratorem;

A, 6. A, 6. D, 3.
B, 11. C, 22. B, 11.

meratorem; [a] *erit vt B, ad C, denominator ad denominatorem, ita A C, ad A B, minutia ad minutiam. Cùm ergo B, ſit per conſtructionem ipſius C, dimidium; erit & minutia A C, minutiæ A B, dimidium. quod eſt propoſitum.* a 7. huius.

Rvrsvs cùm minutia A B, D B, habeant eundem denominatorem; [b] *erit vt D, ad A, numerator ad numeratorem, ita D B, ad A B, minutia ad minutiam. Cùm ergo D, ſit ipſius A, dimidium, ex conſtructione; erit & minutia D B, minutiæ A B, dimidium. quod eſt propoſitum.* b 4. huius.

Eodem modo minutia data triplicabitur, quadruplicabitur, &c. ſi vel numerator triplicetur, quadruplicetur, &c. eodem manente denominatore; vel (quando fieri poteſt) ſi denominatoris accipiatur pars tertia, quarta, &c. manente eodem numeratore.

Sic etiam data minutia ſumetur pars tertia, quarta, &c. ſi denominator triplicetur, quadruplicetur, &c. manente eodem numeratore; vel (quando fieri poteſt) ſi numeratoris tertia pars, quarta, &c. ſumatur. Quod eodem modo demonſtrabitur.

XIII.

Minvtia minutiæ æqualis eſt minutiæ ſimplici, cuius numerator ex multiplicatione mutua numeratorum, denominator verò ex mutua denominatorum multiplicatione procreatur.

Sit enim A B, minutia minutiæ C D, reſpectu integri numeri E, ſiue vnitatis E, & valorem huius minutiæ minutiæ exprimat ſimplex minutia K. Fiat F, ex A, in C; & G, ex B, in D. Dico datam minutiam minutiæ æqualem eſſe ſimplici minutiæ F G, reſpectu integri E, cuius videlicet numerator F, & denominator G.

F, 6. H, 9.
A, 2. C, 3. E, 1.
B, 3. D, 4. E, 24.
G, 12. K, $\frac{1}{2}$.

Fiat enim rurſus H, ex C, in B. [c] *Et quoniam eſt, vt A, ad B, ita minutia A B, ad ſuum integrum, nimirũ ad minutiam C D, cuius integrum eſt E:* [d] *Item vt A, ad B, ita eſt F, ad H; quòd A, B, ipſum C, multiplicantes faciant F, H: Erit quoque, vt minutia A B, ad minutiam C D, ita F, ad H. Rurſus* [e] *quia eſt, vt C, ad D, ita minutia C D, ad ſuum integrum E:* [f] *Item vt C, ad D, ita eſt H, ad G; quòd B, ipſos C, D, multiplicans fecerit H, G; Erit quoq; vt C D, minutia ad ſuum integrum E, ita H, ad G. Quoniam igitur eſt, vt minutia A B, ad minutiã C D, ita F, ad H: Et vt minutia C D, ad E, integrum, ita H, ad G; erit ex æquo, vt A B, minutia minutiæ C D, ad integrum E, ita F, ad G. Vt autem A B, minutia minutiæ C D, ad integrum E, ita eſt ſimplex minutia K, ad idem integrum E; quòd ſimplex minutia K, æqualis poſita ſit datæ minutiæ A B, minutiæ C D; cùm eius valorem reſpectu integri E, exprimat. Igitur erit quoque, vt F, ad G, ita minutia ſimplex K, ad integrum E.* [g] *Cùm ergo quoque ſit, vt F, ad G, ita minutia F G, ad idem ſuum integrum E; æquales erunt minutiæ ſimplices K, & F G: ac proinde cùm minutia K, æqualis ſit datæ minutiæ minutiæ, erit quoque ſimplex minutia F G, æqualis datæ minutiæ A B, reſpectu minutiæ C D, cuius integrum E. quod eſt propoſitum.*

A B. F.
C D. H.
E. G.

c 2. huius.
d 18. ſept.
e 2. huius.
f 17. ſept.
g 2. huius.

Sit $\frac{2}{3}$. minutia minutiæ $\frac{3}{4}$. reſpectu integri 24. Huius numeri $\frac{3}{4}$. ſunt 18. & huius numeri $\frac{2}{3}$. ſunt 12. qui numerus eſt $\frac{1}{2}$. dati integri numeri 24. Manifeſtum autem eſt, ſi tam numeratores 2. 3. inter ſe multiplicentur, quàm denominatores 3. 4. procreari minutiam $\frac{6}{12}$. qua huic $\frac{1}{2}$. æquiualet, qualis nimirum erat numerus 12. reſpectu numeri integri 24.

XIIII.

Minvtiam minutiæ, aut minutiam minutiarum ad ſimplicem minutiam reducere.

E; 6.
A, 2. C, 3.
B, 3. D, 4.
F, 12.

Sit primùm A B, minutia minutiæ C D. Ex A, in C, fiat E; & ex B, in D, fiat F. [h] *Et quoniam minutia E F, exprimit valorem minutiæ A B, reſpectu minutiæ C D; reducta erit data minutia minutiæ ad ſimplicem minutiam E F. quod eſt propoſitum.* h 13. huius.

G, 6. I, 6.
A, 2. C, 3. E, 1.
B, 3. D, 4. F, 2.
H, 12. K, 24.

Deinde ſit A B, minutia minutiarum C D, E F, ita vt C D, ſit minutia minutiæ E F; & A B, minutia minutiæ C D. Fiat G, ex A, in C; & H, ex B, in D. Item I, ex G, in E; & K, ex H, in F; atq; ita deinceps, ſi plures ſint minutiæ, numeri vltimo loco producti I, K, in numeros ſequentis minutiæ ducantur. Dico minutiam I K, cuius numerator I, & denominator K, datæ minutiæ minutiarum æqualem eſſe. [i] *Nam minutia G H, æqualis eſt minutiæ A B, minutia C D, reſpectu minutiæ E F, tanquam integri cuiuſdam.* [k] *Item minutia I K, æqualis eſt minutiæ G H, (hoc eſt, minutiæ A B, minutiæ C D.) minutiæ E F, reſpectu integri, cuius E F, eſt minutia; & ſic deinceps, ſi plures ſint minutiæ. Quare minutia I K, ex numeris vltimo loco productis conſtituta, æqualis eſt datæ minutiæ minutiarum. quod eſt propoſitum.* i 13. huius. k 13. huius.

Sit $\frac{2}{3}$. minutia minutiarum $\frac{3}{4}$. $\frac{1}{2}$. reſpectu integri 24. Huius numeri $\frac{1}{2}$. eſt numerus 12. & huius numeri $\frac{3}{4}$. ſunt 9. Huius deniq; $\frac{2}{3}$. ſunt 6. qui numerus eſt $\frac{1}{4}$. totius integri 24. Liquidò autem conſtat, ſi tam numeratores 2. 3. 1. inter ſe multiplicentur, quàm denominatores 3. 4. 2. gigni minutiam $\frac{6}{24}$. qua æqualis eſt minutia $\frac{1}{4}$. qualis nimirum pars erat numerus 6. reſpectu integri 24.

XV.

DATIS duabus minutiis, alterutram earum ad aliam æqualem reducere, ita vt alterius numeri numeros huius inuentæ numerent per numeros ex numeratore datæ minutiæ reductæ in denominatorem alterius minutiæ datæ, & ex numeratore alterius huius minutiæ datæ in denominatorem illius reductæ, productos.

SINT duæ minutiæ A B, C D, quarum A B, ad aliam æqualem reducenda sit, cuius numeratorem numerator C, metiatur per numerum ex A, in D, productum; denominatorem verò denominator D, metiatur per numerum ex C, in B, productum. Fiat F, ex C, in D; & ex F, in A, B, fiant G, H. Item ex A, in D, fiat K; & L, ex C, in B. Dico minutiam G H, minutiæ A B, æqualem esse; & C, metiri G, per K, ex A, in D, productum; & D, metiri H, per L, ex C, in B, productum. Quoniam enim F, multiplicans A B, facit G, H; [a] *erit vt A, ad B, ita G, ad H,* [b] *ac proinde minutia A B, G H, æquales erunt. Deinde quia C, multiplicans D, facit F,* [c] *metietur C, ipsum F, per D:* [d] *Metitur autem & vnitas ipsum D, per D. Eadem igitur pars est C, ipsius F, quæ vnitas ipsius D. Cùm ergo vnitas sit ipsius D, pars à D, denominata, erit quoq; C, ipsius F, pars à D, denominata. Eadem ratione erit F, ipsius G, pars ab A, denominata; propterea, quòd G, fit ex F, in A. Quia igitur C, minutia est minutiæ F, respectu integri G, sunt q; numeratores, vnitates; & denominatores, numeri D, A, à quibus partes C, F, denominantur;* [e] *constituet C, minutia minutiæ F, respectu integri G, minutiam simplicem M, (quas minutias C, F, M, seorsum scripsimus) respectu eiusdem integri G; cuius nimirum numerator ex numeratoribus minutiarum C, F, & denominator ex earundem denominatoribus producitur. Quare cùm numeratores gignant vnitatem, & denominatores numerum K; (quòd numeratores sint vnitates, denominatores autem numeri D, A, à quibus partes C, F, denominantur, & ex quorum multiplicatione factus est numerus K,) constituet minutia C, minutiæ F, respectu integri G, minutiam simplicem eiusdem integri G, cuius numerator est vnitas, & denominator numerus K, qualis est minutia M: ac proinde C, numerator minutiæ datæ C D, qui constituit C, minutiam minutiæ F, respectu integri G, pars erit ipsius integri G, à numero K, denominata. Quocirca numerus C, ipsum G, metietur per K; toties nimirum sumptus, quoties vnitas est in K, numero. Eadem prorsus ratione demonstrabimus, D, metiri ipsum H, per L, numerum. Quod est propositum.*

a 17. sept.
b 8. huius.
c 7. pron.
d 5. pron.
e 13. huius.

G, 24. K, 8.
A, 2. / B, 3. F, 12. C, 3. / D, 4.
H, 36. L, 9.
C. 1/4. F, 1/2. M, 1/8.

XVI.

DVAE minutiæ, quarum numeratores in denominatores vicissim ducti gignũt numeros æquales, æquales sunt: Et minutiarum æqualium numeratores in denominatores vicissim ducti gignunt æquales numeros. Cuius verò numerator in denominatorem alterius ductus maiorem numerum gignit, illa maior est: Et maioris minutiæ numerator in denominatorem alterius ductus maiorem numerum producit.

SINT duæ minutiæ A B, C D: & ex A, in D, fiat E; atque ex C, in B, fiat F: sintq; primùm numeri E, F, æquales. Dico minutias A B, C D, æquales esse. Quoniam enim numerus E, factus ex A, primo in D, quartum æqualis est numero F, facto ex C, secundo in B, tertium; [f] *erit vt A, primus ad C, secundum, numerator ad numeratorem, ita B, tertius ad D, quartum, denominator ad denominatorem* [g] *Quare minutiæ A B, C D, æquales sunt. VEL sic.* [h] *Quoniam est, vt E, ad F, ita minutia A B, ad minutiam C D; Est autem E, ipsi F, æqualis; erit quoque minutia A B, minutiæ C D, æqualis. quod est propositum.*

f 19. sept.
g 9 huius.
h 5. huius.

E, 24. F, 24.
A, 2. / B, 3. C, 8. / D, 12.

SED sint iam æquales minutiæ A B, C D. Dico numerum E, æqualem quoque esse numero F. Nam ob æqualitatem minutiarum [i] *erit, vt A, ad C, numerator ad numeratorem, ita B, ad D, denominator ad denominatorem.* [k] *Quapropter idem numerus fiet ex A, primo in D, quartum, qui ex C, secundo in B, tertium; ac proinde æquales erunt E, & F, numeri. VEL sic.* [l] *Quoniam est, vt minutia A B, ad minutiam C D, ita E, ad F; ponuntur autem minutiæ æquales; erunt quoque numeri E, F, æquales. quod est propositum.*

i 9. huius.
k 19. sept.
l 5. huius.

DEINDE sit E, numerus maior numero F. Dico minutiam quoq; A B, maiorem esse minutia C D. Cùm enim ex A, in D, fiat numerus E, maior quàm F; gignetur F, ex minore numero quàm A, in D, nimirum ex G, in D. Quia igitur idem numerus F, fit ex G, primo in D, quartum, & ex C, secundo in B, tertium, [m] *erit vt G, primus ad C, secundum, ita B, tertius ad D, quartum: Est autem maior proportio A, ad C, quàm G, ad C; quòd A, maior sit quàm G. Igitur maior quoque erit proportio A, ad C, quàm B, ad D;* [n] *ac proinde minutia A B, maior erit, quàm minutia C D. VEL sic.* [o] *Quoniam est, vt E, ad F, ita minutia A B, ad minutiam C D; Est autem E, maior quàm F; erit quoque minutia A B, maior quàm minutia C D. quod est propositum.*

m 19. sept.
n 9. huius.
o 5. huius.

E, 24. F, 21.
G, 1 3/4 A, 2. / B, 3. C, 7. / D, 12.

VERVM sit iam minutia A B, maior quàm minutia C D. Dico & numerum E, numero F, esse maiorem. Cùm enim maior sit minutia A B, quàm minutia C D, [p] *erit maior proportio A, ad C, quàm B, ad D. Minor ergo numerus, quàm A, habebit ad C, eandem proportionem, quam B, ad D, qui sit G.* [q] *Idem ergo numerus fiet ex G, primo in D, quartum, qui ex C, secundo in B, tertium. Cùm ergo ex A, in D, maior fiat, & ex G, in D propterea*

p 9. huius.
q 19. sept.

propterea quòd A, maior est quàm C; erit quoq; E, factus ex A, in D, maior, quàm F, ex C, in B, genitus.

VEL sic. [a] *Quoniam est, vt minutia A B, ad minutiam C D, ita E, ad F: Est autem A B, minutia maior quàm minutia C D; erit quoq; E, maior quàm F. Quod est propositum.* a 5. huius.

AT QVE hæc est quoq; demõstratio eius regulæ, quam in Arithmetica præscripsimus ad dignoscendum, vtra duarum minutiarum propositarum maior sit. Id quod etiam ad 5. propositionem monuimus.

XVII.

DATAM minutiam ad minimos terminos reducere.

SIT minutia A B, ad minimos reuocanda terminos. Si igitur A, & B, sint inter se primi, non poterit minutia A B, ad minores terminos reuocari, sed ipsa iam in minimis erit terminis constituta. Reducatur enim, si fieri potest, ad minores terminos C, D, ita vt minutia C D, minutiæ A B, sit æqualis. [b] *Quoniam igitur est, vt A, ad B, ita C, ad D; sintq; C, D, numeri minores numeris A B; non erunt A, B, minimi termini in sua proportione:* [c] *sunt autem & minimi, cùm primi inter se sint. quod est absurdum.* b 8. huius. c 23. sept.

A, 3 6. D, 3. B, 4 8. E, 4. C, 1 2.

SI verò A, B, non sint inter se primi; [d] *sit eorum maxima mensura C, quæ metiatur A, per D; & B, per E. Dico minutiam D E, cuius numerator D, & denominator E, æqualem esse datæ minutiæ A B, & in minimis terminis constitutam. Quoniam enim C, metitur A, B, per D, E;* [e] *producentur A, B, ex C, in D, E.* [f] *Quare erit vt A, ad B, ita D, ad E, & propterea minutia A B, D E, æquales erunt. Deinde quia C, maximus numerus numerorum A, B, metitur ipsos per D, E; erunt ex coroll. propos. 35. lib. 7. D, E, minimi in proportione sua, ad B. Quod est propositum.* d 2. sept. e 9. pron. f 17. sept. g 8. huius.

XVIII.

DATAM minutiam ad aliam æqualem datæ denominationis, quando id fieri potest, reuocare.

A, 3. E, 9. B, 4. C, 1 2. D, 3 6.

SIT data minutia A B, reuocanda ad æqualẽ aliam, cuius denominator datus sit C. Ex A, numeratore in denominatorem datum C, fiat D, quem metiatur B, denominator datæ minutiæ per E. Dico minutiam E C, cuius numerator E, & denominator C, datus, æqualem esse minutiæ A B, datæ. Quia enim B, metitur D, per E, [h] *fiet D, ex B, in E: Factus est autem idem D, ex A, in C.* [i] *Igitur erit, vt A, primus ad B, secundum, ita E, tertius ad C, quartum;* [k] *ideoq; minutiæ A B, E C, æquales erunt. quod est propositum.* h 9. pron. i 9. sept. k 8. huius.

A, 3. E, —. B, 4. C, 1 0. D, 3 0.

QVOD si E, non metiatur D, ex A, in C, procreatũ, non poterit data minutia A B, reduci ad denominationem datam C. Reducatur enim, si fieri potest, ad minutiam E C. Quia ergo minutiæ A B, E C, æquales sunt; [l] *erit vt A, ad B, ita E, ad C.* [m] *Idem igitur numerus fiet ex A, primo in C, quartum, qui ex B, secundo in E, tertium; videlicet numerus D, factus ex A, in C.* [n] *Igitur B, metietur D, per E. quod est absurdum. Ponitur enim B, ipsum D, non metiri.* l 8. huius. m 19. sept. n 7. pron.

XIX.

QVANDO minor numerus per maiorem diuiditur, numerus Quotiens est minutia, cuius numerator est numerus minor diuisus; denominator verò maior numerus diuidens.

A, 6. B, 1 1. A, 6. B, 1 1.

SIT minor numerus A, diuidendus per maiorem B. Dico Quotientem esse minutiam A B, cuius numerator A, & denominator B. [o] *Quoniam enim est, vt A, ad B, numerus diuisus ad diuidentem: hoc est, vt numerator ad denominatorem, ita minutia A B, ad integrum: hoc est, ad vnitatem; erit ex defin. Diuisionis minutia A B, Quotiens diuisionis numeri A, per numerum B. quod est propositum.* o 2. huius.

HINC fit, si diuiso numero integro maiore per integrum numerum minorem, aliquid superfit; Quotienti integro inuento addendum adhuc esse minutiam, cuius numerator sit numerus ex diuisione reliquus; denominator verò, numerus diuidens. Nam reliquus ille numerus, qui necessariò minor est numero diuidente, diuidendus adhuc est per eundem numerum diuidentem, qui maior est. Verbi gratiâ. Diuiso numero 23. per 4. Quotiens integer est 5. & supersunt 3. adhuc diuidenda per 4. [p] *Fit ergo minutia $\frac{3}{4}$. ita vt totus Quotiens sit $5\frac{3}{4}$.* p 19. huius.

XX.

MINVTIAS plures in vnam summam colligere.

A, 3. B, 1 0. C, 4. B, 1 0. D, 7. B, 1 0.

SINT primùm addenda duæ minutiæ A B, C B, eiusdem denominationis. Ex A, & C, numeratoribus fiat summa D, cui idem denominator B, supponatur. Dico minutiam D B, esse summam ex additione minutiarum A B, C B, collectam. Quoniam enim minutiæ eundem habẽt denominatorem B, erit vt A, ad C, ita minutia A B, ad minutiam C B: q 4. huius.

a 4. huius. *Et componendo, vt A, C, simul ad C, ita minutia A B, C B, simul ad minutiam C B.* [a] *Vt autem C, ad D, ita quoq; est minutia C B, ad minutiam D B. Igitur ex æquo erit, vt A, C, simul ad D, ita minutia A B, C B, simul ad minutiam D B. Cùm ergo A, & C, simul æquales sint ipsi D, ex constructione: erunt quoq; minutia A B, C B, simul æquales minutiæ D B. Quod est propositum.*

DEINDE *sint addenda duæ minutiæ A B, C D, diuersarum denominationum. Ducatur A, numerator prioris in D, denominatorem posterioris: & C, numerator posterioris in B, denominatorem prioris, collectaq; sit summa E, ex duobus illis productis, cui supponatur denominator F, ex multiplicatione mutua denominatorum B, D, procreatus. Dico minutiam E F, esse summam ex datis duabus minutijs A B, C D, collectam.* [b] *Quoniam enim est, vt integrum ad summam duarum minutiarum A B, C D, ita F, ex denominatoribus productus ad E, summam productorum ex numeratoribus in denominatores vicissim ductis; erit conuertendo, vt summa minutiarum A B, C D, ad integrum, ita E, ad F:* [c] *Vt autem E, ad F, ita quoq; est minutia E F, ad idem integrum. Igitur erit, vt summa minutiarum A B, C D, ad integrum, ita minutia E F, ad idem integrum. Quapropter summa minutiarum A B, C D, æqualis erit minutiæ E F: ac proinde minutiæ E F, summa erit ex minutijs A B, C D, collecta. quod est propositum.*

b 6. huius. A, 2. B, 3. C, 3. D, 4. E, 17. F, 12.

c 2. huius.

VEL *sic. Quoniam ex multiplicatione numeratorum in denominatores vicissim, & ex multiplicatione denominatorum inter se, fiunt duæ minutiæ eiusdem denominationis, minutijs A B, C D, æquales, vt ex demonstratione propositionis 10. constat: si summa E, productorum ex numeratoribus in denominatores supponatur F, communis denominator ex denominatoribus procreatus, facta erit minutia E F, summa minutiarum A B, C D; hoc est, duarum illarũ eiusdem denominationis, ad quas A B, C D, reducta sunt, vt initio huius propositionis est demonstratum.*

IAM *verò datis pluribus minutijs, addenda primùm erunt duæ primæ: deinde hæc summa cũ tertia coniungenda, atq; hæc summa cum quarta, & sic deinceps, donec omnes absoluantur.*

QVOD *si dentur integra cum minutijs, addenda erunt integra seorsum, & minutiæ seorsum.*

SINT *verbi gratiâ, $\frac{2}{3}$. & $\frac{3}{4}$. minutiæ huius integri 60. cuius $\frac{2}{3}$. sunt 40. & $\frac{3}{4}$. sunt 45. Ex 40. & 45. fit summa 85. hoc est, totus numerus integer 60. & insuper 25. vnitates, quæ faciunt $\frac{5}{12}$. integri 60. quemadmodum ex $\frac{2}{3}$. & $\frac{3}{4}$. collecta est summa $\frac{17}{12}$. id est, semel 1. & insuper $\frac{5}{12}$.*

ITA *etiã summa minutiarũ $\frac{1}{3}$. $\frac{4}{9}$. est $\frac{7}{12}$. hoc est, in minimis terminis $\frac{7}{9}$. Si igitur illarũ minutiarum integrũ sit 36. erit $\frac{1}{3}$. ipsius 12. at $\frac{4}{9}$. eiusdem, 16. Vbi vides ex 12. & 16. confici 28. hoc est, $\frac{7}{9}$. ipsius integri 36.*

XXI.

MINVTIAM minorem ex maiore detrahere.

EX maiore minutia A B, detrahenda sit minor C B, sintq; primũ hæ minutiæ eiusdem denominationis. Detracto numeratore C, minoris minutiæ ex A, numeratore maioris, reliquum sit numerus D, cui idem denominator B, supponatur. Dico minutiã D B, reliquam esse post detractionem minutiæ C B, ex minutia A B. Quia enim C, ex A, subtractus relinquit D; componetur A, ex C, & D. Minutia ergo A B, cuius numerator A, ex numeratoribus C, D, collectus est, summa est duarum minutiarum C B, D B, vt in prima parte antecedentis propositionis ostensum est. Quare detracta minutia C B, ex minutia A B; reliqua fiet minutia D B. Quod est propositum.

A, 7. B, 10. C, 3. B, 10. D, 4. B, 10.

DEINDE *minutiæ A B, C D, habeant diuersos denominatores, detrahendaq; sit minor C D, ex maiore A B. Ex C, numeratore minoris in B, denominatorẽ maioris fiat E; & ex A, numeratore maioris in D, denominatorem minoris fiat F: atq; E, ablatus ex F, relinquat G, cui supponatur denominator H, ex mutua multiplicatione denominatorum procreatus. Dico minutiam G H, esse reliquã post detractionem minutiæ C D, ex minutia A B. Quoniam enim D, multiplicans A, B, facit F, H;* [d] *erit vt A, ad B, ita F, ad H:* [e] *vt autẽ A, ad B, ita est minutia A B, ad integrum. Igitur erit quoq; vt F, ad H, ita minutia A B, ad integrum. Rursus quia B, multiplicãs C, D, facit E, H;* [f] *erit vt C, ad D, ita E, ad H,* [g] *Vt autem C, ad D, ita est minutia C D, ad integrum. Igitur erit quoq; vt E, ad H, ita minutia C D, ad integrum. Quia igitur est, vt E, primus ad H, secundum, ita minutia C D; tertius numerus ad integrũ, quartum numerũ;* [h] *Et vt G, quintus ad eundem secundum H, ita minutia G H, sextus numerus ad idem integrum, quartũ numerum; erit ex 5. theor. scholij propos. 22. lib. 7. vt E, G, primus & quintus simul, ad H, secundum, ita minutia C D, G H, tertius & sextus numerus simul, ad integrũ. Vt autem E, G, simul ad H, ita est F, ipsis E, G, æqualis, (Nam E, ex F, detractus reliquit G.) ad eundem H. Igitur erit quoq; vt F, ad H, ita minutia C D, G H, simul ad integrũ. Cũ ergo ostensum sit, vt est F, ad H, ita esse minutiam A B, ad integrũ; erit quoq; vt minutia A B, ad integrũ, ita minutia C D, G H, simul ad idem integrũ: ac propterea æquales erũt minutia A B, & minutia C D, G H, simul. Detracta igitur minutia C D, ex minutia A B, reliqua erit minutia G H. qd est propositũ. VEL sic. Quoniã ex multiplicatione numeratorũ in denominatores vicissim, & ex ductu denominatorũ inter se, gignũtur duæ minutiæ eiusdẽ denominatiõis minutijs datis æquales, vt ex demõstratione propos. 10. cõstat: si E, factus ex C, in B, detrahatur ex F, facto ex A, in D; et reliquo*

d 17. sept. e 2. huius. F, 15. E, 8.

f 17. sept. g 2. huius. A, 3. B, 4. C, 2. D, 5. G, 7. H, 20.

h 2. huius.

numero

numero G, supponatur communis denominator H, ex denominatoribus productus, fiet minutia GH, reliqua post detractionem minutiæ C D, ex minutia A B, veluti initio huius propositionis ostensum est.

IAM verò si dentur integra vnà cum minutijs, subtrahenda erunt integra seorsum ab integris, & minutiæ à minutijs. Quòd si minutia detrahenda, maior sit, quàm ea, à qua fieri debet subtractio, [a] reducenda prius erit vtriusque numeri integri, à quo fit subtractio, ad minutiam denominatoris minutiæ adhærentis. Vt si subtrahenda sint $6\frac{3}{5}$. ex $10\frac{3}{4}$. subtractis 6. ex 10. supersunt 4. & subductis $\frac{3}{5}$. ex $\frac{3}{4}$. superest minutia $\frac{7}{20}$. Totus ergo numerus reliquus erit $4\frac{7}{20}$. At si subtrahenda sint $4\frac{6}{7}$. ex $20\frac{3}{4}$. faciemus ex vnitate numeri 20. minutiam $\frac{4}{4}$. quæ cum $\frac{3}{4}$. facit $\frac{7}{4}$. remanebunt 19. integra. Subtracto ergo integro numero 4. ex 19. supersunt 15. & subducta minutia $\frac{6}{7}$. ex minutia $\frac{7}{4}$. reliqua est minutia $\frac{25}{28}$. Totus ergo reliquus numerus erit $15\frac{25}{28}$. a 11. huius.

SINT verbi gratiâ $\frac{3}{4}$. & $\frac{2}{5}$. minutiæ huius numeri integri 40. Igitur si $\frac{2}{5}$. id est, 16. detrahantur ex $\frac{3}{4}$. hoc est, ex 30. supersunt 14. nimirum $\frac{7}{20}$. integri numeri 40. vt superior calculus docuit.

XXII.

MINVTIAM per minutiam multiplicare.

SIT minutia A B, per minutiam C D, multiplicanda. Ex multiplicatione numeratorum A, C, inter se fiat E, cui supponatur F, ex denominatoribus B, D, procreatus. Dico minutiam E F, gigni ex multiplicatione minutiarum A B, C D, inter se. Fiat enim G, ex E, in D; & H, ex C, in F: [b] Erit [g] vt minutia E F, ad minutiam C D, ita G, ad H. Quia verò C, multiplicans A, facit E, H; [c] erit vt A, ad F, ita E, ad H: Et permutando, vt A, ad E, ita E, ad H. Rursus quia D, multiplicans E, & B, facit G, & F; [d] erit vt E, ad B, ita G, ad F. Ex æqualitate igitur perturbata, vt hîc apparet, erit vt A, ad B, ita G, ad H. Vt autem G, ad H, ita ostendimus esse minutiam E F, ad minutiam C D: [e] Et vt A, ad B, ita est minutia A B, ad integrum; hoc est, ad 1. Igitur erit quoque vt minutia E F, ad minutiam C D, ita minutia A B, ad 1. Quapropter ex definitione Multiplicationis, minutia E F, producitur ex multiplicatione minutiæ A B, in minutiam C D: Quod est propositum.

H, 60.	G, 40.
A, 2.	C, 4.
B, 3.	D, 5.
	E, 8.
	F, 15.
A.	G.
E.	F.
B.	H.

b 5. huius. c 17. sept. d 17. sept. e 2. huius.

QVOD si minutia per numerum integrum sit multiplicanda, supponenda erit integro numero vnitas, vt fiat quasi minutia, cuius numerator est numerus integer datus, denominator autem vnitas. Ex quo fit, satis esse, si tunc numerator propositæ minutiæ per datum numerum integrum multiplicetur, & producto numero supponatur eiusdem minutiæ propositæ denominator: propterea quòd vnitas integro numero supposita in denominatorem datæ minutiæ ducta eundem denominatorem datæ minutiæ nõ auget. Vt si multiplicari debeat minutia $\frac{3}{4}$. per 5. fient $\frac{15}{4}$. vt hîc apparet, $\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{1}$. Gignetur enim minutia $\frac{15}{4}$.

SI verò integris minutiæ adhæreant, [f] reuocanda erunt integra ad minutiam eiusdem denominationis cum minutia adhærente, atq; ex numeratore huius minutiæ, & numeratore minutiæ adhærentis vnus numerator constituí. Vt si multiplicanda sint $7\frac{2}{3}$. per $4\frac{1}{2}$. fient hæ duæ minutiæ multiplicandæ $\frac{23}{3}\cdot\frac{9}{2}$. f 11. huius.

IAM vt multiplicationem minutiarum integris numeris accommodemus, non erit minutia producta cum integro numero assumpto conferenda, vt in additione, ac subtractione factum est, sed cum quadrato numeri integri assumpti: quia cùm comparatio inter similia fieri debeat, ex multiplicatione autem duorum numerorum inter se gignatur numerus planus, conferendus erit numerus productus cum plano totius numeri integri; hoc est, cum eius quadrato. Itaque sint $\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{5}$. minutiæ huius numeri integri 60. ex quarum multiplicatione gignitur minutia $\frac{8}{15}$. Necesse est ergo, vt $\frac{2}{3}$. numeri 60. in $\frac{4}{5}$. eiusdem faciant numerum, qui constituat $\frac{8}{15}$. quadrati, qui ex 60. in se producitur. Id quod liquidò constat. Nam $\frac{2}{3}$. numeri 60. sunt 40. & $\frac{4}{5}$. eiusdem sunt 48. At ex 40. in 48. fit numerus 1920. qui efficit $\frac{8}{15}$. numeri 3600. hoc est, quadrati ipsius 60.

XXIII.

MINVTIAM per minutiam diuidere.

A, 12.	C, 3.	E, 4.
B, 16.	D, 8.	F, 2.
A, 6.	C, 3.	E, 2.
B, 8.	D, 8.	F, 1.
A, 3.	C, 3.	E, 1.
B, 8.	D, 4.	F, 2.

SIT diuidenda minutia A B, per minutiam C D, & primùm huius numeri C, D, metiantur illius numeros A, B, per E, F; ita vt diuiso A, per C, Quotiens sit E, & diuiso B, per D, Quotiens sit F. Dico minutiam E F, esse Quotientem diuisionis minutiæ A B, per minutiam C D. Quoniam enim C, metitur A, per E; & D, metitur B, per F; [g] gignetur A, ex C, in E; & B, ex D, in F. [h] Igitur minutia A B, producta est ex multiplicatione minutiæ E F, per minutiam C D: ac proinde ex definitione multiplicationis erit, vt minutia A B, ad minutiam C D, ita minutia E F, ad 1. Quocirca cùm sit, vt A B, minutia diuisa ad C D, minutiam diuidentem, ita minutia E F, ad 1. erit ex defin. Diuisionis minutia E F, Quotiens diuisionis minutiæ A B, per minutiam C D. Quod est propositum. g 9. prop. h 22. huius.

DEINDE numeri C, D, minutiæ C D, non metiantur numeros A, B, minutiæ A B. [i] Reducatur minutia i 15. huius.

E, 24. A, 2. K, 12. C, 3. G, 8.
F, 36. B, 3. D, 4. H, 9.

E, 90. A, 6. K, 15. C, 3. G, 30.
F, 135. B, 9. D, 5. H, 27.

AB, ad aliam æqualem EF, cuius numeros E, F, numeri C, D, minutiæ CD, metiantur per numeros G, H, ex A, in D, & ex C, in B, productos: quod quidem fiet, si K, ex C, in D, procreatus ducatur in A, B, vt gignantur E, F, veluti propos. 15. oſtenſum eſt. Quoniam igitur C, D, metiuntur E, F, per G, H; erit minutia GH, Quotiens diuiſionis minutiæ EF, vel AB, illi æqualis, per minutiam CD, vt initio huius propoſitionis demonſtratum eſt, Quod eſt propoſitum.

QVIA verò G, H, numeri minutiæ Quotientis GH, gignuntur ex A, in D, & ex C, in B, vt dictum eſt, ſatis eſt ad diuiſionem cuiuſcunque minutiæ per quamlibet minutiam, ſi numerator A, minutiæ dividendæ in D, denominatorem minutiæ diuidentis; & C, numerator minutiæ diuidentis in B, denominatorem minutiæ dividendæ ducatur. Prior enim numerus procreatus G, dabit numeratorem, & poſterior H, denominatorē Quotientis minutiæ GH. Atque hoc verum eſt in omnibus minutijs, ſiue numeri minutiæ diuidentis numeros minutiæ dividendæ metiantur, ſiue non. Nam ſemper ex numeratore minutiæ dividendæ in denominatorem minutiæ diuidentis, & ex numeratore minutiæ diuidentis in denominatorem minutiæ diuidendæ, procreantur duo numeri, per quos numeri minutiæ diuidentis metiuntur numeros minutiæ, ad quam minutia dividenda ſecundùm doctrinam propoſ. 15. reuocatur, vt ex eius propoſ. demonſtratione liquet, atq; in hoc appoſito exemplo apparet, vbi numeri C, D, numeros A, B, metiuntur per G, H, & numeros E, F, procreatos ex AB, in K, productum ex C, in D, ijdem numeri C, D, metiuntur per L, M: atq; adeò tam minutia GH, q̄ LM, Quotiens eſt minutia AB, per minutiam CD, diuiſa.

E, 48. A, 8. K, 6. C, 2. G, 4. L, 24.
F, 54. B, 9. D, 3. H, 3. M, 18.

IAM verò ſi numerus integer dividendus ſit per minutiam, vel per numerum integrum minutiæ dividendæ, ſupponenda eſt ei vnitas, vt fiat quaſi minutia, cuius numerator eſt datus numerus integer, & denominator 1. Vt ſi numerus 8. dividendus proponatur per $\frac{1}{2}$. fiet Quotiens $\frac{1\ 6}{1}$. vt in appoſito prioris exemplo perſpicuum eſt. Si autem minutia $\frac{1}{2}$. dividenda ſit per integrum numerum 8. fiet Quotiens $\frac{1}{1\ 6}$. vt in poſteriori exemplo apparet.

8 1 16
1. 2. 1.

1 8 1
2. 1. 16.

QVOD ſi minutiæ adhæreant integris, reducenda erunt integra ad minutiam eiuſdem denominationis cum minutia adhærente, veluti ad finem antecedentis propoſitionis diximus.

VERVM quia non facilè eſt memoriter tenere, ex numeratore minutiæ dividendæ in denominatorem minutiæ diuidentis gigni numeratorem Quotientis minutiæ, denominatorē autem ex numeratore minutiæ diuidentis in denominatorem minutiæ dividendæ; ſatius erit ad memoriam iuuandam, loca numerorum minutiæ diuidentis inter ſe permutare, vt in Arithmetica tradidimus, ac deinde regulam multiplicationis vſurpare. Vt ſi dividenda proponatur minutia $\frac{3}{4}$. per $\frac{2}{7}$. permutandi erunt numeri minutiæ diuidentis hoc modo $\frac{7}{2}$. Vnde Quotiens erit $\frac{2\ 1}{8}$. vt hic vides. Nam hac ratione numerator minutiæ dividendæ ſemper ducitur in denominatorē minutiæ diuidentis, iuxta regulam multiplicationis, quæ præcipit, numeratores eſſe multiplicandos inter ſe, vt fiat numerator, &c.

3 7 21
4. 2. 8.

SIT integer numerus 700. cuius minutia $\frac{3}{4}$. dividenda ſit per eiuſdem $\frac{2}{7}$. hoc eſt, numerus 525. per 200. Perſpicuum autem eſt, diuiſis 525. per 200. Quotientem eſſe $2\frac{5}{8}$. id eſt, minutiam $\frac{2\ 1}{8}$. quæ proximè inuenta eſt. Sic etiam ſi integer numerus 10. octies ſumptus dividatur per eius dimidium, nimirum per 5. Quotiens fiet 16. qui inuentus ſuprà fuit, ex diuiſione 8. per $\frac{1}{2}$.

XXIIII.

MINVTIAM in minutiam inſerere.

SIT minutia AB, in minutiam CD, inſerenda, fitq; primùm ſenſus, addendam eſſe minutiam AB, vnius particulæ minutiæ CD, ad minutiam CD: hoc eſt, addendas eſſe $\frac{3}{4}$. vnius ſeptimæ ad $\frac{5}{7}$. Ex C, numeratore poſterioris minutiæ in B, denominatorem prioris minutiæ fiat F, cui addatur A, numerator prioris, & compoſito numero G, ſupponatur denominator H, ex multiplicatione denominatorum B, D, procreatus. Dico minutiam GH, procreari ex inſitione minutiæ AB, in minutiam CD, in eo ſenſu, quem diximus: hoc eſt, minutiam GH, æqualem eſſe minutiæ AB, reſpectu vnius particulæ minutiæ CD, additæ ad minutiam CD. Quoniam enim AB, minutia vnius particulæ minutiæ CD, [a] reducitur ad ſimplicem minutiam AH, cuius numerator idem eſt qui A, productus, nimirum ex vnitate in A; denominator autem numerus H, ex denominatoribus B, D, procreatus, vt in appoſito hoc exemplo apparet. Item minutia FH, minutiæ CD, æqualis eſt, habens eundem denominatorem H, ex denominatoribus B, D, productum; numeratorem verò E, ex C, numeratore poſterioris minutiæ in B, denominatorem prioris productum: (Cùm enim B, in C, D, faciat F, H; [b] erit vt C, ad D, ita F, ad H; [c] ac propterea

F. 24.

A, 3. C, 6. G, 27.
B, 4. D, 7. H, 28.

a 14. huius.

A, 3. 1 A, 3.
B, 4. D, 7. H, 28.

b 17. ſept.
c 8. huius.

propterea minutia C D, F H, æquales erunt.) efficitur, minutiam G H, cuius numerator G, ex numeratoribus F, A, minutiarum F H, A H, componitur, (nimirũ ex numero ex C, in B, producto, & ex A,) denominator autem H, idem, qui earundem minutiarum F H, A H; efficitur, inquam, minutiam G H, ſummam eſſe minutiarum F H, A H, vt initio propoſ. 20. oſtenſum eſt; hoc eſt, ſummam ex minutia A B, reſpectu vnius particulæ minutiæ C D, quæ minutia A H, oſtenſa eſt æqualis, & ex minutia C D, quæ oſtenſa eſt æqualis minutiæ F H, collectam. Minutia igitur G H, procreatur ex inſitione minutiæ A B, in minutiam C D; id eſt, æqualis eſt minutiæ A B, vnius particulæ minutiæ C D, & minutiæ C D, ſimul. Quod eſt propoſitum.

IAM verò ſi plures minutiæ A B, C D, E F, G H, ſint inferendæ: hoc eſt, ſi minutia A B, vnius particulæ minutiæ C D, vnius particulæ minutiæ E F, vnius particulæ minutiæ G H: & minutia C D, vnius particulæ minutiæ E F, vnius particulæ minutiæ G H: & minutia E F, vnius particulæ minutiæ G H, addi debeant ad minutiam G H, ita agendum erit. Ex G, numeratore poſtremæ minutiæ G H, in F, denominatorem penultimæ minutiæ E F, fiat numerus, cui addatur E, numerator eiuſdem penultimæ minutiæ E F, vt fiat numerus K. Deinde producto ex K, in D, denominatorem antepenultimæ minutiæ C D, addatur C, numerator eiuſdem minutiæ C D, vt fiat M. Producto quoque ex M, in B, denominatorem proximè antecedentis minutiæ A B, adiiciatur A, numerator eiuſdem minutiæ A B, vt fiat P: Atque ita deinceps ducatur ſemper vltimus numerus conflatus in denominatorem proximè antecedentis minutiæ; productoq; numerator eiuſdem proximè antecedentis minutiæ adiiciatur, donec nulla minutia ſuperſit. Numero autem P, qui vltimo loco conflatus eſt, ſupponatur numerus Q, ex denominatoribus inter ſe multiplicatis procreatus, ducendo primùm H, in F, vt fiat L; deinde L, in D; vt fiat N; poſt hæc N, in B, vt fiat Q, &c.

P, 119. M, 59. K, 14. A, 1. C, 3. E, 2. G, 4. B, 2. D, 4. F, 3. H, 5. Q, 120. N, 60. L, 15.

Dico minutiam P Q, ex inſitione datarũ minutiarum produci in eo ſenſu, quẽ expoſuimus. Nã vt in duabus minutijs oſtenſum eſt, minutia K L, producitur ex inſitione minutiæ E F, in minutiã G H: hoc eſt, æqualis eſt ſummæ ex minutia E F, vnius particulæ minutiæ G H, & ex minutia G H, collectæ. Deinde minutia C D, vnius particulæ minutiæ E F, vnius particulæ minutiæ G H, [a] facit minutiã ſimplicem, cuius numerator C, (productus nimirum ex C, in vnitatẽ bis poſitam hoc modo, 3.1.1.) & denominator N, ex D, in L: hoc eſt, ex multiplicatione denominatorum H, F, D, procreatus: Minutia quoque, cuius numerator eſt numerus ex D, in K, productus, denominator autem idem numerus N, ex D, in L, productus, [b] æqualis eſt minutiæ K L: [c] quòd numeratores harum minutiarum ad denominatores eandem proportionem habeant; quippe cùm D, in K, L, gignat numeros alterius illius minutiæ. Igitur cùm per ea, quæ ad initium propoſitionis 20. demonſtrauimus, minutia M N, cuius numerator M, ex numeratore C, & ex numero, qui fit ex D, in K, conflatur, æqualis ſit ſumma collectæ ex minutia, cuius numerator C, & denominator N, atque ex minutia, cuius numerator ex D, in K, producitur, denominator verò N; æqualis quoque erit eadem minutia M N, ſummæ collectæ ex minutia G H, & ex minutia E F, vnius particulæ minutiæ G H, atque ex minutia C D, vnius particulæ minutiæ E F, vnius particulæ minutiæ G H. Rurſus minutia A B, vnius particulæ minutiæ C D, vnius particulæ minutiæ E F, vnius particulæ minutiæ G H, [d] facit minutiam ſimplicem, cuius numerator A, & denominator Q, ex B, in N; id eſt, ex multiplicatione denominatorum H, F, D, B, productus: Minutia quoque, cuius numerator eſt numerus ex B, in M, procreatus; denominator verò idem numerus Q, ex B, in N, productus, [e] æqualis eſt minutiæ M N, [f] quòd numeratores harum minutiarum ad denominatores eandem proportionem habeant, quippe cùm B, in M, N, gignat numeros alterius illius minutiæ. Cùm minutia igitur P Q, cuius numerator P, ex numeratore A, & ex numero, qui fit ex B, in M, conflatur, æqualis ſit ſummæ collectæ ex minutia, cuius numerator A, & denominator Q, atque ex minutia, cuius numerator ex B, in M, gignitur, denominator verò Q, vt initio propoſitionis 20. monſtratum eſt; æqualis quoque erit eadem minutia P Q, ſummæ collectæ ex minutia G H, & ex minutia E F, vnius particulæ minutiæ G H; & ex minutia C D, vnius particulæ minutiæ E F, vnius particulæ minutiæ G H; & ex minutia A B, vnius particulæ minutiæ C D, vnius particulæ minutiæ E F, vnius particulæ minutiæ G H. quod eſt propoſitum. Eademq; ratio eſt de pluribus.

a 14. huius. b 8. huius. c 17. ſept. d 14. huius. e 8. huius. f 17. ſept.

SIT deinde ſenſus, addendam eſſe minutiam A B, totius minutiæ C D, ad minutiam C D. Ex C, numeratore poſterioris minutiæ in B, denominatorem prioris fiat F, cui addatur E, ex numeratoribus A, C, productus, conflatoq; numero G, ſupponatur H, ex denominatoribus B, D, procreatus. Dico minutiam G H, produci ex inſitione minutiæ A B, in minutiam C D, in eo, quem diximus, ſenſu: hoc eſt, minutiam G H, æqualem eſſe ſummæ collectæ ex minutia C D, & ex minutia A B, minutiæ C D. Quoniam enim minutia A B, minutiæ C D, [g] reducitur ad minutiam ſimplicem E H, cuius numerator eſt E, ex numeratoribus A, C, procreatus; denominator autem H, ex denominatoribus B, D, productus, vt exemplum appoſitum demonſtrat: [h] Minutia quoque F H, æqualis eſt minutiæ C D; [i] quòd numeratores ad denominatores eandem proportionem habeant; quippe cùm B, in C, D, faciat F, H: Erit minutia G H, (quæ ex ijs, quæ ad initium propoſitionis 20. oſtendimus, æqualis eſt

E, 18. F, 24. A, 3. C, 6. G, 42. B, 4. D, 7. H, 28. A, 3. C, 6. E, 18. B, 4. D, 7. H, 28.

g 14. huius. h 8. huius. i 17. ſept.

ſumma minutiarum E H, F H,) æqualis ſumma collecta ex minutia C D, (hoc eſt, ex minutia F H,) & ex minutia A B, minutiæ C D, (id eſt, ex minutia E H,) atque ideò minutia G H, procreatur ex inſitione minutiæ A B, in minutiam C D, in hoc poſteriori ſenſu. Quod eſt propoſitum.

Quod ſi plures ſint minutiæ inſerendæ A B, C D, F F, G H: hoc eſt, minutia A B, minutiæ C D, minutiæ E F, minutiæ G H; & minutiæ C D, minutiæ E F, minutiæ G H; & minutiæ E F, minutiæ G H, addendæ ſint ad minutiam G H, ita agendum erit: Ducatur G, in F, producto q̃ numero, addatur numerus ex E, in G, procreatus, vt fiat K. Deinde ducatur K, in D, numero ó producto adjiciatur numerus ex C, E, G, factus, vt fiat M. Producto quoq; numero ex M, in B, addatur numerus ex A, C, E, G, procreatus, vt fiat P. Atq; ita deinceps ducatur ſemper numerus vltimo loco genitus in denominatorem antecedentis minutiæ, numero ó procreato adjiciatur numerus ex omnibus numeratoribus minutiarum ad eum vſque locum aſſumptarum productus, donec nulla ſuperſit minutia. Numero autem P, qui vltimo loco procreatus eſt, ſupponatur numerus Q, ex omnibus denominatoribus productus, vt in priori ſenſu. Dico minutiam P Q, produci ex inſitione dictarum minutiarum, ſi inſitio intelligatur, vt dictum eſt. Nam, vt in duabus minutijs demonſtratum eſt, minutia K L, producitur ex inſitione minutiarum E F, G H, id eſt, æqualis eſt ſumma collecta ex minutia E F, totius minutiæ G H, & ex minutia G H. Deinde minutiæ C D, totius minutiæ E F, totius minutiæ G H, [a] *facit minutiam ſimplicem, cuius numerator ex numeratoribus C, E G, producitur, denominator autem eſt N, ex denominatoribus H, F, D, procreatus. Minutia quoque, cuius numerator ex D, in K, gignitur, denominator autem eſt idem N, ex D, in L; hoc eſt, ex denominatoribus H, F, D, procreatus;* [b] *æqualis eſt minutiæ K L;* [c] *quòd numeratores harum minutiarum ad denominatores habeant proportionem eandem: quippe cùm D, in K, L, faciat numeros alterius huius minutiæ. Igitur cùm minutia M N, cuius numerator M, conflatur ex numero, quem numeratores C, E, G, gignunt, & ex numero, quem D, in K, procreat, æqualis ſit per ea, quæ initio propoſ. 20. oſtenſa ſunt, ſumma collecta ex minutia, cuius numerator ex numeratoribus C, E, G, producitur, denominator autē N, ex denominatoribus H, F, D, procreatus, atque ex minutia, cuius numerator ex D, in K, gignitur, denominator verò eſt idem N; æqualis erit etiam eadem minutia M N, ſummæ collectæ ex minutia G H; & ex minutia E F, minutiæ G H, & ex minutia C D, minutiæ E F, minutiæ G H. Rurſus minutia A B, minutiæ C D, minutiæ E F, minutiæ G H,* [d] *facit minutiam ſimplicem, cuius numerator ex numeratoribus A, C, E, G, producitur, denominator autem Q, ex B, in N, procreatus, ſiue ex denominatoribus H, F, D, B. Minutia quoq;, cuius numerator ex B, in M, producitur, denominator autem eſt idem Q, ex B, in N, procreatus,* [e] *æqualis eſt minutiæ M N;* [f] *quòd harum minutiarum numeratores eandem habeant ad denominatores proportionem; cùm B, in M, N, faciat numeros alterius huius minutiæ. Minutia ergo P Q, cuius numerator P, conflatur ex numero, quem numeratores A, C, E, G, gignunt, & ex numero, quem facit B, in M, cùm æqualis ſit, ex ijs, quæ initio propoſ. 20. demonſtrata ſunt, ſumma collecta ex minutia, cuius numerator ex numeratoribus A, C, E, G, producitur, denominator autem eſt Q: atq; ex minutia, cuius numerator ex B, in M, gignitur, denominator autem eſt idem Q; æqualis quoq; erit ſummæ collectæ ex minutia G H; & ex minutia E F, minutiæ G H; & ex minutia C D, minutiæ E F, minutiæ G H; & ex minutia A B, minutiæ C D, minutiæ E F, minutiæ G H. quod eſt propoſitum. Eadem q̃ de pluribus eſt ratio.*

P, 232. M, 104. K, 20.
A, 1. C, 3. E, 2. G, 4.
B, 2. D, 4. F, 3. H, 5.
Q, 120. N, 60. L, 15.

a 14. huius. b 8. huius. c 17. ſept. d 14. huius. e 8. huius. f 17. ſept.

DE PROPORTIONVM COMPOSITIONE.

Expeditis ijs, quæ ad fractorum numerorũ demonſtrationes pertinent, reliquũ eſt, vt compoſitionem proportionũ explicemus: id quod ad defin. 10. lib. 5. et ad defin. 5. lib. 6. et ad propoſ. 23 lib. 6. nos hoc loco facturos recepimus. In primis igitur, compoſitionẽ illam proportionũ, de qua Euclid. egit defin. 10. lib. 5. & defin. 5. lib. 6. & in ijs propoſitionibus, vbi duplicatam, triplicatã, aut compoſitam proportionem dè magnitudinibus, vel numeris demonſtrat, non eſſe verè additionem proportionum, ita vt duplicata vel triplicata proportio ſit duplo, aut triplo maior ea proportione, cuius illa dicitur duplicata, triplicatáue: Item vt proportio ex pluribus proportionibus compoſita ſit verè totum quippiam, cuius partes ſint proportiones, ex quibus componi dicitur, vt plerunque interpretes Euclidis exiſtimant, ex hoc perſpicuè confirmari poteſt: quòd pars eſſet vel æqualis, vel maior toto. Nam cùm hæc compoſitio intelligenda ſit, ſiue maior quantitas cum minore, ſiue minor cum maiore conferatur, vt ad defin. 10. lib. 5. oſtendimus, ſi, poſitis his tribus terminis continuè proportionalibus, 1. 10. 100. proportio 1. ad 100. non ſolùm duplicata diceretur proportionis 1. ad 10. vt vult defin. 10. lib. 5. ſed verè eſſet duplo maior, ita vt coaceruata foret ex duabus proportionibus 1. ad 10. & 10. ad 100. æqualibus, vt Euclidis interpretes putant, quis non videt, partem eſſe maiorem toto, nimirum proportionem 1. ad 10. quæ vna pars eſt, maiorem eſſe proportione 1. ad 100? Hic autem 4. 4. 4. partem æqualem eſſe toti? Sic etiam, ſi, poſitis his tribus terminis non continuè proportionalibus 4. 2. 8. proportio 4. ad 8. verè coaceruaretur ex proportionibus 4. ad 2. & 2. ad 8. tanquam ex partibus, vt ijdem auctores contendunt, eſſet quoq; pars maior, quam totum, quòd proportio dupla 4. ad 2. maior ſit proportione ſubdupla 4. ad 8. Hic autem 10. 5. 1. 2. 5. pars toti foret æqualis, proportio videlicet 10. ad 5. primi termini ad ſecundum, proportioni 10. ad 5. primi termini ad vltimum. Id quod coguntur omnino concedere, velint nolint, ex propoſ. 5. lib. 5. Sint enim duo numeri

neri plani 24. & 48. Prioris latera ſint 12. & 2. Poſterioris verò 3. & 16. Quoniam igitur Euclides ibi demonſtrat, proportionem 24. ad 48. compoſitam eſſe ex proportionibus laterum: hoc eſt, ex proportione 12. ad 3. & ex proportione 2. ad 16. erit pars componens, (ſi hæc compoſitio eſt vera additio.) nimirum proportio quadrupla 12. ad 3. maior toto, proportione videlicet ſubdupla 24. ad 48. Pari ratione, ſi proportio ſubdupla 24. ad 48. verè totum eſt, & eius partes componentes proportio quadrupla 12. ad 3. & proportio ſuboctupla 2. ad 16. ſi alterutra harum ab illa ſubtrahatur, reliqua erit altera. Igitur & maius ex minore ſubtrahi poteſt; nimirum proportio quadrupla 12. ad 3. ex proportione ſubdupla 24. ad 48. & ſubtracta proportione ſuboctupla 2. ad 16. ex proportione ſubdupla 24. ad 48. reliqua erit proportio quadrupla 12. ad 3. maior quàm ea, à qua facta eſt ſubtractio. Quòd ſi poſterioris numeri plani 48. latera ſumantur 12. & 4. erit vna partium componentium, nimirum proportio 3. ad 4. æqualis toti, proportioni videlicet 24. ad 48. Et ſubtracta proportione 2. ad 4. ex proportione æquali 24. ad 48. ſupereſſet adhuc proportio æqualitatis 12. ad 12. quæ maior eſt, quàm totum: hoc eſt, quàm proportio 24. ad 48. Rurſus ſequatur, totum non augeri, etiamſi ei infinitæ partes adderentur. Poſitis enim his quatuor terminis, 12. 4. 2. 1. ſi proportio 12. ad 1. verè coaceruatur ex proportionibus 12. ad 4. & 4. ad 2. & 2. ad 1. relinquitur ex partibus ita vt hæ proportiones ſimul ſumptæ proportioni 12. ad 1. ſint æquales: ſi cum illis terminis continuentur alij tres termini hoc modo, 12. 4. 2. 1. 6. 3. 1. componetur eadem proportio 12. ad 1. ex ſex proportionibus, quarum priores tres ſunt eadem illæ, ex quibus prius componebatur. Tres ergo proportiones 1. ad 6. & 6. ad 3. & 3. ad 1. additæ tribus proportionibus 12. ad 4. & 4. ad 2. & 2. ad 1. non augent totum ex illis coaceruatum. Hæc autem omnia abſurda ſunt, & contra principia Mathematicorum. Hucaccedit, quòd ſecundùm communem hominum ſenſum duæ proportiones triplæ conſtituant proportionem ſextuplam, non autem noncuplam, vt prædicti auctores volunt, quanquam noncupla proportio dicatur triplæ duplicata, vt in hiſce numeris apparet, 9. 3. 1. Nam quis non videat, ſi agens aliquod ſit, vt 3. illud idem duplo potentius factum eſſe vt 6. non autem vt 9? Sic etiam communis intelligentia comprehendit ex proportione triplæ, & quintuplæ confici proportionem octuplam, propterea quòd duo mouentia vt 3. & 5. mo ueant ſimul ſumpta, vt 8. nõ autem ex illis conſtitui proportionem 15. ad 1. quamuis hæc ex illis per continuationem compoſita eſſe dicatur, ex defin. 5. lib. 6. vt patet in his numeris, 15. 5. 1. His adde, multorum agentium vires non poſſe dimidiari, eo quòd inter duos numeros, qui proportionem agentis ad patiens exprimunt, nullus medius cadat proportionalis. Verbi gratiâ. Agens vt 6. non poſſet habere agens duplo minus, quòd inter 6. & 1. nullus medius proportionalis cadat numerus: quis autem non ſtatim intelligat, agens vt 3. in dupla proportione minus eſſe, quàm agens vt 6?

LIQVET ergo, huiuſmodi compoſitionem proportionum non eſſe additionem, ſed proportionum continuationem, quæ per multiplicationem denominatorum fit, vt ad defin. 5. lib. 6. demonſtrauimus, vbi etiam expoſuimus, cur extremorum proportio dicatur ex mediis proportionibus compoſita propter terminorũ continuationem, quemadmodum & ad defin. 10. lib. 1. explicauimus, cur, poſitis tribus, quatuor, aut pluribus terminis continuè proportionalibus, extremorum proportio appelletur duplicata, triplicata, aut quadruplicata, &c. eius proportionis, quam primi duo termini habent. Hæc autem planiùs percipientur ex ijs, quæ iam iam de vera compoſitione proportionum dicturi ſumus.

ITAQVE omnes operationes Arithmeticæ in proportionibus; nimirum additio, ſubtractio, multiplicatio, ac diuiſio, fieri debent per proportionum denominatores, vt rectè docet Volumnius Rodulphus in diſputatione de proportione proportionum. Et quoniam denominatores proportionum ſunt fractiones, ſiue minutiæ, vt libro quinto docuimus, (cùm denominatori cuiuslibet proportionis multiplicis, qui numerus integer eſt, ſupponi poſſit vnitas, vt ex eo fiat quaſi minutia ab vnitate denominata.) quarum qualibet æqualis eſt fractioni, quam conſtituunt duo quicunque numeri in ea proportione, cuius illa fractio denominator eſt, ſi ex antecedente fiat numerator, & ex conſequente denominator: manifeſtè colligitur, operationes Arithmeticas in proportionibus ab operationibus fractorum numerorum non differre, ſiue per proportionum denominatores, ſiue per numeros earundem proportionum quoſcunque: poſitis tamen conſequentibus terminis ſub antecedentibus, inſtar minutiarum, inſtituantur, vt egregiè Cardanus præcipit in ſua Arithmetica, vt iam apparebit.

PRIMVM enim ſint in vnam ſummã colligendæ duæ proportiones, tripla & quintupla. Quoniam denominatores ſunt 3. & 5. ex quorum additione fit ſumma 8. coaceruabitur octupla proportio ex illis. quæ ſumma etiam colligitur, ſiue denominatores, ſuppoſita prius vnitate cuilibet illorum, inſtar minutiarum addantur, ſiue numeri 12. 4. & 40. 8. inter quos datæ proportiones reperiuntur, perinde ac ſi eſſent fracti numeri, poſitis terminis conſequentibus ſub antecedentibus, in vnã ſummam colligantur. Priori enim modo colligitur proportio 8. ad 1. poſteriori autem 256. ad 32. quarum vtraque octupla eſt. Sic etiam ex proportione dupla ſuperquadripartiente ſeptimas, & ſeſquialtera, quarum denominatores ſunt 2 4/7. & 1 1/2. & quæ inter numeros 54. 21. &

3 ✕ 5 — 12 ✕ 40.
1 ✕ 1. — 4 ✕ 8.
8 — 256
1. — 32.

18 ✕ 3 — 54 ✕ 6
7 — 2 — 21 — 4.
57 — 342
14 — 84

6.4. reperiuntur, sit proportio quadrupla sesquidecimaquarta, qualem habent tam numeri 57.14. q̃ 342.84. Sed quãdo p denominatores instituitur operatio, revocandi prius sunt denominatores ad vnicas fractiones, vt hic factum est. Nam $2\frac{4}{7}$. revocauimus ad $\frac{18}{7}$. & $1\frac{1}{2}$. ad $\frac{3}{2}$. Quod in alijs etiã operationibus intelligendũ est.

8	3	256.	12	57	3	342	6
1	1.	32	4.	14	2.	84	4.
5		640		72		864	
1.		128.		28		336.	

DEINDE, si ex proportione octupla subtrahatur proportio tripla: Item ex proportione quadrupla sesquidecimaquarta deducatur p portio sesquialtera; reliquæ fient proportiones quintupla, & dupla superquadripartiens septimas, vt hic perspicuum est.

3	2	6	12	10	120	3	8	24	9	16	144
1	1.	1.	4	5.	20.	2	5.	10.	6	10.	60.

TERTIO, si multiplicanda sit proportio tripla per 2. vel quod idem est, per proportionẽ duplam: Item proportio sesquialtera per supertripartientem quintas, instituenda erit operatio, vt hic vides, producetur q̃ ibi proportio sextupla, hic autem dupla superbipartiens quintas.

6	1	6	120	4.	480	24	2	48	144	6	864
1	3.	3.	20	12.	240.	10	3.	30.	60	9.	540.

QVARTO et vltimo, si proportio sextupla dividenda proponatur p proportionem triplam: Item proportio dupla superbipartiens quintas per proportionem sesquialteram, si divisoris termini permutentur, vt in divisione minutiarum docuimus, ita instituetur operatio.

VIDES ergo operationes Arithmeticas proportionum ab operationibus minutiarum nulla in re discrepare, nisi quòd in proportionibus necesse non est interponere lineolam inter numeratorẽ & denominatorem, quemadmodum in minutijs.

IAM verò multiplicationem proportionum à nobis præscriptam, quam auctores additionem falsò nuncupant, cum proportionum compositione, de qua Euclides defin. 10. lib. 5. & defin. 5. lib. 6. egit, convenire, atque adeò compositionem illam Euclidis verè esse multiplicationem, non autem additionem, vt diximus, hoc modo demõstrabimus. Sint duæ proportiones A, ad B, & C, ad D, sive æquales, sive inæquales; ducatur q̃ A, antecedẽs in antecedentem C, & fiat E; ex consequente verò B, in consequentem D, fiat F. Dico proportionem E, ad F, quæ ex illa multiplicatione producitur, esse compositam ex proportionibus duabus A, ad B, & C, ad D: ita vt si proportiones hæ A, ad B, & C, ad D, fuerint æquales, proportio E, ad F, dicatur alterutrius earũ duplicata, vt vult defin. 10. lib. 5 si autem fuerint inæquales, dicatur ex illis composita, ex sententia defin. 5. lib. 6. Fiat enim G, ex B, in C. Et quia ex A, B, in C, fiunt E, & G; [a] erit vt A, ad B, ita E, ad G. Rursus quia ex B, in C, D, fiunt G, & F; [b] erit vt C, ad D, ita G, ad F. Componitur autem proportio E, ad F, ex proportionibus E, ad G, & G, ad F, ex defin. Euclidis. Igitur eadem proportio E, ad F, componitur ex proportionibus A, ad B, & C, ad D, cùm hæ eadem sint, quæ E, ad G, & G, ad F. Quod etiam patet ex demonstratione, quam ad defin. 5. lib. 6. ex Eutocio, & Vitellione attulimus. Cùm enim compositio proportionum ab Euclide descripta respondeat multiplicationi denominatorũ inter se, vt ibi demonstrauimus, nostra verò multiplicatio à multiplicatione denominatorum non differat, liquidò constat, compositionem illam proportionum esse multiplicationem, quam tradidimus.

A,	6.	C,	12.	A,	3.	C,	6.
B,	2.	D,	4.	B,	2.	D,	5.
E,	72.	F,	8.	F,	18.	E.	10.
G,	24.			G,	12.		

a 18. septimi.

b 17. septimi.

EADEM ratione ostendemus, subtractionem proportionum, quam ijdem auctores docent, nõ esse aliud, q̃ divisionem à nobis explicatam, esseq̃ compositioni illi Euclidis contrariam. Sit enim ex proportione A, ad B, detrahenda proportio C, ad D, vt ipsi volunt. Ex A, in D, fiat E, & ex B, in C, fiat F. quod idem est, ac si termini proportionis C, ad D, permutent loca, & regula multiplicationis adhibeatur. Dico proportionẽ E, ad F, quæ ex divisione proportionis A, ad B, per proportionem C, ad D, producitur, vt docuimus, esse eam, quæ relinquitur, sublata proportione C, ad D, ex proportione A, ad B; hoc est, proportionem A, ad B, compositam esse ex proportionibus C, ad D, & E, ad F. iuxta defin. Euclidis. Fiat enim G, ex A, in C. Quia igitur ex A, B, in C, fiũt G, F; [c] erit vt A, ad B, ita G, ad F. Rursus quia ex A, in C, D, fiunt G, E; [d] erit vt C, ad D, ita G, ad E. Cùm ergo proportio G, ad F, composita sit ex proportionibus G, ad E, & E, ad F, vt vult Euclides; erit quoq; proportio A, ad B, (quæ eadem est, quæ G, ad F,) composita ex eisdem proportionibus G, ad E; hoc est, C, ad D, & E, ad F: ac proinde subducta proportione C, ad D, ex proportione A, ad B, reliqua erit proportio E, ad F: quemadmodum si ex proportione G, ad F, (posito termino E, medio) dematur proportio G, ad E, reliqua est proportio E, ad F. Sed quis non videt, hoc potius esse dividi proportionem A, ad B, per proportionem C, ad D, q̃ proportionem C, ad D, ex proportione A, ad B, subtrahi, ne maius ex minore auferri dicatur, vt in posteriori exemplo accidit? Atq; hæc de proportionum compositione: qui plura desiderat, legat eruditissimum tractatum hac de re à Volumnio Rodulpho Spoletano conscriptũ.

A,	9.	C,	3.	A,	4.	C,	6.
B,	1.	D,	1.	B,	2.	D,	3.
E,	9.	F,	3.	E,	8.	F,	12.
G,	27.			G,	24.		

c 18. septimi.

d 17. septimi.

FINIS ELEMENTI NONI.

EVCLIDIS

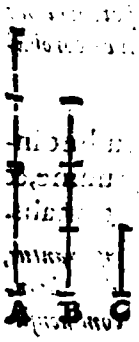
ELEMENTVM DECIMVM.

DEFINITIONES.

I.

COMMENSVRABILES magnitudines dicũtur, quas eadem mensura metitur.

ABSOLVIT Euclides in antecedentibus tribus libris ea, quæ ad numeros spectant, quantum satis visum est ad res Geometricas intelligendas: Nunc in hoc decimo libro aggreditur ad disputationem linearum commensurabilium, & incommensurabilium, quarum causa numerorum tractationem ab eo susceptam esse superius diximus. Nam sine cognitione harum linearum complures magnitudines cùm solidæ tum planæ, neq; perfectè intelligi possunt, neq; cùm res ruleris, in opus atq; vsum conferri; propterea quòd plerunque latera earum incommensurabilia sunt: Id quod & de planis ipsis atq; solidis dici potest, quippe cùm & hæc incommensurabilia sæpenumero existant, vt ad finem huius libri demonstrabimus. Quoniam verò hic liber multis obstructus est difficultatibus, ob linearum, de quibus disserit, obscuritatem; omnes nervos industriæ meæ in eo contendam, vt ex his, quæ hactenus ab Euclide sunt demonstrata, ita planus reddatur, ac facilis, vt sine vllo labore à quouis, qui præcedentium tamen librorum demonstrationes rectè intellexerit, possit percipi. Neque enim in eorum possum sententiam ire, qui putant ad eius intelligentiam esse necessariam eam partem Arithmetices, quæ de radicibus numerorum, tam rationalibus quàm irrationalibus, vt vocant, sermonem instituit: Immò contra persuasum mihi prorsus habeo, cognitionem perfectam illius partis Arithmetices pendere ex hoc 10. lib. tantum abest, vt existimem, tractationem illam radicum requiri, vt facilius hic liber intelligatur. Non negarim tamen, eum, qui rationem radicum atq; calculum tenuerit, maiore cum voluptate hunc librum percepturum, quàm qui illarum omnino sit ignarus, propterea quòd ille demonstrationes ad vsum potest reuocare, hic verò nullo modo. Hac enim de causa & nos priora decem theoremata secundi lib. numeris accommodauimus, vt oblectationem animi maiorem ex eo studiosus caperet, ac fructum; non autem vt ea, quæ in illo demonstrantur, facilius arbitraremur intelligi posse ex numeris. Cur ergo (dicet aliquis) vt in eo libro, non perinde etiam in hoc exempla numerorum, quibus Algebra vtitur, vsurpasti, vt ea res & maiori voluptati esset, & cõmodo legentibus? In promptu causa est, quare id omittendum putauimus. Cùm enim perpauci sint hoc tempore, quibus celeberrima illa Algebra ars sit cognita, videbantur numeri illi, si adhiberentur, tenebras potius effusuri, quàm lucis aliquid maioris daturi, & perspicuitatis; quippe ita ingenia studiosorum pro adiumento, ac luce, quam his nostris commentarijs afferre laborauimus, plus caperent incommodi, minusq; demonstrationes ipsas perciperent: Id quod in lib. 2. accidere non potuit, cùm additionem numerorum integrorum, ac multiplicationem, quæ sola necessaria ibi fuerunt, nemo fere sit, qui ignoret. Huc accedit, quòd qui in Algebra sunt versati, facili negotio demõstrationes huius lib. ad numeros accommodare possint per se ipsos, quando volunt, præsertim cùm iam hoc ipsum non multò ante à Michaele Stifelio nobili Arithmetico in 2. lib. operis, quod de Arithmetica integra inscripsit, diligenter effectum sit, & accurate.



IN HOC vt ad institutum redeamus, inchoans rem ipsam Euclides, more suo, ab explicationibus vocabulorum, quibus vtendum erit; declarat primo loco, quænam magnitudines dicantur commensurabiles, definiens eas esse, quas eadem mensura metitur. Vt duæ magnitudines A, B, quas eadem mensura C metitur, (metitur enim C, ipsam A, quater repetita, & ter sumpta ipsam B,) dicuntur commensurabiles. Eodem modo commensurabiles sunt, linea 20. palmorum & linea 13. palmorum; quia eas linea tam vnius palmi, quàm dimidiati palmi, quam tertiæ partis vnius palmi, &c. metitur. Similiter commensurabiles dicuntur superficies, quas vna, & eadem superficies metitur, item corpora, solidumve commensurabilia, quæ metitur idem corpus, seu solidum.

II.

INCOMMENSVRABILES autem, quarum nullam communem mensuram contingit reperiri.

TALES magnitudines sunt, diameter quadrati cuiusuis, & latus eiusdem; quoniã nullam habent mensuram communem, vt propositione vltima huius libri demonstrabitur ab Euclide. Sunt etiam plurimæ aliæ lineæ incommensurabiles, quibus scilicet mensura aliqua communis dari nullo modo potest, quarum multas hoc libro Geometra explicat, licetq; quamplurimæ inueniri possint. Rursus, superficies dicentur incommensurabiles, & solida incommensurabilia, quæ nullam admittunt mensuram communem.

III.

RECTAE lineæ potentia commensurabiles sunt, cùm quadrata earum idem spatium metitur.

LINEARVM rectarum quædam commensurabiles sunt longitudine, quas nimirũ alia linea, tanquam mensura communis, metitur; cuiusmodi sunt illæ, quas in expositione defin. 1. commensurabiles simpliciter diximus: quædam verò longitudine incommensurabiles, quas scilicet nulla linea, tanquam mensura communis, metitur. Rursus linearum, quæ sunt incommensurabiles longitudine, aliæ sunt eiusmodi, vt earum quadrata sint commensurabilia; aliæ verò ita se habent, vt & quadrata earum incommensurabilia sint. Lineæ ergo illæ longitudine incommensurabiles, quarum quadrata sunt commensurabilia, appellantur hic ab Euclide potentia commensurabiles; quia videlicet secundùm earum potentias; hoc est, secundùm earum quadrata (est enim, vt ad propos. 47. lib. 1. diximus, potentia cuiusque lineæ quadratum ab ea descriptum) commensurabiles sunt, licet ipsa secundùm longitudinem sint prorsus incommensurabiles.

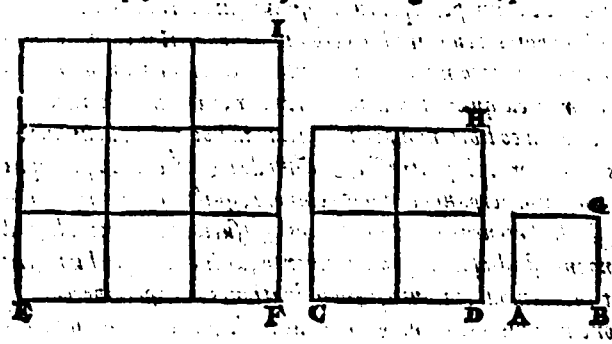
QVOD si quis roget, cur Euclides definierit seorsum lineas potentia commensurabiles, non autem commensurabiles longitudine, respondendum est, lineas longitudine commensurabiles satis superq; esse explicatas in definitione commensurabilium magnitudinum, cùm huiusmodi lineas vna cõmunis mensura metiatur, vt dictum est: At verò quoniam lineæ potentia commensurabiles nulla communi mensura metiri potest, sed tantummodò earum quadrata idem spacium metitur, idò necessarium omninò fuit, vt ea propria definitione explicarentur.

IIII.

INCOMMENSVRABILES autem, cùm quadratis earum nullum spacium, quod sit communis eorum mensura, contingit reperiri.

LINEAS reliquas longitudine incommensurabiles, quarũ etiam quadrata incommensurabilia sunt, vocat incommensurabiles potentia.

HABENT autem lineæ commensurabiles tam longitudine, q̃ potentia, hãc quasi conuenientiam inter se, & connexionem, vt linea longitudine commensurabiles, sint etiam commensurabiles potentia, ita vt nulla lineæ dari possint commensurabiles longitudine, quin earum quadrata commensurabilia quoq; sint; quoniam quadratũ ex communi earum mensura descriptum metitur tanquam mensura communis earum quadrata, vt in subiecta figura apparet: sicut enim recta A B, metitur rectam C D, E F; ita quoq; quadratum A G, quadratum C H, E I, metitur: Non autem, vt omnes lineæ potentia commensurabiles, sint etiam commensurabiles longitudine; multæ enim lineæ sunt potentia commensurabiles; hoc est, quadrata habent commensurabilia, quæ tamen longitudine omnino incommẽsurabiles sunt, vt in hoc libro demonstrabitur. Rursus inter lineas incommensurabiles tam longitudine, quàm potentia, huiusmodi colligatio reperitur, vt omnes lineæ potentia incommensurabiles, sint etiã incommensurabiles longitudine; Non autem contrà, vt omnes lineæ longitudine incommensurabiles, sint quoq; incommensurabiles potentia, cùm multæ lineæ reperiantur longitudine inter se incommensurabiles, quæ tamen potentia, hoc est, secundùm earum quadrata, commensurabiles existant. Quæ quidem omnia perspicua erunt ex corollario propos. 9. huius libri.



V.

HIS positis, ostenditur, cuicunque rectæ propositæ rectas lineas multitudine infinitas & commensurabiles esse, & incommensurabiles: alias quidè longitudine, & potentia; alias verò potẽtia solùm. Vocetur autẽ proposita recta linea, Rationalis.

SI proponatur aliqua recta linea nota magnitudinis, erunt omnium aliarũ, quæ cum ipsa comparantur, quædam illi commensurabiles longitudine ac potentia, quælibet scilicet sibi potentia tantum. Item quædam illi incommensu-

commensurabiles longitudine tantùm; quædam verò longitudine, & potentia, vt hoc 10. libro demonstrabitur variis in locis. Non enim vult Euclides, ex dictis ostendi, seu colligi, (quanquam eius verba hoc sonare videantur) hæc ita se habere: sed solùm indicat nobis, & innuit quodam modo, linearum quasdam dici posse propositæ rectæ lineæ commensurabiles longitudine, & potentia, quasdam autẽ potentia tantùm, &c. Quod quidem ex dictis nullo modo sequitur, sed demonstrabitur in sequentibus, vt diximus.

LINEA autem illa proposita, ratione cuius aliæ commensurabiles sunt, vel incommensurabiles, dicitur Græcis ῥητὴ; Latinis verò Rationalis; quoniam ea ponitur semper certa, & nota, aliæ verò cum illa comparatæ non semper notæ sunt, quamuis singulæ eorsum sumptæ existant certa quoque, ac notæ: cùm qualibet in quotcunque partes æquales possit diuidi.

VI.

ET huic commensurabiles siue longitudine & potentia, siue potentia tantùm, Rationales.

DOCET lineas alias illi, quæ Rationalis dicitur, commensurabiles quomodocunque, appellari quoq; Rationales; non quidem ex positione, vt illa, sed quia cum illa comparatæ reperiuntur ei commensurabiles vel longitudine & potentia, vel potentia tantum.

ITAQVE ex sententia Euclidis, radix quadrata huius numeri 20. vel 1000. &c. Seu quod idem est, linea recta, cuius quadratum est 20. vel 1000. &c. dicitur Rationalis; cùm potentia sit commensurabilis lineæ Rationali, (est enim tam numerus 20. quàm 1000. commensurabilis numero cuilibet quadrato, vt 16. vel 100. &c.) quamuis longitudine sit eidem incommensurabilis. Decipiuntur ergo Arithmetici non pauci, qui idcirco eam Irrationalem vocant; quod numero non possit exprimi.

VII.

HVIC verò incommensurabiles, Irrationales vocentur.

QVONIAM in antecedenti definitione Euclides lineas illas, quæ longitudine & potentia, vel quæ potentia tantùm sunt commensurabiles propositæ rectæ Rationali, appellauit Rationales; liquidò constat, eum hic eas dicere Irrationales, quæ propositæ rectæ Rationali incommensurabiles sunt vtroque modo; longitudine videlicet & potentia; non autem longitudine tantùm. Ex quibus etiam manifestum est, radicem quadratam huius numeri 20. vel 1000. &c. seu (quod idem est) lineam, cuius quadratum est 20. vel 1000. &c. non posse appellari Irrationalem, cùm non sit longitudinè, & potentia, sed longitudine tantùm Rationali lineæ propositæ incommensurabilis.

VIII.

ET quadratum, quod à proposita recta fit dicatur Rationale.

QVEMADMODVM linea illa, quæ certa ponitur, ac nota, Rationalis dicitur: Ita quoq; quadratum ab ea descriptum, Rationale vocatur, quia & ipsum certum est, ac notum, comparationeq; illius aliæ superficies, commensurabiles, incommensurabilesue dicuntur.

IX.

ET huic commensurabilia quidem, Rationalia.

OMNES planæ superficies quadrato Rationalis lineæ propositæ commensurabiles, Rationales dicuntur; non quidem ex positione, vt illud, sed quia cum eo collatæ reperiuntur ei vel commensurabiles, vel incommensurabiles: quemadmodum etiam lineæ, quæ Rationali lineæ quomodocunq; commensurabiles sunt, Rationales appellantur.

QVONIAM verò lineæ potentes ipsa spatia commensurabilia quadrato Rationalis lineæ propositæ, sunt saltem potentia commensurabiles lineæ Rationali, ex 3. definitione; perspicuum est, ipsas quoque appellari iuxta definitionem 6. Rationales.

X.

HVIC verò incommensurabilia, Irrationalia dicantur.

NON aliter superficies planæ quadrato à Rationali lineæ descripto incommensurabiles, Irrationales vocantur, ac lineæ, quæ Rationali propositæ prorsus incommensurabiles sunt, Irrationales sunt dictæ.

XI.

ET rectæ, quæ ipsa possunt, Irrationales: siquidem ea quadrata sint, ipsa latera; si verò alia quæpiam rectilinea, rectæ, quæ spatiis incommensurabilibus æqualia quadrata describunt.

VOCANTVR lineæ, quæ possunt spatia quadrato Rationalis lineæ incommensurabilia, Irrationales: quemadmodum & ipsa spatia dicta Irrationalia: Ita vt si incommensurabilia spatia fuerint quidem quadrata, latera ipsorum dicantur Irrationalia; si verò non fuerint quadrata, sed alia quæcunque figura rectilinea, appellentur rectæ, quæ describunt quadrata æqualia illis spatijs incommensurabilibus, Irrationales.

COLLIGITVR autem, lineas potentes ſpatia incommenſurabilia quadrato Rationalis lineæ, dici debere Irrationales, ex 7. defin. quemadmodum ſuprà ex 6. defin. collegimus, lineas, quæ poſſunt ſpatia commenſurabilia eidem quadrato Rationalis lineæ, appellari debere Rationales. Nam lineæ, quæ poſſunt illa ſpatia incommenſurabilia, ſunt potentia incommenſurabiles lineæ Rationali, ex 4. defin. Cùm ergo omnes lineæ potentia incommenſurabiles, ſint quoq; incommenſurabiles longitudine, vt ad defin. 4. diximus, demonſtrabitur q; in coroll. propoſ. 9. manifeſtum eſt, ex 7. defin. lineas illas, quæ poſſunt ſpatia incommenſurabilia quadrato Rationalis lineæ, dici Irrationales.

PRÆTEREVNDVM quoque non eſt, Euclidem & veteres Geometras hac voce: longitudine & potentia: atque potentia tantùm: *apponere ferè ſemper vocibus iſtis*: commenſurabiles, ac incommenſurabiles: *Vix autem, & rariſſimè hic*: Rationales, & Irrationales: *Rectè enim dicuntur lineæ commenſurabiles longitudine & potentia, vel potentia tantùm. Item incommenſurabiles longitudine & potentia, vel longitudine tantùm: Minus verò rectè Rationales longitudine & potentia, vel potentia tantùm, aut Irrationales longitudine & potentia, vel longitudine tantùm. Quod quidem, quoniam Campanus non animaduertit, occaſionem multis præbuit, vt variè & obſcurè in hoc 10. lib. de lineis commenſurabilibus, incommenſurabilibusq;, nec non Rationalibus, Irrationalibusq; ſint locuti.*

CÆTERVM his definitionibus adiungemus poſtulatum vnum, & nonnulla pronunciata, quorum vſus in hoc libro reperitur.

POSTVLATVM, SIVE PETITIO.

POSTVLETVR, quamlibet magnitudinem toties poſſe multiplicari, donec quamlibet magnitudinem eiuſdem generis excedat.

PROPOSITIS enim duabus magnitudinibus eiuſdem generis inæqualibus, cùm maior infinita nõ ſit, minor verò infinitè poſſit augeri; perſpicuum eſt, minorem toties poſſe multiplicari, donec ſuperet maiorem. Conſtat hoc etiam ex iis, quæ in defin. 5. lib. 5 ſcripſimus. Ibi enim eas magnitudines diximus tum demum eſſe eiuſdem magnitudinis, cùm alterutra ita poteſt multiplicari, vt alteram excedat. Atque ex huius conditionis defectu, angulum rectilineum, & angulum contingentiæ, diuerſi eſſe generis, docuimus.

AXIOMATA, SIVE PRONVNCIATA.

I.

MAGNITVDO quotcunque magnitudines metiens, compoſitam quoque ex ipſis metitur.

II.

MAGNITVDO quamcunque magnitudinem metiens, metitur quoque omnem magnitudinem, quam illa metitur.

III.

MAGNITVDO metiens totam magnitudinẽ, & ablatam, metitur & reliquã.

HÆC axiomata, vt ad numeros pertinent, oſtenſa ſunt à nobis in vltimis tribus pronunciatis libri 7. Quare cùm ſit eadem ratio in magnitudinibus, non eſt, quòd fruſtra eorum demonſtrationes hic repetamus, præſertim quòd ad verbum huc poſſint transferri, mutata ſolùm voce numeri in vocem magnitudinis.

CÆTERVM quia hoc in libro diſcedendum nobis fuit à numero, quem Theon in propoſitionibus Euclidis ſequitur, vt ad propoſ. 13. dicemus, quemadmodum & in omnibus ſeriem Campani negleximus; vt docuimus ad initium primi libri; curauimus vt duplex numerus in margine è regione propoſitionum apponeretur, quorum ſuperior ordinem Theonis, inferior autem Campani ſeriem demonſtraret. Quòd ſi vnus tantùm numerus reperiatur in margine, nullam tunc eſſe inter Theonem & Campanum diſcrepantiam, intelliges, quod ad numerum propoſitionum attinet.

1. THEOR. 1. PROPOS. 1.

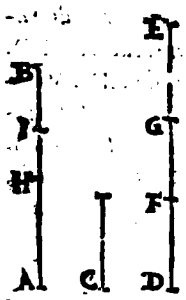
DVABVS magnitudinibus inæqualibus propoſitis, ſi à maiore auferatur maius quàm dimidium; & ab eo, quod reliquum eſt, rurſus detrahatur maius quàm dimidium; & hoc ſemper fiat: Relinquetur tandem quædam magnitudo, quæ minor erit propoſita minore magnitudine.

PROPOSITAE ſunt duæ magnitudines inæquales AB, & C, quarum AB, ſit maior. Dico ſi ex AB, auferatur maius quàm dimidium; & ab eo, quòd reliquũ eſt, rurſum maius quàm dimidium; atque hoc ſemper fiat: relinqui tandem magnitudinem quandam, quæ minor ſit q̃ C. Multiplicetur enim C, toties, donec magnitudo facta D E, maior ſit q̃ AB, ita vt D E, ſit multiplex ipſius C, proximè

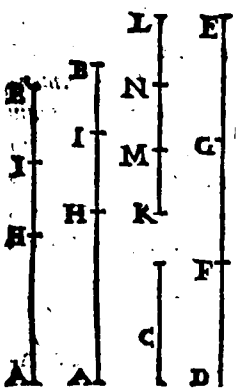
proximè maior quàm AB. Diuisa autem DE, in partes DF, FG, GE, ipsi C, æquales, detrahatur



ex AB, maius quàm dimidiũ AH, & ex reliqua HB, maius quàm dimidium HI; atque hoc semper fiat, donec partes ipsius AB, multitudine æquales sint partibus ipsius DE. Sint ergo iam partes AH, HI, IB, tot, quot sunt ipsæ DF, FG, GE. Quia igitur DE, maior est quàm AB; At ex DE, ablatum est DF, minus quàm dimidium, vel certè dimidium, si DE, ipsius C, sit duplex; ex AB, verò maius quàm dimidium AH: Erit reliquum FE, reliquo HB, maius. (Cùm enim DE, maior sit quàm AB; si ex DE, dimidiũm auferretur, necnon & ex AB, dimidium, esset quoque reliquum ex DE, maius reliquo ex AB. Si ergo ex DE, auferatur minus quàm dimidium, vel certè dimidium, & ex AB, maius quàm dimidium; erit reliquum ex DE, maius reliquo ex AB.) Rursus quoniam FE, maior est quàm HB, auferturq; ex FE, dimidium FG, vel certè minus quàm dimidium, si FE, maior sit quàm duplex ipsius C; at ex HB, maius quàm dimidiũ HI; erit eodem modo reliquum GE, maius reliquo IB: atque ita procedendo ostendemus tandem postremam partem ipsius DE, qualis hîc est GE, maiorem esse postrema parte ipsius AB, qualis hîc est IB. Dum ergo GE, postrema pars ipsius DE, æqualis sit ipsi C; erit quoq; C, maior quàm IB, postrema pars ipsius AB. Relicta igitur est IB, magnitudo, quæ minor est magnitudine C. Quare duabus magnitudinibus inæqualibus ꝓpositis, si à maiori auferatur maius, &c. Quod erat demonstrandum.



IDEM demonstrabitur, si ex AB, auferatur dimidium AH, & ex reliquo HB, rursus dimidium HI, &c. Nam eadem ratione erit reliquum FE, maius reliquo HB, nec non & reliquum GE, maius reliquo IB; cùm ex maiori DE, ablatum sit DF, minus quàm dimidium, vel certè dimidium; & ex minori AB, dimidium AH, &c.



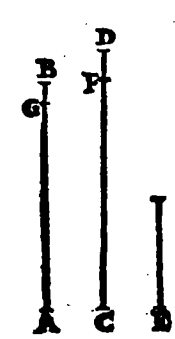
ALITER. Facta cõstructione, vt prius, sumatur KL, ita multiplex ipsius IB, vt est multiplex DE, ipsius C. Diuisa ergo KL, in partes KM, MN, NL, ipsi IB, æquales, erunt tot partes in KL, quot in DE. Quoniam verò AH, maior est quàm HB, vel certè illi æqualis, si ablatum sit dimidium ex AB; & HB, maior est, quàm IB; erit quoque AH, maior quàm IB, hoc est, quàm KM. Rursus quia HI, maior est quàm IB, vel certè illi æqualis; est autem IB, ipsi MN, æqualis: erit quoq; HI, maior quàm MN, vel illi æqualis: atque adeò tota AI, maior, quàm tota KN. Additis ergo æqualibus IB, NL, erit tota AB, maior quàm tota KL: Est autem DE, maior adhuc, quàm AB. Multò ergo maior erit DE, quàm KL. Quare cùm sit, vt DE, ad C, ita KL ad IB; (Sumpta enim fuit KL, ipsius IB, tam multiplex, quàm multiplex est DE, ipsius C,) [a] erit quoque C, maior quàm IB. Ac proinde relicta est IB, minor quàm C. Quod erat demonstrandum. *a 14. quinti.*

SCHOLIVM.

LVCE clarius ex demonstratione huius Theorematis apparet, duas quantitates inæquales propositas debere esse tales, vt minor multiplicata, tandem maiorem possit superare. Id quod ad propos. 16. lib. 3. monuimus, cùm de angulo contactus contra Iacobum Peletarium ageremus.

THEOR. 2. PROPOS. 2.

SI duabus magnitudinibus inæqualibus propositis, detrahatur semper minor de maiore, alterna quadam detractione, & reliqua minimè præcedentem metiatur: Incommensurabiles erunt ipsæ magnitudines.



DVABVS inæqualibus magnitudinibus propositis AB, CD, quarum minor AB, detrahatur ex maiore CD, & reliqua huius ex AB; & sic deinceps, alterna quadam detractione, auferatur semper minor de maiore, & nunquam reliqua metiatur præcedentem. Dico magnitudines AB, CD, incommensurabiles esse. Si enim non sunt incommensurabiles, metietur eas aliqua mẽsura communis. Metiatur eas si fieri potest, magnitudo E, quæ vel æqualis erit ipsi AB, vel minor. Detracta autem AB, ex CD, quoties potest, relinquat FD, se minorem, ita vt AB, ipsam CF, metiatur. Rursus detracta FD, ex AB, relinquat se minorem GB, ita vt FD, metiatur ipsam AG; atque hoc semper fiat. [b] Relinquetur ergo tandem ex CD, vel AB, magnitudo quædam minor quàm E. (Quoniam cùm AB, ablata ex CD, relinquat FD, se minorem, erit CF, ablata maior, quàm dimidia ipsius CD; aliàs si esset dimidia, vel minor quã dimidia, posset adhuc AB, detrahi ex CD. Eodem modo erit AG, ablata ex AB, maior quàm dimidia ipsius AB: Et sic deinceps semper fiet. *b 1. decimi.*

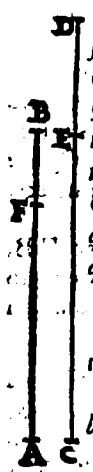
a 1. decimi. Quare cùm ſemper auferatur maius, quàm dimidium, [a] relinquetur tandem magnitudo quædam minor quàm E.) Sit ergo iam relicta G B, minor quàm E. Quoniam igitur E, metitur A B; & A B; metitur C F; [b] metietur quoque E, ipſam C F: Metitur autem E, & totam C D. [c] Igitur E, reliquam quoque F D, metietur. At F D, metitur A G: [d] quare & E, ipſam A G, metietur. Metitur autem E, & totam A B: [e] ergo E, reliquam etiam G B, metietur, maior minorem. Quod eſt abſurdum. Non ergo A B, C D, magnitudines aliqua magnitudo metietur. Quare incommenſurabiles ſunt. Si igitur duabus magnitudinibus inæqualibus propoſitis, &c. Quod erat oſtendendum.

b 2. pron.
c 3. pron.
d 2. pron.
e 3. pron.

SCHOLIVM.

Hoc Theorema conuertemus ad hunc modum.

Si duabus magnitudinibus incommẽſurabilibus propoſitis, detrahatur ſemper minor de maiore, alterna quadam detractione: Nunquam reliqua præcedentem metietur.



Sint incommenſurabiles magnitudines A B, C D, detrahaturq; minor A B, ex C D, & reliqua ſit E D. Item E D, ex A B, auferatur, relinquaturq; F B, & ſic deinceps. Dico in hac alterna detractione nunquam reliquam metiri præcedentem. Si enim fieri poteſt, metiatur F B, præcedentem E D.

a 2. pron. *Quoniam igitur F B, metitur E D; & E D, metitur A F; [a] metietur quoque F B, ipſam A F: Metitur autem & ſe ipſam:*
b 1. pron. *[b] Igitur F B, & totam A B, metietur: Metitur autem A B, ipſam C E.*
c 2. pron. *[c] Igitur & F B, ipſam C E, metietur. Ponitur autem & F B, metiri ipſam E D:*
d 1. pron. *[d] Igitur & F B, totam C D, metietur. Oſtenſa eſt autem & F B, ipſam A B, metiri. Quare F B, vtramq; A B, C D, metietur, quod eſt abſurdum. ponuntur enim A B, C D, incommenſurabiles. Nunquam ergo magnitudo aliqua reliqua præcedentem magnitudinem metitur. Quod eſt propoſitum.*

Similiter & hoc demonſtrabimus.

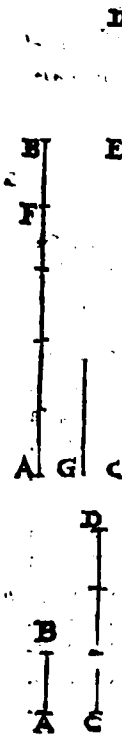
Si duabus magnitudinibus commenſurabilibus propoſitis, detrahatur ſemper minor de maiore, alterna quadã detractione: Metietur quædã reliqua præcedentẽ.

Nam ſi nunquam reliqua metiretur præcedentem, eſſent propoſitæ magnitudines incõmenſurabiles, vt demonſtrauit hoc theoremate Euclides. Quod eſt abſurdũ. ponuntur enim cõmenſurabiles.

Ita qve facile ex his dignoſcemus, an duæ quæcunque magnitudines propoſitæ ſint commenſurabiles, nec ne. Nam detracta ſemper minore de maiore, alterna quadam detractione, ſi reliqua quæpiam metiatur præcedentem; erunt magnitudines propoſitæ commenſurabiles, cùm illa eadem reliqua metiatur vtramque magnitudinem propoſitam, vt conſtat ex demonſtratione primi theorematis huius ſcholij. Ex eo enim, quòd reliqua magnitudo F B, metiri dicebatur præcedentem E D, oſtenſum eſt, eandem reliquam F B, metiri vtramque magnitudinem A B, C D. Si verò nunquam reliqua magnitudo præcedentem metiatur, propoſitæ magnitudines incommenſurabiles erunt, vt Euclides hoc loco demonſtrauit.

PROBL. I. PROPOS. 3.

DVABVS magnitudinibus commenſurabilibus datis, maximam earum communem menſuram inuenire.



Datæ duæ magnitudines commenſurabiles ſint A B, C D, quarum oporteat maximam menſuram inuenire. Quoniam A B, C D, commenſurabiles ſunt, fit vt ſi minor A B, ex maiore C D, detracta, quoties poteſt, relinquat E D; & E D, detracta ex A B, quoties poteſt, relinquat F B, & hoc ſemper fiat alterna quadam detractione; tandem reliqua quæpiam magnitudo præcedentem metiatur, per 2. theor. præcedentis ſcholij. Metiatur iam F B, reliqua præcedentem E D. Dico F B, eſſe maximam mẽſuram communem magnitudinum A B, C D. Quòd enim vtramque metiatur, ita oſtendemus.

a 2. pron. Quoniam F B, metitur E D, & E D, metitur A F; [a] metietur quoque F B, ipſam A F:
b 1. pron. At metitur F B, & ſe ipſam. [b] Igitur F B, totam A B, metietur; [c] atque adeò & ipſam
c 2. pron. C E, quam A B, metitur. Cùm ergo, & ipſam E D, metiatur; [d] metietur quoq; F B, totam C D. Metitur ergo F B, vtramque A B, C D. Quare vtriuſque A B, C D, communis menſura eſt F B.
d 1. pron.

Quod autem F B, ſit maxima earum communis menſura, ita probabimus. Si non eſt maxima, erit aliqua alia communis earum menſura, maior quàm F B. Sit ergo, ſi fieri poteſt, G, illarum communis menſura, maior quàm F B. Quia igitur G, metitur vtramque A B, C D; metitur autem & A B, ipſam C E; [e] metietur quoq; G, ipſam C E:
e 2. pron. At metitur quoq; totam C D. [f] Igitur G, reliquam quoque E D, metietur: Metitur
f 3. pron. autem E D, ipſam A F. [g] Ergo & G, ipſam A F, metietur. Quare cùm G, totam etiam
g 2. pron. A B, metiatur; [h] metietur quoque eadem G, reliquam F B, maior minorem. Quod eſt
h 3. pron. abſurdum. Non ergo maior magnitudo, quàm F B, communis menſura eſt ipſarum A B, C D. Quare F B, maxima earum communis menſura eſt.

Quod ſi minor magnitudo A B, metiatur maiorem C D, ita vt detracta ex C D, nihil relinquat; erit ipſa A B, ambarum maxima menſura communis: cùm & ſe ipſam metiatur. Duabus ergo magnitudinibus commenſurabilibus datis, &c. Quod faciendum erat.

COROL.

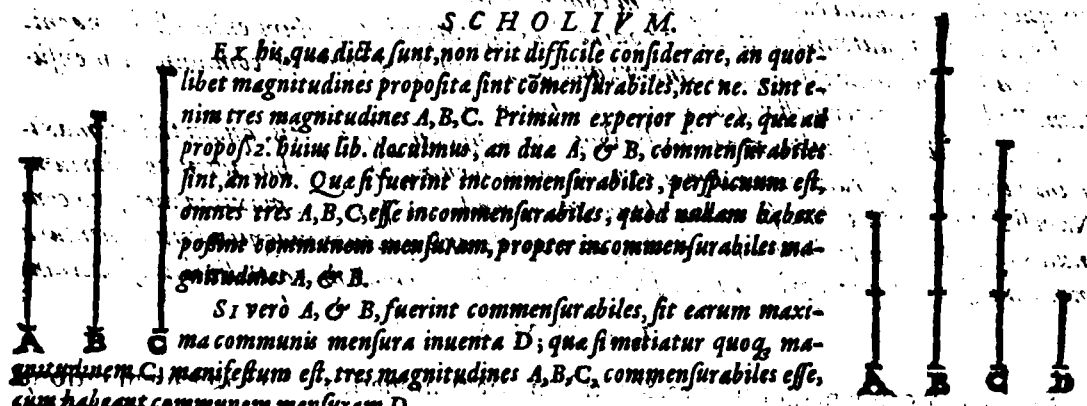
COROLLARIVM.

Ex hoc manifestum est, quòd magnitudo metiens duas magnitudines, metitur & maximam earum mensuram communem.

ELICITVR hoc ex ea parte demonstrationis, qua ostensum est F B, esse maximam mensuram communem ipsarum A B, C D. Demonstratum enim est ibi, magnitudinem G, si metiatur magnitudines A B, C D, metiri quoque maximam mensuram F B. Eademq; est ratio de cæteris.

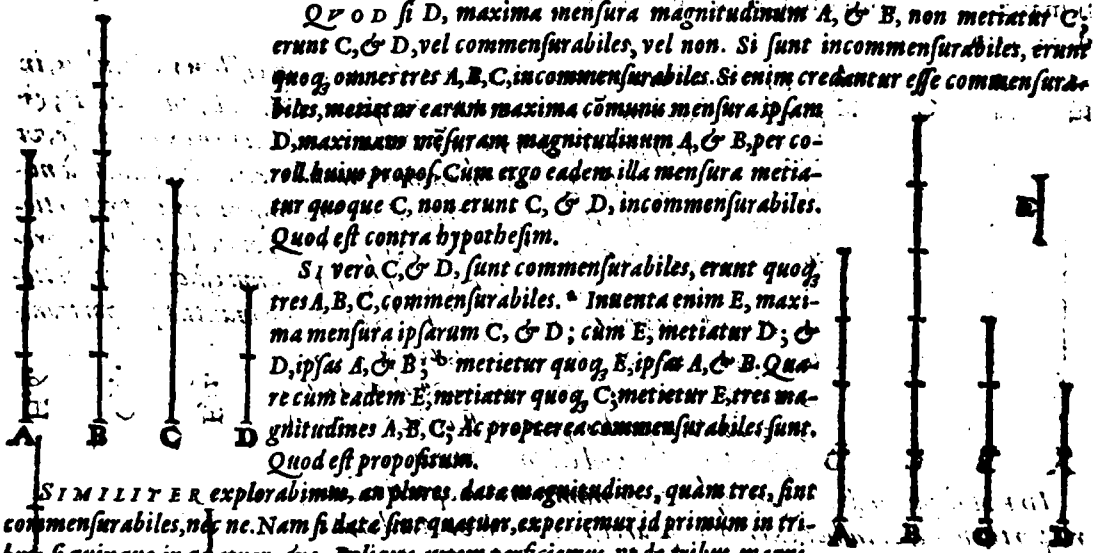
SCHOLIVM.

EX his, quæ dicta sunt, non erit difficile considerare, an quotlibet magnitudines propositæ sint cõmensurabiles, nec ne. Sint enim tres magnitudines A, B, C. Primùm experior per ea, quæ ad propos. 2. huius lib. docuimus, an duæ A, & B, commensurabiles sint, an non. Quæ si fuerint incommensurabiles, perspicuum est, omnes tres A, B, C, esse incommensurabiles, quòd nullam habere possint communem mensuram, propter incommensurabiles magnitudines A, & B.



SI verò A, & B, fuerint commensurabiles, sit earum maxima communis mensura inuenta D; quæ si metiatur quoq; magnitudinem C, manifestum est, tres magnitudines A, B, C, commensurabiles esse, cùm habeant communem mensuram D.

QVOD si D, maxima mensura magnitudinum A, & B, non metiatur C; erunt C, & D, vel commensurabiles, vel non. Si sunt incommensurabiles, erunt quoq; omnes tres A, B, C, incommensurabiles. Si enim credantur esse commensurabiles, metiatur earum maxima cõmunis mensura ipsam D, maximam mẽsuram magnitudinum A, & B, per coroll. huius propos. Cùm ergo eadem illa mensura metiatur quoque C, non erunt C, & D, incommensurabiles. Quod est contra hypothesim.



SI verò C, & D, sunt commensurabiles, erunt quoq; tres A, B, C, commensurabiles. [a] *Inuenta enim E, maxima mensura ipsarum C, & D; cùm E, metiatur D; & D, ipsas A, & B;* [b] *metietur quoq; E, ipsas A, & B. Quare cùm eadem E, metiatur quoq; C; metietur E, tres magnitudines A, B, C; ac propterea commensurabiles sunt. Quod est propositum.*

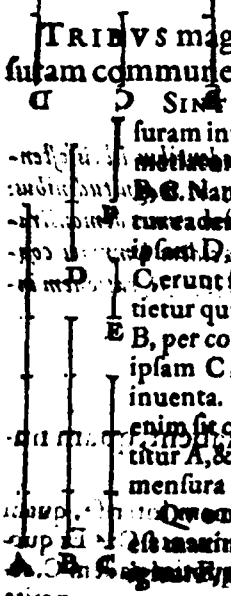
a 3. decimi.

b 2. pron.

SIMILITER explorabimus, an plures datæ magnitudines, quàm tres, sint commensurabiles, nec ne. Nam si datæ sint quatuor, experiemur id primùm in tribus; si quinque, in quatuor, &c. Reliquæ autem perficiemus, vt de tribus magnitudinibus est dictum.

PROBL. 2. PROPOS. 4.

TRIBVS magnitudinibus commensurabilibus datis, maximam earum mensuram communem inuenire.



SINT datæ tres magnitudines commensurabiles A, B, C, quarum maximam mensuram inuenire oportet. Sit D, maxima mensura ipsarum A, B, inuenta. Si ergo D, metiatur quoque C, perspicuum est D, maximam esse mensuram omnium trium A, B, C. Nam si maior magnitudo quàm D, metiri dicatur magnitudines A, B, C; metietur eadem, per coroll. propos. 3. huius lib. maximam mensuram ipsarum A, B, nempe ipsam D, maior magnitudo minorem. quod fieri non potest. Si verò D, non metiatur C, erunt saltem D, C, commensurabiles. Cùm enim A, B, C, sint commensurabiles, metietur quælibet mensura earum communis ipsam D, maximam mensuram ipsarum A, B, per coroll. præcedentis propos. Cùm ergo eadem illa mensura metiatur quoque ipsam C; erunt D, & C, commensurabiles. [b] Sit igitur E, maxima mensura ipsarum inuenta. Dico E, maximam mensuram esse datarum magnitudinum A, B, C. Quòd enim sit communis earum mensura, ita planum fiet. Quia E, metitur D, & C; & D, metitur A, & B; metietur quoque E, ipsas A, & B. Metitur autem & ipsam C. Igitur E, mensura est communis ipsarum A, B, C, quemadmodum asserimus.

a 3. decimi.

b 3. decimi.

c 2. pron.

Quòd autem E, earum maxima mensura, hoc modo confirmari potest. Si non est maxima, sit F, maior quàm E, si fieri potest, earum mensura communis. Quoniam igitur F, metitur A, & B; metietur quoque earum maximam mensuram D, per coroll.

præcedentis propos. Metitur autem & C: Igitur F, metiens D, & C, metietur quoque earum maximam E, ex eodem coroll. maior magnitudo minorem. Quod est absurdum. Non ergo maior magnitudo q̃ E, magnitudines A, B, C, metitur; Ac propterea E, maxima est earũ cõmunis mensura. Quam ob rem tribus magnitudinib. cõmensurabilibus datis, &c. Quod erat faciendum.

COROLLARIVM.

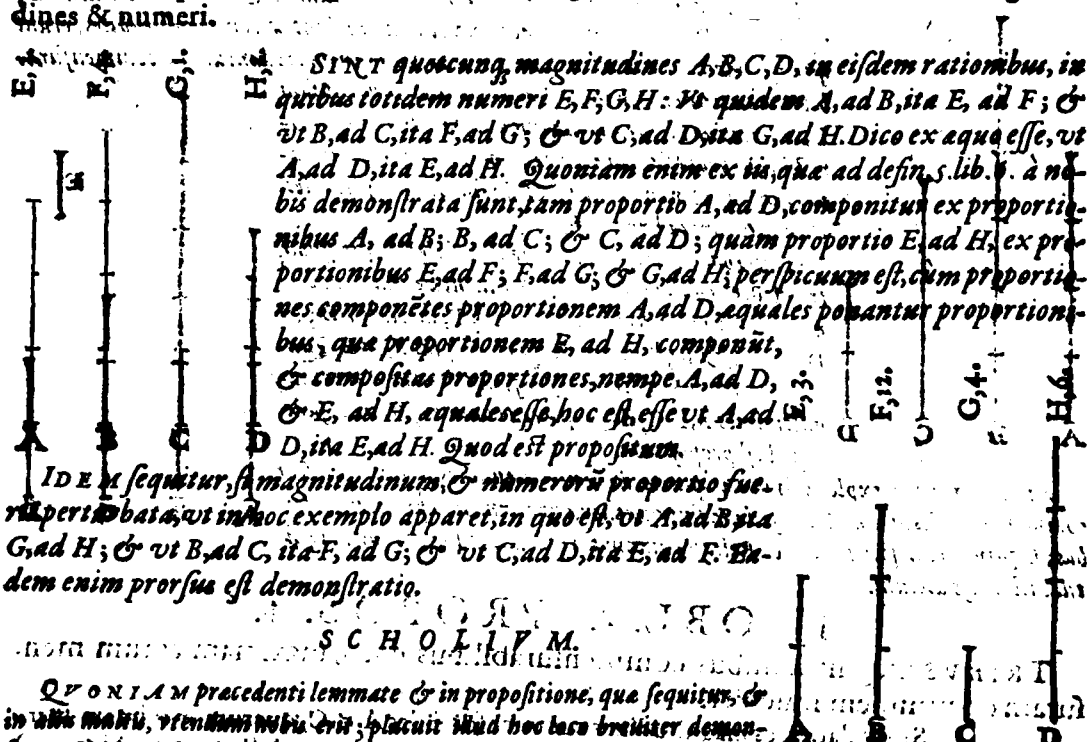
APERTE quoque ex hoc colligitur, quòd magnitudo metiens tres magnitudines, metitur quoque maximam earum mensuram communem.

INFERTVR autem hoc ex vltima parte demonstrationis. Ostensum enim est ibi, magnitudinem F, si metiatur ipsas A, B, C, metiri quoq; E, maximam illarum communem mensuram. Eadem de cæteris est ratio.

SIMILI modo, pluribus magnitudinibus commensurabilibus datis, quàm tribus, maximam earum mensuram communem inueniemus; locumq; habebit hoc idem corollarium. Nam si datæ magnitudines fuerint quatuor, inuenienda erit primùm maxima mensura communis trium magnitudinum; Si quinq;, accipienda erit quatuor magnitudinum mensura maxima, &c. Reliqua verò omnia absoluenda erũt, vt de tribus magnitudinibus est dictum.

LEMMA.

SI sint quotcunq; magnitudines, & totidem etiam numeri, qui bini in eadem ratione sumantur, in qua binæ magnitudines: Et ex æqualitate in eadem ratione erunt magnitudines & numeri.



SINT quotcunq; magnitudines A, B, C, D, in eisdem rationibus, in quibus totidem numeri E, F, G, H: Vt quidem A, ad B, ita E, ad F; & vt B, ad C, ita F, ad G; & vt C, ad D, ita G, ad H. Dico ex æquo esse, vt A, ad D, ita E, ad H. Quoniam enim ex iis, quæ ad defin. 5. lib. 6. à nobis demonstrata sunt, tam proportio A, ad D, componitur ex proportionibus A, ad B; B, ad C; & C, ad D; quàm proportio E, ad H, ex proportionibus E, ad F; F, ad G; & G, ad H; perspicuum est, cum proportiones componẽtes proportionem A, ad D, æquales ponantur proportionibus, quæ proportionem E, ad H, componũt, & compositas proportiones, nempe A, ad D, & E, ad H, æquales esse, hoc est esse vt A, ad D, ita E, ad H. Quod est propositum.

IDEM sequitur, si magnitudinum, & numerorũ proportio sue-rit perturbata, vt in hoc exemplo apparet, in quo est, vt A, ad B, ita G, ad H; & vt B, ad C, ita F, ad G; & vt C, ad D, ita E, ad F. Eadem enim prorsus est demonstratio.

SCHOLIVM.

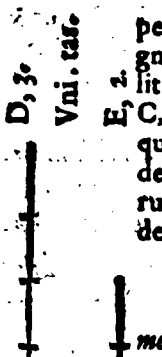
QVONIAM præcedenti lemmate & in propositione, quæ sequitur, & in alijs multis, vtendum nobis erit, placuit illud hoc loco breuiter demonstrare, cùm non facile videatur ex demonstratis sequi. Num magnitudo & numerus diuersa genera quantitatis constituunt? At proportio ex æqualitate in præcedentibus libris ostensa, tantùm est in quantitatibus eiusdem generis, in numeris quidem lib. 7. Libro verò 5. in magnitudinibus: quanquam demonstratio in quinto lib. facta, etiam ad hoc lemma transferri possit, cùm omnes demonstrationes illius libri numeris quoq; conueniant. Vel certè demonstratio facta in 7. lib. huic eidem lemmati congruet, cùm magnitudines A, B, C, D, quæ proportiones habent easdem, quas numeri E, F, G, H, rationem inter se habeant numerorum.

THEOR. 3. PROPOS. 5.

COMMENSVRABILES magnitudines inter se rationem habent, quam numerus ad numerum.

SINT magnitudines commensurabiles A, B. Dico eas habere proportionem inter se, quam numerus aliquis habet ad alium numerũ. Sit enim earum maxima mensura minuens C. Et quoties ea repetita metitur A, toties vnitas repetita metiatur numerum D; Et quotiens C, repetita

a 3. decimi.



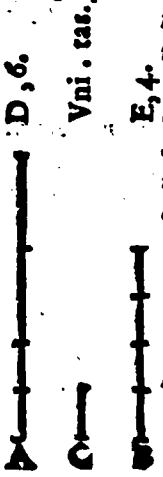
petita metitur B, toties vnitas repetita metiatur numerum E. Quoniam igitur magnitudo C, magnitudinem A, & vnitas numerum D, æquè metitur; continebit æqualiter magnitudo A, magnitudinem C, atque numerus D, vnitatem. Quare erit vt A, ad C, ita numerus D, ad vnitatem: Est autem & vt C, ad B, ita vnitas ad numerum E; quòd C, ipsam B, atque vnitas numerum E, æquè metiatur. Igitur per lemma præcedens, erit ex æquo, vt A, magnitudo ad B, magnitudinem, ita D, numerus ad E, numerum. Commensurabiles ergo magnitudines inter se rationem habent, &c. Quod erat demonstrandum.

SCHOLIVM.

CVM Euclides ad demonstrationem huius theorematis assumat maximam communem mensuram propositarum magnitudinum commensurabilium, qualis fuit C, ipsarum A, & B, perspicuum est, lineas debere esse longitudine, & ob id potentia quoque commensurabiles, vt rationem habeant inter se, quam numerus ad numerum. Ha enim sola communem recipiunt mensuram, atq; adeò in eis demonstratio locum habet.

QVOD si lineæ sint potentia tantùm commensurabiles, habebunt quidem earũ quadrata inter se rationem, quam numerus ad numerum, quia commensurabilia sunt, atq; idcirco mensuram habent communem, ipsis q; demonstratio huius theorematis conuenit: At ipsæ lineæ nequaquam, quia longitudine incommensurabiles cùm sint, communi mensura sunt expertes, ac propterea huius theorematis demonstratio in ipsas conuenire nullo modo potest.

EX demonstratione porrò eiusdem huius theorematis liquidò constat, commensurabilium magnitudinum proportionem esse eam, quam habent numeri, per quos eorum communis mensura maxima ipsas metitur. Ostensum enim est, eam habere proportionem magnitudines A, & B, quam habent numeri D, & E; per quos scilicet earum mensura communis maxima C, ipsas metitur.



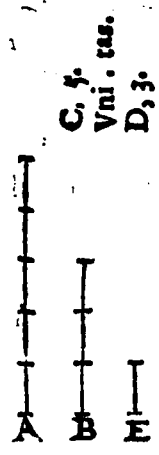
VNDE si propositis duabus magnitudinibus commensurabilibus A, & B, libeat inuenire, quam proportionem habeant in numeris; sumendi erunt duo numeri D, & E, quos vnitas æquè, ac communis magnitudinum commensurabilium A, & B, mensura maxima C, ipsas magnitudines metitur. Nam vt demonstratum est, magnitudines A, & B, proportionem habent, quam numeri D, & E.

QVOD si loco maximæ mensuræ C, sumamus aliam quamcumque communem earum mensuram, nihilominus hoc theorema demonstrabimus eodem argumento. Quamuis enim numeri D, & E, maiores inueniantur in hac posteriori demonstratione, quàm in priori; habent tamen eandem proportionem cum illis, vt ex apposita figura apparet. Quoniam verò in priori demonstratione numeri inuenti, sunt minimi omnium eandem cum ipsis proportionem habentium; propterea fortassis Euclides in demonstratione maximam communem mensuram assumpsit, & non quamlibet, licet id necessarium non sit.

THEOR. 4. PROPOS. 6.

6.

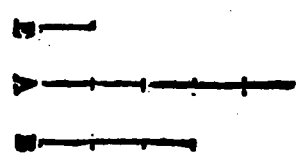
SI duæ magnitudines inter se proportionem habeant, quam numerus ad numerum: commensurabiles erunt magnitudines.



HABEANT duæ magnitudines A, B, eam proportionem, quam numeri C, D. Dico A, B, magnitudines esse commensurabiles. Quoties enim vnitas continetur in numero C, in tot æquales partes diuisa intelligatur magnitudo A, quarũ partium vni æqualis sit magnitudo E. Deinde quoties vnitas repetita metitur numerum D, toties magnitudo E, repetita metiatur magnitudinem quandam aliam F. Quoniá igitur magnitudo E, toties in A, cõtinetur, quoties vnitas in C; cõtinebit æqualiter A, ipsam E, & C, numerus vnitatẽ. Quare erit A, ad E, vt C, ad vnitatem: Est autem & vt E, ad F, ita vnitas ad D, quòd E, ipsam F, & vnitas ipsum D, æquè metiatur. Igitur per lemma propos. 4. huius lib. erit ex æquo, vt A, ad F, ita C, ad D: Erat autem etiam vt C, ad D, ita A, ad B. Igitur erit vt A, ad B, ita A, ad F; [a] ac propterea B, & F, magnitudines æquales inter se sunt. Quocirca cùm E, ipsam F, metiatur, metietur quoq; eadem E, ipsam B: Metiebatur autem & ipsam A. Igitur magnitudo E, vtramque A, & B, metitur; [b] Ac proinde A, & B, magnitudines commensurabiles inter se sunt. Si igitur duæ magnitudines inter se proportionem habeant, &c. Quod erat demonstrandum.

[a] 9. quinti.

[b] 1. defin.



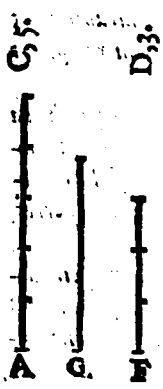
ALITER. Quot sunt vnitates in C, in tot partes æquales intelligatur diuisa magnitudo A, quarum partium vni æqualis sit magnitudo E. Quoniam igitur est vt E, ad A, ita vnitas ad C, quòd E, ipsam A, & vnitas ipsum C, æquè metiantur; ponitur q; vt A, ad B, ita C, ad D; erit per idem lem-

ma ſuperius, ex æquo, vt E, ad B, ita vnitas ad D: Metitur autem vnitas numerum D. Igitur & magnitudo E, magnitudinem B, metitur: Metitur autem E, ipſam quoq; A. Igitur A, & B, habentes eandem communem menſuram E, [a] commenſurabiles ſunt. Quod eſt propoſitum.

a 1. defin.

COROLLARIVM.

Ex priori autem demonſtratione theorematis aperta eſt nobis via, qua lineam rectam inueniamus, ad quam ita ſe habeat quauis alia data recta linea, vt numerus ad numerum. Nam (repetita priori figura huius propoſitionis) ſi inuenienda ſit linea, ad quam ita ſe habeat linea data A, vt numerus C, ad numerum D; diuidenda erit linea A, in tot æquales partes, quot vnitates ſunt in C; & ſumenda alia linea F, tot earundem partium, quot vnitates ſunt in D. Hoc enim ſi fiat, erit A, ad F, vt C, ad D, vt demonſtratum eſt.



Hinc rurſus apparet, quánam arte poſſit inueniri linea recta, ad cuius quadratum ita ſe habeat quadratum alterius data rectæ, vt numerus ad numerum. Si namque inuenienda ſit linea, ad cuius quadratum ita ſe habeat quadratum lineæ datæ A, vt numerus C, ad numerum D, inuenienda erit primùm linea F, ex iis, quæ modò diximus, ad quam ſic ſe habeat A, vt C, ad D: [a] *Deinde accipienda inter A, & F, media proportionalis G. Erit enim quadratum ex A, ad quadratum ex G, vt C, numerus ad numerum D. Cùm enim tres rectæ A, G, F, ſint continuè proportionales, erit ex coroll. propoſ. 20. lib. 6. vt A, ad F, atque adeò vt numerus C, ad numerum D, (cùm ſit vt A, ad F, ita C, ad D,) ſic quadratum ex A, ad quadratum ex G; cùm quadrata omnia ſint ſimilia ſimiliterq; deſcripta.*

a 13. ſexti.

SCHOLIVM.

In hoc etiam theoremate manifeſtum eſt, lineas proportionem habentes, quam numerus ad numerum, commenſurabiles eſſe longitudine & potentia, non autem potentia tantùm; quoniam habent, vt ex demonſtratione conſtat, menſuram communem, quemadmodum & magnitudines A, & B, menſuram communem E, habere demonſtratum eſt.

7. THEOR. 5. PROPOS. 7.

INCOMMENSVRABILES magnitudines inter ſe proportionem non habent, quam numerus ad numerum.



SINT incommenſurabiles magnitudines A, & B. Dico eas proportionem non habere, quam habet numerus ad numerum. Si enim A, & B, proportionem dicãtur habere, quam numerus ad numerum: [a] erunt ipſæ commenſurabiles. Quod eſt abſurdum. ponuntur enim incommenſurabiles. Non igitur A, & B, proportionem habent, quam numerus ad numerum. Quare incommenſurabiles magnitudines, &c. Quod oſtendendum erat.

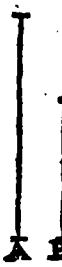
a 6. decimi.

SCHOLIVM.

QVOCVNQVE modo lineæ incommenſurabiles ſint, ſiue longitudine & potentia, ſiue longitudine tantùm, ſemper colligemus, eas proportionem non habere, quam numerus ad numerum, vt vult theorema. Nam aliàs, vt demonſtratum eſt, eſſent longitudine commenſurabiles. Quod non ponitur.

8. THEOR. 6. PROPOS. 8.

SI duæ magnitudines inter ſe proportionem non habeant, quam numerus ad numerum: Incommenſurabiles erunt magnitudines.



NON habeant magnitudines A, & B, inter ſe proportionem, quam numerus ad numerum. Dico eas incommenſurabiles eſſe. Si enim A, & B, credantur eſſe commenſurabiles; [b] erit earum proportio, quæ numeri ad numerum. Quod eſt abſurdum. ponuntur enim non habere proportionem, quam numerus ad numerum. Non igitur commenſurabiles ſunt A, & B. Quocirca ſi duæ magnitudines inter ſe proportionem nõ habeant, &c. Quod erat oſtendendum.

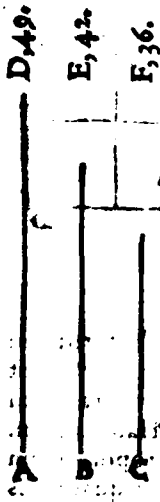
b 5. decimi.

SCHOLIVM.

QVOD ſi lineæ proportionem non habeant, quam numerus ad numerum, erunt ipſæ neceſſariò, ex hoc theoremate, longitudine incommenſurabiles; alioquin proportionem haberent, quam numerus ad numerum, vt ad propoſ. 5. huius lib. demonſtrauimus. quod eſt contra hypotheſim. Non autem colligendum eſt ex hoc theoremate, lineas, quæ proportionem non habent, quam numerus ad numerum, neceſſariò & potentia

dentia incommensurabiles esse, vt manifestum est ex demonstratione. Non enim sequitur, si potentia tantum sint commensurabiles, eas proportionem habere, quam numerus ad numerum, vt in demonstratione theorematis assumitur; immo nullo modo talem proportionem habere possunt, vt in scholio propos. 5. huius lib. decimus. Solùm igitur infertur ex huius theorematis demõstratione, lineas proportionem non habentes, quam numerus ad numerum, longitudine esse incommensurabiles.

LEMMA.



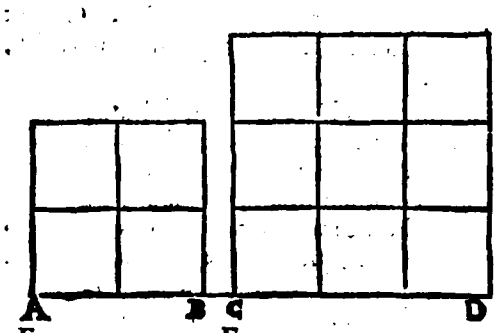
Si sint tres quantitates continuè proportionales, & aliæ tres continuè quoq; proportionales; sitq; vt prima illarum ad tertiam, ita prima harum ad tertiam: Erit & vt prima illarum ad secundam, ita prima harum ad secundam.

Sint continuè proportionales tam quantitates A, B, C, quàm D, E, F; sive priores in eodem genere sint, in quo posteriores, sive non; sitq; vt A, ad C, ita D, ad F. Dico quoque esse vt A, ad B, ita D, ad E. Quoniã enim tam proportio A, ad C, proportionis A, ad B, quàm proportio D, ad F, proportionis D, ad E, duplicata est; ponunturq; proportiones A, ad C, & D, ad F, æquales; erunt quoq; proportiones A, ad B, & D, ad E, æquales; quandoquidem earum proportiones duplicatæ æquales sunt.

Idem sequitur, si plures quantitates sint, quàm tres; si tamen in quatuor assumamus triplicatam proportionem loco duplicatæ, ad demonstrationem: & in quinque, quadruplicatam, &c.

THEOR. 7. PROPOS. 9. 7.

Quæ à rectis lineis longitudine commensurabilibus fiunt quadrata; inter se proportionem habent, quam quadratus numerus ad quadratum numerum: Et quadrata inter se proportionem habentia, quam quadratus numerus ad quadratum numerum; & latera habebunt longitudine commensurabilia. Quæ verò à rectis lineis longitudine incommensurabilibus fiunt quadrata; inter se proportionem non habent, quam quadratus numerus ad quadratum numerum: Et quadrata inter se proportionem non habentia, quam quadratus numerus ad quadratum numerum; neque latera habebunt longitudine commensurabilia.

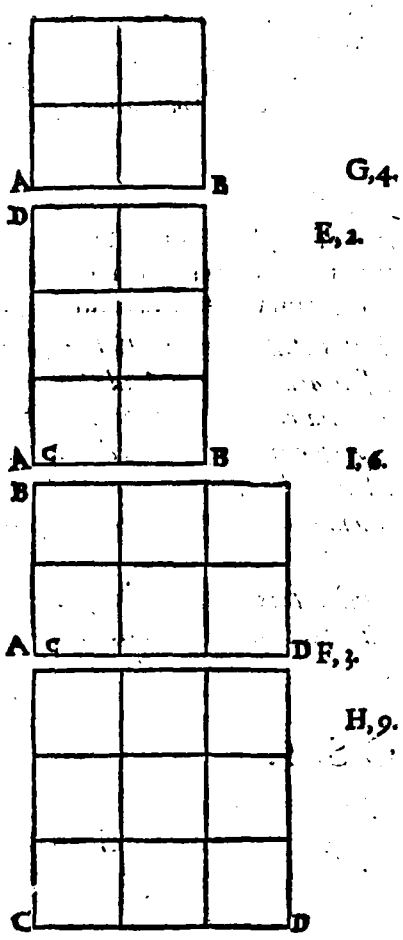


Sint primùm rectæ AB, CD, longitudine commensurabiles. Dico quadratum ex AB, ad quadratum ex CD, proportionem habere, quam numerus quadratus ad numerũ quadratum. Quoniam enim rectæ AB, CD, longitudine sunt commensurabiles; [a] erit AB, ad CD, vt numerus ad numerum: Sit vt E, numerus ad numerum F; quadrati autem ipsorum E, & F, sint G, & H. Quoniam igitur est AB, ad CD, vt E, numerus ad numerum F: [b] habet autem quadratum ex AB, ad quadratum ex CD, duplicatam proportionem lateris AB, ad latus CD: [c] Item & numerus quadratus G, ad quadratum H, proportionẽ habet duplicatam lateris E, ad latus F; Erit proportio quadrati ex AB, ad quadratum ex CD, eadem, quæ numeri quadrati G, ad numerum quadratum H; quãdoquidem ambæ hæ proportiones, duplicatæ sunt proportionum æqualium. Quod est propositum.

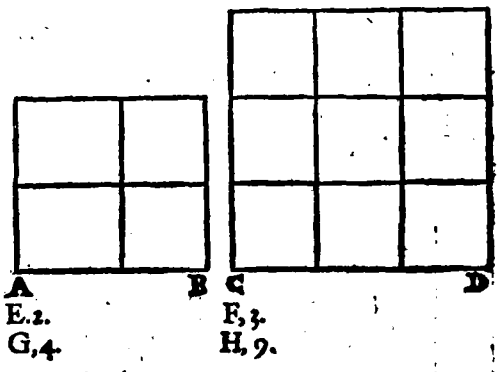
[a] 5. decimi.
[b] 20. sexti.
[c] 11. octavi.

Aliter. Posita eadem constructione, contineatur rectãgulum BD, sub rectis AB, CD. Et E, F, se mutuò multiplicantes faciant I, qui medius proportionalis erit inter quadratos G, H, vt constat ex demonstratione propos. 11. lib. 8. atq; adeò in proportione lateris E, ad latus F, vt diximus in scholio eiusdem propos. Quoniam igitur est AB, ad CD, vt E, ad F: [d] Vt autem AB, ad CD, ita est quadratum ex AB, ad rectangulum BD, ob eandem altitudinem AB, si CD, ponatur basis rectanguli; Item vt E, ad F, ita est G, ad I: Erit quoque quadratum ex AB, ad rectangulum BD, vt quadratus numerus G, ad numerum I. Rursus quia est AB, ad CD, vt E, ad F, [e] Vt autem AB, ad CD, ita est rectangulum BD, ad quadratum ex CD, ob eandem altitudinem CD, si AB, ponatur basis rectanguli; Item vt E, ad F, ita est I, ad H: Erit quoque rectangulum BD, ad quadratum ex CD, vt I, numerus ad numerum quadratum H. Quare tres magnitudines, nimirum

[d] 1. sexti.
[e] 1. sexti.



quadratum ex AB, rectangulum BD, & quadratū ex CD, in eadem ratione continua ſunt, in qua tres numeri G, I, H. Igitur ex æquo, per lemma propoſ. 4. huius lib. erit quadratum ex AB, ad quadratum ex CD, vt numerus quadratus G, ad numerum quadratum H. Quod eſt propoſitum.



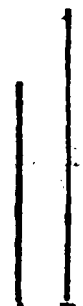
SIT ſecundò quadratū ex AB, ad quadratū ex CD, vt numerus quadratus G, ad numerū quadratum H. Dico rectas AB, CD, eſſe longitudine commenſurabiles. Sint enim numeri E, & F, latera quadratorum numerorum G, & H, vt in priori figura. Quoniam igitur eſt quadratum ex AB, ad quadratum ex CD, vt quadratus numerus G, ad quadratum numerum H: [a] Habet autem quadratum ex AB, ad quadratum ex CD, proportionem duplicatam lateris AB, ad latus CD; [b] Item & quadratus numerus G, ad quadratum numerum H, proportionem habet duplicatam lateris E, ad latus F. Erit proportio lateris AB, ad latus CD, quæ lateris E, ad latus F; quandoquidem harum proportionum duplicatæ proportiones æquales ſunt. Quare cùm rectæ AB, CD, proportionem habeant quam numeri E, F, [c] ipſæ commenſurabiles erunt longitudine. Quod eſt propoſitum.

[a] 20. ſexti.
[b] 11. octaui.
[c] 6. decimi.

ALITER. Repetatur conſtructio figuræ poſterioris. [d] Quia igitur eſt vt AB, ad CD, ita quadratum ex AB, ad rectangulum BD; Item vt AB, rurſum ad CD, ita rectangulum BD, ad quadratum ex CD, vt ſuprà diximus; erunt quadratum ex AB, rectangulum BD, & quadratum ex CD, continuè proportionalia in ratione lineæ AB, ad lineam CD: Sunt autem & numeri G, I, H, continuè proportionales in ratione numeri E, ad numerum F, vt ſuprà oſtendimus; ponitúrque quadratum ex AB, ad quadratum ex CD, vt quadratus numerus G, ad quadratum numerum H. Igitur erit per lemma præcedens AB, ad CD, vt G, ad I, hoc eſt, vt E, ad F; [e] ideóque AB, CD, rectæ, proportionem habentes, quam numeri E, F, commenſurabiles ſunt longitudine. Quod eſt propoſitum.

[d] 1. ſexti.
[e] 6. decimi.

SINT tertiò rectę A, B, longitudine incommenſurabiles. Dico earum quadrata proportionem non habere, quam numerus quadratus ad numerum quadratum. Si enim quadratum ex A, ad quadratum ex B, proportionem dicatur habere, quam numerus quadratus ad numerum quadratum; erunt A, B, longitudine commenſurabiles, vt iam eſt demonſtratum. Quod eſt abſurdum. ponuntur enim longitudine incommenſurabiles. Non ergo quadratum ex A, ad quadratum ex B, proportionem habet, quam numerus quadratus ad numerum quadratum. Quod eſt propoſitum.



QVARTO ac poſtremò, quadratum ex A, ad quadratum ex B, non habeat proportionem, quam numerus quadratus ad numerum quadratum. Dico eas longitudine eſſe incommenſurabiles. Si enim longitudine commenſurabiles credantur; habebunt earum quadrata, vt eſt demonſtratum, proportionem, quam quadratus numerus ad quadratum numerum. Quod eſt abſurdum. ponuntur enim non habere. Non ergo longitudine commenſurabiles ſunt A, & B. Quod eſt propoſitum. Igitur quæ à rectis lineis longitudine commenſurabilibus fiunt quadrata, &c. Quod erat demonſtrandum.

COROLLARIVM.

Ex his manifeſtum eſt, rectas lineas, quæ longitudine ſunt commenſurabiles, omnino & potentia commenſurabiles eſſe: Quæ verò potentia commenſurabiles, non omnino & longitudine. Et quæ longitudine incommenſurabiles ſunt, non omnino & potentia incommenſurabiles: Quæ verò potentia incommenſurabiles, omnino & longitudine incommenſurabiles eſſe.

QVONIAM

QVONIAM enim quadrata linearum longitudine commensurabilium proportionem habent, quam quadratus numerus ad quadratum numerum, vt in hoc theoremate demonstratum est, hoc est, simpliciter quam numerus ad numerum; [a] *ipsa commensurabilia erunt;* a 6.decimi
[b] *Ac propterea & latera ipsorum potentia commensurabilia existent. Quare linea longitudine commensurabiles, omnino & potentia commensurabiles sunt.* b 3.defin.

DEINDE quia linea, quarum quadrata proportionem non habent, quam quadratus numerus ad quadratum numerum, sed tamen, quam numerus simpliciter ad numerum, [c] *potentia quidem commensurales sunt,* [d] *cùm earum quadrata commensurabilia sint; at longitudine nequaquam, vt in hoc theoremate est ostensum; perspicuum est, lineas potentia commensurabiles, non omnino & longitudine commensurabiles esse. Solùm enim ea linea potentia commensurabiles, quarum quadrata proportionem habent, quam numerus quadratus ad numerum quadratum, longitudine quoque sunt commensurabiles, vt constat ex secunda parte huius theorematis.* c 3. defin. d 6.decimi

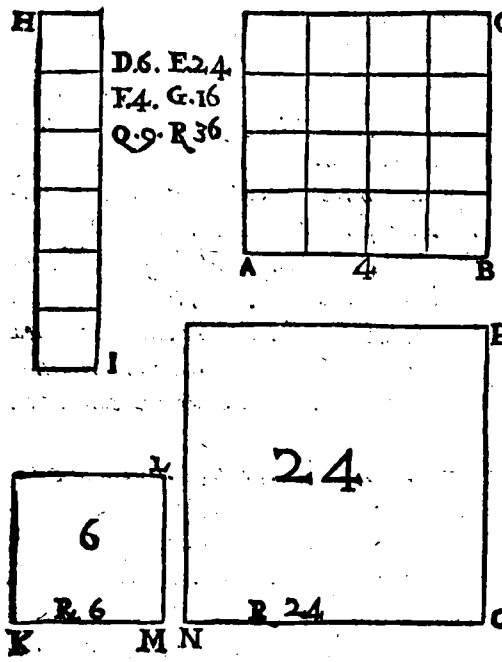
RVRSVS quia linea, quarum quadrata proportionem non habent, quam numerus quadratus ad numerum quadratum, sed tamen, quam numerus ad numerum, incommensurabiles quidem sunt longitudine, at potentia commensurabiles, vt modò diximus; liquidò constat, lineas longitudine incommensurabiles, non omnino & potentia incommensurabiles esse. Solùm enim ea linea longitudine incommensurabiles, quarum quadrata proportionem non habent, quam numerus ad numerum, [e] *potentia quoque incommensurabiles sunt,* [f] *cùm earum quadrata incommensurabilia sint.* e 4.defin. f 8.decimi

POSTREMO, lineas potentia incommensurabiles, esse omnino & longitudine incommensurabiles, perspicuum est. Nam si longitudine essent commensurabiles, omnino & potentia commensurabiles forent, vt patet ex prima parte corollarij. Quod est absurdum. Ponuntur enim potentia incommensurabiles. Quam ob rem linea potentia incommensurabiles, omnino & longitudine incommensurabiles sunt.

SCHOLIVM.

VT autem scopus priorum duarum partium huius theorematis planius perfectiusq; percipiatur, diligenter considerandæ sunt hæc, quæ sequuntur. Primùm lineas rectas longitudine commẽsurabiles, quarum quadrata, ex prima parte theorematis, proportionem habent, quam quadratus numerus ad quadratum numerum, non solùm esse eas, quæ numeris exprimi possunt, si cum linea Rationali proposita comparentur; quales sunt illæ, quæ in demonstratione sunt positæ: (est enim recta A B, 2. & C D, 3.) verùm etiam illas, quæ nullis possunt numeris efferri, si cum Rationali linea proposita conferantur: Deinde econtrariò, quadrata inter se proportionem habentia, quam quadratus numerus ad quadratum numerum, quorum lineæ, seu latera, ex secunda theorematis parte, longitudine sunt commensurabilia, non solùm ea esse intelligenda, quæ continent totidem quadratas mensuras æquales illis, in quas quadratum Rationalis lineæ resoluitur, quot sunt vnitates in numeris quadratis, eandem cum ipsis proportionem habentibus; cuiusmodi sunt quadrata in demonstratione descripta: (continet enim quadratum ex A B, quatuor mensuras quadratas, & quadratũ ex C D, nouem; quot nimirum vnitates sunt in quadratis numeris G, H.) Sed ea etiam, quæ vel pauciores, vel plures mensuras quadratas complectuntur, quàm sunt vnitates in numeris illis quadratis, si cum quadrato lineæ Rationalis conferantur. Sæpenumero enim lineæ datæ commensurabiles inter se sunt longitudine, sed numeris exprimi non possunt, propterea quòd Rationali linea propositæ sunt longitudine incommensurabiles; Ac propterea quadrata illarum proportionem quidem habent, quam quadratus numerus ad quadratum numerum, vt in hoc theoremate est ostensum, at pauciores quadratas mensuras, vel plures continent, quàm sunt in quadratis illis numeris vnitates. Hæc autem omnia perspicua faciemus hac demonstratione.

EXPONATVR linea Rationalis A B, expressa numero 4. cuius quadratum A C, continebit mensuras quadratas 16. Sint quoque numeri D, E, plani similes non quadrati, habentes tamen proportionem, ſ vt in g 26.octaui
Arithmeticis est demonstratum, quam quadratus numerus F, ad quadratum numerum G, nempe 4. ad 16. Deinde sumatur rectangulum H I, constans ex sex quadratis mensuris quadrati A C, quot nimirum vnitates in D, numero continentur; [h] *atq; ipsi H I, quadratum æquale constituatur K L, cuius latus K M. Postremò* h 14 secũdi
per ea, quæ in coroll. propoſ. 6. huius lib. ostendimus, inueniatur recta N O, ad cuius quadratum N P, ita se habeat K L, quadratum rectæ K M, vt numerus D, ad numerum E, vel vt quadratus F, ad quadratum G. Quoniam igitur est vt quadratus numerus F, ad quadratum numerum G, vel vt numerus D, ad numerum E, videlicet 6. ad 24. ita quadratum K L, ad quadratum N P, per constructionem; Continet autem quadratum K L, 6. mensuras quadratas, qualium 16. continet quadratum Rationale A C: (constructum enim est quadratum K L, æquale rectangulo H I, constanti ex 6. huiusmodi quadratis mensuris.) continebit quadratum N P, earundem mensuratum quadratarum 24. ac propterea K M, N O, latera quadratorum K L, N P, erunt



a 6. decimi

Rad.6.& Rad.24. quæ numeris exprimi nequeunt, cùm 6.& 24. non ſint numeri quadrati, eruntq́ linea Rationali A B, longitudine incommenſurabilia, inter ſe autem commenſurabilia longitudine, ex hoc theoremate, cùm eorum quadrata proportionem habeant, quam quadratus numerus F, ad quadratum numerum G. Quod etiam ex hoc conſtare poteſt. Nam cùm quadrata K L, N P, proportionem habeant, ex coroll. propoſ. 20. lib. 6. duplicatam laterum K M, N O, ſit autem quadratorum proportio ſubquadrupla, nempe 1. ad 4. erit proportio laterum ſubdupla, videlicet 1. ad 2. huius enim illa duplicata eſt, vt hic apparet 1.2.4. a Quare longitudine cōmenſurabiles ſunt recta K M, N O, cùm proportionem habeant, quā numerus ad numerū. Intelligendæ ſunt ergo in hoc theoremate lineæ etiam illæ longitudine commenſurabiles, quæ numeris non poſſunt exprimi ſi cum linea Rationali comparentur. Quod ſi conſiderentur eadem lineæ K M, N O, ſimpliciter, & abſolutè, nulla habita ratione lineæ Rationalis A B, numeris poterunt efferri. Cùm enim proportionem habeant ſubduplam, ſi K M, diuidatur in duas partes æquales, diuidetur N O, in eiuſdem magnitudinis partes 4. ſi illa in 3. ſecabitur hæc in 6. &c. At verò hæ partes nullo modo æquales ſunt partibus lineæ Rationalis A B, immò illis omnino ſunt longitudine incommenſurabiles, vt diximus.

RVRSVS, quia quadrata K L, N P, proportionem habentia, quam quadratus numerus F, ad quadratum numerum G, plures quadratas menſuras continent æquales illis, in quas A C, quadratum Rationalis lineæ A B, reſoluitur, quàm vnitates ſunt in dictis numeris quadratis F, G; (Nam K L, æquale eſt ſex huiuſmodi menſuris, & N P, continet 24. At numerus quadratus F, componitur ex quatuor vnitatibus, & G, ex 16.) Et ſi maiores quadrati in eadem proportione ſumantur Q, R, pauciores tales menſuras complectuntur quadrata K L, N P, quàm ſunt vnitates in numeris quadratis Q, R, cùm alter ex 9. alter verò ex 36. vnitatibus conſtituatur; manifeſtum eſt, in hoc theoremate intelligenda quoq; eſſe quadrata proportionem habentia, quam numerus quadratus ad numerum quadratum, quæ pauciores quadratas menſuras, vel plures comprehendunt, quàm vnitates in illis quadratis numeris reperiuntur. ſi ea conferantur cum quadrato lineæ Rationalis propoſitæ. Quod ſi eadem quadrata K L, N P, conſiderentur abſolutè, & ſimpliciter, nulla habita ratione quadrati A C, ex Rationali linea A B, deſcripti, reſolui poterunt in totidem menſuras quadratas, quot vnitates in quadratis numeris F, G, vel Q, R, continentur. Nam ſi recta K M, diuidatur in duas partes, & N O, in quatuor, vt dictum eſt, continebit quadratum K L, quatuor menſuras quadratas, & quadratum N P, ſexdecim, quot ſcilicet vnitates reperiuntur in quadratis numeris F, G. Item, ſi eadem lineæ ſecentur in partes tres, & ſex, habebunt earum quadrata menſuras quadratas 9. & 36. quot nimirum vnitates comprehenduntur in numeris quadratis Q, R, &c. At huiuſmodi menſuræ nullo modo æquales ſunt quadratis menſuris, in quas quadratum A C, Rationalis lineæ A B, reſoluitur.

IDEM dicemus de omnibus aliis quadratis, eorumq́ lateribus, quorum ſuperficies non exprimuntur numeris quadratis, dummodo proportionem habeant inter ſe, quam numeri quadrati ad numeros quadratos; cuiuſmodi ſunt quadrata, quorum ſuperficies ſint 12. & 3. habentes proportionem, quam quadratus numerus 16. ad quadratum numerum 4. &c.

ITAQVE theorema hoc intelligendum eſt de lineis longitudine commenſurabilibus inter ſe, quamuis interdum Rationali linea incommenſurabiles ſint, vt ſit ſenſus. Quadrata quæ deſcribuntur à rectis lineis longitudine inter ſe commenſurabilibus, licet interdum longitudine ſint incommenſurabiles lineæ Rationali propoſitæ, proportionem inter ſe habent, quam quadratus numerus ad quadratum numerum, quamuis ipſa quadrata, ſi cum quadrato Rationalis lineæ conferantur, ſæpenumero numeris quadratis nullo modo poſſint exprimi: Et quadrata inter ſe proportionem habentia, quam quadratus numerus ad quadratum numerum, ſiue hæc quadrata numeris quadratis poſſint exprimi, ſiue non, ſi comparentur cum quadrato Rationalis lineæ, latera habebunt longitudine inter ſe commenſurabilia, etiamſi lineæ Rationali ſint longitudine incommenſurabilia, &c.

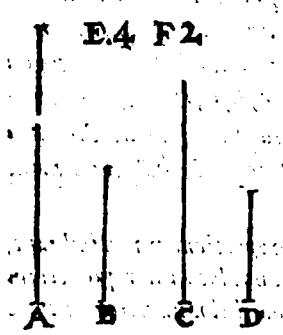
COLLIGIT Campanus ex hoc theoremate, in figuris quadratis diametrum lateri incommenſurabilem eſſe longitudine, hac ratione. Quoniam quadratum diametri duplum eſt quadrati lateris, vt ad propoſ. 47. lib. 1. demonſtrauimus; Nulla autem proportio dupla eadem eſſe poteſt, quæ quadrati numeri ad quadratum numerum, quòd inter numeros duplam proportionē habentes nullus medius cadat proportionalis, vt in ſcholio propoſ. 8. lib. 8. oſtendimus: Non habebunt quadratum diametri, & quadratum lateris proportionem, quam numerus quadratus ad numerū quadratum. Quare ex vltima parte huius theorematis eorum latera,

nempe

nempe diameter, & latus in vno eodemq; quadrato, longitudine inter se sunt incommensurabilia. Hoc etiam nos demonstrauimus in scholio propos. 8. lib. 8. Quod tamen clarius ostendet Euclides propos. vltima huius lib.

THEOR. 8. PROPOS. 10. 11.

SI quatuor magnitudines proportionales fuerint, prima verò secundæ fuerit commensurabilis; & tertia quartæ commensurabilis erit. Et si prima secundę fuerit incommensurabilis; & tertia quartæ incommensurabilis erit. 10.



SINT proportionales quatuor magnitudines, A, B, C, D, sitq; A, prima secundæ B, commensurabilis. Dico & tertiam C, quartæ D, commensurabilem esse. Quoniam n. A, & B, inter se commensurabiles sunt, [a] habebit A, ad B, proportionem quam numerus ad numerum, nempe quam E, ad F. Ponitur autem vt A, ad B, ita C, ad D. Igitur & C, ad D, proportionem habet quam numerus E, ad numerum F. [b] Quare C, & D, commensurabiles inter se sunt. a 5. decimi. b 6. decimi.

SED sit iam A, ipsi B, incommensurabilis. Dico & C, ipsi D, esse incommensurabilem. Quoniam enim A, & B, incommensurabiles sunt, [c] non habebit A, ad B, proportionem, quam numerus ad numerum: Ponitur autem vt A, ad B, ita C, ad D. Igitur nec C, ad D, proportionem habet, quam numerus ad numerum. [d] Quare C, & D, incommensurabiles sunt inter se. Si quatuor ergo magnitudines proportionales fuerint, &c. Quod erat ostendendum. c 7. decimi. d 8. decimi.

SCHOLIVM.

QVOD si quatuor proposita magnitudines fuerint lineæ, prima autem secundæ commensurabilis fuerit longitudine, erit & tertia quartæ lōgitudine commensurabilis, vt ex demonstratione huius theorematis apparet. Eodem enim modo ostendemus posteriores duas proportionem habere numeri ad numerum. Quare, vt in scholio propos. 5. huius lib. diximus, longitudine commensurabiles sunt.

SI autem prima secundæ fuerit cōmensurabilis potentia tantùm, erit & tertia quartæ potentia tantùm commensurabilis. Repetatur enim eadem figura. Quoniam igitur A, cōmensurabilis est potētia ipsi B, [a] erunt earum quadratæ cōmensurabilia, [b] ac propterea proportionem habebunt, quā numerus ad numerum. [c] Est autem, vt quadratum ex A, ad quadratum ex B, ita quadratum ex C, ad quadratū ex D. (quod quatuor lineæ propositæ A, B, C, D, proportionales sint, & earum quadrata figuræ similes similiterq; descriptæ.) Igitur & quadratæ ex C, D, proportionē habebunt, quam numerus ad numerum. [d] Quare commensurabilia erūt; [e] Ac propterea lineæ C, D, potentia commensurabiles. Quòd autem potentia tantùm sint commensurabiles, ita manifestum fiet. Quoniam rectæ A, B, cùm sint commensurabiles potentia tantùm, longitudine incommensurabiles sunt; non erit earum proportio, quæ numeri ad numerum, vt in scholio propos. 7. huius lib. docuimus; Ac propterea neque C, D, proportionem habebunt, quam numerus ad numerum. Longitudine ergo incommensurabiles sunt C, D, ex scholio propos. 8. huius lib. Sunt autem potentia commensurabiles, vt ostendimus: Igitur potentia tantùm sunt commensurabiles. Quod est propositum. a 3. defin. b 5. decimi c 22. sexti. d 6. decimi e 3. defin.

EADEM ratione, si prima secundæ sit incommensurabilis longitudine tantùm, erit & tertia quartæ longitudine tantùm incommensurabilis. Nam si A, & B, sint longitudine tantùm incommēsurabiles; erunt ipsarum potentia commensurabiles; ac propterea ipsa potentia tantùm commensurabiles erunt. Igitur, vt nunc ostendimus, erunt quoq; rectæ C, D, potentia tantùm commensurabiles; Ac idcircò longitudine tantùm incommensurabiles erunt. Quod est propositum.

RVRSVS, si quatuor magnitudinum priores duæ fuerint lineæ, duæ verò reliquæ superficies, vel solida; sequetur nihilominus, si lineæ sint longitudine commensurabiles, vel incommensurabiles, & reliquas duas magnitudines commensurabiles, vel incommensurabiles esse. Si enim lineæ longitudine sint commensurabiles, erit earum proportio, quæ numeri ad numerum, ex iis, quæ in scholio propos. 5. huius lib. docuimus. Cùm ergo habeant reliquæ duæ magnitudines proportionē eandem, quam lineæ, erit quoq; illarum proportio, quæ numeri ad numerum; [f] atque adeò commensurabiles erunt. Si verò lineæ longitudine incommensurabiles sint, siue potentia commensurabiles existant, siue non; non erit earum proportio, quæ numeri ad numerū, vt constat ex scholio propos. 7. huius lib. Igitur neq; reliquarū duarū magnitudinū eandem cum illis proportionem habentiū, proportio erit, quæ numeri ad numerū. [g] Quare incōmensurabiles erunt. Quod est propositū. f 6. decimi g 8. decimi

EODEM modo, si priores duæ magnitudines fuerint superficies, vel solida, posteriores verò duæ, lineæ, demonstrabimus, si plana, vel solida commensurabilia sint, vel incōmensurabilia, lineas longitudine commensurabiles esse, vel incommensurabiles. Si enim plana, solidáve commensurabilia sint, [h] habebunt ipsa proportionem, quam numerus ad numerum. Igitur & lineæ eandem cum ipsis rationem habētes, proportionem habebunt, quam numerus ad numerum; ac propterea longitudine commensurabiles erunt, vt diximus in scholio propos. 6. huius lib. Si verò plana, vel solida sint incommensurabilia, non habebunt ea proportionem, quam numerus ad numerum. Igitur neq; lineæ eandem cùm ipsis proportionem habentes, proportionem habebunt, quam numerus ad numerum. Ergo longitudine incommensurabiles erunt per ea, quæ docuimus in scholio propos. 8. huius lib. Quod est propositum. h 5. decimi.

LEMMA.

Dvos numeros planos inuenire, qui proportionem non habeant, quam quadratus numerus ad quadratum numerum.

INVENIANTVR duo plani numeri non similes, per ea, quæ ad finem lib. 8. docuimus. Nam huiusmodi numeri non habebunt proportionem, quam quadratus numerus ad quadratum numerum, vt in scholio propos. 26. lib. 8. demonstrauimus. Quod est propositum.

QVOD si plures numeros inuenire velimus, quorum quilibet duo proportionem non habeant, quam quadratus numerus ad quadratum numerum, sumemus quotcunque numeros primos, per ea, quæ in scholio propos. 20. lib. 9. tradidimus, A, B, C, D, E. Nulli enim horum primorum acceptorum proportionem inter se habent, ex scholio propos. 26. lib. 8. quam numeri quadrati ad numeros quadratos, cũ non sint plani similes, vt ad finẽ lib. 8. docuimus.

A, 3. B, 5. C, 7. D, 11. E, 13.

SCHOLIVM.

PORRO inuentionem numerorum planorum non similium, qui videlicet proportionem non habeant, quam quadratus numerus ad quadratum numerum, nõ rectè quidam tradiderunt hoc loco, inter quos etiam est Federicus Commandinus. Quod vt ostendamus, adducenda est eorum ratio, qua dictos numeros inuenire conantur. Ita igitur rem expediunt.

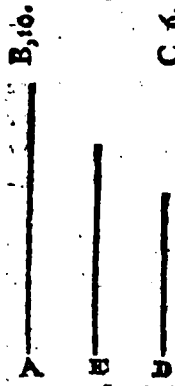
A, 2. B, 6. C, 3. D, 16. E, 12. F, 48.

EXPONANTVR quatuor numeri A, B, C, D, ita vt non sit sicut A, ad C, ita B, ad D; & fiat ex A, B, numerus E; & ex C, D, numerus F. Perspicuum igitur est E, F, numeros planos esse, planos autem dissimiles; quoniam latera proportionalia non sunt, quod facere oportebat.

HAEC est eorum ratio inueniendorum numerorum planorum non similium. Errant autem huiusmodi interpretes, quia sæpe numero inuenti numeri secundùm eorum doctrinam, plani similes sunt. Nam numeri ex eorum demonstratione inuenti, 12. & 48. sunt plani similes, cùm proportionem habeant, quam quadrati numeri 4. & 16. Item q3 prior numerus latera habeat 3. & 4. proportionalia lateribus posterioris 6. & 8. vt constat; quamuis latera prioris ab illis assumpta 2. & 6. non sint proportionalia lateribus posterioris acceptis 3. & 16. Satis enim est, vt duo numeri plani sint similes, aliqua duo latera vnius proportionalia esse quibusdam duobus lateribus alterius, non autem requiritur, vt quæcunq3 duo latera vnius proportionalia sint quibuscunq3 duob. laterib. alterius; qua de re plura scripsimus in defin. 21. lib. 7. & in scholio propos. 23. lib. 8.

10. PROBL. 3. PROPOS. 11.

PROPOSITAE rectæ lineæ inuenire duas rectas lineas incommensurabiles, alteram quidem longitudine tantùm, alteram verò etiam potentia.



SIT recta proposita A, cui primùm inuenienda sit linea incommensurabilis longitudine tantùm. Inueniantur, per lemma præcedens, duo numeri B, & C, proportionem non habentes, quam quadratus numerus ad quadratum numerum: Deinde ex corollario propos. 6. huius lib. reperiatur linea D, ad cuius quadratum sic se habeat quadratum ex A, vt numerus B, ad numerum C. Dico D, esse ipsi A, incommensurabilem longitudine tantùm. Quòd enim A, & D, longitudine sint incommensurabiles, ita probabitur. Quoniam est quadratum ex A, ad quadratum ex D, vt numerus B, ad numerum C; non est autem proportio B, ad C, quæ numeri quadrati ad numerũ quadratum; neq; quadratum ex A, ad quadratum ex D, proportionem habebit, quam numerus quadratus ad numerum quadratum. [a] Igitur rectæ A, & D, longitudine incommensurabiles sunt. Quòd autem tantùm longitudine sint incommensurabiles, patet. Cùm enim quadrata ex A, & D, proportionem habeant, quam numerus B, ad numerum C, [b] ipsa commensurabilia erunt. Sunt ergo rectæ A, & D, ex definitione, potentia commensurabiles. Quare longitudine tantùm incommensurabiles sunt.

a 9. decimi.

b 6. decimi.

SIT iam eidem rectæ propositæ A, inuenienda linea incommensurabilis longitudine, & potentia. [c] Inueniatur recta E, inter rectas A, & D, longitudine tantùm incommẽsurabiles, media proportionalis. Dico E, ipsi A, incommensurabilem esse longitudine, & potentia. Quoniam enim est quadratum ex A, ad quadratum ex E, per coroll. propos. 20. lib. 6. vt A, ad D; & A, incommensurabilis est longitudine ipsi D, vt iam est ostensum [d] erit & quadratum ex A, incommẽsurabile quadrato ex E. Quare rectæ A, E, ex definitione, potentia sunt incommensurabiles; ac proinde ex coroll. propos. 9. huius lib. & omnino longitudine incommensurabiles sunt. Est igitur E, ipsi A, incommensurabilis longitudine, & potentia. Quocirca propositæ rectæ lineæ inuenimus duas rectas, &c. Quod erat demonstrandum.

c 13. sexti.

d 10. decimi.

SCHOLIVM.

SI igitur recta A, proposita statuatur Rationalis, ita vt ab ea mensura cæterarum sumantur; erit & recta D, per defin. 6. Rationalis, quia potentia illi est commensurabilis, licet eidem longitudine incommensurabilis sit.

bilis sit. At verò E, Irrationalis, ex defin. 7. cùm Rationali A, incommensurabilis sit longitudine, & potentia.

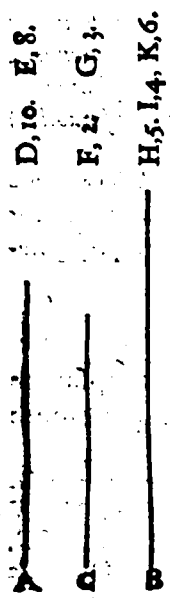
QVARTO ex demonstratione huius theorematis liquidò constat, rectam mediâ proportionalẽ inter duas rectas potentia tantùm cõmensurabiles, vel q̃ idem est, inter duas longitudine tantũ incõmensurabiles, esse vtrilibet illarum incommensurabilẽ longitudine & potentia: atque adeò appellari Irrationalem, si alterutra illarum statuatur Rationalis. Ex eo enim quòd rectæ A, D, sunt longitudine tantùm incommensurabiles, vel commensurabiles potentia tantùm, demonstrauimus rectam E, inter illas mediam proportionalem, esse ipsi A, incommensurabilem longitudine, & potentia: Eodemq̃ argumento ostendemus eandem longitudine, & potentia ipsi D, esse incommensurabilem. Cùm enim rectæ D, E, A, sint continuè proportionales, erit ex corollario propos. 20. lib. 6. vt quadratum ex D, ad quadratum ex E, ita recta D, ad rectam A: Est autem recta D, recta A, incommensurabilis longitudine. [a] Igitur & quadratum ex D, quadrato ex E, incommensurabile erit. Quare recta D, & E, ex defin. incommensurabiles sunt potentia atque adeò & longitudine, per corollarium propos. 9. huius libri. a 10. decimi.

In codicibus vulgatis præponitur hac vndecima propositio à Theone propositioni decimæ præcedenti: quod errore librariorum factum esse puto, cùm secunda pars huius ex præcedenti propositione decima demonstretur, vt ex dictis apparet.

12.

THEOR. 9. PROPOS. 12. 8.

QVÆ eidẽ magnitudini sunt cõmensurabiles, & inter se sunt cõmensurabiles.



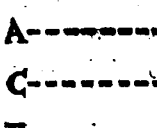
SIT vtraque magnitudo A, B, magnitudini C, commensurabilis. Dico & A, B, inter se esse commensurabiles. Cùm enim A, & C, sint commensurabiles, [a] habebit A, ad C, proportionem, quam numerus ad numerum: habeat quam numerus D, ad numerum E. Rursus quia C, B, commensurabiles sunt, habebit quoq; C, ad B, proportionem, quam numerus ad numerum: habeat quam numerus F, ad numerum G, [b] sumanturq̃ tres numeri H, I, K, minimi deinceps proportionales in proportionibus D, ad E, & F, ad G; sitq̃ H, ad I, vt D, ad E, hoc est, vt A, ad C; & I, ad K, vt F, ad G; hoc est, vt C, ad B. Quoniam igitur est A, ad C, vt H, ad I; & C, ad B, vt I, ad K; erit ex æquo A, ad B, vt H, ad K, numerus ad numerum. Quare A, B, proportionẽ habentes, quam numeri H, K, [c] inter se commensurabiles sunt. Quæ ergo eidem magnitudini commensurabiles sunt, &c. Quod demonstrãdum erat. a 5. decimi. b 4. octaui. c 6. decimi.

SCHOLIVM.

QVOD si magnitudines A, B, C, sint lineæ, atq; A, & B, ipsi C, longitudine commensurabiles existant, erunt quoque A, & B, inter se longitudine commensurabiles, vt constat ex demonstratione theorematis, quia eodem modo ostendemus, lineas A, & B proportionẽ habere, quam habet numerus H, ad numerũ K: Quare longitudine commensurabiles erunt, vt ad propos. 6. diximus. Si verò A, & B, fuerint ipsi C, potentia cõmensurabiles, licet eidem longitudine sint incommensurabiles, demonstrabuntur eodem modo & A, B, inter se commensurabiles potentia. Cùm enim A, & C, sint potentia commensurabiles, [a] erit quadratum ex A, ad quadratum ex C, vt numerus ad numerum, nempe, vt D, ad E, cùm quadrata ex A, C, per defin. sint commensurabilia. Eodem modo erit quadratum ex C, ad quadratum ex B, vt numerus ad numerum, nimirum vt F, ad G. [b] Sumptis ergo in eisdem rationibus D, ad E, & F, ad G, tribus numeris minimis H, I, K, deinceps proportionalibus; erit rursus ex æquo quadratum ex A, ad quadratum ex B, vt numerus H, ad numerum K. [c] Quare quadrata ex A, & B, commensurabilia sunt: atque adeò lineæ A, B, potentia commensurabiles. Non tamen ex hoc sequitur, A, & B, potentia tantùm esse commensurabiles. Possunt enim esse duæ lineæ longitudine inter se commensurabiles, licet vtraque cuipiam alteri lineæ potentia tantùm sit cõmensurabilis; quales sunt duæ Rationales lõgitudine inter se cõmensurabiles, potentia verò tantũ Rationali expositæ cõmensurabiles, quas quidẽ inueniemus postea in scholio secundo, propositionis 19. huius libri. a 5. decimi. b 4. octaui. c 6. decimi

SED & conuersum quodammodo huius theorematis demonstrabimus, hoc modo.

SI sint duæ magnitudines commensurabiles, altera verò sit vni cuipiam commensurabilis; erit & reliqua eidem commensurabilis.



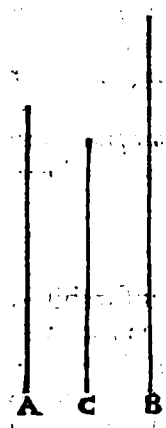
SINT enim A, & B, commensurabiles, sitq̃ A, ipsi C, commensurabilis. Dico & B, eidem C, commensurabilem esse. Cùm enim tam B, quàm C, ipsi A, sit commensurabilis; erunt quoq; B, & C, est hoc theoremate, inter se commensurabiles. Quod est propositum.

QVOD si magnitudines A, B, C, sint lineæ, & A, B, commensurabiles longitudine, sit autem A, ipsi C, commensurabilis longitudine; erit & B, reliquæ eidem C, longitudine commensurabilis. Nam cùm tam B, quàm C, ipsi A, longitudine sit commensurabilis, erunt etiam B, C, inter se commensurabiles longitudine, vt ostendimus. At verò si lineæ A, & B, potentia tantùm sint commensurabiles, & A, ipsi C, commensurabilis, siue longitudine, & potentia, siue potentia tantum, colligemus quidem eodẽ argumento, reliquam B, eidem C, potentia esse commensurabilem; quia vtraq; B, C, ipsi A, hac ratione potentia est commensurabilis ex hypothesi. Non autem colligere licebit, si A, ipsi C,

commensurabilis sit longitudine, reliquam B, eidem C, longitudine commensurabilem esse, quia non vtraque B, C, ipsi A, longitudine commensurabilis est, sed C, quidem longitudine; at verò B, potentia tantùm, vt ex hypothesi constat.

12. 0. ## THEOR. 10. PROPOS. 13.

SI sint duæ magnitudines, & altera quidem eidem sit commensurabilis, altera verò incommensurabilis: Incommensurabiles erunt magnitudines.



SINT duæ magnitudines A, & B, quarum A, sit ipsi C, commensurabilis, & B, eidem C, incommensurabilis. Dico A, & B, inter se incommensurabiles esse. Si enim B, dicatur esse commensurabilis ipsi A; cùm eidem A, commensurabilis ponatur C; [a] erunt B, & C, inter se commensurabiles. quod est absurdum. ponitur enim B, ipsi C, incommensurabilis. Non ergo B, ipsi A, commensurabilis est. Quare si sint duæ magnitudines, & altera quidem, &c. Quod erat ostendendum.

a 12. decimi.

SCHOLIVM.

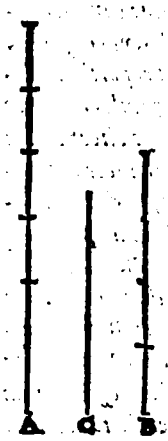
SI magnitudines A, B, C, sint lineæ, & A, quidem ipsi C, longitudine commensurabilis, at B, eidem C, incommensurabilis longitudine: erunt A, & B, longitudine incommensurabiles. Si enim longitudine commensurabiles essent, [a] ostenderemus quoq; B, C, esse inter se longitudine commensurabiles. (cùm hoc posito, vtraque B, C, ipsi A, commensurabilis esset longitudine) quod non ponitur. Pari ratione, si A, ipsi C, potentia sit commensurabilis, siue tantùm, siue etiam longitudine, at verò B, eidem C, potentia incommensurabilis: erunt A, & B, potentia incommensurabiles. Si enim essent commensurabiles potentia, essent quoq; B, & C, potentia commensurabiles. (cùm hoc posito, vtraque B, C, ipsi A, potentia esset commensurabilis.) Quod est absurdum, Ponitur enim B, ipsi C, potentia incommensurabilis.

a 12. decimi.

QVONIAM verò hæc propositio 13. apud Theonem lemma est, sit, vt posthac in nostra editione numerus propositionum Euclidis differat ab eo, quem Theon sequitur. Reliquimus enim dedita opera ordinem ac seriem Theonis hoc loco, quia à iunioribus, & peritioribus Geometris hoc theorema in numerum propositionum Euclidis iam est ascitum.

13. 8. ## THEOR. 11. PROPOS. 14.

SI sint duæ magnitudines commensurabiles, altera autē ipsarum magnitudini cuipiam incommensurabilis fuerit: Et reliqua eidem incommensurabilis erit.



SINT duæ magnitudines commensurabiles A, & B, quarum A, incommensurabilis sit alteri cuipiam C. Dico & B, eidem C, esse incommensurabilem. Nam si B, dicatur esse commensurabilis ipsi C, ac propterea & C, ipsi B; cùm & A, ipsi B, ponatur commensurabilis; [a] erunt & A, C, inter se commensurabiles. Quod est absurdū. Ponitur enim A, ipsi C, incommensurabilis. Non ergo B, ipsi C, commensurabilis est. Quare si sint duę magnitudines commensurabiles, &c. Quod demonstrandum erat.

a 12. decimi.

SCHOLIVM.

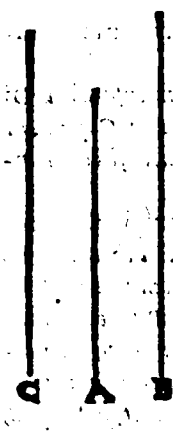
HIC quoq; si magnitudines A, B, C, sint lineæ, & A, B, commensurabiles longitudine: sit autem A, ipsi C, siue longitudine tantùm, siue longitudine & potentia incommensurabilis: erit & B, eidem C, longitudine incommensurabilis. Si enim B, & C, essent longitudine commensurabiles, [a] essent quoq; A, & C, commensurabiles longitudine. (Cùm hoc posito, vtraq; A, & C, ipsi B, longitudine esset commensurabilis.) Quod est absurdum. Ponitur enim A, ipsi C, longitudine incommensurabilis. Quòd si A, & B, commensurabiles sint potentia tantū, & A, ipsi C, potentia incommensurabilis, colligemus eodem modo, & B, ipsi C, potentia incommensurabilem esse. Aliàs si B, C, potentia essent commensurabiles; [b] & A, C, potentia commensurabiles essent. (cùm hoc posito, vtraq; A, C, ipsi B, potentia esset commensurabilis.) Quod non ponitur.

a 12. decimi.

b 12. decimi.

COLLIGVNT porrò ex hoc theoremate interpretes Euclidis sequens theorema, ad ea, quæ in hoc libro demonstrantur, peritile.

QVÆ incommensurabilibus sunt commensurabiles; & inter se incommensurabiles erunt.



SINT duæ magnitudines incommensurabiles A, B, quibus commensurabiles sint C, & D, nempe C, ipsi A, & D, ipsi B. Dico C, & D, inter se incommensurabiles esse. Quoniam enim A, & C, commensurabiles ponuntur, & est A, ipsi B, incommensurabilis; [c] erit quoque reliqua C, eidem B, incommensurabilis. Rursus quia D, &

c 14. decimi.

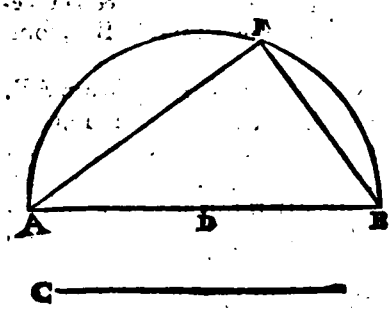
B, com-

B, commensurabiles ponuntur, & est B, ostensa ipsi C, incommensurabilis; [a] *erit & D, reliqua eidem C, incommensurabilis. Quod est propositum.* a 14. decimi.

Si autem magnitudines A, B, C, D, sint lineæ, & A, B, vel longitudine tantùm incommensurabiles, vel longitudine & potentia; sint autem C, D, ipsis A, B, longitudine commensurabiles; erunt C, & D, eodem argumento longitudine incommensurabiles. Si verò A, & B, incommensurabiles sint potentia, & ipsis potentia tantùm commensurabiles C, & D; ostendemus similiter C, & D, potentia esse incommensurabiles; vt perspicuum est.

LEMMA.

DVABVS datis rectis lineis inæqualibus, inuenire id, quo maior plus potest, q̃ minor.



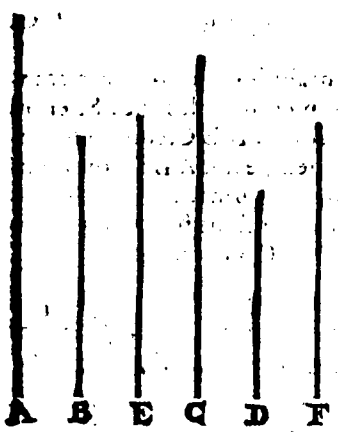
QVAMVIS id, quod lemma hoc proponit, ostenderimus antea ad propos. 47. lib. 1. tamen quia hîc breuius ex ijs, quæ tradita sunt in lib. 3. & 4. demonstratur, non inutile iudicauimus, idem hoc loco aliter efficere. Sint ergo datæ duæ rectæ lineæ inæquales, A B, & C, quarum A B, maior, oporteatq; inuenire, quo A B, plus possit, quàm C. Diuisa A B, bifariam in D, describatur ex centro D, & interuallo D A, vel D B, semicirculus A E B, [b] *in quo aptetur recta A E, ipsi C, æqualis, iungaturq; recta E B. Dico rectam A B, plus posse, quàm C, quadrato rectæ E B.* [c] *Cùm enim angulus E, in semicirculo rectus sit;* [d] *erit quadratum ex A B, æquale quadratis ex A E, E B; atq; idcirco A B, plus poterit, quàm A E, hoc est, quàm C, quadrato rectæ E B. Quod est propositum. Similiter.* b 1. quarti. c 31. tertij. d 47. primi.

DVABVS datis rectis lineis, siue æqualibus, siue inæqualibus, inuenire rectam, quæ illas potest.

HOC etiam tradidimus ad propos. 47. lib. 1. Sint ergo datæ duæ rectæ A E, E B, quæ si coniungantur ad angulum rectum E, poterit eas recta ducta A B, [e] *quippe cùm quadratum ex A B, æquale sit quadratis ex A E, E B.* e 47. primi.

THEOR. 12. PROPOS. 15. 14. 12.

SI quatuor rectæ lineæ proportionales fuerint, prima verò tantò plus possit q̃ secunda, quantũ est quadratum rectæ lineæ sibi commensurabilis longitudine: Et tertia tantò plus poterit q̃ quarta, quantũ est quadratũ rectæ lineæ sibi longitudine commensurabilis. Quòd si prima tantò plus possit q̃ secunda, quantũ est quadratum rectæ lineæ sibi incommensurabilis longitudine: Et tertia tantò plus poterit q̃ quarta, quantũ est quadratũ rectæ lineæ sibi longitudine incommensurabilis.



SINT quatuor rectæ lineæ proportionales A B, C D, possitq́ue A, prima plus q̃ B, secunda, quadrato rectæ E, & C, tertia plus possit, q̃ D, quarta, quadrato rectæ F. Dico, si E, commensurabilis sit longitudine ipsi A; & F, commensurabilẽ esse longitudine ipsi C: Si verò E, sit longitudine incõmensurabilis ipsi A; & F, ipsi C, longitudine incommensurabilem esse. Quoniam enim est, vt A, ad B, ita C, ad D; [a] erit quoque vt quadratum ex A, ad quadratum ex B, ita quadratum ex C, ad quadratum ex D. Est autem quadratum ex A, æquale quadratis ex B, E, per hypothesim; & quadratũ ex C, quadratis ex D, F. Igitur erunt quoque, vt quadrata ex B, E, ad quadratum ex B, ita quadrata ex D, F, ad quadratum ex D: Et diuidendo, vt quadratum ex E, ad quadratum ex B, ita quadratum ex F, ad quadratum ex D; [b] Ac propterea erit etiam vt recta E, ad rectam B, ita recta F, ad rectam D; conuertendoq́ue vt B, ad E, ita D, ad F. Quia igitur est vt A, ad B, ita C, ad D; & vt B, ad E, ita D, ad F, erit quoque ex æquo, vt A, ad E, ita C, ad F. Quare si A, est longitudine commensurabilis ipsi E, erit quoque C, ipsi F, longitudine commensurabilis: Et si A, longitudine est incommensurabilis ipsi E, erit & C, ipsi F, incõmensurabilis longitudine, vt in scholio propos. 10. huius libri tradidimus. Si igitur quatuor rectæ lineæ proportionales fuerint, &c. Quod erat demonstrandum. a 22. sexti. b 22. sexti.

SCHOLIVM.

EODEM argumento ostendemus, si E, potentia tantùm commensurabilis fuerit ipsi A; & F, potentia tantùm ipsi C, esse commensurabilem, vt constat ex ijs, quæ in scholio propos. 10. huius libri scripsimus.

15. 9.

THEOR. 13. PROPOS. 16.

SI duæ magnitudines commensurabiles componantur; & tota magnitudo vtrique ipsarum commensurabilis erit. Quòd si tota magnitudo vni ipsarum commensurabilis fuerit; & quæ à principio magnitudines commensurabiles erunt.



COMPONANTVR duæ magnitudines commensurabiles A B, B C. Dico totam quoque magnitudinem A C, vtrique ipsarum A B, B C, commensurabilem esse. *a* Sit enim ipsarum A B, B C, communis mensura D. Quoniam igitur D, ipsas A B, B C, metitur, *b* metietur quoque D, totam A C, ex ipsis compositam. Cùm ergo D, metiatur A C, & A B; erunt A C, A B, commensurabiles. Similiter cùm D, metiatur A C, & B C; erunt & A B, B C, commensurabiles; Ac propterea A C, vtrique ipsarum A B, B C, commensurabilis erit.

a 3. decimi. *b* 1. pron.

SED iam tota A C, ex A B, B C, composita commensurabilis sit alteri ipsarum A B, B C, nempe ipsi A B. Dico & A B, B C, inter se commensurabiles esse. *c* Sit enim D, communis mensura ipsarum A C, A B. Quoniam igitur D, metitur totam A C, & ablatam A B; *d* metietur quoque D, reliquam B C. Quare cùm D, metiatur A B, B C; commensurabiles erunt A B, B C, inter se. Eodem argumento ostendemus A B, B C, esse commensurabiles, si A C, ipsi B C, fuerit commensurabilis. Si duæ igitur magnitudines commensurabiles componantur, &c. Quod ostendendum erat.

c 3. decimi. *d* 3. pron.

COROLLARIVM.

HINC sequitur, si tota magnitudo ex duabus composita, commensurabilis sit alteri ipsarum, eandem & reliquæ commensurabilem esse. Vt si A C, ipsi A B, sit commensurabilis, esse quoque eandem A C, reliquæ B C, commensurabilem. Nam vt in posteriori parte theorematis ostensum est, semper D, communis mensura totius A C, & ablatæ A B, cùm metiatur totam A C, & ablatam A B, metietur quoque reliquam B C, ex 3. pronunciato. Quare commensurabiles sunt A C, B C. Quod est propositum.

16. 9.

THEOR. 14. PROPOS. 17.

SI duæ magnitudines incommensurabiles componantur, & tota magnitudo vtrique ipsarum incommensurabilis erit. Quòd si tota magnitudo vni ipsarum incommensurabilis fuerit; & quæ à principio magnitudines incommensurabiles erunt.



COMPONANTVR duæ magnitudines incommensurabiles A B, B C. Dico totam quoque magnitudinem A C, vtrique ipsarum A B, B C, incommensurabilem esse. Si enim non est vtrique incommensurabilis, sit alteri commensurabilis, si fieri potest, nempe ipsi A B, *e* sitque D, communis mensura ipsarum A C, A B. Quoniam igitur D, metitur totam A C, & ablatam A B; *f* metietur quoque D, reliquam B C. Ac propterea cùm D, metiatur vtramque A B, B C, erunt A B, B C, commensurabiles. Quod est absurdum. ponuntur enim incommensurabiles. Non ergo commensurabilis est A C, ipsi A B; Eademque ratione neq; ipsi B C, commensurabilis erit. Quare vtrique ipsarum A B, B C, commensurabilis est.

e 3. decimi. *f* 3. pron.

SED iam tota A C, composita ex A B, B C, incommensurabilis sit vni ipsarum componentium, nempe ipsi A B. Dico quoque A B, B C, incommensurabiles esse. Si enim sint commensurabiles, *g* erit quoque tota A C, vtrique ipsarum A B, B C, commensurabilis. Quod est absurdum. Ponitur enim A C, alteri ipsarũ, nempe ipsi A B, incommensurabilis. Non ergo commensurabiles sunt A B, B C. Eodem argumento ostendemus A B, B C, incommensurabiles esse, si A C, ipsi B C, incommensurabilis fuerit. Quapropter si duæ magnitudines incõmensurabiles componãtur, &c. Quod erat ostendendũ.

g 16. decimi.

COROLLARIVM.

SEQVITVR ex his, si tota magnitudo ex duabus composita, incommensurabilis sit alteri ipsarum, eandem & reliquæ incommensurabilem esse. Nempe si A C, incommensurabilis sit ipsi A B, esse quoque eandem A C, reliquæ B C, incommensurabilem. Si enim A C, ipsi B C, foret commensurabilis, esset quoquè A C, ex coroll. præcedentis propos. reliquæ A B, commensurabilis. Quod est absurdum. ponitur enim incommensurabilis. Non est ergo A C, ipsi B C, commensurabilis, sed incommensurabilis. Quod est propositum.

SCHOLIVM I.

PERSPICVVM est, in duabus proximis antecedentibus propositionibus, earumq; corollarijs, si de lineis agatur, intelligendas esse lineas longitudine commensurabiles, vel incommensurabiles. Assumitur enim

ad

ad vtriusque propositionis demonstrationem communis mensura D, &c. quam quidem solùm linea longitudine inter se commensurabiles habent, vt ex defin. apparet.

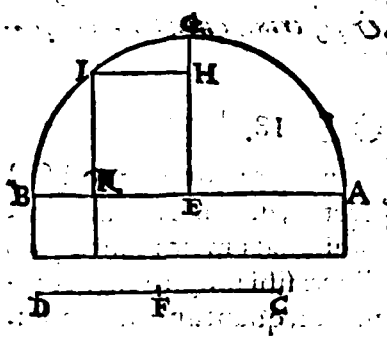
LEMMA I.

Si ad aliquam rectam lineam applicetur parallelogrammum deficiens figura quadrata; Parallelogrammum applicatum æquale est ei rectangulo, quod sub segmentis rectæ lineæ ex applicatione factis continetur.

Hoc lemma demonstrauimus nos in scholio propos. 28. lib. 6.

LEMMA II.

Dvabvs datis rectis lineis inæqualibus, quartam partem quadrati ex minore descripti ad maiorem applicare, ita vt deficiat figura quadrata.



Qvamvis id, quod hoc lemmate proponitur, absolui possit ex propos. 28. libri 6. quod quarta pars quadrati ex minore linea descripti, minor sit rectangulo ad dimidiam maioris lineæ applicato, deficiente figura quadrata, vt vult propos. illa 28. lib. 6. hoc est, quadratum ex dimidio minoris lineæ descripti, (quod quidē quarta pars est quadrati ex tota descripti, ex scholio propos. 4. libri 2.) minus sit quadrato ex dimidiata parte maioris descripto: (quod quidem applicatum est ad dimidium maioris, deficitq; figura quadrata.) Quamuis, inquam, absolui hoc possit per propos. 28. lib. 6. libet tamen idipsum hoc in loco cum alijs interpretibus exequi alia ratione faciliori. Sint igitur data rectæ inæquales A B, C D, quarum A B maior sit, oporteatq; ad A B, applicare parallelogrammum deficiens figura quadrata, quod quidem parallelogrammum æquale sit quartæ parti quadrati ex rectæ C D, descripti. Secetur rectis A B, C D, bifariam in E, & F, describatur ex centro E, & interuallo E A, vel E B, semicirculus A G B; & ex E, perpendicularis ad A B, ducatur E G. Et quia tota A B, maior ponitur, quàm tota C D, erit quoq; A E, dimidia ipsius A B, hoc est, E G, ipsi A E, æqualis, maior quàm C F, dimidia ipsius C D. Posita igitur E H, æquali ipsi C F, agatur per H, ipsi A B, parallela H I, demittaturq; I K L, ad A B, perpendicularis, & sit K L, ipsi K B, æqualis; Ac tandem perficiantur rectangulum A L, & quadratum B L. Dico parallelogrammum A L, applicatum ad rectam A B, deficiens figura quadrata B L, æquale esse quartæ parti quadrati rectæ C D. Quoniam enim K I, media proportionalis est inter A K, K B, vt in scholio propos. 13. lib. 6. tradidimus; [a] erit rectangulum sub A K, K B, hoc est, rectangulum A L, æquale quadrato ex K I, hoc est, quadrato ex E H; [b] (est enim K I, ipsi E H, æqualis, ob parallelogrammum E I,) hoc est, quadrato ex C F. Est autem quadratum ex C F, quarta pars quadrati ex C D; quod quadratū ex C D, per scholium propositionis 4. libri 2. quadruplum sit quadrati ex C F. Igitur parallelogrammum A L, ad rectam A B, applicatum, deficiensq; quadrato B L, æquale est quartæ parti quadrati ex C D, descripti. Quod est propositum.

a 17. sexti.

b 34. primi.

SCHOLIVM II.

Ex hoc lemmate absoluemus & hoc problema, quod sequitur, in hunc modum.

Datam rectam lineam ita secare, vt rectangulum sub partibus contentum, æquale sit dato rectilineo, quod tamen maius non sit, quàm quadratum à dimidia linea descriptum.

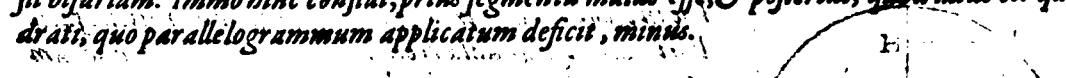
Sit enim recta data A B; & rectilineum quodcunque, cui æquale ponatur quadratum ex C F, nō maius quàm quadratum ex dimidia A E, ita vt latus C F, non maius sit latere A E. Educta ergo ad A B, perpendiculari E G, sit E H, æqualis ipsi C F. Deinde acta H I, parallela ipsi A B, demittatur I K, perpendicularis ad A B. Quibus peractis, ostendemus, vt prius, rectangulum sub partibus A K, K B, æquale esse quadrato ex I K, hoc est, quadrato ex C F, datoq; adeò & rectilineo dato, cui æquale est positum quadratum ex C F. Quod est propositum. Diximus autem, rectilineum datum non debere esse maius, q̄ quadratum ex dimidia linea descriptum; quia si maius esset, esset quoq; recta C F, maior quàm recta E G. Quare ex E G, abscindi non posset recta ipsi C F, æqualis: quod tamen ad problema efficiendum requiritur, vt ex demonstratione manifestum est.

LEMMA III.

Si sint duæ rectæ inæquales, & ad maiorem applicetur quarta pars quadrati ex minore descripti, deficiens figura quadrata; Non erunt segmenta, quæ ex applicatione fiunt, æqualia.

Si vero duæ rectæ inæquales A B, & C; & ad maiorem A B, applicetur parallelogrammum deficiens quadrato, sitq; illud æquale quartæ parti quadrati ex minore C, descripti, ita vt D B, latus sit quadrati, quo parallelogrammum applicatum deficit. Dico segmenta A D, D B, inæqualia esse. Si enim A D, D B, segmenta dicantur esse æqualia; cùm ex 1. lemmate parallelogrammum applicatum ad A B, deficiensq; figura quadrata ex D B, descripta, æquale sit rectangulo sub A D, D B; sit autem quod sub æqualibus A D, D B, quadratum; erit dictum parallelogrammum, quadratum ex A D, dimidio ipsius A B, descriptum; atq; adeo ex scholio propos. 4. lib. 2. quadratum ex A B, quadruplum erit ipsius parallelogrammi: Est autem & quadratum ex C, per hypothesim, quadruplum eiusdem parallelogrammi applicati, nempe quartæ partis quadrati ex C. Igitur quadrata rectarum ex A B, & C, æqualia sunt, atq; recta A B, & C, æquales. Quod est absurdum. ponuntur enim inæquales, & A B, maior. Inæqualia igitur sunt segmenta A D, D B. Quod est propositum.

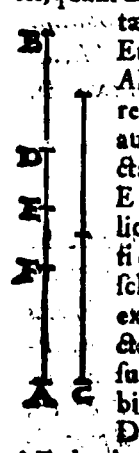
Hoc facile etiam apparet ex constructione problematis in antecedente lemmate. Cùm enim abscissa sit per constructionem E H, æqualis dimidiatæ parti ipsius C D, nempe ipsi C F, ducta q; H I, parallela ipsi A B, & tandem demissa perpendicularis I K, vt partes factæ ex applicatione sint A K, K B; manifestum est A K, K B, segmenta esse inæqualia, cùm A B, in E, secta sit bifariam. Immò hinc constat, prius segmentum maius esse, & posterius, quod latus est quadrati, quo parallelogrammum applicatum deficit, minus.



17. 13. # THEOR. 15. PROPOS. 18.

SI fuerint duæ rectæ lineæ inæquales, quartæ autem parti quadrati, quod fit à minori, æquale parallelogrammum ad maiorem applicetur, deficiens figura quadrata, & in partes longitudine commensurabiles ipsam diuidat: maior tantò plus poterit quàm minor, quantum est quadratum rectæ lineæ sibi longitudine commensurabilis. Quòd si maior tantò plus possit quàm minor, quantum est quadratum rectæ lineæ sibi longitudine commensurabilis, quartæ autem parti quadrati, quod fit à minori, æquale parallelogrammum ad maiorem applicetur, deficiens figura quadrata; in partes longitudine commensurabiles ipsam diuidet.

SINT duæ rectæ inæquales A B, & C, quarum maior A B; quartæ autem parti quadrati ex minore C, descripti, per lemma secundum præcedentis propositionis applicetur ad A B, parallelogrammum æquale, & deficiens figura quadrata, contentum sub A D, B D, faciatq; segmenta A D, D B, longitudine commensurabilia. Dico A B, plus posse, quàm C, quadrato lineæ longitudine sibi commensurabilis. Quoniam enim per tertium lemma præcedentis propositionis A D, maior est, quàm D B; diuidatur A B, bifariam in E, & ipsi E D, æqualis sumatur E F. Quo facto, cùm totæ E A, E B, æquales sint, & ablatæ quoque E F, E D; erunt & reliquæ A F, B D, æquales.



a 5. secundi. Et quia recta A B, diuisa est bifariam in E, & non bifariam in D; [a] erit rectangulum sub A D, D B, vnà cum quadrato ex E D, æquale quadrato ex E B. Ac propterea quadruplum rectanguli sub A D, D B, & quadrati ex E D, æquale erit quadruplo quadrati ex E B: Est autem quadruplo rectanguli sub A D, D B, æquale quadratum ex C; (Ponitur enim rectangulum sub A D, D B, æquale quartæ parti quadrati ex C,) & quadruplo quadrati ex E D, æquale est quadratum ex F D; (quadratum enim ex F D, quadruplum est ex scholio propos. 4. lib. 2. quadrati ex E D, cùm F D, dupla sit ipsius E D,) & quadruplo quadrati ex E B, æquale est quadratum ex A B. (quòd quadratum ex A B, quadruplum sit per scholium propos. 4. lib. 2. quadrati ex E B, dimidiata parte ipsius A B.) Igitur & quadrata ex C, & F D, æqualia sunt quadrato ex A B; Ac proinde recta A B, plus potest, quàm recta C, quadrato rectæ F D. Hanc igitur F D, demonstrare oportet longitudine commensurabilem esse ipsi A B. Quoniam rectæ A D, D B, longitudine ponuntur commensurabiles; b erit quoque tota A B, parti D B, commensurabilis longitudine. Est autem & ipsi D B, composita ex D B, A F, longitudine commensurabilis: (quòd composita ex D B, A F, dupla sit ipsius D B.) Igitur cùm vtraque A B, & composita ex D B, A F, longitudine sit commensurabilis ipsi D B; c erunt quoq; A B, & composita ex D B, A F, longitudine inter se commensurabiles; Ac propterea cùm A B, composita ex A F, D B, tanquam vna, & ex F D, commensurabilis sit longitudine compositæ ex A F, D B; erit eadem A B, ex corollario propos. 16. huius lib. commensurabilis longitudine reliquæ F D. Ergo A B, plus potest, quàm C, quadrato rectæ F D, longitudine sibi commensurabilis.

b 16. decimi.

c 12. decimi.

SED iam A B, plus possit, quàm C, quadrato lineæ sibi longitudine commensurabilis; & quartæ parti quadrati ex C, æquale parallelogrammum applicetur ad A B, deficiens figura quadrata, faciatq;

eiatque segmenta A D, D B. Dico & rectas A D, D B, longitudine esse commensurabiles. Iisdem enim constructis, similiter demonstrabimus A B, plus posse, quàm C, quadrato rectæ F D. Quare cùm A B, ponatur plus posse, quàm C, quadrato rectæ longitudine sibi commensurabilis; erit recta A B, ipsi F D, longitudine commensurabilis. Igitur cùm tota A B, composita ex F D, & ex A F, D B, tanquam vna, commensurabilis sit longitudine ipsi F D; erit eadem A B, longitudine commensurabilis reliquæ compositæ ex A F, D B, per corollarium propos. 16. huius libri. Est autem & composita ex A F, D B, ipsi D B, longitudine commensurabilis, cùm ipsius sit dupla: Igitur cùm vtraque A B, D B, longitudine sit commensurabilis compositæ ex A F, D B; [a] erunt quoque A B, D B, longitudine inter se commensurabiles: Atq; adeò cùm tota A B, composita ex A D, D B, commensurabilis sit longitudine ipsi D B; [b] erunt ipsæ A D, D B, longitudine quoq; inter se commensurabiles. Quocirca si fuerint duæ rectæ lineæ inæquales, &c. Quod erat demonstrandum.

[a] 12. decimi.
[b] 16. decimi

THEOR. 16. PROPOS. 19. 18.

SI fuerint duæ rectæ lineæ inæquales quartæ autem parti quadrati, quod fit à minore, æquale parallelogrammum ad maiorem applicetur deficiens figura quadrata, & in partes incommẽsurabiles longitudine ipsam diuidat; maior tantò plus poterit, quàm minor, quantum est quadratũ rectæ lineæ sibi longitudine incommensurabilis. Quòd si maior tantò plus possit, quàm minor, quantum est quadratum rectæ lineæ sibi longitudine incommensurabilis, quartæ autem parti quadrati, quod fit à minore, æquale parallelogrammum ad maiorem applicetur deficiẽs figura quadrata; in partes longitudine incommensurabiles ipsam diuidet. 14.

SINT duæ rectæ inæquales A B, & C, quarum maior A B; quartæ autem parti quadrati ex C, minore descripti applicetur ad A B, per secundum lemma propositionis præcedentis, parallelogrammum æquale deficiens figura quadrata, quod faciat in recta A B, partes A D, D B, longitudine incommensurabiles. Dico A B, plus posse, quàm C, quadrato rectæ sibi longitudine incommensurabilis. Iisdem enim, quæ suprà constructis, similiter ostendemus A B, plus posse, quàm C, quadrato rectæ F D. Hanc igitur demonstrare oportet ipsi A, longitudine esse incommensurabilem. Quoniam rectæ A D, D B, ponuntur longitudine incommensurabiles; [c] erit quoque tota A B, parti D B, longitudine incommensurabilis. Sed D B, longitudine commensurabilis est compositæ ex D B, A F, cùm hæc illius sit dupla. Igitur cùm duarum linearum commensurabilium D B, & quæ componitur ex D B, A F, ipsa D B, longitudine sit incommensurabilis rectæ A B: [d] erit quoque reliqua composita ex D B, A F, eidem A B, longitudine incommẽsurabilis: Ac propterea cùm A B, composita ex A F, D B, tanquam vna, & ex F D, incommensurabilis sit longitudine compositæ ex A B, D B, erit eadem A B, per corollarium propos. 17. huius lib. & reliquæ F D, longitudine incommensurabilis. Ergo A B, plus potest, quàm C, quadrato rectæ F D, longitudine sibi incommensurabilis.



[c] 17. decimi.
[d] 14. decimi.

IAM verò A B, plus possit, q̃ C, quadrato lineæ longitudine sibi incommensurabilis; & quartæ parti quadrati ex C, æquale parallelogrammum applicetur ad A B, deficiens figurã quadrata, faciatque in recta A B, partes A D, D B. Dico & rectas A D, D B, esse incommensurabiles longitudine. Iisdem enim constructis, ostendemus vt prius, rectam A B, plus posse, quàm C, quadrato rectæ F D. Quare cùm A B, ponatur plus posse, quàm C, quadrato rectæ longitudine sibi incommensurabilis; erit A B, ipsi F D, incommensurabilis longitudine. Igitur cùm tota A B, composita ex F D, & ex A F, D B, tanquam vna, longitudine incommensurabilis sit ipsi F D; erit eadem A B, per corollarium propositionis 17. huius libri, & reliquæ compositæ ex A F, D B, longitudine incommensurabilis: Est autem composita ex A F, D B, ipsi D B, longitudine commensurabilis, cùm illa huius sit dupla. Igitur cùm duarum linearum commensurabilium, nempe quę ex A F, D B, componitur, & D B, ipsa composita ex A F, D B, longitudine incommensurabilis sit rectæ A B; [e] erit & reliqua D B, eidem A B, longitudine incommensurabilis; Ac proinde cùm tota A B, composita ex A D, D B, incommensurabilis sit ipsi D B, longitudine; [f] erunt & ipsę A D, D B, longitudine inter se incommensurabiles. Quam ob rem si fuerint duæ rectæ lineæ inæquales, quartæ autem parti quadrati, &c. Quod erat demonstrandum.

[e] 14. decimi.
[f] 17. decimi.

SCHOLIVM I.

EGIT hactenus Euclides de magnitudinibus commensurabilibus, & incommensurabilibus; nunc ad Rationales & Medias transit in sequentibus.

LEMMA I.

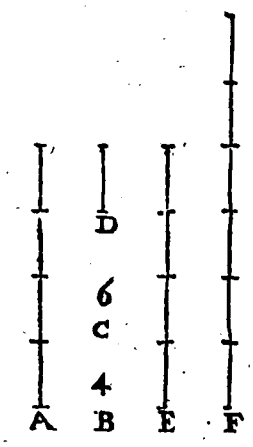
QVONIAM demonstratum est, lineas longitudine commensurabiles, omnino & potentia commensurabiles esse, potentia verò commensurabiles, non omnino & longitudine, sed posse & longitudine commensurabiles esse, & incommensurabiles; manifestum est, si exposita Rationali aliqua linea commensurabilis fuerit longitudine, illam Rationalem vocari, &

ipſi commenſurabilem, non ſolùm longitudine, ſed etiam potentia: longitudine enim commenſurabiles, omninò & potentia commenſurabiles ſunt. Si verò expoſitæ Rationali aliqua linea fuerit potentia commenſurabilis, ſiquidem & longitudine, dicetur & ſic Rationalis, & commenſurabilis ipſi longitudine, & potentia. Quòd ſi expoſitæ Rationali rurſus aliqua linea commenſurabilis exiſtens potentia, longitudine fuerit incommenſurabilis; dicetur & ſic Rationalis, potentia tantùm ipſi commenſurabilis.

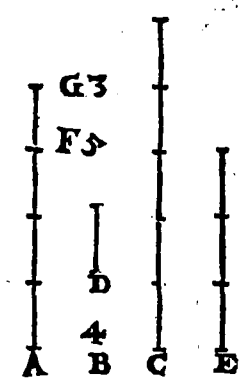
LEMMA II.

Ex Procl o. Rationales vocat eas lineas, quæ expoſitæ Rationali vel longitudine & potentia commenſurabiles ſunt, vel potentia ſolùm. Sunt autem & aliæ lineæ, quæ longitudine quidem expoſitæ Rationali incommenſurabiles ſunt, potentia autem ſolùm commenſurabiles; atque ob id rurſus dicuntur Rationales, & commenſurabiles inter ſe, quatenus Rationales; commenſurabiles, inquam, inter ſe vel longitudine & potentia, vel potentia ſolùm: Et ſiquidem longitudine, dicuntur & ipſæ Rationales longitudine inter ſe commenſurabiles, vt intelligatur, etiam potẽtia commenſurabiles eſſe; Si verò potentia inter ſe ſolùm ſunt commenſurabiles: dicuntur ipſæ quoq; Rationales, potentia ſolùm inter ſe commenſurabiles.

SCHOLIVM.

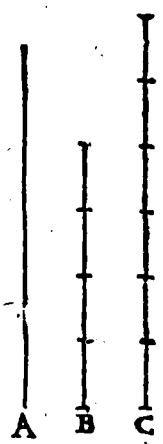


Itaque ex his colligere licebit tria genera linearum Rationalium longitudine inter ſe commenſurabilium. Aut enim duarum linearum Rationalium longitudine inter ſe commenſurabilium, altera æqualis eſt expoſitæ Rationali; ac proinde vtraque Rationali commenſurabilis quoq; longitudine: Aut neutra Rationali expoſitæ æqualis eſt, longitudine tamen ei vtraque eſt commenſurabilis: Aut denique vtraque expoſitæ Rationali commenſurabilis eſt ſolùm potentia. Hæc autem tria genera inueniemus hoc modo; Sit expoſita Rationalis A, diuiſa in quatuor partes; quot nimirum vnitates ſunt in numero B. Sumpto deinde quolibet alio numero C, ſit D, recta vna partium rectæ A; & quoties D, metitur lineam A, toties metiatur quandam aliam E. Item quoties vnitas eſt in C, toties eadem D, metiatur quampiam aliam lineam F. Quoniam igitur A, & E, componũtur ex partibus multitudine æqualibus, quæ quidem magnitudine æquales ſunt ipſi D; ipſæ æquales erunt. Rurſus quia D, metitur omnes tres, A, E, & F, erunt omnes tres A, E, & F, longitudine commenſurabiles. Quare E, & F, Rationali A, commenſurabiles longitudine, Rationales ſunt: Sunt autem & oſtenſæ longitudine inter ſe commenſurabiles, cùm habeant D, communem menſuram. Inuentæ ergo ſunt duæ Rationales E, F, longitudine commenſurabiles & inter ſe, & expoſitæ Rationali A, & quarum vna, nempe E, æqualis eſt Rationali expoſitæ A.



Iam verò D, metiatur duas lineas quaſdam C, E, per duos numeros F, G, quorum neuter idem ſit qui B, ita vt vtraque linea C, & E, inæqualis ſit ipſi A. Erunt igitur vt prius, tres rectæ A, C, E, menſuram habentem communẽ D, longitudine commenſurabiles. Quare C, E, Rationali A, longitudine commenſurabiles, Rationales ſunt. Cùm ergo & inter ſe ſint longitudine commenſurabiles; inuentæ erunt duæ Rationales C, E, longitudine commenſurabiles & inter ſe, & expoſitæ Rationali A, quarum neutra æqualis eſt Rationali expoſitæ A.

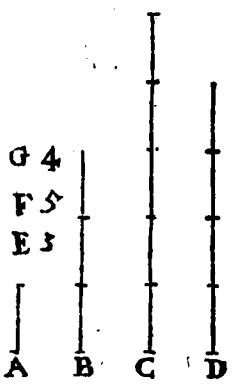
a 11. decimi. *Postremo, expoſitæ Rationali A, [a] inueniatur recta B, longitudine tantùm incommenſurabilis, quæ ſecetur in quotcunque partes æquales, & ſumatur C, compoſita ex alijs quotcunque partibus, quæ magnitudine æquales ſint partibus rectæ B. Quo facto, erunt B, & C, longitudine commenſurabiles. Dico eaſdem expoſitæ Rationali A, potentia ſolùm eſſe commenſurabiles. Quoniam enim A, B, potentia ſunt commenſurabiles; erit quadratum ex A, quadrato ex B, commenſurabile: Eſt autem eidem quadrato ex B, commenſurabile quadratum ex C: quòd B, C, longitudine ſint commenſurabiles, atque adeò & potentia; [b] igitur quadrata rectarum A, & C, commenſurabilia quoque inter ſe ſunt. Quare C, ipſi A, potentia eſt commenſurabilis. Et quia duarũ rectarum B, C, longitudine commenſurabilium B, eſt ipſi A, longitudine incommenſurabilis; [c] erit quoque reliqua C, eidem A, longitudine incommenſurabilis. Eſt ergo C, ſolùm potentia ipſi A, commenſurabilis. Et quia B, & C, Rationali expoſitæ A, potentia commenſurabiles, Rationales ſunt; Inuentæ erũt duæ Rationales B, C, longitudine quidem inter ſe commenſurabiles, potentia verò tantùm commenſurabiles expoſitæ Rationali A. Quod eſt propoſitum.*



b 12. decimi.

c 14. decimi.

Qvod.



QVOD si quis optet inuenire quotcunque lineas Rationales longitudine inter se commensurabiles, id efficiet hoc modo: Sumpta mensura quauis A, componantur quotlibet lineæ B, C, D, ex tot partibus ipsi A, æqualibus, quot sunt vnitates in totidem numeris inæqualibus E, F, G. Nam lineæ B, C, D, habentes communem mensuram A, longitudine commensurabiles erunt.

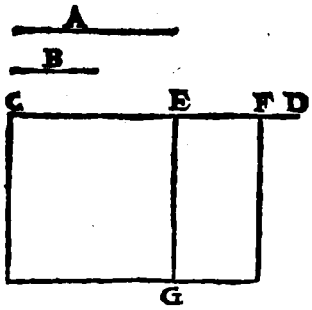
CAETERVM & omnes lineæ Rationales, non solùm expositæ Rationali, sed etiã inter se esse commensurabiles, facilè hoc modo demonstrabimus. [a] *Quoniã Rationales lineæ sunt, quæ expositæ Rationali sunt commensurabiles vel longitudine & potentia, vel potentia tantùm;* [b] *quæ autem eidem commensurabiles, & inter se commensurabiles sunt; manifestum est, Rationales lineas quascunque inter se commensurabiles esse.*

a 6. defin.

b 12. decimi.

LEMMA III.

Si sint duæ rectæ lineæ, erit vt prima ad secundam, ita quadratum, quod fit à prima, ad rectangulum, quod sub duabus illis rectis lineis continetur: Et vt secunda ad primam, ita rectangulum sub ipsis, ad quadratum ex prima.



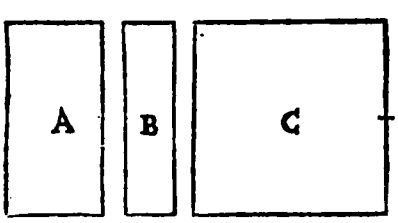
SINT duæ rectæ A, & B. Dico esse vt A, ad B, ita quadratum ex A, ad rectangulum sub A, & B, comprehensum. Ex quantacunque enim linea recta C D, abscindatur C E, ipsi A, æqualis, & E F, ipsi B. Deinde super C E, describatur quadratum C G, perficiaturq; rectangulum G F, contentum sub C E, & E F, hoc est, sub A, & B. [c] *Quoniam igitur est vt C E, ad E F, hoc est, vt A, ad B, ita parallelogrammũ C G, hoc est, quadratum ex A, ad parallelogrammum G F, sub A, & B, comprehensum; perspicuum est, si sint duæ rectæ lineæ, esse primam ad secundam, vt quadratum ex prima descriptum, ad rectangulum sub ipsis comprehensum.*

c 1. sexti.

EODEM modo erit, vt B, ad A, ita rectangulũ F G, ad quadratũ G C. Quod est propositũ.

LEMMA IIII.

SPATIVM Rationali spatio commensurabile, & ipsum Rationale est.



SIT spatium A, commensurabile Rationali spatio B. Dico & A, Rationale esse. Sit namque C, quadratũ Rationale, ratione cuius reliqua Rationalia dicuntur, vel irrationalia; quod nimirum ab exposita Rationali describitur. Quoniam igitur B, Rationale est, [d] *erit ipsum Rationali C, commensurabile: Est autem & A, ipsi B, commensurabile. Igitur A, & C, cùm commensurabilia sint ipsi B,* [e] *inter se quoque commensurabilia erunt; ac proinde spatium A, Rationali quadrato C, ex Rationali linea expositæ descripto commensurabile,* [f] *Rationale est. Quod erat demonstrandum.*

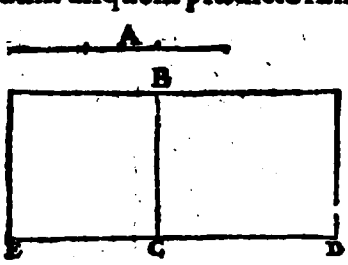
d 9. defin.

e 12. decimi.

f 9. defin.

THEOR. 17. PROPOS. 20. 19. 15.

QVOD sub Rationalibus longitudine commensurabilibus rectis lineis, secundùm aliquem prædictorum modorum, continetur rectangulum; Rationale est.



SIT expositæ Rationalis A, & spatium rectangulum B D, contentum sub Rationalibus longitudine commensurabilibus B C, C D, secundùm aliquem prædictorum modorum. (hoc est, secundùm aliquem trium modorum, quos in scholio 2. antecedentis propositionis explicuimus; ita vt vel altera ipsarum B C, C D, Rationali expositæ A, sit æqualis, vel neutra: sed tamẽ ei vtraque commensurabilis sit aut longitudine, aut potentia tantùm. Dico B D, rectangulum Rationale esse. Describatur enim ex altera earum; nempe ex B C, quadratum B E. Quoniam igitur B C, Rationalis Rationali expositæ A, commensurabilis est vel longitudine & potentia, vel potentia solùm;* [a] *erit quoque quadratum B E, ex B C, descriptum quadrato ex A, commensurabile:* [b] *Est autem quadratum ex A, Rationale, ratione cuius reliqua Rationalia vocantur, vel Irrationalia.* [c] *Igitur & B E, illi comensurabile, Rationale est. Quia verò B C, hoc est, E C, & C D, longitudine commensurabiles sunt; (ponuntur enim B C, C D, Rationales inter se longitudine cõmensurabiles.)*

a 3. defin.

b 8. defin.

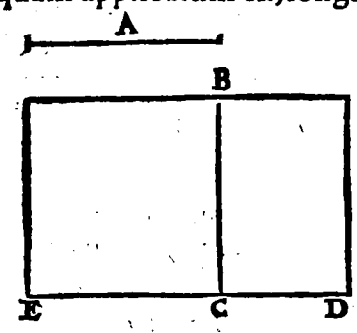
c 9. defin.

a 1. sexti. b 10. decimi. a & est vt E C, ad C D, ita E B, ad B D; b erunt quoque E B, B D, commensurabilia. Quare ex lemmate 4. antecedentis propos. B D, Rationali B E, commensurabile, Rationale est. Quod igitur sub Rationalibus longitudine commensurabilibus rectis, &c. Quod erat demonstrandum.

20. 16.

THEOR. 18. PROPOS. 21.

Si Rationale ad Rationalem applicetur, latitudinem efficit Rationalem, & ei, ad quam applicatum est, longitudine commensurabilem.



Sit rursum exposita Rationalis A, & alia Rationalis B C, secundùm aliquē modorum, quos in scholio 2. propos. 19. exposuimus, hoc est, siue B C, æqualis sit Rationali expositæ A, siue non, commensurabilis tamen ei vel longitudine & potentia, vel potentia tantùm. Applicetur autem ad B C, Rationale B D, latitudinem faciens C D. Dico C D, Rationalem esse, & ipsi B C, commensurabilem longitudine. Describatur enim ex B C, quadratum B E; quod similiter, vt in antecedenti propositione ostendemus Rationale esse. Quia igitur B E, B D, Rationalia sunt, c ipsa commensurabilia erunt quadrato ex lineâ Rationali expositâ A, descripto; d Ac propterea & commensurabilia inter se erunt: e Est autem vt B E, ad B D, ita E C, hoc est, B C, ad C D. Igitur & B C, C D, commēsurabiles sunt longitudine, vt in scholio propos. 10. huius lib. docuimus. Est ergo C D, ipsi B C, commensurabilis longitudine: f sed & Rationalis, quippe quę Rationali B C, atq; idcircò Rationali expositæ A, commensurabilis sit, vt in scholio propos. 12. huius lib. demonstrauimus. Quare latitudo C D, Rationalis est, & longitudine commensurabilis ipsi B C. Si igitur Rationale ad Rationalem applicetur, latitudinem efficit, &c. Quod erat demonstrandum.

c 9. defin. d 12. decimi. e 1. sexti. f 6. defin.

LEMMA I.

Recta linea potens spatium Irrationale, Irrationalis est.

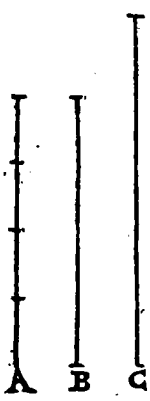


Possit recta A, spatium Irrationale, hoc est, quadratum ex A, æquale sit spatio cuipiam Irrationali. Dico A, Irrationalem esse. Si enim dicatur Rationalis; erit eius quadratum Rationale quoque, vt in demonstratione propos. 20. huius libri ostensum est. quod est absurdum. ponitur enim Irrationale. Non ergo A, Rationalis est. Igitur Irrationalis.

Hoc idem constat ex defin. 11. huius lib. Vbi lineæ potentes spatia Irrationalia, vocantur Irrationales.

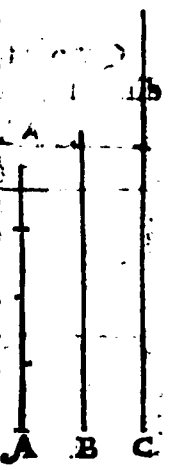
LEMMA II.

Dvas rectas Rationales potentia solùm commensurabiles inuenire.



Dvo genera sunt linearum Rationalium potentia tantū inter se commensurabilium. Aut enim altera earū est æqualis expositæ Rationali, aut neutra. Prioris generis lineas ita inueniemus: Sit exposita Rationalis A, cui æqualis sumatur B. Deinde ipsi B, a *inueniatur C, longitudine tantū incommēsurabilis, seu (quod idem est) potētia tantū commensurabilis. Quoniam igitur B, C, ipsi A, commensurabiles sunt, (B, quidem, q ei sit æqualis; at C, ex constructione, q inuenta sit potētia tantū commensurabilis ipsi B, atq; adeò ipsi A.) Rationales erunt B, & C: Sunt autē & potentia solùm cōmensurabiles. Inuenta ergo sunt duæ Rationales B, C, potentia tantū commensurabiles, quarū altera, nempe B, expositæ Rationali A, æqualis est.*

a 11. decimi.

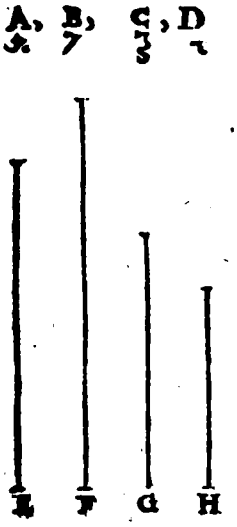


Posterioris autē generis lineas hac arte reperiemus: Sit rursus exposita Rationalis A, cui longitudine tantū incommensurabilis b *inueniatur B; & huic rursum longitudine tantū incommēsurabilis C, maior aut minor q̄ A. Dico B, C, esse Rationales potentia tantū commensurabiles. Quod enim sint solùm commensurabiles potentia, patet ex constructione. Quòd autem sint Rationales, ita ostendemus. Quoniam A, C, ipsi B, potentia sunt commensurabiles; erunt & A, C, commensurabiles potentia, vt in scholio propos. 12. huius lib. demonstrauimus. Quare cùm vtraq; B, C, expositæ Rationali A, sit potentia commensurabilis;* c *erūt B, C, Rationales. Inuenta ergo sunt B, & C, Rationales potentia tantùm commensurabiles.*

b 11. decimi. c 6. defin.

SCHOLIVM.

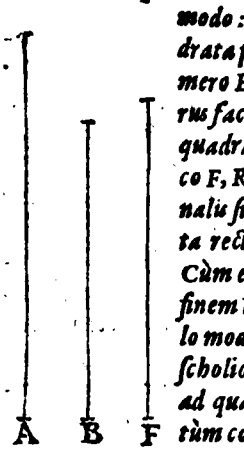
Qvod si inueniendæ sunt quotcunq; lineæ Rationales potentia tantū inter se commensurabiles, exequemur id hac ratione.



SVMANTVR per ea, quæ in ſcholio propoſ. 20. lib. 9. docuimus, tot numeri primi, quot lineæ Rationales quæruntur; nempe A, B, C, D. Deinde ſumpta linea Rationali E, fiat vt A, ad B, ita quadratũ ex E, ad quadratum ex F, vt in corollario propoſitionis 6. huius libri oſtendimus. Item vt B, ad C, ita quadratum ex F, ad quadratum ex G; & denique vt C, ad D, ita quadratum ex G, ad quadratum ex H. Dico rectas E, F, G, H, Rationales eſſe, & potẽtia tantùm commenſurabiles inter ſe. Quòd enim Rationales ſint, manifeſtum eſt. Cùm enim earum quadrata proportionem habeant, quam numeri A, B, C, D, (nempe quadratum ex E, ad quadratum ex F, vt numerus A, ad numerum B, ex conſtructione; ſimiliterq; quadratum ex F, ad quadratum ex G, vt B, ad C, & quadratum ex G, ad quadratum ex H, vt C, ad D. At verò ex æquo quadratum ex E, ad quadratum ex G, vt A, ad C; ſimiliterq; quadratum ex E, ad quadratum ex H, vt A, ad D; & denique quadratum ex F, ad quadratum ex H, vt B, ad D.) [a] erunt ipſa inter ſe commenſurabilia, ac propterea & rectæ ipſa potentia ſaltem commenſurabiles. Exiſtente ergo E, Rationali, erunt & reliquæ F, G, H, Rationales. Quòd autem potentia tantùm ſint commenſurabiles, ita oſtendemus. Quoniam earum quadrata proportionalia ſunt numeris primis A, B, C, D: numeri autem primi proportionem nõ habent, quam quadrati numeri, vt ad finem libri 8. docuimus; non habebunt etiam quadrata rectarum E, F, G, H, proportionem, quam numeri quadrati. [b] Quare recta E, F, G, H, longitudine incommenſurabiles ſunt. Oſtenſa ſunt autem Rationales, & potentia commenſurabiles. Rationales igitur ſunt, & potentia tantùm commenſurabiles. Quod eſt propoſitum.

a 6. decimi.

b 9. decimi.



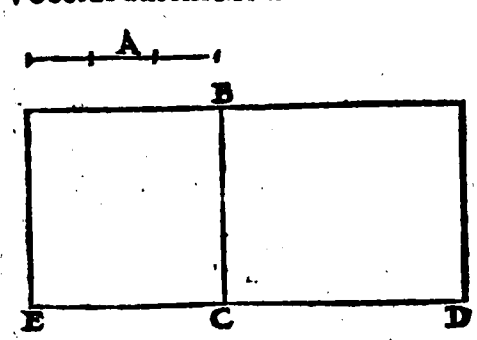
QVOD ſi propoſitis quotcunque Rationalibus potentia ſolùm commenſurabilibus, inuenienda ſit adhuc alia, quæ omnibus illis commenſurabilis ſit potentia tantùm, fiet id hoc modo: Sint propoſitæ duæ Rationales potentia tantùm commenſurabiles A, B, quarũ quadrata proportionem habeant, quam numerus C, ad numerum D: Sumpto autem alio numero E, qui ad quemlibet ipſorum C, D, primus ſit; (Inuenietur autem huiuſmodi numerus facilè, ſi ſumatur primus, qui neutrum ipſorum C, D, metiatur.) fiat vt D, ad E, ita quadratum lineæ B, ad quadratum lineæ F, per corollarium propoſitionis 6. huius libri. Dico F, Rationalem eſſe, & ipſis A, B, potentia ſolùm commenſurabilem. Quòd enim Rationalis ſit, ex eo patet, quòd commenſurabilis ſit Rationali B, ſaltem potentia, cùm quadrata rectarum B, F, proportionem habentia, quam numerus D, E, [c] commenſurabilia ſint. Cùm ergo proportio D, ad E, non ſit, qua numeri quadrati ad numerum quadratum, vt ad finem libri 8. oſtendimus; (quòd D, & E, qui ambo non ſunt quadrati, cùm E, primus nullo modo quadratus ſit, ſint inter ſe primi, ideoq; plani non ſimiles, ac proinde ex ijs, quæ in ſcholio propoſitionis 26. libri 8. oſtendimus, proportionem non habeant, quam quadratus ad quadratum) [d] erunt rectæ B, F, longitudine incommenſurabiles. Ergo potentia tantùm commenſurabiles. Eadem ratione erũt A, & F, potentia ſolùm commenſurabiles. Nam ex æquo erit quadratum ex A, ad quadratum ex F, vt C, numerus ad numerum E. Cùm ergo hi numeri proportionem non habeant, quam quadratus ad quadratum; (quod oſtendemus perinde, vt idem demonſtrauimus de numeris D, & E,) erunt A, F, longitudine incommenſurabiles, &c.

c 6. decimi.

d 9. decimi.

THEOR. 19. PROPOS. 22. 21. 19.

QVOD ſub Rationalibus potentia ſolùm commenſurabilibus rectis lineis continetur rectangulum; Irrationale eſt: Et recta linea ipſum potens, Irrationalis eſt. Vocetur autem Media.



SIT expoſita Rationalis A, & rectangulum B D, contentum ſub Rationalibus B C, C D, potentia tantùm commenſurabilibus ſecundùm aliquem modorum, quos in lemmate 2. præcedentis propoſ. diximus. (hoc eſt, ſiue altera illarum æqualis ſit Rationali expoſitæ A, ſiue non.) Dico rectangulum B D, eſſe Irrationale; & rectam, cuius quadratum ipſi B D, æquale eſt, Irrationalem quoque, quæ vocetur Media. Deſcribatur enim ex altera illarum, vt ex B C, quadratum B E, quod erit Rationale, vt in demonſtratione propoſ. 20. diximus. [a] Et quoniam eſt vt E C, hoc eſt, B C, ad C D, vt B E, ad B D. Eſt autem B C, ipſi C D, longitudine incommenſurabilis, ex hypotheſi; erit ex iis, quæ in ſcholio propoſ. 10. huius libri tradidimus, B E, ipſi B D, incommenſurabile. [b] Quare cùm B E, commenſurabile ſit quadrato ex Rationali expoſita A: ſit autem B E,

a 1. ſexti.

b 9. defin.

a 14. decimi. ipſi B D, incõmenſurabile; a erit quoq; quadratũ ex Rationali expoſita A, eidem B D, incommenſurabile; Ac propterea B D, quadrato Rationalis expoſitæ incõmenſurabile exiſtens, b Irrationale
b 10. defin. eſt. Quamobrem & recta potens ipſum B D, Irrationalis eſt, ex 1. lemmate propoſ. antecedentis.
c 17. ſexti. VOCETVR autem hæc linea potens ipſum B D, Media, c propterea quòd media proportionalis eſt inter duas B C, C D, Rationales potẽtia tantùm inter ſe commenſurabiles, quippe cùm eius quadratum æquale ſit rectangulo B D, ſub ipſis B C, C D, comprehenſo. Quod igitur ſub Rationalibus potentia ſolùm commenſurabilibus, &c. Quod demonſtrandum erat.

SCHOLIVM.

ITAQVE omnis linea media proportionalis inter duas Rationales potentia tantùm inter ſe commen-
a 17. ſexti. *ſurabiles, Media vocabitur.* a *Cùm enim eius quadratum æquale ſit rectangulo ſub talibus Rationalibus com prehenſo, quod quidem in hoc theoremate oſtenſum eſt, eſſe Irrationale, erit latus ipſius, nempe media proportionalis inter dictas Rationales, linea Irrationalis, qua Media appellatur. Ex quo lineam Mediam facilè deſcribemus, ſi dicamus eam eſſe lineam Irrationalem, qua medio loco proportionalis eſt inter duas lineas Rationales potentia tantùm inter ſe commenſurabiles. Vel qua poteſt rectangulum ſub duabus Rationalibus potentia tantùm inter ſe commenſurabilibus contentum. Nam ſola hæc linea Media hoc loco appellatur.*

VT autem rectè hoc loco monet Campanus, non ſolùm recta potens rectangulum Irrationale ſub duabus rectis Rationalibus potentia tantùm commenſurabilibus contentum, Irrationalis eſt, vocaturq; Media: Verùm etiam quadratum ipſius, vel rectangulum illud medium dicitur, quia medio loco proportionale eſt inter quadrata illarum rectarum Rationalium potentia ſolùm commenſurabilium, quemadmodum & recta ipſa media proportionalis eſt inter dictas Rationales. Nam ſi tres linea ſint continuè proportionales, quales ſunt B C, & recta Irrationalis, qua Media dicitur, & C D; erunt quoque rectilinea ſimilia, ſimiliterq; deſcripta ſuper ipſas, cuiuſmodi ſunt earum quadrata proportionalia, vt in ſcholio propoſ. 22. lib. 6. demonſtrauimus. Quare quadratum ex Media deſcriptum proportionale eſt inter quadrata rectarum B C, C D, ideoq; Medium appellari poteſt.

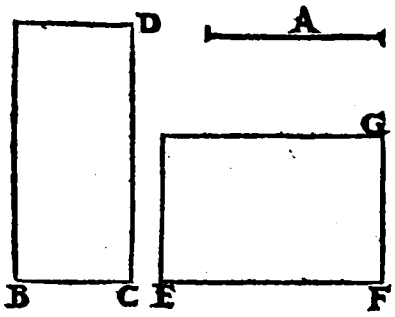
HOC autem non ita intelligas, vt putes omne rectangulum Medium contineri ſub duabus rectis Rationalibus potentia tantùm commenſurabilibus, quale eſt Medium B D. Hoc enim falſum eſt, cùm & ſpatium Medium contineri poſſit ſub duabus Irrationalibus, nempe Mediis longitudinè, vel potentia tantùm inter ſe commenſurabilibus, vt ex propoſ. 25. & 26. huius lib. conſtabit. Itaque non reciprocantur, rectangulum ſub duabus Rationalibus potentia tantùm inter ſe commenſurabilibus contentum, & ſpatium Medium. Omne ſiquidem rectangulum ſub duabus Rationalibus potentia tantùm commenſurabilibus contentum, Medium eſt, vt oſtendimus: At non omne ſpatium Medium ſub duabus Rationalibus potentia tantùm commenſurabilibus continetur. Vniuersè tamẽ omne ſpatium Medium, æquale eſt alteri cuipiam Medio ſub duabus Rationalibus potentia tantùm commenſurabilibus contento. Nam aliàs recta ipſum potens, non eſſet dicenda Media, quia non poſſet rectangulum ſub duabus Rationalibus potentia tantùm commenſurabilibus comprehenſum; vel non eſſet proportionalis inter duas Rationales potentia tantùm commenſurabiles.

VNDE Medium deſcribi ſic poterit, vt dicamus, illud eſſe rectangulum ſub duabus Rationalibus potentia tantùm commenſurabilibus contentũ: Vel certè rectangulum, quod alteri cuipiam rectangulo ſub duabus Rationalibus potentia ſolùm commenſurabilibus comprehenſo æquale eſt, ita vt ipſum poſſit linea recta, qua Media in hoc theoremate eſt vocata. Omne enim Medium nõ contentum ſub duabus huiuſmodi Rationalibus reuocari poteſt ad aliud Medium, cuius latera ſunt dua linea Rationales potentia tantùm commenſurabiles, vt in ſcholio ſequentis theorematis oſtendemus.

22. 20.

THEOR. 20. PROPOS. 23.

QVOD à Media fit, ad Rationalem applicatum, latitudinẽ efficit Rationalem, & ei, ad quam applicatum eſt, longitudine incommenſurabilem.



a 45. primi. SIT linea Media A, & Rationalis B C, ſiue ea ſit expoſita, ſiue expoſitæ commenſurabilis longitudine & potentia, vel potentia tantũ; a appliceturq; ad B C, rectangulum B D, æquale quadrato ex Media A, vel rectangulo, quod huic quadrato æquale eſt, faciatq; latitudinẽ C D. Dico C D, Rationalem eſſe, & ipſi B C, longitudine incommenſurabilẽ. Quoniam enim A, Media eſt, ipſa poterit rectangulũ ſub duabus rectis Rationalibus potentia tantũ inter ſe commenſurabilibus contentum; aliàs nõ poſſet dici Media. Sit igitur illud rectangulum E G, ſub Rationalibus E F, F G, potentia tantùm commenſurabilibus contentũ. Et quia A, ex hypotheſi, poteſt etiam ipſum B D; æqualia erunt B D, & E G, b lateraq; idcircò habebunt reciproca circa æquales angulos; nempe erit vt B C, ad E F, ita F G, ad C D;
b 14. ſexti.
c 22. ſexti. c Ac propterea quoq; vt quadratũ ex B C, ad quadratum ex E F, ita quadratum ex F G, ad quadratum ex C D: Sed quadratũ ex B C, commenſurabile eſt quadrato ex E F. (quòd rectæ B C, E F, ponantur Rationales; atque adeò inter ſe commenſurabiles vel longitudine & potentia, vel potẽtia tantùm.)

tantùm.) [a] Igitur & quadratum ex F G, commensurabile erit quadrato ex C D; propterea quę & rectæ F G, C D, commensurabiles erunt saltem potentia. Ergo cùm F G, Rationalis expositæ Rationali sit commensurabilis, si ipsa non est exposita Rationalis; erit quoque C D, expositæ Rationali commensurabilis, vt ostendimus in scholio propos. 12. huius lib. atq; adeò C D, ex definitione, Rationalis erit. Dico quòd & longitudine incommensurabilis ipsi B C. Quoniam enim E F, F G, Rationales sunt potentia tantùm commensurabiles, hoc est, longitudine incommensurabiles; & est vt E F, ad F G, ita quadratum ex E F, ad rectangulum E G, sub E F, F G, contentum, ex lemmate 3. propos. 19. huius lib. [b] erit quadratum ex E F, incommensurabile rectangulo E G, atque adeò rectangulo B D, quod huic æquale est. Atqui quadratum ex E F, commensurabile est quadrato ex C D. (quòd E F, C D, Rationales sint, atque idcirco saltem potentia commensurabiles.) Igitur cùm quadratum ex C D, commensurabile sit quadrato ex E F; at rectangulum B D, eidem quadrato ex E F, incommensurabile: [c] incommensurabilia erunt quadratum ex C D, & rectangulum B D. Est autem ex lemmate 3. propos. 19. huius lib. quadratum ex C D, ad rectangulum B D, vt recta C D, ad rectam B C. [d] Incommensurabiles ergo sunt longitudine C D, & B C. Rationalis ergo est C D, & Rationali B C, longitudine incommensurabilis. Quamobrem, quod à Media fit, ad Rationalem applicatum, &c. Quod demonstrandum erat.

a 10. decimi

b 10. decimi

c 13. decimi.

d 10. decimi

SCHOLIVM.

FACILIVS quàm ex propos. 45. lib. 1. applicabimus ad B C, rectangulum quadrato ex A, æquale. si ipsis B C, & A, [a] sumatur tertia proportionalis pro latere C D. Cùm enim B C, A, & C D, proportionales sint; [b] erit rectangulum B D, sub extremis B C, C D, contentum, æquale quadrato mediæ proportionalis A.

a 11. sexti.

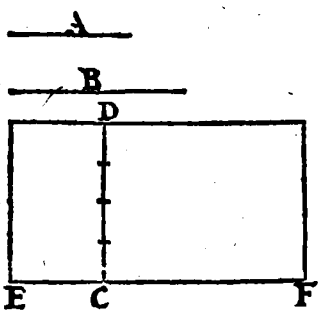
b 17. sexti.

HAC arte vtendum erit & in sequentibus, quando ad aliquam rectam applicandum erit rectangulum æquale quadrato cuiuspiam lineæ rectæ.

PORRO ex hoc theoremate manifestum est, omne Medium, hoc est, spatium, quod lineæ Medię potest, æquale esse cuidam alteri rectangulo contento sub duabus Rationalibus potentia tantùm commensurabilibus. Nam si illi Medio ad Rationalem lineam applicetur æquale rectangulum, faciet id per hoc theorema, alterum latus Rationale, longitudine lineæ Rationali incommensurabile. Quare rectangulum hoc applicatum Medio æquale, Medium erit sub duabus Rationalibus potentia solùm commensurabilibus contentum. Atq; hoc modo quodcunque Medium reduci poterit ad Medium contentum sub duabus Rationalibus potentia tantum commensurabilibus.

THEOR. 21. PROPOS. 24. 23. 21.

MEDIAE commensurabilis, Media est.



SIT Mediæ A, recta B, commensurabilis siue longitudine & potentia, siue potétia tantùm. Dico & B, Mediam esse. Exposita enim sit Rationalis C D, [a] ad quam applicetur rectangulum D E, æquale quadrato ex A, Media. Quoniam igitur D E, Medium ad Rationalem C D, applicatum, facit C E, latitudinem; [b] erit C E, Rationalis ipsi C D, longitudine incommensurabilis. Rursus ad C D, Rationalem [c] applicetur rectangulum D F, quadrato ex B, æquale. Et quia rectæ A, B, ponuntur commensurabiles, erunt quoque eorum quadrata, hoc est, rectangula ipsis æqualia, D E, D F, commensurabilia. [d] Est autem vt D E, ad D F, ita recta E C, ad rectam C F. [e] Igitur E C, C F, longitudine sunt commensurabiles: Sed E C, ostensa est Rationalis, & longitudine ipsi C D, incommensurabilis. [f] Igitur & C F, longitudine eidem C D, incommensurabilis est. Cùm ergo & Rationalis sit, propterea quòd Rationali expositæ C D, sit commensurabilis; (Nam cùm E C, C F, sint longitudine ostensæ commensurabiles, & E C, ipsi C D, commensurabilis saltem potentia, quòd Rationalis sit; erit & C F, eidem C D, commensurabilis potentia, ex iis, quæ in scholio propos. 12. huius lib. scripsimus.) erunt C D, C F, Rationales potentia tantùm commensurabiles. [g] Ac proinde recta B, potens rectangulum D F, sub Rationalibus potentia tantùm commensurabilibus C D, C F, Media est. Mediæ igitur commensurabilis, Media est. Quod ostendendum erat.

a 45. primi.

b 23. decimi

c 45. primi.

d 1. sexti.

e 10. decimi

f 14. decimi

g 22. decimi

COROLLARIVM.

Ex hoc manifestum est, spatium Medio spatio commensurabile, Medium esse. Postquam enim demonstratum est D F, commensurabile esse Medio D E, ostensum ex eo modo fuit D F, esse quoque Medium: nimirum sub Rationalibus potentia tantùm commensurabilibus C D, C F, contentum. Eademq; ratio est in cæteris. Quod tamẽ hoc etiam modo potest demonstrari.

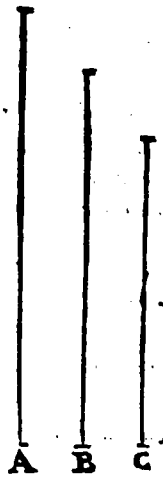
SIT spatium D F, spatio Medio D E, commẽsurabile. Dico & D F, Medium esse. Posit enim A, Media ipsum D E, Medium. (Nam cùm D E, Medium sit, poterit ipsum recta, quæ Media dicitur, vt in scholio propos. 22. huius libri tradidimus.) & B, ipsum D F. Quoniam igitur D E, D F, commensurabilia sunt, erunt quoque quadrata ex A, B, ipsis æqualia, commensurabilia. Quare A, B, recta potentia saltem sunt commensurabiles; Atque idcirco existente A,

Media, erit & B, illi commensurabilis Media, vt in hoc theoremate ostensum est. Igitur & D F, Medium erit. Omne enim spatium, quod potest Media, Medium appellatur, vt in scholio propos. 22. huius lib. docuimus.

LEMMA I.

QVEMADMODVM autem in lemmate 1. propos. 19. huius lib. de Rationalibus dictum est, ita & hîc de Mediis dicemus. Nimirum rectam lineam Mediæ longitudine commensurabilem, dici Mediam, & ipsi commensurabilem non solùm longitudine, sed & potentia; Vniuersè enim quæ longitudine commensurabiles sunt, etiam potentia sunt commensurabiles. Si verò recta quædam linea Mediæ potentia fuerit commensurabilis, si quidem & longitudine, dicetur & sic Media, & ipsi commensurabilis longitudine & potentia. Quod si Mediæ rursus aliqua linea commensurabilis existens potentia, longitudine fuerit incommensurabilis, dicetur & sic Media ipsi potentia solùm commensurabilis.

LEMMA II.



DVAS rectas Medias longitudine commensurabiles; Item duas potentia tantùm commensurabiles inuenire.

SIT Media aliqua linea A, cui si inueniantur duæ rectæ commensurabiles B, C; illa quidem longitudine, hæc verò potentia tantùm; [a] *erit vtraque B, C, Mediæ A, commensurabilis, Media. Cùm ergo A, B, sint longitudine cõmensurabiles; & A, C, potẽtia tantùm; erũt inuentæ A, B, Mediæ longitudine cõmensurabiles; & A, C, Mediæ potentia solùm cõmensurabiles. Quod est propositum.*

a 24. decimi.

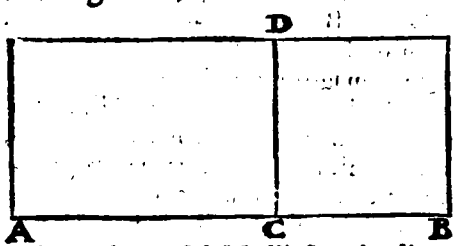
SCHOLIVM.

QVAMVIS omnis linea recta Mediæ commensurabilis, Media sit; non tamen omnis Media cuilibet Mediæ est commensurabilis; cùm duæ Mediæ dari possint prorsus incommensurabiles, longitudine videlicet, & potentia, vt ex propos. 36. huius lib. apparebit. Vbi etiam docebimus, quánam via inueniẽdæ sint duæ Mediæ longitudine et potẽtia incõmensurabiles.

24. 23.

THEOR. 22. PROPOS. 25.

QVOD sub Mediis longitudine commensurabilibus rectis lineis continetur rectangulum, Medium est.



CONTINEATVR rectãgulum A D, sub Mediis A C, C D, longitudine commensurabilibus. Dico A D, Medium esse. Describatur ex C D, Media quadratum B D, quod erit Medium. [a] Et quoniam est vt A C, ad C B, ita A D, ad D B: Sunt autem A C, C B, hoc est, A C, C D, longitudine commẽsurabiles; [b] erunt A D, D B, cõmensurabilia. Quare spatium A D, Medio D B, commensurabile, Medium est, ex coroll. præcedentis propos. Quod ergo sub Mediis longitudine commensurabilibus, &c. Quod erat ostendendum.

a 1. sexti.

b 10. decimi.

25. 23.

THEOR. 23. PROPOS. 26.

QVOD sub Mediis potentia tantùm commensurabilibus rectis lineis continetur rectangulum, vel Rationale est, vel Medium.

SIT rectangulum A C, comprehensum sub Mediis A B, B C, potentia tantùm commensurabilibus. Dico A C, esse vel Rationale, vel Medium. Describantur ex A B, B C, quadrata A D, C E, quæ Media erunt, vt in scholio propos. 22. huius lib. docuimus; cùm rectæ A B, B C, Mediæ ponantur. Exponatur Rationalis F G, [c] ad quam applicetur rectangulum F H, quadrato A D, ex A B, descripto æquale; & ad H I, rectangulum I K, rectangulo A C, æquale; & denique ad K L, rectangulum L M, æquale quadrato C E, ex B C, descripto; eritq; totum F M, vnum rectangulum, quemadmodum propos. 45. lib. 1. est ostensum. Quia verò A D, C E, Media sunt, erunt & F H, L M, illis æqualia, Media: quæ cùm applicentur ad Rationales F G, K L, ([d] est enim & K L, Rationali F G, æqualis, ob parallelogrammum F K, Rationalis.) faciantque latitudines G H, K M, [e] erunt rectæ G H, K M, Rationales, ipsi F G, seu K L, longitudine incommensurabiles. Et quia rectæ A B, B C, potentia inter se sunt commensurabiles, erunt & earum quadrata A D, C E, atque adeò & ipsis æqualia rectangula F H, L M, commensurabilia: [f] Vt autem F H, ad L M, ita est recta G H, ad K M. [g] Igitur G H, K M, longitudine inter se commensurabiles sunt. Quare G H, K M, Rationales ostensæ, sunt longitudine inter se commensurabiles, Rationali verò F G, solùm commensurabiles potentia, cùm ei ostensæ sint longitudine incommensurabiles; [b] Ac propterea rectangulum sub ipsis

c 45. primi.

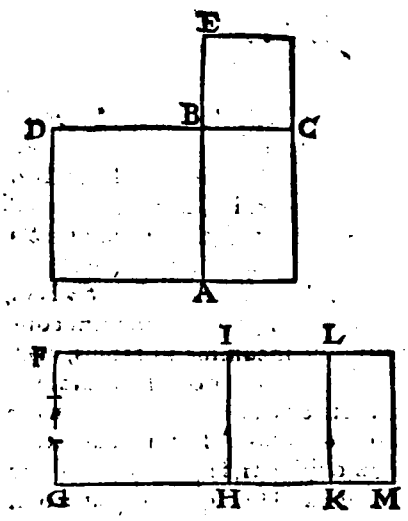
d 34. primi.

e 23. decimi.

f 1. sexti.

g 10. decimi.

b 20. decimi



ipsis GH, KM, Rationale est. Et quoniam est, vt DB, ad BC, ita AB, ad BE; (quòd DB, BC, ipsis AB, BE, sint æquales, vtraque vtriq;) [a] & vt DB, ad BC, ita AD, ad AC; & vt AB, ad BE, ita AC, ad CE; erit quoq; vt AD, ad AC, ita AC, ad CE; atque adeò AD, AC, CE, proportionalia sunt. Igitur & illis æqualia FH, HL, LM, proportionalia erunt: [b] Habent autem rectæ GH, HK, KM, easdem proportiones, quas rectangula FH, HL, LM. Igitur & rectæ GH, HK, KM, proportionales sunt; [c] propterea q; rectangulum sub GH, KM, quadrato ex HK, æquale est. Est autem rectangulum sub GH, KM, ostensum Rationale. Igitur & quadratū ex HK, Rationale est; ideoq; & recta HK, Rationalis erit; [d] & ob hoc ipsi FG, Rationali expositę, hoc est, ipsi HI, commensurabilis vel longitudine, & potentia, vel sòlùm potentia. Et si quidem HK, ipsi HI, longitudine sit commensurabilis; [e] rectangulum HL, sub Rationalibus HI, HK, longitudine commensurabilibus contentum, hoc est, AC, illi æquale, erit Rationale. Si verò HK, ipsi HI, potentia solùm commensurabilis sit; [f] erit rectangulum HL, sub Rationalibus HI, HK, potentia tantùm commensurabilibus contentum, hoc est, AC, illi æquale, Medium. Est ergo AC, rectangulum sub Mediis AB, BC, potentia tantùm commensurabilibus contentum, vel rationale, vel Mediū. Quocirca, quod sub Mediis potentia tantū cōmensurabilibus, &c. Quod erat ostendendū.

a 1. sexti.
b 1. sexti.
c 17. sexti.
d 6. defin. 10.
e 20. decimi.
f 22. decimi.

SCHOLIVM.

FACILIVS quàm ex 45. propos. lib. 1. applicabimus ad HI, rectangulum ipsi AC, æquale, [a] *si tribus rectis HI, AB, BC, quarta proportionalis sumatur pro latere HK.* [b] *Nam rectangulum sub extremis HI, HK, æquale erit rectangulo sub mediis AB, BC.*

a 12. sexti.
b 16. sexti.

HAC eadem arte vtemur insequentibus, quando ad aliquam rectam applicandum erit rectangulum æquale alteri rectangulo.

QVONIAM verò in hoc theoremate demonstratur, rectangulum contentum sub duabus rectis Mediis potentia tantùm commensurabilibus esse vel Rationale, vel Medium; docebit Euclides propos. 28, quánam ratione inuenienda sint duæ Mediæ potētia tantùm commensurabiles, quæ Rationale comprehendant: Propos. verò 29. duas Medias potentia solùm commensurabiles inquiret, quæ spatium Medium contineant.

ITAQVE habemus ex his, [c] *rectangulum contentum sub duabus Rationalibus longitudine commensurabilibus esse Rationale;* [d] *Sub duabus verò Rationalibus potentia tantùm commensurabilibus contentum rectangulum esse Irrationale, appellariq; Medium, & rectam quæ ipsum potest, Mediam. Rursus ex demonstratis constat,* [e] *rectangulum comprehensum sub duabus Mediis longitudine commensurabilibus esse Medium;* [f] *Rectangulum autem sub duabus Mediis potentia solùm commensurabilibus comprehensum esse vel Rationale, vel Medium.*

c 20. decimi.
d 21. decimi.
e 25. decimi.
f 26. decimi.

QVOD si quis roget, qualénam rectangulum sit illud, q̄ sub duabus Mediis longitudine & potētia incōmensurabilibus cōtinetur; Respondemus illud nec Rationale esse, nec Medium sed tertiū quoddā genus constituere; nēpe æquale esse rectangulo, q̄ cōtinetur sub linea Rationali, & Irrationali, quæ Media appellatur.

SIT enim rectangulum AC, comprehensum sub duabus Mediis AB, BC, longitudine & potentia incommensurabilibus. Dico AC neq; Rationale esse, neq; Medium, &c. Constructis enim eisdem, vt in theoremate, ostendemus similiter, rectas GH, KM, Rationales esse, & ipsi FG, longitudine incommensurabiles. Et quia rectæ AB, BC, ponuntur incommensurabiles longitudine & potentia; erunt & earum quadrata AD, CE, atque adeò ipsis æqualia rectangula FH, LM, incommēsurabilia: [g] *Vt autem FH, ad LM, ita est recta GH, ad rectam KM.* [h] *Igitur rectæ GH, KM, longitudine inter se sunt incommensurabiles. Quare GH, KM, ostensæ Rationales, sunt potentia tantùm inter se commensurabiles;* [i] *Ac propterea rectangulum sub ipsis GH, KM, Irrationale est, quod Medium appellatur, & recta ipsum potens, Irrationalis, quæ dicitur Media.* [k] *Potest autem rectangulum sub ipsis GH, KM, recta HK: (Nam, vt prius, ostendemus tres GH, HK, KM, esse proportionales.) Igitur HK, Irrationalis est, & Media. Quare IK, Rationale non est: si enim Rationale esset,* [l] *faceret ipsum ad Rationalem HI, applicatum latitudinem HK, Rationalem, & ipsi HI, longitudine commensurabilem. Quod est absurdum. ostensa enim est HK, Irrationalis ac Media. Eodem modo neq; IK, Medium est; Si enim esset Medium,* [m] *faceret ipsum applicatum ad Rationalem HI, latitudinem HK, Rationalem, & ipsi HI, longitudine incommensurabilem. quod est absurdum. ostensa est enim HK, Irrationalis, & Media. Itaque cùm IK, neq; Rationale sit, neq; Medium; necessariò neq; AC, illi æquale. Rationale erit, neque Medium, sed tertium quoddam genus constituet, nempe æquale erit ipsi IK, quod sub Rationali, & Media, continetur, cùm HI, Rationalis sit, & HK, ostensa Media. Ex quibus efficitur, rectam quæ potest spatiū sub duabus Mediis longitudine & potentia incommēsurabilib. (quales ponuntur AB, BC,) comprehensum, posse quoq; rectangulum sub Rationali, & Irrationali, quæ Media vocatur, cōtentum. Quod est propositum.*

g 1. sexti.
h 10. decimi.
i 21. decimi.
k 17. sexti.
l 21. decimi.
m 23. decimi.

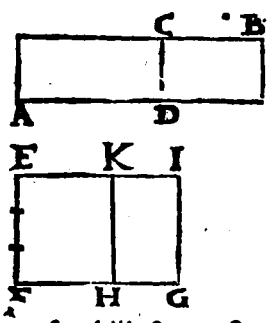
26. 22.

THEOR. 24. PROPOS. 27.

MEDIVM non superat Medium Rationali.

SVPERET Medium AB, Medium AC, rectangulo DB. Dico DB, nõ esse Rationale. Sit enim, si fieri potest, DB, Rationale. Expositâ ergo Rationali linea EF; [a] ad ipsam applicetur rectangulum EG, Medio AB, æquale; & Medio AC, rectangulum EH, æquale, vt sit reliquum HI, Rationali DB, æquale. Erunt igitur EG, EH, æqualia Mediis AB, AC, Media; & HI, æquale Rationali DB, Rationale. Quoniam ergo Media EG, EH, ad Rationalem EF, sunt applicata; [b] erunt rectæ FG, FH, Rationales, & ipsi EF, incommensurabiles longitudine. Rursus, quia Rationale HI, applicatum est ad Rationalem HK; ([c] est enim recta HK, Rationali EF, æqualis) [d] erit recta HG, Rationalis, & ipsi EF, longitudine commensurabilis. Quare cùm HG, EF, longitudine sint commensurabiles; & EF, ipsi FH, longitudine incommensurabilis, vt est ostensum; [e] erit & HG, eidem FH, longitudine incommensurabilis. Est autem vt FH, ad HG, ita quadratum ex FH, ad rectangulum sub FH, HG, ex tertio lemmate propos. 19. huius lib. [f] Igitur quadratum ex FH, incommensurabile est rectangulo sub FH, HG. Sed quadrato ex FH, commensurabile est quadratum ex HG; (quòd sint ambo ex lineis Rationalibus FH, HG, descripta) [g] atque adeò & duo quadrata ex FH, HG, simul, quadrato ex FH, commensurabilia sunt: Et rectangulo sub FH, HG, commensurabile est id, quod bis continetur sub FH, HG, (quia hoc illius est duplum.) Igitur per ea, quæ in scholio propos. 14. huius lib. ostendimus, & duo quadrata ex FH, HG, simul incommensurabilia sunt rectangulo sub FH, HG, bis. [h] Quare & compositum ex quadratis rectarum FH, HG, & ex rectangulo bis sub FH, HG, incommensurabile est composito ex quadratis rectarum FH, HG. [i] At quadratis ex FH, HG, vnà cum rectangulo bis sub FH, HG, æquale est quadratum ex FG. Igitur & quadratum FG, incommensurabile est composito ex quadratis rectarum FH, HG: Est autem compositum hoc Rationale, ex lemmate 4. propos. 19. huius lib. quòd ostensum sit commensurabile quadrato Rationali ex FH. Igitur cùm huic composito, quod Rationale est, incommensurabile sit quadratum ex FG, [k] erit quadratum ex FG, Irrationale; [l] ac propterea & recta FG, Irrationalis erit. Quod est absurdum. ostensa enim est FG, Rationalis longitudine ipsi EF, incommensurabilis. Non ergo DB, quo Medium AB, superat Medium AC, Rationale est. Quam ob rem Medium non superat Medium Rationali. Quod erat ostendendum.

a 45. primi.
b 23. decimi
c 34. primi.
d 21. decimi.
e 14. decimi.
f 10. decimi.
g 16. decimi
b 17. decimi.
i 4. secundi.
k 10. defin.
l 11. defin.



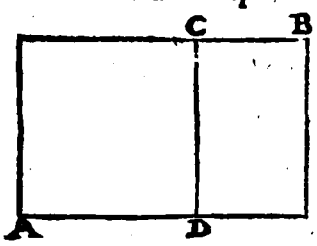
SCHOLIVM.

Ex dictis & hoc demonstrabimus.

RATIONALE superat rationale Rationali.

RATIONALE enim AB, superet Rationale AC, spatio DB. Dico DB, quod esse Rationale. Quoniã enim AB, AC, Rationalia sunt; [a] erunt AB, AC, commensurabilia quadrato Rationalis expositæ; [b] atq; adeò & inter se commensurabilia. Quare cùm totum AB, cõpositum ex AC, DB, commensurabile sit ipsi AC; erit quoq; idem AB, reliquo DB, commẽsurabile, ex coroll. propos. 16. huius lib. Est autẽ AB, Rationale. Igitur & DB, ex lemmate 4. propos. 19. huius lib. Rationale est. Quod est propositum.

a 29. defin.
b 12. decimi.



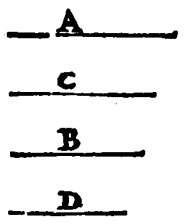
27. 0.

PROBL. 4. PROPOS. 28.

MEDIAS inuenire potentia tantùm commensurabiles, quæ Rationale comprehendant.

EXPONANTVR per lemma 2. propos. 21. huius lib. duæ Rationales AB, potentia tantùm cõmensurabiles [a] inter quas media proportionalis sumatur C; [b] fiatq; vt A, ad B, ita C, ad D. Dico C, D, esse Medias potẽtia tantùm commẽsurabiles, quæ Rationale comprehendant. Quoniam enim A, B, Rationales ponuntur potentia tantùm commensurabiles; [c] erit rectangulum sub ipsis contentum, Irrationale, quod Medium vocatur; atq; adeò [d] cùm ipsum posit recta C, erit C, Media. Et quoniam est vt A, ad B, ita C, ad D; suntq; A, B, potentia tantùm commensurabiles; erunt quoque C, D, solùm commensurabiles potentia, vt in scholio propos. 10. huius lib. ostendimus. [e] Est ergo & D, Mediæ C, commẽsurabilis, Media. Quare inuentæ sunt Mediæ C, D, potentia tantùm commensurabiles. Dico iam ipsas continere Rationale. Quoniam enim est vt A, ad B, ita C, ad D; & permutando vt A, ad C, ita B, ad D; Vt autem A, ad C, ita est C, ad B; erit quoque vt C, ad B, ita B, ad D; ideoq; B, media proportionalis inter C, & D, [f] poterit rectangulum sub ipsis C, D, comprehensum. Est autem quadratum ex B, linea Rationali, Rationale. Igitur & rectangulum sub C, D, Rationale est. Medias ergo inuenimus C, D, potenta tantùm commensurabiles, quæ Rationale comprehendunt. Quod faciendum erat.

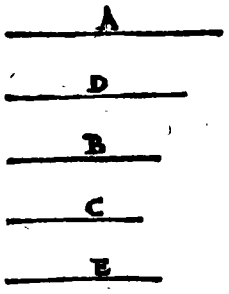
a 13. sexti.
b 12. sexti.
c 22. decimi.
d 17. sexti.
e 24. decimi
f 17. sexti.



PROBL. 5.

PROBL. 5. PROPOS. 29. 28.

MEDIAS inuenire potentia tantùm cõmenſurabiles, quæ Medium contineãt. 0.



EXPONANTVR per ea, quę in ſcholio propoſ. 21. huius lib. demonſtrauimus, tres Rationales A, B, C, potentia tantùm commenſurabiles; [a] & inter A, B, media proportionalis inueniatur D. [b] Deinde fiat vt B, ad C, ita D, ad E. Dico D, E, Medias eſſe, potentia tantùm commenſurabiles, quæ Medium contineant. Quoniam enim A, B, Rationales ſunt potentia ſolùm commenſurabiles; erit rectangulum ſub A, B, atque adeò & quadratum ex D; [c] quod illi æquale eſt, [d] Irrationale, quod Medium dicitur; & ipſa recta D, Media. Et quia eſt vt B, ad C, ita D, ad E; ſunt autem B, C, Rationales, & potentia ſolùm commenſurabiles; erunt quoq; D, E, potentia ſolùm commenſurabiles, vt in ſcholio propoſ. 10. huius lib. demonſtratum eſt. Cùm ergo D, Media ſit, [e] erit & E, illi potentia ſolùm commenſurabilis, Media; Ac propterea D, E, Mediæ ſunt potentia tantùm commenſurabiles. Dico iam ipſas continere Medium. Quoniam enim eſt vt B, ad C, ita D, ad E; & permutando vt B, ad D, ita C, ad E: Vt autem B, ad D, ita D, ad A; erit quoque vt D, ad A, ita C, ad E. [f] Rectangulum igitur ſub D, E, æquale eſt ei, quod ſub A, C: Eſt autem quod ſub A, C, Rationalibus potentia ſolùm commenſurabilibus, [g] Irrationale, & Medium. Igitur & rectangulum ſub D, E, Medium eſt. Medias ergò inuenimus D, E, potentia tantùm commenſurabiles, quæ Medium continent. Quod faciendum erat.

a 13. ſexti.
b 12. ſexti.
c 17. ſexti.
d 22. decimi
e 14. decimi.
f 16. ſexti.
g 22. decimi

SCHOLIVM I.

IN iis quæ ſequuntur, indigemus hoc problemate.

DVOS numeros planos ſimiles inuenire.

A, 6. C, 12. B, 4. D, 8. E, 24. F, 96.

SVMANTVR quatuor quicunq; numeri proportionales, A, B, C, D, vt quidem A, ad C, ita B, ad D. Multiplicantes autem ſe mutuò A, & B, faciant E; Item C, & D, ſe multiplicantes faciant F. Erunt ergo E, & F, numeri plani ſimiles, quandoquidem latera habent proportionalia, vt ex conſtructione eſt manifeſtum.

QVONIAM autem in lib. 9. [a] oſtenſum eſt, ſi impar numerus, vel par parem multiplicet, procreari numerum parem; Imparem verò, ſi impar multiplicet imparem; perſpicuum eſt, quonam modo inueniri poſſint duo plani ſimiles, quorum vterq; par ſit, vel impar; Vel vnus quidem par, alter verò impar. Si enim latera ſumpta ſint numeri pares, erunt eorum plani pares etiam: ſi autem numeri ſint impares, erunt & plani eorum impares. Quod ſi vnius latera ſint impares numeri, alterius autem pares, erit illorum quidem planus impar; horum verò par: Similiter pares erunt plani, ſi quilibet habeat vnum latus numerum parem, alterum verò imparem, &c.

a 28. & 29. noni.

LEMMA I.

DVOS numeros quadratos inuenire, ita vt compoſitus ex ipſis quadratus etiam ſit.

INVENIANTVR per ea, quæ in ſcholio proximo dicta ſunt, duo plani ſimiles A B, & C, quorum vterque vel par ſit, vel impar. [b] *Et quoniam, ſiue à pari par auferatur, ſiue ab impari impar, reliquus par eſt; detracto B D, ex A B, qui æqualis ſit ipſi C, erit reliquus A D, par. Quo diuiſo bifariam in E;*

A.....E.....D.....B
C.....

Dico numerum factum ex A B, in B D, [c] *qui quidem quadratus eſt, compoſitum cum quadrato numeri E D, facere quadratum. Quoniam enim numerus A D, bifariam eſt diuiſus in E, & ei additus D B; erit ex 6. theoremate eorum, quæ ad propoſ. 14. lib. 9. demonſtrauimus, numerus qui fit ex A B, in B D, vnà cum quadrato numeri D E, æqualis quadrato numeri E B. Quare duo quadrati, nempe qui fit ex A B, in B D, & quadratus numeri D E, compoſiti faciunt quadratum, eum videlicet, qui ex B E, gignitur. quod eſt propoſitum.*

b 24. & 26. noni.
c 1. noni.

COROLLARIVM.

EX his manifeſtum eſt, quando A B, & C, ſimiles ſunt, inuentos eſſe eadem arte duos numeros quadratos numerorum B E, E D, quorum exceſſus, nimirum numerus ex A B, in B D, factus, etiam numerus quadratus ſit.

QVOD ſi numeri ſumantur A B, & C, nón ſimiles, vterq; tamen par, vel impar; inuenti erunt eodem modo duo quadrati numerorum B E, E D, quorum exceſſus, numerus ſcilicet, qui fit ex AB, in B D, non eſt quadratus. Si enim quadratus eſſet, [d] *numeri A B, B D, hoc eſt, A B, & C, plani ſimiles eſſent. Quod eſt abſurdum. ponuntur enim non ſimiles.*

d 2. noni.

SCHOLIVM II.

IN HAQVE ſi iubeamur inuenire duos quadratos numeros, quorũ exceſſus etiam ſit numerus quadratus;

A..... E..... D..... B
C.....

ſumemus vt prius, duos planos ſimiles, quorum vterq; par, vel impar ſit, nempe A B, & C, & reliqua perficiemus, vt in proximo lemmate eſt dictum. Nam quadrati numeri ex B E, E D, deſcripti ſunt illi, quos quærimus. Excedit enim quadratus ex B E, quadratum ex E D, numero, qui producitur ex A B, in B D, qui etiam quadratus eſt.

Si verò inueniendi ſint duo quadrati, quorum exceſſus non ſit quadratus: ſumendi erunt duo numeri plani A B, & C, non ſimiles, quorum vterque par ſit, vel impar, & reliqua peragenda, vt prius. Nam ſimiliter oſtendemus quadratum ex B E, æqualem eſſe quadrato ex D E, vnà cum eo qui ex A B, in B D, fit; Quare exceſſus quadratorum ex B E, E D, eſt numerus factus ex A B, in B D, qui cùm non ſit quadratus; (Si enim eſſet quadratus, eſſent A B, B D, plani ſimiles. quod non ponitur) conſtat propoſitum.

A..E...D.....B
C.....

Hoc poſterius facilius abſoluemus, ſi quemcunque quadratum numerum diuidamus in duos numeros, quorum alter ſit quadratus, alter verò non. Vt ſi quadratum 36. diuidatur in quadratum 16. & non quadratum 20. excedet quadratus 36. quadratum 16. numero 20 non quadrato. Sic quoque ſi idem quadratus 36. diuidatur in quadratum 25. & non quadratum 11. ſuperabit quadratus 36. quadratum 25. numero non quadrato 11. & ſic de cæteris.

LEMMA II.

Dvos numeros quadratos inuenire, ita vt compoſitus ex ipſis non ſit quadratus.

Sint duo numeri plani ſimiles A B, & C, pares, vel impares, vt in lemmate præcedenti, fiatq; eadem conſtructio, ita vt rurſus quadratus, qui fit ex multiplicatione ſimilium numerorum A B, D B, inter ſe, vnà cum quadrato ex D E, æqualis ſit quadrato ex B E. Auferatur deinde ex D E, vnitas E F. Erit ergo quadratus ex D F, minor quadrato ex D E, quòd & latus D F, latere D E, minus ſit. Dico quadratos numeros, quorum alter ex A B, in B D, alter verò ex D F, in ſe ſit, compoſitos non efficere numerum quadratum. Nam ſi compoſitus ex ipſis eſt quadratus, erit is vel maior quadrato ex B F, vel æqualis, vel minor: quod fieri non poſſe, in hunc modum demonſtrabimus. Sit enim primùm maior, quàm quadratus ex B F; ac propterea latus ipſius maius latere B F. Erit ergo latus ipſius vel æquale numero B E, vel maius. (Minus enim non erit, quoniam inter numeros B E, B F, ſola vnitate inter ſe diſtantes nullus medius eſt numerus, ne vnitas ipſa ſecetur; Eſſet autem dictum latus inter ipſos medium, ſi maius poneretur quàm B F, minus verò quàm B E.) Si dicatur æquale, ita vt quadrato ex B E, æqualis ſit quadratus numerus compoſitus ex quadrato, qui fit ex A B, in B D, & ex quadrato numeri D F; cùm eidem quadrato ex B E, ſit oſtenſus in præcedenti lemmate æqualis numerus, qui fit ex A B, in B D, vnà cum quadrato ex D E; erit, qui fit ex A B, in B D, vnà cum quadrato ex D F, æqualis ei, qui fit ex A B, in B D, vnà cum quadrato ex D E. Ablato ergo communi, eo ſcilicet qui fit ex A B, in B D; erit reliquus quadratus ex D F, æqualis reliquo quadrato ex D E; Ideoq; & latus D F, lateri D E, æquale, pars toti. Quod eſt abſurdum. Non ergo latus quadrati compoſiti ex quadratis, quorum alter ex A B, in B D, alter verò ex D F, in ſe ſit, æquale eſt numero B E. Sed neque maius. Sit enim, ſi fieri poteſt, latus illius æquale numero B I, qui maior ſit, quàm B E, ita vt quadrato ex B I, æqualis ſit quadratus ille compoſitus. Quoniam igitur quadratus ex B I, latere maiore, maior eſt quadrato ex B E, latere minore: erit quoque compoſitus ex quadratis, quorum alter ex A B, in B D, alter verò ex D F, in ſe ſit, (cùm hic compoſitus æqualis ponatur quadrato ex B I,) maior quadrato ex B E. Eſt autem quadrato ex B E, oſtenſus in lemmate præcedenti æqualis numerus, qui fit ex A B, in B D; vnà cum quadrato ex D E: Ablato ergo communi, qui fit ex A B, in B D; erit reliquus quadratus ex D F, reliquo quadrato ex D E, maior; ac proinde latus D F, latere D E, maius, pars toto. Quod eſt abſurdum. Non ergo latus quadrati compoſiti ex quadratis, quorum alter ſit ex A B, in B D, alter verò ex D F, in ſe, maius eſt latere B E. Sed neq; æquale, neque minus oſtenſum eſt. Non igitur quadratus ille compoſitus maior eſt quadrato ex B F.

Sit iam, ſi fieri poteſt, numerus qui fit ex A B, in B D, vnà cum quadrato ex D F, æqualis quadrato ex B F; & ponatur numerus A H, duplus vnitatis E F. Quia igitur totus A D, totus E D, duplus eſt, (diuiſus enim eſt A D, in E, bifariam) & ablatus A H, ablatæ vnitatis E F; erit & reliquus H D, reliqui F D, duplus, ex iis, quæ ad propoſ. 7. lib. 7. oſtendimus; atque

A..H..I. E. F. G... D .....B
C .....

idcirco

idcirco HD, in F, bifariam diuiditur. Quare ex 6. theorem. eorum, quæ ad propoſ. 14. lib. 9. demonſtrauimus, erit numerus qui fit ex HB, in BD, vnà cum quadrato ex DF, æqualis quadrato ex BF. Sed eidem quadrato ex BF, æqualis ponitur numerus, qui fit ex AB, in BD, vnà cum quadrato ex DF: Igitur qui fit ex HB, in BD, vnà cum quadrato ex DF, æqualis eſt ei, qui fit ex AB, in BD, vnà cum quadrato ex DF: & detracto communi quadrato ex DF, relinquetur, qui fit ex HB, in BD, ei qui fit ex AB, in BD, æqualis. Quare cum HB, AB, multiplicantes eundem BD, producant æquales numeros; [a] habeant autem multiplicantes eandem proportionem, quam producti; erit HB, ipſi AB, æqualis, pars toti. Quod eſt abſurdum. Non eſt ergo, qui ex AB, in BD, vnà cum quadrato ex DF, quadrato ex BF, æqualis.

[a] 18. ſeptimi.

SIT tandem, ſi poteſt fieri, numerus qui ex AB, in BD, vnà cum quadrato ex DF, minor quadrato ex BF, ac propterea & latus eius latere BF, minus, quòd ſit BG, ita vt qui ex AB, in BD, vnà cum quadrato ex DF, æqualis ſit quadrato ex BG. Sumatur autem ipſius EG, duplus AI. Quoniam igitur totus AD, totius FD, duplus eſt, & ablatus AI, ablati EG; erit rurſus & reliquus ID, reliqui GD, duplus; ac propterea ID, in G, diuidetur bifariam. Quare ex eodem theorem. 6. eorum, quæ ad propoſ. 14. lib. 9. demonſtrata ſunt, erit numerus qui fit ex IB, in BD, vnà cum quadrato ex DG, æqualis quadrato ex BG: ponitur autem eidem quadrato ex BG, æqualis qui fit ex AB, in BD, vnà cum quadrato ex DF. Igitur qui fit ex IB, in BD, vnà cum quadrato ex DG, æqualis eſt ei, qui ex AB, in BD, vnà cum quadrato ex DF. Ablatis igitur quadratis ex DG, & DF, quorum qui ex DG, minor eſt, remanebit qui ex IB, in BD, maior eo, qui ex AB, in BD, pars toto. Quod eſt abſurdum. Non eſt ergo qui ex AB, in BD, vnà cum quadrato ex DF, minor quadrato ex BF. Sed neque maior eſt oſtenſus, neque æqualis. Non igitur quadratus eſt, qui ex AB, in BD, vnà cum quadrato ex DF. Quod eſt propoſitum.

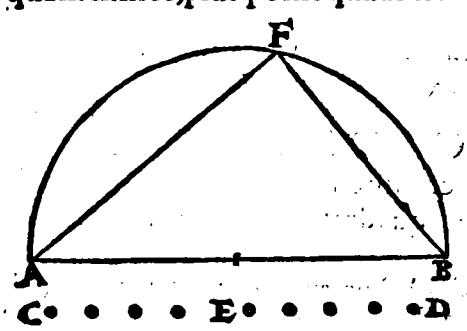
SCHOLIVM III.

Ex hoc facilè inuenietur duos numeros, ita vt ex illis compoſitus ad neutrum ipſorum proportionem habeat, quam quadratus ad quadratum. Si enim per lemma præcedens inueniantur duo quadrati, ita vt compoſitus ex ipſis non ſit quadratus; habebit hic compoſitus non quadratus ad neutrum ipſorum quadratorum proportionem, quam quadratus ad quadratum.

IDEM obtinebimus, ſi quemlibet numerum quadratum in duos non quadratos partiti fuerimus. Ita enim quadratus totus ad neutrum eorum, in quos diuiſus eſt, proportionẽ habebit, q̃ quadratus ad quadratũ.

PROBL. 6. PROPOS. 30. 29. 17.

INVENIRE duas Rationales potentia tantùm commenſurabiles, ita vt maior, quàm minor, plus poſſit quadrato rectæ lineæ longitudine ſibi commenſurabilis.



EXPONATVR linea Rationalis AB, & inueniantur ex iis, quæ in ſcholio 2. propoſ. præcedentis tradidimus, duo numeri quadrati CD, CE, quorum exceſſus DE, non ſit quadratus. Deinde per coroll. propoſ. 6. huius lib. fiat vt CD, numerus ad numerum DE, ita quadratum ex AB, ad aliud quadratum, nimirum ad id, quod ex AF; accommodeturq; AF, in ſemicirculo AFB, circa diametrum AB, deſcripto: ac denique connectatur recta FB. [a] Quoniam ergo angulus F, rectus eſt in ſemicirculo; [b] erit quadratum ex AB, æquale duobus quadratis ex AF, & FB; hoc eſt, recta AB, plus poterit quàm AF, quadrato rectæ FB. Et quia eſt quadratum ex AB, ad quadratum ex AF, vt numerus CD, ad numerum DE; [c] erunt quadrata ex AB, AF, commenſurabilia; atque adeò cùm quadratum ex AB, ſit Rationale, nempe ex linea Rationali AB, deſcriptum; erit & quadratũ ex AF, Rationale, propterea q; & recta AF, ipſum deſcribens, Rationalis. Rationales ergo ſunt AB, AF; atque adeò commenſurabiles ſaltem potentia. Quia verò quadratum ex AB, ad quadratum ex AF, proportionem non habet, quam quadratus numerus ad quadratum numerum; (cùm neque quadratus numerus CD, ad non quadratum DE, proportionem habeat, quam quadratus ad quadratum; aliàs & DE, quadratus eſſet, [d] vt in Arithmeticis eſt demonſtratum. quod non ponitur) [e] erunt rectæ AB, AF, longitudine incommenſurabiles: Sunt autem commenſurabiles potentia, vt oſtenſum eſt. Igitur AB, AF, Rationales ſunt potentia tantùm commenſurabiles.

[a] 31. tertij. [b] 47. primi. [c] 6. decimi. [d] 24. decimi. [e] 9. decimi.

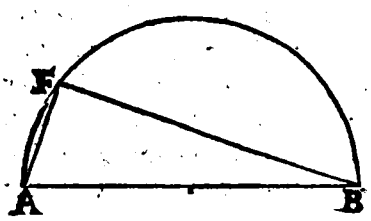
IAM verò quoniam eſt vt CD, ad DE, ita quadratum ex AB, ad quadratum ex AF; erit per conuerſionem rationis, vt quadratus numerus CD, ad quadratum numerum CE, ita quadratum ex AB, ad quadratũ ex FB, (ſicut enim CD, ſuperat DE, quadrato CE, ita etiam quadratũ ex AB,

a 9. decimi. superat quadrátũ ex A F, quadrato ex F B.) a Quare rectæ A B, F B, longitudine commẽsurabiles sunt. Inuenimus ergo duas Rationales A B, A F, potentia tantũ cõmensurabiles, ita vt maior A B, plus possit, q̃ minor A F, quadrato lineæ F B, sibi lõgitudine cõmensurabilis. Quod faciendũ erat.

30. 18.

PROBL. 7. PROPOS. 31.

INVENIRE duas Rationales potentia tantùm commensurabiles, ita vt maior, quàm minor, plus possit quadrato rectæ lineæ sibi longitudine incõmensurabilis.

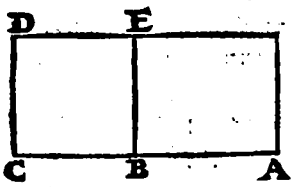


b 24. octaui



EXPONATVR Rationalis linea A B, inueniantuŕq; per lemma 2. propos. 29. huius lib. duo numeri quadrati C E, E D, ita vt ex illis compositus C D, non sit quadratus, vel certè numerus aliquis quadratus C D, secetur in duos numeros non quadratos C E, E D: Vtrumuis enim horum fiat, totus C D, ad neutrũ ipsorum C E, E D, proportionem habebit, quam quadratus ad quadratum, aliàs secundùm priorem modum, esset totus C D, etiam quadratus: iuxta posteriorẽ verò, quilibet ipsorum C E, E D, quadratus quoque, b vt in Arithmeticis ostẽsum est. quod non ponitur. Fiat deinde per coroll. propos. 6. huius lib. vt C D, ad D E, ita quadratum ex A B, ad aliud quadratum, vt ad id, quod ex A F; accommodeturq; A F, in semicirculo A F B, circa A B, descripto. Denique connectatur recta F B. Poterit igitur, vt in præcedenti, A B, plus quàm A F, quadrato rectæ F B; Eruntque A B, A F, Rationales potentia solùm commensurabiles: Eadem enim hìc est demonstratio, quæ in præcedenti propos. Quoniam verò rursus, vt prius, est per conuersionem rationis, vt C D, ad C E, ita quadratum ex A B, ad quadratum ex F B: Non habet autem C D, ad C E, proportionem quam quadratus ad quadratum; Non habebit quoque quadratum ex A B, ad quadratum ex F B,

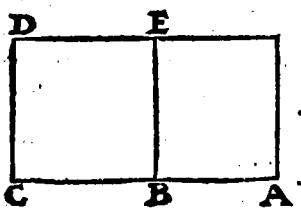
c 9. decimi. proportionem, quam quadratus numerus ad numerum quadratum. c Quare rectæ A B, F B, longitudine incommensurabiles sunt. Inuenimus ergo duas Rationales A B, A F, potentia tantùm commensurabiles, ita vt maior A B, plus possit quàm minor A F, quadrato lineæ F B, sibi longitudine incommensurabilis. Quod erat faciendùm.



LEMMA.

Si sint duæ rectæ lineæ inæquales, erit vt maior ad minorem, ita rectangulum sub ipsis contentum, ad quadratum minoris.

SINT duæ rectæ inæquales A B, B C, in rectum constitutæ, quarum A B, maior sit. Dico esse, vt A B, ad B C, ita rectangulum sub A B, B C, ad quadratũ ex B C. Describatur enim ex B C, quadratum B D, compleaturq; rectangulum A D; eritq; rectangulum A E, sub A B, B C, contentum; quod B E, ipsi B C, sit æqualis: a *perspicuum autem est, esse vt A B, ad B C, ita A E, ad B D.*



21. sexti.

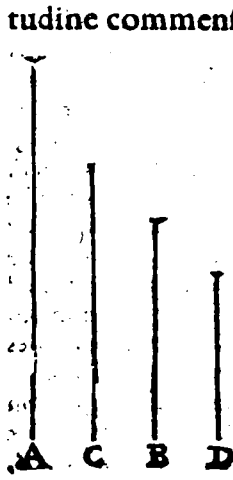
EODEM modo erit, vt minor ad maiorem, ita rectangulum sub ipsis contentum, ad quadratum maioris, vt in secunda figura est manifestum, in qua A B, minor est, quàm B C.

31.

PROBL. 8. PROPOS. 32.

24. 25. INVENIRE duas Medias potentia tantùm commensurabiles, quæ Rationale contineant, ita vt maior plus possit quàm minor, quadrato rectæ lineæ sibi longitudine commensurabilis.

a 30. decimi



b 22. decimi

c 24. decimi

d 17. sexti.

a REPERTAE sint duę Rationales A, B, potentia tantùm commensurabiles, ita vt A, maior plus possit quàm B, minor quadrato lineæ longitudine sibi commensurabilis; sitq; C, media proportionalis inter A, & B; & fiat vt A, ad B, ita C, ad D. Quoniá igitur A, B, sunt Rationales potẽtia solùm commensurabiles; b erit rectangulum sub A, B, Irrationale, & recta C, ipsum potens, linea Media. Et quia est vt A, ad B, ita C, ad D; sunt autem A, & B, potentia tantùm commẽsurabiles, erunt quoque C, & D, potentia solùm commensurabiles, vt in scholio propos. 10. huius libri ostendimus. c Quare D, Mediæ C, commensurabilis, Media quoque est. Inuentæ ergo sunt duæ Mediæ C, D, potentia tantùm commensurabiles. Dico eas Rationale comprehendere. Cùm enim sit vt A, ad B, ita C, ad D; & permutando vt A, ad C, ita B, ad D; sit autem vt A, ad C, ita C, ad B; erit quoque vt C, ad B, ita B, ad D; d Ac propterea rectangulum sub C, & D, æquale erit quadrato ex B. Quam ob rem, cùm quadratum ex B, Rationali Rationale sit; erit & rectangulum sub C, D, illi æquale, Rationale. Continent ergo Mediæ C, D, potentia tantùm com-

tùm commensurabiles, Rationale. Quoniam verò est vt A, ad B, ita C, ad D: potest autem A, plus quàm B, quadrato lineæ longitudine sibi commensurabilis, ex constructione; [a] poterit quoq; C, plus quàm D, quadrato lineæ longitudine sibi commensurabilis. Inuenimus igitur duas Medias C, D, potentia tantùm commensurabiles, quæ Rationale continent, ita vt maior C, plus possit quã minor D, quadrato rectæ lineæ sibi longitudine commensurabilis. Quod faciendum erat. [a] 15. decimi.

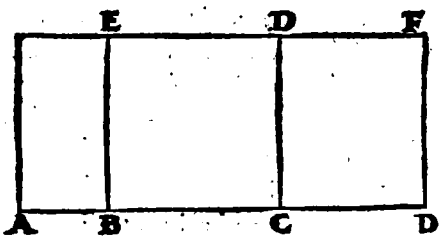
QVOD si repertæ sint A, B, Rationales potentia tantùm commensurabiles, ita vt A, plus possit quàm B, quadrato lineę sibi longitudine incommensurabilis; reliqua autem fiant, vt prius, ostendemus eodem modo, inuentas esse duas Medias C, D, potentia tantùm commensurabiles, quæ Rationale contineant, ita vt maior C, plus possit quàm minor D, quadrato lineæ longitudine sibi incommensurabilis.

SCHOLIVM.

ALII hoc problema demonstrant per lemma antecedens: Nos autem breuiùs ac facilius idem sine ipso ostendimus, vt facilè iudicabunt, qui cum eorum demonstratione hanc nostram contulerint. Immo rectas C, D, Medias esse potentia solùm commensurabiles, quæ Rationale contineant, non aliter hic ostendimus, ac in propos. 28. huius lib.

LEMMA.

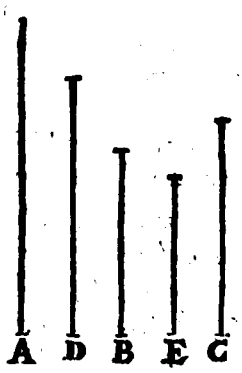
SI sint tres lineæ rectæ, erit vt prima ad tertiam, ita rectangulum sub prima & secunda contentum, ad id, quod sub secunda & tertia continetur.



SINT tres rectæ A B, B C, C D, in rectum constitutæ. Dico esse vt A B, ad C D, ita rectangulum sub A B, B C, ad rectangulum sub B C, C D. Describatur enim ex B C, quadratum B C D E, perficiaturq; rectangulum A F; Eritq; A E, contentum sub A B, B C; & C F, sub B C, C D; quòd B E, C D, ipsi B C, æquales sint. [a] Perspicuum autem est esse A B, ad C D, vt A E, ad C F. Quod est propositum. [a] 1. sexti.

PROBL. 9. PROPOS. 33. 32. 26.

INVENIRE duas Medias potentia solùm commensurabiles, quæ Medium contineant, ita vt maior plus possit quàm minor, quadrato rectæ lineæ sibi longitudine commensurabilis.



SINT inuentæ tres Rationales A, B, C, potentia tantùm commensurabiles, ita vt A, plus possit quàm C, quadrato lineæ sibi longitudine commensurabilis. (Hoc autem fiet in hunc modum. [a] Repertis duabus Rationalibus A, C, potentia tantùm commensurabilibus, ita vt A, plus possit quàm C, quadrato lineæ sibi commensurabilis longitudine; inueniatur alia B, vtriq; A, & C, potentia solùm commensurabilis, per ea, quæ in scholio propos. 21. huius lib. demonstrauimus.) [b] Et ipsarum A, B, sumatur media proportionalis D; [c] fiatq; vt D, ad B, ita C, ad E. Quoniam igitur ex lemmate antecedenti, est vt A, ad C, ita rectãgulum sub A, B, ad rectangulum sub B, C: [d] Est autem rectangulo sub A, B, æquale quadratum ex D; [e] & rectangulo sub B, C, æquale rectangulum sub D, E, quòd proportionales sint D, B, C, E; Erit quoque vt A, ad C, ita quadratum ex D, ad rectangulum sub D, E: Sed vt quadratum ex D, ad rectangulum sub D, E, ita est per lemma 3. propos. 19. huius lib. recta D, ad rectam E. Igitur erit vt A, ad C, ita D, ad E: Sunt autem A, C, potentia solùm commensurabiles. Ergo & D, E, potentia solùm commensurabiles sunt, vt in scholio propos. 10. huius lib. ostendimus. [f] Quia verò D, potens spatium sub A B, Rationalibus potentia tantùm commensurabilibus, Irrationalis est, & Media; [g] erit quoque E, ipsi ostensa commensurabilis, Media. Inuentæ ergo sunt duæ Mediæ D, E, potentia solùm commensurabiles. Et quia ostensum est rectangulo sub B, C, [h] quod Medium est, (quòd B, C, sint Rationales potentia tantùm cõmensurabiles,) æquale esse rectangulum sub D, E; erit rectangulũ sub D, E, Medium. Deniq; quia ostendimus esse vt A, ad C, ita D, ad E; potest autẽ A, plus quã C, quadrato lineæ sibi longitudine commensurabilis, ex constructione; [i] poterit etiã D, plus quàm E, quadrato lineæ longitudine sibi commensurabilis. Inuenimus ergo duas Medias D, E, potentia solùm commensurabiles, quæ Medium continent, ita vt maior D, plus possit quàm minor E, quadrato lineæ rectæ longitudine sibi commensurabilis. Quod erat faciendum.

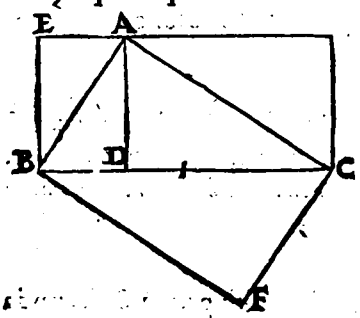
[a] 30. decimi
[b] 13. sexti.
[c] 12. sexti.
[d] 17. sexti.
[e] 16. sexti.
[f] 22. decimi.
[g] 24. decimi
[h] 22. decimi
[i] 15. decimi.

QVOD si repertæ fuerint A, B, C, Rationales potentia tantùm commensurabiles, ita vt A, plus possit quàm C, quadrato lineæ sibi longitudine incommensurabilis, reliqua autem construantur, vt prius, demõstrabimus similiter, inuentas esse duas Medias D, E, potentia tantùm commen-

ſurabiles, quæ Medium contineant, ita vt maior D, plus poſsit quàm minor E, quadrato lineæ ſibi longitudine incommenſurabilis. Id quod facilè apparere poteſt ex adducta demonſtratione.

LEMMA I.

SIT triangulum rectangulum A B C, angulum rectum habens B A C, à quo perpendicularis demittatur A D. Dico rectangulum contentum ſub C B, B D, æquale eſſe quadrato ex A B: contentum autem ſub B C, C D, æquale quadrato ex A C: & contentum ſub B D, D C, æquale quadrato ex A D: contentũ deniq; ſub B C, A D, æquale cõtento ſub A B, A C.



a 17. ſexti. *QVONIAM ex coroll. propoſ. 8. lib. 6. recta A B, media proportionalis eſt inter C B, B D;* [a] *erit rectangulum ſub C B, B D, quadrato ex A B, æquale.*

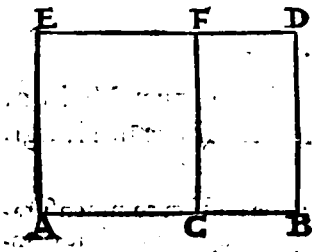
EADEM ratione erit rectangulum ſub B C, C D, æquale quadrato ex A C; quoniam per idem coroll. A C, media proportionalis eſt inter B C, C D.

RVRSVS, quia ex eodem coroll. A D, inter B D, D C, media eſt proportionalis, erit eodem modo rectangulum ſub B D, D C, æquale quadrato ex A D.

b 8. ſexti. c 16. ſexti. d 41. primi *POSTREMO,* [b] *quia triangula A B C, A B D, ſimilia ſunt; erit vt B C, ad A C, ita A B, ad A D.* [c] *Quare rectangulum ſub B C, A D, æquale eſt rectangulo ſub A B, A C. Quod etiam ita oſtendetur. Compleatur rectangulum C E, contentum ſub B C, A D: item rectangulum A F, ſub A B, A C, contentum.* [d] *Quoniam igitur rectangulum C E, duplum eſt trianguli A B C, necnon & rectangulum A F, eiuſdem trianguli eſt duplum; erunt inter ſe æqualia rectangula C E, A F. quod eſt propoſitum.*

LEMMA II.

SI recta linea ſecetur in duas partes inæquales, erit vt maior pars ad minorem, ita rectangulum ſub tota & maiore parte, ad rectangulum ſub tota & minore parte contentum.

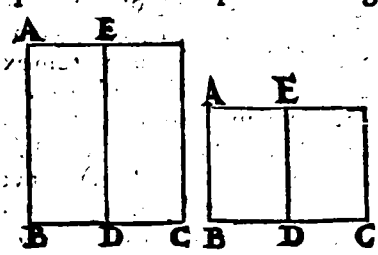


e 1. ſexti. *SECETVR recta A B, non bifariam in C, ſitq; maior pars A C. Dico eſſe vt A C, ad C B, ita rectangulum ſub A B, A C, ad rectangulum ſub A B, C B. Deſcribatur enim ipſius A B, quadratum A B D E, ducaturq; C F, ipſi A E, parallela; eritq; A F, contentum ſub A B, A C, & C D, contentum ſub A B, C B; quòd A E, C F, ipſi A B, æquales ſint.* [e] *Quoniam igitur eſt vt A C, ad C B, ita A F, ad C D; conſtat propoſitum.*

EADEM ratione erit, vt minor pars B C, ad maiorem C A, ita B F, contentum ſub A B, B C, tota, & minore parte, ad C E, contentum ſub A B, C A, tota, & maiore parte.

LEMMA III.

SI ſint duæ rectæ lineæ inæquales, minor autem ſecetur bifariam; erit rectangulũ ſub ipſis contentũ duplum rectanguli, q; ſub maiori linea & dimidia parte minoris cõtinetur.



f 1. ſexti. *SINT duæ rectæ inæquales A B, B C, angulum rectum conſtituentes A B C, ſeceturq; minor B C, bifariam in D. Dico rectangulũ ſub A B, B C, duplum eſſe rectãguli ſub A B, B D. Compleatur enim rectangulũ A C, ſub A B, B C; ducaturq; D E, ipſi A B, parallela; eritq; B E, contentũ ſub A B, et B D, dimidia minoris.* [f] *Quoniam igitur A C, ipſius B E, duplum eſt, q & baſis B C, dupla ſit baſis B D; conſtat propoſitũ.*

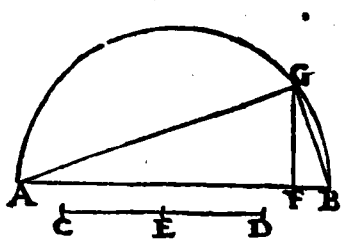
EODEM modo, ſi B C, ſecta bifariam, ſit maior, erit quod ſub A B, B C, continetur, duplum eius, q cõtinetur ſub A B, minore & B D, dimidia maioris, vt ex ſecũda figura apparet.

33. PROBL. 10. PROPOS. 34.

27. INVENIRE duas rectas lineas potẽtia incõmenſurabiles, q̃ faciant cõpoſitum quidẽ ex ipſarũ quadratis, Rationale; Rectangulũ verò ſub ipſis contentũ, Mediũ.

a 31. *decimi.* [a] REPERIANTVR duæ Rationales A B, C D, potentia ſolùm commenſurabiles, ita vt maior A B, plus poſsit, quàm minor C D, quadrato lineæ longitudine ſibi incommẽſurabilis: ſeceturq; C D, bifariam in E. Deinde per lemma 2. propoſ. 17. huius lib. ad A B, applicetur quadrato ex C E, hoc eſt, quartæ parti quadrati ex C D, æquale rectangulum deficiens figura quadrata, & ſit illud, quod ſub A F, F B, continetur. Poſtremò, deſcripto ſemicirculo A G B, circa A B, erigatur F G, ad

A B,

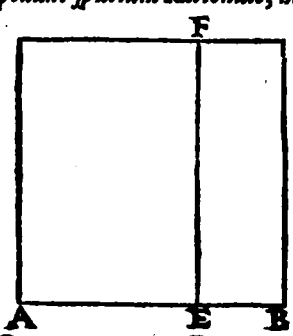


AB, perpendicularis, connectanturq; rectæ AG, GB. Quoniam igitur AB, plus potest, quàm CD, quadrato lineæ sibi longitudine incommensurabilis, applicatumq; est ad AB, rectangulum sub AF, FB, æquale quartæ parti quadrati ex CD, deficiens figura quadrata: [a] erit AF, ipsi FB, longitudine incommensurabilis. [a] 19. decimi. Est autem vt AF, ad FB, ita per lemma 2. propositionis antecedentis, rectangulum sub AB, AF, ad rectangulum sub AB, FB: Rectangulum verò sub AB, AF, quadrato ex AG, & rectangulum sub AB, FB, quadrato ex GB, est æquale, per lemma 1. eiusdem antecedentis propositionis; [b] quòd angulus AGB, rectus sit in semicirculo AGB. [b] 31. tertij. Igitur quoque erit vt AF, ad FB, ita quadratum ex AG, ad quadratum ex GB; ac propterea cùm AF, FB, longitudine sint incommensurabiles, [c] erunt quadrata ex AG, GB, incommensurabilia. [c] 10. decimi. [d] Igitur rectæ AG, GB, potentia incommensurabiles sunt. Et quia quadratum ex Rationali AB, Rationale est, [e] æqualeq; quadratis ex AG, GB; erit etiam compositum ex quadratis rectarum AG, GB, Rationale. Rursus, quia ex 1. lemmate propositionis præcedentis, rectangulum sub AF, FB, quod quadrato ex CE, æquale est factum, [f] æquale est quadrato ex FG; (propterea quòd angulus AGB, rectus est, & FG, ad AB, perpendicularis) erunt quadrata ex FG, CE, æqualia; ac proinde & rectæ FG, CE, æquales. Quare CD, dupla existens ipsius CE, dupla etiá erit ipsius FG. Igitur per lemma 3. antecedentis propositionis, rectangulum sub AB, CD, duplum erit rectanguli sub AB, FG. (cùm FG, dimidia sit minoris CD.) [g] Sed rectangulum sub AB, CD, Rationalibus potentia tantùm commensurabilibus contentum, Medium est. Igitur & rectangulum sub AB, FG, illi commensurabile, cùm sit eius dimidium, Medium est, per coroll. propos. 24. huius lib. Atqui rectangulo sub AB, FG, per 1. lemma propositionis præcedentis, æquale est rectangulum sub AG, GB. Contentum igitur sub AG, GB, Medium quoque est: Ostensum autem est compositum ex earum quadratis, Rationale. Inuentæ ergo sunt duæ rectæ AG, GB, potentia incommensurabiles, quæ faciunt compositum quidem ex ipsarum quadratis, Rationale; Rectangulum verò sub ipsis contentum; Medium. Quod faciendum erat.

[d] 4. defin. [e] 47. primi. [f] 17. sexti. [g] 22. decimi

SCHOLIVM.

DEMONSTRATVR hoc loco in scholio quodam antiquo, fieri posse, vt duo spatia Irrationalia componant spatium Rationale, hac ferè ratione.



EXPONATVR Rationalis linea AB, & duo numeri C, D, quorum C, maior sit, non habentes proportionem, quam quadratus ad quadratum; fiatq; vt C, ad D, ita quadratum ex AB, ad quadratum ex AE; & tandem descripto quadrato ex AB, educatur EF, ad AB, perpendicularis. Quoniam igitur est vt C, ad D, ita quadratum ex AB, ad quadratum ex AE; Non habet autem C, ad D, proportionem quam quadratus ad quadratum; [a] erunt a 9. decimi *latera AB, AE, dictorum quadratorum proportionem nõ habentium, quam quadratus ad quadratum, longitudine incommensurabilia; Ac propterea cùm AB, tota longitudine sit incommensurabilis parti AE, erit eadem AB, & reliqua EB, longitudine incommensurabilis, ex coroll. propos. 17. huius lib. [b] Vt autem AB, ad AE, ita est quadratum ex AB, ad AF. Igitur cùm* b 1. sexti. *AB, AE, incommensurabiles sint longitudine, [c] erunt quadratum ex AB,* c 10. decimi *& rectangulum AF, incommensurabilia. Quare quadrato ex AB, existente Rationali, quòd & AB, Rationalis ponatur; erit AF, dicto quadrato incommensurabile, Irrationale. Eodemq; argumento ostendemus BF, Irrationale esse. Quia verò AF, BF, componunt quadratum Rationale ex AB; perspicuum est, ex duobus Irrationalibus confici posse Rationale. Quod est propositum.*

AT verò si AF, FB, Rationalia sint, ostendemus & totum AFB, ex ipsis compositum Rationale esse. Cùm enim vtrumq; AF, FB, Rationale sit; erunt ipsa inter se commensurabilia. [d] Igitur & totum AFB, ex ipsis compositum vtrique eorum commensurabile erit. Quare AFB, totum commensurabile vtrique Rationali AF, FB, [e] Rationale quoq; est. Quod est propositum.

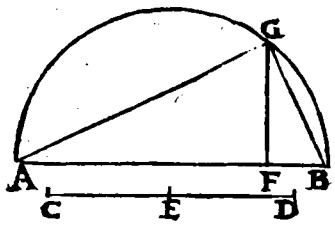
d 16. decimi. e 9. defin.

PROBL. II. PROPOS. 35. 34. 28.

INVENIRE duas rectas lineas potentia incommensurabiles, quæ faciant compositum quidem ex ipsarum quadratis, Medium; Rectangulum verò sub ipsis contentum, Rationale.

[a] REPERIANTVR duæ Mediæ AB, CD, potentia tantùm commensurabiles, quæ Rationale contineant, ita vt maior AB, plus possit quàm minor CD, quadrato lineæ sibi lõgitudine incommensurabilis; fiantq; reliqua, vt in præcedenti propos. Ostendemus igitur similiter, vt in propos. antecedenti, rectas AG, GB, potentia esse incommensurabiles. Et quia quadratum ex Media AB, [b] æquale existens quadratis rectarum AG, GB, Medium est; erit quoque compositum ex quadratis rectarum AG, GB, Medium. Rursus vt in antecedenti propositione, ostendemus rectan-

a 32. decimi. b 47. primi.



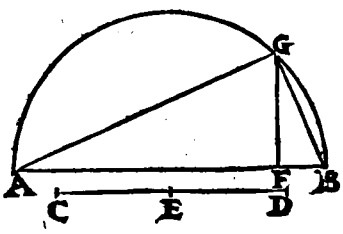
gulum ſub AB, CD, duplum eſſe rectanguli ſub AB, FG; atq; adeò illud eſſe huic commẽſurabile. Quare cùm rectangulum ſub AB, CD, Rationale ſit, ex conſtructione; erit & rectangulum ſub AB, FG, illi commenſurabile, Rationale: Sed per 1. lemma propoſ. 33. huius lib. rectangulo ſub AB, FG, æquale eſt rectangulum ſub AG, GB. Igitur & rectangulum ſub AG, GB, Rationale eſt. Oſtenſum autem eſt, compoſitum ex quadratis ipſarum AG, GB, eſſe Medium. Igitur duæ rectæ AG, GB, quæ oſtenſæ ſunt potentia incommenſurabiles, faciunt compoſitum ex earum quadratis Medium, & rectangulum ſub eiſdem comprehenſum, Rationale. Inuentæ ergo ſunt duæ rectæ AG, GB, potentia incommẽſurabiles, quæ faciunt compoſitum quidem ex ipſarum quadratis Medium, Rectangulum verò ſub ipſis cõtentum, Rationale. Quod erat faciendum.

55. 29.

PROBL. 12. PROPOS. 36.

INVENIRE duas rectas lineas potentia incommenſurabiles, quæ faciant & compoſitum ex ipſarum quadratis Medium, & rectangulum ſub ipſis contentum Medium, incommenſurabileque compoſito ex ipſarum quadratis.

a 33. decimi.



b 47. primi.

[a] REPERIANTVR duæ Mediæ AB, CD, potentia tantùm commenſurabiles, quæ Medium contineant, ita vt maior AB, plus poſsit quàm minor CD, quadrato lineæ ſibi longitudine incommẽſurabilis; fiantq; reliqua, vt in propoſ. 34. Oſtendemus igitur ſimiliter, rectas AG, GB, potentia incommenſurabiles eſſe. Et quia quadratum ex Media AB, Medium eſt, [b] & quadratis, rectarum AG, GB, æquale; erit & compoſitum ex quadratis rectarum AG, GB, Medium. Rurſus, vt in 34. demonſtrabimus, rectangulum ſub AB, CD, duplum eſſe rectanguli ſub AB, FG, atque adeò illud eſſe huic commenſurabile. Quare cùm ex conſtructione, rectangulum ſub AB, CD, Medium ſit: erit quoq; rectangulum ſub AB, FG, hoc eſt, ſub AG, GB, quod illi per 1. lemma propoſ. 33. huius lib. æquale eſt, Medium, ex coroll. propoſ. 24. huius lib. Quoniam verò AB, longitudine incommenſurabilis ponitur ipſi CD; Eſt autem eidem CD, ipſa CE, longitudine commenſurabilis, quòd illa huius ſit dupla; [c] erunt AB, CE, longitudine incommenſurabiles: Sed vt AB, ad CE, ita eſt per lemma 3. propoſ. 19. huius lib. quadratum ex AB, ad rectangulum ſub AB, CE, hoc eſt, ad rectangulum ſub AB, FG, hoc eſt, ſub AG, GB, (ſunt enim rectangula ſub AB, FG, & ſub AG, GB, per 1. lemma propoſ. 33. huius lib. æqualia.) [d] Igitur quadratum ex AB, incommenſurabile eſt rectangulo, ſub AG, GB. Inuentæ ſunt ergo duæ rectæ lineæ AG, GB, potentia incommenſurabiles, quæ faciunt & compoſitum ex ipſarum quadratis Medium, & rectangulum ſub ipſis contentum Medium, incommenſurabileq; compoſito ex ipſarum quadratis. Quod faciendum erat.

c 13. decimi.

d 10. decimi

SCHOLIVM.

EX hoc verò problemate facilè illud abſoluemus, quod ad propoſ. 24. huius lib. nos demonſtraturos recepimus, nimirum.

INVENIRE duas Medias longitudine, & potentia incommenſurabiles.

QVONIAM oſtenſum eſt tam compoſitum ex quadratis rectarum AG, GB, quàm rectangulum ſub ipſis, eſſe Medium, & hoc illi compoſito incommenſurabile; erunt quoq; lineæ potentes illud compoſitum Medium, & hoc rectangulum Medium, Mediæ, incommenſurabiles tam longitudine, quàm potẽtia. Si enim potentia eſſent commẽſurabiles, eſſent & earum quadrata, hoc eſt, compoſitum ex quadratis rectarum AG, GB, & rectangulum ſub AG, GB, cõmenſurabilia. quod non ponitur. Quocirca ſi ſumatur AB, potens compoſitum ex quadratis rectarum AG, GB, & alia recta potens rectangulum ſub AG, GB, id eſt, media proportionalis inter AG, GB; inuenta erunt duæ Mediæ & longitudine, & potentia incommenſurabiles. Quod eſt propoſitum.

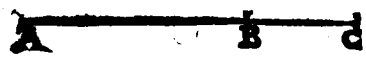
PRINCIPIVM SENARIORVM PER compoſitionem.

36. 30.

THEOR. 25. PROPOS. 37.

SI duæ Rationales potentia tantùm commenſurabiles componantur; tota Irrationalis erit. Vocetur autem ex binis nominibus.

COMPONANTVR duæ Rationales AB, BC, potentia ſolùm commenſurabiles, inuentæ per 4. lemma propoſ. 21 huius lib. Dico totam AC, Irrationalem eſſe. Quoniam enim AB, longitudine incommẽſurabilis eſt ipſi BC; & vt AB, ad BC, ita eſt rectangulum ſub AB, BC, ad quadratũ ex BC, per



B C, per lemma propoſ. 31 huius libri. [a] erit rectangulum ſub A B, B C, quadrato ex B C, incommenſurabile Sed rectangulo ſub A B, B C, commenſurabile eſt eius duplũ, nempe quod bis ſub A B, B C, cõtinetur; & quadrato ex B C, commenſurabile eſt quadratum rectæ A B; (omnia enim ſunt Rationalia) [b] atq; adeò & compoſitum ex quadratis rectarum A B, B C, eidem quadrato ex B C, commenſurabile eſt. Igitur per ea, quæ in ſcholio propoſ. 14. huius libri oſtendimus, & quod bis ſub A B, B C, continetur, incommenſurabile eſt compoſito ex quadratis rectarum A B, B C. Quamobrem & compoſitum ex eo, quod bis ſub A B, B C, & ex compoſito quadratorum rectarum A B, B C, hoc eſt, quadratũ ex tota A C. ([c] Eſt enim hoc quadratum æquale quadratis rectarum A B, B C, vnà cum rectangulo ſub A B, B C, bis) compoſito ex quadratis rectarum A B, B C, [d] incommenſurabile erit: Eſt autem compoſitum ex quadratis rectarum A B, B C, Rationale, quòd commenſurabile ſit oſtenſum quadrato Rationali ex B C, Rationali. Igitur quadratum ex A C, quadrato Rationali ex B C, incommenſurabile, [e] Irrationale eſt; atque adeò & recta ipſa A C, Irrationalis erit. Vocetur autem ex binis nominibus, ſeu, vt alij loquuntur, Binomium, quia ex duobus nominibus, nempe ex duabus Rationalibus lineis, A B, B C, potentia ſolùm commenſurabilibus componitur. Si duæ igitur Rationales potentia tantùm commenſurabiles componantur, tota Irrationalis erit, &c. Quod oſtendendum erat.

[a] 10. *decimi*
[b] 16. *decimi*
[c] 4. *ſecundi.*
[d] 17. *decimi.*
[e] 10. *defin.*

SCHOLIVM.

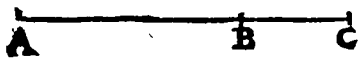
ITAQVE ex duabus Rationalibus potentia ſolùm commenſurabilibus procreantur duæ lineæ Irrationales. Nam recta, quæ inter eas eſt medio loco proportionalis, [a] Irrationalis eſt, quæ Media vocatur. At verò compoſita ex ipſis, [b] Irrationalis eſt, quæ ex binis nominibus dicitur.

[a] 22. decimi.
[b] 37. decimi.

THEOR. 26. PROPOS. 38. 37. 31.

SI duæ Mediæ potentia tantùm commenſurabiles componantur, quæ Rationale contineant; tota Irrationalis erit. Vocetur autem ex binis Mediis prima.

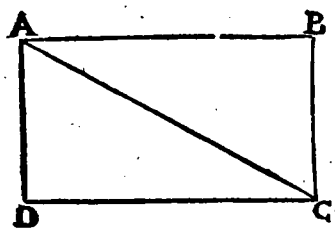
COMPONANTVR duæ Mediæ, [a] ſuperius inuentæ A B, B C, potentia tantùm commenſurabiles, quæ Rationale contineant. Dico totam A C, Irrationalem eſſe. Quia enim A B, eſt ad B C, vt rectangulum ſub A B, B C, ad quadratum ex B C, vt in lemmate propoſ. 31. huius lib. eſt oſtenſum; ſunt autem A B, B C, longitudine incommenſurabiles; [b] erunt rectangulum ſub A B, B C, & quadratum ex B C, incommenſurabilia: Sed rectangulo ſub A B, B C, commenſurabile eſt, quod ſub A B, B C, bis; & quadrato ex B C, commenſurabile eſt compoſitũ ex quadratis rectarum A B, B C.



(Nam cùm A B, B C, potentia ſint commenſurabiles, erũt ipſarum quadrata commenſurabilia, [c] atque adeò & compoſitum ex ipſarum quadratis quadrato ex B C, commenſurabile erit.) Igitur & rectangulum ſub A B, B C, bis, & compoſitum ex quadratis rectarum A B, B C, incommenſurabilia inter ſe ſunt, per ea, quæ in ſcholio propoſ. 14. huius lib. ſunt demonſtrata. Ergo compoſitum ex quadratis rectarum A B, B C, vnà cum rectangulo bis ſub A B, B C, hoc eſt, quadratum ex A C, [d] quod huic compoſito æquale eſt, [e] incommenſurabile quoq; eſt rectangulo ſub A B, B C, bis: Eſt autem eidem rectangulo bis ſub A B, B C, commenſurabile rectangulum ſemel ſub A B, B C, cùm hoc ſit illius dimidium. [f] Igitur quadratum ex A C, incommenſurabile eſt rectangulo ſub A B, B C: Ponitur autem rectangulum ſub A B, B C, Rationale. [g] Irrationale ergo eſt quadratum ex A C, [h] & ob id recta quoq; A C, Irrationalis erit. Vocetur autem ex binis Mediis prima, vel, vt alij loquuntur, Bimediale prius. Si duæ ergo Mediæ potentia tantùm commenſurabiles componantur, &c. Quod erat oſtendendum.

[a] 28. *decimi*
[b] 10. *decimi*
[c] 16. *decimi*
[d] 4. *ſecundi.*
[e] 17. *decimi.*
[f] 13. *decimi.*
[g] 10. *defin.*
[h] 11. *defin.*

LEMMA.



QVOD ſub linea Rationali & Irrationali cõtinetur rectangulum, Irrationale eſt.

CONTINEATVR rectangulum A B C D, ſub Rationali A B, & Irrationali B C. Dico ipſum Irrationale eſſe. Si enim dicatur eſſe Rationale, [a] faciet ipſum ad Rationalem A B, applicatum latitudinem B C, Rationalem. Quod eſt abſurdum. ponitur enim B C, Irrationalis. Non ergo A C, Rationale eſt. Igitur Irrationale. Quod eſt propoſitum.

[a] 21. decimi.

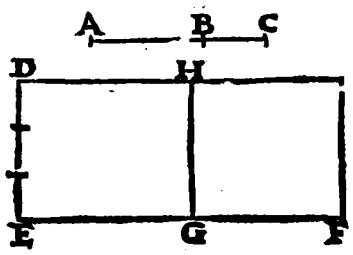
THEOR. 27. PROPOS. 39. 38. 32.

SI duę Mediæ potentia tantùm commenſurabiles componantur, quæ Medium contineant; tota Irrationalis erit. Vocetur autem ex binis Mediis ſecunda.

COMPONANTVR duæ Mediæ [a] ſuperius inuentæ A B, B C, potentia tantùm commenſurabiles, quæ Medium contineãt. Dico totam A C, Irrationalem eſſe. Exponatur enim Rationalis D E,

[a] 29. *decimi*

a 45. primi. a ad quã applicetur rectangulum D F, æquale quadrato A C: & compoſito ex quadratis rectarum A B, B C, æquale alterum ad eandem D E, applicetur D G. Et quia quadratũ ex A C, hoc eſt, rectangulum D F, b æquale eſt duobus quadratis ex A B, B C, vnà cum rectangulo bis ſub A B, B C; erit reliquum H F, æquale reliquo rectangulo, quod bis ſub A B, B C, continetur. Quoniam verò ex hypotheſi, rectangulum ſub A B, B C, Medium eſt; erit & rectangulum bis ſub A B, B C, ei commenſurabile: hoc eſt, H F, Medium, ex coroll. propoſ. 24. huius libri. Rurſus quia quadrata Mediarum A B, B C, potentia commenſurabilium, commenſurabilia ſunt; c erit & compoſitum ex ipſis, nimirum rectangulum D G, vtriuis ipſorum commenſurabile: Sed vtrumq; quadratorum ex Mediis A B, B C, Medium eſt. Igitur & D G, ex coroll. propoſ. 24. huius lib. Medium erit. Quia igitur Media D G, H F, applicantur ad Rationalem D E; (d eſt enim G H, Rationali D E, æqualis.) e erunt eorũ latitudines E G, G F, Rationales ipſi D E, longitudine incommenſurabiles. Rurſus quia A B, B C, longitudine incommẽſurabiles ſunt; & eſt vt A B, ad B C, ita quadratum ex A B, ad rectangulum ſub A B, B C, ex lemmate 3. propoſ. 19. huius lib. erit quadratũ ex A B, incommenſurabile rectangulo ſub A B, B C, vt in ſcholio propoſ. 10. huius lib. oſtenſum eſt: Atqui quadrato ex A B, oſtenſum eſt commenſurabile compoſitũ ex quadratis rectarũ A B, B C; & rectangulo ſub A B, B C, commenſurabile eſt, quod cõtinetur bis ſub A B, B C, cùm hoc illius ſit duplum. Igitur & ea, quæ in ſcholio propoſ. 14. huius lib. diximus, erit & compoſitũ ex quadratis rectarum A B, B C, hoc eſt, rectangulum D G, incommẽſurabile rectangulo bis ſub A B, B C, hoc eſt, rectangulo H F.



c 16. decimi.

d 34. primi.

e 23. decimi.

f 1. ſexti. f Cùm ergo ſit vt D G, ad H F, ita E G, ad G F; g erit E G, ipſi G F, longitudine incommẽſurabilis; oſtenſum autẽ iam fuit E G, G F, eſſe Rationales. Rationales igitur ſunt E G, G F, potentia tantùm commenſurabiles, b ac propterea & tota E F, compoſita, Irrationalis eſt. Quare, per lemma antecedens, D F, contentum ſub Rationali D E, & Irrationali E F, Irrationale eſt; Ac propterea & quadratum ex A C, ipſi D F, æquale, Irrationale eſt. Quare & recta A C, Irrationalis eſt. Vocetur autem ex binis Mediis ſecunda, ſeu vt aliis placet, Bimediale ſecundum. Si duæ ergo Mediæ potentia tantùm commenſurabiles, &c. Quod erat demonſtrandum.

g 10. decimi.

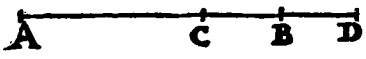
b 37. decimi

SCHOLIVM.

VOCAVIT Euclides in præcedenti propoſ. lineam Irrationalem A C, quæ componitur ex duabus Mediis potentia tantùm commenſurabilibus, quæ Rationale contineant, ex binis Mediis primam: Hic verò lineam Irrationalem A C, quæ componitur ex duabus Mediis potentia tantũ commenſurabilibus, quæ Medium contineant, ex binis Mediis ſecundam, quoniam Rationale & natura, & cognitione prius eſt Medio, quod Irrationale eſt, ex propoſ. 22. huius libri.

LEMMA.

SI recta linea non bifariam ſecetur, erit compoſitũ ex quadratis partium maius q̃ rectangulũ ſub partibus bis cõprehenſum, quadrato eius lineæ, qua maior pars minorẽ ſuperat.



SECETVR recta A D, in B, non bifariam, ſitq; maior pars A B; in qua ſumatur B C, minori parti B D, æqualis, vt ſit A C, exceſſus, quo A B, ſuperat B D, hoc eſt, B C, ipſi B D, æqualem. Dico quadrata rectarum A B, B D, ſimul maiora eſſe rectangulo bis ſub A B, B D, a 7. ſecũdi. *quadrato rectæ A C. Quoniam enim quadrata ex A B, B C, a æqualia ſunt rectangulo bis ſub A B, B C, vnà cum quadrato ex A C; eſtq; B C, ipſi B D, æqualis: erũt quoq; quadrata ex A B, B D, æqualia rectangulo bis ſub A B, B D, vnà cũ quadrato ex A C. Quare quadrata ex A B, B D, maiora ſunt, q̃ rectangulum bis ſub A B, B D, quadrato rectæ A C. Quod eſt propoſitum.*

COROLLARIVM.

Ex hoc ſequitur, quadrata partium inæqualium ſimpliciter eſſe maiora rectangulo, quod bis ſub partibus inæqualibus continetur.

39. THEOR. 28. PROPOS. 40.

33. SI duæ rectæ lineæ potentia incommenſurabiles componantur; quæ faciant compoſitum quidem ex ipſarum quadratis, Rationale; quod autem ſub ipſis continetur, Medium: tota recta linea Irrationalis erit. Vocetur autem Maior.

a 34. decimi. COMPONANTVR duæ rectæ a ſuperius inuentæ A B, B C, potẽtia incommenſurabiles, facientes quidem compoſitum ex ipſarum quadratis Rationale; rectangulum verò ſub ipſis contẽtum, Medium. Dico totam A C, eſſe Irrationalem. Quoniam enim rectangulum ſub A B, B C, Medium ponitur, erit & rectangulum bis ſub A B, B C, illi commenſurabile, Medium, ex coroll. propoſ. 24. huius lib. atq; adeò Irrationale. Ponitur autẽ compoſitum ex quadratis rectarum A B, B C, Rationale. b Incommenſurabile ergo eſt rectangulum bis ſub A B, B C, cõpoſito ex quadratis rectarum

b 10. defin.

A B, B C,



AB,BC. [a] Igitur & rectangulum bis ſub AB,BC, vnà cũ quadratis ex AB,BC, hoc eſt, quadratũ ex AC, incommenſurabile eſt compoſito ex quadratis rectarum AB, BC. Cùm ergo hoc compoſitum ponatur Rationale; [b] erit quadratũ ex AC, illi incommenſurabile, Irrationale; [c] Ac propterea recta AC, Irrationalis eſt. Vocetur autẽ Maior, quia [d] cùm poſsit duo quadrata ex AB, BC, & rectangulum bis ſub AB,BC; compoſitũ ex quadratis rectarum AB,BC, p lemma antecedens, maius eſt rectangulo bis ſub AB,BC. Quare cùm compoſitum ex quadratis rectarũ AB,BC, Rationale ſit, rectangulum verò bis ſub AB,BC, Medium; rectè vocabitur AC, Maior, ſiquidem à Rationali, quod maius eſt, nomẽ conuenit imponere. Si duæ ergo rectæ lineæ potentia incommenſurabiles componantur, &c. Quod erat oſtendendum.

[a] 17. decimi
[b] 10. defin.
[c] 11. defin.
[d] 4. ſecundi.

THEOR. 29. PROPOS. 41. 40. 34.

SI duæ rectæ lineæ potentia incommenſurabiles componantur, quæ faciant compoſitum quidem ex ipſarum quadratis, Medium; quod autem ſub ipſis continetur, Rationale: tota recta linea Irrationalis erit. Vocetur autem Rationale ac Medium potens.

COMPONANTVR duæ rectę [e] ſuperius inuentæ AB,BC, potẽtia incommenſurabiles, facientes compoſitum quidem ex quadratis ipſarum, Medium; rectangulum verò ſub ipſis contentum, Rationale. Dico totam AC, Irrationalem eſſe. Quoniam enim compoſitum ex quadratis rectarum AB,BC, Medium eſt; quod verò continetur bis ſub AB,BC, Rationale, quòd eius dimidiũ, nempe quod ſub AB, BC, ſemel continetur, Rationale ponatur; [f] erit compoſitũ ex quadratis rectarum AB,BC, incommenſurabile rectangulo bis ſub AB,BC. [g] Igitur & compoſitũ ex quadratis rectarum AB,BC, vnà cum rectangulo bis ſub AB, BC, hoc eſt, quadratum ex AC, incommenſurabile eſt rectangulo bis ſub AB,BC. Cùm ergo rectangulum bis ſub AB,BC, vt diximus, ſit Rationale; [h] erit quadratum ex AC, illi incommenſurabile, Irrationale; [i] Ac proinde & recta AC, Irrationalis erit. Vocetur autẽ Rationale ac Medium potens, quia poteſt Medium, nempe compoſitum ex quadratis rectarum AB,BC, & Rationale, rectangulum ſcilicet bis contentum ſub AB,BC. Conuenit autem Rationale Irrationali anteponi. Si duæ ergo rectæ lineæ potentia incommenſurabiles, &c. Quod demonſtrandum erat.

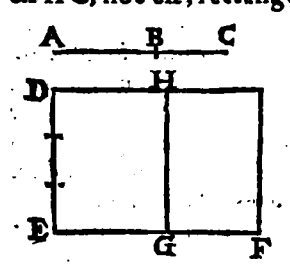


[e] 35. decimi.
[f] 10. defin.
[g] 17. decimi
[h] 10 defin.
[i] 11. defin.

THEOR. 30. PROPOS. 42. 41. 35.

SI duæ rectæ lineæ potentia incommenſurabiles componantur, quæ faciant & compoſitum ex ipſarum quadratis, Medium, & quod ſub ipſis cõtinetur, Medium; incommenſurabileque compoſito ex quadratis ipſarum: tota recta linea Irrationalis erit. Vocetur autem bina Media potens.

COMPONANTVR duæ rectæ [k] ſuperius inuentæ AB, BC, potentia incõmenſurabiles, facientes compoſitum ex ipſarum quadratis Medium, & rectangulum ſub eiſdem Medium, incommenſurabileque compoſito ex quadratis ipſarum. Dico totam AC, Irrationalem eſſe. Exponatur enim Rationalis DE, [l] ad quam applicetur rectangulum DF, æquale quadrato ex AC; Et compoſito ex quadratis rectarum AB,BC, alterum æquale applicetur DG. Et quia quadratum ex AC, hoc eſt, rectangulum DF, [m] æquale eſt compoſito ex quadratis rectarum AB, BC, vnà cum rectangulo bis ſub AB, BC, erit reliquum HF, æquale rectangulo bis ſub AB, BC. Quoniam verò tam compoſitum ex quadratis rectarum AB, BC, hoc eſt, rectangulum DG, quàm rectangulum ſub AB,BC, atque adeò ex corollario 24. huius libri, quod bis ſub AB, BC, nempe ipſum HF, (cùm illi ſit commenſurabile) Medium ponitur, [n] fa cient DG, HF, ad Rationalem DE, applicata latitudines EG, GF, Rationales ipſi DE, longitudine incommenſurabiles. Rurſus quia compoſitum ex quadratis rectarum AB, BC, id eſt, rectangulum DG, incommenſurabile ponitur rectangulo ſub AB,BC: Eidem autem rectangulo ſub AB,BC, commenſurabile eſt ipſius duplum, nempe quod bis continetur ſub AB, BC, hoc eſt, ipſum HF; [o] erunt & DG, HF, incommenſurabilia. Quare [p] cùm ſit vt DG, ad HF, ita EG, ad GF; [q] erunt EG, GF, longitudine incommenſurabiles: Atqui EG, GF, oſtenſæ ſunt Rationales. Igitur EG, GF, Rationales ſunt potentia ſolùm commenſurabiles; [r] Ac propterea tota EF, ex ipſis compoſita Irrationalis eſt. Quare DF, contentum ſub Rationali DE, & Irrationali EF, ex lemmate propoſ. 38. huius lib. Irrationale eſt. Igitur & quadratum ex AC, illi æquale, Irrationale eſt; [s] ideoque & recta ipſa AC, Irrationalis. Vocetur autem bina Media potens, nimirum & compoſitum ex quadratis rectarum AB,BC; & rectangulum bis ſub AB,BC. Si duæ ergo rectæ lineæ potentia incommenſurabiles componantur, quæ faciant & compoſitũ ex ipſarum quadratis Medium, &c. Quod erat demonſtrandum.



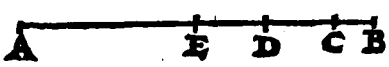
[k] 36. decimi
[l] 45. primi.
[m] 4. ſecũdi.
[n] 23. decimi.
[o] 13. decimi.
[p] 1. ſexti.
[q] 10. decimi
[r] 37. decimi.
[s] 11. defin.

LEMMA.

Si recta linea in partes inæquales secetur, & rursus in alias partes inæquales; erunt quadrata partium magis inæqualium simul maiora quadratis partium minus inæqualium simul.

Secetur recta AB, inæqualiter in C, & rursus inæqualiter in D, sintq; priores partes AC, CB, magis inæquales, quàm posteriores AD, DB. Dico quadrata ex AC, CB, simul maiora esse quadratis ex AD, DB, simul. Diuisa enim AB, bifariam in E, cadet punctum D, vel inter E, C, vel inter A, E. Cadat primùm inter E, C. Quoniam igitur rectangulum sub AC, CB, vnà cum quadrato ex EC, [a] *æquale est quadrato ex EB: Item rectangulum sub AD, DB, vnà cum quadrato ex ED, æquale est eidem quadrato ex EB; erit rectangulum sub AC, CB, vnà cum quadrato ex EC, æquale rectangulo sub AD, DB, vnà cũ quadrato ex ED. Ablatis igitur quadratis inæqualibus rectarum inæqualium EC, ED, cùm quadratum ex EC, maius sit quadrato ex ED; erit reliquum rectangulum sub AC, CB, minus reliquo rectangulo sub AD, DB; ac propterea & rectangulum bis sub AC, CB, minus erit rectangulo bis sub AD, DB. Quoniã verò quadratum ex AB,* [b] *æquale est tam rectangulo bis sub AC, CB, vnà cũ quadratis ex AC, CB, quàm rectangulo bis sub AD, DB, vnà cum quadratis ex AD, DB; erit rectangulum bis sub AC, CB, vnà cum quadratis ex AC, CB, æquale rectangulo bis sub AD, DB, vnà cum quadratis ex AD, DB. Quare cùm rectangulum bis sub AC, CB, ostensum sit minus rectangulo bis sub AD, DB, erũt reliqua quadrata ex AC, CB, maiora reliquis quadratis ex AD, DB. Quod est propositum.*

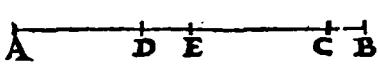
a 5. secũdi.



b 4. secũdi.

Sed cadat iam D, inter A, E. Quoniam igitur partes AC, CB, magis inæquales ponũtur, quàm partes AD, DB; erit AD, (quæ minor est posteriorũ) maior quàm CB; (quæ priorum minor est) ac proinde cùm AE, EB, æquales sint, erit reliqua EC, maior quã reliqua DE. Itaq; quia rectangulum sub AC, CB, vnà cũ quadrato ex EC, [c] *æquale est quadrato ex EB: Item rectangulum sub AD, DB, vnà cum quadrato ex DE, æquale est quadrato ex AE, hoc est, eidem quadrato ex EB; erit rectangulum sub AC, CB, vnà cum quadrato ex EC, æquale rectangulo sub AD, DB, vnà cum quadrato ex DE. Igitur vt prius, demonstrabimus quadrata ex AC, CB, maiora esse quadratis ex AD, DB. Quod est propositum.*

c 5. secũdi.

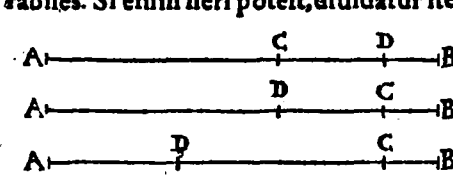


42. 36.

THEOR. 31. PROPOS. 43.

Quæ ex binis nominibus, ad vnum duntaxat punctum diuiditur in nomina.

Sit ex binis nominibus AB, diuisa ad punctum C, in sua nomina, ita vt AC, CB, sint Rationales potentia tantũ commensurabiles, vt vult propos. 37. huius lib. Dico AB, ad aliud punctum diuidi non posse in alia nomina, quæ scilicet sint etiam Rationales lineæ potentia tantũ commensurabiles. Si enim fieri potest, diuidatur iterum in sua nomina ad D. Constat ergo AB, in C, non diuidi bifariam. Nam si bifariam diuideretur, essent AC, CB, longitudine commensurabiles. quod est absurdũ. ponuntur enim Rationales potentia tantùm commensurabiles. Eodem modo neq; ad D, bifariam secabitur AB, cùm & AD, DB, Rationales sint potentia tantùm commensurabiles. Secatur ergo AB, tam ad C, q̃ ad D, inæqualiter; ac propterea partes AC, CB, vel minus inæquales sunt q̃ partes AD, DB, vel magis inæquales; Ac propterea per lemma antecedens, quadrata ex AC, CB, vel minora sunt quadratis ex AD, DB, vel maiora. (Neq; enim partes AD, DB, vbicunq; punctum D, extiterit, partibus AC, CB, æquales erunt, vtraque vtrique, nempe maior maiori, & minor minori. Nam hac ratione secaretur AB, secunda diuisione in eadem nomina, in quæ secta est diuisione prima. quod non ponitur.) Quia verò si ab æqualibus inæqualia demantur, residuorum excessus excessui ablatorum æqualis est, vt in pron. 16. lib. 1. docuimus: Sunt autem quadrata ex AC, CB, vnà cum rectangulo bis sub AC, CB, æqualia quadratis ex AD, DB, vnà cum rectangulo bis sub AD, DB, [a] quòd tam illa, quàm hæc æqualia sint quadrato ex AB; fit, vt qui excessus fuerit ablati compositi ex quadratis rectarum AC, CB, & ablati compositi ex quadratis rectarum AD, DB, idem sit reliqui rectanguli bis sub AC, CB, & reliqui rectanguli bis sub AD, DB. Sed excessus compositi ex quadratis rectarum AC, CB, & compositi ex quadratis rectarũ AD, DB, spatium Rationale est. (cùm enim rectæ AC, CB, Rationales sint, & ob id earum quadrata, Rationalia; erit & compositum ex ea-



a 4. secundi.

ex earum quadratis, Rationale, ex iis, quæ in ſcholio propoſitionis 34. huius libri oſtendimus: eademque ratione erit & compoſitum ex quadratis rectarum A D, D B, Rationale. Quare cùm Rationale ſuperet Rationale Rationali, vt in ſcholio propoſ. 27. huius libri demonſtrauimus; manifeſtum eſt, exceſſum compoſiti ex quadratis rectarum A C, C B, & compoſiti ex quadratis rectarum A D, D B, ſpatium eſſe Rationale.) Igitur & exceſſus rectanguli bis ſub A C, C B, & rectanguli bis ſub A D, D B, ſpatium Rationale eſt. [a] Quoniam verò rectangulum ſub A C, C B, Medium eſt, erit & quod bis ſub A C, C B, illi commenſurabile, ex coroll. propoſ. 24. huius lib. Medium; Atque eodem modo rectangulum bis ſub A D, D B, Medium erit. [b] Quare cùm Medium non ſuperet Medium Rationali; non erit exceſſus rectanguli bis ſub A C, C B, & rectanguli bis ſub A D, D B, ſpatium Rationale: Oſtendimus autem & Rationale eſſe. Quod eſt abſurdum. Non igitur A B, ex binis nominibus ad aliud punctum, quàm ad C, in ſua nomina diuiditur. Quare ad vnum duntaxat punctum diuiditur in nomina. Quod erat demonſtrandum.

[a] 22. decimi.

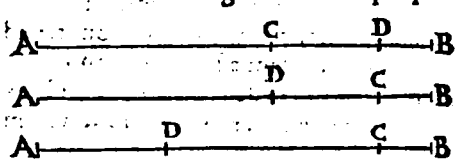
[b] 27. decimi.

THEOR. 32. PROPOS. 44.

43. 37.

QVAE ex binis Mediis prima, ad vnũ duntaxat punctum diuiditur in nomina.

SIT ex binis Mediis prima A B, diuiſa ad punctum C, in ſua nomina, ita vt A C, C B, ſint Mediæ potentia ſolùm commenſurabiles, quæ Rationale contineant, vt vult propoſitio 38. huius libri. Dico A B, ad aliud punctum diuidi non poſſe in alia nomina, quæ ſcilicet ſint etiam Mediæ lineæ potentia tantùm commenſurabiles, continentesque Rationale. Diuidatur enim, ſi fieri poteſt, in alia nomina A D, D B. Igitur vbicunque punctum D, exiſtat, ſimiliter probabimus, vt in præcedenti propoſ. exceſſum rectanguli bis ſub A C, C B, & rectanguli bis ſub A D, D B, eundem eſſe, qui eſt compoſiti ex quadratis rectarum A C, C B, & compoſiti ex quadratis rectarum A D, D B: Sed exceſſus rectanguli bis ſub A C, C B, & rectanguli bis ſub A D, D B, ſpatium eſt Rationale. (Cùm enim A C, C B, ponantur continere Rationale, erit & quod bis ſub A C, C B, ei, quod continetur ſemel ſub A C, C B, commenſurabile, Rationale. Eodemq; modo Rationale erit, quod bis ſub A D, D B. Quare cùm Rationale ſuperet Rationale Rationali, vt in ſcholio propoſ. 27. huius lib. oſtendimus; perſpicuum eſt, exceſſum rectanguli bis ſub A C, C B, & rectanguli bis ſub A D, D B, ſpatiũ eſſe Rationale.) Igitur & exceſſus compoſiti ex quadratis rectarum A C, C B, & compoſiti ex quadratis rectarum A D, D B, ſpatium Rationale eſt. Quia verò rectæ A C, C B, Mediæ ſunt, & potentia commenſurabiles, erunt earũ quadrata Media quoq;, & commenſurabilia. [c] Quare & compoſitum ex ipſis vtrique ipſorum commenſurabile erit. Igitur cùm vtrumque ſit Medium, erit & compoſitum ex ipſis, per corollarium propoſ. 24. huius libri, Medium. Eodem modo Medium oſtendemus compoſitum ex quadratis rectarũ A D, D B. [d] Cùm ergo Medium nõ ſuperet Medium Rationali; non erit exceſſus compoſiti ex quadratis rectarum A C, C B, & compoſiti ex quadratis rectarum A D, D B, ſpatium Rationale. Oſtendimus autem & Rationale eſſe. Quod eſt abſurdum. Non igitur A B, ex binis Mediis prima ad aliud punctum, quàm ad C, in ſua nomina diuiditur. Quam ob rem ad vnum duntaxat punctum diuiditur in nomina. Quod demonſtrandum erat.



[c] 16. decimi.

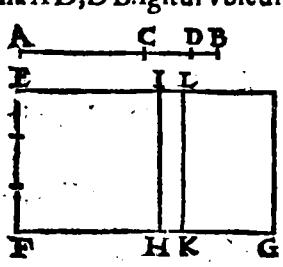
[d] 27. decimi

THEOR. 33. PROPOS. 45.

44. 38.

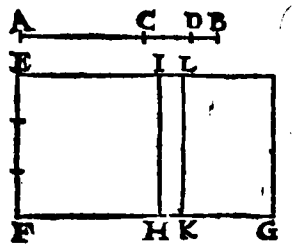
QVAE ex binis Mediis ſecunda, ad vnũ duntaxat punctũ diuiditur in nomina.

SIT ex binis Mediis ſecunda A B, diuiſa ad punctum C, in ſua nomina, ita vt A C, C B, Mediæ ſint potentia tantũ commenſurabiles, quæ Medium contineant, vt vult propoſ. 39. huius lib. Dico A B, ad aliud punctum diuidi nõ poſſe in alia nomina, quæ ſcilicet ſint etiam lineæ Mediæ potentia tantùm commenſurabiles, continentesq; Medium. Diuidatur enim, ſi poteſt fieri, in alia nomina A D, D B. Igitur vbicunq; punctum D, exiſtat, ſimiliter oſtendemus, vt in propoſ. 43. quadrata ex A C, C B, vel maiora eſſe quadratis ex A D, D B, vel minora. Exponatur Rationalis E F, [e] ad quam applicetur rectangulum E G, æquale quadrato ex A B. Item E H, æquale quadratis ex A C, C B. Erit igitur reliquum I G, æquale ei, quod continetur bis ſub A C, C B, quandoquidem quadratum ex A B, [f] æquale eſt quadratis ex A C, C B, & rectangulo bis ſub A C, C B. Eodem modo ſi ad E F, applicetur E K, quadratis ex A D, D B, æquale; erit reliquum L G, æquale rectangulo bis ſub A D, D B, comprehenſo. Et quia quadrata ex A C, C B, inæqualia ſunt quadratis ex A D, D B; erunt quoque rectangula E H, E K, quæ illis æqualia ſunt, inæqualia; ac propterea & rectangulum F H, F K, inæquales erunt. Rurſus quia quadrata ex A C, C B, maiora ſunt, per lemma propoſ. 39. huius libri, rectangulo bis ſub A C, C B; erit & E H, maius quàm I G; ac propterea E H, maius quàm dimidium ipſius E G, ideoq; & recta F H, maior quàm dimidium ipſius F G. Eadem ratione oſtendemus F K, maiorem eſſe dimidio ipſius F G. Inæquales ergo ſunt partes F H, H G, partibus F K, K G, ſingulæ ſingulis.



[e] 45. primi.

[f] 4. ſecundi.



Quoniam verò A C, C B, Mediæ ſunt, & potentia commenſurabiles erunt & earum quadrata Media, & commenſurabilia. [a] Igitur & compoſitum ex ipſis vtrique ipſorum commenſurabile erit. Cùm ergo vtrumque ipſorum ſit Medium, erit quoq; compoſitum ex ipſis, hoc eſt, E H, per coroll. propoſ. 24. huius libri, Medium. Eademque ratione Medium erit E K. [b] Quare E H, E K, ad Rationalem E F, applicata faciunt latitudines F H, F K, Rationales ipſi E F, longitudine incommenſurabiles. Eodem modo cùm rectangulum ſub A C, C B, ponatur Medium, erit & quod bis ſub A C, C B, hoc eſt, I G, illi commenſurabile, Medium, ex coroll. propoſ. 24. huius libri. Quare cùm applicetur ad Rationalem H I, [c] erit H G, Rationalis ipſi H I, longitudine incommenſurabilis. Non aliter oſtendemus L G, Medium eſſe, & K G, Rationalem ipſi K L, longitudine incommenſurabilem. Rurſus quia A C, C B, longitudine ſunt incommenſurabiles; & eſt vt A C, ad C B, ita per lemma 3. propoſ. 19. huius libri, quadratum ex A C, ad rectangulum ſub A C, C B, [d] erit quadratum ex A C, rectangulo ſub A C, C B, incommenſurabile. Sed quadrato ex A C, commenſurabile eſt compoſitum ex quadratis rectarum A C, C B: (cùm enim A C, C B, potentia ſint commenſurabiles, atque adeò ipſarum quadrata commenſurabilia; [e] erit & compoſitum ex ipſis vtrilibet ipſorum, nimirum quadrato ex A C, commenſurabile.) Rectangulo verò ſub A C, C B, commenſurabile eſt, quod bis ſub A C, C B. Igitur & compoſitum ex quadratis rectarum A C, C B, hoc eſt, rectangulum E H, incommenſurabile eſt, per ſcholium propoſ. 14. huius libri, rectangulo bis ſub A C, C B, hoc eſt, ipſi I G. Quocirca [f] cùm ſit, vt E H, ad I G, ita F H, ad H G, [g] erunt F H, H G, longitudine incommenſurabiles. Oſtenſæ ſunt autem & Rationales. Rationales ergo ſunt F H, H G, potentia ſolùm commenſurabiles. [h] Igitur F G, tota Irrationalis eſt, quæ ex binis nominibus appellatur, diuiſaque in nomina ad punctum H. Eodem modo oſtendemus & F G, ex binis nominibus diuiſam eſſe in alia nomina ad aliud punctum K. Quod fieri non poteſt, [i] vt demonſtratum eſt in præcedentibus. Igitur A B, ex binis Mediis ſecunda non diuiditur in ſua nomina ad aliud punctum, quàm ad C. Quare ad vnum duntaxat punctum diuiditur in nomina. Quod erat oſtendendum.

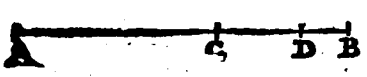
a 16. decimi. b 23. decimi. c 23. decimi. d 10. decimi. e 16. decimi. f 1. ſexti. g 10. decimi. h 37. decimi i 43. decimi.

45. 39.

THEOR. 34. PROPOS. 46.

MAIOR ad vnum duntaxat punctum diuiditur in nomina.

SIT Maior A B, diuiſa in ſua nomina ad punctum C, ita vt A C, C B, potentia ſint incommenſurabiles, facientes quidem compoſitum ex ipſarum quadratis Rationale; rectangulum verò ſub ipſis Medium, vt vult propoſ. 40. huius libri. Dico A B, non poſſe diuidi ad aliud punctum in alia nomina, quæ ſcilicet lineæ incommenſurabiles quoque ſint potentia, facientes compoſitum ex ipſarum quadratis Rationale, & rectangulũ ſub ipſis Medium.



Si enim fieri poteſt, diuidatur in alia nomina ad D. Vbicunq; ergo punctum D, extiterit, demonſtrabimus ſimiliter, vt in propoſ. 43. exceſſum compoſiti ex quadratis rectarũ A C, C B, & compoſiti ex quadratis rectarum A D, D B, eum eſſe, qui rectanguli bis ſub A C, C B, & rectanguli bis ſub A D, D B. Sed exceſſus compoſiti ex quadratis rectarũ A C, C B, & compoſiti ex quadratis rectarum A D, D B, ſpatium eſt Rationale: (quia cùm vtrumque compoſitum ex hypotheſi ſit Rationale, erit quoque eorum exceſſus ſpatium Rationale, vt in ſcholio propoſ. 27. huius libri oſtendimus.) Igitur & exceſſus rectanguli bis ſub A C, C B, & rectanguli bis ſub A D, D B, ſpatium eſt Rationale. Quoniam verò rectangulum ſub A C, C B, ponitur Medium, erit & rectangulum bis ſub A C, C B, Medium, ex coroll. propoſ. 24. huius libri, cùm ei ſit commenſurabile. Atque eodem modo Medium erit rectangulum bis ſub A D, D B. [k] Igitur cùm Medium non ſuperet Medium Rationali; non erit exceſſus rectanguli bis ſub A C, C B, ſpatium Rationale: Oſtendimus autem & Rationale eſſe. Quod eſt abſurdum. Non igitur Maior A B, ad aliud punctum, quàm ad C, in ſua nomina diuiditur. Quapropter ad vnum duntaxat punctum diuiditur in nomina. Quod erat demonſtrandum.

k 27. decimi

46. 40.

THEOR. 35. PROPOS. 47.

RATIONALE ac Medium potens, ad vnum duntaxat punctum diuiditur in nomina.

SIT linea Rationale ac Medium potens A B, diuiſa in ſua nomina in puncto C, ita vt A C, C B, incommenſurabiles ſint potentia, facientes compoſitum quidem ex ipſarum quadratis Medium; rectangulum verò ſub ipſis Rationale, vt vult propoſ. 41. huius libri. Dico A B, non poſſe diuidi in alio puncto in alia nomina, quæ nimirum ſint lineæ quoque incommenſurabiles potentia, facientes compoſitum quidem ex ipſarum quadratis Medium, & rectangulum ſub ipſis Rationale. Diuidatur enim, ſi fieri poteſt, in alia nomina ad D. Vbicunque ergo punctum D, exiſtat, oſtendemus non aliter, ac in propoſ. 43. huius libri, exceſſum



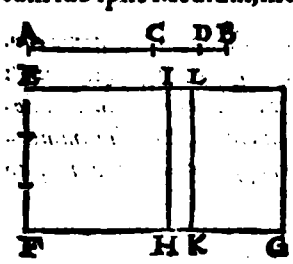
rectanguli

rectanguli bis ſub A C, C B, & rectanguli bis ſub A D, D B, eundem eſſe, qui eſt compoſiti ex quadratis rectarum A C, C B, & compoſiti ex quadratis rectarum A D, D B. Sed exceſſus rectanguli bis ſub A C, C B, & rectanguli bis ſub A D, D B, ſpatium Rationale eſt, quod oſtendemus, vt in propoſ. 44. Igitur & exceſſus compoſiti ex quadratis rectarum A C, C B, & compoſiti ex quadratis rectarum A D, D B, ſpatium eſt Rationale. Quia verò compoſita ex his quadratis ponuntur eſſe Media: [a] Medium autem non ſuperat Medium Rationali; nõ erit eorum exceſſus ſpatium Rationale. Sed & Rationale oſtendimus. Quod eſt abſurdum. Non igitur A B, Rationale ac Medium potens, ad aliud punctum, quàm ad C, in ſua nomina diuiditur. Quam ob rem ad vnũ duntaxat punctum diuiditur in nomina. Quod oſtendendum erat. [a] 27. decimi

THEOR. 36. PROPOS. 48. 47. 41.

BINA Media potens, ad vnum duntaxat punctum diuiditur in nomina.

SIT linea potens bina Media A B, diuiſa in ſua nomina ad C, ita vt A C, C B, potentia incommenſurabiles ſint, facientes & compoſitum ex ipſarum quadratis Medium, & rectangulum ſub ipſis Medium, incommenſurabileq; compoſito ex earum quadratis, vt vult propoſ. 42. huius libri. Dico A B, diuidi non poſſe ad aliud punctum in alia nomina, quæ videlicet ſint etiam lineæ potentia incommenſurabiles, facientes & compoſitum ex ipſarum quadratis Medium, & rectangulum ſub ipſis Medium, incommenſurabileque compoſito ex earum quadratis. Nam, ſi poteſt fieri, diuidatur in alia nomina ad punctum D, vbicunq; hoc punctum D, exiſtat. Conſtructio autem eadem fiat, quæ in propoſitione quadrageſimaquinta oſtendemus; quæ, vt ibi, partes F H, H G, partibus F K, K G, inæquales eſſe ſingulas ſingulis. Quoniam igitur compoſitum ex quadratis rectarum A C, C B, Medium ponitur, erit & E H, illi compoſito æquale, Medium. Item quia rectangulum ſub A C, C B, ponitur etiam Medium, erit & I G, eius duplo æquale, Medium, ex corollario propoſ. 24. huius lib. quia illi commenſurabile eſt. Igitur Media E H, I G, applicata ad Rationalem E F, (eſt enim I H, ipſi E F, æqualis) [b] faciunt latitudines F H, H G, Rationales, longitudine ipſi E F, incommenſurabiles. Eadem quoque ratione probabimus, & rectas lineas F K, K G, Rationales eſſe, longitudine incommenſurabiles ipſi E F. Quia verò compoſitum ex quadratis rectarum A C, C B, deſcriptis, hoc eſt, rectangulum E H, incommenſurabile eſt, ex hypotheſi, rectangulo bis ſub A C, C B, nempe rectangulo I G, [c] eſtq; vt E H, ad I G, ita F H, ad H G; erunt F H, H G, longitudine incommenſurabiles, vt in ſcholio propoſ. 10. huius libri oſtendimus: Sed oſtenſæ ſunt Rationales. Rationales ergo ſunt F H, H G, potentia ſolùm commenſurabiles. Igitur tota F G, Irrationalis eſt, quæ ex binis nominibus appellatur, diuiſaque in nomina ad punctum H. Non ſecus demonſtrabimus & F G, ex binis nominibus diuiſam eſſe in alia nomina, ad aliud punctum K. Quod fieri non poſſe, [d] iam ante demonſtratum eſt. Igitur A B, bina Media potens non diuiditur ad aliud punctum quàm ad C, in ſua nomina. Quocirca ad vnum duntaxat punctum diuiditur in nomina. Quod oſtendendum erat.



[b] 23. decimi
[c] 1. ſexti.
[d] 43. decimi

DEFINITIONES SECVNDAE.

EXPOSITA Rationali, & quæ ex binis nominibus, diuiſa in nomina, cuius maius nomen plus poſsit, quàm minus, quadrato rectæ lineæ ſibi longitudine commenſurabilis,

I.

SI quidem maius nomen expoſitæ Rationali commenſurabile ſit longitudine; Vocetur tota ex binis nominibus prima.

II.

SI verò minus nomen expoſitæ Rationali longitudine ſit commenſurabile; Vocetur ex binis nominibus ſecunda.

III.

QVOD ſi neutrum ipſorum nominum ſit longitudine commenſurabile expoſitæ Rationali; Vocetur ex binis nominibus tertia.

RVRSVS ſi maius nomen plus poſsit, quàm minus, quadrato rectæ lineæ ſibi longitudine incommenſurabilis.

IIII.

SI quidem maius nomen expoſitæ Rationali commenſurabile ſit longitudine; Vocetur ex binis nominibus quarta.

V.

SI verò minus nomen; Vocetur quinta.

VI.

QVOD ſi neutrum ipſorum nominum; Vocetur ſexta.

SCHOLIVM.

NVMERVS dictarum sex linearum, quæ ex binis nominibus appellantur, colligitur hac ratione. Quoniam nomina linea, quæ ex binis nominibus dicitur, sunt lineæ Rationales potentia tantùm commensurabiles, non poterit vtrumque nomen expositæ Rationali commensurabile esse longitudine; (aliàs enim nomina ipsa essent quoque lineæ longitudine inter se commensurabiles, vt in scholio propos. 12. huius libri docuimus, quod non ponitur.) Sed vel vnum tantùm, nempe maius, aut minus; vel neutrum: Atque ita tria genera consurgunt linearum, quæ ex binis nominibus vocantur. Rursus quia nomina inæqualia sunt; (aliàs enim essent lineæ inter se longitudine commensurabiles. quod nō ponitur.) poterit maius nomen plus, quàm minus, quadrato lineæ sibi longitudine commensurabilis, vel incommensurabilis: Et si quidem plus possit quadrato lineæ longitudine sibi commensurabilis; constituentur vnà cum tribus dictis generibus, tres diuersæ lineæ ex binis nominibus, nimirum prima, secunda, & tertia ex binis nominibus: Si verò plus possit quadrato lineæ longitudine sibi incommensurabilis, efficientur vnà cum eisdem tribus generibus alia tres diuersæ lineæ ex binis nominibus, videlicet quarta ex binis nominibus, quinta, & sexta, vt ex definitionibus hic ab Euclide traditis perspicuum est. Sunt igitur sex diuersæ lineæ ex binis nominibus appellatæ.

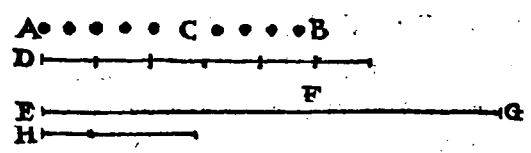
PVLCHRE autem Euclides primas ordine facit tres, in quibus maius nomen plus potest, quàm minus, quadrato rectæ lineæ sibi longitudine commensurabilis; Secundas verò tres reliquas, in quibus maius nomen plus potest, quàm minus, quadrato rectæ lineæ sibi incommensurabilis longitudine; propterea quòd commensurabile antecedit incommensurabile, vt manifestum est.

RVRSVS rectè adhuc inter lineas ex binis nominibus, primam omnium ponit, in qua maius nomē cum mensurabile est longitudine expositæ lineæ Rationali; & secundam, in qua minus nomen eidem Rationali lineæ expositæ longitudine est commensurabile. quoniam maius natura antecedit minus, cùm minus à maiori contineatur; tertiam verò, in qua neutrum ipsorum nominū expositæ Rationali longitudine est commensurabile; Et in reliquis tribus eodem modo, primam dicti secundi ordinis quartam appellans; secundam, quintam; & tertiam, sextam.

48. PROBL. 13. PROPOS. 49.

42. INVENIRE ex binis nominibus primam.

REPERTIS duobus numeris quadratis AB, CB, ex iis, quæ in scholio 2. propos. 29. huius libri scripsimus, quorum excessus AC, non sit quadratus, ita vt AB, CB, proportionem quidem habeant, quam quadratus ad quadratum; at AB, AC, proportionem non habeant, quam quadratus ad quadratū: Exponatur Rationalis quæpiam D, cui longitudine commensurabilis sumatur EF. Erit ergo & EF, Rationali D, commensurabilis, Rationalis. Fiat deinde vt numerus AB, ad AC, ita per coroll. propos. 6. huius lib. quadratum ex EF, ad quadratum ex FG. Dico EG, esse ex binis nominibus primam. Quoniam enim quadrata ex EF, FG, cùm proportionem habeant, quam numeri AB, AC, *a* commensurabilia sunt; erunt & rectæ EF, FG, commensurabiles, saltem potētia: Ostensa autem est EF, Rationalis. Igitur & FG, Rationalis est. Quia verò AB, ad AC, proportionem non habet, quā quadratus ad quadratum, nō habebunt quoq; quadrata ex EF, FG, proportionem, quam numerus quadratus ad quadratum. *b* Incommensurabiles ergo sunt longitudine rectæ EF, FG. Sunt igitur EF, FG, Rationales potentia solùm cōmensurabiles; *c* Atq; idcircò tota EG, Irrationalis est, quæ ex binis nominibus dicitur. Dico & primam esse. Cùm enim sit vt numerus AB, ad numerum AC, ita quadratum ex EF, ad quadratum ex FG; sit autem AB, maior, quàm AC; erit quoque quadratum ex EF, maius quàm quadratum ex FG. Sit maius, ex lemmate propos. 14. huius libri, quadrato rectæ H. Quoniam igitur est, vt AB, numerus ad AC, ita quadratum ex EF, ad quadratum ex FG; erit quoque, per conuersionē rationis, vt AB, ad CB, videlicet ad excessum, quo antecedens AB, superat consequentem AC, ita quadratum ex EF, ad quadratum ex H, nimirum ad excessum, quo antecedens quadratum ex EF, superat consequens quadratum ex FG: Habet autem AB, ad CB, proportionem, quam quadratus ad quadratum. Igitur & quadrata ex EF, & H, proportionem habebunt, quam numerus quadratus ad numerum quadratum; *d* ac proinde rectæ EF, H, longitudine commensurabiles sunt. Quoniam igitur maius nomen EF, plus potest, quàm minus FG, quadrato rectæ H, sibi longitudine commensurabilis; estque idem maius nomen EF, expositæ Rationali D, commensurabile longitudine; erit EG, per definitionem, ex binis nominibus prima. Inuenimus ergo ex binis nominibus primam. Quod faciendum erat.



a 6. decimi.
b 9. decimi.
c 37. decimi.
d 9. decimi.

49. PROBL. 14. PROPOS. 50.

48. INVENIRE ex binis nominibus secundam.

REPERTIS duobus numeris quadratis AB, CB, vt in præcedenti propositione, expositaque Rationali

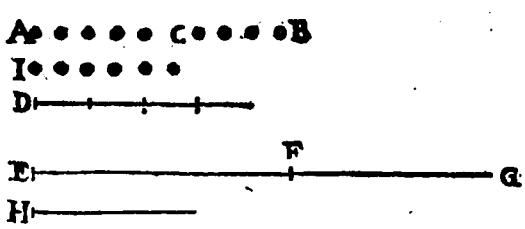
Rationali quadam D; ſumatur ei longitudine commenſurabilis F G. Erit ergo & F G, Rationali D, commenſurabilis, Rationalis. Fiat deinde, vt numerus A C, ad numerum A B, ita p corollarium propoſ. 6. huius libri, quadratum ex F G, ad quadratum ex E F. Dico E G, eſſe ex binis nominibus ſecundam. Quoniam enim quadrata ex F G, E F, proportionem habentia, quam numeri A C, A B, [a] commenſurabilia ſunt; erunt & rectæ F G, E F, commenſurabiles, ſaltem potentia: Oſtenſa eſt autem F G, Rationalis. Igitur & E F, Rationalis eſt. Quia verò A C, A B, proportionẽ non habent, quam quadrati numeri; neque quadrata ex F G, E F, proportionem habebũt, quam numeri quadrati. [b] Incommenſurabiles ergo ſunt longitudine rectæ F G, E F. Sunt igitur E F, F G, Rationales potentia tantùm commenſurabiles; [c] Atque idcircò tota E G, Irrationalis eſt, quæ ex binis nominibus dicitur. Dico & ſecundam eſſe. Cùm enim ſit vt numerus A C, ad numerum A B, ita quadratum ex F G, ad quadratũ ex E F: Et conuertendo vt A B, ad A C, ita quadratum ex E F, ad quadratum ex F G; ſit autem A B, maior quàm A C; erit & quadratum ex E F, maius, quàm quadratum ex F G. Sit, per lemma propoſ. 14. huius lib. maius quadrato rectæ H. Oſtendemus iam, vt in precedenti propoſ. H, ipſi E F, longitudine commenſurabilem eſſe. Quoniam igitur maius nomen E F, plus poteſt, quàm minus F G, quadrato rectæ H, ſibi longitudine commenſurabilis; eſtq; minus nomen F G, expoſitæ Rationali D, commenſurabile longitudine; erit E G, per definitionem, ex binis nominibus ſecunda. Inuenimus ergo ex binis nominibus ſecundã. Quod erat faciẽdum.

[a] 6. decimi.
[b] 9. decimi.
[c] 37. decimi.

PROBL. 15. PROPOS. 51. 50. 44.

INVENIRE ex binis nominibus tertiam.

RAPERTIS duobus numeris quadratis A B, C B, vt in propoſ. 49. Sumatur alius numerus I, qui ad neutrum ipſorum A B, A C, proportionem habeat, quam quadratus ad quadratum. quod quidem fiet, ſi ſumatur I, non quadratus numerus proximè maior, quàm A C. Ita enim, cùm nõ ſit quadratus, non habebit ad quadratum A B, proportionem, quam quadratus ad quadratũ. Rurſus cùm ſit non quadratus proximè maior, q̃ A C, differet vel ſola vnitate ab A C, vel binario. (Vnitate quidem, quando A C, numerus fuerit, cui addita vnitas non facit quadratum: binario verò, quando vnitas addita ad A C, quadratum facit. Vt ſi A C, ſit 8. erit non quadratus proximè maior 10. differens ab 8. binario. quia vnitas addita ad 8. facit quadratum 9. At ſi A C, ſit 5. erit non quadratus proximè maior 6. differens à 5. vnitate, quia vnitas addita ad 5. non facit quadratum, &c.) Quare vt in ſcholio propoſ. 8. lib. 8. oſtendimus, non cadet inter I, & A C, medius proportionalis. Igitur non erunt ſimiles plani; ac propterea neq; proportionem habebunt, quam numeri quadrati. Exſita iam Rationali quapiam D, fiat p corollarium propoſ. 6. huius lib. vt I, ad A B, ita quadratum ex D, ad quadratum ex E F. [d] Erunt ergo quadrata ex D, & E F, proportionẽ habentia, quam numerus I, ad numerum A B, commenſurabilia; atque adeò & lineę D, E F, commenſurabiles, ſaltem potentia. Exiſtente igitur D, Rationali, erit & E F, Rationalis. Quia verò I, ad A B, hoc eſt, quadratũ ex D, ad quadratum ex E F, proportionẽ non habet, quam numerus quadratus ad numerum quadratum; [e] erunt D, & E F, rectæ inter ſe longitudine incommenſurabiles. Rurſus per dictum coroll. fiat vt A B, ad A C, ita quadratum ex E F, ad quadratum ex F G. [f] Erunt ergo quadrata ex E F, F G, proportionem habẽtia, quam numerus ad numerum, commenſurabilia; Ideoq; & lineæ E F, F G, commenſurabiles ſaltem potentia. Igitur cùm E F, oſtenſa ſit Rationalis; erit & F G, Rationalis. Et quia A B, ad A C, hoc eſt, quadratum ex E F, ad quadratum ex F G, proportionem non habet, quam numerus quadratus ad numerũ quadratum; [g] erunt E F, F G, longitudine incommenſurabiles. Sunt ergo E F, F G, Rationales potentia tantùm commenſurabiles; [h] Atq; idcircò tota E G, Irrationalis eſt ex binis nominibus appellata. Dico & tertiam eſſe. Quoniam enim eſt, vt I, ad A B, ita quadratum ex D, ad quadratum ex E F; Et vt A B, ad A C, ita quadratum ex E F, ad quadratũ ex F G; erit ex æqualitate vt I, ad A C, ita quadratum ex D, ad quadratũ ex F G: Non habet autem I, ad A C, proportionem, quã numerus quadratus ad numerum quadratum. Igitur nec quadrata ex D, & F G, proportionem habebũt, quam quadratus numerus ad numerum quadratum; [i] ac propterea rectæ D, & F G, longitudine incommenſurabiles ſunt. Quoniam autem eſt vt A B, ad A C, ita quadratum ex E F, ad quadratũ ex F G; Eſt autem A B, maior q̃ A C; erit & quadratum ex E F, maius q̃ quadratum ex F G. Sit ergo maius, per lemma propoſ. 14. huius lib. quadrato rectæ H. Oſtendemus iam ſimiliter, vt in 49. propoſ. H, ipſi E F, longitudine commenſurabilem eſſe. Quoniam igitur maius nomen E F, plus poteſt, q̃ minus F G, quadrato rectæ H, ſibi longitudine commenſurabilis; & neutra ipſarum E F, F G, longitudine commenſurabilis eſt expoſitæ Rationali D, vt demonſtratũ eſt; Erit E G, p definitionem, ex binis nominibus tertia. Inuenimus ergo ex binis nominibus tertiam. Quod erat faciendum.

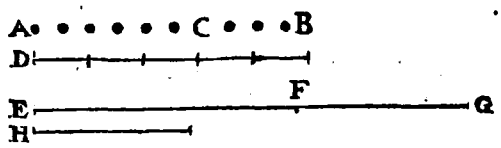


[d] 6. decimi.
[e] 9. decimi.
[f] 6. decimi.
[g] 9. decimi.
[h] 37. decimi.
[i] 9. decimi.

PROBL. 16. PROPOS. 52. 51. 45.

INVENIRE ex binis nominibus quartam.

REPERTIS duobus numeris, A C, C B, ita vt compositus ex ipsis A B, ad neutrum ipsorũ proportionem habeat, quam quadratus ad quadratum, ex iis, quæ in scholio 3. propos. 29. huius lib. tradidimus; exponatur Rationalis quædam D, cui longitudine commensurabilis sumatur E F. Erit ergo & E F, Rationalis, cùm Rationali D, commensurabilis sit. Quòd si reliqua construantur, vt in propos. 49. ostẽdemus similiter, vt ibi, totam E G, ex binis nominibus esse. Dico & quartam esse. Erit enim rursus, vt in 49. propos. quadratũ ex E F, maius q̃ quadratum ex F G. Sit ergo maius, quadrato rectæ H. Quoniam igitur eodem modo, vt in 49. propos. per conuersionem rationis est, vt A B. ad C B, ita quadratum ex E F, ad quadratum ex H: Non est autem A B, ad C B, vt quadratus ad quadratum; neq; quadratum ex E F, ad quadratum ex H, erit vt numerus quadratus ad numerũ quadratum. [a] Longitudine ergo incommensurabiles sunt rectæ E F, & H. Itaq; cùm maius nomẽ E F, plus possit, q̃ minus F G, quadrato rectæ H, sibi longitudine incommẽsurabilis, & maius rursus nomen E F, longitudine commensurabile expositæ Rationali D; erit E G, per defin. ex binis nominibus quarta. Inuenimus ergo ex binis nominibus quartam. Quod faciendum erat.



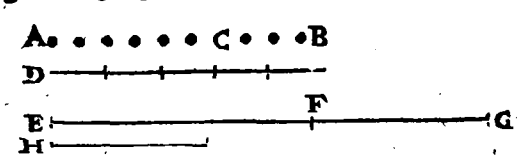
a 9. decimi.

52. 46.

PROBL. 17. PROPOS. 53.

INVENIRE ex binis nominibus quintam.

REPERTIS duobus numeris A C, C B, vt in præcedenti propos. fiat constructio, vt in propos. 50. hoc est, sumatur F G, longitudine commensurabilis expositæ Rationali D; &c. Ostendemus ergo, vt in propos. 50. E G, esse ex binis nominibus. Dico & quintã esse. Demonstrabimus enim eodem modo, vt in 50. propos. quadratum ex E F, maius esse, q̃ quadratum ex F G. Sit ergo maius, quadrato rectæ H. Quoniam verò, vt in propos. 49. ostensum est, per conuersionem rationis, est vt A B, ad C B, ita quadratum ex E F, ad quadratũ ex H. Ostendemus, vt in propos. antecedenti, rectas E F, & H, longitudine incommensurabiles esse. Quare cùm maius nomẽ E F, plus possit, quàm minus F G, quadrato rectæ H, sibi longitudine incommensurabilis, & minus nomen F G, longitudine commensurabile expositæ Rationali D; erit per definitionem E G, ex binis nominibus quinta. Inuenimus ergo ex binis nominibus quintam. Quod faciendum erat.

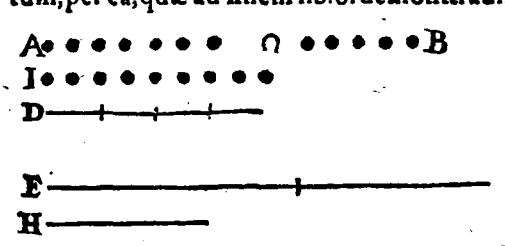


53. 47.

PROBL. 18. PROPOS. 54.

INVENIRE ex binis nominibus sextam.

REPERTIS duobus numeris AC, C B, planis non similibus, quorum neuter sit quadratus, & compositus ex ipsis A B, non sit quoq; quadratus, habeatq; ad neutrum ipsorum proportionem, quam quadratus numerus ad quadratum numerum; (quod quidem fiet, si numerus quilibet non quadratus diuidatur in duos numeros inter se primos. [b] Nam hac ratione & totus ad vtrumque ipsorum primus erit; atq; idcirco proportionem ad illos nõ habebit, quam quadratus ad quadratum, per ea, quæ ad finem lib. 8. demonstrauimus. Sumatur alius numerus quicunq; I, qui nec ad A B, nec ad A C, habeat proportionem, quam quadratus ad quadratum; qualis est quiuis numerus quadratus. Hic enim ad A B, & A C, nõ quadratos, proportionem non habebit, quam quadratus ad quadratum. Exponatur deinde Rationalis aliqua D; & vt I, ad A B, ita fiat quadratum ex D, ad quadratum ex E F, per coroll. propos. 6. huius libri, & reliqua fiant, vt in propos. 51. ostendemus q; vt ibi, rectas D, & E F, esse longitudine incommensurabiles, atq; totam E G, ex binis esse nominibus. Dico & sextam esse. Demonstrabimus enim similiter, vt in 51. propos. D, & F G, longitudine esse incommensurabiles, esseq; quadratum ex E F, maius, quàm quadratum ex F G. Sit ergo maius, quadrato rectæ H. Ostendemus quoq;, vt in propos. 49. per conuersionem rationis, esse vt A B, ad C B, ita quadratum ex E F, ad quadratum ex H. Cùm igitur A B, ad C B, atq; adeò quadratum ex E F, ad quadratum ex H, proportionem nõ habeat, quam quadratus numerus ad quadratum; [c] erunt rectæ E F, & H, longitudine incommensurabiles. Itaque cùm maius nomen E F, plus possit, quàm minus F G, quadrato rectæ H, sibi longitudine incommensurabilis, & neutrum ipsorũ nominum E F, F G, longitudine sit commensurabile expositæ Rationali D; erit E G, per definitionem, ex binis nominibus sexta. Inuenimus ergo ex binis nominibus sextam. Quod faciendum erat.



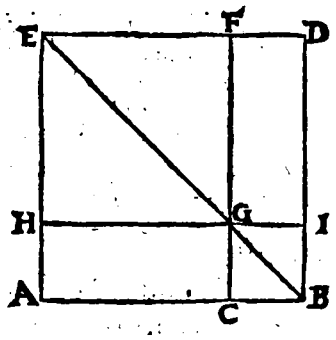
b 30. sept.

c 9. decimi.

LEMMA.

Si recta linea secta sit vtcunque; erit rectangulum sub partibus contentum, medium proportionale inter earum quadrata: Item rectangulum contentum sub tota, & vna parte, medium proportionale inter quadratum totius lineæ, & quadratum dictæ partis.

SECTA



SECTA sit recta AB, vicunque in C. Describatur ex AB, quadratum ABDE, in quo diameter ducatur BE: Ducta autem ex C, recta CF, ipsi BD, parallela, quæ diametrum secet in G, agatur per G, ipsi AB, parallela HI. Erunt igitur per coroll. propos. 4. lib. 2. FH, CI, quadrata partium AC, CB; vtrumque autem rectangulorum DG, GA, comprehensum sub eisdē partibus: At verò rectangula CD, AI, sub tota AB, & parte CB, contenta. Dico DG, mediū proportionale esse inter quadrata FH, CI: At CD, medium esse proportionale inter quadrata AD, CI. Quoniam enim [a] *vt HG, ad GI, ita est tam FH, ad DG, quàm AG, ad CI; erit vt FH, ad DG, ita AG, ad CI:* [b] *Est autem AG, ipsi DG, æquale. Igitur erit quoque, vt FH, ad DG, ita DG, ad CI; Atque adeò DG, medium proportionale est inter quadrata FH, CI.*

a 1. sexti.

b 43. primi.

RVRSVS quia est [c] *vt AB, ad CB, ita tam AD, ad CD, quàm AI, ad CI; erit vt AD, ad CD, ita AI, ad CI: Est autem AI, ipsi CD, æquale. Igitur erit vt AD, ad CD, ita quoque CD, ad CI. Quare CD, medium proportionale est inter quadrata AD, CI. Eodem modo erit AF, medium proportionale inter quadrata AD, FH.*

c 1. sexti.

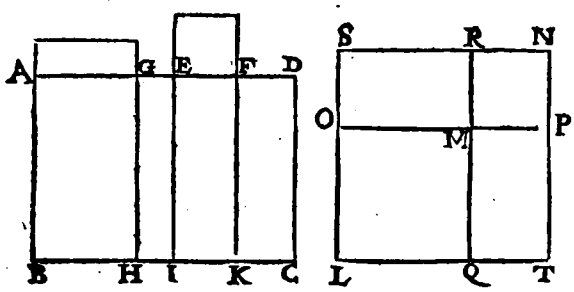
THEOR. 37. PROPOS. 55. 54.

SI spatium contineatur sub Rationali, & ex binis nominibus prima; Recta linea spatium potens Irrationalis est, quæ ex binis nominibus appellatur. 48.

CONTINEATVR spatium AC, sub Rationali AB, & ex binis nominibus prima AD. Dico rectam lineam, quæ potest spatium AC, Irrationalem esse, quæ ex binis nominibus appellatur. Sit enim ipsius AD, maius nomen AE. Erunt igitur ex defin. AE, ED, Rationales potentia tantùm commensurabiles; & AE, plus poterit, q̄ ED, quadrato rectæ sibi longitudine commensurabilis; & denique AE, expositæ Rationali AB, longitudine commensurabilis erit. Secetur ED, bifariam in F. Quia igitur AE, plus potest q̄ ED, quadrato rectæ sibi longitudine commensurabilis, si quartę parti quadrati ex ED, hoc est, quadrato ex EF, æquale parallelogrammū sub AG, GE, contentum, per 2. lemma propos. 17. huius libri, applicetur deficiēs figura quadrata; [a] in partes longitudine commensurabiles ipsam diuidet. Quare AG, GE, partes inter se longitudine commensurabiles sunt. Ducantur iam per puncta G, E, F, ipsis AB, DC, parallelæ GH, EI, FK. [b] Et parallelogrammo AH, æquale quadratū fiat LM: At parallelogrammo GI, æquale fiat quadratum MN; coniungantúrq; quadrata LM, MN, ita ad angulum M, vt latera MO, MP, vnam rectam lineam constituant OP. Facient ergo & latera MQ, MR, vnam rectam QR, vt demonstratū est à nobis ex Proclo ad propos. 15. lib. 1. propterea quòd anguli OMQ, PMR, ad verticem M, sunt æquales, nempe recti. Completo autem rectangulo LN, cùm rectæ OM, MP, rectis QM, MR, æquales sint, ideoq; & tota OP, toti QR; [c] sit autem OP, ipsis SN, LT; & QR, ipsis LS, TN, æqualis; æquilaterum erit rectangulum LN; ideoque quadratum.

a 18. decimi.

b 14. secūdi.



c 34. primi.

QVONIAM verò rectangulum sub AG, GE, æquale est, per constructionem, quadrato ex EF; [d] erit vt AG, ad EF, ita EF, ad GE; [e] Ac propterea & vt AH, ad EK, ita EK, ad GI. Quare EK, medium proportionale est inter AH, GI, hoc est, inter quadrata LM, MN, illis æqualia: Sed inter eadem quadrata LM, MN, medium proportionale est TM, ex antecedenti lemmate. Æquale igitur est TM, ipsi EK. [f] Cùm ergo ipsi TM, æquale sit MS, [g] & ipsi EK, æquale sit FC; erit & MS, ipsi FC, æquale. Quocirca totum quadratum LN, toti rectangulo AC, æquale est; atque adeò recta OP, potest spatium AC, contentum sub AB, Rationali, & AD, ex binis nominibus prima. Dico OP, esse Irrationalem, quæ ex binis nominibus dicitur.

d 17. sexti.

e 1. sexti.

f 43. primi.

g 36. primi.

QVONIAM enim AG, GE, ostensæ sunt longitudine commēsurabiles; [h] erit & tota AE, vtriq; ipsarum longitudine commensurabilis: Est autem AE, cùm sit maius nomen ipsius AD, ex binis nominibus primæ, Rationali AB, commensurabilis longitudine. Igitur & AG, GE, eidem AB, ex scholio propos. 12. huius lib. longitudine commensurabiles sunt; Atq; adeò cùm AB, sit Rationalis, erunt & AG, GE, Rationales. [i] Quare rectangula AH, GI, sub Rationalibus longitudine commensurabilibus contenta Rationalia sunt; Ideoq; & quadrata LM, MN, ipsis æqualia, Rationalia erunt; Ac proinde & rectæ OM, MP, Rationales erunt.

h 16. decimi.

i 20. decimi.

ET quoniam AE, ipsi ED, longitudine incommensurabilis est; Est autem ipsi AE, longitudine ostensa commensurabilis AG, & ipsi ED, commensurabilis est longitudine EF, eius dimidia; erūt

ex ſcholio propoſ. 14. huius lib. & AG, EF, inter ſe longitudine incommenſurabiles. Quare & AH, EK, [a] eandem proportionẽ habẽtia, quam AG, EF, [b] incommenſurabilia ſunt, ac proinde & LM, MT, illis æqualia, ſunt incommenſurabilia. [c] Igitur & rectæ OM, MP, longitudine ſunt incommenſurabiles, [d] cùm eandem habeant proportionem, quam LM, MT: Sunt autẽ & OM, MP, Rationales oſtenſæ. Igitur OM, MP, Rationales ſunt potentia ſolùm commenſurabiles. [e] Quapropter tota OP, potens ſpatium AC, Irrationalis eſt, quæ ex binis nominibus dicitur. Si ſpatium ergo contineatur ſub Rationali, & ex binis nominibus prima, &c. Quod demonſtrandum erat.

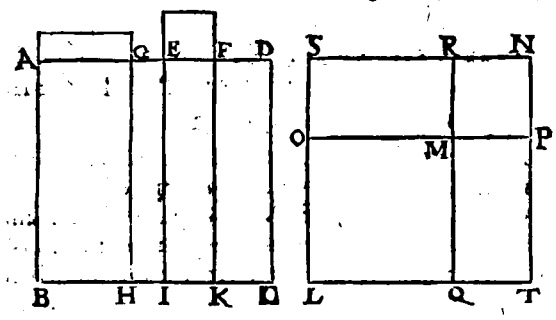
a 1. ſexti.
b 10. decimi.
c 10. decimi.
d 1. ſexti.
e 37. decimi.

55. 49.

THEOR. 38. PROPOS. 56.

Si ſpatium contineatur ſub Rationali, & ex binis nominibus ſecunda; Recta linea ſpatium potens Irrationalis eſt, quæ ex binis Mediis prima appellatur.

CONTINEATVR ſpatium AC, ſub Rationali AB, & ex binis nominibus ſecunda AD. Dico rectam lineã, quæ poteſt ſpatium AC, Irrationalem eſſe, quæ ex binis Mediis prima dicitur. Sit enim ipſius AD, maius nomen AE. Erunt igitur ex defin. AE, ED, Rationales potentia tantũ commenſurabiles; & AE, plus poterit, q̃ ED, quadrato rectæ lineæ ſibi longitudine commenſurabilis; Et denique ED, Rationali expoſitę AB, longitudine commenſurabilis. Secetur ED, bifariam in F; & reliqua conſtruantur, vt in antecedenti propoſitione. Quo facto, demonſtrabimus ſimiliter, vt ibi, rectam OP, poſſe ſpatium AC, contentum ſub Rationali AB, & ex binis nominibus ſecunda AD. Dico iam OP, Irrationalem eſſe, quæ ex binis Mediis prima vocatur.



QVONIAM enim AE, longitudine incommenſurabilis eſt ipſi ED; & ED, minus nomẽ exiſtẽs ipſius AD, ex binis nominibus ſecundæ, longitudine commẽſurabilis eſt Rationali AB; [f] erũt AE, AB, longitudine incommenſurabiles. Et quia AG, GE, oſtenſæ ſunt in antecedenti propoſ. longitudine commenſurabiles; [g] Erit quoq; tota AE, vtriq; ipſarum commenſurabilis. Quare cùm AE, maius nomen exiſtens ipſius AD, ex binis nominibus ſecundæ, linea ſit Rationalis; erunt & AG, GE, Rationales: quòd cùm vtraque AG, GE, ipſi AE, ſit longitudine commenſurabilis; at verò AE, Rationali AB, longitudine incommenſurabilis; [h] erit vtraque AG, GE, eidem AB, incommenſurabilis longitudine. Ac proinde tam AB, AG, quàm AB, GE, Rationales ſunt potentia ſolùm commenſurabiles. [i] Igitur rectangula AH, GI, Media ſunt, propterea quę & quadrata LM, MN, ipſis æqualia, Media ſunt. Ergo & rectæ OM, MP, ſunt Mediæ.

f 13. decimi.
g 16. decimi.
h 14. decimi.
i 22. decimi.

QVIA verò AG, GE, longitudine ſunt commenſurabiles; [k] erunt & AH, GI, eandem cum illis proportionẽ habẽtia, commenſurabilia, atq; idcircò & quadrata LM, MN, ipſis æqualia, commenſurabilia ſunt. Igitur & rectæ OM, MP, commenſurabiles ſunt, ſaltẽ potentia. Et quoniã AE, ED, longitudine incommenſurabiles ſunt; Ipſi verò AE, oſtenſa eſt longitudine commẽſurabilis AG; & ipſi ED, longitudine commenſurabilis eſt EF, eius dimidia; erunt p ſcholium propoſ. 14. huius lib. AG, EF, longitudine incommenſurabiles; Ac proinde AH, EK, eandem habẽtia proportionẽ cum ipſis, [l] incommenſurabilia ſunt. Igitur & LM, MT, ipſis AH, & EK, æqualia, incommenſurabilia ſunt. [m] Ideoq; & rectæ OM, MP, longitudine ſunt incommenſurabiles. [n] cùm eandẽ habeãt proportionem quã LM, MT. Cùm ergo oſtenſum ſit OM, MP, Medias eſſe, & commenſurabiles, erunt OM, MP, Mediæ potentia ſolùm commenſurabiles. Quoniam deniq; ED, minus nomen ipſius AD, ex binis nominibus ſecundæ, linea eſt longitudine commenſurabilis ipſi AB, hoc eſt, ipſi EI: Eſt autẽ EF, ipſi ED, quoq; longitudine commenſurabilis; [o] erunt etiam EI, EF, longitudine commenſurabiles; Ac propterea cũ EI, Rationalis ſit, erit & EF, Rationalis. [p] Quare EK, rectangulum, Rationale eſt: Eſt autẽ MT, ſub OM, MP, contentum ipſi EK, æquale. Igitur & MT, Rationale eſt. Quapropter OM, MP, Mediæ ſunt potentia tantũ commenſurabiles, Rationale q; [q] continentes; [r] atq; adeò OP, Irrationalis eſt, quæ ex binis Mediis prima appellatur. Si ergo ſpatium contineatur ſub Rationali, & ex binis nominibus ſecunda, &c. Quod oſtendendum erat.

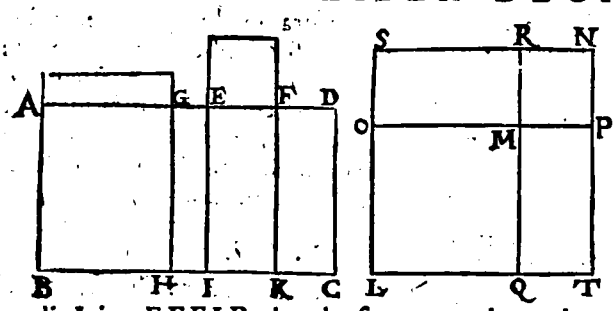
k 10. decimi
l 10. decimi.
m 10. decimi
n 1. ſexti.
o 12. decimi.
p 20. decimi
q 38. decimi

56. 50.

THEOR. 39. PROPOS. 57.

Si ſpatium contineatur ſub Rationali, & ex binis nominibus tertia; Recta linea ſpatium potens Irrationalis eſt, quæ ex binis Mediis ſecunda dicitur;

CONTINEATVR ſpatiũ AC, ſub Rationali AB, & ex binis nominibus tertia AD. Dico rectam, quæ poteſt ſpatiũ AC, Irrationalem eſſe, quę dicitur ex binis Mediis ſecunda. Sit enim ipſius AD, maius nomen AE. Erunt ergo AE, ED, ex defin. Rationales potentia tantùm commenſurabiles & AE, plus poterit, q̃ ED, quadrato rectæ ſibi longitudine commenſurabilis; Et deniq; neutra ipſarum AE, ED, Rationali expoſitę AB, longitudine commenſurabilis erit. Secta ED, bifariam in F, reliqua omnia fiant, vt in propoſ. 55. Similiter ergo, vt ibi, oſtendemus rectam OP, poſſe ſpatium AC: Et vt in antecedenti propoſ. 56. rectas OM, MP, eſſe Medias potentia tantũ commenſurabiles; propterea quòd AE, Rationali AB, ponitur longitudine incommenſurabilis, quemadmodum &



dum & ibi eadem AE, ipſi AB, longitudine erat incommenſurabilis. Quoniam verò ED, EF, ſunt commenſurabiles longitudine; eſtque BD, ipſi AB, Rationali, hoc eſt, ipſi EI, longitudine incommenſurabilis; a erit quoque EF, eidem EI, longitudine incommenſurabilis: Sunt autem EF, EI, Rationales, quòd EF, dimidia ſit ipſius ED, Rationalis; & EI, expoſitæ Rationali AB, æqualis. Igitur EF, EI, Rationales ſunt potentia tantùm commenſurabiles; b Ac propterea EK, Medium eſt; ideoq; & MT, æquale ipſi EK, Medium eſt, quod ſub Mediis OM, MP, continetur. Itaque cùm OM, MP, Mediæ ſint potentia ſolùm commenſurabiles, contineantque ſpatium Medium; c erit OP, Irrationalis, quæ ex binis Mediis ſecunda appellatur. Si igitur ſpatium contineatur ſub Rationali, & ex binis nominibus tertia, &c. Quod erat demonſtrandum.

a 14. decimi

b 22. decimi

c 22. decimi

THEOR. 40. PROPOS. 58. 57.

SI ſpatium contineatur ſub Rationali, & ex binis nominibus quarta; Recta linea ſpatium potens Irrationalis eſt, quæ vocatur Maior. 51.

CONTINEATVR ſpatium AC, ſub Rationali AB, & ex binis nominibus quarta AD. Dico rectam lineam, quæ poteſt ſpatium AC, eſſe Irrationalem, quæ Maior vocatur. Sit enim AE, ipſius AD, maius nomen. Erunt ergo ex defin. AE, ED, Rationales potentia tantùm commenſurabiles; & AE, plus poterit, quàm ED, quadrato rectæ lineæ longitudine ſibi incommenſurabilis, & denique AE, ipſi AB, commenſurabilis erit longitudine. Secta ED, bifariam in F, fiant reliqua omnia, vt in propoſ. 55. d Erunt ergo AG, GE, longitudine incommenſurabiles. Demonſtrabimus iam eodem modo, vt ibi, OP, poſſe ſpatium AC. Dico OP, Irrationalem eſſe, quæ vocatur Maior. Quoniam enim AG, GE, longitudine incommenſurabiles ſunt; e erunt & rectangula AH, GI, eandem cum illis habentia proportionem, incommenſurabilia; atq; adeò & quadrata LM, MN, ipſis AH, GI, æqualia, incommenſurabilia erunt. Quare rectæ OM, MP, potentia ſunt incommenſurabiles. Quia verò AE, maius nomen ipſius AD, ex binis nominibus quartæ, linea eſt longitudine commenſurabilis Rationali AB; erit & AE, Rationalis; f & rectangulum AI, ſub ipſis contentum, Rationale. Eſt autem AI, æquale compoſito ex quadratis LM, MN: Compoſitum ergo ex quadratis LM, MN, Rationale eſt.

d 19. decimi

e 10. decimi.

f 20. decimi

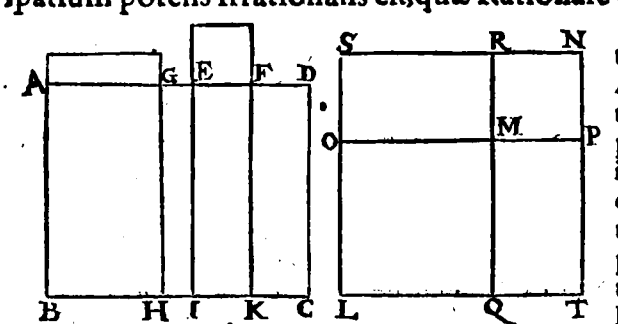
ET quoniam ED, minus nomen ipſius AD, ex binis nominibus quartæ, linea eſt longitudine incommenſurabilis Rationali AB, erit & EF, ipſius dimidia eidem AB, longitudine incommenſurabilis; Et eſt EF, Rationalis, cùm ſit Rationali ED, commenſurabilis. Igitur EF, & AB, Rationales ſunt potentia ſolùm cõmenſurabiles. g Quare EK, Medium eſt, ſub ipſis cõtentum; ideoq; & MT, illi æquale, contentumq; ſub OM, MP, Medium eſt. Quocirca cùm OM, MP, ſint potentia incommenſurabiles, faciantque compoſitum quidem ex ipſarum quadratis LM, MN, Rationale: Rectangulũ verò ſub ipſis MT, Mediũ; h Irrationalis erit tota OP, quæ maior nominatur. Si ſpatiũ ergo cõtineatur ſub Rationali, & ex binis nominibus quarta, &c. Quod erat oſtendendũ.

g 22. decimi

h 40. decimi

THEOR. 41. PROPOS. 59. 58.

SI ſpatium cõtineatur ſub Rationali, & ex binis nominibus quinta; Recta linea ſpatium potens Irrationalis eſt, quæ Rationale & Medium potens appellatur. 52.



CONTINEATVR ſpatium AC, ſub Rationali AB, & ex binis nominibus quinta AD. Dico rectam lineam, quæ poteſt ſpatium AC, eſſe Irrationalem, quæ dicitur potens Rationale & Medium. Sit enim ipſius AD, maius nomen AE. Sunt ergo ex defin. AE, ED, Rationales potentia tantùm commenſurabiles; & AE, plus poteſt, quàm ED, quadrato rectæ longitudine ſibi incommenſurabilis; & denique ED, longitudine commẽſurabilis eſt expoſitæ Rationali AB. Secta ED, bifariam, fiant reliqua eadem, quæ in propoſ. 55. i Erunt igitur rurſus AG, GE, longitudine incommenſurabiles. Simili autem modo, vt in propoſ. 55. conſtabit rectam OP, poſſe ſpatium AC. Dico OP, Irrationalem eſſe, quæ potens Rationale & Medium appellatur. Erunt enim, vt in propoſ. antecedenti, rectæ OM, MP, potentia incommenſurabiles. Et quia AE, maius nomen ipſius AD, ex binis nominibus quintæ, linea eſt Rationalis & longitudine incommenſurabilis Rationali AB; erunt AE, AB, Rationales potentia tantùm commenſurabiles. k Quare rectangulum AI, ſub ipſis contentum, Medium eſt. Eſt autem AI, æquale compoſito ex quadratis LM, MN. Igitur & compoſitum hoc, Medium erit. Rurſus quia ED, Rationalis ponitur longitudine commenſurabilis Rationali AB, cùm ſit minus nomẽ ipſius AD, ex binis

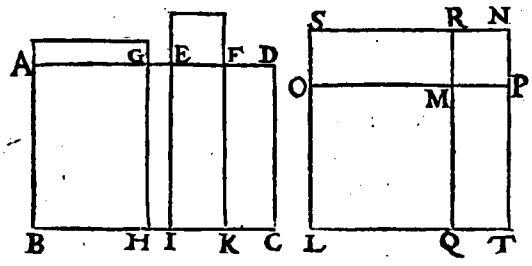
i 19. decimi.

k 22. decimi

nominibus quintæ; erit & E F, ipſius dimidia, eidem A B, commenſurabilis longitudine, & Ra-
a 20. decimi tionalis. a Quare E K, ſub Rationalibus E I, E F, longitudine commenſurabilibus, Rationale eſt: atque idcirco & M T, ſub O M, M P, contentum Rationale erit, cùm ipſi E K, ſit æquale. Quamobrem cùm rectæ O M, M P, potentia incommenſurabiles ſint, faciantque compoſitum quidem ex ipſarum quadratis L M, M N, Medium; Rectangulum verò M T, ſub ipſis contentum, Rationale;
b 41. decimi b Irrationalis erit tota O P: quæ dicitur potens Rationale, & Medium. Si igitur ſpatium cõtineatur ſub Rationali, & ex binis nominibus quinta, &c. Quod erat demonſtrandum.

59. 53. ## THEOR. 42. PROPOS. 60.

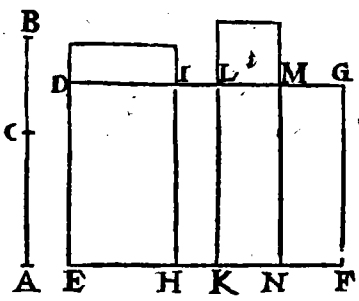
SI ſpatium contineatur ſub Rationali, & ex binis nominibus ſexta; Recta linea ſpatium potens Irrationalis eſt, quæ bina Media potens nominatur.



CONTINEATVR ſpatium A C, ſub Rationali A B, & ex binis nominibus ſexta A D. Dico rectam, quæ ſpatium A C, poteſt, Irrationalem eſſe, quæ dicitur potẽs bina Media. Sit enim ipſius A D, maius nomen A E. Sunt ergo A E, E D, ex defin. Rationales potentia tantùm commenſurabiles; & A E, plus poterit, quàm E D, quadrato rectæ ſibi longitudine incommenſurabilis; & denique neutra ipſarum A E, E D, longitudine erit cõmenſurabilis Rationali A B. Fiant om-
c 19. decimi. nia, quæ in ſuperioribus; c eruntque A G, G E, longitudine incommẽſurabiles. Iam verò oſtendemus ſimiliter, vt in propoſ. 55. rectam O P, poſſe ſpatium A C. Item vt in propoſ. 58. rectas O M, M P, potentia eſſe incommenſurabiles. Rurſus, vt in antecedenti propoſ. erit compoſitum ex quadratis L M, M N, Medium. Vt autem in propoſ. 58. erit quoque M T, ſub O M, M P, comprehenſum, Medium. Et quia duarum rectarum A E, E F, illa quidem incommenſurabilis eſt longitudine
d 13. decimi ipſi E D; hæc verò eidem commenſurabilis; d erunt A E, E F, longitudine incommenſurabiles.
e 10. decimi e Igitur & A I, E K, incommenſurabilia ſunt. f cùm eandem rationem habeant, quam A E, E F.
f 1. ſexti. Quare & compoſitum ex quadratis L M, M N, quod ipſi A I, æquale eſt, & rectangulum M T, quod ipſi E K, eſt æquale, incommenſurabilia ſunt. Quapropter cùm rectæ O M, M P, ſint potentia incommenſurabiles, faciantq; & compoſitum ex ipſarum quadratis L M, M N, Medium, &
g 42. decimi M T, ſub ipſis contentum, Medium, incommenſurabileq; compoſito ex ipſarum quadratis; g erit tota O P, Irrationalis, quæ bina Media potens vocatur. Si ergo ſpatium contineatur ſub Rationali, & ex binis nominibus ſexta, &c. Quod oſtendendum erat.

60. 54. ## THEOR. 43. PROPOS. 61.

QVADRATVM eius, quæ eſt ex binis nominibus, ad Rationalem applicatum, latitudinem facit ex binis nominibus primam.



h 45. primi. SIT ex binis nominibus A B, cuius maius nomen A C; h & ad Rationalem expoſitam D E, applicetur rectangulum D F, æquale quadrato ex A B, latitudinem faciens D G. Dico D G, ex binis nominibus eſſe primam. Applicetur enim ad eandem Rationalem D E, rectangulum D H, æquale quadrato ex A C; & ad H I, aliud I K, æquale quadrato ex C B. Erit igitur reliquũ L F, æquale ei, quod bis ſub A C, C B, continetur, cùm quadrata ex A C, C B, vnà cum rectangulo bis ſub A C, C B,
i 4. ſecundi. i æqualia ſint quadrato ex A B, quemadmodũ & eidem quadrato ex A B, æquale eſt, per cõſtructionem, rectangulum D F. Secetur L G, bifariam in M, puncto, per quod ipſis L K, G F, parallela agatur
k 37. decimi M N: eritque vtrumq; rectangulũ L N, M F, æquale ei, quod ſub A C, C B, continetur. k Et quoniã A C, C B, Rationales ſunt potentia ſolùm commenſurabiles, quòd tota A B, ſit ex binis nomini-
l 16. decimi. bus; erunt quadrata ex A C, C B, Rationalia, & ob id commenſurabilia; l quorum vtrique cùm etiam commenſurabile ſit compoſitum ex ipſis; erit quoque compoſitum quadratorum ex A C, C B, Rationale. Eſt autem huic compoſito æquale, per conſtructionem, rectangulum D K. Igitur
m 21. decimi & D K, Rationale erit; quod cum applicatum ſit ad Rationalem D E, m faciet latitudinem D L, Rationalem, & ipſi D E, longitudine commenſurabilem.
n 22. decimi Rvrsvs quia A C, C B, Rationales ſunt ſolùm potentia commenſurabiles, n erit rectangulum ſub ipſis, Medium, atq; adeò, & quòd bis ſub ipſis, cùm ſit ei commenſurabile, hoc eſt, ipſum
o 23. decimi. L F, Medium erit, per coroll. propoſ. 24. huius lib. Quare L F, applicatum ad L K, Rationalem, o facit L G, latitudinem Rationalem, & ipſi L K, hoc eſt, ipſi D E, longitudine incommenſurabilem.
p 13. decimi. Eſt autem D L, oſtenſa eidem D E, commenſurabilis longitudine. p Igitur D L, L G, longitudine incommenſurabiles ſunt. Sunt ergo D L, L G, Rationales potentia tantùm commenſurabiles;
q 37. decimi q Ac propterea D G, ex binis nominibus eſt. Dico & primam eſſe.

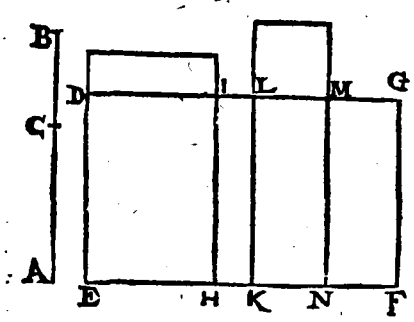
QVONIAM

QVONIAM enim ex lemmate propoſ. 54. huius lib. rectangulum ſub A C, C B, medium proportionale eſt inter quadrata ex A C, C B, erit quoque L N, medium proportionale inter D H, I K, atque adeò [a] cùm rectæ D I, L M, I L, eandem rationem habeant, quam D H, L N, I K; erit quoque recta L M, media proportionalis inter D I, I L. [b] Quare rectangulum ſub D I, I L, æquale eſt quadrato ex L M. Et quia quadrata ex rectis A C, C B, commenſurabilia ſunt, quòd A C, C B, ponuntur potentia commenſurabiles; erunt & D H, I K, ipſis æqualia, commenſurabilia. [c] Igitur & rectæ D I, I L, eandem cum illis habentes rationem, longitudine commenſurabiles ſunt. Quoniam autem D K, maius eſt, quàm L F, quòd & quadrata ex A C, C B, maiora ſint, per lemma propoſ. 39. huius libri, quàm rectangulum bis ſub A C, C B; erit & recta D L, maior quàm L G, [d] cùm D L, L G, eandem rationem habeant, quam D K, L F. Itaque quoniam D L, maior eſt, quàm L G, & ad D L, applicatur rectangulum ſub D I, I L, deficiens figura quadrata, æquale quadrato ex L M, hoc eſt, quartæ parti quadrati ex minore L G, deſcripti; (oſtenſum enim eſt rectangulum ſub D I, I L, æquale quadrato ex L M.) diuiditurq; D L, ad I, in partes D I, I L, longitudine commenſurabiles, vt eſt demonſtratum; [e] poterit D L, maior plus quàm L G, minor, quadrato rectæ ſibi longitudine commenſurabilis. Quare cùm D G, oſtenſa ſit ex binis nominibus, & D L, maius nomen plus poſſe; quàm L G, minus nomen, quadrato rectæ ſibi longitudine commenſurabilis, atque idem maius nomen D L, longitudine commenſurabile Rationali expoſitæ D E; erit ex defin. D G, ex binis nominibus prima. Quadratũ ergo eius, q̃ eſt ex binis nominibus, &c. Quod oſtẽdendũ erat.

[a] 1. ſexti. [b] 17. ſexti. [c] 10. decimi [d] 1. ſexti. [e] 18. decimi.

THEOR. 44. PROPOS. 62. 61.

QVADRATVM eius, quæ eſt ex binis Mediis prima, ad Rationalem applicatum, latitudinem facit ex binis nominibus ſecundam. 55.

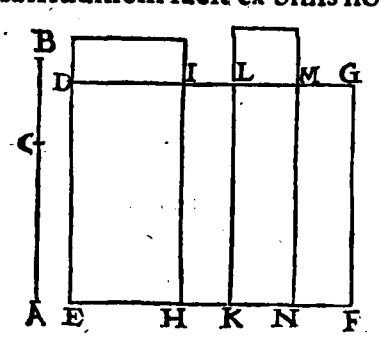


SIT ex binis Mediis prima A B, cuius maius nomẽ A C; [f] & ad Rationalẽ D E, applicetur rectãgulum D F, æquale quadrato ex A B, latitudinem faciens D G. Dico D G, ex binis nominibus eſſe ſecundam. Conſtituãtur enim eadẽ, quæ in propoſ. præcedenti, ita vt rurſus D H, I K, æqualia ſint quadratis ex A C, C B, & vtrumque ipſorum L N, M F, ei quod ſub A C, C B, cõtinetur. Quoniam igitur A C, C B, ex binis Mediis primam A B, componentes [g] Mediæ ſunt potentia tantùm commenſurabiles, quæ Rationale continent; erunt quadrata ex A C, C B, atq; adeò rectãgula ipſis æqualia D H, I K, commenſurabilia, atque Media. [h] Cùm ergo propterea & totum D K, vtriq; ipſorum D H, I K, ſit commẽſurabile; erit quoq; ex coroll. propoſ. 24. huius lib. D K, Medium; quod cùm applicatum ſit ad Rationalem D E: [i] erit eius latitudo D L, Rationalis ipſi D E, longitudine incommenſurabilis. Rurſus quoniam rectangulum ſub A C, C B, Rationale eſt: erit & eius duplum, nempe L F, Rationale; quod cum applicatum ſit ad Rationalem L K; [k] erit eius latitudo L G, Rationalis ipſi L K, hoc eſt, ipſi D E, longitudine commenſurabilis. Quare cùm duarum rectarum D L, L G, ipſa L G, ſit ipſi D E, commenſurabilis longitudine, at D L, longitudine incommenſurabilis, [l] erunt D L, L G, longitudine incommenſurabiles. Quòd cum D L, L G, oſtenſæ ſint Rationales; erunt ipſæ Rationales potentia ſolùm cõmenſurabiles; [m] ac propterea tota D G, ex binis nominib. eſt. Iam verò vt in antecedenti propoſ. demonſtrabimus D L, maius nomẽ eſſe, & poſſe plus, q̃ minus L G, quadrato rectæ ſibi lõgitudine cõmenſurabilis. Quocirca cùm ipſius D G, maius nomẽ D L, plus poſſit, q̃ minus nomen L G, quadrato rectæ ſibi longitudine cõmenſurabilis, & minus nomẽ L G, oſtenſum ſit longitudine cõmenſurabile Rationali expoſitæ D E; erit ex defin. D G, ex binis nominibus ſecũda. Quadratũ ergo eius, q̃ eſt ex binis Mediis prima, &c. Quod erat oſtendendũ.

[f] 45. primi. [g] 38. decimi [h] 16. decimi [i] 23. decimi. [k] 21. decimi. [l] 13. decimi. [m] 37. decimi

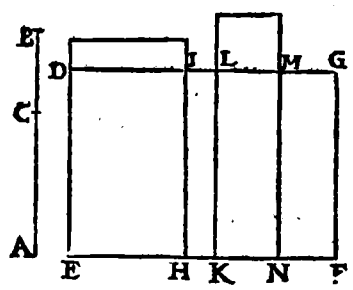
THEOR. 45. PROPOS. 63. 62.

QVADRATVM eius, quę ex binis Mediis ſecunda, ad Rationalem applicatum, latitudinem facit ex binis nominibus tertiam. 56.



SIT ex binis Mediis ſecunda A B, cuius maius nomen A C, [n] & ad Rationalem D E, applicetur rectangulum D F, æquale quadrato ex A B, latitudinem faciens D G. Dico D G, eſſe ex binis nominibus tertiam. Conſtructis enim iiſdem, quę in propoſ. 61. quoniam A C, C B, ex binis Mediis ſecundam A B, componentes, [o] Mediæ ſunt potentia ſolùm commenſurabiles, quæ Medium continent; Erunt quadrata ex A C, C B, atque adeò rectangula ipſis æqualia D H, I K, commenſurabilia; & Media. [p] Cùm ergo propterea & totum D K, vtrique ipſorum D H, I K, ſit commenſurabile; erit & ex coroll. propoſ. 24. huius libri D K, Medium; quod cùm applicatum ſit ad Rationalem D E; [q] erit eius latitudo D L, Rationalis ipſi D E, longitudine incommenſurabilis. Rurſus quia rectangulum ſub A C, C B, Medium eſt; erit & eius duplum L F, Medium; quod cum applicatum ſit ad Rationalem L K; [r] erit latitudo L G, Rationalis

[n] 45. primi. [o] 39. decimi [p] 16. decimi [q] 23. decimi [r] 23. decimi



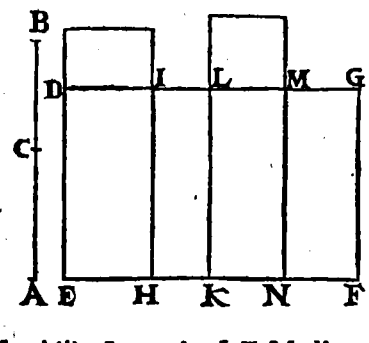
ipſi L K, hoc eſt, ipſi D E, longitudine incommenſurabilis. Et quia A C, ipſi C B, longitudine eſt incommenſurabilis; eſtque vt A C, ad C B, ita per lemma 1. propoſ. 19. huius libri, quadratũ ex A C, ad rectangulum ſub A C, C B, [a] erit quoq; quadratum ex A C, rectangulo ſub A C, C B, incommenſurabile. [b] Eſt autem quadrato ex A C, commenſurabile compoſitum ex quadratis rectarum A C, C B, quòd quadrata ex A C, C B, commenſurabilia ſint, quippe cùm rectæ ipſæ potentia ponantur commenſurabiles; & rectangulo ſub A C, C B, commenſurabile eſt eius duplum, nimirum rectangulum bis ſub A C, C B. Igitur compoſitum ex quadratis rectarum A C, C B, hoc eſt, rectangulum D K, incommenſurabile eſt rectangulo bis ſub A C, C B, hoc eſt, rectangulo L F, per ea, quæ in ſcholio propoſ. 14. huius libri conſcripſimus. Quare rectæ D L, L G, eandem rationem cum D K, L F, habentes [c] longitudine ſunt incõmenſurabiles: Sunt autem oſtenſæ & Rationales. Rationales ergo ſunt potentia tantùm commenſurabiles; [d] ac propterea tota D G, ex binis nominibus eſt. Iam verò, vt in propoſ. 61. oſtendemus D L, eſſe maius nomen, poſſeq; plus, q̃ minus L G, quadrato rectæ ſibi longitudine commenſurabilis. Quamobrẽ cùm D L, maius nomen plus poſsit, quã L G, minus, quadrato rectæ ſibi longitudine cõmenſurabilis, & neutra ipſarũ D L, L G, Rationali expoſitæ D E, ſit oſtenſa longitudine cõmenſurabilis; erit ex defin. D G, ex binis nominibus tertia. Quadratũ ergo eius, quæ ex binis Mediis ſecunda, ad Rationalem applicatum, latitudinẽ facit ex binis nominibus tertiam. Quod erat demonſtrandũ.

[a] 10. decimi
[b] 16. decimi
[c] 10. decimi.
[d] 37. decimi

63. 57.

THEOR. 46. PROPOS. 64.

QVADRATVM Maioris ad Rationalem applicatum, latitudinem facit ex binis nominibus quartam.



SIT Maior A B, cuius maius nomen A C, [e] & ad Rationalem D E, applicetur rectangulum D F, æquale quadrato ex A B, latitudinem faciens D G. Dico D G, ex binis nominibus eſſe quartam. Conſtruatur enim eadem prorſus, quæ in propoſ. 61. Et quia A C, C B, Maiorem A B, componentes, [f] potentia incommenſurabiles ſunt, faciuntq; compoſitum quidem ex quadratis rectarum A C, C B, Rationale, rectãgulum verò ſub ipſis, Medium; erit quoque D K, compoſito ex quadratis rectarum A C, C B, æquale exiſtens, Rationale; At verò L F, duplum eius, quod ſub A C, C B, continetur, Medium. Quoniam igitur rationale D K, ad Rationalem D E, eſt applicatum; [g] erit D L, Rationalis ipſi D E, longitudine commenſurabilis. Item cùm L F, Medium ſit applicatum ad Rationalem L K; [h] erit L G, Rationalis ipſi L K, hoc eſt, ipſi D E, longitudine incommenſurabilis. Quare cùm duarum rectarum D L, L G, illa quidem ipſi D E, commenſurabilis ſit longitudine; hæc verò eidem D E, longitudine incommenſurabilis; [i] incommenſurabiles erunt longitudine D L, L G: Oſtenſæ ſunt autem & Rationales. Sunt igitur D L, L G, Rationales potentia tantùm commenſurabiles; [k] ideoq; D G, ex binis nominibus eſt. Iam verò, vt in propoſ. 61. demonſtrabimus rectãgulum ſub ſub D I, I L, æquale eſſe quadrato ex L M. Quia autem quadrata ex A C, C B, incommenſurabilia ſunt, quòd rectæ A C, C B, potentia incommenſurabiles ſint; Erunt etiam illis æqualia D H, I K, incommenſurabilia; [l] atque adeò & rectæ D I, I L, eándem cùm illis habentes proportionem, longitudine incommenſurabiles. Quoniam verò, vt in propoſ. 61. oſtendimus, D L, maior eſt, quàm L G, & ad D L, applicatum eſt rectangulum ſub D I, I L, quadrato ex L M, hoc eſt, quartæ parti quadrati ex L G, æquale, deficiens figura quadrata, quod diuidit ipſam D L, ad I, in partes longitudine incommenſurabiles; [m] poterit D L, plus quàm L G, quadrato rectæ ſibi longitudine incommenſurabilis. Quam ob rem cùm & ipſa D L, (maius nomen ipſius D G, quæ eſt ex binis nominibus.) oſtenſa ſit longitudine commenſurabilis expoſitæ Rationali D E; erit ex defin. D G, ex binis nominibus quarta. Quadratum ergo maioris ad Rationalem applicatum, &c. Quod erat demonſtrandum.

[e] 45. primi.
[f] 40. decimi
[g] 21. decimi
[h] 23. decimi.
[i] 13. decimi.
[k] 37. decimi
[l] 10. decimi.
[m] 19. decimi

64. 58.

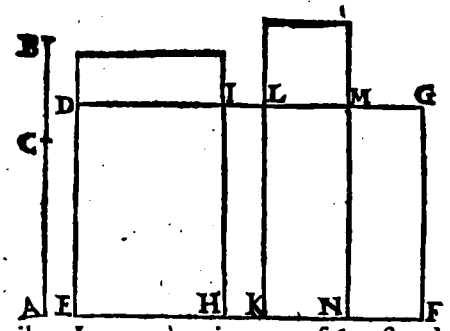
THEOR. 47. PROPOS. 65.

QVADRATVM eius, quæ Rationale ac Medium poteſt, ad Rationalem applicatum, latitudinem facit ex binis nominibus quintam.

SIT recta potens Rationale ac Medium A B, cuius maius nomẽ A C; [n] & ad Rationalem D E, rectangulum D F, applicetur æquale quadrato ex A B, latitudinem faciens D G. Dico D G, ex binis nominibus quintam eſſe. Fiant enim eadem omnino, quæ in propoſ. 61. Quoniam igitur rectæ A C, C B, componentes A B, potentem Rationale ac medium, [o] potentia incommẽſurabiles ſunt, facientes quidem compoſitum ex ipſarum quadratis Medium, at rectãgulum ſub ipſis contentũ, Rationale; erit D K, æquale compoſito ex quadratis rectarum A C, C B, Medium; & L N, æquale ei, quod ſub A C, C B, continetur, atque adeò ipſius duplum L F, Rationale. Igitur Medium D K,

[n] 45. primi.
[o] 41. decimi.

applicatum

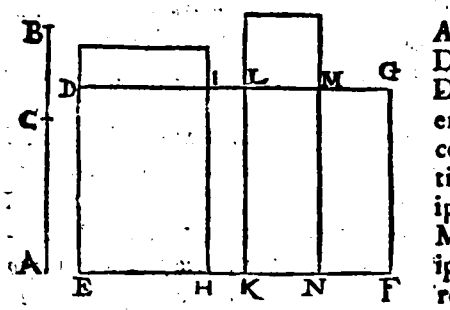


applicatum ad Rationalem DE, [a] facit latitudinem DL, Rationalē, & longitudine Rationali DE, incommensurabilem: At verò Rationale LF, ad Rationalem LK, applicatum, [b] facit latitudinem LG, Rationalem longitudine ipsi LK, hoc est, ipsi DE, commensurabilem. Quia igitur duarum rectarum DL, LG, hæc quidem longitudine commensurabilis est Rationali DE, illa verò longitudine incommensurabilis; [c] erunt DL, LG, longitudine incommensurabiles. Quare DL, LG, Rationales sunt potentia solùm commensurabiles; [d] Ac propterea DG, est ex binis nominibus. Iam verò, vt in propos. 61. ostendemus rectangulum sub DI, IL, æquale esse quadrato ex LM; & vt in antecedente propos. DL, maius nomen esse, atque posse plus, quàm LG, quadrato rectæ sibi longitudine incommensurabilis. Quapropter cùm & minus nomen LG, ostensum sit expositæ Rationali DE, longitudine commensurabile; erit ex defin. DG, ex binis nominibus quinta. Quadratum igitur eius, quę Rationale ac Medium potest, &c. Quod demonstrándum erat.

a 23. decimi.
b 21. decimi
c 13. decimi.
d 37. decimi

THEOR. 48. PROPOS. 66. 65.

QVADRATVM eius, quæ bina Media potest, ad Rationalem applicatum, latitudinem facit ex binis nominibus sextam. 59.

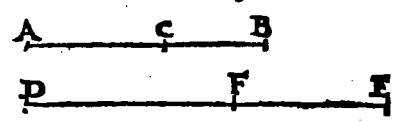


SIT bina Media potens recta AB, cuius maius nomen AC, [e] & ad Rationalem DE, applicetur rectangulum DF, æquale quadrato ex AB, latitudinem faciens DG. Dico DG, esse ex binis nominibus sextam. Constructis enim iisdem, quæ in propos. 61. quoniam rectæ AC, CB, componentes ipsam AB, potentem bina Media, [f] potentia incommensurabiles sunt, faciuntq; & compositum ex ipsarum quadratis Medium, & quod sub ipsis continetur, Medium, & incommensurabile composito ex quadratis ipsarum; erit tam DK, illi composito æquale, quàm LF, rectangulo bis sub AC, CB, æquale, Medium. Et quia Media DK, LF, applicata sunt ad Rationalem DE; [g] erunt eorum latitudines DL, LG, Rationales ipsi DE, longitudine incommensurabiles. [h] Quoniam verò compositum ex quadratis rectarum AC, CB, incommensurabile est rectangulo sub AC, CB; eidem verò rectangulo sub AC, CB, commensurabile est rectangulum bis sub AC, CB, cùm hoc illius sit duplum; [i] Erit compositum ex dictis quadratis, hoc est, DK, incommensurabile rectangulo bis sub AC, CB, hoc est, ipsi LF; Ac propterea rectæ DL, LG, eandem rationem habentes cum DK, LF, [k] longitudine incommensurabiles sunt. Rationales ergo sunt DL, LG, potentia solùm commensurabiles; [l] Ac proinde DG, est ex binis nominibus. Iam verò, vt in præcedenti propos. demonstrabimus DL, esse maius nomen; possęq; plus quàm LG, quadrato rectæ sibi longitudine incommensurabilis. Cùm ergo ostensum sit neutram ipsarum DL, LG, longitudine commensurabilem esse expositæ Rationali DE; erit ex defin. DG, ex binis nominibus sexta. Quadratum igitur eius, quæ bina Media potest, ad Rationalē applicatū, latitudinē facit ex binis nominib. sextam. Quod erat ostendendū.

e 45. primi.
f 42. decimi
g 23. decimi
h 42. decimi
i 13. decimi.
k 10. decimi
l 37. decimi.

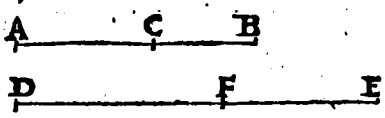
THEOR. 49. PROPOS. 67. 66.

EI, quæ est ex binis nominibus, longitudine commensurabilis, & ipsa ex binis nominibus est, atque ordine eadem. 60.



SIT ex binis nominibus quęcunque AB, diuisa in sua nomina, quorum maius AC, & CB, minus, sitq; recta DE, ipsi AB, longitudine commensurabilis. Dico DE, quoq; esse ex binis nominibus, & ordine eandem ipsi AB. [m] Fiat enim vt tota AB, ad totam DE, ita ablata AC, ad ablatam DF. [n] Erit ergo & reliqua CB, ad reliquam FE, vt tota AB, ad totam DE. Et quoniam ipsi AB, longitudine commensurabilis ponitur DE; [o] erit & DF, ipsi AC, & FE, ipsi CB, longitudine commensurabilis: [p] Sunt autem AC, CB, cùm sint nomina eius, q ex binis nominibus, Rationales. Igitur & DF, FE, Rationales sunt. Rursus quia est vt AC, ad DF, ita CB, ad FE; & permutádo vt AC, ad CB, ita DF, ad FE: Sunt autē AC, CB, potentia solū cōmensurabiles; [q] erunt & DF, FE, potētia solū cōmensurabiles. Igitur DF, FE, Rationales sunt potētia tantū commensurabiles; [r] Ac propterea DE, ex binis est nominibus. Dico & ipsi AB, ordine eandem esse. Aut enim AC, plus potest q CB, quadrato rectæ lineæ sibi longitudine cōmensurabilis, aut incōmensurabilis. Si quidem AC, plus potest q CB, quadrato rectæ sibi longitudine cōmensurabilis; [s] poterit & DF, plus q FE, quadrato rectę sibi longitudine cōmensurabilis. Quod si AC, cōmensurabilis sit lōgitudine Rationali expositæ, ita vt AB, sit ex binis nominib. prima; [t] erit & DF, eidē Rationali lōgitudine cōmensurabilis, cū vtraq;, & Rationalis, & DF,

m 12. sexti.
n 19. quinti
o 10. decimi.
p 37. decimi
q 10. decimi
r 37. decimi
s 15. decimi.
t 12. decimi.



eidem A C, sit commensurabilis longitudine. Quare & D E, ex defin. est ex binis nominibus prima, hoc est, ordine eadē. Si verò C B, expositæ Rationali sit longitudine commensurabilis, vt A B, sit ex binis nominibus secunda: erit eodem modo & F E, Rationali expositæ longitudine commensurabilis. Quare & D E, ex defin. est ex binis nominibus secunda. Si denique neutra ipsarum A C, C B, longitudine sit commensurabilis
a 12. decimi. expositæ Rationali, ita vt A B, sit ex binis nominibus tertia; [a] erit & neutra ipsarum D F, F E, longitudine cōmensurabilis expositę Rationali. Quare & D E, ex defin. est ex binis nominibus tertia.
b 15. decimi. At si A C, plus possit, quàm C B, quadrato rectæ sibi longitudine incommensurabilis; [b] poterit & D F, plus quàm F E, quadrato rectæ sibi longitudine incommensurabilis. Quare vt prius, ostendemus D E, ex binis nominibus quartam esse, vel quintam, vel sextam, prout & A B, fuerit ex binis nominibus quarta, vel quinta, vel sexta. Ei igitur, quę ex binis nominibus, longitudine commensurabilis, &c. Quod erat ostendendum.

SCHOLIVM.

Quod si recta D E, potentia tantùm commensurabilis sit ipsi A B, quæ est ex binis nominibus, ostendemus quidem eodem modo, (si loco: Commensurabilis longitudine: in demonstratione reponamus vbique: commensurabilis potentia tantùm:) & D E, esse ex binis nominibus: At eam esse ordine eandem ipsi A B, cui commensurabilis est, nullo modo concludemus. Non enim sequitur, si A C, maius nomen longitudine sit commensurabile expositæ Rationali; & D F, maius nomen eidem esse commensurabile longitudine; propterea quòd non vtraque, nempe expositæ Rationali, & D F, eidem A C, longitudine commensurabilis est, sed Rationalis quidem commensurabilis longitudine; At verò D F, potentia tantùm, ex hypothesi. Immo verò, si A B, sit ex binis nominibus prima, secunda, quarta, vel quinta, fieri nulla ratione potest, vt D E, illi potentia tantùm commensurabilis sit ex binis nominibus ordine eadem.

Sit enim A B, ex binis nominibus prima, secunda, quarta, vel quinta, diuisa in sua nomina ad C: sitq; ei commensurabilis potentia tantùm D E, quam quidem, vt in theoremate, demonstrabimus esse ex binis nominibus, diuisamq; esse in sua nomina ad F; & partes A C, C B, partibus D F, F E, proportionales esse, nimirū illas ad has eandem habere rationem, quam tota A B, ad totam D E. Dico nullo modo fieri posse, vt D E, ex binis nominibus sit eadem ordine ipsi A B. Nam si potest fieri, sit vtraque ex binis nominibus prima. Erit ergo
a 12. decimi. *vtrumque maius nomen A C, D F, ex defin. Rationali expositæ commensurabilis longitudine.* [a] *Quare & inter se longitudine commensurabiles erunt. Et quoniam est vt A C, ad D F, ita A B, ad D E;*
b 10. decimi. [b] *erunt propterea & A B, D E, longitudine commensurabiles. Quod est absurdum. Ponitur enim D E, ipsi A B, potentia solùm commensurabilis. Non ergo vtraq; A B, D E, ex binis nominibus prima est. Eodem modo neq; vtraq; ex binis nominibus quarta erit. Sed neq; secunda vel quinta. Esset enim vtrumq; nomen minus C B, F E, ex defin. longitudine cōmensurabile Rationali expositæ, atq; adeò & inter se. Igitur & totæ A B, D E, longitudine forent commensurabiles. quod non ponitur.*

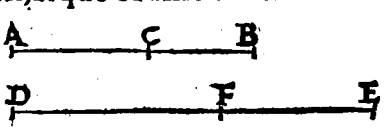
Semper tamen verum est, si A B, est ex binis nominibus prima, vel secunda, vel tertia, rectam D E, ipsi A B, potentia solùm commensurabilem, esse quoque vnam ex illis tribus, licet ordine non eadem sit. Nam hoc posito, poterit A C, plus quàm C B, quadrato rectæ sibi longitudine commensurabilis. Cùm ergo sit, vt
c 15. decimi *A C, ad C B, ita D F, ad F E;* [c] *poterit quoque D F, plus quàm F E, quadrato rectæ sibi longitudine commensurabilis. Quare ex defin. erit D E, ex binis nominibus prima, vel secunda, vel tertia. Eodem modo si A B, est ex binis nominibus quarta, vel quinta, vel sexta, ita vt A C, plus possit, quàm C B, quadrato rectæ sibi longitudi-*
d 15. decimi *ne incommensurabilis;* [d] *poterit quoque D F, plus quàm F E, quadrato rectæ sibi longitudine incommensurabili, cùm sit, vt A C, ad C B, ita D F, ad F E. Igitur ex defin. erit D E, ex binis nominibus etiam quarta, vel quinta, vel sexta, licet non eadem ordine ipsi A B.*

In sequentibus autem quatuor propositionibus necessariò erit D E, eadem ordine ipsi A B, quanquam potentia tantùm illi commensurabilis sit.

67. 61.

THEOR. 50. PROPOS. 68.

Et, quæ est ex binis Mediis, longitudine commensurabilis, & ipsa ex binis Mediis est, atque ordine eadem.



Sit ex binis Mediis A B, quæcunq; diuisa in sua nomina, quorum A C, maius, & C B, minus, sitque ei recta D E, longitudine commensurabilis. Dico D E, quoque ex binis Mediis esse, & ipsi A B, ordine eandem.
a 12 sexti. [a] Fiat enim vt tota A B, ad totam D E, ita ablata A C, ad ablatam D F.
b 19. quinti. [b] Erit ergo & reliqua C B, ad reliquam F E, vt tota A B, ad totam D E. Et quoniam ipsi A B, ponitur longitudine commensurabilis D E;
c 10. decimi. [c] erit & D F, ipsi A C, & F E, ipsi C B, longitudine commensurabilis. Sunt autem A C, C B, Mediæ.
d 24. decimi [d] Igitur & D E, F E, illis commensurabiles, Mediæ sunt. Rursus quia est vt A C, ad D F, ita C B, ad F E;
e 38. decimi. & permutando vt A C, ad C B, ita D F, ad F E;
f 10. decimi. [e] Sunt autem A C, C B, potentia solùm commensurabiles;
[f] erunt & D F, F E, solùm commēsurabiles potentia. Cùm ergo & ostensæ sint Mediæ, erunt D F, F E, Mediæ

FE, Mediæ potentia tantùm commensurabiles; [a] Atque idcirco DE, erit ex binis mediis. Dico & ipsi AB, eandem esse ordine. Quoniam enim est vt AC, ad CB, ita DF, ad FE: Est autem vt AC, ad CB, ita quadratum ex AC, ad rectangulum sub AC, CB, & vt DF, ad FE, ita quadratum ex DF, ad rectangulum sub DF, FE, ex lemmate 3. propos. 19. huius libri; erit quoque vt quadratum ex AC, ad rectangulum sub AC, CB, ita quadratum ex DF, ad rectangulum sub DF, FE; & permutando vt quadratum ex AC, ad quadratum ex DF, ita rectangulum sub AC, CB, ad rectangulum sub DF, FE. Commensurabile est autem quadratum ex AC, quadrato ex DF; quòd rectæ AC, DF, commensurabiles ostensæ sint longitudine. [b] Igitur & rectangulum sub AC, CB, rectangulo sub DF, FE, commensurabile est. Quare si rectangulum sub AC, CB, fuerit Rationale, ita vt AB, sit ex binis Mediis prima 7. erit & rectangulum sub DF, FE, Rationale, cùm illi sit commensurabile; [c] atque adeò & DE, ex binis Mediis prima erit. Si verò rectangulum sub AC, CB, fuerit Medium, ita vt AB, sit ex binis Mediis secunda: erit & rectangulum sub DF, FE, eicommensurabile, Mediũ, ex corollario propos. 24. huius lib. [d] Ac propterea & DE, erit ex binis Mediis secunda. Quare ei, quę ex binis Mediis lõgitudine cõmensurabilis, &c. Quod demonstrandũ erat.

a 38. vel 39. decimi.
b 10. decimi
c 38. decimi.
d 39. decimi

SCHOLIVM.

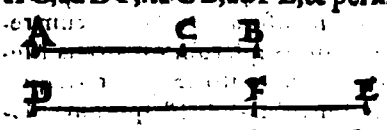
Eodem prorsus modo demonstrabimus, rectam lineam DE, si potentia tantùm fuerit commensurabilis ipsi AE, quæ est ex binis Mediis, ex binis Mediis esse, atque ordine eandem ipsi AB, cui commensurabilis est; si modò loco: commensurabilis longitudine: in demonstratione dicamus vbique: commensurabilis potentia tantùm, &c. vt manifestum est.

THEOR. 51. PROPOS. 69.

68. 62.

MAIORI commensurabilis, & ipsa Maior est.

SIT linea maior AB, diuisa in sua nomina ad C, eiq; commensurabilis sit DE, siue longitudine & potentia, siue potentia tantùm. Dico & DE, Maiorem esse. Fiant enim eadem, quæ superius; ita vt partes AC, CB, ad partes DF, FE, eandem habeant rationem, quam tota AB, ad totam DE. Quoniam igitur AB, DE, cõmensurabiles sunt vel longitudine & potentia, vel potentia tantùm; erunt quoque etiam AC, DF, quàm CB, FE, eodem modo commensurabiles. Rursus quia est vt AC, ad DF, ita CB, ad FE, & permutando vt AC, ad CB, ita DF, ad FE; [f] erit vt quadratum ex



AC, ad quadratum ex CB, ita quadratũ ex DF, ad quadratum ex FE: & componẽdo vt compositum ex quadratis rectarum AC, CB, ad quadratum ex CB, ita compositum ex quadratis rectarum DF, FE, ad quadratum ex FE; Et conuertendo, vt quadratum ex CB, ad compositum ex quadratis rectarum AC, CB, ita quadratum ex FE, ad compositum ex quadratis rectarum DF, FE. Et permutãdo, vt quadratum ex CB, ad quadratum ex FE, ita compositum ex quadratis rectarum AC, CB, ad compositum ex quadratis rectarum DF, FE. Commensurabile est autem quadratum ex CB, quadrato ex FE, quòd rectæ CB, FE, ostensæ sint commensurabiles vel longitudine & potentia, vel potentia tantùm. [g] Igitur & compositum ex quadratis rectarum AC, CB, commensurabile est composito ex quadratis rectarum DF, FE. [h] Est autem compositum illud Rationale, cùm rectæ AC, CB, componant Maiorem AB. [i] Igitur & hoc Rationale est.

e 10. decimi
f 22. sexti.
g 10. decimi
h 40. decimi
i 9. defin.

RVRSVS quia est vt AC, ad CB, ita DF, ad FE; Vt autem AC, ad CB, ita est quadratum ex AC, ad rectangulum sub AC, CB, & vt DF, ad FE, ita quadratum ex DF, ad rectangulum sub DF, FE, ex lemmate 3. propos. 19. huius libri; Erit quoque vt quadratum ex AC, ad rectangulum sub AC, CB, ita quadratum ex DF, ad rectangulum sub DF, FE: Et permutando vt quadratum ex AC, ad quadratum ex DF, ita rectangulum sub AC, CB, ad rectangulum sub DF, FE. Est autem quadratum ex AC, quadrato ex DF, commẽsurabile, quòd rectæ AC, DF, ostensæ sint commensurabiles vel longitudine & potentia, vel potentia tantùm. [k] Igitur & rectangulum sub AC, CB, rectangulo sub DF, FE, commensurabile est. [l] Est autem rectangulum sub AC, CB, Medium. Igitur & rectangulum sub DF, FE, illi commensurabile, Medium est, ex coroll. propos. 24. huius libri. Quoniam verò est vt AC, ad CB, ita DF, ad FE; [m] sunt quæ AC, CB, potentia incommensurabiles, cùm componant Maiorem AB: [n] Erunt quoque DF, FE, potentia incommensurabiles. Itaq; cùm DF, FE, sint potentia incommensurabiles, faciantque compositum quidem ex ipsarum quadratis Rationale; quod autem sub ipsis continetur, Medium, vt ostensum est; [o] erit tota DE, Maior. Maiori ergo commensurabilis, & ipsa Maior est. Quod demonstrandum erat.

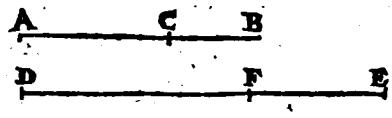
k 10. decimi
l 40. decimi
m 40. decimi
n 40. decimi
o 40. decimi

THEOR. 52. PROPOS. 70.

69. 63.

RATIONALE ac Medium potenti commensurabilis, & ipsa Rationale ac Medium potens est.

SIT recta AB, potens Rationale ac Medium, diuisa in sua nomina ad C, eiq; commensurabilis DE, siue longitudine & potentia, siue potentia tantùm. Dico & DE, esse potentem Rationale ac Medium. Constructis enim iisdem, quæ suprà, ostendemus, vt in præcedenti propos. compo-



a 41. decimi. situm ex quadratis rectarum A C, C B, commensurabile esse composito ex quadratis rectarum D F, F E. a Est autem illud compositum Medium, cùm rectæ A C, C B, componant ipsam AB, potentem Rationale ac Medium. Igitur per coroll. propos. 24. huius libri, & hoc compositum illi commensurabile, Medium est. Eodem modo, vt in eadem propos. antecedenti, erit rectangulum sub A C, C B, b quod Rationale est, commensurabile rectangulo sub D F, F E; atque adeò & rectangulum sub D F, F E, Rationale est, ex 9. defin. Deniq; vt in eadem superiori propos. erunt D F, F E, potentia incommensurabiles. Quare cùm D F, F E, sint potentia incommensurabiles, faciantque compositum quidem ex ipsarum quadratis Medium; quod autem sub ipsis continetur, Rationale, vt demõstratum est; c erit tota D E, Rationale ac Medium potens. Igitur Rationale ac Medium potenti commensurabilis, &c. Quod erat demonstrandum.

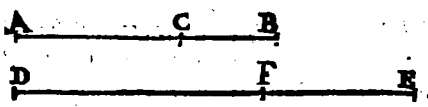
b 41. decimi

c 41. decimi

70. 64.

THEOR. 53. PROPOS. 71.

BINA Media potenti commensurabilis, & ipsa bina Media potens est.



SIT bina Media potens A B, diuisa in sua nomina ad C, eiq; commensurabilis D E, siue longitudine & potentia, siue potentia tantùm. Dico & D E, esse bina Media potentem. Constructis enim iisdem, quæ suprà, ostendemus, vt in propos. 69. compositum ex quadratis rectarum A C, C B, composito ex quadratis rectarum D F, F E, commensurabile esse: Nec non & rectangulum sub A C, C B, esse commensurabile rectangulo sub D F, F E. d Cùm ergo tam compositum ex quadratis rectarum A C, C B, quàm rectangulum sub A C, C B, Medium sit; erit etiam ex coroll. propos. 24. huius libri, tam compositũ ex quadratis rectarum D F, F E, quàm rectangulum sub D F, F E, Medium. Sed & D F, F E, potentia incommensurabiles sunt, vt prius. Postremò, e quia compositum ex quadratis rectarum A C, C B, & rectangulum sub A C, C B, incommensurabilia sunt, ex hypothesi, propterea quòd A B, bina Media potest: Est autem composito ex quadratis rectarum A C, C B, commensurabile ostensum compositum ex quadratis rectarum D F, F E; & rectangulo sub A C, C B, probauimus commensurabile rectangulum sub D F, F E; Erunt quoque ex scholio propos. 14. huius lib. compositũ ex quadratis rectarum D F, F E, & rectangulum sub D F, F E, incommensurabilia. Quare cùm rectæ D F, F E, potentia sint incommensurabiles, faciantq; compositum ex ipsarum quadratis Medium; & quod sub ipsis continetur, Medium; incommensurabileq; composito ex quadratis ipsarum; f erit D E, bina Media potens. Itaq; bina Media potenti commensurabilis, & ipsa bina Media potens est. Quod erat ostendendum.

d 42. decimi

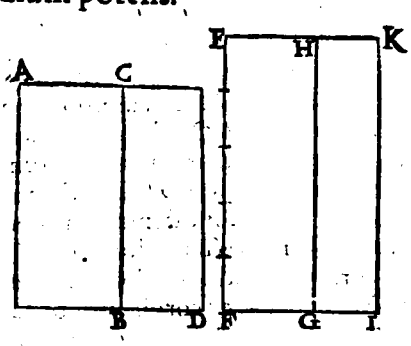
e 42. decimi

f 42. decimi

71. 65.

THEOR. 54. PROPOS. 72.

SI Rationale & Medium componantur, quatuor Irrationales fiunt; vel ea, quæ ex binis nominibus, vel quæ ex binis Mediis prima, vel Maior, vel Rationale ac Medium potens.



SIT Rationale spatium A B, cum quo componatur Medium C D. Dico rectam, quæ totum spatium A D, potest, esse vel ex binis nominibus, vel ex binis Mediis primam, vel Maiorem, vel Rationale ac Medium potentem. Erit enim A B, vel maius quàm C D, vel minus: Æquale siquidem nõ erit; aliàs cùm A B, sit Rationale, esset & illi æquale C D, Rationale. quod non ponitur. Sit primò maius, & exposita Rationali E F, g applicetur ad eam rectangulum E G, æquale ipsi A B; & ad H G, aliud H I, æquale ipsi C D, vt totum E I, toti A D, sit æquale. Et quoniam A B, Rationale est, & C D, Medium; erit quoque E G, Rationale, & H I, Medium: quę cùm applicentur ad Rationalem E F; h erit E H, Rationalis, & ipsi E F, longitudine commensurabilis; i At verò H K, Rationalis, & eidem E F, longitudine incommensurabilis. Rursus quia E G, H I, incommensurabilia sunt, vt constat ex definitionibus: quòd E G, Rationale sit, at H I, Irrationale, nempe Medium; k erunt E H, H K, eandem cum illis habentes rationem, incommensurabiles longitudine. Rationales ergo sunt E H, H K, potentia solùm commensurabiles; l Ac propterea E K, ex binis nominibus est. Et quoniam maius ponitur A B, quàm C D, hoc est, E G, quàm H I; erit quoque E H, maior quàm H K, m cùm E H, H K, eandem rationẽ habeant, quam E G, H I. Iam verò maius nomen E H, plus poterit quàm minus H K, quadrato rectæ sibi longitudine commensurabilis, vel incommensurabilis. Si plus possit E H, quã H K, quadrato rectæ sibi commensurabilis longitudine; erit E K, ex defin. ex binis nominibus prima, cùm E H, maius nomen ostensum sit longitudine commensurabile Rationali E F. Quare recta potens spatium E I, contentum sub Rationali E F, & ex binis nominibus prima E K, atque adeò & spatium A D, compositum ex Rationali A B, & Medio C D, n Irrationalis est, quæ ex binis nominibus appellatur.

g 45. primi.

h 21. decimi.

i 23. decimi.

k 10. decimi

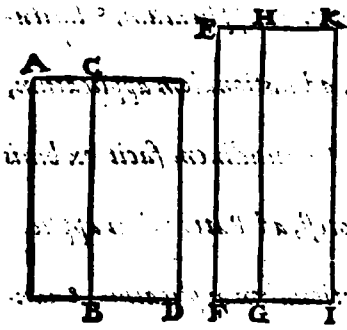
l 37. decimi.

m 1. sexti.

n 55. decimi

SI verò

Si verò EH, plus possit quàm HK, quadrato rectæ sibi longitudine incommensurabilis: erit EA, ex binis nominibus quarta, ex defin. cùm EH, maius nomen ostensum sit longitudine commensurabile Rationali EF. Quare recta potens spatium EI, contentum sub Rationali EF, & ex binis nominibus quarta EK, atque adeò & spatium AD, [a] Irrationalis est, quæ vocatur Maior. [a] 58. decimi



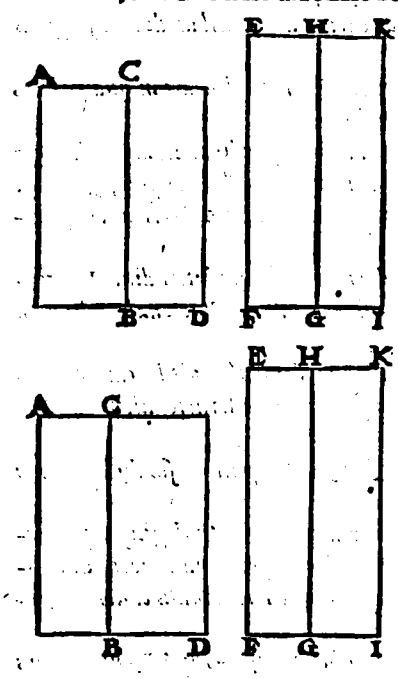
Sit deinde AB, minus quàm CD; & eadem construantur, quæ prius. Erit ergo, vt prius, EK, ex binis nominibus, & EH, ipsi EF, longitudine commensurabilis. Et quia AB, minus est, quàm CD, hoc est, EG, quàm HI; erit quoque recta EH, minor quàm HK. Poterit igitur rursus HK, maius nomen ipsius EK, quæ est ex binis nominibus, plus quàm EH, minus nomen, quadrato rectæ longitudine sibi commensurabilis, vel incommensurabilis. Si plus possit HK, quàm EH, quadrato rectæ longitudine sibi commensurabilis; erit EK, ex binis nominibus secunda, cùm EH, minus nomen commensurabile sit longitudine Rationali EF, vt ostensum est. Quare recta potens spatium EI, contentum sub Rationali EF, & ex binis nominibus secunda EK, atq; adeò & spatium AD, ex Rationali AB, & Medio CD, compositum, [b] Irrationalis est, quæ dicitur ex binis Mediis prima. [b] 56. decimi

Si verò HK, plus possit quàm EH, quadrato rectæ lineæ sibi longitudine incommensurabilis: erit EK, ex binis nominibus quinta, cùm EH, minus nomen ostensum sit longitudine commensurabile Rationali EF. Quare recta potens spatium EI, contentum sub Rationali EF, & ex binis nominibus quinta EK, atque adeò & spatium AD, [c] Irrationalis est, quæ Rationale & Medium potens appellatur. Si igitur Rationale, & Medium componantur, quatuor Irrationales fiunt, &c. Quod demonstrandum erat. [c] 59. decimi

THEOR. 55. PROPOS. 73.

72.
66.

Si duo Media inter se incommensurabilia componãtur, duæ reliquæ Irrationales fiunt, vel ex binis Mediis secunda, vel bina Media potens.



Componantvr duo Media incommensurabilia AB, CD. Dico rectam, quæ potest totum spatium AD, esse vel ex binis Mediis secundam, vel bina Media potentem. Erit enim rursus AB, vel maius, quàm CD, vel minus: Æquale siquidem non erit; aliàs essent AB, CD, commensurabilia. quod non ponitur. Sit primò maius, & omnia fiant, quæ in præcedenti propositione. Et quia spatia AB, CD, ponuntur Media, & incommensurabilia; erunt & spatia EG, HI, Media & incommensurabilia; cùm illis sint æqualia. [d] Igitur [d] 10. decimi.
rectæ EH, HK, eandem cum illis habentes rationem, longitudine incommensurabiles sunt; & vtraque (cùm EG, HI, Media sint, applicenturq; ad Rationalem EF.) [e] Rationalis [e] 23. decimi.
est, ipsi EF, longitudine incommensurabilis. Rationales ergo sunt EH, HK, potentia solùm commensurabiles; [f] ac [f] 37. decimi.
propterea EK, ex binis nominibus est. Quoniam verò AB, maius ponitur quàm CD; erit vt in antecedenti propos. EH, maius nomen ipsius EK. Poterit ergo plus quàm HK, quadrato rectæ sibi longitudine commensurabilis, vel incommensurabilis. Si plus possit EH, quàm HK, quadrato rectæ sibi commensurabilis longitudine, cùm vtrumque nomen EH, HK, ostensum sit longitudine incommensurabile Rationali EF; erit EK, ex defin. ex binis nominibus tertia. Quare recta potens spatium EI, contentum sub Rationali EF, & ex binis nominibus tertia EK, atque adeò & spatium AD, [g] Irrationalis est, quæ ex binis Mediis secunda dicitur. [g] 57. decimi

Si verò EH, plus possit quàm HK, quadrato rectæ longitudine sibi incommensurabilis, cùm vtrumque nomen EH, HK, longitudine sit incommensurabile Rationali EF; erit EK, ex binis nominibus sexta, vt constat ex defin. Recta igitur potens spatium EI, siue spatium AD, [h] Irrationalis est, quæ bina Media potens nominatur. [h] 60. decimi.

Quod si AB, minus sit, quàm CD; non aliter propositum concludemus, vt ex figura constat. Quapropter si duo Media inter se incommensurabilia componantur, duæ reliquæ Irrationales fiunt, &c. Quod ostendendum erat.

COROLLARIVM.

Ex his omnibus facilè colligitur, eam, quæ ex binis nominibus, & reliquas ipsam subsequentes Irrationales lineas, neque Mediæ, neque inter se easdem esse.

a 23. decimi. NAM quadratum Mediæ, ad Rationalem lineam applicatum, [a] latitudinem efficit Rationalem, ipſi Rationali longitudine incommenſurabilem.

b 61. decimi. AT quadratum eius, quæ ex binis nominibus, ad Rationalem applicatum, [b] latitudinem efficit ex binis nominibus primam.

c 62. decimi. ET quadratum eius, quæ eſt ex binis Mediis prima, ad Rationalem applicatum, [c] latitudinem facit ex binis nominibus ſecundam.

d 63. decimi. QVADRATVM deinde eius, quæ ex binis Mediis ſecunda, ad Rationalem applicatum, [d] latitudinem facit ex binis nominibus tertiam.

e 64. decimi. AT verò quadratum Maioris ad Rationalem applicatum, [e] latitudinem facit ex binis nominibus quartam.

f 65. decimi. QVADRATVM autem eius, quæ Rationale ac Medium poteſt, ad Rationalem applicatum, [f] latitudinem facit ex binis nominibus quintam.

g 66. decimi. POSTREMO, quadratum eius, quæ bina Media poteſt, ad Rationalem applicatum, [g] latitudinem facit ex binis nominibus ſextam.

ITAQVE cùm hæ latitudines differant & à latitudine Mediæ, & inter ſe; à latitudine quidem Mediæ, quòd hæc Rationalis ſit, illæ verò Irrationales; Inter ſe autem, quòd ordine non ſint eædem ex binis nominibus; perſpicuum eſt, omnes Irrationales lineas, de quibus hactenus eſt dictum, inter ſe differentes eſſe.

SCHOLIVM.

HACTENVS egit Euclides de ſeptem ſenariis.

IN primo, qui continetur propoſ. 37. 38. 39. 40. 41. & 42. tradidit ortum ſex linearum Irrationalium, nimirum eius, quæ ex binis nominibus; & eius, quæ ex binis Mediis prima; & eius, quæ ex binis Mediis ſecunda; & Maioris; & eius, quæ Rationale ac Medium poteſt; & denique eius, quæ poteſt bina Media.

IN ſecundo, quem continent propoſ. 43. 44. 45. 46. 47. & 48. egit de earum diuiſionibus, docens ſingulas in ſingulis duntaxat punctis diuidi poſſe in ſua nomina.

IN tertio deinde, contento propoſ. 49. 50. 51. 52. 53. & 54. docuit inuentionem ſex linearum, quæ ex binis nominibus dicuntur, videlicet primæ, ſecundæ, tertiæ, quartæ, quintæ, & ſextæ.

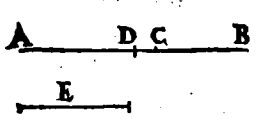
IN quarto, quem abſoluunt propoſ. 55. 56. 57. 58. 59. & 60. oſtendit, quo modo hæ ſex lineæ Irrationales, quæ in primo ſenario explicantur, inter ſe differant, docens, quænam linea Irrationalis ſit illa, quæ poteſt ſpatium contentum ſub Rationali, & ex binis nominibus prima, vel ex binis nominibus ſecunda, vel tertia, vel quarta, vel quinta, vel ſexta.

IN quinto autem, quem reperies in propoſ. 61. 62. 63. 64. 65. & 66. docuit, quaſnam latitudines Irrationales faciant quadrata linearum Irrationalium in primo ſenario explicatarum, ad Rationalem lineam applicata.

IN ſexto verò, qui quinque propoſ. nempe 67. 68. 69. 70. & 71. abſoluitur, demonſtrauit lineam quamcunque commenſurabilem alicui dictarum ſex Irrationalium in primo ſenario, eſſe Irrationalem eandem illi, cui commenſurabilis eſt.

IN ſeptimo denique, contento duabus propoſitionibus, nimirum 72. & 73. explicauit rurſus differentiam aliam ſex prædictarum Irrationalium.

REPERITVR autem in his ſex lineis Irrationalibus, de quibus in primo ſenario, Analogia ſeu proportionalitas Arithmetica, quæ quidem conſiſtit in exceſſu eodem. Et recta media proportionalis, ſecundùm Analogiam Arithmeticam, inter duo nomina cuiuſuis lineæ Irrationalis, eſt quoque Irrationalis eadem illi, inter cuius nomina media exiſtit.



SIT enim quæcunq; Irrationalis, nempe ex binis nominibus A B, cuius maius nomen A C; & diuidatur A B, bifariam in D; & eius dimidia A D, vel D B, æqualis ſumatur E. Dico E, mediam eſſe, ſecundùm Analogiam Arithmeticam, inter A C, C B: & E, eſſe quoque ex binis nominibus. Quoniam enim A C, ſuperat dimidiam A D, recta D C; & dimidia D B, ſuperat ipſam C B, eadem recta D C; perſpicuum eſt, dimidiam ipſius A B, nempe E, eſſe mediam proportionalem inter A C, C B, in Analogia Arithmetica.

RVRSVS quia E, commenſurabilis eſt longitudine toti A B, cùm hæc illius ſit dupla; erit & E, Irrationalis eadem ipſi A B, vt in ſexto ſenario eſt demonſtratum.

IDEM oſtendemus non aliter in cæteris lineis Irrationalibus contingere.

SEQVVNTVR iam ſeptem alij ſenarij, in quibus eadem Euclides demonſtrat de ſex aliis lineis Irrationalibus, quæ per detractionem generantur, quæ in præcedentibus ſeptem ſenariis de Irrationalibus, quæ per compoſitionem fiunt, eum oſtendiſſe docuimus.

PRINCI-

PRINCIPIVM SENARIORVM per detractionem.

THEOR. 56. PROPOS. 74. 73. 68.

SI à Rationali Rationalis auferatur, potentia tantùm commensurabilis existens toti; Reliqua Irrationalis est. Vocetur autem Apotome.

DETRAHATVR à Rationali AB, Rationalis AC, potentia solùm commensurabilis ipsi AB. Dico reliquam BC, Irrationalem esse. Quoniam enim per lemma 3. propos. 19. huius lib. est vt AB, ad AC, ita quadratum ex AB, ad rectangulum sub AB, AC: Et sunt AB, AC, longitudine incommensurabiles: [a] erunt incommensurabilia quadratum ex AB, & rectangulum sub AB, AC. Sed quadrato ex AB, commensurabile est compositum ex quadratis rectarum AB, AC; (cùm enim AB, AC, potentia ponantur commensurabiles, erunt quadrata ex AB, AC, commensurabilia. [b] Igitur & compositum ex ipsis commensurabile erit quadrato ex AB,) rectangulo verò sub AB, AC, commensurabile est rectangulum sub AB, AC, bis. Igitur compositum ex quadratis rectarum AB, AC, & rectangulum sub AB, AC, bis contentum, incommensurabilia sunt, vt in scholio propos. 14. huius libri demonstrauimus. [c] Est autem compositum ex quadratis rectarum AB, AC, æquale rectangulo bis sub AB, AC, vnà cum quadrato ex BC. Igitur & compositum ex quadratis rectarum AB, AC, per coroll. propos. 17. huius lib. reliquo quadrato ex BC, incommensurabile est. Cùm ergo compositum ex quadratis rectarum AB, AC, sit Rationale; (propterea quòd commensurabile est quadrato Rationali ex AB, lineæ Rationali descripto;) erit quadratum ex BC, Irrationale; atque adeò & recta ipsa BC, Irrationalis. Vocetur autem Apotome. Iuniores dicunt Residuum. Si igitur à Rationali Rationalis auferatur potentia tantùm commensurabilis existens toti; Reliqua Irrationalis est, &c. Quod ostendendum erat.

A C B

[a] 10. decimi

[b] 16. decimi

[c] 7. secundi

SCHOLIVM.

POTVISSET Euclides proponere quoque hanc propositionem hoc modo.

SI à maiori nomine eius, quæ ex binis nominibus, minus nomen auferatur; Reliqua Irrationalis est. Vocetur autem Apotome.

A C B

NAM cùm AB, AC, sint Rationales potentia tantùm commensurabiles; [d] erit composita ex ipsis Irrationalis, quæ ex binis nominibus dicitur, cuius maius nomẽ AB, & minus AC. Auferatur igitur AC, minus nomen ex maiori nomine AB, vt relinquatur Apotome BC.

[d] 37. decimi

THEOR. 57. PROPOS. 75. 74. 69.

SI à Media Media auferatur potentia tantùm commensurabilis existens toti, quæ cum tota Rationale contineat; Reliqua Irrationalis est. Vocetur autem Mediæ Apotome prima.

DETRAHATVR à Media AB, Media AC, potentia solùm commensurabilis ipsi AB. sitque rectangulum sub AB, AC, Rationale. Dico reliquam BC, esse Irrationalem. Quoniam enim AB, AC, potentia sunt commensurabiles: erunt quadrata ex AB, AC, commensurabilia; [a] atq; adeò & compositum ex ipsis commensurabile erit quadrato ex AC. Est autem quadratum ex AC, Media Irrationale, & Medium. Igitur ex coroll. propos. 24. huius lib. & compositum ex quadratis rectarum AB, AC, Irrationale erit, ac Medium. Et quia rectangulum sub AB, AC, ponitur Rationale: erit & rectangulum bis sub AB, AC, Rationale. Igitur incommensurabile est compositum ex quadratis rectarum AB, AC, rectangulo bis sub AB, AC. [b] Cùm ergo compositum ex quadratis rectarum AB, AC, æquale sit rectangulo bis sub AB, AC, vnà cum quadrato ex BC; erit quoque rectangulum bis sub AB, AC, vnà cum quadrato ex BC, incommensurabile rectangulo bis sub AB, AC. [c] Quare & rectangulum bis sub AB, AC, & quadratum ex BC, incommensurabilia sunt. Existente ergo rectangulo bis sub AB, AC, Rationali; erit quadratum ex BC, Irrationale; ideoque & recta BC, Irrationalis erit. Vocetur autem Mediæ Apotome prima, quia videlicet relinquitur post detractionem minoris nominis lineæ ex binis Mediis primæ, à maiori nomine, vt in scholio sequenti patebit. Si igitur à Media Media auferatur potentia tantùm commensurabilis existens toti, quæ cum tota Rationale contineat; Reliqua Irrationalis est. Vocetur autem Mediæ Apotome prima. Quod ostendendum erat.

A C B

[a] 16. decimi

[b] 7. secundi.

[c] 17. decimi.

SCHOLIVM.

POTVISSET hæc propositio proponi hoc modo.

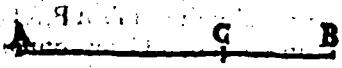
SI à maiori nomine eius, quæ ex binis Mediis prima, minus nomen auferatur; Reliqua Irrationalis est. Vocetur autem Mediæ Apotome prima.



238. deci. *CVM enim AB, AC, sint Media potentia solùm commensurabiles, contineantq; Rationale; [a] erit composita ex ipsis Irrationalis, quæ ex binis Mediis prima dicitur, cuius maius nomen AB, & minus AC. Auferatur igitur AC, minus nomen ex maiori AB, vt relinquatur BC, Media Apotome prima.*

75. THEOR. 58. PROPOS. 76.
70.

SI à Media Media auferatur potentia tantùm commensurabilis existens toti, quæ cum tota Medium contineat; Reliqua Irrationalis est. Vocetur autem Mediæ Apotome secunda.



DETRAHATVR à Media AB, Media AC, potentia solùm commensurabilis ipsi AB, sitque rectangulum sub AB, AC, Medium. Dico reliquam BC, esse Irrationalem. Quoniam enim quadrata ex AB, AC, potentia commensurabilibus commẽsurabilia sunt, [a] erit & compositum ex ipsis vtrique ipsorum commensurabile: Est autem vtrumque ipsorum Medium, quòd & rectæ AB, AC, Mediæ ponantur. Igitur & compositum ex ipsis, vtrique commensurabile, Medium est, ex coroll. propos. 24. huius libri. Rursus quia rectangulum sub AB, AC, Medium ponitur: erit & eius duplum, rectangulum, videlicet bis sub AB, AC, ex coroll. propos. 24. huius lib. Medium. [b] Cùm ergo compositum ex quadratis rectarum AB, AC, æquale sit rectangulo bis sub AB, AC, vnà cum quadrato ex BC; superabit compositũ ex quadratis rectarum AB, AC, quod Medium est, rectangulum bis sub AB, AC, quod etiam Medium est, quadrato ex BC. [c] Medium autem non superat Medium Rationali. Non ergo quadratum ex BC, Rationale est. Ergo Irrationale, & ipsa recta BC, Irrationalis. Vocetur autem Mediæ Apotome secunda, quoniam relinquitur post detractionem minoris nominis eius, quæ ex binis Mediis secunda, à maiori nomine, vt ex scholio sequenti apparebit. Si igitur à Media Media auferatur, &c. Quod erat ostendendum.

a 16. decimi
b 7. secundi
c 27. decimi

SCHOLIVM.

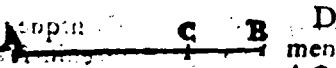
Hoc etiam theorema ita potuisset proponi.

SI à maiori nomine eius, quæ ex binis Mediis secunda, minus nomen auferatur; Reliqua Irrationalis est. Vocetur autem Mediæ Apotome secunda.

239. deci. *QVONIAM enim AB, AC, Mediæ sunt potentia tantùm commẽsurabiles, continentq; Medium; [a] erit composita ex ipsis Irrationalis, quæ ex binis Mediis secunda appellatur, cuius maius nomen AB, & minus AC. Auferatur igitur AC, minus nomen ex maiori AB, vt relinquatur BC, Media Apotome secunda.*

76. THEOR. 59. PROPOS. 77.
71.

SI à recta linea recta auferatur potentia incommensurabilis existens toti, quæ cum tota faciat compositum quidem ex ipsarum quadratis Rationale; quod autem sub ipsis continetur, Medium: Reliqua Irrationalis est. Vocetur autem Minor.



DETRAHATVR à recta AB, recta AC, potentia ipsi AB, incommensurabilis; Sit autem compositum ex quadratis rectarum AB, AC, Rationale; rectangulum verò sub AB, AC, Medium. Dico reliquam BC, Irrationalem esse. Quoniam enim compositum ex quadratis rectarum AB, AC, Rationale est; rectangulum verò sub AB, AC, atque adeò, ex coroll. propos. 24. huius lib. & ei commensurabile, hoc est, rectangulum bis sub AB, AC, Medium, hoc est, Irrationale; [a] erit compositum ex quadratis rectarum AB, AC, incommensurabile rectangulo bis sub AB, AC. [b] Est autem compositum ex quadratis rectarum AB, AC, æquale rectangulo bis sub AB, AC, vnà cum quadrato ex BC. Igitur & compositum ex quadratis rectarum AB, AC, per coroll. propos. 17. huius lib. reliquo quadrato ex BC, incommensurabile erit. Ponitur autem compositum ex quadratis rectarum AB, AC, Rationale. [c] Igitur quadratum ex BC, illi incommensurabile, Irrationale est, & linea BC, Irrationalis. Vocetur autem Minor, quoniam relinquitur post detractionem minoris nominis, lineæ Maioris, à maiori nomine, vt in scholio sequenti dicemus. Si igitur à recta linea recta auferatur, &c. Quod erat demonstrandum.

a 10. defin.
b 7. secundi
c 10. defin.

SCHOLIVM.

Sic etiam theorema hoc poterat proponi.

SI à maiori nomine lineæ Maioris minus nomen auferatur; Reliqua Irrationalis est. Vocetur autem Minor.

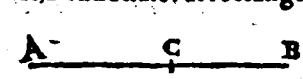
240. deci. *NAM cùm AB, AC, sint potentia incommensurabiles, quæ faciunt compositum quidem ex ipsarum quadratis Rationale, quod autem sub ipsis continetur, Medium; [a] erit composita ex ipsis Irrationalis, quæ vocatur Maior, eiusq; maius nomen AB, minus autem AC. Auferatur igitur AC, minus nomen ex maiori AB, vt relinquatur Minor BC.*

THEOR.

THEOR. 60. PROPOS. 78. 77. 72.

SI à recta recta auferatur potentia incommenſurabilis exiſtens toti, quæ cùm tota faciat compoſitum quidem ex ipſarum quadratis Medium; quod autem ſub ipſis continetur, Rationale: Reliqua Irrationalis eſt. Vocetur autem cum Rationali Medium totum efficiens.

DETRAHATVR ex recta AB, recta AC, potentia ipſi AB, incommenſurabilis; ſit autem compoſitum ex ipſarum quadratis Medium, & rectangulum ſub ipſis, Rationale. Dico reliquam BC, eſſe Irrationalem. Quoniam enim compoſitum ex quadratis rectarum AB, AC, Medium eſt, hoc eſt, Irrationale; at rectangulum ſub AB, AC, atq; adeò & eius duplum, nempe quod bis ſub AB, AC, Rationale; [a] erit compoſitum ex quadratis rectarum AB, AC, incommenſurabile rectangulo bis ſub AB, AC. [b] Eſt autem compoſitum ex quadratis rectarum AB, AC, æquale rectangulo bis ſub AB, AC, vnà cum quadrato ex BC. Igitur & rectangulum bis ſub AB, AC, vnà cum quadrato ex BC, incommenſurabile eſt rectangulo bis ſub AB, AC. [c] Sunt ergo & rectangulum bis ſub AB, AC, & quadratum ex BC, incommenſurabilia. Cùm ergo rectangulum bis ſub AB, AC, Rationale ſit; [d] erit quadratum ex BC, Irrationale, & recta BC, Irrationalis. Vocetur autem cum Rationali Medium totum efficiens: quia eius quadratum additum rectangulo bis ſub AB, AC, quod Rationale eſt, facit totum compoſitũ ex quadratis rectarum AB, AC, quod Medium exiſtit. Si igitur à recta recta auferatur potentia incommenſurabilis exiſtens toti, quæ cũ tota faciat compoſitum quidem ex ipſarum quadratis Medium; quod autem ſub ipſis continetur, Rationale: Reliqua Irrationalis eſt, &c. Quod oſtendendum erat.



[a] 10. defin. [b] 7. ſecundi. [c] 17. decimi. [d] 10. defin.

SCHOLIVM.

Hoc etiam modo Euclides theorema hoc potuiſſet proponere.

SI à maiori nomine eius, quæ Rationale ac Medium poteſt, minus nomen auferatur; Reliqua Irrationalis eſt. Vocetur autem cum Rationali Medium totum efficiens.

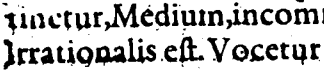
CVM enim AB, AC, ſint potentia incommenſurabiles, quæ faciunt compoſitũ quidem ex ipſarum quadratis, Medium; quod autem ſub ipſis continetur, Rationale; [a] erit compoſita ex ipſis Irrationalis, quæ nominatur Rationale ac Medium potens, cuius maius nomen eſt AB, minus autem AC. Auferatur igitur minus nomen AC, à maiori AB, vt BC, cum Rationali Medium totum efficiens relinquatur.

[a] 14. decimi.

THEOR. 61. PROPOS. 79. 78. 73.

SI à recta recta auferatur potentia incommenſurabilis exiſtens toti, quæ cum tota faciat & compoſitum ex ipſarum quadratis, Medium; & quod ſub ipſis continetur, Medium, incommenſurabileque compoſito ex quadratis ipſarum: Reliqua Irrationalis eſt. Vocetur autem cum Medio Medium totum efficiens.

DETRAHATVR ex recta AB, recta AC, potentia ipſi AB, incommenſurabilis; Sitq; tam compoſitum ex ipſarum quadratis, q̃ rectangulum ſub ipſis Medium, incommenſurabileq; compoſito ex ipſarum quadratis. Dico reliquam BC, eſſe Irrationalem. [a] Quoniam enim compoſitũ ex quadratis rectarum AB, AC, æquale eſt rectangulo bis ſub AB, AC, vnà cum quadrato ex BC, ſuperabit compoſitum ex quadratis rectarum AB, AC, quod Medium ponitur, rectangulum bis ſub AB, AC, quod ex coroll. propoſ. 24. huius lib. Medium etiam eſt, (cùm Medio, quod ſub AB, AC, continetur, ſit commenſurabile) quadrato ex BC. [b] Medium autẽ non ſuperat Medium Rationali. Non ergo quadratum ex BC, Rationale eſt. Ergo Irrationale, & recta ipſa BC, Irrationalis. Vocetur autẽ cum Medio Medium totum efficiens, quia eius quadratũ cum rectangulo bis ſub AB, AC, quod Medium eſt, facit totum compoſitũ ex quadratis rectarum AB, AC, quod Medium etiam eſt. Si igitur à recta recta auferatur, &c. Quod oſtendendum erat.



[a] 7. ſecundi. [b] 27. decimi

SCHOLIVM.

IN *hunc modum proponi quoque potuiſſet hoc theorema.*

SI à maiori nomine eius, quæ bina Media poteſt, minus nomen auferatur; Reliqua Irrationalis eſt. Vocetur autem cum Medio Medium totum efficiens.

QVONIAM cùm AB, AC, ſint potentia incommenſurabiles, faciantq; & compoſitũ ex ipſarum quadratis Medium, & rectangulum ſub ipſis Medium, incommenſurabileq; compoſito ex quadratis ipſarũ; [a] erit compoſita ex illis Irrationalis, quæ bina Media potens dicitur, cuius maius nomen AB, & minus AC. Auferatur igitur minus nomen AC, ex maiori AB, vt relinquatur BC, cum Media Medium totum efficiens.

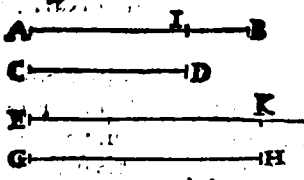
[a] 42. decimi.

LEMMA.

SI idem exceſſus ſit inter primam magnitudinem, & ſecundam, qui inter tertiam ma-

gnitudinem, & quartam; erit & vicissim idem excessus inter primam magnitudinem, & tertiam, qui inter secundam magnitudinem & quartam.

SINT quatuor magnitudines AB, CD, EF, GH, sitq; IB, excessus inter AB, CD, equalis excessui KF, inter EF, GH. Dico eundem esse excessum inter AB, EF, qui est inter CD, GH.



Quoniam enim IB, excessui est inter AB, & CD; erit AI, ipsi CD, aequalis. Eodem modo aequalis erit EK, ipsi GH. Idem igitur excessus erit inter AI, & EK, qui inter CD, & GH; cũ hæ magnitudines illis sint aequales, singulæ singulis. Est autẽ totorum AB, EF, ex pronunciato 16. lib. 1. idem excessus, qui inter AI, EK; quòd IB, KF, aequales ponantur. Igitur idem quoque excessus erit inter AB, & EF, qui inter CD, & GH. quod est propositum.

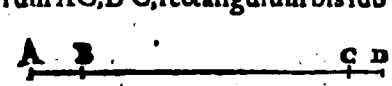
COROLLARIVM.

Ex his constat, quatuor magnitudines Arithmeticam Analogiam habentes, habere quoq; vicissim Arithmeticam Analogiam. quoniam huiusmodi Analogia consistit in eodem excessu, quem ostendimus eundem esse inter primam, & tertiam magnitudines, qui inter secundam & quartam magnitudines reperitur, si idem sit excessus inter primam magnitudinem, & secundam, qui inter tertiam magnitudinem, & quartam, hoc est, si quatuor magnitudines Analogiam Arithmeticam habeant.

79. 74. ## THEOR. 62. PROPOS. 80.

APOTOMAE vna tantùm congruit recta linea Rationalis, potẽtia solùm commensurabilis existens toti.

SIT Apotome AB; congruẽs autem ei Rationalis BC, potentia solùm toti AC, commensurabilis. Dico ipsi AB, aliam Rationalem nõ congruere, quæ toti sit potentia tantũ commensurabilis. Si enim fieri potest, congruat alia Rationalis BD, ita vt BD, ipsi AD, sit potentia solùm commensurabilis. Et quia BC, Rationalis est; erit AC, illi solùm potentia commensurabilis, Rationalis. Rationales ergo sunt AC, BC, potentia tantũ commensurabiles. Eodem modo erunt & AD, BD, Rationales potentia solùm commensurabiles. Quoniam verò idem excessus est inter compositũ ex quadratis rectarum AC, BC, & rectangulum bis sub AC, BC, qui inter compositum ex quadratis rectarum AD, BD, & rectangulum bis sub AD, BD; (superat enim compositũ ex quadratis rectarum AC, BC, rectangulum bis sub AC, BC, quadrato ex AB; [a] & compositum ex quadratis rectarum AC, BC, æquale sit rectangulo bis sub AC, BC, vnà cum quadrato ex AB. Et eodem modo compositũ ex quadratis rectarum AD, BD, superat rectangulum bis sub AD, BD, quadrato eodẽ ex AB. [b] cùm & compositũ ex quadratis rectarũ AD, BD, æquale sit rectangulo bis sub AD, BD, vnà cũ quadrato ex AB.) erit quoq; permutando, ex lemmate antecedẽti, idem excessus inter compositũ ex quadratis rectarum AC, BC, & compositum ex quadratis rectarum AD, BD, qui inter rectangulum bis sub AC, BC, & rectangulum bis sub AD, DB. Est autẽ excessus inter illa composita, spatium Rationale, ex scholio propos. 27. huius lib. & vtrumq; Rationale sit. (Nam cùm AC, BC, sint Rationales potentia solùm commensurabiles; erunt earum quadrata, Rationalia, & commensurabilia. [c] Igitur & compositum ex ipsis vtriq; illorum commensurabile est, atq; adeò & Rationale; ex 9. defin. Non aliter Rationale ostendemus compositũ ex quadratis rectarum AD, BD.) Igitur & excessus inter rectangulũ bis sub AC, BC, & rectangulum bis sub AD, BD, spatiũ Rationale est. [d] Et quia rectangulum sub AC, BC, Rationalibus potẽtia solùm commensurabilibus Medium est; erit ex coroll. propos. 24. huius lib. & eius duplum, nempe rectangulum bis sub AC, BC, Medium. Eademq; ratione Medium erit rectangulum bis sub AD, BD. [e] Medium autẽ non superat Medium Rationali. Igitur excessus inter rectangulum bis sub AC, BC, & rectangulum bis sub AD, BD, Rationale spatium nõ est. Sed & Rationale ostensum est. Quod est absurdũ. Ergo ipsi AB, alia Rationalis non congruit, præter BC, q̃ toti sit potẽtia tantũ commẽsurabilis. Apotomæ igitur vna tantũ cõgruit, &c. Quod erat ostendendũ.



a 7. secundi.

b 7. secundi.

c 61. decimi

d 12. decimi.

e 27. decimi.

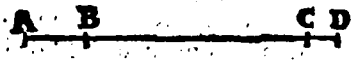
80. 75. ## THEOR. 63. PROPOS. 81.

MEDIAE Apotomæ primæ vna tantùm congruit recta linea Media, potentia solùm commensurabilis existens toti, & cum tota Rationale continens.

SIT Mediæ Apotomæ prima AB, & ipsi congruat BC, Media toti AC, potẽtia solùm commensurabilis, & rectangulum sub AC, BC, sit Rationale. Dico ipsi AB, aliam Mediam non congruere, quæ toti sit potentia tantùm commensurabilis, contineatq; cum tota, Rationale. Si enim fieri potest, congruat alia BD, Media toti AD, potentia tantùm commensurabilis, sitq; rectangulum sub AD, BD, Rationale. Et quia BC, Media est potẽtia solùm ipsi AC, commensurabilis; [f] erit & AC,

f 24. decimi

Media,



Media, cùm illi sit commensurabilis. Mediæ ergò sunt A C, B C, potentia tantũ commensurabiles. Quoniam verò idem excessus est inter compositum ex quadratis rectarũ AC, C B, & compositũ ex quadratis rectarũ A D, B D, qui inter rectangulum bis sub AC, B C, & rectangulum bis sub AD, B D, vt in propos. præcedẽti ostensum est: Est autẽ excessus inter hæc rectangula, ex scholio propos. 27. huius lib. spatium Rationale; quòd vtrumq; sit Rationale. (cùm enim rectangulum sub A C, B C, ponatur Rationale; erit rectangulum bis sub A C, B C, illi commensurabile, Rationale. Atq; eadẽ ratione Rationale erit rectangulũ bis sub A D, B D.) Igitur & excessus inter compositũ ex quadratis rectarum A C, B C, & compositũ ex quadratis rectarum A D, B D, spatium Rationale est. Et quoniam rectæ AC, B C, Mediæ sunt potentia solùm commensurabiles; erunt & ipsarũ quadrata Media, & commensurabilia. [a] Igitur & compositũ ex ipsis vtriq; eorum commensurabile est, atq; adeò & Medium, ex coroll. propos. 24. huius lib. Non aliter quàm Medium erit compositum ex quadratis rectarum A D, B D. [b] Medium autem non superat Medium Rationali. Igitur excessus inter compositum ex quadratis rectarum A C, B C, & compositum ex quadratis rectarum A D, B D, spatium Rationale non est. Sed & Rationale ostensum est. Quod est absurdum. Ergo ipsi A B, alia Media non congruit, præter B C, quæ toti sit potentia solùm commensurabilis, contineatque cum tota Rationale. Mediæ igitur Apotomæ primæ vna tantùm congruit, &c. Quod erat demonstrandum.

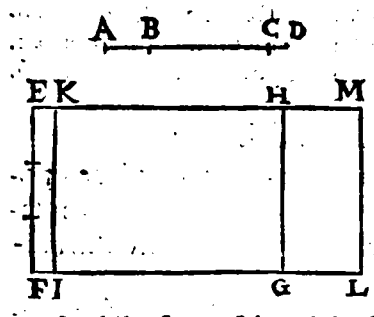
[a] 16. decimi

[b] 27. decimi

THEOR. 64. PROPOS. 82. 81.

MEDIAE Apotomæ secundæ vna tantùm congruit recta linea, Media potentia solùm commensurabilis existens toti, & cum tota Medium continens. 76.

SIT Mediæ Apotomæ secundæ A B, cui congruat Media B C, toti A C, potentia tantũ commensurabilis, & rectangulum sub A C, B C, sit Medium. Dico ipsi A B, aliá mediam nõ congruere, quæ toti sit potentia tantũ commensurabilis, contineatq; cum tota Medium. Si enim fieri potest, congruat ipsi alia B D, media toti A D, potentia tantũ commẽsurabilis, sitq; rectangulũ sub A D, B D, Medium. Exponatur Rationalis E F, [c] ad quá applicetur rectangulum E G, æquale compositò ex quadratis rectarũ A C, B C, & ad eandẽ E F, aliud E I, applicetur æquale quadrato ex A B. Et demique aliud E L, æquale compositò ex quadratis rectarũ A D, B D. [d] Quoniam igitur compositũ ex quadratis rectarum A C, B C, æquale est rectangulo bis sub A C, B C, vnà cũ quadrato ex A B; erit K G, æquale ei, quod bis cõtinetur sub A C, B C. Eodemq; modo erit K L, æquale ei, quod bis continetur sub A D, B D. Et quoniam A C, B C, Mediæ sunt, & potẽtia commensurabiles; (cùm enim B C, Media ponatur, [e] erit & A C, ipsi potẽtia commensurabilis, Media) erunt & earum quadrata Media, & commensurabilia. [f] Ergo & compositũ ex ipsis, commensurabile est vtrique eorũ; atq; idcircò & Medium, ex coroll. propos. 24. huius libri. Igitur & E G, quod illi compositò æquale est, Medium est; qd cũ applicetur ad Rationalẽ E F, [g] erit E H, Rationalis ipsi E F, longitudine incommẽsurabilis. Rursus quia rectangulum sub A C, B C, Medium est; erit ex coroll. propos. 24. huius lib. & eius duplum, nempe K G, Medium: quod cũ applicetur ad Rationalem K I, [h] erit K H, Rationalis ipsi K I, hoc est, ipsi E F, longitudine incõmensurabilis. Et quia A C, B C, longitudine incommensurabiles sunt, estq; vt A C, ad B C, ita quadratũ ex A C, ad rectangulum sub A C, B C, vt ostendimus lemmate 3. ad propos. 19. huius lib. [i] erit quadratũ ex A C, incommẽsurabile rectangulo sub A C, B C. Est autẽ quadrato ex A C, commensurabile compositũ ex quadratis rectarum A C, B C, hoc est, rectangulum E G. (cùm enim rectæ A C, B C, ponantur potẽtia commensurabiles; erũt & earũ quadrata commensurabilia. [k] Igitur & compositũ ex ipsis commensurabile est vtrique ipsorum, nempe quadrato ex A C.) & rectangulo sub A C, B C, commensurabile est eius duplũ; videlicet K G. Igitur & E G, ipsi K G, incommensurabile est, ex iis, quæ in scholio propos. 14. huius lib. docuimus. [l] Rectæ igitur E H, K H, eandem habentes rationẽ cum E G, K G, longitudine incommensurabiles sunt: Sed & Rationales sunt ostensæ. Rationales ergo sunt potentia tantũ commensurabiles. Quapropter cũ ex Rationali E H, auferatur Rationalis K H, potentia solùm commensurabilis ipsi E H, [m] erit E K, Apotome, & illi congruẽs K H. Similiter demonstrabimus E K, Apotomen esse, & illi congruentẽ K M. Non igitur Apotomæ vna tantũ congruit recta linea Rationalis potentia solùm commensurabilis existens toti. quod est absurdum. Vnam enim tantùm congruere, [n] demonstratum est. Igitur mediæ Apotomæ secundæ vna tantùm congruit, &c. Quod erat demonstrandum.



[c] 45. primi.

[d] 7. secundi.

[e] 24. decimi

[f] 16. decimi.

[g] 23. decimi

[h] 23. decimi

[i] 10. decimi.

[k] 16. decimi

[l] 10. decimi.

[m] 74. decimi.

[n] 9. decimi

THEOR. 65. PROPOS. 83. 82.

MINORI vna tantũ congruit recta linea potentia incommensurabilis existens toti, & cum tota faciens compositum quidem ex ipsarum quadratis Rationale; quod autem sub ipsis continetur, Medium. 77.

Sit minor A B, & illi congruens B C, toti A C, potentia incommensurabilis, faciensque compositum ex quadratis rectarum A C, B C, Rationale, & rectangulum sub A C, B C, Medium. Dico ipsi A B, aliam nō congruere, quæ eadem præstet. Sit enim, si fieri potest, alia congruens B D, toti A D, potentia incommensurabilis, faciensque compositum quidem ex quadratis rectarum A D, B D, Rationale, at rectangulum sub A D, B D, Medium. Quoniam igitur, vt in propositione 80. demonstratum est, idem excessus est inter compositum ex quadratis rectarum A C, B C, & compositum ex quadratis rectarum A D, B D, qui inter rectangulum bis sub A C, B C, & rectangulum bis sub A D, B D: Est autem excessus inter alia composita, spatium Rationale, ex scholio propos. 27. huius libri; quòd vtrumque Rationale ponatur. Igitur & excessus inter rectangulum bis sub A C, B C, & rectangulum bis sub A D, B D, spatium est Rationale, sed & non Rationale est. (Cùm enim rectangulum sub A C, B C, ponatur Medium, erit quoque ex coroll. propositionis 24. huius lib. eius duplum, nempe rectangulum bis sub A C, B C, Medium. Similiterq; Medium erit rectangulum bis sub A D, B D. [a] Quare vnum non superabit alterum Rationali.) Quod est absurdum. Ergo ipsi A B, alia recta præter B C, non congruit potentia toti incommensurabilis, &c. Minori ergo vna tantùm congruit, &c. Quod erat demonstrandum.

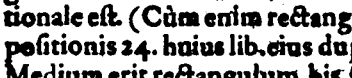


a 27. decimi

83. PROBL. 66. PROPOS. 84.

78. Ei, quæ cum Rationali Medium totum facit, vna tantùm congruit recta linea, potentia incommensurabilis existens toti, & cum tota faciens compositum quidem ex ipsarum quadratis, Medium; quod autem sub ipsis continetur, Rationale.

Sit recta cum Rationali Medium totum faciens A B, cui congruat recta B C, toti A C, potentia incommensurabilis, faciensque compositū quidem ex quadratis rectarum A C, B C, Medium, rectangulum verò sub A C, B C, Rationale. Dico ipsi A B, aliam rectam non congruere, quæ hæc eadem faciat. Si enim fieri potest, congruat ipsi alia recta B D, toti A D, potentia incommensurabilis, faciensque compositum quidem ex quadratis rectarum A D, B D, Medium, rectangulum verò sub A D, B D, Rationale. Quoniam igitur, vt in propos. 80. ostensum est, idem excessus est inter compositum ex quadratis rectarum A C, B C, & compositum ex quadratis rectarum A D, B D, qui inter rectangulum bis sub A C, B C, & rectangulum bis sub A D, B D. Est autem excessus inter hæc rectangula, spatium Rationale, vt in propos. 81. demonstrauimus. Igitur & excessus inter illa composita, spatium Rationale est: sed & non Rationale est; cùm vtrumque sit Medium. [b] Medium enim Medium non superat Rationali. Quod est absurdum. Non ergo ipsi A B, alia recta, quàm B C, congruet potentia toti incommensurabilis, &c. Quare ei, quę cũ Rationali Medium totũ facit, vna tantũ congruit, &c. Quod erat demonstrandũ.

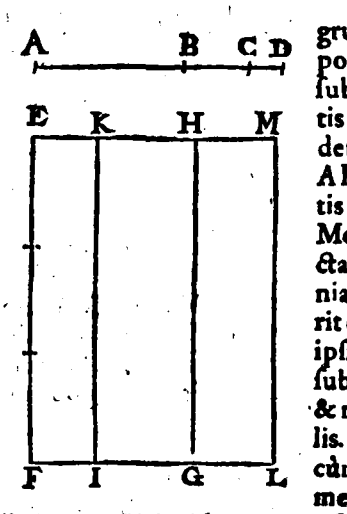


b 27. decimi

84. PROBL. 67. PROPOS. 85.

79. Ei, quæ cum Medio Medium totum facit, vna tantùm congruit recta linea, potentia incommẽsurabilis existens toti, & cum tota faciens & compositum ex ipsarum quadratis Medium, & quod sub ipsis continetur Medium, incommensurabileque composito ex ipsarum quadratis.

Sit recta A B, cum Medio Medium totum faciens, ipsi verò congruens B C, toti A C, potentia incommensurabilis, faciensq; & compositum ex quadratis rectarum A C, B C, Medium, & rectangulum sub A C, B C, Medium, incommensurabileq; composito ex quadratis rectarum A C, B C. Dico ipsi A B, aliam non congruere, quæ eadem hæc faciat. Si enim fieri potest, congruat ipsi recta alia B D, toti A D, potentia incommensurabilis, ita vt & compositum ex quadratis rectarum A D, B D, Medium sit, & rectangulum sub A D, B D, Medium quoque, ac incommensurabile composito ex quadratis rectarum A D, B D. Constructis autem iisdem, quæ in propos. 82. quoniam compositum ex quadratis rectarum A C, B C, Medium est; erit etiam E G, illi æquale, Medium; [c] Recta igitur E H, Rationalis est, ipsi E F, longitudine incommensurabilis. Rursus quia rectangulum sub A C, B C, Medium est; erit & eius duplum K G, Medium. [d] Igitur & recta K H, Rationalis est, longitudine ipsi E F, incommensurabilis. Et quoniam K G, commensurabile est rectangulo sub A C, B C, cùm illud huius sit duplum; at rectangulum sub A C, B C, incommensurabile ponitur composito ex quadratis rectarum A C, B C; [e] erit quoque K G, eidem composito, hoc est, ipsi E G, incommensurabile; ac propterea rectæ E H, K H, eandem habentes cum E G, K G, rationem, [f] longitudine incommensurabiles sunt. Sed & ostensæ sunt Rationales. Rationales ergo sunt potentia solùm commensurabiles. Quare cùm ex



c 23. decimi.
d 23. decimi.
e 14. decimi.
f 10. decimi.

Rationali

Rationali EH, auferatur Rationalis KH, potentia ſolùm commenſurabilis ipſi EH; erit EK, Apotome, & ei congruens KH. Non aliter oſtendemus EK, eſſe Apotomen, & ei congruentem eſſe KM. Non igitur Apotomæ vna tantùm recta congruit, &c. Quod eſt abſurdum. Vnam enim tantùm congruere demonſtratum eſt. Igitur ei, quæ cum Medio Medium totum facit, vna tantùm congruit, &c. Quod erat oſtendendum. *a* 74. *decimi* *b* 80. *decimi*

DEFINITIONES TERTIAE.

EXPOSITA Rationali, & Apotoma; ſi tota plus poſſit, quàm congruens, quadrato rectæ lineæ ſibi longitudine commenſurabilis,

I.

SI quidem tota expoſitæ Rationali ſit longitudine commenſurabilis; Vocetur Apotome prima.

II.

SI verò congruens expoſitæ Rationali ſit longitudine commenſurabilis; Vocetur Apotome ſecunda.

III.

QVOD ſi neque tota, neque congruens expoſitæ Rationali ſit longitudine commenſurabilis; Vocetur Apotome tertia.

RVRSVS ſi tota plus poſſit, quàm congruens, quadrato rectæ lineæ ſibi longitudine incommenſurabilis,

IIII.

SI quidem tota expoſitæ Rationali ſit longitudine commenſurabilis; Vocetur Apotome quarta.

V.

SI verò congruens expoſitæ Rationali ſit longitudine commenſurabilis; Vocetur Apotome quinta.

VI.

QVOD ſi neque tota, neque congruēs expoſitæ Rationali ſit longitudine commenſurabilis; Vocetur Apotome ſexta.

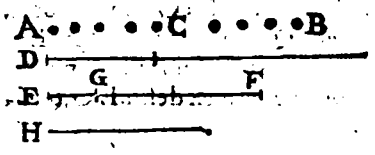
SCHOLIVM.

NON aliter colligitur numerus harum ſex Apotomarum, ac ſuperius numerus ſex linearum ex binis nominibus fuit collectus. Sunt enim ſex hæ Apotomæ, rectæ lineæ, quæ relinquuntur poſt detractionem minorum nominum ex maioribus nominibus ſex linearum, quæ ex binis nominibus dicuntur; vt ex definitionibus eſt perſpicuum.

PROBL. 19. PROPOS. 86. 85. 80.

INVENIRE primam Apotomen.

REPERTIS duobus numeris quadratis AB, CB, vt in ſcholio 2. propoſ. 29. huius libri docuimus, quorum exceſſus AC, non ſit quadratus; ita vt AB, CB, proportionem quidem habeant, quam quadratus ad quadratum, at AB, AC, non. Exponatur Rationalis quæpiam D, cui longitudine commenſurabilis ſit EF. Eritque EF, cùm commenſurabilis ſit Rationali D, Rationalis. Fiat deinde vt numerus AB, ad numerum AC, ita per coroll. propoſ. 6. huius lib. quadratum ex EF, ad quadratum ex GF. Dico EG, eſſe primam Apotomen.



Quoniam enim quadrata ex EF, GF, proportionem habentia, quam numeri AB, AC, commenſurabilia ſunt; Erunt & rectæ EF, GF, commenſurabiles, ſaltem potentia. Cùm ergo EF, oſtenſa ſit Rationalis, erit & GF, Rationalis. Quia verò AB, AC, proportionē non habent, quam quadrati numeri; neque quadrati ex EF, GF, proportionem habebunt, quam quadrati numeri. Incommenſurabiles ergo ſunt longitudine rectæ EF, GF. Rationales ergo ſunt EF, GF, potentia tantùm commenſurabiles; atque idcirco reliqua EG, Apotome eſt. Dico & primam eſſe. Poſsit enim recta EF, plus quàm recta GF, quadrato H. Et quia eſt, vt numerus AB, ad numerum AC, ita quadratum ex EF, ad quadratum ex GF; erit per conuerſionem rationis, vt AB, ad CB, ita quadratum ex EF, ad quadratum ex H. Habent autem AB, CB, proportionem, quam numeri quadrati. Igitur & quadrata ex EF, & H, proportionem habent, quam numeri quadrati. Ac propterea rectæ EF, & H, longitudine commenſurabiles ſunt. Quoniā igitur tota EF, plus poteſt, quàm congruens GF, quadrato rectæ H, ſibi longitudine commenſurabilis; eſtque tota eadem EF, expoſitæ Rationali D, commenſurabilis longitudine; erit EG, ex defin. prima Apotome. Inuenimus ergo primam Apotomen. Quod faciendum erat. *c* 6. *decimi.* *d* 9. *decimi.* *e* 74. *decimi* *f* 9. *decimi.*

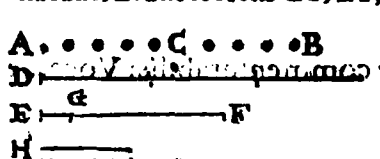
86. 81.

PROBL. 20. PROPOS. 87.

INVENIRE secundam Apotomen.

REPERTIS duobus numeris quadratis AB, CB, vt in propositione præcedenti: expositaque Rationali D, sumatur ei longitudine commensurabilis GF: eritque GF, Rationali D, commensurabilis, Rationalis quoque. Fiat deinde vt numerus AC, ad numerum AB, ita quadratum ex GF, ad quadratum ex EF, per coroll. propos. 6. huius lib. Dico EG, esse secundam Apotomen. [a] Quoniam enim quadrata ex GE, EF, proportionem habentia, quam numeri AC, AB, commensurabilia sunt; Erunt & rectæ GF, EF, commensurabiles, saltem potentia. Cùm ergo GF, sit ostensa Rationalis; erit quoque EF, Rationalis. Quia verò numeri AC, AB, atque adeò & quadrata ex GF, EF, proportionem non habet, quam numerus quadratus ad numerum quadratum; [b] erunt GF, EF, longitudine incommensurabiles. Rationales ergo sunt GF, EF, potentia solùm commensurabiles; [c] Ideoque EG, reliqua, Apotome est. Dico & secundam esse. Posit enim recta EF, plus quàm GF, quadrato ex H. Quoniam ergo est, vt AC, ad AB, ita quadratum ex GF, ad quadratum ex EF; & conuertendo, vt AB, ad AC, ita quadratum ex EF, ad quadratum ex GF. Ostendemus iam, vt in antecedenti propositione rectam H, ipsi EF, longitudine esse commensurabilem. Quam ob rem cùm tota EF, plus possit, quam congruens GF, quadrato rectæ H, illi longitudine commensurabilis, sitq; congruens GF, expositæ Rationali D, longitudine commensurabilis: erit EG, ex defin. secunda Apotome. Inuenimus ergo secundam Apotomen. Quod erat faciendum.

a 6. decimi.



b 9. decimi.

c 74. decimi

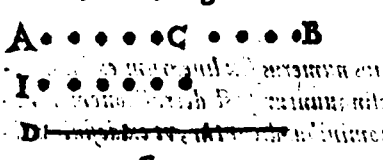
87. 82.

PROBL. 21. PROPOS. 88.

INVENIRE tertiam Apotomen.

REPERTIS duobus numeris quadratis AB, CB, vt in propos. 86. sumatur alius numerus I, vt in propos. 51. huius lib. docuimus, qui ad neutrum ipsorum AB, AC, proportionem habeat, quam quadratus ad quadratum. Exposita deinde Rationali D, fiat vt I, ad AB, ita quadratum ex D, ad quadratum ex EF, per coroll. propos. 6. huius libri. [a] Eruntque quadrata ex D, & EF, proportionem habentia, quam numeri I, & AB, commensurabilia; atque adeò & rectæ D, & EF, commensurabiles, saltem potentia. Existente ergo D, Rationali, erit & EF, Rationalis. Et quia numeri I, & AB, ac propterea quadrata ex D, & EF, proportionem non habent, quam numeri quadrati; [b] erunt rectæ D, & EF, longitudine incommensurabiles. Rursus fiat, vt AB, ad AC, ita quadratum ex EF, ad quadratum ex GF, ex eodem coroll. propos. 6. huius libri. Dico EG, esse tertiam Apotomen. [c] Quoniam enim quadrata ex EF, GF, proportionem habentia, quam numeri AB, AC, commensurabilia sunt; erunt & rectæ EF, GF, commensurabiles, saltem potentia. Cùm ergo EF, ostensa sit Rationalis, erit & GF, Rationalis, cùm illi hæc sit commensurabilis, vt demonstrauimus. Et quia AB, AC, atque adeò & quadrata ex EF, GF, proportionem nō habent, quam numeri quadrati; [d] Erunt rectæ EF, GF, longitudine incōmensurabiles. Rationales ergo sunt EF, GF, potentia solùm commensurabiles. Ac propterea cùm ex EF, auferatur GF, potentia illi solùm commensurabilis; [e] reliqua EG, Apotome erit. Dico & tertiam esse. Quoniam enim est vt I, ad AB, ita quadratum ex D, ad quadratum ex EF; & vt AB, ad AC, ita quadratum ex EF, ad quadratum ex GF; erit ex æquo vt I, ad AC, ita quadratum ex D, ad quadratum ex GF. Non habent autem numeri I, & AC, proportionem, quam numeri quadrati. Neque igitur quadrata ex D, & GF, proportionem habebunt, quam numeri quadrati. [f] Sunt ergo rectæ D, & GF, longitudine incommensurabiles. Igitur neutra ipsarum EF, GF, longitudine commensurabilis est expositæ Rationali D. Possit iam EF, plus quàm GF, quadrato rectæ H. Ostendemus q;, vt in propos. 86. rectam H, esse ipsi EF, longitudine commensurabilem. Quapropter cùm tota EF, plus possit quàm congruens GF, quadrato rectæ H, longitudine sibi commensurabilis, & neutra ipsarum EF, GF, longitudine commensurabilis sit Rationali D, expositæ: erit ex defin. EG, tertia Apotome. Inuenimus ergo tertiam Apotomen. Quod faciendum erat.

a 6. decimi.



b 9. decimi.

c 74. decimi

d 9. decimi.

e 74. decimi

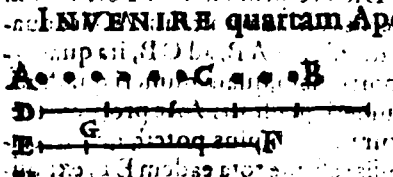
f 9. decimi.

88. 83.

PROBL. 22. PROPOS. 89.

INVENIRE quartam Apotomen.

REPERTIS duobus numeris AC, CB, ita vt AB, ex illis compositus ad neutrum ipsorum proportionem habeat, quam quadratus ad quadratū; per ea, quæ in scholio 3. propositionis 29. huius lib. docuimus; exponatur Rationalis D, cui longitudine commensurabilis sit EF; eritque propterea & EF, Rationalis. Quod si reliqua fiant, quæ in propos. 86. ostendemus, vt ibi, EG, esse Apotomen. Dico & quartam esse. Possit enim EF, plus quā GF, quadra-



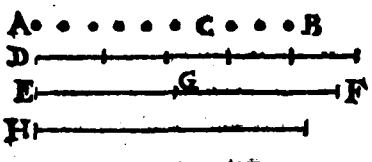
tore

to rectæ H. Et quia est vt AB, ad AC, ita quadratum ex EF, ad quadratum ex GF; erit per conuersionem rationis, vt AB, ad CB, ita quadratum ex EF, ad quadratum ex H. Cùm ergo AB, & CB, proportionem non habeant, quam numeri quadrati; [a] erunt rectæ EF, & H, longitudine incommensurabiles. Quoniam igitur tota EF, plus potest, quàm congruens GF, quadrato rectæ H, sibi longitudine incommensurabilis, estq; eadē tota EF, commensurabilis longitudine Rationali D; erit ex defin. E G, quarta Apotome. Inuenimus ergo quartam Apotomen. Quod erat faciendum. [a] 9. huius.

PROBL. 23. PROPOS. 90. 89. 84.

INVENIRE quintam Apotomen.

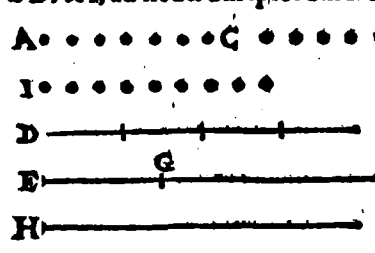
REPERTIS duobus numeris AC, CB, vt in propositione præcedenti, fiat constructio, vt in propos. 87. hoc est, sumatur GF, longitudine commensurabilis Rationali D, &c. Ostendemus ergo, vt in propos. 87. EG, esse Apotomen. Dico & quintam esse. Possit enim EF, plus quàm GF, quadrato rectæ H. Et quia similiter, vt in propos. 86. ostendemus, per conuersionem rationis, esse vt AB, ad CB, ita quadratum EF, ad quadratum ex H; erunt rursus, vt in propositione antecedenti, rectæ EF, & H, longitudine incommensurabiles; estque congruens GF, Rationali D, commensurabilis longitudine; erit ex defin. E G, quinta Apotome. Inuenimus ergo quintam Apotomen. Quod faciendum erat.



PROBL. 24. PROPOS. 91. 90. 85.

INVENIRE sextam Apotomen.

REPERTIS tribus numeris AC, CB, & I, vt in propos. 54. ita vt AB, ad neutrum ipsorum AC, CB; & I, ad neutrum ipsorum AB, AC, proportionem habeat, quam quadratus ad quadratum: exponatur Rationalis D, & reliqua fiant, vt in propositione 88. Ostendemus ergo similiter, vt ibi, D, & EF, longitudine incommensurabiles esse; & EG, Apotomen esse. Dico & sextam esse. Nam vt in propos. 88. erūt D, & GF, longitudine quoq; incommensurabiles; Atque adeò neutra ipsarum EF, GF, longitudine commensurabilis est expositæ Rationali D. Possit iam EF, plus quàm GF, quadrato rectæ H, quam ostendemus, vt in propos. 89. longitudine incommensurabilem esse ipsi EF. Igitur cùm tota EF, plus possit, quàm congruens GF, quadrato rectæ H, sibi longitudine incommensurabilis, & neutra ipsarum EF, GF, longitudine sit commensurabilis Rationali D; erit ex defin. EG, sexta Apotome. Inuenimus ergo sextam Apotomen. Quod erat faciendum.



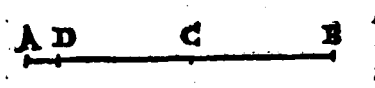
SCHOLIVM.

SED & expeditius sex dictas Apotomas inueniemus hac ratione, vt Theon docet hoc loco.

SIT inuenienda exempli gratia, prima Apotome. [a] *Reperiatur prim ex binis nominibus prima AB, cuius maius nomen AC, & minus CB. Abscissa igitur ex AC, recta CD, quæ æqualis sit ipsi CB: Dico AD, esse primam Apotomen. Quoniam enim AC, CB, Rationales sunt potentia tantùm commensurabiles; erūt etiam AC, DC, Rationales potentia tantùm commēsurabiles.* [b] *Est ergo AD, Apotome. Et quia AC, plus potest, quàm CB, hoc est, quàm DC, quadrato rectæ lineæ sibi longitudine commensurabilis: & est AC, Rationali expositæ longitudine commensurabilis, ex definitione eius, quæ ex binis nominibus prima dicitur; erit ex definitione Apotoma prima, AD, prima Apotome. Eadem ratione ex cæteris, quæ ex binis nominibus dicuntur, & alias Apotomas inueniemus, vt ex secunda secundam, ex tertia tertiam, ex quarta quartam, ex quinta quintam, & ex sexta sextam, si minora nomina ex maioribus auferamus.*

[a] 49. decimi.

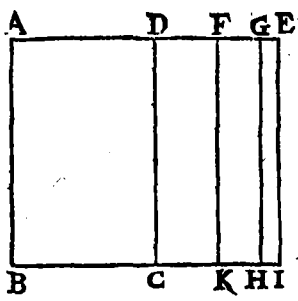
[b] 74. decimi.

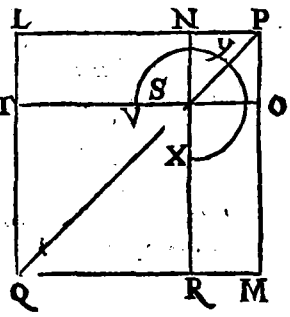


THEOR. 68. PROPOS. 92. 91. 86.

SI spatium contineatur sub Rationali, & Apotoma prima; Recta linea spatium potens Apotome est.

CONTINEATVR spatium AC, sub Rationali AB, & Apotoma prima AD. Dico rectam lineam, quæ potest spatium AC, Apotomen esse. Sit ipsi AD, congruens DE. Erunt igitur AE, DE, ex defin. Apotomæ primæ, Rationales potentia solùm commensurabiles; & tota AE, longitudine commensurabilis Rationali AB; & denique eadem AE, tota plus poterit, quàm congruens DE, quadrato rectæ sibi longitudine commensurabilis. Secetur DE, bifariam in F, & quadrato ex FE, hoc est, quartæ parti quadrati ex DE, applicetur ad AE, rectangulum æquale sub AG, GE, deficiens figura quadrata, per lemma 2. propos. 17. huius lib. Et quia AE, plus potest, quàm DE, quæ





drato rectæ ſibi longitudine commenſurabilis; [a] erunt rectæ A G, G E, longitudine commenſurabiles; [b] Ac propterea & vtraque toti A E, longitudine commenſurabilis erit: Eſt autem A E, Rationali A B, longitudine commenſurabilis. [c] Igitur & vtraque A G, G E, ipſi A B, longitudine eſt commenſurabilis; atq; ex definitione 6. Rationalis. Quare ductis G H, E I, ipſi A B, parallelis, quæ ipſi B C, productæ occurrant in H, I; [d] erit vtrumque rectangulum A H, G I, contentum ſub duabus rationalibus longitudine commenſurabilibus, Rationale. Rurſus quia vtraque D F, F E, longitudine commenſurabilis eſt ipſi D E; & D E, longitudine incommenſurabilis eſt Rationali A B; (Nam ſi commenſurabilis eſſet longitudine, cùm & A E, ſit eidem A B, longitudine commenſurabilis; [e] eſſent A E, D E, longitudine quoq; commenſurabiles. Quod eſt abſurdum. ponuntur enim ſolùm potentia commenſurabiles:) [f] erit etiam vtraq; ipſarum D F, F E, ipſi A B, longitudine incommenſurabilis. Et quoniam vtraque D F, F E, Rationali D E, commẽſurabilis, Rationalis eſt; Erunt propterea tam A B, D F, quàm A B, F E, Rationales potentia tantũ commenſurabiles. Quare ducta F K, ipſi A B, parallela, [g] erit vtrumque rectangulum D K, F I, contentũ ſub Rationalibus potentia tantùm commenſurabilibus, Medium.

IAM verò ipſi A H, [h] fiat quadratũ æquale L M, & ipſi G I, æquale fiat quadratum N O, communẽ habens cum L M, angulum L P M. [i] Erunt igitur quadrata L M, N O, circa eandem diametrum, quæ ſit P Q. Perficiatur autem figura, vt vides. Quoniam igitur rectangulum ſub A G, G E, per conſtructionem, æquale eſt quadrato ex F E; [k] erunt tres rectæ A G, F E, G E, proportionales; [l] Ac propterea cùm A H, F I, G I, eandem cum ipſis habeant rationem; erit F I, medium proportionale inter A H, G I, hoc eſt, inter quadrata L M, N O, illis æqualia. Eſt autem inter eadem L M, N O, per lemma propoſ. 14. huius lib. medium quoq; proportionale L O. Igitur rectangula F I, L O, æqualia ſunt: [m] Sed ipſi F I, æquale eſt D K, & ipſi L O, æquale eſt M N. Eſt ergo totum D I, toti gnomoni V Y X, cum quadrato N O, æquale. Eſt autem & totum A I, per conſtructionem, æquale quadratis L M, N O. Igitur & reliquum A C, reliquo quadrato T R, eſt æquale; Ac propterea recta T S, poteſt ſpatiũ A C. Dico T S, Apotomẽ eſſe.

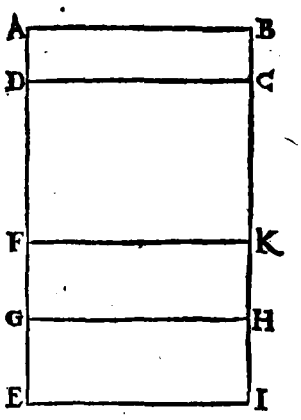
QVONIAM enim ſpatia A H, G I, oſtenſa ſunt Rationalia; & eis æqualia ſunt L M, N O, erunt quoq; quadrata L M, N O, Rationalia; atq; adeò & rectę T O, S O, Rationales. Rurſus quia F I, Medium eſt oſtenſum; erit & L O, illi æquale, Mediũ. Incommenſurabilia ergo ſunt L O, & N O, cùm vnum ſit Irrationale, alterum verò Rationale. Igitur rectæ T O, S O, [n] eandem rationem habẽtes cum L O, N O, [o] longitudine incommenſurabiles ſunt; [p] Atque idcircò reliqua T S, Apotome eſt. Si ſpatium ergo contineatur ſub Rationali, & Apotoma prima, &c. Quod demonſtrandum erat.

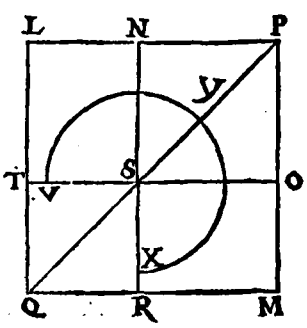
[a] 18. decimi. [b] 16. decimi. [c] 12. decimi. [d] 20. decimi. [e] 12. decimi. [f] 14. decimi. [g] 22. decimi. [h] 14. ſecũdi. [i] 26. ſexti. [k] 17. ſexti. [l] 1. ſexti. [m] 36. primi. [n] 1. ſexti. [o] 10. decimi. [p] 74. decimi.

92.
87.

THEOR. 69. PROPOS. 93.

SI ſpatium contineatur ſub Rationali, & Apotoma ſecunda; Recta linea ſpatium potens, Mediæ eſt Apotome prima.





CONTINEATVR ſpatium A C, ſub Rationali A B, & Apotoma ſecunda A D. Dico rectam, quæ ſpatium A C, poteſt, Mediæ Apotomen eſſe primam. Sit ipſi A D, congruens recta D E. Erunt ergo A E, D E, ex definitione Apotomę ſecundæ, Rationales potentia tantùm commenſurabiles, & congruens D E, longitudine commenſurabilis Rationali A B; Et denique A E, plus poterit quàm D E, quadrato rectæ ſibi commenſurabilis longitudine. Secetur D E, bifariam in F, & reliqua omnia conſtruantur, vt in propoſitione præcedenti. [q] Eruntque rurſus, vt in antecedenti propoſ. A G, G E, longitudine commenſurabiles; [r] Ac propterea & vtraque toti A E, longitudine commenſurabilis. Eſt autem A E, Rationali A B, longitudine incommenſurabilis: (Si enim commenſurabilis eſſet ipſi A B, longitudine, cùm D E, eidem A B, ponatur longitudine commenſurabilis; [s] eſſent A E, D E, inter ſe quoque commenſurabiles longitudine. Quod eſt abſurdum. ponuntur enim potentia tantùm commenſurabiles.) [t] Igitur & vtraque ipſarum A G, G E, longitudine incommenſurabilis eſt eidem A B. Eſt autem vtraque A G, G E, Rationali A E, commenſurabilis, Rationalis. Rationales ergo ſunt tam A B, A G, quàm A B, G E, potentia ſolùm commenſurabiles; [u] Atque idcircò rectangulum vtrumque A H, G I, contentum ſub Rationalibus potentia tantùm commenſurabilibus, Medium eſt. Rurſus quia vtraque D F, F E, ipſi D E, longitudine commenſurabilis eſt; & ponitur

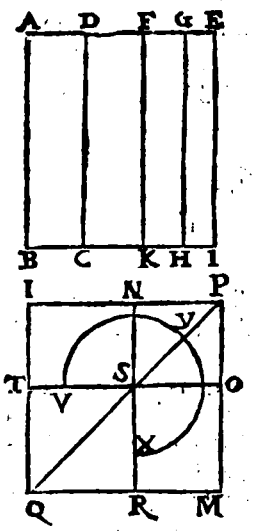
[q] 18. decimi. [r] 16. decimi. [s] 12. decimi. [t] 14. decimi. [u] 22. decimi.

nitur D E, Rationali A B, longitudine commensurabilis; erit quoq; , vt in scholio propos. 12. huius libri ostendimus, eidem A B, Rationali longitudine commensurabilis vtraque D F, F E; atq; adeò & Rationalis. [a] Vtrumque ergo rectangulum D K, F I, contentum sub Rationalibus longitudine commensurabilibus, Rationale est. Iam verò, vt in præcedenti propositione, demonstrabimus rectam T S, posse spatium A C. Dico T S, Mediæ Apotomen esse primam. [a 20. decimi]

QVONIAM enim A G, G E, longitudine sunt commensurabiles, [b] erunt & A H, G I, eandem cum illis habentia rationem, commensurabilia; atq; adeò & L M, N O, quadrata illis æqualia, commensurabilia erunt. Igitur & latera eorum, nempe rectæ T O, S O, saltem potentia erunt commensurabiles. Sunt autem & Mediæ, quòd quadrata L M, N O, Mediis A H, G I, æqualia, (ostensa enim sunt A H, G I, Media esse.) Media sint. Et quoniam F I, atque adeò sibi æquale L O, Rationale est, propterea quæ Medio N O, incommensurabile; [c] erunt rectæ T O, S O, eandem cum illis rationem habentes, longitudine incommensurabiles. Cùm ergo & Mediæ sint ostensæ, & commensurabiles; erunt T O, S O, Mediæ potentia tantùm commensurabiles. Cùm ergo contineant L O, quod Rationale est ostensum; [d] erit T S, Mediæ Apotome prima. Si ergo spatiũ contineatur sub Rationali, & Apotoma secunda, &c. Quod demonstrandum erat. [b 16. decimi] [c 10. decimi] [d 75. decimi]

THEOR. 70. PROPOS. 94. 93. 88.

SI spatium contineatur sub Rationali, & Apotoma tertia; Recta linea spatium potens, Mediæ est Apotome secunda.



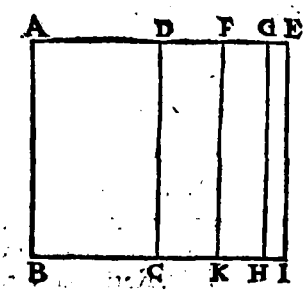
CONTINEATVR spatium A C, sub Rationali A B, & Apotoma tertia A D. Dico rectam, quæ spatium A C, potest, esse Mediæ Apotomen secundam. Sit enim ipsi A D, congruens D E. Erunt ergo, ex definitione Apotomæ tertiæ, A E, D E, Rationales potentia tantùm commensurabiles, & neutra ipsarum A E, D E, longitudine commensurabilis Rationali A B. Et denique A E, plus poterit, quàm D E, quadrato rectæ sibi longitudine commensurabilis. Secetur D E, bifariam in F, & cætera fiant, vt in propos. 92. eruntque rursus, vt ibi, A G, G E, longitudine inter se commensurabiles; [e] Ac propterea & vtraque totius A E, longitudine commensurabilis erit. Est autem A E, posita incommensurabilis longitudine Rationali A B. [f] Igitur & vtraq; A G, G E, eidem A B, longitudine erit incommensurabilis. Cùm ergo vtraque A G, G E, Rationali A E, commensurabilis, Rationalis sit; erunt tam A B, A G, quàm A B, G E, Rationales potentia solùm commensurabiles; [g] Ac propterea vtrumque rectangulum A H, G I, Medium erit. Rursus quia D E, longitudine ponitur incommensurabilis Rationali A B; erit quoque vtraque D F, F E, ipsi D E, longitudine commensurabilis existens, [h] eidem A B, longitudine incommensurabilis. Cùm ergo vtraque D F, F E, Rationali D E, commensurabilis, sit Rationalis; erunt tam A B, D F, quàm A B, F E, Rationales potentia tantùm commensurabiles; [i] atq; propterea vtrumque rectangulum D K, F I, Medium erit. Similiter iam demonstrabimus, vt in propositione 92. rectam T S, posse spatium A C. Dico T S, esse Mediæ Apotomen secundam. [e 16. decimi.] [f 14. decimi.] [g 22. decimi] [h 14. decimi.] [i 22. decimi.]

QVONIAM enim A H, G I, Media sunt ostensa; erunt & quadrata L M, N O, illis æqualia, Media; Ac propterea & rectæ T O, S O, Mediæ. Et quia A H, G I, eandem habentia rationem, quam A G, G E, quas ostendimus commensurabiles esse, [k] commensurabilia sunt; Erunt & quadrata L M, N O, commensurabilia. Igitur & rectæ T O, S O, commensurabiles sunt saltem potentia. At verò quia A E, D E, potentia solùm sunt commensurabiles, hoc est, longitudine incommensurabiles, estque ipsi A E, longitudine ostensa commensurabilis G E, ipsi verò D E, commensurabilis est longitudine F E; erunt ex scholio propos. 14. huius lib. & G E, F E, longitudine incommensurabiles; [l] ac propterea G I, F I, eandem rationem habentia, quam G E, F E, hoc est, illis æqualia N O, L O, incommensurabilia. Quare T O, S O, eandem rationem habentes, quam L O, N O, longitudine incommensurabiles sunt. Ostensæ sunt autem Mediæ, & commensurabiles. Mediæ ergo sunt T O, S O, potentia solùm commensurabiles. Et quoniã continent L O, Medium; (cùm enim L O, æquale sit ipsi F I, vt constat ex propos. 92. quod Medium esse ostendimus; erit & L O, Medium.) [m] erit T S, Mediæ Apotome secunda. Si ergo spatium contineatur sub Rationali, & Apotoma tertia, &c. Quod erat demonstrandum. [k 10. decimi] [l 10. decimi.] [m 76. decimi.]

THEOR. 71. PROPOS. 95. 94. 89.

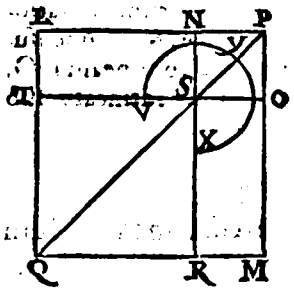
SI spatium contineatur sub Rationali, & Apotoma quarta; recta linea spatium potens, Minor est.

CONTINEATVR spatium A C, sub Rationali A B, & Apotoma quarta A D. Dico rectã lineam, quæ potest spatium A C, Minorem esse. Sit ipsi A D, congruens D E. Erunt ergo A E, D E, Rationales potentia solùm commensurabiles, ex definitione Apotomæ quartæ; & A E, longitudine



commensurabilis Rationali AB, & eadē AE, plus poterit, quàm DE, quadrato rectæ sibi longitudine incommensurabilis. Secetur DE bifariam in F, & reliqua omnia fiant, vt prius. [a] Erunt ergo AG, GE, incommensurabiles longitudine, quandoquidem AE, plus potest, quàm DE, quadrato rectæ sibi longitudine incommensurabilis; & ad AE, applicatum est rectangulum sub AG, GE, æquale quartæ parti quadrati ex DE, deficiensque figura quadrata. Et quia AE, Rationalis est, & Rationali AB, longitudine commēsurabilis, [b] erit rectangulum AI, Rationale. Rursus quia DE, Rationalis est, & Rationali AB, longitudine incommensurabilis; [c] erit DI, atque adeò & eius dimidium FI, Medium. Amplius cùm AG, GE, sint longitudine incommensurabiles; [d] incommensurabilia erunt AH, GI, eandem cum illis proportionem habentia. Iam verò similiter demonstrabimus, vt in propositione 92. rectam TS, posse spatium AC. Dico TS, esse Minorem.

a 19. decimi
b 20. decimi
c 22. decimi.
d 10. decimi.

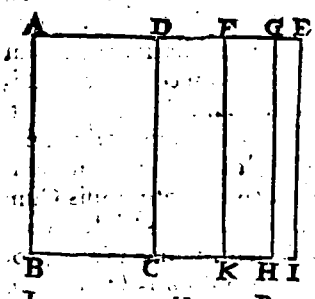


QVONIAM enim ex constructione, rectángulo AI, æquale est compositum ex quadratis LM, NO, rectarum TO, SO: Est autem illud ostensum Rationale: erit & compositum ex quadratis rectarum TO, SO, Rationale. Item quia FI, Medium est ostensum; erit & LO, contentum sub TO, SO, illi æquale, Medium. Denique quoniam AH, GI, incōmensurabilia sunt demonstrata; erūt & quadrata LM, NO, illis æqualia, incommensurabilia; Atq; adeò rectæ TO, SO, potentia incommensurabiles. Quapropter cùm TO, SO, potentia sint incommensurabiles, sitq; compositum ex quadratis ipsarum, Rationale: rectangulum verò sub ipsis, Medium; [e] erit reliqua TS, Minor. Si igitur spatium contineatur sub Rationali, & Apotoma quarta, &c. Quod demonstrandum erat.

e 77. decimi

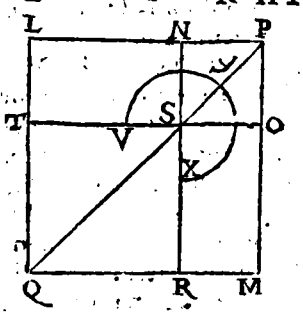
95. 90. THEOR. 72. PROPOS. 96.

SI spatium contineatur sub Rationali, & Apotoma quinta; Recta linea spatium potens est, quæ cum Rationali Medium totum efficit.



CONTINEATVR spatium AC, (repetita figura proximè antecedentis propositionis) sub Rationali AB, & Apotoma quinta AD. Dico rectam lineam, quæ spatium AC, potest, esse eam, quæ cum Rationali Medium totum efficit. Sit ipsi AD, congruens DE. Erunt ergo ex definitione Apotomæ quintæ AE, DE, Rationales potentia tantùm commensurabiles, & DE, Rationali AB, commensurabilis longitudine; Et denique AE, plus poterit, quàm DE, quadrato rectæ sibi longitudine incommensurabilis. Secetur DE, bifariam in F, & reliqua construantur, vt prius. Erunt ergo rursus, vt in antecedenti propositione, AG, GE, longitudine incommensurabiles. Et quia AE, Rationalis longitudine incommensurabilis est Rationali AB, vt in propos. 93. diximus; [f] erit rectangulum AI, Medium. Item quia DE, Rationalis est, & Rationali AB, longitudine commensurabilis; [g] erit DI, atque idcircò & eius dimidium FI, Rationale. Rursus erūt, vt in præcedenti propositione AH, GI, incōmensurabilia; poteritq;, vt ostensum est in propos. 92. recta TS, spatium AC. Dico TS, esse eam, quæ cum Rationali Medium totum efficit.

f 22. decimi.
g 20. decimi



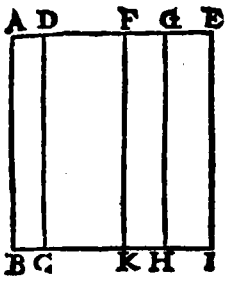
QVONIAM enim ostensum est AI, Medium esse; erit & compositum ex quadratis LM, NO, rectarum TO, SO, illi æquale, Medium. Item quia demonstrauimus FI, Rationale esse; erit & LO, rectangulum sub TO, SO, contentum, cùm illi sit æquale, Rationale. Sunt autem & TO, SO, potentia incommensurabiles, vt in propositione antecedenti est demonstratum. Igitur cùm TO, SO, potentia incommensurabiles sint, & compositum ex ipsarum quadratis, Medium; rectángulum verò sub ipsis, Rationale; [h] erit reliqua TS, ea, quæ cum Rationali Medium totū efficit. Quocirca si spatium contineatur sub Rationali, & Apotoma quinta, &c. Quod erat demonstrandum.

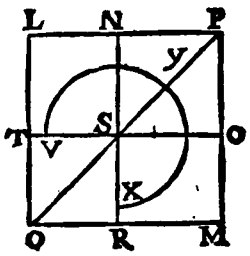
h 78. decimi

96. 91. THEOR. 73. PROPOS. 97.

SI spatium contineatur sub Rationali, & Apotoma sexta; Recta linea spatium potens est, quæ cum Medio Medium totum efficit.

CONTINEATVR spatium AC, sub Rationali AB, & Apotoma sexta AD. Dico rectam, quæ potest spatium AC, esse eam, quæ cum Medio Medium totū efficit. Sit enim ipsi AD, congruens DE. Erunt ergo ex definitione Apotomæ sextæ, AE, DE, Rationales potentia tantùm commensurabiles,





surabiles,& neutra ipſarum A E, D E, Rationali A B, commenſurabilis longitudine: Et denique A E, plus poterit, quàm D E, quadrato rectæ ſibi longitudine incommenſurabilis. Secetur D E, bifariam in F, & reliqua conſtruantur, vt ſuprà. Erunt ergo rurſus, vt in propoſitione 95. A G, G E, longitudine incommenſurabiles. Et quia tam A E, quàm D E, Rationalis eſt, & Rationali A B, longitudine incommenſurabilis; [a] erit tam A I, quàm D I, atque adeò & huius dimidium F I, Medium. Eruntque, vt in propoſitione 95. A H, G I, incommenſurabilia. Et quoniam A E, D E, potentia ſolùm ſunt commenſurabiles; [b] Erunt A I, D I, eandem habentia cum illia proportionem, incommenſurabilia; Atque adeò cùm D I, F I, commenſurabilia ſint; [c] erit F I, ipſi A I, incommenſurabile. Iam verò demonſtrabimus, vt in propoſ. 92. rectam T S, poſſe ſpatium A C. Dico T S, eſſe eam, quę cum Medio Medium totum efficit.

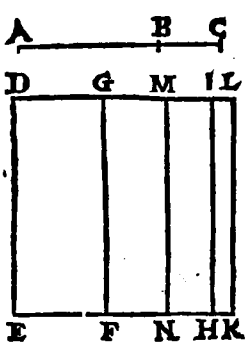
[a] 22. decimi
[b] 10. decimi
[c] 14. decimi.

QVONIAM enim A I, Medium oſtendimus, erit & compoſitum ex quadratis L M, N O, rectarum T O, S O, illi æquale, Medium. Item quia F I, Medium oſtenſum eſt; erit & L O, illi æquale, contentumque ſub T O, S O, Medium. Rurſus quoniam F I, ipſi A I, eſt incommenſurabile, vt oſtendimus; erit quoque L O, ſub T O, S O, contentum, incommenſurabile compoſito ex quadratis rectarum T O, S O; propterea quòd L O, ipſi F I, & compoſitum ex quadratis rectarum T O, S O, ipſi A I; eſt æquale. Denique T O, S O, potentia incommenſurabiles ſunt, vt in propoſ. 95. eſt demonſtratum. Quamobrem cùm T O, S O, ſint potentia incommenſurabiles, & compoſitum ex ipſis quadratis, Medium; necnon & rectangulum ſub ipſis Medium, & adhuc compoſito ex quadratis ipſarũ incommenſurabile; [d] erit reliqua T S, ea, quæ cum Medio Medium totum efficit. Si igitur ſpatium contineatur ſub Rationali, & Apotoma ſexta, &c. Quod erat oſtendendum.

[d] 79. decimi

THEOR. 74. PROPOS. 98. 97. 92.

QVADRATVM Apotomæ ad Rationalem applicatum, latitudinem facit Apotomen primam.



SIT Apotome A B, & ipſi congruens B C, ita vt A C, B C, ſint Rationales potentia ſolùm commenſurabiles: [e] & ad Rationalem D E, applicetur rectangulum D E, æquale quadrato ex A B, latitudinẽ faciens D G. Dico D G, eſſe Apotomen primam. Ad eandem enim D E, applicetur rectangulum D H, æquale quadrato ex A C; & ad I H, aliud I K, æquale quadrato ex B C; ita vt totum D K, æquale ſit compoſito ex quadratis rectarum A C, B C. [f] Et quoniam compoſitum ex quadratis rectarum A C, B C, æquale eſt rectangulo bis ſub A C, B C; vnà cum quadrato ex A B; ſi auferãtur quadratum ex A B, & rectangulum D F; relinquetur G K, rectangulo bis ſub A C, B C, æquale; atque adeò diuiſa G L, bifariam in M, ductaque M N, ipſi D E, parallela, erit M K, æquale rectangulo ſub A C, B C. Et quoniam A C, B C, Rationales ſunt; erunt quoque quadrata ex A C, B C, Rationalia; ideoque commenſurabilia. [g] Cùm ergo & compoſitum ex quadratis rectarum A C, B C, vtrique ipſorum ſit commenſurabile; erit & illud compoſitum, hoc eſt, illi æquale D K, Rationale. Quod cùm applicetur ad Rationalem D E, [h] erit D L, Rationalis ipſi D E, longitudine commenſurabilis. Rurſus quia A C, B C, Rationales ſunt potentia tantùm commenſurabiles; erit rectangulum ſub ipſis, atque adeò & eius duplum G K, Medium. Quod cùm applicetur ad Rationalem G F, [i] erit G L, Rationalis ipſi G F, hoc eſt, ipſi D E, longitudine incommenſurabilis. Et quoniam D K, Rationale, & G K, Medium, hoc eſt, Irrationale, incommenſurabilia ſunt; [k] erunt rectæ D L, G L, eandem habentes proportionem, quam D K, G K, longitudine incommenſurabiles. Quare cùm & Rationales ſint demonſtratæ; erunt D L, G L, Rationales potentia tantùm commenſurabiles; [l] Ac propterea reliqua D G, Apotome erit. Dico & primam eſſe.

[e] 45. primi.
[f] 7. ſecundi.
[g] 16. decimi.
[h] 21. decimi.
[i] 23. decimi.
[k] 10. decimi
[l] 74. decimi

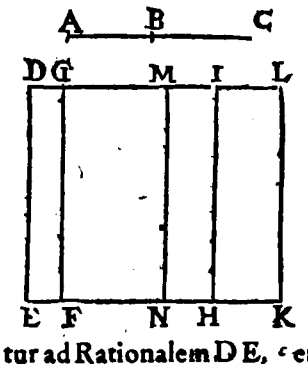
QVONIAM enim per lemma propoſitionis 54. huius libri, rectangulum ſub A C, B C, hoc eſt, M K, medium eſt proportionale inter quadrata rectarum A C, B C, hoc eſt, inter D H, I K; erunt D H, M K, I K, continuè proportionalia; atque adeò & rectæ D I, M L, I L, eandem cum illis habentes proportionem, continuè proportionales ſunt. [m] Quare rectangulum ſub D I, I L, æquale eſt quadrato ex M L, hoc eſt, quartæ parti quadrati ex G L. Et quoniam quadrata ex A C, B C, hoc eſt, illis æqualia D H, I K, commenſurabilia ſunt, [n] erunt rectæ D I, I L, eandem cum illis habentes proportionem, longitudine commenſurabiles. Itaq; cùm duæ rectæ D L, G L, inæquales ſint, & ad maiorem D L, applicatum rectangulum ſub D I, I L, æquale quartæ parti quadrati ex G L, minore, deficiensque figura quadrata; atque ſit oſtenſa D I, ipſi I L, longitudine commenſurabilis; [o] poterit D L, plus quàm G L, quadrato rectæ ſibi commenſurabilis longitudine. Quare cùm ſit oſtenſum D G, eſſe Apotomen, & totam D L, plus poſſe, quàm G L, congruẽtem, quadrato re-

[m] 17. ſexti.
[n] 10. decimi.
[o] 18. decimi.

ctæ sibi longitudine commensurabilis, atque eandem totam commensurabilem esse longitudine Rationali D E; erit ex defin. D G, Apotome prima. Quadratum ergo Apotomæ ad Rationalem applicatum, latitudinem facit Apotomen primam. Quod ostendendum erat.

98. ## THEOR. 75. PROPOS. 99.

93. QVADRATVM Mediæ Apotomæ primæ ad Rationalem applicatum, latitudinem facit Apotomen secundam.

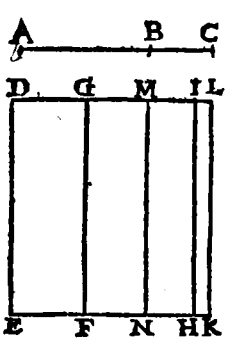


a 45. primi. Sit Mediæ Apotome prima AB, & ipsi congruens B C, ita vt AC, B C, sint Mediæ potentia solùm commensurabiles, contineantq; Rationale: a Et ad Rationalem D E, quadrato ex AB, æquale applicetur rectangulum D F, latitudinem faciens D G. Dico D G, Apotomen secundam esse. Construantur enim eadem, quæ in antecedenti propositione, ita vt rursus D H, I K, æqualia sint quadratis ex A C, B C; & G K, æquale ei, quod sub A C, B C, bis continetur; ac proinde M K, ei, quod sub A C, B C, continetur semel. Quoniam igitur A C, B C, Mediæ sunt potentia commensurabiles; erunt & earum quadrata, hoc est, illis æqualia, D H, I K, Media, & commensurabilia; b ac proinde & totum D K, vtrique illorum commensurabile erit; Igitur & Medium, per coroll. propos. 24. huius lib. Cùm ergo D K, applicetur ad Rationalem D E, c erit D L, Rationalis ipsi D E, longitudine incommensurabilis. Rursus quia rectangulum sub AC, B C, Rationale ponitur, erit quoq; eius duplum G K, Rationale. Quod cùm applicetur ad Rationalem D E, d erit G L, Rationalis longitudine commensurabilis ipsi D E. Quia verò D K, Medium, id est, Irrationale, & G K, Rationale, incommensurabilia sunt; e erunt rectæ D L, G L, eandem habentes cum illis rationem, longitudine incommensurabiles. Cùm ergo Rationales sint ostensæ, erunt D L, G L, Rationales potentia tantùm commensurabiles; f Ac propterea reliqua D G, Apotome est. Dico & secundam esse. Nam similiter, vt in præcedenti propositione, demonstrabimus totam D L, plus posse, quàm congruentem G L, quadrato rectæ sibi longitudine commensurabilis. Quare cùm congruens G L, ostensa sit longitudine commensurabilis Rationali D E, erit ex defin. D G, Apotome secunda. Quadratum ergo Mediæ Apotomæ primæ ad Rationalem applicatum, latitudinem facit Apotomen secundam. Quod ostendendum erat.

b 16. decimi.
c 23. decimi.
d 21. decimi.
e 10. decimi
f 74. decimi

99. ## THEOR. 76. PROPOS. 100.

94. QVADRATVM Mediæ Apotomæ secundę ad Rationalem applicatum, latitudinem facit Apotomen tertiam.



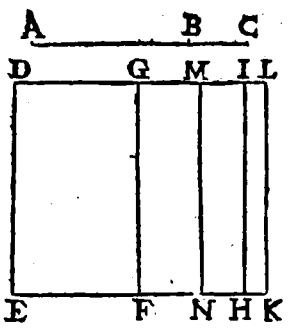
g 45. primi. Sit Mediæ Apotome secunda A B, & ipsi congruēs B C, ita vt A C, B C, sint Mediæ potentia tantùm commensurabiles: contineantque Medium: g Et ad Rationalem D E, applicetur D F, æquale quadrato ex A B, latitudinem faciens D G. Dico D G, esse tertiam Apotomen. Eadem enim fiant, quæ suprà Ostendemus iam, vt in propositione precedenti, D K, Medium esse, h atque adeò rectam D L, Rationalem ipsi D E, longitudine incommensurabilem. Et quia rectangulum sub A C, B C, Medium est, atque ob id, & eius duplum G K; i erit quoque G L, Rationalis ipsi D E, longitudine incommensurabilis. Quia verò A C, B C, longitudine sunt incommensurabiles, estque vt A C, ad B C, ita per lemma 3. propos. 19. huius libri, quadratum ex A C, ad rectangulum sub A C, B C; k erit quadratum ex A C, incommensurabile rectangulo sub A C, B C. l Est autem quadrato ex A C, commensurabile compositum ex quadratis rectarum A C, B C; quòd quadrata ex rectis A C, B C, potentia commensurabilibus descripta, commensurabilia sint; rectangulo verò sub A C, B C, commensurabile est rectangulum bis sub A C, B C. Igitur ex scholio propos. 14. huius lib. compositum ex quadratis rectarum A C, B C, hoc est, D K, incommensurabile est rectangulo bis sub A C, B C, hoc est, ipsi G K; m Atque adeò rectæ D L, G L, eandem habentes rationem, quam D K, G K, longitudine incommensurabiles sunt. Sunt autem ostensæ & Rationales. Rationales ergo sunt D L, G L, potentia solùm commensurabiles; n Ac proinde reliqua D G, Apotome est. Dico esse & tertiam. Similiter enim, vt in propos. 98. demonstrabimus D L, totam plus posse, quàm G L, congruentem, quadrato rectæ sibi longitudine commensurabilis. Cùm ergo neutra ipsarum D L, G L, Rationali D E, longitudine sit commensurabilis, vt demonstratum est; erit ex definitione D G, Apotome tertia. Quadratum igitur Mediæ Apotomæ secundæ ad Rationalem applicatum, &c. Quod erat ostendendum.

h 23. decimi
i 23. decimi.
k 10. decimi
l 16. decimi.
m 10. decimi
n 74. decimi.

100. ## THEOR. 77. PROPOS. 101.

95. QVADRATVM Minoris ad Rationalem applicatum, latitudinem facit Apotomen quartam.

Sit



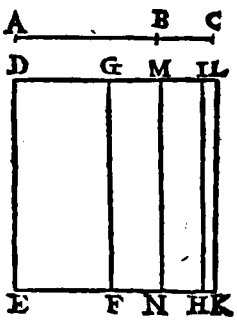
SIT Minor AB, & ipsi congruens BC, ita vt AC, BC, potentia incommensurabiles sint, facientesq; compositum quidem ex quadratis rectarum AC, BC, Rationale; rectangulum verò sub AC, BC, Medium: [a] & ad Rationalem DE, applicetur spatium DF, quadrato ex AB, æquale, latitudinẽ faciens DG. Dico DG, Apotomen esse quartam. Fiant enim omnia, vt in præcedentibus. Quoniam igitur compositum ex quadratis rectarum AC, BC, hoc est, illi æquale DK, Rationale est; [b] erit DL, Rationalis ipsi DE, longitudine commensurabilis. Item quia rectangulum sub AC, BC, atque adeò & eius duplum GK, Medium est; [c] erit GL, Rationalis ipsi DE, longitudine incommensurabilis. Rursus quoniam DK, Rationale, & GK, Irrationale, nempe Medium, incommensurabilia sunt; [d] erunt DL, GL, eandem cum ipsis habentes rationem longitudine incommensurabiles. Ostensæ sunt autem Rationales. Rationales ergo sunt DL, GL, potentia tantùm commensurabiles; [e] Ac propterea reliqua DG, Apotome est. Dico & quartam esse. Quoniam enim AC, BC, potentia sunt incommensurabiles; Erunt etiam quadrata, hoc est, ipsis æqualia, DH, IK, incommensurabilia; [f] Ac propterea rectæ DI, IL, longitudine incommensurabiles. Cùm ergo rectangulum sub DI, IL, æquale sit quadrato ex ML, id est, quartæ parti quadrati ex GL, vt in propos. 98. est demonstratum; [g] poterit DL, plus quàm GL, quadrato rectæ sibi longitudine incommensurabilis; quandoquidem ad DL, maiorem, applicatum est rectangulum sub DI, IL, æquale quartæ parti quadrati ex GL, minore, deficiens figura quadrata, diuidensq; maiorem DL, in partes DI, IL, longitudine incommensurabiles. Itaq; cùm tota DL, plus possit, quàm congruens GL, quadrato rectæ sibi longitudine incommensurabilis; sitque eadem tota DL, Rationali DE, longitudine ostensa commensurabilis; erit ex defin. DG, Apotome quarta. Quadratum igitur Minoris ad Rationalem applicatum, &c. Quod erat demonstrandum.

[a] 45. primi.
[b] 21. decimi.
[c] 23. decimi
[d] 10. decimi
[e] 74. deci.
[f] 10. decimi
[g] 19. decimi

THEOR. 78. PROPOS. 102.

101.
96.

QVADRATVM eius, quæ cum Rationali Medium totum efficit, ad Rationalem applicatum, latitudinem facit Apotomen quintam.



SIT recta cum Rationali Medium totum efficiens AB, & ipsi congruens BC, ita vt AC, BC, potentia sint incommensurabiles, faciantque compositum quidem ex quadratis rectarum AC, BC, Medium; rectangulum verò sub iisdem AC, BC, Rationale: [h] Et ad Rationalem DE, applicetur DF, æquale quadrato ex AB, latitudinem faciens DG. Dico DG, Apotomen quintam esse. Constructur enim eadem, quæ suprà. Quoniam igitur compositum ex quadratis rectarum AC, BC, atque adeò & illi æquale DK, Medium est; [i] erit DL, Rationalis ipsi DE, longitudine incommensurabilis. Item quia rectangulum sub AC, BC, atque adeò & eius duplum GK, Rationale est; [k] erit GL, Rationalis ipsi DE, longitudine commensurabilis. Et quia DK, Medium seu Irrationale, & GK, Rationale, incommensurabilia sunt; [l] erunt DL, GL, eandem cum ipsis habentes rationem, longitudine incommensurabiles. Sunt autem & Rationales ostensæ. Rationales ergo sunt DL, GL, potentia solùm commensurabiles; [m] Atque idcirco reliqua DG, Apotome est. Dico & quintam esse. Eodem enim modo, vt in antecedenti propos. demonstrabimus DL, totam plus posse quàm GL, congruentem, quadrato sibi longitudine incommensurabilis. Quare cùm congruens GL, demonstrata sit longitudine commensurabilis Rationali DE; erit ex defin. DG, Apotome quinta. Quadratum ergo eius, quæ cum Rationali Medium totum efficit, &c. Quod demonstrandum erat.

[h] 45. primi.
[i] 23. decimi.
[k] 21. decimi
[l] 10. decimi.
[m] 74. deci.

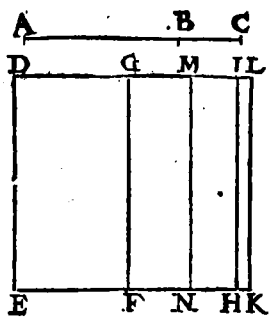
THEOR. 79. PROPOS. 103.

102.
97.

QVADRATVM eius, quæ cum Medio Medium totum efficit, ad Rationalem applicatum, latitudinem facit Apotomen sextam.

SIT recta cum Medio Medium totum efficiens AB, & ipsi congruens BC, ita vt AC, BC, potentia sint incommensurabiles, faciantq; & compositum ex quadratis rectarũ AC, BC, Medium, & rectangulum sub iisdem AC, BC, Medium, incommensurabileq; composito ex quadratis ipsarum: [n] Et ad Rationalem DE, applicetur quadrato ex AB, spatium æquale DF, latitudinem faciens DG. Dico DG, esse sextam Apotomen. Eadem enim fiant, quæ suprà. Quoniam igitur tam compositum ex quadratis rectarum AC, BC, hoc est, illi æquale DK, quàm rectangulum sub AC, BC, atq; adeò & eius duplum GK, Medium est; [o] Erit tam DL, quàm GL, Rationalis ipsis DE, longitudine incommensurabilis. Et quia rectangulum sub AC, BC, incommensurabile est composito ex quadratis rectarum AC, BC; Et sunt rectangulum sub AC, BC, & eius duplum

[n] 45. primi.
[o] 23. decimi



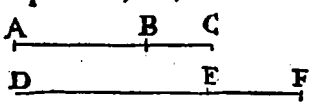
GK, commensurabilia; [a] Erit & GK, eidem composito, hoc est, ipsi DK, incommensurabile; [b] propterea quę rectæ DL, GL, eandem habentes rationem, quam DK, GK, longitudine incommensurabiles. Ostensæ sunt autem & Rationales. Rationales ergo sunt DL, GL, potentia solùm commensurabiles; [c] Atque idcirco reliqua DG, Apotome est. Dico esse & sextam. Ostendemus enim similiter, vt propos. 101. totam DL, plus posse, quàm congruentem GL, quadrato rectæ sibi longitudine incommensurabilis. Cùm igitur neutra ipsarum DL, GL, commẽsurabilis sit longitudine Rationali DE; erit ex defin. DG, Apotome sexta. Quadratum ergo eius, quæ cum Medio Medium totum efficit, &c. Quod erat ostendendum.

a 14. decimi.
b 10. decimi
c 74. deci.

103. THEOR. 80. PROPOS. 104.

98. RECTA linea Apotomæ longitudine commensurabilis; & ipsa Apotome est, atque ordine eadem.

SIT Apotome AB, & ipsi congruens BC, ita vt AC, BC, sint Rationales potentia solùm commensurabiles. Sit autem ipsi AB, longitudine commensurabilis DE. Dico & DE, Apotomen esse, atque ordine eandem ipsi AB. [d] Fiat enim vt AB, ad DE, ita BC, ad EF. [e] Erit ergo tota AC, ad totam DF, vt AB, ad DE, vel vt BC, ad EF. Quoniam igitur AB, DE, longitudine ponuntur commensurabiles; [f] Erunt quoque AC, DF, necnon & BC, EF, commensurabiles longitudine. Et quia AC, BC, sunt Rationales, erunt etiam illis commensurabiles DF, EF, Rationales. Rursus



quia est vt AC, ad DF, ita BC, ad EF; & permutando, vt AC, ad BC, ita DF, ad EF: & sunt AC, BC, potentia solùm commensurabiles; erunt quoque ex iis, quæ ad propos. 10. huius libri demonstrauimus, DF, EF, potentia tantùm commẽsurabiles. Quare cùm & Rationales sint ostensæ, [g] reliqua DE, Apotome est. Dico & ipsi AB, ordine eandem esse. Possit enim primùm AC, plus quàm BC, quadrato rectæ sibi longitudine commensurabilis. Quo posito, [h] poterit & DF, plus quàm EF, quadrato rectæ sibi longitudine commensurabilis. Si igitur [i] AC, longitudine sit commensurabilis Rationali expositæ, vt AB, sit Apotome prima; [i] erit quoq; DF, longitudine commensurabilis Rationali expositæ, cùm tam Rationalis exposita, quàm DF, eidem AC, sit longitudine commensurabilis. Igitur ex defin. erit quoque DE, Apotome prima, nempe ordine eadem ipsi AB. Si verò BC, sit longitudine commẽsurabilis Rationali; erit eodem modo EF, Rationali longitudine commensurabilis; Atque adeò vtraque AB, DE, ex defin. erit Apotome secunda. Si denique neutra ipsarum AC, BC, commensurabilis sit longitudine expositæ Rationali; [k] erit quoque neutra ipsarum DF, EF, eidem Rationali longitudine commensurabilis. Quare vtraque AB, DE, ex defin. erit Apotome tertia.

d 12. sexti.
e 12. quinti.
f 10. decimi.
g 74. decimi
h 15. decimi
i 12. decimi.
k 14. decimi

POSSIT iam AC, plus quàm BC, quadrato rectæ sibi longitudine incommensurabilis. Quo posito, [l] poterit & DF, plus quàm EF, quadrato rectæ sibi longitudine incõmensurabilis. Quare vt prius, ostẽdemus DE, esse Apotomen quartam, quintam, vel sextam, &c. Recta ergo linea Apotomæ longitudine commensurabilis, &c. Quod ostendendum erat.

l 15. decimi.

SCHOLIVM.

IDEM hic dicemus de Apotomis, quod ad propos. 67. huius lib. de lineis ex binis nominibus scripsimus. Nimirum, si recta DE, commensurabilis sit ipsi AB, potentia tantùm, eodem modo demonstrari posse, (si loco vocis: longitudine commensurabilis: vtamur voce: potentia tantùm commẽsurabilis:) & DE, Apotomen esse: At non posse inferri, illam esse ordine eandem ipsi AB. Non enim sequitur, si tota AC, longitudine sit commensurabilis Rationali expositæ, & DF, eidem esse commensurabilem longitudine, propterea quòd non vtraque; nempe Rationalis exposita, & DF; eidem AC, longitudine commensurabilis est; sed Rationalis quidem commensurabilis longitudine; At verò DF, potentia tantùm ex hypothesi. Immo verò, si AB, sit Apotome prima, secunda, quarta, vel quinta, fieri nullo modo potest, vt DE, illi potentia tantùm commensurabilis, sit Apotome eadem ordine.

SIT enim AB, prima Apotome, secunda, quarta, vel quinta, eiq; congruens BC; & sit DE, ipsi AB, potentia tantùm commensurabilis, quam quidem, vt in theoremate, ostendemus Apotomen esse, eiq; congruentem EF; & partes AB, BC, ad partes DE, EF, eandem proportionem habere cum totis AC, DF. Dico nulla ratione DE, Apotomen esse ordine eandem ipsi AB. Nam si fieri potest, sit vtraque Apotome prima. Quo posito, erit tam AC, tota, quàm tota DF, ex definitione Apotomæ primæ, Rationali expositæ commensurabilis longitudine; [a] atque adeò & inter se longitudine commensurabiles erunt AC, & DF. Quare cùm sit vt AC, ad DF, ita AB, ad DE; [b] erunt quoque AB, DE, longitudine commensurabiles. Quod est absurdum. ponitur enim DE, ipsi AB, potentia solùm commensurabilis. Non ergo vtraque AB, DE, Apotome prima est. Eodem modo neq; quarta Apotome erit. Sed neque secunda, vel quinta. Esset enim vtraq; congruens BC, EF, ex defin. longitudine commensurabilis Rationali expositæ, atque adeò & ipsa inter se. Quocirca & AB, DE, inter se longitudine forent commensurabiles. quod non ponitur.

a 12. deci.
b 10. deci.

SEMPER

SEMPER tamen verum eſt, ſi AB, eſt Apotome prima, vel ſecunda, vel tertia, rectam DE, quæ ipſi AB, potentia ſolùm eſt commenſurabilis, eſſe quoq; vnam ex illis tribus, licet ordine non eadem ſit. Nam hoc poſito, poterit AC, plus quàm BC, quadrato rectæ ſibi longitudine commenſurabilis. Cùm ergo ſit vt AC, ad BC, ita DF, ad EF; [a] poterit quoque DF, plus quàm EF, quadrato rectæ longitudine ſibi commenſurabilis. Quare ex defin. erit DE, Apotome prima, vel ſecunda, vel tertia. Eodem modo ſi AB, eſt Apotome quarta, vel quinta, vel ſexta, ita vt AC, plus poſſit, quàm BC, quadrato rectæ ſibi longitudine incommenſurabilis; erit quoq; DE, Apotome quarta, vel quinta, vel ſexta, quamuis ordine non eadem ipſi AB: quia rurſus, cùm ſit vt AC, ad BC, ita DF, ad EF, [b] poterit quoque DF, plus quàm EF, quadrato rectæ ſibi longitudine incommenſurabilis. Quare ex defin. erit AB, Apotome quarta, vel quinta, vel ſexta.

[a] 15. decimi

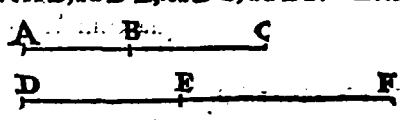
[b] 15. decimi

IN ſequentibus autem quatuor propoſitionibus neceſſariò erit DE, eadem ordine ipſi AB, licet potentia ſolùm illi fuerit commenſurabilis.

THEOR. 81. PROPOS. 105. 104.

RECTA linea Mediæ Apotomæ commenſurabilis; & ipſa Mediæ Apotome eſt, atque ordine erit. 99.

SIT Mediæ Apotome quęcunq; AB, eiq́ue congruens BC, ita vt AC, BC, ſint Mediæ potentia ſolùm commenſurabiles: Sit autem ipſi AB, commenſurabilis DE, ſiue longitudine & potentia, ſiue potentia tantùm. Dico & DE, Mediæ Apotomen eſſe, & ipſi AB, ordine eandem. [a] Fiat enim vt AB, ad DE, ita BC, ad EF. [b] Erit ergo tota AC, ad totam DF, vt AB, ad DE, & vt BC, ad EF.



Quoniam igitur AB, DE, commenſurabiles ponuntur vel longitudine & potentia, vel potentia tantùm; [c] erunt quoque BC, EF, & AC, DF, eodem modo commenſurabiles. Et quia AC, BC, Mediæ ſunt, [d] erunt quoque DF, EF, illis cõmenſurabiles, Mediæ. Rurſus, quia eſt vt AC, ad DF, ita BC, ad EF; & permutando vt AC, ad BC, ita DF, ad EF: Sunt autem AC, BC, potentia ſolùm commenſurabiles, erunt etiam, ex ſcholio propoſ. 10. huius lib. DF, EF, ſolùm potentia commenſurabiles. Quare cùm DF, EF, Mediæ ſint oſtenſæ; [e] erit reliqua DE, Mediæ Apotome. Dico & eandem eſſe ordine ipſi AB. Quoniam enim eſt AC, ad BC, ita DF, ad EF; & vt AC, ad BC, ita eſt quadratum ex AC, ad rectangulum ſub AC, BC, ex lemmate 3. propoſ. 19. huius lib. & vt DF, ad EF, ita quadratũ ex DF, ad rectangulum ſub DF, EF; erit quoque vt quadratum ex AC, ad rectangulum ſub AC, BC, ita quadratũ ex DF, ad rectangulum ſub DF, EF; Et permutãdo, vt quadratum ex AC, ad quadratum ex DF, ita rectangulum ſub AC, BC, ad rectangulum ſub DF, EF. Igitur cùm quadratum ex AC, commenſurabile ſit quadrato ex DF, quòd rectæ AC, DF, oſtenſæ ſint commenſurabiles; [f] erit & rectangulum ſub AC, BC, rectangulo ſub DF, EF, commenſurabile. Quare ſi rectangulum ſub AC, BC, ſit Rationale, ita vt AB, ſit Mediæ Apotome prima; Erit etiam rectangulum ſub DF, EF, Rationale, cùm illi ſit commenſurabile: [g] atq; adeò & DE, Mediæ Apotome prima erit. Si verò rectangulum ſub AC, BC, ſit Medium, ita vt AB, ſit Mediæ Apotome ſecunda; erit quoq; rectangulum ſub DF, EF, ei commenſurabile, Medium, ex coroll. propoſ. 24. huius lib. [h] Ac propterea & DE, Mediæ Apotome ſecunda erit. Recta ergo linea Mediæ Apotomæ commenſurabilis, &c. Quod erat oſtendendum.

[a] 12. ſexti.

[b] 12. quinti.

[c] 10. decimi

[d] 24. decimi

[e] 75. vel 76. decimi.

[f] 10. decimi

[g] 75. decimi

[h] 76. decimi

THEOR. 82. PROPOS. 106. 105. 116.

RECTA linea Minori commenſurabilis; & ipſa Minor eſt. 100.

SIT Minor AB, ipſiq́; congruens BC, ita vt AC, BC, potentia ſint incommenſurabiles, facientesq́ue compoſitum quidem ex quadratis rectarum AC, BC, Rationale; rectangulum verò ſub iiſdem AC, BC, Medium. Sit autem DE, ipſi AB, commenſurabilis ſiue longitudine & potentia, ſiue potentia tantùm. Dico & DE, Minorem eſſe. Fiant enim eadem, quæ ſuprà, ita vt rurſus AB, BC, ad DE, EF, eandem habeant rationem, quã AC, ad DF. Erunt ergo rurſus, vt in antecedenti propoſ. DF, EF, ipſis AC, BC, commenſurabiles ſiue longitudine & potentia, ſiue potentia tantùm. Et quoniam eſt, vt AC, ad DF, ita BC, ad EF; & permutando vt AC, ad BC, ita DF, ad EF; [i] erit vt quadratum ex AC, ad quadratum ex BC, ita quadratum ex DF, ad quadratum ex EF; & componendo, vt compoſitum ex quadratis rectarum AC, BC, ad quadratum ex BC, ita compoſitum ex quadratis rectarum DF, EF, ad quadratum ex EF; & permutando vt compoſitum ex quadratis rectarum AC, BC, ad compoſitum ex quadratis rectarũ DF, EF, ita quadratum ex BC, ad quadratum ex EF. Eſt autem quadratum ex BC, commenſurabile quadrato ex EF; quòd rectas BC, EF, oſtenderimus commenſurabiles eſſe. [k] Igitur & compoſitum ex quadratis rectarum AC, BC, compoſito ex quadratis rectarum DF, EF, commenſurabile eſt. Eſt autem compoſitum ex quadratis rectarum AC, BC, ex hypotheſi, Rationale. Igitur & compoſitum ex quadratis rectarum DF, EF, ex 9. defin. Rationale eſt. Rurſus quoniam, vt in antecedenti propoſ. demonſtrabimus rectangulum ſub AC, BC, rectangulo ſub DF, EF, eſſe commenſurabile: ponitur autem rectangulum ſub AC, BC, Medium; Erit quoq; rectangulum ſub DF, EF, ex coroll. propoſ. 24. huius lib. Medium. Et quia eſt vt AC, ad BC, ita DF, ad EF, ſuntq;

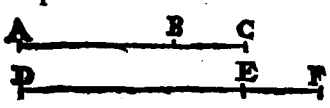
[i] 22. ſexti.

[k] 10. decimi

a 10. decimi AC, BC, potentia incommenſurabiles: a erunt etiam DF, EF, potentia incommenſurabiles. Quam ob rem cùm DF, EF, potentia ſint incommenſurabiles, faciantq; compoſitum quidem ex
b 77. decimi quadratis rectarum DF, EF, Rationale, rectangulum verò ſub iiſdem DF, EF, Medium; b erit
106 117. DE, Minor. Recta ergo linea Minori commenſurabilis, &c. Quod erat demonſtrandum.

101. ## PROBL. 83. PROPOS. 107.

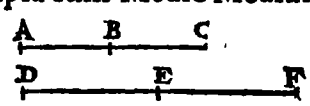
RECTA linea commenſurabilis ei, quæ cum Rationali Medium totum efficit; & ipſa cum Rationali Medium totum efficiens eſt.



SIT recta AB, cum Rationali Medium totum efficiens, & ipſi congruens BC, ita vt AC, BC, ſint potentia incommenſurabiles, facientesque compoſitum quidem ex quadratis rectarum AC, BC, Medium: at rectangulum ſub AC, BC, Rationale: Sit autem DE, ipſi AB, commenſurabilis quocunque modo. Dico & DE, eſſe, quæ cum Rationali Medium totum efficit. Conſtructis enim iiſdem, quæ ſuprà, oſtendemus vt in antecedenti propoſ. compoſitum ex quadratis rectarum AC, BC, commenſurabile eſſe compoſito ex quadratis rectarum DF, EF. Cùm ergo illud ponatur Medium, erit & hoc, ex coroll. propoſ. 24. huius lib. Medium. Rurſus, vt in propoſ. 105. demonſtrabimus rectangulum ſub AC, BC, cõmenſurabile eſſe rectangulo ſub DF, EF. Cùm ergo illud Rationale ponatur, erit & hoc Rationale, ex defin. 9. Sunt denique eodem modo, vt in præcedenti propoſ. eſt probatum, rectæ DF, EF, potentia incommenſurabiles. Igitur cùm DF, EF, incommenſurabiles ſint potentia, faciantque compoſitum quidem ex
c 78. decimi ipſarum quadratis, Medium, rectangulum verò ſub ipſis, Rationale; c erit DE, quæ cum Rationali Medium, &c. Quod demonſtrandum erat.

107. ## THEOR. 84. PROPOS. 108.

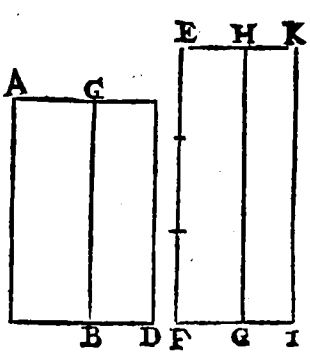
102. RECTA linea commenſurabilis ei, quæ cum Medio Medium totum efficit; & ipſa cum Medio Medium totum efficiens eſt.



SIT recta AB, cum Medio Medium totum efficiens, & ipſi congruens BC, ita vt AC, BC, ſint potentia incommẽſurabiles, facientesq; compoſitum ex quadratis ipſarum Medium, & rectangulum ſub ipſis Medium quoque, & adhuc incommenſurabile compoſito ex ipſarum quadratis: Sit autem DE, ipſi AB, quomodolibet commenſurabilis. Dico & DE, eſſe, quæ cum Medio Medium totum efficit. Conſtructis enim iiſdem, quæ ſuprà, probabimus ſimiliter, vt in propoſ. 106. compoſitum ex quadratis rectarum AC, BC, commenſurabile eſſe compoſito ex quadratis rectarum DF, EF. Cùm ergo illud Medium ponatur, erit & hoc ex coroll. propoſ. 24. huius lib. Medium. Rurſus vt in propoſ. 105. oſtendemus, rectangulum ſub AC, BC, commenſurabile eſſe rectangulo ſub DF, EF. Cùm ergo illud ſit Medium, erit & hoc Medium, ex eodem coroll. Item vt in propoſ. 106. erunt quoque DF, EF, potentia incommenſurabiles. Poſtremò, quia compoſito ex quadratis rectarum AC, BC, commenſurabile eſt compoſitum ex quadratis rectarum DF, EF, vt dictum eſt; & rectangulo ſub AC, BC, commenſurabile rectangulum ſub DF, EF: Sunt autem compoſitum ex quadratis rectarum AC, BC, & rectangulum ſub AC, BC, per hypotheſin, incommenſurabilia; erunt quoque, ex ſcholio propoſ. 14. huius lib. compoſitum ex quadratis rectarum DF, EF, & rectangulum ſub DF, EF, incommẽſurabilia. Quocirca cùm DF, EF, potentia ſint incommenſurabiles, & compoſitum ex ipſarum quadratis, Medium; necnon & rectangulum ſub ipſis, Medium; incommenſurabileque compoſito ex ipſarum quadratis;
d 79. deci. d erit DE, quæ cum Medio Medium totum efficit. Recta igitur linea commenſurabilis ei, quæ cum Medio, &c. Quod erat oſtendendum.

108. ## THEOR. 85. PROPOS. 109.

103. MEDIO à Rationali detracto; Recta linea, quæ reliquum ſpatium poteſt, vna ex duabus Irrationalibus fit, vel Apotome, vel Minor.



e 45. primi.
f 21. decimi.
g 23. decimi
h 13. decimi
i 74. decimi

DETRAHATVR à Rationali AD, Medium CD. Dico rectam, quæ poteſt ſpatium reliquum AB, eſſe vel Apotomen, vel Minorem. Exponatur enim Rationalis EF, e ad quam applicetur rectangulum EG, æquale ipſi AB, & ad GH, aliud HI, æquale ipſi CD, ita vt totũ EI, toti AD, ſit æquale. Quoniam igitur EI, æquale Rationali AD, Rationale eſt; f erit EK, Rationalis, Rationali EF, lõgitudine commenſurabilis. Rurſus quia HI, Medio CD, æquale Medium eſt, g erit HK, Rationalis, ipſi EF, longitudine incommenſurabilis. Itaq; cùm EK, quidem ſit longitudine commenſurabilis ipſi EF; at HK, eidem EF, longitudine incommenſurabilis, h erunt EK, HK, longitudine incommenſurabiles. Sed & Rationales. Rationales ergo ſunt potentia tantùm commenſurabiles: i propterea q; reliqua EH, Apotome eſt, & ei congruens HK. Aut igitur EK, plus poteſt quàm HK, quadrato

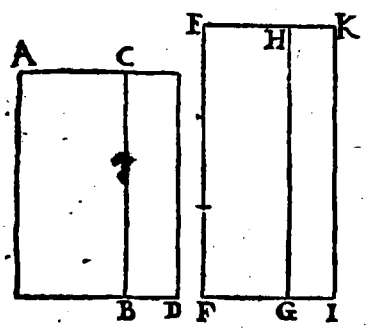
drato rectæ sibi longitudine commensurabilis, aut incommensurabilis. Si plus potest E K, quàm H K, quadrato rectæ lineæ commensurabilis sibi longitudine, cùm tota E K, ostensa quoque sit longitudine commensurabilis Rationali E F; erit ex defin. E H, Apotome prima. Quare recta potens spatium E G, contentum sub Rationali E F, & Apotoma prima E H, hoc est, spatium A B, sibi æquale, [a] Apotome est. Si verò E K, plus potest, quàm H K, quadrato rectæ sibi longitudine incommensurabilis, cùm tota E K, sit ostensa commensurabilis longitudine Rationali E F; erit ex definitione E H, Apotome quarta. Quapropter recta potens spatium E G, contentum sub Rationali E F, & Apotoma quarta E H, hoc est, spatium A B, illi æquale, [b] Minor est. Medio ergo à Rationali detracto, &c. Quod ostendendum erat.

[a] 92. decimi

[b] 95. quinti

THEOR. 86. PROPOS. 110. 109. 104.

RATIONALI à Medio detracto; aliæ duæ Irrationales fiunt, vel Mediæ Apotome prima, vel cum Rationali Medium totum efficiens.



DETRAHATVR à Medio A D, Rationale C D. Dico rectam, quæ reliquum spatium A B, potest, esse vel Mediæ Apotomen primam, vel eam, quæ cum Rationali Medium totum efficit. Eadem enim construantur, quæ suprà. Et quia E I, Medio A D, æquale, Medium est; [c] erit E K, Rationalis ipsi E F, longitudine incommensurabilis. Item quia H I, æquale Rationali C D, Rationale est; [d] erit H K, Rationalis ipsi E F, longitudine commensurabilis. Itaque cùm H K, quidem ipsi E F, sit commensurabilis longitudine, at E K, eidem E F, longitudine incommensurabilis; [e] erunt H K, E K, longitudine incommensurabiles. Sed & Rationales. Rationales ergo sunt potentia solùm commensurabiles; [f] Ac proinde reliqua E H, Apotome est, & ei congruens H K. Aut igitur E K, plus potest, quàm H K, quadrato rectæ sibi longitudine commensurabilis, aut incommensurabilis. Si E K, plus potest, quàm H K, quadrato rectæ sibi longitudine commensurabilis, cùm congruens H K, ostensa sit longitudine commensurabilis Rationali E F; erit ex defin. E H, Apotome secunda. Recta igitur potens spatium E G, contentum sub Rationali E F, & Apotoma secunda E H, hoc est, spatium A B, illi æquale, [g] Mediæ est Apotome prima. Si verò E K, plus potest, quàm H K, quadrato rectæ sibi longitudine incommensurabilis, cùm congruens H K, sit ostensa commensurabilis longitudine Rationali E F; erit E H, Apotome quinta, ex defin. Recta igitur potens spatium E G, contentum sub Rationali E F, & Apotoma quinta E H, hoc est, spatium illi æquale A B, est ea, quæ cum Rationali Medium totum efficit. Quamobrem Rationali à Medio detracto, &c. Quod ostendendum erat.

[c] 23. decimi

[d] 21. decimi

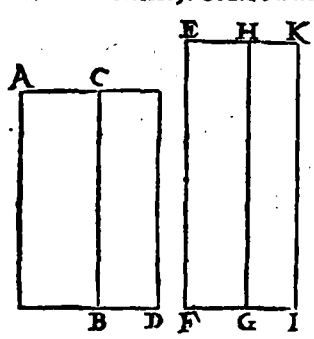
[e] 13. decimi.

[f] 74. primi.

[g] 93. decimi

THEOR. 87. PROPOS. 111. 110. 105.

MEDIO à Medio detracto, quod sit incommensurabile toti; reliquæ duæ Irrationales fiunt, vel Mediæ Apotome secunda, vel cum Medio Medium totū efficiēs.



DETRAHATVR à Medio A D, Medium C D, quod incommensurabile sit toti A D. Dico rectam, quæ reliquum spatium A B, potest, esse vel Mediæ Apotomen secundam, vel eam, quæ cum Medio Medium totum efficit. Constructis enim iisdem, quæ suprà; quoniam E I, H I, Mediis A D, C D, æqualia, Media sunt; [h] erunt E K, H K, Rationales ipsi E F, longitudine incommensurabiles. Et quia A D, C D, hoc est, E I, H I, ponuntur incommensurabilia; [i] erunt E K, H K, eandem cum illis habentes rationem, longitudine incommensurabiles. Sed & Rationales. Rationales ergo sunt potentia tantùm commensurabiles; [k] Ac propterea reliqua F H, Apotome est, & ei congruens H K. Aut igitur E K, plus potest, quàm H K, quadrato rectæ sibi longitudine commensurabilis, aut incommensurabilis. Si plus potest E K, quàm H K, quadrato rectæ sibi longitudine commensurabilis, cùm neutra ipsarum E K, H K, Rationali E F, longitudine commensurabilis sit ostensa; erit ex defin. E H, Apotome tertia. Quocirca recta potens spatium E G, contentum sub Rationali E F, & Apotoma tertia E H, hoc est, spatium A B, illi æquale; [l] Mediæ Apotome est secunda. Si verò E K, plus potest, quàm H K, quadrato rectæ sibi longitudine incommensurabilis, cùm neutra ipsarum E K, H K, Rationali E F, sit longitudine commensurabilis, vt demonstrauimus; erit ex defin. E H, Apotome sexta. Quam ob rem recta potens spatium E G, contentum sub Rationali E F, & Apotoma sexta E H, hoc est, spatium A B, illi æquale, [m] est ea, quæ cum Medio Medium totum efficit. Medio ergo à Medio detracto, &c. Quod demonstrandum erat.

[h] 23. decimi.

[i] 110. decimi.

[k] 74. decimi

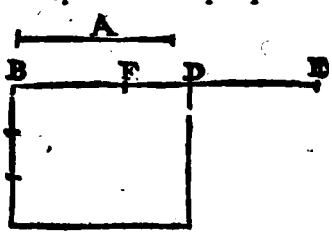
[l] 94. decimi

[m] 97. deci.

THEOR. 88. PROPOS. 112. 111. 116.

APOTOME non est eadem, quæ ex binis nominibus,

SIT Apotome A, quæcunque. Dico A, non esse eandem, quæ ex binis nominibus. Sit enim, si
a 45. primi. fieri potest, A, aliqua ex binis nominibus. Expositа autem Rationali B C, a applicetur ad B C, re-
b 98. decimi ctangulum C D, æquale quadrato ex A. Quoniam igitur A, Apotome est; b erit latitudo B D, Apo-
tome prima. Sit ergo ei congruens D E. Erunt igitur ex defin. Apotomæ primæ B E, D E, Ratio-
nales potentia tantùm commensurabiles, poteritq; B E, plus quàm D E, quadrato rectæ sibi lon-
gitudine commensurabilis, & ipsa B E, Rationali B C, commensurabilis erit longitudine. Rursus
c 61. decimi quia A, ponitur esse quoque ex binis nominibus; c erit latitudo eadem B D, ex binis nominibus
prima. Sit ergo maius ipsius nomen B F. Erunt igitur ex defin.



eius, quæ ex binis nominibus prima est, B F, F D, Rationales potentia solùm commensurabiles, poteritque B F, plus quàm F D, quadrato rectæ commensurabilis sibi longitudine, & ipsa B F, Rationali B C, longitudine commensurabilis erit. Itaque cùm tam B E, quàm B F, longitudine sit cõmensurabilis eidem B C; d erunt quoq; B E, B F, inter se commensurabiles longi-
d 12. decimi. tudine. Igitur cùm tota B E, sit longitudine commensurabilis parti B F, erit & eadem B E, reliquæ parti F E, longitudine commensurabilis, ex coroll. propos. 16. huius libri. Atque adeò cùm B E, Rationalis sit, & F E, Ratio-
nalis erit. Quoniam verò duarum linearum B E, F E, longitudine commensurabilium, ipsa B E, longitudine incõmensurabilis est ipsi D E; (quòd B E, D E, Rationales sint potentia solùm com-
e 14. decimi mensurabiles) e erit quoque altera F E, eidem D E, incommensurabilis longitudine. Sed & vtra-
que F E, D E, Rationalis est ostensa. Rationales ergo sunt F E, D E, potentia solùm commensura-
f 74. decimi biles. Quare reliqua F D, f Apotome est; Atque adeò Irrationalis. Ostensa est autem & Ratio-
nalis. Quod est absurdum. Non ergo A, Apotome existens eadem est, quæ ex binis nominibus. Quod demonstrandum erat.

COROLLARIVM.

Ex demonstratis quoque facilè colligere licebit, Apotomen, & cæteras ipsam consequentes Irrationales lineas, neque Mediæ, neque inter se esse easdem.

a 23. decimi. *QVADRATVM enim Mediæ ad Rationalem lineam applicatum, a latitudinem efficit Rationalem, ipsi Rationali longitudine incommensurabilem.*

b 98. decimi. *AT quadratũ Apotomæ ad Rationalem applicatũ, b latitudinẽ efficit Apotomen primã.*

c 99. decimi. *ET quadratum Mediæ Apotomæ primæ ad Rationalem applicatum, c latitudinem efficit Apotomen secundam.*

d 100. decimi. *QVADRATVM verò Mediæ Apotomæ secundæ ad Rationalem applicatum, d latitudinem efficit Apotomen tertiam.*

e 101. decimi. *QVADRATVM deinde Minoris ad Rationalem applicatum, e latitudinem efficit Apotomen quartam.*

AT verò quadratum eius, quæ cum Rationali Medium totum efficit, ad Rationalem applicatum, f 102. decimi. *f latitudinem efficit Apotomen quintam.*

QVADRATVM denique eius, quæ cum Medio Medium totum efficit, ad Rationalem
g 103. decimi. *applicatum, g latitudinem efficit Apotomen sextam.*

ITAQVE cùm hæ latitudines differant & à latitudine Mediæ, & inter se; à latitudine quidem Mediæ, quòd hæc Rationalis sit, illæ verò Irrationales; inter se autem, quòd ordine non sint eædem Apotomæ: Manifestum est, Apotomen, & reliquas Irrationales ipsam consequentes, & à Media, & inter se se differre.

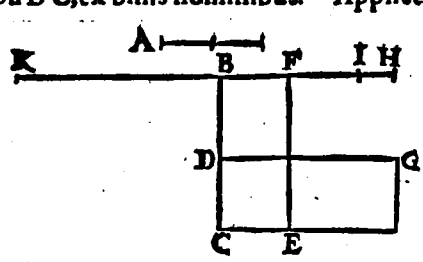
QVONIAM verò in hoc theoremate demonstrauimus, Apotomen eandem non esse, quæ ex binis nominibus: Et quadrata Apotomæ, & cæterarum quinque Irrationalium eam consequentium, ad Rationalem applicata, latitudines efficiunt Apotomen primam, secundam, tertiam, quartam, quintam, & sextam: At verò quadrata eius, quæ ex binis nominibus, & reliquarum quinque Irrationalium, quæ ipsam sequuntur, ad Rationalem applicata, latitudines efficiunt ex binis nominibus primam, secundam, tertiam, quartam, quintam, ac sextam; liquidò cõstat, latitudines Apotomæ, & aliarum Irrationalium, quæ post ipsam, easdem nõ esse latitudinibus eius, quæ ex binis nominibus, & reliquarum post ipsam Irrationalium; quandoquidem nulla Apotome eadem est, quæ ex binis nominibus aliqua. Igitur & Apotome, & quæ ipsam sequuntur, differũt ab ea, quæ ex binis nominibus, & quæ post ipsam. Quam ob rem cùm & tam illæ, quàm hæ à Media differant; efficitur, Rationali quapiam expositа tredecim numero esse lineas Irrationales inter se se differentes, de quibus hactenus disputauimus; Hæ scilicet.

1. Media.
2. Ex binis nominibus, cuius ſex ſunt ſpecies inuentæ,
3. Ex binis Mediis prima.
4. Ex binis Mediis ſecunda.
5. Maior.
6. Rationale ac Medium potens.
7. Bina Media potens.
8. Apotome, cuius etiam ſpecies ſex ſunt repertæ.
9. Mediæ Apotome prima.
10. Mediæ Apotome ſecunda.
11. Minor.
12. Cum Rationali Medium totum efficiens.
13. Cum Medio Medium totum efficiens.

THEOR. 89. PROPOS. 113. 112.

QVADRATVM Rationalis ad eam, quæ ex binis nominibus, applicatum, latitudinem facit Apotomen, cuius nomina commenſurabilia ſunt nominibus eius, quæ eſt ex binis nominibus, & in eadem proportione; & adhuc Apotome, quæ fit, eundem habet ordinem, quem ea, quæ eſt ex binis nominibus. 6.

SIT Rationalis A, & ex binis nominibus B C, cuius maius nomen B D, [a] & ad B C, applicetur rectangulum B E, æquale quadrato ex A, latitudinem faciens B F. Dico B F, eſſe Apotomen, cuius nomina, hoc eſt, tota linea, & ipſi congruens, commenſurabilia ſunt nominibus B D, D C, ipſius B C, ex binis nominibus; & in eadem proportione; & adhuc Apotomen B F, eſſe ordine eandem ipſi B C, ex binis nominibus. [b] Applicetur enim rurſus ad D C, minus nomen, rectangulum C G, æquale eidem quadrato ex A; atq; adeò rectangulo B E, latitudinem faciens D G; ſitque ipſi D G, æqualis B H. Et quoniã æqualia ſunt B E, C G; [c] erit vt B C, ad D C, ita D G, hoc eſt, ſibi æqualis B H, ad B F. Et diuidendo vt B D, ad D C, ita H F, ad F B: Eſt autem B D, maior, quàm D C. Igitur & H F, maior eſt, quàm F B. Ponatur F I, ipſi F B, æqualis; [d] & fiat vt H I, ad I F, ita F B, ad B K. Erit ergo componendo vt H F, ad I F, hoc eſt, ad ſibi æqualem B F, ita F K, ad B K. Oſtẽſum eſt autem eſſe vt H F, ad B F, ita B D, ad D C. Igitur erit quoque vt B D, ad D C, ita F K, ad B K. At B D, D C, (cùm ſint nomina ipſius B C, ex binis nominibus) Rationales ſunt potentia tantùm commenſurabiles. [e] Igitur & F K, B K, potentia ſolùm commenſurabiles ſunt.



a 45. primi.
b 45. primi.
c 14. vel 16. ſexti.
d 12. ſexti.
e 10. decimi.

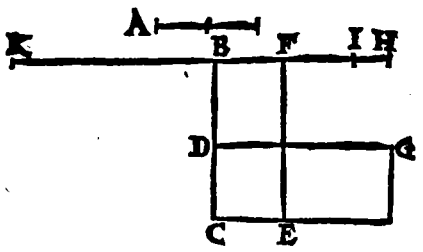
RVRSVS quia eſt vt H F, ad B F, ita F K, ad B K, [f] erunt quoque H F, F K, antecedentes ſimul, nempe tota H K, ad B F, & B K, conſequentes ſimul, hoc eſt, ad totam F K, vt F K, ad B K. Ac propterea F K, media proportionalis eſt inter H K, B K. Quare vt H K, prima ad B K, tertiam, ita erit, per coroll. propoſ. 20. lib. 6. quadratum ex H K, prima ad quadratum ex F K, ſecunda. Quia verò C G, cùm Rationale ſit, (eſt enim quadrato Rationalis A, æquale) ad Rationalem D C, applicatũ, [g] facit D G, latitudinem Rationalem, ipſi D C, longitudine commenſurabilem; Erit quoque H B, ipſi D G, æqualis, Rationalis & longitudine commenſurabilis ipſi D C. Et quoniam oſtenſum eſt, eſſe vt B D, ad D C, ita F K, ad B K: Vt autem F K, ad B K, ita H K, ad F K; erit quoque vt B D, ad D C, ita H K, ad F K. [h] Igitur vt quadratum ex B D, ad quadratum ex D C, ita quadratum ex H K, ad quadratum ex F K. At quadratum ex B D, commenſurabile eſt quadrato ex D C, (quòd rectæ B D, D C, ſint Rationales potentia commenſurabiles, cùm ſint nomina ipſius B C, ex binis nominibus.) [i] Commenſurabile igitur erit quoque quadratum ex H K, quadrato ex F K. Sed fuit vt quadratum ex H K, ad quadratum ex F K, ita recta H K, ad B K. [k] Igitur longitudine commenſurabilis eſt H K, ipſi B K; atque adeò & reliquæ B H, ex coroll. propoſ. 16. huius lib. Oſtenſa eſt autem B H, Rationalis. Igitur & H K, illi commenſurabilis, Rationalis eſt; ac propterea & B K, ipſi H K, cõmenſurabilis, Rationalis exiſtit. Cùm ergo oſtenſa ſit F K, ipſi B K, potentia ſolùm commenſurabilis, erit quoq; F K, Rationalis. Quare cùm F K, B K, Rationales ſint, & potentia tantùm oſtenſæ commenſurabiles, [l] erit reliqua B F, Apotome, & ei congruens B K. Quod eſt primum.

f 12. quinti.
g 21. decimi.
h 22. ſexti.
i 10. decimi
k 10. decimi
l 74 decimi

QVONIAM verò oſtenſum eſt, eſſe rectam H K, totam parti B K, longitudine commenſurabilem, [m] erunt propterea & B K, B H, longitudine inter ſe commenſurabiles. Cùm ergo B H, oſtenſa ſit longitudine cõmenſurabilis ipſi D C; erit quoque B K, ex ſcholio propoſ. 12. huius lib. eidem

m 16. decimi

DC, longitudine commensurabilis. Rursus quia demonstratum est, esse vt BD, ad DC, ita FK, ad BK; & permutando vt BD, ad FK, ita DC, ad BK: Sunt autem modò DC, BK, ostensæ longi-
a 10. decimi. tudine commensurabiles; a Erunt quoque BD, FK, commensurabiles longitudine. Itaque cùm FK, ipsi BD, & BK, ipsi DC, longitudine sit commensurabilis, erunt ipsius Apotomæ BF, nomina FK, BK, nominibus BD, DC, ipsius BC, ex binis nominibus, longitudine commensurabilia. Quod est secundum.



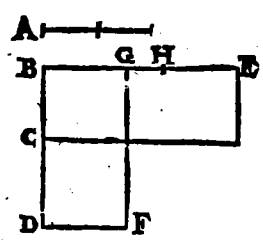
ITEM quia demonstrauimus esse vt BD, ad DC, ita FK, ad BK; erunt idcirco Apotomæ nomina FK, BK, in eadem ratione cum BD, DC, nominibus ipsius BC, quæ est ex binis nominibus. Quod est tertium.

POSTREMO, vel BD, plus potest, quàm DC, quadrato rectæ sibi longitudine commensurabilis, vel incommensurabilis. Si plus potest BD, quàm DC, quadrato rectæ sibi longitudine commensurabilis; cùm
b 15. decimi. sit vt BD, ad DC, ita FK, ad BK; b poterit quoq; FK, plus quàm BK, quadrato rectæ sibi longitudine commensurabilis: Et si BD, plus potest quàm DC, quadrato rectæ sibi longitudine incommensurabilis; poterit & FK, plus quàm BK, quadrato rectæ sibi longitudine incommensurabilis. Et si quidem BD, expositæ Rationali fuerit longitudine commensurabilis; erit & FK, quæ longitudine ostensa est commensurabilis ipsi BD, commensurabilis longitudine eidem Rationali, per ea, quæ in scholio propos. 12. huius lib. demonstrauimus. Si verò DC, sit Rationali commensurabilis longitudine; erit & eadem ratione BK, eidem Rationali longitudine commensurabilis. Si deniq; neutra ipsarum BD, DC, sit Rationali longi-
c 14. decimi. tudine commensurabilis; c erit quoque neutra ipsarum FK, BK, commensurabilis longitudine Rationali. Igitur eadem ordine est Apotome BF, ipsi BC, ex binis nominibus, vt constat ex definitionibus secundis, atque tertiis. Quod est quartum. Quadratum ergo Rationalis ad eam, quæ ex binis nominibus, &c. Quod demonstrandum erat.

113. THEOR. 90. PROPOS. 114.

90. QVADRATVM Rationalis ad Apotomen applicatum, latitudinem facit eam, quæ ex binis nominibus, cuius nomina commensurabilia sunt Apotomę nominibus, & in eadem proportione; & adhuc, quę ex binis nominibus fit, eundem habet ordinem, quem ipsa Apotome.

d 45. primi. SIT Rationalis A, & Apotome BC, cui congruat CD, d & ad BC, applicetur rectangulũ CE, æquale quadrato ex A, latitudinem faciens BE. Dico BE, esse ex binis nominibus, cuius nomina commensurabilia sunt nominibus BD, CD, Apotomæ BC, & in eadem proportione; & adhuc
e 45. primi. ipsam BE, ex binis nominibus, esse ipsi BC, Apotomæ ordine eandem. e Applicetur enim rursus ad BD, totam, rectangulum BF, æquale eidem quadrato ex A, hoc est, ipsi CE, latitudinẽ faciens BG: Et quoniam BF, CE, æqualia sunt; f erit vt BE, ad BG, ita BD, ad BC; & per conuersionem rationis, vt BE, ad GE, ita BD, ad CD. Secetur quoque EG, ad H, secundùm proportionem BE, ad GE, ex iis, quæ
f 14. vel 16. sexti. in schol. propos. 10. lib. 6. conscripsimus; vt sit EH, ad HG, quemadmodum BE, ad GE. Quia igitur est vt BE, tota ad GE, totam, ita EH, ex BE, ablata ad HG, ex GE, ablatam; erit quoque BH, reliqua ipsius BE; ad HE, reliquam ipsius GE, vt tota BE, ad totam GE: Erat autem vt BE, ad GE; ita EH, ad HG. Erit igitur quoque vt BH, ad HE, ita EH, ad GH; atque adeò HE, media proportionalis est inter BH, GH. Quare erit vt BH, prima ad GH, tertiam, ita quadratum ex BH, prima ad quadratum ex HE, secunda, per coroll. propos. 20. lib. 6. Quia verò fuit vt BD, ad CD, ita BE, ad GE, hoc est, BH, ad HE: & sunt BD, CD, cùm sint nomina Apotomæ BC, Rationales potentia tantùm commensurabiles:
g 10. decimi g Erunt quoq; BH, HE, potentia solùm commensurabiles; Ac propterea quadrata ex BH, HE, commensurabilia. Igitur rectæ BH, GH, eandem habentes rationem cum quadratis ex BH, HE,
h 10. decimi vt demonstrauimus, h longitudine sunt commensurabiles; Ac propterea tota BH, longitudine commensurabilis existens parti GH, commensurabilis quoque longitudine erit parti reliquæ BG, ex coroll. propos. 16. huius libri. At verò cùm BD, Rationalis sit, nempe maius nomen Apo-
i 21. decimi. tomæ BC; & rectangulum BF, quadrato ex Rationali linea A, æquale, Rationale; i erit latitudo BG, Rationalis commensurabilis longitudine ipsi BD. Igitur ex scholio propos. 12. huius lib. & BH, eidem BD, Rationali commensurabilis est longitudine, atque adeò Rationalis existit; quandoquidem BH, BG, longitudine commẽsurabiles sunt ostensæ. Quia verò BH, HE, ostensæ sunt commensurabiles potentia tantùm, & BH, Rationalis; erit quoque HE, illi commensurabilis,
k 37. decimi Rationalis. Rationales ergo sunt BH, HE, potentia solùm commensurabiles; k Ac propterea BE, ex binis nominibus est. Quod est primum.



QVONIAM verò ostendimus esse BH, ad HE, vt BD, ad CD; atque adeò permutando BH,
l 10. decimi. ad BD, vt HE, ad CD; Ostensa est autem BH, ipsi BD, longitudine commensurabilis; l erit quoque

quoque HE, ipsi CD, commensurabilis longitudine. Quare BH, HE, nomina ipsius BE, ex binis nominib⁹, cõmensurabilia sunt lõgitudine nominib⁹ BD, CD, Apotomę BC. Quod est secundũ.

IMMO & in eadem proportione, cùm demonstratum sit esse BH, ad HE, vt BD, ad CD. Quod est tertium.

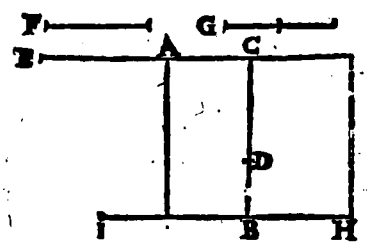
POSTREMO vel BD, plus potest quàm CD, quadrato rectæ sibi longitudine commensurabilis, vel incommensurabilis. Si plus potest quadrato rectæ sibi longitudine commensurabilis, [a] poterit quoq; BH, plus quàm HE, quadrato rectæ sibi commẽsurabilis longitudine: Et si BD, plus potest, quàm CD, quadrato rectæ sibi longitudine incommensurabilis; poterit etiam BH, plus quàm HE, quadrato rectæ longitudine sibi incommensurabilis. Et si quidem BD, Rationali expositæ longitudine sit commensurabilis; erit quoque BH, commensurabilis existens longitudine ipsi BD, eidem Rationali longitudine commensurabilis, ex scholio propos. 12. huius lib. Si verò CD, longitudine sit commensurabilis Rationali; erit & eadem ratione HE, eidem Rationali longitudine commensurabilis. Si verò neutra ipsarum BD, CD, commensurabilis sit longitudine Rationali expositæ; [b] erit quoq; neutra ipsarum BH, HE, eidem Rationali longitudine commensurabilis. Igitur ex secundis, atque tertiis definitionibus, ipsa BE, ex binis nominibus, ordine eadem est ipsi Apotomæ BC. Quod est quartum. Quadratum ergo Rationalis ad Apotomen applicatum, latitudinem facit eam, quæ ex binis nominibus, cuius nomina commensurabilia sunt Apotomæ nominibus, & in eadem proportione, &c. Quod erat demonstrandum.

[a] 15. decimi

[b] 14. decimi

THEOR. 91. PROPOS. 115. 114.

SI spatium contineatur sub Apotoma, & ea, quæ ex binis nominibus, cuius nomina commensurabilia sunt nominibus Apotomæ, & in eadem proportione; Recta linea spatium potens, est Rationalis. 0.



CONTINEATVR spatiũ AB, sub Apotoma AC, & sub CB, ex binis nominibus, cuius nomina CD, DB, commensurabilia sint nominibus CE, AE, Apotomæ AC, & in eadem ratione, nempe CD, ad DB, vt CE, ad AE. Posit autem recta F, spatiũ AB. Dico F, esse Rationalem. Exposita enim Rationali G, [c] applicetur ad CB, quæ ex binis nominibus, rectangulum CH, æquale quadrato ex G. [d] Erit ergo latitudo BH, Apotome, cuius nomina HI, BI, longitudine commensurabilia sunt nominibus CD, DB, & in eadem ratione, nimirum HI, ad BI, vt CD, ad DB; atque adeò vt CE, ad AE, & permutando, vt tota HI, ad totam CE, ita ablata BI, ad ablatam AE. [e] Erit ergo & reliqua BH, ad reliquam AC, vt tota HI, ad totam CE: [f] Commensurabilis autem est longitudine HI, ipsi CE, quòd vtraque HI, CE, commensurabilis fuerit longitudine ipsi CD. [g] Igitur & BH, ipsi AC, longitudine est commensurabilis; [h] Atque idcirco & HC, ipsi BA, commensurabile erit, [i] cùm sit vt HB, ad AC, ita HC, ad BA: Sed HC, quadrato Rationalis G, æquale, Rationale est. Igitur & BA, illi commensurabile, Rationale erit, propterea quę & recta F, ipsum BA, potens, Rationalis erit. Quapropter si spatium contineatur sub Apotoma, & ea, quæ ex binis nominibus, cuius nomina cõmensurabilia sunt nominibus Apotomæ, & in eadem proportione; Recta linea spatiũ potẽs, est Rationalis. Quod erat demonstrandũ.

[c] 45. primi.
[d] 113. decimi
[e] 19. quinti.
[f] 12. decimi
[g] 10. decimi
[h] 10. decimi
[i] 1. sexti.

COROLLARIVM.

Ex hoc manifestum est, fieri posse, vt spatium Rationale contineatur sub duabus rectis Irrationalibus. Nam spatium AB, contentum sub AC, CB, Apotoma, & ex binis nominibus, quæ Irrationales sunt, ostensum est Rationale esse.

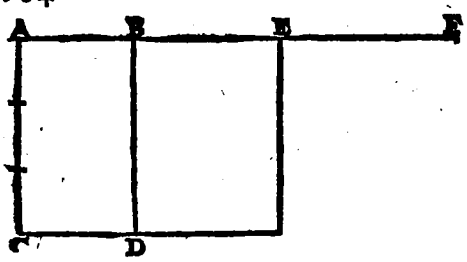
SCHOLIVM.

IN proximis autem tribus propositionibus intelligenda sunt nomina Apotomæ nominibus eius, quæ ex binis nominibus, commensurabilia esse longitudine. In prioribus enim duabus, longitudine ostensa sunt esse commensurabilia; In posteriori verò, nempe in hac 115. nihil colligetur, si nomina CD, DB, nominibus CE, AE, potentia tantùm commensurabilia ponantur. Id quod facile ex demonstrationibus harum trium propositionum apparet.

THEOR. 92. PROPOS. 116. 115.

A MEDIA infinitæ Irrationales fiunt, & nulla alicui antecedentium est eadem. 107.

SIT Media AB. Dico ex illa fieri Irrationales infinitas, quarum nulla eadem sit alicui illarum tredecim antecedentium, de quibus in coroll. propos. 112. huius lib. Exposita enim Rationali AC, contineatur sub AB, Media, & Rationali AC, spatium AD. Est ergo AD, spatium sub Rationali AC, & Irrationali AB, contentum, Irrationale, ex lemmate propos. 38. huius lib. Posit ipsum recta BE, quæ ex defin. 11. Irrationalis erit. Dico BE, non esse eandem alicui tredecim illarum, quas in coroll. propos. 112. huius lib. collegimus. Nam cùm quadratum Mediæ ad Rationalem AC, appli-



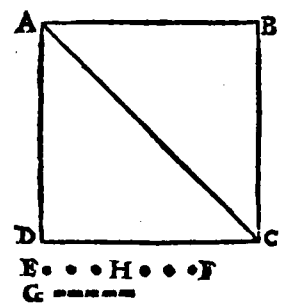
a 23. decimi catum, a latitudinem faciat Rationalem ipsi AC, longitudine incommensurabilem: Et quadrata reliquarum duodecim Irrationalium, ad eádem Rationalem AC, applicata, faciant latitudines vel ex binis nominibus, vel Apotomas, vt constat ex propos. 61.62.63. 64.65.66.98.99.100.101.102.& 103. huius lib. At verò quadratum huius Irrationalis BE, ad eandem Rationalem AC, applicatum, faciat AB, latitudinem Mediam; perspicuum est, Irrationalem BE, ab omnibus illis tredecim differre; quandoquidem eius quadratum ad Rationalem lineam applicatum, latitudinem facit differentem à latitudinibus, quas quadrata illarum tredecim linearum ad eandem Rationalem applicata efficiunt.

QVOD si compleatur rectangulum DE; erit & hoc contentum sub Rationali BD, & Irrationali BE, Irrationale, ex dicto lemmate propos. 38. Possit ergo ipsum recta EF, quæ ex defin. 11. Irrationalis erit. Dico rursus EF, non esse eandem alicui illarum tredecim, vel etiam ipsi BE. Hoc autem manifestum est, cùm quadratum ipsius EF, ad Rationalem applicatum, latitudinem faciat BE. At quadrata illarum tredecim, & quadratum etiam ipsius BE, latitudines faciant, si ad eandem Rationalem applicentur, differentes à BE, vt demonstratum est. Eodem modo & aliæ Irrationales infinitæ inuenientur & inter se, & à dictis differentes. Quocirca à Media infinitæ Irrationales fiunt, &c. Quod demonstrandum erat.

118. 7. THEOR. 93. PROPOS. 117.

PROPOSITVM sit nobis ostendere, in quadratis figuris diametrum lateri incommensurabilem esse longitudine.

SIT quadratum ABCD, in quo diameter AC. Dico diametrum AC, longitudine incommensurabilem esse lateri AB. Si enim non est incommensurabilis, commensurabilis erit longitudine; b 5. decimi. b ac propterea AC, AB, proportionem habebunt, quam numerus ad numerum. Habeat AC, ad AB, proportionem, quam numerus EF, ad numerum G; sintque numeri EF, & G, minimi omnium eandem proportionem habentium. Quoniam ergo est vt AC, ad AB, ita numerus EF, ad numerum G; Erit quoque vt quadratum ex AC, ad quadratum ex AB, ita quadratus numerus c 20. sexti, & 11. octani ex EF, ad quadratum numerum ex G, (c Cùm enim quadrata habeant suorum laterum proportionem duplicatam; latera autem æquales habeant proportiones; erunt proportiones quadratorum æquales etiam, cùm sint æqualium duplicatæ.) Sed quadratũ ex AC, duplum est quadrati ex AB, per ea, quæ in scholio propos. 47. lib. 1. ostendimus. Igitur & quadratus numerus ex EF, duplus erit quadrati numeri ex G; Ac propterea quadratus numerus ex EF, cùm dimidium habeat, atque adeò bifariam possit diuidi, par erit, ex defin. Igitur & ipse EF, illum producens, par erit. (Si namque impar esset, cùm se ipsum multiplicans producat suum quadratum, esset & quadratus ipse impar; d 29. noni. d eo quòd impar imparem multiplicans imparem procreat. Quod est absurdum. ostensus est enim par.) Quia verò EF, & G, in sua proportione minimi, e 24. septimi e inter se primi sunt; & EF, ostensus est par, erit G, impar. (Si enim par etiam esset, metiretur vtrumq; EF, & G, binarius; atque adeò non essent inter se primi. Quod est absurdum.) Diuidatur iam par numerus EF, bifariam in H. Quia igitur numerus EF, duplus est f 11. octani. numeri EH; f & quadrati habent proportionem laterum duplicatam; erit quadratus ex EF, quadruplus quadrati ex EH. (Quadrupla enim proportio duplicata est proportionis duplæ, vt in his numeris apparet, 4.2.1.) Itaq; cùm quadratus ex EF, duplus sit quadrati ex G; & quadruplus quadrati ex EH; qualium partium 4. est quadratus ex EF, talium 2. erit quadratus ex G; & talium 1. quadratus ex EH. Quadratus igitur ex G, duplus est quadrati ex EH, cùm illius ad hunc proportio sit, quæ 2. ad 1. ac proinde, vt suprà de numero EF, diximus, erit quadratus ex G, dimidium habens par, & ipse quoque G, par. Sed & impar est ostensus. quod est absurdum. Non ergo longitudine commensurabilis est diameter AC, lateri AB. Igitur incommẽsurabilis longitudine.



ALITER. Sit, si potest fieri, diameter AC, commensurabilis longitudine lateri AB; habeantq; AC, AB, proportionem, quam numeri EF, & G, qui minimi sint in sua proportione; atque adeò inter se primi. Non erit igitur G, vnitas. (Cùm enim quadratum ex AC, duplum sit quadrati ex AB; sit autem vt quadratum ex AC, ad quadratum ex AB, ita quadratus numerus ex EF, ad quadratum numerum ex G, vt in priori demonstratione diximus; erit quoque quadratus ex EF, duplus quadrati ex G. Si ergo G, est vnitas, atque adeò & quadratus ex ea, vnitas; erit quadratus ex EF, binarius. Quod est absurdum.) Ergo numerus. Et quia, vt iam est demonstratum, quadra- g 14. octani. tus ex EF, duplus est quadrati ex G; metietur quadratus ex G, quadratum ex EF; g ac propterea & G, latus, metietur latus EF. Cùm ergo & G, se ipsum metiatur; erunt numeri EF, & G, inter se compositi, habentes mensuram communem, numerum G; Sed & inter se primi sunt. Quod est absurdum.

absurdum. Non ergo commensurabilis est diameter A C, longitudini lateri A B. Quare ostendimus, in quadratis figuris diametrum lateri incommensurabilem esse longitudine. Quod erat demonstrandum.

SCHOLIVM.

Sed & affirmatiuè hoc idem theorema demonstrabimus, hoc modo. Quoniam ex iis, quæ in scholio propos. 47. lib. 1. demonstrata à nobis sunt, quadratum diametri duplum est quadrati ex latere descripti; habebit quadratum ex diametro ad quadratum ex latere proportionem, 2. ad 1. vel 4. ad 2. vel 8. ad 4. &c. Et quia sumptis in proportione dupla quotcunque numeris ab vnitate 1. 2. 4. 8. 16. 32. 64. &c.

1. 2. 4. 8. 16. 32. 64. *solùm tertius ab vnitate quadratus est, & cæteri omnes vnum intermittentes; quòd primus ab vnitate, nempe 2. quadratus non sit; erunt solùm hi numeri 4. 16. 64. quadrati; reliqui verò 2. 8. 32. non quadrati. Quare cùm 4. quadratus sit, & 2. non quadratus, non habebit 4. ad 2. proportionem, quam quadratus ad quadratum; (aliàs & 2. quadratus esset.) ac propterea neque quadratum ex diametro ad quadratum lateris proportionem habebit, quam numerus quadratus ad numerum quadratum. Incommensurabilis ergo est diameter longitudine ipsi lateri. Quod est propositum.*

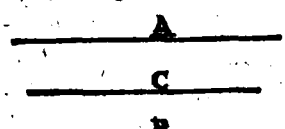
a 10. noni.

b 24. octaui

c 9. decimi

Hoc etiam theorema aliter demonstrauimus ad finem defin. 8. lib. 5. & in scholio propos. 8. lib. 8. & in scholio propos. 9. huius libri.

Cæterum in exemplaribus Græcis reperitur hoc loco appendix quædam, cuius intelligentia ex sequentibus Stereometriæ libris pendet, vt meritò omitti posset. Verùm quia in ea cõtinetur doctrina non contemnenda ad commensuralitatem omnium magnitudinum, & incommensurabilitatem pertinens; visum est, eam paucis explicare, assignando more nostro solito in margine loca Stereometriæ, quæ ad demonstrationem eorum, quæ hic dicuntur, necessaria sunt. Est igitur appendix hæc.



Inventis lineis rectis longitudine incommensurabilibus, inuenientur & alia quam plurima magnitudines, planæ scilicet, atq; solida incommensurabiles inter se. Sint enim rectæ A, B, longitudine inter se incommensurabiles, inter quas media proportionalis sit C. Quoniam igitur ex coroll. propos. 20. lib. 6. vt A, ad B, ita est figura rectilinea quæuis super A, constituta ad figuram rectilineam sibi similem, similiterq; positam super C; & sunt A, & B, longitudine incommensurabiles; erunt rectilineæ illæ figuræ super A, & C, incommensurabiles.

d 10. deci.

Rursvs quoniam circuli, quorum diametri A, C, proportionem habent, quam quadrata ex A, & C, descripta: Quadrata autem hæc, cùm sint figuræ rectilineæ similes, similiterq; posita, proportionem habent, quam recta A, & B, ex coroll. propos. 20. lib. 6. Habebunt quoque circuli diametrorum A, C, eandem proportionem, quam recta A, B: Sed rectæ A, B, incommensurabiles sunt longitudine. Igitur & circuli diametrorum A, C, incommensurabiles sunt.

e 2. duodecimi.

f 11. quinti.

g 10. deci.

Iam verò si constituantur solida, nempe pyramides, vel prismata eiusdem altitudinis, quorum bases sint figuræ rectilineæ similes, similiterq; descriptæ super A, C, habebunt pyramides, atque prismata eandem proportionem, quam bases, hoc est, quam rectilineæ illæ figuræ. Quare cùm rectilineæ illæ figuræ incommensurabiles sint, vt modò est demonstratum; incommensurabilia etiam erunt ipsa solida, nimirum pyramides, & prismata.

h 5. 6. vel 7. duodecimi

i 10. decimi

Quod si coni, vel cylindri æquè alti fabricentur, quorum bases circuli sint diametrorum A, C, habebunt huiusmodi coni, & cylindri eandem proportionem cum basibus, hoc est, cum illis circulis. Cùm ergo circuli astensi sint incommensurabiles; Erunt quoque incommensurabiles dicti coni, & cylindri. Inuenta sunt igitur non solùm lineæ, & superficies incommensurabiles, verùm etiam & corpora, siue solida incommensurabilia. Quod est propositum.

k 11. duodecimi.

l 10. decimi

Eadem autem ratione, si rectæ A, & B, longitudine commensurabiles sint, ostendemus earum figuras rectilineas similes, similiterq; descriptas, necnon & ipsarum circulos, commensurabiles esse, atque adeò & eorundem pyramides, & prismata; ac denique conos, & cylindros; si modò eandem habeant altitudinem, vt perspicuum est.

m 10. deci.

n 5. 6. 7. & 11. duodecimi.

FINIS ELEMENTI DECIMI.

EVCLIDIS

ELEMENTVM VNDECIMVM:

& Solidorum primum.

DEFINITIONES.

I.

SOLIDVM est, quod longitudinem, latitudinem, & crassitudinem habet.

POSTQVAM Euclides in prioribus sex libris abundè de ea Geometriæ parte disseruit, quæ circa plana versatur, sibiq; nomen Geometriæ, tanquam proprium, vsurpauit; In subsequentibus verò tribus diligenter ea de passionibus numerorum docuit, quæ necessaria videbantur ad intelligendam doctrinam linearum commensurabilium, atque incommensurabilium, quas idcirco luculentissimè in libro decimo deinde exposuit, vt constructio, atque natura quinque corporũ regularium, de quibus in postremis tribus libris, nimirum in 13 14. & 15. subtilissimè disseritur, perfectius posset cognosci: Nunc tandem aggreditur in hoc libro vndecimo, eam partem Geometriæ, quæ corpora, siue solida considerat, propriq; vocabulo Stereometria est appellata.

EXPLICAT autem prius, more suo, voces ad eam rem perneccessarias, quarum primus est: Solidum, siue corpus: nempe tertium genus quantitatis. Docet igitur eam quantitatem, quæ præter longitudinem latitudinemq; sortita est crassitudinem, seu profunditatem, ita vt tres dimensiones possideat, vnam quidem secundùm longitudinem, aliam verò secundùm latitudinem, & tertiam secundùm profunditatem, seu crassitudinem, altitudinemue, appellari solidum, siue corpus: quemadmodum quantitas longitudinem tantùm habens, linea; quæ verò longitudini latitudinem adiicit superficies vocatur, vt in primo lib. diximus.

PORRO quemadmodum Mathematici, vt rectè intelligamus lineam, præcipiunt, vt imaginemur punctum aliquod è loco in locum moueri; hoc enim describit vestigium quoddam longum tantùm, hoc est, lineam, propterea quòd punctum omne est magnitudinis expers; vt autem percipiamus superficiem, monent, vt intelligamus lineam aliquam in transuersum moueri; hæc enim describet vestigium longum & latum quodammodo; longum quidem propter longitudinem lineæ, latum verò propter motum illum, qui in transuersum est factus; carens autem profunditate, quòd & linea illius sit expers: Ita quoque, vt nobis ob oculos ponant corpus, seu solidum, hoc est, quantitatem trina dimensione præditam, consuluêre, vt concipiamus superficiem aliquam æqualiter eleuari, siue in transuersum moueri; hac enim ratione describetur vestigium quoddam longum, latum, atque profundum; longum quidem & latum, ob superficiem, quæ longa & lata existit; profundum verò seu crassum, propter eleuationem illam, seu motum superficiei. Hæc ergo quantitas, solidum siue corpus vocatur. Neque verò alia quantitas quarta distincta à linea, superficie, & corpore reperiri potest, propterea quòd triplex tantùm dimensio possit assignari, vt perspicuè in cõmentariis, quos in Sphæram Ioannis de Sacro Bosco conscripsimus, à nobis fuit demonstratũ ex Ptolemæo in libello de Analemate.

II.

SOLIDI autem extremum est superficies.

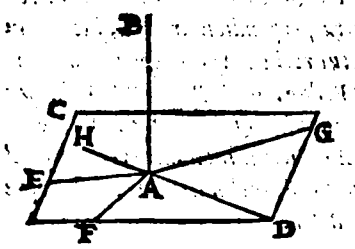
QVEMADMODVM linea finita in extremitatibus puncta, superficies verò lineas recipit, vt in 1. lib. docuit, ita nunc ait Solidi finiti extremum esse superficiem. Cùm enim solidum, siue corpus efficiatur ex illo motu imaginario superficiei; perspicuum est extremas partes illius esse superficies.

III.

LINEA recta est ad planum recta, cùm ad rectas omnes lineas, à quibus illa tangitur, quæque in proposito sunt plano, rectos angulos efficit.

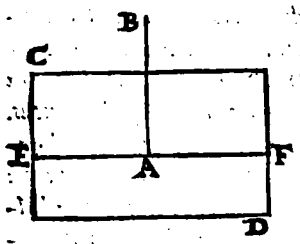
VT linea recta A B, plano C D, insistens, ita vt B, punctum sit in sublimi extra planum C D, at punctum A, in ipso plano, tùm demum dicetur recta, seu perpendicularis ad planum C D, cùm rectos effecerit angulos cum lineis A E, A F, A D, A G, & cum omnibus aliis, quæ in eodem existentes plano ipsam tangunt in puncto A. Hac enim ratione fiet, vt A B, æqualiter insistat plano C D, & non magis in vnam partem, quàm

in aliam



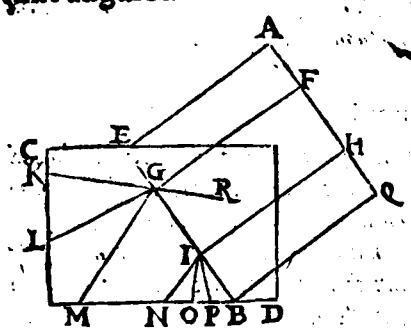
in eam inclinet. Nam producta recta D A, ad B, cùm angulus B A D, ponatur rectus, erit quoque ei deinceps B A H, rectus: ideóque illi æqualis. Eadémque ratione protracta qualibet linea in plano G D, faciet A B, cum illa duos angulos æquales. Ac propterea æquabiliter ipsi plano insistet. Quòd si fieri posset, vt A B, cum vna linea ex A, in plano C D, educta, non efficeret angulum rectum, etiamsi cum aliis omnibus tactum angulum constitueret, non diceretur A B, recta ad planum C D. Itaque quando conceditur linea aliqua ad planum recta, concedendum quoque erit, eam cum omnibus in eodem plano ductis, quæ ipsam tangunt, rectos constituere angulos: Et è contrario, vt rectè concludatur, lineam quampiam esse ad planum datum rectam, demonstrandum erit prius, eam cum omnibus in eodem plano ductis, quæ ipsam tanguni, rectos angulos conficere.

Vt autem recta quæpiam plano cuicunque insistens rectos constituat angulos cum omnibus rectis in eodem plano ductis, ipsamq; tangentibus, satis est, vt cum duabus non efficientibus lineam vnam, sed sè mutuò secantibus, si producantur, rectos angulos conficiat. Nam ex hoc rectè colligitur, eam cum omnibus aliis rectos quoque angulos efficere, vt perspicuum fiet ex propositione 4. huius lib. Dixi: cum duabus non efficientibus lineam vnam: quia si duæ linea componant vnam rectam lineam, non necessariò efficitur, lineam, quæ cum ipsis rectos angulos constituit, cum omnibus aliis rectos conficere angulos. Recta enim A B, insistat plano C D, efficiatq; rectos angulos cum duabus in eodem plano ductis A E, A F, quæ rectam vnam lineam componant. Dico A B, non propterea cum omnibus aliis rectos angulos constituere; atque idcircò non esse rectam ad planum C D. Hoc autem perspicuum est, cùm A B, circa E F, veluti axem, circumuerti queat, ita vt punctum B, modò sit plano propinquius, modò ab eodem remotius; nihilominus tamen ipsa cum E F, semper eosdem rectos angulos, & æquales conficiat. Quòd si eadem A B, cum duabus angulum componentibus, quales sunt A G, A D, in priori figura, rectos constituat angulos, tum demum cum omnibus aliis rectos angulos efficiet, vt diximus. Id quod dilucidè demonstrabitur propos. 4. huius libri.



IIII.

PLANVM ad planum rectum est, cùm rectæ lineæ, quæ communi planorum sectioni ad rectos angulos in vno planorum ducuntur, alteri plano ad rectos sunt angulos.

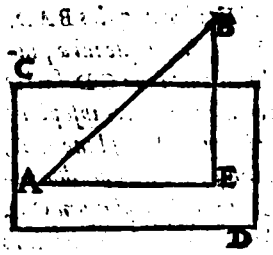


INSISTAT planum A B, plano C D, ita vt linea A Q, sit in sublimi, hoc est, extra planum subiectum C D, at E B, in ipso eodem plano: Sit autem horum planorum communis sectio E B, quæ, vt demonstrabitur propositione 3. huius libri, recta erit linea. In hac autem sumptis quotcunque punctis G, I; ex ipsis in plano A B, ducantur G F, I H, perpendiculares ad communem sectionem E B. Si igitur linea F G, H I, ad planum alterum C D, rectæ fuerint, hoc est, rectos angulos effecerint cum lineis G K, G L, G M; I N, I O, I P, & cum aliis omnibus in plano C D, à punctis G, & I, ductis; dicetur planum A B, ad planum C D, rectum; quia hoc modo non magis in vnam partem inclinabit, quàm in alteram, sed æquabiliter illi insistet. Si enim K G, producatur ad R, cùm angulus F G K, ponatur rectus; erit & angulus ei deinceps F G R, rectus; ideoq; illi æqualis. Eademq; ratione, protracta qualibet alia linea in plano C D, fient vtrobique à lineis F G, H I, anguli æquales. Quare planum A B, æquabiliter plano C D, insistet. Quotiescunque igitur planum aliquod rectum esse conceditur ad planum aliud, concedendum quoque erit, lineas perpendiculares in vno eorum ad communem sectionem deductas, rectas quoq; esse ad alterum planum. Et contrà, vt colligatur planum quodpiam ad aliud esse rectum, ostendendum prius erit, lineas perpendiculares in vno eorum ad communem sectionem ductas, rectas esse ad reliquum planum.

V.

RECTAE lineæ ad planum inclinatio est, cùm à sublimi termino rectæ illius lineæ ad planum deducta fuerit perpendicularis, atque à puncto, quod perpendicularis in ipso plano fecerit, ad propositæ illius lineæ extremum, quod in eodem est plano, altera recta linea fuerit adiuncta; est, inquam, angulus acutus insistente linea, & adiuncta comprehensus.

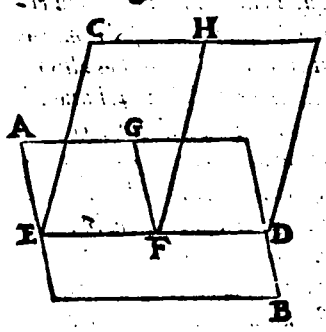
INSISTAT recta A B, plano C D, non ad angulos rectos, sed inclinata, ita vt punctum B, sit extra pla-



num in ſublimi, punctum verò A, in plano. Deinde ex B, termino ſublimi rectæ AB, intelligatur ad idem planum deducta perpendicularis BE, faciens in plano punctum E; atq; ab E, ad A, adiungatur recta EA; erit q; necessariò angulus BAE, acutus, 17. primi. *cùm in triangulo ABE, duo anguli BAE, BEA, duobus ſint rectis minores, & angulus BEA, rectus. Angulus igitur acutus BAE, comprehenſus lineâ inſiſtente AB, & adiuncta AE, dicitur inclinatio rectæ AB, ad dictum planum CD. Ita vt tanta dicatur recta eſſe inclinatio lineæ AB, ad planum CD, quantus eſt dictus angulus acutus BAE.*

VI.

PLANI ad planum inclinatio, eſt angulus acutus rectis lineis contentus, quæ in vtroque planorum ad idem communis ſectionis punctum ductæ, rectos cum ſectione angulos efficiunt.



PLANO namque AB, inſiſtat planum CD, ita vt pars ad C, ſit in ſublimi extra planum AB, & pars ad D, in ipſo plano AB, ſit q; CD, inclinatum ad AB; & communis eorum ſectio ſit DE. Si igitur ad DE, communem ſectionem ex eius puncto F, duæ perpendiculares ducantur; FG, quidem in plano AB, & FH, in plano CD; dicetur angulus acutus GFH, dictis rectis comprehenſus, inclinatio plani CD, ad planum AB, ita vt tanta eſſe dicatur inclinatio plani ad planum, quantus eſt dictus angulus acutus.

INTERDVM Geometræ angulum GFH, dicunt angulum inclinationis plani CD, ad planum AB, ſiue is acutus ſit, ſiue rectus, obtuſúsve: quamquã propriè ſolùm angulus acutus inclinationem vnius plani ad alterum oſtendat, vt Euclides docet hoc loco: Rectus enim indicat potius æquabilem eleuationem vnius plani ſupra aliud, quàm inclinationẽ vnius ad alterum; obtuſus verò receſſum quodammodo vnius ab altero. Veruntamen quia quilibet horum angulorum commonſtrat ſitum, ſeu eleuationem vnius plani ſupra alterum, generaliter dici conſueuit à pleriſque angulus inclinationis omnis ille, qui comprehenditur duabus rectis lineis, quæ in vtroque plano ad aliquod vnum punctum communis illorum ſectionis ducuntur perpendiculares, cuiuſmodi eſt angulus GFH, ſiue is rectus ſit, ſiue acutus, ſiue obtuſus.

VII.

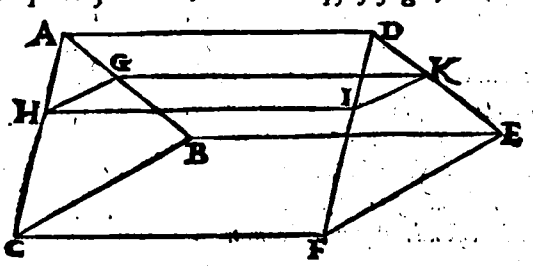
PLANVM ad planum ſimiliter inclinatum eſſe dicitur, atque alterum ad alterum, cùm dicti inclinationum anguli inter ſe fuerint æquales.

NON obſcura eſt hæc definitio, præcedenti bene intellecta. Vnde planum ad planum magis inclinatum eſſe dicetur, cuius angulus inclinationis minor extiterit, atq; adeò à recto magis receſſerit.

VIII.

PARALLELA plana ſunt, quæ inter ſe non conueniunt.

INTELLIGE, in quamcunque partem, etiam infinitè, producantur; hoc eſt, ſiue ad dexteram, ſiue ad ſiniſtram, & ſiue ſurſum, ſiue deorſum, &c. Sunt enim quædam plana, quæ nec ad dexterã, nec ad ſiniſtram producta conueniunt; nec tamen ob id parallela ſunt dicenda; quia nimirum vel ſurſum, vel deorſum protracta, tandem coëunt. Nam ſi ſumatur tectum aliquod, cuius faſtigium intelligatur abſciſſum; remanentia duo plana non conuenient, quamuis producantur infinitè ad dexteram, & ad ſiniſtram: Sed tamen quia ſurſum protenſa coëunt, nimirum in ipſo faſtigio, idcircò non dicentur parallela.



SIT enim tectum quodpiam ABCDEF, contentum duobus planis ABED, ACFD, cuius baſis BCFE; auferatur q; faſtigium AGHDKI. Quo facto, perſpicuũ eſt, reliqua plana GBEK, HCFI, non conuenire inter ſe, ſi ad partes GB, HC, vel ad partes KE, IF, producantur; nec tamen idcirco parallela dicentur, cùm producta ad partes GH, KI, conueniant in faſtigio AD. Vt igitur plana aliqua dicantur parallela, neceſſe eſt, vt in nullam partem producta inter ſe conueniant. Sicut autẽ linea in eodem plano exiſtentes, ad duas duntaxat partes produci poſſunt, nempe ad ſiniſtram, & ad dexteram; ita duo plana in quatuor partes intelligi poſſunt protracta, nempe ſiniſtrorſum, dextrorſum, ſurſum, atq; deorſum. Itaque duo plana quæcunque, vel ſunt parallela, vel ad aliquam partem producta coëunt; lineæ verò rectæ, vel ſunt parallelæ, vel ad alteram partem protractæ conueniunt, ſi nimirum in eodem exiſtant plano, vel tandem nec ſunt parallelæ, neq; vnquã conueniunt, ſi videlicet in diuerſis ſint planis, & in tranſuerſum poſitæ. Vnde in definitione linearum parallelarum in 1. lib. additum fuit: quæ cùm in eodem ſint plano; Hîc autem ſimpliciter dicitur: quæ nunquam conueniunt.

SIMILES

IX.

SIMILES ſolidæ figuræ ſunt, quæ ſimilibus planis continentur multitudine æqualibus.

POTVISSET Euclides ſimiles figuras ſolidas definire per angulos æquales, & proportionalitatem laterum circa æquales angulos, vti fecit in figuris planis ſimilibus definiendis: Satius tamen eſſe iudicauit, vt breuitati conſulens, eas ex ſimilibus planis multitudine æqualibus deſcriberet; præſertim quòd ex ſimilitudine planorum ſtatim conſequatur & angulorum ſolidorum æqualitas, vt ex defin. 11. patebit, cùm illos conſtituant anguli plani & multitudine, & magnitudine æquales; & proportionalitas laterum circum angulos æquales, propter planorum ſimilitudinem.

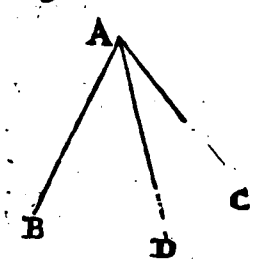
X.

AEQVALES, & ſimiles ſolidæ figuræ ſunt, quæ ſimilibus planis, multitudine, & magnitudine æqualibus continentur.

QVOD ſi plana ſimilia, quibus corpora ſimilia ex precedenti definitione circumſcribuntur, fuerint æqualia, ſingula ſingulis, dicentur eiuſmodi figuræ ſolidæ non ſolùm ſimiles, verùm etiam æquales. Nam ſi animo concipiantur ſeſe penetrare mutuò huiuſmodi ſolida, neutrũ alterum excedet, propter æqualitatem, ac ſimilitudinem planorum. Ex ſimilitudine enim planorum infertur angulorum ſolidorum æqualitas, vt in precedenti definitione docuimus; ex eorundem verò æqualitate, laterum proportionalium æqualitas, vt in lemmate propoſ. 22. lib. 6. demonſtrauimus. Quare ſolida illa omni ex parte ſibi mutuò congruent; ac propterea inter ſeſe exiſtent æqualia.

XI.

SOLIDVS angulus eſt plurium, quàm duarum linearum, quæ ſe mutuò contingant, nec in eadem ſint ſuperficie, ad omnes lineas inclinatio.



DVÆ linea in eodem exiſtentes plano, quæ non in directum iacentes ad vnum punctum conueniunt, efficiunt angulum planum, vt lib. 1. expoſuimus, qualis eſt angulus B A C, contentus duabus lineis A B, A C, in eodem plano conſtitutis. Si igitur accedat tertia quædam linea A D, quæ non in eodem cum illis plano exiſtat, ſed punctum D, ſit in ſublimi extra illarum planum, efficietur ad punctum A, angulus ſolidus, ſiue corporeus. Idem contingeret, ſi quarta linea, vel quinta, vel denique plures adiungerentur, licet anguli quantitas variaretur. Dixit autem Euclides, lineas angulum ſolidum conſtituentes, non debere in eadem ſuperficie exiſtere, quoniam videlicet, ſi tres lineæ A B, A C, A D, in eadem conſiſterent ſuperficie, non efficeretur angulus ſolidus ad punctum A, ſed planus duntaxat ex duobus planis B A D, D A C, compoſitus. Quòd ſi A D, ſit in ſublimi, hoc eſt, extra planum, in quo ſunt A B, A C, iam non componeretur angulus planus totus ex B A D, D A C; immò circa punctum A, tres plani conſiſtent anguli B A D, D A C, C A B, qui, vt mox dicetur, ſolidum conſtituunt angulum. Idem dices, ſi plures fuerint lineæ, & idcircò plures quoq; anguli plani.

ALITER.

SOLIDVS angulus eſt, qui pluribus, quàm duobus planis angulis in eodẽ non conſiſtentibus plano, ſed ad vnum punctum conſtitutis, continetur.

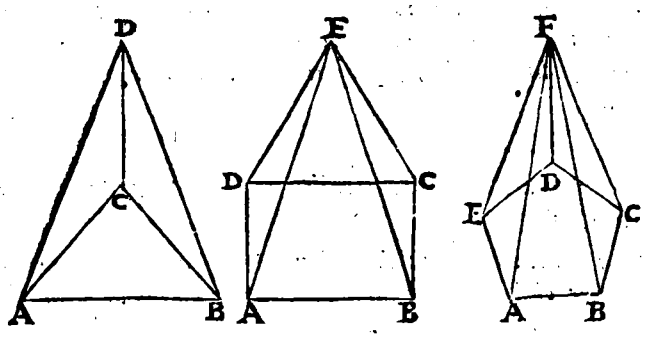
HÆC definitio ſecunda anguli ſolidi facilis eſt, precedenti rectè intellecta. Cùm enim ſaltem tres lineæ in eodem non exiſtentes plano neceſſariæ ſint ad anguli ſolidi conſtitutionem, perſpicuum eſt, cùm minimum tres planos angulos requiri, vt angulus ſolidus efficiatur, vt ex ſuperiori figura apparet. Angulus enim B A D, in plano eſt, in quo recta A B, A D; & angulus D A C, in plano, in quo recta A D, A C; angulus denique C A B, in plano, in quo recta A C, A B; atque ita ex ipſis angulus ſolidus ad punctum A, conſtituitur. Quòd ſi tres, vel plures anguli plani ad vnum punctum conſiſtant, in eodem tamen plano, non conſtituetur ex ipſis angulus ſolidus, ſed totus quidam angulus planus, vt ſuprà diximus de lineis in eadem ſuperficie exiſtentibus. Neque verò ſatis ſunt duo anguli plani ad conſtituendum angulum ſolidum, etiamſi in diuerſis ſint planis. Hiabit enim ſemper ex altera parte. Vnde neceſſe eſt, vt tertia ſaltem ſuperficies accedat, in qua tertius angulus planus conſiſtat. Anguli porrò ſolidi exemplum clariſſimũ nobis præbent duo parietes cum pauimento domus, vel laqueari, ad vnum punctum conuenientes. In eo enim puncto, in quo coëunt, conſtituitur angulus ſolidus ex tribus angulis planis. Vbi manifeſtum eſt, ſi vna earum ſuperficierum tollatur, deſtrui angulum ſolidum, remanere q; tantùm duas ſuperficies ad inuicem inclinatas, & hiantes.

EX his verò perſpicuum cuiuis erit, illos angulos ſolidos inter ſe eſſe æquales, qui continentur angulis planis & multitudine, & magnitudine æqualibus. Nam huiuſmodi anguli ſibi mutuò congruent, ſi ſeſe penetrare intelligantur. Quemadmodum autem in primo libro, Euclides ex omnibus angulis planis ſolùm rectilineum aſſumpſit, ita hic ex omnibus eum duntaxat definit, quem plures lineæ rectæ quàm duæ, vel plures anguli plani rectilinei comprehendunt. Non enim comprehenditur hac definitione angulus coni, qui vnica ſu-

perficie curua continetur; neque is, qui continetur duabus superficiebus, vna quidem plana, altera verò curua; qualis est, qui fit, si conus per verticem secetur.

XII.

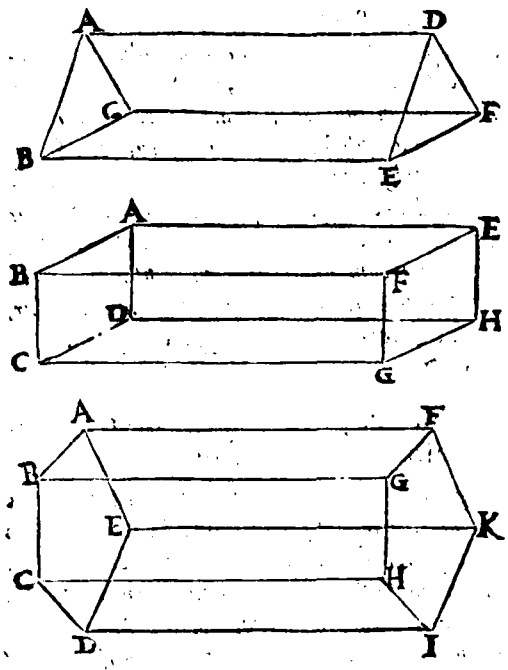
PYRAMIS est figura solida, quæ planis continetur, ab vno plano ad vnum punctum constituta.



VIDELICET figura solida à planis ABC, ABCD, ABCDE, ad puncta D, E, F, constituta, appellantur pyramides. Perspicuum autem est, omnia plana, quibus pyramis continetur, esse triangula, cùm omnia ad vnũ punctum tendant: excepto plano, à quo omnia tendunt, quodq; puncto illi est oppositum. Hoc enim potest esse vel triangulum, vel quadrangulum, vel pentagonum, &c. à quo quidem tota pyramis denominationem sumit; vt videlicet dicatur pyramis triangula, quadrangula, pentagona, hexagona, &c. Tot enim trianguli qualibet pyramis comprehenditur, quot angulos, seu latera planum dictum continet. Vnde & planum huiusmodi, basis pyramidis nuncupari solet. Vt pyramidis triangularis, præter basin, triangula sunt ABD, ACD, BCD: Quadrangula verò ABE, ADE, BCE, CDE: Pentagona denique ABF, AEF, BCF, CDF, EDF.

XIII.

PRISMA est figura solida, quæ planis continetur, quorum aduersa duo sunt & æqualia, & similia, & parallela, alia verò parallelogramma.



FIGVRAE scilicet solidæ, quarum plana aduersa, & æqualia, & similia, & parallela sunt triangula ABC, DEF: vel quadrangula ABCD, EFGH: vel pentagona ABCDE, FGHIK, &c. Parallelogramma verò ACFD, ABED, CBEF: vel ABFE, ADHE, CDHG, CBFG: vel ABGF, AEKF, DEKI, DCHI, BCHG: dicuntur prismata. Itaque prisma nil aliud erit, quàm columna quædam laterata æqualis crassitudinis, cuius bases oppositæ sunt æquales, similes, & parallelæ, siue hæ sint triangula, siue quadrangula, siue pentagona, & Vnde tot parallelogramma continebit prisma quodlibet, quot latera, siue anguli, in vno quoque oppositorum planorum reperiuntur, vt figura indicant.

EX hu manifestum est, quantum hallucinentur ij, inter quos est & Campanus, qui prisma intelligunt esse eam figuram solidam duntaxat, cuius duo plana aduersa parallela, æqualia, similiáque, triangula sunt; reliqua verò tria parallelogramma. Quam quidem figurã solidam Campanus vocat Corpus seratile. Cùm enim hæc figura sit solùm vna species prismatis, definitio autem tradita infinita alia genera prismatis amplectatur, vt constat; præsertim quòd plurima demonstrationes in hoc libro, & duodecimo sequenti, ex æquo omnibus prismatibus conueniunt: perspicuum est eos hallucinari, qui vnum tantùm prismatis genus ex hac definitione colligunt. Sumpserunt autem fortasse hi auctores occasionem errandi, quòd Euclides & in propositione vltima huius libri, & in tertia, quarta, & quinta propositione, libri duodecimi, solùm de eo prismate loquatur, quòd duo aduersa plana habet triangula. Non autem animaduerterunt, septimam propositionem libri duodecimi illis aduersari, in qua Euclides loquens de prismate, mentionem facit duorum triangulorum oppositorum, eo quòd tali prismati solùm demonstratio illa conuenit. Quòd si sola ea figura, vt ipsi volunt, prisma appellaretur ab Euclide, frustrà dixisset: Omne prisma trigonam habens basin, &c. cùm nullum aliud prisma daretur. Immò in corollario dictæ propositionis septima infert Theon, Pyramidem esse tertium partem prismatis eandem cum illa basin habentis, & altitudinem æqualem, licet duo plana prismatis aduersa non sint triangula, sed alia quauis rectilinea, æqualia tamen & similia,

similia, vt vult definitio. Ex quo loco luce clarius colligitur, infinita esse prismatum genera secundùm Theonem, atq; adeò secundùm Euclidem, cùm communi omnium sententia demonstrationes Theoni ascriptæ, sint Euclidis. Accedit etiam, quòd à Theone in demonstratione propos. 10. lib. 12. apertissimè appellantur prismata omnia solida, quæ habent duo plana aduersa & æqualia, & similia, siue ea sint triangula, & quadrata, siue multangula, reliqua verò parallelogramma.

XIIII.

SPHAERA est, quando, semicirculi manente diametro, circumductus semicirculus in seipsum rursus reuoluitur, vnde moueri cœperat, circumassumpta figura.

SICVT linea recta circa alterum eius extremum quiescens reuoluta describit circulum: ita & semicirculus circa alterum eius extremum, nempe circa diametrum, circumductus figuram describit, quam Geometræ Sphæram appellant. Vnde quemadmodum in circulo punctum assignatur, extremum videlicet illud quiescẽs, à quo omnes lineæ rectæ in peripheriam cadentes sunt æquales; propterea quòd omnes æquales existunt illi linea circumuolutæ: Ita quoque in sphæra punctum reperitur, nempe medium diametri quiescentis, hoc est, centrum semicirculi circumducti, à quo omnes rectæ cadentes in peripheriam sunt æquales; eo quòd omnes sunt semidiametro dicti semicirculi æquales. Quapropter ad similitudinem definitionis circuli, sphæra definiri poterit hoc etiam modo.

SPHAERA est figura solida, vna superficie comprehẽsa, ad quam ab vno puncto eorum, quæ intra figuram sunt posita, cadentes omnes rectæ lineæ inter se sunt æquales.

CICERO in libro de Vniuersitate de mundo loquens, eleganter hanc definitionem expressit, his verbis: Ergo globosus est fabricatus, quod σφαιροειδὲς Græci vocant, cuius omnis extremitas paribus à medio radius attingitur.

XV.

AXIS autem sphæræ, est quiescens illa recta linea, circum quam semicirculus conuertitur.

XVI.

CENTRVM sphæræ est idem, quod & semicirculi.

XVII.

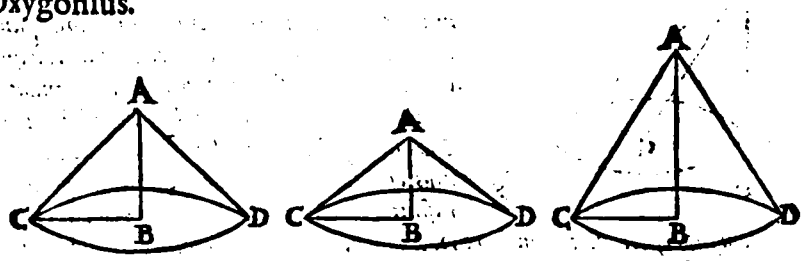
DIAMETER autem sphæræ, est recta quædam linea per centrum ducta, & vtrinque à sphæræ superficie terminata.

HAE tres definitiones non egent expositione; dummodò hoc solùm notetur, omnem diametrum sphæræ posse esse axem, si nimirum circum eam sphæra reuoluatur. Vnde quia in descriptione sphæræ circa diametrum semicirculi factus est motus ipsius sphæræ; propterea eam solam Euclides axem sphæræ nominauit.

XVIII.

CONVS est, quando rectanguli trianguli manente vno latere eorum, quæ circa rectum angulum, circumductum triangulum in se ipsum rursus reuoluitur, vnde moueri cœperat, circumassumpta figura.

ATQVE si quiescens recta linea æqualis sit reliquæ, quæ circa rectum angulum conuertitur, Orthogonius erit conus: Si verò minor, Amblygonius: Si verò maior, Oxygonius.



VT si triangulum rectangulum A B C, circa latus quiescens A B, quod est circum rectum angulum, circumducatur, donec integram reuolutionẽ expleat, describetur solida quædam figura, quæ continetur duabus superficiebus, circulari vna, ac plana, quam B C, latus alterum circa angulum rectum, suo motu describit; & curua alia, eaq; conuexa, quam latus A C, recto angulo oppositum delineat. Hæc igitur figura solida, conus nuncupatur. Campanus autem pyramidem rotundam appellat.

QVOD si latus quiescens A B, æquale fuerit circumducto B C, vt in prima figura, dicetur conus descriptus Orthogonius, seu rectangulus, quia videlicet angulus prope verticem A, rectus est. Cùm enim latera A B, B C, ponantur æqualia; erunt & anguli B A C, B C A, æquales; qui cùm æquiualeant vni recto, eo quòd A B C, rectus est; erit angulus B A C, semirectus. Eodémque modo angulus B A D, ex parte oppositæ a 5. primi.

ſemirectus erit. Quare totus angulus C A D, rectus erit. Si verò quieſcens latus A B, minus fuerit circumducto B C, vt in ſecunda figura, vocabitur deſcriptus conus Amblygonius, ſeu obtuſangulus; quoniam ſcilicet an-
a 18. primi. *gulus ad verticem A, obtuſus exiſtit. Cùm enim B C, latus latere A B, ſit maius; [a] erit angulus B A C, maior angulo B C A. Quare cùm hi duo æquipolleant vni recto, propterea quòd angulus A B C, ponitur rectus, erit B A C, ſemirecto maior. Similiter B A D, maior erit ſemirecto; atque adeò totus C A D, recto maior erit. Si denique quieſcens latus A B, maius fuerit circumducto B C, vt in tertia figura, appellabitur conus deſcriptus Oxygonius, ſeu acutangulus; quia nimirum angulus ad verticem A, acutus eſt. Cùm enim latus A B, maius ſit*
b 18. primi. *latere B C, [b] erit & angulus B C A, angulo B A C, maior. Quapropter cũ hi duo vni recto æquinaleant, quòd angulus A B C, rectus ponatur, erit B C A, ſemirecto maior, ideoq; reliquus B A C, ſemirecto minor. Non ſecus oſtendetur angulus B A D, minor eſſe ſemirecto. Igitur totus C A D, recto erit minor.*

X I X.

AXIS autem coni, eſt quieſcens illa linea, circa quam triangulum vertitur.

VT in quolibet cono ſuperius deſcripto, axis eſt recta quieſcens A B.

X X.

BASIS verò coni eſt circulus, qui à circumducta linea recta deſcribitur.

NIMIRVM circulus, qui deſcribitur ab altero latere circa rectum angulum, quale eſt B C, in ſuperioribus conis. Itaq; huius circuli ſemidiameter eſt ipſum latus circumductum.

QVONIAM verò Euclides ſolùm definiuit conum rectum, cuius videlicet axis rectus eſt ad baſin; Non autem inclinatum, cuius axis ad baſim rectus non eſt; placuit ex Apollonio Pergæo adducere generalem coni deſcriptionem, quæ & rectum, & inclinatum comprehendat; propterea quòd in 12. lib. eadem ferè demonſtrari poſſunt de cono inclinato, quæ Euclides de recto cono oſtendit, vt ibi docebimus. Ita igitur ſcribit Apollonius ad initium conicorum elementorum.

SI ab aliquo puncto ad circumferentiam circuli, qui nõ ſit in eodem plano, in quo punctum, coniuncta recta linea in vtramque partem producatur; & manente puncto, conuertatur circa circuli circumferentiam, quouſque ad eum locum redeat, à quo cœpit moueri: Superficiem à recta linea deſcriptam, conſtantemq; ex duabus ſuperficiebus ad verticem inter ſeſe aptatis, quarum vtraque in infinitum augetur, nimirum recta linea, quæ eam deſcribit, in infinitum producta, voco conicam ſuperficiem.

VERTICEM ipſius, manens punctum.

AXEM, rectam lineam, quæ per punctum, & centrum circuli ducitur.

CONVM autem voco figuram contentam circulo, & conica ſuperficie, quæ inter verticem, & circuli circumferentiam interiicitur.

VERTICEM coni, punctum, quod & ſuperficiei conicæ vertex eſt.

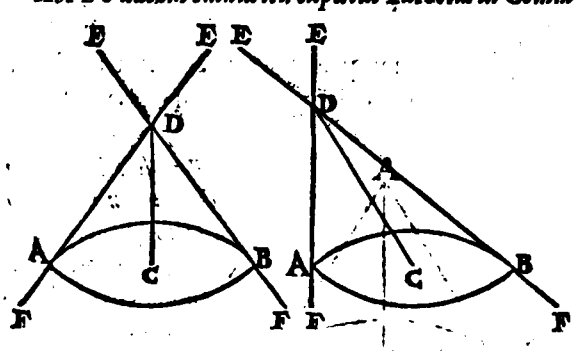
AXEM, rectam lineam, quæ à vertice ad circuli centrum producitur.

BASIM, circulum ipſum.

CONORVM, Rectos quidem voco, qui axes habent ad rectos angulos ipſis baſibus.

SCALENOS verò, qui non ad rectos angulos ipſis baſibus axes habent.

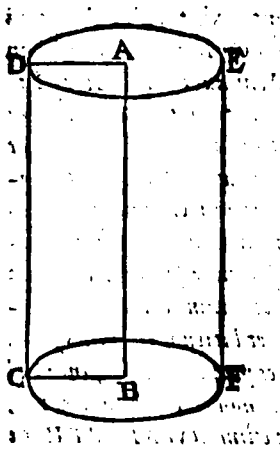
HÆC autem omnia ita explicat Eutocius in Commentarijs, quos in Apollonium ſcripſit.



SIT circulus A B, cuius centrum C, & punctum aliquod ſublime D; iunctaq; D B, in infinitum ex vtraque parte producatur ad puncta E, F. Si igitur recta linea D B, feratur eouſque in circuli A B, circumferentia, quouſque punctum B, rurſus in eum locum reſtituatur, à quo cœpit moueri: deſcribet ſuperficiem quandam, quæquidem conſtat ex duabus ſuperficiebus ad D, punctũ ſeſe tangentibus. Eam vocat Apollonius conicam ſuperficiem, quæ & augetur in infinitũ, cùm recta linea D B, ipſam deſcribens in infinitum producitur. Verticem ſuperficiei dicit punctum D. Axem, rectam D C. Conum verò appellat figuram contentam circulo A B, & ea ſuperficie, quam D B, ſola deſcribit. Coni verticem, punctum D, Axem D C. Baſim A B, circulum. Quòd ſi D C, ad circulum fuerit perpendicularis, Rectum vocat conum: Sin minus, Scalenum.

X X I.

CYLINDRVS eſt, quando rectanguli parallelogrammi manẽte vno latere eorum, quæ circa rectum angulum, circumductum parallelogrammum in ſe ipſum rurſus reuoluitur, vnde cœperat moueri, circumaſſumpta figura,



VELVTI si rectangulum parallelogrammum A B C D, circa latus quiescēs A B, circumuoluatur, donec integram expleat reuolutionem, appellabitur figura descripta cylindrus, quæ quidem tribus superficiebus continetur, duabus videlicet planis circularibus, quas latera A D, B C, describūt; & altera circuæ, eaq; conuexa, quam latus C D, describit, instar columnæ alicuius rotundæ. Vnde factum est, vt Campanus cylindrum appellauerit columnam rotundam.

XXII.

AXIS autem cylindri, est quiescens illa recta linea, circum quam parallelogrammum conuertitur.

NEMPE recta A B, in superiori figura, dicetur axis cylindri.

XXIII.

BASES verò cylindri sunt circuli à duobus aduersis lateribus, quæ circumaguntur, descripti.

QVALES sunt circuli à lateribus A D, B C, oppositis descripti.

EVCLIDES porrò solùm cylindrum rectum hoc loco definit, cùm videlicet axis rectus est ad vtramque basim; atq; de hoc solùm in lib. 12. est disputaturus. Cùm igitur nos eadem fere theoremata, ex alijs Geometris simus proposituri in eodem 12. lib. de cylindro inclinato, quæ Euclides de cylindro recto demonstrauit, visum est prius ex Sereno Antinsensi definire cylindrum vniuersè, vt complectatur tam rectum, quàm inclinatum. Sic igitur scribit Serenus ad initium primi libri de Sectione cylindri:

SI duorum circulorum æqualium, & æquidistantium diametri semper inter sese æquidistantes & ipsæ in circulorum planis circa manens centrum circumferantur, & simul circumferatur recta linea, diametrorum terminos ex eadem parte coniungens, quousque rursus in eum locum restituatur, à quo moueri cœpit: Superficies, quæ à circumlata recta linea describitur, cylindrica superficies vocetur; quæ quidem & in infinitum augeri potest, linea ipsa describente in infinitum producta.

CYLINDRVS est figura, quæ circulis æquidistantibus, & cylindrica superficie inter ipsos interiecta continetur.

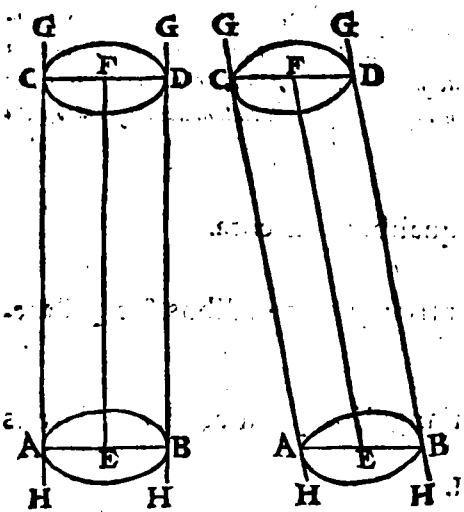
CYLINDRI bases sunt circuli ipsi.

AXIS, recta linea, quæ per circulorum centra ducitur.

LATVS autem cylindri, linea, quæ cùm recta sit, & in superficie ipsius cylindri, bases vtrasque contingit; quam & circumlatam, cylindri superficiem describere antea diximus.

CYLINDRORVM, Recti quidem dicantur, qui axem habent ad rectos angulos existentem ipsis basibus.

SCALENI autem, qui non ad rectos angulos existentem ipsis basibus axem habent.

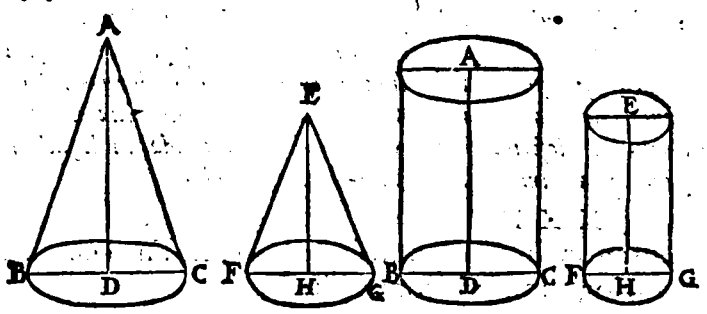


SINT duo circuli æquales, & æquidistātes A B, C D, quorum centra E, F, & diametri æquidistantes quoque A B, C D: iunctaq; recta A C, in infinitum ex vtraque parte producatur ad puncta G, H. Si igitur diametri A B, C D, circa centra E, F, in planis circulorū semper æquidistantes, vnà cum recta A C, circumducantur, donec ad eum locum restituantur, vnde moueri cœperunt: describetur à linea A C, superficies quædam rotunda, quam Serenus cylindricam vocat; quæ & augetur ad infinitum, cùm recta A C, ipsam describens in infinitum producitur. Cylindrum verò appellat figuram A B D C, circulis A B, C D, & cylindrica superficie inter ipsos interiecta, quam videlicet sola A C, describit, comprehensam. Bases cylindri dicit esse circulos A B, C D. Axem, rectam E F, quæ circulorum centra coniungit. Latus cylindri, rectum A C. Quòd si axis E F, perpendicularis fuerit ad bases, rectum vocat cylindrum: Sin minus, Scalenum.

XXIIII.

SIMILES coni & cylindri sunt, quorum & axes, & basium diametri proportionales sunt.

RECTE Euclides similitudinem conorum, atque cylindrorum ab eorum axibus, & basium diametris sumit. Diametri enim basium indicant conos & cylindros secundùm duas dimensiones esse similes, longitudinem scilicet ac latitudinem; Axes, verò eosdem secundùm profunditatem, seu altitudinem similes esse de-



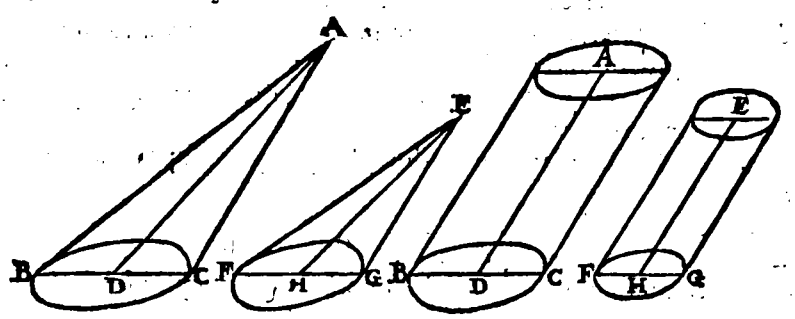
monſtrant. Sint enim duo coni A B C, E F G; item duo cylindri in conis autem axes A D, E H, & baſium diametri B C, F G; ſimiliter & in cylindris. Itaque ſi fuerit, vt axis A D, ad axem E H, ita B C, diameter baſis ad F G, diametrum baſis, dicentur tam coni, quàm cylindri ſimiles inter ſe; quia videlicet hac ratione tam ſecundùm longitudinem et latitudinẽ ſimiles ſunt, quàm ſecundùm profunditatem, vt diximus, nempe omnes eorum tres dimenſiones proportionales ſunt: Vel etiam, quia triangula A D B, E H F, ex quorum reuolutione deſcripti ſunt coni, nec non rectangula A B, E F, quorum conuerſiones cylindros effecerunt, hac ratione ſimilia inter ſe erunt. Cùm enim ſit vt A D, ad E H, ita

a 15. quinti. *B C, ad F G; Sit autem vt B C, ad F G, [a] ita dimidia B D, ad dimidiam F H; erit quoque vt A D, ad E H, ita D B, ad H F: & permutando vt A D, ad D B, ita E H, ad H F. Quare tam in triangulis, quàm in rectangulis latera, circum æquales angulos, nempe rectos, proportionalia ſunt; ac propterea & triangula & rectangula*

b 6. ſexti. *ſimilia inter ſe erunt: Triangula quidem, [b] propterea quòd triangula vnum angulum vni angulo habentia æqualem, & circum æquales angulos latera proportionalia, æquiangula ſunt,*

c 5. ſexti. *[c] ideoq; latera omnia circa angulos æquales habent proportionalia, atque adeò inter ſe ſimilia exiſtunt: Rectangula verò,*

d 34. primi. *[d] eo quòd reliqua duo latera duobus lateribus A D, D B, ſunt æqualia, oppoſita oppoſitis, ac propterea eandem cum his proportionem habent.*



Quod ſi coni, vel cylindri fuerint inclinati, (de rectis enim duntaxat Euclides verba fecit.) dicentur ij tum demum ſimiles, quando eorum axes, et diametri baſium erunt proportionales, angulique inclinationum, quos axes efficiunt, æquales: qui quidem anguli accipiendi ſunt, vt in defin. 5. dictum eſt. Sint enim coni inclinati, ſimiliter & cylindri A B C, E F G: In conis autẽ axes ſint A D, E H, & baſium diametri B C, F G; ſimiliter & in cylindris. Itaq; ſi fuerit tam in conis, quàm in cylindris, vt A D, ad E H, ita B C, ad F G, extiterint q; anguli inclinationum A D B, E H F, tam in conis, quàm in cylindris, æquales inter ſe; dicentur & coni inter ſe, & cylindri quoque inter ſeſe ſimiles. quoniam nimirum hac ratione & tres eorum dimenſiones ſunt proportionales, vt ſuprà diximus, & rurſus tam triangula A D B, E H F, quàm rectangula A B, E F, quorum conuerſiones conos, & cylindros effecerunt, inter ſe ſimilia ſunt, veluti in rectis conis, cylindriq; demonſtrauimus. Eſt enim prorſus eadem demonſtratio, cùm anguli A D B, E H F, ponantur æquales, licèt non ſint recti.

XXV.

CVBVS eſt figura ſolida, ſub ſex quadratis æqualibus contenta.

XXVI.

TETRAEDVM eſt figura ſolida, ſub quatuor triangulis æqualibus, & æquilateris contenta.

XXVII.

OCTAEDRVM eſt figura ſolida, ſub octo triangulis æqualibus, & æquilateris contenta.

XXVIII.

DODECAEDRVM eſt figura ſolida, ſub duodecim pentagonis æquálibus, & æquilateris, & æquiangulis contenta.

XXIX.

ICOSAEDRVM eſt figura ſolida, ſub viginti triangulis æqualibus, & æquilateris contenta.

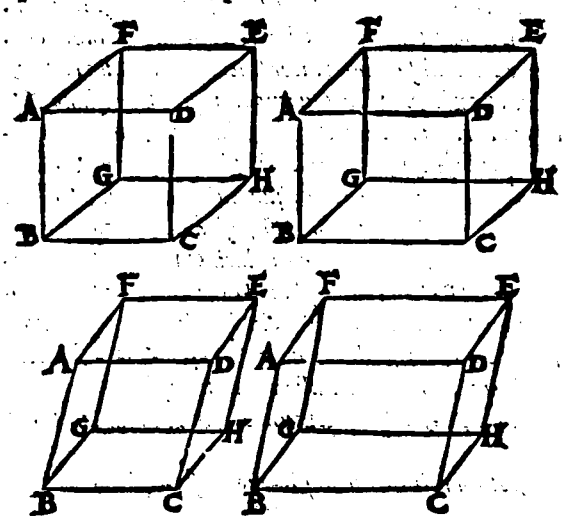
Hæc ſunt quinque corpora, quæ regularia vocantur, quòd omnia plana, quibus continentur, æqualia ſint,

sint, æquilatera, & æquiangula, vt ex eorum definitionibus constat, & nonnullis corpora Platonica dicuntur, propterea quòd Plato in Tymæo quinque mundi corpora, quæ simplicia à Philosophis nuncupantur, nempe Cœlum, Ignem, Aërem, Aquam, atque Terram, quinque hisce corporibus assimilat, vt in sphæra Ioannis à Sacro Bosco latius explicauimus. Horum omnium constructio tradetur lib. 13. Cubi quidem propos. 15. Tetraëdri verò propos. 13. Octaëdri deinde propos. 14. Dodecaëdri autem propos. 17. Icosaëdri denique propos. 16. Vbi planius perfectiusq; definitiones horum corporum intelligentur. In plano enim difficillimum est, ea ita depingere, vt veram eorum effigiem, atque formam quis intueatur. Trademus tamen propriis in locis præxes admodum faciles, quibus ea quilibet secundùm eorum soliditatem possit conficere. Neque verò aliud corpus regulare, præter quinque illa, dari potest, vt demonstrabimus ad finem lib. 13.

QVONIAM verò frequens hoc lib. 11. fit mentio Parallelepipedi, & lib. 15. agitur de mutua inscriptione, circumscriptioneq; corporum regularium; necessarium esse duximus, tribus definitionibus explicare, quidnam sit Parallelepipedum, quidq; sit figuram solidam in figura solida inscribi, vel circa eandem describi.

XXX.

PARALLELEPIPEDVM est figura solida sex figuris quadrilateris, quarum, quæ ex aduerso, parallelæ sunt, contenta.



VELVT I solida figura comprehensa sex quadrilateris A B C D, D E F A, A B G F, F G H E, E D C H, H C B G, quarum opposita A C, F H; Item D F, C G; Item A G, D H, sunt parallela, nominantur parallelepipeda, quasi parallelis planis comprehensa: quæ quidem plana parallela opposita, sunt & æqualia, & similia, & parallelogramma, vt demonstrabitur propos. 24. huius libri.

SVNT autem tot parallelepipedorum genera, quot parallelogrammorum. Si enim sex parallelogramma fuerint æquilatera, & rectangula, hoc est, quadrata, dicetur parallelepipedum illud, cubus, respondebitq; quadrato in planis figuris: Si autem sex parallelogramma fuerint quidem rectangula, at non omnia æquilatera, sed altera parte longiora, quamuis duo sint æquilatera, appellabitur parallelepipedum altera parte longius. Quòd si sex parallelogramma extiterint, æquilatera quidem, sed non omnia rectangula, quamuis duo sint rectangula, vocabitur parallelepipedum illud, Rhombus. Si denique sex parallelogramma neq; rectangula fuerint omnia, neque omnia æquilatera, quamuis duo sint rectangula, & æquilatera, vel rectangula tantùm, vel æquilatera tantùm, fuerint tamen parallelogramma, quæ ex aduerso, æqualia; parallelepipedum tale Rhomboides nuncupabitur. Cæterùm quodcunq; parallelepipedum vocari etiam poterit Prisma, vt ex defin. prismatis constat.

XXXI.

SOLIDA figura in solida figura dicitur inscribi, quando omnes anguli figuræ inscriptæ constituuntur vel in angulis, vel in lateribus, vel denique in planis figuræ, cui inscribitur.

XXXII.

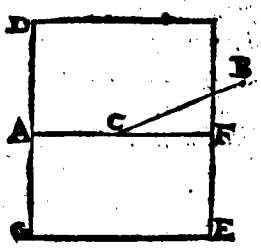
SOLIDA figura solidæ figuræ vicissim circumscribi dicitur, quando vel anguli, vel latera, vel denique plana figuræ circumscriptæ tangunt omnes angulos figuræ, circum quam describitur.

NON est necesse, vt anguli interioris figuræ constituantur in omnibus vel angulis, vel lateribus, vel planis exterioris figuræ, cùm interdum figura exterior plures, interdum pauciores angulos contineat, vel latera, vel plana, quàm interior: sed satis est, vt omnes anguli figuræ interioris tangant vel aliquot angulos, vel aliquot latera, vel denique aliquot plana exterioris figuræ; ita vt nullum angulum figuræ interioris intactum relinquatur vel ab angulis, vel à lateribus, vel denique à planis figuræ exterioris.

VERVM duas hæ postremæ definitiones planius percipietur ex lib. 15. in quo de inscriptionibus, circumscriptionibusq; mutuis corporum regularium copiosè agetur.

THEOR. PROPOS. 1.

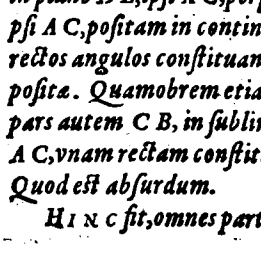
RECTAE lineæ pars quædam non est in subiecto plano, quædam verò in sublimi.



SIT enim, si fieri potest, rectæ lineæ AB, pars quidem AC, in subiecto plano DE, pars verò CB, in sublimi, ita vt omnia puncta partis AC, in plano DE, iaceant, puncta verò omnia partis CB, supra planum DE, existant, vel infra. Erit igitur in plano DE, ipsi AC, rectæ lineæ continua quædam recta linea in directum posita, nempe CF. Quamobrem duæ rectæ AB, AF, commune habent segmentum AC. quod est absurdum, vt in pronunciato 10. libri 1. demonstrauimus. Rectæ igitur lineæ pars quædam non est in subiecto plano, quædam verò in sublimi. Quod erat demonstrandum.

SCHOLIVM.

HAEC est communis demonstratio interpretum. Sed fortasse dicet aliquis, in ea aliquid desiderari, nempe vt ostendatur, recta AC, esse aliquam rectam in plano DE, in directum, & continuum positam. Qui enim concedit, rectæ AB, partem quidem AC, esse in plano DE, partem verò CB, in sublimi, vtique negabit, rectam AC, in plano DE, dari posse aliam rectam in continuum, & directum, quandoquidem rectam CB, in rectum & continuum positam esse fatetur ipsi AC. Veruntamen ei, qui sic dubitat, respondendum est, rectam quamlibet finitam in quouis plano datam, posse in eodem vlterius produci in rectum & continuũ, cùm plana superficies sit illa, quæ ex æquali suas interiacet lineas, hoc est, quæ recte & æqualiter semper extenditur, vt & linea recta. Quamobrem si AC, in plano DE, producatur vsque ad F, erit CF, recta recta AC, in continuum & directum posita. Verùm demonstremus iam idipsum Geometricè, in plano videlicet DE, ipsi AC, dari posse aliam rectam, quæ cum ipsa vnam rectam lineam constituat, quamuis quis dicat, AB, esse quoque rectam, eiusq; partem AC, in plano DE, partem verò CB, in sublimi esse positam. [a] Ducatur enim in plano DE, ipsi AC, perpendicularis CG; & in eodem plano ipsi CG, perpendicularis CF. Dico CF, esse ipsi AC, positam in continuum & rectum. Cùm enim AC, & FC, in eodem plano DE, cum recta CG, duos rectos angulos constituant ACG, FCG, ex constructione; [b] erunt AC, & FC, in directum & continuum positæ. Quamobrem etiamsi quis contendat, AB, esse rectam, cuius quidem pars AC, in plano DE, subiecto, pars autem CB, in sublimi sit constituta; tamen in eodem plano DE, erit alia recta, nempe CF, quæ cum AC, vnam rectam constituat lineam; atque adeò duæ rectæ AB, AF, segmentum commune habebunt AC. Quod est absurdum.



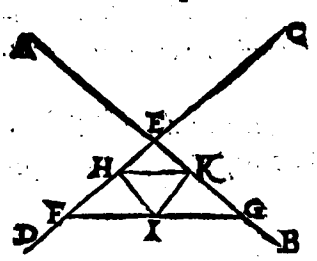
a 11. primi.

b 14. primi.

HINC fit, omnes partes cuiusuis rectæ lineæ, hoc est, totam rectam lineam, in vno existere plano.

2. THEOR. 2. PROPOS. 2.

SI duæ rectæ lineæ se mutuò secent, in vno sunt plano. Atque triangulum omne in vno est plano.



RECTAE lineæ AB, CD, se mutuò secent in E, & in EB, ED, sumptis punctis F, & G, vtcumque; ducatur recta FG, vt fiat triangulum EFG. Dico triangulum EFG, in vno esse plano; Item rectas AB, CD, in vno quoq; plano existere. Si enim trianguli EFG, pars quædam, nimirum EHIG, in plano vno existat, & pars quædam, nempe reliqua FHI; in sublimi, vel contrà; Existent quoque rectarum EF, GF, partes quidē EH, GI, in vno plano, partes verò HF, IF, in sublimi, vel contrà. quod fieri non posse, iam suprà [a] demonstratum est. Quòd si eiusdem trianguli pars quidem EFIK, in vno plano credatur esse, pars autem GIK, in sublimi, vel contrà; erunt eadem ratione rectarum EG, FG, partes quidem EK, FI, in vno plano, partes verò KG, IG, in sublimi, vel contrà. Si deniq; eiusdem trianguli pars quidem FHKG, in vno concedatur esse plano, pars verò EHK, in sublimi, vel contrà; erunt quoque rectarum FE, GE, partes quidem FH, GK, in vno plano, partes autem HE, KE, in sublimi, vel contrà. Quæ omnia absurda sunt, [b] vt est demonstratum. Quare triangulum EFG, in vno plano existit; eademque est ratio in omni alio triangulo.

a 1. vndec.

b 1. vndec.

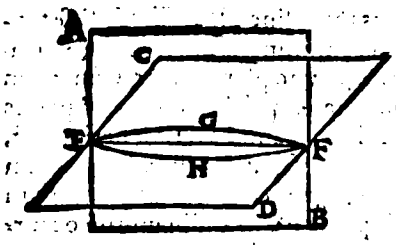
QVIA verò, in quo plano est triangulum EFG, in eodem existunt eius latera EF, EG: In quo autem sunt rectæ EF, EG, [c] in eodem sunt rectæ totæ CD, AB, ne partes quædam in plano, partes verò aliæ in sublimi dicantur esse; Erunt propterea rectæ AB, CD, in vno plano, in quo nimirum triangulum EFG, consistere demõstrauimus. Quocirca si duæ rectæ lineæ se mutuò secent, in vno sunt plano. Atque triangulum omne in vno est plano. Quod erat demonstrandum.

c 1. vndec.

3. THEOR. 3. PROPOS. 3.

SI duo plana se mutuò secent, communis eorum sectio est linea recta.

SECENT se mutuò plana AB, CD, sitque communis eorum sectio EF. Dico EF, esse lineam rectam.



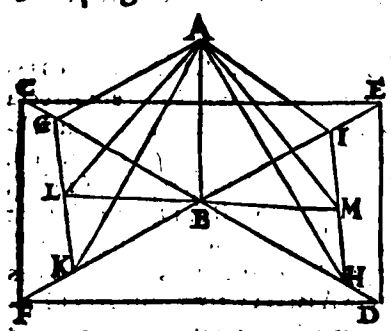
rectam. Si enim nō credatur esse recta, ducatur in plano AB, recta EGF, & in plano CD, recta EHF. Rectæ igitur EGF, EHF, cùm eosdem habeant terminos E, & F, superficiem includent. Quod fieri non potest, vt in 14. pronunciato 1. libri ostendimus. Communis ergo sectio EF, recta erit linea: Ac proinde si duo plana se mutuò secent, communis eorum sectio est linea recta. Quod erat ostendendum.

ALITER. Secent se rursus plana AB, CD, sintque termini sectionis communis E, & F, puncta, quæ connectantur recta EF. Si igitur recta EF, in vtroque plano existit, constat propositum: Ipsa enim erit communis sectio. Si verò EF, recta in neutro eorum dicatur esse, tunc si in alterutro eorum recta ducatur EGE, concludent rursus duæ rectæ EF, EGF, superficiem, cùm eosdem habeant terminos E, & F. Si denique recta EF, in altero tantùm plano esse credatur, tunc si in altero ducatur recta EGE, includent iterum duæ rectæ EF, EGF, superficiem. Quod est absurdum. Est ergo recta EF, in vtroque plano AB, CD, atque adeò communis eorum sectio est.

THEOR. 4. PROPOS. 4.

4.

SI recta linea rectis duabus lineis se mutuò secantibus, in communi sectione ad rectos angulos insistat: illa ducto etiam per ipsas plano ad angulos rectos erit.



RECTA linea AB, insistat duabus rectis CD, EF, ad rectos angulos in communi earum sectione B. Dico rectam AB, ad angulos quoq; rectos esse plano, quod per ipsas ducitur, seu in quo existunt. Cùm enim se mutuò secent in B, [a] erunt ipsę in vno plano, quod sit CEDF. Sumantur inter se æquales rectæ BG, BH; Item rectæ BI, BK; ducanturq; rectæ GK, IH; & in eodem plano per B, ducatur recta LM, secans rectas GK, IH, in punctis L, & M. Demittantur quoque ex A, puncto in sublimi ad idem planū rectæ AG, AL, AK, AH, AM, AI. Quoniam igitur latera BG, BK, trianguli BGK, lateribus BH, BI, trianguli BHI, ex constructione sunt æqualia; [b] & anguli quoque ipsis contenti GBK, HBI, cùm sint ad verticem B, oppositi, æquales: [c] Erunt bases GK, HI, inter se, & anguli BKG, BIH, inter se quoque æquales. [a] 2. vndec. [b] 15. primi. [c] 4. primi.

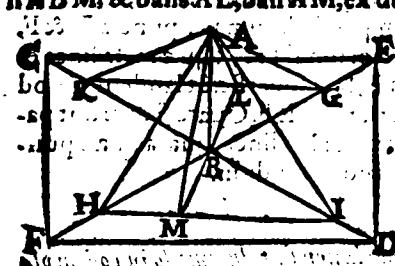
RVRSVS [d] cùm anguli KBL, IBM, ad verticem B, oppositi sint æquales; erunt duo anguli KBL, BKL, trianguli BKL, duobus angulis IBM, BIM, trianguli BIM, æquales; Sunt autem & latera BK, BI, quibus adiacent, æqualia, ex constructione. [e] Igitur & reliqua latera KL, LB, reliquis lateribus IM, MB, æqualia erunt. [d] 15. primi. [e] 26. primi.

PRAETEREA cùm latera AB, BG, trianguli ABG, æqualia sint lateribus AB, BH, trianguli ABH, ex constructione; & anguli ipsis contenti ABG, ABH, æquales, nempe recti, ex hypothesi, [f] erunt & bases AG, AH, æquales. Simili argumento æquales erunt rectæ lineæ AI, AK. [f] 4. primi.

AMPLIVS quia latera AI, IH, trianguli AIH, lateribus AK, KG, triāguli AKG, æqualia sunt; & basis AH, basi AG, ex hactenus demonstratis; [g] erunt etiam anguli AIH, AKG, dictis lateribus comprehensi, æquales. [g] 8. primi.

ITAQVE cùm latera AK, KL, trianguli AKL, æqualia sint lateribus AI, IM, trianguli AIM; & anguli ipsis contenti AKL, AIM, æquales etiam, vt hactenus demonstrauimus; [h] erunt quoque bases AL, AM, æquales. [h] 4. primi.

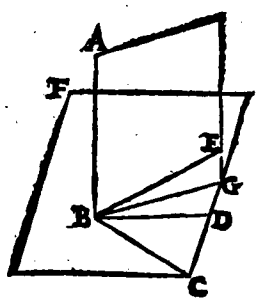
QVONIAM denique latera AB, BL, trianguli ABL, æqualia sunt lateribus AB, BM, trianguli ABM; & basis AL, basi AM, ex demonstratis; [i] erunt quoque anguli ABL, ABM, dictis lateribus comprehēsi, æquales; qui cùm sint deinceps, recti erūt, ex definitione 10. lib. 1. Quare recta AB, rectos angulos efficit, cum recta LM, quæ in plano subiecto ipsam tangit in B. Eademque ratione ostendetur, rectam AB, cum omnibus rectis, quæ in eodem plano ipsam tangent in B, angulos rectos constituere, etiamsi inter puncta G, I, & K, H, ductę sint, dummodò rectæ GI, KH, iungantur: vel certè literæ dispo nantur, vt prius, quemadmodum in hac figura apparet, vbi eædem sunt literæ, & tamen LM, non ducitur à sinistra in dextram, vt in priori figura, sed à superiori parte versus inferiorem. Quocirca recta AB, plano CEDF, quod per rectas CD, EF, ducitur, ad rectos angulos erit, ex defin. 4. huius lib. Si recta igitur linea rectis duabus lineis se mutuò secantibus, &c. Quod demonstrandum erat. [i] 8. primi.



THEOR. 5. PROPOS. 5.

5.

SI recta linea rectis tribus lineis se mutuò tangentibus, in communi sectione ad rectos angulos insistat: Illæ tres rectæ in vno sunt plano,

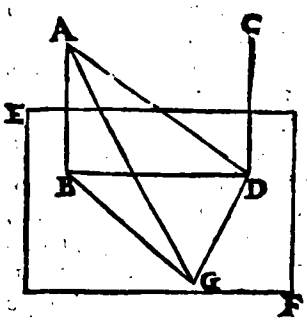


a 2. vndec.
b a. vndec.
c 3. vndec.
d 4. vndec.

INSISTAT recta linea AB, tribus rectis lineis BC, BD, BE, se tangentibus in B, ad rectos angulos in communi earum sectione, seu tactu B. Dico tres rectas BC, BD, BE, in vno plano esse. [a] Cùm enim quælibet duæ in vno sint plano, propterea quòd productæ ad partes B, se mutuò secent in B; sint BC, BD, in plano FC: Et si fieri potest, recta BE, non ponatur in eodem plano, sed in sublimi. [b] Quoniam verò duæ rectæ AB, BE, in vno sunt plano, cùm se mutuò secent in B; sint ambæ in plano AE. Et quia plana FC, AE, sibi mutuò occurrunt in B; necessariò producta se mutuò secabunt. [c] Sit ergo eorum communis sectio recta BG. Quia verò recta AB, ad angulos rectos ponitur rectis BC, BD; [d] erit propterea & plano FC, per ipsas ducto ad rectos angulos; ac proinde ad rectos angulos erit rectæ BG, quæ ipsam in B, tangit, ex defin. 3. huius libri. Quare recti anguli ABE, ABG, existentes in plano AG, per rectas AB, BE, ducto, æquales inter se erunt, pars & totum. Quod est absurdum. Duabus igitur rectis BC, BD, in vno plano FC, existentibus, non erit BE, in sublimi, sed in eodem cum ipsis plano. Quocirca si recta linea rectis tribus lineis se mutuò tangentibus, &c. Quod erat ostendendum.

6. THEOR. 6. PROPOS. 6.

SI duæ rectæ lineæ eidem plano ad rectos sint angulos; Parallelæ erunt illæ rectæ lineæ.



e 4. primi.
f 8. primi.

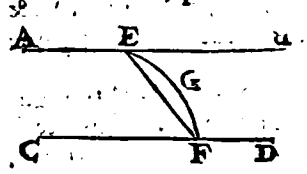
SINT duæ rectæ lineæ AB, CD, eidem plano EF, ad angulos rectos in punctis B, & D. Dico illas esse parallelas. Ducta enim recta BD, in plano EF, erunt anguli ABD, CDB, recti, ex defin. 3. huius libri. Iam in eodem plano EF, ducatur DG, ad BD, perpendicularis, ponanturq; æquales AB, DG. Connectãtur deinde rectæ BG, GA, AD. Quoniam igitur latera AB, BD, trianguli BAD, æqualia sunt lateribus GD, DB, trianguli GDB, ex constructione; & anguli quoque ipsis contenti ABD, GDB, æquales, nempe recti; [e] erunt bases æquales AD, GB. Rursus quia latera AB, BG, trianguli ABG, æqualia sunt lateribus GD, DA, trianguli GDA; Est autem & basis communis AG; [f] Erunt anguli ABG, GDA, æquales: Est autem ABG, rectus, ex defin. 3. huius lib. Igitur & GDA, rectus erit. Quoniam verò ex eadem defin. angulus quoque GDC, rectus est; erit recta GD, tribus rectis DB, DA, DC, ad angulos rectos.

g 5. vndec.
h 2. vndec.
i 28. primi.

[g] Quare rectę DB, DA, DC, in vno erunt plano; hoc est, CD, erit in plano per rectas DB, DA, ducto: [h] Est autem AB, in eodem plano, in quo DB, DA. Recta igitur CD, in eodem erit cum AB, plano. Quocirca cùm anguli interni ABD, CDB, sint recti, [i] erunt rectæ AB, CD, parallelæ. Si duæ itaque rectæ lineæ eidem plano ad rectos sint angulos, &c. Quod erat demonstrandum.

7. THEOR. 7. PROPOS. 7.

SI duæ sint parallelæ rectæ lineæ, in quarum vtraque sumpta sint quælibet puncta: Illa linea, quæ ad hæc puncta adiungitur, in eodem est cum parallelis plano.



k 3. vndec.

IN parallelis AB, CD, sumantur vtcunque duo puncta E, & F, quę recta connectãtur EF. Dico rectam EF, in eodem esse plano, in quo per definitionem parallelarum, sunt parallelæ AB, CD. Si enim recta EF, non concedatur esse in eodem plano parallelarum, sed extra; secet iam aliud planum superficiem parallelarum per puncta E, & F, sitque communis sectio horum planorum EGF, [k] quæ recta linea erit. Duæ igitur rectæ EF, EGF, cùm habeant eosdem terminos E, & F, superficiem claudent. Quod est absurdum. Non ergo extra planum parallelarum AB, CD, erit recta EF. Quare si duæ sint parallelæ rectæ lineæ, in quarum vtraque sumpta sint quælibet puncta: Illa linea, quæ ad hæc puncta adiungitur, in eodem est cum parallelis plano. Quod erat demonstrandum.

SCHOLIVM.

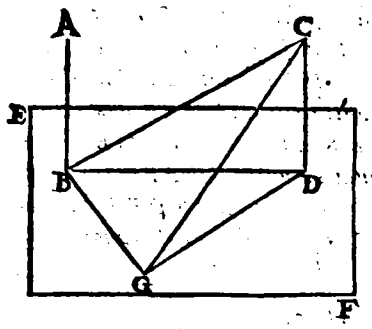
HAEC eadem propositio vera est, etiamsi duæ rectæ AB, CD, parallelæ non sint, dummodò in eodem plano existant, vt manifestum est ex demonstratione.

8. THEOR. 8. PROPOS. 8.

SI duæ sint parallelæ rectæ lineæ, quarum altera ad rectos cuidam plano sit angulos: Et reliqua eidem plano ad rectos angulos erit.

[1] SINT parallelæ rectæ AB, CD; sitque CD, plano EF, ad angulos rectos. Dico & AB, eidem plano EF, esse ad rectos angulos. Ducta enim recta BD, in plano EF; erit per defin. 3. huius libri,

angulus



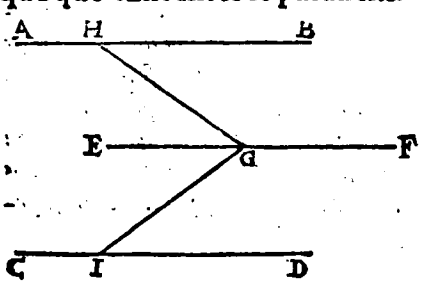
angulus GDB, rectus: [a] Sunt autem duo CDB, ABD, duobus rectis æquales. Igitur & ABD, rectus erit. Iam in plano EF, ducatur BG, perpendicularis ad BD; ponanturq; æquales BG, CD. Coniungátur deinde rectæ DG, GC, CB. Quoniam igitur latera CD, DB, trianguli CDB, æqualia sunt lateribus GB, BD, trianguli GBD, ex constructione; & anguli quoque ipsis contenti, CDB, GBD, æquales, nimirum recti; [b] Erunt bases CB, GD, æquales. Rursus quia latera CD, DG, trianguli CDG, æqualia sunt làteribus GB, BC, trianguli GBC; & basis est cómunis CG; [c] Erunt anguli CDG, GBC, dictis lateribus cõprehensi æquales. Est autem CDG, rectus ex defin. 3. huius lib. Igitur & GBC, rectus erit. Quare recta GB, duabus rectis BD, BC, se mutuò secantibus in B, (Si namque producerentur DB, CB, secarent sese in B, ob angulum CBD.) ad rectos angulos existit; [d] ac proinde ad rectos angulos erit plano per BD, BC, ducto: Est autem in hoc eodem plano recta AB; [e] propterea quòd rectæ BD, BC, in eodem sunt plano, in quo parallelæ AB, CD; cùm puncta B, C, D, existãt in parallelis AB, CD. Igitur & GB, recta rectæ BA, ad rectos erit angulos ex defin. 3. huius lib. Quare cùm AB, recta sit ad rectas BG, BD; [f] erit quoque AB, recta ad planum per BG, BD, ductum, hoc est, ad planum EF. Si duæ igitur sint parallelæ rectæ lineæ, quarum altera ad rectos cuidam plano sit angulos: Et reliqua eidem plano ad rectos angulos erit. Quod erat ostendendum.

[a] 29. primi.
[b] 4. primi.
[c] 8. primi.
[d] 4. vndec.
[e] 7. vndec.
[f] 4. vndec.

THEOR. 9. PROPOS. 9.

9.

QVAE eidem rectæ lineæ sunt parallelæ, sed non in eodem cum illa plano: Hæ quoque sunt inter se parallelæ.



SINT rectæ AB, CD, ipsi EF, parallelæ; non sint autem in eodem cum EF, plano. Dico AB, CD, parallelas quoq; esse. Nam à quolibet pũcto G, rectæ EF, ad ipsam EF, ducantur duæ perpendiculares; GH, quidem in plano parallelarum AB, EF; at GI, in plano parallelarũ CD, EF. Quoniam igitur EG, recta est ad duas rectas GH, GI, se tangentes mutuò in G; [g] erit recta quoque ad planum per ipsas GH, GI, ductũ. Quamobrem cùm sint parallelæ AB, EF; & EF, sit recta ad planum per GH, GI, ductum; [h] erit quoq; AB, ad idem planum recta. Similiter cùm sint parallelæ CD, EF; sit autem EF, recta ad planum per GH, HI, ductum; [i] erit etiam CD, recta ad idem planum; [k] Atque proinde rectæ AB, CD, cùm rectæ sint ad idem planum per GH, GI, ductum, parallelæ erunt. Quæ igitur eidem rectæ lineæ sunt parallelæ, sed non in eodem cum illa plano: hæ quoque sunt inter se parallelæ. Quod erat demonstrandum.

[g] 4. vndec.
[h] 8. vndec.
[i] 8. vndec.
[k] 6. vndec.

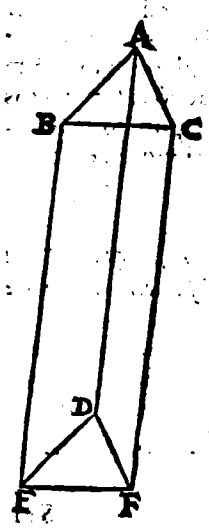
SCHOLIVM.

DATA opera Euclides voluit, duas rectas AB, CD, non esse in eodem plano cum recta EF, cui sunt parallelæ. Nam si forent in eodem plano cum ipsa EF; essent AB, CD, inter se parallelæ, ex 30. propos. 1. lib. Superuacaneum ergo esset, hic idem demonstrare.

THEOR. 10. PROPOS. 10.

10.

SI duæ rectæ lineæ se mutuò tangentes, ad duas rectas se mutuò tangentes sint parallelæ, non autem in eodem plano: illæ angulos æquales comprehendent.

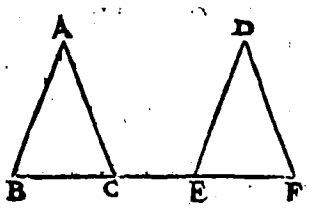


SINT rectæ AB, AC, se tangentes in A, parallelæ rectis DE, DF, se tangentibus in D; non sint autem AB, AC, in eodem plano, in quo DE, DF. Dico angulos BAC, EDF, ab ipsis comprehẽsos esse æquales. Ponantur enim AB, DE, inter se æquales, & AC, DF, inter se; ducanturq; rectæ BC, EF, BE, AD, CF. Quoniam igitur AB, DE, parallelæ sunt & æquales; [l] erunt quoq; BE, AD, parallelæ & æquales. Simili argumento parallelæ erunt & æquales CF, AD. Quare cùm BE, CF, parallelæ & æquales sint eidem AD; [m] erũt etiam BE, CF, inter se parallelæ, & æquales: [n] Ac propterea parallelæ & æquales erunt rectæ BC, EF. Quia ergo latera AB, AC, trianguli ABC, æqualia sunt lateribus DE, DF, trianguli DEF, ex constructione; & basis BC, basi EF, æqualis, vt modò demonstrauimus; [o] Erunt & anguli BAC, EDF, dictis lateribus comprehensi, æquales. Si igitur duæ rectæ lineæ se mutuò tangentes, &c. Quod erat ostendendum.

[l] 33. primi.
[m] 9. vndec.
[n] 33. primi.
[o] 8. primi.

SCHOLIVM.

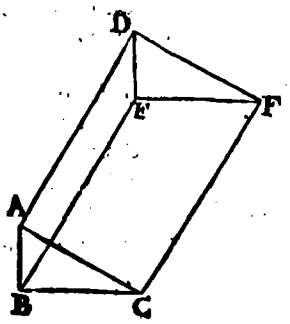
CONCLVSIO huius theorematis vera etiam est, quando priores duæ



a 29. primi

linea in eodem ſunt plano cum duabus poſterioribus. Sint enim quatuor lineæ A B, A C, D E, D F, in eodem plano, ſitq; A B, ipſi D E, & A C, ipſi D F, parallelæ. Dico angulos B A C, E D F, eſſe æquales. Nam ponantur æquales A B, D E, & A C, D F; ducanturq; rectæ B C, E F, quæ aut in vna recta linea erunt conſtitutæ, aut non. Sint prius in vna recta B F. Quoniã igitur parallelæ ſunt A B, D E, [a] *æquales erunt anguli A B C, D E F, internus & externus. Similiter æquales erunt anguli A C B, D F E; Sunt enim & A C, D F, parallelæ. Quare duo anguli A B C, A C B, trianguli A B C, æquales ſunt duobus angulis D E F,*

b 32. primi *D F E, trianguli D E F.* [b] *Igitur anguli quoque reliqui B A C, E D F, æquales erunt. Quod eſt propoſitum.*



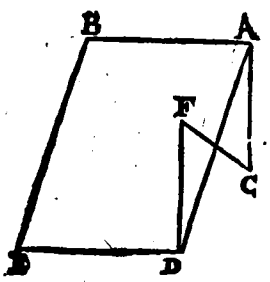
c 33. primi.

d 30. primi
e 33. primi

f 8. primi.

Non ſint iam B C, E F, in vna recta linea conſtitutæ. Ductis rectis A D, B E, C F, cùm A B, D E, ſint parallelæ & æquales; [c] *erunt & A D, B E, parallelæ & æquales. Eadem ratione A D, C F, parallelæ erunt & æquales, eò quòd A C, D F, parallelæ ponuntur, & æquales. Quare & B E, C F, eidem A D, parallelæ exiſtentes & æquales,* [d] *inter ſe parallelæ erunt & æquales:* [e] *Ac proinde parallelæ & æquales quoq; erunt B C, E F. Itaque cùm duo latera A B, A C, trianguli A B C, æqualia ſint duobus lateribus D E, D F, trianguli D E F; & baſis B C, baſi E F,* [f] *erunt anguli B A C, E D F, contenti dictis lateribus, æquales. Quod eſt propoſitum.*

Caeterum vt concluſio huius theorematis rectè ex data hypotheſi colligatur, neceſſe eſt, rectas lineas parallelas ita eſſe poſitas, (ſiue omnes ſint in eodem plano, ſiue non,) vt tres rectæ A D, B E, C F, nullatenus ſe mutuò ſecent; vt ex prima & vltima figura apparebit. Nam aliàs concluſio vera non erit.

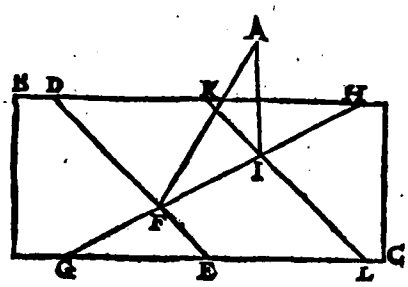


Sunt enim rectæ A B, A C, rectis D E, D F, parallelæ in hac figura; & tamen anguli B A C, E D F, quos comprehendunt, non ſunt æquales, cùm ille ſit acutus, hic verò obtuſus. Hoc autem ideò euenit, quòd A D, C F, ſe mutò ſecant. Vnde quamuis A C, D F, ſint parallelæ & æquales, non tamen propterea A D, C F, quæ eas coniungunt, parallelæ ſunt & æquales, propterea quòd eas non coniungunt ad eaſdem partes, vt vult propoſ. 33. lib. 1. Quare demonſtratio huius theorematis locum non habet, deficiente hac conditione; quatenus in ſuperioribus figuris ſeruatur.

11.

PROBL. 1. PROPOS. 11.

A dato puncto in ſublimi, ad ſubiectum planum perpendicularem rectam lineam ducere.



a 12. primi.
b 11. primi.
c 12. primi.

d 31. primi.
e 4. vndec.
f 8. vndec.
g 2. vndec.
h 4. vndec.

Sit à puncto A, in ſublimi ad ſubiectum planum B C, ducenda perpendicularis. Ducatur in plano B C, recta vtcunque D E; [a] ad quam ex A, deducatur perpendicularis A F: [b] Et in plano B C, per F, ad D E, perpendicularis ducatur G H: [c] ad quam ex A, perpendicularis demittatur A I. Dico A I, eſſe perpendicularem ad planum ſubiectum B C. [d] Ducta enim in plano B C, per I, ipſi D E, parallela K L; cùm D E, ad rectos angulos ſit duabus F A, F H, ex conſtructione, [e] ac proinde recta ad planum per F A, F H, ductum; [f] erit quoque K L, ad idem planum per F A, F H, ductum recta. [g] Quoniam verò A I, in eodem eſt cum rectis F A, F H, plano, tangitque rectam K L, in I; erit per definitionem 3. huius lib. angulus K I A, rectus; atque adeò A I, ad rectos angulos erit duabus K I, I F. [h] Igitur A I, ad planum B C, recta erit. A dato ergo puncto in ſublimi, ad ſubiectum planum perpendicularem rectam lineam duximus. Quod faciendum erat.

SCHOLIVM.

Quod ſi quando A I, ad G H, ducta perpendicularis cadat in punctum F, ita vt eadem ſit, quæ A F, ad

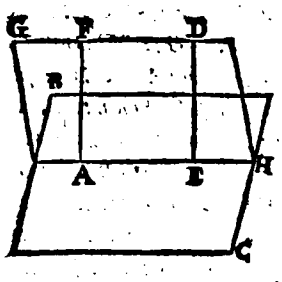
a 4. vndec. *D E, ducta perpendicularis;* [a] *erit ipſa A F, ab initio ad D E, ducta perpendicularis ad ſubiectum planum B C, perpendicularis, cùm perpendicularis ſit ad vtramque D E, G H.*

12.

PROBL. 2. PROPOS. 12.

Dato plano à puncto, quod in illo datum eſt, ad rectos angulos rectam lineam excitare.

Sit

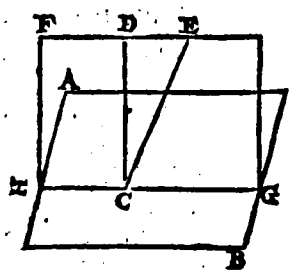


SIT à dato puncto A, in plano B C, ducenda perpendicularis ad datum planum B C. [a] Ex quouis puncto D, in sublimi demittatur ad planum B C, perpendicularis D E, quæ si ceciderit in A, punctum, factum erit, quod proponitur: Si verò ceciderit in aliud punctum E, extensa recta per E, & A, [b] ducatur per A, ipsi D E, parallela A F, in plano G H, per D E, E A, ducto. Dico A F, rectam esse ad planum datum B C. Cùm enim D E, A F, parallelæ sint; & D E, recta ad planum B C; ex constructione; [c] erit quoq; A F, ad idem planum B C, recta. Itaque dato plano, à puncto, quod in illo datum est, &c. Quod faciendum erat.

[a] 11. vndec.
[b] 31. primi.
[c] 8. vndec.

THEOR. 11. PROPOS. 13. 13.

DATO plano, à puncto, quod in illo datum est, duæ rectæ lineæ ad rectos angulos non excitabuntur, ad easdem partes.



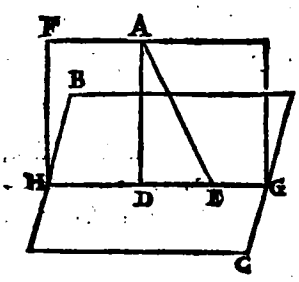
SIT datum planum A B. Dico à dato eius puncto C, ad easdem partes non posse educi duas perpendiculares ad planum A B. Ducantur enim, si potest fieri, duæ perpendiculares C D, C E, ad planum A B; & per C D, C E, [a] quæ in vno, eodemque plano sunt, ducatur planum F G, secans planum A B, per rectam lineam G H. Cùm igitur E C, D C, rectæ sint ad planum A B; erunt per defin. 3. huius lib. anguli E C G, D C G, recti, ac proinde æquales; pars & totum. Quod est absurdum. Dato igitur plano, à puncto, quod in illo datum est, duæ rectæ lineæ ad rectos angulos non excitabuntur, ad easdem partes. Quod erat demonstrandum.

[a] 2. vndec.

ALITER. Ducantur, si fieri potest, ex C, ad planum A B, duæ perpendiculares C D, C E. Cùm igitur duæ D C, E C, rectæ sint ad idem planum A B; [b] erunt ipsæ inter se parallelæ, cùm tamen conueniant in puncto C. Quod est absurdum.

[b] 6. vndec.

SCHOLIVM.



EODEM modo à puncto in sublimi ad subiectum planum duæ rectæ lineæ ad angulos rectos non demittentur. Ducantur enim ex A, puncto in sublimi ad subiectum planum B C, si fieri potest, duæ perpendiculares A D, A E. Ducatur per A D, A E [a] quæ in vno plano sunt, planum F G, secans planum B C, per rectam G H. Cùm igitur A D, A E, rectæ sint ad planum B C, erunt per defin. 3. huius lib. duo anguli A D E, A E D, recti interni in triangulo A D E. Quod est absurdum; [b] cùm sint duobus rectis minores quilibet duo anguli in triangulo quouis assumpti.

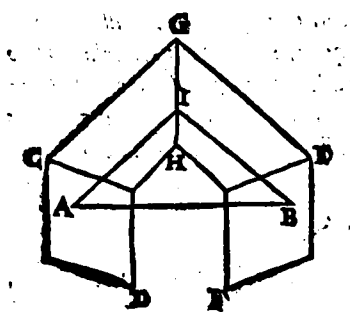
[a] 2. vndec.
[b] 17. primi.

ALITER. *Si A D, A E, rectæ sunt ad planum B C; [c] ipsæ erunt inter se parallelæ, cùm tamen conueniant in puncto A. Quod est absurdum.*

[c] 6. vndec.

THEOR. 12. PROPOS. 14. 14.

AD quæ plana, eadem recta linea recta est; illa sunt parallela.



SIT recta A B, ad plana C D, E F, recta. Dico parallela esse plana C D, E F. Si enim non credantur esse parallela, producta inter se conuenient. Conueniant ad partes C, E; [a] & faciant communem sectionem rectam lineam G H: In qua sumpto puncto vtcunque I, ducantur rectæ I A, I B, in planis G C D, G E F. Quia igitur A B, recta ponitur ad plana G C D, G E F; erunt per defin. 3. huius lib. duo anguli I A B, I B A, recti, in triangulo A B I. [b] Sed & minores duobus rectis sunt. Quod est absurdum. Igitur plana C D, E F, producta nunquam inter se conueniunt. Parallela ergo sunt. Ad quæ igitur plana, eadē recta linea recta est, &c. Quod erat demonstrandum.

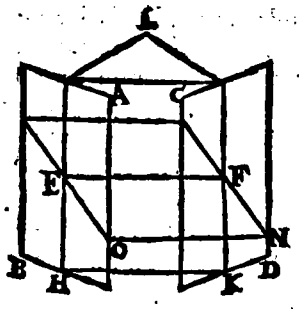
[a] 3. vndec.
[b] 17. primi.

SCHOLIVM.

FACILE etiam demonstrari poterit conuersum huius, videlicet.

SI fuerint duo plana parallela, recta linea, quæ ad vnum eorum recta fuerit, ad reliquum quoque recta erit.

SINT duo plana parallela A B, C D, ad quorum alterum A B, recta sit linea recta E F. Dico E F, rectam quoq; esse ad planum reliquum C D. Secet enim planum aliquod, nempe G K, plana A B, C D, per lineam rectam E F, incedens, faciatq; communes sectiones cum dictis planis rectas G H, I K: eruntq; anguli G E F, H E F, recti, per definitionem 3. huius libri. Ac proinde recti etiam erunt anguli I F B, K F E. (Si enim



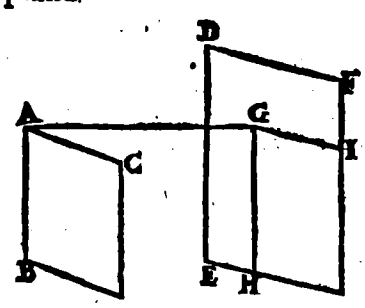
a 1. vndec.

b 4. vndec.

alter eorum, nempe I F E, dicatur acutus; erunt duo anguli G E F, I E E, duobus rectis minores. Quare recta E G, F I, ad partes G, I, in plano G K, conuenient, nimirum in puncto L; atque adeò & plana A B, C D, in quibus existunt, ad easdem partes conuenient ad punctum L; [a] cùm tota recta H G L, sit in vno plano, nempe in A B, producto; Item tota recta K I L, in vno quoque plano, nimirum in C D, protracto. Quod est absurdum, cùm ponantur parallela. Recti ergo sunt anguli I F E, K F E.) Eodem modo si aliud planum, videlicet M N, eadem plana secet per E F, faciens alias rectas, communes cum ipsis sectiones M O, P N; erunt anguli P F E, N F E, recti. Itaque cùm E F, sit recta ad duas rectas I K, P N, [b] recta quoque erit E F, ad planum C D, per ipsas ductum. Quod est propositum.

15. ## THEOR. 13. PROPOS. 15.

Si duæ rectæ lineæ se mutuò tangentes, ad duas rectas se mutuò tangentes sint parallelæ, non in eodem consistentes plano: Parallela sunt, quæ per illa ducuntur, plana.



a 11. vndec.

b 31. primi.

c 9. vndec.

d 29. primi.

e 4. vndec.

f 14. vndec.

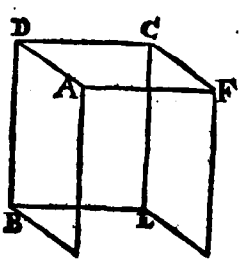
Sint duæ rectæ lineæ A B, A C, se tangentes in A, parallelæ duabus rectis lineis D E, D F, se tangentibus in D, existentibusq; in alio cum illis plano. Dico & plana B C, E F, per ipsas ducta, esse parallela. [a] Ex A, enim deducatur ad planũ E F, perpendicularis A G, occurrens plano E F, in puncto G. [b] Deinde in plano E F, per G, ducantur G H, G I, ipsis D E, D F, parallelæ. Quoniam igitur rectæ A B, G H, parallelę sunt ipsi D E; [c] erunt & A B, G H, inter se parallelæ; [d] Ac proinde anguli B A G, A G H, duobus rectis æquales: Est autem A G H, rectus, ex defin. 3. huius lib. Rectus ergo erit & angulus B A G. Simili argumento concludes, angulum C A G, rectum esse. Itaque cùm recta G A, sit recta duabus A B, A C; [e] recta quoque erit G A, ad planum B C, per ipsas ductum. Est autem & recta ad planum E F, ex constructione. [f] Igitur parallela sunt plana B C, E F. Si ergo duę rectæ lineæ se mutuò tangentes, &c. Quod erat demonstrandum.

SCHOLIVM.

Quod si perpendicularis ex A, ad planum E F, ducta cadat in ipsummet punctum D, concludetur idem, hoc excepto, quòd in plano E F, non sunt ducenda alia parallela. Vt si lineæ G H, G I, ponantur parallelæ rectis A B, A C, ita vt A G, ad planum H I, per G H, G I, ductum perpendicularis, cadat in G; ostendemus, vt prius, G A, esse rectam ad planum B C, per rectas A B, A C, ductum, &c.

Ex hoc theoremate non difficilè erit problema subsequens: Videlicet.

Dato plano, per datum punctum, quod in eo non est, parallelum planum ducere.



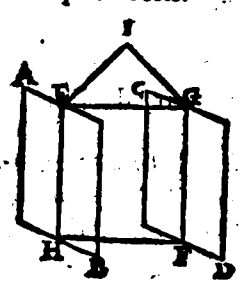
a 31. primi.

b 15. vndec.

Datum planum sit A B, punctumq; extra ipsum sit C, per quod ducendum sit planum, plano A B, parallelum. In plano A B, ducantur vtcunque duæ rectæ D B, D A, se tangentes in D, puncto, à quo ad C, recta ducatur D C. Deinde in plano B C, per rectas D B, D C, ducto, [a] agatur C E, ipsi D B, parallela; Et in plano A C, per rectas D A, D C, ducto, fiat quoque C F, ipsi D A, parallela. Dico planum E F, per rectas C E, C F, ductum, parallelum esse plano dato A B. Cùm enim duæ rectæ D B, D A, se tangentes in D, duabus rectis C E, C F, se tangentibus in C, existentibusq; in alio cum illis plano, parallelæ sint; [b] parallela erunt plana A B, E F, per ipsas ducta. Quod est propositum.

16. ## THEOR. 14. PROPOS. 16.

Si duo plana parallela plano quopiam secentur: communes illorum sectiones sunt parallelæ.



a 1. vndec.

Secentur plana A B, C D, parallela plano E F, per rectas E H, G F. Dico communes sectiones eorum E H, G F, esse lineas parallelas. Si enim non sunt parallelæ, productæ inter se conuenient, cùm sint in plano E F, secante. Cõueniant igitur in puncto I. [a] Quia ergo tota recta H E I, in vno est plano, nimirum in A B, producto; Item tota recta F G I, in vno quoq; est plano, videlicet in C D, producto; conuenient etiam plana A B, C D, producta ad I. Quod est absurdum, cùm ponantur parallela. Sunt igitur rectæ E H, G F, parallelæ. Quare si duo plana parallela plano quopiam secentur, &c. Quod erat demonstrandum.

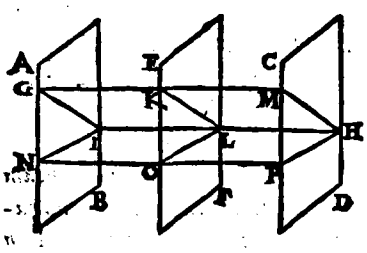
SCHO-

SCHOLIVM.

Hoc theorema nulla ratione poteſt conuerti. Quamuis enim communes ſectiones planorum parallelorum facta ab alio plano ſecante, ſint parallelæ, vt hic demonſtratum eſt; Non tamen omnia illa plana, quorum communes ſectiones facta ab alio plano ſecante ſunt parallelæ, parallela ſunt, cùm per duas lineas rectas parallelas infinita plana poſſint duci, quorum duo tantùm ſunt parallela, alia verò omnia in aliquam partem producta conueniunt.

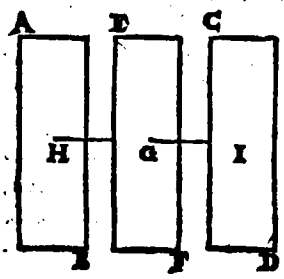
Porro ex hoc theoremate colligimus aliud ſimile theoremati 30. lib. 1.

QVAE eidem plano parallela, & inter ſe ſunt parallela.



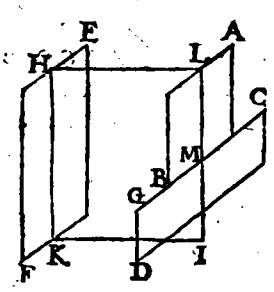
SINT duo plana AB, CD, plano EF, parallela. Dico & AB, CD, parallelæ eſſe. Secentur enim omnia tria plana plano GH, ſint q communes eorum ſectiones rectæ GI, KL, MH. Secentur rurſus alio plano NH, ſint q communes eorum ſectiones rectæ NI, OL, PH, hac tamen lege, vt duo plana ſecantia GH, NH, ſe quoque mutuò ſecent, quorum ſectio communis ſit linea recta HI. Quia igitur parallela plana AB, EF, ſecantur plano GH, [a] *erunt communes ſectiones GI, KL, parallelæ. Eodem modo parallelæ erunt MH, KL;* [b] *atque adeò parallelæ erunt inter ſe GI, MH. Non aliter oſtendemus, parallelas eſſe NI, PH. Itaque cùm IG, IN, ſe mutuò tangentes in I, parallelæ ſint rectis HM, HP, ſe tangentibus in H, exiſtentibus q in alio plano;* [c] *erunt plana AB, CD, per ipſas ducta, parallela. Quod eſt propoſitum.*

a 16. vndecimi.
b 9. vndec.
c 15 vndec.



ALITER. Sumatur in tertio plano EF, punctum quodlibet G, à quo in vtramque partem educatur ad planum EF, linea recta perpendicularis, occurrens plano AB, in puncto H, & plano CD, in puncto I. Quoniam igitur linea HG, recta eſt ad planum EF, recta quoq; erit ad planum AB, ſibi parallelum, per ea, quæ in ſcholio propoſitionis 14. huius lib. demonſtrauimus. Eadem ratione GI, recta erit ad planum CD. Quamobrem cùm recta HI, ſit recta ad plana AB, CD; [d] *parallelæ inter ſe erunt plana AB, CD. Quod eſt propoſitum.*

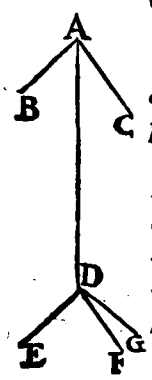
d 14. vndecimi.



QVOD ſi duo plana fuerint alteri plano parallela, non tamen inter ſe, ſed conueniant, tunc idem efficient planum; quemadmodum duæ rectæ, quæ alteri rectæ ſunt parallelæ, ſi conueniant, vnam rectam conſtituunt lineam, veluti ad propoſit. 30. lib. 1. demonſtrauimus. Sint enim plana AB, CD, plano EF, parallela, conueniantq; producta ſecundùm rectam CG. Dico plana AB, CD, vnum planum conſtituere. Secet enim planum quodpiam HI, omnia tria plana per lineas rectas HK, LM, MI. Quoniam igitur parallela ſunt plana AB, EF; [e] *erunt & communes ſectiones LM, HK, parallelæ. Eadem ratione parallelæ erunt IM, HK. Quamobrem cùm rectæ LM, IM, parallelæ ſint ipſi HK, exiſtant q in eodem plano ſecante HI, & conueniant in M; ipſæ erunt in rectum & cõtinuum poſitæ, per ea, quæ ad 30. propoſ. lib. 1. oſtendimus. Ac proinde plana AB, CD, vnum planum efficiẽt;* [f] *propterea quòd recta LI, in vno iaceat plano. Quod eſt propoſitum.*

e 16. vndecimi.
f 1. vndec.

ITAQVE duo plana, quæ parallela ſint alteri plano, vel inter ſe parallela erunt, vel certè, ſi producta conueniant, vnum planum conficient.



PORRO conuerſum quoq; propoſitionis 10. facilè demonſtrabimus, hoc loco; videlicet.

SI in planis parallelis duo anguli ſint æquales, & linea vna vnius anguli lineæ vni alterius anguli parallela; erit quoque altera linea alteri lineæ parallela, ſi modò ducta ſint ex eadem parte plani, per priores parallelas ducti.

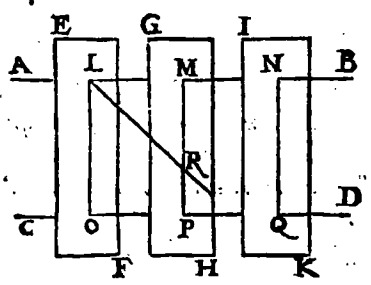
IN planis enim parallelis ſint anguli æquales BAC, EDF, ſitq; AB, ipſi DE, parallela, & AC, DF, ſint ad eaſdem partes plani per AB, DE, ducti. Dico AC, DF, parallelas quoque eſſe: hoc eſt, ductam rectam AD, planum per AC, AD, ductum, tranſire etiam per rectam DF; ita vt AC, DF, ſint communes ſectiones factæ à plano per AC, AD, ducto, in planis parallelis per AB, AC, & DE, DF, ductis. Hinc enim efficitur, [g] *ſectiones AC, DF, parallelas eſſe. quod eſt propoſitum. Si namq; planum per AC, AD, ductum, non facit in illis planis parallelis ſectiones AC, DF, faciat ſectiones AC, DG,* [h] *quæ parallelæ erunt.* [i] *Igitur angulus EDG, angulo BAC, hoc eſt, angulo EDF, æqualis erit: quod eſt abſurdum, cùm vnus ſit totũ, & alter pars.*

g 16. vndecimi.
h 16. vndecimi.
i 10. vndec.

THEOR. 15. PROPOS. 17.

17.

SI duæ rectæ lineæ parallelis planis ſecentur; In eaſdem rationes ſecabuntur.



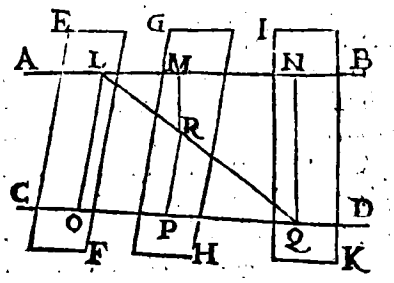
RECTAE lineæ AB, CD, (siue eæ parallelæ sint, vt in figura, siue non, existentes tamen in eodem plano; siue in transuersum positæ, in diuersis existentes planis) secentur planis parallelis EF, GH, IK, in punctis L, M, N, O, P, Q. Dico eas secari proportionaliter, hoc est, segmenta earum inter dicta plana intercepta, esse proportionalia, vt quidem LM, ad MN, ita esse OP, ad PQ. Ducantur enim rectæ LO, NQ, in planis EF, IK, & coniungatur recta LQ, occurrēs plano GH, in R, puncto, à quo ad puncta M, P, rectæ ducantur RM, RP, in eodem plano GH; [a] Eritque triangulum LNQ, in vno plano: similiter triangulum LOQ, in vno plano. Quoniam verò plana parallela GH, IK, secantur plano trianguli LNQ, [b] erunt communes sectiones eorum MR, NQ, parallelæ. Pari ratione parallelæ erunt RP, LO. [c] Quam ob rem erit vt LR, ad RQ, ita LM, ad MN; Item vt LR, ad RQ, ita OP, ad PQ; Ac proinde vt LM, ad MN, ita OP, ad PQ. Si igitur duæ rectæ lineæ parallelis planis secentur, &c. Quod erat demonstrandum.

a 2. vndec.
b 16. vndec.
c 2. sexti.

SCHOLIVM.

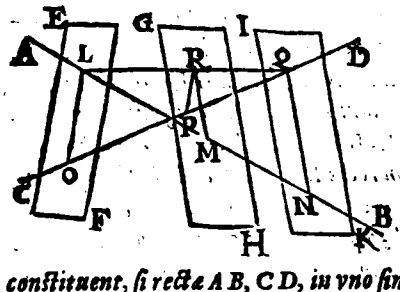
QVOD si data duæ rectæ AB, CD, sint in vno eodemq; plano, efficient duæ rectæ RM, RP, vnam lineam rectam, vt in superiori figura apparet. Nam tunc planum per rectas AB, CD, ductum secabit tria plana parallela in punctis L, O, M, P, N, Q, & per rectas LO, MP, NQ, [a] quæ inter se parallelæ erunt, punctum q; R, in recta MP, existet, cùm sit & in plano per rectas AB, CD, ducto (propter puncta L, Q, in eodem illo plano existentia, vt in scholio propos. 7. huius lib. diximus) & in plano GH, atq; adeò in MP, communi eorum planorum sectione. Quare RM, RP, vnam rectam lineam MP, constituent, nimirum communem sectionem planorum LOQN, GH.

a 16. vndecimi.



b 2. vndec.
c 1. vndec.

SI verò duæ rectæ AB, CD, non sint in eodem plano, non efficient RM, RP, vnam rectam lineam, vt in hisce duabus figuris apparet: quia [b] cùm triangulum LOQ, sit in vno plano, & triangulum LNQ, in vno etiam plano, quod ab illo diuersum est; (Si namq; duo illa triangula in vno eodemq; plano existerent, essent duæ rectæ AB, CD, in eodem illo plano, quod ex ipsis constituitur, quod est contra hypothesim.) erunt rectæ RM, RP, in diuersis illis planis triangulorum; ac proinde vnam rectam non constituent; [c] aliàs in vno essent plano. quod est absurdum.

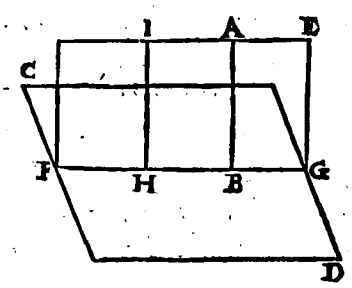


EADEM hæc propositio locum habet, si duæ rectæ AB, CD, in eodem plano existentes, non sint parallelæ, vt in eisdem hisce duabus figuris apparet: sed tunc MRP, semper erit vna linea recta, vt ad initium huius scholij demonstratum est, quādo AB, CD, in vno plano ponebantur. Eadem enim demonstratio hic adhiberi potest.

NON secus, si plura plana parallela, quàm tria, rectas AB, CD, secent, erunt earum partes proportionales, & communes sectiones mediorum planorum & triangulorum LOQ, LNQ, rectas lineas constituent, si rectæ AB, CD, in vno sint plano, non rectas autem, si non sint in vno plano: quemadmodum de rectis MR, RP, dictum est.

18. THEOR. 16. PROPOS. 18.

SI recta linea plano cuipiam ad rectos sit angulos: Et omnia, quæ per ipsam, plana eidem plano ad rectos angulos erunt.



a 31. primi.
b 8. vndec.

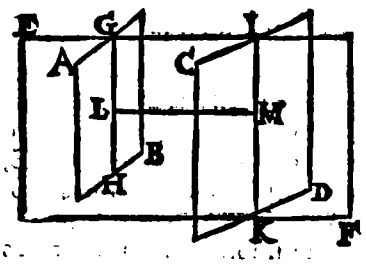
SIT recta AB, ad planum CD, recta. Dico omnia plana per rectam AB, ducta, esse recta ad idem planum CD. Ductum enim sit per AB, planum EF, secans planum CD, per rectam lineam FG. Sumpto deinde puncto H, vtcunq; in recta FG, [a] ducatur in plano EF, ipsi AB, parallela HI. Quoniam igitur AB, IH, parallelæ sunt, & AB, ponitur recta ad planum CD; [b] erit quoque IH, ad idem planum CD, recta: ac proinde per defin. 3. huius libri, ad communem sectionē FG, perpendicularis. Eadem ratione omnes lineæ, quæ in plano EF, ipsi AB, ducentur parallelæ, erunt ad planum CD, rectæ; ac proinde per defin. 3. huius lib. ad communem sectionem FG, perpendiculares. Quare rectum erit planum EF, ad planum CD, per defin. 4. huius libri. Similiq; argumento ostendentur omnia alia plana per rectam AB, ducta, ad planum CD, esse recta. Si igitur recta linea plano cuipiam ad rectos sit angulos, &c. Quod erat demonstrandum.

SCHOLIVM.

SCHOLIVM.

Ex his aliud hoc theorema licebit demonſtrare. Videlicet.

Dvo plana ad idem planum recta, in quo faciant communes ſectiones parallelas, parallela ſunt: Et duorum planorum parallelorum, ſi vnum cuipiam plano ad rectos ſit angulos, erit & alterum ad idem rectum.



Sint plana AB, CD, ad planum EF, recta, facientia ſectiones GH, IK, parallelas. Dico ea parallela eſſe. In plano enim EF, ducatur ad GH, perpendicularis LM, quæ ex defin. 4. huius lib. ad planum AB, recta erit: [a] eademq; perpendicularis erit ad IK; ac propterea ex defin. 4. huius lib. ad planum quoque CD, recta erit. Quia igitur LM, ad vtrumque planum AB, CD, recta eſt, [b] ipſa parallela erunt. [a] 29. primi. [b] 14 vndec.

Sed iam parallela ſint plana AB, CD; ſitq; AB, rectum ad planum EF. Dico & CD, rectum eſſe ad idem planum EF. Sint enim communes ſectiones plani EF, & planorum AB, CD, recta GH, IK; [c] quæ parallelæ erunt. Ducta quoq; in plano EF, ad rectam GH, linea perpendiculari LM; erit hæc, ex defin. 4. huius lib. ad AB, planum recta. Igitur ex ſcholio propoſ. 14. huius lib. eadem LM, ad planum CD, recta quoque erit. [d] *Quare planum EF, per rectam LM, ductum ad planum CD, erit rectum; ideoq; viciſſim planum CD, ad planum EF, erit quoq; rectum. Quod eſt propoſitum.*

[c] 16 vndec. [d] 18 primi.

Hinc etiam problema hoc abſoluetur.

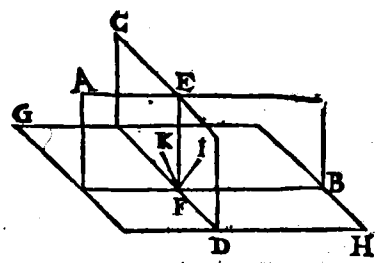
Per rectam in plano quouis datam planum ducere, quod ad ipſum planum ſit rectum.

Sit data recta FG, in plano CD, vt in figura huius propoſ. oporteat q; per FG, planum ducere, quod ad planum CD, rectum ſit. Ex quouis puncto B, rectæ FG, [e] *erigatur ad planum CD, perpendicularis BA, & per rectas AB, FG, planum ducatur EF.* [f] *quod ad planum CD, rectum erit. Quod eſt propoſitum.*

[e] 12 vndec. [f] 18. vndec.

THEOR. 17. PROPOS. 19. 19.

Si duo plana ſe mutuò ſecantia, plano cuidam ad rectos ſint angulos, communis etiam illorum ſectio ad rectos eidem plano angulos erit.



Sint duo plana AB, CD, ſe mutuò ſecantia per lineam rectam EF, ad planum GH, recta. Dico communem illorum ſectionem EF, rectam quoque eſſe ad idem planum GH. Aut enim EF, ad BF, DF, communes ſectiones planorum AB, CD, cum plano GH, recta eſt, aut non. Si recta eſt EF, ad BF, DF, [a] recta quoq; erit ad planum GH, quod per ipſas ducitur. Si verò EF, concedatur recta ad alteram rectarum BF, DF, tantùm; ſit ea recta ad BF. Quoniam igitur planum AB, ad planum GH, ponitur rectum erit EF, quæ in plano AB, ad BF, communem eius ſectionem cum plano GH, ducitur perpendicularis, ad planum GH, recta, ex 4. defin. huius lib. Idem cõcludes, ſi EF, concedatur recta ad DF. Erit enim & tunc EF, ad planum GH, recta ex defin. 4. huius lib. cùm perpendicularis ponatur ad DF, communem ſectionem plani CD, cum plano GH, ducaturque in plano CD, ad planum GH, recto. Si denique EF, ad neutram BF, DF, eſſe credatur recta; [b] ducatur ex F, in plano AB, ad BF, communem eius ſectionem cum plano GH, perpendicularis FI; Item in plano CD, ad DF, communem eius ſectionem cum plano GH, perpendicularis FK. Quoniam igitur planum AB, rectum ponitur ad planum GH, erit quoque perpendicularis IF, quæ in plano AB, ad BF, communem eius ſectionem cum plano GH, ducitur, recta ad planum GH, ex 4. defin. huius lib. Eadem ratione erit KF, ad idem planum GH, recta; Ac proinde à puncto F, ad planum GH, duæ perpendiculares ſunt excitatæ. Quod fieri non poſſe ſuprà [c] demonſtratum eſt. Quare EF, recta erit ad planum GH. Si duo igitur plana ſe mutuò ſecantia plano cuidam ad rectos ſint anguli, &c. Quod erat demonſtrandum.

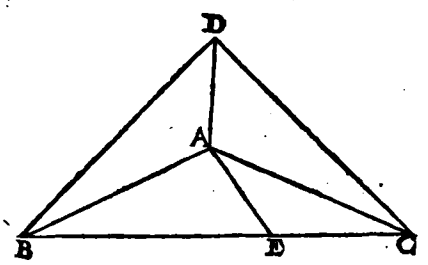
[a] 4. vndec. [b] 11. primi. [c] 13. vndec.

THEOR. 18. PROPOS. 20. 20.

Si ſolidus angulus tribus angulis planis contineatur: Ex his duo quilibet vtut aſſumpti, tertio ſunt maiores.

Continebatvr angulus ſolidus ad A, tribus angulis planis BAC, CAD, DAB. Dico quoslibet duos reliquo eſſe maiores. Si enim omnes tres ſint æquales, perſpicuum eſt, quoſuis duos maiores eſſe reliquo: Si verò duo tantùm ſint æquales, & tertius vtrouis minor, conſtat quoque quoslibet duos reliquo maiores eſſe. Quod ſi vnus, videlicet BAC, ſit maximus, reliqui autem ſiue æquales, ſiue inæquales, manifeſtum etiam eſt, quemlibet horum cum maximo illo BAC, reliquo eſſe maiorem. Dico iam hoc angulo maximo BAC, maiores quoque eſſe angulos duos

a 23. primi.

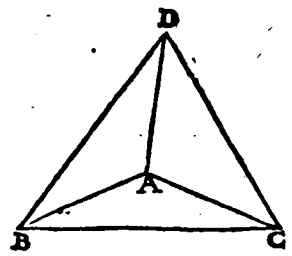


BAD, DAC. In plano enim per AB, AC, ducto a fiat angulus BAE, angulo BAD, æqualis: & recta AE, æqualis rectæ AD. Deinde in eodem plano per E, extendatur recta BC, secans rectas AB, AC, in B, & C: coniunganturque rectæ BD, DC. Quoniam igitur latera AD, AB, trianguli BAD, æqualia sunt lateribus AE, AB, trianguli BAE; & anguli quoque ipsis contenti per constructionem, æquales; b erunt bases BD, BE, æquales. c Quia verò latera DB, DC, maiora sunt latere BC; si demantur æquales rectæ BD, BE, relinquetur recta CD, maior quàm CE. Cùm igitur latera AD, AC, trianguli DAC, æqualia sint lateribus AE, AC, trianguli EAC; & basis CD, maior base CE: d erit angulus CAD, angulo CAE, maior. Additis ergo æqualibus angulis BAD, BAE, erunt duo anguli CAD, BAD, maiores duobus angulis CAE, BAE, hoc est, toto angulo BAC, qui maximus omnium ponebatur. Ac proinde duo quilibet multò maiores erunt reliquo non maximo. Quocirca si solidus angulus tribus angulis planis contineatur, &c. Quod erat ostendendum.

b 4. primi.
c 20. primi.
d 25. primi.

21. THEOR. 19. PROPOS. 21.

OMNIS solidus angulus sub minoribus, quàm quatuor rectis angulis planis continetur.

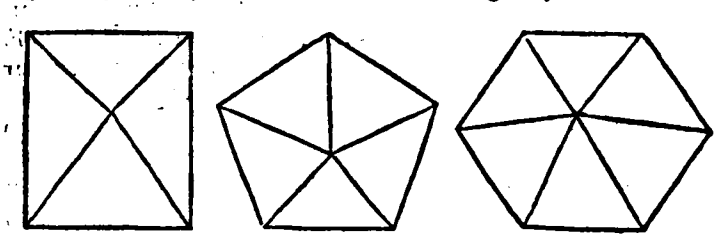


SIT angulus solidus A, contentus tribus planis angulis BAC, CAD, DAB. Dico hos tres angulos minores esse quatuor rectis. Ductis enim rectis BC, CD, DB, erunt constituti tres anguli solidi, B, C, D, quorum quilibet sub tribus angulis planis continetur, nempe B, sub CBA, ABD, DBC. At C, sub BCA, ACD, DCB: D, verò sub CDA, ADB, BDC. e Quoniam verò duo anguli CBA, ABD, maiores sunt angulo CBD; similiterque duo anguli BCA, ACD, maiores angulo BCD; & duo anguli CDA, ADB, maiores angulo CDB: erunt sex anguli CBA, ABD, BCA, ACD, CDA, ADB, tribus angulis CBD, BCD, CDB, maiores. f Hi autem tres æquales sunt duobus rectis. Illi ergo sex duobus rectis erunt maiores. Cùm igitur sex illi, vnà cũ tribus ad A, æquales sint sex rectis propter triangula tria BAC, CAD, DAB, (g sunt enim anguli cuiuslibet trianguli duobus rectis æquales.) si auferantur sex illi duobus rectis maiores, relinquentur tres ad A, solidum angulum constituentes, quatuor rectis minores. Omnis ergo solidus angulus, &c. Quod erat demonstrandum.

e 20. vndec.
f 32. primi.
g 32. primi.

SCHOLIVM.

QVONIAM hac demonstratio ab interpretibus accommodatur soli illi angulo solido, quem tres plani anguli constituunt; idcirco nos eam ad omnes angulos solidos extendemus, hoc modo.

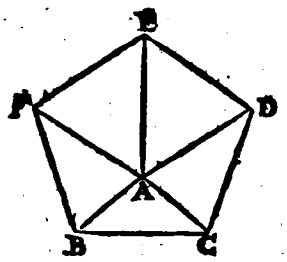


SIT angulus solidus quicunq; contentus quotcunq; angulis planis. Dico omnes illos esse quatuor rectis quoq; minores. Nam si omnibus angulis planis rectæ subtendantur, ordine in eodem plano existentes; constituetur pyramis, cuius vertex datus angulus solidus, tot laterum, angulorumúe, sub quot angulis planis solidus angulus comprehenditur: ac proinde totidem triangula pyramidem ambient. Vnde omnes anguli horum triangulorum, (a cùm anguli cuiuslibet trianguli duobus sint rectis æquales.) bis tot rectis erunt æquales, quot angulos continet basis: Sed omnes anguli basis æquales sunt quoque bis tot rectis, demptis quatuor, per ea, quæ ad 32. propos. 1. lib. demonstrauimus ex Proclo. Igitur omnes anguli dictorum triangulorum superabunt omnes angulos basis, quatuor rectis. Quare cùm omnes anguli horum triangulorum prope basin maiores sint angulis basis; (propterea, quòd prope basin constituantur anguli solidi, quorum quilibet tribus planis angulis continetur, b & horum quilibet duo reliquo, nempe eo, qui in basi, sint maiores.) superabunt omnes anguli horum triangulorum, angulos eorundem prope basin, minoribus quàm quatuor rectis. Cùm ergo omnes anguli omnium triangulorum superent illos eorundem, qui prope basin, angulis solidum angulum constituentibus; erunt anguli, qui angulum solidum componunt, quatuor rectis minores. Quod est propositum.

a 32. primi.
b 20. vnde.

VERVM vt res melius percipiatur, sit gratia exempli angulus solidus A, contentus quinque angulis planis BAC, CAD, DAE, EAF, FAB; quibus subtendantur ordine rectæ BC, CD, DE, EF, FB, in vno eodemq; plano, in eo videlicet, quod rectæ AB, AC, AD, AE, AF, secat in punctis B, C, D, E, F; ita vt constituatur pyramis pentagona, habens videlicet basin pentagonam, & in ambitu quinque triangula, tot videlicet,

quot



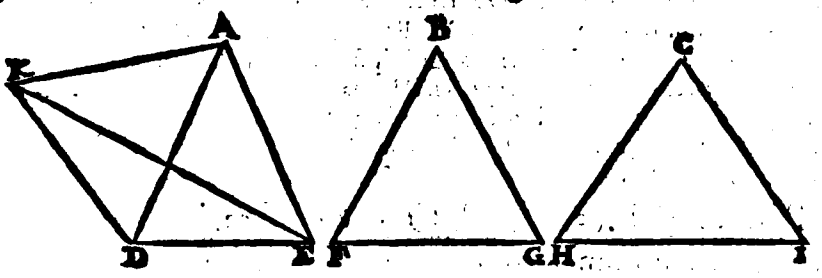
quot anguli plani componunt angulum ſolidum A. [a] *Quia verò omnes anguli quinque triangulorum BAC, CAD, DAE, EAF, FAB, æquales ſunt decem rectis: Anguli autem quinque baſis BCDEF, æquales ſunt ſex rectis, nempe decem, minus quatuor; ſuperabunt anguli triangulorum angulos baſis, quatuor rectis. Cùm igitur decem anguli triangulorum prope baſin maiores ſint angulis baſis; (Cùm enim angulus ſolidus B, tribus planis angulis ABC, ABF, CBF, contineatur;* [b] *erunt duo CBA, ABF, qui ſunt in triangulis, maiores angulo CBF, qui eſt in baſi: Eademq; ratione maiores erunt reliqui anguli triangulorum prope baſin, reliquis angulis in baſi.) Maiores erunt anguli triangulorum iuxta baſin, ſex rectis. Reliqui igitur quinque angulum ſolidum A, conſtituentes, minores erunt quatuor rectis; quandoquidem hi cum illis æquales ſunt decem rectis, vt dictum eſt. Eadem demonſtratio adhibenda eſt in aliis omnibus angulis ſolidis.*

a 21. primi.

b 20. vnde.

THEOR. 20. PROPOS. 22.

Si fuerint tres anguli plani, quorum duo vt libet aſſumpti reliquo ſint maiores: comprehendant autem ipſos rectæ lineæ æquales: fieri poteſt, vt ex lineis æquales illas rectas connectentibus triangulum conſtituatur.



SINT tres anguli plani A, B, C, contenti rectis æqualibus AD, AE, BF, BG, CH, CI, hac tamen lege, vt duo quilibet reliquo ſint maiores. Dico ex tribus rectis DE, FG, HI, quæ rectas illas æquales connectunt, triangulum poſſe conſtitui; hoc eſt, trium rectarum DE, FG, HI, quaslibet duas reliqua eſſe maiores. Nam hoc poſito, [a] ex ipſis triangulum facilè conficietur. Quòd enim duæ DE, FG, maiores ſint, quàm HI, ita oſtendetur. [b] Fiat angulus DAK, angulo B, æqualis, cadatque primùm AK, ad partes AD, ita vt fiat totus quidam angulus EAK, ex duobus EAD, DAK, compoſitus; quod quidem continget, quando duo anguli DAE, & B, duobus rectis ſunt minores. Ponatur AK, ipſi AD, æqualis, connectanturq; rectæ KD, KE. Quoniam igitur latera AK, AD, trianguli AKD, æqualia ſunt lateribus BF, BG, trianguli BFG; & anguli ipſis contenti DAK, & B, æquales; [c] erunt & baſes KD, FG, æquales. Rurſus quia latera AK, AE, trianguli AKE, æqualia ſunt lateribus CH, CI; & angulus EAK, maiori angulo C; propterea quòd duo anguli DAE, & B, maiores ponuntur angulo C; [d] erit & baſis EK, maior baſe HI: [e] Sunt autem rectæ ED, DK, maiores recta EK. Igitur multò maiores erunt ED, DK, quàm HI. Cùm ergo DK, oſtenſa ſit æqualis rectæ FG; erunt quoq; DE, FG, maiores q̃ HI. Quod eſt propoſitũ.

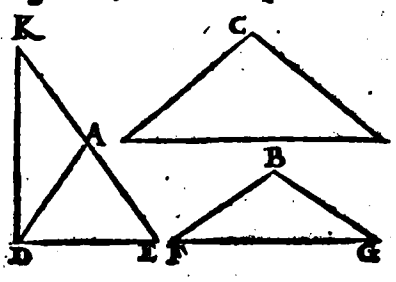
a 22. primi.

b 23. primi.

c 4. primi.

d 24. primi.

e 20. primi.

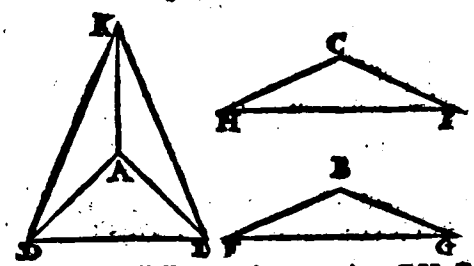


CADAT deinde AK, in rectum & continuum ipſi AE; quod quidem accidet, quando duo anguli DAE, & B, duobus rectis ſunt æquales. Ponaturq; AK, ipſi AD, æqualis rurſum, & connectatur recta KD. [f] Erit igitur, vt prius, KD, ipſi FG, æqualis. [g] Quoniam verò rectæ ED, DK, maiores ſunt recta KE; & KE, æqualis eſt rectis CH, CI, ex hypotheſi, & conſtructione; erunt quoque ED, DK, maiores duabus CH, CI: [h] Hæ autem maiores ſunt, quàm HI. Igitur multò maiores erunt ED, DK, quàm HI. Cùm ergo DK, oſtenſa ſit æqualis ipſi FG; erunt quoque DE, FG, maiores quàm HI. Quod eſt propoſitum.

f 4. primi.

g 20. primi.

h 20. primi.



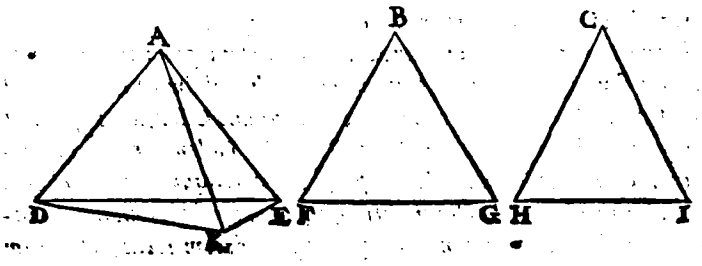
CADAT poſtremò AK, ad partes AE, ita vt nec angulus totus componatur ex angulis EAD, DAK, nec recta ſit EAK; quod demum eueniet, quando duo anguli DAE, & B, duobus rectis ſunt maiores. Ponaturq; rurſum AK, ipſi AD, æqualis, & ducantur rectæ KD, KE. [i] Erit igitur, vt prius, KD, ipſi FG, æqualis. [k] Quoniam verò duæ DE, DK, maiores ſunt duab. AE, AK; & AE, AK, æquales duabus CH, CI, ex hypotheſi & conſtructione; erunt quoque DE, DK, maiores quàm CH, CI: [l] Hæ autem maiores ſunt, quàm HI. Igitur multò erunt maiores DE, DK, quàm HI. Cùm ergo DK, oſtenſa ſit æqualis ipſi FG; erunt quoq; DE, FG, maiores quàm HI. quod eſt propoſitum. Eodem modo concludemus DE, HI, maiores eſſe,

i 4. primi.

k 21. primi.

l 20. primi.

quàm FG, si angulus DAK, angulo C, fiat æqualis: Item FG, HI, maiores, quàm DE, si angulo
a 22. primi. C, ad FB, constituatur angulus æqualis, &c. a Quare ex tribus rectis DE, FG, HI, triangulum constitui potest. Si igitur fuerint tres anguli plani, &c. Quod erat demonstrandum.



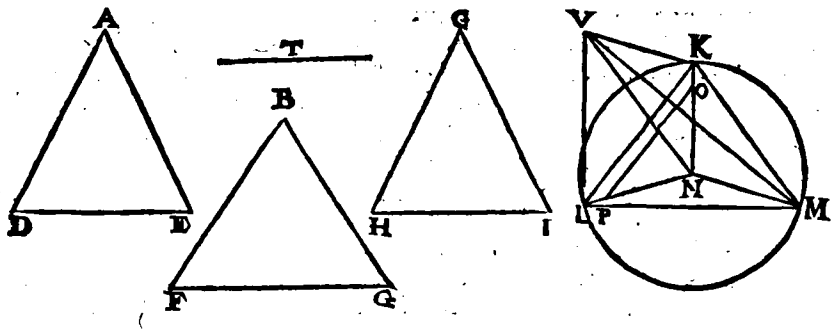
b 4. primi. c 4. primi. d 24. primi.

ALITER. Si tres anguli A, B, C, sunt æquales; b erunt quoque bases DE, FG, HI, æquales; ac proinde quælibet duæ reliqua maiores: Si verò duo tantùm anguli sunt æquales, & tertius minor; c erunt quoque duæ illorum bases æquales, d & basis tertij vtrâq; minor: Quare rursus quælibet duæ, maiores erunt reliqua. Quod si vnus eorum, nempe A, sit maximus, siue reliqui B, & C, sint inter se æquales, siue inæquales;
e 24. primi. e erit quoque basis DE, omnium maxima. Quare DE, FG, maiores erunt quàm HI: Item DE,
f 23. primi. HI, maiores, quàm FG. Dico iam & rectas FG, HI, maiores esse recta DE. f Fiat enim angulus DAK, æqualis angulo B, ponaturque AK, ipsi AD, æqualis. Cadet ergo punctum K, infra DE; propterea quòd per puncta D, K, E, transit circumferentia circuli ex A, ad interuallum AD, descripta, ob æqualitatem rectarum AD, AK, AE. Connectantur deinde rectæ DK, KE. Quoniam igitur duo anguli B, & C, maiores ponuntur angulo DAE; & B, æqualis est angulo DAK, per constructionem; erit angulus C, maior reliquo angulo KAE. Et quia latera AD, AK, triâguli ADK, æqualia sunt lateribus BF, BG, trianguli BFG; & anguli ipsis contenti DAK, & B, æquales;
g 4. primi. g erit basis DK, basi FG, æqualis. Rursus quia latera CH, CI, trianguli CHI, æqualia sunt lateri-
h 24. primi. bus AK, AE, trianguli AKE; & angulus C, ostensus maior angulo KAE; h erit & basis HI, maior basi KE. Quare cùm DK, ostensa sit æqualis ipsi FG: erunt FG, HI, maiores quàm DK, KE:
i 20. primi. i Sed DK, KE maiores sunt, q̃ DE. Igitur multò maiores erũt FG, HI, q̃ DE. Quod est ꝓpositũ.

23. PROBL. 3. PROPOS. 23.

Ex tribus angulis planis, quorum duo quomodocunque assumpti reliquo sunt maiores, solidum angulum constituere. Oportet autem illos tres angulos quatuor rectis minores esse.

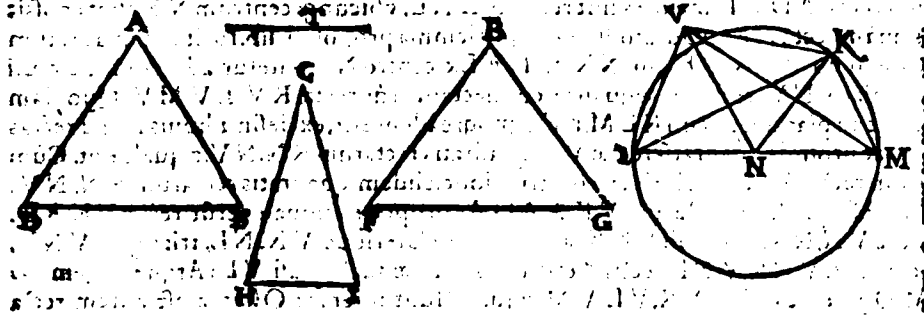
SINT tres anguli A, B, C, quatuor rectis minores, hac conditionẽ, vt quilibet duo sint maiores reliquo. Oportet iam ex tribus angulis A, B, C, angulum solidum conficere, qui nimirum contineatur tribus angulis planis, qui dictis tribus angulis sint æquales. Ponantur sex lineæ angulos dictos comprehendentes, nempe AD, AE, BF, BG, CH, CI, æquales; subtendanturq; bases DE,
k 22. vndec. FG, HI. k Fieri ergo potest, vt ex DE, FG, HI, triangulũ constituatur. Constituatur ex ipsis igitur



l 5. quarti.

triangulum KLM, sitque latus KL, rectæ DE; latus LM, rectæ FG; & latus KM, rectæ HI, æquale. l Describatur circa triângulum KLM, circulus, cuius cẽtrum N, à quo ducãtur rectæ NK, NL, NM. Eritque quælibet rectarum angulos planos comprehendentium, nempe AD, AE, &c. maior qualibet ductarum ex centro N. Quod ita ostendetur. Cadat primò centrum N, intra triangulum KLM; quod quidem fiet, quando triangulum est oxygonium, vt ex coroll. propos. 5. lib. 4. constat. Si igitur AD, AE, maiores nõ credantur, quàm NK, NL, erunt vel æquales, vel minores. Sint ergo æquales. Quoniam igitur latera AD, AE, trianguli ADE, æqualia sunt lateribus NK, NL, trianguli NKL; & basis DE, basi
m 8. primi. KL, æqualis: m erit angulus A, angulo KNL, æqualis. Eodem argumento erit angulus B, angulo LNM; & angulus C, angulo MNK, æqualis. Cùm igitur tres anguli circa N, æquales sint quatuor rectis ex coroll. propos. 15. lib. 1. erunt quoq; tres anguli A, B, C, quatuor rectis æquales. Quod est absurdum. ponuntur enim quatuor rectis minores. Nõ igitur æquales sunt AD, AE, ipsis NK, NL. Dico quòd neq; minores. Si enim minores sint AD, AE, quàm NK, NL, abscindantur NO, NP, ipsis AD, AE, æquales, ducaturq; recta OP. Quoniã igitur est vt NK, ad NO, ita NL, ad NP,
n 2. sexti. cùm & antecedentia inter se, & consequentia sint inter se æqualia; erunt latera NK, NL, trian-
o 29. primi. guli NKL, secta proportionaliter: n ac proinde OP, ipsi KL, parallela erit. o Quare anguli NOP, NPO, angulis NKL, NLK, æquales erunt, & triangulum NOP, triangulo NKL, æ-
p 4. sexti. quiangulum. p Igitur erit vt NK, ad KL, ita NO, ad OP. Estautem NK, maior quàm NO.
q 14. quinti. q Igitur & KL, hoc est, DE, quæ æqualis est ipsi KL, maior erit, quàm OP. Quocirca cùm latera AD, AE,

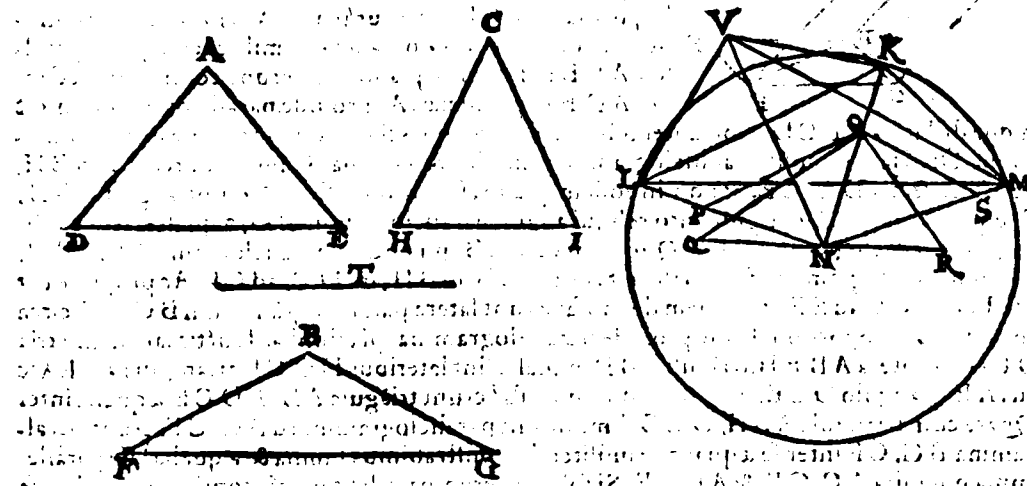
AD, AE, triangli ADE, sint æquales lateribus NO, NP, trianguli NOP, & basis DE, maior basi OP: erit & angulus A, maior angulo ONP. Eadem ratione angulus B, angulo LNM, & angulus C, angulo MNK, maior esse ostendetur. Cùm igitur tres anguli ad N, quatuor sint rectis æquales, ex coroll. propos. 15. lib. 1. erunt tres anguli A, B, C, maiores quatuor rectis. Quod est absurdum ponuntur enim quatuor rectis minores. Non igitur minores sunt AD, AE, quàm NK, NL; sed neque æquales. Igitur maiores. *a 25. primi.*



CADAT deinde centrum N, in latus LM, & tum cóntinget, quádo triángulũ KLM, angulũ LKM, habuerit rectũ, vt ex eadẽ coroll. propos. 5. lib. 4. manifestum erit.

Si igitur AD, AE, dicatur esse æquales ipsis NK, NL; erunt quoq; BF, BG, æquales eisdem NK, NL. Cùm ergo NK, æqualis sit ipsi NM; æquales erunt BF, BG, rectæ LM: Posita autem fuit LM, æqualis ipsi FG. Igitur BF, BG, æquales quoque sunt rectæ FG. *b* Sunt autem & maiores BF, BG, quàm FG. Quod est absurdum. Non igitur æquales sunt AD, AE, ipsis NK, NL. Quod si AD, AE, minores credantur, quàm NK, NL; erunt quoque BF, BG, minores quàm NK, NL. Cùm ergo NK, æqualis sit ipsi NM; minores erunt BF, BG, quàm recta LM; posita autem fuit LM, ipsi FG, æqualis. Igitur BF, BG, minores quoque sunt recta FG. Quod est absurdum, *c* cùm sint maiores. Non ergo minores sunt AD, AE, quàm NK, NL; sed neq; æquales: Igitur maiores. *b 20. primi.* *c 29. primi.*

CADAT postremò centrum N, extra triangulum KLM, infra latus LM, quod demum accidet, quando angulus LKM, fuerit obtusus, vt ex coroll. dicto propos. 5. lib. 4. liquet. Si igitur dicantur AD, AE, esse æquales ipsis NK, NL; cùm & basis DE, basi KL, ponatur æqualis; *d* erit angulus A, angulo KNL, æqualis. Eadem ratione angulus C, angulo KNM, æqualis erit. Quare totus angulus LNM, angulis A, & C, æqualis erit. Sed hi duo maiores sunt ex hypothesi, angulo B. Igitur & angulus LNM, angulo B, erit maior. Rursus quia latera NL, NM, triãguli NLM, æqualia sunt lateribus BF, BG, triãguli BFG, & basis LM, basi FG, æqualis; *e* erit angulus LNM, angulo B, *d 8. primi.* *e 8. primi.*

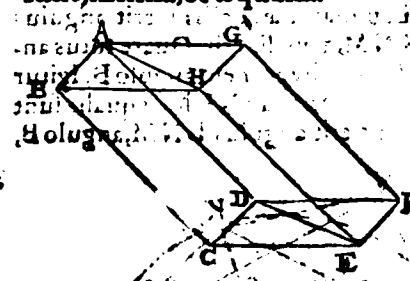


æqualis: Sed & maiorem ostẽdimus esse. Quod est absurdum. Non igitur æquales sunt AD, AE, ipsis NK, NL. Quod si AD, AE, credantur esse minores, quàm NK, NL; si abscindatur NO, NP, ipsis AD, AE, æquales, & ducatur recta OP; demonstrabitur, vt in primo casu, angulus A, maior angulo ONP; & eadem ratione angulus C, maior angulo KNM. *f* Fiat angulus ONQ, angulo NOR; & angulus ONR, angulo C, æqualis, ponanturq; NQ, NR, æquales ipsis AD, AE, & connectantur OQ, OR; cadetq; OQ, infra OP, propterea quod p puncta O, P, Q, transit circumferentia circuli ex N, ad interuallũ NQ, descripta, cùm æquales sint rectæ NO, NP, NQ. *g* Quare cùm angulus PON, æqualis sit angulo LKN, externus interno; erit angulus QON, minor angulo LKN. Eadem ratione ostendetur angulus NOR, minor angulo NKM, si ducatur OS, parallela ipsi KM. Cadet enim similiter OR, infra OS. Igitur totus angulus LKM, toto angulo QOR, maior erit. Quoniam verò latera NO, NQ, trianguli NOQ, æqualia sunt lateribus AD, AE, triangli ADE; Est autem & angulus ONQ, angulo A, æqualis, per costructionem; *h* erit OQ, ipsi DE, hoc est, ipsi KL, æqualis. Eodem modo erit OR, ipsi KM, æqualis. Connexa iam recta QR, cũ latera KL, KM, trianguli LKM, æqualia sint lateribus OQ, OR, triãguli OQR, & angulus LKM, maior angulo QOR, vt ostendimus: *i* erit basis LM, hoc est, FG, maior basi *f 23. primi.* *g 29. primi.* *h 4. primi.* *i 24. primi.*

QR. Quoniam igitur latera BE, BG, trianguli BFG, æqualia sunt lateribus NQ, NR, trianguli
a 25. primi. NQR, & basis FG, maior basi QR, a erit angulus B maior angulo QNR. Rursus quia angulus
GNQ, angulo A, & angulus ONR, angulo C, factus est angulorum omnium circulis circa
N, duobus A, & C, æqualis: erit A, & C, maiores, quàm sit angulus B. Igitur & angulus QNR, maior erit
angulo B. Quod est absurdum, cùm B, ostensus sit maior angulo QNR. Non ergo minores sunt
AD, AE, quàm NK, NL; sed neque æquales: Igitur maiores. Simili
ob hanc
rursus, cùm rectæ AD, AE, maiores sint rectis NK, NL, vbicunque centrum N, existat; possit
recta AD, plus quàm recta NK, quadrato lineæ T, per lemma propos. 14. lib. 10. ita vt quadratum
b 11. vndec. rectæ AD, æquale sit quadratis rectarum NK, & T. b Ex centro N, excitetur ad planum circuli
KLM, perpendicularis NV, rectæ T, æqualis; connectanturq; rectæ KV, LV, MV. Quoniam
igitur NV, recta est ad planum circuli KLM, recta quoq; eadem erit, ex defin. 3. huius lib. ad rectas
c 47. primi. NK, NL, NM; c ac proinde quadratum rectæ VK, quadratis rectarum KN, NV, æquale erit. Cùm
ergo & quadratum rectæ AD, æquale sit ex constructione, eisdem quadratis rectarum KN, NV;
æqualia erunt inter se quadrata rectarum VK, & AD. Ac propterea æquales erunt rectæ VK, AD.
Rursus quia latera VN, NK, trianguli VNK, æqualia sunt lateribus VN, NL, trianguli VNL;
d 4. primi. & anguli ipsis contenti VNK, VNL, recti; d erit basis VK, æqualis basi VL; Atque eadem ra-
tione rectæ VM. Quare tres rectæ VK, VL, VM, æquales sunt inter se. Ostensa est autem recta
VK, æqualis rectæ AD. Tres ergo rectæ VK, VL, VM, æquales sunt rectæ AD, ac ideo rectis AB,
BF, BG, CH, CI. Quamobrem cùm latera VK, VL, trianguli VKL, æqualia sint lateribus AD,
e 8. primi. AE, trianguli ADE, & basis KL, basi DE, e erit angulus KVL, angulo A, æqualis. Non secus
demonstrabimus, angulum LVM, angulo B, & angulum KVM, angulo C, esse æqualem. Quare
angulus solidus V, continetur tribus angulis planis KVL, LVM, MVK, qui æquales sunt ei
tribus angulis planis A, B, C. Ex tribus itaque angulis planis, &c. Quod erat faciendum.

24. THEOR. 21. PROPOS. 24.

Si solidum parallelis planis cõtineatur; aduersa illius plana, parallelogramma sunt, similia, & æqualia.



Sit parallelepipedum ABEF, (de hoc enim intelligenda est propositio) contentum, iuxta defin. 20. huius lib. sex figuris quadrilateris AC, CF, FH, HA, AF, BE, quarum aduersæ quælibet sint parallelæ. Dico quæuis opposita plana esse parallelogramma, similia, & æqualia. Cùm enim parallela plana BG, GF, secentur plano AC; f Erunt communes sectiones AB, CD, parallelæ. Similiter & cùm plana parallela AF, BE, secentur plano AC; erunt communes sectiones AD, BC, parallelæ; Ac proinde parallelogrammum est
f 16. vndec. figura quadrilatera ABCD. Non aliter ostendemus, reliquas figuras quadrilateras esse parallelogramma. Dico iam opposita parallelogramma esse similia, & æqualia. Cùm enim rectæ AB, BH, parallelæ sint rectis DC, CE, & non in eodem plano, sed in oppositis; g erunt anguli ABH, DCE, æquales; eodemque argumento reliqui anguli parallelogrammi BG, æquales erunt reli-
g 10. vndec. quis angulis parallelogrammi CF. h Quoniam verò AB, ipsi DC, in parallelogrammo AC, & BH,
h 34. primi. ipsi CE, in parallelogrammo BE, æqualis est; erit vt AB, ad BH, ita DC, ad CE; Ac propterea vt
BH, ad HG, ita CE, ad EF, &c. eadem de causa: Erunt latera parallelogrammorum BG, CF, circa
anguli æquales, proportionalia; ac proinde parallelogramma ipsa similia. Ductis iam diametris
i 34. primi. AH, DE, cùm latera AB, BH, trianguli ABH, æqualia sint lateribus DC, CE, trianguli DCE, & &
k 10. vndec. angulus ABH, angulo DCE, æqualis, vt ostensum est; k erunt triangula ABH, DCE, æqualia inter
l 4. primi. se. m Quare cùm triangula ABH, DCE, dimidia sint parallelogrammorũ BG, CF, erunt paral-
m 34. primi. lelogramma BG, CF, inter se æqualia. Similiter demonstrabimus similia & æqualia esse paralle-
logramma opposita AC, GE, & AF, BE. Si solidum ergo parallelis planis contineatur, aduersa
illius plana, parallelogramma sunt, similia, & æqualia. Quod erat demonstrandum.

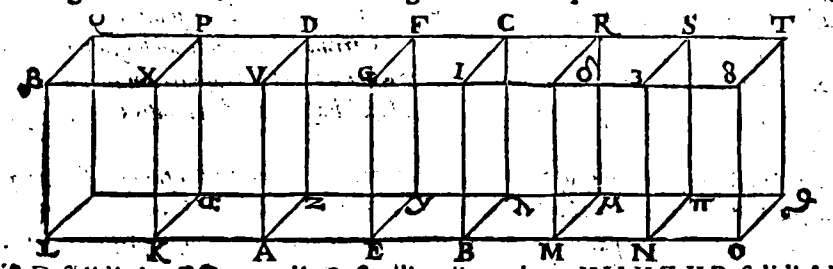
25. THEOR. 22. PROPOS. 25.

Si solidum parallelepipedũ plano secetur, aduersis planis parallelo; Erit quemadmodum basis ad basim, ita solidum ad solidum.

Sit parallelepipedum ABCD, plano EFL, parallelo oppositis planis AD, BC, Dico
esse basis AG, ad basim BG, ita esse solidum ABFD, ad solidum BEHC. Intelligatur enim pa-
rallelepipedum ABCD, productum in vtranque partem, ita tamen vtrinque in AB,
protracta quotcunque rectæ AK, KL, ipsi AB, & quotcunque rectæ BM, MN, NO, ipsi EB, æ-
quales. Deinde per puncta K, L, M, N, O, ducantur plana KP, LQ, MR, NS, OT, parallela
planis AD, EF, BC, per scholium propos. 15. huius lib. Quoniam igitur solidum AEFD, conti-
netur planis parallelis, ex hypothesi; ipsum parallelepipedum erit, ex definitione, & habebit; pla-
n 24. vndec. na opposita, parallelogramma similia, & æqualia. Eodem modo erunt parallelepipeda AKPD,
KLQP, EBCF, BMRC, MNSR, NOTS, ELQF, HOTF, habebuntque plana opposita,
o 36. primi. parallelogramma similia, & æqualia. o Quoniam verò parallelogramma AG, KV, LX, cùm sint

super

super æquales bases AE, AK, KL, æqualia sunt; & similia quoque, [a] cùm anguli vnius sint æquales angulis aliorum, & latera circa angulos vnius æqualia lateribus circa angulos aliorum, ideoq; proportionalia. Eademq; ratione æqualia, & similia sunt parallelogràma AY, KZ, La. Cùm igitur æqualia quoq; sint, & similia parallelogramma AD, KP, LQ: Erunt tria plana AG, AY, AD, solidi AEFD, æqualia, & similia tribus planis KV, KZ, KP, solidi AKPD; & tribus planis LX, La, LQ, solidi KLQP. [b] Sunt autẽ tria in vnoquoq; solido æqualia, & similia tribus reliquis oppositis in eodẽ, nempe AG, ipsi ZF; & AY, ipsi VF; & AD, ipsi EF, &c. Igitur p defin. 10. huius libri. æqualia sunt solida AEFD, AKPD, KLQP. Eodẽ argumento æqualia ostendentur solida EBCF, BMRC, MNSR, NOTS. Quare quàm multiplex est basis LG, basis AG, tam multiplex erit solidum LEFQ, solidi AEFD; Et quàm multiplex est basis OG, basis BG, tam multiplex erit solidum OEFT, solidi BEFC. Quoniam verò si basis LG, (multiplex basis AG, primæ magnitudinis,) æqualis est basi OG, (multiplici basis BC, secundæ magnitudinis,) æquale quoq; est solidum LEFQ, (multiplex solidi AEFD, tertiæ magnitudinis) solido OEFT, (multiplici solidi BEFC, quartæ magnitudinis,) propterea quòd basibus LG, OG, æqualibus existentibus, æqualia quoque sunt & similia sex parallelogramma solidi LEFQ, sex parallelogrammis solidi OEFT: Si autem basis maior est base, solidum quoque solido maius est; & si minor, minus; in quacunque hoc fiat multiplicatione: Erit per defin. 6. lib. 5. vt basis AG, prima magnitudo, ad basin BG, secundam magnitudinẽ, ita solidum AEFD, tertia magnitudo, ad solidum BEFC, quartam magnitudinẽ. Eadem ratione demonstrabitur esse solidum ad solidum, vt est basis DY, ad basin CY; & vt basis AY, ad basin BY; & vt basis DG, ad basin CG. Si solidum igitur parallelepipedum plano secetur, &c. Quod erat ostendendum.

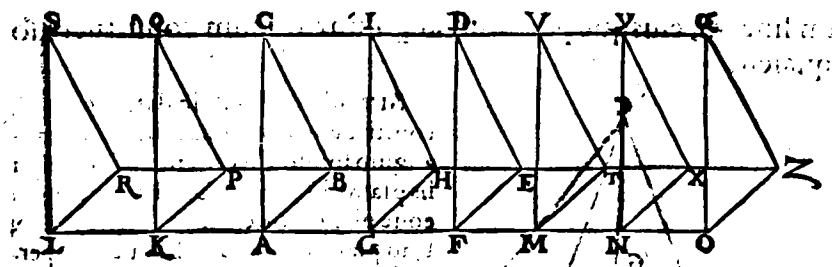


[a] 29. primi.

[b] 24. vnde.

SCHOLIVM.

HAEC propositio accommodari etiã potest omni prismati. Nam si prisma quodcunq; plano secetur, aduersis planis parallelo; erit quemadmodum basis ad basim, ita solidum ad solidum. Sit enim primò prisma ABCDEF, cuius plana aduersa sint triangula ABC, DEF: secetur q; plano GHI, aduersis planis parallelo. Dico vt est basis AI, ad basin FI, ita ẽsse solidum ABCIHG, ad solidum FEDIHG. Intelligatur enim prisma ABCDEF in vtramque partem quantumlibet productum, & ex A F, protracta vtrinq; e capiantur quotcunque rectæ AK, KL, ipsi AG; & quotcunq; rectæ FM, MN, NO, ipsi FG, æquales. Deindeper puncta K, L, M, N, O, ducantur plana KPQ, LRS: MTV, NXY, OZa, parallela planis ABC, GHI, FED, per schol. propos. 15. huius lib. Quoniam igitur plana parallela ABC, GHI, secantur plano AI; [a] erunt communes sectiones AC, GI, parallelæ: Sunt autem & AG, CI, parallelæ ex hypothesi, ob parallelogrammum AD. Igitur parallelogrammũ est AI. Rursus quia plana parallela ABC, GHI, secantur plano AH; [b] erunt communes sectiones AB, GH, parallelæ: Sunt autem & AG, BH, parallelæ, ob parallelogrammum AE. Igitur parallelogrammũ est AH. Eodem modo parallelogrammum ostendetur CH. Quoniam verò latera AC, AB, trianguli ABC, æqualia sunt lateribus GI, GH, trianguli GHI; [c] cùm AC, ipsi GI, & AB, ipsi GH, sit æquale; [d] & anguli CAB, IGH, sunt quoq; æquales, eò quod rectæ CA, AB, parallelæ sunt rectis IG, GH, & non in eodem plano: [e] Erunt triangula ABC, GHI, æqualia inter se, & æquiangula. [f] Quare latera circum æquales angulos proportionalia habebunt; Atque idcircò similia erunt. Igitur solidum ABCIHG, contentum duobus planis oppositis ABC, GHI, æqualibus & similibus, atq; parallelogrammis AI, IB, BG, prisma est. Eadem ratione prismata erunt ABCQPK, KPQSRL; FEDIHG, FEDVTM, MTVYXN, NXYaZO, LRSIHG, OZaIHG. Quoniam verò parallelogramma AI, KC, LQ, æqualia sunt & similia, necnon AH, KB, LP; & CH, QB, SP; erunt omnia plana prismatis ABCIHG, æqualia & similia omnibus planis prismatis ABCQPK, KPQSRL. Quare per defin. 10. huius libri, æqualia erunt prismata ABCIHG, ABCQPK, KPQSRL. Eadem ratione æqualia erunt prismata FEDIHG, FEDVTM, MTVYXN, NXYaZO. Quare [g] multiplex est basis LI, basis AI, tam multiplex erit prisma LRSIHG, prismatis ABCIHG; & [g] multiplex est basis OI, basis FI, tã multiplex erit prisma PZaIHG, prismatis FEDIHG. Quia verò si basis LI, (multiplex basis AI, primæ magnitudinis) æqualis est basi OI, (multiplici basis FI, secundæ magnitudinis;) æquale quoq; est prismã LRSIHG, (multiplex prismatis ABCIHG, tertiæ magnitudinis) prismati OZa-



[a] 16. vnde.

[b] 16. vnde.

[c] 34. primi.

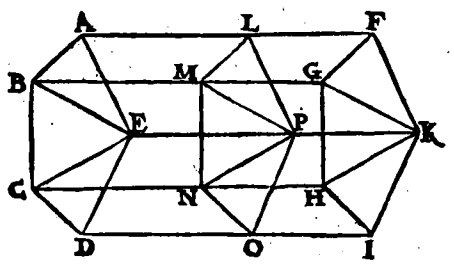
[d] 10. vnde.

[e] 4. primi.

[f] 4. sexti.

IHG, (multiplici prismatis FEDIHG, quarta magnitudinis:) propterea quòd basibus LI, OI, existentibus æqualibus, æqualia quoque sunt & similia omnia plana prismatis LRSIHG, omnibus planis prismatis OZ æIHG: Si autem basis LI, maior est base OI, prisma quoque prismate maius est: & si minor, minus, in quacunque multiplicatione hoc fiat: Erit, per defin. 6. lib. 5. vt basis AI, prima magnitudo ad basin FI, secundam magnitudinem, ita prisma ABCIHG, tertia magnitudo ad prisma FEDIHG, quartam magnitudinem. Eodem modo ostendetur esse prisma ad prisma, vt est basis AH, ad basin FH: & vt basis CH, ad basin DH. Quod est propositum.

SIT deinde prisma ABCDEFGHIK, cuius opposita plana sint polygona, nempe pentagona, secetur q; plano LMNOP. Dico rursus, vt est basis CM, ad basin NG, ita esse solidũ ABCDELMNOP, ad solidum LMNOPFGHIK. Si enim plana opposita parallela resoluantur in triangula, erit quoque prisma in totidem prismata, quorum plana opposita sunt triangula, resolutum. Quare erit vt basis BP, ad basin MK, ita prisma ABEPML, ad prisma LMPKGF, per ea, quæ demonstrata sunt. Eodem modo erit vt basis CP, ad basin NK, ita prisma BCEPMN, ad prisma MNPKGH; & prisma CDEPNO, ad prisma NOPKHI. a *Vt autẽ BP, ad MK, & CP, ad NK, ita est recta EP, ad rectã PK, hoc est, vt CN, ad NH; & vt CN, ad NH, ita est CM, ad NG. Igitur prismata ABEPML, BCEPMN, CDEPNO, ad prismata LMPKGF, MNPKGH, NOPKHI, eandem habent proportionem ei, quam habet CM, ad NG; ac proinde eandem inter se.* b *Vt autem vnum ad vnum, ita se habent omnia ad omnia. Igitur erit vt prisma BCEPMN, ad prisma MNPKGH, hoc est, vt basis CM, ad basin NG; ita prisma ABCDELMNOP, ex tribus compositũ ad prisma LMNOPFGHIK, ex tribus constatum. Quod est propositum. Eadem prorsus erit demonstratio in quocunq; alio prismate.*



a 1. sexti.

b 12. quinti

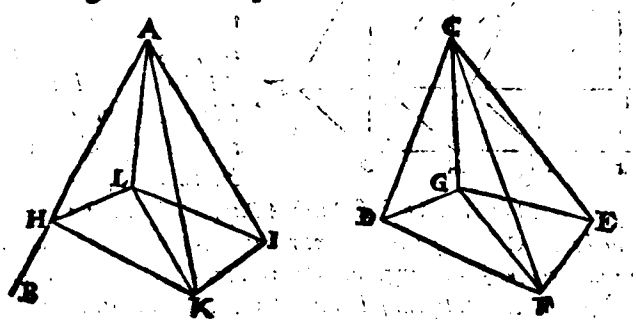
POTEST tamen hoc idem in omni prismate ostendi, demonstratione, qua vsi sumus in prismate habente plana opposita, triangula similia. Si enim eadem fiat constructio, producto prismate in vtramq; partem, e-
c 16. vnde. *runt omnia plana parallela secantia, inter se æqualia, & similia:* c *propterea quòd latera eorum sunt paral-*
d 10. vnde. *lela, nempe communes sectiones parallelorum planorum:* d *ac proinde angulos æquales comprehendunt, &c. Vnde, vt prius, ostendentur prismata ex vna parte inter se æqualia, necnon & prismata ex altera parte, &c.*

COROLLARIVM.

Ex his infertur, si prisma quodcunque secetur plano oppositis planis æquidistante, sectionem esse figuram æqualem & similem planis oppositis: Veluti demonstratum est in priori prismate, triangulum GHI, æquale esse & simile triangulo ABC, atq; adeò triangulo DEF. Eadem enim in omnibus est demonstratio. Idem dices de parallelepipedo.

26. PROBL. 4. PROPOS. 26.

AD datam rectam lineam, eiusque punctum angulum solidum constituere, solido angulo dato æqualem.



a 11. vndec.

b 23. primi.

SIT ad punctũ A, in data recta AB, constituẽdus angulus solidus, æqualis angulo solido C, contento tribus angulis planis DCE, DCF, FCE, non in eodẽ plano existentibus. a Ducatur ex F, ad planum p CD, CE, ductum, perpendicularis FG; connectãturq; rectæ DF, DG, EF, EG, CG. Deinde abscindatur AH, æqualis ipsi CD, b fiatq; angulus HAI, angulo DCE, æqualis; & recta AI, rectæ CE, æqualis. Rursus in plano per AH, AI, ductum constituatur angulus HAL, æqualis angulus DCG, qui in plano per
c 12. vndec. CD, CE, ducto existit; & recta AL, rectæ CG, æqualis. c Ex L, verò ad planum, in quo sunt tres AH, AL, AI, erigatur perpendicularis LK, quæ ipsi FG, æqualis ponatur, & coniungatur recta KA. Dico angulum solidum A, contentum tribus planis angulis HAI, HAK, KAI, æqualem esse dato angulo solido C. Connexis enim rectis HK, HL, IK, IL; cũ latera AH, AL, trianguli AHL, æqualia sint lateribus CD, CG, trianguli CDG, & anguli HAL, DCG, æquales, p constructio-
d 4. primi. nem; d Erunt bases HL, DG, æquales. Rursus quia ablatis angulis æqualibus HAL, DCG, ab æqualibus HAI, DCE, reliqui æquales sunt LAI, GCE: Cùm igitur & latera AL, AI, trianguli
e 4. primi. ALI, æqualia sint lateribus CG, CE, trianguli CGE, per constructionem; e æquales quoque erunt LI, GE. Quia igitur latera LH, LK, æqualia sunt lateribus GD, GF; & anguli HLK,

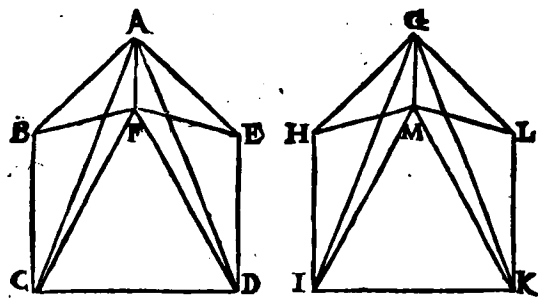
DGF,

DGF,recti,ex defin.3.huius lib. [a] erunt & baſes HK,DF,æquales. Quare cùm & latera AH, AK, trianguli AHK,ſint æqualia lateribus CD,CF,triãguli CDF,ex conſtructione. (cùm enim AL, LK,latera lateribus CG,GF,æqualia ſint ex conſtructione, comprehendantq; angulos æquales: nimirũ rectos,ex defin.3.huius lib. [b] erunt baſes AK,CF, æquales.) [c] Erunt quoq; anguli HAK, DCF,æquales. Deniq; quia latera LI,LK,ſunt æqualia lateribus GE,GF; & anguli ILK,EGF, recti,ex defin.3.huius libri. [d] Erunt baſes IK,EF,æquales: Cùm igitur & latera AI, AK, trianguli AIK, lateribus CE, CF, trianguli CEF, ſint æqualia ex conſtructione; [e] Erunt quoque anguli IAK,ECF,æquales. Sunt ergo tres anguli plani HAI,HAK,KAI,ſolidum angulum A,componentes, æquales tribus angulis planis DCE,DCF,FCE, angulum ſolidum C, componentibus: Atq; prõinde ſolidus angulus A,ſolido angulo C,æqualis. Ad datam itaque rectam lineam,eiusq; punctum,angulum ſolidum conſtituimus,ſolido angulo dato æqualem. Quod erat faciendum.

[a] 4. primi.
[b] 4. primi.
[c] 8. primi.
[d] 4. primi.
[e] 4. primi.

SCHOLIVM.

QVOD ſi angulus ſolidus datus contineatur pluribus angulis planis, q̃ tribus, ſubtendendæ erunt omnibus angulis planis recta in vno eodemq; exiſtentes plano (in eo ſcilicet, quod omnes rectas lineas planorum angulorum ſecet) ita vt figuram planam polygonam conſtituant,pyramisq; quadam multilatera efficiatur. Si enim figura polygona in triangula reſoluatur, habebuntur tot pyramides trilatera, quot triangula in figura polygona continentur. Si igitur angulis ſolidis omnium pyramidum triangularium æquales ſolidi anguli conſtituantur, quorum quilibet tribus angulis planis continetur; conſtitutus erit totus angulus ſolidus toti angulo ſolido æqualis.

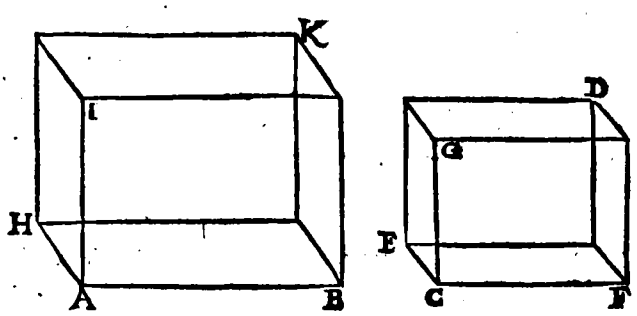


VT ſi angulo ſolido A, contento quinque angulis planis BAC, CAD, DAE, EAF, FAB, conſtituendus ſit ſolidus angulus æqualis, ſubtendẽdæ ſunt angulis planis rectæ BC, CD, DE, EF, FB, vt fiat pentagonum BCDEF, quòd in tria triangula reſoluatur BCF, FCD, DEF. Deinde ſolido angulo A, contento tribus planis angulis BAC, CAF, FAB, conſtituendus ſolidus angulus æqualis G, contentus tribus angulis planis HGI, IGM, MGH. Et ſolido angulo A, contẽto tribus planis angulis CAF, FAD, DAC, æqualis ſolidus angulus G, contentus tribus angulis planis IGM, MGK, KGI. Et denique angulo ſolido A, contento tribus angulis planis DAE, EAF, FAD, æqualis ſolidus angulus G, contentus tribus planis angulis KGL, LGM, MGK. Ita enim fiet totus angulus ſolidus G, toti angulo ſolido A, æqualis. Atq; in hunc modum cuilibet angulo ſolido æqualis angulus ſolidus conſtituetur.

PROBL. 5. PROPOS. 27.

27.

A' DATA recta linea, dato ſolido parallelepipedo ſimile & ſimiliter poſitum ſolidum parallelepipedum deſcribere.



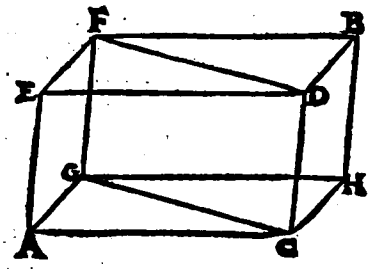
SIT à data recta AB, deſcribendum parallelepipedum ſimile, ſimiliterq; poſitum parallelepipedo CD. [f] Fiat ad rectam AB, eiusq; punctum A, angulus ſolidus æqualis angulo ſolido C, ita vt tres anguli plani HAI, IAB,BAH, æquales ſint tribus angulis planis ECG,GCF,FCE. Deinde vt eſt CF,ad CG, [g] ſic fiat AB,ad AI, & vt CG,ad CE,ita AI,ad AH; eritq; ex æquo, vt CF, ad CE, ita AB, ad AH. Poſthæc,perficiatur parallelepipedum AK, completis nimirum parallelogrammis BH, HI, IB, & per I, B, H, ductis planis IK, BK, HK,quæ parallela ſint parallelogrãmis BH,HI,IB. Dico parallelepipedũ AK, parallelepipedo CD, ſimile eſſe ſimiliterq; poſitum. Cùm enim anguli BAH,FCE, ſint æquales,& latera circa ipſos proportionalia, nempe vt BA, ad AH,ita FC,ad CE,ex conſtructione; erunt parallelogramma HB,EF,ſimilia,ſimiliterq; poſita. Eadem ratione ſimilia erunt, ſimiliterq; poſita parallelogramma HI,EG; & IB,GF. Tria igitur plana BH,HI,IB,ſolidi AK,ſimilia ſunt,ſimiliterque poſita tribus planis FE, EG, GF, ſolidi CD. [h] Sunt autem tria cuiuslibet æqualia & ſimilia tribus reliquis oppoſitis. Quare ſex plana ſolidi AK,ſimilia ſunt,ſimiliterque poſita ſex planis ſolidi CD; Ac proinde ex defin.9.huius lib.ſimilia ſunt, ſimiliterque poſita,ſolida AK,CD. A data ergo recta linea, dato ſolido parallelepipedo ſimile, & ſimiliter poſitũ ſolidum parallelepipedum deſcripſimus. Quod erat faciendum.

[f] 26. vndec.
[g] 12. ſexti.
[h] 24. vndec.

28.

THEOR. 23. PROPOS. 28.

SI solidum parallelepipedum plano secetur per diagonios aduersorum planorum: Bifariam secabitur solidum ab ipso plano.



c 34. primi.
b 9. vndec.
c 33. primi.
d 24. vndec.

SIT parallelepipedũ AB, in quo plana opposita sint AH, EB, quorum diagonij, seu diametri, sint rectæ lineæ CG, DF. Quoniam igitur vtraque CD, GF, parallela est, [c] & æqualis ipsi AE, cùm sint parallelogramma CE, GE; [b] erunt & inter se parallelæ, & æquales CD, GF. [c] Ac proinde, quæ ipsas coniungunt CG, DF, parallelæ erunt, & æquales, ideoque in vno plano. Dico planum, quod per CG, DF, ducitur, secare bifariam parallelepipedum AB. [d] Cùm enim plana AH, EB, sint parallelogramma æqualia, & similia; erunt & eorum dimidia, nimirum triangula AGC, GCH; EFD, FDB, æqualia inter

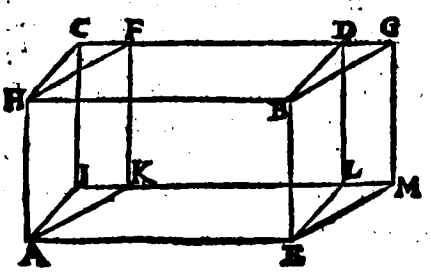
e 6. sexti.
f 24. vndec.

se: Sunt autem & latera circa angulos æquales GAC, CHG; FED, DBF, proportionalia. [e] Igitur similia quoque erunt dicta triangula. [f] Cùm igitur & parallelogrammum AF, æquale sit & simile parallelográmo CB; & AD, ipsi GB; & CF, commune: Erunt duo triangula AGC, EFD, & parallelogramma AF, AD, CF, prismatis ACGFED, æqualia & similia duobus triangulis HCG, BDF, & parallelogrammis CB, BG, CF, prismatis HGCDBF; propterea quæ prismata æqualia erunt, ex definitione 10. huius libri. Quæ cùm componant parallelepipedum AB, sectum erit parallelepipedum AB, bifariam. Itaque si solidum parallelepipedum plano secetur, &c. Quod erat demonstrandum.

29.

THEOR. 24. PROPOS. 29.

SOLIDA parallelepipeda super eandem basin constituta, & in eadem altitudine, quorũ insistentes lineæ in iisdem collocantur rectis lineis: sunt inter se æqualia.



g 35. primi.
b 34. primi.

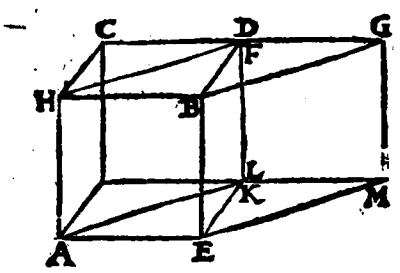
SVPER basin AB, in eadem altitudine, hoc est, inter eadem plana parallela, sint constituta duo parallelepipeda ACDE, AFGE, quorum insistentes lineæ ex quatuor angulis basis exeuntes in iisdem collocentur lineis, nempe AI, AK, EL, EM, in recta IM; & HC, HF, BD, BG, in recta CG. Dico parallelepipeda ACDE, AFGE, esse inter se æqualia. [g] Cùm enim æqualia sint parallelogramma AL, AM, super eadem basi AE, & in eisdem parallelis constituta; erunt, ablato communi trapezio AELK, æqualia quoque triangula AIK, ELM. [b] Quoniam verò omnia latera trianguli AIK, æqualia sunt omnibus lateribus trianguli HCF; erit triangulum AIK, triangulo HCF, æquiangulum, & æquale, per ea, quæ ad 8. propos. libri 1. ostendimus

i 4. sexti.
k 24. vndec.
l 36. primi.
m 34. primi.

[i] Ac propterea latera circa æquales angulos habebũt proportionalia, ideoque inter se erunt similia. Eadem ratione triangulum ELM, triangulo BDG, æquale erit, & simile. [k] Rursus parallelogrammum AC, æquale est, & simile parallelogrammo ED; & eadem ratione parallelogrammum AF, parallelogrammo EG; [l] Sed & IF, ipsi LG, cùm bases IK, LM, sint æquales. ([m] Nam cùm rectæ IL, KM, æquales sint ipsi AE, erunt quoque inter se æquales; quare communi dempta KL, æquales erunt IK, LM.) Erunt ergo omnia plana prismatis AIKFCH, æqualia & similia omnibus planis prismatis ELMGDB. Igitur ex definitione 10. huius lib. æqualia erunt dicta prismata; Ac propterea addito communi solido AHFKLDBE, æqualia fient parallelepipeda super eandem basin, &c. Quod erat demonstrandum.

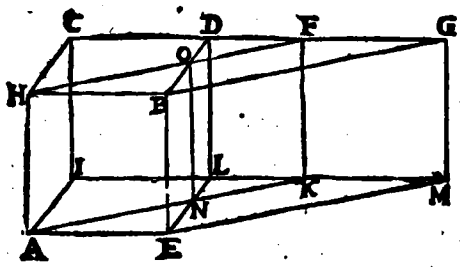
SCHOLIVM.

HAEC propositio persimilis est propositioni 35. libri 1. Quod enim ibi de parallelogrammis, hoc de parallelepipedis demonstratur hoc loco, eisdem ferè medijs, dummodò loco triangulorum assumantur prismata, vt ex demonstratione liquet. Vnde reliqui duo casus, quando nimirum punctum K, in punctum L, cadit, vel vltra L, eodem modo demonstrabuntur, vt in his figuris apparet. Nam in secundo casu, si ex parallelogrammis æqualibus AL, AM, auferatur triangulum cõmune ALE, erunt reliqua triangula AIK, ELM, æqualia. Vnde, vt prius, æqualia erunt prismata AIKFCH, ELMGDB. Addito ergo prismate communi AKEBHD, æqualia fient parallelepipeda ACDE, AFGE.



IN tertio verò casu, si ex parallelogrammis æqualibus AL, AM, dematur triangulum cõmune ANE, erunt reliqua trapezia AILN, NKME, æqualia; quibus si addatur triangulum commune KLN, tota triangula AIK, ELM, æqualia fient.

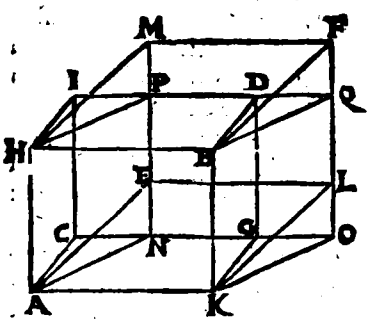
Vnde,



Vnde, vt prius, æqualia erunt prismata AIKFCH, ELMGDB; à quibus si auferatur prisma cõmune KLNODF; (Nam communis sectio planorum AF, DE, est recta NO.) remanebit solidum comprehẽsum planis AILN, NOHA, AICH, HCDO, CDLI, DLNO, æquale solido contento planis ENKM, MKFG, GFOB, FKNO, BGME, EBON. Si igitur addatur vtrique prisma commune AENQBH; fient parallelepipeda ACDE, AFGE, inter se æqualia.

THEOR. 25. PROPOS. 30. 30.

SOLIDA parallelepipeda super eandem basin constituta, & in eadẽ altitudine, quorũ insistentes lineæ nõ in iisdem collocãtur rectis lineis: inter se sunt æqualia.



SVPER basin AB, in eadem altitudine, hoc est, inter eadem plana parallela, sint constituta parallelepipeda AIDK, AMFK, quorum insistentes lineę ex quatuor angulis basis exeuntes AC, AE, KG, KL; HI, HM, BD, BF, non sint in eisdem rectis, hoc est, neque CI, GD, protractę transeant per puncta M, E, F, L, neque CG, ID, productæ, &c. Dico parallelepipeda AIDK, AMFK, esse æqualia: Cùm enim plana CD, EF, opposita basi AB, sint in eodem plano, ob eandẽ altitudinem parallelepipedorum; producãtur in eo plano rectæ CG, ID, quarum CG, secet EM, LF, protractas in punctis N, O; Et ID, easdem in punctis P, Q; adiunganturque rectę AN, KO, HP, BQ. [a] Quia igitur rectæ PQ, MF, sunt æquales, cùm opponantur in parallelogrammo FP; & MF, ipsi HB, est æqualis; erunt & PQ, HB, æquales: Sunt autem & parallelæ, propter parallelogrammum HIDB. [b] Igitur & HP, BQ, parallelæ sunt & æquales, ideoque parallelogrammum est HPQB. Eadem ratione parallelogramma erunt HPNA, ANOK, KOQB: Est autem & parallelogrammum NOQP. Igitur parallelepipedum est APQK. [c] Quamobrem parallelepipedum AIDK, æquale est parallelepipedo APQK, cùm vtriusque eadem sit basis AB, & insistentes lineæ sint in rectis eisdem CO, IQ. Eodem modo eidem parallelepipedo APQK, æquale erit parallelepipedum AMFK, cùm vtriusque eadem sit basis AB, & insistentes lineæ sint in rectis eisdem NM, OF. Quare parallelepipeda AIDK, AMFK, inter se sunt æqualia. Solida igitur parallelepipeda super eandem basin, &c. Quod erat demonstrandum.

[a] 34. primi.
[b] 33. primi.
[c] 29. vndec.

SCHOLIVM.

CONVERTATVR *hæc propositio, atq; præcedens, in hunc modum.*

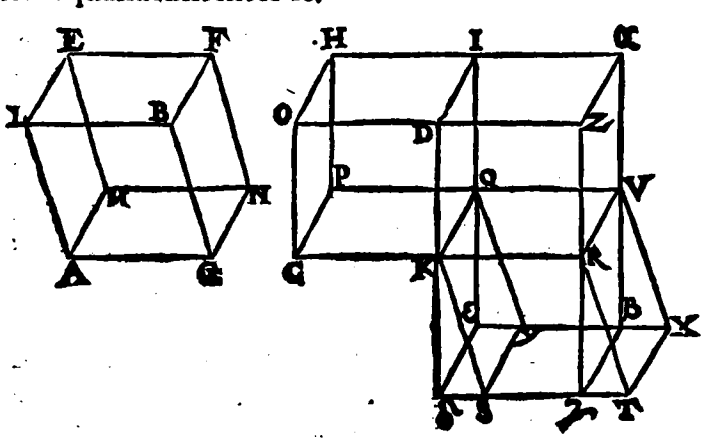
SOLIDA parallelepipeda æqualia super eandem basin, siue insistentes lineæ in eisdem collocentur rectis, siue non; in eadem sunt altitudine.

NAM *si vnum dicatur altius; si ab eo abscindatur parallelepipedum in eadem cum reliquo altitudine; erunt æqualia abscissum, & reliquum.* [a] *Cùm igitur & totum huic reliquo ponatur æquale; æquale erit abscissum toti. Quod est absurdum.*

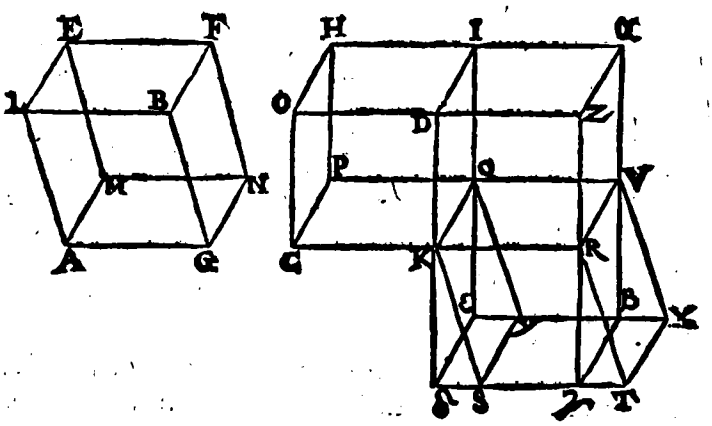
[a] 29. vel 30 vndec.

THEOR. 26. PROPOS. 31. 31. 32.

SOLIDA parallelepipeda super æquales bases constituta, & in eadem altitudine: æqualia sunt inter se.



SVPER æquales bases AB, CD, in eadẽ altitudine sint constituta parallelepipeda AEFG, CHIK. Dico hæc parallelepipeda esse æqualia inter se. Sint enim primùm insistentes lineæ AM, GN, LE, BF, ad basin AB; & insistentes CP, KQ, OH, DI, ad basin CD, perpendiculares. Quo posito, erunt omnes dictæ perpendiculares inter se æquales, propter eandem parallelepipedorum altitudinẽ. Producatur CK, in rectum, sitque KR, æqualis ipsi LB, & fiat an-



gulus RKS, in plano OK, extenſo, æqualis angulo BLA, ponanturq; KS, æqualis ipſi LA; & perficiatur parallelogrammum KT, ſuper quod, ad altitudinem perpẽdicularis KQ, cõſtruatur parallelepipedum QSTV. Quoniam igitur latera KR, KS, æqualia ſunt lateribus LB, LA, & anguli RKS, BLA, æquales: erunt parallelogramma KT, LG, æqualia & ſimilia. Rurſus quia latera KQ, KS, æqualia ſunt lateribus LE, LA, & anguli QKS, ELA, recti, per defin. 3. huius lib. eõ ꝙ KQ, LE, rectæ ponantur ad plana KT, LG; erunt & parallelogramma QS, EA, æqualia & ſimilia. Eodem modo cùm latera KR, KQ, æqualia ſint lateribus LB, LE, & anguli QKR, ELB, recti, ex eadem definitione 3. huius lib. erunt quoque parallelogramma KV, LF, æqualia & ſimilia. [a] Quare cùm tria plana KT, QS, KV, parallelepipedi QSTV, æqualia ſint & ſimilia tribus planis LG, EA, LF, parallelepipedi AEFG; [b] tam autem illa, quàm hæc æqualia ſint & ſimilia tribus reliquis oppoſitis: Erunt per defin. 10. huius lib. parallelepipeda QSTV, EAGF, inter ſe æqualia.

a 24. vndec.

b 24. vndec.

CONVENIANT rectæ DK, TS, productæ in α; & IQ, XY, in ι, compleaturque parallelepipedum Qαγ V. Item HI, βV, protractæ conueniant in α; & OD, γR, in Z, perficiaturque parallelepipedum IKRα. Quoniam igitur parallelepipeda QSTV, Qαγ V, eandẽ habent baſin KV, ſuntque in eadem altitudine, nempe inter eadem plana parallela KV, αX, & inſiſtentes ipſorum lineæ KS, Kα, RT, Rγ; QY, Qι, VX, Vβ, collocantur in eiſdem rectis αT, ιX; [c] ipſa inter ſe æqualia erunt. Eſt autem parallelepipedum QSTV, parallelepipedo EAGF, æquale. Igitur eidem parallelepipedo EAGF, æquale erit parallelepipedum Qαγ V.

c 29. vndec.

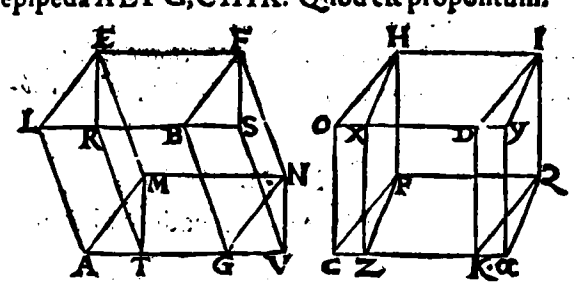
[d] QVONIAM verò parallelogramma KT, Kγ, æqualia ſunt inter ſe; & KT, æquale eſt ipſi LG; erit & Kγ, ipſi LG, hoc eſt, ipſi CD, æquale; cùm baſes LG, CD, ponantur æquales. [e] Quare erit, vt CD, ad DR, ita Kγ, ad DR; [f] Vt autem CD, baſis ad baſim DR, ita eſt ſolidum CHIK, ad ſolidum KIαR; cùm parallelepipedum CHαR, ſecetur plano IK, planis oppoſitis CH, αR, parallelo: Et eadem ratione, vt Kγ, ad DR, ita eſt ſolidum Qαγ V, ad ſolidum IKRα; cùm & parallelepipedum Iαγα, ſecetur plano KV, oppoſitis planis Dα, αβ, parallelo. [g] Igitur æqualia erunt parallelepipeda CHIK, Qαγ V; cùm eandem habeant proportionem ad idem ſolidum IKRα; nimirum eandem, quam habent baſes æquales CD, Kγ, ad eandem baſin DR. Quare cùm parallelepipedum Qαγ V, ſit oſtenſum æquale parallelepipedo AEFG: æqualia quoque erunt parallelepipeda AEFG, CHIK. Quod eſt propoſitum.

d 35. primi.

e 7. quinti.

f 25. vndec.

g 9. quinti.



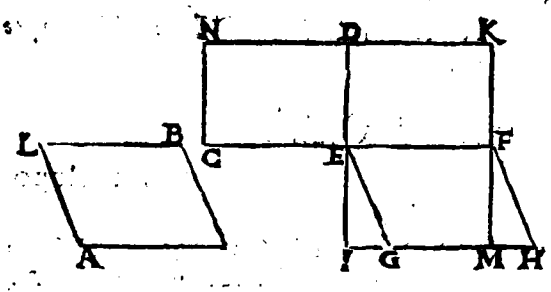
SINT iam neque inſiſtentes lineæ AM, GN, LE, BF, ad baſin AB; neq; CP, KQ, OH, DI, ad baſin CD, perpendiculares: [h] Et à punctis E, F, M, N, demittantur ER, FS, MT, NV, ad planum, in quo baſis AB, perpendiculares; Item à punctis, H, I, P, Q, ad planum, in quo baſis CD, perpendiculares HX, IY, PZ, Qα. Erũt autem omnes hæ perpendiculares inter ſe æquales, cùm ſint altitudines dictorum parallelepipedorum æquales. Ducantur rectæ RS, SV, VT, TR: Item rectæ XY, Yα, αZ, ZX, vt fiant parallelepipeda ETVF, HZαI, quæ cùm ſint eiuſdem altitudinis, habeantque inſiſtentes lineas perpendiculares, erunt inter ſe æqualia, vt oſtenſum eſt. [i] Sed parallelepipedum ETVF, æquale eſt parallelepipedo AEFG, cùm hoc eandem cum illo habeat baſin EN, eandemque altitudinem; Et parallelepipedum HZαI, æquale eſt eadem ratione parallelepipedo CHIK, cùm hoc eandem cum illo baſin HQ, eandemque altitudinem poſideat. Igitur & inter ſe æqualia ſunt parallelepipeda AEFG, CHIK. Idemque oſtendetur, ſi vnius parallelepipedi inſiſtentes lineæ ſint perpendiculares ad baſin, alterius verò non. Quocirca ſolida parallelepipeda ſuper æquales baſes conſtituta, &c. Quod demonſtrandum erat.

h 11. vndec.

i 29. vel 30. vndec.

SCHOLIVM.

POTEST cum Campano expeditius fortaſſe demonſtrari, duo parallelepipeda ſuper æquales baſes conſtituta, & in eadem altitudine, quorum inſiſtentes lineæ ad baſes ſunt perpendiculares, inter ſe eſſe æqualia; Nimirum ex ſolis baſibus, ſine conſtructione tot parallelepipedorum, quamuis eadem ſit demonſtratio illius, quæ



que noſtra. Sint enim duæ baſes æquales, nempe duo parallelogramma A B, C D. Dico parallelepipeda ſuper ipſas conſtituta, in eadem altitudine, quorum inſiſtentes lineæ ad baſes A B, C D, ſunt perpendiculares, inter ſe eſſe æqualia. Protrahantur enim duo latera D E, C E, ad partes E. Deinde fiat angulus F E G, æqualis angulo L; & recta E F, rectæ L B; & recta E G, rectæ L A, ponatur æqualis; perficiaturq; parallelogrammum E H, quod æquale erit, & ſimile parallelogrammo A B. Conueniat autem H G, producta cum D E, producta in I, & compleatur parallelogrammum I K. Iam verò intelligantur ſuper baſes E H, I F, E K, conſtituta parallelepipeda eiuſdem altitudinis cum parallelepipedis ſuper A B, C D, conſtructis; ſintq; inſiſtentes lineæ perpendiculares ad dictas baſes. Perſpicuum eſt igitur, ſolidum ſuper E H, æquale eſſe ac ſimile ſolido ſuper A B, ex defin. 10. huius lib. cùm plana illius æqualia ſint & ſimilia planis huius, per conſtructionem: [a] *Sunt autem & æqualia parallelepipeda ſuper E H, I F, cùm habeant baſin eandem, cuius infimum latus E F, erectam ſuper planum I K; item plana baſi oppoſita, quorum latera infima G H, I M, in eodem plano, cuius infimum latus I H; atque inſiſtentes lineas E G, F H, E I, F M, &c. in eiſdem rectis lineis I H, &c. Igitur æquale erit parallelepipedum ſuper I F, parallelepipedo ſuper A B.* [b] *Quoniam verò parallelogramma E H, I F, æqualia ſunt; & E H, æquale eſt ipſi C D: æqualia erunt I F, C D.* [c] *Erit igitur, vt I F, ad E K, ita C D, ad E K:* [d] *Eſt autem vt I F, ad E K, ita ſolidum ſuper I F, ad ſolidum ſuper E K, quòd ſolidum ſuper I K, ſecetur plano ſuper E F, erecto parallelo planis ſuper D K, I M, erectis. Et eadem ratione, vt C D, ad E K, ita ſolidum ſuper C D, ad ſolidum ſuper E K, cùm ſolidum ſuper C K, ſecetur plano ſuper D E, erecto parallelo planis ſuper C N, F K, erectis. Quare erit vt ſolidum ſuper I F, ad ſolidum ſuper E K, ita ſolidum ſuper C D, ad ſolidum ſuper E K;* [e] *Ac proinde æqualia erunt parallelepipeda ſuper I F, & C D. Oſtenſum eſt autem parallelepipedum ſuper I F, æquale parallelepipedo ſuper A B. Æqualia ergo erunt & parallelepipeda ſuper A B, C D. Quod eſt propoſitum.*

a 29. vnde.
b 35. primi.
c 7. quinti.
d 25. vndec.
e 9. quinti.

CONVERTETVR *quoque hæc propoſ. 31. in hunc modum.*

SOLIDA parallelepipeda æqualia ſuper æquales baſes, in eadem ſunt altitudine. Et parallelepipeda æqualia in eadem altitudine, ſuper æquales ſunt baſes, ſi non habuerint eandem baſin:

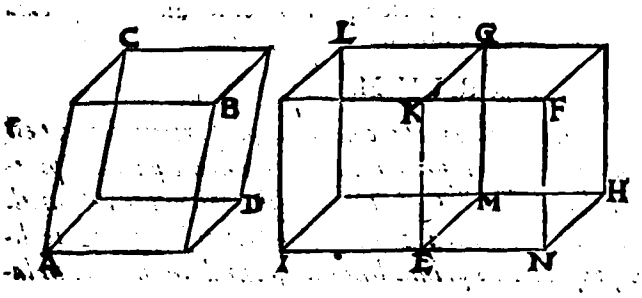
SI enim vnum altero credatur altius, ſi ab eo abſcindatur parallelepipedum in eadem cum altero altitudine, [f] *fient æqualia abſciſſum, & alterum. Cùm ergo & totũ ponatur æquale alteri; æquale erit abſciſſum toti. Quod eſt abſurdum.*

f 31. vndec.

QVOD ſi in eadem ſint altitudine, & baſis vnius credatur maior baſe alterius, ſi ab ea abſcindatur baſis æqualis alteri, & ſuper abſciſſam intelligatur parallelepipedum eiuſdem altitudinis, demonſtrabimus eodem modo, partem toti eſſe æqualem. Quod eſt abſurdum.

THEOR. 27. PROPOS. 32. 33.

SOLIDA parallelepipeda ſub eadem altitudine; inter ſe ſunt, vt baſes.



SINT duo parallelepipeda A B C D, E F G H, eiuſdem altitudinis ſuper baſes A B, E F. Dico eſſe ſolidum ad ſolidum, vt eſt baſis ad baſin. [a] Super rectam enim E K, conſtruatur parallelogrammum I K, æquale parallelogrammo A B, in angulo I E K, qui ſit æqualis angulo E N F. Conſtituent autem parallelogramma E F, I K, totum parallelogrammum vnum F I, vt in 45. propoſitione lib. 1. demonſtratum eſt. Si igitur alia plana parallelepipedi E F G H, producátur ad partes E G, perficiaturque totum vnum parallelepipedum I F L H; [b] erunt parallelepipeda A B C D, I K L M, æqualia, cùm habeant æquales baſes, per conſtructionem A B, I K; & eandem altitudinem, ex hypotheſi. [c] Quare erit vt ſolidum I K L M, ad ſolidum E F G H, ita ſolidum A B C D, ad idem ſolidum E F G H: [d] Eſt autem ſolidum I K L M, ad ſolidum E F G H, vt baſis I K, hoc eſt, illi æqualis baſis A B, ad baſin E F. Igitur & ſolidum A B C D, erit ad ſolidum E F G H, vt baſis A B, ad baſin E F. Solida ergo parallelepipeda ſub eadem altitudine inter ſe ſunt, vt baſes. Quod erat demonſtrandum.

a 45. primi.
b 31. vndec.
c 7. quinti.
d 25. vndec.

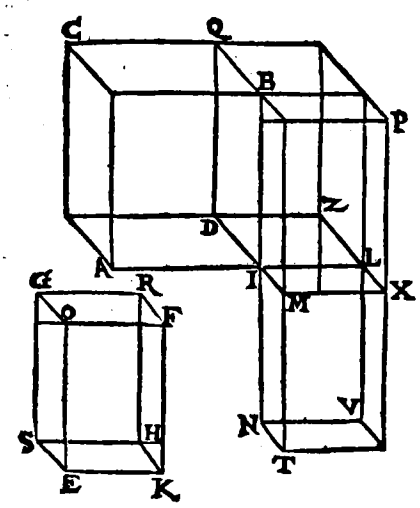
SCHOLIVM.

CONVERSO *modo, ſi ſolida parallelepipeda inter ſe ſint, vt baſes; ipſa erunt ſub eadem altitudine. Si enim non eadem credatur altitudo; & maiori abſcindatur minori æqualis, & ducatur planum baſi*

a 32. vnde. *parallelum*; a *erit q3 vt basis ad basin, ita parallelepipedum ad parallelepipedum abscissum: sed sic quoque*
b 9 quinti. *erat ad totum.* b *Abscissum ergo æquale est toti. Quod est absurdum.*

36. ## THEOR. 28. PROPOS. 33.

SIMILIA solida parallelepipeda, inter se sunt in triplicata ratione homologorum laterum.



a 15. primi.

SINT similia parallelepipeda A B C D, E F G H, super bases similes A B, E F, in quibus latera homologa sint A I, E K. Dico proportionem parallelepipedi A B C D, ad parallelepipedum E F G H, esse triplicatam proportionis laterum homologorũ A I, E K. Producatur enim A I, ad L, & sit I L, æqualis ipsi E K, vel G R; Item D I, ad M, & sit I M, æqualis ipsi H K, vel G O; Item B I, ad N, & sit I N, æqualis ipsi K F, vel G S. Deinde completis parallelogrãmis L M, L N, I T, perficiatur parallelepipedum T X I V. Quoniam verò latera I L, I M, æqualia sunt lateribus G R, G O; & anguli contenti æquales, cùm angulus L I M, sit æqualis angulo A I D, qui ob similitudinem parallelepipedorum æqualis est angulo E K H, seu R G O; erũt parallelogramma I X, G F, similia & æqualia. Eadem ratione similia erũt, & æqualia L N, R S; item I T, G E. Quare tria plana I X, L N, I T, parallelepipedi T X I V, similia sunt & æqualia tribus planis G F, R S, G E, parallelepipedi E F G H: b Sũt autem tria cuiusque similia & æqualia tribus reliquis oppositis. Igitur æqualia sunt & similia parallelepipeda T X I V, E F G H, ex defin. 10. huius lib. Rursus completis parallelogrammis M B, B L, L M, perficiatur parallelepipedum M P B L; Item completis parallelogrammis I Y, D L, I Q, perficiatur parallelepipedum I Y Q Z. Quoniam igitur ob similitudinem parallelepipedorum A B C D, E F G H, est vt A I, ad E K, hoc est, ad I L, ita D I, ad H K, hoc est, ad I M; & B I, ad F K, hoc est, ad I N. c Vt autem A I, ad I L, ita est parallelogrammum A D, ad D L; Et vt D I, ad I M, ita parallelogrammum D L, ad L M; & vt B I, ad I N, ita parallelogrammum B L, ad L N. Igitur erit vt A D, ad D L, ita D L, ad L M; & B L, ad L N. d Sed vt A D, basis ad D L, basin, ita est parallelepipedum A D C B, ad parallelepipedum D L Y Q: & vt basis D L, ad basin L M, ita parallelepipedum D L Y Q, ad parallelepipedum L M B P; & vt basis B L, ad basin L N, ita parallelepipedum L M B P, ad parallelepipedum L N T X. Quare erit, vt parallelepipedum A D C B, ad parallelepipedum D L Y Q, ita parallelepipedum D L Y Q, ad parallelepipedum L M B P, & parallelepipedum L M B P, ad parallelepipedum L N T X. Ac proinde quatuor quantitates sunt continuè proportionales A D C B, D L Y Q, L M B P, L N T X, ideoque proportio primæ A D C B, ad quartam L N T X, hoc est, ad E F G H, erit triplicata proportionis primæ A D C B, ad secundam D L Y Q ex defin. 10. lib. 5. e Vt autẽ A D C B, ad D L Y Q, ita est basis A D, ad basin D L; f Et vt A D, ad D L, ita est recta A I, ad I L, hoc est, ad E K. Igitur proportio parallelepipedi A D C B, ad parallelepipedum E F G H, est triplicata proportionis homologorum laterum, nimirum A I, ad E K. Quapropter similia solida parallelepipeda, inter se sunt in triplicata ratione homologorum laterum. Quod erat demonstrandum.

b 24. vndec.
c 1. sexti.
d 32. vndec.
e 32. vndec.
f 1. sexti.

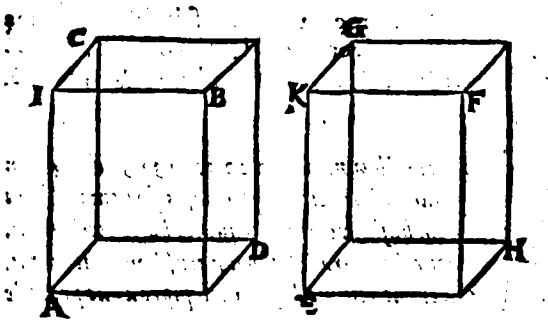
COROLLARIVM.

EX hoc perspicuum est, si fuerint quatuor lineæ rectæ continuè proportionales, vt est prima ad quartam, ita esse parallelepipedum super primam descriptum ad parallelepipedum simile, similiterq; descriptum super secundam. Quia tam parallelepipedum ad parallelepipedum, vt demonstratum est, quàm prima linea ad quartam, ex definitione 10. libri 5. habet proportionem triplicatam proportionis primæ lineæ ad secundam, nimirum laterum homologorum.

34. 35. ## THEOR. 29. PROPOS. 34.

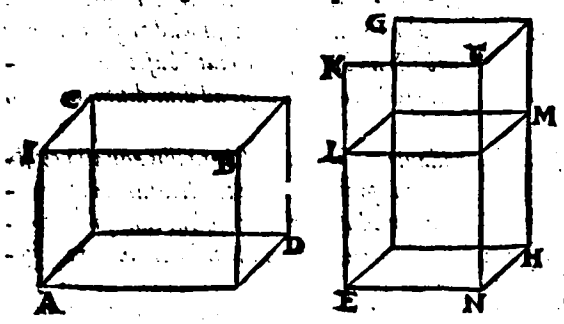
AEQVALIVM solidorum parallelepipedorum bases, & altitudines reciprocantur; Et quorum solidorum parallelepipedorum bases, & altitudines reciprocantur; illa sunt æqualia.

SINT æqualia parallelepipeda A D C B, E H G F, super bases A D, E H. Dico bases A D, E H, & altitudines parallelepipedorum A D C B, E H G F; esse reciprocas, hoc est, esse vt A D, ad E H, ita altitudinem solidi E H G F, ad altitudinem A D C B. Sint enim primùm insistentes lineæ A I, E K,



EK, perpendiculares ad baſes AD, EH, ita vt AI, EK, ſint per defin. 4. lib. 6. altitudines parallelepipedorum. Si igitur altitudines AI, EK, ſunt æquales; cùm & parallelepipeda æqualia ponantur; erunt & baſes AD, EH, æquales, per ea, quæ ad finem propoſitionis 31. huius lib. oſtendimus. Quare erit, vt baſis AD, ad baſin EH, ita altitudo EK, ad altitudinem AI; Ac proinde baſes & altitudines ſunt reciprocæ.

QVOD ſi altitudines AI, EK, inæquales fuerint; ſit EK, maior, ex qua abſcindatur EL, ipſi AI, æqualis; & per L, ducatur planum LM, parallelum baſi EH, per ſcholium propoſ. 15. huius libri. Quoniam igitur æqualia ſunt ſolida ADCB, EHGF; [a] erit vt ADCB, ad ſolidũ EHML, ita EHGF, ad idem ſolidũ EHML: [b] Vt autem ſolidum ADCB, ad ſolidum EHML, ita eſt baſis AD, ad baſin EH, cũ æquales ponantur altitudines AI, EL; Et vt ſolidum EHGF, ad ſolidum EHML, ita eſt eadem ratione, baſis KN, ad baſin LN, cùm hac ratione ſolida EHGF, EHML, eandẽ habeãt altitudinem, ſi nimirum baſes ponantur KN, LN; erunt enim inter eadem plana parallela KN, GH. Igitur erit vt baſis AD, ad baſin EH, ita baſis KN, ad baſin LN; [c] Sed vt KN, ad LN, ita eſt recta EK, ad rectam EL, hoc eſt, ad AI, ipſi EL, æqualem. Quare erit vt baſis AD, ad baſin EH, ita altitudo EK, ad altitudinem AI; Ac propterea reciprocæ ſunt baſes & altitudines.



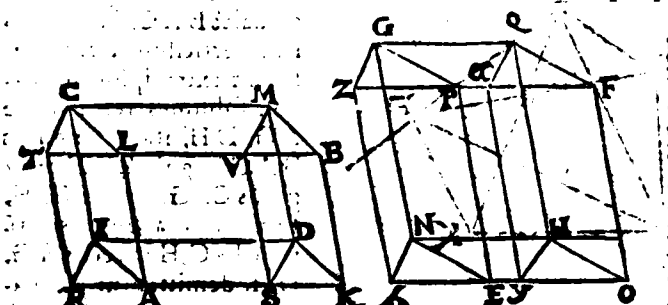
[a] 7. quinti.
[b] 32. vndec.
[c] 1. ſexti.

SINT iam baſes & altitudines reciprocæ. Dico parallelepipeda eſſe æqualia. Si enim altitudines EK, AI, ſunt æquales; cùm ſit baſis AD, ad baſin EH, vt altitudo EK, ad altitudinem AI, ex hypotheſi; erunt & baſes AD, EH, æquales. [d] Quare parallelepipeda ADCB, EHGF, cùm æquales habeant baſes, & altitudinem eandem, inter ſe æqualia erunt.

[d] 31. vndec.

QVOD ſi altitudo EK, maior fuerit, abſcindatur EL, ipſi AI, æqualis, & per L, ducatur planum LM, parallelum baſi EH. Quia igitur ex hypotheſi eſt, vt baſis AD, ad baſin EH, ita altitudo EK, ad altitudinem AI, hoc eſt, ad EL, ipſi AI, æqualem; [e] Vt autem baſis AD, ad baſin EH, ita eſt ſolidum ADCB, ad ſolidum EHML; cùm altitudines AI, EL, æquales ponantur; [f] Et vt EK, ad EL, ita eſt KN, ad LN; [g] Vt autem baſis KN, ad baſin LN, ita eſt ſolidum EHGF, ad ſolidum EHML, cùm ſolida EHGF, EHML, eandem habeant altitudinem, ſi baſes ponantur KN, LN; erunt enim hac ratione inter plana parallela KN, GH; Erit vt ſolidũ ADCB, ad ſolidũ EHML, ita ſolidum EHGF, ad idem ſolidum EHML; [h] ideoq; æqualia erunt ſolida ADCB, EHGF.

[e] 32. vndec.
[f] 1. ſexti.
[g] 32. vndec.
[h] 9. quinti.



SED proponantur iam parallelepipeda ABCD, EFGH, æqualia, quorum inſiſtentes lineæ AI, KD, BM, LC; EN, OH, FQ, PG; nõ ſint perpendiculares ad baſes AB, EF. Demittantur autem à punctis I, D, M, C, ad planum baſis AB, perpendiculares IR, DS, MV, CT; Item à punctis N, H, Q, G, ad planum baſis EF, perpendiculares NX, HY, Qα, GZ; connectanturq; rectæ RS, TV, RT, SV, XY, Zα, XZ, Yα: Eruntque perpendiculares RI, XN, parallelepipedorum altitudines, ex defin. 4. lib. 6. Dico rurſus, vt baſis AB, ad baſin EF, ita eſſe altitudinem XN, ad altitudinem RI; Cùm enim æqualia ſint ſolida ABCD, EFGH, ex hypotheſi, ſit autem ABCD, æquale ſolido RVCD, quòd habeant eandem baſin CD, eandemq; altitudinem RI; & EFGH, eadem ratione, æquale ſolido XαGH. Erunt & parallelepipeda RVCD, XαGH, æqualia. Quare cũ habeant inſiſtentes lineas perpendiculares ad baſes CD, GH; erit, vt iam demonſtratum eſt, vt baſis CD, ad baſin GH, hoc eſt, vt baſis AB, ad baſin EF, ita altitudo XN, ad altitudinem RI. Ac propterea baſes & altitudines ſunt reciprocæ.

[i] 29. vel 30. vndec.

SINT iam baſes atque altitudines reciprocæ. Dico parallelepipeda eſſe æqualia. Conſtructa enim figura, vt prius; Cùm ſit vt baſis AB, ad baſin EF, ita altitudo XN, ad altitudinẽ RI; [k] Sit autem AB, ipſi CD, & EF, ipſi GH, æqualis; erit quoque vt baſis CD, ſolidi RVCD, ad baſin GH, ſolidi XαGH, ita altitudo XN, ad altitudinem RI. Quare cùm XN, RI, ſint inſiſtentes lineæ, perpendiculares ad baſes CD, GH; erunt, vt iam oſtenſum eſt, æqualia parallelepipeda RVCD, XαGH. [l] Sunt autem hæc parallelepipeda parallelepipedis ABCD, EFGH, æqualia. Igitur

[k] 24. vndec.
[l] 29. vel 30. vndec.

æqualia quoque erunt parallelepipeda ABCD,EFGH: Idemque ostendetur si insistentes lineæ vnius parallelepipedi fuerint perpendiculares ad basin, alterius verò non. Quam ob rem, Æqualium solidorum parallelepipedorũ bases, & altitudines reciprocãtur, &c. Quod erat ostendendũ.

SCHOLIVM.

OMNIA hæc, quæ demonstrata sunt in sex proximis propositionibus nimirum 29.30.31.32.33.& 34. conueniunt quoq; prismatis, quæ habent duo plana opposita triangularia, si predicta hypotheses seruentur. Nam si duobus prismatis eiusmodi eiusdem altitudinis, & super eandem basin, vel super æquales bases constitutis, apponantur duo alia prismata illis æqualia & similia, conficientur duo parallelepipeda eiusdem altitudinis,

a 29.30.vel 31.vndec. *& super eandem, vel æquales bases existentia.* [a] *Quare æqualia erunt eiusmodi parallelepipeda, ac proinde & data prismata, eorum videlicet dimidia.*

RVRSVS, si duobus prismatis prædictis eiusdem altitudinis, & super diuersas bases constitutis adijciantur duo alia prismata illis æqualia & similia, conficientur iterum duo parallelepipeda eiusdem altitudinis.

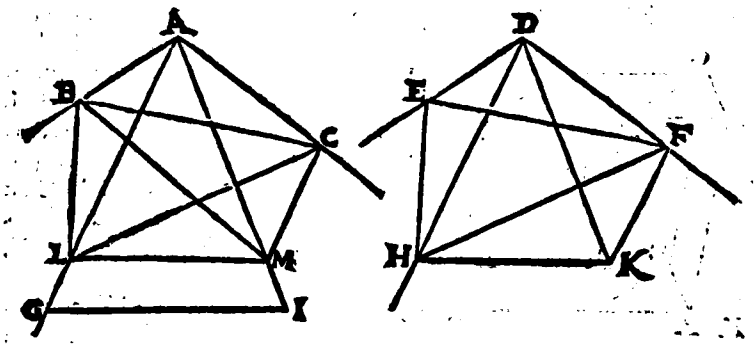
b 32.vndec. [b] *Quare erit parallelepipedum ad parallelepipedum, vt basis ad basin;* c 15.quinti. [c] *Atq; adeò prisma ad prisma, nempe dimidium vnius parallelepipedi, ad dimidium alterius, vt eadem basis ad basin, si prismatũ bases fuerint parallelogramma, vel certè vt triangulum ad triangulum, dimidium scilicet vnius basis ad dimidium alterius, si bases prismatum fuerint triangula.*

PRÆTEREA, si duobus prismatis prædictis similibus addantur alia duo prismata illis æqualia & similia, constituentur duo parallelepipeda similia, d 33.vndec. [d] *quæ inter se habent proportionem triplicatam proportionis laterum homologorum.* e 15.quinti. [e] *Igitur & prismata, eorum nimirum dimidia, cùm eandem habeant proportionem cum parallelepipedis, proportionem habebunt triplicatam proportionis eorundem laterum homologorum, quæ quoq; sunt latera homologa prismatum.*

DENIQVE si dictis duobus prismatis æqualibus adiungantur alia duo prismata illis æqualia & similia, componentur duo parallelepipeda æqualia eorundem altitudinum cũ prismatis. f 34.vndec. [f] *Quare cùm bases, & altitudines parallelepipedorum sint reciprocæ; & bases prismatum eadem sint, vel certè triangula eorum dimidia,* g 15.quinti. [g] *eandem habentia proportionem: Erunt quoq; bases prismatum & eorum altitudines reciprocæ.*

37. THEOR. 30. PROPOS. 35.

SI fuerint duo plani anguli æquales, quorum verticibus sublimes rectæ lineæ insistant, quæ cum lineis primò positis angulos contineant æquales, vtrumque vtrique; In sublimibus autem lineis quælibet sumpta fuerint puncta, & ab his ad plana, in quibus consistunt anguli primùm positi, ductæ fuerint perpendiculares; à punctis verò, quæ in planis à perpendicularibus fiunt, ad angulos primùm positos adiunctæ fuerint rectæ lineæ: Hæ cũ sublimibus æquales angulos cõprehendẽt.



SINT duo anguli plani æquales BAC, EDF, quorum verticibus A, & D, insistant extra ipsorum plana, sublimes rectæ lineæ AG, DH, ita vt angulus BAG, angulo EDH, & angulus CAG, angulo FDH, sit æqualis: à sumptis autẽ punctis G, H, in rectis AG, DH, demittantur ad plana, in quibus anguli BAC, EDF, existunt, perpendiculares GI, HK, incidentes in puncta I, K, & adiungantur rectæ IA, KD. Dico angulos GAI, HDK, esse æquales inter se. Nam si AG, DH, sunt inæquales, auferatur à maiori AG, ipsi DH, æqualis linea AL; & ex L, in plano trianguli AGI, ducatur ipsi GI, parallela

a 8.vndec. LM. Quoniam igitur parallelæ sunt GI, LM; & est GI, ad planũ anguli BAC, recta, [a] erit quoq; LM, ad idem planum recta. Ducantur autem ex punctis M, K, ad rectas AB, AC, DE, DF, perpendiculares MB, MC, KE, KF; & connectantur rectæ BC, BL, LC, EF, EH, HF. Et quia LM, recta est ad planum anguli BAC, ipsa rectum angulum efficiet cum recta AM; in eodem plano ducta, p

b 47.primi. defin. 3. huius libri. [b] Quare quadratum rectæ AL, æquale erit quadratis rectarum AM, ML: c 47.primi. [c] Est autem quadratum rectæ AM, æquale quadratis rectarum AC, CM, cùm & angulus ACM, rectus sit, ex constructione. Quadratum ergo rectæ AL, æquale est quadratis rectarum AC, CM,

d 47.primi. ML: [d] At quadratis rectarum CM, ML, æquale est quadratum rectæ CL, cùm angulus CML,

e 48.primi. rectus sit, per definitionem 3. huius libri. Igitur quadratum rectæ AL, æquale est quadratis rectaf 47.primi. rum AC, CL; [e] Ac proinde angulus ACL, rectus erit. [f] Rursus quia quadratum rectæ AL, æ-

g 47.primi. quale est quadratis rectarum AM, ML: [g] Est autem quadratum rectæ AM, æquale quadratis rectarum

tarum AB,BM,cùm angulus ABM, per conſtructionem, ſit rectus. Igitur quadratum rectæ AL, æquale eſt quadratis rectarum AB,BM,ML: [a] At quadratis rectarum BM, ML, æquale eſt quadratum rectæ BL, quòd & angulus BML, ſit rectus, ex defin. 3. huius lib. Quadratum ergo rectæ AL, æquale eſt quadratis rectarum AB, BL; [b] propterea quę angulus ABL, erit rectus. Non aliter oſtendentur recti anguli DFH, DEH. Quoniam igitur anguli ABL, LAB, trianguli ABL, æquales ſunt angulis DEH, HDE, trianguli DEH; ſuntque latera AL, DH, æqualia; [c] Erunt & reliqua latera AB, BL, reliquis lateribus DE, EH, æqualia. Eodem argumento æquales erunt rectæ AC, CL, rectis DF, FH. Quare cùm latera AB, AC, trianguli ABC, æqualia ſint lateribus DE, DF, trianguli DEF; & anguli contenti BAC, EDF, æquales, ex hypotheſi; [d] erunt & baſes BC, EF, inter ſe, & anguli ABC, ACB, angulis DEF, DFE, æquales: Sunt autem & toti anguli ABM, ACM, totis angulis DEK, DFK, æquales, cùm omnes ſint recti. Igitur & reliqui anguli MBC, MCB, reliquis angulis KEF, KFE, æquales erunt. Ac propterea cùm & latera BC, EF, ſint oſtenſa æqualia; [e] erunt latera BM, CM, lateribus EK, FK, æqualia. Quia igitur latera AC, CM, trianguli ACM, æqualia ſunt oſtenſa lateribus DF, FK, trianguli DFK; & anguli ACM, DFK, ſunt recti; [f] erunt & baſes AM, DK, inter ſe æquales. Cùm autem æquales ſint oſtenſæ rectæ BL, EH, erunt etiam earum quadrata æqualia: [g] Quia verò quadratum rectæ BL, æquale eſt quadratis rectarum BM, ML; & quadratum rectæ EH, quadratis rectarum EK, KH, quòd anguli BML, EKH, recti ſint, ex definitione 3. huius lib. Erunt & quadrata rectarum BM, ML, æqualia quadratis rectarum EK, KH. Ablatis ergo quadratis rectarum BM, EK, quæ æqualia ſunt, & rectæ BM, EK, oſtenſæ ſint æquales; reliqua quadrata rectarũ LM, HK, æqualia erunt, ac proinde rectæ LM, HK, æquales. Quam ob rem cùm latera AL, AM, trianguli ALM, æqualia ſint lateribus DH, DK, trianguli DHK, & baſis LM, baſi HK, æqualis; [h] erunt & anguli LAM, HDK, æquales. Si igitur fuerint duo anguli plani æquales, quorum verticibus ſublimes rectæ lineæ inſiſtant, &c. Quod oſtendendum erat.

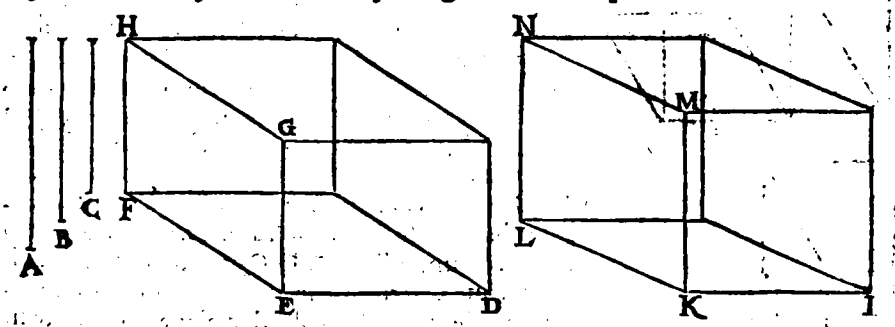
[a] 47. primi.
[b] 48. primi.
[c] 26. primi.
[d] 4. primi.
[e] 26. primi.
[f] 4. primi.
[g] 47. primi.
[h] 8. primi.

COROLLARIVM.

ITAQVE, ſi fuerint duo anguli plani æquales, quorũ verticibus ſublimes recta linea æquales inſiſtant, quæ cum lineis primò poſitis angulos contineãt æquales, vtrumque vtrique. Erunt à punctis extremis linearum ſublimium ad plana angulorum primò poſitorum demiſſæ perpendiculares inter ſe æquales. Nam propterea quòd anguli plani BAC, EDF, ponuntur æquales, & ſublimes æquales AL, DH, conſtituunt angulos æquales LAB, HDE; Item LAC, HDF; demonſtratum fuit, demiſſas perpendiculares LM, HK, eſſe æquales.

THEOR. 31. PROPOS. 36. 38.

Si tres rectæ lineæ proportionales fuerint: Quod ex his tribus fit ſolidum parallelepipedum, æquale eſt deſcripto à media linea ſolido parallelepipedo, quod æquilaterum quidem ſit, æquiangulum verò prædicto.



SINT continuè proportionales rectæ A, B, C. Cõſtituatúrque angulus ſolidus E, ex tribus angulis planis quibuſcunq; DEF, DEG, FEG, ita vt recta DE, ipſi A, & EF, ipſi B; & EG, ipſi C, ſit æqualis. Completis autem parallelogrammis DF, FG, GD, perficiatur parallelepipedum DH; quod ſub tribus rectis A, B, C, dicitur cõtineri, aut ex ipſis fieri. [i] Deinde ad rectam IK, eiuſq; punctum K, fiat ſolidus angulus K, æqualis ſolido angulo E, ex tribus angulis planis IKL, IKM, LKM, qui æquales ſint tribus DEF, DEG, FEG; itavt rectæ IK, KL, KM, æquales ſint mediæ lineæ B. Completis verò parallelogrammis IL, LM, MI, perficiatur parallelepipedum IN; quod contineri dicitur ſub linea B, ſeu ex ipſa deſcribi. Dico ſolidum DH, æquale eſſe ſolido IN. Cùm enim ſit vt DE, ad IK, ita KM, ad EG, (& DE, ipſi A; & IK, KM, ipſi B; & EG, ipſi C, ſumpta ſit æqualis,) & anguli DEG, IKM, æquales: [k] Erũt parallelogramma DG, IM, æqualia, propterea & latera habent circa æquales angulos reciproca. Quoniam verò anguli plani DEG, IKM, ſunt æquales, quorũ verticibus inſiſtunt ſublimes lineæ æquales EF, KL, quæ æquales angulos comprehendunt cũ lineis primò poſitis, ex cõſtructione, vtrumq; vtriq; Erunt perpendiculares ex F, L, ad plana baſium DG, IM, demiſſæ, nimirũ altitudines parallelepipedorum DH, IN, ſi baſes ſint DG, IM, inter ſe æquales, per coroll. propoſ. præcedentis. [l] Quare parallelepipeda DH, IN, cùm habeant baſes DG, IM, æquales, & æquales quoq; altitudines, inter ſe æqualia erunt. Si tres igitur rectæ lineæ proportionales fuerint, &c. Quod erat demonſtrandum.

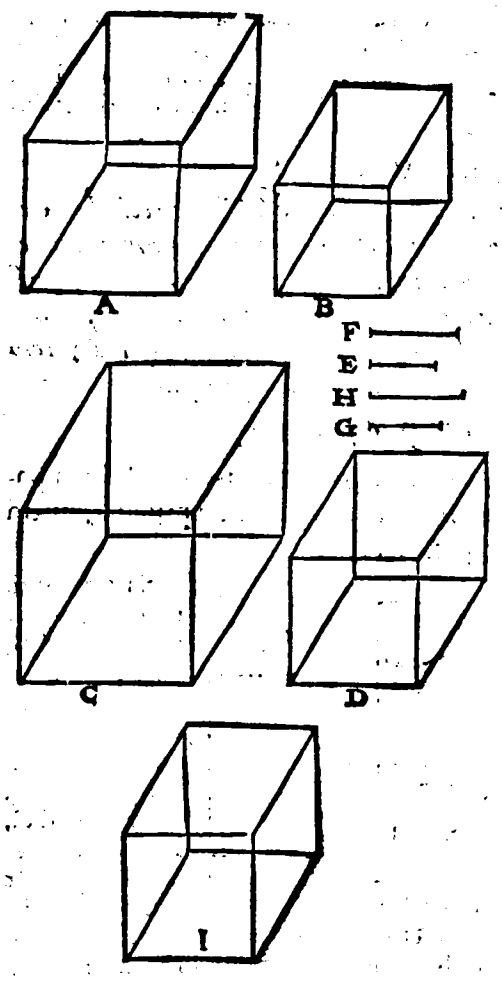
[i] 26. vndec.
[k] 14. ſexti.
[l] 31. vndec.

SCHOLIVM.

VICISSIM quoq; , si parallelepipedum ex tribus lineis rectis descriptum, æquale fuerit parallelepipedo sibi æquiangulo à media linea descripto: erunt tres rectæ continuè proportionales. Sit enim parallelepipedum D H, descriptum ex rectis A, B, C, vt dictum est, æquale sibi æquiangulo parallelepipedo I N, descripto à media B. Dico tres A, B, C, esse continuè proportionales. Nam veluti prius, ostendentur eorum altitudines ex F, I, demissæ, esse æquales. Quare cùm & ipsa ponantur æqualia; erunt eorum bases D H, I M, æquales per ea, quæ ad finem propos. 31. huius lib. demonstrauimus. Quæ bases, cùm angulos habeant æquales D E G, I K M, ex
214. sexti. *constructione; [a] habebùt latera circa illos æquales angulos reciproca; hoc est, vt D E, ad I K, ita K M, ad E G. Quapropter cùm D E, ipsi A; & I K, K M, ipsi B; & E G, ipsi C, sumpta sit æqualis; Erit quoq; vt A, ad B, ità B, ad C. Quod est propositum.*

39. THEOR. 32. PROPOS. 37.

SI quatuor rectæ lineæ proportionales fuerint: & solida parallelepipeda, quæ ab ipsis & similia, & similiter describuntur, proportionalia erunt. Et si solida parallelepipeda, quæ & similia, & similiter describuntur, fuerint proportionalia: Et ipsæ rectæ lineæ proportionales erunt.



SINT quatuor rectæ proportionales A, B, C, D, vt quidem A, ad B, ita C, ad D; constituanturq; super A, & B, duo parallelepipeda A, & B, similia, similiterq; descripta; itē super C, & D, alia duo C, & D, similia similiterque posita, siue hæc sint illis similia, siue nō. Dico esse quoque solida A, B, C, D, proportionalia. Vt quidem solidum A, ad solidum B, ita solidum C, ad solidum D. Inueniantur enim, per scholium propositionis 11. lib. 6. duabus rectis A, B, aliæ duæ continuè proportionales E, F. Item duabus C, D, aliæ G, H. Quoniam igitur sunt quatuor lineæ A, B, E, F, & quatuor lineæ aliæ C, D, G, H, quæ binæ in eadem ratione sumuntur; erit ex æquo, vt A, ad F, ita C, ad H. Vt autē A, ad F, ita est solidum A, ad solidum B, & vt C, ad H, ita solidū C, ad solidum D, ex corol. propos. 33. huius lib. Igitur erit vt solidum A, ad solidum B, ita solidum C, ad solidum D. Quod est propositum.

SINT iam e contrariò solida A, B, C, D, proportionalia. Dico rectas A, B, C, D, esse quoq; proportionales. [a] Tribus enim rectis A, B, C, inueniatur quarta
a 12. sexti. proportionalis I, [b] super quā describatur parallelepipedum ipsi D, vel C, simile, similiterq; positū. Quoniam igitur est, vt recta A, ad rectam B, ita recta C, ad
b 27. vndec. rectam I; erit quoq;, vt iam est ostensum, vt solidum A, ad solidum B, ita solidum C, ad solidum I. Vt autē solidum A, ad solidum B, ita ponitur quoq; solidum C, ad solidum D: Igitur erit vt solidū C, ad solidum I, ita idem solidum C, ad solidum D. [c] Atque idcirco
c 9. quinti. æqualia erunt solida I, & D. Quæ cùm sint similia, similiterque descripta, continebuntur planis æqualibus, per defin. 10. huius lib. Sed plana æqualia, & similia, habent latera homologa æqualia, per lemma propos. 22. lib. 6. Igitur rectæ I, & D, æquales sunt. Ac propterea erit, vt recta C, ad I, rectam, ita eadem C, ad rectam D. Posita est autē C, ad I, vt recta A, ad B. Quare erit vt recta A, ad rectā B, ita recta C, ad rectam D. Itaq; si quatuor rectæ lineæ proportionales fuerint, &c. Quod erat demonstrandum.

BREVIVS tota hæc propositio demonstrabitur cū Theone, hoc modo. Ponatur primùm vt recta A, ad rectam B, ita recta C, ad rectam D. Dico esse quoq; vt solidū A, ad solidum B, ita solidum
d 33. vndec. C, ad solidum D. [d] Cùm enim sit proportio solidi A, ad solidum B, triplicata proportionis rectæ A, ad rectam B; Item proportio solidi C, ad solidum D, triplicata proportionis rectæ C, ad rectam D: erunt proportiones solidi A, ad solidū B, & solidi C, ad solidum D, æquales; quandoquidem triplicatæ sunt proportionū æqualium, nempe rectæ A, ad rectam B, & rectæ C, ad rectam D. Quod est primum. Rursus ponatur secundò esse vt solidum A, ad solidum B, ita solidum C, ad solidū D. Dico esse quoq;, vt rectā A, ad rectam B, ita rectam C, ad rectam D. [e] Cùm enim sit proportio soli-
e 33. vndec. di A, ad solidum B, triplicata proportionis rectæ A, ad rectam B; Item proportio solidi C, ad solidum D, triplicata proportionis rectæ C, ad rectam D; erunt proportiones rectarum A, ad B,

ad D,

ad D, æquales: quandoquidem earum proportiones triplicatæ, nimirum solidi A, ad solidum B, & solidi C, ad solidum D, æquales ponuntur. Quod est secundum.

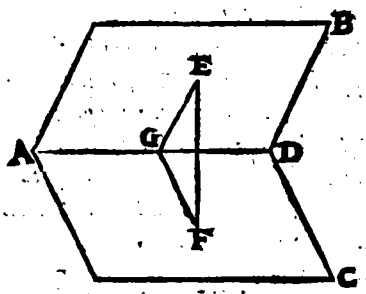
SCHOLIVM.

EODEM modo, si fuerint tres rectæ proportionales, erunt & parallelepipeda similia similiterq; descripta ex eis, proportionalia, &c. Si enim media linea, eiusq; solidū sumatur bis, habebuntur quatuor rectæ proportionales. Igitur & quatuor solida proportionalia, vt demonstratū est. Cùm igitur solidū secundæ lineæ æquale sit solido tertiæ lineæ; & linea secunda æqualis tertiæ lineæ; perspicuum est, quod proponitur.

TOTA verò hæc propositio cōuenit etiam prismatis, quorum duo plana aduersa æqualia, sunt vel triangula, vel parallelogramma, vt Campanus ait. Nam additis prismatis, quæ singula singulis sint æqualia, exurgent parallelepipeda, quæ, vt hic est demonstratum, proportionalia erunt. [a] *Cùm igitur prismata, eorum dimidia, eandem habeant cum ipsis proportionem; perspicuum est, quod proponitur.* a 15. quin.

THEOR. 33. PROPOS. 38. 13.

SI planum ad planum rectum fuerit; & ab aliquo puncto eorū, quæ in vno sunt planorum, ad alterum planum perpendicularis ducta fuerit: in communē sectionem cadet planorum ducta perpendicularis.



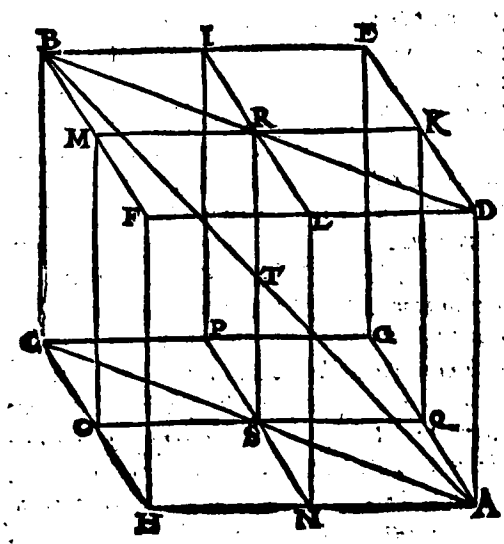
PLANVM.n. AB, rectum sit ad planum AC, sitque eorum communis sectio recta AD; Et ab E, puncto plani AB, ad planum AC, perpendicularis demittatur: quam dico cadere in communem sectionem AD. Nam si fieri potest, cadat extra ad punctum F, [a] & ab F, in plano AC, ducatur ad rectā AD, perpēdicularis FG, connectaturq; recta EG, in plano AB. Quoniam igitur FG, perpēdicularis est ad communem sectionem AD; erit quoque perpendicularis ad planum AB, ex defin. 4. huius lib. atq; adeò & ad rectam GE, per 3. defin. huius lib. Est autem & EF, recta ad FG, per eandem 3. defin. Igitur in triangulo EFG, duo anguli EFG, EGF, recti sunt: quod est absurdum: [b] cùm duobus rectis sint minores. Perpendicularis ergo ex E, demissa ad planum AC, nō extra communem sectionem AD, cadet. ergo in ipsam cadat, necesse est. Quamobrem, si planum ad planum rectum fuerit, &c. Quod erat demonstrandum. a 11. primi. b 17. primi.

SCHOLIVM.

HAEC est demonstratio Theonis. Nos tamen idem demonstrabimus breuius, hoc modo. Si ex puncto E, dato in plano AB, demissa perpendicularis ad planum AC, non cadit in communem sectionem AD, sed in punctum F, extra sectionē; [a] *ducatur ex E, ad rectam AD, perpendicularis EG; quæ ex 4. defin. recta erit ad planum AC. Quare ex puncto E, extra planum AC, ducta sunt ad ipsum planum AC, duæ perpendiculares EF, FG. Quod fieri nequit, vt in scholio propos. 13. huius lib. demonstrauimus.* a 12. primi.

THEOR. 34. PROPOS. 39. 40.

SI solidi parallelepipedi eorum, quæ ex aduerso, planorum latera bifariam secta sint; per sectiones autem plana sint extensa: communis sectio planorum, & solidi parallelepipedi diameter, bifariam se mutuò secabunt.



SINT parallelepipedi AB, plana opposita AC, BD, quorū omnia latera bifariā secta sint in punctis I, K, L, M, N, O, P, Q; per quæ extensa sint duo plana IN, KO, quorum sectio communis sit recta RS: Ducatur item diameter AB. Dico rectam RS, & diametrum AB, se mutuò secare bifariam. Connexis enim rectis RB, RD, SA, SC; considerentur duo triangula AQS, COS. Quoniam igitur latera AQ, QS, trianguli AQS, æqualia sunt lateribus CO, OS, triāguli COS. (Sunt enim AQ, CO, dimidia rectarū æqualiū AG, GH; [a] & QS, QS, duabus æqualibus AN, HN, equales, cùm sint parallelogramma AS, HS;) [b] & angulus AQS, equalis alterno angulo COS: erunt & bases AS, CS, equales, & anguli ASQ, CSO, æquales. [d] Atqui anguli ASQ, ASO, æquales sunt duobus rectis. Igitur & CSO, ASO, duob. sunt rectis æquales. [e] Ac propterea AS, CS, vnam rectā lineam constituent. Eodem modo ostendētur esse æquales BR, DR, & vnam ex eis componi lineā rectam. Rursus quia vtraq; AD, BC, parallela est, & æqualis rectæ FH, ob parallelogramma AF, EC, [f] ipsæ quoque a 34. primi. b 29. primi. c 4. primi. d 13. primi. e 14. primi. f 9. vndec.

a 33. primi. inter se parallelæ erũt, & æquales.[a] Quare & rectæ A C, B D, earum extrema coniungentes, parallelæ sunt, & æquales; Ac proinde ipsarũ dimidiæ A S, B R, æquales sunt. Quia verò A C, B D, parallelæ sunt;[b] erunt rectę A B, R S, in eodem cum ipsis plano, ideoq; se mutuò secabunt, in puncto videlicet T.[c] Cùm autem duo anguli A S T, A T S, trianguli A S T, æquales sint duobus angulis B R T, B T R, trianguli B R T; & latus A S, lateri B R:[d] Erunt reliqua latera T A, T S, reliquis lateribus T B, T R, æqualia; Ac propterea A B, R S, se mutuò secant bifariam in T. Si igitur solidi parallelepipedi eorum, quæ ex aduerso, &c. Quod erat ostendendum.

b 7. vndec.
c 29. & 15. primi.
d 26. primi.

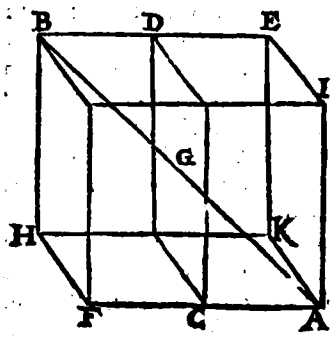
COROLLARIVM.

Hinc efficitur, in omni parallelepipedo diametros omnes se mutuò bifariã secare in vno puncto; nimirum in puncto T, in quo bifariam diuidunt, vt hîc demonstratũ est, rectam R S.

SCHOLIVM.

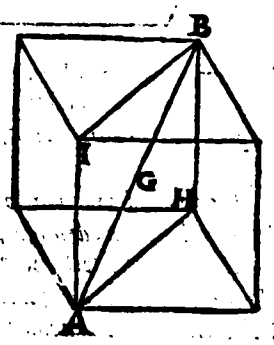
Huic theoremati addi potest aliud non dissimile illi, quod ad ppos. 34. 1. lib. demõstrauimus, videlicet.

Si solidum parallelepipedum plano secetur per centrum: bifariam secabitur solidum ab ipso plano. Et si solidum parallelepipedum plano secetur bifariam: per centrum transibit ipsum planum.



a 17. vndec.
b 25. vnde.

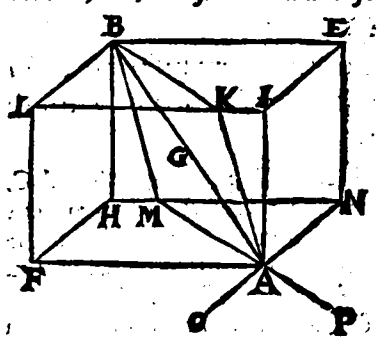
Sectvr parallelepipedũ A B, plano C D, per centrũ, hoc est, per punctũ mediũ diametri A B, quod sit G. Dico parallelepipedũ bifariã secari. Sit enim primò planũ C D, oppositis planis A E, B F, parallelum.[a] *Et quia plana parallela B F, D C, E A, secãt rectas quascunq; proportionaliter; secatur autẽ B A, bifariã in G; secabuntur quoq; latera aduersorum planorum A H, B I, atq; adeò & bases A H, B I, bifariam.*[b] *Cùm igitur sit vt basis K C, ad basim C H; ita solidũ A D, ad solidum C B; erit parallelepipedum A B sectum bifariam plano C D, per centrum G, ducto.*



Transeat secundò planum secãs A I B H, per diametros B I, A H, planorum oppositorum; quoniam & sic secatur parallelepipedum per centrum G, immo per totam diametrum A B;[c] *cùm A B, in plano sit parallelarum A H, B I.*[d] *Demonstratum autem est antea, parallelepipedũ secari plano per diametros oppositorum planorum ducto bifariam.*

c 7. vndec.
d 28. vnde.

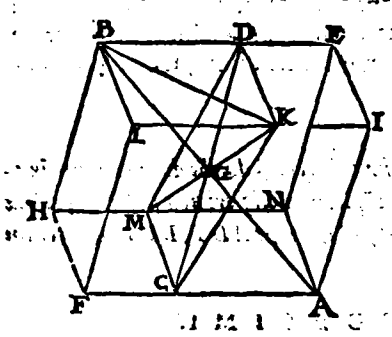
Tertio, planum secans A K B M, neq; sit aduersis planis parallelum, neq; per diametros oppositorum planorum ductum, sed tantùm per angulos A, & B, planorum A H, B I. Quoniam igitur plana parallela A H, B I, secantur plano A K B M;[e] *erunt communes sectiones A M, B K, parallelæ. Similiter parallelæ erunt A K, B M, cùm sint communes sectiones planorum parallelorum A L, B N, facta à plano A K B M. Quare parallelogrammum est A K B M;*[f] *ideoq; tam recta A K, B M, quam recta A M, B K, inter se erunt æquales. Quia ergo latera B K, B L, trianguli B K L, æqualia sunt lateribus A M, A N, trianguli A M N; & angulus K B L, angulo M A N, æqualis. (Productis enim N A, M A, ad O, P, erunt A O, A P, rectis B L, B K, parallelæ;*[g] *ac proinde æquales anguli erũt O A P, L B K.*[h] *Cùm igitur O A P, æqualis sit angulo M A N; æquales quoq; erũt anguli K B L, M A N.)*[i] *Erũt bases K L, M N, inter se, & anguli B K L, B L K, angulis A M N, A N M, æquales; & triangulũ triangulo æquale. Quare & similia erunt triãgula B K L, A M N;*[k] *cùm latera habeant circa æquos angulos proportionalia. Quoniam verò recta K L, rectæ M N; & angulus B K L, angulo A M N; & angulus K B L, angulo M A N, est æqualis, vt ostendimus; erit & reliqua I K, reliquæ H M; & reliquus angulus B K I, reliquo A M H; & reliquus K B E, reliquo M A F, æqualis. (Est enim tota L I, toti N H, æqualis, & tam anguli B K L, B K I, quàm anguli A M N, A M H, duobus rectis æquales; & totus angulus L B E, toti angulo N A F, æqualis, ob similitudinem parallelogrammorũ L E, F N.) Sunt autem & latera B E, E I, lateribus A F, F H, æqualia & anguli B E I, E I K, angulis A F H, F H M, ob parallelogramma L E, F N. Igitur quadrilaterum B K I E, & æquilaterum, & æquiangulum est quadrilatero A M H F; At propterea æquale & simile, cùm singula singulis conueniant, latera nimirum lateribus, & anguli angulis. Eodem modo æqualia erunt & similia triãgula B H M, A I K; & quadrilatera A K L F, B M N E, cùm inter se sint & æquilatera & æquiangula. Quapropter solidum contentum planis A K L F, F H M A, A K B M, M H B, B K I, I B H F, æquale erit solido contento planis B M N E, E I K B, B M A K, K I A, A M N, N A I E, per 10. defin. huius libri, cùm his planis illa sint similia & æqualia, vt demonstratum est. Parallelepipedum ergo A B, sectũ est plano A K B M, per centrum G, bifariam.*



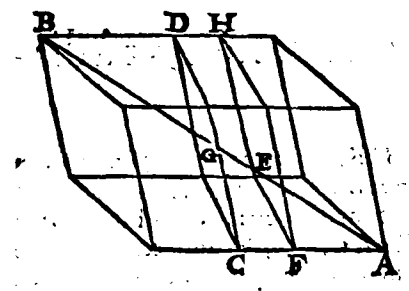
e 16. vnde.
f 34. primi.
g 10. vnde.
h 15. primi.
i 4. primi.
k 4. sexti.

Postremo planum secans C D, neque aduersis planis parallelum sit, neque per diametros planorum op-

cum oppositorum, neque per vllos angulos eorum ductum; sed vtcunque secet plana oppositа AH, BI. Ostendemus autem, vt prius, planum secans CD, esse parallelogrammũ, & tam rectas CK, DM, quàm rectas CM, DK, esse æquales. Ducantur in parallelogrammo CD, diametri CD, KM; connectanturq; rectæ AM, BK. Quoniam igitur AF, BE, parallelæ ipsi LI, ob parallelogramma AL, LE, [a] inter se sunt parallelæ; [b] Erunt AB, CD, in eodem cum illis plano; ac propterea se mutuò secabunt in centro G. In solo enim centro G, rectæ AB, per hypothesim, secat planum CD, in quo existit recta CD. [c] Et quoniam angulus BDC, angulo alterno ACD, æqualis est: [d] Est autem & angulus BGD, angulo AGC, ad verticem æqualis; & latus BG, lateri AG, æquale, quòd AB, bifariã secetur in G, centro; [e] Erit & latus DG, lateri CG, æquale. Cùm ergo per ea, quæ ad propos. 34. lib. 1. ostendimus, diametri CD, KM, se mutuò bifariam secent, transibit KM, per punctum G, ibiq; diametrũ AB, secabit. Quia ergo latera BG, GD, trianguli BGD, æqualia sunt lateribus AG, GC, trianguli AGC; [f] & angulus BGD, æqualis angulo AGC. [g] Erit & basis BD, æqualis basi AC. Eodem argumento æquales erunt rectæ BK, AM. Quocirca cùm tria latera BD, DK, KB, triãguli BDK, æqualia sint tribus lateribus AC, CM, MA, trianguli ACM; Erunt, per ea, quæ ad propos. 8. l. 1. docuimus, anguli illius, angulis huius æquales: Est autem totus DBL, toti CAN, æqualis, ob similitudinem parallelogrammorum BI, AH. Igitur & reliquus KBL, reliquo MAN, erit æqualis. Quoniam igitur latera BK, BL, trianguli BKL, æqualia sunt lateribus AM, AN, trianguli AMN; & angulus KBL, angulo MAN, æqualis; [h] Erit & basis KL, basi MN; & reliqui anguli reliquis angulis æquales. Si igitur æqualibus angulis BKL, AMN, æquales addantur anguli BKD, AMC, fient toti anguli DKL, CMN, æquales. Quare quadrilaterum BDKL, quadrilatero ACMN, & æquilaterum est, & æquiãgulum; Ac propterea æquale & simile, cùm singula conueniant singulis, nempe latera lateribus, & anguli angulis. Rursus quia tota LI, toti NH, est æqualis, erit & reliqua IK, reliquæ HM, æqualis. Eademq; ratione reliqua DE, reliquæ CF, æqualis erit; Ac propterea quadrilaterum DEIK, æquilaterum est quadrilatero CFHM: Sed & æquiangulum; cùm anguli DEI, EIK, æquales sint angulis CFH, FHM, propter similitudinẽ parallelogrammorũ BI, AH; & anguli EDK, IKD, angulis FCM, HMC, æquales, quòd æquales ostensi sint eorum anguli alterni LKD, BDK, angulis NMC, ACM. Igitur quadrilatera DEIK, CFHM, æqualia sunt & similia. Non aliter ostendemus, æqualia esse & similia quadrilatera ACKI, BDMH; Item DENM, CFLK, cùm & latera lateribus, & anguli angulis conueniant, vt perspicuum est. Quamobrem solidum contentum planis CKLF, FHMC, CKDM, MHBD, DKLB, BHFL, per 10. defin. huius lib. æquale est solido cõtento planis DMNE, EIKD, DMCK, KIAC, CMNA, AIEN; cùm hisce illa sint demonstrata & æqualia & similia. Parallelepipedum igitur AB, sectum est per centrum G, plano CD, bifariam.

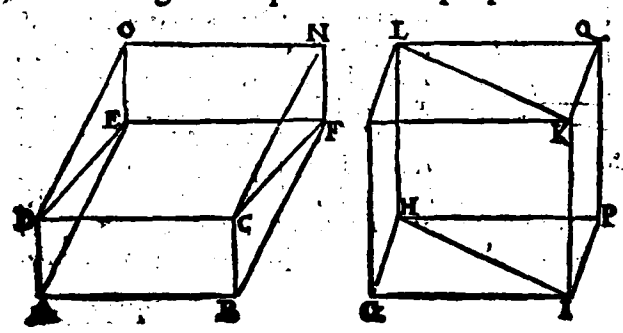


SED secetur iam parallelepipedum AB, plano CD, bifariam. Dico planum CD, per centrum parallelepipedi transire, hoc est, punctum G, in quo planum CD, secat diametrũ AB, diuidere diametrum AB, bifariam. Si enim diameter AB, in G, non diuiditur bifariam, diuidatur bifariam in E, vt sit E, centrum parallelepipedi. Si igitur per E, ducatur planum FH, plano CD, parallelum, secabitur parallelepipedum AB, bifariam plano FH, vt demonstratum est. Ponitur autem & bifariam secari plano CD; Igitur solida CB, FB, cùm sint dimidia parallelepipedi AB, inter se æqualia sunt, pars & totũ. Quod est absurdũ. Non ergo aliud punctũ, præter G, diuidet diametrũ AB, bifariam; Ac proinde G, centrũ erit parallelepipedi. Quod demonstrandũ erat.



THEOR. 35. PROPOS. 40. 41.

SI fuerint duo prismata æqualis altitudinis, quorum hoc quidem habeat basin, parallelogrammum; illud verò, triangulum; duplum autem fuerit parallelogrammum trianguli: Æqualia erunt ipsa prismata.



SINT duo prismata æqualis altitudinis ABCDEF, GHIKLM, quorum illud basim habeat parallelogrammum ABCD, hoc verò, triangulũ GHL, sitq; parallelogrammũ AC, trianguli GHL, duplũ. Dico hæc prismata esse æqualia. Perficiantur enim parallelepipeda AN, GQ; Quod quidem fiet, si plana triangulorũ extendantur, perficianturq; parallelogrãma BN, AO, GP, MQ. Si enim cõnectantur rectæ NO, PQ, cõstituta erũt

duo parallelepipeda A N, G Q, eiusdem altitudinis cum prismatis. Nam planorum solidorũ
c 34. primi. oppositæ esse parallelas, facilè colligetur ex propos. 15. huius lib. c Quoniam igitur parallelogrãmum GP, duplum est trianguli GHI. Ponitur autem & parallelogrammũ AC, eiusdem trian-
b 31. vndec. guli GHI duplum: æqualia erunt parallelográma AC, GP. b Quare parallelepipeda AN, GQ, eiusdem altitudinis super æquales bases AC, GP, inter se sunt æqualia. Atque propterea eorum
c 32. vnde. dimidia, nimirum prismata ABCDEF, GHIKLM, (c Nam parallelepipeda AN, GQ, per diametros CF, DE, HI, LK, planorum aduersorum secantur bifariam, in bina scilicet prismata) æqualia quoque sunt inter se. Itaque si fuerint duo prismata æqualis altitudinis, &c. Quod erat demonstrandum.

SCHOLIVM.

PERSPICVVM autem est ex demonstratione, propositionem hanc intelligi de illis duntaxat prismatis, quæ duo triangula habent opposita; cùm imperet parallelepipeda cõpleri; quod fieri non posset, si prisma super parallelogrammum ABCD, constitutum non haberet duo triangula, nempe ADE, BCF. Esset enim tam parallelepipedum completum.

FINIS ELEMENTI VNDECIMI.

EVCLIDIS

ELEMENTVM DVODECIMVM:

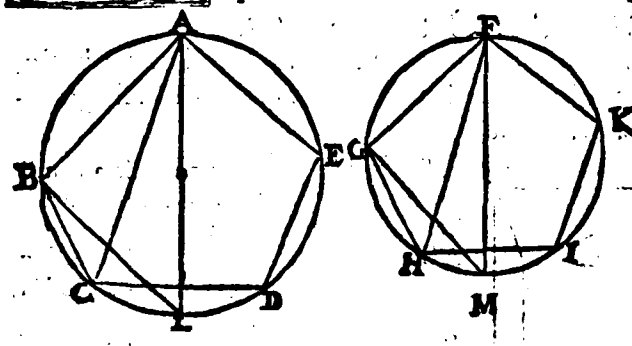
& Solidorum secundum.

1. THEOR. 1. PROPOS. 1.

QVÆ in circulis polygona similia; inter se sunt, vt à diametris quadrata.



INT duo polygona similia ABCDE, FGHIK, descripta in circulis, quorum diametri AL, FM. Dico ita esse polygonum ABCDE, ad polygonum FGHIK, vt quadratum diametri AL, ad quadratum diametri FM. Subtendantur enim angulis æqualibus ABC, FGH, rectæ AC, FH, & connectantur rectæ BL, GM. Quoniam igitur ob similitudinem polygonorum est vt AB, ad BC, ita FG, ad GH; d erunt triangula ABC, FGH, æquiangula, cùm circa angulos
d 6. sexti. æquales ABC, FGH, habeant latera proportionalia: e Est autẽ angulus ALB,
e 21. tertij. angulo ACB, & angulus FMG, angulo FHG, æqualis. Igitur & anguli ALB, FMG, æquales erunt. Cùm ergo & anguli ABL, FGM, æquales sint, f nempe recti in semicirculis consistentes; g erũt & reliqui BAL, GFM, æquales. h Quare erit vt AL, ad AB, ita FM, ad FG; & permutando, vt AL, ad FM, ita AB, ad FG. i Igitur est vt quadratum ex AL, ad quadratum ex FM, ita polygonũ ABCDE, super AB, ad polygonum FGHIK, super FG; cùm tam quadrata, quàm polygona sint figuræ similes, similiterque descriptæ. Quæ itaque in circulis polygona similia, inter se sunt, vt à diametris quadrata. Quod erat demonstrandum.



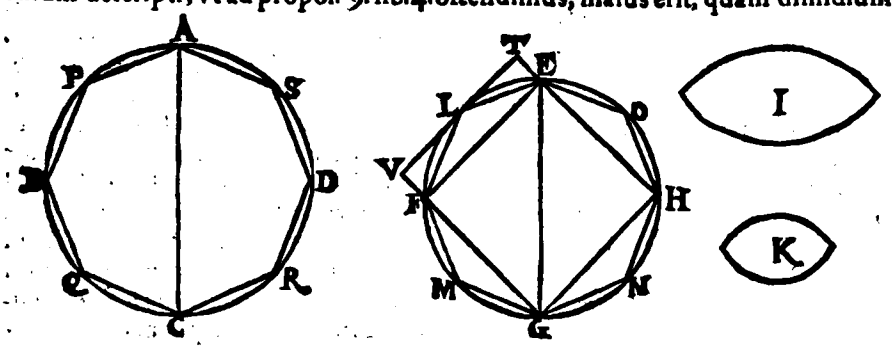
f 31. tertij.
g 23. primi.
h 4. sexti.
i 22. sexti.

THEOR. 2. PROPOS. 2.

CIRCVLI inter se sunt, quemadmodum à diametris quadrata.

SINT duo circuli A B C D, E F G H, quorum diametri A C, E G. Dico esse, vt quadratum diametri A C, ad quadratum diametri E G, ita circulum A B C D, ad circulum E F G H. Si enim res non ita se habet; Sit vt quadratum diametri A C, ad quadratum diametri E G, ita circulus A B C D, ad aliquam magnitudinem, nempe ad I, quæ vel minor erit, vel maior circulo E F G H. Si enim esset æqualis, [a] haberet circulus A B C D, ad circulum E F G H, & ad I, eádem proportionem; ac propterea esset circulus A B C D, ad circulum E F G H, vt quadratum diametri A C, ad quadratum diametri E G, quod non conceditur. Sit ergo primùm I, minor, quàm circulus E F G H, magnitudine scilicet K, ita vt circulus E F G H, æqualis sit manitudinibus I, & K, simul. Inscribatur in circulo E F G H, quadratum E F G H; quod quia dimidium est quadrati circa eundem circulum descripti, vt ad propos. 9. lib. 4. ostendimus, maius erit, quàm dimidium circuli E F G H.

[a] 7. quinti.



Secentur bifariã peripheriæ E F, F G, G H H E, in punctis L, M, N, O, adiungãturque rectæ L E, L F, M F, M G, N G, N H, O H, O E. Ducatur per L, recta T V, tangens circulũ in L, quæ parallela erit ipsi E F, vt ad propos. 27. lib. 3. ostendimus, occurratque rectis H E, G F, productis in T, & V. [b] Quia ergo triangulum E L F, dimidium est parallelogrammi T E F V; maius erit triangulum E L F, quàm dimidium segmenti circuli E L F. Eadem ratione erunt reliqua triangula maiora, quàm dimidia segmentorum, in quibus sunt. Omnia igitur triangula simul maiora sunt, quàm dimidium omnium segmentorum simul. Quod si rursus peripheriæ E L, L F, &c. secentur bifariam, & adiungantur rectæ lineæ, constituentur eodem modo triangula, quæ maiora erunt simul, quàm dimidium omnium segmentorum simul, in quibus sunt; & sic deinceps. Quoniam verò, si à circulo E F G H, auferatur plus quàm dimidium, nempe quadratum E F G H; & à reliquis segmentis plus quàm dimidium, nempe triangula E L F, F M G, &c. atque in hunc modum semper fiat detractio; [c] relinquitur tandem minor magnitudo, quàm K, excessus inter circulum E F G H, & magnitudinem I. Sint iam circuli segmenta relicta E L, L F, F M, &c. simul sumpta minora, quàm magnitudo K. Cùm igitur circulus E F G H, æqualis ponatur magnitudinibus I, & K, simul; si ex circulo detrahantur dicta segmenta, & ex I, & K, ipsa magnitudo K, quæ maior est præfatis circuli segmẽtis; erit reliquum polygonum E L F M G N H O, maius reliqua magnitudine I. Inscribatur in circulo A B C D, polygonum A P B Q C R D S, simile polygono E L F M G N H O. Quod quidem facilè fiet, si semicirculi A B C, A D C, bifariam secentur in B, & D; & rursus circumferentiæ A B, B C, C D, D A, bifariam in P, Q, R, S; & sic deinceps, donec in tot partes æquales diuisa sit circumferentia A B C D, in quot distributa est circumferentia E F G H. Nam iunctis rectis A P, P B, B Q, &c. erit figura inscripta similis figuræ E L F M G N H O, vt patet. [d] Quoniam igitur est polygonum A P B Q C R D S, ad polygonum E L F M G N H O, vt quadratum diametri A C, ad quadratum diametri E H, hoc est, per hypothesim, vt circulus A B C D, ad I: Est autem polygonum A P B Q C R D S, minus circulo A B C D. [e] Igitur & polygonũ E L F M G N H O, minus erit quàm I. Ostensum autem est & maius. Quod est absurdum. Non igitur minor est magnitudo I, circulo E F G H.

[b] 41. primi.

[c] 1. decimi.

[d] 1. duodec.

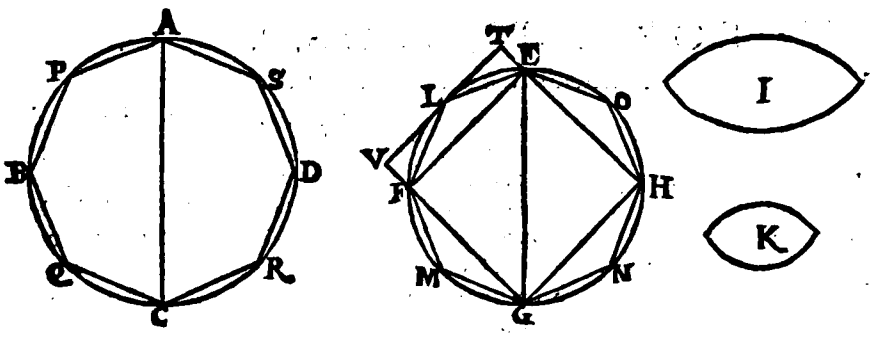
[e] 14. quinti

QVAMQVAM autem in figura confertur maior circulus cum minore; eodẽ tamen modo demonstrabimus, minorem circulum E F G H, non posse ad magnitudinem, quæ minor sit, quàm maior circulus A B C D, habere eandem proportionem, quam habet quadratum diametri minoris E G, ad quadratum maioris diametri A C; Ita vt generaliter & vniuersè demonstratum sit, nunquam quadratum diametri alicuius circuli ad quadratum diametri alterius circuli eandem habere posse proportionem, quam habet prior circulus ad magnitudinem posteriore circulo minorem: siue prior circulus maior sit posteriore, siue minor.

SIT deinde magnitudo I, maior circulo E F G H. Cùm ergo ponatur circulus A B C D, ad I, esse vt quadratum diametri A C, ad quadratum diametri E G; erit & conuertendo I, ad circulum A B C D, vt quadratum diametri E G, ad quadratum diametri A C. Ponatur vt I, ad circulũ A B C D, ita circulus E F G H, ad magnitudinem aliquam, nẽpe ad K. Et quia I, maior ponitur circulo E F G H, [f] maior quoq; erit circulus A B C D, magnitudine K. Quare erit vt quadratũ diametri E G, ad quadratum diametri A C, ita circulus E F G H, ad magnitudinem K, quæ minor est circulo A B C D. Quod est absurdũ. Ostensum enim est iam in priori parte generaliter, non posse esse vt quadratũ diametri ad quadratũ diametri, ita circulum ad magnitudinẽ circulo minorẽ; siue prior

[f] 14. quinti

circulus



circulus maior sit posteriore, siue minor. Quamuis autẽ circulus A B C D, maior est, & E F G H, minor: eadem tamen ratione ostẽdemus, quadratũ diametri circuli E F G H, ad quadratũ diametri circuli, A B C D, non posse habere eandem proportionem, quam habet circulus E F G H, ad magnitudinem circulo A B C D, maiorem: quia eodem modo probabimus, (si illud cõcedatur) quadratrum diametri A C, ad quadratum diametri E G, eandem habere proportionem, quam habet circulus A B C D, ad magnitudinem circulo E F G H, minorem. quod falsum esse iam in priori parte generaliter demonstratum est: Ita vt generaliter & vniuersè quoque demonstratum sit, nunquã quadratum diametri alicuius circuli ad quadratum diametri alterius circuli eandẽ habere posse proportionem, quam habet prior circulus ad magnitudinem posteriore circulo maiorem: siue prior circulus maior sit posteriore, siue minor. Non ergo maior est magnitudo I, circulo E F G H: sed neque minor est ostensa, æqualis igitur est. Quare cùm ponatur, vt quadratum diametri A C, ad quadratum diametri E G, ita circulus A B C D, ad I; [a] sit autem vt circulus A B C D, ad I, ita idem circulus A B C D, ad circulum E F G H, qui æqualis est magnitudini I; Erit quoq; vt quadratum diametri A C, ad quadratum diametri E G, ita circulus A B C D, ad circulum E F G H, siue circulus A B C D, circulo E F G H, maior sit, siue minor. Circuli igitur inter se sunt, quemadmodum à diametris quadrata. Quod erat ostendendum.

a 7. quinti.

COROLLARIVM.

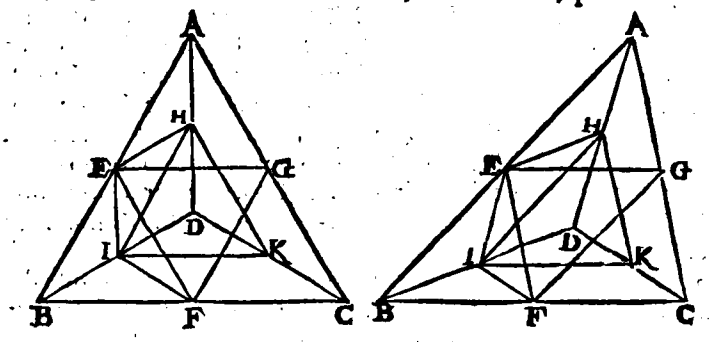
HINC fit, ita esse circulum ad circulum, vt polygonum in illo descriptum ad polygonum simile in hoc descriptum. Quoniam [a] *tam circulus ad circulum,* [b] *quàm polygonum ad polygonum est, vt quadratum diametri ad quadratum diametri, veluti demonstratum est.*

a 2. duode.
b 1. duode.

3. THEOR. 3. PROPOS. 3.

OMNIS pyramis triangularem habens basim, diuiditur in duas pyramides æquales, & similes inter se, triangulares habentes bases, & similes toti; Et in duo prismata æqualia, quæ duo prismata maiora sunt dimidio totius pyramidis.

SIT pyramis, cuius basis triangulum A B C, vertex D. Secentur omnia eius latera bifariam in E, F, G, H, I, K, cónectanturque rectæ E F, F G, G E, H I, I K, K H, H E, E I, I F. Diuisa itaq; est pyramis in duas pyramides A E G H, H I K D, quarum bases triangula A E G, H I K, & vertices H, D; nec non in duo solida E B F G H I, C F G H I K, quæ mox ostendemus esse prismata, quorum illius basis est parallelogrãmum E B F G, & triangula opposita E H G, B I F; huius verò basis est triãgulum C F G, cui opponitur triangulum K I H, habentq; hæc prismata terminum communẽ, parallelogrammum F G H I; & cum duabus illis pyramidibus componunt totam pyramidem, vt constat, si rectè concipiatur pyramidis vertex D, in sublimi, necnon eius triangula circumiacentia. Dico igitur duas illas pyramides esse æquales, & similes inter se, & similes toti; Item duo hæc prismata esse inter se æqualia, & maiora dimidio totius pyramidis Cùm enim latera A D B D, trianguli A D B, secta sint bifariam, ac proinde proportionaliter, [a] erunt H I, A B, parallelæ. Eadẽ ratione parallelæ erunt I K, B C; & H K, A C; & E G, B C; & E F, A C; & F G, A B; & E H B D; & E I, A D; & I F, D C; & H G, D C. [b] Sunt autẽ & rectæ F G, H I, cùm parallelę sint ipsi A B, inter se parallelæ; Atq; eadẽ ratione parallelæ sunt G H, F I, cùm sint parallelæ ipsi D C. Quare parallelogramma sunt A E I H, H E B I, I D H E, E B F G, G H K C, C K I F, F G H I Quoniam verò rectæ H E, H G, rectis D B, D C, sunt parallelæ, [c] erunt anguli E H G, B D C, æquales: Ac eadem rõne æquales erunt anguli H E G, D B C; & H G E, D C B. [d] Proportionalia igitur sunt latera triãguli H E G, lateribus trianguli D B C, circa æquales angulos; ac proinde simile est triãgulum H E G, triangulo D B C. Sunt autem & triangula H A E, H A G, A E G, triangulis D A B, D A C, A B C, similia, per coroll. propos. 4. lib. 6. Pyramis ergo A E G H, pyramidi A B C D, similis est,



a 2. sexti.
b 9. vndec.
c 10. vndec.
d 4. sexti.

per

per defin.9.huius lib. Rursus quia rectæ HI, HK, rectis AB, AC, sunt parallelæ; [a] erunt anguli IHK, BAC, æquales. Eadem ratione æquales erunt anguli HIK, ABC, & HKI, ACB. [b] Quare latera trianguli HIK, lateribus triáguli ABC, circa æquales angulos sunt proportionalia; ac propterea triangulum HIK, triangulo ABC, simile est: Sunt autem & triangula DHI, DIK, DKH, triangulis DAB, DBC, DCA, similia, per idem coroll. propos. 4. lib. 6. Pyramis ergo HIKD, similis est quoque eidem pyramidi ABCD, per defin. 9. huius lib. Quoniam autem triágula AHE, HDI, similia sunt triangulo ADB, vt ostensum est ex coroll. propos. 4. lib. 6. [c] ipsa quoque inter se similia erunt. Cùm igitur sint super rectas æquales AH, HD, constituta; ipsa erunt æqualia, per lemma propos. 22. lib. 6. Simili argumento æqualia erunt & similia triangula AHG, HDK, cùm similia sint ostensa triangulo ADC, & constituta super æquales rectas AH, HD. Pari ratione æqualia, & similia erunt triangula AEG, HIK, cùm similia sint ostensa triangulo ABC, & super rectas posita AE, HI, [d] quæ æquales sunt, ob parallelogrammum AEIH. Non secus æqualia erũt & similia triangula EHG, IDK, cùm sint ostensa similia triangulo BDC, & habeant rectas HE, DI, [e] quæ æquales sunt, ob parallelogrammum HEID. Pyramides igitur AEGH, HIKD, æquales sunt & similes, per 10. defin. 11. lib. quandoquidem omnia triangula vnius æqualia sunt, & similia omnibus triangulis alterius, vt demonstratum est.

a 10. vndec.
b 4. sexti.
c 21. sexti.
d 34. primi.
e 34. primi.

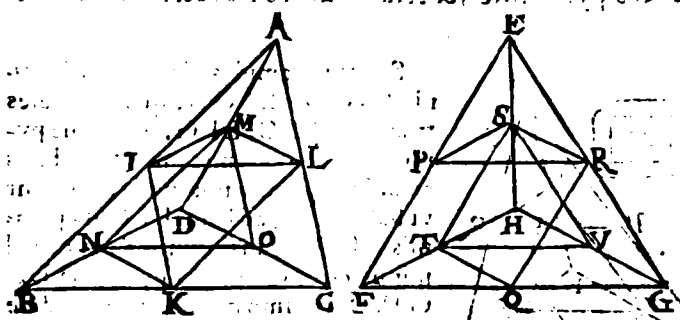
RVRSVS, [f] quia rectæ EH, HG, GE, æquales sunt, & parallelæ rectis BI, IF, FB, ob parallelográma EHIB, FGHI, BFGE, erunt triangula EHG, BIF, æquiágula inter se, & æqualia, per coroll. propositi. 8. lib. 1. Ac propterea & similia; [g] Sunt autem & parallela; cùm EH, HG, per quas ducitur planum EHG, parallelę sint rectis BI, IF, per quas planum BIF, ducitur. Igitur solidum BIFGHE, contentum duobus triangulis EHG, BIF, ex aduerso æqualibus & similibus, & parallelis; & tribus parallelogrammis EGFB, BEHI, IFGH, prisma est, ex definitione. Eodẽ modo prisma ostendetur solidum CFGHIK. [h] Cùm enim rectæ FC, CG, GF, æquales sint, & parallelæ rectis IK, KH, HI, ob parallelogramma CFIK, CGHK, FGHI; erunt triangula CFG, HIK, æqualia, & æquiangula inter se, ac propterea similia: [i] Sunt autem & parallela, quòd rectæ CF, CG, per quas ducitur planum CFG, parallelæ sint rectis KI, KH, per quas planũ KIH, ducitur. Igitur solidum CFGHIK, contentum duobus triangulis CFG, KIH, ex aduerso æqualibus & similibus, & parallelis; atq; tribus parallelogrammis CFIK, KHGC, IFGH, prisma est. Quoniam verò prismata EBFGHI, CFGHIK, sunt eiusdem altitudinis, nempe inter plana parallela BCGE, HIK; & parallelogrammum EBFG, basis illius, duplum est trianguli CFG, basis huius, per scholium propos. 41. lib. 1. [k] Ipsa inter se æqualia erunt.

f 34. primi.
g 15. vndec.
h 34. primi.
i 15. vndec.
k 40. vndec.

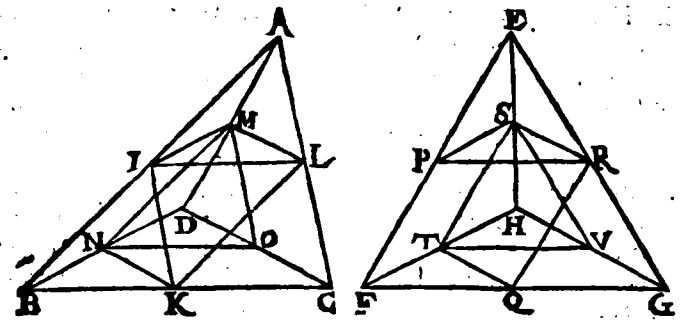
DENIQVE quia prisma EBFGHI, maius est pyramide EBFI, totum parte; Est autem pyramis EBFI, æqualis & similis pyramidi AEGH, necnon pyramidi HIKD, vt perspicuum est ex æqualitate & similitudine triangulorum: Maiora erunt prismata EBFGHI, CFGHIK, pyramidibus AEGH, HIKD. Ac proinde illa quidem dimidium pyramidis ABCD, excedent, hæ verò à dimidio eiusdem deficient. Quando enim totum in duas partes inæquales secatur, maior dimidium eius superat, minor verò à dimidio deficit. Omnis igitur pyramis triangularem habens basim, &c. Quod erat ostendendum.

THEOR. 4. PROPOS. 4.

SI fuerint duæ pyramides eiusdem altitudinis, triangulares habentes bases; sit autem illarum vtraque diuisa & in duas pyramides æquales inter se, & similes toti; & in duo prismata æqualia; Ac eodem modo diuisa sit vtraq; pyramidum, quæ ex superiore diuisione natæ sunt, idq; semper fiat; erit vt vnius pyramidis basis ad alterius pyramidis basim, ita & omnia, quæ in vna pyramide, prismata ad omnia, quæ in altera pyramide, prismata multitudine æqualia.



SINT super bases triangulares ABC, EFG, duæ pyramides ABCD, EFGH, eiusdem altitudinis, quarum latera bifariam diuidantur in punctis I, K, L, M, N, O, P, Q, R, S, T, V, connectanturq; rectæ IL, LK, KN, NO, OM, MN, LM, MI, PR, RQ, QT, TV, VS, ST, RS, SP, ita vt pyramis vtraq; secta sit in binas pyramides æquales inter se, & similes toti, nimirum in AILM, MNOD, EPRS, STVH; & in bina prismata æqualia IBKLMN, CKLMNO, PFQRST, GQRSTV; vt vult propositio præcedens: eodemq; modo intelligantur esse diuisæ pyramidis factæ AILM, MNOD, EPRS, STVH; & sic deinceps. Dico ita esse omnia prismata facta in pyramide ABCD, ad omnia prismata generata in pyramide EFGH, illis multitudine æqualia, vt est basis ABC, ad basin EFG. Cùm enim sit vt BC, ad CK, ita FG, ad GQ, eo quòd vtraq; linea diuisa est bifariam; sint autem triangula ABC, LKC, similia similiterque posita: Item trian-



a 22. sexti.

gula EFG, RQG, ex coroll. prop. 4. lib. 6. a Erit quoque vt triangulum ABC, ad triangulum LKC, ita triangulum EFG, ad triangulum RQG. Et permutando, vt ABC, ad EFG, ita LKC, ad RQG. Vt autem LKC, ad RQG, ita est prisma CKLMNO, ad prisma GQRSTV, vt mox ostendemus, atque adeò ita prisma IBKLMN, ad prisma PFQRST, cùm hæc illis sint æqualia: Et vt vnum prisma, videlicet IBKLMN, ad vnum prisma PFQRST,

b 12. quinti. b ita sunt duo prismata IBKLMN, CKLMNO, ad duo prismata PFQRST, GQRSTV. Igitur erunt quoque, vt basis ABC, ad basin EFG, ita duo prismata in pyramide ABCD, ad duo prismata in pyramide EFGH. Simili argumento ostendemus, ita esse bina prismata in pyramidibus AILM, MNOD, factis in pyramide ABCD, ad bina prismata in pyramidibus EPRS, STVH, factis in pyramide EFGH, vt sunt bases AIL, MNO, illarum pyramidum ad bases EPR, STV, harum pyramidum: & sic deinceps, eadem semper facta diuisione. Sed vt illæ bases ad has, ita est LKC, basis quæ illis est æqualis & similis, ad basin RQG, quæ his est æqualis, & similis, vt in præcedenti est demonstratum, hoc est, ita est basis ABC, ad basin EFG. Igitur erunt quoque, vt basis ABC, ad basin EFG, ita prismata cuiuslibet pyramidis factæ in pyramide ABCD, ad prismata cuiuslibet pyramidis factæ in pyramide EFGH: Ac propterea erunt quoque, vt prismata pyramidis ABCD, ad prismata pyramidis EFGH, ita prismata tam pyramidis AILM, ad prismata pyramidis EPRS, quàm prismata pyramidis MNOD, ad prismata pyramidis STVH: & ita deinceps. Quare cùm sint, vt duo prismata pyramidis ABCD, ad duo prismata

c 12. quinti. pyramidis EFGH, c ita omnia prismata in pyramidibus ABCD, AILM, MNOD, &c. simul ad omnia prismata in pyramidibus EFGH, EPRS, STVH, &c. simul, si hæc illis multitudine sint æqualia: Erunt quoque, vt basis ABC, ad basin EFG, ita omnia prismata in pyramide ABCD, ad omnia prismata in pyramide EFGH. Quocirca si fuerint duæ pyramides eiusdem altitudinis, triangulares habentes bases, &c. Quod erat demonstrandum.

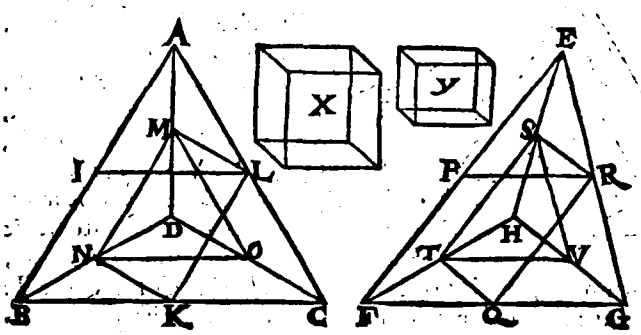
LEMMA.

Qvod autem sit LKC, ad RQG, ita prisma CKLMNO, ad prisma GQRSTV, ita ostendemus. Intelligantur ex verticibus D, H, ad bases ABC, EFG, demissæ perpendiculares, quæ erunt altitudines æquales pyramidum ABCD, EFGH. Quoniam igitur plana

a 17. vndec. *parallela ABC, MNO, a secant duas rectas, nempe DC, & perpendicularem ex D, demissam proportionaliter; secatur autem DC, bifariam in O; secabitur quoque perpendicularis ex D, demissa bifariam in puncto, qui planum MNO, occurrit. Eadem ratione perpendicularis ex H, demissa bifariam secabitur à plano STV. Quare cùm totæ perpendiculares ponantur æquales, erunt & dimidiæ, nempe prismatum altitudines, æquales; Ac proinde prismata CKLMNO, GQRSTV, cùm habeant altitudines æquales, inter se erunt, vt bases LKC, RQG, per ea, quæ ad propos. 34. lib. 11. demonstrauimus.*

5. THEOR. 5. PROPOS. 5.

Svb eadem altitudine existentes pyramides, & triangulares habentes bases; inter se sunt, vt bases.



Sint pyramides eiusdem altitudinis ABCD, EFGH, quarum bases triangula ABC, EFG. Dico esse pyramidem ad pyramidem, vt est basis ad basin. Si enim non ita sit, ponatur vt basis ABC, ad basin EFG, ita pyramis ABCD, ad solidum X; quod vel minus erit, vel maius pyramide EFGH. Sit primò minus, magnitudine Y. Diuidatur pyramis EFGH, in duas pyramides æquales, & duo prismata æqualia, iuxta propos. 3. huius lib. Rursus eodem modo factæ pyramides in pyramide EFGH, in binas pyramides æquales, & in bina prismata æqualia, & sic deinceps. Quoniam igitur, si à pyramide EFGH, auferatur plus quàm

c 3. duodec. dimidiũ, nempe duo prismata PFQRST, GQRSTV, c quæ maiora sunt dimidio pyramidis EFGH:

EFGH; Item à reliquis pyramidibus EPRS, STVH, plus quàm dimidium, earum ſcilicet priſmata, & ſic deinceps: relinquetur tandem minor magnitudo quàm Y, exceſſus pyramidis EFGH, ſupra ſolidum X. Sit ergo iam relicta magnitudo minor. Cùm autem pyramis EFGH, æqualis ponatur ſolidis X, Y; erunt reliqua priſmata in pyramide EFGH, maiora ſolido X. Diuidatur pyramis ABCD, in duas pyramides æquales, & duo priſmata æqualia, & eodem modo factæ pyramides AILM, MNOD, in binas pyramides æquales, & bina priſmata æqualia: Atque hoc toties fiat, quoties id factum fuit in pyramide EFGH. [b] Quoniam igitur ſunt omnia priſmata in pyramide ABCD, ad omnia priſmata numero æqualia in pyramide EFGH, vt baſis ABC, ad baſin EFG, hoc eſt, vt pyramis ABCD, ad ſolidum X: Sunt autem omnia priſmata in pyramide ABCD, minora, quàm tota pyramis ABCD; [c] erunt quoque omnia priſmata in pyramide EFGH, minora quàm ſolidum X. Oſtenſa verò ſunt & maiora. Quod eſt abſurdum. Non ergo minus eſt ſolidum X, pyramide EFGH.

[a] 1. decimi

[b] 4. duode.

[c] 14. quinti.

SIT deinde ſolidum X, pyramide EFGH, maius. Quoniam igitur ponitur pyramis ABCD, ad ſolidum X, vt baſis ABC, ad baſin EFG; erit conuertendo ſolidũ X, ad pyramidem ABCD, vt baſis EFG, ad baſin ABC. Ponatur, vt ſolidum X, ad pyramidem ABCD, ita pyramis EFGH, ad ſolidum Y. Et quia ſolidũ X, maius ponitur pyramide EFGH; [d] erit & pyramis ABCD, maior ſolido Y. Quare erit, vt baſis EFG, ad baſin ABC, ita pyramis EFGH, ad ſolidũ Y, quod minus eſt pyramide ABCD. Quod eſt abſurdum. Oſtenſum enim eſt iam, non poſſe eſſe, vt eſt baſis ad baſin, ita pyramidem ad ſolidum pyramide minus. Non ergo maius eſt ſolidum X, pyramide EFGH, ſed neq; minus eſt oſtenſum. Igitur æquale eſt. Quare cùm ponatur vt baſis ABC, ad baſin EFG, ita pyramis ABCD, ad ſolidum X; [e] Sit autem pyramis ABCD, ad ſolidũ X, vt ad pyramidẽ EFGH, ſolidum X, æqualem: Erit quoq; vt baſis ABC, ad baſin EFG, ita pyramis ABCD, ad pyramidẽ EFGH. Sub eadem ergo altitudine exiſtẽtes pyramides, &c. Quod erat oſtendendũ.

[d] 14. quinti.

[e] 7. quinti.

SCHOLIVM.

CONVERSO modo, ſi pyramides triangulares inter ſe ſint, vt baſes; ipſæ erunt ſub eadem altitudine. Si enim vnius altitudo maior credatur, abſcindatur ab ea æqualis minori, & à puncto abſciſionis ad omnes angulos baſis ducantur rectæ lineæ; Erit q; vt baſis ad baſin, ita pyramis ad pyramidem modò conſtitutam. Sed ſic quoq; erat ad totam pyramidem. [a] Pyramis ergo conſtituta æqualis erit toti pyramidi, pars toti. Quod eſt abſurdum.

[a] 9. quinti.

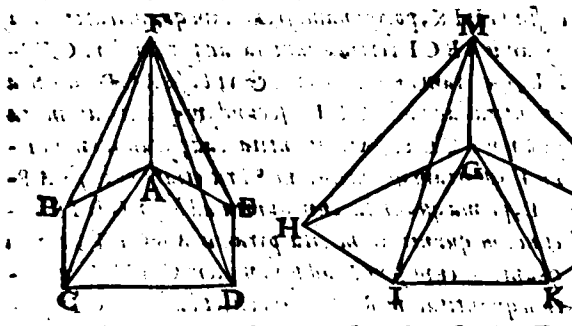
COROLLARIVM.

HINC ſit, pyramides eiuſdem altitudinis ſuper eandem, vel æquales baſes triangulares conſtitutas, eſſe inter ſe æquales; propterea quod eandem proportionem habent cum baſibus, quæ æquales ponuntur, vel certè vna & eadem.

ITEM ſequitur, è converſo pyramides triangulares æquales ſuper eandẽ, vel æquales baſes, eandem habere altitudinem. Et pyramides triangulares æquales eandemq; habentes altitudinem, baſes habere æquales, ſi non eandem habuerint. Quæ quidem duo ex prima parte corollarij eodem argumento oſtendemus, quo in converſo propoſ. 30. & 31. lib. 11. demonſtrandò vſi ſumus: ſi tam in altitudine, quàm in baſi abſciſſa conſtituatur alia pyramis, &c.

THEOR. 6. PROPOS. 6. 6.

SVB eadem altitudine exiſtentes pyramides, & polygonas habentes baſes, inter ſe ſunt, vt baſes.



SINT pyramides ABCDEF, GHIKLM, quarum baſes polygonę ABCDE, GHIKL, latera multitudine æqualia habentes. Dico eſſe pyramidem ad pyramidem, vt eſt baſis ad baſin. Reſolutis enim baſibus in triangula numero æqualia; erit quælibet pyramis in totidem pyramides triangulares diuiſa. [a] Quia verò eſt, vt baſis ABC, ad baſin ACD, ita pyramis ABCF, ad pyramidem ACDF; erit componendo vt baſis ABCD, ad baſin ACD, ita pyramis ABCDF, ad pyramidem ACDF: [b] Sed rurſus eſt vt baſis ACD, ad baſin ADE, ita pyramis AGDF, ad pyramidẽ ADEF. Igitur ex æquo vt baſis ABCD, ad baſin ADE, ita pyramis ABCDF, ad pyramidem ADEF. Componendo ergo erit vt baſis ABCDE, ad baſin ADE, ita pyramis ABCDEF, ad pyramidem ADEF. Simili argumento erit vt baſis GHIKL, ad baſin GKL, ita pyramis GHIKLM, ad pyramidem GKLM; & conuertendo vt baſis GKL, ad baſin GHIKL, ita pyramis GKLM, ad pyramidem GHIKLM. [c] Rurſus quoniam eſt, vt baſis ADE, ad baſin GKL, ita

[a] 5. duode.

[b] 5. duode.

[c] 5. duode.

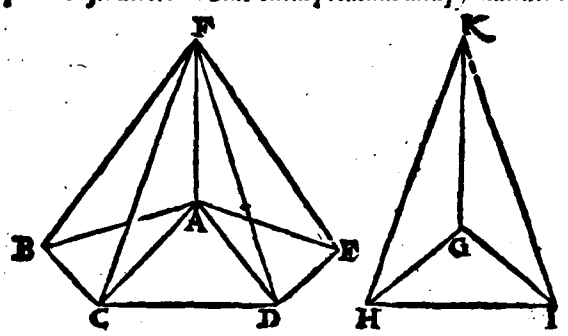
ABCDE.	ABCDEF.
ADE.	ADEF.
GKL.	GKLM.
GHIKL.	GHIKLM

pyramis ADEF, ad pyramidem GKLM; Erunt quatuor baſes ABCDE, ADE, GKL, GHIKL, in eiſdem proportionibus cum quatuor pyramidibus ABCDEF, ADEF, GKLM, GHIKLM, vt in hac formula videre; manifeſtumque eſt ex demonſtratione. Quare ex æquo, erit vt baſis ABCDE, ad baſin GHIKL, ita pyramis ABCDEF, ad pyramidem GHIKLM: ac propterea, ſub eadem altitudine exiſtentes pyramides, &c. Quod erat demonſtrandum.

SCHOLIVM.

QVAMVIS huius propoſitionis demonſtratio de illis duntaxat pyramidibus eiuſdem altitudinis loquatur, ſecundùm interpretes, quorum baſes polygona latera habent multitudine æqualia; facilè tamen idem etiam demonſtrabimus de pyramidibus eiuſdem altitudinis, quarum vnius baſis plura continet latera, quàm baſis alterius. Sint enim primùm duæ pyramides eiuſdē altitudinis ABCDEF, GHIK, quarū illius baſis ſit polygona, nempe pentagona, huius verò triangularis. Dico eſſe pyramidem ad pyramidē, vt eſt baſis ad baſin. Reſoluto enim pentagono in triangula, erit & pyramis in pyramides numero æquales diuiſa. [a] *Quoniam verò eſt, vt baſis ABC, prima quantitas, ad baſin GHI ſecūdam quantitatem, ita pyramis ABCF, tertia quantitas, ad pyramidem GHIK, quartam quantitatem; & eodem modo, vt baſis ACD, quinta quantitas, ad baſin GHI, ſecundam quātitatem, ita pyramis ACDF, ſexta quantitas, ad pyramidem GHIK, quartam quantitatem:* [b] *Erit vt baſis ABCD, prima quantitas cum quinta, ad baſin GHI, ſecundam quantitatem, ita pyramis ABCDF, tertia quantitas cum ſexta, ad pyramidē GHIK, quartam quantitate. Rurſus quia eſt vt baſis ABCD, prima quantitas, ad baſin GHI, ſecundā quantitatem, ita pyramis ABCDF, tertia quantitas, ad pyramidem GHIK, quartam quantitatem, vt modò eſt oſtenſum:* [c] *& vt baſis ADE, quinta quantitas, ad baſin GHI, ſecundam quantitatem, ita pyramis ADEF ſexta quantitas ad pyramidem GHIK, quartam quantitatem,* [d] *Erit etiam baſis ABCDE prima quantitas cum quinta, ad baſin GHI, ſecundam quātitatem, ita pyramis ABCDEF, tertia quātitas cum ſexta, ad pyramidem GHIK, quartam quantitatem Quod eſt propoſitum. Eodem modo ſemper procedendum eſt, ſi plura fuerint triangula in baſi polygona. Cum autem vt demonſtratum eſt, ſit vt baſis polygona ABCDE, ad baſin triangularem GHI, ita pyramis ABCDEF, ad pyramidem GHIK; Erit quoque conuertendo vt baſis GHI, ad baſin ABCDE, ita pyramis GHIK, ad pyramidem ABCDEF. Quamobrem duæ pyramides qualibet quarum vnius baſis eſt polygona, alterius triangularis, ſuis baſibus ſunt proportionales, vndecunque incipias Quamuis enim demonſtratio incipiat à polygono, eiusq; pyramide, vt ex demonſtratione conſtat, tamen conuertendo licebit initium quoq; ſumere à triangulo, eiusq; pyramide, vt dictum eſt.*

SED iam ſint duæ pyramides eiuſdem altitudinis ABCDEF, GHIKL, quarum baſes ſint polygona, ſintq; plura latera in vna baſe, quam in altera. Dico rurſus eſſe pyramidem ad pyramidem, vt eſt baſis ad baſin. Reſoluto enim polygono ABCDE, in triangula ABC, ACD, ADE, erit pyramis eius in totidem diuiſa pyramides. Quia verò, vt iam eſt demonſtratum, eſt vt baſis ABG, triangularis prima quantitas, ad baſin GHIK, polygonam, ſecundam quantitatem ita pyramis ABCF, tertia quantitas ad pyramidem GHIKL, quartam quantitatem; & vt baſis ACD, quinta quantitas, ad baſin GHIK ſecundam quantitatem, ita pyramis ACDF, ſexta quantitas, ad pyramidem GHIKL, quartam quantitatem [e] *Erit etiam vt baſis ABCD, prima quantitas cum quinta, ad baſin GHIK, ſecundam quantitatem, ita pyramis ABCDF, tertia quantitas cum ſexta, ad pyramidem GHIKL, quartam quantitatem Rurſus quia eſt, vt baſis ABCD, prima quantitas, ad baſin GHIK ſecundam quantitatem, ita pyramis ABCDF, tertia quantitas, ad pyramidem GHIKL, quartam quantitatem, vt proximè demonſtratum eſt: Et eſt quoq;, vt baſis ADE, quinta quantitas, ad baſin GHIK, ſecundam quantitatem, ita pyramis ADEF ſexta quantitas, ad pyramidem GHIKL, quartam quantitatem, vt antè eſt oſtenſum;* [f] *Erit etiam vt baſis ABCDE, prima quantitas cum quinta, ad baſin GHIK, ſecundam quantitatem, ita pyramis ABCDEF tertia quantitas cum ſexta, ad pyramidem GHIKL, quartam quantitatem. Quod eſt propoſitum. Non aliter procedendum erit, ſi plura triangula fuerint in baſi ABCDE.*

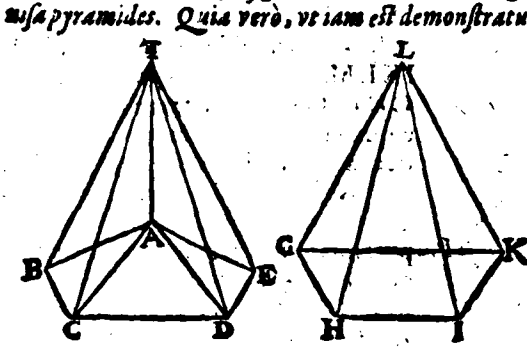


[a] 5. duode.

[b] 24. quin.

[c] 5. duode.

[d] 24 quin.



[e] 24 quin.

[f] 24. quin.

HANC autem propositionem 6. & ea, quæ in hoc scholio demonstrata sunt, conuertemus hoc modo.

PYRAMIDES quarumlibet basium, quæ inter se sunt, vt bases; eandem habēt altitudinem.

QVOD non secus ostendemus, ac ea, quæ in scholio propos. 5. huius lib. diximus, ostensa sunt.

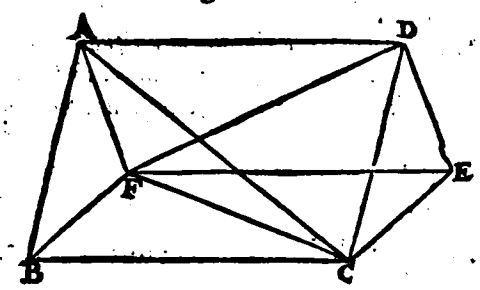
COROLLARIVM.

PERSPICVVM quoq; inde efficitur, pyramides eiusdem altitudinis super æquales bases multangulas, vel eandem constitutas, esse inter se æquales; cùm eandem habeant proportionem cum basibus, quæ æquales ponuntur, vel certè vna & eadem.

RVRSVS contrà fit, pyramides multangulas æquales, & super æquales bases, vel super eandem constructas, eandem habere altitudinem. Et pyramides multangulas æquales, eandemq; habentes altitudinem, æquales habere bases, si non habuerint eandem. Hæc autem duo demonstrabuntur, vt in coroll. propos. 5. huius lib. diximus.

THEOR. 7. PROPOS. 7. 6.

OMNE prisma triangularem habens basim, diuiditur in tres pyramides æquales inter se, triangulares bases habentes.

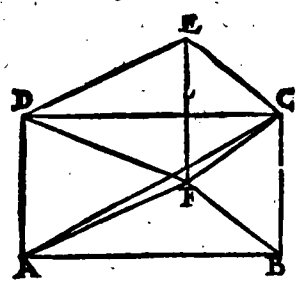


SIT prisma ABCDEF, cuius duo triágula opposita, æqualia, ac similia ABF, DCE. Dico ipsum prisma secari in tres pyramides triangulares inter se æquales. Ducantur enim in tribus parallelogrammis tres diametri, nempe AC, in ABCD; CF, in BCEF; FD, in ADEF. [a] Quoniam igitur triangula ABC, ADC, æqualia sunt; [b] estq; vt basis ABC, ad basin ADC, ita pyramis ABCF, ad pyramidem ADCF, cùm hæ pyramides eandē habeant altitudinem, nempe perpendicularem ex F, vertice ad planum ABCD, demissam; Erunt & pyramides ABCF, ADCF, inter se æquales. Eadem ratione æquales erunt pyramides ADFC, EFDC, super æquales bases ADF, EFD, constitutæ, & sub eadem altitudine, nempe perpendiculari à vertice C, ad planum ADEF, demissa. Est autē pyramis ADCF, eadem pyramidi ADFC, cùm illa contineatur quatuor planis, nempe basi ADC, & triangulis ADF, ACF, DCF; hæc verò eisdem quatuor planis, nimirum basi ADF, & triangulis ADC, ACF, DCF. Igitur tres pyramides ABCF, ADCF, EFDC, seu CDEF, (quæ eadem est pyramidi EFDC, cùm tam EFDC, quàm CDEF, contineatur planis CDE, EFD, DCF, FCE, totum prisma componentes, vt perspicuum est) æquales sunt inter se; Ac propterea prisma ABCDEF; in tres pyramides æquales est diuisum. Quocirca omne prisma triangularem habens basin, &c. Quod erat demonstrandum.

[a] 34. primi.
[b] 5. duodec.

COROLLARIVM I.

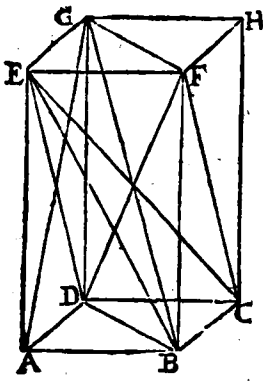
HINC colligitur, quamlibet pyramidem esse tertiam partem prismatis, quod eandē cum illa habet & basim, & altitudinem: Siue prisma quodlibet triplum esse pyramidis, quæ eandem cum ipso habet & basin, & altitudinem.



SIT enim primùm pyramis ABFC, triangulum habens basin ABF; & prisma ABCDEF: sub eadem altitudine eandem habens basin triangularem ABF. Dico pyramidem esse tertiā partem prismatis. Nam si ducatur recta DF, erit prisma diuisum in tres pyramides æquales ABCF, ADCF, CDEF; [a] vt demonstratum est; Ac propterea pyramis ABCF, hoc est, pyramis ABFC, (cùm hæc illi sit æqualis, immo eadem, quòd eisdem planis comprehendatur ABF, FCA, ABC, CBF,) tertia pars erit prismatis ABCDEF. Cùm igitur pyramis ABFC, æqualis sit cuicunq; alteri pyramidi sub eadem altitudine, & super eandem basin ABF, cōstitutæ, ex coroll. propos. 5. huius lib. manifestum est, quamlibet pyramidem esse tertiam partem prismatis, quod eandem cum illa habet basin triangularem, & altitudinem; ac propterea prisma è contrario esse pyramidis triplum,

[a] 7. duodec.

SIT deinde pyramis ABCDE, cuius basis rectilineum quodcunq; ABCD, quotlibet laterum; & prisma ABCDEFGH, sub eadem altitudine eandem habens basim. Dico rursus pyramidem esse prismatis partem tertiam. Resoluta enim basi ABCD, & plano opposito EFGH, in triangula numero æqualia ADB, BCD; EHF, FGH; erit prisma in totidem prismata bases habentia triangulares diuisum. Ductis ergo rectis AH, BH; DF, CF; erit, vt demonstratū est, pyramis ADBH, tertia pars prismatis ABFEHD; Itē pyramis BCDF, tertia pars prismatis CDHGFB. Quare erit, vt pyramis ADBH, ad prisma ABFEHD, ita pyramis BCDF, ad



a 12.quinti

prisma CDHGFB; [a] *Ac propterea vt vna pyramis ad suum prisma, ita omnes pyramides ad omnia prismata, hoc est, ad prisma ABCDEFGH. Igitur pyramides ADBH, BCDF, simul tertiam partem constituent prismatis ABCDEFGH. Sunt autem pyramides ADBH, BCDF, equales pyramidi ABCDE; propterea quòd pyramides ADBH, ADBE, super eandem basin, & sub eadem altitudine, nimirum inter plana parallela, sunt equales, ex coroll. propos. 5. huius lib. Eademq; ratione equales sunt pyramides BCDF, BCDE, super eandem basim, & sub eadem altitudine. Quapropter cùm pyramides ADBE, BCDE, componãt totam pyramidem ABCDE; erit & pyramis ABCDE, tertia pars prismatis ABCDEFGH. Cùm igitur pyramis ABCDE, equalis sit cuicunque alteri pyramidi sub eadem altitudine, & super eandem basim ABCD, constituta, per corollarium propos. 5. huius lib. perspicuum est, quamlibet pyramidem esse tertiam partem prismatis, quod eandem cum illa habet basim multilateram, eandemq; altitudinem.*

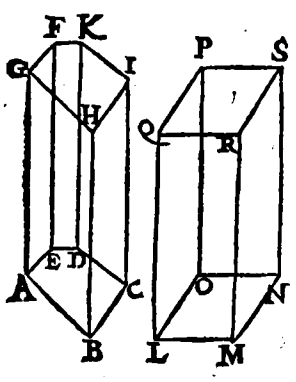
Quod si basis pyramidis, ac prismatis plura habeat latera, eodem modo ostendetur, pyramidem esse prismatis partem tertiam. Nam diuisis polygonis in triangula, fiet prisma in totidem prismata bases habentia triangulares. Vnde singulæ pyramides triangulares horum prismatum erunt tertiæ partes singulorum prismatum. Cùm igitur omnes hæ pyramides equales sint pyramidi basim habenti polygonum prismatis propositi, constat propositum.

Eodem modo pyramis tertia pars est prismatis habentis basem basi, & altitudinem altitudini pyramidis equalem. Nam eiusmodi pyramis equalis est pyramidi illi, quæ eandem cum prismate habet & basem, & altitudinem per coroll. propos. 6. huius lib. Quam quidem iam ostendimus tertiam esse prismatis partem.

SCHOLIVM I.

Ex dictis facilè demonstrabimus hanc propositionem, videlicet.

Sub eadem altitudine existentia prismata, quascumque habeant bases, inter se sunt, vt bases.



Quamvis enim hoc demonstratum sit in lib. 11. de prismatibus quorum duo plana opposita, parallela, & equalia, sunt triangula, licet eorum bases sint parallelogramma, vertices verò linea recta; necnon de parallelepipedis, quæ nomine prismatum contineri diximus: Nunc tamen idipsum demonstrabimus vniuersè de omnibus prismatis, quorum duo plana aduersa, siue bases, sunt polygona, quamuis plura latera, seu anguli in vnius basi reperiantur, quàm in basi alterius. Sint igitur duo prismata eiusdem altitudinis ABCDEFGHIK, LMNOPQRS, quorum bases sint figuræ multilatera. Dico vt est basis ABCDE, ad basim LMNO, ita esse prisma ad prisma. Si enim ex omnibus angulis vtriusque basis ad vnum punctum superioris plani, quod basi opponitur, lineæ rectæ ducantur, consurgent duæ pyramides sub eadem altitudine cum prismatis habentes easdem bases: Ac proinde per coroll. prædictum huius propos. qualibet pyramis tertia pars erit sui prismatis. [b] *Quam ob rem erit, vt pyramis ad pyramidem, ita prisma ad prisma: Sed pyramis ad pyramidem est, vt basis ad basin, vt ostensum est propos. 6. eiusq; scholio. Igitur erit quoque vt basis ad basin, ita prisma ad prisma. Quod est propositum.*

b 15.quinti

Conuerso modo, si prismata quarumcunque basium inter se sint, vt bases, ipsa erunt sub eadem altitudine. Quod quidem eodem modo ostendemus, quo scholium propos. 5. demonstratum est.

COROLLARIVM II.

Vnde prismata eiusdem altitudinis super eandem, vel æquales bases quascunque, inter se sunt æqualia. Quia nimirum eandem habent proportionem, quam bases, quæ æquales ponuntur, vel certè vna & eadem.

Econtrario, Prismata æqualia super æquales bases, vel eandem, in eadem sunt altitudine. Et prismata æqualia eiusdem altitudinis, bases habent æquales, si non habuerint eandem. Quod quidem non aliter ostendes, ac conuersum propos. 31. lib. 11. fuit demonstratum.

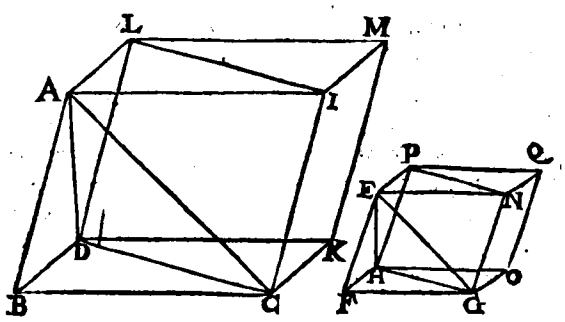
SCHOLIVM II.

Cæterum tam ea, quæ in priori corollario, quàm illa, quæ in scholio proximo demonstrata sunt, intelliguntur tantummodò de prismatis, quæ in vertice habẽt plana basi parallela, æqualia, & similia. Quod dixerim,

dixerim, ne hallucineris in prismate constante duobus triangulis parallelis, æqualibus, & similibus, & tribus parallelogrammis, quod videlicet Campanus cum alijs putat tantummodò prisma dici ab Euclide, vt in definitione prismatis diximus. Nam si in huiusmodi prismate intelligatur quidem basis vnum illorum triangulorum, erit necessariò pyramis eiusdem altitudinis, eandemq; habens basim, tertia pars ipsius prismatis, vt in coroll. 1. demonstratum est. Item ipsum prisma ad quodlibet aliud prisma proportionem habebit, quam basis ad basin, vt in scholio ostendimus. At verò si in prismate tali basis concipiatur vnum parallelogrammorum, ita vt in vertice sit linea recta, nõ erit pyramis eandem habens basim, eandemq; altitudinem, tertia eius pars, sed duæ tertiæ partes; hoc est, prisma ad pyramidem proportionem habebit sesquialteram, quam videlicet habent 3. ad 2. Si enim huic prismati addatur aliud æquale & simile, vt parallelepipedum efficiatur, erit pyramis tertia pars constituti parallelepipedi, ex corollario prædicto, cùm parallelepipedum sit prisma eandem & altitudinem, & basin habens cum pyramide. Quare si pyramis ponatur 2. erit parallelepipedum 4. Ablato ergo dimidio, erit reliquum prisma propositum 3. Ac propterea ad pyramidem proportionem habebit, quam 3. ad 2. nimirũ sesquialteram. Ex quo efficitur, pyramidem super dimidium parallelogrammum constitutam, quæ eandem cum tali prismate habeat altitudinẽ, cùm sit dimidium prioris pyramidis, esse tertiam partem prismatis. Quæ cùm ita sint, non habebit tale prisma ita constitutum ad aliud prisma eiusdem altitudinis, eandem proportionem, quam basis ad basin, nisi hoc aliud prisma in vertice lineam rectam habeat quoq; & basin parallelogrammum. Itaque ea, quæ ostendimus in scholio, intelligenda sunt de prismatis eiusdem altitudinis, quorum vertices vel linea recta sunt, & bases parallelogramma, vel certè, quæ in verticibus plana habeant basibus parallela, æqualia atq; similia. Hac enim ratione, si vertices prismatum fuerint linea recta, erunt pyramides in eisdem basibus, eiusdemq; altitudinis, duæ tertiæ partes prismatũ, vt modò demonstrauimus. Quare eandem habebunt rationem, quam prismata, &c.

THEOR. 8. PROPOS. 8.

SIMILES pyramides, quæ triangulares habent bases, in triplicata sunt homologorum laterum ratione.



SINT pyramides similes triangulares ABCD, EFGH, ita vt bases ABC, EFG, sint similes, & reliqua triangula vnius similia reliquis triangulis alterius. Dico proportionem pyramidum esse triplicatam proportionis, quam habent latera homologa, nempe BC, FG. Extendantur enim plana triangulorum ABC, CBD, DAB, perficianturque parallelogramma BI, BK, BL. Deinde ducantur LM, IM, rectis AI, AL, parallelæ, conuenientes in M, connectatúrque recta KM. Erit igitur completum parallelepipedum BM, eiusdem cum pyramide altitudinis, cùm plana solidi BM, sint parallela, vt facilè colligitur ex propos. 15. lib. 11. Rursus eodẽ modo perficiatur parallelepipedum FQ. Quoniam igitur ob similitudinẽ pyramidum, anguli plani ABC, EFG, sunt æquales, estque vt AB, ad BC, ita EF, ad FG; erunt parallelogramma BI, FN, similia. Eodem modo cùm anguli ABD, EFH, sint æquales, sitque vt AB, ad BD, ita EF, ad FH; Item anguli DBC, HFG, æquales, & vt DB, ad BC, ita HF, ad FG; erunt & parallelogramma BL, BK, parallelogrammis FP, FO, similia. [a] Sed tam tria BI, BK, BL, parallelepipedi BM, reliquis tribus oppositis DM, AM, CM; quàm tria FN, FO, FP, parallelepipedi FQ, reliquis oppositis tribus HQ, EQ, GQ, [b] sunt æqualia, & similia. Igitur sex plana circumscribentia solidum BM, similia sunt sex planis solidum FQ, ambientibus; Ac propterea ex defin. 9. lib. 11. similia sunt parallelepipeda BM, FQ. Quoniam verò ductis rectis LI, PN, [c] prismata DBCILA, HFGNPE, habent eandem proportionem, quam parallelepipeda BM, FQ, eorum dupla; & pyramides ABCD, EFGH, eandem quam prismata dicta, earum tripla; [d] habebunt quoque pyramides eandem proportionem, quam parallelepipeda. [e] Cùm igitur proportio parallelepipedi BM, ad parallelepipedum FQ, sit triplicata proportionis homologorum laterum BC, FG; erit quoque proportio pyramidis ABCD, ad pyramidem EFGH, proportionis BC, ad FG, triplicata. Similes itaque pyramides, quæ triangulares habent bases, &c. Quod erat demonstrandum.

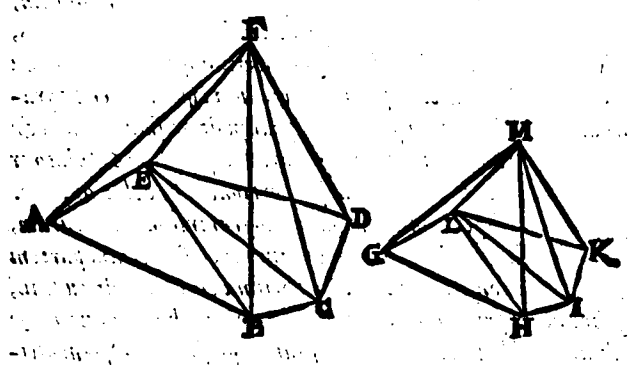
[a] 24. vndec.
[b] 24. vndec.
[c] 15. quinti.
[d] 11. quinti.
[e] 33. vndec.

COROLLARIVM.

EX hac quoque est manifestum, similes pyramides, quarum bases plura latera, quàm tria, continent, habere proportionem homologorum laterum triplicatam.

SINT pyramides similes, quarum bases rectilinea similia plurium laterum ABCDE, GHIKL. Dico proportionem pyramidum esse triplicatam proportionis, quam habent latera homologa AB, GH. Nam si ex angulis E, L, ducantur ad angulos oppositos rectæ EB, EC; LH, LI, [a] diuisæ erunt bases similes in trian- [a] 20. sexti.

gula numero æqualia, & similia; nimirum triangula ABE, EBC, CDE, similia erunt triangulis GHL, LHI, IKL. Quoniam ergo ob pyramidum similitudinem, triangula AEF, GLM, similia sunt, & angulus FEA, angulo MLG, æqualis; erit vt FE, ad EA, ita ML, ad LG. Vt autem EA, ad EB, ita LG, ad LH, propter similitudinem triangulorum AEB, GLH. Igitur ex æquo erit, vt FE, ad EB, ita ML, ad LH. Rursus quia est, vt EB, ad BA, ita LH, ad HG, ob triangula similia ABE, GHL; Et vt BA, ad BF, ita HG, ad HM, cùm ob pyramidum similitudinem similia sint triangula ABF, GHM: Erit quoque ex æquo, vt EB, ad BF, ita LH, ad HM; Ac propterea cùm sit, vt FE, ad EB, ita ML, ad LH; & vt EB, ad BF, ita LH, ad HM; erit etiam ex æquo, vt FE, ad FB, ita ML, ad MH. [a] *Quare æquiangula, atque adeò & similia sunt triangula FEB, MLH. Sunt autē & triangula FEA, FAB, ABE, triangulis MLG, MGH, GHL, similia. Igitur pyramides ABEF, GHLM, ex definitione 9. libri 11. similes sunt. Eadem ratione similes erunt pyramides EBCF, LHIM; Item CDEF, IKLM.* [b] *Quapropter, vt demonstratum est, pyramides ABEF, EBCF, CDEF, ad pyramides GHLM, LHIM, IKLM, singula ad singulas, triplicatam proportionem habebunt laterum homologorum AB, BC, CD, ad GH, HI, IK, singulorum ad singula. Cùm igitur AB, BC, CD, ad GH, HI, IK, habeant vnam & eandem proportionem, ob similitudinem basium ABCDE, GHIKL; habebunt quoque pyramides ABEF, EBCF, CDEF, ad pyramides GHLM, LHIM, IKLM, vnam eandemq; proportionem, triplicatam scilicet illius;* [c] *Atque idcirco erit, vt vna pyramis ABEF, ad vnam pyramidem GHLM, ita omnes pyramides, nempe pyramis ABCDEF, ad omnes pyramides, nimirum ad pyramidem GHIKLM. Quam ob rem,* [d] *cùm pyramis ABEF, ad pyramidem GHLM, habeat triplicatam proportionem homologorum laterum AB, GH; habebit quoque pyramis ABCDEF, ad pyramidem GHIKLM, triplicatam proportionem eorundem laterum homologorum AB, GH. Quod est propositum.*



a 5. sexti.

b 8. duodecimi.

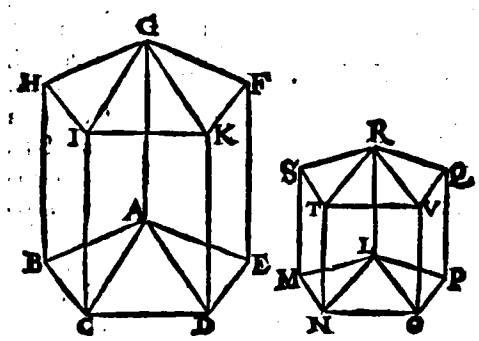
c 12. quinti.

d 8. duodecimi.

SCHOLIVM.

EADEM ratione prismata similia habebunt triplicatam proportionem homologorum laterum. Sint enim duo prismata similia ABCDEFGHIK, LMNOPQRSTV. Dico eorum proportionem, esse triplicatam proportionis homologorum laterum. Nam si ex angulis A, & L, ducantur rectæ AC, AD; LN, LO, [e] *erunt, vt de pyramidibus dictum est, triangula ABC, CAD, DEA, triangulis LMN, NLO, OPL, similia. Similiter, si ex angulis G, & R, ducantur rectæ GI, GK; RT, RV, erunt triangula GHI, IGK, KFG, & triangulis RST, TRV, VQR, & triangulis antè dictis, similia, cùm omnia plana prismatum opposita similia existant, per definitionem prismatis. Quoniam verò ob similitudinem prismatum, parallelogramma CH, NS, similia sunt; erit vt IC, ad CB, ita TN, ad NM: Vt autem CB, ad CA, ita quoque est NM, ad NL, ob similitudinem triangulorum BCA, MNL. Igitur ex æquo erit, vt IC, ad CA, ita TN, ad NL. Rursus quoniam angulus solidus N, æqualis est solido angulo C, ob similitudinem prismatum; si ille huic superponatur, omnia inter se conuenient, nimirum angulus MNO, angulo BCD, & angulus TNM, angulo ICB, & angulus TNO, angulo ICD: Conuenit autem & recta NL, rectæ CA, eò quòd anguli MNL, BCA, sunt æquales. Igitur anguli ICA, TNL, æquales sunt; Ac propterea cùm latera circa ipsos ostensa sint esse proportionalia, erunt parallelogramma CG, NR, similia. Atqui & parallelogramma CH, HA, parallelogrammis NS, SL; & triangula ABC, GHI, triangulis LMN, RST, similia sunt. Igitur prismata ABCIGH, LMNTRS, similia sunt, ex definitione solidorum similium. Non aliter ostendentur esse similia prismata CDAGIK, NOLRTV; nec non prismata AEDKGF, LPOVRQ. Quapropter prismata ABCIGH, CDAGIK, AEDKGF, ad prismata LMNTRS, NOLRTV, LPOVRQ, per ea, quæ demonstrauimus ad propositionem 34. libri 11. triplicatam habent proportionem, singula ad singula, laterum homologorū BC, CD, DE, ad MN, NO, OP, singulorum ad singula. Ac propterea eodem modo demonstrabimus, prismata ABCDEFGHIK, LMNOPQRSTV, proportionē habere homologorum laterum BC, MN, triplicatam, quo paulò antè vsi sumus ad idem demonstrandum in pyramidibus multangulis.*

EX quibus omnibus colligitur, pyramides multangulas similes diuidi in pyramides triangulares similes, & numero



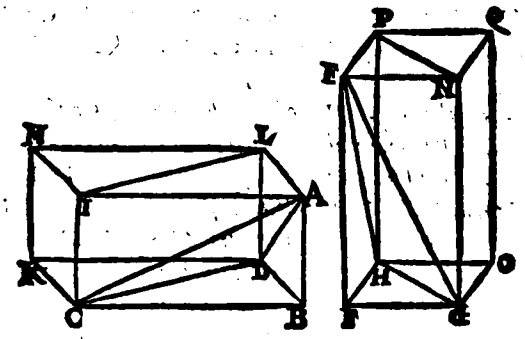
e 20. sexti.

numero æquales, & homologas totis. Hoc enim manifestum est ex demonstratione præcedentis corollarij.

Eodem modo infertur, prismata multangula similia diuidi in prismata similia triangulares bases habentia, & numero æqualia, & homologa totis. Vt apparet ex huius scholij demonstratione.

THEOR. 9. PROPOS. 9. 7.

Æqvalivm pyramidum, & triangulares bases habentium, reciprocantur bases & altitudines. Et quarum pyramidum triangulares bases habentium reciprocantur bases & altitudines; illæ sunt æquales.



Sint æquales pyramides triangulares A B C D, E F G H. Dico earum bases A B C, E F G, & altitudines esse reciprocas, hoc est, esse vt A B C, ad E F G, ita altitudinem pyramidis E F G H, ad altitudinem pyramidis A B C D. Si enim perficiantur, vt in præcedenti propositione dictum est, parallelepipeda B M, F Q, eorundem altitudinũ cum pyramidibus, connectanturque rectæ L I, P N; erunt prismata D B C I L A, H F G N P E, cùm sint tripla pyramidum, quæ æquales ponuntur, inter se æqualia; Ac proinde parallelepipeda B M, F Q, cùm sint prismatum dupla, æqualia quoq; erunt. [a] Quare bases eorum & altitudines reciprocabũtur, hoc est, erit vt basis B I, ad basin F N, ita altitudo solidi F Q, ad altitudinẽ solidi B M: [b] Vt autem basis B I, ad basim F N, ita est triangulum A B C, ad triangulum E F G. Igitur erit quoque vt basis A B C, ad basin E F G, ita altitudo pyramidis E F G H, ad altitudinem pyramidis A B C D, cùm altitudines pyramidum eædem sint, quæ parallelepipedorum; Ac propterea bases, & altitudines pyramidum æqualium reciprocantur.

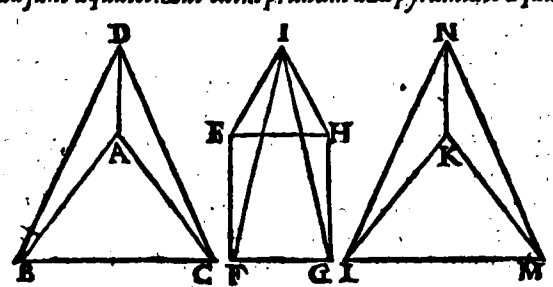
[a] 34. vndec.
[b] 15. quinti.

Sint iam bases & altitudines reciprocæ. Dico pyramides esse æquales. Constructa enim figura, vt prius; [c] cùm sit vt A B C, ad E F G, ita parallelogrammũ B I, ad parallelogrammũ F N; sintq; eædem altitudines parallelepipedorum, & pyramidum; erunt quoque bases parallelepipedorum & altitudines eorundem reciprocæ; [d] Ac propterea inter se æqualia erunt parallelepipeda B M, F Q. Quare & prismata D B C I L A, H F G N P E, eorum dimidia, æqualia erunt: Atq; propterea pyramides quoque, prismatũ tertiæ partes, æquales erunt. Æqualium igitur pyramidum, & triangulares bases habentium, &c. Quod erat demonstrandum.

[c] 15. quinti.
[d] 34. vndec.

SCHOLIVM.

Eadem ratione Aequalium pyramidum, quarum bases non sint triangulares, reciprocantur bases atq; altitudines. Et quarum pyramidum triangulares bases non habentium reciprocantur bases & altitudines, illæ sunt æquales. Sint enim primùm duæ pyramides æquales, quarum quidem A B C D, basin habeat triangularem; at verò E F G H I, non triangularem. Fiat basi non triangulari E F G H I, æquale triangulum K L M. Quod quidem fiet, si basis multilatera reducetur ad parallelogrammum, per propos. 45. lib. 1. Nam hoc parallelogrammum facilè ad triangulum reducetur, per ea, quæ demonstrauimus ad propos. 42. lib. 1. Deindè super K L M, fiat pyramis K L M N, eiusdem altitudinis cum pyramide E F G H I. Quoniã ergo pyramides E B G H I, K L M N, æquales habent bases, & eandem altitudinem; ipsæ erunt æquales, per ea, quæ in scholio propos. 6. huius libri ostendimus: Ponitur autẽ pyramis E F G H I, æqualis pyramidi A B C D. Igitur & pyramis K L M N, pyramidi A B C D, æqualis erit. Quamobrem, cùm habeant pyramides A B C D, K L M N, bases triangulares; [a] erit vt basis A B C, ad basin K L M, hoc est, ad huic æqualem basin E F G H, ita altitudo pyramidis K L M N, hoc est, altitudo pyramidis E F G H, (ponuntur enim hæ altitudines æquales) ad altitudinem pyramidis A B C D. Ac proinde pyramidum A B C D, E F G H I, æqualium bases & altitudines reciprocantur.

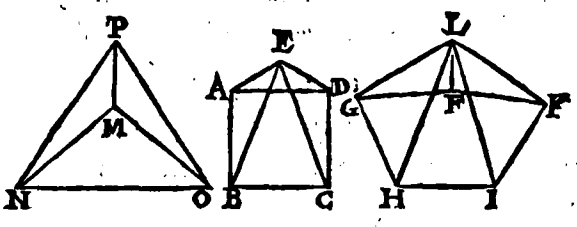


[a] 9. duodecimi.

Sed reciprocentur iam harum pyramidum bases atq; altitudines. Dico ipsas esse æquales. Constructa enim figura eodem modo; cũ basis K L M, æqualis sit basi E F G H, & altitudo pyramidis K L M N, eadem, quæ pyramidis E F G H I; ponatur autem esse vt A B C, ad E F G H, ita altitudo pyramidis E F G H I, ad pyramidis A B C D, altitudinem; erit quoq; vt basis A B C, ad basim K L M, ita altitudo pyramidis K L M N, ad altitudinem pyramidis A B C D. [b] Quamobrem æquales sunt pyramides A B C D, K L M N. Cùm ergo pyramis K L M N, æqualis sit pyramidi E F G H I, per ea, quæ ostensa sunt in scholio propos. 6. huius lib. Erit & pyramis A B C D, pyramidi E F G H I, æqualis. Quod est propositum.

[b] 9. duodecimi.

Sint deinde pyramides æquales A B C D E F G H I K L, quarũ bases sint multangulæ. Fiat rursus trian-



gulum MNO, æquale basi ABCD, & pyramis MNOP, eiusdem altitudinis cum pyramide ABCDE: Eritq; ex scholio propos. 6. huius libri, pyramis MNOP, æqualis pyramidi ABCDE: Sed hæc æqualis ponitur pyramidi FGHIKL. Igitur & pyramis MNOP, æqualis est pyramidi FGHIKL. Quare, vt nunc demonstrauimus, erit vt basis MNO, hoc est, basis ABCD, sibi æqualis, ad basim FGHIK, ita altitudo pyramidis FGHIKL, ad altitudinẽ pyramidis MNOP, hoc est, ad altitudinem pyramidis ABCDE; (ponuntur enim hæ altitudines æquales.) Ac propterea pyramidum æqualium ABCDE, FGHIKL, bases & altitudines reciprocantur.

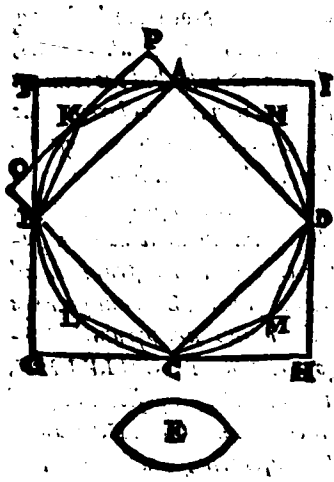
SED reciprocentur iam bases harum pyramidum atque altitudines. Dico ipsas esse æquales. Constituta enim eodem modo figura, cùm basis MNO; æqualis sit basi ABCD, & altitudo pyramidis MNOP, eidem quæ pyramidis ABCDE: ponatur autem vt ABCD, ad FGHIK, ita altitudo pyramidis FGHIKL, ad altitudinem pyramidis ABCDE; Erit quoque vt MNO, ad FGHIK, ita altitudo pyramidis FGHIKL, ad altitudinẽ pyramidis MNOP. Quare, vt antè ostendimus, æquales erũt pyramides MNOP, FGHIKL: Est autem pyramis MNOP, pyramidi ABCDE, æqualis, ex scholio propos. 6. huius libri. Igitur & pyramis ABCDE, pyramidi FGHIKL, æqualis erit. Quod est propositum.

OMNIA hac facilè quoq; demonstrabuntur conuenire prismatis quibuscunque. Nam si prismata fuerint æqualia, erunt & eorum pyramides earundem altitudinum cum ipsis, & super easdem bases, æquales; cùm sint eorum tertia partes, ex coroll. propos. 7. huius libri. Vel certè tua tertia, si inimarum prismatum bases fuerint parallelogramma, & eorum vertices, linea recta, vt in scholio eiusdem propositionis ostensum est. Quare, vt modò demonstrauimus, bases harum pyramidum, atq; altitudines reciprocantur. Cùm ergo hæ bases & altitudines eædem sint, quæ prismatum; reciprocabuntur quoque bases prismatum atque altitudines.

RVRSVS, si prismatum bases, & altitudines reciprocentur, reciprocabuntur quoque bases, & altitudines pyramidum, easdem bases & altitudines cum prismatis habẽtium. Quare, vt demonstratum est, pyramides æquales sunt; Ac propterea prismata, cùm earum sint tripla, vel certè sesquialtera, æqualia quoque sunt. Quod est propositum.

9. THEOR. 10. PROPOS. 10.

OMNIS conus tertia pars est cylindri eandem cum ipso basin habentis, & altitudinem æqualem.



HABEANT conus & cylindrus basin eandẽ circulum ABCD, & altitudinem eandem. Dico conum cylindri esse tertiam partem. Si enim conus non credatur esse tertia pars cylindri, non erit cylindrus coni triplus, sed vel maior, vel minor triplo coni. Sit primùm maior quàm triplus coni, magnitudine E, ita vt cylindrus sit æqualis triplo coni, & magnitudini E, simul. Inscribatur in circulo quadratũ ABCD, & circa eundẽ, quadratũ FGHI; intelligãturq; super hæc quadrata sub altitudine coni, & cylindri, erecta duo parallelepipeda. Quoniã igitur quadratũ ABCD, dimidiũ est quadrati FGHI, vt ad propos. 9. lib. 4. ostendimus; estq; vt basis ad basin, ita parallelepipedũ ad parallelepipedũ eiusdem altitudinis; Erit & parallelepipedum basis ABCD, dimidium parallelepipedi basis FGHI. Ac proinde parallelepipedũ basis ABCD, maius erit, q̃ dimidium cylindri, cuius basis circulus ABCD. Secentur bifariam peripheriæ AB, BC, CD, DA, in punctis K, L, M, N, adiungantúrque rectæ KA, KB, LB, LC, MC, MD, ND, NA. Ducatur quoq; per K, recta OP, tangens circulum in K, quæ parallela erit ipsi AB, vt ad propos. 27. lib. 3. ostendimus; occurratq; rectis DA, CB, productis in P, & O. & super AKB, ABOP, intelligantur prismata sub altitudine coni & cylindri. [b] Quia ergo triangulum AKB, dimidium est parallelogrammi ABOP; erit quoque prisma basis AKB, dimidium prismatis, seu parallelepipedi basis ABOP; cùm sit prisma ad prisma, vt basis ad basim, quemadmodum ad propos. 7. huius lib. demonstrauimus; Ac propterea prisma basis AKB, maius erit, quàm dimidium segmenti cylindri, cuius basis figura contenta linea recta AB, & peripheria AKB. Eadem ratione erũt prismata, quorũ bases reliqua triangula BLC, CMD, DNA, & altitudo eadem, quæ coni & cylindri, maiora, quàm dimidia segmentorum cylindri, quorum bases circuli segmenta. Omnia igitur hæc prismata simul maiora sunt, quàm dimidia omnium segmentorum cylindri simul. Quòd si rursus peripheriæ AK, KB, &c. secentur bifariam, & adiungantur rectæ lineæ, constituentur eodem modo prismata eiusdem altitudinis cum cono & cylindro, quæ maiora erunt simul, quàm dimidia omnium segmentorum cylindri simul,

a 32. vndec.

b 41. primi.

simul, quorum bases circuli segmenta, & sic deinceps. Quoniam verò si à cylindro, cuius basis circulus A B C D, auferatur plus q̃ dimidium, nempe parallelepipedum basis A B C D; & à reliquis segmentis plus q̃ dimidium, nimirum prismata basium A K B, B L C, &c. atq; in hunc modũ semper fiat detractio; [a] relinquitur tandem minor magnitudo, q̃ E, excessus cylindri supra triplum coni: Sint iam segmenta cylindri relicta basium A K, K B, B L, &c. (quæ quidem bases sunt circuli segmenta,) simul sumpta, minora q̃ E. Cùm igitur cylindrus æqualis ponatur triplo coni & magnitudini E, simul; Si ex cylindro auferantur segmenta dicta, & ex triplo coni vnà cum magnitudine E, ipsa magnitudo E, quæ maior est dictis cylindri segmentis, erit reliquum prisma basim habens multangulam A K B L C M D N, eandem habens altitudinem cum cono & cylindro, maius q̃ reliquum triplum coni; ideoq; conus minor erit, q̃ tertia pars prismatis. Quare cùm dicti prismatis sit tertia pars pyramis, cuius eadem cum ipso basis & altitudo, ex coroll. propos. 7. huius lib. Erit conus minor dicta pyramide, totum parte. Quod est absurdum. Non igitur maior est cylindrus triplo coni. [a] 1. decimi.

Sit deinde cylindrus minor triplo coni, ac proinde conus maior, q̃ tertia pars cylindri. Sit ergo conus maior q̃ tertia pars cylindri, magnitudine E; ita vt conus æqualis sit tertiæ parti cylindri, & magnitudini E, simul. Inscribatur rursus in circulo quadratũ A B C D, & circa eundẽ quadratum F G H I; intelliganturq; super hæc quadrata, pyramides sub altitudine coni & cylindri. Quoniam igitur quadratũ A B C D, dimidium est quadrati F G H I, vt ad propos. 9. lib. 4. demonstrauimus, [b] estq; vt basis ad basin, ita pyramis ad pyramidem eiusdem altitudinis. Erit quoque pyramis super A B C D, dimidium pyramidis super basin F G H I, ac proinde pyramis super basin A B C D, maior erit dimidio coni, cuius basis circulus A B C D. Secẽtur peripheriæ A B, B C, C D, D A, bifariam in K, L, M, N, adiunganturq; rectæ A K, K B, B L, L C, C M, M D, D N, N A. Ducatur quoque per K, recta O P, tangens circulum in K, quæ parallela erit ipsi A B, vt ad propos. 27. lib. 3. demonstrauimus, occurratq; rectis D A, C B, productis in P, & O, & super A K B, A B O P, intelligantur pyramides sub altitudine coni & cylindri. [c] Quia ergo triangulum A K B, dimidium est parallelogrammi A B O P, erit quoq; pyramis super basin A K B, dimidium pyramidis super basin A B O P, [d] cùm pyramides habeãt proportionem eandem, quam bases; ac proinde pyramis super basin A K B, maior erit dimidio segmenti coni, cuius basis figura contenta linea recta A B, & peripheria A K B. Eadẽ ratione erunt pyramides, quarũ bases reliqua triangula B L C, C M D, D N A, & altitudo eadem cum cono & cylindro, maiores q̃ dimidia segmentorum coni, quorum bases circuli segmenta. Omnes igitur hæ pyramides simul maiores sunt, q̃ dimidia omnium segmẽtorum coni simul. Quòd si rursus peripheriæ A K, K B, B L, L C, C M, M D, D N, N A, secentur bifariam, & adiungantur rectæ lineæ in eodem circulo, constituentur eodem modo pyramides eiusdem altitudinis cum cono & cylindro, quæ maiores erunt simul, q̃ dimidia omnium segmentorum coni simul, quorum bases circuli segmẽta; & sic deinceps. Quoniam verò si à cono, cuius basis circulus A B C D, auferatur plus q̃ dimidium, nempe pyramis super basin A B C D, quam maiorem esse ostendimus, q̃ dimidium coni, cuius basis est circulus A B C D; & à reliquis segmẽtis plus q̃ dimidium, nimirum pyramides basium A K B, B L C, C M D, D N A; atq; in hunc modum semper fiat detractio, [e] relinquitur tandem minor magnitudo, q̃ E, excessus coni supra tertiam partem cylindri: Sint iam segmenta coni relicta basium A K, K B, B L, L C, C M, M D, D N, N A, (quæ quidem bases sunt circuli segmenta,) simul sumpta minora q̃ E. Cùm igitur conus æqualis ponatur tertiæ parti cylindri, & magnitudini E, simul; si ex cono detrahantur segmẽta prædicta, & ex tertia parte cylindri, vnà cum magnitudine E, ipsa magnitudo E, quæ maior est, præfatis coni segmentis; erit reliqua pyramis, cuius basis polygonum A K B L C M D N, eandem habens altitudinem cum cono & cylindro, maior quàm tertia pars cylindri reliqua; ac proinde triplum dictæ pyramidis maius erit cylindro. Quocirca, cùm prisma eandem habens basim cum dicta pyramide, eandemq; altitudinem cum cono & cylindro, triplum sit ipsius pyramidis, vt suprà in corollario propositionis septimæ huius libri à nobis est demonstratum, erit huiusce modi prisma maius cylindro, pars toto. Quod est absurdum. Non ergo cylindrus minor est triplo coni: Sed neque maior triplo est ostensus. Igitur æqualis est triplo coni, propterea q̃ conus tertia pars est cylindri. Omnis igitur conus tertia pars est cylindri, eandem cum ipso basim habentis, & altitudinẽ æqualem. Quod erat demonstrandum. [b] 6. duodec. [c] 41. primi. [d] 6. duodec. [e] 1. decimi.

SCHOLIVM.

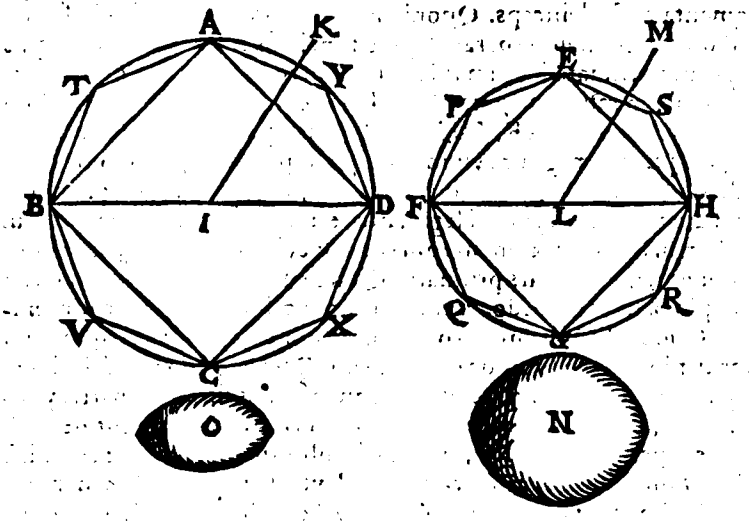
Qvamvis propositio hæc solùm intelligatur de conis & cylindris rectis, cùm hos duntaxat Euclides definierit lib. 11. omnibus tamen conis & cylindris tam rectis, quàm scalenis conuenit, vt perspicuum est eius demonstrationem diligenter intuenti. Itaque propositio vniuersè ita proponi poterit.

Omnis conus, siue rectus, siue scalenus, tertia pars est cuiuslibet cylindri, siue recti, siue scaleni, eandem cum ipso & basim, & altitudinem habentis, licèt non sit idem axis coni & cylindri.

THEOR. II. PROPOS. II.

Svb eadem altitudine existentes coni & cylindri, inter se sunt, vt bases. II.

Sint sub eadem altitudine coni & cylindri, quorũ bases circuli A B C D, E F G H, altitudines



verò æquales I K, L M. Dico vt est basis ad basim, ita esse conum ad conum, & cylindrum ad cylindrũ. Si enim hoc non credatur, sit vt basis A B C D, ad basim E F G H, ita conus A B C D K, ad aliquam magnitudinem, nempe ad N, quæ vel maior erit, vel minor cono E F G H M. Si enim esset æqualis, *a* haberet conus A B C D K, ad conum E F G H M, & ad N, proportionem eandem: ac propterea esset conus ad conum, vt basis ad basin: qđ non conceditur. Sit ergo primùm N, minor quàm conus E F G H M, magnitudine O, ita vt conus E F G H M, æqualis sit magnitudinibus N, & O, simul. Inscribatur in circulo E F G H, quadratum E F G H, diuidanturque peripherię E F, F G, G H, H E, bifariam in P, Q, R, S, & adiungantur rectæ E P, P F, F Q, &c. Quoniam igitur si ex cono E F G H M, detrahatur pyramis super basin E F G H, eiusdẽ altitudinis, & à reliquis segmẽtis auferantur pyramides eiusdem altitudinis basium E P F, F Q G, &c. atq; in hunc modũ semper fiat detractio, semper plus dimidio subtrahitur, vt in posteriore parte præcedentis propositionis ostensum est, *b* relinquetur tandem minor magnitudo, quàm O, excessus coni E F G H M, super N. Sint ergo iam segmenta coni relicta basium E P, P F, F Q, &c. (quæ quidem bases sunt circuli segmenta) simul sumpta, minora quàm O. Cùm igitur conus E F G H M, ponatur æqualis magnitudinibus N, & O, simul: si ex cono detrahantur dicta coni segmenta, & ex N, & O, ipsa magnitudo O, quæ prædicti coni segmentis maior est, erit reliqua pyramis, cuius basis polygonum E P F Q G R H S, eiusdem altitudinis cũ cono, maior quàm N, reliqua magnitudo. Inscribatur in circulo A B C D, polygonum A T B V C X D Y, simile polygono E P F Q G R H S, vt in propos. 2. huius lib. docuimus, ducanturque circulorum diametri B D, F H. Quoniam igitur, per coroll. propos. 2. huius libri, est vt circulus A B C D, ad circulum E F G H, ita polygonum A T B V C X D Y, ad polygonum E P F Q G R H S: Vt autem circulus A B C D, ad circulum E F G H, ita ponitur conus A B C D K, ad magnitudinem N, *c* & vt polygonum, ad polygonũ, ita est pyramis ad pyramidem eiusdem altitudinis cum conis: Erit quoque vt pyramis A T B V C X D Y K, ad pyramidem E P F Q G R H S M, vt conus A B C D K, ad N. Cùm igitur pyramis A T B V C X D Y K, minor sit cono A B C D K, pars toto, *d* erit & pyramis E P F Q G R H S M, minor quàm N. Ostensa autem fuit & maior. Quod est absurdum. Non igitur minor est magnitudo N, cono E F G H M.

a 7. quinti.

b 1. decimi.

c 6. duodec.

d 14. quinti.

Sit secundò N, maior cono E F G H M. Cùm igitur ponatur vt circulus A B C D, ad circulum E F G H, ita conus A B C D K, ad N: Erit & conuertendo vt circulus E F G H, ad circulũ A B C D, ita N, ad conum A B C D K. Ponatur vt N, ad conum A B C D K, ita conus E F G H M, ad magnitudinẽ O. Et quia N, maior ponitur cono E F G H M: *e* maior quoq; erit conus A B C D K, quàm O. Quare erit vt circulus E F G H, ad circulum A B C D, ita conus E F G H M, ad magnitudinem O, quæ minor est cono A B C D K. Quod est absurdum. Ostensum enim est iam, non posse esse conum ad magnitudinem minorem alio cono, vt est basis illius coni ad basin huius coni. Non ergo maior est N, magnitudo cono E F G H M: Sed neq; minor est ostensa: Æqualis igitur est. Quapropter cùm ponatur, vt basis A B C D, ad basin E F G H, ita conus A B C D K, ad N: *f* Sit autem, vt conus A B C D K, ad N, ita idem conus A B C D K, ad conum E F G H M: erit quoque vt basis A B C D, ad basin E F G H, ita conus A B C D K, ad conum E F G H M.

e 14. quinti.

f 7. quinti.

g 15. quinti.

g Quoniam autem, vt conus A B C D K, ad conum E F G H M, ita est cylindrus A B C D K, (qui triplus est coni A B C D K,) ad cylindrum E F G H M, (qui triplus est coni E F G H M.) Erit quoque vt basis A B C D, ad basin E F G H, ita cylindrus A B C D K, ad cylindrum E F G H M. Quod tamen eodem modo confirmari potest, quo vsi sumus in conis, si loco conorum, & pyramidum, concipiantur cylindri, & prismata. Sub eadem ergo altitudine existentes coni & cylindri, inter se sunt, vt bases. Quod erat demonstrandum.

SCHOLIVM.

Perspicvvm quoq; est, hanc propositionem, quam Euclides de conis, & cylindris solis rectis proposuit, ob rationem superius traditam, extendi etiam posse ad conos, & cylindros scalenos, vt eius demonstratio manifestè indicat, ita vt propositio vniuersè proponatur in hunc modum.

Sub eadem altitudine existentes coni & cylindri, siue ambo recti sint, siue scaleni, siue vnus rectus, & alter scalenus; inter se proportionem habent, quam bases.

Conuertitur hæc propositio quoq; hoc modo.

Si coni & cylindri inter se sint, vt bases; ipsi sub eadem altitudine erunt.

Quod quidem demonstrabimus eo modo, quo conuersum propos. 32. lib. 11. ostendimus.

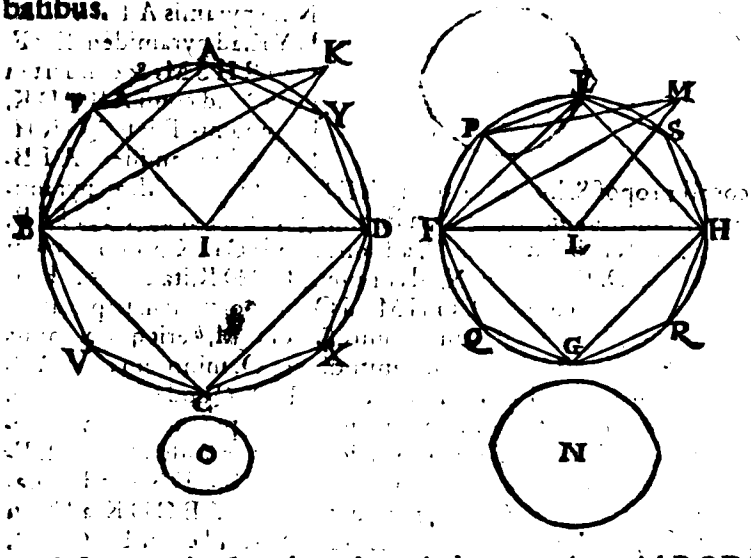
COROLLARIVM.

Hinc fit, conos & cylindros eiusdem altitudinis super eandem, vel æquales bases constitutos, siue ambo sint recti, vel scaleni, siue vnus rectus, & alter scalenus, esse inter se æquales; propterea quòd eandem proportionem habent, quam bases, quæ æquales ponuntur, vel certè vna & eadem.

Item sequitur conos & cylindros æquales super eandem, vel æquales bases, in eadem esse altitudine: Et conos & cylindros æquales in eadem altitudine, super æquales bases esse, si non habuerint eandem. Quod ostendemus non aliter, ac conuersum propos. 31. lib. 11. demonstratum fuit.

THEOR. 12. PROPOS. 12. 10.

SIMILES coni, & cylindri, in triplicata ratione sunt diametrorum, quæ in basibus.

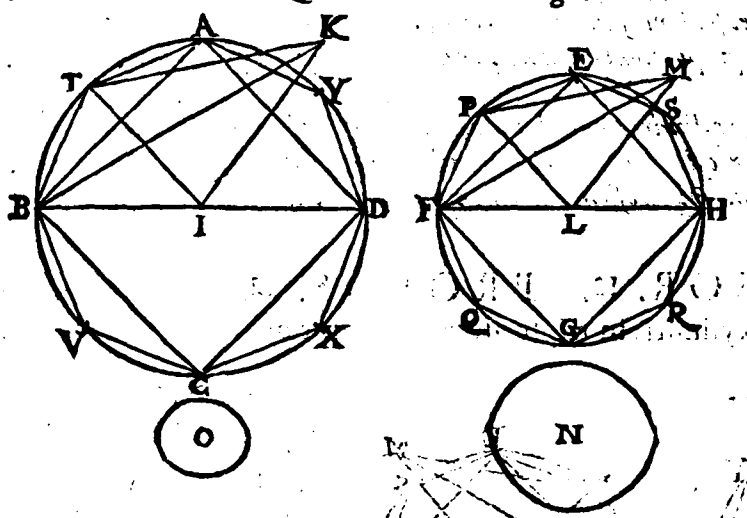


SINT similes coni & cylindri, quorum bases circuli ABCD, EFGH, axes verò LK, LM, & diametri basium BD, FH. Dico conum ad conum, & cylindrum ad cylindrum, habere proportionem triplicatam diametri ad diametrum. Si enim hoc nô credatur, habeat conus ABCDK, ad aliquam magnitudinem N, proportionem triplicatam diametri BD, ad diametrum FH. Eritque N, vel minor, vel maior cono EFGHM. Si enim esset æqualis, [a] haberet conus ABCDK, ad conum EFGHM, & ad N, proportionẽ eandem; Ac proinde proportio coni ABCDK, ad conum EFGHM, esset quoq; triplicata proportionis diametri BD, ad diametrum FH; quod nô conceditur. Sit ergo primùm N, minor, q̃ conus EFGHM, magnitudine O; Fiatque eadem prorsus constructio figuræ, quæ in præcedenti propositione, ita vt rursus pyramis EPFQGRHSM, maior ostendatur, q̃ N. Ducantur deinde rectæ KB, KT, MF, MP, vt habeantur duo triangula BKT, EMP, pyramidum ATBVCXDYK, EPFQGRHSM; & connectantur rectæ TI, PL. Quoniam igitur coni ABCDK, EFGHM, similes ponuntur, erit, ex 24. defin. lib. 11. vt diameter BD, ad diametrum FH, [b] ac propterea vt semidiameter BI, ad semidiametrum FL, ita axis IK, ad axem LM; Ac permutãdo vt BI, ad IK, ita FL, ad LM. Cùm igitur anguli BIK, FLM, recti sint, ex defin. 3. lib. 11. quòd coni recti ponantur, propterea q; axes recti ad eorum bases; [c] Erunt triangula BIK, FLM, æquiangula; [d] Ac propterea vt KB, ad BI, ita erit MF, ad FL. Vt autem BI, ad BT, ita FL, ad FP, ob similitudinem triangulorum BIT, FLP. (Cùm enim anguli BIT, FLP, insistentes similibus arcubus BT, FP, sint æquales, vt in scholio propos. 22. lib. 3. ostensum est; sitq; vt BI, ad IT, ita FL, ad LP, ob æqualitatem tam linearum BI, IT, q̃ FL, LP; [e] erunt triangula BIT, FLP, similia.) Igitur ex æquo, vt KB, ad BT, ita MF, ad FP. Rursus quia latera KI, IB, trianguli KIB, æqualia sunt lateribus KI, IT, trianguli KIT, & anguli dictis lateribus comprehensi, recti, ex defin. 3. lib. 11. cùm axis IK, rectus ponatur ad circulum ABCD, [f] erunt bases KB, KT, æquales. Eodem modo, æquales erunt rectæ MF, MP; Ac propterea rectæ KB, KT, rectis MF, MP, proportionales erunt, cùm vtrobique sit proportio æqualitatis. [g] Quoniam verò vt KB, ad BT, ita KT, ad eandem BT; Item vt MF, ad FP, ita MP, ad eandem FP: Erat autem vt KB, ad BT, ita MF, ad FP; Erit quoq; vt KT, ad BT, ita MP, ad FP; Et conuertêdo vt BT, ad TK, ita FP, ad PM. Quare cùm sit vt TK, ad KB, ita PN, ad MF; & vt KB, ad BT, ita MF, ad FP; Et vt BT, ad TK, ita FP, ad PM, veluti ostensum est; habebunt triangula BKT, FMP, latera proportionalia, [h] ideoq; æquiangula erunt; Ac proinde similia. ex definitione. Non aliter ostendẽtur reliqua triangula ambientia pyramides ATBVCXDYK, EPFQGRHSM, inter se similia esse; Quæ cùm sint multitudine æqualia, erunt dictæ pyramides similes, ex defin. 9. lib. 11. Quocirca in triplicata proportione erunt homologorum laterum BT, FP, ex coroll. propos. 8. huius lib. Vt autem BT, ad FP, ita est BI, ad FL, ob similitudinem triangulorum BIT, FLP; [i] Et vt BI, ad FL, ita BD, ad FH. Igitur pyramis ad py-

a 7. quinti.
b 15. quinti.
c 6. sexti.
d 4. sexti.
e 6. sexti.
f 4. primi.
g 7. quinti.
h 6. sexti.
i 15. quinti.

ramidem habebit quoq; proportionẽ triplicatam diametrorũ B D, F H; Ponebatur autem & proportio coni A B C D K, ad N, earundem diametrorũ triplicata. Igitur erit vt pyramis A T B V C X D Y K, ad pyramidem E P F Q G R H S M, ita conus A B C D K, ad N. Quare cũ pyramis A T B V C X D Y K, minor sit cono A B C D K, pars toto; [a] erit & pyramis E P F Q G R H S M, minor q̃ N. Ostensa aũt est & maior. Quod est absurdũ. Non igitur minor est magnitudo N, cono E F G H M.

a 14. quinti.



SIT deinde N, maior cono E F G H M. Cùm ergo ponatur conus A B C D K, ad N, habere proportionẽ triplicatam diametri B D, ad diametrum F H: Habeat aũtẽ & pyramis A T B V C X D Y K, ad pyramidem E P F Q G R H S M, triplicatam proportionem earundẽ diametrorum vt proximè ostẽdimus: Erit vt conus A B C D K, ad N, ita pyramis A T B V C X D Y K, ad pyramidem E P F Q G R H S M; & conuertendo vt N, ad conum A B C D K, ita pyramis E P F Q G R H S M, ad pyramidem A T B V C X D Y K. Quare cùm ex coroll. propos. 8. huius lib. pyramis E P F Q G R H S M, ad pyramidem A T B V C X D Y K, habeat proportionem triplicatam homologorum laterum P F, ad F B, hoc est, diametri F H, ad diametrum B D; habebit quoq; N, ad conum A B C D K, proportionem triplicatam diametri F H, ad diametrũ B D. Ponatur vt N, ad conum A B C D K, ita conus E F G H M, ad magnitudinem O. Habebit igitur & conus E F G H M, ad O, proportionem triplicatam diametri F H, ad diametrum B D. Et quia N, maior ponitur q̃ conus E F G H M, [b] erit quoq; conus A B C D K, maior q̃ O. Quapropter conus E F G H M, ad magnitudinem O, minorem cono A B C D K, proportionem habet triplicatam diametri F H, ad diametrum B D. Quod est absurdum. Ostensum enim est, non posse conum ad magnitudinẽ alio cono minorem, proportionem habere triplicatam eius, quam habent basium diametri. Non ergo maior est magnitudo N, cono E F G H M: Sed neq; minor est ostensa. Æqualis igitur est; [c] ac proinde conus A B C D K, eandem habet proportionem ad conum E F G H M, & ad N. Cùm ergo ponatur conus A B C D K, ad N, in triplicata proportione diametrorũ B D, & F H; erit quoq; conus A B C D K, ad conũ E F G H M, in earundem diametrorum proportione triplicata.

b 14. quinti.

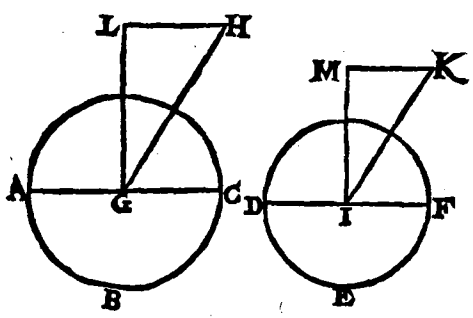
c 7. quinti.

d 15. quinti.

[d] QVONIAM verò, quam proportionẽ habent coni, eandem quoque obtinent cylindri, eorum tripli; habebit quoque cylindrus ad cylindrum proportionem diametrorum in basibus triplicatam. Quod tamen eodem modo demonstrabitur, quo vsi sumus in conis, si modò loco conorum, & pyramidum assumantur cylindri, atque prismata. Similes igitur coni, & cylindri in triplicata ratione sunt diametrorum, quæ in basibus. Quod ostendendum erat.

SCHOLIVM.

QVOD si maior conus, & cylindrus cum minore conferatur, perspicuum est, in secunda parte huius propositionis, Euclidem assumere, demonstratum esse propos. 8. huius lib. minorẽ pyramidem ad maiorem habere proportionem laterum homologorum triplicatam. Id quod ad defin. 10. lib. 5. monuimus contra Federicum Commandinum, & alios, qui putant referri semper debere maiorem quantitatem ad minorem, vt habeatur proportio duplicata, triplicata, &c.



HAEC porrò propositio, quamuis etiam extendatur ad similes conos & cylindros scalenos: tamen hic demonstratur in solis rectis conis & cylindris similibus, cùm in demonstratione assumãtur axes recti ad bases. Quocirca eam hac ratione ostendemus in similibus conis & cylindris scalenis. Sint similes coni, & cylindri scaleni, quorũ bases circuli A B C, D E F, axes verò G H, I K. Dico tam conum ad conum, q̃ cylindrũ ad cylindrum habere proportionem diametri ad diametrum triplicatam. Intelligantur enim super eadem bases duo coni, & cylindri recti eorundem cum scalenis altitudinum, quorũ axes G L, I M. Ducanturq; per rectas G H, G L; Item per I K, I M, plana secantia bases lineis rectis A C, D F, quæ diametri basium erunt. Quoniam igitur axes G L, I M, recti sunt basibus A B C, D E F; [a] erunt & plana per G H, G L; & per I K, I M, ad eadem recta. [b] Ac propterea perpendiculares lineæ ex H, K, ad bases demissæ cadent in A C, D F, cõmunes sectiones; & proinde erunt anguli

a 18. vnde.

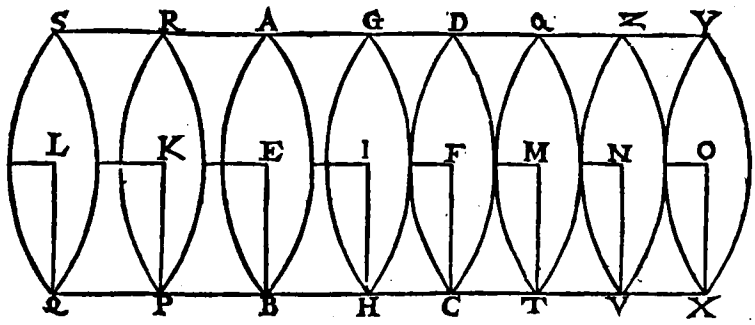
b 38. vnde.

guli C G H, F I K, anguli inclinationum, qui æquales inter se erunt, cùm coni & cylindri scaleni similes ponantur: Sunt autem & anguli C G L, F I M, æquales, nempe recti, ex defin. 3. libri 11. [a] *Reliqui igitur H G L, K I M, æquales quoq; erunt. Quoniam verò coni A B C H, A B C L, ponuntur esse eiusdem altitudinis: erit recta H L, per axium vertices ducta ipsi A C, parallela,* [b] *ideoq; angulus L, rectus. Eodemq; argumẽto rectus erit angulus M, cùm & anguli C G L, F I M, recti sint. Non aliter & reliqui anguli H, K, æquales erunt, cùm sint æquales eorũ alterni anguli C G H, F I K. Triangula igitur G H L, I K M, æquiangula sunt;* [c] *atq; idcirco erit vt G H, ad G L, ita I K, ad I M; & permutando, vt G H, ad I K, ita G L, ad I M. Vt autem axis G H, ad axem I K, ita est A C, diameter ad D F, diametrum; & coni & cylindri scaleni pònantur similes. Igitur & G L, axis ad I M, axem erit, vt diameter A C, ad D F, diametrum; Et proinde coni & cylindri recti A B C L, D E F M, similes erunt, ex definitione.* [d] *Quare proportionem habebunt diametrorum triplicatam. Quia verò tam conus & cylindrus A B C L, cono & cylindro A B C H, (cùm eandem habeant basim, & altitudinem,) quàm conus & cylindrus D E F M, cono & cylindro D E F K, (ob eandem rationẽ,) est æqualis, vt constat ex corollario propos. 11. huius lib.* [e] *Erit vt conus & cylindrus A B C L, ad conum & cylindrum D E F M, ita conus & cylindrus A B C H, ad conum & cylindrum D E F K; ideoq; proportio coni & cylindri A B C H, ad conum & cylindrum D E F K, triplicata quoq; erit diametri A C, ad diametrum D F. Quod est propositum.*

a 32. primi.
b 29. primi
c 4. sexti.
d 12. duodecimi.
e 7. quinti.

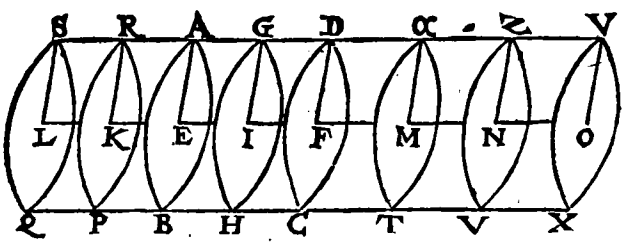
THEOR. 13. PROPOS. 13. 11.

Si cylindrus plano secetur aduersis planis parallelo: Erit vt cylindrus ad cylindrum, ita axis ad axem.



Secetur cylindrus A B C D, plano G H, parallelo aduersis planis A B, C D, quod quidem secet axem E F, in I. Dico vt est cylindrus A B H G, ad cylindrũ G H C D, ita esse axem E I, ad axem I F. Intelligatur enim cylindrus A B C D, in vtramque partem, vnà cum eius axe & rectangulo E C, ad cuius reuolutionem descriptus est cylindrus, protractus quantumlibet; Sumanturque in axe producto quotcunque rectæ E K, K L, æquales ipsi E I; Item quotcunque rectæ F M, M N, N O, æquales ipsi F I. Deinde per puncta I, K, L, M, N, O, ducantur rectæ I H, K P, L Q, M T, N V, O X, parallelæ, & æquales rectis E B, F C; quæ quidem ad reuolutionem rectanguli E C, describẽt circulos G H, P R, Q S, T α, V Z, X Y, parallelos & æquales circulis A B, C D, ob æqualitatem semidiametrorum, quæ semper inter se æquidistantes circunferuntur. Ac propterea cylindri erunt S P, P A, A H, H D, D T, T Z, Z X, ex definitione, componentes totũ cylindrum S Q X Y. Quoniam verò tam cylindri S P, P A, A H, super bases æquales Q S, P R, B A, & sub altitudinibus æqualibus K L, E K, I E, æquales sunt, quàm cylindri X Z, Z T, T D, D H, super æquales bases X Y, V Z, T α, C D, & sub altitudinibus æqualibus N O, M N, F M, I F, ex corollario propositionis 11. huius lib. Erit tam multiplex cylindrus S H, cylindri A H, quàm multiplex est axis I L, ipsius axis I E; Item tam multiplex cylindrus X G, cylindri C G, quàm multiplex est axis I O, ipsius axis I F. Quoniam autem si axis I L, (multiplex I E, primæ magnitudinis) æqualis est axi I O, (multiplici axis I F, secundæ magnitudinis) æqualis quoq; est cylindrus S H, (multiplex cylindri A H, tertiæ magnitudinis) cylindro X G, (multiplici cylindri C G, quartę magnitudinis) vt ex propositione 11. huius libri liquet. Si verò axis maior est axe, cylindrus quoque cylindro maior est; Et si minor, minor, in quacunque hoc contingat multiplicatione: Erit, per definitionem 6. lib. 5. ita axis I E, prima magnitudo ad axem I F, secundam magnitudinem, vt cylindrus A H, tertia magnitudo ad cylindrum C G, quartam magnitudinem. Si cylindrus igitur plano secetur aduersis planis parallelo; erit vt cylindrus ad cylindrum, ita axis ad axem. Quod erat demonstrandum.

SCHOLIVM.

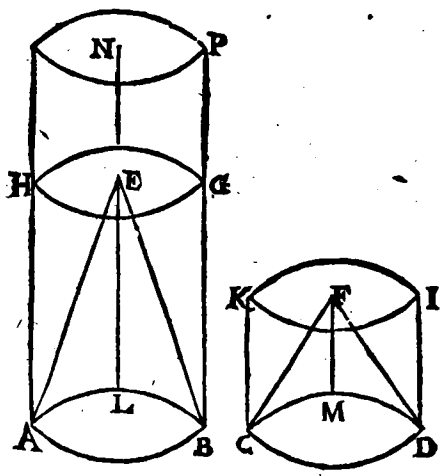


Et si hanc propositionem Euclides de solo cylindro recto demonstrat; tamẽ eius demonstrationem cylindro scaleno facilè accommodabis, si modò adhibeas descriptionem cylindri scaleni, sicut in demonstratione Euclidis assumpta fuit cylindri recti descriptio; ita vt quemadmodum in conis rectis rectangulum circa quiescens latus circumfertur, sic quoque in conis scalenis circumferantur semidiametri L S, K R, E A, &c.

ſemper æquidiſtantes circa centra L,K,E,&c. vnà cum recta SY, ſemidiametros coniungente. Hac enim ratione ſemper cylindri deſcribentur, vt conſtat ex iis, quæ ſcribit Serenus in lib. 1. de Sectione cylindri.

11. THEOR. 14. PROPOS. 14.

SVPER æqualib⁹ baſibus exiſtentes coni, & cylindri; inter ſe ſunt, vt altitudines.



SINT ſuper baſes æquales AB, CD, duo coni ABE, CDF, & duo cylindri ABGH, CDIK, quorum axes, ſeu altitudines (Nam in conis & cylindris rectis, axes ipſi ſunt altitudines) LE, MF. Dico eſſe conum ABE, ad conum CDF, & cylindrum ABGH, ad cylindrum CDIK, vt eſt altitudo LE, ad altitudinem MF. Extendatur enim cylindrus ABGH, ad partes GH, vnà cũ eius axe LE, & rectangulo AG; abſcindaturque axis EN, æqualis axi MF, & circa centrum N, intelligatur circulus OP, æqualis & parallelus circulo GH, vt fiat cylindrus GHOP, eiuſdem altitudinis cum cylindro CDIK. Quoniam igitur cylindri HP, CI, cùm habeãt æquales baſes & altitudines, æquales ſunt, ex coroll. propoſ. 11. huius lib. [a] cylindrus AG, ad ipſos eandem habebit proportionem: [b] Eſt autem cylindrus AG, ad cylindrum HP, vt axis, ſeu altitudo LE, ad axem, ſeu altitudinem EN, hoc eſt, ad altitudinẽ MF, ſibi æqualem. Igitur & cylindrus AG, ad cylindrum CI, erit quoque, vt altitudo LE, ad altitudinem MF.

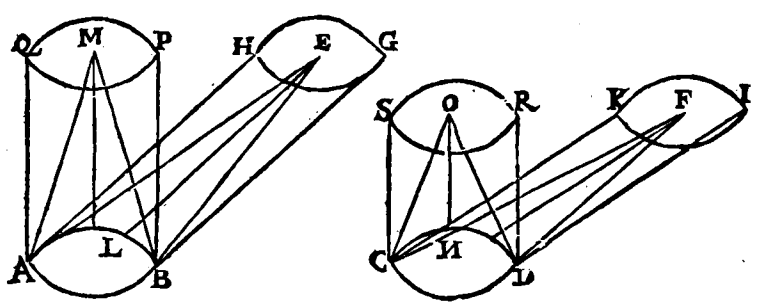
a 7. quinti.
b 13. duodec.

[c] Quia verò coni ABE, CDF, ſunt tertiæ partes cylindrorum AG, CI; [d] ipſi habebunt eandem cum cylindris proportionem; Ac proinde erit quoque conus ABE, ad conum CDF, vt altitudo LE, ad altitudinem MF. Super æqualibus igitur baſibus exiſtentes coni & cylindri, inter ſe ſunt, vt altitudines. Quod oſtendendum erat.

c 10. duodec.
d 15. quinti.

SCHOLIVM.

Hoc idem conuenire conis ſcalenis, hoc modo demonſtrabimus. Sint ſuper baſes æquales AB, CD, coni ABE, CDF, & cylindri ABGH, CDIK, ſcaleni, quorum altitudines LM, NO. Dico conum ABE, ad conum CDF, & cylindrum ABGH, ad cylindrum CDIK, eſſe, vt eſt altitudo LM, ad altitudinem NO. Super baſin enim AB, conſtruatur cylindrus rectus ABPQ, ſub altitudine LM; Item ſuper baſin CD, cylindrus CDRS, ſub altitudine NO.



a 14. duodecimi.

[a] Quoniam igitur eſt cylindrus rectus ABPQ, ad cylindrum rectum CDRS, vt altitudo LM, ad altitudinem NO: Eſt autem cylindro ABPQ, cylindrus ABGH: Item cylindro CDRS, cylindrus CDIK, æqualis, ex corollario propoſ. 11. huius lib. Erit quoq; cylindrus ABGH, ad cylindrum CDIK, vt altitudo LM, ad altitudinem NO. Quod eſt propoſitum.

QVONIAM autem coni, [b] cùm ſint tertiæ partes cylindrorum, [c] eandem habẽt proportionem, quam cylindri; Erit quoque conus ABE, ad conum CDF, vt altitudo LM, ad altitudinem NO. Quod tamen eodem argumento, quo vſi ſumus in cylindris, confirmari poteſt, vt perſpicuum eſt, ſi ſuper baſes AB, CD, fiant coni recti ABM, CDO, earundem altitudinum cum cylindris ABPQ, CDRS.

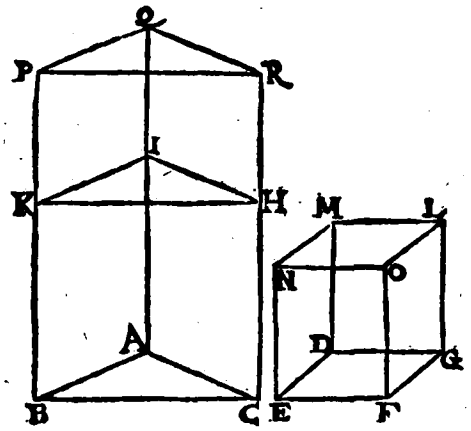
b 10. duodecimi.
c 15. quinti.

IDEM concludetur, quamuis vnus conorum, & cylindrorum, nempe conus ABE, & cylindrus ABGH, fuerit ſcalenus, alter verò, nimirum conus CDO, & cylindrus CDRS, rectus. Nam cùm cylindrus ſcalenus ABGH, æquàlis ſit cylindro recto ABPQ; ſit autem cylindrus rectus ABPQ, ad cylindrum rectum CDRS, vt altitudo LM, ad altitudinem NO, vt Euclides demonſtrauit: Erit quoq; cylindrus ſcalenus ABGK, ad cylindrum rectum CDRS, vt altitudo LM, ad altitudinem NO. Quod eſt propoſitum.

[d] QVONIAM verò coni eandem habent proportionem, quam cylindri, [c] cùm illi horum ſint tertiæ partes; Erit etiam conus ſcalenus ABE, ad conum rectum CDO, vt altitudo LM, ad altitudinẽ NO. Quod nihilominus oſtendetur eadem ratione, qua vſi ſumus in cylindris, vt manifeſtum eſt.

d 15. quinti
e 10. duodecimi.

EADEM quoque hæc propoſitio conuenit priſmatis, parallelepipedis, & pyramidibus ſuper æquales baſes conſtitutis. Sint enim ſuper baſes æquales ABC, DEFG, priſmata ABCHIK, DEFGLMNO, & pyramides



pyramides ſub eiſdem altitudinibus. Dico eſſe priſma ad priſma, & pyramidem ad pyramidem, vt eſt altitudo ad altitudinem. Sint namque inſiſtentes lineæ AI, CH, BK, priſmatis ABCHIK, ad baſin ABC, perpendiculares, ita vt BK, ſit altitudo priſmatis ABCHIK; Producti autem rectis AI, CH, BK, ſumantur IQ, HR, KP, æquales altitudini priſmatis EL; & ductis rectis PQ, QR, RP, compleatur priſma HIKPQR, eiuſdem altitudinis cum priſmate EL. Erunt q; priſmata HIKPQR, EL, cùm habeant & baſes, & altitudines æquales, inter ſe æqualia, ex coroll. 2. propoſ. 7. huius lib. [a] *Ac propterea priſma ABCHIK, ad vtrumq; eandem habebit proportionem. Quia verò ex ſcholio propoſitionis 25. lib. 11. priſma ABCHIK, ad priſma HIKPQR,* a 7. quinti.

eſt vt planum BI, ad planum KQ; [b] *Et vt planum BI, ad planum KQ, ita eſt recta BK, ad KP; erit priſma ABCHIK, ad priſma HIKPQR, hoc eſt, ad priſma EL, vt BK, altitudo priſmatis ABCHIK, ad KP, altitudinem priſmatis HIKPQR, hoc eſt, priſmatis EL. Quod eſt propoſitum.* b 1. ſexti.

QVOD ſi inſiſtentes lineæ AI, CH, BK, non ſint perpendiculares ad baſin ABC, conſtituendum erit ſuper baſin ABC, aliud priſma, cuius inſiſtentes ſint perpendiculares ad baſin, & æquales altitudini priſmatis ABCHIK. Nam cùm ex 2. coroll. propoſ. 7. huius lib. hæc duo priſmata eandem habentia altitudinem, & baſin, ſint æqualia, ſit q; priſma conſtitutum ad priſma EL, vt illius altitudo ad huius altitudinem; erit & priſma ABGHIK, ad priſma EL, vt altitudo illius, ad altitudinem huius.

QVONIAM verò pyramides eandem habent proportionem cum priſmatis, [c] *quod illa ſint horum tertiæ partes: Perſpicuum eſt, ita quoque eſſe pyramidem ad pyramidem, vt eſt altitudo ad altitudinem.* c 15. quin. d 7. duode.

EADEM prorſus eſt ratio habenda de parallelepipedis, cùm parallelepipeda comprehendantur etiam nomine priſmatum, vt dictum eſt; atq; ob id eadem illis demonſtratio poſſit accommodari.

HAEC omnia eodem ferè modo demonſtrabuntur de conis, & cylindris, nec non de pyramidibus, & priſmatis eandem habentibus baſem.

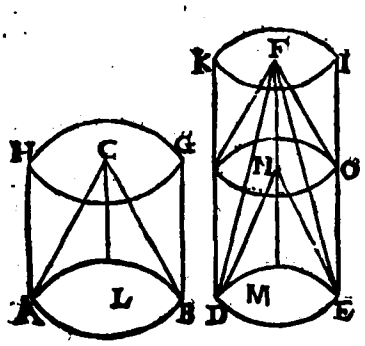
OMNIA quoq; hæc facilè conuerti poſſunt, hoc modo.

CONI & cylindri tam recti, quàm ſcaleni; item priſmata, parallelepipeda, & pyramides, proportionem habentes eandem, quam altitudines, baſes habebunt æquales.

NAM alioquin pars æqualis foret toti, vt in converſo propoſ. 31. lib. 11. oſtenſum eſt.

THEOR. 15. PROPOS. 15. 12.

AEQVALIVM conorum, & cylindrorum reciprocantur baſes & altitudines: & quorum conorum, & cylindrorum reciprocantur baſes & altitudines, illi ſunt æquales.

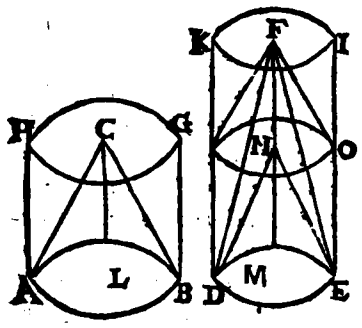


SINT æquales coni ABC, DEF, & æquales cylindri ABGH, DEIK, quorum baſes AB, DE; axes, altitudines ve LC, MF. Dico baſes & altitudines eſſe reciprocas, hoc eſt, eſſe vt AB, ad DE, ita MF, ad LC. In cylindris quidem ſic propoſitum oſtendetur. Si altitudines LC, MF, ſint æquales, cùm cylindri ponantur quoque æquales; erunt & baſes æquales, ex coroll. propoſ. 11. huius lib. Quare erit vt baſis AB, ad baſin æqualem DE, ita altitudo MF, ad altitudinem æqualem LC. Ac proinde baſes atque altitudines ſunt reciprocæ.

QVOD ſi altitudines LC, MF, inæquales fuerint, ſit MF, maior, ex qua abſcindatur MN, ipſi LC, æqualis; & per N, ducatur planum ON, baſi DE, parallelum, vt in ſcholio propoſ. 15. lib. 11. docuimus, vt fiant duo cylindri DO, OK. Quoniam igitur æquales ponũtur cylindri ABGH, DEIK; [a] erit vt cylindrus ABGH, ad cylindrum DO, ita cylindrus DEIK, ad eundem cylindrum DO. [b] Eſt autem vt cylindrus ABGH, ad cylindrum DO, ita baſis AB, ad baſin DE, cùm æquales ſint altitudines: [c] Item vt cylindrus DEIK, ad cylindrum DO, ita altitudo MF, ad altitudinem MN, cùm baſes ſint æquales, immo vna & eadem DE. Igitur erit quoque vt baſis AB, ad baſin DE, ita altitudo MF, ad altitudinem MN, hoc eſt, ad huic æqualem LC; Ac propterea reciprocæ ſunt baſes & altitudines. a 7. quinti. b 11. duodec. c 14. duode.

IN conis verò ita cõcludemus propoſitum. Si coni ABC, DEF, ſint æquales; erunt & cylindri ABGH, DEIK, æquales, [d] cùm coni ſint cylindrorum tertiæ partes. Quare vt oſtenſum d 10. duod.

est, ex æqualitate cylindrorum sequetur, bases & altitudines esse reciprocas: Ac propterea ex æqualitate conorum etiam sequetur, bases & altitudines reciprocas esse. Quod tamen eodem prorsus modo demonstrari potest, quo vsi sumus in cylindris, si modò sub altitudinibus M N, N F, constituantur duo coni, vt in figura.



SED iam bases atque altitudines reciprocentur. Dico conos & cylindros esse æquales. Quod quidem in cylindris confirmabitur hac ratione. Si altitudines L C, M F, sint æquales, cùm sit vt basis A B, ad basin D E, ita altitudo M F, ad altitudinem æqualem L C; erunt & bases A B, D E, æquales: Ac propterea cylindri super æquales bases A B, D E, & sub altitudinibus æqualibus L C, M F, æquales erunt, ex coroll. propos. 11. huius lib.

a 11. *duode.*

QVOD si altitudines fuerint inæquales, fiat constructio vt prius. Quia igitur ponitur vt basis A B, ad basin D E, ita altitudo M F, ad altitudinẽ L C, hoc est, ad huic æqualem M N; [a] Est autem vt basis A B, ad basin D E, ita cylindrus A B G H, ad cylindrum D O, cùm altitudines sint æquales: [b] Item vt altitudo M F, ad altitudinem M N, ita cylindrus D E I K, ad cylindrum D O, cùm bases sint æquales; erit vt cylindrus A B G H, ad cylindrum D O, ita cylindrus D E I K, ad eundem cylindrum D O; [c] Ideoque cylindrus A B G H, cylindro D E I K, æqualis erit.

b 14. *duode.*

c 9. *quinti.*

AT verò in conis hæc erit demonstratio. Si conorum A B C, D E F, bases & altitudines reciprocentur, reciprocabuntur quoque bases, & altitudines cylindrorum A B G H, D E I K, cùm eædem sint bases, altitudinesq; conorum, & cylindrorum. Quam ob rem, vt ostensum fuit, cylindri, ideoq; coni, eorum tertiæ partes, æquales erunt. Demonstrari tamen potest eodem modo, conos esse æquales, quo ostendimus cylindros æquales esse. Æqualium igitur conorum & cylindrorum reciprocantur bases & altitudines, &c. Quod erat demonstrandum.

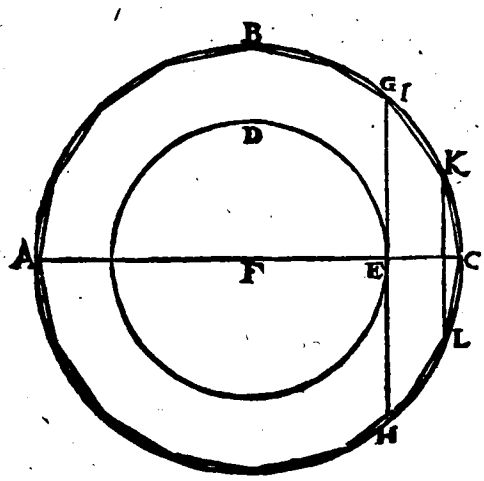
SCHOLIVM.

NON difficile erit idem ostendere de conis, & cylindris scalenis. Si enim æquales sint coni & cylindri scaleni, erunt quoq; recti, easdem cum illis bases & altitudines habentes, æquales, ex coroll. propos. 11. huius libri. Quare, vt ostensum est, bases & altitudines reciprocabuntur. Quòd si bases, & altitudines conorum & cylindrorum scalenorum reciprocentur, reciprocabuntur quoq; bases & altitudines conorum & cylindrorum rectorum, si eadem sint bases, & altitudines rectorum & scalenorum. Quare, vt demonstratum est, coni & cylindri recti æquales erunt: Ac propterea coni & cylindri scaleni, cùm sint rectis æquales, ex coroll. propos. 11. huius libri, inter se quoq; erunt æquales.

IDEM facilè concludetur, licèt vnus conorum & cylindrorũ sit rectus, & alter scalenus, vt perspicuum est ex ijs, quæ in scholio propos. 14. huius lib. docuimus.

13. PROBL. I. PROPOS. 16.

DVOBVS circulis circa idem centrum existentibus, in maiori circulo polygonum æquilaterum, & parium laterũ inscribere, quod nõ tangat minorẽ circulum.



SINT duo circuli A B C, D E, circa idem centrũ F, oporteatque in maiori A B C, inscribere polygonum æquilaterum, cuius latera numero pari continentur, non tangens minorem D E. Extendatur per centrum F, recta A C, secans circulum D E, in E, puncto, & p E, ducatur G H, ad A C, perpendicularis, quæ tanget circulum D E, in E, ex corollario propos. 16. lib. 3. Quoniam igitur arcus A G C, maior est arcu G C, si ex A G C, auferatur dimidiũ A B, & ex residuo B C, dimidium B I, & ex residuo I C, dimidium I K, & sic deinceps; [d] relinquetur tandem minor arcus, quàm C G. Sit igitur iam arcus C K, arcu C G, minor, & subtendatur recta C K. Dico rectam C K, esse vnum latus polygoni inscribendi. Si enim arcus B I, diuidatur in partes numero & magnitudine æquales partibus arcus C I; & quadrans A B, in totidem partes æquales diuidatur, in quot diuisus est quadrans B C; nec non semicirculus A H C, in totidem partes, quot continet semicirculus A B C; deinde omnibus arcubus rectæ lineæ subtendantur, [e] quæ æquales quidem erunt ipsi rectæ C K, eò quòd arcus arcui C K, æquales subtendant: Descriptum erit polygonum in circulo A B C, & æquilaterum, & parium laterum. Quod quidem non tangere circulum minorem D E, ita ostendetur. Ex K, ad A C, demittatur perpendicularis K L, secans ipsam A C, in M. Quoniã igitur anguli G E M, K M E, recti sunt; [f] erunt

d 11. *decimi.*

e 29. *tertij.*

f 28. *primi.*

rectæ

rectæ G H, K L, parallelę. Quare cùm recta G H, tangat circulum D E, in ſolo puncto E; recta K L, erit tota extra dictum circulum, nec vnquam ipſum continget, quòd nunquam cum recta G H, conueniat. Multò igitur minus recta C K, quæ longius à circulo D E, abeſt, quàm K L, circulum D E, tanget. Ac propterea neq; alia latera polygoni inſcripti, cùm æqualia ſint lateri C K: [a] ideoq; æqualiter cum C K, à centro F, diſtent, circulum D E, contingent. Duobus itaque circulis circa ydem centrum exiſtentibus, in maiori circulo, &c. quod erat faciendum. [a] 14. tertij.

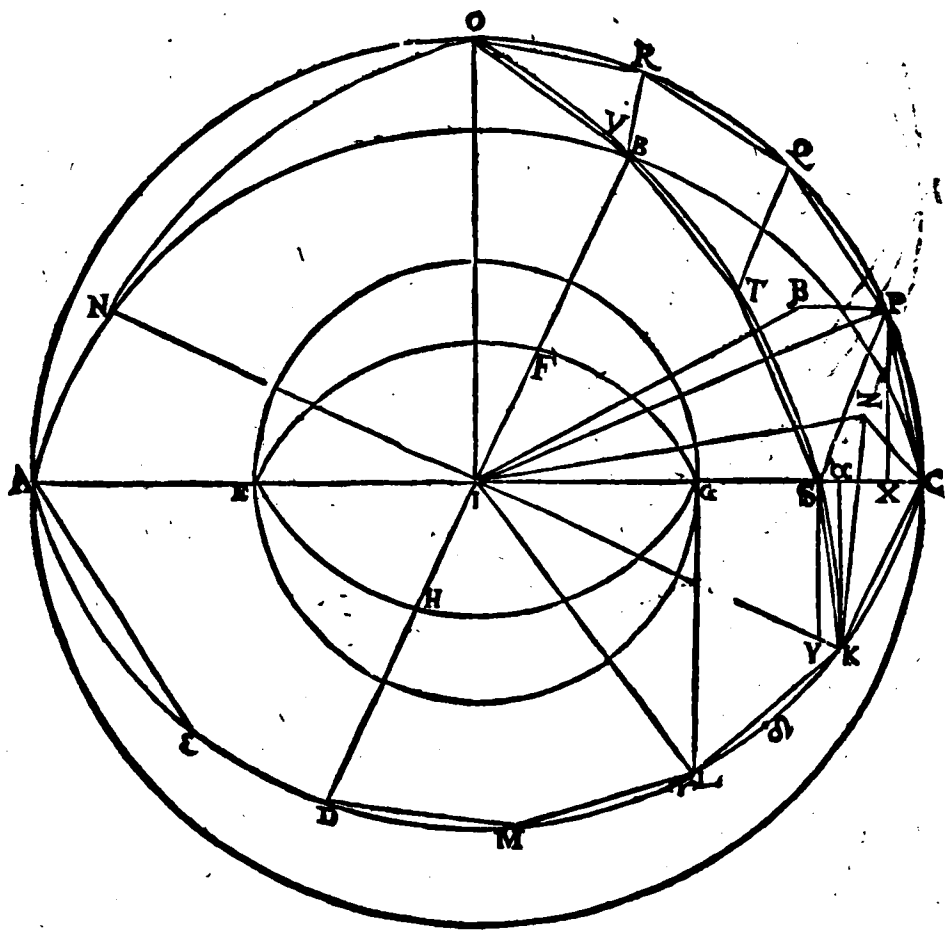
COROLLARIVM.

Hinc eſt manifeſtum, ſi ab extremitate lateris polygoni inſcripti, quod cum diametro conuenit, ad diametrum ducatur perpendicularis, hãc nullo modo circulum minorem poſſe contingere, ſed totam extra ipſum cadere. Huiuſmodi enim eſt linea K L, quæ cùm ducatur ab extremo puncto K, lateris C K, cum diametro A C, conuenientis, ad A C, diametrum perpendicularis, oſtenſa eſt non tangere circulum D E.

PROBL. 2. PROPOS. 17. 14.

DVABVS ſphæris circa idem centrum exiſtentibus, in maiori ſphæra ſolidum polyedrum inſcribere, quod non tangat minoris ſphæræ ſuperficiem.

SINT duæ ſphęræ A B C D, E F G H, circa idem centrum I, oporteatque in maiori A B C D, inſcribere ſolidum polyedrum, ſeu multilaterum, quod non tangat minorem ſphæram E F G H. Secentur ambæ ſphæræ plano aliquo per centrum, ſintq; communes ſectiones factæ in ſphæris plana A B C D, E F G H, quæ circuli erunt, ex deſcriptione ſphæræ, habentes idem centrum ſphærarum I. Nam ſemicirculi, ad quorum circumuolutionem ſphæræ deſcribuntur, circumducti, congruent ſectionibus A B C D, E F G H. Quare dictæ ſectiones circuli erunt. Vel certè, quia omnes



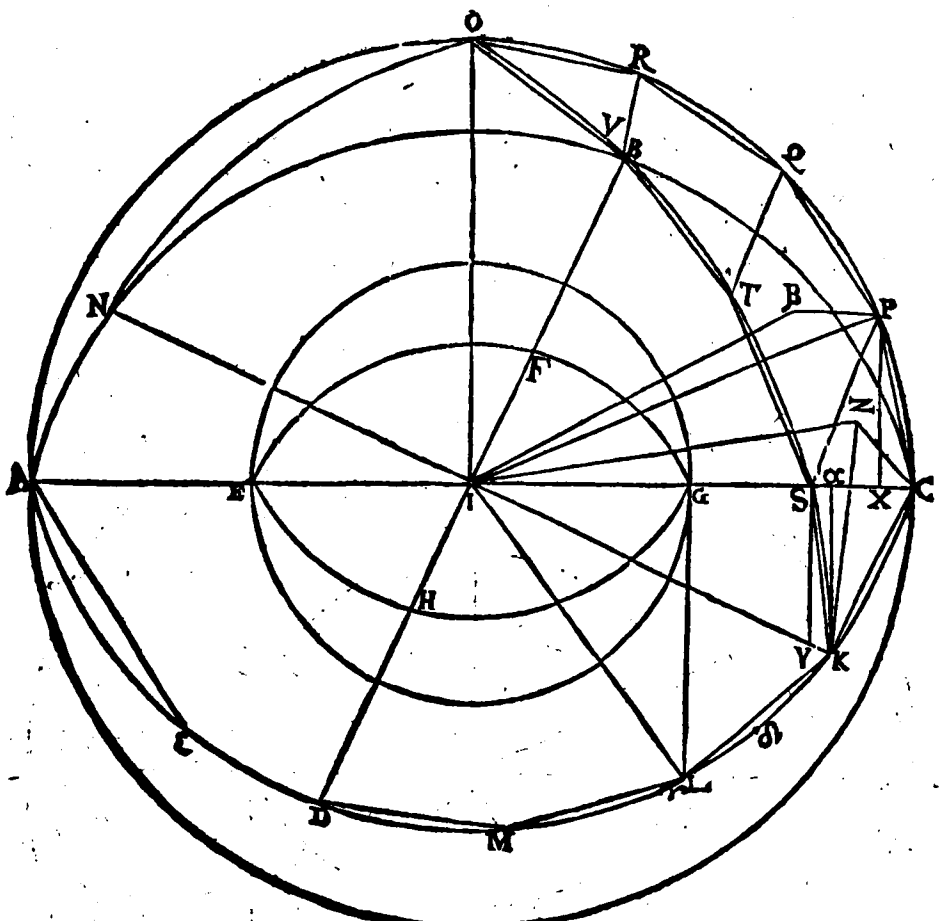
lineæ rectæ cadentes ex I, ad peripherias ſectionum ſunt æquales, cùm ducantur ex centro ſphærarum ad earum ſuperficiem; erunt ipſæ ſectiones, circuli, ex definitione circuli. Ducantur in his circulis diametri A C, B D, ſeſe in centro I, ſecantes ad angulos rectos, vt ſint quadrantes A B, B C, C D, D A, &c. Deinde in maiori circulo A B C D, inſcribatur polygonum non tangens minorem circulum E F G H. Quod quidem, vt facilius omnia demonſtrentur, in hunc modum efficiatur. Ex G, ad E G, ducatur perpendicularis G [illegible], ad circumferentiam vſq; circuli A B C D, quæ circulum E F G H, tanget in G, ex coroll. propoſ. 16. lib. 3. Et rectæ G [illegible], [c] applicetur in circulo A B C D, recta [b] 16. duodecimi. [c] 1. quarti.

a 19. primi. æqualis A ι. Quia verò ſi arcui C γ, intelligatur ſubtendi recta, vt fiat triangulum G C γ, *a* latus C γ, oppoſitum maiori angulo, nempe recto, maius eſt latere G γ, quod minori angulo opponitur, nimirum acuto; erit quoq; recta C γ, maior recta A ι; ac proinde arcus C γ, arcu A ι, maior erit, vt conſtat ex ſcholio propoſ. 28. lib. 3. Abſcindatur ergo arcus C δ, arcui A ι, æqualis. Quod ſi ex quadrante C D, dimidium auferatur D L, & ex reliquo C L, dimidium L K, & ſic deinceps, *b* relinquetur tandem arcus minor arcu C δ, ſeu arcu A ι. Sit ergo iam arcus C K, minor; Eritque recta C K, ſubtenſa, minor quàm recta A ι, hoc eſt, quàm G γ, ex ſcholio propoſ. 29. lib. 3. Dico igitur, rectam C K, eſſe vnum latus polygoni æquilateri inſcribendi. Nam cùm recta ſubtendés arcum C δ, minorem arcu C γ, non tangat circulum E F G H, vt ex demonſtratione præcedentis propoſ. patet, multò minus recta C K, ſubtendens arcum minorem arcu C δ, eundem circulum tanget. Rurſus ducta diametro K N, *c* erigatur ex centro I, ad plana circulorum A B C D, E F G H, perpendicularis I O, occurrens ſuperficiei ſphæræ maioris in O; Et per rectas O I, A C, & O I, K N, plana ducantur, *d* quæ ad circulum A B C D, recta erunt, efficientq; communes ſectiones, circulos, vt iam dictum eſt, quorum ſemicirculi ſint A O C, N O K. Quia verò anguli O I C, O I K, recti ſunt,

b 1. decimi.

c 18. vndec.

d 18. vndec.



e ſchol. 22. tertij. ex defin. 3. lib. 11. *e* quadrantes erunt O C, O K, atque adeò cùm circuli A B C D, A O C, N O K, æquales ſint, quòd eorum diametri ſint & ſphæræ maioris diametri, erunt quoq; quadrantes C D, O C, O K, æquales. Si igitur arcus D L, in tot partes æquales diſtribuatur, in quot diuiſus fuit arcus C L; & quadrantes O C, O K, in arcus numero & magnitudine æquales arcubus quadrantis C D; *f* Erunt rectæ his omnibus arcubus æqualibus ſubtenſæ, nimirum C K, K L, L M, M D; C P, P Q, Q R, R O; K S, S T, T V, V O, æquales. Coniunctis autem rectis P S, Q T, R V, demittantur ex P, & S, ad planum circuli A B C D, perpendiculares P X, S Y, *g* quæ in communes ſectiones A C, N K, cadent; *h* eruntque inter ſe parallelæ.

f 29. tertij.

g 38. vndec.

h 6. vndec.

QVONIAM igitur triangulorum P C X, S K Y, anguli P X C, S Y K, recti ſunt, ex defin. 3. lib. 11. *i* & anguli P C X, S K Y, æquales, quòd & æquales ſint peripheriæ A O P, N O S, quibus inſiſtũt; (Nam ſi ex ſemicirculis A O C, N O K, æqualibus, demantur arcus æquales C P, K S, reliqui arcus A O P, N O S, æquales quoq; erũt.) Erunt duo anguli P C X, P X C, trianguli P C X, æquales duobus angulis S K Y, S Y K, trianguli S K Y: Sunt autem & latera P C, S K, rectis angulis oppoſita, æqualia. *k* Igitur reliqua latera P X, X C, reliquis lateribus S Y, Y K, æqualia erunt. Quare cùm rectæ P X, S Y, æquales ſint & parallelæ; ſi connectatur recta X Y; *l* æquales quoque erunt & parallelæ P S, X Y, inter ſeſe. *m* At quia & rectæ C K, X Y, parallelæ ſunt, quòd latera I C, I K, proportionaliter ſecta ſint. (Si enim ex ſemidiametris I C, I K, æqualibus demantur æquales rectę C X, K Y,

i 27. tertij.

k 26. primi.

l 33. primi.

m 2. ſexti.

CX, KY, relinquentur & IX, IY, æquales; Ac proinde erit, vt IX, ad XC, ita IY, ad YK.) [a] Erunt parallelæ quoq; PS, CK, inter se, cùm vtraq; parallela, sit ipsi XY; [b] ideoq; eas coniungentes rectæ CP, KS, in eodem cum ipsis plano existent. Totum igitur quadrilaterum CKSP, in vno erit plano. Quod si ex Q, & T, demittantur ad planum circuli ABCD, perpendiculares, & connectantur rectæ QC, TK, ostendemus similiter CK, QT, esse parallelas; atque adeò ipsas PS, QT, inter se parallelas esse, cùm eidem CK, sint parallelę; totumq; quadrilaterum PSTQ, in vno esse plano. Eadem ratione in vno erit plano quadrilaterum QTVR. [c] Est autem & triangulum RVO, in vno plano. Si igitur eadem constructio exhibeatur super reliqua latera KL, LM, MD, ductis scilicet quadrantibus OL, OM, OD; necnon in reliquis tribus quartis, ac reliquo hemisphærio, vt tota sphæra maior repleatur quadrilateris, & triangulis, quæ similia sint prædictis inter quadrantes OC, OK, super latus CK, constructis; inscriptum erit in sphæra maiori solidum polyedrum circumscriptum dictis quadrilateris atque triangulis. Hoc ergo dico non tangere sphæram minorem EFGH.

a 9. vndec.
b 7. vndec.
c 2. vndec.

DVCATVR enim ex I, ad planum CKSP, perpendicularis IZ, connectanturque rectæ ZC, ZK. Cadere autē perpendicularem IZ, intra quadrilaterum CKSP, in scholio sequēti ostendemus. Quoniam igitur, ex defin. 3. lib. 11. anguli IZC, IZK, recti sunt; [d] erit quadratum rectæ IC, quadratis rectarum IZ, ZC, & quadratum rectæ IK, quadratis rectarum IZ, ZK, æquale. Cùm ergo quadrata rectarum æqualium IC, IK, æqualia sint, erunt & quadrata rectarum IZ, ZC, quadratis rectarum IZ, ZK, æqualia; Ac proinde dempto communi quadrato IZ, reliqua quadrata rectarum ZC, ZK, æqualia erunt, ideoq; & ipsæ rectæ ZC, ZK, æquales. Similiter ostendemus rectas, quæ ex Z, ad PS, ducentur, æquales esse & inter se & rectis ZC, ZK. Quare circulus ex Z, ad interuallum ZC, descriptus per quatuor puncta C, K, S, P, transibit. Eademq; ratione circa reliqua quadrilatera PSTQ, QTVR, & triangulum RVO, circulos describi posse, demonstrabimus. Quoniam verò, vt postea ostendemus, angulus CZK, obtusus est; erit quadratum rectæ CK, maius quadratis rectarum ZC, ZK; ideoque cùm hæc quadrata æqualia sint, maius erit quadratum rectæ CK, duplo quadrati rectæ ZC.

d 47. primi.

DVCATVR ex K, ad rectam AC, perpendicularis Kα. Cùm igitur AC, dupla sit ipsius AI, & Aα, maior sit, quàm AI, erit AC, minor duplo ipsius Aα. Quamobrem cùm sit, [e] vt AC, ad Aα, ita rectangulum sub AC, αC, ad rectangulum sub Aα, αC, quòd bases horum rectangulorum sint AC, Aα, & eadem altitudo αC; erit quoque rectangulum sub AC, αC, minus duplo rectanguli sub Aα, αC. [f] Est autem rectangulum sub AC, αC, æquale quadrato rectæ CK; & rectangulum sub Aα, αC, æquale quadrato rectæ Kα; quòd recta CK, inter AC, αC, sit media proportionalis; & recta Kα, inter Aα, αC, ex coroll. propos. 8. lib. 6. (si enim connecteretur recta AK, fieret triangulum rectangulum ACK.) Igitur & quadratum rectæ CK, minus erit duplo quadrati rectæ Kα. Ac propterea cùm quadratum rectæ CK, ostensum sit maius esse duplo quadrati rectæ ZC; erit quadratum rectæ Kα, maius quadrato rectæ ZC. [g] Quoniam verò quadratum rectæ IC, æquale est quadratis rectarum IZ, ZC; & quadratum rectæ IK, quadratis rectarum Iα, αK: Suntque æqualia quadrata rectarum æqualium IC, IK; Erunt & quadrata rectarum IZ, ZC, æqualia quadratis rectarum Iα, αK. Si ergo ex his demantur quadratum maius, nempe rectæ αK; & ex illis minus, videlicet rectæ ZC, erit reliquum quadratum rectæ IZ, maius quadrato reliquo rectæ Iα; ideoq; recta IZ, maior quàm recta Iα. Quapropter cùm punctum α, non tangat sphæram minorem EFGH, quòd, per coroll. propos. præcedentis, recta Kα, tota sit extra dictam sphæram; multò minus punctum Z, longius distans, eandem sphæram continget. Ac proinde cùm omnia alia puncta plani CKSP, longius absint à sphæra EFGH, quàm punctum Z, vt mox ostendemus, non tanget planum CKSP, sp' æram EFGH.

e 1. sexti.
f 17. sexti.
g 47. primi.

SED & expeditius ex ipsa fe onstructione figuræ ostendemus, planum CKSP, non tangere sphæram minorem FFGH, si prius ducatur recta Iγ, hoc modo. Quoniam ex cōstructione ostensum fuit, rectam CK, minorem esse recta Cγ: [h] Est autem CK, maior quàm ZC, quòd angulus CZK, obtusus sit, vt mox demonstrabitur; Multò maior erit Gγ, quàm ZC; Ac proinde quadratum rectæ Gγ, maius quadrato rectæ ZC. [i] Quia verò quadratum rectæ Iγ, æquale est quadratis rectarum IG, Gγ; & quadratum rectæ IC, quadratis rectarum IZ, ZC; sunt autem quadrata rectarum Iγ, IC, æqualium æqualia: erunt & quadrata rectarum IG, Gγ, quadratis rectarū IZ, ZC, æqualia. Dempto ergo illinc quadrato rectæ Gγ, & hinc quadrato rectæ ZC; relinquetur quadratum rectæ IG, minus quadrato rectæ IZ; Ac propterea recta IG, minor, quàm IZ. Quam ob rem, cùm IG, sit sphæræ minoris EFGH, semidiameter; existet punctum Z, extra eandem sphæram; Et proinde, vt prius, planum CKSP, sphæram EFGH, nequaquam continget.

h 19. primi.
i 47. primi.

DVCATVR rursus ex I, ad planum PSTQ, perpendicularis Iβ, eritq; β, centrum circuli circa PSTQ, descripti, vt demonstratum est: Connexis autem rectis βP, IP, cùm angulus IβP, rectus sit, ex tertia definitione libri vndecimi, [k] erit quadratū rectæ IP, æquale quadratis rectarū Iβ, βP. Quia verò & quadratum rectæ IC, (quod æquale est quadrato rectæ IP, ob æqualitatem rectarum IC, IP,) æquale est quadratis rectarum IZ, ZC; erunt quadrata rectarum Iβ, βP, quadratis rectarum IZ, ZC, æqualia; Est autem quadratum rectæ ZC, maius quadrato rectę βP, quòd & linea ZC, maior sit, quàm linea βP, vt postea ostendemus. Reliquum igitur quadratum rectæ Iβ, reliquo quadrato rectæ IZ, maius erit; ideoq; & linea Iβ, maior quàm linea IZ: Ac proinde multò magis punctum β, extra sphæram EFGH, existet, quàm punctum Z, propterea q;

k 47. primi.

multò minus planum PSTQ, quàm CKSP, tanget sphæram minorem EFGH. Eodem modo demonstrabimus, quòd neque reliqua plana sphæram dictam contingere possint. Quocirca, duabus sphæris circa idem centrum existentibus, in maiori sphæra solidum polyedrum inscripsimus, quod non tangat minoris sphæræ superficiem. Quod erat faciendum.

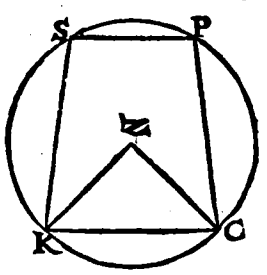
COROLLARIVM.

Ex iis, quæ demonstrata sunt, manifestum est, si in quauis alia sphæra describatur solidum polyedrum simile prædicto solido polyedro, proportionem polyedri in vna sphæra ad polyedrum in altera sphæra esse triplicatam eius, quam habent sphærarum diametri. Nam si ex centris sphærarum ad omnes angulos basium dictorum polyedrorum rectæ lineæ ducantur, distribuentur polyedra in pyramides numero æquales, & similes, quarum homologa latera sunt semidiametri sphærarum; vt constat, si intelligatur harum sphærarum minor intra maiorem circa idem centrum descripta. Congruent enim sibi mutuò lineæ rectæ ductæ à centris ad basium angulos, ob similitudinem basium; Ac propterea pyramides efficientur similes. Quare cùm singulæ pyramides in vna sphæra ad singulas pyramides illis similes in altera sphæra habeant proportionem triplicatam laterum homologorum, hoc est, semidiametrorum sphærarum, vt constat ex coroll. propos. 8. huius lib. Sint autem, vt vna pyramis ad vnam pyramidem, ita omnes pyramides, hoc est, solidum polyedrum ex ipsis compositum, ad omnes pyramides, id est, ad solidum polyedrum ex ipsis constitutum. Habebit quoq; polyedrum vnius sphæræ ad polyedrum alterius sphæra proportionem triplicatam semidiametrorum, atque adeò diametrorũ sphærarum, [a] *cùm semidiametri atq; diametri eandem habeãt proportionẽ.*

a 15. quinti.

SCHOLIVM.

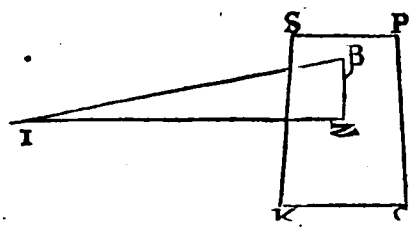
QVONIAM verò ne nimis longa demonstratio fieret, nonnulla in ea assumpta fuerunt, vt vera; quæ tamen nondum sunt demonstrata; idcirco ea nunc breuiter à nobis erunt demonstranda.



b 14. quinti

c 28. tertij.

PRIMVM itaq; ostendendum est, punctum Z, cadere intra quadrilaterum CKSP, & angulum CZK, esse obtusum. Quod vt commodius fiat, describatur circa dictum quadrilaterum ex centro Z, circulus. Quoniam igitur in figura superiori, est vt IK, ad KC, ita IT, ad TX, (quòd per coroll. propos. 4. lib. 6. triangula ICK, IXT, similia sint.) Est autem IK, maior quã IT; [b] erit & KC, maior quàm TX. Cùm igitur TX, æqualis sit ostensa ipsi SP, erit quoq; KC, maior quàm SP; Ac propterea in hac figura, arcus CK, maior erit arcu SP, ex scholio propos. 28. lib. 3. [c] Quare cùm arcus CP, KS, arcui CK, sint æquales, quòd & lineæ CP, KS, ipsi KC. lineæ sint æquales demonstratæ: (subtenduntur enim arcubus circulorum æqualibus, vt ex constructione figuræ superioris constat) erunt quoque arcus CP, KS, arcu PS, maiores; Atq; idcirco quilibet arcuum CK, CP, KS, quadrantem circuli CKSP, excedet; atque à semicirculo superabitur, ac proinde multò magis segmentum SP, minus erit semicirculo. Ex quo fit, centrum Z, non esse in illis segmentis, sed extra, nimirum intra quadrilaterum CKSP. Eadem ratione ostendemus, perpendiculares ex I, ad plana aliorum quadrilaterorum demissas, qualis est IB, cadere intra quadrilatera; necnon & perpendicularem ex I, ad triangulum ORV, ductam, cadere intra ipsum. Quia igitur arcus CK, quadrante maior est; angulus CZK, obtusus erit, nempe recto maior, cùm angulo recto in centro subtendatur quadrans circuli, vt perspicuum est ex scholio propos. 27. lib. 3.



d 19. primi

SECVNDO demonstrandum est, omnia alia puncta quadrilateri CKSP, longius à centro I, abesse, quàm punctum Z. Sumatur enim quodcunque aliud punctum θ, in quadrilatero CKSP, & adiungantur rectæ Iθ, Zθ. Quoniam ergo angulus IZθ, rectus est, ex defin. 3. lib. 11. [d] Erit latus illi oppositum Iθ, maius latere IZ, quod minori angulo IθZ, nimirum acuto, opponitur; Ac propterea punctum θ, longius à centro I, distat, quàm punctum Z. Simili argumento concludemus, omnia alia puncta longius distare.

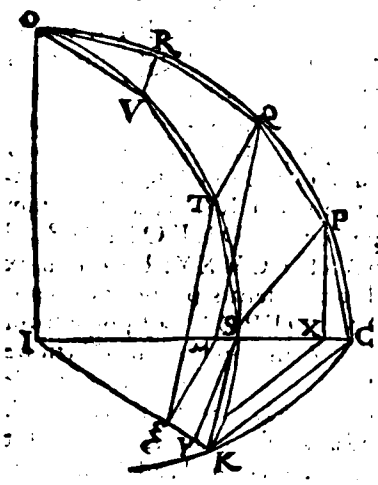
TERTIO, ac vltimo probandum est, rectam ZC, maiorem esse recta βP. Quod vt aptius fiat, demonstrandum prius erit, rectam PS, maiorem esse recta QT. Describatur igitur pars superioris figuræ, ea videlicet, quæ continetur semidiametris IC, IK, IO, & quadrantibus OC, OK, &c. Demittantur deinde ex Q, & T, ad planum circuli ABCD, in quo est triangulum ICK, perpendiculares Qμ, Tξ, [e] quæ in communes sectiones IC, IK, cadent, [f] eruntq; inter se parallelæ, vt de rectis PX, SY, dictum est. Quod si adiungatur recta μξ, erunt QT, μξ, parallelæ & æquales, quemadmodum ostensum fuit.

e 28. vndecimi.

f 6. vndec.

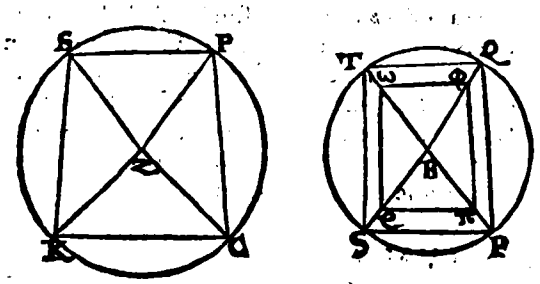
fuit, parallelas esse & æquales PS, XY. [a] *Quia verò μξ, ipsi CK, parallela est; quòd latera IC, IK, proportionaliter sint secta in μ, & ξ, veluti diximus de recta XY;* [b] *erunt quoque μξ, XY, parallelæ. Quare erit, ex corollario propos. 4. lib. 6. vt IY, ad YX, ita Iξ, ad ξμ: Est autem IY, maior quàm Iξ.* [c] *Igitur & YX, maior erit quàm ξμ; Ac proinde & PS, quæ æqualis est ipsi XY, maior erit quàm QT, quæ æqualis est ipsi ξμ.*

a 2. sexti.
b 30. primi
c 14. quinti



Hoc ergo demonstrato, describantur ex centris Z, β, circa quadrilatera CKSP, PSTQ, circuli, egredianturq; è centris rectæ ZC, ZK, ZS, ZP; βP, βS, βT, βQ. Si igitur ZC, non credatur maior, quàm βP, erit vel æqualis, vel minor. Sit primùm æqualis. Quia ergo latera ZK, ZC, æqualia ponuntur lateribus βS, βP, & basis KC, maior est basi PS; [d] *erit angulus KZC, maior angulo SβP: Eadem ratione maior erit angulus SZP, angulo TβQ. At quoniam bases KS, CP, basibus ST, PQ, sunt æquales;* [e] *erunt anguli KZS, CZP, angulis SβT, PβQ, æquales. Igitur quatuor anguli ad Z, maiores erunt quatuor angulis ad β: Sunt autem & æquales, cùm tam hi, quàm illi quatuor rectis sint æquales, ex coroll. 2. propos. 15. lib. 1. quod est absurdum. Non igitur æqualis est recta ZC, rectæ βP.*

d 25. primi
e 8. primi.

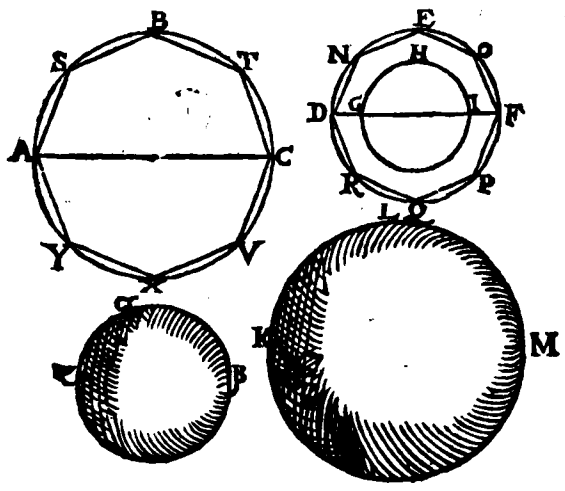


Sit deinde ZC, minor, quàm βP. Et abscindantur βπ, βρ, βσ, βφ, ipsis ZC, ZK, ZS, ZP, æquales, connectanturq; rectæ πρ, ρσ, σφ, φπ, [f] *quæ parallelæ erunt rectis PS, ST, TQ, QP, eò quòd rectæ ex centris secto sunt proportionaliter; ac proinde, ex coroll. propos. 4. lib. 6. erit vt βS, ad SP, ita βρ ad ρπ. Cùm ergo βS, maior sit quàm βρ, erit & SP, maior quàm ρπ. Eademq; ratione maiores erunt ST, TQ, QP, rectis ρσ, σφ, φπ; Ac propterea cùm PS, minor sit, quàm CK, & ST, PQ, æquales rectis KS, CP; & TQ, minor quàm PS, erunt rectæ πρ, ρσ, σφ, φπ, minores rectis CK, KS, SP, PC. Quare cùm rectæ βπ, βρ, βσ, βφ, rectis ZC, ZK, ZS, ZP, sint æquales;* [h] *erunt anguli ad Z, maiores angulis ad β: Sunt autem & æquales. quòd tam illi, quàm hi sint quatuor rectis æquales, ex coroll. 2. propos. 15. lib. 1. Quod est absurdum. Non igitur minor est recta ZC, quàm βP: Sed neque æqualis est ostensa; Maior igitur est. Quod erat ostendendum.*

f 2. sexti.
g 14 quinti
h 25. primi.

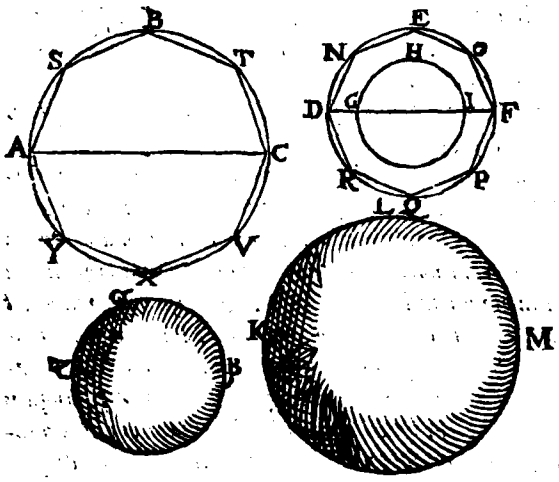
THEOR. 16. PROPOS. 18. 15.

SPHÆRAE inter se sunt in triplicata ratione suarum diametrorum.



Sint duæ sphæræ ABC, DEF, quarum diametri AC, DF. Dico sphæram ABC, ad sphæram DEF, habere proportionem triplicatam diametri AC, ad diametrum DF. Si enim hoc non concedatur, habebit sphæra ABC, ad aliam sphæram GHI, minorem, vel KLM, maiorem, quàm DEF, triplicatam proportionem diametri AC, ad diametrum DF. Habeat primùm sphæra ABC, ad sphæram GHI, minorem sphæra DEF, proportionem triplicatam diametri AC, ad diametrum DF: intelligaturq; sphæra GHI, concentrica sphæræ DEF. [a] *Inscribatur in sphæra maiori DEF, polyedrum DNEOFPQR, non tangens minorem sphæram GHI; Atque huic simile polyedrum ASBTCVXY, inscribatur in sphæra ABC. Quoniam igitur ponitur proportio sphæræ ABC, ad sphæram GHI, triplicata proportionis diametri AC, ad diametrum DF: Est autem, per coroll. præcedentis propos. & proportio polyedri ASBTCVXY, ad polyedrum DNEOFPQR, triplicata proportionis diametri AC, ad diametrum DF; Erit vt sphæra ABC, ad sphæram GHI, ita polyedrum ASBTCVXY, ad polyedrum DNEOFPQR. Quare cùm sphæra ABC, maior sit polyedro ASBTCVXY,* [b] *erit & sphæra GHI, maior polyedro DNEOFPQR, pars toto. Quod est absurdum. Non igitur habebit sphæra ABC, ad sphæram GHI, minorem sphæra DEF, proportionem triplicatam diametri AC, ad diametrum DF.*

a 17. duodecimi.
b 14. quinti.



HABEAT secundò sphæra A B C, ad sphæram K L M, maiorem sphæra D E F, proportionem triplicatam diametri A C, ad diametrum D F. Cùm igitur, ex coroll. præcedentis propos. & polyedrum A S B T C V X Y, ad polyedrum D N E O F P Q R, habeat proportionem triplicatam diametri A C, ad diametrum D F; Erit vt sphæra A B C, ad sphæram K L M, ita polyedrum A S B T C V X Y, ad polyedrum D N E O F P Q R: Et conuertendo, vt sphæra K L M, ad sphæram A B C, ita polyedrum D N E O F P Q R, ad polyedrum A S B T C V X Y: Est autem, ex dicto coroll. præcedentis propositionis polyedrum D N E O F P Q R, ad polyedrum A S B T C V X Y, in triplicata proportione diametri D F, ad diametrum A C. Igitur & sphæra K L M, ad sphæram A B C, erit in triplicata proportione diametri D F, ad diametrum A C. Ponatur vt sphæra K L M, ad sphæram A B C, ita sphæra D E F, ad aliam sphæram Z. Habebit igitur & sphæra D E F, ad sphæram Z, proportionem triplicatam diametri D F, ad diametrum A C. Et quia sphæra K L M, maior ponitur, quàm sphæra D E F, erit quoque sphæra A B C, maior, quàm sphæra Z. Quapropter sphæra D E F, ad sphæram Z, minorem sphæra A B C, proportionem habet triplicatam diametri D F, ad diametrum A C. Quod est absurdum. Ostensum enim est, non posse sphæram ad sphæram alia sphæra minorem, proportionem habere triplicatam diametrorum. Non ergo habebit sphæra A B C, ad sphæram K L M, maiorem sphæra D E F, proportionem triplicatam diametri A C, ad diametrum D F. Sed neque ad minorem habet, vt demonstratum est: Igitur habebit ad sphæram D E F, proportionem triplicatam diametri A C, ad diametrum D F. Sphæræ itaque inter se sunt in triplicata ratione suarum diametrorum. Quod erat ostendendum.

COROLLARIVM.

HINC fit, ita esse sphæram ad sphæram, vt polyedrum in illa descriptum ad polyedrum simile in hac descriptum. Quia tam sphæra ad sphæram, quàm polyedrum ad polyedrum habet triplicatam diametrorum proportionem, vt demonstratum est.

FINIS ELEMENTI DVODECIMI.

EVCLIDIS

EVCLIDIS ELEMENTVM TERTIVMDECIMVM:

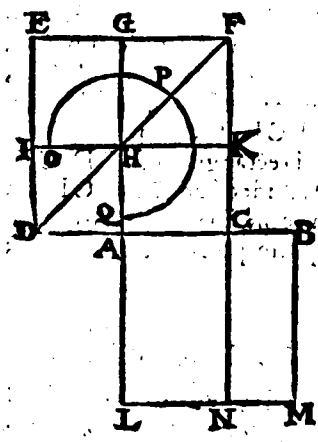
& Solidorum tertium.

THEOR. 1. PROPOS. 1.

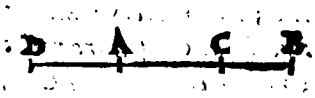
Si recta linea secundùm extremam & mediam rationem secetur; maius segmentum assumens dimidiam totius, quintuplum potest eius, quod à dimidia totius describitur, quadrati.



Secetur recta AB, in C, extrema ac media ratione, sitq; maius segmentum AC. Producta autem BA, ad D, sit AD, dimidia totius AB. Dico quadratum rectæ CD, quintuplum esse quadrati rectæ AD. Describatur enim super CD, quadratum CE, in quo ducta diametro DF, ducatur AG, ipsi DE, parallela, secans diametrum in H, puncto, per quod ducatur IK, parallela ipsi CD. Producta deinde GA, perficiatur quadratũ AM, protrahaturq; FC, ad N. eruntq; ex coroll. propos. 4. lib. 2. AI, KG, quadrata rectarum AD, AC. [a] Quia ergo est vt AB, ad AC, ita AC, ad CB; [b] erit rectangulum CM, sub AB, CB, æquale ipsi KG, quadrato rectæ AC. Deinde cùm ponatur AB, dupla ipsius AD, sitque AL, ipsi AB; & AH, ipsi AD, æqualis; erit quoque AL, ipsius AH, dupla: [c] Est autem vt AL, ad AH, ita rectangulum AN, ad AK, rectangulum. Duplum igitur est AN, ipsius AK. [d] Quoniam autem AK, ipsi IG, est æquale; erit AN, æquale duobus AK, IG. Additis igitur æqualibus CM, KG; erit quadratum AM, gnomoni OPQ, æquale. Quare cùm quadratum AM, quadruplum sit quadrati AI, ex scholio propos. 4. lib. 2. quòd linea AB, dupla ponatur lineæ AD; erit & gnomon OPQ, eiusdem quadrati AI, quadruplus; Ac propterea, si gnomoni OPQ, addatur ipsum quadratum AL, quintuplum efficietur quadratum CE, quadrati AL



Aliter. Ex scholio propos. 4. lib. 2. quadratum rectæ AB, quadruplum est quadrati rectæ AD, quòd linea AB, dupla lineæ AD, ponatur. [e] Est autem quadratum rectæ AB, æquale rectangulis sub AB, AC, & sub AB, BC, comprehensis; Et rursus, quod sub AB, AC, æquale est ei, quod sub AD, AC, bis: (sicut enim AB, ipsius AD, est dupla, [f] ita quoque erit rectangulum sub AB, AC, rectanguli sub AD, AC, duplum, cùm vtriusq; rectanguli eadem sit altitudo AC. Ac propterea rectangulum sub AD, AC, bis sumptum æquale erit rectangulo sub AB, AC.) [g] Quod verò sub AB, BC, æquale est quadrato rectæ AC, cùm sit vt AB, ad AC, ita AC, ad CB. Igitur quadratum rectæ AC, vnà cum rectangulo sub AD, AC, bis, quadruplum quoq; erit quadrati rectæ AD; Ac proinde quadrata rectarum AC, AD, vnà cum rectangulo sub AD, AC, bis, quintupla erunt quadrati eiusdem rectæ AD. [h] Quocirca cùm quadratum rectæ CD, æquale sit quadratis rectarum AC, AD, vnà cum rectangulo sub AD, AC, bis; Erit & quadratum rectæ CD, quadrati rectæ AD, quintuplum. Si recta igitur linea secundùm extremam & mediam rationem secetur, &c. Quod erat demonstrandum.

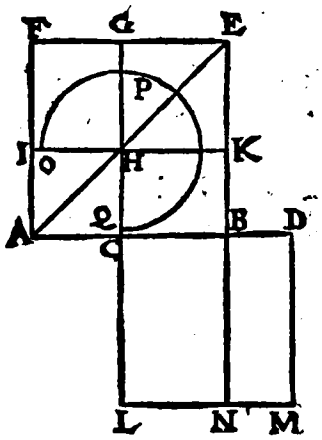


[a] 3. defin. sexti.
[b] 17. sexti.
[c] 1. sexti.
[d] 43. primi.
[e] 2. secundi.
[f] 1. sexti.
[g] 17. sexti.
[h] 4. secundi

THEOR. 2. PROPOS. 2.

Si recta linea sui ipsius segmenti quintuplum possit; Duplæ prædicti segmenti extrema ac media ratione sectæ, maius segmentum reliqua pars est eius, quæ à principio, rectæ.

Divisa sit recta AB, in C, positq; quintuplum segmenti AC; sumatur autem ipsius AC, dupla CD, quæ, vt post ostendemus, maior erit reliquo segmento BC. Dico si CD, secetur extrema

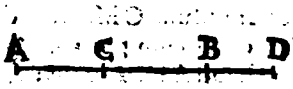


ac media ratione, maius segmentum esse CB, reliquam partem prioris lineæ. Describatur enim super AB, quadratum BF, in quo ducta diametro AE, ex C, ducatur ipsi AF, parallela CG, secans diametrum in puncto H, per quod agatur IK, parallela ipsi AB. Producta deinde GC, perficiatur quadratum CM, protrahaturq; EB, ad N. Erunt ex coroll. propos. 4. lib. 2. CI, KG, quadrata rectarum AC, CB. Quia igitur quadratum BF, quintuplum ponitur quadrati CI; Si tollatur quadratum CI, relinquetur gnomon OPQ, eiusdem quadrati CI, quadruplus: Est autem & quadratum CM, quadruplum quadrati CI, ex scholio propos. 4. lib. 2. quod recta CD, dupla sit rectæ AC. Igitur gnomon OPQ, quadrato CM, æqualis erit. Rursus quoniam CD, ponitur ipsius AC, dupla; est q; LC, ipsi CD; & CH, ipsi AC, æqualis; erit & LC, ipsius CH, dupla. [a] Cùm igitur sit vt LC, ad CH, ita rectangulum LB, ad rectangulum CK; erit quoque illud huius duplum: [b] Est autem CK, ipsi HF, æquale. Æquale igitur est LB, ipsis CK, HF; Ac proinde & reliquum quadratum KG, reliquo rectangulo BM. Quoniam ergo sunt tres rectæ CD, CB, BD, estq; rectangulum BM, sub CD, BD, comprehensum æquale ipsi KG, quadrato rectæ CB; [c] Erit vt CD, ad CB, ita CB, ad BD. Quamobrem, ex definitione, recta CD, secta est in B, extrema ac media ratione, estq; maius segmentum CB.

a 1. sexti.
b 43. primi.
c 17. sexti.
d 4. secundi

ALITER. Quoniam quadratum rectæ AB, quintuplum ponitur quadrati rectæ AC; [d] erit quoq; quadratum rectæ AB, æquale quadratis rectarum CB, AC, vnà cum rectangulo sub AC, CB bis. Erunt & quadrata rectarum CB, AC, vnà cùm rectangulo sub AC, CB bis, quintuplum quadrati rectæ AC. Dempto igitur quadrato rectæ AC, relinquetur quadratum rectæ CB, & rectangulum sub AC, CB bis, quadruplum eiusdem quadrati rectæ AC: Est autem & quadratum rectæ CD, eiusdem quadrati rectæ AC, quadruplum, ex scholio propos. 4. lib. 2. Æquale igitur est quadratum rectæ CB, & rectangulum sub AC, CB bis, quadrato rectæ CD. Cùm ergo rectangulum sub AC, CB bis, æquale sit rectangulo sub CD, CB; (sicut enim recta CD, dupla est rectæ AC, [e] ita quoq; duplum erit rectangulum sub CD, CB, rectanguli sub AC, CB; cùm vtriusque rectanguli eadem sit altitudo CB; Ac propterea rectangulum sub CD, CB, æquale erit rectangulo sub AC, CB bis.) Erit & quadratum rectæ CB, & rectangulum sub CD, CB, quadrato rectæ CD, æquale: [f] At quadratum rectæ CD, æquale est rectangulis sub CD, CB, & sub CD, BD. Igitur quadratum rectæ CB, & rectangulum sub CD, CB, æquale erit rectangulis sub CD, CB, & sub CD, BD; Ac proinde dempto communi rectangulo sub CD, CB, relinquetur quadratum rectæ CB, æquale rectangulo sub CD, BD; [g] ideoque erit vt CD, ad CB, ita CB, ad DB. Quare ex defin. recta CD, secta est in B, extrema ac media ratione, estq; segmentum maius CB. Si igitur recta linea suiipsius segmenti quintuplum ponsit, &c. Quod erat demonstrandum.

e 1. sexti.
f 2. secundi
g 17. sexti.



LEMMA.

QVOD autem recta CD, maior sit necessariò, quàm CB, ita ostendemus ex hypothesi. Quia quadratum rectæ CD, quadruplum est, ex scholio propos. 4. lib. 2. quadrati rectæ AC; Addito quadrato rectæ AC, erunt duo quadrata rectarũ CD, AC, quintupla eiusdem quadrati rectæ AC. Est autem quadratum rectæ AD, maius quadratis rectarũ AC, CD, & cùm æquale sit quadratis rectarum AC, CD, vnà cum rectangulo sub AC, CD, bis. Igitur quadratum rectæ AD, maius quoque erit quintuplo quadrati rectæ AC; Ac propterea maius quadrato rectæ AB, quod quintuplum ponitur eiusdem quadrati rectæ AC. Quare recta AD, maior erit, quàm recta AB; ideoq; dempta communi AC; maior erit reliqua CD, quàm reliqua CB. Quod est propositum.

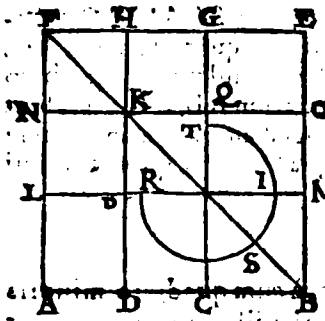
a 4. secundi.

3. THEOR. 3. PROPOS. 3.

SI recta linea secundùm extremam & mediam rationem secetur; minus segmentum assumens dimidiam maioris segmenti, quintuplum potest eius, quod à dimidia maioris segmenti describitur, quadrati.

SECETVR recta AB, in C, extrema ac media ratione, cuius maius segmentum AC, bifariam diuidatur in D. Dico quadratum rectæ BD, quintuplum esse quadrati rectæ CD. Describatur enim super AB, quadratum AE, in quo diameter BF. Deinde ex C, D, ducantur ipsis AF, BE, parallelæ CG, DH, secantes diametrum in I, K, punctis, per quæ agãtur ipsis AB, EF, parallelæ LM, NO, quæ secent rectas CG, DH, in P, Q. Eruntq; ex coroll. propos. 4. lib. 2. LG, PQ, DO, quadrata rectarum AC, CD, BD. Quoniam igitur recta AC, dupla est rectæ CD, erit ex scholio eiusdem propos. quadratum LG, quadruplum quadrati PQ. Est autem rectangulum CE, æquale

quadrato

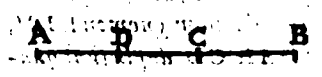


quadrato L G. (Nam cùm sit vt A B, ad A C, ita A C, ad C B, [a] erit rectángulum sub A B, C B, nempe C E, æquale quadrato rectæ A C, nimirum ipsi L G.) Igitur & C E, quadruplum erit quadrati P Q. Quia verò æqualia sunt quadrata N H, P Q, ob æqualitatem rectarum A D, C D; erunt eorum latera H K, I Q, æqualia; [b] ac proinde rectæ E O, O M, ipsis oppositæ æquales erunt. [c] Quare rectangula L O, Q E, æqualia erunt. [d] Est autem I O, ipsi I D, æquale. Ergo & Q E, eidem I D, æquale erit; Ac proinde, addito communi rectangulo C O; totus gnomon R S T, rectángulo C E, erit æqualis. Cùm igitur C E, ostensum sit quadruplum quadrati P Q; erit etiá gnomon R S T, eiusdem quadrati P Q, quadruplus: Ac propterea addito quadrato P Q, erit quadratum D O, ex recta B D, quintuplum quadrati P Q, ex recta C D.

[a] 17. sexti.
[b] 34. primi.
[c] 36. primi.
[d] 43. primi.

ALITER. Cùm A C, diuisa sit bifariam in D, & ei addita C B; [e] erit rectangulum sub A B, B C, vnà cum quadrato rectæ C D, æquale quadrato rectæ B D. At rectangulum sub A B, B C, quadruplum est quadrati rectæ C D; (Nam cùm sit, vt A B, ad A C, ita A C, ad C B; [f] erit rectangulum sub A B, B C, æquale quadrato rectæ A C: quod cùm, ex scholio propos. 4. lib. 2. quadruplum sit quadrati rectæ C D; erit & rectangulum sub A B, B C, quadruplum eiusdem quadrati rectæ C D.) Ac propterea rectangulum sub A B, B C, vnà cum quadrato rectæ C D, quintuplum quadrati rectæ C D. Igitur & quadratum rectæ B D, quintuplum erit quadrati rectæ C D. Si recta ergo linea secundùm extremam & mediam rationem secetur; minus segmentum assumens dimidium maioris segmenti, quintuplum potest eius, quod à dimidia maioris segmenti describitur, quadrati. Quod erat ostendendum.

[e] 6. secundi.
[f] 17. sexti.



SCHOLIVM.

CONVERSVM huius theorematis demonstrabimus quoque cum Campano, ad hunc modum.

Si recta inæqualiter secetur, & minus segmentum assumens dimidium maioris segmenti quintuplum possit eius, quod à dimidia maioris segmenti describitur, quadrati; Recta illa linea secta erit extrema & media ratione.

SIT recta A B, diuisa inæqualiter in C, cuius maius segmentum A C, bifariam sectum sit in D; sitq; quadratũ rectæ B D, quintuplum quadrati rectæ C D. Dico rectam A B, diuisam esse in C, extrema ac media ratione. Repetita enim figura prioris huius propos. erit quadratum L G, rectæ A C, quadruplum quadrati P Q, rectæ C D, ex scholio propos. 4. lib. 2. Est autem & gnomon R S T, eiusdem quadrati P Q, quadruplus. (cum enim quadratum D O, rectæ B D, quintuplum ponatur quadrati P Q, ex recta C D; dempto quadrato P Q, relinquetur gnomon R S T, eiusdem quadrati P Q, quadruplus.) Igitur gnomon R S T, æqualis erit quadrato L G. At gnomoni R S T, æquale est rectangulum C E, vt suprà ostensum est. Ergo & quadrato L G, recta A C, æquale erit idem rectangulum C E, sub A B, B C, comprehensum: [a] *Ac proinde erit, vt A B, ad A C, ita A C, ad C B. Quocirca, ex definitione, secta erit A B, in C, extrema ac media ratione. Quod est propositum.*

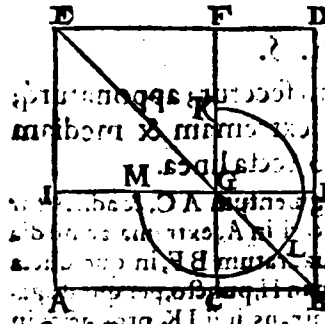
[a] 17. sexti.

ALITER. Cùm A C, diuisa sit bifariam in D, & ei addita C B; [b] *erit rectangulum sub A B, B C, vnà cũ quadrato rectæ C D, æquale quadrato rectæ B D; Ac propterea cùm quadratũ ex recta linea B D, descripta, quintuplum ponatur quadrati ex recta C D, descripti; erit & rectangulũ sub rectis lineis A B, B C, descriptũ, vnà cum quadrato rectæ C D, quintuplum eiusdem quadrati rectæ C D. Quare ablato quadrato rectæ C D; rectangulum sub A B, B C, quadruplum erit quadrati rectæ C D: Est autem eiusdem quadrati rectæ C D, quadruplum quadratum rectæ A C, ex scholio propos. 4. lib. 2. Igitur quadrato rectæ A C, æquale est rectangulum sub A B, B C.* [c] *Quamobrem erit vt A B, ad A C, ita A C, ad C B; Ac proinde secta A B, in C, extrema & media ratione, ex definitione.*

[b] 6. secundi.
[c] 17. sexti.

THEOR. 4. PROPOS. 4.

Si recta linea secundùm extremam & mediam rationem secetur; Quod à tota, quodq; à minore segmento, simul vtraque quadrata, tripla sunt eius, quod à maiore segmento describitur quadrati.



SECETVR recta A B, in C, extrema ac media ratione, sitq; segmentum maius A C, & minus C B. Dico quadrata rectarum A B, B C, simul tripla esse quadrati rectæ A C. Describatur enim super A B, quadratum A D, in quo ducta diametro B E, ducatur ex C, ipsi B D, parallela C F, secans diametrum in puncto G, per quod agatur H I, parallela ipsi A B, eruntq; C H, I F, quadrata rectarum B C, A C, ex coroll. propos. 4. lib. 2. Quoniam igitur est, vt A B, ad A G, ita A C, ad C B; [a] erit rectangulum sub A B, B C, nempe A H, æquale ipsi I F, quadrato rectæ A C. Cùm ergo A H, æquale sit ipsi C D; erit gnomon K L M, vnà cum quadrato C H, duplus quadrati I F. Ac proinde, addito quadrato I F, erit quadratum A D, rectæ A B, vnà cum quadrato C H, rectæ B C, eiusdem quadrati I F, rectæ A C, triplum.

[a] 17. sexti.

a 19. sexti. ALITER. Quoniam est, vt AB, ad AC, ita AC, ad CB; a erit rectangulum sub AB, BC, æquale quadrato rectæ AC. Atqui adeò rectangulum sub AB, BC, bis, vnà cum quadrato rectæ AC, b 7. secundi triplum quadrati rectæ AC. b Sunt autem quadrata rectarum AB, BC, simul æqualia quadrato rectæ AC, vnà cum rectangulo sub AB, BC, bis. Igitur & quadrata rectarum AB, BC, tripla sunt quadrati rectæ AC. Quocirca si recta linea secundùm extremam & mediam rationem secetur: Quod à tota, quodq; à minore segmento, simul vtraque quadrata, tripla sunt eius, quod à maiori segmento describitur, quadrati. Quod erat demonstrandum.

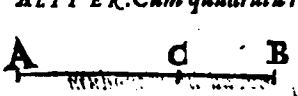
SCHOLIVM.

CONVERSVM etiam huius verum est, videlicet.

Si recta linea inæqualiter secetur, fitque quadratum totius, vnà cum quadrato minoris segmenti, triplum quadrati ex maiore segmento descripti; Recta illa linea extrema ac media ratione secabitur.

SECTA sit recta AB, inæqualiter in C, ita vt quadratum totius AB, & quadratum minoris segmenti BC, vtraq; simul tripla sint quadrati maioris segmenti AC. Dico rectam AB, sectam esse extrema ac media ratione. Constructa enim figura, vt prius; cùm quadrata AD, CH, tripla sint quadrati IF; dempto quadrato IF, erit gnomon KLM, vnà cum quadrato CH, duplum eiusdem quadrati IF: Est autem gnomon KLM, vnà cum quadrato CH, æqualis duobus rectangulis AH, CD. Igitur & rectangula AH, CD, dupla sunt quadrati IF; Ac propterea cùm æqualia sint AH, & CD, erit AH, ipsi EF, æquale. Quapropter cùm rectangu-
a 17. sexti. *lum AH, sub AB, BC, æquale sit quadrato IF, recta AC; a erit vt AB, ad BC, ita AC, ad CB; Ac proinde AB, diuisa erit in C, extrema & media ratione.*

b 7. secundi. *ALITER. Cùm quadrata rectarum AB, BC, tripla sint quadrati rectæ AC; b Sunt verò quadrata rectarum AB, BC, æqualia quadrato rectæ AC, & rectangulo sub AB, BC, bis;*

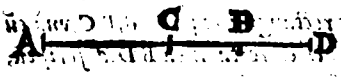


erit & quadratum rectæ AC, vnà cum rectangulo sub AB, BC, bis, triplum quadrati rectæ AC. Dempto ergo quadrato rectæ AC, relinquetur rectangulum sub AB, BC, bis, duplum quadrati rectæ AC; Et proinde rectangulum sub AB, BC, semel, æquale quadrato rectæ AC. c 17. sexti. *Quare, vt prius, erit vt AB, ad AC, ita AC, ad CB; ideoq; AB, in C, secta erit extrema ac media ratione.*

Ex Francisco Maurolyco demonstrabimus quoque theorema, quod sequitur.

Si recta linea secundùm extremam & mediam rationem secetur, tota linea assumens minus segmentum, quintuplum potest eius, quod à maiori segmento describitur quadrati. Et si recta linea inæqualiter secetur, totaque assumens minus segmentum posit quintuplum eius, quod à maiori segmento describitur, quadrati: Recta illa linea secundùm extremam & mediam rationem secta est.

SIT primùm recta AB, secta in C, extrema ac media ratione, cui addatur recta BD, minori segmento
d 8. secundi. *BC, æqualis. Dico quadratum ex AD, quintuplum esse quadrati ex AC, maiore segmento.* d *Quoniam enim*
e 4. secundi. *quadratum ex AD, æquale est rectangulo sub AB, BC, quater contento, vnà cum quadrato ex AC;* e *Rectangulum autem sub AB, BC, æquale est quadrato ex AC; (quod AB, AC, CB, sint continuè proportionales.)*



erit rectangulum sub AB, BC, quater, quadruplum quadrati ex AC; atque adeò rectangulum sub AB, BC, quater vnà cum quadrato ex AC, quintuplum quadrati ex AC. Igitur & quadratum ex AD, (quod æquale ostensum est rectangulo sub AB, BC, quater, vnà cum quadrato ex AC,) eiusdem quadrati ex AC, quintuplum erit. quod est propositum.

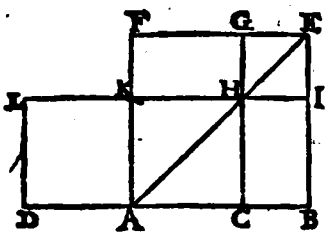
SIT deinde recta AB, secta inæqualiter in C, cui addatur recta BD, minori segmento BC, æqualis, sitq; quadratum ex AD, quadrati ex AC, maiori segmento quintuplum. Dico AB, in C, sectam esse extrema ac
f 8. secundi. *media ratione.* f *Quoniam enim quadratum ex AD, æquale est rectangulo sub AB, BC, quater, vnà cùm quadrato ex AC; erit quoque rectangulum sub AC, BC, quater, vnà cum quadrato ex AC, quintuplum quadrati ex AC; ac propterea rectangulum sub AB, BC, quater, quadruplum quadrati ex AC: hoc est, rectan-*
g 17. sexti. *gulum sub AB, BC, æquale quadrato ex AC.* g *Igitur erit vt AB, ad AC, ita AC, ad CB: Ac proinde AB, in C, secta est extrema & media ratione. Quod est propositum.*

4. THEOR. 5. PROPOS. 5.

Si recta linea secundùm extremam & mediam rationem secetur; apponaturq; ei æqualis maiori segmento: Tota recta linea secundùm extremam & mediam rationem secatur, & maius segmentum est, quæ à principio recta linea.

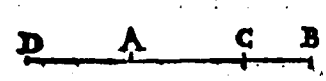
SECTVR recta AB, in C, extrema ac media ratione, sitq; maius segmentum AC, & adiiciatur ei in rectum AD, æqualis maiori segmento AC. Dico rectam BD, secari in A, extrema ac media ratione, esseq; maius segmentum AB. Describatur enim super AB, quadratum BF, in quo ducta diametro AE, ducatur ex C, ipsi BE, parallela CG, secans diametrum in H, puncto, per quod agatur ipsi BD, parallela IK, & ex D, ducatur ipsi AF, parallela DL, occurrens ipsi IK, productæ in L. Eruntque ex coroll. propos. 4. lib. 2. CK, IG, quadrata rectarum AC, BC. Quoniam igitur est

vt AB,



vt AB, ad AC, ita AC, ad CB: [a] Erit rectangulum IF, contentum sub AB, BC, æquale quadrato CK, rectæ AC. [b] Est autem CK, ipsi AL, æquale. Igitur IF, æquale erit ipsi AL; additoq; communi BK, erit rectangulum BL, contentum sub BD, DA, æquale quadrato BF, rectæ AB; [c] Ac proinde erit vt BD, ad AB, ita AB, ad DA. Quare BD, secatur in A, extrema ac media ratione, estque maius segmentum AB.

[a] 17. sexti. [b] 36. primi. [c] 17. sexti.



ALITER. Quoniam est vt AB, ad AC, hoc est, ad AD, ita AC, ad CB; Erit conuertendo vt DA, ad AB, ita BC, ad CA; & componendo vt DB, ad AB, ita AB, ad CA, hoc est, ad AD. Secta igitur est BD, in A, extrema ac media ratione. Itaque si recta linea secundùm extremam & mediam rationem secetur, apponaturq; ei æqualis maiori segmento: tota recta linea, &c. Quod erat demonstrandum.

SCHOLIVM.

SIMILITER cum Campano & hoc demonstrabimus.



Si recta linea secetur extrema ac media ratione, detrahaturq; ex maiori segmento segmentum minus; erit maius segmentum sectum extrema ac media ratione, & maius segmentum est illa linea, quæ prioris lineæ minus segmentum erat.

RECTA enim linea BD, extrema ac media ratione secetur in A, cuius maius segmentum AB, minus autem segmentum AD; & ex maiori segmento AB, detrahatur recta AC, æqualis minori segmento AD. Dico maius segmentum AB, diuisum esse in C, extrema ac media ratione, & maius segmentum esse rectam AC, quæ æqualis est minori segmento AD. Facta enim prioris figuræ constructione, cùm sit vt BD, ad AB, ita AB, ad AD; [a] *erit rectangulum BL, contentum sub BD, AD, æquale quadrato BF, rectæ AB; & ablato communi BK, erit AL, æquale ipsi IF;* [b] *Est autem AL, ipsi CK, æquale. Æquale igitur est IF, contentũ sub AB, CB, quadrato CK, rectæ AC;* [c] *Ac proinde erit vt AB, ad AC, ita AC, ad CB. Quare AB, secta est in C, extrema ac media ratione, cuius segmentũ maius est AC, minus verò segmentũ recta CB. Quod est propositũ.*

[a] 17. sexti. [b] 36. primi. [c] 17. sexti.

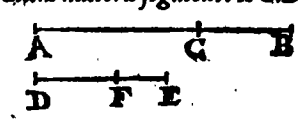
ALITER. Quoniam est vt tota BD, ad totam AB, ita AB, detracta ex BD, ad AD, hoc est, ad AC, detractam ex AB; [d] *erit quoq; ita AD, reliqua ipsius BD, hoc est, AC, ad CB, reliquam ipsius AB, vt tota DB, ad totam AB, hoc est, vt AB, ad AC; Ac propterea diuisa erit AB, in C, extrema & media ratione. Quod est propositum.*

[d] 19. quin.

RVRSVS & hoc demonstrabimus, quod sequitur.

Si linea secetur extrema ac media ratione, atque ex dimidio illius auferatur dimidia maioris segmenti: Erit quoque dimidia totius diuisa extrema ac media ratione, maiusq; segmentum erit dimidium maioris segmenti totius lineæ.

DIVIDATVR enim AE, extrema ac media ratione in C, sitq; DE, dimidium totius, & DF, dimidium maioris segmenti AC. Dico DE, in F, secari extrema ac media ratione, maiusq; segmentum esse DF.



Cùm enim sit vt AB, tota ad DE totam, ita AC, ablata ad DF, ablatam, cùm vtrobiq; sit proportio dupla; [e] *erit quoque reliqua CB, ad reliquam FE, vt tota ad totam: Ac proinde & CB, dupla erit ipsius FE.* [f] *Quoniam verò est, vt AB, ad AC, ita DE, dimidia illius, ad DF, dimidiam huius: Item vt AC, ad CB, ita DF, dimidia illius, ad FE, dimidiam huius; Est autem ex defin. linea secta extrema ac media ratione, AB, ad AC, vt AC, ad CB; erit quoque DE, ad DF, vt DF, ad FE; Ac proinde ex eadem defin. DE, secta erit in F, extrema ac media ratione. Quod est propositum.*

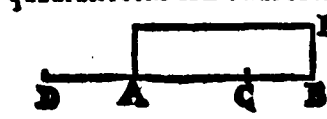
[e] 19 quinti [f] 15. quinti.

THEOR. 6. PROPOS. 6.

Si recta linea Rationalis extrema ac media ratione secetur; Vtrumq; segmentorum Irrationalis linea est, quæ vocatur Apotome.

SECETVR recta Rationalis AB, in C, extrema & media ratione. Dico vtrumque segmentum AC, CB, esse lineam Irrationalem, quæ Apotome dicitur. Addatur enim maiori segmento AC, recta AD, æqualis dimidiæ totius AB. [a] Quoniam igitur quadratum rectæ CD, quintuplum est quadrati rectæ AD; habebit quadratum rectæ CD, ad quadratum rectæ AD, proportionem, quam numerus ad numerum. [b] Quare commensurabilia erunt quadrata rectarum CD, AD; propterea q; ipsæ rectæ CD, AD, commensurabiles quoque existent, saltem potentia: Est autem AD, Rationalis, cùm sit dimidia lineæ Rationalis AB. Igitur & CD, Rationalis erit. Quia verò quadrata rectarum CD, AD, non habent proportionem, quam numerus quadratus ad numerum quadratum, (vt cõstat ex coroll. propos. 24. lib. 8. Habent enim proportionem quam 5. ad 1. vel 25. ad 5.) [c] erunt rectæ CD, AD, longitudine incommensurabiles: Ac proinde Rationales potentia tantùm commensurabiles. Quare si ex CD, Rationali detrahatur AD, Rationalis potentia tantùm commensurabilis: [d] erit reliqua AC, Irrationalis, quæ appellatur Apotome.

[a] 1. tertiidecimi. [b] 6. decimi. [c] 9. decimi. [d] 74. decimi

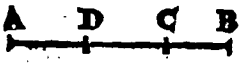


RVRSVS applicato ad AB, rectangulo AE, contento ſub AB, CB; cùm ſit vt AB, ad AC, ita
a 17. ſexti. AC, ad CB; [a] erit rectangulum AE, æquale quadrato rectæ AC. Quam ob rem quadratum Apo-
b 98. deci. tomæ AC, nimirum rectangulum AE, applicatum ſecundùm lineam Rationalem AB, [b] facit al-
terum latus BE, hoc eſt, rectam CB, illi æqualem, Apotomen primam. Si recta ergo linea Ratio-
nalis extrema ac media ratione ſecetur, &c. Quod erat demonſtrandum.

SCHOLIVM.

SED & hoc theorema cum Campano oſtendemus.

SI recta linea ſecundùm extremam & mediam rationem ſecetur, ſitque maius ſegmen-
tum linea Rationalis; erit minus ſegmentum, Apotome.

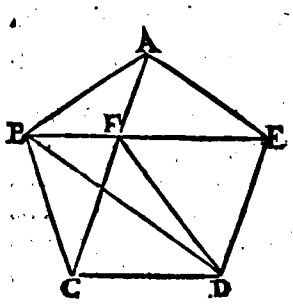
SIT recta AB, extrema ac media ratione diuiſa in C, ſitq; maius ſegmentum AC, linea Rationalis. Dico
minus ſegmentum CB, eſſe Apotomen. Diuiſa enim AC, bifariam in D; erit CD, dimidia ipſius Rationalis
AC, Rationalis, cùm ſit ipſi AC, commenſurabilis. [a] *Quoniam autem quadratum rectæ BD, quintuplum*
a 3. tertij decimi. *eſt quadrati rectæ CD; habebunt quadrata rectarum BD, CD, proportionẽ, quam*


numerus ad numerum; [b] *ac propterea commenſurabilia exiſtent. Quare & ipſæ*
b 6. decimi *rectæ BD, CD, commenſurabiles erunt, ſuntq; potentia. Cùm igitur CD, ſit ratio-*
nalis, erit quoque BD, Rationalis. Quia verò quadrata rectarum BD, CD, non habent proportionem, quam
numerus quadratus ad numerum quadratum; (vt conſtat ex coroll. propoſ. 24. lib. 8. Habent enim propor-
tionem, quam 5. ad 1. vel 25. ad 5.) erunt rectæ BD, CD, longitudine incommenſurabiles; Ac proinde ſi à Ra-
tionali BD, detrahatur CD, Rationalis potentia tantùm commenſurabilis; [c] *erit reliqua CB, Irrationa-*
c 74. deci. *lis, quæ vocatur Apotome.*

7. THEOR. 7. PROPOS. 7.

SI pentagoni æquilateri tres anguli, ſiue qui deinceps, ſiue qui non deinceps
ſint, æquales fuerint: Aequiangulum erit ipſum pentagonum.

SINT in pentagono æquilatero ABCDE, tres anguli, qui primùm deinceps ſint æquales A,
B, C. Dico ipſum pentagonum eſſe æquiangulum. Subtendantur enim dictis angulis æqualibus
rectæ BE, AC, BD; & ex puncto F, vbi ſe interſecant rectæ BE, AC, recta ducatur FD. Quoniã
igitur latera AB, AE, trianguli ABE, æqualia ſunt lateribus CB, CD, trianguli CBD; & anguli
quoq; ipſis contenti æquales, ex hypotheſi; [a] erunt & baſes BE, BD,
a 4. primi. & anguli AEB, CDB, æquales. [b] Sunt autẽ & anguli BED, BDE,
b 5. primi. æquales, cùm æqualia ſint oſtenſa latera BE, BD; Toti igitur anguli
AED, CDE, æquales erunt. Rurſus quia latera AB, AE, trianguli
ABE, æqualia ſunt lateribus BA, BC, trianguli BAC; & anguli quo-
que ipſis contenti æquales, ex hypotheſi: [c] Erit & baſis BE, baſi AC,
c 4. primi. æqualis, & anguli ABE, AEB, angulis BAC, BCA, æquales. Cùm
ergo æquales ſint anguli ABE, BAC, trianguli ABF; [d] erunt quoq;
d 6. primi. latera BF, AF, æqualia: Ac propterea ſi ipſa demantur ex rectis æ-
qualibus BE, AC, erunt reliquæ lineæ FE, FC, æquales. Itaque cùm late-
ra FE, ED, trianguli FED, æqualia ſint lateribus FC, CD, trianguli
FCD; & baſis communis FD; [e] erunt & anguli dictis lateribus contenti FED, FCD, æquales:
e 8. primi. Sunt autem & anguli AEB, BCA, oſtẽſi æquales. Æquales igitur ſunt toti anguli AED, BCD;
Ac proinde cùm angulo AED, oſtenſus ſit æqualis angulus CDE, & angulo BCD, æquales po-
nantur anguli ABC, BAE; erunt omnes anguli pentagoni æquales, ideoque æquiangulum erit
ipſum pentagonum.

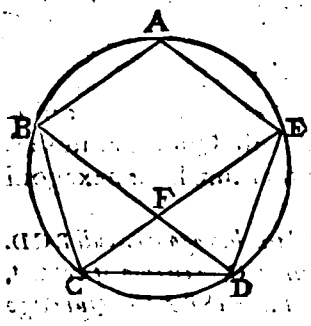


SINT ſecundò tres anguli non deinceps æquales A, C, D. Quoniam igitur latera AB, AE,
trianguli ABE, æqualia ſunt lateribus CB, CD, trianguli CBD; & anguli quoque ipſis conten-
f 4. primi. ti, æquales, ex hypotheſi; [f] Erunt & baſes BE, BD, & anguli AEB, CDB, æquales; [g] Sunt au-
g 5. primi. tem & anguli BED, BDE, æquales, quòd æqualia oſtenſa ſint latera BE, BD. Igitur toti anguli
AED, CDE, æquales erunt. Quare cùm æquales ponantur anguli BAE, CDE; erunt tres an-
guli deinceps æquales A, E, D; Ac proinde, vt iam demonſtratum eſt, pentagonum æquiangu-
lum erit. Si pentagoni igitur æquilateri tres anguli, &c. Quod erat demonſtrandum.

11. THEOR. 8. PROPOS. 8.

SI pentagoni æquilateri, & æquianguli duos angulos, qui deinceps ſint, ſubten-
dant rectæ lineæ: hæ extrema & media ratione ſe mutuò ſecant, & maiora ipſarum
ſegmenta æqualia ſunt pentagoni lateri.

SVBTENDANTVR in pentagono æquilatero & æquiangulo ABCDE, duobus angulis, qui
ſunt deinceps C, D, rectę DB, CE, ſe mutuò ſecãtes in F. Dico ipſas ſecari extrema ac media ratio-



ne, maioraq; earũ ſegmenta F B, F E, æqualia eſſe lateri cuilibet pentagoni. [a] Deſcripto enim circulo circa pentagonum; [b] erunt quinque arcus A B, B C, C D, D E, E A, æquales. Quia verò latera C D, C B, trianguli C D B, æqualia ſunt lateribus D C, D E, trianguli D C E; & anguli quoque ipſis contenti æquales, ex hypotheſi; [c] Erunt & baſes D B, C E, & anguli C D B, D C E, æquales; Ac proinde cùm in triangulo C D F, duo anguli F C D, F D C, ſint æquales, [d] & ipſis æqualis ſit externus angulus B F C: erit angulus B F C, duplus anguli D C E: [e] Eſt autem & angulus B C E, eiuſdem anguli D C E, duplus, quòd & arcus B A E, arcus D E, ſit duplus. Igitur anguli B F C, B C F, æquales ſunt; [f] Ideoque recta B F, lateri pentagoni B C, æqualis. [g] Quoniam autem anguli D B C, E C D, arcubus æqualibus inſiſtentes, æquales ſunt; erunt duo anguli D B C, C D B, trianguli B C D, æquales duobus angulis D C F, F D C, trianguli C F D: [h] Ac proinde æquiangula erunt triangula B C D, C F D. [i] Quare erit vt B D, ad D C, hoc eſt, ad B F, æqualẽ ipſi D C, ita C D, hoc eſt, ſibi æqualis B F, ad F D; Ac propterea B D, ſecta eſt in F, extrema ac media ratione, eſtque maius ſegmentum B F, lateri pentagoni æquale, vt oſtenſum eſt. Simili ratione oſtendemus, rectam C E, ſecari in F, extrema ac media ratione, maiusque illius ſegmentum E F, æquale eſſe lateri pentagoni D E. Itaque ſi pentagoni æquilateri & æquianguli duos angulos, &c. Quod erat oſtendendum.

[a] 14. quarti. [b] 28. tertij. [c] 4. primi. [d] 32. primi. [e] 33. ſexti. [f] 6. primi. [g] 27. tertij. [h] 32. primi. [i] 4. ſexti.

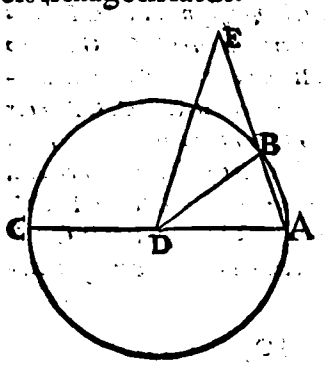
SCHOLIVM.

FACILE etiam demonſtrabimus, rectam, quæ angulum pentagoni æquilateri & æquianguli ſubtendit, parallelam eſſe oppoſito lateri: hoc eſt, B D, parallelam eſſe lateri A E; & C E, lateri A E. Deſcripto enim circulo circa pentagonum; [a] *Quoniam tam duo anguli A, & B C E, quàm duo A B C, A E C, duobus rectis æquales ſunt: Sunt autem A, & A B C, inter ſe æquales in pentagono æquiangulo; erunt & reliqui anguli B C E, A E C, æquales. Cùm ergo A, & B C E, duobus ſint rectis æquales; erunt etiam A, & A E C, duobus rectis æquales:* [b] *ac proinde A B, C E, parallelæ erunt. Quod eſt propoſitum.*

[a] 12. tertij. [b] 28. primi

THEOR. 9. PROPOS. 9. 9.

SI hexagoni latus, & decagoni, in eodem circulo deſcriptorum, componantur: Tota recta linea extrema ac media ratione ſecatur, & maius eius ſegmentum eſt hexagoni latus.



IN circulo A B C, ſit latus decagoni A B, cui in rectum addatur B E, æqualis ſemidiametro circuli, ac proinde lateri hexagoni eidem circulo inſcripti. Dico E A, rectam ſectam eſſe in B, extrema ac media ratione, maiusque ſegmentum eſſe E B, latus hexagoni. Ducatur enim ex A, per centrum D, diameter A C, coniunganturque rectæ D B, D E. Quoniam igitur A B, arcus, eſt decima pars totius peripheriæ circuli; continebit arcus ſemicirculi arcum A B, quinquies; Ac proinde arcus B C, quadruplus erit arcus A B. [a] Quare & angulus B D C, anguli A D B, quadruplus erit. Rurſus quia latera B D, B E, ſunt æqualia, nempe latera hexagoni; (eſt enim B E, latus hexagoni ſemidiametro B D, æquale, ex coroll. propoſ. 15. libri 4.) [b] erunt & anguli B D E, B E D, æquales: [c] quibus cũ æqualis ſit externus A B D; erit angulus A B D, duplus anguli B E D: [d] Eſt autẽ angulus A B D, æqualis angulus B A D, ob æqualitatẽ laterum D A, D B. Igitur & angulus B A D, duplus erit anguli B E D: ac proinde duo anguli D A B, D B A, ſimul quadrupli erunt anguli B E D. [e] Cùm ergo angulis D A B, D B A, æqualis ſit externus B D C; erit angulus B D C, quadruplus eiuſdem anguli B E D: Atqui idem angulus B D C, oſtenſus fuit quadruplus anguli A D B. Igitur æquales ſunt anguli A E D, A D B. Quocirca cũ duo anguli A E D, D A E, trianguli A D E, æquales ſint duobus angulis A D B, B A D, trianguli A B D; [f] erunt triangula A D E, A B D, æquiangula. [g] Igitur erit vt E A, ad A D, hoc eſt, ad E B, ipſi A D, æqualem, ita A D, hoc eſt, E B, ſibi æqualis ad B A; Atque idcirco recta E A, ſecta eſt in B; extrema & media ratione, eſtque maius ſegmentum E B, latus hexagoni. Itaque ſi hexagoni latus, & decagoni, in eodem circulo deſcriptorum, componantur: Tota recta linea extrema ac media ratione ſecatur, & maius eius ſegmentum eſt hexagoni latus. Quod erat demonſtrandum.

[a] 33. ſexti. [b] 5. primi. [c] 32. primi. [d] 5. primi. [e] 32. primi. [f] 32. primi. [g] 4. ſexti.

SCHOLIVM.

QVIA verò demonſtrauimus ad propoſ. 5. huius libri, ſi minus ſegmentum linea diuiſa extrema ac media ratione ex maiori ſegmento detrahatur; maius ſegmentum ſecari quoque extrema & media ratione, eiuſq; ſegmentum maius eſſe minus ſegmentum detractum. Hic autem oſtenſum eſt, latus hexagoni compoſitum cum latere decagoni, ſecari extrema ac media ratione: Fit, ſi latus hexagoni ſecetur extrema & media ratione, maius illius ſegmentum eſſe latus decagoni. Nam ſi hoc detrahatur ex latere hexagoni, quod eſt

maius ſegmentum, diuiſum erit hexagoni latus extrema ac media ratione, vt ad propoſ.5. huius libri oſtendimus. Hoc tamen aliter demonſtrabimus lib.14. propoſ.4.

CONVERSVM quoq; huius theorematis facilè cum Campano demonſtrabimus: Videlicet.

SI lineæ diuiſæ extrema ac media ratione maius ſegmentum fuerit latus hexagoni alicuius circuli; Erit minus ſegmentum latus decagoni eiuſdem circuli. Quòd ſi minus ſegmentum fuerit latus decagoni alicuius circuli; Erit maius ſegmentum latus hexagoni eiuſdem circuli.

SIT enim A B, diuiſa in C, extrema & media ratione, ſitq; primùm A C, latus hexagoni circuli B C D. Dico minus ſegmentum C B, eſſe eiuſdem circuli latus decagoni. Coaptetur enim B C, in circulo, ita vt C A, extra circulum cadat. Et ducta ex B, per centrum E, diametro B E D, connectantur rectæ E A, E C. Quia ergo eſt vt A B, ad A C, ita A C, ad C B; & eſt A C, latus hexagoni æquale ſemidiametro E B, ex coroll. propoſ.15. libri 4. Erit quoque vt A B, ad B E, ita E B, ad B C, [a] *ideoq; triangula A B E, E B C, equiangula erunt, cùm habeant latera circa communem angulum B, proportionalia: eritq; angulus A, angulo B E C, æqualis. Rurſus quia latera C A, C E, æqualia ſunt, nempe latera hexagoni;* [b] *erunt anguli C A E, C E A, æquales;* [c] *quibus cùm æqualis ſit externus B C E, erit B C E, duplus anguli A:* [d] *Eſt autem angulo B C E, angulus C B E, ob æqualitatem laterum E B, E C, æqualis. Igitur & C B E, duplus erit anguli A; Ac proinde duo anguli B C E, C B E, ſimul quadrupli erunt eiuſdem anguli A.* [e] *Cùm ergo anguli B C E, C B E, æqualis ſit externus C E D; erit quoque angulus C E D, eiuſdem anguli A, & propterea anguli B E C, qui æqualis oſtenſus eſt angulo A, quadruplus.* [f] *Quare & arcus C D, quadruplus erit arcus B C; Ac proinde arcus ſemicirculi B C D, eiuſdem arcus B C, quintuplus exiſtet, ideoq; tota peripheria circuli decupla erit arcus B C. Quapropter recta B C, latus eſt decagoni.*

a 6. ſexti.

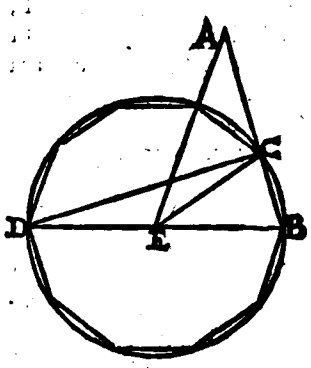
b 5. primi.

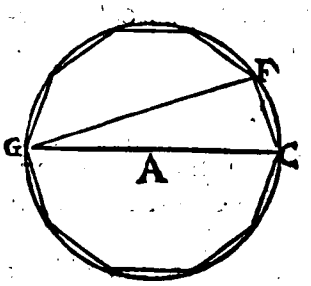
c 32. primi.

d 5. primi.

e 32. primi.

f 33. ſexti.





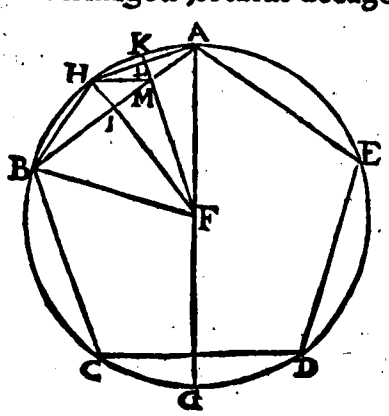
SIT deinde C B, minus ſegmentum, latus decagoni circuli B C D. Dico maius ſegmentum A C, eſſe eiuſdem circuli latus hexagoni. Coaptetur enim rurſus B C, in circulo B C D, ducaturq; diameter B E D. Deinde interuallo A C, deſcribatur circulus C F G, cuius diameter C A G; eritq; ex corollario propoſ.14 lib.4. A C, latus hexagoni circuli C F. Quoniam igitur A B, ſecta eſt in C, extrema ac media ratione, eſtq; maius ſegmentum A C, latus hexagoni circuli C F G; erit, vt iam oſtenſum eſt, minus ſegmentum C B, latus decagoni eiuſdem circuli C F G. Deſcribatur ergo in circulo C F G, decagonum æquilaterum & æquiangulum C F G; Item in circulo B C D, decagonum æquilaterum, & æquiangulum B C D; eruntq; latera B C, C F, inter ſe æqualia. Quoniam verò, ſi connectantur rectæ C D, F G, anguli C D B, F G C, ſunt æquales, vt in ſcholio propoſ.22. lib.3. oſtendimus, quòd inſiſtant arcubus ſimilibus B C, C F, nempe decimis partibus peripheriarũ, [g] *& ſunt quoq; anguli B C D, C F G, in ſemicirculis æquales, & nimirum recti:* [h] *Erunt quoq; latera B D, C G, inter ſe æqualia. Quam ob rem cũ diametri B D, C G, ſint æquales, æquales quoq; erunt circuli B C D, C F G. Ac proinde, cùm recta A C, ſit latus hexagoni circuli C F G, erit quoq; eadem recta A C, latus hexagoni circuli B C D. Quod eſt propoſitum.*

g 31. tertij.

h 26. primi

10. THEOR. 10. PROPOS. 10.

SI in circulo pentagonum æquilaterum deſcribatur; Pentagoni latus poteſt & latus hexagoni, & latus decagoni, in eodem circulo deſcriptorum.



IN circulo A B C D E, cuius centrũ F, deſcriptũ ſit pentagonum æquilaterum. Dico quadratũ lateris A B, æquale eſſe quadrato lateris hexagoni, vnà cũ quadrato lateris decagoni eiuſdem circuli. Ducatur enim diameter A F G, & connectatur recta F B. Diuiſo deinde arcu A B, bifariam in H, connectantur rectæ A H, B H, & F H, ſecans rectam A B, in I; eritq; recta A H, latus decagoni, & B F, latus hexagoni. Rurſus diuiſo arcu A H, bifariã in K, adiungatur recta F K, ſecans rectã A H, in L, & rectam A B, in M, puncto, ad quod recta ducatur H M. Quoniã igitur arcus A H, B H, æquales ſunt; [a] *erunt & anguli ipſis inſiſtẽtes A F H, B F H, æquales. Quare cũ latera A F, F I, trianguli A F I, æqualia ſint lateribus B F, F I, trianguli B F I, & anguli ipſis contenti æquales quoq;:* [b] *erunt & baſes A I, B I, æquales, & anguli A I F, B I F, ideoq; recti: Eademq; ratione æquales erũt rectę A L, H L, & anguli A L F, H L F, recti. Deinde ſi ex ſemicirculis æqualib. A B C G, A E D G, demãtur æquales arcus A B C, A E D, relinquẽtur arcus C G, D G,*

a 27. tertij.

b 4. primi.

D G, inter ſeſe æquales, ideoq; erit arcus C G, dimidium arcus C D. Eſt autem & arcus A H, dimidium arcus A B. Igitur cùm arcus A B, C D, æquales ſint; erunt quoq; eorum dimidij arcus C G, A H, æquales; Ac proinde cùm arcus A H, duplus ſit arcus H K, erit & arcus C G, duplus eiuſdem arcus H K. Eodem modo, quia arcus A B, B C, æquales ſunt, & eſt arcus A B, duplus arcus B H, erit etiam arcus B C, eiuſdem arcus B H, duplus. Quare arcus C G, B C, æquemultiplices ſunt, nempe dupli, arcuum H K, B H; [a] Ac propterea totus arcus B G, duplus quoque erit totius arcus B K; [b] & idcircò angulus quoque B F G, duplus anguli B F K: [c] Sed quia idem angulus B F G, ad centrum duplus eſt quoque anguli F A B; erunt idcircò anguli B F M, F A B, æquales; [d] Ac propterea triangula A B F, F B M, cùm habeant angulos F A B, M F B, æquales, & angulum A B F, communem, æquiangula erunt. [e] Quocirca erit vt A B, ad B F, ita B F, ad B M; [f] ideoque rectangulum ſub A B, B M, æquale erit quadrato rectæ B F.

a 1. quinti.
b 33. ſexti.
c 20. tertij.
d 32. primi.
e 4. ſexti.
f 17. ſexti.

[g] Rvrsvs quia latera A L, L M, triáguli A L M, æqualia ſunt lateribus H L, L M, triáguli H L M, & anguli quoque ipſis contenti æquales, nempe recti: [g] erunt & baſes A M, H M, & anguli L A M, L H M, æquales. [h] Eſt autem angulus L A M, angulo H B A, æqualis, [i] & latera H A, H B, æqualia ſunt. Igitur & angulus L H M, eidem angulo H B A, æqualis erit; [i] Ac propterea triangula A B H, A H M, cùm habeát angulos A B H, A H M, æquales, & angulum H A M, communem, æquiangula erunt. [k] Quam ob rem erit vt A B, ad A H, ita A H, ad A M; [l] ideoq; rectangulum ſub A B, A M, æquale erit quadrato rectæ A H: Oſtenſum eſt autem & rectangulum ſub A B, B M, æquale quadrato rectæ B F. Igitur rectangula ſub A B, B M, & ſub A B, A M, ſimul æqualia ſunt quadratis rectarum B F, A H: [m] At verò rectangula ſub A B, B M, & ſub A B, A M, æqualia ſunt quadrato rectæ A B. Quadratum ergo rectæ A B, nempe lateris pentagoni, æquale eſt quadratis rectarũ B F, A H, lateris videlicet hexagoni, & lateris decagoni. Si igitur in circulo pentagonum æquilaterum deſcribatur, &c. Quod erat demonſtrandum.

g 4. primi.
h 5 primi.
i 32. primi.
k 4. ſexti.
l 17. ſexti.
m 2. ſecundi.

COROLLARIVM I.

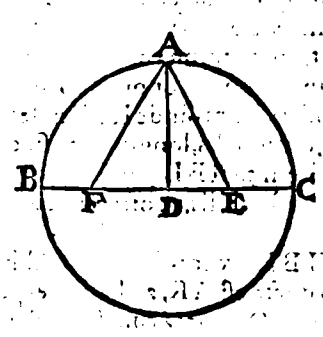
Hinc ſequitur, lineam rectam, quæ ex centro diuidit arcum quempium bifariam, diuidere quoq; rectam illi arcui ſubtenſam bifariam, & ad angulos rectos. Oſtenſum enim eſt, rectam F H, propterea quòd arcum A B, diuidit bifariam, diuidere quoq; rectam A B, bifariam in I, & ad angulos rectos. Eademq; in cæteris eſt demonſtratio.

COROLLARIVM II.

Perspicvvm quoq; eſt, diametrum circuli ex angulo quouis pentagoni ductam diuidere & arcum, quem latus pentagoni illi angulo oppoſitũ ſubtendit, & latus ipſum oppoſitum bifariam, & ad angulos rectos. Demonſtratum enim eſt, diametrum A G, ex puncto A, ductam, diuidere arcum C D, quem latus oppoſitum C D, ſubtendit, bifariam. Quare ex præfato corollario, cùm tranſeat per centrum, ſecabit quoque latus C D, bifariam, & ad angulos rectos. Eadem demonſtratio erit in omni polygono æquilatero in circulo deſcripto, ſi numerus laterum fuerit impar, vt conſtat.

SCHOLIVM.

Qvonıam ad finẽ lib. 4. praxim quandam ex Proclum nos tradidimus, qua vna eademq; opera in dato circulo & pentagonum, & decagonum æquilaterũ deſcribitur, eiusq; demonſtrationem in hunc locum diſtulimus; paucis nunc à nobis ea demonſtranda eſt. Sit igitur datus circulus A B C, cuius centrũ D. Ducta autem diametro B C, erigatur D A perpendicularis ad B C. Deinde diuiſa ſemidiametro C D, bifariã in E, ducatur recta E A, cui æqualis abſcindatur E F, adiungaturq; recta A F. Dico rectam A F, eſſe latus pentagoni, & D F, latus decagoni. Cùm enim C D, ſecta ſit bifariam in E, eiq; addita D F: [a] erit rectangulum ſub C F, D F, vnà cum quadrato rectæ D E, æquale quadrato rectæ E F, ideoq; quadrato rectæ E A, quæ ipſi E F, eſt æqualis. [b] Eſt autem quadratum rectæ E A, æquale quadratis rectarũ A D, D E. Igitur rectangulum ſub C F, D F, vnà cum quadrato rectæ D E, æquale eſt quadratis rectarũ A D, D E. Ac proinde, dempto communi quadrato rectæ D E, relinquetur rectangulum ſub C F, D F, æquale quadrato rectæ A D, hoc eſt, quadrato rectæ C D. [c] Quam ob rem erit vt C F, ad C D, ita C D, ad D F: propterea q; recta C F, diuiſa erit in D, extrema ac media ratione. Cùm igitur maius ſegmẽtum C D, ſit latus hexagoni circuli A B C, ex coroll. propoſ. 15. lib. 4. erit minus ſegmẽtum D F, latus decagoni eiuſdem circuli, vt demonſtrauimus ad propoſ. 9. huius lib. [d] Rurſus quoniã quadrato lateris hexagoni A D, vnà cum quadrato lateris decagoni D F, æquale eſt quadratum lateris pentagoni eiuſdem circuli; [e] Eſt autem eiſdem quadratis rectarum A D, D F, æquale quadratum rectæ A F; erit quadratum lateris pentagoni æquale quadrato rectæ A F; ideo propterea recta A F, lateri pentagoni æqualis. Quod eſt propoſitum.



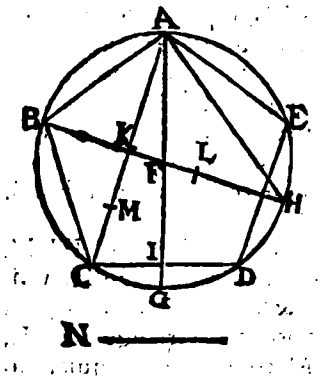
a 6. ſecundi.
b 47. primi
c 17. ſexti.
d 10. tertij decimi.
e 47. primi

THEOR. II. PROPOS. II. 12.

Si in circulo, Rationalem habente diametrum, pentagonum æquilaterum de-

ſcribatur: Pentagoni latus Irrationalis eſt linea, quæ vocatur Minor.

IN circulo ABCDE, habente diametrum Rationalem, deſcribatur pentagonũ æquilaterum ABCDE. Dico eius latus AB, eſſe lineam Irrationalem, quę dicitur Minor. Ducantur enim per centrum F, diametri AG, BH, ſecetque AG, latus CD, in I, connectanturq; rectæ AC, AH, quarum AC, ſecet diametrum BH, in K. Abſcindatur quoq; ex ſemidiametro FH, quarta eius pars FL; Item ex recta AC, quarta eius pars CM. Quia igitur diameter BH, ponitur Rationalis; erunt quoque FL, BF, illi commenſurabiles, cùm ſint eius partes aliquotæ, Rationales. Atque idcirco & tota BL, compoſita, [a] cùm ſit commenſurabilis vtriq; FL, BF, Rationalis erit.



a 16. decimi.

RVRSVS quoniam recta FB, ex centro ducta ſecat arcum AC, bifariam in B; ſecabit quoq; rectam AC, bifariam in L, & ad angulos rectos, ex coroll. 1. præcedentis propoſ. Secat autem & recta AG, rectam CD, in I, bifariam, & ad angulos rectos, ex coroll. 2. eiuſdem propoſ. Triangula ergo ACI, AFK, cũ habeãt angulos AIC, AKF, rectos, & angulum CAI, communẽ, [b] æquiangula inter ſe erũt. [c] Qualnobrem erit vt CI, ad CA, ita FK, ad FA; & permutando vt CI, ad FK, ita CA, ad FA, ſiue ad FH, ipſi FA, æqualem: [d] Vt autem CA, ad FH, ita eſt CM, quarta pars ipſius CA, ad FL, quartam partẽ ipſius FH. Erit igitur vt CI, ad FK, ita CM, ad FL; & permutando vt CI, ad CM, hoc eſt, vt CD, dupla ipſius CI, ad CK, duplam ipſius CM, ita FK, ad FL; Atq; componẽdo, vt CD, CK, ſimul ad CK, ita FK, FL, ſimul, nimirum recta KL, ad FL; [e] Ac propterea erit, vt quadratũ rectæ compoſitæ ex CD, CK, ad quadratum rectæ CK, ita quadratum rectæ KL, ad quadratũ rectę FL. Quia verò ſi AC, ſecetur extrema ac media ratione, (ducta videlicet recta BD,) [f] maius eius ſegmentum æquale eſt lateri pentagoni, nimirum ipſi CD; [g] Erit quadratum rectæ compoſitæ ex CD, maiori ſegmento, & CK, dimidia totius, quintuplum quadrati rectæ CK, dimidiæ ſcilicet totius. Quare & quadratum rectæ KL, quintuplum erit quadrati rectæ FL; [h] ideoq; quadratũ rectæ KL, commenſurabile erit quadrato rectæ FL; Ac proinde rectæ KL, FL, commenſurabiles quoque erunt, ſaltem potentia: Eſt autem FL, oſtenſa Rationalis. Igitur & KL, Rationalis erit.

b 32. primi.
c 4. ſexti.
d 15. quinti.
e 22. ſexti.
f 8. tertiædecimi.
g 1. tertiædecimi.
h 6. decimi.

DEINDE quia qualium partium 4. eſt BF, talium 1. eſt FL; [i] 20 propterea qualium 5. eſt BL, talium 1. eſt FL; erit quadratũ rectæ BL, talium partium 25. qualium 1. eſt quadratũ rectæ FL, (vt in his numeris patet 1. 5. 25.) [k] habent enim quadrata proportionẽ laterum duplicatam.) Qualium verò partium 1. eſt quadratũ rectæ FL, talium 5. oſtenſum eſt quadratum rectæ KL. Qualium igitur 25. eſt quadratũ rectæ BL, talium 5. eſt quadratũ rectæ KL; ac proinde quadratũ rectæ BL, quintuplum erit quadrati rectæ KL. Quia ergo quadrata rectarum BL, KL, proportionẽ non habent, quam numerus quadratus ad numerum quadratũ, (vt patet ex coroll. propoſ. 24. lib. 8. Eſt enim eorum proportio, quæ 25. ad 5. vel 5. ad 1.) [l] Erũt rectæ BL, KL, longitudine incommenſurabiles; ideoq;, cùm oſtenſæ ſint Rationales, erunt Rationales potentia tantũ commenſurabiles. Quare ſi ex Rationali BL, dematur Rationalis KL, potentia tantùm commenſurabilis; [m] erit reliqua BK, Irrationalis, quæ dicitur Apotome, ei verò congruens erit KL.

i 20. ſexti.
k 9. decimi.
l 74. decimi
m 6. decimi.

IAM verò recta BL, poſſit plus q̃ recta KL, quadrato rectæ N. Quoniam igitur quadratũ rectæ BL, æquale eſt quadratis rectarum KL, & N; Qualium autẽ partium 5. fuit quadratũ rectæ BL, talium 1. fuit quadratum rectæ KL; Erit reliquum quadratũ rectæ N, talium partium 4. qualium 5. eſt quadratum rectæ BL; Ac propterea quadrata rectarum BL, & N, proportionem habebunt, quam numerus ad numerum. [n] Quare commenſurabilia erunt; propterea q; rectę ipſæ BL, & N, commenſurabiles, ſaltem potentia: Eſt autem BL, oſtenſa Rationalis. Rationalis igitur erit & N. Quia verò quadrata rectarum BL, & N, proportionem non habent, quam numerus quadratus ad numerum quadratum; (vt perſpicuum eſt ex coroll. propoſ. 24. lib. 8. quòd proportio eorum ſit, quæ 5. ad 4.) [o] Erunt rectæ BL, & N, longitudine incommenſurabiles; Ac proinde Rationales potentia tantùm commenſurabiles. Quapropter cùm tota recta BL, Rationalis, longitudine ſit commenſurabilis Rationali BH; (Qualium enim partium 8. eſt BH, talium 5. eſt BL,) poſitq́ue plus, quam congruens KL, quadrato rectæ N, ſibi longitudine incommenſurabilis, vt oſtenſum eſt; Erit BK, Apotome quarta, ex definitione.

n 9. decimi.
o 31. tertij.
p 17. ſexti.
q 95. decimi

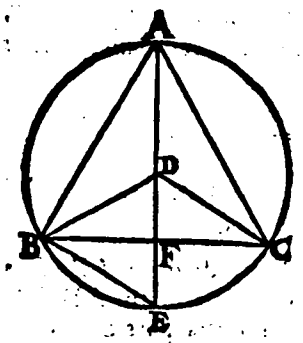
POSTREMO, quia recta AB, eſt media proportionalis inter BH, BK, ex coroll. propoſ. 8. lib. 6. (quòd triangulum ABH, habeat angulum BAH, rectum, à quo ducta eſt AK, ad baſin perpendicularis) [p] erit quadratũ rectæ AB, æquale rectangulo ſub BH, BK. Quocirca cùm ſuperficiem contentam ſub Rationali BH, & Apotoma quarta BK, poſsit recta linea AB, [q] Erit AB, linea Minor. Si igitur in circulo Rationalem habente diametrum, &c. Quod erat demonſtrandum.

8. THEOR. 12. PROPOS. 12

Si in circulo triangulum æquilaterum deſcribatur, Trianguli latus potentia tri plum eſt eius lineæ, quæ ex centro circuli ducitur.

IN circulo ABC, cuius centrum D, triangulum æquilaterum inſcribatur ABC. Dico quadratum lateris AB, triplum eſſe quadrati ex ſemidiametro. Ducta enim diametro AE, quæ ſecet, ex

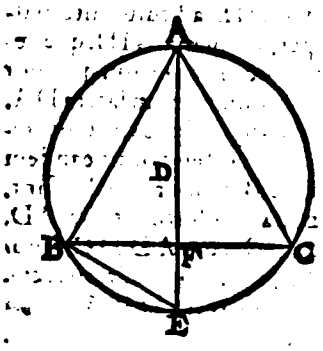
corollario



corollario 2. propoſ. 10. huius lib. arcum B C, bifariam in E, & rectam B C, bifariam quoque & ad angulos rectos in puncto F; cùm arcus B C, ſit tertia pars totius peripheriæ; erit arcus B E, eiuſdem peripheriæ ſexta pars, ideoque coniuncta recta B E, latus erit hexagoni, & æqualis ſemidiametro circuli, ex corollario propoſ. 15. libri 4. Quod etiam ita probabitur. Semicirculus A B E, continet tres ſextas partes totius circuli; arcus verò A B, cùm ſit tertia pars totius circuli, duas ſextas comprehendit eiuſdem circuli. Igitur arcus B E, ſexta pars eſt eiuſdem, ac proinde recta B E, latus eſt hexagoni, & æqualis ſemidiametro D E, ex corollario propoſ. 15. lib. 4. [a] Quoniam igitur quadratum rectæ A E, æquale eſt quadratis rectarum A B, B E, [b] quòd angulus A B E, in ſemicirculo rectus ſit; Eſt autem quadratum rectæ A E, quadruplum quadrati rectæ B E, ex ſcholio propoſ. 4. lib. 2. quòd linea A E, dupla ſit lineæ B E; erunt quadrata rectarum A B, B E, ſimul, quadrupla quoque quadrati eiuſdem rectæ B E; Ac propterea qualium partium 4. ſunt quadrata rectarum A B, B E, talium partium 1. erit quadratum rectæ B E; & idcircò talium partium 3. erit quadratum rectæ A B. Quare quadratum rectæ A B, triplum eſt quadrati rectæ B E, quæ æqualis eſt ſemidiametro. Si igitur in circulo triangulum æquilaterum deſcribatur, &c. Quod erat oſtendendum.

[a] 47. primi.
[b] 31. tertij.

COROLLARIVM I.



SEQVITVR ex his, diametrum circuli potentia eſſe ſeſquitertiam lateris trianguli æquilateri in eo circulo deſcripti. Nam cùm latus A B, oſtenſum ſit potentia triplum ſemidiametri A D; poſita quadrato ex A B, 3. erit quadratum ex A D, 1. atq; adeò quadratum ex A E, quod ex ſcholio propoſitionis 4. libri 2. quadruplum eſt quadrati ex A D, erit 4. Quare quadratũ ex A E, quadrati ex A B, ſeſquitertium eſt, hoc eſt, proportionem habet, quam 4. ad 3.

ET quia ex corollario propoſitionis 8. libri 6. vt eſt A E, ad A B; ita ſe habet A B, ad A F; erit quoque latus trianguli æquilateri A B, perpendicularis A F, ex vno angulo ad baſim demiſſa potentia ſeſquitertium: quod tamen aliter demonſtrabitur ab Euclide lib. 14. propoſ. 12.

COROLLARIVM II.

HINC facilè etiam colligi poteſt, ſemidiametrum D E, bifariam ſecari in F, à latere trianguli B C. Cùm enim quadratum rectæ A B, triplum ſit quadrati rectæ B E; ſi ponatur quadratum rectæ A B, partium 12. erit quadratum rectæ B E, talium partium 4. [a] *Eſt autem quadratum rectæ B E, æquale quadratis rectarum B F, F E. Igitur & talium partium 4. erunt quadrata rectarum B F, F E. Eſt autem talium partium 3. quadratum rectæ B F, (quòd quadratum rectæ A B, quadruplum ſit quadrati rectæ B F, ex ſcholio propoſitionis 4. lib. 2. Eſt enim A B, dupla ipſius B F.) Igitur talium 1. erit quadratum rectæ F E; Ac proinde quadratum rectæ B E, hoc eſt, quadratum rectæ D E, ſibi æquale, quadruplum erit quadrati rectæ F E. Quare ex ſcholio propoſ. 4. lib. 2. recta D E, dupla erit ipſius F E. Quocirca D E, bifariam ſecatur in F.*

[a] 47. primi.

SCHOLIVM.

Hoc tamen corollarium aliter demonſtrabitur, hoc theoremate poſito.

SI in circulo triangulum æquilaterum deſcribatur; Diameter ex vno angulo ducta, diuidet & angulum bifariam, & latus oppoſitum, ac inſuper ad angulos rectos; Semidiameter quoque viciſsim bifariam, & ad angulos rectos ſecabitur à latere oppoſito.

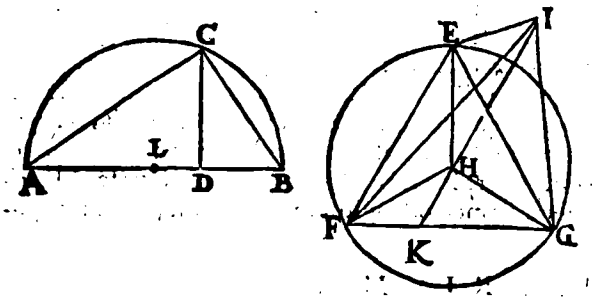
IN circulo A B C, cuius centrum D, triangulum æquilaterum inſcribatur A B C. Dico rectam A E, per centrum D, ductam, hoc eſt, diametrum, ſecare bifariam & angulum B A C, & latus B C, nec non ad angulos rectos; Semidiametrum quoque D E, ſecari à latere B C, bifariam, & ad angulos rectos. Ductis enim rectis B D, C D, B E; cùm latera A B, A D, æqualia ſint lateribus A C, A D, trianguli C A D; & baſes B D, C D, æquales quoque: [b] *Erunt anguli B A D, C A D, æquales. Quod eſt primum. Deinde, cùm latera A B, A F, trianguli B A F, æqualia ſint lateribus A C, A F, trianguli C A F, & anguli ipſis contenti æquales oſtenſi:* [c] *Erũt & baſes B F, C F, & anguli ad F, æquales, ideoq; recti. Quod eſt ſecundum. Poſtremò, cũ anguli B A E, C A E, demõſtrati ſint eſſe æquales;* [d] *erũt & arcus B E, C E, æquales. Quare cũ B E C, arcus ſit tertia pars circumferẽtiæ, erit B E, ſexta pars eiuſdẽ; Ac propterea recta B E, latus hexagoni, atq; ſemidiametro proinde B D,*

[b] 8. primi.
[c] 4. primi.
[d] 26. tertij.

a 5. primi. *æqualis, ex coroll. propoſ. 15. lib. 4.* a *Igitur anguli B D E, B E D, æquales erunt. Quoniam ergo anguli B D F,*
b 26. primi *B F D, trianguli D B F, æquales ſunt angulis B E F, B F E, trianguli E B F, & latus B F, commune;* b *Erunt*
& latera D F, E F, æqualia. Quod eſt tertium.

13. # PROBL. I. PROPOS. 13.

PYRAMIDEM conſtituere; & data ſphæra complecti; & demonſtrare, quòd ſphæræ diameter potentia ſit ſeſquialtera lateris ipſius pyramidis.



SIT datæ ſphæræ diameter A B, circa quam ſemicirculus deſcribatur A B C; & ex A B, auferatur tertia pars B D, vt ſit A D, ipſius D B, dupla; at verò A B, eiuſdem D B, tripla; & ipſius A D, ſeſquialtera. Deinde ducta D C, perpendiculari ad A B, connectantur rectæ A C, B C. Ad interuallum rectæ H E, quæ æqualis ſit ipſi D C, deſcribatur circulus E F G, cuius centrum H, in quo triangulum æquilaterum inſcribatur E F G, adiunganturque rectæ H F, H G, quæ ſingulæ æquales erunt ipſi D C, cùm æquales ſint ipſi H E, ad cuius interuallum deſcriptus eſt circulus. Erigatur deinde ex H, ad planum circuli perpendicularis H I, quæ æqualis ponatur rectæ A D, & ex I, demittantur rectæ I E, I F, I G. Dico ſolidum contentum quatuor triangulis F E G, I E F, I F G, I E G, eſſe Pyramidem, ſiue Tetraedrum. Quoniam enim latera D A, D C, trianguli A D C, æqualia ſunt lateribus H I, H E, trianguli I H E, & anguli ipſis contenti, recti, ex hypotheſi, & 3. defin. lib. 11. c erit baſis A C, baſi I E, æqualis. Non aliter oſtendemus eandem rectam A C, æqualem eſſe rectis I F, I G. Rurſus quia tres lineæ A D, D C, D B, proportionales ſunt, ex coroll. propoſ. 8. lib. 6. erit, ex coroll. propoſ. 20. lib. 6. vt A D, ad D B, ita quadratum rectæ A D, ad quadratum rectæ D C; & componendo, vt A B, ad D B, ita quadrata rectarum A D, D C, ſimul ad quadratum rectæ D C: b Sunt autem quadrata rectarum A D, D C, æqualia quadrato rectæ A C. Igitur erit quoque vt A B, ad D B, ita quadratum rectæ A C, ad quadratum rectæ D C. Ac proinde cùm A B, ſit ipſius D B, tripla, erit quoque quadratum rectæ A C, triplum quadrati rectæ H E, cùm H E, æqualis ſit ipſi D C: c Atqui & quadratum rectæ E F, triplum quoque eſt eiuſdem quadrati rectæ H E. Quadratum ergo rectæ A C, quadrato rectæ E F, æquale erit; & propterea recta A C, rectæ E F. Quare cùm recta A C, oſtenſa quoque ſit æqualis rectis I E, I F, I G; erunt quatuor triangula E F G, E F I, F G I, G E I, æquilatera & æqualia inter ſe. Conſtituta igitur iam eſt pyramis, ſeu Tetraedrum, cuius baſis E F G, vertex verò I. Dico pyramidem hanc comprehendi ſphæra data, cuius diameter A B; & diametrum ſphæræ A B, potentia ſeſquialteram eſſe lateris E F, vel A C.

a 4. primi.

b 47. primi.

c 12. tertij.

EXTENDATVR perpendicularis I H, vſque ad K, vt ſit H K, ipſi D B, & tota I K, toti A B, æqualis. Quia ergo tres rectæ A D, D C, D B, proportionales ſunt, quibus æquales exiſtũt tres I H, H E, H K, erunt quoque I H, H E, H K, proportionales. Quare cùm H E, ſit ad I K, perpendicularis, & media proportionalis inter I H, H K, ſemicirculus circa I K, deſcriptus in plano rectarum I K, H E, tranſibit per E, vt mox oſtendetur; Eodemque argumento tam ſemicirculus circa eandem rectam I K, deſcriptus in plano rectarum I K, H F, tranſibit per F, quàm ſemicirculus circa eandem I K, deſcriptus in plano rectarum I K, H G, per G. Igitur quilibet horum ſemicirculorum circumductus, manente fixa diametro, ſphæram deſcribet, quæ conſtitutum Tetraedrum complectitur, cùm per omnes illius angulos E, F, G, I, incedat. Cùm ergo hæc ſphæra deſcripta æqualis ſit ſphæræ datæ, quòd diameter I K, æqualis ponatur diametro A B, comprehendetur idem Tetraedrum ſphæra data.

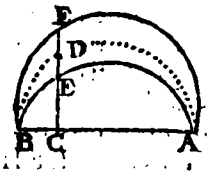
QVONIAM verò tres rectæ A B, A C, A D, proportionales ſunt, ex coroll. propoſ. 8. lib. 6. erit vt A B, ad A D, ita quadratum rectæ A B, ad quadratum rectæ A C, ex coroll. propoſ. 20. lib. 6. Eſt autem recta A B, ſeſquialtera rectæ A D, quòd qualium partium 3. eſt A B, talium 2. ſit A D. Igitur & quadratum rectæ A B, ſeſquialterum erit quadrati rectæ A C; Ac propterea cùm A B, ſit diameter ſphæræ, & A C, recta lateri pyramidis E F, æqualis; perſpicuum eſt, diametrum ſphæræ potentia ſeſquialteram eſſe lateris Tetraedri, ſeu pyramidis. Pyramidem ergo conſtituimus, & data ſphæra complexi ſumus, &c. Quod erat faciendum.

LEMMA.

QVOD autem ſemicirculus circa I K, in plano rectarum I K, H E, deſcriptus, tranſeat per E, facilè demonſtrabitur, hoc propoſito theoremate.

SI ad lineã rectam perpendicularis ducatur, quæ ſit media proportionalis inter ſegmenta lineæ; ſemicirculus circa illam lineam rectam deſcriptus, tranſibit per extremum punctum lineæ perpendicularis.

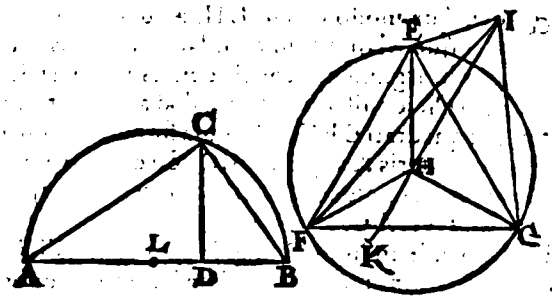
SIT



Sit enim ad AB, perpendicularis CD, & media proportionalis inter AC, & CB. Dico ſemicirculum circa AB, deſcriptum, tranſire per D. Nam ſi tranſeat citra D, vel vltra, nimirũ per punctum E; erit quoque CE, media proportionalis inter AC, & CB, ex coroll. propoſ. 13. lib. 6. Quare tam quadratum rectæ CD, quàm quadratum rectæ CE, [a] *æquale erit rectangulo ſub AC, CB; Ac proinde quadrata rectarũ CD, CE, inter ſe æqualia, & ipſæ rectæ CD, CE, æquales erunt, pars & totum. Quod eſt abſurdum. Tranſibit ergo ſemicirculus per D.* a 17. ſexti.

Hinc manifeſtum eſt, ſemicirculum in ſuperiori figura deſcriptum circa IK, in plano rectarum IK, HE, tranſire per E, cùm HE, ſit ad IK, perpendicularis, & media proportionalis inter IH, HK.

COROLLARIVM I.



Hinc facilè colligemus, diametrum ſphæræ eſſe potentia quadruplam ſeſquialteram ſemidiametri circuli circa baſim pyramidis deſcripti. Cùm enim diameter ſphæræ AB, oſtenſa ſit potentia ſeſquialtera lateris pyramidis EF, erit quadratum rectæ EF, talium partium 6. qualium 9. eſt quadratũ rectæ AB: At qualium partium 6. eſt quadratũ rectæ EF, talium partium 2. eſt quadratum rectæ HE, [b] *quòd quadratum rectæ EF, triplum ſit quadrati rectæ HE. Qualium igitur partium 9. eſt quadratum rectæ AB, talium partium 2. erit quadratum rectæ HE; Ac propterea diameter ſphæræ AB, potentia eſt quadrupla ſeſquialtera ſemidiametri HE, cùm proportio quadratorum ſit, quæ 9. ad 2.* b 12. tertij decimi.

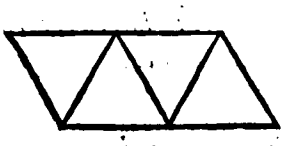
COROLLARIVM II.

Rvrsvs perpendicularis ex centro ſphæræ ad planum baſis pyramidis demiſſa, ſexta pars erit diametri ſphæræ, & tertia pars ſemidiametri. Sit enim L, centrũ ſemicirculi ACB, eritq; L, centrum quoque ſphæræ. Dico rectam LD, (quæ nimirum ex centro ſphæræ ad baſin EFG, ducitur perpendicularis; cùm AD, æqualis ſit ipſi IH, & ideò punctum D, idem quod H, quemadmodum & L, idem eſt, quod centrum ſphæræ) eſſe ſextam partem diametri ſphæræ, nempe rectæ AB, & tertiam partem ſemidiametri AL. Quoniam enim AD, dupla eſt ipſius DB; Qualium partium 4. eſt AD, talium 2. erit DB; ac proinde talium 6. tota AB, & ſemidiameter AL, talium 3. Quare ſi AD, eſt 4. & AL, 3. erit LD, 1. & idcircò LD, ſexta pars erit rectæ AB, quæ fuit partium earundem 6. & tertia pars rectæ AL, quæ fuit earundem partium 3.

Similiter, altitudo pyramidis HI, duas tertias partes continebit ipſius diametri. Eſt enim HI, eadem, quæ AD, continens duas tertias diametri, ex conſtructione.

Rvrsvs, qualium partium 9. ponetur quadratum diametri, talium 4. erit quadratum altitudinis pyramidis. Nam proportio 9. ad 4. eſt duplicata proportionis 3. ad 2. vt hìc apparet 9. 6. 4.

SCHOLIVM.



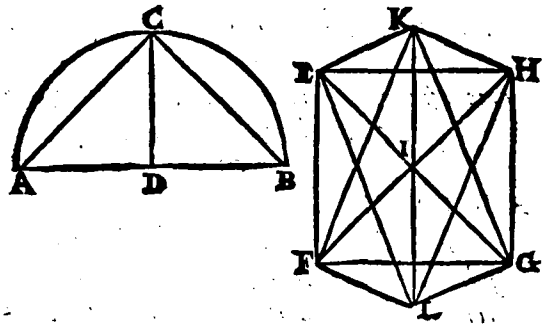
Qvod ſi ex materia aliqua conficiantur quatuor triangula æquilatera æqualia, diſponanturq;, vt hæc figura indicat, facilè ex ipſis ritè inter ſe complicatis componetur Tetraëdrum, ſecundùm totam ſoliditatem. Hanc verò praxim, & ſequentes quatuor, quibus reliqua quatuor ſolida regularia in materia quauis ſenſibili conficiuntur, deſumpſimus ex Alberto Durere, non ignobili ſcriptore.

PROBL. 2. PROPOS. 14. 15.

OCTAEDRVM conſtituere, & ſphæra complecti, qua & pyramidem; & demonſtrare, quòd ſphæræ diameter potentia ſit dupla lateris ipſius octaedri.

Sit ſphæræ, quę conſtitutam pyramidem comprehendit, diameter AB, circa quam ſemicirculus deſcribatur ACB, & ex centro D, ad AB, perpendicularis ducatur DC, connectanturq; rectæ

a 4. primi. A C, B C, [a] quæ æquales inter se erunt. Sumpta iam recta E F, quæ æqualis sit ipsi A C, vel B C, describatur super eam quadratum E F G H, in quo ducantur diametri E G, F H, se mutuò secantes in I: eruntq; rectæ I E, I F, I G, I H, æquales, cùm sint semidiametri circuli circa quadratum descripti, vt in 4. lib. demonstratum est. Deinde ex I, in vtramque partem ad planum quadrati erigatur perpendicularis K L, ponanturque I K, I L, æquales ipsi I E: Et denique ex K, & L, deducantur ad angulos quadrati rectæ K E, K F, K G, K H, L F, L E, L H, L G. Dico solidum contentum octo triangulis, K E F, K F G, K G H, K E H; L F E, L E H, L H G, L F G, esse octaedrum, quod quæritur.



b 8. primi. Quoniam enim latera E I, I K, trianguli E I K, æqualia sunt lateribus E I, I H, trianguli E I H; & anguli ipsis contenti, recti; (ipse quidē E I K, ex defin. 3. lib. 11. At verò E I G, [b] eō quòd sit æqualis angulo G I H, sibi deinceps, ob æqualitatem laterum E I, I H, G I, I H, & basium E H, G H.) [c] Erit & basis E K, basi E H, æqualis. Eodemque modo eidem E H, æqualis erit K H; ideoque triangulum æquilaterum erit K E H. Simili argumento concludemus, reliqua triangula esse æquilatera: atque adeò æqualia triangulo K E H, cùm illorum latera æqualia sint lateribus quadrati E F G H, singula singulis. Constitutum igitur iam est octaedrum ex octo triangulis æquilateris & æqualibus. Quod octaedrum di co comprehendi sphæra diametri A B, qua nimirum & pyramis constructa comprehenditur; & diametrum sphæræ A B, potentia duplam esse lateris E F, vel A C.

c 4. primi.

QVONIAM enim I E, perpendicularis est ad K L, ex 3. defin. lib. 11. & media proportionalis inter segmenta K I, I L; (quòd tres rectæ K I, I E, I L, æquales sint, ideoque eandem habeant proportionem.) Semicirculus circa K L, in plano rectarum K L, I E, descriptus, transibit per punctum E, ex lemmate præcedētis propositionis. Eadem ratione semicirculus descriptus circa eandem K L, in plano rectarum K L, I F, incedet per punctum F. Idemque dicendum est de punctis G, H. Igitur quilibet horum semicirculorum circumductus, manente fixa diametro K L, describet sphæram, quę complectitur octaedrum constitutum, cùm per omnes illius angulos incedat. Cùm ergo hæc sphæra æqualis sit datæ sphæræ, cuius diameter A B; (Nam cū rectæ A C, E F, æquales sint, ideoq; ipsarum quadrata æqualia; Sit autem tam quadratum rectæ A C, duplum quadrati rectæ A D, q̄ quadratum rectæ E F, quadrati rectæ E I; Erunt & rectæ A D, E I, hoc est, K I, semidiametri æquales. Quare & totæ diametri A B, K L, æquales erūt; ac proinde sphæræ ipsarum æquales existent.) comprehendetur idem octaedrum data sphæra.

d 47. primi. QVIA verò quadratum rectæ A B, [d] æquale est quadratis rectarum A C, B C, quę æqualia sunt; erit quadratum rectæ A B, duplum quadrati rectæ A C. Quamobrem cùm A B, sit diameter sphæræ, & A C, recta æqualis lateri octaedri E F, manifestum est, diametrum sphæræ potentia duplam esse lateris octaedri. Itaque octaedrum constituimus, & sphæra complexi sumus, qua & pyramidem, &c. Quod erat faciendum.

COROLLARIVM I.

Ex dictis manifestum est, in octaedro tres diametros se mutuò ad angulos rectos secare in centro sphæræ: quales sunt K L, E G, F H, secantes sese in I. Omnes enim anguli ad I, ostensi

a 4. vndec. *sunt recti. Atque proinde, cùm K I, recta sit ad lineas E G, H F;* [a] *recta quoque erit ad planum*

b 18. vndec. *E F G H, per ipsas ductum;* [b] *Ideoq; & plana K F L H, E L G K, per K I, ducta, recta erunt ad planū E F G H. Immò eadem ratione, vt paucis rem complectar, tria plana E F G H, K F L H, E L G K, se mutuò ad angulos rectos secabunt; Quæ quidem plana sunt quadrata, cùm omnia eorum latera sint ipsius octaedri latera, ac proinde æqualia existant inter se, comprehendantq; angulos rectos; eò quòd (cùm quadratum diametri sphæræ duplum sit quadrati lateris octaedri, vt ostendimus,) quadratū diametri H F, æquale existit quadratis laterū octaedri*

c 48. primi *F K, K H.* [c] *Ita enim efficitur, vt angulus F K H, rectus sit. Eademq; est ratio de cæteris angulis.*

COROLLARIVM II.

OCTAEDRVM diuiditur in duas pyramides similes & æquales, quarum basis communis, est quadratum E F G H, vertices verò K, & L; altitudines denique, semidiametri I K, I L: cuiusmodi sunt pyramides E F G H K, E F G H L. Nam plana vnius sunt similia & æqualia planis alterius, vt constat, cùm sint triangula æquilatera, & æqualia, præter basin communem, quæ est quadratum subduplum quadrati diametri sphæræ, vt est demonstratum.

COROLLARIVM III.

SI tetraedrum, & octaedrum in eadem sphæra describantur, erit tetraedri latus potentia

sesquiter-

ſeſquitertium lateris octaedri. Ponatur enim quadratum diametri ſphæræ diuiſum in ſex partes. [a] *Quoniam igitur diameter ſphæræ eſt potentia ſeſquialtera lateris tetraedri, erit quadratum lateris tetraedri talium partium 4. qualium 6. eſt quadratū diametri ſphæræ.* [b] *Rurſus quia diameter ſphæræ eſt potentia dupla lateris octaedri, erit quadratum lateris octaedri talium partium 3. qualium 6. eſt quadratum diametri ſphæræ. Igitur cùm talium partium 4. ſit quadratum lateris tetraedri, qualium 3. eſt quadratum lateris octaedri; perſpicuum eſt, latus tetraedri potentia ſeſquitertium eſſe lateris octaedri.*

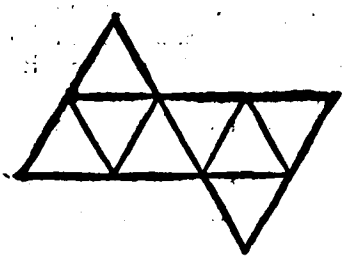
a 17. tertij decimi.

b 14. tertij decimi.

COROLLARIVM IIII.

DENIQVE, quia in quadrato EFGH, recta EH, parallela eſt rectæ FG; & in quadrato ELGK, recta EK, rectæ GL: [c] *Erit planum EHK, per EH, EK, ductum plano FGL, per FG, GL, ductо, parallelum. Cùm igitur eadem ſit ratio de cæteris baſibus octaedri, efficitur, baſes octaedri oppoſitas inter ſe parallelas eſſe.*

c 15. vndec.

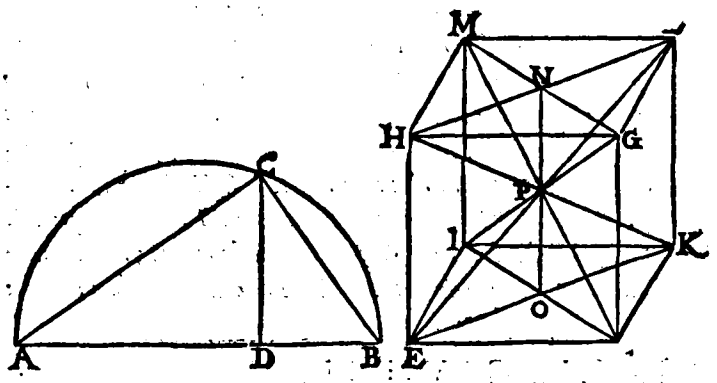


SCHOLIVM.

QVOD ſi ex materia aliqua conficiantur octo triangula æquilatera, inter ſe æqualia, diſponanturq́, vt hac figura indicat, facilè ex ipſis ritè inter ſeſe complicatis componetur octaedrum, ſecundùm tò tam ſoliditatem, vt ait Albertus Durerus.

PROBL. 3. PROPOS. 15. 14.

CVBVM conſtituere; & ſphæra complecti, qua & priores figuras; & demonſtrare, quòd ſphæræ diameter potentia ſit tripla lateris ipſius cubi.



SIT ſphæræ, quæ prædictas figuras comprehendit, diameter AB, circa quam ſemicirculus deſcribatur ACB: & ex AB, auferatur tertia pars BD, vt ſit AB, ipſius BD, tripla. Deindè ducta DC, perpendiculari ad AB, connectatur rectę AC, BC. Super rectá EF, quę rectæ BC, ſit æqualis, quadratum conſtituatur EFGH, ſuper quod erigantur perpẽdiculares EI, FK, GL, HM, æquales quoque ipſi BC, quarum extremá coniungantur rectis IK, KL, LM, MI. Quoniam ergo rectæ EI, FK, ad planum EFGH, rectæ ſunt; [a] erunt rectæ EI, FK, parallelæ: Sunt autem & æquales, q vtraq; æqualis poſitá ſit ipſi BC, hoc eſt, ipſi EF. [b] Igitur & EF, IK, parallelæ ſunt & æquales; & ideò parallelogrammum eſt EFKI; In quo, cùm lineæ EI, IK, KF, æquales ſint ipſi EF, omnes quatuor lineę æquales exiſtunt: [c] Sunt autem & omnes quatuor anguli recti, cùm EIK, FKI, æquales ſint oppoſitis angulis rectis KFE, IEF. Igitur EFKI, quadratū eſt. Eadem ratione quadrata erunt FKLG, GLMH, HMIE. Atq; idcircò & IKLM, quadratum erit, [d] cùm ſimile ſit & æquale quadrato oppoſito EFGH. Eſt enim EL, ſolidum parallelepipedum, [e] quòd eius plana oppoſita ſint parallela, nimirum per lineas parallelas ſe mutuò tangẽtes ducta. Quare cubus erit EL. Quem dico comprehendi ſphęra diametri AB. Sint enim planorum oppoſitorum EFKI, GHML, diametri EK, FI, GM, HL, per quas ducátur plana EKLH, FIMG. [f] Quia igitur tam planum EKLH, quàm FIMG, cubum bifariam ſecat; vtrumque per centrum cubi tranſibit, ex ſcholio propoſ. 39. lib. 11. per punctum videlicet P, in quo ex coroll. eiuſdem propoſ. ſe mutuò quoque bifariam diuidẽt omnes diametri cubi; Ac propterea communis planorum ſectio, recta ſcilicet NO, per idem punctum P, incedet. Quia verò plana EKLH, FIMG, rectangula ſunt, (Cùm enim HE, perpendicularis ſit duabus rectis EI, EF, ob quadrata EM, EK; & perpendicularis quoque erit ad planum EK, ideóque & ad rectam EK, ex defin. 3. lib. 11. Rectus ergo angulus eſt HEK. Eadem ratione recti erunt reliqui anguli in plano EKLH, necnon & anguli in plano FIMG. Rectangula ergo ſunt plana EKLH, FIMG.) & æqualia, quòd latera vnius æqualia ſint lateribus alterius; erunt quoque eorum diametri EL, HK, FM, GI, æquales, vt conſtat ex ſcholio propoſitionis 34. libri 1. Ac proinde & ſemidiametri PE, PL, PH, PK; PF, PM, PG, PI, æquales erunt. Quare ſemicirculus circa EL, ex centro P, deſcriptus, & circumductus, fixa manente diametro EL, ſphæram deſcribet per omnes cubi angulos tranſeuntem; quam quidem æqualem eſſe ſphæræ diametri AB, ita demonſtrabitur.

a 6. vndec.

b 33. primi.

c 34. primi.

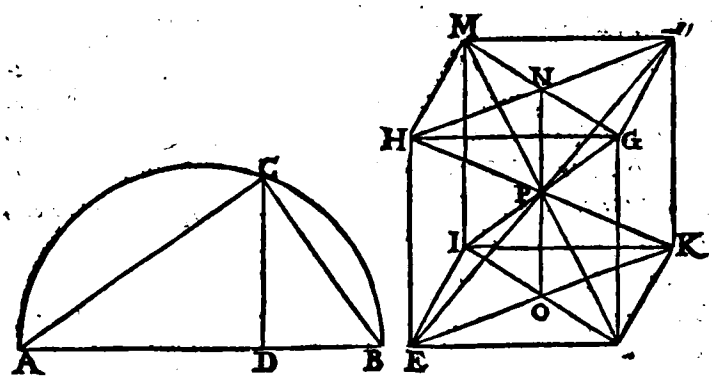
d 24. vndec.

e 15. vndec.

f 28. vndec.

g 4. vndec.

a 47. primi.



b 47. primi.

Cvm quadratum rectæ EF, æquale sit quadratis æqualium rectarum æqualium EF, FK, ac proinde duplũ quadrati rectæ EF, hoc est, quadrati rectæ KL. Erunt quadrata rectarum EK, KL, tripla quadrati rectæ KL. [b] Est autẽ quadratis rectarum EK, KL, æquale quadratum rectæ EL, quòd angulus EKL, sit rectus in rectangulo EKLH. Igitur & quadratum rectę EL, triplum erit quadrati rectę KL, hoc est, quadrati rectę BC: At verò eiusdem quadrati rectæ BC, triplum est quadratum rectæ AB. (Nam tres rectæ AB, BC, BD, proportionales sunt, ex coroll. propos. 8. lib. 6. Ac proinde ex coroll. propos. 20. lib. 6. vt est AB, ad BD, ita erit quadratum rectæ AB, ad quadratum rectæ BC. Cùm ergo AB, ipsius BD, sit tripla; erit quoque quadratum rectæ AB, quadrati rectæ BC, triplum.) Igitur quadrata rectarum EL, AB, æqualia sunt; ac propterea ipsæ rectæ EL, AB, diametri nimirum sphærarum, ideoque & ipsarum sphærę, æquales existunt.

Qvia verò ostensum est, quadratum diametri EL, triplum esse quadrati lateris cubi KL; manifestum est, diametrum sphærę potẽtia triplam esse lateris cubi. Quocirca cubum constituimus, & sphæra complexi sumus, &c. Quod erat faciendum.

COROLLARIVM I.

Ex demonstratione huius problematis manifestum est, omnes diametros cubi inter se esse æquales, seseq; mutuò bifariam in centro sphæræ secare. Atque eadem ratione rectas lineas, quæ centra quadratorum oppositorum coniungunt, bifariam diuidi in eodem centro. Demonstratum enim est, diametros cubi EL, HK, FM, GI, æquales esse, seseq; mutuò bifariam secare in centro P. Quòd verò & recta NO, coniungens centra N, & O, quadratorum oppositorum GHML, EFKI, in eodem centro P, bifariam diuidatur, hac ratione ostendetur. Duo anguli OFP, OPF, trianguli OFP, æquales sunt duobus angulis NMP, NPM, trianguli

a 29. primi b 16. vnde. c 15. primi.

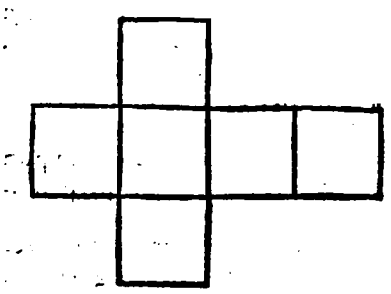
NMP: (a Nam angulus OFP, æqualis est alterno NMP, inter lineas FI, GM, b quæ parallelæ sunt, cùm sint communes sectiones planorum parallelorum EFKI, GHML; c & angulus OPF, æqualis est oppositò ad verticem NPM.) Sunt autem & latera PF, PM, quibus adiacent, æqualia, cùm sint semidiametri. Igitur & latera PO, PN, æqualia erunt; ac proinde recta NO, bifariam secabitur in P. Eademq; est ratio de cæteris lineis coniungentibus centra aliorum quadratorum oppositorum.

COROLLARIVM II.

Rvrsvs potentia diametri sphæræ, seu cubi, æqualis est potentiis laterum tetraedri & cubi simul sumptis. d *Nam qualium partium 9. est quadratum diametri, talium 6. est quadratum lateris tetraedri:* e *Qualium verò partium 9. est idem quadratum diametri, talium 3. est quadratum lateris cubi. Igitur quadratum lateris tetraedri, & quadratum lateris cubi simul sunt partium 9. quemadmodum & quadratum diametri; Ac proinde quadratum diametri æquale est quadratis dictorum laterum. Hoc etiam manifestum est ex semicirculo circa diametrum sphæræ descripto, in quo latus tetraedri est AC, cubi verò BC.* f *Perspicuum autem est, diametrum sphæræ AB, posse & rectã AC, & rectam BC, cùm angulus ACB, sit rectus.*

d 13. tertij decimi. e 15. tertij decimi.

f 47. primi.



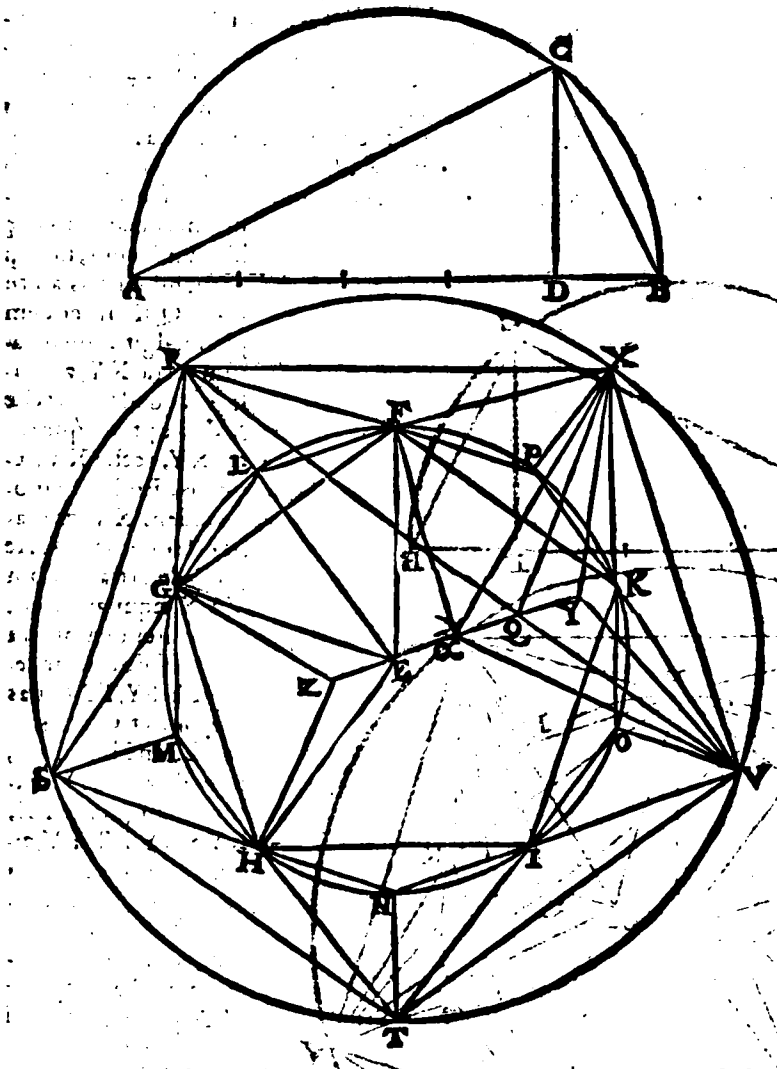
SCHOLIVM.

Qvod si ex aliqua materia conficiãtur sex quadrata inter se æqualia, disponanturq; vt hac figura indicat, facilè componetur cubus secundùm totam solidităt. si dicta quadrata ritè complicentur inter se. Efficietur enim ex illis figura quædam solida, octo angulos solidos continens instar tesseræ cuiusplam, vt constat.

16. # PROBL. 4. PROPOS. 16.

Icosaedrvm constituere; & sphæra complecti, qua & ante dictas figuras: & demonstrare, quòd Icosaedri latus Irrationalis est linea, quæ vocatur Minor.

Sit



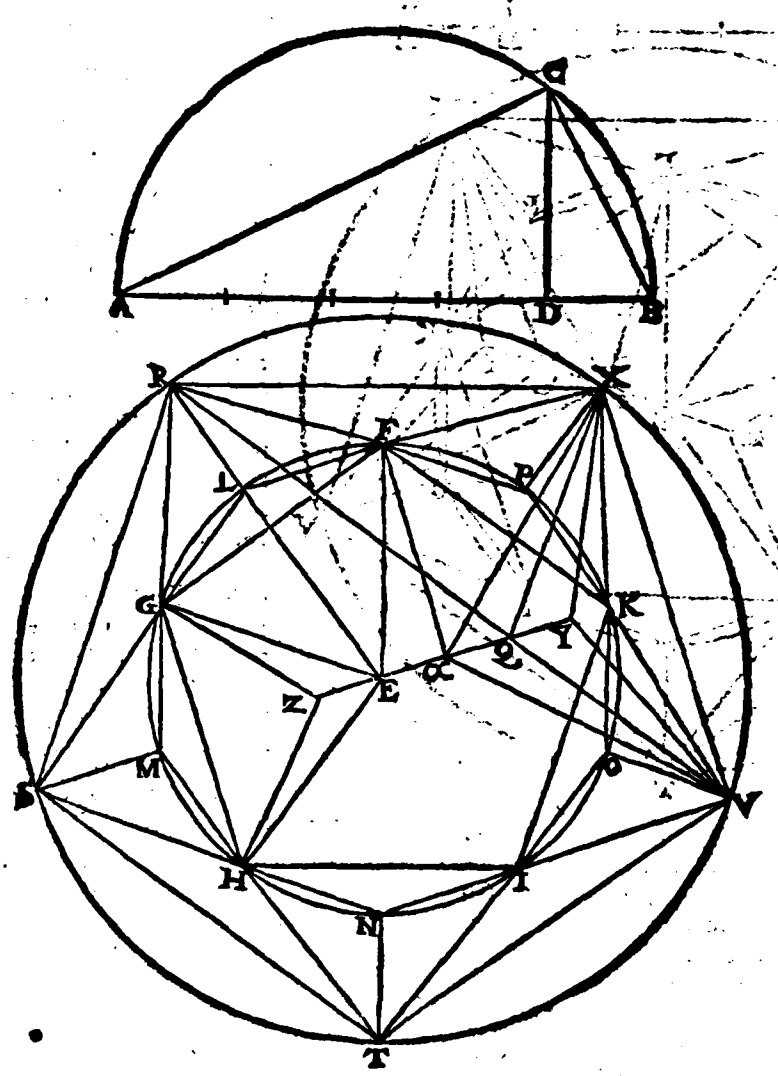
SIT sphærę, quæ prædictas figuras comprehendit, diameter AB, circa quam semicirculus describatur ACB: Et ex AB, abscindatur quinta pars BD, vt AB, ipsius BD, sit quintupla; & ipsius AD, sesquiquarta: At verò AD, ipsius BD, quadrupla. Deinde ducta DC, perpendiculari ad AB, connectantur rectæ AC, BC. Ad interuallum rectæ EF, quæ ipsi BC, sit æqualis, circulus describatur ex centro E; [a] in quo pentagonum æquilaterum, inscribatur FGHIK. Post hæc diuisis arcubus FG, GH, HI, IK, KF, bifariam in punctis L, M, N, O, P, connectantur rectæ FL, LG, GM, MH, &c. nempe latera decagoni. Deinde ex centro E, & punctis L, M, N, O, P, ad planum circuli FGHIK, perpendiculares erigãtur EQ, LR, MS, NT, OV, PX, quæ æquales ponantur semidiametro EF, seu rectæ BC. Eruntq; omnes inter se æquales; [b] sed & parallelæ sunt. Igitur rectę, quę illas coniungunt, nempe EL, QR; EM, QS; EN, QT; EO, QV; EP, QX. (quas tamen omnes, vt vitaremus confusionem, non duximus.) [c] binæ inter se æquales erũt: Ac proinde cùm æquales sint EL, EM, &c. semidiametro EF; æquales quoque erunt QR, QS, QT, QV, QX, & inter se, & semidiametro EF, seu rectæ BC. [d] Quia verò planum per rectas QR, QS, ductum parallelum est plano FGHIK, per rectas EL, EM, ducto: eademque ratione planum per rectas QS, QT, ductum, parallelum est plano eidem FGHIK, per rectas EM, EN, ducto, conuenit autem planum per rectas QR, QS, cum plano per QS, QT, in recta QS. Igitur efficient hæc duo plana vnum planum, per ea, quæ ad propos. 16. lib. 11. ostendimus. Non aliter ostendemus planum per QT, QV, cum hoc plano efficere vnum planum: necnon planum per QV, QX; & planum per QX, QR. Sunt ergo quinque lineæ QR, QS, QT, QV, QX, in eodem plano. Ac proinde si ex Q, ad interuallum QR, in eo plano circulus describatur, is per reliqua puncta S, T, V, X, transibit, eritque æqualis circulo FGHIK. Coniungantur puncta R, S, T, V, X, rectis RS, ST, TV, VX, XR. Quia igitur LR, PX, æquales sunt, [e] & parallelæ; si concipiatur duci recta LP; [f] erunt quoque LP, RX, æquales & parallelæ; [g] Ac proinde ex circulis æqualibus æquales arcus auferent: Aufert autem LP, quintam partem circuli FGHIK, nempe duas decimas partes FL, FP. Igitur & RX, quintam partem auferet circuli RSTVX. Simili prorsus argumento concludemus, reliquas rectas RS, ST, TV, VX, quintas partes auferre. Quamobrem pentagonum æquilaterum est RSTVX, omnia latera æqualia habens lateribus pentagoni FGHIK. Demittantur ex angulis pentagoni RSTVX, ad angulos pentagoni FGHIK, rectæ RF, RG, SG, SH, TH, TI, VI, VK, XK, XF. Quia igitur perpendicularis LR, æqualis ponitur semidiametro EF, hoc est, lateri hexagoni circuli FGHIK; & est LF, latus decagoni; [h] erit quadratum lateris pentagoni eiusdem circuli æquale quadratis rectarum LR, LF: [i] Est autem eisdem quadratis æquale quadratum rectæ FR; quòd angulus FLR, rectus sit, ex 3. definitione libri 11. Igitur quadratum rectæ FR, æquale est quadrato lateris pentagoni; ideoque recta FR, lateri pentagoni LP, seu FG, hoc est, ipsi RX, æqualis erit. Eademque ratione erunt reliquæ lineæ RG, SG, SH, &c. reliquis lateribus vtriusque pentagoni æquales: Ac propterea decem triangula RFX, RFG, RGS, SGH, SHT, THI, TIV, VIK, VKX, XKF, æquilatera erunt, & inter se æqualia, cùm eorum omnia latera æqualia sint lateribus pen-

[a] 11. quarti.
[b] 6. vndec.
[c] 33. primi.
[d] 15. vndec.
[e] 6. vndec.
[f] 33. primi.
[g] 28. tertij.
[h] 10. tertijdecimi.
[i] 47. primi.

tagoni æquilateri. Post hæc, perpendicularis E Q, in vtramque partem extendatur, sintque rectæ Q Y, E Z, æquales singulæ, lateri decagoni circuli F G H I K, vel R S T V X; & connectantur rectæ V Q, V Y, X Q, X Y, G E, G Z, H E, H Z. Quoniam ergo Q X, semidiameter est circuli R S T V X, hoc est, latus hexagoni, & Q Y, latus est decagoni eiusdem circuli; [a] erit quadratum lateris pentagoni X V, æquale quadratis rectarum Q X, Q Y; [b] Est autem eisdem quadratis æquale quadratum rectæ X Y, quòd angulus X Q Y, rectus sit, ex definitione tertia libri vndecimi. (Nam cùm plana circulorum F G H I K, R S T V X, parallela sint ostensa, sitque E Q, ad illius planum recta, ex constructione, erit quoque E Q, ad huius planum recta, ex scholio propositionis decimequarte libri vndecimi, ideoq; perpendicularis ad rectam Q X, in eodem plano.) Igitur quadratum rectæ X Y, æquale est quadrato rectæ X V, propterea quæ recta X Y, rectæ X V, æqualis. Eodemq; modo eidem X V, æqualis ostendetur V Y; Ac proinde, triangulum V Y X, æquilaterū est. Non aliter demonstrabimus si ducantur rectæ R Y, S Y, T Y, (quas tamen, vt vitaremus confusionem linearum, non duximus,) quatuor triangula R Y X, R Y S, S Y T, T Y V, æquilatera esse, & æqualia triangulo V Y X, hoc est, prioribus decem, cùm omnium latera æqualia sint lateribus pentagoni. Simili argumento æquilaterum erit triangulum G Z H, (cùm E G, sit latus hexagoni, nempe semidiameter, & E Z, latus decagoni, angulusq; G E Z, rectus, ex tertia definitione libri vndecimi,) necnon quatuor triangula H Z I, I Z K, K Z F, F Z G, (quorum tamen lineas, ne pareremus confusionem, nō duximus,) quæ omnia prioribus quindecim æqualia erunt, eandem ob causam. Cùm igitur omnia hæc triangula viginti æquilatera sint, & æqualia, copulenturq; singula singulis per lineas rectas, nempe per eorum latera; constitutū erit ex ipsis Icosaedrum. Quod dico comprehendi sphæra diametri A B.

[a] 10. tertiædecimi.

[b] 47. primi.



DIVISA enim recta E Q, bifariam in α, ducantur rectæ α F, α X, α V. Quoniam igitur latera α Q, Q V, trianguli α Q V, æqualia sunt lateribus α Q, Q X, trianguli α Q X, cùm Q V, Q X, sint semidiametri circuli R S T V X: Sunt autem & anguli α Q V, α Q X, æquales, nempe recti, ex definitione tertia libri vndecimi. [c] Erunt & bases α V, α X, æquales. Eademque ratione, si ducantur rectæ ex α, Q, ad R, S, T, ostendentur rectæ α R, α S, α T, æquales & inter se, & ipsis α V, α X. Rursus quia latera α Q, Q X, trianguli α Q X, æqualia sunt lateribus α E, E E, trianguli α E F, cùm Q X, E F, sint semidiametri circulorum æqualium, & E Q, diuisa sit bifariam in α: Sunt autem & anguli α Q X, α E F, æquales, nimirum recti, ex definitione tertia libri vndecimi. [d] Erunt quoque bases α X, α F, æquales: eodemque modo si ex α, E, ad G, H, I, K, rectæ ducantur, ostendentur α G, α H, α I, α K, æquales ipsi α X; Ac proinde decem lineæ ductæ ad decem angulos F, G, H, I, K, R, S, T, V, X, æquales sunt. Quoniam verò Q E, semidiameter est, hoc est, latus hexagoni circuli F G H I K; & E Z, latus decagoni eiusdem circuli; [e] erit Q Z, diuisa in E, extrema ac media

[c] 4. primi.

[d] 4. primi.

[e] 9. tertiædecimi.

dia ratione, maiusque segmentum erit QE. Quare minus segmentum ZE, assumens Eα, dimidium maioris segmenti, hoc est, recta αZ, [a] quintuplum potest eius, quod ex Eα, describitur quadrati: Potest autem & recta αF, quintuplum eiusdem quadrati rectæ Eα. (Nam cùm quadratum rectæ EF, quadruplum sit quadrati rectæ αE, ex scholio propositionis quartæ libri secundi, quòd recta EF, dupla sit ipsius Eα; erunt quadrata rectarum EF, Eα, simul quintupla quadrati rectæ Eα. [b] Cùm ergo quadratis rectarum EF, Eα æquale sit quadratum rectæ AF; erit quoque quadratum rectæ αF, quintuplum quadrati rectæ Eα.) Igitur æqualia sunt quadrata rectarum, αZ, αF, ac proinde rectæ ipsæ αZ, αF, æquales erunt. Cùm igitur ZY, bifariam secetur in α; (propterea quòd si æqualibus αE, αQ, æquales rectæ addantur EZ, QY, totæ Zα, Yα, æquales fiunt:) Erunt omnes rectæ ductæ ex α, ad omnes angulos Icosaedri æquales. Quocirca sphæra descripta circa diametrum ZY, ex centro α, per omnes angulos Icosaedri cõstituti transibit. Hanc ergo sphæram dico æqualem esse sphæræ diametri AB.

[a] 3. tertiidec.

[b] 47. primi.

Cvm enim sit vt αZ, ad αE, ita YZ, dupla ipsius αZ, ad QE, duplam ipsius αE; [c] Ac propterea vt quadratum rectæ αZ, ad quadratum rectæ αE, ita quadratum rectæ YZ, ad quadratum rectæ QE; sit autem quadratum rectæ αZ, ostensum quintuplum quadrati rectæ αE: Erit quoque quadratum rectæ YZ, quintuplum quadrati rectæ QE, hoc est, quadrati rectæ BC; quòd recta QE, æqualis sit posita semidiametro EF, hoc est, rectæ BC; Est autem & eiusdem quadrati rectæ BC, quintuplum quadratum rectæ AB; (Nam cùm, ex coroll. propos. 8. lib. 6. sit vt AB, ad BC, ita BC, ad BD; erit vt AB, ad BD, ita quadratum rectæ AB, ad quadratum rectæ BC, ex coroll. propos. 20. lib. 6. Ac proinde existente AB, quintupla ipsius BD, erit etiam quadratum rectæ AB, quintuplum quadrati rectæ BC.) Quadrata igitur rectarum YZ, AB, æqualia sunt, ideoque & rectæ YZ, AB; ac propterea & sphæræ circa ipsas, æquales erunt.

[c] 15. quinti. [d] 22. sexti.

Qvoniam denique diameter sphæræ AB, Rationalis ponitur; (Nam comparatione ipsius ostendendum est, latus Icosaedri esse lineam Irrationalem quæ Minor vocatur.) potestq; quintuplum quadrati rectæ BC, hoc est, rectæ illi æqualis EF; erit quoq; semidiameter EF, circuli FGHIK, Rationalis. (Nam quadrata rectarum AB, EF, cùm habeant proportionem, quam numerus ad numerum, nempe quam 5. ad 1. vel 10. ad 2. [e] erunt commensurabilia; Ac propterea & rectæ AB, EF, commensurabiles erunt, saltem potentia. Cùm ergo AB, sit Rationalis, erit & EF, Rationalis.) Quare & tota diameter circuli FGHIK, Rationalis erit; Ac propterea FG, latus pentagoni, hoc est, latus Icosaedri, [f] Irrationalis erit linea, quæ vocatur Minor. Icosaedrum igitur constituimus, & sphæra sanus complexi, qua & antedictas figuras; & demonstrauimus, quòd Icosaedri latus Irrationalis est linea, quæ vocatur Minor. quod erat faciendum.

[e] 6. decimi.

[f] 11. tertiædecimi.

COROLLARIVM I.

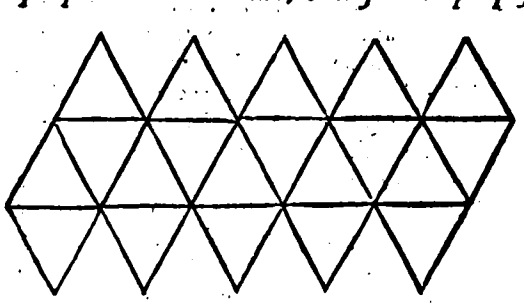
Ex dictis infertur, sphæræ diametrum esse potentia quintuplam semidiametri circuli quinque latera Icosaedri ambientis, ex quo scilicet Icosaedrum constitutum est, & qui per quinque Icosaedri angulos incedit. Ostensum enim est quadratum diametri AB, quintuplum esse quadrati rectæ BC, hoc est, semidiametri EF.

COROLLARIVM II.

Item manifestum est sphæræ diametrum esse compositam ex latere hexagoni, hoc est, ex semidiametro, & duobus lateribus decagoni eiusdem circuli: Nam YZ, diameter sphæræ componitur ex EQ, latere hexagoni, & ex QY, EZ, lateribus decagoni circuli FGHIK.

COROLLARIVM III.

Constat denique latera Icosaedri opposita, qualia sunt RX, HI, esse parallela. Nam recta RX, ostensa est parallela rectæ, quæ ex L, in P, duceretur. Cùm igitur eidem rectæ LP, sit quoque parallela recta HI, vt in scholio propositionis 27. lib. 3. demonstrauimus; (eò quòd æquales sunt arcus HL, IP; continet enim vterque tres decimas partes totius circumferentiæ,) perspicuum est, rectas RX, HI, esse parallelas. Eademq; est ratio de cæteris lateribus oppositis.



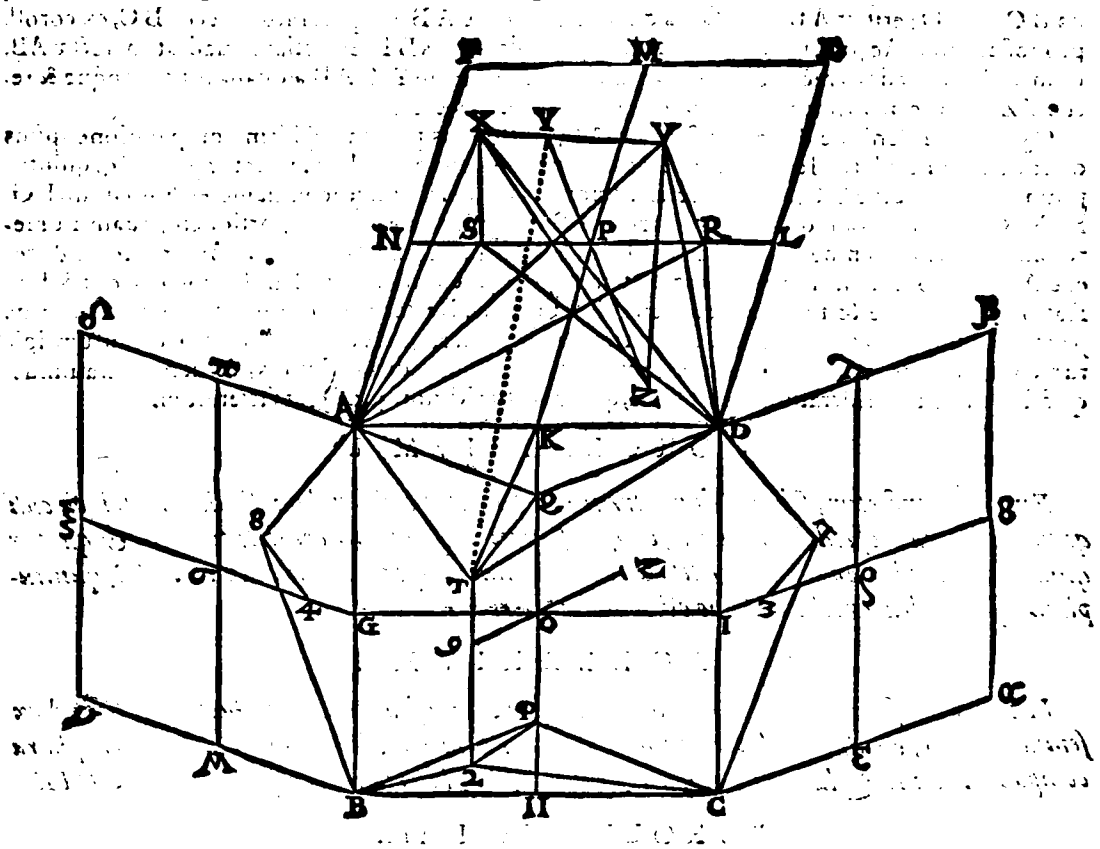
SCHOLIVM.

Qvod si ex aliqua materia conficiantur viginti triangula æquilatera inter se æqualia, disponanturque, vt hæc figura indicat, componetur Icosaedrum secundùm totam soliditatem, si rite inter sese aptentur.

17. # PROBL. 5. PROPOS. 17.

DODECAEDRVM constituere; & sphęra complecti, qua & prędictas figuras; & demonstrare, q̃ Dodecaedri latus Irrationalis est linea, quæ vocatur Apotome.

SIT vna basis cubi data sphæra comprehensi, quadratum A B C D, cui insistat aliud æquale ad rectos angulos A D E F, vt sit communis horum sectio recta A D, (Insistunt enim omnes bases cubi sibi mutuò ad angulos rectos. Nam in præcedentibus, vt cubus constitueretur, erectæ sunt ex angulis basis E F G H, quatuor lineę E I, F K, G L, H M, ipsi basi E F G H, perpendiculares. Id quod
a 18. *vndec.* facilè apparere potest ex figura propositionis 15. huius lib. *a* Quare & bases cubi per ipsas ductæ, rectæ erunt ad eandem basin E F G H.) Diuisis itaq; cunctis lateribus bifariam in punctis G, H, I, K, L, M, N, quæ rectis cõnectantur secantibus sese in O, P, centris quadratorum, vt constat ex demonstratione octani problematis lib. 4. Secentur O K, P L, P N, extrema ac media ratione in punctis Q, R, S, ex quibus ad plana quadratorum educantur extra cubum perpendiculares Q T, R V, S X, æquales segmentis maioribus O Q, P R, P S. Coniunctis deinde rectis A T, A X, D T, D V, V X; Dico A T D V X, esse vnum ex duodecim pentagonis æquilateris, & æquiangulis Dodecaedri constituendi. Quod enim pentagonum A T D V X, sit in vno plano, ita ostendetur. Cùm
b 6. *vndec.* R V, S X, sint ad quadratum A D E F, rectæ, *b* ipsæ erunt parallelæ; Ac proinde, cùm sint æqua-



les, (quia segmenta maiora P R, P S, quibus æquales sunt positæ, æqualia sunt, cùm & lineæ sectæ
c 33. *primi.* P L, P N, æquales sint.) *c* erunt quoque coniungentes rectæ R S, V X, æquales & parallelæ: *d* Est
d 33. *primi.* autem & A D, eidem R S, siue L N, parallela, eò quòd A N, D L, parallelæ sunt & æquales. *e* Igitur
e 9. *vndec.* & A D, V X, parallelæ sunt; *f* Ac propterea rectæ coniungentes A X, D V, in eodem cum ipsis
f 7. *vndec.* erunt plano; ideoque trapezium A D V X, in vno existet plano: Est autem & triangulum A T D, in vno plano. Dico quòd & in eodem plano cum trapezio A D V X. Ex P, namque ducatur P Y,
g 8. *vndec.* parallela ipsi R V, *g* quæ erit recta ad quadratum A D E F, quòd ad idem recta sit R V: Et connectantur rectæ K T, K Y. Quoniam igitur est vt O K, ad O Q, ita O Q, ad Q K, ob sectionem rectæ O K: Est autem K P, ipsi O K, æqualis; (sunt enim dimidia latera cubi;) & P Y, ipsi O Q, (cùm æqualis sit ipsi R V, quæ posita fuit æqualis ipsi O Q, maiori segmento;) Erit quoque vt K P, ad P Y, ita O Q, hoc est, Q T, illi æqualis, ad Q K. Quare cùm triangula P K Y, Q T K, duo la-
h 6. *vndec.* tera habeant duobus lateribus proportionalia, sintque ad vnum angulum K, composita, *h* ita vt homologa latera sint parallela, nempe P K, & Q T, inter se, quòd vtrumque rectum sit ad quadra-
i 32. *sexti.* tum A B C D; & P Y, Q K, inter se, quòd vtrumque rectum sit ad quadratum A D E F: *i* Erunt re-
k 1. *vndec.* liqua latera K Y, K T, in rectam lineam collocata; *k* Ac propterea recta T Y, in vno erit plano, ideoq; planum A T D, & planum A D V X, vnum planum constituent, per rectas T Y, A D, ductum. Quocirca pentagonum A T D V X, in vno existit plano.

Quod

QVOD verò sit æquilaterum, ita docebitur. Cùm latera AN, NS, trianguli ANS, æqualia sint lateribus AK, KQ, trianguli AKQ; (Sunt enim AN, AK, dimidia latera cubi, & NS, KQ, segmenta minora rectarum æqualium sectarum.) & anguli ANS, AKQ, recti; si ducatur recta AQ, [a] erunt bases AS, AQ, æquales. Rursus cùm latera AS, SX, trianguli ASX, sint æqualia lateribus AQ, QT, trianguli AQT; (Nam rectæ AS, AQ, ostensæ sunt æquales, & SX, QT, sunt segmenta maiora rectarũ æqualium sectarum) & anguli ASX, AQT, recti, ex defin. 3. lib. 11. [b] Erunt quoque bases AX, AT, æquales. Quod si ducatur recta DQ, ostendemus eodem argumento, rectam DT, rectæ AT; si verò ducatur recta DR, rectam DV, rectæ DT, esse æqualem. Sunt igitur pentagoni quatuor latera XA, AT, TD, DV; æqualia; quibus etiam æquale ostendemus reliquum VX, hac ratione. [c] Quadrata rectarum PN, NS, simul tripla sunt quadrati rectæ PS, hoc est, quadrati rectæ SX; Est autem quadrato rectæ PN, æquale quadratum rectæ AN. Igitur & quadrata rectarum AN, NS, simul tripla sunt quadrati rectæ SX. [d] Cùm ergo quadratis rectarũ AN, NS, æquale sit quadratũ rectæ AS; erit quoq; quadratũ rectæ AS, triplum quadrati rectæ SX; Ac proinde quadrata rectarum AS, SX, simul, quadrupla eiusdem quadrati rectæ SX. [e] Est autem quadratis rectarum AS, SX, æquale quadratum rectæ AX. Quadratum ergo rectæ AX, quadruplum quoque erit quadrati rectæ SX, hoc est, quadrati rectæ PS, hoc est, quadrati rectæ XY; [f] Sunt enim rectæ PS, XY, æquales. Cùm igitur & quadratum rectæ VX, quadruplum sit eiusdem quadrati rectæ XY, ex scholio propos. 4. lib. 2. quòd VX, dupla sit ipsius XY; Erunt quadrata rectarum AX, VX, æqualia; Ac proinde rectæ ipsæ æquales. Quare cùm & XA, AT, TD, DV, ostensæ sint esse æquales; æquilaterum est pentagonum ATDVX.

a 4. primi.
b 4. primi.
c 4. tertiædecimi.
d 47. primi.
e 47. primi.
f 34. primi.

QVOD autem & æquiangulum sit, ita perspicuum fiet. Ductis rectis AR, AV; cùm PN, secta sit in S, extrema ac media ratione, eiq; addita PR, æqualis maiori segmẽto PS; [g] erit quoq; NR, secta in P, extrema ac media ratione, maiusque segmentum erit NP. [h] Quadrata igitur rectarum NR, RP, simul tripla sunt quadrati rectæ NP, hoc est, quadrati rectæ AN: Est autem quadratum rectæ RV, æquale quadrato rectæ RP. Ergo & quadrata rectarum NR, RV, tripla sunt quadrati rectæ AN; Ac proinde quadrata rectarum NR, RV, AN, quadrupla sunt eiusdem quadrati rectæ AN. [i] Sunt autem quadrata rectarum NR, AN, æqualia quadrato rectæ AR. Igitur & quadrata rectarum RV, AR, quadrupla sunt quadrati rectæ AN. [k] Cùm ergo quadratis rectarum AR, RV, æquale sit quadratum rectæ AV; Erit quoque quadratum rectæ AV, eiusdem quadrati rectæ AN, quadruplum. At verò eiusdem quadrati rectæ AN, quadruplum est quadratum rectæ AD, ex scholio propos. 4. lib. 2. quòd AD, dupla sit ipsius AN. Æqualia igitur sunt quadrata rectarum AV, AD; ideoq; & rectæ AV, AD, æquales. Simili argumento, ductis rectis DS, DX, ostendemus DX, DA, æquales esse; ac propterea tres rectas AD, AV, DX, inter se esse æquales. Quoniam igitur latera TA, TD, trianguli TAD, æqualia sunt lateribus DV, VX, trianguli DXV; & bases AD, DX, æquales quoque: [l] Erunt & anguli ATD, DVX, æquales. Non secus ostendetur angulus DVX; æqualis angulo AXV. Ac proinde, cũ in pentagono æquilatero ATDVX, tres habeantur anguli æquales ATD, DVX, AXV, [m] ipsum erit æquiangulum.

g 5. tertiædecimi.
h 4. tertiædecimi.
i 47. primi.
k 47. primi.
l 8. primi.
m 7. tertiædecimi.

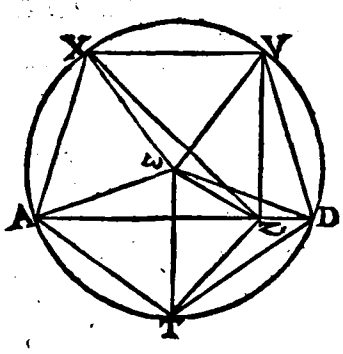
QVOD si sumantur alia duo cubi quadrata Cα, βD, Bγ, δA, recta ad quadratum ABCD, in communibus sectionibus CD, AB, quorum singula latera bifariam secẽtur in ε, ζ, λ, μ, ξ, ϖ, G, punctis, quæ rectis iungãtur se mutuò secantibus in quadratorum centris ρ, σ. Secentur deinde OH, OK, ρI, σG, extrema ac media ratione in punctis φ, Q, 3, 4, ex quibus ad plana quadratorum educantur ad partes cubi exteriores, perpendiculares φ2, QT, 37, 48, æquales segmentis maioribus φO, QO, 3ρ, 4σ, coniunganturq; rectæ T2, 2C, C7, 7D, DT, TA, A8, 8B, B2, demonstrabimus eadem ratione, pentagona T2C7D, T2B8A, æquilatera esse & æquiangula, & æqualia priori ATDVX, ob communia latera TD, TA. Constructa igitur iam sunt tria pentagona tangentia cubi tria latera AD, DC, AB, & sibi mutuò cohærentia lateribus communibus TD, TA. Si igitur eadem methodo fabricentur alia nouem similia pentagona, tangentia reliqua nouem cubi latera, constitutum erit Dodecaedrum. Quod quidem sphæra comprehendi, qua & cubus, & præcedentes figuræ comprehenduntur, hac arte demonstrabimus.

n 7. tertiædecimi.

INTELLIGANTVR plana cubi opposita secari planis, quæ per rectas planorum latera bifariam secantes ducuntur, nempe planum ADEF, & eius oppositum, planis ductis per rectas KM, LN. Item planum ABCD, & eius oppositum, planis per rectas GI, HK, ductis, &c. Quoniam igitur plana secantia recta sunt ad dicta plana cubi, quòd parallela sint basibus cubi, quæ rectæ sunt ad plana ADEF, ABCD. [n] Erunt & communes eorum sectiones ad eadem cubi plana rectæ. Quare cùm YP, recta sit ad planum ADEF, ipsa producta versus Z, erit communis sectio planorum per rectas KM, LN, ductorum. Eodem pacto si ex O, ad planum ABCD, erigatur perpendicularis ϙOZ; erit ipsa communis sectio planorum, quæ per rectas GI, HK, ducuntur. [o] Quia verò dictæ communes sectiones & diametri cubi se mutuò bifariam secant; secent se mutuò bifariam in Z: Secant autem sese diametri cubi bifariam in centro sphæræ cubum complectentis, ex corollario primo, propositionis decimæquintæ huius libri. Punctum igitur Z, centrum erit sphæræ circa cubum descriptæ; Ac proinde omnes rectæ ex Z, ad omnes angulos cubi ductæ inter se æquales erunt: Quibus omnibus æquales quoque esse omnes rectas ex Z, ad omnes angulos Dodecaedri ductas, sic fiet perspicuum, ducta recta ZX. [p] Quoniam parallelæ sunt KP, OZ, quòd vtraq; recta sit ad planum ABCD; Item parallelæ sunt OK, ZP, quòd vtraq; recta sit ad planum ADEF; erit PKOZ, (debent enim duo puncta Z, intelligi esse cõiuncta) parallelo-

o 38. vndec.
p 6. vndec.

grammum; [a] ac propterea P Z, æqualis erit ipsi K O, hoc est, ipsi N P, dimidio lateri cubi: Est autem & P Y, ipsi P R, æqualis. Tota ergo Z Y, toti N R, æqualis erit. [b] Quare cùm quadrata rectarũ N R, P R, simul tripla sint quadrati rectæ N P, quòd N R, in P, secta sit extrema & media ratione: erunt quoq; quadrata rectarum Z Y, P Y, hoc est, quadrata rectarũ Z Y, Y X, simul tripla quadrati rectæ P Z: (Est enim Y X, æqualis ipsi P S, hoc est, ipsi P Y:) [c] Est autem quadratis rectarum Z Y, Y X, æquale quadratum rectæ Z X. Igitur & quadratum rectæ Z X, triplum erit quadrati rectæ Z P, hoc est, quadrati dimidij lateris cubi. At quia eiusdem quadrati dimidij lateris cubi triplum, est quoque quadratum semidiametri sphæræ cubum comprehendentis. ([d] Nam vt diameter ad latus cubi, ita est semidiameter ad dimidium lateris; [e] Ac proinde vt quadratũ diametri ad quadratum lateris, ita quadratum semidiametri ad quadratum dimidij lateris. [f] Cùm ergo quadratum diametri triplum sit quadrati lateris, erit quoque quadratum semidiametri triplum quadrati dimidij lateris.) Æquale igitur est quadratum rectæ Z X, quadrato semidiametri sphæræ, seu cubi: Ac propterea Z X, æqualis semidiametro. Eadem ratione erit ducta recta Z V, semidiametro æqualis. Vel certè quia cùm latera Z Y, Y X, trianguli Z Y X, æqualia sint lateribus Z Y, Y V, trianguli Z Y V, & anguli contenti recti. (cùm enim P Y, sit perpendicularis ad L N, erit quoque eadem ad sibi parallelam V X, perpendicularis.) [g] Erunt bases Z X, Z V, æquales: Sunt autem & Z A, Z D, ad angulos cubi, semidiametro sphæræ æquales, vt dictum est. Sunt ergo iam quatuor rectæ ductæ ex Z, centro sphæræ ad quatuor angulos pentagoni A, D, V, X, æquales semidiametro sphęræ. Vt autem ostendatur & recta ducta Z T, ad quintum angulum T, semidiametro æqualis, describatur circa pentagonum, cùm sit æquilaterum & æquiangulum, circulus A T D V X, & in planum ipsius ex Z, centro sphæræ perpẽdicularis demittatur Z ω, connectanturq́ue rectæ ω A, ω T, ω D, ω V, ω X. [h] Quoniam igitur quadratum rectæ Z A, æquale est quadratis rectarum Z ω, ω A; & quadratum rectæ Z X, quadratis rectarum Z ω; ω X: Sunt autem quadrata rectarum Z A, Z X, æqualia, quòd rectæ Z A, Z X, ostensæ sint æquales; Igitur & quadrata rectarum Z ω, ω A, quadratis rectarum Z ω, ω X, æqualia; Ac proinde dempto communi quadrato rectæ Z ω, æqualia relinquẽtur quadrata rectarum ω A, ω X, ideoq; rectæ ipsæ ω A, ω X, æquales erunt. Non aliter ostẽdentur rectæ ω V, ω D, & inter se, & ipsis ω A, ω X, æquales, quòd & rectæ Z V, Z D, æquales sint ostensę rectis Z A, Z X. Quare cùm ex ω, cadant in circumferentiam plures rectæ lineæ æquales, quàm duę, [i] punctum ω, centrum erit circuli; Ac proinde ω T, reliquis ex centro ductis æqualis; ideoq; quadrata rectarum Z ω, ω A, æqualia erunt quadratis rectarum Z ω, ω T. [k] Cùm ergo illis duobus æquale sit quadratum rectæ Z A; his verò quadratum rectæ Z T; Erunt æqualia quadrata rectarum Z A, Z T; propterea q́; & rectæ Z A, Z T, æquales. Quare sphæra complectens cubum, ex centro Z, descripta, comprehendet pentagonum quoque A T D V X; Eodemq́ue modo & reliqua pentagona Dodecaedri; Ac propterea eadem sphæra comprehendetur Dodecaedrum, qua cubus.



[a] 34. primi. [b] 4. tertiidecimi. [c] 47. primi. [d] 15. quinti. [e] 22. sexti. [f] 15. tertiidecimi. [g] 4. primi. [h] 47. primi. [i] 9. tertij. [k] 47. primi.

POSTREMO cùm sit vt N P, ad P S, ita P S, ad S N: [l] erit quoque vt N L, dupla ipsius N P, ad R S, duplam ipsius P S, ita R S, dupla ipsius P S, ad rectam compositam ex S N, R L, nimirum ad duplam ipsius S N. Si igitur cubi latus N L, secetur extrema ac media ratione, maius segmentum erit S R: Sed N L, tota ita secta, Rationalis est. (Nam eius quadratum commensurabile est quadrato diametri sphæræ, quæ Rationalis ponitur; cùm sit illud tertia pars huius.) [m] Igitur maius segmentum S R, hoc est, dodecaedri latus X V, illi æquale, Irrationalis est linea, quæ vocatur Apotome. Dodecaedrum ergo constituimus, & sphæra cõplexi sumus, qua & prædictas figuras; & demõstrauimus, q; Dodecaedri latus Irrationalis est linea, q̃ vocatur Apotome. Quod erat faciendũ.

[l] 15. quinti. [m] 6. tertiidecimi.

COROLLARIVM I.

CVM ergo demonstratum sit; recta L N, extrema ac media ratione secta, maius segmentum esse rectam R S: Sit autem L N, æqualis lateri cubi, & R S, lateri Dodecaedri; Perspicuum est, si latus cubi secetur extrema ac media ratione, maius segmentum esse latus Dodecaedri in eadem sphæra descripti.

COROLLARIVM II.

SIC quoq; latus cubi æquale est linea rectæ subtendenti angulum pentagoni Dodecaedri eadem sphæra comprehensi. Nam A D, latus cubi subtendit angulum T, pentagoni, estq; ostensum æquale rectis A V, D X, subtendentibus angulos X, & V, eiusdem pentagoni.

QVONIAM verò recta subtendens dictum angulum pentagoni secta extrema ac media ratione, [a] facit maius segmentũ latus pentagoni; [b] ac propterea recta cõposita ex dicta recta subtendente angulum pentagoni, hoc est, ex latere cubi, & ex maiori segmento, id est, ex latere Dodecaedri, similiter diuiditur, facitq; minus segmentum latus Dodecaedri, & maius segmentum latus cubi: Efficitur, si recta linea secetur extrema ac media ratione, cuius minus segmentum sit latus Dodecaedri, maius segmentum esse latus cubi eiusdem sphæræ.

[a] 8. tertiidecimi. [b] 5. tertiidecimi.

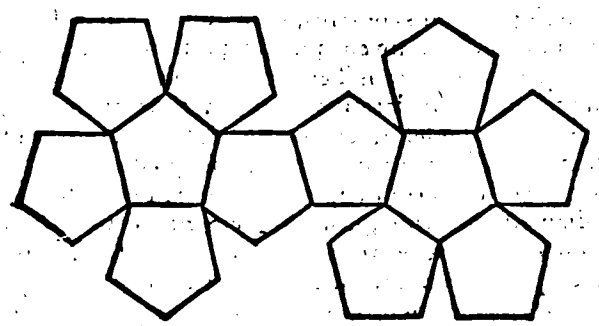
COROL-

COROLLARIVM III.

CONSTAT etiam ex dictis, in Dodecaedro esse sex latera, quorum bina opposita sunt parallela, bifariamq; secantur, & ad angulos rectos à tribus lineis rectis æqualibus sese in centro Dodecaedri bifariam quoque, & ad angulos rectos secantibus. Nam duo ex dictis lateribus sunt VX, TZ, quæ videlicet parallela sunt lateribus cubi EF, AB; aliaq; quatuor reperiuntur super reliquas quatuor bases cubi, quorum, quæ super bases cubi oppositas existunt, parallela sunt, cùm parallela sint cubi lateribus parallelis & oppositis, secanturq; ex demonstratis, bifariam & ad rectos angulos, à lineis rectis, quæ centra basium cubi oppositarum coniungunt; quales sunt rectæ YZ, ΨZ, ΘZ, quæ, vt demonstratum est, se mutuò intersecant in centro Z. Dico se mutuò secare bifariam & ad angulos rectos: bifariam quidem, quoniam cùm rectæ PZ, OZ, æquales sint dimidijs lateri cubi; & YP, ΨO, æquales maioribus segmentis æqualibus PS, OΩ, erunt totæ YZ, ΨZ, æquales; Eademq; ratione reliquæ lineæ ex Z, ad sectiones oppositarum laterum ductæ, æquales erunt. Quare totæ tres lineæ æquales sunt, seq; bifariam in centro Z, mutuò secant: Ad angulos rectos verò, quia in parallelogrammo KΘZP, angulus ΘZP, rectus est, cùm opponatur recto ΘKP. Non aliter ostendentur reliquæ lineæ rectæ centra basium coniungentes, efficere angulos rectos. Omnes enim parallelæ sunt lateribus cubi parallelis rectos angulos constituentibus, vt perspicuum est.

COROLLARIVM IIII.

DENIQVE constat, si recta diuidens opposita latera Dodecaedri bifariam, & ad angulos rectos, vt dictum est, secetur extrema ac media ratione, maius segmentum esse latus cubi, minus verò, latus Dodecaedri eadem sphæra comprehensi. Cùm enim quadrata rectarum ZY, YP, tripla ostensa sint quadrati rectæ PZ; erit ZY, secta in P, extrema ac media ratione, maiusq; segmentum erit PZ, ex scholio propos. 4 huius lib. Ac proinde erit vt ZY, ad ZP, ita ZP, ad PY; ideoq; vt dupla ipsius ZY, nempe recta diuidens latera opposita Dodecaedri bi- a 15. quinti *fariam, ad duplam ipsius ZP, nimirum ad latus cubi, ita eadem dupla ipsius ZP, ad duplam ipsius PY, hoc est, ad latus Dodecaedri. Quare recta diuidens latera opposita Dodecaedri bifariam, secta extrema ac media ratione, facit maius segmentum, latus cubi, minus verò, latus Dodecaedri eiusdem sphæræ.*

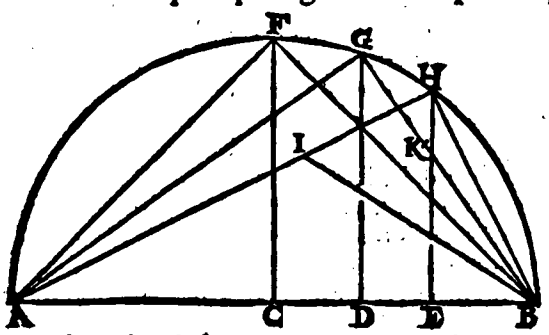


SCHOLIVM.

QVOD si ex aliqua materia conficiantur duodecim pentagona æquilatera, & æquiangula, inter se æqualia, disponanturq; vt hæc figura indicat, componetur Dodecaedrum secundùm totam soliditatem, si ritè inter se complicentur.

PROBL. 6. PROPOS. 18. 18.

LATERA quinque figurarum exponere, & inter se comparare.



SIT sphæræ diameter AB, quæ in C, secetur bifariã; In D, verò ita, vt BD, sit ipsius pars tertia; In E, denique ita, vt BE, sit quinta pars eiusdem. Descripto deinde circa AB, semicirculo, ducantur ad eius circumferentiam ex C, D, E, ipsi AB, perpendiculares CF, DG, EH; connectanturq; rectæ AF, BF, AG, BG, AH, BH. Post hæc ex HA, abscindatur HI, æqualis lateri Decagoni in eo circulo descripti, cuius semidiameter, seu latus Hexagoni est BH: connectaturq; recta BI. Postremò BG, secetur extrema ac media ratione in K, sitq; maius segmentum BK.

QVOD igitur attinet ad expositionem laterum prædictarum figurarum, dico AG, esse latus Pyramidis, seu Tetraedri; AF, latus Octaedri; BG, latus cubi; BI, latus Icosaedri; BK, denique latus Dodecaedri. Quoniam n. AG, media proportionalis est inter BA, AD, ex coroll. propos. 8 lib. 6.

Erit ex coroll. propoſ. 20. eiuſdem lib. vt B A, ad A D, ita quadratum rectæ B A, ad quadratum rectæ A G: Eſt autem B A, ipſius A D, ſeſquialtera; cùm tanium partium 2. ſit A D, qualium 3. eſt B A. Igitur & quadratum rectæ B A, ſeſquialterum eſt quadrati rectæ A G; [a] Ac proinde cùm diameter ſphæræ ſit potentia ſeſquialtera lateris Tetraedri; erit A G, latus Tetraedri.

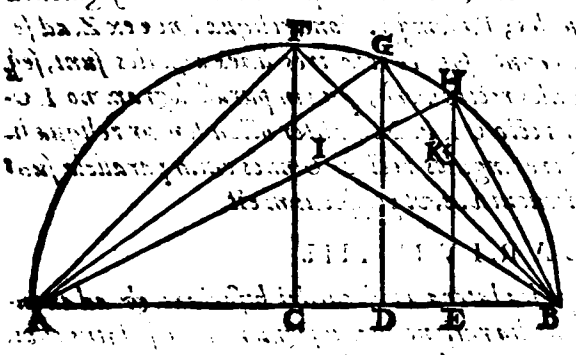
a 13. *tertiædecimi.*

RVRSVS quoniam A F, eſt media proportionalis inter B A, A C, ex eadem coroll. propoſ. 8. lib. 6. Ac proinde vt B A, ad A C, ita quadratum rectæ B A, ad quadratum rectæ A E, ex adducto coroll. propoſ. 20. lib. 6. Eſt autem B A, ipſius A C, dupla: Erit quadratum rectæ B A, duplum quadrati rectæ A F. [b] Quare cùm diameter ſphæræ potentia ſit duplà lateris Octaedri; erit A F, latus Octaedri. Eodem modo erit B F, latus Octaedri.

b 14. *tertiædecimi.*

RVRSVS cùm B G, ſit media proportionalis inter A B, B D, ideoq; vt A B, ad B D, ita quadratum rectæ A B, ad quadratum rectæ B G, ex prefatis duobus corollariis lib. 6. Sit autem A B, ipſius B D, tripla, ex conſtructione: Erit quadratum rectæ A B, triplum quadrati rectæ B G. [c] Quocirca cùm ſphæræ diameter potentia ſit tripla lateris cubi; Erit B G, latus cubi.

c 15. *tertiædecimi.*



PRÆTEREA quia, ex eiſdem corollariis, B H, eſt media proportionalis inter A B, B E, atque ideirco vt A B, ad B E, ita quadratum rectæ A B, ad quadratum rectæ B H: Eſt autem, ex conſtructione, A B, ipſius B E, quintupla: Erit quadratum rectæ A B, quintuplum quadrati rectæ B H. Cùm igitur diameter ſphæræ potentia ſit quintupla ſemidiametri circuli quinque latera Icoſaedri ambientis, ex coroll. 1. propoſ. 16. huius lib. Erit B H, ſemidiameter, hoc eſt, latus hexagoni dicti circuli: Eſt autem H I, latus decagoni eiuſdem circuli, ex conſtructione. [d] Igitur latus pentagoni poterit B H, & H I, ſimul; Ac proinde [e] cùm quadratum rectæ B I, æquale ſit quadratis rectarum B H, H I; erit B I, latus pentagoni circuli eiuſdem. [f] Quam ob rem B I, latus eſt Icoſaedri.

d 10. *tertiædecimi.*

e 47. *primi.*

f 16. *tertiædecimi.*

DANIQVE, cùm B G, latus cubi ſectum ſit in K, extrema & media ratione, erit B K, maius ſegmentum, latus Dodecaedri in eadem ſphæra deſcripti, ex coroll. 1. propoſ. 17. huius lib. Expoſita ergo ſunt latera quinque figurarum regularium in eadem ſphæra deſcriptarum.

QVOD verò ad comparationem laterum iam inuentorum ſpectat; cùm demonſtratum ſit, diametrum ſphæræ eſſe potentia ſeſquialterâ lateris pyramidis; potentia verò duplam lateris Octaedri, & potentia triplam lateris cubi; perſpicuum eſt, qualium partium 6. fuerit quadratum diametri, talium 4. eſſe quadratum lateris Tetraedri; talium verò 3. quadratum lateris Octaedri; & denique quadratum lateris cubi, talium 2. Ac propterea latus pyramidis, ſeu Tetraedri, eſſe potentia ſeſquitertium lateris Octaedri, potentia verò duplum lateris cubi. Item latus Octaedri potentia eſſe ſeſquialterum lateris cubi. Quapropter quadrata ex lateribus harum trium figurarum, Tetraedri nimirum, Octaedri, & cubi, nec non ex ſphæræ diametro deſcripta, proportionem inter ſe habent, quâ numerus ad numerum; [g] Ac propterea diameter ſphæræ, & latera dictarum figurarũ lineæ ſunt commenſurabiles; atque adeò cùm diameter ſphæræ ponatur eſſe Rationalis, erunt quoque prædicta latera Rationalia. Quia verò dicta quadrata nõ habent proportionem, quam numerus quadratus ad numerum quadratum, vt conſtat ex coroll. propoſ. 24. lib. 8. [h] Erunt huiuſmodi lineæ, nimirum diameter ſphæræ, latus Tetraedri, latus Octaedri, & latus cubi, longitudine incommenſurabiles, ac proinde Rationales potentia tantùm commenſurabiles.

Quadrati	6.
Tetraed.	4.
Octaed.	3.
Cubi.	2.

g 6. *decimi.*

h 9. *decimi.*

AT verò latera Icoſaedri, & Dodecaedri, quoniam ſunt lineę Irrationales, illud quidem, Minor hoc verò Apotome, vt demonſtratum eſt, nullo modo, hoc eſt, nec longitudine, nec potentia commenſurabilia ſunt lateribus prædictis. Si enim commenſurabilia eſſent latera harum poſteriorum figurarum lateribus priorum, cùm latera priorum ſint diametro ſphæræ commenſurabilia; eſſent quoque latera poſteriorum eidem diametro commenſurabilia; Ac proinde, exiſtente diametro Rationali, forent quoque ipſa latera Rationalia. Quod eſt abſurdum. oſtenſum enim eſt, ipſa eſſe Irrationalia.

SED neque inter ſe vllo pacto commenſurabilia ſunt dicta latera Icoſaedri, & Dodecaedri. Si namque credantur eſſe commenſurabilia longitudine inter ſe, cùm latus Dodecaedri ſit Apotome, [i] erit quoque latus Icoſaedri, Apotome. Item cùm latus Icoſaedri ſit linea Minor, [k] erit & latus Dodecaedri linea Minor. Quod ſi dicantur commenſurabilia eſſe potentia tantùm, ſequetur eodem modo, latus Dodecaedri eſſe lineam Minorem, ex eo, [l] quòd latus Icoſaedri Minor eſt. Quod eſt abſurdum. Nam ex ſcholio propoſ. 112. lib. 10. Apotome, & Minor ſunt lineæ Irrationales prorſus inter ſe differentes, ita vt neutra ſit eadem alteri.

i 104. *deci.*

k 106. *deci.*

l 16. *tertiædecimi.*

[i] ITAQVE quamuis ex lateribus expoſitis quinque figurarum regularium, tria quidem priora ſint commenſurabilia & inter ſe, & diametro ſphæræ, ideoq; Rationalia exiſtant, duo verò poſteriora incommenſurabilia & inter ſe, & diametro, reliquisq; lateribus; ac proinde Irrationalia ſint:

Cernitur

Cernitur tamen inter omnia latera prædicta hic ordo, vt latus Tetraedri maius sit latere Octaedri; Octaedri latus maius latere cubi; Latus cubi maius latere Icosaedri; Latus denique Icosaedri maius latere Dodecaedri; Hoc est, eo ordine se mutuò excedunt dicta latera, quo præfatas figuras construximus. Quæ fortè causa fuit, cur Euclides non eodem ordine huiusmodi figuras fuerit fabricatus, quo eas definiuit.

NAM latus Tetraedri maius esse latere Octaedri, perspicuum est. Cùm enim AG, latus Tetraedri subtendat maiorem arcum, quàm AF, latus Octaedri; maior erit recta AG, quàm AF, ex scholio propos. 28. lib. 3.

EODEM modo ostendemus latus Octaedri maius esse latere cubi. Nam BF, latus Octaedri maiorem arcum subtendit, quàm BG, cubi latus.

LATVS autem cubi BG, maius esse latere Icosaedri BI, hac arte demonstrabimus. Quoniam AB, tripla ponitur ipsius BD; [a] & quadrata habent proportionem laterum duplicatam: erit quadratum rectæ AB, noncuplum quadrati rectæ BD, cùm noncupla proportio sit duplicata proportionis triplæ, vt hìc apparet 1. 3. 9. Ac propterea qualium partium 9. ponetur quadratum rectæ AB, talium 1. erit quadratum rectæ BD. Qualium autem partium 9. est quadratum rectæ AB, talium 3. est quadratum rectæ BG; [b] quòd illud huius triplum sit; Ac proinde talium quoque 3. sunt quadrata rectarum GD, BD, cùm æqualia sint quadrato rectæ BG. Igitur si auferatur quadratum rectæ BD, talium partium 1. relinquetur talium partium 2. quadratum rectæ GD. Quoniam verò quadratum rectæ AB, quintuplum est quadrati rectæ BH, erit quadratum rectæ BH, minus quàm talium partium 2. Nam cùm 9. ad 2. minorem habeant proportionem quintupla, quòd 10. ad 2. quintuplam proportionem habeant; [c] erit numerus, ad quem 9. habent proportionem quintuplam, minor quàm 2. Quare quadratum rectæ GD, maius est quadrato rectæ BH, ideoq; recta GD, maior quàm recta BH. Rursùs quia diameter sphæræ AB, componitur ex BH, semidiametro circuli, ex quo Icosaedrum constituitur, & ex linea dupla lateris decagoni HI, eiusdem circuli, per coroll. 2. propos. 16. huius lib. constat latus decagoni HI, minus esse tertia parte rectæ AB, hoc est, minus recta BD. Nam si HI, recta æqualis credatur tertiæ parti rectæ AB; erit dupla illius, æqualis duabus tertiis partibus, nempe ipsi AD; Ac propterea BH, reliquæ tertiæ parti erit æqualis, nimirum ipsi BD; Atque adeò, cùm quadratum rectæ AB, noncuplum sit ostensum quadrati rectæ BD, erit idem quadratum rectæ AB, noncuplum quadrati rectæ BH. Quod est absurdum. quintuplum enim est demonstratum. Non ergo HI, tertia pars est ipsius AB: Sed neque maior tertia parte. Si enim recta HI, dicatur maior tertia parte rectæ AB, & proinde dupla ipsius HI, maior quàm duæ tertiæ, hoc est, quàm AD, erit BH, minor quàm tertia pars BD. Quare quadratum rectæ AB, maius erit, quàm noncuplum quadrati rectæ BD. Quod magis est absurdum. Non igitur maior est HI, tertia parte ipsius AB: Sed neque æqualis tertiæ parti, vt ostendimus. Minor ergo est quàm tertia pars, hoc est, quàm BD. Itaque cùm rectæ GD, DB, maiores sint rectis BH, HI, vt demonstratum est, erunt quoque quadrata illarum quadratis harum maiora: [d] Est autem quadratum rectæ BG, æquale quadratis rectarum GD, DB; & quadratum rectæ BI, quadratis rectarum BH, HI. Quadratum ergo rectæ BG, maius quoque erit quadrato rectæ BI; Ac proinde recta BG, nempè latus cubi, maior erit quàm recta BI, latus scilicet Icosaedri.

MALVS denique esse latus Icosaedri BI, latere Dodecaedri BK, hac ratione patefiet. Cùm rectæ BG, diuisæ extrema ac media ratione, maius segmentum sit BK, & minus GK; erit rectangulum sub BG, BK, maius rectangulo sub BG, GK; atque adeò rectangula sub BG, BK, & sub BG, GK, simul maiora duplo rectanguli sub BG, GK: [e] Est autem rectangulis sub BG, BK, & sub BG, GK, æquale quadratum rectæ BG; Et duobus rectangulis sub BG, GK, æqualia sunt duo quadrata rectæ BK. (Nam cùm sit, vt BG, ad BK, ita BK, ad GK; [f] erit quadratum rectæ BK, æquale rectangulo sub BG, GK, ideoque duo quadrata rectæ BK, æqualia duobus rectangulis sub BG, GK.) Maius igitur quoque est quadratum rectæ BG, duobus quadratis rectæ BK; Atque idcirco maiora erunt tria quadrata rectæ BG, sex quadratis rectæ BK: Atqui tribus quadratis rectæ BG, æqualia sunt quinque quadrata rectæ BH, (Cùm enim quadratum rectæ AB, triplum sit quadrati rectæ BG, & quintuplum quadrati rectæ BH, erunt tam tria quadrata rectæ BG, quàm quinque quadrata rectæ BH, æqualia eidem quadrato rectæ AB, ideoque tria illa, his quinque æqualia.) Igitur & quinque quadrata rectæ BH, maiora erunt sex quadratis rectæ BK; Ac proinde vnum quadratum rectæ BH, maius erit vno quadrato rectæ BK. (Si namq; æquale esset quadratum rectæ BH, quadrato rectæ BK, vel minus; forent quinque quadrata rectæ BH, minora sex quadratis rectæ BK. quod est absurdum, cùm illa quinq; hisce sex maiora sint demonstrata.) Quàm ob rem & recta BH, maior erit quàm recta BK; Ac propterea cùm BI, maior sit quàm BH, multò maior erit BI, latus videlicet Icosaedri, quàm BK, latus Dodecaedri. Latera igitur quinque figurarum exposuimus, & inter se comparauimus. Quod erat faciendum.

a 20. sexti.

b 15. tertij decimi.

c 10. quinti.

d 47. primi.

e 2. secundi.

f 17. sexti.

SCHOLIVM.

INTERPRETES hoc loco demonstrant, præter dictas quinq; figuras, non posse aliam constitui figuram solidam, quæ planis & æquilateris & æquiangulis contineatur, inter se æqualibus, hac ferè ratione.

Ex duobus triangulis, vel ex duabus figuris aliis, solidus angulus constitui non potest, cùm saltem tres anguli plani requirantur ad solidi anguli constitutionem.

Ex tribus autem triangulis æquilateris, conflatur pyramidis angulus.

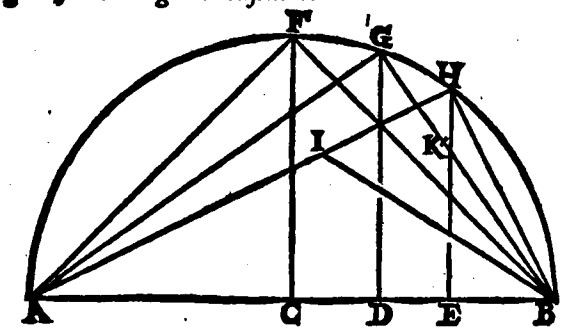
Ex quatuor, Octaedri angulus;

Ex quinque, angulus Icosaedri;

Ex sex autem huiusmodi triangulis ad idem punctum coeuntibus fieri non potest angulus solidus. Cùm enim trianguli æquilateri angulus contineat duas tertias partes vnius recti, ex coroll. 3. propos. 32. lib. 1. Erunt eiusmodi anguli sex, duodecim tertiæ partes vnius recti, hoc est, erunt quatuor rectis æquales. Quare ex ipsis nullus angulus solidus constituetur. [a] *Nam solidus omnis angulus, minoribus quàm quatuor rectis angulis continetur. Multò ergo minus ex pluribus, quàm sex planis eiusmodi angulis, solidus angulus constabit.*

a 20. vndecimi.

Ex tribus deinde quadratis, cubi angulus conficitur. Ex quatuor autem quadratis nullus angulus solidus constitui potest. Rursus enim recti quatuor erunt. Multò ergo minus ex pluribus, quàm quatuor eiusmodi angulis, solidus angulus constabit.



Ex tribus denique pentagonis æquilateris, & æquiangulis, Dodecaedri angulus componitur. Cùm enim quinq; anguli pentagoni æquales sint sex rectis, vt ostendimus ad propos. 32. lib. 1. Ac proinde vnus angulus contineat vnum rectum, ac præterea quintam partem vnius recti; continebunt tres eiusmodi anguli tres rectos, & insuper tres quintas partes vnius recti. Quare minores erunt quatuor rectis, ideoq; ex ipsis angulus solidus constituetur. Sed ex quatuor huiusmodi angulis, nullus solidus angulus confici potest. Cùm enim vnus, vt dictum est, maior sit recto, eò quòd continet vnum rectum, & insuper recti quintam partem; erunt quatuor maiores quatuor rectis. Quare nullus angulus solidus ex ipsis cõstituetur; Ac propterea multò minus ex pluribus, quàm quatuor eiusmodi angulis, solidus angulus constabit. Nec sanè ex aliis figuris æquilateris, & æquiangulis constitui poterit angulus solidus. Nam cùm sex anguli hexagoni æquales sint octo rectis, vt ad propos. 32 lib. 1. est demonstratum; Ac proinde vnus angulus contineat vnum rectum, ac præterea duas partes sextas vnius recti; continebunt tres anguli eiusmodi tres rectos, & sex sextas partes recti, hoc est, quatuor rectos. Quare ex ipsis nullo modo componetur angulus solidus; Atque idcirco multò minus ex pluribus eiusmodi angulis, quàm tribus, angulus solidus conficietur; neque propterea ex aliis polygonis. Quilibet enim tres maiores sunt quatuor rectis. Quam ob rem perspicuum est, præter dictas quinque figuras, aliam figuram solidam non posse constitui, quæ planis æquilateris, & æquiangulis inter se æqualibus contineatur.

Nam si tria triangula æquilatera & æqualia coeant in vnum punctum ad constitutionem anguli solidi, constituetur Pyramidis contenta quatuor huiusmodi triangulis.

Si verò quatuor eiusmodi triangula conueniant ad angulum solidum componendum, efficietur Octaedrum octo triangulis eiusmodi comprehensum.

Si denique assumantur quinque talia triangula ad efformandum angulum solidum, conficietur Icosaedrum viginti triangulis eiusmodi contentum.

Quod si tria quadrata æqualia coeant in vnum punctum, vt constituant angulum solidum, fabricabitur cubus ex sex huiusmodi quadratis.

Postremo, si tria pentagona æquilatera, & æquiangula, inter se æqualia conueniant ad constitutionem anguli solidi, componetur Dodecaedrum duodecim eiusmodi pentagona continens.

Hoc etiam loco apponere libet modum quendam ex Hypsicle Alexandrino, quo expedite numerus laterum, & angulorum cuiuslibet figuræ regularis habeatur.

Si enim quis interrogauerit, quotnam latera quoduis Regularium Solidorum habeat; Multiplicanda sunt omnes bases in vnius basis latera, vt habeantur omnium basium latera: Quia verò bina semper laterum basium in vnum conueniunt, ad constitutionem vnius lateris Regularis solidi, sumendum est dimidium omnium laterum, vt numerus laterum Regularis solidi appareat.

Exemplvm. Si quatuor triangula Pyramidis, siue Tetraedri, multiplicentur in numerum laterum vnius trianguli, vt in 3. fiunt 12. quorum dimidium est 6. numerus scilicet laterum Pyramidis. Ad eundem modum & in reliquis. Si enim sex quadrata cubum componentia multiplicentur in vnius quadrati latera, nempe in 4. fiunt 24. quorum dimidium est 12. numerus videlicet laterum cubi. Si autem octo triangula Octaedri multiplicentur in 3. numerum laterum vnius trianguli, fiunt 24. quorum dimidium est rursus 12. numerus laterum Octaedri. Si rursus 20. triangula Icosaedri multiplicentur in 3. numerum laterum vnius trianguli, fiunt 60. quorum dimidium est 30. numerus laterum Icosaedri. Si denique 12. pentagona Dodecaedrum constituentia multiplicentur in 5. numerum laterum vnius pentagoni, fiunt 60. quorum dimidium est rursus 30. numerus laterum Dodecaedri.

Quod si quis rursus interrogauerit, quotnam angulos solidos quoduis Regularium Solidorum habeat: Multiplicanda sunt omnes bases in vnius basis angulos, vt habeantur omnium basium anguli: Quia verò tres quatuor,

quatuor, vel quinq; ſemper anguli baſium in vnum conueniunt, ad conſtitutionem vnius anguli ſolidi, diuidendi ſunt omnes anguli in numerum angulorum, qui ſimul coeunt ad angulum ſolidum conſtituendum, vt numerus angulorum ſolidorum Regularis ſolidi appareat.

EXEMPLVM. Si quatuor triangula Pyramidis multiplicentur in 3. numerũ angulorum vnius trianguli, fiunt 12. anguli, qui ſi diuidantur in 3. (Tot enim anguli conſtituunt vnum ſolidum angulum Pyramidis) faciunt 4. angulos ſolidos Pyramidis. Si verò 6. quadrata cubi multiplicẽtur in 4. numerum angulorum vnius quadrati, fiunt 24. anguli, qui diuiſi in 3. (Tot enim anguli conficiunt vnum angulum ſolidum cubi.) faciunt 8. angulos ſolidos cubi. Si quoque octo triangula Octaedri multiplicentur in 3. numerum angulorum vnius trianguli, fiunt 24. anguli, qui diuiſi in 4. (Tot enim anguli componunt ſolidum angulum Octaedri.) conficiunt 6. angulos ſolidos Octaedri. Si rurſus 20. triangula Icoſaedri multiplicentur in 3. numerum angulorum vnius trianguli, fiunt 60. anguli, qui diuiſi in 5. (Tot enim anguli conſtituunt angulum ſolidum Icoſaedri.) producunt 12. angulos ſolidos Icoſaedri. Si denique 12. pentagona Dodecaedri multiplicentur in 5. numerum angulorum vnius pentagoni, fiunt 60. anguli, qui diuiſi in 3. (Tot enim anguli conueniunt ad conſtituendum angulum ſolidum Dodecaedri.) efficiunt 20. angulos ſolidos Dodecaedri.

DENIQVE conſideratione etiam dignum eſt, cubum & octaedrum reciproca eſſe, quod ad baſes attinet, & ad angulos ſolidos. Nam quot baſes in vno continentur, tot anguli ſolidi in altero reperiuntur, & contrà. Vt cubus habet ſex baſes, & octo angulos ſolidos, octaedrum verò octo continet baſes, & ſex angulos ſolidos. Sic etiã reciproca ſunt Icoſaedrum, & Dodecaedrum. Nam Icoſaedrum habet viginti baſes, & duodecim ſolidos angulos, at Dodecaedrũ duodecim baſes poſſidet, & viginti angulos ſolidos. Solum Tetraedrũ, (hoc eſt Pyramis) cum nullo reciprocatur, niſi cũ ſeipſo. Habet enim quatuor baſes totidemq; ſolidos angulos.

FINIS ELEMENTI DECIMITERTII.

EVCLIDIS ELEMENTVM QVARTVMDECIMVM:

& Solidorum quartum,

vt quidam arbitrantur: Vt alij verò, Hypſiclis Alexandrini de quinq; corporibus,

LIBER PRIMVS.

PROOEMIVM HYPSICLIS ALEXANDRINI ad Protarchum.

BASILIDES Tyrius, Protarche, Alexandriam profectus, patriq; noſtro ob diſciplinæ ſocietatem commendatus, longiſſimo peregrinationis tempore cum eo verſatus eſt. Cumq; diſſererent aliquando de ſcripta ab Apollonio comparatione Dodecaedri & Icoſaedri eidem ſphæræ inſcriptorum, quam hæc inter ſe habeant rationem, cenſuerunt ea non rectè tradidiſſe Apollonium; quæ à ſe emendata, vt pater meus dicebat, literis prodiderunt. Ego autem poſtea incidi in alterum librum ab Apollonio editum, qui demonſtrationem accuratè complectebatur de re propoſita, ex eiuſq; problematis indagatione magnam equidem cæpi voluptatem. Illud certè ab omnibus perſpici poteſt, quòd ſcripſit Apollonius, cùm ſit in omnium manibus. Quod autem diligenti, quantum coniicere licet, ſtudio nos poſtea ſcripſiſſe videmur, id monimentis conſignatum tibi dedicandum duximus; vt qui feliciter cùm in omnibus diſciplinis, tum vel maximè in Geometria verſatus, ſcitè ac prudenter iudices ea, quæ dicturi ſumus: Ob eam verò, quæ tibi cum patre fuit, vita conſuetudinem, quaq; nos complecteris

beneuolentiam, tractationem ipſam libenter audias. Sed iam tempus eſt, vt proœmio finem imponentes id, quod propoſitum eſt, aggrediamur.

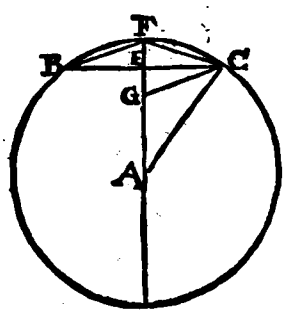
TREDECIM *libri hactenus expoſiti ab omnibus Euclidi aſcribuntur: Duo verò ſubſequentes à plerisq; Hypſicli Alexandrino & rectè, meo iudicio, tribui ſolent; in quorum quidem priori inter ſe comparantur Icoſaedrum, & Dodecaedrum, tam ſecundùm ſuperficies, quàm ſolidítates: In poſteriori verò exponuntur deſcriptiones aliquot figurarum regularium vnius intra aliam; vt hi duo libri ſint inſtar appendicis cuiuſdam elementorum Euclidis. Verùm quia plurima omittuntur ab Hypſicle ſcitu non iniucunda, quæ ſpectant ad comparationes dictorum quinque corporum regularium, eorumq; mutuas inſcriptiones vnius in alio; quatuor enim propoſitionibus duntaxat liber hic quartusdecimus, quinq; verò problematibus decimusquintus abſoluitur: Viſum eſt, vt aliquam lucem huic tractationi afferremus, paulò vberius de dictis figuris regularibus in vniuerſum diſſerere, proponendo varia theoremata, atque problemata, quibus & prædicta corpora regularia inter ſe comparantur, & ſibi mutuò inſcribuntur. Qua in re maximo nobis adiumento fuiſſe Campanum, & Franciſcum Fluſſatem Candallam, qui diligentem operam, & ſedulam in hoc negotio collocauit, non negamus. Hic enim non ſolùm inſequentes duos libros quamplurimis theorematibus, problematibusq; locupletauit; verumetiam integrum librum, qui ordine decimusſextus eſt, adiunxit, in quo proprietates illuſtres de dictis corporibus proponit. Cæterum præcipuum fuiſſe Hypſiclis inſtitutum, in hoc lib. 14. diſputare de comparatione mutua Icoſaedri & Dodecaedri, facilè intelligi poteſt ex eius proœmio ad Protarchum, quod ſuperius eſt poſitum.*

QVONIAM *verò in hiſce duobus libris Hypſicles, & Campanus tam in numero propoſitionum, quàm in earundem ordine, & inter ſe, & à Franciſco Fluſſate, ideoq; & à nobis diſcrepant; annotauimus in margine ordinem vtriuſque duobus numeris, quorum ſuperior ordinem Hypſiclis, inferior verò Campani ſeriem indicat. Quando autem in margine vnicus tantùm numerus reperitur, nullam eſſe tunc differentiam inter Campanum & Hypſiclem, ſignificatur; Quod ſi aliquando loco ſuperioris numeri apponatur hæc nota O, intelligendum eſt, in Hypſicle dictam propoſitionem deſiderari. Idemq; in Campano intellige, ſi fortè loco numeri inferioris eadem nota poſita fuerit. Quando denique nihil in margine deprehenditur, indicio eſt, tum apud Hypſiclem, quàm apud Campanum, illam propoſitionem deeſſe.*

1. ## THEOR. 1. PROPOS. 1.

QVAE ex centro circuli cuiuſpiam in pentagoni eidem circulo inſcripti latus perpendicularis ducitur, dimidia eſt vtriuſque lineæ ſimul, & lateris hexagoni, & lateris decagoni eidem circulo inſcripti.

Ex centro A, circuli B C D, ducatur A E, perpendicularis ad B C, latus pentagoni in dicto circulo deſcripti. Dico A E, dimidium eſſe lineæ compoſitæ ex latere hexagoni & decagoni eiuſdem circuli. Extenſa enim A E, in vtramque partem, vt perficiatur tota diameter D F, ſumptaque E G, æquali ipſi E F; connectantur rectæ A C, C G, C F, B F. [a] Quoniam igitur perpendicularis A E, ſecat rectam B C, bifariam; erunt latera B E, E F, trianguli B E F, æqualia lateribus C E, E F, trianguli C E F; Cùm igitur & anguli contenti ſint æquales, nempe recti; [b] erunt baſes C F, B F, æquales; [c] ideoq; & arcus C F, B F, æquales; Ac proinde exiſtéte arcu B C, quinta parte totius circumferentiæ, erit C F, eiuſdem pars decima; atq; adeò recta C F, latus erit decagoni. Rurſus quia latera G E, E F, trianguli C E F, æqualia ſunt lateribus C E, E G, trianguli C E G, ſuntque anguli contenti recti; [d] erunt & baſes C F, C G, & anguli C F G, C G F, æquales. Quia verò arcus C F, quinta pars eſt ſemicircumferentiæ D C F, cùm ſit totius circumferentiæ decima pars; Erit talium partium 1. arcus C F, qualium 4. eſt arcus D C, hoc eſt, arcus D C, quadruplus erit arcus C F. [e] Quare & angulus D A C, quadruplus erit anguli C A F: [f] Eſt autem angulus C F D, dimidium anguli D A C, cùm illius ad circumferentiam, & huius ad centrũ eadem ſit baſis D C. Igitur angulus C F D, atq; adeò illi æqualis oſtenſus C G F, duplus erit anguli C A F: [g] Atqui angulus C G F, externus, æqualis eſt internis G A C, G C A, in triangulo G A C. Cùm igitur G A C, ſit dimidium anguli C G F, vt oſtenſum eſt, erit G C A, reliquum dimidium eiuſdem anguli C G F, ideoq; æquales erunt anguli G A C, G C A; [h] ac proinde & latera A G, C G, æqualia: Eſt autem C G, recta oſtenſa æqualis rectæ C F. Igitur & A G, recta æqualis erit eidem C F. Quare additis æqualibus G E, E F, fiet A E, æqualis duabus E F, F C, ſimul: Ac proinde tres ſimul A E, E F, F C, hoc eſt, duæ ſimul A F, F C, duplæ erunt ipſius A E, atque idcirco è contrario erit A E, ducta videlicet perpendicularis in pentagoni latus, dimidia duarum ſimul A F, F C, nempe lateris hexagoni, & decagoni. Quæ ergo ex centro circuli cuiuſpiam in pentagoni eidem circulo inſcripti latus, &c. Quod erat demonſtrandum.



[a] 3. tertij.
[b] 4. primi.
[c] 28. tertij.
[d] 4. primi.
[e] 33. ſexti.
[f] 20. tertij.
[g] 32. primi.
[h] 6. primi.

COROL.

COROLLARIVM I.

Ex his sequitur, lineam perpendicularem ductam ex centro circuli ad lineam rectam in eodem circulo aptatam, secare arcum, quem dicta haec linea recta subtendit, bifariam. Demonstratum enim est rectam A E, quae ex centro perpendicularis est ad B C, diuidere arcum B C, bifariam in F.

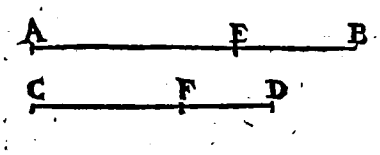
COROLLARIVM II.

Hinc quoque fit, perpendicularem ex centro ad latus pentagoni ductam, aequalem esse vtrique lineae simul, & ei, quae ex centro ad latus trianguli aequilateri eidem circulo inscripti ducitur, perpendiculari, & dimidiae lateris decagoni. Quoniam enim, vt in hac propositione ostensum est, perpendicularis ad latus pentagoni aequalis est dimidio lateris hexagoni, & dimidio lateris decagoni simul; Est autem perpendicularis ad latus trianguli aequilateri, ex coroll. propos. 12. lib. 13. aequalis dimidio semidiametri, seu lateris hexagoni: perspicuum est, eandem perpendicularem ad latus pentagoni esse aequalem perpendiculari ad latus trianguli, & dimidio lateris decagoni simul.

THEOR. 2. PROPOS. 2. 4. 2.

SI binae rectae lineae extrema ac media ratione secentur; ipsae similiter secabuntur, in easdem scilicet proportiones.

SECENTVR binae rectae A B, C D, extrema ac media ratione in E, & F. Dico ipsas in easdem proportiones secari, hoc est, esse vt A B, ad C D, ita A E, ad C F, & E B, ad F D; Item vt A E, ad E B, ita C F, ad F D, &c. Cùm enim sit, vt A B, ad A E, ita A E, ad E B; & vt C D, ad C F, ita C F, ad F D; [a] erit rectangulum sub A B, E B, aequale quadrato rectae A E; & rectangulum sub C D, F D, aequale quadrato rectae C F. Quamobrem erit vt rectangulum sub A B, E B, ad quadratum rectae A E, ita rectangulum sub C D, F D, ad quadratum rectae C F; (est enim vtrobique aequalitatis proportio.) Ac propterea, per ea, quę demonstrauimus in scholio propos. 22. lib. 5. vt quadruplum rectanguli sub A B, E B, ad quadratum rectae A E, ita quadruplum rectanguli sub C D, F D, ad quadratum rectae C F: & componendo, vt quadruplũ rectanguli sub A B, E B, & quadratum rectae A E, ad quadratum rectae A E, ita quadruplum rectanguli sub C D, F D, & quadratũ rectae C F, ad quadratum rectae C F: [b] Sed quod quater continetur sub A B, E B, vnà cum quadrato rectae A E, aequale est quadrato lineae compositae ex A B, E B; Et quod quater continetur sub C D, F D, vnà cum quadrato rectae C F, aequale est quadrato lineae compositae ex C D, F D. Igitur erit quoque, vt quadratum lineae compositae ex A B, E B, ad quadratum rectae A E, ita quadratum lineae compositae ex C D, F D, ad quadratum rectae C F; [c] Ac proinde, vt recta composita ex A B, E B, ad rectam A E, ita recta composita ex C D, F D, ad rectam C F: Et cõponendo vt composita recta ex A B, E B, & recta A E, hoc est, dupla ipsius A B, ad rectam A E, ita recta composita ex C D, F D, & recta C F, id est, dupla ipsius C D, ad rectam C F; Et permutando, vt dupla ipsius A B, ad duplam ipsius C D, ita A E, ad C F; [d] Vt autem dupla ipsius A B, ad duplam ipsius C D, ita est A B, ad C D. Erit ergo vt A B, ad C D, ita A E, ad C F; Ac propterea, cùm sit vt tota A B, ad totam C D, ita A E, ablata ad C F, ablatam; [e] erit quoque reliqua E B, ad reliquam F D, vt tota ad totam. Quare vt A E, ad C F, ita erit E B, ad F D, cùm vtraque proportio eadem sit proportioni A B, ad C D: Et permutando, erit vt A E, ad E B, sic C F, ad F D; & sic denique iuxta omnes modos arguendi ex proportionalitate, ostendemus & totas lineas, & earundem partes esse proportionales inter se. Si binae itaq; rectae lineae extrema ac media ratione secentur, &c. Quod erat ostendendũ.



[a] 17. sexti.
[b] 8. secundi
[c] 22. sexti.
[d] 15. quinti.
[e] 19. quinti.

SCHOLIVM.

FACILE hoc loco demonstrabimus hoc sequens theorema.

LATVS hexagoni ad latus decagoni in eodem circulo descriptorum eandem proportionem habet, quam recta subtendens angulum pentagoni aequilateri & aequianguli ad latus ipsius pentagoni.

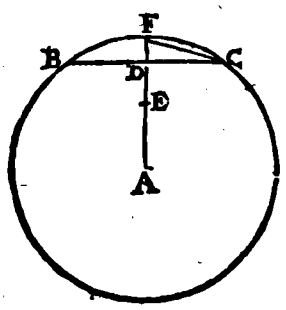
QVONIAM enim [a] latus hexagoni cum latere decagoni efficit lineam media & extrema ratione sectam; [b] & recta subtendens pentagoni angulum secta extrema ac media ratione facit maius segmentum, latus ipsum pentagoni: [c] fit vt eadem sit proportio lateris hexagoni ad latus decagoni, maioris segmenti ad minus, quae maioris segmenti rectae angulum pentagoni subtendentis ad minus. Cùm ergo sit, vt maius segmentum ad minus, ita tota ad maius segmentum; erit quoque latus hexagoni ad latus decagoni, vt recta subtendens angulum pentagoni aequilateri & aequianguli ad latus pentagoni. quod est propositum.

[a] 9. tertij decimi.
[b] 8. tertij decimi.
[c] 2. quarti decimi.

EX hac quoque propositione & praecedenti inferemus hoc alterum theorema.

SI linea perpendicularis ex centro circuli ad latus pentagoni in eodem circulo descripti ducta secetur extrema ac media ratione, maius segmentum aequale est perpendiculari

ex eodem centro ad latus trianguli æquilateri ductæ, minus verò æquale est dimidio lateris decagoni eidem circulo inscriptorum.



Ex centro enim A, circuli B C, ducta perpendicularis A D, ad latus B C, pentagoni eidem circulo inscripti, secetur in E, extrema ac media ratione. Dico maius segmentum A E, esse æquale perpendiculari ex A, ad latus trianguli æquilateri eiusdem circuli ducta; minus verò segmentum E D, æquale esse dimidio lateris decagoni eiusdem circuli. Extensa namque recta A D, ad F, & connexa recta F C; erit F C, latus decagoni, cùm ex coroll. 1. propos. 1. huius libri, arcus B C, nempe quinta pars totius circumferentiæ, bifariam secetur in F; [a] *Ac proinde recta composita ex A F, latere hexagoni, & F C, latere decagoni, secta erit extrema ac media ratione, cuius maius segmentum A F, latus hexagoni, minus verò segmentum F C, latus decagoni. Quare, vt in hac propos. ostensum est, erit vt tota A D, diuisa secundùm extremam ac mediam rationem, ad totam compositam ex A F, F C, similiter diuisam, ita A E, maius segmentum ad A F, maius segmentum; & E D, minus segmentum ad F C, minus segmentum:* [b] *Est autem tota A D, dimidium totius compositæ ex A F, F C. Igitur & A E, ipsius A F, semidiametri, & E D, ipsius F C, lateris decagoni dimidium erit. Cùm ergo, per corollarium propositionis 12. lib. 13. perpendicularis ex centro ad latus trianguli æquilateri ducta, æqualis sit dimidio semidiametri; perspicuum est, maius segmentum A E, æquale esse dictæ perpendiculari, minus verò E D, dimidio lateris decagoni. Quod est propositum.*

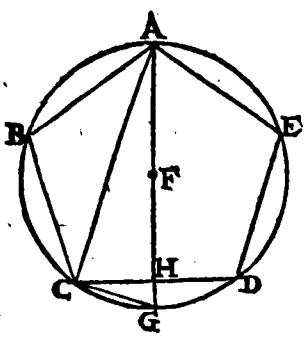
a 9. tertii decimi.

b 1. quartidecimi.

THEOR. 3. PROPOS. 3.

2. 4.

Si in circulo pentagonum æquilaterum describatur, quod ex latere pentagoni, & quod ex ea, quæ binis lateribus pentagoni subtenditur, recta linea, vtraque simul quadrata, quintula sunt eius, quod ex semidiametro describitur, quadrati.



Describatur in circulo A B C D E, cuius centrum F, pentagonum A B C D E, subtendatq; recta A C, bina latera A B, B C. Dico quadrata rectarum C D, A C, simul quintupla esse quadrati ex semidiametro circuli descripti. Ducta enim ex A, per centrum recta A F G, quæ p coroll. 2. propos. 10. lib. 13. diuidat & arcum C D, & latus C D, bifariam in G, & H; erit arcus C G, decima pars totius circumferentiæ, ideoq; recta subtensa C G, latus decagoni. Quoniam igitur recta A G, dupla est rectæ F G; erit ex scholio propos. 4. lib. 2. quadratum rectæ A G, quadruplum quadrati rectæ F G: [a] Sunt autem quadrato rectæ A G, æqualia quadrata rectarum A C, C G. Igitur & quadrata rectarum A C, C G, quadrupla sunt quadrati rectæ F G; Atque adeò tria quadrata rectarum A C, C G, F G, quintupla quadrati eiusdem rectæ F G; [b] Cùm ergo quadratis rectarum F G, C G, nempe lateris hexagoni, & lateris decagoni, æquale sit quadratum rectæ C D, lateris videlicet pentagoni; Erunt quoq; quadrata rectarum A C, C D, quintupla quadrati rectæ F G, nimirum semidiametri. Si in circulo igitur pentagonum æquilaterum describatur; quod ex latere pentagoni, & quod ex ea, quæ binis lateribus pentagoni subtenditur, recta linea, vtraque simul quadrata, quintupla sunt eius, quod ex semidiametro describitur, quadrati. Quod erat demonstrandum.

a 47. primi.

b 10. tertiædecimi.

COROLLARIVM.

Infertur ex his theorema huiusmodi.

Si in sphæra eadem cubus, & dodecaedrum inscribantur; quadratum lateris cubi & quadratum lateris Dodecaedri, vtraque simul, quintupla sunt quadrati semidiametri circuli pentagonum Dodecaedri circumscribentis.

Circumscribat enim circulus A B C D E, pentagonum vnum Dodecaedri in quapiam sphæra descripti; eritq; ex corollario secundo, propositionis decimæseptimæ, libri decimitertij, recta A C, subtendens pentagoni angulum B, latus cubi in eadem sphæra descripti. [a] *Perspicuum est autem, quadrata rectarum A C, C D, lateris scilicet cubi, & lateris Dodecaedri, quintupla esse quadrati semidiametri F G, &c.*

a 3. quartidecimi.

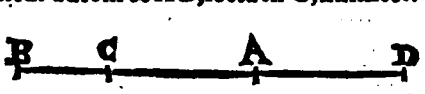
THEOR. 4. PROPOS. 4.

0. 3.

Si latus hexagoni alicuius circuli secetur extrema ac media ratione; maius illius

illius ſegmentum erit latus decagoni eiuſdem circuli.

SECETVR enim AB, latus hexagoni alicuius circuli extrema ac media ratione in C, ſitque maius ſegmentum AC. Dico AC, eſſe latus decagoni eiuſdem circuli. Sit enim AD, latus decagoni eiuſdem circuli, adiungaturque in rectum ipſi AB; [a] eritque tota compoſita BD, ex latere hexagoni, & latere decagoni, diuiſa in A, extrema ac media ratione, cuius maius ſegmentum BA: Ponitur autem & AB, ſecta in C, ſimiliter. [b] Igitur erit vt BD, tota ad maius ſui ſegmentum AB, ita AB, tota ad maius ſui ſegmentum AC: Sed eſt quoque vt BD, tota ad maius ſui ſegmentum AB, ita AB, maius ſegmentum ad AD, ſegmentum minus, per definitionem lineæ ſectæ extrema ac media ratione. Igitur erit vt AB, ad AC, ita eadem AB, ad AD; Ac propterea AC, AD, æquales erunt. Cùm ergo AD, ponatur latus decagoni illius circuli, cuius latus hexagoni eſt AB; erit & AC, eiuſdem circuli latus decagoni.



[a] 9. tertijdecimi.

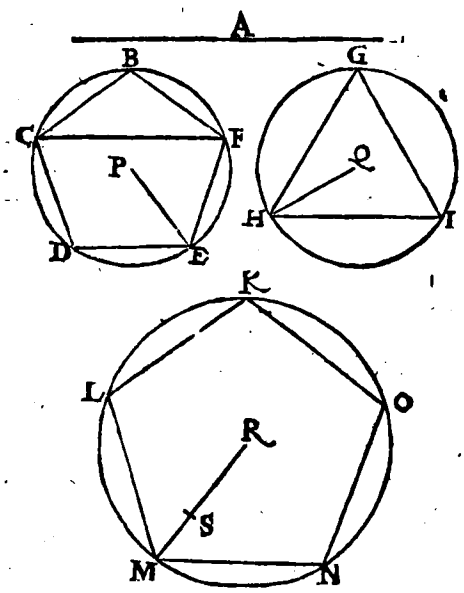
[b] 2. quartidecimi.

ALITER. Adiungatur ipſi AB, in rectum recta AD, æqualis maiori ſegmento AC; [c] eritque tota recta BD, diuiſa in A, extrema ac media ratione. Cùm igitur AB, maius ſegmentum ipſius, ponatur latus hexagoni alicuius circuli, erit per ea, quæ demonſtrauimus ad propoſ. 9. lib. 13. AD, minus ſegmentum eiuſdem circuli latus decagoni; Ac propterea & AC, æqualis ipſi AD, latus erit decagoni in eodem circulo deſcripti, cuius AB, latus hexagoni ponitur. Si ergo latus hexagoni alicuius circuli, &c. Quod erat oſtendendum.

[c] 5. tertijdecimi.

THEOR. 5. PROPOS. 5.

IDEM circulus comprehendit & Dodecaedri pentagonum, & Icoſaedri triangulum, eidem ſphæræ inſcriptorum.



IN ſphæra, cuius diameter A, intelligatur deſcriptum & Dodecaedrum, cuius vnũ pentagonum BCDEF, & Icoſaedrum, cuius vnum triangulum GHI. Dico eundem circulũ circumſcribere & pentagonum BCDEF, & triangulum GHI, hoc eſt, circulos BCDEF, GHI, ipſa circumſcribentes eſſe æquales. Circumſcribat enim circulus KLMNO, pentagonum KLMNO, [d] ex quo Icoſaedrum ſphæræ inſcribitur, ita vt quinque latera huius pentagoni ſint latera Icoſaedri, ideoq; quodlibet ipſorum æquale cuiuis lateri trianguli GHI. Deinde ex centris P, Q, R, ducantur rectæ PE, QH, RM; Seceturque RM, extrema ac media ratione in S; [e] eritq; maius ſegmentum RS, latus decagoni in circulo KLMNO, in quo RM, eſt latus hexagoni. Subtendat quoq; recta CF, angulum B, pentagoni Dodecaedri, quæ erit per corollarium ſecũdum, propoſ. 17. lib. 13. latus cubi in eadẽ ſphæra deſcripti. Quoniam igitur ex coroll. 1. eiuſdẽ propoſ. BF, latus Dodecaedri eſt maius ſegmentum lateris cubi CF, ſecti extrema ac media ratione; [f] erit vt tota CF, ad totam RM, ita BF, maius ſegmẽtum ad RS, maius ſegmentum; [g] Ac propterea vt quadratũ rectæ CF, ad quadratum rectæ RM, ita quadratũ rectæ BF, ad quadratũ rectæ RS. Atq; adeò, per ea, quæ demonſtrata ſunt in ſcholio propoſ. 22. lib. 5. vt triplum quadrati rectę CF, ad quintuplum quadrati rectę RM, ita triplum quadrati rectæ BF, ad quintuplum quadrati rectę RS. Eſt autẽ triplum quadrati rectæ CF, æquale quintuplo quadrati rectæ RM, (quia tam triplum quadrati lateris cubi CF, ex propoſ. 15. lib. 13. q̃ quintuplum quadrati ſemidiametri RM, ex coroll. 1. propoſ. 16. lib. 13. æquale eſt quadrato ex A, diametro ſphæræ.) Igitur & triplum quadrati rectæ BF, æquale erit quintuplo quadrati rectæ RS. [h] Quia verò quadratum rectæ MN, lateris pentagoni, æquale eſt quadrato lateris RM, hexagoni, & quadrato rectæ RS, lateris decagoni; erunt quoque quinque quadrata rectæ MN, æqualia quinque quadratis rectæ RM, & quinque quadratis rectæ RS. Igitur & quinque quadrata rectæ MN, æqualia ſunt tribus quadratis rectæ CF, (cùm hæc oſtenſa ſint æqualia quinque quadratis rectæ RM,) & tribus quadratis rectæ BF, quæ æqualia fuerunt quinque quadratis rectæ RS. Sed quoniam, ([i] cùm quadrata rectarũ CF, BF, quinque quadratis ſemidiametri PE, ſint æqualia;) tria quadrata rectæ CF, & tria quadrata rectæ BF, æqualia ſunt quindecim quadratis rectæ PE, & quinque quadrata rectæ MN, æqualia ſunt quindecim quadratis ſemidiametri QH; (Nam cũ MN, æqualis ſit oſtenſa ipſi GH, lateri Icoſaedri, ſeu trianguli æquilateri; [k] ſit autem quadratum ipſius GH, æquale tribus quadratis ſemidiametri QH; Erunt quinque quadrata rectæ GH, hoc eſt, rectæ MN, æqualia quindecim quadratis rectæ QH;) erunt quoque

[d] 16. tertijdecimi.

[e] 4. quartidecimi.

[f] 2. quartidecimi.

[g] 22. ſexti.

[h] 10. tertijdecimi.

[i] 3. quartidecimi.

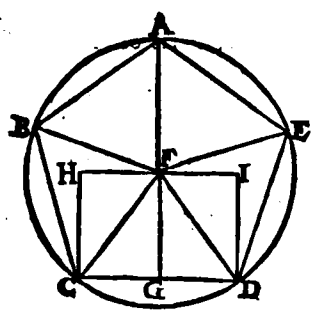
[k] 12. tertijdecimi.

quindecim quadrata rectæ PE, æqualia quindecim quadratis rectæ QH; ac propterea vnũ quadratum rectæ PE, vni quadrato rectæ QH; & idcircò ſemidiameter PE, ſemidiametro QH, æqualis erit. Quare circuli BCDEF, GHI, æquales ſunt. Idem ergo circulus comprehẽdit, &c. Quod erat demonſtrandum.

3. 6.

THEOR. 6. PROPOS. 6.

Si ex centro circuli pentagonum Dodecaedri circumſcribẽtis, perpendicularis ducatur ad vnum latus pentagoni. Erit, quod ſub dicto latere, & perpendiculari comprehenditur, rectangulum trigeſies ſumptum, Dodecaedri ſuperficiei æquale.



In centro F, circuli circumſcribentis pentagonum Dodecaedri ABCDE, ducatur ad latus CD, perpendicularis FG. Dico rectangulum ſub FG, & CD, trigeſies ſumptum, eſſe æquale toti ſuperficiei Dodecaedri. Ductis enim rectis ex F, ad omnes angulos pentagoni, reſoluetur pentagonum in quinque triangula æqualia, ex corollario propoſ. 8. lib. 1. cùm bina latera vnius æqualia ſint binis lateribus aliorum, & baſis quoque vnius baſibus aliorum æqualis. Ducatur quoque per F, recta HI, parallela ipſi CD, occurrens duabus perpendicularibus CH, DI, ductis ex C, D, ad CD, in punctis H, & I. Eritque rectangulum CI, contentum ſub HC, hoc eſt, ſub FG, & CD. [a] Quoniam verò rectangulum CI, duplum eſt trianguli FCD, atque adeò cuiuslibet reliquorum quatuor triangulorum ipſi FCD, æqualium; erit rectangulum CI, quinquies ſumptum, æquale decem huiuſmodi triangulis, hoc eſt, duobus pentagonis Dodecaedri, cùm quinque triangula æqualia ſint vni pentagono; Atq; adeò ſextuplum rectanguli CI, quinquies ſumpti, nimirum rectangulum CI, ſumptum trigeſies, æquale quoque erit ſextuplo duorum pentagonorum, id eſt, duodecim pentagonis, hoc eſt, toti ſuperficiei Dodecaedri. Si igitur ex centro circuli pentagonum Dodecaedri, &c. Quod erat demonſtrandum.

[a] 41. primi.

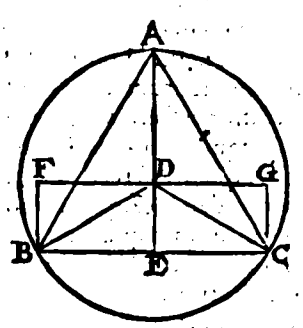
Aliter. Facta eadem figurę conſtructione, [b] cùm rectangulum CI, duplũ ſit trianguli FCD, hoc eſt, æquale triangulo FCD, bis ſumpto; Erit rectangulum CI, trigeſies ſumptũ æquale triangulo FCD, bis ſumpto trigeſies. hoc eſt, ſumpto ſexageſies; ac proinde toti ſuperficiei Dodecaedri. Cùm enim vnum pentagonum Dodecaedri conſtet quinque huiuſmodi triangulis, conſtabunt duodecim pentagona, nempe tota ſuperficies Dodecaedri, ſexaginta huiuſmodi triangulis. Atque idcircò triangulum FCD, ſumptum ſexageſies æqualis erit ſuperficiei Dodecaedri.

[b] 41. primi.

3. 7.

THEOR. 7. PROPOS. 7.

Si ex centro circuli triangulum Icoſaedri circumſcribentis, perpendicularis ducatur ad vnũ latus trianguli; Erit, quod ſub dicto latere, & perpendiculari comprehenditur, rectangulum trigeſies ſumptum Icoſaedri ſuperficiei æquale.



Ex centro D, circuli circumſcribentis triangulum Icoſaedri ABC, ducatur ad latus perpendicularis DE. Dico rectangulum contentum ſub DE, & BC, trigeſies ſumptum, æquale eſſe toti ſuperficiei Icoſaedri. Ductis namque rectis ex D, ad omnes trianguli angulos, reſoluetur triangulum in tria triangula æqualia, ex corollario propoſitionis 8. libri 1. Sunt enim bina latera vnius binis lateribus aliorum æqualia, & baſis vnius baſibus aliorum æqualis. Ducatur quoque per D, recta FG, parallela ipſi BC, occurrens in F, & G, duabus perpendicularibus BF, CG, ex B, C, ductis ad BC; eritque rectangulum BG, contentum ſub FB, hoc eſt, ſub DE, & BC. [c] Quoniam verò rectangulum BG, duplum eſt trianguli BDC; atque adeò cuiuſlibet reliquorum duorum triangulorum ipſi DBC, æqualium: Erit rectangulum BG, ter ſumptum æquale ſex huiuſmodi triangulis, hoc eſt, duobus triangulis Icoſaedri, cùm tria talia triangula æqualia ſint vni triangulo Icoſaedri; Atque adeò idem rectangulum trigeſies ſumptum, nempe decuplum rectanguli BG, ter ſumpti, æquale erit viginti triangulis Icoſaedri, hoc eſt, toti ſuperficiei Icoſaedri, nimirum decuplo duorum triangulorum Icoſaedri. Si ergo ex centro circuli triangulum Icoſaedri, &c. Quod erat oſtendendum.

[c] 41. primi.

Aliter. Facta eadem conſtructione figuræ, [d] cùm rectangulum BG, duplum ſit trianguli DBC, id eſt, æquale dicto triangulo bis ſumpto; Erit rectangulum BG, trigeſies ſumptum, æquale triangulo DBC, ſumpto ſexageſies: Atqui ſexaginta huiuſmodi triangula conficiunt viginti triangula Icoſaedri, eò quòd tria conficiunt vnum. Igitur rectangulum BG, trigeſies ſumptum, æquale eſt toti ſuperficiei Icoſaedri.

[d] 41. primi.

COROL-

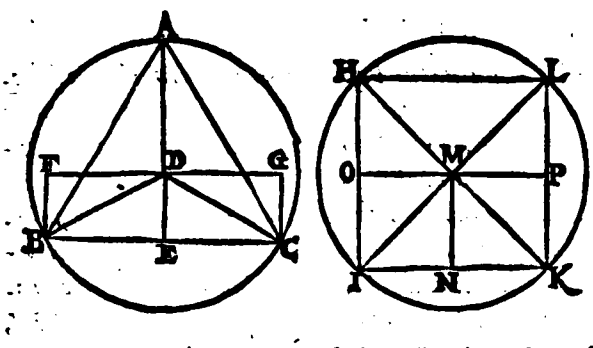
COROLLARIVM.

Itaqve superficies cuiuslibet Dodecaedri ad superficiem cuiuscunque Icosaedri, etiamsi non describantur ambæ figuræ in eadem sphæra, est sicut rectangulum contentum sub latere Dodecaedri, & perpendiculari ducta ex centro pentagoni Dodecaedri in latus dictum, ad rectangulum contentum sub latere Icosaedri, & perpendiculari ducta ex centro trianguli Icosaedri in dictum latus. [a] *Cùm enim superficies Dodecaedri æqualis sit illi rectangulo trigesies sumpto;* [b] *item superficies Icosaedri æqualis huic rectangulo trigesies quoque sumpto: Erit tam illud rectangulum trigesima pars superficiei Dodecaedri, quam hoc rectangulum, superficiei Icosaedri.* [c] *Quare erit superficies Dodecaedri ad superficiem Icosaedri, vt rectangulum illud, trigesima videlicet pars Dodecaedri, ad rectangulum hoc, trigesimam scilicet partem Icosaedri. Quod est propositum.*

a 18. quarti decimi.
b 7. quarti decimi.
c 15. quinti.

SCHOLIVM.

Non dissimili argumento indagabimus superficies reliquorum trium corporum regularium, Tetraedri videlicet, octaedri, & cubi. Nam si ex centro circuli trianguli Tetraedri, vel Octaedri, siue quadrati cubi, circumscribentis perpendicularis ducatur ad vnum aliquod eorum latus; Erit, quod sub dicto latere & perpendiculari continetur, rectangulum, in Tetraedro quidem sumptum sexies, superficiei Tetraedri; In Octaedro verò & cubo duodecies sumptum, superficiei Octaedri, & cubi æquale. Sit enim primò triangulum Tetraedri A B C, circumscriptum à circulo, cuius centrum D, à quo perpendicularis ducatur D E, ad latus B C, & reliqua fiant, vt de triangulo Icosaedri dictum est. Dico rectangulum B G, sexies sumptum, æquale esse superficiei Tetraedri. [d] *Quoniam enim rectangulum B G, duplum est trianguli D B C, hoc est, æquale duobus eiusmodi triangulis; erit ipsum sexies sumptum æquale duodecim talibus triangulis. Cùm igitur duodecim talia triangula constituant totam superficiem Tetraedri, nempe quatuor triangula æquilatera ipsi A B C, æqualia, eò quòd tria conficiunt vnum; Erit rectangulum B G, sexies sumptum, superficiei Tetraedri, seu Pyramidi æquale.*



d 41. primi.

Sit deinde idem triangulum A B C, Octaedri, &c. Dico rectangulum B G, duodecies sumptũ, æquale esse superficiei Octaedri. [e] *Cùm enim rectangulum B G, duplum sit trianguli D B C, hoc est, æquale duobus eiusmodi triangulis, erit idem rectangulum duodecies sumptũ æquale vigintiquatuor huiusmodi triangulis: Sed vigintiquatuor talia triangula constituunt octo triangula Octaedri, id est, totam superficiem Octaedri, propterea q; tria conficiunt vnum. Igitur rectangulum B G, duodecies sumptũ, æquale est superficiei Octaedri.*

e 41. primi.

Sit tertiò quadratum cubi H I K L, circa quod circulus ex centro M, describatur, & deducta M N, perpendiculari ad I K, ducantur ex M, ad omnes angulos quadrati rectæ lineæ, vt quadratum resoluatur in quatuor triangula æqualia; Atque per M, agatur O P, ipsi I K, parallela. Dico rectangulum I P, contentum sub O I, hoc est, sub M N, & I K, sumptum duodecies, æquale esse superficiei cubi. [f] *Quoniam enim rectangulum I P, duplum est trianguli M I K, hoc est, æquale duobus talibus triangulis; Erit idem duodecies sumptum æquale vigintiquatuor eiusmodi triangulis. Quare cùm vigintiquatuor talia triangula constituant sex quadrata, id est, totam superficiem cubi, quòd quatuor talia triangula vnum quadratum conficiant; Erit rectangulum I P, duodecies sumptum æquale superficiei cubi. Quod est propositum.*

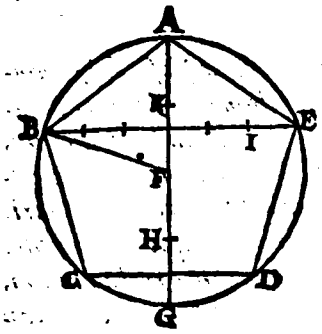
f 41. primi.

Aliter. Cùm duo rectangula I P, conficiant quadratum H I K L; (sunt enim I P, P H, æqualia, cùm recta O I, sit dimidium lateris H I, nempe æqualis ipsi M N,) constituent duodecim talia rectangula sex quadrata eiusmodi, hoc est, totam superficiem cubi.

THEOR. 8. PROPOS. 8. 4. 8.

Rectangvlvm contentum sub tribus quartis partibus diametri alicuius circuli, & quinque sextis partibus lineæ subtendentis angulum pentagoni æquilateri in eodem circulo descripti; æquale est dicto pentagono.

In circulo, cuius centrum F, describatur pentagonum æquilaterum A B C D E, & ducta diameter A G, diuidatur in quatuor æquales partes, quarum tres sint A H: Angulum verò A, subtendens recta B E, secetur in sex partes æquales, quarum quinque sint B I, & vna I E, ita vt B I, sit quintupla ipsius I E. Dico rectangulum comprehensum sub A H, B I, æquale esse pentagono A B C D E. Ducta enim recta B F, quoniam A H, continet tres quartas partes diametri, & A F, duas, cũ sit semidia-



meter, erit AH, ipsius AF, sesquialtera. Quia verò recta FA, diuidens arcũ BAE, bifariam, diuidit quoq; rectam BE, bifariam, per coroll. 1. propos. 10. lib. 13. in puncto K, continebit tam KB, q̃ KE, tres sextas rectæ BE; atq; adeò cùm BI, contineat quinque, cõtinebit KI, duas; Ac proinde & KB, ipsius KI, erit sesquialtera. Quamobrem erit, vt AH, ad AF, ita KB, ad KI; [a] atque idcircò rectangulum sub extremis AH, KI, æquale erit rectangulo sub mediis AF, KB. [b] Est autem rectangulum sub AF, KB, duplum trianguli ABF, cùm rectangulum, & triangulum eandem habeant basin AF, & eandem altitudinem BK, hoc est, inter easdem sint parallelas constituta. Igitur & rectangulum sub AH, KI, duplum erit eiusdẽ trianguli ABF: [c] Est autem & rectangulum sub AH, KI, duplum rectanguli sub AH, IE; propterea quòd & basis KI, dupla est basis IE, (continet enim KI, duas sextas partes ipsius BE, & IE, vnam.) eademq; semper altitudo AH. Igitur æqualia sunt triangulum ABF, & rectangulum sub AH, IE; ideoque & eorum quintupla æqualia erunt. At verò pentagonum ABCDE, quintuplum est trianguli ABF, quòd pentagonũ in quinque huiusmodi triangula resoluatur, ductis rectis è centro F, vt propos. 6. huius lib. docuimus. [d] Rectangulum verò sub AH, BI, quintuplum est rectanguli sub AH, IE; quòd & basis BI, quintupla sit basis IE, eademq; semper altitudo AH. Igitur pentagonum ABCDE, & rectangulum sub AH, BI, æqualia sunt. Rectangulum ergo contentum sub tribus, &c. Quod erat demonstrandum.

a 16. sexti.
b 41. primi.
c 2. sexti.
d 1. sexti.

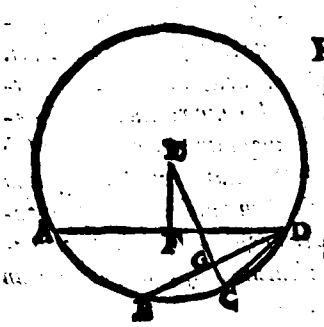
COROLLARIVM

QVONIAM verò, si pentagonũ ABCDE, statuatur basis Dodecaedri in aliqua sphæra descripti, BE, est latus cubi in eadem sphæra descripti, ex coroll 2 propos 17. lib. 13. & vnum latus trianguli Icosaedri in eadem sphæra constituti, (comprehensi videlicet eodem circulo, quo & pentagonum Dodecaedri,) secat Diametrum AG, in H, (cùm ex coroll. propos. 12. lib. 13. secet semidiametrum FG, bifariam, quemadmodum & punctum H, eandem semidiametrum FG, bifariam diuidit.) Manifestum est, rectangulum comprehensum sub perpendiculari ab angulo trianguli Icosaedri ad vnum eius latus ducta, nempe sub AH, & sub quinque sextis partibus lateris cubi eidem sphæræ, in qua Icosaedrum, inscripti, nimirum sub BI, æquale esse pentagono Dodecaedri in eadem sphæra constituti.

a 5. quarti decimi.

THEOR. 9. PROPOS. 9.

SVPERFICIES Dodecaedri ad superficiem Icosaedri in eadem sphæra descripti, eandem proportionem habet, quam latus cubi ad latus Icosaedri.



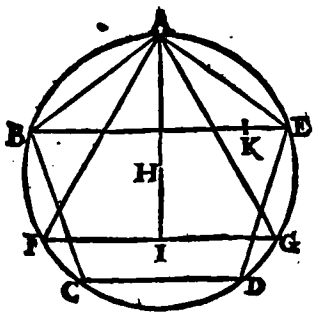
In circulo ABCD, [a] circumscribente & pentagonum Dodecaedri, & triangulum Icosaedri, sit latus pentagoni BD, & trianguli AD; & ex centro E, ducantur ad AD, BD, perpendiculares EF, EG: Sit denique H, latus cubi in eadem sphæra cum Dodecaedro, & Icosaedro descripti. Dico esse vt H, latus cubi, ad AD, latus Icosaedri, ita superficiem Dodecaedri ad superficiem Icosaedri. Quoniam enim lateris cubi H, secti extrema ac media ratione, maius segmentum est BD, latus Dodecaedri, ex coroll. 2. propos. 17. lib. 13. Rectæ autem EG, sectæ quoque extrema ac media ratione, maius segmentum est EF, ex scholio propos. 2. huius libri. [b] Erit vt H, tota ad BD, maius sui segmentum, ita EG, tota ad EF, maius sui segmentum. [c] Ac proinde rectangulum sub extremis H, EF, æquale erit rectangulo sub mediis BD, EG. [d] Quia verò est, vt H, ad AD, ita rectangulum sub H, EF, ad rectangulum sub AD, EF, cùm bases sint H, AD, altitudo verò semper eadem EF; Erit quoque vt H, ad AD, ita rectangulum sub BD, EG, (quod est æquale rectangulo sub H, EF,) ad idem rectangulum sub AD, EF. Quare cùm ex coroll. propos. 7. huius lib. sit, vt rectangulum sub BD, EG, ad rectangulum sub AD, EF, ita superficies Dodecaedri ad superficiem Icosaedri; Erit quoque, vt H, latus cubi, ad AD, latus Icosaedri, ita superficies Dodecaedri ad superficiem Icosaedri. Superficies itaque Dodecaedri ad superficiem Icosaedri, &c. Quod ostendendum erat.

a 5. quartid.
b 2. quartid.
c 16. sexti.
d 1. sexti.

ALITER. [e] Circumscribat pentagonũ Dodecaedri ABCDE, & triangulum Icosaedri AFG, circulus idem, cuius centrum H. Ducatur deinde ex A, per centrum H, recta AI, quæ per coroll. 2. propos. 10. lib. 13. diuidet latus FG, bifariam, & ad angulos rectos. Connectatur denique recta BE, quæ latus erit cubi, ex coroll. 2. propos. 17. lib. 13. cuius quinque sextæ partes sint BK. Dico rursus esse, vt BE, latus cubi ad FG, latus Icosaedri, ita superficiem Dodecaedri ad superficiem Icosaedri. Quoniã enim rectangulum sub AI, BK, æquale est pentagono ABCDE, ex coroll. propos. 8. huius lib. Item rectangulum sub AI, IF, æquale est triãgulo AFG, ex scholio propos. 41. lib. 1. cùm

e 5. quartid.

FG,



FG, basis trianguli dupla sit ipsius IF, basis rectanguli: Erit vt rectangulum sub AI, BK, ad rectangulum sub AI, IF, ita pentagonum ABCDE, ad triangulum AFG: [a] Est autem vt rectangulum sub AI, BK, ad rectangulum sub AI, IF, ita BK, ad IF, cùm bases sint BK, IF, & altitudo eadem semper AI. Erit igitur quoque vt pentagonum ABCDE, ad triangulum AFG, ita BK, ad IF: Ac proinde, (si primum, & tertium, nimirũ pentagonum ABCDE, & recta BK, æquè multiplicentur per numerũ 12. Item secundum, & quartum, nempe triangulum AFG, & recta IF, æquè multiplicentur per numerum 20. [b] erit quoq; vt pentagonum ABCDE, duodecies sumptum, hoc est, superficies Dodecaedri, ad triangulum AFG, vigesies sumptum, nempe ad superficiem Icosaedri, ita recta BK, duodecies sumpta ad rectam IF, vigesies sumptam: Atqui recta BK, duodecies sumpta æquivalet lateri cubi BE, decies sumpto: (Nam cùm BK, contineat quinque sextas partes ipsius BE, continebit eadem BK, duodecies sumpta sexaginta partes sextas eiusdem BE, quæ efficiunt decem integras rectas BE.) Recta verò IF, vigesies sumpta æqualis est lateri Icosaedri FG, decies sumpto: (eò quòd FG, est ipsius IF, dupla.) Erit igitur superficies Dodecaedri ad superficiem Icosaedri, vt latus cubi BE, decies sumptũ ad latus Icosaedri FG, decies sumptum: Ac propterea, [c] cùm eandem proportionem habeant decem latera cubi ad decem latera Icosaedri, quam vnum latus cubi ad vnum latus Icosaedri; perspicuum est, ita esse superficiem Dodecaedri ad superficiem Icosaedri; vt latus cubi ad latus Icosaedri. Quod est propositum.

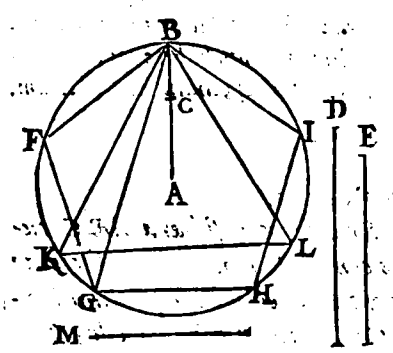
[a] 1. sexti.

[b] schol. 22. quinti.

[c] 15. quinti.

THEOR. 10. PROPOS. 10. 4. 9.

SI recta linea secetur extrema ac media ratione; Erit vt recta potens id, quod à tota, & id quod à maiori segmento, ad rectam potentẽ id, quod à tota, & id, quod à minori segmento, ita latus cubi ad latus Icosaedri eidem sphæræ cũ cubo inscripti.



SECETVR recta AB, in C, extrema ac media ratione, sitque maius segmentum AC. Sit quoq; D, latus cubi, & E, latus Icosaedri in sphæra eadem cũ cubo descripti. Ex A, centro, ad interuallum AB, circulus describatur, in quo cõstituantur & pentagonum æquilaterum BFGHI, & triangulum æquilaterum BKL. Si igitur BF, ponatur latus Dodecaedri alicuius sphæræ, erit ducta recta BG, latus cubi in eadem sphæra descripti, ex coroll. 2. propos. 17. lib. 13. Quoniam verò AC, maius segmentum semidiametri AB, sectæ extrema ac media ratione, [d] est latus Decagoni in circulo BFGHI, in quo nimirum AB, latus est Hexagoni; [e] poterit BF, latus pentagoni & totam AB, latus videlicet hexagoni, & maius segmẽtum AC, latus scilicet Decagoni in eodem circulo. Posit iam & recta M, totã AB, & minus segmentum BC, per ea, quæ ad propos. 47. lib. 1. demonstrauimus. Dico sic esse D, latus propositum cubi ad E, latus propositũ Icosaedri, vt est BF, potens totã AB, & maius segmẽtum AC, ad M, potentẽ totam AB, & minus segmẽtum BC. [f] Quoniam enim quadratum lateris trianguli æquilateri BK, triplum est quadrati semidiametri AB: [g] Item quadrata rectarum AB, BC, tripla sunt quadrati rectæ AC; Erit vt quadratum rectæ BK, ad quadratum rectæ AB, ita quadrata rectarum AB, BC, hoc est, quadratum rectæ M, ipsis æquale, ad quadratum rectæ AC. Vtrobique enim proportio est tripla. Permutando ergo erit, vt quadratum rectæ BK, ad quadratũ rectæ M, ita quadratum rectæ AB, ad quadratum rectæ AC: Est autẽ vt quadratum rectæ AB, ad quadratum rectæ AC, ita quadratum rectæ BG, ad quadratũ rectæ BF. (Nam cùm rectæ BG, sectæ extrema ac media ratione, maius segmentum sit BF, ex coroll. 1. propos. 17. lib. 13. eò q; BG, est latus cubi, & BF, latus Dodecaedri eiusdem sphæræ; [h] Erit vt tota AB, ad maius segmentum AC, ita tota BG, ad maius segmentum BF: [i] Ac proinde vt quadratum rectæ AB, ad quadratũ rectæ AC, ita quadratum rectæ BG, ad quadratum rectæ BF.) Igitur erit quoq;, vt quadratum rectę BG, ad quadratum rectæ BF, ita quadratum rectæ BK, ad quadratũ rectæ M: Et permutando, vt quadratum rectæ BG, ad quadratum rectæ BK, ita quadratum rectæ BF, ad quadratum rectæ M; [k] Ac propterea erit, vt recta BG, ad rectam BK, ita recta BF, potens totam AB, & maius segmentum AC, ad rectam M, potentem totam AB, & minus segmentũ BC, ita se habere propositum cubi latus D, ad Icosaedri propositum latus E. Si recta itaq; linea secetur extrema, ac media ratione, &c. Quod erat ostendendum.

[d] 4. quarti decimi.

[e] 10. tertiædecimi.

[f] 12. tertiædecimi.

[g] 4. tertiædecimi.

[h] 2. quartidecimi.

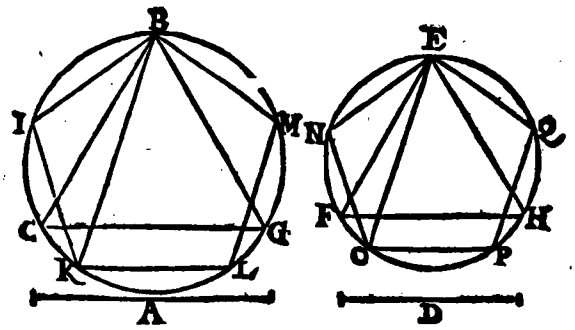
[i] 22. sexti.

[k] 22. sexti.

SCHOLIVM.

QVOD verò proposita latera cubi & Icosaedri D, & E, eiusdem sphæræ eandem habeant proportionem, quam rectæ BG, BK; demonstrabimus, hoc proposito theoremate.

QVAM proportionẽ habent latera cubi, & Icoſaedri eiuſdem ſphæræ, eandem habent latera cubi & Icoſaedri in quauis alia ſphæra deſcriptorum.



SIT enim A, latus cubi, & B C, latus Icoſaedri eiuſdem ſphæræ: Item D, latus cubi, & E F, latus Icoſaedri in quauis alia ſphæra. Dico eſſe vt A, ad B C, ita D, ad E F. Perfectis namq; triangulis Icoſaedrorum B C G, E F H, & circa ipſa deſcriptis circulis, deſcribantur in his circulis pentagona æquilatera B I K L M, E N O P Q, connectanturq; rectæ B K, C K, E O, F O. [a] *Quoniam ergo idem circulus comprehendit & Dodecaedri pentagonum, & Icoſaedri triangulum eiuſdem ſphæræ; & ponitur B C G, triangulum Icoſaedri in eadem ſphæra deſcripti, in qua cubus lateris A: Erit B I K L M, pentagonum Dodecaedri in eadem cum ipſis ſphæra deſcripti; Ac propterea, ex corollario 2. propoſ. 17. lib. 13. recta B K, latus erit cubi eiuſdem ſphæræ, ideoq; ipſi A, æqualis. Simili argumento æqualis erit recta E O, lateri cubi D. Rurſus quia arcus B I K, E N O, ſimiles ſunt; (Nam vterque continet duas quintas partes ſuæ circunferentiæ.) Item arcus B G C, E H F; (vterque enim duas tertias partes totius circunferentiæ comprehendit.) Erunt tam anguli B C K, E F O, ex definitione ſegmentorum ſimilium, æquales inter ſe, quàm anguli B K C, E O F; inter ſe, cùm tam illi, quàm hi, in ſegmentis circulorum ſimilibus exiſtant: Ac proinde, ex coroll. 1. propoſ. 32. lib. 1. reliquus angulus C B K, trianguli B C K, reliquo angulo F E O, trianguli E F O, æqualis erit, & totum triangulum B C K, toti triangulo E F O, æquiangulum.* [b] *Quare erit, vt B K, hoc eſt, recta A, illi æqualis, nempe latus cubi, ad B C, latus Icoſaedri, ita E O, hoc eſt, recta D, illi æqualis, latus ſcilicet alterius cubi, ad E F, latus Icoſaedri. Quod eſt propoſitum.*

a 5. quarti decimi.

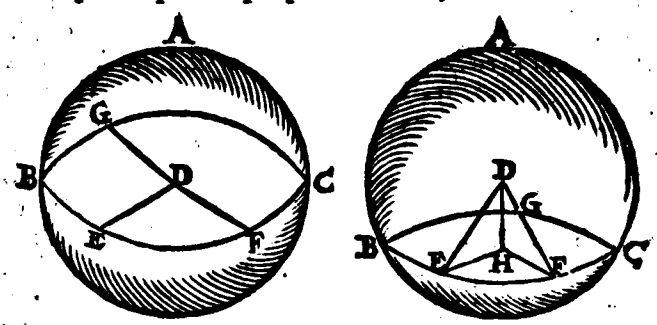
b 4. ſexti.

PERSPICVVM eſt igitur id, q; in demonſtratione aſſumebatur, nimirũ eandem habere proportionẽ D, & E, latera cubi & Icoſaedri in vna ſphæra, quam habẽt B G, B K, latera cubi & Icoſaedri in alia ſphæra.

EX hoc quoq; elicitur, Superficiem Dodecaedri ad ſuperficiem Icoſaedri non ſolùm habere eandem proportionem, quam latus cubi ad latus Icoſaedri in eadem ſphæra cũ ipſis, vt vult propoſ. 9. huius lib. Sed etiam, quam obtinet latus cubi ad latus Icoſaedri in quacunque alia ſphæra.

LEMMA I.

Si ſphæra plano quopiam ſecetur, communis ſectio circulus erit.



SECETVR ſphæra A B C, cuius centrũ D, plano aliquo faciente communẽ ſectionem planum B E F C G. Dico B E F C G, eſſe circulum. Tranſeat enim primò planũ ſecans per centrum ſphæræ, ita vt centrum D, ſit in plano, ſeu communi ſectione B E F C G; ducanturq; ex D, centro ſphæræ ad extremitatem communis ſectionis, lineæ rectæ quotcunque D E, D F, D G. Quoniam igitur omnes hæ lineæ ductæ, quotcunque fuerint, æquales ſunt, ex definitione ſphæræ, cùm ex eius centro ad ſuperficiem cadant; erit, ex definitione circuli, figura plana B E F C G, unica linea contenta, circulus, eiusq; centrum D, idem cum centro ſphæræ.

TRANSEAT ſecundò planum ſecans non per centrum ſphæræ: Ducatur autem ex D, centro ſphæræ ad planum ſecans perpendicularis D H; emittanturq; ex H, rectæ vtcunque H E, H F, ad extremitatẽ vſque communis ſectionis; & connectantur rectæ D E, D F. Quoniam igitur anguli D H E, D H F, ex defin. 3. lib. 11. recti ſunt; [c] *erit tam quadratum rectæ D E, quadratis rectarum D H, H E, quàm quadratum rectæ D F, quadratis rectarum D H, H F, æquale. Sunt autem quadrata rectarum D E, D F, æqualium ex centro ſphæræ ad eius ſuperficiem cadentium, æqualia. Igitur & quadrata rectarum D H, H E, quadratis rectarum D H, H F, æqualia erunt; & proinde, dempto communi quadrato rectæ D H, reliquum quadratum rectæ H E, reliquo quadrato rectæ H F, æquale erit. Quare & rectæ H E, H F, æquales erunt. Eodem argumento oſtendemus, omnes lineas ex H, ad extremitatem communis ſectionis cadentes eſſe æquales & inter ſe, & dictis duabus H E, H F. Figura igitur plana*

c 47. primi.

B E F C G,

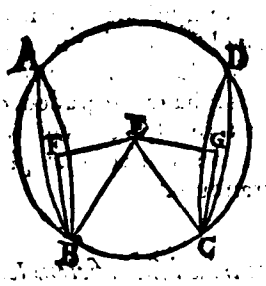
B E F C G, vnica linea contenta, ex definitione circuli, circulus erit; eiusq; centrum, punctum H, in quod perpendicularis D H, cadit. Quod est propositum.

COROLLARIVM.

Itaque si planum secans transierit per centrum sphæræ, efficietur circulus idem centrum habens, quod sphæra. Si verò planum secans per sphæræ centrum non transierit, efficietur circulus habens aliud centrum, quàm sphæra; illud videlicet punctum, in quod cadit perpendicularis ex centro sphæræ ad planum secans ducta. Nam semper demonstrabuntur lineæ rectæ cadentes ex hoc puncto in circumferentiam circuli esse æquales, vt perspicuum est.

LEMMA II.

Circvli in sphæra æquales, æqualiter distant à centro sphæræ: & circuli æqualiter distantes à centro sphæræ, æquales sunt.



In sphæra A B C D, cuius centrum E, sint circuli æquales A B, D C. Dico ipsos æqualiter à centro E, distare. Ducantur enim ex E, ad eorum plana perpendiculares E F, E G, quæ per corollarium præcedentis lemmatis in ipsorum centra cadent, ex quibus ducantur rectæ F B, G C, ad circumferentias circulorum vtcunque, connectanturq; rectæ E B, E C. Quoniam igitur anguli E F B, E G C, recti sunt, ex definitione 3. libri 11. [a] Erit tam quadratum rectæ E B, quadratis rectarum E F, F B, quàm quadratum rectæ E C, quadratis rectarum E G, G C, æquale: Sunt autem quadrata rectarum E B, E C, æqualium, cũ cadant ex centro sphæræ ad eius superficiem, æqualia. [b] Igitur & quadrata rectarum E F, F B, quadratis rectarum E G, G C, æqualia erunt. Et proinde demptis quadratis æqualibus rectarum æqualium F B, G C, cùm sint semidiametri circulorum æqualium, erit reliquum quadratum rectæ E F, reliquo quadrato rectæ E G, æquale; Atque adeò æquales erunt rectæ perpendiculares E F, E G. Quam ob rem circuli A B, D C, æqualiter distant à centro E.

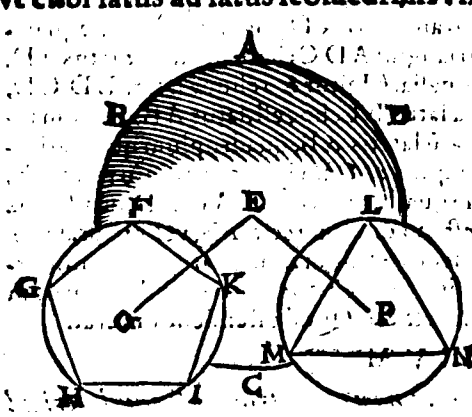
[a] 47. primi

[b] 47. primi

Sed iam æqualiter distent circuli A B, D C, à centro sphæræ E. Dico ipsos esse æquales. Constructa enim figura, vt prius, ostendemus eodem modo, quadrata rectarum E F, F B, æqualia esse quadratis rectarum E G, G C; Ac proinde, demptis quadratis æqualibus rectarum æqualium E F, E G, cùm circuli æqualiter ponantur distare à centro, reliquum quadratum rectæ F B, reliquo quadrato rectæ G C, æquale erit; atq; adeò æquales erunt rectæ F B, G C, semidiametri scilicet circulorũ A B, D C. Circuli igitur A B, D C, æquales sunt. Quod est propositũ.

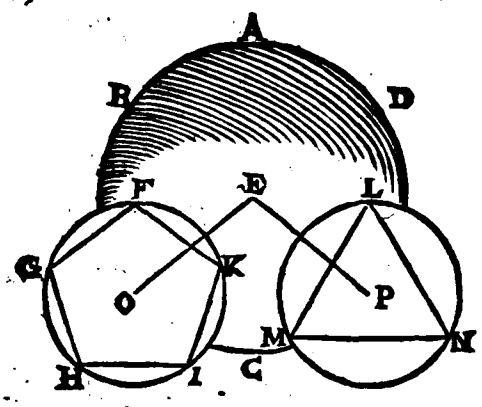
THEOR. 11. PROPOS. 11.

Dodecaedrvm ad Icosaedrum in eadem cum ipso sphæra descriptum, est vt cubi latus ad latus Icosaedri, in vna eademque sphæra.



In sphæra A B C D, cuius centrum E, inscriptum sit Dodecaedrum, cuius vnũ pentagonũ F G H I K: Item Icosaedrum, cuius vnum triangulum L M N. Dico esse Dodecaedrum ad Icosaedrum, vt latus cubi ad latus Icosaedri, in vna eademq; sphæra, siue hæc eadem sit, quæ sphæra A B C D, siue non. Quoniam omnes anguli tam pentagoni, quàm trianguli, superficiem sphæræ tangunt; si per pentagonum, & triangulum plana ducantur, efficientur, per 1. lemma præcedens, duo circuli in sphæra F G H I K, L M N, comprehendentes pentagonum, & triangulum. [a] Quia verò idem circulus comprehẽdit & Dodecaedri pentagonum, & Icosaedri triangulum, æquales erunt idcircò circuli F G H I K, L M N. Ac propterea, per lemma 1. præcedens, æqualiter ab E, centro sphæræ distabunt, ideoque perpendiculares ex E, in plana circulorum deductæ, & in eorum centra, per coroll. lemmatis 1. cadentes, quales sunt E O, E P, æquales erunt. Non aliter ostendentur perpendiculares ex E, ad omnia pentagona Dodecaedri, & ad omnia triangula Icosaedri, deductæ æquales. Quare si ex omnibus angulis Dodecaedri ad E, ducantur rectæ lineæ, resoluetur Dodecaedrum in duodecim pyramides æqualium altitudi-

[a] 5. quarti decimi.



dinum; Ac proinde cùm & baſes ipſarũ æquales ſint, nempe pentagona Dodecaedri, æquales inter ſe, ex coroll. propoſ. 6. lib. 12. Eodemq; modo, ſi ex omnib⁹ angulis Icoſaedri ad E, lineæ rectæ ducantur, reſolue tur Icoſaedrum in 20. pyramides inter ſe æquales, quarum altitudines æquales erunt altitudinibus pyramidum Dodecaedri. [a] Quoniam autem eſt, vt baſis FGHIK, ad baſin LMN, ita pyramis FGHIKE, ad pyramidem LMNE, cùm vtriuſque eadem ſit altitudo; [b] Erunt quoque, per ea, quæ in ſcholio propoſ. 22. lib. 5. demóſtrauimus, vt duodecim baſes Dodecaedri, tota videlicet ſuperficies Dodecaedri, ad baſin LMN, ita duodecim pyramides Dodecaedri, hoc eſt, totum ſolidum Dodecaedri, ad pyramidem LMNE. Rurſus quia eſt (ſicut modò diximus) vt tota ſuperficies Dodecaedri, ad Icoſaedri baſin LMN, ita Dodecaedrũ ad pyramidem LMNE; erit, per idem ſcholium, vt tota ſuperficies Dodecaedri ad 20. baſes Icoſaedri, id eſt, ad totam ſuperficiem Icoſaedri, ita Dodecaedrum ad 20. pyramides Icoſaedri, nempe ad totum ſolidum Icoſaedri: [b] Atqui ita eſt Dodecaedri ſuperficies ad Icoſaedri ſuperficiem, vt cubi latus ad Icoſaedri latus eiuſdem cum ipſis ſphæræ; atq; adeò, ex ſcholio propoſ. 10. huius lib. vt latus cubi ad latus Icoſaedri cuiuſcunque alterius ſphæræ valuit. Igitur erit quoq; Dodecaedrum ad Icoſaedrum, vt latus cubi ad latus Icoſaedri cuiuſcunque ſphæræ. Quapropter Dodecaedrum ad Icoſaedrum, &c. Quod erat demonſtrandum.

a 6. duodec.

b 9. quartidecimi.

COROLLARIVM.

QVONIAM verò oſtenſum eſt quoq; [a] *ita eſſe ſuperficiẽ Dodecaedri ad ſuperficiem Icoſaedri eiuſdem ſphæræ, vt latus cubi ad latus Icoſaedri in eadem cũ ipſis ſphæra:* [b] *Item ita eſſe cubi latus ad latus Icoſaedri vnius eiuſdemq; ſphæræ, vt eſt linea potens totã diuiſam quamcunque extrema ac media ratione, & maius ſegmentum illius, ad lineam potentem totam diuiſam eandem, & minus illius ſegmentum:* [c] *Item ita eſſe Dodecaedrum ad Icoſaedrũ eiuſdem ſphæræ, vt latus cubi ad latus Icoſaedri in vna eademq; ſphæra; Perſpicuum eſt, has quatuor proportiones, nimirum lateris cubi ad latus Icoſaedri; & ſuperficiei Dodecaedri ad ſuperficiem Icoſaedri; & lineæ potentis totam quamcunque ſectam extrema ac media ratione, & eius ſegmentum maius, ad potentem totam eandem, & minus ſegmentum illius; & Dodecaedri ad Icoſaedrum eiuſdem ſphæræ, eſſe inter ſe æquales.*

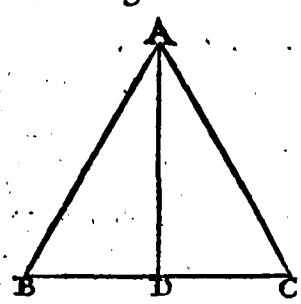
a 9. quartidecimi.

b 10. quartidecimi.

c 11. quartidecimi.

THEOR. 12. PROPOS. 12.

LATVS trianguli æquilateri potentia ſeſquitertium eſt lineæ perpendicularis ab vno angulo ad latus oppoſitum deductæ.



IN triangulo æquilatero ABC, ducatur ex angulo A, ad latus oppoſitum BC, perpendicularis AD. Dico quadratum lateris AB, ſeſquitertium eſſe quadrati perpendicularis AD. Quoniam enim ob æqualitatem laterum AB, AC, [a] anguli B, & C, æquales ſunt; & anguli ad D, recti: Erunt duo anguli B, & D, trianguli ADB, æquales duobus angulis C, & D, trianguli ADC; habent autẽ & latus AD, commune, vel AB, AC, æqualia. [b] Igitur & reliqua latera BD, CD, æqualia ſunt; ac propterea latus BC, hoc eſt, latus AB, dũplum rectæ BD; & idcircò quadratũ lateris AB, quadruplum quadrati rectæ BD, ex ſcholio propoſ. 4. lib. 2. [c] Cùm igitur quadrato rectæ AB, æqualia ſint quadrata rectarum AD, BD; erunt quoque quadrata rectarum AD, BD, quadrupla quadrati rectæ BD; Ac proinde, qualium partium 4. eſt quadratum rectæ AB, vel quadrata rectarum AD, BD, talium 1. erit quadratum rectæ BD, ideoq; talium 3. quadratum reliquum rectæ AD. Quare quadratum rectæ AB, partium 4. ſeſquitertium eſt quadrati rectæ AD, partium 3. Latus igitur trianguli æquilateri potentia ſeſquitertium eſt, &c. Quod oſtendendum erat.

a 5. primi.

b 26. primi.

c 47. primi.

COROLLARIVM.

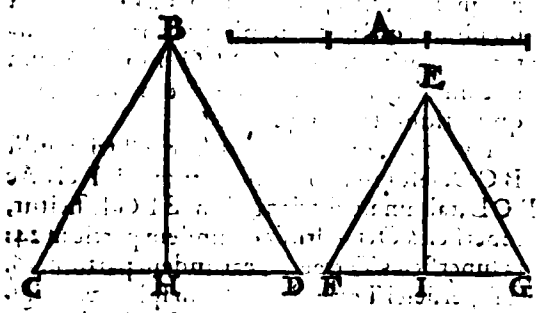
HINC manifeſtum eſt, lineam perpendicularem ex vno angulo trianguli æquilateri ad latus oppoſitũ demiſſam, ſecare & angulum & latus bifariam. Demonſtratum enim eſt BD, & CD, rectas æquales eſſe, hoc eſt, latus BC, ſecari bifariam à perpendiculari AD. Quare cùm latera AB, AD, trianguli ABD, æqualia ſint lateribus AC, AD, trianguli ACD; & baſis BD, baſi CD, æqualis; [a] *Erunt & anguli BAD, CAD, æquales, id eſt, angulus BAC, bifariam ſecabitur ab eadem perpendiculari AD.*

a 8. primi.

THEOR.

THEOR. 13. PROPOS. 13.

SI ſphæræ diameter fuerit Rationalis; Erit tam ſuperficies Tetraedri, quàm Octaedri in ea ſphæra, Media. 13.



SIT ſphæræ diameter Rationalis A. Dico tam ſuperficiem Tetraedri, quàm Octaedri in dicta ſphæra, eſſe Mediam. Sit enim B C D, vnum triangulum Tetraedri, & E F G, Octaedri illius ſphæræ, ducáturq; ex angulis B, & E, ad latera oppoſita C D, F G, perpendiculares B H, E I. [a] Quoniam igitur quadratum diametri A, ſeſquialterum eſt quadrati lateris Tetraedri B C, [b] & duplum quadrati lateris Octaedri E F; habebunt quadrata rectarum A, B C, E F, proportionem, quam numeri 6. 4. 3. [c] ideóque commenſurabilia erunt. Quare lineæ ipſæ A, B C, E F, commenſurabiles exiſtent, ſaltem potentia; Atque adeò, cùm A, ponatur Rationalis, erunt quoque Rationales B C, E F, & idcircò & earum dimidiæ Rationales erunt C H, F I.

[a] 13. tertijdecimi. [b] 14. tertijdecimi. [c] 6. decimi.

RVRSVS, [d] quia tam quadratum rectæ B C, quadrati rectæ B H, q̃ quadratũ rectæ E F, quadrati rectæ E I, ſeſquitertium eſt; habebũt tam quadrata rectarũ B C, B H, q̃ quadrata rectarũ E F, E I, proportionem inter ſe, quam numeri 4. 3. [e] ideóq; tam illa, q̃ hæc inter ſe commenſurabilia erunt. Quare & tam lineæ ipſæ B C, B H, q̃ lineæ E F, E I, commenſurabiles exiſtent. Eſt autẽ & tam C H, ipſi B C, q̃ F I, ipſi E F, dimidia videlicet totũ, commenſurabilis. [f] Igitur & tam B H, C H, q̃ E I, F I, commenſurabiles inter ſe erunt: Ac proinde cùm C H, & F I, oſtenſæ ſint Rationales, erunt quoq; B H, E I, Rationales. [g] Quoniam verò tam C H, B H, q̃ F I, E I, longitudine ſunt incommenſurabiles, q̃ earum quadrata nõ habeant proportionẽ, quam numerus quadratus ad numerum quadratum; (vt conſtat ex coroll. propoſ. 24. lib. 8. Habẽt enim proportionẽ, quam 1. ad 3. [h] cùm oſtenſum ſit talium partium 1. eſſe tam quadratũ C H, q̃ F I, quadratum, qualium 3. eſt tam quadratum B H, q̃ quadratum E I.) Erunt tam C H, B H, q̃ F I, E I, Rationales potentia tantũ commenſurabiles: [i] Ac proinde tam rectangulum ſub C H, B H, Rationalibus potentia tantùm commenſurabilibus, q̃ rectangulum ſub F I, E I, Rationalibus potentia tantùm commenſurabilibus contẽtum, Medium erit: Sunt autem triangula B C D, E F G, æqualia rectangulis ſub C H, B H, & ſub F I, E I, ex ſcholio propoſ. 41. lib. 1. cùm baſes triangulorum C D, F G, duplæ ſint baſium rectangulorum C H, F I. Igitur & triangula B C D, E F G, Media erũt. Quocirca cùm tota ſuperficies Tetraedri triangulo B C D, ſit commenſurabilis; (eſt enim triangulum B C D, totius ſuperficiei quarta pars.) Item tota ſuperficies Octaedri triangulo E F G, commenſurabilis; (Eſt enim triangulum E F G, totius ſuperficiei octaua pars.) Erunt quoque, ex coroll. propoſ. 24. lib. 10. ſuperficies Tetraedri, & Octaedri, Mediæ. Si igitur ſphæræ diameter fuerit Rationalis: Erit tam ſuperficies Tetraedri, q̃ Octaedri in ea ſphæra, Media. Quod erat oſtendendum.

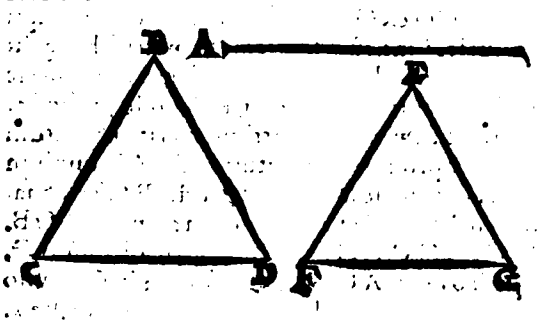
[d] 12. quartidecimi. [e] 6. decimi. [f] 12. decimi. [g] 9. decimi. [h] 12. quartidecimi. [i] 22. decimi.

COROLLARIVM.

SEQVITVR ex demonſtratione huius propoſ. omne triangulum æquilaterũ, cuius latus fuerit Rationale, eſſe ſuperficiem Mediam. Nam ex eo, q̃ latera B C, E F, & ob id eorum dimidia C H, F I, Rationalia ſunt oſtenſa, demonſtratum eſt, tam rectas C H, B H, quàm F I, E I, eſſe Rationales potentia tantùm commenſurabiles; Ac propterea rectangula ſub C H, B H, & ſub F I, E I, hoc eſt, triangula B C D, E F G, ipſis æqualia, eſſe Media. Cùm igitur eadem ſit ratio de omni triangulo æquilatero, cuius vnum latus ſit Rationale, perſpicuum eſt, quod infertur.

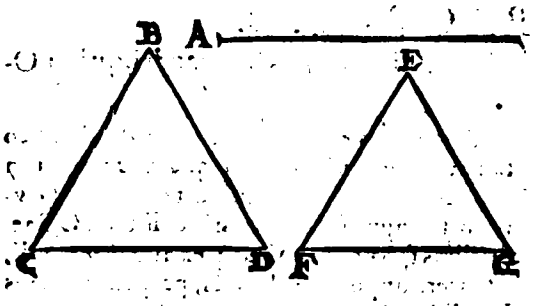
THEOR. 14. PROPOS. 14.

SI Tetraedrum, atq; Octaedrum eidem ſphæræ inſcribantur; erit baſis Tetraedri ſeſquitertia baſis Octaedri: Superficies autem Octaedri ſeſquialtera ſuperficiei Tetraedri. 14.



SIT ſphæræ diameter A, in qua deſcripti Tetraedri baſis ſit triangulũ B C D; Octaedri verò baſis triangulum E F G. Dico triangulum B C D, ſeſquitertium eſſe trianguli E F G. At verò ſuperficiem Octaedri eſſe ſeſquialteram ſuperficiei Tetraedri. [k] Quoniam enim quadratũ diametri A, ſeſquialterum eſt quadrati lateris, Tetraedri C D; [l] duplum verò quadrati lateris, Octaedri F G; ſit vt qualium partium 6. fuerit quadratũ diametri A, talium 4. ſit quadratum

[k] 13. tertijdecimi. [l] 14. tertijdecimi.



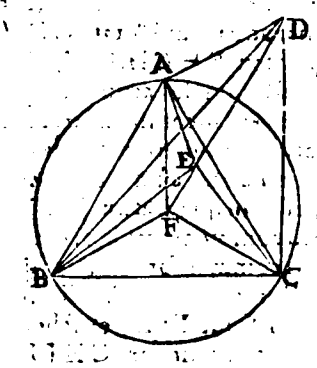
lateris CD, & talium 3. quadratum lateris FG. Quare quadratũ rectæ CD, ſeſquitertium eſt quadrati rectæ FG: Vt autem quadratum rectæ CD, ad quadratum rectæ FG, ita eſt triangulum BCD, ad triangulũ EFG. (a quia tam quadrata, quàm triangula proportionem inter ſe habent laterum CD, FG, duplicatã, cùm ſint ſimilia.) Igitur & triangulum BCD, ſeſquitertium eſt trianguli EFG.

a 20. & 19. ſexti.

RVRSVS, quoniam oſtenſum eſt triangulũ BCD, ſeſquitertium eſſe trianguli ERG; Ac propterea qualium partium 4. fuerit triangulum BCD, talium 3. eſſe triangulum EFG; Efficitur, vt triangulũ EFG, octies ſumptũ, hoc eſt, tota ſuperficies Octaedri, ſit earundem partium 24: At triangulum BCD, quater ſumptum, id eſt, tota ſuperficies Tetraedri, earundem partium 16. Quam ob rem ſuperficies Octaedri ſeſquialtera eſt ſuperficiei Tetraedri eiuſdem ſphæræ. Si igitur Tetraedrum, atque Octaedrum eidem ſphæræ inſcribantur, &c. Quod erat oſtendendum.

THEOR. 15. PROPOS. 15.

RECTA linea ex angulo quouis Tetraedri in ſphæra deſcripti per centrũ ſphæræ ducta, cadit in centrum baſis oppoſitæ, eſtq; perpendicularis ad dictam baſim.



SIT Tetraedrum ABCD, contẽtum quatuor triangulis æquilateris & æqualibus ABC, DAB, DBC, DCA, in ſphæra, cuius centrum E; ducaturq; ex angulo D, per E, centrum ſphæræ, recta DEF, incidens in baſim ABC, circulo inſcriptam ad punctum F. Dico F, eſſe centrum baſis ABC, & DF, perpendicularẽ eſſe ad eandem baſin. Ductis enim ex E, & F, ad angulos dictæ baſis rectis EA, EB, EC; FA, FB, FC; quoniam rectæ EA, EB, EC, ductæ ex centro ſphæræ ad eius ſuperficiem æquales ſunt; erũt duo latera EA, ED, trianguli EAD, æqualia duobus lateribus EC, ED, trianguli CED; Sunt autem & baſes AD, CD, æquales, cùm ſint latera triangulorũ æquilaterorum æqualium. b Igitur anguli AED, CED, æquales erunt; Ac proinde & reliqui AEF, CEF, æquales erũt, c eò quòd tam AED, AEF, q̃ CED, CEF, duobus rectis æquiualent. Eadem ratione æquales erunt anguli BEF, CEF, ſi conſiderentur triangula BED, CED. Quoniam igitur latera EA, EF, trianguli EAF, æqualia ſunt lateribus EC, EF, trianguli ECF; & anguli ipſis contenti, oſtenſi æquales; d Erunt baſes FA, FC, æquales. Sic quoque æquales erunt FB, FC, ſi conſiderentur triangula EBF, ECF. Quare cùm tres rectæ FA, FB, FC, ex F, in circumferentiam circuli cadentes ſint æquales; e erit F, centrum baſis ABC, ſeu circuli eam circumſcribentis.

b 8. primi.
c 13. primi.
d 4. primi.
e 9. tertij.

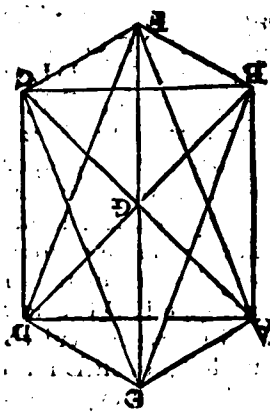
QVIA verò ex coroll. lemmatis 1. propoſ. 10. huius lib. linea perpendicularis ex E, centro ſphæræ ad planum circuli ABC, demiſſa, in centrum circuli cadit; efficitur, vt recta DE, per centrum ducta; & in centrum circuli F, cadens, perpendicularis ſit ad planũ circuli, ſeu baſis Tetraedri ABC. Nam ſi aliá duceretur perpendicularis, caderet ea in centrũ circuli, per dictum coroll. Quare cùm F, quoq; ſit demonſtratum centrum eiuſdem circuli, haberet vnus idemque circulus duo centra. quod eſt abſurdum. Recta igitur linea ex angulo quouis, &c. Quod demonſtrandum erat.

THEOR. 16. PROPOS. 16.

OCTAEDRVM in ſphæra deſcriptum, diuiditur in duas pyramides æquales, & ſimiles æqualium altitudinum; baſis verò vtriuſque eſt quadratum ſubduplum quadrati diametri ſphæræ.

SIT Octaedrum ABCDEF, contentũ octo triangulis æquilateris & æqualibus EAD, EAB, EBC, ECD, FBC, FBA, FAD, FDC, & in ſphæra deſcriptũ; cuius centrum G. Dico ipſum diuidi in duas pyramides æquales & ſimiles æqualium altitudinum, quarũ baſis communis eſt quadratum ſubduplum quadrati diametri ſphæræ. Ductis enim ex G, centro ſphæræ ad omnes angulos rectis lineis GA, GB, GC, GD, GE, GF, quæ æquales ſunt, cùm ſint ſemidiametri ſphæræ, ductæ videlicet è centro ad ſuperficiem ſphæræ: f quoniam quadratũ diametri ſphæræ, duplum eſt quadrati lateris Octaedri AB; & quadruplum quadrati ſemidiametri, AG, ex ſcholio propoſ. 4. lib. 2. Qualium partium 4. ponetur quadratũ diametri ſphæræ, talium partium 2. erit quadratum rectæ AB, & talium partium 1. quadratum rectæ AG; Ac proinde quadratum rectæ AB, duplum erit quadrati rectæ AG. Cùm ergo quadratum rectæ AG, æquale ſit quadrato rectæ BG; erit quadratum rectæ AB, æquale duobus quadratis rectarum AG, BG; g Ac propterea angulus AGB, rectus erit. Non aliter oſtendẽtur reliqui anguli AGD, BGC, CGD, recti. h Quam ob rem AG, CG, & BG, DG, in rectum erunt coniunctæ; i atq; adeò rectæ AC, BD, ſeſe ſecantes in G, in vno exiſtent

f 14. tertij de cimi.
g 4. primi.
h 14. primi.
i 2. vndec.



existent plano; [a] Ac propterea rectæ earũ extrema connectentes A B, B C, C D, D A, in eodem plano erunt cum ipsis. Quare quadrilaterum A B C D, in vno plano est situm. Diuisum est ergo Octaedrum in duas pyramides A B C D E, A B C D F, quarũ basis communis A B C D, vertices verò E, & F, quę pyramides æquales sunt, & similes, ex defin. 10. lib. 11. cùm quælibet constet ex quatuor triangulis æquilateris Octaedri, quę æqualia sunt, & similia, & basi communi A B C D. Dico iam earum altitudines esse æquales, & basin A B C D, esse quadratum subduplum quadrati diametri sphæræ. Quoniam enim ostensum est, quadratum lateris Octaedri A B, æquale esse duobus quadratis semidiametrorum A G, B G; erit quoq; quadratum lateris A E, æquale duobus quadratis semidiametrorum A G, E G; [b] Ac propterea angulus A G E, rectus erit. Eadem ratione rectus erit angulus D G E. Quoniam igitur recta E G, duabus rectis A G, D G, se mutuò secãtibus in G, ad rectos angulos insistit, [c] ipsa recta erit ad planum A B C D, per rectas A G, D G, ductum; nempe ad basin pyramidũ. Quare E G, altitudo est pyramidis A B C D E. Similiter ostendemus F G, altitudinem esse pyramidis A B C D F. Cùm ergo E G, F G, sint semidiametri sphæræ æquales, perspicuum est, dictas pyramides esse æqualium altitudinum. Rursus quia A C, est diameter sphæræ; [d] erit eius quadratum duplum quadrati lateris A D; Ac propterea æquale duobus quadratis laterũ A D, D C. [e] Quare angulus A D C, rectus est: Eodem modo recti erũt anguli D A B, A B C, B C D. Quare quadrilaterum A B C D, rectangulum est: Sed & æquilaterum, cùm eius latera sint latera Octaedri. Igitur quadratum est; quod cùm sit descriptum ex latere Octaedri A B; [f] constat ipsum esse subduplum quadrati diametri sphæræ. Octaedrum ergo in sphæra descriptum, &c. Quod erat ostendendum.

[a] 17. vndec.
[b] 48. primi.
[c] 4. vndec.
[d] 14. tertijdecimi.
[e] 48. primi.
[f] 12. tertijdecimi.

SCHOLIVM.

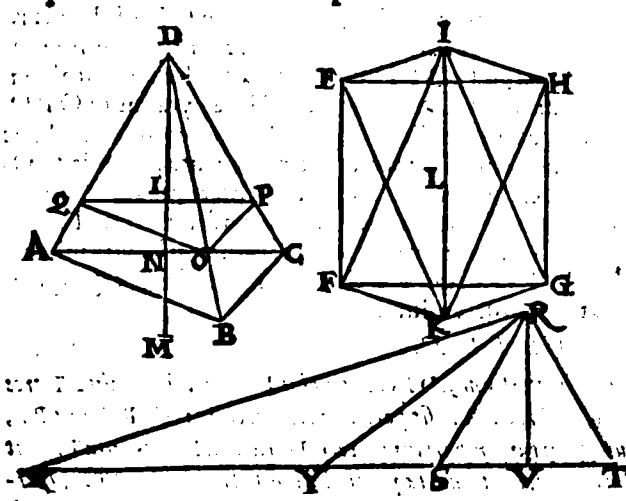
Mr ZTo breuius hanc propositionem demonstrauimus in coroll. 2. propos. 14. lib. 13. ex ipsa videlicet constructione Octaedri. Veruntamen quia hic demonstratur à Campano, non habita ratione constructionis Octaedri, visum est eius demonstrationem hoc etiam loco conscribere.

THEOR. 17. PROPOS. 17.

TETRAEDRVM sphæræ impositum ad Octaedrum in eadem sphæra descriptum se habet, vt rectangulum sub linea potente vigintiseptem sexagesimas quartas partes quadrati lateris Tetraedri, & sub linea continẽte octo nonas partes eiusdem lateris, comprehensum ad quadratum diametri sphæræ. 17.

VEL, vt Campanus loquitur.

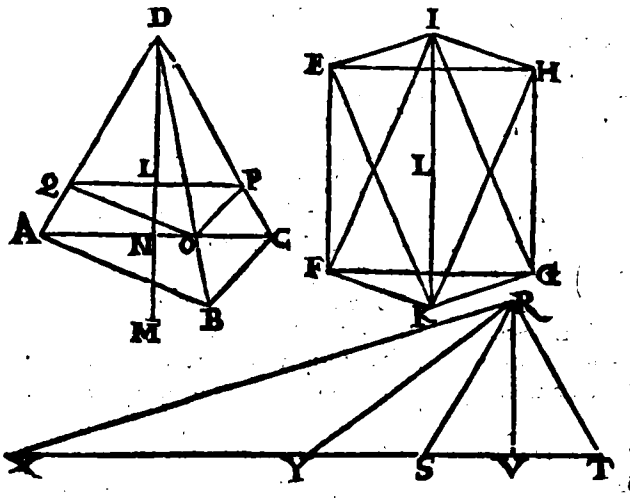
TETRAEDRVM sphæræ impositum ad Octaedrum in eadem sphæra descriptum se habet, vt rectangulum sub linea, quæ potentia est subsesquitertia trium quartarum partium lateris Tetraedri, & sub linea superquintupartiente vigesimas septimas partes earundem trium quartarũ partium lateris Tetraedri contentum, ad quadratum diametri sphæræ.



SIT Tetraedrum A B C D, & Octaedrũ E F G H I K, in vna eademq; sphæra, cuius centrum L. Ducatur ex angulo D, per centrum L, diameter sphæræ D M, incidens in basin A B C, ad punctum N. [g] Erit igitur N, centrum basis A B C, & D N, perpendicularis ad eandem basin. Quia verò pars diametri L N, inter centrum sphæræ & basin Tetraedri, est sexta pars diametri, & tertia semidiametri, p corol. 2. propos. 13. lib. 13: Erit D L, semidiameter talium partium 3, qualium L est L N, Ac propterea D N, talium 4. Ducatur deinde, ex scholio propos. 15. lib. 11. per centrum L, planum O P Q, parallelum plano A B C; [h] Eruntq; rectæ Q O, O P, P Q, parallelæ rectis A B, B C, C A; Ac propterea triangulum Q O P, æquiangulum erit triangulo æquilatero A B C, [i] cùm anguli illius æquales sint angulis huius, singuli singulis: At A B C, est æquiangulum, ex coroll. propos. 5. lib. 1. Igitur & Q O P, æquiangulum erit; Ac propterea & æquilaterum, ex corollario propos. 6. lib. 1. ideoque simile ipsi A B C. Sunt autem & triangula D Q O, D O P, D Q P,

[g] 15. quartidecimi.
[h] 16. vndec.
[i] 10. vndec.

triangulis D A B, D B C, D A C, æquilateris similia, ex corollario propos. 4. lib. 6. Igitur pyramides
a 17. vndec. A B C D, Q O P D, similes sunt, ex defin. 9. lib. 11. a Rursus, quia plana parallela A B, C, Q O P, secãt rectas D N, D C, proportionaliter; erit vt D N, ad D L, ita D C, ad D P: Erat autem D N, ad D L, vt 4. ad 3. (cùm ostensum sit D N, esse talium partium 4. qualium 3. est D L.) Igitur & D C, ad D P, e-
b 8. duodec. rit vt 4. ad 3. Ac proinde, b cùm pyramides similes habeant proportionem laterum triplicatá, erit pyramis A B C D, ad pyramidem Q O P D, vt 64. ad 27. hæc enim proportio triplicata est proportionis 4. ad 3. vt cõstat in his numeris 64. 48. 36. 27. Nam hi numeri sunt minimi in proportione 4.
c 20. sexti. ad 3. vt constat ex propos. 2. libri 8. Rursus c quia quadrata habent laterum proportionem duplicatam; erit quadratũ rectæ D C, ad quadratũ rectæ D P, vt 64. ad 36. vt in iisdem numeris constat.



d 12. quarti decimi. Sit iam triangulum æquilaterum R S T, æquale triangulo D Q P; demittatur; ex R, ad S T, perpendicularis R V. d Erit; latus R T, hoc est, D P, illi æquale, potétia sesquitertium perpendicularis R V. Ac proinde qualium partium 36. fuit quadratum rectæ D P, talium 27. erit quadratũ rectæ R V: Erat autem earundẽ partium 64. quadratũ rectæ D C. Igitur linea R V, est potens viginti septem sexagesimas quartas partes quadrati lateris Tetraedri.

Rvrsvs, extensa T S, fiat T X, ad T S, vt 64. ad 27. ex coroll. propos. 6. libri 10. diuidatur; T X, bifariam in Y, vt sit T Y, talium partiũ 32. qualium 27. est T S, seu illi æqualis D P. Quoniam verò proportio D C, ad D P, erat, vt 4. ad 3. nempe sesquitertia, erit D C, talium partiũ 36. qualium D P, est 27. (proportio enim 36. ad 27. est sesquitertia.) ac propterea qualium partium T Y, est 32. Quare linea T Y, continet octo nonas partes lateris Tetraedri D C. Dico igitur ita esse Tetraedrũ A B C D, ad Octaedrum E F G H I K, vt rectangulum contentũ sub recta R V, (quæ potest viginti septem sexagesimas quartas partes quadrati lateris D C.) & sub recta T Y, (quæ continet octo nonas partes eiusdem lateris.) ad quadratum diametri sphæræ.

e 1. sexti. Cvm enim ductis rectis R X, R Y, e triangulũ R T X, duplum sit trianguli R T Y, & basis T X,
f 41. primi. dupla sit basis T Y: f Est autẽ & rectangulum sub R V, T Y, duplum eiusdem trianguli R T Y. Erit
g 7. quinti. triangulum R T X, æquale rectangulo sub R V, T Y. g Ac propterea erit, vt triangulum R T X, ad
h 1. sexti. triangulum R S T, ita rectangulum sub R V, T Y, ad idem triangulũ R S T: h Est autẽ triangulum R T X, ad triangulum R S T, vt basis T X, ad basin S T, nimirũ vt 64. ad 27. Igitur & rectangulum sub R V, T Y, ad triangulum R S T, hoc est, ad triangulum D Q P, siue Q O P, sibi æquale; erit vt 64. ad 27. Fuit autẽ & pyramis A B C D, ad pyramidem Q O P D, vt 64. ad 27. Erit ergo vt rectangulum sub R V, T Y, ad triangulum Q O P, ita pyramis A B C D, ad pyramidem Q O P D: At verò vt triangulum Q O P, ad quadratum diametri sphæræ D M, ita est pyramis Q O P D, ad Octaedrum E F G H I K. (Nam cùm D N, recta sit ad planũ A B C, recta quoq; erit ad planum Q O P, ex scholio propos. 14. lib. 11. ideoq; sphæræ semidiameter D L, altitudo erit pyramidis seu Tetraedri
i 16. quarti decimi. Q O P D: i Octaedrũ aũt E F G H I K, diuiditur in duas pyramides æquales E F G H I, E F G H K, quarum basis cõmunis quadratũ E F G H, dimidium quadrati diametri sphæræ; & altitudines æquales semidiametri sphæræ L I, L K. Pyramides ergo Q O P D, E F G H I, æquales habent altitudines. Quare, ex scholio propos. 5. lib. 12. erit vt basis Q O P, ad basin E F G H, ita pyramis Q O P D, ad pyramidem E F G H I; Ac propterea per ea, quæ in scholio propos. 22. lib. 5. ostendimus, vt basis Q O P, ad duplum basis E F G H, hoc est, ad quadratum diametri sphæræ D M, ita pyramis Q O P D, ad duplum pyramidis E F G H I, hoc est, ad Octaedrum E F G H I K.) Ex æquo igitur erit, vt rectangulum sub R V, potente viginti septem sexagesimas quartas partes quadrati lateris Tetraedri D C, & sub T Y, octo nonis eiusdem lateris D C, contentum ad quadratum diametri sphæræ D M, ita pyramis, seu Tetraedrum A B C D, ad Octaedrum E F G H I K. Tetraedrum ergo sphæræ impositum ad Octaedrum, &c. Quod erat demonstrandum.

SCHOLIVM.

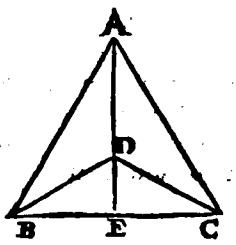
Qvoniam verò D C, talium partium 4. fuit, qualium 3. D P; continebit D P, seu illi æqualis R T, tres
a 12. quarti decimi. *quartas partes lateris Tetraedri D C: ac proinde,* a *cũ recta R T, sit potentia sesquitertia rectæ R V; erit R V, potentia subsesquitertia ipsius R T, nempe trium quartarum partium lateris Tetraedri. Rursus quia T Y, fuit talium partium 32. qualium 27. S T, seu D P; (tres videlicet quartæ partes lateris Tetraedri.) erit T Y, superquintupartiens vigesimas septimas partes ipsius S T, nimirum trium quartarum partium lateris Tetraedri. Quare constat, esse quoq; Tetraedrum A B C D, ad Octaedrum E F G H I K, vt rectangulum sub R V, quæ potentia subsesquitertia est trium quartarum partium lateris Tetraedri, & sub T Y, quæ superquintupartiens est vigesimas septimas partes earundem trium quartarum partium lateris Tetraedri, vt volebat Campanus.*

THEOR.

THEOR. 18. PROPOS. 18.

0. 17.

LINEA perpendicularis ex quolibet angulo trianguli æquilateri ad basin oppositam demissa; tripla est eius perpendicularis, quæ ex centro trianguli ad eandem basin deducitur.



SIT triangulum æquilaterũ A B C, cuius centrũ D, Ducatur ex A, per D, recta A E, q̃ perpendicularis erit ad B C, eamq; bifariam diuidet, ex coroll. 2. propos. 10. lib. 13. Dico A E, triplã esse rectæ D E, quæ scilicet perpendicularis est è centro ad basin ducta. Ductis enim rectis B D, C D, cũ latera D A, D B, trianguli A D B, æqualia sint lateribus D B, D C, trianguli B D C; (è centro enim ducuntur;) sit autem & basis A B, basi B C, æqualis: Erunt triangula A B D, B D C, æqualia, ex coroll. propos. 8. lib. 1. Atque eadem ratione æqualia erunt triangula A D B, A D C. Quare ob æqualitatem trium triangulorum A D B, B D C, C D A, triangulum A B C, triplum est trianguli B D C. Quoniam verò rectangulum sub A E, E B, triangulo A B C, & rectangulum sub D E, E B, triangulo B D C, æquale est, ex scholio propos. 41. lib. 1. cùm basis trianguli B C, dupla sit basis B E, vtriusq; rectanguli: Erit quoque rectangulum sub A E, E B, triplum rectanguli sub D E, E B: [a] Est autem vt rectangulum sub A E, E B, ad rectangulum sub D E, E B, eiusdem altitudinis E B, ita basis A E, ad basin D E. Igitur & A E, tripla est ipsius D E. Linea ergo perpendicularis ex quolibet angulo, &c. Quod erat ostendendum.

a 1. sexti.

COROLLARIVM.

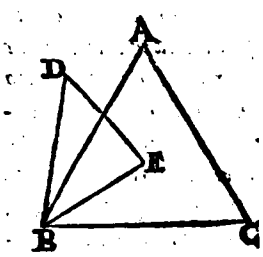
ITAQVE eadem perpendicularis A E, sesquialtera est reliquæ rectæ A D, inter angulum & centrum comprehensæ. Cùm enim A E, tripla sit ipsius D E; qualium partium 3. ponetur A E, talium 1. erit D E; Reliqua igitur A D, earundem partium 2. continebit: Ac propterea A E, sesquialtera erit ipsius A D.

Ex quibus rursus fit, rectam A D, rectæ D E, duplam esse.

THEOR. 19. PROPOS. 19.

0. 17.

SI Octaedrum sphæræ inscribatur; erit semidiameter sphæræ potentia tripla eius perpendicularis, quæ ex centro sphæræ in basin quamcunq; Octaedri ducitur.



SIT basis aliqua octaedri in sphæra, cuius centrum D, descripti, triangulum æquilaterum A B C, in quod è centro sphæræ D, perpendicularis demittatur D E; ducaturque semidiameter sphæræ D B. Dico semidiametrum D B, potentia triplam esse perpendicularis D E. Cùm enim, ex coroll. lemmatis 1. propos. 10. huius lib. perpendicularis D E, in centrum circuli sphæræ, qui triangulum A B C, circumscribit, cadat, erit E, centrum trianguli. Ducta igitur recta B E; [b] quoniam quadratum diametri sphæræ duplum est quadrati lateris octaedri A B; & quadruplum quadrati semidiametri sphæræ D B, ex scholio propos. 4. lib. 2. Si ponatur quadratum diametri partium 12. erit quadratum lateris A B, 6. & quadratum semidiametri sphæræ D B, 3. [c] Quia verò quadratum lateris A B, triplum est quadrati semidiametri circuli triangulum ambientis, rectæ scilicet B E; Erit quadratum rectæ B E, talium partium 2. qualium 6. fuit quadratum lateris A B. Quare [d] cùm quadratum rectæ D B, æquale sit quadratis rectarum B E, D E; sit autem quadratum rectæ D B, ostensum partium 3. Erit reliquum quadratum perpendicularis D E, talium partium 1. Ac proinde quadratum rectæ D B, triplum est quadrati rectæ D E. Si igitur octaedrum sphæræ inscribatur, &c.

b 14. tertiæ dec.

c 12. tertiæ dec.

d 47. primi.

THEOR. 20. PROPOS. 20.

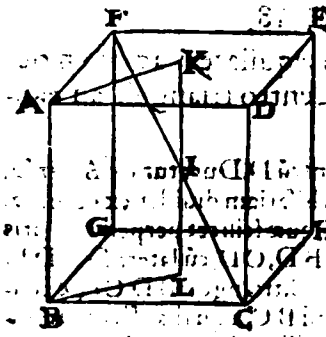
0. 18.

DVPLVM quadrati ex diametro cuiuslibet sphæræ descripti, æquale est superficiei cubi in illa sphæra collocati: Perpendicularis autem à centro sphæræ in aliquam basin cubi demissa, æqualis est dimidio lateris cubi.

SIT cubus A B C D E F G H, in sphæra descriptus, cuius centrum I, ex quo I K, perpendicularis ducatur ad vnam basin cubi, nempe ad A D E F. Dico duplum quadrati diametri sphæræ æquale esse superficiei cubi; & perpendicularẽ I K, æqualem esse dimidio lateris cubi. [e] Cùm enim quadratum diametri sphæræ triplum sit quadrati lateris cubi, hoc est, æquale tribus quadratis cubi; Erit duplum eiusdem quadrati ex diametro sphæræ descripti æquale sex quadratis cubi, id est, toti superficiei cubi.

e 15. tertiæ dec.

PRODVCTA autem K I, ad basin oppositam B C H G, vsque in punctum L; cùm K L, recta sit ad planum A E, recta quoque erit ad planum B H, illi parallelum, per scholium propos. 14. lib. 11.



a 6. vndec. Rursus, quia AB, KL, parallelæ sunt, quòd rectę sint ad planum AE; ducatur per ipsas planum faciens in planis oppositis parallelis AE, BH, communes sectiones, lineas rectas AK, BL, b quæ parallelæ quoque erunt inter se: Ac propterea parallelogrammũ erit ABLK; atque adeò recta KL, æqualis lateri cubi AB. Quoniam verò perpendicularis KL, è centro sphæræ I, cadit in bases AE, BH, ad puncta K, & L, erunt K, & L, centra circulorum dictas bases ambientium in sphæra, per coroll. lemmatis 1. propos. 10. huius lib. Quare KL, in centro I, bifariam secabitur à dicta diametro CF, vt in coroll. 1. propos. 15. lib. 13. ostendimus; Ac propterea cùm KL, ostensa sit æqualis lateri cubi, erit IK, dimidium eiusdem lateris cubi. Duplum igitur quadrati ex diametro cuiuslibet sphæræ descripti, &c. Quod ostendendum erat.

b 16. vndec.

COROLLARIVM.

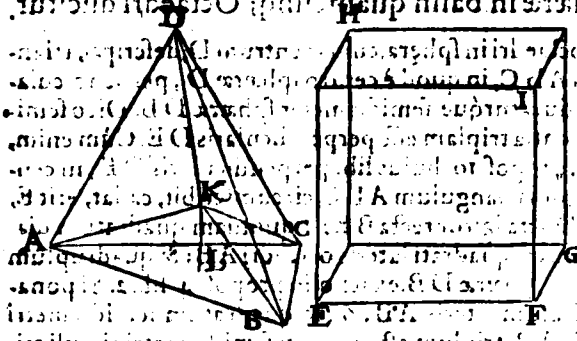
Ex dictis colligitur, solidum, quod fit ex dimidio lateris cubi in duas tertias partes quadrati diametri sphæræ dictum cubum comprehendentis, æquale esse cubo. a *Cùm enim quadratum diametri sphæræ triplum sit quadrati lateris cubi, erunt duo quadrata AE, BH, duæ tertiæ partes quadrati diametri sphæræ.* b *Perspicuum autem est, solidum, quod fit ex IK, dimidio lateris cubi in AE, tertiam partẽ quadrati diametri sphæræ, æquale esse solido, quod fit ex IL, dimidio lateris cubi in BH, tertiam partem quadrati diametri sphæræ, eò quòd dicta solida habeant & bases, & altitudines æquales: itaque cùm dicta duo solida compleant totum cubum, manifestum est, id quod fit ex dimidio lateris cubi, in duas tertias partes quadrati diametri sphæræ, æquale esse toti cubo. Quod erat propositum.*

a 15. tertiidecimi.

b 31. vndecimi.

ALITER proponi potest hoc corollarium, vt dicamus, solidum, quod fit ex latere cubi in tertiam partem quadrati diametri sphæræ, æquale esse cubo. Nam cubus BE, producitur ex BA, latere cubi in quadratum AE, quod est tertia pars quadrati diametri sphæræ: Vt perspicuum est.

SCHOLIVM.



VNIVERSE autem solidi, quod fit ex perpendiculari è centro cuiuscunque corporis regularis ad aliquam eius basim ductam in tertiam partem superficiei ipsius corporis, æquale est propositi corporis regulari. Sit enim corpus regulare quodcunque ABCD, contentum planis ABC, ABD, ACD, BCD, solidum autem EFGH, contentum sub EI, tertiæ parte superficiei corporis ABCD, & sub altitudine FG, quæ æqualis sit perpendiculari KL, ducta ex centro K, ad basin ABC. Dico solidum EFGH, æquale esse dato corpori regulari ABCD. Nam ductis ex centro K, rectis KA, KB, KC, KD, ad omnes angulos corporis, resoluetur corpus regulare in pyramides æquales, cùm æquales habeat bases & altitudines. Cùm enim circuli dictas bases ambientes, æquales sint, ipsi æqualiter à centro distabunt per lemma 2. propos. 10. huius lib. Ac propterea perpendiculares ex K, centro ad ipsorum plana ducta, nempe altitudines pyramidum, æquales erunt. Quoniam verò prisma contentum sub basi ABC, & altitudine KL, triplum est pyramidis ABCK, per coroll. 1. propos. 7. lib. 12. Atque eadem ratione prismata contenta sub reliquis basibus, & eadem altitudine KL, tripla sunt suarum pyramidum; Erit prisma contentum sub tota superficie corporis regularis, & altitudine KL, (nimirum compositum ex omnibus illis prismatis) triplum corporis regularis ABCD. Quam ob rem cùm idem prisma triplum sit prismatis EFGH, quod & illius basis tripla ponatur basis huius, per ea, quæ ad propos. 7. lib. 12. demonstrauimus, erunt solida EFGH, ABCD, æqualia. Quod est propositum.

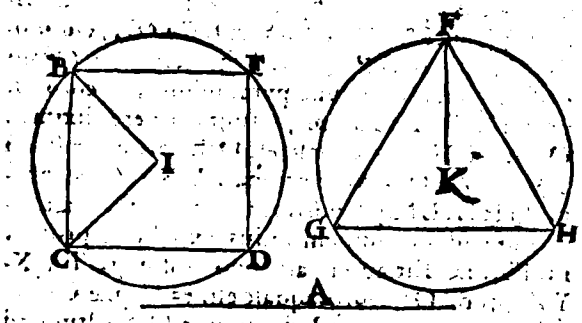
THEOR. 21. PROPOS. 21.

IDEM circulus comprehendit & cubi quadratum, & Octaedri triangulum, eiusdem sphæræ.

IN sphæra, cuius diameter A, intelligatur descriptus cubus, cuius vnum quadratum BCDE, & Octaedrum, cuius vnum triãgulum FGH. Dico eundem circulum circumscribere & quadratum BCDE, & triangulũ FGH, hoc est, circulos BCDE, FGH, ipsa circumscribẽtes, esse æquales. Sint enim rectæ è cẽtris IB, KE. a Quia igitur quadratũ diametri A, triplũ est quadrati lateris cubi BC, & quadratũ lateris BC, duplũ quadrati rectæ BI (Nã ducta recta IC, fiet angulus BIC, rectus,

a 15. tertiidecimi.

b 47. primi.



rectus, cùm ſubtendat quadrantem; [a] Ac proinde quadratum rectæ B C, æquale erit quadratis rectarum B I, I C. Quare cùm rectarum æqualium B I, I C, æqualia ſint quadrata: duplum erit quadratum rectæ B C, quadrati rectę B I.) qualium partium 6. ponetur quadratum diametri A, talium 2. erit quadratum lateris B C, & talium 1. quadratum rectæ B I. Rurſus [b] quia quadratum diametri A, duplum eſt quadrati lateris Octaedri F G; [c] & quadratum lateris F G, tripluum quadrati rectæ F K, ex centro ductæ; qualium partium 6. ponetur quadratum diametri A, talium 3. erit quadratum lateris F G, & talium 1. quadratum rectæ F K. Cùm igitur & talium partium 1. oſtenſum ſit quadratum rectæ B I, æqualia erunt quadrata rectarum B I, F K: Ac propterea & rectæ ipſæ, & circuli ex ipſis deſcripti B C D E F G H, æquales erunt. Idem ergo circulus comprehendit, &c. Quod erat oſtendendum.

[a] 47. primi.

[b] 14. tertiidecimi.

[c] 12. tertiidecimi.

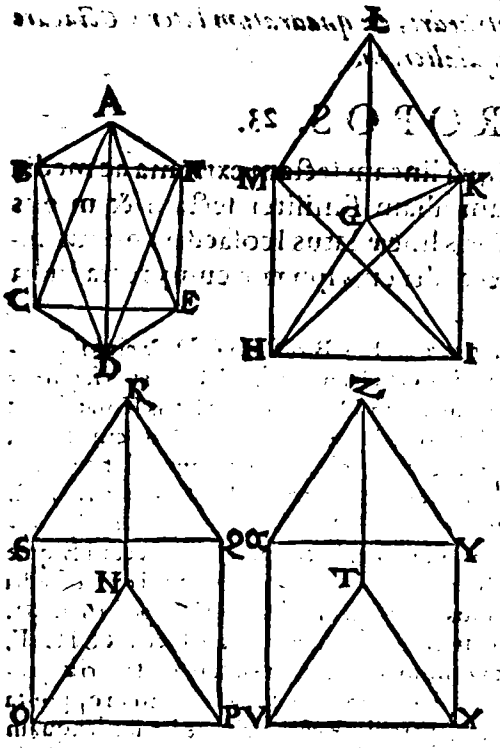
COROLLARIVM

Hinc fit, lineas perpendiculares, coniungentes centra circulorum, qui baſes oppoſitarum cubi, quam Octaedri circumſcribunt, æquales eſſe. Si enim ex centro ſphæræ ad baſes cubi & Octaedri perpendiculares ducantur, cadent earum centra circulorum ipſas circumſcribentium, ex coroll. lemmatis 1. propoſ. 10. huius lib. [c] *quarum ſint æquales oſtenſi, æqualiter diſtabunt a centro ſphæræ, ex lemmate 2. eiuſdem propoſ. Ac proinde æquales erunt dictæ perpendiculares. Quæ cùm ſint dimidiatæ partes rectarum, quæ centra oppoſitarum baſium connectunt; (Nam ſi producantur, perpendiculares quoque erunt ad oppoſitas baſes, ex ſphalio propoſ. 14. lib. 11. propterea quòd parallelæ ſunt oppoſitæ baſes in Octaedro, ex coroll. 2. propoſ. 14. lib. 13. quemadmodum & oppoſitæ baſes cubi parallelæ ſunt.) æquales erunt perpendiculares centra oppoſitarum baſium contingentes tam in cubo, quàm in Octaedro. quod eſt propoſitum.*

[c] 21. quartidecimi.

THEOR. 22. PROPOS. 22.

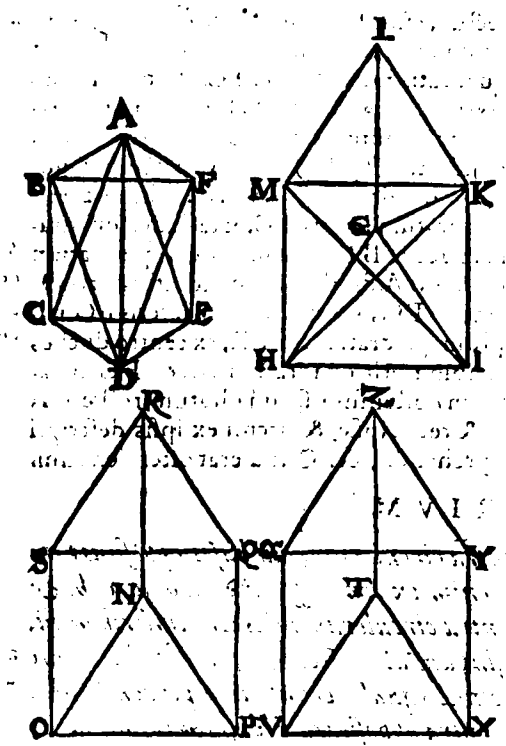
SI Octaedrum, atq; Tetraedrum eidem ſphæræ inſcribantur; erit Octaedrum ad triplum Tetraedri, vt latus Octaedri ad latus Tetraedri.



IN eadem ſphæra inſcriptum ſit Octaedrum A B C D E F, & Tetraedrum G H I K. Dico eſſe Octaedrum ad triplum Tetraedri, vt latus B F, ad latus H I. Ducta enim in Octaedro diametro A D, diuidetur Octaedrum in quatuor pyramides, quarum latus commune eſt ipſa diameter A D, & vertex communis A, nempe in B C D A, cuius baſis B C D; in B D E A, cuius baſis B D E; in C D E A, cuius baſis C D E; & in D E F A, cuius baſis D E F; quæ quidem omnes baſes infra quadratum B C E F, exiſtunt, cõtinentes cum ipſo dimidiatam partem Octaedri. Quoniam verò quælibet harum pyramidum conſtat duobus triangulis æquilateris Octaedri, & duobus aliis triangulis, quæ quoniam latus ipſorum commune eſt A D, diameter, & reliqua latera, ipſius Octaedri latera exiſtunt, [a] inter ſe æqualia ſunt; efficitur has quatuor pyramides æquales eſſe inter ſe, cùm contineantur planis & multitudine, & magnitudine æqualibus. Conſtituatur ſuper G H I, baſin Tetraedri, priſma G H I K L M, eiuſdem cum Tetraedro altitudinis, quod ipſius Tetraedri triplum erit, per corollarium primum, propoſitionis ſeptimæ, libri duodecimi. Rurſus, ſuper baſin octaedri N O P, & T V X, baſi Tetraedri æqualem, cõſtituantur duo priſmata N O P Q R S, T V X Y Z a, eiuſdem cum Octaedro, ſeu pyramide A C D E, altitudinis. [b] Quoniam igitur G H I, hoc eſt, T V X, baſis Tetraedri ſeſquitertia eſt ipſius N O P, baſis Octaedri; Erit quoq; priſma T V X Y Z a, priſmatis N O P Q R S, ſeſquitertium, cùm priſmata eiuſdem altitudinis ſint, vt

[a] 8. primi.

[b] 14. quartidecimi.



baſes, ex iis, quæ ad propoſ. 7. lib. 12. demonſtrauimus. Eſt autẽ & Octaedrum ABCDEF, eiuſmodi priſmatis NOPQRS, ſeſquitertium; (Nam priſma æquale eſt tribus pyramidibus, ex coroll. 1. propoſ. 7. lib. 12. qualium quatuor cõtinere diximus Octaedrũ.) Igitur æquale eſt Octaedrum priſmati TVXYZ α. Quia verò priſma TVXYZ α, ad priſma GHIKLM, proportionem habet, quam altitudo illius ad altitudinem huius, ex ſcholio propoſ. 14. libri 12. Eſt autem altitudo priſmatis TVXYZ α, quod Octaedro æquale eſt, eadẽ quæ Octaedri, ex conſtructione: Erit quoque Octaedrum ad priſma GHIKLM, hoc eſt, ad triplum Tetraedri GHIK, vt altitudo Octaedri ad altitudinẽ Tetraedri: Eſt autem altitudo Octaedri, nempe perpendicularis centra baſium oppoſitarum coniungens, æqualis lateri cubi, nimirum perpendiculari centra baſium oppoſitarum connectenti, per coroll. propoſ. 21. huius lib. Atque vt latus cubi ad altitudinem Tetraedri, ita eſt latus Octaedri ad latus Tetraedri. (Nam tam quadratum lateris cubi ad quadratum altitudinis Tetraedri, quàm quadratum lateris Octaedri ad quadratũ lateris Tetraedri, eſt, vt 3. ad 4. Poſito enim quadrato diametri ſphæræ 9. erit quadratum lateris cubi 3. ex propoſ. 15. lib. 13. & quadratum altitudinis Tetraedri 4. ex coroll. 2. propoſ. 13. lib. 13. ideoq; quadratum lateris cubi ad quadratum altitudinis Tetraedri, eſt vt 3. ad 4. Rurſus poſito quadrato diametri ſphæræ 6. erit quadratum lateris Octaedri 3. & quadratum lateris Tetraedri 4. &c.) Eſt igitur Octaedrum ad triplum Tetraedri, vt latus Octaedri ad latus Tetraedri. Si itaq; Octaedrum, atq; Tetraedrum eidem ſphæræ inſcribantur, &c. quod demonſtrandũ erat.

α 18. tertij decimi.

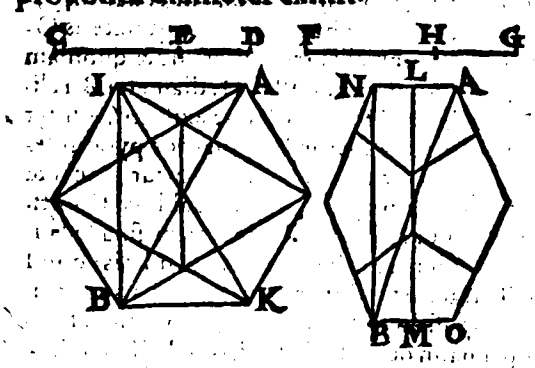
COROLLARIVM.

Ex dictis infertur, ita eſſe altitudinem Octaedri ad altitudinẽ Tetraedri, vt latus Octaedri ad latus Tetraedri. Oſtenſum enim eſt, ita eſſe latus cubi, quod quidem æquale eſt altitudini Octaedri, ad altitudinem Tetraedri, vt latus Octaedri ad latus Tetraedri. Item colligitur ita eſſe diametrum ſphæræ ad latus Tetraedri, vt latus Octaedri ad latus cubi. α *Nam & quadratum diametri ad quadratum lateris Tetraedri, & quadratum lateris Octaedri ad quadratum lateris cubi, proportionem habet ſeſquialteram.*

α 18. tertij decimi.

THEOR. 23. PROPOS. 23.

Si recta linea propoſita potuerit totam aliquã lineam ſectam extrema ac media ratione, & maius eius ſegmentum; Item totam aliam ſimiliter ſectam & minus eius ſegmentum: Erit maius ſegmentum prioris lineæ latus Icoſaedri; minus autem ſegmentum poſterioris lineæ latus Dodecaedri eius ſphæræ, cuius recta linea propoſita diameter exiſtit.



Poſsit recta AB, rectam CD, & eius ſegmẽtum maius CE, Item rectam FG, & eius ſegmentum minus HG. Dico CE, eſſe latus Icoſaedri, & HG, latus Dodecaedri, eius ſphæræ, cuius AB, diameter exiſtit. Intelligatur enim in ſphæra, cuius diameter AB, deſcriptũ Icoſaedrum AIBK, & Dodecaedrũ ANBO. Latera deinde Icoſaedri oppoſita AI, BK, connectantur recta IB, quæ ſubtẽdet vnum angulum pentagoni ex Icoſaedri lateribus cõpoſiti, vt conſtat ex propoſ. 16. lib. 13. (Nam in ea figura, ducta recta ZF, erit RSHZF, pentagonum, ob quinque latera Icoſaedri æqualia GR, GS, GH, GZ, GF, cadentia ex G, in ſuperficiẽ ſphæræ, in quo recta RH, latera oppoſita RX, HI, coniungens angulum RSH, ſubtendit) clariusq; patebit ex cõſtructione Icoſaedri, quam ad finem libri 16. ex Pappo afferemus: quod etiã videre licet in aliquo Icoſaedro materiali. Quia verò AI, BK, latera oppoſita parallela ſunt, per coroll. 3. propoſ. 16. lib. 13. α erunt anguli AIB, IBK, æqua-

α 29. primi.

IBK, æquales duobus rectis; Ac proinde, cùm sint inter se æquales, (Ducta enim alia diametro IK; cùm latera AI, IB, trianguli AIB, æqualia sint lateribus KB, BI; & bases quoque AB, IK, æquales; [a] Erunt anguli AIB, IBK, æquales.) recti erunt; [b] ideoque quadratum rectæ propositæ AB, æquale erit quadratis rectarum AI, IB: Erat autem idem quadratum rectæ AB, æquale, ex hypothesi, quadratis rectarum CD, CE: Igitur quadrata rectarum IB, IA, æqualia sunt quadratis rectarum CD, CE; Ac propterea cùm CE, sit maius segmentum ipsius CD, diuisæ extrema ac media ratione; Item IA, maius segmentum ipsius IB, similiter diuisæ; (Nam IB, subtendit angulum pentagoni, cuius latus est IA, latus Icosaedri. Constat autem, rectæ subtendentis angulum pentagoni, si secetur extrema ac media ratione, [c] maius segmentum esse æquale lateri eiusdem pentagoni.) æquale erit CE, maius segmentum ipsi IA, lateri Icosaedri. [d] Cùm enim sit vt CD, ad CE, ita IB, ad IA; [e] erit quoque vt quadratum rectæ CD, ad quadratum rectæ CE, ita quadratum rectæ IB, ad quadratum rectæ IA; Ac componendo, vt quadrata rectarum CD, CE, ad quadratum rectæ CE, ita quadrata rectarum IB, IA, ad quadratum rectæ IA: Ostensa sunt autem quadratis rectarum CD, CE, æqualia quadrata rectarum IB, IA; [f] Igitur & quadrato rectæ CE, æquale est quadratum rectæ IA; ideoq; rectæ CE, IA, æquales sunt. Quod est propositum.

[a] 8. primi. [b] 47. primi. [c] 8. tertiædecimi. [d] 2. quartædecimi. [e] 22. sexti. [f] 14. quinti.

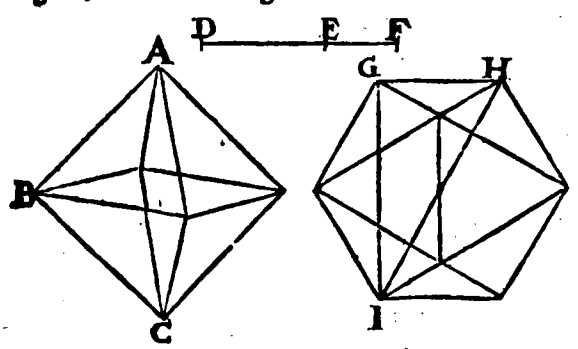
RVRSVS, latera Dodecaedri opposita AN, BO, secentur bifariam in L, & M, punctis quæ recta LM, & ipsa latera recta NB, coniungantur. Quoniam igitur NL, BM, æquales, parallelæ sunt, per coroll. 1. propos. 17. lib. 13. [g] erunt quoque LM, NB, æquales & parallelæ: Est autem recta LM, secans latera opposita bifariam, perpendicularis ad ipsa latera opposita, per idem coroll. Igitur & NB, ad eadem perpendicularis erit. [h] Ac proinde quadratum rectæ propositæ AB, æquale erit quadratis rectarum NB, NA. Quare cùm idem quadratũ rectæ AB, æquale sit positum quadratis rectarum FG, HG; æqualia erunt quadrata rectarum NB, NA, quadratis rectarum FG, HG: Ac propterea, cùm HG, sit minus segmentum ipsius FG, sectæ extrema ac media ratione: Item NA, minus segmentum ipsius NB, hoc est, ipsius LM, similiter diuisæ, per coroll. 4. propos. 17. lib. 13. æquale erit HG, minus segmentum ipsi NA, lateri Dodecaedri. Quod quidem non aliter ostendemus, ac suprà demõstrauimus CE, maius segmentũ æquale esse ipsi IA, lateri Icosaedri. Si recta ergo linea propõsita potuerit totam aliquam lineam sectã extrema ac media ratione, & maius eius segmentum; Item totam aliam similiter sectam, & minus eius segmentum: Erit maius segmentũ prioris lineæ latus Icosaedri; minus autem segmentum posterioris, &c. Quod erat ostendendũ.

[g] 33. primi. [h] 47. primi.

THEOR. 24. PROPOS. 24.

SI latus Octaedri potuerit maius & minus segmentum rectæ lineæ extrema ac media ratione sectæ: Poterit latus Icosaedri in eadem sphæra descripti duplum minoris segmenti.

POSSIT latus AB, Octaedri ABC, & maius segmentum DE, & minus EF, rectæ DF, sectæ extrema ac media ratione. Sit quoque eidem sphæræ inscriptum Icosaedrum GHI, cuius latus GH, & subtendẽs angulum pentagoni ex lateribus Icosaedri compositi GI, & diameter HI. Dico quadratum lateris GH, duplum esse quadrati minoris segmẽti EF. Cùm enim GH, sit latus pentagoni, cuius vnum angulum subtendit recta GI; [i] erit GH, maius segmentum ipsius GI, diuisæ extrema ac media ratione; [k] Ac proinde composita recta ex GI, GH, secabitur similiter in G, puncto extrema ac media ratione. [l] Quia verò quadratum diametri HI, æquale est quadratis rectarum GI, GH, quòd angulus IGH, rectus sit, vt in præcedenti propos. ostensum est; & quadratum lateris AB, æquale quadratis rectarum DE, EF, ponitur; Erunt, vt quadratum diametri HI, ad quadratum lateris AB, ita quadrata rectarũ GI, GH, ad quadrata rectarum DE, EF: [m] Est autem quadratũ diametri HI, duplum quadrati lateris Octaedri AB. Igitur & quadrata rectarum GI, GH, dupla sunt quadratorum rectarũ DE, EF. Atqui vt quadrata rectarum GI, GH, ad quadrata rectarum DE, EF, ita est quadratum rectæ GH, ad quadratum rectæ EF. ([n] Nam cùm sit vt GI, ad GH, ita DE, ad EF. [o] Erit quoq; vt quadratum rectæ GI, ad quadratum rectæ GH, ita quadratum rectæ DE, ad quadratum rectę EF; & componendo, vt quadrata rectarum GI, GH, ad quadratum rectę GH, ita quadrata rectarum DE, EF, ad quadratum rectæ EF: Et permutando, vt quadrata rectarum GI, GH, ad quadrata rectarum DE, EF, ita quadratum rectæ GH, ad quadratum rectæ EF.) Quadratum igitur rectæ GH, duplum quoque est quadrati rectæ EF. Quare si latus Octaedri potuerit maius, & minus segmentum, &c. Quod erat ostendendum.

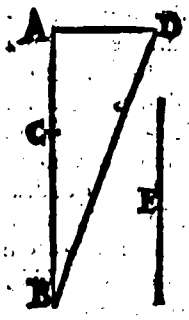


[i] 8. tertiædecimi. [k] 5. tertiædecimi. [l] 47. primi. [m] 14. tertiædecimi. [n] 2. quartædecimi. [o] 22. sexti.

THEOR. 25. PROPOS. 25.

SI recta linea diuisa extrema ac media ratione cum minore segmento angu-

lum rectum constituat, cui recta subtendatur: Erit recta linea, quę potentia sit subdupla ipsius rectæ subtensæ, latus octaedri eius sphæræ, in qua dictum minus segmentum latus existit Dodecaedri.



LINEA recta AB, secta in C, extrema ac media ratione constituat cum recta AD, quę æqualis sit minori segmento AC, angulum rectum A, cui recta subtendatur BD, sitq; recta E, potentia subdupla ipsius BD. Dico E, latus esse Octaedri illius sphęræ, in qua AD, vel AC, latus est Dodecaedri. Cùm enim per coroll. 2. propos. 17. lib. 13. maius segmentum BC, latus sit cubi illius sphæræ, cuius minus segmentum AC, vel AD, latus est Dodecaedri; erit diameter illius sphæræ potentia tripla maioris segmenti BC, nempe lateris cubi: [a] Sunt autem & quadrata rectarum AB, AD, nempe totius lineæ, & minoris segmẽti, tripla eiusdem quadrati maioris segmenti BC. Quadratum igitur diametri sphæræ, æquale erit quadratis rectarum AB, AD, hoc est, quadrato rectæ BD: Ac proinde recta BD, diameter est sphæræ. [b] Quare cùm diameter sphæræ potentia sit dupla lateris Octaedri; Ponsit autem recta BD, duplam rectæ E, quòd recta E, ponatur potentia subdupla ipsius BD: Erit E, latus Octaedri eiusdem sphæræ, cuius AD, latus Dodecaedri ponitur. Si igitur recta linea diuisa, &c. Quod erat demonstrandum.

a 4. tertiædecimi.

b 14. tertiædecimi

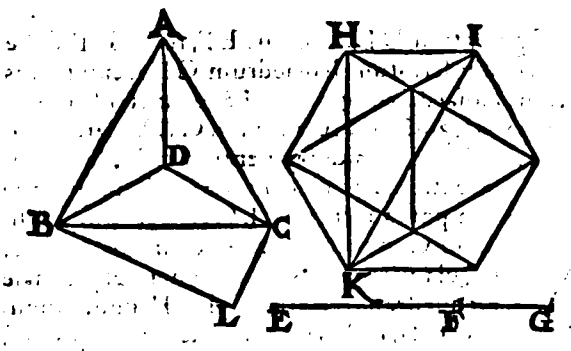
COROLLARIVM.

a 18. tertiædecimi.

† QVONIAM verò latus Octaedri E, potentia sesquialterum est lateris cubi BC, cuius maius segmentum est AD, latus Dodecaedri, vt constat ex iis, quæ ostendimus ad propos. 4. lib. 13. cùm BC, sit maius segmentum, & AD, minus rectæ AB, extrema ac media ratione diuisæ: Perspicuum est, si linea quæuis recta (nimirum BC,) secetur extrema ac media ratione, & alia linea (verbi gratia E,) potentia huius sesquialtera sit latus Octaedri, maius segmentum (nimirum AD,) esse latus Dodecaedri eiusdem sphæræ, in qua Octaedrum descriptum fuerit.

THEOR. 26. PROPOS. 26.

Si latus Tetraedri possit maius & minus segmentum lineæ rectæ extrema ac media ratione sectæ: latus Icosaedri eidem sphæræ inscripti potentia sesquialterum est minoris segmenti.



POSSIT Tetraedri ABCD, latus BC, maius segmentum EF, & minus FG, rectæ EG, diuisæ extrema ac media ratione; Sit quoq; HI, latus Icosaedri HIK, eiusdem sphæræ. Dico HI, rectam potentia esse sesquialterã minoris segmenti FG. Subtendat enim recta HK, vnum angulum pentagoni ex Icosaedri lateribus compositi, connectaturq; recta IK, diameter. [a] Quia igitur HI, est maius segmentum rectæ HK, diuisæ extrema ac media ratione: [b] Erit quoque composita KHI, diuisa eodem modo in H, maiusq; segmentum HK, & minus HI. [c] Fiat ex rectis BC, EF, FG, triangulum BCL, ita vt BL, recta ipsi EF, & CL, ipsi FG, sit æqualis; [d] Eritq; angulus L, rectus, quòd recta BC, ponatur posse rectas BL, CL, hoc est, rectas EF, FG: Est autem & angulus IHK, rectus, vt propos. 23. huius lib. ostendimus; [e] Estque vt BL, ad LC, ita KH, ad HI. [f] Igitur triangula BLC, KHI, æquiangula sunt. [g] Ac propterea vt KI, ad IH, ita BC, ad CL; & permutando, vt KI, ad BC, ita HI, ad CL: [h] Atqui IK, diameter est potentia sesquialterã lateris Tetraedri BC. Ergo & HI, latus Icosaedri erit potentia sesquialterum ipsius CL, hoc est, minoris segmenti FG. Si latus itaque Tetraedri posit maius, & minus segmentum, &c. Quod ostendendum erat.

a 8. tertiædecimi.

b 5. tertiædecimi.

c 22. primi.

d 48. primi.

e 2. quartidecimi.

f 6. sexti.

g 4. sexti.

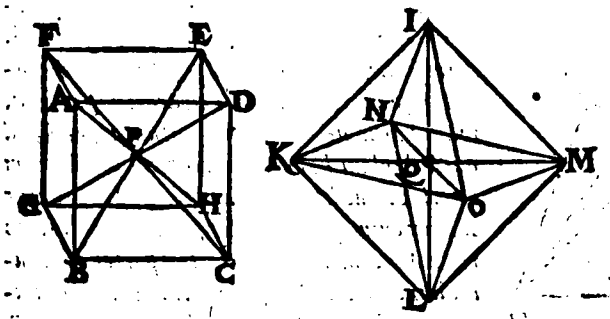
h 13. tertiædecimi.

THEOR. 27. PROPOS. 27.

CVBVS ad Octaedrum in eadem cum ipso sphæra descriptum, est, vt superficies cubi ad Octaedri superficiem. Item vt latus cubi ad semidiametrum sphæræ.

SINT in eadem sphæra cubus ABCDEFGH, & Octaedrum IKLMNO, quorum centra P, & Q. Dico eam esse proportionem cubi ad Octaedrum, quam habet superficies cubi ad superficiem Octaedri; nec non, quam habet cubi latus ad semidiametrum sphæræ. Ductis enim ex centris P, & Q, ad omnes angulos tam cubi, quàm Octaedri, rectis lineis, resoluetur cubus in sex pyramides æquales, quòd habeant & bases æquales, & altitudines. (Cùm enim circuli descripti circa pyramidum, seu cubi bases æquales, sint æquales, ac propterea æqualiter à centro sphæræ distent;

erunt



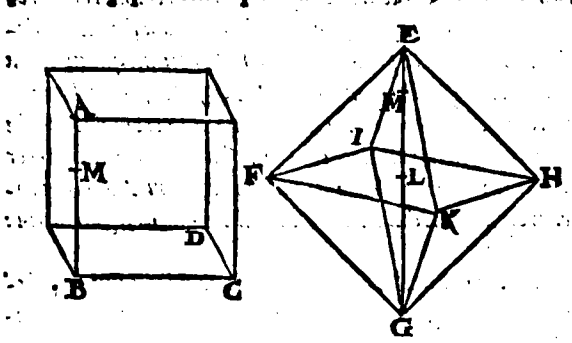
erunt lineæ perpendiculares ex centro P, ad plana circulorum, seu basium dictarum ductæ, nempe altitudines pyramidum, æquales, per lemma 2. propos. 10. lib. 14.) Atque Octaedrum in octo pyramides æquales, eandem ob causam. [a] Quoniam autẽ idem circulus complectitur & cubi quadratum, & Octaedri triangulum; æqualiter distabunt bases pyramidum cubi, & Octaedri à centro sphæræ, per lemma prætatum: Ac propterea æquales erũt altitudines pyramidum cubi, & Octaedri. Quam ob rem erit, vt vna pyramis cubi ad vnam pyramidem Octaedri, ita basis pyramidis cubi ad basim pyramidis Octaedri, ex scholio propos. 6. lib. 12. Ac proinde, ex iis, quæ in scholio propos. 22. lib. 5. demonstrauimus, vt sextuplum pyramidis cubi, nempe cubus ipse, ad pyramidem Octaedri, ita sextuplum basis pyramidis cubi, superficies videlicet tota cubi, ad basim pyramidis Octaedri; Ideoq; rursus, ex eodẽ scholio, vt cubus ad octuplum pyramidis Octaedri, nimirum ad ipsum Octaedrum, ita superficies cubi ad octuplum basis pyramidis Octaedri, ad ipsam scilicet superficiem Octaedri. Quod primo loco ostendendum proponebatur.

[a] 21. quarti decimi.

SINT rursus in eadem sphæra cubus A B C D, & Octaedrum E F G H I K, sitq; diameter sphæræ, seu Octaedri E G, & centrum L. Auferatur autem ex A B, latere cubi tertia pars A M; Item ex semidiametro E L, tertia pars E N. Quoniam verò quadratum I F K H, lateris Octaedri, basis existens duarum pyramidum, in quas Octaedrum secari diximus propos. 16. huius lib. [b] sesquialterum est quadrati B D, lateris cubi B C: Est autem & recta A B, rectæ B M, sesquialtera, ex constructione; reciprocabuntur bases I F K H, B D, & altitudines A B, B M: [c] Ac propterea parallelepipedum super basim I F K H, & sub altitudine B M, æquale erit parallelepipedo super basim B D, & sub altitudine A B, nimirum cubo A B C D. Rursus quia recta E L, rectæ E N, tripla est; erit & parallelepipedum super basim I F K H, & sub altitudine E L, triplum parallelepipedi super eandem basim, & sub altitudine E N, vt in scholio propos. 14. lib. 12. ostendimus; Sed & idem parallelepipedum super basim I F K H, & sub altitudine E L, triplũ est pyramidis I F K H E, ex coroll. 1. propos. 7. lib. 12. Igitur pyramis I F K H E, æqualis erit parallelepipedo super basim I F K H, & sub altitudine E N: Atqui huius parallelepipedi duplum est parallelepipedum super eandem basim, & sub altitudine L N, ex scholio propos. 14. lib. 12. quod & altitudo L N, dupla sit altitudinis E N: [d] Item Octaedrum E F G H I K, duplum est pyramidis I F K H E. Æquale igitur erit parallelepipedum super basim I F K H, & sub altitudine L N, Octaedro E F G H I K. Cæterùm quia parallelepipedum super basim I F K H, & sub altitudine B M, est ad parallelepipedum super eandem basim, & sub altitudine L N, vt altitudn B M, ad altitudinem L N, ex scholio propos. 14. lib. 12. Vt autem B M, ad L N, ita est A B, ad E L. (Cùm enim sit vt A M, ad M B, ita E N, ad N L; & componendo, vt A B, ad B M, ita E L, ad L N; erit quoque permutando, vt A B, ad E L, ita B M, ad L N.) Et parallelepipedum super basim I F K H, & sub altitudine B M, æquale est ostensum cubo A B C D; Et parallelepipedum super eandem basim, & sub altitudine L N, æquale est Octaedro E F G H I K. Igitur erit quoq; vt cubus A B C D, ad Octaedrum E F G H I K, ita A B, latus cubi ad E L, semidiametrum sphæræ. Quod secundo loco demonstrandum proponebatur. Quocirca cubus ad Octaedrum in eadem cum ipso sphæra descriptum, &c. Quod erat ostendendum.

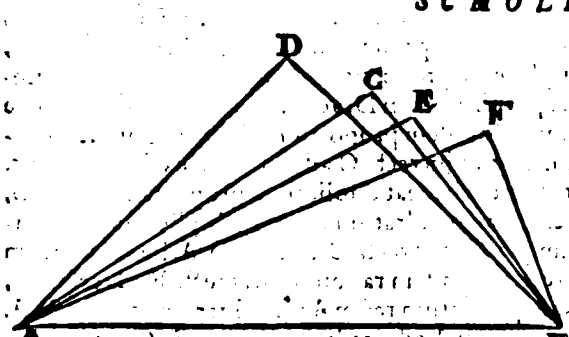
[b] 18. tertiidecimi.

[c] 34. vndec.



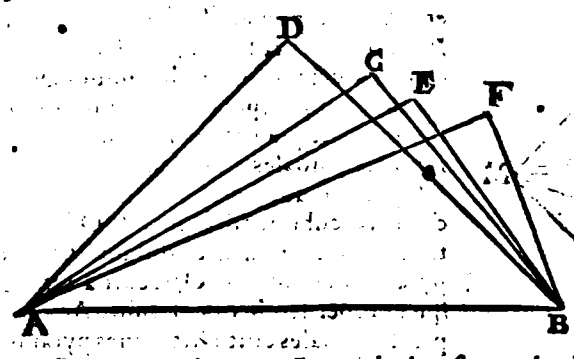
[d] 16. quarti decimi.

SCHOLIVM.



QVIA demonstratum est, [a] *diametrum sphæræ, in qua omnia quinq; corpora regularia describuntur, esse sesquialteram potentia lateris Tetraedri, ita vt, si quadratum diametri ponatur 3. partium, earundem 2. sit quadratum lateris Tetraedri; perspicuum est, si ex quadrato diametri data auferatur quadratum duas tertias illius partes continens, vt in scholio propos. 33. lib. 6. ostendimus, latus huiusce quadrati esse Tetraedri latus. Vel etiam, si quadrato diametri constituantur duo quadrata æqualia, quo-*

[a] 13. tertiidecimi.



proportionem habeant duplam, ex eodem scholio; maioris quadrati latus esse latus Tetraedri. Nam si ex quadrato diametri 3. partium detrahatur quadratum lateris Tetraedri 2. partium, relinquatur necesse est quadratum 1. partis, ad quod duplam habet proportionem quadratum lateris Tetraedri. Vt si diameter sphæræ ponatur A B, ex cuius quadrato detrahatur quadratum rectæ A C, continens duas tertias partes, quadrati diametri A B; Vel si constituantur duo quadrata rectarũ A C, B C, quadrato diametri A B, æqualia, ita vt quadratum rectæ A C, duplum sit quadrati rectæ B C; Erit recta A C, latus Tetraedri.

a 14. tertiidecimi. RVRSVS, a cùm ostensum sit, diametrum sphæræ potentia duplam esse lateris Octaedri; Fit, si ex quadrato diametri A B, dematur quadratum rectæ A D, quod dimidium sit quadrati diametri A B; Vel si constituantur duo quadrata rectarum A D, B D, quadrato diametri A B, æqualia, & inter se proportionem habentia æqualitatis, secundum doctrinam scholij propos. 33. lib. 6. rectam A D, latus esse Octaedri.

b 15. tertiidecimi. DEINDE, b quoniam docuimus, diametrũ sphæræ potentia esse triplam lateris cubi; Efficitur, si ex quadrato diametri A B, auferatur quadratum rectæ B C, quod tertia pars sit quadrati diametri A B; Vel si quadrato diametri A B, construantur duo quadrata æqualia rectarum A C, B C, ita vt quadratum rectæ A C, duplum sit quadrati rectæ B C, iuxta doctrinam eiusdem scholij propos. 33. lib. 6. Lineam rectam B C, cubi latus existere. Vel certè cùm diameter A B, possit & latus Tetraedri, & latus cubi, ex coroll. 2. propos. 15. lib. 13. manifestum est, si ex quadrato diametri A B, auferatur quadratum lateris Tetraedri A C, reliquum quadratum lateris cubi B C: Quemadmodum è contrario, si ex quadrato diametri A B, tollatur quadratum lateris cubi B C, remanet quadratum lateris Tetraedri A C.

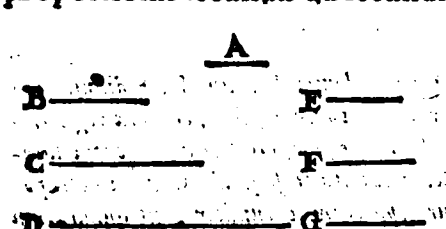
c 23. quartidecimi. PRÆTEREA, quia si recta aliqua potuerit totam quampiam rectam extrema ac media ratione sectam, & maius ipsius segmentum; c Maius segmentum est latus Icosaedri illius sphæræ, cuius diameter est recta prior linea; Constat, si quadrato diametri A B, exhibeantur, iuxta ea, quæ in scholio propos. 33. lib. 6. demonstrata sunt à nobis, duo quadrata æqualia rectarum A E, B E, proportionem habentium, quam recta quæuis extrema ac media ratione diuisa ad maius segmentum; Rectam minorem B E, esse Icosaedri latus.

d 23. quartidecimi. POSTREMO, quoniam si recta quæpiam potuerit totam aliquam rectam diuisam extrema ac media ratione, & minus illius segmentum; d Minus segmentum latus est Dodecaedri eius sphæræ, cuius diameter prior linea: Liquet, si quadrato diametri A B, constituantur duo quadrata æqualia rectarum A F, B F, proportionem habentium, quam quæcunq; recta linea extrema ac media ratione diuisa ad maius segmentum: Minorem lineam B F, latus esse Dodecaedri.

HACTENVS ergo Hypsicles, Campanus, & Franciscus Candalla de comparatione solidorum regularium eidem sphæræ inscriptorum scripserunt: Sequentes autem quinq; propos. ad idem negotium pertinentes collegi ex Cardano lib. 5. de Proportionibus, ad hunc, qui sequitur, modum. Ad finem deinde lib. 16. nonnulla alia adiiciemus, quæ ad eorundem quinq; corporum Regularium in sphæra descriptionem, eorundemq; comparationem spectant.

THEOR. 28. PROPOS. 28.

Si sint quatuor lineæ rectæ continuè proportionales, nec non & aliæ quatuor, ita vt sit eadem antecedens omnium. Erit proportio tertiæ ad tertiam proportionis secundæ ad secundam duplicata; & proportio quartæ ad quartam eiusdem proportionis secundæ ad secundam triplicata.



SINT quatuor rectæ A, B, C, D, continuè proportionales; nec non quatuor A, E, F, G, ita vt A, recta antecedens sit omnium. Dico proportionem C, ad F, tertiæ ad tertiã, esse duplicatam proportionis B, ad E, secundæ ad secundam, & proportionem D, ad G, quartæ ad quartam, esse triplicatam eiusdem proportionis B, ad E, secundæ ad secundam. Cùm enim recta C, ad rectam A, ex defin. 10. lib. 5. proportionem habeat duplicatam proportionis rectæ B, ad rectam A; a habeat autem & quadratum rectæ B, ad quadratum rectæ A, duplicatam proportionem eiusdem proportionis rectæ B, ad rectam A: Erit vt recta C, ad rectam A, ita quadratum rectæ B, ad quadratum rectæ A. Eadem ratione erit, vt recta F, ad rectam A, ita quadratum rectæ E, ad quadratum rectæ A: Et cõuertendo, vt recta A, ad rectam F, ita quadratum rectæ A, ad quadratum rectæ E. Quoniam igitur est quadratum rectæ B, ad quadratum rectæ A, vt recta C, ad rectam A, & quadra-

a 20. sexti.

quadr. B. Recta C.
quadr. A. Recta A.
quadr. E. Recta F.

& quadratum rectæ A, ad quadratum rectæ E, vt recta A, ad rectam F; Erit ex æquo quadratum rectæ B, ad quadratum rectæ E, vt recta C, ad rectam F: [a] Est autem proportio quadrati rectæ B, ad quadratum rectæ E, duplicata proportionis rectæ B, ad rectam E. Igitur & proportio rectæ C, ad rectam F, duplicata est proportionis rectæ B, ad rectam E. Quod est primum. [a] 20 sexti.

RVRSVS, cùm recta D, ad rectam A, ex defin. 10. lib. 5. proportionem habeat triplicatam proportionis rectæ B, ad rectam A; [b] habeat autem & cubus rectæ B, ad cubum rectę A, triplicatam proportionem eiusdem proportionis rectæ B, ad rectam A; Erit vt recta D, ad rectam A, ita cubus rectæ B, ad cubum rectæ A. Eadem ratione erit vt recta G, ad rectam A, ita cubus rectæ E, ad cubum rectæ A; Et conuertendo, vt recta A, ad rectam G, ita cubus rectæ A, ad cubum rectæ E. Quia ergo est cubus rectæ B, ad cubum rectæ A, vt recta D, ad rectam A; & cubus rectæ A, ad cubum rectæ E, vt recta A, ad rectam G; Erit ex æquo, cubus rectæ B, ad cubum rectæ E, vt recta D, ad rectam G: [c] Est autem proportio cubi rectæ B, ad cubum rectæ E, triplicata proportionis rectæ B, ad rectam E. Igitur & proportio rectæ D, ad rectam G, triplicata est, proportionis rectæ B, ad rectam E. Quod est secundũ. Itaq; si sint quatuor lineæ rectæ, &c. Quod demonstrandũ erat. [b] 33. vndec. [c] 33. vndec.

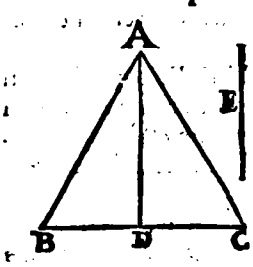
Cubus B. Recta D.
Cubus A. Recta A.
Cubus E. Recta G.

SCHOLIVM.

Hoc idem demonstrauimus ad propos. 10. lib. 8. de quotcunque numeris continuè proportionalibus quorum ordinum ab vno aliquo, eodemq; numero incipientium.

THEOR. 29. PROPOS. 29.

QVADRATVM lateris trianguli æquilateri ad ipsum triangulum habet proportionem duplicatam proportionis lateris trianguli ad lineam medio loco proportionalem inter perpendicularem ab vno angulo ad latus oppositum ductam, & dimidium ipsius lateris.



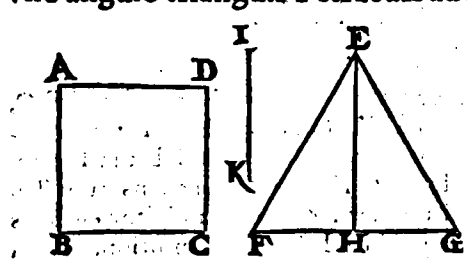
IN triangulo æquilatero A B C, ducatur ex angulo A, ad latus oppositũ B C, recta perpendicularis A D, quæ bifariam secabit latus B C, vt in coroll. propos. 12. huius lib. demonstratum est; Ac propterea B D, dimidium est lateris A B. [d] Inueniatur ergo recta E, media proportionalis inter A D, & B D. Dico quadratum lateris A B, ad triangulum A B C, habere proportionem duplicatam lateris A B, ad rectam E. Cùm enim rectangulo sub A D, B D, æquale sit triangulum A B C, vt perspicuum est ex scholio propos. 41. lib. 1. [e] Sit autem eidem rectangulo sub A D, B D, æquale quadratum rectæ E; Æqualia erunt triangulum A B C, & quadratum rectæ E. [f] Quoniam verò quadratum lateris A B, ad quadratum rectæ E, proportionem habet duplicatam lateris A B, ad rectam E; Constat, quadratum lateris A B, ad triangulum A B C, proportionem habere quoque duplicatam lateris A B, ad rectam E. Quam ob rem, quadratum lateris trianguli æquilateri, &c. Quod erat demonstrandum, [d] 13. sexti. [e] 17. sexti. [f] 20. sexti.

COROLLARIVM.

ITAQVE, si in triangulo æquilatero perpendicularis ducatur ex vno angulo ad latus oppositum; quadratum rectæ, quæ medio loco proportionalis est inter dictam perpendicularem, & dimidium lateris, æquale est ipsi triangulo. Ostensum enim est, quadratum rectæ E, quæ media proportionalis est inter A D, D B, æquale esse triangulo A B C.

THEOR. 30. PROPOS. 30.

SI cubus, & Tetraedrum in eadem sphæra describantur: erit quadratum cubi ad triangulum Tetraedri, vt latus Tetraedri ad lineam perpendicularem, quæ ex vno angulo trianguli Tetraedri ad latus oppositum deducitur.



SIT quadratum cubi cuiusuis A B C D, & Tetraedri in eadem sphæra descripti triangulum E F G, in quo perpendicularis E H, ex angulo E, ad latus oppositum F G, deducta, diuidens F G, latus bifariam, ex coroll. propos. 12. huius lib. Dico, esse quadratum A C, ad triangulum E F G, vt latus trianguli E F, ad perpẽdicularem E H. Posita enim inter E H, F H, media proportionali I K; [g] cùm quadratum lateris Tetraedri E F, duplum sit quadrati lateris cubi A B, [h] sit autem & duplum rectanguli sub latere E F, & dimidio eius F H, eò quòd dictum quadratum, & rectangulum eandem habeant altitudinem, nempe E F: Erit rectangulum sub E F, F H, æquale quadrato lateris A B; [i] Ac propterea A B, media proportionalis erit inter E F, F H, hoc est, tres rectæ F H, A B, E F, continuè erunt proportionales; Sunt autẽ & tres rectæ F H, I K, E H, continuè [g] 18. undecimi. [h] 1. sexti. [i] 17. sexti.

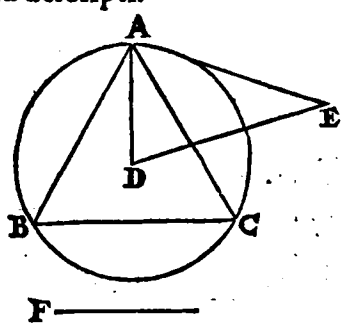
FH. AB. IK. EF. EH. proportionales, ex conſtructione. Igitur cùm omnium antecedens ſit FH, [a] erit prò portio rectæ EF, ad rectam EH, tertiæ ad tertiam, proportionis rectæ AB, ad rectam IK, ſecundæ ad ſecundam duplicata. Quare cùm & quadratum AC, rectæ AB, ad quadratum rectæ IK, hoc eſt, ad triangulum EFG, (eſt enim, ex coroll. propoſ. 19. huius libri, quadratum rectæ IK, æquale triangulo EFG.) [b] proportionem habeat duplicatam proportionis rectę AB, ad rectam IK; Erit quadratum cubi AC, ad triangulum Tetraedri EFG, vt latus EF, ad perpendicularem EH. Quocirca ſi cubus & Tetraedrum in eadem ſphæra deſcribantur, &c. Quod erat demonſtrandum.

[a] 18. vndecimi.

[b] 20. ſexti.

THEOR. 31. PROPOS. 31.

LATVS Tetraedri potentia ſeſquialterum eſt axis, ſeu altitudinis ipſius: Axis verò, ſiue altitudo Tetraedri potentia ſeſquitertia eſt lateris cubi in eadem ſphæra deſcripti.



SIT Tetraedri triangulum ABC, & altitudo, ſeu axis Tetraedri DE, latuſque cubi eiuſdem ſphæræ F. Dico latus Tetraedri AB, eſſe potentia ſeſquialterum axis DE: Axem verò DE, potentia ſeſquitertium lateris cubi F. Nam circa triangulum, [c] deſcripto circulo ABC; ad centrum D, in quod videlicet cadit axis DE, vt conſtat ex propoſ. 15. huius lib. ducatur AD, ſemidiameter, & AE, latus Tetraedri. Quia igitur quadratum lateris AE, hoc eſt, lateris AB, [d] æquale eſt quadratis rectarum AD, DE, [e] & triplum quadrati ſemidiametri AD; Fit, vt poſito quadrato lateris AB, ſeu AE, partium 6. quadratum rectæ AD, ſit [f] earundem partium 2. Ac proinde reliquum quadratum axis DE, talium partium 4. Quapropter quadratum lateris Tetraedri ſeſquialterum eſt quadrati axis Tetraedri.

[c] 5. quarti.

[d] 47. primi.

[e] 12. tertiidecimi.

[f] 18. tertiidecimi.

QVONIAM verò latus Tetraedri AB, [f] potentia duplum eſt lateris cubi F; Erit quadratum lateris F, talium partium 3. qualium 6. poſitum eſt quadratum lateris AB; Oſtenſum eſt autem earundem 4. eſſe quadratum axis DE. Igitur quadratum axis DE, ſeſquitertium eſt quadrati lateris cubi F. Latus itaque Tetraedri potentia ſeſquialterum eſt, &c. Quod erat oſtendendum.

COROLLARIVM I.

QVIA verò, poſito quadrato lateris AB, partium 6. quadratum diametri ſphæræ talium partium eſt 9 [a] quòd diameter potentia ſit ſeſquialtera lateris Tetraedri: Earundem verò partium 4 oſtenſum eſt quadratum axis DE; perſpicuum eſt, diametrum ſphæræ potentia eſſe duplam ſeſquiquartam axis Tetraedri; Ac proinde, [b] cùm quadrata habeant proportionem laterum duplicatam, manifeſtum eſt, diametrum eſſe ſeſquialteram axis Tetraedri. Seſquialteræ enim proportionis duplicata eſt proportio dupla ſeſquiquarta, vt in his numeris 4. 6. 9. apparet. Id quod etiam docuimus in coroll. 2. propoſ. 13. lib. 13.

[a] 13. tertiidecimi.

[b] 20. ſexti.

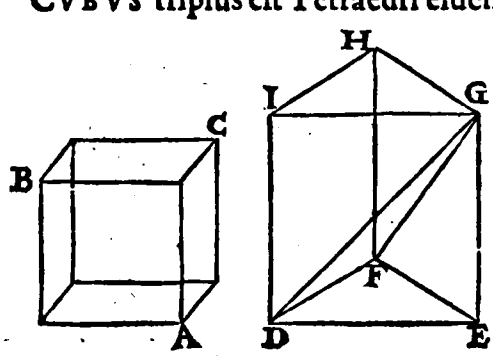
COROLLARIVM II.

CONSTAT quoque, ita eſſe axem, ſeu altitudinem Tetraedri ad latus cubi eidem ſphæræ inſcripti, vt latus Tetraedri ad perpendicularem ex vno angulo baſis ad latus oppoſitum ductam. Quia videlicet [c] tam latus trianguli æquilateri, hoc eſt, latus Tetraedri, potentia ſeſquitertium eſt perpendicularis ex vno angulo ad latus oppoſitum deducta, quàm ex hac propoſ. ipſe axis Tetraedri lateris cubi.

[c] 12. quartidecimi.

THEOR. 32. PROPOS. 32.

CVBVS triplus eſt Tetraedri eidem ſphæræ inſcripti.



DESCRIBANTVR in eadē ſphæra cubus ABC, & Tetraedrum DEFG. Dico cubum Tetraedri eſſe triplum. Conſtituatur ſuper DEF, baſim Tetraedri priſma DEFGHI, eandem habens cum Tetraedro altitudinem. [a] Quoniam igitur eſt baſis priſmatis, ſeu cubi ABC, ad baſim priſmatis, ſeu Tetraedri DEF, vt latus Tetraedri ad perpendicularem ductam ex angulo quouis baſis DEF, ad latus oppoſitum. Vt autem latus Tetraedri ad perpendicularem dictam, ita eſt, per coroll. 2. propoſ. 31. huius lib. altitudo Tetraedri, ac proinde priſmatis

[a] 30. quartidecimi.

tis DEFGHI, ad latus cubi, ideoq; ad altitudinem cubi, seu prismatis ABC; Erit basis prismatis ABC, ad basim prismatis DEFGHI, vt huius altitudo ad illius altitudinem. Quare, per ea, quæ ad propos. 9. lib. 12. demonstrauimus, æqualia erunt prismata ABC, DEFGHI, cùm ipsorum bases & altitudines reciprocentur. Atqui prisma DEFGHI, triplum est pyramidis, seu Tetraedri DEFG; ex coroll. 1. propos. 7. lib. 12. Cubus ergo ABC, triplus quoq; erit eiusdem Tetraedri DEFG. Quapropter cubus triplus est Tetraedri eidem sphæræ inscripti. Quod ostendendũ erat.

COROLLARIVM.

VNDE prisma eandem habens & basim, & altitudinem cum Tetraedro, æquale est cubo in eadem sphæra, in qua Tetraedrum, descripto. Ostensum enim est, cubum ABC, æqualem esse prismati DEFGHI, &c.

FINIS ELEMENTI DECIMIQVARTI.

EVCLIDIS ELEMENTVM QVINTVMDECIMVM:

& Solidorum quintum,

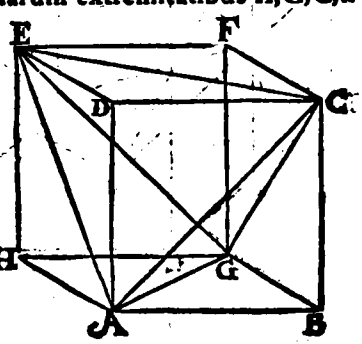
vt nonnulli putant: Vt verò alij, Hypsiclis Alexandrini de quinq; corporibus,

LIBER SECVNDVS.

PROBL. 1. PROPOS. 1.

IN dato cubo Pyramidem describere.

IN cubo dato ABCDEFGH, oporteat describere pyramidem, seu Tetraedrum. Ab vno eius angulo, nempe ab E, ducãtur in basibus tribus ipsum constituentibus tres diametri EA, EG, EC, ex quarum extremitatibus A, G, C, similiter diametri ducantur AG, GC, CA, in reliquis tribus basibus, quæ extrema priorũ trium diametrorum connectant. Quoniam igitur diametri quadratorum æqualium æquales sunt, quòd potẽtia duplæ sint laterũ æqualium quadratorum, vt in scholio propos. 47. lib. 1. demonstrauimus, perspicuum est, quatuor triangula ACE, GAC, GAE, GCE, ex dictis diametris composita, æquilatera esse, & inter se æqualia; Ac propterea pyramidem, seu Tetraedrum constitui ex ipsis. Quòd verò omnes anguli Tetraedri in angulis cubi collocantur; manifestum est, ipsum in cubo esse inscriptum, ex definitione trigesima prima, libri vndecimi. Quare in dato cubo Pyramidem descripsimus. Quod faciendum erat.



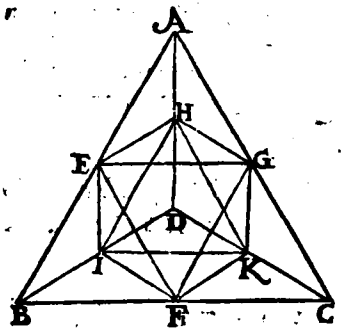
PROBL. 2. PROPOS. 2.

In data Pyramide Octaedrum describere.

SIT in pyramide, seu Tetraedro ABCD, describendum Octaedrum. Diuisis omnibus lateribus bifariam in E, F, G, H, I, K, & ductis duodecim rectis EF, FG, GE, HI, IK, KH, EI, IF, FK, KG, GH, HE, constituentur octo triangula, quorum quidem quatuor EHI, IHK, KHG, GHE, supra planum EIKG; quatuor autem IFE, EFG, GFK, KFI; infra idem planum consistunt.

Quoniam verò latera AE, AH, trianguli AEH, æqualia sunt lateribus AG, AH, trianguli AGH, quòd sint dimidia rectarum æqualium AB, AD, AC; Item & anguli contenti EAH, GAH, æquales, quòd sint anguli triangulorum æquilaterorum, ABD, ACD: [a] æquales erunt bases EH, GH. Eademq; ratione æquales erunt rectæ EH, HI, & reliquæ eodem modo. Quare dicta octo triangula æquilatera sunt, & æqualia inter se; ideoque Octaedrum componunt EIKGHF; quod quidem ex definitione 31. lib. 11. intra Tetraedrum descriptum est; cùm omnes eius anguli tangant omnia latera Tetraedri, ex constructione. In data igitur pyramide Octaedrum descripsimus. Quod erat faciendum.

a 4. primi.



COROLLARIVM.

QVONIAM verò tria plana EIKG, GHIF, FKHE, quadrata sunt æqualia, sese mutuò ad angulos rectos secantia, vt in coroll. 1. propos. 14. lib. 13. demonstrauimus; quorum quodlibet pyramidem ABCD, secat bifariam. (Nam quadratum EIKG, ipsam diuidit in pyramidem HIKD, & prisma HIKGAE; necnon in pyramidem EBFI, & prisma EFCGKI; Constat autem pyramidem pyramidi esse æqualem, & prisma prismati: [a] *Eodemq; modo reliqua quadrata GHIF, FKHE, diuidunt bifariam eandem pyramidem ABCD.) Manifestum est, si in Tetraedro Octaedrum inscribatur, Tetraedrum bifariam secari, tribus quadratis æqualibus, quæ Octaedrum bifariam quoque, & sese ad angulos rectos interfecant.*

a 3. duodecimi.

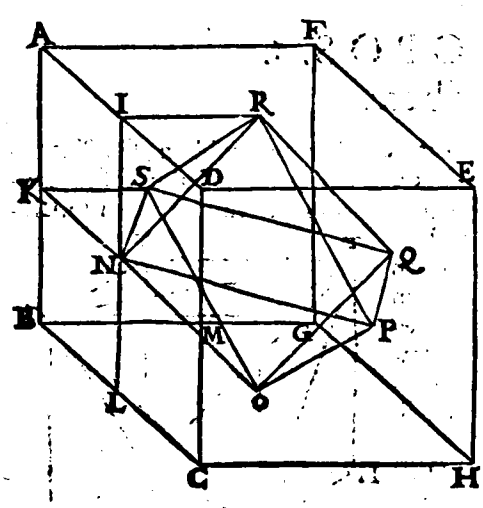
3. PROBL. 3. PROPOS. 3.

IN dato cubo Octaedrum describere.

DESCRIBENDVM sit Octaedrum in cubo dato AH. Diuidantur latera basis ABCD, bifariam in punctis I, K, L, M, quæ connectantur rectis IL, KM, secantibus sese in N, puncto, quod quidem centrum est quadrati ABCD, vt constat ex demonstratione propositionis octauæ, lib. 4. Deinde eadem ratione inueniantur reliquarum basium centra O, P, Q, R, S. Erunt igitur omnes rectæ, ex dictis centris ductæ ad media puncta basium, cuiusmodi sunt NI, RI, NK, SK, &c. æquales dimidiis lateribus cubi, seu quadratorum, vt perspicuum est ex prædicta demonstratione propos. 8. lib. 4. Postremò, si præfata centra coniungantur duodecim rectis NO, OP, PQ, QR, RS, SN, NP, PR, RN, SO, OQ, QS; constituta erunt octo triangula, quorum quidem quatuor NSR, RSQ, QSO, OSN, supra planum NOQR; quatuor autem OPQ, QPR, RPN, NPO, infra idem planum consistunt. Quoniam verò latera IN, IR, triāguli INR, æqualia sunt lateribus KN, KS, trianguli KNS, quòd omnia sint dimidia laterum cubi æqualium, vt dictum est; Item & anguli contenti, æquales; propterea quòd, cùm NI, IR, parallelæ sint rectis BA, AF; [a] angulus NIR, æqualis sit recto angulo KAF, in quadrato AG, eademque ratione angulus NKS, angulo recto IAF, in quadrato AE; [b] Erunt bases NR, NS, æquales. Non aliter ostendemus, reliquas lineas omnes & inter se, & his duabus æquales esse; si nimirum è centris ducantur rectæ ad dimidia laterum, hac lege, vt quælibet duæ ducantur ad dimidium illius lateris, quod commune est duobus cubi quadratis, quorum duo illa puncta, è quibus videlicet rectæ egrediuntur, centra existunt. Ita enim vides duas rectas NI, RI, ductas esse ad I, dimidium lateris AD, quod commune est quadratis AC, AE, quorum centra sunt puncta N, & R: Ita quoque duæ rectæ NK, SK, ductæ sunt ad K, dimidium lateris AB, quod commune est quadratis AC, AG, quorum centra existunt puncta N, & S, &c. Quam ob rem constituta octo triangula & æquilatera sunt, & æqualia inter se; ideoque Octaedrum constituunt NOQRSP; Quod quidem ex defin. 31. lib. 11. intra cubum est descriptum, cùm omnes eius sex anguli tangant cubi omnes sex bases in earum centris. Quam ob rem in dato cubo Octaedrum inscripsimus. Quod faciendum erat.

a 10. vndec.

b 4. primi.



ALITER. [c] In cubo dato inscribatur pyramis; [d] In hac deinde pyramide Octaedrum figuretur, factumque erit, quod proponitur. Cùm enim ex demonstratione propositionis 2. huius libri, anguli Octaedri tangant latera pyramidis; Latera verò pyramidis, ex demonstratione propos. 8. huius

c 1. quintidecimi.

d 2. quintidecimi.

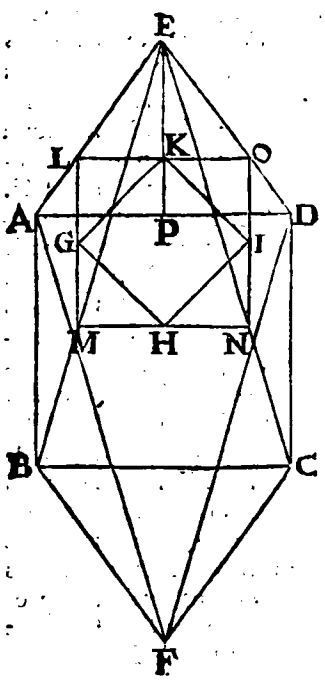
huius lib. existant in planis basium cubi, cùm sint harum basium diametri, perspicuum est, angulos Octaedri tangere quoque bases cubi: atque adeò Octaedrum cubo esse inscriptum.

COROLLARIVM.

QVIA verò diametri Octaedri in cubo descripti NQ, RO, si ducerentur, se mutuò secant ad angulos rectos, ex coroll. 1. propos. 14. lib. 13. quæ quidem coniungunt centra basium cubi oppositarum: Manifestum est, rectas lineas centra basium cubi oppositarum connectentes non solùm seipsas mutuò bifariam, vt docuimus coroll. 1. propos. 15. lib. 13. sed etiam ad angulos rectos, vt hîc ostendimus, diuidere.

PROBL. 4. PROPOS. 4. 4.

IN dato Octaedro cubum inscribere.

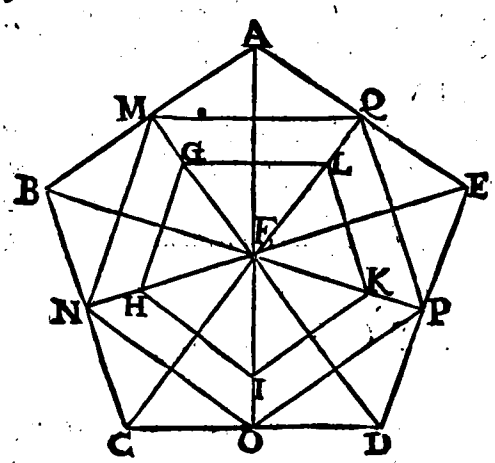


DATVM Octaedrum sit ABCDEF, in quo oporteat describere cubum. Quoniam in Octaedro sex pyramides quadrangulę continentur; quarum videlicet vertices sunt sex anguli Octaedri, & quælibet duæ Octaedrum constituunt; sit vna earum pyramis, ABCDE, cuius basis ABCD, quadratum, triangula verò æquilatera ABE, EBC, CED, DEA, sintq; horum triangulorum centra G, H, I, K, per quæ ducantur rectæ LM, MN, NO, OL, parallelæ lateribus AB, BC, CD, DA. Erunt igitur & triangula LME, EMN, NEO, OEL, æquilatera, cùm similia sint triangulis æquilateris ABE, EBC, CED, DEA, ex coroll. propos. 4. lib. 6. atque adeò inter se æqualia, propterea quòd latera habeant communia. Est enim EM, latus commune triangulis LME, EMN; Et EN, cõmune triangulis EMN, NEO; & deniq; EO, cõmune triangulis NEO, OEL. Hinc enim fit, triangulum LME, triangulo EMN, hoc verò ipsi NEO; & hoc ipsi OEL, æquale esse. Conueniunt enim rectæ LM, MN, NO, OL, in punctis L, M, N, O, vt mox ostendemus. Quocirca & quatuor rectæ LM, MN, NO, OL, inter se æquales sunt. [a] Quia verò ducta recta EKP, tripla est rectæ KP; [b] Est autem vt EP, ad KP, ita EA, ad LA; Erit quoque EA, tripla rectæ LA. Eademque ratione EB, EC, ED, triplę erunt rectarum MB, NC, OD. Quocirca rectæ LM, MN, NO, OL, conuenient in punctis L, M, N, O, in quibus latera ea proportione secantur, quadrilaterumque constituent LMNO. Rursus quia LO, LM, parallelæ sunt rectis AD, AB, nõ in eodem cum ipsis existentibus plano; [c] æqualis erit angulus MLO, angulo BAD, qui rectus est, cùm ABCD, quadratum sit, vt ostendimus in coroll. 1. propos. 14. lib. 13. & in propos. 16. lib. 14. Ac propterea & angulus MLO, rectus erit. Non secus demonstrabimus & reliquos angulos LMN, MNO, NOL, rectos esse. Quoniam verò tam planum per LO, LM, quàm per NM, NO, ductum, [d] parallelum est plano AB-CD; ipsa quoque inter se parallela erunt, atque adeò, cùm conueniant in punctis M, & O, vnum planum efficient, ex scholio propos. 16. lib. 11. Quocirca LMNO, quadratum erit, cùm habeat & latera æqualia, & angulos rectos. Deinde, cùm latera EL, EK, trianguli ELK, æqualia sint lateribus EO, EK, trianguli EOK, & anguli quoque ipsis contenti, æquales, quòd recta EK, ex angulo E, per centrum K, trianguli æquilateri EAD, ducta bifariam secet angulum AED, per corollarium propositionis 12. libri 13. [e] Erunt & bases KL, KO, æquales, hoc est, recta LO, bifariam secabitur in K. Eadem ratione LM, MN, NO, bifariam secabuntur in G, H, I. Ac propterea rectæ GL, GM, HM, HN, IN, IO, KO, KL, cùm sint laterum quadrati LN, dimidia, æquales inter se erunt; Ideoque, cùm & angulos contineant æquales, nimirum rectos, [f] æquales erunt & rectæ GH, HI, IK, KG, centra G, H, I, K, connectentes. Quia verò hæ rectæ in plano existunt quadrati LN, angulosque comprehendunt rectos; ([g] cùm enim anguli LKG, GKI, IKO, duobus sint rectis æquales; Sint autem LKG, IKO, per corollarium 2. propositionis 32. libri 1. semirecti; rectus erit angulus GKI; Eademque ratione recti erunt anguli KGH, GHI, HIK.) quadratum erit GHIK, cùm habeat & latera æqualia, & angulos rectos. Quòd si eadem arte in reliquis quinque pyramidibus Octaedri centra triangulorum rectis coniungãtur, describentur similiter quadrata: quæ cùm latera habeant communia, æqualia inter se erunt. Quare sex huiusmodi quadrata cubum component: qui quidem ex definitione 31. libri 11. intra Octaedrum descriptus erit, cùm octo eius anguli tangant octo Octaedri bases in earum centris. Quare in dato Octaedro cubum descripsimus. Quod faciendum erat.

[a] 18. quarti decimi.
[b] 2. sexti.
[c] 10. vndec.
[d] 15. vndec.
[e] 4. primi.
[f] 4. primi.
[g] 13. primi.

PROBL. 5. PROPOS. 5. 5.

IN dato Icosaedro, Dodecaedrum inscribere. 6.



SIT ex duodecim pyramidibus pentagonis, quæ in Icoſaedro continẽtur, quarũ videlicet baſes ſunt pentagona ex quinque Icoſaedri lateribus compoſita, vertices verò, duodecim anguli Icoſaedri, vna pyramis A B C D E F, cuius baſis pentagonũ A B C D E, triangula verò æquilatera A B F, B C F, C D F, D E F, E A F, ſintq; horum triangulorum centra G, H, I, K, L, quæ rectis connectãtur lineis G H, H I, I K, K L, L G. Rurſus ex vertice F, per centra triangulorum rectæ demittantur F M, F N, F O, F P, F Q; quę, ex ſcholio propoſ. 12. lib. 13. bifariam ſecabunt latera A B, B C, C D, D E, E A, in M, N, O, P, Q: ita vt decẽ rectæ M A, M B, N B, N C, O C, O D, P D, P E, Q E, Q A, æquales ſint, quæ cũ angulos comprehendant æquales, nempe angulos pentagoni, [a] æquales quoque erunt rectæ M N, N O, O P, P Q, Q M, puncta M, N, O, P, Q, connectentes; [b] Ac proinde & anguli M F N, N F O, O F P, P F Q, Q F M, æquales erũt, quòd & latera F M, F N, F O, F P, F Q, æqualia ſint, nempe perpendiculares ex angulis triangulorum æquilaterorũ æqualiũ ad baſes oppoſitas demiſſæ. Cùm enim latera F B, B M, trianguli F B M, lateribus F B, B N, trianguli F B N, æqualia ſint, contineátq; angulos æquales, nempe triangulorum æquilaterorũ; [c] erũt baſes F M, F N, æquales; & ſic de reliquis. Quoniá verò & rectę F G, F H, F I, F K, F L, nimirũ ſemidiametri circulorũ æqualium triangula æquilatera æqualia circumſcribentium æquales ſunt, & angulos comprehendunt æquales, vt demonſtratum eſt; [d] Erunt & rectæ G H, H I, I K, K L, L G, æquales. [e] Rurſus quia tam anguli A M Q, Q M N, N M B, q̃ anguli B N M, M N O, O N C, æquales ſunt duobus rectis. [f] Sunt autẽ anguli A M Q, N M B, angulis B N M, O N C, æquales; Erunt reliqui anguli Q M N, M N O, æquales; Eademq; ratione reliqui anguli N O P, O P Q, P Q M, & inter ſe, & hiſce æquales erunt. Quare pentagonum erit æquilaterum & æquiangulum M N O P Q, in plano pentagoni A B C D E, exiſtens. Denique cùm rectæ F M, F N, F O, F P, F Q, æquales, proportionaliter ſecentur in G, H, I, K, L, quòd & F G, F H, F I, F K, F L, ex centris, æquales ſint; Vel certè quia F G, F H, F I, F K, F L, duplę ſunt ipſarum G M, H N, I O, K P, L Q, ex corollario propoſ. 18. lib. 14. [g] parallelæ erunt G H, H I, I K, K L, L G, ipſis M N, N O, O P, P Q, Q M; [h] Ac propterea anguli L G H, G H I, H I K, I K L, K L G, angulis æqualibus Q M N, M N O, N O P, O P Q, P Q M, ideoque & inter ſe, æquales erunt. [i] Quia verò plana per rectas G H, H I, & per H I, I K, ducta, parallela ſunt plano pentagoni M N O P Q, per rectas M N, N O, O P, ducto, conueniuntque in recta H I; ipſa vnum planum efficient, ex ſcholio propoſitionis 16. libri vndecimi. Eodemq; modo oſtendemus plana per I K, K L, & per K L, L G, nec non per L G, G H, ducta, idem planum conſtituere cum plano per G H, H I, I K, ducto. Quocirca G H I K L, pentagonum eſt æquilaterum & æquiangulum, cùm & latera habeat æqualia & angulos. Quòd ſi eadem arte in reliquis vndecim pyramidibus Icoſaedri centra triangulorum rectis connectantur lineis, deſcribentur ſimiliter pentagona æquilatera & æquiangula: quæ cùm latera habeant communia, æqualia inter ſe erunt. Quamobrem duodecim huiuſmodi pentagona Dodecaedrum conſtituẽt: quod quidem ex defin. 31. lib. 11. in Icoſaedro erit deſcriptum, cùm viginti anguli Dodecaedri in centris viginti baſium Icoſaedri conſiſtant. Quapropter in dato Icoſaedro Dodecaedrum deſcripſimus. Quod erat faciendum.

[a] 4. primi.
[b] 8. primi.
[c] 4. primi.
[d] 4. primi.
[e] 13. primi.
[f] 4. primi.
[g] 2. ſexti.
[h] 10. vndec.
[i] 15. vndec.

COROLLARIVM.

ITAQVE cùm omnes rectæ è centrò Icoſaedri ad centra baſium, hoc eſt, ad angulos Dodecaedri ſibi inſcripti, ſint æquales; (Cùm enim ex coroll. lemmatis 1. propoſ. 10. lib. 14 perpendiculares ſint ad plana circulorum æqualium baſes Icoſaedri circumſcribentium, atq; adeò eorundem diſtantiæ exiſtant à centro ſphæræ, ſeu Icoſaedri; æquales erunt inter ſe, ex lemmate ſecundo eiuſdem propoſitionis 10. lib. 14.) Idem erit centrum Icoſaedri, atque ſibi inſcripti Dodecaedri.

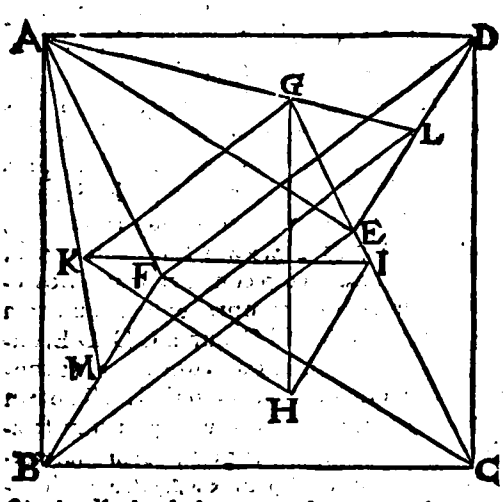
PROBL. 6. PROPOS. 6.

IN dato Octaedro Pyramidem deſcribere.

PYRAMIS deſcribenda ſit in Octaedro A B C D E F. In pyramide Octaedri ſuperiori A B C D E, ſumantur G, & H, centra triangulorum ex aduerſo ſibi reſpondentium A E D, B E C; Item in pyramide inferiori A B C D F, capiantur I, & K, centra triangulorum ex aduerſo quoque ſibi correſpondentium C F D, A F B: quæ quidẽ centra coniungantur ſex rectis G H, G I, G K, H I, H K, I K, vt fiat pyramis H I K G. Deinde ex A, demittantur per centra G, K, rectæ A L, A M, ſecantes latera oppoſita Octaedri D E, B F, bifariam in L, & M, per ſcholium propoſitionis 12. libri 13. coniungaturque recta L M, [k] quæ ipſi B E, vel F D, æqualis & parallela erit: cùm E L, B M; Item D L, F M, rectæ æquales ſint, & parallelę, nimirum dimidia laterum D E, B F, oppoſitorum in quadrato E F.

[k] 33. primi.

Quoniam



Quoniam verò rectæ AL, AM, sectæ sunt proportionaliter in G, & K, punctis, quòd AG, AK, duplæ sint ipsarum GL, KM, ex corollario propositionis 18. libri 14. [a] Erunt GK, LM, parallelæ; [a] 2. sexti. Ac propterea, per corollarium propositionis 4. libri 6. triangula ALM, AGK, similia. [b] Quare erit, vt AL, ad LM, ita AG, ad GK; & permutando, vt AL, ad AG, ita LM, ad GK: Est autem AL, ipsius AG, sesquialtera [c] quòd GL, sit tertia pars ipsius AL, ideoque AG, eiusdem AL, duæ tertiæ; Igitur & LM, hoc est, ipsi æqualis, DF, sesquialtera erit ipsius GK. Hac eadem arte ostendemus, & reliquarum linearum centra G, H, I, K, coniungentium sesquialteras esse latera Octaedri; Ac proinde rectas pyramidẽ HIKG, componentes inter se esse æquales, hoc est, triãgula æquilatera æqualia ex ipsis confici, ideoq; Tetraedrũ constitui; qd̃, cùm habeat angulos omnes in centris quatuor basium Octaedri, descriptũ erit, ex defin. 31. lib. 11. in Octaedro. Quocirca in dato Octaedro pyramidem descripsimus. Quod erat faciẽdum. [b] 4. sexti. [c] 18. quartidecimi.

ALITER. [d] In Octaedro dato inscribatur cubus, [e] & in cubo pyramis, factumque erit, quod proponitur. Cùm enim cubi anguli consistant in centris basium Octaedri; & in angulis cubi collocentur quoque anguli pyramidis; perspicuum est, pyramidis angulos tangere bases Octaedri in earum centris; Ac propterea pyramidem ipsi Octaedro esse inscriptam. [d] 4. quintidecimi. [e] 1. quintidecimi.

COROLLARIVM I.

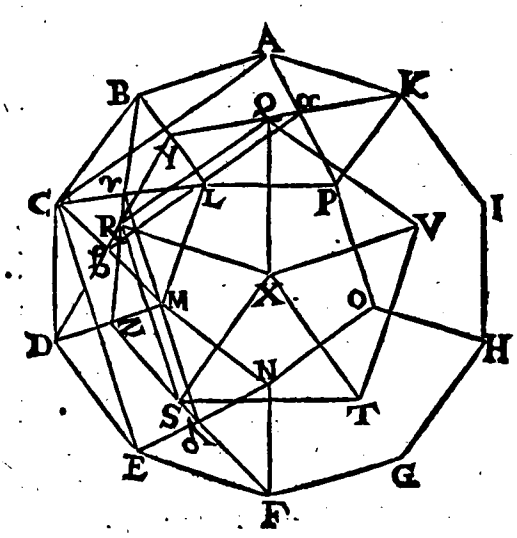
QVIA verò ostensum est, vtramque GK, DF, parallelam esse ipsi LM; [a] ac propterea & GK, ipsi DF, atq; adeò ipsi BE, parallelam esse; Atque eadem ratione KH, ipsis FC, EA, parallelam esse; [b] Atque idcirco planum GKH, per GK, KH, ductum, parallelum esse plano DFC, per DF, FC, necnon & plano BEA, per BE, EA, ducto; Eodemq; modo reliqua triangula pyramidis reliquis triangulis Octaedri esse parallela, binis nimirum singula; Constat, si Tetraedrum Octaedro inscribatur, quatuor bases Tetraedri, octo basibus Octaedri parallelas esse, singula videlicet binis oppositis. [a] 9. vndec. [b] 15. vndec.

COROLLARIVM II.

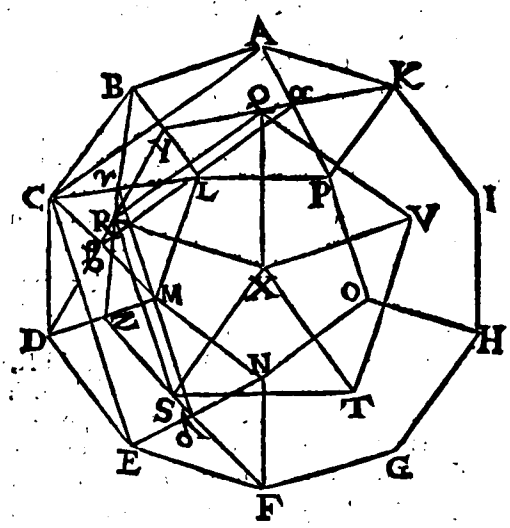
PRAETEREA, cùm Octaedrum circumscribat & cubum, & Tetraedrum in cubo descriptum, quòd Tetraedri anguli in angulis cubi, & huius anguli in centris basium Octaedri constituantur; Atque adeò recta coniungens centra basium Octaedri opposita, sit diameter cubi, hoc est, sphæra circumscribentis & cubum, & Tetraedrum in cubo descriptum, vt constat ex 4. propos. huius lib. Sit autem diameter sphæræ sesquialtera axis Tetraedri in ea sphæra descripti, per coroll. 1 propos. 31. lib. 14. vel per coroll. 2 propos. 13. lib. 13. Manifestum est, si in Octaedro Tetraedrũ inscribatur, rectã, quæ centra basiũ Octaedri oppositarũ coniũgit, sesquialterã esse axis Tetraedri, h.e. perpẽdicularis ab angulo Tetraedri ad basin oppositã deducta.

PROBL. 7. PROPOS. 7. 0. 7.

IN dato Dodecaedro Icosaedrum describere.



SIT dimidium Dodecaedri, in quo describendum est Icosaedrum, contentum sex pentagonis ABLPK, PKIHO, OHGFN, NFEDM, MDCBL, LMNOP, quorum centra Q, R, S, T, V, X, quælibet duo proxima rectis iungantur QR, RS, ST, TV, VQ, QX, RX, SX, TX, VX: Et ex angulis K, D, quos subtendant rectæ AP, CM, per centra Q, R, rectæ ducantur KY, DY, quę per corollarium 2. propositionis 10 libri 13. bifariam diuident latus oppositum BL, & ad angulos rectos, ideoque in puncto Y, conuenient: Diuidunt autem & rectæ eædem YK, YD, rectas AP, CM, bifariam, & ad angulos rectos in α, β ex 1. coroll. eiusdem propos. 9 & arcus AKP, CDM, circulorum circa pentagona descriptorum bifariam diuidant. ([a] constat enim rectas AK, PK; Item CD, MD, arcus subtendere æquales.) [b] Igitur Aα, Cβ, parallelæ sunt rectæ BY; [c] atque adeò & inter se [a] 28. tertij. [b] 28. primi. [c] 9. vndec.

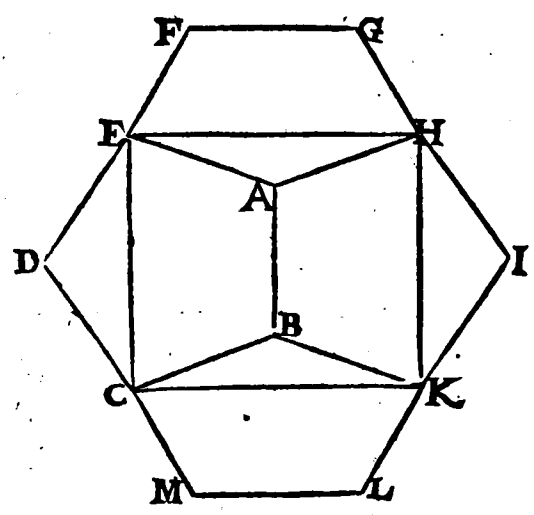


parallelæ: Sunt autem & æquales, nempe dimidia rectarum AP, CM; quæ æquales sunt, cùm latera KA, KP, lateribus DC, DM, æqualia sint, angulosque contineant æquales. Rectæ ergo ipsas connectentes AC, αβ, æquales erunt, & parallelæ. Non aliter ostendemus, si ex angulis B, F, quos subtendant rectæ CL, EN, per centra R, S, rectæ ducantur BZ, FZ, connectanturque rectæ CE, γδ, æquales esse ipsas CE, γδ: Sunt autem AC, CE, inter se æquales, cùm contineant angulos æquales æqualibus lineis comprehensos: (quia tam latera Dodecaedri AB, BC, quàm CD, DE, angulum pentagoni æquianguli continent, vt constat ex aliquo Dodecaedro materiali. Hi autem anguli non vergunt versus X, vt figura monstrare videtur, sed extrorsum, vt ex eodem materiali Dodecaedro patet.) Igitur & αβ, γδ, æquales erunt. Quapropter cùm & rectæ Yα, Yβ, Zγ, Zδ, æquales sint, (Nam YQ, YR, ZR, ZS, perpendiculares, distantiæ sunt æqualium rectarum BL, DM, à centris Q, R, S, circulorum æqualium, qui nimirum pentagona æqualia circumscribunt, atque adeò æquales. Item Qα, Rβ, Rγ, Sδ, distantiæ sunt rectarum æqualium AP, CM, CL, EN, à centris eorundem circulorum æqualium, ideoque æquales: Ac proinde & totæ Yα, Yβ, Zγ, Zδ, æquales erunt.) Erunt quoq; anguli αYβ, γZδ, æquales; Ac propterea, cùm & rectæ YQ, YR, ZR, ZS, æquales sint; æquales quoque erunt rectæ QR, RS, centra Q, R, S, connectentes. Eadem prorsus arte æquales demonstrabuntur omnes rectæ centra pentagonorum copulantes. Quare triangula QXR, RXS, SXT, TXV, VXQ, sub quinque angulis solidis Dodecaedri L, M, N, O, P, constituta, æquilatera erunt, & æqualia. Quòd si simili modo sub reliquis quindecim angulis solidis Dodecaedri, similia triangula construantur: (Habet enim Dodecaedrum viginti angulos solidos.) quæ quidem latera habent communia, descriptum erit Icosaedrum intra Dodecaedrum, cùm duodecim anguli solidi Icosaedri consistant in centris duodecim basium Dodecaedri. In dato ergo Dodecaedro Icosaedrum descripsimus. Quod faciendum erat.

a 4. *primi.*
b 33. *primi.*
c 4. *primi.*
d 14. *tertij.*
e 14. *tertij.*
f 8. *primi.*
g 4. *primi.*

PROBL. 8. PROPOS. 8.

IN dato Dodecaedro cubum describere.



PROPONANTVR quatuor pentagona Dodecaedri, cui inscribendus sit cubus ABCDE, EFGHA, AHIKB, BKLMC. conuenientia ad latus AB, duo quidem ABCDE, ABKIH, secundùm latus idem commune AB; alia autem duo AEFGH, BCMLK, secundùm angulos EAH, CBK. In his verò pentagonis subtendátur angulis A, B, D, I, rectæ EH, CK, CE, HK, quadrilaterum efficientes EHKC. quod æquilaterum erit. Cùm enim omnia latera AE, AH, DE, DC, BC, BK, IH, IK, æqualia sint, angulósque contineant æquales, ex hypothesi; æquales erũt bases EH, HK, KC, CE. Quoniam igitur rectæ AE, BC, æquales, auferũt x circulo pentagonum ABCDE, circumscribente arcus æquales; Erunt, ex scholio propositionis 27. libri 3. rectæ AB, CE, parallelæ. Eademque ratione parallelę erunt AB, HK. Quare & EC, HK, inter se parallelæ erũnt; Ac propterea rectæ EH, CK, quę ipsas connectunt, parallelæ erunt, in eodemq; cum ipsis plano; ideoque parallelogrammum erit EHKC, quod ostendimus esse æquilaterum. Quia verò planum ECKH, productum communem sectionem in sphæra facit circulum, per lemma 2. propos. 10. lib. 14. circa quadrilaterum EK, descriptum; Erunt tam anguli oppositi E, K, quàm C, H, duobus rectis æquales; Ac propterea cùm oppositi E, & K, sint æquales, nec non & oppositi C, & H; erunt omnes quatuor anguli E, C, K, H, recti. Quare EK, quadratum erit, collocans suos angulos in quatuor angulis Dodecaedri, & latera in planis quatuor pentagonorum Dodecaedri. Si igitur in reliquis octo pentagonis similiter octo angulis octo aliæ rectæ subtendantur eodem ordine; constitutum erit solidum sex quadratis contentum; quæ cùm sint æqualia, eò quòd eorum

h 4. *primi.*
i 28. *tertij.*
k 9. *vndec.*
l 33. *primi.*
m 7. *vndec.*
n 22. *tertij.*
o 34. *primi.*
p 4. *primi.*

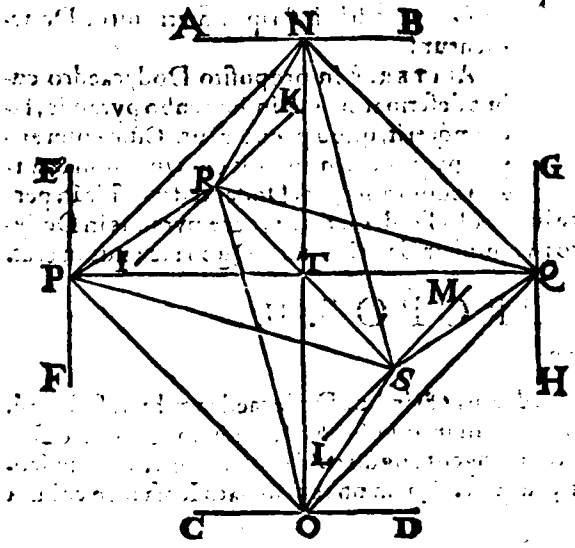
rum latera æquales angulos pentagonorum æqualibus rectis comprehẽsos subtendentia æqualia sunt: cubum constituent intra Dodecaedrum descriptum, propterea quòd duodecim eius latera iacent in planis duodecim pentagonorum Dodecaedri, eiusq; octo anguli in octo Dodecaedri angulis residẽt. In dato ergo Dodecaedro cubum descripsimus. Quod erat faciendum.

COROLLARIVM.

HINC fit, rectam, quæ subtendit vnũ angulum pentagoni equilateri, & equianguli, parallelam esse oppositæ lateri. Ostensum enim est, CE ipsi AB, esse parallelam.

PROBL. 9. PROPOS. 9.

IN dato Dodecaedro Octaedrum describere.

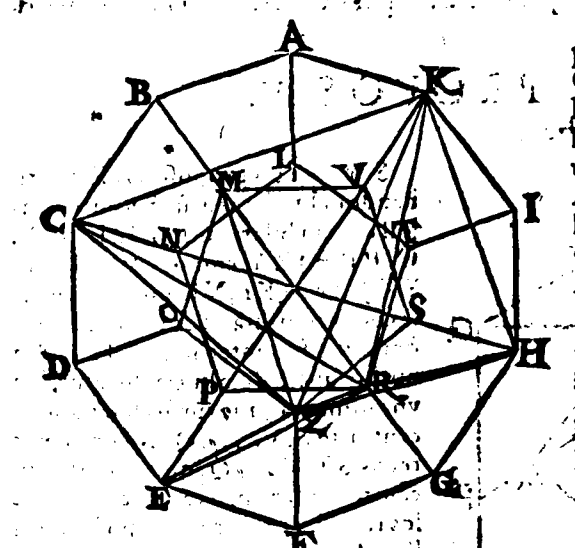


SVMANTVR in Dodecaedro, cui inscribendum sit Octaedrum, ex illa latera, quæ opposita esse diximus in corollario 3. propositionis 17. lib. 13. nimirum AB, OD, EF, GH, IK, LM, quæ bifariam secentur in N, O, P, Q, R, S. Rectæ igitur NO, PQ, RS, sectiones oppositorum laterum coniungentes æquales erunt, sequemutuò in T, centro sphæræ bifariam, & ad angulos rectos dividunt, per coroll. 3. propos. 17. lib. 13. atque adeò æquales quoque erunt earum dimidiatæ partes NT, OT, PT, QT, RT, ST. [a] Quocirca duodecim rectæ subtendentes duodecim angulos rectos NTP, PTO, OTQ, QTN, NTR, RTP, PTS, STQ, QTR, RTQ, OTS, STN, quales sunt NP, PQ, OQ, QN, NR, RP, PS, SQ, QR, RO, QS, SN, æquales erunt, cùm dicti anguli æqualibus rectis contineantur. Ac proinde octo triangula NRP, PRO, ORQ, QRN, QSP, PSN, NSQ, QSO, æquilatera, & æqualia erunt, constituentque Octaedrum intra Dodecaedrum descriptum, cùm sex anguli Octaedri tangant sex latera Dodecaedri opposita, ex constructione. In dato igitur Dodecaedro Octaedrum descripsimus. Quod faciendum erat.

[a] 4. primi.

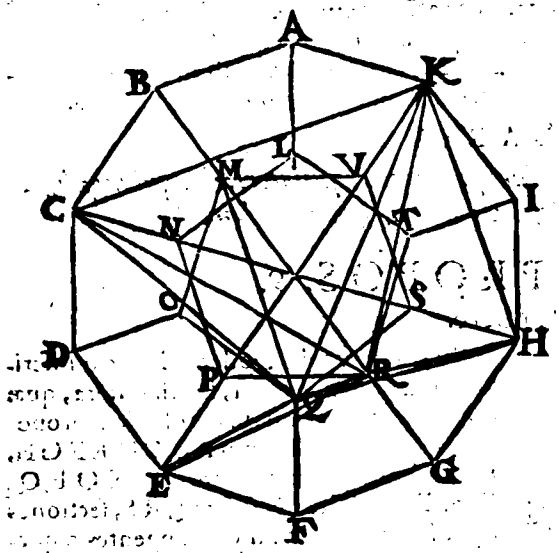
PROBL. 10. PROPOS. 10.

IN dato Dodecaedro, Pyramidem describere.



SIT Dodecaedrum contentum duodecim pentagonis ABCNL, CDEPN, EFGRP, GHITR, IKALT, MOQSV, BCDOM, DEFQO, FGHSQ, HIKVS, KABMV, LNPRT, in quo describenda sit pyramis, siue Tetraedrum. Sumantur tria pentagona ABCNL, LAKIT, TLNPR, angulum solidum L, componentia, in quibus tres anguli C, R, K, (quorum quidem C, opponitur lateri AL, communi pentagonis CAL, ALI; At verò K, lateri LT, communi pentagonis KLT, LTP, Denique R, lateri LN, communi pentagonis RLN, LNB,) rectis connectantur CK, CR, KR; & ex punctis C, K, R, ad angulum Q, ipsi L, oppositum, rectæ ducantur CQ, KQ, RQ, vt sit pyramis cõstructa CKRQ. Ductis autem tribus diametris Dodecaedri, seu sphæræ, CH, KE, RM, & connexis rectis KH, RH, RE, QE, QM, QH; [b] quoniam Dodecaedrũ in sphæra describitur, si planum trianguli CHK, extendatur, fiet communis eius sectio cũ sphæra circulus, per lemma 1. propos. 10. lib. 14. [c] Ac propterea angulus CKH, in semicirculo existens, rectus erit. Non secus ostendemus rectos esse angulos CRH, KRE, KQE, RQM, CQH. [d] Quocirca cùm in omni triangulo rectangulo quadratum lateris recto angulo oppositi æquale sit quadratis laterum circa rectum angulum; sint autem quadrata diametrorum æqualium CH, KE, RM, æqualia: Æqualia erunt quadrata rectarum CK, KH, quadratis rectarum CR, RH, & quadratis rectarum KR, RE, & quadratis rectarum KQ, QE, & quadratis rectarum RQ, QM, nec non &

[b] 17. undecimi.
[c] 31. tertij.
[d] 47. primi.



quadratis rectarum CQ, QH. Ablatis ergò quadratis æqualibus, rectarũ æqualium KH, RH, RE, QE, QM, & QH; (Hæ enim rectæ cùm ſubtendant angulos pentagonorum æquales æqualibus rectis comprehẽſos, [a] æquales ſunt.) æqualia remanebũt quadrata rectarum CK, CR, RK, KQ, RQ, & CQ. Ac proinde & ipſæ rectæ æquales erunt. Quare quatuor triangula CKR, CKQ, KRQ, RCQ, æquilatera ſunt, & æqualia, ideoque Tetraedrum componunt CKRQ; quod cũ habeat quatuor angulos C, K, R, Q, in quatuor angulis Dodecaedri, inſcriptum erit intra Dodecaedrum.

a 4. primi.

ALITER. [b] In propoſito Dodecaedro cubus deſcribatur; [c] & in hoc cubo pyramis, factumq; erit, quod proponitur. Cùm enim anguli pyramidis in angulis cubi, nec non anguli cubi in angulis Dodecaedri reſideãt; perſpicuum eſt, angulos pyramidis ſedem habere in angulis Dodecaedri. Quare pyramis in Dodecaedro deſcripta erit. Itaq; in dato Dodecaedro pyramidem deſcripſimus. Quod faciendum erat.

b 8. quinti decimi.

c 1. quinti decimi.

PROBL. 11. PROPOS. 11.

IN dato Icoſaedro cubum deſcribere.

[d] DESCRIBATVR in dato Icoſaedro Dodecaedrum; [e] & in hoc Dodecaedro cubus, factumq; erit, quod proponitur. Cùm enim anguli cubi reſideant in angulis Dodecaedri; anguli verò Dodecaedri in centris baſium Icoſaedri collocentur; tangent anguli cubi eadem centra baſium Icoſaedri: Ac propterea cubus in Icoſaedro deſcriptus erit. Quam ob rem in dato Icoſaedro cubum deſcripſimus. Quod faciendum erat.

d 5. quinti decimi.

e 8. quinti decimi.

PROBL. 12. PROPOS. 12.

IN dato Icoſaedro Pyramidem deſcribere.

IN dato Icoſaedro [f] cubus deſcribatur, [g] & in hoc cubo pyramis; factumque erit, quod proponitur. [h] Cùm enim anguli cubi tangant centra baſium Icoſaedri; [i] & anguli pyramidis angulis cubi congruant, manifeſtum eſt, angulos pyramidis attingere centra earundem baſium Icoſaedri. Ac proinde pyramidem in Icoſaedro eſſe deſcriptam. In dato igitur Icoſaedro pyramidem deſcripſimus. Quod erat faciendum.

f 11. quinti decimi.

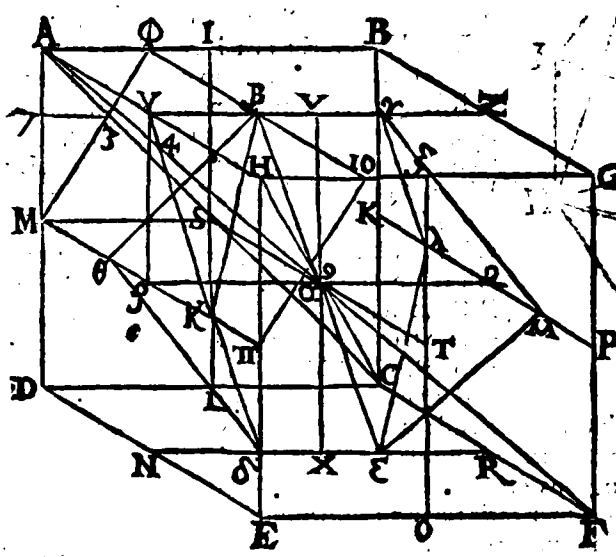
g 1. quinti decimi.

h 11. quinti decimi.

i 1. quinti decimi.

PROBL. 13. PROPOS. 13.

IN dato cubo Dodecaedrum deſcribere.



SIT in cubo propoſito AF, deſcribendum Dodecaedrũ. Secentur ſingula latera bifariam in I, K, L, M, N, O, P, R, ω, ξ, Z, Y, coniunctis rectis IL, YZ, ξO, Mω, KP, NR, nuſquam inter ſe coeuntibus; ita vt ductæ in baſibus oppoſitis ſint inter ſe parallelæ, & à nullo puncto duæ lineæ ducãtur, ſed vna duntaxat, quæ rurſus bifariam ſecentur in S, V, T, ρ, Q, X, connexis rectis ST, VX, ρQ, quæ ſe mutuò in centro α, bifariam ſecant, & ad angulos rectos, vt in coroll. propoſ. 3. huius libri docuimus, ſuntque lateribus cubi, ſicut & priores ſex, æquales. Iam dimidia rectarum YZ, Mω, ſecentur extrema ac media ratione in β, γ, δ, κ, vt ſint maiora ſegmenta, Yβ, Zγ, Mδ, ωκ, ductis rectis Yρ, Yκ, βδ, βα. Quoniam ergo Yρ, YV, dimidio lateris cubi ſunt æquales; & ρκ, βV, ſegmenta minora rectarum æqualium YV, ρω, æqualia quoque: [k] Sunt autem quadrata rectarum YV, βV, tripla quadrati rectæ Yβ; Erunt

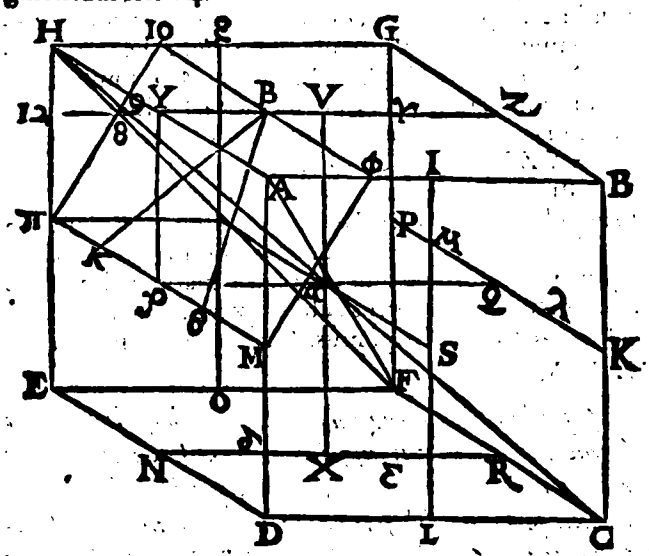
k 4. tertijd.

runt & quadrata rectarum Yρ,ρπ, tripla eiusdem quadrati rectæ Yβ. Quare, [a] cùm quadratis rectarum Yρ, ρπ, æquale sit quadratum rectæ Yπ, [b] quòd angulus Yρπ rectus sit; Erit & quadratum rectæ Yπ, triplum quadrati rectæ Yβ. Rursus, quia VY, perpendicularis ad AY, Yρ, [c] recta est ad planum AE, per rectas AY, Yρ, ductum, rectus erit angulus βYπ, ex defin. 3. lib. 11. [d] Ac propterea quadratum rectæ βπ, æquale quadratis rectarum Yπ, Yβ, existens, quadruplum erit quadrati rectæ Yβ. (quia nimirum quadrata rectarum Yπ, Yβ, quadrupla etiam sunt quadrati rectæ Yβ, cùm quadratum rectæ Yπ, triplum sit ostensum quadrati rectæ Yβ.) Ideoq; [e] cùm quadrata proportionem habeat laterum duplicatam, dupla erit recta βπ, rectæ Yβ. Quadrupla enim proportio duplicata est duplæ proportionis, vt in his numeris 1. 2. 4. apparet: Est autem & δπ, dupla ipsius ρπ, quòd minora segmenta δρ, πρ, rectarum æqualium Mβ, πβ, æqualia sint. [f] Erit igitur vt Yβ, ad ρπ, ita βπ, dupla ipsius Yβ, ad δπ, duplam ipsius ρπ. Est autem Yβ, maius segmentum ad ρπ, rectam minori segmento βV, æqualem, vt tota ad maius segmentũ. Ergo & βπ, ad δπ, erit vt tota ad maius segmentum: Ac proinde δπ, erit maius segmentũ rectæ βπ, sectæ extrema ac media ratione. Eadem ratione ostendemus δπ, maius esse segmentum rectæ βδ, extrema ac media ratione sectæ, si nimirum ducatur recta Yδ. Quare æquales erunt βδ, βπ, constituentes triangulum Isosceles βδπ, simile illi, quod ab Euclide constructum est propos. 10. lib. 4. vt postea demonstrabimus; Ac proinde δπ, erit latus pentagoni in circulo triangulum βδπ, circumscribente descripti, vt perspicuum est ex 11. propos. lib. 4.

[a] 47. primi. [b] 29. primi. [c] 4. vndec. [d] 47 primi. [e] 20. sexti. [f] 15. quinti.

INTERROGATVR iam planum trianguli βδπ, extendi, (ducta per β, recta βρ, ipsi Mπ, parallela,) per parallelum Mπ, ρ 10. vt sit planum extensum ρπ, occurrens diametro AC, quadrati ABCD, in puncto 7; cubi verò diametro AF, in puncto 4. & per 3. ducatur 37. recta ipsi Aρ, parallela, connecturque MS, 3 quæ parallela est vtrique Aρ, 73. Quoniam igitur, per corollariũ propos. 4. lib. 6. [g] triangulum A73. simile est triangulo AMS; [h] ac proinde vt AM, ad MS, ita est A7. ad 73. Sunt autem AM, MS, æquales, nempè dimidia cubi latera; Erunt quoque A7. 73. æquales. Eadem ratione erit, vt MA, ad Aρ, ita M7. ad 73. Est autem Aρ, maius segmentum rectæ MA, diuisæ extrema ac media ratione. ([i] quòd æquales sint Aρ, Yβ, nec non & MA, YV, dimidia cubi latera.) Igitur & 73. hoc est, 7A, maius segmentum erit rectæ M7. extrema ac media ratione sectæ; [k] Ac propterea tota MA, diuisa erit extrema ac media ratione in 7. maiusque segmentum erit M7. [l] Atqui vt M7. ad 7A, ita est S3. ad 3A. Secta est ergo & SA, extrema ac media ratione in 3. maiusq; segmentum est S3. [m] Quia verò Sπ T, parallela est ipsi Mπ; quòd & recta ducta πT, æqualis & parallela sit ipsi MS, si per Sπ T, planum ducatur parallelum plano ρπ; ducto per Mπ, [n] secabuntur rectæ AS, Aπ, in easdem rationes, in punctis 3. & 4. cùm planum ρπ, rectas AS, Aπ, secet in 3. & 4. at planum per Sπ T, ductũ plano ρπ, parallelum eadem secet in S, & π. Atque idcircò, cùm AS, secta sit in 3. extrema ac media ratione, secta erit eodem modo Aπ, semidiameter cubi, in 4. maiusque segmentum erit π4.

[g] 33. primi. [h] 4 sexti. [i] 34. primi. [k] 5. tertiæd. [l] 12. sexti. [m] 33. primi. [n] 17. vndec.

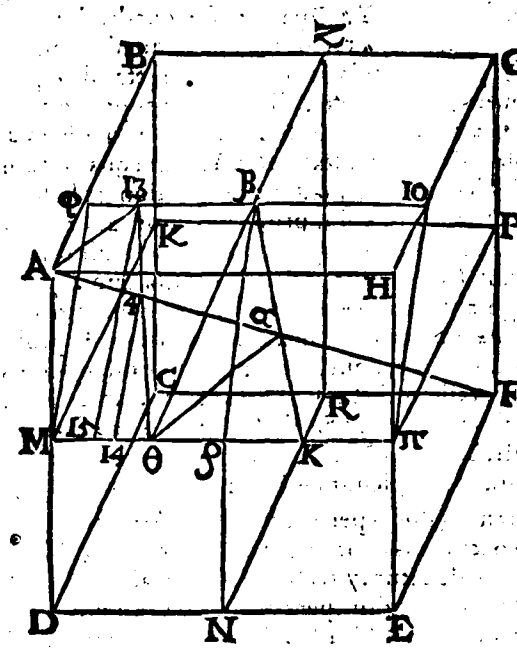


IISDEM argumentis ostendemus, ducta diametro HF, quadrati EFGH, & diametro cubi HC, semidiametrum cubi secari in 9. puncto extrema ac media ratione à plano ρπ, vt perspicuum est, si cubus inuertatur, vt in hac figura secunda apparet. Sunt enim lineamenta omnino similia lineamentis prioris figuræ, licèt bases cubi sedes mutauerint, ita vt quadratum AC, locum quadrati HF; & quadratũ HF, locum quadrati AC, obtineat in hac secunda figura. Quod tamen in prima figura, sine hac inuersione, probabitur etiam hoc modo. Ducta diametro cubi HC, in ea figura, quam planum ρπ, secet in 9. prope punctum A, intelligaturque per rectam AH, planum plano ρπ, parallelum. Quoniam igitur rectæ Aπ, Hπ, in centro π, conueniunt, secanturque planis parallelis in punctis A, H, & 4. 9. (Nam planum ρπ, eas secat in 4. & 9. planum verò per AH, ductũ plano ρπ, parallelum eadem secat in A, & H;) [o] erit vt π4. ad 4A, ita π9, ad 9H. Cùm ergo πA, secta sit in 4, extrema & media ratione, erit quoq; πH, similiter secta. quæ quidem demonstratio locum etiam habet in hac cubi inuersione in secunda figura. Ostendamus nunc, si rectæ iungantur 94, β4, β9, π9, rectilineum β49π9, in plano ρπ, existens, pentagonum esse æquilaterum, & æquiangulum.

[o] 17. vndec.

INVERTATVR rursum cubus, vt quadrata ADEH, ABGH, quæ nimirum continent triangulum βδπ, siue planum ρπ, hunc situm habeant, quem monstrat tertia hæc figura. Deinde in plano ρπ, recta coniuncta δ4. extendatur vsque ad rectam ρ10. in punctum 13. Quoniam igitur ducta recta KP, & iunctis rectis MK, πP, [p] planum MP, parallelum est plano AG, (quòd & rectæ PK, KM, parallelæ sint rectis GB, BA,) [q] secatque cubum bifariam; ideoque per centrum π, transit, [r]

[p] 15. vndec. [q] 32. vndec.



a 16. vndec.

b 4. sexti.

c 15. vndec.

d 17. vndec.

e 2. sexti.

ea, quæ in scholio propos. 39. lib. 11. ostensa sunt si p recta ω A, ∂ 4. 13. planũ extendatur, a fient ω ∂, A 13. communes sectiones planorũ M P, AG, parallelæ; Ac proinde triangula α ∂ 4, A 13 4. æquiangula erunt; b Eritq; vt α 4. ad 4. A, ita ∂ 4. ad 4. 13. Quare cùm α A, in 4. secta sit extrema ac media ratione, vt ostẽdimus: eodem modo erit secta ∂ 13. in 4. Rursus plano N Z, per centrum α, transeunti, parallelum ducatur planum p punctum 4. ex scholio propos. 15. lib. 11. secans planũ ρ ω, recta 4 14. c Est autem eidem plano N Z, parallelum planum D B. d Rectæ igitur α A, ρ M, in easdem rationes secabuntur in punctis 4. & 14. Quocirca & ρ M, in 14. secta erit extrema ac media ratione, minusq; erit segmẽtum 14. M, ideóque æquale minori ρ ∂, ipsius M ρ. Quare cùm ex ρ 14. maiori segmento ipsius ρ M, auferatur ρ ∂, minus segmentum: Erit, vt demonstrauimus ad propos. 5. lib. 13. ρ 14. diuisa in ∂, extrema ac media ratione, maiusque segmentum erit ρ ∂. Postremò, acta per 13. recta 13. 15. rectæ 4. 14. parallela, e secabuntur rectæ ∂ 13, ∂ 15. proportionaliter Ac proinde & ∂ 15, secta erit in 14. extrema ac media ratione, maiusque segmentum erit ∂ 14. f Quapropter erit vt ρ ∂, maius segmentum ad ∂ 14. minus, ita ∂ 14. maius ad 14. 15. minus: Vt autem ∂ 14. ad 14. 15. ita est tota ∂ 15. ad ∂ 14. maius segmentum. Igitur erit vt ρ ∂, ad ∂ 14. ita ∂ 15. ad eandem ∂ 14. Ac propterea rectæ ρ ∂, vel ρ ω, & ∂ 15. æquales erunt. Quoniam verò planum N Z, & planum illi parallelum per 4. 14. ductum, secántur plano ρ ω, erunt communes sectiones β ρ. 4. 14. parallelæ, ideoq; & 13. 15, β ρ, parallelæ erunt, g angulusq; externus β ρ ω, interno 13. 15 ∂, æqualis. Cũ igitur & latera β ρ, ρ ω, lateribus 13. 15. 15 ∂, sint æqualia, h æquales erunt quoq; rectæ β ω, 13 ∂; Ac proinde & earũ segmenta maiora ∂ ω, ∂ 4, (Ostensum enim est ∂ ω, esse maius segmentum ipsius β ω.) æqualia erunt. Eadem arte & β 4. ipsi β γ, in prima figura ostenditur æqualis, si simili situ triangulum Isosceles formetur super basim β γ, cuius vertex consistat in puncto, quod rectam I S, diuidit extrema ac media ratione. Eodemq; modo eisdem ∂ ω, β γ, æquales erunt ω 9. β 9. Æquilaterũ ergo est pentagonum β 4 ∂ ω 9; quandoquidẽ β γ, ∂ ω, rectæ æquales sunt, cùm componantur ex minoribus segmentis linearum æqualium extrema ac media ratione sectarum, quales sunt Y V, Z V, ω ρ, M ρ. Sed & æquiangulũ, vt mox ostendemus. Si igitur hac arte duodecim triangula, nimirum ad singulas rectas M ω, Y Z, N R, I L, S O, K P; bina ipsi β ∂ ω, similia, & æqualia construantur, (Ita enim ad M ω. duo huiusmodi triangula vides β ∂ ω, ∂ ∂ ω.) & ipsorũ officio duodecim pentagona ipsi β 4. ∂ ω 9, similia & æqualia fabricentur, constituetur Dodecaedrũ, cuius duodecim quidẽ anguli in sex rectis lineis M ω, Y Z, N R, I L, S O, K P, bini nimirũ in singulis, octo verò reliqui in octo semidiametris cubi consistũt, nempe in punctis, q̃ ipsas extrema ac media ratione diuidũt, qualia sunt puncta 4. & 9. in semidiametris A α, & H α, secundæ figuræ: Ac propterea quodammodo inscriptũ esse dicetur cubo huiusmodi Dodecaedrũ, quamuis non proprie, cùm non omnes eius anguli vel in angulis, vel lateribus, vel deniq; in planis cubi constituãtur, sed 12. quidẽ in sex planis cubi, octo verò in punctis, quæ octo semidiametros cubi extrema ac media ratione secant, resideant. Quocirca in dato cubo Dodecaedrum descripsimus. Quod erat faciendum.

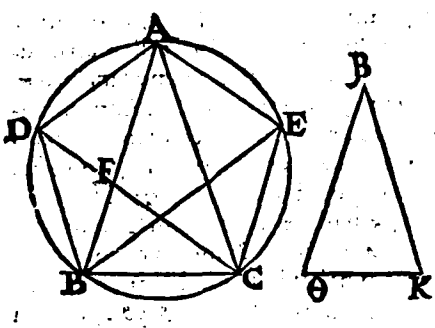
f 2. quartidecimi.

g 15. vndec.

h 29. primi.

i 4. primi.

LEMMA.

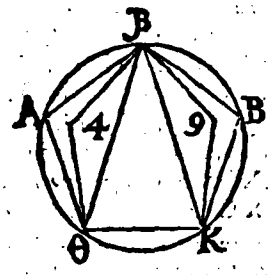


QVOD autẽ triangulũ β ∂ ω, cuius basis ∂ ω, maius segmẽtum existit utriusq; lateris β ∂, β ω, extrema ac media ratione diuisi, simile sit illi, quod Euclides construxit propos. 10. lib. 4. ita demonstrabimus. Describatur circa triangulum Isosceles A B C, quale Euclides construere docet propos. 10. lib. 4. circulus A D B C E, diuisisq; angulis A B C, A C B, bifariã rectis B E, C D, perficiatur pentagonũ æquilaterũ & æquiangulũ A D B C E, vt propos. 11. lib. 4. tradimus, secentq; se mutuò rectæ A B, C D, in F. a *Quoniã ergo A B, in F, secatur extrema ac media ratione, maiusq; eius segmentum est A F, æquale lateri B C.* b *Erit vt A B, tota ad maius suũ segmentũ B C, ita C θ, tota ad maius suum segmentũ ∂ ω; Eodemq; modo, vt tota A C, ad maius segmentum C B, ita β ω, tota ad maius segmentũ ω θ: Est autẽ quoq; vt A B, ad A C, ita β θ, ad β ω, vtrobiq; enim est proportio æqualitatis. Triangula igitur β θ ω, A B C, proportionalia habentia latera, æquiangula sunt, æqualesq; erunt anguli θ, B; Item ω, C, & β, A; propterea q; vterq; angulorum θ, ω, duplus erit anguli β; & triangula β θ ω, A B C, similia.*

a 8. tertij decimi.

b 2. quartidecimi.

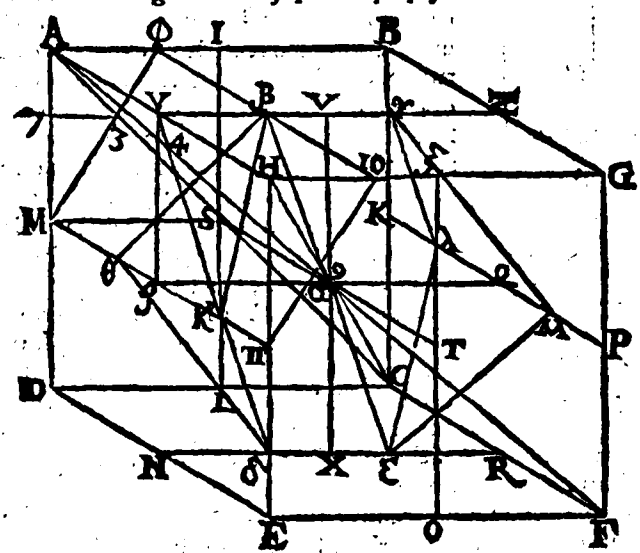
PENTA-



PENTAGONVM verò β 4 ϑ κ 9, æquilaterum, esse quoq; æquiangulum, hac ratione ostendemus. Describatur circa triangulum β ϑ κ, circulus β A ϑ κ B; qui si transeat per puncta 4, & 9, perspicuum est ex ijs, quæ ad propos. 10. lib. 4. docuimus, pentagonum, æquiangulum esse. Si verò non incedat per puncta 4, & 9. describatur in circulo dicto, iuxta doctrinam propos. 11. lib. 4. pentagonum æquilaterum & æquiangulum β A ϑ κ B. Quoniam igitur tam recta A ϑ, A β, quàm recta 4 ϑ, 4 β, æquales sunt rectæ ϑ κ, cùm & β 4 ϑ κ 9, & β A ϑ κ B, pentagonum sit æquilaterum; Erunt tam duæ rectæ ϑ A, ϑ 4, quàm duæ β A, β 4, æquales. quod fieri non posse demonstratum est propos. 7. lib. 1. Transit ergo circulus triangulo β ϑ κ, circumscriptus per puncta 4, & 9. Ac proinde pentagonum β 4 ϑ κ 9, æquiangulum est.

SCHOLIVM.

Ex his colligere licebit sequentes propositiones.



I.

DIAMETER Dodecaedri duo latera potest, ipsius scilicet Dodecaedri & cubi, in quo Dodecaedrum describitur.

DVCATVR enim in prima figura diameter Dodecaedri β ι, intelligaturq; cõiuncta recta γ ι, [a] *æqualis existens & parallela lateri cubi V X, q & V γ, X ι, æquales sint, & parallelæ. Quoniam igitur angulus β V X, rectus est;* [b] *rectus quoq; erit angulus β γ ι, ad γ, constitutus;* [c] *Ac proinde quadratũ diametri β ι, æquale erit quadratis laterum β γ, γ ι, nempe Dodecaedri, & cubi.*

a 33. primi.
b 29. primi
c 47. primi.

II.

SI latus cubi secetur extrema ac media ratione, minus segmentum latus est Dodecaedri in cubo descripti: Maius verò segmentum latus cubi in hoc Dodecaedro descripti.

IN eadem enim prima figura, [d] *cùm sit vt Υ V, ad β V, ita Υ Z, dupla ipsius Υ V, ad β γ, duplam ipsius β V; sit autem Υ β V, minus segmentum ipsius Υ V, secta extrema ac media ratione: Erit & β γ, minus segmentum lateris cubi Υ Z, secti extrema ac media ratione; composita verò ex Υ β, γ Z, hoc est, recta β κ, (quæ dupla fuit ostensa ipsius Υ β, ideoq; composita ex Υ β, γ Z, æqualis) maius segmentum. Constat autem ex constructione β γ, esse latus Dodecaedri,* [e] *& β κ, seu β ϑ, esse latus cubi in dicto Dodecaedro descripti, cùm subtendat angulum pentagoni β 9 κ, vel β 4 ϑ.*

d 15. quinti
e 8. quintidecimi.

III.

LATVS cubi æquale est duobus lateribus, Dodecaedri videlicet in ipso descripti, & Dodecaedri circa eundem cubum descripti.

NAM in prima rursus figura, latus cubi Υ Z, componitur ex latere Dodecaedri β γ, in ipso descripti, & ex recta composita ex Υ β, γ Z; quã constat esse latus Dodecaedri eidem cubo circumscripti. Cùm enim Υ Z, cubi latus subtendat angulum pentagoni Dodecaedri circa cubum descripti, vt perspicuum est ex 8. propos. huius lib. [f] *Sit autem latus illius pentagoni maius segmentum lateris Υ Z, secti extrema ac media ratione: Erit β ϑ, existens quoq; maius segmentum eiusdem lateris Υ Z, & æqualis duabus Υ β, γ Z, simul, vt iam demonstrauimus, latus Dodecaedri cubo lateris Υ Z, circumscripti.*

f 8. tertiidecimi.

IIII.

RECTA duos angulos pentagonorum Dodecaedri communi lateri oppositos connectens est æqualis lateri cubi, cui Dodecaedrum inscribitur.

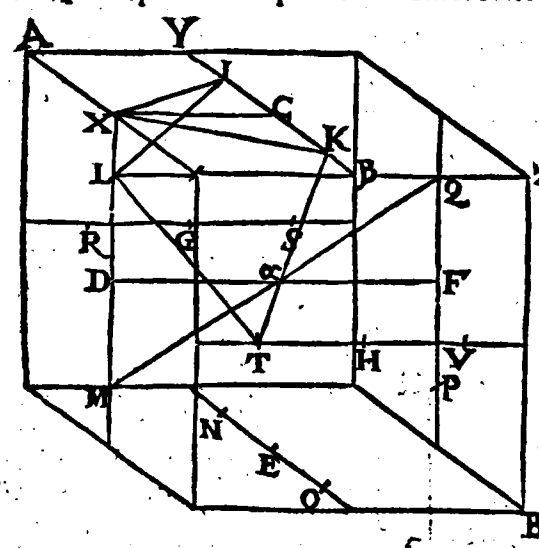
IN prima enim figura, recta connectens puncta β, ϑ, in quibus constituuntur duo anguli pentagonorum communi lateri ι, oppositi, & æqualis est rectæ V X; (quòd & β V, ϑ X, æquales sint, & parallelæ) hoc est, lateri cubi, in quo Dodecaedrum describitur.

g 33. primi.

PROBL. 14. PROPOS. 14.

IN dato cubo Icosaedrum describere.

CVBVS datus, in quo describendum sit Icosaedrum, sit AB, p cuius basium centra C, D, E, F, G, H, lateribus cubi rectæ lineæ parallelæ agantur nusquá inter se conuenientes, & harum medietates extrema ac media ratione secentur, ita vt maiora segmenta prope centra sint in punctis I, K, L, M, N, O, P, Q, R S, T, V; quorũ quodlibet cum quatuor vicinioribus connectatur, vt L, cum I, K, T, & R: R, cũ L, M, I, & N, &c. vt constituátur viginti triangula IKL, IKQ, LMR, LMT, NQM, NOP, PQV, PQS, RSI, RSN, TVK, TVO, ILR, ISQ, KTL, KQV, OPV, OTM, NSP, NMR; quorum priora duodecim subtendantur duodecim cubi lateribus, posteriora verò octo eiusdem cubi octo angulis substernuntur. Connectantur iam rectę XC, XI, XK. Quoniam igitur
a 29. primi. latera XC, CI, trianguli XCI, æqualia sunt lateribus XC, CK, trianguli XCK; a & anguli contenti,
b 4. primi. recti, q XC, parallela sit ipsi AY; b Erunt & bases XI, XK, æquales. Deinde quia linea LX, recta est ad planum AZ, per defin. 4. lib. 11. recta quoq; erit ad lineas XI, XK; Ac propterea cũ latera LX, XI, trianguli LXI, æqualia sint lateribus LX, XK, trianguli LXK, & anguli contenti, recti;



c 4. primi. c æquales erũt bases LI, LK. Rursus d quoniam quadratũ rectæ LI, æquale est quadratis rectarum LX, XI; Et quadratũ rectæ LX, quadrato rectæ IY; quadratum verò rectę XI, quadratis rectarum XC, CI, est æquale: Æquale erit quadratum rectæ LI, tribus quadratis rectarũ XC, CI, IY: Sunt autem & quadrata rectarum XC, CY, æqualia, q eorum latera sint
d 47. primi. dimidia cubi latera. Igitur quadratũ rectæ LI, æquale est tribus quadratis rectarũ CY, CI, IY: Sed hæc tria quadrata quadrupla sunt quadrati rectę CI; (e Cùm enim quadrata rectarum CY, IY, totius, & minoris segmenti, tripla sint quadrati rectæ CI, ma-
e 4. huius. ioris segmenti; Addito quadrato rectæ CI, illis duobus; erũt tria quadrata rectarum CY, CI, IY, quadrupla eiusdem quadrati rectæ CI.) Quadratum ergo rectæ LI, quadruplum est quoq; quadrati rectæ CI; Ac propterea, cùm eiusdem quadrati rectæ CI, quadruplum sit quadratum rectæ KL, ex scholio propos. 4. lib. 2. Æqualia erunt quadrata rectarum LI, IK, ideoque & rectæ ipsæ æquales. Æquilaterum igitur est triangulum IKL, lateri cubi AG, subtratum.

NON aliter ostendemus, reliqua vndecim triangula, vndecim reliquis lateribus cubi supposita, esse æquilatera; Atq; adeò inter se æqualia, cùm eorũ latera IK, LM, NO, PQ, RS, TV, æqualia sint. Quoniam verò latera reliquorum octo triangulorũ, octo angulis cubi suppositorum, communia sunt dictis duodecim triangulis; vt in triangulo KTL, latus KL, cõmune est triangulo IKL, & latus KT, triangulo TVK, & latus TL, triangulo LMT; perspicuũ est, ea quoq; esse æqualia & inter se, & dictis duodecim triangulis. Quare omnia viginti huiusmodi triangula Icosaedrum component cubo inscriptum, cùm eius anguli omnes duodecim in sex cubi basibus consistant, bini nimirum in singulis. Itaque in dato cubo Icosaedrum descripsimus. Quod erat faciendum.

SCHOLIVM.

COLLIGIMVS ex hoc, propositiones sequentes.

I.

DIAMETER Icosaedri potest & latus Icosaedri, & cubi Icosaedrum ambientis.

a 33. primi. DVCTA enim recta LQ, a quæ lateri cubi DF, parallela est, & æqualis, q & DL, FQ, parallelæ sint, &
b 47. primi æquales; b manifestum est, quadratũ diametri QM, æquale esse quadratis rectarum LM, lateris Icosaedri, &
c 29. primi. LQ, lateris cubi, in quo Icosaedrum descriptũ est, c cùm angulus MLQ, sit rectus, quòd & LDF, rectus sit.

II.

BIPARIAE sectiones sex oppositorum laterum Icosaedri coniungantur tribus rectis æqualibus, sese in centro Icosaedri bifariam, & ad angulos rectos secantibus.

NAM huiusmodi tres lineæ, nimirum DF, CE, GH, cùm coniungant centra basium cubi oppositarum, æquales sunt lateribus cubi, sesèq; per coroll. propos. 3. huius lib. bifariam, & ad angulos rectos in centro cubi, quod sit α, diuidunt. Quod quidem & centrum esse Icosaedri, ita ostendetur, ducta recta α P. Quoniam latera α F, FQ, trianguli α FQ, æqualia sunt lateribus α F, FP, trianguli α FP, angulosq; comprehendũt rectos,
d 4. primi. d æquales erunt rectæ α Q, α P. Eademq; ratione æquales erunt omnes rectæ ex α, ad angulos Icosaedri procedentes. Igitur α, centrum est Icosaedri.

III.

SI latus cubi extrema ac media ratione secetur, maius segmentum latus est Icosaedri in dicto cubo descripti.

CVM

Cvm enim CI, sit maius segmentum rectæ CT: a sitq; vt CI, ad CT, ita KI, dupla ipsius CI, ad ST, dupla ipsius CT; b erit quoq; KI, latus Icosaedri, segmentum maius lateris cubi ST. a 15. quinti. b 2. quartidecimi.

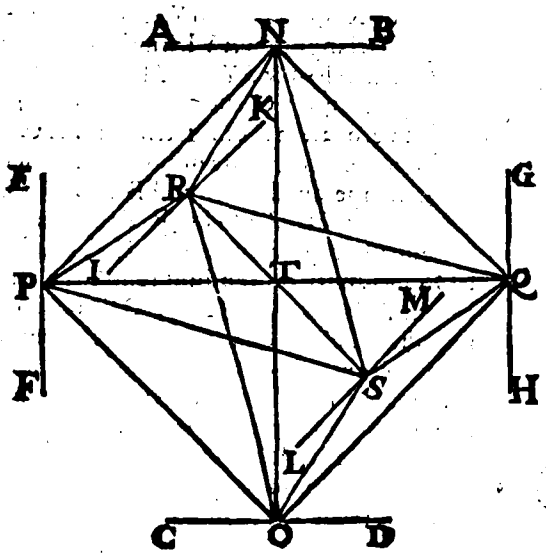
IIII.

ICOSAEDRI tam latera, quàm triangula opposita, inter se sunt parallela.

SI enim quorumlibet duorum laterum oppositorum extrema puncta duabus diametris connectantur, fient duo triangula inter se æqualia, angulosq; alternos habentia æquales, ex 4. propos. lib. 1. quæ quidem in centro conuenient. Quare quælibet latera opposita parallela erunt; c Atq; idcirco, & triangulorum plana, per ipsa latera parallela ducta, inter se erunt parallela. c 15. vndec.

PROBL. 15. PROPOS. 15.

IN dato Icosaedro Octaedrum describere.



EXPONANTVR dati Icosaedri, cui inscribendum est Octaedrum, sex latera opposita, AB, CD, EF, GH, IK, LM, quorum bifarias sectiones N, O, P, Q, R, S, iungant tres rectæ NO, PQ, RS, æquales, sese in centro T, bifariam, & ad angulos rectos secantes, per ea, quæ in scholio propos. præcedentis ostensa sunt; ducanturq; rectæ, NP, NR, NS, NQ, OP, OR, OS, OQ, AR, PS, QR, QS, constituentes octo triangula SNP, SPO, SOQ, SQN, RNP, RPO, RQO, RQN. Quia igitur latera TN, TS, trianguli TNS, æqualia sunt lateribus TN, TP, trianguli TNP, (cũ sint rectarũ æqualium dimidia.) angulosq; continent rectos, vt dictũ est: a Æquales erũt bases NS, NP. Eodemq; modo reliquæ ẽs lineæ æquales erũt & hisce duab⁹, & inter se. Octo ergo dicta triangula æquilatera sunt, & inter se æqualia; Ideoq; Octaedrum constituunt. a 4. primi.

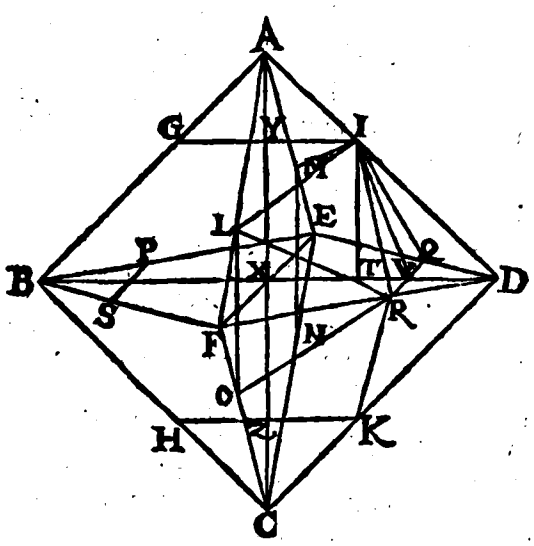
Quod in Icosaedro descriptũ est, cùm eius anguli resideant in bifariis sectionibus sex laterum Icosaedri oppositorum. In dato itaque Icosaedro Octaedrum descripsimus. Quod faciendum erat.

COROLLARIVM.

SEQVITVR hinc, idem esse centrum Icosaedri, & Octaedri in eo descripti. Quoniam scilicet rectæ NO, PQ, RS, per T, centrũ Icosaedri incedentes, diametri sunt Octaedri NPOQRS, sibi inscripti. Quare T, centrũ Icosaedri, vbi se intersecant, centrũ quoq; est Octaedri.

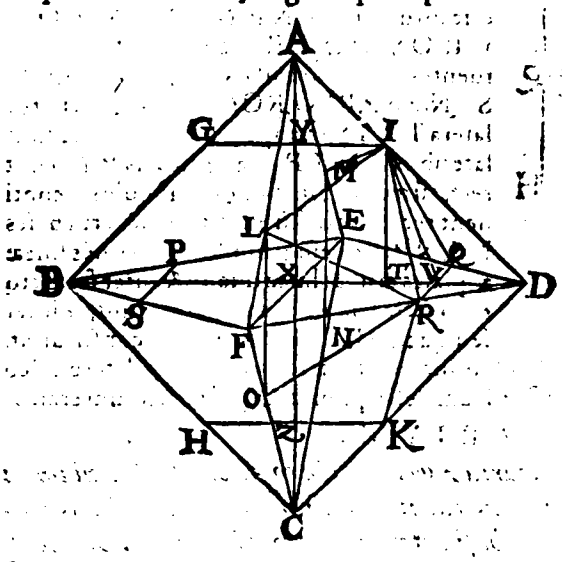
PROBL. 16. PROPOS. 16.

IN dato Octaedro Icosaedrum describere.



DATVM Octaedrum, in quo describẽdum est Icosaedrum, sit ABCDEF. Cùm à quolibet angulo quatuor latera exeant, sumantur à singulis bina non proxima, sed sibi è regione respondentia, hoc est, quę ad angulos quadratorum Octaedri oppositos cadunt, sumendo semper bina iuxta angulos oppositos eiusdem quadrati, qualia sunt BA, BC; DA, DC, iuxta angulos oppositos B, D, quadrati ABCD; AE, AE; CE, CF, iuxta angulos oppositos A, C, quadrati AECF: (Nam à quolibet angulo sumenda sunt tantùm duo latera; at verò latera AB, AD; CB, CD, quadrati ABCD, iuxta eosdem angulos A, C, iam sumpta fuêre.) EB, ED; FD, FB, iuxta angulos oppositos E, F, quadrati EBFD; (Nam latera EA, EC; FC, FA, quadrati AECF, iuxta eosdem angulos, E, F, iam accepta sunt.) quæ omnia secentur extrema ac media ratione, hac lege, vt maiora segmẽta sint prope angulos, à quibus egrediuntur, in duodecim punctis G, H, I, K, L, M, N, O, P, Q, R, S, & à singulis ad quinque proximas sectiones quinque lineæ rectæ ducantur, vt ex R, rectæ RQ, RI, RL, RO, RK. Et ex I, rectæ IQ, IR, IM, IL, IG, & sic de cæteris, quamuis non omnes ductæ sint

in figura, ad euitandam linearũ confuſionem. Quę autẽ ſint hæc quinq; puncta proxima, palàm indicat Octaedrum materiale. Sunt enim tria in lateribus reliquis tribus, quę cum eo, in quo punctum acceptũ eſt, pyramidem conſtituunt; alia autẽ duo ſunt in duobus lateribus duorum triangulorum Octaedri, quæ habẽt cõmune illud latus, in quo punctum acceptũ eſt. Vt quia punctum acceptum eſt R, in latere D F, quod cum tribus D E, D A, D C, pyramidem conſtituit in vertice D, & eſt cõmune triangulis Octaedri D F A, D F C: propterea ex R, ad quinq; puncta horũ quinque laterũ ductę ſunt lineę rectæ, & ſic de cæteris. Poſt hæc, ductis tribus Octaedri diametris A C, B D, E F, ſeſe in centro X, ſecantibus bifariam, & ad angulos rectos, ex coroll. 1. propoſ. 14. lib. 13. quarum A C, B D, ſecant rectas G I, R Q, in Y, & V; connectaturq; recta I V, agaturq; I T, parallela ipſi Y X. Quoniam ergo latera D Q, D I, trianguli D Q I, æqualia ſunt lateribus D R, D I, trianguli D R I (Sunt enim D Q, D R, minora ſegmẽta rectarũ æqualium D E, D F,) & angulos comprehendunt æquales, nempe triangulorũ Octaedri A D E, A D F; [a] Erunt baſes I Q, I R, æquales. Deinde cùm ſit, [b] vt B G, ad G A, ita D I, ad I A; [c] erit G I, rectæ B D, parallela. Eademq; ratione Q R, ipſi E F, parallela; [d] Ac proinde vt D I, ad I A, ita X Y, ad Y A. Recta igitur X A, ſecta erit in Y, extrema ac media ratione. Rurſus, quia eſt vt A X, ad X D, ita A Y, ad Y I, (quòd triangulum A Y I, ſimile ſit triangulo A X D, per coroll. propoſ. 4. lib. 6.) Eſt autẽ A X, ipſi X D, æqualis; Erit & A Y, ipſi Y I, æqualis. Quare Y I, minus ſegmẽtum eſt rectæ X A. Non aliter oſtendemus A Y, ipſi Y G, eſſe æqualem; ideoq; G I, rectam bifariam in Y; ſimiliterque Q R, in V, ſecari. Cùm verò latera A G, A I, trianguli A G I, æqualia ſint lateribus D Q, D R, trianguli D Q R, (nimirũ minora ſegmenta minoribus ſegmentis æqualium rectarum) angulosq; comprehendant rectos, nempe quadratorum A B C D, D E B F.



[e] Æquales erit baſes G I, Q R. Eadem ratione his æquales oſtendentur rectæ H K, P S, M N, L O, quę nimirũ ſubtendunt reliquos quadratorum A B C D, D E B F, A E C F, angulos, in ſingulis videlicet quadratis binos oppoſitos, complectunturq; duo ſegmenta laterũ minora. Deinde quia Y I, minus ſegmentum ipſius X A, oſtenſum, maius eſt ſegmentum maioris ſegmenti X Y, diuiſi extrema ac media ratione, vt demonſtrauimus ad propoſ. 5. lib. 13. Eſt autem X Y, rectæ X V, æqualis, (cùm ambæ ſint maiora ſegmẽta æqualium rectarũ X A, X D.) [f] & Y I, rectæ X T; erit X T, maius ſegmentum ipſius X V, & idcircò T V, ſegmentum minus eiuſdem X V. Quare quadrata rectarum X V, totius, hoc eſt, ipſius I T, ([g] cùm & recta I T, æqualis ſit ipſi X Y.) & T V, minoris ſegmenti, [h] tripla ſunt quadrati rectæ X T, maioris ſegmenti; Atq; adeò quadratũ rectæ I V, [i] æquale exiſtens quadratis rectarum I T, T V, triplum eſt eiuſdem quadrati rectæ X T, hoc eſt, rectę R V, quæ æqualis eſt ipſi X T, ſeu ipſi Y I, ex demonſtratis, cùm R V, Y I, dimidia ſint æqualium rectarum R Q, G I. Addito igitur quadrato rectæ R V, ipſi quadrato rectæ I V; erunt quadrata rectarum I V, V R, quadrupla quadrati rectę R V: [k] At quadratis rectarum I V, V R, æquale eſt quadratum rectæ I R, [l] quòd anguli I V R, I V Q, comprehenſi lateribus æqualibus I V, V R; I V, V Q, & ſubtenſi baſibus æqualibus I R, I Q, æquales ſint, ideoq; recti. Ergo & quadratũ rectæ I R, quadruplum eſt quadrati rectæ V R; Ac propterea cùm eiuſdem quadrati rectæ V R, quadruplum quoq; ſit, per ſcholium propoſ. 4. lib. 2. quadratũ rectæ Q R; Æqualia erunt quadrata rectarum I R, Q R, ideoque & rectæ ipſæ æquales: Erat autem I Q, ipſi I R, æqualis. Triangulum igitur æquilaterum eſt I Q R. Non ſecus demonſtrabimus, æquilatera eſſe triangula ſimilem ſitum cum I Q R, habentia, nempe K Q R; G I L, G I M; G P S, H P S; N H K, O H K; R L O, S L O; P M N, Q M N; atque adeò triangulo I Q R, æqualia, cùm latera omnium ſint æqualia inter ſe. quòd tamen hac etiam ratione demonſtrabimus. Cùm enim in quolibet horum triangulorũ vnum latus ſubtendat angulum rectum quadrati, comprehenſum duobus ſegmentis minoribus laterum Octaedri; duo verò reliqua ſubtendant duos æquales angulos triangulorum æquilaterorũ, contentos ſinguios duobus ſegmentis laterũ Octaedri, maiore & minore: Erunt lateta vnius trianguli lateribus aliorum æqualia; ac propterea & ipſa triangula æqualia, per corollarium propoſitionis 8. lib. 1. Vt in triangulis I Q R, G I L, latera R Q, G I, ſubtendentia angulos rectos Q D R, G A I, quadratorum D E B F, A B C D, comprehenſos minoribus ſegmentis D Q, D R; A G, A I, æqualia ſunt. Eodem modo latera I Q, I L, æqualia erunt, cùm ſubtendant angulos æquales I D Q, I A L, triangulorum æquilaterorum A D E, A D F, quorum ille coptinetur ſegmentis laterum Octaedri D I, D Q, maiore & minore; hic verò ſegmentis A L, A I, maiore & minore quoque. Non ſecus latera I R, G L, æqualia erunt. Æqualia igitur ſunt triangula I Q R; G I L, per corollarium propoſitionis 8. libri 1. Atqui I Q R, oſtenſum eſt eſſe æquilaterum. Ergo & G I L, æquilaterum eſt. Eademq; eſt ratio cæteris habenda. Atq; hæc quidem duodecim triangula ſupponuntur ſex angulis Octaedri, bina videlicet

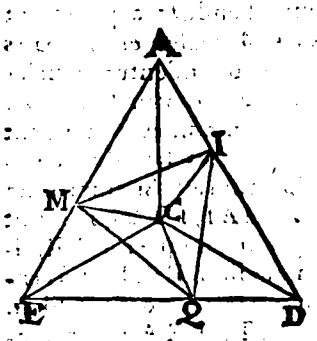
[a] 4. primi. [b] 2. quarti decimi. [c] 2. ſexti. [d] 4. ſexti. [e] 4. primi. [f] 34. primi. [g] 34. primi. [h] 4. tertiæ. [i] 47. primi. [k] 47. primi. [l] 8. primi.

videlicet singulis. Ex his cõsequitur reliqua octo triangula, octo basibus Octaedri imposita, videlicet GMP, in AEB; HNP, in BEC; KNQ, in CED; IMQ, in AED; GLS, in AFB; HOS, in BFC; KOR, in CFD; ILR, in AFD, aquilatera quoq; esse, & prædictis æqualia, cùm horum latera cum illorum lateribus communia sint. Viginti ergo hæc triangula, quorum quina in singulis sectionibus laterum Octaedri concurrunt, & cõstituunt angulum solidi, (vt vides in quinque RQI, RIL, RLO, ROK, RKQ, solidum angulum R, cõponentibus.) Icosaedrum componunt Octaedro inscriptum, cùm Icosaedri duodecim anguli, duodecim sectiones laterum Octaedri possideant. Ita dato itaque Octaedro, &c. Quod faciendum erat.

COROLLARIVM I.

COLLIGITVR ex demonstratis, si duo latera trianguli æquilateri secentur extrema ac media ratione ita vt vnius maius segmẽtum alterius, verò minus, sit prope angulum ab ipsis comprehensum, rectam connectentem dictas sectiones duplum posse minoris segmenti. Cùm enim in triangulo æquilatero EDP, maius segmentum lateris AD, sit DI, & DQ, minus lateris DE; sit autem recta IQ ostensa æqualis rectæ GI, quæ duplum potest minoris segmenti AI, [a] cùm quadratum rectæ GI, æquale sit duobus quadratis æqualibus rectarum æqualium AG, AI: Perspicuum est & rectam IQ, duplum posse eiusdem segmẽti minoris AI. a 47. primi

COROLLARIVM II.



RVRSVS fit, cùm octo Icosaedri bases collocatæ sint in octo basibus Octaedri, idem esse centrum basis Octaedri, & Icosaedri. Suscipiatur namque Octaedri superioris triangulum AED, in quo collocatum est triangulum Icosaedri IMQ, sitq; C, centrum trianguli AED, ex quo rectæ educantur CA, CE, CD; CI, CM, CQ. Quoniam igitur latera CA, AM, trianguli CAM, æqualia sunt lateribus CE, EQ trianguli CEQ; (quòd hæc latera sint ex centro, & maiora segmenta æqualium rectarum.) angulosq; comprehendunt æquales, nempe dimidios angulorum trianguli æquilateri, vt in scholio propos. 12. lib. 13. ostendimus; Erunt bases CM, CQ, æquales. Non secus demonstrabimus CI, æqualem esse lineis CM, CQ. Quare C, centrum erit trianguli IMQ.

COROLLARIVM III.

NON difficile est denique ex dictis colligere, idem centrum esse Octaedri, atque sibi inscripti Icosaedri. Ductis enim ex X, centro Octaedri, duabus rectis ad quoscunque duos angulos Icosaedri, nimirum rectis XG, XO, ad angulos G, & O; cùm latera XA, AG, trianguli XAG, æqualia sint lateribus XF, FO, trianguli XFO, (Nam XA, XF, semidiametri sunt Octaedri, & AG, FO, segmenta minora laterum æqualium Octaedri, sectorum extrema ac media ratione.) angulosq; complectantur æquales, semirectos videlicet; (cùm AC, EF, diametri sint quadratorum ABCD, EAFC; ac proinde, per demonstrata in scholio propos. 34. lib. 1 anguli quadratorum bifariam secent.) [b] Æquales erunt & bases XG, XO. Eodemq; argumento ostendentur omnes aliæ rectæ ex X, ductæ ad angulos Icosaedri æquales. Igitur X, centrum Octaedri, centrum quoque est Icosaedri. b 4. primi.

PROBL. 17. PROPOS. 17.

IN dato Octaedro Dodecaedrum describere.

[a] INSCRIBATVR dato Octaedro Icosaedrum; [b] & in hoc Icosaedro Dodecaedrum, factúmque erit, quod iubetur. Cùm enim Dodecaedri anguli constituantur in centris basium Icosaedri, quarum octo concentricæ sunt basibus Octaedri, ex coroll. 2. propos. 16. huius lib. Manifestum est, Dodecaedri octo angulos in eisdem centris octo basium Octaedri, reliquos autem duodecim in centris duodecim basium Icosaedri, quarum binæ singulis sex angulis Octaedri supponuntur, residere: Ac propterea Dodecaedrum Octaedro inscriptum esse dicetur, quanquam non propriè, vt ex defin. 31. lib. 11. apparere potest. Quapropter in dato Octaedro Dodecaedrum descripsimus. Quod erat faciendum.

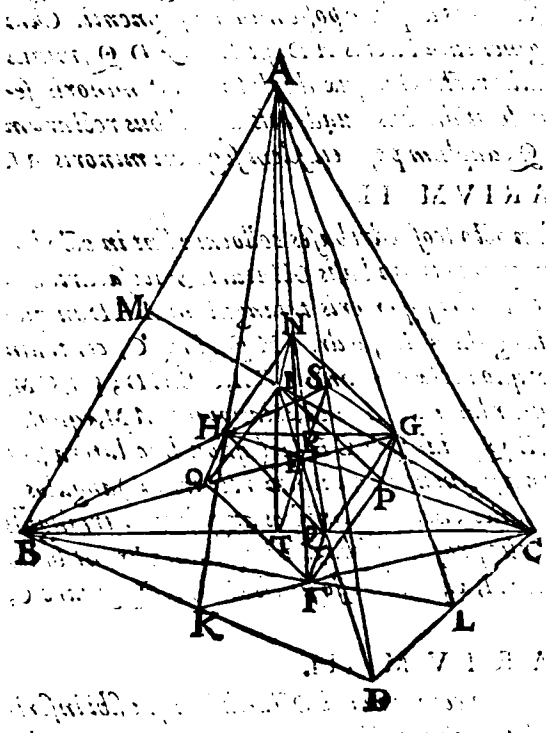
a 16. quintidecimi.
b 5. quintidecimi.

PROBL. 18. PROPOS. 18.

IN data Pyramide cubum describere.

DETVR pyramis ABCD, in qua cubus iubetur describi, sitque eius centrum E, per quod ex

quatuor angulis Pyramidis rectæ educantur A E F, B E G, C E H, D E I, [a] quæ cadent in centra baſium oppoſitarum F, G, H, I, eruntque perpendiculares ad eaſdem baſes B C D, A C D, A B D, A B C. Per hæc centra porrò ex angulis A, B, C, rectæ ducantur A H K, A G L, A I T, B F L, B H S, C I M, C F K, C G S, ſecantes baſes oppoſitas B D, C D, A D, A B, B C, bifariam, & ad angulos rectos, ex ſcholio propoſ. 12. lib. 13. in punctis K, L, M, S, T. Secentur quoque rectæ ex ſolidis angulis per centrum E, deniſſę A F, B G, C H, D I, bifariam in N, O, P, Q, punctis, quorum quodlibet cum tribus proximis centris baſium (centrig, inquam, baſium ipſam lineam, in qua punctum eſt, circumſtantium, ita vt relinquatur centrum illius baſis, in quam perpendicularis cadit.) rectis lineis coniungantur, vt N, cum G, H, I; O, cum F, H, I; P, cum F, G, I; & Q, cum F, G, H. Dico ſolidum N F, contentum quadrilateris N O, N P, N Q, F G, F H, F I, cubum eſſe. Cùm enim latera A F, F K, trianguli A F K, æqualia ſint lateribus A F, F L, trianguli A F L, (quòd F K, F L, cùm perpendiculares ſint ad B D, C D, ex centro F, ductæ, oſtendant æquales diſtantias rectarum æqualium B D, C D, à centro F.) angulosque contineant rectos, ex 3. defin. lib. 11. [b] Æquales erunt & baſes A K, A L, & anguli K A F, L A F. Rurſus, quia latera A N, A H, trianguli A N H, æqualia ſunt lateribus A N, A G, trianguli A N G, (ſunt enim A H, A G, ſemidiametri triangulorum, quilaterorũ ęqualium A B D, A C D.) angulos item comprehendunt æquales, vt demonſtrauimus; [c] Æquales erunt baſes N H, N G. Haud ſecus oſtendentur æquales rectæ Q G, Q H, ſi rectæ ducantur D G, D H, necnon & reliquæ, cùm omnes ſubtendant æquales angulos æqualibus lateribus comprehenſos; vt perſpicuum eſt. Si enim recta ducatur F T, cùm latera A F, F T, æqualia ſint lateribus A F, F K, (Sunt namque F T, F K, diſtantiæ rectarum æqualium B C, B D, à centro.) & anguli contenti recti, ex defin. 3. lib. 11. Æquales erunt anguli T A F, K A F. Ac proinde cùm latera A N, A I, æqualia ſint lateribus A N, A H; (Sunt enim A I, A H, ſemidiametri triangulorum æquilaterorũ ęqualium A B C, A B D,) angulosq; contineant æquales: [d] Æquales erũt baſes N I, N H, &c. Sunt igitur ſex dicta quadrilatera, æquilatera. Oſtendamus iam, ipſa plana eſſe, atque rectangula, vt tandem quadrata eſſe concludamus, atque adeò componere cubum N F.



A S S V M A T V R quadrilaterum N Q, ductis rectis G H, N Q. Quoniam in pyramide latera B C, A D, oppoſita ſunt, hoc eſt, non coeuntia in aliquo puncto; ſi eorum puncta media S, & T, coniungantur recta S T, erit ea diameter Octaedri in pyramide deſcripti, vt conſtat ex figura propoſ. 2. huius lib. Nam punctum S, huius figuræ reſpondet puncto H, illius, & punctum T, puncto F, cùm & in illa ſint latera oppoſita, ſiue non coeuntia B C, A D. Quocirca cùm idem ſit centrum pyramidis & Octaedri in ipſa deſcripti, vt mox demonſtrabimus, tranſibit S T, per E, centrum Pyramidis, æqualesq; erunt E S, E T, nempe ſemidiametri Octaedri. Deinde quia B S, C S, perpendiculares ſunt ad A D, per ſcholium propoſ. 12. lib. 13. [e] erunt H S, G S, ex centris H, & G, tertiæ partes perpendicularium B S, C S. Quare latera B S, C S, trianguli B S C, proportionaliter ſecantur, [f] atque idcirco H G, parallela eſt lateri B C, ſecatq; latera T S, C S, trianguli T S C, (quod quidem pars eſt trianguli B S C.) proportionaliter; ideoq; & S R, tertia pars eſt ipſius S T; Ac proinde duæ tertiæ partes dimidiæ S E. Rurſus, [g] quia D I, perpendicularis eſt ad triangulum A B C; erit E I, tertia pars ſemidiametri D E, ex coroll. 2. propoſ. 13. lib. 13. hoc eſt, qualium partium 3. ponetur D E, talium 1. erit E I, ac proinde talium 4, recta D I, ideoq; eius dimidium D Q, earundem partium 2. Quam ob rem reliqua E Q, talium partium erit 1. atque idcirco E Q, tertia pars erit ipſius D E. Eadem ratione E N, tertia pars erit ipſius A E; Ac propterea, cùm latera D E, A E, trianguli A E D, proportionaliter ſecentur, [h] recta N Q, parallela erit lateri A D, ſecabitq; latera E S, E D, trianguli D E S, (quod quidem pars eſt trianguli A E D.) proportionaliter, ideoq; cùm E Q, ſit tertia pars ipſius D E; tertia pars erit E R, ipſius S E; Ac proinde S R, duæ tertiæ partes eiuſdem S E. Quoniam igitur vtraque H G, N Q, ex S E, duas tertias partes abſtulit, in eodem puncto R, ſecabitur S E, à rectis H G, N Q; Atque idcirco, & ipſæ H G, N Q, in eodem ſeſe puncto interſecabunt. [i] Quare in eodem ſunt plano, propterea q; & rectæ H Q, Q G, G N, N H, in eodem cum ipſis plano. Planum igitur eſt quadrilaterum N Q. Eademq; eſt ratio de cæteris quinque. Quod autem & rectangulum ſit, nunc demonſtremus.

Cvm enim ſit H G, ipſi B C, parallela, atq; adeò triangulum S H G, ſimile triangulo S B C, ex coroll. propoſ. 4. lib. 6. [k] Erit vt S H, ad H G, ita S B, ad B C; & permutãdo, vt S H, ad S B, ita H G, ad B C:

[a] 15. quarti decimi.
[b] 4. primi.
[c] 4. primi.
[d] 4 primi.
[e] 18. quarti decimi.
[f] 2. ſexti.
[g] 15. quarti decimi.
[h] 2. ſexti.
[i] 2. vndec.
[k] 2. ſexti.

ad B C: Eadem S H, tertia pars ipsius S B: Igitur & H G, tertia pars erit lateris B C. Hac ratione ostendemus N Q, tertiam esse partem lateris A D. Cùm ergo latera B C, A D, sint æqualia, erunt & eorum tertiæ partes H G, N Q, æquales. Ac proinde cùm subtendantur æqualibus lateribus H N, G N; G Q, H Q; N G, Q G; N H, Q H; [a] Æquales erunt quatuor anguli, H N G, N G Q, G Q H, Q H N. Quocirca cùm ipsi sint quatuor rectis æquales, vt ostendimus ad propos. 32. lib. 1. recti erunt; ideoq; quadratum erit N Q. Eademq; ratione quadrata erunt reliqua quadrilatera: Ac propterea cubum constituent; qui ideò pyramidi dicetur inscriptus, licet impropriè, quòd quatuor eius anguli F, G, H, I, in centris quatuor basium pyramidis, quatuor verò reliqui N, O, P, Q, in bifariis sectionibus perpendicularium ex angulis pyramidis ad eius bases ductarum resideant, vt constat. [a 8. primi.]

ALITER. In data pyramide describatur Octaedrum, & in hoc Octaedro cubus; factumq; erit, quod iubetur. Quoniam enim octo anguli cubi statuuntur in centris octo basium Octaedri, quarum quatuor sunt in quatuor basibus pyramidis, vt constat ex propos. 2. huius lib. habentque eadem centra cum ipsis, vt mox ostendemus; fit, vt quatuor anguli cubi resideát in centris quatuor basium pyramidis, quemadmodum etiam in priori demonstratione dictum est. Rursus, quia reliquæ quatuor bases Octaedri parallelæ sunt basibus pyramidis, vt constat ex figura propos. 2. huius lib. ([b] cùm enim rectæ E G, E H, parallelę sint rectis B C, B D; [c] erunt quoq; triangula E G H, B C D, per illas rectas ducta, inter se parallela, & sic de cæteris.) fit, vt perpendiculares ab angulis pyramidis in bases oppositas demissæ, sint quoque ad illas quatuor reliquas bases Octaedri perpendiculares, ex scholio propos. 14. lib. 11. Quare cùm prædictæ bases abscindant ex pyramide pyramides similes toti, cadent illæ perpendiculares in centra dictarum basium, quemadmodum & in centra basium totius pyramidis cadunt. [d] Et quia dictæ quatuor bases Octaedri diuidunt illas perpendiculares proportionaliter cùm lateribus pyramidis, hoc est, bifariam; efficitur, vt reliqui quatuor anguli cubi statuantur in mediis punctis quatuor perpendicularium, veluti prior demonstratio docuit. Constat ergo cubum in pyramide esse descriptum, vt prius. In data itaque pyramide cubum descripsimus. Quod faciendum erat. [b 2. huius.] [c 15. vndec.] [d 17. vndec.]

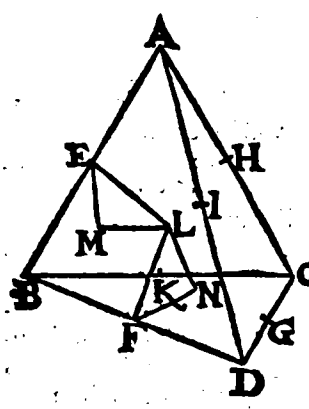
COROLLARIVM I.

CONSTAT ex his, idem esse centrum pyramidis, & cubi in ea descripti. Nam diametri cubi N F, O G, P H, Q I, cùm sint dimidiæ partes perpendicularium ex angulis pyramidis per eius centrum ad bases demissarum, per E, centrum pyramidis transeunt.

COROLLARIVM II.

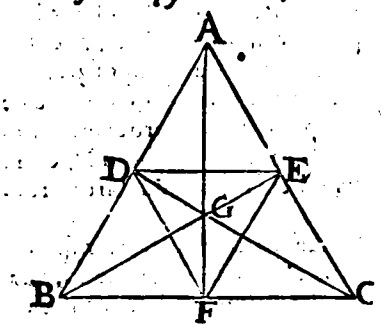
INFERTVR quoque, rectam, quæ coniungit bifarias sectiones oppositorum laterum pyramidis, transire per cẽtrum pyramidis, triplamq; esse lateris cubi in pyramide descripti. Cùm enim E R, ex E, centro cubi, in R, centrum basis G N H Q, ducta, dimidium sit lateris cubi, vt constat; Recta R S, dupla ipsius E R, æqualis erit lateri cubi. Cùm igitur R S, ostensa sit tertia pars ipsius S T; perspicuum est, rectam S T, coniungentem S, & T, bifarias sectiones laterum oppositorum pyramidis A D, B C, transire per centrũ pyramidis, triplamq; esse lateris cubi R S.

LEMMA.



IDEM autem esse centrum Pyramidis, & Octaedri in ea descripti, idemq; centrum basis pyramidis; & basis Octaedri in ea descripti, ita demonstrabimus. Sit primùm pyramis A B C D, cuius omnia sex latera bifariam secentur in E, F, G, H, I, K; & ex L, centro Pyramidis in bases A B D, B C D; perpendiculares demittantur L M, L N, quæ in centra circulorum dictas bases circumscribentium cadent, ex corollario lemmatis primi, propositionis decimæ, libri decimiquarti. Coniunctis autem rectis L E, E M, L F, F N; quoniam latera L M, M E, trianguli L M E, æqualia sunt lateribus L N, N F, trianguli L N F, (cùm enim circuli bases A B D, B C D, circumscribentes sint æquales, æqualiter distabunt ipsi a centro L, per lemma secundæ propositionis 10. lib. 14. Ac propterea eorum distantiæ L M, L N, æquales erunt. Sic quoque æquales erunt M E, N F, distantiæ rectarum æqualium A B, B D, a centris M, & N, circularum æqualium) angulosq; comprehendunt rectos, per defin. 3. lib. 11. [a] Æquales erunt rectæ L E, L F. Eademq; ratione hisce æquales erunt, & inter se rectæ L G, L H, L I, L K. Quare cùm anguli Octaedri in pyramide descripti constituantur in punctis E, F, G, H, I, K, vt ex 2. propos. huius lib. constat: Erit L, centrum [a 4. primi.]

Octaedri, cùm ab eo omnes lineæ cadentes in eius angulos sint æquales. Cùm igitur & L, centrum fuerit pyramidis; idem erit centrum pyramidis & Octaedri in ea descripti.



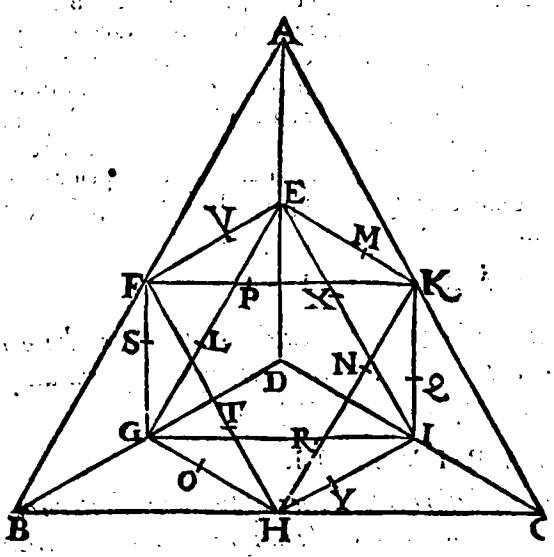
a 4. primi.

Sit deinde in basi pyramidis A B C, basis Octaedri D E F, quæ secabit illius latera bifariam, vt patet ex propos. 2. huius lib. sit autem G centrum trianguli A B C, à quo ad angulos vtriusque basis recta ducantur. Quia igitur latera A G, A D, lateribus B G, B F, æqualia sunt, angulosq; continent æquales, nimirum semisses angulorum æqualium trianguli æquilateri, a erunt & bases G D, G F, æquales: Eademq; ratione erit G E, vtrique G D, G F, æqualis. Igitur G, centrum est trianguli D E F. quod est propositum.

PROBL. 19. PROPOS. 19.

In data Pyramide Icosaedrum describere.

a 2. quinti decimi.



Datam Pyramidi A B C D, a inscribatur Octaedrum E F G H I K, cuius omnia duodecim latera secentur extrema ac media ratione, hac lege, vt bina sumantur ex singulis angulis sibi respondentia, hoc est, in angulos oppositos quadratorũ Octaedri cadentia, vt in propos. 16. huius lib. diximus, qualia sunt E G, E K; H K, H G; K F, K I; G I, G F; F H, F E; I E, I H, in punctis L, M, N, O, P, Q, R, S, T, V, X, Y. Nam si quodlibet horum punctorum cum quinq; proximis coniunxerimus lineis rectis, vt M, cum V, L, X, P, & Q, &c. descriptum erit Icosaedrum in dicto Octaedro, vt constat ex propos. 16. huius lib. habens omnes duodecim angulos in duodecim præfatis sectionibus duodecim laterum Octaedri. Cùm ergo hæc ipsa latera Octaedri in planis basium Pyramidis sint ducta; manifestum est, duodecim angulos Icosaedri in planis basium pyramidis constitui, ternos scilicet in singulis, quòd & terna latera Octaedri in singulis basibus pyramidis ducta sint. Nam in basi A B C, existũt latera F H, H K, K F; In A B D, latera E F, F G, G E; In B D C, latera G H, H I, I G; In A D C, denique latera I K, K E, E I. Quare dictum Icosaedrum in Pyramide descriptum erit, per defin. 3. lib. 11. cuius quidem quatuor bases M X Q, R O Y, L S V, N P T, in quatuor basibus Pyramidis existunt, vt constat. In data igitur Pyramide Icosaedrum descripsimus. Quod erat faciendum.

PROBL. 20. PROPOS. 20.

In data Pyramide Dodecaedrum describere.

b 19. quinti decimi. c 5. quinti decimi. d 8. quinti decimi. e 18. quinti decimi.

Pyramidi datæ b inscribatur Icosaedrum, c & in hoc Dodecaedrum habens viginti suos angulos in centris viginti basium Icosaedri; Factumque erit, quod iubetur. Cùm enim quatuor bases Icosaedri existant in quatuor basibus pyramidis, vt in præcedenti probl. diximus; consistent quatuor anguli Dodecaedri dicto Icosaedro inscripti in quatuor basibus pyramidis, nempe in earum centris. Sunt enim dictæ quatuor bases Icosaedri quatuor basibus Pyramidis concentricæ, vt constat ex 2. coroll. propos. 16. huius lib. Deinde, d quia cubus Dodecaedro inscriptus octo suos angulos in octo angulis Dodecaedri collocat: Item cubus pyramidi inscriptus, e quatuor angulos in centris basium pyramidis, de quibus iam dictum est, quatuor autem reliquos in bifariis sectionibus perpendicularium ex angulis pyramidis in bases semissarum constituit; collocabuntur quatuor anguli Dodecaedri, cum his quatuor angulis cubi conuenientes, in eisdem bifariis sectionibus perpendicularium dictarum: supersunt autem duodecim anguli Dodecaedri, quorum bini singulis lateribus Pyramidis supponentur; Atque adeo dictum Dodecaedrum descriptum esse dicetur in pyramide proposita, etiam si non proprie. Quam ob rem in data Pyramide Dodecaedrum descripsimus. Quod faciendum erat.

13.

PROBL. 21. PROPOS. 21.

In dato solido regulari sphæram describere.

Ex cen-

EX centro sphæræ datum solidum complectentis ad singulas bases perpendiculares demittantur, quæ ex coroll. lemmatis 1. propos. 10. lib. 14. cadent in centra circulorum bases circumscribentium, ideoque æquales erunt, quòd dicti circuli, æquales cùm sint, æqualiter à centro distent, ex lemmate 2. eiusdem propos. Quapropter sphæra, cuius semidiametri sunt præfatæ perpendiculares æquales, in solido descripta erit, cùm eius superficies conuexa singulas bases in earum centris contingat.

SCHOLIVM.

ITAQVE, cùm quodlibet quinque solidorum regularium in quatuor reliquis inscribatur, vt sint in vniuersum viginti inscriptiones; vnum duntaxat Dodecaedrum impropriè describitur in cubo, Octaedro, atque Pyramide, vt perspicuum est ex propos. 13. 17. & 20. huius lib. Similiter vnus tantummodo cubus non propriè in Pyramide describitur, vt ex propos. 18. huius lib. est manifestum. Nam, vt propriè solidum aliquod in solido dicatur describi, necesse est omnes angulos solidi inscripti constitui vel in angulis, vel in lateribus, vel denique in planis, siue basibus solidi, cui inscribitur, vt defin. 31. lib. 11. exposuimus: quæ quidem conditio Dodecaedro, si describatur in cubo, Octaedro, & Pyramide; nec non & cubo, si describatur in Pyramide, non conuenit.

CAETERVM inter omnia quinque solida regularia, vnum Octaedrum reliqua quatuor mutuo sui ambitus suscepit inscripta. [a] *In Octaedro enim describitur Icosaedrum constituens duodecim suos angulos in duodecim punctis, quibus duodecim latera Octaedri extrema ac media ratione secantur. Deinde* [b] *Icosaedro imponitur Dodecaedrum, quod eidem Octaedro inscriptum est, vt constat ex propos. 17. huius lib. Post hoc in Dodecaedro* [c] *describitur cubus, cuius octo anguli, cum octo angulis Dodecaedri conuenientes, cuiusque bases Octaedri possident; ac propterea & cubus ipse in Octaedro descriptus est.* [d] *Denique in cubo Pyramis includitur, qua ideò in Octaedro dicetur esse descripta, quòd eius anguli quatuor, cum quatuor angulis cubi conuenientes, in centris quatuor basium Octaedri resideant. Hoc autem priuilegium reliquis solidis regularibus denegari, perspicuum est ex dictis.*

a 16. quintidecimi.
b 5. quintidecimi.
c 8. quintidecimi.
d 1. quintidecimi.

NEQVE verò prætereundum est, Dodecaedrum, sibiq; inscriptum cubum, & huic cubo inscriptam pyramidem, eadem sphæra comprehendi. [e] *Cùm enim quatuor anguli pyramidis ex octo angulis cubi quatuor possideant,* [f] *conueniantq; omnes anguli cubi cum octo angulis Dodecaedri; liquidò constat, sphæram Dodecaedro circumscriptam complecti quoq; cubum atque Pyramidem, cùm sphæra illius superficies per horum solidorum angulos incedat.*

e 1. quintidecimi.
f 8. quintidecimi.

PARI ratione ex dictis manifestum est, Dodecaedrum, cubum, atque Pyramidem similiter inscribi Icosaedro, Octaedro, & Pyramidi. Illorum enim anguli in horum basium centris constituuntur, vt demonstratum est: In centris quidem basium Icosaedri, propos. 5 11. & 12. In centris verò basium Octaedri, propos. 12. 4. & 8. In centris denique basium pyramidis propos 20. & 18. huius lib.

VIGINTI porrò prioribus huius lib propositionibus omnes delineationes inscriptionésve quinque solidorum regularium, vnius in alio, quotquot excogitari possunt, absoluimus, cùm in quolibet reliqua quatuor designauerimus. In Pyramide enim Octaedrum, cubum, Icosaedrum, atque Dodecaedrum, propos. 2. 18. 19. 20. In Octaedro verò, Pyramidem, cubum, Icosaedrum, & Dodecaedrum, propos 6. 4. 16. 17. In cubo deinde Pyramidem, Octaedrum, Icosaedrum, ac Dodecaedrum, propos. 1. 3. 14 13. In Icosaedro autem, Pyramidem, Octaedrum, cubum, atque Dodecaedrum, propos. 12. 15. 11. 5. In Dodecaedro denique, Pyramidem, Octaedrum, cubum, & Icosaedrum, propos. 10. 9 8. 7. descripsimus. At verò posteriori vnica propositione, qua arte in quouis solido regulari sphæra depingatur, docuimus.

FINIS ELEMENTI QVINTIDECIMI.

ELEMENTVM SEXTVMDECIMVM:

Quo variæ solidorum regularium sibi mutuò inscriptorum, & laterum eorundem comparationes explicantur, à Francisco Flussate Candalla adiectum; & de quinque corporibus,

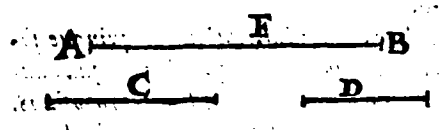
LIBER TERTIVS.

QVEMADMODVM libro 14. tradita sunt comparationes quam plurimarum figurarum regularium, & laterum earundem in eadem sphæra descriptarum, quarum quidem descriptionem libro 13. exposuit Euclides; ita etiam Franciscus Flussas Candalla hoc lib. 16. inter se comparat easdem figuras regulares sibi mutuò inscriptas, nec non & earundem latera, quam quidem inscriptionem precedenti lib. 15. tradidimus. Itaque cum connexionem habet hic liber 16. cum precedenti 15. quam quartusdecimus cum tertiodecimo habuit; vt imperfecta quodammodo videri possit tractatio hac quinque corporum regularium, si liber hic decimussextus non adiungatur.

THEOR. 1. PROPOS. 1.

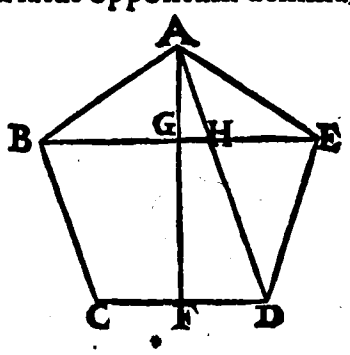
SI in Dodecaedro cubus describatur, & in hoc cubo aliud Dodecaedrum: erit proportio Dodecaedri exterioris ad Dodecaedrum interius proportionis, q̃ habet maius segmentũ ad minus rectę lineæ diuisæ extrema ac media ratione, triplicata.

LATVS cubi in Dodecaedro, cuius latus C, descripti sit A B, & latus Dodecaedri in cubo lateris A B, descripti sit D: diuidaturq; A B, latus cubi in E, extrema ac media ratione. Dico Dodecaedrum lateris C, ad Dodecaedrum lateris D, proportionem habere triplicatam proportionis, quã habet A E, maius segmentum ad E B, minus. Cùm enim, vt in scholio vltimæ propos. lib. 15. dotuimus, Dodecaedrum, cubusq; in illo descriptus, eadem comprehendantur sphęra; Diuiso autem latere cubi extrema ac media ratione, maius segmentum sit latus Dodecaedri in eadẽ sphæra cum cubo descripti, ex coroll. 2. propos. 17. lib. 13. erit A E, maius segmentum lateris cubi æquale lateri C, Dodecaedri in eadem sphæra, & circa cubum illum descripti. Rursus quia ex demonstratis in scholio propos. 13. lib. 15. si diuidatur latus cubi extrema ac media ratione, minus segmentum est latus Dodecaedri in cubo illo descripti; erit E B, minus segmẽtum lateris cubi æquale lateri D, Dodecaedri, quod in illo cubo describitur; Ac propterea erit vt C, latus Dodecaedri cubo circumscripti ad D, latus Dodecaedri eidem cubo inscripti, vt A E, maius segmẽtum ad E B, minus: Atqui Dodecaedrum lateris C, ad Dodecaedrum lateris D, proportionem habet triplicatam lateris C, ad latus D, ex coroll. propos. 17. lib. 12. Igitur idem Dodecaedrum lateris C, ad Dodecaedrum lateris D, proportionem quoque habet triplicatam maioris segmenti A E, ad minus segmentum E B. Quocirca si Dodecaedro cubus inscribatur, &c. Quod erat demonstrandum.



THEOR. 2. PROPOS. 2.

LINEA perpendicularis ex quouis angulo pentagoni æquilateri & æquianguli in latus oppositum demissa, secatur à recta illum angulum subtendente, extrema ac media ratione.



IN pentagono æquilatero, & æquiangulo A B C D E, ex angulo A, ad latus oppositum C D, perpendicularis demittatur A F. Dico A F, à recta B E, subtendente angulum A, secari in G, extrema ac media ratione. Ducta enim recta A D, quæ secet B E, in H; quoniam B E, recta lateri C D, ex scholio propos. 8. lib. 13. est parallela, [a] secabuntur rectæ A F, A D, proportionaliter: [b] Atqui A D, in H, secta est extrema ac media ratione, estq; maius segmentum D H. Igitur & A F, in G, similiter erit secta. Quocirca linea perpendicularis ex quouis angulo, &c. Quod erat demonstrandum.

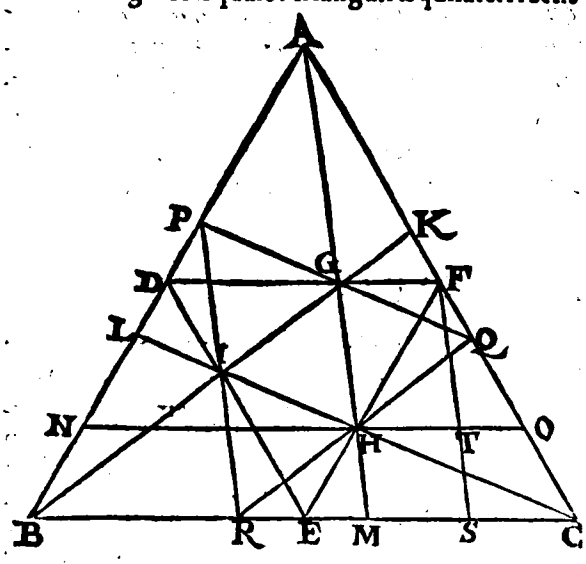
[a] 2. sexti.
[b] 18. tertiædecimi.

THEOR.

THEOR. 3. PROPOS. 3.

Si ab angulis trianguli Pyramidis ducantur rectæ oppoſita latera ſecantes extrema ac media ratione, ita vt prope quemuis angulum ſit maius ſegmentũ vnius lateris, & minus alterius: Hæ ſectionibus ſuis in medio producent baſin Icoſaedri in dicta Pyramide deſcripti, inſcriptam quidem alij triangulo æquilatero, cuius anguli latera trianguli Pyramidis ſecant extrema ac media ratione, & latera ipſa bifariam ſecantur ab angulis baſis Icoſaedri.

TRIANGVLVM Pyramidis ſit A B C, cuius latera ſecẽtur bifariam in D, E, F, iunctis rectis D E, E F, F D, quibus rurſum ſectis extrema ac media ratione in G, H, I, iungantur rectæ G H, H I, I G, conſtituentes G H I, triangulum Icoſaedri in dicta Pyramide deſcripti, vt conſtat ex propoſ. 19. lib. 15. Secentur deinde latera trianguli A B C, extrema ac media ratione in K, L, M, iunctis rectis B K, C L, A M. Dico has rectas ſuis ſectionibus producere triangulum Icoſaedri G H I, hoc eſt, rectam B K, tranſire per puncta G, I; & rectam C L, per puncta H, I; & rectã A M, per puncta G, H. Ducta enim per H, recta N O, ipſi B C, parallela; erit triangulum F H O, triangulo F E C, ſimile, ex coroll. propoſ. 4. lib. 6. ideoq; & æquilaterum, cùm & F E C, æquilaterum ſit, quippe quod ſimile ſit triangulo A B C, per idem coroll. Quare H O, recta æqualis eſt rectæ F H, maiori ſegmento rectæ F E, ſeu D F, ipſi æqualis: (Eſt enim & D E F, triangulum æquilaterum, cùm eius latera ſubtendant angulos æquales trianguli æquilateri rectis æqualibus, dimidiis ſcilicet æqualium laterũ eiuſdem trianguli comprehenſos; [a] ideoq; æqualia ſint.) [b] Eſt autẽ & N H, æqualis toti D F, in parallelogrammo D H, [c] propterea quòd F H, D F, parallelæ ſunt rectis A B, B C, ſeu N O. Igitur recta N O, compoſita ex N H, tota, & H O, maiori ſegmento, [d] ſecta erit in H, extrema ac media ratione; Ac proinde, cùm tres parallelæ B C, N O, D F, ſimiliter ſint ſectæ in M, H, G, nimirum extrema ac media ratione; Recta autem A M, ex iis, quæ demonſtrauimus ad propoſ. 4. lib. 6. ſecet eaſdem ſimiliter; liquidò conſtat, ipſam A M, tranſire per puncta G, H. Haud ſecus oſtendemus B K, per puncta G, I, & C L, per puncta H, I, tranſire, ſi per G, & I, rectæ ducantur parallelæ lateribus A C, A B; Atque idcirco rectæ B K, C L, A M, ſuis ſectionibus producent triangulum Icoſaedri G H I.

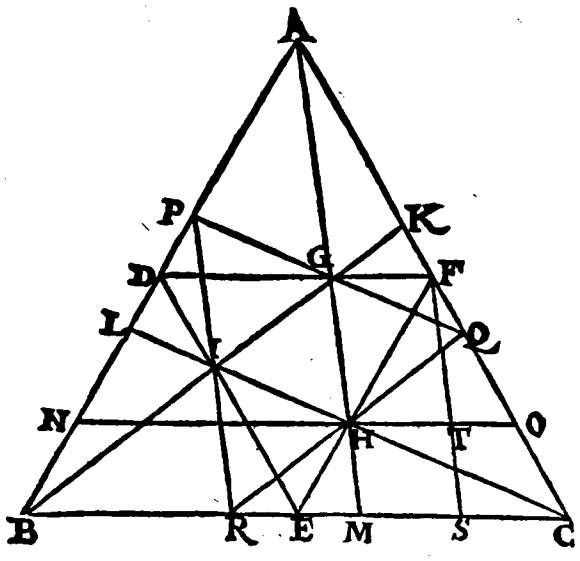


[a] 4 primi.
[b] 34 primi.
[c] 2. ſexti.
[d] 5. tertij decimi.

AGATVR iam per G, recta P Q, rectæ C L, parallela. Quoniam igitur A F, æqualis eſt rectæ D F, ſeu rectæ F E, cuius maius ſegmentum fuit F H, hoc eſt, F O, illi æqualis; Erit quoq; F O, maius ſegmentum rectæ A F; [e] ac proinde tota A O, ſecta in F, extrema ac media ratione; [f] Eſt autem vt A F, ad F O, ita A G, ad G H, ob triangulum A H O; & vt A G, ad G H, ita A Q, ad Q C, & A P, ad P L, ob triangula A H C, A H L. Igitur & rectæ A H, A C, A L, ſecantur in G, Q, P, extrema ac media ratione, ſuntq́ue maiora ſegmenta A G, A Q, A P. Rectæ ergo A Q, A L, ſegmenta maiora rectarum æqualium A C, A B, æquales erunt. Quia verò eſt [g] vt A Q, maius ſegmentum, ad Q C, minus, ita A L, tota ad A P, maius ſegmentum; Et eſt A Q, recta rectæ A L, æqualis: Erit & Q C, recta æqualis rectæ A P. Quare & recta A P, minus ſegmentum erit lateris A B, maiusq́ue reliqua B P; ac propterea recta P Q, ſecabit latera B A, A C, extrema ac media ratione. Eadem ratione recta P R, quæ per I, ducitur, parallela rectæ A M, ſecabit latera C B, B A, extrema ac media ratione, ideoq́ue in punctum P, cadet. Non aliter recta R Q, per H, ducta parallela rectæ B K, latera A C, C B, ſecabit extrema ac media ratione, atque adeò in puncta R, Q, cadet. Quoniam verò ſingula latera trianguli P Q R, cùm ſubtendant angulos æquales trianguli æquilateri æqualibus lineis comprehenſos, nimirum maiore & minore ſegmento ſingulos, [h] æqualia inter ſe ſunt; erit triangulum P Q R, ex ipſis compoſitum, æquilaterum, cuius quidem latera bifariam ſecantur ab angulis trianguli Icoſaedri G H I: (Cùm enim in triangulo A C L, recta P Q, parallela ſit lateri C L; ſecabuntur P Q, L C, in eaſdem rationes, ex iis, quæ ad propoſ. 4. lib. 6. demonſtrauimus: Diuiditur autem C L, bifariam in H, ob triangulum A C L, in quo F H, parallela eſt lateri A L, [i] ſecans proportionaliter latera C A, C L. Igitur & P Q, bifariam ſecatur in G. Eademq́ue eſt ratio de reliquis Q R, R P.) Aç propterea triangulum Icoſaedri G H I, inſcriptum eſt triangulo æquilatero P Q R, cuius anguli diuidunt latera baſis pyramidis extrema ac media ratione, & latera ipſa bifariam ſecantur in G, H, I, ab angulis baſis Icoſaedri G H I. Quapropter, ſi ab angulis trianguli Pyramidis, &c. Quod oſtendendum erat.

[e] 5. tertij decimi.
[f] 2. ſexti.
[g] 2. quarti decimi.
[h] 4 primi.
[i] 2. ſexti.

COROLLARIVM.

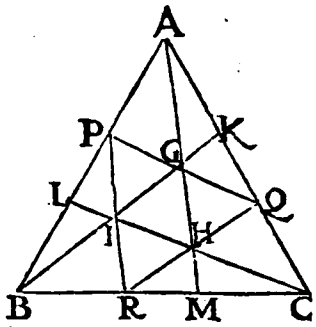


Ex his facilè colligi poteſt, latus Icoſaedri Octaedro inſcripti, maius eſſe ſegmentum rectæ diuiſæ extrema ac media ratione, quæ ab vno angulo baſis Octaedri ducta ſecat latus oppoſitum extrema quoque ac media ratione. Cùm enim, vt conſtat ex propoſ. 16. lib. 15. G H I, triangulum ſit Icoſaedri in Octaedro, cuius baſis D E F, deſcripti; ducatur ex angulo F, trianguli F E C, quod triangulo D E F, eſt æquale, recta F S, parallela rectæ A M, ſecans M C, H O, in S, & T. [a] *Cùm igitur M C, bifariam ſecetur in S, ob triangulum A M C;* [b] *ſitq; M S; ipſi G F, æqualis, ob parallelogrammũ G S; Erit & S C, æqualis eidem G F, minori ſegmento rectæ D F; Ac propterea cùm totæ D F, E C, æquales ſint; erit quoque reliqua E S, reliquæ D G, maiori ſegmento æqualis: Idcoq; E C, in S, ſecta erit extrema ac media ratione. Deinde* [c] *quia F E, F S, ſimiliter ſecantur; ſecatur autem F E, extrema ac media ratione; ſecabitur & F S, in T, extrema ac media ratione, maiuſq; ſegmentum erit F T, recta* [d] *æqualis exiſtens lateri Icoſaedri G H, ob parallelogrammum G T. Igitur F T, latus Icoſaedri Octaedro inſcripti, maius eſt ſegmentum rectæ F S, quæ diuidit E C, latus Octaedri extrema ac media ratione, ex angulo F, demiſſa. Quod eſt propoſitum.*

a 2. ſexti.
b 34. primi
c 2. ſexti.
d 34. primi

THEOR. 4. PROPOS. 4.

MINVS ſegmentum lateris Pyramidis extrema ac media ratione ſecti, duplum eſt potentia lateris Icoſaedri in ea Pyramide deſcripti.



BASIS Pyramidis ſit A B C, cuius latera extrema ac media ratione ſecentur in K, L, M, & ductis rectis B K, C L, A M, producentibus G H I, baſim Icoſaedri in illa pyramide deſcripti, inſcriptã triangulo æquilatero P Q R, cuius anguli latera trianguli A B C, ſecent extrema ac media ratione in P, Q, R, & ipſa latera P Q, Q R, R P, bifariam diuidantur in G, H, I, vt in propoſ. præcedenti demonſtratum eſt. Dico A P, minus ſegmentum lateris Pyramidis duplum eſſe potentia lateris Icoſaedri H I. Cùm enim P Q, dupla ſit potentia minoris ſegmenti A P, ex coroll. 1 propoſ. 16. lib. 15. quadrupla verò potentia rectæ H I, ex ſcholio propoſ. 4. lib. 2. quòd P Q, recta dupla ſit rectæ P G, hoc eſt, ſibi æqualis H I, ob parallelogrammum P H; Erit P Q, potentia 4. & A P, 2. & H I, 1. Quamobrem A P, dupla erit potentia rectæ H I. Minus ergo ſegmentum lateris, &c. Quod erat demonſtrandum.

COROLLARIVM.

SEQVITVR ex his, latus Icoſaedri in Pyramide deſcripti, eſſe Apotomen. [e] *Cùm enim diameter ſphæræ potentia ſeſquialtera ſit lateris Pyramidis; ſi diameter ponatur Rationalis, erit & latus Pyramidis Rationale,* [f] *cùm diametro potentia ſit commenſurabile.* [g] *Quare minus ſegmentum lateris Pyramidis extrema ac media ratione ſecti Apotome erit; Atque adeò* [h] *cùm minori ſegmento lateris Pyramidis latus Icoſaedri potentia ſit commenſurabile; (oſtendimus enim minus ſegmentum potentia eſſe duplum lateris Icoſaedri.) Erit & latus Icoſaedri, ex ſcholio propoſ. 104. lib. 10. Apotome.*

e 13. tertiidecimi.
f 6. decimi
g 6. tertiidecimi.
h 6. decimi

THEOR. 5. PROPOS. 5.

LATVS cubi potentia dimidium eſt lateris Pyramidis in eo deſcriptæ: Latus verò Pyramidis duplum eſt longitudine lateris Octaedri ſibi inſcripti: latus denique cubi duplum eſt potentia lateris ſibi inſcripti Octaedri.

CVM

CVM enim latus Pyramidis in cubo descriptæ diameter sit basis cubi, vt constat ex propos. 1. lib. 15. Sit autem quadratum huius diametri duplum basis cubi, hoc est, quadrati lateris cubi, ex scholio propos. 47. lib. 1. Manifestum est, latus cubi dimidium esse potentia lateris Pyramidis in cubo illo descriptæ.

RVRSVS, quia rectæ coniungentes bifarias sectiones laterum Pyramidis constituunt Octaedrum in Pyramide descriptum, vt liquet ex propos. 2. lib. 15. Est autem latus trianguli æquilateri duplum rectæ coniungentis bifarias eius sectiones, cùm ea recta æqualis sit dimidio lateris trianguli, vt constat ex coroll. propos. 4. lib. 6. [a] Nam cùm sit parallela tertio lateri, auferet triangulũ æquilaterũ, &c. Perspicuũ est latus pyramidis duplũ esse longitudine lateris Octaedri sibi inscripti. *a 2. sexti.*

DENIQVE [b] quia diameter sphæræ, seu Octaedri potentia est dupla lateris Octaedri; Est autem latus cubi æquale diametro Octaedri sibi inscripti, cùm diameter Octaedri coniungat centra basium cubi oppositarum, vt in coroll. propos. 3. lib. 15. diximus: patet, latus cubi potentia esse duplum lateris Octaedri in eo descripti. Quocirca latus cubi potentia dimidium est lateris Pyramidis, &c. Quod erat ostendendum. *b 14. tertij decimi.*

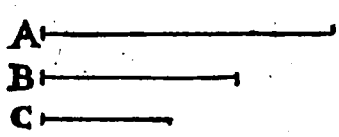
THEOR. 6. PROPOS. 6.

LATVS Dodecaedri maius segmentum est rectæ, quæ potentia est dimidia lateris Pyramidis sibi inscriptæ.

CVM enim Pyramis inscripta cubo, descripta sit quoque in Dodecaedro, cui ille cubus inscribitur, vt docuimus propos. 10. lib. 15. Sit autem latus Dodecaedri maius segmentum, ex coroll. 1. propos. 17. lib. 13. lateris cubi, qui in eo describitur; [c] existat denique latus cubi dimidium potentia lateris Pyramidis sibi inscriptæ: Apertè colligitur, latus Dodecaedri maius esse segmentum rectæ, quæ potentia dimidia est lateris Pyramidis sibi inscriptæ. Quod erat demonstrandum. *c 5. sexti decimi.*

THEOR. 7. PROPOS. 7.

SI in cubo describatur & Icosaedrum, & Dodecaedrum: Latus Icosaedri medium proportionale erit inter latus cubi, & Dodecaedri.



SIT latus cubi A, & latus Icosaedri in eo descripti B, latus denique Dodecaedri in eodem cubo descripti C. Dico B, latus Icosaedri medio loco esse proportionale inter A, latus cubi, & C, latus Dodecaedri. Cùm enim, ex iis, quę in scholio propos. 14. lib. 15. demonstrata sunt, B, latus Icosaedri maius segmentum sit lateris cubi A; & C, latus Dodecaedri, per ea, quæ in scholio propos. 13. eiusdem lib. ostendimus, minus segmentum sit eiusdem lateris cubi: Planum fit, ita esse A, totam ad B, maius segmentum, vt B, maius segmentum ad C, minus. Si in cubo itaque describatur & Icosaedrum, &c. Quod ostendendum erat.

THEOR. 8. PROPOS. 8.

LATVS Pyramidis potentia Octodecuplum est lateris cubi in ea descripti.

CVM enim, per ea, quæ propos. 18. lib. 15. sunt demõstrata, latus Pyramidis longitudine triplum sit diametri basis cubi in ea descripti, (ostensum enim est ibi, G H, diametrum basis cubi inscripti, tertiam esse partem lateris Pyramidis B C.) [d] Et quadrata proportionem habeant laterum duplicatam: Erit quadratum lateris Pyramidis noncuplum quadrati diametri basis cubi in ea descripti, cùm noncupla proportio sit triplæ duplicata, vt in his numeris 1. 3. 9. apparet. Quare, cùm quadratum diametri basis cubi duplum sit ipsius basis cubi, ex scholio propos. 47. lib. 1. fit, vt si ponatur basis cubi, hoc est, quadratum lateris cubi 1. quadratum eiusdem basis diametri sit 2. & quadratum lateris pyramidis 18. Quamobrem latus Pyramidis potentia octodecuplum est lateris cubi in ea descripti. Quod erat ostendendum. *d 20. sexti.*

THEOR. 9. PROPOS. 9.

LATVS Pyramidis potentia octodecuplum est rectæ extrema ac media ratione sectæ, cuius maius segmentum latus est Dodecaedri in pyramide descripti.

CVM enim cubus in Dodecaedro descriptus, inscriptus quoque sit Pyramidi, cui illud Dodecaedrum inscribitur, vt docuimus in scholio propos. vlt. lib. 15. [e] Erit latus Pyramidis potentia octodecuplum lateris cubi sibi, & Dodecaedro inscripti: Huius autem lateris cubi extrema ac media ratione secti maius segmentum est, ex coroll. 1. propos. 17. lib. 13. latus Dodecaedri in pyramide descripti, in quo nimirum cubus est descriptus. Igitur latus Pyramidis potentia octodecuplum est rectæ extrema ac media ratione sectæ, cuius maius segmentum latus est Dodecaedri in Pyramide descripti. Quod demonstrandum erat. *e 8. sexti decimi.*

THEOR. 10. PROPOS. 10.

SI in Octaedro Icoſaedrum deſcribatur: Erit latus Icoſaedri potentia duplum minoris ſegmenti lateris Octaedri extrema ac media ratione diuiſi.

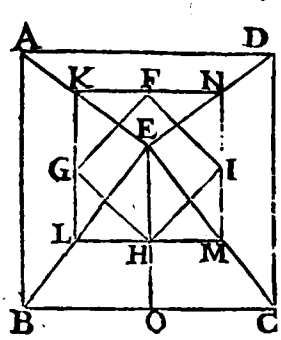
VT enim conſtat ex propoſ.16.lib.14.recta coniungens duas ſectiones duorum laterum Octaedri rectum angulum continentium prope minora ſegmenta, (qualis fuit ibi recta G I, ſubtendens angulum rectum G A I, minoribus ſegmentis A G, A I, comprehẽſum;) latus eſt Icoſaedri in Octaedro deſcripti. Quare, [a] cùm hoc ipſum latus Icoſaedri poſsit duo illa minora ſegmenta æqualia; duplum poterit vnius minoris ſegmenti. Si in Octaedro ergo Icoſaedrum deſcribatur, &c. Quod erat demonſtrandum.

a 47. primi.

THEOR. 11. PROPOS. 11.

LATVS Octaedri potentia quadruplum ſeſquialterum eſt lateris cubi in ipſo deſcripti.

SIT vna ſex pyramidum Octaedri A B C D E, cuius baſis quadratum A B C D, triangula verò ad E, verticem, A B E, E B C, C E D, D E A, ſintq; horum triangulorum centra F, G, H, I, per quæ rectæ ducantur K L, L M, M N, N K, rectis A B, B C, C D, D A, parallelæ. Quod ſi coniungantur rectæ F G, G H, H I, I F; erit F G H I, quadratum cubi in Octaedro deſcripti, vt demonſtrauimus propoſ. 4. lib. 15. Quoniam autem ducta recta E H O, ſeſquialtera eſt rectæ E H, per coroll. propoſ.18.lib. 14. qualium partium 3. ponetur E O, talium 2. erit E H: [b] Atqui vt E O, ad E H, ita eſt E B, ad E L. Igitur qualium partium 3. continet E B, talium 2. erit E L, ſeu L M, ſibi æqualis; Ac propterea quadratum lateris Octaedri E B, partium erit 9. & quadratum rectæ L M, nimirum K L M N, partium 4. ideoq; & quadratũ lateris cubi G H, videlicet F G H I, talium partium 2. cùm quadratum L N, duplum ſit quadrati G I, ſibi inſcripti, per ea, quæ in ſcholio propoſ. 47. lib. 1. demonſtrauimus. Eſt enim L N, quadratum ex diametro quadrati G I, deſcriptum; [c] cùm G I, diameter (ſi ducatur) æqualis ſit lateri L M. Quapropter latus Octaedri E B, potentia quadruplum ſeſquialterum eſt lateris cubi G H, cùm eorum quadrata proportionem habeant, quam 9. 2. Latus igitur Octaedri potentia quadruplum ſeſquialterum eſt lateris cubi in eo deſcripti. Quod erat demonſtrandum.



b 2. ſexti.

c 33. primi.

COROLLARIVM

QVIA verò latus cubi extrema ac media ratione diuiſum, efficit maius ſegmentum latus Dodecaedri, cui inſcribitur, per coroll.2.propoſ.13.lib.15. Inſcribunturq; Dodecaedrum, & cubus ſibi inſcriptus, eidem Octaedro, vt docuimus in ſcholio propoſ. vltima, lib.15. Perſpicuum fit, Octaedri latus eſſe potentia quadruplum ſeſquialterum eius rectæ extrema ac media ratione diuiſæ, cuius maius ſegmentum latus eſt Dodecaedri Octaedro inſcripti. Eſt enim eiuſmodi recta latus cubi eidem Octaedro inſcripti, cuius quadruplum ſeſquialterum potentia eſſe oſtendimus latus Octaedri.

THEOR. 12. PROPOS. 12.

LATVS Icoſaedri maius ſegmentum eſt eius rectæ extrema ac media ratione ſectæ, quæ potentia dupla eſt lateris Octaedri in Icoſaedro deſcripti.

QVONIAM Icoſaedri in cubo deſcripti ſex latera oppoſita in ſex baſibus cubi collocata ſunt, quorum bifarias ſectiones cõiungunt tres rectæ lateri cubi æquales, vt conſtat ex propoſ.14.lib.15. eiusq; ſcholio. Et in bifariis ſectionibus dictorum ſex laterum Icoſaedri reſident ſex anguli Octaedri in Icoſaedro deſcripti, ex propoſ.15. eiuſdem lib.15. Fit diametrum Octaedri in dicto Icoſaedro deſcripti æqualem eſſe lateri cubi, in quo Icoſaedrum deſcribitur. Quare cùm, per ea, quæ ad propoſ.14. lib.15. oſtendimus, latus Icoſaedri ſit maius ſegmentum lateris cubi prædicti extrema ac media ratione diuiſi; Erit quoque idem latus Icoſaedri maius ſegmentum diametri Octaedri in illo Icoſaedro deſcripti. [d] Atqui diameter ſphæræ, ſeu Octaedri dupla eſt potentia lateris Octaedri. Igitur latus Icoſaedri maius ſegmentum eſt eius rectæ extrema ac media ratione ſectæ, quæ potentia dupla eſt lateris Octaedri in Icoſaedro deſcripti. Quod oſtendendum erat.

d 14. vndecimi.

THEOR. 13. PROPOS. 13.

LATVS cubi ad latus Dodecaedri in ipſo deſcripti proportionem habet duplicatam eius, quam habet maius ſegmentum ad minus rectæ lineæ diuiſæ extrema

ma ac media ratione. Latus verò Dodecaedri ad latus cubi in ipso descripti proportionem habet, quam minus segmentum ad maius eiusdem rectæ lineæ.

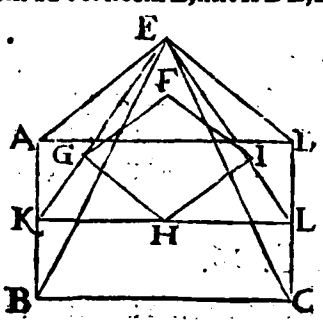
OSTENSVM est in scholio propos. 13. lib. 15. minus segmentum lateris cubi extrema ac media ratione secti, esse latus Dodecaedri in cubo illo descripti. Cùm ergo tota linea extrema ac media ratione diuisa ad minus segmentum proportionem habeat duplicatam proportionis totius lineæ ad maius segmentum, vel maioris segmenti ad minus, (quòd tota linea, maius segmentum, atque minus, sint tres rectæ continuè proportionales:) liquidò constat, proportionem lateris cubi ad latus Dodecaedri in ipso descripti esse quoq; proportionis maioris segmenti ad minus duplicatã.

PRAETEREA, cùm constet ex coroll. 1. propos. 17. lib. 13. maius segmentum lateris cubi extrema ac media ratione diuisi latus esse Dodecaedri, cui cubus inscribitur; manifestum est esse vt latus Dodecaedri, hoc est, maius segmentum, ad latus cubi in ipso descripti, hoc est, ad totam lineam extrema ac media ratione sectam, ita minus segmentum ad maius. Cùm enim sit, vt tota linea ad maius segmentum, ita maius segmentum ad minus; Erit quoque conuertendo, vt maius segmentum ad totam lineam, ita segmentum minus ad maius. Latus ergo cubi ad latus Dodecaedri, &c. Quod erat demonstrandum.

THEOR. 14. PROPOS. 14.

LATVS Octaedri sesquialterum est lateris sibi inscriptæ Pyramidis.

SIT vna sex pyramidum Octaedri A B C D E, cuius basis quadratum A B C D, triangula autem ad verticem E, sint A B E, E B C, C E D, D E A, sintq; horum triangulorum centra F, G, H, I, quæ rectis iungantur F G, G H, H I, I F, quadratum cubi in Octaedro descripti constituentibus, vt docuimus in propos. 4. lib. 15. Quoniam verò Pyramis in cubo descripta, describitur quoque in Octaedro, cui cubus imponitur, vt in scholio propos. vltimę lib. 15. exposuimus; Estque latus pyramidis in cubo descriptæ diameter basis cubi, vt constat ex propos. 1. lib. 15. Erit ducta diameter G I, latus Pyramidis in Octaedro dicto descriptæ. Dico igitur latus Octaedri B C, sesquialterum esse lateris Pyramidis G I. Ductis enim rectis E G K, E I L, diuidentur latera A B, C D, bifariam in K, L, ex scholio propos. 12. lib. 13. ipsæque E K, E L, sesquialteræ erunt rectarum E G, E I, per coroll. propos. 18. lib. 14. [a] Ac propterea G I, parallela erit rectæ K L, auferens, per corollarium propositionis quartæ, libri sexti, triãgulum E G I, simile triangulo E K L. Quare erit, vt E K, ad K L, ita E G, ad G I; & permutando, vt E K, ad E G, ita K L, ad G I; ideoque cùm E K, sesquialtera sit ipsius E G, erit & K L, sesquialtera ipsius G I. [b] Cùm ergo B C, æqualis sit ipsi K L, quòd & B K, C L, æquales sint, & parallelæ; Erit B C, latus Octaedri sesquialterum lateris Pyramidis G I, sibi inscriptæ. Quod erat demonstrandum.

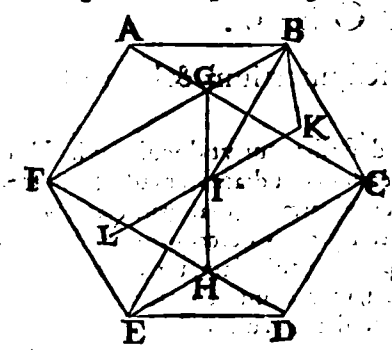


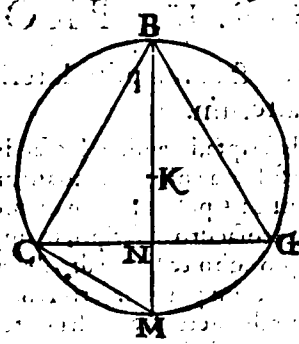
[a] 2. sexti.

[b] 33. primi.

THEOR. 15. PROPOS. 15.

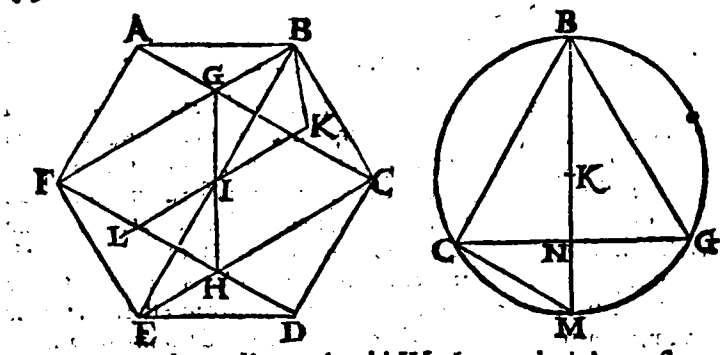
SI ex quadrato diametri Icosaedri auferatur triplum quadrati lateris cubi in eo descripti; relinquitur quadratum sesquitertium quadrati lateris Icosaedri.





SIT Icosaedrum A B C D E F G H, cuius diameter B E, & centrum I; triangula verò opposita parallela, per corollarium quartum, propositionis decimæ quartæ, lib. 13. B C G, E F G, quorum centra K, L. Ducatur ex centro I, ad planum B C G, perpendicularis I K, cadens, ex corollario lemmatis 2. propos. 10. lib. 14. in centrum K. Producta igitur K I, perpendicularis quoque erit ad planum E F H, parallelum plano B C G, per scholium propos. 14. lib. 11. cadetque idcirco in centrum L, per coroll. præfati lemmatis. Quamob rem, cùm cubus in Icosaedro descriptus statuat suos angulos in centris basium Icosaedri, vt constat ex propos. 11. lib. 15. atque adeò angulos oppositos in centris basium oppositarum; Erit K L, diameter cubi in Icosaedro descripti, transiens per I, centrum Icosaedri. Cùm ergo eadem ratione reliquæ diametri cubi per idem centrum I, transeant, erit I, quoq; centrum cubi inscripti, ideoq; I K, I L, semidiametri æquales: Coniuncta autem K B, semidiametro circuli trianguli B C G, circumscribentis, erit angulus B K I, rectus, ex defin. 3. lib. 11. [c] Ac proinde quadratum rectæ B I, æquale quadratis rectarum

[c] 47 primi.



BK, KI. Igitur & quadratum diametri BE, quadruplum existens quadrati semidiametri BI, vt in scholio propos. 4. lib. 2. ostendimus, æquale erit quadratis duarum rectarum, nempe diametri circuli triágulum BCG, circumscribẽtis, & KL. Sunt enim & hæc quadrata, per idem scholium, quadrupla quadratorum ex semidiametris BK, KI, descriptorum. Ablato ergo quadrato diametri cubi KL, (ª quod triplum est quadrati lateris cubi.) ex quadrato diametri Icosaedri BE, remanet quadratum diametri circuli triangulum BCG, circumscribentis. Hoc igitur dico sesquitertium esse quadrati lateris Icosaedri BC. Describatur enim ex centro K, circa triangulum æquilaterum BCG, circulus, extensaq; BK, vsque ad M, quæ secet CG in N, ducatur quoque recta CM. Quoniam igitur BN, per centrum K, ducta, perpendicularis est ad CG, per ea, quæ ostendimus in schol. propos. 12. lib. 13. ᵇ erit recta BC, potentia sesquitertia rectæ BN: Vt autem BC, ad BN, ita est BM, ad BC, quòd BC, sit media proportionalis inter BM, & BN, ex coroll. propos. 8. lib. 6. ᶜ cùm angulus BCM, rectus sit in semicirculo existens. Recta igitur BM, potentia quoq; sesquitertia est rectæ BC; Ac propterea quadratum diametri BM, sesquitertium est quadrati lateris BC. Quapropter si ex quadrato diametri Icosaedri, &c. Quod erat demonstrandum.

ª 15. tertij decimi.

ᵇ 12. quartidecimi.

ᶜ 31. tertij.

COROLLARIVM.

HINC fit, diametrum Icosaedri binas rectas posse, diametrum scilicet cubi in ipso descripti, & diametrum circuli triangulum Icosaedri ambientis. Ostensum siquidem est, quadratum diametri Icosaedri BE, æquale esse quadratis diametri cubi KL, & diametri circuli triangulum BCG, circumscribentis.

THEOR. 16. PROPOS. 16.

LATVS Dodecaedri minus segmentum est rectæ lineæ extrema ac media ratione diuisæ, quæ duplum potest lateris Octaedri in eo descripti.

QVONIAM diameter Octaedri in Dodecaedro descripti ª duplum potens lateris Octaedri, coniungit bifarias sectiones laterum oppositorum Dodecaedri, vt manifestum est ex propos. 9. lib. 15. Est autem rectæ dictas sectiones coniungentis diuisæ extrema ac media ratione minus segmẽtum latus Dodecaedri, ex coroll. 4. propos. 17. lib. 13. Liquet, latus Dodecaedri minus segmentum esse eius rectæ extrema ac media ratione diuisæ, quæ duplum potest lateris Octaedri in eo descripti, cùm huiusmodi recta coniungat bifarias sectiones laterum Dodecaedri oppositorum, cuius quidem minus segmentum est latus Dodecaedri, ex prædicto coroll. Itaque latus Dodecaedri minus segmentum est rectæ lineæ extrema ac media ratione, &c. Quod erat demonstrandum.

ª 14. tertij decimi.

THEOR. 17. PROPOS. 17.

DIAMETER Icosaedri potest & sui ipsius lateris sesquitertium, & lateris Pyramidis in eo descriptæ sesquialterum.

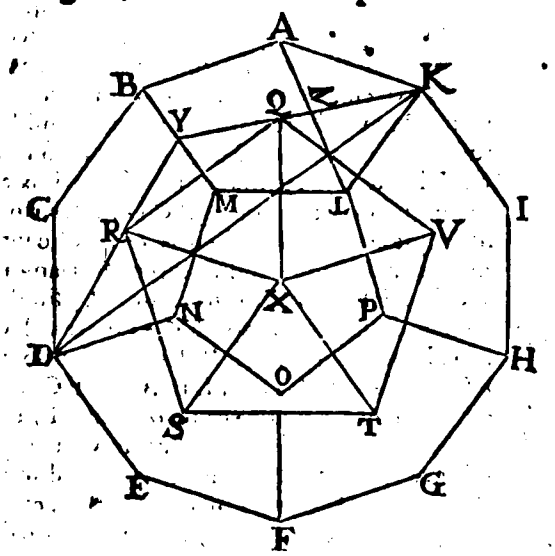
CVM cubus & Pyramis in eo descripta, in eodem Icosaedro describantur, vt docuimus in schosio propos. vltimæ lib. 15. eademq; sphæra comprehendantur; eadem erit diameter cubi, & diameter sphæræ pyramidem circumdantis: ª potest autem diameter sphæræ sesquialterum lateris Pyramidis. Igitur & diameter cubi in Icosaedro descripti, in quo & Pyramis describitur, sesquialterum poterit lateris pyramidis in ipso cubo, & Icosaedro descriptæ; Atqui diameter circuli basim Icosaedri circumscribentis sesquitertium potest lateris Icosaedri, vt in demonstratione propos. 15. huius libri demonstrauimus. Igitur diameter Icosaedri potens & diametrum cubi in ipso descripti, & diametrum circuli basin Icosaedri circumdantis, ex coroll. propos. 15. huius libri, potest & suiipsius lateris sesquitertium, nimirum diametrum circuli circa basim Icosaedri descripti, & lateris Pyramidis in eo descriptæ sesquialterum, nempe diametrum cubi. Quod erat demonstrandũ.

ª 13. tertij decimi.

THEOR. 18. PROPOS. 18.

LATVS Dodecaedri ad sibi inscripti Icosaedri latus se habet, vt minus segmentum lineæ perpendicularis ab vno angulo pentagoni ad latus oppositum ductæ, atque

atque extrema ac media ratione diuisæ, ad partem eiusdem lineæ inter centrum pentagoni, & latus eiusdem positæ.

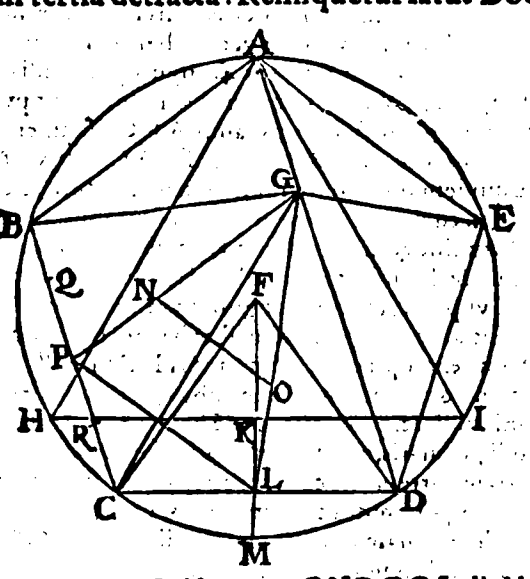


Sit dimidium Dodecaedrum contẽtum sex pentagonis ABMLK, LKIHP, PHGFO, OFEDN, NDCBM, LMNOP, quorum centra Q, R, S, T, V, X, (quælibet videlicet duo proxima) iungãtur rectis QR, RS, ST, TV, VQ, QX, RX, SX, TX, VX. Constituta sunt igitur quinque triangula Icosaedri in Dodecaedro descripti, componentia angulum solidum X, in centro pentagoni LMNOP, vt ostensum est in demonstratione propos. 7. lib. 15. A duobus angulis pentagonorum D, K, in communem basim BM, p centra R, Q, rectæ demittantur DY, KY, quæ quoniam bifariam, & ad rectos angulos secant latus BM, per coroll. 2. propos. 10. libri 13. conuenient in puncto Y. Quòd si subtendatur recta AL, angulo K; secabitur [a] perpendicularis KY, in Z, extrema ac media ratione. Dico ita esse latus Dodecaedri LM, ad latus Icosaedri sibi inscripti QR, vt KZ, minus segmẽtum perpendicularis KY, ad rectam QY, inter centrũ Q, & latus BM, interceptam. Subtensa enim recta DK, quæ, p demonstrata in scholio propos. 13. lib. 15. latus est cubi, in quo Dodecaedrum propositũ describitur; erit LM, latus Dodecaedri, minus segmentum ipsius DK, si extrema ac media ratione secetur, ex eodem scholio propos. 13. lib. 15. Quoniam verò latera YD, YK, trianguli YDK, proportionaliter secantur in R, & Q; (sunt enim RD, QK, semidiametri circulorũ æqualium æquales; necnon & YR, YQ, distantiæ nimirum rectæ BM, à centris R, & Q, eorundem circulorum æqualium.) [b] parallela erit QR, ipsi DK; Ideoq; triangulum YRQ, triangulo YDK, simile, p coroll. propos. 4. lib. 6. [c] Quam ob rem erit, vt DK, ad KY, ita QR, ad QY. [d] Vt autẽ DK, tota ad totã KY, ita est LM, minus segmentum ad minus KZ. Vt igitur LM, ad KZ, ita erit QR, ad QY; Et permutando, vt LM, latus Dodecaedri ad QR, latus Icosaedri sibi inscripti, ita KZ, minus segmentũ perpendicularis KY, ad QY, inter centrum Q, & latus BM, interpositam. Latus ergo Dodecaedri ad sibi inscripti Icosaedri latus, &c. Quod erat demonstrandum.

[a] 12. sexti. Elementorum.
[b] 2. sexti.
[c] 4. sexti.
[d] 2. quartidecimi.

THEOR. 19. PROPOS. 19.

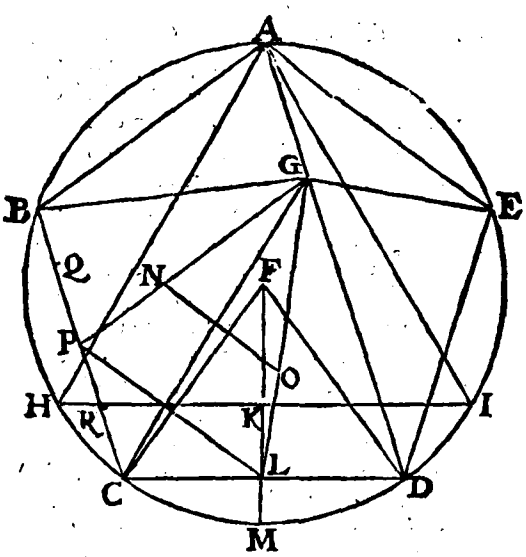
Si dimidium lateris Icosaedri extrema ac media ratione sectũm fuerit, minusq; eius segmentum à toto latere Icosaedri sublatum; à reliqua quoque recta pars rursum tertia detracta: Relinquetur latus Dodecaedri in Icosaedro descripti.



Circa pentagonum ABCDE, ex quinque lateribus Icosaedri compositum, circulus describatur, cuius centrũ F, & super quinque latera pentagoni quinque triangula æquilatera exstentur, constituẽtia angulum solidum Icosaedri G, ex iis, quę in propos. 16. lib. 13. sunt demonstrata. In dicto deinde circulo triangulum æquilaterum inscribatur AHI. Quoniam igitur arcus ABC, AED, æquales sunt, cùm quilibet duas quintas partes totius circumferentiæ contineat, necnon & duo arcus ABH, AEI, cũ sint tertiæ partes eiusdẽ circumferentiæ; erunt reliqui arcus HC, ID, æquales; propterea q; rectæ HI, CD, parallelæ, p scholium propos. 27. lib. 3. Ad quas ex centro F, perpendicularis deducatur FKL, [e] secans rectas HI, CD, bifariam in K, & L; coniunganturq; rectæ FC, FD, Suscipiantur insuper triangulorum æquilaterorum GBC, GCD, centra N, & O, per quæ rectæ ducantur GNP, GOL, diuidentes, per scholium propositionis 12. libri 13. latera opposita BC, CD, bifariam, & ad angulos rectos. Itaque recta GO, in punctum L, in quo diuisa est CD, bifariam, cadet. Iungantur autem centra N, O, recta NO, quæ, vt constat ex demonstratis in propositione 5. lib. 15. latus erit Dodecaedri in Icosaedro descripti. Denique BP, dimidium lateris Icosaedri secetur in Q, extrema ac media ratione; & ablato minori segmento BQ,

[e] 3. tertij.

ex toto latere BC, reliquæ CQ, tertia pars detrahatur CR. *Dico* reliquam QR æqualem esse lateri Dodecaedri NO. Cùm enim FL, perpendicularis à latere trianguli æquilateri HI, secetur in K, extrema ac media ratione; (quòd FL, hac ratione secta faciat maius segmentum æquale perpendiculari FK, per coroll. propos. 2. libri 14.) sit autem maiori segmento FK, æqualis recta KM, per coroll. propos. 12. lib. 13. Erit ex iis, quę demonstrauimus ad propos. 5. lib. 13. maius segmentum KM, sectum quoque in L, à minori segmento KL, extrema ac media ratione; Ac proinde recta FM, excedit rectam FL, minore dimidiæ sui ipsius segmento LM. Quoniam verò iuncta PL, est latus pentagoni æquilateri, & æquianguli in pentagono ABCDE, descripti, idemque centrum F, habentis, ex scholio vltimo, lib. 4. ideoque similis illis erunt triangula FCD, FPL, (si recta duceretur FP.) similia, per scholium propos. 20. lib. 6. [a] Quare vt FC, ad CD, ita erit FL, ad LP; & permutando, vt FC, ad FL, ita CD, ad LP: Atqui FC, hoc est, sibi æqualis FM, excedit rectam FL, minore segmento dimidij ipsius FM, nempe minore segmento rectæ KM, vt ostendimus. Recta igitur CD, vel sibi æqualis BC, excedet quoque rectam LP, minore segmento dimidij ipsius BC, nimirum minore segmento rectæ BP, quod fuit BQ; ideoque reliqua CQ, rectæ PL, æqualis erit. Rursus, quia GP, GL, proportionaliter secantur in centris N, O; (quòd GN, GO, duplæ sint ipsarum NP, OL, per corollarium propos. 18. lib. 14.)



[a] 4. sexti.

[b] parallelæ erunt PL, NO; ac proinde triangulum GNO, triangulo GPL, simile, ex corollario propos. 4. libri 6. [c] Igitur erit, vt GP, ad PL, ita GN, ad NO; & permutando, vt GP, ad GN, ita PL, ad NO: Est autem GP, ipsius GN, sesquialtera, per corollarium propos. 18. lib. 14. Quare & PL, hoc est, sibi æqualis CQ, sesquialtera erit ipsius NO: Ac proinde, cùm CQ, sesquialtera quoque sit rectæ QR; (Nam qualium partium 3. est CQ, talium 1. est CR; per constructionem; Ac propterea earundem 2. QR.) æqualis erit QR, ipsi NO, lateri Dodecaedri in Icosaedro descripti. Si dimidium itaque lateris Icosaedri extrema ac media ratione sectum fuerit, &c. Quod erat demonstrandum.

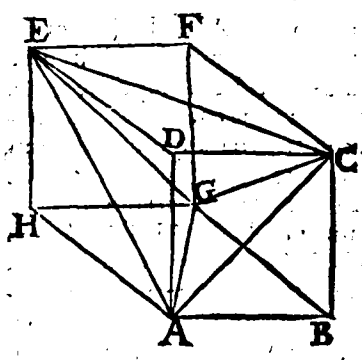
[b] 2. sexti.

[c] 4. sexti.

THEOR. 20. PROPOS. 20.

CVBVS sibi inscriptæ pyramidis triplus est.

IN cubo AF, descripta sit pyramis ACEG. *Dico* cubum pyramidis triplum esse. Cùm enim inscriptam pyramidem æquilateram circumstēt 4. pyramides, fundatæ super 4. bases ipsius, vertices verò habentes reliquos 4. angulos cubi, in quibus non residēt 4. anguli pyramidis æquilaterę inscriptæ: (Nam super basin ACE, fundatur pyramis ACED; super basin AEG, pyramis AEGH, super basin CEG, pyramis CEGF; & super basin ACG, pyramis ACGB: quæ quidem quatuor pyramides æquales sunt, ex 10. definitione libri 11. cùm contineantur planis similibus æqualibusque & multitudine & magnitudine. Quælibet enim constat tribus æqualibus & similibus triangulis, dimidiis scilicet quadratorum cubi, vt patet; & vno triangulo pyramidis æquilaterę inscriptæ.) Sit autem cubus cuiuslibet harum pyramidum sextuplus; (Nam, exempli causa, pyramis ABCG, basim habens ABC, dimidium basis cubi BD, altitudinem verò eandem, quam cubus, rectam videlicet BG, tertia pars est, per corollarium 1. propositionis 7. lib. 12. prismatis eandē basin, & altitudinem habentis. [d] Cùm igitur cubus duplus sit eiusmodi prismatis, quòd & basis cubi dupla sit basis prismatis; manifestum est pyramidem ABCG, sextam partem esse cubi; propterea que cubum pyramidis illius esse sextuplum.) Efficitur, quatuor illas pyramides circumstantes, quatuor esse sextas partes, id est, duas tertias partes cubi: Ac proinde reliquam pyramidem æquilateram ACEG, cubo inscriptam eiusdem cubi tertiam esse partem. Cubus igitur sibi inscriptæ pyramidis triplus est. Quod erat demonstrandum.



[d] 32. vndec.

ALITER. Cùm cubus, & in eo descripta pyramis eadem sphæra comprehendantur, vt docuimus in scholio propositionis vltimæ, lib. 15. [e] Cubus verò triplus sit pyramidis in eadem sphæra descriptæ, vt demonstratum est, perspicuè colligitur, cubum triplum esse sibi inscriptę pyramidis: quandoquidem hæc in eadem sphæra, in qua cubus, continetur.

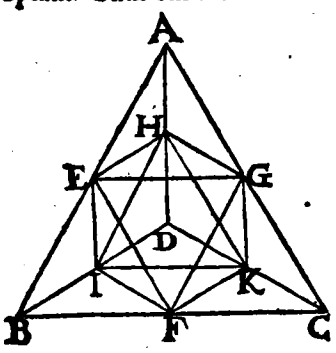
[e] 32. quartidecimi.

THEOR.

THEOR. 21. PROPOS. 21.

PYRAMIS ſibi inſcripti Octaedri dupla eſt.

IN pyramide ABCD, deſcriptum ſit octaedrum EIKGHF. Dico pyramidem octaedri eſſe duplam. Cùm enim octaedrum circumſtent quatuor pyramides pyramidi ABCD, ſimiles, vt



prop.3. lib.12. demonſtratum eſt, fundatæ ſuper quatuor baſes octaedri EGH, EFI, EGK, HIK; quales ſunt pyramides EGHA, EFIB, FGKC, HIKD: (quæ quidem æquales inter ſe ſunt, ex defin.10. lib.11. cùm contineantur triangulis ſimilibus, æqualibuſque numero & magnitudine, quippe quæ ſimilia ſint baſibus pyramidis æquilaterę ABCD, per coroll. propoſ.4. lib.6. lateraque habeant æqualia, nempe dimidia laterum æqualium eiuſdem pyramidis ABCD, ex conſtructione propoſ.2. lib.15.) [a] Habeant autem pyramides ſimiles proportionem homologorum laterum triplicatam; Erit pyramis ABCD, octupla cuiuslibet illarum quatuor pyramidum octaedro circumpoſitarum, (cùm octupla proportio, ſit proportionis duplæ, qualem habent latera pyramidis ABCD, ad latera dictarum quatuor pyramidum, triplicata, vt in his numeris 1.2.4.8. perſpicuè apparet.) hoc eſt, quælibet illarum quatuor pyramidum pars erit octaua pyramidis ABCD; Atque idcirco omnes quatuor dictæ pyramides quatuor partes octauas, id eſt, dimidium pyramidis ABCD, conficient. Quare & reliquum octaedrum EIKGHF, reliqua erit dimidiata pars eiuſdem pyramidis ABCD. Pyramis igitur ſibi inſcripti octaedri dupla eſt. Quod erat demonſtrandum.

[a] 8. duodec.

THEOR. 22. PROPOS. 22.

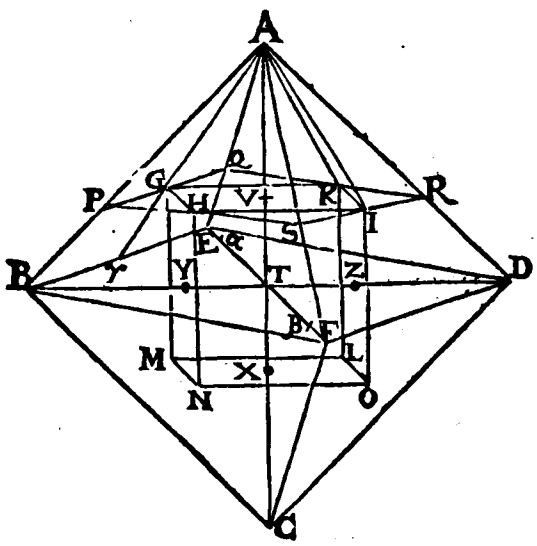
CVBVS ſibi inſcripti Octaedri ſextuplus eſt.

QVONIAM ſi pyramis in cubo deſcribatur, & in pyramide octaedrum; octaedrum in cubo quoque inſcriptum eſt, vt conſtat ex ſecunda demonſtratione propoſ.3. lib.15. [b] Eſt autem cubus pyramidis in eo deſcriptæ triplus, [c] & pyramis octaedri ſibi inſcripti dupla; Fit, vt qualium partium 6. ponatur cubus, taliũ 2. ſit pyramis, & earundem 1. contineat octaedrum; atq; adeò cubus octaedri ſit ſextuplus. Quare cubus ſibi inſcripti octaedri ſextuplus eſt. Quod erat demõſtrandũ.

[b] 20. ſtatim. decimi. [c] 21. ſexti. decimi.

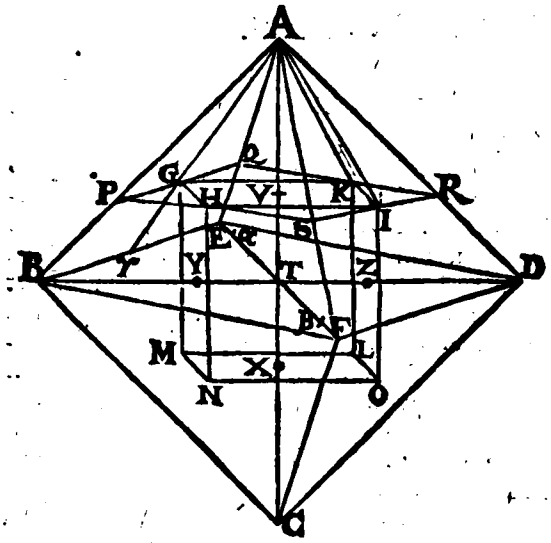
THEOR. 23. PROPOS. 23.

OCTAEDRVM ſibi inſcripti cubi quadruplum ſeſquialterum eſt.



IN octaedro ABCDEF, cubus deſcriptus ſit GHIKLMNO, angulos ſuos ſtatuens in centris baſium octaedri. Dico octaedrum cubi eſſe quadruplum ſeſquialterum. Aſſumpta enim pyramide octaedri BEDFA, ducantur per G, K, I, H, cętra quatuor baſiũ octaedri, rectæ PQ, QR, RS, SP, lateribus BE, ED, DF, FB, parallelæ, quadratũ conſtituętes PQRS, vt in propoſ.4. lib.15. eſt demõſtratum; [d] quod quidem parallelum erit quadrato BEDF. Ducatur quoq; octaedri diameter AC, perpendicularis exiſtens ad quadratum BEDF, in centro T, per ea, quæ oſtendimus in coroll. 1. propoſ.14. lib.13. Ac proinde perpendicularis ad baſes cubi GI, MO, in punctis V, X, per ſcholium propoſ.14. lib.11. Eſt autem V, centrum quadrati PQRS: ([e] cùm enim plana BEDF, PQRS, parallela ſecent rectas æquales AB, AE, AD, AF, proportionaliter; erunt & AP, AQ, AR, AS, æquales. Intelligantur ductæ rectæ VP, VQ, VR, VS. [f] Quoniam igitur æqualia quadrata rectarum æqualium AP, AQ, æqualia ſunt quadratis rectarum AV, VP; AV, VQ, quòd anguli AVP, AVQ, recti ſint, per defin.3. lib.11. dempto communi quadrato rectæ AV; æqualia erunt reliqua quadrata rectarum VP, VQ, propterea & rectæ ipſæ VP, VQ, æquales. Non aliter oſtendemus & hiſce, & inter ſe æquales eſſe rectas VR, VS. Quare V, centrum eſt quadrati PQRS.) Igitur & centrum erit quadrati GHIK, in illo deſcripti, per ſcholium vltimum lib. 4. Secantur enim latera PQ, QR, RS, SP, bifariam in G, K, I, H, vt conſtat ex demonſtratis in propoſ. 4. lib. 15. Eodem argumento concludemus X, centrum eſſe baſis LMNO; Nec non & alias diametros ductas BD, EF, per Y, Z, α, β, centra reliquarum baſium tranſire. Ducta

[d] 15. vndec. [e] 17. vndec. [f] 47. primi.



a 17. vndec.

iam recta A γ, per G, centrum trianguli æquilateri A B E; erit A G, dupla ipsius G γ, per coroll. propos. 18. lib. 14. [a] Cùm ergo plana P R, B D, parallela secent rectas A γ, A T, proportionaliter; dupla quoque erit A V, ipsius V T. Eodem modo dupla probabitur C X, ipsius X T; Ac proinde cùm æquales A T, C T, similiter secentur in V, & X; æquales erunt A V, C X: nec non V T, X T. Recta igitur V X, coniungens cẽtra basium cubi oppositarum, bifariam secatur in T. Quare cùm ad eundem modum Y Z, α β, bifariam secentur in T, erit T, centrum cubi; cùm, per coroll. 1. propos. 15. lib. 13. rectæ centra basium cubi oppositarum connectentes se se bifariã secent in centro. Iam verò, quoniam V X, ipsius V T, dupla est; dupla autẽ fuit & A V, eiusdem V T; æqualis erit A V, ipsi V X, nempe altitudini cubi. Quare pyramis G H I K A, ductis rectis A I, A K, A H, tertia pars est cubi, seu prismatis G O, per coroll. 1. prop. 7. lib. 12. cùm vtriusq; eadem sit basis G I, & altitudines æquales A V, V X: [b] Est autem pyramis P Q R S A, pyramidis G H I K A, dupla, quòd & basis P Q R S, dupla sit basis G H I K, illi inscriptæ. Igitur pyramis P Q R S A, duas tertias partes cubi G O, continet. Quia verò pyramides B E D F A, P Q R S A, similes existentes, per defin. 9. lib. 11. (cùm triangula huius similia sint, ex coroll. propos. 4. lib. 6. triangulis illius.) [c] proportionem habent laterum homologorum triplicatam; Est autem latus A B, lateris A P, sesquialterum, quòd & recta A γ, [d] proportionaliter secta ipsi A B, sesquialtera sit ipsius A G; Erit pyramis B E D F A, ad pyramidem P Q R S A, vt 27. ad 8. hæc enim proportio triplicata est proportionis sesquialteræ 3. ad 2. vt in his numeris 8. 12. 18. 27. constat; Ac proinde totum octaedrum A B C D E F, duplum existens pyramidis B E D F A, proportionem habebit ad eandem pyramidem P Q R S A, quam 54. ad 8. At qualium partium 8. ponitur pyramis P Q R S A, talium 12. esse cubum G O, iam demonstratum est. (Nam numerus 8. duas tertias continet numeri 12.) Igitur octaedrum A B C D E F, ad cubum G O, proportionem habet, quam 54. ad 12. hoc est, in minimis numeris, per 35. propos. lib. 7. repertis, quam 9. ad 2. quæ quidem proportio quadrupla sesquialtera est. Octaedrum itaque sibi inscripti cubi quadruplum sesquialterum est. Quod erat ostendendum.

b 6. duodec.

c 8. duodec.

d 2. sexti.

COROLLARIVM I.

IDEM ergo centrum est octaedri, atque cubi sibi inscripti. ostendimus enim T, vtriusque esse centrum.

COROLLARIVM II.

PERSPICVE etiam hinc inferemus, Octaedrum ad sibi inscriptum cubum eandem habere proportionem, quam eorum laterum quadrata habent. [a] *Nam quadrata ipsorum laterum proportionem habent quadruplam sesquialteram, qualem videlicet demonstrauimus habere octaedrum ad sibi inscriptum cubum.*

a 11. sexti-dec.

THEOR. 24. PROPOS. 24.

OCTAEDRVM sibi inscriptæ Pyramidis tredecuplum sesquialterum est.

QVONIAM, vt ostendimus ad finem lib. 15. cubus, sibique inscripta pyramis in eodem octaedro describuntur; [a] Est autem octaedrum cubi in eo descripti quadruplum sesquialterum; & cubus sibi, ac proinde octaedro, inscriptæ pyramidis [b] triplus: qualium partium 2. ponetur pyramis, talium 6. erit cubus, & earundem 27. octaedrum. Habent enim 27. ad 6. proportionem quadruplam sesquialteram, & 6. ad 2. triplam. Igitur octaedrum ad sibi inscriptam pyramidem proportionem habet, quam 27. ad 2. hoc est, tredecuplam sesquialteram. Ac propterea octaedrum sibi inscriptæ pyramidis, &c. Quod erãt ostendendum.

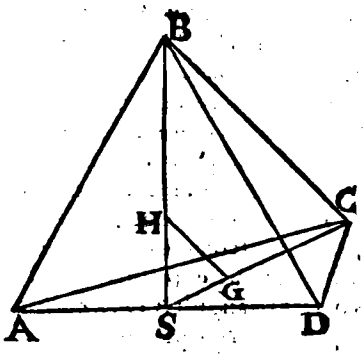
a 23. sexti-dec.

b 20. sexti-dec.

THEOR. 25. PROPOS. 25.

PYRAMIS sibi inscripti cubi noncupla est.

IN pyramide A B D C, cubus intelligatur descriptus. Dico pyramidem cubi esse noncuplam. Assumantur enim G H, centra duarum basium A C D, A B D, commune latus A D, habentium, per quæ ex angulis C, B, ad latus commune oppositum A D, rectæ ducantur C G S, B H S, diuidentes latus A D, bifariam, & ad angulos rectos, per scholium propos. 12. lib. 13. ac propterea conuenientes in medio puncto S. Connexa verò recta G H; cùm B H, C G, duplæ sint rectarum H S, G S, ex



GS, ex coroll. propoſ. 18. lib. 14. ac proinde proportionaliter ſecentur B S, C S, [a] parallelæ erunt B C, H G, & per coroll. propoſ. 4. lib. 6. triangulum H G S, triangulo B C S, ſimile. [b] Erit ergo vt B C, ad C S, ita H G, ad G S; & permutando, vt B C, ad H G, ita C S, ad G S: [c] Eſt autem C S, ipſius G S, tripla. Igitur & B C, tripla erit ipſius H G. Quoniam autem latus pyramidis deſcriptæ in cubo diameter eſt baſis cubi, vt in propoſ. 1. lib. 15. demonſtratum eſt; Recta verò connectens duo centra baſium pyramidis commune latus habentium diameter eſt baſis cubi in pyramide deſcripti, vt perſpicuum eſt ex demonſtratis in propoſ. 18. lib. 15. (Ibi enim recta G H, iungens centra G, H, baſium A C D, A B D, commune latus A D, habentium, diameter fuit baſis G N H Q, cubi deſcripti in pyramide.) Erit latus pyramidis B C, diameter baſis cubi pyramidem A B D C, circumſcribentis; G H, verò diameter baſis cubi in eadem pyramide deſcripti. Cùm ergo eandem habeant proportionem diametri quadratorum, quam latera; (Eſt enim vt diameter vnius quadrati ad ſuum latus, ita diameter alterius quadrati ad ſuum latus, quòd proportio vtraque ſit potentia dupla: Permutando ergo, vt diameter ad diametrum, ita latus ad latus.) habeat autem B C, diameter baſis cubi circumſcripti ad G H, diametrum baſis cubi inſcripti proportionem triplam, vt oſtendimus; habebit quoque latus cubi circumſcripti ad latus cubi inſcripti proportionem triplam. At verò cubi, cùm ſint parallelepipeda ſimilia, [d] proportionem habent laterum homologorum triplicatam. Cubus igitur circumſcriptus ad cubum inſcriptum pyramidi A B D C, proportionem habet, quam 27. ad 1. Hæc enim proportio triplicata eſt triplæ proportionis, vt hîc 1. 3. 9. 27. videre licet. Quam ob rem, [e] cùm cubus ad pyramidem inſcriptam proportionem habeat quam 27. ad 9. videlicet triplam; Habebit pyramis A B D C, ad cubum ſibi inſcriptum proportionem, quam 9. ad 4. nimirum noncuplam; Atque adeò pyramis ſibi inſcripti cubi noncupla eſt. Quod erat demonſtrandum.

[a] 2. ſexti.
[b] 4. ſexti.
[c] 18. quarti decimi.
[d] 33. vndec.
[e] 20. ſexti decimi.

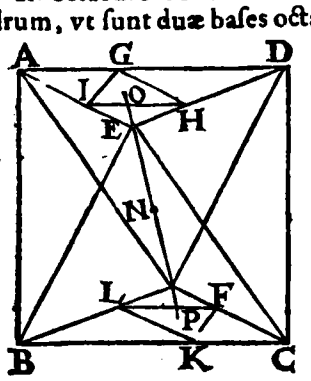
COROLLARIVM.

IGITVR cubus ad cubum deſcriptum in pyramide, quæ in priori cubo deſcribitur, proportionem habet, quam 27. ad 1. Hoc enim demonſtratum eſt ex propoſ. 33. lib. 11. in demõſtratione huius propoſitionis.

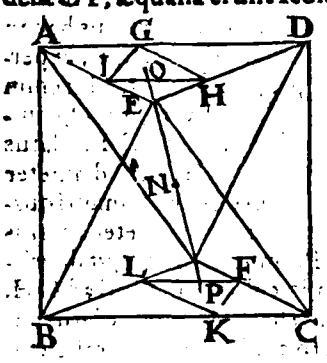
THEOR. 26. PROPOS. 26.

OCTAEDRVM ad ſibi inſcriptum Icoſaedrum proportionem habet, quam duæ baſes Octaedri ad quinque baſes Icoſaedri.

IN octaedro A B C D E F, concipiatur deſcriptum Icoſaedrum. Dico octaedrum eſſe ad Icoſaedrum, vt ſunt duæ baſes octaedri ad quinque baſes Icoſaedri. Cùm enim, vt ex demonſtratis in propoſ. 16. lib. 15. liquet, octo baſes Icoſaedri in octo baſibus octaedri reponãtur; ſint duæ baſes Icoſaedri G H I, K L M, in duabus baſibus oppoſitis octaedri A D E, B C F; atque ex N, centro octaedri, nec non & Icoſaedri (idẽ enim vtriuſq; eſt centrũ, per coroll. 3. propoſ. 16. lib. 15.) ad baſim A D E, perpendicularis ducatur N O, cadens in centrum O, trianguli A D E, ſeu circuli ipſum ambientis, ex coroll. lemm. 1. prop. 10. lib. 14. quod quidem O, centrum quoque eſt trianguli G H I, per coroll. 2. propoſ. 16. lib. 15. Cùm ergo plana oppoſita A D E, B C F, parallela ſint, ex corollario 4. propoſitionis 14. lib. 11. Recta O N, producta, perpendicularis quoque erit, per ſcholium propoſitionis 14. lib. 11. ad planum B C F, in eiuſque propterea centrum P, commune etiam triangulo K L M, cadet. Quare O P, recta, altitudo eſt & octaedri & Icoſaedri ſibi inſcripti. Quia verò octaedrum in octo pyramides, ductis rectis ex centro N, ad omnes angulos octaedri, æquales diuiditur, quarum altitudo eſt N O, dimidium altitudinis octaedri; Similiterque Icoſaedrum in 20. pyramides æquales eiuſdem altitudinis N O: Eſt autem priſma triplum pyramidis eandem cum ipſo & baſim, & altitudinem habentis, per coroll. 1. propoſ. 7. lib. 12. Erit priſma, cuius baſis A D E, & altitudo O N, æquale tribus pyramidibus octaedri: At verò priſma, cuius eadem baſis A D E, altitudo autem O P, dupla altitudinis O N, duplum eſt priſmatis, cuius baſis eadem A D E, altitudo verò O N, per ea, quæ in ſcholio propoſ. 14. lib. 12. oſtendimus. Priſma igitur, cuius baſis A D E, & altitudo O P, æquale eſt ſex pyramidibus octaedri; Ac proinde reliquis duabus octaedri pyramidibus, quæ tertiam partem illarum ſex conſtituunt, æqualis erit tertia pars priſmatis ſuper baſim A D E, & ſub altitudine O P, conſtituti priſma videlicet, cuius baſis tertia pars eſt trianguli A D E, altitudo verò eadem O P. Hoc enim priſma tertia pars eſt priſmatis ſuper baſem A D E, & ſub altitudine O P; cùm, per ea, quæ docuimus ad prop. 7. lib. 12. priſmata eiuſdem altitudinis inter ſe ſint, vt baſes. Quare duo priſmata, quorum vnius baſis A D E, & altitudo O P, alterius autem baſis tertia pars baſis A D E, & altitudo eadem O P, æqualia ſunt octaedro A B C D E F. Non ſecus demonſtra-



bimus prisma, cuius basis G H I, altitudo verò O P, æquale esse sex pyramidibus Icosaedri: propterea; triplum huius prismatis, nempe prisma, cuius basis tripla sit basis G H I, altitudo autem eadem O P, æquales esse 18. pyramidibus Icosaedri. Reliquis igitur duabus Icosaedri pyramidibus; quæ tertiam partem sex pyramidum eiusdem Icosaedri constituunt, æqualis erit tertia pars prismatis super basem G H I, & sub altitudine O P, cõstituti; prisma scilicet, cuius basis tertia pars est trianguli G H I, altitudo verò eadem O P; Atque idcirco duo prismata, quorum vnius basis tripla sit trianguli G H I, altitudo autẽ O P, alterius verò basis tertia pars basis G H I, & altitudo eadem O P, æqualia erunt Icosaedro in dicto Octaedro descripto. Iam verò cùm duo illa prismata,



Octaedro æqualia, ad duo hæc prismata, Icosaedro æqualia sint, per ea, quæ ostendimus ad propos. 7. lib. 12. vt bases prismatum Octaedro æqualium, quatuor tertias partes trianguli A D E, continentes, (cùm vnius basis sit A D E, nempe tres tertiæ partes ipsius A D E, complectens, alterius verò basis tertia pars ipsius A D E.) ad bases prismatum Icosaedro æqualium, decem tertias partes trianguli G H I, comprehendentes; (cùm vnius basis tripla sit trianguli G H I; nimirum nouem tertias partes ipsius G H I, continens, alterius verò basis tertia pars ipsius G H I.) Sint autem, vt quatuor tertiæ partes trianguli A D E, ad decem partes tertias trianguli G H I; ita duæ tertiæ partes ipsius A D E, nempe dimidiũ quatuor tertiarum, ad quinque tertias partes ipsius G H I, hoc est, ad

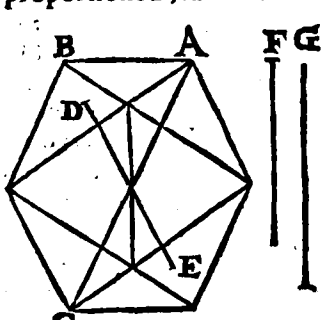
a 15. quinti.

dimidium decem tertiarum: Et vt duæ tertiæ partes ipsius A D E, ad quinque tertias partes ipsius G H I, ita quoq; sint per ea, quæ demonstrauimus in scholio propos. 22. lib. 5. sex tertiæ partes ipsius A D E, (hoc est, duæ bases octaedri triplum duarum tertiarum vnius basis constituentes, cùm sex tertias contineant.) ad quindecim tertias partes ipsius G H I; (id est, ad quinque bases Icosaedri, triplum quinque tertiarum vnius basis complectentes, cùm quindecim tertias complectantur.) Erunt quoque duo illa prismata, octaedro æqualia, hoc est, ipsummet octaedrum, ad duo hæc prismata Icosaedro æqualia, nempe ad ipsummet Icosaedrum, vt duæ bases octaedri ad quinque bases Icosaedri. Quocirca octaedrum ad sibi inscriptum Icosaedrum, proportionem habet, quam duæ bases octaedri ad quinque bases Icosaedri. Quod erat demonstrandum.

THEOR. 27. PROPOS. 27.

ICOSAEDRVM ad sibi inscriptum Dodecaedrum proportionem habet compositam ex proportione lateris Icosaedri ad latus cubi in eadem cum Icosaedro sphæra descripti, & ex proportione triplicata eius, quam habet diameter Icosaedri ad rectam centra basium Icosaedri oppositarum coniungentem.

EXHIBEATVR Icosaedrum A B C, in quo recta D E, coniungat centra basium oppositarum, diameter autem eius sit A C; & F, sit latus Icosaedri, & G, latus cubi in eadem sphæra cum Icosaedro descripti. Dico proportionem Icosaedri A B C, ad sibi inscriptum Dodecaedrum componi ex proportione F, lateris Icosaedri ad G, latus cubi, & ex proportione triplicata diametri A C, ad



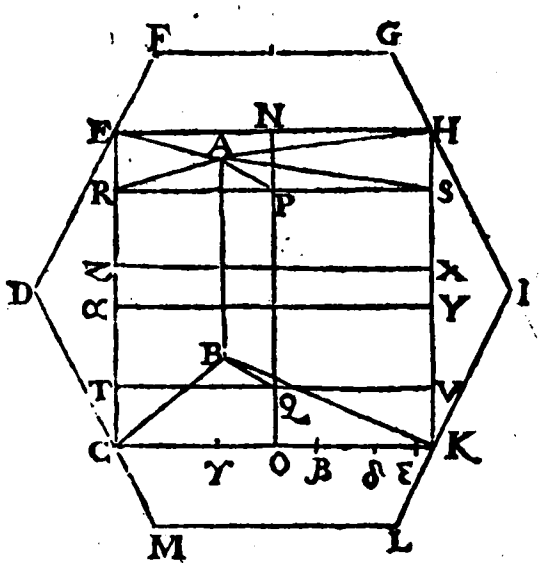
rectam D E. Cùm enim, ex demonstratis propos. 5. lib. 15. Dodecaedrum in Icosaedro descriptum statuat angulos suos in centris basium Icosaedri, atque adeò oppositos angulos in centris basium oppositarum; Erit D E, diameter dodecaedri in Icosaedro A B C, descripti, cùm copulet angulos ipsius oppositos in D, & E, centris basium Icosaedri oppositarum residentes. Propositis iam tribus magnitudinibus, Icosaedro scilicet A B C; Dodecaedro diametri A C, hoc est, in eadem sphæra, in qua Icosaedrum A B C, descripto, cùm vtriusq; eadem sit diameter; & Dodecaedro diametri D E, intra Icosaedrum videlicet, A B C, constructo; Proportio primæ magnitudinis, nempe Icosaedri A B C, ad tertiam, videlicet ad Dodecaedrum diametri D E, sibi inscriptum, componetur ex proportionibus primæ ad secundam, & secundæ ad tertiam, per ea, quæ ad defin. 5. lib 6. à nobis sunt demonstrata, nimirum ex proportionibus Icosaedri A B C, ad Dodecaedrum diametri A C, in eadem sphæra cum ipso descriptum, & Dodecaedri eiusdem diametri A C, ad Dodecaedrum diametri D E, in Icosaedro A B C, descriptum. Cùm ergo Icosaedrũ A B C, ad Dodecaedrum diametri A C, eadem sphæra comprehensum, sit vt F, latus Icosaedri ad G, latus cubi: (b Nam Dodecaedrum diametri A C, ad Icosaedrũ A B C, eiusdem diametri, est vt G, latus cubi ad F, latus Icosaedri. Conuertendo igitur, erit Icosaedrum A B C, ad Dodecaedrum diametri A C, vt F, latus Icosaedri ad G, latus cubi.) At verò Dodecaedrum eiusdem diametri A C, ad Dodecaedrum diametri D E, in Icosaedro videlicet A B C, descriptum, proportionem habeat triplicatam diametri A C, ad diametrum D E, id est, ad rectam centra basium Icosaedri oppositarum coniungentem, ex coroll. propos. 17. lib. 12. Manifestum est, proportionem Icosaedri A B C, ad sibi inscriptum Dodecaedrum diametri D E, componi quoque ex proportione F, lateris Ico-

b 11. quarti dec.

ris Icoſaedri, ad G, latus cubi, & ex proportione triplicata proportionis diametri AC, ad rectam DE. Quare Icoſaedrum ad ſibi inſcriptum Dodecaedrum proportionem habet compoſitam, &c. Quod erat demonſtrandum.

THEOR. 28. PROPOS. 28.

DODECAEDRVM excedit cubum ſibi inſcriptum parallelepipedo, cuius quidem baſis à quadrato cubi deficit rectangulo contento ſub latere cubi, tertiaque parte minoris ſegmenti eiuſdem lateris cubi: At verò altitudo ab altitudine, ſiue latere cubi, minore ſegmento eius lineæ, quæ dimidiati lateris cubi ſegmentum minus exiſtit.

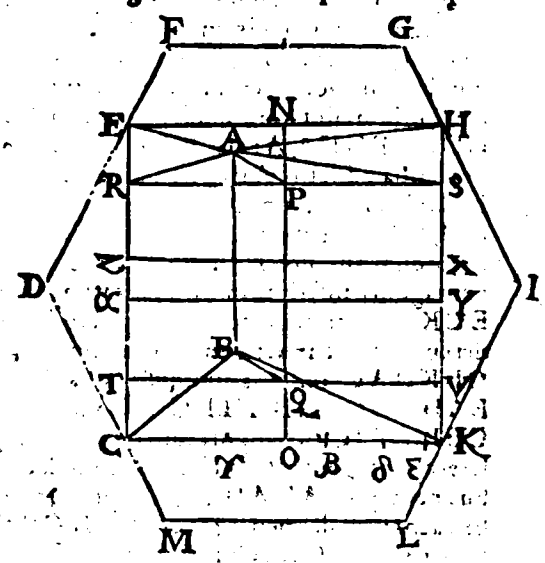


QVONIAM ex demonſtratis propoſ. 8. lib. 15. quatuor latera baſis cubi in Dodecaedro deſcripti ſubtendunt quatuor angulos quatuor baſium Dodecaedri ad vnum latus conuenientium: ſint huiuſmodi pentagona ABCDE, EFGHA, AHIKB, BKLMC, conuenientia ad latus AB; duo quidem ABCDE, AHIKB, ſecundùm latus idem commune AB, alia autem duo AEFGH, BCMLK, ſecundùm angulos EAH, CBK. His verò pentagonis inſcriptum ſit quadratum cubi ECKH, ſuper quod conſiſtat pars Dodecaedri cubum circumſcribentis, ſolidum ſcilicet CBKHAE, conſtans quinque planis CBK, EAH, ABCE, ABKH, ECKH; quorũ duo CBK, EAH, [a] triangula ſunt æqualia, cùm latera pentagoni BC, BK, æqualia ſint lateribus pentagoni AE, AH, angulosque comprehendant æquales pentagonorũ EAH, CBK. Duo verò ABCE, ABKH, trapezia ſunt æqualia quoque: (cùm enim & pentagona ABCDE, ABKIH, per hypotheſin, & triangula ex ipſis ablata CDE, HIK, [b] æqualia exiſtant; æqualia erunt & reliqua trapezia ABCE, ABKH;) Quintum denique eſt baſis cubi inſcripti ECKH. Simili modo reperientur alia quinque ſolida huic ſimilia & æqualia, per 10. definitionem libri 11. ſuper reliquas quinque cubi baſes; ita vt Dodecaedrum ſuperet cubum ſibi inſcriptum ſex huiuſmodi ſolidis. Dico igitur hunc totum exceſſum, ex ſex illis ſolidis cubum inſcriptũ circumſtantibus conflatum, æqualem eſſe parallelepipedo, cuius quidem baſis deficit à CEHK, baſe cubi, rectangulo contento ſub latere cubi CK, tertiaque parte minoris ſegmenti eiuſdem lateris cubi; at verò altitudo ab altitudine, ſeu latere cubi, minore ſegmento eius lineæ, quæ dimidiati lateris cubi ſegmentum minus exiſtit. Sectis enim lateribus EH, CK, bifariam in N, O, iunctaque recta NO, quæ parallela eſt lateri pentagoni AB, & in quam cadunt perpendiculares AP, BQ, demiſſæ in planum EK, vt conſtat ex demonſtratis propoſ. 17. lib. 13. (Exprimunt enim lineæ NO, AB, AP, BQ, huius figuræ lineas LN, VX, VR, XS, figuræ propoſ. 17. lib. 13.) Erit vtraque recta AB, PQ, maius ſegmentum lateris cubi NO, vel HK, & vtraque AP, BQ, æqualis dimidio lateris pentagoni AB, ſeu maioris ſegmenti lateris cubi, vt liquet ex eadem propoſitione 17. libri 13. Ac propterea ſi per P, Q, ducantur rectæ RS, TV, rectis EH, CK, parallelæ; erunt quoque TR, SV, maiora ſegmenta laterum EC, HK; atq; adeò ER, CT, ſimul, & HS, KV, ſimul minora eorundem laterum ſegmenta. Ductis deinde rectis AR, AS, BT, BV, conſtituantur duæ pyramides ERSHA, CTVKB, quæ per corollarium propoſitionis 6. libri 12. æquales inter ſe erunt, cùm & earum baſes ERSH, TCKV, & altitudines PA, QB, æquales ſint; conſiſtentque extra ſolidum ABTVSR. [c] Quoniam autem AS, ipſi BV, & AR, ipſi BT, æqualis eſt, & parallela, cùm coniungant æquales rectas, & parallelas AB, SV, RT, [d] parallela erunt plana triangulorum ARS, BTV, atque adeò inter ſe æqualia, ex corollario propoſitionis 8. libri 11. cùm latera vnius lateribus alterius ſint æqualia. Quare ſolidum ABTVSR, contentum duobus aduerſis triangulis æqualibus, ſimilibus, & parallelis ARS, BTV, & tribus parallelogrammis RV, AT, AV, priſma eſt, ex definitione.

IAM verò, cùm oſtenſum ſit, rectas HS, KV, minus ſegmentum efficere lateris HK, ſint illis æqualis VX, dupla nimirum vtriuſque HS, & KV; & ipſius VX, minoris ſegmẽti lateris HK, duas tertias partes contineat VY, tertia verò pars ſit XY, ducanturque XZ, Yα, rectæ TV, parallelæ. Quoniam igitur pyramides ERSHA, CTVKB, æquales ſunt oſtenſæ; [e] vtriuſque verò earum dupla eſt pyramis ſuper baſem TX, & ſub eadem altitudine PA, vel QB, conſtituta, [f] quòd & baſis TX, dupla ſit baſis CV, vel RH; Æqualis erit pyramis TVXZB, vtriquepyramidi ERSHA, CTVKB, ſimul: At pyramis TVXZB, duas tertias partes cõtinet priſmatis, cuius baſis eadem

[a] 4. primi.
[b] 4. primi.
[c] 33 primi.
[d] 15. vndec.
[e] 6. duodec.
[f] 1. ſenti.

TX, & altitudo eadē QB, vertex verò linea recta, pars videlicet rectæ AB, quæ æqualis sit ipsi VX, vt demonstrauimus in scholio propos. 7. lib. 12. Item eiusdem prismatis, cuius basis TX, & altitudo QB, vertex verò pars rectæ AB, æqualis ipsi VX, duas tertias partes continet prisma, cuius basis TY, & altitudo eadē QB, vertex verò pars rectæ AB, æqualis ipsi VY, ex scholio propos. 25. lib. 11. [a] quòd & basis TY, duas partes tertias complectatur basis TX. Igitur & prisma, cuius basis TY, & altitudo QB, vertex verò pars rectæ AB, æqualis ipsi VY, æquale erit duabus pyramidibus ERS-HA, CTVKB: Ac proinde hoc prisma appositum prismati ABTVSR, efficiet prisma æquale solido CBKHAE, habens basin rectangulum contentum sub latere cubi TV, & sub recta composita ex VY, duas tertias partes minoris segmēti VX, comprehendēte, & ex VS, maiore segmento, ideoq; à basi cubi deficientē rectangulo [a] X, contento sub latere cubi [a] Y, & sub XY, tertia parte minoris segmenti VX. Non dissimili ratione inuestigabimus alia similia quinque prismata æqualia & proximè dicto prismati, & reliquis quinque solidis super reliquas quinque cubi bases constitutis. Sex igitur huiusmodi prismata æqualia erunt sex illis solidis, exceſſui nimirum Dodecaedri suprà cubum sibi inscriptū. Quia autem duo quælibet prismata illiusmodi inter se aptata componūt parallelepipedum eiusdem altitudinis; construētur ex sex illis prismatis tria parallelepipeda sub eadē altitudine QB, quæ æqualis est dimidio lateris pentagoni AB, seu maioris segmēti lateris cubi, & super bases à basi cubi deficientes singulas rectangulo contēto sub latere cubi, & sub tertia parte minoris segmenti eiusdem lateris cubi: Ac proinde ex tribus his parallelepipedis inter se compositis exurget parallelepipedum exceſſui eidem Dodecaedri supra cubū sibi inscriptum æquale, cuius basis à basi cubi deficit rectangulo contēto sub latere cubi, & sub tertia parte minoris segmenti eiusdem lateris cubi; altitudo verò æqualis est tribus altitudinibus prædictorum trium parallelepipedorum, hoc est, altitudini QB, quæ æqualis fuit dimidio maioris segmenti lateris cubi, ter sumptæ. Hanc igitur altitudinem dico ab altitudine, seu latere cubi deficere minore segmento eius lineæ, quæ dimidiati lateris cubi segmentū minus existit. Diuidatur enim CK, latus cubi extrema ac media ratione in β: Itemq; Cβ, maius segmentum, & βK, minus bifariam in γ, Δ; atque ex βK, abscindatur βι, æqualis ipsi βγ, seu Cγ, ita vt Cγ, vel γι, vel βι, dimidia pars maioris segmenti Cβ, æqualis sit ipsi QB, & Cι, toti altitudini præfati parallelepipedi. Potest autem ex minori segmento βK, abscindi recta æqualis ipsi Cγ, dimidio maioris segmenti; quia βK, maior est, quàm dimidium maioris segmenti Cβ. Cùm enim sit, vt CK, ad Cβ, ita Cβ, ad βK; sit autem CK, minor, quàm dupla ipsius Cβ, quòd Cβ, sit ipsius maius segmentum; erit quoque Cβ, minor, quàm dupla ipsius βK, hoc est, erit βK, maior, quàm dimidium ipsius Cβ. Quoniam igitur est, vt tota CK, ad maius segmentum Cβ, ita maius segmētum Cβ, ad minus βK; [b] erit quoq; vt CO, dimidia ipsius CK, ad Cγ, vel βι, dimidiā ipsius Cβ, ita Cγ, vel βι, ad βΔ, dimidiam ipsius βK; Ac proinde si CO, secetur extrema ac media ratione, erit maius illius segmentum Cγ, vel βι, & minus βΔ. Quare & βΔ, minus segmentum secabit βι, maius segmentum extrema ac media ratione, vt demonstrauimus ad propos. 5. lib. 13. eritq; maius segmentum βΔ, minus autē Δι. Ac propterea rursus Δι, minus segmentum secabit rectam ΔK, maiori segmento βΔ, æqualem, extrema ac media ratione, minusque segmentum erit ιK. Deficit igitur Cι, altitudo præfati parallelepipedi ab altitudine, seu latere cubi CK, minore segmēto ιK, rectæ ΔK, vel sibi æqualis rectæ βΔ, quæ dimidiati lateris cubi fuit segmentū minus ostensa. Constat ergo basem parallelepipedi, quo Dodecaedrum excedit sibi inscriptum cubum à basi cubi deficere rectangulo contento sub latere cubi, tertiaq; parte minoris segmēti eiusdem lateris cubi; altitudinē verò ab altitudine cubi deficere minore segmento eius lineæ, quæ dimidiati lateris cubi segmentum minus existit. Quocirca Dodecaedrum excedit cubum sibi inscriptū parallelepipedo, &c. Quod erat demonstrandum.



a 1. sexti.

b 15. quinti.

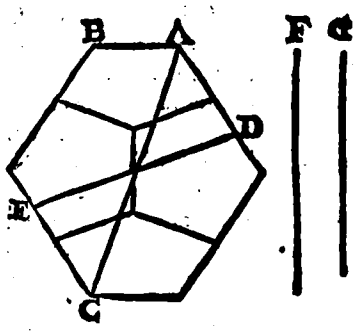
COROLLARIVM.

VNDE elicitur, Dodecaedrum à duplo cubi sibi inscripti deficere duobus parallelepipedis, quorū vnius longitudo lateri cubi est æqualis, latitudo autē tertiæ parti minoris segmēti eiusdem lateris cubi, altitudo deniq; à latere cubi deficit minore segmēto eius lineæ, quæ dimidiati lateris cubi minus segmentū existit; Alterius verò et longitudo, et latitudo lateri cubi æqualis est, altitudo autē minus segmētū eius lineæ, quæ dimidiati lateris cubi segmētū minus existit, ita vt amborū altitudines simul altitudini, siue lateri cubi sint æquales. Nā si prius parallelepipedū addatur illi parallelepipedo, quo cubū à Dodecaedro superari docuimus, conficietur parallelepipedum,

lelepipedum, cuius & longitudo, & latitudo lateri cubi aequalis est, basin nimirum eandem habens, quam cubus, altitudo verò à latere cubi deficit minore segmento eius lineæ, quæ dimidiati lateris cubi minus est segmentum, hoc est, altitudine posterioris parallelepipedi. Quare si confecto iam parallelepipedo adiungatur posterius parallelepipedum, compositum erit parallelepipedum prorsus aequale cubo intra Dodecaedrum descripto, siquidem & basis, & altitudo parallelepipedi, aequalis est & basi & altitudini cubi. Atque idcircò, vt Dodecaedrum cubi inscripti duplum existat, desunt praedicta duo parallelepipeda; cùm his accedentibus ad excessum Dodecaedri supra cubum inscriptum, constituatur parallelepipedum cubo inscripto aequale, immò verò alter cubus, vt demonstratum est.

THEOR. 29. PROPOS. 29.

DODECAEDRVM ad sibi inscriptum Icosaedrum proportionem habet compositam ex proportione triplicata eius, quam habet diameter Dodecaedri ad rectam centra basium Dodecaedri oppositarum copulantem, & proportione lateris cubi ad latus Icosaedri in eadem sphæra cum cubo descripti.



IN Dodecaedro A B C, diameter sit A C, & recta coniungens centra basium oppositarum D E; At verò F, latus cubi, & G, latus Icosaedri in eadem sphæra cum cubo descripti. Dico proportionem Dodecaedri A B C, ad sibi inscriptum Icosaedrum componi ex proportione triplicata proportionis diametri A C, ad rectam D E; & ex proportione F, lateris cubi ad G, latus Icosaedri. Cùm enim anguli Icosaedri in Dodecaedro descripti reponantur in centris basium Dodecaedri, atque adeò anguli oppositi in centris basium oppositarum; erit recta D E, centra basium Dodecaedri oppositarum connectens, diameter Icosaedri inscripti; Ac propterea Dodecaedrum, cuius diameter D E, in eadem sphæra cum Icosaedro intra Dodecaedrum A B C, collocato describetur, cùm eandem habeant diametrum D E. Intellectis iam tribus magnitudinibus, Dodecaedro scilicet A B C; Dodecaedro diametri D E; & Icosaedro eiusdem diametri D E, intra Dodecaedrum videlicet A B C, descripto; Proportio Dodecaedri A B C, primæ magnitudinis ad Icosaedrum sibi inscriptum, tertiam magnitudinē, componetur, per ea, quæ ad definitionem 5. libri 6. à nobis sunt demonstrata, ex proportionibus Dodecaedri A B C, primæ magnitudinis, ad Dodecaedrum diametri D E, secundam magnitudinem, & Dodecaedri ex diametro D E, descripti secundæ magnitudinis ad Icosaedrum in Dodecaedro A B C, descriptum, tertiam magnitudinem. Cùm ergo Dodecaedrum A B C, ad Dodecaedrum diametri D E, proportionem habeat triplicatam diametri A C, ad diametrum D E, ex corollario propositionis 17. lib. 12. [a] Dodecaedrum verò diametri D E, ad Icosaedrum eiusdem diametri D E, quod nimirum in Dodecaedro A B C, describitur, proportionem habeat, quam F, latus cubi ad G, latus Icosaedri; liquidò constat proportionem Dodecaedri A B C, ad Icosaedrum sibi inscriptum, cuius scilicet diameter D E, componi quoque ex triplicata proportione proportionis diametri A C, ad diametrum D E, rectam videlicet centra oppositarum Dodecaedri copulantem, & ex proportione F, lateris cubi, ad G, latus Icosaedri, in eadem sphæra cum cubo descripti. Dodecaedrum itaq; ad sibi inscriptū Icosaedrum proportionē habet compositam, &c. Quod erat demonstrandū.

[a] 11. quartidecimi.

THEOR. 30. PROPOS. 30.

DODECAEDRVM Pyramidis, in qua describitur, duas nonas partes continet, minus duobus parallelepipedis, quorum vnius longitudo lateri cubi in eadem pyramide descripti æqualis est, latitudo verò tertiæ parti minoris segmenti lateris eiusdem cubi, altitudo denique à latere eiusdem cubi deficit minore segmento eius lineæ, quæ dimidiati lateris cubi eiusdem minus segmentum existit; Alterius autem & longitudo, & latitudo lateri cubi prædicti est æqualis, altitudo verò minus segmentum eius lineæ, quæ dimidiati lateris cubi eiusdem segmentum minus existit, ita vt amborum altitudines simul altitudini, siue lateri eiusdem cubi sint æquales.

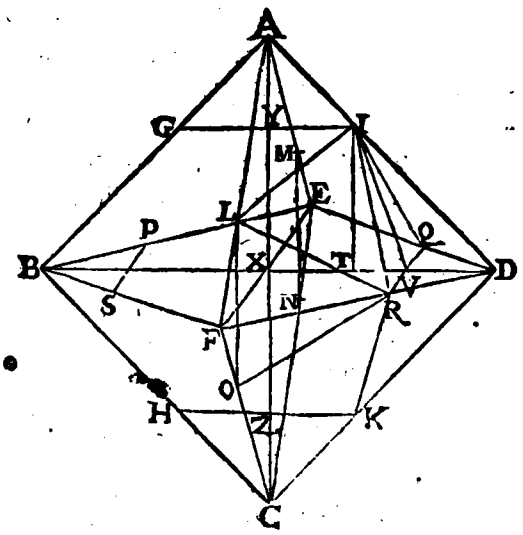
QVONIAM si in Dodecaedro intra Pyramidem descripto cubus describatur, hic idem cubus in eadem pyramide est descriptus, vt ad finem lib. 15. tradidimus; Cubus autem pyramidis, in qua describitur, nona pars est, [b] cùm pyramis cubi sibi inscripti sit noncupla. Fit, vt magnitudo dicti cubi dupla contineat duas partes nonas pyramidis Dodecaedrum, seu cubum ambientis. Quare,

[b] 15. duodecimi.

cùm Dodecaedrũ cubi ſibi inſcripti duplum ſit, ex coroll. propoſ. 28. huius lib. minus duobus illis parallelepipedis, quorũ mentio facta eſt in verbis propoſitionis huius; non obſcurè colligitur, Dodecaedrum pyramidi inſcriptum duas nonas partes cõtinere ipſius pyramidis, minus dictis duobus parallelepipedis; adeò vt ſi dicta duo parallelepipeda addantur Dodecaedro, tum demũ magnitudo exurgat duas partes nonas pyramidis complectens. Quamobrem Dodecaedrum Pyramidis, in qua deſcribitur, duas nonas partes cõtinet, minus duobus parallelepipedis, quorũ vnius longitudo lateri cubi in eadem pyramide deſcripti æqualis eſt, &c. Quod erat demonſtrandum.

THEOR. 31. PROPOS. 31.

OCTAEDRVM excedit ſibi inſcriptum Icoſaedrum Parallelepipedo, cuius baſis eſt quadratum lateris Icoſaedri, altitudo verò maius ſegmentum ſemidiametri Octaedri extrema ac media ratione ſectæ.



OCTAEDRVM, cui inſcriptum eſt Icoſaedrũ, ſit A B C D E F, repetita figura propoſ. 16. libri 15. vbi demonſtratum eſt, viginti triangula Icoſaedrum inſcriptum componentia eſſe I Q R, K Q R, G I L, G I M, G P S, H P S, N H K, O H K, R L O, S L O, P M N, Q M N, G M P, H N P, K N Q, I M Q, G L S, H O S, K O R, I L R, quorum octo poſtrema octo baſibus Octaedri ſunt impoſita, ſecantia videlicet omnia eius latera extrema ac media ratione; item rectam I T, perpendicularem ad B D, æqualem eſſe maiori ſegmẽto X Y, ſemidiametri A X. Dico Octaedrum A B C D E F, ſuperare Icoſaedrum ſibi inſcriptum parallelepipedo, cuius baſis eſt quadratum lateris Icoſaedri Q R, altitudo verò I T, maius ſegmẽtum ſemidiametri A X. Cùm enim in quatuor baſibus Octaedri D E A, D F A, D E C, D F C, angulum ſolidum Octaedri D, conſtituentibus, poſitæ ſint quatuor baſes Icoſaedri I M Q, I L R, K N Q, K O R; remanebunt iuxta angulum ſolidum D, in eiſdem quatuor baſibus Octaedri quatuor triangula I Q D, I R D, K Q D, K R D, quibus ſi accedant duo triangula Icoſaedri, Q I R, K Q R, & commune triangulum D Q R, conſtituentur duæ pyramides ſuper communẽ baſem D Q R, nempe I D Q R, K D Q R, inter ſe æquales, per coroll. propoſ. 5. lib. 12. cùm earum altitudo ſit recta eadem I T, maius videlicet ſegmentum ſemidiametri Octaedri. (Nam quemadmodum A X, ſecta eſt à recta G I, in Y, extrema ac media ratione, ita quoq; ſecta eſt C X, à recta H K, in Z. Quare ſi ex K, ad B D, perpendicularis ducatur, altitudo nimirum pyramidis K D Q R; erit ea æqualis rectæ Z X, maiori ſegmento ſemidiametri C X, hoc eſt, ipſi I T.) Quæ quidem pyramides extra Icoſaedrum in Octaedro deſcriptum conſiſtunt. Simili modo prope ſingulos reliquos quinque angulos Octaedri conſtituentur binæ pyramides & inter ſe & dictis duabus æquales, extra Icoſaedrum prædictum: Ita vt Octaedrum ſuperet Icoſaedrum ſibi inſcriptum duodecim illis pyramidibus æqualibus. Quia verò triangulum D Q R, dimidium eſt quadrati lateris D Q; (Cùm D Q, D R, rectæ æquales ſint, minora ſcilicet ſegmenta laterum Octaedri, angulumq; contineant rectum.) erit recta Q R, diameter illius quadrati; Ac proinde quadratum ipſius Q R, duplum erit quadrati lateris D Q, ideoq; quadruplum trianguli D Q R. Priſma itur, ſiue parallelepipedum, cuius baſis quadratũ rectæ Q R, & altitudo I T, quadruplum quoq; erit priſmatis, cuius baſis triangulum D Q R, & altitudo eadem I T, per ea, quæ demonſtrauimus ad propoſ. 7. lib. 12. Priſma autem, cuius baſis D Q R, & altitudo I T, triplum exiſtens, ex coroll. 1. propoſ. 7. lib. 12. pyramidis I D Q R, æquale eſt tribus pyramidibus earum duodecim, quas circa Icoſaedrum conſiſtere diximus. Priſma ergo, vel parallelepipedũ, cuius baſis quadratũ rectæ Q R, & altitudo I T, quadruplum quoq; eſt trium illarũ pyramidum. Quare cùm earundem trium pyramidum quadruplæ ſint omnes duodecim pyramides ſimul Icoſaedrũ ambientes; Æquale quoque erit priſma, ſeu parallelepipedum, cuius baſis quadratum rectæ Q R, lateris nimirum Icoſaedri, & altitudo I T, maius ſegmentum ſemidiametri A X, duodecim illis pyramidibus, hoc eſt, exceſſui Octaedri ſupra Icoſaedrum ſibi inſcriptum; Ac proinde Octaedrum ſuperabit Icoſaedrum dicto priſmate, vel parallelepipedo. Octaedrum ergo excedit ſibi inſcriptum Icoſaedrum parallelepipedo, cuius baſis eſt quadratum lateris Icoſaedri, &c. Quod erat oſtendendum.

a 34. primi.

COROLLARIVM.

HINC infertur, Pyramidem excedere duplum Icoſaedri ſibi inſcripti parallelepipedo, cuius baſis quadratum lateris Icoſaedri, altitudo verò recta linea bifarias ſectiones oppoſitorũ laterum Icoſaedri coniungens. Cùm enim ex demonſtratis propoſ. 19. lib. 15. conſtet, ſi Pyramidi Octaedrum

Octaedrum, & huic Octaedro Icosaedrum imponatur, Icosaedrum eidem Pyramidi esse inscriptum [3a] *Octaedrum autem superet Icosaedrum sibi inscriptũ parallelepipedo, cuius basis quadratum lateris Icosaedri, nempe recta Q R, altitudo verò maius segmentum semidiametri Octaedri, recta videlicet I T, seu Y X: Fit, vt Octaedrum bis sumptum, nempe pyramis, cui inscribitur, (*[b] *quod Pyramis dupla sit sibi inscripti Octaedri) superet idem Icosaedrũ in Octaedro, ideoq; & in Pyramide descriptum, duplo illius parallelepipedi, nimirum parallelepipedo cuius basis idem quadratum lateris Icosaedri, altitudo verò recta T Z, coniungens bifarias sectiones laterum Icosaedri oppositorum G I, H K. Hoc enim parallelepipedum illius duplum est, per demonstrata à nobis in scholio propos. 14. lib. 12. cùm altitudines duplam habeant proportionem. Quare hoc eodem parallelepipedo, cuius basis quadratum lateris Icosaedri, altitudo verò recta linea bifarias sectiones oppositorum laterum Icosaedri copulans, Pyramis duplum Icosaedri sibi inscripti excedit.*

a 31. sextidecimi.

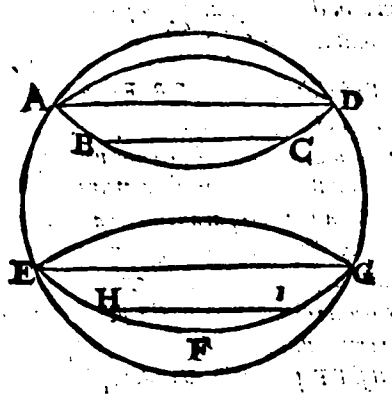
b 21. sextidecimi.

DE QVINQVE CORPORVM REGVLARIVM descriptione in data sphæra, ex Pappo Alexandrino.

Quoniam Euclides lib. 13. quinque corpora Regularia seorsum extra sphæram construxit, deinde verò eadem à sphæra comprehendi, noua demonstratione confirmauit; non erit abs re docere, qua ratione Pappus Alexandrinus eadem quinque corpora in data sphæra describat: præsertim cùm eius ratio multò clarior videatur, & facilior, q. constructio illa, ab Euclide præscripta. Sed prius ex eodem Pappo lemmata nonnulla præmittenda sunt, quorum aliqua etsi per elementa sphærica Theodosii demonstrantur, non tamẽ propterea ordinem Euclidis peruertere censeri possumus; quippe cùm propositiones Sphæricorum elementorũ, quibus hic indigemus, ex solis 19. prioribus propos. lib. 11. Euclidis pendeant; vt commodè antè lib. 12. atq; adeò multò magis ante hãc corporũ Regularium constructionem percipi possint. In citandis autem Theodosii propositionibus, sequemur ordinem nostrorum commentariorum, quos in eadem elementa conscripsimus. Hinc ergo initium sumamus.

LEMMA I.

Datis duobus circulis in sphæra parallelis, dataque in vno eorum linea recta; ducere in altero diametrum huic rectæ datæ parallelam.



In sphæra sint duo circuli paralleli A B C D, E F G; sitq; primũ in A B C D, data diameter A D, cui in E F G, ducẽda sit diameter parallela. Ducatur, vt in scholio propos. 18. lib. 11. docuimus, per diametrum A D, planũ rectum ad circulum A B C D, [c] *faciens in sphæra superficie circulum A E G D. Quoniam igitur circulus A E G D, circulum A B C D, bifariam, & ad angulos rectos secat, erit circulus A E G D, maximus, transibitq; per polos circuli A B C D, ex scholio propos. 15. lib. 1. Theod. ac proinde & per polos circuli E F G,* [d] *cùm paralleli eosdem polos habeant:* [e] *ideoq; eum bifariam secabit. Communis ergo sectio E G, eius diameter erit:* [f] *qua cùm sit ipsi A D, parallela, patet propositum.*

c 1. 1. Theodosij.

d 1. 2. Theodosij.

e 15. 1 Theodosij.

f 16. vndec.

Deinde in circulo A B C D, data recta B C, non sit eius diameter, cui ducenda sit diameter parallela in circulo E F G. Ducatur ipsi B C, per centrum circuli A B C D, diameter parallela A D; cui in circulo E F G, ducatur diameter parallela E G, vt proximè ostendimus. Quoniam igitur vtraque B C, E G, eidem A D, parallela est, ex constructione, [h] *ipsæ quoque B C, E G, inter se parallelæ erunt. Quod est propositum.*

g 31. primi.

h 19. vndec.

Eadem ratione recta B C, ducetur in circulo E F G, parallela H I, à diametro E G, diuersa, quæ ipsi B C, æqualis sit, si modò B C, maior non sit diametro E G. Nam si in circulo E F G, ducatur ipsi B C, parallela H I, & æqualis, vt ad propos. 1. lib. 4. tradidimus, factum erit, quod iubetur.

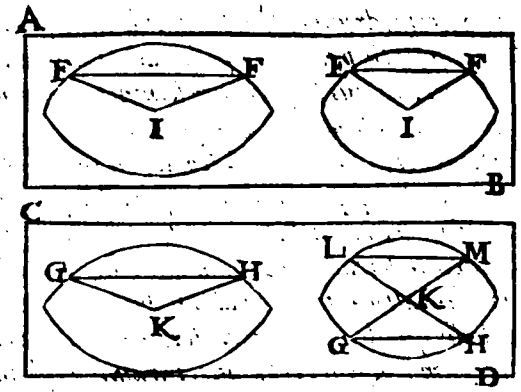
LEMMA II.

Si in planis parallelis descripti sint duo circuli; in quibus duæ rectæ parallelæ abscindant arcus similes; erunt duæ rectæ coniungentes extrema vnius rectę cum centro, parallelæ duabus rectis, quæ extrema alterius rectæ cum centro coniungunt.

In planis parallelis A B, C D, descripti sint duo circuli, in quibus rectæ E F, G H, primùm parallelæ sint, ad easdem partes centrorum I, K, auferantq; arcus similes E F, G H, ac tandem iungantur ad centra rectis E I, F I, G K, H K. Dico tam E I, G K, quàm F I, H K, parallelas esse. Quoniam enim arcus E F, G H, similes sunt, erunt anguli I, K, æquales, ex scholio propositionis 22. libri 3. [i] *Igitur reliqui anguli E, F, reliquis angulis G, H, æquales erunt.* [k] *Cùm ergo tam illi, quàm hi, sint inter se æquales: erit tam angulus E, angulo G, quàm*

i 32. primi.

k 5. primi.



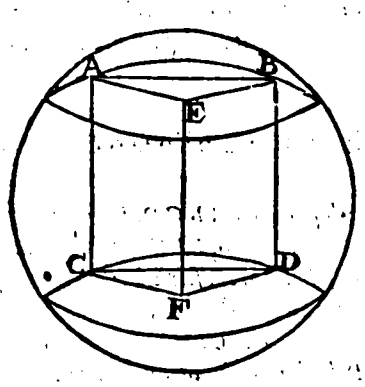
angulus F, angulo H, æqualis. Quoniam igitur in planis parallelis recta E F, G H, parallelæ sunt, & rectæ E I, G K, ad easdem partes plani per E F, G H, ductæ efficiunt cum ipsis æquales angulos E, G; erunt, ex iis, quæ in scholio propos. 16. lib. 11. demonstrauimus, E I, G K, parallelæ: Eademq; ratione F I, H K, parallelæ erunt.

a 15. primi.
b 4. primi.
c 28. tertij.
d 27. primi.
e 9. vndec.

Deinde sint E F, G H, parallelæ, non ad easdem partes centrorum I, K. Dico tam E I, H K, quàm F I, G K, esse parallelas. Productis enim G K, H K, iungatur recta L M. Et quia latera G K, H K, lateribus L K, M K, sunt æqualia, [a] angulosq; ad verticem K, æquales continent; [b] erũt & baſes G H, L M, & anguli H, L, æquales, & anguli G, M. [c] Igitur arcus G H, L M, æquales sunt, [d] & rectæ G H, L M, inter se parallelæ: Ac proinde cùm vtraq; E F, L M, ipsi G H, sit parallela, [e] erũt & E F, L M, parallelæ inter se. Quia igitur E F, L M, parallelæ sunt, abscindentes ad easdem partes centrorũ arcus similes E F, L M; (Nam cùm arcus G H, sit arcui E F, similis, erit quoq; arcus L M, qui arcui G H, æqualis est, eidem arcui E F, similis.) erunt tam E I, L K, hoc est, E I, H K, quàm F I, M K, hoc est, F I, G K, parallelæ. Quod est propositum.

LEMMA III.

Si in sphæra sint duo circuli paralleli, & æquales, in quibus ductæ sint duæ rectæ parallelæ & æquales, ad easdem partes centrorum; rectæ harum parallelarum extrema puncta ad easdem partes coniungẽtes, æquales quoque & parallelæ sunt, & ad plana circulorum perpendiculares.



f 7. vndec.
g 33. primi.

In sphæra sint duo circuli paralleli & æquales A B, C D, in quibus sint duæ rectæ æquales, & parallelæ A B, C D, ad easdem partes centrorum, quarũ extrema iungantur ad easdem partes rectis A C, B D. Dico rectas A C, B D, æquales quoq; esse, ac parallelas, & ad plana circulorũ perpendiculares. Quoniam enim A B, C D, parallelæ sunt; [f] erunt A C, B D, in eodem cum ipsis plano. Quare cùm A B, C D, sint etiam æquales; [g] æquales quoq; erunt, ac parallelæ A C, B D, quod est primum.

h 33. primi.
i 1. 2. Theodosij.
k 10. 1. Theodosij.
l 10. 1. Theodosij.
m 8. vndecimi.

Ex centris deinde E, F, ductis rectis E A, E B; F C, F D, iunctâque recta E F; erunt tam A E, C F, quàm B E, D F, parallelæ, ex secundo lemmate: Sunt autem & æquales ob circulorum æqualitatem. [h] Igitur & A C, E F, & B D, E F, parallelæ erunt, & æquales. [i] Quoniam verò circuli A B, C D, paralleli circa eosdem polos sunt, [k] recta per eorum polos ducta transibit per eorundem centra, & per centrum sphæræ, & ad plana eorundem recta erit. Quocirca recta E F, eorundem centra coniungens, per eorum polos, & centrum sphæræ incedet, ne duæ rectæ per eorum centra dicantur transire, nimirum recta E F, & recta per eorum polos extensa, quod est absurdum. Haberent enim illæ rectæ segmentum commune E F. [l] Igitur E F, ad plana circulorum A B, C D, recta est: [m] Ac propterea & vtraque A C, B D, ipsi E F, parallela, ad eadem plana erit recta. Quod est secundum.

Hæc demonstratio locum etiam habet, quando parallelæ A B, C D, sunt circulorum diametri, sed tũc E A, E B, F C, F D, erunt partes diametrorum, vt patet.

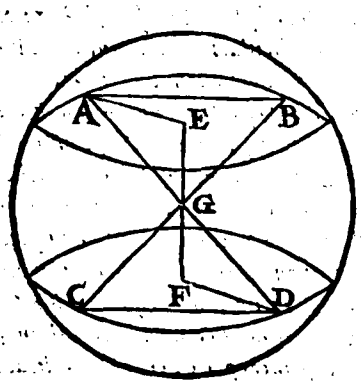
LEMMA IIII.

Si in sphæra sint duo circuli paralleli & æquales, in quibus ductæ sint duæ rectæ parallelæ & æquales, non ad easdem partes centrorum: rectæ harũ parallelarum extrema puncta non ad easdem partes coniungentes, in centro sphæræ se intersecant, ac proinde diametri sphæræ erunt, & inter se æquales: Rectæ verò earundem parallelarum extrema puncta ad easdem partes connectentes, & æquales ac parallelæ inter se sunt, & cum parallelis rectos angulos constituunt.

n 7. vndec.

In sphæra sint duo circuli paralleli & æquales A B, C D, & in iis duæ rectæ parallelæ & æquales A B, C D, non ad easdem partes centrorum, quarum puncta extrema primùm non ad easdem partes iungantur rectis A D, B C. Dico rectas A D, B C, in centro sphæræ se intersecare, ideoq; diametros esse sphæræ inter se æquales. Quoniam enim A B, C D, parallelæ sunt; [n] erunt A D, B C, in eodem cum ipsis plano; ac proinde se mutuò intersecabunt, vt in puncto G: quod dico esse centrũ sphæræ. Connectantur enim circulorũ centra E, F, rectis

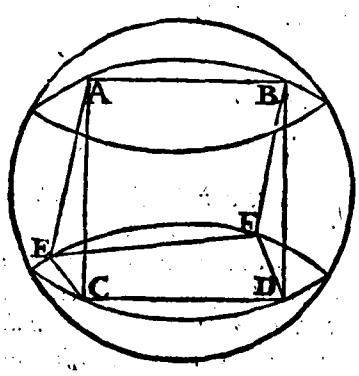
E A, E G;



E A, E G, F D, F G. [a] *Et quia anguli A G B, C G D, ad verticem aquales sunt:* [b] *item tam alterni anguli B A D, C D A, quàm alterni A B C, D C B; equiangula erunt triangula A B G, C D G.* [c] *Igitur erit vt A B, ad B G, ita D C, ad C G: Item vt A B, ad A G, ita D C, ad D G. Cùm ergo A B, C D, ponantur æquales,* [d] *erunt quoque tam B G, C G, quàm A G, D G, inter se æquales. Rursus quia A E, D F, semidiametri circulorum æqualium æquales sunt, sunt autem & lemmate & parallelæ,* [e] *ideoq; anguli alterni E A D, F D A, æquales erunt: duo latera E A, A G, duobus lateribus F D, D G, æqualia, angulosq; comprehendent æquales.* [f] *Igitur & baſes E G, F G, & anguli A G E, D G F, æquales ſunt.* [g] *Et quia A D, in eodem plano eſt, in quo parallelæ A E, D F;* [h] *& E G, F G, in eodem plano, in quo A D, A E, D F; erunt E G, F G, in rectum & continuum conſtituta, propter æquales angulos A G E, D G F, vt ex Proclo ad propoſ. 15. lib. 1. oſtendimus. Quare E F, recta coniungens centra circulorum parallelorum per centrum ſphæræ tranſibit, vt in præcedenti lemmate demonſtrauimus,* [i] *perpendiculariterq; ad eorum plana erit. Cùm ergo E G, F G, æquales ſint oſtenſæ, erit G centrum ſphæræ,* [k] *propterea quòd circuli æquales A B, C D, æqualiter à centro ſphæræ abſunt; inæqualiter verò abeſſent, ſi centrum ſphæræ in recta B F, diceretur aliud punctum quàm G. Quocirca A D, B C, diametri ſphæræ ſunt, & inter ſe propterea æquales. quod eſt primum.*

a 15. primi.
b 29. primi.
c 4. ſexti.
d 9. quinti.
e 29. primi.
f 4. primi.
g 7. vndec.
h 2. vndec.
i 10. vndec.
k 6. 1. Theodoſij.

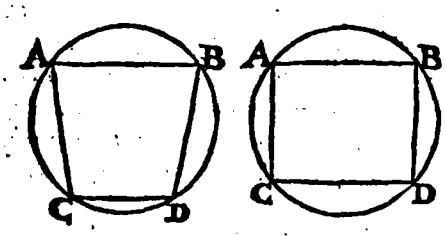
Sed iam puncta extrema parallelarum æqualium A B, C D, ad eaſdem partes iungantur rectis A C, B D. Dico rectas A C, B D, & æquales ac parallelas inter ſe eſſe, & angulos C A B, A B D, B D C, D C A, eſſe rectos. Quòd enim ſint parallelæ & æquales, [l] *manifeſtum eſt, cùm extrema puncta parallelarum æqualium coniungant. Quòd autem ad A B, C D, ſint perpendiculares, ita oſtendetur. In circulo C D, ad rectam C D, excitentur perpẽdiculares C E, D F, iungantúrq; E F, A E, B F. Quia igitur anguli E C D, F D C, recti ſunt, erũt* [m] *ex ſcholio propoſ. 31. lib. 3. arcus E C D, F D C, ſemicirculi, ac proinde & reliqui arcus E F D, C E F, ſemicirculi erũt,* [n] *& anguli E F D, C E F, recti. Quare in parallelogrãmo rectãgulo D E, recta C D, E F, æquales ſunt,* [o] *ideoq; & A B, E F, parallelæ erunt, & æquales. Igitur ex 3. lemmate A E, B F, ad plana circulorum rectæ erunt, ac proinde, ex defin. 3. lib. 11. anguli A E C, B F D, recti erũt. Recta igitur E F, perpẽdicularis ad vtramque E C, E A, & ad vtrãq; F D, F B, vt oſtendimus,* [p] *perpendicularis erit & ad planum trianguli A E C, per E C, E A,* [q] *ducti, & ad planum trianguli B F D, per F D, F B, ducti: ac propterea & C D, A B, ipſi E F, parallelæ, ad eadem plana triangulorum perpendiculares erunt; ideoq; ex defin. 3. lib. 11. anguli C A B, A B D, B D C, D C A, recti erunt. Quod eſt ſecundum.*



l 33. primi.
m 31. tertii.
n 9. vndec.
o 4. vndec.
p 8. vndec.

LEMMA V.

Si in ſphæra ſint duæ rectæ parallelæ, rectæ earum puncta extrema ad eaſdem partes coniungentes, æquales inter ſe erunt. Et ſi parallelæ fuerint æquales, coniungentes non ſolùm æquales, ſed & parallelæ erunt, rectosq; cum ipſis angulos conficient.



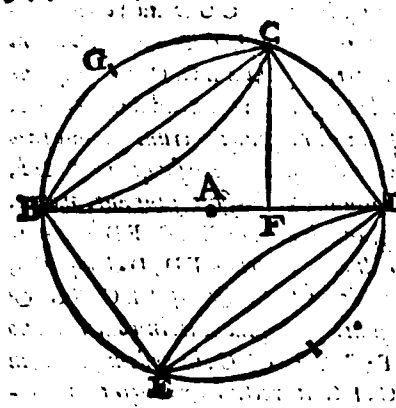
Sint in ſphæra duæ parallelæ A B, C D, quarum extrema puncta ad eaſdem partes connectantur rectis A C, B D. Dico A C, B D, æquales eſſe. Quia enim parallelæ ſunt A B, C D; [q] *erunt A C, B D, in eodẽ cũ ipſis plano. Ducto igitur per ipſas plano,* [r] *fiat in ſphæra circulus A B D C, in quo cùm parallelæ ſint A B, C D; erunt, ex ſcholio propoſ. 27. lib. 3. arcus A C, B D, æquales:* [s] *ideoq; & rectæ A C, B D, æquales erunt. Quod ſi parallelæ A B, C D, fuerint æquales, ita vt quadrilaterum A B D C, in circulo habeat duo oppoſita latera A B, C D, parallela, & æqualia; erit ex ſcholio propoſ. 31. lib. 3. A B D C, parallelogrammum rectangulum; ac proinde anguli A, B, D, C, recti erunt. Quod eſt propoſitum.*

q 7. vndec.
r 1. 1. Theodoſij.
s 29. tertii.

LEMMA VI.

In data ſphæra duos circulos æquales, ac parallelos deſcribere, ita vt diameter ſphæræ ſit vtriuſque diametri potentia ſeſquialtera.

Sit ſphæra centrum A, per quod planũ ductum faciat circulum maximũ B C D E, cuius diameter B D, ex coroll. 1. prop. 1. lib. 1. Theod. Secta autem B D, in F, vt B F, ipſius F D, dupla ſit; erit B D, talium partium 3.



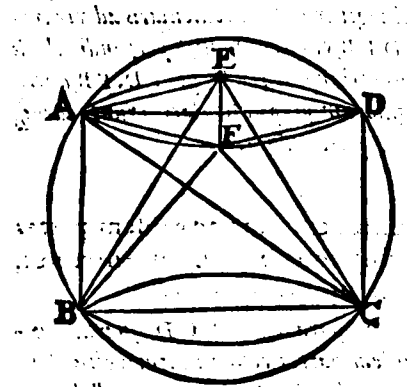
a 29. primi
b 31. tertij.
c 34. primi
d 2. Theodoſij.
e 15 1 Theodoſij.

qualium 2. eſt B F; ac proinde B D, ipſius B F, ſeſquialtera eſt. Ducta quoque F C, ad B D, perpendiculari, iungantur rectæ B C, D C, ductæq; D E, ipſi B C, parallela, connectatur recta B E. [a] Et quoniam tam duo anguli B C D, E D C, quàm duo B E D, C B E, duobus rectis æquales ſunt. [b] eſtq; tam B C D, quàm B E D, rectus; erit quoq; & E D C, & C B E, rectus. Igitur ex ſcholio prop. 34. lib. 1. quadrilaterum rectangulum B C D E, parallelogrammum eſt; [c] ideoq; rectæ B C, D E, æquales ſunt. Diuiſo iam arcu B C, bifariam in G, erit quoque arcus E G D, diuiſus bifariam in G, quòd ex ſcholio propoſ. 27. lib. 3. arcus quoque B E, C D, æquales ſint. Polo igitur G, & interuallo G B, G E, circuli in ſuperficie ſphæræ deſcribantur tranſeuntes per C, D, ob æqualitatem tam arcuum G B, G C, quàm G E, G D; [d] qui paralleli erunt, cùm eoſdem habeant polos. [e] Et quia circulus maximus B C D E, per polos ſecat circulos B C, E D. bifariam, erunt B C, E D, diametri ipſorum, quæ cùm æquales ſint oſtenſa, erunt & circuli B C, E D, æquales. Dico diametrum ſphæræ B D, ad vtramque diametrum B C, E D, proportionem habere potentia ſeſquialteram. Quoniam enim, ex coroll. propoſ. 8. lib. 6. tres rectæ D B, B C, B F, continuè proportionales ſunt; erit ex coroll. propoſ. 20. lib. 6. vt B D, ad B F, ita quadratum ex B D, ad quadratum ex B C: Eſt autem B D, ipſius B F, ſeſquialtera, vt oſtenſum eſt. Igitur & quadratum ex B D, quadrati ex B C, atque adeò & quadrati ex D E, ſeſquialterum eſt: atque idcirco diameter ſphæræ B D, vtriuſque diametri B C, D E, potentia ſeſquialtera eſt. quod eſt propoſitum.

His demonſtratis, hoc modo in ſphæra data deſcribemus quinq; corpora regularia.

PROBL. 1. PROPOS. 1.

In datâ ſphæra Pyramidem deſcribere.



f 17. 1. Theodoſij.
g 47. primi
h 47. primi

Describantur in datâ ſphæra, ex lemmate 6. duo circuli A D, B C, æquales, & paralleli, quorum diametrorum potentia ſit ſeſquialtera. diameter ſphæræ: & per eorum polos maximus circulus ducatur A B C D, [f] qui eos ad angulos rectos, ac bifariam ſecabit. ac proinde cum eis communes ſectiones faciet diametros A D, B C. Ducatur in circulo A D, alia diameter E F, ſecans A D, ad angulos rectos in centro, & rectæ ducantur E B, E C, F B, F C. Dico E B C F, eſſe pyramidem, hoc eſt, quatuor triangula E B C, B C F, C F E, E F B, eſſe æquilatera & æqualia. Iunctis enim rectis A E, E D, D F, F A, A B, C D, C A; erit A C, diameter ſphæræ; ex lemmate 4. & A B, D C, æquales erunt, & ad plana circulorum recta, ex 3. lemmate. Denique A E D F, quadratum erit in circulo A D, deſcriptum, vt conſtat ex prop. 6. lib. 4. Itaque quoniam, ex conſtructione, quadratum ex diametro ſphæræ A C, ſeſquialterum eſt quadrati ex A D, diametro circuli; ſi ponatur quadratum ex A C, 3. erit quadratum ex A D, 2. Cùm ergo quadratum ex A C, 3. æquale ſit quadratis ex A D, D C, quòd angulus A D C, rectus ſit, ex defin. 3. lib. 11. erit quadratum ex D C, 1. ac proinde quadratum ex A D, quadrati ex D C, duplum erit: Eſt autem & quadratum ex A D, quadrati ex D F, duplum, ex ſcholio prop. 47. lib. 1. Æqualia ergo ſunt quadrata ex D C, D F; [h] quibus cùm æquale ſit quadratum ex C F, quòd angulus C D F, ex defin. 3. lib. 11. rectus ſit; erit quadratum ex C F, quadrati ex D F, quoque duplum, propterea q; quadrato ex A D, æquale. Recta igitur C F, rectæ A D, hoc eſt, ipſi B C, æqualis eſt. Eodem modo oſtendetur B F, eidem B C, æqualis; ideoq; B C F, triangulum eſt æquilaterum.

i 47. primi

Rvrsvs quia quadratum ex A D, quadrati ex D C, duplum eſt oſtenſum; eſt autem, ex ſcholio propoſ. 47. lib. 1. & duplum quadrati ex D E: æqualia erunt quadrata ex D C, D E: [i] quibus cùm æquale ſit quadratum ex C E, quòd angulus C D E, ex defin. 3. lib. 11. rectus ſit; duplum quoque erit quadratum ex C E, quadrati ex D E. Æqualia ergo ſunt quadrata ex C E, A D, propterea q; recta C E, rectæ A D, hoc eſt, rectis B C, E F, æqualis eſt, atque adeò & recta C F, quæ ipſi B C, oſtenſa eſt æqualis. Triangulum igitur C E F, æquilaterum etiam eſt, & ipſi B C F, æquale, ob laterum æqualitatem. Non aliter, demonſtrabimus, triangulum B E F, eſſe æquilaterum, & ipſis B C F, F C E, æquale. Ex quo ſequitur & B C E, triangulum æquilaterum eſſe, & aliis tribus æquale: quippe cùm latera B E, C E, ipſi B C, oſtenſa ſint æqualia. Pyramis ergo eſt E B C F, ex defin. 26. lib. 11. & in data ſphæra deſcripta, cùm eius anguli ſolidi E, B, C, F, in ſuperficie ſphæræ conſiſtant. quod eſt propoſitum.

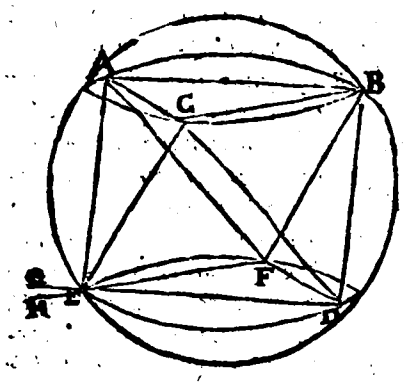
COROL-

COROLLARIVM.

HINC sequitur, diametrum sphæræ potentia esse sesquialteram lateris pyramidis in ea sphæra descriptæ. Nam latus pyramidis est æquale diametro A D, vt ostendimus, & ex constructione, diameter sphæræ potentia est sesquialtera diametri A D.

PROBL. 2. PROPOS. 2.

IN data sphæra Octaedrum describere.



DESCRIBANTVR ex lemmate 6. in data sphæra duo circuli æquales & paralleli A B C, D E F, ita vt sphæræ diametri diametri cuiuslibet eorum potentia sit sesquialtera. [a] Descripto autem triangulo æquilatero A B C, in circulo A B C, ducatur, per primum lemma, recta A B, in circulo D E F, parallela & æqualis D E, ad diuersas partes centrorum: qua latus etiam erit trianguli æquilateri in circulo D E F, descripti, ob circulorum æqualitatem. Completo ergo triangulo æquilatero D E F, erunt singula eius latera singulis lateribus trianguli A B C, æqualia & parallela: æqualia quidem, ob laterum A B, D E, æqualitatem; parallela verò, ex schol. propos. 16. lib. 11. Cùm enim parallela sint A B, D E, & anguli A B C, D E F, æquales; productis rectis D E, F E, ad G, H, erunt quoque anguli A B C, G E H, æquales. Cùm ergo parallelæ sint A B, G E, & B C, E H, ad easdem partes plani per A B, G E, ducti: erunt quoque B C, H E, hoc est, B C, E F, parallelæ, ex illo scholio propos. 16. lib. 11. Eadem ratione parallela erit D F, ipsi A C. Connectantur denique A E, E C, C D, D B, B F, F A, vt in figura. Dico A D, octaedrum esse, hoc est, octo triangula A B C, C A E, E C D, D C B, B F A, A F E, E F D, D F B, æquilatera esse, & æqualia. Quoniam enim in circulis parallelis & æqualibus sphæræ, rectæ A B, D E, æquales sunt & parallelæ ad diuersas partes centrorum, erunt, per 4. lemma, rectæ iunctæ A D, B E, (quas tamen confusionis vitandæ gratia non duximus.) diametri sphæræ, & rectæ A E, B D, æquales etiam erunt, ac perpendiculares ad ipsas A B, D E. [b] Quadratum igitur ex B E, duobus quadratis ex B D, D E, æquale erit: Posito autem quadrato ex diametro sphæræ B E, 6. quadratum ex D E, est 3. (Nam cùm per constructionem diameter sphæræ potentia sit sesquialtera diametri circuli D E F: posito quadrato ex B E, 6. erit quadratum diametri circuli D E F, 4. At posito quadrato diametri circuli D E F, 4. quadratum lateris trianguli æquilateri D E, est 3. quòd, ex coroll. 1. prop. 12. lib. 13. diameter circuli potentia sit sesquitertia lateris trianguli æquilateri.) Igitur & quadratum ex B D, est 3. ac proinde quadrata ex D E, B D, æqualia sunt, & rectæ ipsæ D E, B D, æquales. Est autem D E, ipsi A B, per constructionem, & B D, ipsi A E, per 4. lemma, æqualis. Quatuor ergo rectæ A B, B D, D E, E A, æquales erunt, constituentq; quadratum A B D E, cùm anguli ad A, B, D, E, recti sint, ex eodem 4. lemmate.

RVRSVS quia B C, E F, parallelæ sunt & æquales ad diuersas partes centrorum; erunt quoque iunctæ rectæ B E, C F, non ad easdem partes, diametri sphæræ, ex 4. lemmate, & rectæ B F, C E, æquales inter se, atq; ad B C, E F, perpendiculares, eritq; rursus, vt prius, quadratum B C E F. Non aliter ostendemus, A C D F, quadratum esse; cùm iunctæ rectæ A D, C F, sint quoq; sphæræ diametri, ex 4. lemmate, &c. Cùm ergo tria quadrata A D, B E, C F, constructa sint super latera æqualia A B, B C, C A, nimirum super latera trianguli æquilateri, cùm A B, latus sit quadrati A D; & B C, quadrati B E; & C A, quadrati C F; erunt omnia triangula octo A B C, C A E, E C D, D C B, B F A, A F E, E F D, D F B, æquilatera, & inter se æqualia. Octaedrum ergo est A D, ex defin. 27. lib. 11. & in data sphæra descriptum, cùm eius anguli solidi, A, B, D, E, C, F, sphæræ superficiem attingant. quod est propositum.

[a] 2. quarti.

[b] 47. primi

COROLLARIVM.

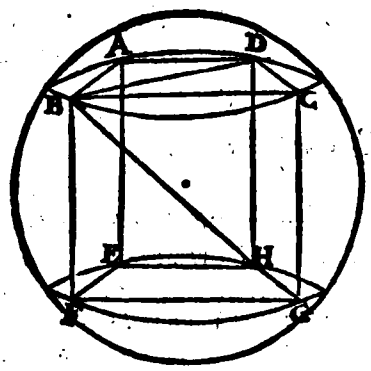
COLLIGITVR ex his, sphæræ diametrum potentia duplam esse lateris octaedri in ea sphæra descripti. Demonstratum enim est, quadratum ex B E, diametro sphæræ duplum esse quadrati ex D E, latere octaedri.

PROBL. 3. PROPOS. 3.

IN data sphæra cubum describere.

DESCRIBANTVR ex lemmate 6. in data sphæra duo circuli æquales ac paralleli A B C D, E F G H, quorum diametrorum potentia sit sesquialtera diameter sphæræ. [c] Descripto autem quadrato A B C D, in circulo A B C D, ducatur, per 1. lemma, recta A D, in circulo E F G H, parallela E H, & æqualis ex eadem parte centrorum, qua latus quoque erit quadrati in circulo E F G H, descripti, ob circulorum æqualitatem. Completo ergo quadrato E F G H, erunt singula eius latera singulis lateribus quadrati A B C D, æqualia, & parallela: æqualia quidem, ob laterum A D, E H, æqualitatem; parallela verò ex scholio

[c] 6. quarti.



propoſ.16. lib.11. Nam quia parallela ſunt A D, E H, ſuntq́, anguli æquales A D C, E H G, nimirum recti; erunt quoq; D C, H G, parallela, cùm ſint ad eaſdem partes plani per A D, E H, ducti, & ſic de cæteris. Iungantur denique ad eaſdem partes centrorum recta A E, B F, C G, D H, quæ, per lemma 3. ad plana circulorũ recta erũt, & inter ſe parallela. Dico A G, eſſe cubum, hoc eſt, ſex quadrilatera A B C D, E F G H, A D H E, B C G F, A B F E, C D H G, eſſe quadrata & æqualia. Ductis enim rectis B H, B D, erit, ex lemmate 4. B H, diameter ſphæræ; at B D, diameter circuli A B C D, quippe quæ diameter ſit quadrati circulo inſcripti. Quoniam igitur, per conſtructionem, quadratum ex B H, ſeſquialterum eſt quadrati ex B D; quadratum autem ex B D, quadrati ex B C duplum, ex ſcholio propoſ.47. lib.1. ſi ſtatuatur quadratum ex B H, 3. erit quadratum ex B D, 2. & quadratum ex D C, 1. atque adeò quadratum ex B H, quadrati ex D C, triplum erit. Rurſus quia quadratum ex B H, eſt 3. & quadratum ex B D, 2. [a] *eſtq́ quadratum ex B H, æquale quadratis ex B D, D H, quòd angulus B D H, ex deſin.3. lib.11. rectus ſit, erit quadratum ex D H, 1. Quadratum igitur ex B H, triplum eſt quadrati ex D H. Fuit autem idem quadratum ex B H, triplum quadrati ex D C. Æqualia ergo ſunt quadrata ex D C, D H, ac proinde recta D C, D H, æquales. Cùm ergo oppoſitis lateribus G H, C G, æquales ſint; erunt omnia quatuor latera æqualia in parallelogrammo C H. Cùm igitur & anguli recti ſint, ex deſin.3. lib.11. quadratum erit C H. Eadem ratione & B E, A H, B G, quadratum oſtendentur: Sed & A C, E G, quadrata ſunt, ex conſtructione. Sunt ergo omnia ſex quadrilatera quadrata, & inter ſe æqualia, ob laterum æqualitatem. Cubus igitur eſt A G, ex deſin.25. lib.11. & in data ſphæra deſcriptus, cùm eius anguli ſolidi A, B, C, D, E, F, G, H, ſuperficiem ſphæræ contingant. quod eſt propoſitum.*

a 47. primi

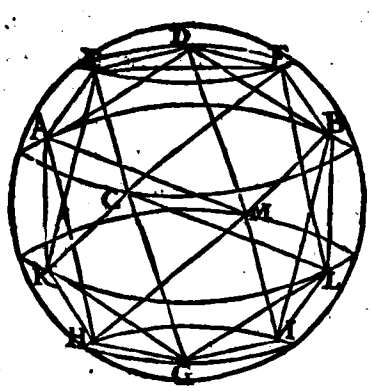
COROLLARIVM

CONSTAT ex his, diametrum ſphæræ potentia triplam eſſe lateris cubi in ea ſphæra deſcripti. Demonſtratum enim eſt, quadratum ex diametro ſphæræ B H, triplum eſſe quadrati lateris cubi D C, vel D H, vel A D, &c.

MANIFESTVM quoque eſt, eundem circulum comprehendere & quadratum cubi, & triangulum Octaedri in eadem ſphæra deſcriptorum: quia videlicet circulus A B C D, huius figuræ æqualis eſt circulo A B C, figuræ antecedentis propoſitionis. Id quod demonſtratum quoque eſt lib.14. propoſ.21.

PROBL. 4. PROPOS. 4.

IN data ſphæra Icoſaedrum deſcribere.



b 12. ſexti.

REPERIATVR [b] *recta linea, ad quam ſic ſe habeat diameter ſphæræ datæ, vt pentagoni latus ad latus hexagoni in eodem circulo cum pentagono deſcripti: Fiatq́ ex coroll. propoſ.6. lib.10. vt numerus 3. ad 1. ita quadratum rectæ inuentæ ad quadratum alterius cuiuſdam linea, ad cuius interuallum, veluti ſemidiametrũ, circulus in data ſphæra deſcribatur. Hoc autem facili negotio ita fiet. Deſcripto maximo circulo in ſphæra data,* [c] *accommodetur in eo recta, quæ inuenta ſemidiametri ſit dupla, cùm hæc recta minor ſit diametro ſphæræ, ſiue illius circuli maximi, vt infrà probabitur. Nam ſi per eam rectam planum ducatur rectũ ad circulum illum maximum,* [d] *faciet id circulum A B C, in ſphæra, cuius ſemidiameter, ex conſtructione, potentia ſubtripla eſt rectæ initio inuentæ. Deinde* [e] *inueniatur rurſus recta linea, ad quam ita ſe habeat data ſphæra diameter, vt pentagoni latus ad latus decagoni in eodem circulo cum pentagono deſcripti; Fiatq́ vt 3. ad 1. ita, per coroll. propoſ.9. lib.10. quadratum rectæ inuentæ ad quadratum alterius lineæ, ad cuius interuallum alter circulus in ſphæra deſcribatur priori circulo A B C, parallelus: quod fiet, ſi in eodem illo circulo maximo accommodetur recta æqualis duplæ ſemidiametri inuentæ, & parallela prioris circuli diametro, ex iis, quæ ad propoſ.1. lib.4. demonſtrauimus, & per eam rectam planum extendatur priori circulo parallelum, hoc eſt, ad dictum circulum maximum rectum, ex ſcholio propoſ.18. lib.11. Nam per idem ſcholium, planum, hoc erit circulo A B C, parallelum,* [f] *facietq́ in ſphæra circulum D E F, cuius ſemidiameter ſemidiametro inuentæ æqualis eſt. His duobus circulis ex altera parte centri ſphæræ alij duo æquales ac paralleli deſcribantur G H I, K L M: quod facile fiet, ſi illorum diametris æquales rectæ, & parallelæ in eodem illo circulo maximo ducantur, &c.* [g] *Deſcripto autem in circulo D E F, triangulo æquilatero D E F,*

c 1. quarti.

d 1. 1. Theodoſij.

e 12. ſexti.

f 1. 1. Theodoſij.

g 2. quarti.

ducatur

ducatur lateri EF, in parallelo circulo ABC, ex lemmate primo: recta linea AB, ex altera parte centri, parallela, quæ æqualis sit vni lateri trianguli æquilateri in circulo ABC, descripti. Item huic AB, agatur ex altera parte centri, parallela KL, in circulo KLM, & æqualis. Ac denique huic KL, in circulo GHI, ducatur ex altera parte centri, parallela HI, & æqualis ipsi EF, hoc est, lateri trianguli æquilateri in circulo GHI, descripti. Completis ergo triangulis æquilateris ABC, KLM, GHI, erunt singula latera singulis lateribus trianguli DEF, parallela; nimirum AC, ML, GH, ipsi DF; at BC, MK, GI, ipsi DE: quod probabimus, vt scholio propos. 16. lib. 11. vt in problemate secundo ostendimus, parallelas esse BC, EF. ad diuersas partes centrorum ductas. In figura non descripsimus ea triangula in circulis ABC, KLM, ne multitudo linearum confusionem pareret, sed tantùm laterum extrema puncta notauimus. Postremò, ex quolibet 12. punctorum quatuor triangulorum æquilaterorum ad vltimorum quinque puncta ducantur quinque lineæ rectæ; videlicet ex puncto D, rectæ DE, DA, DM, DB, DF: ex G, rectæ GH, GK, GC, GL, GI, &c. vt in figura apparet. Ex quoslibet enim puncto quinque rectas lineas emissas esse cernis. Dico DG, esse Icosaedrum, hoc est, viginti triangula DEF, DEA, DAM, DMB, DFB, &c. esse æquilatera, & æqualia. Quod vt demonstretur, ostendendum prius est, Icosaedrum in sphæra descriptum (posse autem in sphæra data describi Icosaedrum, Euclides docuit propos. 16. lib. 13.) suos 12. angulos constituere in quatuor circulis parallelis, quos descripsimus, nimirum ternos angulos in singulis circulis, atque eo situ, quo eadem puncta notauimus.

SIT igitur in sphæra descriptum Icosaedrum DG, duodecim angulos statuens in punctis D, E, A, K, H, G, I, L, B, F, M, C. Et quia quinque rectæ DE, DA, DM, DB, DF, æquales sunt, cùm sint latera triangulorum æquilaterorum æqualium; si ex polo D, per E, in sphæra circulus describatur, transibit is per reliqua puncta A, M, B, F: ac propterea pentagonum EAMBF, in vno plano erit, nimirum in plano illius circuli. Cùm ergo eius latera sint æqualia, vtpote latera Icosaedri, erit illud pentagonum etiam æquiangulum, ex iis, quæ ad finem lib. 4. demonstrata sunt à nobis. Eadem ratione pentagonum æquilaterum, & æquiangulum erit AKCFD, ob quinque rectas æquales EA, EK, EC, EF, ED: Et KHMDE, ob quinque latera Icosaedri inter se æqualia AK, AH, AM, AD, AE: Et HGCEA, ob quinque latera Icosaedri æqualia KH, KG, KC, KE, KA: Et GIMAK, ob latera quinque Icosaedri æqualia HG, HI, HM, HA, HK: Et ILCKH, ob quinque rectas æquales GI, GL, GC, GK, GH: Et LBMHG, ob rectas quinque æquales IL, IB, IM, IH, IG: Et BFCGI, ob quinque rectas æquales LB, LF, LC, LG, LI: Et FDMIL, ob quinque rectas æquales BF, BD, BM, BI, BL: Et DECLB, ob rectas quinque æquales FD, FE, FC, FL, FB: Et DAHIB, ob quinque latera Icosaedri æqualia MD, MA, MH, MI, MB: Ac tandem GLFEK, ob quinque Icosaedri latera æqualia CG, CL, CF, CE, CK; ita vt 12. pentagona æquilatera, æquiangulaque inter se æqualia constituantur. Quoniam verò recta subtendens angulum pentagoni æquilateri, & æquianguli oppositò lateri æquidistat, vt in scholio propos. 8. lib. 13. demonstrauimus; erit iuncta recta AB, ipsi EF, parallela in pentagono EAMBF: & AC, iuncta ipsi DF, parallela in pentagono AKCFD: Et BC, iuncta parallela ipsi DE, in pentagono DECLB. [a] Plana ergo per rectas DE, EF, & CB, BA, ducta parallela sunt, [b] fasiumque circulos parallelos in sphæra DEF, ABC. Eodem modo erit iuncta KL, ipsi HI, parallela in pentagono ILCKH: Et iuncta KM, ipsi GI, in pentagono GIMAK: Et LM, iuncta ipsi GH, in pentagono LBMHG: Ac propterea circuli in sphæra paralleli erunt GHI, KLM. Non aliter erit AB, iuncta ipsi HI, parallela in pentagono DAHIB: Et iuncta KL, ipsi EF, in pentagono GLFEK. [c] Igitur EF, HI, cùm sint eidem iunctæ AB, vel KL, parallelæ, inter se parallelæ sunt. Eademque ratione DE, GL, cùm sint eidem iunctæ BC, vel KM, parallelæ, inter se parallelæ erunt; propterea quæque plana circulorum DEF, GHI, per rectas DE, EF, & HK, GI, ductæ parallelæ erunt. Omnes ergo quatuor circuli in sphæra DEF, ABC, KLM, GHI, paralleli inter se sunt; & tam circuli DEF, GHI, inter se æquales, ob triangula æquilatera in illis descripta æqualia, quàm circuli ABC, KLM, inter se etiam æquales, ob triangula æquilatera æqualia in ipsis, quæ ex iunctis AB, BC, CA; & KL, LM, MK, constituuntur: quippe cùm latera hæc sint rectæ subtendentes angulos pentagonorum æqualium.

a 15. vndec.
b 1. 1. Theodosij.
c 9. vndec.

QVIA verò iuncta recta KB, quæ connectit non ad easdem partes extrema K, B, parallelarum KL, AB, in parallelis circulis non ad easdem partes centrorum ductarum, sphæræ diameter est, & angulus BAK, rectus, ex 4. lemmate, quòd KA, connectat ad easdem partes extrema K, A, earundem parallelarum; [d] erit quadratum diametri KB, æquale duobus quadratis ex AB, AK. Rursus quia in pentagono EAMBF, recta iuncta AB, angulum AMB, subtendit: Vt autem recta angulum pentagoni subtendens ad latus pentagoni, ita est hexagoni latus ad latus decagoni in eodem circulo descriptorum, ex scholio propositionis secundæ, libri decimiquarti, erit AB, iuncta ad EF, vel AK, ipsi EF, æqualem, vt hexagoni latus ad latus decagoni: Atque idcirco [e] cùm latus pentagoni posit & latus hexagoni, & latus decagoni in eodem circulo descriptorum; erit diameter sphæræ KB, (quæ ambas AB, AK, potest, vt ostendimus.) latus pentagoni in eo circulo, in quo AB, latus est hexagoni, & AK, vel EF, latus decagoni. Quare sphæræ diameter KB, ad iunctam AB, proportionem habet, quam pentagoni latus ad latus hexagoni, at verò ad EF, eam, quam latus pentagoni habet ad latus decagoni: [f] Ac proinde cùm tam AB, latus trianguli æquilateri in circulo ABC, quàm EF, latus trianguli æquilateri in circulo DEF, potentia triplum sit semidiametri sui circuli; erunt circuli DEF, ABC, ac proinde & GHI, KLM, qui illis æquales sunt, illi,

d 47. primi
e 10. tertiidecimi.
f 12. tertiidecimi.

quos in principio propoſitionis deſcripſimus. Ex quo patet, rectam, quæ dupla eſt ſemidiametri initio intentæ, minorem eſſe diametro ſphæræ, vt ſuprà diximus.

His demonſtratis, facili negotio concludemus, ſolidam figuram à nobis deſcriptam D G, *eſſe Icoſaedrũ, cum Icoſaedro in ſphæra deſcripto, cuius baſis triangulum* D E F, *omnes eius anguli ſolidi cadant in terna puncta aliorum trium circulorum parallelorum, è quibus latera triangulorum eduximus; ac proinde ſingula horum latera ſingulis lateribus illius Icoſaedri congruant.*

COROLLARIVM I.

Constat ex his, ſphæræ diametrum ad latus Icoſaedri in ea deſcripti habere proportionem, quam latus pentagoni ad latus decagoni in eodem circulo deſcriptorum: adeò vt ſi diameter ſphæræ fuerit latus pentagoni in aliquo circulo, latus Icoſaedri ſit latus decagoni in eodem illo circulo. Nam deſcripto Icoſaedro D G, *in ſphæra, oſtenſum eſt eſſe diametrum ſphæræ* K B, *ad* E F, *latus Icoſaedri, vt latus pentagoni ad latus decagoni.*

Ex quo ſit, latus Icoſaedri maius eſſe ſemidiametro ſphæræ: quemadmodum & latus decagoni maius eſt ſeſquilatere pentagoni, quippe cùm duo latera decagoni cum vno latere pentagoni triangulum iſoſceles conſtituant: [a] *ac propterea duo latera decagoni maiora ſint latere pentagoni, ideoq; vnum latus decagoni maius dimidio lateris pentagoni.*

a 20. primi

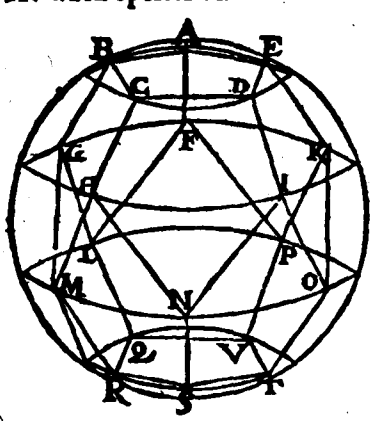
COROLLARIVM II.

Colligitvr etiam ex demonſtratis, diametrum ſphæræ eſſe potentia triplam lateris pentagoni in circulo A B C, *deſcripti. Quoniam enim eſt, vt latus pentagoni ad latus hexagoni in eodem circulo* A B C, *deſcriptorum, ita diameter ſphæræ* K B, *ad iunctam* A B, *ex conſtructione; erit permutando, vt latus pentagoni ad diametrum ſphæræ, ita latus hexagoni ad iunctam* A B: [b] *Eſt autem latus hexagoni in circulo* A B C, *(hoc eſt, ſemidiameter) potentia ſubtriplum rectæ iunctæ* A B, *quòd* A B, *ſit latus trianguli æquilateri. Igitur & latus pentagoni in eodem circulo* A B C, *potentia ſubtriplum eſt diametri ſphæræ, hoc eſt, diameter ſphæræ potentia tripla eſt lateris pentagoni in circulo* A B C, *deſcripti.*

b 12. tertii decimi.

PROBL. 5. PROPOS. 5.

In data ſphæra Dodecaedrum deſcribere.



Describantvr in data ſphæra quatuor circuli paralleli, vt in antecedenti propoſ. A B C D E, F G H I K, L M N O P, Q R S T V, *ita vt ſemidiametri circulorum* A B C D E, Q R S T V, *ſint potentia ſubtriplæ duarum rectarum, ad quas diameter ita ſe habeat, vt pentagoni latus ad latus decagoni; ſemidiametri verò circulorum* F G H I K, L M N O P, *potentia ſint ſubtriplæ duarum rectarum, ad quas diameter ſphæræ ſic ſe habeat, vt pentagoni latus ad latus hexagoni. Deſcripto autem in circulo* A B C D E, *pentagono* A B C D E, *æquilatero, & æquiangulo, ducatur eius lateri* C D, *ad eaſdem partes centrorum parallela* H I, *in circulo* F G H I K, *& æqualis lateri pentagoni eiuſdem circuli, ex 1. lemmate: Recta autem* H I, *ad diuerſas partes centrorum agatur eodem modo parallela* L P, *in circulo* L M N O P: *Huic tandem* L P, *ad eaſdem centrorum partes ducatur parallela* Q V, *in circulo* Q R S T V. *Completis autem pentagonis in hiſce tribus circulis, (quorum tamẽ latera, vt confuſionem vitaremus, non duximus, ſed eorum tantùm extrema puncta notauimus.) erunt ſingula latera eorum ſingulis lateribus pentagoni* A B C D E, *parallela, eo ordine, quo lateri* C D, *parallela ducta ſunt: quod demonſtrabitur, vt in probl. 2. oſtendimus, parallelas eſſe* B C, E F, *nimirum* H G, P O, T V, *latera iuncta, parallela erunt ipſi* B C, *&c. Poſtremò, ex quolibet ep. punctorum quatuor pentagonorum ad viciniora tria puncta ducantur tres rectæ, vt in figura apparet. Ex quolibet enim puncto tres rectas vides eſſe emiſſas. Dico* A S, *Dodecaedrum eſſe, hoc eſt, duodecim pentagona* A B C D E, D E K O I, O I N S T, S T V Q R, Q R M G L, G L F A B, A F P K E, K P V T O, R S N H M, F L Q V P, C D I N H, B C H M G, *æquilatera eſſe, æquiangula, & æqualia. Quod vt oſtendatur, demonſtrandum primùm eſt, Dodecaedrum in ſphæra deſcriptum (poſſe autem in data ſphæra Dodecaedrum deſcribi, docuit Euclides propoſ. 17. lib. 13.) ſuos 20. angulos ſtatuere in quatuor circulis parallelis, quos deſcripſimus, quinos videlicet in ſingulis circulis, atque in eo ſitu, quo eadem 20. puncta notauimus.*

Sit ergo in ſphæra deſcriptum Dodecaedrum A S, *viginti angulos ſtatuens in punctis* A, B, C, D, E, F, G, H, I, K, L, M, N, O, P, Q, R, S, T, V. *Et quoniam recta ſubtendens angulum pentagoni æquilateri & æquianguli oppoſito lateri æquidiſtat, vt in ſcholio propoſ. 8. lib. 13. demonſtrauimus, erit iuncta* G H, *lateri* B C, *parallela in penta-*

in pentagono BCHMG; & iuncta HI, lateri CD, in pentagono CDINH; & IK, lateri DE, in pentagono DEKOI; & KF, ipsi AE, in pentagono AEKPF, & FG, ipsi AB, in pentagono ABGLF; & sic de cæteris. Quia igitur rectæ AB, AE, rectis FG, FK, parallelæ sunt; [a] erit & planum per FG, FK, ductum plano pentagoni ABCDE, per AB, AE, ducto parallelum. Eadem ratione eidem plano pentagoni parallelum erit planum per FG, GH, ductum; quòd hæ rectæ rectis AB, BC, sint parallelæ. Igitur, ex scholio propos. 16. lib. 11. plana per FG, FK, & per FG, GH, ducta, inter se parallela sunt, cum eidem plano pentagoni ABCDE, sint parallela; atque adeò, ex eodem scholio, cùm conueniant in recta FG, vnum planum efficient. Non aliter ostendemus, planum quoque per FK, KI, & planum per KI, IH, & planum per IH, HG, cum plano per FK, FG, ducto, vnum planũ efficere. Plana igitur per puncta A, B, C, D, E, & per puncta F, G, H, I, K, ducta in sphæra [b] efficient duos circulos parallelos ABCDE, FGHIK. Eodemq; modo plana per puncta Q, R, S, T, V, & per puncta L, M, N, O, P, ducta, circulos parallelos efficient QRSTV, LMNOP. Eruntq; tam duo circuli ABCDE, QRSTV, quàm duo FGHIK, LMNOP, inter se æquales, ob pentagona æqualia ABCDE, QRSTV, & ob rectas FG, GH, HI, IK, KF; LM, MN, NO, OP, PL, [c] quæ omnes æquales sunt, cùm subtendant angulos æquales in pentagonis æqualibus.

a 15. vndec.

b 1. 1. Theodosij.

c 4. primi.

DEINDE, quia ex scholio propos. 8. lib. 13. rectæ iunctæ ND, MB, lateri CH, parallelæ sunt in pentagonis CHNID, BGMHC; [d] erunt quoq; ipsæ iunctæ ND, MB, parallelæ: Sunt autem & æquales, q̃ æquales angulos in pentagonis æqualibus subtendant. [e] Igitur & iunctæ NM, BD, æquales erunt ac parallelæ. Eodem modo æquales erunt & parallelæ, iuncta NO, CE, cum connectant duas NC, OE, æquales ac parallelas, quòd vtraq; lateri DI, sit parallela. [f] Circulus igitur LMNOP, circulo ABCDE, parallelus est, cùm ille ducatur per rectas NM, NO, hic verò per rectas BD, CE, quibus illæ parallelæ sunt ostensæ. Non secus ostendentur paralleli circuli QRSTV, FGHIK. Omnes ergo quatuor circuli paralleli sunt.

d 9. vndec.

e 33. primi.

f 15. vndec.

RVRSVS, quoniam iuncta recta EF, OV, cùm, ex scholio propos. 8. lib. 13. lateri PK, in pentagonis AEKPF, TVPKO, æquidistent, [g] parallelæ sunt; nec non & inter se æquales, quòd angulos æquales in pentagonis æqualibus subtendant, [h] erunt & rectæ iunctæ EO, FV, parallelæ & æquales. Quadrilaterum ergo EFVO, in vno plano est, [i] cùm EF, OV, in eodem sint plano cum parallelis EO, FV. Est autem & in circulo, [k] propterea quòd planum, in quo existit, in sphæra circulum efficit. Igitur, ex iis, quæ ad propos. 31. lib. 3. demõstrauimus, cùm in eo quadrilatero opposita latera æqualia sint, quadrilaterũ rectangulum est EFVO; ac proinde cùm omnia latera æqualia sint, subtendentia angulos æquales in pentagonis æqualibus, quadratum erit. Iuncta ergo eius diameter FO, duplum potest lateris FE, ex scholio propos. 47. lib. 1. hoc est, recta iuncta FG, quòd æquales sint FG, FE, subtendentes angulos pentagonorum æqualium: ideoq; qualium partium 1. statuetur quadratum rectæ FG, talium 2. erit quadratum rectæ FO, & ambo quadrata simul earundem partium 3. Quibus [l] cùm æquale sit quadratum iunctæ rectæ OG, quæ diameter sphæræ est; (Nam cùm æquales sint iunctæ FG, ON, subtendentes æquales angulos pentagonorum, & inter se parallelæ, quòd duabus parallelis AB, ST, parallelæ sint, ex scholio propos. 8. lib. 13. erit, ex lemmate 4. iuncta recta OF, ad FG, perpendicularis, & OG, diameter sphæræ.) erit quoq; quadratum diametri sphæræ 3. qualium 1. est quadratum rectæ FG, hoc est, quadratum diametri sphæræ quadrati rectæ FG, triplum erit. [m] Est autem & quadratum lateris trianguli æquilateri triplum quadrati semidiametri, hoc est, lateris hexagoni. Igitur erit, vt quadratum diametri sphæræ ad quadratum rectæ FG, ita quadratum lateris trianguli ad quadratum lateris hexagoni; [n] atq; adeò vt diameter sphæræ ad rectam FG, ita latus trianguli æquilateri ad latus hexagoni: Vt autem recta FG ad latus trianguli in eodem circulo FGHIK, ita est latus pentagoni eiusdem circuli ad latus trianguli, quòd FG, sit latus pentagoni. Igitur ex æqualitate perturbata erit, vt diameter sphæræ ad latus trianguli æquilateri in circulo FGHIK, ita latus pentagoni ad latus hexagoni, vt in apposita formula apparet. Cùm ergo in figura præcedentis propos. sit quoq; vt diameter sphæræ ad latus trianguli, hoc est, ad iunctam rectam AB, in illa figura, ita latus pentagoni ad latus hexagoni; erit vterque circulus ABC, KLM, illius figuræ vtriq; circulo FGHIK, LMNOP, huius figuræ æqualis.

g 9. vndec.

h 33. primi.

i 7. vndec.

k 1. 1. Theodosij.

l 47. primi.

m 12. tertiidecimi.

n 22. sexti.

Diam. sphæræ.	Latus pentag.
Recta FG.	Lat. triang.
Lat. triang.	Lat. hexag.

PRÆTEREA quia, ex scholio propos. 2. lib. 14. est, vt iuncta recta FG, subtendens angulum pentagoni ABGLF, ad AB, latus pentagoni, ita latus hexagoni ad latus decagoni: Et vt FG, latus pentagoni in circulo FGHIK, ad AB, latus pentagoni in circulo ABCDE, ita latus trianguli in circulo FGHIK, ad latus trianguli in circulo ABCDE; erit quoque vt latus trianguli in circulo FGHIK, ad latus trianguli in circulo ABCDE, ita hexagoni latus ad latus decagoni in eodem circulo cum hexagono descripti. Vt autem diameter sphæræ ad latus trianguli in circulo FGHIK, ita est latus pentagoni ad latus hexagoni in eodem circulo cum pentagono descripti, vt proximè demõstratum est. Igitur ex æquo erit, vt diameter sphæræ ad latus trianguli in circulo ABCDE, ita latus pentagoni ad latus decagoni in eodem circulo cum pentagono descripti, vt in hac altera formula apparet. Cùm ergo in figura præcedentis propos. sit quoq; vt diameter

Diam. sphæræ.	Lat. pẽtagoni.
Lat. triang. in circulo FGHIK.	Lat. hexagoni.
Lat. triang. in circulo ABCDE.	Lat. decagoni.

ſphæra ad EF, latus trianguli in circulo DEF, ita latus pentagoni ad latus decagoni; erit vterque circulus DEF, GHI, figuræ antecedentis propoſ. vtriq; circulo ABCDE, QRSTV, huius figuræ æqualis. Quare circuli ABCDE, FGHIK, LMNOP, QRSTV, ſunt illi, quos in propoſ. antecedenti, & in hac deſcripſimus:

QVIBVS demonſtratis, nullo negotio probabimus, ſolidam figuram AS, à nobis deſcriptam, eſſe Dodecaedrum: quippe cum Dodecaedro in ſphæra deſcripto, cuius baſis pentagonum ABCDE, omnes eius anguli ſolidi cadant in quina puncta aliorum trium circulorum parallelorum, è quibus latera pentagonorum eduximus; ac proinde ſingula horum latera ſingulis lateribus illius Dodecaedri congruant.

COROLLARIVM.

PERSPICVE colligitur ex his, eundem circulum comprehendere & triangulum Icoſaedri, & pentagonum Dodecaedri in eadem ſphæra deſcriptorũ: quia videlicet circulus DEF, figuræ antecedentis propoſ. æqualis eſt circulo ABCDE, figuræ huius propoſ. Id quod demonſtratum quoque eſt lib. 14. propoſ. 5.

MANIFESTVM quoq; eſt, eoſdem prorſus circulos ſuſtinere & angulos ſolidos Icoſaedri, & angulos ſolidos Dodecaedri.

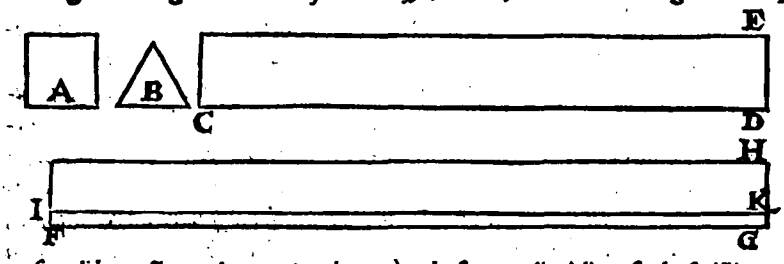
SCHOLIVM.

EX his, quæ hoc loco, & lib. 13. & 14. demonſtrauimus, facilè etiam oſtendemus, ſi omnia quinque corpora regularia in vna eademq; ſphæra deſcribantur, maximum omnium eſſe Dodecaedrum: Deinde Icoſaedrum maius reliquis tribus: Tertiò, cubum maiorem reliquis duobus: Octaedrum denique Tetraedro eſſe maius. Ex quo conſtabit, Euclidem recto ordine quinque hæc corpora conſtruxiſſe, cùm poſt Tetraedrum ſtatim Octaedrum, non autem cubum, conſtituerit. Ita enim ſemper à minoribus ad maiora progreſſus eſt. Sed prius alia nonnulla demonſtranda ſunt. Hinc ergo exordiamur.

I.

Si quadratum, & triangulum æquilaterum æqualia habeant latera; erunt viginti triangula ſimul maiora, quàm octo quadrata ſimul.

HABEANT quadratum A, & triangulum æquilaterum B, latera æqualia. Dico viginti triangula octo quadratis eſſe maiora. Sit enim rectangulum CE, cuius vnum latus CD, octuplum ſit lateris quadrati A, & latus DE, lateri eiuſdem quadrati æquale: Erit q; rectangulum CE, octuplum quadrati A, [a] *cum ſit, vt CD, ad latus quadrati A, ita rectangulum CE, ad quadratum A, ob æqualem altitudinem. Sit quoq; rectangulum FH, cuius vnum latus FG, decuplum ſit lateris trianguli B, & latus GH, æquale perpendiculari ex vno angulo trianguli ad eius baſem demiſſa, hoc eſt, altitudini trianguli B. Et quoniam triangulum rectangulum, cuius vnum latus eſt vigecuplum lateris trianguli B, & alterum latus æquale ipſi GH, hoc eſt, altitudini trianguli B,* [b] *vigecuplum eſt trianguli B; Ei autem triangulo rectangulo æquale eſt, ex ſcholio propoſ. 41. lib. 1. rectangulum FH, quippe cùm baſis FG, dimidium ſit baſis illius trianguli; erit quoque rectangulum FH, vigecuplum trianguli B. Probandum igitur eſt, rectangulum FH, maius eſſe rectangulo CE.*



a 1. ſexti.

b 1. ſexti.

c 13. quartidecimi.

d 12. ſexti.

e 10. quinti

f 14. vel 16. ſexti.

[c] *Quoniam latus trianguli B, hoc eſt, latus DE, potentia ſeſquitertium eſt eius perpendicularis, hoc eſt, lateris GH: Latus autem FG, ad latus CD, potentia proportionem habet, quam 25. ad 16. quòd FG, ſit 10. & CD, 8. hoc eſt, FG, 5. & CD, 4. Erit maior proportio FG, ad CD, quàm DE, ad GH. Eſt enim maior proportio 25. ad 16. ſuperpartiens ſextas decimas, quàm 4. ad 3. ſeſquitertia, quòd maior ſit fractio $\frac{9}{15}$. quàm $\frac{1}{3}$.* [d] *Fiat vt FG, ad CD, ita DE, ad HK; erit q; maior quoque proportio DE, ad HK, quàm ad GH;* [e] *ac proinde maior erit GH, quàm HK. Ducta ergo KI, ipſi FG, parallela, erit vt IK, ipſi FG, æqualis ad CD, ita DE, ad HK.* [f] *Igitur erit IH, rectangulum rectangulo CE, æquale: ideoq; FH, maius, quàm CE. Quod eſt propoſitum.*

II.

Octo quadrata ex ſemidiametro ſphæræ deſcripta æqualia ſunt ſuperficiei cubi in ea ſphæra deſcripti.

g 20. quartidec.

SQVONIAM duo quadrata ex diametro ſphæra deſcripta ſuperficiei cubi in ea ſphæra deſcripti æqualia ſunt: Duo verò eadem quadrata æqualia ſunt octo quadratis ex ſemidiametro ſphæræ deſcripti, quòd quadratum diametri quadruplum ſit quadrati ſemidiametri, ex ſcholio propoſ. 4. lib. 2. efficitur, octo quadrata ſemidiametri ſphæra æqualia quoque eſſe ſuperficiei cubi eiuſdem ſphæra. Quod eſt propoſitum.

III.

Si Octaedrum, cubus, & Icoſaedrum in eadẽ ſphæra deſcribãtur, erit perpendicularis è centro

centro sphæræ ad vnam basim Icosaedri ducta, maior perpendiculari ex eodem centro sphæræ ad vnam basim Octaedri, & cubi ducta.

NAM [a] *quia latus Octaedri maius est latere Icosaedri in eadem sphæra; erit vnum triangulum Octaedri maius quoque vno triangulo Icosaedri. Quare si vtrumque solidum ita intra sphæram constituantur, vt triangulum vnius triangulo alterius sit parallelum, longius à centro aberit Icosaedri triangulum, quàm triangulum Octaedri; cùm vtrumque tribus angulis superficiem sphæræ attingat: Ac proinde perpendicularis è centro sphæræ ad basim Icosaedri deducta maior erit perpendiculari ex eodem centro ad basim Octaedri. Cùm ergo perpendicularis Octaedri æqualis sit perpendiculari cubi;* [b] *quòd basis cubi, & basis Octaedri eodem circulo circumscribantur, ideòque æqualiter à centro distent; erit quoque perpendicularis Icosaedri perpendiculari cubi maior. Quod est propositum.*

a 18. tertiædecimi.

b 21. quartidec.

IIII.

SI Cubus & Icosaedrum in eadem sphæra describantur, superficies Icosaedri superficie cubi maior est.

QVONIAM viginti triangula æquilatera super semidiametro sphæræ maiora sunt octo quadratis ex eadem sphæræ semidiametro descriptis, vt theoremate 1. demonstrauimus: Sunt autem viginti triangula Icosaedri maiora viginti triangulis æquilateris super semidiametro sphæræ constructis, quòd latus Icosaedri semidiametro sphæræ maius sit, ex coroll. 1. problematis 4. superioris. Igitur & viginti triangula Icosaedri multò maiora sunt octo quadratis ex sphæræ semidiametro descriptis. Quam ob rem, cùm viginti triangula Icosaedri totam superficiem Icosaedri conficiant, at octo quadrata ex semidiametro sphæræ descripta, superficiei cubi æqualia sint, ex theoremate 2. paulò antè demonstrato; erit quoque Icosaedri superficies maior superficie cubi. Quod est propositum.

DE COMPARATIONE SOLIDITATVM quinque corporum Regularium in eadem sphæra descriptorum.

HIS præmissis, demonstremus iam, Dodecaedrum maius esse Icosaedro: Icosaedrum maius cubo: Cubum maiorem Octaedro: Octaedrum denique maius Tetraedro. quod hunc in modum fiet.

I.

DODECAEDRVM Icosaedro maius est.

QVONIAM est, [c] *vt cubi latus ad latus Icosaedri, ita Dodecaedrum ad Icosaedrum:* [d] *est autem latus cubi latere Icosaedri maius; maius quoq; erit Dodecaedrum Icosaedro. Quod est propositum.*

c 11. quartidec.

d 18. tertiædecimi.

II.

ICOSAEDRVM cubo maius est.

QVONIAM perpendicularis ex centro sphæræ in vnam basim Icosaedri cadens, maior est perpendiculari ex eodem centro in vnam basim cubi demissa, vt in 3. theoremate præmisso ostensum est: Item ex 4. theoremate, superficies Icosaedri superficie cubi maior quoque est; Erit solidum contentum sub perpendiculari ex centro sphæræ in vnam basim Icosaedri cadente, & tertia parte superficiei Icosaedri contẽtum, maius solido, quod sub perpendiculari ex eodem centro sphæræ in vnam basim cubi cadente, & tertia parte superficiei cubi continetur. Cùm ergo, vt in scholio propos. 20. lib. 14. demonstrauimus, illud solidum Icosaedro sit æquale, & hoc cubo; maius quoq; erit Icosaedrum, quàm cubus. Quod est propositum.

III.

CVBVS Octaedro maior est.

QVONIAM est, [e] *vt latus cubi ad semidiametrum sphæræ, ita Cubus ad Octaedrum: Est autem latus cubi semidiametro sphæræ maius. (Nam* [f] *cùm latus cubi maius sit latere Icosaedri; & latus Icosaedri, ex coroll. 1. problematis 4. superioris, maius semidiametro sphæræ; erit latus cubi multò maius semidiametro sphæræ.) Igitur & cubus maior erit Octaedro. Quod est propositum.*

e 17. quartidec.

f 18. tertiædecimi.

IIII.

OCTAEDRVM Tetraedro maius est.

QVONIAM basis Octaedri minor est basi Tetraedri, [g] *quòd basis Tetraedri ad basem Octaedri proportionem habeat sesquitertiam; erit perpendicularis ex centro sphæræ ad vnam basim Octaedri demissa, maior perpendiculari ex eodem sphæræ centro ad vnam basim Tetraedri cadente: quod probabitur non aliter, quàm suprà theoremate 3. ostẽdimus, perpendicularem in Icosaedro maiorẽ esse perpẽdiculari in Octaedro, & cubo. Est autem & superficies Octaedri superficie Tetraedri maior,* [h] *cùm illa huius sit sesquialtera. Igitur solidum contentum sub perpẽdiculari ex cẽtro sphæræ in vnã basim Octaedri cadente, & tertia parte superficiei Octaedri, maius est solido contẽto sub perpendiculari ex eodẽ centro sphæræ in vnã basim Tetraedri deducta, & tertia parte superficiei Tetraedri. Quocirca cùm, ex scholio propos. 20. lib. 14. illud solidũ Octaedro sit æquale, hoc verò Tetraedro; erit quoq; Octaedrum Tetraedro maius. Quod est propositum.*

g 14. quartidec.

h 14. quartidec.

ALITER. Quoniam est, [i] *vt latus Octaedri ad latus Tetraedri, ita Octaedrum ad triplum Tetraedri:*

i 22. quartidec.

Vt autem latus Tetraedri ad eius tertiam partem, ita est triplum Tetraedri ad tertiam eius partem, id est, ad ipsum Tetraedrum. Igitur ex aqualitate erit quoque, vt latus Octaedri ad tertiam partem lateris Tetraedri, ita Octaedrum ad Tetraedrum. Cùm ergo latus Octaedri maius sit tertia parte lateris Tetraedri;

a 18. tertij decimi. *(Nam [a] quia quadratum lateris Tetraedri sesquitertiũ est quadrati lateris Octaedri; habebit latus Tetraedri ad latus Octaedri proportionẽ minorem sesquitertia, ideoq; multò minorem tripla;*

b 10. quin. *[b] ac proinde tertia pars lateris Tetraedri minor erit latere Octaedri.) Erit quoq; Octaedrũ Tetraedro maius. Quod est propositũ.*

c 17. quartidec. ALITER. *[c] Quoniam Tetraedrum ad Octaedrum se habet, vt rectangulum sub linea potente $\frac{2}{3}$. quadrati lateris Tetraedri, & sub linea continente $\frac{8}{9}$. lateris Tetraedri, ad quadratum diametri sphæræ; Est autem rectangulum illud minus quadrato diametri sphæra, quòd eius latera minora sint sphæra diametro; quippe qua singula minora sint latere Tetraedri. Igitur & Tetraedrum Octaedro minus erit, hoc est, Octaedrum Tetraedro erit maius. Quod est propositum.*

d 32. quartidecimi. ALITER. *[d] Quoniam cubus triplus est Tetraedri; minor verò quàm triplus Octaedri: (Nam [e] cubus ad Octaedrum est, vt latus cubi ad semidiametrum sphæræ; & latus cubi minus est, quàm triplum semidiametri sphæra, quòd & tota diameter, qua cubi latere maior est, minorem proportionem habeat ad semidiametrum, quàm triplum.) Erit Octaedrum maius, quàm Tetraedrum. Quod est propositum.*

e 27. quartidecimi. *EODEM prorsus ordine se mutuò superant cõuexa superficies eorundem corporum Regularium: hoc est, superficies conuexa Dodecaedri maior est superficie conuexa Icosaedri: Superficies conuexa Icosaedri maior superficie conuexa cubi: Conuexa superficies cubi superficie Octaedri maior: Octaedri denique superficies conuexa maior est conuexa superficie Tetraedri.*

f 9. quartidecimi. *QVONIAM enim [f] est superficies Dodecaedri ad superficiem Icosaedri, vt latus cubi ad latus Icosaedri: Est autem cubi latus latere Icosaedri maius, [g] vt suprà demonstratum est: Erit & superficies Dodecaedri superficie Icosaedri maior.*

g 18. tertij decimi. *SVPERFICIEM verò Icosaedri maiorem esse superficie Cubi, demonstratum est paulò antè theoremate quarto, ante comparationem soliditatum quinq; corporum Regularium.*

h 17. quartidec. *DEINDE [h] quoniam est superficies cubi ad Octaedri superficiem, vt latus cubi ad semidiametrũ sphæra: Est autem latus cubi semidiametro sphæra maius, vt in theoremate tertio, quo ostendimus, cubum Octaedro maiorem esse, demonstratum est: Erit quoq; superficies cubi superficie Octaedri maior.*

i 14. quartidec. *DENIQVE [i] quia superficies Octaedri sesquialtera est superficiei Tetraedri; perspicuũ est, Octaedri superficiem maiorem esse Tetraedri superficie.*

Vides igitur superficies & soliditates corporũ Regularium contrario ordine respondere eorundem lateribus: ita vt quò maius fuerit corpus, eò maiorem quidem habeat etiam superficiẽ, at eò minus latus. Nam

k 18. tertij decimi. *[k] vt suprà demonstratum est, Tetraedri latus est omnium maximum, eius verò superficies atq; soliditas, vt hic demonstrauimus, omniũ minima est: Item Dodecaedri latus omniũ est minimũ, eius verò cõuexa superficies & soliditas omnium maxima. Denique quemadmodum, si Tetraedrum, Octaedrum, Cubus, Icosaedrum, & Dodecaedrum in eadem sphæra descripta sint, latera eorum, eo ordine, quo proposita sunt, atq; ab Euclide descripta, se mutuò superant,*

l 18. tertij decimi. *[l] vt suprà ostensum est; ita contrario ordine eorundem superficies conuexa, atque soliditates se mutuò superant, vt hoc loco demonstrauimus.*

CAETERVM pratereundum non est hoc loco id, quod à Pappo demonstratum est lib. 5. Mathematicarum collectionum; soliditates videlicet quinq; corporum Regularium, si Isoperimetra sint, atq; idcirco, non in eadem sphæra constructa, longè aliter se habere, quàm à nobis demonstratum est. Nam corpus, quod plures habet bases, maius semper est corpore pauciorum basium: Ita vt Icosaedrum superet Dodecaedrum, Dodecaedrum maius sit Octaedro, Octaedrum superet Cubum, Cubus denique Tetraedro maius sit.

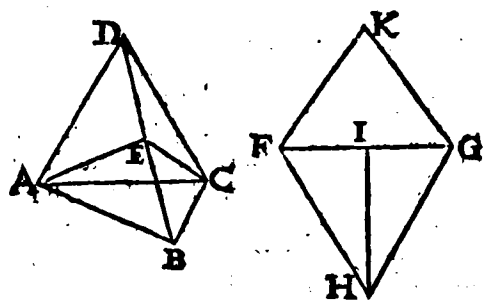
INVENTIO ANGVLI INCLINATIONIS DVArum basium cuiuscunq; solidi Regularis, vnius ad alteram, ex Isidoro Hypsiclis præceptore.

I.

ANGVLVM inclinationis duarum Pyramidis basium, vnius ad alteram, inuenire.

SIT Pyramis ABCD, cuius latere BD, bifariam secto in E, ex angulis A, & C, lateri BD, oppositis rectæ ducantur AE, & CE; quæ cùm perpendiculares sint ad BD, communem sectionem planorum ABD, CBD, in quibus existunt. (

a 8. primi. [a] Sunt enim in triangulis AEB, AED, anguli ad E, æquales, &c.) angulum inclinationis AEC, basium ABD, CBD, continebunt, ex defin. 6. lib. 11. Huic ergo æqualem exhibebimus in quolibet plano, hac ratione. Assumatur FGH, triangulum æquilaterum super rectam FG, lateri pyramidis æqualem constructum, atq; idcirco triangulo cuicunque pyramidis propositæ, ipsi nimirũ ABD, æquale, in quo ducta HI, perpendiculari ad FG, constituatur super FG, trian-



triangulum F G K, habens vtrumque latus F K, G K, æquale perpendiculari H I, hoc eſt, vtrique perpendiculari A E, C E, cùm perpendiculares H I, A E, C E, ſint æquales in triangulis æqualibus. Dico angulum F K G, æqualem eſſe angulo inclinationis A E C, baſium A B D, C B D. Cùm enim latera K F, K G, æqualia ſint lateribus E A, E C; & baſis F G, baſi A C: [a] Æquales erunt anguli F K G, A E C. Dico inſuper angulum inclinationis A E C, acutũ eſſe [b]. Cùm enim latus A D, vel illi æquale A C, ſeſquitertium ſit potentia vtriuſque perpendicularis A E, C E; qualium partium 4. ponetur quadratum rectæ A C, talium 3. erit quadratum vtriuſque rectæ A E, C E; ideoque earundem partium 6. erunt ambo ſimul quadrata rectarum A E, C E. Quare cùm in triangulo A B C, quadratum lateris A C, minus ſit quadratis ſimul laterum A E, C E, acutus erit angulus A E C, vt in ſcholio propoſ. 13. lib. 2. demonſtrauimus.

[a] 8. primi.

[b] 12. quarti decimi.

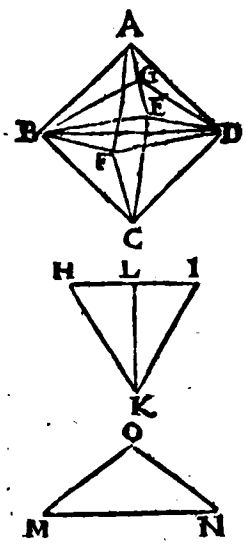
COROLLARIVM

FACILE hinc colligemus, omnes inclinationes baſium pyramidis æquales eſſe. Cùm enim ſinguli anguli inclinationum contineantur binis perpendicularibus ab angulis triangulorum ad baſes oppoſitas ductis, cuiuſmodi ſint A E, C E, ſubtendanturq; à lateribus pyramidis, quale fuit A C; [a] omnes erunt inter ſe æquales, quòd & omnes illæ perpendiculares, quæ ipſos continent, æquales ſint, nec non & latera pyramidis eoſdem ſubtendentia, ſint æqualia.

[a] 8. primi.

II.

ANGVLVM inclinationis duarũ Octaedri baſium, vnius ad alteram, reperire.



EXHIBEATVR Octaedrum A B C D E F, cuius diameter B D. Ex angulis B, & D, ad latus A E, triangulis A B E, A D E, commune, bifariamque ſectum in G, rectæ ducantur B G, D G; quæ cùm perpendiculares ſint ad A E, communem ſectionem planorum A B E, A D E, in quibus exiſtunt, (quòd in triangulis B G A, B G E, anguli ad G, æquales ſint, &c.) continebunt angulum B G D, inclinationis baſium A B E, A D E, per defin. 6. lib. 11. Huic igitur æqualem exhibebimus in plano, quolibet hac via. Sumatur H I K, triangulum æquilaterum ſuper rectam H I, lateri Octaedri æqualem fabricatum, ideóque triangulo cuicunque Octaedri propoſiti, triangulo ſcilicet A B E, æquale, in quo ducta K L, perpendiculari ad H I, conſtituatur ſuper recta M N, quæ æqualis ſit diametro Octaedri B D; hoc eſt, diametro quadrati A B C D, ex A B, latere Octaedri deſcripti, triangulum O M N, habens vtrumque latus M O, N O, perpendiculari K L, æquale, hoc eſt, vtrique perpendiculari B G, D G, cùm perpendiculares K L, B G, D G, in triangulis æqualibus æquales ſint. Dico angulum M O N, æqualem eſſe angulo inclinationis B G D, baſium A B E, A D E. Cùm enim latera O M, O N, æqualia ſint lateribus G B, G D; & baſis M N, baſi B D, [b] Æquales erunt anguli M O N, B G D. Dico præterea, angulum inclinationis B G D, eſſe obtuſum. [c] Cùm enim diameter Octaedri B D, dupla ſit potentia lateris A B; [d] latus verò A B, potentia ſeſquitertium rectæ B G: qualium partium 8. ponetur quadratum diametri B D, talium 4. erit quadratum lateris A B, earundemque 3. quadratum rectæ B G; ideoque ambo ſimul quadrata rectarum B G, D G, talium partium 6. erũt. Quare quadratũ lateris B D, in triangulo G B D, maius eſt quadratis ſimul laterũ G B, G D; Ac propterea angulus B G D, obtuſus erit, vt in ſcholio prop. 12. lib. 2. oſtẽdimus.

[a] 8. primi.

[b] 8. primi.

[c] 14. tertij decimi.

[d] 12. quarti decimi.

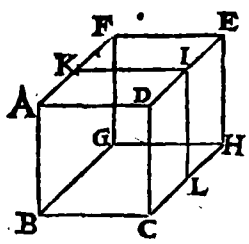
COROLLARIVM.

HINC fit, omnes inclinationes baſium Octaedri æquales eſſe. Cùm enim ſinguli anguli inclinationum contineantur binis perpendicularibus ab angulis triangulorum ad baſes oppoſitas ductis, quales ſunt B G, D G, ſubtendanturq; ab Octaedri diametris, cuiuſmodi eſt B D; [a] omnes inter ſe æquales erunt, quòd & omnes illæ perpendiculares, quæ ipſos continent, æquales ſint, nec non & diametri Octaedri eoſdem ſubtendentes, ſint æquales.

[a] 8. primi.

III.

ANGVLVM inclinationis duarum cubi baſium, vnius ad alteram, inuenire.



a 33. primi.

b 29 primi.

SIT cubus A B C D E F G H, in quo ſecetur latus D E, bifariam in I, necnon & latera illi oppoſita in quadratis A E, E C, commune latus illud D E, habentibus, in punctis K, L. Deinde rectæ ducantur I K, I L; [a] quæ cùm æquales, ac parallelæ ſint lateribus E F, E H, (quòd & K F, I E, inter ſe, nec non & I E, L H, inter ſe æquales exiſtant, & parallelæ.) [b] ideoque angulos rectos ad latus D E, efficiãt, continebunt K I L, angulum inclinationis baſium A E, E C, ex defin. 6. lib. 11. Quoniam verò rectæ I K, I L, parallelæ exiſtentes

c 10. vndec.

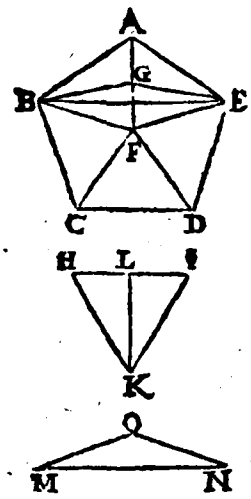
rectis E F, E H, & non in eodem cum illis plano, [c] angulum K I L, æqualem continent angulo recto F E H; Rectus erit angulus inclinationis baſiũ cubi. Quare vt angulo inclinationis baſium cubi æqualis in aliquo plano exhibeatur, cõſtituendus erit angulus rectus. Hic enim; vt modò demonſtrauimus, æqualis erit angulo inclinationis baſium cubi.

COROLLARIVM.

QVOCIRCA, cùm eodem argumento demonſtrari poſſit, quarumlibet duarum baſium cubi angulum inclinationis eſſe rectum; perſpicuè concluditur, omnes inclinationes baſium cubi æquales inter ſe eſſe.

IIII.

ANGVLVM inclinationis duarum baſium Icoſaedri, vnius ad alterã, inuenire.



ESTO pyramis A B C D E F, vna ex 12. pyramidibus Icoſaedri, cuius baſis pentagonum A B C D E, ex quinque Icoſaedri lateribus cõpoſitum, vertex autem F. Diuiſo itaque latere A F, bifariam in G, ducantur ex triangulorum A B F, A E F, latus A F. commune habẽtium, angulis B, & E, lateri A F, oppoſitis rectæ B G, E G, quæ cùm ex demonſtratis in problemate 2. huius ſcholij. perpendiculares ſint ad A F, communem ſectionem planorum A B F, A E F, in quibus ducuntur, comprehendent B G E, angulum inclinationis baſium A B F, A E F; per 6. defin. lib. 11. Huic igitur in plano quouis exhibebimus æqualem, hac arte. Accipiatur triangulum æquilaterũ H I K, ſuper rectam H I, lateri Icoſaedri æqualem fabricatum, hoc eſt, cuiuis triangulo Icoſaedri, ipſi videlicet A B F, æquale, in quo ducta recta K L, ad H I, perpendiculari, conſtruatur ſuper recta M N, quæ rectæ B E, angulum pentagoni A, ſubtendenti ſit æqualis, triangulum O M N, habẽs vtrumque latus M O, N O, perpendiculari K L, æquale, hoc eſt, vtrique perpendiculari B G, E G, cùm perpendiculares K L, B G, E G, in triangulis æqualibus ſint æquales. Dico angulum M O N, angulo B G E, inclinationis baſium A B F, A E F, æqualem eſſe. Cùm enim latera O M, O N, æqualia

d 8. primi.

ſint lateribus G B, G E, & baſis M N, baſi B E; [d] Æquales erunt anguli M O N, B G E. Dico hunc etiã angulũ inclinationis B G E, eſſe obtuſum. Cùm enim B G, angulũ rectũ faciat

e 19. primi.

A G B; [e] erit recta A B, maior quã recta B G; ad eundemq; modũ A E, maior erit quàm E G. Quare rectæ A B, A E, maiores quoq; erũt rectis O M, O N, cũ hæ rectis G B, G E, poſitæ ſint æquales. Si itaq; recta B E, ſuper rectã ſibi æqualem M N, intelligatur poni; cadet angulus

f 21. primi.

A, extra triangulũ M O N, ita vt rectæ A B, A E, rectas O M, O N, prorſus includant. [f] Angulus ergo O, maior erit angulo B A E: At hic obtuſus eſt. (cùm enim quinq; anguli pẽtagoni ſex rectis ſint æquales, per ea, quæ à nobis ſunt demonſtrata in ſcolio propoſ. 32. lib. 1. comprehendet quilibet illorũ rectũ, ac inſuper vnius recti partẽ quintã. obtuſus ergo erit, cũ recto ſit maior.) Multò igitur magis obtuſus erit angulus M O N, hoc eſt, ſibi æqualis B G E.

COROLLARIVM

NON obſcurè quoq; ex his conſequitur, omnes baſium Icoſaedri inclinationes inter ſe æquales eſſe. Nam cùm ſinguli anguli inclinationum contineantur binis perpendicularibus, ab angulis triangulorum ad baſes oppoſitas ductis, quales ſunt B G, E G, ſubtendanturq; à rectis,

a 8. primi.

angulos pentagonorum ſubtẽdentibus, cuiuſmodi eſt B E: [a] omnes inter ſe erũt æquales, quòd & illæ omnes perpẽdiculares, quæ ipſos continẽt, æquales ſint, nec nõ & rectæ illæ omnes, quæ

b 4. primi.

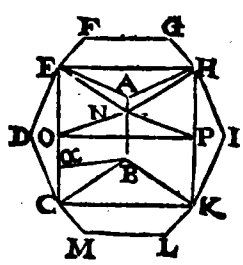
pentagonorum angulos ſubtendunt æquales æqualibus rectis comprehenſos, [b] æquales erunt.

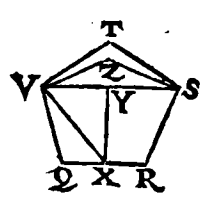
V.

ANGVLVM inclinationis duarũ baſiũ Dodecaedri, vnius ad alterã, reperire.

CVM

CVM, per ea, quæ oſtendimus in propoſ. 8. libri 15. quatuor latera cubi in Dodecaedro deſcripti, ſubtendant quatuor angulos quatuor baſium Dodecaedri ad vnum latus coëuntium; ſint huiuſmodi pentagona ABCDE, EFGHA, AHIKB, BKLMC, ad latus AB, conuenientia; duo quidem ABCDE, AHIKB, ſecundùm idem latus commune AB; alia autẽ duo AEFGH, BCMLK, ſecundùm angulos EAH, CBK. His porrò pentagonis inſcriptum ſit quadratum cubi ECKH, cuius quatuor latera ſubtendant quatuor angulos pentagonorum D, B, I, A. Diuiſo autem latere AB, bifariam in N, ducantur ex N, in planis pentagonorum ABCDE, ABKIH, ad AB, perpendiculares NO, NP, ſecantes latera EC, HK, in O, & P, ad angulos quoque rectos, cùm rectæ EC, HK, ipſi AB, ſint parallelæ, ex ſcholio propoſ. 8. lib. 13. Comprehendũt igitur NO, NP, angulum ONP, inclinationis baſium ABCDE, ABKIH. Cui æqualem in quouis plano hac arte conſtruemus. Super rectam QR, lateri Dodecaedri AB, æqualem, conſtituatur pentagonum æquilaterum & æquiangulum QRSTV, hoc eſt, cuiuis pentagono Dodecaedri, nimirũ ipſi ABCDE, æquale, cuius angulo T, recta ſubtendatur VS, [a] æqualis exiſtens rectæ EC, cùm & latera TV, TS, lateribus DC, DE, æqualia ſint, angulosq; contineãt æquales. Diuiſa deinde recta QR, bifariam in X, ducatur à puncto X, ad QR, perpendicularis XY; propterea q; perpendicularis ad VS, cùm VS, ſint parallela ipſi QR, ex ſcholio propoſ. 8. lib. 13. Ac poſtremò, ſuper recta VS, trianguluſ fabricetur VZS, habens vtrumq; latus ZV, ZS, perpendiculari XY, æquale. Dico angulum VZS, æqualem eſſe angulo inclinationis ONP. Ductis enim rectis NE, NH, VX; cùm latera EA, AN, æqualia ſint lateribus HA, AN: Item lateribus VQ, QX, angulosq; comprehendant æquales; [b] Æquales erunt & baſes NE, NH, VX, & anguli ANE, ANH, QXV; ideoq; & reſidui ex rectis, anguli videlicet ENO, HNP, VXY, æquales erunt. Quoniã igitur anguli ENO, EON, trianguli ENO, æquales ſunt angulis HNP, HPN, trianguli HNP; necnon & angulis VXY, VYX, trianguli VXY; (ſunt enim EON, HPN, VYX, oſtenſi recti.) Et latus NE, lateribus NH, VX, æquale demonſtratum; [c] Æqualia erunt reliqua latera NO, OE, reliquis lateribus NP, PH; Item lateribus XY, YV. Quare rectæ ZV, ZS, æquales exiſtentes ipſi XY, rectis NO, NP, æquales erunt. Iam verò, quia OE, PH, æquales ſunt, ac parallelæ; [d] erit quoq; recta cõiuncta OP, æqualis & parallela ipſi EH, ideoq; æqualis ipſi EC, hoc eſt, rectæ VS. Quã ob rẽ, cùm latera ZV, ZS, lateribus NO, NP, æqualia ſint; baſis item VS, baſi OP; [e] æqualis erit angulus VZS, angulo inclinationis ONP. Dico etiam angulum hunc ONP, inclinationis, eſſe obtuſum. Nam ducta recta Bα, ipſi NO, parallela; cùm ſit quoq; NB, ipſi Oα, parallela, ex ſcholio propoſ. 8. lib. 13. Parallelogrammum erit NOαB, [f] ideoque recta Bα, ipſi NO, æqualis. Quia verò BC, latus pentagoni oppoſitum angulo CαB, qui rectus eſt, ([g] æqualis nimirum interno CON.) maius eſt latere Bα, hoc eſt, recta NO, vel vtraque ZV, ZS, quæ ipſi NO, oſtenſæ ſunt æquales; Erunt duæ rectæ TV, TS, maiores duabus rectis ZV, ZS. Cadit igitur punctum Z, intra triangulum TVS, ita vt rectæ TV, TS, recta ZV, ZS, includant omnino; Atque proinde angulus VZS, ideoque illi æqualis ONP, maior eſt angulo pentagoni T: Hic verò, cùm ſit pentagoni angulus, paulò antè, cùm de inclinatione baſium Icoſaedri ageremus, demonſtratus eſt maior recto. Multò igitur maior recto erit angulus inclinationis ONP, ideoque obtuſus.





[a] 4. primi.

[b] 4. primi.

[c] 26. primi.

[d] 33. primi.

[e] 8. primi.

[f] 34. primi.

[g] 29. primi.

COROLLARIVM.

PATET igitur ex his, omnes inclinationes baſium Dodecaedri æquales eſſe inter ſe. Cùm enim ſinguli anguli inclinationum contineantur binis perpendicularibus à medio puncto lateris Dodecaedri ad duo latera cubi in Dodecaedro deſcripti ductis; quales ſunt NO, NP, ſubtendanturq; à rectis, quæ cubi inſcripti lateribus ſunt æquales, vel certè, quæ rectis ſubtendentibus angulos pentagonorum æquales ſunt, cuiuſmodi eſt recta OP, lateri cubi inſcripti EH, quod angulum pentagoni EAH, ſubtendit, æqualis; [a] *Erunt omnes inter ſe æquales, cùm & omnes illæ perpendiculares, quæ ipſos continent, æquales ſint, necnon & rectæ illæ omnes, quæ eoſdem ſubtendunt, latera videlicet cubi, inter ſe etiam ſint æquales.*

[a] 8. primi.

ELEMENTI DECIMISEXTI FINIS.

INDEX PROBLEMATVM, QVAE HISCE COMMENTARIIS CONTINENTVR:

QVORVM ea, quæ Euclidis ſunt, eodem charactere ſunt expreſſa, quo in propoſitionum demonſtrationibus vſi ſumus: quæ verò adiecta à nobis, charactere, quo ſcholia notauimus. Litera porrò A, primũ tomum, & litera B, ſecundum ſignificat. Vt autẽ faciliùs quiſque inueniat problemata, quæ cupit, digeſſimus ea ſecundùm materias, de quibus proponuntur.

ACVTANGVLVM triangulum. Vide Triangulum.

ÆQVIANGVLA, & æquilatera figura. Vide Figura intra & extra circulum, &c.

ÆQVILATERA, & æquiangula figura. Vide Figura intra & extra circulum, &c.

ÆQVILATERVM triangulum. Vide Triangulum.

ANGVLI proportionales. Vide Figuræ, anguli, & lineæ proportionales.

ANGVLVS.

Angulum datum rectilineum bifariam ſecare. pag. 29. A

Angulum datum rectilineum in quotuis partes æquales diuidere. 29.30. & 352. A

Angulum rectum datum in tres angulos æquales partiri. 61. A

Angulum rectum ad punctum in data recta linea datum conſtituere. 31. A

Angulum rectum ad extremum punctum lineæ rectæ conſtituere. 31.32. & 57. A

Angulum rectũ in data recta p lineã ex puncto extra rectam dato ductam conſtituere. 32. A

Angulum rectum in data recta conſtituere per lineam ductã ex puncto extra rectam dato, quando punctum vicinum eſt datæ rectæ, vel prope extremum plani cuiuſpiam, vel quando recta data prope extremũ plani eſt, vel denique quando & datum punctum eſt vicinum extremo plani, & recta data eſt prope aliud extremum plani. 33. & 57. A

Angulus propoſitus, rectúsne ſit, an obtuſus, acutúsve, cognoſcere. 6. A

Angulum dato angulo rectilineo æqualem ad datam rectam lineam, datumque in ea punctum conſtituere. 42. & 43. A

Angulos rectilineos, & arcus circulorũ reperire incommenſurabiles. 359. A

Ex tribus angulis planis, quorum duo quomodocunque aſſumpti reliquo ſunt maiores, ſolidum angulum conſtituere. Oportet autem illos tres angulos quatuor rectis minores eſſe. 208. B

Ad datam rectam lineam, eiuſq; punctum angulum ſolidum cõſtituere, ſolido angulo dato æqualem. 212. B

ARCVS. Vide Circulus.

CIRCVLVS.

Circuli dati centrum reperire. 122. A

Per datum punctum in circumferentia rectam, quæ circulum tangat, ducere. 132. A

A dato puncto rectam lineam ducere, quæ datum circulum tangat. 145.146. & 167. A

Circulis duobus datis, quorum neuter alterum includat, rectam lineam ducere, quæ vtrumque circulum tangat. 146. A

Circulum per datum punctum deſcribere, qui alium datum circulum tangat. 148. A

Lineæ rectæ, quæ circulum ſecat, lineam parallelam ducere, quæ eundem circulum tangat. 150. A

Circuli ſegmento dato, deſcribere circulum, cuius eſt ſegmentum. 157. A

Circulum per tria puncta non exiſtentia, in linea recta deſcribere. 158. & 178. A

Arcum datum ſecare bifariam. 164. A

Circuli ſegmentum ſuper datam rectam deſcribere, in quo angulus exiſtens ſit æqualis dato angulo rectilineo. 168. A

A dato circulo ſegmentum abſcindere, capiens angulum, angulo dato rectilineo æqualem. 169. A

Circulis duobus datis, quorum vnus non ſit totus intra alium; circulum, qui vtrumque tangat, deſcribere. 149. A

In circulo dato rectam accommodare datæ rectæ, quæ diametro maior non ſit, æqualem. 175. A

In circulo rectam accommodare æqualem datæ rectæ, quæ circuli diametro maior non ſit, & alteri rectæ parallelam. 175. A

Dato circulo, & duobus punctis, ſiue extra circulum, ſiue intra, dummodò neutrum ſit in circumferentia; per ea puncta duas rectas ducere ad aliquod vnum punctum circumferentiæ, ita vt recta contingens duo puncta, quibus duæ illæ rectæ circumferentiam ſe-

unt, parallela ſit rectæ data duo puncta connectenti. 347. *A*

Datum arcum circuli in datam proportionem dividere. 351. *A*

Datum arcum, vel angulum rectilineum in quotuis partes æquales partiri. 352. *A*

Dato arcui circuli, ex cuius quadrante quadratrix deſcripta eſt, rectam lineam inuenire æqualem. 353. & 354. *A*

Dato circulo quadratum æquale conſtituere. 355. *A*

Dato quadrato, circulum æqualem deſcribere. 356. *A*

Circulum cuicunque rectilineo æqualem deſcribere: Et circulo figuram rectilineã æqualem conſtituere, quæ cuicunque alteri ſimilis ſit. 356. *A*

Datæ rectæ lineæ circumferentiam circuli æqualem reperire. 356. & 357. *A*

Datis duobus circulis inæqualibus, datoq; arcu in vno eorum, ex altero arcum æqualem abſcindere. 357. *A*

Arcus circulorum, & angulos rectilineos inuenire incommenſurabiles. 359. *A*

CIRCVMFERENTIA. Vide Circulus.

COMMENSVRABILES, & incommenſurabiles magnitudines.

An duæ quæcunque magnitudines propoſitæ ſint commenſurabiles, nécne, explorare. 104. *B*

Duabus magnitudinibus commenſurabilibus datis, maximam earum communem menſuram inuenire. 104. B

An quotlibet magnitudines propoſitæ ſint commenſurabiles, nécne, conſiderare. 105. *B*

Tribus magnitudinibus commenſurabilibus datis, maximam earum menſuram communem inuenire. 105. B

Propoſitis duabus magnitudinibus commẽſurabilibus, quam proportionem habeant in numeris, inuenire. 107. *B*

Rectam inuenire, ad quam ita ſe habeat quæuis alia data recta, vt numerus ad numerũ. 108 B

Rectam inuenire, ad cuius quadratum ita ſe habeat quadratum alterius datæ rectæ, vt numerus ad numerum. 108. B

Propoſitæ rectæ lineæ inuenire duas rectas incommenſurabiles, alteram quidem longitudine tantùm, alteram verò etiam potentia. 114. B

COMPOSITI inter ſe numeri. Vide Numerus par, &c.

COMPOSITVS numerus. Vide Numerus par, &c.

CONVS, & Cylindrus. Vide Parallelepipedum, &c.

CORPVS Regulare. Vide Figura intra & extra circulum, &c.

CVBVS numerus. Vide Numerus planus, &c.

CYLINDRVS, & Conus. Vide Parallelepipedum, &c.

DIAMETER circuli. Vide Circulus.

FIGVRA intra, & extra circulum, ſphæram, aſque aliam figuram.

In circulo dato triangulũ deſcribere dato triangulo æquiangulum. 176. A

Circa datum circulum triangulum deſcribere dato triangulo æquiangulum. 176. A

In dato triangulo circulum deſcribere. 176. & 177. A

Trianguli lateribus cognitis, inuenire puncta, in quibus circulus inſcriptus ipſa latera tangere debet. 177. & 178. *A*

Circulum circa datum triangulum deſcribere. 178. A

In dato circulo quadratum deſcribere. 179. A

Circa datum circulum quadratum deſcribere. 179. A

In dato quadrato circulum deſcribere. 179. A

Circa datum quadratum circulum deſcribere. 179. & 180. A

In dato circulo pentagonum æquilaterum & æquiangulum inſcribere. 181. A

Super datam rectam pentagonum æquilaterum, & æquiangulum deſcribere. 181. *A*

Circa datum circulum pentagonum æquilaterum, & æquiangulum deſcribere. 182 A

Circa circulum deſcribere quamcunque figuram regularem, quæ circulo inſcribi poteſt. 182. *A*

In dato pentagono æquilatero & æquiangulo circulum inſcribere. 183. A

In quacunque figura regulari circulum deſcribere. 184. *A*

Circa pentagonum æquilaterum & æquiangulum circulum deſcribere. 184. *A*

Circa quamcunque figuram regularem circulum deſcribere. 184. *A*

In circulo hexagonum æquilaterum, & æquiangulum deſcribere. 184. & 185. A

In circulo quintidecagonum æquilaterum & æquiangulum deſcribere. 185. & 186. A

Figura quacunque regulari circulo inſcripta, deſcribere ſimilem circa circulum, & in ea circulum inſcribere, & circa eandem circulum deſcribere. 190. *A*

Figura quacunque regulari circulo inſcripta, inſcribere aliam duplo plurium laterum. 190. *A*

Figuras regulares imparium laterum circulo inſcribere beneficio Iſoſcelium, quorũ anguli ad baſim angulorum ad verticem multiplices ſunt. 191. *A*

Figuras regulares parium laterum circulo inſcribere beneficio Iſoſcelium, quorũ anguli ad baſim angulorum ad verticem multiplices ſeſquialteri ſunt. 191. *A*

Figuram quamcunque regularem abſque beneficio Iſoſcelium circulo practicè inſcribere. 191. *A*

Figuram quamcunque regularem ſuper datam rectam practicè deſcribere. 192. *A*

Latus pentagoni, & decagoni in eodem circulo, ex Ptolemæo inuenire. 192. *A.* & 261. *B*

Quadratricem lineam intra quadrãtem, & quadratum deſcribere. 349. & 350. *A*

Duobus circulis circa idem centrum exiſtentibus, in maiori circulo polygonum æquilaterum & parium laterum inſcribere, quod non tangat minorem circulum. 246 B

Ex quo fit, perpendicularem ad diametrum ductam, ab extremitate lateris polygoni inscripti, quod cum diametro conuenit, totam extra minorem circulum cadere. 247. B

Duabus sphæris circa idem centrum existentibus, in maiori sphæra solidum polyedrũ inscribere, quod nõ tangat minoris sphæræ superficiem. 247. B

Ex quo fit, si in quauis alia sphæra describatur solidum polyedrum simile prædicto polyedro, proportionem polyedri in vna sphæra ad polyedrũ in altera sphæra esse triplicatam eius, quá habent sphærarum diametri. 250. B

Pyramidem constituere, & data sphęra complecti. 264. & 344. B

Octaedrum constituere, & sphæra complecti, qua & pyramidem. 265. & 345. B

Cubum constituere, & sphæra complecti, qua priores figuras. 267. & 345. B

Icosaedrum constituere, & sphæra complecti, qua & ante dictas figuras. 268. & 346. B

Dodecaedrum constituere, & sphæra complecti, qua & prædictas figuras. 272. & 348. B

Latera quinque corporum Regularium exponere, & inter se comparare. 275. B

Numerum laterum, & angulorum solidorum cuiusque corporis Regularis expeditè cognoscere. 278. B

In dato cubo pyramidem describere. 305. B

In data pyramide octaedrum describere. 305. B

In dato cubo octaedrum describere. 306. B

In dato octaedro cubum inscribere. 307. B

In dato Icosaedro dodecaedrũ inscribere. 307. B

In dato octaedro pyramidem describere. 308. B

In dato Dodecaedro Icosaedrum describere. 309. B

In dato Dodecaedro cubum describere. 310. B

In dato Dodecaedro octaedrum describere. 311. B

In dato Dodecaedro Pyramidem describere. 311. B

In dato Icosaedro cubum describere. 312. B

In dato Icosaedro Pyramidem describere. 312. B

In dato cubo Dodecaedrum describere. 312. B

In dato cubo Icosaedrum describere. 315. B

In dato Icosaedro octaedrum describere. 317. B

In dato octaedro Icosaedrum describere. 317. B

In dato octaedro Dodecaedrum describere. 319. B

In data pyramide cubum describere. 319. B

In data pyramide Icosaedrum describere. 322. B

In data pyramide Dodecaedrum describere. 322. B

In dato solido Regulari sphæram describere. 322. B

Datis duobus circulis in sphæra parallelis, datáq; in vno eorum linea recta, ducere in altero diametrũ huic rectæ datæ parallelam: vel etiã aliam rectam, quæ datæ rectæ sit æqualis & parallela, dummodò recta data maior non sit diametro posterioris circuli. 341. B

In data sphæra duos circulos æquales, ac parallelos describere, ita vt diameter sphæræ sit vtriusque diametri potentia sesquialtera. 343. B

Angulum inclinationis duarum basium cuiusque corporis Regularis inuenire. 352. 353. & *seq.*

FIGVRAE, anguli, & lineæ proportionales.

A data recta linea imperatã partẽ auferre. 298. A

Datam rectam lineam similiter secare, vt data altera recta secta fuerit. 298. A

Datam rectam in quotuis partes æquales secare. 29. 34. & 299. A

Datam rectam secare in duas partes datã proportionem habentes. 300. A

Datam rectam in quotuis partes Arithmeticè proportionales secare. 301. A

Datis duabus rectis, tertiam proportionalem inuenire. 302. A

Quotuis rectas in data proportione continuè proportionales reperire. 302. & 303. A

Datis tribus rectis, quartam proportionalem inuenire. 303. A

Datis duabus rectis, alias duas in eadem cum illis proportione reperire. 303. A

Datis tribus rectis, quartã inuenire, quæ sit ad tertiam, vt prima ad secundam. 303. A

Datis duabus rectis, mediam proportionalem inuenire. 304. A

Data recta, aliam rectam (quæ minor non sit, quàm dupla illius) ita secare, vt data recta sit media proportionalis inter segmenta huius. 304. A

Secta recta in duas partes vtcunque alterutram earum iterum rursus partiri in duas partes, vt omnes tres partes sint continuè proportionales. 307. A

Datis duabus rectis, mediã proportionalem in Arithmetica proportionalitate inuenire. 307. A

Datis duabus rectis, minorẽ extremitatem in Arithmetica proportionalitate inuenire. 308. A

Datis duabus rectis, maiorem extremitatem in proportionalitate Arithmetica inuenire. 308. A

Datis duabus rectis, mediam proportionalem in Geometrica proportionalitate inuenire. 308. A

Datis duabus rectis, minorem extremitatem in Geometrica proportionalitate inuenire. 308. A

Datis duabus rectis, maiorem extremitatem in Geometrica proportionalitate inuenire. 308. A

Datis duabus rectis, mediam proportionalem in Harmonica proportionalitate inuenire. 308. & 309. A

Datis duabus rectis, minorem extremitatem in Harmonica medietate inuenire. 309. A

Datis duabus rectis, maiorem extremitatem in proportionalitate Harmonica inuenire. 309. A

A data recta dato rectilineo simile, similiterq; positum rectilineum describere. 314. A

Dato rectilineo simile, similiterq; positum, & alteri dato æquale idem constituere. 327. A

Ad datam rectam, dato rectilineo, quod maius non sit parallelogrammo ad dimidiam applicato, æquale parallelogrammum applicare deficiens figura parallelogramma, quæ similis sit alteri parallelogrammo dato. 330. A

Ad datam rectam, dato rectilineo æquale parallelogrammum applicare, excedens figura parallelogramma, quę similis sit parallelogrammo alteri dato. 331. A

Datam rectam terminatam extrema ac media ratione secare. 332. A

A dato rectilineo imperatam partem auferre, ita tamẽ, vt & ablatum, & id, quod relinquitur, simile sit cuiuis rectilineo dato, similiterq; positum. 338. A

Datis duobus rectilineis, tertium proportionale inuenire. 339. A

Datis tribus rectilineis, quartum proportionale inuenire. 339. A

Datis duobus rectilineis, medium proportionale inuenire. 339. A
Dato rectilineo, duo rectilinea æqualia constituere, quæ similia sint, similiterq; descripta cuicunq; rectilineo, habeantq; datam proportionem inter se. 340. A
Dato rectilineo, duo rectilinea æqualia exhibere, quæ cuiuis rectilineo similia sint, similiterq; descripta, lateraq; eorum homologa habeant inter se datam proportionem. 340. A
Datis duobus rectilineis, æquale rectilineum constituere, quod simile sit, similiterq; positum dato rectilineo. 341. A
A dato puncto in latere trianguli rectam ducere, quæ triangulum diuidat in duo segmenta, secundùm datam proportionem. 343. A
Dato rectilineo simile, similiterq; positum rectilineum describere, maius vel minus, secundùm datam proportionem. 343. A
In dato quadrato aliud quadratũ describere in data proportione, quæ dupla maior non sit. 345. A
Datum arcum circuli in datam proportionem dividere. 351. A
Isosceles triangulum constituere, cuius vterque angulorum æqualium ad reliquum habeat proportionem datam. 352. A

FIGVRAE planę quadrilaterę. Vide Parallelogrammum, &c.

FRACTIONES numerorum. Vide Minutiæ numerorum.

FRACTVS numerus. Vide Minutię numerorũ.

IMPAR numerus. Vide Numerus par, &c.

INCOMMENSVRABILES magnitudines. Vide Commensurabiles, & incommensurabiles magnitudines.

IRRATIONALES magnitudines. Vide Rationales, & irrationales magnitudines.

ISOSCELES. Vide Triangulum.

LINEA perpendicularis. Vide Recta linea.

LINEA recta. Vide Recta linea.

LINEAE parallelæ. Vide Recta linea.

LINEAE proportionales. Vide Figuræ, Anguli, & lineæ proportionales.

MAGNITVDINES commensurabiles, & incommensurabiles. Vide Commensurabiles, & incommensurabiles magnitudines.

MAGNITVDINES proportionales in cõmuni.
Proportionem ex duabus, vel pluribus proportionibus componere. 323. A
Proportionem minorem ex maiore auferre. 323. A

MINVTIAE numerorum.
Duas minutias diuersarũ denominationũ ad alias duas eiusdem denominationis illis æquales reducere. 88. B
Integrum numerum quemcunque ad dati denominatoris minutiam reducere. 88. B
Datam minutiam duplare, ac dimidiare. 88. B
Minutiam minutiæ, aut minutiam minutiarũ ad simplicem minutiam reducere. 89. B
Datis duabus minutijs, alterutram earum ad aliam æqualem reducere, ita vt alterius numeri numeros bini inuentæ numerent, per numeros ex numeratore datæ minutiæ reductæ in denominatorẽ alterius minutiæ datæ, & ex numeratore alterius huius minutiæ datæ in denominatorem illius reductæ, productos. 90. B
Datam minutiam ad minimos terminos reducere. 91. B
Datam minutiam ad aliam æqualem datæ denominationis, quando id fieri potest, revocare. 91. B
Minutias plures in vnam summam colligere. 92. B
Minutiam minorem ex maiore detrahere. 92. B
Minutiam per minutiam multiplicare. 93. B
Minutiam per minutiam dividere. 93. B
Minutiam in minutiam inferere. 94. B

NVMERI proportionales in communi.
Ex datis duobus numeris, tres numeros Harmonicè proportionales inuenire, quorum extremi eandem proportionem habeant, quam dati duo numeri. 310. A
Datis duobus numeris, medium Harmonicè proportionalem inuenire. 311. A
Datis duobus numeris, minorem extremitatem in proportionalitate Harmonica inuenire. 311. A
Datis duobus numeris, maiorem extremitatem in Harmonica proportionalitate inuenire 312. A
Datis numeris quotcunque, reperire minimos omnium eandem rationẽ habentium cum ipsis. 35. B
Duos minimos numeros reperire in proportione quotuis numerorum continuè proportionalium. 35. B
Numeros reperire deinceps proportionales minimos quotcunque quis iusserit in data ratione. 40. B
Numeros quotcunque integros, & minimos continuè proportionales aliter reperire, in proportione data nõ multiplici. 41. B
Datis quotcunque rationibus in minimis numeris, reperire numeros deinceps minimos in datis rationibus. 42. B
Duobus numeris datis, considerare, an possit ipsis tertius proportionalis inueniri. 74. B
Tribus numeris datis, considerare, an ipsis quartus proportionalis possit inueniri. 75. B
Datis quotlibet numeris, considerare, an ipsis possit alius proportionalis adiungi. 75. B
Summam quotcunque numerorum continuè proportionalium inuenire. 82. B
Inuenire quotcunque numeros continuè proportionales in data proportione, quorum summa æqualis sit numero, qui ex primo in vltimum gignitur, vel ex quibusuis duobus, qui ab extremis æqualiter distant. 85. B
Item quorum summa sit numerus quadratus, cuius radix sit medius terminus. 85. B
Duos numeros in data proportione inuenire, quorũ summa æqualis sit numero producto ex vno in alium. 85. B

NVMERVS fractus. Vide Minutiæ numerorũ.

NVMERVS Par, Impar, Primus, Pariter par, Pariter par & impariter: Pariter impar, Perfectus.

Dati duo numeri an sint primi inter se, reperire. 13. B

Datis duobus numeris non primis inter se, maximum eorum communem mensuram reperire. 14. B

Dati quotcunque numeri sint ne primi inter se, an non, considerare. 14. B

Datis tribus numeris non primis inter se, maximam eorum communem mensuram reperire. 15. B

Datis duobus numeris, minimũ numerum ab eis numeratum reperire. 35. B

Tribus numeris datis, reperire minimũ ab eis numeratum. 36. B

Datis quotcunque numeris, inuenire minimum ab eis numeratum. 37. B

Numerum reperire, q̃ minimus cùm sit, habeat datas partes. 38. B

Numerum reperire, qui minimus cùm sit, habeat datas partes; hac lege, vt quælibet pars contineat partẽ sibi sequentem. 38. & 39. B

Primis numeris datis quotcunque, inuenire alium primum numerum ab illis diuersum. 77. B

Omnes pariter pares tantùm reperire. 80. B

Omnes pariter impares tantùm inuenire. 81. B

Omnes pariter pares, & pariter impares inuenire. pag. 82. B

Omnes numeros perfectos inuenire. 83. B

NVMERVS Planus, Solidus, Quadratus, Cubus, similes plani, ac solidi numeri.

Quadratum numerum inuenire, cum quo datus quidã numerus quadratum quod numerum constituat. Et à quo idem datus numerus subtractus relinquat quadratum. 98. 99. 100. & 103. A

Planos numeros, vel solidos duos non similes reperire. 62. B

Planos, vel solidos numeros quotcunque non similes inuenire. 114. B

Duos numeros planos similes inuenire, pares, vel impares, vel vtrum pares, & alterum impares. 131. B

Duos numeros quadratos inuenire, ita vt compositus ex ipsis quadratus etiam sit. 131. B

Duos numeros quadratos inuenire, ita vt excessus eorum quadratus etiam sit. 131. & 132. B

Duos numeros quadratos inuenire, quorum excessus non sit quadratus. 132. B

Duos numeros quadratos inuenire, ita vt compositus ex ipsis non sit quadratus. 132. B

Duos numeros inuenire, ita vt compositus ex ipsis ad neutrum ipsorum proportionem habeat, quam quadratus ad quadratum. 133. B

OBTVSANGVLVM triangulum. Vide Triangulum.

PARALLELAS lineæ. Vide Recta linea.

PARALLELIPIPEDVM, & plana parallela.

Dato plano, per datum punctum, quod in eo non sit, parallelum planum ducere. 262. B

A data recta linea, dato solido parallelepipedo simile & similiter positum solidum parallelepipedum describere. 213. B

PARALLELOGRAMMVM, & aliæ figuræ planæ quadrilateræ.

Parallelogrammum constituere, cuius vnus angulorum æqualis sit dato angulo rectilineo, latera q̃ circa illum angulum, datis duabus rectis æqualia. 58. A

Parallelogrammum secare bifariã per rectam per quodnis punctum ductam, quod non sit in diametro, nisi quando diametrum secat bifariam. 64. A

Parallelogrammum dato triangulo æquale cõstituere in dato angulo rectilineo. 78. A

Parallelogrammo dato æquale triangulum constituere in dato angulo rectilineo. 79. A

Parallelogrammum dato triangulo æquale cõstituere super datam rectam, & in dato angulo rectilineo. 80. A

Parallelogrammo dato æquale triangulũ constituere super datam rectam, & in dato angulo rectilineo. 81. A

Parallelogrammũ dato rectilineo æquale constituere super datam rectam, & in dato angulo rectilineo. 81. A

Parallelogrammum datis quotcunque rectilineis æquale constituere super datam rectam, et in dato angulo rectilineo. 82. A

Rectilineis duobus inæqualibus datis, excessum maioris supra minus inquirere. 82. A

Quadratum supra datã rectam cõstruere. 82. A

Quadratis duobus inæqualibus datis, inuenire alia duo quadrata, quæ et æqualia inter se sint, & simul sumptæ æqualia duobus datis simul sumptis. 86. A

Quadratis quotlibet datis, siue æqualibus, siue inæqualibus, inuenire quadratum omnibus illis æquale. 87. A

Quadratis duobus datis, alteri illorũ adiungere figuram, quæ reliquo quadrato sit æqualis, ita vt tota figura compositâ sit etiam quadrata. 87. A

Quadratum dato rectilineo æquale constituere. 117. A

Dato excessu diametri alicuius quadrati supra latus eiusdem: inuenire latus ipsius quadrati. 118. A

Dato circulo quadratum æquale constituere. 355. A

Dato quadrato, circulum æqualem describere. 356. A

PAR, & impar numerus. Vide Numerus par, &c.

PARITER par, pariter par & impariter, ac pariter impar. Vide Numerus par, &c.

PERFECTVS numerus. Vide Numerus par, &c.

PERPENDICVLARIS linea. Vide Recta linea.

PLANA figura intra, & extra circulum, atque aliam figuram. Vide Figura intra & extra circulum, &c.

PLANAE figuræ quadrilateræ. Vide Parallelogrammum, &c.

PLANA parallela. Vide Parallelepipedum, &c.

PLANI numeri similes. Vide Numerus planus, Solidus, Quadratus, &c.

PLANVS angulus. Vide Angulus.

PLANVS numerus. Vide Numerus planus.

PORTIO circuli. Vide Circulus.

PRIMI inter se numeri. Vide Numerus primus, &c.

PRIMVS numerus. Vide Numerus primus, &c.

PRISMA. Vide Parallelepipedum, &c.

PROPORTIO Figurarum, Angulorum, & Linearum. Vide Figuræ, Anguli, & lineæ proportionales.

PROPORTIO magnitudinum in communi. Vide Magnitudines proportionales in communi.

PROPORTIONALES magnitudines in communi. Vide Magnitudines proportionales in communi.

PROPORTIONALES numeri in communi. Vide Numeri proportionales in communi.

PROPORTIO numerorum in communi. Vide Numeri proportionales in communi.

PYRAMIS. Vide Parallelepipedum, &c.

QVADRATVM. Vide Parallelogrammum, &c.

QVADRATVS numerus. Vide Numerus Planus, Solidus, &c.

QVADRILATERÆ figuræ planæ. Vide Parallelogrammum.

RATIONALES, & Irrationales magnitudines.

Duas Rationales longitudine & inter se, & expositæ Rationali commensurabiles inuenire, quarum vna Rationali expositæ sit æqualis. 122. B

Duas Rationales longitudine & inter se, & expositæ Rationali commensurabiles inuenire, quarum neutra Rationali expositæ æqualis sit. 122. B

Duas Rationales longitudine quidem inter se, potentia verò tantùm expositæ. Rationali commensurabiles inuenire. 122. B

Rationales quotcunque longitudine inter se commensurabiles inuenire. 123. B

Duas Rationales potentia tantùm inter se commensurabiles inuenire, quarum altera expositæ Rationali sit æqualis. 124. B

Duas Rationales potentia tantùm inter se commensurabiles inuenire, quarum neutra sit expositæ Rationali æqualis. 124. B

Rationales quotcunque potentia tantùm inter se commensurabiles reperire. 124. & 125. B

Datis quotcunque Rationalibus potentia solùm commensurabilibus, inuenire alium Rationalem illis omnibus potentia tantùm commensurabilem. 125. B

Duas Medias rectas longitudine commensurabiles, atque duas potentia tantùm commensurabiles inuenire. 128. B

Medias inuenire potentia tantùm commensurabiles, quæ Rationale comprehendant. 130. B

Medias inuenire potentia tantùm commensurabiles, quam Medium contineant. 131. B

Duas Rationales inuenire potentia tantùm commensurabiles, ita vt maior, quàm minor, plus possit quadrato rectæ longitudine sibi commensurabilis. 133. B

Duas Rationales inuenire potentia tantùm commensurabiles, ita vt maior, quàm minor plus possit quadrato rectæ sibi longitudine incommensurabilis. 134. B

Duas Medias inuenire potentia tantùm commensurabiles, quæ Rationale contineant, ita vt maior plus possit, quàm minor, quadrato rectæ sibi longitudine commensurabilis, vel incommensurabilis. 134. B

Duas Medias inuenire potentia solùm commensurabiles, quæ Medium contineant, ita vt maior plus possit, quàm minor, quadrato rectæ sibi longitudine commensurabilis, vel incommensurabilis. 135. B

Duas rectas inuenire potentia incommensurabiles, quæ faciant compositum quidem ex ipsarum quadratis, Rationale, rectangulum verò sub ipsis contentum, Medium. 116. B

Duas rectas inuenire potentia incommensurabiles, quæ faciant compositum quidem ex ipsarum quadratis Medium, Rectangulum verò sub ipsis contentum, Rationale. 117. B

Duas rectas inuenire potentia incommensurabiles, quæ faciant & compositum ex ipsarum quadratis Medium, & rectangulum sub ipsis contentum, Medium, incommensurabile ei, composito ex ipsarum quadratis. 118. B

Duas Medias inuenire longitudine, & potentia incommensurabiles. 138. B

Sex genera linearum Irrationalium, quæ ex binis nominibus dicuntur, inuenire. 146. B

Sex genera linearum Irrationalium, quæ Apotomæ dicuntur, inuenire. 167. B

RECTA LINEA.

Rectæ datæ lineæ æqualem rectam lineam ad datum punctum ponere. 21. A

Rectam lineam æqualem datæ minori ex maiore detrahere. 22. A

Rectam lineam datam finitam bifariam secare. 30. A

Rectam perpendicularem ad rectam lineam ex puncto in ea dato educere. 31. A

Rectam perpendicularem ad rectam in puncto extremo erigere. 32. & 33. A

Rectam perpendicularem ad rectam ducere ex puncto extra eam dato. 32. & 33. A

Rectam

Rectam perpendicularẽ ad rectam ducere ex puncto extra eam dato, quando punctum datum est vicinum data rectæ, vel prope extremũ plani cuiuspiã, vel quando recta data prope extremũ plani est, vel leniq; quãdo & datũ punctum est vicinũ extremæ plani, & recta data est prope alia de extremum plani. 53. & 57. A

Rectæ datæ parallelam rectam à dato puncto ducere. 55. A

Rectam lineam à puncto dato ad rectam lineam propositam ducere, quæ cũ data recta angulum efficiat dato angulo rectilineo æqualem. 56. A

Rectam lineam data recta parallelam ducere per punctum datæ rectæ vicinum. 57. A

Inter duas rectas infinitas angulum facientes lineam rectam datæ lineæ æqualem collocare, quæ cum vtralibet earũ faciat angulum dato angulo æqualem, dummodo datus angulus, & angulus comprehensus datis rectis minores sint duobus rectis. 64. A

Rectam datam lineam finitam, in quotlibet partes æquales secare. 75. & 198. A

Rectis duabus inæqualibus datis, inuenire id, quo plus potest maior, quam minor. 86. 87. A. & 117. B

Datis duabus rectis, siue æqualibus, siue inæqualibus, inuenire rectam, quæ illas potest. 86. A. & 117. B

Rectam lineam datam secare, vt rectangulum sub tota, & altero segmento æquale sit quadrato reliqui segmenti. 106. A

Datis duabus rectis, alterutri earum rectam adiungere, vt rectangulum sub tota composita, & adiuncta, æquale sit quadrato alterius. 173. A

Rectam lineam cuilibet arcui circuli, ex cuius quadratrice Quadratrix linea describitur, æqualem inuenire. 353. & 354. A

Duabus datis rectis inæqualibus quartam partem quadrati ex minore descripti ad maiorem applicare ita vt deficiat figura quadrata. 119. B

Datam rectam lineam ita secare, vt rectangulum sub segmentis contentum, æquale sit dato rectilineo, quod tamen maius non sit, quam quadratum à dimidia linea descriptum. 119. B

A dato puncto in sublimi ad subiectum planũ perpendicularem rectam ducere. 200. B

Dato plano, à puncto, quod in illo datum est, perpendicularẽ rectam excitare. 200. & 201.

Per rectam in plano quouis datam planum ducere, quod ad ipsum planum sit rectum. 205. B

RECTANGVLVM parallelogrammum. Vide Parallelogrammum, &c.

RECTANGVLVM triangulum. Vide Triangulum.

REGVLARIS figura. Vide Figura intra & extra circulum, sphæram, &c.

SCALENVM triangulum. Vide Triangulum.

SEGMENTVM circuli. Vide Circulus.

SIMILES plani ac solidi numeri. Vide Numerus planus, &c.

SOLIDA Figura intra, & extra sphæram, atque aliam figuram. Vide Figura intra, & extra circulum, &c.

SOLIDI numeri similes. Vide Numerus planus, &c.

SOLIDVM Regulare. Vide Figura intra, & extra circulum, &c.

SOLIDVS angulus. Vide Angulus.

SOLIDVS numerus. Vide Numerus planꝰ, &c.

SPHAERA. Vide Figura intra & extra circulũ, sphæram, &c.

TRAPEZIVM. Vide Parallelogrammum, &c.

TRIANGVLVM.

Triangulum æquilaterum super data recta linea terminata constituere. 19. A

Isosceles super data recta constituere. 20. A

Scalenum super data recta constituere. 20. & 21. A

Triangulum ex tribus rectis lineis, quæ sunt tribus datis rectis lineis æquales, quarũ quælibet duæ reliqua sint maiores, cõstituere. 41. A

Triangulum alteri dato triangulo æquilaterum, & æquiangulum constituere. 42. A

In scaleno, & Isoscele, cuius basis minor non sit vtrouis latere, duas rectas intra triangulum ducere, quarum vtraq; simul vtri q; lateri simul sit æqualis. 65. A

In æquilatero, vel Isoscele, cuius basis vtrouis latere minor sit, quælibet duæ lineæ intra triangulum ductæ, sunt simul minores duob. lateribus simul. 65. & 66. A

In scaleno, & Isoscele, cuius basis minor non sit vtrouis latere, duas rectas intra triangulum ducere, quarum vtraq; vtri q; lateri sit æqualis, vel maior. 66. A

Triangulum bifariam secare per lineam à quouis puncto in vno latere dato ductam. 71. A

Triangulo dato æquale parallelogrammũ constituere in dato angulo rectilineo. 78. A

Triangulum dato parallelogrammo æquale constituere in dato angulo rectilineo. 79. A

Triangulo dato parallelogrammũ æquale constituere super datam rectam, & in dato angulo rectilineo. 80. A

Triangulum dato parallelogrammo constituere æquale super datã rectam, & in dato angulo rectilineo. 81. A

Trianguli rectanguli cognitis duobus lateribus, in cognitionem reliqui lateris peruenire. 87. A

Amblygonium triangulũ constituere, in quo propos. 12. lib. 2. numeris posit accommodari. 108. A

Oxygonium triangulum construere, in quo propos. 13. libri 2. numeris posit accommodari. 112. & 113. A

Trianguli cuiusuis aream cognoscere. 116. A

Isosceles construere, quod habeat vtrumq; angulorum ad basim reliqui duplum. 180. A

Isosceles oxygonium construere, cuius tertium latus vtrouis æqualium sit maius. 185. A

In dato triangulo quocunque quadratum describere. 344. & 345. A

FINIS.

INDEX
THEOREMATVM, QVAE HISCE COMMENTARIIS CONTINENTVR:

QVORVM ea, quæ ab Euclide demonſtrantur, eodem charactere ſunt notata, quo in propoſitionum demonſtrationibus vſi ſumus: quæ verò à nobis adiecta, charactere, quo ſcholia excuſimus. Litera porrò A, primum tomum, & litera B, ſecundum ſignificat. Vt autem facilius quiſque inueniat theoremata, quæ cupit, digeſsimus ea ſecundùm materias, de quibus demonſtrantur.

ACVTANGVLVM triangulum. Vide Triangulum.

ÆQVIANGVLA, & æquilatera figura. Vide Figura intra & extra circulum, &c.

ÆQVILATERA, & æquiangula figura. Vide Figura intra & extra circulum, &c.

ÆQVILATERVM triangulum. Vide Triangulum.

ANGVLI proportionales. Vide Figuræ, anguli, & lineæ proportionales.

ANGVLVS.

Anguli recti omnes ſunt inter ſe æquales. 16. A
Anguli oppoſiti ad verticem duarum rectarum ſe interſecantium ſunt æquales. 34. A
Anguli quatuor à duabus rectis ſe interſecantibus facti, ſunt quatuor rectis æquales. 35. A
Anguli quotcunque circa idem punctum quatuor rectis ſunt æquales. 35. A
Angulus externus trianguli maior eſt vtrouis interno oppoſito. 36. A
Angulus externus figuræ quadrilateræ maior eſſe poteſt quouis interno oppoſito. 36. A
Anguli duo trianguli quomodocunque ſumpti duobus rectis ſunt minores. 37. A
Anguli duo trianguli orthogonij, & amblygonij ſunt acuti. 37. A
Anguli omnes trianguli æquilateri, & duo Iſoſcelis ſuper baſem, acuti ſunt. 37. A
Anguli tres cuiuſcunque trianguli æquales ſunt duobus rectis: Et externus æqualis eſt duobus internis oppoſitis ſimul. 57. A
Anguli omnes interni cuiuſcunq; figuræ rectilineæ quot rectis angulis æquiualeant. 58. & 59. A
Anguli omnes externi cuiuſcunque figuræ rectilineæ, productis ſingulis lateribus ordinatim verſus eandem partem, quatuor rectis ſunt æquales. 59. A
Anguli quinque, qui fiunt ex concurſu binorum laterum pentagoni productorum æquales ſunt duobus rectis. 60. A
Angulus contactus verè angulus eſt, contra Peletarium, vbi eius ſophiſmata diſſoluuntur. 133. Vſq; ad 145. A
Angulo quouis contactus dari poteſt alius minor, & hoc alius minor vſque in infinitum: Item maior, & hoc alius maior in infinitum. 135. A
Anguli contactus, quo modo inter ſe ſint æquales, et qui æquales ſint. 136. A
Anguli contactus, quotquot ſint, efficiunt aggregatum omni rectilineo acuto angulo minus. 137. A
Anguli contactus Apologia aduerſus Peletarium. 137. Vſq; ad 145. A
Angulus quiſpiam poteſt in infinitũ augeri, & alius in infinitũ minui: & tamen augmentũ illius, quantumcunque ſit, minus ſemper erit decremẽto huius. 145. A
A minori angulo tranſitus ad maiorẽ, & per omnes intermedios, nunquã tamen per æqualem. 145. & 166. A
Anguli oppoſiti in quadrilatero intra circulum deſcripto æquales ſunt duobus rectis. 154. A
Angulus externus quadrilateri in circulo, æqualis eſt ei, qui opponitur angulo ei deinceps. 156. A
Angulus rectus in centro inſiſtit quadranti; acutus verò arcui quadrante minori: & obtuſus maiori. Et contrà, angulus in centro quadranti inſiſtens, rectus eſt: inſiſtens verò arcui quadrante maiori, acutus: & minori, obtuſus. 161. A
Angulus curuilineus angulo rectilineo æqualis eſſe poteſt. 245. A
Si duæ rectæ ſe mutuò tangentes, ad duas rectas ſe mutuò tangentes ſint parallelæ, nõ autem in eodem plano; illæ angulos æquales comprehendent. 199. B
Idem euenit, ſi omnes illæ rectæ ſint in vno plano. 199. & 200. B
Si ſolidus angulus tribus angulis planis contineatur; Ex his duo quilibet vtut aſſumpti tertio ſunt maiores. 205. B
Omnis ſolidus angulus ſub minoribus, quatuor rectis angulis planis continetur. 206. B
Si fuerint tres anguli plani, quorũ duo vtlibet aſſumpti reliquo ſint maiores, cõprehendant autem ipſos rectæ lineæ æquales; fieri poteſt, vt ex lineis æquales illas rectas connectentibus triangulum conſtituatur. 207. B
Si fuerint duo plani anguli æquales, quorũ verticibus ſublimes rectæ lineæ inſiſtant, quæ cum lineis primò poſitis angulos contineãt æquales, vtrumq; vtrique; in ſublimibus autem lineis quælibet ſumpta fuerint puncta, & ab his ad plana, in quibus conſiſtunt anguli primùm poſiti, ductæ fuerint perpendiculares: à punctis verò, quæ in planis à perpendicularibus fiunt, ad angulos primũ poſitos adiunctæ fuerint rectæ lineæ: Hæ cum ſublimibus æquales angulos cõprehendẽt. 220. B

Si fuerint duo anguli plani æquales, quorũ verticibus ſublimes rectæ æquales cum lineis primùm poſitis angulos continentes æquales, vtrumque vtrique: Erunt à punctis extremis linearũ ſublimium ad plana angulorum primùm poſitorum demiſſæ perpendiculares, inter ſe æquales. 221. B

ARCVS. Vide Circulus.

CIRCVLVS.

Circulus à diametro bifariam diuiditur. 8. *A*

Circulus à recta, quæ diameter non ſit, diuiditur non bifariam. 8. *A*

Si in circulo recta aliqua linea rectã quampiam bifariam ſecet, & ad angulos rectos: in ſecante centrum erit circuli. 122. A

Si in circuli peripheria duo puncta coniungantur linea recta: cadet hæc recta intra circulum. 122. & 123. A

Recta circulum in vno tantùm puncto tangit, ſi ita tangat, vt eum non ſecet. 123. A

Si in circulo recta linea per centrum ducta ſecet aliam nõ per centrum ductam bifariam: & ad angulos rectos ipſam ſecabit. Et ſi ad angulos rectos eam ſecet; bifariam quoque eam ſecabit. 123. A

Duobus circulis ex eodem centro deſcriptis, ſi ab aliquo puncto circumferentiæ exterioris recta ducatur interiorem circumferentiam ſecans: erunt eius ſegmẽta inter vtramq; circumferentiam æqualia. 124. *A*

In circulo duę rectę non per centrum extenſæ, ſe mutuò bifariam non ſecant. 124. A

Duo circuli ſe mutuò ſecantes nõ habent idem centrum. 124. A

Duo circuli ſe mutuò interius tangentes, nõ habent idem centrum. 124. & 125. A

Si in diametro circuli à puncto, quod centrum non ſit, plurimæ rectæ cadant: maxima omnium erit, in qua centrum, minima verò reliqua: aliarum autem propinquior ei, quę per centrum, remotiore ſemper maior eſt: Duæ autem ſolùm rectæ æquales ab eodem puncto in circulum cadunt ad vtraſque partes minimæ vel maximæ. 125. A

Si intra circulum punctum ſumatur, ab eoq; in circulum rectarũ cadentiũ, vna quidem ſit maxima, vna verò minima, & reliquarũ aliæ ſint inæquales, aliæ æquales: Maxima quidẽ per centrũ tranſibit, minima verò erit reliqua pars diametri: & aliarũ maiores quidem erunt maximæ propinquiores, æquales autem à minima vel maxima, æqualiter diſtabunt. 126. *A*

Si extra circulum ſumatur punctũ quodpiam, ab eoque puncto ad circulum deducantur rectæ quædam lineæ, quarum vna quidem per centrum protendatur, reliquæ verò vt libet: In cauam peripheriam cadẽtium rectarum, maxima quidem eſt illa, quæ per centrum ducitur; aliarum autem propinquior ei, quæ per centrum tranſit, remotiore ſemper maior eſt, &c. 126. A

Ex puncto extra circulum ſumpto, in peripheriam concauam duæ tantùm lineæ rectæ æquales cadunt, ad vtraſque partes maximæ lineæ. 127. *A*

Si ex puncto extra circulum ducatur recta tangens circulum, erit ea minor omnibus ex eodem puncto in concauam peripheriam cadentibus, maior verò omnibus in conuexam peripheriam cadentibus. 127. *A*

Punctum in circulo, à quo plures quàm duæ rectę æquales ad peripheriam ducuntur, centrum circuli eſt. 127. A

Circulus circulum in pluribus punctis, quàm duobus, non ſecat. 128. A

Recta per centra duorũ circulorum ſe interius tangentium ducta, cadit in circulorum contactum. 128. A

Recta per centra duorũ circulorum ſe exterius tangentium ducta, tranſit per circulorũ contactum. 129. A

Circulus circulum non tangit in pluribus punctis, quàm vno. 129. A

Si in ſemidiametro circuli producta punctum vltra centrum ſumatur, circulus ex eo puncto, vt centro, per extremum ſemidiametri punctum deſcriptus, tanget priorem circulum in eo puncto extremo, totus q; extra eundem cadet. 130. *A*

In circulo æquales rectæ æqualiter à centro diſtant. Et quæ æqualiter à centro diſtãt, ſunt æquales. 130. & 131. A

In circulo maxima quidem linea eſt diameter: aliarum autẽ propinquior centro, remotiore ſemper maior. 131. A

Ex puncto circumferẽtiæ in concauam peripheriam duæ tantùm rectæ æquales cadunt ad vtraſq; partes diametri. 131. *A*

Quæ ab extremitate diametri cuiuſque circuli ad angulos rectos ducitur, extra ipſum circulum cadet; & in locum inter ipſam rectam, & peripheriam comprehenſum, altera recta non cadet: Et ſemicirculi quidem angulus quouis acuto rectilineo angulo maior eſt, reliquus autem minor. 132. A

Recta ad extremum diametri perpendicularis circulum tangit. 132. A

Si circulum recta tangat, recta ad contactum ducta, perpendicularis eſt ad tangentem lineam. 150. A

Circulis duobus ex eodem centro deſcriptis, rectæ interiorem tangentes, & vſque ad exteriorem extenſæ, inter ſe æquales ſunt, bifariam q; in punctis contactuũ ſecantur. 151. *A*

Si circulum tetigerit recta, perpendicularis ad tangentem in puncto cõtactus, per centrum tranſit. 151. A

In circulo, angulus ad centrum duplus eſt anguli ad peripheriam, ſi fuerit eadem peripheria baſis angulorum. 151. A

In circulo ſpatium ad centrum, duplum eſt anguli ad peripheriam, cùm fuerit eadem peripheria baſis ſpatij, & anguli. 152. *A*

In circulo, qui in eodem ſegmento ſunt, anguli ſunt inter ſe æquales. 152. & 153. A

Si à duobus punctis quatuor rectæ ducantur, ex ſingulis binæ, quæ in concurſu contineant duos angulos æquales: circulus per duo illa puncta, & alterutrum illorum angulorum deſcriptus, per alterum quoque angulum tranſibit. 153. *A*

In circulo quadrilaterũ quodcunq; habet angulos oppositos duobus rectis æquales. 154. A
Si in quadrilatero anguli oppositi sunt duobus rectis æquales; circulus circa ipsum describi potest. 154. A
Si ex semicirculis, aut circulis similia segmenta detrahantur; reliqua segmenta similia etiam sunt. 154. A
Arcus, quibus anguli æquales, siue ad centra, siue ad peripherias insistunt, similes sunt: Et anguli arcubus similibus insistentes; siue ad centra, siue ad peripherias, æquales sunt. 155. A
Si duo aut plures circuli idem habeant centrum: Rectæ ex centro ductæ abscindũt arcus similes. 155. et 337. A
Si duo aut plures circuli se mutuò tangant interiùs; Rectæ à puncto contactus ductæ abscindunt arcus similes. 155. A
Si vnum latus quadrilateri in circulo producatur; angulus externus æqualis est angulo, qui opponitur angulo ei deinceps. 156. A
Segmenta similia, & inæqualia non constituentur super eadem recta linea. 156. A
Segmenta similia super æqualibus rectis, sunt æqualia. 156. A
Segmenta similia, & æqualia, sunt constituta super æquales rectas, vel super eandem rectam. 157. A
In circulis æqualibus, vel eodem anguli æqualibus peripheriis insistunt, siue ad centra, siue ad peripherias. 158. A
In circulis æqualibus, vel eodem maior angulus, maiori peripheriæ insistet. 159. A
In circulis æqualibus, vel eodem anguli æqualibus peripheriis insistentes, sunt æquales. 159. & 160. A
In circulis æqualibus, vel eodem angulus maiori peripheriæ insistens, maior est. 160. A
In circulo, duæ rectæ se non intersecantes & intercipientes arcus æquales, parallelæ sunt: Et parallelæ intercipiunt arcus æquales. 160. A
Rectæ, quæ ex medio puncto arcus alicuius ducitur tangens circulũ, parallela est chordæ illius arcus. 160. A
Angulus rectus in centro insistit quadranti; acutus verò, arcui minori quadrante; & obtusus, maiori. Et contrà, angulus in centro insistens quadranti, rectus est; insistens verò arcui quadrãte minori, acutus; et maiori obtusus. 161. A
Recta è centro secans rectam aliã bifariam, secat quoq; arcum bifariam. Et secans arcũ bifariam, secat quoq; chordam bifariam. 161. A. & 261. 281. B
In circulis æqualibus, vel eodem rectæ æquales, auferunt arcus æquales. 162. A
In circulis æqualibus, vel eodem, maior linea maiorem arcum aufert, si de arcubus semicirculo minoribus sermo fiat; minorem verò, si de segmentis maioribus agatur. 162. A
In circulis æqualibus, vel eodem, si arcus sint æquales, erunt & rectæ æquales. 162. A
In circulis æqualibus, vel eodem maior arcus habet chordam maiorem, si de arcubus semicirculo minoribus loquamur: minorem verò, si de maioribus. 162. A
Circuli, è quibus æquales rectæ auferunt similes arcus, æquales sunt. 163. A
Ex circulis inæqualibus rectæ æquales auferunt arcus dissimiles. 163. A
Ex circulis inæqualibus linea rectæ auferentes arcus similes, inæquales sunt. 163. A
Rectæ lineæ auferentes arcus similes inæquales ex quibusuis circulis, inæquales sunt. 163. A
Si in diametro circuli præter centrum sumatur punctum, ab eoq; in peripheriam duæ rectæ nõ in easdem partes cadentes, efficiant ad diametrũ angulos æquales; rectæ illæ æquales erunt, & arcus abscindent æquales. Et si lineæ sint æquales, constituent ad diametrum angulos æquales, abscindentq; arcus æquales. Si deniq; abscindant arcus æquales, erunt rectæ illæ æquales, angulosq; ad diametrum æquales constituent. 163. A
Si in diametro circuli præter centrũ sumatur punctum, à quo ad easdẽ partes duo anguli æquales constituantur, insistent bi anguli arcubus inæqualibus, maiorq; erit ille, qui à minori portione diametri remotior est. 164. A.
In semicirculo angulus rectus est: In maiore segmento acutus: Et in minore obtusus. Angulus item maioris segmenti recto maior: minoris verò segmenti recto minor. 164. A
Segmentum circuli, in quo angulus rectus est, est semicirculus, in quo verò acutus, segmẽtum maius est: & in quo obtusus, segmẽtum minus. Et segmentum, cuius angulus est recto maior, est maius; cuius verò angulus est recto minor, est minus. 166. A
Circulus ex puncto medio lateris recto angulo oppositi in triangulo rectangulo descriptus per vnum angulum, transit quoq; per reliquos. 167. A
Si per centrum circuli alius circulus describatur, & per vtriusque centrum recta ejiciatur: à puncto verò, vbi hæc recta posteriorem circulum secat, ducatur recta vtcunque, secabitur eius portio intra priorem circulum bifariam. 167. A
Si circulum tangat recta, & à contactu ducatur linea vtcunque secans: anguli ad contingentem æquales sunt angulis in alternis segmentis. 168. A
Si recta ducta ad extremitatem rectæ circulum secantis faciat cum ea angulos æquales angulis in alternis segmentis; recta illa ducta circulum tangit. 168. A
Si in circulo duæ rectæ se secent: rectangulum sub segmentis vnius, æquale est rectangulo sub segmentis alterius. 169. A
Si duæ rectæ ita se secent, vt rectangulum sub segmentis vnius æquale sit rectangulo sub segmentis alterius: describi poterit per quatuor earum puncta extrema circulus. 170. A
Si extra circulum sumatur punctum, à quo ducatur recta tangens, & altera secans: erit quadratum tangentis æquale rectangulo sub tota secante, & eius segmento exteriore. 170. A
Si à puncto extra circulum ducantur plures rectæ secantes; rectangula sub totis secantibus, & segmentis exterioribus, æqualia sunt. 171. A
Duæ rectæ tangentes circulum ab eodem puncto ductæ, sunt æquales. 171. A
Ab eodem puncto duæ tantùm rectæ circulum tangentes duci possunt. 171. A
Si duæ rectæ æquales ducantur ab eodem puncto ad circulum, vna autem earum sit tangens, erit & altera tangens. 172. A
*Si à puncto duæ rectæ egredientes ità secentur in binas partes singulæ, vt rectangula sub totis, & segmentis prope punctũ, æqualia sint: describi poterit circulus p extrema

extrema reliquorum segmentorum. 172.A

Si extra circulum punctum sumatur, à quo ducatur recta secans, & altera incidens, vsq; ad circumferentiam conuexam; sit autem quadratũ incidentis æquale rectangulo sub tota secante, & eius segmẽto exteriore: Incidens circulum tanget. 173.A

Si à puncto duæ tangentes ad circulum ducantur, aut duæ secantes æquales: Recta ab eodem puncto per centrum ducta diuidit angulum ab eis comprehẽsum, bifariam. Et contrà, Recta secans angulum bifariam, per centrum circuli transit. 173.A

Æquales rectæ ex circulis inæqualibus auferunt arcus inæquales, maiorq; est arcus minoris circuli, quàm vt similis sit arcui circuli maioris 337.A

Æquales rectæ ex circulis inæqualibus auferunt arcus simpliciter inæquales, maiorq; est arcus circuli minoris simpliciter, & non solùm maior, quàm vt similis sit arcui circuli maioris. 337.A

Si in circulo, ductis duabus diametris sese ad angulos rectos secantibus, altera earum producatur, aiq; ex vna parte quotquot parallelæ agantur diuidentes vtrumque quadrantem in partes æquales, ac denig; ex puncto extremo alterius diametri per extremum punctũ proximæ parallelæ rectæ ducatur, conueniens cum diametro producta: Erit tota recta inter punctum concursus, & concauam peripheriam circuli, omnibus parallelis, vnà cum diametro, quæ producta est, simul sumptis, æqualis. 161.A

Si ad diametrum circuli in extremis punctis duæ perpendiculares excitẽtur, & ab eisdem extremis per vnum idemq; punctum duæ aliæ rectæ circulum secantes ducantur, occurrentes duabus perpendicularibus; erit rectangulum sub vtralibet secantiũ, & eius segmento interiore comprehẽsum, quadrato diametri æquale 346.A

Si in circulo duæ diametri sese ad rectos angulos secent, & ab vnius extremo recta ducatur vtcunq; secans circumferentiam, & alteram diametrum siue productam, siue intra circulum; erit rectangulum sub duobus segmentis huius lineæ ductæ, quorum vnum inter extremum prioris diametri, & secundam diametrum, alterum verò inter idem punctum extremum, & circumferentiam interiicitur, æquale quadrato intra circulum descripto. 346.A

Circumferentia circuli ad eius diametrum quam proportionem plus minus, habeat. 354.A

CIRCVMFERENTIA. vide Circulus.

COMMENSVRABILES & incommensurabiles magnitudines.

Duabus magnitudinibus inæqualibus propositis, si à maiore auferatur maius quàm dimidium, & ab eo quod reliquum est, rursus detrahatur maius quàm dimidium: & hoc semper fiat: relinquetur tandem quædam magnitudo, quæ minor erit proposita minore magnitudine. 102.B

Idem eueniet, si dimidium auferatur, &c. 103.B

Si duabus magnitudinibus inæqualibus propositis, detrahatur semper minor de maiore, alterna quadam detractione, & reliqua minimè præcedentem metiatur: incommensurabiles erunt ipsæ magnitudines. 103.B

Si duabus magnitudinibus incommensurabilibus propositis, detrahatur semper minor de maiore, alterna quadam detractione: nunquam reliqua præcedentem metietur. 104.B

Si duabus magnitudinibus commensurabilibus propositis, detrahatur semper minor de maiore, alterna quadam detractione: nunquam reliqua præcedẽtem metietur. 104.B

Si duabus magnitudinibus commensurabilibus propositis, detrahatur semper minor de maiore, alterna quadam detractione, metietur quædam reliqua præcedentem. 104.B

Magnitudo metiens duas magnitudines, metitur & maximam earum mensuram communem. 105.B

Magnitudo metiens tres aut quotcunq; magnitudines, metitur quoque maximam earum mensuram communem. 106.B

Si sint quotcunq; magnitudines, & totidem numeri, qui bini in eadem ratione sumantur, in qua binæ magnitudines: & ex æqualitate in eadem ratione erunt magnitudines & numeri. 106.B

Commensurabiles magnitudines inter se rationem habent, quam numerus ad numerum. 106.B

Commensurabiles magnitudines proportionem habent eandem, quam numeri, per quos earum mensura communis maxima ipsas metitur. 107.B

Si duæ magnitudines inter se proportionem habeant, quam numerus ad numerum, commensurabiles erunt magnitudines. 107.B

Incommẽsurabiles magnitudines inter se proportionem non habent, quam numerus ad numerum. 108.B

Si duæ magnitudines inter se proportionẽ non habeant, quam numerus ad numerum: incommẽsurabiles erunt magnitudines. 108.B

Si sint tres quantitates continuè proportionales, & aliæ tres continuè quoq; proportionales, sitq; vt prima illarum ad tertiam, ita prima harum ad tertiam; erit & vt prima illarum ad secundam, ita prima harum ad secundam. 109.B

Idem sequitur si plures quantitates sint, quàm tres, &c. 109.B

Quæ à rectis lineis longitudine commensurabilibus fiunt quadrata, inter se proportionẽ habent, quam quadratus numerus ad quadratum numerum: Et quadrata inter se proportionem habentia, quam quadratus numerus ad quadratum numerum; & latera habebunt longitudine commensurabilia. Quæ verò à rectis lineis longitudine incommensurabilibus fiunt quadrata; inter se proportionem non habent, quam quadratus numerus ad quadratum numerum: Et quadrata inter se proportionem nõ habentia, quam quadratus numerus ad quadratum numerũ; neq; latera habebunt longitudine commensurabilia. 109.B

Rectæ longitudine commensurabiles, omnino & potentia sunt commensurabiles: quæ verò potentia commensurabiles sunt, non om-

nino & longitudine commenſurabiles ſunt. Et quæ longitudine ſunt incommenſurabiles, non omnino & potentia incommenſurabiles ſunt, quæ verò potentia incommenſurabiles ſunt, omnino & longitudine incommenſurabiles ſunt. 110.B

Si quatuor magnitudines ſint ꝓportionales, prima verò ſecundæ ſit commenſurabilis; & tertia quartæ commenſurabilis erit. Et ſi prima ſecundæ ſit incommenſurabilis, & tertia quartæ incommenſurabilis erit. 113.B

Recta media proportionalis inter duas rectas potentia tantùm commenſurabiles, vtrilibet illarum incommenſurabilis eſt longitudine & potentia, ac proinde appellabitur Irrationalis, ſi alterutra illarum ſtatuatur Rationalis. 115.B

Quæ eidem magnitudini ſunt commenſurabiles, & inter ſe ſunt commenſurabiles. 115.B

Si ſint duæ magnitudines commenſurabiles, altera verò ſit vni cuipiam commenſurabilis; erit & reliqua eidem commenſurabilis. 115.B

Si ſint duæ magnitudines, & altera quidem eidem ſit commenſurabilis, altera verò incommenſurabilis; incommenſurabiles erunt magnitudines. 116.B

Si ſint duę magnitudines commenſurabiles, altera autem ipſarũ magnitudini cuipiam incommẽſurabilis fuerit; Et reliqua eidem incommenſurabilis erit. 116.B

Quæ incommenſurabilibus ſunt commenſurabiles; & inter ſe incommenſurabiles erunt. 116.B

Si quatuor rectæ proportionales fuerint, prima verò tantò plus poſsit, quàm ſecunda, quantum eſt quadratum rectæ ſibi commenſurabilis longitudine; Et tertia tantò plus poterit quàm quarta, quãtum eſt quadratum rectæ ſibi longitudine commẽſurabilis. Quod ſi prima tantò plus poſsit quã ſecũda, quantum eſt quadratum rectæ ſibi incommenſurabilis longitudine; Et tertia tantò plus poterit quàm quarta, quantum eſt quadratum rectæ ſibi longitudine incommenſurabilis. 117.B

Si duæ magnitudines commenſurabiles componantur; & tota magnitudo vtriq; ipſarum commenſurabilis erit. Quod ſi tota magnitudo vni ipſarum commenſurabilis fuerit, & quæ à principio magnitudines commenſurabiles erunt. 118.B

Si tota magnitudo ex duabus compoſita, commenſurabilis ſit alteri ipſarum; eadem & reliquæ commenſurabilis eſt. 118.B

Si duæ magnitudines incõmmẽſurabiles componantur; & tota magnitudo vtrique ipſarũ incommenſurabilis erit. Quod ſi tota magnitudo vni ipſarum incommenſurabilis fuerit, & quæ à principio magnitudines incommẽſurabiles erunt. 118.B

Si tota magnitudo ex duabus cõpoſita incommenſurabilis ſit alteri ipſarum; eadem & reliquæ incommenſurabilis eſt. 118.B

Si ſint duæ rectæ inæquales, quartæ autem parti quadrati; quod fit à minore, æquale parallelogrammum ad maiorem applicetur, deficiens figura quadrata, & in partes longitudine commenſurabiles ipſam diuidat: Maior tantò plus poterit quàm minor, quantum eſt quadratum rectæ ſibi longitudine commenſurabilis. Quod ſi maior tãtò plus poſsit quã minor, quantum eſt quadratũ rectæ ſibi longitudine commenſurabilis, quartæ autem parti quadrati, quod fit à minore, æquale parallelogrammũ ad maiorem applicetur, deficiens figura quadrata; In partes longitudine commenſurabiles ipſam diuidet. 120.B

Si ſint duæ rectæ inæquales, quartæ autem parti quadrati, quod fit à minore, æquale parallelogrammum ad maiorem applicetur deficiens figura quadrata, & in partes incommẽſurabiles longitudine ipſam diuidat; Maior tantò plus poterit quàm minor, quantum eſt quadratum rectæ ſibi longitudine incõmenſurabilis. Quod ſi maior tantò plus poſsit, quantum eſt quadratum rectæ ſibi longitudine incommenſurabilis, quartæ autem parti quadrati quod fit à minore, æquale parallelogrammum ad maiorem applicetur deficiens figura quadrata; In partes longitudine incommenſurabiles ipſam diuidet. 121.B

Diameter quadrati longitudine incommenſurabilis eſt lateri. 253.254.A. & 47.184.B

Inuentis rectis lineis longitudine incommenſurabilibus, inuenientur & aliæ quam plurimæ magnitudines, planæ ſcilicet, atq; ſolidæ incommenſurabiles inter ſe. 185.B

COMPOSITI inter ſe numeri. vide Numerus par, &c.

COMPOSITVS nũmerus. vide Numerus par, &c.

CONVS, & Cylindrus. vide Parallelepipedum, &c.

CORPVS Regulare. vide Figura intra & extra circulum, &c.

CVBVS numerus. vide Numerus planus, &c.

CYLINDRVS, & Conus. vide Parallelepipedum, &c.

DIAMETER circuli. vide Circulus.

FIGVRA intra, & extra circulum, ſphæram, atque aliam figuram.

Quadrilaterum in circulo habet oppoſitos angulos duobus rectis æquales. 154.A

Si in quadrilatero anguli oppoſiti ſint duobus rectis æquales; circulus circa ipſum deſcribi poteſt. 154.A

Quadrilateri in circulo angulus externus æqualis eſt ei, qui opponitur ei deinceps. 156.A

Quadrilaterum in circulo, cuius duo latera oppoſita ſunt parallela, & æqualia, parallelogrammum eſt rectangulum. 167.A

In omni triangulo, cui circulus inſcribitur, duo quæuis latera

latera superent reliquum recta linea, cuius quadratum quadruplum est rectanguli comprehensi sub recta ab angulo illis lateribus comprehenso in eandem peripheriam ducta, & sub segmento eius exteriore. Quod si angulus comprehensus sit rectus, superabunt duo illa latera latus recto angulo oppositum diametro circuli triangulo inscripti. Vel duo quæuis latera superent reliquum unaquæ rectis tangentibus inter angulum illorum laterum, & circulum interpositis. 177. A

Si centrum circuli triangulo circumscripti cadit intra triangulum, omnes eius anguli acuti sunt: Si in vnius lâtus, angulus oppositus rectus est: Si denique extra vnum latus, angulus oppositus obtusus est. 178. A

In triangulo acutangulo centrum circuli circumscripti cadit intra: In rectangulo, in latus recto angulo oppositum: In obtusangulo denique extra latus angulo obtuso oppositum. 178. A

Quadratum circulo circumscriptum duplum est quadrati eidem circulo inscripti. 180. A

Pentagoni circulo inscripti, hoc est, æquilateri, & æquianguli, angulus quilibet cõtinet tres quintas duorum rectorum, vel sex quintas vnius recti. 181. A

Si in circulo figura quæuis æquilatera & æquiangula describatur, & ad extrema semidiametrorum excitentur perpendiculares, constituent hæ perpendiculares similem figuram circulo circumscriptam. 182. A

Hexagoni circulo inscripti latus, æquale est semidiametro circuli. 185. A

Si in circulo ab eodem puncto inscribantur latera duarum figurarum regularium; continebit arcus inter illa inclusus tot latera alterius figuræ inscribendæ in eodem circulo, quot vnitatibus inter se differunt denominatores eorundem laterum: Figura autem inscribenda continebit tot latera, quot vnitates sunt in numero ex multiplicatione denominatorum producto. 186. & 187. A

Omnis figura æquilatera circulo inscripta, est quoque æquiangula: at non omnis figura æquilatera circulo circumscripta, æquiangula quoque est, nisi quando numerus angulorum ipsius est impar, &c. 187. A

Omnis figura æquiangula circulo circumscripta, est quoque æquilatera: at non omnis figura æquiangula circulo inscripta, æquiangula quoque est, nisi quando numerus laterum, &c. 189. A

Si bifariæ sectiones laterum regularis figuræ rectis coniungantur, inscripta erit similis figura, idem centrum habens. 193. A

Totum triangulum æquilaterum, quadratum, & Hexagonum æquilaterum atq; æquiangulum, ex omnibus figuris regularibus, latius replent. 193. A

In figura æquilatera, & æquiangula, si quidem angulorum numerus impar est, recta linea ex quouis angulo demissa secans oppositum latus bifariam, diuidit quoque angulum bifariam: Et contrà, recta linea diuidens angulum bifariam, secat quoque latus oppositum bifariam. Si verò numerus angulorum est par, recta linea ex ex quouis angulo ad oppositum angulum ducta secat vtrumque angulum bifariam: Et vicissim, recta linea secans quemuis angulum bifariam, cadit in oppositum angulum, eumque bifariam eodem dimidit. 193. A

In basi quadratricis inter quadrantem & quadratum descriptæ, statuatur semidiameter alicuius circuli: eius latus, siue semidiameter quadrantis æquabitur quadranti illius circuli, &c. 354. A

Quæ in circulis polygona similia, inter se sunt, vt à diametris quadrata. 226. B

Si pentagoni æquilateri tres anguli, siue qui deinceps, siue qui non deinceps sint, æquales fuerint, æquiangulum erit ipsum pentagonum. 258. B

Si pentagoni æquilateri, & æquianguli duos angulos, qui deinceps sint, subtendant lineæ rectæ, hæ extrema ac media ratione se mutuò secant, & maiora ipsarum segmenta æqualia sunt pentagoni lateri. 258. B

Recta subtendens vnum angulum pentagoni æquilateri & æquianguli, parallela est opposito lateri. 259. & 311. B

Si hexagoni latus, & decagoni, in eodem circulo descriptorum componantur, tota recta linea extrema atque media ratione secatur, & maius eius segmentum est hexagoni latus. 259. B

Si latus hexagoni secetur extrema ac media ratione, maius illius segmentum est latus decagoni. 259. B

Si lineæ diuisæ extrema ac media ratione maius segmentum fuerit latus hexagoni alicuius circuli, erit minus segmentum latus decagoni eiusdem circuli. Quod si minus segmentum fuerit latus decagoni alicuius circuli, erit maius segmentum latus hexagoni eiusdem circuli. 260. B

Si in circulo pentagonum æquilaterum describatur, pentagoni latus potest & latus hexagoni, & latus decagoni, in eodem circulo descriptorum. 260. B

Diameter circuli ex angulo quouis pentagoni, vel alterius figuræ æquilateræ imparium laterum, dimidit & latus oppositum bifariam, & ad angulos rectos, & arcum, quem illud latus subtendit. 261. B

Si in circulo triangulum æquilaterum describatur, Trianguli latus potentia tripla est eius lineæ, q̃ ex centro circuli ducitur. 262. B

Diameter circuli potentia est sesquitertia lateris trianguli æquilateri in eo circulo descripti. 263. B

Si in circulo triangulum æquilaterum describatur, diameter ex vno angulo ducta dimidit & angulum bifariam, & latus oppositum, ac insuper ad angulos rectos: Semidiameter quoque vicissim bifariam, & ad angulos rectos secabitur à latere opposito. 263. B

Sphæræ diameter potentia est sesquialtera lateris pyramidis in ea descriptæ. 264. & 345. B

Diameter sphæræ potentia est quadrupla sesquialtera semidiametri circuli circa basem pyramidis in ea sphæra existentis descripti. 265. B

Perpendicularis ex centro sphæræ ad basem pyramidis in ea sphæra existentis demissa, sexta pars est diametri sphæræ, & tertia pars semidiametri. 265. B

Altitudo pyramidis intra sphæram continet duas tertias partes diametri. Eo diameter potentia est dupla sesquiquartæ altitudinis pyramidis. 265. B

Sphæræ diameter potentia est dupla lateris Octaedri in ea descripti. 264. & 345. B

In octaedro tres diametri se mutuo ad angulos rectos secant. 266.B

Octaedrum diuiditur in duas pyramides similes & aequales, quarum basis communis quadratum lateris octaedri, altitudo verò semidiameter sphaerae. vel octaedri. 266. & 292.B

Si tetraedrum, & octaedrum in eadem sphaera describantur, erit tetraedri latus, potentia sesquitertium lateris octaedri. 266. 267. & 297.B

Octaedri bases oppositae sunt inter se parallelae. 267. & 341.B

Sphaerae diameter potentia est tripla lateris cubi in ea descripti. 267. & 346.B

Omnes diametri cubi aequales sunt, se se q; bifariam secant in centro sphaerae. Item rectae coniungentes centra basium oppositarum se mutuo bifariam secant in eodem centro. 268.B

Potentia diametri sphaerae, seu cubi aequalis est potentiis laterum octaedri & cubi simul. 268.B

Si diameter sphaerae sit Rationalis linea, latus Icosaedri in ea est Irrationalis linea, quae vocatur Minor. 268.B

Sphaerae diameter potentia est quintupla semidiametri circuli quinque latera Icosaedri ambientis. 271.B

Diameter sphaerae composita est ex latere hexagoni, & duobus lateribus decagoni eiusdem circuli. 271.B

Icosaedri latera opposita sunt parallela. 271. & 346.B

Si diameter circuli sit Rationalis linea; latus Dodecaedri in ea descripti est Irrationalis linea, quae vocatur Apotome. 272.B

Si latus cubi secetur extrema & media ratione, maius segmentum est latus Dodecaedri eiusdem sphaerae. 274.B

Latus cubi aequale est rectae subtendenti angulum pentagoni Dodecaedri eiusdem sphaerae. 274.B

Si recta secetur extrema ac media ratione, minus segmentum sit latus Dodecaedri; maius segmentum erit latus cubi eiusdem sphaerae. 274.B

In Dodecaedro sunt sex latera, quorum bina opposita sunt & parallela, bifariam secantur, & ad angulos rectos à tribus lineis rectis aequalibus sese in centro Dodecaedri bifariam quoque & ad angulos rectos secantibus. 275.B

Recta diuidens opposita latera Dodecaedri bifariam, & ad angulos rectos, secetur extrema ac media ratione; maius segmentum est latus cubi, minus verò, latus Dodecaedri eiusdem sphaerae. 275.B

Plura corpora Regularia, quam quinque, constitui non possunt. 277.B

Cubus & Octaedrum; Item Icosaedrum & Dodecaedrum reciprocantur, quod ad numerum basium & angulorum attinet. Solum tetraedrum tot bases habet, quot angulos solidos. 279.B

Quae ex centro circuli cuiuspiam in pentagoni eidem circulo inscripti latus perpendicularis ducitur, dimidia est vtriusque lineae simul & lateris hexagoni, & lateris decagoni eidem circulo inscripti. 280.B

Perpendicularis ex centro ad latus pentagoni ducta, aequalis est vtriq; rectae simul, & ei quae ex centro ad latus trianguli aequilateri eiusdem circuli ducitur, perpendiculari, & dimidio lateris decagoni. 281.B

Latus hexagoni ad latus decagoni eiusdem circuli eandem proportionem habet, quam recta subtendens angulum pentagoni, ad latus ipsius pentagoni. 281.B

Si linea perpendicularis ex centro circuli ad latus pentagoni ducta secetur extrema ac media ratione, maius segmentum aequale est perpendiculari ex eodem centro ad latus trianguli aequilateri ductae, minus verò aequale est dimidio lateris decagoni eiusdem circuli. 281. & 282.B

Si in circulo pentagonum aequilaterum describatur, quod ex latere pentagoni, & quod ex ea, quae binis lateribus pentagoni subtenditur recta linea, vtraque simul quadrata, quintupla sunt eius, quod ex semidiametro describitur, quadrati. 282.B

Si in sphaera eadem cubus, & Dodecaedrum inscribantur; quadratum lateris cubi, & quadratum lateris Dodecaedri, vtraq; simul quintupla sunt quadrati semidiametri circuli pentagonum Dodecaedri circumscribentis. 282.B

Si latus hexagoni aliquius circuli secetur extrema ac media ratione; maius illius segmentum erit latus decagoni eiusdem circuli. 282. & 281.B

Idem circulus comprehendit & Dodecaedri pentagonum, & Icosaedri triangulum, eidem sphaerae inscriptorum. 283. & 359.B

Si ex centro circuli pentagonum Dodecaedri circumscribentis, perpendicularis ducatur ad vnum latus pentagoni; erit, quod sub illo latere, & perpendiculari comprehenditur, rectangulum trigesies sumptum, Dodecaedri superficiei aequale. 284.B

Si ex centro circuli trianguli Icosaedri circumscribentis, perpendicularis ducatur ad vnum latus trianguli; erit quod sub dicto latere, & perpendiculari comprehenditur, rectangulum trigesies sumptum, Icosaedri superficiei aequale. 284.B

Superficies cuiuslibet Dodecaedri ad superficiem Icosaedri cuiuscunq; etiamsi non describantur ambae figurae in eadem sphaera, est sicut rectangulum sub latere Dodecaedri, & perpendiculari ex centro pentagoni Dodecaedri in latus illud ducta contentum ad rectangulum contentum sub latere Icosaedri, & perpendiculari ducta ex centro trianguli Icosaedri in illud latus. 285.B

Si ex centro circuli triangulum Tetraedri, vel Octaedri, siue quadratum cubi, circumscribentis perpendicularis ducatur ad vnum latus: Erit quod sub dicto latere & perpendiculari cõtinetur, in Tetraedro quidem sumptum sexies, superficiei Tetraedri: In Octaedro verò & cubo, duodecies sumptum superficiei Octaedri, & cubi aequale. 285.B

Rectangulum contentum sub tribus quartis partibus diametri alicuius circuli, & quinq; sextis partibus lineae subtendentis angulum pentagoni aequilateri in eodem circulo descripti, aequale est dicto pentagono. 285.B

Rectangulum contentum sub perpendiculari ex angulo trianguli Icosaedri ad vnum eius latus ducta, & sub quinq; sextis partibus lateris cubi in eadem sphaera cum Icosaedro descripti, aequale est pentagono Dodecaedri eiusdem sphaerae. 285.B

Superficies Dodecaedri ad superficiem Icosaedri in eadem sphaera descripti, eandem proportionem

portionem habet, quam latus cubi ad latus Icosaedri. 286.B

Si recta linea secetur extrema ac media ratione: erit vt recta potens id, quod à tota, & id, quod à maiori segmento, ad rectam potentem id, quod à tota, & id, quod à minore segmento, ita latus cubi ad latus Icosaedri eidem sphæræ cum cubo inscripti. 287.B

Quam proportionem habet latera cubi & Icosaedri eiusdem sphæræ, eandem habent latera cubi & Icosaedri in quauis alia sphæra descriptorum. 288.B

Si sphæra plano quopiam secetur, communis sectio circulus erit. 288.B

Si planum secans transit per centrum sphæræ, fit circulus idem centrum habens cum sphæra: Si verò non transit per centrum, fit circulus, cuius centrum punctum est, in quod cadit perpendicularis ex cētro sphæræ ad circulum ducta. 289.B

Circuli in sphæra æquales æqualiter distāt à cētro sphæræ: Et circuli æqualiter distantes à centro sphæræ, æquales sunt. 289.B

Dodecaedrum ad Icosaedrum in eadem cum ipso sphæra descriptum, est vt cubi latus ad latus Icosaedri, in vna eademq; sphæra. 289.B

Eadem proportio est lateris cubi ad latus Icosaedri, quæ superficiei Dodecaedri ad superficiem Icosaedri, & lineæ potentis totum quamcunque sectam extrema ac media ratione, & eius segmentum maius, ad potentē totam eandem, & eius segmentum minus. & Dodecaedri ad Icosaedrum eiusdem sphæræ. 290.B

Basis Tetraedri sesquitertia est basis Octaedri eiusdem sphæræ: Superficies item octaedri sesquialtera superficiei Tetraedri. 291.B

Recta ex angulo Tetraedri per centrum sphæræ ducta, cadit in centrum basis oppositæ, estq; perpendicularis ad basim. 292.B

Tetraedrum ad Octaedrum eiusdem sphæræ se habet, vt rectangulum sub linea potente vigintiseptem sexagesimas quartas partes lateris Tetraedri, & sub linea continente octo nonas partes eiusdem lateris comprehensum, ad quadratum diametri sphæræ. 293.B

Sphæræ semidiameter potentia tripla est eius perpendicularis, quæ ex centro sphæræ in basim octaedri eiusdem sphæræ cadit. 295.B

Duplum quadrati ex diametro sphæræ descripti, æquale est superficiei cubi eiusdem sphæræ: perpendicularis autem à centro sphæræ in basim cubi demissa, æqualis est dimidio lateris cubi. 295.B

Solidum, quod fit ex dimidio lateris cubi in duas tertias partes quadrati diametri sphæræ dictum cubum comprehendentis, æquale est cubo. Item quod fit ex latere cubi in tertiam partem eius quadrati. 296.B

Solidum, quod fit ex perpendiculari è centro cuiusuis corporis Regularis in basim demissa, in tertiam partem superficiei ipsius corporis, æquale est proposito corpori Regulari. 296.B

Idem circulus comprehendit & cubi quadratū, & octaedri triangulum eiusdem sphæræ. 296. & 346.B

Rectæ coniungentes centra basium oppositarum tam in cubo, quàm in Octaedro, æquales sunt. 297.B

Octaedrum ad triplum Tetraedri eiusdem sphæræ est, vt latus Octaedri ad latus Tetraedri. 297.B

Altitudo Octaedri ad altitudinem Tetraedri eiusdem sphæræ est, vt latus Octaedri ad latus Tetraedri.

Item diameter sphæræ ad latus Tetraedri, vt latus Octaedri ad latus cubi. 298.B

Si recta proposita potuerit totam aliquam rectam extrema ac media ratione sectam, & maius eius segmentum: Item totam aliam similiter sectam, & minus eius segmentum: Erit maius segmentum prioris lineæ latus Icosaedri: minus autem segmentum posterioris lineæ latus dodecaedri eius sphæræ, cuius recta proposita diameter est. 298.B

Si latus Octaedri potuerit maius & minus segmentum rectæ extrema ac media ratione sectæ: poterit latus Icosaedri eiusdem sphæræ duplum minoris segmenti. 299.B

Si recta diuisa extrema ac media ratione, cum minore segmento angulum rectum constituat, cui recta subtendatur: erit recta, quæ potentia sit subdupla eius rectæ subtensæ, latus Octaedri eius sphæræ, in qua dictum minus segmentum latus est Dodecaedri. 299. & 300. B

Si recta secetur extrema ac media ratione, & alia recta potentia huius sesquialtera sit latus Octaedri, maius segmentum erit latus Dodecaedri eiusdem cum octaedro sphæræ. 300.B

Cubus ad Octaedrum eiusdem sphæræ est, vt superficies cubi ad Octaedri superficiem. Item vt latus cubi ad semidiametrum sphæræ. 300.B

Alia inuentio laterum quinq; corporum Regularium in eadem sphæra descriptorum. 301. & 302.B

Quadratum cubi ad triangulum Tetraedri eiusde sphæræ est, vt latus Tetraedri ad perpendicularem ex vno angulo, trianguli Tetraedri ad latus oppositum ductam. 303. B

Latus Tetraedri potentia sesquialterum est axis, vel altitudinis ipsius: Axis verò Tetraedri, potentia sesquitertius est lateris cubi eiusdem sphæræ. 304.B

Diameter sphæræ sesquialtera est axis Tetraedri illius sphæræ. 304.B

Axis Tetraedri ad latus cubi eiusdem sphæræ est, vt latus Tetraedri ad perpendicularem ex vno angulo basis ad latus oppositum ductam. 304.B

Cubus triplus est Tetraedri eidem sphæræ inscripti. 304.B

Prisma eandem habens & basim, & altitudinem cum Tetraedro, æquale est cubo eiusdem sphæræ. 305.B

Si in Tetraedro Octaedrum inscribatur: Tetraedrum bifariam secatur tribus quadratis æqualibus, quæ Octaedrum bifariam quoque, & sese ad angulos rectos intersecant. 306.B

Rectæ connectentes centra basium cubi oppositarum se mutuò secant & bifariā, & ad angulos rectos. 307.B

Idem est centrum Icosaedri, atq; sibi inscripti Dodecaedri. 308.B

Si Tetraedrum Octaedro inscribatur, erunt quatuor bases Tetraedri octo basibus Octaedri parallelæ, singulæ binæ. 309.B

Item recta centra basium octaedri oppositarum coniungens, sesquialtera est axis Tetraedri. 309.B

Diameter Dodecaedri duo latera potest, ipsius scilicet Dodecaedri & cubi, in quo Dodecaedrum inscribitur. 315.B

Si latus cubi secetur extrema ac media ratione: minus segmentum latus est Dodecaedri in cubo descripti: Maius verò segmentum latus cubi in hoc Dodecaedro descripti. 315.B

Latus cubi æquale est duobus lateribus, Dodecaedri videlicet in ipso descripti, & Dodecaedri circa eundem cubum descripti. 315.B

Recta duos angulos pentagonorum Dodecaedri communi lateri oppositos connectens, est æqualis lateri cubi, cui Dodecaedrum inscribitur. 315.B

Diameter Icosaedri potest & latus Icosaedri & cubi Icosaedri ambientis. 316.B

Bifariæ sectiones sex oppositorũ laterum Icosaedri coniunguntur tribus rectis æqualibus, seseq; in centro Icosaedri bifariam, & ad angulos rectos secãtibus. 316.B

Si latus cubi extrema ac media ratione secetur: maius segmentum latus est Icosaedri in eo cubo descripti. 316.B

Icosaedri tam latera, quàm triangula opposita sunt parallela. 317.B

Idem est centrum Icosaedri, & Octaedri in eo descripti. 317.B

Idem est centrum basis octaedri, & basis Icosaedri in eo descripti, quod intelligendum est de octo basibus Icosaedri in octo basibus octaedri collocatis. 319.B

Idem est centrum octaedri, & Icosaedri in eo descripti. 319.B

Idem est cẽtrum pyramidis, & cubi in ea descripti. 321.B

Recta coniungens bifarias sectiones oppositorum laterũ pyramidis, transit per centrum pyramidis, estq; tripla laterũ cubi in pyramide descripti. 321.B

Idem est centrum pyramidis, & octaedri in ea descripti. 321.B

Idem est centrum basis pyramidis, & basis octaedri in ea descripti. quod intelligendum est de quatuor basibus octaedri in quatuor basibus pyramidis iacentibus. 321.B

Quæ solida Regularia, in quibus propriè describantur, & quæ non? Et alia de hac inscriptione mutua. 323.B

Si in Dodecaedro cubus describatur, & in hoc cubo aliud Dodecaedrum: erit proportio Dodecaedri exterioris ad interius Dodecaedrum triplicata proportionis, quam habet maius segmentum ad minus rectæ lineæ extrema ac media ratione diuisæ. 324.B

Si ab angulis trianguli pyramidis ducantur rectæ secantes opposita latera extrema ac media ratione, ita vt prope quemuis angulum sit maius segmentum minus lateris, & minus alterius: Hæ sectionibus suis in medio producent basim Icosaedri in ea pyramide descripti, inscriptam quidem alij triangulo æquilatero, cuius anguli latera trianguli pyramidis secant extrema ac media ratione, & latera ipsa bifariam secantur ab angulis basis Icosaedri productæ. 325.B

Latus Icosaedri octaedro inscripti, maius segmentum est rectæ diuisæ extrema ac media ratione, quæ ab vno angulo basis octaedri ducta secat latus oppositum extrema quoq; ac media ratione. 326.B

Minus segmentum lateris pyramidis extrema ac media ratione secti, potentia duplum est lateris Icosaedri in ea descripti. 326.B

Latus cubi potentia dimidium est lateris pyramidis in eo descriptæ; Latus verò pyramidis duplum est longitudine lateris octaedri sibi inscripti: Latus denique cubi duplum est potentia lateris sibi inscripti octaedri. 326.B

Latus Dodecaedri maius segmentum est rectæ, quæ potentia dimidium potest lateris pyramidis sibi inscriptæ. 327.B

Si in cubo describatur & Icosaedrum, & Dodecaedrum: Latus Icosaedri medium proportionale erit, inter latus cubi, & latus Dodecaedri. 320.B

Latus pyramidis potentia octodecuplum est lateris cubi in ea descripti. 327.B

Latus pyramidis potentia octodecuplum est rectæ extremæ ac mediæ ratione sectæ, cuius maius segmentum latus est Dodecaedri in pyramide descripti. 327.B

Si in octaedro Icosaedrum describatur, erit latus Icosaedri potentia duplum minoris segmenti lateris octaedri extrema ac media ratione diuisi. 328.B

Latus octaedri potentia est quadruplum sesquialterum lateris cubi in ipso descripti. 328.B

Latus octaedri potentia est quadruplum sesquialterum rectæ extrema ac media ratione sectæ, cuius maius segmentum latus est Dodecaedri Octaedro inscripti. 328.B

Latus Icosaedri maius segmentum est rectæ extrema ac media ratione sectæ, quæ potentia dupla est lateris Octaedri in Icosaedro descripti. 328.B

Latus cubi ad latus Dodecaedri in ipso descripti proportionem habet duplicatam eius, quam habet maius segmentum ad minus rectæ extrema ac media ratione sectæ. Latus verò Dodecaedri ad latus cubi in ipso descripti proportionem habet, quam minus segmentum ad maius eiusdem rectæ lineæ. 328.& 329.B

Latus octaedri sesquialterum est lateris sibi inscriptæ pyramidis. 329.B

Si ex quadrato diametri Icosaedri auferatur triplum quadrati lateris cubi in eo descripti, relinquitur quadratum sesquitertiũ quadrati lateris Icosaedri. 329.B

Diameter Icosaedri binas rectas potest, diametrum scilicet cubi in eo descripti, & diametrum circuli trianguli Icosaedri ambientis. 330.B

Latus Dodecaedri minus segmentum est rectæ extrema ac media ratione sectæ, quæ duplum potest lateris Icosaedri in eo descripti. 330.B

Diameter Icosaedri potest & suiipsius lateris sesquitertium, & lateris pyramidis in eo descriptæ sesquialterum. 330.B

Latus Dodecaedri ad sibi inscripti Icosaedri latus sesquialterum habet, vt minus segmentum lineæ perpendicularis ab vno angulo pentagoni ad latus oppositum ductæ, alij extrema ac media ratione sectæ, ad partem eiusdem lineæ inter centrum pentagoni, & latus eiusdem positæ. 330.& 331.B

Si dimidium lateris Icosaedri extrema ac media ratione secetur, minusq; eius segmentum, à toto latere Icosaedri detrahatur; à reliqua quoque recta pars rursum tertia dematur; relinquetur latus Dodecaedri in Icosaedro descripti. 331.B

Cubus sibi inscriptæ pyramidis triplus est. 332.B

Pyramis sibi inscripti octaedri dupla est. 333.B

Cubus sibi inscripti octaedri sextupla est. 333.B

Octaedrum sibi inscripti cubi quadruplum sesquialterum est. 333.B

Idem est cẽtrum Octaedri, atq; cubi in eo descripti. 334.B

Octaedrum ad sibi inscriptum cubum est, vt quadratum lateris Octaedri ad quadratum lateris cubi in eo descripti. 334.B

Octaedrum sibi inscriptæ pyramidis tredecuplum sesquialterum est. 334.B

Pyramis sibi inscripti cubi nonecupla est. 334.B

Cubus ad cubum descriptum in pyramide, quæ in priori cubo

cubo describitur, est vt 27. ad 1. 335.B
Octaedrum ad sibi inscriptum Icosaedrum proportionẽ habet, quam duæ bases Octaedri ad quinq; bases Icosaedri. 335.B
Icosaedrum ad sibi inscriptum Dodecaedrum proportionem habet compositam ex proportione lateris Icosaedri ad latus cubi in eadem cum Icosaedro sphæra descripti, & ex proportione triplicata eius, quam habet diameter Icosaedri ad rectam centra basium Icosaedri oppositarum coniungentem. 336.B
Dodecaedrum excedit cubum sibi inscriptum parallelepipedo, cuius quidem basis à quadrato cubi deficit rectangulo contento sub latere cubi, tertiaq; parte minoris segmenti eiusdem lateris cubi: at verò altitudo ab altitudine, siue latere cubi, minore segmento eius lineæ, quæ dimidiati lateris cubi segmentum minus existit. 337.B
Dodecaedrum à duplo cubi sibi inscripti deficit duobus parallelepipedis, quorum vnius longitudo lateri cubi est æqualis, latitudo autem tertiæ parti minoris segmenti eiusdem lateris cubi, altitudo denique à latere cubi deficit minore segmento eius lineæ, quæ dimidiati lateris cubi minus segmentum existit: alterius verò & longitudo, & latitudo lateri cubi æqualis est, altitudo autem minus segmentum eius lineæ, quæ dimidiati lateris cubi segmentum minus existit; ita vt amborum altitudines simul altitudini, siue lateri cubi sint æquales. 338.B
Dodecaedrum ad sibi inscriptum Icosaedrum proportionem habet compositã ex proportione triplicata eius, quam habet diameter Dodecaedri ad rectam centra basium Dodecaedri oppositarum copulantem, & proportione lateris cubi ad latus Icosaedri in eadẽ sphæra cum cubo descripti. 339.B
Dodecaedrum pyramidis, in qua describitur, duas nonas partes continet, minus duobus parallelepipedis, quorũ vnius longitudo lateri cubi in eadem pyramide descripti æqualis est, latitudo verò tertiæ parti minoris segmenti lateris eiusdem cubi, altitudo deniq; à latere eiusdem cubi deficit minore segmento eius lineæ, quæ dimidiati lateris cubi eiusdem minus segmentum existit: alterius autem & longitudo, & latitudo lateri cubi prædicti est æqualis, altitudo verò minus segmentum eius lineæ, quæ dimidiati lateris cubi eiusdem segmentum minus existit, ita vt amborum altitudines simul altitudini, siue lateri eiusdem cubi sint æquales. 339.B
Octaedrum excedit sibi inscriptum Icosaedrum parallelepipedo, cuius basis est quadratum lateris Icosaedri, altitudo verò maius segmentum semidiametri octaedri extrema ac media ratione sectæ. 340.B
Pyramis excedit duplum Icosaedri sibi inscripti parallelepipedo, cuius basis quadratum lateris Icosaedri, altitudo verò recta bifarias sectiones oppositorum laterum Icosaedri coniungens. 340.B
Si in sphæra sint duo circuli paralleli, & æquales, in quibus ductæ sint duæ rectæ parallelæ & æquales; ad easdem partes centrorum: rectæ harum parallelarum extrema puncta ad easdem partes cõiungentes, æquales quoq; & parallelæ sunt, & ad plana circulorum perpendiculares. 342.B
Si in sphæra sint duo circuli paralleli & æquales, in quibus ductæ sint duæ rectæ parallelæ & æquales, non ad easdem partes centrorum; rectæ harum parallelarum extrema puncta non ad easdem partes coniungentes, in centro sphæræ se intersecãt, ac proinde diametri sphæræ erunt, & inter se æquales: rectæ verò earundem parallelarum extrema puncta ad easdem partes connectentes, & æquales ac parallelæ inter se sunt, & cum parallelis rectos angulos constituunt. 342.B
Si in sphæra sint duæ rectæ parallelæ; rectæ earum puncta extrema ad easdem partes coniungentes, æquales inter se erunt. Et si parallelæ fuerint æquales, coniungentes non solùm æquales, sed & parallelæ erunt, rectosq; cum ipsis angulos conficient. 343.B
Sphæræ diameter ad latus Icosaedri in ea descripti est, vt latus pentagoni ad latus decagoni eiusdem circuli cuiuslibet. 348.B
Latus Icosaedri maius est semidiametro sphæræ, in qua describitur. 348.B
Sphæræ diameter potentia est tripla lateris pentagoni descripti in circulo, qui per tres angulos Icosaedri eius sphæræ incedit, parallelusq; est vni triangulo Icosaedri. 348.B
Iidem circuli sphæræ sustinent & angulos Icosaedri, & angulos Dodecaedri in ea sphæra descriptorũ. 350.B
Si quadratum, & triangulum æquilaterum æqualia habeant latera; erunt viginti triangula simul maiora, quàm octo quadrata simul. 350.B
Octo quadrata ex semidiametro sphæræ descripta, æqualia sunt superficiei cubi in ea sphæra descripti. 350.B
Si octaedrum, cubus, & Icosaedrum in eadem sphæra describantur; erit perpendicularis ex centro sphæræ ad vnam basim Icosaedri ducta maior perpendiculari ex eodem centro sphæræ ad vnam basim octaedri, & cubi ducta. 350.& 351.B
Icosaedri superficies maior est superficie cubi in eadem sphæra descripti. 351.B
Dodecaedrum Icosaedro maius est. 351.B
Icosaedrum cubo maius est. 351.B
Cubus Octaedro maior est. 351.B
Octaedrum Tetraedro maius est. 351.B
Superficies Dodecaedri superficiem Icosaedri superat, & hæc superficiem cubi, & hæc superficiem Octaedri, atque hæc deniq; superficiem Tetraedri. 352.B
Latus Tetraedri maius est latere Octaedri, & hoc maius latere cubi, & hoc maius latere Icosaedri, atq; hoc deniq; maius latere Dodecaedri. 352.B
Si corpora regularia sint Isoperimetra; illud, quod plures habet bases, maius est: Vt Icosaedrum maius Dodecaedro, & hoc maius Octaedro, & hoc maius Cubo, atq; hoc deniq; maius Tetraedro. 352.B
Omnes inclinationes duarum basium cuiusque corporis Regularis æquales sunt. 353.& 354.B

FIGVRAE, anguli, & lineæ proportionales.

Triangula & parallelogramma, quorum eadem est altitudo, ita se habent inter se, vt bases. 292.A
Triangula & parallelogramma, quæ ita se habent inter se, vt bases, æquales habent altitudines, vel eandem. 292.A
Triangula & parallelogramma, quorum æquales sunt bases, vel eadem, ita se habent inter se, vt altitudines. 293.A
Triangula & parallelogramma, quæ ita se habent inter,

ſe, vt altitudines, æquales habent baſes, ſi vnam & eandem non habeant. 293.A

Si ad vnum trianguli latus parallela ducta ſit, hæc ſecabit duo latera reliqua proportionaliter. Et ſi duo latera ſecta ſint proportionaliter; recta linea ſectiones iungens, parallela erit reliquo lateri. 293.A

Si trianguli angulus bifariam ſectus ſit, ſecans autem angulum recta linea ſecet & baſim: baſis ſegmenta ita ſe habebunt inter ſe, vt reliqua duo latera. Et ſi baſis ſegmenta ita ſe habeant, vt reliqua duo latera: recta à vertice ad ſectionem ducta, bifariam ſecabit angulum trianguli. 294.A

Æquiangulorum triangulorum proportionalia ſunt latera circa æquales angulos, & homologa ſunt latera, quæ æqualibus angulis ſubtenduntur. 294.A

Recta linea vni lateri trianguli parallela, aufert triangulum toti triangulo ſimile. 295.A

Si ex duobus punctis rectæ, quorum alterum ſit extremum, alterum verò intra lineam, duæ parallelæ inter ſe educantur ad eaſdem partes, ita vt habeant eandem proportionem, quam rectæ inter ipſas, & alterum punctum extremum incluſæ: Recta coniungens extremum vnius earum, cum extremo prioris lineæ tranſibit per extremum alterius lineæ. 295.A

Si in triangulo parallela vni lateri agatur, recta ex angulo oppoſito ducta ſecat parallelam, & latus illud in eaſdem rationes. 295.A

Si duo triangula latera proportionalia habeãt; æquiangula erunt, & æquales habebunt eos angulos, ſub quibus homologa latera ſubtenduntur. 296.A

Si duo triangula vnum angulum vni angulo æqualem, & circa æquales angulos latera proportionalia habeant; æquiangula erunt, æqualesq; habebunt angulos, ſub quibus latera homologa ſubtenduntur. 296.A

Si duo triangula vnum angulum vni angulo æqualem, circa autem alios angulos latera proportionalia habeant; reliquorum verò ſimul vtrumq; aut minorem, aut non minorem recto: æquiangula erunt, & æquales habebunt eos angulos, circa quos proportionalia ſunt latera. 296.A

Si in triangulo rectangulo ab angulo recto in baſim perpendicularis ducta ſit: quæ ad perpendicularem triangula tum toti triangulo, tum ipſa inter ſe ſimilia ſunt. 297.A

Item tam perpendicularis eſt media proportionalis inter duo baſis ſegmenta, quàm vtrumlibet laterum circa rectum angulum inter totam baſim, & ſegmentum baſis ei lateri adiacens. 298.A

Si duæ rectæ ſecentur in binis punctis proportionaliter: Erunt quoq; intermediæ ſectiones in eadem proportione cum quibuſlibet ſegmentis duobus. 300.A

Si recta in quotcunque partes Arithmeticè proportionales ſecta ſit, & alia recta ſecetur in totidem partes, quæ eaſdem inter ſe, quas illæ, proportiones habeant: Erunt quoq; partes huius lineæ Arithmeticè proportionales. 301.A

Si duæ rectæ inæquales ad alias duas eandem habeant proportionem, minor ad minorem, & maior ad maiorem: Erit quoque exceſſus priorum ad exceſſum poſteriorum, vt prior vna ad vnam poſteriorũ. 301.A

Recta à quouis puncto diametri ducta perpendicularis vſq; ad circumferentiam ſemicirculi, media proportionalis eſt inter diametri ſegmenta. 304.A

Æqualium, & vnum vni æqualem habentium angulum, parallelogrammorum, reciproca ſunt latera circa æquales angulos. Et quorũ reciproca ſunt latera circum æquales angulos, illa ſunt æqualia. 305.A

Æqualium & vnum vni æqualem habentium angulum, triangulorum, reciproca ſunt latera circum æquales angulos. Et quorum reciproca ſunt latera circa æquales angulos, illa ſunt æqualia. 305.A

Si quatuor rectæ proportionales ſint; rectangulum ſub extremis æquale eſt rectangulo ſub mediis. Et ſi rectangulum ſub extremis æquale ſit rectangulo ſub mediis, illæ quatuor rectæ proportionales ſunt. 305.A

Idem eueniet, ſi parallelogramma non ſint rectangula, ſed tantùm æquiangula. 306.A

Si tres rectæ ſint proportionales; rectangulum ſub extremis quadrato mediæ æquale eſt. Et ſi rectangulum ſub extremis quadrato mediæ ſit æquale; illæ tres proportionales ſunt. 306.A

Recta, cuius quadratum æquale eſt rectangulo ſub duabus rectis quibuſcunque, media proportionalis eſt inter eas duas rectas. 306.A

Idem eueniet, ſi parallelogramma non ſint rectangula, æquiangula tamen. 306.A

Triangula ſimilia inter ſe ſunt in duplicata ratione homologorum laterum. 316.A

Si tres rectæ ſint proportionales; vt eſt prima ad tertiam, ita eſt triangulum ſuper primam ad triangulum ſuper ſecundam ſimile, ſimiliterq; deſcriptum. 316.A

Similia polygona in ſimilia triangula diuiduntur, & numero æqualia, & homologa totis: Et polygona duplicatam habent rationem homologorum laterum. 317.A

Si tres rectæ ſint proportionales; vt eſt prima ad tertiam, ita eſt polygonum ſuper primã, ad polygonum ſuper ſecundam ſimile ſimiliterq; deſcriptum. 318.A

Similia polygona æquilatera, & æquiangula, diuiduntur in ſimilia triangula, & numero æqualia, & homologa totis; ductis rectis à centris circulorum ipſa circumſcribentium ad omnes angulos. 319.A

Quæ eidem rectilineo ſunt ſimilia, & inter ſe ſunt ſimilia. 319.& 320.A

Si quatuor rectæ ſint proportionales: Et ab eis rectilinea ſimilia ſimiliterque deſcripta, proportionalia ſunt. Et ſi à rectis ſimilia ſimiliterque deſcripta rectilinea, proportionalia ſint: ipſæ etiam rectæ proportionales erunt. 320.A

Æqualia rectilinea ſimilia, ſimiliterq; deſcripta, ſunt ſuper æquales rectas. 320.& 321.A

Si tres rectæ ſint proportionales; erunt quoq; rectilinea ſimilia ſimiliterq; deſcripta ab eis proportionalia, &c. 321.A

Æquian-

Æquiangula parallelogramma inter se rationẽ habent ex lateribus compositam. 321.A

Triangula vnum angulum vni angulo æqualem habentia proportionem habent ex lateribus circa æqualem angulum compositam. 323.A

Triangula vnum angulum vni angulo æqualem habentia, eandem proportionem habent, quam rectangula sub lateribus circa angulum æqualem contenta. 323.A

Parallelogramma æquiangula eandem rationem habẽt, quam rectangula sub lateribus circa angulum æqualem contenta. 324.A

Triangula & parallelogramma inter se rationem habẽt compositam ex proportione basium, & proportione altitudinum. 324.A

In parallelogrammo parallelogrãma circa diametrum, & toti, & inter se sunt similia. 325.A

Datis duobus parallelogrammis æquiangulis, sed non similibus: ex quouis illorum alteri simile resecare. 326.A

Si à parallelogrammo parallelogrammum ablatum sit simile toti, & similiter positũ, communem cum eo habens angulum: hoc circa eandem cum toto diametrum cõsistit. 327.A

Idem euenit, si angulum habeant non communem. 328.A

Parallelogrammorum secundum eandem rectam lineam applicatorum, deficientiumque figuris parallelogrammis similibus, similiterque positis ei, quod à dimidia describitur: maximum id est, quod ad dimidium applicatur, parallelogrammum simile existens defectui, 329.A

In rectangulis triangulis, figura quæuis à latere rectum angulum subtendente descripta, æqualis est figuris, quæ priori illi similes, & similiter positæ à lateribus rectum angulum continentibus describuntur. 332.A

Si figura, quæ ab vno latere trianguli describitur, æqualis sit eis, quæ à reliquis duobus lateribus describuntur, figuris similibus similiterque positis: angulus sub reliquis his lateribus comprehensus, rectus est. 333.A

Si duo triangula, quæ duo latera duobus lateribus proportionalia habeant, secundùm vnum angulum composita fuérint, ita vt homologa eorum latera sint parallela: tum reliqua latera in rectam lineam collocata reperientur. 333.& 334.A

In circulis æqualibus, anguli eandem habent rationem cum peripheriis, quibus insistunt, siue ad centra, siue ad peripherias constituti insistant: Insuper verò & sectores, quippe qui ad centra consistunt. 334.A

In circulis æqualibus, est sector ad sectorem, vt angulus ad angulum in centro. 335.A

Vt est angulus in centro ad quatuor rectos, ita est arcus illi angulo subtensus ad totam circumferentiam. Et contrà. 335.A

Similia circulorum segmenta eandem habent proportionem ad totas circumferentias. 336.A

Si duo aut plures circuli idem habeant centrum: Rectæ ex centro ductæ abscindunt arcus similes. 155. & 337.A

Si in circulo duæ rectæ se mutuò secent: erunt segmenta vnius segmentis alterius reciproca. 341.A

Si extra circulum sumatur punctum aliquod, ab eoq; in circulum cadant duæ rectæ circulum secantes: erunt totæ, & segmenta extra circulum reciproca. Quod si ab eodem puncto recta ducatur circulum tangens: erit hæc media proportionalis inter quamlibet rectam, quæ circulum secet, & eius segmentũ exterius. 341.A

Si duæ rectæ se mutuò secent, & à duobus earum terminis perpendiculares sibi mutuò demittantur: erunt duæ lineæ, quarum vna inter vnum terminorum, & sectionem, altera verò inter sectionem, & prioris lineæ assumptæ perpendicularem interiicitur, aliis duabus eodem modo inclusis reciprocæ. 341.A

In parallelogrammo duæ rectæ lateribus parallelæ se mutuò secantes, diuidunt parallelogrammum in quatuor parallelogramma proportionalia. 342.A

Omne quadrilaterum à duabus diametris diuiditur in quatuor triangula proportionalia. 342.A

In triangulo rectangulo, in quo perpendicularis ab angulo recto demissa secat basim extrema ac media ratione: tria latera sunt continuè proportionalia. Et si tria latera trianguli rectanguli sint continuè proportionalia; perpendicularis ad basim ex angulo recto demissa, secat basim extrema ac media ratione. 342.A

Si ex centro per quæuis puncta lineæ Quadratricis ducantur rectæ vsq; ad peripheriam quadrantis ex eodem centro descripti, & ex eisdem punctis ad basim demittantur perpendiculares, & aliæ rectæ eidem basi parallelæ: Erunt arcus quadrantis inter semidiametros interiecti, perpendicularibus, vel segmentis semidiametri intra parallelas positis, proportionales. 350.& 351.A

Si quadrantis & Quadratricis idem centrum sit; erunt arcus quadrantis, semidiameter, & basis Quadratricis, continuè proportionales. 353.A

Circumferentia circuli ad eius diametrum, propertio in numeris plus minus, quæ sit. 354.A

Si sint duæ rectæ, erit vt prima ad secundam, ita quadratum primæ ad rectangulum sub illis duabus contentum. Et vt secunda ad primã, ita rectangulum sub ipsis, ad quadratum primæ. 123.B

Si sint duæ rectæ inæquales, erit vt prima ad secundam, ita rectangulum sub ipsis ad quadratum secundæ. 134.B

Si sint tres rectæ, erit vt prima ad tertiam, ita rectangulum sub prima & secunda cõtentum, ad id, quod sub secunda & tertia continetur. 135.B

Si recta linea secetur in partes duas inæquales; erit vt alterutra pars ad alteram, ita rectangulum sub tota & priore parte assumpta, ad rectangulum sub tota, & altera parte contentum. 136.B

Si recta sit secta vtcunque; erit rectangulum sub partibus contentum, medium proportionale inter earum quadrata. Item rectangulum sub tota, & vna parte contentum, medium proportionale inter quadratum totius lineæ, & quadratum dictæ partis. 148.B

Si duæ rectæ parallelis planis secentur; In easdem rationes secabuntur. 203.& 204.B

Si solidum parallelepipedum plano secetur, aduersis planis parallelo: Erit quemadmodum basis ad basim, ita solidum ad solidum. 210.B

Idem conuenit in omne prisma. 211.B
Si prisma quodcunq; secetur plano oppositis planis æquidistante, sectio est figura æqualis, & similis planis oppositis. 212.B
Solida parallelepipeda sub eadem altitudine; inter se sunt, vt bases. 217.B
Si parallelepipeda inter se sint, vt bases; ipsa erunt sub eadem altitudine. 217.B
Similia solida parallelepipeda, inter se sunt in triplicata ratione homologorum laterum. 218.B
Si sint quatuor rectæ continuè proportionales, vt est prima ad quartam, ita est parallelepipedum super primam descriptum, ad parallelepipedum simile, similiterq; descriptũ super secundam. 218.B
Æqualium solidorum parallelepipedorum bases & altitudines reciprocantur. Et quorum solidorum parallelepipedorum bases & altitudines reciprocãtur; illa sunt æqualia. 218.B
Hæc quinq; quæ proximè de parallelepipedis dicta sunt, conueniunt etiam prismatis, in quibus duo plana opposita sunt triangula. 220.B
Si tres rectæ sint proportionales; quod ex illis fit solidum parallelepipedum, æquale est descripto à media linea solido parallelepipedo, quod æquilaterum quidem sit, æquiangulum verò prædicto. 221.B
Si parallelepipedum ex tribus rectis descriptum, æquale sit parallelepipedo sibi æquiangulo à media recta descripto; erunt tres rectæ continuè proportionales. 222.B
Si quatuor rectæ lineæ proportionales fuerint; & solida parallelepipeda, quæ ab ipsis & similia, & similiter describuntur, proportionalia erunt. Et si solida parallelepipeda, quæ & similia, & similiter describuntur, fuerint proportionalia; & ipsæ rectæ lineæ proportionales erunt. 222.B
Eodem modo si fuerint tres rectæ proportionales, erunt & parallelepipeda similia, similiterq; descripta ex eis, proportionalia, &c. 223.B
Idem quoque quadrat in prismata triangularium planorum oppositorum ex quatuor rectis, vel tribus, continuè proportionalibus descripta, si similia, similiterq; posita sint. 223.B
Circuli inter se sunt, quemadmodum à diametris quadrata. 227.B
Circulus ad circulum est, vt polygonum in illo descriptum ad polygonum simile in hoc descriptum. 228.B
Sub eadem altitudine existentes pyramides, & triangulares habentes bases; inter se sunt, vt bases. 230.B
Si pyramides triangulares inter se sint, vt bases; ipsæ erunt sub eadem altitudine. 231.B
Sub eadem altitudine existentes pyramides, & polygonas habentes bases, inter se sunt, vt bases. 231.B
Idem verum est de pyramidib. eiusdem altitudinis, quarum vna basim habet plurium angulorum, quàm altera. 232.B
Pyramides quarumlibet basium, quæ inter se sunt, vt bases; eandem habent altitudinem. 233.B
Pyramis quælibet tertia pars est prismatis, & eandem cum illa habet & basim, & altitudinem. Siue prisma quodlibet triplum est pyramidis, quæ eandem cum ipso habet & basim & altitudinem. 233.B
Eodem modo pyramis tertia pars est prismatis habentis basem basi, & altitudinem altitudini æqualem. 234.B
Prismata eiusdem altitudinis super quascunque bases, inter se sunt, vt bases. 234.B
Si prismata quarumcunque basium inter se sint, vt bases; ipsa erunt sub eadem altitudine. 234.B
Quæ de prismatis dicta sunt, intelligi debent de iis, quæ habent plana opposita basibus æqualia, & similia. 234.B
Similes pyramides, quæ triangulares habent bases, in triplicata sunt homologorum laterum ratione. 235.B
Similes pyramides, quarum bases plura latera, quàm tria continent, hãbent proportionem homologorum laterum triplicatam. 235.B
Similia prismata triplicatam proportionem habent laterum homologorum. 236.B
Pyramides multangulæ similes diuiduntur in pyramides triangulares similes, & numero æquales, & homologas totis. 236.& 237.
Prismata multangula similia diuiduntur in prismata similia triangulares bases habẽtia, & numero æqualia, & homologa totis. 237.B
Æqualium pyramidum, & triangulares bases habentium, reciprocantur bases & altitudines. Et quarum pyramidum triangulares bases habentium reciprocantur bases, & altitudines; illæ sunt æquales. 237.B
Æqualium pyramidum, quarum bases non sunt triangulares, reciprocantur bases & altitudines. Et quarum pyramidum triangulares bases non habentium reciprocantur bases & altitudines, illæ sunt æquales. 237.B
Idem conuenit prismatibus. 238.B
Sub eadem altitudine existentes coni & cylindri, inter se sunt, vt bases. 239.B
Atque hoc verum est, siue coni & cylindri recti sint, siue scaleni. 240.B
Si coni & cylindri quicunq; inter se sint, vt bases, ipsi sub eadem altitudine erunt. 241.B
Coni & cylindri similes, in triplicata ratione sunt diametrorum, quæ in basibus. 241.B
Idem hoc locum habet in conis & cylindris scalenis. 242.B
Si cylindrus plano secetur aduersis planis parallelo; erit vt cylindrus ad cylindrum, ita axis ad axem. 243.B
Idem intelligatur de cylindro scaleno. 243.B
Super æqualibus basibus existentes coni, & cylindri, inter se sunt, vt altitudines. 244.B
Idem conuenit conis & cylindris scalenis. 244.B
Item prismatis, parallelepipedis, & pyramidibus super æquales bases constitutis. 244.B
Coni & cylindri tam recti, quàm scaleni: Item prismata, parallelepipeda, & pyramides, proportionem habentes eandem, quam altitudines, bases habebunt æquales. 245.B
Æqualium conorum, & cylindrorum reciprocantur

bantur baſes, & altitudines. Et quorum cõnorum & cylindrorum reciprocantur baſes & altitudines, illi ſunt æquales. 245.B

Idem conuenit conis & cylindris ſcalenis. 246.B

Sphæræ inter ſe ſunt in triplicata ratione ſuarum diametrorum. 251.B

Ex quo fit, ita eſſe ſphæram ad ſphæram, vt polyedrum in illa deſcriptum, ad polyedrum ſimile in hac deſcriptum. 252.B

Si recta linea ſecundùm extremam & mediam rationem ſecetur; maius ſegmentum aſſumens dimidiam totius, quintuplum poteſt eius, quod à dimidia totius deſcribitur, quadrati. 253.B

Si recta linea ſuiipſius ſegmenti quintuplum poſsit; Duplæ prædicti ſegmenti extrema ac media ratione ſectæ, maius ſegmentum reliqua pars eſt eius, quæ à principio, rectæ. 253. B

Si recta linea ſecundùm extremam & mediam rationem ſecetur; minus ſegmentum aſſumens dimidiam maioris ſegmenti, quintuplum poteſt eius, quod à dimidia maioris ſegmenti deſcribitur, quadrati. 254.B

Si recta inæqualiter ſecetur, & minus ſegmentum aſſumens dimidium maioris ſegmenti quintuplum poſsit eius, quod à dimidia maioris ſegmenti deſcribitur, quadrati: Recta illa linea ſecta erit extrema & media ratione. 255.B

Si recta linea ſecundùm extremam & mediam rationem ſecetur; quod à tota, quodq; à minore ſegmento, ſimul vtraque quadrata, tripla ſunt eius, quod à maiore ſegmento deſcribitur, quadrati. 255.B

Si recta inæqualiter ſecetur, ſitq; quadratum totius, vnà cum quadrato minoris ſegmenti, triplum quadrati ex maiore ſegmento deſcripti: Recta illa linea extrema ac media ratione ſecabitur. 256.B

Si recta ſecundùm extremam & mediam rationem ſecetur, tota linea aſſumens minus ſegmentum, quintuplum poteſt eius, quod à maiori ſegmento deſcribitur, quadrati. Et ſi recta inæqualiter ſecetur, totaq; aſſumens minus ſegmentum poſsit quintuplum eius, quod à maiori ſegmento deſcribitur, quadrati; Recta illa ſecundùm extremam & mediam rationem ſecta eſt. 256.B

Si recta linea ſecundùm extremam & mediam rationem ſecetur; apponaturq; ei æqualis maiori ſegmento: Tota recta linea ſecundùm extremam & mediam rationem ſecatur, & maius ſegmentum eſt, quæ à principio, recta linea. 256.B

Si recta ſecetur extrema ac media ratione, detrahaturq; ex maiori ſegmento ſegmentum minus; erit maius ſegmentum ſectum extrema ac media ratione, & maius ſegmentum eſt illa linea, quæ prioris lineæ minus ſegmentum erat. 257.B

Si recta ſecetur extrema ac media ratione, atq; ex dimidio illius auferatur dimidia maioris ſegmenti; erit quoq; dimidia totius diuiſa extrema ac media ratione, maiusq; ſegmentum erit dimidium maioris ſegmenti totius lineæ. 257.B

Si ad rectam perpendicularis ducatur, quæ ſit media proportionalis inter ſegmenta lineæ à ſemicirculum circa illam lineam rectam deſcriptus tranſibit per extremum punctum lineæ perpendicularis. 264.B

Si binæ rectæ extrema ac media ratione ſecentur; ipſæ ſimiliter ſecabuntur, in eaſdem ſcilicet proportiones. 281.B

Si ſint quatuor rectæ continuè proportionales, necnon & aliæ quatuor, ita vt eadem ſit antecedens omnium; erit proportio tertiæ ad tertiam proportionis ſecundæ ad ſecundam duplicata; & proportio quartæ ad quartam eiuſdem proportionis ſecundæ ad ſecundam triplicata. 302.B

Si duo latera trianguli æquilateri ſecentur extrema ac media ratione, ita vt minus maius ſegmentum, alterius verò minus ſit prope angulum ab ipſis comprehenſum; recta connectens puncta ſectionum duplum poteſt minoris ſegmenti. 319.B

Perpendicularis ex angulo pentagoni æquilateri & æquianguli in latus oppoſitum demiſſa ſecatur à recta illum angulum ſubtendente, extrema ac media ratione. 324.B

FIGVRAE planæ quadrilateræ. vide Parallelogrammum, &c.

FRACTIONES numerorum. vide Minutię numerorum.

FRACTVS numerus. vide Minutię numerorũ.

IMPAR numerus. vide Numerus par, &c.

INCOMMENSVRABILES magnitudines. vide Commenſurabiles, & incommenſurabiles magnitudines.

IRRATIONALES magnitudines. vide Rationales, & irrationales magnitudines.

ISOSCELES. vide Triangulum.

LINEA perpendicularis. vide Recta linea.

LINEA recta. vide Recta linea.

LINEAE parallelæ. vide Recta linea.

LINEAE proportionales. vide Figuræ, Anguli, & lineæ proportionales.

MAGNITVDINES cõmenſurabiles, & incommenſurabiles. vide Commenſurabiles, & incommenſurabiles magnitudines.

MAGNITVDINES proportionales in cõmuni.

Si ſint tres rectæ arithmeticè proportionales: rectangulum ſub extremis, vnà cum quadrato exceſſus, æquale erit quadrato lineæ mediæ. 100.A

Proportionum rationalium genera, & inuentio: Et proportionalitatis Arithmeticæ, Geometricæ, atq; Harmonicæ, ſiue Muſicæ, proprietates variæ. à 195. 196. &c. vſq; ad 244.A

Euclides cur in defin. 6. & 8. lib. 5. quatuor magnitudines proportionales, & non proportionales per earum

æquè multiplicia definierit. 249.A

Si sint quotcunq; magnitudines quotcunq; magnitudinum æqualium numero, singulæ singularum, æquè multiplices; quàm multiplex est vnius vna magnitudo, tam multiplices erunt & omnes omnium. 261.A

Si prima secundæ æquè fuerit multiplex, atque tertia quartæ, fuerit autem & quinta secundę æquè multiplex, atque sexta quartæ: erit & composita prima cum quinta, secundę æquè multiplex, atq; tertia cum sexta quartę. 261.A

Idem sequitur, si prima & tertia, æquales sint secundæ & quartæ; at quinta & sexta, æquè multiplices secundæ & quartæ: Vel prima & tertia, æquè multiplices secundæ & quartæ; at quinta & sexta, æquales secundæ ac quartæ: Vel denique si tam prima & tertia, quàm quinta ac sexta, æquales sint secundæ ac quartæ. 261. & 262.*A*

Si sit prima secundæ æquè multiplex, atq; tertia quartæ: sumantur autem æquè multiplices primæ ac tertię: Erit & ex æquo, sumptarum vtraque vtriusq; æquè multiplex, altera quidem secundæ, altera autem quartæ. 262.A

Si prima ad secundam habeat eandem rationę, quam tertia ad quartam: Etiam æquè multiplices primæ & tertię, ad æquè multiplices secundæ & quartæ, iuxta quamuis multiplicationem eandem habebunt rationem, si prout inter se respondent, ita sumptę fuerint. 262.*A*

Magnitudines quatuor proportionales, conuertendo quoq; proportionales sunt. 263.A

Si magnitudo magnitudinis æquè fuerit multiplex, atq; ablata ablatæ: Etiam reliqua reliquæ ita multiplex erit, vt tota totius. 264.A

Si duæ magnitudines duarum magnitudinum sint æquè multiplices, & detractæ quædam sint earundem æquè multiplices: Et reliquę eisdem aut æquales sunt, aut æquè ipsarum multiplices. 265.A

Æquales ad eandem, eandem habẽt rationem: Et eadem ad æquales. 265.A

Eodem modo, æquales ad æquales eandem habent rationem. 266.*A*

Inæqualium magnitudinum maior ad eandem, maiorem rationem habet, quàm minor: Et eadem ad minorem, maiorem rationem habet, quàm ad maiorem. 266.A

Quæ ad eandem, eandem habent rationem, æquales sunt: Et ad quas eadem eandem habet rationem, eæ æquales quoq; sunt. 267.A

Ad eandem magnitudinem rationem habentium, quæ maiorem rationem habet, illa maior est: Ad quam autem eadem maiorem rationem habet, illa minor est. 268.A

Quę eidem sunt eędem rationes, & inter se sunt eædem. 268.A

Quæ eisdem sunt eadem rationes, & inter se sunt eædem. 268.*A*

Si sint magnitudines quotcunq; proportionales: quemadmodum se habuerit vna antecedentium ad vnam consequentium, ita se habebunt omnes antecedentes ad omnes consequentes. 269.A

Si prima ad secundam, eandem habuerit rationem, quam tertia ad quartam, tertia verò ad quartam maiorem rationem habuerit, quàm quinta ad sextam: Prima quoque ad secundam, maiorem rationẽ habebit, quàm quinta ad sextam. 269.A

Si prima ad secundam, eandem habuerit rationem, quàm tertia ad quartam; tertia verò ad quartam, minorem rationem habuerit, quàm quinta ad sextam: Prima quoq; ad secundam, minorem rationem habebit quàm quinta ad sextam. 269.*A*

Si prima ad secundam, maiorem habuerit rationem, quã tertia ad quartam; tertia item ad quartam, maiorem habuerit, quàm quinta ad sextam: Prima quoque ad secũdam, maiorem habebit, quàm quinta ad sextam. Quod si prima ad secundam, minorem habuerit rationem, quàm tertia ad quartam; tertia item ad quartam, minorem, quàm quinta ad sextam: Prima quoque ad secundam, minorem rationem habebit, quàm quinta ad sextam. 269.*A*

Si prima ad secundam sit, vt tertia ad quartam; sit autem prima maior, quàm tertia: erit & secunda maior quàm quarta. Et si æqualis, æqualis: Et si minor, minor. 270.A

Eodem modo, si secunda maior fuerit quàm quarta; erit & prima maior quàm tertia: Et si æqualis, æqualis: Et si minor, minor. 270.*A*

Partes cum pariter multiplicibus in eadẽ sunt ratione, si prout sibi mutuò respondent, ita sumantur. 271.A

Magnitudines quatuor proportionales; vicissim quoque proportionales sunt. 271.A

Si sint quatuor magnitudines proportionales, sit autem prima maior quàm secunda: erit quoq; tertia maior quàm quarta: Et si æqualis, æqualis: Et si minor, minor. 271.*A*

Si compositæ magnitudines fuerint proportionales, hæ quoq; diuisę proportionales erunt. 272.A

Si diuisæ magnitudines sint proportionales, hę quoq; compositæ proportionales erũt. 272.A

Si sit, vt totum ad totum, ita ablatum ad ablatũ: erit quoq; reliquum ad reliquum, vt totum ad totum. 274.A

Si sint quatuor magnitudines proportionales; hæ quoque per conuersionem rationis proportionales erunt. 274.A

Si sint tres magnitudines, & aliæ tres, quæ binę & in eadem ratione sumantur; sit autem ex æquo prima maior, quàm tertia; erit & quarta maior quàm sexta; Et si æqualis, æqualis: Et si minor, minor. 274.A

Si sint tres magnitudines, & aliæ tres, quæ binæ & in eadem ratione sumantur, fueritque perturbata earum proportio; ex æquo autem prima maior fuerit quã tertia: Erit & quarta maior quàm sexta: Et si æqualis, æqualis: Et si minor, minor. 275.A

Si sint quotcunq; magnitudines, & aliæ ipsis æquales numero, quæ binæ in eadem ratione sumantur: Et ex æqualitate in eadem ratione erunt. 275.A

Si sit prima ad secundam, vt tertia ad quartam: habebunt æquemultiplices primæ ac tertiæ ad secundam & quartæ

& quartam, eandem rationem: Item æquemultiplices secundæ & quartæ ad primam ac tertiam. Et contrà, eandem rationem habebunt secunda & quarta ad æquè multiplices primæ ac tertiæ: Item prima ac tertia, ad æquè multiplices secundæ & quartæ. 276. A

Si sint tres magnitudines, aliæque ipsis æquales numero, quæ binæ in eadem ratione sumantur, fuerit autem perturbata earum proportio: Etiam ex æqualitate in eadem ratione erunt. 277. A

Si sit prima ad secundam, vt tertia ad quartam: Item quinta ad secundam, vt sexta ad quartam: Etiam composita prima cum quinta ad secundam erit, vt composita tertia cum sexta ad quartam. 277. A

Si duæ magnitudines ad duas eandem habeāt rationem, & detractæ ex prioribus ad easdem posteriores eandem quoq; habeant rationem: Et reliquæ ad easdem posteriores eandem rationem habebunt. 278. A

Si quatuor magnitudines sint proportionales: Maxima & minima reliquis duabus maiores erunt. 278. A

Si tres magnitudines sint proportionales: Maxima & minima maiores erunt, quàm dupla reliquæ. 278. A

Si prima ad secundam habeat maiorem rationem, q̄ tertia ad quartam: habebit conuertendo secunda ad primam, minorem rationem, q̄ quarta ad tertiam. 279. A

Si prima ad secundam habeat minorem proportionem, quàm tertia ad quartam: habebit conuertendo secunda ad primam, maiorem rationem, quàm quarta ad tertiam. 279. A

Si prima ad secundam habeat maiorem rationem, quàm tertia ad quartam: habebit quoq; vicissim prima ad tertiam, maiorē rationē, quàm secunda ad quartam. 279. A

Si prima ad secundam habeat minorem rationē, quàm tertia ad quartam: habebit quoq; vicissim prima ad tertiam, minorem rationem, quàm secunda ad quartam. 279. A

Si prima ad secundam habeat maiorem rationem, quàm tertia ad quartam: habebit quoq; composita prima cū secunda, ad secundam maiorem rationem, quàm composita tertia cum quarta, ad quartam. 280. A

Si prima ad secundam habeat minorem rationem, quàm tertia ad quartam: habebit quoque composita prima cum secunda, ad secundam minorem rationem, quàm composita tertia cum quarta, ad quartam. 280. A

Si composita prima cum secunda ad secundam, maiorem habeat rationem, quàm composita tertia cum quarta ad quartam: habebit quoq; diuidendo prima ad secundam maiorem rationem, quàm tertia ad quartam. 280. A

Si prima cum secunda ad secundam minorem rationem habeat, quàm tertia cum quarta ad quartam: habebit quoq; diuidendo prima ad secundam minorem rationem, quàm tertia ad quartam. 280. A

Si composita prima cum secunda ad secundam habeat maiorem rationem, quàm composita tertia cū quarta ad quartam, habebit per conuersionem rationis, prima cum secunda ad primam, minorem rationē, quàm tertia cum quarta, ad tertiam. 281. A

Si prima cum secunda ad secundam, minorem habeat rationem, quàm tertia cum quarta ad quartam: habebit per conuersionem rationis, prima cum secunda ad primam, maiorē rationem, quàm tertia & quarta ad tertiam. 281. A

Si sint tres magnitudines, & aliæ ipsis æquales numero, sitq; maior proportio primæ priorum ad secundam, q̄ primæ posteriorum ad secundam: Item secundæ priorum ad tertiam maior, quàm secundæ posteriorum ad tertiam: Erit quoq; ex æqualitate, maior proportio primæ priorum ad tertiam, quàm primæ posteriorum ad tertiam. 281. A

Idem eueniet, si proportio primæ ad secundam eadem fuerit, quæ primæ ad secundam; at secundæ ad tertiam maior, quàm secundæ ad tertiam: Vel contrà, si proportio primæ ad secundam fuerit maior, quàm primæ ad secundam: at secundæ ad tertiam eadem, quæ secundæ ad tertiam. 281. & 282. A

Quòd si proportiones priorum magnitudinum minores fuerint: erit quoq; ex æqualitate minor proportio primæ ad tertiam, quàm primæ ad tertiam. 282. A

Idem eueniet, si proportio primæ ad secundam fuerit eadem, quæ primæ ad secundam; at secundæ ad tertiam minor, quàm secundæ ad tertiam: Vel contrà, si proportio primæ ad secundam fuerit minor, quàm primæ ad secundam; at proportio secundæ ad tertiā eadem, quæ secundæ ad tertiam. 282. A

Quòd si plures sint magnitudines tribus, siue omnes proportiones in vno ordine magnitudinum sint maiores, vel minores omnibus proportionibus in alio ordine magnitudinum; siue vna tantùm maior, quàm vna, vel duæ, &c. Erit maior vel minor proportio primæ ad vltimam in vno ordine, quàm primæ ad vltimam in alio ordine. 282. A

Si sint tres magnitudines, & aliæ ipsis æquales numero, sitq; maior proportio primæ priorum ad secundam, quàm secundæ posteriorum ad tertiam: Item secundæ priorum ad tertiam maior, quàm primæ posteriorum ad secundam: Erit quoque ex æqualitate, maior proportio primæ priorum ad tertiam, quàm primæ posteriorum ad tertiam. 282. A

Idem eueniet, si proportio primæ priorum ad secundam sit, quæ secundæ posteriorum ad tertiam; at secundæ priorum ad tertiam maior, quàm primæ priorum ad secundam: Vel contrà, ratio primæ priorum ad secundam maior, quàm secundæ posteriorum ad tertiam; at secundæ priorum ad tertiam eadem, quæ primæ posteriorum ad secundam. 283. A

Quòd si in primis magnitudinibus aliquæ proportiones, vel omnes sint minores; erit minor proportio primæ ad tertiam, quàm primæ ad tertiam. 283. A

Quòd si plures sint magnitudines quàm tres in quolibet ordine: erit quoq; maior vel minor proportio primæ ad vltimam, quàm primæ ad vltimam. 283. A

Si fuerit maior proportio totius ad totum, quàm ablati ad ablatum: Erit & reliqui ad reliquum maior proportio quàm totius ad totum. 283. A

Si fuerit minor ratio totius ad totum, quàm ablati ad ablatum: Erit etiam minor ratio reliqui ad reliquum, quàm totius ad totum. 283. A

Si sint quotcunque magnitudines, & aliæ ipsis æquales numero, sitque maior ratio primæ priorum, ad primam posteriorum, quàm secundæ ad secundam; & hæc maior, quàm tertiæ ad tertiam, & sic deinceps: Habebunt omnes priores simul ad omnes posteriores simul, maiorem rationem, quàm omnes priores, relicta prima, ad omnes posteriores, relicta quoq; prima

minorem autem, quàm prima priorum ad primam posteriorum; maiorẽ denique etiam, quàm vltima priorum ad vltimam posteriorum. 283. A

Propositis quotcunque magnitudinibus, proportio primæ ad vltimam componitur ex omnibus proportionibus intermedijs, vt ex proportione primæ ad secundam, secundæ ad tertiam, &c. 288. A

Si quatuor magnitudines sint Arithmeticè proportionales, hoc est, idem excessus sit inter primam & secundam, qui inter tertiam & quartam; hæ vicissim quoq; erunt Arithmeticè proportionales, hoc est, idem excessus erit inter primam & tertiam, qui inter secundam & quartam. 163. & 164. B

MAGNITVDINES rationales, & irrationales. Vide Rationales, & irrationales magnitudines.

MINVTIAE numerorum.

Nullus numerus fractus, aut compositus ex integro & fracto, in se multiplicatus procreat quadratum numerum integrum. 254. A

Duæ minutiæ eundem habentes denominatorem, quarum vnius numerator sit vnitas, eandem proportionem habent, quam numeratores. 85. B

Numerator cuiusuis minutiæ ad denominatorem eandem proportionẽ habet, quam minutia ad integrum, cuius est minutia. 85. B

Minutia quælibet, pars est numeratoris à denominatore denominata. 86. B

Duæ minutiæ eundem habentes denominatorem, quarum neutra numeratorem habeat vnitatem, eandem proportionem habent, quàm numeratores. 86. B

Si duarum minutiarum numerator prioris in denominatorem posterioris, & posterioris numerator in denominatorem prioris ducatur; erit prior minutia ad posteriorem, vt prior numerus productus ad posteriorem. 86. B

Integrum ad summam duarum minutiarũ eandem proportionem habet, quam numerus ex multiplicatione mutua denominatorum productus ad summam duorum productorum, quorum vnus ex numeratore prioris minutiæ in posterioris denominatorem, alter verò ex numeratore posterioris in denominatorẽ prioris gignitur. 87. B

Si duæ minutiæ eundem habeant numeratorem, erit vt prior minutia ad posteriorem, ita posterioris denominator ad denominatorem prioris. 87. B

Minutiæ, quarum numeratores ad denominatores eandem habent proportionem, æquales sunt: Et æqualium minutiarum numeratores ad denominatores eandem proportionem habent. Cuius autem numerator ad denominatorem habet maiorem proportionem, illa maior est: Et quæ maior est, eius numerator ad denominatorem habet proportionem maiorem. 87. B

Minutiæ, quarum numeratores eandem proportionem habent, quam denominatores, sunt æquales: Et minutiarum æqualium numeratores eandem habent proportionem, quam denominatores. Cuius autem numerator maiorem proportionem habet, quàm denominator, illa maior est: Et maioris numerator maiorem habet proportionem, quàm denominator. 88. B

Minutia minutiæ æqualis est minutiæ simplici, cuius numerator ex multiplicatione mutua numeratorum, denominator verò ex mutua denominatorũ multiplicatione procreatur. 89. B

Duæ minutiæ, quarum numeratores in denominatores vicissim ducti gignunt numeros æquales, æquales sunt: & minutiarum æqualium numeratores in denominatores vicissim ducti, gignunt æquales numeros. Cuius verò numerator in denominatorem alterius ductus maiorem numerum gignit, illa maior est: & maioris minutiæ numerator in denominatorem alterius ductus maiorem numerum producit. 90. B

Quando minor numerus per maiorem diuiditur, numerus Quotiens est minutia, cuius numerator est numerus minor diuisus, denominator verò maior numerus diuidens. 91. B

NVMERI proportionales in communi.

Propositis quatuor numeris proportionalibus, sumptis{q} primi ac tertij æquè multiplicibus iuxta quãuis multiplicationem, item secundi & quarti æquè multiplicibus iuxta quamcunque etiam multiplicationem: si multiplex primi maior sit multiplice secundi, erit & multiplex tertij maior multiplice quarti: Et si æqualis, æqualis: Et si minor, minor. 251. A

Propositis quatuor numeris non proportionalibus, ita vt maior sit proportio primi ad secundum, quàm tertij ad quartum; si sumantur æquè multiplices primi, ac tertij, item æquè multiplices secundi ac quarti, fieri potest, vt multiplex primi maior sit multiplice secundi, multiplex autem tertij non maior multiplice quarti. 251. & 252. A

Propositis quatuor numeris, sumptis{q} æquè multiplicibus primi ac tertij iuxta quamuis multiplicationem, item æquè multiplicibus secundi ac quarti iuxta quamuis etiam multiplicationem; si multiplice primi existente maiore, quàm multiplex secundi, multiplex tertij maior quoq; sit necessariò, quàm multiplex quarti; Et si æqualis, æqualis; Et si minor, minor: Erit eadem proportio primi ad secundum, quæ tertij ad quartum. 253. A

Propositis quatuor numeris, sumptis{q} primi ac tertij æquè multiplicibus, item secundi & quarti æquè multiplicibus; si quando contingat, multiplicem primi maiorem esse multiplice secundi, multiplicem verò tertij non maiorẽ multiplice quarti: Maior erit proportio primi ad secundum, quàm tertij ad quartum. 253. A

Datis tribus terminis Geometricè proportionalibus, siue æqualibus, siue inæqualibus: Summa ex primo semel, secundo bis, & tertio semel collecta; ac summa conflata ex secundo & tertio semel; ac tertius semel, sunt etiam Geometricè proportionales. pag. 313. A

Datis tribus terminis, siue æqualibus, siue inæqualibus, Geometricè proportionalibus: Summa ex primo bis, secundo bis, & tertio semel collecta; ac summa ex primo, secundo, & tertio semel conflata; ac denique tertius semel, sunt Arithmeticè proportionales. 313. A

Datis tribus terminis, siue æqualibus, siue inæqualibus, Geometricè proportionalibus: Summa collecta ex primo

ex primo bis, ex secundo ter, & tertio semel; ac summa conflata ex secundo bis, & tertio semel; & denique summa ex secundo semel, & tertio semel coaceruata, Harmonicè proportionales sunt. 314. A

Numerus ex multiplicatione duorum numerorum productus, ita se habet ad alterutrum multiplicantium, vt alter multiplicantium ad vnitatem. 6. B

Numerus ex diuisione duorum numerorum procreatus, ita se habet ad vnitatem, vt diuisus numerus ad diuidentem. 6. B

Si numerus numeri pars fuerit, & alter alterius eadem pars: Et simul vterq; vtriusque simul eadem pars erit, quæ vnus vnius. 15. B

Idem conuenit numeris fractis. 16. B

Si vnitas numeri pars fuerit, & altera vnitas, vel numerus, alterius numeri eadem pars: Et simul vtraq; vnitas, vel vnitas & numerus simul, vtriusq; numeri simul eadem pars erit, quæ vnitas numeri. 16. B

Si sint quotcunq; numeri quotcunq; numerorum æqualium numero, singuli singulorum, eadem pars: Et omnes omnium simul eadem pars erũt, quæ vnus vnius. 16. B

Idem numeris fractis conuenit. 17. B

Si sint quotcunq; numeri quotcunque numerorum æqualium numero, singuli singulorum, æquè multiplices: quàm multiplex est vnius vnus numerus, tam multiplices erunt & omnes omnium. 17. B

Idem verum est de numeris fractis. 17. B

Si numerus numeri partes fuerit, & alter alterius eædem partes: Et simul vterque vtriusque simul eædem partes erit, quæ vnus vnius. 17. B

Idem locum habet in numeris fractis. 17. B

Si sint quotcunque numeri quotcunq; numerorum, singuli singulorum, eædem partes: Et omnes omnium simul eædem partes erunt, quæ vnus vnius. 17. B

Si numerus numeri pars fuerit, qualis ablatus ablati: Et reliquus reliqui eadem pars erit, qualis totus totius. 18. B

Idem locum habet in numeris fractis. 18. B

Si numerus numeri æquè fuerit multiplex, atq; ablatus ablati: Etiam reliquus reliqui ita multiplex erit, vt totus totius. 18. B

Idem verum est de numeris fractis. 18. B

Si numerus numeri partes fuerit, quales ablatus ablati: & reliquus reliqui eædem partes erit, quales totus totius. 18. B

Idem in fractis numeris verum est. 19. B

Si numerus numeri pars fuerit, & alter alterius eadem pars: Et vicissim, quæ pars est, aut partes primus tertij, eadem pars erit, vel eædem partes & secundus quarti. 19. B

In fractis numeris idem concludes. 19. B

Si numerus numeri partes fuerit, & alter alterius eædem partes: Et vicissim quæ partes est primus tertij, aut pars, eædem partes erit & secundus quarti, aut pars. 19. B

Numeris fractis hoc idem conuenit. 19. B

Si fuerit vt totus ad totum, ita ablatus ad ablatum: Et reliquus ad reliquum erit, vt totus ad totum. 20. B

Idem in fractis numeris verum est. 20. B

Si primus secundum, & tertius quartum æqualiter contineat, eandemq; insuper partẽ, aut partes; erit secundus primi, & quartus tertij eædem partes. Et si primus secundum, & quartus tertij eædem partes sit; continebit primus secundum, & tertius quartum æqualiter, eandemq; insuper partem, aut partes. 20. B

Idem verum est in numeris fractis. 20. B

Si sint quotcunque numeri proportionales: erit quemadmodum vnus antecedentium ad vnum consequentium, ita omnes antecedentes ad omnes consequentes. 21. B

Verum quoq; hoc est in numeris fractis. 22. B

Si quatuor numeri proportionales sint: Et vicissim proportionales erunt. 22. B

In fractis idem cernitur. 23. B

Si sint quotcunque numeri, & alij illis æquales multitudine, qui bini sumantur & in eadem ratione: Etiam ex æqualitate in eadem ratione erunt. 23. B

Idem in numeris fractis verum est. 23. B

Duæ proportiones numerorum, quæ eidem proportioni eædem sunt; inter se quoque sunt eædem. 23. & 24. B

Si vnitas numerum quempiam metiatur, æquè autem alter numerus alterum quendam numerum metiatur: Et vicissim æquè vnitas tertium numerũ metietur, & secundus quartum. 24. B

Si numerus duos numeros multiplicãs fecerit aliquos: geniti ex ipsis eandem rationem habebunt, quam multiplicati. 25. B

In fractis numeris idem verum est. 25. B

Si duo numeri numerum quempiam multiplicantes fecerint aliquos: geniti ex ipsis eandẽ rationem habebunt, quam multiplicantes. 25. B

In fractis idem habet locum. 25. B

Si numerus quotcunq; numeros multiplicet, vel quotcunque numeri numerum quempiam multiplicent, habebunt producti numeri easdem rationes, quas numeri multiplicantes. 25. B

Si quatuor numeri sint proportionales; q ex primo & quarto fit, numerus, æqualis est ei, qui ex secundo & tertio fit, numero. Et si, qui ex primo & quarto fit, numerus, æqualis sit ei, q ex secundo & tertio fit, numero: ipsi quatuor numeri proportionales erunt. 25. & 26. B

Verum est idem in numeris fractis. 26. B

Si duo numeri duos numeros eandem, quam illi, habentes rationem, multiplicent, antecedens nimirum illorum consequentem horum, & consequens antecedentem; geniti ex ipsis æquales erunt. 26. B

Idem conuenit numeris fractis. 26. B

Si maior sit proportio primi ad secundum, quàm tertij ad quartum; qui ex primo & quarto fit, numerus, maior est eo, qui ex secundo & tertio fit, numero: Et contrà; tam in fractis numeris, quàm integris. 26. B

Si tres numeri sint proportionales; qui sub extremis continetur, æqualis est ei, qui à medio efficitur: Et si qui sub extremis continetur, æqualis sit ei, qui à medio describitur; ipsi tres numeri proportionales erunt. 27. B

In fractis idem verum est. 27. B

Si maior sit proportio primi ad secundum, quàm secundi ad tertium; maior fiet numerus ex primo in tertium, quàm ex secundo in se. Et contrà, tam in numeris fractis, quàm integris. 27. B

Minimi numeri omnium eandem cum eis rationem habentium, metiuntur æquè numeros eandem cum eis rationẽ habentes, maior quidem maiorẽ, minor verò minorem. 27.B

Si tres numeri ſint continuè proportionales, & primi duo dicantur in ſua proportione minimi, metietur primus ſecundum, & ſecundus tertium. 27.& 28.B

Quotlibet numeri minimi in continuatione ſuarum proportionum, ſiue eædem ſint, ſiue diuerſæ proportiones, metiuntur æquè totidem alios numeros, qui eaſdem cum eis proportiones habent, primus primum, ſecundus ſecundum, & tertius tertium, &c. 28. B

Si ſint tres numeri, & alij ipſis multitudine æquales, qui bini ſumantur, & in eadem ratione, fuerit autem perturbata eorum proportio: etiam ex æqualitate in eadem ratione erunt. 28. B

Idem verum eſt in numeris fractis. 29. B

Si quatuor numeri tam integri, quàm fracti, proportionales ſint; & conuertendo proportionales erũt. 29.B

Si compoſiti numeri, ſiue integri, ſiue fracti, proportionales ſint; & diuiſi proportionales erunt. 29.B

Si diuſi numeri proportionales ſint, ſiue integri, ſiue fracti; & diuiſi proportionales erunt. 29. B

Si compoſiti numeri tam fracti quàm integri, proportionales ſint; & per conuerſionem rationis proportionales erunt. 30. B

Si primus ad ſecundum eandem habeat rationem, quam tertius ad quartum: habeat autem & quintus ad ſecundum eandem rationem, quam ſextus ad quartum, tam in fractis numeris, quàm integris: Etiam compoſitus primus cum quinto ad ſecundum eandem habebit rationem, quam tertius cum ſexto ad quartum. 30. B

Si duo numeri ad duos numeros eandem habeant rationem; & detracti quidem habeant ad eoſdem eandem, tam in numeris fractis, quàm integris: Et reliqui ad eoſdem eandem rationem habebunt. 30. B

Si primus ad ſecundum eandem habeat rationem, quam tertius ad quartum; habeat autẽ & primus ad quintum eandem, quam tertius ad ſextum, tam in integris, quàm fractis numeris: Etiam primus ad compoſitum ſecundum cum quinto eandem rationem habebit, quam tertius ad quartum cum ſexto. 30. B

Si quotcunque numeri ad eundem habeant proportiones, quas alij illis multitudine æquales ad quendam aliũ eundem, tam in fractis, quàm integris numeris: habebunt quoq; omnes illi ſimul ad eundem, proportionẽ, quam hi alij omnes ſimul ad alium illum eundem. Et ſi idem numerus ad quotcunque numeros proportiones habeat, quas idem alius numerus ad alios multitudine illis æquales: habebit quoq; idem numerus ad omnes illos ſimul proportionem, quam idem alius numerus ad hos omnes ſimul. 30. B

Vltimæ nouem propoſ. lib. 5. à Campano adiectæ, qua ratione eodem modo demonſtrentur in numeris improportionalibus. 31. B

Maxima menſura quotlibet numerorum metitur ipſos per numeros minimos eandẽ cum ipſis proportionem habentes. 35.B

Si duo numeri multiplicent minimos eandem rationem habentes, maior minorẽ, & minor maiorem; producetur minimus numerus ab illis numeratus. 36. B

Si fuerint quotcunq; numeri deinceps proportionales, extremi verò ipſorum primi inter ſe ſint; ipſi minimi ſunt omnium eandem cum eis rationem habentium. 39. B

Si ſint quotuis numeri non continuè proportionales, extremi verò ipſorum ſint inter ſe primi; ipſi minimi ſunt in continuatione ſuarum proportionum. 40.B

Si tres numeri ſint minimi cõtinuè proportionales; extremi quadrati ſunt: Si autem quatuor cubi, &c. 40.& 41.B

Extremi numeri continuè proportionalium quotcunq; minimorum primi ſunt inter ſe. 41.& 42.B

Duo numeri minimi in ſua ꝓportione metiuntur omnes medios quotcunque minimorũ in eadem ratione. 41. B

Si ſint quotcunque numeri deinceps proportionales, primus autem ſecundum non metiatur, neq; alius quiſquam vllum metietur. 44. B

Si ſint quotcunque numeri deinceps proportionales, primus autem ſecundi nõ ſit multiplex; neq; alius quiſquam vllius multiplex erit. 45. B

Si ſint quotcunque numeri deinceps proportionales, primus verò ſecundum metiatur; & quicunque alius quemlibet ſequentium metietur: Si primus autem ſecundi ſit multiplex; & quicunque alius cuiuslibet ſequentium multiplex erit. 45. B

Si ſint quotcunque numeri deinceps proportionales, primus autem, vel alius quiſquã nullum à ſecundo metiatur, neq; primus ſecundum metietur. Et ſi primus vel alius quiſquam nullius à ſecundo ſit multiplex; neq; primus ſecundi multiplex erit. 45.B

Si ſint quotcunque numeri deinceps proportionales, primus autem extremum metiatur; is etiam metietur ſecundum. 45. B

Si ſint quotcunque numeri deinceps proportionales, primus autem, vel alius quiſquam quemlibet à ſecundo metiatur; metietur & primus ſecundum. Et ſi primus, vel alius quiſquam cuiuslibet à ſecundo ſit multiplex; primus quoq; ſecundi multiplex erit. 46.B

Si inter duos numeros medij continua proportione ceciderint numeri; quot inter eos medij continua proportione cadũt numeri, tot & inter alios eandem cum illis habentes rationem medij continua proportione cadent. 46.B

Inter duos numeros duplæ, triplæ, aut quintuplæ proportionis, vel ſuperparticularis, vel ſuperbipartientis nõ poteſt cadere medius numerus proportionalis. 46.& 47. B

Item neque inter duos numeros ſola vnitate, aut binario differentes. 46.& 47. B

Ex quo fit, neq; Diapaſon, neq; Tonum in Muſicis diuiſi poſſe bifariam. 47. B

Si duo numeri ſint inter ſe primi, & inter eos medij continua proportione ceciderint numeri; quot inter eos medij continua proportione cadunt numeri, totidem inter vtrumq; eorum, & vnitatem medij continua proportione cadent. 47. B

Si numerus ſeipſum multiplicans fecerit aliquẽ, & rurſum multiplicet productum, &c. omnes producti ſunt continuè proportionales ab vnitate. 48. B

Si

Si inter duos numeros & vnitatẽ continuè proportionales ceciderint numeri; quot inter vtrumque ipſorum, & vnitatem deinceps medij continua proportione cadunt numeri, totidem & inter ipſos medij continua proportione cadent. 48. B

Si quotquot numeri ſint ab vnitate continuè proportionales, ſecundus ab vnitate in ſe multiplicatus producet tertium, & ex eodem in hunc fiet quartus, & ſic deinceps. 49. B

Si ſint ab vnitate duo ordines numerorum continuè proportionalium, & multitudine æqualium; habebunt tertij ab vnitate proportionem duplicatã eius, quam habent ſecundi ab vnitate; quarti verò eiuſdem triplicatam, & quinti quadruplicatam; & ſemper deinceps vno amplius. 49. B

Si ſint ab aliquo numero eodem duo ordines numerorum continuè proportionaliũ, & multitudine æqualium; habebunt tertij ab illo numero proportionem duplicatam eius, quam habent ſecundi ab eodem; quarti verò eiuſdem triplicatam, &c. 49. B

Si inter duos numeros, & aliquẽ alium numerum aſſumptũ, continuè proportionales ceciderint numeri; quot inter vtrumque ipſorum, & aſſumptũ deinceps medij continua proportione cadunt numeri, totidem & inter ipſos medij continua proportione cadent. 50. B

Si ſint quotlibet numeri deinceps proportionales, & multiplicans quiſque ſeipſum faciat aliquos: qui ab illis producti fuerint, proportionales erunt: Et ſi numeri primùm poſiti multiplicantes iam factos fecerint aliquos: ipſi quoque proportionales erunt: Et ſemper circa extremos hoc eueniet. 52. B

Primi autem numeri producti, ſunt in duplicata ratione proportionis datorum numerorum: & ſecundo loco geniti in triplicata, &c. 52. B

Si ab vnitate quotcunque numeri ſint deinceps proportionales: minor quicunque maiorem quemlibet metitur per aliquẽ eorum, qui in proportionalibus ſunt numeris. 66. B

In numeris ab vnitate continuè proportionalibus, quantum abeſt maior quilibet à minore quouis eũ metiente, tantùm ab vnitate diſtat numerus, per quem minor maiorẽ metitur. Item quilibet numerus ſeipſum multiplicans, producit numerum tantùm ab eo diſtantem, quantum ipſe ab vnitate abeſt. Si verò minor aliquis maiorem quempiam multiplicet, procreatur numerus tantùm à maiore diſtans, quantum minor ab vnitate. 67. B

Si ab vnitate quotcunq; numeri deinceps proportionales ſint; quicunque primorum numerorum vltimũ metiuntur, iidem & eum, q vnitati proximus eſt, metientur. 67. B

Itaque neq; vllus numerus primus, qui maior ſit eo, qui proximus eſt vnitati, neque vllus minor proximum vnitati non metiens, metiri poteſt vltimum. 68. B

Si ab vnitate quotcunq; numeri deinceps proportionales ſint, qui verò poſt vnitatem, primus ſit; Maximum nullus alius metietur, præter eos, qui ſunt in numeris proportionalibus. 68. B

Si quotcunque numeri continuè proportionales, ſint minimi omnium eandem rationem habentium cũ ipſis: Numerus aliquem eorum metiens, metietur quoque alterum duorum numerorum, qui in eadem ratione ſunt minimi; vel certè ad alterum erit compoſitus. 69. B

Si tres numeri ſint deinceps proportionales, & minimi omnium eandem cũ ipſis rationem habẽtium; Duo quilibet ſimul, ad reliquum primi erunt. 73. A

Si quotcunque numeri deinceps proportionales, ſint minimi omnium eandem cum illis rationem habentium, ad quemlibet eorum reliqui omnes ſimul collecti, erũt primi. 74. B

Si duo numeri primi inter ſe fuerint; non erit vt primus ad ſecundum, ita ſecundus ad aliũ quempiam. 74. B

Si fuerint quotcunque numeri deinceps proportionales, extremi autem ipſorum primi inter ſe ſint; nõ erit vt primus ad ſecundum, ita vltimus ad alium quempiam. 74. B

Si ſint quotcunque numeri deinceps proportionales, detrahantur autem à ſecundo, & vltimo æquales ipſi primo; Erit vt ſecundi exceſſus ad primum, ita vltimi exceſſus ad omnes ipſum antecedentes. 81. B

Quolibet numero per duos quotuis numeros diuiſo, erunt duo bini numeri Quotientibus, conuerſo ordine proportionales. 83. B

Quolibet numero per quotuis numeros diuiſo, erunt bini numeri diuidentes binis Quotientibus reſpondentibus conuerſo ordine proportionales. 83. B

Quolibet numero per quotuis numeros continuè proportionales diuiſo, erũt Quotientes conuerſo ordine in eadem proportione continuè proportionales. 83. B

Si ſint quotuis numeri quicunque, & totidem alij in eiſdem proportionibus; erit vt ſumma priorũ ad quemlibet eorum, ita ſumma poſteriorum ad eum, qui illi in poſterioribus reſpondet. 83. B

Si ſint quotuis numeri quicunque, & totidem alij in eiſdem proportionibus; ſumma priorum per ipſos diuiſa ſigillatim, faciet eoſdem prorſus Quotientes, quos ſumma priorum per ipſos diuiſa facit. 84. B

Si ſumma quotuis numerorũ continuè proportionalium per eos ſigillatim diuidatur; & quotientum ſumma per ipſos Quotientes: Et horum ſecundorum Quotientum ſumma per eoſdem ſecundos Quotientes, & ſic deinceps in infinitum; procreabuntur alternis ſemper iidem primi Quotientes ordine conuerſo. 84. B

Si ſumma quotuis numerorũ continuè proportionalium per eos ſigillatim diuidatur; erit ſumma omniũ quotientum æqualis numero, qui gignitur ex multiplicatione primi in vltimum, vel ex mutua multiplicatione quorumlibet duorum mediorũ ab extremis æqualiter diſtantium, vel denique (ſi quotientum numerus fuerit impar) ex multiplicatione medij Quotientis in ſe. 84. B

Itaque quando numerus terminorum eſt impar, ſumma Quotientum eſt numerus quadratus, cuius radix eſt medius Quotiens. 85. B

Proportionum compoſitio, de qua Euclides defin. 10. lib. 5. & defin. 5. lib. 6. non eſt verè additio proportionũ, vt plerique falsò exiſtimant. 96. B

Additio proportionum, ſubtractio, multiplicatio, atq; diuiſio, quomodo fiant. 97. B

NVMERVS fractus. Vide Minutiæ numerorũ.

NVMERVS Par, Impar, Primus, Pariter par, Pariter par & impariter: Pariter impar, Perfectus.

Numeros, quotquot iusserit quis, qui inter se multiplicati datum numerum gignant, reperire. 290. & 291. A

Numero per numerum diuiso, diuisus numerus gignitur ex multiplicatione numeri per diuisionẽ inuenti in numerum diuidentem. 6. B

Si duobus numeris inæqualibus datis, detrahatur semper minor de maiore, alterna quadã detractione, neque reliquus vnquam metiatur præcedentem, quoad assumpta sit vnitas: qui principio dati sunt numeri, primi inter se erunt. 13. B

Si duobus numeris inter se primis datis, detrahatur semper minor de maiore, alterna quadã detractione: nunquam reliquus metietur præcedentem, quoad assumpta sit vnitas. 13. B

Si datis duobus numeris inter se compositis, detrahatur semper minor de maiore, alterna quadam detractione: detractio ad vnitatem vsq; non perueniet, sed ad numerum, qui præcedentem detractum metiatur. 13. B

Numerus duos numeros metiẽs: metitur quoque maximam eorundem mensuram. 14. B

Numerus tres numeros metiens, vel plures; metitur etiam maximam eorum mensuram communem. 15. B

Omnis numerus, omnis numeri, minor maioris, aut pars est, aut partes. 15. B

Si duo numeri mutuò se multiplicantes fecerint aliquos: geniti ex ipsis æquales inter se erunt. 24. B

Idem in fractis numeris concludes. 24. B

Si duo numeri se mutuò multiplicauerint; procreabitur vnus, idemq; numerus. 25. B

Verum hoc etiam est in numeris fractis. 25. B

Primi inter se numeri, minimi sunt omnium eandem cum eis rationem habentium. 31. B

Minimi numeri omnium eandem cum eis rationem habentium, primi inter se sunt. 31. B

Quotcunque numeri inter se primi, minimi sunt in continuatione suarum proportionum. Et quotcunque numeri in continuatione suarum proportionum minimi, sunt inter se primi. 32. B

Si duo numeri primi inter se fuerint; qui vnum eorum metitur numerus, ad reliquũ primus erit. 32. B

Si duo numeri ad quempiam primi fuerint; etiam ex illis genitus ad eundem primus erit. 32. B

Si duo numeri primi inter se fuerint: Etiam ex vno eorum genitus ad reliquum primus erit. 32. B

Si duo numeri ad duos numeros, vterque ad vtrumque primi fuerint: Et qui ex eis gignentur, primi inter se erunt. 33. B

Si duo numeri primi inter se fuerint; & multiplicans vterque se ipsum fecerit aliquem; Et geniti ex ipsis primi inter se erunt: Et si, qui in principio, genitos ipsos multiplicantes fecerint aliquos; Et hi quoque primi inter se erũt: Et semper circa extremos hoc eueniet. 33. B

Si duo numeri primi inter se fuerint; etiam vterque simul ad quemlibet illorum primus erit. Et si vterque simul ad vnum illorum primus fuerit; etiam qui in principio, numeri primi inter se erunt. 33. B

Numerus, qui ex duobus compositus ad vnum illorum primus est, ad reliquum quoque primus erit. 34. B

Omnis primus numerus, ad omnẽ numerum, quem non metitur, primus est. 34. B

Si duo numeri se mutuò multiplicantes fecerint aliquem; genitum autem ex ipsis metiatur aliquis primus numerus: is etiam vnum eorum, qui in principio, metietur. 34. B

Si duo numeri se mutuò multiplicantes fecerint aliquẽ: genitum autem ex ipsis metiatur aliquis non primus numerus, vel certè ad ipsum sit compositus: is etiam ad vnum eorũ, qui in principio, compositus erit. 34. B

Omnem compositũ numerum, aliquis primus numerus metitur. 34. B

Omnis numerus aut primus est, aut eum aliquis primus metitur. 35. B

Si duo numeri numerum quempiam metiantur: Etiam minimus, quẽ illi metiuntur, eundem metietur. 36. B

Si tres numeri numerum quempiam metiantur; Etiam minimus ab eis numeratus eundem metietur. 37. B

Idem euenit in pluribus numeris. 37. B

Si numerum quispiam numerus metiatur; ille, quem metitur, partẽ habebit à metiente denominatam. 37. B

Si numerus partem habuerit quamlibet; metietur illum numerus à parte denominatus. 37. B

Minimus numerus, quem quotlibet numeri metiuntur; minimus est, habẽs partes à numeris metientibus denominatas. 38. B

Datis quotlibet numeris, idem semper numerus procreabitur ex eorũ mutua multiplicatione, quomodocunq; ordinem inter se permutent. 56. B

Si minimum numerum primi numeri metiantur; Nullus alius numerus primus illum metietur, præter eos, qui à principio metiebantur. 69. B

Demonstratio priorum 10. *propositionum lib.* 2. *in numeris.* 70. B

Nullus numerus ita diuidi potest, vt productus ex toto in vnam partem, sit æqualis quadrato alterius partis. 72. 73. & 79. B

Primi numeri plures sunt, omni proposita multitudine primorum numerorum. 76. B

Si pares numeri quotcunque componantur; totus par erit. 77. B

Si impares numeri quotcunque componantur, multitudo autem ipsorum sit par, totus par erit. 77. B;

Si impares numeri quotcunque componãtur multitudo autem ipsorum sit impar, & totus impar erit. 77. B

Impar numerus pari numero, vel pluribus paribus additus, facit imparem. 77. B

Si à pari numero par detrahatur; & reliquus par erit. 77. B

Si

Si à pari numero impar detrahatur & reliquus impar erit. 78. B

Si ab impari numero impar detrahatur; reliquus par erit. 78. B

Si ab impari numero par detrahatur; reliquus impar erit. 78. B

Si impar numerus parem multiplicans fecerit aliquem; factus par erit. 78. B

Si par numerus parem multiplicans fecerit aliquem; factus par erit. 78. B

Par in se multiplicans facit parem. 78. B

Si impar numerus imparem numerum multiplicans fecerit aliquem; factus impar erit. 78. B

Impar numerus in se multiplicatus gignit imparem. 79. B

Numerus impar numerū parem metiens, per numerum parem eum metitur. 79. B

Numerus impar numerum imparem metiens, per numerum imparem eum metitur. 79. B

Si impar numerus parem numerum metiatur; & illius dimidium metietur. 79. B

Si impar numerus ad aliquē numerum primus sit; & ad illius duplum primus erit. 80. B

Immò & ad quadruplum, octuplum, sedecuplum, & sic deinceps in proportione dupla. 80. B

Numerorum à binario duplorum vnusquisque pariter par est tantùm. 80. B

Si numerus dimidium habeat imparem; pariter impar est tantùm. 80. B

Si par numerus neque à binario duplus sit, neque dimidium habeat imparem; pariter par est, & pariter impar. 81. B

Si ab vnitate quotcunq; numeri deinceps exponantur in dupla proportione, quoad totus compositus fiat primus; & totus hic in vltimum multiplicetur: Factus erit Perfectus. 82. B

NVMERVS Planus, Solidus, Quadratus, Cubus, similes plani, ac solidi numeri.

Nullus numerus compositus ex integro & fracto, vel numerus fractus in se multiplicatus procreat numerum quadratum integrum. 254. A

Plani numeri rationem inter se habeat ex lateribus compositum. 44. B

Duorum quadratorum numerorum vnus medius est proportionalis numerus: Et quadratus ad quadratum duplicatam habet lateris ad latus rationem. 50. B

Medio proportionali cadente inter duos quadratos; erit is ad vtrumuis quadratorum compositus. 51. B

Duorum cuborum numerorū duo medij proportionales sunt numeri: Et cubus ad cubum triplicatam habet lateris ad latus rationem. 51. B

Duobus medijs proportionalibus cadentibus inter duos cubos; erunt ij, & vterlibet cuborum inter se compositi. 51. B

Si quadratus numerus quadratum numerum metiatur; & latus vnius metietur latus alterius. Et si vnius quadrati latus metiatur latus alterius; & quadratus quadratum metietur. 53. B

Si cubus numerus cubum numerum metiatur & latus vnius metietur latus alterius. Et si latus vnius cubi latus alterius metiatur; & cubus cubum metietur. 53. B

Si quadratus numerus quadratum numerum non metiatur; neque latus vnius metietur latus alterius. Et si latus vnius quadrati non metiatur latus alterius; neq; quadratus quadratum metietur. 53. B

Si cubus numerus cubum numerum non metiatur; neque latus vnius latus alterius metietur. Et si latus cubi vnius latus alterius non metiatur; neque cubus cubum metietur. 53. B

Si quadratus numerus quadrati numeri, & cubus cubi, sit multiplex; & vnius latus lateris alterius multiplex erit. Et si vnius quadrati, & cubi latus lateris alterius sit multiplex; & quadratus quadrati, & cubus cubi multiplex erit. Si verò quadratus quadrati, & cubus cubi non sit multiplex; neque latus lateris multiplex erit. Et si latus lateris non sit multiplex; neque quadratus quadrati, neq; cubus cubi erit multiplex. 54. B

Duorum similium planorum numerorum vnus medius proportionalis est numerus: Et planus ad planum duplicatam habet lateris homologi ad latus homologum rationem. 54. B

Medius numerus proportionalis inter duos planos similes, ad vtrumlibet compositus est. 54. B

Duorum similium solidorum numerorū duo medij proportionales sunt numeri: Et solidus ad solidum triplicatam rationem habet lateris homologi ad latus homologum. 55. B

Duo numeri medij proportionales inter duos solidos similes, & vterus solidorum, sunt compositi inter se. 55. B

Si inter duos numeros vnus medius proportionalis cadat numerus; similes plani erunt illi numeri. 57. B

Si inter duos numeros duo medij proportionales cadant numeri; similes solidi sunt illi numeri. 57. B

Si tres numeri deinceps sint proportionales, primus autem sit quadratus; Et tertius quadratus erit. 58. B

Si quatuor numeri deinceps sint proportionales, primus autem sit cubus; Et quartus cubus erit. 58. B

Si duo numeri rationem habeāt inter se, quam quadratus ad quadratum, primus autem sit quadratus; & secundus quadratus erit. 59. B

Proportio quadrati numeri ad non quadratum exhiberi non potest in duobus numeris quadratis. 59. & 60. B

Duo numeri in quintupla proportione proportionē non habent, quam quadratus ad quadratum. 60. B

Si duo numeri rationem inter se habeāt, quam cubus ad cubum, primus autem sit cubus; & secundus cubus erit. 60. B

Proportio cubi ad non cubum, reperiri non potest in duobus cubis numeris cubis. 60. B

Similes planī numeri rationem inter se habēt, quam quadratus ad quadratum. 60. B

Numeri proportionē habentes, quam quadratus ad quadratum, similes plani sunt. 60. B

Similes solidi numeri rationem habent inter se, quam cubus ad cubum. 60. B

Numeri proportionem habentes, quam cubus ad cubum, similes solidi sunt. 61. B

Nulli numeri habentes duplam proportionē; vel superparticularem, vel superbipartientem, vel duo numeri primi, vel primi inter se, quamuis neuter primus sit, dummodo quadrati non sint, aut cubi; similes plani sunt, aut solidi. 61. B

Si sint duo numeri plani, aut solidi similes, suus minor primus, metietur minor maiorem. 61. B

Duo numeri inter se primi, quorū minor primus sit, non possunt esse plani, vel solidi similes. 61. B

Si duo similes plani numeri multiplicantes se mutuò faciant quendam; productus quadratus erit. 62. B

Si duo numeri se mutuò multiplicantes faciāt quadratum; similes plani erunt. 62. B

Duo numeri quadratē se mutuò multiplicantes producūt quadratum. 61. B

Si duo numeri se mutuò multiplicantes faciant quadratum, alter autem sit quadratus; Et reliquus quadratus erit. 62. B

Si duo numeri se mutuò multiplicantes faciant non quadratum, alter autem sit quadratus, reliquus non quadratus erit. 63. B

Quadratus multiplicans non quadratum producit non quadratum. 63. B

Si cubus numerus seipsum multiplicans procreet aliquem; productus cubus erit. 63 B

Si cubus numerus cubum numerum multiplicans faciat aliquem; factus cubus erit. 63. B

Si cubus numerus numerum quendam multiplicans faciat cubum; Et multiplicatus cubus erit. 63. B

Cubus non cubum multiplicans facit non cubum. 63. B

Si cubus numerum quendam multiplicans faciat non cubum; Et multiplicatus non cubus erit. 64. B

Si numerus seipsum multiplicās faciat cubum; Et ipse cubus erit. 64. B

Si compositus numerus numerum aliquē multiplicans quempiam faciat; Factus solidus erit. 64. B

Si ab vnitate quotcunq; numeri deinceps proportionales sint; tertius quidem ab vnitate quadratus est, & vnū intermittentes omnes; quartus autē est cubus, & duos intermittentes omnes; septimus verò cubus simul, & quadratus, & quinq; intermittētes omnes 64. B

Si sint quotcunq; numeri ab vnitate continuè proportionales, omnes positi in locis imparibus, nimirum in tertio, quinto, septimo, &c. sunt quadrati. Omnes autem, qui sequuntur proximè positos in locis, tertio, sexto, nono, & alijs, quæ ternarius metitur, tuiusmodi sunt numeri, quartus, septimus, decimus, &c. sunt cubi. Omnes verò, qui proximè sequuntur positos in locis, sexto, duodecimo, decimooctauo, & alijs, quæ metitur senarius, quales sunt, septimus, tertiusdecimus, decimusnonus, &c. sunt cubi simul & quadrati. 65. B

Si ab vnitate quotcunq; numeri sint deinceps proportionales, qui verò post vnitatem, sit quadratus; Et reliqui omnes quadrati erunt. 65. B

At si qui post vnitatem, sit cubus; & reliqui omnes cubi erunt. 65. B

Si ab vnitate quotcunq; numeri deinceps sint proportionales, qui verò post vnitatem, non sit quadratus, neq; aliquis vllus quadratus erit, præter tertium ab vnitate, & vnum intermittentes omnes. At si, qui post vnitatem, nō sit cubus; neque alius vllus cubus erit, præter quartum ab vnitate, & duos intermittentes omnes. 66. B

Quando in numeris ab vnitate proportionalibus continuè, qui post vnitatem, non est cubus simul & quadratus; non necesse est, nullum alium esse quadratum simul & cubum, præter septimum ab vnitate, & quinque intermittentes omnes; quia aliquando etiam quartus, est quadratus simul ac cubus, non existente prima ab vnitate quadrato ac cubo simul. 66. B

QUADRANGVLVM triangulum. Vide Triangulum.

PARALLELAE lineæ. Vide Recta linea.

PARALLELEPIPEDVM, & aliæ figuræ solidæ vndiq; Regulares, ac planæ parallelæ.

Ad quæ plana, eadem recta linea recta est; illa sunt parallela. 201. B

Si sint duo plana parallela; rectæ lineæ, quæ ad vnū eorum recta est, ad reliquum quoq; recta erit. 201. B

Si duæ rectæ se mutuò tangētes, ad duas rectas se mutuò tangentes sint parallelę, non in eodem consistentes plano; Parallela sunt, quæ per illas ducuntur, plana. 202. B

Si duo plana parallela plano quopiam secentur; communes illorum sectiones sunt parallelæ. 202. B

Quæ eidem plano parallela, & inter se sunt parallela; vel si conueniunt, vnum planum efficient. 203. B

Si in planis parallelis duo anguli sint æquales, & lineæ vna vnius, lineæ vni alterius parallelæ; erit quoque altera linea alteri lineæ parallela, si modo ductæ sint ex eadem parte plani, per priores parallelas ductæ. 203. B

Duo plana ad idem planum recta, in quo faciant communes sectiones parallelas, parallela sunt: Et duorum planorum parallelorum, si vnum cuipiam plano ad rectos sit angulos, erit & alterum ad idem, rectum. 203. B

Si solidum parallelis planis contineatur; aduersa illius plana parallelogramma sunt similia, & æqualia. 210. B

Si solidum parallelepipedum plano secetur per diagonios aduersorum planorum; bifariam secabitur solidum ab ipso plano. 214. B

Solida parallelepipeda super eandē basin constituta, & in eadem altitudine, quorum insistentes lineæ in iisdem collocantur rectis lineis, sunt inter se æqualia. 214. B

Solida parallelepipeda super eandē basim constituta, & in eadem altitudine, quorum insistentes lineæ non in iisdem collocantur rectis lineis, inter se sunt æqualia. 215. B

Solida parallelepipeda æqualia super eandem basim, sine

insistentes

insistentes lineæ in eisdem collocentur rectis, siue nõ; in eadem sunt altitudine. 215.B

Solida parallelepipeda super æquales bases constituta, & in eadem altitudine; æqualia sunt inter se. 215.B

Solida parallelepipeda æqualia super æquales bases, in eadem sunt altitudine. Et parallelepipeda æqualia in eadem altitudine, super æquales sunt bases, si non habuerint eandem basim. 217.B

Hæc quinque, quæ proximè dicta sunt de parallelepipedis, conueniunt etiam in prismata, in quibus duo plana opposita sunt triangula. 220.B

Si solidi parallelepipedi eorum, quæ ex aduerso, planorum latera bifariam secta sint; per sectiones autem plana sint extensa: Communis sectio planorum, & solidi parallelepipedi diameter, bifariam se mutuò secabunt. 223.B

In omni parallelepipedo diametri se mutuò bifariam diuidunt in vno puncto. 224. B

Si solidum parallelepipedum plano secetur per centrum; bifariã secabitur solidum ab ipso plano. Et si solidum parallelepipedum plano secetur bifariam; per centrũ transibit ipsum planum. 224.B

Si fuerint duo prismata planorũ triangularium oppositorum æqualis altitudinis, quorũ hoc quidem basim habeat, triangulum, illud verò, parallelogrammum, duplum autem fuerit parallelogrammum trianguli: Æqualia erunt ipsa prismata. 225.B

Omnis pyramis triangularem habens basim diuiditur in duas pyramides æquales & similes inter se, triangulares habentes bases, & similes toti; Et in duo prismata æqualia, quæ duo prismata maiora sunt dimidio totius pyramidis. 228. B

Si fuerint duæ pyramides eiusdem altitudinis, triangulares habentes bases; sit autẽ illarum vtraque diuisa & in duas pyramidas æquales inter se, & similes toti; & in duo prismata æqualia; Ac eodem modo diuisa sit vtraq; pyramidum, quæ ex superiore diuisione natæ sunt, idque semper fiat: Erit vt vnius pyramidis basis ad alterius pyramidis basim, ita & omnia, quę in vna pyramide, prismata ad omnia, quæ in altera pyramide, prismata multitudine æqualia. 229.B

Pyramides eiusdem altitudinis super eandem, vel æquales bases triangulares, sunt inter se æquales. 231.B

Pyramides triangulares æquales super eandem, vel æquales bases, eandem habens altitudinem. Et pyramides triangulares æquales, eiusdemq; altitudinis, habent bases æquales, vel eandem. 231. B

Pyramides eiusdem altitudinis super æquales bases quascunque, vel eandem, sunt inter se æquales. 233. B

Pyramides multangulæ æquales, & super æquales bases, vel super eandem; habent eandem altitudinem. Et pyramides multangulæ æquales, eandemq; habentes altitudinem, bases habent æquales, vel eandem. 233. B

Omne prisma triangularem habens basim, diuiditur in tres pyramides æquales inter se, triangulares bases habentes. 235. B

Prismata eiusdem altitudinis super eandem, vel æquales bases quascunque, inter se sunt æqualia. Et prismata æqualia super æquales bases, vel eandem, in eadem sunt altitudine. Et prismata æqualia eiusdem altitudinis, bases habent æquales, vel eandem. 234.B

Quæ de prismatis dicta sunt, intelligi debent de ijs, quæ habent plana opposita basibus æqualia, & similia. 234. & 235.B

Omnis conus tertia pars est cylindri eandem cum ipso basim habentis, & altitudinem æqualem. 238.B

Atque hoc verum est, siue coni & cylindri sint recti, siue scaleni, licèt non sit idem axis conorum, & cylindrorum. 239. B

Coni & cylindri eiusdem altitudinis super eandem, vel æquales bases constituti, siue ambo sint recti, vel scaleni, siue vnus rectus, & alter scalenus, inter se sunt æquales. 241.B

Coni & cylindri æquales super eandẽ vel æquales bases, in eadem sunt altitudine. Et coni ac cylindri æquales in eadem altitudine, super æquales bases sunt, vel eandem. 241.B

Si in planis parallelis descripti sint duo circuli, in quibus duæ rectæ abscindant arcus similes; erunt duæ rectæ coniungentes extrema vnius rectæ cum centro, parallelæ duabus rectis, quæ extrema alterius rectæ cũ centro coniungunt. 341.B

PARALLELOGRAMMVM, & aliæ figuræ planæ quadrilateræ.

Parallelogrammi cuiusque æqualia sunt & latera opposita, & anguli oppositi, atque ipsum diameter secat bifariam. 61. A

Quadrilaterum habens latera opposita æqualia, parallelogrammum est. 62. A

Quadrilaterum habens angulos oppositos æquales, parallelogrammum est. 62. A

Rhombus, & Rhomboides parallelogramma sunt. pag. 62. A

Quadratum & altera parte longius, parallelogramma sunt. 62. A

Quadrilaterum diuisum bifariam ab vna diametro, non semper est parallelogrammum. 62 A

Quadrilaterum habens omnes angulos rectos, est parallelogrammum. 62. A

Quadrati, & Rhombi angulos secat diameter quælibet bifariam. 62. & 63. A

Rhomboidis, & altera parte longioris angulos secat diameter non bifariam. 63. A

Quadrati, & altera parte longioris diametri sunt æquales. 63. A

Rhombi, & Rhomboidis diametri non sunt æquales. 63. A

Parallelogrammi cuiusque diametri se mutuò secant bifariam. 63. A

Quadrilaterum, in quo diametri se mutuò bifariam secant, parallelogrammum est. 63. A

Parallelogrammum bifariam diuiditur à recta, quæ diametrum bifariam secat: Et recta diuidens parallelogrammum bifariam, secat diametrũ quoq; bifariam. 64. A

Parallelogramma super eadẽ basi, & in eisdem parallelis constituta sunt æqualia. 67. A

Parallelogramma æqualia super eandem basim, ad eas-

demque partes conſtituta, ſunt inter eaſdem parallelas. 68. A

Parallelogramma ſuper æqualibus baſibus, & in eiſdem parallelis conſtituta, ſunt æqualia. 68. A

Parallelogramma æqualia ſuper baſes æquales, & ad eaſdem partes conſtituta, in eiſdem ſunt parallelis: Et parallelogramma æqualia in eiſdem parallelis, ſi non habuerint eandem baſim, ſuper æquales baſes ſunt conſtituta. 68. A

Parallelogrammorum inter eaſdem parallelas, quod maiorem baſim habet, maius eſt: Et quod maius eſt, maiorem habet baſim. 69. A

Quadrilaterum, quod ab vtraque diametro diuiditur bifariam, parallelogrammum eſt. 72. A

Trapezia in eiſdem parallelis, & ſuper eadem baſi, quorum oppoſitæ baſes ſunt æquales, ſunt æqualia. Et trapezia æqualia in eiſdem parallelis, & ſuper eadem baſi, habent baſes oppoſitas æquales. 73. A

Trapeziorum in eiſdem parallelis, & ſuper eadem baſi, quod maiorem habet baſim oppoſitam, maius eſt: Et quod maius eſt, habet baſim oppoſitam maiorẽ. 73. A

Trapezia in eiſdem parallelis, & ſuper æqualibus baſibus, quorũ oppoſitæ baſes ſint æquales, æqualia ſunt. Et trapezia æqualia in eiſdem parallelis, & ſuper æqualibus baſibus, habent baſes oppoſitas æquales. 73. A

Trapeziorum in eiſdem parallelis, & ſuper æqualibus baſibus, quod maiorem habet oppoſitam baſim, maius eſt: Et quod maius eſt, maiorem habet baſim oppoſitam. 74. A

Parallelogrammum duplum eſt trianguli eandem cum eo baſim habentis, & in eiſdem parallelis conſtituti. 76. & 77 A

Parallelogrammum æquale eſt triangulo duplam habenti baſim, & in eiſdem parallelis conſtituto. 77. A

Parallelogrammum duplum eſt trianguli æqualem cum eo baſim habentis, & in eiſdem parallelis conſtituti. 77. A

Si parallelogrammũ duplum fuerit trianguli, eandemq; habuerint baſim, vel æquales, & ad eaſdem partes conſtituta, in eiſdem erunt parallelis: Et ſi parallelogrammum duplum fuerit trianguli, in eiſdemq; parallelis erunt baſes æquales, ſi non ſit eadem. 77. A

Si trapezium & triangulum ſuper eadem baſi, & in eiſdem fuerint parallelis, maior autem linea parallela trapezij, ſit baſis trianguli: erit trapezium minus duplo trianguli: Si verò minor linea parallela trapezij baſis ſit trianguli, erit trapezium maius duplo trianguli. 78. A

Trapezium habens duo latera oppoſita parallela, duplum eſt trianguli, quòd baſim habet vnũ latus trapezij, coniungẽs duas parallelas, verticẽ verò in medio puncto laterũ oppoſiti. 78. A

In parallelogrammo, complemẽta circa diametrum æqualia ſunt. 79. A

Si parallelogrammo diuiſo in quatuor parallelogramma, duo aduerſa ſint æqualia, conſiſtent reliqua duo circa diametrum. 79. A

Quadrata linearum æqualium ſunt æqualia: Et quadratorum æqualium æquales ſunt lineæ. 82. A

Quadratum ex diametro quadrati deſcriptum, duplum eſt ipſius quadrati. 86. A

Quadratum diametri figuræ altera parte longioris, æquale eſt duobus quadratis laterum inæqualium. 86. A

Parallelogrammum, cuius vnus tantùm angulus detur rectus, habet omnes angulos rectos. 91. A

Rectangulum quodcunque æquale eſt alteri rectangulo ſub duabus rectis contento, quæ duobus lateribus illius ſint æquales. 92. A

Parallelogramma circa diametrum quadrati, ſunt quadrata. 97. A

Quadratum cuiuſque rectæ quadruplum eſt quadrati rectæ, cuius illa dupla eſt. Et ſi quadratum quadrati ſit quadruplum, latus lateris duplum eſt. 97. & 319. A

Parallelogrammum ad rectam applicatum deficiẽs quadrato, æquale eſt rectangulo ſub ſegmentis per applicationem factis comprehenſo. 331. A

PAR & impar numer⁹. Vide Numerus par, &c.

PARITER par, pariter par & impariter, ac pariter impar. Vide Numerus par, &c.

PERFECTVS numerus. Vide Numerus par, &c.

PERPENDICVLARIS linea. Vide Recta linea.

PLANA figura intra, & extra circulum, atque aliam figuram. Vide Figura intra & extra circulum, &c.

PLANAE figuræ quadrilateræ. Vide Parallelogrammum, &c.

PLANA parallela. Vide Parallelepipedum, &c.

PLANI numeri ſimiles. Vide Numerus planus, Solidus, Quadratus, &c.

PLANVS angulus. Vide Angulus.

PLANVS numerus. Vide Numerus planus.

PORTIO circuli. Vide Circulus.

PRIMI inter ſe numeri. Vide Numerus par, &c.

PRIMVS numerus. Vide Numerus par, &c.

PRISMA. Vide Parallelepipedum, &c.

PROPORTIO Figurarum, Angulorum, & Linearum. Vide Figuræ, Anguli, & lineæ proportionales.

PROPORTIO magnitudinum in communi. Vide Magnitudines proportionales in communi.

PROPORTIONALES magnitudines in communi. Vide Magnitudines proportionales in communi.

PROPORTIONALES numeri in communi. Vide Numeri proportionales in communi.

PROPORTIO numerorum in communi. Vide Numeri proportionales in communi.

PYRAMIS. Vide Parallelepipedum, &c.

QVADRATVM. Vide Parallelogrammum, &c.

QVADRATVS numerus. Vide Numerus Planus, Solidus, &c.

QVADRILATERAE figuræ planæ. Vide Parallelogrammum.

RATIONALES, & Irrationales magnitudines.

Omnes Rationales lineæ non solùm expositæ Rationali, sed etiam inter se sunt commensurabiles. 123.B
Spatium Rationali spatio commensurabile, & ipsum Rationale est. 123.B
Quod sub Rationalibus longitudine commensurabilibus rectis (quomodocunque commensurabiles sint expositæ Rationali) continetur Rectangulum, Rationale est. 123.B
Si Rationale ad Rationalem applicetur, latitudinem efficit Rationalem, & ei, ad quam applicatum est, longitudine commensurabilem. 124.B
Quod sub Rationalibus potentia solùm commensurabilibus rectis continetur rectangulum Irrationale est: Et recta ipsum potens, Irrationalis. Vocetur autem Media. 125.B
Recta media proportionalis inter duas Rationales potentia tantùm commensurabiles, Irrationalis est, quæ vocatur Media. 126.B
Rectangulum sub duabus Rationalibus potentijs tantùm commensurabilibus contentum, Medium dici potest. 126.B
Non omne rectangulum Medium continetur sub duabus Rationalibus potentijs solùm commensurabilibus. 126.B
Quod à media fit, ad Rationalem applicatum, latitudinem efficit Rationalem, & ei, ad quam applicatum est, longitudine incommensurabilem. 126.B
Omne spatium Medium æquale est rectangulo sub duabus Rationalibus potentia tantùm commensurabilibus contento. 126.& 127.B
Mediæ commensurabilis, Media est. 127.B
Medio spatio commensurabile, Medium est. 127.B
Non omnis Mediæ recta cuilibet Mediæ est commensurabilis. 128.B
Quod sub Mediis longitudine commensurabilibus rectis cõtinetur rectangulum, Medium est. 128.B
Quod sub Mediis potentia tantùm commensurabilibus rectis continetur rectangulum: vel Rationale est, vel Medium. 128.B
Quod sub Medijs longitudine & potentia incommensurabilibus continetur, nec Rationale est, nec Medium, sed Irrationale aliud, quod æquale est rectangulo sub linea Rationali, & Irrationali, quæ Media appellatur, contento. 129.B
Medium non superat Medium Rationali. 130.B
Rationale superat Rationale Rationali. 130.B
Duo spatia Irrationalia componere possunt spatium Rationale. 137.B
Duo spatia Rationalia componunt semper spatium Rationale. 137.B
Si duæ Rationales potentia tantùm commensurabiles componantur, tota Irrationalis erit. Vocetur autem ex binis nominibus. 138.B
Si duæ Mediæ potentia tantùm commensurabiles componantur, quæ Rationale contineant: tota Irrationalis erit. Vocetur autem ex binis Mediis prima. 139.B
Quod sub linea Rationali, & Irrationali continetur rectangulum, Irrationale est. 139.B
Si duæ Mediæ potentia tantùm commensurabiles componantur, quę Medium contineãt: tota Irrationalis erit. Vocetur autem ex binis Mediis secunda. 139.B
Si duæ rectę potentia incommensurabiles componantur, quæ faciant compositum quidem ex ipsarum quadratis Rationale, quod autẽ sub ipsis continetur, Medium: tota recta Irrationalis erit. Vocetur autem Maior. 140.B
Si duę rectæ potentia incommensurabiles componantur, quæ faciant compositum quidem ex ipsarum quadratis Medium, quod autem sub ipsis continetur, Rationale: tota recta Irrationalis erit. Vocetur autem Rationale ac Medium potens. 141.B
Si duę rectæ potentia incommensurabiles componantur, quæ faciant & compositũ ex ipsarum quadratis Mediũ, & quod sub ipsis continetur, Medium, incommensurabileq; composito ex quadratis ipsarum: tota recta Irrationalis erit. Vocetur autem bina Media potens. 141.B
Sex lineæ Irrationales compositæ, vt ea, quę ex binis nominibus, quę ex binis Mediis prima, quæ ex binis Mediis secunda, Maior, Rationale, ac Medium potens, & bina Media potens, ad vnum duntaxat punctum diuiduntur in nomina, singulæ. à pag. 142. vsque ad 145. B
Sex genera linearum Irrationalium, quæ ex binis nominibus dicuntur. 145.B
Si sex spatia contineantur sub Rationali, & ex binis nominibus prima, secunda, tertia, quarta, quinta, ac sexta: Rectæ ea potentes Irrationales sunt hæ ordine: ex binis Mediis prima, ex binis Mediis secunda, Maior, Rationale, ac Medium potens, & bina Media potens. 149. vsque ad 152. B
Quadrata sex harum linearum Irrationalium: eius quæ ex binis nominibus, ex binis Mediis primæ, ex binis Mediis secundæ, Maioris, Rationale, ac Medium potentis, & bina Media potentis: ad Rationalem applicata, latitudines faciunt ordine sex lineas ex binis nominibus. 152. vsque ad 155. B
Rectæ longitudine commensurabiles sex linęis Irrationalibus prædictis, sunt quoque eiusdem ordinis, & nominis Irrationales. 155. vsque ad 158. B
Idem euenit, si potentia tantùm sint commensurabiles,

præterquam in ea, quæ ex binis nominibus dicitur. 156. B

Si Rationale & Medium componantur, quatuor Irrationales fiunt; vel ea, quæ ex binis nominibus, vel quæ ex binis Mediis prima, vel Maior, vel Rationale, ac Medium potens. 158. B

Si duo Media inter se incommensurabilia componantur; duæ reliquæ Irrationales fiunt vel ex Mediis secunda, vel bina Media potẽs. 159. B

Ea, quæ ex binis nominibus, & aliæ quinque Irrationales eam sequentes, & inter se, & à Media differunt. 159. & 160. B

Recta linea media proportionalis secundùm Analogiam Arithmeticam inter duo nomina cuiusuis lineæ Irrationalis, per compositionem factæ, est quoq; Irrationalis eiusdem ordinis. 160. B

Si à Rationali Rationalis auferatur potẽtia tantùm commensurabilis existens toti: (*Vel si à maiori nomine eius, quæ ex binis nominibus, minus auferatur.*) Reliqua Irrationalis est. Vocetur autem Apotome. 161. B

Si à Media auferatur Media potentia tantùm commensurabilis existens toti, quæ cum tota Rationale contineat; (*Vel si à maiori nomine eius, quæ ex binis mediis prima, minus nomen auferatur.*) Reliqua Irrationalis est. Vocetur autẽ Mediæ Apotome prima. 161. B

Si à Media auferatur Media potentia tantùm commensurabilis existens toti, quæ cùm tota Medium contineat; (*Vel si à maiori nomine eius, quæ ex binis Mediis secunda, minus nomen auferatur.*) Reliqua Irrationalis est. Vocetur autem Mediæ Apotome secunda. 162. B

Si à recta linea auferatur recta potentia incommensurabilis existens toti, quæ cum tota faciat compositũ quidem ex ipsarum quadratis Rationale; quod autem sub ipsis continetur Medium; (*Vel si à maiori nomine lineæ Maioris minus nomen auferatur.*) Reliqua Irrationalis est. Vocetur autem Minor. 162. B

Si à recta auferatur recta potentia incommensurabilis existens toti, quæ cũ tota faciat compositum quidem ex ipsarum quadratis Medium; quod autem sub ipsis continetur, Rationale; (*Vel si à maiori nomine eius, quæ Rationale ac Medium potest, minus nomen auferatur.*) Reliqua Irrationalis est. Vocetur autem cum Rationali Medium totum efficiens. 163. B

Si à recta auferatur recta potentia incommensurabilis existens toti, quę cũ tota faciat & compositum ex ipsarum quadratis, Medium; & quod sub ipsis continetur, Medium, incommensurabileq; composito ex quadratis ipsarum; (*Vel si à maiori nomine eius, quæ bina Media potest, minus nomen auferatur.*) Reliqua Irrationalis est. Vocetur autẽ cum Medio Medium totum efficiens. 163. B

Apotomæ vna tantùm congruit recta Rationalis, potentia solùm commensurabilis existẽs toti. 164. B

Mediæ Apotomæ primæ vna tantùm congruit recta Media, potentia solùm commensurabilis existens toti, & cum tota Rationale continens. 164. B

Mediæ Apotomæ secundæ vna tantũ congruit recta Media, potentia solùm commensurabilis existens toti, & cum tota Medium continens. 165. B

Minori vna tantùm congruit recta, potentia incommensurabilis existens toti, & cum tota faciens compositũ quidem ex ipsarum quadratis Rationale; quod autem sub ipsis continetur, Medium. 165. B

Ei, quæ cum Rationali Medium totum facit, vna tantùm congruit recta potentia incommensurabilis existens toti, & cum tota faciens compositum quidem ex ipsarum quadratis Medium; quod autem sub ipsis continetur, Rationale. 166. B

Ei, quæ cum Medio Medium totum facit, vna tantùm congruit recta, potentia incommensurabilis existens toti, & cum tota faciens & compositum ex ipsarum quadratis Medium, & quod sub ipsis continetur, Medium, incommensurabileque composito ex ipsarum quadratis. 166. B

Sex genera linearum Irrationalium, quæ Apotomæ dicuntur. 167. B

Si sex spatia contineantur sub Rationali, & Apotoma prima, secunda, tertia, quarta, quinta, & sexta; Rectæ ei potentes Irrationales sunt hæ ordine: Apotome, Mediæ Apotome prima, Mediæ Apotome secunda, Minor, ea quæ cum Rationali Medium totum efficit, & ea quæ cum Medio Medium totum efficit. 169. vsque ad 172. B

Quadrata harum sex linearum Irrationalium, Apotomæ, Mediæ Apotomæ primæ, Mediæ Apotomæ secundæ, Minoris, eius quæ cum Rationali Medium totum efficit, & eius, quæ cum Medio Medium totum efficit, ad Rationalem applicata, latitudines faciunt ordine sex Apotomas. 173. vsque ad 175. B

Rectæ longitudine commensurabiles sex lineis Irrationalibus prædictis, quæ per detractionem fiunt, sunt quoq; Irrationales eiusdem ordinis & nominis. 176. vsque ad 178. B

Idem euenit, si potentia tantùm eiusdem sint commensurabiles, præterquam in Apotoma. 176. B

Medio à Rationali detracto: Recta, quæ reliquũ spatiũ potest, vna ex duabus Irrationalibus fit, vel Apotome, vel Minor. 178. B

Rationali à Medio detracto; aliæ duæ Irrationales fiunt, vel Mediæ Apotome prima, vel cum Rationali Medium totũ efficiens. 179. B

Medio à Medio detracto, quod sit incommensurabile toti; reliquæ duæ Irrationales fiunt, vel Mediæ Apotome secunda, vel cum Medio Medium totum efficiens. 179. B

Apotome non est eadem, quæ ex binis nominibus. 179. B

Apotome, & aliæ quinque Irrationales eam sequentes, & inter se, & à Media differunt. 180. B

Tredecim lineæ Irrationales inter se diuersæ. 180. B

Quadratum

Quadratum Rationalis ad eam, quæ ex binis nominibus, applicatum, latitudinem facit Apotomen, cuius nomina commensurabilia sunt nominibus illius, quæ est ex binis nominibus, & in eadem proportione. & adhuc Apotome quę fit, eundem habet ordinem, quę ea, quæ est ex binis nominibus. 181.B

Quadratum Rationalis ad Apotomen applicatum, latitudinem facit eam, quæ ex binis nominibus, cuius nomina commensurabilia sunt Apotomæ nominibus, & in eadem proportione; & adhuc, quæ ex binis nominibus fit, eundem habet ordinem, quem ipsa Apotome. 182.B

Si spatium cõtineatur sub Apotoma, & ea, quæ ex binis nominibus, cuius nomina commensurabilia sunt nominibus Apotomæ, & in eadem proportione; Recta spatium potens, est Rationalis. 183.B

Rationale spatium contineri potest sub duabus rectis Irrationalibus. 183.B

A Media infinitæ Irrationales fiunt, & nulla alicui antecedentium est eadem. 183.B

Si recta linea Rationalis extrema ac media ratione secetur, utrumque segmentorum Irrationalis linea est, quæ vocatur Apotome. 257.B

Si recta secundum extremam & mediam rationem secetur, sitq; maius segmentum lineæ Rationalis; erit minus segmentum Apotome. 258.B

Si in circulo Rationalem habente diametrum, pentagonum æquilaterum describatur, pentagoni latus Irrationalis est linea, quæ vocatur Minor. 262.B

Si sphæræ diameter fuerit Rationalis; erit tum superficies Petnedri, quam Octaedri in ea sphæra, Media. 291.B

A *Triangulum æquilaterum, cuius latus est Rationale, superficies Media est.* 291.

Latus Icosaedri in pyramide descripti est Apotome. 326.B

RECTA LINEA.

Rectæ duæ lineæ non habent vnum, & idem segmentum commune. 15.A

Rectæ duæ in vno puncto concurrentes, si producantur ambæ, necessariò se mutuò in eo puncto secabunt. 15.A

Rectæ duæ lineæ spatiũ non comprehendunt. 16. & 17.A

Rectæ duæ lineæ duabus eisdem rectis lineis super eadem recta linea æquales, vtraque vtrique, non constituentur ad aliud atq; aliud punctum, ad easdem partes, eosdemque terminos cum duabus initio ductis rectis lineis habentes. 26.A

Recta linea alteri insistẽs facit cum ea aut duos rectos angulos, aut duobus rectis æquales. 33.A

Rectæ duæ ad vnum punctum coniunctæ faciunt vnam rectam, quando aliæ rectæ ex illo puncto eductæ cum illis faciũt duos angulos non ad easdem partes duobus rectis æquales. 34.A

Rectæ duæ ad vnum punctum coniunctæ non faciunt vnam rectam, quando aliæ rectæ ex illo puncto eductæ cum illis facit duos angulos ad easdem partes duobus rectis æquales. 34.B

Rectæ duæ se interfecantes faciunt angulos ad verticem oppositos æquales. 34.A

Rectæ duæ se interfecantes faciunt quatuor angulos quatuor rectis æquales. 35.A

Rectæ quotcunque ad vnum punctum coniunctæ faciunt omnes angulos quatuor rectis æquales. 35.A

Rectæ duæ faciẽtes cum alia recta in eodem puncto, non ad easdem partes, angulos ad verticem æquales, in directum sunt coniunctæ. 35.A

Rectæ quatuor in eodem puncto facientes binos oppositos angulos æquales, constituunt duas rectas lineas. 35.A

Rectæ lineæ inter se æquales ex vno puncto ad rectam lineam plures quam duæ duci non possunt. 36.A

Rectæ lineæ ad eandem rectam perpendiculares, plures quam vna, duci non possunt. 37.A

Recta linea faciẽte cum alia angulos inæquales, perpendicularis ex vno illius puncto ad hanc demissa, cadit ad partes anguli acuti. 37.A

Rectarum omnium ex vno puncto ad aliam rectam demissarum, minima est perpendicularis. 38.A

Rectæ duæ lineæ ab extremitatibus vnius lateris trianguli interius cõstitutæ, reliquis trianguli duobus lateribus minores quidem sunt, maiorem verò angulum continent. 40.A

Rectæ duæ lineæ intra triangulum, quarum vna ab extremo vnius lateris, altera verò non ab extremo ducitur, maiores esse possunt reliquis trianguli duobus lateribus, minoremq; angulum comprehendere. 41.A

Rectæ duæ lineæ parallelæ sunt, si recta in eas incidens faciat alternos angulos æquales. 47.

Rectæ duæ lineæ parallelæ sunt, si recta in eas incidens faciat externum angulum interno ad easdem partes opposito, æqualem: aut internos ad easdem partes duobus rectis æquales. 47.A

Rectas duas lineas concurrere productas, si recta in eas incidens faciat duos internos angulos ad easdem partes duobus rectis minores. quo modo à Proclo demonstretur. 49.A

Rectas easdem duas conuenire, qua ratione à nobis demonstretur. 53.A

Rectarum linearum angulum constituentium distantia, si in infinitum producantur, omnem finitam magnitudinem excedet. 48. & 50.A

Recta linea secans vnam duarum parallelarum, secabit & alteram. 48.A

Lineæ, cuius omnia puncta à recta linea, quæ in eodem cum ea plano existit, æqualiter distant, recta est. 50.A

Recta linea super aliam rectam in transuersum mota, constituens in suo extremo cum ea angulos semper rectos, describet altero suo extremo lineam quoque rectam. 51.A

Ad rectam lineam duæ perpendiculares rectæ erigantur inter se æquales, quarum extrema puncta per lineam rectam coniungantur; erit perpendicularis ex quouis puncto huius rectæ ad priorem rectam demissa, vtrilibet priorum perpendicularium æqualis. 52.A

Si ad rectam lineam duæ perpendiculares rectæ lineæ

erigantur inter se æquales, quarum extrema puncta per lineam rectam coniungantur: efficiet hæc recta cum vtraque perpendiculari angulum rectum. 52.A

Si in duas rectas lineas alia recta incidens faciat cum vna earum angulum interiorem rectum, & cum altera ex eadem parte acutum: duæ illæ rectæ minus semper inter se distabunt ad eas partes, vbi est angulus acutus, ex altera verò parte semper inter se magis distabunt. 52.A

Recta incidens in duas parallelas facit & angulos alternos æquales, & externum interno ad easdem partes æqualem, & internos duos ad easdem partes duobus rectis æquales. 54.A

Rectæ lineæ, eidem parallelæ, & inter se sunt parallelæ. 55.A

Rectæ lineæ, eidem parallelæ, & inter se coeunt, constituunt vnam lineam rectam. 55.A

Rectæ lineæ, quæ parallelas ad easdem partes connectunt, æquales sunt, & parallelæ. 61.A

In figura æquilatera, & æquiangula pariũ laterum, opposita quælibet duo latera sunt parallela. 66.A

Recta secans duo trianguli latera bifariam, reliquo lateri est parallela. 72.A

Si fuerint duæ rectæ, secetúrque ipsarum altera in quotuis segmenta: Rectangulum comprehensum sub illis duabus rectis lineis, æquale est eis quæ sub insecta, & quolibet segmentorum comprehenduntur, rectangulis. 93.A

Si fuerint duæ rectæ lineæ, secenturq; ambæ in quotuis segmenta: Rectangulum comprehensum sub illis duabus rectis, æquale est eis, quæ sub singulis segmentis vnius, & quolibet segmentorum alterius continentur, rectangulis. 94.A

Si sint duæ rectæ lineæ, secenturq; ambæ vtcunq; Rectangulum comprehensum sub illis duabus lineis, vnà cum rectangulo sub vna parte vnius, & vna parte alterius comprehenso, æquale est eis, quæ sub totis lineis, & dictis partibus mutuò continentur, rectangulis, vnà cum rectangulo sub reliquis partibus comprehenso. 94.A

Si recta linea secta sit vtcunq; vel etiam in plura segmenta: Rectangula, quæ sub tota, & quolibet segmentorũ comprehenduntur, æqualia sunt ei, quod à tota fit, quadrato. 94. & 95.A

Si linea recta secetur in quotuis segmenta, quadratum, quod à tota fit, æquale est eis, quæ sub singulis segmentis, & quolibet segmento comprehenduntur, rectangulis. 95.A

Si recta linea secta sit vtcunq; Rectangulum sub tota, & vno segmentorum comprehensum, æquale est & illi, quod sub segmentis comprehenditur, rectangulo, & illi, quod à prædicto segmento describitur, quadrato. 95.A

Si recta linea secta sit vtcunq; Quadratum totius æquale est quadratis segmentorum, & rectangulo comprehenso bis sub segmentis. 96.A

Si recta linea secetur bifariam, & non bifariam: rectangulum sub inæqualibus segmentis totius comprehensum, vnà cum quadrato intermediæ sectionum, æquale est quadrato ex dimidia descripto. 98.A

Si recta linea bifariam secetur, & illi recta quædam linea in rectum adiiciatur: rectangulum comprehensum sub tota cum adiecta, & adiecta, vnà cum quadrato dimidiæ, æquale est quadrato rectæ compositæ ex dimidia, & adiecta. 99.A

Si recta linea secetur vtcunque: Quadratum totius, & quadratum vnius segmenti, simul æqualia sunt rectangulo sub tota, & illo segmento bis contento vnà cum quadrato alterius segmenti. 101.A

Si recta linea inæqualiter secetur: Erunt quadrata segmentorum æqualia rectangulo bis sub segmentis comprehenso, vnà cum quadrato excessus, quo maius segmentum superat minus. 101.A

Si recta linea secetur vtcunque: rectangulum quater comprehensum sub tota, & vno segmentorum, cum quadrato reliqui segmenti, æquale est quadrato rectæ compositæ ex tota, & priore segmento. 102.A

VEL.

Si linea recta secetur vtcunque: eiq; in rectum adiiciatur alia recta, vni segmentorum æqualis: Quadratum totius lineæ compositæ æquale est rectangulo quater comprehenso sub data linea, & adiecta, siue dicto segmento, vnà cum quadrato alterius segmẽti. 102.A

VEL.

Si linea recta secetur bifariam, eiq; in rectum adiiciatur recta alia quantacunq;: Quadratum totius compositæ lineæ æquale est rectangulo quater comprehẽso sub linea composita ex dimidia, & adiecta, & dimidia, vnà cum quadrato adiectæ. 102. & 103.A

Si recta linea secetur bifariam, & non bifariam: quadrata segmentorum inæqualium, simul dupla sunt quadrati ex dimidia, & quadrati ex intermedia sectionum. 103.A

Si recta linea secetur bifariam, adiiciatur autem ei in rectum quæpiam recta linea: Quod à tota cum adiecta, & quod ab adiecta, vtraque simul quadrata dupla sunt quadrati ex dimidia, & quadrati ex composita ex dimidia & adiecta. 104.A

Perpendicularis linea ex puncto aliquo ad rectã quamcunq; cadens, est omnium ex eodem puncto ad eandem rectam cadentium brevissima. 119.A

Si recta secetur extrema ac media ratione: Isosceles, cuius basis maiori segmento sit æqualis, vtrumuis verò laterum æqualium sectæ lineæ, habet vtrumque angulorum ad basim duplum reliqui. 180.A

Si sint duæ rectæ inæquales, & ad maiorem applicetur quarta pars quadrati ex minore descripti, deficiens figura quadrata: Non erunt segmenta, quæ ex applicatione fiunt, æqualia. 127.B

Si sint duæ rectæ inæquales, erit rectangulum sub ipsis contentum, duplum rectanguli sub alterutra earum, & dimidio alterius contenti. 136.B

Si recta

Si recta linea non bifariam ſecetur; erit compoſitum ex quadratis partium maius, quàm rectangulum ſub partibus bis comprehenſum, quadrato eius lineæ, qua maior pars minorem ſuperat. 140.B

Si recta non bifariam ſecetur, & rurſus non bifariam in alio puncto; erunt quadrata partium magis inæqualium ſimul maiora quadratis partiũ minus inæqualiũ ſimul. 142.B

Rectæ lineæ pars quædam non eſt in ſubiecto plano, quædam verò in ſublimi. 195.B

Si duæ rectæ ſe mutuò ſecent, in vno ſunt plano. Atque triangulum omne in vno eſt plano. 196.B

Si duo plana ſe mutuò ſecent, cõmunis eorum ſectio eſt linea recta. 196.B

Si recta linea rectis duabus ſe mutuò ſecãtibus, in communi ſectione ad rectos angulos inſiſtat: Illa ducto etiam per ipſas plano ad angulos rectos erit. 197.B

Si recta linea rectis tribus ſe mutuò ſecantibus, in communi ſectione ad rectos angulos inſiſtat; Illæ tres rectæ in vno ſunt plano. 197.B

Si duæ rectæ eidem plano ad rectos ſint angulos; parallelæ erunt illæ rectæ lineæ. 198.B

Si duæ ſint parallelæ rectæ, in quarum vtraque ſumpta ſint quælibet puncta: Illa recta, quæ ad hæc puncta adiungitur, in eodem eſt cum parallelis plano. 198.B

Idem euenit, ſi rectæ non ſint parallelæ, in eodem tamen exiſtant plano. 198.B

Si duæ ſint parallelæ rectæ, quarum altera ad rectos cuidam plano ſit angulos: Et reliqua eidem plano ad rectos angulos erit. 198.B

Quæ eidem rectæ lineæ ſunt parallelæ, ſed non in eodem cum illa plano; hæ quoq; ſunt inter ſe parallelæ. 199.B

Dato plano, à puncto, quod in illo datum eſt, duæ rectæ ad rectos angulos non excitabuntur, ad eaſdem partes. 201.B

Item neq; à puncto in ſublimi ad ſubiectum planum duæ perpendiculares demittentur. 201.B

Si recta plano cuipiam ad rectos ſit angulos; & omnia, quæ per ipſum, plana eidem plano ad rectos angulos erunt. 204.B

Si duo plana ſe mutuò ſecantia plano cuidam ad rectos ſint angulos, communis etiam illorum ſectio ad rectos eidem plano angulos erit. 205.B

Si planum ad planum rectum fuerit; & ab aliquo puncto eorum, quæ in vno ſunt, planorum, ad alterum planum perpendicularis ducta fuerit; In communem ſectionem cadet planorum ducta perpendicularis 213.B

RECTANGVLVM parallelogrammum. vide Parallelogrammum, &c.

RECTANGVLVM triangulũ. vide Triangulũ.

REGVLARIS figura. vide Figura intra & extra circulum, ſphæram, &c.

SCALENVM triangulum. vide Triangulum.

SEGMENTVM circuli. vide Circulus.

SIMILES plani ac ſolidi numeri. vide Numerus planus, &c.

SOLIDA Figura intra, & extra ſphæram, atque aliam figuram. vide Figura intra, & extra circulum, &c.

SOLIDI numeri ſimiles. vide Numerus planus, &c.

SOLIDVM Regulare. vide Figura intra, & extra circulum, &c.

SOLIDVS angulus. vide Angulus.

SOLIDVS numerꝰ. vide Numerus planus, &c.

SPHAERA. vide Figura intra & extra circulum, ſphæram, &c.

TRAPEZIVM. vide Parallelogrammum, &c.

TRIANGVLVM.

Triangula duo habẽt & baſes, & angulos æquales, ipſaq; æqualia ſunt, ſi duo latera vnius æqualia ſint duobus lateribus alterius, vtrumque vtrique, angulosque contentos habeant æquales. 22.A

Iſoſcelium triangulorum anguli tam ſupra baſem, quam infra, æquales ſunt. 23. & 24.A

Æquilaterum triangulum habet tres angulos æquales. 24.A

Triangulum, cuius duo anguli ſupra baſem æquales ſunt, habet duo latera angulis illis oppoſita æqualia. 25.A

Triangulum, cuius omnes anguli æquales ſunt, æquilaterum eſt. 25.A

Triangulum, cuius duo anguli infra baſem æquales ſunt, Iſoſceles eſt. 25.A

Triangula duo habent vnum angulum vni angulo æqualem, ſi duo latera vnum ambientia æqualia ſint duobus lateribus alterum ambientibus, & baſis baſi. 27.A

Triangula duo æqualia ſunt, & inter ſe æquiangula, ſi duo latera vnius ſint æqualia duobus lateribus alterius, & baſis baſi. 28.A

Trianguli externus angulus maior eſt vtrouis interno oppoſito. 36.A

Trianguli duo quilibet anguli duobus rectis minores ſunt. 37.A

Trianguli orthogonij, vel amblygonij duo reliqui anguli ſunt acuti. 37.A

Trianguli æquilateri omnes anguli, & Iſoſcelis duo ſupra baſem, acuti ſunt. 37.A

Trianguli maius latus maiorem angulum ſubtendit. 37.& 38.A

Scalenum habet omnes tres angulos inæquales. 38.A

Trianguli maior angulus maiori lateri ſubtenditur. 38.A

Trianguli angulo bifariam ſecto, ſi recta ſecans partiatur baſem inæqualiter, latera circa illum angulũ inæ-

qualia sunt, maiusq; est illud, quod maiori segmento basis adiacet. 38. & 39. A

Trianguli angulo inæqualibus lateribus comprehenso bifariam secto, recta secans dividit basem inæqualiter, maiusq; segmentum maiori lateri adiacet. 39. A

Trianguli angulo bifariam secto, si recta secans dividat basem bifariam, ipsa erit circa eum angulum æqualia sunt: Et si æqualia sint, recta secans angulum bifariam, secat & basim bifariam. 39. A

Trianguli duo latera quomodocunq; sumpta, reliquo sunt maiora. 40. A

Triangula habentia duo latera duobus lateribus æqualia, vtrumq; vtrique, angulum verò comprehensum angulo maiorem, habent & basem base maiorem. 43. A

Triangula habentia duo latera duobus lateribus æqualia, vtrumque vtrique, basem verò base maiorem, habent & angulum comprehensum angulo maiorem. 44. A

Triangula habentia duos angulos duobus angulis æquales, vtrumq; vtriq;, vnumq; latus vni lateri æquale, siue quod æqualibus adiacet angulis, siue quod vni æqualium angulorum subtenditur; habent & reliqua latera reliquis lateribus æqualia, vtrumq; vtrique, & reliquum angulum reliquo angulo æqualem. 45. A

Triangula habentia easdem conditiones, de quibus proximè dictum est, sunt inter se æqualia. 46. A

In triangulo æquilatero, vel Isoscele, recta linea ab angulo duobus lateribus æqualibus comprehenso ducta, dividensq; vel angulum, vel basem bifariam, perpendicularis est ad basem; & si quidem angulum bifariam dividat, secabit quoq; basem bifariam. Si verò basem secet bifariam, dividet quoque angulum bifariam. Et contrà, linea perpendicularis ad basem ducta dividit & basem, & angulum bifariam. 46. A

Triangulum, in quo linea recta ab vno angulorum ducta ad basem perpendicularis dividit vel basim, vel angulum bifariam, habet duo latera circa illum angulum æqualia: Et si quidem basis dividatur bifariam, angulus quoq; bifariam secabitur: si verò angulus bifariam secetur, basis quoque dividetur bifariam. 46. A

Si duo triangula habeant duos angulos duobus angulis æquales, vtrumque vtrique, & vnum latus vni lateri æquale, quod tamen neque æqualibus adiacet angulis, neque vni æqualium angulorum opponitur; nihil colligi potest. 56. A

Trianguli externus angulus duobus internis oppositis est æqualis: Et omnes tres anguli duobus rectis æquales sunt. 57. B

Trianguli cuiuslibet omnes tres anguli simul æquales sunt tribus angulis simul cuiuscunq; alterius trianguli. 60. A

Isoscelis duo anguli supra basim semirecti sunt, quando reliquus angulus rectus est. 60. A

Æquilateri trianguli quilibet angulus cōtinet duas tertias partes vnius recti, vel vnam tertiam partem duorum rectorum. 60. A

Æquilaterum triangulum à perpendiculari ex angulo ad basim ducta dividitur in duo scalena orthogonia, &c. 60. A

Triangula super eadem basi constituta, & in eisdem parallelis, sunt æqualia. 69. A

Triangula, quorum duo latera vnius æqualia sint duobus lateribus alterius, vtrumq; vtriq;, angulum verò contentum angulo maiorem, quo pacto possint æqualia esse, & inæqualia. 69. A

Triangula super æqualibus basibus constituta, & in eisdem parallelis, inter se sunt æqualia. 70. A

Triangulum à recta ex angulo ad medium punctum lateris oppositi ducta secatur bifariam. 71. A

Triangula æqualia super eadem basi, & ad easdem partes constituta, in eisdem sunt parallelis. 71. A

Triangula æqualia super æqualibus basibus, & ad easdem partes constituta, in eisdem sunt parallelis. 72. A

Triangula æqualia inter easdem parallelas, si non habuerint eandem basim, super æquales bases sunt constituta. 72. A

Triangulorum inter easdem parallelas, quod maiorem habet basim, maius est: Et quod maius est, maiorem habet basim. 73. A

Si in triangulo linea recta vni laterum parallela ducatur; Recta ex angulo opposito ducta, dividensq; alterutram parallelarum bifariam, dividit quoq; alteram bifariam. 74. A

In rectangulis triangulis, quadratum lateris anguli recto oppositi, æquale est duobus quadratis simul reliquorum duorum laterum. 83. A

Si fuerint duo triangula rectangula, quorum latera rectis angulis opposita, sint æqualia; erunt duo quadrata, reliquorum duorum laterum vnius trianguli, æqualia duobus quadratis reliquorū duorum laterum alterius. 86. A

Si ex angulo à duobus lateribus inæqualibus trianguli cuiusuis comprehenso ad basim perpendicularis ducatur, cadens intra triangulum; secabitur basis inæqualiter, maiorq; pars iuxta maius latus erit. Et contrà, si basis à perpendiculari secetur inæqualiter, erūt duo latera inæqualia, maiusq; erit prope maiorem partem basis. 88. A

In omni triangulo, parallelogramma quæcunq; duorum laterum æqualia sunt parallelogrammo reliqui lateris, cuius alterum latus æquale sit, & parallelum rectæ ductæ ab angulo, quem duo illa latera continent, ad punctum, in quo conueniunt latera parallelogrammorum lateribus trianguli opposita, si ad partes anguli illius producantur. 88. A

Si quadratum vnius lateris trianguli æquale sit duobus quadratis reliquorum duorum laterum; angulus sub his comprehensus, rectus erit. 89. A

Triangulorum comparationes, variæ, & quo modo fiant. 89. A

In amblygoniis triangulis, quadratum lateris angulo obtuso oppositi quanto maius sit quadratis reliquorū duorum laterum. 106. A

In amblygoniis triangulis perpendicularis ex alterutro angulorum acutorum ad latus oppositum demissa, cadit extra triangulum ad partes anguli obtusi. 107. A

Si in triangulo quadratum vnius lateris maius sit quadratis aliorum duorum laterum: angulus illi lateri oppositus, obtusus erit. 107. A

Si in

Si in triangulo quadratum vnius lateris maius sit quadratis reliquorum duorum laterum, rectangulo bis comprehenso sub alterutro horum laterum, & sub exteriore linea, quam ex illo latere producto recta linea ab opposito angulo demissa abscindit: demissa hæc linea ad latus productum perpendicularis erit, & angulus propositi trianguli priori illi lateri oppositus, obtusus. 107.A

In oxygoniis triangulis, quadratum lateris angulo acuto oppositi, quanto minus sit quadratis aliorum duorum laterum. 109. & 110. A

In quolibet triangulo perpendicularis in latus duobus acutis angulis adiacens ex opposito angulo demissa, cadit intra triangulum. 110.A

Si in triangulo quadratum vnius lateris minus sit quadratis reliquorum duorum laterum; angulus illi lateri oppositus, est acutus. 111.A

Si in triangulo quadratum vnius lateris minus sit quadratis reliquorum duorum laterum, rectangulo bis comprehenso sub alterutro horum laterum, & sub recta linea inter angulum priori lateri oppositum, & rectam lineam ab angulo alteri illi lateri opposito demissam: Linea hæc demissa ad alterum illud latus perpendicularis erit, & angulus propositi trianguli priori illi lateri oppositus, acutus. 111.A

Si in triangulo à quouis angulo recta linea ducatur secans latus oppositum bifariam, erunt duo quadrata laterum circa illum angulum, simul dupla duorum quadratorum, quorum vnum ex linea ducta, alterum verò ex dimidiato latere describitur. 115.A

Trianguli angulus, qui reliquis duobus est æqualis, rectus est. 166.A

Isosceles trianguli, cuius vterq; angulorum ad basim duplus est reliqui, angulus reliquus continet quintam partem duorum rectorum, vel duas quintas vnius recti; vterq; verò ad basim cõtinet duas quintas duorum rectorũ, vel quatuor quintas vnius recti. 180.A

Si recta secetur extrema ac media ratione; Isosceles, cuius basis maiori segmento sit æqualis, vtrumuis verò laterum æqualium datæ lineæ sectæ, habet vtrumque angulorum ad basim duplum reliqui. 180.A

Si in triangulo rectangulo ab angulo recto demittatur perpendicularis ad basim; erit rectangulũ sub base, & alterutro basis segmento, æquale quadrato lateris illi segmento adiacentis; Rectangulũ verò sub basis segmentis æquale quadrato perpẽdicularis; Rectangulum deniq; sub base, & perpendiculari æquale rectangulo sub lateribus circa angulum rectum. 136.B

Triangulum omne in vno est plano. 196.B

Latus trianguli æquilateri potentia sesquitertium est perpendicularis ex vno angulo ad basim demissæ. 265. & 290.B

Perpendicularis ex angulo trianguli æquilateri ad basim oppositam demissa; tripla est eius perpendicularis, quæ ex centro trianguli ad eandem basim deducitur: sesquialtera verò semidiametri circuli triangulum circumscribentis. 295.B

Quadratum lateris trianguli æquilateri ad ipsum triangulum habet proportionem duplicatam proportionis lateris trianguli ad lineam medio loco proportionalem inter perpendicularem ab vno angulo ad latus oppositum ductam, & dimidium ipsius lateris. 303.B

Quadratum rectæ mediæ proportionalis inter dimidium latus trianguli æquilateri, & eius perpendicularem; æquale est ipsi triangulo. 303.B

FINIS.

B. S. O. A.

