Notes du mont Royal

www.notesdumontroyal.com

Cette œuvre est hébergée sur « *Notes du mont Royal* » dans le cadre d'un exposé gratuit sur la littérature.

SOURCE DES IMAGES

Google Livres

EVCLIDIS POSTERIORES LIBRI IX.

Acceßit XVI. de SOLIDORVM REGVLARIVM cuiuslibet intra quodlibet comparatione.

Omnes perſpicuis DEMONSTRATIONIBVS, accuratisq; SCHOLIIS illuſtrati:

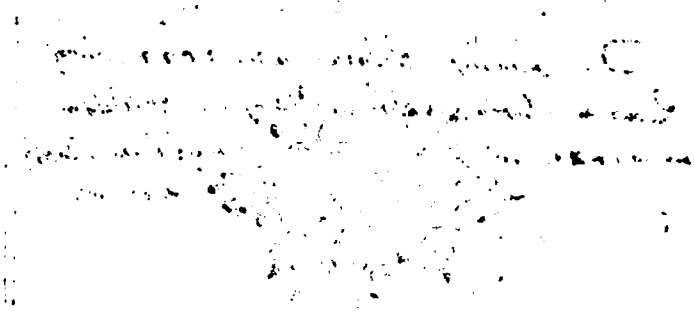
Nunc tertiò editi, ac multarum rerum acceßione locupletati.

Auctore

CHRISTOPHORO CLAVIO BAMBERGENSI, è Societate IESV.

D. Paulus Pistorius anno 1577 Clauij Romæ in Mathematicis discipulus, & Victorem anno 1581. in professione Mathematicarum succes.

COLONIAE,
Expenſis IOH. BAPTISTAE CIOTTI
clɔ Iɔ XCI.



EVCLIDIS

ELEMENTVM SEPTIMVM.

DEFINITIONES.

I.

VNITAS eſt, ſecundùm quam vnumquodque eorum, quæ ſunt, vnum dicitur.

HACTENVS egit Euclides de priori Geometriæ parte, ea ſcilicet, quæ circa plana verſatur; reſtabat altera ſolidorum. Verùm antè ei neceſſe fuit de lineis commenſurabilibus, & incommenſurabilibus diſſerere, quod ad proprietates corporum plurimorum, eorumq́ maximè, quæ regularia nominantur, demonſtrandas, atq́ vt oportet, explicandas, harum cognitio linearum requiratur, idq́ adeò, vt abſq́ eis ſolidorum tractatio imperfecta ſit, neq́ ſuis numeris abſoluta. Huc accedit, quòd abſq́ eiſdem lineis plurima latera tam planorum, quàm ſolidorum, ſi Geometriæ Theoria in opus conferatur, atq́ vſum, neq́ exprimi queant, neq́ intelligi. Nam non rarò pleraque laterum ſunt illæ lineæ, quæ à Græcis ἄλογοι, à Latinis Irrationales appellantur: Vel, ſi non ſunt Irrationales, longitudine certè inter ſe ſunt incommenſurabiles, atq́ adeò ſub menſuram numerorum non cadunt. Et quia earundem linearum explicatio, atq́ intelligentia cum numeris eſt implicata, & coniuncta, vt abſque his nullo modo cognoſcantur; oportuit etiam numerorum explanationem, vt doctrinæ ſuus ordo, ratioq́ conſtaret, lineis illis anteponi. Quare hoc libro ſeptimo, & duobus inſequentibus, circa numerorum proprietates, affectionesq́, quantum eæ rei Geometricæ inſeruiunt, occupatur, vt in decimo deinde facilius, ac plenius demonſtrationes linearum commenſurabilium, & incommenſurabilium exequatur.

INCIPIENS igitur more ſuo à principijs, definit initio vnitatem, docetq́ eam eſſe, ſecundùm quam vnumquodque eorum, quæ ſunt, vnum eſſe dicitur. Nam ſecundùm vnitatem vnum lapidem, vnum animal, vnum corpus, &c. dicere ſolemus. Caterùm vnitas in numeris nullam ſuſcipit diuiſionem, quemadmodum nec punctum in magnitudinibus, vt libro primo docuimus.

II.

NVMERVS autem ex vnitatibus compoſita multitudo.

CVM numerus ſit multitudo quædam ex vnitatibus compoſita, manifeſtum eſt, numerũ quemlibet tot habere partes, quot ſunt vnitates eum conſtituentes: Ita vt vnitas ſit pars cuiuſuis numeri denominata ab ipſo numero, cuius eſt pars. Vt numerus 8. compoſitus ex 8. vnitatibus, diuiditur in totidem partes, nimirum in 8. vnitates, quarum qualibet octaua pars dicitur octonarij. Sic quoque numerus 100. ex centum vnitatibus compoſitus, in totidem diſtribuitur, quarum qualibet centeſima ipſius pars eſt, &c.

EX his ſequitur, omnes numeros, quotcunq́ ſint, inter ſe commenſurabiles eſſe, cùm eos vna eademq́ menſura, nimirum vnitas, vt dictum eſt, metiatur: Id quod omnibus magnitudinibus nulla poteſt ratione conuenire, cùm plurimæ earum menſuram communem non habeant, ſed prorſus ſint incommenſurabiles, vt clariſſimè lib. 10. oſtenditur.

III.

PARS eſt numerus numeri, minor maioris, cùm minor metitur maiorem.

NON eſt diſsimilis hæc definitio illi, quæ Euclides lib. 5. partẽ quantitatis continuæ expoſuit. Sicut enim ibi, ita & hic partem duntaxat aliquotam definit, cùm hæc ſolùm propriè dicatur metiri totum, vt ibidem latius explicauimus. Itaq́ numerus 6. dicetur pars omnium horum numerorum 12. 18. 24. 30. 60. 630, &c. quia ille ſingulos hos metitur. Similiter huius numeri 576. partes erunt omnes hi numeri 3. 4. 6. 8. cùm illum ſinguli hi metiantur, vt perſpicuum eſt.

OMNIS autẽ pars ab eo numero nomẽ sibi sumit, per quẽ ipsa numerũ, cuius pars est, metitur; vt 6. pars huius numeri 42. nomen trahit à 7. cum 6. metiatur 42. per 7. Itaq; 6. erit septima pars numeri 42. & in reliquis eodem modo.

IIII.

PARTES autem, cùm non metitur.

VVLT Euclides, numerum minorem maioris numeri, quem non metitur, non partem, sed partes appellari: cuiusmodi est numerus 5. si conferatur cum hoc numero 18. Quamuis enim, cùm eum non metiatur, nisi per suas vnitates, pars ipsius dici non debeat; aptè tamen congruenterq; partes poterit appellari, quòd quinque contineat vnitates, quarum qualibet decimaoctaua pars est numeri 18. Vnde numerum 5. dicemus quinque partes decimasoctauas numeri 18. Ex quibus liquidò constat, Euclidem nomine partis intellexisse partem aliquotam tantùm, non autem & aliquantam, vt volunt nonnulli; alioquin superuacanea esset hac definitio quarta, qua partem aliquantam comprehendit.

CAETERVM partes quacunq; nomen accipiunt à duobus illis numeris, per quos cõmunis duorũ numerorum mensura vtrumq; eorum metitur, & eum scilicet qui partes dicitur, & eum, cuius ille partes appellatur: Ita vt si communis duorum numerorũ mensura metiatur minorem per 3. & maiorem per 5. dicatur minor maioris tres quintæ. Tales partes sunt 6. huius numeri 10. Nam communis eorum mensura 2. metitur 6. p 3. & 10. per 5. Eadem ratione eundem numerũ 6. dicemus sex decimas eiusdem numeri 10. cùm vnitas, eorum communis mensura, illum metiatur per 6. hunc verò per 10. Idem iudicium habeto & de reliquis.

QVOD si roges, cur Euclides hoc loco non solùm eum numerum minorem definiat, qui maioris pars est, verùm etiam illum, qui partes: non autẽ idipsum 5. lib. in magnitudinibus præstiterit? Neq; enim magnitudinem illam minorem, quæ maiorem non metitur, partes appellauit; sed tantũ eam, quæ maiorem metitur, partem. Respondemus, huius rei causam esse, quòd omnis numerus minor cuiuslibet maioris aut pars est, aut partes, vt propos. 4. huius lib. ostendetur; pars quidem, cùm ipsum metitur; partes verò, cùm non metitur. At in magnitudinibus longè aliter se res habet. Non enim, propositis duabus magnitudinibus inæqualibus, necessariò minor aut pars, aut partes est maioris, cũ ea persæpè sint incommensurabiles, vt apertè liber 10. demonstrabit, atq; adeò minor nullo modo contineat plures partes maioris. Nam solùm in magnitudinibus commensurabilibus, minor maioris partes plures comprehendit, si illum non metiatur. Rectè igitur Euclides 5. lib. partem duntaxat in magnitudinibus, hic autem in numeris & partem & partes explicauit.

V.

MVLTIPLEX verò maior minoris, cùm maiorem metitur minor.

QVEMADMODVM ille solùm numerus minor, maioris pars dicitur, q. maiorẽ metitur; ita quoq; ille tantummodò numerus maior, minoris appellatur multiplex, quẽ minor metitur; adeò vt numerus maior, cuius minor est pars, sit vicissim minoris multiplex. Vt numerus 6. pars est numeri 30. & hic illius multiplex est, &c. Si verò maiorẽ minor nõ metiatur, nullo modo erit maior minoris multiplex. Si enim maior minoris multiplex esset, metiretur minor maiorẽ, per hanc definitionẽ. Et vicissim, si maior minoris non fuerit multiplex, minor maiorẽ non metietur. Nam si metiretur minor maiorẽ, esset per hanc defin. maior minoris multiplex.

VI.

PAR numerus est, qui bifariam diuiditur.

VT omnes hi numeri 4. 10. 40. 100. 1000. pares vocantur, quoniam diuiduntur bifariam, siue in duas partes æquales, cùm eorum dimidia sint 2. 5. 20. 50. 500.

VII.

IMPAR verò, qui bifariam non diuiditur. Vel, qui vnitate differt à pari.

OMNES hi numeri 5. 11. 15. 37. 101. 1001. impares nominantur, quia bifariam diuidi nequeunt. Vel certè, quia vnitate differunt ab his paribus, 4. 10. 14. 36. 100. 1000. vel etiam ab his 6. 12. 16. 38. 102. 1002. Ex hoc autem loco perspicuè colligi potest, vnitatem in numeris prorsus esse indiuiduam. Si enim diuideretur, omnis numerus impar haberet dimidium; atque adeò bifariam diuidi posset. Nam huius imparis 11. dimidia pars essent quinque vnitates & semis: cuius contrarium Euclides hac definitione docuit.

VIII.

PARITER par numerus est, quem par numerus metitur per numerum parem.

QVIA numerus par est, qui bifariam diuiditur, fit vt quemlibet parem aliquis numerus par, saltem binarius, metiatur. Numerus igitur ille par, quem par numerus metitur per numerũ parem, pariter par nominatur. Cuiusmodi est numerus hic par 32. Metitur enim ipsum par numerus 8. per numerũ parem 4. Ita quoque par numerus 24. pariter par nuncupabitur, cùm eum par numerus 4. metiatur per numerũ parem 6. &c.

IX.

PARITER autẽ impar est, quem par numerus metitur per numerũ imparem.

QVOD si numerum parem metiatur numerus par per imparem numerum, vocabitur is pariter impar. Qualis est par, numerus 30. Metitur enim eum numerus par 2. per imparem numerum 15. Sic quoq; par numerus 6. metitur eundem per numerum imparem 5. &c.

CAETERVM

CAETERVM si rectè duæ proximæ definitiones expendantur, perſpicuũ erit, fieri poſſe, vt vnus idemq; numerus par, ſit & pariter par, & pariter impar. Nam par numerus 24. cùm eum metiatur par numerus 6. per numerum parem 4. pariter par erit. Rurſus quia eundem numerus par 8. metitur per numerum imparem 3. pariter quoq; impar vocabitur. Vnde interpretes nonnulli, exiſtimantes hoc eſſe abſurdum, vt excluderent numeros eiuſmodi pares, qui & pariter pares, & pariter impares videntur eſſe, addiderũt vtrique definitioni particulam, tantùm, ita vt numerus pariter par ſecundùm eos ſit; quẽ par numerus metitur per numerum parem tantùm; Pariter autem impar, quem par numerus metitur per numerum imparem tantùm. Ita enim fit, vt propoſitus numerus par 24. ne quepariter par ſit, cùm eum non tantùm metiatur par 6. per parem 4. ſed etiam par 8. per imparem 3. Neq; pariter impar, quod eum metiatur non tantùm, vt dictum eſt, par 8. per imparem 3. verùm etiam par 6. per parem 4. Sed aptè vocari poterit pariter par, & pariter impar. Participat enim quodammodo naturam vtriuſque, vt conſtat. Itaq; tria conſtituentur genera numeri paris inter ſe maximè diuerſa: Pariter par; pariter impar; pariter par, & pariter impar, qui à quibuſdam, pariter par & impariter appellatur. Veruntamen hæc omnia vera quidem ſunt, & ex ſententia Pythagoreorum, Nicomachi, Boëtij, & aliorum rectè explicata, ſed aliena prorſus ab Euclidis inſtituto, vt perſpicuum eſt, & ex definitionibus traditis, in quibus non reperitur dictio iſta, tantùm, quam illi apponunt, & ex propoſ. 32. 33. 34. lib. 9. vbi manifeſtè omnem numerum parem, quem aliquis par per parem metitur, pariter parem appellat; illum verò, quem aliquis par metitur per imparem, pariter imparem: eum denique, quem par numerus metitur, & per parem numerum, & per imparem, vocat pariter parem, & pariter imparem; demonſtratq; omnes numeros à binario duplos, quales ſunt 2. 4. 8. 16. 32. 64. 128. &c. eſſe pariter pares tantùm, hoc eſt, pares numeros eos metiri per pares numeros tantùm; Numerus verò, qui dimidios impares habẽt, eſſe pariter impares tantùm, id eſt, pares numeros eos metiri per numeros impares duntaxat, cuiuſmodi ſunt 6. 10. 14. 18. 22. &c. Numeros deniq; nec à binario dupli ſunt, nec dimidios habent impares, pariter pares eſſe, & pariter impares, vt ſunt 12. 20. 24. 28. 36. &c. Itaq; vult Euclides in demonſtrationibus illarum propoſitionum, hos poſtremos numeros alios q; ſimiles, verè eſſe, ſecundùm traditas definitiones, pariter pares; rurſus eoſdem dici rectè pariter impares, quanq; nec tantũ pariter pares, nec tantũ pariter impares illi ſint. Sed hæc planius ex lib. 9. intelligentur.

X.

IMPARITER verò impar numerus eſt, quem impar numerus metitur per numerum imparem.

VT hic numerus impar 15. impariter impar dicitur, quoniam numerus impar 3. eum metitur per 5. numerum imparem. Sic quoq; hi numeri impares 9. 21. 25. 27. 33. 35. 39. 135. 2025. & alij infiniti, impariter impares nominantur.

XI.

PRIMVS numerus eſt, quem vnitas ſola metitur.

QVOD ſi numerum quempiam nullus numerus, ſed ſola vnitas metiatur, ita vt neq; pariter par, neque pariter impar, neq; impariter impar poſſit dici, appellabitur numerus Primus; quales ſunt omnes iſti 2. 3. 5. 7. 11. 13. 17. 19. 23. 29. 31. &c. Nam eos ſola vnitas metitur.

XII.

PRIMI inter ſe numeri ſunt, quos ſola vnitas, communis menſura, metitur.

SICVT numerus ille, quem ſola vnitas metitur; Primus dicitur; ita quoq; duo, tres, quatuor, vel etiam plures numeri, quos præter vnitatem, nullus numerus, tanquam menſura communis metitur, quamuis ſinguli illorum habeant numeros, qui eos, præter vnitatem metiantur, appellantur inter ſe primi. Vt 15. 8. ſunt numeri inter ſe primi, quia ſola vnitas, menſura communis illos metitur: quamuis enim priorem metiantur hi numeri 3. & 5. poſteriorem verò iſti 2. 4. tamen nullus iſtorum vtrumque metitur, ſed ſola vnitas vtriuſque eſt communis menſura. Sic etiam hi numeri 7. 10. 15. primi inter ſe dicentur, quòd præter vnitatem, nullum habeant numerum, menſuram communem, quanquam poſtremi duo habeant communẽ menſuram hunc numerum 5. Deniq; vnitas, & quiuis numerus, dici poſſunt, licèt impropriè, numeri inter ſe primi: quia ſola vnitas vnitatem, & numerum quemuis metitur, tanquam menſura communis.

XIII.

COMPOSITVS numerus eſt, quem numerus quiſpiam metitur.

NVMERVM, quem præter vnitatem aliquis alius numerus metitur, appellant Geometræ compoſitum, cuiuſmodi eſt hic 15. Nam eum vterque horum numerorum 3. 5. metitur. Perſpicuum autem eſt, omnes numeros pares, dempto binario, eſſe compoſitos, cùm eos omnes binarius metiatur. Ex quo fit, omnes numeros primos, præter binarium, eſſe impares, quandoquidem ex paribus, ſolus binarius primus eſt, vt diximus.

XIIII.

COMPOSITI autem inter ſe numeri ſunt, quos numerus aliquis, communis menſura, metitur.

DVO numeri, vel plures, quos præter vnitatem, aliquis alius numerus, tanquã menſura communis meti-

tur, dicuntur inter se compositi, licèt non quilibet sit compositus numerus; quemadmodum & numerus ille, quem præter vnitatem, numerus quispiam metitur, compositus nominatur. Vt hi numeri 15. 24. compositi inter se sunt, quia eos hic numerus 3. tanquam communis mensura, metitur. Ita etiam inter se compositi erunt hi numeri 7. 21. 35. Nã primus eorũ & se ipsum, & reliquos duos metitur, licèt à se sumptus, Primus vocetur.

XV.

NVMERVS numerum multiplicare dicitur, cùm toties compositus fuerit is, qui multiplicatur, quot sunt in ipso multiplicante vnitates, & procreatus fuerit aliquis.

VT numerus 6. multiplicare dicetur numerum 8. quando numerus 8. sexies fuerit compositus, toties nimirum, quot sunt in multiplicante 6. vnitates, procreatusq; fuerit numerus 48. Ita quoque vicissim numerus 8. multiplicare dicetur numerum 6. si numerũ 6. octies sumpserimus, toties scilicet, quot vnitates in multiplicante 8. continentur, procreauerimusq; eundem numerum 48. Eadem denique ratione hi numeri 100. 1000. 20. &c. dicentur multiplicare numerum 456. cùm hic sumptus fuerit centies, millies, aut vicies, &c. genitiq; fuerint hi numeri 45600. 456000. 9120. &c. Itaque numerus aliquis dicetur produci, gigni, procreariue ex duobus numeris, quando altero alterum multiplicante, productus fuerit. Vt numerus 63. gignì dicitur ex his numeris 7. 9. quia procreatur ex multiplicatione numeri 7. in numerum 9. vel è contrario. Et sic de reliquis.

SEQVITVR *ex his, productum ex multiplicatione numerum eandem habere proportionem ad alterutrum multiplicantium, quam alter multiplicantium habet ad vnitatem. Cùm enim ex definitione Euclidis alteruter multiplicantium toties componendus sit, vt faciat productum, quoties in altero multiplicantium est vnitas; continebit numerus productus toties alterutrum multiplicantium, quoties alter multiplicantium vnitatem continet: ac proinde eandem habebit proportionem numerus productus ad alterutrum multiplicantium, quàm alter multiplicantium ad vnitatem habet. Itaque Multiplicatio, siue ductus vnius numeri in alium ita quoque describi poterit.*

MVLTIPLICATIO numeri in numerum, est inuentio numeri, qui ad alterutrum multiplicantium eandem proportionem habet, quam alter multiplicantium ad vnitatem.

SIC vides, ex multiplicatione, siue ductu 6. in 8. gigni numerum 48. qui ita se habet ad 6. vt 8. ad 1. Vel ita ad 8. vt 6. ad 1.

HVIC definitioni addenda est hac alia docens, quid sit numerum diuidere numerum: quippe quæ necessaria omnino sit ad ea, quæ nos in ijs, quæ sequuntur, sumus demonstraturi.

NVMERVS numerum diuidere dicitur, cùm numerus acceptus fuerit, qui suis vnitatibus indicat, quoties diuidens numerus in diuiso continetur.

VT numerus 6. diuidere dicetur numerũ 48. cùm sumptus fuerit numerus 8. qui octo suis vnitatibus indicat, diuidentem numerum 6. in diuiso 48. contineri octies. Ita quoque vicissim numerus 8. diuidere dicetur eundem numerum 48. si acceptus fuerit numerus 6. qui sex suis vnitatibus indicat, diuidentem numerum 8. in diuiso 48. contineri sexies.

HINC fit, numerum ex diuisione procreatum eandem habere proportionem ad vnitatem, quam numerus diuisus habet ad diuidentem. Cùm enim, vt in definitione diximus, procreatus numerus suis vnitatibus indicare debeat, quoties diuidens numerus in diuiso contineatur; continebit numerus productus vnitatem toties, quoties numerus diuisus diuidentem continet: ac proinde eandem proportionem habebit numerus ex diuisione genitus ad vnitatem, quàm diuisus numerus ad diuidentem. Itaque Diuisio vnius numeri per alium ita quoque poterit describi.

DIVISIO numeri per numerum, est inuentio numeri, qui ad vnitatem habet eandem proportionem, quam numerus diuisus ad diuidentem.

ITA vides ex diuisione numeri 48. per 6 procreari numerum 8. qui ita se habet ad 1. vt 48. ad 6. Item ex diuisione eiusdem numeri 48 per 8. produci numerum 6. qui ita se habet ad 1. vt 48. ad 8.

EX his quoque efficitur, diuiso numero per numerum, diuisum numerum gigni ex multiplicatione numeri per diuisionem inuenti in numerum diuidentem. Diuiso enim numero A,48. B,8. C,6. D,1. *A, per B, procreetur numerus C. Dico numerum A gigni ex ductu numeri C, in numerum B. Quoniam enim ex definitione multiplicationis, numerus ex C, in B, procreatus ita se habet ad B, vt C, ad vnitatem D: Ex definitione autem diuisionu, ita quoque se habet A, ad B, vt C, ad vnitatem D; perspicuum est, numerũ ex C, in B, genitum esse numerum A; cùm tam ille genitus, quàm A, eandem proportionem habeat ad B, quam C, ad D, vnitatem.*

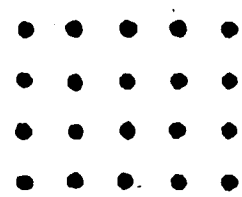
HÆC omnia conueniunt quoque numeris fractis, & integris cum fractis: Id est, Numerus fractus numerum fractum, vel integer fractum, vel fractus integrum (siue fracti adhæreant integris, siue non) multiplicare dicitur, cùm toties compositus fuerit is, qui multiplicatur, quot sunt in ipso multiplicante vnitates, & procreatus fuerit aliquis: Diuidere autem, cùm numerus acceptus fuerit, qui indicet, quoties diuidens in diuiso continetur:

continetur: Ita vt in multiplicatione inueniatur quoq; numerus, qui ad alterutrum multiplicantium eandem proportionem habet, quam alter multiplicantium ad vnitatem: In diuiſione autem procreetur numerus, qui ad vnitatem eandem proportionem habet, quã numerus diuiſus ad diuidentem. Vt numerus $\frac{1}{2}$. multiplicare dicitur numerum 20. quando numerus 20. toties fuerit compoſitus, quot ſunt in $\frac{1}{2}$. vnitates, procreatusq; fuerit numerus 10. Quia enim vnitas per ſui ſemiſſem duntaxat eſt in $\frac{1}{2}$. ſumendus eſt numerus 20. per ſemiſſem quoq; ſui, quæ eſt 10. Ita quoque viciſſim numerus 20. multiplicare dicetur numerum $\frac{1}{2}$. ſi $\frac{1}{2}$ ſumptus fuerit vicies, toties ſcilicet, quoties vnitas eſt in 20. productusq; fuerit idem numerus 10. Vbi videsi eandem eſſe proportionem procreati numeri 10. ad $\frac{1}{2}$. quam habet alter numerus multiplicans 20. ad 1. Vel ita eſſe 10. ad 20. vt $\frac{1}{2}$. ad 1. Sic etiam $\frac{1}{2}$. & $\frac{1}{3}$. ſe mutuò multiplicare dicentur, quando $\frac{1}{2}$. ſumptus fuerit per tertiam ſui partem, quemadmodum $\frac{1}{2}$. tertiam partem vnitatis tantum continet: Vel quando $\frac{1}{3}$. ſumptus fuerit per ſui ſemiſſem, quia & $\frac{1}{2}$. ſemiſſem tantum continet vnitatis. Vtroq; autem modo procreabitur $\frac{1}{6}$. qui numerus tertia pars eſt numeri $\frac{1}{2}$. ſiue $\frac{2}{6}$. & ſemiſsis numeri $\frac{1}{3}$. ſiue $\frac{2}{6}$. Quo pacto autem multiplicatio in numeris fractis facienda ſit, in Arithmetica docuimus, demonſtrabimusq; ad finem lib. 9.

Rvrsvs numerus $\frac{1}{2}$. diuidere dicetur numerum 10. cum ſumptus fuerit numerus 20. indicans, diuidentem numerum $\frac{1}{2}$. vicies contineri in diuiſo numero 10. ita vt eadem proportio ſit procreati numeri 20. ad 1. qua numeri diuiſi 10. ad diuidentem $\frac{1}{2}$. Sic quoque $\frac{1}{2}$. diuidere dicetur $\frac{1}{6}$. quando ſumptus fuerit numerus $\frac{1}{3}$. indicans, diuidentem numerum $\frac{1}{2}$. non totum contineri in diuiſo $\frac{1}{6}$. ſed tertiam eius partem. Nam cum numerus $\frac{1}{2}$. idem ſit qui $\frac{3}{6}$. liquidò conſtat tertiam huius partem, nimirum $\frac{1}{6}$. contineri in $\frac{1}{6}$. Cæterùm quo pacto fiat diuiſio in numeris fractis, tradidimus in Arithmetica, & ad finem lib. 9. demonſtrabimus. vbi omnia hæc, quæ de multiplicatione, diuiſioneq; fractorum diximus, planiora fient.

XVI.

CVM autem duo numeri mutuo ſe ſe multiplicantes aliquem fecerint, qui factus erit, planus appellábitur. Qui verò numeri mutuo ſe ſe multiplicarint, latera illius dicentur.



Omnis numerus procreatus ex multiplicatione mutua duorum numerorum, planus appellatur, quia ſecundum ſuas vnitates in longum, & latũ diſpoſitas parallelogrammum rectangulum refert, cuius latera ſunt duo numeri multiplicantes; qui idcirco latera numeri procreati vocantur, quòd ipſum contineant, non ſecus, ac recta linea angulum rectum ambientes, parallelogrammum rectangulum continere dicuntur, vt latius lib. 2. explicauimus. Vt numerus 24. productus ex multiplicatione mutua numerorum 4. & 6. planus appellatur, lateráque eius ſunt 4. & 6. quia eius vnitates in longum, & latum diſpoſitæ, prout latera exigunt, referũt parallelogrammum rectangulum, cuius vnum latus ſex vnitates, alterum verò 4. complectitur. Eodem modo numerus 64. genitus ex mutua multiplicatione numerorum 8. & 8. planus dicitur, eiúſque latera 8. & 8.

Cæterum cum infinita ſint genera numerorum planorum apud Arithmeticos, quemadmodum & figura plana apud Geometras: Euclides ſolum definit planum quadrangulare rectangulum, qui videlicet ſub duobus numeris, ex quorum mutua multiplicatione gignitur, continetur, quoniam de hoc ſolo in hiſce libris numerorum diſputat, quòd omni ex parte quadrato Geometrico, & figura altera parte longiori, ſimiles ſint, & æquales, ſiue ambitum, ſiue aream, capacitatémve ſpectes. Nihil autem dicit de numeris triangularibus, pentagonis, hexagonis, &c. quia hi, licet conueniant triangulo Geometrico, pentagono, hexagono, &c. quod ad ambitum ſpectat: tamen ſi aream ſeu capacitatem conſideres, ab iiſdem multum diſcrepant. Id quod perſpicuum eſt cuilibet, qui diligenter hos Euclidis libros, & Arithmeticam Iordani perlegerit.

Potest autem vnus, idemq; numerus planus plura habere latera, cum ex pluribus multiplicationibus procreari poſſit, vt numerus 24. non ſolum latera habet 4. & 6. verum etiam 3. & 8. nec non 2. & 12. quia tam ex multiplicatione 3. in 8. quàm 2. in 12. producitur, quemadmodum & idem ex multiplicatione 4. in 6. eſt genitus. Ita quoque numerus planus 100. latera habet 5. & 20: 4. & 25: 2. & 50: 10. & 10. quod ex his omnibus numeris, ſi bini inter ſe multiplicentur, gignatur.

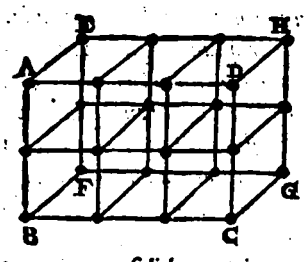
Qvia verò omnem numerum planum metiuntur duo numeri multiplicantes ſe mutuo, quòd quilibet eorum toties ſumptus, quot ſunt in altero vnitates, ipſum procreet; liquido conſtat, omnem planum numerum eſſe compoſitum: Quod etiam de numero ſolido, qui iamiam definietur, dici poteſt. Verum eſt, vnitatem aliquando dici poſſe numerum planum, quamuis improprie; quia eius latera ſunt duæ vnitates, quæ multiplicatæ mutuo ipſam vnitatem producunt.

XVII.

CVM verò tres numeri mutuo ſe ſe multiplicantes aliquem fecerint, qui procreatus erit, ſolidus appellabitur: Qui autem numeri mutuo ſe ſe multiplicarint, latera illius dicentur.

Vt quia tres hi numeri 2. 3. 4. mutuò ſeſe multiplicantes, producunt 24. Nam ex 2. in 3. procreatur nu-

merus 6. & ex 6. in 4. fit 24. Vel ex 2. in 4. gignitur numerus 8. & ex 8 in 3. efficitur 24. Vel denique ex 3. in 4. producitur numerus 12. & ex 12. in 2. generatur 24. appellabitur numerus 24. ſolidus, numeri verò 2. 3. 4. dicentur latera illius, quia eius vnitates in longum, latum atq; profundum diſpoſita referunt figuram quandam ſolidam, quæ Parallelepipedum nuncupatur, vt lib. 11. explicabimus, cuius omnes tres dimenſiones exprimunt tres numeri ſe mutuo multiplicantes; vnus quidem longitudinem, alius verò latitudinem, & altitudinem reliquus. Nam ſi primum multiplicetur numerus 2. in 4. efficietur numerus 8 baſis ſolidi numeri longa quatuor vnitates, & lata duas: Etſi hæc baſis in 3. multiplicetur, hoc eſt, ſi accipiatur ter, exurget totus numerus ſolidus 24. altitudinem habens trium vnitatum. At ſi numerus 2. in 3. multiplicetur, habebitur baſis 6. vnitatum, quæ multiplicata in 4. facit totum ſolidum numerum 24. in altitudine habens 4. vnitates. Si denique numerus 3. multiplicetur in 4. procreabitur numerus 12. q baſe, quæ bis ſumpta faciet numerum eundem ſolidum 24. cuius altitudo continet duas vnitates. Quæ omnia perſpicua ſunt in figura propoſita. Si enim baſis ſit B C G F, octo vnitatum, cuius longitudo B C, quatuor vnitates, & B F, latitudo, duas complectitur; ſuperponentur ei duæ aliæ baſes ſimiles, & æquales, vt totus numerus ſolidus contineat 24. vnitates, eiusq; altitudo B A, vnitates tres. Similiter, ſi baſis ſit A B F E, ſex vnitatum, cuius longitudo A B, tres, & latitudo B F, duas continet vnitates; ſuperponentur ei aliæ tres baſes ſimiles, & æquales, fietq; totus ſolidus numerus rurſum 24. altitudinẽ B C, habens quatuor vnitatum. Si denique baſis ſit A B C D, 12. vnitatum, cuius longitudo B C, quatuor continet, & latitudo A B, tres; ſuperponetur illi alia baſis ſimilis, & æqualis E F G H, conſtabitq; totus numerus ſolidus vnitatibus 24. quarum duæ altitudinem dabũt A E, vel B F. Idem hic numerus ſolidus 24. habet hæc latera 6. 2. 2. cum ex his mutuo multiplicatis producatur. Eodemq; modo de aliis numeris ſolidis iudicandum erit.

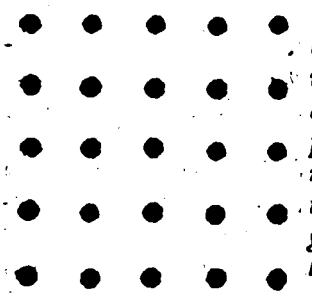


DENIQVE & vnitas interdum ſolidus appellabitur numerus, etſi non propriè, quia eius latera ſunt tres vnitates, ipſam vnitatem ex mutua earum multiplicatione procreantes.

DEFINIT autem & hic Euclides tantùm numerum ſolidum rectangulum, cuius baſes oppoſitæ ſunt parallelæ, & qui continetur ſub tribus numeris, omiſſis infinitis aliis; de quibus Iordanus, ob cauſam in præcedenti definitione datã; qa ſcilicet hi prorſus æquales ſunt, & ſimiles cubis, & parallelepipedis Geometricis.

XVIII.

QVADRATVS numerus eſt, qui æqualiter æqualis. Vel qui ſub duobus æqualibus numeris continetur.

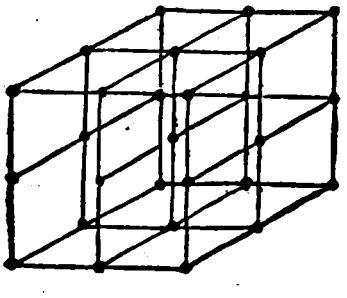


PLANVM illum numerum, qui æqualiter æqualis eſt, hoc eſt, qui ſecundum vnitates ſuas in longum & latum diſpoſitas, refert parallelogrammum rectangulum, cuius longitudo latitudini eſt æqualis, ita vt omnia latera ſint æqualia, vel qui ex multiplicatione mutua duorum numerorum æqualium procreatur, atq; adeò ſub illis continetur, vocat quadratum. Huiuſmodi eſt numerus 25. contentus ſub numeris æqualibus 5. & 5. hoc eſt, ex eorum mutua multiplicatione genitus. Nam ſi eius vnitates in formam planam redigantur, referet perfectum quadratum Geometricum, in quolibet latere habens quinq; vnitates, ideoq; æqualiter æqualis erit.

ALTERVTER autem numerorum æqualium, ſub quibus quadratus numerus continetur, vel ex quorum multiplicatione producitur, latus quadrati à Geometris, radix verò ab Arithmeticis pleriſq; appellatur.

XIX.

CVBVS verò, qui æqualiter æqualis æqualiter. Vel, qui ſub tribus æqualibus numeris continetur.



SOLIDVM quoq; illum numerum vocat cubum, qui eſt æqualiter æqualis æqualiter, id eſt, cuius vnitates in longum, latum, atq; profundum diſpoſitæ cubum Geometricum referunt, ita vt omnes eius dimenſiones, nimirum longitudo, latitudo, & altitudo, ſiue profunditas, æquales ſint; Vel qui ex multiplicatione mutua trium æqualium numerorum inter ſe producitur. Qualis eſt numerus 27. contentus ſub numeris æqualibus 3. 3. 3. ſiue ex eorum multiplicatione mutua procreatus, cum ex 3. in 3. fiat numerus 9. & ex 9. in 3. gignatur numerus cubus 27. Omnes enim illius vnitates in formam ſolidam redactæ referunt perfectum cubum Geometricum, exiſtuntq; tam in longitudine, & latitudine, quàm in profunditate, tres vnitates. Quare ipſe numerus 27. eſt æqualiter æqualis æqualiter.

QVILIBET verò trium numerorum æqualium, ſub quibus cubus continetur, vel ex quorum mutua multiplicatione procreatur, Geometris latus cubi, pleriſq; autem Arithmeticis radix dicitur.

XX.

NVMERI proportionales ſunt, cum primus ſecũdi, & tertius quarti, æquè multiplex eſt; vel eadem pars, vel eædem partes: Vel certè, cum primus ſecundum, & tertius quartũ, æqualiter continet, eandemq; inſuper illius partẽ, vel eaſdẽ partes.

VT numeros proportionales in omni genere proportionis rationalis inæqualitatis (cuiuſmodi ſunt omnes numeri inæquales inter ſe collati) complecteremur, addidimus huic definitioni illa verba; vel certè, cum primus ſecundum, & tertius quartum, æqualiter continet, eandemque inſuper illius partem, vel eaſdem partes. *Definitio etenim vulgata Euclidis, quam puto eſſe corruptam, cum manca ſit, atq; imperfecta, comprehendit ſolum proportionales numeros in proportione multiplici, ſubmultiplicive, & in proportionibus reliquis minoris inæqualitatis. Nam in proportione multiplici ſunt quatuor quilibet numeri proportionales, cum primus ſecundi, & tertius quarti, æquè multiplex eſt; in ſubmultiplici verò, cum primus ſecundi, & tertius quarti, eadem pars eſt; & in reliquis proportionibus minoris inæqualitatis, cum primus ſecundi, & tertius quarti, eadem partes fuerit, vt vult definitio Euclidis. At verò ex ea nequaquam deprehendere poſſumus, quinam numeri proportionales ſint in proportione ſuperparticulari, ſuperpartiente, multiplici ſuperparticulari, & multiplici ſuperpartiente. In his enim omnibus, primus numerus ſecundi, & tertius quarti, neq; æquè multiplex eſt, neq; eadem pars, neq; eadem partes; ſed primus ſecundum, & tertius quartum, æqualiter continet, puta vel ſemel, vel aliquoties, & eandem inſuper illius partem, eaſdémve partes; vt perſpicuum eſt ex iis, quæ docuimus ad defin. 4. lib. 5. vbi omnes proportiones rationales copiosè explicuimus. Itaq; hi numeri 1. 2. 4. 9. 3. proportionales ſunt, cũ primus ſecundi, & tertius quarti æquè multiplex ſit, nimirum triplus. Item hi 4. 12. 3. 9. eſt enim primus ſecundi, & tertius quarti, eadem pars, nimirum tertia. Rurſus proportionales ſunt hi numeri 6. 8. 9. 12. quod primus ſecundi, & tertius quarti eadem partes ſint, videlicet tres partes quartæ. Deniq; & 7. 6. 14. 12. & 7. 4. 14. 8. & 11. 5. 22. 10 & 12. 5. 24. 10 ſunt numeri proportionales. Nam in primo exemplo primus numerus ſecundum, & tertius quartum, ſemel, & inſuper eandem partem, videlicet ſextam; In ſecundo autem ſemel, & eaſdem partes, nimirum tres quartas; In tertio deinde bis, & adhuc partem eandem, videlicet quintam, continet; In vltimo denique primus ſecundum, & tertius quartum, bis, & præterea eaſdem partes complectitur, puta duas partes quintas. Quod ſi primus numerus ſecundi, & tertius quarti, non ſit æquè multiplex, vel eadem pars, vel eadem partes; vel denique primus ſecundum, & tertius quartum, non æqualiter contineat, eandemq; inſuper illius partem, vel eaſdem partes; nullo pacto dicendi erunt numeri propoſiti proportionales.*

QVOTIESCVNQVE igitur quatuor numeri proportionales eſſe ponuntur, concedendum neceſſariò erit, ſi quidem maiores cum minoribus conferantur, quòd primus ſecundi, & tertius quarti, æquè multiplex ſit; Vel certè, quòd primus ſecundum, & tertius quartum, contineat æqualiter, & inſuper eandem partem, vel eaſdem partes: Et contra, ſi primus ſecundi, & tertius quarti, æquè multiplex concedatur: Vel certè primus ſecundum, & tertius quartum, æqualiter dicatur continere, & eandem adhuc partem, vel eaſdem partes, colligetur numeros eſſe proportionales. Quod ſi minores ad maiores referantur, dicanturq; eandem habere proportionem, fatendum erit, primum ſecundi, & tertium quarti, eſſe partem eandem, vel partes eaſdem; Et è contrario, ſi primus ſecundi, & tertius quarti, eadem concedatur pars, vel eadem partes, concludetur numeros ipſos eandem habere proportionem.

DEFINIT autem Euclides eos duntaxat numeros proportionales, qui proportionem eandem inæqualitatis habent. Nam ſi de proportione æqualitatis loquamur, perſpicuum eſt, primum ſecundo, & tertium quarto æqualem debere eſſe, vt proportionales numeri dicantur.

EX hac autem definitione apertè colligitur, æquales numeros ad eundem habere eandem proportionem. Et contra eundem ad æquales eandem quoq; habere proportionem. Item numeros ad eundem habentes eandem proportionem, vel ad quos idem eandem habet proportionem, æquales eſſe. Cum enim æquales numeri ſint eiuſdem, vel æque multiplices, vel eadem pars, vel eadem partes: Vel certè eundem æqualiter cõtineant, eandemq; inſuper illius partem, vel partes: Item cum idem numerus æqualium ſit vel æquè multiplex, vel eadem pars, vel eadem partes: Vel certè illos æqualiter contineat, eandemq; inſuper eorum partem, vel partes; perſpicuum eſt, æquales numeros ad eundem, vel eundem numerum ad æquales, eandem habere proportionem, iuxta hanc definitionem.

RVRSVS quia numeri ad eundem habentes eandem proportionem, ſunt illius vel æquemultiplices, vel eadem pars, vel eadem partes; Vel certè illum æqualiter continent, eandemq; inſuper eius partem, vel partes: Item quia idem numerus habens eandem proportionem ad aliquos, eſt illorum vel æque multiplex, vel eadem pars, vel eadem partes; Vel certe illos æqualiter continet, eandemq; inſuper illorum partem, vel partes, ſecundùm hanc eandem definitionem; manifeſtum eſt, numeros, qui ad eundem eandem habent proportionem, vel ad quos idem eandem proportionem habet, æquales eſſe.

PARI ratione infertur, maioris numeri ad eundem, maiorem proportionem eſſe, quàm minoris. Et contra, eiuſdem ad minorem, maiorem eſſe proportionem, quàm ad maiorem. Item numerorum illum, qui ad eundem habet maiorem proportionem, maiorem eſſe: Ad quem autem idem habet maiorem proportionem, minorem eſſe. Quæ omnia perſpicua ſunt, ſi recte hæc definitio intelligatur.

HÆC definitio conuenit etiam numeris fractis, siue integri numeri simul adsint, siue non. Nam quatuor hi numeri sunt proportionales; $\frac{3}{4}.\frac{3}{8}.\frac{1}{2}.\frac{1}{4}$. quia primus secundi, & tertius quarti, æquè multiplex est, nimirum duplus, vt patet, si priores duo ad eandem denominationem reuocentur, vt ad $\frac{6}{8}.\frac{3}{8}$. & posteriores quoq; ad eandem denominationem, vt ad $\frac{2}{4}.\frac{1}{4}$. Quo pacto autem fracti numeri ad eandem denominationem reducantur, docuimus in Arithmeticæ, & ad finem lib. 9. demonstrabimus. Eadem ratione quatuor hi numeri proportionales sunt $2\frac{3}{8}.4\frac{9}{12}.1\frac{1}{4}.2\frac{5}{10}$. cum primus secundi, & tertius quarti sit eadem pars, nimirum semissis, vt constat, si priores duo ad hos eiusdem denominationis reuocentur, $\frac{19}{8}.\frac{38}{8}$. & posteriores duo ad hos $\frac{5}{4}.\frac{10}{4}$. atq; ita de cæteris. Quo autem modo secundus $\frac{57}{12}$. ad hunc $\frac{38}{8}$. & quartus $\frac{25}{10}$. ad hunc $\frac{10}{4}$. reuocetur, ostendemus ad finem lib. 9. propos. 18. Minutiarum.

XXI.

SIMILES plani, & solidi sunt, qui proportionalia habent latera.

VT planus numerus plano numero sit similis, non necesse est, qualibet duo illius latera quibusuis duobus lateribus huius esse proportionalia; sed satis est, illum habere aliqua duo latera, quæ sint proportionalia quibusdam duobus lateribus huius. Nam hac ratione erunt eorum latitudines longitudinibus proportionales, si secundum suas vnitates in formam planam redigantur, prout latera assumpta exigunt. Vt numeri plani 24. & 6. similes sunt, quoniam illius latera 6 4. proportionalia sunt lateribus huius 3.2. quamuis his eisdem non sint proportionalia alia illius latera, nempe 8.3 vel 12.2.

EODEM modo, vt duo numeri solidi similes sint, non requiritur, vt quæuis tria vnius latera proportionalia sint tribus quibuslibet lateribus alterius; sed sufficit, vt tria vnius reperiantur tribus alterius proportionalia, quia hac ratione, si secundùm vnitates in formam solidam reducantur, erunt eorum latitudines longitudinibus, & longitudines altitudinibus proportionales. Vt numeri solidi 192. & 24 sunt similes, quia latera illius 8.6.4. lateribus huius 4.3.2. sunt proportionalia, licet his eisdem nequaquam proportionalia sint alia latera illius, nimirum 12.8.2. vel 6.4.3.

ITAQVE possunt duo numeri plani, vel solidi, esse similes, licet lateribus aliquibus vnius acceptis nullo modo reperiri queant latera alterius proportionalia. Sunt enim hi numeri plani 24.6. similes, vt dictum est; & tamen si latera prioris sumantur 3. & 8. nulla reperientur in posteriori illis proportionalia. Sic etiam solidi similes sunt 192.24. cum tamen laterib. prioris assumptis 3.4.16. nulla reperiatur proportionalia in posterio. i.

HÆC porrò similitudo planorum, & solidorum reperitur quoq; in fractis numeris, siue in integris cum fractis. Nam si sumantur quatuor numeri nõ integri proportionales, & tam duo priores, quàm duo posteriores inter se multiplicentur, procreabuntur plerunq; duo plani non integri similes, &c. Dixi, plerunq; quia fieri potest, vt interdum integri numeri gignãtur. Nam si duo latera sint $\frac{2}{3}.6$, & alia duo $1\frac{1}{3}.12$. quæ eandem proportionem habent noncuplam, producent priora duo numerum planum 4. posteriora verò numerum 16.

XXII.

PERFECTVS numerus est, qui suis ipsius partibus est æqualis.

NVMERVS ille, cui omnes suæ partes simul sumptæ (loquimur autem de partibus aliquotis, iuxta defin. 3. huius lib.) æquales sunt, Perfectus à Mathematicis nuncupatur. Cuiusmodi sunt hi numeri 6.28.496. Nam primus continet has partes aliquotas duntaxat 1.2.3. quæ simul sumptæ conficiunt numerum 6. Secundi autem numeri partes omnes aliquotæ sunt hæ 1.2.4.7.14. quarum summa constituit ipsum numerum 28. Tertius demum numerus has partes habet aliquotas, 1.2.4.8.16.31.62.124.248. quas omnes in vnam summã collectas componere numerum 496. perspicuum est. Qui autem numeri perfecti sint, & qua via, ac ratione procreentur, (sunt enim præter tres dictos innumerabiles alij) demonstrabitur ab Euclide propos. vlt. lib. 9.

QVOD si partes omnes aliquotæ alicuius numeri simul acceptæ maiores sint ipso numero, dici solet numerus ille, Abundans: si verò minores, Diminutus.

LVCE autem clarius ex hoc loco colligitur, partem ab Euclide sumi tantum pro parte aliquota. Nam alioquin omnis numerus esset perfectus, cum suis ipsius partibus sit æqualis, si quilibet numerus minor numeri maioris pars dici potest, siue eum metiatur, siue non metiatur.

His definitionibus ab Euclide propositis adiungendæ mihi videntur ex Campano, aliisq; scriptoribus nonnullæ aliæ, quibus proximè succedent postulata, & communes animi notiones, præsertim eæ, quibus in demonstrandis numerorum proprietatibus & Euclides, & eius interpretes vti videntur.

XXIII.

NVMERVS numerum metiri dicitur per illum numerum, quem multiplicans, vel à quo multiplicatus, illum producit.

VT numerus 4. metiri dicitur numerum 12. per 3. quia multiplicatus per 3. producit 12. Eademq; ratione numerus 3, eundem numerum 12. metietur per 4. cum ex multiplicatione 4. in 3. numerus 12. producatur. Hoc autem ita esse, hac ratione fiet perspicuum. Cum numerus 4. metiatur 12. per 3. faciet 4. ipsum 12. totics compositus, quoties est vnitas in 3. Quare per defin. 15. numerus 3. multiplicãs numerum 4. producet 12. Quia verò vt propos. 16. huius lib. ostendemus, idem numerus producitur ex multiplicatione 4. in 3. qui ex 3. in 4. manifestum relinquitur, eundem numerum 12 procreari, si numerus 4. multiplicet numerum 3.

HÆC

HAEC quoq; definitio quadrat in numeros non integros. Nam numerus $2\frac{1}{3}$. metiri dicitur numerum $13.\frac{5}{12}$. per $5.\frac{3}{4}$. quia multiplicatus per $5\frac{3}{4}$. gignit $13\frac{5}{12}$.

XXIIII.

PROPORTIO numerorum est habitudo quædam vnius numeri ad alterum, secundum quod illius est multiplex, vel pars, partésve; vel certè illum continet semel, aut aliquoties, & aliquam insuper illius partem, vel partes.

SI numerus 20. cum numero 4. conferatur ea ratione, qua illius multiplex est, nimirum quintuplus, dicetur haec comparatio, habitudóve, Proportio. Sic etiam proportio erit ea habitudo, qua idem numerus 20. cum numero 60. confertur, secundum quod illius tertia pars est; & sic de reliquis.

QVAE cum ita sint, perspicuum est, tum demum quatuor numeros dici proportionales, cum primus secundi, & tertius quarti, aequè multiplex est; vel eadem pars, vel eadem partes: Vel certè, cum primus secundum, & tertius quartum, aequaliter continet, eandemq; insuper illius partem, vel easdem partes, vt supra definit. 20. docuimus.

XXV.

TERMINI, siue radices proportionis dicuntur duo numeri, quibus in eadem proportione minores sumi nequeunt.

XXVI.

CVM tres numeri proportionales fuerint; Primus ad tertium, duplicatam rationem habere dicitur eius, quam habet ad secundum. At cum quatuor numeri proportionales fuerint; Primus ad quartum, triplicatam rationem habere dicitur eius, quam habet ad secundum: Et semper deinceps vno amplius, quamdiu proportio extiterit.

HAEC definitio, vt ad magnitudines pertinet, copiosè explicata est defin. 10. lib. 5. Vnde cum omnia, quae ibi scripsimus, ad numeros huc transferri facilè possint, non est quòd iterum eadem hic repetamus.

XXVII.

QVOTLIBET numeris ordine positis, proportio primi ad vltimum componi dicitur ex proportionibus primi ad secundum, & secundi ad tertium, & tertij ad quartum, & ita deinceps, donec extiterit proportio.

HOC ita se habere, pluribus verbis à nobis demonstratum est ad defin. 5. lib. 6.

POSSVNT etiam huc referri definitiones illa in quinto libro tradita de alterna ratione, inuersaq;; de compositione, diuisione, & conuersione rationis; de ratione ex aequalitate; & de proportione ordinata, ac perturbata. Omnes enim hi modi argumentationum, quae circa proportiones versantur, demonstrabuntur quoque hoc septimo libro proportionibus numerorum conuenire.

POSTVLATA, SIVE PETITIONES.

I.

POSTVLetur, cuilibet numero quotlibet posse sumi æquales, vel multiplices.

II.

QVOLIBET numero sumi posse maiorem.

QVAMVIS enim numerus infinitè diminui nequeat, sed necessariò ad vnitatem indiuiduam diminutio deueniat; tamen augeri potest infinitè per additionem continuam vnitatis. Quare quolibet numero proposito maior exhiberi potest, ille videlicet, qui ex vnius vnitatis, vel etiam plurium additione consurgit.

AXIOMATA, SIVE PRONVNTIATA.

I.

QVI numeri æqualium numerorum, vel eiusdem æquè multiplices sunt, inter se sunt æquales.

II.

QVORVM idem numerus æquè multiplex est, vel æquè multiplices sunt æquales, inter se æquales sunt.

III.

QVI numeri æqualium numerorum, vel eiusdem, eadem pars, vel eædem partes fuerint, æquales inter se sunt.

IIII.

QVORVM idem numerus, vel æquales, eadem pars, vel eædem partes fuerint, æquales inter ſe ſunt.

V.

VNITAS omnem numerum per vnitates, quæ in ipſo ſunt, hoc eſt, per ipſummet numerum metitur.

NAM vnitas ſumpta toties, quot ſunt in numero propoſito vnitates, ipſum cõſtituit. Quamobrem ipſum metitur per vnitates, quæ in ipſo ſunt, hoc eſt, per ipſummet numerum ex ſuis vnitatibus conſtitutum.

VI.

OMNIS numerus ſe ipſum metitur per vnitatem.

CVM quilibet numerus ſemel ſumptus ſibi ipſi ſit æqualis, manifeſtum eſt, omnem numerum ſeipſum metiri per vnitatem.

VII.

SI numerus numerum multiplicans, aliquem produxerit, metietur multiplicãs productum per multiplicatum, multiplicatus autem eundem per multiplicantẽ.

NVMERVS enim A, numerum B, multiplicans producat numerum C. Dico A, metiri ipſum C, per B; & B, eundem C, per A. Cum enim ex defin. 15. numerus B, toties compoſitus conſtituat ipſum C, quot ſunt in A, vnitates; perſpicuum eſt B, metiri ipſum C, per A, & eadem ratione A, ipſum eundem C, metiri per B, cum etiam B, ipſum A, multiplicans procreet numerum C, vt demonſtrabitur propoſ. 16. huius lib.

A .... B ...
C .....

VIII.

SI numerus numerum metiatur, & ille, per quem metitur, eũdem metietur per eas, quæ in metiente ſunt, vnitates, hoc eſt, per ipſum numerum metientem.

VT quia numerus 6. metitur numerum 18. per 3. metietur & numerus 3. eundem numerum 18. per 6. hoc eſt, per vnitates, quæ in metiente numero 6. reperiuntur. Hoc autem ita eſſe, ad hunc modum confirmabimus. Quoniam numerus 6. metitur 18. per 3. fiet numerus 18. ex multiplicatione 6. in 3. vel 3. in 6 per defin. 23. Quare per axioma præcedens numerus 3. numerum 18. metietur per 6.

IX.

SI numerus numerum metiens, multiplicet eum, per quem metitur, vel ab eo multiplicetur, illum quem metitur, producet.

METIATVR enim numerus A, numerum C, per B. Dico A, multiplicantem ipſum B, vel multiplicatum à B producere ipſum C. Nam numerus A, numerum C, metiri dicitur per eum numerum, quem multiplicans, vel à quo multiplicatus, ipſum C, producit, per defin. 23. Cum ergo A, metiri ponatur ipſum C, per B; perſpicuum eſt, numerum A, multiplicantem ipſum B, vel ab eo multiplicatum producere ipſum C.

A .... B ...
C .....

X.

NVMERVS quotcunq; numeros metiẽs, compoſitum quoq; ex ipſis metitur.

METIATVR numerus A, numeros B C, C D. Dico eundem A, metiri quoq; ex ipſis compoſitum B D. Cum enim A, metiatur ipſos B C, C D; erit tam B C, quàm C D, ipſius A, multiplex. Diuiſo ergo B C, in partes B E, E C, ipſi A, æquales, & ipſo C D, in partes C F, F G, G D, eidem A, æquales; erit numerus B D, compoſitus ex omnibus partibus B E, E C, C F, F G, G D, ipſi A, æqualibus, multiplex ipſius A. Quare A, ipſum B D, metitur. Quod eſt propoſitum.

A ....
B....E....C....F....G....D

XI.

NVMERVS quemcunq; numerum metiens, metitur quoque omnem numerum, quem ille metitur.

METIATVR numerus A, numerum B; & B, numerum C D. Dico eundem A, metiri quoq; numerum C D, quem B, metitur. Cum enim B, metiatur ipſum C D; erit C D, ipſius B, multiplex. Diuiſo ergo C D, in partes C E, E D, ipſi B, æquales; metietur A, ipſos numeros C E, E D; quandoquidem numerum B, tam numero C E, quàm E D, æqualem, metiri ponitur. Igitur idem A, per prop. 10. metietur quoq; numerum C D, ex C E, E D, compoſitum. Quod eſt propoſitum.

A ...
B .....
C .....E.....D

XII.

NVMERVS metiens totum & ablatum, metitur & reliquum.

METIATVR numerus A, totum B C, & ablatum B D. Dico eundem A, metiri quoq; reliquum D C. Cum enim A, metiatur & B C, & B D; erit tam B C, quàm B D, ipſius A, multiplex, aut certè B D, ipſi A, æqualis erit. Diuiſo ergo tam B C, quàm B D, in partes ipſi A, æquales; Erit reliquus numerus D C,

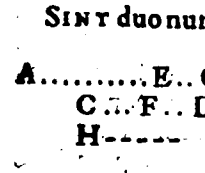
A ...
B.....D... C
B.....D..... C
B... D..... C

vel vna

vel vna pars numeri B C, ipſi A, æqualis, vel plures, atque adeò D C, æqualis erit ipſi A, vel eius multiplex. Metitur igitur A, ipſum D C. Quod eſt propoſitum.

THEOR. 1. PROPOS. 1.

Si duobus numeris inæqualib. propoſitis, detrahatur ſemper minor de maiore, alterna quadam detractione, neq; reliquus vnquam metiatur præcedentē, quoad aſſumpta ſit vnitas; qui principio propoſiti ſunt numeri, primi inter ſe erunt.



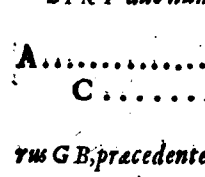
Sint duo numeri propoſiti inæquales A B, C D, quorum C D, minor ex maiore A B, quoties poteſt, detrahatur: & reliquus E B, ex C D, quoties etiam poteſt; & reliquus F D, ex E B: Et in hac alterna detractione nunquam numerus reliquus præcedentem, à quo fuit detractus, metiatur, donec ad vnitatem G B, quæ quidem præcedentem numerum F D, metitur, detractio perueniat. Dico numeros A B, C D, eſſe inter ſe primos, hoc eſt, ſolam vnitatem communi menſura eos metiri. Si enim non dicantur inter ſe primi, metietur eos aliquis numerus, qui ſit H, communi menſura, præter vnitatem. Quia ergo H, metitur numerum C D; & C D, numerum A E, (quod C D, vel pars ſit ipſius A E, vel certè ei æqualis, cum detractus ex A B, reliquerit numerum E B,) [a] metietur quoq; H, ipſum A E: At H, metitur quoq; totum A B. [b] Igitur & reliquum E B, metietur. Metitur autem E B, ipſum C F. [c] Igitur & H, ipſum C F, metietur; Ac propterea, cum & totum C D, metiatur, [d] metietur quoq; reliquum F D. Cum ergo F D, metiatur ipſum E G; [e] metietur etiam H, ipſum E G: Metiebatur autem & H, totum E B. [f] Reliquam igitur vnitatem quoque G B, numerus H, metietur, partem totum. Quod eſt abſurdum. Non igitur numerus aliquis, præter vnitatem, numeros A B, C D, metitur: Ac proinde primi inter ſe ſunt. Quamobrem, ſi duobus numeris inæqualibus propoſitis, &c. Quod erat demonſtrandum.

[a] II. pron. [b] 12. pron. [c] II. pron. [d] 12. pron. [e] II. pron. [f] 12. pron.

SCHOLIVM.

Conuertemvs cum Campano hanc propoſitionem, hoc modo.

Si duobus numeris inter ſe primis propoſitis, detrahatur ſemper minor de maiore, alterna quadam detractione; nunquam reliquus metietur præcedentem, quoad aſſumpta ſit vnitas.



Sint duo numeri inter ſe primi A B, C D, quorum minor C D, ex maiore A B, quoties poteſt, detrahatur; & reliquus E B, ex C D, quoties etiam poteſt; & reliquus F D, ex E B, relinquens G B. Dico in hac alterna detractione nunquam reliquum metiri præcedentem, quoad vnitas aſſumatur. Metiatur enim antequam ad vnitatem detractio perueniat, ſi fieri poteſt, reliquus numerus G B, præcedentem F D, ex E B, ablatum. Quia igitur numerus G B, numerū F D, metitur; & F D, ipſum E G, [a] metietur quoque G B, ipſum E G. Cum ergo G B, & ſe ipſum metiatur, [b] metietur quoque numerum E B, ex E G, G B, compoſitum: Metitur autem E B, ipſum C F. [c] Igitur & G B, eundem C F, metietur: Atque adeò cum & ipſum F D, poſitus ſit metiri; [d] metietur quoque ipſum C D, ex C F, F D, compoſitum. At verò C D, metitur ipſum A E. [e] Igitur & eundem A E, numerus G B, metietur: Ac proinde, cum & ipſum E B, metiatur, vt oſtenſum eſt; [f] metietur & ipſum A B, ex vtroque A E, E B, compoſitum. Quare cum numerus G E, metiatur numeros A B, C D, ipſi erunt inter ſe compoſiti. Quod eſt abſurdum, cum ponantur inter ſe primi. Nunquam ergo numerus aliquis reliquus præcedentem metietur, donec aſſumpta ſit vnitas. Quod eſt propoſitum.

a II. pron. b 10. pron. c II. pron. d 10. pron. e II. pron. f 10. pron.

Eodem modo & hoc verum eſt.

Si propoſitis duobus numeris inter ſe compoſitis, detrahatur ſemper minor de maiore, alterna quadam detractione; detractio ad vnitatem vſque non perueniet, ſed ad numerum, qui præcedentem detractum metiatur.

Nam ſi detractio huiuſmodi ad vnitatem vſque perueniret, eſſent propoſiti numeri inter ſe primi, [g] *vt Euclides demonſtrauit. Quod eſt abſurdum, cum ponantur inter ſe compoſiti.*

g 1. ſeptimi

Ex his facilè dignoſcemus, an duo quicunque numeri propoſiti ſint inter ſe primi, nec ne. Nam detracto ſemper minore de maiore, alterna quadam detractione; ſi nunquam reliquus præcedentem metiatur, quoad aſſumpta ſit vnitas; ipſi erunt inter ſe primi, [h] *vt Euclides demonſtrauit: Si verò reliquus aliquis numerus præcedentem metiatur, ipſi erunt inter ſe compoſiti, cum ille idem reliquus numerus vtrumque numerum propoſitum metiatur, vt perſpicuum eſt ex demonſtratione ſuperiori huius ſcholij. Ex eo enim, quòd reliquus numerus G B, metiri dicebatur præcedentem numerum F D, oſtenſum fuit, eundem reliquum G B, vtrumq; ipſum A B, & C D, metiri.*

h 1. ſeptimi

2. PROBL. I. PROPOS. 2.

DVOBVS numeris datis non primis inter ſe, maximam eorum communem menſuram reperire.

DENTVR duo numeri AB, CD, non primi inter ſe, quorum maximam communem menſuram oporteat reperire. Detrahatur minor CD, ex maiore AB, quoties poteſt, relinquatq; EB, numerum, qui ex CD, ſubtractus relinquat FD, & ſic deinceps ſemper minor de maiore ſubtrahatur alterna quadam detractione; in qua quidem peruenietur ad numerum, qui præcedentem metiatur. Nam ſi ad vnitatem deueniretur, [a] numeri AB, CD, eſſent inter ſe primi; quod eſt contra hypotheſim. Peruentum ergo iam ſit ad reliquum numerum FD, qui detractus ex EB, nihil relinquat, ſed eum metiatur. Dico FD, eſſe maximam menſuram communem numerorum AB, CD. Quod enim vtrumque metiatur, ita oſtendemus. Quia FD, metitur ipſum EB; & EB, ipſum CF, [b] metietur quoq; FD, ipſum CF; atque adeò cum & ſeipſum metiatur, [c] metietur & totum CD, ex CF, FD, compoſitum. At CD, ipſum AE, metitur. [d] Igitur & FD, eundem AE, metietur. Ac propterea cum FD, metiatur quoque ipſum EB; [e] metietur etiam totum AB, ex vtroque AE, EB, compoſitum. Metitur igitur FD, vtrumque numerum AB, CD.

A.....E..&..B
C.....F..D
G-----

a 1. ſeptimi. b 11. pron. c 10. pron. d 11. pron. e 10. pron.

QVOD autem FD, ſit maxima menſura communis illorum, ita probabimus. Si enim fieri poteſt, detur maior menſura communis G, quàm FD. Quoniam ergo G, metitur vtrumq; AB, CD; Et CD, metitur ipſum AE, [f] metietur quoq; G, ipſum AE. [g] Igitur & reſiduum EB: At verò EB, metitur CF. [h] Metietur ergo & G, eundem CF. [i] Igitur & reſiduum FD; maior minorem. Quod eſt abſurdum. Non ergo maior numerus, quàm FD, numeros AB, CD, metitur; Ac proinde FD, maxima eſt menſura numerorum, AB, CD.

f 11. pron. g 12. pron. h 11. pron. i 12. pron.

A.....B
C.....D

QVOD ſi minor numerus CD, metiatur maiorem AB, ita vt detractus ex AB, nihil relinquat, erit ipſe maxima amborum menſura communis, cum & ſe ipſum metiatur, vt in hac figura apparet. Duobus igitur numeris datis non primis inter ſe, &c. Quod erat faciendum.

COROLLARIVM.

Ex hoc manifeſtum eſt, numerum metientem duos numeros, metiri quoque maximam eorundem communem menſuram.

Hoc elicitur ex ea parte demonſtrationis, qua oſtenſum fuit FD, eſſe maximam menſuram ipſorum AB, CD. Demonſtratum enim eſt ibi, numerum G, ſi metiatur numeros AB, CD, metiri quoque numerum FD, maximam eorum menſuram communem. Eademq; ratio eſt de cæteris.

SCHOLIVM.

A.....
B.....
C.....

Ex iis quæ dicta ſunt, facilè cum Campano experiemur, an quotlibet numeri propoſiti ſint inter ſe primi, nec ne. Sint enim tres numeri A, B, C. Primum ergo experior, per ea, quæ ad propoſ. 1. docuimus, an duo A, & B, ſint inter ſe primi: Qui ſi fuerint inter ſe primi, non erunt tres numeri A, B, C, inter ſe compoſiti, quod nullam poſſint habere menſuram communem, præter vnitatem, propter numeros A, & B, inter ſe primos.

a 2. ſeptimi

A.....
B.....
C.....
D...

SI verò A, & B, fuerint inter ſe compoſiti, [a] ſit eorum maxima menſura communis inuenta D; quæ ſi metiatur & numerum C, perſpicuum eſt, tres numeros A, B, C, eſſe inter ſe compoſitos. cum habeant numerum D, communem menſuram.

QVOD ſi D, maxima menſura numerorum A, & B, non metiatur numerum C; erunt C, & D, vel inter ſe primi, vel non. Si ſint inter ſe primi, non erunt tres numeri A, B, C, inter ſe compoſiti, ſed inter ſe primi. Si enim dicantur eſſe inter ſe compoſiti, ita vt habeant numerum communem menſuram, metietur eiuſmodi communis menſura numerum D, maximam menſuram numerorum A, & B, per corollarium huius propoſ. Quare cum eadem illa menſura metiatur quoque numerum C, non erunt inter ſe primi numeri C, & D. Quod eſt contra hypotheſim. Si autem C, & D, non ſint inter ſe primi, erunt tres numeri A, B, C, inter ſe cõpoſiti. [b] Inuenta enim numerorum C, & D, maxima menſura communi E; cum E, metiatur ipſum D; D, autem ipſos A, & B; [c] metietur quoque E, eoſdem A, & B. Quare cum idem E, metiatur quoque ipſum C; metietur E, tres numeros A, B, C; Ac propterea ipſi inter ſe erunt compoſiti. Quod eſt propoſitum.

A.....
B.....
C.....
D....E..

b 2. ſeptimi c 11. pron.

SIMILI arte explorabimus, an plures numeri, quàm tres, ſint inter ſe primi, an potius inter ſe cõpoſiti.

Nam ſi

Nam ſi dati numeri fuerint quatuor, experiendum id erit primùm in tribus; ſi quinque, in quatuor, &c. Reliqua autem perficienda, vt de tribus numeris datis diximus.

PROBL. 2. PROPOS. 3.

TRIBVS numeris datis non primis inter ſe, maximam eorum communem menſuram reperire.

DENTVR tres numeri A,B,C, non primi inter ſe, quorum maximam menſuram communem oporteat reperire. Sit D, maxima menſura numerorum A,& B; Si ergo D, metiatur quoq; ipſum C, perſpicuum eſt D, eſſe maximam menſuram numerorum datorum A,B,C. Nam ſi maior numerus dicatur metiri numeros A,B,C, metietur idem, per corollarium propoſ. 2. huius lib. numerum D, maximam menſuram numerorum A,& B, maior numerus minorem. Quod eſt abſurdum. Si verò D, non metiatur ipſum C; erunt ſaltem D, & C, inter ſe compoſiti. Cum enim ſint A,B,C, inter ſe compoſiti, metietur quæcunque illorum menſura communis, per coroll. propoſ. 2. huius lib. numerum D, maximam menſurã numerorum A,& B. Cum ergo eadem illa menſura metiatur etiam ipſum C; erunt D,& C, inter ſe compoſiti. [a] Sit eorum maxima menſura E. Dico E, eſſe maximam menſuram communem datorum numerorum A,B, C. Quòd enim ſit eorum menſura communis, hac ratione demonſtrabitur. Quoniam E, metitur, numeros C,& D; at D, ipſos A,& B; [b] metietur quoque E, ipſos A,& B; Ac proinde tres numeros A,B,C, metietur.

A.....
B.....D...
C.....E..F----

[a] 2. *ſeptimi*

[b] 11. *pron.*

QVOD autem E, ſit maxima eorum communis menſura, perſpicuum eſt. Si enim fieri poteſt, ſit F, maior quàm E, eorum menſura communis. Quia igitur F, metitur numeros A, & B; metietur quoque, per coroll. propoſ. 2. huius lib. numerum D, maximam eorum menſuram communem. Metitur autem & C. Igitur F, metiens D,& C, metietur quoque E, eorum menſuram maximam, ex eodem coroll. numerus maior minorem, quod eſt abſurdum. Non ergo maior numerus, quàm E, numeros A, B, C, metitur; Atque adeò E, maxima menſura eſt ipſorum. Quamobrem tribus numeris datis non primis inter ſe, &c. Quod faciendum erat.

COROLLARIVM.

HINC perſpicuum eſt, numerum metientem tres numeros, metiri quoque maximam eorum communem menſuram.

Hoc etiam colligitur ex vltima parte demonſtrationis. Oſtenſum enim eſt ibi, numerum F, ſi metiatur numeros A, B, C, metiri quoque numerum E, maximam illorum menſuram communem: Eademq; in cæteris eſt ratio.

PARI ratione, pluribus numeris datis, quàm tribus, non primis inter ſe, maxima eorum communis menſura inuenietur; locumq; habebit hoc idem corollarium. Nam ſi dati numeri fuerint quatuor, inuenienda erit primùm maxima menſura communis trium numerorum: ſi quinq;, quatuor numerorum accipienda erit primùm maxima communis menſura, &c. Reliqua verò omnia peragenda, vt de tribus numeris dictũ eſt.

THEOR. 2. PROPOS. 4.

OMNIS numerus, omnis numeri, minor maioris, aut pars eſt, aut partes.

A.....
B.....

SINT duo numeri A, minor, & B, maior. Dico A, eſſe aut partem, aut partes ipſius B. Sint enim primùm A,& B, inter ſe primi. Quia igitur quælibet vnitas numeri A, pars eſt numeri B; perſpicuum eſt, numerum A, eſſe partes numeri B, tot nimirum, quot ſunt in A, vnitates.

A.....
B.....

SINT deinde A, & B, non primi inter ſe, ſed inter ſe cõpoſiti, & metiatur A, ipſum B. Quo poſito, manifeſtũ eſt A, partẽ eſſe numeri B, ex defin. 3. huius lib.

SED iam A, non metiatur ipſum B, [c] inuenta autem maxima eorum menſura communis ſit C; diuidaturq; numerus A, in partes A D, D E, E F; quarum ſingulæ ipſi C, ſint æquales. [d] Quia igitur C, pars eſt ipſius B, cum ipſum metiatur; erit quoque A D, pars eiuſdem B: ſimiliter & D E, & E F; Ac propterea totus numerus A, eſt partes numeri B, tot videlicet, quoties C, in A F, continetur. Omnis igitur numerus, omnis numeri, minor maioris, aut pars eſt, aut partes. Quod demonſtrandum erat.

A..D..E..F
B.....
C..

[c] 2. *ſeptimi*

[d] 3. *defin.*

THEOR. 3. PROPOS. 5.

SI numerus numeri pars fuerit, & alter alterius eadem pars: Et ſimul vterque vtriuſque ſimul eadem pars erit, quæ vnus vnius.

SIT numerus A, eadem pars numeri B C, quæ eſt numerus D, numeri E F. Dico vtrumque nu-

merum A,& D ſimul vtriuſq; numeri B C,& E F,ſimul eandem eſſe partem,quæ eſt vel A,ipſius B C,vel D,ipſius E F. Diuiſis enim numeris B C, E F, in partes B G, G C; E H, H F, ipſis A, & D, æquales; erit multitudo partium numeri B C,æqualis multitudini partium numeri E F,propterea quòd eadem pars eſt A,ipſius B C,quæ D,ipſius E F. Quia igitur A, & B G, æquales ſunt; ſi illis addantur æquales D,& E H; erunt A,& D,ſimul æquales ipſis B G,& E H,ſimul. Eodem argumento erunt A, & D, ſimul ipſis G C,& H F,ſimul æquales: Et ſic deinceps,ſi plures partes fuerint in B C,E F; aggregatum numerorum A,& D,tot aggregatis partium numerorum B C, & E F, æquale erit, quoties A,in B C,vel D,in E F,continetur: Ac propterea eadem pars erit vterque A,& D,ſimul vtriuſque B C,& E F,ſimul,quæ eſt A,ipſius B C,vel D,ipſius E F. Si numerus ergo numeri pars fuerit; &c. Quod erat oſtendendum.

A..... | D....
B..... G..... C | E.... H.... F

SCHOLIVM.

A, $\frac{2}{9}$ D, $\frac{3}{7}$
B, $\frac{2}{9}$ G, $\frac{2}{9}$ C E, $\frac{3}{7}$ H, $\frac{3}{7}$ F

Idem hoc verum eſt in numeris fractis; eademq; prorſus demonſtratio adhibebitur: vt in hoc exemplo apparet,vbi numerus A,numeri B C, & numerus D, numeri E F, eadem pars eſt; ac proinde vterq; ſimul A,D,vtriuſque B C,E F, ſimul eadem pars oſtendetur,quæ A,ipſius B C: ſi nimirum B C, E F, diuidantur in partes B G,G C; E H,H F, ipſis A,D,æquales,&c.

Quod ſi quando contingat,numerum fractum diuidi non poſſe in partes æquales propoſitas, propterea quòd numerator in eas partes ſecari nequeat, multiplicandus erit tam numerator, quàm denominator per numerum partium. Procreabitur enim hac ratione alia fractio priori æquiualens, & cuius numerator in propoſitas partes diuidi poteſt. Vt ſi fractio $\frac{5}{9}$. ſecanda ſit in duas partes æquales, ducendus erit vterque eius numerus in 2. ſi in tres,in 3. ſi in quatuor,in 4. &c. vt gignantur fractiones $\frac{10}{18}$. $\frac{15}{27}$. $\frac{20}{36}$. quarum prima ſecabitur in has duas partes æquales $\frac{5}{18}$. $\frac{5}{18}$. ſecunda in has tres $\frac{5}{27}$. $\frac{5}{27}$. $\frac{5}{27}$. tertia verò in has quatuor, $\frac{5}{36}$. $\frac{5}{36}$. $\frac{5}{36}$. $\frac{5}{36}$.

Rvrsvs quando adſunt integra, reuocanda prius erunt vnà cum fractione ad vnam fractionem, deinde eodem modo tam numerator,quam denominator multiplicandus per numerum partium,&c. Vt ſi numerus $4\frac{3}{7}$. ſecandus ſit in tres partes,reducemus eum prius ad hanc vnicam fractionem, $\frac{31}{7}$. deinde vtrumque eius numerum per 3. multiplicabimus,vt fiat fractio $\frac{93}{21}$. cuius tres partes æquales ſunt $\frac{31}{21}$. $\frac{31}{21}$. $\frac{31}{21}$. Atque hæc in ſequentibus quoq; propoſitionibus obſeruanda ſunt,quando fractionibus accommodantur: Et ſemper nomine fractionum intelligendi quoq; ſunt numeri integri cum fractis: Item quando aliqui fracti ſunt,& alij integri.

Eodem modo demonſtrabimus & hoc, quod ſequitur.

Si vnitas numeri pars fuerit,& altera vnitas,vel numerus alterius numeri eadem pars; Et ſimul vtraque vnitas,vel vnitas & numerus ſimul, vtriuſque numeri ſimul eadem pars erit,quæ vnitas numeri.

Hoc autem perſpicuè in his appoſitis exemplis apparet. Eadem enim prorſus eſt demonſtratio.

A. | D.
B. G. C | E. H. F

A. | D...
B. G. C | E... H... F

Possvmvs etiam hanc propoſitionem ad quotcunque numeros transferre, hoc modo.

Si ſint quotcunque numeri quotcunque numerorum æqualium numero,ſinguli ſingulorum,eadem pars; Et omnes omnium ſimul eadem pars erunt, quæ vnus vnius.

Sint numeri A,B,C,numerorum D E, F G, H I, ſinguli ſingulorum eadem pars. Dico omnes numeros A,B,C,ſimul omnium numerorum D E,F G,H I, ſimul eandem eſſe partem,quæ eſt A,ipſius D E. Diuiſis enim numeris D E,F G,H I, in partes ipſis A, B, C, æquales; erit multitudo partium numeri D E, æqualis multitudini partium tam numeri F G, quàm numeri H I. Quia igitur A,& D K, æquales ſunt; ſi illis addantur æquales B,& F L, erunt A,B, ſimul æquales ipſis D K, F L, ſimul: quibus ſi rurſum addãtur æquales C, & H M; erunt quoq; A,B,C, ſimul æquales ipſis D K, F L, H M, ſimul. Simili ratione erunt A,B,C, ſimul æquales ipſis K E, L G, M I, ſimul; & ſic deinceps, ſi plures partes fuerint in D E,F G, H I, aggregatum numerorum A, B, C, tot aggregatis partium numerorum D E, F G, H I, æquale erit, quoties A, in D E, continetur. Quamobrem eadem pars erunt A,B,C, ſimul ipſorum D E, F G, H I, ſimul, quæ A, ipſius D E.

A.... | F... L... G | H.. M.. I
D.... K.... E | B... | C..

Idem ſequitur, ſi loco vnius numerorum A,B,C, ſumatur vnitas, vel loco plurium, vel etiam omnium, plures vnitates, vt de duobus dictum eſt. Id quod ſequentes figuræ indicant.

A. | B.. | C...
D. K. E. | F.. L.. G | H... M... I

A. | B. | C.
D. K. E | F. L. G | H. M. I

HAEC

Hæc etiam fractis numeris conueniunt. Nam si quotcunque fracti numeri, quotcunque fractorum numerorum æqualium numero, singuli singulorum, eadem pars fuerint; Et omnes omnium simul eadem pars erunt, quæ vnus vnius. Quod eodem modo demonstrabitur: etiamsi aliqui numerorum sint iutegri, vel vnitates, vt hic videre licet.

A, 1. | B, $\frac{1}{2}$. | C, $\frac{3}{4}$.
D, 1 K, 1 E | F, $\frac{1}{2}$ L, $\frac{1}{2}$ G | H, $\frac{3}{4}$ M, $\frac{3}{4}$ I

Theoremati 1 quoque primo quinti lib. simile proponemus, in hunc modum.

Si sint quotcunque numeri quotcunque numerorum æqualium numero, singuli singulorum, æquè multiplices: quàm multiplex est vnius vnus numerus, tam multiplices erunt & omnes omnium.

Demonstratio eadem hic est, quæ in lib. 5. Quod tamen aliter ita etiam demonstrabimus. Sint A, B, C, numeri numerorum D, E, F, æquè multiplices, singuli singulorum.

A..... B..... C....
D .... E... F..

Dico & omnes A, B, C, simul omnium D, E, F, simul tam multiplices esse, quàm est A, multiplex ipsius D. Cum enim tam sit multiplex A, ipsius D, quàm est B, ipsius E & C, ipsius F; erit è contrario D, eadem pars ipsius A, quæ E, ipsius B, & F, ipsius C. Per ea igitur, quæ nuper à nobis demonstrata sunt, erunt D, E, F, simul eadem pars ipsorum A, B, C, simul, quæ D, ipsius A; Ac propterea è contrario tam multiplices erunt omnes A, B, C, simul, omnium D, E, F, simul, quàm est multiplex A, ipsius D.

Si numeri A, B, C, fracti sint, & ipsorum D, E, F, fractorum æquemultiplices; quàm multiplex est vnius vnus, tam multiplices erunt & omnes omnium. Vt ex demonstratione liquet.

Quod si loco vnius numerorum D, E, F, assumatur vnitas, vel etiam loco plurium, vel omnium, plures vnitates, theorema eodem modo demonstrabitur, vt ex sequentibus figuris apparet.

A.. B.... C..... | A.. B.. C..
D. E.. F... | D. E. F.

THEOR. 4. PROPOS. 6.

6.

Si numerus numeri partes fuerit, & alter alterius eædem partes: Et simul vterque vtriusque simul eædem partes erit, quæ vnus vnius.

Sit numerus A B, eædem partes numeri C, quæ numerus D E, numeri F. Dico vtrumque numerum A B, & D E, simul vtriusque numeri C, & F, simul easdem partes esse, quæ est A B, ipsius C, vel D E, ipsius F.

A.... G... B | D.... H.... E
C..... | F.....

Diuisis enim numeris A B, D E, in partes A G, G B; D H, H E, numerorum C, & F: erit multitudo partium in numero A B, æqualis multitudini partium in numero D E; propterea quod eædem partes est numerus A B, numeri C, quæ numerus D E, numeri F. Quia igitur, quæ pars est A G, numeri C, eadem est D H, numeri F; [a] erit vterque A G, D H, simul eadem pars vtriusque C, F, simul, quæ A G, ipsius C, vel D H, ipsius F. Eadem ratione erit vterque G B, H E, simul eadem pars vtriusque C, F, simul, quæ G B, ipsius C, vel H E, ipsius F: Et sic deinceps, si plures partes fuerint in A B, D E, erunt tot aggregata partium in numeris A B, D E, contenta, quorum quodlibet eadem pars est numerorum C, F, simul, quæ pars est A G, ipsius C; quot partes eędem est numerus A B, ipsius C, vel D E, ipsius F: Ac proinde eædem partes erit vterque numerus A B, D E, simul, vtriusque numeri C, F, simul, quæ A B, ipsius C, vel D E, ipsius F. Si numerus ergo numeri partes fuerit, &c. Quod erat demonstrandum. [a] 5. septimi

SCHOLIVM.

Eadem hæc propositio locum habet in numeris fractis, vnà cum demonstratione: vt hoc exemplum demonstrat.

A, $\frac{1}{9}$ G, $\frac{1}{9}$ B D, $\frac{1}{7}$ H, $\frac{1}{7}$ E
C, $\frac{3}{9}$ F, $\frac{6}{7}$

Sed & hanc propositionem ad quotcunque numeros siue integros, siue fractos extendentes, hoc modo amplificabimus.

Si sint quotcunque numeri quotcuntquè numerorum, singuli singulorum, eędem partes; Et omnes omnium simul eædem partes erunt, quæ vnus vnius.

Eadem enim est demonstratio, si modò pro quinta propos. assumatur id, quod secundo loco demonstrauimus in scholio precedenti; vt hic perspicuum est.

A..K..B | C...L...D | E....M.... F
G..... | H..... | I.....

7. THEOR. 5. PROPOS. 7.

SI numerus numeri pars fuerit, qualis ablatus ablati: Et reliquus reliqui eadem pars erit, qualis totus totius.

SIT numerus AB, eadem pars numeri CD, quæ ablatus AE, ablati CF. Dico reliquum EB, eandem esse partem reliqui FD, quæ est totus AB, totius CD. Ponatur enim EB, numeri GC, eadem pars, quæ est AE, ipsius CF, vel totus AB, totius CD. Quia igitur AE, eadem est pars ipsius CF, quæ EB, ipsius GC; [a] erit vterque AE, EB, simul eadem pars vtriusque simul CF, GC, quæ AE, ipsius CF; hoc est, quæ totus AB, totius CD. Ac propterea cum AB, eadem sit pars vtriusque numeri FG, CD; erunt ipsi numeri FG, CD, inter se æquales. Dempto ergo communi CF, æquales remanebunt GC, FD. Eadem igitur pars erit EB, ipsius FD, quæ ipsius GC, hoc est, quæ totus AB, totius CD. Si igitur numerus numeri pars fuerit, &c. Quod erat ostendendum.

A....E..B
G.... C..... F....D

[a] 5. *septimi.*

SCHOLIVM.

A, 3. E, 2. B
G, 4. C, 6. F, 4. D

LOCVM etiam habet hæc propositio, vnà cum eius demonstratione in numeris fractis, vt hic apparet.

IDEM hoc theorema verum est, tam in numeris integris, quàm in fractis, etiamsi ablata sit vnitas AE, vel reliqua fuerit vnitas EB; vel denique in integris et ablata, & reliqua sit vnitas, vt ex his exemplis apparet.

A.E...B	A...E.B	A.E.B
G.....C..F.....D	G..C.....F..D	G..C..F..D

CAETERVM & ex his theoremati quinto lib. 5. simile hoc demonstrabimus, tam in numeris integris, quàm in fractis.

SI numerus numeri æquè fuerit multiplex, atque ablatus ablati: Etiam reliquus reliqui ita multiplex erit, vt totus totius.

QVOD quidem non aliter ostendemus, ac theorema illud quinti lib. Verùm idem ex demonstratis ita confirmabimus. Sit totus AB, totius CD, æquè multiplex, atque ablatus AE, ablati CF. Dico & reliquum EB, reliqui FD, ita esse multiplicem, vt est totus AB, totius CD. Cum enim AE, ipsius CD, sit æquè multiplex, atque AE, ipsius CF, erit è contrario totus CD, totius AB, eadem pars, quæ ablatus CF, ablati AE. [a] Quare & reliquus FD, reliqui EB, eadem pars erit, quæ totus CD, totius AB; Ac proinde è contrario EB, ita multiplex erit ipsius FD, vt AB, ipsius CD, est multiplex.

A...E.....B
C.F..D

[a] 7. *septimi*

QVOD si ex CD, ablata fuerit vnitas CF; vel reliqua sit vnitas FD: vel denique in integris & ablata sit vnitas CF, & alia reliqua FD; idem demonstrabitur, vt hæc exempla commonstrant.

A...E.....B	A....E..B	A....E....B
C.F..D	C..F.D	C.F.D

8. THEOR. 6. PROPOS. 8.

SI numerus numeri partes fuerit, quales ablatus ablati: Et reliquus reliqui eædem partes erit, quales totus totius.

SIT numerus AB, partes eædem numeri CD, quæ ablatus AE, ablati CF. Dico reliquum EB, easdem esse partes reliqui FD, quæ totus AB, est totius CD. Sumpto enim numero GH, æquali ipsi AB; erit GH, eædem partes ipsius CD, quæ AB, eiusdem CD; hoc est, quæ AE, ipsius CF. Diuiso ergo GH, in partes GI, IH, numeri CD; & AE, in partes AK, KE, numeri CF; erit multitudo partium GI, IH, multitudini partium AK, KE, æqualis, eademque pars tam GI, quàm IH, ipsius CD, quæ tam AK, quàm KE, ipsius CF. Cum ergo CD, numerus maior sit numero CF, erit & tam GI, quàm IH, pars ipsius CD, maior tam numero AK, quàm KE, parte ipsius CF. Sumptis igitur numeris GL, IM, æqualibus ipsis AK, KE; erit GL, eadem pars ipsius CF, quæ AK, eiusdem CF, hoc est, quæ GI, ipsius CD; Ac proinde cum totus GI, totius CD, sit eadem pars, quæ ablatus GL, ablati CF, [a] erit & reliquus LI, reliqui FD, eadem pars, quæ totus GI, totius CD. Eodemque argumento ostendemus MH, eandem esse partem ipsius FD, quæ est totus GI, vel IH, totius CD. Quoniam ergo tam GI, quàm IH, eadem est pars ipsius CD, quæ est tam LI, quàm MH, ipsius FD; erit vterque GI, IH, simul eædem partes ipsius CD, quæ vterque LI, MH, ipsius FD. Est autem GH, eædem partes ipsius CD, quæ AB, eiusdem CD, propter æqualitatem numerorum AB, GH. Igitur & vterq; LI, MH, simul eædem partes erit ipsius FD, quæ AB, ipsius CD. Quia verò si ab æqualibus AB, GH, æquales auferantur AK, KE, & GL, IM, reliqui EB, & LI, MH, simul æquales sunt: Erit quoq; EB, reliquus eædem partes reliqui FD, quæ AB, totus totius CD, nimi-

A....K..... E....B
C..... F.....D
G.....L... I..... M..H

[a] 7. *septimi.*

CD, nimirum eædem, quæ vterque LI, MH, simul erat eiusdem FD. Si numerus ergo numeri partes fuerit, &c. Quod erat ostendendum.

SCHOLIVM.

A, $\frac{2}{19}$. K, $\frac{2}{19}$. E, $\frac{6}{19}$. B
C, $\frac{6}{19}$. F, $\frac{9}{19}$. D
G, $\frac{2}{19}$. L, $\frac{3}{19}$. I, $\frac{2}{19}$. M, $\frac{3}{19}$. H

In numeris fractis eadem hæc propositio eodem prorsus modo demonstrabitur, vt hic manifestum est.

Non demonstrauit Euclides hanc propositionẽ, quemadmodum præcedẽtem, quod nonnulli interpretes faciunt; quia non constabat hic, reliquum numerum EB, alicuius numeri easdem esse partes, quæ est numerus AE, numeri CF: ibi verò perspicuum erat, reliquum EB, alicuius numeri eandem esse partem, quæ est AE, ipsius CF. Licet enim ipsius EB, duplum assumere, triplum, quadruplum, &c. donec EB, sit ita submultiplex numeri assumpti GC, vt AE, est submultiplex ipsius CF.

THEOR. 7. PROPOS. 9.

9.

Si numerus numeri pars fuerit, & alter alterius eadem pars: Et vicissim quæ pars est, aut partes primus tertij, eadem pars erit, vel eædem partes, & secundus quarti.

Sit numerus A, numeri BC, eadem pars, quæ numerus D, numeri EF, sintque A, BC, minores ipsis D, EF, singuli singulis. De his enim propositio intelligenda est. Dico & vicissim eandem partem esse, aut easdem partes A, ipsius D, qualis est, aut quales BC, ipsius EF. Diuisis enim numeris BC, EF, in partes BG, GC, & EH, HF, ipsis A, & D, æquales; erit multitudo partium numeri BC, æqualis multitudini partium numeri EF. Quia verò BG, GC, inter se sunt æquales, & minores quàm EH, HF, quæ inter se etiam æquales sunt, quòd & totus BC, toto EF, minor ponatur; Erit BG, ipsius EH, eadem pars, aut partes, quæ GC, ipsius HF; [a] ac propterea & vterque BG, GC, simul, nimirum BC, secundus vtriusque EH, HF, simul, nimirum EF, quarti, eadem pars, vel partes, quæ BG, ipsius EH: hoc est, quæ A, primus ipsius D, tertij. Si numerus igitur numeri pars fuerit, &c. Quod demonstrandum erat.

A....
B.... G.... C
D.....
E..... H..... F

[a] 5. vel 6. septimi.

SCHOLIVM.

A, $\frac{3}{11}$.
B, $\frac{3}{11}$. G, $\frac{3}{11}$. C
D, $\frac{14}{22}$.
E, $\frac{14}{22}$. H, $\frac{14}{24}$. F

In numeris fractis propositio hæc, vnà cum eius demonstratione locum etiam habet, vt hic perspicuum est.

Quod si loco primi numeri vnitas accipiatur, quæ numeri alicuius pars sit, quæ alter numerus alterius: Erit vicissim vnitas tertij numeri eadem pars, quæ secundus numerus quarti; id quod eodem argumẽto confirmabitur, si loco partium assumamus partem in demonstratione, vt ex hoc exemplo apparet.

A.
B. G. C
D.....
E..... H..... F

THEOR. 8. PROPOS. 10.

10.

Si numerus numeri partes fuerit, & alter alterius eædem partes: Et vicissim, quæ partes est primus tertij, aut pars, eædem partes erit & secundus quarti, aut pars.

Sit numerus AB, eædem partes numeri C, quæ numerus DE, numeri F, sintque AB, C, ipsis DE, F, minores, singuli singulis. De his enim etiam intelligenda est hæc propositio, sicut & antecedens. Dico & vicissim numerum AB, easdem partes esse, aut partem numeri DE, quæ numerus C, est numeri F. Diuisis enim numeris AB, DE, in partes AG, GB, & DH, HE, numerorum C, & F; erit multitudo partium in AB, æqualis multitudini partium in DE, & tam AG, quàm GB, eadem pars ipsius C, quæ tam DH, quàm HE, ipsius F. [b] Vicissim ergo eadem pars erit, aut partes AG, ipsius DH, & GB, ipsius HE, quæ C, ipsius F: Ac propterea eadem pars erit, vel partes AG, ipsius DH, quæ GB, ipsius HE. [c] Igitur & vterque AG, GB, simul, nimirum primus AB, eadem pars erit, aut partes vtriusque DH, HE, simul, nimirum DE, tertij, quæ AG, ipsius DH; hoc est, quæ C, secundus quarti F. Si numerus ergo numeri partes fuerit, & alter alterius, &c. Quod demonstrandum erat.

A, $\frac{2}{15}$. G, $\frac{2}{15}$. B
C, $\frac{6}{15}$.
D, $\frac{3}{10}$. H, $\frac{3}{10}$. E
F, $\frac{9}{10}$.

[b] 9. septimi.

[c] 5. vel 6. septimi.

SCHOLIVM.

Numeris fractis conuenit etiam huius propositionis demonstratio, vt in hoc exemplo apparet.

12. # THEOR. 9. PROPOS. 11.

SI fuerit vt totus ad totum, ita ablatus ad ablatum: Et reliquus ad reliquum erit, vt totus ad totum.

SIT vt totus numerus AB, ad totum CD, ita ablatus AE, ad ablatum CF. Dico & reliquum EB, ad reliquum FD, esse, vt est totus AB, ad totum CD. Cùm enim sit, vt AB, ad CD, ita AE, ad CF; [a] erit AB, ipsius CD, & AE, ipsius CF, vel æquè multiplex, vel eadem pars, vel eædem partes: vel certè AB, ipsum CD, & AE, ipsum CF, æqualiter continebit, eandemque insuper illius partem, vel easdem partes. Sit primùm AB, ipsius CD, & AE, ipsius CF, æquè multiplex. Quo posito, erit è contrario CD, totus totius AB, eadem pars, quæ ablatus CF, ablati AE, propter AB, AE, æquè multiplices ipsorũ CD, CF. [b] Igitur & reliquus FD, reliqui EB, eadem pars erit, quæ totus CD, totius AB; Ac propterea è contrario AB, ipsius CD, & EB, ipsius FD, æquè multiplex erit. [c] Quare erit, vt totus AB, ad totum CD, ita EB, reliquus ad reliquum FD.

[a] 20. defin.

A ..... E ..... B
C ..... F ... D

[b] 7. septimi.

[c] 20. defin.

SIT deinde AB, ipsius CD, & AE, ipsius CF, eadem pars, vel eædem partes. Quo posito, [d] erit & reliquus EB, reliqui FD, eadem pars, vel partes, quæ totus AB, totius CD; [e] Ac proinde, erit vt totus AB, ad totum CD, ita EB, reliquus ad reliquum FD.

[d] 7. vel 8. septimi.

[e] 20. defin.

A .... E .. B
C ..... F .... D

A .... E .. B
C ..... F ... D

CONTINEAT tertiò AB, ipsum CD, & AE, ipsum CF, æqualiter, eandemque insuper illius partem, vel partes. Quo posito, erit è contrario CD, totus totius AB, eædem partes, quæ ablatus CF, ablati AE, vt mox demonstrabimus. [f] Reliquus igitur FD, reliqui EB, eædem quoque partes erit, quæ totus CD, totius AB: Ac propterea, è contrario AB, ipsum CD, & EB, ipsum FD, æqualiter continebit, eandemque insuper illius partem, vel partes, vt mox ostendemus. [g] Quare erit, vt totus AB, ad totum CD, ita EB, reliquus ad reliquum FD.

[f] 8. septimi.

[g] 20. defin.

A ..... E ... B | A ..... E ..... B
C .... F .. D | C ..... F ..... D

QVOD si AB, totus toti CD, æqualis fuerit, & ablatus AE, ablato CF; perspicuum est reliquum EB, quoque esse æqualem reliquo FD. Nam si ab æqualibus æqualia demantur; quæ remanent, sunt æqualia. Itaque si fuerit, vt totus ad totũ, ita ablatus ad ablatũ, &c. Quod erat demõstrandũ.

A ..... E ... B
C ..... F ... D

SCHOLIVM.

EODEM modo demonstrabitur hoc in fractis numeris. Id quod liquidò constat in his exemplis, quæ exemplis tertij casus demonstrationis respondent.

A, $\frac{6}{9}$. E $\frac{2}{10}$. B | A, $\frac{14}{21}$. E $\frac{28}{29}$. B
C, $\frac{4}{9}$. F $\frac{2}{10}$. D | C, $\frac{6}{21}$. F $\frac{10}{29}$. D

LEMMA.

QVOD autem, si AB, ipsum CD, & AE, ipsum CF, æqualiter contineat, eandemq; insuper partem illius vel partes; è contrario CD, ipsius AB, & CF, ipsius AE, sit eadem pars: Et si CD, ipsius AB, & CF, ipsius AE, sit eadem pars; è contrario AB, ipsum CD, & AE, ipsum CF, æqualiter contineat, eandemq; illius partem vel partes, tam in numeris fractis, quàm in integris; hoc modo demonstrabimus. Contineat primùm AB, ipsum CD, & AE, ipsum CF, æqualiter, nimirum semel, vel bis, vel ter, &c. eandemq; insuper partem; GB, quidem ipsius CD, & HE, ipsius CF; ita vt numeri reliqui AG, AH, sint vel æquales ipsis CD, CF, vel eorum æquè multiplices. Diuisis igitur numeris CD, CF, in partes CI, IK, KD; & CL, LM, MF, ipsis GB, HE, æquales; erit multitudo partium numeri CD, multitudini partium numeri CF, æqualis, quòd GB, ipsius CD, sit eadem pars, quæ HE, ipsius CF. Similiter diuisis numeris AG, AH, in partes AN, NO, OG; & AP, PQ, QH, eisdem GB, HE, æquales; erit quoque multitudo partium numeri AG, multitudini partium numeri AH, æqualis. Cùm enim AG, AH, vel æquales sint ipsis CD, CF, vel eorum æquè multiplices; erunt vel tot partes in AG, AH, quot in CD, CF; vel certè numerus partium numeri CD, toties continebitur in AG, quoties numerus partium numeri CF, in AH; propterea q; multitudo partium numeri AG, multitudini partium numeri AH, æqualis erit. Si igitur ipsis addantur

A .. N .. O .. G .. B
C .. I .. K .. D
A ... P ... Q ... H ... E
C ... L ... M ... F

partes

partes GB, HE, erit & multitudo partium numeri AB, multitudini partium numeri AE, æqualis: Atque adeò vna pars numeri CD, eadem pars erit numeri AB, quæ vna pars numeri CF, est numeri AE. Quare cùm multitudo partium numeri CD, æqualis sit multitudini partium numeri CF; erit CD, eadem partes numeri AB, quæ CF, ipsius AE

CONTINEAT *deinde AB, ipsum CD, & AE, ipsum CF, æqualiter, videlicet semel, bis, ter, quaterve, &c. easdemq; insuper partes illius; numerus quidem AB, partes GB, numeri CD, & numerus AE, partes HE, numeri CF: ita vt reliqui numeri AG, AH, sint rursum vel æquales ipsis CD, CF, vel eorum æquè multiplices. Diuisis igitur numeris GB, HE, in*

A.. P.. Q.. G.. I.. B
C.. L.. M.. D
A... R... S... H... K... E
C... N... O... F

partes GI, IB, & HK, KE, numerorum CD, CF, erit multitudo partium ipsius GB, multitudini partium ipsius HE, æqualis. Simili modo, diuisis numeris CD, CF, in partes CL, LM, MD, & CN, NO, OF, partibus GI, IB, & HK, KE, æquales, erit quoq; multitudo partium ipsius CD, multitudini partium ipsius CF, æqualis, propterea quòd quælibet partium numeri GB, eadem pars est numeri CD, quæ vnaquæque partium numeri HE, est numeri CF. Denique diuisis numeris AG, AH, in partes AP, PQ, QG, & AR, RS, SH, eisdem partibus GI, IB, & HK, KE, æquales; erit & multitudo partium numeri AG, æqualis multitudini partium numeri AH. Cùm enim AG, AH, vel æquales sint ipsis CD, CF, vel eorum æquè multiplices; erunt vel tot partes in AG, AH, quot in CD, CF, vel certè numerus partium ipsius CD, toties continebitur in AG, quoties numerus partium ipsius CF, in AH; propterea q; multitudo partium numeri AG, multitudini partium numeri AH, æqualis erit: Quibus si addantur æquales multitudines partium numerorum GB, HE, erit quoque multitudo partium numeri AB, multitudini partium numeri AE, æqualis; Atque adeò vna pars numeri CD, eadem pars erit numeri AB, quæ vna pars numeri CF, est numeri AE. Quare cùm multitudo partium numeri CD, æqualis sit multitudini partium numeri CF; erit CD, eadem partes numeri AB, quæ CF, ipsius AE. Quod est primò propositum.

IAM *verò sit CD, ipsius AB, & CF, ipsius AE, eadem partes. Dico è contrario AB, ipsum CD, & AE, ipsum CF, æqualiter continere, eandemq; insuper illius partem, vel partes. Diuisis enim numeris CD, CF, in partes numerorum AB, AE, erunt eæ multitudine inter se æquales. Item diuisis numeris AB, AE, in partes partibus numerorum CD, CF, æquales, erunt & hæ multitudine inter se æquales. Quarè toties continebuntur omnes partes numeri CD, in AB, superéritq; eadem pars, vel partes ipsius CD, quoties omnes partes numeri CF, continentur in AE, & quæ pars, aut partes ipsius CF, superſunt, propter æquales multitudines partium numerorum CD, CF, & AB, AE. Ita enim fit, vt multitudines æquales partium numerorum AB, AE, contineant æqualiter æquales multitudines partium numerorum CD, CF, & insuper in duobus illis numerus superſint partes numerorum CD, CF, multitudine æquales. Quam ob rem AB, ipsum CD, & AE, ipsum CF, æqualiter continebit, eandemq; insuper illius partem, vel partes. Quod secundò est propositum.*

THEOR. 10. PROPOS. 12. 13.

SI sint quotcunque numeri proportionales, erit quemadmodum vnus antecedentium ad vnum consequentium, ita omnes antecedentes ad omnes consequentes.

SINT quotcunque numeri proportionales A, B; C, D; E, F; hoc est, vt A, ad B, ita C, ad D, & E, ad F. Dico esse quoque omnes A, C, E, simul ad omnes B D, F, simul, vt est A, ad B. Sint enim primùm A, C, E, minores quàm B, D, F. Quoniam igitur propter eandem proportionem, [a] eadem pars est, aut partes A, ipsius B, quæ C, ipsius D, & E, ipsius F; [b] erit quoque vterque A, C, simul vtriusque B, D, simul eadem pars, aut partes, quæ A, ipsius B, vel E, ipsius F. Rursus quia vterque A, C, simul tanquam vnus, vtriusque B, D, simul, tanquam vnius, eadem pars est, aut partes, quæ E, ipsius F; [c] erunt & ambo A, C, tanquam vnus, & E, simul, amborum B, D, tanquam vnius, & F, simul eadem pars, vel partes, quæ A, ipsius B. [d] Quare eadem proportio est omnium A, C, E, simul ad omnes B, D, F, simul, quæ ipsius A, ad B.

A.... C.. E...
B..... D.... F.....

[a] 20. *defin.* [b] 5. *vel* 6. *septimi.* [c] 5. *septimi.* [d] 20. *defin.*

SINT deinde A, C, E, maiores, & æquè multiplices numerorum B, D, F. Quo posito, erit è

contrario B, ipſius A, eadem pars, quæ D, ipſius C, & F, ipſius E; Atque adeò vt prius, [a] erunt omnes B, D, F, ſimul omnium A, C, E, ſimul, eadem pars, quæ B, ipſius A; ideoque & è contrario omnes A, C, E, ſimul omnium B, D, F, ſimul, & A, ipſius B, æquè multiplices. [b] Quare eadem eſt proportio omnium A, C, E, ſimul, ad omnes B, D, F, ſimul, quæ eſt A, ad B. Hoc idem verum eſt, etiamſi aliquæ proportiones multiplices, vel etiam omnes, ſint numerorum ad vnitatem. Eſt enim eadem ſemper demonſtratio, vt hîc apparet, adiuuante tamen ſcholio propoſ. 5. huius libri.

a 5. ſeptimi.

A..... C.... E.....
B.... D.. F...

b 20. defin.

A... C..... E..... | A... C... E..... | A... C... E...
B. D.. F... | B. D. F.. | B. D. F.

Sint tertiò A, C, E, maiores, quàm B, D, F, at non multiplices. [c] Quia igitur propter eandem proportionem, A, ipſum B, & C, ipſum D, & E, ipſum F, æqualiter continet; eandemque inſuper partem, vel partes: Erit per lemma præcedentis propoſitionis B, ipſius A, & D, ipſius C, & F, ipſius E, eædem partes. Igitur vt prius, [d] erunt omnes B, D, F, ſimul omnium A, C, E, ſimul eædem partes, quæ B, ipſius A; Atque adeò per idem lemma, è contrario continebunt omnes numeri A, C, E, ſimul, omnes numeros B, D, F, ſimul, & A, ipſum B, æqualiter, eandemque inſuper partem, vel partes. [e] Quare eadem proportio eſt omnium A, C, E, ſimul, ad omnes B, D, F, ſimul, quæ ipſius A, ad B.

c 20. defin.

A..... C.... E.....
B..... D... F.....

d 6. ſeptimi.

e 20. defin.

Sint quartò & vltimò A, C, E, ipſis B, D, F, æquales. Quoniam igitur ſi æqualibus A, & B, æquales addantur C, & D, fiunt A, C, ſimul æquales ipſis B, D, ſimul: quibus ſi rurſum addâtur æquales E, & F, fiunt & omnes A, C, E, ſimul, omnibus B, D, F, ſimul æquales; Erunt, vt A, ad B, ita omnes A, C, E, ſimul ad omnes B, D, F, ſimul, cùm vtrobique ſit proportio æqualitatis. Si ſint igitur quotcunque numeri proportionales, erit, &c. Quod erat demonſtrandum.

A.... C... E.....
B.... D... F.....

SCHOLIVM.

In numeris quoq; fractis propoſitio hæc vera eſſe eodem modo conuincetur, vt patet, ſi pro numeris integris fracti aſſumantur.

14. THEOR. 11. PROPOS. 13.

Si quatuor numeri proportionales ſint: Et viciſſim proportionales erunt.

Sit enim A, ad B, vt C, ad D. Dico viciſsim eſſe A, ad C, vt B, ad D. Nam ſint primùm A, & C, minores quàm B, & D; & A, quoque minor, quàm C. Quo poſito, erit, propter eandem proportionem, A, ipſius B, & C, ipſius D, eadem pars, vel partes. [f] Viciſsim ergo & A, ipſius C, & B, ipſius D, eadem pars erit, vel partes: [g] Ac proinde erit, vt A, ad C, ita B, ad D.

A... C.....
B.... D.....

f 9. vel 10. ſeptimi.

g 20. defin.

Sint deinde A, & C, minores quàm B, & D; at A, maior quàm C. Quo poſito, erit, ob eandem proportionem, C, ipſius D, & A, ipſius B, eadem pars, vel partes. [h] Viciſsim ergo & C, ipſius A, & D, ipſius B, eadem pars erit, vel partes: Atque adeò è contrario, vel A, ipſius C, & B, ipſius D, æquè multiplex erit, vel certè per lemma propoſ. 11. huius lib. A, ipſum C, & B, ipſum D, æqualiter continebit, eandemque inſuper partem, vel partes. [i] Quare erit vt A, ad C, ita B, ad D.

A..... C...
B..... D....

h 9. vel 10. ſeptimi.

i 20. defin.

Sint tertiò A, & C, maiores quàm B, & D; at A, minor quàm C. Quo poſito, erit ob eandem proportionem, vel A, ipſius B, & C, ipſius D, æquè multiplex; vel certè A, ipſum B, & C, ipſum D, continebit æqualiter, eandemque inſuper partem, vel partes; Atque adeò è contrario erit B, ipſius A, & D, ipſius C, vel eadem pars, vel certè per lemma propoſ. 11. huius lib. eædem partes. [k] Viciſsim ergo & B, ipſius D, & A, ipſius C, eadem pars erit, vel partes. [l] Ac proinde eadem proportio erit B, ad D, quæ A, ad C; hoc eſt, erit vt A, ad C, ita B, ad D.

A.... C.....
B... D.....

k 9. vel 10. ſeptimi.

l 20. defin.

Sint quartò A, & C, maiores quàm B, & D; & A, quoque maior quàm C. Quo poſito, erit C, ipſius D, & A, ipſius B, ob eandem proportionem, vel æquè multiplex, vel certè C, ipſum D, & A, ipſum B, æqualiter continebit, eandemq; inſuper partem, vel partes; Atque adeò è contrario, erit D, ipſius C, & B, ipſius A, vel eadem pars, vel certè per lemma propoſ. 11. huius lib. eædem partes. [m] Viciſsim ergo & D, ipſius B, & C, ipſius A, eadem pars erit, vel partes; Ac propterea è contrario vel B, ipſius D, & A, ipſius C, æquè multiplex erit, vel certè, per lemma propoſ. 11. huius lib. B, ipſum D, & A, ipſum C, continebit æqualiter, eandemque inſuper partem, vel partes. [n] Quare eadem proportio erit B, ad D, quę A, ad C; hoc eſt, erit vt A, ad C, ita B, ad D.

A..... C....
B..... D...

m 9. vel 10. ſeptimi.

n 20. defin.

A... C....
B... D....

Sint quintò A, & C, ipſis B, & D, æquales, & A, minor quàm C. Quoniam igitur æquales numeri A, & B, æqualium numerorum C, & D, vel eadem pars, vel eædem partes ſunt; [o] Erit vt A, ad C, ita B, ad D.

o 20. defin.

Sint

A.... C... B.... D...

SINT ſexto A,& C,ipſis B, & D,æquales: at A,maior, quàm C. Quia igitur æquales numeri A,& B,æqualium numerorum C,& D, vel æquemultiplices ſunt, vel certè illi hos æqualiter continent,eandemque inſuper partem, vel partes; [a] erit vt A,ad C,ita B,ad D. [a] 20. *defin.*

SINT ſeptimo ac vltimo A,& C,inter ſe æquales, ſiue ij maiores ſint, quàm B,& D, ſiue minores, ſiue æquales. [b] Quoniam igitur, ob eandem proportionem, A,ipſius B, & C, ipſius D,æquemultiplex eſt,vel eadem pars,vel eædem partes; vel certè A, ipſum B, & C, ipſum D, æqualiter continet, eandemque inſuper partem, vel partes; ſuntque A, & C, æquales; æquales quoque erunt B,& D; Atque adeò erit,vt A,ad æqualem C,ita B,ad æqualem D. Quocirca,ſi quatuor numeri proportionales ſint,& viciſsim proportionales erunt. Quod erat demonſtrandum. [b] 20. *defin.*

A..... C..... B... D...

SCHOLIVM.

QVOD ſi pro numeris integris fractos numeros ſubſtituas, demonſtrabis eodem modo propoſitionẽ hanc veram eſſe in numeris fractis.

MANIFESTVM quoque eſt, propoſitionem hanc non variari, etiamſi aliquis numerorum ponatur vnitas.

COACTI verò ſumus in hac propoſitione, & duabus præcedentibus tot caſus recenſere, eosq; demonſtrationibus certiſsimis confirmare, vnà cum lemmate propoſ. 11. vt earum veritas in omni genere proportionis rationalis appareret. Theon enim,& nonnulli alij interpretes,illas duntaxat oſtendunt in proportionibus rationalibus minoris inæqualitatis, in quibus nimirum antecedentes numeri partes ſunt conſequentium, vt perſpicuè ex eorundem auctorum demonſtrationibus apparet; niſi maiorem numerum minoris numeri partes eſſe dicamus,vt nonnulli concedunt, inter quos etiam eſt (quod miror) Federicus Commandinus præſtans Geometra: quod eſt abſurdum, & ab Euclidis inſtituto alienum, cùm partes appellârit numerum numeri, minorem maioris, cùm minor non metitur maiorem. Quod etiam ex definitione 20. Solis luce clarius conſtat, vbi numeros proportionales docuit eſſe, cùm primus ſecundi, & tertius quarti æquè multiplex eſt, vel eadem pars, vel eadem partes, &c. Nam ſi exiſtimaret, maiorem numerum minoris partes eſſe, ſatis fuiſſet dicere, cùm primus ſecundi, & tertius quarti, eadem pars eſt, vel eadem partes. Ita enim numeros proportionales in omni genere proportionis comprehendiſſet,vt manifeſtum eſt: quare reliqua omnia verba definitionis ſuperuacanea eſſent.

THEOR. 12. PROPOS. 14. 15

SI ſint quotcunque numeri,& alij illis æquales multitudine,qui bini ſumantur, & in eadem ratione: Etiam ex æqualitate in eadem ratione erunt.

A..... D..... B..... E..... C.... F... G..... H.....

SINT quotcunque numeri A,B,C, & alij totidem D,E,F, ſitque vt A,ad B, ita D,ad E; & vt B, ad C,ita E,ad F. Dico ex æqualitate quoque eſſe vt A, ad C, ita D,ad F. Quoniam enim eſt, vt A,ad B,ita D, ad E; erit viciſsim, vt A,ad D, ita B, ad E: Similiterq; eandem ob cauſam, cùm ſit,vt B,ad C,ita E, ad F; erit viciſsim, vt B,ad E,ita C,ad F. Igitur erit vt A,ad D,ita C,ad F; (Cùm enim vtraque proportio A, ad D,& C, ad F, eadem ſit proportioni B,ad E,vt demonſtratum eſt; & ipſæ inter ſe eædem erunt,vt mox oſtendetur.) [d] Ac proinde viciſsim, vt A, ad C,ita D,ad F. [c] 13. *ſeptimi.* [d] 13. *ſeptimi.*

QVOD ſi fuerint plures numeri, quàm tres, ita vt ſit etiam quemadmodum C,ad G,ita F,ad H; Dico adhuc eſſe,vt A,ad G,ita D,ad H. Cùm enim iam ſit oſtenſum in tribus numeris,eſſe vt A,ad C,ita D,ad F; ponatur autem vt C, ad G, ita F, ad H; erunt tres numeri A,C,G, & alij tres D,F,H, qui bini in eadem ratione ſumuntur.Ex æqualitate igitur in tribus numeris oſtenſa, rurſus erit vt A,ad G,ita D,ad H. Eodemque modo idem oſtendemus in quinque numeris, per quatuor; ſicut id in quatuor numeris demonſtratum fuit per tres, & ſic de pluribus. Itaque ſi ſint quotcunque numeri,& alij illis æquales multitudine,&c. Quod erat oſtendendum.

SCHOLIVM.

A. D... B.. E..... C... F..... G. H...

PERSPICVVM autem eſt, hanc propoſitionem eodem modo demonſtrari poſſe in numeris fractis, ſi pro numeris integris aſſumantur fracti numeri.

IDEM verum eſt, ſi loco vnius numeri vnitas aſſumatur, vel etiam loco plurium plures vnitates, vt in hoc exemplo perſpicuum eſt.

LEMMA.

A..... B..... C.... D..... E..... F...

QVOD autem duæ proportiones numerorum, quæ eidem proportioni eadem ſunt,inter ſe quoq; ſint eadem, quales ſunt in demonſtratione proportiones A, ad D, & C,ad F,quæ eadem oſtenſæ ſunt pro-

portioni B, ad E, siue numeri sint integri, siue fracti; ita demonstrabitur. Propter eandem proportionem, erit B, ipsius E, & tam A, ipsius D, quàm C, ipsius F, æquè multiplex, vel eadem pars, vel eadem partes; vel certè B, ipsum E, & tam A, ipsum D, quàm C, ipsum F, continebit æqualiter, eandemq; insuper partem, vel partes. [a] *Quare numeri A, D, C, F, proportionales sunt, vt quidem A, ad D, ita C, ad F. Quod est propositum.*

a 20. defin.

Hoc idem demonstratum fuit ab Euclide libro 5. de proportionibus magnitudinum, propositione 11.

16. ## THEOR. 13. PROPOS. 15.

Si vnitas numerum quempiam metiatur, æquè autem alter numerus alterum quendam numerum metiatur: Et vicissim æquè vnitas tertium numerum metietur, & secundus quartum.

Metiatur vnitas A, numerum B C, & numerus D, numerum E F, æquè. Dico vicissim vnitatem A, numerum D, & numerum B C, numerum E F, æquè metiri. Diuiso enim numero B C, in vnitates B G, G H, H C, & numero E F, in partes E I, I K, K F, ipsi D, æquales: erit multitudo vnitatum numeri B C, æqualis multitudini partium numeri E F, metieturque æquè vnitas A, numerum D, & vnitas B G, ipsum E I, atque vnitas G H, ipsum I K, & vnitas H C, ipsum K F: atque idcircò eadem pars erit vnitas A, numeri D, & vnitas B G, numeri E I, quæ vnitas G H, numeri I K, & vnitas H C, numeri K F. Quare per ea, quæ ad propos. 5. huius libri ostendimus, eadem pars erunt vnitates B G, G H, H C, simul numerorum E I, I K, K F, simul, quæ vnitas B G, numeri E I, hoc est, quæ vnitas A, numeri D; Ac proinde vnitas A, numerum D, & numerus B C, ex vnitatibus B G, G H, H C, compositus, numerum E F, ex numeris E I, I K, K F, compositum æquè metietur. Si vnitas igitur numerum quempiam metiatur, &c. Quod erat demonstrandum.

A. D.. B. G. H. C E.. I.. K.. F

SCHOLIVM.

Illvd idem, quod Euclides demonstrauit de numeris, propos. 13. ostendit hoc loco separatim de vnitate, & tribus numeris, propterea quòd vnitas non est numerus. Quod quidem breuius ita nos demonstrabimus. Quia vnitas A, numerum B C, æquè metitur, atque numerus D, numerum E F; erit vnitas A, eadem pars numeri B C, quæ numerus D, numeri E F. Per ea igitur, quæ ad propos. 9. demonstrauimus, erit vicissim vnitas A, eadem pars numeri D, quæ numerus B C, numeri E F; Ac propterea vnitas A, numerum D, & numerus B C, numerum E F, æquè metietur.

Haec propositio fractis numeris conuenire non potest. Nam si vnitas numerum quempiam metiatur, æquè autem alter numerus fractus alterum quendam numerum fractum metiatur: non metietur vicissim æquè vnitas tertium numerum, qui fractus ponitur, & secundus integer quartum fractum; [b] *sed solùm eandem habebit rationem vnitas ad numerum tertium, quam secundus ad quartum.*

b 13. septimi.

17. ## THEOR. 14. PROPOS. 16.

Si duo numeri mutuò sese multiplicãtes fecerint aliquos; geniti ex ipsis æquales inter se erunt.

Dvo numeri A, & B, se mutuò multiplicantes faciant numeros C, & D, ita vt A, multiplicans ipsum B, faciat C, at B, ipsum A, multiplicans faciat D. Dico numeros C, & D, inter se æquales esse. Sumpta enim vnitate E; cum A, ipsum B, multiplicans faciat C; [a] erit C, ex B, toties compositus, quot sunt in A, vnitates; atque adeò vnitas E, numerum A, & numerus B, numerum C, æquè metietur. [b] Vicissim ergo & vnitas E, numerum B, & numerus A, numerum C, metietur æquè. Rursus eodem modo, quia B, multiplicans ipsum A, facit D; [c] erit D, ex A, toties compositus, quot sunt in B, vnitates; atque adeò vnitas E, numerum B, & numerus A, numerum D, æquè metietur: Metiebatur autem & eadem vnitas E, eundem numerum B, & numerus idem A, numerum C, æquè. Æquè igitur numerus A, vtrumque numerum C, & D, metietur; Ac proinde C, & D, inter se æquales erunt. Si duo igitur numeri mutuò sese multiplicantes fecerint aliquos, &c. Quod demonstrandum erat.

a 15. defin. b 15. septimi. c 15. defin.

E. A... B.... D..... C.....

SCHOLIVM.

In numeris fractis hac propositio ita demonstranda est. Quoniam A, multiplicãs B, facit C, erit C, ad B, vt A, ad E, vnitatem, ex defin. multiplicationis. Ergo permutando, vt C, ad A, ita B, ad E, vnitatem. Sed ex eadem defin vt B, ad E, vnitatem, ita quoque est D, ad A, quòd B, multiplicans A, facit D. Igitur erit, vt C, ad A, ita D, ad eundem A, ex lemmate propos. 14. ac proinde æquales inter se erunt C, & D. Quod erat ostendendum.

E. A, $\frac{2}{3}$. B, $4\frac{5}{7}$. D, $3\frac{1}{7}$. C, $3\frac{1}{7}$.

Potest hac eadem propositio cum Campano in hunc modum proponi.

Si duo numeri se mutuò multiplicauerint, procreabitur vnus idemque numerus.

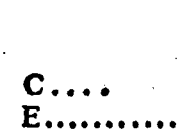


Multiplicet enim A, ipsum B, faciatq; C. Dico eundem C, gigni, si B, ipsum A, multiplicet. Nam vt prius, cùm A, multiplicans ipsum B, faciat C, ostendemus vnitatem E, numerum B, & numerum A, numerum C, aquè metiri. At verò si numerus B, ipsum A, multiplicet, [a] etiam vnitas E, numerum B, & numerus A, numerum factum aquè metitur. Idem ergo numerus C, gignitur ex multiplicatione B, in A; quandoquidem ipsum numerus A, aquè metitur, atque vnitas E, ipsum B. a 15. defin.

Quod si numeri A, & B, sint fracti ambo, vel vnus eorum, demonstrabimus idem hoc modo. Quoniam A, multiplicans B, facit C; erit ex definit. 15. vt C, ad B, ita A, ad E, vnitatem: Et permutando, vt C, ad A, ita B, ad E, vnitatem. At si B, multiplicet A, erit ex eadem definitione 15. B, ad E, vnitatem, vt factus numerus ad A. Erit igitur C, ad A, vt numerus hic factus ad eundem A; ac proinde factus hic numerus idem erit, qui C. Quod est propositum.

THEOR. 15. PROPOS. 17. 18

Si numerus duos numeros multiplicans fecerit aliquos; Geniti ex ipsis eandem rationem habebunt, quam multiplicati.



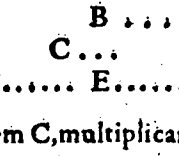
Numerus enim A, multiplicans numeros B, C, faciat D, E. Dico esse, vt B, ad C, ita D, ad E. Assumpta enim vnitate F; [a] erit D, ex B, compositus toties, quoties vnitas F, est in A; similiterque toties E, compositus erit ex C, quoties eadem vnitas F, est in eodem A: Atque adeò B, ipsum D, & C, ipsum E, æquè metietur. Quare B, ipsius D, & C, ipsius E, eadem pars erit; [b] Ac proinde, erit vt B, ad D, ita C, ad E, [c] & permutando, vt B, ad C, ita D, ad E. Si numerus igitur duos numeros multiplicans fecerit aliquos, &c. Quod ostendendum erat. a 15. defin. b 20. defin. c 13. septimi.

SCHOLIVM.

Si numeri A, B, C, sint fracti, vel vnus eorum, vel duo, idem ostendemus hoc modo. Quoniam A, multiplicans B, & C, facit D, & E; erit ex definitione 15. tam D, ad B, quàm E, ad C, vt A, ad F, vnitatem; ac proinde ex lemmate propositionis 14. vt D, ad B, ita E, ad C. Igitur permutando, vt D, ad E, ita B, ad C. Quod est propositum.

THEOR. 16. PROPOS. 18. 19.

Si duo numeri numerum quempiam multiplicantes, fecerint aliquos: Geniti ex ipsis eandem rationem habebunt, quam multiplicantes.



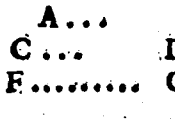
Numeri enim A, & B, multiplicantes numerum C, faciant D, & E. Dico esse vt A, ad B, ita D, ad E. Cùm enim ex A, in C, fiat D; [d] fiet quoque idem D, ex C, in A. Eademq; ratione, cùm ex B, in C, fiat E; fiet idem E, ex C, in B. Quia igitur idem C, multiplicans ipsos A, & B, facit D, & E; [e] erit, vt A, ad B, ita D, ad E. Si duo ergo numeri numerum quempiam multiplicantes, fecerint aliquos, &c. Quod erat demonstrandum. d 16. septimi. e 17. septimi.

SCHOLIVM.

Liquido constat, eandem hanc propositionem eodem modo demonstrari, si numeri A, B, C, sint fracti, vel vnus eorum, vel duo.

Hanc autem propositionem, & præcedentem, ad quotcunque numeros cum Campano accommodabimus, siue numeri omnes sint integri, siue non; hac ratione.

Si numerus quotcunque numeros multiplicet, vel quotcunque numeri numerum quempiam multiplicent; Habebunt producti numeri easdem rationes, quas numeri multiplicati, vel multiplicantes.

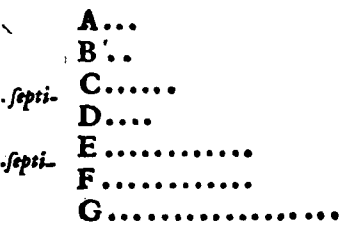


Fiant enim E, F, G, ex A, in B, C, D, vel ex B, C, D, in A. Dico easdem rationes habere numeros productos E, F, G, quas numeri multiplicantes, vel multiplicati B, C, D, habent: hoc est, esse, vt B, ad C, ita E, ad F. & vt C, ad D, ita F, ad G. Nam cùm ex A, in B, C, vel ex B, C, in A, fiant E, F; [a] erit vt B, ad C, ita E, ad F. Similiter quia ex A, in C, D, vel ex C, D, in A, fiunt F, G; erit quoq; vt C, ad D, ita F, ad G. Atq; ita de cæteris. a 17. vel 18. septimi.

THEOR. 17. PROPOS. 19. 20.

Si quatuor numeri proportionales fuerint; qui ex primo, & quarto fit, nume-

rus,æqualis erit ei, qui ex ſecundo,& tertio fit numero. Et ſi,qui ex primo,& quarto fit, numerus, æqualis fuerit ei,qui ex ſecundo & tertio fit,numero; ipſi quatuor numeri proportionales erunt.



SINT quatuor numeri proportionales A,B,C,D, vt quidem A, ad B, ita C,ad D; fiatque E,ex A, primò in D,quartum; & F, ex B, ſecundò in C, tertium. Dico numeros E, F, æquales inter ſe eſſe. Fiat enim rurſus G,ex A,in C. Quia igitur ex A,in C,D,fiunt G,E; [a] erit,vt C,ad D; hoc eſt, vt A,ad B,ita G, ad E. Rurſus quia ex A,& B,in C,fiunt G, & F; [b] erit quoque vt idem A,ad B,ita G,ad F. Quare per lemma propoſitionis 14.habebit G, ad E,& F, eandem proportionem; eam videlicet, quam habet A, ad B; Ac proinde E, & F, numeri æquales erunt, ex iis, quæ ad defin.20. ſcripſimus.

a 17. ſeptimi.

b 18.ſeptimi.

SED iam ſit E,ex A,primò in D,quartum genitus, æqualis ipſi F,producto ex B, ſecundò in C, tertium. Dico quatuor numeros A,B,C,D, proportionales eſſe,vt quidem A,ad B,ita C,ad D.Fiat enim rurſus G,ex A,in C. Quia ergo ex A,in C,D, fiunt G,E; [c] erit vt C,ad D,ita G,ad E, vel ad F, ipſi E,æqualem. Habet enim G,ad æquales E,F, eandem rationem, vt ad definitionem 20.docuimus. Rurſus quoniam ex A,& B,in C,fiunt G,& F; [d] erit quoque,vt A, ad B, ita idem G, ad eundem F. Quare proportiones A,ad B,& C,ad D,cùm eædem ſint proportioni G,ad F,eædem inter ſe erunt, per lemma propoſit.14. Ac proinde erit, vt A,ad B,ita C, ad D. Si quatuor ergo numeri proportionales fuerint,&c. Quod erat oſtendendum.

c 17. ſeptimi.

d 18. ſeptimi.

SCHOLIVM.

LVCE clarius eſt, eandem demonſtrationem huius propoſitionis locum habere in numeris fractis, ſiue omnes fracti ſint, ſiue non.

POTERAT huius theorematis prima pars proponi etiam ad hunc modum,tam in numeris fractis, quàm in integris.

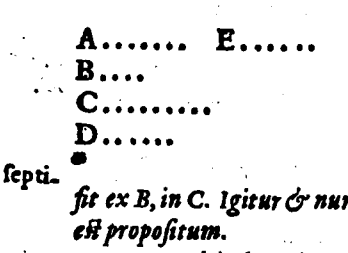
SI duo numeri duos numeros eandem, quam illi, habentes rationem multiplicent, antecedens nimirum illorum conſequentem horum, & conſequens antecedentem; geniti ex ipſis, æquales inter ſe erunt.

IT A enim oſtenſum eſt numerum E,qui fit ex A, antecedente in D,conſequentem,æqualem eſſe numero F,qui procreatur ex B,conſequente in C,antecedentem.

SED & ſequens theorema tam in fractis numeris,quàm in integris facilè ex hac propoſitione decimanona demonſtrabitur.

SI maior fuerit proportio primi ad ſecundum, quàm tertij ad quartum; qui ex primo & quarto fit,numerus, maior erit eo,qui ex ſecundo & tertio fit,numero: Et ſi,qui ex primo & quarto fit,numerus,maior fuerit eo,qui ex ſecundo & tertio fit, numero; maior erit proportio primi ad ſecundum,quàm tertij ad quartum.

SIT primum maior proportio primi A,ad B, ſecundum, quàm C,tertij ad D,quartum. Dico numerum ex A,in D,procreatum, eſſe maiorem eo, qui fit ex B,in C. Nam ſi intelligatur eſſe E,ad B, vt C, ad D; (ſiue E, numerus integer ſit, ſiue fractus; ſiue integer cum fracto: qui quidem reperietur, vt ad propoſ.19.lib.9.oſtendemus, ſi numerus ex B,in C, procreatus diuidatur per D.) erit quoque maior proportio A,ad B,quàm E,ad B: ac proinde A,maior erit,quàm E. Quare maior numerus fiet ex A,in D, quàm ex E, in eundem D: [a] At qui fit ex E, in D, æqualis eſt ei, qui fit ex B, in C. Igitur & numerus ex A,in D,genitus, maior erit,quàm numerus ex B,in C, procreatus. Quod eſt propoſitum.

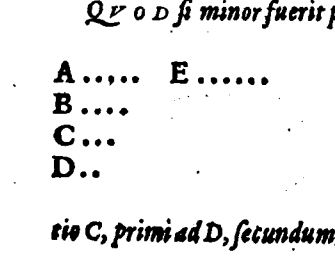


a 19. ſeptimi.

FIAT deinde maior numerus ex A, in D,quàm ex B,in C. Dico maiorem proportionem eſſe A,primi ad B, ſecundum,quàm C,tertij ad D, quartum. Si namque intelligatur numerus E, ex quo in D, idem numerus fiat,qui ex B,in C; (ſiue E,numerus ſit integer,ſiue fractus,aut integer cum fracto) fiet quoque maior numerus ex A, in D, quàm ex E, in eundem D: ac proinde maior erit A,quàm E. Quare maior erit proportio A, ad B, quàm E, ad B: [b] At ita eſt E, ad B, vt C, ad D. Igitur maior erit quoque proportio A,ad B, quàm C, ad D. Quod eſt propoſitum.

b 19. ſeptimi.

QVOD ſi minor fuerit proportio primi ad ſecundum, quàm tertij ad quartum; qui ex primo & quarto fit, numerus, minor erit eo, qui ex ſecundo & tertio fit, numero: Et ſi, qui ex primo & quarto fit, numerus,minor fuerit eo,qui ex ſecundo & tertio fit, numero; minor erit proportio primi ad ſecundum,quàm tertij ad quartum. Eadem enim omnino demonſtratio erit, ſi modò vocẽ,maioris, mutes in vocẽ,minoris. Vt in hoc appoſito exemplo apparet. Quod tamẽ ita etiã oſtendi poteſt. Quoniam minor eſt proportio A,ad B,quàm C,ad D: hoc eſt,maior eſt proportio C, primi ad D, ſecundum, q̃ A, tertij, ad B, quartum; maior fiet numerus ex C,primo in B,quartum,ſiue



ex B,

ex B, in C, quàm ex D, ſecundo in A, tertium, ſiue ex A, in D, vt demonſtratum iam eſt: hoc eſt, minor numerus fiet ex A, in D, quàm ex B, in C. quod eſt propoſitum. Deinde ſi minor numerus fiat ex A, in D, quàm ex B, in C; hoc eſt, maior ex B, in C, ſiue ex C, in B, quàm ex A, in D, ſiue ex D, in A; erit maior proportio C, primi ad D, ſecundum, quàm A, tertij ad B, quartum, vt iam eſt demonſtratum: hoc eſt, minor proportio erit A, ad B, quàm C, ad D. Quod eſt propoſitum.

THEOR. 18. PROPOS. 20. 20.

SI tres numeri proportionales fuerint; qui ſub extremis continetur, æqualis eſt ei, qui à medio efficitur: Et ſi, qui ſub extremis continetur, æqualis fuerit ei, qui à medio deſcribitur; ipſi tres numeri proportionales erunt.

SINT tres numeri proportionales A, B, C, vt quidem A, ad B, ita B, ad C. Dico numerum qui fit ex A, primo in C, tertium, æqualem eſſe ei, qui ex B, medio procreatur. Sumpto enim D, qui ipſi B, fit æqualis, erit vt B, ad C; hoc eſt, vt A, ad B, ita D, ad C; numerusq; genitus ex B, in D, æqualis erit ei, qui ex B, in ſe procreatur. Quia igitur quatuor numeri A, B, D, C, proportionales ſunt, [a] erit numerus factus ex A, in C, æqualis ei, qui fit ex B, in D; hoc eſt, ei, qui ex B, in ſe producitur.

A.....
B..... D.....
C....

SED iam ſit numerus productus ex A, primo in C, tertium, æqualis ei, qui fit ex B, medio in ſe. Dico tres numeros A, B, C, proportionales eſſe. Sumpto enim rurſum D, æquali ipſi B; erit, vt B, ad C, ita D, ad C; & numerus, qui fit ex B, in D, æqualis erit ei, qui fit ex B, in ſe; hoc eſt, ei, qui fit ex A, in C. Quoniam igitur numerus, qui fit ex A, primo in C, quartum, æqualis eſt ei, qui fit ex B, ſecundo in D, tertium, [b] erunt quatuor numeri A, B, D, C, proportionales, vt quidem A, ad B, ita D, ad C, vel B, ad C. Si tres igitur numeri proportionales fuerint, &c. Quod demonſtrandum erat.

[a] 19. ſeptimi.

[b] 19. ſeptimi.

SCHOLIVM.

DEMONSTRATIO hæc non variabitur, etiamſi numeri A, B, C, ſint fracti, vel partim integri, partim fracti.

QVOD ſi maior fuerit proportio primi ad ſecundum, quàm ſecundi ad tertium; maior fiet numerus ex primo in tertium, quàm ex ſecundo in ſe: Et ſi maior numerus fiat ex primo in tertium, quàm ex ſecundo in ſe; maior erit proportio primi ad ſecundum, quàm ſecundi ad tertium. Item ſi minor fuerit proportio primi ad ſecundum, quàm ſecundi ad tertiũ; minor numerus fiet ex primo in tertium, quàm ex ſecundo in ſe. Et ſi minor numerus fiat ex primo in tertium, quàm ex ſecundo in ſe; minor proportio erit primi ad ſecundum, quàm ſecundi ad tertium. Id quod ex ſcholio antecedentis propoſitionis liquet, ſi ſecundo numero ſumatur alius æqualis, vt habeantur quatuor numeri. Tunc enim erit maior proportio primi ad ſecundum, q̃ tertij ad quartum, aut minor, &c. vt in appoſitis exemplis apparet, etiamſi numeri ſint fracti, vel partim fracti, partim integri.

A.....
B..... D.....
C.....

A....
B..... D.....
C.....

THEOR. 19. PROPOS. 21. 21.

MINIMI numeri omnium eandem cum eis rationem habentium, metiuntur æquè numeros eandem cum eis rationem habentes; maior quidem maiorem, minor verò minorem.

SINT numeri A B, C D, minimi in proportione eadem, quam habent alij duo numeri maiores E, F, ita vt ſit, quemadmodum A B, ad C D, ita E, ad F. Dico A B, C D, æquè metiri ipſos E, F; maiorẽ quidem A B, ipſum maiorem E, at minorem C D, ipſum minorem F: hoc eſt, antecedentem, ipſum antecedentem, & conſequentem, ipſum conſequentem. Cùm enim ſit, vt A B, ad C D, ita E, ad F; [c] erit viciſsim, vt A B, ad E, ita C D, ad F; Atque adeò cùm A B, C D, minores ſint, quàm E, F; [d] erit A B, ipſius E, & C D, ipſius F, eadem pars, vel partes. Partes quidem nequaquã. Diuiſis namque, ſi fieri poteſt, A B, C D, in partes A G, G B; C H, H D, numerorum E, F; erit multitudo partium A G, G B, æqualis multitudini partium C H, H D; Ac propterea A G, ipſius E, & C H, ipſius F, eadem pars. [e] Erit ergo vt A G, ad E, ita C H, ad F; [f] & viciſsim, vt A G, ad C H, ita E, ad F, vel A B, ad C D; Ac proinde numeri A G, C H, minores quàm A B, C D, eandem habebunt proportionẽ, quam A B, C D. Quod eſt abſurdum: cùm A B, C D, in ſua proportione ponantur minimi. Non ergo A B, ipſius E, & C D, ipſius F, eædem partes ſunt. Quare eadẽ pars; Ac propterea A B, ipſum E, & C D, ipſum F, æqualiter metietur. Minimi ergo numeri omnium eandem cum eis rationem habentium, &c. Quod demonſtrandum erat.

A... G.. B
C.. H. D
E.....
F.....

[c] 13. ſeptimi.

[d] 20. defin.

[e] 20. defin.

[f] 13. ſeptimi.

SCHOLIVM.

IDEM hoc verum eſt, ſi quis dicat tres numeros eſſe continuè proportionales, primos q̃ duos eſſe in ſua

A-- G-- B
C...H...D
E.....
F.....

proportione minimos. Hoc enim posito, ostendetur eodem modo primũ metiri secundum; & secundum, tertium, vt in hoc apposito exemplo apparet, vbi tertius numerus secundo aqualis est. Quamuis autẽ dari non possint tres numeri continuè proportionales, quorum duo primi in sua proportione sint minimi, nisi primus sit vnitas; idem tamen demonstratur in tribus, etiamsi primus ab aduersario non dicatur esse vnitas, vt diximus. Quod idcircò dixerim, vt propositio 12. lib. 9 demonstrari possit, in qua aduersarius cogitur cõcedere, tres numeros esse continuè proportionales, primosq; duos esse in sua proportione minimos, ac proinde primũ metiri secundum, ex hac propos. quod antè negauerat. Sed hoc planius fiet in propos. 12. lib. 9.

PARI ratione & hoc verum est, quod Campanus docet.

QVOTLIBET numeri minimi in continuatione suarum proportionum, siue eædem sint diuersæ proportiones, metiuntur æquè totidem alios numeros, qui easdem cum eis proportiones habent: primus primum, secundus secundum, tertius tertium, &c.

SINT enim plures, quàm duo numeri A B, C D, E F, minimi in continuatione suarum proportionum, siue eadem sit proportio A B, ad C D, quæ C D, ad E F, siue non; ita vt non possint reperiri alij numeri ipsis A B, C D, E F, minores, quorũ primus ad secundum sit, vt A B, ad C D; & secundus ad tertium, vt C D, ad E F, &c. (quamuis tales proportiones reperiantur seorsum in minoribus numeris non continuatis; nimirum proportio A B, ad C D, in numeris 4. ad 2. vel 2. ad 1. qui minores sunt ipsis A B, C D; quemadmodum & proportiones numerorum 16. 20. 25. qui minimi sunt in continuatione duarum proportionum subsesquiquartarum, cùm in minoribus numeris non possint continuari, reperiuntur seorsum in minoribus numeris; proportio quidem 16. ad 20. in 8. & 10. proportio verò 20. ad 25 in 4. & 5. vel in 12. & 15.) Sint deinde totidem numeri G, H, I, non minimi, continuati in eisdem proportionibus, nimirum G, ad H, vt A B, ad C D; & H, ad I, vt C D, ad E F. Dico A B, ipsum G, & C D, ipsum H, & E F, ipsum I, metiri æquè. Cùm enim

A... K... B C.. L. D E.... M.... F
G..... H..... I.....

a 13. septimi. *sit vt A B, ad C D, ita G, ad H;* [a] *erit vicissim vt A B, ad G, ita C D, ad H. Eodem modo, cùm sit vt C D, ad E F, ita H, ad I;* [b] *erit quoque vicissim, vt C D, ad H, ita E F, ad I.* [c] *Quare A B, ipsius G, & C D, ipsius H, & E F, ipsius I, erit vel eadem pars, vel eadem partes. Partes quidem nequaquam. Diuisis enim, si fieri potest, A B, C D, E F, in A K, K B; C L, L D; E M, M F, partes numerorum G, H, I, erunt tot partes in A B, quot in C D, & in E F: atq; adeò A K, ipsius G, & C L, ipsius H, eadem pars.* [d] *Erit ergo vt A K, ad G, ita C L, ad H;* [e] *& vicissim vt A K, ad C L, ita G, ad H, vel A B, ad C D. Eodemq; modo erit, vt C L, ad E M, ita C D, ad E F. Quare continuantur numeri A K, C L, E M, in proportionibus numerorum A B, C D, E F, & minores quàm A B, C D, E F. Quod est absurdum, cùm hi ponantur in suarum proportionum continuatione minimi. Non ergo A B, C D, E F, eadem partes sunt numerorum G, H, I. Quare singuli singulorum eadem pars; Ac propterea A B, ipsum G, & C D, ipsum H, & E F, ipsum I, æquè metietur. Quod est propositum.*

b 13. septimi.

c 20. defin.

d 20. defin.

e 13. septimi.

QVOD si tres numeri dati A, B, C, minimi sint in continuatione suarum proportionum, ita vt etiam quilibet duo minimi sint, facilius idem hoc modo demonstrabitur.

A.. B..... C...
D.... E..... F.....

Sint alij tres D, E, F, non minimi, qui eadem habeant proportiones, quas A, B, C. Dico A, B, C, ipsos D, E, F, æquè metiri. Nam per hanc propos. 21. A, B, cùm sint minimi in proportione A, ad B, æquè metientur ipsos D, E; eademq; ratione B, C, ipsos E, F. Quare cùm A, ipsum D, & C, ipsum F, æquè metiatur, ac B, ipsum E; metientur æquè omnes A, B, C, ipsos D, E, F.

CAETERVM hæc propositio cum suo scholio nullo modo conuenire potest numeris fractis: propterea quòd in numeris fractis dari non possunt minimi numeri in sua proportione, sed quibusuis datis, dari possunt alij minores in infinitum. Atque hoc idem intelligendum est in omnibus aliis propositionibus, in quibus minimorum numerorum mentio fit. Ea enim omnes de numeris tantùm integris sunt intelligenda. Sic etiam quando de numeris inter se primis agitur, excludendi sunt numeri fracti, cùm hi non possint esse inter se primi, sed quoscunque metiri possit aliqua fractio, tanquam mensura communis. Nam si reducantur ad eandem denominationem, perspicuum est, eos habere vnam particulam, vel plures, eiusdem denominationis, mensuram communem. Alia autem omnes propositiones numerorum, in quibus minimi numeri in sua proportione, vel primi non adhibentur, æquè conueniunt & integris numeris, & fractis. quod satis est semel hoc loco monuisse.

19.

THEOR. 20. PROPOS. 22.

SI fuerint tres numeri, & alij ipsis multitudine æquales, qui bini sumantur, & in eadem ratione, fuerit autem perturbata eorum proportio; Etiam ex æqualitate in eadem ratione erunt.

SINT tres numeri A, B, C, & totidem D, E, F, qui bini sumantur, & in eadem ratione, sitque perturbata eorum proportio, vt quidem A, ad B, ita E, ad F; & vt B, ad C, ita D, ad E. Dico ex æqualitate

A..... H...
B... D....
C..... E.....
G..... F..

qualitate quoque esse vt A, ad C, ita D, ad F. Cùm enim sit vt A, ad B, ita E, ad F; [a] erit numerus ex A, in F, genitus æqualis numero, qui fit ex B, in E. Pari ratione cùm sit etiam vt B, ad C, ita D, ad E, [b] erit eidem numero, qui fit ex B, in E, æqualis numerus, qui fit ex C, in D: Atque adeò numerus genitus ex A, primo in F, quartum, æqualis erit numero ex C, secundo in D, tertiũ, producto. [c] Quare erit vt A, ad C, ita D, ad F.

a 19. septimi.
b 19. septimi.
c 19. septimi.

QVOD si fuerint plures numeri, quàm tres, ita vt sit etiam C, ad G, vt H, ad D: Dico adhuc esse, vt A, ad G, ita H, ad F. Cùm enim iam sit ostensum in tribus numeris, esse vt A, ad C, ita D, ad F; ponatur autem vt C, ad G, ita H, ad D; erunt tres numeri A, C, G, & alij tres H, D, F, qui bini in eadem ratione sumuntur, estque eorum proportio perturbata. Ex æqualitate igitur in tribus numeris ostensa, erit rursus, vt A, ad G, ita H, ad F. Eodemque modo idem ostendemus in quinque numeris, per quatuor, sicut id in quatuor numeris demonstratum fuit per tres, & sic de pluribus. Itaque si fuerint tres numeri, & alij ipsis multitudine æquales, qui bini sumantur, &c. Quod ostendendum erat.

SCHOLIVM.

EODEM modo demonstrabitur propositio in numeris fractis, vt constat.

QVONIAM verò Euclides ex illis sex modis argumentandi in proportionibus, quos in magnitudinibus lib. 5. & explicauit, & demonstrationibus confirmauit, duos tantùm hic in numeris ostendit; nimirum eum, qui à permutata proportione sumitur, propos. 13. & illum, qui ex æqualitate dicitur, propos. 14. & 22. huius libri: non alienum à nostro instituto erit, breuiter reliquos quatuor modos ostendere in numeris, & alia quædam quinti libri sequentibus theorematibus, quæ omnia conueniunt tam fractis numeris, quàm integris.

I.

Si quatuor numeri proportionales sint: Et inuersa ratione, siue conuertendo, proportionales erunt.

A..... C...
B.... D..

SIT vt A, ad B, ita C, ad D. Dico & conuertendo, siue inuersa ratione, esse vt B, ad A, ita D, ad C. Cùm enim sit A, ad B, vt C, ad D, [a] erit vicissim A, ad C, vt B, ad D. Rursus quia est B, ad D, vt A, ad C, [b] erit vicissim B, ad A, vt D, ad C. Quod est propositum.

a 13. septimi.
b 13. septimi.

II.

Si compositi numeri proportionales sint: Hi quoque diuisi proportionales erunt.

A..... C... B
D.... F.. E

SIT vt AB, ad CB, ita DE, ad FE. Dico & diuidendo esse, vt AC, ad CB, ita DF, ad FE. Cùm enim sit vt AB, ad CB, ita DE, ad FE; [c] erit vicissim, vt totus AB, ad totum DE, ita ablatus CB, ad ablatum FE: Ac proindè vt totus AB, ad totum DE, [d] ita reliquus AC, ad reliquum DF: hoc est, AC, ad DF, vt CB, ad FE. [e] Vicissim ergo erit quoq; AC, ad CB, vt DF, ad FE. Quod est propositum.

c 13. septimi.
d 11. septimi.
e 13. septimi.

EADEM ratione demonstrabimus Diuisionem rationis conuersam, & contrariam, vt in lib. 5. Sit enim primum, vt AB, ad CB, ita DE, ad FE. Dico per diuisionem rationis conuersam esse quoque, vt CB, ad AC, ita FE, ad DF. Cùm enim sit, vt AB, ad CB, ita DE, ad FE; erit quoque diuidendo, vt AC, ad CB, ita DF, ad FE: Et conuertendo, vt CB, ad AC, ita FE, ad DF. Quod est propositum.

SIT deinde, vt AC, ad AB, ita DF, ad DE. Dico per diuisionem rationis contrariam, esse quoque, vt AC, ad CB, ita DF, ad FE. Quoniam enim est, vt AC, ad AB, ita DF, ad DE; erit conuertendo, vt AB, ad AC, ita DE, ad DF. Ergo diuidendo, vt CB, ad AC, ita FE, ad DF: Et conuertendo, vt AC, ad CB, ita DF, ad FE. Quod est propositum.

III.

Si diuisi numeri proportionales sint: Hi quoque compositi proportionales erunt.

A..... B... C
D.... E.. F

SIT vt AB, ad BC, ita DE, ad EF. Dico & componendo esse, vt AC, ad BC, ita DF, ad EF. Cùm enim sit, vt AB, ad BC, ita DE, ad EF; [f] erit vicissim, vt AB, ad DE, ita BC, ad EF; [g] Ac proinde AB, BC, simul ad DE, EF, simul, vt BC, ad EF: [h] Et vicissim AB, BC, simul, hoc est, totus AC, ad BC, vt DE, EF, simul, hoc est, totus DF, ad EF. Quod est propositum.

f 13. septimi.
g 12. septimi.
h 13. septimi.

SIMILITER Compositio rationis conuersa, & contraria ostendetur hoc loco, vt in lib. 5. Sit enim primum, vt AB, ad BC, ita DE, ad EF. Dico per compositionẽ rationis conuersam esse quoq;, vt AC, ad AB, ita DF, ad DE. Quia enim est, vt AB, ad BC, ita DE, ad EF; erit conuertendo, vt BC, ad AB, ita EF, ad DE: Et componendo, vt AC, ad AB, ita DF, ad DE. Quod est propositum.

DEINDE sit rursus vt AB, ad BC, ita DE, ad EF. Dico per compositionem rationis contrariam esse quoq;, vt AB, ad AC, ita DE, ad DF. Cùm enim sit, vt AB, ad BC, ita DE, ad EF; erit conuertendo vt BC, ad AB, ita EF, ad DE: Et componendo ergo, vt AC, ad AB, ita DF, ad DE: Et conuertendo, vt AB, ad AC, ita DE, ad DF. Quod est propositum.

IIII.

Si compoſiti numeri proportionales ſint: Hi quoque per conuerſionem rationis proportionales erunt.

A..... C... B
D.... F.. E

Sit vt AB, ad CB, ita DE, ad FE. Dico, per conuerſionem rationis eſſe quod, vt AB, ad AC, ita DE, ad DF. Cùm enim ſit, vt AB, ad CB, ita DE, ad FE; [a] *erit vicißim, vt totus AB, ad totum DE, ita ablatus CB, ad ablatum FE;* [b] *Ac proinde vt totus AB, ad totum DE, ita erit reliquus AC, ad reliquum DF.* [c] *Vicißim igitur vt AB, ad AC, ita DE, ad DF. Quod eſt propoſitum.*

a 13. ſeptimi.
b 11. ſeptimi.
c 13. ſeptimi.

Rvrsvs ex his facilè demonſtrabimus theorema illud in numeris, quod in magnitudinibus oſtendit Euclides propoſ. 24. lib. 5. Videlicet.

V.

Si primus ad ſecundum eandem habuerit rationem, quam tertius ad quartum; habuerit autem & quintus ad ſecundum eandem rationem, quam ſextus ad quartum: Etiam compoſitus primus cum quinto ad ſecundum eandem habebit rationem, quam tertius cum ſexto ad quartum.

Sit vt AB, primus ad C, ſecundum, ita DE, tertius ad F, quartum. Item vt BG, quintus ad C, ſecundum, ita EH, ſextus ad F, quartum. Dico ita eſſe AG, compoſitum ex primo & quinto, ad C, ſecundum, vt eſt DH, compoſitus ex tertio & ſexto, ad F, quartum.

A..... B.. G | D..... E... H
C.... | F.....

Cùm enim ſit, vt BG, ad C, ita EH, ad F; erit conuertendo vt C, ad BG, ita F, ad EH. Quoniam igitur eſt vt AB, ad C, ita DE, ad F; & vt C, ad BG, ita F, ad EH; erit ex æqualitate, vt AB, ad BG, ita DE, ad EH. Componendo igitur, vt AG, ad BG; ita DH, ad EH. Itaq; cùm rurſus ſit, vt AG, ad BG, ita DH, ad EH: & vt BG, ad C, ita EH, ad F; erit ex æqualitate, vt AG, ad C, ita DH, ad F. Quod eſt propoſitum.

Eodem modo & hoc Theorema oſtendemus, quod ad propoſ. 24. lib. 5. in magnitudinibus demonſtrauimus.

VI.

Si duo numeri ad duos numeros eandem habeant rationem; & detracti quidam habeant ad eoſdem eandem: Et reliqui ad eoſdem eandem rationem habebunt.

Sit vt totus AB, ad C, ita totus DE, ad F; Item vt detractus AG, ad C, ita detractus DH, ad F. Dico & reliquum GB, eſſe ad C, vt eſt reliquus HE, ad F. Cùm enim ſit, vt AG, ad C, ita DH, ad F; erit conuertendo, vt C, ad AG, ita F, ad DH. Quia igitur eſt, vt AB, ad C, ita DE, ad F; & vt C, ad AG, ita F, ad DH; erit ex æqualitate vt AB, ad AG, ita DE, ad DH. Diuidendo ergo vt GB, ad AG, ita HE, ad DH. Itaq; cùm rurſus ſit, vt GB, ad AG, ita HE, ad DH; & vt AG, ad C, ita DH, ad F; erit ex æqualitate vt GB, ad C, ita HE, ad F. Quod eſt propoſitum.

A..... G.. B | D..... H... E
C.... | F.....

Item & hoc demonſtrabimus.

VII.

Si primus ad ſecundum eandem habuerit rationem, quam tertius ad quartum; habuerit autem & primus ad quintum eandem, quam tertius ad ſextum: Etiam primus ad compoſitum ſecundum cũ quinto eandem rationẽ habebit, quã tertius ad quartum cũ ſexto.

Sit vt primus A, ad ſecundum BC, ita tertius D, ad quartum EF; & vt primus A, ad quintum CG, ita tertius D, ad ſextum FH. Dico ita eſſe A, primum ad BG, compoſitum ex ſecundo & quinto, vt eſt D, tertius ad EH, compoſitum ex quarto & ſexto. Cùm enim ſit, vt A, ad BC, ita D, ad EF; erit conuertendo, vt BC, ad A, ita EF, ad D. Quia igitur eſt vt BC, ad A, ita EF, ad D; & vt A, ad CG, ita D, ad FH; erit ex æqualitate vt BC, ad CG, ita EF, ad FH; & componendo, vt BG, ad CG, ita EH, ad FH; & conuertendo, vt CG, ad BG, ita FH, ad EH. Quoniam ergo eſt, vt A, ad CG, ita D, ad FH; & vt CG, ad BG, ita FH, ad EH; erit ex æqualitate, vt A, ad BG, ita D, ad EH. Quod eſt propoſitum.

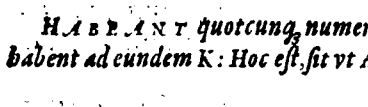
A.....
B.... C.. G
D.....
E..... F.... H

Denique ex his omnibus inferemus hoc theorema.

VIII.

Si quotcunque numeri ad eundem habuerint proportiones, quas alij illis multitudine æquales ad quendam alium eundem; Habebunt quoque illi omnes ſimul ad eundem, proportionem, quã alij omnes hi ſimul ad alium illum eundem. Et ſi idem numerus ad quotcunque numeros proportiones habuerit, quas idem alius numerus ad alios multitudine illis æquales; Habebit quoque idem numerus ad omnes illos ſimul proportionem, quam idem alius numerus ad hos omnes ſimul.

HABENT quotcunq; numeri A B, B C, C D, ad eundem E, proportiones, quas totidem F G, G H, H I, habent ad eundem K: Hoc eſt, ſit vt A B, ad E, ita F G, ad K; & vt B C, ad E, ita G H, ad K; & vt C D, ad E, ita H I, ad K. Dico omnes illos ſimul, hoc eſt, ipſum A D, ad E, eandem habere proportionem, quam hi omnes ſimul habent, hoc eſt, quam ipſe F I, habet ad K. Cùm enim ſit, vt A B, primus ad E, ſecundũ, ita F G, tertius ad K, quartum: Item vt B C, quintus ad E, ſecundum, ita G H, ſextus ad K, quartum; erit quoq; vt A C, primus cum quinto, ad E, ſecundum, ita F H, tertius cum ſexto, ad K, quartum. Rurſus quia eſt, vt A C, primus ad E, ſecundum, ita F H, tertius ad K, quartum: Item vt C D, quintus ad E, ſecundum, ita H I, ſextus ad K, quartum; erit etiam, vt A D, primus cum quinto, ad E, ſecundum, ita F I, tertius cum ſexto, ad K, quartum: Atq; ita de cæteris, ſi plures fuerint.



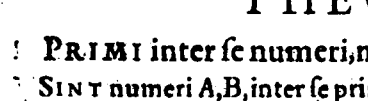
SED habeat iam idem numerus E, ad numeros quotcunque A B, B C, C D, proportiones eaſdem, quas idem alius numerus K, ad totidem F G, G H, H I; Hoc eſt, ſit vt E, ad A B, ita K, ad F G; & vt E, ad B C, ita K, ad G H; & vt E, ad C D, ita K, ad H I. Dico eſſe, vt E, ad omnes illos ſimul, nimirum ad A D, ita K, ad hos omnes ſimul, vtpote ad F I. Cùm enim ſit, vt E, primus ad A B, ſecundum, ita K, tertius ad F G, quartum: Item vt E, primus ad B C, quintum, ita K, tertius ad G H, ſextum; erit quoq; vt E, primus ad A C, ſecundum cum quinto, ita K, tertius ad F H, quartum cum ſexto. Rurſus quia eſt, vt E, primus ad A C, ſecundum, ita K, tertius ad F H, quartum: Item vt E, primus ad C D, quintum, ita K, tertius ad H I, ſextum; erit etiam, vt E, primus ad A D, ſecũdum cum quinto, ita K, tertius ad F I, quartũ cum ſexto. Atq; ita de reliquis, ſi plures fuerint.

IAM verò, his demonſtratis, oſtendentur nouem vltimæ propoſitiones lib. 5. à Campano adiectæ, eodem modo in numeris improportionalibus, quo in magnitudinibus demonſtratæ fuêre; ſi pro magnitudinibus intelligantur numeri ſiue integri, ſiue fracti, & pro modis argumentandi in proportionibus, qui libro 5. ſunt demonſtrati, aſſumantur iidem modi hoc lib. demonſtrati: Vt opus non ſit eas hic repetere. Satis enim eſt, vt dixi, ſi propoſitiones illæ quinti lib. in manus ſumantur, & magnitudines intelligantur eſſe numeri, eademq; prorſus demonſtrationes adhibeantur.

THEOR. 21. PROPOS. 23. 21.

PRIMI inter ſe numeri, minimi ſunt omniũ eandem cum eis rationẽ habentiũ.

SINT numeri A, B, inter ſe primi. Dico eos eſſe minimos omnium, qui eandem proportionem habent, quam ipſi A, & B. Nam ſi non ſunt minimi, erunt aliqui alij minores ipſis, minimi habentes proportionem, quam A, & B. Sint ergo, ſi fieri poteſt, C, D, minimi in proportione A, & B, minores q; idcirco ipſis A, & B. Quoniam igitur C, D, minimi ſunt in proportione A, & B; [a] metietur C, ipſum A, & D, ipſum B, æquè; atque adeò ſecũdum eundem numerum, qui ſit E, ita vt C, toties metiatur ipſum A, & D, ipſum B, quoties vnitas eſt in E. Itaque cùm vnitas numerum E, & numerus C, numerum A, æquè metiatur; [b] metietur & viciſsim æquè vnitas numerum C, & numerus E, numerum A. Rurſus quia vnitas numerum E, & numerus D, numerum B, æquè metitur; [c] metietur quoque viciſsim æquè vnitas numerum D, & numerus E, numerum B; Atque adeò, cùm idem numerus E, vtrumq; A, & B, metiatur, erit numerus E, eorum communis menſura. Quare A, & B, non ſunt primi inter ſe, ſed compoſiti. Quod eſt abſurdum, & cõtra hypotheſin. Non ſunt igitur alij numeri ipſis A, & B, minores, minimi in proportione A, ad B; Ac proinde A, & B, minimi ſunt. Primi ergo inter ſe numeri minimi ſunt, &c. Quod erat demonſtrandum.

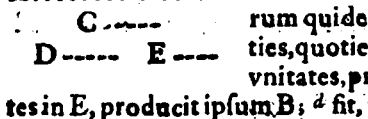


a 21. ſeptimi
b 15. ſeptimi
c 15. ſeptimi

THEOR. 22. PROPOS. 24. 22.

MINIMI numeri omniũ eandem cum eis rationẽ habentiũ, primi inter ſe ſunt.

SINT numeri A, & B, minimi omnium eandem cum ipſis proportionem habentium. Dico eos eſſe inter ſe primos; hoc eſt, nullum numerum, præter vnitatem, communi menſura eos metiri. Si enim non ſunt inter ſe primi, ſed habent numerum communem mẽſuram; ſit numerus C, eorum menſura communis, metiaturq; C, numerus numerum quidem A, toties, quoties vnitas eſt in numero D; At verò ipſum B, toties, quoties vnitas eſt in E. Quia igitur C, toties compoſitus, quot in D, ſunt vnitates, procreat ipſum A; & idem C, toties compoſitus, quot ſunt vnitates in E, producit ipſum B; [d] fit, vt D, & E, ipſum C, multiplicantes, producant A, & B. [e] Quare eadem erit proportio A, ad B, quæ D, ad E; Atque adeò, cùm D, & E, partes ipſorum A, & B, minores ſint, quàm A, & B; non erunt A, & B, numeri minimi omnium eandem cum eis rationem habentium. Quod eſt abſurdum. Primi ergo inter ſe ſunt numeri A, & B; Ac proinde, minimi numeri omnium eandem cum eis rationem habẽtium, primi inter ſe ſunt. Quod oſtendendum erat.



d 9. pron.
e 18. ſeptimi

SCHOLIVM.

HANC propoſitionem, & precedentem cum Campano ad plures numeros extendemus, hoc modo.

QVOTCVNQVE numeri inter ſe primi, minimi ſunt in continuatione ſuarum proportionum. Et quotcunque numeri in continuatione ſuarum proportionum minimi, ſunt inter ſe primi.

SINT quotcunq; numeri inter ſe primi A,B,C. Dico eos minimos eſſe in continuatione ſuarum proportionum, ita vt in minoribus numeris continuari non poſſint, quamuis proportio duorum in minoribus numeris reperiatur. Si enim non ſunt minimi, erunt aliqui alij minores ipſis, nimirum D,E,F, minimi in continuatione illarum proportionum. Quia igitur D,E,F, minimi ſunt in proportione numerorum A, B, C, metietur D, ipſum A, & E, ipſum B, & F, ipſum C, æquè per ea, quæ ad propoſ. 21. huius libri demonſtrauimus; atq; adeò ſecundùm vnum eundem numerum, qui ſit G; ita vt D, toties metiatur ipſum A, & E, ipſum B, & F, ipſum C, quoties vnitas eſt in G. Quoniam igitur vnitas numerum G, & numerus D, ipſum A, æquè metitur; [a] *metietur quoq; vicißim æquè vnitas numerum D, & numerus G, numerum A: Eademq; ratione idem G, metietur & ipſum B, & ipſum C, æquè, atque vnitas ipſos E,F; Atq; idcirco A,B,C, cùm habeant numerum G, communem menſuram, non erunt inter ſe primi, ſed compoſiti. Quod eſt abſurdum, & contra hypotheſim. Non ſunt igitur alij numeri minores ipſis A, B, C, minimi in continuatione proportionum A, ad B, & B, ad C; ſed ipſi A, B, C, minimi ſunt.*

a 15. ſeptimi.

A.....B.....C....
D---- E------F---
G-----

IAM verò ſint A,B,C, in continuatione ſuarum proportionum minimi. Dico eos primos eſſe inter ſe. Si enim non ſunt inter ſe primi, metiatur eos communi menſura numerus G, ita vt G, toties metiatur ipſum A, quoties vnitas eſt in D; & ipſum B, toties, quoties vnitas eſt in E; & ipſum C, toties, quoties vnitas eſt in F. Quoniam igitur G, toties compoſitus facit numeros A,B,C, quoties vnitas eſt in D,E,F; ſit vt D, E, F, ipſum G, multiplicantes producant ipſos A,B,C. Quare D,E,F, eaſdem habent proportiones, quas A,B,C, per ea, quæ ad propoſ 18. huius lib. oſtendimus; Atq; adeò, cum D,E,F, minores ſint quàm A,B,C; non erunt A,B,C, minimi in continuatione ſuarum proportionum. Quod eſt abſurdum. Primi igitur inter ſe ſunt A,B,C. Quod eſt propoſitum.

24. ## THEOR. 23. PROPOS. 25.

SI duo numeri primi inter ſe fuerint; Qui vnum eorum metitur numerus, ad reliquum primus erit.

A.....B.....
C.... D----

SINT inter ſe primi A, & B; & ipſum A, metiatur numerus C. Dico C, ad reliquum B, eſſe primum. Si enim non ſunt inter ſe primi B, & C; metiatur eos communi menſura, ſi fieri poteſt, numerus D. Quoniam igitur D, metitur C; & C, ipſum A; [a] metietur etiam D, ipſum A: Metitur autem & ipſum B. Igitur A, & B, non ſunt inter ſe primi, cùm habeant menſuram communem numerum D. Quod eſt abſurdum, & contra hypotheſim. Eſt ergo C, ad B, primus. Eodem modo, ſi numerus quiſpiã metiatur ipſum B, erit is ad A, primus. Quapropter ſi duo numeri primi inter ſe fuerint, &c. Quod erat demõſtrandũ.

a 11. prom.

25. ## THEOR. 24. PROPOS. 26.

SI duo numeri ad quempiam primi fuerint; etiam ex illis genitus ad eundem primus erit.

A..... B...
C.....
D.....
E---- F----

SIT vterque numerus A,B, ad C, primus, producaturq; ex A, in B, vel ex B, in A, numerus D. Dico & D, ad eundem C, primum eſſe. Si enim C, & D, non ſunt inter ſe primi; ſit eorum communis menſura numerus E, metiẽs ipſum D, toties, quot vnitates ſunt in numero F. Quoniam igitur E, toties compoſitus facit ipſum D, quot ſunt vnitates in F; [b] fit vt F, ipſum E, multiplicans gignat ipſum D; [c] & contra E, ipſum F, multiplicans producat eundem D. Genitus eſt autem idem D, ex A, in B. Igitur cùm ex E, primo in F, quartum fiat idem numerus, qui ex A, ſecundo in B, tertium; [d] erit vt E, primus ad A, ſecundum, ita B, tertius ad F, quartum. Quia verò A, & C, primi inter ſe ſunt; & E, ipſum C, ponitur metiri; [e] erit E, ad A, primus; Atq; adeò E, & A, cùm ſint inter ſe primi, [f] in ſua proportione minimi erunt. & Æquè igitur metientur ipſos B, & F, eandem proportionem habentes, nimirum E, ipſum B, & A, ipſum F. Quare cum E, metiatur vtrumque B, & C; non erunt B, & C, inter ſe primi. Quod eſt abſurdum, & contra hypotheſim. Primus ergo erit D, ad ipſum C; Ac proinde, ſi duo numeri ad quempiam primi fuerint, &c. Quod erat demonſtrandum.

b 9. prom.
c 16. ſeptimi
d 19. ſeptimi
e 25. ſeptimi
f 23. ſeptimi
g 21. ſeptimi

26. ## THEOR. 25. PROPOS. 27.

SI duo numeri primi inter ſe fuerint: Etiam ex vno eorum genitus ad reliquum primus erit.

A.... B.....
C.....
D.....

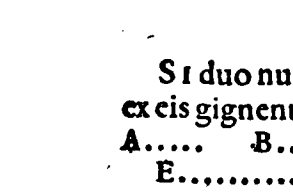
SINT inter ſe primi A, & B, gignatur q; C, ex A, in ſe ipſum. Dico C, ad reliquum B, eſſe primum. Sumpto enim D, æquali ipſi A, erit & D, ad B, primus. Quoniam igitur A, & D, ad B, primi ſunt, [b] erit numerus ex A, in D, hoc

b 26. ſeptimi

in D, hoc eſt, ex A, in ſe genitus, nimirum C, ad eundem B, primus. Eademq; arte oſtendemus, numerum ex B, in ſe genitum, ad A, primum eſſe. Si duo ergo numeri primi inter ſe fuerint, &c. Quod demonſtrandum erat.

THEOR. 26. PROPOS. 28. 27.

Si duo numeri ad duos numeros, vterque ad vtrumque, primi fuerint; Et qui ex eis gignentur, primi inter ſe erunt.



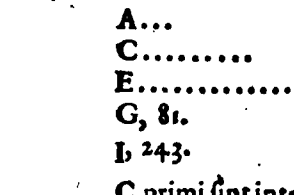
Sit vterque A, & B, ad vtrumque C, & D, primus, gignaturque E, ex A, in B; & F, ex C, in D. Dico E, & F, inter ſe primos eſſe. Cum enim vterq; A, & B, primus ſit ad C; [a] erit quoque E, ex ipſis genitus, ad eundem C, primus. Rurſus cum vterque A, & B, ad D, ſit primus, erit eodem modo E, ipſis genitus, ad eundem D, primus. Quia igitur vterq; C, & D, primus eſt ad E; [b] erit quoque F, ex illis procreatus, ad E, primus. Si ergo duo numeri ad duos numeros, vterq; ad vtrumque, &c. Quod erat oſtendendum.

[a] 26. ſeptimi

[b] 26. ſeptimi

THEOR. 27. PROPOS. 29. 28.

Si duo numeri primi inter ſe fuerint, & multiplicans vterque ſe ipſum fecerit aliquem; Et geniti ex ipſis primi inter ſe erunt: Et ſi, qui in principio, genitos ipſos multiplicantes fecerint aliquos; Et hi quoque primi inter ſe erunt: Et ſemper circa extremos hoc eueniet.



Sint primi inter ſe A, & B; & ex A, in ſe fiat C; at ex B, in ſe fiat D. Dico & C, D, primos inter ſe eſſe: Et ſi rurſum fiat E, ex A; in C; & F, ex B, in D; Dico E, F, quoque eſſe inter ſe primos. Cum enim A, B, ſint inter ſe primi, [c] erit C, factus ex A, in ſe, ad reliquum B, primus: Atque eodem modo cum B, & C, primi ſint inter ſe, erit & D, factus ex B, in ſe, ad C, primus: atque adeò geniti duo C D, primi inter ſe erunt.

[c] 27. ſeptimi

Rvrsvs, quia A, & B, ſunt inter ſe primi, [d] erit & C, factus ex A, in ſe, ad B; & D, genitus ex B, in ſe, ad A, primus: Eſt autem & C, oſtenſus ad D, primus. Vterque igitur A, C, ad vtrumque B, D, primus erit; [e] Ac proinde E, factus ex A, in C, primus erit ad F, factum ex B, in D. Quod ſi adhuc ex A, in E, fiat G; & ex B, in F, fiat H; cum A, & C, primi ſint ad B, [f] erit quoque E, ex ipſis genitus, ad B, primus: Eademque ratione & F, ad A, primus erit. Quia igitur vterque A, E, ad vtrumque B, F, primus eſt; [g] erit & G, factus ex A, in E, ad H, factum ex B, in F, primus. Et ſic deinceps, ſi plures fuerint. Nam eodem modo cum A, & E, primi ſint ad B, [h] erit & G, ex ipſis factus, ad B, primus: necnon & H, ad A. [i] Quare & I, genitus ex A, in G, ad K, genitum ex B, in H, primus erit, cum vterque A, G, ad vtrumque B, H, ſit primus. Si duo itaque numeri primi inter ſe fuerint, &c. Quod oſtendendum erat.

[d] 27. ſeptimi

[e] 28. ſeptimi

[f] 26. ſeptimi

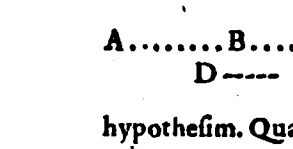
[g] 28. ſeptimi

[h] 26. ſeptimi

[i] 28. ſeptimi

THEOR. 28. PROPOS. 30. 29.

Si duo numeri primi inter ſe fuerint: Etiam vterque ſimul ad quemlibet illorum primus erit: Et ſi vterque ſimul ad vnum aliquem illorum primus fuerit; Etiam, qui in principio, numeri primi inter ſe erunt.



Sint inter ſe primi A B, B C. Dico & vtrumque ſimul A C, primum eſſe & ad A B, & ad B C. Si enim A C, A B, non ſunt inter ſe primi; metiatur illos, ſi fieri poteſt, communi menſura numerus D. Quia igitur D, metitur totum A C, & ablatum A B; [k] metietur quoq; reliquum B C. Non igitur primi inter ſe ſunt A B, B C, cum eos metiatur numerus D. Quod eſt abſurdum, & contra hypotheſim. Quare A C, ad A B, primus erit. Eodemque modo ad B C, oſtendemus eundem eſſe primum.

[k] 11. prop.

Sed iam vterque A B, B C, ſimul, primus ſit ad vnum aliquem illorum, videlicet ad A B. Dico & A B, B C, inter ſe primos eſſe. Si enim non ſunt inter ſe primi, metiatur illos, ſi fieri poteſt, numerus D. Quia igitur D, metitur A B, & B C; [l] metietur quoque D, numerum A C, ex A B, B C, compoſitum; Ac proinde A C, A B, non ſunt inter ſe primi, cum eos numerus D, metiatur. Quod eſt abſurdum, & contra hypotheſim. Sunt igitur A B, B C, inter ſe primi. Eodemque argumento oſtendemus A B, B C, inter ſe primos eſſe, ſi A C, ad B C, primus eſſe ponatur. Si duo ergo numeri primi inter ſe fuerint, &c. Quod erat demonſtrandum.

[l] 10. prop.

COROLLARIVM.

Ex hoc ſequitur, numerum, qui ex duobus compoſitus ad vnum illorum primus eſt, ad reliquum quoq; primum eſſe. Si enim A C, ad A B, primus eſt, erunt A B, B C, inter ſe primi, per ſecundam partem huius propoſ. Igitur & A C, ad B C, primus erit, per primam partem eiuſdem. Quod eſt propoſitum.

32. THEOR. 29. PROPOS. 31.

OMNIS primus numerus, ad omnem numerũ, quem non metitur, primus eſt.

PRIMVS numerus A, non metiatur numerum B. Dico A, ad B, primum eſſe; hoc eſt, A, & B, eſſe inter ſe primos, licet B, compoſitus ſit. Si enim A, & B, non ſunt inter ſe primi, metiatur eos, præter vnitatem, ſi fieri poteſt, communi menſura numerus C. Non erit ergo C, idem qui A; quòd A, ponatur non metiri ipſum B. Quia igitur numerũ A, alius numerus C, metitur, non erit A, primus. Quod eſt abſurdum, & contra hypotheſim. Primus igitur eſt A, ad B; Ac propterea, omnis primus numerus, ad omnem numerum, &c. Quod demonſtrandum erat.

A..... B .....
C---

33. THEOR. 30. PROPOS. 32.

SI duo numeri ſeſe mutuo multiplicantes fecerint aliquem: genitum autem ex ipſis metiatur aliquis primus numerus: is etiam vnum eorum, qui in principio, metietur.

DVO numeri A, & B, ſe mutuo multiplicantes faciant C, quam metiatur numerus primus D. Dico & D, metiri ſaltem vnum ipſorum A, & B, ſi non vtrumq; metitur. Non metiatur enim D, ipſum A; metiatur verò ipſum C, toties, quot ſunt vnitates in numero E; ita vt C, fiat ex D, in E, qui idem factus eſt ex A, in B. Quia igitur numerus genitus ex D, primo in E, quartum, æqualis eſt numero genito ex A, ſecundo in B, tertium; [a] erit vt D, primus ad A, ſecundum; ita B, tertius ad E, quartum. [b] Quia verò primus D, ad A, primus eſt, cum eum non metiatur; [c] erunt D, & A, in ſua proportione minimi. [d] Quare æquè metientur ipſos B, & E; nimirum D, ipſum B, & A, ipſum E; Ac proinde ſi D, non metitur ipſum A, metietur ſaltem ipſum B: Eodemq; modo ſi D, non metiatur ipſum B, metietur ſaltẽ ipſum A. Si duo ergo numeri ſeſe mutuo multiplicantes fecerint aliquem, &c. Quod erat demõſtrandum.

A.... B .....
C.....
D... E.....

[a] 19. ſeptimi
[b] 31. ſeptimi
[c] 23. ſeptimi
[d] 21. ſeptimi

SCHOLIVM.

EODEM modo & hoc theorema ſequens demonſtrabimus.

SI duo numeri ſeſe mutuo multiplicantes fecerint aliquem; genitum autem ex ipſis metiatur aliquis non primus numerus, vel certè ad ipſum ſit compoſitus: is etiam ad vnum eorum, qui in principio, compoſitus erit.

NAM ex A, in B, fiat C, quem vel metiatur numerus non primus D, vel certè compoſitus ad eum ſit: hoc eſt, vel D, & C, compoſiti ſint inter ſe. Dico D, quoq; ad vnum ipſorum A, B, compoſitum eſſe: id eſt, vel D, & A; vel D, & B. eſſe quoque inter ſe compoſitos. Si enim D, ad neutrum eorum compoſitus eſt; erit vtrq; A, & B, ad D, primus. [a] Quare & C, ex illius genitus, ad eundem D, primus erit. Quod eſt abſurdum, cum D, ponatur vel metiri ipſum C, vel certè ad eum eſſe compoſitus. Eſt igitur D, compoſitus ad A, vel ad B, cum non ſit primus ad vtrumque.

A... B....
C.....
D.....

[a] 26. ſeptimi.

30. THEORE. 31. PROPOS. 33.

OMNEM compoſitum numerum, aliquis primus numerus metitur.

SIT numerus compoſitus A. Dico aliquem numerum primum eum metiri. Metiatur enim ipſum numerus B, qui ſi primus fuerit, habetur propoſitũ: Si verò compoſitus, metiatur eum numerus C, qui vel primus erit, vel compoſitus. Si primus, cum metiatur ipſum B; & B, ipſum A; [a] metietur quoque C, primus ipſum A. Si autem C, compoſitus fuerit, metietur eum alius numerus. Quia verò numerus non diminuitur infinitè, veniemus tandem ad aliquem numerum, quem nullus alius metiatur, atq; adeò ad primum; qui cum metiatur omnes præcedentes, [b] metietur quoq; compoſitum A. Quod eſt propoſitum.

A.....
B..... C...

[a] 11. pron.
[b] 11. pron.

ALITER. Quia numerus A, compoſitus eſt; metietur eum aliquis numerus, vel etiam plures. Sit omnium metientium eum minimus B; quem dico eſſe primum. Si enim B, non eſt primus, metiatur eum, ſi fieri poteſt, numerus C. Quoniam igitur C, metitur ipſum B, & B, ipſum A; [c] metietur quoq; C, minor ipſo B, ipſum A. Quod eſt abſurdum, cum B, ponatur omnium metientium minimus. Primus ergo eſt numerus B. Omnem igitur compoſitum numerum aliquis primus numerus metitur. Quod erat demonſtrandum.

A.....
B... C--

[c] 11. pron.

THEOR.

THEOR. 32. PROPOS. 34. 31.

OMNIS numerus aut primus eſt, aut eum aliquis primus metitur.

A..... SIT numerus quicunq; A. Dico eum vel eſſe primum, vel certè aliquem primũ eum metiri. Cum enim omnis numerus vel primus ſit, vel compoſitus; ſi quidem A, primus eſt, habetur propoſitum: Si verò compoſitus; [a] metietur eum aliquis primus. Omnis igitur numerus aut primus eſt, aut eum aliquis primus metitur. Quod erat oſtendendum. [a] 33. ſeptimi

PROBL. 3. PROPOS. 35. 34.

NVMERIS datis quotcunque, reperire minimos omnium eandem rationem habentium cum ipſis.

SINT quotcunque numeri A,B,C, habentes quaſcunque proportiones, ſiue eadem ſit proportio A, ad B, quæ B, ad C, ſiue non; oporteatq; totidem reperire, qui in eiſdem proportionibus ſint minimi. Quoniam A,B,C, ſunt inter ſe aut primi, aut compoſiti: Si primi inter ſe ſunt; erunt ipſi in continuatione ſuarum proportionum minimi, per ea, quæ ad propoſ. 24. huius lib. demonſtrauimus.

A..... B.... C.....
D..
E... F.. G....
H---- I---- K----
L-----

Si verò non ſunt inter ſe primi, [b] inuenta ſit maxima eorum communis menſura numerus D, qui metiatur ipſos A,B,C, per numeros E,F,G. Dico E,F,G, minimos eſſe in proportionibus numerorum A,B,C. Quòd enim eaſdem habeant proportiones, quas numeri A,B,C, ſic oſtendetur. Quoniam D, ipſos A,B,C, metitur per E,F,G; [c] fit, vt D, ipſos E,F,G, multiplicans faciat A,B,C. Quare, per ea, quæ ad propoſ. 18. huius lib. oſtendimus, eaſdem rationes habebunt E,F,G, quas numeri A,B,C. [b] 3. ſeptimi. [c] 9. prom.

QVOD verò E,F,G, ſint minimi omnium eandem rationem habentium cum ipſis, hoc modo perſpicuum fiet. Si non ſunt minimi, erunt aliqui alij ipſis minores, minimi in eiſdem proportionibus. Sint ergo, ſi fieri poteſt, minimi H, I, K; qui quoniam ipſos A,B,C, metiuntur æquè, vt ad propoſ. 21. huius libri oſtendimus; metiantur eos per numerum L. Quo poſito, [d] fit, vt L, multiplicans numeros H,I,K, producat numeros A,B,C; [e] & viciſsim L, ipſos A,B,C, metiatur per H,I,K. Quoniam igitur E, primus multiplicans D, quartum facit A, & H, ſecundus multiplicans L, tertium facit eundem A; [f] erit, vt E, primus ad H, ſecundum, ita L, tertius ad D, quartum: Eſt autem E, maior quàm H. Igitur & L, maior erit, quàm D; Atque adeò, cum L, ipſos A,B,C, metiatur; non erit D, maxima menſura communis numerorum A,B,C. Quod eſt abſurdum, & contra hypotheſim. Non igitur erunt alij numeri minores ipſis E,F,G, minimi in continuatione proportionum A, ad B, & B, ad C; ſed ipſi E,F,G, minimi erunt. Quamobrem, numeris datis quotcunque, reperimus minimos, &c. Quod faciendum erat. [d] 9. prom. [e] 8. prom. [f] 19. ſeptimi

COROLLARIVM.

HINC fit, maximam menſuram quotlibet numerorum, metiri ipſos per numeros, qui minimi ſunt omnium eandem proportionem cum ipſis habentium. Oſtenſum enim eſt, numeros E,F,G, per quos D, maxima menſura numerorum A,B,C, ipſos A,B,C, metitur, minimos eſſe in continuatione proportionum A, ad B, & B, ad C: Eademq; eſt in cæteris ratio.

SCHOLIVM.

A,16. B,24. C,36. D,54. E,81.
H, 8. I, 9
F, 2, G, 3. K, 4. L, 6. M, 9.

EX his facili via comperiemus duos minimos numeros, qui eandem habeant proportionem, quam quotcunq; numeri dati continuè proportionales. Vt ſi proponantur continuè proportionales A, B, C, D, E, ſiue illi ſint in continuatione proportionis A, ad B, minimi, ſiue non; reperiemus duos in eadem proportione minimos, ſi per hoc problema ſumamus F, & G, minimos in proportione duorum A, & B; nimirum illos, per quos I, maxima eorum cõmunis menſura eos metitur.

A... B..... C.....
D...
E. F.. G...

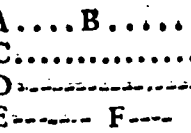
A.... B.. C.....
D..
E.. F. G...

CAETERVM contingit interdum, vnum numerorum E,F,G, per hanc propoſitionẽ inuentorum eſſe vnitatem; quando ſcilicet D, maxima menſura vni ipſorum A,B,C, æqualis eſt, vt ex his exemplis apparet. Manifeſtum eſt autem, tunc inuentos E,F,G, eſſe minimos in continuatione ſuarum proportionum, cum minor numerus dari non poſſit, quàm vnitas.

PROBL. 4. PROPOS. 36. 36.

DVOBVS numeris datis, reperire, quem illi minimum metiantur, numerum.

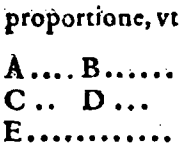
SIT reperiendus minimus numerus omnium, quos dati numeri A, & B, metiũtur. Sint primũ dati numeri A, & B, inter ſe primi, ſe ſeq; mutuo multiplicantes faciant C. Dico C, eſſe minimum, quem A, & B, metiuntur. Quod enim eum metiãtur, perſpicuum eſt. Nam cùm producatur C, ex A in B, vel ex B, in A; [g] metietur A, ipſum C, per B; & B, eundem C, per A. Vterque igitur A, & B, ipſum C, metitur. Quod autẽ C, ſit minimus omnium, quos A, & B, metiũtur, ſic demõſtrabimus. [g] 7. prom.



Si C, non eſt minimus; metiantur, ſi fieri poteſt, A, & B, alium numerum D, ipſo C, minorem; metiaturq; A, ipſum D, per E, at B, eundem D, per F. Quo poſito, [a] tam ex A, in E, quàm ex B, in F, & è contrario, producetur numerus D. Quia igitur idem numerus D, fit ex A, primo in E, quartum, & ex B, ſecundo in F, tertium; [b] erit, vt A, primus ad B, ſecundum, ita F, tertius ad E, quartum. Igitur A, & B, (cum ponantur primi inter ſe, [c] & ob id in ſua proportione minimi) [d] æquè metiẽtur ipſos F, & E; nimirum A, ipſum F, & B, ipſum E. Quoniam verò A, multiplicans B, & E, facit C, & D; [e] erit C, ad D, vt B, ad E: Ac propterea cùm B, metiatur ipſum E, vt oſtenſum eſt; metietur & C, numerus numerum D, maior minorem. Quod eſt abſurdum. Non igitur A, & B, metientur alium numerum minorem ipſo C; atque adeò C, minimus eſt omnium, quos metiuntur.

a 9. pron.
b 19. ſeptimi
c 23. ſeptimi.
d 21. ſeptimi
e 17. ſeptimi.

Sint deinde dati numeri A, & B, non primi inter ſe. [f] Inueniantur C, & D, minimi in eadem proportione, vt ſint quatuor numeri proportionales, nimirum A, ad B, vt C, ad D. Quo poſito, [g] fiet idem numerus ex A, primo in D, quartum, & ex B, ſecundo in C, tertium.



Factus ergo ſit E. Dico E, hac via procreatum eſſe minimum, quem A, & B, metiuntur. Quod enim eum metiantur, manifeſtum eſt. Nam cum tam A, multiplicatus à D, quàm B, multiplicatus à C, ipſum E, producat; [h] metietur tam A, quàm B, ipſum E. Quod verò E, ſit minimus omnium, quos A, & B, metiuntur, ita probabitur. Si E, non eſt minimus, metiatur, ſi fieri poteſt, A, & B, alium numerum F, ipſo E, minorem: metiatur autem A, ipſum F, per G; & B eundem F, per H. Quo poſitò, [i] fiet F, tam ex A, in G, quàm ex B, in H. Quia igitur idem numerus F, fit & ex A, primo in G, quartum, & ex B, ſecundo, in H, tertium: [k] erit, vt A, primus ad B, ſecundum, ita H, tertius ad G, quartum. Quare C, & D, cum ſint minimi in proportione A, ad B, vel H, ad G; [l] metientur ipſos H, & G, æquè; nimirum C, ipſum H; & D, ipſum G. Quia verò A, multiplicans D, & G, facit E, & F; [m] erit E, ad F, vt D, ad G; Ac propterea cum D, metiatur ipſum G, vt oſtenſum eſt; metietur etiam E, numerus numerum F, maior minorem. Quod eſt abſurdum. Non igitur A, & B, metientur alium numerum ipſo E, minorem; atque adeò E, minimus eſt omnium, quos metiuntur. Quamobrem, duobus numeris datis, reperimus, quem illi minimum metiantur, numerum. Quod faciendum erat.

f 35. ſeptimi.
g 19. ſeptimi
h 7. pron.
i 9. pron.
k 19. ſeptimi
l 21. ſeptimi
m 17. ſeptimi.

COROLLARIVM.

Hinc fit, ſi duo numeri multiplicent minimos eandem rationem habentes, maior minorem, & minor maiorem, produci numerum minimum, quem illi metiantur. Nam poſitis C, & D, minimis in proportione A, ad B, demonſtratum eſt, numerum E, factum ex A, minore in D, maiorem, & ex B, maiore in C, minorem, eſſe minimum, quem A, & B, metiuntur.

SCHOLIVM.

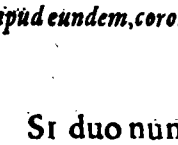
Hoc autem corollarium apud Campanum eſt propoſitio 35. huius libri ſeptimi; Et ſequens propoſitio apud eundem, corollarium eſt propoſitionis 35.

35.

THEOR. 33. PROPOS. 37.

Si duo numeri numerum quempiam metiantur: Etiam minimus, quem illi metiuntur, eundem metietur.

Metiantvr duo numeri A, & B, quemlibet numerum C D, ſitq; alius numerus E, minimus, quem iidem A, & B, metiuntur. Dico & E, ipſum C D, metiri. Si enim E, ipſum C D, non metitur; ablato E, ex C D, quoties poteſt auferri, relinquetur numerus quidã minor, quàm E. Relinquat igitur E, ablatus ex C D, quoties poteſt, numerum, ſi fieri poteſt, F D, minorem ſe, ita vt E, metiatur ablatum C F. Quoniam igitur tam A, quàm B, ipſum E, metitur, & E, ipſum C F; [n] metietur quoque tam A, quàm B, ipſum C F. Itaq; A, & B, cum metiantur totum C D, & ablatum C F; [o] metiẽtur & reliquum F D. Eſt autẽ F D, minor quàm E. Non igitur E, minimus eſt numerus, quem A, & B, metiuntur. Quod eſt abſurdum, & contra hypotheſim. Quare E, ipſum C D, metitur. Si duo ergo numeri numerum quempiam metiãtur, &c. Quod erat demonſtrandum.

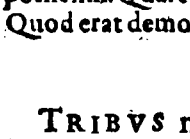


n 11. pron.
o 12. pron.

36.

PROBL. 5. PROPOS. 38.

Tribvs numeris datis, reperire, quem illi minimum metiantur, numerum.



Sit inueniendus minimus numerus, quem dati tres numeri A, B, C, metiantur. [p] Inuento D, minimo, quem metiantur duo A, & B; metietur & eundem D, reliquus C, aut nõ metietur. Metiatur primũ C, ipſum D, ita vt omnes tres A, B, C, ipſum D, metiantur. Dico numerum D, minimum inuentum, quem A, & B, metiuntur, minimum quoq; eſſe, quem tres A, B, C, metiantur. Si enim D, non eſt minimus, metiantur, ſi fieri poteſt A, B, C, alium numerum E, ipſo D, minorem.

p 36. ſeptimi

Quo

Quoniam igitur A,& B, metiuntur ipſum E, minorem quàm D; non erit D, minimus, quem A,& B, metiuntur. Quod eſt abſurdum,& contra hypotheſim. Immò, cum A,& B, metiantur ipſum E; & D, ſit minimus, quem ijdem A,& B, metiuntur; [a] metietur quoq; D, ipſum E, maior minorem. Quod eſt abſurdum. [a] 37. ſeptimi

SED iam C, non metiatur ipſum D, inuentum. [b] Inuento igitur E, minimo, quem C,& D, metiantur; Dico E, eſſe minimum, quem A, B, C, metiantur. Quod enim eum metiantur, ita oſtenditur. Cùm A,& B, metiantur ipſum D,& D, ipſum E; [c] metientur quoque A, & B, ipſum E. Metitur autem & C, eundem E. Igitur omnes tres A, B, C, ipſum E, metiuntur. Quod autem E, ſit minimus, quem metiantur A, B, C, hoc modo probabitur. Si E, non eſt minimus; metiantur, ſi fieri poteſt, A, B, C, alium numerum F, ipſo E, minorem. Quoniam igitur A,& B, ipſum F, metiuntur; [d] metietur quoq; eundem F, numerus D, nimirum minimus inuentus, quem numeri A,& B, metiuntur; Atque adeò cùm C,& D, metiantur ipſum F, minorem, quàm E; non erit E, minimus, quem C,& D, metiantur. Quod eſt abſurdum,& contra hypotheſim. Immo cum C,& D, metiantur ipſum F; [e] metietur quoque eundem F, numerus E, minimus, quem metiuntur iidem C,& D: maior minorem. Quod eſt abſurdum. Non ergo A, B, C, alium numerum ipſo E, minorem metientur; ſed ipſe E, erit minimus. Quapropter tribus numeris datis, reperimus, quem illi minimum metiantur, numerum. Quod erat faciendum.

A.. B... C....
D.....
E.....
F--------

[b] 36. ſeptimi
[c] 11. pron.
[d] 37. ſeptimi
[e] 37. ſeptimi

COROLLARIVM.

SEQVITVR ex his, ſi tres numeri numerum quempiam metiantur; etiam minimum, quem illi metiuntur, eundem metiri. Nam in extrema huius demõſtrationis parte, ex eo, quòd A, B, C, ponebantur metiri ipſum F, oſtenſum eſt, & E, minimum, quem A, B, C, metiuntur, eundem F, metiri.

SCHOLIVM.

Hoc corollarium alio modo, non ſecus ac propoſ. 37. huius lib. oſtendere poterimus. Metiantur enim A, B, C, quemcunq; numerum D E, ſitq; F, minimus, quem iidem A, B, C, metiantur. Dico & F, ipſum D E, metiri. Si enim non metitur, metiatur eius partem D G, relinquatq; numerum G E, ſe minorem. Quoniam igitur A, B, C, ipſum F, metiuntur, & F, ipſum D G; [a] metientur quoque A, B, C, eundem D G; Ac proinde, cùm & totum D E, ponantur metiri; [b] metientur & reliquum G E, ipſo F, minorem. Quare F, non erit minimus, quem A, B, C, metiuntur. Quod eſt abſurdum, & contra hypotheſim. Metitur igitur F, ipſum D E.

A.. B... C.....
D.....G---- E
F.....

[a] 11. pron.
[b] 12. pron.

PARI ratione; Pluribus numeris datis, quàm tribus, reperiemus, quem illi minimum metiantur, numerum; locumq; habebit hoc idem corollarium. Nam ſi dati numeri fuerint quatuor, inueniendus erit primùm minimus, quem tres metiantur. Si quinq; reperiendus erit minimus, quem quatuor metiantur, &c. Reliqua autem omnia peragenda, vt de tribus numeris dictum eſt.

THEOR. 34. PROPOS. 39. 37.

SI numerum quiſpiam numerus metiatur; ille, quem metitur, partem habebit à metiente denominatam.

A.....
B.... C...

METIATVR numerum A, numerus B. Dico A, habere partem aliquam à B, denominatam. Metiatur enim B, ipſum A, toties, quot vnitates ſunt in numero C. Quia igitur vnitas ipſum C,& B, ipſum A, æquè metitur; [a] & viciſsim vnitas æquè ipſum B,& C, ipſum A, metietur; atq; adeò eadem pars erit vnitas ipſius B, quę C, ipſius A: Eſt autem vnitas pars ipſius B, denominata ab ipſo B, vt ad defin. 2. huius libri docuimus. Igitur & C, pars erit ipſius A, ab eodem B, denominata. Si numerum ergo quiſpiam numerus metiatur, &c. Quod oſtendendum erat.

[a] 15. ſeptimi.

THEOR. 35. PROPOS. 40. 38.

SI numerus partem habuerit quamlibet; metietur illum numerus à parte denominatus.

A.....
B... C.....

HABEAT numerus A, partem B, à qua numerus C, denominatur. Dico C, metiri ipſum A. Nam cùm B, pars denominetur à C; ſit autem & vnitas pars ipſius C, ab eodē C, denominata; metietur vnitas ipſum C,& B, ipſum A, æquè. [b] Viciſsim ergo & vnitas ipſum B,& C, ipſum A, metietur. Si numerus ergo partem habuerit quamlibet, &c. Quod demonſtrandum erat.

[b] 15. ſeptimi

39. PROBL. 6. PROPOS. 41.

NVMERVM reperire, qui minimus cùm sit, habeat datas partes.

SINT datæ partes A,B,C: Inueniendusq; sit minimus numerus datas partes habens. Sint à partibus A,B,C, numeri denominati, siue qui ipsas denominent, D,E,F: [a] minimusq; quem D, E,F, metiuntur, numerus G. Dico G, esse minimũ, qui habeat datas partes A,B,C. Quod enim eiusmodi partes habeat, ita ostendetur. Cùm D, E,F, ipsum G, metiantur, [b] habebit G, partes à D,E,F, denominatas, hoc est, partes A,B,C, cùm hæ denominentur à D,E,F. Quòd verò G, sit minimus illas partes habens, perspicuum est. Si enim non est minimus, habeat, si fieri potest, H, ipso G, minor easdem partes A, B, C. Quia igitur H, habet partes A, B, C, [c] metientur ipsum numeri D, E, F, à partibus A,B,C, denominati; Atq; adeò, cùm H, minor sit quàm G, nõ erit G, minimus, quem metiuntur D,E,F. Quod est absurdum, & contra hypothesim. Non igitur minor numerus, quàm G, datas partes A,B,C, habebit, sed ipse G, minimus erit. Quare numerum reperimus, qui minimus cùm sit, habet datas partes. Quod faciendum erat.

a 38. *septimi*

b 39. *septimi*

c 40. *septimi*

D.. A, Secunda
E... B, Tertia
F.... C, Quarta
G.....
H----------

SCHOLIVM.

QVOD si sumantur numeri I, K, L, per quos numeri D, E, F, ipsum G, metiuntur; erunt numeri I, K, L, datæ partes A,B,C, ipsius G, denominatæ scilicet à D,E,F. Cùm enim D,E,F, ipsum G, metiantur per I, K, L; metietur æquè vnitas ipsos I,K,L, & numeri D,E,F, ipsum G. [a] *Vicissim ergo metietur quoq; vnitas ipsos D,E,F, & numeri I,K,L, ipsum G; atq; adeò vnitas ipsorum D,E,F, eadem pars erit, quæ numeri I,K,L, ipsius G. Cùm ergo vnitas sit pars ipsorum D,E,F, ab ipsis denominata; erunt & I,K,L, ipsius G, partes denominatæ à D,E,F.*

a 15. septimi.

A, Secunda D.. I.....
B, Tertia E... K....
C, Quarta F.... L...
G.....

EX his autem sequitur, minimum numerum, quem quotlibet numeri metiuntur, esse minimum habentem partes à numeris metientibus denominatas. Ostensum enim est numerum G, quem minimũ metiuntur D,E,F, minimũ esse, q̃ habeat partes A,B,C, eiusmodi sunt I,K,L, à metientib numeris D,E,F, denominatas.

IAM verò, vt Campanus ait, si inuentus minimus numerus datas partes habens duplicetur, triplicetur, &c. habebitur secundus numerus post minimum, tertius, quartus, &c. easdem partes continens. Inuento enim G, minimo, qui habeat partes A,B,C, denominatas à D, E, F; sit illius duplus, numerus H; triplus verò I, &c. Dico H, esse secundum numerum, qui easdem partes A,B,C, à numeris D,E,F, denominatas habeat, & I, tertium, &c. ita vt neque inter G, minimum, & eius duplum H, neque inter H, duplum, & I, triplum, &c. cadat alius numerus habens easdem partes sed ipsi soli H, I, & cæteri multiplices ipsius G, dictas partes contineant. Quod enim H, & I, &c. partes A,B,C, habeant, denominatas scilicet à D,E,F, ita ostendemus. Quoniam D, E,F, metiuntur ipsum G per constructionem: & G, ipsos H,I, & reliquos multiplices ipsius G. [b] *metientur quoq; D,E,F, eosdem H I, & reliquos multiplices ipsius G.* [c] *Quare H,I, & reliqui numeri ipsius G, multiplices, partes habebunt à metientibus numeris D,E,F, denominatas, quales ponuntur partes A,B,C.*

G..... A,D..
H..... B,E...
I..... C,F....
K----------M-----L
N----------P-----O

b 11. pron.

c 39. septi.

QVOD autem H, duplus ipsius G, minimi, sit secundus eas partes habens, hoc modo demonstrabimus. Si H, non est secundus, sit si fieri potest, alius K L, ipso prior, qui nimirum maior sit, quàm G, minimus, et minor, quàm H, duplus ipsius G. Detracto autem G, ex K L, relinquatur M L, ipso G, minor. Quoniam igitur K L partes habet A,B,C; [d] *metientur ipsum numeri D,E,F, à partibus illis denominati; Ac propterea & G, minimus, quem D,E,F, metiuntur, metietur per coroll. propos. 38. huius lib. eundem K L: Metitur autem & G, ablatum K M, sibi æqualem.* [e] *Igitur & reliquum M L, metietur, maior minorem. Quod est absurdum. Non ergo alius numerus inter G, & H, cadens partes habet A,B,C; Ac proinde H, secundus est huiusmodi partes habens.*

d 40. septimi.

e 12. pron.

NON aliter ostendemus numerum I triplum ipsius G, esse tertium dictas partes habentem. Si enim non est tertius sit alius, si fieri potest, videlicet N O, ipso prior, qui videlicet maior sit, quàm H, duplus minor verò quàm I triplus. Detracto autem H, duplo ex N O, relinquatur P O, minor ipso G. Quia igitur N O. partes habet A,B,C, [f] *metientur ipsum numeri D,E,F, à partibus illis denominati. Atque idcirco & G. minimus, quem D,E,F, metiuntur, eundem N O, per coroll. propos. 38. huius lib. metietur: Metitur autem & G, ipsum N P, ablatum ipsi H, duplo æqualem.* [g] *Igitur & reliquum P O, idem G, metietur, minorem maior. Quod est absurdum. Non ergo alius numerus inter H, & I, cadens partes habet A,B,C, datas; Ac propterea I, tertius est illas partes habens. Eademq; ratione quadruplus ipsius G, quartus erit; & quintuplus, quintus, &c.*

f 40. septimi.

g 12. pron.

HVC quoque referri potest sequens problema.

NVMERVM reperire, qui minimus cùm sit, habeat datas partes, hac lege, vt quælibet pars subsequentem partem contineat.

SINT

SINT data partes A,B,C; inueniendumq; sit numerus minimus, qui eas habeat hoc ordine, vt pars A, contineat partem B, & pars B, partem C. Sint autem partibus A,B,C, numeri denominati D,E,F; Fiatq; G ex E, in F: Item H, ex D, in G. Dico H, esse minimum numerum, qui quæritur. Quod enim habeat datas partes ordine prædicto, facilè demonstratur. Nam cùm ex D, in G, fiat H; erit G, toties in H, quoties vnitas in D: Est autem vnitas pars ipsius D denominata ab ipso D. Igitur & G, pars est ipsius H, ab eodem D, denominata; Atq; adeò H, habet partem A, nimirum numerum G, à D, denominatam. Deinde quia ex E, in F, fit G; erit eadem ratione F, pars ipsius G, denominata ab E: Atq; adeò A, pars ipsius H, nimirum numerus G, habet partem B, nimirum numerum F, ab E, denominatam. Deniq; cùm F, habeat vnitatem, tanquam partem ab ipso F, denominatam, perspicuum est B, partem ipsius G, partis, nimirum numerum F, habere quoque partem C, ab F, denominatam, nimirum vnitatem. Quare numerus inuentus H, partem habet A; & pars A, partem B; & pars B, partem C. Quod autem H, sit minimus eas partes hoc ordine continens, hac ratione ostendetur. Si enim non est minimus, habeat minor numerus I, si fieri potest, easdem partes eodem ordine, ita vt K, sit ipsius I, pars A, à numero D, denominata; & L, ipsius K, pars B, ab E, denominata; & M, ipsius L, pars C, ab F, denominata. Quia igitur K, pars est ipsius I, à D, denominata; erit K, toties in I, quoties vnitas in D; [a] Atq; adeò ex D, in K, fiet I. Eadē ratione ex E, in L, fiet K; & L, ex F, in M. Itaq; cùm D, ipsos G, & K, multiplicās faciat H, & I; [b] erit, vt H, ad I, ita G, ad K. Eadē ratione, cùm ex E, in F, & L, fiant G, & K; erit, vt G, ad K, ita F, ad L. Et cùm ex F, in vnitatē, & M, fiant F, & L; erit, vt F, ad L, ita vnitas ad M. Quoniam igitur est, vt H, ad I, ita G, ad K; & vt G, ad K, ita F, ad L; & vt F, ad L, ita vnitas ad M: Erit per lemma propos. 14. huius lib. vt H, ad I, ita vnitas ad M: Ponitur autem H, numerus numero I, maior. Vnitas igitur maior quoq; erit numero M, pars toto. Quod est absurdum. Non ergo alius numerus minor, quàm H, habet partes A,B,C, ordine prædicto, sed ipse H, minimus est. Quod est propositum.

A,Secunda. B,Tertia. C,Quarta.
D.. E... F....
G.....
H.....
Vnitas
I----------
K----------
L----------
M----------
H. G. F. Vnitas.
I. K. L. M.

a 15. defin.
b 15. septimi.

SI verò plures fuerint partes, quàm tres, eadem prorsus est via tenenda ac demonstratio. Vt si numeri 2. 3. 4. 5. 6. sint denominatores partium, fient 30. ex 5. in 6. & 120. ex 4. in 30. & 360. ex 3. in 120. & tandem 720. ex 2. in 360. Nam numerus 720. habebit partem à 2. denominatam; & hac partem à 3. denominatam; & hac aliam à 4. & hac aliam à 5. & hac denique partem à 6. denominatam, vt manifestum est.

QVOD si numerum H, inuentum duplicemus, triplicemus, &c. habebimus alios numeros, videlicet secundum, tertium, quartum, &c. qui easdem partes eodem ordine habeant, duplicatas tamen, vel triplicatas, &c. Nam G, duplicatus, vel triplicatus, &c. dimidiata pars erit, ipsius H, duplicati, vel triplicati, &c. quemadmodum & G, ipsius H. Eademq; est ratio de cæteris partibus.

FINIS ELEMENTI SEPTIMI.

EVCLIDIS

ELEMENTVM OCTAVVM.

THEOR. 1. PROPOS. 1. 1.

SI fuerint quotcunq; numeri deinceps proportionales, extremi verò ipsorum primi inter se fuerint; ipsi minimi sunt omniũ eandem cum eis rationẽ habentiũ.



VMERORVM deinceps proportionalium quotcunq; A,B,C,D, extremi A, & D, inter se primi sint. Dico A, B, C, D, minimos esse omniũ eandem cum eis proportionem habentium. Si enim non sunt minimi, erunt alij ipsis minores, in eadem proportione. Sint ergo ipsis minores in eadem ratione E,F,G,H, si fieri potest. Quoniam igitur quotcunque numeri sunt A,B,C,D, & alij illis æquales multitudine E,F,G,H, qui bini sumuntur, & in eadem

A..... E---
B..... F-----
C..... G--------
D.....H----------

ratione, [c] erit, ex æqualitate, vt A, ad D, ita E, ad H: [b] Sunt autem A, & D, in sua proportione minimi, quòd inter se primi esse ponantur. [c] Igitur tam A, ipsum E, quàm D, ipsum H, æquè metietur, maior minorem. Quod est absurdum. Non ergo numeri minores ipsis A, B, C, D, sunt in eadem cum eis ratione, sed ipsimet minimi sunt; Ac propterea, si fuerint quotcunque numeri deinceps proportionales, &c. Quod erat demonstrandum.

c 14. *septimi*
b 23. *septimi*
c 21. *septimi*

SCHOLIVM.

A.... E---
B..... F-----
C..... G------
D..... H--------

PERSPICVVM autem est ex demonstratione, numeros A, B, C, D, esse minimos in continuatione suarum proportionum, si extremi A, & D, inter se primi sint, siue A, B, C, D, sint continuè proportionales, vt vult Euclides, siue non. Vt hoc exemplum ostendit, in quo proportiones omnes diuersæ sunt, quemadmodum in superiori eadem semper proportio reperitur.

2. PROBL. 1. PROPOS. 2.

NVMEROS reperire deinceps proportionales minimos, quotcunque iusserit quispiam, in data ratione.

SINT minimi numeri datæ rationis A, & B, oporteatq; inuenire primùm tres numeros minimos in proportione data A, ad B. Multiplicans A, seipsum, & numerum B, faciat C, & D. Deinde B, multiplicans seipsum faciat E. Dico C, D, E, esse tres minimos in proportione A, ad B. Quòd enim proportionales sint in data proportione A, ad B, hoc est, sit vt C, ad D, ita D, ad E, sic ostendemus. Cùm ex A, in A, & B, fiant C, & D; [d] erit vt A, ad B, ita C, ad D. Rursus cùm ex B, in A, & B, fiant D, & E; [e] erit quoque, vt A, ad B, ita D, ad E. Quare proportionales sunt C, D, E, continuè in proportione data A, ad B. Quod verò in eadem ratione sint minimi, ita demonstrabitur. Quoniam extremi C, & E, procreati sunt ex A, & B, in se ipsos; [f] sunt autē A, & B, inter se primi, quòd minimi sint in sua proportione; [g] Erunt & C, E, extremi, inter se primi. [h] Quare C, D, E, minimi sunt in ratione A, ad B.

A.. B...
C....D..... E.....
F, 8. G, 12. H, 18. I, 27.
K, 16. L, 24. M, 36. N, 54. O, 81.

d 17. *septimi*
e 17. *septimi*
f 24. *septimi*
g 29. *septimi*
h 1. *octani.*

IAM verò ex A, in tres inuentos C, D, E, fiant F, G, H, & ex B, in vltimum E, fiat I. Dico quatuor numeros F, G, H, I, minimos esse in eadem ratione data A, ad B. Quod enim proportionales sint in ratione A, ad B, ita demonstrabimus. Quoniam A, multiplicans ipsos C, D, E, fecit F, G, H, habebunt, ex iis, quæ ad propos. 18. lib. 7 ostendimus, numeri F, G, H, easdem proportiones, quas C, D, E, hoc est, quam habet A, ad B. Rursus quia A, & B, ipsum E, multiplicantes, fecerunt H, & I; [i] erit quoque, vt A, ad B, ita H, ad I. Sunt igitur F, G, H, I, continuè proportionales in data proportione A, ad B. Quòd autem in data ratione minimi sint, ita perspicuum fiet. [k] Quoniam A, & B, minimi in sua proportione, sunt inter se primi; factiq; sunt C, & E, ex A, & B, in se ipsos; Item procreati sunt F, & I, ex A, B, in C, E; nimirum F, ex A, in C, & I, ex B, in E; [l] erunt & F, I, extremi, inter se primi. [m] Quare F, G, H, I, in sua proportione, quæ est A, ad B, minimi sunt.

i 18. *septimi*
k 24. *septimi*
l 29. *septimi*
m 1. *octani.*

NON aliter, si ex A, in quatuor inuentos F, G, H, I, fiant K, L, M, N, & ex B, in vltimum I, fiat O: erunt K, L, M, N, O, quinque numeri minimi in data ratione A, ad B: Eademq; ratione inueniemus sex, septem, octo, &c. Quare numeros reperimus deinceps proportionales minimos, &c. Quod faciendum erat.

SCHOLIVM. I.

EODEM modo quatuor numeri minimi proportionales producentur ex multiplicatione B, in tres inuentos E, D, C, & ex multiplicatione A, in C. Fiant enim I, H, G, ex B, in E, D, C: & F, ex A, in C Quo peracto, [a] numeri F, G, eandem rationem habebunt, quam A, B; quòd A, B, multiplicantes C, ipsos F, G, fecerint: Item & G, H, I, ex iis, quæ ad propos. 18, huius lib. demonstrauimus, in eadem erunt ratione, in qua C, D, E, hoc est, in qua A, B; quòd B, multiplicans C, D, E, ipsos G, H, I, fecerit. Sunt ergo F, G, H, I, in eadem ratione, in qua A, B. Quod verò minimi sint, ostendetur, vt prius.

a 18. *septimi.*

A.. B...
C....D..... E.....
F, 8. G, 12. H, 18. I, 27.
K, 16. L, 24. M, 36. N, 54. O, 81.

NON aliter si ex B, in quatuor inuentos I, H, G, F, fiant O, N, M, L, & ex A, in F, fiat K; erunt K, L, M, N, O, quinque numeri minimi in data ratione A, ad B. Eademq; ratione inueniemus sex, septem, octo, &c. Itaq; siue A, multiplicetur in omnes inuentos, & B, in vltimum; siue B, in omnes inuentos, & A, in primum; producentur semper plures numeri in eadem ratione data A, ad B, minimi. Demonstrauit enim Euclides, quatuor F, G, H, I, produci ex A, in C, D, E, & ex B, in E: Nos autem eosdem ostendimus procreari ex B, in E, D, C, & ex A, in C.

COROLLARIVM I.

HINC fit, si tres numeri minimi sint continuè proportionales, extremos quadratos esse: si autem

& autem quatuor fuerint, cubos. Nam trium minimorum C, D, E, extremi C, & E, facti ſunt ex A, & B, in ſeipſos, ideoq; æqualiter ſunt æquales. Quare ex definitione 18. quadrati ſunt. Eodem modo, cùm quatuor minimorum F, G, H, I, extremi F, & I, geniti ſint ex A, & B, lateribus in C, & E, quadratos ipſorũ A, & B, hoc eſt, tam numerus F, ex mutua multiplicatione trium numerorum æqualium A, A, A, quàm numerus I, ex multiplicatione mutua triũ numerorum æqualium B, B, B, ſit procreatus, ac propterea vterque ſit æqualiter æqualis æqualiter; ipſi, ex defin 19. cubi erunt.

Sic etiam, ſi fuerint quinq; numeri minimi proportionales continuè; erunt extremi eorũ quadrati quadratorum; Et ſic ſi fuerint plures, erunt eorũ extremi, numeri alij ſub alijs denominationibus, quæ in Algebra ſolent explicari. Hæc autẽ omnia manifeſta ſunt ex multiplicationibus, quibus numeri proportionales, iuxta hanc propoſ. procreantur.

Neque verò dicere quis poterit, corollarium hoc verum quidem eſſe in tribus, quatuórve numeris minimis continuè proportionalibus inuentis arte in hac propoſ. tradita, non autem in quibuſuis tribus, quatuórve numeris minimis continuè proportionalibus vtcunq; propoſitis: Dicere, inquam, nemo hoc poterit, quia dati quilibet tres numeri, vel quatuor minimi continuè proportionales æquales prorſus ſunt iis, qui per hanc propoſ. inueniuntur. Si enim illi dati minores eſſent inuentis, non eſſent inuenti, minimi, quod eſt contra hanc propoſ. Si verò dati, maiores eſſent inuentis, non eſſent illi dati, minimi. quod eſt contra hypotheſim. Quod clariſſimè ita fiet perſpicuum. Dati ſint tres numeri A, B, C, minimi continuè proportionales: ſumptiq; duobus minimis D, E, in proportione A, ad B, vel B, ad C, ex ſcholio propoſ. 35. lib. 7. inueniantur per hanc propoſ. ex his duobus minimis D, E, tres minimi F, G, H, in eadem proportione. Dico tres A, B, C, datis à tribus inuentis F, G, H, non differre. Nam neceſſariò A, ipſi F, æqualis erit; atque ita, cùm ſit, vt A, ad B, ita F, ad G, erit quoq; permutando, vt A, ad F, ita B, ad G; ac proinde ſi A, æqualis eſt ipſi F, erit & B, ipſi G, æqualis: Eademq; ratione oſtendemus C, æqualem eſſe ipſi H: ideoq; tres A, B, C, tribus F, G, H, ſinguli ſingulis, æquales erunt. Eademq; ratio eſt de quatuor, aut pluribus. Quòd ſi A, dicatur minor, quàm F, oſtendemus eodem argumento & B, C, minores eſſe, quàm G, H. Quare F, G, H, minimi non ſunt. quod eſt abſurdum, & contra hanc propoſ. Si verò A, concedatur maior, quàm F; erunt eodem argumento & B, C, maiores, quàm G, H: atq; idcirco A, B, C, minimi non ſunt. quod eſt contra hypotheſim. Cùm ergo A, minor non ſit, aut maior, quàm F; æqualis omnino erit; ideoq; vt oſtenſum eſt, & B, C, ipſis G, H, æquales erunt. Quod eſt propoſitum.

A --- B ----- C ------
D, 2. E, 3.
F, 4. G, 6. H. 9.

COROLLARIVM II.

Perspicvvm quoq; eſt, extremos numeros proportionaliũ quotcunq; ſecundùm hanc propoſitionem inuentorum in data ratione minimorũ, inter ſe primos eſſe. Quod quidẽ facilè oſtendemus ex multiplicationibus, quibus numeri proportionales producuntur, & ex propoſ. 29 lib. 7. quemadmodũm id demonſtratum fuit de numeris extremis C, E, & F, I, &c.

COROLLARIVM III.

Constat etiam, duos numeros minimos in data ratione, metiri omnes medios quotcunq; minimorum in eadem ratione; quia ſcilicet producuntur ex illorum multiplicatione in alios quoſdam numeros. Vt in dato exemplo D, medius producitur ex A, in B; & G, H, medij ex A, in D, & E, vel ex B, in C, & D; Item L, M, N, medij ex A, in G, H, I, vel ex B, in F, G, H; vt ex demonſtratione Euclidis, & ea, quam in Scholio tradidimus, apparet.

SCHOLIVM II.

Quoniam verò tam numeri A, C, F, K, quàm B, E, I, O, ex conſtructione, continuè proportionales ſunt ab vnitate, quòd illorum quidem proportiones à numero A, horum verò à B, denominẽtur, vt clarius demonſtrabitur propoſ. 9. huius lib. fit vt extremi numeri quotcunq; minimorum continuè proportionalium ſint vltimi tot continuè proportionalium ab vnitate, quorum proportiones à minimis numeris data ratione denominantur, quot ſunt propoſiti minimi continuè proportionales. Ita enim in ſuperiori exemplo vides C, & F, extremos numeros trium minimorũ continuè proportionalium in proportione A, ad B, eſſe vltimos trium numerorum continuè proportionalium ab vnitate, quorum proportiones denominantur ab A, & B. At verò F, & I, extremos quatuor continuè proportionalium, eſſe vltimos quatuor numerorum ab vnitate continuè proportionalium, &c. Quamobrem ſi quis optet inuenire quotcunq; integros numeros minimos in data ratione non multiplici (in multiplici enim res facilis eſt, quippe quæ ab vnitate incipiat) continuè proportionales; id facilè hac via conſequetur. Inuentis duobus minimis numeris in data ratione, ſumantur ab vnitate tot numeri continuè proportionales in proportione, cuius denominator ſit minor illorum, quot numeri mi-

nimi inueniendi proponuntur. Nam vltimus illorum ab vnitate continuè proportionalium erit primus continuè proportionalium inueniendorum, qui si per denominatorem datæ proportionis multiplicetur, habebitur secundus, & si hic rursum per denominatorem eundem multiplicetur, gignetur tertius, & sic deinceps. Vt si quis desideret octo minimos numeros in proportione sesquialtera: Inuentis minimis duobus numeris 1. & 2. in sesquialtera proportione, sumendi erunt octo numeri ab vnitate continuè proportionales in proportione dupla, quæ denominatur à 2. hoc modo 1. 2. 4. 8. 16. 32. 64. 128. Nam horum vltimus 128. erit primus octo numerorum inueniendorum, qui minimi sint in proportione 3. ad 2. vt hîc patet, 128. 192. 288. 432. 648. 972. 1458. 2187. si maiores numeri ad minores referantur. Eademq; de reliquis est ratio.

Boetius autem, & alij regulam hanc ita explicant, vt & nos quinto lib. in tractatione proportionum declarauimus. Sumantur tot numeri continuè ab vnitate multiplices secundùm denominationem partis aliquotæ, cuius in data proportione fit mentio, quot numeros continuè proportionales oportet inuenire in data proportione. Nam vltimus numerus erit primus inueniendorum. Vt in dato exemplo, quia desiderantur octo numeri minimi in proportione sesquialtera, sumendi sunt octo numeri ab vnitate dupli, vt primus, qui nimirum denominantur à denominatore partis secundæ, seu dimidiæ, cuius mentio fit in proportione sesquialtera, hoc est, à 2. Quod si optentur quinque numeri minimi in proportione sesquiquinta, sumendi erunt quinq; numeri ab vnitate quintupli; vt hîc 1. 5. 25. 125. 625. Nam 625. est primus quinq; numerorũ in proportione sesquiquinta, vt hic apparet; 625. 750. 900. 1080. 1296. Atq; ita de cæteris. Porrò hac arte nõ possunt inueniri (quod mirum videri possit) plures numeri continuè proportionales, quàm propositi sunt. Neque enim post 1296. in vltimo exemplo alius numerus inuenietur, qui habeat ad 1296. proportionem sesquiquintam; sicut neq; in priori exemplo post 2187. alius potest reperiri, qui ad 2187. proportionem sesquialteram habeat. Ratio autem huius rei est, quòd extremi hac arte inuenti sint inter se primi, vt ex demonstratione liquet. Hinc enim fit, vt vltimus non possit esse ad alium quempiam numerum, vt primus ad secundum, veluti propos. 17. lib. 9. demonstrabitur.

3. ## THEOR. 2. PROPOS. 3.

SI sint quotcunq; numeri deinceps proportionales minimi omnium eandem cum eis rationem habentium; Illorum extremi sunt inter se primi.

SINT numeri A, B, C, D, minimi deinceps proportionales. Dico extremos A, & D, inter se primos esse. Inueniantur enim duo E, F, minimi in ratione A, ad B, vel B, ad C, vel C, ad D. Deinde iuxta viam præcedentis problematis, tres minimi G, H, I, in eadem ratione, nec non quatuor K, L, M, N, & sic deinceps, donec multitudo K, L, M, N, æqualis sit multitudini A, B, C, D. Quoniam igitur A, B, C, D, minimi sunt in sua proportione, & in eadem quoque proportione minimi sumpti sunt K, L, M, N, illis multitudine æquales; erunt singuli singulis æquales, ne minores minimis dentur in eadem proportione, nimirum A, ipsi K, & D, ipsi N. Id quod nos Geometricè demonstrauimus ad finem coroll. 1. superioris propos. Sunt autem per coroll. 2. propos. præcedentis K, & N, inter se primi. Primi ergo quoque sunt A, & D. Quocirca, si sint quotcunque numeri deinceps proportionales minimi omnium eandem cum eis, &c. Quod erat ostendendum.

A, 8. B, 12. C, 18. D 27.
E, 2. F. 3.
G, 4. H, 6. I, 9.
K, 8. L, 12. M, 18. N, 27.

SCHOLIVM.

HAEC propositio intelligenda est de numeris minimis continuè proportionalibus, vt ex eius demonstratione, & verbis Euclidis apparere potest. Nam si A, B, C, D, non essent proportionales continuè, inueniri non possent, ex precedenti problemate, K, L, M, N, totidem minimi in eadem proportione. Immò si diuersæ sint proportiones, dabuntur aliquando minimi numeri deinceps proportionales, hoc est, continuati in suis proportionibus diuersis, quorum extremi non sunt inter se primi. Sunt enim hi numeri 6. 10. 13. 18, minimi in continuatione suarum proportionum, cùm tamen extremi 6. & 18. compositi sint inter se. Itaque hoc Theorema primi est conuersum, quoad numeros continuè proportionales. Etenim numeri quotcunque continuè proportionales, quorum extremi inter se sunt primi, minimi sunt in sua proportione, vt constat ex 1. theor. Et vicissim, numeri extremi quotcunque minimorum continuè proportionalium, inter se primi sunt, velut hic demonstratum est. At verò primum theorema, prout spectat ad numeros non continuè proportionales, conuerti nequit. Nam licet numeri quotcunque non continuè proportionales, quorum extremi sunt inter se primi, minimi sint in continuatione suarum proportionum, vt ex scholio propos. 1. huius libri liquet; Tamen non semper è contrario, numeri extremi quotcunque minimorum non continuè proportionalium, inter se primi sunt, vt manifestum est in exemplo nuper prolato 6. 10. 13. 18.

4. ## PROBL. 2. PROPOS. 4.

RATIONIBVS datis quotcunque in minimis numeris, reperire numeros deinceps minimos in datis rationibus.

SINT primùm datæ duæ rationes in minimis numeris A, ad B, & C, ad D; oporteatque inuenire tres

tres numeros minimos deinceps proportionales, in datis proportionibus. [a] Inuento numero E, minimo, quem metiantur B, & C, secundus & tertius; quoties B, ipsum E, metitur, toties A, metiatur ipsum F; & quoties C, eundem E, toties ipsum G, metiatur D. Dico F, E, G, minimos esse in proportionibus datis. Quòd enim deinceps datas proportiones habeant, ita ostendemus. Quoniam A, & B, æquè metiuntur ipsos F, & E; hoc est, per eundem numerum; metiantur per H: Quo posito, [b] A, & B, multiplicantes ipsum H, producent F, & E. [c] Quare erit vt A, ad B, ita F, ad E. Eadem ratione cùm C, & D, æquè metiantur ipsos E, & G; erit vt C, ad D, ita E, ad G. Igitur F, E, G, deinceps proportionales sunt in rationibus A, ad B, & C, ad D. Quòd autem minimi sint, sic manifestum erit. Si non sunt minimi, erunt aliqui illis minores, singulis singuli in eisdem rationibus: sint, si fieri potest, I, K, L. Quia igitur A, & B, minimi sunt in sua proportione; [d] ipsi æquè metientur I, & K, in eadem proportione existentes; nimirum B, ipsum K, consequens consequentem. Eademque ratione C, & D, æquè metientur K, & L; nimirum C, ipsum K, antecedens antecedentem. Quare cùm B, & C, ipsum K, metiantur; [e] metietur eundem K, numerus E, minimus, quem B, & C, metiuntur, minorem maior. Quod est absurdum. Non igitur erunt alij numeri minores ipsis F, E, G, in rationibus A, ad B, & C, ad D; Ac proptereà ipsi F, E, G, minimi sunt in datis rationibus.

A, 6. B, 5. C, 4. D, 3.
H, 4. F, 24. E, 20. G, 15.
I---- K---- L----

a 36. sept.
b 9. prop.
c 18. sept.
d 21. sept.
e 37. sept.

Sint deinde datæ tres rationes in numeris minimis A, ad B; C, ad D; & E, ad F; inueniendique sint quatuor minimi deinceps proportionales in datis rationibus. [f] Inuento rursum numero G, minimo, quem metiantur B, secundus, & C, tertius; quoties B, ipsum G, metitur, toties metiatur A, ipsum H; & quoties C, ipsum G, toties D, ipsum I, metiatur. Quibus peractis, aut E, ipsum I, metitur, aut non. Metiatur primùm; Et quoties E, ipsum I, metitur, toties F, metiatur ipsum K. Dico H, G, I, K, minimos esse in datis rationibus. Quòd enim sint in datis rationibus deinceps proportionales, constat. Cùm enim A, & B, ipsos H, & G, æquè metiantur; erit vt prius, quemadmodum A, ad B, ita H, ad G. Eadem ratione erit, vt C, ad D, ita G, ad I: & vt E, ad F, ita I, ad K; quòd tam C, & D, ipsos G, & I, quàm E, & F, ipsos I, & K, metiantur æquè. Igitur H, G, I, K, deinceps proportionales sunt in datis rationibus. Quòd autem sint minimi, sic ostendemus. Si non sunt minimi, sint in eisdem rationibus minores ipsis, singuli singulis, si fieri potest L, M, N, O. Quia igitur A, & B, minimi sunt in sua proportione; [g] ipsi metientur æquè L, & M, eandem habentes rationem; nimirum B, consequens consequentem M. Eodem modo C, & D, æquè metientur M, & N; nimirum C, antecedens antecedentem M. Quocirca cùm B, & C, ipsum M, metiantur; [h] metietur eundem M, & numerus G, minimus, quem B, & C, metiuntur, minorem maior. Quod est absurdum. Non ergo erunt alij numeri deinceps proportionales in rationibus datis minores ipsis H, G, I, K; Ac proinde H, G, I, K, in datis rationibus minimi sunt.

A, 6. B, 5. C, 4. D, 3. E, 5. F, 7.
H, 24. G, 20. I, 15. K, 21.
L---- M------ N---- O-----

f 36. sept.
g 21. sept.
h 37. sept.

Sed iam E, non metiatur ipsum L. [i] Inuento ergo numero K, minimo, quem E, & I, metiantur; quoties I, ipsum K, metitur, toties quoque G, ipsum L; & H, ipsum M, metiatur: & quoties E, metitur K, toties metiatur F, ipsum N. Dico M, L, K, N, esse minimos in proportionibus datis. Cùm enim H, G, I, ipsos M, L, K, æquè metiantur; erit vt suprà, quemadmodum H, ad G, ita M, ad L; & vt G, ad I, ita L, ad K: Est autem eadem ratione, vt H, ad G, ita A, ad B; & vt G, ad I, ita C, ad D; quòd & A, B, ipsos H, G; & C, D, ipsos G, I, metiantur æquè. Igitur vt A, ad B, ita M, ad L; & vt C, ad D, ita L, ad K. Atqui vt E, ad F, ita quoque est K, ad N, cùm E, F, æquè ipsos K, N, metiantur. Sunt ergo M, L, K, N, deinceps proportionales in datis rationibus. Dico & minimos eos esse in eisdem rationibus. Si namque non sunt minimi, dentur ipsis minores in rationibus eisdem O, P, Q, R, si fieri potest. Quoniam ergo A, B, in sua proportione minimi sunt; [k] ipsi æquè metientur O, P, in eadem ratione existentes; nimirum B, consequens consequentem P. Eodem argumento C, D, ipsos P, Q, metientur æquè, videlicet antecedens C, antecedentem P; Atque adeo cùm B, & C, ipsum P, metiantur; [l] metietur quoque G, minimus, quem metiuntur B, & C, eundem P. Quia verò ostensum est, esse vt G, ad I, ita L, ad K, hoc est, ita P, ad Q; erit permutando, vt G, ad P, ita I, ad Q: Atque idcircò, cùm metiatur G, ipsum P, metietur & I, ipsum Q. Metitur autem & E, eundem Q; [m] quòd E, F, in sua proportione minimi æquè metiantur Q, R, eiusdem rationis; nimirum antecedens E, antecedentem Q. Ergo cùm metiantur I, E, ipsum Q; [n] metietur etiam K, quem minimum metiuntur I, E, eundem Q, maior minorem. Quod est absurdum. Non dabuntur ergo alij numeri deinceps proportionales in datis rationibus minores, quàm M, L, K, N; proptereaque ipsi M, L, K, N, minimi sunt.

A, 6. B, 5. C, 4. D, 3. E, 2. F, 7.
H, 24. G, 20. I, 15.
M, 48. L, 40. K, 30. N, 105.
O----- P---- Q---- R-----

k 21. sept.
l 37. sept.
m 21. sept.
n 37. sept.

Quod si quatuor rationes datæ fuerint; inueniendi prius erunt numeri deinceps proportionales in tribus prioribus rationibus; deinde cũ quarta posteriori agendum, vt nuper cum tertia proportione data. Veluti si quarta proportio data sit in numeris minimis S, ad T; inueniemus primùm M, L, K, N, minimos deinceps proportionales in tribus proportionibus A, ad B; C, ad D; & E, ad F. Deinde si S, ipsum N, metiatur, accipiemus O, quem T, toties metiatur, quoties S, ipsum N,

A, 6. B, 5. C, 4. D, 3. E, 2. F, 7. S, 3. T, 2.
M, 48. L, 50. K, 30. N, 105. O, 70.

metitur. Nam M, L, K, N, O, erunt deinceps proportionales in datis rationibus minimi. Si verò S, ipſum N, non metiatur; [a] ſumemus O, quem S, & N, minimum metiantur. Et quoties N, ipſum O, metitur, toties metiatur K, ipſum P; & L, ipſum Q; & M, ipſum R; quoties verò S, eundem O, metitur, toties T, ipſum V, metiatur. His enim peractis, erunt R, Q, P, O, V, deinceps proportionales minimi in rationibus A, ad B; C, ad D; E, ad F, & S, ad T. Quæ omnia eo argumento, quo prius, demonſtrabimus. Eodem modo operabimur, ſi quinque, vel plures rationes datæ ſint in minimis numeris. Itaque rationibus datis, quotcunque in minimis numeris, &c. Quod faciendum erat.

a 36. ſeptimi.

A, 6. B, 5. C, 4. D, 3. E, 2. F, 7. S, 9. T, 2.
M, 48. L, 40. K, 30. N, 105.
R, 144. Q, 120. P, 90. O, 315. V, 70.

SCHOLIVM.

Si omnes rationes, vel aliquæ datæ fuerint in numeris non minimis, abſoluemus nihilo minus problema propoſitum; ſed prius exhibendæ erunt rationes datæ in minimis numeris, antequam ad inuentionem minimorum numerorum deinceps proportionalium aggrediamur, vt ex demonſtratione manifeſtum eſt.

DIFFERT autem hoc problema ab eo, quod propoſ. 35. lib. 7. demonſtratum eſt, quòd hic non dantur numeri deinceps proportionales, ita vt quilibet intermedius ſit & antecedens, & conſequēs, licèt proportiones ſint diuerſæ, quemadmodum ibi.

PORRO inuentis minimis numeris deinceps proportionalibus in datis rationibus, ſi ij multiplicentur per quemcunque numerum eundem, procreabūtur alij in eiſdem rationibus deinceps proportionales, vt conſtat ex ijs, quæ ad propoſ. 18. lib. 7. demonſtrauimus.

5. THEOR. 3. PROPOS. 5.

PLANI numeri rationem inter ſe habent ex lateribus compoſitam.

SINT duo numeri plani A, B, & latera prioris quæcunq; C, D; poſterioris verò E, F. Dico proportionem A, ad B, compoſitam eſſe ex laterum proportionibus; nimirum ex proportionibus C, ad E, & D, ad F; vel ex proportionibus C, ad F, & D, ad E; ita vt latera vnius ſint antecedentia, & alterius conſequentia, quemadmodum propoſ. 23. lib. 6. docuimus. Faciant D, & E, ſe mutuò multiplicantes numerum G. Quoniam igitur D, multiplicans C, & E, fecit A, & G; [b] erit A, ad G, vt C, ad E. Eodemque modo, quia E, multiplicans D, & F, fecit G, & B; erit G, ad B, vt D, ad F. Quare A, G, B, ſunt deinceps proportionales in proportionibus laterum C, ad E, & D, ad F. [c] Componitur autem proportio A, ad B, ex proportionibus A, ad G, & G, ad B. Eadem ergo proportio A, ad B, ex proportionibus laterum C, ad E, & D, ad F, componitur.

b 17. ſeptimi.

c 27. defin.

A, 24. B, 48. G, 18. C, 4. D, 6. E, 3. F, 16.

EODEM argumento oſtendemus, proportionem A, ad B, compoſitam eſſe ex proportionibus C, ad F, & D, ad E, ſi latera E, & F, loca inter ſe permutent, fiatque G, ex mutua D, & F, multiplicatione. Cùm enim D, multiplicans C, & F, faciat A, & G; [d] erit A, ad G, vt C, ad F. Similiter cùm F, multiplicans D, & E, faciat G, & B; erit G, ad B, vt D, ad E. Ac proinde rurſum A, G, B, deinceps proportionales ſunt in rationibus laterum C, ad F, & D, ad E. [e] Cùm ergo proportio A, ad B, componatur ex proportionibus A, ad G, & G, ad B; Eadem ex proportionibus C, ad F, & D, ad E, componetur. Quare plani numeri rationem inter ſe habent ex lateribus compoſitam. Quod demonſtrandum erat.

d 17. ſeptimi.

e 27. defin.

A, 24. B, 48. G, 96. C, 4. D, 6. F, 16. E, 3.

6. THEOR. 4. PROPOS. 6.

Si ſint quotcunque numeri deinceps proportionales, primus autem ſecundum non metiatur; neque alius quiſquam vllum metietur.

SINT continuè proportionales A, B, C, D, E; & A, primus nō metiatur B, ſecundum. Dico neque alium quenquam illorum vllum metiri. Quòd enim nullus proximè inſequentem metiatur, manifeſtum eſt. Nam cùm ſit, vt A, ad B, ita B, ad C; C, ad D; & D, ad E: A, verò ipſum B, non metiatur; neque B, ipſum C, neque C, ipſum D, neque D, ipſum E, metietur. Quòd verò nec alius quiſquam illorū vllum metiatur, ſic demonſtrabimus. [f] Sumptis tribus numeris minimis F, G, H, in ratione A, ad B; erit ex æquo, vt A, ad C, ita F, ad H. Quia verò eſt vt A, ad B, ita F, ad G; nō metitur autem A, ipſum B; neque F, ipſum G, metietur; Ac propterea F, non erit vnitas, aliàs F, ipſum G, metiretur, cùm vnitas omnem numerum metiatur. [g] Quare cùm F, & H, ſint inter ſe primi, & F, non ſit vnitas; non metietur F, ipſum H; Atque ob id neque A, ipſum C, metietur. Eſt enim oſtenſum eſſe A, ad C, vt F, ad H. Eadem ratione oſtendemus, quòd nec B, tertium à ſe numerum D, nec C, tertium E, metiatur. Quòd ſi quatuor numeri minimi ſumantur in ratione A, ad B, ſimili modo demonſtrabimus, neque A, quartum D, neque B, quartum E, metiri. Atque ita de reliquis. Si itaque ſint quotcunque numeri deinceps proportionales, &c. Quod erat oſtendendum.

f 2. octaui.

A, 16. B, 24. C, 36. D, 54. E, 81. F, 4. G, 6. H, 9.

g 3. octaui.

SCHOLIVM.

SCHOLIVM.

Si maiores numeri ad minores referantur, proponi poterit hæc propositio ad hunc modum.

Si sint quotcunque numeri deinceps proportionales, primus autem secundi non sit multiplex, neque alius quisquam vllius multiplex erit.

SINT enim continuè proportionales A, B, C, D, E; & A, primus non sit multiplex secundi B. Dico neq; alium quenquam illorum vllius esse multiplicem. Quòd enim nullus proximè insequentis multiplex sit, constat. Nam cùm sit, vt A, ad B, ita B, ad C, C, ad D & D, ad

A, 81. B, 54. C, 36. D, 24. E, 16.

E: non sit autē A, ipsius B, multiplex; neq; B, ipsius C; neq; C, ipsius D: neq; D, ipsius E, multiplex erit. Quòd autē neque alius quisquam illorum vllius sit multiplex, hoc pacto confirmabitur. Quoniam D, ipsius E, non est multiplex: non metietur è contrario E, ipsum D, per ea, quæ in defin. 5. lib. 7. scripsimus. Quoniam igitur sunt numeri deinceps proportionales quotcunq; E, D, C, B, A; (Nam cùm sit D, ad E, vt C, ad D; B, ad C; & A, ad B; erit conuertendo E, ad D, vt D, ad C; C, ad B; & B, ad A.) Et E, primus secundum D, non metitur; [a] neq; alius quisquam illorum vllum metietur. Quare è contrario, si maiores ad minores referantur, neq; quisquam illorum vllius erit multiplex, per ea, quæ in defin. 5. lib. 7. scripsimus. a 6. octaui.

SED & ex his sequens theorema demonstrabimus.

Si sint quotcunq; numeri deinceps proportionales, primus verò secundum metiatur; & quicunque alius quemlibet sequentium metietur. Si primus autem secundi sit multiplex; & quicunque alius cuiuslibet sequentium multiplex erit.

SINT deinceps proportionales quotcunque numeri A, B, C, D, E; & primus A, secundum B, metiatur. Dico & quemque illorum quemlibet sequentium metiri. Quòd enim quilibet proximè insequentem metiatur, perspicuum est. Nam cùm sit, vt A, ad B, ita B, ad C; C,

A, 3. B, 6. C, 12. D, 24. E, 48.

ad D; & D, ad E; metiatur autē A, ipsum B; & B, ipsum C; & C, ipsum D; & D, ipsum E, metietur. Quòd autem quilibet illorum quemlibet sequētium metiatur, nempe B, ipsos D, & E, hoc modo ostendetur. Quia B, ipsum C, metitur, & C, ipsum D; [b] metietur quoq; B, ipsum D. Rursus quia D, ipsum E, metitur; [c] metietur quoque B, (ipsum D, metiens) eundem E. Et sic de reliquis. b 11. pron. c 11. pron.

SED iam primus A, multiplex sit B, secundi. Dico & quemque illorum cuiuslibet sequentium multiplicem esse. Cùm enim sit vt A, ad B, ita B, ad C; C, ad D; & D, ad E: sit autem A, ipsius B, multiplex; erit & B,

A, 48. B, 24. C, 12. D, 6. E, 3.

ipsius C; & C, ipsius D; & D, ipsius E, multiplex. Quilibet ergo cuiuslibet proximè insequētis multiplex est. Rursus quia D, ipsius E, est multiplex; metietur è contrario E, ipsum D: sunt autem, per inuersam rationem, E, D, C, B, A, continuè proportionales. Igitur & quilibet illorum quemlibet sequentium metietur, vt demonstratum est; Ac propterea è contrario, si maiores ad minores referantur, & quilibet cuiusque sequentium multiplex erit.

CONVERTEMVS etiam hanc propositionē 6. & theorema, quod primo loco in scholio demonstrauimus, hac ratione.

Si sint quotcunque numeri deinceps proportionales, primus autē, vel alius quisquam nullum à secundo metiatur; neque primus secundū metietur. Et si primus, vel alius quisquam nullius à secundo sit multiplex: neque primus secundi multiplex erit.

SINT deinceps proportionales A, B, C, D, E; & primus A, vel alius quisq; nullum à secundo B, metiatur. Dico neq; A, primum, metiri B, secūdum. Si enim A, primus, secundum B, dicatur metiri; metietur quoq; per ea,

A, 16. B, 24. C, 36. D, 54. E, 81.

quæ secundo loco in hoc scholio ostendimus, quicunq; alius quemlibet sequentium. Quod est absurdum, cùm neq; primus, neq; alius quisquam vllum à secundo metiri ponatur. Non ergo A, ipsum B, metietur.

IAM verò A, primus, vel alius quisquam nullius à secundo B, sit multiplex. Dico neq; A, primum multiplicem esse B, secundi. Si namque A, primus multiplex

A, 81. D, 54. C, 36. D, 24. E, 16.

esse dicatur B, secundi; multiplex quoque erit quicunque alius cuiuslibet sequentium, ex ijs, quæ secundo theoremate huius scholij demonstrauimus. Quod est absurdum. Neq; enim primus, neque alius quisquam vllius à secundo multiplex esse ponitur. Non igitur A, ipsius B, multiplex erit.

THEOR. 5. PROPOS. 7.

Si sint quotcunque numeri deinceps proportionales, primus autē extremum metiatur, is etiam metietur secundum.

SINT deinceps proportionales A,B,C,D,E; & A, primus extremũ E, metiatur. Dico & A, primum metiri B, ſecundum. Si enim A, ipſum B, non dicatur metiri: [a] neq; alius quiſquam vllum metietur. Quare nec A, ipſum E. Quod eſt abſurdum. Ponitur enim A, metiri E. Igitur A, primus B, ſecundum metietur; Atque idcircò, ſi ſint quotcunque numeri deinceps proportionales, &c. Quod erat demonſtrandum.

[a] 6. octani. A, 3. B, 6. C, 12. D, 24. E, 48.

SCHOLIVM.

VT theorema, quod ſecundo loco in ſcholio precedentis propoſitionis demonſtrauimus, conuertamus, amplificabimus hanc propoſitionem hoc modo.

SI ſint quotcunque numeri deinceps proportionales, primus autẽ, vel alius quiſquam quemlibet à ſecundo metiatur; metietur & primus ſecundum. Et ſi primus, vel alius quiſquam cuiuslibet à ſecundo ſit multiplex; primus quoque ſecundi multiplex erit.

QVOD eodem modo demonſtrabimus. Si enim primus non dicatur metiri ſecundum, vel illius eſſe multiplex; neque alius quiſquam vllum metietur; vel illius multiplex erit, ex propoſ. 6. & 1. theoremate ſcholij precedentis. quod eſt contra hypotheſin.

8. THEOR. 6. PROPOS. 8.

SI inter duos numeros medij continua proportione ceciderint numeri; quot inter eos medij continua proportione cadunt numeri: tot & inter alios eandem cum illis habentes rationem medij continua proportione cadent.

Cadant inter duos numeros A,B, medij proportionales continuè C,D; ſitque vt A, ad B, ita E, ad F. Dico tot medios numeros continuè proportionales cadere inter E, & F, quot inter A, & B.

A, 24. C, 36. D, 54. B, 81.
[b] 3. octani. G, 8. H, 12. I, 18. K, 27.
E, 32. L, 48. M, 72. F, 108.

[c] 23. ſeptimi. A, 40. C, 20. D, 10. B, 5.
[d] 21. ſeptimi. G, 8. H, 4. I, 2. K, 1.
E, 8. L, 4. M, 2. F, 1.

[e] 9. pron. A, 27. C, 9. D, 3. B, 1.
G, 27. H, 9. I, 3. K, 1.
E, 108. L, 36. M, 12. F, 4.

Sumptis enim totidem numeris G,H,I,K, minimis in ratione A, ad C, quot ſunt numeri A,C,D,B; erit ex æquo, vt A, ad B, atque adeò vt E, ad F, ita G, ad K. [b] Quare cùm G, & K, inter ſe primi ſint, quippe qui extremi ſint minimorum numerorum; [c] ac propterea in ſuâ proportione minimi; [d] æquè metietur G, ipſum E, & K, ipſum F. Quoties ergo G, & K, ipſos E, & F, metiuntur, toties H, & I, alios numeros L, & M, metiantur, ita vt numeri G,H,I,K, numeros E,L,M,F, æquè metiantur, ſinguli ſingulos. [e] Quia igitur G, H,I,K, multiplicantes numerum, per quẽ metiũtur numeros E,L,M,F, ipſos E,L,M,F, producũt; in eiſdẽ rationibus erũt E,L,M,F, in quibus G,H,I,K, vt ad propoſ. 18. lib. 7. demonſtrauimus. At G,H,I,K, ſunt continuè proportionales. Igitur & E,L,M,F, continuè proportionales ſunt; Atque idcircò, cùm multitudo E,L,M,F, æqualis ſit multitudini A,C,D,B; tot cadent medij proportionales inter E, & F, quot inter A, & B. Si igitur inter duos numeros medij continua proportione ceciderint, &c. Quod demonſtrandum erat.

SCHOLIVM.

NON ſolùm ex demonſtratione conſtat, totidem medios proportionales cadere inter E, & F, quot inter A, & B; verùm etiam eandem eſſe proportionem numerorum E,L,M,F, quæ eſt numerorum A,C,D,B. Oſtenſum enim eſt E,L,M,F, in eadem eſſe proportione, in qua G,H,I,K: Sed hi eandem habent, ex conſtructione, quam A,C,D,B. Igitur & E,L,M,F, eandem habent, quam A,C,D,B.

EADEM hæc propoſitio vera eſt, ſi exiſtentibus numeris A, & B, ſumatur vel E, vel F, vnitas. Item ſi vel A, vel B, fuerit vnitas, exiſtentibus E, & F, numeris; vt in exemplis apparet.

CONSTAT etiam ex hoc theoremate, inter numeros duplæ proportionis, vel ſuperparticularis cuiuſuis, vel ſuperbipartientis, non poſſe cadere numerum medium proportionalem. Cùm enim duplæ proportionis in minimis numeris reperiatur inter binarium, & vnitatem; ſuperparticularis verò inter numeros ſola vnitate differentes: ſuperbipartiens denique inter numeros, quorum differentia eſt binarius: ſi inter duos numeros duplæ proportionis, vel ſuperparticularis, vel ſuperbipartientis, medius numerus caderet proportionalis; caderet quoque, per hoc theorema, numerus aliquis medius proportionalis inter binarium, & vnitatem; vel inter numeros ſola vnitate differentes, vel etiam binario: nimirum inter numeros minimos, qui eaſdem cum illis proportiones habent: quod fieri nulla ratione poteſt. Nam neque inter binarium & vnitatem, neq; inter duos numeros ſola vnitate differẽtes, vllus numerus interponitur, tantum abeſt, vt aliquem medium proportionalem ipſi recipiant. Similiter inter duos numeros binario inter ſe diſtantes interijcitur ſolùm numerus, qui ab vtroque vnitate differt; Quem nulla poſſe ratione eſſe inter illos medium proportionalem, in hunc modum demonſtrabimus. Differant numeri A B, C D, (ſiue C D, vnitas ſit, & A B, ternarius, ſiue non,) binario, inter quos cadat numerus E F, minor vnitate quàm A B, maior verò quàm C D, vnitate quoque. Dico E F,

non

A.. G. B | A..... G. B
E.. H. F | E..... H. F
C. D | C..... D

non esse medium proportionalem inter A B, C D. Si enim dicatur esse A B, ad E F, vt E F, ad C D: ablato ex A B, numero A G, ipsi E F, æquali, vt reliqua sit vnitas G B & ex E F, numero E H, ipsi C D, æquali, vt relinquatur etiam vnitas H F; erit quoq; vt A B, totus ad E F, totum, ita A G, ablatus ad E H, ablatum; cùm A G, E H, ipsis E F, C D, æquales sint, ex constructione. Igitur erit quoq; reliquus G B, ad reliquum H F, hoc est, vnitas ad vnitatem, vt totus A B, ad totum E F, maior ad minorem. Quod est absurdum. Non ergo E F, medius proportionalis est inter A B, & C D.

ITAQVE inter numeros triplæ proportionis medius proportionalis cadere non potest. Alioquin caderet etiam medius proportionalis, ex hoc theoremate, inter 3. & 1. minimos numeros proportionis triplæ, qui binario inter se differunt, quod fieri non posse, proximè demonstrauimus.

PARI ratione inter numeros quintuplæ proportionis cadere non potest medius proportionalis. Si enim cadere dicatur, cadet quoq; ex hoc theoremate, medius proportionalis inter 5. & 1, minimos numeros proportionis quintuplæ, quod fieri non posse, ita demonstrabimus. Cadat primùm, si fieri potest,

A..... B. E
D.. D...
C.

inter quinarium A B, & vnitatem C, medius proportionalis binarius, vel ternarius D: ita vt sit A B, ad D, vt D, ad C: Et conuertendo C, ad D, vt D, ad A B. Et quoniam vnitas C, metitur D; metietur quoq; D, ipsum A B. At binarius, vel ternarius D, metitur quoq; senarium A E. Igitur D, metitur totum A E, & ablatum A B: [a] ac proinde & D, numerus metietur reliquam vnitatem B E. Quod est absurdum. a 11. pron.

CADAT deinde, si fieri potest, inter quinarium A B, & vnitatem C, medius proportionalis quaternarius D. Ostendemus ergo, vt prius, D, metiri quinarium A B: metitur autem quaternarius D, quaternarium etiam A E. Igitur D, metitur totum A B, & ablatum A E: [b] ac proinde & D, numerus reliquam vnitatem E B, metietur. Quod est absurdum. b 11. pron.

B.... E. B
D....
C.

EX quibus fit, neq; illud interuallum Musicum, quod in dupla proportione consistit, vt Diapason, vel, vt vulgò dicitur, Octaua. neq; illud, quod in sesquioctaua proportione reperitur, cuiusmodi est Tonus, seu vulgò Secunda, bifariam posse secari, hoc est, in duas proportiones æquales. Illa enim proportio bifariam (quod ad propositum attinet) secari dicitur, inter cuius terminos medius proportionalis cadit: Vt quia inter hos terminos 24. & 6 proportionis quadruplæ cadit medius proportionalis numerus 12. hoc modo: 24. 12. 6. Idcircò proportio quadrupla bifariam diuisa esse dicitur in duas duplas proportiones. Cùm ergo ostensum sit, inter numeros duplæ proportionis, & superparticularis, qualis est sesquioctaua, nõ cadere medium numerum proportionalem; perspicuum est, Diapason, & Tonum, bifariam secari non posse. Vnde Diapason prima sui diuisione in Diapenten, & Diatessaron, quorum interuallorum illud in proportione sesquialtera, hoc verò in sesquitertia consistit, apud Musicos secatur, vt hic apparet, 2. 3. 4. Est enim hic proportio dupla diuisa in proportionem sesquialterã, & sesquitertiam, tanq; in maximas sui partes inter se inæquales. Ita quoq; Tonus in duo semitonia, quorũ alterũ maius, alterũ minus dicitur, secari solet. Sed de his plura apud Musicos reperies.

RVRSVM ex his demonstrari potest, proportionem diametri cuiusuis quadrati ad latus eiusdem, numeris non posse exprimi, sed esse irrationalem. Cùm enim per ea, quæ ad propos. 47. lib. 1. demonstrauimus, quadratum diametri duplum sit quadrati ex latere descripti; quadratorum verò proportio sit duplicata proportionis laterum; sit, vt proportio quadrati ex diametro descripti ad quadratum lateris duplicata sit proportionis diametri ad latus. Cùm ergo illa proportio, cuius duplicata est proportio dupla, numeris exprimi nequeat, q̃ inter numeros duplæ proportionis medius proportionalis nõ cadat, qui illam bifariam secet, vt ostendimus; manifestum est, nec proportionem diametri ad latus numeris exprimi posse, sed esse irrationalem, seu, quod idem est, diametrum esse lateri incommensurabilem. quæ de re plura ad 9. & vltimam propos. lib. 10. scribemus.

THEOR. 7. PROPOS. 9. 9.

SI duo numeri sint inter se primi, & inter eos medij cõtinua proportione ceciderint numeri; quot inter eos medij continua proportione cadunt numeri, totidem & inter vtrumque eorum, ac vnitatem medij continua proportione cadent.

A, 8. C, 12. D, 18. B, 27.
Vnitas.
1.
E, 2. F, 3.
G, 4. H. 6. I, 9.
K, 8. L, 12. M, 18. N, 27.

CADANT inter numeros A, B, inter se primos medij continuè proportionales C, D. Dico totidẽ cadere continuè proportionales inter vnitatem, & A, nec non inter vnitatem, & B, quot inter A, & B, cadunt. Inuentis enim duobus numeris E, & F, minimis in ratione A, ad C; [a] sumantur in eadem proportione tres minimi G, H, I; & quatuor K, L, M, N, & sic deinceps, donec multitudo assumptorũ æqualis sit multitudini A, C, D, B. Quoniã ergo A, B, extremi inter se, primi sunt; [b] erũt A, C, D, B, minimi in proportione E, ad F. Sunt autẽ & totidẽ K, L, M, N, ex constructione, in eadẽ proportione minimi. Igitur K, L, M, N, ipsis A, C, D, B, æquales sunt, singuli singulis, vt K, ipsi A; & N, ipsi a 2. octaui. b 1. octaui.

A, 8. C, 12. D, 18. B, 27.
Vnitas.
1.
E, 2. F, 3.
G, 4. H. 6. I, 9.
K, 8. L, 12. M, 18. N, 27.

B, ne minores minimis dentur. Quia verò, vt cõstat ex demonstratione propos. 2. huius libri, E, seipsum multiplicans produxit G; multiplicans verò ipsum G, fecit K, [a] metietur E, ipsum G, per E; & G, ipsum K, per eundem E: [b] Metitur autem & vnitas ipsum E, per E. Æquè igitur metietur vnitas ipsum E, & E, ipsum G, & G, ipsum K; Ac propterea eadem pars erit vnitas ipsius E, & E, ipsius G, & G, ipsius K. [c] Proportionales ergo sunt deinceps, vnitas, & numeri E, G, K. Simili ratione, cùm manifestum sit ex eadem demonstratione propos. 2. huius lib. quòd F, seipsum multiplicans producat I, multiplicans verò ipsum I, faciat N; [d] metietur F, ipsum I, per F, & I, ipsum N, per eundem F: [e] Metitur autem & vnitas ipsum F, per F. Æquè igitur metietur vnitas ipsum F, & F, ipsum I, & I, ipsum N; Ac propterea eadem pars erit vnitas ipsius F, & F, ipsius I, & I, ipsius N. [f] Proportionales ergo sunt continuè, vnitas, & numeri F, I, N; Ac proinde cùm tam multitudo E, G, K, quàm F, I, N, vnà cum vnitate, æqualis sit multitudini K, L, M, N, vel A, C, D, B; (vt perspicuum est ex propositione 2. huius libri. Nam duo E, F, sunt secundi ab vnitate: & tres G, H, I, tertij; & quatuor K, L, M, N, quarti, &c.) tot cadent medij continuè proportionales numeri inter vnitatem, & K, numerum, seu A, sibi æqualem; & inter vnitatem, & numerum N, siue B, sibi æqualem, quot inter numeros A, B. Si duo ergo numeri sint inter se primi, & inter eos medij, &c. Quod ostendendũ erat.

a 7. pron.
b 5. pron.
c 20. defin.
d 7. pron.
e 5. pron.
f 20. defin.

SCHOLIVM.

PERSPICVVM autem est, numeros, qui in continua proportione cadunt inter numeros A, & B, atq; vnitatem, habere proportiones denominatas à minimis numeris proportionis A, ad C; hoc est, quas habent E, & F, numeri ad vnitatem; id quod in scholio propos. 2. huius lib. quoq; asseruimus.

CONSTAT etiam ex demonstratione hac, si numerus seipsum multiplicans aliquem fecerit; & rursum multiplicet productum, & sic deinceps: omnes productos esse continuè proportionales ab vnitate. Ostensum enim est & E, G, K, & F, I, N, qui hac ratione sunt procreati, ex demonstratione propos. 2. huius lib. continuè esse proportionales ab vnitate.

10. THEOR. 8. PROPOS. 10.

SI inter duos numeros, & vnitatem, continuè proportionales ceciderint numeri; quot inter vtrunque ipsorum, & vnitatem deinceps medij continua proportione cadunt numeri, totidem & inter ipsos medij continua proportione cadent.

CADANT inter vtrumque numerorum A, B, & vnitatem, quotcunque numeri medij continuè proportionales; inter A, quidem & vnitatem, numeri C, D, E: At verò inter B, & vnitatem; numeri F, G, H, illis multitudine æquales. Dico totidem medios continuè proportionales cadere inter A, & B, quot inter vtrumque A, B, & vnitatem. Multiplicantes enim se mutuò C, & F, faciant I. Deinde C, multiplicans I, & G, faciat K, & L. Rursus idem C, multiplicans K, L, & H, faciat M, N, & O, totidem inter A, & B, quot sunt inter vtrumque A, B, & vnitatem. Quoniam igitur est, vt vnitas ad C, ita C, ad D; D, ad E; & E, ad A; æquè metietur vnitas ipsum C, & C, ipsum D, & D, ipsum E, & E, ipsum A: [g] Metietur autem vnitas ipsum C, per C. Igitur & C, ipsum D, & D, ipsum E, & E, ipsum A, per C, metietur. [h] Quare C, seipsum multiplicans fecit D; multiplicans autem D, fecit E, & multiplicans E, fecit A. Eadem ratione F, seipsum multiplicans fecit G, & multiplicans G, fecit H, & multiplicans H, fecit B. Itaque cùm C, multiplicans C, & F, fecerit D, & I; [i] erit, vt C, ad F, ita D, ad I. Similiter, quia F, multiplicans C, & F, fecit I, & G; [k] erit vt C, ad F, ita I, ad G. Sunt igitur tres D, I, G, continuè proportionales in ratione C, ad F. Rursus quia C, multiplicans D, I, G, fecit E, K, L; habebunt E, K, L, per ea, quæ ad propos. 18. lib. 7. ostendimus, eandẽ proportionem continuam, quam D, I, G, hoc est, quam C, ad F. Eodem modo, quia C, & F, multiplicantes G, fecerunt L, & H; [l] erit vt C, ad F, ita L, ad H. Quatuor ergo numeri E, K, L, H, continuè proportionales sunt in ratione C, ad F. Postremò, quia C, multiplicans E, K, L, H, fecit A, M, N, O, habebunt ex iis, quæ à nobis sunt demonstrata ad propos. 18. lib. 7. A, M, N, O, eandem continuam proportionem, quam E, K, L, H, hoc est, quam C, ad F. Eadem ratione, cùm C, & F, multiplicantes H, fecerint O, & B, [m] erit, vt C, ad F, ita O, ad B. Quinque igitur numeri A, M, N, O, B, continuè proportionales sunt in ratione C, ad F; Ac proinde tot medij proportionales cadunt inter A, & B, quot inter A, vel B, & vnitatem, cùm multitudo M, N, O, facta sit æqualis multitudini C, D, E, vel F, G, H. Quocirca si inter duos numeros, & vnitatem, continuè proportionales ceciderint numeri, &c. Quod erat demonstrandum.

A, 81. M, 162. N, 324. O, 648. B, 1296.
E, 27. K, 54. L, 108. H, 216.
D, 9. I, 18. G, 36.
C, 3. F, 6.
1.
Vnitas.

g 5. pron.
h 9. pron.
i 17. septimi.
k 17. sept.
l 18. sept.
m 18. sept.

SCHOLIVM.

SCHOLIVM.

Ex his conſtat, numeros, qui mediȳ proportionales cadunt inter A, & B, proportionem habere, quam duo numeri vnitati propinquiores, quales ſunt C, & F, habent.

PATET etiam ex hac demonſtratione, ſi quotquot numeri fuerint ab vnitate continuè proportionales, ſecundum ab vnitate in ſe multiplicatum producere tertium, & ex eodem in hunc fieri quartum; & ex eodem in hunc gigni quintum, & ſic deinceps. Demonſtratū enim eſt, ex eo quòd C, D, E, A, continuè proportionales ſunt ab vnitate; D, tertium fieri ex C, ſecundo in ſe; & E, ex C, in D; & A, ex eodem C, in E, &c.

LIBET hoc loco nonnulla alia theoremata demonſtrare ad numeros continuè proportionales pertinentia, quæ tum ad ea, quæ ſequuntur, tum ad alia multa erunt vtilia; hinc initium ſumentes.

I.

SI ſint ab vnitate duo ordines numerorum continuè proportionalium, & multitudine æqualium; habebunt tertij ab vnitate proportionem duplicatam eius, quam habent ſecundi ab vnitate; quarti verò eiuſdem triplicatam; & quinti quadruplicatam; & ſemper deinceps vno amplius.

SINT numeri A, B, C, D, continuè ab vnitate proportionales, & ab eadem totidem alij E, F, G, H. Dico proportionem B, tertij ab vnitate ad F, ab eadem tertium, duplicatam eſſe eius, quam habet A, ſecundus ad E, ſecundum, &c. Quoniam enim inter vtrumque numerorum B, F, & vnitatem cadit medius vnus proportionalis; inter B, quidem & vnitatem, numerus A; At inter F, & vnitatem numerus E; [a] cadet quoq; inter B, & F, vnus medius proportionalis: atq; adeò, per ſcholium huius propoſitionis in ratione A, ad E. Cadat igitur, & ſit I. Eodem modo cadent inter C, & G, duo mediȳ in eadem proportione A, ad E, qui ſint K, L; quot numerum cadunt inter vtrumque C, G, & vnitatem. Nec nō inter D, H, tres, qui ſint M, N, O, in eadem ratione A, ad E, proportionales. Quoniam igitur ex definitione B, ad F, proportionem habet duplicatam eius, quam habet B, ad I; Eſt autem vt B, ad I, ita A, ad E; Habebit quoq; B, ad F, rationem duplicatam eius, quam habet A, ad E. Non aliter habebit C, ad G, rationem triplicatam rationis A, ad E; quia ratio C, ad G, triplicata eſt proportionis C, ad K; & eſt vt C, ad K, ita A, ad E. Sic etiam D, ad H, rationem habebit quadruplicatam rationis A, ad E, & ſic de cæteris.

D, 81. M, 108. N, 144. O, 192. H, 256.
C, 27. K, 36. L, 48. G, 64.
B, 9. I, 12. F, 16.
A, 3. E, 4.
1.
Vnitas.

[a] 210. octaui

HOC idem demonſtrabimus, ſi fuerint duo ordines numerorum continuè proportionalium, ab aliquo numero eodem incipientes. Vnde hoc idem theorema ita proponemus.

II.

SI ſint ab aliquo numero eodem duo ordines numerorū continuè proportionalium, & multitudine æqualium; Habebunt tertij ab illo numero proportionem duplicatam eius, quam habent ſecundi ab eodem; quarti verò eiuſdem triplicatam; & quinti quadruplicatam; & ſemper deinceps vno amplius.

SINT ab A, numero continuè proportionales B, C, D, E, & ab eodem totidem alij F, G, H, I. Dico rurſum proportionis B, ad F, eſſe duplicatam proportionem C, ad G; & D, ad H, triplicatam: & E, ad I, quadruplicatam. Ex A, in ſe fiat K, & ex A, in K, fiat L; & ex A, in L, fiat M. Similiter ex B, in ſe fiat N; & ex B, in N, fiat O; & ex B, in O, fiat P. Poſtremò ex F, quoque in ſe fiat Q; & ex F, in Q, fiat R. & ex F, in R, fiat S. Quibus peractis, erunt A, K, L, M, continuè proportionales ab vnitate, vt conſtat ex ſcholio propoſitionis 9. huius libri. Eademq; ratione erunt B, N, O, P, ab vnitate proportionales; necnon & F, Q, R, S. Quia igitur ratio N, ad K, duplicata eſt rationis B, ad A, ex theor. 1. huius ſcholij: Eſt autem ex definitione eiuſdem rationis B, ad A, duplicata quoque ratio C, ad A, erit C, ad A, vt N, ad K. Eodem modo erit A, ad G, vt K, ad Q. Nam ex eodem primo theoremate eſt ratio K, ad Q, duplicata rationis A, ad F; & eiuſdem, ex definitione duplicata eſt ratio A, ad G. Quare cùm ſit C, ad A, vt N, ad K; & A, ad G, vt K, ad Q; erit ex æqua C, ad G, vt N, ad Q: Atqui ratio N, ad Q, duplicata eſt rationis B, ad F, ex theoremate primo huius ſcholij; quòd tam B, N, quàm F, Q, ſint ab vnitate continuè proportionales, ex ſcholio propoſitionis 9. huius libri. Igitur & ratio C, ad G, duplicata eſt rationis B, ad F. Eiſdem argumentis erit ratio D, ad H, triplicata rationis B, ad F. Nam ratio O, ad L, ex primo theoremate, triplicata eſt rationis B, ad A; quòd tam B, N, O, quàm A, K, L, ſint ab vnitate continuè proportionales, ex ſcholio propoſitionis 9. huius libri, & eiuſdem triplicata eſt ratio D, ad A, ex de-

E, 162. I, 512.
D, 54. Vnitas. H, 128.
C, 18. 1. G, 32.
B, 6. F, 8.
A, 2.
N, 36. K, 4. Q, 64.
O, 216. L, 8. R, 512.
P, 1296. M, 16. S, 4096.

E, 81. D, 54. Vnitas. H, 2. C, 36. 1. G, 4. B, 24. F, 8. A, 16. N, 576. K, 256. Q, 64. O, 1382 4. L, 4096. R, 512. P, 331776. M, 65536. S, 4096. I, 1.

finitione. Igitur est D, ad A, vt O, ad L. Eodemq; modo est A, ad H, vt L, ad R: quòd vtraque proportio triplicata sit proportionis A, ad F: Proportio quidem A, ad H, ex defin. at proportio L, ad R, ex primo theoremate huius scholij, propterea quòd tam A, K, L, quàm F, Q, R, continuè proportionales sunt ab vnitate, ex scholio propositionis 9. huius libri. Est ergo ex æquo D, ad H, vt O, ad R. Sed ratio O, ad R, triplicata est rationis B, ad F, eò quòd tam B, N, O, q̃ F, Q, R, sunt continuè proportionales ab vnitate ex scholio propositionis 9. huius lib. Igitur & ratio D, ad H, triplicata est eiusdem rationis B, ad F. Non secus demonstrabimus rationem E, ad I, esse quadruplicatam rationis B, ad F. Atque ita deinceps.

IDEM omnino demonstrabitur, si numeri vnius ordinis desinant in vnitatẽ, vt ex secunda figura est manifestum, in qua I, est vnitas.

CAETERVM theorema hoc demonstrabitur etiã in lineis ab vna & eadem linea proportionalibus, libro 14. propositione 28. licèt non in quotcunque lineis. Vnde multò generalius est hoc in numeris, quàm illud in lineis. Ex his autem in hunc modum demonstratis efficiemus propositionem hanc 10. Euclidis magis vniuersalem, hoc modo.

III.

Si inter duos numeros, & aliquem alium numerũ assumptum, continuè proportionales ceciderint numeri; quot inter vtrumque ipsorum, & assumptum, deinceps medij continua proportione cadũt numeri, totidẽ & inter ipsos medij cõtinua proportione cadẽt.

CADANT inter vtrumque numerorum A, B, & assumptum numerum C, quotlibet numeri continuè proportionales; inter A, quidem & C, numeri D, E, F; inter E, verò & C, totidẽ numeri G, H, I. Dico tot quoque medios continuè proportionales cadere inter A, & B, quot inter A, & C, & inter B, & C. Item tot inter F, & I, quot inter F, & C, & inter I, & C. Et tot inter E, & H, quot inter E, & C, & inter H, & C. Sumptis enim tribus K, L, M, minimis in ratione D, ad G erit ex defin. ratio K, ad M, duplicata rationis K, ad L, hoc est, D, ad G: Sed per theor. 2. huius scholij, ratio quoq; E, ad H, duplicata est eiusdem rationis D, ad G Igitur est, vt K, ad M, ita E, ad H; Atq; adeò cũ inter K, & M, cadat vnus medius pro-

A, 162. Q, 216. R, 288. S, 384. B, 512. F, 54. O, 72. P, 96. I, 128. E, 18. N, 24. H, 32. D, 6. G, 8. C, 2. K, 9. L, 12. M, 16.

a 8. octaui. *portionalis L; a cadet quoq; vnus medius; nimirum N, inter E, & H quemadmodum & inter E, & C, & inter H, & C, vnus medius cadit. Simili modo, si in eadem proportione D, ad G, sumantur quatuor minimi numeri, ostendemus inter F, & I, duos medios cadere, sicut & inter F, & C & inter I, & C, duo medij cadunt. Et eadẽ ratione inter A, & B, tres medij cadent, si in eade proportione D, ad G, sumãtur quinq; numeri minimi.*

HOC etiam verum est, si loco alterius numeri, nimirum B, vnitas assumatur; veluti perspicuum est in hac secunda figura, in qua numerus B, vnitas est, caduntq; tam inter A, & C, quàm inter B, & C, tres numeri continuè proportionales, quot scilicet inter A, & B, cadunt, &c.

A, 1048576. Q, 32768. R, 1024. S, 32. B, 1. F, 65536. O, 2048. P, 64. I, 2. E, 4096. N, 128. H, 4. D, 256. G, 8. C, 16. K, 1024. L, 32. M, 1.

EX his etiã apparet, numeros, qui medij proportionales cadunt inter A, & B; necnon inter F, & I; atq; inter E, & H, proportionem habere, quàm duo numeri D, & G, numero assumpto C, propinquiores.

11. THEOR. 9. PROPOS. 11.

DVORVM quadratorum numerorum vnus medius proportionalis est numerus: Et quadratus ad quadratum duplicatam habet lateris ad latus rationem.

SINT quadrati numeri A, & B, quorum latera C, & D. Dico inter A, & B, vnum medium proportionalem numerum cadere: & proportionem A, & B, quadrati ad quadratum, esse duplicatam proportionis C, ad D, lateris ad latus. Multiplicantes enim se mutuò C, & D, faciant E. Quia igitur C, multiplicans seipsum fecit A, quadratũ, ex defin. quadrati; & ipsum D, multiplicans, fecit E, ex constructione; a erit vt C, ad D, ita A, ad E. Rursus, quia D, multiplicãs C, fecit E, ex cõstructione; & multiplicãs seipsum, ex defin. quadrati, fecit B, quadratũ; b erit quoq; vt C, ad D, ita E, ad B. Quare A, E, B, continuè proportionales sunt in ratione laterũ C, & D. Ac proinde inter quadratos A, & B, medius continuè proportionalis cadit E. Quia verò ex eo quòd A, E, B, continuè proportionales sunt, numerus A, & B, duplicatam rationẽ habet eius, quam habet A, ad E; duplicatam quoq; rationem habebit A, quadratus ad B, quadratum eius, quã habet C, latus ad latus D; cũ hæc proportio eadẽ

a 17. sept. A, 9. E, 21. B, 49. C, 3. D, 7.

b 17. sept.

sit,

ſit', quæ A, ad E. Duorum ergo quadratorum numerorum vnus medius proportionalis eſt, &c. Quod demonſtrandum erat.

SCHOLIVM.

PERSPICVVM eſt ex dictis, inter duos quadratos numeros cadere numerum medium proportionalem in continua proportione lateris ad latus. Nam eadem eſt proportio quadrati A, ad E, medium proportionalem, quæ lateris C, ad latus D, vt demonſtratum eſt.

PARI ratione liquet, numerum medium proportionalem E, & vtrumlibet quadratorum A, B, eſſe inter ſe compoſitos. Cùm enim A, E, B, proportionales ſint oſtenſi in ratione C, ad D; hoc eſt, eſſe A, ad E, & E, ad B, vt C, ad D; metiatur autem latus D, quadratum ſuum B, conſequens conſequentem, ſi de proportionibus E, ad B, & C, ad D, loquamur; metietur & C, ipſum E, antecedens antecedentem; quandoquidem eſt E, ad B, vt C, ad D. Metitur autem & latus C, quadratum ſuum A. Igitur E, & A, menſuram communem habent C; atq; adeò inter ſe ſunt compoſiti. Similiter cùm ſit A, ad E, vt C, ad D; & metiatur latus C, ſuum quadratum A, antecedens antecedentem; metietur quoque D, ipſum E, conſequens conſequentem. Quare cùm & latus D, metiatur ſuum quadratum B; habebunt E, & B, communem menſuram D; Ideoq; compoſiti erunt inter ſe. Perſpicuum autem eſt ex hac demonſtratione, priorum numerorum A, E, communem menſuram eſſe C, latus prioris quadrati A; poſteriorum verò E, B, menſuram communem eſſe D, latus quadrati poſterioris B.

A, 9. E, 21. B, 49.
C, 3. D, 7.

THEOR. 10. PROPOS. 12. 11.

DVORVM cuborum numerorum duo medij proportionales ſunt numeri: Et cubus ad cubum triplicatam habet lateris ad latus rationem.

SINT numeri cubi A, & B, quorum latera C, & D. Dico inter A, & B, duos medios numeros continuè proportionales cadere: Et proportionem A, ad B, cubi ad cubum, triplicatam eſſe proportionis C, ad D, lateris ad latus. Multiplicans enim C, ſeipſum faciat E; & D, ſeipſum multiplicans faciat F; At C, & D, ſe mutuò multiplicantes faciant G; Multiplicantes verò G, faciant H, & I. Quoniam igitur C, ſeipſum, & D, multiplicans fecit E, & G; [a] erit, vt C, ad D, ita E, ad G. Eadem ratione, cùm D, multiplicans C, & ſeipſum, fecerit G, & F; [b] erit quoque vt C, ad D, ita G, ad F; propterea{que} E, G, F, continuè proportionales ſunt in ratione C, ad D. Rurſus quia ex definitione cubi, C, ipſum E, multiplicans fecit A; & ex conſtructione multiplicans ipſum G, fecit H; [c] erit vt E, ad G; hoc eſt, vt C, ad D, ita A, ad H. Similiter cùm D, ipſum G, multiplicans fecerit, ex conſtructione, numerum I; multiplicans verò ipſum F, ex definitione cubi, fecerit cubum B; [d] erit quoque, vt G, ad F; hoc eſt, vt C, ad D, ita I, ad B: [e] Eſt autem & H, ad I, vt C, ad D; quòd C, & D, ipſum G, multiplicantes fecerint ex conſtructione, H, & I. Igitur A, H, I, B, continuè ſunt proportionales in ratione C, ad D; Atque adeò inter cubos A, & B, duo medij H, & I, cadunt continuè proportionales. Quoniam verò, ex eo quòd A, H, I, B, continuè ſunt proportionales, numerus A, ad B, triplicatam habet rationem eius, quam habet A, ad H; triplicatam quoque rationem habebit A, ad B, cubus ad cubum, eius, quam habet C, ad D, latus ad latus, cùm ſit C, ad D, vt A, ad H. Quam ob rem duorum cuborum numerorum duo medij proportionales ſunt numeri, &c. Quod erat oſtendendum.

A, 27. H, 36. I, 48. B, 64.
E, 9. G, 12. F, 16.
C, 3. D, 4.

[a] 17. ſeptimi.
[b] 17. ſeptimi.
[c] 17. ſeptimi.
[d] 17. ſeptimi.
[e] 18. ſeptimi.

SCHOLIVM.

HIC quóque manifeſtum eſt, inter duos cubos cadere duos numeros medios proportionales in continua proportione lateris ad latus. Oſtenſum enim eſt, ita eſſe A, ad H, & H, ad I, & I, ad B, vt C, ad D.

EODEM modo conſtat, duos numeros medios proportionales H, I, & vtrumlibet cuborum A, B, eſſe inter ſe compoſitos. Cùm enim A, H, I, B, oſtenſi ſint proportionales in ratione C, ad D: hoc eſt, eſſe A, ad H, & I, ad B, vt C, ad D: Metiatur autem latus D, cubum ſuum B, conſequens conſequentem, ſi de proportionibus I, ad B, & C, ad D, loquamur; metietur quoque C, ipſum E, antecedens antecedentem; quandoquidem eſt I, ad B, vt C, ad D: Metitur autem & latus C, cubum ſuum A; immò & ipſum H, quòd H, factum ſit ex multiplicatione C, in G, ex conſtructione. Igitur A, H, I, communem habent menſuram C; atq; adeò inter ſe compoſiti ſunt. Similiter cùm ſit A, ad H, vt C, ad D; metiatur autem latus C, cubum ſuum A, antecedens antecedentem; metietur quoque D, ipſum H, conſequens conſequentem: Metitur autem & latus D, cubum ſuum B; immò & ipſum I, quòd I, factus ſit ex multiplicatione D, in G, ex conſtructione. Igitur H, I, B, communem menſuram habent D; Ac proinde ſunt inter ſe compoſiti. Manifeſtum etiam hìc eſt, priorum trium numerorum A, H, I, communem menſuram eſſe C, latus cubi prioris A; poſteriorum verò trium H, I, B, menſuram communem eſſe D, latus poſterioris cubi B.

A, 27. H, 36. I, 48. B, 64.
E, 9. G, 12. F, 16.
C, 3. D, 4.

12. # THEOR. 11. PROPOS. 13.

SI ſint quotlibet numeri deinceps proportionales, & multiplicans quiſque ſeipſum faciat aliquos; qui ab illis producti fuerint, proportionales erunt: Et ſi numeri primùm poſiti multiplicantes iam factos fecerint aliquos: ipſi quoque proportionales erunt: Et ſemper circa extremos hoc eueniet.

SINT continuè proportionales A,B,C, qui ſeipſos multiplicantes faciant D,E,F; multiplicantes autem ipſos D,E,F, faciant G,H,I; & rurſum multiplicantes ipſos G,H,I, faciant K,L,M, & ita deinceps. Dico quoque D,E,F, & G,H,I, & K,L,M, continuè eſſe proportionales. Multiplicantes enim A, & B, ſe mutuò faciant N; & B,C, ſe mutuò multiplicantes faciant O. Deinde A, multiplicans N,E, faciat P,Q. Item B, multiplicans O,F, faciat R,S. Simili modo A, multiplicans P,Q,H,

A, 2. B, 4. C, 8.
D, 4. N, 8. E, 16. O, 32. F, 64.
G, 8. P, 16. Q, 32. H, 64. R, 128. S, 256. I, 512.
K, 16. T, 32. V, 64. X, 128. L, 256. Y, 512. Z, 1024. a, 248. M, 4096.

faciat T,V,X; & B, multiplicans R,S,I, faciat Y,Z,a. Quoniam igitur A, multiplicás ſeipſum, & B, fecit D, & N; [a] erit vt A, ad B, ita D, ad N. Eodem modo, quia B, multiplicás A, & ſeipſum, fecit N, & E; erit etiam, vt A, ad B, ita N, ad E. Sunt igitur D,N,E, continuè proportionales in ratione A, ad B. Rurſus, quia B, ſeipſum, & numerum C, multiplicans fecit E, & O; [b] erit vt B, ad C, ita E, ad O. Eademq; ratione, cùm C, multiplicans B, & ſeipſum, fecerit O, & F; erit vt B, ad C, ita O, ad F; proptereaque & E,O,F, continuè proportionales ſunt in ratione B, ad C, ſeu A, ad B. Quare cùm D,N,E, in eadem ratione ſint continuè proportionales, in qua E,O,F: erit ex æquo D, ad E, vt E, ad F; atque adeò D,E,F, continuè proportionales ſunt.

a 17. ſept.

b 17. ſept.

DEINDE, quia A, multiplicans D,N,E, fecit G,P,Q; erunt ex iis, quæ ad propoſ. 18. lib. 7. oſtendimus, G,P,Q, in eadem ratione, in qua D,N,E, hoc eſt, in ratione A, ad B, proportionales. Item quia A, & B, multiplicantes E, fecerunt Q, & H; [c] erit quoque vt A, ad B, ita Q, ad H. Sunt ergo G,P,Q,H, proportionales in ratione A, ad B. Similiter quia B, multiplicans E,O,F, fecit H,R,S; erũt ex demonſtratis ad propoſ. 18. lib. 7. H,R,S, proportionales in ratione E,O,F, hoc eſt, B, ad C, ſeu A, ad B. Et eodem modo cùm B,C, multiplicantes F, fecerint S, & I; [d] erit vt B, ad C, hoc eſt, vt A, ad B, ita S, ad I; proptereaque & H,R,S,I, proportionales ſunt in ratione A, ad B. Quocirca, cùm G,P,H,Q, eandem habeant proportionem continuam, quam H,R,S,I; erit ex æquo G, ad H, vt H, ad I. Ac proinde G,H,I, continuè ſunt proportionales.

c 18. ſept.

d 18. ſept.

NON diſſimili argumẽto demonſtrabimus & K,L,M, eſſe continuè proportionales; & eodem modo in aliis procedemus. Igitur ſi ſint quotlibet numeri deinceps proportionales, & multiplicans quiſque ſeipſum, &c. Quod oſtendendum erat.

SCHOLIVM.

SVNT autem, vt ex demonſtratione liquet, numeri primo loco producti D,E,F, proportionales in duplicata ratione datorum numerorum A,B,C. Nam D, ad E, habet proportionem duplicatam eius, quam habet D, ad N, hoc eſt, A, ad B, &c.

ITA quoq; numeri ſecundo loco geniti G,H,I, erunt in ratione triplicata A, ad B: Et numeri tertio loco procreati in quadruplicata, & ſic deinceps ſemper vno amplius.

BREVIS propoſitionem totam demonſtrabimus, hac ratione. Fiant ex A,B,C, continuè proportionalibus in ſeipſos, numeri D, E, F; & in hos ex eiſdem numeri G,H,I; & rurſum ex eiſdem in hos numeri K, L,M. Dico D,E,F; & G,H,I; & K,L,M, eſſe quoq; continuè proportionales. Nam ex ſcholio propoſ. 9. huius lib. tam A,D,G,K, quàm B,E,H,L; & C,F,I,M, continuè ſunt ab vnitate proportionales. Quare ex 1. theor. ſcholij propoſ 10. huius lib. erit D, ad E, in duplicata ratione A, ad B, vel B, ad C. Sed eiuſdem rationis B, ad C, duplicata eſt ratio E, ad F, per idem theorema. Igitur D,E,F, continuè ſunt proportionales in duplicata ratione A, ad B, & B, ad C. Eodem modo oſtendemus G,H,I, eſſe proportionales continuè in triplicata ratione rationis A, ad B, & B, ad C: At verò K,L,M, in quadruplicata, atq; ita de cæteris.

A, 2. B, 4. C, 8.
D, 4. E, 16. F, 64.
G, 8. H, 64. I, 512.
K, 16. L, 256. M, 4096.

EX quarurſum demonſtratione apparet, numeros primo loco productos, eſſe in duplicata ratione datorum numerorum: ſecundo verò loco procreatos, in triplicata, &c. Id quod luce clarius ex 1. theor. ſcholij propoſitionis 10. huius lib. elicitur.

QVAMVIS autem in vtraque demonſtratione huius propoſ. 13. dati ſint tantùm tres numeri continuè proportionales A,B,C; eandem tamen propoſitionem demonſtrabimus, etiamſi plures fuerint, q. tres. Sint namque numeri plures, q. tres A,B,C,D, continuè proportionales; quiſe ipſos multiplicantes faciant E,F,G,H: poſtea verò multiplicantes ipſos E,F,G,H, faciant I,K,L,M, & ſic deinceps. Quoniam igitur E,F,G, [a] *ex demonſtratis proportionales*

a 13. octaui.

tionales ſunt: Item F,G,H; cùm illi producti ſint ex A,B,C, proportionalibus in ſe ipſos: hi verò ex B,C,D, proportionalibus quoq; in ſe ipſos: Erunt E,F,G,H, continuè proportionales: Non ſecus proportionales erunt I,K,L,M; & alij deinceps eodem modo producti.

PROBL. 12. PROPOS. 14. 13.

Si quadratus numerus quadratum numerum metiatur: & latus vnius metietur latus alterius. Et ſi vnius quadrati latus metiatur latus alterius; & quadratus quadratum metietur.

METIATVR quadratus A, cuius latus C, quadratum B, cuius latus D. Dico & latus C, latus D, metiri. Multiplicantes enim ſe mutuò C, & D, faciant E. Quoniam igitur, vt liquet ex demonſtratione propoſ. 11. huius libri, A, E, B, continuè proportionales ſunt in ratione C, ad D; Metitur autem A, primus extremum B: [a] metietur quoque A, primus ſecundum E. Quare cùm ſit vt A, ad E, ita C, ad D; & C, latus, latus D, metietur.

A, 4. E, 12. B, 36. C, 2. D, 6.

[a] 7. octani.

METIATVR iam C, latus, latus D. Dico & quadratũ A, quadratum B, metiri. Eodem enim modo erit, vt C, ad D, ita A, ad E, propterea quòd A, E, B, continuè proportionales ſunt in ratione C, ad D, vt demonſtratum eſt propoſ. 11. huius lib. Quare cùm C, metiatur D, metietur quoque A, primus E, ſecundum; ac proinde & extremum B, metietur, ex theor. 2. ſcholij propoſ. 6. huius lib. Si quadratus ergo numerus quadratum numerum metiatur, &c. Quod erat oſtendendum.

THEOR. 13. PROPOS. 15. 14.

Si cubus numerus cubum numerum metiatur; & latus vnius metietur latus alterius. Et ſi latus vnius cubi latus alterius metiatur; & cubus cubum metietur.

METIATVR cubus A, cuius latus C, cubum B, cuius latus D. Dico & latus C, metiri latus D. Vterque enim C, & D, ſeipſum multiplicans faciat E, & F; multiplicantes autem ſe mutuò faciant G: Multiplicantes denique G, faciant H, I. Quoniam igitur, vt apparet ex demonſtratione propoſ. 12. huius lib. tam E, G, F, quàm A, H, I, B, continuè ſunt proportionales in ratione C, ad D; Metitur autem A, primus B, extremum; [b] metietur quoque idem A, primus H, ſecundum. Cùm ergo ſit, vt A, ad H, ita C, ad D; metietur & C, latus, latus D.

A, 8. H, 24. I, 72. B, 216. E, 4. G, 12. F, 36. C, 2. D, 6.

[b] 7. octani.

METIATVR iam C, latus, latus D. Dico & A, cubum, metiri cubum B. Eodem enim argumento erit, vt C, ad D, ita A, ad H, propterea quòd A, H, I, B, continuè proportionales ſunt in ratione C, ad D, vt oſtenſum eſt propoſ. 12. huius lib. Quapropter cùm latus C, metiatur latus D, metietur & A, ipſum H; atque idcirco & extremum B, cubus cubum, ex iis, quæ ad propoſ. 6. huius libri demonſtrauimus. Itaq; ſi cubus numerus cubum numerũ metiatur, &c. Quod erat demonſtrandũ.

THEOR. 14. PROPOS. 16. 15.

Si quadratus numerus quadratum numerum nõ metiatur; neque latus vnius metietur alterius latus. Et ſi latus vnius quadrati non metiatur latus alterius, neque quadratus quadratum metietur.

SINT quadrati A, & B, quorũ latera C, & D; Non metiatur autem A, ipſum B. Dico neque C, latus metiri latus D. Si enim fieri poteſt, metiatur C, ipſum D. Quia igitur C, latus quadrati A, metitur D, latus quadrati B; [c] metietur & quadratus A, quadratum B. Quod eſt abſurdum; Ponitur enim non metiri. Non ergo latus C, metitur latus D.

A, 16. B, 81. C, 4. D, 9.

[c] 14. octani.

SED iam latus C, non metiatur latus D. Dico quòd nec quadratus A, quadratum B, metietur. Si namque A, metiri dicatur ipſum B; [d] metietur quoque C, latus illius, latus huius D. Quod eſt abſurdum. Ponitur enim non metiri. Igitur quadratus A, quadratum B, non metietur. Quapropter ſi quadratus numerus quadratum numerum non metiatur, &c. Quod erat oſtendendum.

[d] 14. octani.

THEOR. 15. PROPOS. 17. 15.

Si cubus numerus cubum numerum non metiatur: neque latus vnius latus alterius metietur. Et ſi latus cubi vnius latus alterius non metiatur: neque cubus cubum metietur.

SINT cubi A, & B, quorum latera C, & D; Non metiatur autem A, ipſum B. Dico quòd nec latus C, latus D, metietur. Si enim C, dicatur metiri D; [e] metietur quoque A, cubus cubum B. Quod eſt abſurdum, cùm ponatur non metiri. Non ergo latus C, latus D, metietur.

A, 8. B, 27. C, 2. D, 3.

[e] 15. octani.

SED iam C,latus,non metiatur latus D. Dico quòd nec cubus A,cubũ B,metietur. Nam ſi me-
a 15. octaui. tiri dicatur; [a] metietur etiam C,latus,latus D. Quod eſt abſurdum. Ponitur enim nõ metiri. Non igitur A,cubus, cubum B, metietur. Quocirca, ſi cubus numerus, cubum numerum non metiatur, &c. Quod demonſtrandum erat.

SCHOLIVM.

PROXIME antecedentes quatuor propoſitiones hoc etiam modo proponi poſſunt, ſi maiores numeri ad minores referantur.

Si quadratus numerus quadrati numeri, & cubus cubi, ſit multiplex; & vnius latus lateris alterius multiplex erit. Et ſi vnius quadrati, & cubi latus lateris alterius ſit multiplex; & quadratus quadrati, & cubus cubi multiplex erit. Si verò quadratus quadrati, & cubus cubi nõ ſit multiplex; neq; latus lateris erit multiplex. Et ſi latus lateris non ſit multiplex; neque quadratus quadrati, neque cubus cubi erit multiplex.

NAM ſi quadratus A, quadrati B, & cubus A, cubi B, ſit multiplex; metietur B, quadratus quadratum A,
a 14. & 15. octaui. *& cubus B, cubum A.* [a] *Igitur & latus D, latus C, metietur; ac proinde latus C, lateris D, multiplex erit.*

A, 36. B, 9. C, 6. D, 3.

QVOD ſi latus C, lateris D, multiplex ſit, metietur latus D, latum C.
b 14. & 15. octaui. [b] *Igitur & B, ipſum A, quadratus quadratum, & cubus cubũ metietur; Ac propterea A, ipſius B, quadratus quadrati, & cubus cubi, erit multiplex.*

A, 64. B, 8. C, 4. D, 2.

AT verò ſi A, ipſius B, quadratus quadrati, & cubus cubi, nõ ſit multiplex; non metietur B, ipſum A, quadratus quadratum, aut cubus cubum.
c 16. & 17. octaui. [c] *Igitur neque latus D, latus C, metietur. Quare C, latus lateris D, non erit multiplex.*

A, 49. B, 9. C, 7. D, 3 1.

SIMILITER ſi C, latus, lateris D, non ſit multiplex; non metietur D, latus, latus
d 16. & 17. octaui. *C.* [d] *Igitur nec B, ipſum A, quadratus quadratum, nec cubus cubum metietur. Atq; adeò A, ipſius B, quadratus quadrati, & cubus cubi, multiplex non erit.*

A, 125. B, 8. C, 5. D, 2.

16. THEOR. 16. PROPOS. 18.

DVORVM ſimilium planorum numerorum vnus medius proportionalis eſt numerus: Et planus ad planum duplicatam habet lateris homologi ad latus homologum rationem.

SINT plani numeri ſimiles A,B, & latera illius ſint C, D, huius verò illis proportionalia E, F, ita vt C,D, ſe mutuò multiplicãtes faciant A; & E,F, mutuò ſe multiplicãtes faciant B; ſitq; vt C, ad D, ita E, ad F. Dico inter A, & B, cadere vnum numerũ medium proportionalem, & proportionẽ A, ad B, eſſe duplicatam proportionis laterum homologorum C,E, vel D,F. Multiplicantes enim ſe mutuò D, E, faciant G. Quoniam igitur eſt C, ad D, vt E, ad F; erit permutando C, ad E, vt D, ad F. Et quia D, multiplicans C, & E, fecit A, & G; [a] erit A, ad G, vt C, ad E, hoc eſt, vt D, ad F. Similiter quia E, multiplicãs D, & F, fecit G, & B; [b] erit quoque G, ad B, vt D, ad F. Proportionales ergo ſunt A, G, B, in ratione C, ad E, vel D, ad F; Atque adeò inter A, & B, medius proportionalis cadit G.

A, 12. G, 18. B, 27. C, 6. D, 2. E, 9. F, 3.

a 17. ſept. b 17. ſept.

QVIA verò, cùm A, G, B, ſint continuè proportionales, A, ad B, duplicatam habet rationẽ eius, quam habet A, ad G, hoc eſt, C, ad E, vel D, ad F; perſpicuum eſt proportionem numeri plani A, ad planum B, eſſe duplicatam eius, quã habet C, ad E, vel D, ad F, latus homologum ad latus homologum. Duorum igitur ſimilium planorum numerorum, &c. Quod erat demonſtrandum.

SCHOLIVM.

QVIA oſtenſum eſt A, G, B, eſſe proportionales in ratione C, ad E, vel D, ad F; manifeſtum eſt, inter duos ſimiles planos A, & B, cadere medium proportionalem G, in ratione laterum homologorum C, E, vel D, F, aſſumptorum.

CONSTAT etiam ex dictis, medium proportionalem G, & vtrumlibet planorum A, B, eſſe inter ſe compoſitos. Cùm enim oſtenſi ſint A, G, B, proportionales in ratione C, ad E, vel D, ad F, id eſt, eſſe A, ad G, & G, ad B, vt C, ad E, vel D, ad F; metiantur autem E, F, latera numerum B, cuius ſunt latera, conſequentes conſequentem, ſi de proportionibus G, ad B, & C, ad E, vel D, ad F, loquamur; metientur quoque C, D, ipſum G, antecedentes antecedentem, quòd ſit G, ad B, vt C, ad E, vel D, ad F. Atqui & C, D, latera metiuntur numerum A, cuius ſunt latera. Igitur G, A, menſuram communem habent tam C, quàm D; Ac proinde compoſiti ſunt inter ſe. Rurſus cùm ſit A, ad G, vt C, ad E, vel D, ad F: metiantur autem C, D, latera ſuum planum A, antecedentes antecedentem: metientur etiam E, F, ipſum G, conſequentes conſequentem. Quare cùm & E, F, latera ſuum planum B, metiantur, habebunt G, B, communem menſuram tam E, quàm F, ideoq; erunt inter ſe compoſiti.

EX qua demonſtratione etiam manifeſtum relinquitur, priorum duorum numerorum A, G, communes menſuras eſſe C, D, latera prioris plani A; poſteriorum autem G, B, menſuras communes eſſe E, F, latera plani poſterioris B.

THEORE-

THEOR. 17. PROPOS. 18.

18.

DVORVM ſimilium ſolidorum numerorum duo medij proportionales ſunt numeri: Et ſolidus ad ſolidum triplicatam rationem habet lateris homologi ad latus homologum.

SINT ſolidi numeri ſimiles A, B, & latera illius ſint C, D, E, huius verò illis proportionalia F, G, H, ita vt ſit C, ad D, quemadmodum F, ad G; & D, ad E, ſicut G, ad H. Dico inter A, & B, cadere duos medios proportionales, & proportionem A, ad B, eſſe triplicatam eius, quam habent latera homologa C, F, vel D, G, vel E, H.

A,30. M,60. N,120. B,240.
I,6. L,12. K,24.
C,2. D,3. E,5. F,4. G,6. H,10.

Multiplicantes enim ſe mutuò C, D, faciant I; & F, G, ſe mutuò multiplicantes faciát K. Item D, F, ſe mutuò multiplicátes faciant L. Poſtremò E, H, ipſum L, multiplicantes faciant M, N. Quia igitur C D, E, ipſis F, G, H, proportionales ſunt; erunt & permutando proportionales; nimirum vt C, ad F, ita D, ad G, & E, ad H. Quoniam verò D, multiplicans C, & F, fecit I, & L; [a] erit vt C, ad F, ita I, ad L. Simili modo, quia F, multiplicans D, & G, fecit L, & K; [b] erit quoque vt D, ad G, ita L, ad K. Sunt ergo I, L, K, continuè proportionales in ratione C, ad F, vel D, ad G, vel E, ad H. Et quoniam A, ſolidus factus eſt ex mutua multiplicatione laterum C, D, E; factus eſt autem I, ex multiplicatione mutua C, D; fit vt E, multiplicans I, faciat A. Eodem modo cùm B, ſolidus factus ſit ex mutua multiplicatione laterum F, G, H; & K, factus ex mutua multiplicatione F, G; numerus H, ipſum K, multiplicans faciet B. Quare cùm E, multiplicans I, & L, fecerit A, & M, [c] erit A, ad M, vt I, ad L, hoc eſt vt C, ad F, vel D, ad G, vel E, ad H. Eadē ratione, cùm H, multiplicans L, K, fecerit N, & B; [d] erit N, ad B, vt L, ad K, hoc eſt, vt C, ad F, vel D, ad G, vel E, ad H. [e] Eſt autem & M, ad N, vt E, ad H; quòd E, H, multiplicantes L, fecerint ipſos M, & N. Igitur A, M, N, B, continuè ſunt proportionales in ratione C, ad F, vel D, ad G, vel E, ad H; Atque idcirco inter A, B, ſolidos ſimiles duo medij M, N, continuè proportionales cadunt.

a 17. ſeptimi. b 17. ſept. c 17. ſept. d 17. ſept. e 18. ſept.

QVONIAM verò, cùm A, M, N, B, ſint proportionales continuè; proportio A B, triplicata eſt eius, quam habet A, ad M, Eſt autem A, ad M, vt C, ad F, vel D, ad G, vel E, ad H; Habebit quoque A, ad B, ſolidus ad ſolidum, proportionem triplicatam eius, quam habet C, ad F, vel D, ad G, vel E, ad H, latus ad latus homologum. Quocirca, Duorum ſimilium ſolidorum numerorum duo medij, &c. Quod oſtendendum erat.

SCHOLIVM.

CVM demonſtratum ſit A, M, N, B, proportionales eſſe in ratione C, ad F, vel D, ad G, vel E, ad H; liquet inter duos ſimiles ſolidos A, & B, cadere duos medios proportionales M, & N, in ratione laterum homologorum C, F, vel D, G, vel E, H, aſſumptorum.

EX ijs, quæ dicta ſunt, perſpicuum etiam eſt, duos medios proportionales M, N, & vtrumlibet ſolidorum A, B, inter ſe eſſe compoſitos. Cùm enim A, M, N, B, oſtenſi ſint proportionales in ratione C, ad F, vel D, ad G, vel E, ad H. hoc eſt, eſſe A. ad M, & M, ad N. & N. ad B, vt C, ad F, vel D, ad G, vel E, ad H; metiantur autem F, G, H, latera ſuum ſolidum B, conſequentes conſequentem, ſi de proportionibus N, ad B, & C, ad F, vel D. ad G, vel E, ad H, loquamur; metientur quoq; C, D, E, ipſum N, antecedentes antecedentem, quòd ſit N, ad B, vt C, ad F, vel D, ad G, vel E, ad H. Atqui & C, D, E, ipſum M, metiuntur; (Cùm enim M, factus ſit per conſtructionem, ex E, in L, metietur E, ipſum M. Deinde quia M, N, B, proportionales ſunt ipſis I, L, K; metitur autem K; ipſum B, quòd B, factus ſit ex K, in H; metietur quoque I, ipſum M; Metiuntur autem & C, D, latera planum ſuum I. [a] *Igitur & C, D, metientur ipſum M; Atq; adeò C, D, E, ipſum M, metientur.)* a 11. prop. *Nec non & ipſum A, nimirum latera ſuum ſolidum. Ergo A, M, N, habent communem menſuram tam C, quàm D, quàm E; Ideoq; compoſiti inter ſe ſunt. Rurſus quia eſt A, ad M, vt C, ad F, vel D, ad G, vel E, ad H; metiuntur autem C, D, E, latera ſolidum ſuum A; antecedentes antecedentem, metientur quoq; F, G, H, ipſum M, conſequentes conſequentem. Metiuntur verò & F, G, H, ipſum N; (Cùm enim N, factus ſit ex H, in L, per conſtructionē; metietur H, ipſum N. Deinde quia A, M, N, ipſis I, L, K, proportionales ſunt: metitur autem I, ipſum A, quòd A, factus ſit ex I, in E; metietur etiam K, ipſum N. Cùm ergo & F, G, latera metiantur planum ſuum K: metientur quoque F, G, ipſum N; atque adeò F, G, H, ipſum N, metientur.) Nec non & ipſum E, nimirum latera ſuum ſolidum. Igitur M, N, B, communem habent menſurā tam F, quàm G; quàm H. Quare ſunt inter ſe compoſiti. Ex quibus liquidò conſtat, priorum trium numerorum A, M, N, communes eſſe menſuras C, D, E, latera prioris ſolidi A; At verò F, G, H, latera poſterioris ſolidi B, communes menſuras eſſe poſteriorum trium numerorum M, N, B.*

A,30. M,60. N,120. B,240.
I,6. L,12. K,24.
C,2. D,3. E,5. F,4. G,6. H,10.

QVIA verò ſolidus numerus tria latera habet, ex quorū mutua multiplicatione gignitur, demonſtremus hoc loco, eundem numerū ſolidū procreari; ſiue primū latus ducatur in ſecundū, & numerus procreatus in tertium; ſiue primum in tertium, & numerus genitus in ſecundum; ſiue denique ſecundum in tertium,

& productus numerus in primum: Quin etiam propoſitis quotuis numeris, eundem ſemper numerum gigni ex eorum multiplicatione mutua, quomodocunq; ordinem inter ſe permutent. Qua quidem res magnum uſum habet in rebus Arithmeticis. Proponatur ergo eiuſmodi theorema.

DATIS quotlibet numeris, procreabitur ex eorum mutua multiplicatione idem ſemper numerus, quomodocunque ordinem inter ſe permutent.

SINT primùm tres numeri dati A, B, C, & ex A, in B, fiat D; & ex D, in C, fiat E. Dico eundem E, procreari, ſi ex A, in C, fiat F, & F, in B, multiplicetur: Item ſi ex B, in C, fiat G, & G, in A, multiplicetur. Quoniam enim C, multiplicans D, facit E; [a] erit vt E, ad D, ita C, ad vnitatem: Sed vt C, ad vnitatem, [b] ita quoque eſt F, ad A; quòd A, multiplicans C, faciat F. Igitur erit vt E, ad D, ita F, ad A: Vt autem D, ad B, [c] ita eſt A, ad vnitatem; propterea quòd A, multiplicans B, facit D. Igitur ex æqualitate erit, vt E, ad B, ita F, ad vnitatem: [d] atque idcirco numerus ex E, in vnitatem factus, hoc eſt, ipſemet numerus E, æqualis erit numero facto ex B, in F, productum ex A, in C. Quemadmodum igitur numerus E, fit ex A, in B, & ex producto in C; ita idem E, fit ex A, in C, & ex producto in B. Quod eſt primum.

A, 3. B, 5. C, 8.
D, 15. E, 120. F, 24. G, 40.
E, F, D, A, B, vnitas.

a 15. defin.
b 15. defin.
c 15. defin.
d 19. ſepti.

RVRSVS quia ex C, in D, fit E; [e] erit vt E, ad D, ita C, ad vnitatem: Sed vt C, ad vnitatem, [f] ita etiam eſt G, ad B, eò quòd G, factus eſt ex B, in C. Igitur erit, vt E, ad D, ita G, ad B: Vt autem D, ad A, [g] ita eſt B, ad vnitatem, propterea quòd D, factus eſt ex A, in B. Igitur ex æquo erit vt E, ad A, ita G, ad vnitatem: [h] ac proinde numerus factus ex E, in vnitatem, id eſt, ipſemet numerus E, æqualis erit numero genito ex A, in G, productum ex B, in C. Quemadmodum igitur E, gignitur ex A, in B, & ex producto in C; ita idem E, procreatur ex B, in C, & ex producto in A. Quod eſt ſecundum.

E, G, D, B, A, vnitas.

e 15. defin.
f 15. defin.
g 15. defin.
h 19. ſept.

SINT deinde quatuor numeri A, B, C, D: atque ex A, in B, & ex producto in C, & ex producto in D, fiat E. Dico eundem E, gigni ex A, in B, & ex producto in D, & ex producto in C: Item ex A, in C, & ex producto in B, & ex producto in D: Item ex A, in C, & ex producto in D, & ex producto in B: Item ex A, in D, & ex producto in B, & ex producto in C: Itẽ ex A, in D, & ex producto in C, & ex producto in B: Itẽ ex B, in C, & ex producto in A, & ex producto in D: Item ex B, in C, & ex producto in D, & ex producto in A: Itẽ ex B, in D, & ex producto in A, & ex producto in C: Item ex B, in D, & ex producto in C, & ex producto in A: Item ex C, in D, & ex producto in A, & ex producto in B: Item ex C, in D, & ex producto in B, & ex producto in A; ita vt præter primam multiplicationem, qua omnes quatuor numeri ordinatim multiplicantur inter ſe, fiant 11. multiplicationes diuerſæ producentes eundem ſemper numerum. Quoniam enim, vt in tribus oſtenſum eſt, idem numerus fit, ſiue genitus numerus ex A, in B, ducatur prius in C, deinde hic productus in D; ſiue prius in D, deinde hic productus in C, conſtat id, quod primo loco proponitur.

A, 2. B, 3. C, 4. D, 5. E, 120.

DEINDE, quia vt in tribus eſt oſtenſum, idem numerus fit ex A, in B, & ex producto in C, qui fit ex A, in C, & ex producto in B, perſpicuum eſt, eundem numerum gigni tum ex A, in B, & ex producto in C, & ex producto in D, tum ex A, in C, & ex producto in B, & ex producto in D. quod eſt ſecundum.

TERTIO, quoniam, vt in tribus eſt oſtenſum, idem numerus procreatur, ſiue genitus ex A, in C, ducatur prius in B, deinde hic productus in D; ſiue prius in D, deinde hic productus in B, patet eundem generari numerum tum ex A, in C, & ex producto in B, & ex producto in D, tum ex A, in C, & ex producto in D, & ex producto in B. Cùm ergo ille ſit æqualis proximè oſtenſo primo producto, erit & hic æqualis eidem. quod eſt tertium.

QVARTO, quia, vt in tribus oſtenſum eſt, idẽ numerus fit ex A, in B, & ex producto in D, qui ex A, in D, & ex producto in B; gignetur quoq; idẽ numerus ex A, in B, & ex producto in D, & ex producto in C, qui ex A, in D, & ex producto in B, & ex producto in C. Sed ille oſtenſus eſt primo loco æqualis ei, qui fit ex A, in B, & ex producto in C, & ex producto in D. Igitur & hic. Quod eſt quartum.

QVINTO, quoniam vt demonſtratum eſt in tribus, idem numerus gignitur ex A, in C, & ex producto in D, qui ex A, in D, & ex producto in C producetur idem numerus ex A, in C, & ex producto in D, & ex producto in B, qui ex A, in D, & ex producto in C, & ex producto in B. Cũ ergo ille ſit oſtẽſus tertio loco æqualis ei, qui fit ex A, in B, & ex producto in C, & ex producto in D, erit & hic eidem æqualis. Quod eſt quintum.

SEXTO, quia, vt in tribus demonſtrauimus, idem numerus fit ex A, in B, & ex producto in C, qui fit ex B, in C, & ex producto in A liquet eundem procreari numerum tam ex A, in B, & ex producto in C, & ex producto in D, quàm ex B, in C, & ex producto in A, & ex producto in D. Quod eſt ſextum.

SEPTIMO, quia, vt in tribus oſtendimus, idẽ numerus gignitur, ſiue productus ex B, in C, ducatur prius in A, deinde hic ꝓductus in D, ſiue prius in D deinde hic ꝓductus in A; cõſtat eundẽ numerũ fieri ex B, in C, & ex ꝓducto in D & ex ꝓducto in A qui fit ex B, in C, & ex ꝓducto in A, & ex ꝓducto in D. Sed hic ꝓximè oſteſus eſt æqualis ei, q̃ fit ex A, in B, & ex ꝓducto in C, & ex ꝓducto in D. Igitur & ille. ꝙ eſt ſeptimum.

OCTAVO, quia, vt in tribus oſtenſum eſt, idem numerus procreatur ex A, in B, & ex producto in D, qui ex B, in D, & ex producto in A; gignetur quoq; idẽ numerus ex A, in B, & ex ꝓducto in D, & ex ꝓducto in C,

qui

qui ex B,in D,& ex producto in A,& ex producto in C. Sed ille primo loco oſtenſus eſt æqualis ei, qui fit ex A, in B,& ex producto in C,& ex producto in D. Igitur & hic. Quod eſt octauum.

Nono, quia, vt demonſtratum eſt in tribus, idem numerus fit ex B,in C,& ex producto in D, qui ex B, in D,& ex producto in C; procreabitur idem quoq; numerus ex B,in C,& ex producto in D,& ex producto in A. qui ex B,in D,& ex producto in C,& ex producto in A. Sed ille oſtenſus eſt ſeptimo loco æqualis ei, qui fit ex A,in B,& ex producto in C,& ex producto in D. Ergo & hic. Quod eſt nonum.

A,2. B,3. C,4. D,5. E,120. *Decimo, quoniam, vt in tribus eſt demonſtratum idem gignitur numerus ex A,in C,& ex producto in D,qui ex C,in D,& ex producto in A; producetur quoque idem numerus ex A,in C,& ex producto in D,& ex producto in B, qui ex C in D, & ex producto in A, & ex producto in B. Sed ille, vt tertio loco eſt oſtenſum, æqualis eſt ei, qui fit ex A,in B, & ex producto in C,& ex producto in D. Igitur & hic. Quod eſt decimum.*

Postremo, quoniam, vt oſtenſum eſt in tribus, idem numerus gignitur ex B,in C,& ex producto in D qui ex C,in D,& ex producto in B; procreabitur quoque idem numerus ex B,in C,& ex producto in D, & ex producto in A,qui ex C,in D,& ex producto in B,& ex producto in A Sed ille ſeptimo loco oſtenſus eſt æqualis ei, qui fit ex A,in B,& ex producto in C,& ex producto in D. Igitur & hic eidem æqualis erit. Quod eſt vndecimum.

Eodem argumentandi modo vtendum eſt in quinque vel pluribus numeris; dummodo interdum in quinque aſſumatur id, quod iam in quatuor demonſtratum eſt; & in ſex, quod in quinque, &c. Vt in quinque numeris A,B,C,D,E, apparet, quorum ordinem ter immutauimus, idemq; ſemper numerus ex continua eorum multiplicatione inter ſe procreatur. Nam productus ex A, in B, cum C,D,E, conſtituit quatuor numeros. Ergo quomodocunque inter ſe ordinent permutent, eundem ſemper gignent numerum: ac proinde tam ſecundus ordo, quàm tertius, eundem numerum producet, quem primus. Item quia tres numeri, A,B,C, quomodocunque ordinem commutent, eundem efficiunt numerum: ſit vt quartus ordo eundem prorſus numerum procreet, quem primus, & ſic de cæteris.

A. B. C. D. E.
A. B. C. E. D.
A. B. E. D. C.
B. C. A. D. E.

THEOR. 18. PROPOS. 20. 17.

SI inter duos numeros vnus medius proportionalis cadat numerus; Similes plani erunt illi numeri.

CADAT inter A, & B, medius proportionalis C. Dico A, & B, eſſe planos ſimiles. Sumantur D,& E, minimi in ratione A,C,B. Quia igitur D,E, minimi ſunt in ratione A,ad C; [a] metientur D, & E, ipſos A,& C, æquè: metiantur per F. Similiter æquè metiẽtur ipſos C, & B: metiantur per G. [b] Itaque F, multiplicans D, & E, faciet A,& C; [c] Item G, eoſdem D, & E, multiplicans faciet C,& B. Quia ergo E, multiplicans F,& G, fecit C,& B; [d] erit, vt C, ad B, ita F, ad G: Vt autem C, ad B ita erat D, ad E. Igitur erit vt D, ad E, ita F, ad G; & permutando vt D, ad F, ita E, ad G. Quoniam verò F, multiplicans D, fecit A; erit A, planus, cuius latera D,F. Simili modo, quia G, multiplicans E, fecit B; erit & B, planus cuius latera E, G. Cùm ergo hæc latera oſtenſa ſint eſſe proportionalia, hoc eſt, D, ad F, vt E, ad G; erunt ex defin. A,B, plani ſimiles. Quare ſi inter duos numeros vnus, &c. Quod demonſtrandum erat.

A, 18. C, 24. B, 32. D, 3. E, 4. F, 6. G, 8.

[a] 21. *ſeptimi*
[b] 9. *pron.*
[c] 9. *pron.*
[d] 17. *ſeptimi*

THEOR. 19. PROPOS. 21. 19.

SI inter duos numeros duo medij proportionales cadant numeri; Similes ſolidi ſunt illi numeri.

CADANT inter A,& B, duo medij proportionales C, D. Dico A,& B, eſſe ſimiles ſolidos. Sumantur tres E,F,G, minimi in ratione A,C,D,B. Quoniam igitur inter E,& G, medius cadit proportionalis F; [e] erunt E,& G, plani ſimiles: ſint ipſius E, latera H, I; ipſius verò G, latera illis proportionalia K, L. Et quia E, F, G, cùm minimi ſint in ratione A, C, D, [f] æquè metiuntur ipſos A,C,D, eiuſdem rationis cum illis metiantur per M. Eodemque modo, [g] quia E,F,G, minimi æquè metiuntur C,D,B, eandem habentes rationem cum illis; metiantur per N; [h] ita vt M, multiplicans E,F,G, faciat A,C,D; & N, multiplicans eoſdem E, F, G, faciat C,D,B. Factus eſt autẽ E, ex multiplicatione mutua ſuorum laterum H, & I nec non G, ex mutua multiplicatione ſuorum laterum K, & L. Igitur A, producitur ex mutua multiplicatione H,I,M; & B, ex mutua multiplicatione K,L,N; atq; adeò A, ſolidus eſt numerus, ex defin. latera habẽs H,I,M; & B, ſolidus etiã, latera habens K,L,N. Quia verò M,& N, multiplicãtes F, faciũt C,& D, vt oſtẽdimus; [i] erit C, ad D, vt M, ad N: [k] Sunt autẽ C,& D, in eadẽ ratione, in qua E,& F; & N, multiplicãs E,& F, fecerit ipſos C,& D; Nec nõ & E,F, eandẽ habent rationẽ, quam H,K, vel I,L. Etenim inter planos ſimiles E,G, cadit F, medius proportionalis, per coroll. propoſ. 19. huius lib. in ratione laterum ho-

A, 24. C, 72. D, 216. B, 648. E, 1. F, 3. G, 9. H, 1. I, 1. M, 24. K, 3. L, 3. N, 72.

A, 8. C, 12. D, 18. B. 27. E, 4. F, 6. G, 9. H, 2. I, 2. M, 2. K, 3. L, 3. N, 3.

[e] 20. *octaui.*
[f] 21. *ſeptimi*
[g] 21. *ſeptimi*
[h] 9. *pron.*
[i] 18. *ſeptimi*
[k] 17. *ſeptimi*

mologorum H,K, vel I,L. Igitur erit quoque H,ad K,& I, ad L,vt M, ad N: & permutando H, ad I, vt K,ad L; & I,ad M,vt L,ad N. Proportionalia ergo ſunt latera H, I, M, lateribus K,L,N; ac propterea ſimiles ſunt numeri ſolidi A,& B. Quam ob rem,ſi inter duos numeros duo medij proportionales cadant,numeri,&c. Quod erat demonſtrandum.

SCHOLIVM.

DVO exempla appoſuimus,in quorum priori liquidò conſtat,vnitatem E,eſſe planum numerum,& vnitates H,I,eius latera,licet impropriè,vt in definitione numeri plani monuimus. Si enim vnitatem à numeris planis excludamus, non poterimus hac argumentatione Euclidis demonſtrare, numeros A, & B, qui includunt duos medios proportionales C,& D,eſſe ſolidos ſimiles. Quod idem continget in aliis omnibus numeris, qui habent duos medios proportionales in ratione multiplici, cuiuſmodi ſunt etiam A, B, in eodem priori exemplo. Hoc autem eſt abſurdum,cùm Euclides propoſitionem generaliter proponat, eamq; ſine vlla exceptione demonſtret.

20. THEOR. 20. PROPOS. 22.

SI tres numeri deinceps ſint proportionales, primus autem ſit quadratus; Et tertius quadratus erit.

A,9. B,54. C.324. SINT tres numeri A,B,C,continuè proportionales, ſitque primus eorum A, quadratus. Dico & tertium C,quadratum eſſe. Nam cùm inter A, & C, cadat medius proportionalis; [a] erunt A, & C, plani ſimiles. Quare exiſtente A,quadrato, erit & C,ei ſimilis, quadratus. Si igitur tres numeri deinceps ſint proportionales,&c. Quod demonſtrandum erat.

[a] 20. oſtani.

21. THEOR. 21. PROPOS. 23.

SI quatuor numeri deinceps ſint proportionales, primus autem ſit cubus; Et quartus cubus erit.

A,27. B,45. C,75. D,125. SINT quatuor numeri A,B,C,D, proportionales continuè,& A,primus ſit cubus. Dico & quartum D, cubum eſſe. Cum enim inter A,& D,cadant duo medij proportionales B,C; [b] erunt A,& D,ſolidi ſimiles. Quare exiſtente A,cubo,erit & D,illi ſimilis,cubus. Quam ob rem,ſi quatuor numeri deinceps ſint proportionales,&c. Quod erat oſtendendum.

[b] 21. oſtani.

SCHOLIVM.

HAEC eſt apud omnes interpretes Euclidis,quos ego vidi,vulgata demonſtratio precedentium duarum propoſitionũ; quam qui diligenter examinare velit,inueniet ſanè mancam eſſe,& imperfectam. Cùm enim ad defin. 21. lib. 7. tradiderimus,duos numeros planos, vel ſolidos poſſe ſimiles eſſe,quamuis non quibuſcunq; lateribus vnius exhiberi poſſint alia latera alterius proportionalia; dummodo quibuſdam lateribus vnius proportionalia ſint quædam alterius; Iure optimo quis inficiari poterit, ſi duorum planorum ſimilium vnus fuerit quadratus,alterum quoq; quadratum eſſe: & ſi duorum ſimilium ſolidorum vnus cubus fuerit, alterum etiam eſſe cubum: quod tamen in demonſtratione pro conceſſo,atque omnibus perſpicuo aſſumebatur. Nam poſitis duobus numeris planis 36.& 64. ſimilibus,ſatis eſt, vt duobus lateribus prioris, qualia ſunt 3. & 12. exhibeantur alia duo latera poſterioris,nimirũ 4.& 16. proportionalia. Vnde etiamſi prior ſit quadratus, habens duo latera æqualia 6.& 6. meritò dubitare quis poſſit,immò omnino negare, poſteriorem habere alia duo latera his proportionalia,hoc eſt,inter ſe quoque æqualia, atque adeò eſſe quadratum: quemadmodum etiam manifeſtum eſt,hiſce lateribus prioris 4. & 9. vel 2.& 18. non reſpondere alia latera in poſteriori proportionalia. Si igitur his lateribus prioris numeri non reperiuntur alia latera in poſteriori proportionalia, quanquam ipſi numeri ſint ſimiles; cur ſine demonſtratione vlla concedemus,his lateribus prioris æqualibus 6.& 6. aſſignari poſſe in poſteriori alia duo proportionalia,videlicet & inter ſe æqualia? Idem dicendum eſt de ſolidis ſimilibus. Quapropter vtramque propoſitionem Euclidis aliter demonſtrabimus, ad hunc, qui ſequitur,modum.

SINT tres numeri A, B, C, continuè proportionales, & primus A, quadratus. Dico & C, tertium eſſe quadratum. Sumpto enim D, latere quadrati A; cum D,ex defin. in ſe faciat A; erunt D, & A,ex ſcholio propoſ. 9, huius lib. ab vnitate continuè proportionales; eritq; conuertendo A, ad D,vt D,ad vnitatem; atque adeò cùm inter numerum A, eundem, & tam numerum C,quàm vnitatem,cadant medij proportionales multitudine æquales,nimirum vnus; cadent quoq; totidem,ex theor. 3. ſcholij propoſ. 10. huius libri,inter vnitatem,atque C,numerum,nimirum vnus, qui ſit E. Quoniam igitur vnitas & E,C. numeri ſunt cõtinuè proportionales; producetur C,ex E,in ſe ipſum, ex ſcholio propoſ. 10. huius lib. Ac proinde C,quadratus erit. ex defin. cuius latus E.

A,36. B,48. C.64. D,6. E,8. vni-.tas

ALITER. Sumptis tribus numeris,D,E,F,minimis in ratione A, ad B, & B, ad C; metietur D, ipſum A, & F,ipſum C,æquè,ex iis,quæ oſtendimus ad propoſ. 21. lib. 7. Et quoniam extremi D,F, minimorum trium

numerorum,

A,36. B,48. C,64. G,18. H,32. D,9. E,12. F,16. L,64. K,8. I,4.

numerorum, per coroll. 1. propoſ. 2. huius libri, ſunt quadrati: Eſt autem & A, quadratus, ex hypotheſi; [a] *cadet inter A, & D, quadratos medius vnus proportionalis, vt G. Quia verò eſt, ex æquo, vt A, ad C, ita D, ad F: & permutando, vt A, ad D, ita C, ad F;* [b] *cadet quoq; inter C, & F, vnus proportionalis medius, nimirum H. Cùm ergo F, primus metiatur C, vltimum;* [c] *metietur idem & ſecundum H. Sumpto autem I, latere quadrati F; metiatur I, toties numerum K, quoties F, ipſum H, metitur; ita vt H, ad F; & K, ad I, eandem habeant proportionem multiplicem. Sit quoq; L, quadratus ipſius K.* [d] *Itaque quia ratio L, ad F, quadrati ad quadratum, duplicata eſt rationis K, ad I, lateris ad latus, hoc eſt, H, ad F: Eſt autem & ratio C, ad F, eiuſdem rationis H, ad F, ex defin. duplicata, quòd conuertendo ſint proportionales etiam C, H, F; erit L, ad F, vt C, ad F; Ac proinde L, & C, æquales ſunt. Exiſtente ergo L, quadrato, ex conſtructione, & C, quadratus erit.*

a 11. octaui.
b 8. octaui.
c 7. octaui.
d 11. octaui

ALITER. [e] *Quoniam A, & C, ſimiles plani ſunt; ſint eorum latera proportionalia, D, E, quidem ipſius A; at F, G, ipſius C; ita vt ſit D, ad E, ſicut F, ad G: aſſumatur q3 H, latus quadrati A. Quoniam igitur idem numerus A, producitur ex D, in E, & ex H, in ſe,* [f] *erunt D, H, E, continuè proportionales. Cùm ergo ſit F, ad G, vt D, ad E; cadat q3 inter D, & E, medius proportionalis H, &* [g] *cadet quoq; inter F, & G, vnus medius proportionalis, qui ſit I. Quare cùm F, I, G, ſint continuè proportionales;* [h] *idem numerus fiet ex F, in G, qui ex I, in ſe ipſum. Fit autem C, ex F, in G. Igitur & idem C, fiet ex I, in ſe ipſum: Atq; adeo C, quadratus erit, ex definitione, cuius latus I.*

A,36. B,48. C,64. H,6. I,8. D,3. E,12. F,4. G,1.6.

e 20. octaui
f 20. ſeptimi.
g 8. octaui.
h 20. ſeptimi.

SINT rurſum quatuor numeri A, B, C, D, continuè proportionales, & A, primus, ſit cubus. Dico & D, quartum, cubum eſſe. Sumpto enim E, latere cubi A; fiat ex E, in ſeipſum numerus F, ac proinde, ex defin. ex E in F, cubus A. Quia ergo E, in ſe facit F, & in F, facit A; erunt, ex ſcholio propoſ. 9. huius lib. E, F, A, continuè proportionales ab vnitate; atq; idcirco conuertendo proportionales quoq; erunt numeri A, F, E, & vnitas. Itaq; cùm tam inter numerum D, quam vnitatem, at eundem numerum A cadant media proportionales multitudine æquales, videlicet duo; cadent, ex theorem. 3. ſcholij propoſ. 10. huius lib. totidem media inter vnitatem, & numerum D, qui ſint G, H. Itaque quia vnitas, & numeri G, H, D, continuè ſunt proportionales: fiet H, ex G, in ſe, & D, ex G in productum H, vt ad propoſ. 10. huius lib. à nobis eſt demonſtratum. Quare D, cubus eſt, ex definitione cuius latus G.

A,64. B,160. C,400. D,1000. F,16. H,100. E,4. G,10. vnitas

ALITER. Inuentis quatuor numeris minimis E, F, G, H, in ratione A, ad B, & B, ad C, & C, ad D, metietur E, ipſum A, & H, ipſum D, aque, per ea, quæ ad propoſ. 21. lib. 7. demonſtrauimus. Et quia E, H, extremi quatuor minimorum, cubi ſunt, ex 1. coroll. propoſ. 2. huius lib. Eſt autem & A, cubus ex hypotheſi; [i] *cadent inter E, A, cubos duo media proportionales, qui ſint I, K. Quoniam autem, ex æquo, eſt vt A, ad D, ita E, ad H; & permutando, vt A, ad E, ita D, ad H;* [k] *cadent quoq; inter H, D, duo media proportionales, qui ſint L, M. Cùm ergo H primus metiatur D extremum,* [l] *metietur idem & L ſecundum. Sumpto deinde N, latere cubi H; metiatur N, toties numerum O, quoties H, ipſum L, ita vt L, ad H, & O, ad N, eandem habeant proportionem multiplicem: ſit quoque P, cubus ipſius O.* [m] *Itaque cùm ratio P, ad H, cubi ad cubum triplicata ſit rationis O, ad N, lateris ad latus, hoc eſt L, ad H: Sit autem & ratio D, ad H, eiuſdem rationis L, ad H, ex defin. triplicata, quòd conuertendo proportionales etiam ſint D, M, L, H, erit P, ad H vt D, ad H; Ac propterea P, & D, æquales erunt. Quare cùm P, cubus ſit, ex conſtructione, cubus quoque erit D.*

A,64. B,160. C,400. D,1000. K,32. M,500. I,16. L,250. E,8. F,20. G,50. H,125. P,1000. O,10. N,5.

i 12. octaui.
k 8. octaui.
l 7. octaui.
m 12. octaui

THEOR. 22. PROPOS. 24. 22.

SI duo numeri rationem habeant inter ſe, quam quadratus numerus ad quadratum numerum; primus autem ſit quadratus, & ſecundus quadratus erit.

SIT enim A, ad B, vt C, quadratus ad quadratum D; ſitq; A, quadratus. Dico & B, eſſe quadratum. Cùm enim ſit A, ad B, vt C, ad D; [a] cadat autem inter C, & D, quadratos vnus medius proportionalis, videlicet E; [b] cedet quoque inter A, & B, medius vnus, qui ſit. F. Quia igitur tres numeri ſunt continuè proportionales A, F, B; & A, primus eſt quadratus; [c] erit & B, tertius, quadratus. Quare ſi duo numeri rationem habeant inter ſe, quam quadratus numerus ad quadratum numerum, &c. Quod erat oſtendendum.

A,36. F,48. B,64. C,9. E,12. D,16.

a 11. octaui.
b 8. octaui.
c 22. octaui.

COROLLARIVM.

LIQVET ex his, proportionem cuiuſuis numeri quadrati ad quemlibet numerum non-

a 24. octaui *quadratum exhiberi nullo modo posse in duobus numeris quadratis. Si enim exhiberetur,* [a] *essent ambo priores numeri habentes proportionem, quam quadrati proportionis exhibita, etiam quadrati, cùm primus ponatur quadratus. Quod est absurdum. Ponitur enim secundus, non quadratus. Vnde numeri in dupla proportione, proportionem nō habent, quam quadratus ad quadratum. Si enim haberent, essent omnes hi dupli numeri 4. 8. 16. 32. 64. 128. &c.*

b 24. octaui *quadrati. Primò enim 4. existente quadrato,* [b] *esset & 8. quadratus. Igitur & 16. & 32. &c.*

c 11. octaui. *quod est absurdum.* [c] *Nam inter 4. & 8: & inter 8. & 16. & inter 16. & 32. &c. caderet medius proportionalis, si essent quadrati: cùm tamen in scholio propos. 8. huius lib. demonstratum sit, inter numeros duplæ proportionis quosuis non posse cadere medium proportionalem.*

Simili modo numeri in quintupla proportione proportionem non habebunt, quam quadratus numerus ad numerum quadratum. Si enim haberent, [d] *caderet inter eos medius*

d 11. octaui.

c 8. octaui. *proportionalis.* [e] *Igitur & inter 5. & 1. minimos numeros quintuplæ proportionis. quod fieri non posse, demonstratum à nobis est in scholio propos. 8. huius lib.*

23. THEOR. 23. PROPOS. 25.

Si duo numeri rationem inter se habeant, quam cubus numerus ad cubum numerum; primus autem sit cubus, & secundus cubus erit.

Sit enim A, ad B, vt C, cubus ad D, cubum: sitque A, cubus Dico & B, cubum esse. Cum enim sit A, ad B, vt C, ad D;

a 12. octaui. [a] cadant autem inter C, & D, cubos duo medij proportionales, qui sint E, F;

b 8. octaui. [b] cadent quoque inter A, & B, duo medij, qui sint G, H. Quia igitur quatuor numeri A, G, H, B, sunt continuè proportionales, & A, primus est cubus;

c 23. octaui. [c] erit & B, quartus cubus. Quocirca, si duo numeri rationem inter se habeant, quam cubus numerus ad cubum numerum, &c. Quod demonstrandum erat.

A, 8. G, 12. H, 18. B, 27.
C, 64. E, 96. F, 144. D, 216.

COROLLARIVM.

Patet etiam ex his, proportionem cuiusuis numeri cubi ad quemlibet numerum non

a 25. octaui *cubum, non posse reperiri in duobus numeris cubis. Si enim reperiretur,* [a] *essent ambo priores numeri habentes proportionem, quam cubi proportionis reperta, etiam cubi, cùm primus ponatur cubus. Quod est absurdum. Ponitur enim secundus, non cubus.*

24. THEOR. 24. PROPOS. 26.

Similes plani numeri rationem inter se habent, quam quadratus numerus ad quadratum numerum.

Sint plani similes A, & B. Dico esse vt A, ad B, ita aliquem numerum quadratum ad alium quendam quadratum. Cùm enim A, & B, sint plani similes;

a 18. octaui. [a] cadet inter eos vnus medius proportionalis, videlicet C. Sumptis ergo tribus numeris D, E, F, minimis in ratione continua A, C, B; erunt extremi D, & F, quadrati, ex coroll. 1. propos. 2. huius lib. Quare cum sit, ex æquo A, ad B, vt D, ad F, manifestum est, ita esse A, ad B, vt est quadratus aliquis, videlicet D, ad quadratum alium, vt ad F. Ergo similes plani numeri rationem inter se habent, &c. Quod demonstrandum erat.

A, 20. C, 30. B, 45.
D, 4. E, 6. F, 9.

A, 20. C, 30. B, 45.
D, 4. E, 6. F, 9.

SCHOLIVM.

Facile etiam demonstrabimus conuersum huius, videlicet.

Numeri, qui proportionem habent, quam quadratus numerus ad quadratum numerum, similes plani sunt.

Habeant numeri A, B, proportionem inter se, quam quadrati C, D. Dico A, B, esse

a 11. octaui. *planos similes.* [a] *Quoniam enim inter quadratos C, D, cadit vnus medius proportionalis:*

b 8. octaui. *Et est, vt C, ad D, ita A, ad B;* [b] *cadet quoq; medius proportionalis inter A, & B.*

c 20. octaui *A, & B, plani similes sunt.* [c] *Quare*

Ex hoc perspicuum est, planos numeros, qui similes non sunt, proportionem non habere, quam quadratus ad quadratum. Si enim haberent; essent, vt modò demonstratum est, plani similes. quod est absurdum. ponuntur enim non similes.

A, 8. B, 18.
C, 16. D, 36.

25. THEOR. 25. PROPOS. 27.

Similes solidi numeri rationem habent inter se, quam cubus numerus ad cubum numerum.

Sint

SINT ſimiles ſolidi A,B. Dico eſſe,vt A,ad B,ita cubum quempiam numerum ad alium quendam cubum. Quia enim A,B,ſunt ſolidi ſimiles; [a] cadent inter eos duo medij proportionales,qui ſint C, D. Sumptis autem quatuor numeris E, F, G, H, minimis in continua proportione A, C, D,B; erunt extremi E,H,ex coroll.1.propoſ.2. huius lib. cubi. Quare, cùm ex æquo ſit A ,ad B,vt E, ad H; conſtat ita eſſe A, ad B,vt eſt cubus aliquis, nimirum E, ad alium cubum, videlicet ad H. Similes ergo ſolidi numeri rationem habent inter ſe,&c. Quod erat oſtendendum. [a] 19.octaui.

A,240. C,360. D,540. B,810.
E, 8. F, 12. G, 18. H, 27.

SCHOLIVM.

CONVERSVM huius etiam demonſtrabimus; ſcilicet.

NVMERI,qui proportionem habent,quam cubus numerus ad cubum numerum,ſunt ſolidi ſimiles.

NVMERI enim A,B, proportionem habeant inter ſe,quam cubi C, D Dico A, B, ſolidos eſſe ſimiles. Nam cùm ſit A,ad B,vt C, ad D, [a] cadant autem inter C, D, cubos duo medij proportionales; [b] cadent quoque inter A,B,duo medij. [c] Sunt ergo A, & B, ſolidi ſimiles. [a] 12.octaui. [b] 8. octaui. [c] 21.octaui.

A, 16. B, 54. C,64. D,216.

EX his omnibus perſpicuè infertur nullos numeros habentes duplam proportionem,vel ſuperparticularem,vel ſuperbi partientem, eſſe ſimiles planos,vel ſolidos.Si enim eſſent ſimiles plani, [d] caderet inter eos medius vnus proportionalis,quòd fieri non poſſe,iam dudum oſtenſum eſt in ſcholio propoſ.8.huius lib. Eadem ratione non erunt ſimiles ſolidi,cùm inter eos cadere non poſſint duo medij proportionales. [e] Namaliàs caderent quoque duo medij inter minimos earundem proportionum numeros Quod fieri non poteſt,quòd hi vel ſola vnitate,vel certè binario tantùm inter ſe diſtent. vt in ſcholio pradicto traditum eſt, inter quos certum eſt,non poſſe intercipi duos numeros,nedum duos medios proportionales. [d] 18.octaui. [e] 8. octaui.

SIMILITER nec duo quilibet numeri primi eſſe poſſunt plani ſimiles,vel ſolidi cùm non poſſint habere latera proportionalia.Nam quilibet numerus planus, qui ſit numerus primus, latera habet ſolummodo vnitatem,& ſeipſum,quamuis impropriè. Vt hi numeri plani 19.& 23. latera habent 1. 19. & 1. 23. cùm ex horum mutua multiplicatione producantur, quæ conſtat non eſſe proportionalia. Quilibet verò numerus ſolidus, qui numerus etiam primus ſit, latera tantùm habet duas vnitates, & ſeipſum. Vt hi numeri ſolidi 29. & 47.latera habent 1.1.29 & 1.1.47.cùm ex mutua horum multiplicatione producantur.Perſpicuum autem eſt ea non poſſe eſſe proportionalia.

RVRSVS neque duo quicunque numeri inter ſe primi,qui quadrati non ſint, vel cubi, (quamuis neuter eorum primus ſit) plani ſimiles, vel ſolidi ſimiles eſſe poſſunt. Si enim duo huiuſmodi numeri inter ſe primi, dicantur eſſe plani vel ſolidi ſimiles; [f] cadet inter illos vnus medius proportionalis, vel duo. Cùm ergo extremi duo ponantur inter ſe primi, erunt omnes tres, vel quatuor inter ſe primi, cùm nullus numerus illos omnes, tanquam communis menſura metiri poſſit, propter duos extremos inter ſe primos. Quare minimi erunt continuè proportionales,vt in ſcholio propoſ.24.lib.7. demonſtrauimus.Ac propterea ex coroll.1. propoſ. 2.huius lib. extremi duo quadrati erunt,vel cubi.quod abſurdum eſt.Ponuntur enim neq; quadrati, neq; cubi. [f] 18.& 19.octaui.

EX his ſequitur.ſi duo numeri ſint plani, vel ſolidi ſimiles,quorum minor ſit primus, minorem numerare maiorem.Nam ſi eum non numerarent, [g] eſſent duo propoſiti numeri inter ſe primi: ac proinde,vt proximè oſtendimus, non poſſent eſſe plani,vel ſolidi ſimiles, quòd abſurdum eſt, & contra hypotheſim. Verùm hoc oſtenſiuè quoque ita demonſtrabimus. Sint primùm duo numeri plani ſimiles A, B, ſitq; A, minor, primus Dico A,ipſum B,metiri. Nam cùm A, & B, ponantur plani ſimiles, habebunt latera proportionalia. Cùm ergo latera numeri primi A, ſint C, vnitas, & numerus D,ipſi A, æqualis, quòd nullus alius numerus, præter C, vnitatem, & numerum D, ipſi A, æqualem metiatur primum numerum A: ſint E, F,latera numeri B lateribus C,D proportionalia.ita vt ſit C.ad E,vt D,ad F. Erit igitur permutando C, ad D,vt E,ad F. [h] *Igitur numerus factus ex C,primo in F,quartũ æqualis erit ei,qui fit ex D ſecũdo in E, tertiũ: Fit autem ex C,vnitate in F, ipſemet numerus F. Idem ergo numerus F, fiet ex D, in E.* [i] *Quare D, ipſum F, metietur:* [k] *Metitur autem F,ipſum B,quòd B gignatur ex E,in F,* [l] *Igitur & D,id eſt, A,illi æqualis,eundem B,metietur.quod eſt propoſitum.* [g] 31. ſepti. [h] 19. ſepti. [i] 14.pron. [k] 4. pron. [l] 11.pron.

A,3. B,48. C,1. D,3. E,4. F,12.

HINC perſpicuũ eſt, duos numeros inter ſe primos,quorũ minor primus ſit, non poſſe eſſe planos ſimiles. Nam ſi eſſent ſimiles, metiretur minor maiorem, vt proximè oſtendimus. Cùm ergo & ſeipſum metiatur, non eſſent inter ſe primi,ſed compoſiti.quod eſt contra hypotheſim.

SINT deinde duo ſolidi ſimiles A,B ſitq; A, minor primus. Dico A, ipſum B,metiri. Nam cùm A, & B, ſint ſolidi ſimiles habebunt latera proportionalia. Cùm ergo latera numeri primi A ſint B, C, vnitates, & numerus D, ipſi A, æqualis,quòd nullus alius numerus, præter vnitatem, & numerum D,ipſi A, æqualem,metiatur numerum primum A:ſint E,F. G,latera numeri B,lateribus B,C,D,proportionalia,ita vt ſit B,ad E,vt C,ad F,& D,ad G.Quia igitur eſt C,ad F,

A,3. B,24. B,1. C,1. D,3. E,2. F,2. G,6.

a 19. sept. *vt D, ad G; erit permutando C, ad D, vt F, ad G.* a *Igitur numerus factus ex C, primo in G, quartum æqualis erit ei, qui fit ex D, secundo in F, tertium; Fit autem ex C, vnitate in G, ipsemet numerus G. Idem ergo numerus G, fiet ex D, in F.* b *Quare D, ipsum G, metietur.* c *Metitur autem G, ipsum B, quòd G, latus sit ipsius B.* d *Igitur, & D, hoc est, A, illi æqualis, eundem B, metietur: quod est propositum.*

b 4. pron. c 4. pron. d 11. pron.

Atqve ex hoc etiam constat, duos numeros inter se primos, quorum minor primus sit, non posse esse solidos similes. Nam si essent similes, metiretur minor maiorem, vt proximè ostendimus. Cùm ergo & seipsum metiatur, non essent inter se primi, sed inter se compositi. quod est contra hypothesim.

Itaqve facilis admodum est inuentio duorum planorum, vel solidorum non similium. Si enim accipiantur duo numeri habentes proportionem duplam, vel superparticularẽ, vel superbipartientem; vel certè duo numeri primi, vel duo inter se primi, quorum neuter quadratus sit, aut cubus; erũt illi ipsi per ea quæ tradita sunt, plani seu solidi non similes.

Rvrsvs quilibet duo numeri, quorum alter quadratus sit, alter verò nõ quadratus, plani sunt non similes; quales sunt 16. & 20. Si enim essent plani similes, e *haberent proportionẽ, quam quadratus ad quadratũ. Existente igitur 16. quadrato,* f *esset & 20. quadratus, quod est absurdum. ponitur enim non quadratus.*

e 26. octaui f 24. octaui

Pari ratione quilibet duo numeri, quorum alter cubus sit, alter verò non cubus, solidi sunt non similes, vt 27. & 40. Si enim essent solidi similes, & haberent proportionem, quam cubus ad cubum. Cùm igitur 27. cubus sit, h *esset & 40. cubus. quod est absurdum. ponitur enim non cubus.*

g 27. octaui h 25. octaui

FINIS ELEMENTI OCTAVI.

EVCLIDIS ELEMENTVM NONVM.

1. THEOR. 1. PROPOS. 1.

SI duo similes plani numeri multiplicantes se mutuò faciant quendam; Productus quadratus erit.



DVO numeri plani similes A, B, se mutuò multiplicantes faciant C. Dico C, quadratum esse. Multiplicans enim A, seipsum faciat D, quadratum. Quoniam igitur A, multiplicans A, & B, produxit D, & C, a erit vt A, ad B, ita D, ad C. At inter A, & B, cùm sint plani similes, b vnus medius cadit proportionalis. c Igitur & inter D, & C, vnus medius proportionalis cadet.

A, 6. B, 54.
D, 36. E, 108. C, 324.

Cadat ergo E, vt sint continuè proportionales D, E, C. Itaq; cùm tres D, E, C, continuè sint proportionales, sitq; primus D, quadratus, ex constructione; d erit quoq; C, tertius, quadratus. Si duo ergo similes plani numeri multiplicãtes se mutuò, &c. Quod erat demõstrandũ.

a 17. septimi b 18. octaui. c 8. octaui. d 22. octaui.

2. THEOR. 2. PROPOS. 2.

SI duo numeri se mutuò multiplicãtes faciant quadratum; similes plani erũt.

DVO numeri A, B, se mutuò multiplicãtes faciant C, quadratum. Dico A, B, esse similes planos. Multiplicans enim A, seipsum faciat D, quadratum. Quoniam igitur A, multiplicans A, & B, fecit D, & C; e erit vt A, ad B, ita D, ad C. f At inter D, & C, quadratos vnus medius cadit proportionalis. g Igitur & inter A, & B, vnus medius proportionalis cadet. h Ac propterea A, & B, similes plani sunt. Quare si duo numeri se mutuò multiplicantes, &c. Quod demonstrandum erat.

A, 6. B, 54.
D, 36. C, 324.

e 17. sept. f 11. octaui. g 8. octaui. h 20. octaui.

SCHOLIVM.

Ex his demonstrabimus quatuor insequentia theoremata non inutilia.

I.

SI duo numeri quadrati se mutuò multiplicãtes faciãt quẽpiã: Productus quadratus erit.

A, 4. B, 25. C, 100.

Dvo quadrati A, B, se mutuò multiplicantes faciant C. Dico C, esse quadratũ. Cùm enim A, & B, sint similes plani, nimirum quadrati; a *erit C, ex eis productus, quadratus.*

21. noni.

II.

SI duo numeri se mutuò multiplicantes faciant quadratum; alter autem sit quadratus; Et reliquus quadratus erit.

DVO

A,9. D,12. B,16. C,144. *Duo numeri A,B,se mutuò multiplicantes faciant C, quadratum sit q. A, quadratus. Dico & B, quadratum esse. Cùm enim A, & B, se mutuò multiplicantes faciant C, quadratum:* [a] *erunt A, & B, similes plani:* [b] *atque adeò inter eos vnus medius cadet proportionalis, videlicet D.* [c] *Quare A, existente quadrato, erit & B, quadratus.*

a 2. noni.
b 18. octaui
c 22. octaui

I I I.

Si duo numeri se mutuò multiplicantes faciant non quadratum, alter autem sit quadratus; Reliquus non quadratus erit.

A, 4. B, 20. C, 80. *Duo numeri A, B, se mutuò multiplicantes faciant C, non quadratum: sit q. A, quadratus. Dico B, non quadratum esse. Si enim B, dicatur esse quadratus, erit & C, productus ex quadratis A, B, quadratus, per theor. 1. huius scholij; Quod est absurdum, & contra hypothesim. Non igitur quadratus est B, numerus.*

I I I I.

Si duo numeri, quadratus & non quadratus, se mutuò multiplicantes faciant aliquem; Productus non quadratus erit.

A, 9. B, 20. C, 180. *Duo numeri A, quadratus, & B, non quadratus, se mutuò multiplicantes faciant C. Dico C, non esse quadratum. Nam si C. foret quadratus, cùm producatur ex A, in B, sit q. A, quadratus; esset & B, ex theor. 2. huius scholij, quadratus: Quod est absurdum, & contra hypothesim. Non igitur C, quadratus erit.*

THEOR. 3. PROPOS. 3.

3.

Si cubus numerus seipsum multiplicãs procreet aliquẽ; Productus cubus erit.

A, 8. E, 16. D, 4. F, 32. C, 2. B, 64. Vni-. tas. FACIAT cubus A, seipsum multiplicans numerum B. Dico B, esse cubum. Sit enim C, latus cubi A; & ex C, in se fiat D, & idcirco ex C, in D, ipse cubus A, gignatur. Quia igitur C, seipsum multiplicans fecit D: [a] metietur C, ipsum D, per C: [b] Metitur autem & vnitas ipsum C, per C. Igitur eadem pars est vnitas ipsius C, quæ C, ipsius D, nimirum denominata à C; Ac proinde [c] vt vnitas ad C, ita C, ad D. Rursus quia C, multiplicans D, fecit A; [d] metietur D, ipsum A, per C. Metiebatur autem & C, ipsum D, per C. Eadem ergo pars est C, ipsius D, quæ D, ipsius A; [e] ideoq; vt C, ad D, ita D, ad A: sed vt C, ad D, ita erat vnitas ad C. Igitur vt vnitas ad C, ita C, ad D, & D, ad A; Atque adeò inter vnitatem & numerum A, duo medij proportionales cadunt numeri C, D. [f] At quia A, ipsum B, metitur per A, quòd A, seipsum multiplicãs fecerit B; [g] metitur verò & vnitas ipsum A, per A; Eadem erit pars vnitas ipsius A, quæ A, ipsius B; [h] Ac propterea erit vt vnitas ad A, ita A, ad B. Quare cùm inter vnitatem & numerum A, cadant duo medij proportionales C, & D; [i] cadent totidem inter A, & B, nimirum E, & F. Cùm ergo quatuor numeri A, E, F, B, sint continuè proportionales, & A, primus sit cubus, [k] erit quoq; B, quartus cubus. Si cubus igitur numerus seipsum multiplicãs, &c. Quod erat demõstrandũ.

a 7. pron.
b 5. pron.
c 20. defin.
d 7. pron.
e 20. defin.
f 7. pron.
g 5. pron.
h 10. defin.
i 8 octaui.
k 23. octaui.

THEOR. 4. PROPOS. 4.

4.

Si cubus numerus cubũ numerũ multiplicans faciat aliquẽ; Factus cubus erit.

A, 8 B, 27. D, 64. C, 216. FIAT ex cubo A, in cubum B, numerus C. Dico C, cubum esse. Multiplicans enim A, seipsum faciat D; [l] eritque D, cubus. Quoniam verò A, multiplicans A, & B, fecit D, & C; [m] erit vt A, ad B, ita D ad C. [n] At inter A, & B, cubos duo medij proportionales cadunt. [o] Igitur & inter D, & C, duo medij proportionales cadent; [p] Ac propterea D, existente cubo, & C, cubus erit. Quocirca si cubus numerus cubum numerum multiplicans, &c. Quod erat ostendendum.

l 3. noni.
m 17. septi.
n 12. octaui.
o 8. octaui.
p 23. octaui.

THEOR. 5. PROPOS. 5.

5.

Si cubus numerus numerum quendam multiplicans faciat cubum; Et multiplicatus cubus erit.

A, 8. B, 27. D, 64. C, 216. FIAT ex cubo A, in numerum B, numerus cubus C. Dico & B, cubum esse. Multiplicans enim A, seipsum faciat D, [q] qui cubus erit. Quoniam igitur A, multiplicans A, & B, fecit D, & C, [r] erit vt A, ad B, ita D, ad C; [s] At inter D, & C, cubos duo cadunt medij proportionales. [t] Totidem igitur & inter A, & B, cadent; [u] Ac proinde existente A, cubo, & B, cubus erit. Quamobrem si cubus numerus numerum quendam multiplicans, &c. Quod ostendendum erat.

q 3. noni.
r 7. septimi
s 12. octaui.
t 8. octaui.
u 23. octaui.

SCHOLIVM.

Ex his & hac, quæ sequuntur, facilè demonstrabuntur, videlicet.

I.

Si cubus numerus non cubũ numerũ multiplicãs faciat aliquẽ; Factus non cubus erit.

A,8. B,20. C,160. *FIAT ex A,cubo in B,non cubum numerus C. Dico C, non esse cubum. Si enim C, sit cubus;* [a] *& multiplicatus B,cubus erit. quod non ponitur.*

a 5.noni.

II.

SI cubus numerus numerum quendam multiplicans faciat non cubum; Et multiplicatus non cubus erit.

A,8. B,17. C,136. *FIAT ex cubo A,in numerum B,non cubum C. Dico & B,non esse cubum. Si namque B,* [b] *sit cubus, & factus C,cubus erit. quod est contra hypothesim.*

b 4.noni.

6. THEOR. 6. PROPOS. 6.

SI numerus seipsum multiplicans cubum faciat: Et ipse cubus erit.

MVLTIPLICANS seipsum numerus A, faciat B, cubum. Dico & A,cubum esse. Fiat enim ex A, in B,numerus C,qui cubus erit, cùm A, in se faciat B, & ipse C, ex A, in B,gignatur, atque adeò æqualis æqualiter æqualis sit, vt perspicuum est ex ijs, quæ ad definitionem cubi scripsimus. Quia igitur B,cubus multiplicans numerum quempiam A, facit cubum C; [a] erit & A, cubus. Quare si numerus seipsum multiplicans cubum faciat, &c. Quod erat demonstrandum.

A,8. B,64. C,512.

a 5.noni.

SCHOLIVM.

ALIAM demonstrationem interpretes Euclidis hoc loco adducunt, & quidem longiorem. Postquam enim demonstrarunt C,factum ex A,in B,esse cubum: inferunt, [a] *Ergo inter B,&* [b] *C,cubos duo medij proportionales cadunt.* [c] *Quoniam verò est vt B, ad C, ita A, ad B, quòd A, multiplicans A,& B, ipsos B, & C, fecit;* [d] *cadent quoque inter A, & B,duo medij proportionales.* [e] *Atque adeò existente B,cubo, & A, cubus erit. Verùm nostra demonstratio breuior est, & planior, vt perspicuum est.*

a 12. octaui. b 17.sept. c 8. octaui. d 23.octaui

7. THEOR. 7. PROPOS. 7.

SI compositus numerus numerum aliquem multiplicans, quempiam faciat: Factus solidus erit.

NVMERVS compositus A,multiplicãs numerum quemlibet B, faciat C. Dico C, esse solidum. Cùm enim A, sit compositus, [a] metietur eum, præter vnitatem, numerus aliquis; metiatur D, ipsum A, per E. Quo posito, [b] multiplicante D, ipsum E, producetur A. Cùm ergo B, ipsum A, multiplicans fecerit C; procreabitur C, ex mutua multiplicatione trium numerorum D, E, B; Ac propterea solidus erit ex defin. cuius latera D, E, B. Quapropter si compositus numerus numerũ aliquem multiplicans, &c. Quod erat ostendendum.

A,6. B,11. C,66. D,2. E,3.

a 13. defin. b 9. pron.

8. THEOR. 8. PROPOS. 8.

SI ab vnitate quotcunque numeri deinceps proportionales fuerint: Tertius quidem ab vnitate quadratus est, & vnum intermittentes omnes: Quartus autem est cubus, & duos intermittentes omnes: Septimus verò cubus simul, & quadratus, & quinque intermittentes omnes.

SINT ab vnitate continuè proportionales numeri quotcunq; A,B,C,D,E,F,G,H,I,K,L,M. Dico tertium quidẽ B, ab vnitate esse quadratũ, & vnum intermittentes omnes, quales sunt D,F,H,K,M: Quartũ autem C, cubũ, & duos intermittentes omnes; euiusmodi sunt F,I,M: septimum verò F, cubũ simul, & quadratũ, & quinq; intermittẽtes omnes, nimirũ M. Quoniam enim est vnitas ad A, vt A, ad B; æquè metietur vnitas numerũ A, & numerus A, numerũ B: [a] Metitur aũt vnitas numerũ A, per A. Ergo & A, ipsum B, p A, metietur; [b] Atq; adeò A, multiplicãs A, ipsum B, producet. Quare B, quadratus est. Quia verò tres deinceps ꝓportionales sunt B, C, D, & est B, quadratus; [c] erit & D, quadratus. Eadẽ ratione assumptis tribus deinceps ꝓportionalibus D, E, F, cũ D, sit quadratus, [d] & F, quadratus erit; Nec nõ & oẽs vnũ intermittẽtes.

Vnitas. A,3 B,9. C,27. D,81. E,243. F,729. G,2187. H,6561. I,19683. K,59049. L,177147. M,531441.

a 5.pron. b 9. pron. c 22.octaui. d 22.octaui.

RVRSVS quia est vnitas ad A, vt B, ad C; æquè metietur vnitas numerum A, & numerus B, numerũ C; [e] Metitur autẽ vnitas ipsum A, per A. Igitur & B, ipsum C, per A, metietur; [f] atq; adeò B, ipsum A, multiplicans procreabit numerũ C. Quare cùm A, seipsum multiplicãs faciat B, multiplicãs verò B, faciat C, vt est ostẽsum; erit C, cubus. Quia verò quatuor deinceps proportionales sunt C, D, E, F, & est C, cubus, [g] erit & F, cubus. Eodem argumẽto, assumptis quatuor deinceps proportionalibus F, G, H, I, cùm F, sit cubus; [h] & I, cubus erit; atq; omnes semper duos intermittentes.

e 5. pron. f 9.pron. g 23.octaui. h 23. octaui.

POSTREMO quia F, septimus ab vnitate ostensus est & quadratus, & cubus: ipse erit cubus & simul & quadratus: Atque eodem modo M, septimus ab F, intermissis nimirum quinq; G, H, I, K, L, cubus erit simul & quadratus; Nec nõ & omnes quinque intermittẽtes. Si igitur ab vnitate quotcunque numeri deinceps proportionales fuerint, &c. Quod erat demonstrandum.

SCHO-

SCHOLIVM.

Hoc theorema poteſt quoque hoc modo proponi.

SI ſint quotcunque numeri ab vnitate continuè proportionales, omnes poſiti in locis imparibus; nimirum in tertio, quinto, ſeptimo, nono, vndecimo, &c. ſunt quadrati. Omnes autem, qui ſequuntur proximè numeros poſitos in locis, tertio, ſexto, nono, duodecimo, decimoquinto, decimooctauo, & aliis, quæ ternarius metitur, cuiuſmodi ſunt numeri quartus, ſeptimus, decimus, tertiusdecimus, decimusſextus, decimusnonus, &c. ſunt cubi. Omnes verò qui proximè ſequuntur numeros poſitos in locis ſexto, duodecimo, decimooctauo, vigeſimoquarto, & aliis, quæ metitur ſenarius, quales ſunt ſeptimus, tertiusdecimus, decimusnonus, vigeſimusquintus, &c. ſunt cubi ſimul, & quadrati.

NAM primi ordinis numeri omnes ſemper vnum intermittunt poſt tertium ab vnitate: At ſecundi ordinis numeri omittunt ſemper duos numeros poſt quartum ab vnitate. Numeri denique tertij ordinis quinque ſemper interponunt poſt ſeptimum ab vnitate, quemadmodum in theoremate proponit Euclides.

THEOR. 9. PROPOS. 9.

SI ab vnitate quotcunque numeri deinceps proportionales fuerint, qui verò poſt vnitatem ſit quadratus, Et reliqui omnes quadrati erunt. At ſi qui poſt vnitatem, ſit cubus; & reliqui omnes cubi erunt.

SINT ab vnitate continuè proportionales numeri quotcunq; A, B, C, D, E, F, ſitq; primùm A, proximus vnitati quadratus. Dico & reliquos omnes quadratos eſſe. Quòd enim tertius ab vnitate, & omnes vnum intermittentes, quales ſunt B, D, F, quadrati ſint, [a] iam demonſtratum eſt. Quod verò & reliqui intermedij C, & E, quadrati ſint, ita perſpicuum fiet. Cùm tres continuè proportionales ſint A, B, C; ſitque A, quadratus [b] erit & C, quadratus. Eodemq; modo, aſſumptis tribus continuè proportionalibus C, D, E, cùm C, ſit quadratus; [c] & E, quadratus erit. Omnes igitur A, B, C, D, E, F, quadrati ſunt. Idem oſtendemus, ſi plures numeri ſint continuè proportionales.

Vnitas. A, 4. B, 16. C, 64. D, 256. E, 1024. F, 4096.

Vnitas. A, 4. B, 16. C, 64. D, 256. E, 1024. F, 4096.

[a] 8. noni.

[b] 22. octaui.

[c] 22. octaui.

SIT iam A, proximus vnitati cubus. Dico & reliquos cubos eſſe. Quòd enim quartus ab vnitate, & omnes duos intermittentes, cuiuſmodi ſunt C, & F, ſint cubi, [d] iam eſt demõſtratum. Quòd autem & reliqui B, D, E, cubi ſint, ſic oſtendemus. Cùm ſit vnitas ad A, vt A, ad B; æquè metietur vnitas numerũ A, & numerus A, numerum B: [e] Metitur autem vnitas numerum A, per ipſummet A. Igitur, & A, ipſum B, per ſeipſum metietur; [f] Atque adeò cubus A, ſeipſum multiplicans numerum B, procreabit. [g] Quare B, cubus eſt. Quoniam verò quatuor continuè proportionales ſunt A, B, C, D, eſtque A, cubus, [h] & D, cubus erit. Eademque ratione, aſſumptis quatuor deinceps proportionalibus B, C, D, E, cùm B, cubus ſit; [i] & E, cubus erit. Omnes igitur A, B, C, D, E, F, cubi ſunt. Non ſecus demonſtrabimus, omnes cubos eſſe, ſi plures continuè proportionales fuerint. Quocirca, ſi ab vnitate quotcunq; numeri deinceps proportionales fuerint, &c. Quod demonſtrandum erat.

Vnitas. A, 8. B, 64. C, 512. D, 4096. E, 32768. F, 262144.

[d] 8. noni.

[e] 5. pron.

[f] 9. pron.

[g] 3. noni.

[h] 23. octaui.

[i] 23. octaui.

SCHOLIVM.

NON demonſtrauit Geometra, ſi numerus, qui poſt vnitatem, ſit cubus ſimul & quadratus, & reliquos omnes eſſe cubos ſimul, & quadratos; quia perſpicuè hoc ipſum ex demonſtratis colligitur. Nam ſi proximus vnitati ſit cubus ſimul, & quadratus: qua parte eſt cubus, ea ratione omnes reliqui cubi erunt; qua verò parte eſt quadratus, ea ratione & reliqui omnes quadrati erunt, vt demonſtratum eſt. Omnes igitur erunt cubi ſimul, & quadrati.

VERVM tota propoſitio faciliùs ita poterit demonſtrari. Sit primum A, proximus vnitati, quadratus. Dico & omnes quadratos eſſe. Quoniam enim ex ſcholio propoſ. 10. lib. 8. A, ſeipſum multiplicans facit B; erit ex defin. B, quadratus. Item quia ex eodem ſcholio, A, multiplicans B, facit C, ſunt q3 A, B, quadrati; erit & C, quadratus, ex ſcholio propoſ. 2. huius lib. Rurſus quia ex eodem ſcholio propoſ. 10. lib. 8. A, multiplicans C, facit D, ſunt q3 A, C, quadrati; erit ex eodem ſcholio propoſ. 2. huius lib. & D, quadratus: Atq; ita deinceps: cùm ex illo ſcholio propoſ. 10. lib. 8. A, multiplicans D, producat E; & multiplicans E, faciat F, &c.

Vnitas. A, 4. B, 16. C, 64. D, 256. E, 1024. F, 4096.

SIT deinde A, proximus vnitati, cubus. Dico & omnes eſſe cubos. Quia enim ex ſcholio propoſ. 10. lib. 8. cubus A, ſeipſum multiplicans facit B; [a] erit & B, cubus. Item quia ex eodem ſcholio, A, multiplicans B, facit C, ſunt q3 A, B, cubi; [b] erit & C, cubus. Rurſus quia ex eodẽ ſcholio, A, multiplicãs C, facit D, ſunt q3 A, C, cubi; [c] erit quoq;

Vnitas. A, 8. B, 64. C, 512. D, 4096. E, 32768. F, 262144.

[a] 3. noni.

[b] 4. noni.

[c] 4. noni.

D,cubus. Atq; ita de cæteris,cùm ex eo ſcholio,A,multiplicãs D,gignat E; & multiplicans E,procreet F,&c.

10. ## THEOR. 10. PROPOS. 10.

SI ab vnitate quotcunq; numeri deinceps proportionales fuerint, q verò poſt vnitatem,non ſit quadratus,neq; alius vllus quadratus erit,præter tertium ab vnitate,& vnum intermittentes omnes. At ſi,qui poſt vnitatem, non ſit cubus, neque alius vllus cubus erit,præter quartum ab vnitate, & duos intermittentes omnes.

SINT ab vnitate quotcunque numeri deinceps proportionales A,B,C,D,E,F,G,H,I,&c. & primum A,proximus vnitati non ſit quadratus. Dico nec alium vllum eſſe quadratum,præter tertium ab vnitate,& vnum intermittentes omnes; hoc eſt,præter B,D,F,H,&c. Si enim præter hos

Vnitas. A, 1. B, 4. C, 8. D,16. E,32. F,64. G,128. H,256. I,512. K,1024. L,2048. M, 4096.

a 8.noni. alius eſt quadratus,ſit quadratus E. [a] Cùm ergo & D,ſit quadratus; ſitque vt D,ad E,vel E,ad F, ita A, ad B, & conuertendo vt E, ad D, vel F,ad E, ita B, ad A; habebit B, ad A, rationem, quam
b 8.noni. quadratus numerus E,ad quadratum numerum D,vel quadratus F, ad quadratũ E; [b] ſed B, tet-
c 24. octaui. tius ab vnitate eſt quadratus. [c] Igitur & A,primus ab vnitate quadratus erit. Quod eſt abſurdum: ponitur enim A,non quadratus. Non ergo E,quadratus eſt. Eadem ratione oſtendemus, nullum alium,præter dictos,quadratum eſſe.

SED iam A,proximus vnitati non ſit cubus. Dico nec alium vllum eſſe cubum,præter quartum ab vnitate,& duos intermittentes omnes,videlicet præter C,F,I,&c. Nam ſi præter hos alius po-
d 8.noni. teſt eſſe cubus,ſit D,cubus. [d] Cùm ergo & F,cubus ſit,ſitq; ex æquo vt D,ad F, ita A, ad C, (quòd tres D,E,F, eandem habeant rationem, quam tres A,B,C,) & conuertendo vt F,ad D, ita C,ad A;
e 8.noni. habebit C,ad A,rationem, quam cubus F, ad cubum D: [e] Sed C,eſt cubus, cùm ſit quartus ab
f 25.octaui. vnitate. [f] Igitur & A, primus ab vnitate cubus erit. quod eſt contra hypotheſim. Non igitur D,
g 8.noni. cubus eſt. Quod ſi E,credatur eſſe cubus; [g] cùm & C,cubus ſit,ſitque ex æquo, vt C, cubus ad E,
h 25. octaui. cubum,ita A,ad C,& conuertendo vt cubus E,ad cubum C,ita C, ad A; exiſtente C,cubo, [h] erit, & A,cubus. quod non ponitur. Non ergo E,cubus eſt. Quemadmodum autem oſtenſum eſt, duos D,& E,inter duos cubos C,& F,cubos non eſſe; ita quoque eadem ratione oſtendemus, neq; G, & H, inter cubos F, & I, neque vllos alios duos, inter duos cubos,eſſe cubos. Si igitur ab vnitate quotcunque numeri,&c. Quod demonſtrandum erat.

SCHOLIVM.

NON eſt autem neceſſe, ſi numerus,qui poſt vnitatem, non ſit cubus ſimul, & quadratus, nullum alium eſſe cubum ſimul,& quadratum, præter ſeptimum ab vnitate, & quinq; intermittentes omnes; cùm aliquando tertius ab vnitate, aliquando verò quartus poſſit eſſe cubus ſimul,& quadratus, non exiſtente primo ab vnitate cubo ſimul,& quadrato.

Vnitas A,8, B,64. *SIT enim primùm A,qui poſt vnitatem,cubus quidem,non autem ſimul & quadratus. Dico B,tertium eſſe cubum ſimul & quadratum; cubum quidem,* [a] *quòd*
a 9.noni. *primo exiſtente cubo,omnes cubi ſint,* [b] *quadratum verò, quòd tertius ſit ab vnitate.*
b 8.noni.

Vnitas. A,4. B,16. C,64. *SIT deinde A,poſt vnitatem quadratus quidem,non autem ſimul & cubus. Dico quartum C,eſſe cubum ſimul & quadratum;* [c] *Cubum quidem,*
c 8.noni. *quòd quartus ſit ab vnitate; quadratum verò,* [d] *quòd primo exiſtente quadrato,omnes ſint quadrati.*
d 9.noni.

SIT poſtremò A,poſt vnitatem neque cubus, neque quadratus. Dico nullum alium eſſe cubum ſimul & quadratum,præter ſeptimum F,& quinq; intermittentes omnes. Cùm enim primo non exiſtente quadra-
e 10. noni. *to,* [e] *nullus alius quadratus ſit,præter tertium*

Vnitas.A,6. B,36. C,216. D,1296. E,7776. F,46656. *ab vnitate, & vnum intermittentes omnes, cuiuſmodi ſunt, vt in ſcholio propoſ. 8. huius lib. docuimus,tertius,quintus,ſeptimus,nonus,vndecimus,decimustertius,decimusquintus, decimusſeptimus,*
f 10.noni. *decimusnonus,&c. Primo autem non exiſtente cubo,* [f] *nullus alius ſit cubus, præter quartum ab vnitate,& duos intermittentes omnes,quales ſunt,vt ex eodem ſcholio apparet, quartus ſeptimus, decimus, tertiusdecimus,decimusſextus,decimusnonus,&c. perſpicuum eſt, tantummodo ſeptimum, tertiumdecimum, decimumnonum,qui quidem omnes quinque intermittunt,quadratos eſſe ſimul,& cubos,& ſic de cæteris. Nam in hæc loca ſola incidunt quadratus, & cubus ſimul, vt liquidò conſtat ei, qui rectè propoſitionem hanc & octauam huius libri expenderit.*

12. ## THEOR. 11. PROPOS. 11.

SI ab vnitate quotcunq; numeri deinceps proportionales fuerint; Minor maiorem metitur per aliquem eorum,qui in proportionalibus ſunt numeris.

SINT ab vnitate quotcunq; numeri continuè proportionales A,B,C,D,E,F,G. Dico quemlibet minorem,vt C,quemlibet maiorem, vt G, metiri per aliquem numerorum A,B,C,D,E,F,G. Cùm enim ſit ex æquo vt C, ad G, ita vnitas ad D; (quòd quinque numeri C,D,E,F,G,eandem habeant

habeant rationem continuam, quam vnitas & quatuor numeri A,B,C,D,) [a] æquè metietur vnitas numerum D, atque numerus C, numerum G: [b] Sed vnitas metitur numerum D, per ipſum met

Vnitas. A, 3. B, 9. C, 27. D, 81. E, 243. F, 729. G, 2187.

[a] 20. defin.

[b] 5. pron.

D. Igitur & C, numerus numerum G, per D, metietur. Eadem ratione metietur E, ipſum F, per A, quòd ſit vt E, ad F, ita vnitas ad A, &c. Sic quoque metietur A, ipſum G, per F, cùm ſit ex æquo vt A, ad G, ita vnitas ad F, &c. Atque ita de reliquis eodem modo. Si igitur ab vnitate quotcunque numeri deinceps proportionales fuerint, &c. Quod erat oſtendendum.

SCHOLIVM.

PERSPICVVM autem eſt ex his, quantum abeſt maior numerus à minore metiente, tantùm diſtare ab vnitate eum numerum, per quem minor maiorem metitur; propterea quòd eadem eſſe debet proportio minoris ad maiorẽ, quæ vnitas ad eũ, per quem metitur minor maiorem, vt ex demonſtratione apparet. Itaque B, metietur F, per D; Et C, metietur F, per C; nimirum per ſeipſum, &c. quia tam inter B, & F, quàm inter vnitatem & D, tres numeri interponuntur: Et tam inter C, & F, quàm inter vnitatem & C, duo interiecti ſunt numeri.

Vnitas. A, 3. B, 9. C, 27. D, 81. E, 243. F, 729. G, 2187.

HINC rurſus efficitur, quemlibet numerum, qui ſeipſum multiplicet, producere numerum, qui in numeris proportionalibus tantùm ab eo diſtat, quantum ipſe ab vnitate: Si verò minor aliquis maiorẽ quempiam multiplicet, procreari numerum, qui tantùm à maiore diſtat, quantum minor ab vnitate, propterea quòd ſi numerus numerum metiens multiplicet eum, per quem metitur; [a] producatur ille, quem metitur. Ergo C, ſe ipſum multiplicans gignet F; cùm F, tantùm abſit à C, quantum C, ab vnitate; ac propterea C, ipſum F, per C, metiatur, vt diximus. Sic quoq; B, multiplicans D, faciet eundem F; quòd D, ipſum F, metiatur per B, &c. & ſic de reliquis.

[a] 9. pron.

THEOR. 12. PROPOS. 12. 11.

SI ab vnitate quotcunq; numeri deinceps proportionales fuerint; quicunque primorum numerorum vltimum metiuntur, iidem & eum, qui vnitati proximus eſt, metientur.

SINT ab vnitate deinceps proportionales quotcunque numeri A,B,C,D. Dico quoſcunque primorum numerorum, qui metiuntur vltimum D, metiri quoq; A, proximum vnitati. Metiatur enim numerus primus E, ipſum D. Dico eundem E, primũ metiri etiam numerum A, vnitati proximum. Si namq; non metitur ipſum A; [a] erit E, cùm primus ſit, ad A, primus: hoc eſt, A, & E, inter ſe primi erunt. Metiatur E, ipſum D, per F, [b] atque adeò E, multiplicans F, faciat D. Quia verò & A, ipſum D, metitur per C; ac proinde A, multiplicans C, facit D, vt in ſcholio præcedentis propoſ. oſtendimus; producetur idem numerus D, ex A, primo in C, quartum, & ex E, ſecundo in F, tertium. [c] Quare erit vt A, primus ad E, ſecundum, ita F, tertius ad C, quartum. Cùm ergo A, & E, ſint inter ſe primi; [d] ac proinde in ſua proportione minimi; [e] metietur æquè A, ipſum F, & E, ipſum C. Metiatur E, ipſum C, per G, [f] atq; adeò E, multiplicãs G, faciat C. Quia verò & A, ex ſcholio eodem præcedentis propoſ. metitur C, per B, [g] atq; adeò A, multiplicans B, facit C; procreabitur idem numerus C, ex A, primo in B, quartum, & ex E, ſecundo in G, tertium. [h] Erit igitur vt A, primus ad E, ſecundũ, ita G, tertius ad B, quartũ. Quapropter cùm A, & E, ſint inter ſe primi; [i] ac propterea in ſua proportione minimi; [k] metietur æquè A, ipſum G, & E, ipſum B. Metiatur E, ipſum B, per H: [l] ita vt E, multiplicans H, faciat B. Metitur autem & A, ipſum B, per A, atq; idcircò A, ſe ipſum multiplicans facit B, vt ex eodem ſcholio præcedentis propoſ. apparet. Gignitur ergo idem numerus B, ex E, primo in H, tertium, & ex A, medio in ſeipſum. [m] Quare erit vt E, primus ad A, ſecundum, ita A, ſecundus ad H, tertium. Cùm ergo E, & A, inter ſe primi ſint; [n] ac proinde in ſua proportione minimi; [o] æquè metietur E, ipſum A, & A, ipſum H. Quod eſt cõtra hypotheſim. ponitur enim E, ipſum A, non metiri. Quare falſum eſt E, ipſum A, non metiri. Nam ex eo quòd E, non dicatur metiri ipſum A, ſemper demonſtrabitur E, ipſum A, metiri; Quod eſt abſurdum. Metitur ergo E, ipſum A. Eodem argumento oſtendemus, quoſcunque alios numeros primos ipſum D, metientes, metiri quoque ipſum A; Eademque erit ratio, ſi C, vel B, vltimus numerus ſtatuatur.

Vnitas. A, 10. B, 100. C, 1000. D, 10000. E, 5. H, 20. G, 200. F, 2000.

[a] 31. ſept.

[b] 9. pron.

[c] 19. ſept.

[d] 23. ſept.

[e] 21. ſept.

[f] 9. pron.

[g] 9. pron.

[h] 19. ſept.

[i] 23. ſept.

[k] 21. ſept.

[l] 9. pron.

[m] 20. ſept.

[n] 23. ſept.

[o] 21. ſept.

ALITER. Metiatur E, numerus primus vltimum D. Dico & E, ipſum A, metiri. Si enim non metiatur; [p] erit E, ad A, primus. Quia igitur A, & E, inter ſe primi ſunt, & A, ſeipſum multiplicans facit B, vt ex ſcholio propoſ. præcedentis conſtat, [q] erit B, ad E, primus. Quia ergo A, & B, ad E, primi ſunt; fit autem C, ex A, in B, per idem ſcholium præcedẽtis propoſitionis [r] erit C, ad E, primus. Rurſus eodem modo quia A, & C, ad E, primi ſunt; & fit D, ex A, in C, ex eodem ſcholio præcedentis propoſ. [s] erit D, ad

Vnitas. A, 6. B, 36. C, 216. D, 1296. E, 3.

[p] 31. ſept.

[q] 27. ſept.

[r] 26. ſept.

[s] 26. ſept.

E, primus. Non igitur E, ipſum D, metitur. Quod eſt contra hypotheſin. Metitur ergo E, ipſum A. Si igitur ab vnitate quotcunque numeri deinceps proportionales fuerint, &c. Quod oſtendendum erat.

COROLLARIVM.

ITAQVE neq; vllus numerus primus, qui maior ſit eo, qui proximus eſt vnitati, neq; vllus minor proximum vnitati non metiens, metiri poteſt vltimum. Si namq; metiretur vltimum, metiretur quoq; vnitati proximum, vt demonſtratum eſt. quod non ponitur.

SCHOLIVM.

EST autẽ admirabilis prima huius propoſ demonſtratio. Nam in ea Euclides ex eo, quòd E, dicatur non metiri ipſum A, oſtendit demonſtratione affirmatiua E, ipſum A, metiri: quod videtur fieri nõ poſſe. Nã ſi quis demonſtrare inſtituat, Socratem eſſe album, ex eo, q̃ non eſt albus, paradoxum aliquid, & inopinatũ in medium videatur afferre: Cui tamen nõ abſimile quid factum hic eſt in numeris ab Euclide, & in alijs nonnullis propoſitionibus, quæ ſequuntur. Cardanus quoque ſimile quid effecit in magnitudinibus, lib. 5. de propor. propoſ. 20. gloriatur q̃ ſe primùm omnium hanc rationem demonſtrandi reperiſſe: quod arbitror eum nõ dicturum fuiſſe, ſi diligentius vim huius demonſtrationis expendiſſet, vel certè, ſi expendit, eã in memoriam revocaſſet; quandoquidem ipſo longè prior Euclides vſus eſt hoc etiã demonſtrandi modo, vt ex hoc theor 12. eſt manifeſtum. Eodem genere demonſtrãdi vſus eſt Theodoſius lib. 1. Sphæricorum, propoſ. 12. vt ibid. monuimus.

CAETERVM ex demonſtratis perſpicuum eſt, quemcunq; numerum primum, qui vltimum metitur, a 12. noni. *metiri etiam omnes alios ante ipſum.* [a] *Cùm enim metiatur proximum vnitati; hic autẽ omnes ſubſequentes,* b 11. noni. [b] *quòd ſemper minor maiorem metiatur per aliquẽ eorum, qui in proportionalibus ſunt numeris;* c 11. pron. [c] *manifeſtum eſt, quòd & ille omnes metiatur.*

13. THEOR. 13. PROPOS. 13.

Si ab vnitate quotcunque numeri deinceps proportionales fuerint, qui verò poſt vnitatem, primus ſit; Maximum nullus alius metietur, præter eos, qui ſunt in numeris proportionalibus.

SINT ab vnitate continuè proportionales quotcunq; numeri A, B, C, D, quorum A, proximus vnitati ſit primus. Dico nullum alium numerũ, præter ipſos A, B, C, metiri maximum D. Si enim fieri poteſt, metiatur numerus alius E, diuerſus ab A, B, C, ipſum D. Manifeſtum autem eſt, E, non

a 12. noni. eſſe numerum primũ. Si enim primus ſit, & metiatur extremum D; [a] metietur quoq; ipſum A, vnitati proximum, qui primus ponitur. Quod eſt abſurdum. Non igitur E, primus eſt, ſed compoſitus; [b] atque adeò eum aliquis numerus primus metietur.

b 33. ſept.

Vnitas. A, 5. B, 25. C, 125. D, 625.
E---- H---- G---- F----

quem dico alium eſſe non poſſe, præter primum A. Si enim alius primus q̃ A, metiatur E; cùm E, metiatur extremum

c 11. pron. D; [c] metietur quoq; ille alius primus eundẽ D, [d] atq; adeò

d 12. noni. & ipſum A, primum; nimirum vnitati proximum. Quod eſt abſurdum. Ergo non alius primus, q̃ A, ipſum E, metitur. Metiatur iam E, ipſum D, per F. Dico F, diuerſum eſſe ab A, B, C. Si enim F, ſit idem, qui aliquis ipſorum A, B, C; & E, metiatur D, per F; metietur vtique E, ipſum D, per aliquem

e 8. pron. ipſorum A, B, C; [e] & viciſsim aliquis ipſorum A, B, C, (nimirum is, per quem E, ipſum D, metitur,)

f 11. noni. metietur D, per E. [f] Cùm ergo quilibet ipſorum A, B, C, metiatur D, per aliquẽ ipſorum A, B, C; erit E, idem qui aliquis ipſorum A, B, C, quod eſt contra hypotheſim. ponitur enim E, non idem, qui aliquis ipſorum A, B, C. Non igitur F, idem eſt, qui aliquis ipſorum A, B, C, ſed diuerſus. Quo-

g 8. pron. niam verò E, metitur D, per F; [g] metietur viciſsim F, ipſum D, per E. Non erit autem F, primus: ſi

h 12. noni. enim ſit primus, & metiatur D, vltimum; [h] metietur & A, proximum vnitati, qui primus eſt. quod

i 23. ſept. eſt abſurdum. Igitur F, non primus eſt, ſed compoſitus; [i] atque adeò eum aliquis numerus primus metietur. quem rurſus dico nullum alium eſſe poſſe præter primum A. Si namque alius primus quàm A, metiatur F; cùm F, metiatur D, extremum; k 11. pron. [k] metietur quoque ille alius primus eundem D; l 12. noni. [l] atque adeò & ipſum A, proximum vnitati, qui primus eſt: quod eſt abſurdum. Ergo

m 9. pron. non alius primus, quàm A, ipſum F, metitur. Iam verò quoniam E, metitur D, per F; [m] fiet D, ex E,

n 19. ſept. in F: Fit autem & D, ex A, in C, vt in ſcholio propoſitionis 11. huius libri docuimus. Idem igitur numerus D, fit ex A, primo in C, quartum, & ex E, ſecundo in F, tertium; [n] Ac proinde erit vt A, primus ad E, ſecundum, ita F, tertius ad C, quartum: Metitur autem A, ipſum E, vt oſtenſum eſt. Ergo & F, ipſum C, metietur. Metiatur per G. Quoniam igitur F, diuerſus ab A, B, metitur C, vltimum (relinquimus enim iam numerum D,) per G; oſtendemus ſimiliter, G, diuerſum eſſe ab A, B, & non primum, ſed compoſitum, quem ſolus A, primus metiatur: quemadmodum id oſtenſum eſt de numero F, per quem E, diuerſus ab A, B, C, metiebatur D, vltimum.

Si enim G, ſit idem, qui aliquis ipſorum A, B; metiatur q̃ F, ipſum C, per G; metietur vtique F,

o 8. pron. ipſum C, per aliquẽ ipſorum A, B; [o] & viciſsim aliquis ipſorum A, B, (videlicet is, per quẽ F, ipſum

p 11. noni. C, metitur) metietur C, per F. [p] Cùm ergo quilibet ipſorũ A, B, metiatur C, per aliquẽ ipſorum A, B; erit F, idem qui aliquis ipſorum A, B. quod eſt abſurdum. oſtenſum eſt enim F, nõ eſſe eundem

quem

quem aliquem ipſorum A, B. Non ergo G, eſt idem qui aliquis ipſorum A, B, ſed diuerſus. Quoniam autem F, metitur C, per G; [a] metietur viciſsim G, ipſum C, per F. Non erit autem G, primus. Si enim primus ſit, metiaturq; vltimum C, [b] metietur quoq; numerum primum A, vnitati proximum. quod eſt abſurdum. Non ergo G, primus eſt, ſed compoſitus; [c] ac proinde eũ aliquis primus metietur. quem dico nullum alium poſſe eſſe præter A. Nam ſi alius primus quàm A, metiatur G, cùm G, metiatur C, vltimum; [d] metietur quoq; ille alius primus eundem C; [e] atque adeò & ipſum A, vnitati proximum, qui primus eſt. quod eſt abſurdum. Ergo non alius primus quàm A, ipſum G, metitur. [f] Iam verò quia C, fit ex F, in G; quòd F, metiatur C, per G; Fit autem idem C, ex A, in B, vt docuimus in ſcholio propoſ. 11. huius lib. Fiet idem numerus C, ex A, primo in B, quartũ, & ex F, ſecundo in G, tertiũ. [g] Quare erit vt A, primus ad F, ſecundum, ita G, tertius ad B, quartum. Metitur autem A, ipſum F, vt demonſtratum eſt. Igitur & G, ipſum B, metietur. metiatur per H. Quia ergo G, diuerſus ab A, metitur B, vltimum (relinquimus enim iam numeros C, & D,) per H; oſtendemus ſimiliter H, diuerſum eſſe ab A; quemadmodum id oſtenſum eſt de numeris F, & G.

a 8. pron.
b 12. noni.
c 33. ſept.
d 11. pron.
e 12. noni.
f 9. pron.
g 19. ſept.

Nam ſi H, idem ſit qui A; metiaturque G, ipſum B, per H; metietur vtique G, ipſum B, per A; [h] Et viciſsim A, ipſum B, per G, metietur. Cùm igitur metiatur A, ipſum B, per A, vt conſtat ex ſcholio propoſ. 11. huius lib. erit G, idem qui A. quod eſt abſurdum. oſtenſum eſt enim G, non eſſe eundem, quem A. Non ergo H, idem eſt, qui A, ſed diuerſus. [i] Iam verò quia B, fit ex G, in H; quòd G, ipſum B, metiatur per H: Fit autem & idem B, ex A, in ſe, vt in ſcholio propoſ. 11. huius lib. docuimus; Fiet idem numerus B, ex H, primo in G, tertiũ, & ex A, medio in ſe ipſum. [k] Quare erit vt H, primus ad A, ſecundum, ita A, ſecundus ad G, tertium: At A, metitur ipſum G, vt eſt demonſtratum. Igitur & H, ipſum A, metietur, numerum primum. Quod eſt abſurdum. Quare ſi A, primus eſt, maximũ D, nullus alius numerus metitur, præter ipſos A, B, C. Ac proinde ſi ab vnitate quotcunque numeri deinceps proportionales fuerint, &c. Quod erat oſtendendum.

h 8. pron.
i 9. pron.
k 20. ſept.

THEOR. 14. PROPOS. 14. 14.

Si minimum numerum primi numeri metiantur: Nullus alius numerus primus illum metietur, præter eos, qui à principio metiebantur.

Sit numerus A, minimus, quẽ metiantur primi numeri B, C, D. Dico nullum alium primum præter ipſos B, C, D, metiri ipſum A. Metiatur enim, ſi fieri poteſt, primus numerus E, diuerſus à B, C, D, ipſum A, per numerum F. Quia igitur E, metitur A, per F; [l] multipli cans E, ipſum F, faciet A. [m] Quare ſinguli B, C, D, alterum ipſorum E, F, metientur: non quidem ipſum E, primum, & ab ipſis diuerſum: ergo ipſum F, qui minor eſt, quàm A. Quod eſt abſurdum. Ponitur enim A, minimus, quem primi B, C, D, metiantur. Si igitur minimum numerum primi numeri metiantur, &c. Quod demonſtrandum erat.

A.....
B.. C... D.....
E---- F------

l 9. pron.
m 32. ſept.

SCHOLIVM.

Addit hoc loco Campanus ſequens theorema ad ea, quæ ſequuntur, non inutile. Videlicet.

Si quotcunque numeri deinceps proportionales, fuerint minimi omnium eandem rationem habentium cum ipſis: Numerus aliquem eorum metiens, metietur quoque alterum duorum numerorum, qui in eadem ratione ſumuntur minimi, vel certè ad alterum erit compoſitus.

Sint quotcunque numeri continuè proportionales A, B, C, D, E, in ſua proportione minimi, in qua ſumantur etiam duo minimi F, G: Metiatur autem primò H, primum eorum, nimirum A. Dico H, metiri quoq; vel F, vel G, vel certè ad alterum eorum compoſitum eſſe. Sit enim H, non primus, ſed compoſitus: [a] *Et ſumantur in eadem proportione tres numeri minimi I, K, L; & quatuor M, N, O, P; & ſic deinceps, donec habeantur tot, vno minus, quot ſunt ipſi A, B, C, D, E. Quoniam igitur, vt conſtat ex modo procreandi quotlibet minimos tradito in 2. propoſ. lib. 8. numerus A, ſit ex F, in M; metitur autem H, ipſum A; erit H, compoſitus, ex ſcholio propoſ. 32. lib. 7. ad F, vel ad M. Si ad F, habemus propoſitum; ſi verò ad M, qui quidem ſit ex F, in I, vt conſtat ex demonſtratione propoſ. 2. lib. 8. erit, ex ſcholio eiuſdem propoſ. 32. lib. 7. rurſus H, compoſitus vel ad F, vel ad I. Si ad F, habetur propoſitum: ſi verò ad I; cùm I, gignatur ex F, in ſe ipſum; erit H, compoſitus ad F, ex eodem ſcholio propoſ. 32. libri 7. Quòd ſi H, ſit primus, oſtendemus eodem modo, ex propoſ. 32. lib. 7. non autem ex ſcholio, eum metiri ipſum F.*

a 2. octaui.

A, 16, B, 24. C, 36. D, 54. E, 81.
M, 8. N, 12. O, 18. P, 27.
I, 4. K, 6. L, 9.
H---- F, 2. G, 3.

Deinde metiatur H, non primus ſecundum B. Quia ergo B, fit ex F, in N; erit vt prius H, cõpoſitus, vel ad F, vel ad N. Si ad F, habetur propoſitũ; ſi verò ad N, q. quidem ſit ex F, in K; erit H, eodẽ modo cõpoſitus vel ad F, vel ad K. Si ad F, habetur propoſitum; ſi verò ad K, cũ K, gignatur ex F, in G; erit quoq; H, compoſitus vel ad F, vel ad G. Quòd ſi H, ſit primus, demonſtrabimus eadem ratione eũ metiri vel F, vel G, ex propoſ. 32. lib. 7.

Rursvs metiatur H, non primus tertium C, qui cùm fiat ex F, in O; erit H, compoſitus vel ad F, vel ad O. Si ad F, habetur propoſitum; ſi verò ad O, qui quidem ſit ex F, in L; erit H, compoſitus vel ad F, vel ad L.

Si ad F, habetur propoſitum; ſi verò ad L, cùm L, gignatur ex G, in ſe; compoſitus quoq; erit H, ad G. Quòd ſi H, ſit primus, probabimus eodem modo ex propoſ. 32. lib. 7. eum metiri ipſum G.

PRÆTEREA metiatur H, non primus quartum D; qui cùm fiat ex F, in P; erit H, compoſitus vel ad F, vel ad P. Si ad F, habetur propoſitū; ſi verò ad P, qui quidem fit ex G, in L; erit etiam H, compoſitus vel ad G, vel ad L. Si ad G, habetur propoſitum; ſi verò ad L; cùm L, producatur ex G, in ſe; erit quoq; H, ad G, compoſitus. Quòd ſi H, primus ſit, oſtendemus eodem modo ex propoſ. 32. lib. 7 eum metiri ipſum G.

EODEM modo ſi H, non primus metiatur vltimum E, oſtendemus H, compoſitum eſſe ad G; Si verò H, primus ſit, eum metiri ipſum G; atq; ita in cæteris eadem ſemper erit demonſtratio.

ITAQVE ſi H, metiatur primum numerum A, metietur idem ipſum F, vel ad eum compoſitus erit: Si verò H, metiatur vltimum E, metietur idem ipſum G, vel ad eum compoſitus erit: Si denique H, metiatur aliquem, præter primum & vltimum, metietur idem vel ipſum F, vel ipſum G, aut ad alterutrum erit compoſitus. Id quod perſpicuum eſt ex ipſa demonſtratione.

DEMONSTRATIO IN NVMERIS EORVM, quæ in lineis 2. libro Euclides demonſtrauit prioribus 10. theorematibus.

QVONIAM ad theorema ſequens demonſtrandum Theon quædam aſſumit in numeris, quæ demonſtrata ſunt de lineis libro 2. perinde ac ſi eadem de numeris eſſent oſtenſa; nō alienum inſtituto noſtro duximus, nonnulla ex ijs, quæ Geometricè ab Euclide libro 2. demonſtrata ſunt de lineis, hoc loco de numeris demonſtrare. Quod idem & Barlaam monachum feciſſe à nonnullis eſt traditum. Sequemur autem eundem ordinem, quem Euclidem in 2. lib. tenuiſſe conſpicimus.

I.

Si fuerint duo numeri, ſeceturque ipſorum alter in quotcunque partes: Numerus planus comprehenſus ſub illis duobus numeris æqualis eſt numeris, qui ſub numero indiuiſo, & qualibet parte numeri diuiſi continentur.

SINT duo numeri A B, & C, quorum A B, diuidatur in A D, D E, E B; Fiat q. F, ex C, in A B: Item G H, ex C, in A D; & H I, ex C, in D E; & I K, ex C, in E B. Dico F, æqualem eſſe numeris G H, H I, I K, hoc eſt, toti numero G K, ex G H, H I, I K, compoſito. Quoniam enim C, multiplicans A B, fecit F; [a] *metietur A B, ipſum F, per C, hoc eſt, A B, pars erit ipſius F, denominata à C. Eadem ratione A D, ipſius G H; & D E, ipſius H I; & E B, ipſius I K, pars erit à C, denominata, eadem nimirum, quæ A B, ipſius F. Quia verò per ea, quæ ad propoſ. 5. lib. 7. demonſtrauimus, totus A B, totius G K, eadem pars eſt, quæ A D, ipſius G H; erit quoq; A B, totus totius G K, pars eadem, quæ A B, ipſius F;* [b] *Ac proinde inter ſe æquales erunt F, & G K. Quod eſt propoſitum.*

a 2. pron.
b 4. pron.

A... D.. E. B C..
F.....
G..... H.... I.. K

II.

Si numerus in duas partes diuidatur: Numeri plani ſub toto, & ſingulis partibus comprehenſi æquales ſunt numero quadrato, qui à toto efficitur.

NVMERVS enim A B, diuidatur in A C, C B. Dico numeros, qui fiunt ex A B, toto in partes A C, C B, ſimul æquales eſſe numero quadrato, qui ex toto A B, efficitur. Sumpto enim numero D, qui æqualis ſit ipſi A B; erit per theor. 1. numerus factus ex D, hoc eſt, ex A B, in A B, nimirum quadratus ipſius A B, æqualis numeris, qui fiunt ex D, hoc eſt, ex A B, in A C, & in C B. quod eſt propoſitum.

D.....
A.... C.. B

IDEM demonſtrabitur, ſi A B, in plures partes, quàm in duas ſecetur, vt ex appoſita ſecunda figura apparere poteſt. Eadem enim ratione erit numerus factus ex E, hoc eſt, ex A B, in A B, nimirū quadratus ipſius A B, æqualis numeris, qui gignuntur ex E, hoc eſt, ex A B, in ſingulas partes A C, C D, D B.

E.....
A... C.. D. B

III.

Si numerus in duas partes diuidatur: Numerus planus ſub toto, & vna parte comprehenſus æqualis eſt & illi, qui ſub partibus continetur, numero, & illi, qui à prædicta parte efficitur, quadrato.

SIT numerus A B, diuiſus in A C, C B. Dico numerum, qui fit ex toto A B, in partem A C, æqualem eſſe & ei, qui ſub partibus A C, C B, continetur, & quadrato dictæ partis A C. Sumpto enim numero D, qui dictæ parti A C, æqualis ſit: erit ex 1. theoremate numerus factus ex D: hoc eſt, ex A C, in A B; vel (quod idem eſt) ex A B, in A C, æqualis numeris factis ex D; hoc eſt, ex A C, in C B, & ex D; hoc eſt, ex A C, in A C, quadrato ſcilicet ipſius A C. Quod eſt propoſitum.

D....
A.... C..... B

Si nu-

IIII.

Si numerus in duas partes diuidatur: Quadratus ex toto factus æqualis eſt quadratis, qui à partibus efficiuntur, vnà cum numero plano, qui bis ſub partibus continetur.

Sit numerus AB, diuiſus in AC, CB. Dico numerum quadratum ex AB, factum æqualem eſſe quadratis partium AC, CB, vnà cum numero, qui fit bis ex parte AC, in partem CB. Nam ex 2. theoremate numerus quadratus ipſius AB, æqualis eſt numeris, qui fiunt ex AB, in AC, & in CB. Eſt autem numerus, qui fit ex AB, in AC, per tertium theorema, æqualis numero genito ex AC, in CB, vnà cum quadratò ipſius AC: Item numerus, qui fit ex AB, in CB, eodem modo æqualis numero producto ex AC, in CB, vnà cum quadrato ipſius CB. Igitur numerus quadratus ex AB, factus æqualis eſt quoq; numeris quadratis partium AC, CB, vnà cum numero bis, qui fit ex AC, in CB. Quod eſt propoſitum.

A..... C.... B

V.

Si numerus ſecetur in duas partes æquales, & non æquales: Numerus planus ſub partibus inæqualibus contentus, vnà cum numero quadrato numeri inter duas ſectiones medij, æqualis eſt quadrato, qui ex dimidio numero gignitur.

Numerus enim AB, ſecetur in partes æquales AC, CB; & non æquales AD, DB. Dico numerum ſub partibus inæqualibus AD, DB, contentum, vnà cum quadrato numeri intermedij CD, (qui quidem exceſſus eſt inter ſemiſſem AC, vel CB, & alterutram partium inæqualium AD, DB.) eſſe æqualem quadrato, qui ex dimidio numero CB, efficitur. Nam cùm numerus quadratus ipſius CB, per quartum theorema, æqualis ſit quadratis partium CD, DB, vnà cum plano numero bis comprehenſo ſub CD, DB; numero verò comprehenſo ſemel ſub CD, DB, vnà cum quadrato ipſius DB, æqualis ſit, per tertium theorema, numerus factus ex CB, in DB; ſit, vt ſi hic numerus factus ex CB, in DB, ſumatur pro quadrato ipſius DB, vnà cum numero facto ex CD, in DB; numerus quadratus ipſius CB, æqualis etiam ſit reliquo quadrato ipſius CD, vnà cum reliquo numero facto ex CD, in DB, ſemel, & numero ex CB; hoc eſt, ex AC, in DB, producto. Atqui ex primo theoremate numeris, qui fiunt ex CD, in DB, & ex AC, in DB, æqualis eſt numerus, qui fit ex toto AD, in DB. Igitur quadratus ipſius CB, æqualis erit quadrato ipſius CD, vnà cum numero, qui fit ex AD, in DB; hoc eſt, numerus factus ex AD, in DB, vnà cum quadrato ipſius CD, æqualis erit quadrato ipſius CB. Quod eſt propoſitum.

A..... C... D.. B

VI.

Si numerus in duas partes æquales diuidatur, & illi aliquis alius numerus adiiciatur: Numerus qui fit ex toto cum adiecto in adiectum, vnà cum quadrato dimidij numeri, æqualis eſt quadrato eius numeri, qui ex dimidio & adiecto componitur.

Numerus enim AB, ſecetur in partes æquales AC, CB, eiq; adijciatur numerus BD. Dico numerum factum ex toto AB, & adiecto BD, tanquam vno, nimirum ex AD, in adiectum BD, vnà cum quadrato dimidij numeri CB, æqualem eſſe quadrato, qui fit ex CB, dimidio & adiecto BD, tanquam vno; hoc eſt, quadrato ipſius CD. Cùm enim quadratus ipſius CD, per 4. theorema, æqualis ſit quadratis partium CB, BD, vnà cum numero bis comprehenſo ſub CB, BD; hoc eſt, quadratis partium CB, BD, vnà cum numeris ſub CB, BD, & ſub AC, BD, comprehenſis; numeris autem contentis ſub CB, BD, & ſub AC, BD, & ſub BD, BD; hoc eſt, quadrato ipſius BD, æqualis ſit, ex primo theoremate numerus factus ex AD, in BD; ſit, vt ſi hic numerus factus ex AD, in BD, ſumatur pro quadrato partis BD, vnà cum numeris factis ex CB, in BD, & ex AC, in BD, quadratus ipſius CD, æqualis etiam ſit reliquo quadrato ipſius CB, vnà cum numero facto ex AD, in BD; hoc eſt, numerus factus ex AD, in BD, vnà cum quadrato ipſius CB, æqualis ſit quadrato ipſius CD. Quod eſt propoſitum.

A.... C.... B.. D

VII.

Si numerus in duas partes diuidatur: Quadratus totius, vnà cum quadrato vnius partis, æqualis eſt numero, qui fit bis ex toto in dictam partẽ, vnà cũ quadrato reliquæ partis.

Diuidatur numerus AB, in partes AC, CB. Dico quadratum totius AB, vnà cum quadrato partis CB, æqualem eſſe numero bis, qui fit ex toto AB, in dictam partem CB, vnà cum quadrato reliquæ partis AC. Cùm enim ex 4. theoremate quadratus totius AB, æqualis ſit quadratis partium AC, CB, vnà cum numero, qui fit bis ex AC, in CB; ſi quadratus ipſius CB, addatur communis; erunt quadrati numerorum AB, CB, ſimul æquales quadratis numerorũ AC, CB, CB, vnà cum numero, qui fit bis ex AC, in CB. Atqui ei, q̃ fit ex AC, in CB, vnà cũ quadrato ipſius CB, æqualis eſt, per 3. theor. numerus qui fit ex AB, in CB; Ac proinde ei, qui fit bis ex AC, in CB, vnà cũ quadrato ipſius CB, bis, æqualis eſt, q̃ fit bis ex AB, in CB. Igitur

A..... C.... B

ſi pro numero, qui fit bis ex A C, in C B, vnà cum quadrato ipſius C B, bis, ſumatur numerus factus bis ex A B, in C B; erunt quadrati numerorum A B, C B, ſimùl, æquales numero, qui fit bis ex A B, in C B, vnà cum quadrato reliquæ partis A C. Quod eſt propoſitum.

VIII.

Si numerus in duas partes diuidatur: Qui fit quater ex toto in vnam partem, vnà cum quadrato reliquæ partis, æqualis eſt quadrato numeri compoſiti ex toto & priori parte.

Secetur numerus A B, in partes A C, C B. Dico numerum, qui fit quater ex toto A B, in partem C B, vnà cum quadrato reliquæ partis A C, æqualem eſſe quadrato numeri, qui ex toto A B, & prædicta parte C B, componitur. Addito enim numero B D, qui æqualis ſit dictæ parti C B; cùm quadratus totius A D, compoſiti ex A B, & B D, ſiue dicta parte C B, ſit æqualis per 4. theorema, quadratis numerorum A B, B D, vnà cum numero, qui fit bis ex A B, in B D, hoc eſt, quadratis numerorum A B, C B, vnà cum eo, qui fit bis ex A B, in C B; Sint autem, ex 7. theor. quadrati numerorum A B, C B, ſimul æquales numero bis comprehenſo ſub A B, C B, vnà cum quadrato numeri A C; fit, vt ſi pro quadratis numerorũ A B, C B, ſumatur numerus factus bis ex A B, in C B, vnà cum quadrato ipſius A C, quadratus factus ex A D, æqualis ſit numero, qui fit quater ex A B, in C B, vnà cum quadrato reliquæ partis A C. Quod eſt propoſitum.

A.... C... B... D

IX.

Si numerus ſecetur in duas partes æquales, & non æquales: Quadrati, qui ab inæqualibus partibus fiunt, dupli ſunt quadratorum, qui à dimidio numero, & ab intermedio efficiuntur.

Diuidatur numerus A B, in partes æquales A C, C B, & non æquales A D, D B. Dico quadratos partium inæqualium A D, D B, duplos eſſe quadratorũ, qui ex A C, dimidio, & ex C D, numero intermedio (qui quidem exceſſus eſt inter ſemiſſem A C, vel C B, & alterutram partium inæqualium A D, D B.) efficiuntur. Cùm enim quadratus numeri A D, æqualis ſit, ex 4. theor. quadratis numerorum A C, C D, vnà cum numero bis, qui fit ex A C, in C D; Si communis apponatur quadratus partis D B; erunt quadrati partium A D, D B, æquales quadratis partium A C, C D, D B, vnà cum numero bis, qui fit ex A C, hoc eſt ex C B, in C D. Atqui quadrato ipſius D B, vnà cum numero bis, qui fit ex C B, in C D, æquales ſunt ex 7. theor. quadrati, qui fiunt ex C B, hoc eſt, ex A C, & C D. Igitur ſi pro quadrato ipſius D B, vnà cum eo, qui fit bis ex C B, in C D, ſumantur quadrati ipſorum A C, C D, erunt quadrati partium A D, D B, æquales quadratis partium A C, C D, bis; Ac propterea quadrati partiũ A D, D B, dupli erunt quadratorũ, qui ex partibus A C, C D, fiunt. Quod eſt propoſitũ.

A..... C... D.. B

X.

Si numerus in duas partes æquales diuidatur, adiiciatur autem illi alius quiſpiam numerus: Quadratus compoſiti numeri ex toto & adiecto, & quadratus numeri adiecti, ſimul dupli ſunt eius quadrati, qui ex dimidio efficitur, & eius, qui fit à numero compoſito ex dimidio & adiecto.

Sit numerus A B, diuiſus in partes duas æquales A C, C B, eiq; adiiciatur numerus B D. Dico quadratum numeri A D, compoſiti ex toto A B, & adiecto B D, & quadratum adiecti numeri B D, vtroſque ſimul, duplos eſſe quadratorũ, qui fiunt ex A C, dimidio, & ex C D, compoſito ex C B, dimidio, & adiecto B D. Cùm enim quadratus ipſius A D, æqualis ſit, ex 4. theor. quadratis partium A C, C D, vnà cum numero bis, qui fit ex A C, hoc eſt, ex C B, in C D; ſi communis addatur quadratus partis B D; erunt quadrati numerorũ A D, B D, æquales quadratis partium A C, C D, B D, vnà cum numero bis, qui fit ex C B, in C D. Sed per 7. theor. quadrato ipſius B D, vnà cum numero bis, qui fit ex C B, in C D, æquales ſunt quadrati numerorũ C B, C D; & quadrato ipſius C B, æqualis eſt quadratus ipſius A C. Igitur ſi pro quadrato ipſius B D, vnà cum numero, qui fit bis ex C B, in C D, ſumantur quadrati numerorum C B, C D, hoc eſt, numerorum A C, C D: erũt quadrati numerorum A D, B D, æquales quadratis numerorũ A C, C D, bis; Ac propterea quadrati numerorum A D, B D, dupli erunt quadratorum, qui ex A C, C D, efficiuntur. Quod eſt propoſitum.

Iam verò theor. 11. lib. 2. nõ poſſe numeris accommodari, hoc eſt, nullo modo fieri poſſe, vt numerus aliquis in duas partes diuidatur, ita vt numerus planus, qui ex toto in vnam partium fit, æqualis ſit quadrato reliquæ partis, vt ibi monuimus, ita demonſtrabimus.

Diuidatur, ſi fieri poteſt, numerus A B, in C, ita vt numerus factus ex toto A B, in partem C B, æqualis ſit quadrato reliquæ partis A C. Quia igitur numerus contẽtus ſub extremis A B, C B, æqualis eſt quadrato numeri medij A C; [a] erit vt A B, ad A C, ita A C, ad C B: Eſt autem A B, maior quàm A C. Igitur & A C, maior eſt quàm C B. Ablato iam C D, qui ipſi C B, ſit æqualis, erit quoque vt A B, ad A C, ita A C, ad C D. Quoniam ergo totus A B, ad totum A C, eſt vt A C, ex toto A B, detractus ad C D, ex toto A C, detractum; [b] erit quoque vt totus A B, ad totum A C, vel vt detractus A C, ad detractum C D, ita C B, ex A B, reſiduus, hoc eſt, C D, ipſi C B,

a 20. ſept.

A D EC B

b 11. ſept.

C B, æqualis, ad A D, ex A C, reſiduum. Quia igitur eſt, vt A C, ad C D, ita C D, ad A D; & eſt A C, maior q̃ C D; erit quoq; C D, maior quàm A D. Ablato ergo D E, qui ipſi A D, ſit æqualis; erit etiam vt A C, ad C D, ita C D, ad D E. Itaq; quia eſt, vt totus A C, ad totum C D, ita C D, ex toto A C, detractus ad D E, ex toto C D, detractum; [a] erit quoq; vt totus A C, ad totum C D, vel vt detractus C D, ad detractum D E, ita A D, ex A C, reſiduum: hoc eſt, D E, ipſi A D, æqualis, ad E C, ex C D, reſiduum. Quare cùm ſit, vt C D, ad D E, ita D E, ad E C; ſit autem C D, maior, quàm D E; erit etiam D E, maior, quàm E C; Ac proinde ex E D, auferri poterit numerus ipſi E C, æqualis; & ſic deinceps, nec vnquam finis erit huius detractionis. Quod eſt abſurdum: cùm numerus non poſſit diuidi in infinitum. Non ergo numerus A B, diuidetur ita, vt planus numerus ex toto in vnam partium factus, æqualis ſit quadrato reliquæ partis. Quod eſt propoſitum. [a] 11. ſept.

ALITER. Quoniam numerus A B, in C, ita diuiſus eſt, vt is, qui fit ex A B, in C B, æqualis ſit quadrato reliquæ partis A C; erit numerus, qui quater fit ex A B, in C B, quadruplus quadrati ipſius A C; Ac proinde numerus, qui fit quater ex A B, in C B, vnà cum quadrato ipſius A C, quintuplus erit quadrati partis A C. Eſt autem numerus contentus quater ſub A B, C B, vnà cum quadrato ipſius A C, quadratus; quippe cùm æqualis ſit quadrato numero, qui fit ex numero compoſito ex A B, & C B, per 8. theorema. Igitur duo numeri quadrati (nimirum is, qui quater continetur ſub A B, C B, vnà cum quadrato ex A C; & quadratus ex A C,) proportionem habent, quam 5. ad 1. vel 25. ad 5. Quod eſt abſurdum, vt conſtat ex coroll. propoſ. 24. lib. 8. Non ergo numerus A B, diuiditur ita in C, vt is, qui producitur ex A B, in C B, æqualis ſit quadrato ipſius A C. Quod eſt propoſitum.

A C B

VERVM hoc idem clariùs demonſtrabimus ad propoſ. 29. huius lib.

THEOR. 15. PROPOS. 15. 16.

Si tres numeri deinceps proportionales, fuerint minimi omnium eandem cum ipſis rationem habentium; Duo quilibet compoſiti, ad reliquum primi erunt.

SINT tres numeri A, B, C, minimi omnium eandem cum illis proportionem habentium. Dico quoslibet duos compoſitos, ad reliquum primos eſſe; nimirum A, B, ſimul ad C; & B, C, ſimul ad A; & A, C, ſimul ad B. Sumptis enim duobus D, E, in eadem cum illis proportione minimis, ex ſcholio propoſ. 35. lib. 7. manifeſtum eſt ex demonſtratione propoſ. 2. lib. 8. D, ſeipſum multiplicantem facere A; multiplicantem verò ipſum E, facere B; atque E, ſeipſum multiplicantem facere C. [a] Quia igitur D, E, minimi in ſua proportione inter ſe primi ſunt; [b] erit & vterque D, E, ſimul ad quemlibet illorum primus. Itaque cùm tam compoſitus ex D, E, quàm ipſe D, ad E, primus ſit; [c] erit quoq; numerus factus ex D, E, tanquã vno, in D, ad eundem E, primus: Qui autem fit ex D, E, tanquam vno, in D, æqualis eſt per 3. theor. ſcholij præcedentis, & numero A, facto ex D, in ſe, & numero B, facto ex D, in E. Igitur & A, B, compoſiti, primi ſunt ad E; [d] Ac proinde & ad C, qui factus eſt ex E, in ſe, primi ſunt A, B, ſimul compoſiti.

A, 9. B, 12. C, 16. D, 3. E, 4.

[a] 24. ſept. [b] 30. ſept. [c] 26. ſept. [d] 27. ſept.

DEINDE quia, vt prius, [e] vterque D, E, ſimul primus eſt ad quemlibet ipſorum D, E; efficitur, (cùm tam compoſitus ex D, E, quàm ipſe E, primus ſit ad D,) [f] numerum factum ex D, E, tanquam vno, in E, primum eſſe ad D: Qui autem fit ex D, E, tanquam vno, in E, æqualis eſt per 3. theor. ſcholij antecedentis, & numero C, facto ex E, in ſe, & numero B, facto ex D, in E. Igitur & B, C, ſimul compoſiti, ad D, primi ſunt, [g] atque adeò & ad ipſum A, qui factus eſt ex D, in ſe, primi ſunt B, & C, ſimul compoſiti.

B, 12. C, 16. A, 9. D, 3. E, 4.

[e] 30. ſept. [f] 26. ſept. [g] 27. ſept.

POSTREMO, quia, vt prius, [h] vterque D, & E, ſimul ad quemlibet ipſorum primus eſt; atque adeò è contrario, quilibet ipſorum D, E, primus eſt ad compoſitum ex D, E, [i] erit quoque qui fit ex D, in E, ad compoſitum ex D, E, primus; [k] Ac proinde & idem, qui fit ex D, in E, ad eum, qui fit ex D, E, tanquam vno, in ſe, primus erit. Qui autem fit ex D, E, tanquam vno, in ſe, æqualis eſt, per 4. theor. antecedentis ſcholij, eis qui fiunt ex D, & E, in ſe ipſos, vnà cum eo, qui ex D, in E, bis. Igitur & factus ex D, in E, primus erit ad eos, qui fiunt ex D, & E, in ſe ipſos, & ex D, in E, bis. Quoniam ergo duo numeri ſimul, videlicet compoſitus ex iis, qui fiunt ex D, & E, in ſe ipſos, & ex eo, qui fit ex D, in E, atque is, qui fit ex D, in E, primi ſunt ad aliquem ipſorum; nimirũ ad eum, qui fit ex D, in E, vt oſtenſum eſt. [l] Erunt etiam duo illi; nimirum compoſitus ex iis, qui fiunt ex D, & E, in ſe ipſos, & ex eo, qui fit ex D, in E, atque is, qui fit ex D, in E, inter ſe primi. Rurſus quia duo numeri ſimul, videlicet compoſitus ex iis, qui fiunt ex D, & E, in ſe ipſos, atque is, qui fit ex D, in E, ad aliquem ipſorum; nimirum ad eum, qui fit ex D, in E, primi ſunt, vt oſtenſum eſt; [m] erunt etiam duo illi; nimirum compoſitus ex iis, qui fiunt ex D, & E, in ſe ipſos, atque is, qui fit ex D, in E, inter ſe primi. Cùm igitur ex D, & E, in ſe ipſos fiant A, & C; Item ex D, in E, fiat B; erunt A, & C, ſimul compoſiti, primi ad B. Quam ob rem, ſi tres numeri deinceps proportionales, &c. Quod erat oſtendendum.

A, 9. C, 16. B, 12. D, 3. E, 4.

[h] 30. ſept. [i] 26. ſept. [k] 27. ſept. [l] 37. ſept. [m] 30. ſept.

SCHOLIVM.

CAMPANVS hoc theorema aliter, & quidem facilius demonſtrat de quotcunque numeris continuè proportionalibus minimis, hoc modo ipſum proponens.

Si quotcunq; numeri deinceps proportionales, fuerint minimi omnium eandem cum ipſis rationẽ habentium: Ad quemlibet eorũ reliqui omnes ſimul compoſiti, erunt primi.

Sint continuè proportionales minimi quotcunq; numeri A,B,C,D. Dico ad quemlibet eorum reliquos omnes ſimul compoſitos, eſſe primos; Videlicet A,B,C ſimul ad D; & A,B,D, ſimul ad C; & A,C,D, ſimul ad B; & B,C,D, ſimul ad A. Si enim A,B,C, ſimul non ſunt primi ad D, erunt A,B,C ſimul atq; D, compoſiti inter ſe; atq; adeò eos aliquis numerus communis menſura metietur. Metiatur eos numerus E, ſi fieri poteſt; ſumanturq; F, & G, duo minimi in ratione A,B,C,D, numerorum. Quoniam ergo A,B,C,D, continuè proportionales ſunt, & minimi; metitur autem E, aliquem eorum; nimirum D, metietur quoq; E, alterum ipſorum F,G, vel certè compoſitus erit ad alterum ipſorum F,G, ex ſcholio propoſ.14. huius lib. Atq; idcircò ipſum E, & alterũ ipſorum F,G, aliquis numerus metietur: Metiatur eos H. Itaq; cùm H, metiatur E; & E, ponatur metiri compoſitum ex A,B,C, & ipſum D; metietur quoq; H, eundem compoſitum ex A,B,C, & ipſum D. Quia verò H, metitur quoq; alterum ipſorum F,G; & tam F, q̃ G, medios numeros B,C, metitur ex coroll.3. propoſ.2. lib.8. metietur quoq; H, medios B,C; ac propterea & compoſitum ex B,C. Itaq; cùm H, metiatur totum compoſitum ex A,B,C, & detractum compoſitũ ex B,C, vt demonſtrauimus; metietur quoq; idem H, reliquum A: Metiebatur autem & ipſum D. Sunt ergo A,D, extremi minimorum A,B,C,D, inter ſe compoſiti. Sed & primi inter ſe ſunt. Quod fieri non poteſt. Non igitur compoſiti inter ſe ſunt, compoſitus ex A,B,C, & numerus D. Ergo inter ſe primi.

a 11. pron. b 11. pron. c 10. pron. d 12. pron. e 3. octaui.

A, 8. B, 12. C, 18. D, 27.
E ---- F, 2. G, 3. H ----

Rvrsvs, ſi A,B,D, ſimul compoſiti non ſunt primi ad C, metietur eos, vt prius, aliquis numerus. Metiatur eos E, qui rurſum ex ſcholio propoſ.14. huius lib. vel metietur alterum ipſorum F,G, vel compoſitus erit ad alterum ipſorum F,G. Metiatur ergo H, ipſum E, & alterum ipſorum F,G. Itaq; cùm H, metiatur E; & E, compoſitum ex A,B,D; metietur etiam H, eundem compoſitum ex A,B,D. Quia verò H, metitur alterum ipſorum F,G, qui metiuntur, per coroll.3. propoſ.2. lib 8. medios B,C, & metietur quoq; H, ipſos B,C. Itaq; cùm H, metiatur totum compoſitum, ex A,B,D, & detractum B, metietur quoque H, compoſitum ex A,D, reliquum. Et quia H, metitur alterum ipſorum F, G, quorum F, ipſum A, & G, ipſum D, metitur, vt conſtat ex demonſtratione propoſ.2. lib.8. metietur etiam H, alterum ipſorum A,D. Igitur & reliquum. Sunt ergo A, D, extremi inter ſe compoſiti. Sed & primi inter ſe ſunt. Quod fieri nõ poteſt. Non igitur A,B,D, ſimul compoſiti, ad C, compoſiti ſunt. Ergo primi. Quod eſt propoſitum.

f 11. pron. g 11. pron. h 12. pron. i 11. pron. k 12. pron. l 13. octaui.

Non aliter oſtendemus & A,C,D, compoſitos, eſſe ad B, primos; nec non & B,C,D; ſimul ad A. Eademq; ratio eſt de quotlibet numeris continuè proportionalibus.

17.

THEOR. 16. PROPOS. 16.

Si duo numeri primi inter ſe fuerint: Non erit vt primus ad ſecundum, ita ſecundus ad alium quempiam.

Sint primi inter ſe A, & B. Dico non eſſe vt A, ad B, ita B, ad alium numerum. Si enim fieri poteſt, ſit vt A, ad B, ita B, ad alium; nimirum ad C. Quoniam igitur A, & B, primi ſunt inter ſe, atque adeò in ſua proportione minimi; ipſi æquè metientur numeros B, & C, in eadem ratione exiſtentes; nimirum A, ipſum B, & B, ipſum C: Metitur autem & A, ſe ipſum. Igitur A, metitur ipſos A,B, primos inter ſe. Quod eſt abſurdum. Non ergo eſt vt A, ad B, ita B, ad alium numerum C. Eademque ratione non erit, vt B, ad A, ita A, ad alium. Quare ſi duo numeri, primi inter ſe fuerint, &c. Quod demonſtrandum erat.

a 23. ſept. b 21. ſept.

A.....
B.....
C----------

18.

THEOR. 17. PROPOS. 17.

Si fuerint quotcunque numeri deinceps proportionales, extremi autẽ ipſorũ primi inter ſe ſint: Non erit vt primus ad ſecundum, ita vltimus ad aliumquempiã.

Sint continuè proportionales quotcunque numeri A,B,C,D, quorum extremi A,D, inter ſe primi ſint. Dico non eſſe vt A, ad B, ita D, ad alium numerum. Si enim fieri poteſt, ſit vt A, ad B, ita D, ad alium; videlicet ad E. Erit igitur permutando vt A, ad D, ita B, ad E. Sunt autem A,D, cũ ſint inter ſe primi, minimi in ſua proportione. Igitur æquè metiẽtur ipſos B, & E; nimirũ A, ipſum B, & D, ipſum E. Atqui eſt vt A, ad B, ita B, ad C: Ergo cùm A, metiatur ipſum B; & B, ipſum C, metietur; atque ob id & A, ipſum C, metietur. Et quia eſt vt B, ad C, ita C, ad D; metitur autem B, ipſum C; metietur & C, ipſum D. Quare A, metiens ipſum C, metietur quoq; ipſum D. Metitur verò & A, ſe ipſum. Igitur A, metitur ipſos A,D, inter ſe primos. Quod eſt abſurdum. Non ergo eſt vt A, ad B, ita D, ad alium numerũ E. Eodem quoq; argumento non erit vt D, ad C, ita A, ad alium. Quocirca ſi fuerint quotcunque numeri deinceps proportionales, &c. Quod erat oſtendendum.

c 23. ſept. d 21. ſept. e 11. pron. f 11. pron.

A, 8. B, 12. C, 18. D, 27. E ----

19.

PROBL. 1. PROPOS. 18.

Dvobvs numeris datis conſiderare, an poſſit ipſis tertius proportionalis inueniri.

Datt

DATI duo numeri ſint A, & B, oporteatque conſiderare, an inueniri poſsit tertius ipſis proportionalis; hoc eſt, an ſit B, ad alium quempiam numerum, vt A, ad B. Aut igitur A, 4. B, 7. A, B, primi inter ſe ſunt, aut non. Si ſunt inter ſe primi [a] perſpicuum eſt ex demonſtratis, non poſſe ipſis reperiri tertium proportionalem. Si verò non ſunt A, & B, inter ſe primi; multiplicans B, ſeipſum faciat C. Aut igitur A, metitur ipſum C, aut non. Metiatur primũ A, ipſum C, p D. Dico ipſis A, B, inueniri poſſe tertiũ proportionalem, immò ipſum D, eſſe tertiũ proportionalẽ. Cũ enim A, metiatur C, p D, [b] fiet C, ex A, in D: A, 4. B, 6. D, 9. C, 36. Fit autẽ ex conſtructione, idem C, ex B, in ſe ipſum. Igitur, qui continetur ſub extremis A, D, æqualis eſt ei, qui ex medio B, deſcribitur; [c] Ac proinde erit vt A, ad B, ita B, ad D. Quare D, inuentus eſt tertius proportionalis ipſis A, B. [a] 16. noni. [b] 9. pron. [c] 20 ſept.

SED non metiatur A, ipſum C. Dico ipſis A, B, non poſſe reperiri tertium proportionalem. Si enim inueniri poteſt, inuẽtus ſit D, ita vt ſit A, ad B, quemadmodum B, ad D. Quoniam igitur eſt, vt A, ad B, ita B, ad D; [d] erit numerus contentus ſub extremis A, D, æqualis ei, qui fit ex B, medio in ſe ipſum; hoc eſt, ipſi C. Quare cùm C, fiat ex A, in D; [e] metietur A, ipſum C, per D: ſed & non metiri ponitur. Quod eſt abſurdum. Non igitur inueniri poteſt ipſis A, B, tertius proportionalis, quando A, primus non metitur C, productum ex B, ſecundo in ſe ipſum. Eadem via conſiderabimus, an ipſis B, & A, inueniri poſsit alius tertius numerus, ad quem ita ſit A, vt B, ad A. Duobus ergo numeris datis conſiderauimus, &c. Quod faciendum erat. [d] 20. ſept. [e] 7. pron. A, 6. B, 4. D —— C, 16.

PROBL. 2. PROPOS. 19.

TRIBVS numeris datis, conſiderare, an poſſit ipſis quartus proportionalis inueniri.

SINT dati tres numeri A, B, C, ſiue deinceps proportionales, ſiue non; oporteatque conſiderare, an poſsit reperiri quartus ipſis proportionalis; hoc eſt, an ſit C, ad aliquem alium numerum, vt A, ad B. Multiplicans B, ipſum C, faciat D. Aut igitur A, ipſum D, metitur, aut non. Metiatur primùm A, ipſum D, per E. Dico ipſis A, B, C, inueniri poſſe quartum proportionalem, immò ipſum E, eſſe quartum proportionalem. Cùm enim A, metiatur D, per E; [f] fiet D, ex A, in E; Fit autem idem D, ex B, in C, per conſtructionem. Igitur qui ſub extremis A, E, continetur, æqualis eſt ei, qui ſub B, C, ſecundo, & tertio continetur; [g] Ac propterea erit, vt A, ad B, ita C, ad E. Quare inuentus eſt E, ipſis A, B, C, quartus proportionalis. [f] 9. pron. [g] 19. ſept. A, 8. B, 12. C, 18. E, 27. D, 216. A, 4. B, 8. C, 9. E, 18. D, 72.

SED iam non metiatur A, ipſum D. Dico ipſis A, B, C, non poſſe inueniri quartum proportionalem. Sit enim, ſi fieri poteſt, inuentus quartus proportionalis E; ita vt ſit quemadmodum A, ad B, ita C, ad E. Quia ergo quatuor numeri A, B, C, E, proportionales ſunt, [h] erit numerus contentus ſub extremis A, E, æqualis ei, qui ex B, ſecundo fit in C, tertium; hoc eſt, ipſi D. Quare cùm D, fiat ex A, in E; [i] metietur A, ipſum D, per E: ſed & ponitur non metiri. Quod eſt abſurdum. Non igitur inueniri poteſt ipſis A, B, C, quartus proportionalis, quando A, primus nõ metitur D, productum ex B, ſecundo in C, tertium. Eadem methodo conſiderabimus, an ipſis C, B, A, inueniri poſsit aliquis quartus, ad quem ita ſe habeat A, vt C, ad B. Quocirca tribus numeris datis conſiderauimus, an poſsit, &c. Quod erat faciendum. [h] 19. ſept. [i] 7. pron. A, 4. B, 6. C, 9. E —— D, 54. A, 3, B, 4. C, 10. E —— D, 40.

SCHOLIVM.

HAEC, quæ proximis quatuor propoſitionibus, nimirũ 16. 17. 18. & 19. demonſtrata ſunt, intelligi debent de numeris integris. Nam ſi de fractis loquamur, poteſt quibuslibet duobus, vel tribus adiungi alius proportionalis, quamuis extremi inter ſe primi ſint. Nam datis duobus, ſi quadratus numerus ſecundi diuidatur per primum, procreabitur tertius proportionalis. Vt duobus numeris datis 3. 8. ſi quadratus numerus ſecundi 8. nimirũ 64. diuidatur per 3. inuenietur tertius proportionalis $21\frac{1}{3}$. hoc modo, 3. 8. $21\frac{1}{3}$. Quia enim diuiſis 64. per 3. ſit numerus $21\frac{1}{3}$. producetur numerus diuiſus 64. ex multiplicatione Quotientis $21\frac{1}{3}$. per diuiſorem 3. vt ad defin. 15. lib. 7. tradidimus. Cùm ergo idem numerus 64. factus ſit ex medio numero 8. in ſe; [a] erunt 3. 8. $21\frac{1}{3}$. continuè proportionales. [a] 20. ſept.

DATIS autem tribus numeris, ſi numerus ex ſecundo in tertium genitus diuidatur per primum, procreabitur quartus proportionalis. Vt datis tribus numeris 9. 6. 20. ſi numerus 120. ex ſecundo in tertium genitus diuidatur per primum 9. reperietur quartus proportionalis $13\frac{1}{3}$. hoc modo, 9. 6. 20. $13\frac{1}{3}$. Cùm enim diuiſis 120. per 9. fiat $13\frac{1}{3}$. producetur numerus diuiſus 120. ex multiplicatione Quotientis $13\frac{1}{3}$. per diuiſorem 9. ex ijs, quæ in defin. 15. lib. 7. ſcripſimus. Fit autem idem numerus diuiſus ex ſecundo in tertium. [b] *Igitur quatuor numeri 9. 6. 20. $13\frac{1}{3}$. proportionales ſunt.* [b] 19. ſept.

EX his facilè cognoſcemus, propoſitis quotcunque numeris continuè proportionalibus, an poſsit ipſis alius proportionalis adiungi. Sumptis enim tribus vltimis, ſi ipſis alius poteſt inueniri, ille idem erit omnibus illis proportionalis.

THEON, & qui illum ſequuntur, inter quos etiam eſt Federicus Commandinus, quatuor membris hoc problema abſoluunt. Aut enim (aiunt) tres dati numeri & deinceps proportionales ſunt, & eorum extremi inter ſe primi; Aut nō deinceps quidem proportionales, ſed eorum extremi primi inter ſe; Aut deinceps quidem proportiōnales, ſed eorum extremi non primi inter ſe; Aut denique nec deinceps proportionales, nec eorum extremi inter ſe primi. Vbi mirari ſatis non poſſum, quonam modo diligentiſſimi Euclidis interpretes, & in alijs quidem demonſtrationibus vigilantiſſimi, in ſecundo membro huius problematis demonſtrādo dormitârint, & quaſi ſui obliti, ac de diligentia remittentes, in errorem, eumq; non leuem, incurrerint. Dicunt enim, ſi tres numeri dati non ſint deinceps proportionales, ſed eorū extremi inter ſe primi, non poſſe ipſis quartum proportionalem inueniri. Quod quidem & falſum eſt, & demonſtratio, qua id ipſum comprobare nituntur, vitioſa. Nā falſitas huius rei perſpicuè in his numeris non continuè proportionalibus, apparet 4.8.9. quorum extremi 4.9. ſunt inter ſe primi, & nihilominus eis adiungi poteſt quartus proportionalis 18. Quis enim non videt, eſſe vt 4. ad 8. ita 9. ad 18. cùm vtrobique proportio ſit ſubdupla? Idem videri poteſt in exemplis alijs infinitis, vt hic 2.4.7.14. Item 3.9.4.12. Item 2.10.3.15. Item 5.10.6.12. &c. In omnibus enim his numeris extremi priorū trium ſunt inter ſe primi, cùm tamen ipſis adiungatur poſterior quartus proportionalis. Falſum ergo eſt, illis dari non poſſe quartū proportionalem. Quòd autē vitioſa ſit eorum demonſtratio, qua hoc probare contendunt, perſpicuū fiet, ſi demonſtrationē ipſam in medium proferamus. Ita igitur ratiocinātur.

SINT trium numerorum A, B, C, non deinceps proportionalium, extremi A, C; inter ſe primi. Dico ipſis inueniri nullo modo poſſe quartum proportionalem. Si enim poteſt inueniri, ſit ille D, ita vt ſit quemadmodum A, ad B, ita C, ad D; &

A, 3. B, 6. C, 8. D, 16. E---- vt B, ad C, ita fiat D, ad E. Erit igitur ex æquo, vt A, ad C, ita C, ad E: Sed ſunt A, C, inter ſe primi, [a] & ob id minimi.

a 23. ſeptimi.

b 21. ſeptimi.

[b] Igitur metientur æquè ipſos C, E, nimirum A, ipſum C, & C, ipſum E. At verò & A, ſeipſum metitur. Ergo A, metitur duos A, C, primos inter ſe. Quod fieri non poteſt. Ipſis igitur A, B, C, quartus proportionalis inueniri nequit.

HAEC eſt eorum demonſtratio, in qua aſſumunt eſſe, vt B, ad C, ita D, ad alium quendam numerum, videlicet ad E; quod quidem fieri poſſe, nuſquam demonſtrârunt. Immò hoc ipſum vertitur in dubium in hoc problemate. Non enim minus inquiritur, an tribus numeris B, C, D, quartus proportionalis poſſit inueniri, quàm tribus A, B, C; cùm non magis hoc conſtet in illis, quàm in his. Quapropter cùm ibi id pro conceſſo aſſumant, vt hic idem fieri non poſſe, oſtendant; liquidò conſtat, eos petere principium (vt cum Dialecticis loquamur) in demonſtrando. Quin etiam quotieſcunque quatuor numeri dantur proportionales, ſed non deinceps, quorum primus, & tertius, primi inter ſe ſunt, quales ponuntur eſſe A, B, C, D; nulla ratione fieri poteſt, vt detur alius, ad quem ita ſe habeat quartus, ſicut ſecundus ad tertium: quod tamen ipſi tanquam conceſſum, atq; probatū aſſumunt; quandoquidem ſine probatione vlla exigunt, vt detur illis numerus E, ad quem ita ſe habeat quartus D, vt B, ſecundus ad C, tertium. Hoc verò non poſſe fieri, facilè demonſtrabimus eodem argumento, quo ipſi vtuntur.

SINT enim quatuor numeri A, B, C, D, proportionales, nō tamen deinceps, ſintq; A, & C, primus & tertius, inter ſe primi. Dico fieri non poſſe, vt ſit D, ad alium numerum, quemadmodum B, ad C. Sit enim, ſi poteſt fieri, vt B, ad C, ita D, ad E. Eſt ergo ex æquo, vt A, ad C, ita C,

A, 4. B, 12. C, 3. D, 9. E---- ad E; atque adeò, vt ipſi oſtenderunt, metietur A, duos A, & C, primos inter ſe. Quod eſt abſurdum. Non ergo fieri poteſt, vt D, ad E, ſit, quemadmodū B, ad C. Quare apertiſſimè falſum in demonſtratione ſecundi membri aſſumpſerūt Theon, & alij Euclidis interpretes, qui Theonem ſequuntur.

PRIMVM verò membrum perſpicuè & apertè oſtendunt. Nam ſi tres numeri deinceps proportionales

c 17. noni. ſunt, & eorum extremi inter ſe primi; [c] manifeſtum eſt, ex demonſtratis, non poſſe ipſis quartum proportionalem inueniri. Poſtrema tandem duo membra expediunt non aliter, ac nos totum problema abſoluimus.

21.

THEOR. 18. PROPOS. 20.

PRIMI numeri plures ſunt, omni propoſita multitudine primorū numerorū.

A, 2. B, 3. C, 5.

a 38. ſept. 30. 1.

D---------- E. F

SINT propoſiti primi numeri quotcunque A, B, C. Dico ipſis A, B, C, plures eſſe primos numeros. [a] Sumpto enim numero D E, minimo, quē A, B, C, metiuntur; apponatur ei vnitas E F. Aut ergo totus D F, primus eſt, aut non primus. ſit primùm primus. Sunt ergo primi numeri A, B, C, & D F, plures propoſita multitudine A, B, C.

A, 3. B, 5. C, 7.

b 33. ſept. 105. 1.

D---------- E. F

53.

c 11. prop. G----

SED iam nō ſit primus D F. [b] Metietur ergo eum aliquis numerus primus; nimirum G. Dico G, primum nulli ipſorum A, B, C, eundem eſſe. Si namque G, ſit idem, qui vnus ipſorum A, B, C; metiantur autem A, B, C, ipſum D E; & G, eundem D E, metietur. Quare G, metiēs totum D F, & detractum D E, [c] metietur quoque E F, reliquum, numerus vnitatem.

Quod

Quod est absurdum. Ergo G, primus non est idem, qui vnus ipsorum A, B, C; Ac proinde inuenti sunt primi numeri A, B, C, G, plures proposita multitudine primorum numerorum A, B, C. Eademque via plures inuenientur, quàm A, B, C, G, si sumatur minimus, quem ipsi metiantur, &c. Quocirca primi numeri plures sunt, &c. Quod demonstrandum erat.

SCHOLIVM.

POTERAT idem hoc theorema instar problematis hoc modo proponi.

PRIMIS numeris quotcunque propositis, inuenire alium primum numerum ab illis diuersum.

NAM si primi quotcunque propositi sint A, B, C, inueniemus eodem modo alium primum ab illis diuersum; videlicet D F, si primus est, vel certè G, qui ipsum D F, metitur. Atque eodem modo quatuor primis alium quintum, & quinque primis alium sextum inueniemus; & sic deinceps primos numeros, quotquot quis volet, inueniemus.

THEOR. 19. PROPOS. 21. 22.

SI pares numeri quotcunque componantur: totus par erit.

COMPONANTVR quotcunque pares numeri A B, B C, C D. Dico & totum compositũ A D, parem esse. Cùm enim A B, B C, C D, sint pares, habebunt singuli singulas partes dimidias, ex definitione. Sit ergo E, dimidia pars ipsius A B; & E, ipsius B C; & G, ipsius C D. Quoniam igitur est vt A B, ad E, ita B C, ad F; & C D, ad G; (quòd semper sit proportio dupla.) [a] erit quoque vt A B, ad E, ita A D, ad E, F, G, simul. Est autẽ A B, ipsius E, duplus. Igitur & totus A D, compositi ex E, F, G, duplus erit; Ac propterea A D, dimidiam partem habens numerum ex E, F, G, compositum par erit, ex definitione. Si igitur pares numeri quotcunque, &c. Quod erat demonstrandum.

A..... B.... C..... D
E... F.. G....

[a] 12. *sept.*

THEOR. 20. PROPOS. 22. 23.

SI impares numeri quotcunque componantur, multitudo autem ipsorum sit par: Totus par erit.

COMPONANTVR quotcunque numeri impares, quorum multitudo par A B, B C, C D, D E. Dico & totum compositum A E, parem esse. Cùm enim A B, B C, C D, D E, sint impares; differet quilibet vnitate à pari, ex definitione. Quare detracta ab vnoquoque vnitate, quilibet reliquorum par erit. [b] Quare & compositus ex ipsis par erit. Est autem & multitudo vnitatum detractarum par. [c] Igitur & totus A E, compositus par erit. Si igitur impares numeri quotcunque, &c. Quod erat ostendendum.

A... B..... C..... D..... E

[b] 21. *noni.* [c] 21. *noni.*

THEOR. 21. PROPOS. 23. 24.

SI impares numeri quotcunque componantur, multitudo autem ipsorum sit impar: & totus impar erit.

QVOTCVNQVE numeri impares, quorum multitudo impar est, A B, B C, C D, componantur. Dico & totum A D, compositum, imparem esse. Cùm enim impar numerus differat vnitate à pari, ex definitione; ablata vnitate E D, ab impari C D; erit reliquus C E, par. [d] Est autẽ & A C, compositus ex imparibus A B, B C, multitudine paribus, par. [e] Igitur & A E, compositus ex paribus A C, C E, par erit. Quare addita vnitate E D, totus A D, impar erit, cùm impar à pari differat vnitate, ex definitione. Si igitur impares numeri quotcunque, &c. Quod ostendendum erat.

A..... B... C..... E. D

[d] 22. *noni.* [e] 21. *noni.*

SCHOLIVM.

PARI ratione, Impar numerus pari numero, vel pluribus paribus numeris additus faciet imparẽ. Nam dempta vnitate ex impare, reliquus erit par; cùm ex defin. Impar à pari differat vnitate. [a] Quare reliquus ille par cum alio pari dato; vel cum pluribus datis, conficiet parem. Addita ergo rursus illa vnitate, totus fiet impar; cùm à pari sola vnitate differat. Quod est propositum. .....

[a] 21. noni.

THEOR. 22. PROPOS. 24. 25.

SI à pari numero par detrahatur: Et reliquus par erit.

Ex pari numero A B, detrahatur par C B. Dico & reliquum A C, parem esse. Aut enim C B, par detractus dimidia pars est ipsius A B, aut maior, quàm dimidia pars, vel minor. Sit primum dimidia pars. Cùm igitur ipsi C B, pari æqualis sit A C, reliqua pars dimidia; erit & A C, numerus par.

A..... C..... B

SED iam C B, par detractus maior sit, vel minor dimidia parte ipsius A B. Quoniam igitur A B, C B, pares numeri, dimidias partes habent, ex definitione; sit D B, dimidia pars ipsius A B; & E B, dimidia ipsius C B. Itaque cùm sit vt A B, ad D B, dimidiũ, ita C B, ad E B, dimidium; erit permutando vt A B, ad C B, ita D B, ad E B; & diuidendo vt A C, ad C B, ita D E, ad E B. Rursumque permutando, vt A C, ad D E, ita C B, ad E B.

A..... C.. D... E..... B
A.....D... C.. E.. B

Atqui C B, ipsius E B, duplus est: Igitur & A C, ipsius D E, duplus erit; Ac propterea A C, cùm bifariam diuidatur, (quòd D E, sit eius pars dimidia) par erit. Si ergo à pari numero par detrahatur, &c. Quod erat ostendendum.

SCHOLIVM.

A. D.... C..... B

FACILIVS demonstrabimus hanc propositionem, ducendo ad impossibile, hoc modo: Si A C, reliquus non dicatur par, sed impar; detracta vnitate A D, erit reliquus D C, par. [a] *Igitur compositus D B, par quoq; erit; ac proinde addita vnitate A D, totus A B, impar fiet. quod est absurdum, cùm par ponatur.*

a 21. noni.

26. THEOR. 23. PROPOS. 25.

SI à pari numero impar detrahatur: Et reliquus impar erit.

Ex pari numero A B, impar detrahatur C B. Dico & reliquum A C, imparem esse. Detracta enim vnitate C D, ex C B, reliquus fit numerus D B, par. Quia igitur & totus A B, ponitur par; [a] erit & reliquus A D, par. Dempta ergo vnitate C D, reliquus A C, impar erit. Si igitur à pari numero impar detrahatur, &c. Quod demonstrandum erat.

a 24. noni. A..... C. D.... B

27. THEOR. 24. PROPOS. 26.

SI ab impari numero impar detrahatur: Reliquus par erit.

Ex impari numero A B, impar detrahatur C B. Dico reliquũ A C, parem esse. Detracta enim D B, vnitate ex imparibus A B, C B; erunt reliqui A D, C D, pares. Quia ergo ex pari A D, par aufertur C D; [b] erit & reliquus A C, par. Quare si ab impari numero impar detrahatur, &c. Quod erat demonstrandum.

b 24. noni. A.... C..... D. B

28. THEOR. 25. PROPOS. 27.

SI ab impari numero par detrahatur: Reliquus impar erit.

Ex impari A B, detrahatur par C B. Dico reliquum A C, imparem esse. Detracta enim A D, vnitate ex impare A B; erit reliquus D B, par: Ex quo cùm detrahatur C B, par; [c] reliquus D C, par quoque erit; Ac proinde addita vnitate A D, fiet A C, impar. Si ergo ab impari numero par detrahatur, &c. Quod demonstrandum erat.

c 24. noni. A. D.... C..... B

29. THEOR. 26. PROPOS. 28.

SI impar numerus parem multiplicans fecerit aliquem: Factus par erit.

FIAT ex A, impari in B, parem numerus C. Dico C, parem esse. Cùm enim C, fiat ex A, in B; componetur C, ex tot numeris ipsi B, æqualibus, quot in A, sunt vnitates. Quare cùm B, sit par, componetur C, ex tot paribus ipsi B, æqualibus, quot sunt vnitates in A; [d] Atque adeò par erit. Si ergo impar numerus parem multiplicans, &c. Quod ostendendum erat.

A... B.... C.....

d 21. noni.

SCHOLIVM.

EADEM demonstratione ostendemus & hoc.

SI par numerus parem multiplicans fecerit aliquem; Factus par erit.

NAM rursus C, componetur ex tot paribus ipsi B, æqualibus, quot in A, continentur vnitates, &c.

A... B..... C.....

COROLLARIVM.

CONSTAT quoq; ex his, Parem numerum in se multiplicatũ procreare parem: vt patet, si pares A, & B, ponantur æquales.

A.... B.... C.....

30. THEOR. 27. PROPOS. 29.

SI impar numerus imparem numerum multiplicans fecerit aliquem: Factus impar erit.

Ex

Ex impari A, in imparem B, fiat C. Dico C, imparem esse. Cùm enim C, fiat ex A, in B; componetur C, ex tot numeris ipsi B, æqualibus, quot sunt vnitates in A. Quare cùm tam A, quàm B, sit impar; componetur C, ex imparibus ipsis B, æqualibus, quorum multitudo impar est, nimirum æqualis multitudini vnitatũ, quæ in A, impari continentur. [a] Igitur C, impar erit. Quocirca si impar numerus imparem numerum multiplicans, &c. Quod erat ostendendum.

A... B.....
C.....

[a] 23. noni.

COROLLARIVM.

HINC sequitur, Imparem numerum in se multiplicatum gignere imparem: vt constat, si impares A, & B, ponantur æquales.

A... B...
C.....

EX CAMPANO.

NVMERVS impar numerum parem metiens, per numerum parem eum metitur.

METIATVR impar A, parem B, per C. Dico C, parem esse. Nam si impar sit; [a] *erit B, factus ex A, impari in C, imparem impar. Quod est absurdum, cùm ponatur par. Est ergo C, par.*

A... C....
B.....

[a] 29. noni.

NVMERVS impar numerum imparem metiens, per numerum imparem eum metitur.

METIATVR impar A, imparem B, per C. Dico C, imparem esse. Si enim sit par; [b] *erit B. factus ex A, impari in C, parem par. Quod est absurdum, cùm impar ponatur. Est ergo C, impar.*

A... C.....
B.....

[b] 28. noni.

SCHOLIVM.

EX his clarissimè quoq; demonstrabimus theorema 11. lib. 2. numeris non posse accommodari: Id quod etiam in scholio propos. 14. huius lib. aliter ostendimus; recepimusq; nos hoc loco clariùs demonstraturos. Secetur enim, si fieri potest, numerus A B, in partes A C, C B, ita vt numerus ex A B, in C B, factus, æqualis sit quadrato reliquæ partis A C. Aut igitur vtraq; pars A C, C B, impar est; aut maior A C, impar, & minor C B, par; aut contra, maior A C, par, & minor C B, impar; aut denique vtraq; pars A C, C B, par. Sit primùm vtraque pars A C, C B, impar, [c] *ideoq; totus numerus A B, par.* [d] *Igitur qui fit ex A B, in C B, par est: qui verò ex A C, in se fit, impar est, ex Coroll. huius propos. 29. Cùm ergo numerus ex A B, in C B, genitus ponatur æqualis ei, qui fit ex A C, in se; erit par numerus impari æqualis. quod fieri non potest.*

A------C----B
D--- E--

[c] 22. noni. [d] 28. noni.

DEINDE, sit A C, impar, & C B, par, ideoq; ex scholio propos. 23. huius lib. totus A B, impar. [e] *Quia ergo numerus ex A B, impare in parem C B, factus, par est: & numerus ex impare A C, in se genitus, impar, ex coroll. huius propos. 29. erit rursus ille par huic impari æqualis. quod est absurdum.*

[e] 28. noni.

TERTIO, sit A C, par, & C B, impar; ideoq; ex scholio propos. 23. huius lib. totus A B, impar. [f] *Quia ergo numerus ex A B, impare in imparem C B, factus, impar est: & numerus ex pare A C, in se genitus, par, ex coroll. propos. 28. huius lib. erit rursus ille impar huic pari æqualis. quod absurdum est.*

[f] 29. noni.

QVARTO, sit vtraq; pars A C, C B, par. Inuentis igitur, ex scholio propos. 35. lib. 7. duobus numeris minimis D, E, in proportione A C, ad C B; [g] *erunt D, E, inter se primi: ac proinde ambo pares non erunt, sed vel vterque impar, vel vnus impar, & alter par. Et quia est, vt A C, ad C B, ita D, ad E; erit conuertendo, vt C B, ad A C, ita E, ad D: Et componendo, vt A B, ad A C, ita totus D E, ad D:* [h] *Est autem, vt A B, ad A C, ita A C, ad C B; quòd numerus factus ex A B, in C B, æqualis ponatur quadrato medij A C. Igitur erit quoq; vt totus D E, ad D, ita D, ad E,* [i] *ac proinde numerus, qui fit ex toto D E, in E, æqualis erit quadrato ipsius D. Totus ergo numerus D E, sectus est in partes D, E, quarum vel vtraque impar est, vel vna impar, & altera par; ita vt numerus factus ex toto D E, in partem E, æqualis sit quadrato alterius partis D. quod fieri non posse, iam demonstratum est in numero A B, quando vtraq; pars A C, C B, vel impar est, vel vna impar, & altera par. Constat ergo propositum.*

[g] 24. septi. [h] 20. septi. [i] 20. septi.

THEOR. 28. PROPOS. 30. 33.

SI impar numerus parem numerum metiatur; & illius dimidium metietur.

METIATVR impar A, parem B. Dico A, dimidium quoque ipsius B, metiri. Metiatur A, ipsum B, per C. Erit ergo, ex iis, quæ in antecedente propos. ex Campano demonstrauimus, numerus C, par: Atque adeò dimidiam partem habebit. Itaque cùm A, metiatur B, per C, [a] metietur quoque C, ipsum B, per A; Ac proinde C, pars erit ipsius B, denominata ab A, vt ad 3. definitionem lib. 7. docuimus. Quoniam verò est vt C, ad dimidium sui, ita B, ad dimidiũ sui; & permutando vt C; ad B, ita dimidia pars ipsius C, ad dimidiam partem ipsius B. Est autem C, pars ipsius B, denominata ab A, vt ostensum est; erit & dimidium ipsius C, dimidij ipsius B, pars ab eodem A, denominata. [b] Ac propterea A, dimidium ipsius B, metietur. Si impar ergo numerus parem numerum metiatur, &c. Quod erat ostendendum.

A... C....
B.....

[a] 8. *prop.* [b] 40. *sept.*

34. ## THEOR. 29. PROPOS. 31.

SI impar numerus ad aliquem numerum primus sit: & ad illius duplum primus erit.

IMPAR numerus A, primus sit ad numerum B, cuius duplus sit C. Dico A, ad C, quoq; primum esse. Si enim A, C, non sunt inter se primi; metietur eos aliquis numerus, qui sit D: qui necessariò impar erit. Nam si sit par, cùm metiatur imparem A; [a] erit A, factus ex D, pari in eum numerum, per quem metitur, par. Quod est absurdum. ponitur enim A, impar. Quare D, impar parem C, metiés: (est enim C, par; cùm dimidium habeat B.) [b] metietur quoq; numerum B, eius dimidium: Metitur autem & A. Igitur D, ipsos A, B, primos inter se metitur. Quod est absurdum. Non igitur A, ad C, primus non est. Ergo primus. Quapropter si impar numerus ad aliquem numerum primus sit, &c. Quod erat ostendendum.

a 28. noni.

A..... B.....
C..... D----

b 30. noni.

COROLLARIVM.

SEQVITVR hinc, numerum imparem, qui ad aliquem numerum primus est, primum quoque esse non solum ad eius duplum, vt Euclides demonstrauit, sed etiam ad eius quadruplum, octuplum, sedecuplum, & sic deinceps per proportionem duplam progrediendo. Nam si primus est ad duplum, [a] primus quoque erit ad quadruplum, qui dupli duplus est: Et similiter ad octuplum, qui quadrupli duplus est, &c.

a 31. noni.

35. ## THEOR. 30. PROPOS. 32.

NVMERORVM à binario duplorum vnusquisque pariter par est tantùm.

NVMERI à binario A, dupli quotcunque sint B, C, D, E. Dico B, C, D, E, esse pariter pares tantùm. Quòd enim sint pariter pares, perspicuum est. Nam exposita vnitate, cùm A, sit binarius, & B, C, D, E, à binario dupli; erunt A, B, C, D, E, ab vnitate deinceps proportionales, nimirum in proportione dupla. [a] Quare A, quemlibet ipsorũ B, C, D, E, & quilibet minor maiorem sequentem metietur per aliquem ipsorum A, B, C, D, E; qui cùm omnes sint pares, vtpote dupli à binario; metietur quemlibet ipsorum B, C, D, E, par numerus per numerum parem; Ac propterea quilibet pariter par erit, ex definitione.

Vnitas. A, 2. B, 4. C, 8. D, 16. E, 32.

a 11. noni.

QVOD autem iidem numeri sint pariter pares tantùm, liquidò etiam constat. Cùm enim A, B, C, D, E, sint ab vnitate continuè proportionales, sitque A, proximus vnitati numerus primus, nimirum binarius; [b] nullus aliius quemlibet ipsorum metietur, præter ipsos A, B, C, D, E; qui cùm sint omnes pares; metietur quemlibet ipsorum par numerus per parem numerum tantùm: Ac propterea quilibet pariter par est tantùm. Numerorum igitur à binario duplorum, &c. Quod demonstrandum erat.

b 13. noni.

SCHOLIVM.

HINC cum Arithmeticis facilè colligemus artem, qua omnes numeros inueniamus, qui sint pariter pares tantùm. Sint enim A, B, C, D, E, F, à binario dupli, qui ex hîc demonstratis omnes sunt pariter pares tantùm. Dico nullum alium esse pariter parem tantùm, præter eos, qui in hoc ordine continentur; Atque adeò si ordo numerorum à binario duplorum infinitè augeatur, omnes numeros pariter pares tantum inueniri, nullo relicto. Si enim fieri potest, sit alius numerus G, extra ordinem numerorum à binario duplorum, pariter par tantùm, cuius pars dimidia sit H. Erit igitur H, numerus par: (Nam si dicatur impar, cùm sit ipsius G, pars dimidia; metietur binarius, numerus par, ipsum G, per H, numerum imparem; Atque adeò G, pariter impar erit. Quod est absurdum: ponitur namque pariter par tantùm) cuius rursum dimidia pars sit I. Erit igitur rursum I, par numerus: (Nam si dicatur impar, cùm sit ipsius G, pars quarta; metietur numerus par 4. ipsum G, per I, numerum imparem; Atq; ob id G, pariter impar erit; Quod est absurdum: ponitur enim pariter par tantùm.) Atq; ita deinceps erit semper dimidia pars numerus par, donec ad vnitatem veniamus. Sit ergo iam ipsius I, dimidia pars vnitas, ita vt sit I, binarius. Igitur H, G, sunt à binario I, dupli; Ac proindè G, erit aliquis ex ordine ipsorum A, B, C, D, E, F. ponitur autem, non esse. Quod est absurdum. Nullus ergo alius pariter par est tantùm, præter eos, qui à binario sunt dupli.

A, 4. B, 8. C, 16. D, 32. E, 64. F, 128.
I----H----G-----

36. ## THEOR. 31. PROPOS. 33.

SI numerus dimidium habeat imparem: Pariter impar est tantùm.

HABEAT numerus A: dimidiam partem numerum imparem. Dico A, esse pariter imparem tantùm. Quòd enim sit pariter impar, ita perspicuum fiet. Quoniam A, dimidiũ habet imparem; metietur

A..... metietur binarius numerus par ipsum A, per illum dimidium imparem. Quare A, ex definitione, pariter impar est. Quòd autem idem A, sit pariter impar tantùm, hoc modo demonstrabimus. Sit B, dimidia pars ipsius A; & C, binarius. Si igitur A, non est pariter impar tantùm; ipse erit quoque pariter par. Quare eum metietur aliquis par numerus per parem numerum. Metiatur eum D, par per parem E. [a] Igitur fit A, ex D, in E: sed idem A, fit ex C, binario in B, eius dimidium. Ergo numerus factus ex C, primo in B, quartum æqualis est ei, qui fit ex D, secundo in E, tertium, [b] Ac propterea erit vt C, ad D, ita E, ad B. Metitur autem C, binarius parem D. Igitur & E, ipsum B, metietur, par imparem. Quod est absurdum. Non est ergo A, pariter par. Ergo pariter impar tantùm. Quocirca si numerus dimidium habeat imparem, &c. Quòd demonstrandum erat.

A.....
B..... C..
D----- E----

[a] 9. pron.
[b] 19. septimi

SCHOLIVM.

Impares. 3. 5. 7. 9. 11. 13. 15.

Pariter impares tantùm. 6. 10. 14. 18. 22. 26. 30.

Itaque si omnium numerorum imparium dupli sumantur, inuenientur omnes numeri, qui sunt pariter impares tantùm. Quod enim quilibet illorum sit pariter impar tantùm, constat ex hac propositione; quippe cùm quilibet dimidium habeat imparem. Quòd autem illi soli sint pariter impares tantùm, perspicuum erit ex sequenti theoremate, in quo demonstratur, omnes pares, qui nec à binario sunt dupli, neque dimidios habent impares, esse pariter pares, & pariter impares. Cùm ergo nullus alius par habeat dimidium imparem præter duplos imparium numerorum; manifestum est, nullum alium, præter ipsos, esse pariter imparem tantũ; sed vel esse pariter parem tantũ, vel certè pariter parẽ & pariter imparẽ.

THEOR. 32. PROPOS. 34. 37.

SI par numerus neque à binario duplus sit, neque dimidium habeat imparem: Pariter par est, & pariter impar.

A..... PAR numerus A, neque sit à binario duplus, neque dimidium habeat imparem, sed parem. Dico A, & pariter parem esse, & pariter imparem. Quòd enim sit pariter par, liquet. Nam cùm dimidium habeat parem, metietur eum binarius, par numerus, per parem, nempe per dimidium. Igitur ex definitione, pariter par est.

QVOD autem idem A, sit etiam pariter impar, ita ostendemus. Diuiso A, bifariam, & eius dimidio rursus bifariam, & ita deinceps; tandem incidemus in aliquem imparem. Nam si in binarium incideremus, esset A, à binario duplus; ponitur autem & non duplus. Quod est absurdum. Igitur cùm in imparem incidamus, metietur ille impar ipsum A, per numerum parem: Aliàs si per imparem metiretur, [c] cùm impar imparem multiplicans faciat imparem; esset A, factus ex illo impare in hunc imparem, impar. Quod est absurdum. ponitur enim par. Quare cùm impar metiatur A, per parem; atque adeò vicissim par per imparem; erit ex definitione A, pariter impar. Fuit autem & pariter par. Igitur est & pariter par, & pariter impar. Si par ergo numerus neque à binario duplus sit, &c. Quod ostendendum erat.

[c] 29. noni.

SCHOLIVM.

FACILE ex his inueniemus omnes numeros, qui & pariter pares sint, & pariter impares. Relictis enim omnibus illis, qui à binario sunt dupli, & omnibus, qui dimidios habent impares; erunt ex hac propos. omnes alij pares, & pariter pares & pariter impares.

PORRO ex proximis tribus theorematib. apertè intelliguntur ea, quæ in definitionem 9. lib. 7 scripsimus.

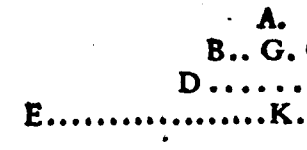
THEOR. 33. PROPOS. 35. 38.

SI sint quotcunque numeri deinceps proportionales, detrahantur autem à secundo, & vltimo æquales ipsi primo: Erit vt secundi excessus ad primum, ita vltimi excessus ad omnes ipsum antecedentes.

A.....
B.... G..... C
D.....
E.....K.....I....H.....F

A.
B.. G. C
D.....
E.....K.....I..H. F

SINT quotcunque numeri continuè proportionales A, B C, D, E F; & ex B C, secundo, & E F, vltimo detrahantur C G, F H, primo A, æquales. Dico esse vt B G, ad A, ita E H, ad A, B C, & D, simul. Detrahatur F I, ipsi B C, & F K, ipsi D, æqualis. Quoniam igitur F I, æqualis est ipsi B C, & ablatus F H, ablato C G; erit & reliquus I H, reliquo B G, æqualis. Quia verò est vt A, ad B C, ita B C, ad D, & D, ad E F; conuertendoque vt E F, ad D, ita D, ad



BC, & BC, ad A; Atque est KF, ipsi D, & IF, ipsi BC, & HF, ipsi A, æqualis: Erit quoque vt EF, ad KF, ita KF, ad IF, & IF, ad HF. Diuidendo igitur vt EK, ad KF, ita KI, ad IF, & IH, ad HF; [a] Ac proinde ita etiã erunt omnes EK, KI, IH, ad omnes KF, IF, HF, hoc est, totus EH, ad D, BC, A, simul, (quibus sumpti sunt æquales KF, IF, HF,) vt IH, ad HF, hoc est, vt BG, ad A: sunt enim BG, & A, ipsis IH, & HF, æquales. Quare si sint quotcunque numeri deinceps proportionales, &c. Quod demonstrandum erat.

a 12. sept.

SCHOLIVM.

Ex hoc theoremate veniemus in notitiam summæ quotcunq; numerorum continuè proportionalium, si modò primus secundus, & vltimus fuerint noti. Cùm enim sit vt excessus secundi ad primum, ita excessus vltimi ad omnes ipsum antecedentes; Si primus à secundo, & vltimo demantur, fiat q; vt reliquus secundi ad primum, ita reliquus vltimi ad alium: Erit hic alius summa omnium numerorum proportionalium, qui vltimum antecedunt. Si igitur adiiciatur vltimus, habebitur tota summa.

1. 3. 9. 27. 81. 243. 729. 2187.

Inuenietur autem quartus ille proportionalis, si primus multiplicetur in excessum vltimi, & productus diuidatur in excessum secundi: vt liquet ex scholio propos. 19. huius lib. quandoquidem tres dati numeri, quibus quartus proportionalis inueniendus est, sunt, excessus secundi, primus, & excessus vltimi: Vt in exemplo apposito, si primus numerus, nimirum vnitas, detrahatur ex 3. secundo; & ex 2187. vltimo; erunt reliqui excessus, 2. 2186. Quoniam igitur debet esse vt 2. ad 1. ita 2186. ad summam omnium, excepto vltimo, si secundus numerus 1. multiplicetur per tertium 2186. fiet numerus 2186. qui si diuidatur in primum 2. exurget numerus 1093. Videlicet summa omnium, excluso vltimo 2187. qui si addatur summa inuenta 1093. procreabitur summa omnium 3280.

39. THEOR. 34. PROPOS. 36.

SI ab vnitate quotcunque numeri deinceps exponantur in dupla proportione, quoad totus compositus fiat primus; & totus hic in vltimum multiplicatus faciat aliquem: Factus erit perfectus.

SINT ab vnitate quotcunque numeri A, B, C, D, dupli, quoad E, ex illis compositus sit primus: & E, multiplicans D, vltimum faciat F. Dico F, esse numerum perfectum. Quot enim sunt numeri A, B, C, D, tot sumantur ab E, dupli, nimirum E, G, H, I. Quia igitur A, B, C, D, eandem rationem habent, quam E, G, H, I; erit ex æquo, vt A, ad D, ita E, ad I; [b] Ac propterea numerus factus ex A, primo in I, quartum æqualis est facto ex D, secundo in E, tertium: Factus est autem F, ex D, in E. Igitur idem F, fiet ex A, in I; [c] ideoq; I, ipsum F, metietur per A, binarium; & ob hoc F, ipsius I, duplus erit. Quare E, G, H, I, F, deinceps dupli sunt. Detrahantur ex G, secundo, & ex F, vltimo numeri K, L, primo E, æquales, sintq; reliqui excessus M, N. [d] Erit igitur vt M, ad E, ita N, ad E, G, H, I, simul: Est autem M, æqualis ipsi E. (Cùm enim G, duplus sit ipsius E, ablatusq; sit K, ipsi E, æqualis; erit & reliquus M, ipsi E, æqualis.) Ergo & N, æqualis est ipsis E, G, H, I, simul. Additis igitur æqualibus, nimirum numero L, (qui æqualis est ipsi E, ablatus) & numero composito ex vnitate, & A, B, C, D, numeris; (qui compositus eidem E, per constructionem, est æqualis) erit compositus ex L N, nimirum ipse F, æqualis vnitati, & numeris A, B, C, D, E, G, H, I, simul. Quare cùm vnitas, & omnes numeri A, B, C, D, E, G, H, I, metiantur ipsum F; (Cùm enim F, factus sit ex E, in D; [e] metietur D, ipsum F; [f] atque adeò eundem F, metietur vnitas, & numeri A, B, C, [g] qui ipsum D, metiuntur. Rursus cùm I, ipsum F, metiatur, vt ostensum est, [h] metientur quoque eundem F, numeri E, G, H, [i] qui ipsum I, propter proportionem duplam, metiuntur) & nullus alius numerus ipsum F, metiatur, vt mox ostendemus; Erunt vnitas & numeri A, B, C, D, E, G, H, I, omnes partes, quas F, habere potest: Quibus cùm æqualis ostensus fit ipse F; erit F, ex definitione, perfectus.

	Vnitas.	A, 2. B, 4. C, 8. D, 16.
c 7. pron.	E, 31.	G ------ 62. H, 124. I, 248. F ------ 496.
	K, 31.	M, 31. L, 31. N, 465.
	O -----	P ----

b 19. sept.
d 35. noni.
e 7. pron.
f 11. pron.
g 11. noni.
h 11. pron.
i 11. noni.

QVOD autem nullus alius numerus, præter A, B, C, D, E, G, H, I, ipsum F, metiatur, ita demonstrabimus. Metiatur, si fieri potest, alius numerus O, præter illos, ipsum F, per P; [k] atq; adeò F, fiat ex O, in P: Sed & idem F, factus est ex E, in D. Idem ergo numerus fit ex E, primo in D, quartus, & ex P, secundo in O, tertium; [l] ac propterea est vt E, ad P, ita O, ad D. Quoniam verò, cùm A, B, C, D, ab vnitate sint proportionales, & A, proximus vnitati primus, [m] vltimum D, nullus alius, præter A B, C, metitur: & O, ponitur non idem, qui aliquis ipsorum A, B, C; non metietur O, ipsum D. Vt autem O, ad D, ita erat E, ad P; neque igitur E, ipsum P, metietur. Cùm ergo E, primus sit, [n] erunt E, & P, inter se primi; [o] ideoque in sua proportione minimi; [p] Ac proinde æquè metietur E, ipsum O, & P, ipsum D. [q] Nullus verò alius præter A, B, C, ipsum D, metitur. Igitur P, idem erit, qui aliquis ipsorum A, B, C. Sit ergo idem, qui B, & quot sunt B, C, D, tot ab E, sumantur dupli

k 9. pron.
l 19. septimi
m 13. septimi
n 31. septimi
o 23. septimi.
p 21. septimi
q 23. octani.

tur dupli E, G, H. Erit igitur ex æquo, vt B, ad D, ita E, ad H: [a] Ac proinde idem numerus fiet ex B, primo in H, quartum, qui ex D, secundo in E, tertium. Qui autem ex D, in E, æqualis fuit ei, qui ex P, in O. Idem ergo fiet ex P, in O, qui ex B, in H, [b] atque adeò erit, vt P, ad B, ita H, ad O. Erat autem P, idem qui B: Igitur & H, idem est, qui O. Quod est absurdum, ponitur enim O, diuersus ab omnibus A, B, C, D, E, G, H, I. Non igitur alius numerus O, ipsum F, metitur, sed ipsum soli A, B, C, D, E, G, H, I, metiuntur. Quam ob rem, si ab vnitate quotcunque numeri deinceps exponantur in dupla proportione, &c. Quod erat demonstrandum.

[a] 19. septimi

[b] 19. septimi

SCHOLIVM.

Ex hoc theoremate elicitur modus inueniendi omnes numeros perfectos, & earum partes aliquotas, quibus simul sumptis, iuxta definitionem numeri perfecti, ipsi æquales sunt. Si enim quotcunq; numeri ab vnitate dupli in vnam summam colligantur, donec compositus sit numerus primus; Erit numerus factus ex illo primo in vltimum duplorum, perfectus. Quod si ab illo primo, qui ex illis duplis componitur, sumantur tot continuè dupli (ipso primo etiam computato) quot sunt numeri illi dupli ab vnitate, excluſa vnitate; erunt hi numeri accepti, & illi ab vnitate dupli, vnà cum ipsa vnitate, omnes partes aliquotæ, quas perfectus numerus inuentus habere potest. Quæ omnia perspicua sunt ex demonstratione theorematis, & facilè ex subiectis exemplis percipi possunt. Vt quia numerus 3. compositus ex 1. 2. primus est; erit propterea numerus 6. qui fit ex 3. in 2. vltimum duplorum, perfectus, cuius partes aliquotæ sunt 1, 2, 3. Item, quia compositus ex his 1. 2. 4. nimirum 7. primus est: idcirco 28. factus ex 7. in 4. est perfectus habens has partes aliquotas 1. 2. 4. 7. 14. At verò quia compositus ex his 1. 2. 4. 8. hoc est, 15. non est primus; non erit 120. factus ex 15. in 8. perfectus.

Deniqve quia compositus ex his 1. 2. 4. 8. 16. nimirum 31. primus est; erit 496. factus ex 31. in 16. numerus perfectus, cuius partes aliquotæ sunt 1. 2. 4. 8. 16. 31. 62. 124. 248. Eodem modo & reliquos perfectos numeros inueniemus.

Lvbet hoc loco demonstrare proprietates quasdam proportionalitatis Geometricæ, qua nititur admirabilis illa proprietas, quam libro 5. septimo loco, cùm de proportionalitate Geometrica ageremus, exposuimus. hinc exordientes.

I.

Qvolibet numero per duos quosuis numeros diuiso, erunt duo hi numeri Quotientibus conuerso ordine proportionales.

A, 48. B, 8. C, 3. D, 6. E, 16.

Nvmervs enim A, diuisus per B, C, faciat quotientes D, E. Dico esse, vt B, ad C, ita E, ad D. Quoniam enim diuiso A, per B, fit Quotiens D; fiet A, ex B, in D, vt ad defin. 15. lib. 7. scripsimus. Eadem ratione idem A, fiet ex C, in E. Quia ergo idem numerus A, fit ex B, primo in D, quartum, & ex C, secundo in E, tertium; [a] erit vt B, primus ad C, secundum, ita E, tertius ad D, quartum. Quod est propositum.

[a] 19. sept.

II.

Qvolibet numero per quotuis numeros diuiso, erunt bini numeri diuidentes binis Quotientibus respondentibus conuerso ordine proportionales.

A, 48. B, 3. C, 4. D, 8. E, 6. F, 16. G, 12. H, 6. I, 8.

Diviso enim numero A, per B, C, D, E, sint Quotientes F, G, H, I. Dico esse, vt B, ad C, ita G, ad F; Et vt C, ad D, ita H, ad G: Et vt D, ad E, ita I, ad H. Hoc autem manifestum est ex theoremate 1. proximè demonstrato. Cùm enim duo B, C, diuidentes A, faciant F, G; erit vt B, ad C, ita G, ad F. Item cùm duo C, D, diuidentes A, faciant G, H; erit vt C, ad D, ita H, ad G. Item cùm duo D, E, diuidentes A, faciant H, I; erit vt D, ad E, ita I, ad H: Atq; ita deinceps, si plures fuerint. Quod est propositum.

III.

Qvolibet numero per quotuis numeros continuè proportionales diuiso, erunt Quotientes conuerso ordine in eadem proportione continuè proportionales.

A, 15. B, 1. C, 2. D, 4. E, 8. F, 15. G, $7\frac{1}{2}$. H, $3\frac{3}{4}$. I, $1\frac{7}{8}$.

Diviso enim numero A, per B, C, D, E, continuè proportionales, sint Quotientes F, G, H, I. Dico I, H, G, F, in eadem proportione B, ad C, continuè proportionales esse. Quoniam enim per 2. theorema est, vt D, ad E, ita I, ad H: Et vt C, ad D, hoc est, vt D, ad E, ita H, ad G; Et vt B, ad C, hoc est, vt C, ad D, & D, ad E, ita G, ad F; erunt I, H, G, F, continuè proportionales in proportione D, ad E, vel B, ad C. Quod est propositum.

IIII.

Si sint quotuis numeri quicunq;, & totidem alij in eisdem proportionibus; erit vt summa priorum ad quemlibet eorum, ita summa posteriorum ad eum, qui illi in posterioribus respondet.

A,3. B,6. C,20. D,29. E,6. F,12. G,40. H,58.

SINT quotuis numeri A,B,C, quorum ſumma D: Et totidem alij E,F,G, quorum ſumma H; ſitq; vt A, ad B, ita E, ad F; & vt B, ad C, ita F, ad G. Dico eſſe, vt D, ad A, B, C, ſigillatim, ita H, ad E, F, G, ſigillatim. Cùm enim ſit, vt A, ad B, ita E, ad F; erit componendo, vt A, B, ſimul ad B, ita E, F, ſimul ad F: Vt autem B, ad C, ita eſt F, ad G. Igitur ex æquo, vt A, B, ſimul ad C, ita erit E, F, ſimul ad G: Et componendo, vt A, B, C, ſimul, hoc eſt, vt D, ad C, ita E, F, G, ſimul, hoc eſt, H, ad G. quod eſt propoſitum.

QVIA igitur eſt, vt D, ad C, ita H, ad G: Et conuertendo, vt C, ad B, ita G, ad F; erit ex æquo, vt D, ad B, ita H, ad F. quod eſt propoſitum.

DENIQVE quia eſt, vt D, ad B, ita H, ad F: Et conuertendo, vt B, ad A, ita F, ad E; erit ex æquo, vt D, ad A, ita H, ad E. quod eſt propoſitum. Eademq; ratio eſt de pluribus.

V.

SI ſint quotuis numeri quicunque, & totidem alij in eiſdem proportionibus; ſumma priorum per ipſos diuiſa ſigillatim, faciet eoſdem prorſus Quotientes, quos ſumma poſteriorum per ipſos diuiſa facit.

NAM, vt in 4. theor. oſtenſum eſt, eadem proportio eſt ſummæ priorum ad primum, quæ ſummæ poſteriorum ad primum: ac proinde vtriuſq; proportionis idem denominator erit. Cùm ergo ex diuiſione antecedentis termini per conſequentem gignatur denominator proportionis; idem Quotiens omnino procreabitur, ſi vtraq; ſumma ſeorſum per primos numeros, quaq; per ſuum, diuidatur. Eademq; ratio eſt, ſi per ſecundos, tertios, quartos, &c. diuiſio fiat. Conſtat ergo propoſitum.

VI.

SI ſumma quotuis numerorum continuè proportionalium per eos ſigillatim diuidatur; Et Quotientum ſumma per ipſos Quotientes; Et horum ſecundorum Quotientum ſumma per eoſdem ſecundos Quotientes; & ſic deinceps in infinitum: procreabuntur alternis ſemper iidem primi Quotientes ordine conuerſo.

SINT continuè proportionales quotuis numeri A,B,C,D, quorum ſumma E, per ipſos diuiſa faciat Quotientes F,G,H,I, & horum ſumma K, per eos diuiſa faciat Quotientes L,M,N,O. Dico hos Quotientes, & illos eſſe eoſdem alternis, ordine conuerſo, hoc eſt, F, & O, eoſdem eſſe; Item G, & N; H, & M; I, & L, &c.

A,1. B,2. C,4. D,8. E,15. F,15. G,7½. H,3¾. I,1⅞. K,28⅛. L,1⅞. M,3¾. N,7½. O,15.

Quoniam enim per 3. theor. Quotientes F,G,H,I, eandem continuam proportionem habent conuerſo ordine, quam numeri A,B,C,D: Et Quotientes L,M,N,O, conuerſo ordine eandem, quam Quotientes F,G,H,I, hoc eſt, eandem eodem ordine, quam numeri A,B,C,D: erit per 4. theorema, E, ad A, vt K, ad I. Quare cùm ex diuiſione antecedentis termini per conſequentem producatur denominator proportionis, fiet idem Quotiens ex diuiſione E, per A, qui ex diuiſione K, per I. Cùm ergo Quotientes ſint F, & O, æquales erunt F, & O. Eadem ratione æquales erunt G, & N; H, & M; I, & L, &c. quod eſt propoſitum.

VII.

SI ſumma quotuis numerorum continuè proportionalium per eos ſigillatim diuidatur: erit ſumma omnium Quotientum æqualis numero, qui gignitur ex multiplicatione primi in vltimum, vel ex mutua multiplicatione quorumlibet duorum mediorum ab extremis æqualiter diſtantium, vel denique (ſi Quotientum numerus fuerit impar) ex multiplicatione medij Quotientis in ſe.

SINT primùm quotuis numeri multitudine pares continuè proportionales A,B,C,D,E,F, quorum ſumma G, per ipſos ſigillatim diuiſa faciat Quotientes H,I,K,L,M,N, quorum ſumma O. Dico ſummæ O, æqualem eſſe numerum qui fit ex H, in N, vel ex I, in M, vel ex K, in L. Quia enim per 4. theor. Quotientes H,I,K, L,M,N, ſunt continuè proportionales conuerſo ordine in proportione A, ad B; erit N, ad M, vt I, ad H.

A,1. B,2. C,4. D,8. E,16. F,32. G,63. H,63. I,31½. K,15¾. L,7⅞. M,3 1/16. N,1 3/32. O,124½.

[a] *Igitur idem numerus gignitur ex N, in H, qui ex M, in I; hoc eſt, idem ex H, in N, qui ex I, in M. Eademq; ratione idem fiet ex I, in M, qui ex K, in L. Et quoniam per 6. theor. ſumma O, diuiſa per H,I,K,L,M,N, producit eoſdem Quotientes conuerſo ordine, hoc eſt, ſumma O, diuiſa per H, facit Quotientem N; producetur ſumma O, ex H, in N, per defin. ac proinde & ex I, in M, & ex K, in L.*

[a] 19. ſepti.

SINT deinde quotuis numeri multitudine impares cõtinuè proportionales A,B,C,D,E, quorum ſumma F, per ipſos ſigillatim diuiſa faciat Quotientes G,H,I,K,L, quorum ſumma M. Dico ſummæ M, æqualem eſſe numerum genitum ex G, in L; & ex H, in K; & ex I, in ſeipſum. Quòd enim æqualis ſit ei, qui fit ex G, in L, & ex H, in K, demonſtrabimus, vt prius. Deinde

A,1. B,2. C,4. D,8. E,16. F,31. G,31. H,15½. I,7¾. K,3⅞. L,1 1/16. M,60 1/16.

verò quia tres numeri H, I, K, continuè proportionales sunt; [a] erit numerus ex H, in K, genitus: id est, summa M, æqualis numero, qui ex I, in seipsum ducto generatur. quod est propositum. [a] 20. septi.

HINC fit, quando numerus terminorum est impar, summam Quotientum esse numerum quadratum, cuius latus, siue radix, est medius terminus.

ITAQVE si inueniendi sint quotcunque numeri cõtinuè proportionales in data proportione, quorum summa æqualis sit numero, qui ex primo in vltimum gignitur, vel ex quibuslibet duobus, qui ab extremis æqualiter distant: accipiendi sunt in data proportione tot numeri quicunque continuè proportionales, quot inquiruntur. Nam si eorum summa per ipsos figillatim diuidatur, erunt Quotientes quæsiti numeri, vt ex hoc 7. theor. perspicuum est. Quod si desiderentur quotus numeri multitudine impares, quorum summa sit numerus quadratus, cuius latus, siue radix sit medius terminus: sumendi sunt in data proportione totidem numeri continuè proportionales, eorumq; summa per eos figillatim diuidenda. Quotientes enim erunt numeri quæsiti, vt ex eodem hoc 7. theor. liquet. Atq; mirabile sanè est, posse reperiri quotcunq; numeros continuè proportionales in data proportione, etiam mille, aut plures, quorum omnium summa æqualis sit producto ex primo in vltimum; & ex quibuslibet duobus, qui ab extremis æqualiter distant, inter se multiplicatis, & denique, si terminorum numerus est impar, ex medio terminum in seipsum multiplicato.

SIC etiam si quis optet duos numeros in data proportione, quorum summa æqualis sit numero producto ex vno in alterum, sumat duos numeros in data proportione quoscunq;, eorumq; summam per vtrumq; diuidat. Quotientes enim dabunt numeros quæsitos, vt ostensum est: quia videlicet eorum summa æqualis est numero, qui fit ex primo in vltimum; hoc est, in secundum. Exempli gratia. Sint inueniendi duo numeri in proportione sesquiquinta, quorum summa æqualis sit numero, qui ex multiplicatione vnius in alterum producitur. Sumantur duo numeri quicunq; in data proportione sesquiquinta, nimirum 6. & 5. eorumq; summa 11. per vtrumq; diuidatur. Nam Quotientes $1\frac{1}{6}$. & $2\frac{1}{5}$. sunt numeri quæsiti. Habent enim proportionem sesquiquintam datam, & tam eorum summa, quàm numerus ex multiplicatione eorũ productus, est $4\frac{1}{3}\frac{1}{0}$.

MINVTIARVM SIVE NVMERORVM fractorum DEMONSTRATIONES.

I.

DVAE minutiæ eundem habentes denominatorem, quarum vnius numerator sit vnitas, eandem proportionem habent, quam numeratores.

SINT duæ minutiæ A B, C B, eundem habentes denominatorẽ, & numerator C, sit vnitas. Dico ita esse minutiam A B, ad minutiam C B, vt est numerator A, ad numeratorem C. Quoties enim vnitas C, continetur in A, toties minutia C B, in minutia A B, includitur; propterea quòd minutia A B, diuiditur in tot minutias minutiæ C B, æquales, quot vnitates sunt in A, ita vt qualibet earum minutiarum habeat numeratorem C, & denominatorem B. [b] Igitur eadem pars est vnitas C, numeri A, quæ minutia C B, minutiæ A B; ac proinde est, vt vnitas C, ad A, ita minutia C B, ad minutiam A B: Et conuertendo, ita A, ad C, numerator ad numeratorem, vt minutia A B, ad minutiam C B. quod est propositum.

A, 6. C, 1.
B, 11. B, 11.

[b] 20. defin.

QVONIAM verò minutiæ sunt fractiones, siue particulæ vel vnitatis, vel alterius cuiuspiam numeri, (Neque enim eorum sententiam probare possum, qui existimant, eas respectu solius vnitatis esse accipiendas; propterea quòd falsò putant, earum demonstrationes nõ posse omnes explicari in numeris integris, sed solum in vnitate. Nos enim in hac tractatione omnes demonstrationes quibusuis etiam numeris integris accommodabimus.) conabimur omnes minutiarum demonstrationes numeris integris explicare, vt exemplis etiam studiosus lector addiscat, veras esse demonstrationes, quas afferimus.

SINT ergo datæ minutiæ $\frac{5}{11}$. & $\frac{1}{11}$. particulæ, verbi gratia, huius numeri integri 44. Et quia eius $\frac{1}{11}$. est 4. & $\frac{5}{11}$. sunt 24. perspicuum est, ita esse 4. ad 24. vt est numerator 1. ad numeratorem 6. Vel ita 24. ad 4. vt 6. ad 1.

HANC porrò propositionem demonstrabimus propos. 4. in vniuersum de quibuscunq; duabus minutiis eiusdem denominationis, etiamsi neutra numeratorem habeat vnitatem.

II.

NVMERATOR cuiusuis minutiæ ad denominatorem eandem proportionẽ habet, quam minutia ad integrum, cuius est minutia.

SIT minutia quæcunque A B. Dico esse numeratorem A, ad denominatorem B, vt est minutia A B, ad suum integrum. Sumatur minutia C B, cuius numerator C, vnitas, & denominator idem B: Item alia minutia, cuius numerator D, æqualis sit eidem denominatori B, ita vt suo integro sit æqualis. Quando enim numerator denominatori est æqualis, minutia suo integro æquiualet; quippe qua tot particulas integri contineat, in quot ipsum integrum diuisum est, ac proinde totum integrum contineat. [c] Quoniam igitur est, vt A, ad C, ita mi- [c] 1. huius.

A, 3. C, 1. D, 5.
B, 5. B, 5. B, 5.

nutia AB, ad minutiam CB: Et vt C, ad D, ita minutia CB, ad minutiam DB; erit ex æquo vt A, ad D, hoc est, vt numerator A, ad denominatorem B, ipsi D, æqualem, ita minutia AB, ad minutiam DB, hoc est, ad integrum. quod est propositum.

A, 1. C, 1. B, 5. C, 30. ALITER. Sit primùm data minutia AB, numerator A, vnitas, ita vt minutia sit pars aliquota integri C, siue C, sit vnitas, siue numerus, pars, inquam, aliquota à B, denominata, propterea quòd tot minutiæ ipsi AB, æquales integrum C, conficiunt, quoties vnitas est in B, denominatore. Cùm ergo & vnitas A, sit pars numeri B, ab ipso B, denominata, vt ad defin. 2. lib. 7 scripsimus; eadem pars erit vnitas A, numeri B, quæ minutia AB, integri C. [a] Quare erit, vt A, numerator ad B, denominatorem, ita minutia AB, ad integrum C. quod est propositum.

a 20. defin.

A, 3. D, 1. C, 1. B, 5. B, 5. C, 30. DEINDE non sit vnitas numerator A. Sumatur minutia DB, cuius numerator D, vnitas & denominator idem B, qui minutiæ AB. [b] Et quia est, vt A, ad D, numerator ad numeratorem, ita minutia AB, ad minutiam DB: Et vt D, ad B, ita minutia DB, ad integrum C, vt proximè demonstrauimus; erit ex æquo, vt A, ad B, numerator ad denominatorem, ita minutia AB, ad integrum C. quod est propositum.

b 1. huius.

ITAQVE si data minutia $\frac{3}{5}$. sit huius numeri integri 30. erit eius $\frac{1}{5}$. numerus 6. ac proinde $\frac{3}{5}$. numerus 18. vbi vides ita esse 18. ad 30. vt est 3. ad 5. numerator ad denominatorem.

III.

MINVTIA quælibet, pars est numeratoris à denominatore denominata.

SIT qualibet minutia AB. Dico eam esse partem numeratoris A, à denominatore B, denominatam. [c] Quoniam enim est, vt A, ad B, numerator ad denominatorem, ita minutia AB, ad suum integrum C; erit permutando, vt A, ad minutiam AB, ita B, ad integrum: Et conuertendo, vt minutia AB, ad A, ita integrum ad B. Cùm ergo integrum C, sit pars denominatoris B, (hoc est, integri toties accepti, quoties vnitas est in denominatore B.) ab ipso denominatore B, denominata; (Cùm enim æquè metiatur vnitas denominatorem, & integrum ipsum integrum toties acceptum, quoties vnitas est in denominatore; sit autem vnitas pars denominatoris à denominatore denominata, vt ad defin. 2. lib. 7. scripsimus; erit quoque integrum eadem pars integri toties accepti, quoties vnitas est in denominatore) erit quæque minutia AB, numeratoris A, (hoc est, integri toties accepti, quoties est vnitas in numeratore A.) eadem pars à denominatore B, denominata. quod est propositum.

c 2. huius.

A, 3. C, 1. B, 5. C, 30.

PONATVR minutia $\frac{3}{5}$. esse huius integri 30. cuius $\frac{3}{5}$. sunt 18. Et quia numerator 3. numerat tria integra, hoc est, valet 90. & denominator 5. valet 150. (quemadmodum, cùm eadem minutia $\frac{3}{5}$. sumitur respectu vnitatis, numerator continet tres vnitates, & denominator quinque,) liquidò constat, 18. esse quintam partem numeratoris, hoc est, trium vnitatum, quarum qualibet numerum integrum 30. significat, quæ tres vnitates faciunt 90. partem, inquam, à denominatore 5. denominatam, quemadmodum & 30. datus numerus integer, quinta pars est denominatoris, hoc est, quinque vnitatum, quarum qualibet numerum integrum 30. significat, quæ quinque vnitates conficiunt 150. pars, inquam, à denominatore 5. denominata.

IIII.

DVAB minutiæ eundem habentes denominatorem, quarum neutra numeratorem habeat vnitatem, eandem proportionem habent, quam numeratores.

QVOD prima propositione ostensum est de duabus minutiis, quarum altera numeratorem habet vnitatem, demonstratur hic de quibusuis minutiis. Habeant ergo duæ minutiæ AB, CB, eundem denominatorem E. Dico esse minutiam AB, ad minutiam CB, vt est A, ad C, numerator ad numeratorem. [d] Quia enim est, vt A, ad B, ita minutia AB, ad suum integrum: Et vt B, ad C, ita integrum ad minutiam CB; (Nam [e] cùm sit, vt C, ad B, ita minutia CB, ad integrum, erit conuertendo, vt B, ad C, ita integrum ad minutiam CB.) erit ex æquo, vt A, numerator ad C, numeratorem, ita minutia AB, ad minutiam CB. quod est propositum.

A, 6. C, 2. B, 7. B, 7.

d 2. huius.

e 2. huius.

DATAE minutiæ $\frac{5}{7}$. $\frac{3}{7}$. sint huius integri 28. cuius $\frac{5}{7}$. sunt 24. & $\frac{3}{7}$. sunt 12. vbi perspicuum est, ita esse 24. ad 12. vt est numerator 6. ad numeratorem 3.

V.

SI duarum minutiarum numerator prioris in denominatorem posterioris, & posterioris numerator in denominatorem prioris ducatur, erit prior minutia ad posteriorem, vt prior numerus productus ad posteriorem.

F, 10. G, 12. A, 2. C, 4. B, 3. D, 5. H, 15.

SINT duæ minutiæ AB, CD: Et ex A, in D, fiat F; & ex C, in B, fiat G. Dico esse minutiam AB, ad minutiam CD, vt est F, ad G. Fiat enim H, ex B, in D. Quia igitur A, B, multiplicantes D, faciunt F, H; [f] erit vt A, ad B, ita F, ad H. Vt autem A, ad B, [g] ita est minutia AB, ad integrum. Igitur erit quoque, vt minutia AB, ad integrum, ita F, ad H. Rursus quia C, D, multiplicantes B, faciunt G, H; [h] erit vt C, ad D, ita G, ad H: Et conuertendo, vt D, ad C, ita H, ad G. Vt autem D, ad C, ita est integrum ad minutiam CD. (Nam [i] cùm sit, vt C, ad D, ita minutia CD, ad integrum, erit cõuertendo, vt D, ad C, ita integrum ad minutiam CD.) Igitur erit quoq; vt H, ad G, ita integrũ ad minutiã CD. Ex æquo igitur erit, vt F, ad G, ita minutia AB, ad minutiã CD. q. est propositũ.

f 18. sept.

g 2 huius.

h 18. sept.

F. AB. H. Integrum. G. CD.

i 2. huius.

SI duæ

Si duæ minutiæ $\frac{2}{3}.\frac{4}{5}$. sint particulæ numeri 30. erunt duæ tertiæ eius, 20. at quatuor quintæ eiusdem, 24. Perspicuum autem est, ita esse 20. ad 24. vt 10. ad 12. qui duo numeri procreati sunt ex numeratoribus in denominatores, permutato ordine.

Itaque si productus numerus F, æqualis fuerit numero producto G, erit quoque minutia A B, minutiæ C D, æqualis: si minor, minor: Et si maior, maior; propter eandem proportionem F, ad G, & minutia ad minutiam. Atque hæc est demonstratio regulæ, quam in Arithmetica dedimus ad dignoscendum, vtra duarum minutiarum maior sit.

VI.

INTEGRVM ad summam duarum minutiarum eandem proportionem habet, quam numerus ex multiplicatione mutua denominatorũ productus ad summam duorum productorum, quorum vnus ex numeratore prioris minutiæ in posterioris denominatorem, alter verò ex numeratore posterioris in denominatorem prioris gignitur.

F, 10. G, 12. A, 2. C, 4. B, 3. D, 5. H, 15.

AB, CD. F, G. CD. G. Integrum. H.

SINT duæ minutiæ A B, C D. Et ex B, in D, fiat H: at ex A, in D, fiat F; & ex C, in B, fiat G. Dico ita esse integrum ad summam minutiarũ A B, C D, vt est H, ad summam numerorum F, G. [a] *Quoniam enim est, vt minutia A B, ad minutiam C D, ita F, ad G; erit componendo, vt summa minutiarum A B, C D, ad minutiam C D, ita summa numerorum F, G, ad G. Vt autem minutia C D, ad integrum, ita est G, ad H,* [b] *(Nam vt minutia C D, ad integrum, ita est C, ad D.* [c] *Et vt C, ad D, ita est G, ad H: propterea quòd C, D, ipsum B, multiplicantes fecerunt G, & H.) Igitur ex æquo erit, vt summa minutiarum A B, C D, ad integrum, ita summa numerorum F, G, ad H: Et cõuertendo, vt integrum ad summam minutiarum A B, C D, ita H, ad summam numerorum F, G. quod est propositum.*

a 5. huius. b 2. huius. c 18. septi.

SINT rursus duæ minutiæ $\frac{2}{3}.\frac{4}{5}$. particulæ numeri 30. cuius $\frac{2}{3}$, sunt 20. & $\frac{4}{5}$. eiusdem 24. ac proinde summa minutiarum 44. Vbi vides, ita esse integrum 30. ad hanc summam 44. vt est 15. ex denominatoribus productus ad 22. summã numerorũ 10. 12. ex numeratoribus in denominatores permutato ordine productorũ.

VII.

SI duæ minutiæ eundem habeant numeratorem, erit vt prior minutia ad posteriorem, ita posterioris denominator ad denominatorem prioris.

D, 105. E, 35. A, $\frac{5}{7}$. A, 5. B, 7. C, 21.

HABEANT duæ minutiæ A B, A C, eundem numeratorem A. Dico ita esse minutiam A B, ad minutiam A C, vt est denominator C, ad denominatorem B. Fiat enim D, ex A, in C: & E, ex A, in B. Quia igitur A, multiplicans C, B, facit D, E; [d] *erit vt D, ad E, ita C, ad B. Vt autem D, ad E,* [e] *ita est minutia A B, ad minutiam A C. Igitur erit quoque minutia A B, ad minutiam A C, vt C, ad B. quod est propositum.*

d 17. septi. e 5. huius.

DVAE minutiæ $\frac{5}{7}.\frac{5}{21}$. sint particulæ numeri integri 42. cuius $\frac{5}{7}$. sunt 30. & $\frac{5}{21}$. eiusdem 10. Manifestum autem est, ita esse 30. ad 10. vt posterior denominator 21. ad priorem 7.

VIII.

MINVTIAE, quarum numeratores ad denominatores eandem habent proportionem, æquales sunt: Et æqualium minutiarum numeratores ad denominatores eandem proportionem habent. Cuius autem numerator ad denominatorem habet maiorem proportionem, illa maior est: Et quæ maior est, eius numerator ad denominatorem habet proportionem maiorem.

A, 3. C, 9. B, 4. D, 12.

SINT duæ minutiæ A B, C D, sitq; eadem proportio A, ad B, quæ C, ad D, numeratoris ad denominatorem. Dico minutias has æquales esse. [f] *Quoniam enim est, vt A, ad B, ita minutia A B, ad integrum: Et vt C, ad D, ita minutia C D, ad idem integrũ: vt autem A, ad B, ita ponitur C, ad D; erit quoq; minutia A B, ad integrum, vt minutia C D, ad idem integrum. Æquales ergo sunt minutiæ A B, C D. quod est propositum.*

f 2. huius.

SED sint iam æquales minutiæ A B, C D. Dico esse, vt A, ad B, ita C, ad D. Cùm enim æquales sint minutiæ, erit vt minutia A B, ad integrum, ita minutia C D, ad idem integrum. [g] *Est autem, vt minutia A B, ad integrum, ita A, ad B; Et vt minutia C D, ad integrum, ita C, ad D. Igitur erit quoque, vt A, ad B, ita C, ad D. quod est propositum.*

g 2. huius.

A, 3. C, 2. B, 4. D, 3.

DEINDE sit maior proportio A, ad B, quàm C, ad D. Dico maiorem esse minutiam A B, quàm C D. [h] *Cùm enim sit, vt A, ad B, ita minutia A B, ad integrum; & vt C, ad D, ita minutia C D, ad idem integrum; ponatur autem maior proportio A, ad B, quàm C, ad D; erit quoque maior proportio minutiæ A B, ad integrum, quàm minutiæ C D, ad idem integrum. Maior ergo est minutia A B, quàm minutia C D. quod est propositum.*

h 2. huius.

VERVM sit iam minutia A B, maior, quàm minutia C D. Dico maiorem esse proportionẽ A, ad B, quàm C, ad D. Erit enim maior proportio minutiæ A B, maioris ad integrum, quàm minutiæ C D, minoris ad idem integrum. [i] *Cùm ergo sit, vt minutia A B, ad integrum, ita A, ad B; & vt minutia C D, ad integrum, ita C, ad D: erit quoque maior proportio A, ad B, quàm C, ad D. quod est propositum.*

i 2. huius.

MINVTIARVM $\frac{3}{4}.\frac{9}{12}$. integer numerus sit 24. cuius tam $\frac{3}{4}$. quàm $\frac{9}{12}$. sunt 18. ac proinde æquales sunt minutiæ $\frac{3}{4}.\frac{9}{12}$. At $\frac{2}{3}$. eiusdem numeri 24. sunt 16. vbi manifestum est, numerum 18. maiorem esse numero 16. ideoq; minutiam $\frac{3}{4}$. maiorem esse minutia $\frac{2}{3}$.

IX.

MINVTIAE, quarum numeratores eandem proportionem habẽt, quam denominatores; sunt æquales: Et minutiarum æqualium numeratores eandem habent proportionẽ, quam denominatores. Cuius autẽ numerator maiorem proportionẽ habet, q̃ denominator, illa maior est: Et maioris numerator maiorẽ habet proportionem, quã denominator.

A, 6. C, 2.
B, 9. D, 3.

SINT duæ minutiæ AB, CD, sitq; eadem proportio A, ad C, quæ B, ad D. Dico minutias ipsas æquales esse. Erit enim permutando, vt A, ad B, ita C, ad D: [a] *ac proinde minutiæ æquales erunt. quod est propositum.*

a 8.huius.

SED sint iam minutiæ æquales AB, & CD. Dico ita esse A, ad C, vt B, ad D. [b] *Erit enim vt A, ad B, ita C, ad D. Igitur permutando, vt A, ad C, ita B, ad D. quod est propositum.*

b 8.huius.

A, 6. C, 3.
B, 9. D, 5.

DEINDE sit maior proportio A, ad C, quàm B, ad D. Dico minutiam AB, maiorem esse minutia CD. Erit enim permutando quoque maior proportio A, ad B, quàm C, ad D, [c] *ac propterea maior erit minutia AB, quàm CD. quod est propositum.*

c 8. huius.

VERVM sit iam minutia AB, maior quàm CD. Dico maiorem proportionem esse A, ad C, quàm B, ad D. [d] *Erit enim maior proportio A, ad B, quàm C, ad D: ideoq; & permutando maior proportio erit A, ad C, quàm B, ad D. quod est propositum.*

d 8 huius.

SINT duæ minutiæ $\frac{6}{9}.\frac{2}{3}$. partes integri numeri 90. vbi vides minutiam $\frac{6}{9}$. hoc est, 60. æqualem esse minutiæ $\frac{2}{3}$. id est, numero 60. At verò minutiã eandem $\frac{6}{9}$. id est, 60. maiorẽ esse minutia $\frac{3}{5}$. hoc est, numero 54.

X.

DVAS minutias diuersarum denominationum ad alias duas eiusdem denominationis illis æquales reducere.

E, 10. F, 9.
A, 2. C, 3.
B, 3. D, 5.
G, 15.

DVAE minutiæ AB, CD, habeant dissimiles denominatores B, D. Fiat E, ex A, in D; & F, ex C, in B; & G, ex B, in D. Dico minutias EG, FG, quarum numeratores E, F, & denominator idem G, esse æquales minutiis AB, CD. Quoniam enim A, B, multiplicantes D, faciunt E, G; [e] *erit vt A, ad B, ita E, ad G.* [f] *Quare minutia AB, EG, æquales erunt. Eodem modo, quia C, D, multiplicantes B, faciunt F, G,* [g] *erit vt C, ad D, ita F, ad G.* [h] *Igitur minutiæ CD, FG, æquales erunt. quod est propositum.*

e 18.sept. f 8.huius. g 18. sept. h 9.huius.

XI.

INTEGRVM numerum quemcumque ad dati denominatoris minutiam reducere.

A, 1. B, 6. C, 6.

SIT primùm A, integrum 1. reducendum ad minutiam, cuius denominator C. Sumatur numerator B, denominatori C æqualis. Dico minutiam BC, vnitati A, æqualem esse. [i] *Quia enim est vt B, ad C, ita minutia BC, ad integrum A: Est autem B, ipsi C, æqualis. Igitur & minutia BC, integro A, id est, vnitati, erit æqualis quod est propositum.*

i 2.huius.

DEINDE sit integer numerus A, reuocandus ad minutiam, cuius denominator C. Ex A, in C, fiat B, numerator. Dico minutiam BC, integro A, æqualem esse. Supponatur enim integro A, vnitas D, vt fiat minutia AD, tot vnitatibus æqualis, quoties vnitas est in A. Quia igitur ex A, in C, fit B; erit ex defin. multiplicationis, ita B, ad C, vt A, ad D, vnitatem. Cùm ergo minutiarum AD, BC, numeratores A, B, ad denominatores D, C, eandem proportionem habeant, [k] *ipsæ inter se æquales erunt. Quare cùm minutia AD, sit integro A, æqualis, ob denominatorem, qui est vnitas; erit quoq; minutia BC, eidem integro A, æqualis. quod est propositum.*

A, 7. B, 42.
D, 1. C, 6.

k 8.huius.

XII.

DATAM minutiam duplare, ac dimidiare.

SIT primùm minutia AB, duplanda. Dupletur numerator A, vt fiat numerator C, manente eodem denominatore B: vel denominator B, quando par est, dimidietur, vt fiat denominator D, manente eodem numeratore A. Dico vtramq; minutiam CB, AD, duplum esse minutiæ AB. Cùm enim minutiæ AB, CB, eundem habeant denominatorem; [l] *erit vt C, ad A, numerator ad numeratorem, ita CB, ad AB, minutia ad minutiam. Est autem C, ipsius A, duplus ex constructione. Igitur & minutia CB, minutiæ AB, dupla erit. quod est propositum.*

A, 3. C, 6. A, 3.
B, 8. B, 8. D, 4.

l 4.huius.

RVRSVS quia minutia AB, AD, eundem habent numeratorem; [m] *erit vt B, ad D, denominator ad denominatorem, ita AD, ad AB, minutia ad minutiam. Est autem B, ipsius D, duplus, per constructionem. Igitur & minutia AD, minutiæ AB, dupla erit. quod est propositum.*

m 7.huius.

DEINDE dimidianda sit minutia AB. Dupletur denominator B, vt fiat denominator C, manente eodem numeratore A: Vel numerator A, quando par est, dimidietur, vt fiat numerator D, manente eodem denominatore B. Dico vtramq; minutiam AB, DB, dimidium esse minutiæ AB. Cùm enim minutiæ AB, AC, eundem habeant numeratorem;

A, 6. A, 6. D, 3.
B, 11. C, 22. B, 11.

meratorem; [a] erit vt B, ad C, denominator ad denominatorem, ita A C, ad A B, minutia ad minutiam. Cùm ergo B, sit per constructionem ipsius C, dimidium; erit & minutia A C, minutia A B, dimidium. quod est propositum. a 7. huius.

RVRSVS cùm minutia A B, D B, habeant eundem denominatorem; [b] erit vt D, ad A, numerator ad numeratorem, ita D B, ad A B, minutia ad minutiam. Cùm ergo D, sit ipsius A, dimidium, ex constructione; erit & minutia D B, minutia A B, dimidium. quod est propositum. b 4. huius.

EODEM modo minutia data triplicabitur, quadruplicabitur, &c. si vel numerator triplicetur, quadruplicetur, &c. eodem manente denominatore; vel (quando fieri potest) si denominatoris accipiatur pars tertia, quarta, &c. manente eodem numeratore.

SIC etiam data minutia sumetur pars tertia, quarta, &c. si denominator triplicetur, quadruplicetur, &c. manente eodem numeratore; vel (quando fieri potest) si numeratoris tertia pars, quarta, &c. sumatur. Quod eodem modo demonstrabitur.

XIII.

MINVTIA minutiæ æqualis est minutiæ simplici, cuius numerator ex multiplicatione mutua numeratorum, denominator verò ex mutua denominatorum multiplicatione procreatur.

SIT enim A B, minutia minutiæ C D, respectu integri numeri E, siue vnitatis E, & valorem huius minutiæ minutiæ exprimat simplex minutia K. Fiat F, ex A, in C; & G, ex B, in D. Dico datam minutiam minutiæ æqualem esse simplici minutiæ F G, respectu integri E, cuius videlicet numerator F, & denominator G.

F, 6. H, 9.
A, 2. C, 3. E, 1.
B, 3. D, 4. E, 24.
G, 12. K, 1/2.

Fiat enim rursus H, ex C, in B. [c] Et quoniam est, vt A, ad B, ita minutia A B, ad suum integrum, nimirũ ad minutiam C D, cuius integrum est E: [d] Item vt A, ad B, ita est F, ad H; quòd A, B, ipsum C, multiplicantes faciant F, H: Erit quoque, vt minutia A B, ad minutiam C D, ita F, ad H. Rursus [e] quia est, vt C, ad D, ita minutia C D, ad suum integrum E: [f] Item vt C, ad D, ita est H, ad G; quòd B, ipsos C, D, multiplicans fecerit H, G; Erit quoq; vt C D, minutia ad suum integrum E, ita H, ad G. Quoniam igitur est, vt minutia A B, ad minutiã C D, ita F, ad H: Et vt minutia C D, ad E, integrum, ita H, ad G; erit ex æquo, vt A B, minutia minutiæ C D, ad integrum E, ita F, ad G. Vt autem A B, minutia minutiæ C D, ad integrum E, ita est simplex minutia K, ad idem integrum E; quòd simplex minutia K, æqualis posita sit datæ minutiæ A B, minutiæ C D; cùm eius valorem respectu integri E, exprimat. Igitur erit quoque, vt F, ad G, ita minutia simplex K, ad integrum E. [g] Cùm ergo quoque sit, vt F, ad G, ita minutia F G, ad idem suum integrum E; æquales erunt minutiæ simplices K, & F G: ac proinde cùm minutia K, æqualis sit datæ minutiæ minutiæ, erit quoque simplex minutia F G, æqualis datæ minutiæ A B, respectu minutiæ C D, cuius integrum E. quod est propositum. c 2. huius. d 18. sept. e 2. huius. f 17. sept. g 2. huius.

SIT 2/3. minutia minutiæ 3/4. respectu integri 24. Huius numeri 3/4. sunt 18. & huius numeri 2/3. sunt 12. qui numerus est 1/2. dati integri numeri 24. Manifestum autem est, si tam numeratores 2. 3. inter se multiplicentur, quàm denominatores 3. 4. procreari minutiam 6/12. quæ huic 1/2. æquivalet, qualis nimirum erat numerus 12. respectu numeri integri 24.

XIIII.

MINVTIAM minutiæ, aut minutiam minutiarum ad simplicem minutiam reducere.

E; 6.
A, 2. C, 3.
B, 3. D, 4.
F, 12.

SIT primùm A B, minutia minutiæ C D. Ex A, in C, fiat E; & ex B, in D, fiat F. [h] Et quoniam minutia E F, exprimit valorem minutiæ A B, respectu minutiæ C D; reducta erit data minutia minutiæ ad simplicem minutiam E F. quod est propositum. h 13. huius.

G, 6. I, 6.
A, 2. C, 3. E, 1.
B, 3. D, 4. F, 2.
H, 12. K, 24.

DEINDE sit A B, minutia minutiarum C D, E F, ita vt C D, sit minutia minutiæ E F; & A B, minutia minutiæ C D. Fiat G, ex A, in C; & H, ex B, in D. Item I, ex G, in E; & K, ex H, in F; atq; ita deinceps, si plures sint minutiæ, numeri vltimo loco producti I, K, in numeros sequentis minutiæ ducantur. Dico minutiam I K, cuius numerator I, & denominator K, datæ minutiæ minutiarum æqualem esse. [i] Nam minutia G H, æqualis est minutiæ A B, minutiæ C D, respectu minutiæ E F, tanquam integri cuiusdam. [k] Item minutia I K, æqualis est minutiæ G H, (hoc est, minutiæ A B, minutiæ C D.) minutiæ E F, respectu integri, cuius E F, est minutia; & sic deinceps, si plures sint minutiæ. Quare minutia I K, ex numeris vltimo loco productis constituta, æqualis est datæ minutiæ minutiarum. quod est propositum. i 13. huius. k 13. huius.

SIT 2/3. minutia minutiarum 3/4. 1/2. respectu integri 24. Huius numeri 1/2. est numerus 12. & huius numeri 3/4. sunt 9. Huius denique 2/3. sunt 6. qui numerus est 1/4. totius integri 24. Liquidò autem constat, si tam numeratores 2. 3. 1. inter se multiplicentur, quàm denominatores 3. 4. 2. gigni minutiam 6/24. quæ æqualis est minutiæ 1/4. qualis nimirum pars erat numerus 6. respectu integri 24.

XV.

DATIS duabus minutiis, alterutram earum ad aliam æqualem reducere, ita vt alterius numeri numeros huius inuentæ numerent per numeros ex numeratore datæ minutiæ reductæ in denominatorem alterius minutiæ datæ, & ex numeratore alterius huius minutiæ datæ in denominatorem illius reductæ, productos.

SINT duæ minutiæ A B, C D, quarum A B, ad aliam æqualem reducenda sit, cuius numeratorem numerator C, metiatur per numerum ex A, in D, productum; denominatorem verò denominator D, metiatur per numerum ex C, in B, productum. Fiat F, ex C, in D; & ex F, in A, B, fiant G, H. Item ex A, in D, fiat K; & L, ex C, in B. Dico minutiam G H, minutiæ A B, æqualem esse; & C, metiri G, per K, ex A, in D, productum; & D, metiri H, per L, ex C, in B, productum. Quoniam enim F, multiplicans A B, facit G, H; [a] *erit vt A, ad B, ita G, ad H,* [b] *ac proinde minutia A B, G H, æquales erunt. Deinde quia C, multiplicans D, facit F,* [c] *metietur C, ipsum F, per D:* [d] *Metitur autem & vnitas ipsum D, per D. Eadem igitur pars est C, ipsius F, quæ vnitas ipsius D. Cùm ergo vnitas sit ipsius D, pars à D, denominata, erit quoq; C, ipsius F, pars à D, denominata. Eadem ratione erit F, ipsius G, pars ab A, denominata; propterea, quòd G, fit ex F, in A. Quia igitur C, minutia est minutiæ F, respectu integri G, sunt q; numeratores, vnitates; & denominatores, numeri D, A, à quibus partes C, F, denominantur;* [e] *constituet C, minutia minutiæ F, respectu integri G, minutiam simplicem M, (quas minutias C, F, M, seorsum scripsimus) respectu eiusdem integri G; cuius nimirum numerator ex numeratoribus minutiarum C, F, & denominator ex earundem denominatoribus producitur. Quare cùm numeratores gignant vnitatem, & denominatores numerum K; (quòd numeratores sint vnitates, denominatores autem numeri D, A, à quibus partes C, F, denominantur, & ex quorum multiplicatione factus est numerus K,) constituet minutia C, minutiæ F, respectu integri G, minutiam simplicem eiusdem integri G, cuius numerator est vnitas, & denominator numerus K, qualis est minutia M: ac proinde C, numerator minutiæ datæ C D, qui constituit C, minutiam minutiæ F, respectu integri G, pars erit ipsius integri G, à numero K, denominata. Quocirca numerus C, ipsum G, metietur per K; toties nimirum sumptus, quoties vnitas est in K, numero. Eadem prorsus ratione demonstrabimus, D, metiri ipsum H, per L, numerum. Quod est propositum.*

a 17. sept.
b 8. huius.
c 7. pron.
d 5. pron.
e 13. huius.

G, 24. K, 8.
A, 2. / B, 3. F, 12. C, 3. / D, 4.
H, 36. L, 9.
C. 1/4. F, 1/2. M, 1/8.

XVI.

DVARVM minutiæ, quarum numeratores in denominatores vicissim ducti gignũt numeros æquales, æquales sunt: Et minutiarum æqualium numeratores in denominatores vicissim ducti gignunt æquales numeros. Cuius verò numerator in denominatorem alterius ductus maiorem numerum gignit, illa maior est: Et maioris minutiæ numerator in denominatorem alterius ductus maiorem numerum producit.

SINT duæ minutiæ A B, C D: & ex A, in D, fiat E; atque ex C, in B, fiat F: sintq; primùm numeri E, F, æquales. Dico minutias A B, C D, æquales esse. Quoniam enim numerus E, factus ex A, primo in D, quartum æqualis est numero F, facto ex C, secundo in B, tertium; [f] *erit vt A, primus ad C, secundum, numerator ad numeratorem, ita B, tertius ad D, quartum, denominator ad denominatorem.* [g] *Quare minutiæ A B, C D, æquales sunt. VEL sic.* [h] *Quoniam est, vt E, ad F, ita minutia A B, ad minutiam C D; Est autem E, ipsi F, æqualis; erit quoque minutia A B, minutiæ C D, æqualis. quod est propositum.*

f 19. sept.
g 9 huius.
h 5. huius.

E, 24. F, 24.
A, 2. / B, 3. C, 8. / D, 12.

SED sint iam æquales minutiæ A B, C D. Dico numerum E, æqualem quoque esse numero F. Nam ob æqualitatem minutiarum [i] *erit, vt A, ad C, numerator ad numeratorem, ita B, ad D, denominator ad denominatorem.* [k] *Quapropter idem numerus fiet ex A, primo in D, quartum, qui ex C, secundo in B, tertium; ac proinde æquales erunt E, & F, numeri. VEL sic.* [l] *Quoniam est, vt minutia A B, ad minutiam C D, ita E, ad F; ponuntur autem minutiæ æquales; erunt quoque numeri E, F, æquales. quod est propositum.*

i 9. huius.
k 19. sept.
l 5. huius.

DEINDE sit E, numerus maior numero F. Dico minutiam quoq; A B, maiorem esse minutia C D. Cùm enim ex A, in D, fiat numerus E, maior quàm F; gignetur F, ex minore numero quàm A, in D, nimirum ex G, in D. Quia igitur idem numerus F, fit ex G, primo in D, quartum, & ex C, secundo in B, tertium, [m] *erit vt G, primus ad C, secundum, ita B, tertius ad D, quartum: Est autem maior proportio A, ad C, quàm G, ad C; quòd A, maior sit quàm G. Igitur maior quoque erit proportio A, ad C, quàm B, ad D;* [n] *ac proinde minutia A B, maior erit, quàm minutia C D. VEL sic.* [o] *Quoniam est, vt E, ad F, ita minutia A B, ad minutiam C D; Est autem E, maior quàm F; erit quoque minutia A B, maior quàm minutia C D. quod est propositum.*

m 19. sept.
n 9. huius.
o 5. huius.

E, 24. F, 21.
G, 1 3/4 A, 2. / B, 3. C, 7. / D, 12.

VERVM sit iam minutia A B, maior quàm minutia C D. Dico & numerum E, numero F, esse maiorem. Cùm enim maior sit minutia A B, quàm minutia C D, [p] *erit maior proportio A, ad C, quàm B, ad D. Minor ergo numerus, quàm A, habebit ad C, eandem proportionem, quam B, ad D, qui sit G.* [q] *Idem ergo numerus fiet ex G, primo in D, quartum, qui ex C, secundo in B, tertium. Cùm ergo ex A, in D, maior fiat, q; ex G, in D*

p 9. huius.
q 19. sept.

propterea

propterea quòd A, maior est quàm G; erit quoq; E, factus ex A, in D, maior, quàm F, ex C, in B, genitus.

VEL sic. [a] Quoniam est, vt minutia A B, ad minutiam C D, ita E, ad F: Est autem A B, minutia maior quàm minutia C D; erit quoq; E, maior quàm F. Quod est propositum. a 5. huius.

AT QVE hæc est quoq; demõstratio eius regulæ, quam in Arithmetica præscripsimus ad dignoscendum, vtra duarum minutiarum propositarum maior sit. Id quod etiam ad 5. propositionem monuimus.

XVII.

DATAM minutiam ad minimos terminos reducere.

SIT minutia A B, ad minimos reuocanda terminos. Si igitur A, & B, sint inter se primi, non poterit minutia A B, ad minores terminos reuocari, sed ipsa iam in minimis erit terminis constituta. Reducatur enim, si fieri potest, ad minores terminos C, D, ita vt minutia C D, minutia A B, sit æqualis. [b] Quoniam igitur est, vt A, ad B, ita C, ad D; sunt q; C, D, numeri minores numeris A B; non erunt A, B, minimi termini in sua proportione: [c] sunt autem & minimi, cùm primi inter se sint. quod est absurdum.

A, 36. B, 48. C, 12. D, 3. E, 4.

SI verò A, B, non sint inter se primi; [d] sit eorum maxima mensura C, qua metiatur A, per D; & B, per E. Dico minutiam D E, cuius numerator D, & denominator E, æqualem esse datæ minutiæ A B, & in minimis terminis constitutam. Quoniam enim C, metitur A, B, per D, E; [e] producentur A, B, ex C, in D, E. [f] Quare erit vt A, ad B, ita D, ad E, & propterea minutia A B, D E, æquales erunt. Deindo quia C, maximus mensura numerorum A, B, metitur ipsos per D, E; erunt ex coroll. propos. 35. lib. 7. D, E, minimi in proportione A, ad B. Quod est propositum.

b 8. huius. c 23. sept. d 2. sept. e 9. pron. f 17. sept. g 8. huius.

XVIII.

DATAM minutiam ad aliam æqualem datæ denominationis, quando id fieri potest, reuocare.

SIT data minutia A B, reuocanda ad æqualẽ aliam, cuius denominator datus sit C. Ex A, numeratorem denominatorem datum C, fiat D, quem metiatur B, denominator datæ minutiæ per E. Dico minutiam E C, cuius numerator E, & denominator C, datus, æqualem esse minutiæ A B, datæ. Quia enim B, metitur D, per E, [h] fiet D, ex B, in E: Factus est autem idem D, ex A, in C. [i] Igitur erit, vt A, primus ad B, secundum, ita E, tertius ad C, quartum; [k] ideoq; minutia A B, E C, æquales erunt. quod est propositum.

A, 3. B, 4. C, 12. D, 36. E, 9.

QVOD si B, non metiatur D, ex A, in C, procreatũ, non poterit data minutia A B, reduci ad denominationem datam C. Reducatur enim, si fieri potest, ad minutiam E C. Quia ergo minutia A B, E C, æquales sunt; [l] erit vt A, ad B, ita E, ad C. [m] Idem igitur numerus fiet ex A, primo in C, quartum, qui ex B, secundo in E, tertium; videlicet numerus D, factus ex A, in C. [n] Igitur B, metietur D, per E. quod est absurdum. Ponitur enim B, ipsum D, non metiri.

h 9. pron. i 9. sept. k 8. huius. l 8. huius. m 19. sept. n 7. pron.

XIX.

QVANDO minor numerus per maiorem diuiditur, numerus Quotiens est minutia, cuius numerator est numerus minor diuisus; denominator verò maior numerus diuidens.

SIT minor numerus A, diuidendus per maiorem B. Dico Quotientem esse minutiam A B, cuius numerator A, & denominator B. [o] Quoniam enim est, vt A, ad B, numerus diuisus ad diuidentem: hoc est, vt numerator ad denominatorem, ita minutia A B, ad integrum: hoc est, ad vnitatem; erit ex defin. Diuisionis minutia A B, Quotiẽs diuisionis numeri A, per numerum B. quod est propositum.

A, 6. B, 11.

HINC fit, si diuiso numero integro maiore per integrum numerum minorem, aliquid superest; Quotienti integro inuento addendam adhuc esse minutiam, cuius numerator sit numerus ex diuisione reliquus; denominator verò, numerus diuidens. Nam reliquus ille numerus, qui necessariò minor est numero diuidente, diuidendus adhuc est per eundem numerum diuidentem, qui maior est: Verbi gratiâ. Diuiso numero 23. per 4. Quotiens integer est 5. & supersunt 3. adhuc diuidenda per 4. [p] Fit ergo minutia $\frac{3}{4}$. ita vt totus Quotiens sit $5\frac{3}{4}$.

o 2. huius. p 19. huius.

XX.

MINVTIAS plures in vnam summam colligere.

SINT primùm addenda duæ minutiæ A B, C B, eiusdem denominationis. Ex A, & C, numeratoribus fiat summa D, cui idem denominator B, supponatur. Dico minutiam D B, esse summam ex additione minutiarum A B, C B, collectam. Quoniam enim minutiæ eundem habẽt denominatorẽ; [q] erit vt A, ad C, ita minutia A B, ad minutiam C B:

A, 3. C, 4. D, 7. B, 10. B, 10. B, 10.

q 4. huius.

a 4. huius. *Et componendo, vt A, C, simul ad C, ita minutia A B, C B, simul ad minutiam C B.* [a] *Vt autem C, ad D, ita quoq; est minutia C B, ad minutiam D B. Igitur ex æquo erit, vt A, C, simul ad D, ita minutiæ A B, C B, simul ad minutiam D B. Cùm ergo A, & C, simul æquales sint ipsi D, ex constructione; erunt quoq; minutiæ A B, C B, simul æquales minutiæ D B. Quod est propositum.*

DEINDE sint addenda duæ minutiæ A B, C D, diuersarum denominationum. Ducatur A, numerator prioris in D, denominatorem posterioris; & C, numerator posterioris in B, denominatorem prioris, collectaq; sit summa E, ex duobus illis productis, cui supponatur denominator F, ex multiplicatione mutua denominatorum B, D, procreatus. Dico minutiam E F, esse summam ex datis duabus minutijs A B, C D, collectam. [b] *Quoniam enim est, vt integrum ad summam duarum minutiarum A B, C D, ita F, ex denominatoribus productus ad E, summam productorum ex numeratoribus in denominatores vicissim ductis; erit conuertendo, vt summa minutiarum A B, C D, ad integrum, ita E, ad F:* [c] *Vt autem E, ad F, ita quoq; est minutia E F, ad idem integrum. Igitur erit, vt summa minutiarum A B, C D, ad integrum, ita minutia E F, ad idem integrum. Quapropter summa minutiarum A B, C D, æqualis erit minutiæ E F: ac proinde minutia E F, summa erit ex minutijs A B, C D, collecta. quod est propositum.*

b 6. huius. A, 2. B, 3. C, 3. D, 4. E, 17. F, 12.

c 2. huius.

VEL sic. Quoniam ex multiplicatione numeratorum in denominatores vicissim, & ex multiplicatione denominatorum inter se, fiunt duæ minutiæ eiusdem denominationis, minutijs A B, C D, æquales, vt ex demonstratione propositionis 10. constat: si summa E, productorum ex numeratoribus in denominatores supponatur F, communis denominator ex denominatoribus procreatus, facta erit minutia E F, summa minutiarum A B, C D; hoc est, duarum illarũ eiusdem denominationis, ad quas A B, C D, reducta sunt, vt initio huius propositionis est demonstratum.

IAM verò datis pluribus minutijs, addenda primùm erunt duæ prima: deinde hæc summa cũ tertia coniungenda, atq; hæc summa cum quarta, & sic deinceps, donec omnes absoluantur.

QVOD si dentur integra cum minutijs, addenda erunt integra seorsum, & minutiæ seorsum.

SINT verbi gratiâ, $\frac{2}{3}$. & $\frac{3}{4}$. minutiæ huius integri 60. cuius $\frac{2}{3}$. sunt 40. & $\frac{3}{4}$. sunt 45. Ex 40. & 45. fit summa 85. hoc est, totus numerus integer 60. & insuper 25. vnitates, quæ faciunt $\frac{5}{12}$. integri 60. quemadmodum ex $\frac{2}{3}$. & $\frac{3}{4}$. collecta est summa $\frac{17}{12}$. id est, semel 1. & insuper $\frac{5}{12}$.

ITA etiã summa minutiarũ $\frac{1}{3}$. $\frac{4}{9}$. est $\frac{21}{27}$. hoc est, in minimis terminis $\frac{7}{9}$. Si igitur illarũ minutiarum integrũ sit 36, erit $\frac{1}{3}$. ipsius 12. at $\frac{4}{9}$. eiusdem, 16. Vbi vides ex 12. & 16. confici 28. hoc est, $\frac{7}{9}$. ipsius integri 36.

XXI.

MINVTIAM minorem ex maiore detrahere.

EX maiore minutia A B, detrahenda sit minor C B, sintq; primũ hæ minutiæ eiusdem denominationis. Detracto numeratore C, minoris minutiæ ex A, numeratore maioris, reliquum sit numerus D, cui idem denominator B, supponatur. Dico minutiã D B, reliquam esse post detractionem minutiæ C B, ex minutia A B. Quia enim C, ex A, subtractus relinquit D; componetur A, ex C, & D. Minutia ergo A B, cuius numerator A, ex numeratoribus C, D, collectus est, summa est duarum minutiarum C B, D B, vt in prima parte antecedentis propositionis ostensum est. Quare detracta minutia C B, ex minutia A B; reliqua fiet minutia D B. Quod est propositum.

A, 7. B, 10. C, 3. B, 10. D, 4. B, 10.

DEINDE minutiæ A B, C D, habeant diuersos denominatores, detrahendaq; sit minor C D, ex maiore A B. Ex C, numeratore minoris in B, denominatorẽ maioris fiat E; & ex A, numeratore maioris in D, denominatorem minoris fiat F: atq; E, ablatus ex F, relinquat G, cui supponatur denominator H, ex mutua multiplicatione denominatorum procreatus. Dico minutiam G H, esse reliquã post detractionem minutiæ C D, ex minutia A B. Quoniam enim D, multiplicans A, B, facit F, H; [d] *erit vt A, ad B, ita F, ad H:* [e] *vt autẽ A, ad B, ita est minutia A B, ad integrum. Igitur erit quoq; vt F, ad H, ita minutia A B, ad integrum. Rursus quia B, multiplicãs C, D, facit E, H;* [f] *erit vt C, ad D, ita E, ad H,* [g] *Vt autem C, ad D, ita est minutia C D, ad integrum. Igitur erit quoq; vt E, ad H, ita minutia C D, ad integrum. Quia igitur est, vt E, primus ad H, secundum, ita minutia C D; tertius numerus ad integrũ, quartum numerũ;* [h] *Et vt G, quintus ad eundem secundum H, ita minutia G H, sextus numerus ad idem integrum, quartũ numerum; erit ex 5. theor. scholij propos. 22. lib. 7. vt E, G, primus & quintus simul, ad H, secundum, ita minutia C D, G H, tertius & sextus numerus simul, ad integrũ. Vt autem E, G, simul ad H, ita est F, ipsis E, G, æqualis, (Nam E, ex F, detractus reliquit G.) ad eundem H. Igitur erit quoq; vt F, ad H, ita minutia C D, G H, simul ad integrũ. Cũ ergo ostensum sit, vt est F, ad H, ita esse minutiam A B, ad integrũ; erit quoq; vt minutia A B, ad integrũ, ita minutiæ C D, G H, simul ad idem integrũ: ac propterea æquales erũt minutia A B, & minutiæ C D, G H, simul. Detracta igitur minutia C D, ex minutia A B, reliqua erit minutia G H. qd est propositũ. VEL sic. Quoniã ex multiplicatione numeratorũ in denominatores vicissim, & ex ductu denominatorũ inter se, gignũtur duæ minutiæ eiusdẽ denominatiõis minutijs datis æquales, vt ex demõstratione propos. 10. cõstat: si E, factus ex C, in B, detrahatur ex F, facto ex A, in D; et reliquo*

d 17. sept. e 2. huius. f 17. sept. g 2. huius. h 2. huius. A, 3. B, 4. C, 2. D, 5. G, 7. H, 20. F, 15. E, 8.

numero

numero G, ſupponatur communis denominator H, ex denominatoribus productus, fiet minutia G H, reliqua poſt detractionem minutiæ C D, ex minutia A B, veluti initio huius propoſitionis oſtenſum eſt.

IAM verò ſi dentur integra vnà cum minutijs, ſubtrahenda erunt integra ſeorſum ab integris, & minutia à minutia. Quòd ſi minutia detrahenda, maior ſit, quàm ea, à qua fieri debet ſubtractio, [a] *reducenda prius erit vnitas vna numeri integri, à quo fit ſubtractio, ad minutiam denominatoris minutiæ adherentis. Vt ſi ſubtrahenda ſint $6\frac{2}{5}$. ex $10\frac{3}{4}$. ſubtractis 6. ex 10. ſuperſunt 4. & ſubductis $\frac{2}{5}$. ex $\frac{3}{4}$. ſupereſt minutia $\frac{7}{20}$. Totus ergo numerus reliquus erit $4\frac{7}{20}$. At ſi ſubtrahenda ſint $4\frac{6}{7}$. ex $20\frac{1}{4}$. faciemus ex vna vnitate numeri 20. minutiam $\frac{4}{4}$. quæ cum $\frac{3}{4}$. facit $\frac{7}{4}$. remanebuntq; 19. integra. Subtracto ergo integro numero 4. ex 19. ſuperſunt 15. & ſubducta minutia $\frac{6}{7}$. ex minutia $\frac{7}{4}$. reliqua eſt minutia $\frac{25}{28}$. Totus ergo reliquus numerus erit $15\frac{25}{28}$.* a 11. huius.

SINT verbi gratiâ $\frac{3}{4}$. & $\frac{2}{5}$. minutiæ huius numeri integri 40. Igitur ſi $\frac{2}{5}$. id eſt, 16. detrahantur ex $\frac{3}{4}$. hoc eſt, ex 30. ſuperſunt 14 nimirum $\frac{7}{20}$. integri numeri 40. vt ſuperior calculus docuit.

XXII.

MINVTIAM per minutiam multiplicare.

SIT minutia A B, per minutiam C D, multiplicanda. Ex multiplicatione numeratorum A, C, inter ſe fiat E, cui ſupponatur F, ex denominatoribus B, D, procreatus. Dico minutiam E F, gigni ex multiplicatione minutiarum A B, C D, inter ſe. Fiat enim G, ex E, in D; & H, ex C, in F: [b] *Erit q3 vt minutia E F, ad minutiam C D, ita G, ad H. Quia verò C, multiplicans A, F, facit E, H;* [c] *erit vt A, ad F, ita E, ad H: Et permutando, vt A, ad E, ita F, ad H. Rurſus quia D, multiplicans E, & B, facit G, & F;* [d] *erit vt E, ad B, ita G, ad F. Ex æqualitate igitur perturbata, vt hic apparet, erit vt A, ad B, ita G, ad H. Vt autem G, ad H, ita oſtendimus eſſe minutiam E F, ad minutiam C D:* [e] *Et vt A, ad B, ita eſt minutia A B, ad integrum; hoc eſt, ad 1. Igitur erit quoque vt minutia E F, ad minutiam C D, ita minutia A B, ad 1. Quapropter ex definitione Multiplicationis, minutia E F, producitur ex multiplicatione minutiæ A B, in minutiam C D. Quod eſt propoſitum.*

H, 60.	G, 40.		
A, 2.	C, 4.		E, 8.
B, 3.	D, 5.		F, 15.

b 5. huius. c 17. ſept. d 17. ſept. e 2. huius.

QVOD ſi minutia per numerum integrum ſit multiplicanda, ſupponenda erit integro numero vnitas, vt fiat quaſi minutia, cuius numerator eſt numerus integer datus, denominator autem vnitas. Ex quo fit, ſatis eſſe, ſi tunc numerator propoſitæ minutiæ per datum numerum integrum multiplicetur, & producto numero ſupponatur eiuſdem minutiæ propoſitæ denominator; propterea quòd vnitas integro numero ſuppoſita in denominatorem datæ minutiæ ducta eundem denominatorem datæ minutiæ nõ auget. Vt ſi multiplicari debeat minutia $\frac{3}{4}$. per 5. fient $\frac{15}{4}$. vt hic apparet, $\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{1}$. Gignetur enim minutia $\frac{15}{4}$.

SI verò integris minutiæ adhæreant, [f] *revocanda erunt integra ad minutiam eiuſdem denominationis cum minutia adhærente, atq; ex numeratore huius minutiæ, & numeratore minutiæ adherentis vnus numerator conſtitui. Vt ſi multiplicanda ſint $7\frac{2}{3}$. per $4\frac{1}{2}$. fient hæ duæ minutiæ multiplicandæ $\frac{23}{3}\cdot\frac{9}{2}$.* f 11. huius.

IAM vt multiplicationem minutiarum integris numeris accommodemus, non erit minutia producta cum integro numero aſſumpto conferenda, vt in additione, ac ſubtractione factum eſt, ſed cum quadrato numeri integri aſſumpti: quia cùm comparatio inter ſimilia fieri debeat, ex multiplicatione autem duorum numerorum inter ſe gignatur numerus planus, conferendus erit numerus productus cum plano totius numeri integri; hoc eſt, cum eius quadrato. Itaque ſint $\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{5}$. minutiæ huius numeri integri 60. ex quarum multiplicatione gignitur minutia $\frac{8}{15}$. Neceſſe eſt ergo, vt $\frac{2}{3}$. numeri 60. in $\frac{4}{5}$. eiuſdem faciant numerum, qui conſtituat $\frac{8}{15}$. quadrati, qui ex 60. in ſe producitur. Id quod liquidò conſtat. Nam $\frac{2}{3}$. numeri 60. ſunt 40. & $\frac{4}{5}$. eiuſdem ſunt 48. At ex 40. in 48. fit numerus 1920. qui efficit $\frac{8}{15}$. numeri 3600. hoc eſt, quadrati ipſius 60.

XXIII.

MINVTIAM per minutiam diuidere.

A, 12.	C, 3.	E, 4.
B, 16.	D, 8.	F, 2.
A, 6.	C, 3.	E, 2.
B, 8.	D, 8.	F, 1.
A, 3.	C, 3.	E, 1.
B, 8.	D, 4.	F, 2.

SIT diuidenda minutia A B, per minutiam C D, & primùm huius numeri C, D, metiantur illius numeros A, B, per E, F; ita vt diuiſo A, per C, Quotiens ſit E, & diuiſo B, per D, Quotiens ſit F. Dico minutiam E F, eſſe Quotientem diuiſionis minutiæ A B, per minutiam C D. Quoniam enim C, metitur A, per E, & D, metitur B, per F; [g] *& gignetur A, ex C, in E; & B, ex D, in F.* [h] *Igitur minutia A B, producta eſt ex multiplicatione minutiæ E F, per minutiam C D: ac proinde ex definitione multiplicationis erit, vt minutia A B, ad minutiam C D, ita minutia E F, ad 1. Quocirca cùm ſit, vt A B, minutia diuiſa ad C D, minutiam diuidentem, ita minutia E F, ad 1. erit ex defin. Diuiſionis minutia E F, Quotiens diuiſionis minutiæ A B, per minutiam C D. Quod eſt propoſitum.*

g 9. prop. h 22. huius.

DEINDE numeri C, D, minutia C D, non metiantur numeros A, B, minutia A B: [i] *Reducatur minutia* i 15. huius.

E, 24. A, 2. K, 12. C, 3. G, 8.
F, 36. B, 3. D, 4. H, 9.

E, 90. A, 6. K, 15. C, 3. G, 30.
F. 135. B, 9. D, 5. H, 27.

AB, ad aliam æqualem EF, cuius numeros E, F, numeri C, D, minutiæ CD, metiantur per numeros G, H, ex A, in D, & ex C, in B, productos: quod quidem fiet, si K, ex C, in D, procreatus ducatur in A, B, vt gignantur E, F, veluti propoſ. 15. oſtenſum eſt. Quoniam igitur C, D, metiuntur E, F, per G, H; erit minutia GH, Quotiens diuiſionis minutiæ EF, vel AB, illi æqualis, per minutiam CD, vt initio huius propoſitionis demonſtratum eſt. Quod eſt propoſitum.

QVIA verò G, H, numeri minutiæ Quotientis GH, gignuntur ex A, in D, & ex C, in B, vt dictum eſt, ſatis eſt ad diuiſionem cuiuſuis minutiæ per quamlibet minutiam, ſi numerator A, minutiæ diuidendæ in D, denominatorem minutiæ diuidentis; & C, numerator minutiæ diuidentis in B, denominatorem minutiæ diuidendæ ducatur. Prior enim numerus procreatus G, dabit numeratorem, & poſterior H, denominatorẽ Quotientis minutiæ GH. Atque hoc verum eſt in omnibus minutijs, ſiue numeri minutiæ diuidentis numeros minutiæ diuidendæ metiantur, ſiue non. Nam ſemper ex numeratore minutiæ diuidendæ in denominatorem minutiæ diuidentis, & ex numeratore minutiæ diuidentis in denominatorem minutiæ diuidendæ, procreantur duo numeri, per quos numeri minutiæ diuidentis metiuntur numeros minutiæ, ad quam minutiæ diuidendæ ſecundùm doctrinam propoſ. 15. reuocatur, vt ex eius propoſ. demonſtratione liquet, atq; in hoc appoſito exemplo apparet, vbi numeri C, D, numeros A, B, metiuntur per G, H; & numeros E, F, procreatos ex AB, in K, productum ex C, in D, ijdem numeri C, D, metiuntur per L, M; atq; adeò tam minutia GH, q̃ LM, Quotiens eſt minutiæ AB, per minutiam CD, diuiſæ.

E, 48. A, 8. K, 6. C, 2. G, 4. L, 24.
F, 54. B, 9. D, 3. H, 3. M, 18.

IAM verò ſi numerus integer diuidendus ſit per minutiam, vel per numerum integrum minutia diuidenda, ſupponenda eſt ei vnitas, vt fiat quaſi minutia, cuius numerator eſt datus numerus integer, & denominator 1. Vt ſi numerus 8. diuidendus proponatur per $\frac{1}{2}$. fiet Quotiens $\frac{1\ 6}{1}$. vt in appoſito priori exemplo perſpicuum eſt. Si autem minutia $\frac{1}{2}$. diuidenda ſit per integrum numerum 8. fiet Quotiens $\frac{1}{1\ 6}$. vt in poſteriori exemplo apparet.

8 1 16
1. 2. 1.

1 8 1
2. 1. 16.

QVOD ſi minutiæ adhæreant integris, reducenda erunt integra ad minutiam eiuſdem denominationis cum minutia adhærente, veluti ad finem antecedentis propoſitionis diximus.

VERVM quia non facilè eſt memoriter tenere, ex numeratore minutiæ diuidendæ in denominatorem minutiæ diuidentis gigni numeratorem Quotientis minutiæ, denominatorẽ autem ex numeratore minutiæ diuidentis in denominatorem minutiæ diuidendæ; ſatius erit ad memoriam iuuandam, loca numerorum minutiæ diuidentis inter ſe permutare, vt in Arithmetica tradidimus, ac deinde regulam multiplicationis vſurpare. Vt ſi diuidenda proponatur minutia $\frac{3}{4}$. per $\frac{2}{7}$. permutandi erunt numeri minutiæ diuidentis hoc modo $\frac{7}{2}$. Vnde Quotiens erit $\frac{2\ 1}{8}$. vt hic videt. Nam hac ratione numerator minutiæ diuidendæ ſemper ducitur in denominatorẽ minutiæ diuidentis, iuxta regulam multiplicationis, quæ præcipit, numeratores eſſe multiplicandos inter ſe, vt fiat numerator, &c.

3 7 21
4. 2. 8.

SIT integer numerus 700. cuius minutia $\frac{3}{4}$. diuidenda ſit per eiuſdem $\frac{2}{7}$. hoc eſt, numerus 525. per 200. Perſpicuum autem eſt, diuiſis 525. per 200. Quotientem eſſe $2\frac{5}{8}$. id eſt, minutiam $\frac{2\ 1}{8}$. quæ proximè inuenta eſt. Sic etiam ſi integer numerus 10. octies ſumptus diuidatur per eius dimidium; nimirum per 5. Quotiens fiet 16. qui inuentus ſuprà fuit, ex diuiſione 8. per $\frac{1}{2}$.

XXIIII.

MINVTIAM in minutiam inſerere.

SIT minutia AB, in minutiam CD, inſerenda, ſitq; primùm ſenſus, addendam eſſe minutiam AB, vnius particulæ minutiæ CD, ad minutiam CD: hoc eſt, addendas eſſe $\frac{3}{4}$. vnius ſeptimæ ad $\frac{5}{7}$. Ex C, numeratore poſterioris minutiæ in B, denominatorem prioris minutiæ fiat F, cui addatur A, numerator prioris, & compoſito numero G, ſupponatur denominator H, ex multiplicatione denominatorum B, D, procreatus. Dico minutiam GH, procreari ex inſitione minutiæ AB, in minutiam CD, in eo ſenſu, quem diximus: hoc eſt, minutiam GH, æqualem eſſe minutiæ AB, reſpectu vnius particulæ minutiæ CD, additæ ad minutiam CD. Quoniam enim AB, minutia vnius particulæ minutiæ CD, [a] reducitur ad ſimplicem minutiam AH, cuius numerator idem eſt, qui A, productus, nimirum ex vnitate in A; denominator autem numerus H, ex denominatoribus B, D, procreatus, vt in appoſito hoc exemplo apparet. Item minutia FH, minutiæ CD, æqualis eſt, habens eundem denominatorem H, ex denominatoribus B, D, productum; numeratorem verò E, ex C, numeratore poſterioris minutiæ in B, denominatorem prioris productum: (Cùm enim B, in C, D, faciat F, H; [b] erit vt C, ad D, ita F, ad H; [c] ac propterea

F. 24.
A, 3. C, 6. G, 27.
B, 4. D, 7. H, 28.

a 14. huius.
b 17. ſept. 4
c 8. huius.

propterea minutia C D, F H, æquales erunt.) efficitur, minutiam G H, cuius numerator G, ex numeratoribus F, A, minutiarum F H, A H, componitur, (nimirũ ex numero ex C, in B, producto, & ex A,) denominator autem H, idem, qui earundem minutiarum F H, A H; efficitur, inquam, minutiam G H, ſummam eſſe minutiarum F H, A H, vt initio propoſ. 20. oſtenſum eſt; hoc eſt, ſummam ex minutia A B, reſpectu vnius particulæ minutiæ C D, quæ minutiæ A H, oſtenſa eſt æqualis, & ex minutia C D, quæ oſtenſa eſt æqualis minutiæ F H, collectam. Minutia igitur G H, procreatur ex inſitione minutiæ A B, in minutiam C D; id eſt, æqualis eſt minutiæ A B, vnius particulæ minutiæ C D, & minutiæ C D, ſimul. Quod eſt propoſitum.

Iam verò ſi plures minutiæ A B, C D, E F, G H, ſint inſerendæ; hoc eſt, ſi minutia A B, vnius particulæ minutiæ C D, vnius particulæ minutiæ E F, vnius particulæ minutiæ G H: & minutia C D, vnius particulæ minutiæ E F, vnius particulæ minutiæ G H: & minutia E F, vnius particulæ minutiæ G H, addi debeant ad minutiam G H, ita agendum erit. Ex G, numeratore poſtremæ minutiæ G H, in F, denominatorem penultimæ minutiæ E F, fiat numerus, cui addatur E, numerator eiuſdem penultimæ minutiæ E F, vt fiat numerus K. Deinde producto ex K, in D, denominatorem antepenultimæ minutiæ C D, addatur C, numerator eiuſdem minutiæ C D, vt fiat M. Producto quoque ex M, in B, denominatorem proximè antecedentis minutiæ A B, adiiciatur A, numerator eiuſdem minutiæ A B, vt fiat P: Atque ita deinceps ducatur ſemper vltimus numerus conflatus in denominatorem proximè antecedentis minutiæ; productoq; numerator eiuſdem proximè antecedentis minutiæ adiiciatur, donec nulla minutia ſuperſit. Numero autem P, qui vltimo loco conflatus eſt, ſupponatur numerus Q, ex denominatoribus inter ſe multiplicatis procreatus, ducendo primùm H, in F, vt fiat L; deinde L, in D; vt fiat N; poſt hæc N, in B, vt fiat Q, &c.

P, 119. M, 59. K, 14.
A, 1. C, 3. E, 2. G, 4.
B, 2. D, 4. F, 3. H, 5.
Q, 120. N, 60. L, 15.

Dico minutiam P Q, ex inſitione datarũ minutiarum produci in eo ſenſu, quẽ expoſuimus. Nã vt in duabus minutijs oſtenſum eſt, minutia K L, producitur ex inſitione minutiæ E F, in minutiã G H: hoc eſt, æqualis eſt ſummæ ex minutia E F, vnius particulæ minutiæ G H, & ex minutia G H, collectæ. Deinde minutia C D, vnius particulæ minutiæ E F, vnius particulæ minutiæ G H, [a] facit minutiã ſimplicem, cuius numerator C, (productus nimirum ex C, in vnitatẽ bis poſitam hoc modo, 3.1.1.) & denominator N, ex D, in L: hoc eſt, ex multiplicatione denominatorum H, F, D, procreatus: Minutia quoque, cuius numerator eſt numerus ex D, in K, productus, denominator autem idem numerus N, ex D, in L, productus, [b] æqualis eſt minutiæ K L: [c] quòd numeratores harum minutiarum ad denominatores eandem proportionem habeant; quippe cùm D, in K, L, gignat numeros alterius illius minutiæ. Igitur cùm per ea, quæ ad initium propoſitionis 20. demonſtrauimus, minutia M N, cuius numerator M, ex numeratore C, & ex numero, qui fit ex D, in K, conflatur, æqualis ſit ſummæ collectæ ex minutia, cuius numerator C, & denominator N, atque ex minutia, cuius numerator ex D, in K, producitur, denominator verò N; æqualis quoque erit eadem minutiæ M N, ſummæ collectæ ex minutia G H, & ex minutia E F, vnius particulæ minutiæ G H, atque ex minutia C D, vnius particulæ minutiæ E F, vnius particulæ minutiæ G H. Rurſus minutia A B, vnius particulæ minutiæ C D, vnius particulæ minutiæ E F, vnius particulæ minutiæ G H, [d] facit minutiam ſimplicem, cuius numerator A, & denominator Q, ex B, in N; id eſt, ex multiplicatione denominatorum H, F, D, B productus: Minutia quoque, cuius numerator eſt numerus ex B, in M, procreatus; denominator verò idem numerus Q, ex B, in N, productus, [e] æqualis eſt minutia M N, [f] quòd numeratores harum minutiarum ad denominatores eandem proportionem habeant, quippe cùm B, in M, N, gignat numeros alterius illius minutiæ. Cùm minutia igitur P Q, cuius numerator P, ex numeratore A, & ex numero, qui fit ex B, in M, conflatur, æqualis ſit ſummæ collectæ ex minutia, cuius numerator A, & denominator Q, atque ex minutia, cuius numerator ex B, in M, gignitur, denominator verò Q, vt initio propoſitionis 20. monſtratum eſt; æqualis quoque erit eadem minutiæ P Q, ſummæ collectæ ex minutia G H, & ex minutia E F, vnius particulæ minutiæ G H; & ex minutia C D, vnius particulæ minutiæ E F, vnius particulæ minutiæ G H; & ex minutia A B, vnius particulæ minutiæ C D, vnius particulæ minutiæ E F, vnius particulæ minutiæ G H. quod eſt propoſitum. Eademq; ratio eſt de pluribus.

a 14. huius.
b 8. huius.
c 17. ſept.
d 14. huius.
e 8. huius.
f 17. ſept.

Sit deinde ſenſus, addendam eſſe minutiam A B, totius minutiæ C D, ad minutiam C D. Ex C, numeratore poſterioris minutiæ in B, denominatorem prioris fiat F, cui addatur E, ex numeratoribus A, C, productus, conflatoq; numero G, ſupponatur H, ex denominatoribus B, D, procreatus. Dico minutiam G H, produci ex inſitione minutiæ A B, in minutiam C D, in eo, quem diximus, ſenſu: hoc eſt, minutiam G H, æqualem eſſe ſummæ collectæ ex minutia C D, & ex minutia A B, minutiæ C D. Quoniam enim minutia A B, minutiæ C D, [g] reducitur ad minutiam ſimplicem E H, cuius numerator eſt E, ex numeratoribus A, C, procreatus; denominator autem H, ex denominatoribus B, D, productus, vt exemplum appoſitum demonſtrat: [h] Minutia quoque F H, æqualis eſt minutiæ C D; [i] quòd numeratores ad denominatores eandem proportionem habeant; quippe cùm B, in C, D, faciat F, H: Erit minutia G H, (quæ ex ijs, quæ ad initium propoſitionis 20. oſtendimus, æqualis eſt

E, 18. F, 24.
A, 3. C, 6. G, 42.
B, 4. D, 7. H, 28.

g 14. huius.
h 8. huius.
i 17. ſept.

ſumma minutiarum E H, F H,) æqualis ſumma collecta ex minutia C D; (hoc eſt, ex minutia F H,) & ex minutia A B, minutia C D, (id eſt, ex minutia E H,) atque ideò minutia G H, procreatur ex inſitione minutiæ A B, in minutiam C D, in hoc poſteriori ſenſu. Quod eſt propoſitum.

QVOD ſi plures ſint minutiæ inſerendæ A B, C D, E F, G H; hoc eſt, minutia A B, minutia C D, minutia E F, minutia G H; & minutia C D, minutia E F, minutia G H; & minutia E F, minutia G H, addendæ ſint ad minutiam G H, ita agendum erit: Ducatur G, in F, producto q̃ numero, addatur numerus ex E, in G, procreatus, vt fiat K. Deinde ducatur K, in D, numero q̃ producto adjiciatur numerus ex C, E, G, factus, vt fiat M. Producto quoq; numero ex M, in B, addatur numerus ex A, C, E, G, procreatus, vt fiat P. Atq; ita deinceps ducatur ſemper numerus vltimo loco genitus in denominatorem antecedentis minutiæ, numero q̃ procreato adjiciatur numerus ex omnibus numeratoribus minutiarum ad eum vſque locum aſſumptarum productus, donec nulla ſuperſit minutia. Numero autem P, qui vltimo loco procreatus eſt, ſupponatur numerus Q, ex omnibus denominatoribus productus, vt in priori ſenſu. Dico minutiam P Q, produci ex inſitione dictarum minutiarum, ſi inſitio intelligatur, vt dictum eſt. Nam, vt in duabus ſuperioribus minutijs demonſtratum eſt, minutia K L, producitur ex inſitione minutiarum E P, G H, id eſt, æqualis eſt ſumma collectæ ex minutia E F, totius minutiæ G H, & ex minutia G H. Deinde minutia C D, totius minutiæ E F, totius minutiæ G H, [a] facit minutiam ſimplicem, cuius numerator ex numeratoribus C, E G, producitur, denominator autem eſt N, ex denominatoribus H, F, D, procreatus. Minutia quoque, cuius numerator ex D, in K, gignitur, denominator autem eſt idem N, ex D, in L; hoc eſt, ex denominatoribus H, F, D, procreatus, [b] æqualis eſt minutiæ K L; [c] quòd numeratores harum minutiarum ad denominatores habeant proportionem eandem: quippe cùm D, in K, L, faciat numeros alterius huius minutiæ. Igitur cùm minutia M N, cuius numerator M, conflatur ex numero, quem numeratores C, E, G, gignunt, & ex numero, quem D, in K, procreat, æqualis ſit per ea, quæ initio propoſ. 20. oſtenſa ſunt, ſumma collecta ex minutia, cuius numerator ex numeratoribus C, E, G, producitur, denominator autē N, ex denominatoribus H, F, D, procreatus, atque ex minutia, cuius numerator ex D, in K, gignitur, denominator verò eſt idem N; æqualis erit etiam eadem minutia M N, ſummæ collectæ ex minutia G H; & ex minutia E F, minutiæ G H; & ex minutia C D, minutiæ E F, minutiæ G H. Rurſus minutia A B, minutiæ C D, minutiæ E F, minutiæ G H, [d] facit minutiam ſimplicem, cuius numerator ex numeratoribus A, C, E, G, producitur, denominator autem Q, ex B, in N, procreatus, ſiue ex denominatoribus H, F, D, B. Minutia quoq;, cuius numerator ex B, in M, producitur, denominator autem eſt idem Q, ex B, in N, procreatus, [e] æqualis eſt minutiæ M N; [f] quòd harum minutiarum numeratores eandem habeant ad denominatores proportionem; cùm B, in M, N, faciat numeros alterius huius minutiæ. Minutia ergo P Q, cuius numerator P, conflatur ex numero, quem numeratores A, C, E, G, gignunt, & ex numero, quem facit B, in M, cùm æqualis ſit, ex ijs, quæ initio propoſ. 20 demonſtrata ſunt, ſumma collecta ex minutia, cuius numerator ex numeratoribus A, C, E, G, producitur, denominator autem eſt Q: atq; ex minutia, cuius numerator ex B, in M, gignitur, denominator autem eſt idem Q; æqualis quoq; erit ſummæ collectæ ex minutia G H; & ex minutia E F, minutiæ G H; & ex minutia C D, minutiæ E F, minutiæ G H; & ex minutia A B, minutiæ C D, minutiæ E F, minutiæ G H. quod eſt propoſitum. Eadem q̃ de pluribus eſt ratio.

P, 232. M, 104. K, 20.
A, 1. C, 3. E, 2. G, 4.
B, 2. D, 4. F, 3. H, 7.
Q, 120. N, 60. L, 15.

a 14. huius.
b 8. huius.
c 17. ſept.
d 14. huius.
e 8. huius.
f 17. ſept.

DE PROPORTIONVM COMPOSITIONE.

EXPEDITIS ijs, quæ ad fractorum numerorũ demonſtrationes pertinent, reliquũ eſt, vt compoſitionem proportionũ explicemus: id quod ad defin. 10. lib. 5. et ad defin. 5. lib. 6. et ad propoſ. 23 lib. 6. nos hoc loco facturos recepimus. In primis igitur, compoſitionẽ illam proportionũ, de qua Euclid. egit defin. 10. lib. 5. & defin. 5. lib. 6. & in ijs propoſitionibus, vbi duplicatam, triplicatã, aut compoſitam proportionem de magnitudinibus, vel numeris demonſtrat, non eſſe verè additionem proportionum, ita vt duplicata vel triplicata proportio ſit dupla, aut tripla maior ea proportione, cuius illa dicitur duplicata, triplicatáue: Item vt proportio ex pluribus proportionibus compoſita ſit verè totum quippiam, cuius partes ſint proportiones, ex quibus componi dicitur, vt plerunque interpretes Euclidis exiſtimant, ex hoc perſpicuè confirmari poteſt: quòd pars eſſet vel æqualis, vel maior toto. Nam cùm hæc compoſitio intelligenda ſit, ſiue maior quantitas cum minore, ſiue minor cum maiore conferatur, vt ad defin. 10. lib. 5. oſtendimus, ſi, poſitis his tribus terminis continuè proportionalibus, 1. 10. 100. proportio 1. ad 100. non ſolùm duplicata diceretur proportionis 1. ad 10. vt vult defin. 10 lib. 5. ſed verè eſſet duplo maior, ita vt coaceruata foret ex duabus proportionibus 1. ad 10. & 10. ad 100. æqualibus, vt Euclidis interpretes putant, quis non videt, partem eſſe maiorem toto, nimirum proportionem 1. ad 10. quæ vna pars eſt, maiorem eſſe proportione 1. ad 100? Hic autem 4. 4. 4. partem æqualem eſſe toti? Sic etiam, ſi, poſitis his tribus terminis non continuè proportionalibus 4. 2. 8. proportio 4. ad 8. verè coaceruaretur ex proportionibus 4. ad 2. & 2. ad 8. tanquam ex partibus, vt ijdem auctores contendunt, eſſet quoq; pars maior, quam totum, quòd proportio dupla 4. ad 2. maior ſit proportione ſubdupla 4. ad 8. Hic autem 10. 5. 1. 2. 5. pars toti foret æqualis, proportio videlicet 10. ad 5. primi termini ad ſecundum, proportioni 10. ad 5. primi termini ad vltimum. Id quod coguntur omnino concedere, velint nolint, ex propoſ. 5. lib. 8. Sint enim duo numeri

meri plani 24. & 48. Prioris latera ſint 12. & 2. Poſterioris verò 3. & 16. Quoniam igitur Euclides ibi demonſtrat, proportionem 24. ad 48. compoſitam eſſe ex proportionibus laterum: hoc eſt, ex proportione 12. ad 3. & ex proportione 2. ad 16. erit pars componens, (ſi hæc compoſitio eſt vera additio.) nimirum proportio quadrupla 12. ad 3. maior tuto, proportione videlicet ſubdupla 24. ad 48. Pari ratione, ſi proportio ſubdupla 24. ad 48. verè totum eſt; & eius partes componentes proportio quadrupla 12. ad 3. & proportio ſuboctupla 2. ad 16. ſi alterutra harum ab illa ſubtrahatur, reliqua erit altera. Igitur & maius ex minore ſubtrahi poteſt; nimirum proportio quadrupla 12. ad 3. ex proportione ſubdupla 24. ad 48. & ſubtracta proportione ſuboctupla 2. ad 16. ex proportione ſubdupla 24. ad 48. reliqua erit proportio quadrupla 12. ad 3. maior quàm ea, à qua facta eſt ſubtractio. Quòd ſi poſterioris numeri plani 48. latera ſumantur 12. & 4. erit vna partium componentium; nimirum proportio 2. ad 4. æqualis toti, proportioni videlicet 24. ad 48. Et ſubtracta proportione 2. ad 4. ex proportione æquali 24. ad 48. ſupereſſet adhuc proportio æqualitatis 12. ad 12. quæ maior eſt, quàm totum: hoc eſt, quàm proportio 24. ad 48. Rurſus ſuperaretur, totum non augeri, etiamſi ei infinitæ partes adderentur.

24.	48.	
12. 2.	3. 16.	

Poſitis enim his quatuor terminis, 12. 4. 2. 1. ſi proportio 12. ad 1. verè coaceruatur ex proportionibus 12. ad 4. & 4. ad 2. & 2. ad 1. velut ex partibus, ita vt hæ proportiones ſimul ſumptæ proportioni 12. ad 1. ſint æquales: ſi cum illis terminis continuentur adhuc alij tres termini hoc modo, 12. 4. 2. 1. 6. 3. componetur eadem proportio 12. ad 1. ex ſex proportionibus, quarum priores tres ſunt eadem illæ, ex quibus prius componebatur. Tres ergo proportiones 1. ad 6. & 6. ad 3. & 3. ad 1. additæ tribus proportionibus 12. ad 4. & 4. ad 2. & 2. ad 1. non augent totum ex illis coaceruatum. Hæc autem omnia abſurda ſunt, & contra principia Mathematicarum. Hæc accedit, quòd ſecundùm communem hominum ſenſum duæ proportiones triplæ conſtituant proportionem ſextuplam, non autem nonuplam, vt prædicti auctores volunt, quanquam nonupla proportio dicatur tripla duplicata, vt in hiſce numeris apparet, 9. 3. 1. Nam quis non videat, ſi agens aliquod ſit, vt 3. illud idem duplo potentius factum eſſe vt 6. non autem vt 9? Sic etiam communis intelligentia comprehendit ex proportione triplæ, & quintupla confici proportionem octuplam, propterea quòd duo mouentia vt 3. & 5. moueant ſimul ſumpta, vt 8. nō autem ex illis conſtitui proportionem 15. ad 1. quamuis hæc ex illis per continuationem compoſita eſſe dicatur, ex defin. 5. lib. 6. vt patet in his numeris, 15. 5. 1. His adde, multorum agentium vires non poſſe dimidiari, eo quòd inter duos numeros, qui proportionem agentis ad patiens exprimunt, nullus medius cadat proportionalis. Verbi gratiâ. Agens vt 6. non poſſet habere agens duplo minus, quòd inter 6. & 1. nullus medius proportionalis cadat numerus: quis autem non ſtatim intelligat, agens vt 3. in dupla proportione minus eſſe, quàm agens vt 6?

LIQVET ergo, huiuſmodi compoſitionem proportionum non eſſe additionem, ſed proportionum continuationem, quæ per multiplicationem denominatorum fit, vt ad defin. 5. lib. 6. demonſtrauimus, vbi etiam expoſuimus, cur extremorum proportio dicatur ex mediis proportionibus compoſita propter terminorū continuationem, quemadmodum & ad defin. 10. lib. 8. explicauimus, cur, poſitis tribus, quatuor, aut pluribus terminis continuè proportionalibus, extremorum proportio appelletur duplicata, triplicata, aut quadruplicata, &c. eius proportionis, quam primi duo termini habent. Hæc autem planiùs percipientur ex ijs, quæ iam iam de vera compoſitione proportionum dicturi ſumus.

ITAQVE omnes operationes Arithmeticæ in proportionibus; nimirum additio, ſubtractio, multiplicatio, ac diuiſio, fieri debent per proportionum denominatores, vt rectè docet Volumnius Rodulphus in diſputatione de proportione proportionum. Et quoniam denominatores proportionum ſunt fractiones, ſiue minutiæ, vt libro quinto docuimus, (cùm denominatori cuiuslibet proportionis multiplicis, qui numerus integer eſt, ſupponi poſſit vnitas, vt ex eo fiat quaſi minutia ab vnitate denominata.) quarum quælibet æqualis eſt fractioni, quam conſtituunt duo quicunque numeri in ea proportione, cuius illa fractio denominator eſt, ſi ex antecedente ſint numerator, & ex conſequente denominator: manifeſtò colligitur, operationes Arithmeticas in proportionibus ab operationibus fractorum numerorum non differre, ſiue per proportionum denominatores, ſiue per numeros earundem proportionum quoſcunque: poſitis tamen conſequentibus terminis ſub antecedentibus, inſtar minutiarum, inſtituantur, vt egregiè Cardanus præcipit in ſua Arithmetica, vt iam apparebit.

PRIMVM enim ſint in vnam ſummã colligendæ duæ proportiones, tripla & quintupla. Quoniam denominatores ſunt 3. & 5. ex quorum additione fit ſumma 8. coaceruabitur octupla proportio ex illis. quæ ſumma etiam colligitur, ſiue denominatores, ſuppoſita prius vnitate cuilibet illorum, inſtar minutiarum addantur, ſiue numeri 12. 4. & 40. 8. inter quos datæ proportiones reperiuntur, perinde ac ſi eſſent fracti numeri, poſitis terminis conſequentibus ſub antecedentibus, in vnã ſummam colligantur. Priori enim modo colligitur proportio 8. ad 1. poſteriori autem 256. ad 32. quarum vtraque octupla eſt. Sic etiam ex proportione dupla ſuperquadripartiente ſeptimas, & ſeſquialtera, quarum denominatores ſunt $2\frac{4}{7}$. & $1\frac{1}{2}$. & quæ inter numeros 54. 21. &

3	5	12	40.		
1	1.	4	8.		
8		256			
1.		32.			
18	3	54	6		
7	2	21	4		
57		342			
14		84			

6.4. reperiuntur, fit proportio quadrupla ſeſquidecimaquarta, qualem habent tam numeri 57.14. q̃ 342.84. Sed quãdo p denominatores inſtituitur operatio, reuocandi prius ſunt denominatores ad vnicas fractiones, vt hic factum eſt. Nam $2\frac{4}{7}$. reuocauimus ad $\frac{18}{7}$. & $1\frac{1}{2}$. ad $\frac{3}{2}$. Quod in alijs etiã operationibus intelligendũ eſt.

8	3	256.	12	57	3	342	6
1	1.	32	4.	14	2.	84	4.
5		640		72		864	
1.		128.		28		336.	

DEINDE, ſi ex proportione octupla ſubtrahatur proportio tripla: Item ex proportione quadrupla ſeſquidecimaquarta deducatur proportio ſeſquialtera; reliqua fient proportiones quintupla, & dupla ſuperquadripartiens ſeptimas, vt hic perſpicuum eſt.

3	2	6	12	10	120	3	8	24	9	16	144
1	1.	1.	4	5.	20.	2	5.	10.	6	10.	60.

TERTIO, ſi multiplicanda ſit proportio tripla per 2. vel quod idem eſt, per proportionẽ duplam: Item proportio ſeſquialtera per ſupertripartientem quintas, inſtituenda erit operatio, vt hic vides, produceturq; ibi proportio ſextupla, hic autem dupla ſuperbipartiens quintas.

6	1	6	120	4	480	24	2	48	144	6	864
1	3.	3.	20	12.	240.	10	3.	30.	60	9.	540.

QVARTO et vltimo, ſi proportio ſextupla dividenda proponatur p proportionem triplam: Item proportio dupla ſuperbipartiens quintas per proportionem ſeſquialteram, ſi diuiſoris termini permutentur, vt in diuiſione minutiarum docuimus, ita inſtituetur operatio.

VIDES ergo operationes Arithmeticas proportionum ab operationibus minutiarum nulla in re diſcrepare, niſi quòd in proportionibus neceſſe non eſt interponere lineolam inter numeratorẽ & denominatorem, quemadmodum in minutijs.

IAM verò multiplicationem proportionum à nobis preſcriptam, quam auctores additionem falsò nuncupant, cum proportionum compoſitione, de qua Euclides defin. 10. lib. 5. & defin. 5. lib. 6. egit, conuenire, atque adeò compoſitionem illam Euclidis verè eſſe multiplicationem, non autem additionem, vt diximus, hoc modo demõſtrabimus. Sint duæ proportiones A, ad B, & C, ad D, ſiue æquales, ſiue inæquales; ducaturq; A, antecedẽs in antecedentem C, & fiat E; ex conſequente verò B, in conſequentem D, fiat F. Dico proportionem E, ad F, quæ ex illa multiplicatione producitur, eſſe compoſitam ex proportionibus duabus A, ad B, & C, ad D: ita vt ſi proportiones hæ A, ad B, & C, ad D, fuerint æquales, proportio E, ad F, dicatur alterutrius earũ duplicata, vt vult defin. 10. lib. 5. ſi autem fuerint inæquales, dicatur ex illis compoſita, ex ſententia defin. 5. lib. 6. Fiat enim G, ex B, in C. Et quia ex A, B, in C, fiunt E, & G; [a] erit vt A, ad B, ita E, ad G. Rurſus quia ex B, in C, D, fiunt G, & F; [b] erit vt C, ad D, ita G, ad F. Componitur autem proportio E, ad F, ex proportionibus E, ad G, & G, ad F, ex defin. Euclidis. Igitur eadem proportio E, ad F, componitur ex proportionibus A, ad B, & C, ad D, cùm hæ eædem ſint, quæ E, ad G, & G, ad F. Quod etiam patet ex demonſtratione, quam ad defin. 5. lib. 6. ex Eutocio, & Vitellione attulimus. Cùm enim compoſitio proportionum ab Euclide deſcripta reſpondeat multiplicationi denominatorũ inter ſe, vt ibi demonſtrauimus, noſtra verò multiplicatio à multiplicatione denominatorum non differat, liquidò conſtat, compoſitionem illam proportionum eſſe multiplicationem, quam tradidimus.

A,	6.	C,	12.	A,	3.	C,	6.				
B,	2.	D,	4.	B,	2.	D,	5.				
E,	72.	F,	8.	F,	18.	E,	10.				
G,	24.			G,	12.						

[a] 18. ſeptimi.

[b] 17. ſeptimi.

EADEM ratione oſtendemus, ſubtractionem proportionum, quam ijdem auctores docent, nõ eſſe aliud, q̃ diuiſionem à nobis explicatam, eſſeq; compoſitioni illi Euclidis contrariam. Sit enim ex proportione A, ad B, detrahenda proportio C, ad D, vt ipſi volunt. Ex A, in D, fiat E, & ex B, in C, fiat F. quod idem eſt, ac ſi termini proportionis C, ad D, permutent loca, & regula multiplicationis adhibeatur. Dico proportionẽ E, ad F, quæ ex diuiſione proportionis A, ad B, per proportionem C, ad D, producitur, vt docuimus, eſſe eam, quæ relinquitur, ſublata proportione C, ad D, ex proportione A, ad B; hoc eſt, proportionem A, ad B, compoſitam eſſe ex proportionibus C, ad D, & E, ad F. iuxta defin. Euclidis. Fiat enim G, ex A, in C. Quia igitur ex A, B, in C, fiũt G, F; [c] erit vt A, ad B, ita G, ad F. Rurſus quia ex A, in C, D, fiunt G, E; [d] erit vt C, ad D, ita G, ad E. Cùm ergo proportio G, ad E, compoſita ſit ex proportionibus G, ad E, & E, ad F, vt vult Euclides; erit quoq; proportio A, ad B, (quæ eadem eſt, quæ G, ad F,) compoſita ex eiſdem proportionibus G, ad E; hoc eſt, C, ad D, & E, ad F: ac proinde ſubducta proportione C, ad D, ex proportione A, ad B, reliqua erit proportio E, ad F: quemadmodum ſi ex proportione G, ad F, (poſito termino E, medio) dematur proportio G, ad E, reliqua eſt proportio E, ad F. Sed quis non videt, hoc potius eſſe dividi proportionem A, ad B, per proportionem C, ad D, q̃ proportionem C, ad D, ex proportione A, ad B, ſubtrahi, ne maius ex minore auferri dicatur, vt in poſteriori exemplo accidit? Atq; hæc de proportionum compoſitione: qui plura deſiderat, legat eruditiſſimum tractatum hac de re à Volumnio Rodulpho Spoletano conſcriptũ.

A,	9.	C,	3.	A,	4.	C,	6.				
B,	1.	D,	1.	B,	2.	D,	3.				
E,	9.	F,	3.	E,	8.	F,	12.				
G,	27.			G,	24.						

[c] 18. ſeptimi.

[d] 17. ſeptimi.

FINIS ELEMENTI NONI.

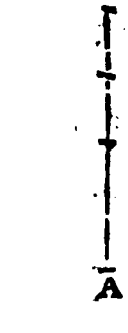
EVCLIDIS ELEMENTVM DECIMVM.

DEFINITIONES.

I.

COMMENSVRABILES magnitudines dicũtur, quas eadem mensura metitur.

ABSOLVIT Euclides in antecedentibus tribus libris ea, quæ ad numeros ſpectant, quantum ſatis viſum eſt ad res Geometricas intelligendas: Nunc in hoc decimo libro aggreditur ad diſputationem linearum commenſurabilium, & incommenſurabilium, quarum cauſa numerorum tractationem ab eo ſuſceptam eſſe ſuperius diximus. Nam ſine cognitione harum linearum compiures magnitudines cùm ſolidæ tum planæ, neq; perfectè intelligi poſſunt, neq; cùm res tulerit, in opus atq; vſum conferri; propterea quòd plerunque latera earum incommenſurabilia ſunt: Id quod & de planis ipſis atq; ſolidis dici poteſt, quippe cùm & hæc incommenſurabilia ſæpenumero exiſtant, vt ad finem huius libri demonſtrabimus. Quoniam verò hic liber multis obſtructus eſt difficultatibus, ob linearum, de quibus diſſerit, obſcuritatem; omnes neruos induſtriæ meæ in eo contendam, vt ea hactenus ab Euclide ſunt demonſtrata, ita planus reddatur, ac facilis, vt ſine multo labore à quouis, qui præcedentium tamen librorum demonſtrationes rectè intellexerit, poſſit percipi. Neque enim in eorum poſſum ſententiam ire, qui putant ad eius intelligentiam eſſe neceſſariam eam partem Arithmetices, quæ de radicibus numerorum, tam rationalibus quàm irrationalibus, vt vocant, ſermonem inſtituit: Immò contra perſuaſum mihi prorſus habeo, cognitionem perfectam illius partis Arithmetices pendere ex hoc 10. lib. tantum abeſt, vt exiſtimem, tractationem illam radicum requiri, vt facilius hic liber intelligatur. Non negarim tamen, eum, qui rationem radicum atq; calculum tenuerit, maiore cum voluptate hunc librum percepturum, quàm qui illarum omnino ſit ignarus, propterea quòd ille demonſtrationes ad vſum poteſt reuocare, hic verò nullo modo. Hac enim de cauſa & nos priora decem theoremata ſecundi lib. numeris accommodauimus, vt oblectationem animi maiorem ex eo ſtudioſus caperet, ac fructum; non autem vt ea, quæ in illo demonſtrantur, facilius arbitraremur intelligi poſſe ex numeris. Cur ergo (dicet aliquis) vt in eo libro, non perinde etiam in hoc exempla numerorum, quibus Algebra vtitur, vſurpaſti, vt ea res & maiori voluptati eſſet, & cõmodo legentibus? In promptu cauſa eſt, quare id omittendum putauimus. Cùm enim perpauci ſint hoc tempore, quibus celeberrima illa Algebræ ars ſit cognita, videbantur numeri illi, ſi adhiberentur, tenebras potius offuſuri, quàm lucis aliquid maioris daturi, & perſpicuitatis; quippe ita ingenia ſtudioſorum pro adiumento, ac luce, quam his noſtris commentarijs afferre laboramus, plus caperent incommodi, minus q; demonſtrationes ipſas perciperent: Id quod in lib. 2. accidere non potuit, cùm additionem numerorum integrorum, ac multiplicationem, quæ ſola neceſſaria ibi fuerunt, nemo ferè ſit, qui ignoret. Huc accedit, quòd qui in Algebra ſunt verſati, facili negotio demõſtrationes huius lib. ad numeros accommodare poſſunt per ſe ipſos, quando volunt, præſertim cùm iam hoc ipſum non multò antè à Michaële Stifelio nobili Arithmetico in 2. lib. operis, quod de Arithmetica integra inſcripſit, diligenter effectum ſit, & accuratè.



ITAQVE, vt ad inſtitutum redeamus, inchoans rem ipſam Euclides, more ſuo, ab explicationibus vocabulorum, quibus vtendum erit; declarat primo loco, quænam magnitudines dicantur commenſurabiles, definiens eas eſſe, quas eadem menſura metitur. Vt duæ magnitudines A, B, quas eadem menſura C, metitur, (metitur enim C, ipſam A, quater repetita, & ter ſumpta ipſam B,) dicuntur commenſurabiles. Eodem modo commenſurabiles ſunt, linea 20. palmorum & linea 13. palmorum; quia eas linea tam vnius palmi, quàm dimidiati palmi, quàm tertiæ partis vnius palmi, &c. metitur. Similiter commenſurabiles dicuntur ſuperficies, quas vna, & eadem ſuperficies metitur; Item corpora, ſolidáue commenſurabilia, quæ metitur idem corpus, ſen ſolidum.

II.

INCOMMENSVRABILES autem, quarum nullam communem menſuram contingit reperiri.

TALES magnitudines ſunt, diameter quadrati cuiuſuis, & latus eiuſdem; quoniã nullam habent menſuram communem, vt propoſitione vltima huius libri demonſtrabitur ab Euclide. Sunt etiam plurimæ aliæ lineæ incommenſurabiles, quarum ſcilicet menſurabilium quæ communis dari nullo modo poteſt, quarum multas hoc libro Geometra explicat, docetq; quanam ratione inueniri poſſint. Rurſus, ſuperficies dicentur incommenſurabiles, & ſolida incommenſurabilia, quæ nullam admittunt menſuram communem.

III.

RECTAE lineæ potentia commenſurabiles ſunt, cùm quadrata earum idem ſpatium metitur.

LINEARVM rectarum quædam commenſurabiles ſunt longitudine, quas nimirũ alia linea, tanquam menſura communis, metitur; cuiuſmodi ſunt illæ, quas in expoſitione defin. 1. commenſurabiles ſimpliciter diximus: quædam verò longitudine incommenſurabiles, quas ſcilicet nulla linea, tanquam menſura communis, metitur. Rurſus linearum, quæ ſunt incommenſurabiles longitudine, aliæ ſunt eiuſmodi, vt earum quadrata ſint commenſurabilia; aliæ verò ita ſe habent, vt & quadrata earum incommenſurabilia ſint. Lineæ ergo illæ longitudine incommenſurabiles, quarum quadrata ſunt commenſurabilia, appellantur hic ab Euclide potentia commenſurabiles; quia videlicet ſecundùm earum potentias; hoc eſt, ſecundùm earum quadrata (eſt enim, vt ad propoſ. 4. huius. dictum, potentia cuiuſque lineæ, quadratum ab ea deſcriptum) commenſurabiles ſunt, licet ipſæ ſecundùm longitudinem ſint prorſus incommenſurabiles.

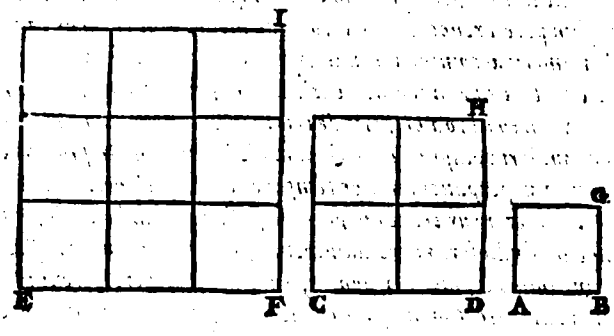
QVOD ſi quis roget, cur Euclides definierit ſeorſum lineas potentia commenſurabiles, non autem commenſurabiles longitudine, reſpondendum eſt, lineas longitudine commenſurabiles ſatis ſuperq; eſſe explicatas in definitione commenſurabilium magnitudinum, cùm huiuſmodi lineas vna cõmunis menſura metiatur, vt dictum eſt: At verò quoniam lineas potentia commenſurabiles nulla communis menſura metiri poteſt, ſed tantummodò earum quadrata idem ſpacium metitur, ideò neceſſarium omnino fuit, vt ea propria definitione explicarentur.

IIII.

INCOMMENSVRABILES autem, cùm quadratis earum nullum ſpacium, quod ſit communis eorum menſura, contingit reperiri.

LINEAS reliquas longitudine incommenſurabiles, quarũ etiam quadrata incommenſurabilia ſunt, vocat incommenſurabiles potentia.

HABENT autem lineæ commenſurabiles tam longitudine, q̃ potentia, hãc quaſi conuenientiam inter ſe, & connexionem, vt linea longitudine commenſurabiles, ſint etiam commenſurabiles potentia, ita vt nulla linea dari poſſint commenſurabiles longitudine, quin earum quadrata commenſurabilia quoq; ſint; quoniam quadratũ ex communi earum menſura deſcriptum metitur tanquam menſura communis earum quadrata, vt in ſubiecta figura apparet: ſicut enim recta A B, metitur rectas C D, E F, ita quoq; quadratum A G, quadrata C H, E I, metitur: Non autem, vt omnes lineæ potentia commenſurabiles, ſint etiam commenſurabiles longitudine: multæ enim lineæ ſunt potentia commenſurabiles; hoc eſt, quadrata habent commenſurabilia, quæ tamen longitudine omnino incommẽſurabiles ſunt, vt in hoc libro demonſtrabitur. Rurſus inter lineas incommenſurabiles tam longitudine, quàm potentia, huiuſmodi colligatio reperitur, vt omnes lineæ potentia incommenſurabiles ſint etiã incommenſurabiles longitudine; Non autem contrà, vt omnes lineæ longitudine incommenſurabiles, ſint quoq; incommenſurabiles potentia, cùm multæ lineæ reperiantur longitudine inter ſe incommenſurabiles, cùm tamen potentia, hoc eſt, ſecundùm earum quadrata, commenſurabiles exiſtant. Quæ quidem omnia perſpicua erunt ex corollario propoſ. 9. huius libri.



V.

HIS poſitis, oſtenditur, cuicunque rectæ propoſitæ rectas lineas multitudine infinitas & commenſurabiles eſſe, & incommenſurabiles: alias quidẽ longitudine, & potentia; alias verò potẽtia ſolùm. Vocetur autẽ propoſita recta linea, Rationalis.

SI proponatur aliqua recta linea nota magnitudinis, erunt omnium aliarũ, quæ cum ipſa comparantur, quædam illi commenſurabiles longitudine ac potentia, quædam verò potentia tantùm: Item quædam illi incommenſu-

commensurabiles longitudine tantùm; quædam verò longitudine, & potentia, vt hoc 10. libro demonstrabitur variis in locis. Non enim vult Euclides, ex dictis ostendi, seu colligi, (quanquam eius verba hoc sonare videantur) hæc ita se habere: sed solùm indicat nobis, & innuit quodam modo, linearum quasdam dici posse propositæ rectæ lineæ commensurabiles longitudine, & potentia, quasdam autẽ potentia tantùm, &c. Quod quidem ex dictis nullo modo sequitur, sed demonstrabitur in sequentibus, vt diximus.

LINEA autem illa proposita, ratione cuius aliæ commensurabiles sunt, vel incommensurabiles, dicitur Græcis ῥητὴ; Latinis verò Rationalis; quoniam ea ponitur semper certa, & nota, aliæ verò cum illa comparatæ non semper notæ sunt, quamuis singulæ seorsum sumptæ existant certæ quoque, ac notæ; cùm quælibet in quotcunque partes æquales possit diuidi.

VI.

ET huic commensurabiles siue longitudine & potentia, siue potentia tantùm, Rationales.

DOCET lineas alias illi, quæ Rationalis dicitur, commensurabiles quomodocunque, appellari quoq; Rationales; non quidem ex positione, vt illa, sed quia cum illa comparatæ reperiuntur ei commensurabiles vel longitudine & potentia, vel potentia tantùm.

ITAQVE ex sententia Euclidis, radix quadrata huius numeri 20. vel 1000. &c. Seu quod idem est, linea recta, cuius quadratum est 20. vel 1000. &c. dicitur Rationalis; cùm potentia sit commensurabilis lineæ Rationali, (est enim tam numerus 20, quàm 1000. commensurabilis numero cuilibet quadrato, vt 16. vel 100. &c.) quamuis longitudine sit eidem incommensurabilis. Decipiuntur ergo Arithmetici non pauci, qui idcirco eam Irrationalem vocant, quòd numero non possit exprimi.

VII.

HVIC verò incommensurabiles, Irrationales vocentur.

QVONIAM in antecedenti definitione Euclides lineas illas, quæ longitudine & potentia, vel quæ potentia tantùm sunt commensurabiles propositæ rectæ Rationali, appellauit Rationales, liquidò constat, eum hic eas dicere Irrationales, quæ propositæ rectæ Rationali incommensurabiles sunt vtroque modo; longitudine videlicet & potentia; non autem longitudine tantùm. Ex quibus etiam manifestum est, radicem quadratam huius numeri 20. vel 1000. &c. seu (quod idem est) lineam, cuius quadratum est 20. vel 1000. &c. non posse appellari Irrationalem, cùm non sit longitudine, & potentia, sed longitudine tantùm Rationali lineæ propositæ incommensurabilis.

VIII.

ET quadratum, quod à proposita recta fit dicatur Rationale.

QVEMADMODVM linea illa, quæ certa ponitur, ac nota, Rationalis dicitur: Ita quoq; quadratum ab ea descriptum, Rationale vocatur, quia & ipsum certum est, ac notum, comparationeq; illius aliæ superficies, commensurabiles, incommensurabilésue dicuntur.

IX.

ET huic commensurabilia quidem, Rationalia.

OMNES planæ superficies quadrato Rationalis lineæ propositæ commensurabiles, Rationales dicuntur; non quidem expositione, vt illud, sed quia cum eo collatæ reperiuntur ei vel commensurabiles, vel incommensurabiles: quemadmodum etiam lineæ, quæ Rationali lineæ quomodocunq; commensurabiles sunt, Rationales appellantur.

QVONIAM verò lineæ potentes ipsa spatia commensurabilia quadrato Rationalis lineæ propositæ, sunt saltem potentia commensurabiles lineæ Rationali, ex 3. definitione; perspicuum est, ipsas quoque appellari iuxta definitionem 6. Rationales.

X.

HVIC verò incommensurabilia, Irrationalia dicantur.

NON aliter superficies plana quadrato à Rationali linea descripto incommensurabiles, Irrationales vocantur, ac linea, quæ Rationali propositæ prorsus incommensurabiles sunt, Irrationales sunt dictæ.

XI.

ET rectæ, quæ ipsa possunt, Irrationales: siquidem ea quadrata sint, ipsa latera; si verò alia quælibet rectilinea, rectæ, quæ spatiis incommensurabilibus æqualia quadrata describunt.

VOCAT lineas, quæ possunt spatia quadrato Rationalis lineæ incommensurabilia, Irrationales; quemadmodum & ipsa spatia dixit Irrationalia: Ita vt si incommensurabilia spatia fuerint quidem quadrata, latera ipsorum dicantur Irrationalia; si verò non fuerint quadrata, sed aliæ quæcunque figuræ rectilineæ, appellentur rectæ, quæ describunt quadratis qualia illis spatia fuerint incommensurabilibus, Irrationales.

COLLIGITVR autem, lineas potentes spatia incommensurabilia quadrato Rationalis lineæ, dici debere Irrationales, ex 7. defin. quemadmodum suprà ex 6. defin. collegimus, lineas, quæ possunt spatia commensurabilia eidem quadrato Rationalis lineæ, appellari debere Rationales. Nam lineæ, quæ possunt illa spatia incommensurabilia, sunt potentia incommensurabiles lineæ Rationali, ex 4. defin. Cùm ergo omnes lineæ potentia incommensurabiles, sint quoq; incommensurabiles longitudine, vt ad defin. 4. diximus, demonstrabiturq; in coroll. propos. 9. manifestum est, ex 7. defin. lineas illas, quæ possunt spatia incommensurabilia quadrato Rationalis lineæ, dici Irrationales.

PRAETEREVNDVM quoque non est, Euclidem & veteres Geometras has voces: longitudine & potentia: atque potentia tantùm: *apponere ferè semper vocibus istis:* commensurabiles, ac incommensurabiles: *Vix autem, & rarissimè his:* Rationales, & Irrationales: *Rectè enim dicuntur lineæ commensurabiles longitudine & potentia, vel potentia tantùm; Item incommensurabiles longitudine & potentia, vel longitudine tantùm: Minus verò rectè Rationales longitudine & potentia, vel potentia tantùm, aut Irrationales longitudine & potentia, vel longitudine tantùm. Quod quidem, quoniam Campanus non animaduertit, occasionem multis præbuit, vt variè & obscurè in hoc 10. lib. de lineis commensurabilibus, incommensurabilibusq;, nec non Rationalibus, Irrationabilibusq; sint locuti.*

CAETERVM his definitionibus adiungemus postulatum vnum, & nonnulla pronunciata, quorum vsus in hoc libro reperitur.

POSTVLATVM, SIVE PETITIO.

POSTVLETVR, quamlibet magnitudinem toties posse multiplicari, donec quamlibet magnitudinem eiusdem generis excedat.

PROPOSITIS enim duabus magnitudinibus eiusdem generis inæqualibus, cùm maior infinita nõ sit, minor verò infinitè possit augeri; perspicuum est, minorem toties posse multiplicari, donec superet maiorem. Constat hoc etiam ex ijs, quæ in defin. 5. lib. 5. scripsimus. Ibi enim eas magnitudines diximus tum demum eiusdem magnitudinis, cùm alterutra ita potest multiplicari, vt alteram excedat. Atque ex huius conditionis defectu, angulum rectilineum, & angulum contingentiæ, diuersi esse generis, docuimus.

AXIOMATA, SIVE PRONVNCIATA.

I.

MAGNITVDO quotcunque magnitudines metiens, compositam quoque ex ipsis metitur.

II.

MAGNITVDO quamcunque magnitudinem metiens, metitur quoque omnem magnitudinem, quam illa metitur.

III.

MAGNITVDO metiens totam magnitudinẽ, & ablatam, metitur & reliquã.

HAEC axiomata, vt ad numeros pertinent, ostensa sunt à nobis in vltimis tribus pronunciatis libri 7. Quare cùm sit eadem ratio in magnitudinibus, non est, quòd frustra eorum demonstrationes hic repetamus, præsertim quòd ad verbum huc possint transferri, mutata solùm voce numeri in vocem magnitudinis.

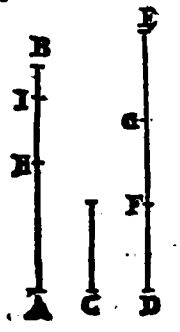
CAETERVM quia hoc in libro discedendum nobis fuit à numero, quem Theon in propositionibus Euclidis sequitur, vt ad propos. 13. dicemus, quemadmodum & in omnibus seriem Campani negleximus; vt docuimus ad initium primi libri; curauimus vt duplex numerus in margine è regione propositionum apponeretur, quorum superior ordinem Theonis, inferior autem Campani seriem demonstraret. Quòd si vnus tantùm numerus reperiatur in margine, nullam tunc esse inter Theonem & Campanum discrepantiam, intelligas, quod ad numerum propositionum attinet.

1. ## THEOR. 1. PROPOS. 1.

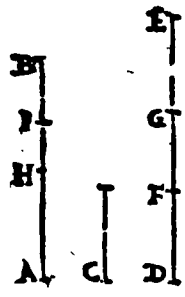
DVABVS magnitudinibus inæqualibus propositis, si à maiore auferatur maius quàm dimidium; & ab eo, quod reliquum est, rursus detrahatur maius quàm dimidium; & hoc semper fiat: Relinquetur tandem quædam magnitudo, quæ minor erit proposita minore magnitudine.

PROPOSITAE sunt duæ magnitudines inæquales AB, & C, quarum AB, sit maior. Dico si ex AB, auferatur maius quàm dimidium; & ab eo, quod reliquũ est, rursum maius quàm dimidium atque hoc semper fiat: relinqui tandem magnitudinem quandam, quæ minor sit q̃ C. Multiplicetur enim C, toties, donec magnitudo facta DE, maior sit q̃ AB, ita vt DE, sit multiplex ipsius C, proximè

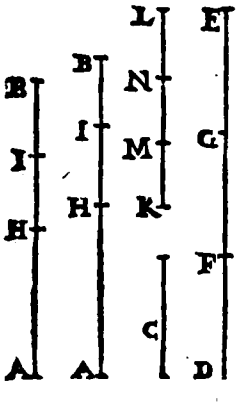
proximè maior quàm AB. Diuisa autem DE, in partes DF, FG, GE, ipsi C, æquales, detrahatur



ex AB, maius quàm dimidiũ AH, & ex reliqua HB, maius quàm dimidium HI; atque hoc semper fiat, donec partes ipsius AB, multitudine æquales sint partibus ipsius DE. Sint ergo iam partes AH, HI, IB, tot, quot sunt ipsæ DF, FG, GE. Quia igitur DE, maior est quàm AB; At ex DE, ablatum est DF, minus quàm dimidium, vel certè dimidium, si DE, ipsius C, sit duplex; ex AB, verò maius quàm dimidium AH: Erit reliquum FE, reliquo HB, maius. (Cùm enim DE, maior sit quàm AB; si ex DE, dimidium auferretur, necnon & ex AB, dimidium, esset quoque reliquum ex DE, maius reliquo ex AB. Si ergo ex DE, auferatur minus quàm dimidium, vel certè dimidium, & ex AB, maius quàm dimidium; erit reliquum ex DE, maius reliquo ex AB.) Rursus quoniam FE, maior est quàm HB, auferturq; ex FE, dimidium FG, vel certè minus quàm dimidium, si FE, maior sit quàm duplex ipsius C; at ex HB, maius quàm dimidiũ HI; erit eodem modo reliquum GE, maius reliquo IB: atque ita procedẽdo ostendemus tandem postremam partem ipsius DE, qualis hîc est GE, maiorem esse postrema parte ipsius AB, qualis hîc est IB. Dum ergo GE, postrema pars ipsius DE, æqualis sit ipsi C; erit quoq; C, maior quàm IB, postrema pars ipsius AB. Relicta igitur est IB, magnitudo, quæ minor est magnitudine C. Quare duabus magnitudinibus inæqualibus ꝓpositis, si à maiori auferatur maius, &c. Quod erat demonstrandum.



Idem demonstrabitur, si ex AB, auferatur dimidium AH, & ex reliquo HB, rursus dimidium HI, &c. Nam eadem ratione erit reliquum FE, maius reliquo HB, nec non & reliquum GE, maius reliquo IB; cùm ex maiori DE, ablatum sit DF, minus quàm dimidium, vel certè dimidium; & ex minori AB, dimidium AH, &c.



Aliter. Facta cõstructione, vt prius, sumatur KL, ita multiplex ipsius IB, vt est multiplex DE, ipsius C. Diuisa ergo KL, in partes KM, MN, NL, ipsi IB, æquales, erunt tot partes in KL, quot in DE. Quoniam verò AH, maior est quàm HB, vel certè illi æqualis, si ablatum sit dimidium ex AB; & HB, maior est, quàm IB; erit quoque AH, maior quàm IB, hoc est, quàm KM. Rursus quia HI, maior est quàm IB, vel certè illi æqualis; est autem IB, ipsi MN, æqualis: erit quoq; HI, maior quàm MN, vel illi æqualis; atque adeò tota AI, maior, quàm tota KN. Additis ergo æqualibus IB, NL, erit tota AB, maior quàm tota KL: Est autem DE, maior adhuc, quàm AB. Multò ergo maior erit DE, quàm KL. Quare cùm sit, vt DE, ad C, ita KL ad IB; (Sumpta enim fuit KL, ipsius IB, tam multiplex, quàm multiplex est DE, ipsius C,) [a] erit quoque C, maior quàm IB. Ac proinde relicta est IB, minor quàm C. Quod erat demonstrandum. [a] 14. quinti.

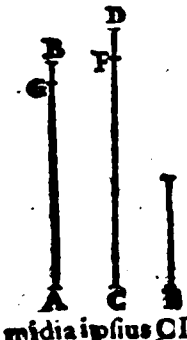
SCHOLIVM.

Lvce clarius ex demonstratione huius Theorematis apparet, duas quantitates inæquales propositas debere esse tales, vt minor multiplicata, tandem maiorem possit superare. Id quod ad propos. 16. lib. 3. monuimus, cùm de angulo contactus contra Iacobum Peletarium ageremus.

THEOR. 2. PROPOS. 2.

2.

Si duabus magnitudinibus inæqualibus propositis, detrahatur semper minor de maiore, alterna quadam detractione, & reliqua minimè præcedentem metiatur: Incommensurabiles erunt ipsæ magnitudines.



Dvabvs inæqualibus magnitudinibus propositis AB, CD, quarum minor AB, detrahatur ex maiore CD, & reliqua huius ex AB; & sic deinceps, alterna quadam detractione, auferatur semper minor de maiore, & nunquam reliqua metiatur præcedentem. Dico magnitudines AB, CD, incommensurabiles esse. Si enim non sunt incommensurabiles, metietur eas aliqua mẽsura communis. Metiatur eas si fieri potest, magnitudo E, quæ vel æqualis erit ipsi AB, vel minor. Detracta autem AB, ex CD, quoties potest, relinquat FD, se minorem, ita vt AB, ipsam CF, metiatur. Rursus detracta FD, ex AB, relinquat se minorem GB, ita vt FD, metiatur ipsam AG; atque hoc semper fiat. [b] Relinquetur ergo tandem ex CD, vel AB, magnitudo quædam minor quàm E. (Quoniam cùm AB, ablata ex CD, relinquat FD, se minorem, erit CF, ablata maior, quàm dimidia ipsius CD; aliàs si esset dimidia, vel minor quã dimidia, posset adhuc AB, detrahi ex CD. Eodem modo erit AG, ablata ex AB, maior quàm dimidia ipsius AB: Et sic deinceps semper fiet. [b] 1. decimi.

a 1. decimi. Quare cùm ſemper auferatur maius, quàm dimidium, [a] relinquetur tandem magnitudo quædam minor quàm E.) Sit ergo iam relicta GB, minor quàm E. Quoniam igitur E, metitur AB; & AB; metitur CF; [b] metietur quoque E, ipſam CF: Metitur autem E, & totam CD. [c] Igitur E, reliquam quoque FD, metietur. At FD, metitur AG: [d] quare & E, ipſam AG, metietur. Metitur autem E, & totam AB: [e] ergo E, reliquam etiam GB, metietur, maior minorem. Quod eſt abſurdum. Non ergo AB, CD, magnitudines aliqua magnitudo metietur. Quare incommenſurabiles ſunt. Si igitur duabus magnitudinibus inæqualibus propoſitis, &c. Quod erat oſtendendum.

b 2. pron. c 3. pron. d 2. pron. e 3. pron.

SCHOLIVM.

Hoc Theorema conuertemus ad hunc modum.

Si duabus magnitudinibus incommẽſurabilibus propoſitis, detrahatur ſemper minor de maiore, alterna quadam detractione: Nunquam reliqua præcedentem metietur.



Sint incommenſurabiles magnitudines AB, CD, detrahaturq; minor AB, ex CD, & reliqua ſit ED. Item ED, ex AB, auferatur, relinquaturq; FB, & ſic deinceps. Dico in hac alterna detractione nunquam reliquam metiri præcedentem. Si enim fieri poteſt, metiatur FB, præcedentem ED. a 2. pron. *Quoniam igitur FB, metitur ED; & ED, metitur AF;* [a] *metietur quoque FB, ipſam AF: Metitur autem & ſe ipſam:* b 1. pron. [b] *Igitur FB, & totam AB, metietur: Metitur autem AB, ipſam CE.* c 2. pron. [c] *Igitur & FB, ipſam CE, metietur. Ponitur autem & FB, metiri ipſam ED:* d 1. pron. [d] *Igitur & FB, totam CD, metietur. Oſtenſa eſt autem & FB, ipſam AB, metiri. Quare FB, vtramq; AB, CD, metitur, quod eſt abſurdum. ponuntur enim AB, CD, incommenſurabiles. Nunquam ergo magnitudo aliqua reliqua præcedentem magnitudinem metitur. Quod eſt propoſitum.*

Similiter & hoc demonſtrabimus.

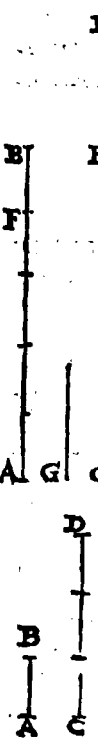
Si duabus magnitudinibus commenſurabilibus propoſitis, detrahatur ſemper minor de maiore, alterna quadã detractione: Metietur quædã reliqua præcedentẽ.

Nam ſi nunquam reliqua metietur præcedentem, eſſent propoſitæ magnitudines incõmenſurabiles, vt demonſtrauit hoc theoremate Euclides. Quod eſt abſurdũ. ponuntur enim cõmenſurabiles.

Ita quæ facile ex his dignoſcemus, an duæ quæcunque magnitudines propoſitæ ſint commenſurabiles, nec ne. Nam detracta ſemper minore de maiore, alterna quadam detractione, ſi reliqua quæpiam metiatur præcedentem; erunt magnitudines propoſitæ commenſurabiles, cùm illa eadem reliqua metiatur vtramque magnitudinem propoſitam, vt conſtat ex demonſtratione primi theorematis huius ſcholij. Ex eo enim, quòd reliqua magnitudo FB, metiri dicebatur præcedentem ED, oſtenſum eſt, eandem reliquam FB, metiri vtramque magnitudinem AB, CD. Si verò nunquam reliqua magnitudo præcedentem metiatur, propoſitæ magnitudines incommenſurabiles erunt, vt Euclides hoc loco demonſtrauit.

3. PROBL. I. PROPOS. 3.

DVABVS magnitudinibus commenſurabilibus datis, maximam earum communem menſuram inuenire.



DATAE duæ magnitudines commenſurabiles ſint AB, CD, quarum oporteat maximam menſuram inuenire. Quoniam AB, CD, commenſurabiles ſunt, fit vt ſi minor AB, ex maiore CD, detracta, quoties poteſt, relinquat ED; & ED, detracta ex AB, quoties poteſt, relinquat FB, & hoc ſemper fiat alterna quadam detractione: tandem reliqua quæpiam magnitudo præcedentem metiatur, per 2. theor. præcedentis ſcholij. Metiatur iam FB, reliqua præcedentem ED. Dico FB, eſſe maximam mẽſuram communem magnitudinum AB, CD. Quòd enim vtramque metiatur, ita oſtendemus. Quoniam FB, metitur ED, & ED, metitur AF; [a] metietur quoque FB, ipſam AF: At metitur FB, & ſe ipſam. [b] Igitur FB, totam AB, metietur; [c] atque adeò & ipſam CE, quam AB, metitur. Cùm ergo, & ipſam ED, metiatur; [d] metietur quoq; FB, totam CD. Metitur ergo FB, vtramque AB, CD. Quare vtriuſque AB, CD, communis menſura eſt FB.

a 2. pron. b 1. pron. c 2. pron. d 1. pron.

QVOD autem FB, ſit maxima earum communis menſura, ita probabimus. Si non eſt maxima, erit aliqua alia communis earum menſura, maior quàm FB. Sit ergo, ſi fieri poteſt, G, illarum communis menſura, maior quàm FB. Quia igitur G, metitur vtramque AB, CD; metitur autem & AB, ipſam CE; [e] metietur quoq; G, ipſam CE: At metitur quoq; totam CD. [f] Igitur G, reliquam quoque ED, metietur: Metitur autem ED, ipſam AF. [g] Ergo & G, ipſam AF, metietur. Quare cùm G, totam etiam AB, metiatur; [h] metietur quoque eadem G, reliquam FB, maior minorem. Quod eſt abſurdum. Non ergo maior magnitudo, quàm FB, communis menſura eſt ipſarum AB, CD. Quare FB, maxima earum communis menſura eſt.

e 2. pron. f 3. pron. g 2. pron. h 3. pron.

QVOD ſi minor magnitudo AB, metiatur maiorem CD, ita vt detracta ex CD, nihil relinquat; erit ipſa AB, ambarum maxima menſura communis: cùm & ſe ipſam metiatur. Duabus ergo magnitudinibus commenſurabilibus datis, &c. Quod faciendum erat.

COROL.

COROLLARIVM.

Ex hoc manifestum est, quòd magnitudo metiens duas magnitudines, metitur & maximam earum mensuram communem.

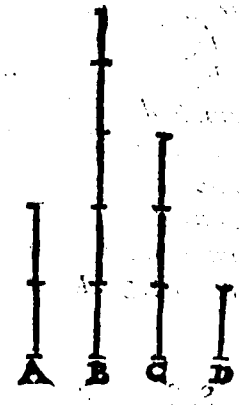
ELICITVR *hoc ex ea parte demonstrationis, qua ostensum est F B, esse maximam mensuram communem ipsarum A B, C D. Demonstratum enim est ibi, magnitudinem G, si metiatur magnitudines A B, C D, metiri quoque maximam mensuram F B. Eademq; est ratio de cæteris.*

SCHOLIVM.

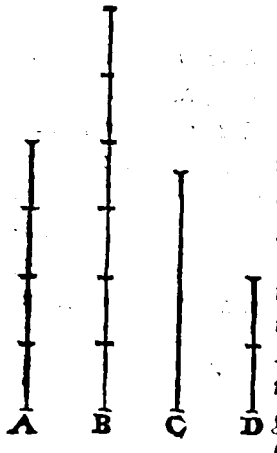
Ex his, quæ dicta sunt, non erit difficile considerare, an quotlibet magnitudines propositæ sint cõmensurabiles, nec ne. Sint enim tres magnitudines A, B, C. Primùm experior per ea, quæ ad propos. 2. huius lib. docuimus, an duæ A, & B, commensurabiles sint, an non. Quæ si fuerint incommensurabiles, perspicuum est, omnes tres A, B, C, esse incommensurabiles, quòd nullam habere possint communem mensuram, propter incommensurabiles magnitudines A, & B.



Si verò A, & B, fuerint commensurabiles, sit earum maxima communis mensura inuenta D; quæ si metiatur quoq; magnitudinem C, manifestum est, tres magnitudines A, B, C, commensurabiles esse, cùm habeant communem mensuram D.



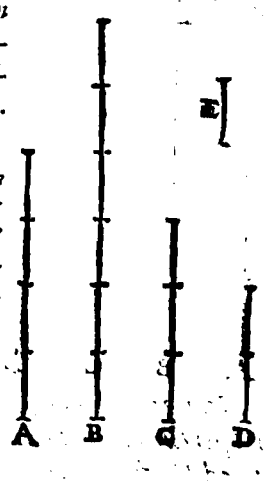
Quod si D, maxima mensura magnitudinum A, & B, non metiatur C; erunt C, & D, vel commensurabiles, vel non. Si sunt incommensurabiles, erunt quoq; omnes tres A, B, C, incommensurabiles. Si enim credantur esse commensurabiles, metietur earum maxima cõmunis mensura ipsam D, maximam mẽsuram magnitudinum A, & B, per coroll. huius propos. Cùm ergo eadem illa mensura metiatur quoque C, non erunt C, & D, incommensurabiles. Quod est contra hypothesim.



Si verò C, & D, sunt commensurabiles, erunt quoq; tres A, B, C, commensurabiles. [a] *Inuenta enim E, maxima mensura ipsarum C, & D; cùm E, metiatur D; & D, ipsas A, & B;* [b] *metietur quoq; E, ipsas A, & B. Quare cùm eadem E, metiatur quoq; C, metietur E, tres magnitudines A, B, C; Ac propterea commensurabiles sunt. Quod est propositum.*

a 3. decimi.

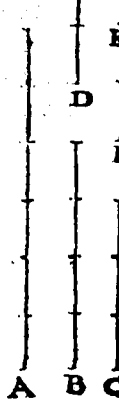
b 2. pron.



SIMILITER explorabimus, an plures datæ magnitudines, quàm tres, sint commensurabiles, nec ne. Nam si datæ sint quatuor, experiemur id primùm in tribus; si quinque, in quatuor, &c. Reliqua autem perficiemus, vt de tribus magnitudinibus est dictum.

PROBL. 2. PROPOS. 4.

TRIBVS magnitudinibus commensurabilibus datis, maximam earum mensuram communem inuenire.



SINT datæ tres magnitudines commensurabiles A, B, C, quarum maximam mensuram inuenire oporteat. [a] Sit D, maxima mensura ipsarum A, B, inuenta. Si ergo D, metiatur quoque C, perspicuum est D, maximam esse mensuram omnium trium A, B, C. Nam si maior magnitudo quàm D, metiri dicatur magnitudines A, B, C; metietur eadem, per coroll. propos. 3. huius lib. maximam mensuram ipsarum A, B, nempe ipsam D, maior magnitudo minorem. quod fieri non potest. Si verò D, non metiatur C, erunt saltem D, C, commensurabiles. Cùm enim A, B, C, sint commensurabiles, metietur quælibet mensura earum communis ipsam D, maximam mensuram ipsarum A, B, per coroll. præcedentis propos. Cùm ergo eadem illa mensura metiatur quoque ipsam C; erunt D, & C, commensurabiles. [b] Sit igitur E, maxima mensura ipsarum inuenta. Dico E, maximam mensuram esse datarum magnitudinum A, B, C. Quòd enim sit communis earum mensura, ita planum fiet. Quia E, metitur D, & C; & D, metitur A, & B; [c] metietur quoque E, ipsas A, & B. Metitur autem & ipsam C: Igitur E, mensura est communis ipsarum A, B, C, quemadmodum asseruimus.

a 3. decimi.

b 3. decimi.

c 2. pron.

QVOD autem E, sit earum maxima mensura, hoc modo confirmari potest. Si non est maxima, sit F, maior quàm E, si fieri potest, earum mensura communis. Quoniam igitur F, metitur A, & B; metietur quoque earum maximam mensuram D, per coroll.

præcedentis propoſ. Metitur autem & C: Igitur F, metiens D, & C, metietur quoque earum menſuram maximam E, ex eodem coroll. maior magnitudo minorem. Quod eſt abſurdum. Non ergo maior magnitudo q̃ E, magnitudines A, B, C, metitur; Ac propterea E, maxima eſt earũ cõmunis menſura. Quam ob rem tribus magnitudinib. cõmenſurabilibus datis, &c. Quod erat faciendum.

COROLLARIVM.

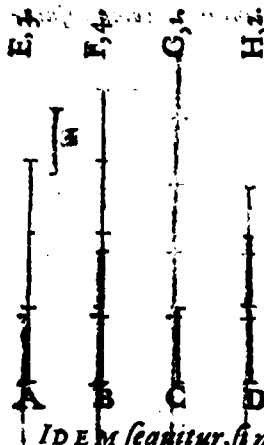
APERTE quoque ex hoc colligitur, quòd magnitudo metiens tres magnitudines, metitur quoque maximam earum menſuram communem.

INFERTVR autem hoc ex vltima parte demonſtrationis. Oſtenſum enim eſt ibi, magnitudinem F, ſi metiatur ipſas A, B, C, metiri quoq; E, maximam illarum communem menſuram. Eadem q̃ de cæteris eſt ratio.

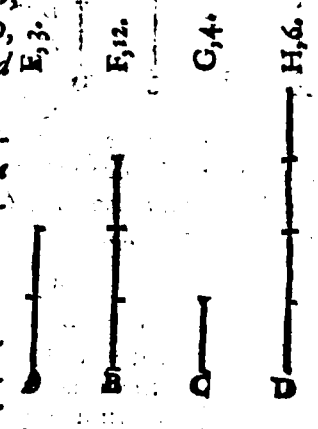
SIMILI modo, plurib⁹ magnitudinibus commenſurabilibus datis, quàm tribus, maximam earum menſuram communem inueniemus; locumq; habebit hoc idem corollarium. Nam ſi datæ magnitudines fuerint quatuor, inuenienda erit primùm maxima menſura communis trium magnitudinum; Si quinq;, accipienda erit quatuor magnitudinum menſura maxima, &c. Reliqua verò omnia abſoluenda erũt, vt de tribus magnitudinibus eſt dictum.

LEMMA.

SI ſint quotcunq; magnitudines, & totidem etiam numeri, qui bini in eadem ratione ſumantur, in qua binæ magnitudines: Et ex æqualitate in eadem ratiõne erunt magnitudines & numeri.



SINT quotcunq; magnitudines A, B, C, D, in eiſdem rationibus, in quibus totidem numeri E, F, G, H: Vt quidem A, ad B, ita E, ad F; & vt B, ad C, ita F, ad G; & vt C, ad D, ita G, ad H. Dico ex æquo eſſe, vt A, ad D, ita E, ad H. Quoniam enim ex iis, quæ ad defin. 5. lib. 6. à nobis demonſtrata ſunt, tam proportio A, ad D, componitur ex proportionibus A, ad B; B, ad C; & C, ad D; quàm proportio E, ad H, ex proportionibus E, ad F; F, ad G; & G, ad H; perſpicuum eſt, cùm proportiones componẽtes proportionem A, ad D, æquales ponantur proportionibus, quæ proportionem E, ad H, componũt, & compoſitas proportiones, nempe A, ad D, & E, ad H, æquales eſſe, hoc eſt, eſſe vt A, ad D, ita E, ad H. Quod eſt propoſitum.



IDEM ſequitur, ſi magnitudinum, & numerorũ proportio fuerit perturbata, vt in hoc exemplo apparet, in quo eſt, vt A, ad B, ita G, ad H; & vt B, ad C, ita F, ad G; & vt C, ad D, ita E, ad F. Eadem enim prorſus eſt demonſtratio.

SCHOLIVM.

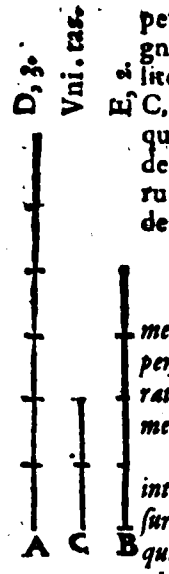
QVONIAM præcedenti lemmate & in propoſitione, quæ ſequitur, & in aliis multis, vtendum nobis erit; placuit illud hoc loco breuiter demonſtrare, cùm non facilè videatur ex demonſtratis ſequi. Nam magnitudo & numerus diuerſa genera quantitatis conſtituunt: At proportio ex æqualitate in præcedentibus libris oſtenſa, tantùm eſt in quantitatibus eiuſdem generis; In numeris quidem lib. 7. Libro verò 5. in magnitudinibus: quanquam demonſtratio in quinto lib. facta, etiam ad hoc lemma transferri poſſit, cùm omnes demonſtrationes illius libri numeris quoq; conueniant. Vel certè demonſtratio facta in 7. lib. huic eidem lemmati congruet, cùm magnitudines A, B, C, D, quæ proportiones habent eaſdem, quas numeri E, F, G, H, rationem induant numerorum.

THEOR. 3. PROPOS. 5.

COMMENSVRABILES magnitudines inter ſe rationem habent, quam numerus ad numerum.

SINT magnitudines commenſurabiles A, B. Dico eas habere proportionem inter ſe, quam numerus aliquis habet ad alium numerũ. Sit enim earum maxima menſura inuenta C: [a] Et quoties ea repetita metitur A, toties vnitas repetita metiatur numerum D; Et quoties eadem C, repetita

a 3. decimi.



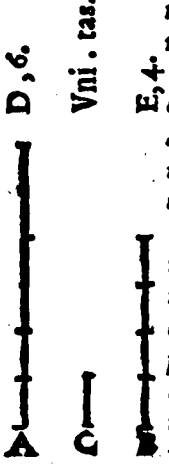
petita metitur B, toties vnitas repetita metiatur numerum E. Quoniam igitur magnitudo C, magnitudinem A, & vnitas numerum D, æquè metitur; continebit æqualiter magnitudo A, magnitudinem C, atque numerus D, vnitatem. Quare erit vt A, ad C, ita numerus D, ad vnitatem: Est autem & vt C, ad B, ita vnitas ad numerum E; quòd C, ipsam B, atque vnitas numerum E, æquè metiatur. Igitur per lemma præcedens, erit ex æquo, vt A, magnitudo ad B, magnitudinem, ita D, numerus ad E, numerum. Commensurabiles ergo magnitudines inter se rationem habent, &c. Quod erat demonstrandum.

SCHOLIVM.

CVM Euclides ad demonstrationem huius theorematis assumat maximam communem mensuram propositarum magnitudinum commensurabilium, qualis fuit C, ipsarum A, & B, perspicuum est, lineas debere esse longitudine, & ob id potentia quoque commensurabiles, vt rationem habeant inter se, quam numerus ad numerum. Ha enim sola communem recipiunt mensuram, atq; adeò in eis demonstratio locum habet.

QVOD si lineæ sint potentia tantùm commensurabiles, habebunt quidem earũ quadrata inter se rationem, quam numerus ad numerum, quia commensurabilia sunt, atq; idcirco mensuram habent communem, ipsisq; demonstratio huius theorematis conuenit: At ipsæ lineæ nequaquam, quia longitudine incommensurabiles cùm sint, communis mensura sunt expertes, ac propterea huius theorematis demonstratio in ipsas conuenire nullo modo potest.

EX demonstratione porrò eiusdem huius theorematis liquidò constat, commensurabilium magnitudinum proportionem esse eam, quam habent numeri, per quos eorum communis mensura maxima ipsas metitur. Ostensum enim est, eam habere proportionem magnitudines A, & B, quam habent numeri D, & E; per quos scilicet earum mensura communis maxima C, ipsas metitur.

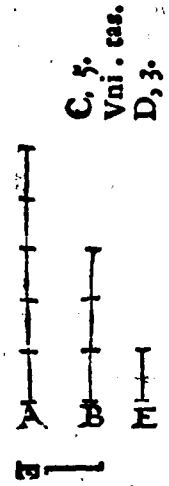


VNDE si propositis duabus magnitudinibus commensurabilibus A, & B, libeat inuenire, quam proportionem habeant in numeris; sumendi erunt duo numeri D, & E, quos vnitas æquè, ac communis magnitudinum commensurabilium A, & B, mensura maxima C, ipsas magnitudines metitur. Nam vt demonstratum est, magnitudines A, & B, proportionem habent, quam numeri D, & E.

QVOD si loco maximæ mensuræ C, sumamus aliam quamcumque communem earum mensuram, nihilominus hoc theorema demonstrabimus eodem argumento. Quamuis enim numeri D, & E, maiores inueniantur in hac posteriori demonstratione, quàm in priori; habent tamen eandem proportionem cum illis, vt ex appositæ figura apparet. Quoniam verò in priori demonstratione numeri inuenti, sunt minimi omnium eandem cum ipsis proportionem habentium; propterea fortassis Euclides in demonstratione maximam communem mensuram assumpsit, & non quamlibet, licet id necessarium non sit.

THEOR. 4. PROPOS. 6. 6.

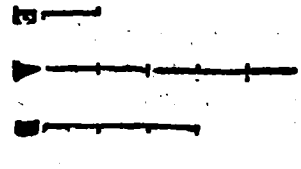
SI duæ magnitudines inter se proportionem habeant, quam numerus ad numerum: commensurabiles erunt magnitudines.



HABEANT duæ magnitudines A, B, eam proportionem, quam numeri C, D. Dico A, B, magnitudines esse commensurabiles. Quoties enim vnitas continetur in numero C, in tot æquales partes diuisa intelligatur magnitudo A, quarũ partium vni æqualis sit magnitudo E. Deinde quoties vnitas repetita metitur numerum D, toties magnitudo E, repetita metiatur magnitudinem quandam aliam F. Quoniã igitur magnitudo E, toties in A, cõtinetur, quoties vnitas in C; cõtinebit æqualiter A, ipsam E, & C, numerus vnitatẽ. Quare erit A, ad E, vt C, ad vnitatem: Est autem & vt E, ad F, ita vnitas ad D, quòd E, ipsam F, & vnitas ipsum D, æquè metiatur. Igitur per lemma propos. 4. huius lib. erit ex æquo, vt A, ad F, ita C, ad D: Erat autem etiam vt C, ad D, ita A, ad B. Igitur erit vt A, ad B, ita A, ad F; [a] ac propterea B, & F, magnitudines æquales inter se sunt. Quocirca cùm E, ipsam F, metiatur, metietur quoq; eadem E, ipsam B: Metiebatur autem & ipsam A. Igitur magnitudo E, vtramque A, & B, metitur; [b] Ac proinde A, & B, magnitudines commensurabiles inter se sunt. Si igitur duæ magnitudines inter se proportionem habeant, &c. Quod erat demonstrandum.

[a] 9. quinti.

[b] 1. defin.



ALITER. Quot sunt vnitates in C, in tot partes æquales intelligatur diuisa magnitudo A, quarum partium vni æqualis sit magnitudo E. Quoniam igitur est vt E, ad A, ita vnitas ad C, quòd E, ipsam A, & vnitas ipsum C, æquè metiantur; ponitur q; vt A, ad B, ita C, ad D; erit per idem lem-

ma ſuperius, ex æquo, vt E, ad B, ita vnitas ad D: Metitur autem vnitas numerum D. Igitur & magnitudo E, magnitudinem B, metitur: Metitur autem E, ipſam quoq; A. Igitur A, & B, habentes eandem communem menſuram E, [a] commenſurabiles ſunt. Quod eſt propoſitum.

a 1. defin.

COROLLARIVM.

Ex priori autem demonſtratione theorematis aperta eſt nobis via, qua lineam rectam inueniamus, ad quam ita ſe habeat quauis alia data recta linea, vt numerus ad numerum. Nam (repetita priori figura huius propoſitionis) ſi inuenienda ſit linea, ad quam ita ſe habeat linea data A, vt numerus C, ad numerum D; dividenda erit linea A, in tot æquales partes, quot vnitates ſunt in C; & ſumenda alia linea F, tot earundem partium, quot vnitates ſunt in D. Hoc enim ſi fiat, erit A, ad F, vt C, ad D, vt demonſtratum eſt.

C. 5. D. 3.

HINC rurſus apparet, quánam arte poſſit inueniri linea recta, ad cuius quadratum ita ſe habeat quadratum alterius datæ rectæ, vt numerus ad numerum. Si namque inuenienda ſit linea, ad cuius quadratum ita ſe habeat quadratum linea data A, vt numerus C, ad numerum D, inuenienda erit primùm linea F, ex iis, quæ modò diximus, ad quam ſic ſe habeat A, vt C, ad D: [a] *Deinde accipienda inter A, & F, media proportionalis G. Erit enim quadratum ex A, ad quadratum ex G, vt C, numerus ad numerum D. Cùm enim tres rectæ A, G, F, ſint continuè proportionales, erit ex coroll. propoſ. 20. lib. 6. vt A, ad F, atque adeò vt numerus C, ad numerum D, (cùm ſit vt A, ad F, ita C, ad D,) ſic quadratum ex A, ad quadratum ex G; cùm quadrata omnia ſint ſimilia ſimiliterq; deſcripta.*

a 13. ſexti.

A G F

SCHOLIVM.

IN hoc etiam theoremate manifeſtum eſt, lineas proportionem habentes, quam numerus ad numerum, commenſurabiles eſſe longitudine & potentia, non autem potentia tantùm; quoniam habent, vt ex demonſtratione conſtat, menſuram communem, quemadmodum & magnitudines A, & B, menſuram communem E, habere demonſtratum eſt.

7. THEOR. 5. PROPOS. 7.

INCOMMENSVRABILES magnitudines inter ſe proportionem non habent, quam numerus ad numerum.

SINT incommenſurabiles magnitudines A, & B. Dico eas proportionem non habere, quam habet numerus ad numerum. Si enim A, & B, proportionem dicatur habere, quam numerus ad numerum; [a] erunt ipſæ commenſurabiles. Quod eſt abſurdum. ponuntur enim incommenſurabiles. Non igitur A, & B, proportionem habent, quam numerus ad numerum. Quare incommenſurabiles magnitudines, &c. Quod oſtendendum erat.

a 6. decimi.

A B

SCHOLIVM.

QVOCVNQVE modo linea incommenſurabiles ſint, ſiue longitudine & potentia, ſiue longitudine tantùm, ſemper colligemus, eas proportionem non habere, quam numerus ad numerum, vt vult theorema. Nam aliàs, vt demonſtratum eſt, eſſent longitudine commenſurabiles. Quod non ponitur.

8. THEOR. 6. PROPOS. 8.

SI duæ magnitudines inter ſe proportionem non habeant, quam numerus ad numerum: Incommenſurabiles erunt magnitudines.

NON habeant magnitudines A, & B, inter ſe proportionem, quam numerus ad numerum. Dico eas incommenſurabiles eſſe. Si enim A, & B, credantur eſſe commenſurabiles; [b] erit earum proportio, quæ numeri ad numerum. Quod eſt abſurdum. ponuntur enim non habere proportionem, quam numerus ad numerum. Non igitur commenſurabiles ſunt A, & B. Quocirca ſi duæ magnitudines inter ſe proportionem nô habeant, &c. Quod erat oſtendendum.

b 5. decimi.

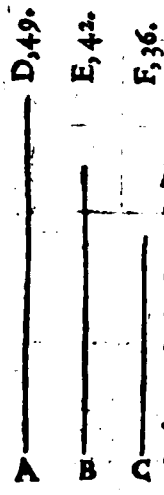
A B

SCHOLIVM.

QVOD ſi lineæ proportionem non habeant, quam numerus ad numerum, erunt ipſæ neceſſariò, ex hoc theoremate, longitudine incommenſurabiles; alioquin proportionem haberent, quam numerus ad numerum, vt ad propoſ. 5. huius lib. demonſtrauimus. quod eſt contra hypotheſim. Non autem colligendum eſt ex hoc theoremate, lineas, quæ proportionem non habent, quam numerus ad numerum, neceſſariò & potentia

tentia incommensurabiles esse, vt manifestum est ex demonstratione. Non enim sequitur, si potentia tantum sint commensurabiles, eas proportionem habere, quam numerus ad numerum, vt in demonstratione theorematis assumitur; immo nullo modo talem proportionem habere possunt, vt in scholio propos. 5. huius lib. docuimus. Solùm igitur infertur ex huius theorematis demõstratione, lineas proportionem non habentes, quam numerus ad numerum, longitudine esse incommensurabiles.

LEMMA.



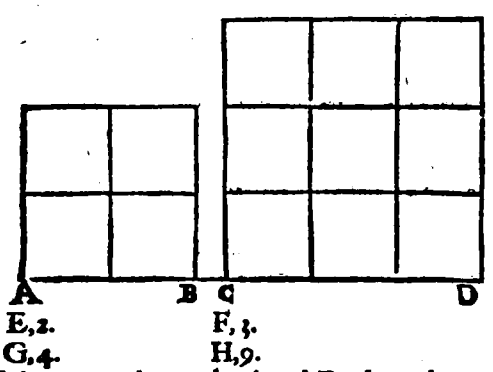
SI sint tres quantitates continuè proportionales, & aliæ tres continuè quoq; proportionales; sitq; vt prima illarum ad tertiam, ita prima harum ad tertiam: Erit & vt prima illarum ad secundam, ita prima harum ad secundam.

SINT continuè proportionales tam quantitates A, B, C, quàm D, E, F; sive priores in eodem genere sint, in quo posteriores, sive non; sitq; vt A, ad C, ita D, ad F. Dico quoque esse vt A, ad B, ita D, ad E. Quoniã enim tam proportio A, ad C, proportionis A, ad B, quàm proportio D, ad F, proportionis D, ad E, duplicata est; ponunturq; proportiones A, ad C, & D, ad F, æquales; erunt quoq; proportiones A, ad B, & D, ad E, æquales; quandoquidem earum proportiones duplicatæ æquales sunt.

IDEM *sequitur, si plures quantitates sint, quàm tres; si tamen in quatuor assumamus triplicatam proportionem loco duplicatæ, ad demonstrationem: & in quinque, quadruplicatam, &c.*

THEOR. 7. PROPOS. 9. 7.

QVAE à rectis lineis longitudine commensurabilibus fiunt quadrata; inter se proportionem habent, quam quadratus numerus ad quadratum numerum: Et quadrata inter se proportionem habentia, quam quadratus numerus ad quadratum numerum; & latera habebunt longitudine commensurabilia. Quæ verò à rectis lineis longitudine incommensurabilibus fiunt quadrata; inter se proportionem non habent, quam quadratus numerus ad quadratum numerum: Et quadrata inter se proportionem non habentia, quam quadratus numerus ad quadratum numerum; neque latera habebunt longitudine commensurabilia.

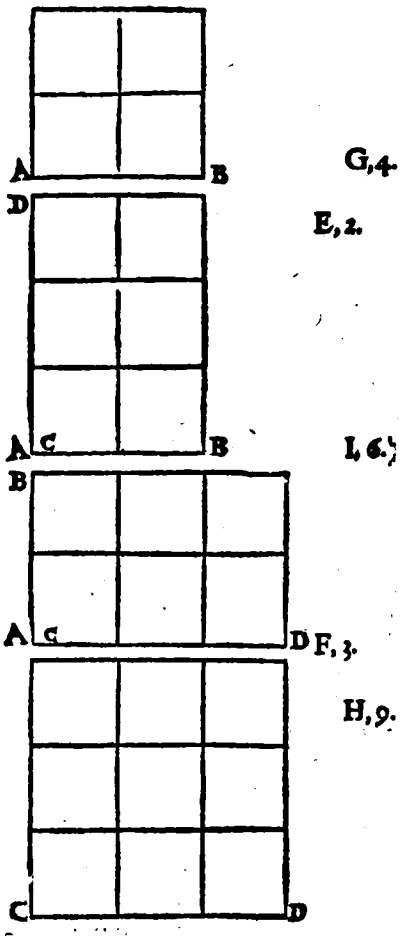


SINT primùm rectæ AB, CD, longitudine commensurabiles. Dico quadratum ex AB, ad quadratum ex CD, proportionem habere, quam numerus quadratus ad numerũ quadratum. Quoniam enim rectæ AB, CD, longitudine sunt commensurabiles; [a] erit AB, ad CD, vt numerus ad numerum: Sit vt E, numerus ad numerum F; quadrati autem ipsorum E, & F, sint G, & H. Quoniam igitur est AB, ad CD, vt E, numerus ad numerum F: [b] habet autem quadratum ex AB, ad quadratum ex CD, duplicatam proportionem lateris AB, ad latus CD: [c] Item & numerus quadratus G, ad quadratum H, proportionẽ habet duplicatam lateris E, ad latus F; Erit proportio quadrati ex AB, ad quadratum ex CD, eadem, quæ numeri quadrati G, ad numerum quadratum H; quãdoquidem ambæ hæ proportiones, duplicatæ sunt proportionum æqualium. Quod est propositum.

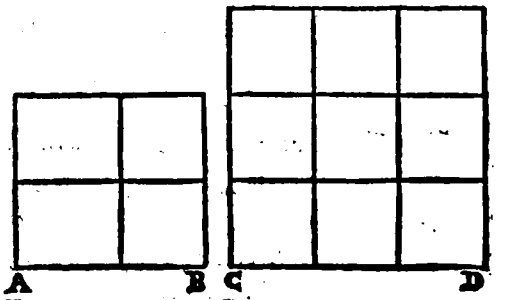
[a] 5. decimi.
[b] 20. sexti.
[c] 11. octavi.

ALITER. Posita eadem constructione, contineatur rectãgulum BD, sub rectis AB, CD. Et E, F, se mutuò multiplicantes faciant I, qui medius proportionalis erit inter quadratos G, H, vt constat ex demonstratione propos. 11. lib. 8. atq; adeò in proportione lateris E, ad latus F, vt diximus in scholio eiusdem propos. Quoniam igitur est AB, ad CD, vt E, ad F: [d] Vt autem AB, ad CD, ita est quadratum ex AB, ad rectangulum BD, ob eandem altitudinem AB, si CD, ponatur basis rectanguli; Item vt E, ad F, ita est G, ad I: Erit quoque quadratum ex AB, ad rectangulum BD, vt quadratus numerus G, ad numerum I. Rursus quia est AB, ad CD, vt E, ad F, [e] Vt autem AB, ad CD, ita est rectangulum BD, ad quadratum ex CD, ob eandem altitudinem CD, si AB, ponatur basis rectanguli; Item vt E, ad F, ita est I, ad H: Erit quoque rectangulum BD, ad quadratum ex CD, vt I, numerus ad numerum quadratum H. Quare tres magnitudines, nimirum

[d] 1. sexti.
[e] 1. sexti.



quadratum ex AB, rectangulum BD, & quadratũ ex CD, in eadem ratione continua ſunt, in qua tres numeri G, I, H. Igitur ex æquo, per lemma propoſ. 4. huius lib. erit quadratum ex AB, ad quadratum ex CD, vt numerus quadratus G, ad numerum quadratum H. Quod eſt propoſitum.



SIT ſecundò quadratũ ex AB, ad quadratũ ex CD, vt numerus quadratus G, ad numerũ quadratum H. Dico rectas AB, CD, eſſe longitudine commenſurabiles. Sint enim numeri E, & F, latera quadratorum numerorum G, & H, vt in priori figura. Quoniam igitur eſt quadratum ex AB, ad quadratum ex CD, vt quadratus numerus G, ad quadratum numerum H: [a] Habet autem quadratum ex AB, ad quadratum ex CD, proportionem duplicatam lateris AB, ad latus CD; [b] Item & quadratus numerus G, ad quadratum numerum H, proportionem habet duplicatam lateris E, ad latus F: Erit proportio lateris AB, ad latus CD, quæ lateris E, ad latus F; quandoquidem harum proportionum duplicatæ proportiones æquales ſunt. Quare cùm rectæ AB, CD, proportionem habeant quam numeri E, F, [c] ipſæ commenſurabiles erunt longitudine. Quod eſt propoſitum.

[a] 20. ſexti.
[b] 11. octani.
[c] 6. decimi.

ALITER. Repetatur conſtructio figuræ poſterioris. [d] Quia igitur eſt vt AB, ad CD, ita quadratum ex AB, ad rectangulum BD; Item vt AB, rurſum ad CD, ita rectangulum BD, ad quadratum ex CD, vt ſuprà diximus; erunt quadratum ex AB, rectangulum BD, & quadratum ex CD, continuè proportionalia in ratione lineæ AB, ad lineam CD: Sunt autem & numeri G, I, H, continuè proportionales in ratione numeri E, ad numerum F, vt ſuprà oſtendimus; ponituréque quadratum ex AB, ad quadratum ex CD, vt quadratus numerus G, ad quadratum numerum H. Igitur erit per lemma præcedens AB, ad CD, vt G, ad I, hoc eſt, vt E, ad F; [e] ideoque AB, CD, rectæ, proportionem habentes, quam numeri E, F, commenſurabiles ſunt longitudine. Quod eſt propoſitum.

[d] 1. ſexti.
[e] 6. decimi.

SINT tertiò rectę A, B, longitudine incommenſurabiles. Dico earum quadrata proportionem non habere, quam numerus quadratus ad numerum quadratum. Si enim quadratum ex A, ad quadratum ex B, proportionem dicatur habere, quam numerus quadratus ad numerum quadratum; erunt A, B, longitudine commenſurabiles, vt iam eſt demonſtratum. Quod eſt abſurdum. ponuntur enim longitudine incommenſurabiles. Non ergo quadratum ex A, ad quadratum ex B, proportionem habet, quam numerus quadratus ad numerum quadratum. Quod eſt propoſitum.

A
B

QVARTO ac poſtremò, quadratum ex A, ad quadratum ex B, non habeat proportionem, quam numerus quadratus ad numerum quadratum. Dico eas longitudine eſſe incommenſurabiles. Si enim longitudine commenſurabiles credantur; habebunt earum quadrata, vt eſt demonſtratum, proportionem, quam quadratus numerus ad quadratum numerum. Quod eſt abſurdum. ponuntur enim non habere. Non ergo longitudine commenſurabiles ſunt A, & B. Quod eſt propoſitum. Igitur quæ à rectis lineis longitudine commenſurabilibus fiunt quadrata, &c. Quod erat demonſtrandum.

COROLLARIVM.

Ex his manifeſtum eſt, rectas lineas, quæ longitudine ſunt commenſurabiles, omnino & potentia commenſurabiles eſſe: Quæ verò potentia commenſurabiles, non omnino & longitudine. Et quæ longitudine incommenſurabiles ſunt, non omnino & potentia incommenſurabiles: Quæ verò potentia incommenſurabiles, omnino & longitudine incommenſurabiles eſſe.

QVONIAM

QVONIAM enim quadrata linearum longitudine commenſurabilium proportionem habent, quam quadratus numerus ad quadratum numerum, vt in hoc theoremate demonſtratum eſt, hoc eſt, ſimpliciter quam numerus ad numerum; [a] *ipſa commenſurabilia erunt;* a 6.decimi
[b] *Ac propterea & latera ipſorum potentia commenſurabilia exiſtent. Quare linea longitudine commenſurabiles, omnino & potentia commenſurabiles ſunt.* b 3.defin.

DEINDE quia linea, quarum quadrata proportionem non habent, quam quadratus numerus ad quadratum numerum, ſed tamen, quam numerus ſimpliciter ad numerum, [c] *potentia quidem commenſurales ſunt,* [d] *cùm earum quadrata commenſurabilia ſint; at longitudine nequaquam, vt in hoc theoremate eſt oſtenſum; perſpicuum eſt, lineas potentia commenſurabiles, non omnino & longitudine commenſurabiles eſſe. Solùm enim ea linea potentia commenſurabiles, quarum quadrata proportionem habent, quam numerus quadratus ad numerum quadratum, longitudine quoque ſunt commenſurabiles, vt conſtat ex ſecunda parte huius theorematis.* c 3. defin. d 6.decimi

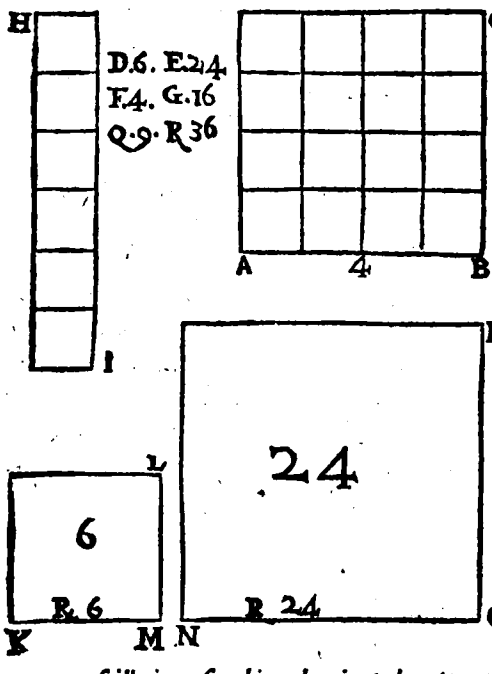
RVRSVS quia linea, quarum quadrata proportionem non habent, quam numerus quadratus ad numerum quadratum, ſed tamen quam numerus ad numerum, incommenſurabiles quidem ſunt longitudine, at potentia commenſurabiles, vt modò diximus; liquidò conſtat, lineas longitudine incommenſurabiles, non omnino & potentia incommenſurabiles eſſe. ſolùm enim ea linea longitudine incommenſurabiles, quarum quadrata proportionem non habent, quam numerus ad numerum, [e] *potentia quoque incommenſurabiles ſunt,* [f] *cùm earum quadrata incommenſurabilia ſint.* e 4.defin. f 8.decimi

POSTREMO, lineas potentia incommenſurabiles, eſſe omnino & longitudine incommenſurabiles, perſpicuum eſt. Nam ſi longitudine eſſent commenſurabiles, omnino & potentia commenſurabiles forent, vt patet ex prima parte corollary. Quod eſt abſurdum. Ponuntur enim potentia incommenſurabiles. Quam ob rem linea potentia incommenſurabiles, omnino & longitudine incommenſurabiles ſunt.

SCHOLIVM.

VT autem ſcopus priorum duarum partium huius theorematis planius perfectiúſq; percipiatur, diligenter conſideranda ſunt hæc, quæ ſequuntur. Primùm lineas rectas longitudine commẽſurabiles, quarum quadrata, ex prima parte theorematis, proportionem habent, quam quadratus numerus ad quadratum numerum, non ſolùm eſſe eas, quæ numeris exprimi poſſunt, ſi cum linea Rationali propoſita comparentur; quales ſunt illæ, quæ in demonſtratione ſunt poſitæ: (eſt enim recta A B, 2. & C D, 3.) verùm etiam illas, quæ nullis poſſunt numeris efferri, ſi cum Rationali linea propoſita conferantur: Deinde econtrariò, quadrata inter ſe proportionem habentia, quam quadratus numerus ad quadratum numerum, quorum lineæ, ſeu latera, ex ſecunda theorematis parte, longitudine ſunt commenſurabilia, non ſolùm ea eſſe intelligenda, quæ continent totidem quadratas menſuras æquales illis, in quas quadratum Rationalis linea reſoluitur, quot ſunt vnitates in numeris quadratis, eandem cum ipſis proportionem habentibus; cuiuſmodi ſunt quadrata in demonſtratione deſcripta: (continet enim quadratum ex A B, quatuor menſuras quadratas, & quadratũ ex C D, nouem; quot nimirum vnitates ſunt in quadratis numeris G, H.) Sed ea etiam, quæ vel pauciores, vel plures menſuras quadratas complectuntur, quàm ſunt vnitates in numeris illis quadratis, ſi cum quadrato linea Rationalis conferantur. Sæpenumero enim lineæ datæ commenſurabiles inter ſe ſunt longitudine, ſed numeris exprimi non poſſunt, propterea quòd Rationali linea propoſitæ ſunt longitudine incommenſurabiles; Ac propterea quadrata illarum proportionem quidem habent, quam quadratus numerus ad quadratum numerum, vt in hoc theoremate eſt oſtenſum, at pauciores quadratas menſuras, vel plures continent, quàm ſunt in quadratis illis numeris vnitates. Hæc autem omnia perſpicua faciemus hac demonſtratione.

EXPONATVR linea Rationalis A B, expreſſa numero 4. cuius quadratum A C, continebit menſuras quadratas 16. Sint quoque numeri D, E, plani ſimiles non quadrati, habentes tamen proportionem, & vt in g 26.octaui
Arithmeticis eſt demonſtratum, quam quadratus numerus F, ad quadratum numerum G, nempe 4. ad 16. Deinde ſumatur rectangulum H I, conſtans ex ſex quadratis menſuris quadrati A C, quot nimirum vnitates in D, numero continentur; [h] *atq; ipſi H I, quadratum æquale conſtituatur K L, cuius latus K M. Poſtremò* h 14.ſecũdi
per ea, quæ in coroll. propoſ. 6. huius lib. oſtendimus, inueniatur recta N O, ad cuius quadratum N P, ita ſe habeat K L, quadratum rectæ K M, vt numerus D, ad numerum E, vel vt quadratus F, ad quadratum G. Quoniam igitur eſt vt quadratus numerus F, ad quadratum numerum G, vel vt numerus D, ad numerum E, videlicet 6. ad 24. ita quadratum K L, ad quadratum N P, per conſtructionem; Continet autem quadratum K L, 6. menſuras quadratas, qualium 16. continet quadratum Rationale A C: (conſtructum enim eſt quadratum K L, æquale rectangulo H I, conſtanti ex 6. huiuſmodi quadratis menſuris.) continebit quadratum N P, earundem menſuratum quadratarum 24. ac propterea K M, N O, latera quadratorum K L, N P, erunt



a 6. decimi

Rad. 6. & Rad. 24. quæ numeris exprimi nequeunt, cùm 6. & 24. non ſint numeri quadrati, erunt q3 linea Rationali A B, longitudine incommenſurabilia, inter ſe autem commenſurabilia longitudine, ex hoc theoremate, cùm eorum quadrata proportionem habeant, quam quadratus numerus F, ad quadratum numerum G. Quod etiam ex hoc conſtare poteſt. Nam cùm quadrata K L, N P, proportionem habeant, ex coroll. propoſ. 20. lib. 6. duplicatam laterum K M, N O, ſit autem quadratorum proportio ſubquadrupla, nempe 1. ad 4. erit proportio laterum ſubdupla, videlicet 1. ad 2. huius enim illa duplicata eſt, vt hîc apparet 1. 2. 4. [a] Quare longitudine cõmenſurabiles ſunt recta K M, N O, cùm proportionem habeant, quã numerus ad numerũ. Intelligenda ſunt ergo in hoc theoremate linea etiam illa longitudine commenſurabiles, quæ numeris non poſſunt exprimi ſi cum linea Rationali comparentur. Quod ſi conſiderentur eadem linea K M, N O, ſimpliciter, & abſolutè, nulla habita ratione linea Rationalis A B, numeris poterunt efferri. Cùm enim proportionem habeant ſubduplam, ſi K M, diuidatur in duas partes æquales, diuidetur N O, in eiuſdem magnitudinis partes 4. ſi illa in 3. ſecabitur hæc in 6. &c. At verò hæ partes nullo modo æquales ſunt partibus linea Rationalis A B, immò illis omnino ſunt longitudine incommenſurabiles, vt diximus.

Rvrsvs, quia quadrata K L, N P, proportionem habentia, quam quadratus numerus F, ad quadratum numerum G, plures quadratas menſuras continent æquales illis in quas A C, quadratum Rationalis linea A B, reſoluitur, quàm vnitates ſunt in dictis numeris quadratis F, G; (Nam K L, æquale eſt ſex huiuſmodi menſuris, & N P, continet 24. At numerus quadratus F, componitur ex quatuor vnitatibus, & G, ex 16.) Et ſi maiores quadrati in eadem proportione ſumantur Q, R, pauciores tales menſuras complectuntur quadrata K L, N P, quàm ſunt vnitates in numeris quadratis Q, R, cùm alter ex 9. alter verò ex 36. vnitatibus conſtituatur; manifeſtum eſt, in hoc theoremate intelligenda quoq; eſſe quadrata proportionem habentia, quam numerus quadratus ad numerum quadratum, quæ pauciores quadratas menſuras, vel plures comprehendunt, quàm vnitates in illis quadratis numeris reperiuntur, ſi ea conferantur cum quadrato linea Rationalis propoſita. Quod ſi eadem quadrata K L, N P, conſiderentur abſolutè, & ſimpliciter, nulla habita ratione quadrati A C, ex Rationali linea A B, deſcripti, reſolui poterunt in totidem menſuras quadratas, quot vnitates in quadratis numeris F, G, vel Q, R, continentur. Nam ſi recta K M, diuidatur in duas partes, & N O, in quatuor, vt dictum eſt, continebit quadratum K L, quatuor menſuras quadratas, & quadratum N P, ſexdecim, quot ſcilicet vnitates reperiuntur in quadratis numeris F, G. Item, ſi eadem linea ſecentur in partes tres, & ſex, habebunt earum quadrata menſuras quadratas 9. & 36. quot nimirum vnitates comprehenduntur in numeris quadratis Q, R, &c. At huiuſmodi menſuræ nullo modo æquales ſunt quadratis menſuris, in quas quadratum A C, Rationalis linea A B, reſoluitur.

Idem dicemus de omnibus aliis quadratis, eorum q3 lateribus, quorum ſuperficies non exprimuntur numeris quadratis, dummodo proportionem habeant inter ſe, quam numeri quadrati ad numeros quadratos; cuiuſmodi ſunt quadrata, quorum ſuperficies ſint 12. & 3. habentes proportionem, quam quadratus numerus 16. ad quadratum numerum 4. &c.

It a qve theorema hoc intelligendum eſt de lineis longitudine commenſurabilibus inter ſe, quamuis interdum Rationali linea incommenſurabiles ſint, vt ſit ſenſus. Quadrata quæ deſcribuntur à rectis lineis longitudine inter ſe commenſurabilibus, licet interdum longitudine ſint incommenſurabiles linea Rationali propoſita, proportionem inter ſe habent, quam quadratus numerus ad quadratum numerum, quamuis ipſa quadrata, ſi cum quadrato Rationalis linea conferantur, ſæpenumero numeris quadratis nullo modo poſſint exprimi: Et quadrata inter ſe proportionem habentia, quam quadratus numerus ad quadratum numerum, ſiue hæc quadrata numeris quadratis poſſint exprimi, ſiue non, ſi comparentur cum quadrato Rationalis linea, latera habebunt longitudine inter ſe commenſurabilia, etiamſi linea Rationali ſint longitudine incommenſurabilia, &c.

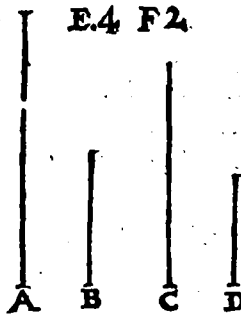
Colligit Campanus ex hoc theoremate, in figuris quadratis diametrum lateri incommenſurabilem eſſe longitudine, hac ratione. Quoniam quadratum diametri duplum eſt quadrati lateris, vt ad propoſ. 47. lib. 1. demonſtrauimus; Nulla autem proportio dupla eadem eſſe poteſt, quæ quadrati numeri ad quadratum numerum, quòd inter numeros duplam proportionẽ habentes nullus medius cadat proportionalis, vt in ſcholio propoſ. 8. lib. 8. oſtendimus: Non habebunt quadratum diametri, & quadratum lateris proportionem, quam numerus quadratus ad numerũ quadratum. Quare ex vltima parte huius theorematis eorum latera,

nempe

nempe diameter, & latus in vno eodemq; quadrato, longitudine inter se sunt incommensurabilia. Hoc etiam nos demonstrauimus in scholio propos. 8. lib. 8. Quod tamen clarius ostendet Euclides propos. vltima huius lib.

THEOR. 8. PROPOS. 10. 11.

SI quatuor magnitudines proportionales fuerint, prima verò secundæ fuerit commensurabilis; & tertia quartæ commensurabilis erit. Et si prima secundę fuerit incommensurabilis; & tertia quartæ incommensurabilis erit. 10.



SINT proportionales quatuor magnitudines, A, B, C, D, sitq; A, prima secundæ B, commensurabilis. Dico & tertiam C, quartæ D, commensurabilem esse. Quoniam n. A, & B, inter se commensurabiles sunt, [a] habebit A, ad B, proportionem quam numerus ad numerum, nempe quam E, ad F: Ponitur autem vt A, ad B, ita C, ad D: Igitur & C, ad D, proportionem habet quam numerus E, ad numerum F. [b] Quare C, & D, commensurabiles inter se sunt. a 5. decimi. b 6. decimi.

SED sit iam A, ipsi B, incommensurabilis. Dico & C, ipsi D, esse incommensurabilem. Quoniam enim A, & B, incommensurabiles sunt, [c] non habebit A, ad B, proportionem, quam numerus ad numerum: Ponitur autem vt A, ad B, ita C, ad D. Igitur nec C, ad D, proportionem habet, quam numerus ad numerum. [d] Quare C, & D, incommensurabiles sunt inter se. Si quatuor ergo magnitudines proportionales fuerint, &c. Quod erat ostendendum. c 7. decimi. d 8. decimi.

SCHOLIVM.

QVOD si quatuor propositæ magnitudines fuerint lineæ, prima autem secundæ commensurabilis fuerit longitudine, erit & tertia quartæ lōgitudine commensurabilis, vt ex demonstratione huius theorematis apparet. Eodem enim modo ostendemus posteriores duas proportionem habere numeri ad numerum. Quare, vt in scholio propos. 5. huius lib. diximus, longitudine commensurabiles sunt.

SI autem prima secundæ fuerit cōmensurabilis potentia tantùm, erit & tertia quartæ potentia tantùm commensurabilis. Repetatur enim eadem figura. Quoniam igitur A, cōmensurabilis est potētia ipsi B, [a] erunt earum quadrata cōmensurabilia, [b] ac propterea proportionem habebunt, quā numerus ad numerum. [c] Est autem, vt quadratum ex A, ad quadratum ex B, ita quadratum ex C, ad quadratū ex D. (quod quatuor lineæ propositæ A, B, C, D, proportionales sint, & earum quadrata figuræ similes similiterq; descriptæ.) Igitur & quadrata ex C, D, proportionē habebunt, quam numerus ad numerum. [d] Quare commensurabilia erūt; [e] Ac propterea lineæ C, D, potentia commensurabiles. Quòd autem potentia tantùm sint commensurabiles, ita manifestum fiet. Quoniam rectæ A, B, cùm sint commensurabiles potentia tantùm, longitudine incommensurabiles sunt; non erit earum proportio, quæ numeri ad numerum, vt in scholio propos. 5. huius lib. docuimus; Ac propterea neque C, D, proportionem habebunt, quam numerus ad numerum. Longitudine ergo incommensurabiles sunt C, D, ex scholio propos. 8. huius lib. Sunt autem potentia commensurabiles, vt ostendimus: Igitur potentia tantùm sunt commensurabiles. Quod est propositum. a 3. defin. b 5. decimi c 22. sexti. d 6. decimi e 3. defin.

EADEM ratione, si prima secunda sit incommensurabilis longitudine tantùm, erit & tertia quarta longitudine tantùm incommensurabilis. Nam si A, & B, sint longitudine tantùm incommēsurabiles; erunt ipsarum potentiæ commensurabiles; ac propterea ipsæ potentia tantùm commensurabiles erunt. Igitur, vt nunc ostendimus, erunt quoq; rectæ C, D, potentia tantùm commensurabiles; Ac idcircò longitudine tantùm incommensurabiles erunt. Quod est propositum.

RVRSVS, si quatuor magnitudinum priores duæ fuerint lineæ, duæ verò reliquæ superficies, vel solida; sequetur nihilominus, si lineæ sint longitudine commensurabiles, vel incommensurabiles, & reliquas duas magnitudines commensurabiles, vel incommensurabiles esse. Si enim lineæ longitudine sint commensurabiles, erit earum proportio, quæ numeri ad numerum, ex iis, quæ in scholio propos. 5. huius lib. docuimus. Cùm ergo habeant reliquæ duæ magnitudines proportionē eandem, quam lineæ, erit quoq; illarum proportio, quæ numeri ad numerum; [f] atque adeò commensurabiles erunt. Si verò lineæ longitudine incommensurabiles sint, siue potentia commensurabiles existant, siue non; non erit earum proportio, quæ numeri ad numerū, vt constat ex scholio propos. 7. huius lib. Igitur neq; reliquarū duarū magnitudinū eandem cum illis proportionem habentiū, proportio erit, quæ numeri ad numerū. [g] Quare incōmensurabiles erunt. Quod est propositū. f 6. decimi g 9. decimi

EODEM modo, si priores duæ magnitudines fuerint superficies, vel solida, posteriores verò duæ, lineæ, demonstrabimus, si plana, vel solida commensurabilia sint, vel incōmensurabilia, lineas longitudine commensurabiles esse, vel incommensurabiles. Si enim plana, solidáve commensurabilia sint, [h] habebunt ipsa proportionem, quam numerus ad numerum. Igitur & lineæ eandem cum ipsis rationem habētes, proportionem habebunt, quam numerus ad numerum; ac propterea longitudine commensurabiles erunt, vt diximus in scholio propos. 6. huius lib. Si verò plana, vel solida sint incommensurabilia, non habebunt ea proportionem, quam numerus ad numerum. Igitur neq; lineæ eandem cum ipsis proportionem habentes, proportionem habebunt, quam numerus ad numerum. Ergo longitudine incommensurabiles erunt per ea, quæ docuimus in scholio propos. 8. huius lib. Quod est propositum. h 5. decimi.

LEMMA.

Dvos numeros planos inuenire, qui proportionem non habeant, quam quadratus numerus ad quadratum numerum.

INVENIANTVR duo plani numeri non ſimiles, per ea, quæ ad finem lib. 8. docuimus. Nam huiuſmodi numeri non habebunt proportionem, quam quadratus numerus ad quadratum numerum, vt in ſcholio propoſ. 26. lib. 8. demonſtrauimus. Quod eſt propoſitum.

QVOD ſi plures numeros inuenire velimus, quorum quilibet duo proportionem non habeant, quam quadratus numerus ad quadratum numerum, ſumemus quotcunque numeros primos, per ea, quæ in ſcholio propoſ. 20. lib. 9. tradidimus, A, B, C, D, E. Nulli enim horum primorum acceptorum proportionem inter ſe habent, ex ſcholio propoſ. 26. lib. 8. quam numeri quadrati ad numeros quadratos, cũ non ſint plani ſimiles, vt ad finẽ lib. 8. docuimus.

A, 3. B, 5. C, 7. D, 11. E, 13.

SCHOLIVM.

PORRO inuentionem numerorum planorum non ſimilium, qui videlicet proportionem non habeant, quam quadratus numerus ad quadratum numerum, nõ rectè quidam tradiderunt hoc loco, inter quos etiam eſt Federicus Commandinus. Quod vt oſtendamus, adducenda eſt eorum ratio, quæ dictos numeros inuenire conantur. Ita igitur rem expediunt.

A, 2. B, 6. C, 3. D, 16. E, 12. F, 48.

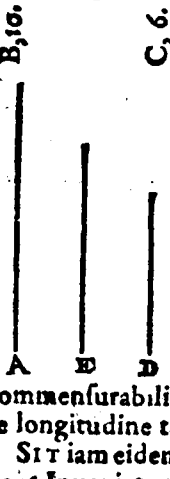
EXPONANTVR quatuor numeri A, B, C, D, ita vt non ſit ſicut A, ad C, ita B, ad D; & fiat ex A, B, numerus E; & ex C, D, numerus F. Perſpicuum igitur eſt E, F, numeros planos eſſe, planos autem diſſimiles; quoniam latera proportionalia non ſunt. quod facere oportebat.

HAEC eſt eorum ratio inueniendorum numerorum planorum non ſimilium. Errant autem huiuſmodi interpretes, quia ſæpenumero inuenti numeri ſecundùm eorum doctrinam, plani ſimiles ſunt. Nam numeri ex eorum demonſtratione inuenti, 12. & 48. ſunt plani ſimiles, cùm proportionem habeant, quam quadrati numeri 4. & 16. Itemq; prior numerus latera habeat 3. & 4. proportionalia lateribus poſterioris 6. & 8. vt conſtat; quamuis latera prioris ab illis aſſumpta 2. & 6. non ſint proportionalia lateribus poſterioris acceptis 3. & 16. Satis enim eſt, vt duo numeri plani ſint ſimiles, aliqua duo latera vnius proportionalia eſſe quibuſdam duobus lateribus alterius, non autem requiritur, vt quacunq; duo latera vnius proportionalia ſint quibuſcunq; duob. laterib. alterius; qua de re plura ſcripſimus in defin. 21. lib. 7. & in ſcholio propoſ. 23. lib. 8.

10. 11.

PROBL. 3. PROPOS. 11.

PROPOSITAE rectæ lineæ inuenire duas rectas lineas incommenſurabiles, alteram quidem longitudine tantùm, alteram verò etiam potentia.



SIT recta propoſita A, cui primùm inuenienda ſit linea incommenſurabilis longitudine tantùm. Inueniantur, per lemma præcedens, duo numeri B, & C, proportionem non habentes, quam quadratus numerus ad quadratum numerum: Deinde ex corollario propoſ. 6. huius lib. reperiatur linea D, ad cuius quadratum ſic ſe habeat quadratum ex A, vt numerus B, ad numerum C. Dico D, eſſe ipſi A, incommenſurabilem longitudine tantùm. Quòd enim A, & D, longitudine ſint incommenſurabiles, ita probabitur. Quoniam eſt quadratum ex A, ad quadratum ex D, vt numerus B, ad numerum C; non eſt autem proportio B, ad C, quæ numeri quadrati ad numerũ quadratum; neq; quadratum ex A, ad quadratum ex D, proportionem habebit, quam numerus quadratus ad numerum quadratum. [a] Igitur rectæ A, & D, longitudine incommenſurabiles ſunt. Quòd autem tantùm longitudine ſint incommenſurabiles, patet. Cùm enim quadrata ex A, & D, proportionem habeant, quam numerus B, ad numerum C, [b] ipſa commenſurabilia erunt. Sunt ergo rectæ A, & D, ex definitione, potentia commenſurabiles. Quare longitudine tantùm incommenſurabiles ſunt.

[a] 9. decimi.

[b] 6. decimi.

SIT iam eidem rectæ propoſitæ A, inuenienda linea incommenſurabilis longitudine, & potentia. [c] Inueniatur recta E, inter rectas A, & D, longitudine tantùm incommẽſurabiles, media proportionalis. Dico E, ipſi A, incommenſurabilem eſſe longitudine, & potentia. Quoniam enim eſt quadratum ex A, ad quadratum ex E, per coroll. propoſ. 20. lib. 6. vt A, ad D; & A, incommenſurabilis eſt longitudine ipſi D, vt iam eſt oſtenſum [d] erit & quadratum ex A, incommẽſurabile quadrato ex E. Quare rectæ A, E, ex definitione, potentia ſunt incommenſurabiles; ac proinde ex coroll. propoſ. 9. huius lib. & omnino longitudine incommenſurabiles ſunt. Eſt igitur E, ipſi A, incommenſurabilis longitudine, & potentia. Quocirca propoſitæ rectæ lineæ inuenimus duas rectas, &c. Quod erat demonſtrandum.

[c] 13. ſexti.

[d] 10. decimi.

SCHOLIVM.

SI igitur recta A, propoſita ſtatuatur Rationalis, ita vt ab ea menſuræ cæterarum ſumantur; erit & recta D, per defin. 6. Rationalis, quia potentia illi eſt commenſurabilis, licet eidem longitudine incommenſurabilis ſit.

bilis ſit. At verò E, Irrationalis, ex defin. 7. cùm Rationali A, incommenſurabilis ſit longitudine, & potentia.

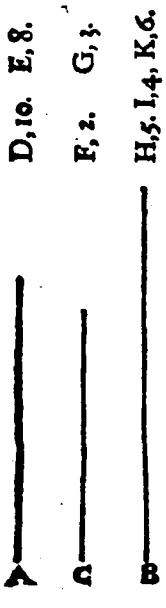
CAETERVM ex demõſtratione huius theorematis liquidò conſtat, rectam mediã proportionalẽ inter duas rectas potentia tãtùm cõmenſurabiles, vel q̃ idem eſt, inter duas longitudine tantũ incõmenſurabiles, eſſe vtrilibet illarum incommenſurabilẽ longitudine & potentia; atque adeò appellari Irrationalem, ſi alterutra illarum ſtatuatur Rationalis. Ex eo enim quòd recta A, D, ſunt longitudine tantùm incommenſurabiles, vel commenſurabiles potentia tantùm, demonſtrauimus rectam E, inter illas mediam proportionalem, eſſe ipſi A, incommenſurabilem longitudine, & potentia: Eodemq̃ argumento oſtendemus eandem longitudine, & potentia ipſi D, eſſe incommenſurabilem. Cùm enim recta D, E, A, ſint continuè proportionales, erit ex corollario propoſ. 20. lib. 6. vt quadratum ex D, ad quadratum ex E, ita recta D, ad rectam A: Eſt autem recta D, recta A, incommenſurabilis longitudine. [a] *Igitur & quadratum ex D, quadrato ex E, incommenſurabile erit. Quare recta D, & E, ex defin. incommenſurabiles ſunt potentia atque adeò & longitudine, per corollarium propoſ. 9. huius libri.* a 10. decimi.

IN codicibus vulgatis præponitur hæc vndecima propoſitio à Theone propoſitioni decimæ præcedenti: quod errore librariorum factum eſſe puto, cùm ſecunda pars huius ex præcedenti propoſitione decima demonſtretur, vt ex dictis apparet.

12.

THEOR. 9. PROPOS. 12. 8.

QVAE eidẽ magnitudini ſunt cõmenſurabiles, & inter ſe ſunt cõmenſurabiles.



SIT vtraque magnitudo A, B, magnitudini C, commenſurabilis. Dico & A, B, inter ſe eſſe commenſurabiles. Cùm enim A, & C, ſint commenſurabiles, [a] habebit A, ad C, proportionem, quam numerus ad numerum: habeat quam numerus D, ad numerum E. Rurſus quia C, B, commenſurabiles ſunt, habebit quoq; C, ad B, proportionem, quam numerus ad numerum: habeat quam numerus F, ad numerum G, [b] ſumanturq́ue tres numeri H, I, K, minimi deinceps proportionales in proportionibus D, ad E, & F, ad G; ſitq́ue H, ad I, vt D, ad E; hoc eſt, vt A, ad C; & I, ad K, vt F, ad G; hoc eſt, vt C, ad B. Quoniam igitur eſt A, ad C, vt H, ad I; & C, ad B, vt I, ad K; erit ex æquo A, ad B, vt H, ad K, numerus ad numerum. Quare A, B, proportionẽ habentes, quam numeri H, K, [c] inter ſe commenſurabiles ſunt. Quæ ergo eidem magnitudini commenſurabiles ſunt, &c. Quod demonſtrãdum erat.

a 5. decimi.

b 4. octaui.

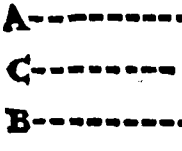
c 6. decimi.

SCHOLIVM.

QVOD ſi magnitudines A, B, C, ſint lineæ, atq; A, & B, ipſi C, longitudine commenſurabiles exiſtant, erunt quoque A, & B, inter ſe longitudine commenſurabiles, vt conſtat ex demonſtratione theorematis, quia eodem modo oſtendemus, lineas A, & B proportionẽ habere, quam habet numerus H, ad numerũ K: Quare longitudine commenſurabiles erunt, vt ad propoſ. 6. diximus. Si verò A, & B, fuerint ipſi C, potentia cõmenſurabiles, licet eidem longitudine ſint incommenſurabiles, demonſtrabuntur eodem modo & A, B, inter ſe commenſurabiles potentia. Cùm enim A, & C, ſint potentia commenſurabiles, [a] *erit quadratum ex A, ad quadratum ex C, vt numerus ad numerum, nempe, vt D, ad E, cùm quadrata ex A, C, per defin. ſint commenſurabilia. Eodem modo erit quadratum ex C, ad quadratum ex B, vt numerus ad numerum, nimirum vt F, ad G.* [b] *Sumptis ergo in eiſdem rationibus D, ad E, & F, ad G, tribus numeris minimis H, I, K, deinceps proportionalibus; erit rurſum ex æquo quadratum ex A, ad quadratum ex B, vt numerus H, ad numerum K.* [c] *Quare quadrata ex A, & B, commenſurabilia ſunt; atque adeò lineæ A, B, potentia commenſurabiles. Non tamen ex hoc ſequitur, A, & B, potentia tantùm eſſe commenſurabiles. Poſſunt enim eſſe duæ lineæ longitudine inter ſe commenſurabiles, licet vtraque cuipiam alteri lineæ potentia tantùm ſit cõmenſurabilis; quales ſunt duæ Rationales lõgitudine inter ſe cõmenſurabiles, potentia verò tantũ Rationali expoſitæ cõmenſurabiles, quas quidẽ inueniemus poſtea in ſcholio ſecundo, propoſitionis 19. huius libri.*

SED & conuerſum quodammodo huius theorematis demonſtrabimus, hoc modo.

SI ſint duæ magnitudines commenſurabiles, altera verò ſit vni cuipiam commenſurabilis; erit & reliqua eidem commenſurabilis.



SINT enim A, & B, commenſurabiles, ſitq́; A, ipſi C, commenſurabilis. Dico & B, eidem C, commenſurabilem eſſe. Cùm enim tam B, quàm C, ipſi A, ſit commenſurabilis; erunt quoq; B, & C, eſt hoc theoremate, inter ſe commenſurabiles. Quod eſt propoſitum.

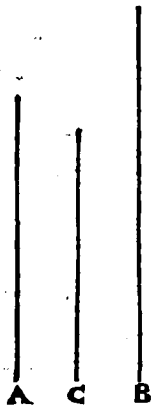
QVOD ſi magnitudines A, B, C, ſint lineæ, & A, B, commenſurabiles longitudine, ſit autem A, ipſi C, commenſurabilis longitudine; erit & B, reliquæ eidem C, longitudine commenſurabilis. Nam cùm tam B, quàm C, ipſi A, longitudine ſit commenſurabilis, erunt etiam B, C, inter ſe commenſurabiles longitudine, vt oſtendimus. At verò ſi lineæ A, & B, potentia tantùm ſint commenſurabiles, & A, ipſi C, commenſurabilis, ſiue longitudine, & potentia, ſiue potentia tantùm, colligemus quidem eodẽ argumento, reliquam B, eidem C, potentia eſſe commenſurabilem; quia vtraq; B, C, ipſi A, hac ratione potentia eſt commenſurabilis ex hypotheſi. Non autem colligere licebit, ſi A, ipſi C,

commensurabilis sit longitudine, reliquam B, eidem C, longitudine commensurabilem esse, quia non vtraque B, C, ipsi A, longitudine commensurabilis est, sed C, quidem longitudine; at verò B, potentia tantùm, vt ex hypothesi constat.

12. 10.

THEOR. 10. PROPOS. 13.

SI sint duæ magnitudines, & altera quidem eidem sit commensurabilis, altera verò incommensurabilis: Incommensurabiles erunt magnitudines.



SINT duæ magnitudines A, & B, quarum A, sit ipsi C, commensurabilis, & B, eidem C, incommensurabilis. Dico A, & B, inter se incommensurabiles esse. Si enim B, dicatur esse commensurabilis ipsi A; cùm eidem A, commensurabilis ponatur C; [a] erunt B, & C, inter se commensurabiles. quod est absurdum. ponitur enim B, ipsi C, incommensurabilis. Non ergo B, ipsi A, commensurabilis est. Quare si sint duæ magnitudines, &c. Quod erat ostendendum.

a 12. decimi.

SCHOLIVM.

SI magnitudines A, B, C, sint lineæ, & A, quidem ipsi C, longitudine commensurabilis, at B, eidem C, incommensurabilis longitudine: erunt A, & B, longitudine incommensurabiles. Si enim longitudine commensurabiles essent, [a] ostenderemus quoq; B, C, esse inter se longitudine commensurabiles. (cùm hoc posito, vtraque B, C, ipsi A, commensurabilis esset longitudine) quod non ponitur. Pari ratione, si A, ipsi C, potentia sit commensurabilis, sive tantùm, sive etiam longitudine, at verò B, eidem C, potentia incommensurabilis; erunt A, & B, potentia incommensurabiles. Si enim essent commensurabiles potentia, essent quoq; B, & C, potentia commensurabiles. (cùm hoc posito, vtraque B, C, ipsi A, potentia esset commensurabilis.) Quod est absurdum. Ponitur enim B, ipsi C, potentia incommensurabilis.

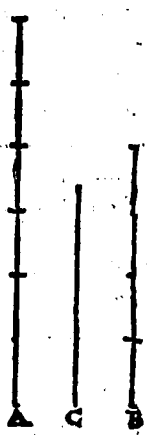
a 12. decimi.

QVONIAM verò hæc propositio 13. apud Theonem lemma est, sit, vt posthac in nostra editione numerus propositionum Euclidis differat ab eo, quem Theon sequitur. Reliquimus enim dedita opera ordinem ac seriem Theonis hoc loco, quia à iunioribus, & peritioribus Geometris hoc theorema in numerum propositionum Euclidis iam est ascitum.

13. 8.

THEOR. 11. PROPOS. 14.

SI sint duæ magnitudines commensurabiles, altera autẽ ipsarum magnitudini cuipiam incommensurabilis fuerit: Et reliqua eidem incommensurabilis erit.



SINT duæ magnitudines commensurabiles A, & B, quarum A, incommensurabilis sit alteri cuipiam C. Dico & B, eidem C, esse incommensurabilem. Nam si B, dicatur esse commensurabilis ipsi C, ac propterea & C, ipsi B; cùm & A, ipsi B, ponatur commensurabilis; [a] erunt & A, C, inter se commensurabiles. Quod est absurdũ. Ponitur enim A, ipsi C, incommensurabilis. Non ergo B, ipsi C, commensurabilis est. Quare si sint duę magnitudines commensurabiles, &c. Quod demonstrandum erat.

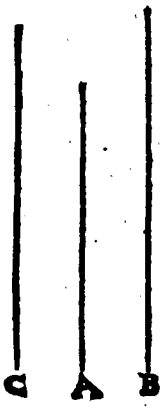
a 12. decimi.

SCHOLIVM.

HIC quoq;, si magnitudines A, B, C, sint lineæ, & A, B, commensurabiles longitudine; sit autem A, ipsi C, sive longitudine tantum, sive longitudine & potentia incommensurabilis; erit & B, eidem C, longitudine incommensurabilis. Si enim B, & C, essent longitudine commensurabiles, [a] essent quoq; A, & C, commensurabiles longitudine. (Cùm hoc posito, vtraq; A, & C, ipsi B, longitudine esset commensurabilis.) Quod est absurdum. Ponitur enim A, ipsi C, longitudine incommensurabilis. Quòd si A, & B, commensurabiles sint potentia tantũ, & A, ipsi C, potentia incommensurabilis, colligemus eodem modo, & B, ipsi C, potentia incommensurabilem esse. Aliàs si B, C, potentia essent commensurabiles; [b] & A, C, potentia commensurabiles essent. (cùm hoc posito, vtraq; A, C, ipsi B, potentia esset commensurabilis.) Quod non ponitur.

a 12. decimi.

b 12. decimi.



c 14. decimi.

COLLIGVNT *porrò ex hoc theoremate interpretes Euclidis sequens theorema, ad ea, quæ in hoc libro demonstrantur, perutile.*

QVÆ incommensurabilibus sunt commensurabiles; & inter se incommensurabiles erunt.

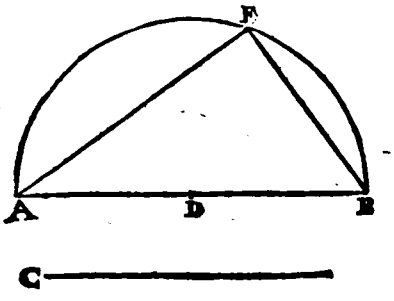
SINT duæ magnitudines incommensurabiles A, B, quibus commensurabiles sint C, & D, nempe C, ipsi A, & D, ipsi B. Dico C, & D, inter se incommensurabiles esse. Quoniam enim A, & C, commensurabiles ponuntur, & est A, ipsi B, incommensurabilis; [c] erit quoque reliqua C, eidem B, incommensurabilis. Rursus quia D, & B, com-

B, commensurabiles ponuntur, & est B, ostensa ipsi C, incommensurabilis; [a] *erit & D, reliqua eidem C, incommensurabilis. Quod est propositum.* a 14. decimi.

Si autem magnitudines A, B, C, D, sint linea, & A, B, vel longitudine tantùm incommensurabiles, vel longitudine & potentia; sint autem C, D, ipsis A, B, longitudine commensurabiles; erunt C, & D, eodem argumento longitudine incommensurabiles. Si verò A, & B, incommensurabiles sint potentia, & ipsis potentia tantùm commensurabiles C, & D; ostendemus similiter C, & D, potentia esse incommensurabiles; vt perspicuum est.

LEMMA.

DVABVS datis rectis lineis inæqualibus, inuenire id, quo maior plus potest, q̃ minor.



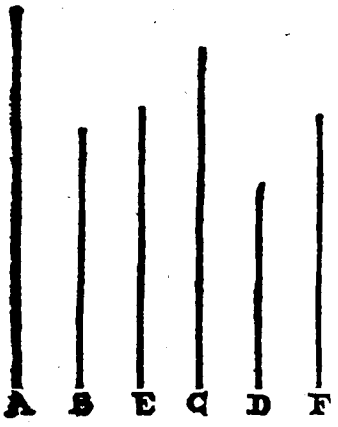
QVAMVIS id, quod lemma hoc proponit, ostenderimus antea ad propos. 47. lib. 1. tamen quia hîc breuius ex ijs, quæ tradita sunt in lib. 3. & 4. demonstratur, non inutile iudicauimus, idem hoc loco aliter efficere. Sint ergo datæ duæ rectæ lineæ inæquales, A B, & C, quarum A B, maior, oporteatq; inuenire, quo A B, plus possit, quàm C. Diuisa A B, bifariam in D, describatur ex centro D, & interuallo D A, vel D B, semicirculus A E B, [b] *in quo aptetur recta A E, ipsi C, æqualis, iungaturq; recta E B. Dico rectam A B, plus posse, quàm C, quadrato rectæ E B.* [c] *Cùm enim angulus E, in semicirculo rectus sit;* [d] *erit quadratum ex A B, æquale quadratis ex A E, E B; atq; idcirco A B, plus poterit, quàm A E, hoc est, quàm C, quadrato rectæ E B. Quod est propositum. Similiter.* b 1. quarti. c 31. tertij. d 47. primi.

DVABVS datis rectis lineis, siue æqualibus, siue inæqualibus, inuenire rectam, quæ illas potest.

Hoc etiam tradidimus ad propos. 47. lib. 1. Sint ergo datæ duæ rectæ A E, E B, quæ si coniungantur ad angulum rectum E, poterit eas recta ducta A B, [e] *quippe cùm quadratum ex A B, æquale sit quadratis ex A E, E B.* e 47. primi.

THEOR. 12. PROPOS. 15. 14.

SI quatuor rectæ lineæ proportionales fuerint, prima verò tantò plus possit q̃ secunda, quantũ est quadratum rectæ lineæ sibi commensurabilis longitudine: Et tertia tantò plus poterit q̃ quarta, quantũ est quadratũ rectæ lineæ sibi longitudine commensurabilis. Quòd si prima tantò plus possit q̃ secunda, quantũ est quadratum rectæ lineæ sibi incommensurabilis longitudine: Et tertia tantò plus poterit q̃ quarta, quantũ est quadratũ rectæ lineæ sibi longitudine incommensurabilis. 12.



SINT quatuor rectæ lineæ proportionales A B, C D, possitq́ue A, prima plus q̃ B, secunda, quadrato rectæ E, & C, tertia plus possit, q̃ D, quarta, quadrato rectæ F. Dico, si E, commensurabilis sit longitudine ipsi A; & F, commensurabilẽ esse longitudine ipsi C: Si verò E, sit longitudine incõmensurabilis ipsi A; & F, ipsi C, longitudine incommensurabilem esse. Quoniam enim est, vt A, ad B, ita C, ad D; [a] erit quoque vt quadratum ex A, ad quadratum ex B, ita quadratum ex C, ad quadratum ex D. Est autem quadratum ex A, æquale quadratis ex B, E, per hypothesim; & quadratũ ex C, quadratis ex D, F. Igitur erunt quoque, vt quadrata ex B, E, ad quadratum ex B, ita quadrata ex D, F, ad quadratum ex D: Et diuidendo, vt quadratum ex E, ad quadratum ex B, ita quadratum ex F, ad quadratum ex D; [b] Ac propterea erit etiam vt recta E, ad rectam B, ita recta F, ad rectam D; conuertendoq́ue vt B, ad E, ita D, ad F. Quia igitur est vt A, ad B, ita C, ad D; & vt B, ad E, ita D, ad F, erit quoque ex æquo, vt A, ad E, ita C, ad F. Quare si A, est longitudine commensurabilis ipsi E, erit quoque C, ipsi F, longitudine commensurabilis: Et si A, longitudine est incommensurabilis ipsi E, erit & C, ipsi F, incommensurabilis longitudine, vt in scholio propos. 10. huius libri tradidimus. Si igitur quatuor rectæ lineæ proportionales fuerint, &c. Quod erat demonstrandum. a 22. sexti. b 22. sexti.

SCHOLIVM.

EODEM argumento ostendemus, si E, potentia tantùm commensurabilis fuerit ipsi A; & F, potentia tantùm ipsi C, esse commensurabilem, vt constat ex ijs, quæ in scholio propos. 10. huius libri scripsimus.

15. 9.

THEOR. 13. PROPOS. 16.

Si duæ magnitudines commensurabiles componantur; & tota magnitudo vtrique ipsarum commensurabilis erit. Quòd si tota magnitudo vni ipsarum commensurabilis fuerit; & quæ à principio magnitudines commensurabiles erunt.



COMPONANTVR duæ magnitudines commensurabiles A B, B C. Dico totam quoque magnitudinem A C, vtrique ipsarum A B, B C, commensurabilem esse. [a] Sit enim ipsarum A B, B C, communis mensura D. Quoniam igitur D, ipsas A B, B C, metitur, [b] metietur quoque D, totam A C, ex ipsis compositam. Cùm ergo D, metiatur A C, & A B; erunt A C, A B, commensurabiles. Similiter cùm D, metiatur A C, & B C; erunt & A B, B C, commensurabiles; Ac propterea A C, vtrique ipsarum A B, B C, commensurabilis erit.

SED iam tota A C, ex A B, B C, composita commensurabilis sit alteri ipsarum A B, B C, nempe ipsi A B. Dico & A B, B C, inter se commensurabiles esse. [c] Sit enim D, communis mensura ipsarum A C, A B. Quoniam igitur D, metitur totam A C, & ablatam A B; [d] metietur quoque D, reliquam B C. Quare cùm D, metiatur A B, B C; commensurabiles erunt A B, B C, inter se. Eodem argumento ostendemus A B, B C, esse commensurabiles, si A C, ipsi B C, fuerit commensurabilis. Si duæ igitur magnitudines commensurabiles componantur, &c. Quod ostendendum erat.

a 3. decimi. b 1. pron. c 3. decimi. d 3. pron.

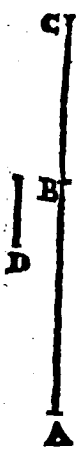
COROLLARIVM.

HINC sequitur, si tota magnitudo ex duabus composita, commensurabilis sit alteri ipsarum, eandem & reliquæ commensurabilem esse. Vt si A C, ipsi A B, sit commensurabilis, esse quoque eandem A C, reliquæ B C, commensurabilem. Nam vt in posteriori parte theorematis ostensum est, semper D, communis mensura totius A C, & ablatæ A B, cùm metiatur totam A C, & ablatam A B, metietur quoque reliquam B C, ex 3. pronunciato. Quare commensurabiles sunt A C, B C. Quod est propositum.

16. 9.

THEOR. 14. PROPOS. 17.

Si duæ magnitudines incommensurabiles componantur, & tota magnitudo vtrique ipsarum incommensurabilis erit. Quòd si tota magnitudo vni ipsarum incommensurabilis fuerit; & quæ à principio magnitudines incommensurabiles erunt.



COMPONANTVR duæ magnitudines incommensurabiles A B, B C. Dico totam quoque magnitudinem A C, vtrique ipsarum A B, B C, incommensurabilem esse. Si enim non est vtrique incommensurabilis, sit alteri commensurabilis, si fieri potest, nempe ipsi A B, [e] sitque D, communis mensura ipsarum A C, A B. Quoniam igitur D, metitur totam A C, & ablatam A B; [f] metietur quoque D, reliquam B C; Ac propterea cùm D, metiatur vtramque A B, B C, erunt A B, B C, commensurabiles. Quod est absurdum. ponuntur enim incommensurabiles. Non ergo commensurabilis est A C, ipsi A B; Eademque ratione neq; ipsi B C, commensurabilis erit. Quare vtrique ipsarum A B, B C, commensurabilis est.

SED iam tota A C, composita ex A B B C, incommensurabilis sit vni ipsarum componentium, nempe ipsi A B. Dico quoque A B, B C, incommensurabiles esse. Si enim sint commensurabiles, [g] erit quoque tota A C, vtrique ipsarum A B, B C, commensurabilis. Quod est absurdum. Ponitur enim A C, alteri ipsarū, nempe ipsi A B, incommensurabilis. Non ergo commensurabiles sunt A B, B C. Eodem argumento ostendemus A B, B C, incommensurabiles esse, si A C, ipsi B C, incommensurabilis fuerit. Quapropter si duæ magnitudines incōmensurabiles componātur, &c. Quod erat ostendendū.

e 3. decimi. f 3. pron. g 16. decimi.

COROLLARIVM.

SEQVITVR ex his, si tota magnitudo ex duabus composita, incommensurabilis sit alteri ipsarum, eandem & reliquæ incommensurabilem esse. Nempe si A C, incommensurabilis sit ipsi A B, esse quoque eandem A C, reliquæ B C, incommensurabilem. Si enim A C, ipsi B C, foret commensurabilis, esset quoque A C, ex coroll. præcedentis propos. reliqua A B, commensurabilis. Quod est absurdum. ponitur enim incommensurabilis. Non est ergo A C, ipsi B C, commensurabilis, sed incommensurabilis. Quod est propositum.

SCHOLIVM I.

PERSPICVVM est, in duabus proximis antecedentibus propositionibus, earumq; corollarijs, si de lineis agatur, intelligendas esse lineas longitudine commensurabiles, vel incommensurabiles. Assumitur enim

ad

ad vtriuſque propoſitionis demonſtrationem communis menſura D, &c. quam quidem ſolùm linea longitudine inter ſe commenſurabiles habent, vt ex defin. apparet.

LEMMA I.

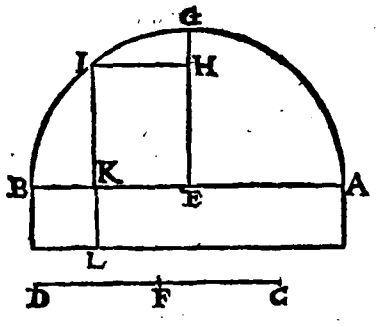
Si ad aliquam rectam lineam applicetur parallelogrammum deficiens figura quadrata; Parallelogrammum applicatum æquale eſt ei rectangulo, quod ſub ſegmentis rectæ lineę ex applicatione factis continetur.

Hoc lemma demonſtrauimus nos in ſcholio propoſ. 28. lib. 6.

LEMMA II.

Dvabvs datis rectis lineis inæqualibus, quartam partem quadrati ex minore deſcripti ad maiorem applicare, ita vt deficiat figura quadrata.

Qvamvis id, quod hoc lemmate proponitur, abſolui poſſit ex propoſ. 28. libri 6. quòd quarta pars quadrati ex minore linea deſcripti, minor ſit rectangulo ad dimidiam maioris linea applicato, deficienteq; figura quadrata, vt vult propoſ. illa 28. lib. 6. hoc eſt, quadratum ex dimidio minoris linea deſcriptũ, (quod quidẽ quarta pars eſt quadrati ex tota deſcripti, ex ſcholio propoſ. 4. libri 2.) minus ſit quadrato ex dimidiata parte maioris deſcripto: (quod quidem applicatum eſt ad dimidium maioris, deficitq; figura quadrata.) Quamuis, inquam, abſolui hoc poſſit per propoſ. 28. lib. 6. libet tamen idipſum hoc in loco cum alijs interpretibus exequi alia ratione faciliori. Sint igitur data recta inæquales A B, C D, quarum A B, maior ſit, oporteatq; ad A B, applicare parallelogrammum deficiens figura quadrata, quod quidem parallelogrammum æquale ſit quartæ parti quadrati ex recta C D, deſcripti. Sectis rectis A B, C D, bifariam in E, & F, deſcribatur ex centro E, & interuallo E A, vel E B, ſemicirculus A G B; & ex E, perpendicularis ad A B, ducatur E G. Et quia tota A B, maior ponitur, quàm tota C D, erit quoq; A E, dimidia ipſius A B, hoc eſt, E G, ipſi A E, æqualis, maior quàm C F, dimidia ipſius C D. Poſita igitur E H, æquali ipſi C F, agatur per H, ipſi A B, parallela H I, demittaturq; I K L, ad A B, perpendicularis, & ſit K L, ipſi K B, æqualis; Ac tandem perficiantur rectangulum A L, & quadratum B L. Dico parallelogrammum A L, applicatum ad rectam A B, deficiens figura quadrata B L, æquale eſſe quartæ parti quadrati recta C D. Quoniam enim K I, media proportionalis eſt inter A K, K B, vt in ſcholio propoſ. 13. lib. 6. tradidimus; [a] *erit rectangulum ſub A K, K B, hoc eſt, rectangulum A L, æquale quadrato ex K I, hoc eſt, quadrato ex E H;* [b] *(eſtenim K I, ipſi E H, æqualis, ob parallelogrammum E I,) hoc eſt, quadrato ex C F: Eſt autem quadratum ex C F, quarta pars quadrati ex C D; quod quadratũ ex C D, per ſcholium propoſitionis 4. libri 2. quadruplum ſit quadrati ex C F. Igitur parallelogrammum A L, ad rectam A B, applicatum, deficiensq; quadrato B L, æquale eſt quartæ parti quadrati ex C D, deſcripti. Quod eſt propoſitum.*



a 17. ſexti.

b 34. primi.

SCHOLIVM II.

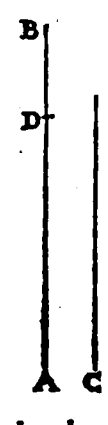
Ex hoc lemmate abſoluemus & hoc problema, quod ſequitur, in hunc modum.

Datam rectam lineam ita ſecare, vt rectangulum ſub partibus contentum, æquale ſit dato rectilineo, quod tamen maius non ſit, quàm quadratum à dimidia linea deſcriptum.

Sit enim recta data A B, & rectilineum quodcunque, cui æquale ponatur quadratum ex C F, nõ maius quàm quadratum ex dimidia A E, ita vt latus C F, non maius ſit latere A E. Educta ergo ad A B, perpendiculari E G, ſit E H, æqualis ipſi C F. Deinde acta H I, parallela ipſi A B, demittatur I K, perpendicularis ad A B. Quibus peractis, oſtendemus, vt prius, rectangulum ſub partibus A K, K B, æquale eſſe quadrato ex I K, hoc eſt, quadrato ex C F, atq; adeò & rectilineo dato, cui æquale eſt poſitum quadratum ex C F. Quod eſt propoſitum. Diximus autem, rectilineum datum non debere eſſe maius, q̃ quadratum ex dimidia linea deſcriptum; quia ſi maius eſſet, eſſet quoq; recta C F, maior quàm recta E G. Quare ex E G, abſcindi non poſſet recta ipſi C F, æqualis: quod tamen ad problema efficiendum requiritur, vt ex demonſtratione manifeſtum eſt.

LEMMA III.

Si ſint duæ rectæ inæquales, & ad maiorem applicetur quarta pars quadrati ex minore deſcripti, deficiens figura quadrata; Non erunt ſegmenta, quæ ex applicatione fiunt, æqualia.



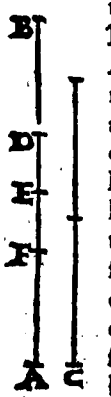
Sint dua recta inæquales A B, & C; & ad maiorem A B, applicetur parallelogrammum deficiens quadrato, sitq; illud æquale quartæ parti quadrati ex minore C, descripti, ita vt D B, latus sit quadrati, quo parallelogrammum applicatum deficit. Dico segmenta A D, D B, inæqualia esse. Si enim A D, D B, segmenta dicantur esse æqualia; cùm ex 1. lemmate parallelogrammum applicatum ad A B, deficiensq; figura quadrata ex D B, descripta, æquale sit rectangulo sub A D, D B; sit autem quod sub æqualibus A D, D B, quadratum; erit dictum parallelogrammum, quadratum ex A D, dimidio ipsius A B, descriptum; atq; adeò ex scholio propos. 4. lib. 2. quadratum ex A B, quadruplum erit ipsius parallelogrammi: Est autem & quadratũ ex C, per hypothesim, quadruplũ eiusdẽ parallelogrammi applicati, nempe quartæ partis quadrati ex C. Igitur quadrata rectarum ex A B, & C, æqualia sunt, atq; recta A B, & C, æquales. Quod est absurdum. ponuntur enim inæquales, & A B, maior. Inæqualia igitur sunt segmenta A D, D B. Quod est propositum.

Hoc facilè etiam apparet ex constructione problematis in antecedente lemmate. Cùm enim abscissa sit per constructionem E H, æqualis dimidiatæ parti ipsius C D, nempe ipsi C F, ducta q; H I, parallela ipsi A B, & tandem demissa perpendicularis I K, vt partes factæ ex applicatione sint A K, K B; manifestum est A K, K B, segmenta esse inæqualia, cùm A B, in E, secta sit bifariam. Immò hinc constat, prius segmentũ maius esse, & posterius, quod latus est quadrati, quo parallelogrammum applicatum deficit, minus.

17. 13. # THEOR. 15. PROPOS. 18.

SI fuerint duæ rectæ lineæ inæquales, quartæ autem parti quadrati, quod fit à minori, æquale parallelogrammum ad maiorem applicetur, deficiens figura quadrata, & in partes longitudine commensurabiles ipsam diuidat; maior tantò plus poterit quàm minor, quantum est quadratum rectæ lineæ sibi longitudine commensurabilis. Quòd si maior tantò plus possit quàm minor, quantum est quadratum rectæ lineæ sibi longitudine commensurabilis, quartæ autem parti quadrati, quod fit à minori, æquale parallelogrammum ad maiorem applicetur, deficiens figura quadrata; in partes longitudine commensurabiles ipsam diuidet.

SINT duæ rectæ inæquales A B, & C, quarum maior A B; quartæ autem parti quadrati ex minore C, descripti, per lemma secundum præcedentis propositionis applicetur ad A B, parallelogrammum æquale, & deficiens figura quadrata, contentum sub A D, B D, faciatq; segmenta A D, D B, longitudine commensurabilia. Dico A B, plus posse, quàm C, quadrato lineæ longitudine sibi commensurabilis. Quoniam enim per tertium lemma præcedentis propositionis A D, maior est, quàm D B; diuidatur A B, bifariam in E, & ipsi E D, æqualis sumatur E F. Quo facto, cùm totæ E A, E B, æquales sint, & ablatæ quoque E F, E D; erunt & reliquæ A F, B D, æquales.



a 5. secundi. Et quia recta A B, diuisa est bifariam in E, & non bifariam in D; a erit rectangulum sub A D, D B, vnà cum quadrato ex E D, æquale quadrato ex E B; Ac propterea quadruplum rectanguli sub A D, D B, & quadrati ex E D, æquale erit quadruplo quadrati ex E B: Est autem quadruplo rectanguli sub A D, D B, æquale quadratum ex C; (Ponitur enim rectangulum sub A D, D B, æquale quartæ parti quadrati ex C,) & quadruplo quadrati ex E D, æquale est quadratum ex F D; (quadratum enim ex F D, quadruplum est ex scholio propos. 4. lib. 2. quadrati ex E D, cùm F D, dupla sit ipsius E D,) & quadruplo quadrati ex E B, æquale est quadratum ex A B. (quòd quadratum ex A B, quadruplum sit per scholium propos. 4. lib. 2. quadrati ex E B, dimidiata parte ipsius A B.) Igitur & quadrata ex C, & F D, æqualia sunt quadrato ex A B; Ac proinde recta A B, plus potest, quàm recta C, quadrato rectæ F D. Hanc igitur F D, demonstrare oportet longitudine commensurabilem esse ipsi A B. Quoniam rectæ A D, D B, longitudine ponuntur commensurabiles; b erit quoque tota A B, parti D B, commensurabilis longitudine. Est autem & ipsi D B, composita ex D B, A F, longitudine commensurabilis: (quòd composita ex D B, A F, dupla sit ipsius D B.) Igitur cùm vtraque A B, & composita ex D B, A F, longitudine sit commensurabilis ipsi D B; c erunt quoq; A B, & composita ex D B, A F, longitudine inter se commensurabiles; Ac propterea cùm A B, composita ex A F, D B, tanquam vna, & ex F D, commensurabilis sit longitudine compositæ ex A F, D B; erit eadem A B, ex corollario propos. 16. huius lib. commensurabilis longitudine reliquæ F D. Ergo A B, plus potest, quàm C, quadrato rectæ F D, longitudine sibi commensurabilis.

b 16. decimi.

c 12. decimi.

SED iam A B, plus possit, quàm C, quadrato lineæ sibi longitudine commensurabilis; & quartæ parti quadrati ex C, æquale parallelogrammum applicetur ad A B, deficiens figura quadrata, fa-

ciatque

ciatque segmenta A D, D B. Dico & rectas A D, D B, longitudine esse commensurabiles. Iisdem enim constructis, similiter demonstrabimus A B, plus posse, quàm C, quadrato rectæ F D. Quare cùm A B, ponatur plus posse, quàm C, quadrato rectæ longitudine sibi commensurabilis; erit recta A B, ipsi F D, longitudine commensurabilis. Igitur cùm tota A B, composita ex F D, & ex A F, D B, tanquam vna, commensurabilis sit longitudine ipsi F D; erit eadem A B, longitudine commensurabilis reliquæ compositæ ex A F, D B, per corollarium propos. 16. huius libri. Est autem & composita ex A F, D B, ipsi D B, longitudine commensurabilis, cùm ipsius sit dupla: Igitur cùm vtraque A B, D B, longitudine sit commensurabilis compositæ ex A F, D B; [a] erunt quoque A B, D B, longitudine inter se commensurabiles: Atq; adeò cùm tota A B, composita ex A D, D B, commensurabilis sit longitudine ipsi D B; [b] erunt ipsæ A D, D B, longitudine quoq; inter se commensurabiles. Quocirca si fuerint duæ rectæ lineæ inæquales, &c. Quod erat demonstrandum.

[a] 12. decimi.

[b] 16. decimi

THEOR. 16. PROPOS. 19. 18.

SI fuerint duæ rectæ lineæ inæquales quartæ autem parti quadrati, quod fit à minore, æquale parallelogrammum ad maiorem applicetur deficiens figura quadrata, & in partes incommẽsurabiles longitudine ipsam diuidat; maior tantò plus poterit, quàm minor, quantum est quadratũ rectæ lineæ sibi longitudine incommensurabilis. Quòd si maior tantò plus possit, quàm minor, quantum est quadratum rectæ lineæ sibi longitudine incommensurabilis, quartæ autem parti quadrati, quod fit à minore, æquale parallelogrammum ad maiorem applicetur deficiẽs figura quadrata; in partes longitudine incommensurabiles ipsam diuidet. 14.

SINT duæ rectæ inæquales A B, & C, quarum maior A B; quartæ autem parti quadrati ex C, minore descripti applicetur ad A B, per secundum lemma propositionis præcedentis, parallelogrammum æquale deficiens figura quadrata, quod faciat in recta A B, partes A D, D B, longitudine incommensurabiles. Dico A B, plus posse, quàm C, quadrato rectæ sibi longitudine incommensurabilis. Iisdem enim, quæ suprà constructis, similiter ostendemus A B, plus posse, quàm C, quadrato rectæ F D. Hanc igitur demonstrare oportet ipsi A, longitudine esse incommensurabilem. Quoniam rectæ A D, D B, ponuntur longitudine incommensurabiles; [c] erit quoque tota A B, parti D B, longitudine incommensurabilis. Sed D B, longitudine commensurabilis est compositæ ex D B, A F, cùm hæc illius sit dupla. Igitur cùm duarum linearum commensurabilium D B, & quæ componitur ex D B, A F, ipsa D B, longitudine sit incommensurabilis rectæ A B; [d] erit quoque reliqua composita ex D B, A F, eidem A B, longitudine incommẽsurabilis: Ac propterea cùm A B, composita ex A F, D B, tanquam vna, & ex F D, incommensurabilis sit longitudine compositæ ex A B, D B, erit eadem A B, per corollarium propos. 17. huius lib. & reliquæ F D, longitudine incommensurabilis. Ergo A B, plus potest, quàm C, quadrato rectæ F D, longitudine sibi incommensurabilis.



[c] 17. decimi.

[d] 14. decimi.

IAM verò A B, plus possit, q̃ C, quadrato lineæ longitudine sibi incommensurabilis; & quartæ parti quadrati ex C, æquale parallelogrammum applicetur ad A B, deficiens figura quadrata, faciatque in recta A B, partes A D, D B. Dico & rectas A D, D B, esse incommensurabiles longitudine. Iisdem enim constructis, ostendemus vt prius, rectam A B, plus posse, quàm C, quadrato rectæ F D. Quare cùm A B, ponatur plus posse, quàm C, quadrato rectæ longitudine sibi incommensurabilis; erit A B, ipsi F D, incommensurabilis longitudine. Igitur cùm tota A B, composita ex F D, & ex A F, D B, tanquam vna, longitudine incommensurabilis sit ipsi F D; erit eadem A B, per corollarium propositionis 17. huius libri, & reliquæ compositæ ex A F, D B, longitudine incommensurabilis: Est autem composita ex A F, D B, ipsi D B, longitudine commensurabilis, cùm illa huius sit dupla. Igitur cùm duarum linearum commensurabilium, nempe quę ex A F, D B, componitur, & D B, ipsa composita ex A F, D B, longitudine incommensurabilis sit rectæ A B; [e] erit & reliqua D B, eidem A B, longitudine incommensurabilis; Ac proinde cùm tota A B, composita ex A D, D B, incommensurabilis sit ipsi D B, longitudine; [f] erunt & ipsę A D, D B, longitudine inter se incommensurabiles. Quam ob rem si fuerint duæ rectæ lineæ inæquales, quartæ autem parti quadrati, &c. Quod erat demonstrandum.

[e] 14. decimi.

[f] 17. decimi.

SCHOLIVM I.

EGIT hactenus Euclides de magnitudinibus commensurabilibus, & incommensurabilibus; nunc ad Rationales & Medias transit in sequentibus.

LEMMA I.

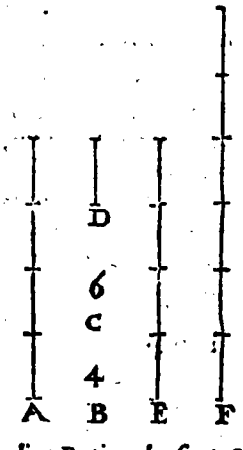
QVONIAM demonstratum est, lineas longitudine commensurabiles, omnino & potentia commensurabiles esse, potentia verò commensurabiles, non omnino & longitudine, sed posse & longitudine commensurabiles esse, & incommensurabiles; manifestum est, si expositæ Rationali aliqua linea commensurabilis fuerit longitudine, illam Rationalem vocari, &

ipſi commenſurabilem, non ſolùm longitudine, ſed etiam potentia: longitudine enim commenſurabiles, omnino & potentia commenſurabiles ſunt. Si verò expoſita Rationali aliqua linea fuerit potentia commenſurabilis, ſiquidem & longitudine, dicetur & ſic Rationalis, & commenſurabilis ipſi longitudine, & potentia. Quòd ſi expoſita Rationali rurſus aliqua linea commenſurabilis exiſtens potentia, longitudine fuerit incommenſurabilis; dicetur & ſic Rationalis, potentia tantùm ipſi commenſurabilis.

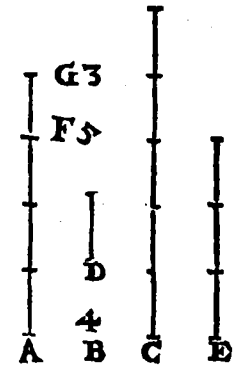
LEMMA II.

Ex Proclo. Rationales vocat eas lineas, quæ expoſitæ Rationali vel longitudine & potentia commenſurabiles ſunt, vel potentia ſolùm. Sunt autem & aliæ lineæ, quæ longitudine quidem expoſitæ Rationali incommenſurabiles ſunt, potentia autem ſolùm commenſurabiles; atque ob id rurſus dicuntur Rationales, & commenſurabiles inter ſe, quatenus Rationales; commenſurabiles, inquam, inter ſe vel longitudine & potentia, vel potentia ſolùm: Et ſiquidem longitudine, dicuntur & ipſæ Rationales longitudine inter ſe commenſurabiles, vt intelligatur, etiam potẽtia commenſurabiles eſſe; Si verò potentia inter ſe ſolùm ſunt commenſurabiles: dicuntur ipſæ quoq; Rationales, potentia ſolùm inter ſe commenſurabiles.

SCHOLIVM.

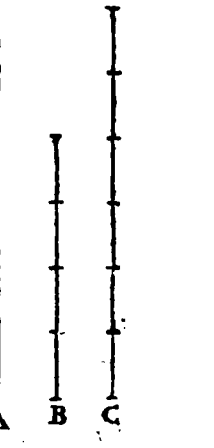


Ivaqve ex his colligere licebit tria genera linearum Rationalium longitudine inter ſe commenſurabilium. Aut enim duarum linearum Rationalium longitudine inter ſe commenſurabilium, altera æqualis eſt expoſitæ Rationali; ac proinde vtraque Rationali commenſurabilis quoq; longitudine: Aut neutra Rationali expoſitæ æqualis eſt, longitudine tamen ei vtraque eſt commenſurabilis: Aut denique vtraque expoſitæ Rationali commenſurabilis eſt ſolùm potentia. Hæc autem tria genera inueniemus hoc modo: Sit expoſita Rationalis A, diuiſa in quatuor partes; quot nimirum vnitates ſunt in numero B. Sumpto deinde quolibet alio numero C, ſit D, recta vna partium rectæ A; & quoties D, metitur lineam A, toties metiatur quandam aliam E. Item quoties vnitas eſt in C, toties eadem D, metiatur quampiam aliam lineam F. Quoniam igitur A, & E, componũtur ex partibus multitudine æqualibus, quæ quidem magnitudine æquales ſunt ipſi D; ipſæ æquales erunt. Rurſus quia D, metitur omnes tres, A, E, & F, erunt omnes tres A, E, & F, longitudine commenſurabiles. Quare E, & F, Rationali A, commenſurabiles longitudine, Rationales ſunt: Sunt autem & oſtenſa longitudine inter ſe commenſurabiles, cùm habeant D, communem menſuram. Inuenta ergo ſunt duæ Rationales E, F, longitudine commenſurabiles & inter ſe, & expoſitæ Rationali A, & quarum vna, nempe E, æqualis eſt Rationali expoſitæ A.



Iam verò D, metiatur duas lineas quaſdam C, E, per duos numeros F, G, quorum neuter idem ſit qui B, ita vt vtraque linea C, & E, inæqualis ſit ipſi A. Erunt igitur vt prius, tres rectæ A, C, E, menſuram habentes communẽ D, longitudine commenſurabiles. Quare C, E, Rationali A, longitudine commenſurabiles, Rationales ſunt. Cùm ergo & inter ſe ſint longitudine commenſurabiles; inuentæ erunt duæ Rationales C, E, longitudine commenſurabiles & inter ſe, & expoſitæ Rationali A, quarum neutra æqualis eſt Rationali expoſitæ A.

Postremo, expoſitæ Rationali A, [a] *inueniatur rectæ B, longitudine tantùm incommenſurabilis, quæ ſecetur in quotcunque partes æquales, & ſumatur C, compoſita ex aliis quotcunque partibus, quæ magnitudine æquales ſint partibus rectæ B. Quo facto, erunt B, & C, longitudine commenſurabiles. Dico eaſdem expoſitæ Rationali A, potentia ſolùm eſſe commenſurabiles. Quoniam enim A, B, potentia ſunt commenſurabiles; erit quadratum ex A, quadrato ex B, commenſurabile: Eſt autem eidem quadrato ex B, commenſurabile quadratum ex C: quòd B, C, longitudine ſint commenſurabiles, atque adeò & potentia;* [b] *Igitur quadrata rectarum A, & C, commenſurabilia quoque inter ſe ſunt. Quare C, ipſi A, potentia eſt commenſurabilis. Et quia duarũ rectarum B, C, longitudine commenſurabilium B, eſt ipſi A, longitudine incommenſurabilis;* [c] *erit quoque reliqua C, eidem A, longitudine incommenſurabilis. Eſt ergo C, ſolùm potentia ipſi A, commenſurabilis. Et quia B, & C, Rationali expoſitæ A, potentia commenſurabiles, Rationales ſunt; Inuentæ erũt duæ Rationales B, C, longitudine quidem inter ſe commenſurabiles, potentia verò tantùm commenſurabiles expoſitæ Rationali A. Quod eſt propoſitum.*

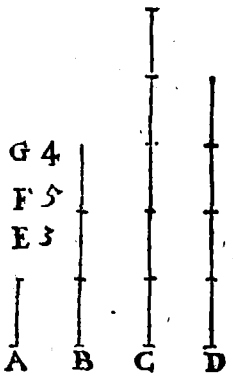


[a] 12. decimi.

[b] 12. decimi.

[c] 14. decimi.

Qvod



QVOD si quis optet inuenire quotcunque lineas Rationales longitudine inter se commensurabiles, id efficiet hoc modo: Sumpta mensura quauis A, componantur quotlibet lineæ B, C, D, ex tot partibus ipsi A, æqualibus, quot sunt vnitates in totidem numeris inæqualibus E, F, G. Nam lineæ B, C, D, habentes communem mensuram A, longitudine commensurabiles erunt.

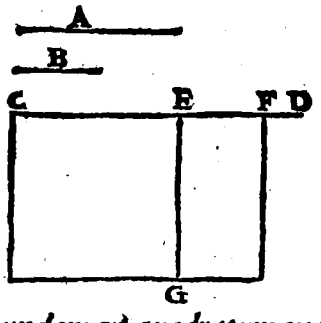
CAETERVM & omnes lineas Rationales, non solùm expositæ Rationali, sed etiã inter se esse commensurabiles, facilè hoc modo demonstrabimus. [a] *Quoniã Rationales lineæ sunt, quæ expositæ Rationali sunt commensurabiles vel longitudine & potentia, vel potentia tantùm;* [b] *quæ autem eidem commensurabiles, & inter se commensurabiles sunt; manifestum est, Rationales lineas quascunque inter se commensurabiles esse.*

a 6. defin.

b 12. decimi.

LEMMA III.

SI sint duæ rectæ lineæ, erit vt prima ad secundam, ita quadratum, quod fit à prima, ad rectangulum, quod sub duabus illis rectis lineis continetur: Et vt secunda ad primam, ita rectangulum sub ipsis, ad quadratum ex prima.



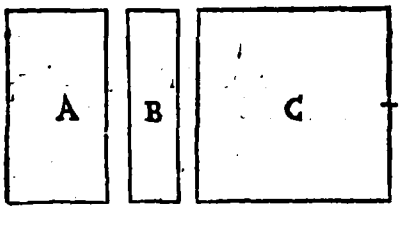
SINT duæ rectæ A, & B. Dico esse vt A, ad B, ita quadratum ex A, ad rectangulum sub A, & B, comprehensum. Ex quantacunque enim linea recta C D, abscindatur C E, ipsi A, æqualis, & E F, ipsi B. Deinde super C E, describatur quadratum C G, perficiaturq; rectangulum G F, contentum sub C E, & E F, hoc est, sub A, & B. [c] *Quoniam igitur est vt C E, ad E F, hoc est, vt A, ad B, ita parallelogrammũ C G, hoc est, quadratum ex A, ad parallelogrammum G F, sub A, & B, comprehensum; perspicuum est, si sint duæ rectæ lineæ, esse primam ad secundam, vt quadratum ex prima descriptum, ad rectangulum sub ipsis comprehensum.*

c 1. sexti.

EODEM modo erit, vt B, ad A, ita rectangulũ F G, ad quadratũ G C. Quod est propositũ.

LEMMA IIII.

SPATIVM Rationali spatio commensurabile, & ipsum Rationale est.



SIT spatium A, commensurabile Rationali spatio B. Dico & A, Rationale esse. Sit namque C, quadratũ Rationale, ratione cuius reliqua Rationalia dicuntur, vel irrationalia; quod nimirum ab exposita Rationali describitur. Quoniam igitur B, Rationale est, [d] *erit ipsum Rationali C, commensurabile: Est autem & A, ipsi B, commensurabile. Igitur A, & C, cùm commensurabilia sint ipsi B,* [e] *inter se quoque commensurabilia erunt; ac proinde spatium A, Rationali quadrato C, ex Rationali linea expositæ descripto commensurabile,* [f] *Rationale est. Quod erat demonstrandum.*

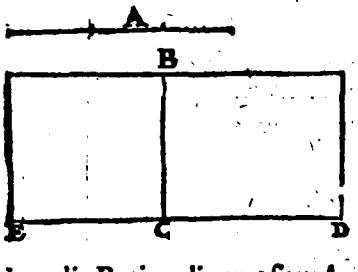
d 9. defin.

e 12. decimi.

f 9. defin.

THEOR. 17. PROPOS. 20. 19. 15.

QVOD sub Rationalibus longitudine commensurabilibus rectis lineis, secundùm aliquem prædictorum modorum, continetur rectangulum; Rationale est.



SIT exposita Rationalis A, & spatium rectangulum B D, contentum sub Rationalibus longitudine commensurabilibus B C, C D, secundùm aliquem prædictorum modorum. (hoc est, secundùm aliquem trium modorum, quos in scholio 2. antecedentis propositionis explicuimus; ita vt vel altera ipsarum B C, C D, Rationali expositæ A, sit æqualis, vel neutra: sed tamé ei vtraque commensurabilis sit aut longitudine, aut potentia tantùm. Dico B D, rectangulum Rationale esse. Describatur enim ex altera earum; nempe ex B C, quadratum B E. Quoniam igitur B C, Rationalis Rationali expositæ A, commensurabilis est vel longitudine & potentia, vel potentia solùm;* [a] *erit quoque quadratum B E, ex B C, descriptum quadrato ex A, commensurabile:* [b] *Est autem quadratum ex A, Rationale, ratione cuius reliqua Rationalia vocantur, vel Irrationalia.* [c] *Igitur & B E, illi comensurabile, Rationale est. Quia verò B C, hoc est, E C, & C D, longitudine commensurabiles sunt; (ponuntur enim B C, C D, Rationales inter se longitudine cõmensurabiles.)*

a 3. defin.

b 8. defin.

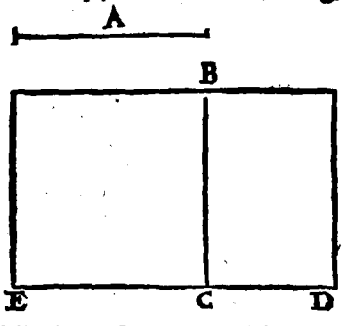
c 9. defin.

a 1. sexti. & est vt E C, ad C D, ita E B, ad B D; b erunt quoque E B, B D, commensurabilia. Quare ex lem-
b 10. decimi. mate 4. antecedentis propos. B D, Rationali B E, commensurabile, Rationale est. Quod igitur sub Rationalibus longitudine commensurabilibus rectis, &c. Quod erat demonstrandum.

20. 16.

THEOR. 18. PROPOS. 21.

SI Rationale ad Rationalem applicetur, latitudinem efficit Rationalem, & ei, ad quam applicatum est, longitudine commensurabilem.



SIT rursum exposita Rationalis A, & alia Rationalis B C, secundùm aliquê modorum, quos in scholio 2. propos. 19. exposuimus, hoc est, siue B C, æqualis sit Rationali expositæ A, siue non, commensurabilis tamen ei vel longitudine & potentia, vel potentia tantùm. Applicetur autem ad B C, Rationale B D, latitudinem faciens C D. Dico C D, Rationalem esse, & ipsi B C, commensurabilem longitudine. Describatur enim ex B C, quadratum B E; quod similiter, vt in antecedenti propositione ostendemus Rationale esse. Quia igitur B E, B D, Rationalia sunt, c ipsa commensurabilia erunt quadrato ex linea Rationali exposita A, descripto; d Ac propterea & commensu-
c 9. defin. d 12. decimi. e 1. sexti. rabilia inter se erunt: e Est autem vt B E, ad B D, ita E C, hoc est, B C, ad C D. Igitur & B C, C D, commẽsurabiles sunt longitudine, vt in scholio propos. 10. huius lib. docuimus. Est ergo C D, ipsi
f 6. defin. B C, commensurabilis longitudine: f sed & Rationalis, quippe quæ Rationali B C, atq; idcirco Rationali expositæ A, commensurabilis sit, vt in scholio propos. 12. huius lib. demonstrauimus. Quare latitudo C D, Rationalis est, & longitudine commensurabilis ipsi B C. Si igitur Rationale ad Rationalem applicetur, latitudinem efficit, &c. Quod erat demonstrandum.

LEMMA I.

RECTA linea potens spatium Irrationale, Irrationalis est.

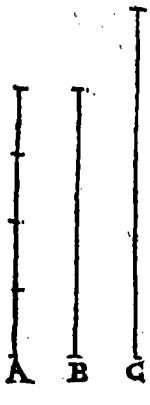


POSSIT recta A, spatium Irrationale, hoc est, quadratum ex A, æquale sit spatio cuipiam Irrationali. Dico A, Irrationalem esse. Si enim dicatur Rationalis; erit eius quadratum Rationale quoque, vt in demonstratione propos. 20. huius libri ostensum est. quod est absurdum. ponitur enim Irrationale. Non ergo A, Rationalis est. Igitur Irrationalis.

HOC idem constat ex defin. 11. huius lib. Vbi lineæ potentes spatia Irrationalia, vocantur Irrationales.

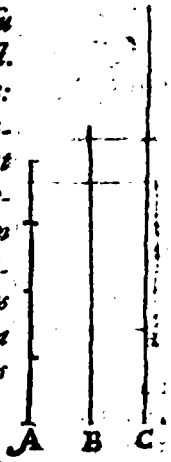
LEMMA II.

DVAS rectas Rationales potentia solùm commensurabiles inuenire.



DVO genera sunt linearum Rationalium potentia tantũ inter se commensurabilium. Aut enim altera earũ est æqualis expositæ Rationali, aut neutra. Prioris generis lineas ita inueniemus: Sit exposita Rationalis A, cui æqualis sumatur B. Deinde ipsi B, a *inueniatur C, longitudine tantũ incommẽsurabilis, seu (quod idem est) potẽtia tantũ commensurabilis. Quoniam igitur B, C, ipsi A, commensurabiles sunt, (B, quidem, q ei sit æqualis; at C, ex constructione, q inuenta sit potẽtia tantũ commensurabilis ipsi B, atq; adeò ipsi A.) Rationales erunt B, & C: Sunt autẽ & potentia solùm cõmensurabiles. Inuenta ergo sunt duæ Rationales B, C, potentia tantũ commensurabiles, quarũ altera, nempe B, expositæ Rationali A, æqualis est.*
a 11. decimi.

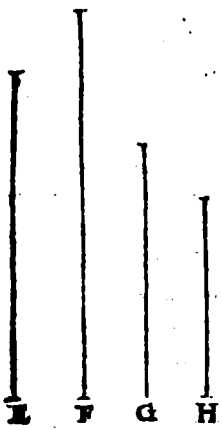
POSTERIORIS autẽ generis lineas hac arte reperiemus: Sit rursus exposita Rationalis A, cui longitudine tantũ incommensurabilis b *inueniatur B; & huic rursum longitudine tantũ incommẽsurabilis C, maior aut minor q̃ A. Dico B, C, esse Rationales potentia tantũ commensurabiles. Quòd enim sint solùm commensurabiles potentia, patet ex constructione. Quòd autem sint Rationales, ita ostendemus. Quoniam A, C, ipsi B, potentia sunt commensurabiles; erunt & A, C, commensurabiles potentia, vt in scholio propos. 12. huius lib. demonstrauimus. Quare cùm vtraq; B, C, expositæ Rationali A, sit potentia*
b 11. decimi. c 6. defin. *commensurabilis;* c *erit B, C, Rationales. Inuentæ ergo sunt B, & C, Rationales potentia tantùm commensurabiles.*



SCHOLIVM.

QVOD si inueniendæ sunt quotcunq; lineæ Rationales potentia tantũ inter se commensurabiles, exequemur id hac ratione.

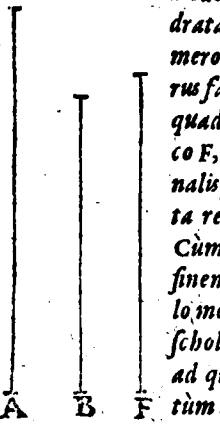
SYMAN-



SVMANTVR per ea, quæ in ſcholio propoſ. 20. lib. 9. docuimus, tot numeri primi, quot lineæ Rationales quæruntur; nempe A, B, C, D. Deinde ſumpta linea Rationali E, fiat vt A, ad B, ita quadratũ ex E, ad quadratum ex F, vt in corollario propoſitionis 6. huius libri oſtendimus. Item vt B, ad C, ita quadratum ex F, ad quadratum ex G; & denique vt C, ad D, ita quadratum ex G, ad quadratum ex H. Dico rectas E, F, G, H, Rationales eſſe, & potẽtia tantùm commenſurabiles inter ſe. Quòd enim Rationales ſint, manifeſtum eſt. Cùm enim earum quadrata proportionem habeant, quam numeri A, B, C, D, (nempe quadratum ex E, ad quadratum ex F, vt numerus A, ad numerum B, ex conſtructione; ſimiliterq; quadratum ex F, ad quadratum ex G, vt B, ad C, & quadratum ex G, ad quadratum ex H, vt C, ad D. At verò ex æquo quadratum ex E, ad quadratum ex G, vt A, ad C; ſimiliterq; quadratum ex E, ad quadratum ex H, vt A, ad D; & denique quadratum ex F, ad quadratum ex H, vt B, ad D.) [a] *erunt ipſa inter ſe commenſurabilia, ac propterea & recta ipſa potentia ſaltem commenſurabiles. Exiſtente ergo E, Rationali, erunt & reliquæ F, G, H, Rationales. Quòd autem potentia tantùm ſint commenſurabiles, ita oſtendemus. Quoniam earum quadrata proportionalia ſunt numeris primis A, B, C, D: numeri autem primi proportionem nõ habent, quam quadrati numeri, vt ad finem libri 8. docuimus; non habebunt etiam quadrata rectarum E, F, G, H, proportionem, quam numeri quadrati.* [b] *Quare rectæ E, F, G, H, longitudine incommenſurabiles ſunt. Oſtenſæ ſunt autem Rationales, & potentia commenſurabiles. Rationales igitur ſunt, & potentia tantùm commenſurabiles. Quod eſt propoſitum.*

a 6. decimi.

b 9. decimi.



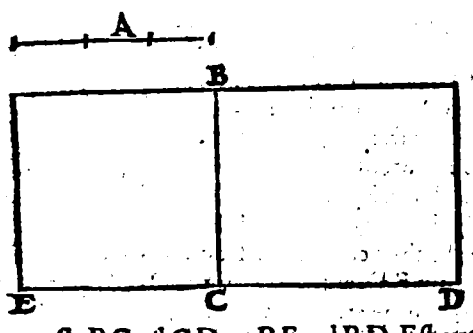
QVOD ſi propoſitis quotcunque Rationalibus potentia ſolùm commenſurabilibus, inuenienda ſit adhuc alia, quæ omnibus illis commenſurabilis ſit potentia tantùm, fiet id hoc modo: Sint propoſitæ duæ Rationales potentia tantùm commenſurabiles A, B, quarũ quadrata proportionem habeant, quam numerus C, ad numerum D: Sumpto autem alio numero E, qui ad quemlibet ipſorum C, D, primus ſit; (Inuenietur autem huiuſmodi numerus facilè, ſi ſumatur primus, qui neutrum ipſorum C, D, metiatur.) fiat vt D, ad E, ita quadratum lineæ B, ad quadratum lineæ F, per corollarium propoſitionis 6. huius libri. Dico F, Rationalem eſſe, & ipſis A, B, potentia ſolùm commenſurabilem. Quòd enim Rationalis ſit, ex eo patet, quòd commenſurabilis ſit Rationali B, ſaltem potentia, cùm quadrata rectarum B, F, proportionem habentia, quam numerus D, E, [c] *commenſurabilia ſint. Cùm ergo proportio D, ad E, non ſit, qua numeri quadrati ad numerum quadratum, vt ad finem libri 8. oſtendimus; (quòd D, & E, qui ambo non ſunt quadrati, cùm E, primus nullo modo quadratus ſit, ſint inter ſe primi, ideoq; plani non ſimiles, ac proinde ex ijs, quæ in ſcholio propoſitionis 26. libri 8. oſtendimus, proportionem non habeant, quam quadratus ad quadratum)* [d] *erunt rectæ B, F, longitudine incommenſurabiles. Ergo potentia tantùm commenſurabiles. Eadem ratione erũt A, & F, potentia ſolùm commenſurabiles. Nam ex æquo erit quadratum ex A, ad quadratum ex F, vt C, numerus ad numerum E. Cùm ergo hi numeri proportionem non habeant, quam quadratus ad quadratum; (quod oſtendemus perinde, vt idem demonſtrauimus de numeris D, & E,) erunt A, F, longitudine incommenſurabiles, &c.*

c 6. decimi.

d 9. decimi.

THEOR. 19. PROPOS. 22. 21. 19.

QVOD ſub Rationalibus potentia ſolùm commenſurabilibus rectis lineis continetur rectangulum; Irrationale eſt: Et recta linea ipſum potens, Irrationalis eſt. Vocetur autem Media.



SIT expoſita Rationalis A, & rectangulum B D, contentum ſub Rationalibus B C, C D, potentia tantùm commenſurabilibus ſecundùm aliquem modorum, quos in lemmate 2. præcedentis propoſ. diximus. (hoc eſt, ſiue altera illarum æqualis ſit Rationali expoſitæ A, ſiue non.) Dico rectangulum B D, eſſe Irrationale; & rectam, cuius quadratum ipſi B D, æquale eſt, Irrationalem quoque, quæ vocetur Media. Deſcribatur enim ex altera illarum, vt ex B C, quadratum B E, quod erit Rationale, vt in demonſtratione propoſ. 20. diximus. [a] Et quoniam eſt vt E C, hoc eſt, B C, ad C D, vt B E, ad B D. Eſt autem B C, ipſi C D, longitudine incommenſurabilis, ex hypotheſi; erit ex iis, quæ in ſcholio propoſ. 10. huius libri tradidimus, B E, ipſi B D, incommenſurabile. [b] Quare cùm B E, commenſurabile ſit quadrato ex Rationali expoſita A: ſit autem B E,

a 1. ſexti.

b 9. defin.

ipſi B D, incõmenſurabiles: [a] erit quoq; quadratũ ex Rationali expoſita A, eidem B D, incommenſurabile: Ac propterea B D, quadrato Rationalis expoſitæ incõmenſurabile exiſtens, [b] Irrationale eſt. Quamobrem & recta potens ipſum B D, Irrationalis eſt, ex 1. lemmate propoſ. antecedentis.

a 14. decimi.
b 10. defin.
c 27. ſexti.

VOCETVR autem hæc linea potens ipſum B D, Media, [c] propterea quòd media proportionalis eſt inter duas B C, C D, Rationales potẽtia tantùm inter ſe commenſurabiles, quippe cùm eius quadratum æquale ſit rectangulo B D, ſub ipſis B C, C D, comprehenſo. Quod igitur ſub Rationalibus potentia ſolùm commenſurabilibus, &c. Quod demonſtrandum erat.

SCHOLIVM.

ITAQVE omnis linea media proportionalis inter duas Rationales potentia tantùm inter ſe commenſurabiles, Media vocabitur. [a] *Cùm enim eius quadratum æquale ſit rectangulo ſub talibus Rationalibus comprehenſo, quod quidem in hoc theoremate oſtenſum eſt, eſſe Irrationale, erit latus ipſius, nempe media proportionalis inter dictas Rationales, linea Irrationalis, quæ Media appellatur. Ex quo lineam Mediam facilè deſcribemus, ſi dicamus eam eſſe lineam Irrationalem, quæ medio loco proportionalis eſt inter duas lineas Rationales potentia tantùm inter ſe commenſurabiles. Vel quæ poteſt rectangulum ſub duabus Rationalibus potentia tantùm inter ſe commenſurabilibus contentum. Nam ſola hæc linea Media hoc loco appellatur.*

a 17. ſexti.

VT autem rectè hoc loco monet Campanus, non ſolùm recta potens rectangulum Irrationale ſub duabus rectis Rationalibus potentia tantùm commenſurabilibus contentum, Irrationalis eſt, vocaturq; Media: Verùm etiam quadratum ipſius, vel rectangulum illud medium dicitur, quia medio loco proportionale eſt inter quadrata illarum rectarum Rationalium potentia ſolùm commenſurabilium, quemadmodum & recta ipſa media proportionalis eſt inter dictas Rationales. Nam ſi tres lineæ ſint continuè proportionales, quales ſunt B C, & recta Irrationalis, quæ Media dicitur, & C D; erunt quoque rectilinea ſimilia, ſimiliterq; deſcripta ſuper ipſas, cuiuſmodi ſunt earum quadrata proportionalia, vt in ſcholio propoſ. 22. lib. 6. demonſtrauimus. Quare quadratum ex Media deſcriptum proportionale eſt inter quadrata rectarum B C, C D, ideoq; Medium appellari poteſt.

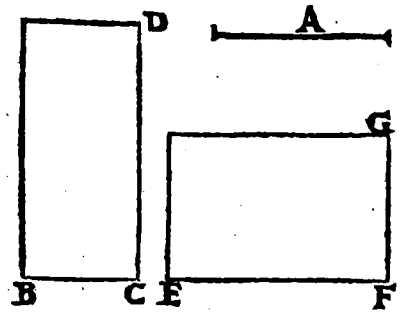
HOC autem non ita intelligas, vt putes omne rectangulum Medium contineri ſub duabus rectis Rationalibus potentia tantùm commenſurabilibus, quale eſt Medium B D. Hoc enim falſum eſt, cùm & ſpatium Medium contineri poſſit ſub duabus Irrationalibus, nempe Medijs longitudine, vel potentia tantùm inter ſe commenſurabilibus, vt ex propoſ. 25. & 26 huius lib. conſtabit. Itaque non reciprocantur, rectangulum ſub duabus Rationalibus potentia tantùm inter ſe commenſurabilibus contentum, & ſpatium Medium. Omne ſiquidem rectangulum ſub duabus Rationalibus potentia tantùm commenſurabilibus contentum, Medium eſt, vt oſtendimus: At non omne ſpatium Medium ſub duabus Rationalibus potentia tantùm commenſurabilibus continetur. Vniuersè tamen omne ſpatium Medium, æquale eſt alteri cuipiam Medio ſub duabus Rationalibus potentia tantùm commenſurabilibus contento. Nam aliàs recta ipſum potens, non eſſet dicenda Media, quia non poſſet rectangulum ſub duabus Rationalibus potentia tantùm commenſurabilibus comprehenſum; vel non eſſet proportionalis inter duas Rationales potentia tantùm commenſurabiles.

VNDE Medium deſcribi ſic poterit, vt dicamus, illud eſſe rectangulum ſub duabus Rationalibus potentia tantùm commenſurabilibus contentũ: Vel certè rectangulum, quod alteri cuipiam rectangulo ſub duabus Rationalibus potentia ſolùm commenſurabilibus comprehenſo æquale eſt, ita vt ipſum poſſit linea recta, quæ Media in hoc theoremate eſt vocata. Omne enim Medium nõ contentum ſub duabus huiuſmodi Rationalibus reuocari poteſt ad aliud Medium, cuius latera ſunt duæ lineæ Rationales potentia tantùm commenſurabiles, vt in ſcholio ſequentis theorematis oſtendemus.

22. 20.

THEOR. 20. PROPOS. 23.

QVOD à Media fit, ad Rationalem applicatum, latitudinẽ efficit Rationalem, & ei, ad quam applicatum eſt, longitudine incommenſurabilem.



SIT linea Media A, & Rationalis B C, ſiue ea ſit expoſita, ſiue expoſitæ commenſurabilis longitudine & potentia, vel potentia tantũ; [a] appliceturq; ad B C, rectangulum B D, æquale quadrato ex Media A, vel rectangulo, quod huic quadrato æquale eſt, faciatq; latitudinẽ C D. Dico C D, Rationalem eſſe, & ipſi B C, longitudine incommenſurabilẽ. Quoniam enim A, Media eſt, ipſa poterit rectangulũ ſub duabus rectis Rationalibus potentia tantũ inter ſe commenſurabilibus contentum; aliàs nõ poſſet dici Media. Sit igitur illud rectangulum E G, ſub Rationalibus E F, F G, potentia tantùm commenſurabilibus contentũ. Et quia A, ex hypotheſi, poteſt etiam ipſum B D, [b] æqualia erunt B D, & E G, lateraq; idcircò habebunt reciproca circa æquales angulos; nempe erit vt B C, ad E F, ita F G, ad C D: [c] Ac propterea quoq; vt quadratũ ex B C, ad quadratum ex E F, ita quadratum ex F G, ad quadratum ex C D: Sed quadratũ ex B C, commenſurabile eſt quadrato ex E F. (quòd rectæ B C, E F, potnantur Rationales; atque adeò inter ſe commenſurabiles vel longitudine & potentia, vel potẽtia tantùm.)

a 45. primi.
b 14. ſexti.
c 22. ſexti.

tantùm.) [a] Igitur & quadratum ex F G, commensurabile erit quadrato ex C D; propterea{que} & rectæ F G, C D, commensurabiles erunt saltem potentia. Ergo cùm F G, Rationalis expositæ Rationali sit commensurabilis, si ipsa non est exposita Rationalis; erit quoque C D, expositæ Rationali commensurabilis, vt ostendimus in scholio propos. 12. huius lib. atq; adeò C D, ex definitione, Rationalis erit. Dico quòd & longitudine incommensurabilis ipsi B C. Quoniam enim E F, F G, Rationales sunt potentia tantùm commensurabiles, hoc est, longitudine incommensurabiles; & est vt E F, ad F G, ita quadratum ex E F, ad rectangulum E G, sub E F, F G, contentum, ex lemmate 3. propos. 19. huius lib. [b] erit quadratum ex E F, incommensurabile rectangulo E G, atque adeò rectangulo B D, quod huic æquale est. Atqui quadratum ex E F, commensurabile est quadrato ex C D. (quòd E F, C D, Rationales sint, atque idcirco saltem potentia commensurabiles.) Igitur cùm quadratum ex C D, commensurabile sit quadrato ex E F; at rectangulum B D, eidem quadrato ex E F, incommensurabile: [c] incommensurabilia erunt quadratum ex C D, & rectangulum B D. Est autem ex lemmate 3. propos. 19. huius lib. quadratum ex C D, ad rectangulum B D, vt recta C D, ad rectam B C. [d] Incommensurabiles ergo sunt longitudine C D, & B C. Rationalis ergo est C D, & Rationali B C, longitudine incommensurabilis. Quamobrem, quod à Media fit, ad Rationalem applicatum, &c. Quod demonstrandum erat.

a 10. decimi
b 10. decimi
c 13. decimi.
d 10. decimi

SCHOLIVM.

FACILIVS quàm ex propos 45. lib. 1. applicabimus ad B C, rectangulum quadrato ex A, æquale, si ipsis B C, & A, [a] sumatur tertia proportionalis pro latere C D. Cùm enim B C, A, & C D, proportionales sint; [b] erit rectangulum B D, sub extremis B C, C D, contentum, æquale quadrato mediæ proportionalis A.

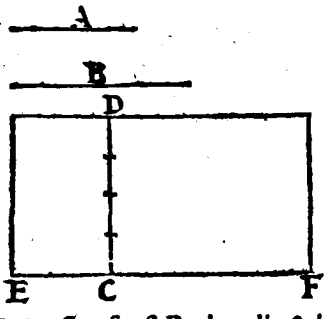
a 11. sexti.
b 17. sexti.

HAC arte vtendum erit & in sequentibus, quando ad aliquam rectam applicandum erit rectangulum æquale quadrato cuiuspiam lineæ rectæ.

PORRO ex hoc theoremate manifestum est, omne Medium, hoc est, spatium, quod linea Media potest, æquale esse cuidam alteri rectangulo contento sub duabus Rationalibus potentia tantùm commensurabilibus. Nam si illi Medio ad Rationalem lineam applicetur æquale rectangulum. faciet id, per hoc theorema, alterum latus Rationale, longitudine lineæ Rationali incommensurabile. Quare rectangulum hoc applicatum Medio æquale, Medium erit sub duabus Rationalibus potentia solùm commensurabilibus contentum. Atq; hoc modo quodcunque Medium reduci poterit ad Medium contentum sub duabus Rationalibus potentia tantùm commensurabilibus.

THEOR. 21. PROPOS. 24. 23. 21.

MEDIAE commensurabilis, Media est.



SIT Mediæ A, recta B, commensurabilis siue longitudine & potentia, siue potẽtia tantùm. Dico & B, Mediam esse. Expositæ enim sit Rationalis C D, [a] ad quam applicetur rectangulum D E, æquale quadrato ex A, Media. Quoniam igitur D E, Medium ad Rationalem C D, applicatum, facit C E, latitudinem; [b] erit C E, Rationalis ipsi C D, longitudine incommensurabilis. Rursus ad C D, Rationalem [c] applicetur rectangulum D F, quadrato ex B, æquale. Et quia rectæ A, B, ponuntur commensurabiles, erunt quoque eorum quadrata, hoc est, rectangula ipsis æqualia, D E, D F, commensurabilia. [d] Est autem vt D E, ad D F, ita recta E C, ad rectam C F. [e] Igitur E C, C F, longitudine sunt commensurabiles: Sed E C, ostensa est Rationalis, & longitudine ipsi C D, incommensurabilis. [f] Igitur & C F, longitudine eidem C D, incommensurabilis est. Cùm ergo & Rationalis sit, propterea quòd Rationali expositæ C D, sit commensurabilis; (Nam cùm E C, C F, sint longitudine ostensæ commensurabiles, & E C, ipsi C D, commensurabilis saltem potentia, quòd Rationalis sit; erit & C F, eidem C D, commensurabilis potentia, ex iis, quæ in scholio propos. 12. huius lib. scripsimus.) erunt C D, C F, Rationales potentia tantùm commensurabiles. [g] Ac proinde recta B, potens rectangulum D F, sub Rationalibus potentia tantùm commensurabilibus C D, C F, Media est. Mediæ igitur commensurabilis, Media est. Quod ostendendum erat.

a 45. primi.
b 23. decimi
c 45. primi.
d 1. sexti.
e 10. decimi
f 14. decimi
g 22. decimi

COROLLARIVM.

Ex hoc manifestum est, spatium Medio spatio commensurabile, Medium esse. Postquam enim demonstratum est D F, commensurabile esse Medio D E, ostensum ex eo mox fuit D F, esse quoque Medium: nimirum sub Rationalibus potentia tantùm commensurabilibus C D, C F, contentum. Eademq; ratio est in cæteris. Quod tamẽ hoc etiam modo potest demonstrari.

SIT spatium D F, spatio Medio D E, commẽsurabile. Dico & D F, Medium esse. Posit enim A, Media ipsum D E, Medium. (Nam cùm D E, Medium sit, poterit ipsum recta, quæ Media dicitur, vt in scholio propos. 22. huius libri tradidimus.) & B, ipsum D F. Quoniam igitur D E, D F, commensurabilia sunt, erunt quoque quadrata ex A, B, ipsis æqualia, commensurabilia. Quare A, B, rectæ potentia saltem sunt commensurabiles; Atque idcirco existente A,

Media, erit & B, illi commensurabilis Media, vt in hoc theoremate ostensum est. Igitur & D F, Medium erit. Omne enim spatium, quod potest Media, Medium appellatur, vt in scholio propos. 22. huius lib. docuimus.

LEMMA I.

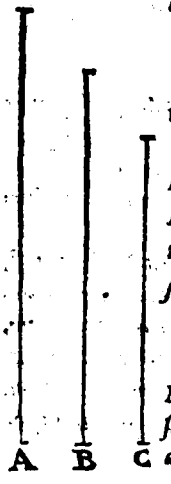
QVEMADMODVM autem in lemmate 1. propos. 19. huius lib. de Rationalibus dictum est, ita & hîc de Mediis dicemus. Nimirum rectam lineam Mediæ longitudine commensurabilem, dici Mediam, & ipsi commensurabilem non solùm longitudine, sed & potentia; Vniuersè enim quæ longitudine commensurabiles sunt, etiam potentia sunt commensurabiles. Si verò recta quædam linea Mediæ potentia fuerit commensurabilis, si quidem & longitudine, dicetur & sic Media, & ipsi commensurabilis longitudine & potentia. Quod si Mediæ rursus aliqua linea commensurabilis existens potentia, longitudine fuerit incommensurabilis, dicetur & sic Media ipsi potentia solùm commensurabilis.

LEMMA II.

DVAS rectas Medias longitudine commensurabiles; Item duas potentia tantùm commensurabiles inuenire.

SIT Media aliqua linea A, cui si inueniantur duæ rectæ commensurabiles B, C; illa quidem longitudine, hæc verò potentia tantùm; [a] *erit vtraque B, C, Mediæ A, commensurabilis, Media. Cùm ergo A, B, sint longitudine cõmensurabiles; & A, C, potẽtia tantùm; erũt inuentæ A, B, Mediæ longitudine cõmensurabiles; & A, C, Mediæ potentia solùm cõmensurabiles. Quod est propositum.*

a 24. decimi.

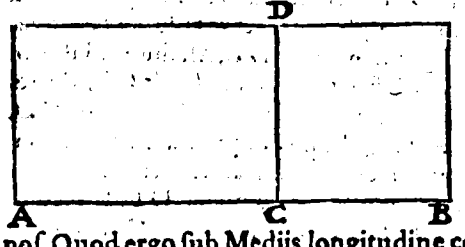


SCHOLIVM.

QVAMVIS omnis linea recta Mediæ commensurabilis, Media sit; non tamen omnis Media cuilibet Mediæ est commensurabilis; cùm duæ Mediæ dari possint prorsus incommensurabiles, longitudine videlicet, & potentia, vt ex propos. 36. huius lib. apparebit. Vbi etiam docebimus, quánam via inueniẽdæ sint duæ Mediæ longitudine et potẽtia incõmensurabiles.

24. THEOR. 22. PROPOS. 25.

23. QVOD sub Mediis longitudine commensurabilibus rectis lineis continetur rectangulum, Medium est.



CONTINEATVR rectãgulum A D, sub Mediis A C, C D, longitudine commensurabilibus. Dico A D, Medium esse. Describatur ex C D, Media quadratum B D, quod erit Medium. [a] Et quoniam est vt A C, ad C B, ita A D, ad D B: Sunt autem A C, C B, hoc est, A C, C D, longitudine commẽsurabiles; [b] erunt A D, D B, cõmensurabilia. Quare spatium A D, Medio D B, commensurabile, Medium est, ex coroll. præcedentis propos. Quod ergo sub Mediis longitudine commensurabilibus, &c. Quod erat ostendendum.

a 1. sexti.

b 10. decimi.

25. THEOR. 23. PROPOS. 26.

23. QVOD sub Mediis potentia tantùm commensurabilibus rectis lineis continetur rectangulum, vel Rationale est, vel Medium.

SIT rectangulum A C, comprehensum sub Mediis A B, B C, potentia tantùm commensurabilibus. Dico A C, esse vel Rationale, vel Medium. Describantur ex A B, B C, quadrata A D, C E, quæ Media erunt, vt in schollo propos. 22. huius lib. docuimus; cùm rectæ A B, B C, Mediæ ponantur. Exponatur Rationalis F G, [c] ad quam applicetur rectangulum F H, quadrato A D, ex A B, descripto æquale; & ad H I, rectangulum I K, rectangulo A C, æquale; & denique ad K L, rectangulum L M, æquale quadrato C E, ex B C, descripto; eritq; totum F M, vnum rectangulum, quemadmodum propos. 45. lib. 1. est ostensum. Quia verò A D, C E, Media sunt, erunt & F H, L M, illis æqualia, Media: quæ cùm applicentur ad Rationales F G, K L, ([d] est enim & K L, Rationali F G, æqualis, ob parallelogrammum F K, Rationalis.) faciantque latitudines G H, K M, [e] erunt rectæ G H, K M, Rationales, ipsi F G, seu K L, longitudine incommensurabiles. Et quia rectæ A B, B C, potentia inter se sunt commensurabiles, erunt & earum quadrata A D, C E, atque adeò & ipsis æqualia rectangula F H, L M, commensurabilia: [f] Vt autem F H, ad L M, ita est recta G H, ad K M. [g] Igitur G H, K M, longitudine inter se commensurabiles sunt. Quare G H, K M, Rationales ostensæ, sunt longitudine inter se commensurabiles, Rationali verò F G, solùm commensurabiles potentia, cùm ei ostensæ sint longitudine incommensurabiles; [h] Ac propterea rectangulum sub ipsis

c 45. primi.

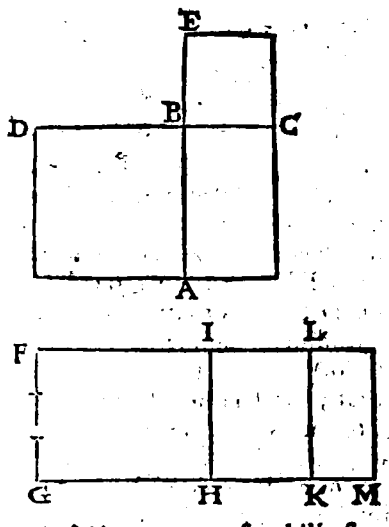
d 34. primi.

e 23. decimi.

f 1. sexti.

g 10. decimi.

h 20. decimi



ipſis GH, KM, Rationale eſt. Et quoniam eſt, vt DB, ad BC, ita AB, ad BE; (quòd DB, BG, ipſis AB, BE, ſint æquales, vtraque vtriq;) [a] & vt DB, ad BC, ita AD, ad AC; & vt AB, ad BE, ita AC, ad CE; erit quoq; vt AD; ad AC, ita AC, ad CE; atque adeò AD, AC, CE, proportionalia ſunt. Igitur & illis æqualia FH, HL, LM, proportionalia erunt: [b] Habent autem rectæ GH, HK, KM, eaſdem proportiones, quas rectangula FH, HL, LM. Igitur & rectæ GH, HK, KM, proportionales ſunt; [c] propterea q; rectangulum ſub GH, KM, quadrato ex HK, æquale eſt. Eſt autem rectangulum ſub GH, KM, oſtenſum Rationale. Igitur & quadratũ ex HK, Rationale eſt; ideoq; & recta HK, Rationalis erit; [d] & ob hoc ipſi FG, Rationali expoſitę, hoc eſt, ipſi HI, commenſurabilis vel longitudine, & potentia, vel ſolùm potentia. Et ſi quidem HK, ipſi HI, longitudine ſit commenſurabilis; [e] rectangulum HL, ſub Rationalibus HI, HK, longitudine commenſurabilibus contentum, hoc eſt, AC, illi æquale, erit Rationale. Si verò HK, ipſi HI, potentia ſolùm commenſurabilis ſit; [f] erit rectangulum HL, ſub Rationalibus HI, HK, potentia tantùm commenſurabilibus contentum, hoc eſt, AC, illi æquale, Medium. Eſt ergo AC, rectangulum ſub Mediis AB, BC, potentia tantùm commenſurabilibus contentum, vel rationale, vel Mediũ. Quocirca, quod ſub Mediis potentia tantũ cõmenſurabilibus, &c. Quod erat oſtendendũ.

a 1. ſexti.
b 1. ſexti.
c 17. ſexti.
d 6. defin.
e 26. decimi
f 21. decimi

SCHOLIVM.

FACILIVS quàm ex 45. propoſ. lib. 1. applicabimus ad HI, rectangulum ipſi AC, æquale, [a] *ſi tribus rectis HI, AB, BC, quarta proportionalis ſumatur pro latere HK.* [b] *Nam rectangulum ſub extremis HI, HK, æquale erit rectangulo ſub mediis AB, BC.*

a 12. ſexti.
b 16. ſexti.

HAC eadem arte vtemur in ſequentibus, quando ad aliquam rectam applicandum erit rectangulum æquale alteri rectangulo.

QVONIAM verò in hoc theoremate demonſtratur, rectangulum contentum ſub duabus rectis Mediis potentia tantùm commenſurabilibus eſſe vel Rationale, vel Medium; docebit Euclides propoſ. 28. quánam ratione inuenienda ſint dua Media potẽtia tantùm commenſurabiles, qua Rationale comprehendant: Propoſ. verò 29. duas Medias potentia ſolùm commenſurabiles inquiret, quæ ſpatium Medium contineant.

ITAQVE habemus ex his, [c] *rectangulum contentum ſub duabus Rationalibus longitudine commenſurabilibus eſſe Rationale;* [d] *Sub duabus verò Rationalibus potentia tantùm commenſurabilibus contentum rectangulum eſſe Irrationale, appellariq; Medium, & rectam, quæ ipſum poteſt, Mediam. Rurſus ex demonſtratis conſtat,* [e] *rectangulum comprehenſum ſub duabus Mediis longitudine commenſurabilibus eſſe Medium;* [f] *Rectangulum autem ſub duabus Mediis potentia ſolùm commenſurabilibus comprehenſum eſſe vel Rationale, vel Medium.*

c 20. decimi.
d 22. decimi.
e 25. decimi.
f 26. decimi.

QVOD ſi quis roget, qualénam rectangulum ſit illud, q̃ ſub duabus Mediis longitudine & potẽtia incõmenſurabilibus cõtinetur; Reſpondemus illud nec Rationale eſſe, nec Medium, ſed tertiũ quoddã genus conſtituere; nẽpe æquale eſſe rectangulo, q̃ cõtinetur ſub linea Rationali, & Irrationali, quæ Media appellatur.

SIT enim rectangulum AC, comprehenſum ſub duabus Mediis AB, BC, longitudine & potentia incommenſurabilibus. Dico AC, neq; Rationale eſſe, neq; Medium. & c. Conſtructis enim eiſdem, vt in theoremate, oſtendemus ſimiliter, rectas GH, KM, Rationales eſſe, & ipſi FG, longitudine incommenſurabiles. Et quia rectæ AB, BC, ponuntur incommenſurabiles longitudine & potentia; erunt & earum quadrata AD, CE, atque adeò ipſis æqualia rectangula FH, LM, incommẽſurabilia: [g] *Vt autem FH, ad LM, ita eſt recta GH, ad rectam KM.* [h] *Igitur rectæ GH, KM, longitudine inter ſe ſunt incommenſurabiles. Quare GH, KM, oſtenſæ Rationales, ſunt potentia tantùm inter ſe commenſurabiles;* [i] *Ac propterea rectangulum ſub ipſis GH, KM, Irrationale eſt, quod Medium appellatur, & recta ipſum potens, Irrationalis, quæ dicitur Media.* [k] *Poteſt autem rectangulum ſub ipſis GH, KM, recta HK: (Nam, vt prius, oſtendemus tres GH, HK, KM, eſſe proportionales.) Igitur HK, Irrationalis eſt, & Media. Quare IK, Rationale non eſt: ſi enim Rationale eſſet,* [l] *faceret ipſum ad Rationalem HI, applicatum latitudinem HK, Rationalem, & ipſi HI, longitudine commenſurabilem. Quod eſt abſurdum. oſtenſa enim eſt HK, Irrationalis, ac Media. Eodem modo neq; IK, Medium eſt; Si enim eſſet Medium,* [m] *faceret ipſum applicatum ad Rationalem HI, latitudinem HK, Rationalem, & ipſi HI, longitudine incommenſurabilem. quod eſt abſurdum. oſtenſa eſt enim HK, Irrationalis, & Media. Itaque cùm IK, neq; Rationale ſit, neq; Medium: neceſſariò neq; AC, illi æquale, Rationale erit, neque Medium, ſed tertium quoddam genus conſtituet, nempe æquale erit ipſi IK, quod ſub Rationali, & Media, continetur, cùm HI, Rationalis ſit, & HK, oſtenſa Media. Ex quibus efficitur, rectam quæ poteſt ſpatium ſub duabus Mediis longitudine & potentia incommẽſurabilib. (quales ponuntur AB, BC,) comprehenſum, poſſe quoq; rectangulum ſub Rationali, & Irrationali, quæ Media vocatur, cõtentum. Quod eſt propoſitum.*

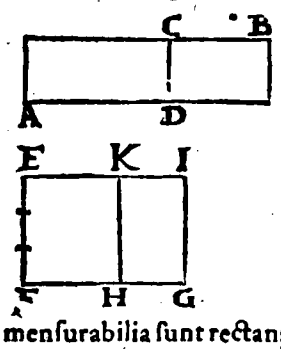
g 1. ſexti.
h 10. decimi.
i 22. decimi.
k 17. ſexti.
l 21. decimi
m 23. decimi.

26. 22.

THEOR. 24. PROPOS. 27.

MEDIVM non superat Medium Rationali.

SVPERET Medium AB, Medium AC, rectangulo DB. Dico DB, nô esse Rationale. Sit enim, si fieri potest, DB, Rationale. Expositâ ergo Rationali linea EF; [a] ad ipsam applicetur rectangulum EG, Medio AB, æquale; & Medio AC, rectangulum EH, æquale, vt sit reliquum HI, Rationali DB, æquale. Erunt igitur EG, EH, æqualia Mediis AB, AC, Media; & HI, æquale Rationali DB, Rationale. Quoniam ergo Media EG, EH, ad Rationalem EF, sunt applicata; [b] erunt rectæ FG, FH, Rationales, & ipsi EF, incommensurabiles longitudine. Rursus, quia Rationale HI, applicatum est ad Rationalem HK; ([c] est enim recta HK, Rationali EF, æqualis) [d] erit recta HG, Rationalis, & ipsi EF, longitudine commensurabilis. Quare cùm HG, EF, longitudine sint commensurabiles; & EF, ipsi FH, longitudine incommensurabilis, vt est ostensum; [e] erit & HG, eidem FH, longitudine incommensurabilis. Est autem vt FH, ad HG, ita quadratum ex FH, ad rectangulum sub FH, HG, ex tertio lemmate propos. 19. huius lib. [f] Igitur quadratum ex FH, incommensurabile est rectangulo sub FH, HG. Sed quadrato ex FH, commensurabile est quadratum ex HG; (quòd sint ambo ex lineis Rationalibus FH, HG, descripta) [g] atque adeò & duo quadrata ex FH, HG, simul, quadrato ex FH, commensurabilia sunt: Et rectangulo sub FH, HG, commensurabile est id, quod bis continetur sub FH, HG, (quia hoc illius est duplum.) Igitur per ea, quæ in scholio propos. 14. huius lib. ostendimus, & duo quadrata ex FH, HG, simul incommensurabilia sunt rectangulo sub FH, HG, bis. [h] Quare & compositum ex quadratis rectarum FH, HG, & ex rectangulo bis sub FH, HG, incommensurabile est composito ex quadratis rectarum FH, HG. [i] At quadratis ex FH, HG, vnà cum rectangulo bis sub FH, HG, æquale est quadratum ex FG. Igitur & quadratum FG, incommensurabile est composito ex quadratis rectarum FH, HG: Est autem compositum hoc Rationale, ex lemmate 4. propos. 19. huius lib. quòd ostensum sit commensurabile quadrato Rationali ex FH. Igitur cùm huic composito, quod Rationale est, incommensurabile sit quadratum ex FG, [k] erit quadratum ex FG, Irrationale; [l] ac propterea & recta FG, Irrationalis erit. Quod est absurdum. ostensa enim est FG, Rationalis longitudine ipsi EF, incommensurabilis. Non ergo DB, quo Medium AB, superat Medium AC, Rationale est. Quam ob rem Medium non superat Medium Rationali. Quod erat ostendendum.

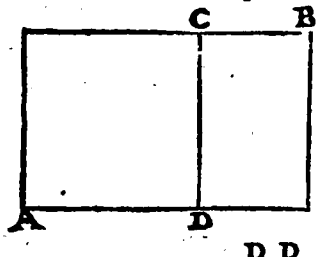


a 45. primi. b 23. decimi c 34. primi. d 21. decimi. e 14. decimi. f 10. decimi. g 16. decimi h 17. decimi. i 4. secundi. k 10. defin. l 11. defin.

SCHOLIVM.

Ex dictis & hoc demonstrabimus.

RATIONALE superat rationale Rationali.



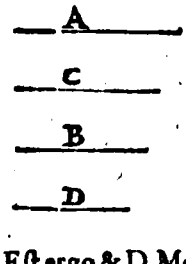
RATIONALE enim AB, superet Rationale AC, spatio DB. Dico DB, quoq; esse Rationale. Quoniã enim AB, AC, Rationalia sunt; [a] *erunt AB, AC, commensurabilia quadrato Rationalis expositæ;* [b] *atq; adeò & inter se commensurabilia. Quare cùm totum AB, cõpositum ex AC, DB, commensurabile sit ipsi AC; erit quoq; idem AB, reliquo DB, commẽsurabile, ex coroll. propos. 16. huius lib. Est autẽ AB, Rationale. Igitur & DB, ex lemmate 4. propos. 19. huius lib. Rationale est. Quod est propositum.*

a 9. defin. b 12. decimi.

PROBL. 4. PROPOS. 28.

27. 0.

MEDIAS inuenire potentia tantùm commensurabiles, quæ Rationale comprehendant.



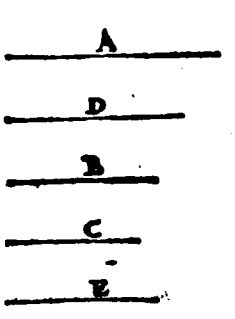
EXPONANTVR per lemma 2. propos. 21. huius lib. duæ Rationales A, B, potentia tantùm cõmensurabiles [a] inter quas media proportionalis sumatur C; [b] fiatq; vt A, ad B, ita C, ad D. Dico C, D, esse Medias potẽtia tantùm commẽsurabiles, quæ Rationale comprehendant. Quoniam enim A, B, Rationales ponuntur potentia tantùm commensurabiles; [c] erit rectangulum sub ipsis contentum, Irrationale, quod Medium vocatur; atq; adeò [d] cùm ipsum posit recta C, erit C, Media. Et quoniam est vt A, ad B, ita C, ad D; suntq; A, B, potentia tantùm commensurabiles; erunt quoque C, D, solùm commensurabiles potentia, vt in scholio propos. 10. huius lib. ostendimus. [e] Est ergo & D, Mediæ C, commẽsurabilis, Media. Quare inuentæ sunt Mediæ C, D, potentia tantùm commensurabiles. Dico iam ipsas continere Rationale. Quoniam enim est vt A, ad B, ita C, ad D; & permutando vt A, ad C, ita B, ad D; Vt autem A, ad C, ita est C, ad B; erit quoque vt C, ad B, ita B, ad D; ideoq; B, media proportionalis inter C, & D, [f] poterit rectangulum sub ipsis C, D, comprehensum. Est autem quadratum ex B, linea Rationali, Rationale. Igitur & rectangulum sub C, D, Rationale est. Medias ergo inuenimus C, D, potenta tantùm commensurabiles, quæ Rationale comprehendunt. Quod faciendum erat.

a 13. sexti. b 12. sexti. c 22. decimi. d 17. sexti. e 24. decimi f 17. sexti.

PROBL. 5.

PROBL. 5. PROPOS. 29. 28.

MEDIAS inuenire potentia tantùm cõmenſurabiles, quæ Medium contineãt. 0.



EXPONANTVR per ea, quę in ſcholio propoſ. 21. huius lib. demonſtrauimus, tres Rationales A, B, C, potentia tantùm commenſurabiles; [a] & inter A, B, media proportionalis inueniatur D. [b] Deinde fiat vt B, ad C, ita D, ad E. Dico D, E, Medias eſſe, potentia tantùm commenſurabiles, quæ Medium contineant. Quoniam enim A, B, Rationales ſunt potentia ſolùm commenſurabiles; erit rectangulum ſub A, B, atque adeò & quadratum ex D; [c] quod illi æquale eſt, [d] Irrationale, quod Medium dicitur; & ipſa recta D, Media. Et quia eſt vt B, ad C, ita D, ad E; ſunt autem B, C, Rationales, & potentia ſolùm commenſurabiles; erunt quoq; D, E, potentia ſolùm commenſurabiles, vt in ſcholio propoſ. 10. huius lib. demonſtratum eſt. Cùm ergo D, Media ſit, [e] erit & E, illi potentia ſolùm commenſurabilis, Media: Ac propterea D, E, Mediæ ſunt potentia tantùm commenſurabiles. Dico iam ipſas continere Medium. Quoniam enim eſt vt B, ad C, ita D, ad E; & permutando vt B, ad D, ita C, ad E: Vt autem B, ad D, ita D, ad A; erit quoque vt D, ad A, ita C, ad E. [f] Rectangulum igitur ſub D, E, æquale eſt ei, quod ſub A, C: Eſt autem quod ſub A, C, Rationalibus potentia ſolùm commenſurabilibus, [g] Irrationale, & Medium. Igitur & rectangulum ſub D, E, Medium eſt. Medias ergo inuenimus D, E, potentia tantùm commenſurabiles, quæ Medium continent. Quod faciendum erat.

a 13. ſexti. b 12. ſexti. c 17. ſexti. d 22. decimi e 14. decimi. f 16. ſexti. g 22. decimi

SCHOLIVM I.

IN iis quæ ſequuntur, indigemus hoc problemate.

DVOS numeros planos ſimiles inuenire.

A, 6. C, 12. B, 4. D, 8. E, 24. F, 96.

SVMANTVR quatuor quicunq; numeri proportionales, A, B, C, D, vt quidem A, ad C, ita B, ad D. Multiplicantes autem ſe mutuò A, & B, faciant E; Item C, & D, ſe multiplicantes faciant F. Erunt ergo E, & F, numeri plani ſimiles, quandoquidem latera habent proportionalia, vt ex conſtructione eſt manifeſtum.

QVONIAM autem in lib. 9. [a] *oſtenſum eſt, ſi impar numerus, vel par parem multiplicet, procreari numerum parem; Imparem verò, ſi impar multiplicet imparem; perſpicuum eſt, quonam modo inueniri poſſint duo plani ſimiles, quorum vterq; par ſit, vel impar; Vel vnus quidem par, alter verò impar. Si enim latera ſumpta ſint numeri pares, erunt eorum plani pares etiam: ſi autem numeri ſint impares, erunt & plani eorum impares. Quod ſi vnius latera ſint impares numeri, alterius autem pares, erit illorum quidem planus impar; horum verò par: Similiter pares erunt plani, ſi quilibet habeat vnum latus numerum parem, alterum verò imparem, &c.*

a 28. & 29. noni.

LEMMA I.

DVOS numeros quadratos inuenire, ita vt compoſitus ex ipſis quadratus etiam ſit.

INVENIANTVR per ea, quæ in ſcholio proximo dicta ſunt, duo plani ſimiles A B, & C, quorum vterque vel par ſit, vel impar. [b] *Et quoniam, ſiue à pari par auferatur, ſiue ab impari impar, reliquus par eſt; detracto B D, ex A B, qui æqualis ſit ipſi C, erit reliquus A D, par. Quo diuiſo bifariam in E;*

A.....E.....D.....B
C.....

Dico numerum factum ex A B, in B D, [c] *qui quidem quadratus eſt, compoſitum cum quadrato numeri E D, facere quadratum. Quoniam enim numerus A D, bifariam eſt diuiſus in E, & ei additus D B; erit ex 6. theoremate eorum, quæ ad propoſ. 14. lib. 9. demonſtrauimus, numerus qui fit ex A B, in B D, vnà cum quadrato numeri D E, æqualis quadrato numeri E B. Quare duo quadrati, nempe qui fit ex A B, in B D, & quadratus numeri D E, compoſiti faciunt quadratum, eum videlicet, qui ex B E, gignitur. quod eſt propoſitum.*

b 24. & 26. noni. c 1. noni.

COROLLARIVM.

EX his manifeſtum eſt, quando A B, & C, ſimiles ſunt, inuentos eſſe eadem arte duos numeros quadratos numerorum B E, E D, quorum exceſſus, ſimilium numerus ex A B, in B D, factus, etiam numerus quadratus ſit.

QVOD ſi numeri ſumantur A B, & C, non ſimiles, vterq; tamen par, vel impar; inuenti erunt eodem modo duo quadrati numerorum B E, E D, quorum exceſſus, numerus ſcilicet, qui fit ex A B, in B D, non eſt quadratus. Si enim quadratus eſſet, [d] *numeri A B, B D, hoc eſt, A B, & C, plani ſimiles eſſent. Quod eſt abſurdum. ponuntur enim non ſimiles.*

d 2. noni.

SCHOLIVM II.

IT A QVE ſi iubeamur inuenire duos quadratos numeros, quorũ exceſſus etiam ſit numerus quadratus;

A..... E..... D..... B
C.....

ſumemus vt prius, duos planos ſimiles, quorum vterq; par, vel impar ſit, nempe A B, & C, & reliqua perficiemus, vt in proximo lemmate eſt dictum. Nam quadrati numeri ex B E, E D, deſcripti ſunt illi, quos quærimus. Excedit enim quadratus ex B E, quadratum ex E D, numero, qui producitur ex A B, in B D, qui etiam quadratus eſt.

Si verò inueniendi ſint duo quadrati, quorum exceſſus non ſit quadratus: ſumendi erunt duo numeri plani A B, & C, non ſimiles, quorum vterque par ſit, vel impar, & reliqua peragenda, vt prius. Nam ſimiliter oſtendemus quadratum ex B E, æqualem eſſe quadrato ex D E, vnà cum eo qui ex A B, in B D, ſit; Quare exceſſus quadratorum ex B E, E D, eſt numerus factus ex A B, in B D, qui cùm non ſit quadratus; (Si enim eſſet quadratus, eſſent A B, B D, plani ſimiles. quod non ponitur) conſtat propoſitum.

A... E... D..... B
C.....

Hoc poſterius facilius abſoluemus, ſi quemcunque quadratum numerum diuidamus in duos numeros, quorum alter ſit quadratus, alter verò non. Vt ſi quadratus 36. diuidatur in quadratum 16. & non quadratum 20. excedet quadratus 36. quadratum 16. numero 20. non quadrato. Sic quoque ſi idem quadratus 36. diuidatur in quadratum 25. & non quadratum 11. ſuperabit quadratus 36. quadratum 25. numero non quadrato 11. & ſic de cæteris.

LEMMA II.

Dvos numeros quadratos inuenire, ita vt compoſitus ex ipſis non ſit quadratus.

SINT duo numeri plani ſimiles A B, & C, pares, vel impares, vt in lemmate præcedenti, fiatq; eadem conſtructio, ita vt rurſus quadratus, qui ſit ex multiplicatione ſimilium numerorum A B, D B, inter ſe, vnà cum quadrato ex D E, æqualis ſit quadrato ex B E. Auferatur deinde ex D E, vnitas E F. Erit ergo quadratus ex D F, minor quadrato ex D E, quòd & latus D F, latere D E, minus ſit. Dico quadratos numeros, quorum alter ex A B, in B D, alter verò ex D F, inſe ſit, compoſitos non efficere numerum quadratum. Nam ſi compoſitus ex ipſis eſt quadratus, erit is vel maior quadrato ex B F, vel æqualis, vel minor: quod fieri non poſſe, in hunc modum demonſtrabimus. Sit enim primùm maior, quàm quadratus ex B F; ac propterea latus ipſius maius latere B F. Erit ergo latus ipſius vel æquale numero B E, vel maius. (Minus enim non erit, quoniam inter numeros B E, B F, ſola vnitate inter ſe diſtantes nullus medius eſt numerus, ne vnitas ipſa ſecetur; Eſſet autem dictum latus inter ipſos medium, ſi maius poneretur quàm B F, minus verò quàm B E.) Si dicatur æquale, ita vt quadrato ex B E, æqualis ſit quadratus numerus compoſitus ex quadrato, qui fit ex A B, in B D, & ex quadrato numeri D F; cùm eidem quadrato ex B E, ſit oſtenſus in præcedenti lemmate æqualis numerus, qui fit ex A B, in B D, vnà cum quadrato ex D E; erit, qui fit ex A B, in B D, vnà cum quadrato ex D F, æqualis ei, qui fit ex A B, in B D, vnà cum quadrato ex D E. Ablato ergo communi, eo ſcilicet qui fit ex A B, in B D; erit reliquus quadratus ex D F, æqualis reliquo quadrato ex D E; Ideoq; & latus D F, lateri D E, æquale, pars toti. Quod eſt abſurdum. Non ergo latus quadrati compoſiti ex quadratis, quorum alter ex A B, in B D, alter verò ex D F, inſe ſit, æquale eſt numero B E. Sed neque maius. Sit enim, ſi fieri poteſt, latus illius æquale numero B I, qui maior ſit, quàm B E, ita vt quadrato ex B I, æqualis ſit quadratus ille compoſitus. Quotam igitur quadratus ex B I, latere maiore, maior eſt quadrato ex B E, latere minore: erit quoque compoſitus ex quadratis, quorum alter ex A B, in B D, alter verò ex D F, inſe ſit, (cùm hic compoſitus æqualis ponatur quadrato ex B I,) maior quadrato ex B E. Eſt autem quadrato ex B E, oſtenſus in lemmate præcedenti æqualis numerus, qui fit ex A B, in B D; vnà cum quadrato ex D E: Ablato ergo communi, qui fit ex A B, in B D; erit reliquus quadratus ex D F, reliquo quadrato ex D E, maior; ac proinde latus D F, latere D E, maius, pars toto. Quod eſt abſurdum. Non ergo latus quadrati compoſiti ex quadratis, quorum alter ſit ex A B, in B D, alter verò ex D F, in ſe, maius eſt latere B E. Sed neq; æquale, neque minus oſtenſum eſt. Non igitur quadratus ille compoſitus maior eſt quadrato ex B F.

A..H..I. E. F. G... D .....B
C .....

SIT tam, ſi fieri poteſt, numerus qui fit ex A B, in B D, vnà cum quadrato ex D F, æqualis quadrato ex B F; & ponatur numerus A H, duplus vnitatis E F. Quia igitur totus A D, totius E D, duplus eſt, (diuiſus enim eſt A D, in E, biſariam) & ablatus A H, ablatæ vnitatis E F; erit & reliquus H D, reliqui F D, duplus, ex 7. ſuæ ad propoſ. 7. lib. 5. oſtendimus; atque

idcirco

idcirco HD, in F, bifariam diuiditur. Quare ex 6. theorem. eorum, quæ ad propoſ. 14. lib. 9. demonſtrauimus, erit numerus qui fit ex HB, in BD, vnà cum quadrato ex DF, æqualis quadrato ex BF. Sed eidem quadrato ex BF, æqualis ponitur numerus, qui fit ex AB, in BD, vnà cum quadrato ex DF: Igitur qui fit ex HB, in BD, vnà cum quadrato ex DF, æqualis eſt ei, qui fit ex AB, in BD, vnà cum quadrato ex DF: & detracto communi quadrato ex DF, relinquetur, qui fit ex HB, in BD, ei qui fit ex AB, in BD, æqualis. Quare cùm HB, AB, multiplicantes eundem BD, producant æquales numeros; [a] habeant autem multiplicantes eandem proportionem, quam producti; erit HB, ipſi AB, æqualis, pars toti. Quod eſt abſurdum. Non eſt ergo, qui ex AB, in BD, vnà cum quadrato ex DF, quadrato ex BF, æqualis.

[a] 18. ſeptimi.

SIT tandem, ſi poteſt fieri, numerus qui ex AB, in BD, vnà cum quadrato ex DF, minor quadrato ex BF, ac propterea & latus eius latere BF, minus, quòd ſit BG, ita vt qui ex AB, in BD, vnà cum quadrato ex DF, æqualis ſit quadrato ex BG. Sumatur autem ipſius EG, duplus AI. Quoniam igitur totus AD, totius FD, duplus eſt, & ablatus AI, ablati EG; erit rurſus & reliquus ID, reliqui GD, duplus; ac propterea ID, in G, diuidetur bifariam. Quare ex eodem theorem. 6. eorum, quæ ad propoſ. 14. lib. 9. demonſtrata ſunt, erit numerus qui fit ex IB, in BD, vnà cum quadrato ex DG, æqualis quadrato ex BG: ponitur autem eidem quadrato ex BG, æqualis qui fit ex AB, in BD, vnà cum quadrato ex DF. Igitur qui fit ex IB, in BD, vnà cum quadrato ex DG, æqualis eſt ei, qui ex AB, in BD, vnà cum quadrato ex DF. Ablatis igitur quadratis ex DG, & DF, quorum qui ex DG, minor eſt, remanebit qui ex IB, in BD, maior eo, qui ex AB, in BD, pars toto. Quod eſt abſurdum. Non eſt ergo qui ex AB, in BD, vnà cum quadrato ex DF, minor quadrato ex BF. Sed neque maior eſt oſtenſus, neque æqualis. Non igitur quadratus eſt, qui ex AB, in BD, vnà cum quadrato ex DF. Quod eſt propoſitum.

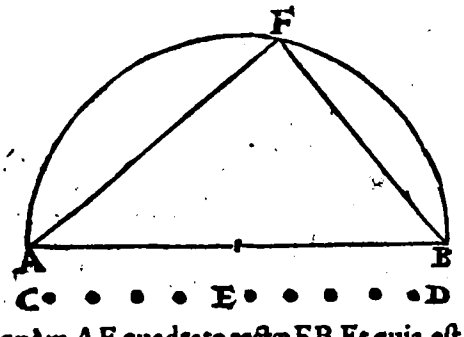
SCHOLIVM III.

EX hoc facilè inueniemus duos numeros, ita vt ex illis compoſitus ad neutrum ipſorum proportionem habeat, quam quadratus ad quadratum. Si enim per lemma præcedens inueniantur duo quadrati, ita vt compoſitus ex ipſis non ſit quadratus; habebit hic compoſitus non quadratus ad neutrum ipſorum quadratorum proportionem, quam quadratus ad quadratum.

IDEM obtinebimus, ſi quemlibet numerum quadratum in duos non quadratos partiti fuerimus. Ita enim quadratus totus ad neutrum eorum, in quos diuiſus eſt, proportionẽ habebit, q̃ quadratus ad quadratũ.

PROBL. 6. PROPOS. 30. 29. 17.

INVENIRE duas Rationales potentia tantùm commenſurabiles, ita vt maior, quàm minor, plus poſſit quadrato rectæ lineæ longitudine ſibi commenſurabilis.



EXPONATVR linea Rationalis AB, & inueniantur ex iis, quæ in ſcholio 2. propoſ. præcedentis tradidimus, duo numeri quadrati CD, CE, quorum exceſſus DE, non ſit quadratus. Deinde per coroll. propoſ. 6. huius lib. fiat vt CD, numerus ad numerum DE, ita quadratum ex AB, ad aliud quadratum, nimirum ad id, quod ex AF: accommodeturq; AF, in ſemicirculo ABF, circa diametrum AB, deſcripto: ac denique connectatur recta FB. [a] Quoniam ergo angulus F, rectus eſt in ſemicirculo; [b] erit quadratum ex AB, æquale duobus quadratis ex AF, & FB; hoc eſt, recta AB, plus poterit quàm AF, quadrato rectæ FB. Et quia eſt quadratum ex AB, ad quadratum ex AF, vt numerus CD, ad numerum DE; [c] erunt quadrata ex AB, AF, commenſurabilia: atque adeò cùm quadratum ex AB, ſit Rationale, nempe ex linea Rationali AB, deſcriptum; erit & quadratũ ex AF, Rationale, propterea q; & recta AF, ipſum deſcribens, Rationalis. Rationales ergo ſunt AB, AF; atque adeò commenſurabiles ſaltem potentia. Quia verò quadratum ex AB, ad quadratum ex AF, proportionem non habet, quam quadratus numerus ad quadratum numerum; (cùm neque quadratus numerus CD, ad non quadratum DE, proportionem habeat, quam quadratus ad quadratum: aliàs & DE, quadratus eſſet, [d] vt in Arithmeticis eſt demonſtratum. quod non ponitur) [e] erunt rectæ AB, AF, longitudine incommenſurabiles: Sunt autem commenſurabiles potentia, vt oſtenſum eſt. Igitur AB, AF, Rationales ſunt potentia tantùm commenſurabiles.

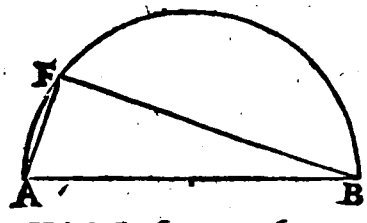
[a] 31. tertij. [b] 47. primi. [c] 6. decimi. [d] 24. decimi. [e] 9. decimi.

IAM verò quoniam eſt vt CD, ad DE, ita quadratum ex AB, ad quadratum ex AF; erit per conuerſionem rationis, vt quadratus numerus CD, ad quadratum numerum CE, ita quadratum ex AB, ad quadratũ ex FB, (ſicut enim CD, ſuperat DE, quadrato CE, ita etiam quadratũ ex AB,

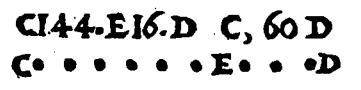
a 9. decimi. superat quadratū ex AF, quadrato ex FB.) a Quare rectæ AB, FB, longitudine commēsurabiles sunt. Inuenimus ergo duas Rationales AB, AF, potentia tantū cōmensurabiles, ita vt maior AB, plus possit, q̄ minor AF, quadrato lineæ FB, sibi lōgitudine cōmensurabilis. Quod faciendū erat.

30. 18. ## PROBL. 7. PROPOS. 31.

INVENIRE duas Rationales potentia tantùm commensurabiles, ita vt maior, quàm minor, plus possit quadrato rectæ lineæ sibi longitudine incōmensurabilis.

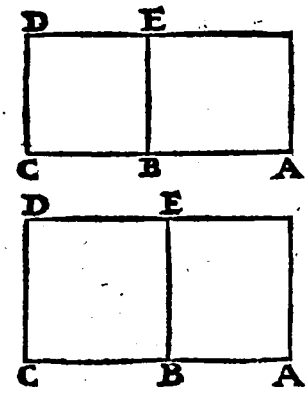


b 24. octaui



EXPONATVR Rationalis linea AB, inuenianturq; per lemma 2. propos. 29. huius lib. duo numeri quadrati CE, ED, ita vt ex illis compositus CD, non sit quadratus, vel certè numerus aliquis quadratus CD, secetur in duos numeros non quadratos CE, ED: Vtrumuis enim horum fiat, totus CD, ad neutrū ipsorum CE, ED, proportionem habebit, quam quadratus ad quadratum, aliàs secundùm priorem modum, esset totus CD, etiam quadratus: iuxta posteriorē verò, quilibet ipsorum CE, ED, quadratus quoque, b vt in Arithmeticis oftēsum est. quod non ponitur. Fiat deinde per coroll. propos. 6. huius lib. vt CD, ad DE, ita quadratum ex AB, ad aliud quadratum, vt ad id, quod ex AF: accommodeturq; AF, in semicirculo AFB, circa AB, descripto. Denique connectatur recta FB. Poterit igitur, vt in præcedenti, AB, plus quàm AF, quadrato rectæ FB; Eruntq; AB, AF, Rationales potentia solùm commensurabiles: Eadem enim hìc est demonstratio, quæ in præcedenti propos. Quoniam verò rursus, vt prius, est per conuersionem rationis, vt CD, ad CE, ita quadratum ex AB, ad quadratum ex FB: Non habet autem CD, ad CE, proportionem quam quadratus ad quadratum; Non habebit quoque quadratum ex AB, ad quadratum ex FB, proportionem, quam quadratus numerus ad numerum quadratum. c Quare rectæ AB, FB, longitudine incommensurabiles sunt. Inuenimus ergo duas Rationales AB, AF, potentia tantùm commensurabiles, ita vt maior AB, plus possit quàm minor AF, quadrato lineæ FB, sibi longitudine incommensurabilis. Quod erat faciendum.

c 9. decimi.



LEMMA.

SI sint duæ rectæ lineæ inæquales, erit vt maior ad minorem, ita rectangulum sub ipsis contentum, ad quadratum minoris.

SINT dua recta inæquales AB, BC, in rectum constituta, quarum AB, maior sit. Dico esse, vt AB, ad BC, ita rectangulum sub AB, BC, ad quadratū ex BC. Describatur enim ex BC, quadratum BD, compleaturq; rectangulum AD; eritq; rectangulum AE, sub AB, BC, contentum; quod BE, ipsi BC, sit æqualis: a perspicuum autem est, esse vt AB, ad BC, ita AE, ad BD.

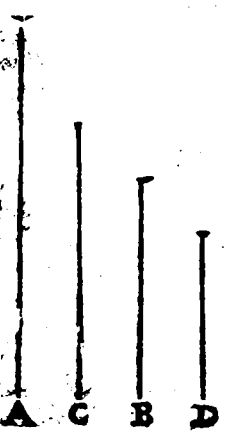
a 1. sexti.

EODEM modo erit, vt minor ad maiorem, ita rectangulum sub ipsis contentum, ad quadratum maioris, vt in secunda figura est manifestum, in qua AB, minor est, quàm BC.

31. ## PROBL. 8. PROPOS. 32.

24. 25. INVENIRE duas Medias potentia tantùm commensurabiles, quæ Rationale contineant, ita vt maior plus possit quàm minor, quadrato rectæ lineæ sibi longitudine commensurabilis.

a 30. decimi



b 22. decimi

c 24. decimi

d 17. sexti.

a REPERTAE sint duę Rationales A, B, potentia tantùm commensurabiles, ita vt A, maior plus possit quàm B, minor quadrato lineæ longitudine sibi commensurabilis; sitq; C, media proportionalis inter A, & B; & fiat vt A, ad B, ita C, ad D. Quoniá igitur A, B, sunt Rationales potētia solùm commensurabiles; b erit rectangulum sub A, B, Irrationale, & recta C, ipsum potens, linea Media. Et quia est vt A, ad B, ita C, ad D; sunt autem A, & B, potentia tantùm commēsurabiles, erunt quoque C, & D, potentia solùm commensurabiles, vt in scholio propos. 10. huius libri ostendimus. c Quare D, Mediæ C, commensurabilis, Media quoque est. Inuentæ ergo sunt duæ Mediæ C, D, potentia tantùm commensurabiles. Dico eas Rationale comprehendere. Cùm enim sit vt A, ad B, ita C, ad D; & permutando vt A, ad C, ita B, ad D; sit autem vt A, ad C, ita C, ad B; erit quoque vt C, ad B, ita B, ad D; d Ac propterea rectangulum sub C, & D, æquale erit quadrato ex B. Quam ob rem, cùm quadratum ex B, Rationali Rationale sit; erit & rectangulum sub C, D, illi æquale, Rationale. Continent ergo Mediæ C, D, potentia tantùm com-

tùm commensurabiles, Rationale. Quoniam verò est vt A, ad B, ita C, ad D: potest autem A, plus quàm B, quadrato lineæ longitudine sibi commensurabilis, ex constructione: [a] potorit quoq; C, plus quàm D, quadrato lineæ longitudine sibi commensurabilis. Inuenimus igitur duas Medias C, D, potentia tantùm commensurabiles, quæ Rationale continent, ita vt maior C, plus possit quàm minor D, quadrato rectæ lineæ sibi longitudine commensurabilis. Quod faciendum erat. [a] 15. decimi.

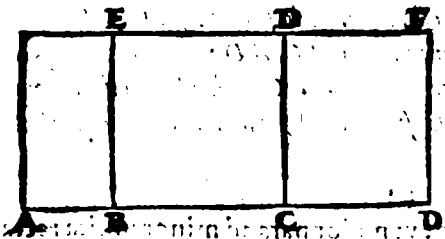
QVOD si repertæ sint A, B, Rationales potentia tantùm commensurabiles, ita vt A, plus possit quàm B, quadrato lineę sibi longitudine incommensurabilis; reliqua autem fiant, vt prius, ostendemus eodem modo, inuentas esse duas Medias C, D, potentia tantùm commensurabiles, quæ Rationale contineant, ita vt maior C, plus possit quàm minor D, quadrato lineæ longitudine sibi incommensurabilis.

SCHOLIVM.

ALIQVI hoc problema demonstrant per lemma antecedens: Nos autem breuius ac facilius idem sine ipso ostendimus, vt facilè iudicabunt, qui cum eorum demonstratione hanc nostram contulerint. Immo rectas C, D, Medias esse potentia solùm commensurabiles, quæ Rationale contineant, non aliter hic ostendimus, ac in propos. 28. huius lib.

LEMMA.

SI sint tres lineæ rectæ, erit vt prima ad tertiam, ita rectangulum sub prima & secunda contentum, ad id, quod sub secunda & tertia continetur.



SINT tres rectæ A B, B C, C D, in rectum constitutæ. Dico esse vt A B, ad C D, ita rectangulum sub A B, B C, ad rectangulum sub B C, C D. Describatur enim ex B C, quadratum B C D E, perficiaturq; rectangulum A F; Eritq; A E, contentum sub A B, B C; & C F, sub B C, C D; quod B E, C D, ipsi B C æquales sint. [a] Perficiunum autem est esse A B, ad C D, vt A E, ad C F. Quod est propositum. [a] 1. sexti.

PROBL. 9. PROPOS. 33. 32. 26.

INVENIRE duas Medias potentia solùm commensurabiles, quæ Medium contineant, ita vt maior plus possit quàm minor, quadrato rectæ lineæ sibi longitudine commensurabilis.



SINT inuentæ tres Rationales A, B, C, potentia tantùm commensurabiles, ita vt A, plus possit quàm C, quadrato lineæ sibi longitudine commensurabilis. (Hoc autem fiet in hunc modum. [a] Repertis duabus Rationalibus A, C, potentia tantùm commensurabilibus, ita vt A, plus possit quàm C, quadrato lineæ sibi commensurabilis longitudine; inueniatur alia B, vtriq; A, & C, potentia solùm commensurabilis, per ea, quæ in scholio propos. 21. huius lib. demonstrauimus.) [b] Et ipsarum A, B, sumatur media proportionalis D; [c] fiatq; vt D, ad B, ita C, ad E. Quoniam igitur ex lemmate antecedenti, est vt A, ad C, ita rectangulum sub A, B, ad rectangulum sub B, C; [d] Est autem rectangulo sub A, B, æquale quadratum ex D; [e] & rectangulo sub B, C, æquale rectangulum sub D, E, quòd proportionales sint D, B, C, E; Erit quoque vt A, ad C, ita quadratum ex D, ad rectangulum sub D, E: Sed vt quadratum ex D, ad rectangulum sub D, E, ita est per lemma 3. propos. 19. huius lib. recta D, ad rectam E. Igitur erit vt A, ad C, ita D, ad E. Sunt autem A, C, potentia solùm commensurabiles. Ergo & D, E, potentia solùm commensurabiles sunt, vt in scholio propos. 10. huius lib. ostendimus. [f] Quia verò D, potens spatium sub A, B, Rationalibus potentia tantùm commensurabilibus, Irrationalis est, & Media; [g] erit quoque E, ipsi ostensa commensurabilis, Media. Inuentæ ergo sunt duæ Mediæ D, E, potentia solùm commensurabiles. Et quia ostensum est rectangulo sub B, C, [h] quod Medium est, (quòd B, C, sint Rationales potentia tantùm cõmensurabiles,) æquale esse rectangulum sub D, E, erit rectangulũ sub D, E, Medium. Deniq; quia ostendimus esse vt A, ad C, ita D, ad E; potest autem A, plus quà C, quadrato lineæ sibi longitudine commensurabilis, ex constructione: [i] poterit etiã D, plus quàm E, quadrato lineæ longitudine sibi commensurabilis. Inuenimus ergo duas Medias D, E, potentia solùm commensurabiles, quæ Medium continent, ita vt maior D, plus possit quàm minor E, quadrato lineæ rectæ longitudine sibi commensurabilis. Quod erat faciendum.

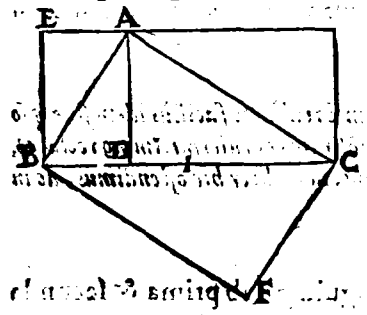
[a] 30. decimi. [b] 13. sexti. [c] 12. sexti. [d] 17. sexti. [e] 16. sexti. [f] 22. decimi. [g] 24. decimi. [h] 22. decimi. [i] 15. decimi.

QVOD si repertæ fuerint A, B, C, Rationales potentia tantùm commensurabiles, ita vt A, plus possit quàm C, quadrato lineæ sibi longitudine incommensurabilis, reliqua autem construantur, vt prius, demõstrabimus similiter, inuentas esse duas Medias D, E, potentia tantùm commen-

surabiles, quæ Medium contineant; ita vt maior D, plus possit quàm minor E, quadrato lineæ sibi longitudine incommensurabilis. Id quod facilè apparere potest ex adducta demonstratione.

LEMMA I.

SIT triangulum rectangulum A B C, angulum rectum habens B A C, à quo perpendicularis demittatur A D. Dico rectangulum contentum sub C B, B D, æquale esse quadrato ex A B: contentum autem sub B C, C D, æquale quadrato ex A C; & contentum sub B D, D C, æquale quadrato ex A D: contentũ denique sub B C, A D, æquale contento sub A B, A C.



a 17. sexti. *QVONIAM ex coroll. propos. 8. lib. 6. recta A B, media proportionalis est inter C B, B D;* a *erit rectangulum sub C B, B D, quadrato ex A B, æquale.*

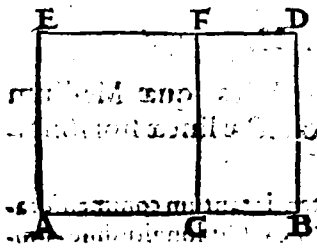
EADEM ratione erit rectangulum sub B C, C D, æquale quadrato ex A C; quoniam per eadem coroll. A C, media proportionalis est inter B C, C D.

RVRSVS, quia ex eodem coroll. A D, inter B D, D C, media est proportionalis, erit eodem modo rectangulum sub B D, D C, æquale quadrato ex A D.

b 8. sexti. c 16. sexti. *POSTREMO,* b *quia triangula A B C, A B D, similia sunt; erit vt B C, ad A C, ita A B, ad A D.* c *Quare rectangulum sub B C, A D, æquale est rectangulo sub A B, A C. Quod etiam ita ostendetur. Compleatur rectangulum C E, contentum sub B C, A D: Item rectangulum* d 41. primi *A F, sub A B, A C, contentum.* d *Quoniam igitur rectangulum C E, duplum est trianguli A B C, necnon & rectangulum A F, eiusdem trianguli est duplum; erunt inter se æqualia rectangula C E, A F. quod est propositum.*

LEMMA II.

Si recta linea secetur in duas partes inæquales, erit vt maior pars ad minorem, ita rectangulum sub tota & maiore parte, ad rectangulum sub tota & minore parte contentum.

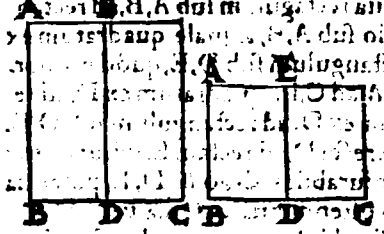


SECETVR recta A B, non bifariam in C, sitq; maior pars A C. Dico esse vt A C, ad C B, ita rectangulum sub A B, A C, ad rectangulum sub A B, C B. Describatur enim ipsius A B, quadratum A B D E, ducaturq; C F, ipsi A E, parallela; eritq; A F, contentum sub A B, A C, & C D, contentum sub A B, C B; quod A E, e 1. sexti. *C F, ipsi A B, æquales sint.* e *Quoniam igitur est vt A C, ad C B, ita A E, ad C D; constat propositum.*

EADEM ratione erit, vt minor pars B C, ad maiorem C A, ita B F, contentum sub A B, B C, tota, & minore parte, ad C E, contentum sub A B, C A, tota, & maiore parte.

LEMMA III.

Si sint duæ rectæ lineæ inæquales, minor autem secetur bifariam; erit rectangulũ sub ipsis contentũ, duplum rectanguli, q; sub maiori linea & dimidia parte minoris cõtinetur.



SINT duæ rectæ inæquales A B, B C, angulum rectum constituentes A B C; secetur q; minor B C, bifariam in D. Dico rectangulũ sub A B, B C, duplum esse rectanguli sub A B, B D. Compleatur enim rectangulum A C, sub A B, B C; ducaturq; D E, ipsi A B, parallela; eritq; B E, contenta sub A B, et f 1. sexti. *B D, dimidia minoris. Quoniam igitur A C, ipsius B E, duplum est, q; & basis B C, dupla est basis B D; constat propositũ.*

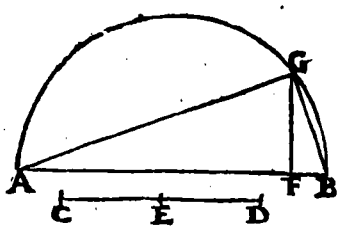
EODEM modo, si B C, secta bifariam, sit maior, erit quod sub A B, B C, continetur, duplum eius, q; cõtinetur sub A B, minore & B D, dimidia maioris, vt ex secunda figura apparet.

33. PROBL. 10. PROPOS. 27.

INVENIRE duas rectas lineas potẽtia incõmensurabiles, q; faciant cõpositum quidẽ ex ipsarũ quadratis, Rationale; Rectangulũ verò sub ipsis contentũ, Mediũ.

a 31. decimi. REPERIANTVR duæ Rationales A B, C D, potentia solùm commensurabiles, ita vt maior A B, plus possit, quàm minor C D, quadrato lineæ longitudine sibi incommensurabilis; secetur q; C D, bifariam in E. Deinde per lemma 2. propos. 17. huius lib. ad A B, applicetur quadrato ex D E, hoc est, quartæ parti quadrati ex C D, æquale rectangulum defectionis figura quadrata, & sit illud quod sub A F, F B, continetur. Postremò, descripto semicirculo A G B, circa A B, erigatur F G, ad

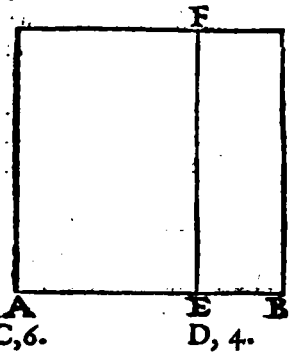
A B,



AB, perpendicularis, connectanturq; rectæ AG, GB. Quoniam igitur AB, plus potest, quàm CD, quadrato lineæ sibi longitudine incommensurabilis, applicatumq; est ad AB, rectangulum sub AF, FB, æquale quartæ parti quadrati ex CD, deficiens figura quadrata: [a] erit AF, ipsi FB, longitudine incommensurabilis. [a] 19. decimi. Est autem vt AF, ad FB, ita per lemma 2. propositionis antecedentis, rectangulum sub AB, AF, ad rectangulum sub AB, FB; Rectangulum verò sub AB, AF, quadrato ex AG, & rectangulum sub AB, FB, quadrato ex GB, est æquale, per lemma 1. eiusdem antecedentis propositionis; [b] quòd angulus AGB, rectus sit in semicirculo AGB. Igitur [b] 31. tertij. quoque erit vt AF, ad FB, ita quadratum ex AG, ad quadratum ex GB; ac propterea cùm AF, FB, longitudine sint incommensurabiles, [c] erunt quadrata ex AG, GB, incommensurabilia. [c] 10. decimi. [d] Igitur rectæ AG, GB, potentia incommensurabiles sunt. Et quia quadratum ex Rationali AB, Rationale est, [e] æqualeq; quadratis ex AG, GB; erit etiam compositum ex quadratis rectarum AG, GB, Rationale. Rursus, quia ex 1. lemmate propositionis præcedentis, rectangulum sub AF, FB, quod quadrato ex CE, æquale est factum, [f] æquale est quadrato ex FG; (propterea quòd angulus AGB, rectus est, & FG, ad AB, perpendicularis) erunt quadrata ex FG, CE, æqualia; ac proinde & rectæ FG, CE, æquales. Quare CD, dupla existens ipsius CE, dupla etiá erit ipsius FG. Igitur per lemma 3. antecedentis propositionis, rectangulum sub AB, CD, duplum erit rectanguli sub AB, FG. (cùm FG, dimidia sit minoris CD.) [g] Sed rectangulum sub AB, CD, Rationalibus potentia tantùm commensurabilibus contentum, Medium est. Igitur & rectangulum sub AB, FG, illi commensurabile, cùm sit eius dimidium, Medium est, per coroll. propos. 24. huius lib. Atqui rectangulo sub AB, FG, per 1. lemma propositionis præcedentis, æquale est rectangulum sub AG, GB. Contentum igitur sub AG, GB, Medium quoque est: Ostensum autem est compositum ex earum quadratis, Rationale. Inuentæ ergo sunt duæ rectæ AG, GB, potentia incommensurabiles, quæ faciunt compositum quidem ex ipsarum quadratis, Rationale; Rectangulum verò sub ipsis contentum; Medium. Quod faciendum erat. [f] 17. sexti. [g] 22. decimi.

SCHOLIVM.

DEMONSTRATVR hoc loco in scholio quodam antiquo, fieri posse, vt duo spatia Irrationalia componant spatium Rationale, hac ferè ratione.



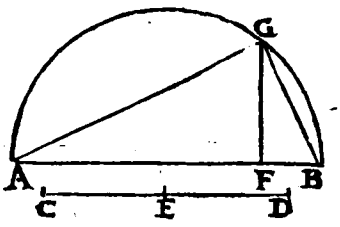
EXPONATVR Rationalis linea AB, & duo numeri C, D, quorum C, maior sit, non habentes proportionem, quam quadratus ad quadratum; fiatq; vt C, ad D, ita quadratum ex AB, ad quadratum ex AE; & tandem descripto quadrato ex AB, educatur EF, ad AB, perpendicularis. Quoniam igitur est vt C, ad D, ita quadratum ex AB, ad quadratum ex AE; Non habet autem C, ad D, proportionem quam quadratus ad quadratum; [a] erunt latera AB, AE, dictorum quadratorum proportionem nõ habentium, quam quadratus ad quadratum; longitudine incommensurabilia; Ac propterea cùm AB, tota longitudine sit incommensurabilis parti AE, erit eadem AB, & reliqua EB, longitudine incommensurabilis, ex coroll. propos. 17. huius lib. [b] Vt autem AB, ad AE, ita est quadratum ex AB, ad AF. Igitur cùm AB, AE, incommensurabiles sint longitudine, [c] erunt quadratum ex AB, & rectangulum AF, incommensurabilia. Quare quadrato ex AB, existente Rationali, quòd & AB, Rationalis ponatur; erit AF, dicto quadrato incommensurabile, Irrationale. Eodemq; argumento ostendemus EF, Irrationale esse. Quia verò AF, BF, componunt quadratum Rationale ex AB; perspicuum est, ex duobus Irrationalibus confici posse Rationale. Quod est propositum. [a] 9. decimi. [b] 1. sexti. [c] 10. decimi.

AT verò si AF, FB, Rationalia sint, ostendemus & totum AFB, ex ipsis compositum Rationale esse. Cùm enim vtrumq; AF, FB, Rationale sit; erunt ipsa inter se commensurabilia. [d] Igitur & totum AFB, ex ipsis compositum vtrique eorum commensurabile erit. Quare AFB, totum commensurabile vtrique Rationali AF, FB, [e] Rationale quoq; est. Quod est propositum. [d] 16. decimi. [e] 9. defin.

PROBL. II. PROPOS. 35. 34. 28.

INVENIRE duas rectas lineas potentia incommensurabiles, quæ faciant compositum quidem ex ipsarum quadratis, Medium; Rectangulum verò sub ipsis contentum, Rationale.

[a] REPERIANTVR duæ Mediæ AB, CD, potentia tantùm commensurabiles, quæ Rationale contineant, ita vt maior AB, plus possit quàm minor CD, quadrato lineæ sibi longitudine incommensurabilis; fiantq; reliqua, vt in præcedenti propos. Ostendemus igitur similiter, vt in propos. antecedenti, rectas AG, GB, potentia esse incommensurabiles. Et quia quadratum ex Media AB, [b] æquale existens quadratis rectarum AG, GB, Medium est; erit quoque compositum ex quadratis rectarum AG, GB, Medium. Rursus vt in antecedenti propositione, ostendemus rectan- [a] 31. decimi. [b] 47. primi.



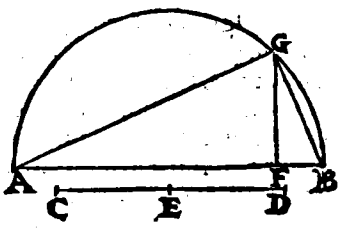
gulum ſub AB, CD, duplum eſſe rectanguli ſub AB, FG: atq; adeò illud eſſe huic commẽſurabile. Quare cùm rectangulum ſub AB, CD, Rationale ſit, ex conſtructione; erit & rectangulum ſub AB, FG, illi commenſurabile, Rationale: Sed per 1. lemma propoſ. 33. huius lib. rectangulo ſub AB, FG, æquale eſt rectangulum ſub AG, GB. Igitur & rectangulum ſub AG, GB, Rationale eſt. Oſtenſum autem eſt, compoſitum ex quadratis ipſarum AG, GB, eſſe Medium. Igitur duæ rectæ AG, GB, quæ oſtenſæ ſunt potentia incommenſurabiles, faciunt compoſitum ex earum quadratis Medium, & rectangulum ſub eiſdem comprehenſum, Rationale. Inuentæ ergo ſunt duæ rectæ AG, GB, potentia incommẽſurabiles, quæ faciunt compoſitum quidem ex ipſarum quadratis Medium, Rectangulum verò ſub ipſis cõtentum, Rationale. Quod erat faciendum.

35. 29.

PROBL. 12. PROPOS. 36.

INVENIRE duas rectas lineas potentia incommenſurabiles, quæ faciant & compoſitum ex ipſarum quadratis Medium, & rectangulum ſub ipſis contentum Medium, incommenſurabileque compoſito ex ipſarum quadratis.

a 33. decimi.



b 47. primi.

[a] REPERIANTVR duæ Mediæ AB, CD, potentia tantùm commenſurabiles, quæ Medium contineant, ita vt maior AB, plus poſsit quàm minor CD, quadrato lineæ ſibi longitudine incommẽſurabilis; fiantq; reliqua, vt in propoſ. 34. Oſtendemus igitur ſimiliter, rectas AG, GB, potentia incommenſurabiles eſſe. Et quia quadratum ex Media AB, Medium eſt, [b] & quadratis rectarum AG, GB, æquale; erit & compoſitum ex quadratis rectarum AG, GB, Medium. Rurſus, vt in 34. demonſtrabimus, rectangulum ſub AB, CD, duplum eſſe rectanguli ſub AB, FG, atque adeò illud eſſe huic commenſurabile. Quare cùm ex conſtructione, rectangulum ſub AB, CD, Medium ſit: erit quoq; rectangulum ſub AB, FG, hoc eſt, ſub AG, GB, quod illi per 1. lemma propoſ. 33. huius lib. æquale eſt, Medium, ex coroll. propoſ. 24. huius lib. Quoniam verò AB, longitudine incommenſurabilis ponitur ipſi CD; Eſt autem eidem CD, ipſa CE, longitudine commenſurabilis, quòd illa huius ſit dupla; [c] erunt AB, CE, longitudine incommenſurabiles: Sed vt AB, ad CE, ita eſt per lemma 3. propoſ. 19. huius lib. quadratum ex AB, ad rectangulum ſub AB, CE, hoc eſt, ad rectangulum ſub AB, FG, hoc eſt, ſub AG, GB, (ſunt enim rectangula ſub AB, FG, & ſub AG, GB, per 1. lemma propoſ. 33. huius lib. æqualia.) [d] Igitur quadratum ex AB, incommenſurabile eſt rectangulo, ſub AG, GB. Inuentæ ſunt ergo duæ rectæ lineæ AG, GB, potentia incommenſurabiles, quæ faciunt & compoſitum ex ipſarum quadratis Medium, & rectangulum ſub ipſis contentum Medium, incommenſurabileq; compoſito ex ipſarum quadratis. Quod faciendum erat.

c 13. decimi.

d 10. decimi

SCHOLIVM.

EX hoc verò problemate facilè illud abſoluemus, quod ad propoſ. 24. huius lib. nos demonſtraturos recepimus, nimirum.

INVENIRE duas Medias longitudine, & potentia incommenſurabiles.

QVONIAM oſtenſum eſt tam compoſitum ex quadratis rectarum AG, GB, quàm rectangulum ſub ipſis, eſſe Medium, & hoc illi compoſito incommenſurabile; erunt quoq; lineæ potentes illud compoſitum Medium, & hoc rectangulum Medium. Mediæ, incommenſurabiles tam longitudine, quàm potẽtia. Si enim potentia eſſent commẽſurabiles, eſſent & earum quadrata, hoc eſt, compoſitum ex quadratis rectarum AG, GB, & rectangulum ſub AG, GB, cõmenſurabilia. quod non ponitur. Quocirca ſi ſumatur AB potens compoſitum ex quadratis rectarum AG, GB, & alia recta potens rectangulum ſub AG, GB, id eſt, media proportionalis inter AG, GB; inuenta erunt duæ Mediæ & longitudine, & potentia incommenſurabiles. Quod eſt propoſitum.

PRINCIPIVM SENARIORVM PER compoſitionem.

36. 30.

THEOR. 25. PROPOS. 37.

SI duæ Rationales potentia tantùm commenſurabiles componantur; tota Irrationalis erit. Vocetur autem ex binis nominibus.

COMPONANTVR duæ Rationales AB, BC, potentia ſolùm commenſurabiles, inuentæ per 2. lemma propoſ. 21 huius lib. Dico totam AC, Irrationalem eſſe. Quoniam enim AB, longitudine incommẽſurabilis eſt ipſi BC; & vt AB, ad BC, ita eſt rectangulum ſub AB, BC, ad quadratũ ex BC, per



B C, per lemma propoſ.31 huius libri. [a] erit rectangulum ſub A B,B C,quadrato ex B C,incommenſurabile. Sed rectangulo ſub A B,B C,commenſurabile eſt eius duplũ, nempe quod bis ſub A B,B C,cõtinetur; & quadrato ex B C,commenſurabile eſt quadratum rectæ A B; (omnia enim ſunt Rationalia) [b] atq; adeò & compoſitum ex quadratis rectarum A B,B C,eidem quadrato ex B C,commenſurabile eſt. Igitur per ea, quæ in ſcholio propoſ.14. huius libri oſtendimus, & quod bis ſub A B,B C,continetur, incommenſurabile eſt compoſito ex quadratis rectarum A B,B C. Quamobrem & compoſitum ex eo, quod bis ſub A B, B C, & ex compoſito quadratorum rectarum A B,B C, hoc eſt, quadratũ ex tota A C. ([c] Eſt enim hoc quadratum æquale quadratis rectarum A B,B C, vnà cum rectangulo ſub A B,B C,bis) compoſito ex quadratis rectarum A B,B C, [d] incommenſurabile erit: Eſt autem compoſitum ex quadratis rectarum A B, B C, Rationale, quòd commenſurabile ſit oſtenſum quadrato Rationali ex B C, Rationali. Igitur quadratum ex A C, quadrato Rationali ex B C, incommenſurabile, [e] Irrationale eſt; atque adeò & recta ipſa A C,Irrationalis erit. Vocetur autem ex binis nominibus, ſeu, vt alij loquuntur,Binomium,quia ex duobus nominibus, nempe ex duabus Rationalibus lineis, A B,B C,potentia ſolùm commenſurabilibus componitur. Si duæ igitur Rationales potentia tantùm commenſurabiles componantur,tota Irrationalis erit,&c. Quod oſtendendum erat.

a 10. decimi

b 16. decimi

c 4. ſecundi.

d 17. decimi.

e 10. defin.

SCHOLIVM.

Itaque ex duabus Rationalibus potentia ſolùm commenſurabilibus procreantur duæ lineæ Irrationales. Nam recta, quæ inter eas eſt medio loco proportionalis, [a] Irrationalis eſt, quæ Media vocatur. At verò compoſita ex ipſis, [b] Irrationalis eſt, quæ ex binis nominibus dicitur.

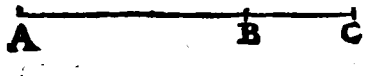
a 22. decimi.

b 37. decimi.

THEOR. 26. PROPOS. 38. 37. 31.

SI duæ Mediæ potentia tantùm commenſurabiles componantur, quæ Rationale contineant; tota Irrationalis erit. Vocetur autem ex binis Mediis prima.

COMPONANTVR duæ Mediæ, [a] ſuperius inuentæ A B, B C, potentia tantùm commenſurabiles, quæ Rationale contineant. Dico totam A C,Irrationalem eſſe. Quia enim A B, eſt ad B C, vt rectangulum ſub A B,B C,ad quadratum ex B C, vt in lemmate propoſ.31. huius lib. eſt oſtenſum; ſunt autem A B,B C, longitudine incommenſurabiles; [b] erunt rectangulum ſub A B, B C,& quadratum ex B C,incommenſurabilia: Sed rectangulo ſub A B,B C, commenſurabile eſt,quod ſub A B,B C,bis; & quadrato ex B C,commenſurabile eſt compoſitũ ex quadratis rectarum A B,B C.



(Nam cùm A B,B C, potentia ſint commenſurabiles, erũt ipſarum quadrata commenſurabilia, [c] atque adeò & compoſitum ex ipſarum quadratis quadrato ex B C, commenſurabile erit.) Igitur & rectangulum ſub A B,B C,bis,& compoſitum ex quadratis rectarum A B,B C,incommenſurabilia inter ſe ſunt, per ea,quæ in ſcholio propoſ.14.huius lib.ſunt demonſtrata. Ergo compoſitum ex quadratis rectarum A B,B C,vnà cum rectangulo bis ſub A B,B C, hoc eſt, quadratum ex A C, [d] quod huic compoſito æquale eſt, [e] incommenſurabile quoq; eſt rectangulo ſub A B,B C,bis: Eſt autem eidem rectangulo bis ſub A B,B C, commenſurabile rectangulum ſemel ſub A B, B C, cùm hoc ſit illius dimidium. [f] Igitur quadratum ex A C, incommenſurabile eſt rectangulo ſub A B,B C: Ponitur autem rectangulum ſub A B,B C, Rationale. [g] Irrationale ergo eſt quadratum ex A C, [h] & ob id recta quoq; A C, Irrationalis erit. Vocetur autem ex binis Mediis prima, vel,vt alij loquuntur, Bimediale prius. Si duæ ergo Mediæ potentia tantùm commenſurabiles componantur, &c. Quod erat oſtendendum.

a 28. decimi

b 10. decimi

c 16. decimi

d 4. ſecundi.

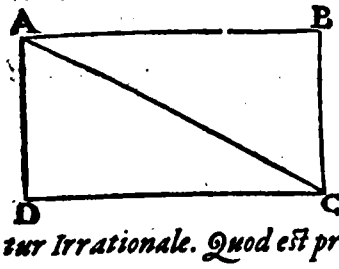
e 17. decimi.

f 13. decimi.

g 10. defin.

h 11. defin.

LEMMA.



QVOD ſub linea Rationali & Irrationali cõtinetur rectangulum, Irrationale eſt.

CONTINEATVR rectangulum A B C D, ſub Rationali A B, & Irrationali B C. Dico ipſum Irrationale eſſe. Si enim dicatur eſſe Rationale, [a] faciet ipſum ad Rationalem A B, applicatum latitudinem B C, Rationalem. Quod eſt abſurdum. ponitur enim B C, Irrationalis. Non ergo A C, Rationale eſt. Igitur Irrationale. Quod eſt propoſitum.

a 21. decimi.

THEOR. 27. PROPOS. 39. 38. 32.

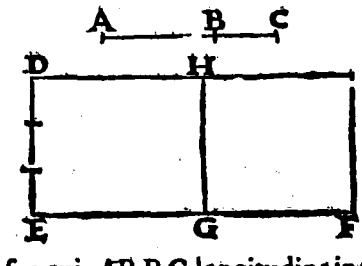
SI duę Mediæ potentia tantùm commenſurabiles componantur, quæ Medium contineant; tota Irrationalis erit. Vocetur autem ex binis Mediis ſecunda.

COMPONANTVR duæ Mediæ [a] ſuperius inuentæ A B, B C, potentia tantùm commenſurabiles, quæ Medium contineãt. Dico totam A C, Irrationalem eſſe. Exponatur enim Rationalis D E,

a 29. decimi

a 45. primi. a ad quã applicetur rectangulum D F, æquale quadrato A C; & compoſito ex quadratis rectarum A B, B C, æquale alterum ad eandem D E, applicetur D G. Et quia quadratũ ex A C, hoc eſt, rectangulum D F, b æquale eſt duobus quadratis ex A B, B C, vnà cum rectangulo bis ſub A B, B C; erit reliquum H F, æquale reliquo rectangulo, quod bis ſub A B, B C, continetur. Quoniam verò ex hypotheſi, rectangulum ſub A B, B C, Medium eſt; erit & rectangulum bis ſub A B, B C, ei commenſurabile; hoc eſt, H F, Medium, ex coroll. propoſ. 24. huius libri.

b 4. ſecundi.



c 16. decimi. Rurſus quia quadrata Mediarum A B, B C, potentia commenſurabilium, commenſurabilia ſunt; c erit & compoſitum ex ipſis, nimirum rectangulum D G, vtriuis ipſorum commenſurabile: Sed vtrumq; quadratorum ex Mediis A B, B C, Medium eſt. Igitur & D G, ex coroll. propoſ. 24. huius lib. Medium erit. Quia igitur Media D G, H F, applicantur ad Rationalem D E; (d eſt enim G H, Rationali D E, æqualis.) e erunt eorũ latitudines E G, G F, Rationales ipſi D E, longitudine incommenſurabiles. Rurſus quia A B, B C, longitudine incommẽſurabiles ſunt; & eſt vt A B, ad B C, ita quadratum ex A B, ad rectangulum ſub A B, B C, ex lemmate 3. propoſ. 19. huius lib. erit quadratũ ex A B, incommenſurabile rectangulo ſub A B, B C, vt in ſcholio propoſ. 10. huius lib. oſtenſum eſt: Atqui quadrato ex A B, oſtenſum eſt commenſurabile compoſitũ ex quadratis rectarũ A B, B C; & rectangulo ſub A B, B C, commenſurabile eſt, quod cõtinetur bis ſub A B, B C, cùm hoc illius ſit duplum. Igitur per ea, quæ in ſcholio propoſ. 14. huius lib. diximus, erit & compoſitũ ex quadratis rectarum A B, B C, hoc eſt, rectangulum D G, incommẽſurabile rectangulo bis ſub A B, B C, hoc eſt, rectangulo H F.

d 34. primi.

e 23. decimi.

f 1. ſexti. f Cùm ergo ſit vt D G, ad H F, ita E G, ad G F; g erit E G, ipſi G F, longitudine incommẽſurabilis: oſtenſum autẽ iam fuit E G, G F, eſſe Rationales. Rationales igitur ſunt E G, G F, potentia tantùm commenſurabiles, h ac propterea & tota E F, compoſita, Irrationalis eſt. Quare, per lemma antecedens, D F, contentum ſub Rationali D E, & Irrationali E F, Irrationale eſt: Ac propterea & quadratum ex A C, ipſi D F, æquale, Irrationale eſt. Quare & recta A C, Irrationalis eſt. Vocetur autem ex binis Mediis ſecunda, ſeu vt aliis placet, Bimediale ſecundum. Si duæ ergo Mediæ potentia tantùm commenſurabiles, &c. Quod erat demonſtrandum.

g 10. decimi.

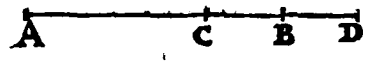
h 37. decimi

SCHOLIVM.

VOCAVIT Euclides in præcedenti propoſ. lineam Irrationalem A C, quæ componitur ex duabus Mediis potentia tantùm commenſurabilibus, quæ Rationale contineant, ex binis Mediis primam: Hic verò lineam Irrationalem A C, quæ componitur ex duabus Mediis potentia tantũ commenſurabilibus, quæ Medium contineant, ex binis Mediis ſecundam, quoniam Rationale & natura, & cognitione prius eſt Medio, quod Irrationale eſt, ex propoſ. 22. huius libri.

LEMMA.

SI recta linea non bifariam ſecetur, erit compoſitũ ex quadratis partium maius q̃ rectangulũ ſub partibus bis cõprehenſum, quadrato eius lineæ, qua maior pars minorẽ ſuperat.



SECETVR recta A D, in B, non bifariam, ſitq; maior pars A B; in qua ſumatur B C, minori parti B D, æqualis, vt ſit A C, exceſſus, quo A B, ſuperat B D, hoc eſt, B C, ipſi B D, æqualem. Dico quadrata rectarum A B, B D, ſimul maiora eſſe rectangulo bis ſub A B, B D, a 7. ſecũdi. *quadrato rectæ A C. Quoniam enim quadrata ex A B, B C, a æqualia ſunt rectangulo bis ſub A B, B C, vnà cum quadrato ex A C; eſtq; B C, ipſi B D, æqualis: erũt quoq; quadrata ex A B, B D, æqualia rectangulo bis ſub A B, B D, vnà cũ quadrato ex A C. Quare quadrata ex A B, B D, maiora ſunt, q̃ rectangulum bis ſub A B, B D, quadrato rectæ A C. Quod eſt propoſitum.*

COROLLARIVM.

Ex hoc ſequitur, quadrata partium inæqualium ſimpliciter eſſe maiora rectangulo, quod bis ſub partibus inæqualibus continetur.

39. 33.

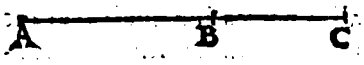
THEOR. 28. PROPOS. 40.

SI duæ rectæ lineæ potentia incommenſurabiles componantur; quæ faciant compoſitum quidem ex ipſarum quadratis, Rationale; quod autem ſub ipſis continetur, Medium: tota recta linea Irrationalis erit. Vocetur autem Maior.

a 34. decimi. COMPONANTVR duæ rectæ a ſuperius inuentæ A B, B C, potẽtia incommenſurabiles, facientes quidem compoſitum ex ipſarum quadratis Rationale; rectangulum verò ſub ipſis contẽtum, Medium. Dico totam A C, eſſe Irrationalem. Quoniam enim rectangulum ſub A B, B C, Medium ponitur, erit & rectangulum bis ſub A B, B C, illi commenſurabile, Medium, ex coroll. propoſ. 24. huius lib. atq; adeò Irrationale. Ponitur autẽ compoſitum ex quadratis rectarum A B, B C, Rationale. b Incommenſurabile ergo eſt rectangulum bis ſub A B, B C, cõpoſito ex quadratis rectarum

b 10. defin.

A B, B C,

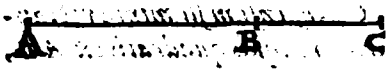


AB,BC. a Igitur & rectangulum bis sub AB,BC, vnà cũ quadratis ex AB,BC, hoc est, quadratũ ex AC, incommensurabile est composito ex quadratis rectarum AB, BC. Cùm ergo hoc compositum ponatur Rationale; b erit quadratũ ex AC, illi incommensurabile, Irrationale; c Ac propterea recta AC, Irrationalis est. Vocetur autẽ Maior, quia d cùm posit duo quadrata ex AB, BC, & rectangulum bis sub AB, BC; compositũ ex quadratis rectarum AB, BC, p lemma antecedens, maius est rectangulo bis sub AB, BC. Quare cùm compositum ex quadratis rectarũ AB, BC, Rationale sit, rectangulum verò bis sub AB, BC, Medium; recte vocabitur AC, Maior, siquidem à Rationali, quod maius est, nomẽ conuenit imponere. Si duæ ergo rectæ lineæ potentia incommensurabiles componantur, &c. Quod erat ostendendum.

a 17. decimi
b 10. defin.
c 11. defin.
d 4. secundi.

THEOR. 29. PROPOS. 41. 40. 34.

Si duæ rectæ lineæ potentia incommensurabiles componantur, quæ faciant compositum quidem ex ipsarum quadratis, Medium; quod autem sub ipsis continetur, Rationale: tota recta linea Irrationalis erit. Vocetur autem Rationale ac Medium potens.

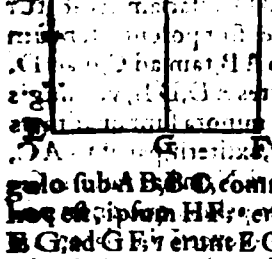


Componantur duæ rectæ superius inuentæ AB, BC, potẽtia incommensurabiles, facientes compositum quidem ex quadratis ipsarum, Medium, rectangulum verò sub ipsis contentum Rationale. Dico totam AC, Irrationalem esse. Quoniam enim compositum ex quadratis rectarum AB, BC, Medium est; quod verò continetur bis sub AB, BC, Rationale, quod eius dimidiũ, nempe quod sub AB, BC, semel continetur, Rationale ponatur, e erit compositũ ex quadratis rectarum AB, BC, incommensurabile rectangulo bis sub AB, BC. f Igitur & compositũ ex quadratis rectarum AB, BC, vnà cum rectangulo bis sub AB, BC, hoc est, quadratum ex AC, incommensurabile est rectangulo bis sub AB, BC. Cùm ergo rectangulum bis sub AB, BC, vt diximus, sit Rationale, g erit quadratum ex AC, illi incommensurabile, Irrationale; h Ac proinde & recta AC, Irrationalis erit. Vocetur autẽ Rationale ac Medium potens, quia potest Medium, nempe compositum ex quadratis rectarum AB, BC, & Rationale, rectangulum scilicet bis contentum sub AB, BC. Conuenit autem Rationale Irrationali anteponi. Si duæ ergo rectæ lineæ potentia incommensurabiles, &c. Quod demonstrandum erat.

e 35. decimi.
f 10. defin.
g 17. decimi
h 10. defin.
i 11. defin.

THEOR. 30. PROPOS. 42. 41. 35.

Si duæ rectæ lineæ potentia incommensurabiles componantur, quæ faciant compositum ex ipsarum quadratis Medium, & quod sub ipsis cõtinetur, Medium, incommensurabileque composito ex quadratis ipsarum; tota recta linea Irrationalis erit. Vocetur autem bina Media potens.



Componantur duæ rectæ superius inuentæ AB, BC, potentia incommensurabiles, facientes compositum ex ipsarum quadratis Medium, & rectangulum sub eisdem Medium, incommensurabileque composito ex quadratis ipsarum. Dico totam AC, Irrationalem esse. Exponatur enim Rationalis DE, l ad quam applicetur rectangulum DF, æquale quadrato ex AC, composito ex quadratis rectarum AB, BC, alterum æquale applicetur DG. Et quia quadratum ex AC, hoc est, rectangulum DF, m æquale est composito ex quadratis rectarum AB, BC, vnà cum rectangulo bis sub AB, BC, erit reliquum HF, æquale rectangulo bis sub AB, BC. Quoniam verò tam compositum ex quadratis rectarum AB, BC, hoc est, rectangulum DG, quàm rectangulum sub AB, BC, atque adeò ex corollario 24. huius libri, quod bis sub AB, BC, nempe ipsum HF, (cum illi sit commensurabile) Medium ponitur, n fa cient DG, HF, ad Rationalem DE, applicata latitudines EG, GF, Rationales ipsi DE, longitudini incommensurabiles. Rursus quia compositum ex quadratis rectarum AB, BC, id est, rectangulum DG, incommensurabile ponitur rectangulo sub AB, BC, bis contento, o erunt & DG, HF, incommensurabilia. Quare cum sit DG, ad HF, ita BG, ad GF, p erunt EG, GF, longitudines incommensurabiles. Atque DG, GF, ostensæ sunt Rationales: igitur EG, GF, Rationales sunt potentia solùm commensurabiles; q Ac propterea tota EF, ex ipsis composita Irrationalis est. Quare DF, contenta sub Rationali DE, & Irrationali EF, ex lemmate propos. 18. huius lib. Irrationale est. Igitur & quadratum ex AC, illi æquale, Irrationale est, r adeoque & recta ipsa AC, Irrationalis. Vocetur autem bina Media potens, nimirum & compositum ex quadratis rectarum AB, BC, & rectangulum bis sub AB, BC. Si duæ ergo rectæ lineæ potentia incommensurabiles componantur, quæ faciant & compositũ ex ipsarum quadratis Medium, &c. Quod erat demonstrandum.

k 36. decimi
l 45. primi.
m 4. secũdi.
n 23. decimi.
o 13. decimi.
p 1. sexti.
q 10. decimi
r 37. decimi.
s 11. defin.

LEMMA.

Si recta linea in partes inæquales secetur, & rursus in alias partes inæquales; erunt quadrata partium magis inæqualium simul maiora quadratis partium minus inæqualium simul.

SECETVR recta AB, inæqualiter in C, & rursus inaqualiter in D, sintq; priores partes AC, CB, magis inæquales, quàm posteriores AD, DB. Dico quadrata ex AC, CB, simul maiora esse quadratis ex AD, DB, simul. Diuisa enim AB, bifariam in E, cadet punctum D, vel inter E, C, vel inter A, E. Cadat primùm inter E, C. Quoniam igitur rectangulum sub AC, CB, vnà cum quadrato ex EC, a *æquale est quadrato ex EB: Item rectangulum sub AD, DB, vnà cum quadrato ex ED, æquale est eidem quadrato ex EB; erit rectangulum sub AC, CB, vnà cum quadrato ex EC, æquale rectangulo sub AD, DB, vnà cũ quadrato ex ED. Ablatis igitur quadratis inæqualibus rectarum inæqualium EC, ED, cùm quadratum ex EC, maius sit quadrato ex ED; erit reliquum rectangulum sub AC, CB, minus reliquo rectangulo sub AD, DB; ac propterea & rectangulum bis sub AC, CB, minus erit rectangulo bis sub AD, DB. Quoniã verò quadratum ex AB,* b *æquale est tam rectangulo bis sub AC, CB, vnà cũ quadratis ex AC, CB, quàm rectangulo bis sub AD, DB, vnà cum quadratis ex AD, DB; erit rectangulum bis sub AC, CB, vnà cum quadratis ex AC, CB, æquale rectangulo bis sub AD, DB, vnà cum quadratis ex AD, DB. Quare cùm rectangulum bis sub AC, CB, ostensum sit minus rectangulo bis sub AD, DB, erũt reliqua quadrata ex AC, CB, maiora reliquis quadratis ex AD, DB. Quod est propositum.*

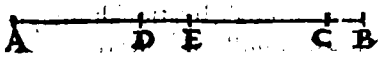
a 5. secũdi.



b 4. secũdi.

SED cadat iam D, inter A, E. Quoniam igitur partes AC, CB, magis inæquales ponũtur, quàm partes AD, DB; erit AD, (quæ minor est posteriorũ) maior quam CB; (quæ priorum minor est) ac proinde cùm AE, EB, æquales sint, erit reliqua EC, maior quã reliqua DE. Itaq; quia rectangulum sub AC, CB, vnà cũ quadrato ex EC, c *æquale est quadrato ex EB: Item rectangulum sub AD, DB, vnà cum quadrato ex DE, æquale est quadrato ex EB, hoc est, eidem quadrato ex EB; erit rectangulum sub AC, CB, vnà cum quadrato ex EC, æquale rectangulo sub AD, DB, vnà cum quadrato ex DE. Igitur vt prius, demonstrabimus quadrata ex AC, CB, maiora esse quadratis ex AD, DB. Quod est propositum.*

c 5. secũdi.



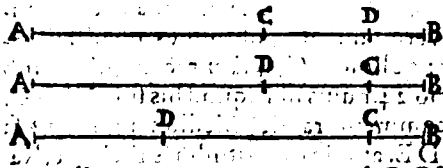
42. 36.

THEOR. 31. PROPOS. 43.

QVAE ex binis nominibus, ad vnum duntaxat punctum diuiditur in nomina.

SIT ex binis nominibus AB, diuisa ad punctum C, in sua nomina, ita vt AC, CB, sint Rationales potentia tantũ commensurabiles, vt vult propos. 37. huius lib. Dico AB, ad aliud punctum diuidi non posse in alia nomina, quæ scilicet sint etiam Rationales lineæ potentia tantũ commensurabiles. Si enim fieri potest, diuidatur iterum in sua nomina ad D. Constat ergo AB, in C, non diuidi bifariam. Nam si bifariam diuideretur, essent AC, CB, longitudine commensurabiles, quod est absurdũ. ponuntur enim Rationales potentia tantùm commensurabiles. Eodem modo neq; ad D, bifariam secabitur AB, cùm & AD, DB, Rationales sint potentia tantùm commensurabiles. Secatur ergo AB, tam ad C, q̃ ad D, inæqualiter; ac propterea partes AC, CB, vel minus inæquales sunt q̃ partes AD, DB, vel magis inæquales; Ac propterea per lemma antecedens, quadrata ex AC, CB, vel minora sunt quadratis ex AD, DB, vel maiora. (Neq; enim partes AD, DB, vbicunq; punctum D, extiterit, partibus AC, CB, æquales erunt, vtraque vtrique, nempe maior maiori, & minor minori. Nam hac ratione secaretur AB, secunda diuisione in eadem nomina, in quæ secta est diuisione prima. quod non ponitur.) Quia verò si ab æqualibus inæqualia demantur, residuorum excessus excessui ablatorum æqualis est, vt in pron. 16. lib. 1. demonstrauimus: Sunt autem quadrata ex AC, CB, vnà cum rectangulo bis sub AC, CB, æqualia quadratis ex AD, DB, vnà cum rectangulo bis sub AD, DB, d quòd tam illa, quàm hæc æqualia sint quadrato ex AB; fit, vt qui excessus fuerit ablati compositi ex quadratis rectarum AC, CB, & ablati compositi ex quadratis rectarum AD, DB, idem sit reliqui rectanguli bis sub AC, CB, & reliqui rectanguli bis sub AD, DB. Sed excessus, compositi ex quadratis rectarum AC, CB, & compositi ex quadratis rectarũ AD, DB, spatium Rationale est. (cùm enim rectæ AC, CB, Rationales sint, & ob id earum quadrata, Rationalia, erit & compositum ex ea-

d 4. secundi.



ex earum quadratis, Rationale, ex iis, quæ in ſcholio propoſitionis 34. huius libri oſtendimus: eademque ratione erit & compoſitum ex quadratis rectarum A D, D B, Rationale. Quare cùm Rationale ſuperet Rationale Rationali, vt in ſcholio propoſ. 27. huius libri demonſtrauimus; manifeſtum eſt, exceſſum compoſiti ex quadratis rectarum A C, C B, & compoſiti ex quadratis rectarum A D, D B, ſpatium eſſe Rationale.) Igitur & exceſſus rectanguli bis ſub A C, C B, & rectanguli bis ſub A D, D B, ſpatium Rationale eſt. [a] Quoniam verò rectangulum ſub A C, C B, Medium eſt, erit & quod bis ſub A C, C B, illi commenſurabile, ex coroll. propoſ. 24. huius lib. Medium; Atque eodem modo rectangulum bis ſub A D, D B, Medium erit. [b] Quare cùm Medium non ~~ſuperet~~ Medium Rationali; non erit exceſſus rectanguli bis ſub A C, C B, & rectanguli bis ſub A D, D B, ſpatium Rationale: Oſtendimus autem & Rationale eſſe. Quod eſt abſurdum. Non igitur A B, ex binis nominibus ad aliud punctum, quàm ad C, in ſua nomina diuiditur. Quare ad vnum duntaxat punctum diuiditur in nomina. Quod erat demonſtrandum.

[a] 22. decimi.

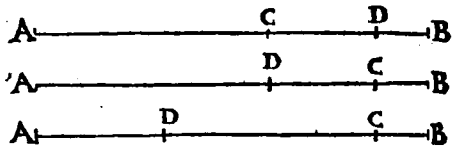
[b] 27. decimi.

THEOR. 32. PROPOS. 44.

43. 37.

QVAE ex binis Mediis prima, ad vnũ duntaxat punctum diuiditur in nomina.

SIT ex binis Mediis prima A B, diuiſa ad punctum C, in ſua nomina, ita vt A C, C B, ſint Mediæ potentia ſolùm commenſurabiles, quæ Rationale contineant, vt vult propoſitio 38. huius libri. Dico A B, ad aliud punctum diuidi non poſſe in alia nomina, quæ ſcilicet ſint etiam Mediæ lineæ potentia tantùm commenſurabiles, continentesque Rationale. Diuidatur enim, ſi fieri poteſt, in alia nomina A D, D B. Igitur vbicunque punctum D, exiſtat, ſimiliter probabimus, vt in præcedenti propoſ. exceſſum rectanguli bis ſub A C, C B, & rectanguli bis ſub A D, D B, eundem eſſe, qui eſt compoſiti ex quadratis rectarum A C, C B, & compoſiti ex quadratis rectarum A D, D B: Sed exceſſus rectanguli bis ſub A C, C B, & rectanguli bis ſub A D, D B, ſpatium eſt Rationale. (Cùm enim A C, C B, ponantur continere Rationale, erit & quod bis ſub A C, C B, ei, quod continetur ſemel ſub A C, C B, commenſurabile, Rationale. Eodemque modo Rationale erit, quod bis ſub A D, D B. Quare cùm Rationale ſuperet Rationale Rationali, vt in ſcholio propoſ. 27. huius lib. oſtendimus; perſpicuum eſt, exceſſum rectanguli bis ſub A C, C B, & rectanguli bis ſub A D, D B, ſpatiũ eſſe Rationale.) Igitur & exceſſus compoſiti ex quadratis rectarum A C, C B, & compoſiti ex quadratis rectarum A D, D B, ſpatium Rationale eſt. Quia verò rectæ A C, C B, Mediæ ſunt, & potentia commenſurabiles, erunt earũ quadrata Media quoque, & commenſurabilia. [c] Quare & compoſitum ex ipſis vtrique ipſorum commenſurabile erit. Igitur cùm vtrumque ſit Medium, erit & compoſitum ex ipſis, per corollarium propoſ. 24. huius libri, Medium. Eodem modo Medium oſtendemus compoſitum ex quadratis rectarũ A D, D B. [d] Cùm ergo Medium nõ ſuperet Medium Rationali; non erit exceſſus compoſiti ex quadratis rectarum A C, C B, & compoſiti ex quadratis rectarum A D, D B, ſpatium Rationale. Oſtendimus autem & Rationale eſſe. Quod eſt abſurdum. Non igitur A B, ex binis Mediis prima ad aliud punctum, quàm ad C, in ſua nomina diuiditur. Quam ob rem ad vnum duntaxat punctum diuiditur in nomina. Quod demonſtrandum erat.



[c] 16. decimi.

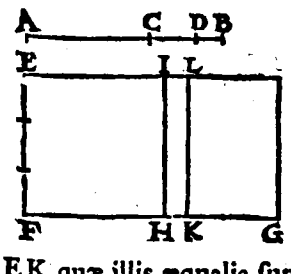
[d] 27. decimi

THEOR. 33. PROPOS. 45.

44. 38.

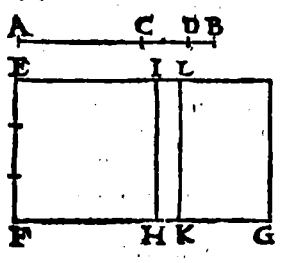
QVAE ex binis Mediis ſecunda, ad vnũ duntaxat punctũ diuiditur in nomina.

SIT ex binis Mediis ſecunda A B, diuiſa ad punctum C, in ſua nomina, ita vt A C, C B, Mediæ ſint potentia tantũ commenſurabiles, quæ Medium contineant, vt vult propoſ. 39. huius lib. Dico A B, ad aliud punctum diuidi nõ poſſe in alia nomina, quæ ſcilicet ſint etiam lineæ Mediæ potentia tantùm commenſurabiles, continentesque Medium. Diuidatur enim, ſi poteſt fieri, in alia nomina A D, D B. Igitur vbicunque punctum D, exiſtat, ſimiliter oſtendemus, vt in propoſ. 43. quadrata ex A C, C B, vel maiora eſſe quadratis ex A D, D B, vel minora. Exponatur Rationalis E F, [e] ad quam applicetur rectangulum E G, æquale quadrato ex A B. Item E H, æquale quadratis ex A C, C B. Erit igitur reliquum I G, æquale ei, quod continetur bis ſub A C, C B, quandoquidem quadratum ex A B, [f] æquale eſt quadratis ex A C, C B, & rectangulo bis ſub A C, C B. Eodem modo ſi ad E F, applicetur E K, quadratis ex A D, D B, æquales erit reliquum L G, æquale rectangulo bis ſub A D, D B, comprehenſo. Et quia quadrata ex A C, C B, inæqualia ſunt quadratis ex A D, D B; erunt quoque rectangula E H, E K, quæ illis æqualia ſunt, inæqualia; ac propterea & rectangulum F H, F K, inæquales erunt. Rurſus quia quadrata ex A C, C B, maiora ſunt, per lemma propoſ. 39. huius libri, rectangulo bis ſub A C, C B; erit & E H, maius quàm I G; ac propterea E H, maius quàm dimidium ipſius E G, ideoque & recta F H, maior quàm dimidium ipſius F G. Eadem ratione oſtendemus F K, maiorem eſſe dimidio ipſius F G. Inæquales ergo ſunt partes F H, H G, partibus F K, K G, ſingulæ ſingulis.



[e] 45. primi.

[f] 4. ſecundi.



Quoniam verò A C, C B, Mediæ ſunt, & potentia commenſurabiles; erunt & earum quadrata Media, & commenſurabilia. [a] Igitur & compoſitum ex ipſis vtrique ipſorum commenſurabile erit. Cùm ergo vtrumque ipſorum ſit Medium, erit quoq; compoſitum ex ipſis, hoc eſt, E H, per coroll. propoſ. 24. huius libri, Medium. Eademque ratione Medium erit E K. [b] Quare E H, E K, ad Rationalem E F, applicata faciunt latitudines F H, F K, Rationales ipſi E F, longitudine incommenſurabiles. Eodem modo cùm rectangulum ſub A C, C B, ponatur Medium, erit & quod bis ſub A C, C B, hoc eſt, I G, illi commenſurabile, Medium, ex coroll. propoſ. 24. huius libri. Quare cùm applicetur ad Rationalem H I, [c] erit H G, Rationalis ipſi H I, longitudine incommenſurabilis. Non aliter oſtendemus L G, Medium eſſe, & K G, Rationalem ipſi K L, longitudine incommenſurabilem. Rurſus quia A C, C B, longitudine ſunt incommenſurabiles; & eſt vt A C, ad C B, ita per lemma 3. propoſ. 19. huius libri, quadratum ex A C, ad rectangulum ſub A C, C B, [d] erit quadratum ex A C, rectangulo ſub A C, C B, incommenſurabile. Sed quadrato ex A C, commenſurabile eſt compoſitum ex quadratis rectarum A C, C B: (cùm enim A C, C B, potentia ſint commenſurabiles, atque adeò ipſarum quadrata commenſurabilia; [e] erit & compoſitum ex ipſis vtrilibet ipſorum, nimirum quadrato ex A C, commenſurabile.) Rectangulo verò ſub A C, C B, commenſurabile eſt, quod bis ſub A C, C B. Igitur & compoſitum ex quadratis rectarum A C, C B, hoc eſt, rectangulum E H, incommenſurabile eſt, per ſcholium propoſ. 14. huius libri, rectangulo bis ſub A C, C B, hoc eſt, ipſi I G. Quocirca [f] cùm ſit, vt E H, ad I G, ita F H, ad H G, [g] erunt F H, H G, longitudine incommenſurabiles. Oſtenſæ ſunt autem & Rationales. Rationales ergo ſunt F H, H G, potentia ſolùm commenſurabiles. [h] Igitur F G, tota Irrationalis eſt, quæ ex binis nominibus appellatur, diuiſaque in nomina ad punctum H. Eodem modo oſtendemus & F G, ex binis nominibus diuiſam eſſe in alia nomina ad aliud punctum K. Quod fieri non poteſt, [i] vt demonſtratum eſt in præcedentibus. Igitur A B, ex binis Mediis ſecunda non diuiditur in ſua nomina ad aliud punctum, quàm ad C. Quare ad vnum duntaxat punctum diuiditur in nomina. Quod erat oſtendendum.

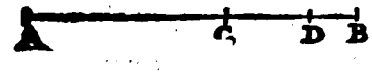
[a] 16. decimi. [b] 23. decimi. [c] 23. decimi. [d] 10. decimi. [e] 16. decimi. [f] 1. ſexti. [g] 10. decimi. [h] 37. decimi [i] 43. decimi.

45. 39.

THEOR. 34. PROPOS. 46.

MAIOR ad vnum duntaxat punctum diuiditur in nomina.

SIT Maior A B, diuiſa in ſua nomina ad punctum C, ita vt A C, C B, potentia ſint incommenſurabiles, facientes quidem compoſitum ex ipſarum quadratis Rationale; rectangulum verò ſub ipſis Medium, vt vult propoſ. 40. huius libri. Dico A B, non poſſe diuidi ad aliud punctum in alia nomina, quæ ſcilicet lineæ incommenſurabiles quoque ſint potentia, facientes compoſitum ex ipſarum quadratis Rationale, & rectangulũ ſub ipſis Medium.



Si enim fieri poteſt, diuidatur in alia nomina ad D. Vbicunq; ergo punctum D, extiterit, demonſtrabimus ſimiliter, vt in propoſ. 43. exceſſum compoſiti ex quadratis rectarũ A C, C B, & compoſiti ex quadratis rectarum A D, D B, eum eſſe, qui rectanguli bis ſub A C, C B, & rectanguli bis ſub A D, D B. Sed exceſſus compoſiti ex quadratis rectarũ A C, C B, & compoſiti ex quadratis rectarum A D, D B, ſpatium eſt Rationale: (quia cùm vtrumque compoſitum ex hypotheſi ſit Rationale, erit quoque eorum exceſſus ſpatium Rationale, vt in ſcholio propoſ. 27. huius libri oſtendimus.) Igitur & exceſſus rectanguli bis ſub A C, C B, & rectanguli bis ſub A D, D B, ſpatium eſt Rationale. Quoniam verò rectangulum ſub A C, C B, ponitur Medium, erit & rectangulum bis ſub A C, C B, Medium, ex coroll. propoſ. 24. huius libri, cùm ei ſit commenſurabile. Atque eodem modo Medium erit rectangulum bis ſub A D, D B. [k] Igitur cùm Medium non ſuperet Medium Rationali; non erit exceſſus rectanguli bis ſub A C, C B, ſpatium Rationale: Oſtendimus autem & Rationale eſſe. Quod eſt abſurdum. Non igitur Maior A B, ad aliud punctum, quàm ad C, in ſua nomina diuiditur. Quapropter ad vnum duntaxat punctum diuiditur in nomina. Quod erat demonſtrandum.

[k] 27. decimi

46. 40.

THEOR. 35. PROPOS. 47.

RATIONALE ac Medium potens, ad vnum duntaxat punctum diuiditur in nomina.

SIT linea Rationale ac Medium potens A B, diuiſa in ſua nomina in puncto C, ita vt A C, C B, incommenſurabiles ſint potentia, facientes compoſitum quidem ex ipſarum quadratis Medium; rectangulum verò ſub ipſis Rationale, vt vult propoſ. 41. huius libri. Dico A B, non poſſe diuidi in alio puncto in alia nomina, quæ nimirum ſint lineæ quoque incommenſurabiles potentia, facientes compoſitum quidem ex ipſarum quadratis Medium, & rectangulum ſub ipſis Rationale.



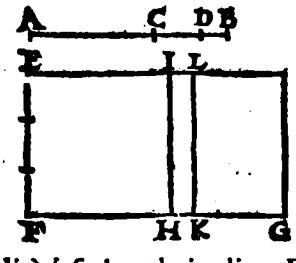
Diuidatur enim, ſi fieri poteſt, in alia nomina ad D. Vbicunque ergo punctum D, exiſtat, oſtendemus non aliter, ac in propoſ. 43. huius libri, exceſſum rectanguli

rectangulibis ſub AC, CB, & rectanguli bis ſub AD, DB, eundem eſſe, qui eſt compoſiti ex quadratis rectarum AC, CB, & compoſiti ex quadratis rectarum AD, DB. Sed exceſſus rectanguli bis ſub AC, CB, & rectanguli bis ſub AD, DB, ſpatium Rationale eſt, quod oſtendemus, vt in propoſ. 44. Igitur & exceſſus compoſiti ex quadratis rectarum AC, CB, & compoſiti ex quadratis rectarum AD, DB, ſpatium eſt Rationale. Quia verò compoſita ex his quadratis ponuntur eſſe Media: [a] Medium autem non ſuperat Medium Rationali; nõ erit eorum exceſſus ſpatium Rationale. Sed & Rationale oſtendimus. Quod eſt abſurdum. Non igitur AB, Rationale ac Medium potens, ad aliud punctum, quàm ad C, in ſua nomina diuiditur. Quam ob rem ad vnũ duntaxat punctum diuiditur in nomina. Quod oſtendendum erat. [a] 27. decimi

THEOR. 36. PROPOS. 48. 47. 41.

BINA Media potens, ad vnum duntaxat punctum diuiditur in nomina.

SIT linea potens bina Media AB, diuiſa in ſua nomina ad C, ita vt AC, CB, potentia incommenſurabiles ſint, facientes & compoſitum ex ipſarum quadratis Medium, & rectangulum ſub ipſis Medium, incommenſurabileq; compoſito ex earum quadratis, vt vult propoſ. 42. huius libri. Dico AB, diuidi non poſſe ad aliud punctum in alia nomina, quæ videlicet ſint etiam lineæ potentia incommenſurabiles, facientes & compoſitum ex ipſarum quadratis Medium, & rectangulum ſub ipſis Medium, incommenſurabileque compoſito ex earum quadratis. Nam, ſi poteſt fieri, diuidatur in alia nomina ad punctum D, vbicunq; hoc punctum D, exiſtat. Conſtructio autem eadem fiat, quæ in propoſitione quadrageſimaquinta oſtendemusque, vt ibi, partes FH, HG, partibus FK, KG, inæquales eſſe ſingulas ſingulis. Quoniam igitur compoſitum ex quadratis rectarum AC, CB, Medium ponitur, erit & EH, illi compoſito æquale, Medium. Item quia rectangulum ſub AC, CB, ponitur etiam Medium, erit & IG, eius duplo æquale, Medium, ex corollario propoſ. 24. huius lib. quia illi commenſurabile eſt. Igitur Media EH, IG, applicata ad Rationalé EF, (eſt enim IH, ipſi EF, æqualis) [b] faciunt latitudines FH, HG, Rationales, longitudine ipſi EF, incommenſurabiles. Eadem quoque ratione probabimus, & rectas lineas FK, KG, Rationales eſſe, longitudine incommenſurabiles ipſi EF. Quia verò compoſitum ex quadratis rectarum AC, CB, deſcriptis, hoc eſt, rectangulum EH, incommenſurabile eſt, ex hypotheſi, rectangulo bis ſub AC, CB, nempe rectangulo IG, [c] eſtq; vt EH, ad IG, ita FH, ad HG; erunt FH, HG, longitudine incommenſurabiles, vt in ſcholio propoſ. 10. huius libri oſtendimus: Sed oſtenſæ ſunt Rationales. Rationales ergo ſunt FH, HG, potentia ſolùm commenſurabiles. Igitur tota FG, Irrationalis eſt, quæ ex binis nominibus appellatur, diuiſaque in nomina ad punctum H. Non ſecus demonſtrabimus & FG, ex binis nominibus diuiſam eſſe in alia nomina, ad aliud punctum K. Quod fieri non poſſe, [d] iam ante demonſtratum eſt. Igitur AB, bina Media potens non diuiditur ad aliud punctum quàm ad C, in ſua nomina. Quocirca ad vnum duntaxat punctum diuiditur in nomina. Quod oſtendendum erat.



[b] 23. decimi
[c] 1. ſexti.
[d] 43. decimi

DEFINITIONES SECVNDAE.

EXPOSITA Rationali, & quæ ex binis nominibus, diuiſa in nomina, cuius maius nomen plus poſſit, quàm minus, quadrato rectæ lineæ ſibi longitudine commenſurabilis,

I.

SI quidem maius nomen expoſitæ Rationali commenſurabile ſit longitudine; Vocetur tota ex binis nominibus prima.

II.

SI verò minus nomen expoſitæ Rationali longitudine ſit commenſurabile; Vocetur ex binis nominibus ſecunda.

III.

QVOD ſi neutrum ipſorum nominum ſit longitudine commenſurabile expoſitæ Rationali; Vocetur ex binis nominibus tertia.

RVRSVS ſi maius nomen plus poſſit, quàm minus, quadrato rectæ lineæ ſibi longitudine incommenſurabilis.

IIII.

SI quidem maius nomen expoſitæ Rationali commenſurabile ſit longitudine; Vocetur ex binis nominibus quarta.

V.

SI verò minus nomen; Vocetur quinta.

VI.

QVOD ſi neutrum ipſorum nominum; Vocetur ſexta.

SCHOLIVM.

NVMERVS dictarum ſex linearum, quæ ex binis nominibus appellantur, colligitur hac ratione. Quoniam nomina lineæ, quæ ex binis nominibus dicitur, ſunt lineæ Rationales potentia tantùm commenſurabiles, non poterit vtrumque nomen expoſitæ Rationali commenſurabile eſſe longitudine; (aliàs enim nomina ipſa eſſent quoque lineæ longitudine inter ſe commenſurabiles, vt in ſcholio propoſ. 12. huius libri docuimus, quod non ponitur.) Sed vel vnum tantùm, nempe maius, aut minus; vel neutrum: Atque ita tria genera conſurgunt linearum, quæ ex binis nominibus vocantur. Rurſus quia nomina inæqualia ſunt; (aliàs enim eſſent lineæ inter ſe longitudine commenſurabiles. quod nõ ponitur.) poterit maius nomen plus, quàm minus, quadrato lineæ ſibi longitudine commenſurabilis, vel incommenſurabilis: Et ſi quidem plus poßit quadrato lineæ longitudine ſibi commenſurabilis, conſtituentur vnà cum tribus dictis generibus, tres diuerſæ lineæ ex binis nominibus, nimirum prima, ſecunda, & tertia ex binis nominibus: Si verò plus poßit quadrato lineæ longitudine ſibi incommenſurabilis, efficientur vnà cum eiſdem tribus generibus aliæ tres diuerſæ lineæ ex binis nominibus, videlicet quarta ex binis nominibus, quinta, & ſexta, vt ex definitionibus hic ab Euclide traditis perſpicuum eſt. Sunt igitur ſex diuerſæ lineæ ex binis nominibus appellatæ.

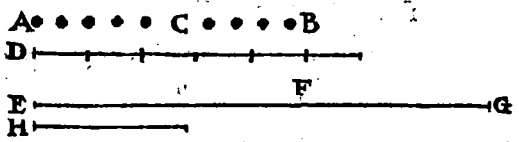
PVLCHRE autem Euclides primas ordine facit tres, in quibus maius nomen plus poteſt, quàm minus, quadrato rectæ lineæ ſibi longitudine commenſurabilis; Secundas verò tres reliquas, in quibus maius nomen plus poteſt, quàm minus, quadrato rectæ lineæ ſibi incommenſurabilis longitudine; propterea quòd commenſurabile antecedit incommenſurabile, vt manifeſtum eſt.

RVRSVS rectè adhuc inter lineas ex binis nominibus, primam omnium ponit, in qua maius nomẽ commenſurabile eſt longitudine expoſitæ lineæ Rationali; & ſecundam, in qua minus nomen eidem Rationali lineæ expoſitæ longitudine eſt commenſurabile. quoniam maius natura antecedit minus, cùm minus à maiori contineatur; tertiam verò, in qua neutrum ipſorum nominũ expoſitæ Rationali longitudine eſt commenſurabile; Et in reliquis tribus eodem modo, primam dicti ſecundi ordinis quartam appellans; ſecundam, quintam; & tertiam, ſextam.

48. 42. ## PROBL. 13. PROPOS. 49.

INVENIRE ex binis nominibus primam.

REPERTIS duobus numeris quadratis A B, C B, ex iis, quæ in ſcholio 2. propoſ. 29. hũius libri ſcripſimus, quorum exceſſus A C, non ſit quadratus, ita vt A B, C B, proportionem quidem habeant, quam quadratus ad quadratum; at A B, A C, proportionem non habeant, quam quadratus ad quadratũ: Exponatur Rationalis quæpiam D, cui longitudine commenſurabilis ſumatur E F. Erit ergo & E F, Rationali D, commenſurabilis, Rationalis. Fiat deinde vt numerus A B, ad A C, ita per coroll. propoſ. 6. huius lib. quadratum ex E F, ad quadratum ex F G. Dico E G, eſſe ex binis nominibus primam. Quoniam enim quadrata ex E F, F G, cùm proportionem habeant, quam numeri A B, A C, [a] commenſurabilia ſunt; erunt & rectæ E F, F G, commenſurabiles, ſaltem potẽtia: Oſtenſa autem eſt E F, Rationalis. Igitur & F G, Rationalis eſt. Quia verò A B, ad A C, proportionem non habet, quã quadratus ad quadratum, nõ habebunt quoq; quadrata ex E F, F G, proportionem, quam numerus quadratus ad quadratum. [b] Incommenſurabiles ergo ſunt longitudine rectæ E F, F G. Sunt igitur E F, F G, Rationales potentia ſolùm cõmenſurabiles; [c] Atq; idcirco tota E G, Irrationalis eſt, quæ ex binis nominibus dicitur. Dico & primam eſſe. Cùm enim ſit vt numerus A B, ad numerum A C, ita quadratum ex E F, ad quadratum ex F G; ſit autem A B, maior, quàm A C; erit quoque quadratum ex E F, maius quàm quadratum ex F G. Sit maius, ex lemmate propoſ. 14. huius libri, quadrato rectæ H. Quoniam igitur eſt, vt A B, numerus ad A C, ita quadratum ex E F, ad quadratum ex F G; erit quoque, per conuerſionẽ rationis, vt A B, ad C B, videlicet ad exceſſum, quo antecedens A B, ſuperat conſequentem A C, ita quadratum ex E F, ad quadratum ex H, nimirum ad exceſſum, quo antecedens quadratum ex E F, ſuperat conſequens quadratum ex F G. Habet autem A B, ad C B, proportionem, quam quadratus ad quadratum. Igitur & quadrata ex E F, & H, proportionem habebunt, quam numerus quadratus ad numerum quadratum; [d] ac proinde rectæ E F, H, longitudine commenſurabiles ſunt. Quoniam igitur maius nomen E F, plus poteſt, quàm minus F G, quadrato rectæ H, ſibi longitudine commenſurabilis; eſtque idem maius nomen E F, expoſitæ Rationali D, commenſurabile longitudine; erit E G, per definitionem, ex binis nominibus prima. Inuenimus ergo ex binis nominibus primam. Quod faciendum erat.



a 6. decimi.
b 9. decimi.
c 37. decimi.
d 9. decimi.

49. 43. ## PROBL. 14. PROPOS. 50.

INVENIRE ex binis nominibus ſecundam.

REPERTIS duobus numeris quadratis A B, C B, vt in præcedenti propoſitione, expoſitaque Rationali

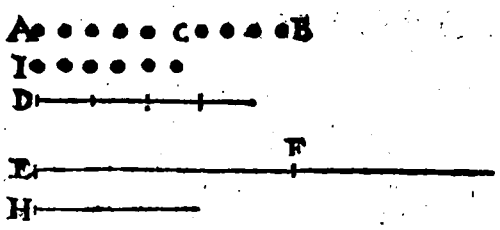
Rationali quadam D; ſumatur ei longitudine commenſurabilis F G. Erit ergo & F G, Rationali D, commenſurabilis, Rationalis. Fiat deinde, vt numerus A C, ad numerum A B, ita p corollarium propoſ. 6. huius libri, quadratum ex F G, ad quadratum ex E F. Dico E G, eſſe ex binis nominibus ſecundam. Quoniam enim quadrata ex F G, E F, proportionem habentia, quam numeri A C, A B, [a] commenſurabilia ſunt; erunt & rectæ F G, E F, commenſurabiles, ſaltem potentia: Oſtenſa eſt autem F G, Rationalis. Igitur & E F, Rationalis eſt. Quia verò A C, A B, proportionẽ non habent, quam quadrati numeri; neque quadrata ex F G, E F, proportionem habebũt, quam numeri quadrati. [b] Incommenſurabiles ergo ſunt longitudine rectæ F G, E F. Sunt igitur E F, F G, Rationales potentia tantùm commenſurabiles; [c] Atque idcircò tota E G, Irrationalis eſt, quæ ex binis nominibus dicitur. Dico & ſecundam eſſe. Cùm enim ſit vt numerus A C, ad numerum A B, ita quadratum ex F G, ad quadratũ ex E F: Et conuertendo vt A B, ad A C, ita quadratum ex E F, ad quadratum ex F G; ſit autem A B, maior quàm A C; erit & quadratum ex E F, maius, quàm quadratum ex F G. Sit, per lemma propoſ. 14. huius lib. maius quadrato rectæ H. Oſtendemus iam, vt in præcedenti propoſ. H, ipſi E F, longitudine commenſurabilem eſſe. Quoniam igitur maius nomen E F, plus poteſt, quàm minus F G, quadrato rectæ H, ſibi longitudine commenſurabilis; eſtq; minus nomen F G, expoſitæ Rationali D, commenſurabile longitudine; erit E G, per definitionem, ex binis nominibus ſecunda. Inuenimus ergo ex binis nominibus ſecundã. Quod erat faciẽdum.

[a] 6. decimi.
[b] 9. decimi.
[c] 37. decimi.

PROBL. 15. PROPOS. 51. 50.

INVENIRE ex binis nominibus tertiam. 441.

REPERTIS duobus numeris quadratis A B, C B, vt in propoſ. 49. Sumatur alius numerus I, qui ad neutrum ipſorum A B, A C, proportionem habeat, quam quadratus ad quadratum. quod quidem fiet, ſi ſumatur I, non quadratus numerus proximè maior, quàm A C. Ita enim, cùm nõ ſit quadratus, non habebit ad quadratum A B, proportionem, quam quadratus ad quadratũ. Rurſus cùm ſit non quadratus proximè maior, q̃ A C, differet vel ſola vnitate ab A C, vel binario. (Vnitate quidem, quando A C. numerus fuerit, cui addita vnitas non facit quadratum: binario verò, quando vnitas addita ad A C, quadratum facit. Vt ſi A C, ſit 8. erit non quadratus proximè maior 10. differens ab 8. binario. quia vnitas addita ad 8. facit quadratum 9. At ſi A C, ſit 5. erit non quadratus proximè maior 6. differens à 5. vnitate, quia vnitas addita ad 5. non facit quadratum, &c.) Quare vt in ſcholio propoſ. 8. lib. 8. oſtendimus, non cadet inter I, & A C, medius proportionalis. Igitur non erunt ſimiles plani; ac propterea neq; proportionem habebunt, quam numeri quadrati. Exſita iam Rationali quapiam D, fiat p corollarium propoſ. 6, huius lib. vt I, ad A B, ita quadratum ex D, ad quadratum ex E F. [d] Erunt ergo quadrata ex D, & E F, proportionẽ habentia, quam numerus I, ad numerum A B, commenſurabilia; atque adeò & lineæ D, E F, commenſurabiles, ſaltem potentia. Exiſtente igitur D, Rationali, erit & E F, Rationalis. Quia verò I, ad A B, hoc eſt, quadratũ ex D, ad quadratum ex E F, proportionẽ non habet, quam numerus quadratus ad numerum quadratum; [e] erunt D, & E F, rectæ inter ſe longitudine incommenſurabiles. Rurſus per dictum coroll. fiat vt A B, ad A C, ita quadratum ex E F, ad quadratum ex F G. [f] Erunt ergo quadrata ex E F, F G, proportionem habẽtia, quam numerus ad numerum, commenſurabilia; Ideoq; & lineæ E F, F G, commenſurabiles ſaltem potentia. Igitur cùm E F, oſtenſa ſit Rationalis; erit & F G, Rationalis. Et quia A B, ad A C, hoc eſt, quadratum ex E F, ad quadratum ex F G, proportionem non habet, quam numerus quadratus ad numerũ quadratum; [g] erunt E F, F G, longitudine incommenſurabiles. Sunt ergo E F, F G, Rationales potentia tantùm commenſurabiles; [h] Atq; idcircò tota E G, Irrationalis eſt ex binis nominibus appellata. Dico & tertiam eſſe. Quoniam enim eſt, vt I, ad A B, ita quadratum ex D, ad quadratum ex E F; Et vt A B, ad A C, ita quadratum ex E F, ad quadratũ ex F G; erit ex æqualitate vt I, ad A C, ita quadratum ex D, ad quadratũ ex F G: Non habet autem I, ad A C, proportionem, quã numerus quadratus ad numerum quadratum. Igitur nec quadrata ex D, & F G, proportionem habebũt, quam quadratus numerus ad numerum quadratum; [i] ac propterea rectæ D, & F G, longitudine incommenſurabiles ſunt. Quoniam autem eſt vt A B, ad A C, ita quadratum ex E F, ad quadratũ ex F G; Eſt autem A B, maior q̃ A C; erit & quadratum ex E F, maius q̃ quadratum ex F G. Sit ergo maius, per lemma propoſ. 14. huius lib. quadrato rectæ H. Oſtendemus iam ſimiliter, vt in 49. propoſ. H, ipſi E F, longitudine commenſurabilem eſſe. Quoniam igitur maius nomen E F, plus poteſt, q̃ minus F G, quadrato rectæ H, ſibi longitudine commenſurabilis; & neutra ipſarum E F, F G, longitudine commenſurabilis eſt expoſitæ Rationali D, vt demonſtratũ eſt. Erit E G, p definitionem, ex binis nominibus tertia. Inuenimus ergo ex binis nominibus tertiam. Quod erat faciendum.

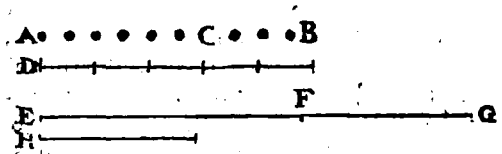


[d] 6. decimi.
[e] 9. decimi.
[f] 6. decimi.
[g] 9. decimi.
[h] 37. decimi
[i] 9. decimi.

PROBL. 16. PROPOS. 52. 51.

INVENIRE ex binis nominibus quartam. 451.

REPERTIS duobus numeris, A C, C B, ita vt compositus ex ipsis A B, ad neutrum ipsorũ proportionem habeat, quam quadratus ad quadratum, ex iis, quæ in scholio 3. propos. 29. huius lib. tradidimus; exponatur Rationalis quædam D, cui longitudine commensurabilis sumatur E F. Erit ergo & E F, Rationalis, cùm Rationali D, commensurabilis sit. Quòd si reliqua construantur, vt in propos. 49. ostẽdemus similiter, vt ibi, totam E G, ex binis nominibus esse. Dico & quartam esse. Erit enim rursus, vt in 49. propos. quadratũ ex E F, maius q̃ quadratum ex F G. Sit ergo maius, quadrato rectæ H. Quoniam igitur eodem modo, vt in 49. propos. per conuersionem rationis est, vt A B, ad C B, ita quadratum ex E F, ad quadratum ex H: Non est autem A B, ad C B, vt quadratus ad quadratum; neq; quadratum ex E F, ad quadratum ex H, erit vt numerus quadratus ad numerũ quadratum. [a] Longitudine ergo incommensurabiles sunt rectæ E F, & H. Itaq; cùm maius nomẽ E F, plus possit, q̃ minus F G, quadrato rectæ H, sibi longitudine incommensurabilis, & maius rursus nomen E F, longitudine commensurabile expositæ Rationali D; erit E G, per defin. ex binis nominibus quarta. Inuenimus ergo ex binis nominibus quartam. Quod faciendum erat.



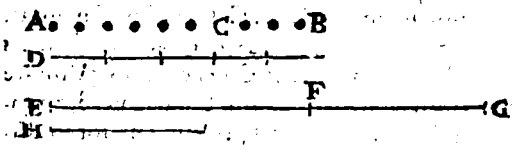
a 9. decimi.

52. 46.

PROBL. 17. PROPOS. 53.

INVENIRE ex binis nominibus quintam.

REPERTIS duobus numeris A C, C B, vt in præcedenti propos. fiat constructio, vt in propos. 50. hoc est, sumatur F G, longitudine commensurabilis expositæ Rationali D, &c. Ostendemus ergo, vt in propos. 50. E G, esse ex binis nominibus. Dico & quintã esse. Demonstrabimus enim eodem modo, vt in 50. propos. quadratum ex E F, maius esse, q̃ quadratum ex F G. Sit ergo maius, quadrato rectæ H. Quoniam verò, vt in propos. 49. ostensum est, per conuersionem rationis, est vt A B, ad C B, ita quadratum ex E F, ad quadratũ ex H. Ostendemus, vt in propos. antecedenti, rectas E F, & H, longitudine incommensurabiles esse. Quare cùm maius nomẽ E F, plus possit, quàm minus F G, quadrato rectæ H, sibi longitudine incommensurabilis, & minus nomen F G, longitudine commensurabile expositæ Rationali D; erit per definitionem E G, ex binis nominibus quinta. Inuenimus ergo ex binis nominibus quintam. Quod faciendum erat.

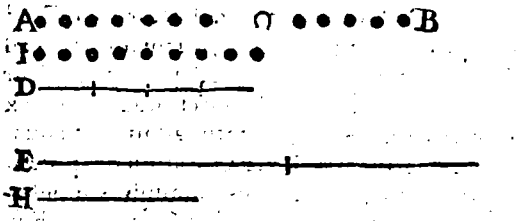


53. 47.

PROBL. 18. PROPOS. 54.

INVENIRE ex binis nominibus sextam.

REPERTIS duobus numeris A C, C B, planis non similibus, quorum neuter sit quadratus, & compositus ex ipsis A B, non sit quoq; quadratus, habeatq; ad neutrum ipsorum proportionem, quam quadratus numerus ad quadratum numerum; (quod quidem fiet, si numerus quilibet non quadratus diuidatur in duos numeros inter se primos.) [b] Nam hac ratione & totus ad vtrumque ipsorum primus erit; atq; idcirco proportionem ad illos nõ habebit, quam quadratus ad quadratum, per ea, quæ ad finem lib. 8. demonstrauimus. Sumatur alius numerus quicunq; I, qui nec ad A B, nec ad A C, habeat proportionem, quam quadratus ad quadratum; qualis est quiuis numerus quadratus. Hic enim ad A B, & A C, nõ quadratos, proportionem non habebit, quam quadratus ad quadratum. Exponatur deinde Rationalis aliqua D; & vt I, ad A B, ita fiat quadratum ex D, ad quadratum ex E F, per coroll. propos. 6. huius libri, & reliqua fiant, vt in propos. 51. ostendemus q̃; vt ibi, rectas D, & E F, esse longitudine incommensurabiles, atq; totam E G, ex binis esse nominibus. Dico & sextam esse. Demonstrabimus enim similiter, vt in 51. propos. D, & F G, longitudine esse incommensurabiles, esseq; quadratum ex E F, maius, quàm quadratum ex F G. Sit ergo maius, quadrato rectæ H. Ostendemus quoq;, vt in propos 49. per conuersionem rationis, esse vt A B, ad C B, ita quadratum ex E F, ad quadratum ex H. Cùm igitur A B, ad C B, atq; adeò quadratum ex E F, ad quadratum ex H, proportionem nõ habeat, quam quadratus numerus ad quadratum; erunt rectæ E F, & H, longitudine incommensurabiles. Itaque cùm maius nomen E F, plus possit, quàm minus F G, quadrato rectæ H, sibi longitudine incommensurabilis, & neutrum ipsorũ nominum E F, F G, longitudine sit commensurabile expositæ Rationali D; erit E G, per definitionem, ex binis nominibus sexta. Inuenimus ergo ex binis nominibus sextam. Quod faciendum erat.

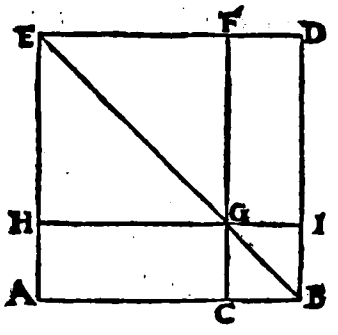


b 30. sept.

c 9. decimi.

LEMMA.

Si recta linea secta sit vtcunque; erit rectangulum sub partibus contentum, medium proportionale inter earum quadrata: Item rectangulum contentum sub tota, & vna parte, medium proportionale inter quadratum totius lineæ, & quadratum dictæ partis.



Secta ſit recta A B, vtcunque in C. Deſcribatur ex A B, quadratum A B D E, in quo diameter ducatur B E: Ducta autem ex C, recta C F, ipſi B D, parallela, quæ diametrum ſecet in G, agatur per G, ipſi A B, parallela H I. Erunt igitur per coroll. propoſ. 4. lib. 2. F H, C I, quadrata partium A C, C B; vtrumque autem rectangulorum D G, G A, comprehenſum ſub eiſdē partibus: At verò rectangula C D, A I, ſub tota A B, & parte C B, contenta. Dico D G, mediū proportionale eſſe inter quadrata F H, C I: At C D, medium eſſe proportionale inter quadrata A D, C I. Quoniam enim [a] *vt H G, ad G I, ita eſt tam F H, ad D G, quàm A G, ad C I; erit vt F H, ad D G, ita A G, ad C I:* [b] *Eſt autem A G, ipſi D G, æquale. Igitur erit quoque, vt F H, ad D G, ita D G, ad C I; Atque adeò D G, medium proportionale eſt inter quadrata F H, C I.*

a 1. ſexti. b 43. primi.

Rvrsvs quia eſt [c] *vt A B, ad C B, ita tam A D, ad C D, quàm A I, ad C I; erit vt A D, ad C D, ita A I, ad C I: Eſt autem A I, ipſi C D, æquale. Igitur erit vt A D, ad C D, ita quoque C D, ad C I. Quare C D, medium proportionale eſt inter quadrata A D, C I. Eodem modo erit A F, medium proportionale inter quadrata A D, F H.*

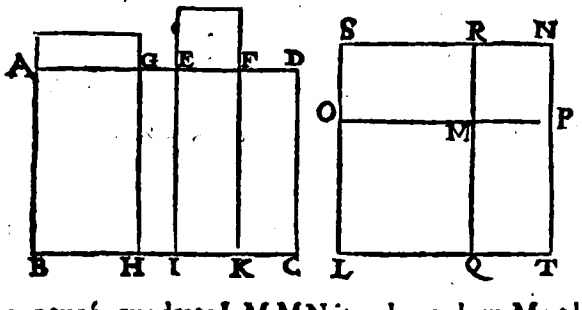
c 1. ſexti.

THEOR. 37. PROPOS. 55. 54. 48.

SI ſpatium contineatur ſub Rationali, & ex binis nominibus prima; Recta linea ſpatium potens Irrationalis eſt, quæ ex binis nominibus appellatur.

Continebatvr ſpatium A C, ſub Rationali A B, & ex binis nominibus prima A D. Dico rectam lineam, quæ poteſt ſpatium A C, Irrationalem eſſe, quæ ex binis nominibus appellatur. Sit enim ipſius A D, maius nomen A E. Erunt igitur ex defin. A E, E D, Rationales potentia tantùm commenſurabiles; & A E, plus poterit, q̄ E D, quadrato rectæ ſibi longitudine commenſurabilis; & denique A E, expoſitæ Rationali A B, longitudine commenſurabilis erit. Secetur E D, bifariam in F. Quia igitur A E, plus poteſt q̄ E D, quadrato rectæ ſibi longitudine commenſurabilis, ſi quartę parti quadrati ex E D, hoc eſt, quadrato ex E F, æquale parallelogrammū ſub A G, G E, contentum, per 1. lemma propoſ. 17. huius libri, applicetur deficiēs figura quadrata; [a] ipſa partes longitudine commenſurabiles ipſam diuidet. Quare A G, G E, partes inter ſe longitudine commenſurabiles ſunt. Ducantur iam per puncta G, E, F, ipſis A B, D C, parallelæ G H, E I, F K. [b] Et parallelogrammo A H, æquale quadratū fiat L M: At parallelogrammo G I, æquale fiat quadratum M N; coniunganturq; quadrata L M, M N, ita ad angulum M, vt latera M O, M P, vnam rectam lineam conſtituant O P. Facient ergo & latera M Q, M R, vnam rectam Q R, vt demonſtratū eſt à nobis ex Proclo ad propoſ. 15. lib. 1. propterea quòd anguli O M Q, P M R, ad verticem M, ſunt æquales, nempe recti. Completo autem rectangulo L N, cùm rectæ O M, M P, rectis Q M, M R, æquales ſint, ideoq; & tota O P, toti Q R; [c] ſit autem O P, ipſis S N, L T; & Q R, ipſis L S, T N, æqualis; æquilaterum erit rectangulum L N; ideoque quadratum.

a 18. decimi.



b 14. ſecūdi.

c 34. primi.

Qvoniam verò rectangulum ſub A G, G E, æquale eſt, per conſtructionem, quadrato ex E F; [d] erit vt A G, ad E F, ita E F, ad G E; [e] Ac propterea & vt A H, ad E K, ita E K, ad G I. Quare E K, medium proportionale eſt inter A H, G I, hoc eſt, inter quadrata L M, M N, illis æqualia: Sed inter eadem quadrata L M, M N, medium proportionale eſt T M, ex antecedenti lemmate. Æquale igitur eſt T M, ipſi E K. [f] Cùm ergo ipſi T M, æquale ſit M S, & ipſi E K, æquale ſit F C; erit & M S, ipſi F C, æquale. Quocirca totum quadratum L N, toti rectangulo A C, æquale eſt; atque adeò recta O P, poteſt ſpatium A C, contentum ſub A B, Rationali, & A D, ex binis nominibus prima. Dico O P, eſſe Irrationalem, quæ ex binis nominibus dicitur.

d 17. ſexti. e 1. ſexti. f 43. primi. g 36. primi.

Qvoniam enim A G, G E, oſtenſæ ſunt longitudine commēſurabiles; [h] erit & tota A E, vtriq; ipſarum longitudine commenſurabilis: Eſt autem A E, cùm ſit maius nomen ipſius A D, ex binis nominibus primæ, Rationali A B, commenſurabilis longitudine. Igitur & A G, G E, eidem A B, ex ſcholio propoſ. 12. huius lib. longitudine commenſurabiles ſunt; Atq; adeò cùm A B, ſit Rationalis, erunt & A G, G E, Rationales. [i] Quare rectangula A H, G I, ſub Rationalibus longitudine commenſurabilibus contenta Rationalia ſunt; Ideoq; & quadrata L M, M N, ipſis æqualia, Rationalia erunt; Ac proinde & rectæ O M, M P, Rationales erunt.

h 16. decimi. i 20. decimi.

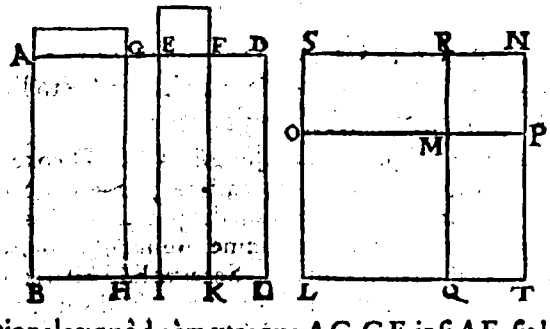
Et quoniam A E, ipſi E D, longitudine incommenſurabilis eſt; Eſt autem ipſi A E, longitudine oſtenſa commenſurabilis A G, & ipſi E D, commenſurabilis eſt longitudine E F, eius dimidia, erūt

ex ſcholio propoſ.14.huius lib.& AG,EF,inter ſe longitudine incommenſurabiles. Quare & AH,
a 1.ſexti. EK, a eandem proportionẽ habẽtia,quam AG,EF, b incommenſurabilia ſunt,aç proinde & LM,
b 10.decimi. MT, illis æqualia, ſunt incommenſurabilia. c Igitur & rectæ OM,MP, longitudine ſunt incom-
c 10.decimi. menſurabiles, d cùm eandem habeant proportionem,quam LM,MT: Sunt autẽ & OM,MP,Ra-
d 1.ſexti. tionales oſtenſæ. Igitur OM, MP, Rationales ſunt potentia ſolùm commenſurabiles. e Quapro-
e 37.decimi. pter tota OP, potens ſpatium AC,Irrationalis eſt,quæ ex binis nominibus dicitur. Si ſpatium ergo contineatur ſub Rationali,& ex binis nominibus prima,&c. Quod demonſtrandum erat.

55. 49. ## THEOR. 38. PROPOS. 56.

Si ſpatium contineatur ſub Rationali, & ex binis nominibus ſecunda; Recta linea ſpatium potens Irrationalis eſt,quæ ex binis Mediis prima appellatur.

Continebatvr ſpatium AC,ſub Rationali AB,& ex binis nominibus ſecunda AD.Dico rectam lineã,quæ poteſt ſpatium AC,Irrationalem eſſe,quæ ex binis Mediis prima dicitur. Sit enim ipſius AD,maius nomen AE.Erunt igitur ex defin. AE,ED,Rationales potentia tantũ commenſurabiles; & AE,plus poterit, q̃ ED, quadrato rectæ lineæ ſibi longitudine commenſurabilis: Et denique ED,Rationali expoſitę AB,longitudine commenſurabilis. Secetur ED,bifariam in F; & reliqua conſtruantur,vt in antecedenti propoſitione. Quo facto,demonſtrabimus ſimiliter,vt ibi, rectam OP, poſſe ſpatium AC,contentum ſub Rationali AB,& ex binis nominibus ſecunda AD. Dico iam OP,Irrationalem eſſe,quæ ex binis Mediis prima vocatur.



Qvoniam enim AE,longitudine incommenſurabilis eſt ipſi ED; & ED, minus nomẽ exiſtẽs ipſius AD, ex binis nominibus ſecundæ,longitudine commẽſurabilis eſt Rationali AB; f erũt AE, AB, longitudine incommenſurabiles. Et quia AG, GE, oſtenſæ ſunt in antecedenti propoſ.longitudine commenſurabiles; g Erit quoq; tota AE, vtriq; ipſarum commenſurabilis. Quare cùm AE, maius nomen exiſtens ipſius AD,ex binis nominibus ſecundæ,linea ſit Rationalis; erunt & AG,GE,Rationales:quòd cùm vtraque AG,GE,ipſi AE, ſit longitudine commenſurabilis; at verò AE, Rationali AB,longitudine incommenſurabilis; h erit vtraque AG,GE,eidem AB, incommenſurabilis longitudine. Ac proinde tam AB,AG, quàm AB,GE,Rationales ſunt potentia ſolùm commenſurabiles. i Igitur rectangula AH, GI, Media ſunt, propterea q̃ue & quadrata LM,MN, ipſis æqualia,Media ſunt. Ergo & rectæ OM,MP,ſunt Mediæ.

f 13.decimi.
g 16.decimi.
h 14.decimi.
i 22.decimi.
k 10.decimi

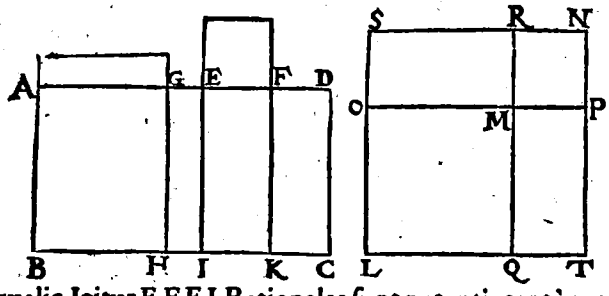
Qvia verò AG,GE,longitudine ſunt commenſurabiles; k erunt & AH,GI,eandem cum illis proportionẽ habẽtia,commenſurabilia,atq; idcircò & quadrata LM,MN,ipſis æqualia,commenſurabilia ſunt.Igitur & rectæ OM,MP,commenſurabiles ſunt,ſaltẽ potentia.Et quoniã AE,ED, longitudine incommenſurabiles ſunt; Ipſi verò AE,oſtenſa eſt longitudine commẽſurabilis AG; & ipſi ED,longitudine commenſurabilis eſt EF,eius dimidia; erunt p ſcholium propoſ.14.huius lib. AG,EF,longitudine incommenſurabiles; Ac proinde AH,EK, eandem habẽtia proportionẽ cum ipſis, l incommenſurabilia ſunt.Igitur & LM,MT,ipſis AH,& EK,æqualia,incommenſurabilia ſunt. m Ideoq; & rectæ OM,MP,longitudine ſunt incommenſurabiles. n cùm eandẽ habeãt proportionem quã LM,MT. Cùm ergo oſtenſum ſit OM,MP, Medias eſſe,& commenſurabiles, erunt OM, MP, Mediæ potentia ſolùm commenſurabiles. Quoniam deniq; ED, minus nomen ipſius AD,ex binis nominibus ſecundæ, linea eſt longitudine commenſurabilis ipſi AB, hoc eſt, o ipſi EI: Eſt autẽ EF,ipſi ED,quoq; longitudine commenſurabilis; o erunt etiam EI,EF,longitudine commenſurabiles; Ac propterea cũ EI, Rationalis ſit, erit & EF,Rationalis. p Quare EK,rectangulum,Rationale eſt: Eſt autẽ MT,ſub OM,MP,contentum ipſi EK,æquale. Igitur & MT, Rationale eſt. Quapropter OM,MP, Mediæ ſunt potentia tantũ commenſurabiles, Rationaleq; continentes; q atq; adeò OP,Irrationalis eſt, quæ ex binis Mediis prima appellatur. Si ergo ſpatium contineatur ſub Rationali,& ex binis nominibus ſecunda,&c. Quod oſtendendum erat.

l 10.decimi.
m 10.decimi
n 1.ſexti.
o 12.decimi.
p 20.decimi
q 38.decimi

56. 50. ## THEOR. 39. PROPOS. 57.

Si ſpatium contineatur ſub Rationali, & ex binis nominibus tertia; Recta linea ſpatium potens Irrationalis eſt,quæ ex binis Mediis ſecunda dicitur;

Continebatvr ſpatiũ AC,ſub Rationali AB,& ex binis nominibus tertia AD.Dico rectam, quæ poteſt ſpatiũ AC,Irrationalem eſſe,quę dicitur ex binis Mediis ſecunda. Sit enim ipſius AD, maius nomen AE. Erunt ergo AE, ED, ex defin. Rationales potentia tantùm commenſurabiles & AE, plus poterit, q̃ ED,quadrato rectæ ſibi longitudine commenſurabilis; Et deniq; neutra ipſarum AE, ED Rationali expoſitę AB,longitudine commenſurabilis erit. Secta ED, bifariam in F, reliqua omnia fiant, vt in propoſ.55. Similiter ergo, vt ibi, oſtendemus rectam OP, poſſe ſpatium AC: Et vt in antecedenti propoſ.56.rectas OM,MP, eſſe Medias potentia tantũ commenſurabiles; propterea quòd AE, Rationali AB, ponitur longitudine incommenſurabilis, quemadmodum &



dum & ibi eadem AE, ipſi AB, longitudine erat incommenſurabilis. Quoniam verò ED, EF, ſunt commenſurabiles longitudine; eſtque ED, ipſi AB, Rationali, hoc eſt, ipſi EI, longitudine incommenſurabilis; [a] erit quoque EF, eidem EI, longitudine incommenſurabilis: Sunt autem EF, EI, Rationales, quòd EF, dimidia ſit ipſius ED, Rationalis; & EI, expoſitæ RationaliAB, æqualis. Igitur EF, EI, Rationales ſunt potentia tantùm commenſurabiles; [b] Ac propterea EK, Medium eſt; ideoq; & MT, æquale ipſi EK, Medium eſt, quod ſub Mediis OM, MP, continetur. Itaque cùm OM, MP, Mediæ ſint potentia ſolùm commenſurabiles, contineantque ſpatium Medium; [c] erit OP, Irrationalis, quæ ex binis Mediis ſecunda appellatur. Si igitur ſpatium contineatur ſub Rationali, & ex binis nominibus tertia, &c. Quod erat demonſtrandum.

[a] 14. decimi

[b] 22. decimi

[c] 22. decimi

THEOR. 40. PROPOS. 58. 57. 51.

Si ſpatium contineatur ſub Rationali, & ex binis nominibus quarta; Recta linea ſpatium potens Irrationalis eſt, quæ vocatur Maior.

CONTINEATVR ſpatium AC, ſub Rationali AB, & ex binis nominibus quarta AD. Dico rectam lineam, quæ poteſt ſpatium AC, eſſe Irrationalem, quæ Maior vocatur. Sit enim AE, ipſius AD, maius nomen. Erunt ergo ex defin. AE, ED, Rationales potentia tantùm commenſurabiles; & AE, plus poterit, quàm ED, quadrato rectæ lineæ longitudine ſibi incommenſurabilis, & denique AE, ipſi AB, commenſurabilis erit longitudine. Secta ED, bifariam in F, fiant reliqua omnia, vt in propoſ. 55. [d] Erunt ergo AG, GE, longitudine incommenſurabiles. Demonſtrabimus iam eodem modo, vt ibi, OP, poſſe ſpatium AC. Dico OP, Irrationalem eſſe, quæ vocatur Maior. Quoniam enim AG, GE, longitudine incommenſurabiles ſunt; [e] erunt & rectangula AH, GI, eandem cum illis habentia proportionem, incommenſurabilia; atq; adeò & quadrata LM, MN, ipſis AH, GI, æqualia, incommenſurabilia erunt. Quare rectæ OM, MP, potentia ſunt incommenſurabiles. Quia verò AE, maius nomen ipſius AD, ex binis nominibus quartæ, linea eſt longitudine commenſurabilis Rationali AB; erit & AE, Rationalis; [f] & rectangulum AI, ſub ipſis contentum, Rationale. Eſt autem AI, æquale compoſito ex quadratis LM, MN: Compoſitum ergo ex quadratis LM, MN, Rationale eſt.

[d] 19. decimi

[e] 10. decimi.

[f] 20. decimi

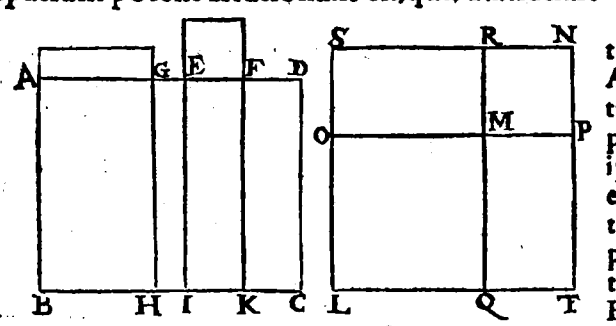
ET quoniam ED, minus nomen ipſius AD, ex binis nominibus quartæ, linea eſt longitudine incommenſurabilis Rationali AB, erit & EF, ipſius dimidia eidem AB, longitudine incommenſurabilis; Et eſt EF, Rationalis, cùm ſit Rationali ED, commenſurabilis. Igitur EF, & AB, Rationales ſunt potentia ſolùm cõmenſurabiles. [g] Quare EK, Medium eſt, ſub ipſis cõtentum; ideoq; & MT, illi æquale, contentumq; ſub OM, MP, Medium eſt. Quocirca cùm OM, MP, ſint potentia incommenſurabiles, faciantque compoſitum quidem ex ipſarum quadratis LM, MN, Rationale: Rectangulũ verò ſub ipſis MT, Mediũ; [h] Irrationalis erit tota OP, quæ maior nominatur. Si ſpatiũ ergo cõtineatur ſub Rationali, & ex binis nominibus quarta, &c. Quod erat oſtendendũ.

[g] 22. decimi

[h] 40. decimi

THEOR. 41. PROPOS. 59. 58. 52.

Si ſpatium cõtineatur ſub Rationali, & ex binis nominibus quinta; Recta linea ſpatium potens Irrationalis eſt, quæ Rationale & Medium potens appellatur.



CONTINEATVR ſpatium AC, ſub Rationali AB, & ex binis nominibus quinta AD. Dico rectam lineam, quæ poteſt ſpatium AC, eſſe Irrationalem, quæ dicitur potens Rationale & Medium. Sit enim ipſius AD, maius nomen AE. Sunt ergo ex defin. AE, ED, Rationales potentia tantùm commenſurabiles; & AE, plus poteſt, quàm ED, quadrato rectæ longitudine ſibi incommenſurabilis; & deniq; ED, longitudine commẽſurabilis eſt expoſitæ Rationali AB. Secta ED, bifariam, fiant reliqua eadem, quæ in propoſ. 55. [i] Erunt igitur rurſus AG, GE, longitudine incommenſurabiles. Simili autem modo, vt in propoſ. 55. conſtabit rectam OP, poſſe ſpatium AC. Dico OP, Irrationalem eſſe, quæ potens Rationale & Medium appellatur. Erunt enim, vt in propoſ. antecedenti, rectæ OM, MP, potentia incommenſurabiles. Et quia AE, maius nomen ipſius AD, ex binis nominibus quintæ, linea eſt Rationalis & longitudine incommenſurabilis Rationali AB; erunt AE, AB, Rationales potentia tantùm commenſurabiles. [k] Quare rectangulum AI, ſub ipſis contentum, Medium eſt. Eſt autem AI, æquale compoſito ex quadratis LM, MN. Igitur & compoſitum hoc, Medium erit. Rurſus quia ED, Rationalis ponitur longitudine commenſurabilis Rationali AB, cùm ſit minus nomẽ ipſius AD, ex binis

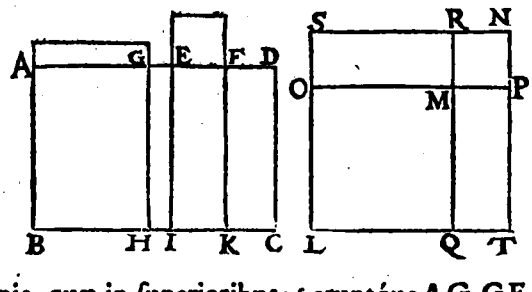
[i] 19. decimi.

[k] 22. decimi

nominibus quintæ; erit & EF, ipſius dimidia, eidem AB, commenſurabilis longitudine, & Ra-
a 20.decimi tionalis. a Quare EK, ſub Rationalibus EI, EF, longitudine commenſurabilibus, Rationale eſt: atque idcirco & MT, ſub OM, MP, contentum Rationale erit, cùm ipſi EK, ſit æquale. Quamobrem cùm rectæ OM, MP, potentia incommenſurabiles ſint, faciantque compoſitum quidem ex ipſarum quadratis LM, MN, Medium; Rectangulum verò MT, ſub ipſis contentum, Rationale;
b 41.decimi b Irrationalis erit tota OP: quæ dicitur potens Rationale, & Medium. Si igitur ſpatium cõtineatur ſub Rationali, & ex binis nominibus quinta, &c. Quod erat demonſtrandum.

59. 53. ## THEOR. 42. PROPOS. 60.

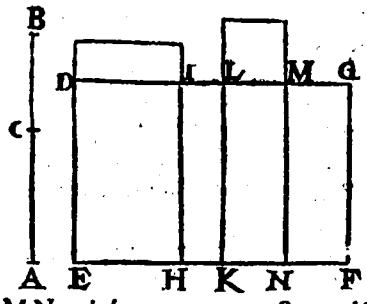
SI ſpatium contineatur ſub Rationali, & ex binis nominibus ſexta; Recta linea ſpatium potens Irrationalis eſt, quæ bina Media potens nominatur.



CONTINEATVR ſpatium AC, ſub Rationali AB, & ex binis nominibus ſexta AD. Dico rectam, quæ ſpatium AC, poteſt, Irrationalem eſſe, quæ dicitur potẽs bina Media. Sit enim ipſius AD, maius nomen AE. Sunt ergo AE, ED, ex defin. Rationales potentia tantùm commenſurabiles; & AE, plus poterit, quàm ED, quadrato rectæ ſibi longitudine incommenſurabilis; & denique neutra ipſarum AE, ED, longitudine erit cõmenſurabilis Rationali AB. Fiant om-
c 19.decimi. nia, quæ in ſuperioribus; c eruntque AG, GE, longitudine incommẽſurabiles. Iam verò oſtendemus ſimiliter, vt in propoſ. 55. rectam OP, poſſe ſpatium AC. Item vt in propoſ. 58. rectas OM, MP, potentia eſſe incommenſurabiles. Rurſus, vt in antecedenti propoſ. erit compoſitum ex quadratis LM, MN, Medium. Vt autem in propoſ. 58. erit quoque MT, ſub OM, MP, comprehenſum, Medium. Et quia duarum rectarum AE, EF, illa quidem incommenſurabilis eſt longitudine
d 13. decimi ipſi ED; hæc verò eidem commenſurabilis; d erunt AE, EF, longitudine incommenſurabiles.
e 10.decimi e Igitur & AI, EK, incommenſurabilia ſunt. f cùm eandem rationem habeant, quam AE, EF.
f 1. ſexti. Quare & compoſitum ex quadratis LM, MN, quod ipſi AI, æquale eſt, & rectangulum MT, quod ipſi EK, eſt æquale, incommenſurabilia ſunt. Quapropter cùm rectæ OM, MP, ſint potentia incommenſurabiles, faciantq; & compoſitum ex ipſarum quadratis LM, MN, Medium, &
g 42.decimi MT, ſub ipſis contentum, Medium, incommenſurabileq; compoſito ex ipſarum quadratis; g erit tota OP, Irrationalis, quæ bina Media potens vocatur. Si ergo ſpatium contineatur ſub Rationali, & ex binis nominibus ſexta, &c. Quod oſtendendum erat.

60. 54. ## THEOR. 43. PROPOS. 61.

QVADRATVM eius, quæ eſt ex binis nominibus, ad Rationalem applicatum, latitudinem facit ex binis nominibus primam.

h 45.primi. 

SIT ex binis nominibus AB, cuius maius nomen AC; h & ad Rationalem expoſitam DE, applicetur rectangulum DF, æquale quadrato ex AB, latitudinem faciens DG. Dico DG, ex binis nominibus eſſe primam. Applicetur enim ad eandem Rationalem DE, rectangulum DH, æquale quadrato ex AC; & ad HI, aliud IK, æquale quadrato ex CB. Erit igitur reliquũ LF, æquale ei, quod bis ſub AC, CB, continetur, cùm quadrata ex AC, CB, vnà cum rectangulo bis ſub AC, CB, i æqualia
i 4.ſecundi. ſint quadrato ex AB, quemadmodũ & eidem quadrato ex AB, æquale eſt, per cõſtructionem, rectangulum DF. Secetur LG, bifariam in M, puncto, per quod ipſis LK, GF, parallela agatur
k 37.decimi MN: eritque vtrumq; rectangulũ LN, MF, æquale ei, quod ſub AC, CB, continetur. k Et quoniã AC, CB, Rationales ſunt potentia ſolùm commenſurabiles, quòd tota AB, ſit ex binis nomini-
l 16.decimi. bus; erunt quadrata ex AC, CB, Rationalia, & ob id commenſurabilia; l quorum vtrique cùm etiam commenſurabile ſit compoſitum ex ipſis; erit quoque compoſitum quadratorum ex AC, CB, Rationale. Eſt autem huic compoſito æquale, per conſtructionem, rectangulum DK. Igitur
m 21.decimi & DK, Rationale erit; quod cum applicatum ſit ad Rationalem DE, m faciet latitudinem DL, Rationalem, & ipſi DE, longitudine commenſurabilem.

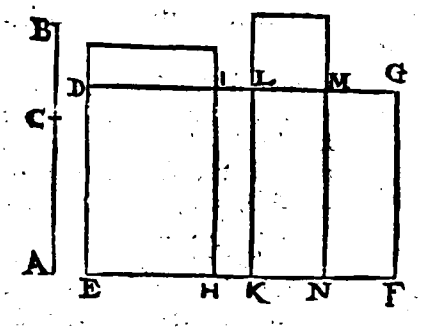
n 22.decimi RVRSVS quia AC, CB, Rationales ſunt ſolùm potentia commenſurabiles, n erit rectangulum ſub ipſis, Medium, atq; adeò, & quòd bis ſub ipſis, cùm ſit ei commenſurabile, hoc eſt, ipſum
o 23.decimi. LF, Medium erit, per coroll. propoſ. 24. huius lib. Quare LF, applicatum ad LK, Rationalem. o facit LG, latitudinem Rationalem, & ipſi LK, hoc eſt, ipſi DE, longitudine incommenſurabilem.
p 13. decimi. Eſt autem DL, oſtenſa eidem DE, commenſurabilis longitudine. p Igitur DL, LG, longitudine incommenſurabiles ſunt. Sunt ergo DL, LG, Rationales potentia tantùm commenſurabiles;
q 37.decimi q Ac propterea DG, ex binis nominibus eſt. Dico & primam eſſe.

QVONIAM

QVONIAM enim ex lemmate propoſ.54.huius lib.rectangulum ſub A C,C B,medium proportionale eſt inter quadrata ex A C, C B,erit quoque L N,medium proportionale inter D H, I K, atque adeò [a] cùm rectæ D I, L M,I L,eandem rationem habeant, quam D H, L N,I K; erit quoque [a] 1. ſexti.
recta L M,media proportionalis inter D I,I L. [b] Quare rectangulum ſub D I, I L, æquale eſt qua- [b] 17. ſexti.
drato ex L M.Et quia quadrata ex rectis A C,C B,commenſurabilia ſunt, quòd A C,C B, ponuntur potentia commenſurabiles; erunt & D H, I K, ipſis æqualia, commenſurabilia. [c] Igitur & re- [c] 10. decimi
ctæ D I, I L,eandem cum illis habentes rationem,longitudine commenſurabiles ſunt. Quoniam autem D K,maius eſt,quàm L F,quòd & quadrata ex A C,C B,maiora ſint,per lemma propoſ.39. huius libri,quàm rectangulum bis ſub A C,C B; erit & recta D L, maior quàm L G, [d] cùm D L, [d] 1. ſexti.
L G,eandem rationem habeant, quam D K, L F.Itaque quoniam D L,maior eſt,quàm L G, & ad D L,applicatur rectangulum ſub D I, I L,deficiens figura quadrata,æquale quadrato ex L M, hoc eſt,quartæ parti quadrati ex minore L G,deſcripti; (oſtenſum enim eſt rectangulum ſub D I,I L, æquale quadrato ex L M.) diuiditurq; D L,ad I,in partes D I, I L, longitudine commenſurabiles, vt eſt demonſtratum; [e] poterit D L,maior plus quàm L G,minor, quadrato rectæ ſibi longitu- [e] 18. decimi.
dine commenſurabilis. Quare cùm D G,oſtenſa ſit ex binis nominibus,& D L,maius nomen plus poſſe, quàm L G, minus nomen, quadrato rectæ ſibi longitudine commenſurabilis, atque idem maius nomen D L,longitudine commenſurabile Rationali expoſitæ D E; erit ex defin. D G, ex binis nominibus prima. Quadratũ ergo eius,q̃ eſt ex binis nominibus,&c. Quod oſtẽdendũ erat.

THEOR. 44. PROPOS. 62. 61.

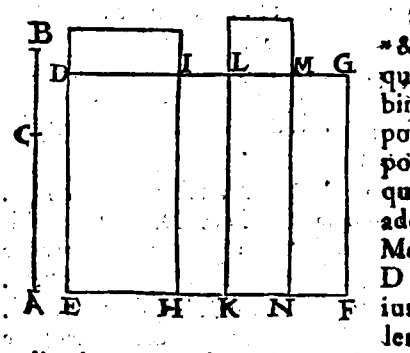
QVADRATVM eius, quæ eſt ex binis Mediis prima,ad Rationalem applica- 55.
tum,latitudinem facit ex binis nominibus ſecundam.



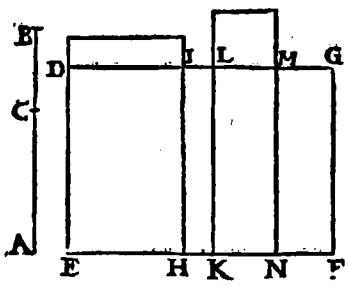
SIT ex binis Mediis prima A B, cuius maius nomẽ A C; [f] & ad Rationalẽ D E,applicetur rectãgulum D F,æquale [f] 45. primi.
quadrato ex A B,latitudinem faciens D G. Dico D G, ex binis nominibus eſſe ſecundam. Conſtituãtur enim eadẽ, quæ in propoſ.præcedenti, ita vt rurſus D H, I K, æqualia ſint quadratis ex A C,C B,& vtrumque ipſorum L N,M F, ei quod ſub A C,C B,cõtinetur. Quoniam igitur AC,C B, ex binis Mediis primam A B,componentes [g] Mediæ ſunt [g] 38. decimi
potentia tantùm commenſurabiles, quæ Rationale continent; erunt quadrata ex A C,C B,atq; adeò rectãgula ipſis æqualia D H, I K,commenſurabilia, atque Media. [h] Cùm [h] 16. decimi
ergo propterea & totum D K,vtriq; ipſorum D H, I K, ſit commẽſurabile; erit quoq; ex coroll. propoſ.24. huius lib.D K,Medium; quod cùm applicatum ſit ad Rationalem D E: [i] erit eius latitudo D L,Rationalis ipſi D E, longitudine incommenſura- [i] 23. decimi.
bilis. Rurſus quoniam rectangulum ſub A C,C B,Rationale eſt; erit & eius duplum, nempe L F, Rationale; quod cum applicatum ſit ad Rationalem L K; [k] erit eius latitudo L G,Rationalis ipſi [k] 21. decimi.
L K,hoc eſt,ipſi D E, longitudine commenſurabilis. Quare cùm duarum rectarum D L, L G, ipſa L G,ſit ipſi D E,commenſurabilis longitudine, at D L, longitudine incommenſurabilis, [l] erunt [l] 13. decimi.
D L, L G,longitudine incommenſurabiles. Quòd cum D L, L G, oſtenſæ ſint Rationales; erunt ipſæ Rationales potentia ſolùm cõmenſurabiles; [m] ac propterea tota D G,ex binis nominib.eſt. [m] 37. decimi
Iam verò vt in antecedenti propoſ. demonſtrabimus D L,maius nomẽ eſſe, & poſſe plus, q̃ minus L G,quadrato rectæ ſibi lõgitudine cõmenſurabilis. Quocirca cùm ipſius D G, maius nomẽ D L, plus poſsit,q̃ minus nomen L G,quadrato rectæ ſibi longitudine cõmenſurabilis,& minus nomẽ L G,oſtenſum ſit longitudine cõmenſurabile Rationali expoſitæ D E; erit ex defin. D G,ex binis nominibus ſecũda. Quadratũ ergo eius,q̃ eſt ex binis Mediis prima,&c. Quod erat oſtendendũ.

THEOR. 45. PROPOS. 63. 62.

QVADRATVM eius,quę ex binis Mediis ſecunda,ad Rationalem applicatum, 56.
latitudinem facit ex binis nominibus tertiam.



SIT ex binis Mediis ſecunda A B, cuius maius nomen A C, [n] & ad Rationalem D E, applicetur rectangulum D F, æquale [n] 45. primi.
quadrato ex A B,latitudinem faciens D G. Dico D G, eſſe ex binis nominibus tertiam. Conſtructis enim iiſdem, quę in propoſ.61.quoniam A C,C B, ex binis Mediis ſecundam A B, componentes, [o] Mediæ ſunt potentia ſolùm commenſurabiles, [o] 39. decimi
quæ Medium continent; Erunt quadrata ex A C,C B, atque adeò rectangula ipſis æqualia. D H, I K, commenſurabilia, & Media. [p] Cùm ergo propterea & totum D K, vtrique ipſorum [p] 16. decimi
D H,I K,ſit commenſurabile; erit & ex coroll. propoſ. 24. huius libri D K,Medium; quod cùm applicatum ſit ad Rationalem D E; [q] erit eius latitudo D L, Rationalis ipſi D E, longi- [q] 23. decimi
tudine incommenſurabilis. Rurſus quia rectangulum ſub A C, C B, Medium eſt; erit & eius duplum L F,Medium; quod cum applicatum ſit ad Rationalem L K; [r] erit latitudo L G,Rationalis [r] 23. decimi



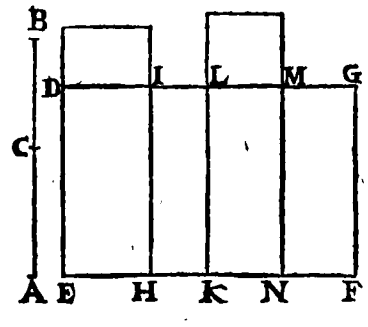
ipſi L K, hoc eſt, ipſi D E, longitudine incommenſurabilis. Et quia A C, ipſi C B, longitudine eſt incommenſurabilis; eſtque vt A C, ad C B, ita per lemma 3. propoſ. 19. huius libri, quadratũ ex A C, ad rectangulum ſub A C, C B, [a] erit quoq; quadratum ex A C, rectangulo ſub A C, C B, incommenſurabile. [b] Eſt autem quadrato ex A C, commenſurabile compoſitum ex quadratis rectarum A C, C B, quòd quadrata ex A C, C B, commenſurabilia ſint, quippe cùm rectæ ipſæ potentia ponantur commenſurabiles; & rectangulo ſub A C, C B, commenſurabile eſt eius duplum, nimirum rectangulum bis ſub A C, C B. Igitur compoſitum ex quadratis rectarum A C, C B, hoc eſt, rectangulum D K, incommenſurabile eſt rectangulo bis ſub A C, C B, hoc eſt, rectangulo L F, per ea, quæ in ſcholio propoſ. 14. huius libri conſcripſimus. Quare rectæ D L, L G, eandem rationem cum D K, L F, habentes [c] longitudine ſunt incõmenſurabiles: Sunt autem oſtenſæ & Rationales. Rationales ergo ſunt potentia tantùm commenſurabiles; [d] ac propterea tota D G, ex binis nominibus eſt. Iam verò, vt in propoſ. 61. oſtendemus D L, eſſe maius nomen, poſſeq; plus, q̃ minus L G, quadrato rectæ ſibi longitudine commenſurabilis. Quamobrẽ cùm D L, maius nomen plus poſsit, quã L G, minus, quadrato rectæ ſibi longitudine cõmenſurabilis, & neutra ipſarũ D L, L G, Rationali expoſitæ D E, ſit oſtenſa longitudine cõmenſurabilis; erit ex defin. D G, ex binis nominibus tertia. Quadratũ ergo eius, quæ ex binis Mediis ſecunda, ad Rationalem applicatum, latitudinẽ facit ex binis nominibus tertiam. Quod erat demonſtrandũ.

a 10. decimi
b 16. decimi
c 10. decimi.
d 37. decimi

63. 57.

THEOR. 46. PROPOS. 64.

QVADRATVM Maioris ad Rationalem applicatum, latitudinem facit ex binis nominibus quartam.



SIT Maior AB, cuius maius nomen A C, [e] & ad Rationalem D E, applicetur rectangulum D F, æquale quadrato ex A B, latitudinem faciens D G. Dico D G, ex binis nominibus eſſe quartam. Conſtruãtur enim eadem prorſus, quæ in propoſ. 61. Et quia A C, C B, Maiorem A B, componentes, [f] potentia incommenſurabiles ſunt, faciuntq; compoſitum quidem ex quadratis rectarum A C, C B, Rationale, rectãgulum verò ſub ipſis, Medium; erit quoque D K, compoſito ex quadratis rectarum A C, C B, æquale exiſtens, Rationale; At verò L F, duplum eius, quod ſub A C, C B, continetur, Medium. Quoniam igitur rationale D K, ad Rationalem D E, eſt applicatum; [g] erit D L, Rationalis ipſi D E, longitudine commenſurabilis. Item cùm L F, Medium ſit applicatum ad Rationalem L K; [h] erit L G, Rationalis ipſi L K, hoc eſt, ipſi D E, longitudine incommenſurabilis. Quare cùm duarum rectarum D L, L G, illa quidem ipſi D E, commenſurabilis ſit longitudine; hæc verò eidem D E, longitudine incommenſurabilis; [i] incommenſurabiles erunt longitudine D L, L G: Oſtenſæ ſunt autem & Rationales. Sunt igitur D L, L G, Rationales potentia tantùm commenſurabiles; [k] ideoq; D G, ex binis nominibus eſt. Iam verò, vt in propoſ. 61. demonſtrabimus rectãgulum ſub ſub D I, I L, æquale eſſe quadrato ex L M. Quia autem quadrata ex A C, C B, incommenſurabilia ſunt, quòd rectæ A C, C B, potentia incommenſurabiles ſint; Erunt etiam illis æqualia D H, I K, incommenſurabilia; [l] atque adeò & rectæ D I, I L, eandem cum illis habentes proportionem, longitudine incommenſurabiles. Quoniam verò, vt in propoſ. 61. oſtendimus, D L, maior eſt, quàm L G, & ad D L, applicatum eſt rectangulum ſub D I, I L, quadrato ex L M, hoc eſt, quartæ parti quadrati ex L G, æquale, deficiens figura quadrata, quod diuidit ipſam D L, ad I, in partes longitudine incommenſurabiles; [m] poterit D L, plus quàm L G, quadrato rectæ ſibi longitudine incommenſurabilis. Quam ob rem cùm & ipſa D L, (maius nomen ipſius D G, quæ eſt ex binis nominibus.) oſtenſa ſit longitudine commenſurabilis expoſitæ Rationali D E; erit ex defin. D G, ex binis nominibus quarta. Quadratum ergo maioris ad Rationalem applicatum, &c. Quod erat demonſtrandum.

e 45. primi.
f 40 decimi
g 21. decimi
h 23. decimi.
i 13. decimi.
k 37. decimi
l 10. decimi.
m 19. decimi

64. 58.

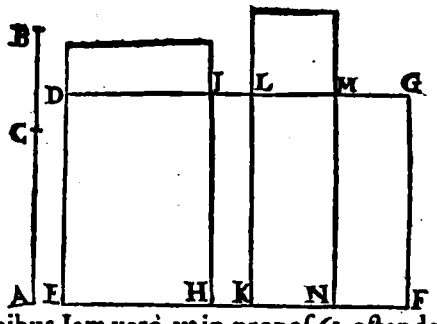
THEOR. 47. PROPOS. 65.

QVADRATVM eius, quæ Rationale ac Medium poteſt, ad Rationalem applicatum, latitudinem facit ex binis nominibus quintam.

SIT recta potens Rationale ac Medium A B, cuius maius nomẽ A C; [n] & ad Rationalem D E, rectangulum D F, applicetur æquale quadrato ex A B, latitudinem faciens D G. Dico D G, ex binis nominibus quintam eſſe. Fiant enim eadem omnino, quæ in propoſ. 61. Quoniam igitur rectæ A C, C B, componentes A B, potentem Rationale ac medium, [o] potentia incommẽſurabiles ſunt, facientes quidem compoſitum ex ipſarum quadratis Medium, at rectãgulum ſub ipſis contentũ, Rationale; erit D K, æquale compoſito ex quadratis rectarum A C, C B, Medium; & L N, æquale ei, quod ſub A C, C B, continetur, atque adeò ipſius duplum L F, Rationale. Igitur Medium D K,

n 45. primi.
o 41. decimi.

applicatum

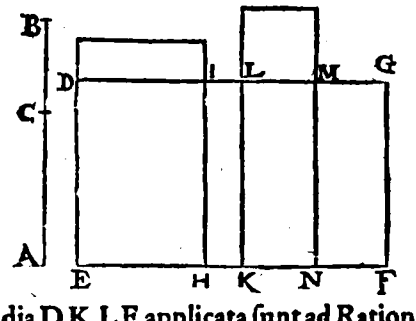


applicatum ad Rationalem DE, [a] facit latitudinem DL, Rationalé, & longitudine Rationali DE, incommensurabilem: At verò Rationale LF, ad Rationalem LK, applicatum, [b] facit latitudinem LG, Rationalem longitudine ipsi LK, hoc est, ipsi DE, commensurabilem. Quia igitur duarum rectarum DL, LG, hæc quidem longitudine commensurabilis est Rationali DE, illa verò longitudine incommensurabilis; [c] erunt DL, LG, longitudine incommensurabiles. Quare DL, LG, Rationales sunt potentia solùm commensurabiles; [d] Ac propterea DG, est ex binis nominibus. Iam verò, vt in propos. 61. ostendemus rectangulum sub DI, IL, æquale esse quadrato ex LM; & vt in antecedente propos. DL, maius nomen esse, atque posse plus, quàm LG, quadrato rectæ sibi longitudine incommensurabilis. Quapropter cùm & minus nomen LG, ostensum sit expositæ Rationali DE, longitudine commensurabile: erit ex defin. DG, ex binis nominibus quinta. Quadratum igitur eius, quę Rationale ac Medium potest, &c. Quod demonstrãdum erat.

[a] 23. decimi.
[b] 21. decimi
[c] 13. decimi.
[d] 37. decimi

THEOR. 48. PROPOS. 66. 65.

QVADRATVM eius, quæ bina Media potest, ad Rationalem applicatum, latitudinem facit ex binis nominibus sextam. 59.

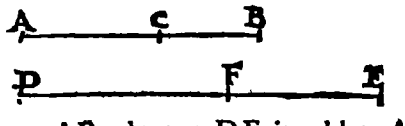


SIT bina Media potens recta AB, cuius maius nomen AC, [e] & ad Rationalem DE, applicetur rectangulum DF, æquale quadrato ex AB, latitudinem faciens DG. Dico DG, esse ex binis nominibus sextam. Constructis enim iisdem, quæ in propos. 61. quoniam rectæ AC, CB, componentes ipsam AB, potentem bina Media, [f] potentia incommensurabiles sunt, faciuntq; & compositum ex ipsarum quadratis Medium, & quod sub ipsis continetur, Medium, & incommensurabile composito ex quadratis ipsarum: erit tam DK, illi composito æquale, quàm LF, rectangulo bis sub AC, CB, æquale, Medium. Et quia Media DK, LF, applicata sunt ad Rationalem DE; [g] erunt eorum latitudines DL, LG, Rationales ipsi DE, longitudine incommensurabiles. [h] Quoniam verò compositum ex quadratis rectarum AC, CB, incommensurabile est rectangulo sub AC, CB; eidem verò rectangulo sub AC, CB, commẽsurabile est rectangulum bis sub AC, CB, cùm hoc illius sit duplum; [i] Erit compositum ex dictis quadratis, hoc est, DK, incommensurabile rectangulo bis sub AC, CB, hoc est, ipsi LF; Ac propterea rectæ DL, LG, eandem rationem habentes cum DK, LF, [k] longitudine incommensurabiles sunt. Rationales ergo sunt DL, LG, potentia solùm commensurabiles; [l] Ac proinde DG, est ex binis nominibus. Iam verò, vt in præcedenti propos. demonstrabimus DL, esse maius nomen; possęq; plus quàm LG, quadrato rectæ sibi longitudine incommensurabilis. Cùm ergo ostensum sit neutram ipsarum DL, LG, longitudine commensurabilem esse expositæ Rationali DE; erit ex defin. DG, ex binis nominibus sexta. Quadratum igitur eius, quæ bina Media potest, ad Rationalẽ applicatũ, latitudinẽ facit ex binis nominib. sextam. Quod erat ostendendũ.

[e] 45. primi.
[f] 42. decimi
[g] 23. decimi
[h] 42. decimi
[i] 13. decimi.
[k] 10. decimi
[l] 37. decimi.

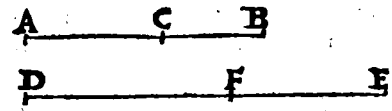
THEOR. 49. PROPOS. 67. 66.

EI, quæ est ex binis nominibus, longitudine commensurabilis, & ipsa ex binis nominibus est, atque ordine eadem. 60.



SIT ex binis nominibus quęcunque AB, diuisa in sua nomina, quorum maius AC, & CB, minus, sitq; recta DE, ipsi AB, longitudine commensurabilis. Dico DE, quoq; esse ex binis nominibus, & ordine eandem ipsi AB. [m] Fiat enim vt tota AB, ad totam DE, ita ablata AC, ad ablatam DF. [n] Erit ergo & reliqua CB, ad reliquam FE, vt tota AB, ad totam DE. Et quoniam ipsi AB, longitudine commensurabilis ponitur DE; [o] erit & DF, ipsi AC, & FE, ipsi CB, longitudine commẽsurabilis: [p] Sunt autem AC, CB, cùm sint nomina eius, q̃ ex binis nominibus, Rationales. Igitur & DF, FE, Rationales sunt. Rursus q̃a est vt AC, ad DF, ita CB, ad FE; & permutãdo vt AC, ad CB, ita DF, ad FE: Sunt autẽ AC, CB, potentia solũ cõmensurabiles; [q] erunt & DF, FE, potẽtia solũ cõmensurabiles. Igitur DF, FE, Rationales sunt potẽtia tantũ commẽsurabiles; [r] Ac propterea DE, ex binis est nominibus. Dico & ipsi AB, ordine eandem esse. Aut enim AC, plus potest q̃ CB, quadrato rectæ lineæ sibi longitudine cõmensurabilis, aut incõmensurabilis. Si quidem AC, plus potest q̃ CB, quadrato rectæ sibi longitudine cõmensurabilis; [s] poterit & DF, plus q̃ FE, quadrato rectę sibi longitudine cõmensurabilis. Quod si AC, cõmensurabilis sit lõgitudine Rationali expositæ, ita vt AB, sit ex binis nominib. prima; [t] erit & DF, eidẽ Rationali lõgitudine cõmẽsurabilis, cũ vtraq;, & Rationalis, & DF,

[m] 12. sexti.
[n] 19. quinti
[o] 10. decimi.
[p] 37. decimi
[q] 10. decimi.
[r] 37. decimi.
[s] 15. decimi.
[t] 22. decimi.



eidem A C, sit commensurabilis longitudine. Quare & D E, ex defin. est ex binis nominibus prima, hoc est, ordine eadē. Si verò C B, expositæ Rationali sit longitudine commensurabilis, vt A B, sit ex binis nominibus secunda; erit eodem modo & F E, Rationali expositæ longitudine commensurabilis. Quare & D E, ex defin. est ex binis nominibus secunda. Si denique neutra ipsarum A C, C B, longitudine sit commensurabilis expositæ Rationali, ita vt A B, sit ex binis nominibus tertia; [a] erit & neutra ipsarum D F, F E, longitudine cōmensurabilis expositę Rationali. Quare & D E, ex defin. est ex binis nominibus tertia.

a 12. decimi.

b 15. decimi.

At si A C, plus possit, quàm C B, quadrato rectæ sibi longitudine incommensurabilis; [b] poterit & D F, plus quàm F E, quadrato rectæ sibi longitudine incommensurabilis. Quare vt prius, ostendemus D E, ex binis nominibus quartam esse, vel quintam, vel sextam, prout & A B, fuerit ex binis nominibus quarta, vel quinta, vel sexta. Ei igitur, quę ex binis nominibus, longitudine commensurabilis, &c. Quod erat ostendendum.

SCHOLIVM.

Quod si recta D E, potentia tantùm commensurabilis sit ipsi A B, quæ est ex binis nominibus, ostendemus quidem eodem modo, (si loco: Commensurabilis longitudine: in demonstratione reponamus vbique: commensurabilis potentia tantùm:) & D E, esse ex binis nominibus: At eam esse ordine eandem ipsi A B, cui commensurabilis est, nullo modo concludemus. Non enim sequitur, si A C, maius nomen longitudine sit commensurabile expositæ Rationali; & D F, maius nomen eidem esse commensurabile longitudine; propterea quòd non vtraque, nempe expositæ Rationali, & D F, eidem A C, longitudine commensurabilis est, sed Rationalis quidem commensurabilis longitudine; At verò D F, potentia tantùm, ex hypothesi. Immo verò, si A B, sit ex binis nominibus prima, secunda, quarta, vel quinta, fieri nulla ratione potest, vt D E, illi potentia tantùm commensurabilis sit ex binis nominibus ordine eadem.

Sit enim A B, ex binis nominibus prima, secunda, quarta, vel quinta, diuisa in sua nomina ad C: sitq; ei commensurabilis potentia tantùm D E, quam quidem, vt in theoremate, demonstrabimus esse ex binis nominibus, diuisamq; esse in sua nomina ad F; & partes A C, C B, partibus D F, F E, proportionales esse, nimirū illas ad has eandem habere rationem, quam tota A B, ad totam D E. Dico nullo modo fieri posse, vt D E, ex binis nominibus sit eadem ordine ipsi A B. Nam si potest fieri, sit vtraque ex binis nominibus prima. Erit ergo

a 12. decimi.

vtrumque maius nomen A C, D F, ex defin. Rationali expositæ commensurabilis longitudine. [a] Quare & inter se longitudine commensurabiles erunt. Et quoniam est vt A C, ad D F, ita A B, ad D E;

b 10. decimi.

[b] erunt propterea & A B, D E, longitudine commensurabiles. Quod est absurdum. Ponitur enim D E, ipsi A B, potentia solùm commensurabilis. Non ergo vtraq; A B, D E, ex binis nominibus prima est. Eodem modo neq; vtraq; ex binis nominibus quarta erit. Sed neq; secunda vel quinta. Esset enim vtrumq; nomen minus C B, F E, ex defin. longitudine commensurabile Rationali expositæ, atq; adeò & inter se. Igitur & tota A B, D E, longitudine serent commensurabiles. quod non ponitur.

Semper tamen verum est, si A B, est ex binis nominibus prima, vel secunda, vel tertia, rectam D E, ipsi A B, potentia solùm commensurabilem, esse quoque vnam ex illis tribus, licet ordine non eadem sit. Nam hoc posito, poterit A C, plus quàm C B, quadrato rectæ sibi longitudine commensurabilis. Cùm ergo sit, vt

c 15. decimi

A C, ad C B, ita D F, ad F E; [c] poterit quoque D F, plus quàm F E, quadrato rectæ sibi longitudine commensurabilis. Quare ex defin. erit D E, ex binis nominibus prima, vel secunda, vel tertia. Eodem modo si A B, est ex binis nominibus quarta, vel quinta, vel sexta, ita vt A C, plus possit, quàm C B, quadrato rectæ sibi longitudi-

d 15. decimi

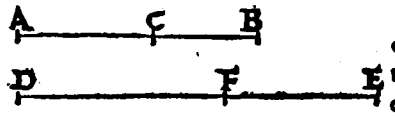
ne incommensurabilis; [d] poterit quoque D F, plus quam F E, quadrato rectæ sibi longitudine incommensurabilis, cùm sit, vt A C, ad C B, ita D F, ad F E. Igitur ex defin. erit D E, ex binis nominibus etiam quarta, vel quinta, vel sexta, licet non eadem ordine ipsi A B.

In sequentibus autem quatuor propositionibus necessariò erit D E, eadem ordine ipsi A B, quanquam potentia tantùm illi commensurabilis sit.

67. 61.

THEOR. 50. PROPOS. 68.

Ei, quæ est ex binis Mediis, longitudine commensurabilis, & ipsa ex binis Mediis est, atque ordine eadem.



Sit ex binis Mediis A B, quæcunq; diuisa in sua nomina, quorum A C, maius, & C B, minus, sitque ei recta D E, longitudine commensurabilis. Dico D E, quoque ex binis Mediis esse, & ipsi A B, ordine eandem. [a] Fiat enim vt tota A B, ad totam D E, ita ablata A C, ad ablatam D F. [b] Erit ergo & reliqua C B, ad reliquam F E, vt tota A B, ad totam D E. Et quoniam ipsi A B, ponitur longitudine commensurabilis D E; [c] erit & D F, ipsi A C, & F E, ipsi C B, longitudine commensurabilis. Sunt autem A C, C B, Mediæ. [d] Igitur & D E, F E, illis commensurabiles, Mediæ sunt. Rursus quia est vt A C, ad D F, ita C B, ad F E; & permutando vt A C, ad C B, ita D F, ad F E; [e] Sunt autem A C, C B, potentia solùm commensurabiles; [f] erunt & D F, F E, solùm commēsurabiles potentia. Cùm ergo & ostensæ sint Mediæ, erunt D F, F E, Mediæ

a 12. sexti.

b 19. quinti.

c 10. decimi.

d 24. decimi

e 38. decimi.

f 10. decimi.

FE, Mediæ potentia tantùm commensurabiles; [a] Atque idcirco DE, erit ex binis mediis. Dico & ipsi AB, eandem esse ordine. Quoniam enim est vt AC, ad CB, ita DF, ad FE: Est autem vt AC, ad CB, ita quadratum ex AC, ad rectangulum sub AC, CB, & vt DF, ad FE, ita quadratum ex DF, ad rectangulum sub DF, FE, ex lemmate 3. propos. 19. huius libri; erit quoque vt quadratum ex AC, ad rectangulum sub AC, CB, ita quadratum ex DF, ad rectangulum sub DF, FE; & permutando vt quadratum ex AC, ad quadratum ex DF, ita rectangulum sub AC, CB, ad rectangulum sub DF, FE. Commensurabile est autem quadratum ex AC, quadrato ex DF; quòd rectæ AC, DF, commensurabiles ostensæ sint longitudine. [b] Igitur & rectangulum sub AC, CB, rectangulo sub DF, FE, commensurabile est. Quare si rectangulum sub AC, CB, fuerit Rationale, ita vt AB, sit ex binis Mediis prima; erit & rectangulum sub DF, FE, Rationale, cùm illi sit commensurabile; [c] atque adeò & DE, ex binis Mediis prima erit. Si verò rectangulum sub AC, CB, fuerit Medium, ita vt AB, sit ex binis Mediis secunda: erit & rectangulum sub DF, FE, ei commensurabile, Mediũ, ex corollario propos. 24. huius lib. [d] Ac propterea & DE, erit ex binis Mediis secunda. Quare ei, quę ex binis Mediis lõgitudine cõmensurabilis, &c. Quod demonstrandũ erat.

a 38. vel 39. decimi.
b 10. decimi
c 38. decimi.
d 39. decimi

SCHOLIVM.

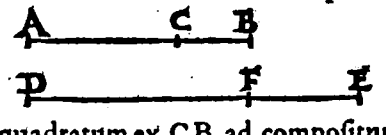
EODEM prorsus modo demonstrabimus, rectam lineam DE, si potentia tantùm fuerit commensurabilis ipsi AE, quæ est ex binis Mediis, ex binis Mediis esse, atque ordine eandem ipsi AB, cui commensurabilis est; si modò loco: commensurabilis longitudine: in demonstratione dicamus vbique: commensurabilis potentia tantùm, &c. vt manifestum est.

THEOR. 51. PROPOS. 69.

68.
62.

MAIORI commensurabilis, & ipsa Maior est.

SIT linea maior AB, diuisa in sua nomina ad C, eiq; cõmensurabilis sit DE, siue longitudinè & potentia, siue potentia tantùm. Dico & DE, Maiorem esse. Fiant enim eadem, quæ superius; ita vt partes AC, CB, ad partes DF, FE, eandem habeant rationem, quam tota AB, ad totam DE. Quoniam igitur AB, DE, cõmensurabiles sunt vel longitudine & potentia, vel potentia tantùm; [e] erunt quoque tam AC, DF, quàm CB, FE, eodem modo commensurabiles. Rursus quia est vt AC, ad DF, ita CB, ad FE, & permutando vt AC, ad CB, ita DF, ad FE; [f] erit vt quadratum ex



AC, ad quadratum ex CB, ita quadratũ ex DF, ad quadratum ex FE; & componẽdo vt compositum ex quadratis rectarum AC, CB, ad quadratum ex CB, ita compositum ex quadratis rectarum DF, FE, ad quadratum ex FE; Et conuertendo, vt quadratum ex CB, ad compositum ex quadratis rectarum AC, CB, ita quadratum ex FE, ad compositum ex quadratis rectarum DF, FE; Et permutãdo vt quadratum ex CB, ad quadratum ex FE, ita compositum ex quadratis rectarum AC, CB, ad compositum ex quadratis rectarum DF, FE. Commensurabile est autem quadratum ex CB, quadrato ex FE, quòd rectæ CB, FE, ostensæ sint commensurabiles vel longitudine & potentia vel potentia tantùm. [g] Igitur & compositum ex quadratis rectarum AC, CB, commensurabile est composito ex quadratis rectarum DF, FE. [h] Est autem compositum illud Rationale, cùm rectæ AC, CB, componant Maiorem AB. [i] Igitur & hoc Rationale est.

e 10. decimi
f 22. sexti.
g 10. decimi
h 40. decimi
i 9. defin.

RVRSVS quia est vt AC, ad CB, ita DF, ad FE; Vt autem AC, ad CB, ita est quadratum ex AC, ad rectangulum sub AC, CB, & vt DF, ad FE, ita quadratum ex DF, ad rectangulum sub DF, FE, ex lemmate 3. propos. 19. huius libri; Erit quoque vt quadratum ex AC, ad rectangulum sub AC, CB, ita quadratum ex DF, ad rectangulum sub DF, FE: Et permutando vt quadratum ex AC, ad quadratum ex DF, ita rectangulum sub AC, CB, ad rectangulum sub DF, FE. Est autem quadratum ex AC, quadrato ex DF, commẽsurabile, quòd rectæ AC, DF, ostensæ sint commensurabiles vel longitudine & potentia, vel potentia tantùm. [k] Igitur & rectangulum sub AC, CB, rectangulo sub DF, FE, commensurabile est. [l] Est autem rectangulum sub AC, CB, Medium. Igitur & rectangulum sub DF, FE, illi commensurabile, Medium est, ex coroll. propos. 24. huius libri. Quoniam verò est vt AC, ad CB, ita DF, ad FE; [m] suntque AC, CB, potentia incommensurabiles, cùm componant Maiorem AB; [n] Erunt quoque DF, FE, potentia incommensurabiles. Itaq; cùm DF, FE, sint potentia incommensurabiles, faciantque compositum quidem ex ipsarum quadratis Rationale; quod autem sub ipsis continetur, Medium, vt ostensum est; [o] erit tota DE, Maior. Maiori ergo commensurabilis, & ipsa Maior est. Quod demonstrandum erat.

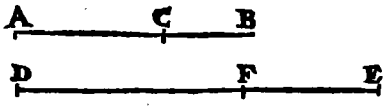
k 10. decimi
l 40. decimi
m 40. deci.
n 10. decimi
o 40. decim

THEOR. 52. PROPOS. 70.

69.
63.

RATIONALE ac Medium potenti commensurabilis, & ipsa Rationale ac Medium potens est.

SIT recta AB, potens Rationale ac Medium, diuisa in sua nomina ad C, eiq; commensurabilis DE, siue longitudine & potentia, siue potentia tantùm. Dico & DE, esse potentem Rationale ac Medium. Constructis enim iisdem, quæ suprà, ostendemus, vt in præcedenti propos. compo-



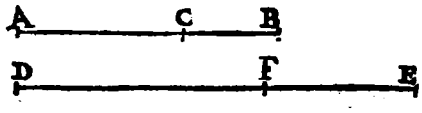
situm ex quadratis rectarum A C, C B, commensurabile esse compositio ex quadratis rectarum D F, F E. [a] Est autem illud compositum Medium, cùm rectæ A C, C B, componant ipsam A B, potentem Rationale ac Medium. Igitur per coroll. propos. 24. huius libri, & hoc compositum illi commensurabile, Medium est. Eodem modo, vt in eadem propos. antecedenti, erit rectangulum sub A C, C B, [b] quod Rationale est, commensurabile rectangulo sub D F, F E; atque adeò & rectangulum sub D F, F E, Rationale est, ex 9. defin. Deniq; vt in eadem superiori propos. erunt D F, F E, potentia incommensurabiles. Quare cùm D F, F E, sint potentia incommensurabiles, faciantque compositum quidem ex ipsarum quadratis Medium; quod autem sub ipsis continetur, Rationale, vt demõstratum est; [c] erit tota D E, Rationale ac Medium potens. Igitur Rationale ac Medium potenti commensurabilis, &c. Quod erat demonstrandum.

a 41. decimi.
b 41. decimi
c 41. decimi

70. 64.

THEOR. 53. PROPOS. 71.

BINA Media potenti commensurabilis, & ipsa bina Media potens est.



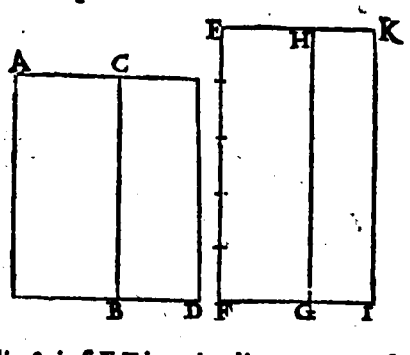
SIT bina Media potens A B, diuisa in sua nomina ad C, eiq; commensurabilis D E, siue longitudine & potentia, siue potentia tantùm. Dico & D E, esse bina Media potentem. Constructis enim iisdem, quæ suprà, ostendemus, vt in propos. 69. compositum ex quadratis rectarum A C, C B, compositio ex quadratis rectarum D F, F E, commensurabile esse: Nec non & rectangulum sub A C, C B, esse commensurabile rectangulo sub D F, F E. [d] Cùm ergo tam compositum ex quadratis rectarum A C, C B, quàm rectangulum sub A C, C B, Medium sit; erit etiam ex coroll. propos. 24. huius libri, tam compositũ ex quadratis rectarum D F, F E, quàm rectangulum sub D F, F E, Medium. Sed & D F, F E, potentia incommensurabiles sunt, vt prius. Postremò, [e] quia compositum ex quadratis rectarum A C, C B, & rectangulum sub A C, C B, incommensurabilia sunt, ex hypothesi, propterea quòd A B, bina Media potest: Est autem compositio ex quadratis rectarum A C, C B, commensurabile ostensum compositum ex quadratis rectarum D F, F E; & rectangulo sub A C, C B, probauimus commensurabile rectangulum sub D F, F E; Erunt quoque ex scholio propos. 14. huius lib. compositũ ex quadratis rectarum D F, F E, & rectangulum sub D F, F E, incommensurabilia. Quare cùm rectæ D F, F E, potentia sint incommensurabiles, faciantq; compositum ex ipsarum quadratis Medium; & quod sub ipsis continetur, Medium; incommensurabileq; compositio ex quadratis ipsarum; [f] erit D E, bina Media potens. Itaq; bina Media potenti commensurabilis, & ipsa bina Media potens est. Quod erat ostendendum.

d 42. decimi
e 42. decimi
f 42. decimi

71. 65.

THEOR. 54. PROPOS. 72.

SI Rationale & Medium componantur, quatuor Irrationales fiunt; vel ea, quæ ex binis nominibus, vel quæ ex binis Mediis prima, vel Maior, vel Rationale ac Medium potens.

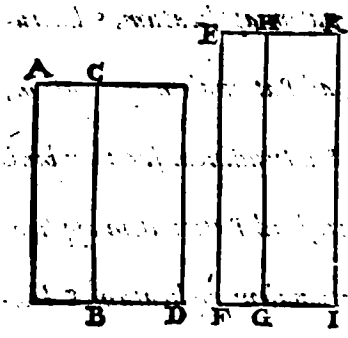


SIT Rationale spatium A B, cum quo componatur Medium C D. Dico rectam, quæ totum spatium A D, potest, esse vel ex binis nominibus, vel ex binis Mediis primam, vel Maiorem, vel Rationale ac Medium potentem. Erit enim A B, vel maius quàm C D, vel minus: Æquale siquidem nõ erit; aliàs cùm A B, sit Rationale, esset & illi æquale C D, Rationale. quod non ponitur. Sit primò maius, & exposita Rationali E F, [g] applicetur ad eam rectangulum E G, æquale ipsi A B; & ad H G, aliud H I, æquale ipsi C D, vt totum E I, toti A D, sit æquale. Et quoniam A B, Rationale est, & C D, Medium; erit quoque E G, Rationale, & H I, Medium: quę cùm applicentur ad Rationalem E F; [h] erit E H, Rationalis, & ipsi E F, longitudine commensurabilis; [i] At verò H K, Rationalis, & eidem E F, longitudine incommensurabilis. Rursus quia E G, H I, incommensurabilia sunt, vt constat ex definitionibus; quòd E G, Rationale sit, at H I, Irrationale, nempe Medium; [k] erunt E H, H K, eandem cum illis habentes rationem, incommensurabiles longitudine. Rationales ergo sunt E H, H K, potentia solùm commensurabiles; [l] Ac propterea E K, ex binis nominibus est. Et quoniam maius ponitur A B, quàm C D, hoc est, E G, quàm H I; erit quoque E H, maior quàm H K, [m] cùm E H, H K, eandem rationẽ habeant, quam E G, H I. Iam verò maius nomen E H, plus poterit quàm minus H K, quadrato rectæ sibi longitudine commensurabilis, vel incommensurabilis. Si plus possit E H, quã H K, quadrato rectæ sibi commensurabilis longitudine; erit E K, ex defin. ex binis nominibus prima, cùm E H, maius nomen ostensum sit longitudine commensurabile Rationali E F. Quare recta potens spatium E I, contentum sub Rationali E F, & ex binis nominibus prima E K, atque adeò & spatium A D, compositum ex Rationali A B, & Medio C D, [n] Irrationalis est, quæ ex binis nominibus appellatur.

g 45. primi.
h 21. decimi
i 23. decimi.
k 10. decimi
l 37. decimi.
m 1. sexti.
n 55. decimi

SI verò

Si verò EH, plùs posit quàm HK, quadrato rectæ sibi longitudine incommensurabilis: erit EA, ex binis nominibus quarta, ex defin. cùm EH, maius nomen ostensum sit longitudine commensurabile Rationali EF. Quare recta potens spatium EI, contentum sub Rationali EF, & ex binis nominibus quarta EK, atque adeò & spatium AD, [a] Irrationalis est, quæ vocatur Maior. *a 58. decimi*

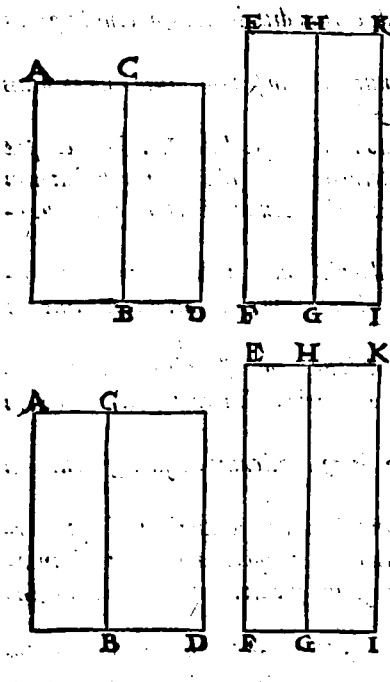


Sit deinde AB, minus quàm CD; & eadem construantur, quæ prius. Erit ergo, vt prius, EK, ex binis nominibus, & EH, ipsi EF, longitudine commensurabilis. Et quia AB, minus est, quàm CD, hoc est, EG, quàm HI; erit quoque recta EH, minor quàm HK. Poterit igitur rursus HK, maius nomen ipsius EK, quæ est ex binis nominibus, plus quàm EH, minus nomen, quadrato rectæ longitudine sibi commensurabilis, vel incommensurabilis. Si plus posit HK, quàm EH, quadrato rectæ longitudine sibi commensurabilis, erit EK, ex binis nominibus secunda, cùm EH, minus nomen commensurabile sit longitudine Rationali EF, vt ostensum est. Quare recta potens spatium EI, contentum sub Rationali EF, & ex binis nominibus secunda EK, atq; adeò & spatium AD, ex Rationali AB, & Medio CD, compositum, [b] Irrationalis est, quæ dicitur ex binis Mediis prima. *b 56. decimi*

Si verò HK, plus posit quàm EH, quadrato rectæ lineæ sibi longitudine incommensurabilis; erit EK, ex binis nominibus quinta, cùm EH, minus nomen, ostensum sit longitudine commensurabile Rationali EF. Quare recta potens spatium EI, contentum sub Rationali EF, & ex binis nominibus quinta EK, atque adeò & spatium AD, [c] Irrationalis est, quæ Rationale & Medium potens appellatur. Si igitur Rationale, & Medium componantur, quatuor Irrationales fiunt, &c. Quod demonstrandum erat. *c 59. decimi*

THEOR. 55. PROPOS. 73. 72. 66.

Si duo Media inter se incommensurabilia componãtur, duæ reliquæ Irrationales fiunt, vel ex binis Mediis secunda, vel bina Media potens.



Componantvr duo Media incommensurabilia AB, CD. Dico rectam, quæ potest totum spatium AD, esse vel ex binis Mediis secundam, vel bina Media potentem. Erit enim rursus AB, vel maius, quàm CD, vel minus: Æquale siquidem non erit; aliàs essent AB, CD, commensurabilia. quod non ponitur. Sit primò maius, & omnia fiant, quæ in præcedenti propositione. Et quia spatia AB, CD, ponuntur Media, & incommensurabilia; erunt & spatia EG, HI, Media & incommensurabilia; cùm illis sint æqualia. [d] Igitur rectæ EH, HK, eandem cum illis habentes rationem, longitudine incommensurabiles sunt; & vtraque (cùm EG, HI, Media sint, applicenturq; ad Rationalem EF.) [e] Rationalis est, ipsi EF, longitudine incommensurabilis. Rationales ergo sunt EH, HK, potentia solùm commensurabiles; [f] ac propterea EK, ex binis nominibus est. Quoniam verò AB, maius ponitur quàm CD; erit vt in antecedenti propos. EH, maius nomen ipsius EK. Poterit ergo plus quàm HK, quadrato rectæ sibi longitudine commensurabilis, vel incommensurabilis. Si plus posit EH, quàm HK, quadrato rectæ sibi commensurabilis longitudine, cùm vtrumque nomen EH, HK, ostensum sit longitudine incommensurabile Rationali EF; erit EK, ex defin. ex binis nominibus tertia. Quare recta potens spatium EI, contentum sub Rationali EF, & ex binis nominibus tertia EK, atque adeò & spatium AD, [g] Irrationalis est, quæ ex binis Mediis secunda dicitur. *d 10. decimi. e 23. decimi. f 37. decimi. g 57. decimi*

Si verò EH, plus posit quàm HK, quadrato rectæ longitudine sibi incommensurabilis, cùm vtrumque nomen EH, HK, longitudine sit incommensurabile Rationali EF; erit EK, ex binis nominibus sexta, vt constat ex defin. Recta igitur potens spatium EI, siue spatium AD, [h] Irrationalis est, quæ bina Media potens nominatur. *h 60. decimi*

Qvod si AB, minus sit, quàm CD; non aliter propositum concludemus, vt ex figura constat. Quapropter si duo Media inter se incommensurabilia componantur, duæ reliquæ Irrationales fiunt, &c. Quod ostendendum erat.

COROLLARIVM.

Ex his omnibus facilè colligitur, eam, quæ ex binis nominibus, & reliquas ipsam subsequentes Irrationales lineas, neque Media, neque inter se easdem esse.

a 23. decimi. *NAM quadratum Mediæ, ad Rationalem lineam applicatum, [a] latitudinem efficit Rationalem, ipſi Rationali longitudine incommenſurabilem.*

b 61. decimi. *AT quadratum eius, quæ ex binis nominibus, ad Rationalem applicatum, [b] latitudinem efficit ex binis nominibus primam.*

c 62. decimi. *ET quadratum eius, quæ eſt ex binis Mediis prima, ad Rationalem applicatum, [c] latitudinem facit ex binis nominibus ſecundam.*

QVADRATVM deinde eius, quæ ex binis Mediis ſecunda, ad Rationalem applicatum,
d 63. decimi. *[d] latitudinem facit ex binis nominibus tertiam.*

e 64. decimi. *AT verò quadratum Maioris ad Rationalem applicatum, [e] latitudinem facit ex binis nominibus quartam.*

QVADRATVM autem eius, quæ Rationale ac Medium poteſt, ad Rationalem applicatum,
f 65. decimi. *[f] latitudinem facit ex binis nominibus quintam.*

g 66. decimi. *POSTREMO, quadratum eius, quæ bina Media poteſt, ad Rationalem applicatum, [g] latitudinem facit ex binis nominibus ſextam.*

ITAQVE cùm hæ latitudines differant & à latitudine Mediæ, & inter ſe; à latitudine quidem Mediæ, quòd hæc Rationalis ſit, illæ verò Irrationales; Inter ſe autem, quòd ordine non ſint eadem ex binis nominibus; perſpicuum eſt, omnes Irrationales lineas, de quibus hactenus eſt dictum, inter ſe differentes eſſe.

SCHOLIVM.

HACTENVS egit Euclides de ſeptem ſenariis.

IN primo, qui continetur propoſ. 37. 38. 39. 40. 41. & 42. tradidit ortum ſex linearum Irrationalium, nimirum eius, quæ ex binis nominibus; & eius, quæ ex binis Mediis prima; & eius, quæ ex binis Mediis ſecunda; & Maioris; & eius, quæ Rationale ac Medium poteſt; & denique eius, quæ poteſt bina Media.

IN ſecundo, quem continent propoſ. 43. 44. 45. 46. 47. & 48. egit de earum diuiſionibus, docens ſingulas in ſingulis duntaxat punctis diuidi poſſe in ſua nomina.

IN tertio deinde, contento propoſ. 49. 50. 51. 52. 53. & 54. docuit inuentionem ſex linearum, quæ ex binis nominibus dicuntur, videlicet primæ, ſecundæ, tertiæ, quartæ, quintæ, & ſextæ.

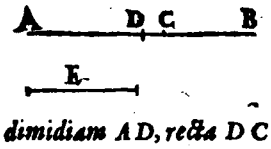
IN quarto, quem abſoluunt propoſ. 55. 56. 57. 58. 59. & 60. oſtendit, quo modo hæ ſex lineæ Irrationales, quæ in primo ſenario explicantur, inter ſe differant, docens, quænam linea Irrationalis ſit illa, quæ poteſt ſpatium contentum ſub Rationali, & ex binis nominibus prima, vel ex binis nominibus ſecunda, vel tertia, vel quarta, vel quinta, vel ſexta.

IN quinto autem, quem reperies in propoſ. 61. 62. 63. 64. 65. & 66. docuit, quænam latitudines Irrationales faciant quadrata linearum Irrationalium in primo ſenario explicatarum, ad Rationalem lineam applicata.

IN ſexto verò, qui quinque propoſ. nempe 67. 68. 69. 70. & 71. abſoluitur, demonſtrauit lineam quamcunque commenſurabilem alicui dictarum ſex Irrationalium in primo ſenario, eſſe Irrationalem eandem illi, cui commenſurabilis eſt.

IN ſeptimo denique, contento duabus propoſitionibus, nimirum 72. & 73. explicauit rurſus differentiam aliam ſex prædictarum Irrationalium.

REPERITVR autem in his ſex lineis Irrationalibus, de quibus in primo ſenario, Analogia ſeu proportionalitas Arithmetica, quæ quidem conſiſtit in exceſſu eodem. Et recta media proportionalis, ſecundùm Analogiam Arithmeticam, inter duo nomina cuiuſuis lineæ Irrationalis, eſt quoque Irrationalis eadem illi, inter cuius nomina media exiſtit.



SIT enim quæcunq; Irrationalis, nempe ex binis nominibus A B, cuius maius nomen A C; & diuidatur A B, bifariam in D; & eius dimidia A D, vel D B, æqualis ſumatur E. Dico E, mediam eſſe, ſecundùm Analogiam Arithmeticam, inter A C, C B: & E, eſſe quoque ex binis nominibus. Quoniam enim A C, ſuperat dimidiam A D, recta D C; & dimidia D B, ſuperat ipſam C B, eadem recta D C; perſpicuum eſt, dimidiam ipſius A B, nempe E, eſſe mediam proportionalem inter A C, C B, in Analogia Arithmetica.

RVRSVS quia E, commenſurabilis eſt longitudine toti A B, cùm hæc illius ſit dupla; erit & E, Irrationalis eadem ipſi A B, vt in ſexto ſenario eſt demonſtratum.

IDEM oſtendemus non aliter in cæteris lineis Irrationalibus contingere.

SEQVVNTVR iam ſeptem alij ſenarij, in quibus eadem Euclides demonſtrat de ſex aliis lineis Irrationalibus, quæ per detractionem generantur, quæ in præcedentibus ſeptem ſenariis de Irrationalibus, quæ per compoſitionem fiunt, eum oſtendiſſe docuimus.

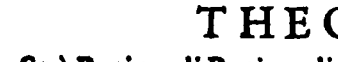
PRINCI-

PRINCIPIVM SENARIORVM per detractionem.

THEOR. 56. PROPOS. 74. 73. 68.

SI à Rationali Rationalis auferatur, potentia tantùm commensurabilis existens toti; Reliqua Irrationalis est. Vocetur autem Apotome.

DETRAHATVR à Rationali AB, Rationalis AC, potentia solùm commensurabilis ipsi AB. Dico reliquam BC, Irrationalem esse. Quoniam enim per lemma 3. propos. 19. huius lib. est vt AB, ad AC, ita quadratum ex AB, ad rectangulum sub AB, AC: Et sunt AB, AC, longitudine incommensurabiles; [a] erunt incommensurabilia quadratum ex AB, & rectangulum sub AB, AC. Sed quadrato ex AB, commensurabile est compositum ex quadratis rectarum AB, AC; (cùm enim AB, AC, potentia ponantur commensurabiles, erunt quadrata ex AB, AC, commensurabilia. [b] Igitur & compositum ex ipsis commensurabile erit quadrato ex AB;) rectangulo verò sub AB, AC, commensurabile est rectangulum sub AB, AC, bis. Igitur compositum ex quadratis rectarum AB, AC, & rectangulum sub AB, AC, bis contentum, incommensurabilia sunt, vt in scholio propos. 14. huius libri demonstrauimus. [c] Est autem compositum ex quadratis rectarum AB, AC, æquale rectangulo bis sub AB, AC, vnà cum quadrato ex BC. Igitur & compositum ex quadratis rectarum AB, AC, per coroll. propos. 17. huius lib. reliquo quadrato ex BC, incommensurabile est. Cùm ergo compositum ex quadratis rectarum AB, AC, sit Rationale; (propterea quòd commensurabile est quadrato Rationali ex AB, linea Rationali descripto;) erit quadratum ex BC, Irrationale; atque adeò & recta ipsa BC, Irrationalis. Vocetur autem Apotome. Iuniores dicunt Residuum. Si igitur à Rationali Rationalis auferatur potentia tantùm commensurabilis existens toti; Reliqua Irrationalis est, &c. Quod ostendendum erat.



[a] 10. decimi

[b] 16. decimi

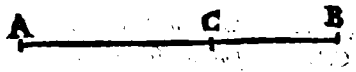
[c] 7. secundi

SCHOLIVM.

POTVISSET Euclides proponere quoque hanc propositionem hoc modo.

SI à maiori nomine eius, quæ ex binis nominibus, minus nomen auferatur; Reliqua Irrationalis est. Vocetur autem Apotome.

NAM cùm AB, AC, sint Rationales potentia tantùm commensurabiles; [a] erit compositum ex ipsis Irrationalis, quæ ex binis nominibus dicitur, cuius maius nomen AB, & minus AC. Auferatur igitur AC, minus nomen ex maiori nomine AB, vt relinquatur Apotome BC.

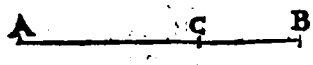


[a] 37. decimi

THEOR. 57. PROPOS. 75. 74. 69.

SI à Media Media auferatur potentia tantùm commensurabilis existens toti, quæ cum tota Rationale contineat; Reliqua Irrationalis est. Vocetur autem Mediæ Apotome prima.

DETRAHATVR à Media AB, Media AC, potentia solùm commensurabilis ipsi AB. sitque rectangulum sub AB, AC, Rationale. Dico reliquam BC, esse Irrationalem. Quoniam enim AB, AC, potentia sunt commensurabiles; erunt quadrata ex AB, AC, commensurabilia; [a] atque adeò & compositum ex ipsis commensurabile erit quadrato ex AC. Est autem quadratum ex AC, Media Irrationale, & Medium. Igitur ex coroll. propos. 24. huius lib. & compositum ex quadratis rectarum AB, AC, Irrationale erit, ac Medium. Et quia rectangulum sub AB, AC, ponitur Rationale; erit & rectangulum bis sub AB, AC, Rationale. Igitur incommensurabile est compositum ex quadratis rectarum AB, AC, rectangulo bis sub AB, AC. [b] Cùm ergo compositum ex quadratis rectarum AB, AC, æquale sit rectangulo bis sub AB, AC, vnà cum quadrato ex BC; erit quoque rectangulum bis sub AB, AC, vnà cum quadrato ex BC, incommensurabile rectangulo bis sub AB, AC. [c] Quare & rectangulum bis sub AB, AC, & quadratum ex BC, incommensurabilia sunt. Existente ergo rectangulo bis sub AB, AC, Rationali; erit quadratum ex BC, Irrationale; ideoque & recta BC, Irrationalis erit. Vocetur autem Mediæ Apotome prima, quia videlicet relinquitur post detractionem minoris nominis lineæ ex binis Mediis primæ, à maiori nomine, vt in scholio sequenti patebit. Si igitur à Media Media auferatur potentia tantùm commensurabilis existens toti, quæ cum tota Rationale contineat; Reliqua Irrationalis est. Vocetur autem Mediæ Apotome prima: Quod ostendendum erat.



[a] 16. decimi

[b] 7. secundi.

[c] 17. decimi.

SCHOLIVM.

POTVISSET hæc propositio proponi hoc modo.

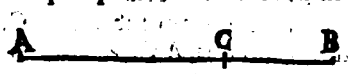
SI à maiori nomine eius, quæ ex binis Mediis prima, minus nomen auferatur; Reliqua Irrationalis est. Vocetur autem Mediæ Apotome prima.



a 38. deci. *Cvm enim AB, AC, sint Media potentia solùm commensurabiles, contineant q3 Rationale; a erit composita ex ipsis Irrationalis, quæ ex binis Mediis prima dicitur, cuius maius nomen AB, & minus AC. Auferatur igitur AC, minus nomen ex maiori AB, vt relinquatur BC, Mediæ Apotome prima.*

75. 70. THEOR. 58. PROPOS. 76.

Si à Media Media auferatur potentia tantùm commensurabilis existens toti, quæ cum tota Medium contineat; Reliqua Irrationalis est. Vocetur autem Mediæ Apotome secunda.



Detrahatvr à Media AB, Media AC, potentia solùm commensurabilis ipsi AB, sitque rectangulum sub AB, AC, Medium. Dico reliquam BC, esse Irrationalem. Quoniam enim quadrata ex AB, AC, potentia commensurabilibus commensurabilia sunt, a erit & compositum ex ipsis vtrique ipsorum commensurabile: Est autem vtrumque ipsorum Medium, quod & rectæ AB, AC, Mediæ ponantur. Igitur & compositum ex ipsis, vtrique commensurabile, Medium est, ex coroll. propos. 24. huius libri. Rursus quia rectangulum sub AB, AC, Medium ponitur: erit & eius duplum, rectangulum, videlicet bis sub AB, AC, ex coroll. propos. 24. huius lib. Medium.

a 16. decimi

b 7. secundi c 27. decimi

b Cùm ergo compositum ex quadratis rectarum AB, AC, æquale sit rectangulo bis sub AB, AC, vnà cum quadrato ex BC; superabit compositũ ex quadratis rectarum AB, AC, quod Medium est, rectangulum bis sub AB, AC, quod etiam Medium est, quadrato ex BC. c Medium autem non superat Medium Rationali. Non ergo quadratum ex BC, Rationale est. Ergo Irrationale, & ipsa recta BC, Irrationalis. Vocetur autem Mediæ Apotome secunda, quoniam relinquitur post detractionem minoris nominis eius, quæ ex binis Mediis secunda, à maiori nomine, vt ex scholio sequenti apparebit. Si igitur à Media Media auferatur, &c. Quod erat ostendendum.

SCHOLIVM.

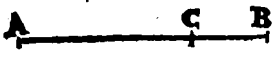
Hoc etiam theorema ita potuisset proponi.

Si à maiori nomine eius, quæ ex binis Mediis secunda, minus nomen auferatur; Reliqua Irrationalis est. Vocetur autem Mediæ Apotome secunda.

a 39. deci. *Qvoniam enim AB, AC, Media sunt potentia tantùm commẽsurabiles, continent q3 Medium; a erit composita ex ipsis Irrationalis, quæ ex binis Mediis secunda appellatur, cuius maius nomen AB, & minus AC. Auferatur igitur AC, minus nomen ex maiori AB, vt relinquatur BC, Mediæ Apotome secunda.*

76. 71. THEOR. 59. PROPOS. 77.

Si à recta linea recta auferatur potentia incommensurabilis existens toti, quæ cum tota faciat compositum quidem ex ipsarum quadratis Rationale; quod autem sub ipsis continetur, Medium: Reliqua Irrationalis est. Vocetur autem Minor.



Detrahatvr à recta AB, recta AC, potentia ipsi AB, incommensurabilis; Sit autem compositum ex quadratis rectarum AB, AC, Rationale; rectangulum verò sub AB, AC, Medium. Dico reliquam BC, Irrationalem esse. Quoniam enim compositum ex quadratis rectarum AB, AC, Rationale est; rectangulum verò sub AB, AC, atque adeò, ex coroll. propos. 24. huius lib. & ei commensurabile, hoc est, rectangulum bis sub AB, AC, Medium, hoc est, Irrationale; a erit compositum ex quadratis rectarum AB, AC, incommensurabile rectangulo bis sub AB, AC. b Est autem compositum ex quadratis rectarum AB, AC, æquale rectangulo bis sub AB, AC, vnà cum quadrato ex BC. Igitur & compositum ex quadratis rectarum AB, AC, per coroll. propos. 17. huius lib. reliquo quadrato ex BC, incommensurabile erit. Ponitur autem compositum ex quadratis rectarum AB, AC, Rationale. c Igitur quadratum ex BC, illi incommensurabile, Irrationale est, & linea BC, Irrationalis. Vocetur autem Minor, quoniam relinquitur post detractionem minoris nominis lineæ Maioris, à maiori nomine, vt in scholio sequenti dicemus. Si igitur à recta linea recta auferatur, &c. Quod erat demonstrandum.

a 10. defin. b 7. secundi c 10. defin.

SCHOLIVM.

Sic etiam theorema hoc poterat proponi.

Si à maiori nomine lineæ Maioris minus nomen auferatur; Reliqua Irrationalis est. Vocetur autem Minor.

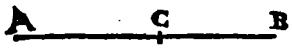
a 40. deci. *Nam cùm AB, AC, sint potentia incommensurabiles, quæ faciunt compositum quidem ex ipsarum quadratis Rationale, quod autem sub ipsis continetur, Medium; a erit composita ex ipsis Irrationalis, quæ vocatur Maiòr, eiusq3 maius nomen AB, minus autem AC. Auferatur igitur AC, minus nomen ex maiori AB, vt relinquatur Minor BC.*

THEOR.

THEOR. 60. PROPOS. 78. 77. 72.

SI à recta recta auferatur potentia incommensurabilis existens toti, quæ cùm tota faciat compositum quidem ex ipsarum quadratis Medium; quod autem sub ipsis continetur, Rationale: Reliqua Irrationalis est. Vocetur autem cum Rationali Medium totum efficiens.

DETRAHATVR ex recta A B, recta A C, potentia ipsi A B, incommensurabilis; sit autem compositum ex ipsarum quadratis Medium, & rectangulum sub ipsis, Rationale. Dico reliquam B C, esse Irrationalem. Quoniam enim compositum ex quadratis rectarum A B, A C, Medium est, hoc est, Irrationale; at rectangulum sub A B, A C, atq; adeò & eius duplum, nempe quod bis sub A B, A C, Rationale; [a] erit compositum ex quadratis rectarum A B, A C, incommensurabile rectangulo bis sub A B, A C. [b] Est autem compositum ex quadratis rectarum A B, A C, æquale rectangulo bis sub A B, A C, vnà cum quadrato ex B C. Igitur & rectangulum bis sub A B, A C, vnà cum quadrato ex B C, incommensurabile est rectangulo bis sub A B, A C. [c] Sunt ergo & rectangulum bis sub A B, A C, & quadratum ex B C, incommensurabilia. Cùm ergo rectangulum bis sub A B, A C, Rationale sit; [d] erit quadratum ex B C, Irrationale, & recta B C, Irrationalis. Vocetur autem cum Rationali Medium totum efficiens: quia eius quadratum additum rectangulo bis sub A B, A C, quod Rationale est, facit totum compositũ ex quadratis rectarum A B, A C, quod Medium existit. Si igitur à recta recta auferatur potentia incommensurabilis existens toti, quæ cũ tota faciat compositum quidem ex ipsarum quadratis Medium; quod autem sub ipsis continetur, Rationale: Reliqua Irrationalis est, &c. Quod ostendendum erat.



[a] 10. defin. [b] 7. secundi. [c] 17. decimi. [d] 10. defin.

SCHOLIVM.

Hoc etiam modo Euclides theorema hoc potuisset proponere.

SI à maiori nomine eius, quæ Rationale ac Medium potest, minus nomen auferatur; Reliqua Irrationalis est. Vocetur autem cum Rationali Medium totum efficiens.

CVM enim A B, A C, sint potentia incommensurabiles, quæ faciunt compositũ quidem ex ipsarum quadratis, Medium; quod autem sub ipsis continetur, Rationale; [a] erit composita ex ipsis Irrationalis, quæ nominatur Rationale ac Medium potens, cuius maius nomen est A B, minus autem A C. Aufertur igitur minus nomen A C, à maiori A B, vt B C, cum Rationali Medium totum efficiens relinquatur.

[a] 14. decimi.

THEOR. 61. PROPOS. 79. 78. 73.

SI à recta recta auferatur potentia incommensurabilis existens toti, quæ cum tota faciat & compositum ex ipsarum quadratis, Medium; & quod sub ipsis continetur, Medium, incommensurabileque composito ex quadratis ipsarum: Reliqua Irrationalis est. Vocetur autem cum Medio Medium totum efficiens.

DETRAHATVR ex recta A B, recta A C, potentia ipsi A B, incommensurabilis; Sitq; tam compositum ex ipsarum quadratis, q̃ rectangulum sub ipsis Medium, incommẽsurabileq; composito ex ipsarum quadratis. Dico reliquam B C, esse Irrationalem. [a] Quoniam enim compositũ ex quadratis rectarum A B, A C, æquale est rectangulo bis sub A B, A C, vnà cum quadrato ex B C, superabit compositum ex quadratis rectarum A B, A C, quod Medium ponitur, rectangulum bis sub A B, A C, quod ex coroll. propos. 24. huius lib. Medium etiam est, (cùm Medio, quod sub A B, A C, continetur, sit commensurabile) quadrato ex B C. [b] Medium autẽ non superat Medium Rationali. Non ergo quadratum ex B C, Rationale est. Ergo Irrationale, & recta ipsa B C, Irrationalis. Vocetur autẽ cum Medio Medium totum efficiens, quia eius quadratũ cum rectangulo bis sub A B, A C, quod Medium est, facit totum compositũ ex quadratis rectarum A B, A C, quod Medium etiam est. Si igitur à recta recta auferatur, &c. Quod ostendendum erat.



[a] 7. secundi. [b] 27. decimi.

SCHOLIVM.

IN hunc modum proponi quoque potuisset hoc theorema.

SI à maiori nomine eius, quæ bina Media potest, minus nomen auferatur; Reliqua Irrationalis est. Vocetur autem cum Medio Medium totum efficiens.

QVONIAM cùm A B, A C, sint potentia incommensurabiles, faciant q̃ & compositũ ex ipsarum quadratis Medium, & rectangulum sub ipsis Medium, incommẽsurabileq; composito ex quadratis ipsarũ; [a] erit composita ex illis Irrationalis, quæ bina Media potens dicitur, cuius maius nomen A B, & minus A C. Auferatur igitur minus nomen A C, ex maiori A B, vt relinquatur B C, cum Media Medium totum efficiens.

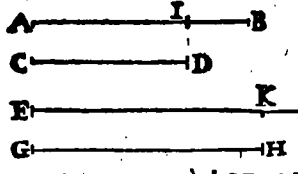
[a] 42. decimi.

LEMMA.

SI idem excessus sit inter primam magnitudinem, & secundam, qui inter tertiam ma-

gnitudinem, & quartam; erit & viciſsim idem exceſſus inter primam magnitudinem, & tertiam, qui inter ſecundam magnitudinem & quartam.

Sint quatuor magnitudines A B, C D, E F, G H, ſitq; I B, exceſſus inter A B, C D, æqualis exceſſui K F, inter E F, G H. Dico eundem eſſe exceſſum inter A B, E F, qui eſt inter C D, G H.



Quoniam enim I B, exceſſus eſt inter A B, & C D; erit A I, ipſi C D, æqualis. Eodem modo æqualis erit E K, ipſi G H. Idem igitur exceſſus erit inter A I, & E K, qui inter C D, & G H; cũ hæ magnitudines illis ſint æquales, ſingulæ ſingulis. Eſt autẽ totorum A B, E F, ex pronunciato 16. lib. 1. idem exceſſus qui inter A I, E K; quòd I B, K F, æquales ponantur. Igitur idem quoque exceſſus erit inter A B, & E F, qui inter C D, & G H. quod eſt propoſitum.

COROLLARIVM.

Ex his conſtat, quatuor magnitudines Arithmeticam Analogiam habentes, habere quoq; viciſsim Arithmeticam Analogiam. quoniam huiuſmodi Analogia conſiſtit in eodem exceſſu, quem oſtendimus eundem eſſe inter primam, & tertiam magnitudines, qui inter ſecundam & quartam magnitudines reperitur, ſi idem ſit exceſſus inter primam magnitudinem, & ſecundam, qui inter tertiam magnitudinem, & quartam, hoc eſt, ſi quatuor magnitudines Analogiam Arithmeticam habeant.

79. ## THEOR. 62. PROPOS. 80.

74. APOTOMAE vna tantùm congruit recta linea Rationalis, potẽtia ſolùm commenſurabilis exiſtens toti.

SIT Apotome A B; congruẽs autem ei Rationalis B C, potentia ſolùm toti A C, commenſurabilis. Dico ipſi A B, aliam Rationalem nõ congruere, quæ toti ſit potentia tantũ commenſurabilis. Si enim fieri poteſt, congruat alia Rationalis B D, ita vt B D, ipſi A D, ſit potentia ſolùm commenſurabilis. Et quia B C, Rationalis eſt; erit A C, illi ſolùm potentia commenſurabilis, Rationalis. Rationales ergo ſunt A C, B C, potentia tantũ commenſurabiles. Eodem modo erunt & A D, B D, Rationales potentia ſolùm commenſurabiles. Quoniam verò idem exceſſus eſt inter compoſitũ ex quadratis rectarum A C, B C, & rectangulum bis ſub A C, B C, qui inter compoſitum ex quadratis rectarum A D, B D, & rectangulum bis ſub A D, B D; (ſuperat enim compoſitũ ex quadratis rectarum A C, B C, rectangulum bis ſub A C, B C, quadrato ex A B; [a] & compoſitum ex quadratis rectarum A C, B C, æquale ſit rectangulo bis ſub A C, B C, vnà cum quadrato ex A B. Et eodem modo compoſitũ ex quadratis rectarum A D, B D, ſuperat rectangulum bis ſub A D, B D, quadrato eodẽ ex A B, [b] cùm & compoſitũ ex quadratis rectarũ A D, B D, æquale ſit rectangulo bis ſub A D, B D, vnà cũ quadrato ex A B.) erit quoq; permutando, ex lemmate antecedẽti, idem exceſſus inter compoſitũ ex quadratis rectarum A C, B C, & compoſitum ex quadratis rectarum A D, B D, qui inter rectangulum bis ſub A C, B C, & rectangulum bis ſub A D, D B. Eſt autẽ exceſſus inter illa compoſita, ſpatium Rationale, ex ſcholio propoſ. 27. huius lib. & vtrumq; Rationale ſit. (Nam cùm A C, B C, ſint Rationales potentia ſolùm commenſurabiles; erunt earum quadrata, Rationalia, & commenſurabilia. [c] Igitur & compoſitum ex ipſis vtriq; illorum commenſurabile eſt, atq; adeò & Rationale; ex 9. defin. Non aliter Rationale oſtendemus compoſitũ ex quadratis rectarum A D, B D.) Igitur & exceſſus inter rectangulũ bis ſub A C, B C, & rectangulum bis ſub A D, B D, ſpatiũ Rationale eſt. [d] Et quia rectangulum ſub A C, B C, Rationalibus potẽtia ſolùm commenſurabilibus Medium eſt; erit ex coroll. propoſ. 24. huius lib. & eius duplum, nempe rectangulum bis ſub A C, B C, Medium. Eademq; ratione Medium erit rectangulum bis ſub A D, B D. [e] Medium autẽ non ſuperat Medium Rationali. Igitur exceſſus inter rectangulum bis ſub A C, B C, & rectangulum bis ſub A D, B D, Rationale ſpatium nõ eſt. Sed & Rationale oſtenſum eſt. Quod eſt abſurdũ. Ergo ipſi A B, alia Rationalis non congruit, præter B C, cui toti ſit potẽtia tantũ commẽſurabilis. Apotomæ igitur vna tantũ cõgruit, &c. Quod erat oſtendendũ.



a 7. ſecundi.

b 7. ſecundi.

c 61. decimi

d 22. decimi.

e 27. decimi.

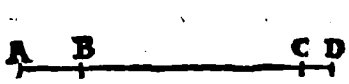
80. ## THEOR. 63. PROPOS. 81.

75. MEDIAE Apotomæ primæ vna tantùm congruit recta linea Media, potentia ſolùm commenſurabilis exiſtens toti, & cum tota Rationale continens.

SIT Mediæ Apotomæ prima A B, & ipſi congruat B C, Media toti A C, potẽtia ſolùm commenſurabilis, & rectangulum ſub A C, B C, ſit Rationale. Dico ipſi A B, aliam Mediam non congruere, quæ toti ſit potentia tantùm commenſurabilis, contineatq; cum tota, Rationale. Si enim fieri poteſt, congruat alia B D, Media toti A D, potentia tantùm commenſurabilis, ſitq; rectangulum ſub A D, B D, Rationale. Et quia B C, Media eſt potẽtia ſolùm ipſi A C, commenſurabilis; [f] erit & A C,

f 24. decimi

Media,

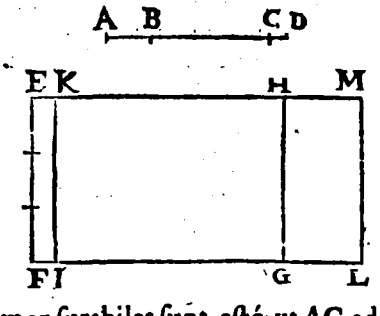


Media, cùm illi ſit commenſurabilis. Mediæ ergò ſunt A C, B C, potentia tantũ commenſurabiles. Quoniam verò idem exceſſus eſt inter compoſitum ex quadratis rectarũ AC, C B, & compoſitũ ex quadratis rectarũ A D, B D, qui inter rectangulum bis ſub AC, B C, & rectangulum bis ſub AD, B D, vt in propoſ. præcedẽti oſtenſum eſt: Eſt autẽ exceſſus inter hæc rectangula, ex ſcholio propoſ. 27. huius lib. ſpatium Rationale; quòd vtrumq; ſit Rationale. (cùm enim rectangulum ſub A C, B C, ponatur Rationale; erit rectangulum bis ſub A C, B C, illi commenſurabile, Rationale. Atq; eadẽ ratione Rationale erit rectangulũ bis ſub A D, B D.) Igitur & exceſſus inter compoſitũ ex quadratis rectarum A C, B C, & compoſitũ ex quadratis rectarum A D, B D, ſpatium Rationale eſt. Et quoniam rectę AC, B C, Mediæ ſunt potentia ſolùm commenſurabiles; erunt & ipſarũ quadrata Media, & commenſurabilia. [a] Igitur & compoſitũ ex ipſis vtri- *a 16. decimi*
que ipſorum commenſurabile eſt, atq; adeò & Medium, ex coroll. propoſ. 24. huius lib. Non aliter quoq; Medium erit compoſitum ex quadratis rectarum A D, B D. [b] Medium autem non ſuperat *b 27. decimi*
Medium Rationali. Igitur exceſſus inter compoſitum ex quadratis rectarum A C, B C, & compoſitum ex quadratis rectarum A D, B D, ſpatium Rationale non eſt. Sed & Rationale oſtenſum eſt. Quod eſt abſurdum. Ergo ipſi A B, alia Media non congruit, præter B C, quæ toti ſit potentia ſolùm commenſurabilis, contineatque cum tota Rationale. Mediæ igitur Apotomæ primæ vna tantùm congruit, &c. Quod erat demonſtrandum.

THEOR. 64. PROPOS. 82. 81.

MEDIAE Apotomæ ſecundę vna tantùm congruit recta linea, Media potentia ſolùm commenſurabilis exiſtens toti, & cum tota Medium continens. 76.

SIT Mediæ Apotomæ ſecunda AB, cui congruat Media B C, toti AC, potentia tantũ commenſurabilis, & rectangulum ſub AC, B C, ſit Medium. Dico ipſi A B, aliá mediam nó congruere, quæ toti ſit potentia tantũ commenſurabilis, contineatq; cum tota Medium. Si enim fieri poteſt, congruat ipſi alia B D, media toti AD, potentia tantũ commẽſurabilis, ſitq; rectangulũ ſub AD, B D, Medium. Exponatur Rationalis E F, [c] ad quá applicetur rectangulum E G, æquale compoſito ex *c 45. primi.*
quadratis rectarũ A C, B C, & ad eandẽ E F, aliud E I, applicetur æquale quadrato ex A B. Et denique aliud E L, æquale compoſito ex quadratis rectarũ A D, B D. [d] Quoniam igitur compoſitũ ex *d 7. ſecundi.*
quadratis rectarum A C, B C, æquale eſt rectangulo bis ſub A C, B C, vnà cũ quadrato ex A B; erit K G, æquale ei, quod bis cõtinetur ſub A C, B C. Eodemq; modo erit K L, æquale ei, quod bis continetur ſub A D, B D. Et quoniam AC, B C, Mediæ ſunt, & potẽtia commenſurabiles; (cùm enim

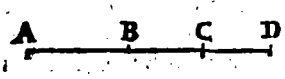


B C, Media ponatur, [e] erit & A C, ipſi potẽtia commenſurabi- *e 24. decimi*
lis, Media) erunt & earum quadrata Media, & commenſurabilia. [f] Ergo & compoſitũ ex ipſis, commenſurabile eſt vtrique *f 16. decimi.*
eorũ; atq; idcircò & Medium, ex coroll. propoſ. 24. huius libri. Igitur & E G, quod illi compoſito æquale eſt, Medium eſt; qđ cũ applicetur ad Rationalẽ E F, [g] erit E H, Rationalis ipſi E F, *g 23. decimi*
longitudine incommẽſurabilis. Rurſus quia rectangulum ſub AC, B C, Medium eſt; erit ex corol. propoſ. 24. huius lib. & eius duplum, nempe K G, Medium: quod cũ applicetur ad Rationalem K I, [h] erit K H, Rationalis ipſi K I, hoc eſt, ipſi E F, longi- *h 23. decimi*
tudine incõmenſurabilis. Et quia AC, B C, longitudine incommenſurabiles ſunt, eſtq; vt AC, ad B C, ita quadratũ ex AC, ad rectangulum ſub AC, B C, vt oſtendimus lemmate 3. ad propoſ. 19. huius lib. [i] erit quadratũ ex A C, incommẽſurabile rectangulo ſub *i 10. decimi.*
A C, B C. Eſt autẽ quadrato ex A C, commenſurabile compoſitũ ex quadratis rectarum A C, B C, hoc eſt, rectangulum E G. (cùm enim rectæ AC, B C, ponantur potẽtia commenſurabiles; erũt & earũ quadrata commenſurabilia. [k] Igitur & compoſitũ ex ipſis commenſurabile eſt vtrique ipſo- *k 16. decimi*
rum, nempe quadrato ex AC.) & rectangulo ſub AC, B C, commenſurabile eſt eius duplũ; videlicet K G. Igitur & E G, ipſi K G, incommenſurabile eſt, ex iis, quæ in ſcholio propoſ. 14. huius lib. docuimus. [l] Rectæ igitur E H, K H, eandem habentes rationẽ cum E G, K G, longitudine incom- *l 10. decimi.*
menſurabiles ſunt: Sed & Rationales ſunt oſtenſæ. Rationales ergo ſunt potentia tantũ commenſurabiles. Quapropter cũ ex Rationali E H, auferatur Rationalis K H, potentia ſolùm commenſurabilis ipſi E H, [m] erit E K, Apotome, & illi congruẽs K H. Similiter demonſtrabimus E K, Apoto- *m 74. decimi.*
men eſſe, & illi congruentẽ K M. Non igitur Apotomæ vna tantũ congruit recta linea Rationalis potentia ſolùm commenſurabilis exiſtens toti. quod eſt abſurdum. Vnam enim tantùm congruere, [n] demonſtratum eſt. Igitur mediæ Apotomæ ſecundæ vna tantùm congruit, &c. Quod erat *n 0. decimi*
demonſtrandum.

THEOR. 65. PROPOS. 83. 82.

MINORI vna tantũ congruit recta linea potentia incommenſurabilis exiſtens toti, & cũm tota faciens compoſitum quidem ex ipſarum quadratis Rationale; quod autem ſub ipſis continetur, Medium. 77.

SIT minor A B, & illi congruens B C, toti A C, potentia incommensurabilis, faciensque compositum ex quadratis rectarum A C, B C, Rationale, & rectangulum sub A C, B C, Medium. Dico ipsi A B, aliam nō congruere, quæ eadem præstet. Sit enim, si fieri potest, alia congruens B D, toti A D, potentia incommensurabilis, faciensque compositum quidem ex quadratis rectarum A D, B D, Rationale, at rectangulum sub A D, B D, Medium. Quoniam igitur, vt in propositione 80. demonstratum est, idem excessus est inter compositum ex quadratis rectarum A C, B C, & compositum ex quadratis rectarum A D, B D, qui inter rectangulum bis sub A C, B C, & & rectangulum bis sub A D, B D: Est autem excessus inter alia composita, spatium Rationale. ex scholio propos. 27. huius libri; quòd vtrumque Rationale ponatur. Igitur & excessus inter rectangulum bis sub A C, B C, & rectangulum bis sub A D, B D, spatium est Rationale, sed & non Rationale est. (Cùm enim rectangulum sub A C, B C, ponatur Medium, erit quoque ex coroll. propositionis 24. huius lib. eius duplum, nempe rectangulum bis sub A C, B C, Medium. Similiterq; Medium erit rectangulum bis sub A D, B D. [a] Quare vnum non superabit alterum Rationali.) Quod est absurdum. Ergo ipsi A B, alia recta præter B C, non congruit potentia toti incommensurabilis, &c. Minori ergo vna tantùm congruit, &c. Quod erat demonstrandum.



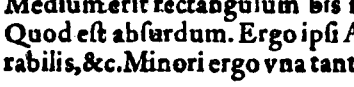
a 27. decimi

83. 78.

PROBL. 66. PROPOS. 84.

EI, quæ cum Rationali Medium totum facit, vna tantùm congruit recta linea, potentia incommensurabilis existens toti, & cum tota faciens compositum quidem ex ipsarum quadratis, Medium; quod autem sub ipsis continetur, Rationale.

SIT recta cum Rationali Medium totum faciens A B, cui congruat recta B C, toti A C, potentia incommensurabilis, faciensque compositū quidem ex quadratis rectarum A C, B C, Medium, rectangulum verò sub A C, B C, Rationale. Dico ipsi A B, aliam rectam non congruere, quæ hæc eadem faciat. Si enim fieri potest, congruat ipsi alia recta B D, toti A D, potentia incommensurabilis, faciensque compositum quidem ex quadratis rectarum A D, B D, Medium, rectangulum verò sub A D, B D, Rationale. Quoniam igitur, vt in propos. 80. ostensum est, idem excessus est inter compositum ex quadratis rectarum A C, B C, & compositum ex quadratis rectarum A D, B D, qui inter rectangulum bis sub A C, B C, & rectangulum bis sub A D, B D. Est autem excessus inter hæc rectangula, spatium Rationale, vt in propos. 81. demonstrauimus. Igitur & excessus inter illa composita, spatium Rationale est: sed & non Rationale est; cùm vtrumque sit Medium. [b] Medium enim Medium non superat Rationali. Quod est absurdum. Non ergo ipsi A B, alia recta, quàm B C, congruet potentia toti incommensurabilis, &c. Quare ei, quę cũ Rationali Medium totũ facit, vna tantũ congruit, &c. Quod erat demonstrandũ.



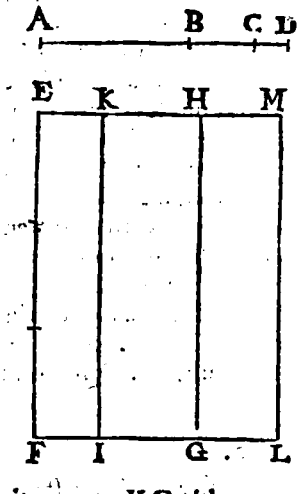
b 27. decimi

84. 79.

PROBL. 67. PROPOS. 85.

EI, quæ cum Medio Medium totum facit, vna tantùm congruit recta linea, potentia incommẽsurabilis existens toti, & cum tota faciens & compositum ex ipsarum quadratis Medium, & quod sub ipsis continetur Medium, incommensurabileque composito ex ipsarum quadratis.

SIT recta A B, cum Medio Medium totum faciens, ipsi verò congruens B C, toti A C, potentia incommensurabilis, faciensq; & compositum ex quadratis rectarum A C, B C, Medium, & rectangulum sub A C, B C, Medium, incommensurabileq; composito ex quadratis rectarum A C, B C. Dico ipsi A B, aliam non congruere, quæ eadem hæc faciat. Si enim fieri potest, congruat ipsi recta alia B D, toti A D, potentia incommensurabilis, ita vt & compositum ex quadratis rectarum A D, B D, Medium sit, & rectangulum sub A D, B D, Medium quoque, ac incommensurabile composito ex quadratis rectarum A D, B D. Constructis autem iisdem, quæ in propos. 82. quoniam compositum ex quadratis rectarum A C, B C, Medium est; erit etiam E G, illi æquale, Medium; [c] Recta igitur E H, Rationalis est, ipsi E F, longitudine incommensurabilis. Rursus quia rectangulum sub A C, B C, Medium est; erit & eius duplum K G, Medium. [d] Igitur & recta K H, Rationalis est, longitudine ipsi E F, incommensurabilis. Et quoniam K G, commensurabile est rectangulo sub A C, B C, cùm illud huius sit duplum; at rectangulum sub A C, B C, incommensurabile ponitur composito ex quadratis rectarum A C, B C; [e] erit quoque K G, eidem composito, hoc est, ipsi E G, incommensurabile; ac propterea rectæ E H, K H, eandem habentes cum E G, K G, rationem, [f] longitudine incommensurabiles sunt. Sed & ostensæ sunt Rationales. Rationales ergo sunt potentia solùm commensurabiles. Quare cùm ex



c 23. decimi.
d 23. decimi.
e 14. decimi.
f 10. decimi.

Rationali

Rationali E H, auferatur Rationalis K H, potentia ſolùm commenſurabilis ipſi E H; [a] erit E K, Apotome, & ei congruens K H. Non aliter oſtendemus E K, eſſe Apotomen, & ei congruentem eſſe K M. Non igitur Apotomæ vna tantùm recta congruit, &c. Quod eſt abſurdum. [b] Vnam enim tantùm congruere demonſtratum eſt. Igitur ei, quæ cum Medio Medium totum facit, vna tantùm congruit, &c. Quod erat oſtendendum.

[a] 74. decimi

[b] 80. decimi

DEFINITIONES TERTIAE.

EXPOSITA Rationali, & Apotoma; ſi tota plus poſsit, quàm congruens, quadrato rectæ lineæ ſibi longitudine commenſurabilis,

I.

SI quidem tota expoſitæ Rationali ſit longitudine commenſurabilis; Vocetur Apotome prima.

II.

SI verò congruens expoſitæ Rationali ſit longitudine commenſurabilis; Vocetur Apotome ſecunda.

III.

QVOD ſi neque tota, neque congruens expoſitę Rationali ſit longitudine commenſurabilis; Vocetur Apotome tertia.

RVRSVS ſi tota plus poſsit, quàm congruens, quadrato rectæ lineæ ſibi longitudine incommenſurabilis,

IIII.

SI quidem tota expoſitæ Rationali ſit longitudine commenſurabilis; Vocetur Apotome quarta.

V.

SI verò congruens expoſitæ Rationali ſit longitudine commenſurabilis; Vocetur Apotome quinta.

VI.

QVOD ſi neque tota, neque congruẽs expoſitæ Rationali ſit longitudine commenſurabilis; Vocetur Apotome ſexta.

SCHOLIVM.

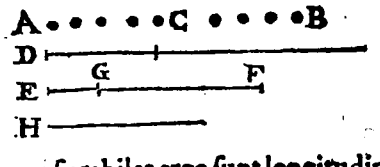
NON aliter colligitur numerus harum ſex Apotomarum, ac ſuperius numerus ſex linearum ex binis nominibus fuit collectus. Sunt enim ſex hæ Apotomæ, rectæ lineæ, quæ relinquuntur poſt detractionem minorum nominum ex maioribus nominibus ſex linearum, quæ ex binis nominibus dicuntur, vt ex definitionibus eſt perſpicuum.

PROBL. 19. PROPOS. 86.

85.
80.

INVENIRE primam Apotomen.

REPERTIS duobus numeris quadratis A B, C B, vt in ſcholio 2. propoſ. 29. huius libri docuimus, quorum exceſſus A C, non ſit quadratus; ita vt A B, C B, proportionem quidem habeant, quam quadratus ad quadratum, at A B, A C, non. Exponatur Rationalis quæpiam D, cui longitudine commenſurabilis ſit E F. Eritque E F, cùm commenſurabilis ſit Rationali D, Rationalis. Fiat deinde vt numerus A B, ad numerum A C, ita per coroll. propoſ. 6. huius lib. quadratum ex E F, ad quadratum ex G F. Dico E G, eſſe primam Apotomen. [c] Quoniam enim quadrata ex E F, G F, proportionem habentia, quam numeri A B, A C, commenſurabilia ſunt; Erunt & rectæ E F, G F, commenſurabiles, ſaltem potentia. Cùm ergo E F, oſtenſa ſit Rationalis, erit & G F, Rationalis. Quia verò A B, A C, proportionẽ non habent, quam quadrati numeri; neque quadrati ex E F, G F, proportionem habebunt, quam quadrati numeri. [d] Incommenſurabiles ergo ſunt longitudine rectę E F, G F. Rationales ergo ſunt E F, G F, potentia tantùm commenſurabiles; [e] atque idcircò reliqua E G, Apotome eſt. Dico & primam eſſe. Poſsit enim recta E F, plus quàm recta G F, quadrato H. Et quia eſt, vt numerus A B, ad numerum A C, ita quadratum ex E F, ad quadratum ex G F; erit per conuerſionem rationis, vt A B, ad C B, ita quadratum ex E F, ad quadratum ex H. Habent autem A B, C B, proportionem, quam numeri quadrati. Igitur & quadrata ex E F, & H, proportionem habent, quam numeri quadrati; [f] Ac propterea rectæ E F, & H, longitudine commenſurabiles ſunt. Quoniã igitur tota E F, plus poteſt, quàm congruens G F, quadrato rectæ H, ſibi longitudine commenſurabilis; eſtque tota eadem E F, expoſitæ Rationali D, commenſurabilis longitudine; erit E G, ex defin. prima Apotome. Inuenimus ergo primam Apotomen. Quod faciendum erat.



[c] 6. decimi.

[d] 9. decimi.

[e] 74. decimi

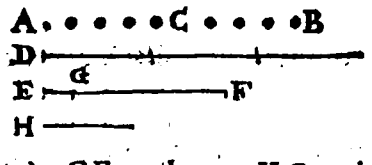
[f] 9. decimi.

86. 81.

PROBL. 20. PROPOS. 87.

INVENIRE ſecundam Apotomen.

REPERTIS duobus numeris quadratis AB, CB, vt in propoſitione præcedenti; expoſitaque Rationali D, ſumatur ei longitudine commenſurabilis GF; eritque GF, Rationali D, commenſu-
a 6. decimi. rabilis, Rationalis quoque. Fiat deinde vt numerus AC, ad numerum AB, ita quadratum ex GF, ad quadratum ex EF, per coroll. propoſ. 6. huius lib. Dico EG, eſſe ſecundam Apotomen. [a] Quoniam enim quadrata ex GF, EF, proportionem habentia, quam numeri AC, AB, commenſurabilia ſunt; Erunt & rectæ GF, EF, commenſurabiles, ſaltem potentia. Cùm ergo GF, ſit oſtenſa Rationalis; erit quoque EF, Rationalis. Quia verò numeri AC, AB, atque adeò & quadrata ex GF, EF, proportionem non habẽt, quam numeri quadrati; [b] erunt GF, EF, longitudine incommenſurabiles. Rationales ergo ſunt GF, EF, potentia ſolùm commenſurabiles; [c] Ideoque EG, reliqua, Apotome eſt. Dico & ſecundam eſſe. Poſsit enim recta EF, plus quàm GF, quadrato ex H. Quoniam ergo eſt, vt AC, ad AB, ita quadratum ex GF, ad quadratum ex EF; & conuertendo, vt AB, ad AC, ita quadratum ex EF, ad quadratum ex GF: Oſtendemus iam, vt in antecedẽti propoſitione rectam H, ipſi EF, longitudine eſſe commenſurabilem. Quam ob rem cùm tota EF, plus poſsit, quàm congruens GF, quadrato rectæ H, ſibi longitudine commenſurabilis, ſitq; congruens GF, expoſitæ Rationali D, longitudine commenſurabilis; erit EG, ex defin. ſecunda Apotome. Inuenimus ergo ſecundam Apotomen. Quod erat faciendum.



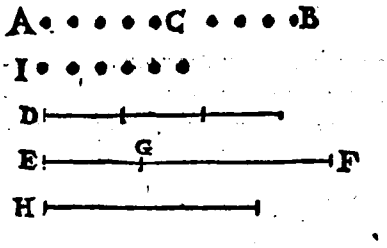
b 9. decimi.
c 74. decimi

87. 82.

PROBL. 21. PROPOS. 88.

INVENIRE tertiam Apotomen.

REPERTIS duobus numeris quadratis AB, CB, vt in propoſ. 86. ſumatur alius numerus I, vt in propoſ. 51. huius lib. docuimus, qui ad neutrum ipſorum AB, AC, proportionem habeat, quam quadratus ad quadratum. Expoſita deinde Rationali D, fiat vt I, ad AB, ita quadratum ex D, ad
d 6. decimi. quadratum ex EF, per coroll. propoſ. 6. huius libri. [d] Eruntque quadrata ex D, & EF, proportionem habentia, quam numeri I, & AB, commenſurabilia; atque adeò & rectæ D, & EF, commenſurabiles, ſaltem potentia. Exiſtente ergo D, Rationali, erit & EF, Rationalis. Et quia numeri I, &
e 9. decimi. AB, ac propterea quadrata ex D, & EF, proportionẽ non habent, quam numeri quadrati; [e] erunt rectæ D, & EF, longitudine incommenſurabiles. Rurſus fiat, vt AB, ad AC, ita quadratũ ex EF, ad quadratum ex GF, ex eodem coroll. propoſ. 6. huius libri.
f 6. decimi. Dico EG, eſſe tertiam Apotomen. [f] Quoniam enim quadrata ex EF, GF, proportionẽ habentia, quam numeri AB, AC, commenſurabilia ſunt; erunt & rectæ EF, GF, commenſurabiles, ſaltem potentia. Cùm ergo EF, oſtenſa ſit Rationalis, erit & GF, Rationalis, cùm illi hæc ſit commenſurabilis, vt demonſtrauimus. Et quia AB, AC, atque adeò & quadrata ex EF, GF, proportionem nõ habent, quam numeri quadrati; [g] Erunt rectæ EF, GF, longitudine incõmenſurabiles. Rationales ergo ſunt EF, GF, potentia ſolùm commenſurabiles; Ac propterea cùm ex EF, auferatur
g 9. decimi.
h 74. decimi GF, potentia illi ſolùm commenſurabilis; [h] reliqua EG, Apotome erit. Dico & tertiam eſſe. Quoniam enim eſt vt I, ad AB, ita quadratum ex D, ad quadratum ex EF; & vt AB, ad AC, ita quadratum ex EF, ad quadratum ex GF; erit ex æquo vt I, ad AC, ita quadratum ex D, ad quadratum ex GF; Non habent autem numeri I, & AC, proportionem, quam numeri quadrati. Neque igitur
i 9. decimi. quadrata ex D, & GF, proportionem habebunt, quam numeri quadrati. [i] Sunt ergo rectæ D, & GF, longitudine incommenſurabiles. Igitur neutra ipſarum EF, GF, longitudine commenſurabilis eſt expoſitæ Rationali D. Poſsit iam EF, plus quàm GF, quadrato rectæ H; Oſtendemusq;, vt in propoſ. 86. rectam H, eſſe ipſi EF, longitudine commenſurabilem. Quapropter cùm tota EF, plus poſsit quàm congruens GF, quadrato rectæ H, longitudine ſibi commenſurabilis, & neutra ipſarum EF, GF, longitudine commenſurabilis ſit Rationali D, expoſitæ; erit ex defin. EG, tertia Apotome. Inuenimus ergo tertiam Apotomen. Quod faciendum erat.

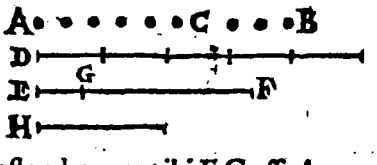


88. 83.

PROBL. 22. PROPOS. 89.

INVENIRE quartam Apotomen.

REPERTIS duobus numeris AC, CB, ita vt AB, ex illis compoſitus ad neutrum ipſorum proportionem habeat, quam quadratus ad quadratũ, per ea, quæ in ſcholio 3. propoſitionis 29. huius lib. docuimus; exponatur Rationalis D, cui longitudine commenſurabilis ſit EF; eritque propterea & EF, Rationalis. Quòd ſi reliqua fiant, quæ in propoſ. 86. oſtendemus, vt ibi, EG, eſſe Apotomen. Dico & quartam eſſe. Poſsit enim EF, plus q̃ GF, quadrato re-

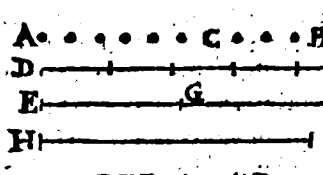


to rectæ H. Et quia est vt AB, ad AC, ita quadratum ex EF, ad quadratum ex GF; erit per conuersionem rationis, vt AB, ad CB, ita quadratum ex EF, ad quadratum ex H. Cùm ergo AB, & CB, proportionem non habeant, quam numeri quadrati; [a] erunt rectæ EF, & H, longitudine incommensurabiles. Quoniam igitur tota EF, plus potest, quàm congruens GF, quadrato rectæ H, sibi longitudine incommensurabilis, estq; eadé tota EF, commensurabilis longitudine Rationali D; erit ex defin. E G, quarta Apotome. Inuenimus ergo quartam Apotomen. Quod erat faciendum. [a] 49. decimi.

PROBL. 23. PROPOS. 90. 89. 84.

INVENIRE quintam Apotomen.

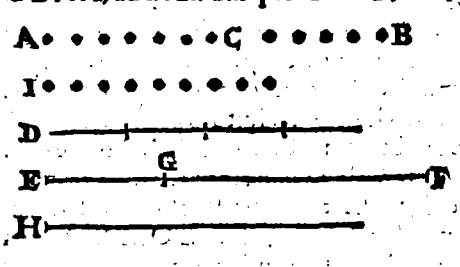
REPERTIS duobus numeris AC, CB, vt in propositione præcedenti, fiat constructio, vt in propos. 87. hoc est, sumatur GF, longitudine commensurabilis Rationali D, &c. Ostendemus ergo, vt in propos. 87. E G, esse Apotomen. Dico & quintam esse. Posit enim EF, plus quàm GF, quadrato rectæ H. Et quia similiter, vt in propos. 86. ostendemus, per conuersionem rationis, esse vt AB, ad CB, ita quadratum EF, ad quadratum ex H; erunt rursus, vt in propositione antecedenti, rectæ EF, & H, longitudine incommensurabiles; estque congruens GF, Rationali D, commensurabilis longitudine; erit ex defin. E G, quinta Apotome. Inuenimus ergo quintam Apotomen. Quod faciendum erat.



PROBL. 24. PROPOS. 91. 90. 85.

INVENIRE sextam Apotomen.

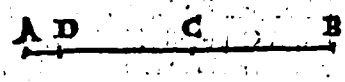
REPERTIS tribus numeris AC, CB, & I, vt in propos. 54. ita vt AB, ad neutrum ipsorum AC, CB; & I, ad neutrum ipsorum AB, AC, proportionem habeat, quam quadratus ad quadratum; exponatur Rationalis D, & reliqua fiant, vt in propositione 88. Ostendemus ergo similiter, vt ibi, D, & EF, longitudine incommensurabiles esse; & E G, Apotomen esse. Dico & sextam esse. Nam vt in propos. 88. erũt D, & GF, longitudine quoq; incommensurabiles; Atque adeò neutra ipsarum EF, GF, longitudine commensurabilis est expositæ Rationali D. Posit iam EF, plus quàm GF, quadrato rectæ H, quam ostendemus, vt in propos. 89, longitudine incommensurabilem esse ipsi EF. Igitur cùm tota EF, plus possit, quàm congruens GF, quadrato rectæ H, sibi longitudine incommensurabilis, & neutra ipsarum EF, GF, longitudine sit commensurabilis Rationali D; erit ex defin. E G, sexta Apotome. Inuenimus ergo sextam Apotomen. Quod erat faciendum.



SCHOLIVM.

SED & expeditius sex dictas Apotomas inueniemus hac ratione, vt Theon docet hoc loco.

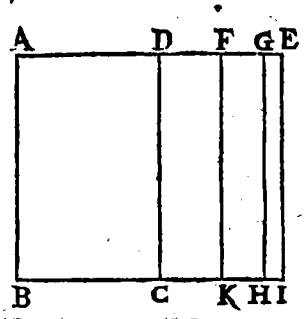
SIT inuenienda exempli gratia, prima Apotome. [a] *Reperiatur prius ex binis nominibus prima AB, cuius maius nomen AC, & minus CB. Abscissa igitur ex AC, recta CD, quæ æqualis sit ipsi CB: Dico AD, esse primam Apotomen. Quoniam enim AC, CB, Rationales sunt potentia tantùm commensurabiles; erũt etiam AC, DC, Rationales potentia tantùm commẽsurabiles.* [b] *Est ergo AD, Apotome. Et quia AC, plus potest, quàm CB, hoc est, quàm DC, quadrato rectæ lineæ sibi longitudine commensurabilis: & est AC, Rationali expositæ longitudine commensurabilis, ex definitione eius, quæ ex binis nominibus prima dicitur; erit ex definitione Apotomæ primæ, AD, prima Apotome. Eadem ratione ex cæteris, quæ ex binis nominibus dicuntur, & alias Apotomas inueniemus, vt ex secunda secundam, ex tertia tertiam, ex quarta quartam, ex quinta quintam, & ex sexta sextam, si minora nomina ex maioribus auferamus.* [a] 49. decimi. [b] 74. decimi.

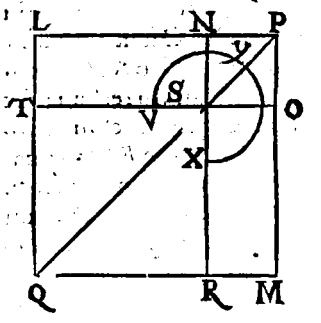


THEOR. 68. PROPOS. 92. 91. 86.

SI spatium contineatur sub Rationali, & Apotoma prima; Recta linea spatium potens Apotome est.

CONTINEATVR spatium AC, sub Rationali AB, & Apotoma prima AD. Dico rectam lineam, quæ potest spatium AC, Apotomen esse. Sit ipsi AD, congruens DE. Erunt igitur AE, DE, ex defin. Apotomæ primæ, Rationales potentia solùm commensurabiles; & tota AE, longitudine commensurabilis Rationali AB; & denique eadem AE, tota plus poterit, quàm congruens DE, quadrato rectæ sibi longitudine commensurabilis. Secetur DE, bifariam in F, & quadrato ex FE, hoc est, quartæ parti quadrati ex DE, applicetur ad AE, rectangulum æquale sub AG, GE, deficiens figura quadrata, per lemma 2. propos. 17. huius lib. Et quia AE, plus potest, quàm DE, qua-





drato rectæ ſibi longitudine commenſurabilis; [a] erunt rectæ AG, GE, longitudine commenſurabiles; [b] Ac propterea & vtraque toti AE, longitudine commenſurabilis erit: Eſt autem AE, Rationali AB, longitudine commenſurabilis. [c] Igitur & vtraque AG, GE, ipſi AB, longitudine eſt commenſurabilis; atq; ex definitione 6. Rationalis. Quare ductis GH, EI, ipſi AB, parallelis, quæ ipſi BC, productæ occurrant in H, I; [d] erit vtrumque rectangulum AH, GI, contentum ſub duabus rationalibus longitudine commenſurabilibus, Rationale. Rurſus quia vtraque DF, FE, longitudine commenſurabilis eſt ipſi DE; & DE, longitudine incommenſurabilis eſt Rationali AB; (Nam ſi commenſurabilis eſſet longitudine, cùm & AE, ſit eidem AB, longitudine commenſurabilis; [e] eſſent AE, DE, longitudine quoq; commenſurabiles. Quod eſt abſurdum. ponuntur enim ſolùm potentia commenſurabiles:) [f] erit etiam vtraq; ipſarum DF, FE, ipſi AB, longitudine incommenſurabilis. Et quoniam vtraque DF, FE, Ratio'ali DE, commẽſurabilis, Rationalis eſt; Erunt propterea tam AB, DF, quàm AB, FE, Rationales potentia tantũ commenſurabiles. Quare ducta FK, ipſi AB, parallela, [g] erit vtrumque rectangulum DK, FI, contentũ ſub Rationalibus potentia tantùm commenſurabilibus, Medium.

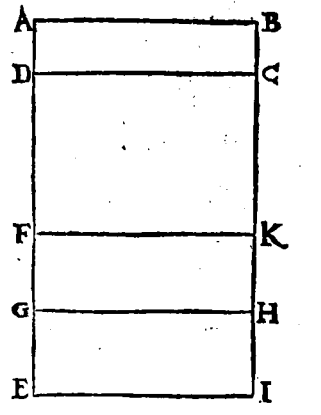
IAM verò ipſi AH, [h] fiat quadratũ æquale LM, & ipſi GI, æquale fiat quadratum NO, communẽ habens cum LM, angulum LPM. [i] Erunt igitur quadrata LM, NO, circa eandem diametrum, quæ ſit PQ. Perficiatur autem figura, vt vides. Quoniam igitur rectangulum ſub AG, GE, per conſtructionem, æquale eſt quadrato ex FE; [k] erunt tres rectæ AG, FE, GE, proportionales; [l] Ac propterea cùm AH, FI, GI, eandem cum ipſis habeant rationem; erit FI, medium proportionale inter AH, GI, hoc eſt, inter quadrata LM, NO, illis æqualia. Eſt autem inter eadem LM, NO, per lemma propoſ. 14. huius lib. medium quoq; proportionale LO. Igitur rectangula FI, LO, æqualia ſunt: [m] Sed ipſi FI, æquale eſt DK, & ipſi LO, æquale eſt MN. Eſt ergo totum DI, toti gnomoni VYX, cum quadrato NO, æquale. Eſt autem & totum AI, per conſtructionem, æquale quadratis LM, NO. Igitur & reliquum AC, reliquo quadrato TR, eſt æquale; Ac propterea recta TS, poteſt ſpatiũ AC. Dico TS, Apotomẽ eſſe.

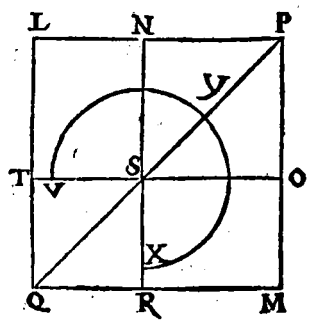
QVONIAM enim ſpatia AH, GI, oſtenſa ſunt Rationalia; & eis æqualia ſunt LM, NO, erunt quoq; quadrata LM, NO, Rationalia; atq; adeò & rectę TO, SO, Rationales. Rurſus quia FI, Medium eſt oſtenſum; erit & LO, illi æquale, Mediũ. Incommenſurabilia ergo ſunt LO, & NO, cùm vnum ſit Irrationale, alterum verò Rationale. Igitur rectæ TO, SO, [n] eandem rationem habẽtes cum LO, NO, [o] longitudine incommenſurabiles ſunt; [p] Atque idcirco reliqua TS, Apotome eſt. Si ſpatium ergo contineatur ſub Rationali, & Apotoma prima, &c. Quod demonſtrandum erat.

92.
87.

THEOR. 69. PROPOS. 93.

SI ſpatium contineatur ſub Rationali, & Apotoma ſecunda; Recta linea ſpatium potens, Mediæ eſt Apotome prima.





CONTINEATVR ſpatium AC, ſub Rationali AB, & Apotoma ſecunda AD. Dico rectam, quæ ſpatium AC, poteſt, Mediæ Apotomen eſſe primam. Sit ipſi AD, congruens recta DE. Erunt ergo AE, DE, ex definitione Apotomę ſecundæ, Rationales potentia tantùm commenſurabiles, & congruens DE, longitudine commenſurabilis Rationali AB; Et denique AE, plus poterit quàm DE, quadrato rectæ ſibi commenſurabilis longitudine. Secetur DE, bifariam in F, & reliqua omnia conſtruantur, vt in propoſitione præcedenti. [q] Eruntque rurſus, vt in antecedenti propoſ. AG, GE, longitudine commenſurabiles; [r] Ac propterea & vtraque toti AE, longitudine commenſurabilis. Eſt autem AE, Rationali AB, longitudine incommenſurabilis: (Si enim commenſurabilis eſſet ipſi AB, longitudine, cùm DE, eidem AB, ponatur longitudine commenſurabilis; [s] eſſent AE, DE, inter ſe quoque commenſurabiles longitudine. Quod eſt abſurdum. ponuntur enim potentia tantùm commenſurabiles.) [t] Igitur & vtraque ipſarum AG, GE, longitudine incommenſurabilis eſt eidem AB. Eſt autem vtraque AG, GE, Rationali AE, commenſurabilis, Rationalis. Rationales ergo ſunt tam AB, AG, quàm AB, GE, potentia ſolùm commenſurabiles; [u] Atque idcirco rectangulum vtrumque AH, GI, contentum ſub Rationalibus potentia tantùm commenſurabilibus, Medium eſt. Rurſus quia vtraque DF, FE, ipſi DE, longitudine commenſurabilis eſt; & ponitur

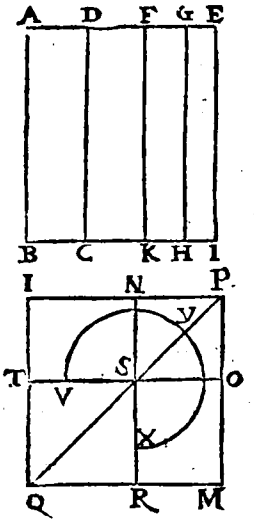
[a] 18. decimi. [b] 16. decimi. [c] 12. decimi. [d] 20. decimi. [e] 12. decimi. [f] 14. decimi. [g] 22. decimi. [h] 14. ſecũdi. [i] 26. ſexti. [k] 17. ſexti. [l] 1. ſexti. [m] 36. primi [n] 1. ſexti. [o] 10. decimi. [p] 74. decimi [q] 18. decimi [r] 16. decimi. [s] 12. decimi. [t] 14. decimi. [u] 22. decimi

nitur D E, Rationali A B, longitudine commensurabilis; erit quoq;, vt in scholio propos. 12. huius libri ostendimus, eidem A B, Rationali longitudine commensurabilis vtraque D F, F E; atq; adeò & Rationalis. [a] Vtrumque ergo rectangulum D K, F I, contentum sub Rationalibus longitudine commensurabilibus, Rationale est. Iam verò, vt in præcedenti propositione, demonstrabimus rectam T S, posse spatium A C. Dico T S, Mediæ Apotomen esse primam. [a] 20. decimi

Quoniam enim A G, G E, longitudine sunt commensurabiles, [b] erunt & A H, G I, eandem cum illis habentia rationem, commensurabilia; atq; adeò & L M, N O, quadrata illis æqualia, commensurabilia erunt. Igitur & latera eorum, nempe rectę T O, S O, saltem potentia erunt commensurabiles. Sunt autem & Mediæ, quòd quadrata L M, N O, Mediis A H, G I, æqualia, (ostensa enim sunt A H, G I, Media esse.) Media sint. Et quoniam F I, atque adeò sibi æquale L O, Rationale est, propterea quę Medio N O, incommensurabile; [c] erunt rectæ T O, S O, eandem cum illis, rationem habentes, longitudine incommensurabiles. Cùm ergo & Mediæ sint ostensæ, & commensurabiles; erunt T O, S O, Mediæ potentia tantùm commensurabiles. Cùm ergo contineant L O, quod Rationale est ostensum; [d] erit T S, Mediæ Apotome prima. Si ergo spatiũ contineatur sub Rationali, & Apotoma secunda, &c. Quod demonstrandum erat. [b] 10. decimi. [c] 10. decimi [d] 75. decimi

THEOR. 70. PROPOS. 94. 93. 88.

Si spatium contineatur sub Rationali, & Apotoma tertia; Recta linea spatium potens, Mediæ est Apotome secunda.



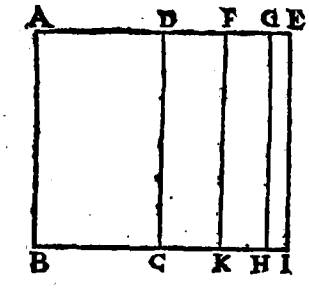
Continetur spatium A C, sub Rationali A B, & Apotoma tertia A D. Dico rectam, quæ spatium A C, potest, esse Mediæ Apotomen secundam. Sit enim ipsi A D, congruens D E. Erunt ergo, ex definitione Apotomæ tertiæ, A E, D E, Rationales potentia tantùm commensurabiles, & neutra ipsarum A E, D E, longitudine commensurabilis Rationali A B; Et denique A E, plus poterit, quàm D E, quadrato rectę sibi longitudine commensurabilis. Secetur D E, bifariam in F, & cætera fiant, vt in propos. 92. eruntque rursus, vt ibi, A G, G E, longitudine inter se commensurabiles; [e] Ac propterea & vtraque totius A E, longitudine commensurabilis erit. Est autem A E, posita incommensurabilis longitudine Rationali A B. [f] Igitur & vtraq; A G, G E, eidem A B, longitudine erit incommensurabilis. Cùm ergo vtraque A G, G E, Rationali A E, commensurabilis, Rationalis sit; erunt tam A B, A G, quàm A B, G E, Rationales potentia solùm commensurabiles; [g] Ac propterea vtrumque rectangulum A H, G I, Medium erit. Rursus quia D E, longitudine ponitur incommensurabilis Rationali A B; erit quoque vtraque D F, F E, ipsi D E, longitudine commensurabilis existęs, [h] eidem A B, longitudine incommensurabilis. Cùm ergo vtraque D F, F E, Rationali D E, commensurabilis, sit Rationalis; erunt tam A B, D F, quàm A B, F E, Rationales potentia tantùm commensurabiles; [i] atq; propterea vtrumque rectangulum D K, F I, Medium erit. Similiter iam demonstrabimus, vt in propositione 92. rectam T S, posse spatium A C. Dico T S, esse Mediæ Apotomen secundam. [e] 16. decimi. [f] 14. decimi. [g] 22. decimi [h] 14. decimi. [i] 22. decimi.

Quoniam enim A H, G I, Media sunt ostensa; erunt & quadrata L M, N O, illis æqualia, Media; Ac propterea & rectæ T O, S O, Mediæ. Et quia A H, G I, eandem habentia rationem, quam A G, G E, quas ostendimus commensurabiles esse, [k] commensurabilia sunt; Erunt & quadrata L M, N O, commensurabilia. Igitur & rectæ T O, S O, commensurabiles sunt saltem potentia. At verò quia A E, D E, potentia solùm sunt commensurabiles, hoc est, longitudine incommensurabiles, estque ipsi A E, longitudine ostensa commensurabilis G E, ipsi verò D E, commensurabilis est longitudine F E; erunt ex scholio propos. 14. huius lib. & G E, F E, longitudine incommensurabiles; [l] ac propterea G I, F I, eandem rationem habentia, quam G E, F E, hoc est, illis æqualia N O, L O, incommensurabilia. Quare T O, S O, eandem rationem habentes, quam L O, N O, longitudine incommensurabiles sunt. Ostensæ sunt autem Mediæ, & commensurabiles. Mediæ ergo sunt T O, S O, potentia solùm commensurabiles. Et quoniã continent L O, Medium; (cùm enim L O, æquale sit ipsi F I, vt constat ex propos. 92. quod Medium esse ostendimus; erit & L O, Medium.) [m] erit T S, Mediæ Apotome secunda. Si ergo spatium contineatur sub Rationali, & Apotoma tertia, &c. Quod erat demonstrandum. [k] 10. decimi [l] 10. decimi. [m] 76. decimi.

THEOR. 71. PROPOS. 95. 94. 89.

Si spatium contineatur sub Rationali, & Apotoma quarta; recta linea spatium potens, Minor est.

Continetur spatium A C, sub Rationali A B, & Apotoma quarta A D. Dico rectã lineam, quæ potest spatium A C, Minorem esse. Sit ipsi A D, congruens D E. Erunt ergo A E, D E, Rationales potentia solùm commensurabiles, ex definitione Apotomæ quartæ; & A E, longitudine

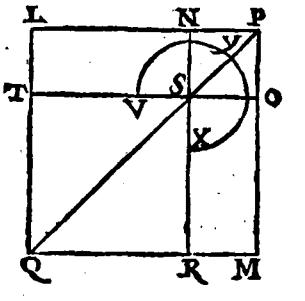


commensurabilis Rationali AB, & eadē AE, plus poterit, quàm DE, quadrato rectæ sibi longitudine incommensurabilis. Secetur DE, bifariam in F, & reliqua omnia fiant, vt prius. [a] Erunt ergo AG, GE, incommensurabiles longitudine, quandoquidem AE, plus potest, quàm DE, quadrato rectæ sibi longitudine incommensurabilis; & ad AE, applicatum est rectangulum sub AG, GE, æquale quartæ parti quadrati ex DE, deficiensque figura quadrata. Et quia AE, Rationalis est, & Rationali AB, longitudine commēsurabilis; [b] erit rectangulum AI, Rationale. Rursus quia DE, Rationalis est, & Rationali AB, longitudine incommensurabilis; [c] erit DI, atque adeò & eius dimidium FI, Medium. Amplius cùm AG, GE, sint longitudine incommensurabiles; [d] incommensurabilia erunt AH, GI, eandem cum illis proportionem habentia. Iam verò similiter demonstrabimus, vt in propositione 92. rectam TS, posse spatium AC. Dico TS, esse Minorem.

a 19. *decimi*

b 20. *decimi*

c 22. *decimi.*



d 10. *decimi.*

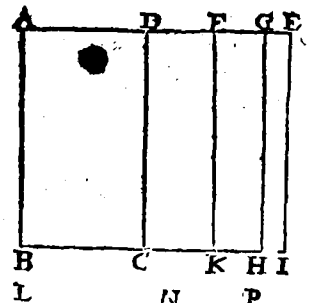
QVONIAM enim ex constructione, rectāgulo AI, æquale est compositum ex quadratis LM, NO, rectarum TO, SO: Est autem illud ostensum Rationale; erit & compositum ex quadratis rectarum TO, SO, Rationale. Item quia FI, Medium est ostensum; erit & LO, contentum sub TO, SO, illi æquale, Medium. Denique quoniam AH, GI, incōmensurabilia sunt demonstrata; erūt & quadrata LM, NO, illis æqualia, incommensurabilia; Atq; adeò rectæ TO, SO, potentia incommensurabiles. Quapropter cùm TO, SO, potentia sint incommensurabiles, sitq; compositum ex quadratis ipsarum, Rationale: rectangulum verò sub ipsis, Medium; [e] erit reliqua TS, Minor. Si igitur spatium contineatur sub Rationali, & Apotoma quarta, &c. Quod demonstrandum erat.

e 77. *decimi*

95. 90.

THEOR. 72. PROPOS. 96.

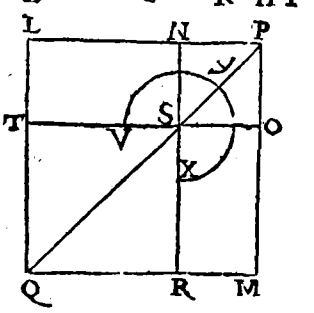
SI spatium contineatur sub Rationali, & Apotoma quinta; Recta linea spatium potens est, quæ cum Rationali Medium totum efficit.



CONTINEATVR spatium AC, (repetita figura proximè antecedentis propositionis) sub Rationali AB, & Apotoma quinta AD. Dico rectam lineam, quæ spatium AC, potest, esse eam, quæ cum Rationali Medium totum efficit. Sit ipsi AD, congruens DE. Erunt ergo ex definitione Apotomæ quintæ AE, DE, Rationales potentia tantùm commensurabiles, & DE, Rationali AB, commensurabilis longitudine; Et denique AE, plus poterit, quàm DE, quadrato rectæ sibi longitudine incommensurabilis. Secetur DE, bifariam in F, & reliqua construantur, vt prius. Erunt ergo rursus, vt in antecedenti propositione, AG, GE, longitudine incommensurabiles. Et quia AE, Rationalis longitudine incommensurabilis est Rationali AB, vt in propos. 93. diximus; [f] erit rectangulum AI, Medium. Item quia DE, Rationalis est, & Rationali AB, longitudine commensurabilis; [g] erit DI, atque idcircò & eius dimidium FI, Rationale. Rursus erūt, vt in præcedenti propositione AH, GI, incōmensurabilia; poteritq;, vt ostensum est in propos. 92. recta TS, spatium AC. Dico TS, esse eam, quæ cum Rationali Medium totum efficit.

f 22. *decimi.*

g 20. *decimi*



QVONIAM enim ostensum est AI, Medium esse; erit & compositum ex quadratis LM, NO, rectarum TO, SO, illi æquale, Medium. Item quia demonstrauimus FI, Rationale esse; erit & LO, rectangulum sub TO, SO, contentum, cùm illi sit æquale, Rationale. Sunt autem & TO, SO, potentia incommensurabiles, vt in propositione antecedenti est demonstratum. Igitur cùm TO, SO, potentia incommensurabiles sint, & compositum ex ipsarum quadratis, Medium; rectāgulum verò sub ipsis, Rationale; [h] erit reliqua TS, ea, quæ cum Rationali Medium totū efficit. Quocirca si spatium contineatur sub Rationali, & Apotoma quinta, &c. Quod erat demonstrandum.

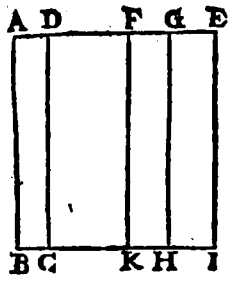
h 78. *decimi*

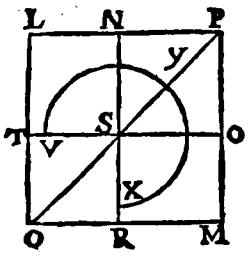
96. 91.

THEOR. 73. PROPOS. 97.

SI spatium contineatur sub Rationali, & Apotoma sexta; Recta linea spatium potens est, quæ cum Medio Medium totum efficit.

CONTINEATVR spatium AC, sub Rationali AB, & Apotoma sexta AD. Dico rectam, quæ potest spatium AC, esse eam, quæ cum Medio Medium totū efficit. Sit enim ipsi AD, congruens DE. Erunt ergo ex definitione Apotomæ sextæ, AE, DE, Rationales potentia tantùm commensurabiles,



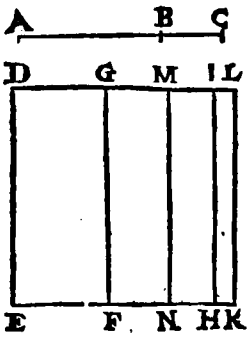


surabiles,& neutra ipsarum AE,DE, Rationali AB,commensurabilis longitudine: Et denique AE,plus poterit,quàm DE,quadrato rectæ sibi longitudine incommensurabilis, Secetur DE, bifariam in F, & reliqua construantur, vt suprà. Erunt ergo rursus, vt in propositione 95.AG,GE,longitudine incommensurabiles. Et quia tam AE,quàm DE, Rationalis est, & Rationali AB, longitudine incommensurabilis; [a] erit tam AI, quàm DI, atque adeò & huius dimidium FI, Medium. Eruntque, vt in propositione 95. AH, GI, incommensurabilia. Et quoniam AE, DE, potentia solùm sunt commensurabiles; [b] Erunt AI, DI,eandem habentia cum illis proportionem,incommensurabilia; Atque adeò cùm DI,FI,commensurabilia sint; [c] erit FI,ipsi AI,incommensurabile. Iam verò demonstrabimus,vt in propos.92.rectam TS,posse spatium AC.Dico TS,esse eam,quę cum Medio Medium totum efficit. [a] 22. decimi [b] 10. decimi [c] 14. decimi.

QVONIAM enim AI,Medium ostendimus, erit & compositum ex quadratis LM, NO, rectarum TO, SO, illi æquale, Medium. Item quia FI,Medium ostensum est; erit & LO,illi æquale,contentumque sub TO, SO, Medium. Rursus quoniam FI, ipsi AI, est incommensurabile, vt ostendimus; erit quoque LO, sub TO, SO, contentum, incommensurabile composito ex quadratis rectarum TO,SO; propterea quòd LO,ipsi FI, & compositum ex quadratis rectarum TO, SO, ipsi AI; est æquale. Denique TO,SO,potentia incommensurabiles sunt,vt in propos.95.est demonstratum. Quamobrem cùm TO, SO, sint potentia incommensurabiles, & compositum ex ipsis quadratis, Medium; necnon & rectangulum sub ipsis Medium,& adhuc composito ex quadratis ipsarũ incommensurabile; [d] erit reliqua TS,ea, quæ cum Medio Medium totum efficit. Si igitur spatium contineatur sub Rationali,& Apotoma sexta,&c. Quod erat ostendendum. [d] 79. decimi

THEOR. 74. PROPOS. 98. 97. 92.

QVADRATVM Apotomæ ad Rationalem applicatum,latitudinem facit Apotomen primam.



SIT Apotome AB,& ipsi congruens BC, ita vt AC, BC, sint Rationales potentia solùm commensurabiles: [e] & ad Rationalem DE, applicetur,rectangulum DE, æquale quadrato ex AB, latitudinẽ faciens DG. Dico DG, esse Apotomen primam. Ad eandem enim DE, applicetur rectangulum DH,æquale quadrato ex AC; & ad IH,aliud IK æquale quadrato ex BC; ita vt totum DK, æquale sit composito ex quadratis rectarum AC,BC. [f] Et quoniam compositum ex quadratis rectarum AC,BC, æquale est rectangulo bis sub AC, BC; vnà cum quadrato ex AB; si auferatur quadratum ex AB, & rectangulum DF; relinquetur GK, rectangulo bis sub AC, BC, æquale; atque adeò diuisa GL, bifariam in M, ductaque MN, ipsi DE, parallela, erit MK, æquale rectangulo sub AC,BC. Et quoniam AC, BC, Rationales sunt; erunt quoque quadrata ex AC, BC, Rationalia; ideoque commensurabilia. [g] Cùm ergo & compositum ex quadratis rectarum AC, BC, vtrique ipsorum sit commensurabile; erit & illud compositum, hoc est, illi æquale DK,Rationale. Quod cùm applicetur ad Rationalem DE, [h] erit DL,Rationalis ipsi DE, longitudine commensurabilis. Rursus quia AC, BC, Rationales sunt potentia tantùm commensurabiles; erit rectangulum sub ipsis, atque adeò & eius duplum GK,Medium. Quod cùm applicetur ad Rationalem GF, [i] erit GL, Rationalis ipsi GF, hoc est, ipsi DE,longitudine incommensurabilis. Et quoniam DK, Rationale, & GK, Medium, hoc est, Irrationale, incommensurabilia sunt; [k] erunt rectæ DL, GL, eandem habentes proportionem, quam DK, GK, longitudine incommensurabiles. Quare cùm & Rationales sint demonstratæ; erunt DL, GL, Rationales potentia tantùm commensurabiles; [l] Ac propterea reliqua DG, Apotome erit. Dico & primam esse. [e] 45. primi. [f] 7. secundi. [g] 16. decimi. [h] 21. decimi. [i] 23. decimi. [k] 10. decimi [l] 74. decimi

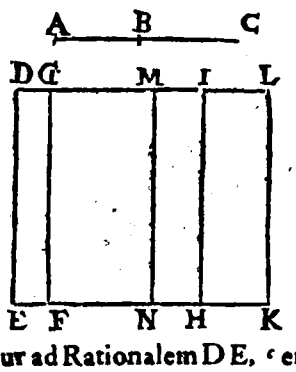
QVONIAM enim per lemma propositionis 54. huius libri, rectangulum sub AC,BC, hoc est, MK, medium est proportionale inter quadrata rectarum AC, BC, hoc est,inter DH, IK; erunt DH,MK,IK,continuè proportionalia; atque adeò & rectæ DI,ML,IL, eandem cum illis habentes proportionem, continuè proportionales sunt. [m] Quare rectangulum sub DI, IL, æquale est quadrato ex ML, hoc est, quartæ parti quadrati ex GL. Et quoniam quadrata ex AC, BC, hoc est, illis æqualia DH, IK, commensurabilia sunt, [n] erunt rectæ DI, IL, eandem cum illis habentes proportionem, longitudine commensurabiles. Itaq; cùm duæ rectæ DL, GL, inæquales sint, & ad maiorem DL, applicatum rectangulum sub DI, IL, æquale quartæ parti quadrati ex GL, minore, deficiensque figura quadrata; atque sit ostensa DI, ipsi IL, longitudine commensurabilis; [o] poterit DL, plus quàm GL,quadrato rectæ sibi commensurabilis longitudine. Quare cùm sit ostensum DG,esse Apotomen,& totam DL,plus posse, quàm GL, congruẽtem,quadrato re- [m] 17. sexti. [n] 10. decimi. [o] 18. decimi.

ctæ sibi longitudine commensurabilis, atque eandem totam commensurabilem esse longitudine Rationali D E; erit ex defin. D G, Apotome prima. Quadratum ergo Apotomæ ad Rationalem applicatum, latitudinem facit Apotomen primam. Quod ostendendum erat.

98. 93.

THEOR. 75. PROPOS. 99.

QVADRATVM Mediæ Apotomæ primæ ad Rationalem applicatum, latitudinem facit Apotomen secundam.



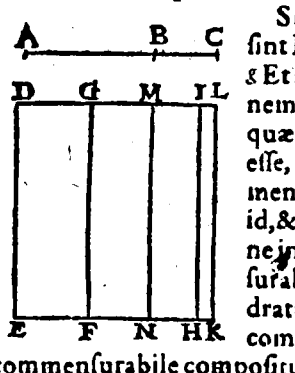
SIT Mediæ Apotome prima AB, & ipsi congruens B C, ita vt AC, B C, sint Mediæ potentia solùm commensurabiles, contineantq; Rationale: [a] Et ad Rationalem D E, quadrato ex AB, æquale applicetur rectangulum D F, latitudinem faciens D G. Dico D G, Apotomen secundam esse. Construantur enim eadem, quæ in antecedenti propositione, ita vt rursus D H, I K, æqualia sint quadratis ex A C, B C; & G K, æquale ei, quod sub A C, B C, bis continetur; ac proinde M K, ei, quod sub A C, B C, continetur semel. Quoniam igitur A C, B C, Mediæ sunt potentia commensurabiles; erunt & earum quadrata, hoc est, illis æqualia, D H, I K, Media, & commensurabilia; [b] ac proinde & totum D K, vtrique illorum commensurabile erit; Igitur & Medium, per coroll. propos. 24. huius lib. Cùm ergo D K, applicetur ad Rationalem D E, [c] erit D L, Rationalis ipsi D E, longitudine incommensurabilis. Rursus quia rectangulum sub AC, B C, Rationale ponitur, erit quoq; eius duplum G K, Rationale. Quod cùm applicetur ad Rationalem D E, [d] erit G L, Rationalis longitudine commensurabilis ipsi D E. Quia verò D K, Medium, id est, Irrationale, & G K, Rationale, incommensurabilia sunt; [e] erunt rectæ D L, G L, eandem habentes cum illis rationem, longitudine incommensurabiles. Cùm ergo Rationales sint ostensæ, erunt D L, G L, Rationales potentia tantùm commensurabiles; [f] Ac propterea reliqua D G, Apotome est. Dico & secundam esse. Nam similiter, vt in præcedenti propositione, demonstrabimus totam D L, plus posse, quàm congruentem G L, quadrato rectæ sibi longitudine commensurabilis. Quare cùm congruens G L, ostensa sit longitudine commensurabilis Rationali D E, erit ex defin. D G, Apotome secunda. Quadratum ergo Mediæ Apotomæ primæ ad Rationalem applicatum, latitudinem facit Apotomen secundam. Quod ostendendum erat.

a 45. *primi.* *b* 16. *decimi.* *c* 23. *decimi.* *d* 21. *decimi.* *e* 10. *decimi* *f* 74. *decimi*

99. 94.

THEOR. 76. PROPOS. 100.

QVADRATVM Mediæ Apotomæ secundę ad Rationalem applicatum, latitudinem faci[illegible]potomen tertiam.



SIT Mediæ Apotome secunda A B, & ipsi congruēs B C, ita vt A C, B C, sint Mediæ potentia tantùm commensurabiles: contineantque Medium: [g] Et ad Rationalem D E, applicetur D F, æquale quadrato ex A B, latitudinem faciens D G. Dico D G, esse tertiam Apotomen. Eadem enim fiant, quæ suprà. Ostendemus iam, vt in propositione precedenti, D K, Medium esse, [h] atque adeò rectam D L, Rationalem ipsi D E, longitudine incommensurabilem. Et quia rectangulum sub A C, B C, Medium est, atque ob id, & eius duplum G K; [i] erit quoque G L, Rationalis ipsi D E, longitudine incommensurabilis. Quia verò A C, B C, longitudine sunt incommensurabiles, estque vt A C, ad B C, ita per lemma 3. propos. 19. huius libri, quadratum ex A C, ad rectangulum sub A C, B C; [k] erit quadratum ex A C, incommensurabile rectangulo sub A C, B C. [l] Est autem quadrato ex A C, commensurabile compositum ex quadratis rectarum A C, B C; quòd quadrata ex rectis A C, B C, potentia commensurabilibus descripta, commensurabilia sint; rectangulo verò sub A C, B C, commensurabile est rectangulum bis sub A C, B C. Igitur ex schólio propos. 14. huius lib. compositum ex quadratis rectarum A C, B C, hoc est, D K, incommensurabile est rectangulo bis sub A C, B C, hoc est, ipsi G K; [m] Atque adeò rectæ D L, G L, eandem habentes rationem, quam D K, G K, longitudine incommensurabiles sunt. Sunt autem ostensæ & Rationales. Rationales ergo sunt D L, G L, potentia solùm commensurabiles; [n] Ac proinde reliqua D G, Apotome est. Dico esse & tertiam. Similiter enim, vt in propos. 98. demonstrabimus D L, totam plus posse, quàm G L, congruentem, quadrato rectæ sibi longitudine commensurabilis. Cùm ergo neutra ipsarum D L, G L, Rationali D E, longitudine sit commensurabilis, vt demonstratum est; erit ex definitione D G, Apotome tertia. Quadratum igitur Mediæ Apotomæ secundæ ad Rationalem applicatum, &c. Quod erat ostendendum.

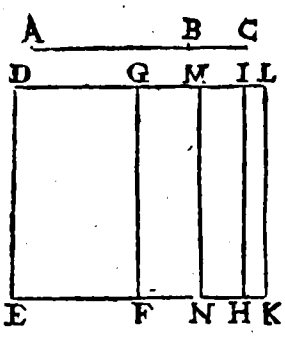
g 45. *primi.* *h* 23. *decimi* *i* 23. *decimi.* *k* 10. *decimi* *l* 16. *decimi.* *m* 10. *decimi* *n* 74. *decimi.*

100. 95.

THEOR. 77. PROPOS. 101.

QVADRATVM Minoris ad Rationalem applicatum, latitudinem facit Apotomen quartam.

SIT



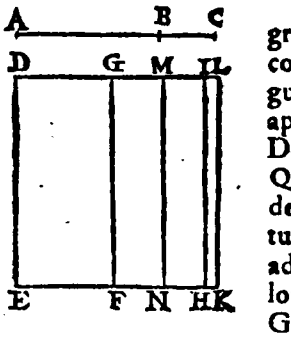
SIT Minor AB, & ipsi congruens BC, ita vt AC, BC, potentia incommensurabiles sint, faciantesq; compositum quidem ex quadratis rectarum AC, BC, Rationale; rectangulum verò sub AC, BC, Medium: [a] & ad Rationalem DE, applicetur spatium DF, quadrato ex AB, æquale, latitudiné faciens DG. Dico DG, Apotomen esse quartam. Fiant enim omnia, vt in præcedentibus. Quoniam igitur compositum ex quadratis rectarum AC, BC, hoc est, illi æquale DK, Rationale est; [b] erit DL, Rationalis ipsi DE, longitudine commensurabilis. Item quia rectangulum sub AC, BC, atque adeò & eius duplum GK, Medium est; [c] erit GL, Rationalis ipsi DE, longitudine incommensurabilis. Rursus quoniam DK, Rationale, & GK, Irrationale, nempe Medium, incommensurabilia sunt; [d] erunt DL, GL, eandem cum ipsis habentes rationem longitudine incommensurabiles. Ostensæ sunt autem Rationales. Rationales ergo sunt DL, GL, potentia tantùm commensurabiles; [e] Ac propterea reliqua DG, Apotome est. Dico & quartam esse. Quoniam enim AC, BC, potentia sunt incommensurabiles; Erunt etiam quadrata, hoc est, ipsis æqualia, DH, IK, incommensurabilia; [f] Ac propterea rectæ DI, IL, longitudine incommensurabiles. Cùm ergo rectangulum sub DI, IL, æquale sit quadrato ex ML, id est, quartæ parti quadrati ex GL, vt in propos. 98. est demonstratum; [g] poterit DL, plus quàm GL, quadrato rectæ sibi longitudine incommensurabilis; quandoquidem ad DL, maiorem, applicatum est rectangulum sub DI, IL, æquale quartæ parti quadrati ex GL, minore, deficiens figura quadrata, diuidensq; maiorem DL, in partes DI, IL, longitudine incommensurabiles. Itaq; cùm tota DL, plus possit, quàm congruens GL, quadrato rectæ sibi longitudine incommensurabilis; sitque eadem tota DL, Rationali DE, longitudine ostensa commensurabilis; erit ex defin. D G, Apotome quarta. Quadratum igitur Minoris ad Rationalem applicatum, &c. Quod erat demonstrandum.

[a] 45. primi.
[b] 21. decimi.
[c] 23. decimi
[d] 10. decimi
[e] 74. deci.
[f] 10. decimi
[g] 19. decimi

THEOR. 78. PROPOS. 102.

101. 96.

QVADRATVM eius, quæ cum Rationali Medium totum efficit, ad Rationalem applicatum, latitudinem facit Apotomen quintam.



SIT recta cum Rationali Medium totum efficiens AB, & ipsi congruens BC, ita vt AC, BC, potentia sint incommensurabiles, faciantque compositum quidem ex quadratis rectarum AC, BC, Medium; rectangulum verò sub iisdem AC, BC, Rationale: [b] Et ad Rationalem DE, applicetur DF, æquale quadrato ex AB, latitudinem faciens DG. Dico DG, Apotomen quintam esse. Constituantur enim eadem, quæ suprà. Quoniam igitur compositum ex quadratis rectarum AC, BC, atque adeò & illi æquale DK, Medium est; [i] erit DL, Rationalis ipsi DE, longitudine incommensurabilis. Item quia rectangulum sub AC, BC, atque adeò & eius duplum GK, Rationale est; [k] erit GL, Rationalis ipsi DE, longitudine commensurabilis. Et quia DK, Medium seu Irrationale, & GK, Rationale, incommensurabilia sunt; [l] erunt DL, GL, eandem cum ipsis habentes rationem, longitudine incommensurabiles. Sunt autem & Rationales ostensæ. Rationales ergo sunt DL, GL, potentia solùm commensurabiles; [m] Atque idcirco reliqua DG, Apotome est. Dico & quintam esse. Eodem enim modo, vt in antecedenti propos. demonstrabimus DL, totam plus posse quàm GL, congruentem, quadrato sibi longitudine incommensurabilis. Quare cùm congruens GL, demonstrata sit longitudine commensurabilis Rationali DE; erit ex defin. D G, Apotome quinta. Quadratum ergo eius, quæ cum Rationali Medium totum efficit, &c. Quod demonstrandum erat.

[b] 45. primi.
[i] 23. decimi.
[k] 21. decimi
[l] 10. decimi.
[m] 74. deci.

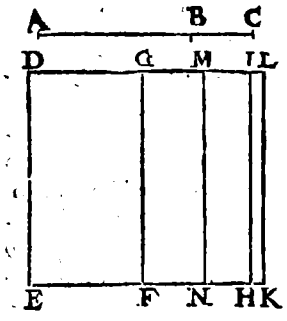
THEOR. 79. PROPOS. 103.

102. 97.

QVADRATVM eius, quæ cum Medio Medium totum efficit, ad Rationalem applicatum, latitudinem facit Apotomen sextam.

SIT recta cum Medio Medium totum efficiens AB, & ipsi congruens BC, ita vt AC, BC, potentia sint incommensurabiles, faciantq; & compositum ex quadratis rectarū AC, BC, Medium, & rectangulum sub iisdem AC, BC, Medium, incommensurabileq; composito ex quadratis ipsarum: [n] Et ad Rationalem DE, applicetur quadrato ex AB, spatium æquale DF, latitudinem faciens DG. Dico DG, esse sextam Apotomen. Eadem enim fiant, quæ suprà. Quoniam igitur tam compositum ex quadratis rectarum AC, BC, hoc est, illi æquale DK, quàm rectangulum sub AC, BC, atq; adeò & eius duplum GK, Medium est; [o] Erit tam DL, quàm GL, Rationalis ipsis DE, longitudine incommensurabilis. Et quia rectangulum sub AC, BC, incommensurabile est composito ex quadratis rectarum AC, BC; Et sunt rectangulum sub AC, BC, & eius duplum

[n] 45. primi.
[o] 23. decimi



GK, commensurabilia; [a] Erit & GK, eidem compositio, hoc est, ipsi DK, incommensurabile; [b] propterea quę rectæ DL, GL, eandem habentes rationem, quam DK, GK, longitudine incommensurabiles. Ostensæ sunt autem & Rationales. Rationales ergo sunt DL, GL, potentia solùm commensurabiles; [c] Atque idcirco reliqua DG, Apotome est. Dico esse & sextam. Ostendemus enim similiter, vt propos. 101. totam DL, plus posse, quàm congruentem GL, quadrato rectæ sibi longitudine incommensurabilis. Cùm igitur neutra ipsarum DL, GL, commẽsurabilis sit longitudine Rationali DE; erit ex defin. DG, Apotome sexta. Quadratum ergo eius, quæ cum Medio Medium totum efficit, &c. Quod erat ostendendum.

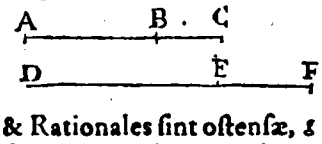
a 14. decimi.
b 10. decimi
c 74. deci.

103. 98.

THEOR. 80. PROPOS. 104.

RECTA linea Apotomæ longitudine commensurabilis; & ipsa Apotome est, atque ordine eadem.

SIT Apotome AB, & ipsi congruens BC, ita vt AC, BC, sint Rationales potentia solùm commensurabiles. Sit autem ipsi AB, longitudine commensurabilis DE. Dico & DE, Apotomen esse, atque ordine eandem ipsi AB. [d] Fiat enim vt AB, ad DE, ita BC, ad EF. [e] Erit ergo tota AC, ad totam DF, vt AB, ad DE, vel vt BC, ad EF. Quoniam igitur AB, DE, longitudine ponuntur commensurabiles; [f] Erunt quoque AC, DF, necnon & BC, EF, commensurabiles longitudine. Et quia AC, BC, sunt Rationales, erunt etiam illis commensurabiles DF, EF, Rationales. Rursus



quia est vt AC, ad DF, ita BC, ad EF; & permutando, vt AC, ad BC, ita DF, ad EF: & sunt AC, BC, potentia solùm commensurabiles; erunt quoque ex iis, quæ ad propos. 10. huius libri demonstrauimus, DF, EF, potentia tantùm commẽsurabiles. Quare cùm & Rationales sint ostensæ, [g] reliqua DE, Apotome est. Dico & ipsi AB, ordine eandem esse. Possit enim primùm AC, plus quàm BC, quadrato rectæ sibi longitudine commensurabilis. Quo posito, [h] poterit & DF, plus quàm EF, quadrato rectæ sibi longitudine commensurabilis. Si igitur AC, longitudine sit commensurabilis Rationali expositæ, vt AB, sit Apotome prima; [i] erit quoque DF, longitudine commensurabilis Rationali expositæ, cùm tam Rationalis exposita, quàm DF, eidem AC, sit longitudine commensurabilis. Igitur ex defin. erit quoque DE, Apotome prima, nempe ordine eadem ipsi AB. Si verò BC, sit longitudine commẽsurabilis Rationali; erit eodem modo EF, Rationali longitudine commensurabilis; Atque adeò vtraque AB, DE, ex defin. erit Apotome secunda. Si denique neutra ipsarum AC, BC, commensurabilis sit longitudine expositæ Rationali, [k] erit quoque neutra ipsarum DF, EF, eidem Rationali longitudine commensurabilis. Quare vtraque AB, DE, ex defin. erit Apotome tertia.

POSSIT iam AC, plus quàm BC, quadrato rectæ sibi longitudine incommensurabilis. Quo posito, [l] poterit & DF, plus quàm EF, quadrato rectæ sibi longitudine incõmensurabilis. Quare vt prius, ostẽdemus DE, esse Apotomen quartam, quintam, vel sextam, &c. Recta ergo linea Apotomæ longitudine commensurabilis, &c. Quod ostendendum erat.

d 12. sexti.
e 12. quinti.
f 10. decimi.
g 74. decimi
h 15. decimi
i 12. decimi.
k 14. decimi
l 15. decimi.

SCHOLIVM.

IDEM hic dicemus de Apotomis, quod ad propos. 67. huius lib. de lineis ex binis nominibus scripsimus. Nimirum, si recta DE, commensurabilis sit ipsi AB, potentia tantùm, eodem modo demonstrari posse, (si loco vocis: longitudine commensurabilis: vtamur voce: potentia tantùm commẽsurabilis:) & DE, Apotomen esse: At non posse inferri, illam esse ordine eandem ipsi AB. Non enim sequitur, si tota AC, longitudine sit commensurabilis Rationali expositæ, & DF, eidem esse commensurabilem longitudine, propterea quòd non vtraque; nempe Rationalis exposita, & DF; eidem AC, longitudine commensurabilis est; sed Rationalis quidem commensurabilis longitudine; At verò DF, potentia tantùm ex hypothesi. Immo verò, si AB, sit Apotome prima, secunda, quarta, vel quinta, fieri nullo modo potest, vt DE, illi potentia tantùm commensurabilis, sit Apotome eadem ordine.

SIT enim AB, prima Apotome, secunda, quarta, vel quinta, eiq; congruens BC; & sit DE, ipsi AB, potentia tantùm commensurabilis, quam quidem, vt in theoremate, ostendemus Apotomen esse, eiq; congruentem EF; & partes AB, BC, ad partes DE, EF, eandem proportionem habere cum totis AC, DF. Dico nulla ratione DE, Apotomen esse ordine eandem ipsi AB. Nam si fieri potest, sit vtraque Apotome prima. Quo posito, erit tam AC, tota, quàm tota DF, ex definitione Apotomæ primæ, Rationali expositæ commensurabilis longitudine; [a] atque adeò & inter se longitudine commensurabiles erunt AC, & DF. Quare cùm sit vt AC, ad DF, ita AB, ad DE; [b] erunt quoque AB, DE, longitudine commensurabiles. Quod est absurdum. ponitur enim DE, ipsi AB, potentia solùm commensurabilis. Non ergo vtraque AB, DE, Apotome prima est. Eodem modo neq; quarta Apotome erit. Sed neque secunda, vel quinta. Esset enim vtraq; congruens BC, EF, ex defin. longitudine commensurabilis Rationali expositæ, atque adeò & ipsa inter se. Quocirca & AB, DE, inter se longitudine forent commensurabiles. quod non ponitur.

a 12. deci.
b 10. deci.

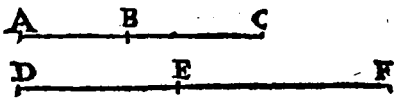
SEMPER tamen verum eſt, ſi A B, eſt Apotome prima, vel ſecunda, vel tertia, rectam D E, quæ ipſi A B, potentia ſolùm eſt commenſurabilis, eſſe quoq; vnam ex illis tribus, licet ordine non eadem ſit. Nam hoc poſito, poterit A C, plus quàm B C, quadrato rectæ ſibi longitudine commenſurabilis. Cùm ergo ſit vt A C, ad B C, ita D F, ad E F; [a] poterit quoque D F, plus quàm E F, quadrato rectæ longitudine ſibi commenſurabilis. Quare ex defin. erit D E, Apotome prima, vel ſecunda, vel tertia. Eodem modo ſi A B, eſt Apotome quarta, vel quinta, vel ſexta, ita vt A C, plus poſſit, quàm B C, quadrato rectæ ſibi longitudine incommenſurabilis; erit quoq; D E, Apotome quarta, vel quinta, vel ſexta, quamuis ordine non eadem ipſi A B: quia rurſus, cùm ſit vt A C, ad B C, ita D F, ad E F, [b] poterit quoque D F, plus quàm E F, quadrato rectæ ſibi longitudine incommenſurabilis. Quare ex defin. erit A B, Apotome quarta, vel quinta, vel ſexta. [a] 15. decimi. [b] 15. decimi.

IN ſequentibus autem quatuor propoſitionibus neceſſariò erit D E, eadem ordine ipſi A B, licet potentia ſolùm illi fuerit commenſurabilis.

THEOR. 81. PROPOS. 105. 104. 99.

RECTA linea Mediæ Apotomæ commenſurabilis; & ipſa Mediæ Apotome eſt, atque ordine erit.

SIT Mediæ Apotome quęcunq; A B, eiq́ue congruens B C, ita vt A C, B C, ſint Mediæ potentia ſolùm commenſurabiles: Sit autem ipſi A B, commenſurabilis D E, ſiue longitudine & potentia, ſiue potentia tantùm. Dico & D E, Mediæ Apotomen eſſe, & ipſi A B, ordine eandem. [a] Fiat enim vt A B, ad D E, ita B C, ad E F. [b] Erit ergo tota A C, ad totam D F, vt A B, ad D E, & vt B C, ad E F. [a] 12. ſexti. [b] 12. quinti.



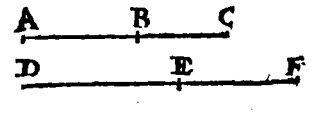
Quoniam igitur A B, D E, commenſurabiles ponuntur vel longitudine & potentia, vel potentia tantùm; [c] erunt quoque B C, E F, & A C, D F, eodem modo commenſurabiles. Et quia A C, B C, Mediæ ſunt, [d] erunt quoque D F, E F, illis cõmenſurabiles, Mediæ. Rurſus, quia eſt vt A C, ad D F, ita B C, ad E F; & permutando vt A C, ad B C, ita D F, ad E F: Sunt autem A C, B C, potentia ſolùm commenſurabiles, erunt etiam, ex ſcholio propoſ. 10. huius lib. D F, E F, ſolùm potentia commenſurabiles. Quare cùm D F, E F, Mediæ ſint oſtenſæ; [e] erit reliqua D E, Mediæ Apotome. Dico & eandem eſſe ordine ipſi A B. Quoniam enim eſt A C, ad B C, ita D F, ad E F; & vt A C, ad B C, ita eſt quadratum ex A C, ad rectangulum ſub A C, B C, ex lemmate 3. propoſ. 19. huius lib. & vt D F, ad E F, ita quadratũ ex D F, ad rectangulum ſub D F, E F; erit quoque vt quadratum ex A C, ad rectangulum ſub A C, B C, ita quadratũ ex D F, ad rectangulum ſub D F, E F; Et permutãdo, vt quadratum ex A C, ad quadratum ex D F, ita rectangulum ſub A C, B C, ad rectangulum ſub D F, E F. Igitur cùm quadratum ex A C, commenſurabile ſit quadrato ex D F, quòd rectæ A C, D F, oſtenſæ ſint commenſurabiles; [f] erit & rectangulum ſub A C, B C, rectangulo ſub D F, E F, commenſurabile. Quare ſi rectangulum ſub A C, B C, ſit Rationale, ita vt A B, ſit Mediæ Apotome prima; Erit etiam rectangulum ſub D F, E F, Rationale, cùm illi ſit commenſurabile; [g] atq; adeò & D E, Mediæ Apotome prima erit. Si verò rectangulum ſub A C, B C, ſit Medium, ita vt A B, ſit Mediæ Apotome ſecunda; erit quoq; rectangulum ſub D F, E F, ei commenſurabile, Medium, ex coroll. propoſ. 24. huius lib. [h] Ac propterea & D E, Mediæ Apotome ſecunda erit. Recta ergo linea Mediæ Apotomæ commenſurabilis, &c. Quod erat oſtendendum.

[c] 10. decimi. [d] 24. decimi. [e] 75. vel 76. decimi. [f] 10. decimi. [g] 75. decimi. [h] 76. decimi.

THEOR. 82. PROPOS. 106. 105. 116. 100.

RECTA linea Minori commenſurabilis; & ipſa Minor eſt.

SIT Minor A B, ipſiq́; congruens B C, ita vt A C, B C, potentia ſint incommenſurabiles, faciente ſq́ue compoſitum quidem ex quadratis rectarum A C, B C, Rationale; rectangulum verò ſub iiſdem A C, B C, Medium. Sit autem D E, ipſi A B, commenſurabilis ſiue longitudine & potentia, ſiue potentia tantùm. Dico & D E, Minorem eſſe. Fiant enim eadem, quæ ſuprà, ita vt rurſus A B, B C, ad D E, E F, eandem habeant rationem, quã A C, ad D F. Erunt ergo rurſus, vt in antecedenti propoſ. D F, E F, ipſis A C, B C, commenſurabiles ſiue longitudine & potentia, ſiue potentia tantùm. Et quoniam eſt, vt A C, ad D F, ita B C, ad E F; & permutando vt A C, ad B C, ita D F, ad E F; [i] erit vt quadratum ex A C, ad quadratum ex B C, ita quadratum ex D F, ad quadratum ex E F; & componendo, vt compoſitum ex quadratis rectarum A C, B C, ad quadratum ex B C, ita compoſitum ex quadratis rectarum D F, E F, ad quadratum ex E F; & permutando vt compoſitum ex quadratis rectarum A C, B C, ad compoſitum ex quadratis rectarũ D F, E F, ita quadratum ex B C, ad quadratum ex E F. Eſt autem quadratum ex B C, commenſurabile quadrato ex E F; quòd rectas B C, E F, oſtenderimus commenſurabiles eſſe. [k] Igitur & compoſitum ex quadratis rectarum A C, B C, compoſito ex quadratis rectarum D F, E F, commenſurabile eſt. Eſt autem compoſitum ex quadratis rectarum A C, B C, ex hypotheſi, Rationale. Igitur & compoſitum ex quadratis rectarum D F, E F, ex 9. defin. Rationale eſt. Rurſus quoniam, vt in antecedenti propoſ. demonſtrabimus rectangulum ſub A C, B C, rectangulo ſub D F, E F, eſſe commenſurabile: ponitur autem rectangulum ſub A C, B C, Medium; Erit quoq; rectangulum ſub D F, E F, ex coroll. propoſ. 24. huius lib. Medium. Et quia eſt vt A C, ad B C, ita D F, ad E F, ſuntq;

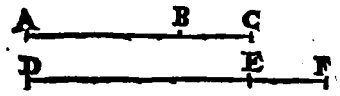


[i] 22. ſexti. [k] 10. decimi.

a 10. decimi AC, BC, potentia incommensurabiles: a erunt etiam DF, EF, potentia incommensurabiles. Quam ob rem cùm DF, EF, potentia sint incommensurabiles, faciantq; compositum quidem ex
b 77. decimi quadratis rectarum DF, EF, Rationale, rectangulum verò sub iisdem DF, EF, Medium; b erit
106 117. DE, Minor. Recta ergo linea Minori commensurabilis, &c. Quod erat demonstrandum.

101. ## PROBL. 83. PROPOS. 107.

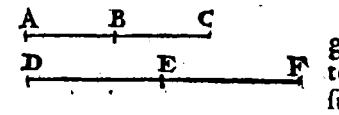
RECTA linea commensurabilis ei, quæ cum Rationali Medium totum efficit; & ipsa cum Rationali Medium totum efficiens est.



SIT recta AB, cum Rationali Medium totum efficiens, & ipsi congruens BC, ita vt AC, BC, sint potentia incommensurabiles, facientesque compositum quidem ex quadratis rectarum AC, BC, Medium: at rectangulum sub AC, BC, Rationale: Sit autem DE, ipsi AB, commensurabilis quocunque modo. Dico & DE, esse, quæ cum Rationali Medium totum efficit. Constructis enim iisdem, quæ suprà, ostendemus vt in antecedenti propos. compositum ex quadratis rectarum AC, BC, commensurabile esse composito ex quadratis rectarum DF, EF. Cùm ergo illud ponatur Medium, erit & hoc, ex coroll. propos. 24. huius lib. Medium. Rursus, vt in propos. 105. demonstrabimus rectangulum sub AC, BC, cõmensurabile esse rectangulo sub DF, EF. Cùm ergo illud Rationale ponatur, erit & hoc Rationale, ex defin. 9. Sunt denique eodem modo, vt in præcedenti propos. est probatum, rectę DF, EF, potentia incommensurabiles. Igitur cùm DF, EF, incommensurabiles sint potentia, faciantque compositum quidem ex
c 78. decimi ipsarum quadratis, Medium, rectangulum verò sub ipsis, Rationale; c erit DE, quæ cum Rationali Medium, &c. Quod demonstrandum erat.

107. ## THEOR. 84. PROPOS. 108.

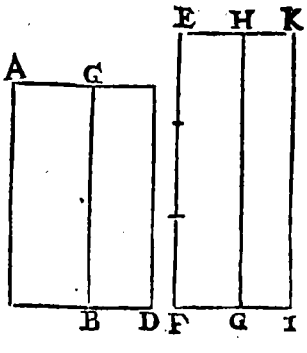
102. RECTA linea commensurabilis ei, quæ cum Medio Medium totum efficit; & ipsa cum Medio Medium totum efficiens est.



SIT recta AB, cum Medio Medium totum efficiens, & ipsi congruens BC, ita vt AC, BC, sint potentia incommensurabiles, facientesq; compositum ex quadratis ipsarum Medium, & rectangulum sub ipsis Medium quoque, & adhuc incommensurabile composito ex ipsarum quadratis: Sit autem DE, ipsi AB, quomodolibet commensurabilis. Dico & DE, esse, quæ cum Medio Medium totum efficit. Constructis enim iisdem, quæ suprà, probabimus similiter, vt in propos. 106. compositum ex quadratis rectarum AC, BC, commensurabile esse composito ex quadratis rectarum DF, EF. Cùm ergo illud Medium ponatur, erit & hoc ex coroll. propos. 24. huius lib. Medium. Rursus vt in propos. 105. ostendemus, rectangulum sub AC, BC, commensurabile esse rectangulo sub DF, EF. Cùm ergo illud sit Medium, erit & hoc Medium, ex eodem coroll. Item vt in propos. 106. erunt quoque DF, EF, potentia incommensurabiles. Postremò, quia compositum ex quadratis rectarum AC, BC, commensurabile est compositum ex quadratis rectarum DF, EF, vt dictum est; & rectangulo sub AC, BC, commensurabile rectangulum sub DF, EF: Sunt autem compositum ex quadratis rectarum AC, BC, & rectangulum sub AC, BC, per hypothesin, incommensurabilia; erunt quoque, ex scholio propos. 14. huius lib. compositum ex quadratis rectarum DF, EF, & rectangulum sub DF, EF, incommẽsurabilia. Quocirca cùm DF, EF, potentia sint incommensurabiles, & compositum ex ipsarum quadratis, Medium; necnon &
d 79. deci. rectangulum sub ipsis, Medium; incommensurabileque composito ex ipsarum quadratis; d erit DE, quæ cum Medio Medium totum efficit. Recta igitur linea commensurabilis ei, quæ cum Medio, &c. Quod erat ostendendum.

108. ## THEOR. 85. PROPOS. 109.

103. MEDIO à Rationali detracto; Recta linea, quæ reliquum spatium potest, vna ex duabus Irrationalibus fit, vel Apotome, vel Minor.



DETRAHATVR à Rationali AD, Medium CD. Dico rectam, quę
e 45. primi. potest spatium reliquum AB, esse vel Apotomen, vel Minorem. Exponatur enim Rationalis EF, e ad quam applicetur rectangulum EG, æquale ipsi AB, & ad GH, aliud HI, æquale ipsi CD, ita vt totũ EI, toti AD, sit æquale. Quoniam igitur EI, æquale Rationali AD, Rationale est;
f 21. decimi. f erit EK, Rationalis, Rationali EF, lõgitudine commensurabilis. Rursus quia HI, Medio CD, æquale Medium est,
g 23. decimi g erit HK, Rationalis, ipsi EF, longitudine incommensurabilis. Itaq; cùm EK, quidem sit longitudine commensurabilis ipsi EF; at HK, eidem EF, longitudine incommensurabilis,
b 13. decimi b erunt EK, HK, longitudine incommensurabiles. Sed & Rationales. Rationales ergo sunt potentia tantùm commensurabiles:
i 74. decimi i propterea q; reliqua EH, Apotome est, & ei congruens HK. Aut igitur EK, plus potest quàm HK, quadrato

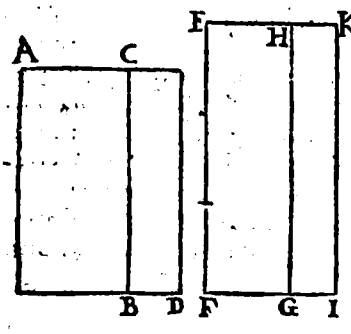
drato rectæ ſibi longitudine commenſurabilis, aut incommenſurabilis. Si plus poteſt E K, quàm H K, quadrato rectæ lineæ commenſurabilis ſibi longitudine, cùm tota E K, oſtenſa quoque ſit longitudine commenſurabilis Rationali E F; erit ex defin. E H, Apotome prima. Quare recta potens ſpatium E G, contentum ſub Rationali E F, & Apotoma prima E H, hoc eſt, ſpatium A B, ſibi æquale, [a] Apotome eſt. Si verò E K, plus poteſt, quàm H K, quadrato rectæ ſibi longitudine incommenſurabilis, cùm tota E K, ſit oſtenſa commenſurabilis longitudine Rationali E F; erit ex definitione E H, Apotome quarta. Quapropter recta potens ſpatium E G, contentum ſub Rationali E F, & Apotoma quarta E H, hoc eſt, ſpatium A B, illi æquale, [b] Minor eſt. Medio ergo à Rationali detracto, &c. Quod oſtendendum erat.

[a] 92. decimi

[b] 95. quinti

THEOR. 86. PROPOS. 110. 109. 104.

RATIONALI à Medio detracto; aliæ duæ Irrationales fiunt, vel Mediç Apotome prima, vel cum Rationali Medium totum efficiens.



DETRAHATVR à Medio A D, Rationale C D. Dico rectam, quæ reliquum ſpatium A B, poteſt, eſſe vel Mediæ Apotomen primam, vel eam, quæ cum Rationali Medium totum efficit. Eadem enim conſtruantur, quæ ſuprà. Et quia E I, Medio A D, æquale, Medium eſt; [c] erit E K, Rationalis ipſi E F, longitudine incommenſurabilis. Item quia H I, æquale Rationali C D, Rationale eſt; [d] erit H K, Rationalis ipſi E F, longitudine commenſurabilis. Itaque cùm H K, quidem ipſi E F, ſit commenſurabilis longitudine, at E K, eidem E F, longitudine incommenſurabilis; [e] erunt H K, E K, longitudine incommenſurabiles. Sed & Rationales. Rationales ergo ſunt potentia ſolùm commenſurabiles; [f] Ac proinde reliqua E H, Apotome eſt, & ei congruens H K. Aut igitur E K, plus poteſt, quàm H K, quadrato rectæ ſibi longitudine commenſurabilis, aut incommenſurabilis. Si E K, plus poteſt, quàm H K, quadrato rectæ ſibi longitudine commenſurabilis, cùm congruens H K, oſtenſa ſit longitudine commenſurabilis Rationali E F; erit ex defin. E H, Apotome ſecunda. Recta igitur potens ſpatium E G, contentum ſub Rationali E F, & Apotoma ſecunda E H, hoc eſt, ſpatium A B, illi æquale, [g] Mediæ eſt Apotome prima. Si verò E K, plus poteſt, quàm H K, quadrato rectæ ſibi longitudine incommenſurabilis, cùm congruens H K, ſit oſtenſa commenſurabilis longitudine Rationali E F; erit E H, Apotome quinta, ex defin. Recta igitur potens ſpatium E G, contentum ſub Rationali E F, & Apotoma quinta E H, hoc eſt, ſpatium ipſi æquale A B, eſt ea, quæ cum Rationali Medium totum efficit. Quamobrem Rationali à Medio detracto, &c. Quod oſtendendum erat.

[c] 23. decimi

[d] 21. decimi

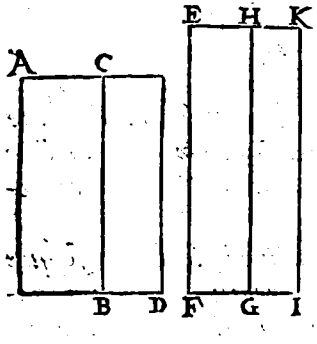
[e] 13. decimi.

[f] 74. primi.

[g] 93. decimi

THEOR. 87. PROPOS. 111. 110. 105.

MEDIO à Medio detracto, quod ſit incommenſurabile toti; reliquæ duæ Irrationales fiunt, vel Mediæ Apotome ſecunda, vel cum Medio Medium totũ efficiẽs.



DETRAHATVR à Medio A D, Medium C D, quod incommenſurabile ſit toti A D. Dico rectam, quæ reliquum ſpatium A B, poteſt, eſſe vel Mediç Apotomen ſecundam, vel eam, quæ cum Medio Medium totum efficit. Conſtructis enim iiſdem, quæ ſuprà; quoniam E I, H I, Mediis A D, C D, æqualia, Media ſunt; [h] erunt E K, H K, Rationales ipſi E F, longitudine incommenſurabiles. Et quia A D, C D, hoc eſt, E I, H I, ponuntur incommenſurabilia; [i] erunt E K, H K, eandem cum illis habentes rationem, longitudine incommenſurabiles. Sed & Rationales. Rationales ergo ſunt potentia tantùm commenſurabiles; [k] Ac propterea reliqua F H, Apotome eſt, & ei congruens H K. Aut igitur E K, plus poteſt, quàm H K, quadrato rectæ ſibi longitudine commenſurabilis, aut incommenſurabilis. Si plus poteſt E K, quàm H K, quadrato rectæ ſibi longitudine commenſurabilis, cùm neutra ipſarum E K, H K, Rationali E F, longitudine commenſurabilis ſit oſtenſa; erit ex defin. E H, Apotome tertia. Quocirca recta potens ſpatium E G, contentum ſub Rationali E F, & Apotoma tertia E H, hoc eſt, ſpatium A B, illi æquale; [l] Mediç Apotome eſt ſecunda. Si verò E K, plus poteſt, quàm H K, quadrato rectæ ſibi longitudine incommenſurabilis, cùm neutra ipſarum E K, H K, Rationali E F, ſit longitudine commenſurabilis, vt demonſtrauimus; erit ex defin. E H, Apotome ſexta. Quam ob rem recta potens ſpatium E G, contentum ſub Rationali E F, & Apotoma ſexta E H, hoc eſt, ſpatium A B, illi æquale, [m] eſt ea, quæ cum Medio Medium totum efficit. Medio ergo à Medio detracto, &c. Quod demonſtrandum erat.

[h] 23. decimi.

[i] 10. decimi.

[k] 74. decimi

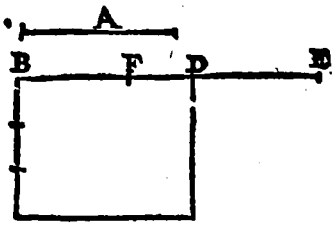
[l] 94. decimi

[m] 97. deci.

THEOR. 88. PROPOS. 112. 111. 116.

APOTOME non eſt eadem, quæ ex binis nominibus.

SIT Apotome A, quæcunque. Dico A, non esse eandem, quæ ex binis nominibus. Sit enim, si
a 45. primi. fieri potest, A, aliqua ex binis nominibus. Exposita autem Rationali B C, a applicetur ad B C, re-
b 98. decimi ctangulum C D, æquale quadrato ex A. Quoniam igitur A, Apotome est; b erit latitudo B D, Apo-
tome prima. Sit ergo ei congruens D E. Erunt igitur ex defin. Apotomæ primæ B E, D E, Ratio-
nales potentia tantùm commensurabiles, poteritq; B E, plus quàm D E, quadrato rectæ sibi lon-
gitudine commensurabilis, & ipsa B E, Rationali B C, commensurabilis erit longitudine. Rursus
c 61. decimi quia A, ponitur esse quoque ex binis nominibus; c erit latitudo eadem B D, ex binis nominibus
prima. Sit ergo maius ipsius nomen B F. Erunt igitur ex defin.
eius, quæ ex binis nominibus prima est, B F, F D, Rationales
potentia solùm commensurabiles, poteritque B F, plus quàm
F D, quadrato rectæ commensurabilis sibi longitudine, & ipsa
B F, Rationali B C, longitudine commensurabilis erit. Itaque
cùm tam B E, quàm B F, longitudine sit cõmensurabilis eidem
d 10. decimi. B C; d erunt quoq; B E, B F, inter se commensurabiles longi-
tudine. Igitur cùm tota B E, sit longitudine commensurabilis
parti B F, erit & eadem B E, reliquæ parti F E, longitudine com-
mensurabilis, ex coroll. propos. 16. huius libri; Atque adeò cùm B E, Rationalis sit, & F E, Ratio-
nalis erit. Quoniam verò duarum linearum B E, F E, longitudine commensurabilium, ipsa B E,
longitudine incõmensurabilis est ipsi D E; (quòd B E, D E, Rationales sint potentia solùm com-
e 14. decimi mensurabiles) e erit quoque altera F E, eidem D E, incommensurabilis longitudine. Sed & vtra-
que F E, D E, Rationalis est ostensa. Rationales ergo sunt F E, D E, potentia solùm commensura-
f 74. decimi biles. Quare reliqua F D, f Apotome est; Atque adeò Irrationalis. Ostensa est autem & Ratio-
nalis. Quod est absurdum. Non ergo A, Apotome existens eadem est, quæ ex binis nominibus.
Quod demonstrandum erat.



COROLLARIVM.

Ex demonstratis quoque facilè colligere licebit, Apotomen, & cæteras ipsam consequentes Irrationales lineas, neque Mediæ, neque inter se esse easdem.

a 23. decimi. *QVADRATVM enim Mediæ ad Rationalem lineam applicatum, a latitudinem efficit Rationalem, ipsi Rationali longitudine incommensurabilem.*

b 98. decimi. *AT quadratũ Apotomæ ad Rationalem applicatũ, b latitudinẽ efficit Apotomen primã.*

c 99. decimi. *ET quadratum Mediæ Apotomæ primæ ad Rationalem applicatum, c latitudinem efficit Apotomen secundam.*

d 100. decimi. *QVADRATVM verò Mediæ Apotomæ secundæ ad Rationalem applicatum, d latitudinem efficit Apotomen tertiam.*

e 101. decimi. *QVADRATVM deinde Minoris ad Rationalem applicatum, e latitudinem efficit Apotomen quartam.*

AT verò quadratum eius, quæ cum Rationali Medium totum efficit, ad Rationalem applicatum, f latitudinem efficit Apotomen quintam.

f 102. decimi.

QVADRATVM denique eius, quæ cum Medio Medium totum efficit, ad Rationalem applicatum, g latitudinem efficit Apotomen sextam.

g 103. decimi.

ITAQVE cùm hæ latitudines differant & à latitudine Mediæ, & inter se; à latitudine quidem Mediæ, quòd hæc Rationalis sit, illæ verò Irrationales; inter se autem, quòd ordine non sint eædem Apotomæ: Manifestum est, Apotomen, & reliquas Irrationales ipsam consequentes, & à Media, & inter se se differre.

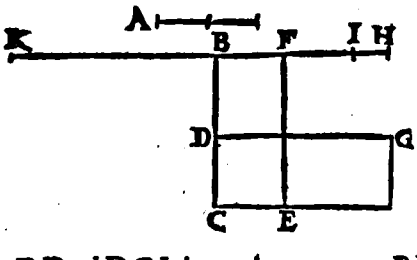
QVONIAM verò in hoc theoremate demonstrauimus, Apotomen eandem non esse, quæ ex binis nominibus: Et quadratæ Apotomæ, & cæterarum quinque Irrationalium eam consequentium, ad Rationalem applicatæ, latitudines efficiunt Apotomen primam, secundam, tertiam, quartam, quintam, & sextam: At verò quadratæ eius, quæ ex binis nominibus, & reliquarum quinque Irrationalium, quæ ipsam sequuntur, ad Rationalem applicatæ, latitudines efficiunt ex binis nominibus primam, secundam, tertiam, quartam, quintam, ac sextam; liquidò cõstat, latitudines Apotomæ, & aliarum Irrationalium, quæ post ipsam, easdem nõ esse latitudinibus eius, quæ ex binis nominibus, & reliquarum post ipsam Irrationalium; quandoquidem nulla Apotome eadem est, quæ ex binis nominibus aliqua. Igitur & Apotome, & quæ ipsam sequuntur, differũt ab ea, quæ ex binis nominibus, & quæ post ipsam. Quam ob rem cùm & tam illæ, quàm hæ à Media differant; efficitur, Rationali quapiam exposita tredecim numero esse lineas Irrationales inter se se differentes, de quibus hactenus disputauimus; Hæ scilicet.

1. Media.
2. Ex binis nominibus,cuius ſex ſunt ſpecies inuentæ.
3. Ex binis Mediis prima.
4. Ex binis Mediis ſecunda.
5. Maior.
6. Rationale ac Medium potens.
7. Bina Media potens.
8. Apotome,cuius etiam ſpecies ſex ſunt repertæ.
9. Mediæ Apotome prima.
10. Mediæ Apotome ſecunda.
11. Minor.
12. Cum Rationali Medium totum efficiens.
13. Cum Medio Medium totum efficiens.

THEOR. 89. PROPOS. 113. 112. O.

QVADRATVM Rationalis ad eam,quæ ex binis nominibus, applicatum,latitudinem facit Apotomen, cuius nomina commenſurabilia ſunt nominibus eius, quæ eſt ex binis nominibus,& in eadem proportione; & adhuc Apotome,quæ ſit, eundem habet ordinem,quem ea,quæ eſt ex binis nominibus.

SIT Rationalis A,& ex binis nominibus B C,cuius maius nomen B D, [a] & ad B C, applicetur rectangulum B E,æquale quadrato ex A,latitudinem faciens B F.Dico B F,eſſe Apotomen, cuius nomina,hoc eſt,tota linea, & ipſi congruens, commenſurabilia ſunt nominibus B D, D C, ipſius B C,ex binis nominibus; & in eadem proportione; & adhuc Apotomen B F, eſſe ordine eandem ipſi B C,ex binis nominibus. [b] Applicetur enim rurſus ad D C,minus nomen,rectangulum C G, æquale eidem quadrato ex A; atq; adeò rectangulo B E, latitudinem faciens D G; ſitque ipſi D G, æqualis B H. Et quoniã æqualia ſunt B E, C G; [c] erit vt B C,ad D C, ita D G, hoc eſt, ſibi æqualis B H, ad B F. Et diuidendo vt B D,ad D C,ita H F,ad F B: Eſt autem B D, maior,quàm D C.Igitur & H F, maior eſt, quàm F B. Ponatur F I, ipſi F B,æqualis; [d] & fiat vt H I,ad I F,ita F B, ad B K. Erit ergo componendo vt H F,ad I F, hoc eſt, ad ſibi æqualem B F,ita F K,ad B K. Oſtenſum eſt autem eſſe vt H F,ad B F, ita B D,ad D C.Igitur erit quoque vt B D,ad D C,ita F K,ad B K. At B D, D C, (cùm ſint nomina ipſius B C,ex binis nominibus)Rationales ſunt potentia tantùm commenſurabiles. [e] Igitur & F K, B K,potentia ſolùm commenſurabiles ſunt.



a 45. primi.
b 45. primi.
c 14. vel 16. ſexti.
d 12. ſexti.
e 10. decimi.

RVRSVS quia eſt vt H F, ad B F, ita F K, ad B K, [f] erunt quoque H F, F K,antecedentes ſimul, nempe tota H K,ad B F,& B K,conſequentes ſimul, hoc eſt, ad totam F K, vt F K,ad B K. Ac propterea F K,media proportionalis eſt inter H K, B K. Quare vt H K, prima ad B K, tertiam, ita erit, per coroll.propoſ.20.lib.6. quadratum ex H K, prima ad quadratum ex F K, ſecunda. Quia verò C G, cùm Rationale ſit,(eſt enim quadrato Rationalis A,æquale)ad Rationalem D C,applicatũ, [g] facit D G,latitudinem Rationalem,ipſi D C,longitudine commenſurabilem; Erit quoque H B, ipſi D G,æqualis,Rationalis & longitudine commenſurabilis ipſi D C.Et quoniam oſtenſum eſt, eſſe vt B D,ad D C,ita F K,ad B K: Vt autem F K, ad B K, ita H K,ad F K; erit quoque vt B D, ad D C, ita H K,ad F K. [h] Igitur vt quadratum ex B D,ad quadratum ex D C,ita quadratum ex H K, ad quadratum ex F K. At quadratum ex B D,commenſurabile eſt quadrato ex D C, (quòd rectæ B D,D C,ſint Rationales potentia commenſurabiles,cùm ſint nomina ipſius B C, ex binis nominibus.) [i] Commenſurabile igitur erit quoque quadratum ex H K, quadrato ex F K. Sed fuit vt quadratum ex H K,ad quadratum ex F K,ita recta H K,ad B K. [k] Igitur longitudine commenſurabilis eſt H K, ipſi B K; atque adeò & reliquæ B H,ex coroll.propoſ.16. huius lib. Oſtenſa eſt autem B H,Rationalis. Igitur & H K, illi commenſurabilis, Rationalis eſt; ac propterea & B K, ipſi H K, cõmenſurabilis,Rationalis exiſtit. Cùm ergo oſtenſa ſit F K, ipſi B K, potentia ſolùm commenſurabilis,erit quoq; F K,Rationalis. Quare cùm F K, B K, Rationales ſint, & potentia tantùm oſtenſæ commenſurabiles, [l] erit reliqua B F,Apotome,& ei congruens B K. Quod eſt primum.

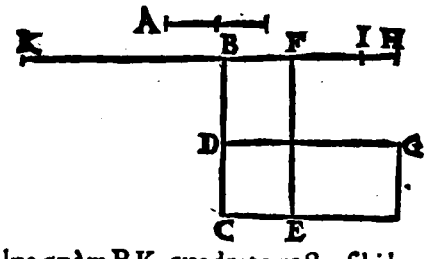
f 12. quinti.
g 21. decimi.
h 22. ſexti.
i 10. decimi
k 16. decimi
l 74. decimi

QVONIAM verò oſtenſum eſt,eſſe rectam H K, totam parti B K, longitudine commenſurabilem, [m] erunt propterea & B K, B H, longitudine inter ſe commenſurabiles. Cùm ergo B H, oſtenſa ſit longitudine cõmenſurabilis ipſi D C; erit quoque B K,ex ſcholio propoſ.12.huius lib.eidem

m 16. decimi

D C, longitudine commensurabilis. Rursus quia demonstratum est, esse vt B D, ad D C, ita F K, ad B K; & permutando vt B D, ad F K, ita D C, ad B K: Sunt autem modò D C, B K, ostensæ longitudine commensurabiles; [a] Erunt quoque B D, F K, commensurabiles longitudine. Itaque cùm F K, ipsi B D, & B K, ipsi D C, longitudine sit commensurabilis, erunt ipsius Apotomæ B F, nomina F K, B K, nominibus B D, D C, ipsius B C, ex binis nominibus, longitudine commensurabilia. Quod est secundum.

a 10. decimi.



ITEM quia demonstrauimus esse vt B D, ad D C, ita F K, ad B K; erunt idcirco Apotomæ nomina F K, B K, in eadem ratione cum B D, D C, nominibus ipsius B C, quæ est ex binis nominibus. Quod est tertium.

POSTREMO, vel B D, plus potest, quàm D C, quadrato rectæ sibi longitudine commensurabilis, vel incommensurabilis. Si plus potest B D, quàm D C, quadrato rectæ sibi longitudine commensurabilis; cùm sit vt B D, ad D C, ita F K, ad B K; [b] poterit quoq; F K, plus quàm B K, quadrato rectæ sibi longitudine commensurabilis: Et si B D, plus potest quàm D C, quadrato rectæ sibi longitudine incommensurabilis; poterit & F K, plus quàm B K, quadrato rectæ sibi longitudine incommensurabilis. Et si quidem B D, expositæ Rationali fuerit longitudine commensurabilis; erit & F K, quæ longitudine ostensa est commensurabilis ipsi B D, commensurabilis longitudine eidem Rationali, per ea, quæ in scholio propos. 12. huius lib. demonstrauimus. Si verò D C, sit Rationali commensurabilis longitudine; erit & eadem ratione B K, eidem Rationali longitudine commensurabilis. Si deniq; neutra ipsarum B D, D C, sit Rationali longitudine commensurabilis; [c] erit quoque neutra ipsarum F K, B K, commensurabilis longitudine Rationali. Igitur eadem ordine est Apotome B F, ipsi B C, ex binis nominibus, vt constat ex definitionibus secundis, atque tertiis. Quod est quartum. Quadratum ergo Rationalis ad eam, quæ ex binis nominibus, &c. Quod demonstrandum erat.

b 15. decimi.

c 14. decimi.

113. THEOR. 90. PROPOS. 114.

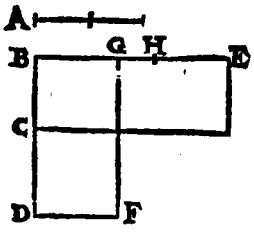
90. QVADRATVM Rationalis ad Apotomen applicatum, latitudinem facit eam, quæ ex binis nominibus, cuius nomina commensurabilia sunt Apotomę nominibus, & in eadem proportione; & adhuc, quę ex binis nominibus fit, eundem habet ordinem, quem ipsa Apotome.

SIT Rationalis A, & Apotome B C, cui congruat C D, [d] & ad B C, applicetur rectangulũ C E, æquale quadrato ex A, latitudinem faciens B E. Dico B E, esse ex binis nominibus, cuius nomina commensurabilia sunt nominibus B D, C D, Apotomæ B C, & in eadem proportione; & adhuc ipsam B E, ex binis nominibus, esse ipsi B C, Apotomæ ordine eandem. [e] Applicetur enim rursus ad B D, totam, rectangulum B F, æquale eidem quadrato ex A, hoc est, ipsi C E, latitudinẽ faciens B G: Et quoniam B F, C E, æqualia sunt; [f] erit vt B E, ad B G, ita B D, ad B C; & per conuersionem rationis, vt B E, ad G E, ita B D, ad C D. Secetur quoque E G, ad H, secundùm proportionem B E, ad G E, ex iis, quæ in schol. propos. 10. lib. 6. conscripsimus; vt sit E H, ad H G, quemadmodum B E, ad G E. Quia igitur est vt B E, tota ad G E, totam, ita E H, ex B E, ablata ad H G, ex G E, ablatam; erit quoque B H, reliqua ipsius B E; ad H E, reliquam ipsius G E, vt tota B E, ad totam G E: Erat autem vt B E, ad G E; ita E H, ad H G. Erit igitur quoque vt B H, ad H E, ita E H, ad G H; atque adeò H E, media proportionalis est inter B H, G H. Quare erit vt B H, prima ad G H, tertiam, ita quadratum ex B H, prima ad quadratum ex H E, secunda, per coroll. propos. 20. lib. 6. Quia verò fuit vt B D, ad C D, ita B E, ad G E, hoc est, B H, ad H E: & sunt B D, C D, cùm sint nomina Apotomæ B C, Rationales potentia tantùm commensurabiles: [g] Erunt quoq; B H, H E, potentia solùm commensurabiles; Ac propterea quadrata ex B H, H E, commensurabilia. Igitur rectæ B H, G H, eandem habentes rationem cum quadratis ex B H, H E, vt demonstrauimus, [h] longitudine sunt commensurabiles; Ac propterea tota B H, longitudine commensurabilis existens parti G H, commensurabilis quoque longitudine erit parti reliquæ B G, ex coroll. propos. 16. huius libri. At verò cùm B D, Rationalis sit, nempe maius nomen Apotomæ B C; & rectangulum B F, quadrato ex Rationali linea A, æquale, Rationale; [i] erit latitudo B G, Rationalis commensurabilis longitudine ipsi B D. Igitur ex scholio propos. 12. huius lib. & B H, eidem B D, Rationali commensurabilis est longitudine, atque adeò Rationalis existit; quandoquidem B H, B G, longitudine commẽsurabiles sunt ostensæ. Quia verò B H, H E, ostensæ sunt commensurabiles potentia tantùm, & B H, Rationalis; erit quoque H E, illi commensurabilis, Rationalis. Rationales ergo sunt B H, H E, potentia solùm commensurabiles; [k] Ac propterea B E, ex binis nominibus est. Quod est primum.

d 45. primi.

e 45. primi.

f 14. vel 16. sexti.



g 10. decimi

h 10. decimi

i 21. decimi.

k 37. decimi

QVONIAM verò ostendimus esse B H, ad H E, vt B D, ad C D; atque adeò permutando B H, ad B D, vt H E, ad C D; Ostensa est autem B H, ipsi B D, longitudine commensurabilis; [l] erit quoque

l 10. decimi.

quoque HE, ipsi CD, commensurabilis longitudine. Quare BH, HE, nomina ipsius BE, ex binis nominib⁹, cõmensurabilia sunt lõgitudine nominib⁹ BD, CD, Apotomę BC. Quod est secundũ.

IMMO & in eadem proportione, cùm demonstratum sit esse BH, ad HE, vt BD, ad CD. Quod est tertium.

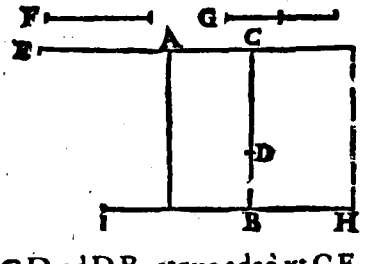
POSTREMO vel BD, plus potest quàm CD, quadrato rectæ sibi longitudine commensurabilis, vel incommensurabilis. Si plus potest quadrato rectæ sibi longitudine commensurabilis, [a] poterit quoq; BH, plus quàm HE, quadrato rectæ sibi commẽsurabilis longitudine: Et si BD, plus potest, quàm CD, quadrato rectæ sibi longitudine incommensurabilis; poterit etiam BH, plus quàm HE, quadrato rectæ longitudine sibi incommensurabilis. Et si quidem BD, Rationali expositæ longitudine sit commensurabilis; erit quoque BH, commensurabilis existens longitudine ipsi BD, eidem Rationali longitudine commensurabilis, ex scholio propos. 12. huius lib. Si verò CD, longitudine sit commensurabilis Rationali; erit & eadem ratione HE, eidem Rationali longitudine commensurabilis. Si verò neutra ipsarum BD, CD, commensurabilis sit longitudine Rationali expositæ; [b] erit quoq; neutra ipsarum BH, HE, eidem Rationali longitudine commensurabilis. Igitur ex secundis, atque tertiis definitionibus, ipsa BE, ex binis nominibus, ordine eadem est ipsi Apotomæ BC. Quod est quartum. Quadratum ergo Rationalis ad Apotomen applicatum, latitudinem facit eam, quæ ex binis nominibus, cuius nomina commensurabilia sunt Apotomæ nominibus, & in eadem proportione, &c. Quod erat demonstrandum.

[a] 15. decimi

[b] 14. decimi

THEOR. 91. PROPOS. 115. 114.

SI spatium contineatur sub Apotoma, & ea, quæ ex binis nominibus, cuius nomina commensurabilia sunt nominibus Apotomæ, & in eadem proportione; Recta linea spatium potens, est Rationalis. 0.



CONTINEATVR spatiũ AB, sub Apotoma AC, & sub CB, ex binis nominibus, cuius nomina CD, DB, commensurabilia sint nominibus CE, AE, Apotomæ AC, & in eadem ratione, nempe CD, ad DB, vt CE, ad AE. Posit autem recta F, spatiũ AB. Dico F, esse Rationalem. Exposita enim Rationali G, [c] applicetur ad CB, quæ ex binis nominibus, rectangulum CH, æquale quadrato ex G. [d] Erit ergo latitudo BH, Apotome, cuius nomina HI, BI, longitudine commensurabilia sunt nominibus CD, DB, & in eadem ratione, nimirum HI, ad BI, vt CD, ad DB; atque adeò vt CE, ad AE, & permutando, vt tota HI, ad totam CE, ita ablata BI, ad ablatam AE. [e] Erit ergo & reliqua BH, ad reliquam AC, vt tota HI, ad totam CE: [f] Commensurabilis autem est longitudine HI, ipsi CE, quòd vtraque HI, CE, commensurabilis fuerit longitudine ipsi CD. [g] Igitur & BH, ipsi AC, longitudine est commensurabilis; [h] Atque idcirco & HC, ipsi BA, commensurabile erit, [i] cùm fit vt HB, ad AC, ita HC, ad BA: Sed HC, quadrato Rationalis G, æquale, Rationale est. Igitur & BA, illi commensurabile, Rationale erit, proptereaque & recta F, ipsum BA, potens, Rationalis erit. Quapropter si spatium contineatur sub Apotoma, & ea, quæ ex binis nominibus, cuius nomina cõmensurabilia sunt nominibus Apotomæ, & in eadem proportione; Recta linea spatiũ potẽs, est Rationalis. Quod erat demonstrandũ.

[c] 45. primi.

[d] 113. decimi

[e] 19. quinti.

[f] 12. decimi

[g] 10. decimi

[h] 10. decimi

[i] 1 sexti.

COROLLARIVM.

EX hoc manifestum est, fieri posse, vt spatium Rationale contineatur sub duabus rectis Irrationalibus. Nam spatium AB, contentum sub AC, CB, Apotoma, & ex binis nominibus, quæ Irrationales sunt, ostensum est Rationale esse.

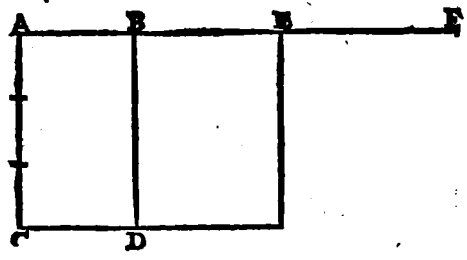
SCHOLIVM.

IN proximis autem tribus propositionibus intelligenda sunt nomina Apotomæ nominibus eius, quæ ex binis nominibus, commensurabilia esse longitudine. In prioribus enim duabus, longitudine ostensa sunt esse commensurabilia; In posteriori verò, nempe in hac 115. nihil colligetur, si nomina CD, DB, naminibus CE, AE, potentia tantùm commensurabilia ponantur. Id quod facile ex demonstrationibus harum trium propositionum apparet.

THEOR. 92. PROPOS. 116. 115.

A MEDIA infinitæ Irrationales fiunt, & nulla alicui antecedentium est eadem. 107.

SIT Media AB. Dico ex illa fieri Irrationales infinitas, quarum nulla eadem sit alicui illarum tredecim antecedentium, de quibus in coroll. propos. 112. huius lib. Exposita enim Rationali AC, contineatur sub AB, Media, & Rationali AC, spatium AD. Est ergo AD, spatium sub Rationali AC, & Irrationali AB, contentum, Irrationale, ex lemmate propos. 38. huius lib. Posit ipsum recta BE, quæ ex defin. 11. Irrationalis erit. Dico BE, non esse eandem alicui tredecim illarum, quas in coroll. propos. 112. huius lib. collegimus. Nam cùm quadratum Mediæ ad Rationalem AC, appli-



c 23. *decimi* catum, *c* latitudinem faciat Rationalem ipſi AC, longitudine incommenſurabilem: Et quadrata reliquarum duodecim Irrationalium, ad eádem Rationalem AC, applicata, faciant latitudines vel ex binis nominibus, vel Apotomas, vt conſtat ex propoſ. 61.62.63. 64.65.66.98.99.100.101.102.& 103. huius lib. At verò quadratum huius Irrationalis BE, ad eandem Rationalem AC, applicatum, faciat AB, latitudinem Mediam; perſpicuum eſt, Irrationalem BE, ab omnibus illis tredecim differre; quandoquidem eius quadratum ad Rationalem lineam applicatum, latitudinem facit differentem à latitudinibus, quas quadrata illarum tredecim linearum ad eandem Rationalem applicata efficiunt.

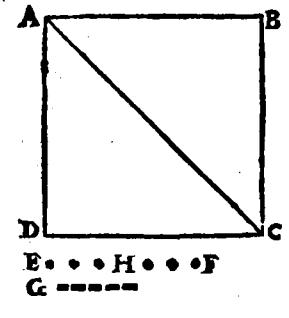
QVOD ſi compleatur rectangulum DE; erit & hoc contentum ſub Rationali BD, & Irrationali BE, Irrationale, ex dicto lemmate propoſ. 38. Poſsit ergo ipſum recta EF, quæ ex defin. 11. Irrationalis erit. Dico rurſus EF, non eſſe eandem alicui illarum tredecim, vel etiam ipſi BE. Hoc autem manifeſtum eſt, cùm quadratum ipſius EF, ad Rationalem applicatum, latitudinem faciat BE. At quadrata illarum tredecim, & quadratum etiam ipſius BE, latitudines faciant, ſi ad eandem Rationalem applicentur, differentes à BE, vt demonſtratum eſt. Eodem modo & aliæ Irrationales infinitæ inuenientur & inter ſe, & à dictis differentes. Quocirca à Media infinitæ Irrationales fiunt, &c. Quod demonſtrandum erat.

118. 7.

THEOR. 93. PROPOS. 117.

PROPOSITVM ſit nobis oſtendere, in quadratis figuris diametrum lateri incommenſurabilem eſſe longitudine.

SIT quadratum ABCD, in quo diameter AC. Dico diametrum AC, longitudine incommenſurabilem eſſe lateri AB. Si enim non eſt incommenſurabilis, commenſurabilis erit longitudine; *b* 5. *decimi.* *b* ac propterea AC, AB, proportionem habebunt, quam numerus ad numerum. Habeat AC, ad AB, proportionem, quam numerus EF, ad numerum G; ſintque numeri EF, & G, minimi omnium eandem proportionem habentium. Quoniam ergo eſt vt AC, ad AB, ita numerus EF, ad numerum G; Erit quoque vt quadratum ex AC, ad quadratum ex AB, ita quadratus numerus *c* 20. *ſexti, & 11. octaui* ex EF, ad quadratum numerum ex G, (*c* Cùm enim quadrata habeant ſuorum laterum proportionem duplicatam; latera autem æquales habeant proportiones; erunt proportiones quadratorum æquales etiam, cùm ſint æqualium duplicatæ.) Sed quadratũ ex AC, duplum eſt quadrati ex AB, per ea, quæ in ſcholio propoſ. 47. lib. 1. oſtendimus. Igitur & quadratus numerus ex EF, duplus erit quadrati numeri ex G; Ac propterea quadratus numerus ex EF, cùm dimidium habeat, atque adeò bifariam poſsit diuidi, par erit, ex defin. Igitur & ipſe EF, illum producens, par erit. (Si namque impar eſſet, cùm ſe ipſum multiplicans producat ſuum quadratum, eſſet & quadratus ipſe impar; *d* eo quòd impar imparem multiplicans imparem procreat. Quod eſt abſurdum. oſtenſus eſt enim par.) Quia verò EF, & G, in ſua proportione minimi, *e* inter ſe primi ſunt; & EF, oſtenſus eſt par, erit G, impar. (Si enim par etiam eſſet, metiretur vtrumq; EF, & G, binarius; atque adeò non eſſent inter ſe primi. Quod eſt abſurdum.) Diuidatur iam par numerus EF, bifariam in H. Quia igitur numerus EF, duplus eſt *f* 11. *octaui.* numeri EH; *f* & quadrati habent proportionem laterum duplicatam; erit quadratus ex EF, quadruplus quadrati ex EH. (Quadrupla enim proportio duplicata eſt proportionis duplæ, vt in his numeris apparet, 4. 2. 1.) Itaq; cùm quadratus ex EF, duplus ſit quadrati ex G; & quadruplus quadrati ex EH; qualium partium 4. eſt quadratus ex EF, talium 2. erit quadratus ex G; & talium 1. quadratus ex EH. Quadratus igitur ex G, duplus eſt quadrati ex EH, cùm illius ad hunc proportio ſit, quæ 2. ad 1. ac proinde, vt ſuprà de numero EF, diximus, erit quadratus ex G, dimidium habens par, & ipſe quoque G, par. Sed & impar eſt oſtenſus. quod eſt abſurdum. Non ergo longitudine commenſurabilis eſt diameter AC, lateri AB. Igitur incommẽſurabilis longitudine.



d 29. *noni.*

e 24. *ſeptimi*

ALITER. Sit, ſi poteſt fieri, diameter AC, commenſurabilis longitudine lateri AB; habeantq; AC, AB, proportionem, quam numeri EF, & G, qui minimi ſint in ſua proportione; atque adeò inter ſe primi. Non erit igitur G, vnitas. (Cùm enim quadratum ex AC, duplum ſit quadrati ex AB; ſit autem vt quadratum ex AC, ad quadratum ex AB, ita quadratus numerus ex EF, ad quadratum numerum ex G, vt in priori demonſtratione diximus; erit quoque quadratus ex EF, duplus quadrati ex G. Si ergo G, eſt vnitas, atque adeò & quadratus ex ea, vnitas; erit quadratus ex EF, binarius. Quod eſt abſurdum.) Ergo numerus. Et quia, vt iam eſt demonſtratum, quadra- *g* 14. *octaui.* tus ex EF, duplus eſt quadrati ex G; metietur quadratus ex G, quadratum ex EF; *g* ac propterea & G, latus, metietur latus EF. Cùm ergo & G, ſe ipſum metiatur; erunt numeri EF, & G, inter ſe compoſiti, habentes menſuram communem, numerum G: Sed & inter ſe primi ſunt. Quod eſt abſurdum,

absurdum. Non ergo commensurabilis est diameter A C, longitudine lateri A B. Quare ostendimus, in quadratis figuris diametrum lateri incommensurabilem esse longitudine. Quod erat demonstrandum.

SCHOLIVM.

SED & affirmatiuè hoc idem theorema demonstrabimus, hoc modo. Quoniam ex iis, quæ in scholio propos. 47. lib. 1. demonstrata à nobis sunt, quadratum diametri duplum est quadrati ex latere descripti; habebit quadratum ex diametro ad quadratum ex latere proportionem, 2. ad 1. vel 4. ad 2. vel 8. ad 4. &c. Et quia sumptis in proportione dupla quotcunque numeris ab vnitate 1. 2. 4. 8. 16. 32. 64. &c.

1. 2. 4. 8. 16. 32. 64. *[a] solùm tertius ab vnitate quadratus est, & ceteri omnes vnum intermittentes; quòd primus ab vnitate, nempe 2. quadratus non sit; erunt solùm hi numeri 4. 16. 64. quadrati; reliqui verò 2. 8. 32. non quadrati. Quare cùm 4. quadratus sit, & 2. non quadratus, non habebit 4. ad 2. proportionem, quam quadratus ad quadratum; ([b] aliàs & 2. quadratus esset.) ac propterea neque quadratum ex diametro ad quadratum lateris proportionem habebit, quam numerus quadratus ad numerum quadratum. [c] Incommensurabilis ergo est diameter longitudine ipsi lateri. Quod est propositum.*

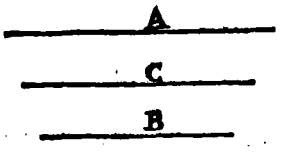
a 10. noni.

b 24. octaui

c 9. decimi

HOC etiam theorema aliter demonstrauimus ad finem defin. 8. lib. 5. & in scholio propos. 8. lib. 8. & in scholio propos. 9. huius libri.

CAETERVM in exemplaribus Græcis reperitur hoc loco appendix quædam, cuius intelligentia ex sequentibus Stereometria libris pendet, vt meritò omitti posset. Verùm quia in ea cõtinetur doctrina non contemnenda ad commensuralitatem omnium magnitudinum, & incommensurabilitatem pertinens; visum est, eam paucis explicare, assignando more nostro solito in margine loca Stereometriæ, quæ ad demonstrationem eorum, quæ hic dicuntur, necessaria sunt. Est igitur appendix hæc.



INVENTIS lineis rectis longitudine incommẽsurabilibus, inuenientur & aliæ quam plurimæ magnitudines, planæ scilicet, atq; solidæ incommensurabiles inter se. Sint enim rectæ A, B, longitudine inter se incommensurabiles, inter quas media proportionalis sit C. Quoniam igitur ex coroll. propos. 20. lib. 6. vt A, ad B, ita est figura rectilinea quæuis super A, constituta ad figuram rectilineam sibi similem, similiterq; positam super C; & sunt A, & B, longitudine incommensurabiles; [d] erunt rectilineæ illæ figuræ super A, & C, incommensurabiles.

d 10. deci.

RVRSVS [e] quoniam circuli, quorum diametri A, C, proportionem habent, quam quadrata ex A, & C, descripta: Quadrata autem hæc, cùm sint figuræ rectilineæ similes, similiterq; posite, proportionem habent, quam recta A, & B, ex coroll. propos. 20. lib. 6. [f] Habebunt quoque circuli diametrorum A, C, eandem proportionem, quam recta A, B: Sed recta A, B, incommensurabiles sunt longitudine. [g] Igitur & circuli diametrorum A, C, incommensurabiles sunt.

e 2. duodecimi.

f 11. quinti.

g 10. deci.

IAM verò si constituantur solida, nempe pyramides, vel prismata eiusdem altitudinis, quorum bases sint figuræ rectilineæ similes, similiterq; descriptæ super A, C, [h] habebunt pyramides, atque prismata eandem proportionem, quam bases, hoc est, quam rectilineæ illæ figuræ. Quare cùm rectilineæ illæ figuræ incommensurabiles sint, vt modò est demonstratum; [i] incommensurabilia etiam erunt ipsa solida, nimirum pyramides, & prismata.

h 5. 6. vel 7. duodecimi

i 10. decimi

QVOD si coni, vel cylindri æquè alti fabricentur, quorum bases circuli sint diametrorum A, C, [k] habebunt huiusmodi coni, & cylindri eandem proportionem cum basibus, hoc est, cum illis circulis. Cùm ergo circuli ostensi sint incommensurabiles; [l] Erunt quoque incommensurabiles dicti coni, & cylindri. Inuenta sunt igitur non solùm lineæ, & superficies incommensurabiles, verùm etiam & corpora, siue solida incommensurabilia. Quod est propositum.

k 11. duodecimi.

l 10. decimi

EADEM autem ratione, si rectæ A, & B, longitudine commensurabiles sint, [m] ostendemus earum figuras rectilineas similes, similiterq; descriptas, necnon & ipsarum circulos, commensurabiles esse, [n] atque adeò & earundem pyramides, & prismata; ac denique conos, & cylindros; si modò eandem habeant altitudinem, vt perspicuum est.

m 10. deci.

n 5. 6. 7. & 11. duodecimi.

FINIS ELEMENTI DECIMI.

EVCLIDIS

ELEMENTVM VNDECIMVM:

& Solidorum primum.

DEFINITIONES.

I.

SOLIDVM eſt, quod longitudinem, latitudinem, & craſſitudinem habet.

POSTQVAM Euclides in prioribus ſex libris abundè de ea Geometriæ parte diſſerit, quæ circa plana verſatur, ſibiq; nomen Geometriæ, tanquam proprium, vſurpauit; In ſubſequentibus verò tribus diligenter ea de paſſionibus numerorum docuit, quæ neceſſaria videbantur ad intelligendam doctrinam linearum commenſurabilium, atque incommenſurabilium, quas idcirco luculentiſſimè in libro decimo deinde expoſuit, vt conſtructio, atque natura quinque corporũ regularium, de quibus in poſtremis tribus libris, nimirum in 13. 14. & 15. ſubtiliſſimè diſſeritur, perfectius poſſet cognoſci: Nunc tandem aggreditur in hoc libro vndecimo, eam partem Geometriæ, quæ corpora, ſiue ſolida conſiderat, proprioq; vocabulo Stereometria eſt appellata.

EXPLICAT autem prius, more ſuo, voces ad eam rem perneceſſarias, quarum prima eſt: Solidum, ſiue corpus: nempe tertium genus quantitatis. Docet igitur eam quantitatem, quæ præter longitudinem latitudinemq; ſortita eſt craſſitudinem, ſeu profunditatem, ita vt tres dimenſiones poſſideat, vnam quidem ſecundùm longitudinem, aliam verò ſecundùm latitudinem, & tertiam ſecundùm profunditatem, ſeu craſſitudinem, altitudinemue, appellari ſolidum, ſiue corpus: quemadmodum quantitas longitudinem tantùm habens, linea; quæ verò longitudini latitudinem adiicit, ſuperficies vocatur, vt in primo lib. diximus.

PORRO quemadmodum Mathematici, vt rectè intelligamus lineam, præcipiunt, vt imaginemur punctum aliquod è loco in locum moueri; hoc enim deſcribit veſtigium quoddam longum tantùm, hoc eſt, lineam propterea quòd punctum omne eſt magnitudinis expers; vt autem percipiamus ſuperficiem, monent, vt intelligamus lineam aliquam in tranſuerſum moueri, hac enim deſcribet veſtigium longum & latum duntaxat; longum quidem propter longitudinem linea, latum verò propter motum illum, qui in tranſuerſum eſt factus; carens autem profunditate, quòd & linea illius ſit expers: Ita quoque, vt nobis ob oculos ponant corpus, ſeu ſolidum, hoc eſt, quantitatem trina dimenſione præditam, conſulunt, vt concipiamus ſuperficiem aliquam æqualiter eleuari, ſiue in tranſuerſum moueri; hac enim ratione deſcribetur veſtigium quoddam longum, latum, atque profundum; longum quidem & latum, ob ſuperficiem, quæ longa & lata exiſtit; profundum verò ſeu craſſum, propter eleuationem illam, ſeu motum ſuperficiei. Hæc ergo quantitas, ſolidum ſiue corpus vocatur. Neque verò alia quantitas quarta diſtincta à linea, ſuperficie, & corpore reperiri poteſt, propterea quòd triplex tantùm dimenſio poſſit aſſignari, vt perſpicuè in cõmentariis, quos in Sphæram Ioannis de Sacro Boſco conſcripſimus, à nobis fuit demonſtratũ ex Ptolemæo in libello de Analẽmate.

II.

SOLIDI autem extremum eſt ſuperficies.

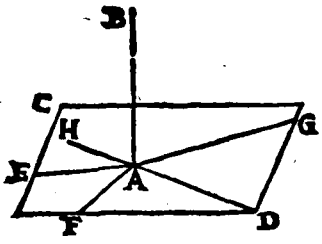
QVEMADMODVM linea finita in extremitatibus puncta, ſuperficies verò lineas recipit, vt in 1. lib. docuit, ita nunc ait Solidi finiti extremum eſſe ſuperficiem. Cùm enim ſolidum, ſiue corpus efficiatur ex illo motu imaginario ſuperficiei; perſpicuum eſt extremas partes illius eſſe ſuperficies.

III.

LINEA recta eſt ad planum recta, cùm ad rectas omnes lineas, à quibus illa tangitur, quæque in propoſito ſunt plano, rectos angulos efficit.

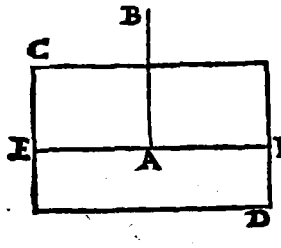
VT linea recta A B, plano C D, inſiſtens, ita vt B, punctum ſit in ſublimi extra planum C D, at punctum A, in ipſo plano, tùm demum dicetur recta, ſeu perpendicularis ad planum C D, cùm rectos effecerit angulos cum lineis A E, A F, A D, A G, & cum omnibus aliis, quæ in eodem exiſtentes plano ipſam tangunt in puncto A. Hac enim ratione fiet, vt A B, æqualiter inſiſtat plano C D, & non magis in vnam partem, quàm

in alium



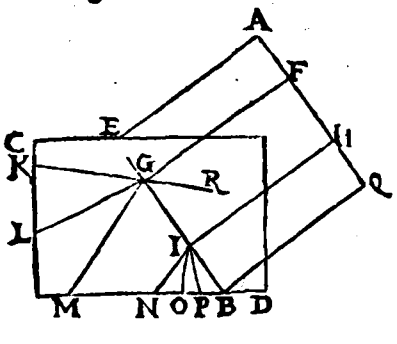
in aliam inclinet. Nam producta recta D A, ad H, cùm angulus B A D, ponatur rectus, erit quoque ei deinceps B A H, rectus, ideóque illi aqualis. Eadémque ratione protracta qualibet linea in plano C D, faciet A B, cum illa duos angulos aquales. Ac propterea aquabiliter ipſi plano inſiſtet. Quòd ſi fieri poſſet, vt A B, cum vna linea ex A, in plano C D, educta, non efficeret angulum rectum, etiamſi cum aliis omnibus rectum angulum conſtitueret, non diceretur A B, recta ad planum C D. Itaque quando conceditur linea aliqua ad planum recta, concedendum quoque erit, eam cum omnibus in eodem plano ductis, quæ ipſam tangunt, rectos conſtituere angulos. Et è contrario, vt rectè concludatur, lineam quampiam eſſe ad planum datum rectam, demonſtrandum erit prius, eam cum omnibus in eodem plano ductis, quæ ipſam tangunt, rectos angulos conficere.

Vt autem recta quæpiam plano cuicunque inſiſtens rectos conſtituat angulos cum omnibus rectis in eodem plano ductis, ipſamq; tangentibus, ſatis eſt, vt cum duabus non efficientibus lineam vnam, ſed ſe mutuò ſecantibus, ſi producantur, rectos angulos conficiat. Nam ex hoc rectè colligitur, eam cum omnibus aliis rectos quoque angulos efficere, vt perſpicuum fiet ex propoſitione 4. huius lib. Dixi: cum duabus non efficientibus lineam vnam: quia ſi dua linea componant vnam rectam lineam, non neceſſariò efficitur, lineam, qua cum ipſis rectos angulos conſtituit, cum omnibus aliis rectos conficere angulos. Recta enim A B, inſiſtat plano C D, efficiatq; rectos angulos cum duabus in eodem plano ductis A E, A F, qua rectam vnam lineam componant. Dico A B, non propterea cum omnibus aliis rectos angulos conſtituere; atque idcircò non eſſe rectam ad planum C D. Hoc autem perſpicuum eſt, cùm A B, circa E F, veluti axem, circumuerti queat, ita vt punctum B, modò ſit plano propinquius, modò ab eodem remotius; nihilominus tamen ipſa cum E F, ſemper eoſdem rectos angulos, & aquales conficiat. Quòd ſi eadem A B, cum duabus angulum componentibus, quales ſunt A G, A D, in priori figura, rectos conſtituat angulos, tum demum cum omnibus aliis rectos angulos efficiet, vt diximus. Id quod diluciдè demonſtrabitur propoſ. 4. huius libri.



IIII.

PLANVM ad planum rectum eſt, cùm rectæ lineæ, quæ communi planorum ſectioni ad rectos angulos in vno planorum ducuntur, alteri plano ad rectos ſunt angulos.

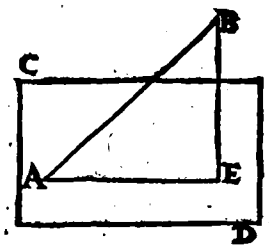


INSISTAT planum A B, plano C D, ita vt linea A Q, ſit in ſublimi, hoc eſt, extra planum ſubiectum C D, at E B, in ipſo eodem plano: Sit autem horum planorum communis ſectio E B, qua, vt demonſtrabitur propoſitione 3. huius libri, recta erit linea. In hac autem ſumptis quotcunque punctis G, I; ex ipſis in plano A E, ducantur G F, I H, perpendiculares ad communem ſectionem E B. Si igitur linea F G, H I, ad planum alterum C D, rectæ fuerint, hoc eſt, rectos angulos effecerint cum lineis G K, G L, G M; I N, I O, I P, & cum aliis omnibus in plano C D, à punctis G, & I, ductis; dicetur planum A B, ad planum C D, rectum; quia hoc modo non magis in vnam partem inclinabit, quàm in alteram, ſed aquabiliter illi inſiſtet. Si enim K G, producatur ad R, cùm angulus F G K, ponatur rectus: erit & angulus ei deinceps F G R, rectus; idcoq; illi aqualis. Eademq; ratione, protracta qualibet alia linea in plano C D, fient vtrobique à lineis F G, H I, anguli aquales. Quare planum A B, aquabiliter plano C D, inſiſtet. Quotieſcunque igitur planum aliquod rectum eſſe conceditur ad planum aliud, concedendum quoque erit, lineas perpendiculares in vno eorum ad communem ſectionem deductas, rectas quoq; eſſe ad alterũ planum. Et contrà, vt colligatur planum quodpiam ad aliud eſſe rectum, oſtendendum prius erit, lineas perpendiculares in vno eorum ad communem ſectionem ductas, rectas eſſe ad reliquum planum.

V.

RECTAE lineæ ad planum inclinatio eſt, cùm à ſublimi termino rectæ illius lineæ ad planum deducta fuerit perpendicularis, atque à puncto, quod perpendicularis in ipſo plano fecerit, ad propoſitæ illius lineæ extremum, quod in eodem eſt plano, altera recta linea fuerit adiuncta; eſt, inquam, angulus acutus inſiſtente linea, & adiuncta comprehenſus.

INSISTAT recta A B, plano C D, non ad angulos rectos, ſed inclinata, ita vt punctum B, ſit extra pla-

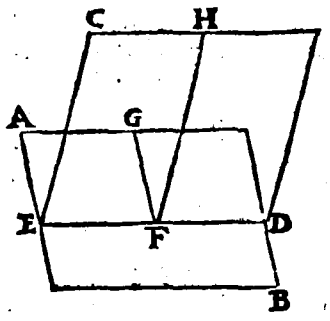


num in ſublimi, punctum verò A, in plano. Deinde ex B, termino ſublimi rectæ A B, intelligatur ad idem planum deducta perpendicularis B E, faciens in plano punctum E; atq; ab E, ad A, adiungatur recta E A; eritq; necessariò angulus B A E, acutus, a *cùm in triangulo A B E, duo anguli B A E, B E A, duobus ſint rectis minores, & angulus B E A, rectus. Angulus igitur acutus B A E, comprehenſus linea inſiſtente A B, & adiuncta A E, dicitur inclinatio recta A B, ad dictum planum C D; Ita vt tanta dicatur recta eſſe inclinatio linea A B, ad planum C D, quantus eſt dictus angulus acutus B A E.*

a17. primi.

VI.

PLANI ad planum inclinatio, eſt angulus acutus rectis lineis contentus, quæ in vtroque planorum ad idem communis ſectionis punctum ductę, rectos cum ſectione angulos efficiunt.



PLANO namque A B, inſiſtat planum C D, ita vt pars ad C, ſit in ſublimi extra planum A B, & pars ad D, in ipſo plano A B, ſitq; C D, inclinatum ad A B; & communis eorum ſectio ſit D E. Si igitur ad D E, communem ſectionem ex eius puncto F, duæ perpendiculares ducantur; F G, quidem in plano A B, & F H, in plano C D; dicetur angulus acutus G F H, dictis rectis comprehenſus, inclinatio plani C D, ad planum A B, ita vt tanta eſſe dicatur inclinatio plani ad planum, quantus eſt dictus angulus acutus.

INTERDVM Geometræ angulum G F H, dicunt angulum inclinationis plani C D, ad planum A B, ſiue is acutus ſit, ſiue rectus, obtuſusve: quamquã propriè ſolùm angulus acutus inclinationem vnius plani ad alterum oſtendat, vt Euclides docet hoc loco: Rectus enim indicat potius æquabilem eleuationem vnius plani ſupra aliud, quàm inclinationẽ vnius ad alterum; obtuſus verò receſſum quodammodo vnius ab altero. Veruntamen quia quilibet horum angulorum commonſtrat ſitum, ſeu eleuationem vnius plani ſupra alterum, generaliter dici conſueuit à pleriſque angulus inclinationis omnis ille, qui comprehenditur duabus rectis lineis, quæ in vtroque plano ad aliquod vnum punctum communis illorum ſectionis ducuntur perpendiculares, cuiuſmodi eſt angulus G F H, ſiue is rectus ſit, ſiue acutus, ſiue obtuſus.

VII.

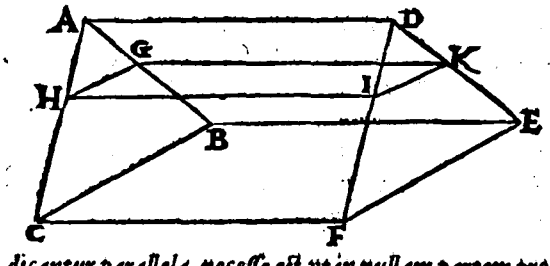
PLANVM ad planum ſimiliter inclinatum eſſe dicitur, atque alterum ad alterum, cùm dicti inclinationum anguli inter ſe fuerint æquales.

NON *obſcura eſt hac definitio, præcedenti bene intellecta. Vnde planum ad planum magis inclinatum eſſe dicetur, cuius angulus inclinationis minor extiterit, atq; adeò à recto magis receſſerit.*

VIII.

PARALLELA plana ſunt, quæ inter ſe non conueniunt.

INTELLIGE, *in quamcunque partem, etiam infinitè, producantur; hoc eſt, ſiue ad dexteram, ſiue ad ſiniſtram, & ſiue ſurſum, ſiue deorſum, &c. Sunt enim quædam plana, quæ nec ad dexterã, nec ad ſiniſtram producta conueniunt; nec tamen ob id parallela ſunt dicenda: quia nimirum vel ſurſum, vel deorſum protracta, tandem coëunt. Nam ſi ſumatur tectum aliquod, cuius faſtigium intelligatur abſciſſum; remanentia duo plana non conuenient, quamuis producantur infinitè ad dexteram, & ad ſiniſtram: Sed tamen quia ſurſum protenſa coëunt, nimirum in ipſo faſtigio, idcircò non dicentur parallela.*



SIT enim tectum quodpiam A B C D E F, contentum duobus planis A B E D, A C F D, cuius baſis B C F E; auferatur q; faſtigium A G H D K I. Quo facto, perſpicuũ eſt, reliqua plana G B E K, H C F I, non conuenire inter ſe, ſi ad partes G B, H C, vel ad partes K E, I F, producantur; nec tamen idcircò parallela dicentur, cùm producta ad partes G H, K I, conueniant in faſtigio A D. Vt igitur plana aliqua dicantur parallela, neceſſe eſt, vt in nullam partem producta inter ſe conueniant. Sicut autẽ lineæ in eodem plano exiſtentes, ad duas duntaxat partes produci poſſunt, nempe ad ſiniſtram, & ad dexteram; ita duo plana in quatuor partes intelligi poſſunt protracta, nempe ſiniſtrorſum, dextrorſum, ſurſum, atq; deorſum. Itaque duo plana quæcunque, vel ſunt parallela, vel ad aliquam partem producta coëunt; lineæ verò rectæ, vel ſunt parallelæ, vel ad alteram partem protractæ conueniunt, ſi nimirum in eodem exiſtant plano, vel tandem nec ſunt parallelæ, neq; vnquã conueniunt, ſi videlicet in diuerſis ſint planis, & in tranſuerſum poſitæ. Vnde in definitione linearum parallelarum in 1. lib. additum fuit: quæ cùm in eodem ſint plano: Hic autem ſimpliciter dicitur: quæ nunquam conueniunt.

SIMILES

IX.

SIMILES ſolidæ figuræ ſunt, quæ ſimilibus planis continentur multitudine æqualibus.

POTVISSET Euclides ſimiles figuras ſolidas definire per angulos æquales, & proportionalitatem laterum circa æquales angulos, vti fecit in figuris planis ſimilibus definiendis: Satius tamen eſſe iudicauit, vt breuitati conſulens, eas ex ſimilibus planis multitudine æqualibus deſcriberet; præſertim quòd ex ſimilitudine planorum ſtatim conſequatur & angulorum ſolidorum æqualitas, vt ex defin. 11. patebit, cùm illos conſtituant anguli plani & multitudine, & magnitudine æquales; & proportionalitas laterum circum angulos æquales, propter planorum ſimilitudinem.

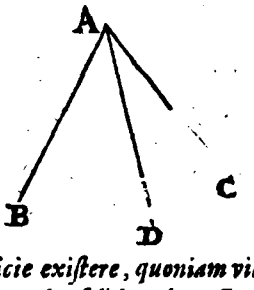
X.

ÆQVALES, & ſimiles ſolidæ figuræ ſunt, quæ ſimilibus planis, multitudine, & magnitudine æqualibus continentur.

QVOD ſi plana ſimilia, quibus corpora ſimilia ex præcedenti definitione circumſcribuntur, fuerint æqualia, ſingula ſingulis, dicentur eiuſmodi figuræ ſolidæ non ſolùm ſimiles, verùm etiam æquales. Nam ſi animo concipiantur ſeſe penetrare mutuò huiuſmodi ſolida, neutrũ alterum excedet, propter æqualitatem, ac ſimilitudinem planorum. Ex ſimilitudine enim planorum infertur angulorum ſolidorum æqualitas, vt in præcedenti definitione docuimus; ex eorundem verò æqualitate, laterum proportionalium æqualitas, vt in lemmate propoſ. 22. lib. 6. demonſtrauimus. Quare ſolida illa omni ex parte ſibi mutuò congruent; ac propterea inter ſeſe exiſtent æqualia.

XI.

SOLIDVS angulus eſt plurium, quàm duarum linearum, quæ ſe mutuò contingant, nec in eadem ſint ſuperficie, ad omnes lineas inclinatio.



DVÆ lineæ in eodem exiſtentes plano, quæ non in directum iacentes ad vnum punctum conueniunt, efficiunt angulum planum, vt lib. 1. expoſuimus, qualis eſt angulus B A C, contentus duabus lineis A B, A C, in eodem plano conſtitutis. Si igitur accedat tertia quædam linea A D, quæ non in eodem cum illis plano exiſtat, ſed punctum D, ſit in ſublimi extra illarum planum, efficietur ad punctum A, angulus ſolidus, ſiue corporeus. Idem contingeret, ſi quarta linea, vel quinta, vel denique plures adiungerentur, licet anguli quantitas variaretur. Dixit autem Euclides, lineas angulum ſolidum conſtituentes, non debere in eadem ſuperficie exiſtere, quoniam videlicet, ſi tres lineæ A B, A C, A D, in eadem conſiſterent ſuperficie, non efficeretur angulus ſolidus ad punctum A, ſed planus duntaxat ex duobus planis B A D, D A C, compoſitus. Quòd ſi A D, ſit in ſublimi, hoc eſt, extra planum, in quo ſunt A B, A C, iam non componeretur angulus planus totus ex B A D, D A C; immò circa punctum A, tres plani conſiſtent anguli B A D, D A C, C A B, qui, vt mox dicetur, ſolidum conſtituunt angulum. Idem dices, ſi plures fuerint lineæ, & idcirco plures quoq; anguli plani.

ALITER.

SOLIDVS angulus eſt, qui pluribus, quàm duobus planis angulis in eodẽ non conſiſtentibus plano, ſed ad vnum punctum conſtitutis, continetur.

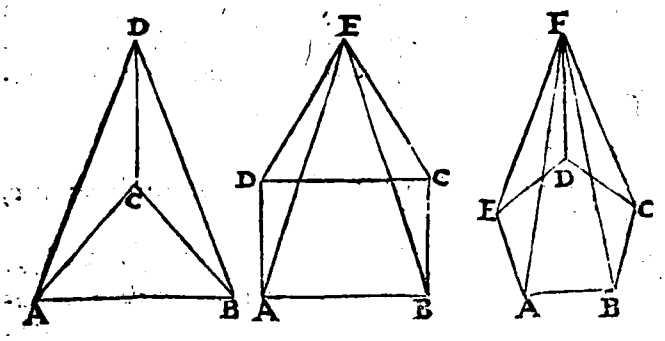
HÆC definitio ſecunda anguli ſolidi facilis eſt, præcedenti rectè intellecta. Cùm enim ſaltem tres lineæ in eodem non exiſtentes plano neceſſariæ ſint ad anguli ſolidi conſtitutionem, perſpicuum eſt, cùm minimum tres planos angulos requiri, vt angulus ſolidus efficiatur, vt ex ſuperiori figura apparet. Angulus enim B A D, in plano eſt, in quo rectæ A B, A D; & angulus D A C, in plano, in quo rectæ A D, A C; angulus denique C A B, in plano, in quo recta A C, A B; atque ita ex ipſis angulus ſolidus ad punctum A, conſtituitur. Quòd ſi tres, vel plures anguli plani ad vnum punctum conſiſtant, in eodem tamen plano, non conſtituetur ex ipſis angulus ſolidus, ſed totus quidam angulus planus, vt ſuprà diximus de lineis in eadem ſuperficie exiſtentibus. Neque verò ſatis ſunt duo anguli plani ad conſtituendum angulum ſolidum, etiamſi in diuerſis ſint planis. Hiabit enim ſemper ex altera parte. Vnde neceſſe eſt, vt tertia ſaltem ſuperficies accedat, in qua tertius angulus planus conſiſtat. Anguli porrò ſolidi exemplum clariſſimũ nobis præbent duo parietes cum pauimento domus, vel laqueari, ad vnum punctum conuenientes. In eo enim puncto, in quo coëunt, conſtituitur angulus ſolidus ex tribus angulis planis. Vbi manifeſtum eſt, ſi vna earum ſuperficierum tollatur, deſtrui angulum ſolidum, remanere q; tantùm duas ſuperficies ad inuicem inclinatas, & hiantes.

EX his verò perſpicuum cuiuis erit, illos angulos ſolidos inter ſe eſſe æquales, qui continentur angulis planis & multitudine, & magnitudine æqualibus. Nam huiuſmodi anguli ſibi mutuò congruent, ſi ſeſe penetrare intelligantur. Quemadmodum autem in primo libro, Euclides ex omnibus angulis planis ſolùm rectilineum aſſumpſit, ita hic ex omnibus eum duntaxat definit, quem plures lineæ rectæ quàm duæ, vel plures anguli plani rectilinei comprehendunt. Non enim comprehenditur hac definitione angulus coni, qui vnica ſu-

perficie curua continetur; neque is, qui continetur duabus superficiebus, vna quidem plana, altera verò curua; qualis est, qui fit, si conus per verticem secetur.

XII.

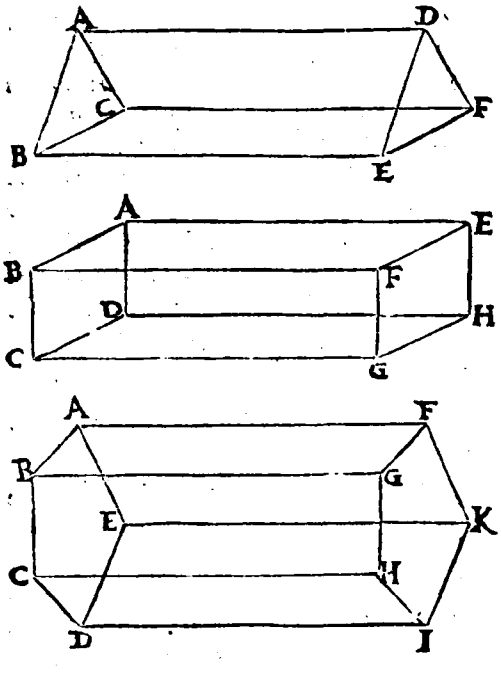
PYRAMIS est figura solida, quæ planis continetur, ab vno plano ad vnum punctum constituta.



VIDELICET figura solida à planis ABC, ABCD, ABCDE, ad puncta D, E, F, constituta, appellantur pyramides. Perspicuum autem est, omnia plana, quibus pyramis continetur, esse triangula, cùm omnia ad vnũ punctum tendant; excepto plano, à quo omnia tendunt, quodq; puncto illi est oppositum. Hoc enim potest esse vel triangulum, vel quadrangulum, vel pentagonum, &c. à quo quidem tota pyramis denominationem sumit; vt videlicet dicatur pyramis triangula, quadrangula, pentagona, hexagona, &c. Tot enim trianguli qualibet pyramis comprehenditur, quot angulos, seu latera planum dictum continet. Vnde & planum huiusmodi, basis pyramidis nuncupari solet. Vt pyramidis triangularis, præter basin, triangula sunt ABD, ACD, BCD: Quadrangula verò ABE, ADE, BCE, CDE: Pentagona denique ABF, AEF, BCF, CDF, EDF.

XIII.

PRISMA est figura solida, quæ planis continetur, quorum aduersa duo sunt & æqualia, & similia, & parallela, alia verò parallelogramma.



FIGVRAE scilicet solidæ, quarum plana aduersa, & æqualia, & similia, & parallela sunt triangula ABC, DEF: vel quadrangula ABCD, EFGH: vel pentagona ABCDE, FGHIK, &c. Parallelogramma verò ACFD, ABED, CBEF: vel ABFE, ADHE, CDHG, CBFG: vel ABGF, AEKF, DEKI, DCHI, BCHG; dicuntur prismata. Itaque prisma nil aliud erit, quàm columna quædam laterata æqualis crassitudinis, cuius bases oppositæ sunt æquales, similes, & parallelæ, siue hæ sint triangula, siue quadrangula, siue pentagona, &c. Vnde tot parallelogramma continebit prisma quodlibet, quot latera, siue anguli, in vno quoque oppositorum planorum reperiuntur, vt figura indicant.

EX his manifestum est, quantum hallucinentur ij, inter quos est & Campanus, qui prisma intelligunt esse eam figuram solidam duntaxat, cuius duo plana aduersa parallela, æqualia, similiáque, triangula sunt; reliqua verò tria parallelogramma. Quam quidem figurã solidam Campanus vocat Corpus serratile. Cùm enim hæc figura sit solùm vna species prismatis, definitio autem tradita infinita alia genera prismatis amplectatur, vt constat; præsertim quòd plurima demonstrationes in hoc libro, & duodecimo sequenti, ex æquo omnibus prismatibus conueniunt; perspicuum est eos hallucinari, qui vnum tantùm prismatis genus ex hac definitione colligunt. Sumpserunt autem fortasse hi auctores occasionem errandi, quòd Euclides & in propositione vltima huius libri, & in tertia, quarta, & quinta propositione, libri duodecimi, solùm de eo prismate loquatur, quòd duo aduersa plana habet triangula. Non autem animaduerterunt, septimam propositionem libri duodecimi illis aduersari, in qua Euclides loquens de prismate, mentionem facit duorum triangulorum oppositorum, eo quòd tali prismati solùm demonstratio illa conueniat. Quòd si sola ea figura, vt ipsi volunt, prisma appellaretur ab Euclide, frustrà dixisset: Omne prisma trigonam habens basin, &c. cùm nullum aliud prisma daretur. Immò in corollario dictæ propositionis septimæ infert Theon, Pyramidem esse tertiam partem prismatis eandem cum illa basin habentis, & altitudinem æqualem, licet duo plana prismatis aduersa non sint triangula, sed alia quæuis rectilinea, æqualia tamen & similia.

ſimilia, vt vult definitio. Ex quo loco luce clarius colligitur, infinita eſſe priſmatum genera ſecundùm Theonem, atq; adeò ſecundùm Euclidem, cùm communi omnium ſententia demonſtrationes Theoni aſcriptæ, ſint Euclidis. Accedit etiam, quòd à Theone in demonſtratione propoſ. 10. lib. 12. apertiſſimè appellantur priſmata omnia ſolida, quæ habent duo plana aduerſa & æqualia, & ſimilia, ſiue ea ſint triangula, & quadrata, ſiue multangula, reliqua verò parallelogramma.

XIIII.

SPHAERA eſt, quando, ſemicirculi manente diametro, circumductus ſemicirculus in ſeipſum rurſus reuoluitur, vnde moueri cœperat, circumaſſumpta figura.

SICVT linea recta circa alterum eius extremum quieſcens reuoluta deſcribit circulum; ita & ſemicirculus circa alterum eius extremum, nempe circa diametrum, circumductus figuram deſcribit, quam Geometræ Sphæram appellant. Vnde quemadmodum in circulo punctum aſſignatur, extremum videlicet illud quieſcens, à quo omnes lineæ rectæ in peripheriam cadentes ſunt æquales; propterea quòd omnes æquales exiſtunt illi lineæ circumuolutæ: Ita quoque in ſphæra punctum reperitur, nempe medium diametri quieſcentis, hoc eſt, centrum ſemicirculi circumducti, à quo omnes rectæ cadentes in peripheriam ſunt æquales; eo quòd omnes ſunt ſemidiametro dicti ſemicirculi æquales. Quapropter ad ſimilitudinem definitionis circuli, ſphæra definiri poterit hoc etiam modo.

SPHAERA eſt figura ſolida, vna ſuperficie comprehẽſa, ad quam ab vno puncto eorum, quæ intra figuram ſunt poſita, cadentes omnes rectæ lineæ inter ſe ſunt æquales.

CICERO in libro de Vniuerſitate de mundo loquens, eleganter hanc definitionem expreſſit, his verbis: Ergo globoſus eſt fabricatus, quod σφαιροειδὲς Graci vocant, cuius omnis extremitas paribus à medio radiis attingitur.

XV.

AXIS autem ſphæræ, eſt quieſcens illa recta linea, circum quam ſemicirculus conuertitur.

XVI.

CENTRVM ſphæræ eſt idem, quod & ſemicirculi.

XVII.

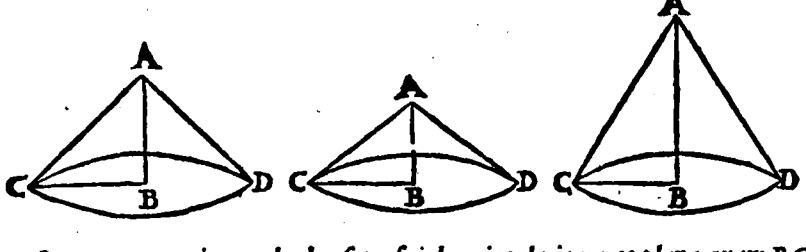
DIAMETER autem ſphæræ, eſt recta quædam linea per centrum ducta, & vtrinque à ſphæræ ſuperficie terminata.

HAE tres definitiones non egent expoſitione; dummodò hoc ſolùm notetur, omnem diametrum ſphæræ poſſe eſſe axem, ſi nimirum circum eam ſphæra reuoluatur. Vnde quia in deſcriptione ſphæræ circa diametrum ſemicirculi factus eſt motus ipſius ſphæræ; propterea eam ſolam Euclides axem ſphæræ nominauit.

XVIII.

CONVS eſt, quando rectanguli trianguli manente vno latere eorum, quæ circa rectum angulum, circumductum triangulum in ſe ipſum rurſus reuoluitur, vnde moueri cœperat, circumaſſumpta figura.

ATQVE ſi quieſcens recta linea æqualis ſit reliquæ, quæ circa rectum angulum conuertitur, Orthogonius erit conus: Si verò minor, Amblygonius: Si verò maior, Oxygonius.



VT ſi triangulum rectangulum A B C, circa latus quieſcens A B, quod eſt circum rectum angulum, circumducatur, donec integram reuolutionẽ expleat, deſcribetur ſolida quædam figura, quæ continetur duabus ſuperficiebus, circulari vna, ac plana, quam B C, latus alterum circa angulum rectum, ſuo motu deſcribit; & curua alia, eaq; conuexa, quam latus A C, recto angulo oppoſitum delineat. Hæc igitur figura ſolida, conus nuncupatur. Campanus autem pyramidem rotundam appellat.

QVOD ſi latus quieſcens A B, æquale fuerit circumducto B C, vt in prima figura, dicetur conus deſcriptus Orthogonius, ſeu rectangulus, quia videlicet angulus prope verticem A, rectus eſt. Cùm enim latera A B, B C, ponantur æqualia; [a] erunt & anguli B A C, B C A, æquales; qui cùm æquiualeant vni recto, eo quòd A B C, rectus eſt; erit angulus B A C, ſemirectus. Eodémque modo angulus B A D, ex parte oppoſita

a 5. primi.

ſemirectus erit. Quare totus angulus C A D, rectus erit. Si verò quieſcens latus A B, minus fuerit circumducto B C, vt in ſecunda figura, vocabitur deſcriptus conus Amblygonius, ſeu obtuſangulus; quoniam ſcilicet an-

a 18. primi. *gulus ad verticem A, obtuſus exiſtit. Cùm enim B C, latus latere A B, ſit maius; [a] erit angulus B A C, maior angulo B C A. Quare cùm hi duo æquipolleant vni recto, propterea quòd angulus A B C, ponitur rectus, erit B A C, ſemirecto maior. Similiter B A D, maior erit ſemirecto; atque adeò totus C A D, recto maior erit. Si denique quieſcens latus A B, maius fuerit circumducto B C, vt in tertia figura, appellabitur conus deſcriptus Oxygonius, ſeu acutangulus; quia nimirum angulus ad verticem A, acutus eſt. Cùm enim latus A B, maius ſit*

b 18. primi. *latere B C, [b] erit & angulus B C A, angulo B A C, maior. Quapropter cũ hi duo vni recto æquiualeant, quòd angulus A B C, rectus ponatur, erit B C A, ſemirecto maior, ideoq; reliquus B A C, ſemirecto minor. Non ſecus oſtendetur angulus B A D, minor eſſe ſemirecto. Igitur totus C A D, recto erit minor.*

X I X.

AXIS autem coni, eſt quieſcens illa linea, circa quam triangulum vertitur.

VT in quolibet cono ſuperius deſcripto, axis eſt recta quieſcens A B.

X X.

BASIS verò coni eſt circulus, qui à circumducta linea recta deſcribitur.

NIMIRVM circulus, qui deſcribitur ab altero latere circa rectum angulum, quale eſt B C, in ſuperioribus conis. Itaq; huius circuli ſemidiameter eſt ipſum latus circumductum.

QVONIAM verò Euclides ſolùm definiuit conum rectum, cuius videlicet axis rectus eſt ad baſin; Non autem inclinatum, cuius axis ad baſim rectus non eſt; placuit ex Apollonio Pergæo adducere generalem coni deſcriptionem, quæ & rectum, & inclinatum comprehendat; propterea quòd in 12. lib. eadem ferè demonſtrari poſſunt de cono inclinato, quæ Euclides de recto cono oſtendit, vt ibi docebimus. Ita igitur ſcribit Apollonius ad initium conicorum elementorum.

SI ab aliquo puncto ad circumferentiam circuli, qui nõ ſit in eodem plano, in quo punctum, coniuncta recta linea in vtramque partem producatur; & manente puncto, conuertatur circa circuli circumferentiam, quouſque ad eum locum redeat, à quo cœpit moueri: Superficiem à recta linea deſcriptam, conſtantemq; ex duabus ſuperficiebus ad verticem inter ſeſe aptatis, quarum vtraque in infinitum augetur, nimirum recta linea, quæ eam deſcribit, in infinitum producta, voco conicam ſuperficiem.

VERTICEM ipſius, manens punctum.

AXEM, rectam lineam, quæ per punctum, & centrum circuli ducitur.

CONVM autem voco figuram contentam circulo, & conica ſuperficie, quæ inter verticem, & circuli circumferentiam interiicitur.

VERTICEM coni, punctum, quod & ſuperficiei conicæ vertex eſt.

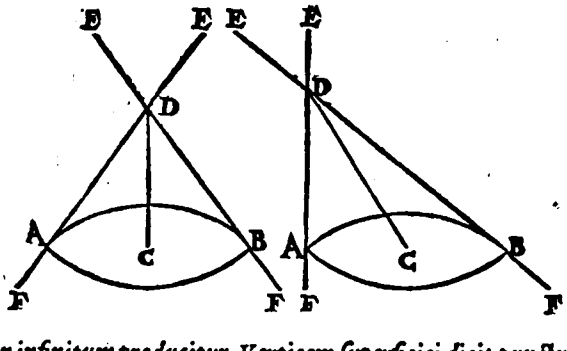
AXEM, rectam lineam, quæ à vertice ad circuli centrum producitur.

BASIM, circulum ipſum.

CONORVM, Rectos quidem voco, qui axes habent ad rectos angulos ipſis baſibus.

SCALENOS verò, qui non ad rectos angulos ipſis baſibus axes habent.

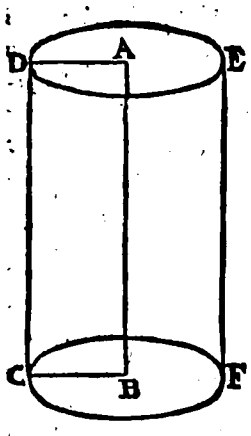
HAEC autem omnia ita explicat Eutocius in Commentarijs, quos in Apollonium ſcripſit.



SIT circulus A B, cuius centrum C, & punctum aliquod ſublime D; iunctaq; D B, in infinitum ex vtraque parte producatur ad puncta E, F. Si igitur recta linea D B, feratur eouſque in circuli A B, circumferentia, quouſque punctum B, rurſus in eum locum reſtituatur, à quo cœpit moueri: deſcribet ſuperficiem quandam, quæ quidem conſtat ex duabus ſuperficiebus ad D, punctũ ſeſe tangentibus. Eam vocat Apollonius conicam ſuperficiem, quæ & augetur in infinitũ, cùm recta linea D B, ipſam deſcribens in infinitum producitur. Verticem ſuperficiei dicit punctum D. Axem, rectam D C. Conum verò appellat figuram contentam circulo A B, & ea ſuperficie, quam D B, ſola deſcribit. Coni verticem, punctum D, Axem D C. Baſim A B, circulum. Quòd ſi D C, ad circulum fuerit perpendicularis, Rectum vocat conum: Sin minus, Scalenum.

X X I.

CYLINDRVS eſt, quando rectanguli parallelogrammi manẽte vno latere eorum, quæ circa rectum angulum, circumductum parallelogrammum in ſe ipſum rurſus reuoluitur, vnde cœperat moueri, circumaſſumpta figura,



VELVTI si rectangulum parallelogrammum A B C D, circa latus quiescēs A B, circumuoluatur, donec integram expleat reuolutionem, appellabitur figura descripta cylindrus, quæ quidem tribus superficiebus continetur, duabus videlicet planis circularibus, quas latera A D, B C, describūt; & altera curua, eaq; conuexa, quam latus C D, describit, instar columna alicuius rotunda. Vnde factum est, vt Campanus cylindrum appellauerit columnam rotundam.

XXII.

AXIS autem cylindri, est quiescens illa recta linea, circum quam parallelogrammum conuertitur.

NEMPE recta A B, in superiori figura, dicetur axis cylindri.

XXIII.

BASES verò cylindri sunt circuli à duobus aduersis lateribus, quæ circumaguntur, descripti.

QVALES sunt circuli à lateribus A D, B C, oppositis descripti.

EVCLIDES porrò solùm cylindrum rectum hoc loco definit, cuius videlicet axis rectus est ad vtramque basim; atq; de hoc solùm in lib. 12. est disputaturus. Cùm igitur nos eadem ferè theoremata, ex alijs Geometris simus proposituri in eodem 12. lib. de cylindro inclinato, quæ Euclides de cylindro recto demonstrauit, visum est prius ex Sereno Antinsensi definire cylindrum vniuersè, vt complectatur tam rectum, quam inclinatum. Sic igitur scribit Serenus ad initium primi libri de Sectione cylindri.

SI duorum circulorum æqualium, & æquidistantium diametri semper inter sese æquidistantes & ipsæ in circulorum planis circa manens centrum circumferantur, & simul circumferatur recta linea, diametrorum terminos ex eadem parte coniungens, quosque rursus in eum locum restituatur, à quo moueri cœpit: Superficies, quæ à circumlata recta linea describitur, cylindrica superficies vocetur; quæ quidem & in infinitum augeri potest, linea ipsa describente in infinitum producta.

CYLINDRVS est figura, quæ circulis æquidistantibus, & cylindrica superficie inter ipsos interiecta continetur.

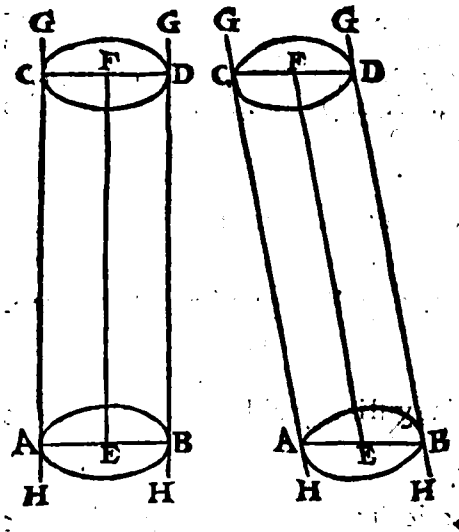
CYLINDRI bases sunt circuli ipsi.

AXIS, recta linea, quæ per circulorum centra ducitur.

LATVS autem cylindri, linea, quæ cùm recta sit, & in superficie ipsius cylindri, bases vtrasque contingit; quam & circumlatam, cylindri superficiem describere antea diximus.

CYLINDRORVM, Recti quidem dicantur, qui axem habent ad rectos angulos existentem ipsis basibus.

SCALENI autem, qui non ad rectos angulos existentem ipsis basibus axem habent.

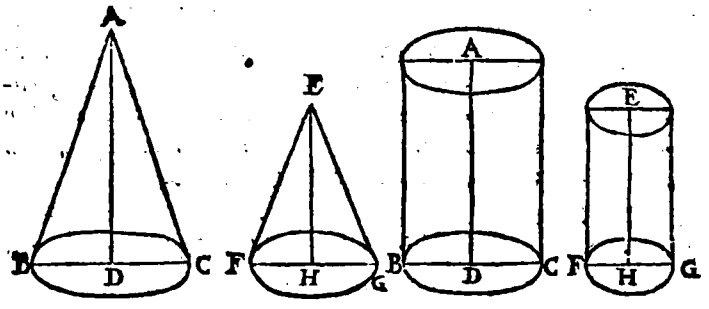


SINT duo circuli æquales, & æquidistātes A B, C D, quorum centra E, F, & diametri æquidistantes quoque A B, C D: iunctaq; recta A C, in infinitum ex vtraque parte producatur ad puncta G, H. Si igitur diametri A B, C D, circa centra E, F, in planis circulorū semper æquidistantes, vnà cum recta A C, circumducantur, donec ad eum locum restituantur, vnde moueri cœperunt; describetur à linea A C, superficies quædam rotunda, quam Serenus cylindricam vocat; quæ & augetur in infinitum, cùm recta A C, ipsam describens in infinitum producitur. Cylindrum verò appellat figuram A B D C, circulis A B, C D, & cylindrica superficie inter ipsos interiecta, quam videlicet sola A C, describit, comprehensam. Bases cylindri dicit esse circulos A B, C D. Axem, rectam E F, quæ circulorum centra coniungit. Latus cylindri, rectam A C. Quòd si axis E F, perpendicularis fuerit ad bases, rectum vocat cylindrum: Sin minus, Scalenum.

XXIIII.

SIMILES coni & cylindri sunt, quorum & axes, & basium diametri proportionales sunt.

RECTE Euclides similitudinem conorum, atque cylindrorum ab eorum axibus, & basium diametris sumit. Diametri enim basium indicant conos & cylindros secundùm duas dimensiones esse similes, longitudinem scilicet ac latitudinem; Axes verò eosdem secundùm profunditatem, seu altitudinem similes esse de-



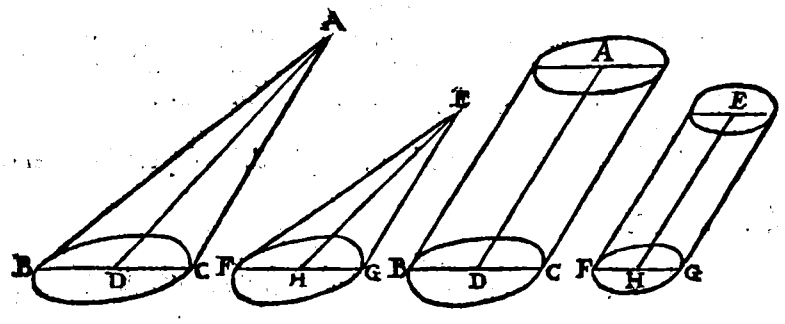
monſtrant. Sint enim duo coni A B C, E F G; Item duo cylindri, in conis autem axes A D, E H, & baſium diametri B C, F G; ſimiliter & in cylindris. Itaque ſi fuerit, vt axis A D, ad axem E H, ita B C, diameter baſis ad F G, diametrum baſis, dicentur tam coni, quàm cylindri ſimiles inter ſe; quia videlicet hac ratione tam ſecundùm longitudinem et latitudinẽ ſimiles ſunt, quàm ſecundùm profunditatem, vt diximus, nempe omnes eorum tres dimenſiones proportionales ſunt: Vel etiam, quia triangula A D B, E H F, ex quorum reuolutione deſcripti ſunt coni, nec non rectangula A B, E F, quorum conuerſiones cylindros effecerunt, hac ratione ſimilia inter ſe erunt. Cùm enim ſit vt A D, ad E H, ita

a 15. quinti. *B C, ad F G; Sit autem vt B C, ad F G, [a] ita dimidia B D, ad dimidiam F H; erit quoque vt A D, ad E H, ita D B, ad H F: & permutando vt A D, ad D B, ita E H, ad H F. Quare tam in triangulis, quàm in rectangulis latera, circum æquales angulos, nempe rectos, proportionalia ſunt; ac propterea & triangula & rectangula*

b 6. ſexti. *ſimilia inter ſe erunt: Triangula quidem, [b] propterea quòd triangula vnum angulum vni angulo habentia æqualem, & circum æquales angulos latera proportionalia, æquiangula ſunt, [c] ideoq; latera omnia circa angulos æquales habent proportionalia, atque adeò inter ſe ſimilia exiſtunt: Rectangula verò, [d] eo quòd*

c 5 ſexti.

d 34. primi. *reliqua duo latera duobus lateribus A D, D B, ſunt æqualia, oppoſita oppoſitis, ac propterea eandem cum his proportionem habent.*



QVOD ſi coni, vel cylindri fuerint inclinati, (de rectis enim duntaxat Euclides verba fecit.) dicentur ij tum demum ſimiles, quando eorum axes, et diametri baſium erunt proportionales, angulique inclinationum, quos axes efficiunt, æquales: qui quidem anguli accipiendi ſunt, vt in defin. 5. dictum eſt. Sint enim coni inclinati, ſimiliter & cylindri A B C, E F G: In conis autẽ axes ſint A D, E H, & baſium diametri B C, F G; ſimiliter & in cylindris. Itaq; ſi fuerit tam in conis, quàm in cylindris, vt A D, ad E H, ita B C, ad F G, extiterintq; anguli inclinationum A D B, E H F, tam in conis, quàm in cylindris, æquales inter ſe; dicentur & coni inter ſe, & cylindri quoque inter ſeſe ſimiles; quoniam nimirum hac ratione & tres eorum dimenſiones ſunt proportionales, vt ſuprà diximus, & rurſus tam triangula A D B, E H F, quàm rectangula A B, E F, quorum conuerſiones conos, & cylindros effecerunt, inter ſe ſimilia ſunt, veluti in rectis conis, cylindriſq; demonſtrauimus. Eſt enim prorſus eadem demonſtratio, cùm anguli A D B, E H F, ponantur æquales, licèt non ſint recti.

XXV.

CVBVS eſt figura ſolida, ſub ſex quadratis æqualibus contenta.

XXVI.

TETRAEDVM eſt figura ſolida, ſub quatuor triangulis æqualibus, & æquilateris contenta.

XXVII.

OCTAEDRVM eſt figura ſolida, ſub octo triangulis æqualibus, & æquilateris contenta.

XXVIII.

DODECAEDRVM eſt figura ſolida, ſub duodecim pentagonis æqualibus, & æquilateris, & æquiangulis contenta.

XXIX.

ICOSAEDRVM eſt figura ſolida, ſub viginti triangulis æqualibus, & æquilateris contenta.

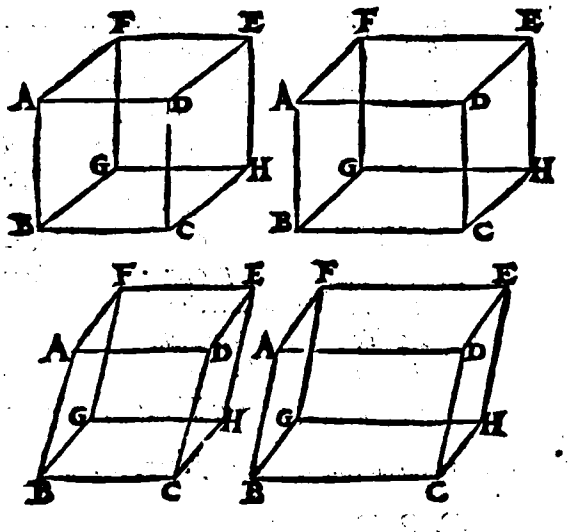
HAEC ſunt quinque corpora, quæ regularia vocantur, quòd omnia plana, quibus continentur, æqualia ſint,

sint, æquilatera, & æquiangula, vt ex eorum definitionibus constat. A nonnullis corpora Platonica dicuntur, propterea quòd Plato in Tymæo quinque mundi corpora, quæ simplicia à Philosophis nuncupantur, nempe Cœlum, Ignem, Aërem, Aquam, atque Terram, quinque hisce corporibus assimilat, vt in sphæra Ioannis à Sacro Bosco latius explicauimus. Horum omnium constructio tradetur lib. 13. Cubi quidem propos. 15. Tetraëdri verò propos. 13. Octaëdri deinde propos. 14. Dodecaëdri autem propos. 17. Icosaëdri denique propos. 16 Vbi planius perfectiusq; definitiones horum corporum intelligentur. In plano enim difficillimum est, ea ita depingere, vt veram eorum effigiem, atque formam quis intueatur. Trademus tamen proprijs in locis praxes admodum faciles, quibus ea quilibet secundùm eorum soliditatem possit conficere. Neque verò aliud corpus regulare, præter quinque illa, dari potest, vt demonstrabimus ad finem lib. 13.

Qvoniam verò frequens hoc lib. 11. fit mentio Parallelepipedi, & lib. 15. agitur de mutua inscriptione, circumscriptioneq; corporũ regularium; necessarium esse duximus, tribus definitionibus explicare, quidnam sit Parallelepipedum, quidq; sit figuram solidam in figura solida inscribi, vel circa eandem describi.

XXX.

PARALLELEPIPEDVM est figura solida sex figuris quadrilateris, quarum, quæ ex aduerso, parallelæ sunt, contenta.



Velvti solida figura comprehẽsa sex quadrilateris A B C D, D E F A, A B G F, F G H E, E D C H, H C B G, quarũ oppositæ A C, F H; Item D F, C G; Item A G, D H, sunt parallelæ, nominantur parallelepipeda, quasi parallelis planis comprehensa: qua quidem plana parallela opposita, sunt & æqualia, & similia, & parallelogramma, vt demonstrabitur propos. 24. huius libri.

Svnt autem tot parallelepipedorũ genera, quot parallelogrammorum. Si enim sex parallelogramma fuerint æquilatera, & rectangula, hoc est, quadrata, dicetur parallelepipedũ illud, cubus, respondebitq; quadrato in planis figuris: Si autem sex parallelogramma fuerint quidem rectangula, at non omnia æquilatera, sed altera parte longiora, quamuis duo sint æquilatera, appellabitur parallelepipedum altera parte longius. Quòd si sex parallelogramma extiterint, æquilatera quidem, sed non omnia rectangula, quamuis duo sint rectangula, vocabitur parallelepipedum illud, Rhombus. Si denique sex parallelogrammaneq; rectangula fuerint omnia, neque omnia æquilatera, quamuis duo sint rectangula, & æquilatera, vel rectangula tantùm, vel æquilatera tantùm, fuerint tamen parallelogramma, quæ ex aduerso, æqualia; parallelepipedum tale Rhomboides nuncupabitur. Cæterùm quodcunq; parallelepipedum vocari etiã poterit Prisma, vt ex defin. prismatis constat.

XXXI.

SOLIDA figura in solida figura dicitur inscribi, quando omnes anguli figuræ inscriptæ constituuntur vel in angulis, vel in lateribus, vel denique in planis figuræ, cui inscribitur.

XXXII.

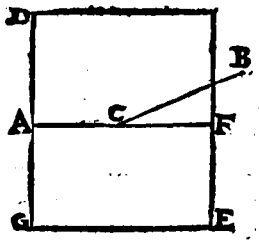
SOLIDA figura solidæ figuræ vicissim circumscribi dicitur, quando vel anguli, vel latera, vel denique plana figuræ circumscriptæ tangunt omnes angulos figuræ, circum quam describitur.

Non est necesse, vt anguli interioris figura constituantur in omnibus vel angulis, vel lateribus, vel planis exterioris figuræ, cùm interdum figura exterior plures, interdum pauciores angulos contineat, vel latera, vel plana, quàm interior: sed satis est, vt omnes anguli figuræ interioris tangant vel aliquot angulos, vel aliquot latera, vel denique aliquot plana exterioris figuræ; ita vt nullus angulus figuræ interioris intactus relinquatur vel ab angulis, vel à lateribus, vel denique à planis figuræ exterioris.

Verum duabus postremis definitionibus planius percipientur ex lib. 15. in quo de inscriptionibus, circumscriptionibusq; mutuis corporum regularium copiosè agetur.

THEOR. 1. PROPOS. 1.

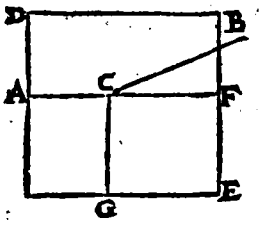
RECTÆ lineæ pars quædam non est in subiecto plano, quædam verò in sublimi.



SIT enim, si fieri potest, rectæ lineæ AB, pars quidem AC, in subiecto plano DE, pars verò CB, in sublimi, ita vt omnia puncta partis AC, in plano DE, iaceant, puncta verò omnia partis CB, supra planum DE, existant, vel infra. Erit igitur in plano DE, ipsi AC, rectæ lineæ continua quædam recta linea in directum posita, nempe CF. Quamobrem duæ rectæ AB, AF, commune habent segmentum AC. quod est absurdum, vt in pronunciato 10. libri 1. demonstrauimus. Rectæ igitur lineæ pars quædam non est in subiecto plano, quædam verò in sublimi. Quod erat demonstrandum.

SCHOLIVM.

HAEC est communis demonstratio interpretum. Sed fortasse dicet aliquis, in ea aliquid desiderari, nempe vt ostendatur, rectæ AC, esse aliquam rectam in plano DE, in directum, & continuum positam. Qui enim concedit, rectæ AB, partem quidem AC, esse in plano DE, partem verò CB, in sublimi, vtique negabit, rectæ AC, in plano DE, dari posse aliam rectam in continuum, & directum, quandoquidem rectam CB, in rectum & continuum positam esse fatetur ipsi AC. Veruntamen ei, qui sic dubitat, respondendum est, rectam quamlibet finitam in quouis plano datam, posse in eodem vlterius produci in rectum & continuū, cùm plana superficies sit illa, quæ ex æquali suas interiacet lineas, hoc est, quæ recte & æqualiter semper extenditur, vt & linea recta. Quamobrem si AC, in plano DE, producatur vsque ad F, erit CF, recta rectæ AC, in continuum & directum posita. Verùm demonstremus iam id ipsum Geometricè, in plano videlicet DE, ipsi AC, dari posse aliam rectam, quæ cum ipsa vnam rectam lineam constituat, quamuis quis dicat, AB, esse



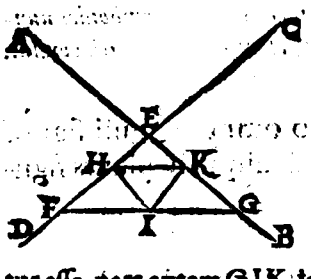
a 11. primi. *quoque rectam, eiusq; partem AC, in plano DE, partem verò CB, in sublimi esse positam. a Ducatur enim in plano DE, ipsi AC, perpendicularis CG; & in eodem plano ipsi CG, perpendicularis CF. Dico CF, esse ipsi AC, positam in continuum & rectum. Cùm enim AC, & FC, in eodem plano DE, cum recta CG, duos*

b 14. primi. *rectos angulos constituant ACG, FCG, ex constructione; b erunt AC, & FC, in directum & continuum positæ. Quamobrem etiamsi quis contendat, AB, esse rectam, cuius quidem pars AC, in plano DE, subiecto, pars autem CB, in sublimi sit constituta; tamen in eodem plano DE, erit alia recta, nempe CF, quæ cum AC, vnam rectam constituat lineam; atque adeò duæ rectæ AB, AF, segmentum commune habebunt AC. Quod est absurdum.*

HINC fit, omnes partes cuiusuis rectæ lineæ, hoc est, totam rectam lineam, in vno existere plano.

2. THEOR. 2. PROPOS. 2.

SI duæ rectæ lineæ se mutuò secent, in vno sunt plano. Atque triangulum omne in vno est plano.



RECTAE lineæ AB, CD, se mutuò secent in E, & in EB, ED, sumptis punctis F, & G, vtcumque ducatur recta FG, vt fiat triangulum EFG. Dico triangulum EFG, in vno esse plano; Item rectas AB, CD, in vno quoq; plano existere. Si enim trianguli EFG, pars quædam, nimirum EHIG, in plano vno existat, & pars quædam, nempe reliqua FHI, in sublimi, vel contrà: Existent quoque rectarum BF, GF, partes quidē EH, GI, in vno plano, partes verò HF, IF, in sublimi, vel contrà, quod fieri non posse, iam suprà a demonstratum est.

a 1. vndec. Quòd si eiusdem trianguli pars quidem EFIK, in vno plano credatur esse, pars autem GIK, in sublimi, vel contrà; erunt eadem ratione rectarum EG, FG, partes quidem EK, FI, in vno plano, partes verò KG, IG, in sublimi, vel contrà. Si denique eiusdem trianguli pars quidem FHKG, in vno concedatur esse plano, pars verò EHK, in sublimi, vel contrà, erunt quoque rectarum FE, GE, partes quidem FH, GK, in vno plano, partes autem HE, KE, in

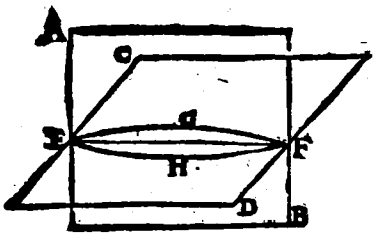
b 1. vndec. sublimi, vel contrà. Quæ omnia absurda sunt, b vt est demonstratum. Quare triangulum EFG, in vno plano existit; eademque est ratio in omni alio triangulo.

c 1. vndec. QVIA verò, in quo plano est triangulum EFG, in eodem existunt eius latera EF, EG. In quo autem sunt rectæ EF, EG, c in eodem sunt rectæ totæ CD, AB, ne partes quædam in plano, partes verò aliæ in sublimi dicantur esse; Erunt propterea rectæ AB, CD, in vno plano, in quo nimirum triangulum EFG, consistere demonstrauimus. Quocirca si duæ rectæ lineæ se mutuò secent, in vno sunt plano. Atque triangulum omne in vno est plano. Quod erat demonstrandum.

3. THEOR. 3. PROPOS. 3.

SI duo plana se mutuò secent, communis eorum sectio est linea recta.

SECANT se mutuò plana AB, CD, sitque communis eorum sectio EF. Dico EF, esse lineam rectam.

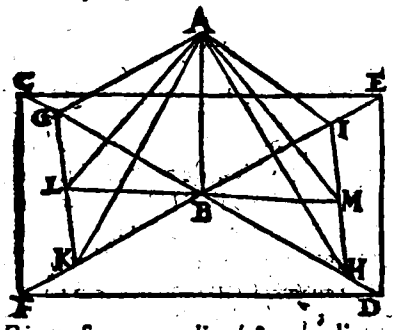


rectam. Si enim nõ credatur esse recta, ducatur in plano AB, recta EGF, & in plano CD, recta EHF. Rectæ igitur EGF, EHF, cùm eosdem habeant terminos E, & F, superficiem includent. Quod fieri non potest, vt in 14. pronunciato 1. libri ostendimus. Communis ergo sectio EF, recta erit linea; Ac proinde si duo plana se mutuò secent, communis eorum sectio est linea recta. Quod erat ostendendum.

ALITER. Secent se rursus plana AB, CD, sintque termini sectionis communis E, & F, puncta, quæ connectantur recta EF. Si igitur recta EF, in vtroque plano existit, constat propositum: Ipsa enim erit communis sectio. Si verò EF, recta in neutro eorum dicatur esse, tunc si in alterutro eorum recta ducatur EGF, concludent rursus duæ rectæ EF, EGF, superficiem, cùm eosdem habeant terminos E, & F. Si denique recta EF, in altero tantùm plano esse credatur, tunc si in altero ducatur recta EGF; includent iterum duæ rectæ EF, EGF, superficiem. Quod est absurdum. Est ergo recta EF, in vtroque plano AB, CD; atque adeò communis eorum sectio est.

THEOR. 4. PROPOS. 4. 4.

SI recta linea rectis duabus lineis se mutuò secantibus, in communi sectione ad rectos angulos insistat: Illa ducto etiam per ipsas plano ad angulos rectos erit.



RECTA linea AB, insistat duabus rectis CD, EF, ad rectos angulos in communi earum sectione B. Dico rectam AB, ad angulos quoq; rectos esse plano, quod per ipsas ducitur, seu in quo existunt. Cùm enim se mutuò secent in B; [a] erunt ipsę in vno plano, quod sit CEDF. Sumantur inter se æquales rectæ BG, BH; Item rectæ BI, BK; ducanturq; rectæ GK, IH; & in eodem plano per B, ducatur recta LM, secans rectas GK, IH, in punctis L, & M. Demittantur quoque ex A, puncto in sublimi ad idem planũ rectæ AG, AL, AK, AH, AM, AI. Quoniam igitur latera BG, BK, trianguli BGK, lateribus BH, BI, trianguli BHI, ex constructione sunt æqualia; [b] & anguli quoque ipsis contenti GBK, HBI, cùm sint ad verticem B, oppositi, æquales: [c] Erunt bases GK, HI, inter se, & anguli BKG, BIH, inter se quoque æquales. a 2. vndec. b 15. primi. c 4. primi.

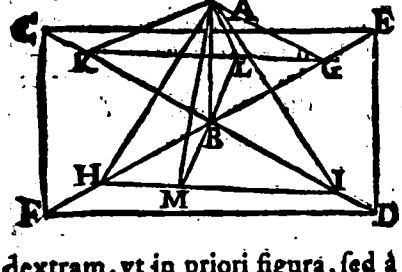
RVRSVS [d] cùm anguli KBL, IBM, ad verticem B, oppositi sint æquales; erunt duo anguli KBL, BKL, trianguli BKL, duobus angulis IBM, BIM, trianguli BIM, æquales; Sunt autem & latera BK, BI, quibus adiacent, æqualia, ex constructione. [e] Igitur & reliqua latera KL, LB, reliquis lateribus IM, MB, æqualia erunt. d 15. primi. e 26. primi.

PRAETEREA cùm latera AB, BG, trianguli ABG, æqualia sint lateribus AB, BH, trianguli ABH, ex constructione; & anguli ipsis contenti ABG, ABH, æquales, nempe recti, ex hypothesi, [f] erunt & bases AG, AH, æquales. Simili argumento æquales erunt rectæ lineæ AI, AK. f 4. primi.

AMPLIVS quia latera AI, IH, trianguli AIH, lateribus AK, KG, triãguli, AKG, æqualia sunt; & basis AH, basi AG, ex hactenus demonstratis; [g] erunt etiam anguli AIH, AKG, dictis lateribus comprehensi, æquales. g 8. primi.

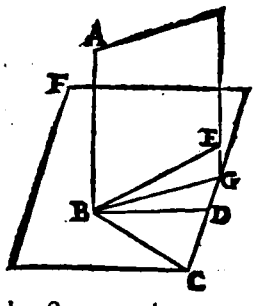
ITAQVE cùm latera AK, KL, trianguli AKL, æqualia sint lateribus AI, IM, trianguli AIM; & anguli ipsis contenti AKL, AIM, æquales etiam, vt hactenus demonstrauimus; [h] erunt quoque bases AL, AM, æquales. h 4. primi.

QVONIAM denique latera AB, BL, trianguli ABL, æqualia sunt lateribus AB, BM, trianguli ABM; & basis AL, basi AM, ex demonstratis; [i] erunt quoque anguli ABL, ABM, dictis lateribus comprehẽsi, æquales; qui cùm sint deinceps, recti erũt, ex definitione 10. lib. 1. Quare recta AB, rectos angulos efficit, cum recta LM, quæ in plano subiecto ipsam tangit in B: Eademque ratione ostendetur, rectam AB, cum omnibus rectis, quæ in eodem plano ipsam tangent in B, angulos rectos constituere, etiamsi inter puncta G, I, & K, H, ductę sint, dummodò rectæ GI, KH, iungantur: vel certè literæ disponantur, vt prius, quemadmodum in hac figura apparet, vbi eædem sunt literæ, & tamen LM, non ducitur à sinistra in dextram, vt in priori figura, sed à superiori parte versus inferiorem. Quocirca recta AB, plano CEDF, quod per rectas CD, EF, ducitur, ad rectos angulos erit, ex defin. 3. huius lib. Si recta igitur linea rectis duabus lineis se mutuò secantibus, &c. Quod demonstrandum erat. i 8. primi.



THEOR. 5. PROPOS. 5. 5.

SI recta linea rectis tribus lineis se mutuò tangentibus, in communi sectione ad rectos angulos insistat: Illæ tres rectæ in vno sunt plano.

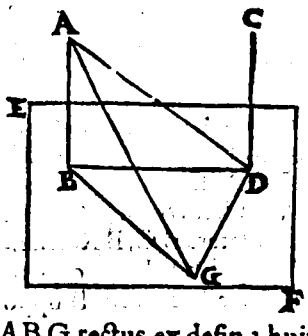


a 2. vndec.
b 2. vndec.
c 3. vndec.
d 4. vndec.

INSISTAT recta linea AB, tribus rectis lineis BC, BD, BE, se tangentibus in B, ad rectos angulos in communi earum sectione, seu tactu B. Dico tres rectas BC, BD, BE, in vno plano esse. [a] Cùm enim quælibet duæ in vno sint plano, propterea quòd productæ ad partes B, se mutuò secent in B; sint BC, BD, in plano FC; Et si fieri potest, recta BE, non ponatur in eodem plano, sed in sublimi. [b] Quoniam verò duæ rectæ AB, BE, in vno sunt plano; cùm se mutuò secent in B; sint ambæ in plano AE. Et quia plana FC, AE, sibi mutuò occurrunt in B; necessariò producta se mutuò secabunt. [c] Sit ergo eorum communis sectio recta BG. Quia verò recta AB, ad angulos rectos ponitur rectis BC, BD; [d] erit propterea & plano FC, per ipsas ducto ad rectos angulos; ac proinde ad rectos angulos erit rectæ BG, quæ ipsam in B, tangit, ex defin. 3. huius libri. Quare recti anguli ABE, ABG, existentes in plano AG, per rectas AB, BE, ducto, æquales inter se erunt, pars & totum. Quod est absurdum. Duabus igitur rectis BC, BD, in vno plano FC, existentibus, non erit BE, in sublimi, sed in eodem cum ipsis plano. Quocirca si recta linea rectis tribus lineis se mutuò tangentibus, &c. Quod erat ostendendum.

6. THEOR. 6. PROPOS. 6.

SI duæ rectæ lineæ eidem plano ad rectos sint angulos; Parallelæ erunt illæ rectæ lineæ.



e 4. primi.
f 8. primi.

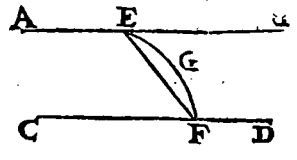
SINT duæ rectæ lineæ AB, CD, eidem plano EF, ad angulos rectos in punctis B, & D. Dico illas esse parallelas. Ducta enim recta BD, in plano EF, erunt anguli ABD, CDB, recti, ex defin. 3. huius libri. Iam in eodem plano EF, ducatur DG, ad BD, perpendicularis, ponanturq; æquales AB, DG. Connectantur deinde rectæ BG, GA, AD. Quoniam igitur latera AB, BD, trianguli BAD, æqualia sunt lateribus GD, DB, trianguli GDB, ex constructione; & anguli quoque ipsis contenti ABD, GDB, æquales, nempe recti; [e] erunt bases æquales AD, GB. Rursus quia latera AB, BG, trianguli ABG, æqualia sunt lateribus GD, DA, trianguli GDA; Est autem & basis communis AG; [f] Erunt anguli ABG, GDA, æquales: Est autem ABG, rectus, ex defin. 3. huius lib. Igitur & GDA, rectus erit. Quoniam verò ex eadem defin. angulus quoque GDC, rectus est; erit recta GD, tribus rectis DB, DA, DC, ad angulos rectos.

g 5. vndec.
h 2. vndec.
i 28. primi.

[g] Quare rectę DB, DA, DC, in vno erunt plano; hoc est, CD, erit in plano per rectas DB, DA, ducto: [h] Est autem AB, in eodem plano, in quo DB, DA. Recta igitur CD, in eodem erit cum AB, plano. Quocirca cùm anguli interni ABD, CDB, sint recti, [i] erunt rectæ AB, CD, parallelæ. Si duæ itaque rectæ lineæ eidem plano ad rectos sint angulos, &c. Quod erat demonstrandum.

7. THEOR. 7. PROPOS. 7.

SI duæ sint parallelæ rectæ lineæ, in quarum vtraque sumpta sint quælibet puncta: Illa linea, quæ ad hæc puncta adiungitur, in eodem est cum parallelis plano.



k 3. vndec.

IN parallelis AB, CD, sumantur vtcunque duo puncta E, & F, quę recta connectatur EF. Dico rectam EF, in eodem esse plano, in quo, per definitionem parallelarum, sunt parallelæ AB, CD. Si enim recta EF, non concedatur esse in eodem plano parallelarum, sed extrà: secet iam aliud planum superficiem parallelarum per puncta E, & F, sitque communis sectio horum planorum EGF, [k] quæ recta linea erit. Duæ igitur rectæ EF, EGF, cùm habeant eosdem terminos E, & F, superficiē claudent. Quod est absurdum. Non ergo extra planum parallelarum AB, CD, erit recta EF. Quare si duæ sint parallelæ rectæ lineæ, in quarum vtraque sumpta sint quælibet puncta: Illa linea, quæ ad hæc puncta adiungitur, in eodem est cum parallelis plano. Quod erat demonstrandum.

SCHOLIVM.

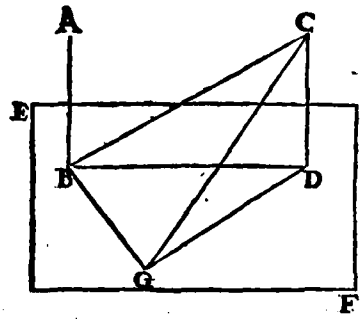
HAEC eadem propositio vera est, etiamsi duæ rectæ AB, CD, parallelæ non sint, dummodò in eodem plano existant, vt manifestum est ex demonstratione.

8. THEOR. 8. PROPOS. 8.

SI duæ sint parallelæ rectæ lineæ, quarum altera ad rectos cuidam plano sit angulos: Et reliqua eidem plano ad rectos angulos erit.

SINT parallelæ rectæ AB, CD; sitque CD, plano EF, ad angulos rectos. Dico & AB, eidem plano EF, esse ad rectos angulos. Ducta enim recta BD, in plano EF; erit per defin. 3. huius libri,

angulus

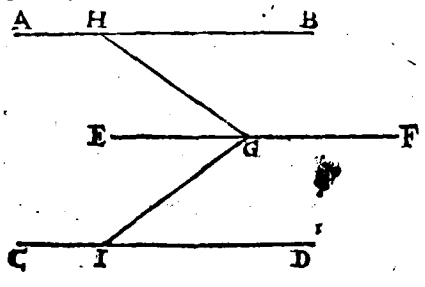


angulus CDB, rectus: [a] Sunt autem duo CDB, ABD, duobus rectis æquales. Igitur & ABD, rectus erit. Iam in plano EF, ducatur BG, perpendicularis ad BD; ponanturq; æquales BG, CD. Coniungãtur deinde rectæ DG, GC, CB. Quoniam igitur latera CD, DB, trianguli CDB, æqualia sunt lateribus GB, BD, trianguli GBD, ex constructione; & anguli quoque ipsis contenti, CDB, GBD, æquales, nimirum recti; [b] Erunt bases CB, GD, æquales. Rursus quia latera CD, DG, trianguli CDG, æqualia sunt lateribus GB, BC, trianguli GBC; & basis est cõmunis CG; [c] Erunt anguli CDG, GBC, dictis lateribus cõprehensi æquales. Est autem CDG, rectus ex defin. 3. huius lib. Igitur & GBC, rectus erit. Quare recta GB, duabus rectis BD, BC, se mutuò secantibus in B, (Si namque producerentur DB, CB, secarent sese in B, ob angulum CBD.) ad rectos angulos existit; [d] ac proinde ad rectos angulos erit plano per BD, BC, ducto: Est autem in hoc eodem plano recta AB; [e] propterea quòd rectæ BD, BC, in eodem sunt plano, in quo parallelæ AB, CD; cùm puncta B, C, D, existãt in parallelis AB, CD. Igitur & GB, recta rectæ BA, ad rectos erit angulos ex defin. 3. huius lib. Quare cùm AB, recta sit ad rectas BG, BD; [f] erit quoque AB, recta ad planum per BG, BD, ductum, hoc est, ad planum EF. Si duæ igitur sint parallelæ rectæ lineæ, quarum altera ad rectos cuidam plano sit angulos: Et reliqua eidem plano ad rectos angulos erit. Quod erat ostendendum.

a 29. primi. *b* 4. primi. *c* 8. primi. *d* 4. vndec. *e* 7. vndec. *f* 4. vndec.

THEOR. 9. PROPOS. 9. 9.

QVÆ eidem rectæ lineæ sunt parallelæ, sed non in eodem cum illa plano: Hæ quoque sunt inter se parallelæ.



SINT rectæ AB, CD, ipsi EF, parallelæ; non sint autem in eodem cum EF, plano. Dico AB, CD, parallelas quoq; esse. Nam à quolibet pũcto G, rectæ EF, ad ipsam EF, ducantur duæ perpendiculares; GH, quidem in plano parallelarum AB, EF; at GI, in plano parallelarũ CD, EF. Quoniam igitur EG, recta est ad duas rectas GH, GI, se tangentes mutuò in G; [g] erit recta quoque ad planum per ipsas GH, GI, ductũ. Quamobrem cùm sint parallelæ AB, EF; & EF, sit recta ad planum per GH, GI, ductum; [h] erit quoq; AB, ad idem planum recta. Similiter cùm sint parallelæ CD, EF; sit autem EF, recta ad planum per GH, HI, ductum; [i] erit etiam CD, recta ad idem planum; [k] Atque proinde rectæ AB, CD, cùm rectæ sint ad idem planum per GH, GI, ductum, parallelæ erunt. Quæ igitur eidem rectæ lineæ sunt parallelæ, sed non in eodem cum illa plano: hæ quoque sunt inter se parallelæ. Quod erat demonstrandum.

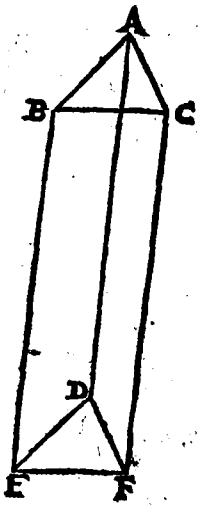
g 4. vndec. *h* 8. vndec. *i* 8. vndec. *k* 6. vndec.

SCHOLIVM.

DATA opera Euclides voluit, duas rectas AB, CD, non esse in eodem plano cum recta EF, cui sunt parallelæ. Nam si forent in eodem plano cum ipsa EF; essent AB, CD, inter se parallelæ, ex 30. propos. 1. lib. Superuacaneum ergo esset, hic idem demonstrare.

THEOR. 10. PROPOS. 10. 10.

SI duæ rectæ lineæ se mutuò tangentes, ad duas rectas se mutuò tangentes sint parallelæ, non autem in eodem plano: Illæ angulos æquales comprehendent.

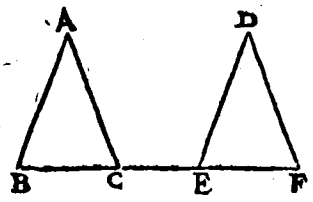


SINT rectæ AB, AC, se tangentes in A, parallelæ rectis DE, DF, se tangentibus in D; non sint autem AB, AC, in eodem plano, in quo DE, DF. Dico angulos BAC, EDF, ab ipsis comprehẽsos esse æquales. Ponantur enim AB, DE, inter se æquales, & AC, DF, inter se; ducanturq; rectæ BC, EF, BE, AD, CF. Quoniam igitur AB, DE, parallelæ sunt & æquales; [l] erunt quoq; BE, AD, parallelæ & æquales. Simili argumento parallelæ erunt & æquales CF, AD. Quare cùm BE, CF, parallelæ & æquales sint eidem AD; [m] erũt etiam BE, CF, inter se parallelæ, & æquales: [n] Ac propterea parallelæ & æquales erunt rectæ BC, EF. Quia ergo latera AB, AC, trianguli ABC, æqualia sunt lateribus DE, DF, trianguli DEF, ex constructione; & basis BC, basi EF, æqualis, vt modò demonstrauimus; [o] Erunt & anguli BAC, EDF, dictis lateribus comprehensi, æquales. Si igitur duæ rectæ lineæ se mutuò tangentes, &c. Quod erat ostendendum.

l 33. primi. *m* 9. vndec. *n* 33. primi. *o* 8. primi.

SCHOLIVM.

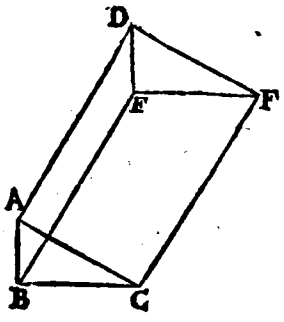
CONCLVSIO *huius theorematis vera etiam est, quando priores duæ*



linea in eodem ſunt plano cum duabus poſterioribus. Sint enim quatuor lineæ A B, A C, D E, D F, in eodem plano, ſitq; A B, ipſi D E, & A C, ipſi D F, parallelæ. Dico angulos B A C, E D F, eſſe æquales. Nam ponantur æquales A B, D E, & A C, D F; ducanturq; rectæ B C, E F, quæ aut in vna recta linea erunt conſtitutæ, aut non. Sint prius in vna recta B F. Quoniã igitur parallelæ ſunt A B, D E, [a] *æquales erunt anguli A B C, D E F, internus & externus. Similiter æquales erunt anguli A C B, D F E; Sunt enim & A C, D F, parallelæ. Quare duo anguli A B C, A C B, trianguli A B C, æquales ſunt duobus angulis D E F,* [b] *D F E, trianguli D E F. Igitur anguli quoque reliqui B A C, E D F, æquales erunt. Quod eſt propoſitum.*

a 29. primi

b 32. primi



Non ſint iam B C, E F, in vna recta linea conſtitutæ. Ductis rectis A D, B E, C F, cùm A B, D E, ſint parallelæ & æquales; [c] *erunt & A D, B E, parallelæ & æquales. Eadem ratione A D, C F, parallelæ erunt & æquales, eò quòd A C, D F, parallelæ ponuntur, & æquales. Quare & B E, C F, eidem A D, parallelæ exiſtentes & æquales,* [d] *inter ſe parallelæ erunt & æquales:* [e] *Ac proinde parallelæ & æquales quoq; erunt B C, E F. Itaque cùm duo latera A B, A C, trianguli A B C, æqualia ſint duobus lateribus D E, D F, trianguli D E F; & baſis B C, baſi E F,* [f] *erunt anguli B A C, E D F, contenti dictis lateribus, æquales. Quod eſt propoſitum.*

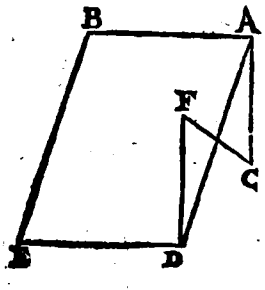
c 33. primi.

d 30. primi

e 33. primi

f 8. primi.

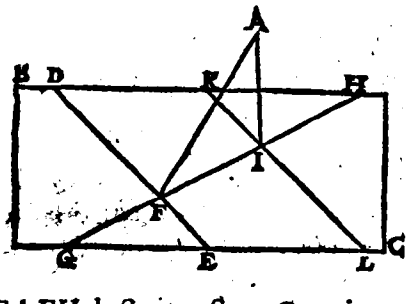
Caeterum vt concluſio huius theorematis rectè ex data hypotheſi colligatur, neceſſe eſt, rectas lineas parallelas ita eſſe poſitas, (ſiue omnes ſint in eodem plano, ſiue non,) vt tres rectæ A D, B E, C F, nullâ ratione ſe mutuò ſecent: vt ex prima & vltima figura apparet. Nam aliâs concluſio vera non erit.



Sunt enim rectæ A B, A C, rectis D E, D F, parallelæ in hac figura; & tamen anguli B A C, E D F, quos comprehendunt, non ſunt æquales, cùm ille ſit acutus, hic verò obtuſus. Hoc autem ideò euenit, quòd A D, C F, ſe mutò ſecant. Vnde quamuis A C, D F, ſint parallelæ & æquales, non tamen propterea A D, C F, quæ eas coniungunt, parallelæ ſunt & æquales, propterea quòd eas non coniungunt ad eaſdem partes, vt vult propoſ. 33. lib. 1. Quare demonſtratio huius theorematis locum non habet, deficiente hac conditione; quæ tamen in ſuperioribus figuris ſeruatur.

11. PROBL. 1. PROPOS. 11.

A dato puncto in ſublimi, ad ſubiectum planum perpendicularem rectam lineam ducere.



Sit à puncto A, in ſublimi ad ſubiectum planum B C, ducenda perpendicularis. Ducatur in plano B C, recta vtcunque D E; [a] *ad quam ex A, deducatur perpẽdicularis A F:* [b] *Et in plano B C, per F, ad D E, perpendicularis ducatur G H;* [c] *ad quam ex A, perpendicularis demittatur A I. Dico A I, eſſe perpendicularem ad planum ſubiectum B C.* [d] *Ducta enim in plano B C, per I, ipſi D E, parallela K L; cùm D F, ad rectos angulos ſit duabus F A, F H, ex conſtructione,* [e] *ac proinde recta ad planum per F A, F H, ductum;* [f] *erit quoque K I, ad idem planum per F A, F H, ductum recta.* [g] *Quoniam verò A I, in eodem eſt cum rectis F A, F H, plano, tangitque rectam K I, in I; erit per definitionem 3. huius lib. angulus K I A, rectus; atque adeò A I, ad rectos angulos erit duabus K I, I F.* [h] *Igitur A I, ad planum B C, recta erit. A dato ergo puncto in ſublimi, ad ſubiectum planum perpendicularem rectam lineam duximus. Quod faciendum erat.*

a 12. primi.

b 11. primi.

c 12. primi.

d 31. primi.

e 4. vndec.

f 8. vndec.

g 2. vndec.

h 4. vndec.

SCHOLIVM.

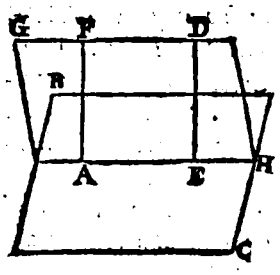
Quod ſi quando A I, ad G H, ducta perpendicularis cadat in punctum F, ita vt eadem ſit, quæ A F, ad D E, ducta perpendicularis; [a] *erit ipſa A F, ab initio ad D E, ducta perpendicularis ad ſubiectum planum B C, perpendicularis, cùm perpendicularis ſit ad vtramque D E, G H.*

a 4. vndec.

12. PROBL. 2. PROPOS. 12.

Dato plano à puncto, quod in illo datum eſt, ad rectos angulos rectam lineam excitare.

Sit

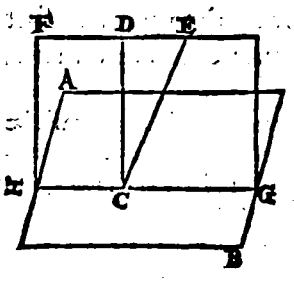


SIT à dato puncto A, in plano B C, ducenda perpendicularis ad datum planum B C. [a] Ex quouis puncto D, in sublimi demittatur ad planum B C, perpendicularis D E, quæ si ceciderit in A, punctum, factum erit, quod proponitur: Si verò ceciderit in aliud punctum E; extensa recta per E. & A. [b] ducatur per A, ipsi D E, parallela A F, in plano G H, per D E, E A, ducto. Dico A F, rectam esse ad planum datum B C. Cùm enim D E, A F, parallelæ sint; & D E, recta ad planum B C; ex constructione; [c] erit quoq; A F, ad idem planum B C, recta. Itaque dato plano, à puncto, quod in illo datum est, &c. Quod faciendum erat.

[a] 11. vndec.
[b] 31. primi.
[c] 8. vndec.

THEOR. 11. PROPOS. 13. 13.

DATO plano, à puncto, quod in illo datum est, duæ rectæ lineæ ad rectos angulos non excitabuntur, ad easdem partes.



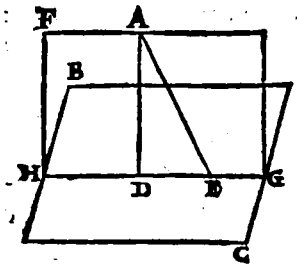
SIT datum planum A B. Dico à dato eius puncto C, ad easdem partes non posse èduci duas perpendiculares ad planum A B. Ducantur enim, si potest fieri, duæ perpendiculares C D, C E, ad planum A B; & per C D, C E, [a] quæ in vno, eodemque plano sunt, ducatur planum F G, secans planum A B, per rectam lineam G H. Cùm igitur E C, D C, rectæ sint ad planum A B; erunt per defin. 3. huius lib. anguli E C G, D C G, recti, ac proinde æquales; pars & totum. Quod est absurdum. Dato igitur plano, à puncto, quod in illo datum est, duæ rectæ lineæ ad rectos angulos non excitabuntur, ad easdem partes. Quod erat demonstrandum.

[a] 2. vndec.

ALITER. Ducantur, si fieri potest, ex C, ad planum A B, duæ perpendiculares C D, C E. Cùm igitur duæ D C, E C, rectæ sint ad idem planum A B; [b] erunt ipsæ inter se parallelæ, cùm tamen conueniant in puncto C. Quod est absurdum.

[b] 6. vndec.

SCHOLIVM.



EODEM modo à puncto in sublimi ad subiectum planum duæ rectæ lineæ ad angulos rectos non demittentur. Ducantur enim ex A, puncto in sublimi ad subiectum planum B C, si fieri potest, duæ perpendiculares A D, A E. Ducatur per A D, A E [a] quæ in vno plano sunt, planum F G, secans planum B C, per rectam G H. Cùm igitur A D, A E, rectæ sint ad planum B C, erunt per defin. 3. huius lib. duo anguli A D E, A E D, recti interni in triangulo A D E. Quod est absurdum; [b] cùm sint duobus rectis minores quilibet duo anguli in triangulo quouis assumpti.

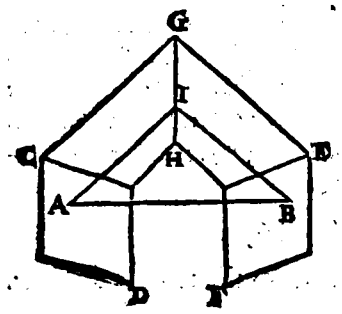
[a] 2. vndec.
[b] 17. primi.

ALITER. Si A D, A E, rectæ sunt ad planum B C; [c] ipsæ erunt inter se parallelæ, cùm tamen conueniant in puncto A. Quod est absurdum.

[c] 6. vndec.

THEOR. 12. PROPOS. 14. 14.

AD quæ plana, eadem recta linea recta est; illa sunt parallela.



SIT recta A B, ad plana C D, E F, recta. Dico parallela esse plana C D, E F. Si enim non credantur esse parallela, producta inter se conuenient. Conueniant ad partes C, E; [a] & faciant communem sectionem rectam lineam G H: In qua sumpto puncto vtcunque I, ducantur rectæ I A, I B, in planis G C D, G E F. Quia igitur A B, recta ponitur ad plana G C D, G E F; erunt per defin. 3. huius lib. duo anguli I A B, I B A, recti, in triangulo A B I. [b] Sed & minores duobus rectis sunt. Quod est absurdum. Igitur plana C D, E F, producta nunquam inter se conueniunt. Parallela ergo sunt. Ad quæ igitur plana, eadē recta linea recta est, &c. Quod erat demonstrandum.

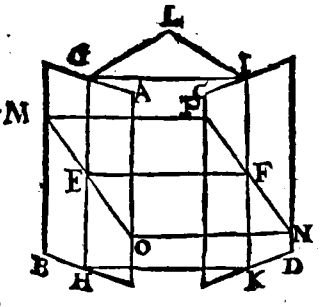
[a] 3. vndec.
[b] 17. primi.

SCHOLIVM.

FACILE etiam demonstrari poterit conuersum huius, videlicet.

Si fuerint duo plana parallela, recta linea, quæ ad vnum eorum recta fuerit, ad reliquum quoque recta erit.

SINT duo plana parallela A B, C D, ad quorum alterum A B, recta sit linea recta E F. Dico E F, rectam quoq; esse ad planum reliquum C D. Secet enim planum aliquod, nempe G K, plana A B, C D, per lineam rectam E F, incedens, faciat q; communes sectiones cum dictis planis rectas G H, I K: eruntq; anguli G E F, H E F, recti, per definitionem 3. huius libri. Ac proinde recti etiam erunt anguli I F E, K F E. (Si enim



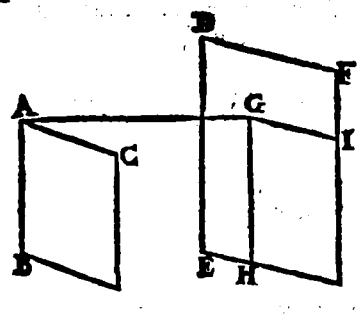
a 1. vndec.

b 4. vndec.

alter eorum, nempe I F E, dicatur acutus; erunt duo anguli G E F, I F E, duobus rectis minores. Quare rectæ E G, F I, ad partes G, I, in plano G K, conuenient, nimirum in puncto L; atque adeò & plana A B, C D, in quibus existunt, ad easdem partes conuenient ad punctum L; [a] cùm tota recta H G L, sit in vno plano, nempe in A B, producto; Item tota recta K I L, in vno quoque plano, nimirum in C D, protracto. Quod est absurdum, cùm ponantur parallela. Recti ergo sunt anguli I F E, K F E.) Eodem modo si aliud planum, videlicet M N, eadem plana secet per E F, faciens alias rectas, communes cum ipsis sectiones M O, P N; erunt anguli P F E, N F E, recti. Itaque cùm E F, sit recta ad duas rectas I K, P N, [b] recta quoque erit E F, ad planum C D, per ipsas ductum. Quod est propositum.

15. ## THEOR. 13. PROPOS. 15.

Si duæ rectæ lineæ se mutuò tangentes, ad duas rectas se mutuò tangentes sint parallelæ, non in eodem consistentes plano: Parallela sunt, quæ per illa ducuntur, plana.



a 11. vndec.

b 31. primi.

c 9. vndec.

d 29. primi.

e 4. vndec.

f 14. vndec.

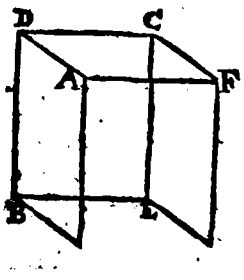
Sint duæ rectæ lineæ A B, A C, se tangentes in A, parallelæ duabus rectis lineis D E, D F, se tangentibus in D, existentibus q; in alio cum illis plano. Dico & plana B C, E F, per ipsas ducta, esse parallela. [a] Ex A, enim deducatur ad planũ E F, perpendicularis A G, occurrens plano E F, in puncto G. [b] Deinde in plano E F, per G, ducantur G H, G I, ipsis D E, D F, parallelæ. Quoniam igitur rectæ A B, G H, parallelę sunt ipsi D E; [c] erunt & A B, G H, inter se parallelæ; [d] Ac proinde anguli B A G, A G H, duobus rectis æquales: Est autem A G H, rectus, ex defin. 3. huius lib. Rectus ergo erit & angulus B A G. Simili argumento concludes, angulum C A G, rectum esse. Itaque cùm recta G A, sit recta duabus A B, A C; [e] recta quoque erit G A, ad planum B C, per ipsas ductum. Est autem & recta ad planum E F, ex constructione. [f] Igitur parallela sunt plana B C, E F. Si ergo duę rectæ lineæ se mutuò tangentes, &c. Quod erat demonstrandum.

SCHOLIVM.

Quod si perpendicularis ex A, ad planum E F, ducta cadat in ipsummet punctum D, concludetur idem, hoc excepto, quòd in plano E F, non sunt ducendæ aliæ parallelæ. Vt si lineæ G H, G I, ponantur parallelæ rectis A B, A C, ita vt A G, ad planum H I, per G H, G I, ductum perpendicularis, cadat in G; ostendemus, vt prius, G A, esse rectam ad planum B C, per rectas A B, A C, ductum, &c.

Ex hoc theoremate non difficilè erit problema subsequens: Videlicet.

Dato plano, per datum punctum, quod in eo non est, parallelum planum ducere.



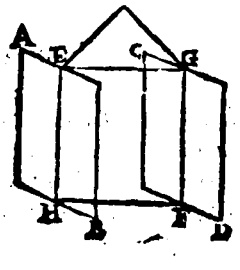
a 31. primi.

b 15. vndec.

Datum planum sit A B, punctum q; extra ipsum sit C, per quod ducendum sit planum, plano A B, parallelum. In plano A B, ducantur vtcunque duæ rectæ D B, D A, se tangentes in D, puncto, à quo ad C, recta ducatur D C. Deinde in plano B C, per rectas D B, D C, ducto, [a] agatur C E, ipsi D B, parallela; Et in plano A C, per rectas D A, D C, ducto, fiat quoque C F, ipsi D A, parallela. Dico planum E F, per rectas C E, C F, ductum, parallelum esse plano dato A B. Cùm enim duæ rectæ D B, D A, se tangentes in D, duabus rectis C E, C F, se tangentibus in C, existentibus q; in alio cum illis plano, parallelæ sint; [b] parallela erunt plana A B, E F, per ipsas ducta. Quod est propositum.

16. ## THEOR. 14. PROPOS. 16.

Si duo plana parallela plano quopiam secentur: communes illorum sectiones sunt parallelæ.



a 1. vndec.

Secentur plana A B, C D, parallela plano E F, per rectas E H, G F. Dico communes sectiones eorum E H, G F, esse lineas parallelas. Si enim non sunt parallelæ, productæ inter se conuenient, cùm sint in plano E F, secante. Conueniant igitur in puncto I. [a] Quia ergo tota recta H E I, in vno est plano, nimirum in A B, producto; Item tota recta F G I, in vno quoq; est plano, videlicet in C D, producto; conuenient etiam plana A B, C D, producta ad I. Quod est absurdum, cùm ponantur parallela. Sunt igitur rectæ E H, G F, parallelæ. Quare si duo plana parallela plano quopiam secentur, &c. Quod erat demonstrandum.

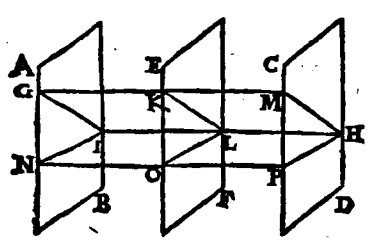
SCHO-

SCHOLIVM.

Hoc theorema nulla ratione poteſt conuerti. Quamuis enim communes ſectiones planorum parallelorum, facta ab alio plano ſecante, ſint parallelæ, vt hic demonſtratum eſt; Non tamen omnia illa plana, quorum communes ſectiones factæ ab alio plano ſecante ſunt parallelæ, parallela ſunt, cùm per duas lineas rectas parallelas infinita plana poſſint duci, quorum duo tantùm ſunt parallela, alia verò omnia in aliquam partem producta conueniunt.

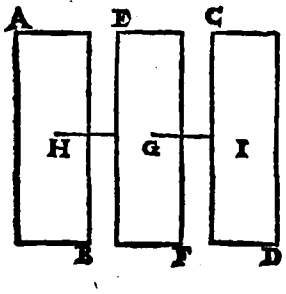
PORRO *ex hoc theoremate colligimus aliud ſimile theoremati 30. lib. 1.*

QVAE eidem plano parallela, & inter ſe ſunt parallela.



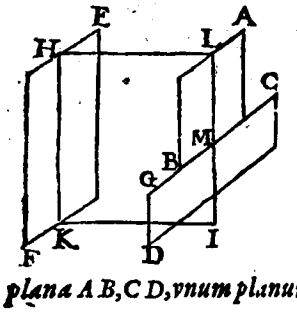
SINT duo plana AB, CD, plano EF, parallela. Dico & AB, CD, parallela eſſe. Secentur enim omnia tria plana plano GH, ſintq; communes eorum ſectiones rectæ GI, KL, MH. Secentur rurſus alio plano NH, ſintq; communes eorum ſectiones rectæ NI, OL, PH, hac tamen lege, vt duo plana ſecantia GH, NH, ſe quoque mutuò ſecent, quorum ſectio communis ſit linea recta HI. Quia igitur parallela plana AB, EF, ſecantur plano GH, [a] *eruut communes ſectiones GI, KL, parallelæ. Eodem modo parallelæ erunt MH, KL;* [b] *atque adeò parallelæ erunt inter ſe GI, MH. Non aliter oſtendemus, parallelas eſſe NI, PH. Itaque cùm IG, IN, ſe mutuò tangentes in I, parallelæ ſint rectis HM, HP, ſe tangentibus in H, exiſtentibusq; in alio plano;* [c] *erunt plana AB, CD, per ipſas ducta, parallela. Quod eſt propoſitum.*

a 16. vndecimi.
b 9. vndecim.
c 15 vndec.



ALITER. Sumatur in tertio plano EF, punctum quodlibet G, à quo in vtramque partem educatur ad planum EF, linea recta perpendicularis, occurrens plano AB, in puncto H, & plano CD, in puncto I. Quoniam igitur linea HG, recta eſt ad planum EF, recta quoq; erit ad planum AB, ſibi parallelum, per ea, quæ in ſcholio propoſitionis 14. huius lib. demonſtrauimus. Eadem ratione GI, recta erit ad planum CD. Quamobrem cùm recta HI, ſit recta ad plana AB, CD; [d] *parallela inter ſe erunt plana AB, CD. Quod eſt propoſitum.*

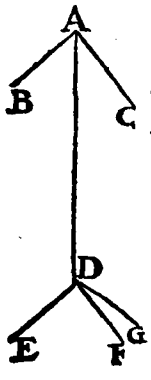
d 14. vndecimi.



QVOD ſi duo plana fuerint alteri plano parallela, non tamen inter ſe, ſed conueniant, tunc idem efficient planum; quemadmodum duæ rectæ, quæ alteri rectæ ſunt parallelæ, ſi conueniant, vnam rectam conſtituunt lineam, veluti ad propoſit. 30. lib. 1. demonſtrauimus. Sint enim plana AB, CD, plano EF, parallela, conueniantq; producta ſecundùm rectam CG. Dico plana AB, CD, vnum planum conſtituere. Secet enim planum quodpiam HI, omnia tria plana per lineas rectas HK, LM, MI. Quoniam igitur parallela ſunt plana AB, EF; [e] *erunt & communes ſectiones LM, HK, parallelæ. Eadem ratione parallelæ erunt IM, HK. Quam ob rem cùm rectæ LM, IM, parallelæ ſint ipſi HK, exiſtantq; in eodem plano ſecante HI, & conueniant in M; ipſæ erunt in rectum & cõtinuum poſitæ, per ea, quæ ad 30. propoſ. lib. 1. oſtendimus. Ac proinde plana AB, CD, vnum planum efficiẽt;* [f] *propterea quòd recta LI, in vno iaceat plano. Quod eſt propoſitum.*

e 16. vndecimi.
f 1. vndec.

ITAQVE duo plana, quæ parallela ſint alteri plano, vel inter ſe parallela erunt, vel certè, ſi producta conueniant, vnum planum conficient.



PORRO *conuerſum quoq; propoſitionis 10. facilè demonſtrabimus, hoc loco; videlicet.*

SI in planis parallelis duo anguli ſint æquales, & linea vna vnius anguli lineæ vni alterius anguli parallela; erit quoque altera linea alteri lineæ parallela, ſi modò ductæ ſint ex eadem parte plani, per priores parallelas ducti.

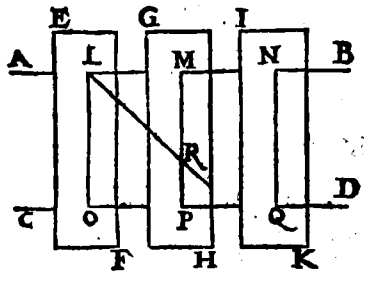
IN planis enim parallelis ſint anguli æquales BAC, EDF. ſitq; AB, ipſi DE, parallela, & AC, DF, ſint ad eaſdem partes plani per AB, DE, ducti. Dico AC, DF, parallelas quoque eſſe: hoc eſt, ducta recta AD, planum per AC, AD, ductum, tranſire etiam per rectam DF; ita vt AC, DF, ſint communes ſectiones factæ à plano per AC, AD, ducto, in planis parallelis per AB, AC, & DE, DF, ductis. Hinc enim efficitur, [g] *ſectiones AC, DF, parallelas eſſe. quod eſt propoſitum. Si namq; planum per AC, AD, ductum, non facit in illis planis parallelis ſectiones AC, DF, faciat ſectiones AC, DG,* [h] *quæ parallelæ erunt.* [i] *Igitur angulus EDG, angulo BAC, hoc eſt, angulo EDF, æqualis erit: quod eſt abſurdum, cùm vnus ſit totũ, & alter pars.*

g 16. vndecimi.
h 16. vndecimi.
i 10. vndec.

THEOR. 15. PROPOS. 17.

17.

SI duæ rectæ lineæ parallelis planis ſecentur; In eaſdem rationes ſecabuntur.



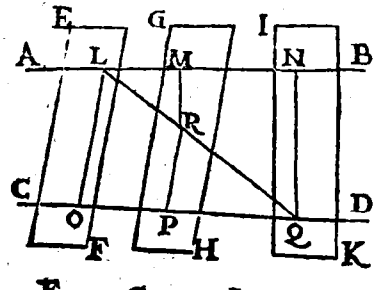
RECTAE lineæ AB, CD, (siue eæ parallelæ sint, vt in figura, siue non, existentes tamen in eodem plano: siue in transuersum positæ, in diuersis existentes planis) secentur planis parallelis EF, GH, IK, in punctis L, M, N, O, P, Q. Dico eas secari proportionaliter, hoc est, segmenta earum inter dicta plana intercepta, esse proportionalia, vt quidem LM, ad MN, ita esse OP, ad PQ. Ducantur enim rectæ LO, NQ, in planis EF, IK, & coniungatur recta LQ, occurrés plano GH, in R, puncto, à quo ad puncta M, P, rectæ ducantur RM, RP, in eodem plano GH. [a] Eritque triangulum LNQ, in vno plano: similiter triangulum LOQ, in vno plano. Quoniam verò plana parallela GH, IK, secantur plano triangulo LNQ, [b] erunt communes sectiones eorum MR, NQ, parallelæ. Pari ratione parallelæ erunt RP, LO. [c] Quam ob rem erit vt LR, ad RQ, ita LM, ad MN: Item vt LR, ad RQ, ita OP, ad PQ: Ac proinde vt LM, ad MN, ita OP, ad PQ. Si igitur duæ rectæ lineæ parallelis planis secentur, &c. Quod erat demonstrandum.

a 2. vndec.
b 16. vndec.
c 2. sexti.

SCHOLIVM.

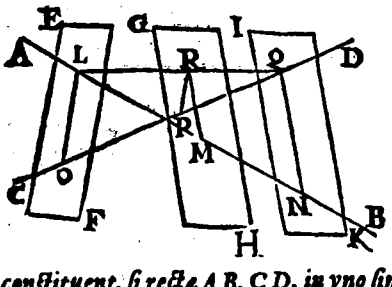
QVOD si data duæ rectæ AB, CD, sint in vno eodemq; plano, efficient duæ rectæ RM, RP, vnam lineam rectam, vt in superiori figura apparet. Nam tunc planum per rectas AB, CD, ductum secabit tria plana parallela in punctis L, O, M, P, N, Q, & per rectas LO, MP, NQ, [a] quæ inter se parallelæ erunt, punctumq; R, in recta MP, existet, cùm sit & in plano per rectas AB, CD, ducto (propter puncta L, Q, in eodem illo plano existentia, vt in scholio propos. 7. huius lib. diximus) & in plano GH, atq; adeò in MP, communi eorum planorum sectione. Quare RM, RP, vnam rectam lineam MP, constituent, nimirum communem sectionem planorum LOQN, GH.

a 16. vndecimi.



SI verò duæ rectæ AB, CD, non sint in eodem plano, non efficient RM, RP, vnam rectam lineam, vt in hisce duabus figuris apparet: quia [b] cùm triangulum LOQ, sit in vno plano, & triangulum LNQ, in vno etiam plano, quod ab illo diuersum est, (Si namq; duo illa triangula in vno eodemq; plano existerent, essent duæ rectæ AB, CD, in eodem illo plano, quod ex ipsis constituitur, quod est contra hypothesim.) erunt rectæ RM, RP, in diuersis illis planis triangulorum; ac proinde vnam rectam non constituent; [c] aliàs in vno essent plano. quod est absurdum.

b 2. vndec.
c 1. vndec.

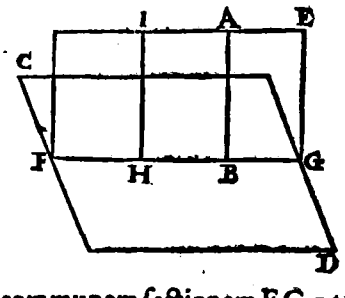


EADEM hac propositio locum habet, si duæ rectæ AB, CD, in eodem plano existentes, non sint parallelæ, vt in eisdem hisce duabus figuris apparet: sed tunc MRP, semper erit vna linea recta, vt ad initium huius scholij demonstratum est quãdo AB, CD, in vno plano ponebantur. Eadem enim demonstratio hic adhiberi potest.

NON secus, si plura plana parallela, quàm tria, rectas AB, CD, secent, erunt earum partes proportionales, & communes sectiones mediorum planorum & triangulorum LOQ, LNQ, rectas lineas constituent, si rectæ AB, CD, in vno sint plano, non rectas autem, si non sint in vno plano: quemadmodum de rectis MR, RP, dictum est.

18. THEOR. 16. PROPOS. 18.

SI recta linea plano cuipiam ad rectos sit angulos: Et omnia, quæ per ipsam, plana eidem plano ad rectos angulos erunt.



SIT recta AB, ad planum CD, recta. Dico omnia plana per rectam AB, ducta, esse recta ad idem planum CD. Ductum enim sit per AB, planum EF, secans planum CD, per rectam lineam FG. Sumpto deinde puncto H, vtcunq; in recta FG, [a] ducatur in plano EF, ipsi AB, parallela HI. Quoniam igitur AB, IH, parallelæ sunt, & AB, ponitur recta ad planum CD; [b] erit quoque IH, ad idem planum CD, recta: ac proinde per defin. 3. huius libri, ad communem sectionem FG, perpendicularis. Eadem ratione omnes lineæ, quæ in plano EF, ipsi AB, ducentur parallelæ, erunt ad planum CD, rectæ; ac proinde per defin. 3. huius lib. ad communem sectionem FG, perpendiculares. Quare rectum erit planum EF, ad planum CD, per defin. 4. huius libri. Similique argumento ostendentur omnia alia plana per rectam AB, ducta, ad planum CD, esse recta. Si igitur recta linea plano cuipiam ad rectos sit angulos, &c. Quod erat demonstrandum.

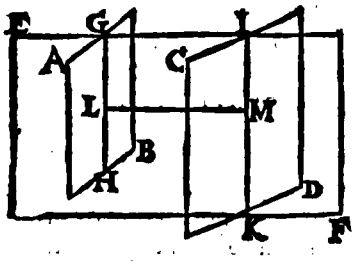
a 31. primi.
b 8. vndec.

SCHOLIVM.

SCHOLIVM.

Ex his aliud hoc theorema licebit demonstrare. Videlicet.

Dvo plana ad idem planum recta, in quo faciant communes sectiones parallelas, parallela sunt: Et duorum planorum parallelorum, si vnum cuipiam plano ad rectos sit angulos, erit & alterum ad idem rectum.



Sint plana AB, CD, ad planum EF, recta, facientia sectiones GH, IK, parallelas. Dico ea parallela esse. In plano enim EF, ducatur ad GH, perpendicularis LM, quæ ex defin. 4. huius lib. ad planum AB, recta erit: [a] *eademq; perpendicularis erit ad IK; ac propterea ex defin. 4. huius lib. ad planum quoque CD, recta erit. Quia igitur LM, ad vtrumque planum AB, CD, recta est,* [b] *ipsa parallela erunt.* [a] 29. primi [b] 14 vndec.

Sed iam parallela sint plana AB, CD; sitq; AB, rectum ad planum EF. Dico & CD, rectum esse ad idem planum EF. Sint enim communes sectiones plani EF, & planorum AB, CD, rectæ GH, IK; [c] *quæ parallelæ erunt. Ducta quoq; in plano EF, ad rectam GH, lineæ perpendiculari LM; erit hæc, ex defin. 4. huius lib. ad AB, planum recta. Igitur ex scholio propos. 14. huius lib. eadem LM, ad planum CD, recta quoque erit.* [d] *Quare planum EF, per rectam LM, ductum ad planum CD, erit rectum; ideoq; vicissim planum CD, ad planum EF, erit quoq; rectum. Quod est propositum.* [c] 16 vndec. [d] 18 primi.

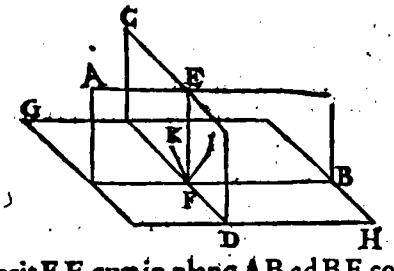
Hinc etiam problema hoc absoluetur.

Per rectam in plano quouis datam planum ducere, quod ad ipsum planum sit rectum.

Sit data recta FG, in plano CD, vt in figura huius propos. oporteat q; per FG, planum ducere, quod ad planum CD, rectum sit. Ex quouis puncto B, rectæ FG, [e] *erigatur ad planum CD, perpendicularis BA, & per rectas AB, FG, planum ducatur EF.* [f] *quod ad planum CD, rectum erit. Quod est propositum.* [e] 12 vndec. [f] 18. vndec.

THEOR. 17. PROPOS. 19. 19.

Si duo plana se mutuò secantia, plano cuidam ad rectos sint angulos, communis etiam illorum sectio ad rectos eidem plano angulos erit.



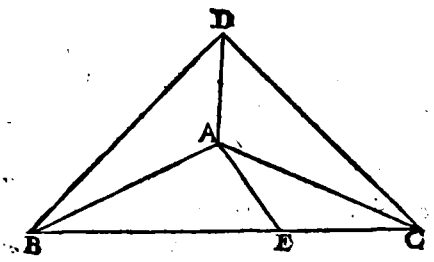
Sint duo plana AB, CD, se mutuò secantia per lineam rectam EF, ad planum GH, recta. Dico communem illorum sectionem EF, rectam quoque esse ad idem planum GH. Aut enim EF, ad BF, DF, communes sectiones planorum AB, CD, cum plano GH, recta est, aut non. Si recta est EF, ad BF, DF, [a] recta quoq; erit ad planum GH, quod per ipsas ducitur. Si verò EF, concedatur recta ad alteram rectarum BF, DF, tantùm; sit ea recta ad BF. Quoniam igitur planum AB, ad planum GH, ponitur rectum, erit EF, quæ in plano AB, ad BF, communem eius sectionem cum plano GH, ducitur perpendicularis, ad planum GH, recta, ex 4. defin. huius lib. Idem cõcludes, si EF, concedatur recta ad DF. Erit enim & tunc EF, ad planum GH, recta ex defin. 4. huius lib. cùm perpendicularis ponatur ad DF, communem sectionem plani CD, cum plano GH, ducaturque in plano CD, ad planum GH, recto. Si denique EF, ad neutram BF, DF, esse credatur recta; [b] ducatur ex F, in plano AB, ad BF, communem eius sectionem cum plano GH, perpendicularis FI; Item in plano CD, ad DF, communem eius sectionem cum plano GH, perpendicularis FK. Quoniam igitur planum AB, rectum ponitur ad planum GH, erit quoque perpendicularis IF, quæ in plano AB, ad BF, communem eius sectionem cum plano GH, ducitur, recta ad planum GH, ex 4. defin. huius lib. Eadem ratione erit KF, ad idem planum GH, recta; Ac proinde à puncto F, ad planum GH, duæ perpendiculares sunt excitatæ. Quod fieri non posse suprà [c] demonstratum est. Quare EF, recta erit ad planum GH. Si duo igitur plana se mutuò secantia plano cuidam ad rectos sint anguli, &c. Quod erat demonstrandum.

[a] 4. vndec. [b] 11. primi. [b] 13. vndec.

THEOR. 18. PROPOS. 20. 20.

Si solidus angulus tribus angulis planis contineatur: Ex his duo quilibet vtut assumpti, tertio sunt maiores.

Continetvr angulus solidus ad A, tribus angulis planis BAC, CAD, DAB. Dico quoslibet duos reliquo esse maiores. Si enim omnes tres sint æquales, perspicuum est, quosuis duos maiores esse reliquo: Si verò duo tantùm sint æquales, & tertius vtrouis minor, constat quoque quoslibet duos reliquo maiores esse. Quod si vnus, videlicet BAC, sit maximus, reliqui autem siue æquales, siue inæquales, manifestum etiam est, quemlibet horum cum maximo illo BAC, reliquo esse maiorem. Dico iam hoc angulo maximo BAC, maiores quoque esse angulos duos

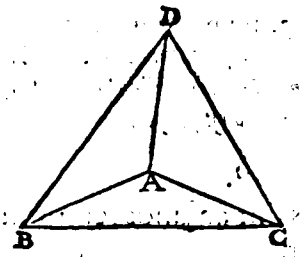


a 23. primi. BAD, DAC. In plano enim per AB, AC, ducto [a] fiat angulus BAE, angulo BAD, æqualis; & recta AE, æqualis rectæ AD. Deinde in eodem plano per E, extendatur recta BC, secans rectas AB, AC, in B, & C; coniunganturque rectæ BD, DC. Quoniam igitur latera AD, AB, trianguli BAD, æqualia sunt lateribus AE, AB, trianguli BAE; & anguli quoque ipsis contenti, per constructionem, æquales; [b] erunt bases BD, BE, æquales. [c] Quia verò latera DB, DC, maiora sunt latere BC; si demantur æquales rectæ BD, BE, relinquetur recta CD, maior quàm CE. Cùm igitur latera AD, AC, trianguli DAC, æqualia sint lateribus AE, AC, trianguli EAC; & basis CD, maior basi CE; [d] erit angulus CAD, angulo CAE, maior. Additis ergo æqualibus angulis BAD, BAE, erunt duo anguli CAD, BAD, maiores duobus angulis CAE, BAE, hoc est, toto angulo BAC, qui maximus omnium ponebatur. Ac proinde duo quilibet multò maiores erunt reliquo non maximo. Quocirca si solidus angulus tribus angulis planis contineatur, &c. Quod erat ostendendum.

b 4. primi.
c 20. primi.
d 25. primi.

21. THEOR. 19. PROPOS. 21.

OMNIS solidus angulus sub minoribus, quàm quatuor rectis angulis planis continetur.

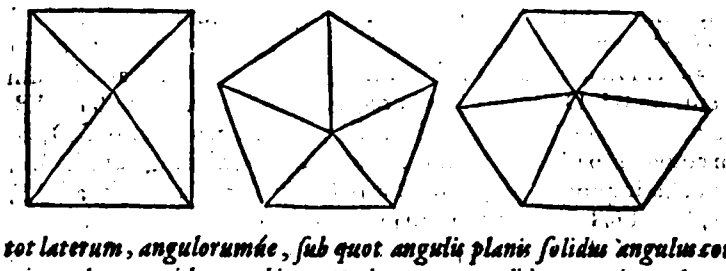


SIT angulus solidus A, contentus tribus planis angulis BAC, CAD, DAB. Dico hos tres angulos minores esse quatuor rectis. Ductis enim rectis BC, CD, DB, erunt constituti tres anguli solidi, B, C, D, quorum quilibet sub tribus angulis planis continetur, nempe B, sub CBA, ABD, DBC. At C, sub BCA, ACD, DCB: D, verò sub CDA, ADB, BDC. [e] Quoniam verò duo anguli CBA, ABD, maiores sunt angulo CBD; similiterque duo anguli BCA, ACD, maiores angulo BCD; & duo anguli CDA, ADB, maiores angulo CDB: erunt sex anguli CBA, ABD, BCA, ACD, CDA, ADB, tribus angulis CBD, BCD, CDB, maiores. [f] Hi autem tres æquales sunt duobus rectis. Illi ergo sex duobus rectis erunt maiores. Cùm igitur sex illi, vnà cũ tribus ad A, æquales sint sex rectis propter triangula tria BAC, CAD, DAB, ([g] sunt enim anguli cuiuslibet trianguli duobus rectis æquales.) si auferantur sex illi duobus rectis maiores, relinquentur tres ad A, solidum angulum constituentes, quatuor rectis minores. Omnis ergo solidus angulus, &c. Quod erat demonstrandum.

e 20. vndec.
f 32. primi.
g 32. primi.

SCHOLIVM.

QVONIAM hæc demonstratio ab interpretibus accommodatur soli illi angulo solido, quem tres plani anguli constituunt; idcirco nos eam ad omnes angulos solidos extendemus, hoc modo.

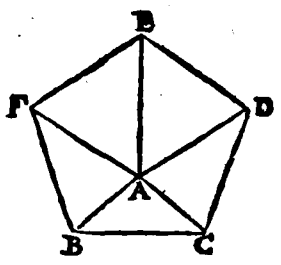


SIT angulus solidus quicunq; contentus quotcunq; angulis planis. Dico omnes illos esse quatuor rectis quoq; minores. Nam si omnibus angulis plani rectæ subtendantur, ordine in eodem plano existentes; constituetur pyramis, cuius vertex datus angulus solidus, tot laterum, angulorumúe, sub quot anguli planis solidum angulum comprehenditur; ac proinde totidem triangula pyramidem ambient. Vnde omnes anguli horum triangulorum, ([a] cùm anguli cuiuslibet trianguli duobus sint rectis æquales.) bis tot rectis erunt æquales, quot angulos continet basis: Sed omnes anguli basis æquales sunt quoque bis tot rectis, demptis quatuor, per ea, quæ ad 32. propos. 1. lib. demonstrauimus ex Proclo. Igitur omnes anguli dictorum triangulorum superabunt omnes angulos basis, quatuor rectis. Quare cùm omnes anguli horum triangulorum propè basin maiores sint angulis basis; (propterea, quòd prope basin constituantur anguli solidi, quorum quilibet tribus planis angulis continetur, [b] & horum quilibet duo reliquo, nempe eo, qui in basi, sint maiores.) superabunt omnes anguli horum triangulorum, angulos eorundem prope basin, minoribus quàm quatuor rectis. Cùm ergo omnes anguli omnium triangulorum superent illos eorundem, qui prope basin, angulis solidum angulum constituentibus; erunt anguli, qui angulum solidum componunt, quatuor rectis minores. Quod est propositum.

a 32. primi.
b 20. vnde.

VERVM vt res melius percipiatur, sit gratia exempli angulus solidus A, contentus quinque angulis planis BAC, CAD, DAE, EAF, FAB, quibus subtendantur ordine rectæ BC, CD, DE, EF, FB, in vno eodemq; plano, in eo videlicet, quod rectas AB, AC, AD, AE, AF, secat in punctis B, C, D, E, F; ita vt constituatur pyramis pentagona, habens videlicet basin pentagonam, & in ambitu quinque triangula, tot videlicet,

quot



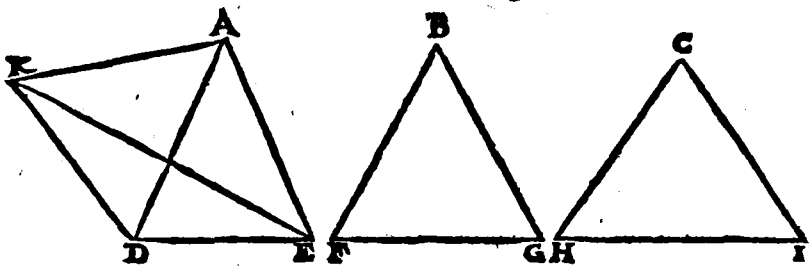
quot anguli plani componunt angulum ſolidum A. [a] *Quia verò omnes anguli quinque triangulorum B A C, C A D, D A E, E A F, F A B, æquales ſunt decem rectis: Anguli autem quinque baſis B C D E F, æquales ſunt ſex rectis, nempe decem, minus quatuor; ſuperabunt anguli triangulorum angulos baſis, quatuor rectis. Cùm igitur decem anguli triangulorum prope baſin maiores ſint angulis baſis; (Cùm enim angulus ſolidus B, tribus planis angulis A B C, A B F, C B F, contineatur;* [b] *erunt duo C B A, A B F, qui ſunt in triangulis, maiores angulo C B F, qui eſt in baſi: Eademq; ratione maiores erunt reliqui anguli triangulorum prope baſin, reliquis angulis in baſi.) Maiores erunt anguli triangulorum iuxta baſin, ſex rectis. Reliqui igitur quinque angulum ſolidum A, conſtituentes, minores erunt quatuor rectis; quandoquidem hi cum illis æquales ſunt decem rectis, vt dictum eſt. Eadem demonſtratio adhibenda eſt in aliis omnibus angulis ſolidis.*

[a] 32. primi.

[b] 20. vnde.

THEOR. 20. PROPOS. 22.

SI fuerint tres anguli plani, quorum duo vt libet aſſumpti reliquo ſint maiores: comprehendant autem ipſos rectæ lineæ æquales: fieri poteſt, vt ex lineis æquales illas rectas connectentibus triangulum conſtituatur.



SINT tres anguli plani A, B, C, conten ti rectis æqualibus A D, A E, B F, B G, C H, C I, hac tamen lege, vt duo quilibet reliquo ſint maiores. Dico ex tribus rectis D E, F G, H I, quæ rectas illas æquales connectunt, triangulum poſſe conſtitui; hoc eſt, trium rectarum D E, F G, H I, quaslibet duas reliqua eſſe maiores. Nam hoc poſito, [a] ex ipſis triangulum facilè conficietur. Quòd enim duæ D E, F G, maiores ſint, quàm H I, ita oſtendetur. [b] Fiat angulus D A K, angulo B, æqualis, cadatq́ue primùm A K, ad partes A D, ita vt fiat totus quidam angulus E A K, ex duobus E A D, D A K, compoſitus; quod quidem continget, quando duo anguli D A E, & B, duobus rectis ſunt minores. Ponatur A K, ipſi A D, æqualis, connectanturq́; rectæ K D, K E. Quoniam igitur latera A K, A D, trianguli A K D, æqualia ſunt lateribus B F, B G, trianguli B F G; & anguli ipſis contenti D A K, & B, æquales; [c] erunt & baſes K D, F G, æquales. Rurſus quia latera A K, A E, trianguli A K E, æqualia ſunt lateribus C H, C I; & angulus E A K, maior angulo C; propterea quòd duo anguli D A E, & B, maiores ponuntur angulo C; [d] erit & baſis E K, maior baſi H I: [e] Sunt autem rectæ E D, D K, maiores recta E K. Igitur multò maiores erunt E D, D K, quàm H I. Cùm ergo D K, oſtenſa ſit æqualis rectæ F G; erũt quoq; D E, F G, maiores q̃ H I. Quod eſt propoſitũ.

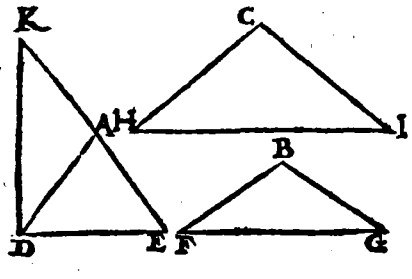
[a] 22. primi.

[b] 23. primi.

[c] 4. primi.

[d] 24. primi.

[e] 20. primi.

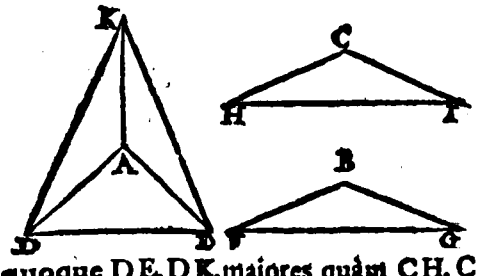


CADAT deinde A K, in rectum & continuum ipſi A E; quod quidem accidet, quando duo anguli D A E, & B, duobus rectis ſunt æquales. Ponaturq́ue A K, ipſi A D, æqualis rurſum, & connectatur recta K D. [f] Erit igitur, vt prius, K D, ipſi F G, æqualis. [g] Quoniam verò rectæ E D, D K, maiores ſunt recta K E; & K E, æqualis eſt rectis C H, C I, ex hypotheſi, & conſtructione; erunt quoque E D, D K, maiores duabus C H, C I: [h] Hæ autem maiores ſunt, quàm H I. Igitur multò maiores erunt E D, D K, quàm H I. Cùm ergo D K, oſtenſa ſit æqualis ipſi F G; erunt quoque D E, F G, maiores quàm H I. Quod eſt propoſitum.

[f] 4. primi.

[g] 20. primi.

[h] 20. primi.



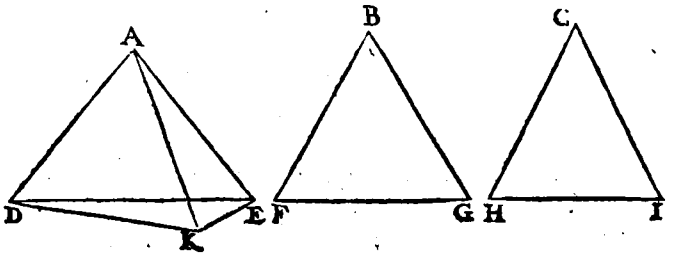
CADAT poſtremò A K, ad partes A E, ita vt nec angulus totus componatur ex angulis E A D, D A K, nec recta ſit E A K; quod demum eueniet, quando duo anguli D A E, & B, duobus rectis ſunt maiores. Ponaturq́; rurſum A K, ipſi A D, æqualis, & ducantur rectæ K D, K E. [i] Erit igitur, vt prius, K D, ipſi F G, æqualis. [k] Quoniam verò duæ D E, D K, maiores ſunt duab. A E, A K; & A E, A K, æquales duabus C H, C I, ex hypotheſi & conſtructione; erunt quoque D E, D K, maiores quàm C H, C I: [l] Hæ autem maiores ſunt, quàm H I. Igitur multò erunt maiores D E, D K, quàm H I. Cùm ergo D K, oſtenſa ſit æqualis ipſi F G; erunt quoq; D E, F G, maiores quàm H I. quod eſt propoſitum. Eodem modo concludemus D E, H I, maiores eſſe,

[i] 4. primi.

[k] 21. primi.

[l] 20. primi.

quàm F G, ſi angulus D A K, angulo C, fiat æqualis: Item F G, H I, maiores, quàm D E, ſi angulo
a 22. primi. C, ad F B, conſtituatur angulus æqualis, &c. a Quare ex tribus rectis D E, F G, H I, triangulum conſtitui poteſt. Si igitur fuerint tres anguli plani, &c. Quod erat demonſtrandum.

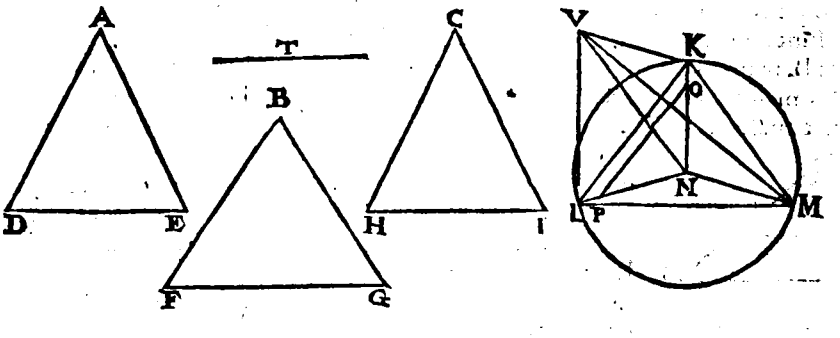


b 4. primi. ALITER. Si tres anguli A, B, C, ſunt æquales; b erunt quoque baſes D E, F G, H I, æquales; Ac proinde quælibet duæ reliqua maiores. Si verò duo tantùm anguli ſunt æquales, & tertius minor;
c 4. primi. c erunt quoque duæ illorum baſes æquales, d & baſis tertij vtraq; minor: Quare rurſus quælibet
d 24. primi. duæ, maiores erunt reliqua. Quod ſi vnus eorum, nempe A, ſit maximus, ſiue reliqui B, & C, ſint inter ſe æquales, ſiue inæquales;
e 24. primi. e erit quoque baſis D E, omnium maxima. Quare D E, F G, maiores erunt quàm H I: Item D E,
f 23. primi. H I, maiores, quàm F G. Dico iam & rectas F G, H I, maiores eſſe recta D E. f Fiat enim angulus D A K, æqualis angulo B, ponaturque A K, ipſi A D, æqualis. Cadet ergo punctum K, infra D E; propterea quòd per puncta D, K, E, tranſit circumferẽtia circuli ex A, ad interuallum A D, deſcripta, ob æqualitatem rectarum A D, A K, A E. Connectantur deinde rectæ D K, K E. Quoniam igitur duo anguli B, & C, maiores ponuntur angulo D A E; & B, æqualis eſt angulo D A K, per conſtructionem; erit angulus C, maior reliquo angulo K A E. Et quia latera A D, A K, triãguli A D K, æqualia ſunt lateribus B F, B G, trianguli B F G; & anguli ipſis contenti D A K, & B, æquales;
g 4. primi. g erit baſis D K, baſi F G, æqualis. Rurſus quia latera C H, C I, trianguli C H I, æqualia ſunt lateri-
h 24. primi. bus A K, A E, trianguli A K E; & angulus C, oſtenſus maior angulo K A E; h erit & baſis H I, maior baſe K E. Quare cùm D K, oſtẽſa ſit æqualis ipſi F G: erunt F G, H I, maiores quàm D K, K E:
i 20. primi. i Sed D K, K E maiores ſunt, q̃ D E. Igitur multò maiores erũt F G, H I, q̃ D E. Quod eſt ꝓpoſitũ.

23. PROBL. 3. PROPOS. 23.

Ex tribus angulis planis, quorum duo quomodocunque aſſumpti reliquo ſunt maiores, ſolidum angulum conſtituere. Oportet autem illos tres angulos quatuor rectis minores eſſe.

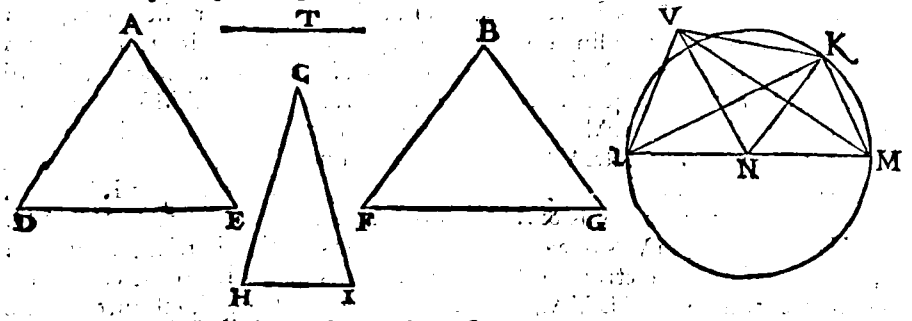
SINT tres anguli A, B, C, quatuor rectis minores, hac conditione, vt quilibet duo ſint maiores reliquo. Oportet iam ex tribus angulis A, B, C, angulum ſolidum confitere, qui nimirum contineatur tribus angulis planis, qui dictis tribus angulis ſint æquales. Ponantur ſex lineæ angulos dictos comprehendentes, nempe A D, A E, B F, B G, C H, C I, æquales; ſubtendanturq; baſes D E,
k 22. vndec. F G, H I. k Fieri ergo poteſt, vt ex D E, F G, H I, triangulũ conſtituatur. Conſtituatur ex ipſis igitur



l 5. quarti. triangulum K L M, ſitque latus K L, rectæ D E; latus L M, rectæ F G; & latus K M, rectæ H I, æquale. l Deſcribatur circa triãgulum K L M, circulus, cuius cẽtrum N, à quo ducãtur rectæ N K, N L, N M. Eritque quælibet rectarum angulos planos comprehendentium, nempe A D, A E, &c. maior qualibet ductarum ex centro N. Quod ita oſtendetur. Cadat primò centrum N, intra triangulum K L M; quod quidem fiet, quando triangulum eſt oxygonium, vt ex coroll. propoſ. 5. lib. 4. conſtat. Si igitur A D, A E, maiores nõ credantur, quàm N K, N L, erunt vel æquales, vel minores. Sint ergo æquales. Quoniam igitur latera A D, A E, trianguli A D E, æqualia ſunt lateribus N K, N L, trianguli N K L; & baſis D E, baſi
m 8. primi. K L, æqualis: m erit angulus A, angulo K N L, æqualis. Eodem argumento erit angulus B, angulo L N M; & angulus C, angulo M N K, æqualis. Cùm igitur tres anguli circa N, æquales ſint quatuor rectis ex coroll. propoſ. 15. lib. 1. erunt quoq; tres anguli A, B, C, quatuor rectis æquales. Quod eſt abſurdum, ponuntur enim quatuor rectis minores. Nõ igitur æquales ſunt A D, A E, ipſis N K, N L. Dico quòd neq; minores. Si enim minores ſint A D, A E, quàm N K, N L, abſcindantur N O, N P, ipſis A D, A E, æquales, ducaturq; recta O P. Quoniã igitur eſt vt N K, ad N O, ita N L, ad N P,
n 2. ſexti. cùm & antecedentia inter ſe, & conſequentia ſint inter ſe æqualia: erunt latera N K, N L, trian-
o 29. primi. guli N K L, ſecta proportionaliter; o ac proinde O P, ipſi K L, parallela erit. p Quare anguli N O P, N P O, angulis N K L, N L K, æquales erunt, & triangulum N O P, triangulo N K L, æ-
p 4. ſexti. quiangulum. p Igitur erit vt N K, ad K L, ita N O, ad O P. Eſtautem N K, maior quàm N O.
q 14. quinti. q Igitur & K L, hoc eſt, D E, quæ æqualis eſt ipſi K L, maior erit, quàm O P. Quocirca cùm latera

A D, A E,

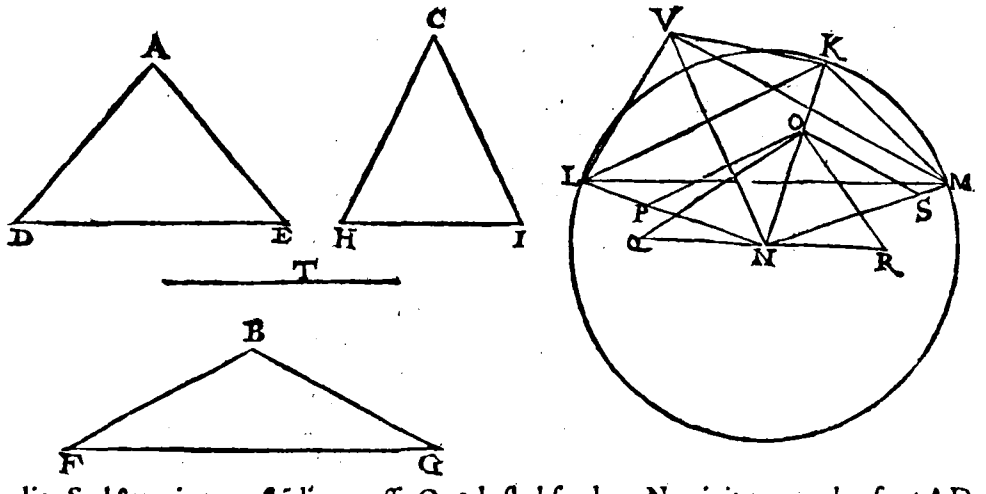
AD, AE, trianguli ADE, sint æqualia lateribus NO, NP, trianguli NOP, & basis DE, maior basi OP: erit & angulus A, maior angulo ONP. Eadem ratione angulus B, angulo LNM; & angulus C, angulo MNK, maior esse ostendetur. Cùm igitur tres anguli ad N, quatuor sint rectis æquales, ex coroll. propos. 15. lib. 1. erunt tres anguli A, B, C, maiores quatuor rectis. Quod est absurdum ponuntur enim quatuor rectis minores. Non igitur minores sunt AD, AE, quàm NK, NL; sed neque æquales. Igitur maiores. *a 25. primi.*



CADAT deinde centrum N, in latus LM; & tum continget, quàdo triángulũ KLM, angulũ LKM, habuerit rectũ, vt ex eodẽ coroll. propos. 5. lib. 4. manifestum est.

Si igitur AD, AE, dicãtur esse æquales ipsis NK, NL; erunt quoq; BF, BG, æquales eisdem NK, NL. Cùm ergo NK, æqualis sit ipsi NM; æquales erunt BF, BG, rectæ LM: Posita autem fuit LM, æqualis ipsi FG. Igitur BF, BG, æquales quoque sunt rectæ FG. *b* Sunt autem & maiores BF, BG, quàm FG. Quod est absurdum. Non igitur æquales sunt AD, AE, ipsis NK, NL. Quod si AD, AE, minores credantur, quàm NK, NL; erunt quoque BF, BG, minores quàm NK, NL. Cùm ergo NK, æqualis sit ipsi NM; minores erunt BF, BG, quàm recta LM: posita autem fuit LM, ipsi FG, æqualis. Igitur BF, BG, minores quoque sunt recta FG. Quod est absurdum, *c* cùm sint maiores. Non ergo minores sunt AD, AE, quàm NK, NL; sed neq; æquales: Igitur maiores. *b 20. primi.* *c 20. primi.*

CADAT postremò centrum N, extra triangulum KLM, infra latus LM, quod demum accidet, quando angulus LKM, fuerit obtusus, vt ex coroll. dicto propos. 5. lib. 4 liquet. Si igitur dicantur AD, AE, esse æquales ipsis NK, NL; cùm & basis DE, basi KL, ponatur æqualis; *d* erit angulus A, angulo KNL, æqualis. Eadem ratione angulus C, angulo KNM, æqualis erit. Quare totus angulus LNM, angulis A, & C, æqualis erit. Sed hi duo maiores sunt ex hypothesi, angulo B. Igitur & angulus LNM, angulo B, erit maior. Rursus quia latera NL, NM, triãguli NLM, æqualia sunt lateribus BF, BG, triãguli BFG, & basis LM, basi FG, æqualis; *e* erit angulus LNM, angulo B, *d 8. primi.* *e 8. primi.*



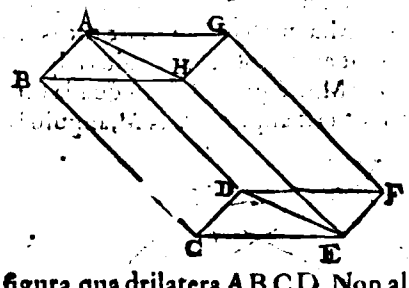
æqualis: Sed & maiorem ostẽdimus esse. Quod est absurdum. Non igitur æquales sunt AD, AE, ipsis NK, NL. Quod si AD, AE, credantur esse minores, quàm NK, NL; si abscindãtur NO, NP, ipsis AD, AE, æquales, & ducatur recta OP; demonstrabitur, vt in primo casu, angulus A, maior angulo ONP; & eadem ratione angulus C, maior angulo KNM. *f* Fiat angulus ONQ, angulo A; & angulus ONR, angulo C, æqualis, ponanturq; NQ, NR, æquales ipsis AD, AE, & connectantur OQ, OR; cadetq; OQ, infra OP, propterea quòd p puncta O, P, Q, transit circumferentia circuli ex N, ad interuallũ NO, descripta, cùm æquales sint rectæ NO, NP, NQ. *g* Quare cùm angulus PON, æqualis sit angulo LKN, externus interno; erit angulus QON, minor angulo LKN. Eadem ratione ostendetur angulus NOR, minor angulo NKM, si ducatur OS, parallela ipsi KM. Cadet enim similiter OR, infra OS. Igitur totus angulus LKM, toto angulo QOR, maior erit. Quoniam verò latera NO, NQ, trianguli NOQ, æqualia sunt lateribus AD, AE, trianguli ADE; Est autem & angulus ONQ, angulo A, æqualis, per cõstructionem; *h* erit OQ, ipsi DE, hoc est, ipsi KL, æqualis. Eodem modo erit OR, ipsi KM, æqualis. Connexa iam recta QR, cũ latera KL, KM, trianguli LKM, æqualia sint lateribus OQ, OR, triãguli OQR; & angulus LKM, maior angulo QOR, vt ostendimus: *i* erit basis LM, hoc est, FG, maior basi *f 23. primi.* *g 29. primi.* *h 4. primi.* *i 24. primi.*

QR. Quoniam igitur latera BF, BG, trianguli BFG, æqualia sunt lateribus NQ, NR, trianguli
a 25. primi. NQR, & basis FG, maior basi QR; a erit angulus B, maior angulo QNR. Rursus quia angulus ONQ, angulo A; & angulus ONR, angulo C, factus est æqualis, erit angulus totus QNR, duobus A, & C, æqualis: Sed A, & C, maiores ponuntur angulo B. Igitur & angulus QNR, maior erit angulo B. Quod est absurdum, cùm B, ostensus sit maior angulo QNR. Non ergo minores sunt AD, AE, quàm NK, NL; sed neque æquales: Igitur maiores sunt.

Iam verò, cùm rectæ AD, AE, maiores sint rectis NK, NL, vbicunq; centrum N, existat; possit recta AD, plus quàm recta NK, quadrato lineæ T, per lemma propos. 14. lib. 10. ita vt quadratum
b 12. vndec. rectæ AD, æquale sit quadratis rectarum NK, & T, b Ex centro N, excitetur ad planum circuli KLM, perpendicularis NV, rectæ T, æqualis; connectanturq; rectæ KV, LV, MV. Quoniam igitur NV, recta est ad planum circuli KLM, recta quoq; eadem erit, ex defin. 3. huius lib. ad rectas
c 47. primi. NK, NL, NM; c ac proinde quadratũ rectæ VK, quadratis rectarum KN, NV, æquale erit. Cùm ergo & quadratum rectæ AD, æquale sit ex constructione, eisdem quadratis rectarum KN, NV; æqualia erunt inter se quadrata rectarum VK, & AD. Ac propterea æquales erũt rectæ VK, AD. Rursus quia latera VN, NK, trianguli VNK, æqualia sunt lateribus VN, NL, trianguli VNL;
d 4. primi. & anguli ipsis contenti VNK, VNL, recti; d erit basis VK, æqualis basi VL; Atque eadem ratione rectæ VM. Quare tres rectæ VK, VL, VM, æquales sunt inter se: Ostensa est autem recta VK, æqualis rectæ AD. Tres ergo rectæ VK, VL, VM, æquales sunt rectæ AD, & da. rectis AB,
e 8. primi. BF, BG, CH, CI. Quamobrem, cùm latera VK, VL, trianguli VKL, æqualia sint lateribus AD, AE, trianguli ADE; & basis KL, basi DE; e erit angulus KVL, angulo A, æqualis. Non secus demonstrabimus, angulum LVM, angulo B; & angulum KVM, angulo C, esse æqualem. Quare angulus solidus V, continetur tribus angulis planis KVL, LVM, MVK, qui æquales sunt datis tribus angulis planis A, B, C. Ex tribus itaque angulis planis, &c. Quod erat faciendum.

24. THEOR. 21. PROPOS. 24.

Si solidum parallelis planis cõtineatur; aduersa illius plana, parallelogramma sunt, similia, & æqualia.



f 16. vndec.

Sit parallelepipedum AB, EF, (de hoc enim, intelligenda est propositio) contentum, iuxta defin. 30. huius lib. sex figuris quadrilateris AC, CF, FH, HA, AF, BE, quarum aduersæ quælibet sint parallelæ. Dico quæuis opposita plana esse parallelogramma, similia, & æqualia. Cùm enim parallela plana BG, CF, secentur plano AC; f Erunt communes sectiones AB, CD, parallelæ. Similiter cùm plana parallela AF, BE, secentur plano AC; erunt communes sectiones AD, BC, parallelæ; Ac proinde parallelogrammum est figura quadrilatera ABCD. Non aliter ostendemus, reliquas figuras quadrilateras esse parallelogramma. Dico iam opposita parallelograma esse similia, & æqualia. Cùm enim rectæ AB, BH,
g 10. vndec. parallelæ sint rectis DC, CE, & non in eodem plano, sed in oppositis; g erunt anguli ABH, DCE, æquales; eodemque argumento reliqui anguli parallelogrammi BG, æquales erunt reli-
h 34. primi. quis angulis parallelogrammi CF. h Quoniam verò AB, ipsi DC, in parallelogrãmo AC; & BH, ipsi CE, in parallelogrãmo BE, æqualis est; erit vt AB, ad BH, ita DC, ad CE; Ac propterea vt BH, ad HG, ita CE, ad EF, &c. eadem de causa: Erunt latera parallelogrãmorum BG, CF, circa angulos æquales, proportionalia; ac proinde parallelogramma ipsa similia. Ductis iam diametris
i 34. primi. AH, DE, cùm latera AB, BH, triãguli ABH, æqualia sint lateribus DC, CE, trianguli DCE; &
k 10. vndec. angulus ABH, angulo DCE, æqualis, vt ostẽsum est; l erunt triãgula ABH, DCE, æqualia inter
l 4 primi. se. m Quare cùm triangula ABH, DCE, dimidia sint parallelogrammorũ BG, CF; erunt paral-
m 34. primi. lelogramma BG, CF, inter se æqualia. Similiter demonstrabimus similia & æqualia esse parallelogramma opposita AC, GE; & AF, BE. Si solidum ergo parallelis planis contineatur, aduersa illius plana, parallelogramma sunt, similia, & æqualia. Quod erat demonstrandum.

25. THEOR. 22. PROPOS. 25.

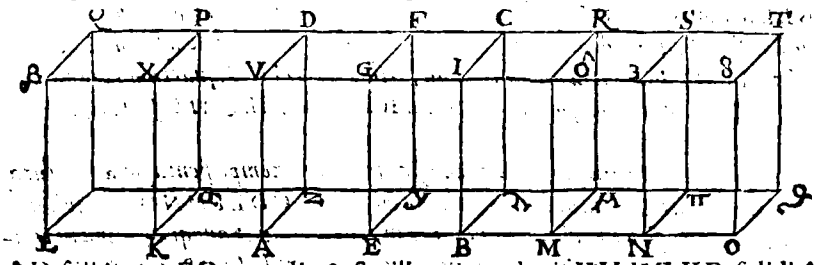
Si solidum parallelepipedũ plano secetur, aduersis planis parallelo: Erit quemadmodum basis ad basim, ita solidum ad solidum.

Secetur parallelepipedum ABCD, plano EF, parallelo oppositis planis AD, BC. Dico vt est basis AG, ad basim BG, ita esse solidum AEFD, ad solidũ BEFC. Intelligatur enim parallelepipedum ABCD, productum in vtramque partem quantumlibet, sumanturque in AB, protracta quotcunque rectæ AK, KL, ipsi AE, & quotcunque rectæ BM, MN, NO, ipsi EB, æquales. Deinde per puncta K, L, M, N, O, ducantur plana KP, LQ, MR, NS, OT, parallela planis AD, EB, BC, per scholium propos. 15. huius lib. Quoniam igitur solidum AEFD, contin-
n 24. vndec. netur planis parallelis, ex hypothesi; ipsum parallelepipedum erit, ex definitione, n habebitq; plana opposita, parallelogramma similia, & æqualia. Eodem modo erunt parallelepipeda AKPD, KLQP, EBCF, BMRC, MNSR, NOTS; ELQF, EOTF; habebuntque plana oppositæ,
o 36. primi. parallelogramma, similia, & æqualia. o Quoniam verò parallelogramma AG, KV, LX, cùm sint

super

ſuper æquales baſes A E, A K, K L, æqualia ſunt; & ſimilia quoque, [a] cùm anguli vnius ſint æquales angulis aliorum, & latera circa angulos vnius æqualia lateribus circa angulos aliorum, ideoq; proportionalia. Eademq; ratione æqualia, & ſimilia ſunt parallelogràma A Y, K Z, L α. Cùm igitur æqualia quoq; ſint, & ſimilia parallelogramma A D, K P, L Q: Erunt tria plana A G, A Y, A D ſolidi A E F D æqualia, & ſimilia tribus planis K V, K Z, K P, ſolidi A K P D; & tribus planis L X, L α, L Q ſolidi K L Q P: [b] Sunt autẽ tria in vnoquoq; ſolido æqualia, & ſimilia tribus reliquis oppoſitis in eodẽ, nempe A G, ipſi Z F; & A Y, ipſi V F; & A D, ipſi E F, &c. Igitur p defin. 10. huius lib. æqualia ſunt ſolida A E F D, A K P D, K L Q P. Eodẽ argumento æqualia oſtendentur ſolida E B C F, B M R C, M N S R, N O T S. Quare quàm multiplex eſt baſis L G, baſis A G, tam multiplex erit ſolidum L E F Q, ſolidi A E F D; Et quàm multiplex eſt baſis O G, baſis B G, tam multiplex erit ſolidum O E F T, ſolidi B E F C. Quoniam verò ſi baſis L G, (multiplex baſis A G, primæ magnitudinis,) æqualis eſt baſi O G, (multipliçi baſis B C, ſecundæ magnitudinis,) æquale quoq; eſt ſolidum L E F Q, (multiplex ſolidi A E F D, tertiæ magnitudinis) ſolido O E F T, (multiplici ſolidi B E F C, quartæ magnitudinis,) propterea quòd baſibus L G, O G, æqualibus exiſtentibus, æqualia quoque ſunt & ſimilia ſex parallelogramma ſolidi L E F Q, ſex parallelogrammis ſolidi O E F T: Si autem baſis maior eſt baſe, ſolidum quoque ſolido maius eſt; & ſi minor, minus; in quacunque hoc fiat multiplicatione: Erit per defin. 6. lib. 5. vt baſis A G, prima magnitudo, ad baſin B G, ſecundam magnitudinẽ, ita ſolidum A E F D, tertia magnitudo, ad ſolidum B E F C, quartam magnitudinẽ. Eadem ratione demonſtrabitur eſſe ſolidum ad ſolidum, vt eſt baſis D Y, ad baſin C Y; & vt baſis A Y, ad baſin B Y; & vt baſis D G, ad baſin C G. Si ſolidum igitur parallelepipedum plano ſecetur, &c. Quod erat oſtendendum.

[a] 29. primi.



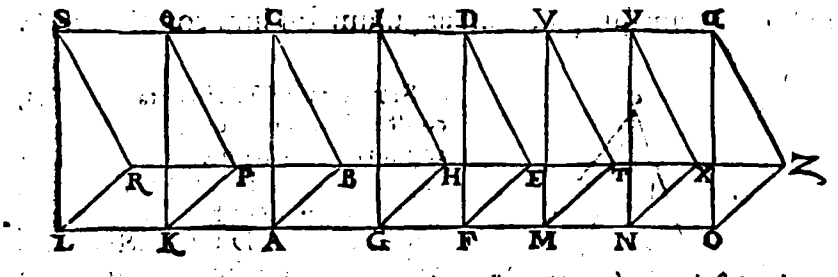
[b] 24. vndec.

SCHOLIVM.

Hæc propoſitio accommodari etiã poteſt omni priſmati. Nam ſi priſma quodcunq; plano ſecetur, aduerſis planis parallelo; erit quemadmodum baſis ad baſim, ita ſolidum ad ſolidum. Sit enim primò priſma A B C D E F, cuius plana aduerſa ſint triangula A B C, D E F; ſecenturq; plano G H I, aduerſis planis parallelo. Dico vt eſt baſis A I, ad baſin F I, ita eſſe ſolidum A B C I H G, ad ſolidum F E D I H G. Intelligatur enim priſma A B C D E F, in vtramque partem quantumlibet productum, & ex A F, protracta vtrinque capiantur quotcunque recta A K, K L, ipſi A G; & quotcunq; recta F M, M N, N O, ipſi F G, æquales. Deinde per puncta K, L, M, N, O, ducantur plana K P Q, L R S; M T V, N X Y, O Z α, parallela planis A B C, G H I, F E D, per ſcholium propoſ. 15. huius lib. Quoniam igitur plana parallela A B C, G H I, ſecantur plano A I; [a] *erunt communes ſectiones A C, G I, parallelæ: Sunt autem & A G, C I, parallelæ ex hypotheſi, ob parallelogrammum A D. Igitur parallelogrammũ eſt A I. Rurſus quia plana parallela A B C, G H I, ſecantur plano A H;* [b] *erunt communes ſectiones A B, G H, parallelæ: Sunt autem & A G, B H, parallelæ, ob parallelogrammum A E. Igitur parallelogrammũ eſt A H. Eodem modo parallelogrammum oſtendetur C H. Quoniam verò latera A C, A B, trianguli A B C, æqualia ſunt lateribus G I, G H, trianguli G H I;* [c] *cùm A C, ipſi G I, & A B, ipſi G H, ſit æquale;* [d] *& anguli C A B, I G H, ſunt quoq; æquales, eò quòd rectæ C A, A B, parallelæ ſunt rectis I G, G H, & non in eodem plano:* [e] *Erunt triangula A B C, G H I, æqualia inter ſe, & æquiangula.* [f] *Quare latera circum æquales angulos proportionalia habebunt; Atque idcircò ſimilia erunt. Igitur ſolidum A B C I H G, contentum duobus planis oppoſitis A B C, G H I, æqualibus & ſimilibus, atq; parallelogrammis A I, I B, B G, priſma eſt. Eadem arte priſmata erunt A B C Q P K, K P Q S R L; F E D I H G, F E D V T M, M T V Y X N, N X Y α Z O, L R S I H G, & O Z α I H G. Quoniam verò parallelogramma A I, K C, L Q, æqualia ſunt & ſimilia; necnon A H, K B, L P; & C H, Q B, S P; erunt omnia plana priſmatis A B C I H G, æqualia & ſimilia omnibus planis priſmatũ A B C Q P K, K P Q S R L. Quare per defin. 10. huius libri, æqualia erunt priſmata A B C I H G, A B C Q P K, K P Q S R L. Eadem ratione æqualia erunt priſmata F E D I H G, F E D V T M, M T V Y X N, N X Y α Z O. Quare q̃ multiplex eſt baſis L I, baſis A I, tam multiplex erit priſma L R S I H G, priſmatis A B C I H G; & q̃ multiplex eſt baſis O I, baſis F I, tã multiplex erit priſma P Z α I H G, priſmatis F E D I H G. Quia verò ſi baſis L I, (multiplex baſis A I, primæ magnitudinis) æqualis eſt baſi O I, (multipliçi baſis F I, ſecundæ magnitudinis;) æquale quoq; eſt priſma L R S I H G, (multiplex priſmatis A B C I H G, tertiæ magnitudinis) priſmati O Z α-*

[a] 16. vnde.

[b] 16. vnde.



[c] 34. primi.

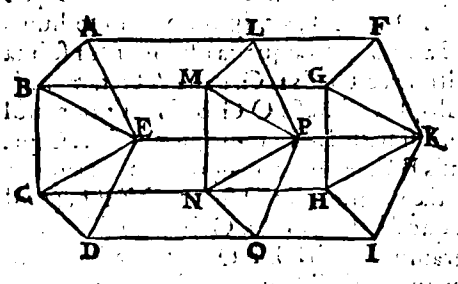
[d] 10. vnde.

[e] 4. primi.

[f] 4. ſexti.

IHG, (multiplici prismatis FEDIHG, quarta magnitudinis) propterea quòd bases LI, OI, existentibus æqualibus, æqualia quoque sunt & similia omnia plana prismatis LRSIHG, omnibus planis prismatis OZ∝IHG: Si autem basis LI, maior est basi OI, prisma quoque prismate maius est; & si minor, minus, in quacunque multiplicatione hoc fiat: Erit, per defin. 6. lib. 5. vt basis AI, prima magnitudo ad basin FI, secundam magnitudinem, ita prisma ABGIHG, tertia magnitudo ad prisma FEDIHG, quartum magnitudinem. Eodem modo ostendetur esse prisma ad prisma, vt est basis AH, ad basin FH: & vt basis CH, ad basin DH. Quod est propositum.

SIT deinde prisma ABCDEFGHIK, cuius opposita plana sint polygona, nempe pentagona, secetur q; plano LMNOP. Dico rursus, vt est basis CM, ad basin NG, ita esse solidum ABCDEPMNOP, ad solidum LMNOPFGHIK. Si enim plana oppositæ parallela resoluantur in triangula, erit quoque prisma in totidem prismata, quorum plana opposita sunt triangula, resolutum. Quare erit vt basis BP, ad basin MK, ita prisma ABEPML, ad prisma LMPKGF, per ea, quæ demonstrata sunt. Eodem modo erit vt basis CP, ad basin NK, ita prisma BCEPMN, ad prisma MNPKGH; & prisma CDEPNO, ad prisma NOPKHI. Vt autē BP, ad ME, & CP, ad NK, ita est recta EP, ad rectā PK, hoc est, vt CN, ad NH; & vt CN, ad NH, ita est CM, ad NG. Igitur prismata ABEPML, BCEPMN, CDEPNO, ad prismata LMPKGF, MNPKGH, NOPKHI, eandem habent proportionem ei, quam habet CM, ad NG; ac proinde eandem inter se. [b] Vt autem vnum ad vnum, ita se habent omnia ad omnia. Igitur erit vt prisma BCEPMN, ad prisma MNPKGH, hoc est, vt basis CM, ad basin NG, ita prisma ABCDELMNOP, ex tribus compositū ad prisma LMNOPFGHIK, ex tribus constatum. Quod est propositum. Eadem prorsus erit demonstratio in quocunq; alio prismate.



a 21. sexti.

b 12. quinti

POTEST tamen hoc idem in omni prismate ostendi, demonstratione, qua vsi sumus in prismate habente plana opposita, triangula similia. Si enim eadem fiat constructio, producto prismate in vtramq; partem, erunt omnia plana parallela secantia, inter se æqualia, & similia; [c] propterea quòd latera eorum sunt parallela, nempe communes sectiones parallelorum planorum; [d] ac proinde angulos æquales comprehendunt, &c. Vnde, vt prius, ostendentur prismata ex vna parte inter se æqualia, necnon & prismata ex altera parte, &c.

c 16. vnde.

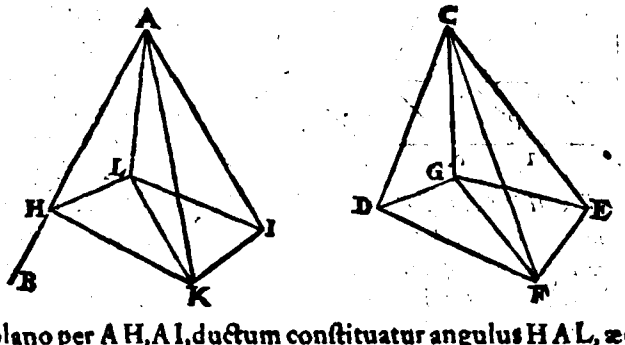
d 10. vnde.

COROLLARIVM.

Ex his infertur, si prisma quodcunque secetur plano oppositis planis æquidistante, sectionem esse figuram æqualem & similem planis oppositis: Veluti demonstratum est in priori prismate, triangulum GHI, æquale esse & simile triangulo ABC, atq; adeò triangulo DEF. Eadem enim in omnibus est demonstratio. Idem dices de parallelepipedo.

26. PROBL. 4. PROPOS. 26.

AD datam rectam lineam, eiusque punctum angulum solidum constituere, solido angulo dato æqualem.



SIT ad punctū A, in data recta AB, constituēdus angulus solidus, æqualis angulo solido C, contento tribus angulis planis DCE, DCF, FCE, non in eodē plano existentibus. [a] Ducatur ex F, ad planum p CD, CE, ductum, perpendicularis FG; connectanturq; rectæ DF, DG, EF, EG, CG. Deinde abscindatur AH, æqualis ipsi CD, [b] fiatq; angulus HAI, angulo DCE, æqualis; & recta AI, rectæ CE, æqualis. Rursus in plano per AH, AI, ductum constituatur angulus HAL, æqualis angulo DCG, qui in plano per CD, CE, ducto existit; & recta AL, rectæ CG, æqualis. [c] Ex L, verò ad planum, in quo sunt tres AH, AL, AI, erigatur perpendicularis LK, quæ ipsi FG, æqualis ponatur, & coniungatur recta KA. Dico angulum solidum A, contentum tribus planis angulis HAI, HAK, KAI, æqualem esse dato angulo solido C. Connexis enim rectis HK, HL, IK, IL; cū latera AH, AL, trianguli AHL, æqualia sint lateribus CD, CG, trianguli CDG, & anguli HAL, DCG, æquales, p constructionem; [d] Erunt bases HL, DG, æquales. Rursus quia ablatis angulis æqualibus HAL, DCG, ab æqualibus HAI, DCE, reliqui æquales sunt LAI, GCE: Cùm igitur & latera AL, AI, trianguli ALI, æqualia sint lateribus CG, CE, trianguli CGE, per constructionem; [e] æquales quoque erunt LI, GE. Quia igitur latera LH, LK, æqualia sunt lateribus GD, GF; & anguli HLK, DGF,

a 11. vndec.

b 23. primi.

c 12. vndec.

d 4. primi.

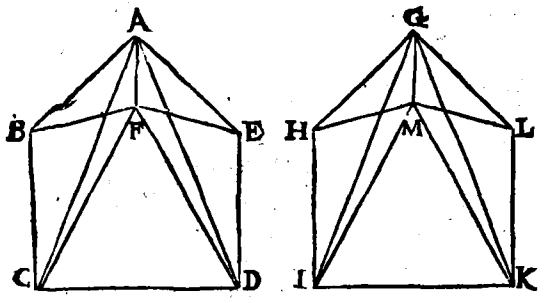
e 4. primi.

DGF, recti, ex defin. 3. huius lib. [a] erunt & baſes HK, DF, æquales. Quare cùm & latera AH, AK, trianguli AHK, ſint æqualia lateribus CD, CF, triãguli CDF, ex conſtructione. (cùm enim AL, LK, latera lateribus CG, GF, æqualia ſint ex conſtructione, comprehendantq; angulos æquales; nimirũ rectos, ex defin. 3. huius lib. [b] erunt baſes AK, CF, æquales.) [c] Erunt quoq; anguli HAK, DCF, æquales. Deniq; quia latera LI, LK, ſunt æqualia lateribus GE, GF; & anguli ILK, EGF, recti, ex defin. 3. huius libri. [d] Erunt baſes IK, EF, æquales: Cùm igitur & latera AI, AK, trianguli AIK, lateribus CE, CF, trianguli CEF, ſint æqualia ex conſtructione; [e] Erunt quoque anguli IAK, ECF, æquales. Sunt ergo tres anguli plani HAI, HAK, KAI, ſolidum angulum A, componentes, æquales tribus angulis planis DCE, DCF, FCE, angulum ſolidum C, componentibus; Atq; proinde ſolidus angulus A, ſolido angulo C, æqualis. Ad datam itaque rectam lineam, eiusq; punctum, angulum ſolidum conſtituimus, ſolido angulo dato æqualem. Quod erat faciendum.

[a] 4. primi.
[b] 4. primi.
[c] 8. primi.
[d] 4. primi.
[e] 4. primi.

SCHOLIVM.

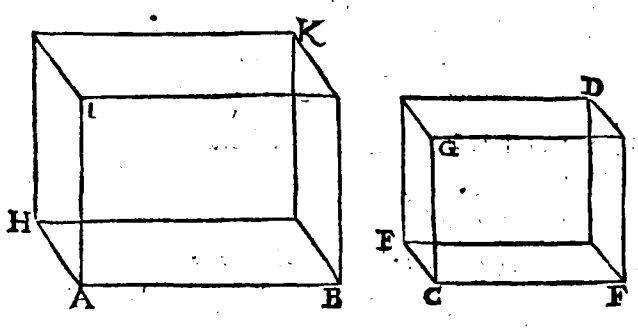
QVOD ſi angulus ſolidus datus contineatur pluribus angulis planis, q̃ tribus, ſubtendenda erunt omnibus angulis planis recta in vno eodemq; exiſtentes plano (in eo ſcilicet, quod omnes rectas lineas planorum angulorum ſecet) ita vt figuram planam polygonam conſtituant, pyramisq; quædam multilatera efficiatur. Si enim figura polygona in triangula reſoluatur, habebuntur tot pyramides trilaterę, quot triangula in figura polygona continentur. Si igitur angulis ſolidis omnium pyramidum triangularium æquales ſolidi anguli conſtituantur; quorum quilibet tribus angulis planis continetur; conſtitutus erit totus angulus ſolidus toti angulo ſolido æqualis.



VT ſi angulo ſolido A, contento quinque angulis planis BAC, CAD, DAE, EAF, FAB, conſtituendus ſit ſolidus angulus æqualis, ſubtendędæ ſunt angulis planis rectæ BC, CD, DE, EF, FB, vt fiat pentagonum BCDEF, quòd in tria triangula reſoluatur BCF, FCD, DEF. Deinde ſolido angulo A, contento tribus planis angulis BAC, CAF, FAB, conſtituendus ſolidus angulus æqualis G, contentus tribus angulis planis HGI, IGM, MGH. Et ſolido angulo A, contẽto tribus planis angulis CAF, FAD, DAC, æqualis ſolidus angulus G, contentus tribus angulis planis IGM, MGK, KGI. Et denique angulo ſolido A, contento tribus angulis planis DAE, EAF, FAD, æqualis ſolidus angulus G, contentus tribus planis angulis KGL, LGM, MGK. Ita enim fiet totus angulus ſolidus G, toti angulo ſolido A, æqualis. Atq; in hunc modum cuilibet angulo ſolido æqualis angulus ſolidus conſtituetur.

PROBL. 5. PROPOS. 27. 27.

A' DATA recta linea, dato ſolido parallelepipedo ſimile & ſimiliter poſitum ſolidum parallelepipedum deſcribere.

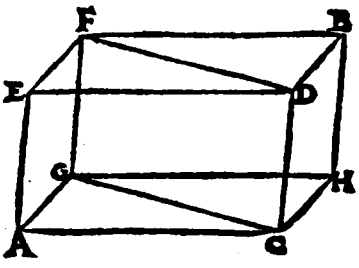


SIT à data recta AB, deſcribendum parallelepipedum ſimile, ſimiliterque poſitum parallelepipedo CD. [f] Fiat ad rectam AB, eiusq; punctum A, angulus ſolidus æqualis angulo ſolido C, ita vt tres anguli plani HAI, IAB, BAH, æquales ſint tribus angulis planis ECG, GCF, FCE. Deinde vt eſt CF, ad CG, [g] ſic fiat AB, ad AI, & vt CG, ad CE, ita AI, ad AH; eritq; ex æquo, vt CF, ad CE, ita AB, ad AH. Poſthæc, perficiatur parallelepipedum AK, completis nimirum parallelogrammis BH, HI, IB, & per I, B, H, ductis planis IK, BK, HK, quæ parallela ſint parallelogrãmis BH, HI, IB. Dico parallelepipedũ AK, parallelepipedo CD, ſimile eſſe ſimiliterque poſitum. Cùm enim anguli BAH, FCE, ſint æquales, & latera circa ipſos proportionalia, nempe vt BA, ad AH, ita FC, ad CE, ex conſtructione; erunt parallelogramma HB, EF, ſimilia, ſimiliterque poſita. Eadem ratione ſimilia erunt, ſimiliterq; poſita parallelogramma HI, EG; & IB, GF. Tria igitur plana BH, HI, IB, ſolidi AK, ſimilia ſunt, ſimiliterque poſita tribus planis FE, EG, GF, ſolidi CD. [h] Sunt autem tria cuiuslibet æqualia & ſimilia tribus reliquis oppoſitis. Quare ſex plana ſolidi AK, ſimilia ſunt, ſimiliterque poſita ſex planis ſolidi CD; Ac proinde ex defin. 9. huius lib. ſimilia ſunt, ſimiliterque poſita, ſolida AK, CD. A data ergo recta linea, dato ſolido parallelepipedo ſimile, & ſimiliter poſitũ ſolidum parallelepipedum deſcripſimus. Quod erat faciendum.

[f] 26. vndec.
[g] 12. ſexti.
[h] 24. vndec.

28. ## THEOR. 23. PROPOS. 28.

SI ſolidum parallelepipedum plano ſecetur per diagonios aduerſorum planorum: Bifariam ſecabitur ſolidum ab ipſo plano.



a 34. primi.
b 9. vndec.
c 33. primi.
d 24. vndec.

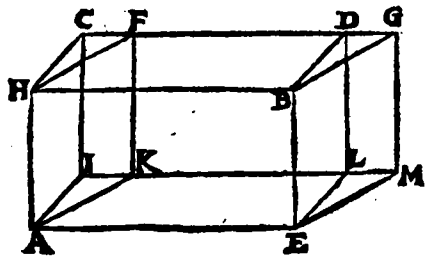
SIT parallelepipedũ AB, in quo plana oppoſita ſint AH, EB, quorum diagonij, ſeu diametri, ſint rectæ lineæ CG, DF. Quoniam igitur vtraque CD, GF, parallela eſt, [a] & æqualis ipſi AE, cùm ſint parallelogramma CE, GE; [b] erunt & inter ſe parallelæ, & æquales CD, GF. [c] Ac proinde, quæ ipſas coniungunt CG, DF, parallelæ erunt, & æquales, ideoque in vno plano. Dico planum, quod per CG, DF, ducitur, ſecare bifariam parallelepipedum AB. [d] Cùm enim plana AH, EB, ſint parallelogramma æqualia, & ſimilia; erunt & eorum dimidia, nimirum triangula AGC, GCH; EFD, FDB, æqualia inter

e 6. ſexti.
f 24. vndec.

ſe: Sunt autem & latera circa angulos æquales GAC, CHG; FED, DBF, proportionalia. [e] Igitur ſimilia quoque erunt dicta triangula. [f] Cùm igitur & parallelogrammum AF, æquale ſit & ſimile parallelográmo CB; & AD, ipſi GB; & CF, commune: Erunt duo triangula AGC, EFD, & parallelogramma AF, AD, CF, priſmatis ACGFED, æqualia & ſimilia duobus triangulis HCG, BDF, & parallelogrammis CB, BG, CF, priſmatis HGCDBF; propterea quę priſmata æqualia erunt, ex definitione 10. huius libri. Quæ cùm componant parallelepipedum AB, ſectum erit parallelepipedum AB, bifariam. Itaque ſi ſolidum parallelepipedum plano ſecetur, &c. Quod erat demonſtrandum.

29. ## THEOR. 24. PROPOS. 29.

SOLIDA parallelepipeda ſuper eandem baſin conſtituta, & in eadem altitudine, quorũ inſiſtentes lineæ in iiſdem collocantur rectis lineis: ſunt inter ſe æqualia.



g 35. primi.
b 34. primi.

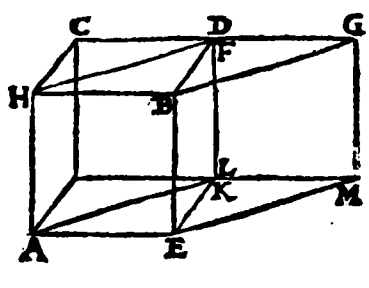
SVPER baſin AB, in eadem altitudine, hoc eſt, inter eadem plana parallela, ſint conſtituta duo parallelepipeda ACDE, AFGE, quorum inſiſtentes lineæ ex quatuor angulis baſis exeuntes in iiſdem collocentur lineis, nempe AI, AK, EL, EM, in recta IM; & HC, HF, BD, BG, in recta CG. Dico parallelepipeda ACDE, AFGE, eſſe inter ſe æqualia. [g] Cùm enim æqualia ſint parallelogramma AL, AM, ſuper eadem baſi AE, & in eiſdem parallelis conſtituta; erunt, ablato communi trapezio AELK, æqualia quoque triangula AIK, ELM. [b] Quoniam verò omnia latera trianguli AIK, æqualia ſunt omnibus lateribus trianguli HCF; erit triangulum AIK, triangulo HCF, æquiangulum, & æquale, per ea, quæ ad 8. propoſ. libri 1. oſtendimus

i 4. ſexti.
k 24. vndec.
l 36. primi.
m 34. primi.

[i] Ac propterea latera circa æquales angulos habebũt proportionalia, ideoque inter ſe erunt ſimilia. Eadem ratione triangulum ELM, triangulo BDG, æquale erit, & ſimile. [k] Rurſus parallelogrammum AC, æquale eſt, & ſimile parallelogrammo ED; & eadem ratione parallelogrammum AF, parallelogrammo EG; [l] Sed & IF, ipſi LG, cùm baſes IK, LM, ſint æquales. ([m] Nam cùm rectæ IL, KM, æquales ſint ipſi AE, erunt quoque inter ſe æquales; quare communi dempta KL, æquales erunt IK, LM.) Erunt ergo omnia plana priſmatis AIKFCH, æqualia & ſimilia omnibus planis priſmatis ELMGDB. Igitur ex definitione 10. huius lib. æqualia erunt dicta priſmata; Ac propterea addito communi ſolido AHFKLDBE, æqualia fient parallelepipeda ſuper eandem baſin, &c. Quod erat demonſtrandum.

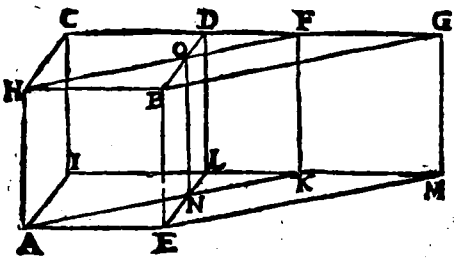
SCHOLIVM.

HAEC propoſitio perſimilis eſt propoſitioni 35. libri 1. Quod enim ibi de parallelogrammis, hoc de parallelepipedis demonſtratur hoc loco, eiſdem ferè medijs, dummodò loco triangulorum aſſumantur priſmata, vt ex demonſtratione liquet. Vnde reliqui duo caſus, quando nimirum punctum K, in punctum L, cadit, vel vltra L, eodem modo demonſtrabuntur, vt in his figuris apparet. Nam in ſecundo caſu, ſi ex parallelogrammis æqualibus AL, AM, auferatur triangulum cõmune ALE, erunt reliqua triangula AIK, ELM, æqualia. Vnde, vt prius, æqualia erunt priſmata AIKFCH, ELMGDB. Addito ergo priſmate communi AKEBHD, æqualia fient parallelepipeda ACDE, AFGE.



IN tertio verò caſu, ſi ex parallelogrammis æqualibus AL, AM, demantur triangulum cõmune ANE, erunt reliqua trapezia AILN, NKME, æqualia; quibus ſi addatur triangulum commune KLN, tota triangula AIK, ELM, æqualia fient.

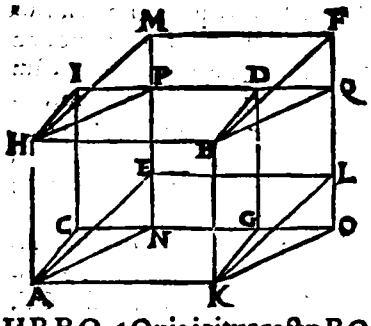
Vnde,



Vnde, vt prius, æqualia erunt prismata AIKFCH, ELMGDB; à quibus si auferatur prisma cõmune KLNODF; (Nam communis sectio planorum AF, DE, est recta NO.) remanebit solidum comprehẽsum planis AILN, NOHA, AICH, HCDO, CDLI, DLNO, æquale solido contento planis ENKM, MKFG, GFOB, FKNO, BGME, EBON. Si igitur addatur vtrique prisma commune AENOBH; fient parallelepipeda ACDE, AFGE, inter se æqualia.

THEOR. 25. PROPOS. 30. 30.

SOLIDA parallelepipeda super eandem basin constituta, & in eadẽ altitudine, quorũ insistentes lineæ nõ in iisdem collocãtur rectis lineis: inter se sunt æqualia.



SVPER basin AB, in eadem altitudine, hoc est, inter eadem plana parallela, sint constituta parallelepipeda AIDK, AMFK, quorum insistentes lineę ex quatuor angulis basis exeuntes AC, AE, KG, KL; HI, HM, BD, BF, non sint in eisdem rectis, hoc est, neque CI, GD, protractę transeant per puncta M, E, F, L, neque CG, ID, productæ, &c. Dico parallelepipeda AIDK, AMFK, esse æqualia. Cùm enim plana CD, EF, opposita basi AB, sint in eodem plano, ob eandẽ altitudinem parallelepipedorum; producãtur in eo plano rectæ CG, ID, quarum CG, secet EM, LF, protractas in punctis N, O; Et ID, easdem in punctis P, Q; adiunganturque rectę AN, KO, HP, BQ. [a] Quia igitur rectæ PQ, MF, sunt æquales, cùm opponantur in parallelogrammo FP; & MF, ipsi HB, est æqualis; erunt & PQ, HB, æquales: Sunt autem & parallelæ, propter parallelogrammum HIDB, [b] Igitur & HP, BQ, parallelæ sunt & æquales, ideoque parallelogrammum est HPQB. Eadem ratione parallelogramma erunt HPNA, ANOK, KOQB: Est autem & parallelogrammum NOQP. Igitur parallelepipedum est APQK. [c] Quamobrem parallelepipedum AIDK, æquale est parallelepipedo APQK, cùm vtriusque eadem sit basis AB, & insistentes lineæ sint in rectis eisdem CO, IQ. Eodem modo eidem parallelepipedo APQK, æquale erit parallelepipedum AMFK, cùm vtriusque eadem sit basis AB, & insistentes lineæ sint in rectis eisdem NM, OF. Quare parallelepipeda AIDK, AMFK, inter se sunt æqualia. Solida igitur parallelepipeda super eandem basin, &c. Quod erat demonstrandum.

[a] 34. primi.
[b] 33. primi.
[c] 29. vndec.

SCHOLIVM.

CONVERTATVR hæc propositio, atq; præcedens, in hunc modum.

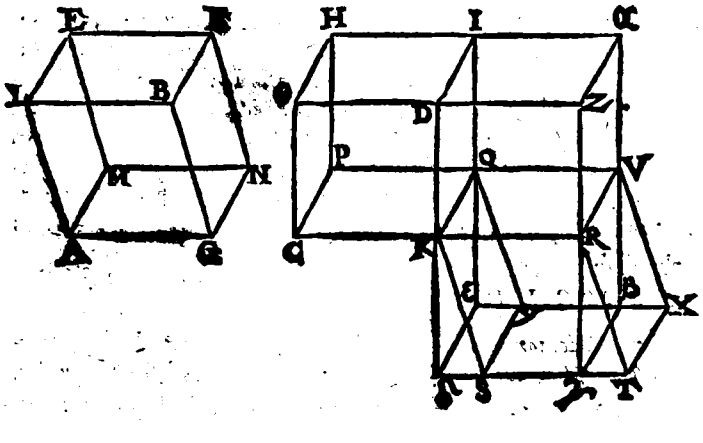
SOLIDA parallelepipeda æqualia super eandem basin, siue insistentes lineæ in eisdem collocentur rectis, siue non; in eadem sunt altitudine.

NAM si vnum dicatur altius: si ab eo abscindatur parallelepipedum in eadem cum reliquo altitudine; erunt æqualia abscissum, & reliquum. [a] *Cùm igitur & totum huic reliquo ponatur æquale; æquale erit abscissum toti. Quod est absurdum.*

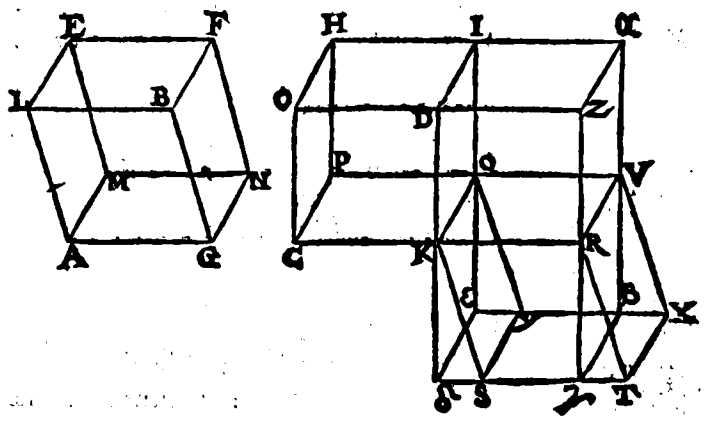
[a] 29. vel 30 vndec.

THEOR. 26. PROPOS. 31. 31. 32.

SOLIDA parallelepipeda super æquales bases constituta, & in eadem altitudine: æqualia sunt inter se.



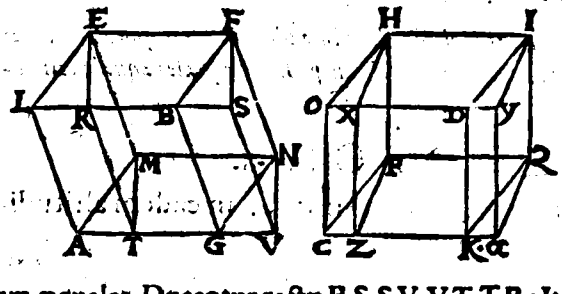
SVPER æquales bases AB, CD, in eadẽ altitudine sint constituta parallelepipeda AEFG, CHIK. Dico hæc parallelepipeda esse æqualia inter se. Sint enim primùm insistentes lineæ AM, GN, LE, BF, ad basin AB; & insistentes CP, KQ, OH, DI, ad basin CD, perpendiculares. Quo posito, erunt omnes dictæ perpendiculares inter se æquales, propter eandem paralelepipedorum altitudinẽ. Producatur CK, in rectum, sitque KR, æqualis ipsi LB, & fiat an-



gulus RKS, in plano OK, extenſo, æqualis angulo BLA, ponanturq; KS, æqualis ipſi LA; & perficiatur parallelogrammum KT, ſuper quod, ad altitudinem perpẽdicularis KQ, cõſtruatur parallelepipedum QSTV. Quoniam igitur latera KR, KS, æqualia ſunt lateribus LB, LA, & anguli RKS, BLA, æquales; erunt parallelogramma KT, LG, æqualia & ſimilia. Rurſus quia latera KQ, KS, æqualia ſunt lateribus LE, LA, & anguli QKS, ELA, recti, per defin. 3. huius lib. eò q; KQ, LE, rectæ ponantur ad plana KT, LG; erunt & parallelogramma QS, EA, æqualia & ſimilia. Eodem modo cùm latera KR, KQ, æqualia ſint lateribus LB, LE, & anguli QKR, ELB, recti, ex eadem definitione 3. huius lib. erunt quoque parallelogramma KV, LF, æqualia & ſimilia. [a] Quare cùm tria plana KT, QS, KV, parallelepipedi QSTV, æqualia ſint & ſimilia tribus planis LG, EA, LF, paral-
[a] 24. vndec. [b] 24. vndec. lelepipedi AEFG; [b] tam autem illa, quàm hæc æqualia ſint & ſimilia tribus reliquis oppoſitis: Erunt per defin. 10. huius lib. parallelepipeda QSTV, EAGF, inter ſe æqualia.

CONVENIANT rectæ DK, TS, productæ in α; & IQ, XY, in ε, compleaturq; parallelepipedum Qα, γV. Item HI, βV, protractæ conueniant in α; & OD, γR, in Z, perficiaturq; parallelepipedum IKRα. Quoniam igitur parallelepipeda QSTV, Qαγ V, eandẽ habent baſin KV, ſuntq; in eadem altitudine, nempe inter eadem plana parallela KV, αX, & inſiſtentes ipſorum
[c] 29. vndec. lineæ KS, Kα, RT, Rγ; QY, Qε, VX, Vβ, collocantur in eiſdem rectis αT, εX; [c] ipſa inter ſe æqualia erunt. Eſt autem parallelepipedum QSTV, parallelepipedo EAGF, æquale. Igitur eidem parallelepipedo EAGF, æquale erit parallelepipedum Qαγ V.

[d] 35. primi. [d] QVONIAM verò parallelogramma KT, Kγ, æqualia ſunt inter ſe; & KT, æquale eſt ipſi LG,
[e] 7. quinti. erit & Kγ, ipſi LG, hoc eſt, ipſi CD, æquales; cùm baſes LG, CD, ponantur æquales. [e] Quare erit,
[f] 25. vndec. vt CD, ad DR, ita Kγ, ad DR; [f] Vt autem CD, baſis ad baſin DR, ita eſt ſolidum CHIK, ad ſolidum KIαR; cùm parallelepipedum CHαR, ſecetur plano IK, planis oppoſitis CH, αR, paral-
[g] 9. quinti. lelo: Et eadem ratione, vt Kγ, ad DR, ita eſt ſolidum Qαγ V, ad ſolidum IKRα; cùm & parallelepipedum Iαγα, ſecetur plano KV, oppoſitis planis Dα, αβ, parallelo. [g] Igitur æqualia erunt parallelepipeda CHIK, Qαγ V; cùm eandem habeant proportionem ad idem ſolidum IKRα; nimirum eandem, quam habent baſes æquales CD, Kγ, ad eandem baſin DR. Quare cùm parallelepipedum Qαγ V, ſit oſtenſum æquale parallelepipedo AEFG: æqualia quoque erunt parallelepipeda AEFG, CHIK. Quod eſt propoſitum.

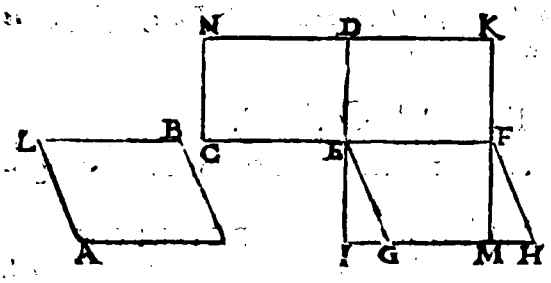


SINT iam neque inſiſtentes lineæ AM, GN, LE, BF, ad baſin AB; neq; CP, KQ, OH, DI, ad baſin CD, perpendiculares:
[h] 11. vndec. [h] Et à punctis E, F, M, N, demittantur ER, FS, MT, NV, ad planum, in quo baſis AB, perpendiculares; Item à punctis, H, I, P, Q, ad planum, in quo baſis CD, perpendiculares HX, IY, PZ, Qα. Erũt autem omnes hæ perpendiculares inter ſe æquales, cùm ſint altitudines dictorum parallelepipedorum æquales. Ducantur rectæ RS, SV, VT, TR: Item rectæ XY, Yα, αZ, ZX, vt fiant parallelepipeda ETVF, HZαI, quæ cùm ſint eiuſdem altitudinis, habeantq; inſiſtentes lineas perpen-
[i] 29. vel 30. vndec. diculares, erunt inter ſe æqualia, vt oſtenſum eſt. [i] Sed parallelepipedum ETVF, æquale eſt parallelepipedo AEFG, cùm hoc eandem cum illo habeat baſin EN, eandemq; altitudinem: Et parallelepipedum HZαI, æquale eſt eadem ratione parallelepipedo CHIK, cùm hoc eandem cum illo baſin HQ, eandemque altitudinem poſsideat. Igitur & inter ſe æqualia ſunt parallelepipeda AEFG, CHIK. Idemq; oſtendetur, ſi vnius parallelepipedi inſiſtentes lineæ ſint perpendiculares ad baſin, alterius verò non. Quocirca ſolida parallelepipeda ſuper æquales baſes conſtituta, &c. Quod demonſtrandum erat.

SCHOLIVM.

POTEST cum Campano expeditius fortaſſe demonſtrari, duo parallelepipeda ſuper æquales baſes conſtituta, & in eadem altitudine, quorum inſiſtentes lineæ ad baſes ſunt perpendiculares, inter ſe eſſe æqualia; Nimirum ex ſolis baſibus, ſine conſtructione tot parallelepipedorum, quamuis eadem ſit demonſtratio illius,

qua



qua noſtra. Sint enim duæ baſes æquales, nempe duo parallelogramma A B, C D. Dico parallelepipeda ſuper ipſas conſtituta, in eadem altitudine, quorum inſiſtentes lineæ ad baſes A B, C D, ſunt perpendiculares, inter ſe eſſe æqualia. Protrahantur enim duo latera D E, C E, ad partes E. Deinde fiat angulus F E G, æqualis angulo L; & recta E F, rectæ L B; & recta E G, rectæ L A, ponatur æqualis; perficiaturq́, parallelogrammum E H, quod æquale erit, & ſimile parallelogrammo A B. Conueniat autem H G, producta cum D E, producta in I, & compleatur parallelogrammum I K. Iam verò intelligantur ſuper baſes E H, I F, E K, conſtituta parallelepipeda eiuſdem altitudinis cum parallelepipedis ſuper A B, C D, conſtructis; ſintq́, inſiſtentes lineæ perpendiculares ad dictas baſes. Perſpicuum eſt igitur, ſolidum ſuper E H, æquale eſſe ac ſimile ſolido ſuper A B, ex defin. 10. huius lib. cùm plana illius æqualia ſint & ſimilia planis huius, per conſtructionem: [a] Sunt autem & æqualia parallelepipeda ſuper E H, I F, cùm habeant baſin eandem, cuius infimum latus E F, erectam ſuper planum I K; Item plana baſi oppoſita, quorum latera infima G H, I M, in eodem plano, cuius infimum latus I H: atque inſiſtentes lineæ E G, F H, E I, F M, &c. in eiſdem rectis lineis I H, &c. Igitur æquale erit parallelepipedum ſuper I F, parallelepipedo ſuper A B. [b] Quoniam verò parallelogramma E H, I F, æqualia ſunt; & E H, æquale eſt ipſi C D: æqualia erunt I F, C D. [c] Erit igitur, vt I F, ad E K, ita C D, ad E K: [d] Eſt autem vt I F, ad E K, ita ſolidum ſuper I F, ad ſolidum ſuper E K, quòd ſolidum ſuper I K, ſecetur plano ſuper E F, erecto parallelo planis ſuper D K, I M, erectis. Et eadem ratione, vt C D, ad E K, ita ſolidum ſuper C D, ad ſolidum ſuper E K, cùm ſolidum ſuper C K, ſecetur plano ſuper D E, erecto parallelo planis ſuper C N, F K, erectis. Quare erit vt ſolidum ſuper I F, ad ſolidum ſuper E K, ita ſolidum ſuper C D, ad ſolidum ſuper E K; [e] Ac proinde æqualia erunt parallelepipeda ſuper I F, & C D. Oſtenſum eſt autem parallelepipedum ſuper I F, æquale parallelepipedo ſuper A B. Æqualia ergo erunt & parallelepipeda ſuper A B, C D. Quod eſt propoſitum.

a 29. vnde.
b 35. primi.
c 7. quinti.
d 25. vndec.
e 9. quinti.

CONVERTETVR quoque hæc propoſ. 31. in hunc modum.

SOLIDA parallelepipeda æqualia ſuper æquales baſes, in eadem ſunt altitudine. Et parallelepipeda æqualia in eadem altitudine, ſuper æquales ſunt baſes, ſi non habuerint eandem baſin:

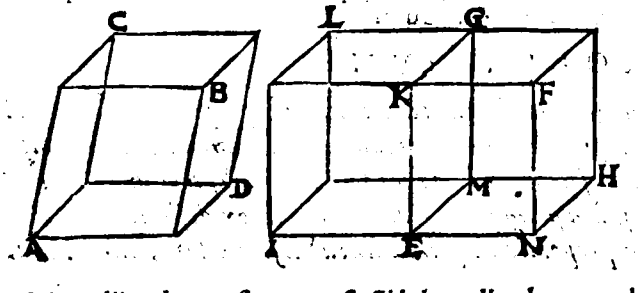
SI enim vnum altero credatur altius, ſi ab eo abſcindatur parallelepipedum in eadem cum altero altitudine, [f] fient æqualia abſciſſum, & alterum. Cùm ergo & totũ ponatur æquale alteri; æquale erit abſciſſum toti. Quod eſt abſurdum.

f 31. vndec.

QVOD ſi in eadem ſint altitudine, & baſis vnius credatur maior baſe alterius, ſi ab ea abſcindatur baſis æqualis alteri, & ſuper abſciſſam intelligatur parallelepipedum eiuſdem altitudinis, demonſtrabimus eodem modo, partem toti eſſe æqualem. Quod eſt abſurdum.

THEOR. 27. PROPOS. 32. 33.

SOLIDA parallelepipeda ſub eadem altitudine; inter ſe ſunt, vt baſes.



SINT duo parallelepipeda A B C D, E F G H, eiuſdem altitudinis ſuper baſes A B, E F. Dico eſſe ſolidum ad ſolidum, vt eſt baſis ad baſin. [a] Super rectam enim E K, conſtruatur parallelogrammum I K, æquale parallelogrammo A B, in angulo I E K, qui ſit æqualis angulo E N F. Conſtituent autem parallelogramma E F, I K, totum parallelogrammum vnum F I, vt in 45. propoſitione lib. 1. demonſtratum eſt. Si igitur alia plana parallelepipedi E F G H, producãtur ad partes E G, perficiaturque totum vnum parallelepipedum I F L H; [b] erunt parallelepipeda A B C D, I K L M, æqualia, cùm habeãt æquales baſes, per conſtructionem A B, I K; & eandem altitudinem, ex hypotheſi. [c] Quare erit vt ſolidum I K L M, ad ſolidum E F G H, ita ſolidum A B C D, ad idem ſolidum E F G H: [d] Eſt autẽ ſolidum I K L M, ad ſolidum E F G H, vt baſis I K, hoc eſt, illi æqualis baſis A B, ad baſin E F. Igitur & ſolidũ A B C D, erit ad ſolidum E F G H, vt baſis A B, ad baſin E F. Solida ergo parallelepipeda ſub eadẽ altitudine inter ſe ſunt, vt baſes. Quod erat demonſtrandũ.

a 45. primi.
b 31. vndec.
c 7. quinti.
d 25. vndec.

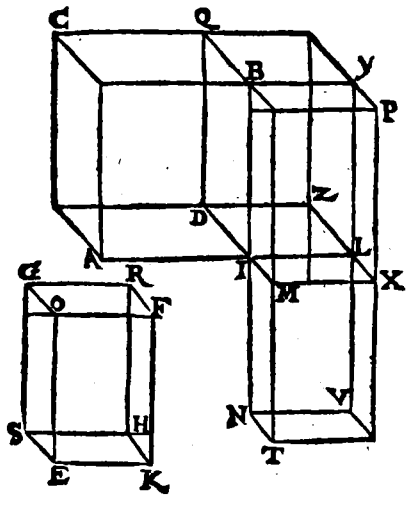
SCHOLIVM.

CONVERSO modo, ſi ſolida parallelepipeda inter ſe ſint, vt baſes; ipſa erunt ſub eadem altitudine. Si enim non eadem credatur altitudo; ex maiori abſcindatur minori æqualis, & dũtaxãt planum baſi

a 32 vnde. *parallelum;* [a] *eritq́, vt basis ad basin, ita parallelepipedum ad parallelepipedum abscissum: sed sic quoque*
b 9 quinti. *erat ad totum.* [b] *Abscissum ergo æquale est toti. Quod est absurdum.*

36. THEOR. 28. PROPOS. 33.

SIMILIA solida parallelepipeda, inter se sunt in triplicata ratione homologorum laterum.



SINT similia parallelepipeda A B C D, E F G H, super bases similes A B, E F, in quibus latera homologa sint A I, E K. Dico proportionem E F G H, esse triplicatam proportionis laterum homologorũ A I, E K. Producatur enim A I, ad L, & sit I L, æqualis ipsi E K, vel G R; Item D I, ad M, & sit I M, æqualis ipsi H K, vel G O; Item B I, ad N, & sit I N, æqualis ipsi K F, vel G S. Deinde completis parallelogrãmis L M, L N, I T, perficiatur parallelepipedum T X I V. Quoniam verò latera I L, I M, æqualia sunt lateribus G R, G O, & anguli contenti æquales, cùm angulus L I M, sit æqualis angulo A I D, qui ob similitudinem parallelepipedorum æqualis est angulo E K H, seu R G O; erũt parallelogramma I X, G F, similia & æqualia. Eadem ratione similia erũt, & æqualia L N, R S; item I T, G E. Quare tria plana I X, L N, I T, parallelepipedi T X I V, similia sunt & æqualia tribus planis G F, R S, G E, parallelepipedi E F G H; [b] Sũt autem tria cuiusque similia & æqualia tribus reliquis oppositis. Igitur æqualia sunt & similia parallelepipeda T X I V, E F G H, ex defin. 10. huius lib. Rursus completis parallelogrammis M B, B L, L M, perficiatur parallelepipedum M P B L; Item completis parallelogrammis I Y, D L, I Q, perficiatur parallelepipedum I Y Q Z. Quoniam igitur ob

a 15. primi.
b 24. vndec.

similitudinem parallelepipedorum A B C D, E F G H, est vt A I, ad E K, hoc est, ad I L, ita D I, ad H K, hoc est, ad I M; & B I, ad F K, hoc est, ad I N. [c] Vt autem A I, ad I L, ita est parallelogrammum A D, ad D L; Et vt D I, ad I M, ita parallelogrammum D L, ad L M; & vt B I, ad I N, ita parallelogrammum B L, ad L N. Igitur erit vt A D, ad D L, ita D L, ad L M; & B L, ad L N. [d] Sed vt A D, basis ad D L, basin, ita est parallelepipedum A D C B, ad parallelepipedum D L Y Q; & vt basis D L, ad basin L M, ita parallelepipedum D L Y Q, ad parallelepipedum L M B P; & vt basis B L, ad basin L N, ita parallelepipedum L M B P, ad parallelepipedum L N T X. Quare erit, vt parallelepipedum A D C B, ad parallelepipedum D L Y Q, ita parallelepipedum D L Y Q, ad parallelepipedum L M B P, & parallelepipedum L M B P, ad parallelepipedum L N T X. Ac proinde quatuor quantitates sunt continuè proportionales A D C B, D L Y Q, L M B P, L N T X, ideoque proportio primæ A D C B, ad quartam L N T X, hoc est, ad E F G H, erit triplicata proportionis primæ A D C B, ad secundam D L Y Q, ex defin. 10. lib. 5. [e] Vt autẽ A D C B, ad D L Y Q, ita est basis A D, ad basin D L; [f] Et vt A D, ad D L, ita est recta A I, ad I L, hoc est, ad E K. Igitur proportio parallelepipedi A D C B ad parallelepipedum E F G H, est triplicata proportionis homologorum laterum, nimirum A I, ad E K. Quapropter similia solida parallelepipeda, inter se sunt in triplicata ratione homologorum laterum. Quod erat demonstrandum.

d 32. vndec.
e 32. vndec.
f 1. sexti.

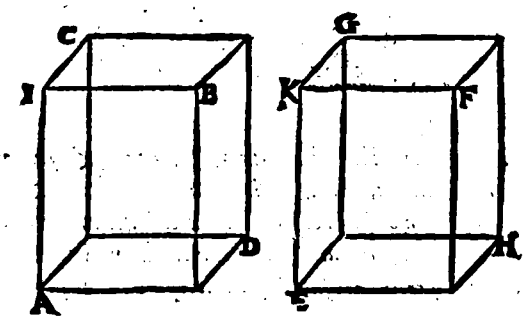
COROLLARIVM.

Ex hoc perspicuum est, si fuerint quatuor lineæ rectæ continuè proportionales, vt est prima ad quartam, ita esse parallelepipedum super primam descriptum ad parallelepipedum simile, similiterq́ descriptum super secundam. Quia tam parallelepipedum ad parallelepipedum, vt demonstratum est, quam prima linea ad quartam, ex definitione 10. libri 5. habet proportionem triplicatam proportionis primæ lineæ ad secundam, nimirum laterum homologorum.

34. 35. THEOR. 29. PROPOS. 34.

AEQVALIVM solidorum parallelepipedorum bases, & altitudines reciprocantur; Et quorum solidorum parallelepipedorum bases, & altitudines reciprocantur; illa sunt æqualia.

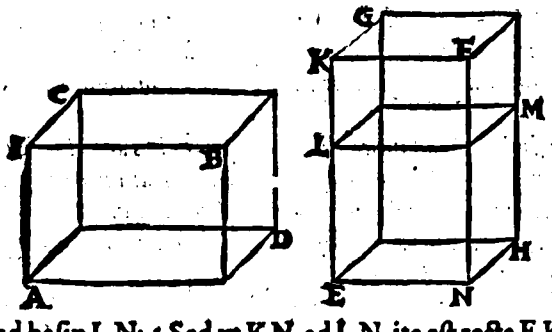
SINT æqualia parallelepipeda A D C B, E H G F, super bases A D, E H. Dico bases A D, E H, & altitudines parallelepipedorum A D C B, E H G F, esse reciprocas, hoc est, esse vt A D, ad E H, ita altitudinem solidi E H G F, ad altitudinem A D C B. Sint enim primùm insistentes lineæ A I, E K,



EK, perpendiculares ad baſes AD, EH, ita vt AI, EK, ſint per defin. 4. lib. 6. altitudines parallelepipedorum. Si igitur altitudines AI, EK, ſunt æquales; cùm & parallelepipeda æqualia ponantur; erunt & baſes AD, EH, æquales, per ea, quæ ad finem propoſitionis 31. huius lib. oſtendimus. Quare erit, vt baſis AD, ad baſin EH, ita altitudo EK, ad altitudinem AI: Ac proinde baſes & altitudines ſunt reciprocæ.

QVOD ſi altitudines AI, EK, inæquales fuerint; ſit EK, maior, ex qua abſcindatur EL, ipſi AI, æqualis; & per L, ducatur planum LM, parallelum baſi EH, per ſcholium propoſ. 15. huius libri. Quoniam igitur æqualia ſunt ſolida ADCB, EHGF; [a] erit vt ADCB, ad ſolidũ EHML, ita EHGF, ad idem ſolidũ EHML: [b] Vt autem ſolidum ADCB, ad ſolidum EHML, ita eſt baſis AD, ad baſin EH, cũ æquales ponantur altitudines AI, EL: Et vt ſolidum EHGF, ad ſolidum EHML, ita eſt eadem ratione, baſis KN, ad baſin LN, cùm hac ratione ſolida EHGF, EHML, eandẽ habeát altitudinem, ſi nimirum baſes ponantur KN, LN; erunt enim inter eadem plana parallela KN, GH. Igitur erit vt baſis AD, ad baſin EH, ita baſis KN, ad baſin LN: [c] Sed vt KN, ad LN, ita eſt recta EK, ad rectam EL, hoc eſt, ad AI, ipſi EL, æqualem. Quare erit vt baſis AD, ad baſin EH, ita altitudo EK, ad altitudinem AI; Ac propterea reciprocæ ſunt baſes & altitudines.

[a] 7. quinti.
[b] 32. vndecim.
[c] 1. ſexti.

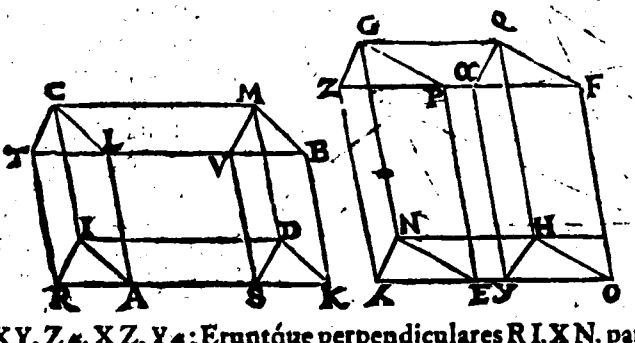


SINT iam baſes & altitudines reciprocæ. Dico parallelepipeda eſſe æqualia. Si enim altitudines EK, AI, ſunt æquales; cùm ſit baſis AD, ad baſin EH, vt altitudo EK, ad altitudinem AI, ex hypotheſi; erunt & baſes AD, EH, æquales. [d] Quare parallelepipeda ADCB, EHGF, cùm æquales habeant baſes, & altitudinem eandem, inter ſe æqualia erunt.

[d] 31. vndec.

QVOD ſi altitudo EK, maior fuerit, abſcindatur EL, ipſi AI, æqualis, & per L, ducatur planum LM, parallelum baſi EH. Quia igitur ex hypotheſi eſt, vt baſis AD, ad baſin EH, ita altitudo EK, ad altitudinem AI, hoc eſt, ad EL, ipſi AI, æqualem; [e] Vt autem baſis AD, ad baſin EH, ita eſt ſolidum ADCB, ad ſolidum EHML; cùm altitudines AI, EL, æquales ponantur; [f] Et vt EK, ad EL, ita eſt KN, ad LN; [g] Vt autem baſis KN, ad baſin LN, ita eſt ſolidum EHGF, ad ſolidum EHML, cùm ſolida EHGF, EHML, eandem habeant altitudinem, ſi baſes ponantur KN, LN; erunt enim hac ratione inter plana parallela KN, GH. Erit vt ſolidũ ADCB, ad ſolidũ EHML, ita ſolidum EHGF, ad idem ſolidum EHML; [h] ideoq; æqualia erunt ſolida ADCB, EHGF.

[e] 32. vndec.
[f] 1. ſexti.
[g] 32. vndec.
[h] 9. quinti.



SED proponantur iam parallelepipeda ABCD, EFGH, æquália, quorum inſiſtentes lineæ AI, KD, BM, LC; EN, OH, FQ, PG; nó ſint perpendiculares ad baſes AB, EF. Demittantur autem à punctis I, D, M, C, ad planum baſis AB, perpendiculares IR, DS, MV, CT; Item à punctis N, H, Q, G, ad planum baſis EF, perpendiculares NX, HY, Qα, GZ; connectanturque rectæ RS, TV, RT, SV; XY, Zα, XZ, Yα: Eruntque perpendiculares RI, XN, parallelepipedorum altitudines, ex defin. 4. lib. 6. Dico rurſus, vt baſis AB, ad baſin EF, ita eſſe altitudinem XN, ad altitudinem RI. [i] Cùm enim æqualia ſint ſolida ABCD, EFGH, ex hypotheſi, ſit autem ABCD, æquale ſolido RV-CD, quòd habeant eandem baſin CD, eandemq; altitudinem RI; & EFGH, eadem ratione, æquale ſolido Xα GH. Erunt & parallelepipeda RVCD, Xα GH, æqualia. Quare cũ habeant inſiſtentes lineas perpendiculares ad baſes CD, GH; erit, vt iam demonſtratum eſt, vt baſis CD, ad baſin GH, hoc eſt, vt baſis AB, ad baſin EF, ita altitudo XN, ad altitudinem RI. Ac propterea baſes & altitudines ſunt reciprocæ.

[i] 29. vel 30. vndec.

SINT iam baſes atque altitudines reciprocæ. Dico parallelepipeda eſſe æqualia. Conſtructa enim figura, vt prius; Cùm ſit vt baſis AB, ad baſin EF, ita altitudo XN, ad altitudinẽ RI; [k] Sit autem AB, ipſi CD, & EF, ipſi GH, æqualis; erit quoque vt baſis CD, ſolidi RVCD, ad baſin GH, ſolidi Xα GH, ita altitudo XN, ad altitudinem RI. Quare cùm XN, RI, ſint inſiſtentes lineæ, perpendiculares ad baſes CD, GH; erunt, vt iam oſtenſum eſt, æqualia parallelepipeda RVCD, Xα GH. [l] Sunt autem hæc parallelepipeda parallelepipedis ABCD, EFGH, æqualia. Igitur

[k] 24. vndec.
[l] 29. vel 30. vndec.

æqualia quoque erunt parallelepipeda A B C D, E F G H: Idemque ostendetur si insistentes lineę vnius parallelepipedi fuerint perpendiculares ad basin, alterius verò non. Quam ob rem, Æqualium solidorum parallelepipedorũ bases, & altitudines reciprocãtur, &c. Quod erat ostendendũ.

SCHOLIVM.

OMNIA hæc, quæ demonstrata sunt in sex proximis propositionibus, nimirum 29. 30. 31. 32. 33. & 34. conueniunt quoq; prismatis, quæ habent duo plana opposita triangularia, si prædicta hypotheses seruentur. Nam si duobus prismatis eiusmodi eiusdem altitudinis, & super eandem basin, vel super æquales bases constitutis, apponantur duo alia prismata illis æqualia & similia, conficientur duo parallelepipeda eiusdem altitudinis,

a 29. 30. vel 31. vndec. *& super eandem, vel æquales bases existentia: [a] Quare æqualia erunt eiusmodi parallelepipeda; ac proinde & data prismata, eorum videlicet dimidia.*

RVRSVS, si duobus prismatis prædictis eiusdem altitudinis, & super diuersas bases constitutis adiũctum tur duo alia prismata illis æqualia & similia, conficientur iterum duo parallelepipeda eiusdem altitudinis.

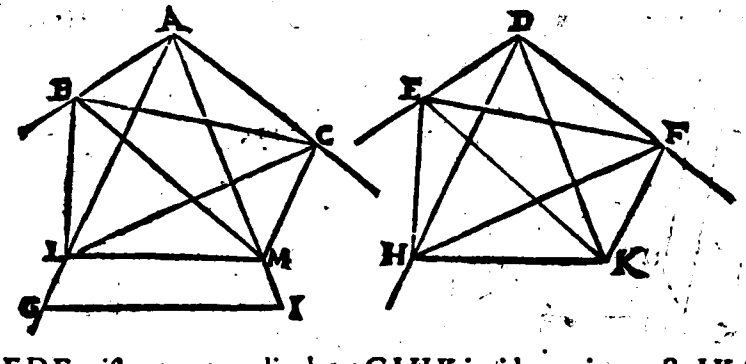
b 32. vndec. *[b] Quare erit parallelepipedum ad parallelepipedum, vt basis ad basin:* c 15. quinti. *[c] Atq; adeò prisma ad prisma, nempe dimidium vnius parallelepipedi, ad dimidium alterius, vt eadem basis ad basin, si prismatũ bases fuerint parallelogramma, vel certè vt triangulum ad triangulum, dimidium scilicet vnius basis ad dimidium alterius, si bases prismatum fuerint triangula.*

PRAETEREA, si duobus prismatis prædictis similibus addantur alia duo prismata illis æqualia & similia, constituentur duo parallelepipeda similia, d 33. vndec. *[d] quæ inter se habent proportionem triplicatam proportionis laterum homologorum.* e 15. quinti. *[e] Igitur & prismata, eorum nimirum dimidia, cùm eandem habeant proportionem cum parallelepipedis, proportionem habebunt triplicatam proportionis eorundem laterum homologorum, quæ quoq; sunt latera homologa prismatum.*

DENIQVE si dictis duobus prismatis æqualibus adiungantur alia duo prismata illis æqualia & similia, componentur duo parallelepipeda æqualia eorundem altitudinum cũ prismatis. f 34. vndec. *[f] Quare cùm bases, & altitudines parallelepipedorum sint reciprocæ; & bases prismatum eadem sint, vel certè triangula eorum* g 15. quinti. *dimidia, & eandem habentia proportionem: Erunt quoq; bases prismatum & eorum altitudines reciprocæ.*

37. THEOR. 30. PROPOS. 35.

SI fuerint duo plani anguli æquales, quorum verticibus sublimes rectæ lineæ insistant, quæ cum lineis primò positis angulos contineant æquales, vtrumque vtrique; In sublimibus autem lineis quælibet sumpta fuerint puncta, & ab his ad plana, in quibus consistunt anguli primùm positi, ductæ fuerint perpendiculares; à punctis verò, quæ in planis à perpendicularibus fiunt, ad angulos primùm positos adiunctæ fuerint rectæ lineæ: Hæ cũ sublimibus æquales angulos cõprehendẽt.



SINT duo anguli plani æquales B A C, E D F, quorum verticibus A, & D, insistant extra ipsorum plana, sublimes rectæ lineæ A G, D H, ita vt angulus B A G, angulo E D H, & ãngulus C A G, angulo F D H, sit æqualis: à sumptis autẽ punctis G, H, in rectis A G, D H, demittantur ad plana, in quibus anguli B A C, E D F, existunt, perpendiculares G I, H K, incidentes in puncta I, K, & adiungantur rectæ I A, K D. Dico angulos G A I, H D K, esse æquales inter se. Nam si A G, D H, sunt inæquales, auferatur à maiori A G, ipsi D H, æqualis linea A L; & ex L, in plano trianguli A G I, ducatur ipsi G I, parallela

a 8. vndec. L M. Quoniam igitur parallelæ sunt G I, L M; & est G I, ad planũ anguli B A C, recta, [a] erit quoq; L M, ad idem planum recta. Ducantur autem ex punctis M, K, ad rectas A B, A C, D E, D F, perpendiculares M B, M C, K E, K F; & connectantur rectæ B C, B L, L C, E F, E H, H F. Et quia L M, recta est ad planum anguli B A C, ipsa rectum angulum efficiet cum recta A M; in eodem plano ducta, p

b 47. primi. defin. 3. huius libri. [b] Quare quadratum rectæ A L, æquale erit quadratis rectarum A M, M L: [c] Est

c 47. primi. autem quadratum rectæ A M, æquale quadratis rectarum A C, C M, cùm & angulus A C M, rectus sit, ex constructione. Quadratum ergo rectæ A L, æquale est quadratis rectarum A C, C M,

d 47. primi. M L: [d] At quadratis rectarum C M, M L, æquale est quadratum rectæ C L, cùm angulus C M L,

e 48. primi. rectus sit, per definitionem 3. huius libri. Igitur quadratum rectæ A L, æquale est quadratis rectarum A C, C L; [e] Ac proinde angulus A C L, rectus erit. [f] Rursus quia quadratum rectæ A L, æ-

f 47. primi. quale est quadratis rectarum A M, M L: [g] Est autem quadratum rectæ A M, æquale quadratis rectarum

g 47. primi.

tarum AB,BM,cùm angulus ABM,per conſtructionem,ſit rectus.Igitur quadratum rectæ AL, æquale eſt quadratis rectarum AB,BM,ML: [a] At quadratis rectarum BM, ML, æquale eſt quadratum rectæ BL,quòd & angulus BML, ſit rectus, ex defin.3.huius lib. Quadratum ergo rectæ AL,æquale eſt quadratis rectarum AB, BL; [b] proptereáque angulus ABL,erit rectus. Non aliter oſtendentur recti anguli DFH, DEH. Quoniam igitur anguli ABL,LAB, trianguli ABL, æquales ſunt angulis DEH, HDE, trianguli DEH; ſuntque latera AL,DH,æqualia; [c] Erunt & reliqua latera AB,BL,reliquis lateribus DE,EH,æqualia. Eodem argumento æquales erunt rectæ AC, CL, rectis DF, FH. Quare cùm latera AB, AC, trianguli ABC, æqualia ſint lateribus DE,DF,trianguli DEF; & anguli contenti BAC,EDF, æquales,ex hypotheſi; [d] erunt & baſes BC,EF,inter ſe,& anguli ABC,ACB,angulis DEF,DFE, æquales: Sunt autem & toti anguli ABM, ACM, totis angulis DEK, DFK, æquales,cùm omnes ſint recti. Igitur & reliqui anguli MBC,MCB, reliquis angulis KEF, KFE, æquales erunt. Ac propterea cùm & latera BC, EF, ſint oſtenſa æqualia; [e] erunt latera BM,CM, lateribus EK,FK, æqualia. Quia igitur latera AC, CM, trianguli ACM, æqualia ſunt oſtenſa lateribus DF, FK, trianguli DFK; & anguli ACM, DFK,ſunt recti; [f] erunt & baſes AM,DK,inter ſe æquales. Cùm autem æquales ſint oſtenſæ rectæ BL,EH,erunt etiam earum quadrata æqualia: [g] Quia verò quadratum rectæ BL,æquale eſt quadratis rectarum BM,ML, & quadratum rectæ EH, quadratis rectarum EK,KH,quòd anguli BML,EKH,recti ſint,ex definitione 3.huius lib. Erunt & quadrata rectarum BM,ML,æqualia quadratis rectarum EK,KH. Ablatis ergo quadratis rectarum BM,EK, quæ æqualia ſunt, & rectæ BM,EK,oſtenſæ ſint æquales; reliqua quadrata rectarũ LM,HK,æqualia erunt,ac proinde rectæ LM,HK,æquales. Quam ob rem cùm latera AL,AM,trianguli ALM, æqualia ſint lateribus DH,DK,trianguli DHK,& baſis LM, baſi HK,æqualis; [h] erunt & anguli LAM, HDK, æquales. Si igitur fuerint duo anguli plani æquales, quorum verticibus ſublimes rectæ lineæ inſiſtant,&c. Quod oſtendendum erat.

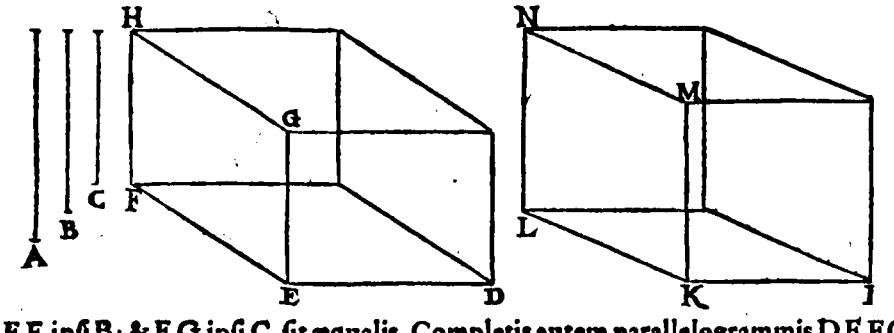
[a] 47.primi.
[b] 48.primi.
[c] 26.primi.
[d] 4.primi.
[e] 26.primi.
[f] 4.primi.
[g] 47.primi.
[h] 8.primi.

COROLLARIVM.

ITAQVE, ſi fuerint duo anguli plani æquales, quorũ verticibus ſublimes rectæ lineæ æquales inſiſtant, quæ cum lineis primò poſitis angulos contineãt æquales, vtrumque vtrique. Erunt à punctis extremis linearum ſublimium ad plana angulorum primò poſitorum demiſſæ perpendiculares inter ſe æquales. Nam propterea quòd anguli plani BAC,EDF, ponuntur æquales, & ſublimes æquales AL,DH, conſtituunt angulos æquales LAB,HDE; Item LAC,HDF; demonſtratum fuit, demiſſas perpendiculares LM,HK, eſſe æquales.

THEOR. 31. PROPOS. 36. 38.

SI tres rectæ lineæ proportionales fuerint: Quod ex his tribus fit ſolidum parallelepipedum, æquale eſt deſcripto à media linea ſolido parallelepipedo, quod æquilaterum quidem ſit, æquiangulum verò prædicto.



SINT continuè proportionales rectæ A,B, C. Cõſtituatúrque angulus ſolidus E, ex tribus angulis planis quibuſcunq; DEF, DEG, FEG, ita vt recta DE,ipſi A,& EF,ipſi B; & EG,ipſi C, ſit æqualis. Completis autem parallelogrammis DF,FG, GD, perficiatur parallelepipedum DH;quod ſub tribus rectis A,B,C, dicitur cõtineri,aut ex ipſis fieri. [i] Deinde ad rectam IK,eiuſq; punctum K,fiat ſolidus angulus K, æqualis ſolido angulo E, ex tribus angulis planis IKL, IKM, LKM, qui æquales ſint tribus DEF,DEG,FEG; ita vt rectæ IK,KL, KM,æquales ſint mediæ lineæ B. Completis verò parallelogrammis IL,LM,MI, perficiatur parallelepipedum IN; quod contineri dicitur ſub linea B, ſeu ex ipſa deſcribi. Dico ſolidum DH,æquale eſſe ſolido IN. Cùm enim ſit vt DE,ad IK,ita KM,ad EG,(& DE,ipſi A; & IK,KM, ipſi B; & EG,ipſi C,ſumpta ſit æqualis,) & anguli DEG,IKM,æquales: [k] Erũt parallelogramma DG, IM,æqualia, proptereáque latera habent circa æquales angulos reciproca. Quoniam verò anguli plani DEG,IKM,ſunt æquales, quorũ verticibus inſiſtunt ſublimes lineæ æquales EF,KL,quæ æquales angulos comprehendunt cũ lineis primò poſitis,ex cõſtructione, vtrumq; vtriq;: Erunt perpendiculares ex F,L,ad plana baſium DG,IM, demiſſæ, nimirũ altitudines parallelepipedorum DH,IN,ſi baſes ſint DG,IM,inter ſe æquales, per coroll.propoſ.præcedentis. [l] Quare parallelepipeda DH,IN,cùm habeant baſes DG,IM,æquales, & æquales quoq; altitudines,inter ſe æqualia erunt. Si tres igitur rectæ lineæ proportionales fuerint,&c. Quod erat demonſtrandum.

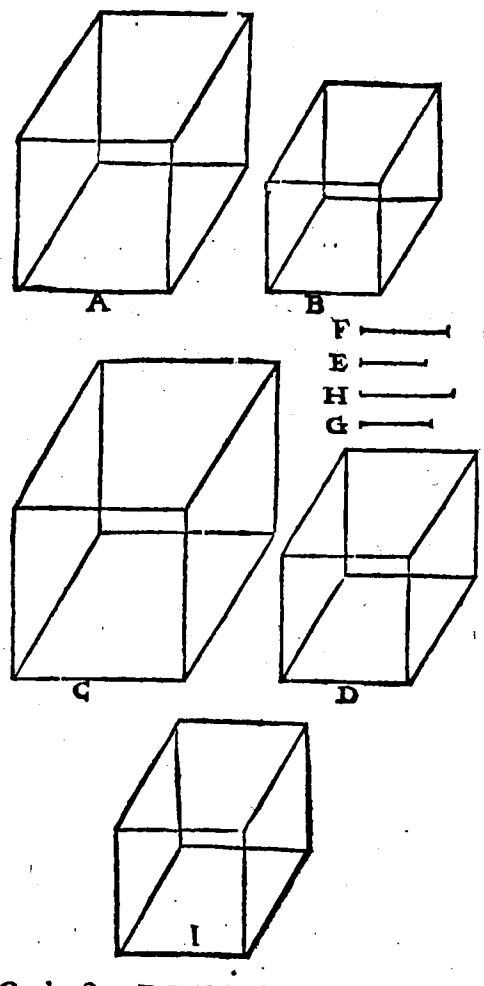
[i] 26.vndec.
[k] 14.ſexti.
[l] 31.vndec.

SCHOLIVM.

VICISSIM quoq;, ſi parallelepipedum ex tribus lineis rectis deſcriptum, æquale fuerit parallelepipedo ſibi æquiangulo à media linea deſcripto: erunt tres rectæ continuè proportionales. Sit enim parallelepipedum D H, deſcriptum ex rectis A, B, C, vt dictum eſt, æquale ſibi æquiangulo parallelepipedo I N, deſcripto à media B. Dico tres A, B, C. eſſe continuè proportionales. Nam veluti prius, oſtendentur eorum altitudines ex F, I, demiſſæ, eſſe æquales. Quare cùm & ipſa ponantur æqualia; erunt eorum baſes D H, I M, æquales per ea, quæ ad finem propoſ. 31. huius lib. demonſtrauimus. Quæ baſes, cùm angulos habeant æquales D E G, I K M, ex
214. ſexti. *conſtructione; [a] habebũt latera circa illos æquales angulos reciproca, hoc eſt, vt D E, ad I K, ita K M, ad E G. Quapropter cùm D E, ipſi A; & I K, K M, ipſi B; & E G, ipſi C, ſumpta ſit æqualis; Erit quoq; vt A, ad B, ita B, ad C. Quod eſt propoſitum.*

§9. THEOR. 32. PROPOS. 37.

SI quatuor rectæ lineæ proportionales fuerint: & ſolida parallelepipeda, quæ ab ipſis & ſimilia, & ſimiliter deſcribuntur, proportionalia erunt. Et ſi ſolida parallelepipeda, quæ & ſimilia, & ſimiliter deſcribuntur, fuerint proportionalia: Et ipſæ rectæ lineæ proportionales erunt.



SINT quatuor rectę proportionales A, B, C, D; vt quidẽ A, ad B, ita C, ad D; conſtituanturq; ſuper A, & B, duo parallelepipeda A, & B, ſimilia, ſimiliterq; deſcripta; itẽ ſuper C, & D, alia duo C, & D, ſimilia ſimiliterque poſita, ſiue hæc ſint illis ſimilia, ſiue nõ. Dico eſſe quoque ſolida A, B, C, D, proportionalia: Vt quidem ſolidum A, ad ſolidum B, ita ſolidum C, ad ſolidum D. Inueniantur enim, per ſcholium propoſitionis 11. lib. 6. duabus rectis A, B, aliæ duæ continuè proportionales E, F; Item duabus C, D, aliæ G, H. Quoniam igitur ſunt quatuor lineæ A, B, E, F, & quatuor lineæ aliæ C, D, G, H, quę binæ in eadem ratione ſumuntur; erit ex æquo, vt A, ad F, ita C, ad H. Vt autẽ A, ad F, ita eſt ſolidum A, ad ſolidum B; Et vt C, ad H, ita ſolidũ C, ad ſolidum D, ex corol. propoſ. 33. huius lib. Igitur erit vt ſolidum A, ad ſolidum B, ita ſolidum C, ad ſolidum D. Quod eſt propoſitum.

SINT iam e contrario ſolida A, B, C, D, proportionalia. Dico rectas A, B, C, D, eſſe quoq; proportionales. [a] Tribus enim rectis A, B, C, inueniatur quarta proportionalis I, [b] ſuper quã deſcribatur parallelepipedum ipſi D, vel C, ſimile, ſimiliterq; poſitũ. Quoniam igitur eſt, vt recta A, ad rectam B, ita recta C, ad rectam I; erit quoq;, vt iam eſt oſtenſum, vt ſolidum A, ad ſolidum B, ita ſolidum C, ad ſolidum I. Vt autẽ ſolidum A, ad ſolidum B, ita ponitur quoq; ſolidum C, ad ſolidum D: Igitur erit vt ſolidũ C, ad ſolidum I, ita idem ſolidum C, ad ſolidum D. [c] Atque idcirco æqualia erunt ſolida I, & D. Quæ cùm ſint ſimilia, ſimiliterque deſcripta, continebuntur planis æqualibus, per defin. 10. huius lib. Sed plana æqualia, & ſimilia, habent latera homologa æqualia, per lemma propoſ. 22. lib. 6. Igitur rectæ I, & D, æquales ſunt. Ac propterea erit, vt recta C, ad I, rectam, ita eadem C, ad rectam D. Poſita eſt autẽ C, ad I, vt recta A, ad B. Quare erit vt recta A, ad rectã B, ita recta C, ad rectam D. Itaq; ſi quatuor rectæ lineæ proportionales fuerint, &c. Quod erat demonſtrandum.

a 12. *ſexti.*
b 27. *vndec.*
c 9. *quinti.*

BREVIVS tota hæc propoſitio demonſtrabitur cũ Theone, hoc modo. Ponatur primùm vt recta A, ad rectam B, ita recta C, ad rectam D. Dico eſſe quoq; vt ſolidũ A, ad ſolidum B, ita ſolidum C, ad ſolidum D. [d] Cùm enim ſit proportio ſolidi A, ad ſolidum B, triplicata proportionis rectæ A, ad rectam B; Item proportio ſolidi C, ad ſolidum D, triplicata proportionis rectæ C, ad rectam D: erunt proportiones ſolidi A, ad ſolidũ B, & ſolidi C, ad ſolidum D, æquales; quandoquidem triplicatæ ſunt proportionũ æqualium, nempe rectæ A, ad rectam B, & rectæ C, ad rectam D. Quod eſt primum. Rurſus ponatur ſecundò eſſe vt ſolidum A, ad ſolidum B, ita ſolidum C, ad ſolidũ D. Dico eſſe quoq;, vt rectã A, ad rectam B, ita rectam C, ad rectam D. [e] Cùm enim ſit proportio ſolidi A, ad ſolidum B, triplicata proportionis rectæ A, ad rectam B; Item proportio ſolidi C, ad ſolidum D, triplicata proportionis rectæ C, ad rectam D: erunt proportiones rectarum A, ad B, & C, ad D.

d 33. *vndec.*
e 33. *vndec.*

ad D, æquales; quandoquidem earum proportiones triplicatæ, nimirum solidi A, ad solidum B; & solidi C, ad solidum D, æquales ponuntur. Quod est secundum.

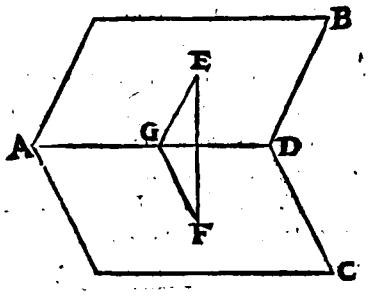
SCHOLIVM.

EODEM modo, si fuerint tres rectæ proportionales, erunt & parallelepipeda similia similiterq; descripta ex eis, proportionalia, &c. Si enim media linea, eiusq; solidū sumatur bis, habebuntur quatuor rectæ proportionales. Igitur & quatuor solida proportionalia, vt demonstratū est. Cùm igitur solidū secundæ lineæ æquale sit solido tertiæ lineæ; & linea secunda æqualis tertiæ lineæ; perspicuum est, quod proponitur.

TOTA verò hæc propositio cōuenit etiam prismatis, quorum duo plana aduersa æqualia, sunt vel triangula, vel parallelogramma, vt Campanus ait. Nam additis prismatis, quæ singula singulis sint æqualia, exurgent parallelepipeda, quæ, vt hic est demonstratum, proportionalia erunt. [a] *Cùm igitur prismata, eorum dimidia, eandem habeant cum ipsis proportionem; perspicuum est, quod proponitur.* a 15. quin.

THEOR. 33. PROPOS. 38. 13.

SI planum ad planum rectum fuerit; & ab aliquo puncto eorū, quæ in vno sunt planorum, ad alterum planum perpendicularis ducta fuerit: in communē sectionem cadet planorum ducta perpendicularis.



PLANVM.n. AB, rectum sit ad planum AC, sitque eorum communis sectio recta AD; Et ab E, puncto plani AB, ad planum AC, perpendicularis demittatur: quam dico cadere in communem sectionem AD. Nam si fieri potest, cadat extra ad punctum F, [a] & ab F, in plano AC, ducatur ad rectā AD, perpēdicularis FG, connectaturq; recta EG, in plano AB. Quoniam igitur FG, perpēdicularis est ad communem sectionem AD; erit quoque perpendicularis ad planum AB, ex defin. 4. huius lib. atq; adeò & ad rectam GE, per 3. defin. huius lib. Est autem & EF, recta ad FG, per eandem 3. defin. Igitur in triangulo EFG, duo anguli EFG, EGF, recti sunt. quod est absurdum; [b] cùm duobus rectis sint minores. Perpendicularis ergo ex E, demissa ad planum AC, nō extra communem sectionem AD, cadet. ergo in ipsam cadat, necesse est. Quamobrem, si planum ad planum rectum fuerit, &c. Quod erat demonstrandum.

a 12. primi.

b 17. primi.

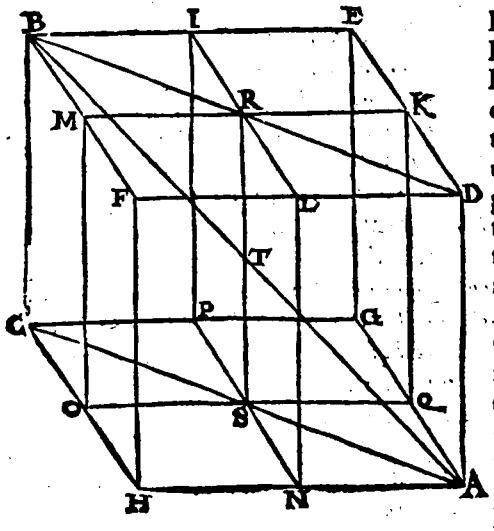
SCHOLIVM.

HAEC est demonstratio Theonis. Nos tamen idem demonstrabimus breuius, hoc modo. Si ex puncto E, dato in plano AB, demissa perpendicularis ad planum AC, non cadit in communem sectionem AD, sed in punctum F, extra sectionē; [a] *ducatur ex E, ad rectam AD, perpendicularis EG; quæ ex 4. defin. recta erit ad planum AC. Quare ex puncto E, extra planum AC, ducta sunt ad ipsum planum AC, duæ perpendiculares EF, FG. Quod fieri nequit, vt in scholio propos. 13. huius lib. demonstrauimus.*

a 12. primi.

THEOR. 34. PROPOS. 39. 40.

SI solidi parallelepipedi eorum, quæ ex aduerso, planorum latera bifariam secta sint; per sectiones autem plana sint extensa: communis sectio planorum, & solidi parallelepipedi diameter, bifariam se mutuò secabunt.



SINT parallelepipedi AB, plana opposita AC, BD, quorū omnia latera bifariā secta sint in punctis I, K, L, M, N, O, P, Q; per quæ extensa sint duo plana IN, KO, quorum sectio communis sit recta RS: Ducatur item diameter AB. Dico rectam RS, & diametrum AB, se mutuò secare bifariam. Connexis enim rectis RB, RD, SA, SC; considerentur duo triangula AQS, COS. Quoniam igitur latera AQ, QS, trianguli AQS, æqualia sunt lateribus CO, OS, triāguli COS; (Sunt enim AQ, CO, dimidia rectarū æqualiū AG, CH; [a] & QS, QS, duabus æqualib. AN, HN, equales, cùm sint parallelogramma AS, HS.) [b] & angulus AQS, æqualis alterno angulo COS: [c] Erunt & bases AS, CS, æquales: & anguli ASQ, CSO, æquales. [d] Atqui anguli ASQ, ASO, æquales sunt duobus rectis. Igitur & CSO, ASQ, duob. sunt rectis æquales. [e] Ac propterea AS, CS, vnam rectā lineam constituent. Eodem modo ostendētur esse æquales BR, DR, & vnam ex eis componi lineā rectam. Rursus quia vtraq; AD, BC, parallela est, & æqualis rectæ FH, ob parallelogramma AF, EC, [f] ipsæ quoque

a 34. primi.

b 29. primi.

c 4. primi.

d 13. primi.

e 14. primi.

f 9. vnde

inter ſe parallelæ erũt, & æquales.[a] Quare & rectæ A C, B D, earum extremas coniungentes, parallelæ ſunt, & æquales: Ac proinde ipſarũ dimidiæ A S, B R, æquales ſunt. Quia verò A C, B D, parallelæ ſunt;[b] erunt rectę A B, R S, in eodem cum ipſis plano, ideoq; ſe mutuò ſecabunt, in puncto videlicet T.[c] Cùm autem duo anguli A S T, A T S, trianguli A S T, æquales ſint duobus angulis B R T, B T R, trianguli B R T; & latus A S, lateri B R:[d] Erunt reliqua latera T A, T S, reliquis lateribus T B, T R, æqualia. Ac propterea A B, R S, ſe mutuò ſecant bifariam in T. Si igitur ſolidi parallelepipedi eorum, quæ ex aduerſo, &c. Quod erat oſtendendum.

a 33. primi.
b 7. vndec.
c 29. & 15. primi.
d 26. primi.

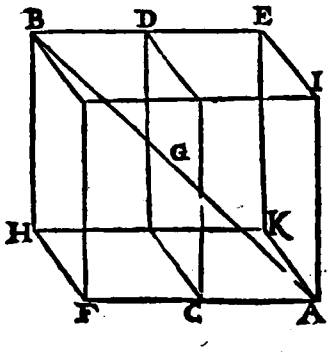
COROLLARIVM.

HINC efficitur, in omni parallelepipedo diametros omnes ſe mutuò bifariã ſecare in vno puncto; nimirum in puncto T, in quo bifariam diuidunt, vt hîc demonſtratũ eſt, rectam R S.

SCHOLIVM.

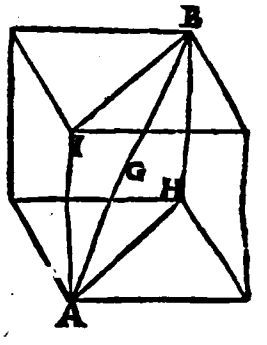
HVIC theoremati addi poteſt aliud non diſſimile illi, quod ad 34. 1. lib. demõſtrauimus, videlicet.

Si ſolidum parallelepipedum plano ſecetur per centrum: bifariam ſecabitur ſolidum ab ipſo plano. Et ſi ſolidum parallelepipedum plano ſecetur bifariam: per centrum tranſibit ipſum planum.



a 17. vndec.
b 25. vnde.

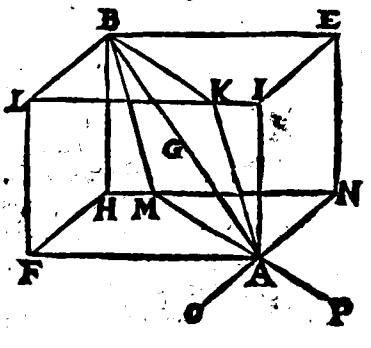
SECETVR parallelepipedũ A B, plano C D, per centrũ, hoc eſt, per punctũ mediũ diametri A B, quod ſit G. Dico parallelepipedũ bifariã ſecari. Sit enim primò planũ C D, oppoſitis planis A E, B F, parallelum.[a] *Et quia plana parallela B F, D C, E A, ſecãt rectas quaſcunq; proportionaliter; ſecatur autẽ B A, bifariã in G; ſecabuntur quoq; latera aduerſorum planorum A H, B I, atq; adeò & baſes A H, B I, bifariam.*[b] *Cùm igitur ſit vt baſis K C, ad baſim C H; ita ſolidũ A D, ad ſolidum C B; erit parallelepipedum A B, ſectum bifariam plano C D, per centrum G, ducto.*



TRANSEAT ſecundò planum ſecãs A I B H, per diametros B I, A H, planorum oppoſitorum; quoniam & ſic ſecatur parallelepipedum per centrum G, immo per totam diametrum A B;[c] *cùm A B, in plano ſit parallelarum A H, B I.*[d] *Demonſtratum autem eſt antea, parallelepipedũ ſecari plano per diametros oppoſitorum planorum ducto bifariam.*

c 7. vndec.
d 28. vnde.

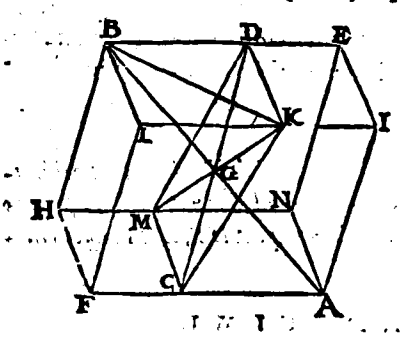
TERTIO, planum ſecans A K B M, neq; ſit aduerſis planis parallelum, neq; per diametros oppoſitorum planorum ductum, ſed tantùm per angulos A, & B, planorum A H, B I. Quoniam igitur plana parallela A H, B I, ſecantur plano A K B M;[e] *erunt communes ſectiones A M, B K, parallelæ. Similiter parallelæ erunt A K, B M, cùm ſint communes ſectiones planorum parallelorum A L, B N, facta à plano A K B M. Quare parallelogrammum eſt A K B M,*[f] *ideoq; tam recta A K, B M, quàm recta A M, B K, inter ſe erunt æquales. Quia ergo latera B K, B L, trianguli B K L, æqualia ſunt lateribus A M, A N, trianguli A M N, & angulus K B L, angulo M A N, æqualis. (Productis enim N A, M A, ad O, P, erunt A O, A P, rectis B L, B K, parallelæ; & ac proinde æquales anguli erũt O A P, L B K.*[h] *Cùm igitur O A P, æqualis ſit angulo M A N; æquales quoq; erũt anguli K B L, M A N.)*[i] *Erũt baſes K L, M N, inter ſe, & anguli B K L, B L K, angulis A M N, A N M, æquales; & triangulũ triangulo æquale. Quare & ſimilia erunt triãgula B K L, A M N;*[k] *cùm latera habeant circa æquos angulos proportionalia. Quoniam verò recta K L, recta M N; & angulus B K L, angulo A M N; & angulus K B L, angulo M A N, eſt æqualis, vt oſtendimus; erit & reliqua I K, reliquæ H M; & reliquus angulus B K I, reliquo A M H; & reliquus K B E, reliquo M A F, æqualis. (Eſt enim tota L I, toti N H, æqualis, & tam anguli B K L, B K I, quàm anguli A M N, A M H, duobus rectis æquales; & totus angulus L B E, toti angulo N A F, æqualis, ob ſimilitudinem parallelogrammorũ L E, F N.) Sunt autem & latera B E, E I, lateribus A F, F H, æqualia & anguli B E I, E I K, angulis A F H, F H M, ob parallelogramma L E, F N. Igitur quadrilaterum B K I E, & equilaterum, & equiangulum eſt quadrilatero A M H F; Ac propterea æquale & ſimile, cùm ſingula ſingulis conueniant, latera nimirum lateribus, & anguli angulis. Eodem modo æqualia erunt & ſimilia triãgula B H M, A I K; & quadrilatera A K L F, B M N E, cùm inter ſe ſint & æquilatera & æquiangula. Quapropter ſolidum contentum planis A K L F, F H M A, A K B M, M H B, B K L, L B H F, æquale erit ſolido contento planis B M N E, E I K B, B M A K, K I A, A M N, N A I E, per 10. defin. huius libri, cùm his planis illa ſint ſimilia & æqualia, vt demonſtratum eſt. Parallelepipedum ergo A B, ſectũ eſt plano A K B M, per centrum G, bifariam.*



e 16. vnde.
f 34. primi.
g 10. vnde.
h 15. primi.
i 4. primi.
k 4. ſexti.

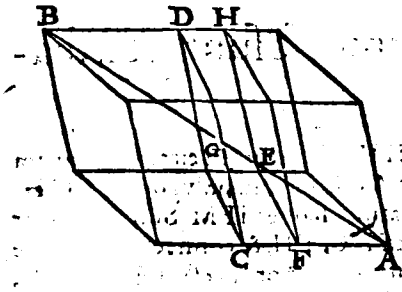
POSTREMO planum ſecans C D, neque aduerſis planis parallelum ſit, neque per diametros planorum op-

rum oppoſitorum, neque per vllos angulos eorum ductum, ſed vtcunque ſecet plana oppoſita AH, BI. Oſtendemus autem, vt prius, planum ſecans CD, eſſe parallelogrammũ, & tam rectas CK, DM, quàm rectas CM, DK, eſſe æquales. Ducantur in parallelogrammo CD, diametri CD, KM; connectanturq́, recta AM, BK. Quoniam igitur AF, BE, parallelæ ipſi LI, ob parallelogramma AL, LE, [a] *inter ſe ſunt parallelæ;* [b] *Erunt AB, CD, in eodem cum illis plano; ac propterea ſe mutuò ſecabunt in centro G. In ſolo enim centro G, recta AB, per hypotheſim, ſecat planum CD, in quo exiſtit recta CD.* [c] *Et quoniam angulus BDC, angulo alterno ACD, æqualis eſt:* [d] *Eſt autẽ & angulus BGD, angulo AGC, ad verticem æqualis; & latus BG, lateri AG, æquale, quòd AB, bifariã ſecetur in G, centro;* [e] *Erit & latus DG, lateri CG, æquale. Cùm ergo per ea, quæ ad propoſ. 34. lib. 1. oſtendimus, diametri CD, KM, ſe mutuò bifariam ſecent, tranſibit KM, per punctum G, ibiq́, diametrũ AB, ſecabit. Quia ergo latera BG, GD, trianguli BGD, æqualia ſunt lateribus AG, GC, trianguli AGC;* [f] *& angulus BGD, æqualis angulo AGC.* [g] *Erit & baſis BD, æqualis baſi AC. Eodem argumento æquales erunt rectæ BK, AM. Quocirca cùm tria latera BD, DK, KB, triãguli BDK, æqualia ſint tribus lateribus AC, CM, MA, trianguli ACM; Erunt, per ea, quæ ad propoſ. 8. l. 1. docuimus, anguli illius, angulis huius æquales: Eſt autem totus DBL, toti CAN, æqualis, ob ſimilitudinem parallelogrammorum BI, AH. Igitur & reliquus KBL, reliquo MAN, erit æqualis. Quoniam igitur latera BK, BL, trianguli BKL, æqualia ſunt lateribus AM, AN, trianguli AMN; & angulus KBL, angulo MAN, æqualis;* [h] *Erit & baſis KL, baſi MN; & reliqui anguli reliquis angulis æquales. Si igitur æqualibus angulis BKL, AMN, æquales addantur anguli BKD, AMC; fient toti anguli DKL, CMN, æquales. Quare quadrilaterum BDKL, quadrilatero ACMN, & æquilaterum eſt, & æquiãgulum; Ac propterea æquale & ſimile, cùm ſingula conueniant ſingulis, nempe latera lateribus, & anguli angulis. Rurſus quia tota LI, toti NH, eſt æqualis, erit & reliqua IK, reliquæ HM, æqualis. Eademq́, ratione reliqua DE, reliquæ CF, æqualis erit; Ac propterea quadrilaterum DELK, æquilaterum eſt quadrilatero CFHM: Sed & æquiangulum; cùm anguli DEI, EIK, æquales ſint angulis CFH, FHM, propter ſimilitudinẽ parallelogrammorũ BI, AH; & anguli EDK, IKD, angulis FCM, HMC, æquales, quòd æquales oſtenſi ſint eorum anguli alterni LKD, BDK, angulis NMC, ACM. Igitur quadrilatera DEIK, CFHM, æqualia ſunt & ſimilia. Non aliter oſtendemus, æqualia eſſe & ſimilia quadrilatera ACKI, BDMH; Item DENM, CFLK, cùm & latera lateribus, & anguli angulis conueniant, vt perſpicuum eſt. Quamobrem ſolidum contentum planis CKDF, FHMC, CKDM, MHBD, DKLB, BHFL, per 10. defin. huius lib. æquale eſt ſolido cõtento planis DMNE, EIKD, DMCK, KIAC, CMNA, AIEN; cùm hiſce illa ſint demonſtrata & æqualia & ſimilia. Parallelepipedum igitur AB, ſectum eſt per centrum G, plano CD, bifariam.*



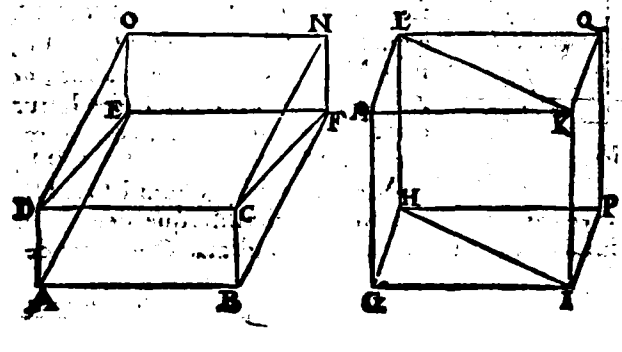
a 29. vndec.
b 7. vndec.
c 29. primi
d 15. primi.
e 26. primi
f 15. primi.
g 4. primi,
h 4. primi.

Si D ſecetur iam parallelepipedum AB, plano CD, bifariam. Dico planum CD, per centrum parallelepipedi tranſire, hoc eſt, punctum G, in quo planum CD, ſecat diametrũ AB, diuidere diametrum AB, bifariam. Si enim diameter AB, in G, non diuiditur bifariam, diuidatur bifariam in E, vt ſit E, centrum parallelepipedi. Si igitur per E, ducatur planum FH, plano CD, parallelum, ſecabitur parallelepipedum AB, bifariam plano FH, vt demonſtratum eſt. Ponitur autem & bifariam ſecari plano CD; Igitur ſolida CB, FB, cùm ſint dimidia parallelepipedi AB, inter ſe æqualia ſunt, pars & totũ. Quod eſt abſurdũ. Non ergo aliud punctũ, præter G, diuidet diametrũ AB, bifariam; Ac proinde G, centrũ erit parallelepipedi. Quod demonſtrandũ erat.



THEOR. 35. PROPOS. 40. 41.

SI fuerint duo priſmata æqualis altitudinis, quorum hoc quidem habeat baſin, parallelogrammum; illud verò, triangulum; duplum autem fuerit parallelogrammum trianguli: Æqualia erunt ipſa priſmata.



SINT duo priſmata æqualis altitudinis ABCDEF, GHIKLM, quorum illud baſim habeat parallelogrammum ABCD, hoc verò, triangulũ GHI, ſitq́, parallelogrammũ AC, trianguli GHI, duplũ. Dico hæc priſmata eſſe æqualia. Perficiantur enim parallelepipeda AN, GQ; Quod quidem fiet, ſi plana triangulorũ extendantur, perficianturq́, parallelogrãma BN, AO, GP, MQ. Si enim cõnectantur rectæ NO, PQ, cõſtituta erũt

duo parallelepipeda AN, GQ, eiuſdem altitudinis cum priſmatis. Nam plana horum ſolidorũ
c 34. primi. oppoſita eſſe parallela, facilè cõſtabit ex propoſ. 15. huius lib. c Quoniam igitur parallelogrãmum GP, duplum eſt trianguli GHI: Ponitur autem & parallelogrammũ AC, eiuſdem trian-
b 31. vndec. guli GHI duplum: æqualia erunt parallelogrãma AC, GP. b Quare parallelepipeda AN, GQ, eiuſdem altitudinis ſuper æquales baſes AC, GP, inter ſe ſunt æqualia: Atque propterea eorum
c 39. vndec. dimidia, nimirum priſmata ABCDEF, GHIKLM, (c Nam parallelepipeda AN, GQ, per diametros CF, DE, HI, LK, planorum aduerſorum ſecantur bifariam, in bina ſcilicet priſmata) æqualia quoque ſunt inter ſe. Itaque ſi fuerint duo priſmata æqualis altitudinis, &c. Quod erat demonſtrandum.

SCHOLIVM.

PERSPICVVM autem eſt ex demonſtratione, propoſitionem hanc intelligi de illis duntaxat priſmatis, quæ duo triangula habent oppoſita; cùm imperet parallelepipeda cõpleri; quod fieri non poſſet, ſi priſma ſuper parallelogrammum ABCD, conſtitutum non haberet duo triangula, nempe ADE, BCF. Eſſet enim iam parallelepipedum completum.

FINIS ELEMENTI VNDECIMI.

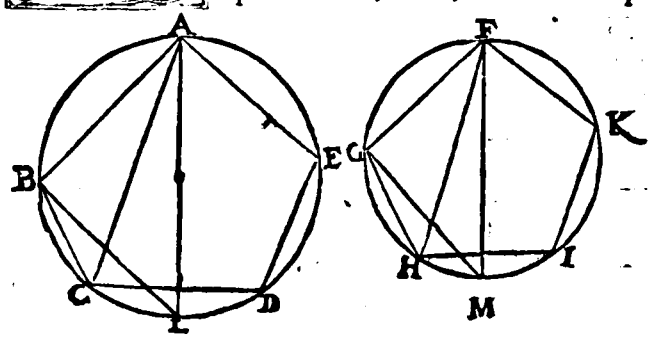
EVCLIDIS ELEMENTVM DVODECIMVM: & Solidorum ſecundum.

1. THEOR. 1. PROPOS. 1.

QVÆ in circulis polygona ſimilia; inter ſe ſunt, vt à diametris quadrata.



SINT duo polygona ſimilia ABCDE, FGHIK, deſcripta in circulis, quorum diametri AL, FM. Dico ita eſſe polygonum ABCDE, ad polygonum FGHIK, vt quadratum diametri AL, ad quadratum diametri FM. Subtendantur enim angulis æqualibus ABC, FGH, rectæ AC, FH, & connectantur rectæ BL, GM. Quoniam igitur ob ſimilitudinem polygonorum eſt vt AB, ad BC, ita FG, ad GH; d erunt triangula ABC, FGH, æquiangula, cùm circa angulos
d 6. ſexti. æquales ABC, FGH, habeant latera proportionalia. e Eſt autẽ angulus ALB,
e 21. tertij. angulo ACB, & angulus FMG, angulo FHG, æqualis. Igitur & anguli ALB, FMG, æquales erunt. Cùm ergo & anguli ABL, FGM, æquales ſint, f nempe recti in ſemicirculis exiſtentes; g erũt & reliqui BAL, GFM, æquales. h Quare erit vt AL, ad AB, ita FM, ad FG; & permutando, vt AL, ad FM, ita AB, ad FG. i Igitur eſt vt quadratum ex AL, ad quadratum ex FM, ita polygonũ ABCDE, ſuper AB, ad polygonum FGHIK, ſuper FG; cùm tam quadrata, quàm polygona ſint figuræ ſimiles, ſimiliterque deſcriptæ. Quæ itaque in circulis polygona ſimilia, inter ſe ſunt, vt à diametris quadrata. Quod erat demonſtrandum.



f 31. tertij.
g 23. primi.
h 4. ſexti.
i 22. ſexti.

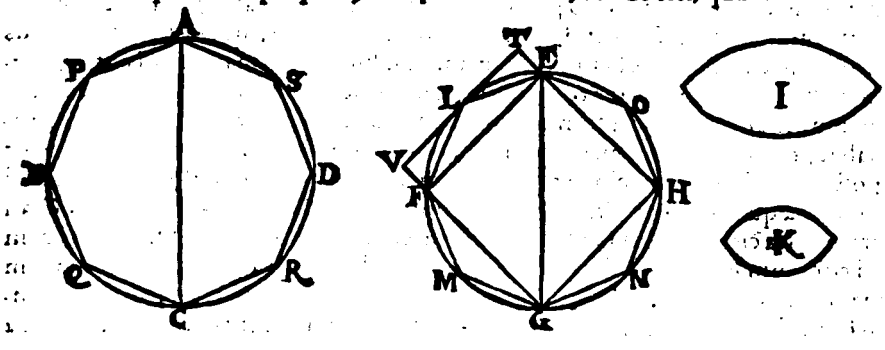
THEOR

THEOR. 2. PROPOS. 2.

CIRCVLI inter se sunt, quemadmodum à diametris quadrata.

SINT duo circuli ABCD, EFGH, quorum diametri AC, EG. Dico esse, vt quadratum diametri AC, ad quadratum diametri EG, ita circulum ABCD, ad circulum EFGH. Si enim res non ita se habet; Sit vt quadratum diametri AC, ad quadratum diametri EG, ita circulus ABCD, ad aliquam magnitudinem, nempe ad I, quæ vel minor erit, vel maior circulo EFGK. Si enim esset æqualis, [a] haberet circulus ABCD, ad circulum EFGH, & ad I, eádem proportionem; ac propterea esset circulus ABCD, ad circulum EFGH, vt quadratum diametri AC, ad quadratum diametri EG, quod non conceditur. Sit ergo primùm I, minor, quàm circulus EFGH, magnitudine scilicet K, ita vt circulus EFGH, æqualis sit manitudinibus I, & K, simul. Inscribatur [m] circulo EFGH, quadratum EFGH; quod quia dimidium est quadrati circa eundem circulum descripti, vt ad propos. 9. lib. 4. ostendimus, maius erit, quàm dimidium circuli EFGH.

[a] 7. quinti.



Secentur bifariam peripheriæ EF, FG, GH, HE, in punctis L, M, N, O, adiungánturque rectæ LE, LF, MF, MG, NG, NH, OH, OE. Ducatur per L, recta TV, tangens circulũ in L, quæ parallela erit ipsi EF, vt ad propos. 27. lib. 3. ostendimus, occurratque rectis HE, GF, productis in T, & V. [b] Quia ergo triangulum ELF, dimidium est parallelogrammi TEFV; maius erit triangulum ELF, quàm dimidium segmenti circuli ELF. Eadem ratione erunt reliqua triangula maiora, quàm dimidia segmentorum, in quibus sunt. Omnia igitur triangula simul maiora sunt, quàm dimidium omnium segmentorum simul. Quod si rursus peripheriæ EL, LF, &c. secentur bifariam, & adiungantur rectæ lineæ, constituentur eodem modo triangula, quæ maiora erunt simul, quàm dimidium omnium segmentorum simul, in quibus sunt; & sic deinceps. Quoniam verò, si à circulo EFGH, auferatur plus quàm dimidium, nempe quadratum EFGH; & à reliquis segmentis plus quàm dimidium, nempe triangula ELF, FMG, &c. atque in hunc modum semper fiat detractio; [c] relinquitur tandem minor magnitudo, quàm K, excessus inter circulum EFGH, & magnitudinem I. Sint iam circuli segmenta relicta EL, LF, FM, &c. simul sumpta minora, quàm magnitudo K. Cùm igitur circulus EFGH, æqualis ponatur magnitudinibus I, & K, simul; si ex circulo detrahantur dicta segmenta, & ex I, & K, ipsa magnitudo K, quæ maior est præfatis circuli segmẽtis; erit reliquum polygonum ELFMGNHO, maius reliqua magnitudine I. Inscribatur in circulo ABCD, polygonum APBQCRDS, simile polygono ELFMGNHO. Quod quidem facilè fiet, si semicirculi ABC, ADC, bifariam secentur in B, & D; & rursus circumferentiæ AB, BC, CD, DA, bifariam in P, Q, R, S; & sic deinceps, donec in tot partes æquales diuisa sit circumferentia ABCD, in quot distributa est circumferentia EFGH. Nam iunctis rectis AP, PB, BQ, &c. erit figura inscripta similis figuræ ELFMGNHO, vt patet. [d] Quoniam igitur est polygonum APBQCRDS, ad polygonum ELFMGNHO, vt quadratum diametri AC, ad quadratum diametri EG, hoc est, per hypothesim, vt circulus ABCD, ad I: Est autem polygonum APBQCRDS, minus circulo ABCD. [e] Igitur & polygonũ ELFMGNHO, minus erit quàm I. Ostensum autem est & maius. Quod est absurdum. Non igitur minor est magnitudo I, circulo EFGH.

[b] 41. primi.

[c] 1. decimi.

[d] 1. duodec.

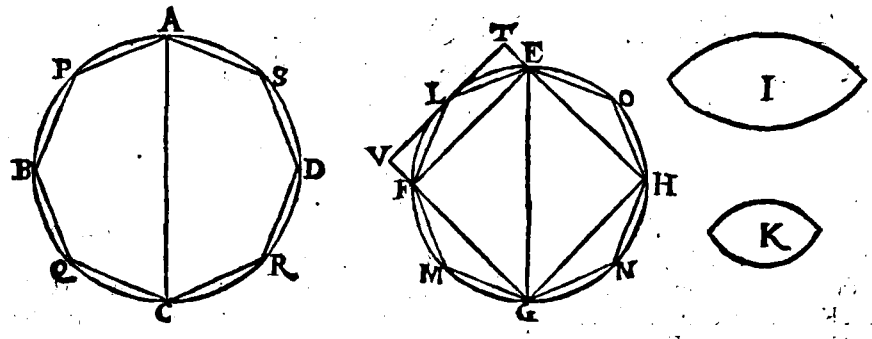
[e] 14. quinti.

QVAMQVAM autem in figura confertur maior circulus cum minore; eodẽ tamen modo demonstrabimus, minorem circulum EFGH, non posse ad magnitudinem, quæ minor sit, quàm maior circulus ABCD, habere eandem proportionem, quam habet quadratum diametri minoris EG, ad quadratum maioris diametri AC; Ita vt generaliter & vniuersè demonstratum sit, nunquam quadratum diametri alicuius circuli ad quadratum diametri alterius circuli eandem habere posse proportionem, quam habet prior circulus ad magnitudinem posteriore circulo minorem: siue prior circulus maior sit posteriore, siue minor.

SIT deinde magnitudo I, maior circulo EFGH. Cùm ergo ponatur circulus ABCD, ad I, esse vt quadratum diametri AC, ad quadratum diametri EG; erit & conuertendo I, ad circulum ABCD, vt quadratum diametri EG, ad quadratum diametri AC. Ponatur vt I, ad circulũ ABCD, ita circulus EFGH, ad magnitudinem aliquam, nẽpe ad K. Et quia I, maior ponitur circulo EFGH, [f] maior quoq; erit circulus ABCD, magnitudine K. Quare erit vt quadratũ diametri EG, ad quadratum diametri AC, ita circulus EFGH, ad magnitudinem K, quæ minor est circulo ABCD. Quod est absurdũ. Ostensum enim est iam in priori parte generaliter, non posse esse vt quadratũ diametri ad quadratũ diametri, ita circulum ad magnitudinẽ circulo minorẽ; siue pri-

[f] 14. quinti

circulus



circulus maior sit posteriore, siue minor. Quamuis autẽ circulus A B C D, maior est, & E F G H, minor; eadem tamen ratione ostẽdemus, quadratũ diametri circuli E F G H, ad quadratũ diametri circuli, A B C D, non posse habere eandem proportionem, quam habet circulus E F G H, ad magnitudinem circulo A B C D, maiorem: quia eodem modo probabimus, (si illud cõcedatur) quadratum diametri A C, ad quadratum diametri E G, eandem habere proportionem, quam habet circulus A B C D, ad magnitudinem circulo E F G H, minorem. quod falsum esse iam in priori parte generaliter demonstratum est: Ita vt generaliter & vniuersè quoque demonstratum sit, nunquã quadratum diametri alicuius circuli ad quadratum diametri alterius circuli eandẽ habere posse proportionem, quam habet prior circulus ad magnitudinem posteriore circulo maiorem: siue prior circulus maior sit posteriore, siue minor. Non ergo maior est magnitudo I, circulo E F G H: sed neque minor est ostensa. æqualis igitur est. Quare cùm ponatur, vt quadratum diametri A C, ad quadratum diametri E G, ita circulus A B C D, ad I; [a] sit autem vt circulus A B C D, ad I, ita idem circulus A B C D, ad circulum E F G H, qui æqualis est magnitudini I; Erit quoq; vt quadratum diametri A C, ad quadratum diametri E G, ita circulus A B C D, ad circulum E F G H, siue circulus A B C D, circulo E F G H, maior sit, siue minor. Circuli igitur inter se sunt, quemadmodum à diametris quadrata. Quod erat ostendendum.

a 7. quinti.

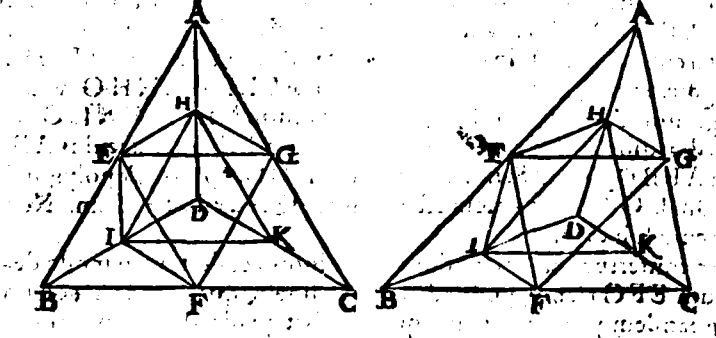
COROLLARIVM.

Hinc fit, ita esse circulum ad circulum, vt polygonum in illo descriptum ad polygonum
a 1. duode. *simile in hoc descriptum. Quoniam* [a] *tam circulus ad circulum,* [b] *quàm polygonum ad po-*
b 1. duode. *lygonum est, vt quadratum diametri ad quadratum diametri, veluti demonstratum est.*

3. ## THEOR. 3. PROPOS. 3.

OMNIS pyramis triangularem habens basim, diuiditur in duas pyramides æquales, & similes inter se, triangulares habentes bases, & similes toti; Et in duo prismata æqualia, quæ duo prismata maiora sunt dimidio totius pyramidis.

SIT pyramis, cuius basis triangulum A B C, vertex D. Secentur omnia eius latera bifariam in E, F, G, H, I, K, cõnectanturque rectæ E F, F G, G E, H I, I K, K H, H E, E I, I F. Diuisa itaq; est pyramis in duas pyramides A E G H, H I K D, quarum bases triangula A E G, H I K, & vertices H, D; nec non in duo solida E B F G H I, C F G H I K, quæ mox ostendemus esse prismata, quorum illius basis est parallelogrãmum E B F G, & triangula opposita E H G, B I F; huius verò basis est triãgulum C F G, cui opponitur triangulum K I H, habentq; hæc prismata terminum communẽ, parallelogrammum F G H I; & cum duabus illis pyramidibus componunt totam pyramidem, vt constat, si rectè concipiatur pyramidis vertex D in sublimi, necnon eius triangula circumia centia. Dico igitur duas illas pyramides esse æquales, & similes inter se, & similes toti; Item duo hæc prismata esse inter se æqualia, & maiora dimidio totius pyramidis Cùm enim latera A D B D,



a 2. sexti. trianguli A D B, secta sint bifariam, ac proinde proportionaliter, [a] erunt H I, A B, parallelæ. Eadẽ ratione parallelæ erunt I K, B C; & H K, A C; & E G, B C; & E F, A C; & F G, A B; & E H B D; &
b 9. vndec. E I, A D; & I F, D C; & H G, D C. [b] Sunt autẽ & rectæ F G, H I, cùm parallelæ sint ipsi A B, inter se parallelæ; Atq; eadẽ ratione parallelæ sunt G H, F I, cùm sint parallelæ ipsi D C. Quare parallelogramma sunt A E I H, H E B I, I D H E, E B F G, G H K C, C K I F, F G H I. Quoniam verò rectæ
c 10. vndec. H E, H G rectis D B, D C, sunt parallelæ, [c] erunt anguli E H G, B D C, æquales: Ac eadem rõne
d 4. sexti. æquales erunt anguli H E G, D B C; & H G E, D C B. [d] Proportionalia igitur sunt latera triãguli H E G, lateribus trianguli D B C, circa æquales angulos; ac proinde simile est triãgulum H E G, triangulo D B C. Sunt autem & triangula H A E, H A G, A E G, triangulis D A B, D A C, A B C, similia, per coroll. propos. 4. huius. Pyramis ergo A E G H, pyramidi A B C D, similis est,

per

per defin.9.huius lib. Rursus quia rectæ HI, HK, rectis AB, AC, sunt parallelæ; [a] erunt anguli IHK, BAC, æquales. Eadem ratione æquales erunt anguli HIK, ABC; & HKI, ACB. [b] Quare latera trianguli HIK, lateribus triáguli ABC, circa æquales angulos sunt proportionalia; ac propterea triangulum HIK, triangulo ABC, simile est: Sunt autem & triangula DHI, DIK, DKH, triangulis DAB, DBC, DCA, similia, per idem coroll. propos. 4. lib. 6. Pyramis ergo HIKD, similis est quoque eidem pyramidi ABCD, per defin. 9. huius lib. Quoniam autem triágula AHE, HDI, similia sunt triangulo ADB, vt ostensum est ex coroll. propos. 4. lib. 6. [c] ipsa quoque inter se similia erunt. Cùm igitur sint super rectas æquales AH, HD, constituta; ipsa erunt æqualia, per lemma propos. 22. lib. 6. Simili argumento æqualia erunt & similia triangula AHG, HDK, cùm similia sint ostensa triangulo ADC, & constituta super æquales rectas AH, HD. Pari ratione æqualia, & similia erunt triangula AEG, HIK, cùm similia sint ostensa triangulo ABC, & super rectas posita AE, HI, [d] quæ æquales sunt, ob parallelogrammum AEIH. Non secus æqualia erũt & similia triangula EHG, IDK, cùm sint ostensa similia triangulo BDC, & habeant rectas HE, DI, [e] quæ æquales sunt, ob parallelogrammum HEID. Pyramides igitur AEGH, HIKD, æquàles sunt & similes, per 10. defin. 11. lib. quandoquidem omnia triangula vnius æqualia sunt & similia omnibus triangulis alterius, vt demonstratum est.

a 10. vndec.
b 4. sexti.
c 21. sexti.
d 34. primi.
e 34. primi.

RVRSVS, [f] quia rectæ EH, HG, GE, æquales sunt, & parallelæ rectis BI, IF, FB, ob parallelográma EHIB, FGHI, BFGE; erunt triangula EHG, BIF, æquiángula inter se, & æqualia, per coroll. propositt. 8. lib. 1. Ac propterea & similia; [g] Sunt autem & parallela; cùm EH, HG, per quas ducitur planum EHG, parallelę sint rectis BI, IF, per quas planum BIF, ducitur. Igitur solidum BIFGHE, contentum duobus triangulis EHG, BIF, ex aduerso æqualibus & similibus, & parallelis; & tribus parallelogrammis EGFB, BEHI, IFGH, prisma est, ex definitione. Eodẽ modo prisma ostendetur solidum CFGHIK. [h] Cùm enim rectæ FC, CG, GF, æquales sint, & parallelæ rectis IK, KH, HI, ob parallelogramma CFIK, CGHK, FGHI; erunt triangula CFG, HIK, æqualia, & æquiangula inter se, ac propterea similia: [i] Sunt autem & parallela, quòd rectæ CF, CG, per quas ducitur planum CFG, parallelæ sint rectis KI, KH, per quas planũ KIH, ducitur. Igitur solidum CFGHIK, contentum duobus triangulis CFG, KIH, ex aduerso æqualibus & similibus, & parallelis; atq; tribus parallelogrammis CFIK, KHGC, IFGH, prisma est. Quoniam verò prismata EBFGHI, CFGHIK, sunt eiusdem altitudinis, nempe inter plana parallela BCGE, HIK; & parallelogrammum EBFG, basis illius, duplum est trianguli CFG, basis huius, per scholium propos. 41. lib. 1. [k] Ipsa inter se æqualia erunt.

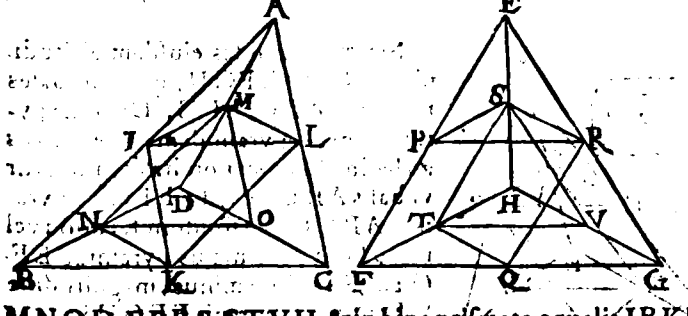
f 34. primi.
g 15. vndec.
h 34. primi.
i 15. vndec.
k 40. vndec.

DENIQVE quia prisma EBFGHI, maius est pyramide EBFI, totum parte; Est autem pyramis EBFI, æqualis & similis pyramidi AEGH, necnon pyramidi HIKD, vt perspicuum est ex æqualitate & similitudine triangulorum: Maiora erunt prismata EBFGHI, CFGHIK, pyramidibus AEGH, HIKD. Ac proinde illa quidem dimidium pyramidis ABCD, excedent, hæ verò à dimidio eiusdem deficient. Quando enim totum in duas partes inæquales secatur, maior dimidium eius superat, minor verò à dimidio deficit. Omnis igitur pyramis triangularem habens basin, &c. Quod erat ostendendum.

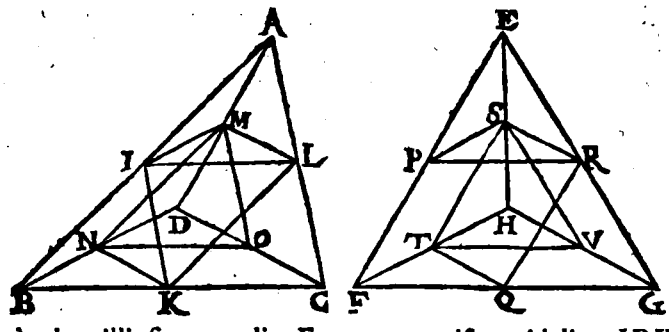
THEOR. 4. PROPOS. 4.

4.

SI fuerint duæ pyramides eiusdem altitudinis, triangulares habentes bases; sit autem illarum vtraque diuisa & in duas pyramides æquales inter se, & similes toti; & in duo prismata æqualia; Ac eodem modo diuisa sit vtraq; pyramidum, quæ ex superiore diuisione natæ sunt, idq; semper fiat; erit vt vnius pyramidis basis ad alterius pyramidis basin, ita & omnia, quæ in vna pyramide, prismata ad omnia, quæ in altera pyramide, prismata multitudine æqualia.



SINT super bases, triangulares ABC, EFG, duæ pyramides ABCD, EFGH, eiusdem altitudinis, quarum latera bifariam diuidantur in punctis I, K, L, M, N, O, P, Q, R, S, T, V, connectanturq; rectæ IL, LK, KN, NO, OM, MN, LM, MI, PR, RQ, QT, TV, VS, ST, RS, SP, ita vt pyramis vtraq; secta sit in binas pyramides æquales inter se, & similes toti, nimirum in AILM, MNOD, EPRS, STVH; & in bina prismata æqualia IBKLMN, CKLMNO, FQRST, GQRSTV; vt vult propositio præcedens: eodemq; modo intelligantur esse diuisæ pyramides factæ AILM, MNOD, EPRS, STVH; & sic deinceps. Dico ita esse omnia prismata facta in pyramide ABCD, ad omnia prismata generata in pyramide EFGH, illis multitudine æqualia, vt est basis ABC, ad basin EFG. Cùm enim sit vt BC, ad CK, ita FG, ad GQ, eo quòd vtraq; linea diuisa est bifariam; sint autem triangula ABC, LKC, similia similiterque posita; Item trian-



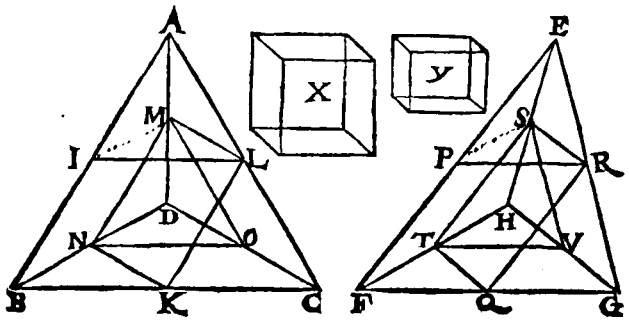
a 22. sexti. gula EFG, RQG, ex coroll. propoſ. 4. lib. 6. a Erit quoque vt triangulum ABC, ad triangulũ LKC, ita triangulum EFG, ad triangulum RQG. Et permutando, vt ABC, ad EFG, ita LKC, ad RQG. Vt autem LKC, ad RQG, ita eſt priſma CKLMNO, ad priſma GQRSTV, vt mox oſtẽdemus, atque adeò ita priſma IBKLMN, ad priſma PFQRST, cùm hæc illis ſint æqualia: Et vt vnum priſma, videlicet IBKLMN, ad vnũ priſma PFQRST. b 12. quinti. b ita ſunt duo priſmata IBKLMN, CKLMNO, ad duo priſmata PFQRST, GQRSTV. Igitur erunt quoque, vt baſis ABC, ad baſin EFG, ita duo priſmata in pyramide ABCD, ad duo priſmata in pyramide EFGH. Simili argumento oſtendemus, ita eſſe bina priſmata in pyramidibus AILM, MNOD, factis in pyramide ABCD, ad bina priſmata in pyramidibus EPRS, STVH, factis in pyramide EFGH, vt ſunt baſes AIL, MNO, illarum pyramidum ad baſes EPR, STV, harum pyramidum; & ſic deinceps, eadem ſemper facta diuiſione. Sed vt illæ baſes ad has, ita eſt LKC, baſis quæ illis eſt æqualis & ſimilis, ad baſin RQG, quæ his eſt æqualis, & ſimilis, vt in præcedenti eſt demonſtratum, hoc eſt, ita eſt baſis ABC, ad baſin EFG. Igitur erunt quoque, vt baſis ABC, ad baſin EFG, ita priſmata cuiuslibet pyramidis factæ in pyramide ABCD, ad priſmata cuiuslibet pyramidis factæ in pyramide EFGH: Ac propterea erunt quoque, vt priſmata pyramidis ABCD, ad priſmata pyramidis EFGH, ita priſmata tam pyramidis AILM, ad priſmata pyramidis EPRS, quàm priſmata pyramidis MNOD, ad priſmata pyramidis STVH; & ita deinceps. Quare cùm ſint, vt duo priſmata pyramidis ABCD, ad duo priſmata c 12. quinti. pyramidis EFGH. c ita omnia priſmata in pyramidibus ABCD, AILM, MNOD, &c. ſimul ad omnia priſmata in pyramidibus EFGH, EPRS, STVH, &c. ſimul, ſi hæc illis multitudine ſint æqualia; Erunt quoque, vt baſis ABC, ad baſin EFG, ita omnia priſmata in pyramide ABCD, ad omnia priſmata in pyramide EFGH. Quocirca ſi fuerint duæ pyramides eiuſdem altitudinis, triangulares habentes baſes, &c. Quod erat demonſtrandum.

LEMMA.

QVOD autem ſit LKC, ad RQG, ita priſma CKLMNO, ad priſma GQRSTV, ita oſtendemus. Intelligantur ex verticibus D, H, ad baſes ABC, EFG, demiſſæ perpendiculares, quæ erunt altitudines æquales pyramidum ABCD, EFGH. Quoniam igitur plana a 17. vndec. *parallela ABC, MNO, a ſecant duas rectas, nempe DC, & perpendicularem ex D, demiſſam proportionaliter; ſecatur autem DC, bifariam in O; ſecabitur quoque perpendicularis ex D, demiſſa bifariam in puncto, cui planum MNO, occurrit. Eadem ratione perpendicularis ex H, demiſſa bifariam ſecabitur à plano STV. Quare cùm totæ perpendiculares ponantur æquales, erunt & dimidiæ, nempe priſmatum altitudines, æquales; Ac proinde priſmata CKLMNO, GQRSTV, cùm habeant altitudines æquales, inter ſe erunt, vt baſes LKC, RQG, per ea, quæ ad propoſ. 34. lib. 11. demonſtrauimus.*

5. THEOR. 5. PROPOS. 5.

SVB eadem altitudine exiſtentes pyramides, & triangulares hãbentes baſes; inter ſe ſunt, vt baſes.



SINT pyramides eiuſdem altitudinis ABCD, EFGH, quarum baſes triangula ABC, EFG. Dico eſſe pyramidem ad pyramidem, vt eſt baſis ad baſin. Si enim non ita ſit, ponatur vt baſis ABC, ad baſin EFG, ita pyramis ABCD, ad ſolidum X; quod vel minus erit, vel maius pyramide EFGH. Sit primò minus, magnitudine Y. Diuidatur pyramis EFGH, in duas pyramides æquales, & duo priſmata æqualia, iuxta propoſ. 3. huius lib. Rurſus eodem modo factæ pyramides in pyramide EFGH, in binas pyramides æquales, & in bina priſmata æqualia, & ſic deinceps. Quoniam igitur, ſi à pyramide EFGH, auferatur plus quam a 3. duodec. dimidiũ, nempe duo priſmata PFQRST, GQRSTV, a quæ maiora ſunt dimidio pyramidis EFGH:

EFGH: Item à reliquis pyramidibus EPRS, STVH, plus quàm dimidium, earum ſcilicet priſmata, & ſic deinceps: relinquetur tandem minor magnitudo quàm Y, exceſſus pyramidis EFGH, ſupra ſolidum X. Sit ergo iam relicta magnitudo minor. Cùm autem pyramis EFGH, æqualis ponatur ſolidis X, Y; erunt reliqua priſmata in pyramide EFGH, maiora ſolido X. Diuidatur pyramis ABCD, in duas pyramides æquales, & duo priſmata æqualia, & eodem modo factæ pyramides AILM, MNOD, in binas pyramides æquales, & bina priſmata æqualia: Atque hoc toties fiat, quoties id factum fuit in pyramide EFGH. [b] Quoniam igitur ſunt omnia priſmata in pyramide ABCD, ad omnia priſmata numero æqualia in pyramide EFGH, vt baſis ABC, ad baſin EFG, hoc eſt, vt pyramis ABCD, ad ſolidum X: Sunt autem omnia priſmata in pyramide ABCD, minora, quàm tota pyramis ABCD; [c] erunt quoque omnia priſmata in pyramide EFGH, minora quàm ſolidum X. Oſtenſa verò ſunt & maiora. Quod eſt abſurdum. Non ergo minus eſt ſolidum X, pyramide EFGH.

a 1. decimi

b 4. duode.

c 14. quinti.

Sit deinde ſolidum X, pyramide EFGH, maius. Quoniam igitur ponitur pyramis ABCD, ad ſolidum X, vt baſis ABC, ad baſin EFG; erit conuertendo ſolidũ X, ad pyramidem ABCD, vt baſis EFG, ad baſin ABC. Ponatur, vt ſolidum X, ad pyramidem ABCD, ita pyramis EFGH, ad ſolidum Y. Et quia ſolidũ X, maius ponitur pyramide EFGH; [d] erit & pyramis ABCD, maior ſolido Y. Quare erit, vt baſis EFG, ad baſin ABC, ita pyramis EFGH, ad ſolidũ Y, quod minus eſt pyramide ABCD. Quod eſt abſurdum. Oſtenſum enim eſt iam, non poſſe eſſe, vt eſt baſis ad baſin, ita pyramidem ad ſolidum pyramide minus. Non ergo maius eſt ſolidum X, pyramide EFGH; ſed neq; minus eſt oſtenſum. Igitur æquale eſt. Quare cùm ponatur vt baſis ABC, ad baſin EFG, ita pyramis ABCD, ad ſolidum X; [e] Sit autem pyramis ABCD, ad ſolidũ X, vt ad pyramidẽ EFGH, ſolido X, æqualem: Erit quoq; vt baſis ABC, ad baſin EFG, ita pyramis ABCD, ad pyramidẽ EFGH. Sub eadem ergo altitudine exiſtẽtes pyramides, &c. Quod erat oſtendendũ.

d 14. quinti.

e 7. quinti.

SCHOLIVM.

Conuerſo modo, ſi pyramides triangulares interſe ſint, vt baſes; ipſa erunt ſub eadem altitudine. Si enim vnius altitudo maior credatur, abſcindatur ab ea æqualis minori, & à puncto abſciſionis ad omnes angulos baſis ducantur rectæ lineæ. Eritq; vt baſis ad baſin, ita pyramis ad pyramidem modò conſtitutam; Sed ſic quoq; erat ad totam pyramidem. [a] *Pyramis ergo conſtituta æqualis erit toti pyramidi, pars toti. Quod eſt abſurdum.*

a 9. quinti.

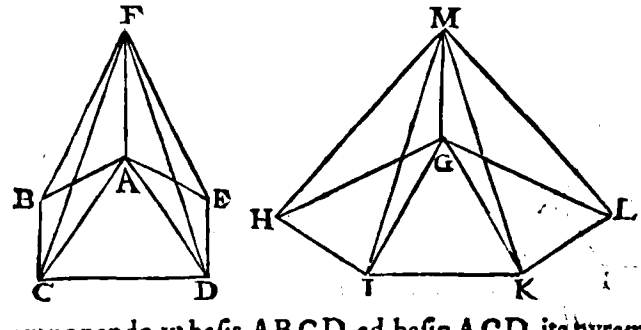
COROLLARIVM.

Hinc ſit, pyramides eiuſdem altitudinis ſuper eandem, vel æquales baſes triangulares conſtitutas, eſſe inter ſe æquales; propterea quod eandem proportionem habent cum baſibus, quæ æquales ponuntur, vel certè vna & eadem.

Item ſequitur, è conuerſo pyramides triangulares æquales ſuper eandẽ, vel æquales baſes, eandem habere altitudinem. Et pyramides triangulares æquales eandemq; habentes altitudinem, baſes habere æquales, ſi non eandem habuerint. Quæ quidem duo ex prima parte corollarij eodem argumento oſtendemus, quo in conuerſo propoſ. 30. & 31. lib. 11. demonſtrando vſi ſumus: ſi tam in altitudine, quàm in baſi abſciſſa conſtituatur alia pyramis, &c.

THEOR. 6. PROPOS. 6. 6.

Sub eadem altitudine exiſtentes pyramides, & polygonas habentes baſes, inter ſe ſunt, vt baſes.



Sint pyramides ABCDEF, GHIKLM, quarum baſes polygonę ABCDE, GHIKL, latera multitudine æqualia habentes. Dico eſſe pyramidem ad pyramidem, vt eſt baſis ad baſin. Reſolutis enim baſibus in triangula numero æqualia; erit quælibet pyramis in totidem pyramides triangulares diuiſa. [a] Quia verò eſt, vt baſis ABC, ad baſin ACD, ita pyramis ABCF, ad pyramidem ACDF; erit componendo vt baſis ABCD, ad baſin ACD, ita pyramis ABCDF, ad pyramidem ACDF: [b] Sed rurſus eſt vt baſis ACD, ad baſin ADE, ita pyramis ACDF, ad pyramidẽ ADEF. Igitur ex æquo vt baſis ABCD, ad baſin ADE, ita pyramis ABCDF, ad pyramidem ADEF. Componendo ergo erit vt baſis ABCDE, ad baſin ADE, ita pyramis ABCDEF, ad pyramidem ADEF. Simili argumento erit vt baſis GHIKL, ad baſin GKL, ita pyramis GHIKLM, ad pyramidem GKLM; & conuertendo vt baſis GKL, ad baſin GHIKL, ita pyramis GKLM, ad pyramidem GHIKLM. [c] Rurſus quoniam eſt, vt baſis ADE, ad baſin GKL, ita

a 5. duode.

b 5. duode.

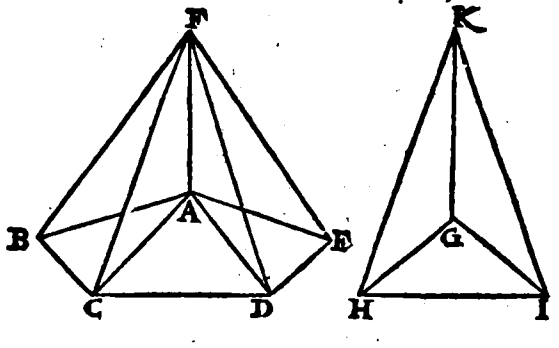
c 5. duode.

ABCDE.	ABCDEF.	pyramis ADER, ad pyramidem GKLM: Erunt quatuor baſes ABCDE,
ADE.	ADEF.	ADE, GKL, GHIKL, in eiſdem proportionibus cum quatuor pyrami-
GKL.	GKLM.	dibus ABCDEF, ADEF, GKLM, GHIKLM, vt in hac fotmula vi-
GHIKL.	GHIKLM.	des: manifeſtumque eſt ex demonſtratione. Quare ex æquo, erit vt baſis

ABCDE, ad baſin GHIKL, ita pyramis ABCDEF, ad pyramidem GHIKLM: ac propterea, ſub eadem altitudine exiſtentes pyramides, &c. Quod erat demonſtrandum.

SCHOLIVM.

QVAMVIS huius propoſitionis demonſtratio de illis duntaxat pyramidibus eiuſdem altitudinis loquatur, ſecundùm interpretes, quorum baſes polygona latera habent multitudine æqualia; facilè tamen idem etiam demonſtrabimus de pyramidibus eiuſdem altitudinis, quarum vnius baſis plura continet latera, quàm baſis alterius. Sint enim primùm duæ pyramides eiuſdē altitudinis ABCDEF, GHIK, quarū illius baſis ſit polygona, nempe pentagona, huius verò triangularis. Dico eſſe pyramidem ad pyramidē, vt eſt baſis ad baſin. Reſoluto enim pentagono in triangula, erit & pyramis in pyramides numero æquales diuiſa. [a] *Quoniam verò eſt, vt baſis ABC, prima quantitas, ad baſin GHI ſecūdam quantitatem, ita pyramis ABCF, tertia quantitas, ad pyramidem GHIK, quartam quantitatem; & eodem mòdo, vt baſis ACD, quinta quantitas, ad baſin GHI, ſecundam quātitatem, ita pyramis ACDF, ſexta quanti-*



a 25. duode.

b 24. quin.

tas, ad pyramidem GHIK, quartam quantitatem: [b] *Erit vt baſis ABCD, prima quantitas cum quinta, ad baſin GHI, ſecundam quantitatem, ita pyramis ABCDF, tertia quantitas cum ſexta, ad pyramidē GHIK, quartam quantitatē. Rurſus quia eſt, vt baſis ABCD, prima quantitas, ad baſin GHI, ſecundā quantitatem, ita pyramis ABCDF, tertia quantitas, ad pyramidem GHIK, quartam quantitatem, vt modo eſt*

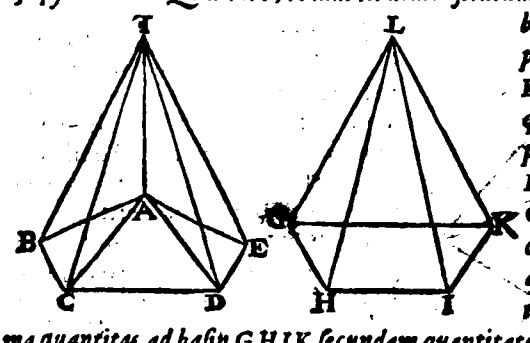
c 5. duode.

oſtenſum: [c] *& vt baſis ADE, quinta quantitas, ad baſin GHI, ſecundam quantitatem, ita pyramis*

d 24 quin.

ADEF, ſexta quantitas ad pyramidem GHIK, quartam quantitatem [d] *Erit etiam baſis ABCDE prima quantitas cum quinta, ad baſin GHI, ſecundam quātitatem, ita pyramis ABCDEF, tertia quātitas cum ſexta, ad pyramidem GHIK, quartam quantitatem. Quod eſt propoſitum. Eodem modo ſemper procedendum eſt, ſi plura fuerint triangula in baſi polygona. Cùm autem vt demonſtratum eſt, ſit vt baſis polygona ABCDE, ad baſin triangularem GHI, ita pyramis ABCDEF, ad pyramidem GHIK; Erit quoque conuertendo, vt baſis GHI, ad baſin ABCDE, ita pyramis GHIK, ad pyramidem ABCDEF. Quamobrem duæ pyramides qualibet, quarum vnius baſis eſt polygona, alterius triangularis, ſuis baſibus ſunt proportionales, vndecunque incipias. Quamuis enim demonſtratio incipiat à polygono, eiusq; pyramide, vt ex demonſtratione conſtat, tamen conuertendo licebit initium quoq; ſumere à triangulo, eiusq; pyramide, vt dictum eſt.*

SED iam ſint duæ pyramides eiuſdem altitudinis ABCDEF, GHIKL, quarum baſes ſint polygona, ſintq; plura latera in vna baſe, quàm in altera. Dico rurſus eſſe pyramidem ad pyramidem, vt eſt baſis ad baſin. Reſoluto enim polygono ABCDE, in triangula ABC, ACD, ADE, erit pyramis eius in totidem diuiſa pyramides. Quia verò, vt iam eſt demonſtratum, eſt vt baſis ABG, triangularis prima quantitas, ad baſin GHIK, polygonam, ſecundam quantitatem, ita pyramis ABCF, tertia quantitas ad pyramidem GHIKL, quartam quantitatem; & vt baſis ACD, quinta quantitas, ad baſin GHIK, ſecundam quantitatem, ita pyramis ACDF, ſexta quantitas, ad pyramidem GHIKL, quartam quantitatem [e] *Erit etiam vt baſis ABCD, prima quantitas cum quinta, ad baſin GHIK, ſecundam quantitatem, ita pyramis ABCDF, tertia quantitas cum ſexta, ad pyramidem GHIKL, quartam quantitatem. Rurſus quia eſt, vt baſis ABCD, prima quantitas, ad baſin GHIK, ſecundam quantitatem, ita pyramis ABCDF, tertia quantitas, ad pyramidem GHIKL, quartam quantitatem, vt proximè demonſtratum eſt; Et eſt quoq;, vt baſis ADE, quinta quantitas, ad baſin GHIK, ſecundam quantitatem, ita pyramis ADEF, ſexta quantitas, ad pyramidem*



e 24 quin.

f 24. quin.

GHIKL, quartam quantitatem, vt antè eſt oſtenſum; [f] *Erit etiam vt baſis ABCDE, prima quantitas cum quinta, ad baſin GHIK, ſecundam quantitatem, ita pyramis ABCDEF, tertia quantitas cum ſexta, ad pyramidem GHIKL, quartam quantitatem. Quod eſt propoſitum. Non aliter procedendum erit, ſi plura triangula fuerint in baſi ABCDE.*

HANC autem propositionem 6. & ea, quæ in hoc scholio demonstrata sunt, conuertemus hoc modo.

PYRAMIDES quarumlibet basium, quæ inter se sunt, vt bases; eandem habẽt altitudinem.

QVOD non secus ostendemus, ac ea, quæ in scholio propos. 5. huius lib. diximus, ostensa sunt.

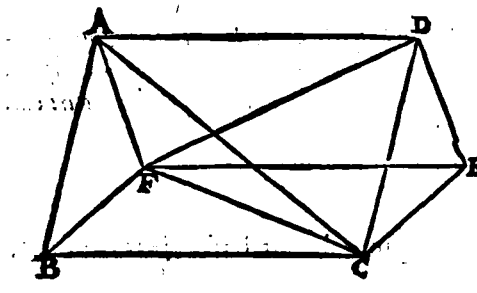
COROLLARIVM.

PERSPICVVM quoq; inde efficitur, pyramides eiusdem altitudinis super æquales bases multangulas, vel eandem constitutas, esse inter se æquales; cùm eandem habeant proportionem cum basibus, quæ æquales ponuntur, vel certè vna & eadem.

RVRSVS contrà fit, pyramides multangulas æquales, & super æquales bases, vel super eandem constructas, eandem habere altitudinem. Et pyramides multangulas æquales, eandemq; habentes altitudinem, æquales habere bases, si non habuerint eandem. Hæc autem duo demonstrabuntur, vt in coroll. propos. 5. huius lib. diximus.

THEOR. 7. PROPOS. 7. 6.

OMNE prisma triangularem habens basim, diuiditur in tres pyramides æquales inter se, triangulares bases habentes.

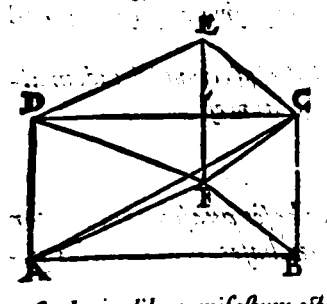


SIT prisma ABCDEF, cuius duo triágula opposita, æqualia, ac similia ABF, DCE. Dico ipsum prisma secari in tres pyramides triangulares inter se æquales. Ducantur enim in tribus parallelogrammis tres diametri, nempe AC, in ABCD; CF, in BCEF; FD, in ADEF. [a] Quoniam igitur triangula ABC, ADC, æqualia sunt; [b] estq; vt basis ABC, ad basin ADC, ita pyramis ABCF, ad pyramidem ADCF, cùm hæ pyramides eandẽ habeant altitudinem, nempe perpendicularem ex F, vertice ad planum ABCD, demissam; Erunt & pyramides ABCF, ADCF, inter se æquales. Eadem ratione æquales erunt pyramides ADFC, EFDC, super æquales bases ADF, EFD, constitutæ, & sub eadem altitudine, nempe perpendiculari à vertice C, ad planum ADEF, demissa. Est autẽ pyramis ADCF, eadem pyramidi ADFC, cùm illa contineatur quatuor planis, nempe basi ADC, & triangulis ADF, ACF, DCF; hæc verò eisdem quatuor planis, nimirum basi ADF, & triangulis ADC, ACF, DCF. Igitur tres pyramides ABCF, ADCF, EFDC, seu CDEF, (quæ eadem est pyramidi EFDC, cùm tam EFDC, quàm CDEF, contineatur planis CDE, EFD, DCF, FCE, totum prisma componentes, vt perspicuum est) æquales sunt inter se; Ac propterea prisma ABCDEF; in tres pyramides æquales est diuisum. Quocirca omne prisma triangularem habens basin, &c. Quod erat demonstrandum.

[a] 34. primi.
[b] 5. duodec.

COROLLARIVM I.

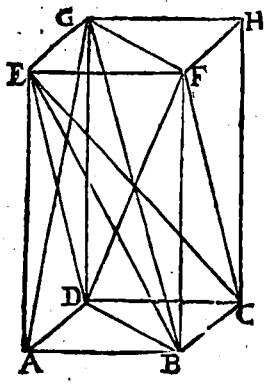
HINC colligitur, quamlibet pyramidem esse tertiam partem prismatis, quod eandẽ cum illa habet & basim, & altitudinem: Siue prisma quodlibet triplum esse pyramidis, quæ eandem cum ipso habet & basin, & altitudinem.



SIT enim primùm pyramis ABFC, triangularem habens basin ABF; & prisma ABCDEF: sub eadem altitudine eandem habens basin triangularem ABF. Dico pyramidem esse tertiã partem prismatis. Nam si ducatur recta DF, erit prisma diuisum in tres pyramides æquales ABCF, ADCF, CDEF; [a] vt demonstratum est; Ac propterea pyramis ABCF, hoc est, pyramis ABFC, (cùm hac illi sit æqualis, immo eadem, quòd eisdem planis comprehendatur ABF, FCA, ABC, CBF,) tertia pars erit prismatis ABCDEF. Cùm igitur pyramis ABFC, æqualis sit cuicunq; alteri pyramidi sub eadem altitudine, & super eandem basin ABF, cõstitutæ, ex coroll. propos. 5. huius lib. manifestum est, quamlibet pyramidem esse tertiam partem prismatis, quod eandem cum illa habet basin triangularem, & altitudinem; ac propterea prisma è contrario esse pyramidis triplum,

[a] 7. duodec.

SIT deinde pyramis ABCDE, cuius basis rectilineum quodcunq; ABCD, quotlibet laterum; & prisma ABCDEFGH, sub eadem altitudine eandem habens basim. Dico rursus pyramidem esse prismatis partem tertiam. Resoluta enim basi ABCD, & plano opposito EFGH, in triangula numero æqualia ADB, BCD; EHF, FGH; erit prisma in totidem prismata bases habentia triangulares diuisum. Ductis ergo rectis AH, BH, DF, CF, erit, vt demonstratũ est, pyramis ADBH, tertia pars prismatis ABFEHD; Itẽ pyramis BCDF, tertia pars prismatis GDHGFB. Quare erit, vt pyramis ADBH, ad prisma ABFEHD, ita pyramis BODF, ad



a 12.quinti

priſma CDHGFB; [a] *Ac propterea vt vna pyramis ad ſuum priſma, ita omnes pyramides ad omnia priſmata, hoc eſt, ad priſma ABCDEFGH. Igitur pyramides ADBH, BCDF, ſimul tertiam partem conſtituent priſmatis ABCDEFGH. Sunt autem pyramides ADBH, BCDF, æquales pyramidi ABCDE; propterea quòd pyramides ADBH, ADBE, ſuper eandem baſin, & ſub eadem altitudine, nimirum inter plana parallela, ſunt æquales, ex coroll. propoſ. 5. huius lib. Eademq; ratione æquales ſunt pyramides BCDF, BCDE, ſuper eandem baſim, & ſub eadem altitudine. Quapropter cùm pyramides ADBE, BCDE, componãt totam pyramidem ABCDE; erit & pyramis ABCDE, tertia pars priſmatis ABCDEFGH. Cùm igitur pyramis ABCDE, æqualis ſit cuicunque alteri pyramidi ſub eadem altitudine, & ſuper eandem baſim ABCD, conſtitutæ, per corollarium propoſ. 5. huius lib. perſpicuum eſt, quamlibet pyramidem eſſe tertiam partem priſmatis, quod eandem cum illa habet baſim multilateram, eandemq; altitudinem.*

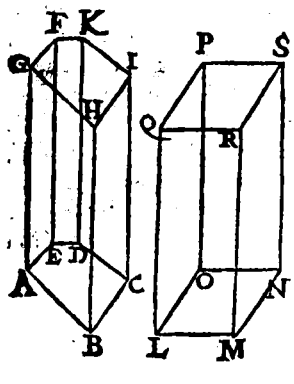
QVOD ſi baſis pyramidis, ac priſmatis plura habeat latera, eodem modo oſtendetur, pyramidem eſſe priſmatis partem tertiam. Nam diuiſis polygonis in triangula, ſectum erit priſma in totidem priſmata baſes habentia triangulares. Vnde ſingulæ pyramides triangulares horum priſmatum erunt tertiæ partes ſingulorum priſmatum. Cùm igitur omnes hæ pyramides æquales ſint pyramidi baſim habenti polygonum priſmatis propoſiti, conſtat propoſitum.

EODEM modo pyramis tertia pars eſt priſmatis habentis baſem baſi, & altitudinem altitudini pyramidis æqualem. Nam eiuſmodi pyramis æqualis eſt pyramidi illi, quæ eandem cum priſmate habet & baſem, & altitudinem per coroll. propoſ. 6. huius lib. Quam quidem iam oſtendimus tertiam eſſe priſmatis partem.

SCHOLIVM I.

EX dictis facilè demonſtrabimus hanc propoſitionem, videlicet.

SVB eadem altitudine exiſtentia priſmata, quaſcumque habeant baſes; inter ſe ſunt, vt baſes.



QVAMVIS enim hoc demonſtratum ſit in lib 11. de priſmatis, quorum duo plana oppoſita, parallela, & æqualia, ſunt triangula, licet eorum baſes ſint parallelogramma, vertices verò linea recta; necnon de parallelepipedis, quæ nomine priſmatum contineri diximus: Nunc tamen idipſum demonſtrabimus vniuersè de omnibus priſmatis, quorum duo plana aduerſa, ſiue baſes, ſunt polygona, quamuis plura latera, ſeu anguli in vnius baſe reperiantur, quàm in baſe alterius. Sint igitur duo priſmata eiuſdem altitudinis ABCDEFGHIK, LMNOPQRS, quorum baſes ſint figuræ multilateræ. Dico vt eſt baſis ABCDE, ad baſim LMNO, ita eſſe priſma ad priſma. Si enim ex omnibus angulis vtriuſque baſis ad vnum punctum ſuperioris plani, quod baſi opponitur, linea recta ducantur, conſurgent duæ pyramides ſub eadem altitudine cum priſmatis habentes eaſdem baſes: Ac proinde per coroll. præditum huius propoſ. qualibet pyramis tertia pars erit ſui priſmatis. [b] *Quamob rem erit, vt pyramis ad pyramidem, ita priſma ad priſma: Sed pyramis ad pyramidem eſt, vt baſis ad baſin, vt oſtenſum eſt propoſ. 6. eiusq; ſcholio. Igitur erit quoque vt baſis ad baſin, ita priſma ad priſma. Quod eſt propoſitum.*

b 15.quinti

CONVERSO modo, ſi priſmata quarumcunque baſium inter ſe ſint, vt baſes, ipſa erunt ſub eadem altitudine. Quod quidem eodem modo oſtendemus, quo ſcholium propoſ. 5. demonſtratum eſt.

COROLLARIVM II.

VNDE priſmata eiuſdem altitudinis ſuper eandem, vel æquales baſes quaſcunque, inter ſe ſunt æqualia. Quia nimirum eandem habent proportionem, quam baſes, quæ æquales ponuntur, vel certè vna & eadem.

ECONTRARIO, Priſmata æqualia ſuper æquales baſes, vel eandem, in eadem ſunt altitudine. Et priſmata æqualia eiuſdem altitudinis, baſes habent æquales, ſi non habuerint eandem. Quod quidem non aliter oſtendes, ac conuerſum propoſ. 31. lib. 11. fuit demonſtratum.

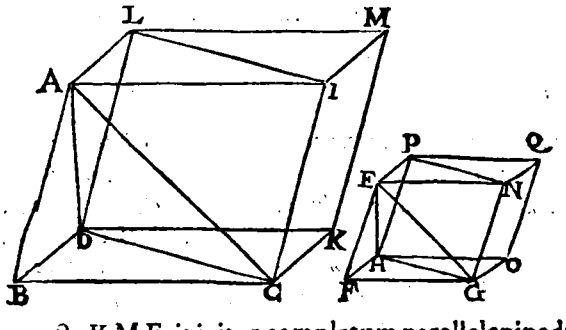
SCHOLIVM II.

CÆTERVM tam ea, quæ in priori corollario, quàm illa, quæ in ſcholio proximo demonſtrata ſunt, intelliguntur tantummodò de priſmatis, quæ in vertice habẽt plana baſi parallela, æqualia, & ſimilia. Quod dixerim.

dixerim, ne hallucineris in prismate constante duobus triangulis parallelis, aqualibus, & similibus, & tribus parallelogrammis, quod videlicet Campanus cum alijs putat tantummodò prisma dici ab Euclide, vt in definitione prismatis diximus. Nam si in huiusmodi prismate intelligatur quidem basis vnum illorum triangulorum, erit necessariò pyramis eiusdem altitudinis, eandemq; habens basim, tertia pars ipsius prismatis, vt in coroll. 1. demonstratum est. Item ipsum prisma ad quodlibet aliud prisma proportionem habebit, quam basis ad basin, vt in scholio ostendimus. At verò si in prismate tali basis concipiatur vnum parallelogrammorum, ita vt in vertice sit linea recta, nō erit pyramis eandem habens basim, eandemq; altitudinem, tertia eius pars, sed duæ tertiæ partes. hoc est, prisma ad pyramidem proportionem habebit sesquialteram, quam videlicet habent 3. ad 2. Si cuim huic prismati addatur aliud æquale & simile, vt parallelepipedum efficiatur, erit pyramis tertia pars constituti parallelepipedi, ex corollario prædicto, cùm parallelepipedum sit prisma eandem & altitudinem & basin habens cum pyramide. Quare si pyramis ponatur 2. erit parallelepipedum 6. Ablato ergo dimidio, erit reliquum prisma propositum 3. Ac propterea ad pyramidem proportionem habebit, quam 3. ad 2. nimirū sesquialteram. Ex quo efficitur, pyramidem super dimidium parallelogrammum constitutum, quæ eandem cum tali prismate habeat altitudinē, cùm sit dimidium prioris pyramidis, esse tertiam partem prismatis. Quæ cùm ita sint, non habebit tale prisma ita constitutum ad aliud prisma eiusdem altitudinis, eandem proportionem, quam basis ad basin, nisi hoc aliud prisma in vertice lineam rectam habeat quoq;, & basin parallelogrammum. Itaque ea, quæ ostendimus in scholio, intelligenda sunt de prismatis eiusdem altitudinis, quorum vertices vel linea recta sunt, & bases parallelogramma, vel certè, quæ in verticibus plana habeant basibus parallela, æqualia atq; similia. Hac enim ratione, si vertices prismatum fuerint linea recta, erunt pyramides in eisdem basibus, eiusdemq; altitudinis, duæ tertiæ partes prismatū, vt modò demonstrauimus. Quare eandem habebunt rationem, quam prismata, &c.

THEOR. 8. PROPOS. 8.

SIMILES pyramides, quæ triangulares habent bases, in triplicata sunt homologorum laterum ratione.



SINT pyramides similes triangulares ABCD, EFGH, ita vt bases ABC, EFG, sint similes, & reliqua triangula vnius similia reliquis triangulis alterius. Dico proportionem pyramidum esse triplicatam proportionis, quam habent latera homologa, nempe BC, FG. Extendantur enim plana triangulorum ABC, CBD, DAB, perficianturque parallelogramma BI, BK, BL. Deinde ducantur LM, IM, rectis AI, AL, parallelæ, conuenientes in M, connectatúrque recta KM. Erit igitur completum parallelepipedum BM, eiusdem cum pyramide altitudinis, cùm plana solidi BM, sint parallela, vt facilè colligitur ex propos. 15. lib. 11. Rursus eodē modo perficiatur parallelepipedum FQ. Quoniam igitur ob similitudinē pyramidum, anguli plani ABC, EFG, sunt æquales, estque vt AB, ad BC, ita EF, ad FG; erunt parallelogramma BI, FN, similia. Eodem modo cùm anguli ABD, EFH, sint æquales, sitque vt AB, ad BD, ita EF, ad FH; Item anguli DBC, HFG, æquales, & vt DB, ad BC, ita HF, ad FG; erunt & parallelogramma BL, BK, parallelogrammis FP, FO, similia. [a] Sed tam tria BI, BK, BL, parallelepipedi BM, reliquis tribus oppositis DM, AM, CM; quàm tria FN, FO, FP, parallelepipedi FQ, reliquis oppositis tribus HQ, EQ, GQ, [b] sunt æqualia, & similia. Igitur sex plana circumscribentia solidum BM, similia sunt sex planis solidum FQ, ambientibus; Ac propterea ex defin. 9. lib. 11. similia sunt parallelepipeda BM, FQ. Quoniam verò ductis rectis LI, PN, [c] prismata DBCILA, HFGNPE, habent eandem proportionem, quam parallelepipeda BM, FQ, eorum dupla; & pyramides ABCD, EFGH, eandem quam prismata dicta, earum tripla; [d] habebunt quoque pyramides eandem proportionem, quam parallelepipeda. [e] Cùm igitur proportio parallelepipedi BM, ad parallelepipedum FQ, sit triplicata proportionis homologorum laterum BC, FG; erit quoque proportio pyramidis ABCD, ad pyramidem EFGH, proportionis BC, ad FG, triplicata. Similes itaque pyramides, quæ triangulares habent bases, &c. Quod erat demonstrandum.

[a] 24. vndec.
[b] 24. vndec.
[c] 15. quinti.
[d] 11. quinti.
[e] 33. vndec.

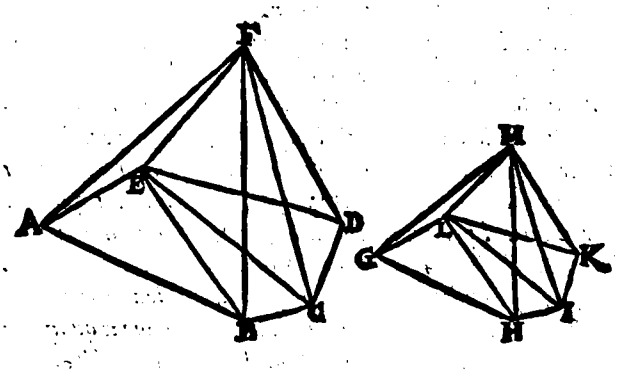
COROLLARIVM.

Ex hoc quoque est manifestum, similes pyramides, quarum bases plura latera, quàm tria, continent, habere proportionem homologorum laterum triplicatam.

SINT pyramides similes, quarum bases rectilinea similia plurium laterum ABCDE, GHIKL. Dico proportionem pyramidum esse triplicatam proportionis, quam habent latera homologa AB, GH. Nam si ex angulis E, L, ducantur ad angulos oppositos rectæ EB, EC; LH, LI, [a] diuisa erunt bases similes in trian-

[a] 20. sexti.

gula numerò æqualia, & similia; nimirum triangula A B E, E B C, C D E; similia erunt triangulis G H L, L H I, I K L. Quoniam ergo ob pyramidum similitudinem, triangula A E F, G L M, similia sunt, & angulus F E A, angulo M L G, æqualis; erit vt F E, ad E A, ita M L, ad L G. Vt autem E A, ad E B, ita L G, ad L H, propter similitudinem triangulorum A E B, G L H. Igitur ex æquo erit, vt F E, ad E B, ita M L, ad L H. Rursus quia est, vt E B, ad B A, ita L H, ad H G, ob triangula similia A B E, G H L; Et vt B A, ad B F, ita H G, ad H M, cùm ob pyramidum similitudinem similia sint triangula A B F, G H M: Erit quoque ex æquo, vt E B, ad B F, ita L H, ad H M; Ac propterea cùm sit, vt F E, ad E B, ita M L, ad L H; & vt E B, ad B F, ita L H, ad H M; erit etiam ex æquo, vt F E, ad F B, ita M L, ad M H. [a] *Quare æquiangula, atque adeò & similia sunt triangula F E B, M L H. Sunt autem & triangula F E A, F A B, A B E, triangulis M L G, M G H, G H L, similia. Igitur pyramides A B E F, G H L M, ex definitione 9. libri 11. similes sunt. Eadem ratione*



a 5. sexti.

b 8. duodecimi. *similes erunt pyramides E B C F, L H I M; Item C D E F, I K L M.* [b] *Quapropter, vt demonstratum est, pyramides A B E F, E B C F, C D E F, ad pyramides G H L M, L H I M, I K L M, singulæ ad singulas, triplicatam proportionem habebunt laterum homologorum A B, B C, C D, ad G H, H I, I K; singulorum ad singula. Cùm igitur A B, B C, C D, ad G H, H I, I K, habeant vnam & eandem proportionem, ob similitudinem basium A B C D E, G H I K L; habebunt quoque pyramides A B E F, E B C F, C D E F, ad pyramides*

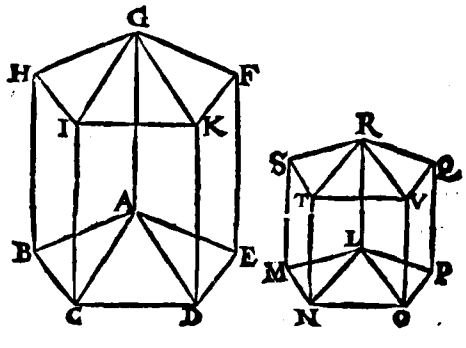
c 12. quinti. *G H L M, L H I M, I K L M, vnam eandemq; proportionem, triplicatam scilicet illius;* [c] *Atque idcircò erit, vt vna pyramis A B E F, ad vnam pyramidem G H L M, ita omnes pyramides, nempe pyramis A B C D E F,*

d 8. duodecimi. *ad omnes pyramides, nimirum ad pyramidem G H I K L M. Quam ob rem,* [d] *cùm pyramis A B E F, ad pyramidem G H L M, habeat triplicatam proportionem homologorum laterum A B, G H; habebit quoque pyramis A B C D E F, ad pyramidem G H I K L M, triplicatam proportionem eorundem laterum homologorum A B, G H. Quod est propositum.*

SCHOLIVM.

EADEM ratione prismata similia habebunt triplicatam proportionem homologorum laterum. Sint enim duo prismata similia A B C D E F G H I K, L M N O P Q R S T V. Dico eorum proportionem, esse triplicatam proportionis homologorum laterum. Nam si ex angulis A, & L, ducantur rectæ A C, A D; L N, L O,

e 20. sexti. [e] *erunt, vt de pyramidibus dictum est, triangula A B C, C A D, D E A, triangulis L M N, N L O, O P L, similia. Similiter, si ex angulis G, & R, ducantur rectæ G I, G K; R T, R V, erunt triangula G H I, I G K, K F G, & triangulis R S T, T R V, V Q R, & triangulis antè dictis, similia, cùm omnia plana prismatum opposita similia existant, per definitionem prismatis. Quoniam verò ob similitudinem prismatum, parallelogramma C H, N S, similia sunt; erit vt I C, ad C B, ita T N, ad N M: Vt autem C B, ad C A, ita quoque est N M, ad N L, ob similitudinem triangulorum B C A, M N L. Igitur ex æquo erit, vt I C, ad C A, ita T N, ad N L. Rursus quoniam angulus solidus N, æqualis est solido angulo C, ob similitudinem prismatum; si ille huic superponatur, omnia inter se conuenient, nimirum angulus M N O, angulo B C D, & angulus T N M, angulo I C B, & angulus T N O, angulo I C D: Conuenit autem & recta N L, rectæ C A, eò quòd anguli M N L, B C A, sunt æquales. Igitur anguli, I C A, T N L, æquales*



sunt; Ac propterea cùm latera circa ipsos ostensa sint esse proportionalia, erunt parallelogramma C G, N R, similia. Atqui & parallelogramma C H, H A, parallelogrammis N S, S L, & triangula A B C, G H I, triangulis L M N, R S T, similia sunt. Igitur prismata A B C I G H, L M N T R S, similia sunt, ex definitione solidorum similium. Non aliter ostendentur esse similia prismata C D A G I K, N O L R T V; nec non prismata A E D K G F, L P O V R Q. Quapropter prismata A B C I G H, C D A G I K, A E D K G F, ad prismata L M N T R S, N O L R T V, L P O V R Q, per ea, quæ demonstrauimus ad propositionem 34. libri 11. triplicatam habent proportionem, singula ad singula, laterum homologorũ B C, C D, D E, ad M N, N O, O P, singulorum ad singula. Ac propterea eodem modo demonstrabimus, prismata A B C D E F G H I K, L M N O P Q R S T V, proportionẽ habere homologorum laterum B C, M N, triplicatam, quo paulò antè vsi sumus ad idem demonstrandum in pyramidibus multangulis.

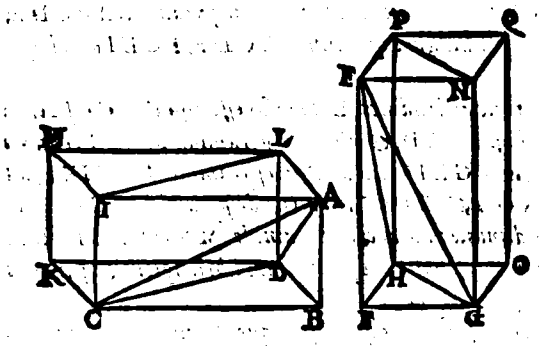
EX quibus omnibus colligitur, pyramides multangulas similes diuidi in pyramides triangulares similes, & numero

numero æquales, & homologas totis. Hoc enim manifestum est ex demonstratione præcedentis corollarij.

Eodem modo infertur, prismata multangula similia diuidi in prismata similia triangulares bases habentia, & numero æqualia, & homologa totis. Vt apparet ex huius scholij demonstratione.

THEOR. 9. PROPOS. 9. 7.

Æqvalivm pyramidum, & triangulares bases habentium, reciprocantur bases & altitudines. Et quarum pyramidum triangulares bases habentium reciprocantur bases & altitudines; illæ sunt æquales.



Sint æquales pyramides triangulares A B C D, E F G H. Dico earum bases A B C, E F G, & altitudines esse reciprocas, hoc est, esse vt A B C, ad E F G, ita altitudinem pyramidis E F G H, ad altitudinem pyramidis A B C D. Si enim perficiantur, vt in præcedenti propositione dictum est, parallelepipeda B M, F Q, eorundem altitudinũ cum pyramidibus, connectanturque rectæ L I, P N; erunt prismata D B C, I L A, H F G N P E, cùm sint tripla pyramidum, quæ æquales ponuntur, inter se æqualia; Ac proinde parallelepipeda B M, F Q, cùm sint prismatum dupla, æqualia quoq; erunt. [a] Quare bases eorum & altitudines reciprocabũtur, hoc est, erit vt basis B I, ad basin F N, ita altitudo solidi F Q, ad altitudinẽ solidi B M: [b] Vt autem basis B I, ad basim F N, ita est triangulum A B C, ad triangulum E F G. Igitur erit quoque vt basis A B C, ad basin E F G, ita altitudo pyramidis E F G H, ad altitudinem pyramidis A B C D, cùm altitudines pyramidum eædem sint, quæ parallelepipedorum; Ac propterea bases, & altitudines pyramidum æqualium reciprocantur.

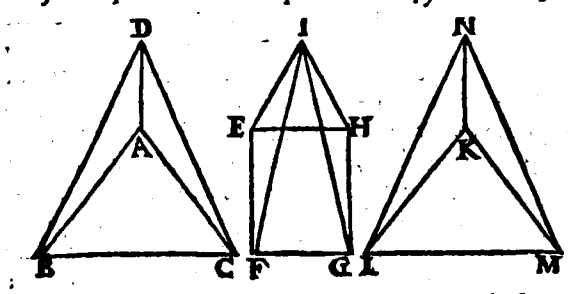
[a] *34. vndec.*
[b] *15. quinti.*

Sint iam bases & altitudines reciprocæ. Dico pyramides esse æquales. Constructa enim figura, vt prius; [c] cùm sit vt A B C, ad E F G, ita parallelogrammũ B I, ad parallelogrammũ F N; sintq; eædem altitudines parallelepipedorum, & pyramidum; erunt quoque bases parallelepipedorum & altitudines eorundem reciprocæ; [d] Ac propterea inter se æqualia erunt parallelepipeda B M, F Q. Quare & prismata D B C I L A, H F G N P E, eorum dimidia, æqualia erunt: Atq; propterea pyramides quoque, prismatũ tertiæ partes, æquales erunt. Æqualium igitur pyramidum, & triangulares bases habentium, &c. Quod erat demonstrandum.

[c] *15. quinti.*
[d] *34. vndec.*

SCHOLIVM.

Eadem ratione Aequalium pyramidum, quarum bases non sint triangulares, reciprocantur bases atq; altitudines. Et quarum pyramidum triangulares bases non habentium reciprocantur bases & altitudines, illæ sunt æquales. Sint enim primùm duæ pyramides æquales, quarum quidem A B C D, basin habeat triangularem; at verò E F G H I, non triangularem. Fiat basi non triangulari E F G H, æquale triangulum K L M. Quod quidem fiet, si basis multilatera reducetur ad parallelogrammum, per propos. 45. lib. 1. Nam hoc parallelogrammum facilè ad triangulum reducetur, per ea, quæ demonstrauimus ad propos. 42. lib. 1. Deinde super K L M, fiat pyramis K L M N, eiusdem altitudinis cum pyramide E F G H I. Quoniã ergo pyramides E F G H I, K L M N, æquales habent bases, & eandem altitudinem; ipsæ erunt æquales, per ea, quæ in scholio propos. 6. huius libri ostendimus: Ponitur autẽ pyramis E F G H I, æqualis pyramidi A B C D. Igitur & pyramis K L M N, pyramidi A B C D, æqualis erit. Quamobrem, cùm habeant pyramides A B C D, K L M N, bases triangulares; [a] erit vt basis A B C, ad basin K L M, hoc est, ad huic æqualem basin E F G H, ita altitudo pyramidis K L M N, hoc est, altitudo pyramidis E F G H, (ponuntur enim hæ altitudines æquales) ad altitudinem pyramidis A B C D. Ac proinde pyramidum A B C D, E F G H I, æqualium bases & altitudines reciprocantur.

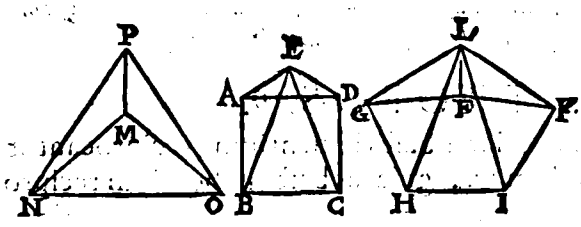


[a] 9. duodecimi.

Sed reciprocentur iam harum pyramidum bases atq; altitudines. Dico ipsas esse æquales. Constructa enim figura eodem modo; eiũ basis K L M, æqualis sit basi E F G H, & altitudo pyramidis K L M N, eadem, quæ pyramidis E F G H I; ponatur autem esse vt A B C, ad E F G H, ita altitudo pyramidis E F G H I, ad pyramidis A B C D, altitudinem; erit quoq; vt basis A B C, ad basim K L M, ita altitudo pyramidis K L M N, ad altitudinem pyramidis A B C D. [b] Quamobrem æquales sunt pyramides A B C D, K L M N. Cùm ergo pyramis K L M N, æqualis sit pyramidi E F G H I, per ea, quæ ostensa sunt in scholio propos. 6. huius lib. Erit & pyramis A B C D, pyramidi E F G H I, æqualis. Quod est propositum.

[b] 9. duodecimi.

Sint deinde pyramides æquales A B C D E, F G H I K L, quarũ bases sint multangula. Fiat rursus trian-



gulum M N O, æquale baſi A B C D, & pyramis M N O P, eiuſdem altitudinis cum pyramide A B C D E: Erit q; ex ſcholio propoſ. 6 huius libri, pyramis M N O P, æqualis pyramidi A B C D E: Sed hæc æqualis ponitur pyramidi F G H I K L. Igitur & pyramis M N O P, æqualis eſt pyramidi F G H I K L. Quare, vt nunc demonſtrauimus, erit vt baſis M N O, hoc eſt, baſis A B C D, ſibi æqualis, ad baſim F G H I K, ita altitudo pyramidis F G H I K L, ad altitudinẽ pyramidis M N O P, hoc eſt, ad altitudinem pyramidis A B C D E; (ponuntur enim hæ altitudines æquales.) Ac propterea pyramidum æqualium A B C D E, F G H I K L, baſes & altitudines reciprocantur.

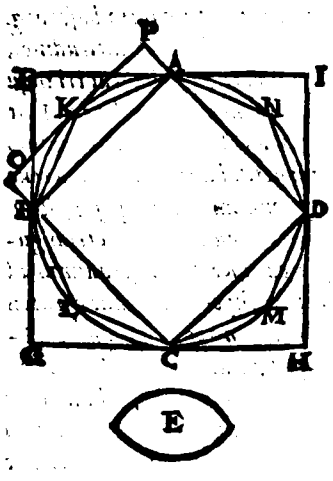
Sed reciprocentur iam baſes harum pyramidum atque altitudines. Dico ipſas eſſe æquales. Conſtituta enim eodem modo figura, cùm baſis M N O; æqualis ſit baſi A B C D, & altitudo pyramidis M N O P, eidem quæ pyramidis A B C D E: ponatur autem vt A B C D, ad F G H I K, ita altitudo pyramidis F G H I K L, ad altitudinem pyramidis A B C D E; Erit quoque vt M N O, ad F G H I K, ita altitudo pyramidis F G H I K L, ad altitudine pyramidis M N O P. Quare, vt ante oſtendimus, æquales erũt pyramides M N O P, F G H I K L. Eſt autem pyramis M N O P, pyramidi A B C D E, æqualis, ex ſcholio propoſ. 6. huius libri. Igitur & pyramis A B C D E, pyramidi F G H I K L, æqualis erit. Quod eſt propoſitum.

Omnia hæc facile quoq; demonſtrabuntur conuenire priſmatis quibuſcunque. Nam ſi priſmata fuerint æqualia, erunt & eorum pyramides earundem altitudinum cum ipſis, & ſuper eaſdem baſes, æquales; cùm ſint eorum tertiæ partes, ex corell. propoſ. 7. huius libri. Vel certè duæ tertiæ, ſi nimirum priſmatum baſes fuerint parallelogramma, & eorum vertices, linea recta, vt in ſcholio eiuſdem propoſitionis oſtenſum eſt. Quare, vt modò demonſtrauimus, baſes harum pyramidum, atq; altitudines reciprocantur. Cùm ergo hæ baſes & altitudines eædem ſint, quæ priſmatum: reciprocabuntur quoque baſes priſmatum atque altitudines.

Rvrsvs, ſi priſmatum baſes, & altitudines reciprocentur, reciprocabuntur quoque baſes, & altitudines pyramidum, eaſdem baſes & altitudines cum priſmatu habẽtium. Quare, vt demonſtratum eſt, pyramides æquales ſunt; Ac propterea priſmata, cùm earum ſint tripla, vel certè ſeſquialtera, æqualia quoque ſunt. Quod eſt propoſitum.

9. THEOR. 10. PROPOS. 10.

OMNIS conus tertia pars eſt cylindri eandem cum ipſo baſin habentis, & altitudinem æqualem.



HABEANT conus & cylindrus baſin eandẽ circulum A B C D, & altitudinem eandem. Dico conum cylindri eſſe tertiam partem. Si enim conus non credatur eſſe tertia pars cylindri, non erit cylindrus coni triplus, ſed vel maior, vel minor triplo coni. Sit primùm maior quàm triplus coni, magnitudine E, ita vt cylindrus ſit æqualis triplo coni, & magnitudini E, ſimul. Inſcribatur in circulo quadratũ A B C D, & circa eundẽ, quadratũ F G H I; intelligãturq; ſuper hæc quadrata ſub altitudine coni, & cylindri, erecta duo parallelepipeda. Quoniã igitur quadratũ A B C D, dimidiũ eſt quadrati F G H I, vt ad propoſ. 9. lib. 4. oſtendimus; [a] eſtq; vt baſis ad baſin, ita parallelepipedũ ad parallelepipedũ eiuſdem altitudinis: Erit & parallelepipedum baſis A B C D, dimidium parallelepipedi baſis F G H I. Ac proinde parallelepipedũ baſis A B C D, maius erit, q̃ dimidium cylindri, cuius baſis circulus A B C D. Secentur bifariam peripheriæ A B, B C, C D, D A, in punctis K, L, M, N, adiunganturq; rectæ K A, K B, L B, L C, M C, M D, N D, N A. Ducatur quoq; per K, recta O P, tangens circulum in K, quæ parallela erit ipſi A B, vt ad propoſ. 27. lib. 3. oſtendimus, occurratq; rectis D A, C B, productis in P, & O: & ſuper A K B, A B O P, intelligantur priſmata ſub altitudine coni & cylindri. [b] Quia ergo triangulum A K B, dimidium eſt parallelogrammi A B O P; erit quoque priſma baſis A K B, dimidium priſmatis, ſeu parallelepipedi baſis A B O P: cùm ſit priſma ad priſma, vt baſis ad baſim, quemadmodum ad propoſ. 7. huius lib. demonſtrauimus; Ac propterea priſma baſis A K B, maius erit, quàm dimidium ſegmenti cylindri, cuius baſis figura contenta linea recta A B, & peripheria A K B. Eadem ratione erũt priſmata, quorũ baſes reliqua triangula B L C, C M D, D N A, & altitudo eadem, quæ coni & cylindri, maiora, quàm dimidia ſegmentorum cylindri, quorum baſes circuli ſegmenta. Omnia igitur hæc priſmata ſimul maiora ſunt, quàm dimidia omnium ſegmentorum cylindri ſimul. Quòd ſi rurſus peripheriæ A K, K B, &c. ſecentur bifariam, & adiungantur rectæ lineæ, conſtituentur eodem modo priſmata eiuſdem altitudinis cum cono & cylindro, quæ maiora erunt ſimul, quàm dimidia omnium ſegmentorum cylindri ſimul,

[a] 32. vndec.

[b] 41. primi.

simul, quorum bases circuli segmenta, & sic deinceps. Quoniam verò si à cylindro, cuius basis circulus A B C D, auferatur plus q̃ dimidium, nempe parallelepipedum basis A B C D; & à reliquis segmentis plus q̃ dimidium, nimirum prismata basium A K B, B L C, &c. atq; in hunc modũ semper fiat detractio; [a] relinquitur tandem minor magnitudo, q̃ E, excessus cylindri supra triplum coni: Sint iam segmenta cylindri relicta basium A K, K B, B L, &c. (quæ quidem bases sunt circuli segmenta,) simul sumpta, minora q̃ E. Cùm igitur cylindrus æqualis ponatur triplo coni & magnitudini E, simul; Si ex cylindro auferantur segmenta dicta, & ex triplo coni vnà cum magnitudine E, ipsa magnitudo E, quæ maior est dictis cylindri segmentis, erit reliquum prisma basis multangulæ A K B L C M D N, eandem habens altitudinem cum cono & cylindro, maius q̃ reliquum triplum coni; ideoq; conus minor erit, q̃ tertia pars prismatis. Quare cùm dicti prismatis sit tertia pars pyramis, cuius eadem cum ipso basis & altitudo, ex coroll. propos. 7. huius lib. Erit conus minor dicta pyramide, totum parte. Quod est absurdum. Non igitur maior est cylindrus triplo coni. [a] 1. decimi.

Sit deinde cylindrus minor triplo coni, ac proinde conus maior, q̃ tertia pars cylindri. Sit ergo conus maior q̃ tertia pars cylindri, magnitudine E; ita vt conus æqualis sit tertiæ parti cylindri, & magnitudini E, simul. Inscribatur rursus in circulo quadratũ A B C D, & circa eundẽ quadratum F G H I; intelliganturq; super hæc quadrata, pyramides sub altitudine coni & cylindri. Quoniam igitur quadratũ A B C D, dimidium est quadrati F G H I, vt ad propos. 9. lib. 4. demonstrauimus, [b] estq; vt basis ad basin, ita pyramis ad pyramidem eiusdem altitudinis. Erit quoque pyramis super A B C D, dimidium pyramidis super basin F G H I; ac proinde pyramis super basin A B C D, maior erit dimidio coni, cuius basis circulus A B C D. Secẽtur peripheriæ A B, B C, C D, D A, bifariam in K, L, M, N, adiunganturq; rectæ A K, K B, B L, L C, C M, M D, D N, N A. Ducatur quoque per K, recta O P, tangens circulum in K, quæ parallela erit ipsi A B, vt ad propos. 27. lib. 3. demonstrauimus, occurratq; rectis D A, C B, productis in P, & O, & super A K B, A B O P, intelligantur pyramides sub altitudine coni & cylindri. [c] Quia ergo triangulum A K B, dimidium est parallelogrammi A B O P, erit quoq; pyramis super basin A K B, dimidium pyramidis super basin A B O P, [d] cùm pyramides habeãt proportionem eandem, quam bases; ac proinde pyramis super basin A K B, maior erit dimidio segmenti coni, cuius basis figura contenta linea recta A B, & peripheria A K B. Eadẽ ratione erunt pyramides, quarũ bases reliqua triangula B L C, C M D, D N A, & altitudo eadem cum cono & cylindro, maiores q̃ dimidia segmentorum coni, quorum bases circuli segmenta. Omnes igitur hæ pyramides simul maiores sunt, q̃ dimidia omnium segmẽtorum coni simul. Quòd si rursus peripheriæ A K, K B, B L, L C, C M, M D, D N, N A, secentur bifariam, & adiungantur rectæ lineæ in eodem circulo, constituentur eodem modo pyramides eiusdem altitudinis cum cono & cylindro, quæ maiores erunt simul, q̃ dimidia omnium segmentorum coni simul, quorum bases circuli segmẽta; & sic deinceps. Quoniam verò si à cono, cuius basis circulus A B C D, auferatur plus q̃ dimidium, nempe pyramis super basin A B C D, quam maiorem esse ostendimus, q̃ dimidium coni, cuius basis est circulus A B C D; & à reliquis segmẽtis plus q̃ dimidium, nimirum pyramides basium A K B, B L C, C M D, D N A; atq; in hunc modum semper fiat detractio; [e] relinquitur tandem minor magnitudo, q̃ E, excessus coni supra tertiam partem cylindri: Sint iam segmenta coni relicta basium A K, K B, B L, L C, C M, M D, D N, N A, (quæ quidem bases sunt circuli segmenta,) simul sumpta minora, q̃ E. Cùm igitur conus æqualis ponatur tertiæ parti cylindri, & magnitudini E, simul; si ex cono detrahantur segmẽta prædicta, & ex tertia parte cylindri, vnà cum magnitudine E, ipsa magnitudo E, quæ maior est, præfatis coni segmentis; erit reliqua pyramis, cuius basis polygonum A K B L C M D N, eandem habens altitudinem cum cono & cylindro, maior quàm tertia pars cylindri reliqua; ac proinde triplum dictæ pyramidis maius erit cylindro. Quocirca, cùm prisma eandem habens basim cum dicta pyramide, eandemq; altitudinem cum cono & cylindro, triplum sit ipsius pyramidis, vt suprà in corollario propositionis septimæ huius libri à nobis est demonstratum, erit huiusce modi prisma maius cylindro, pars toto. Quod est absurdum. Non ergo cylindrus minor est triplo coni: Sed neque maior triplo est ostensus. Igitur æqualis est triplo coni, propterea q̃ conus tertia pars est cylindri. Omnis igitur conus tertia pars est cylindri, eandem cum ipso basim habentis, & altitudinẽ æqualem. Quod erat demonstrandum. [b] 6. duodec. [c] 41. primi. [d] 6. duodec. [e] 1. decimi.

SCHOLIVM.

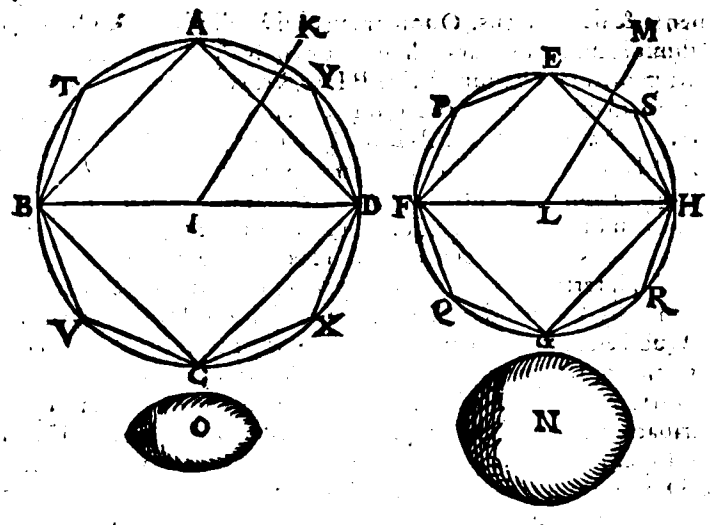
Qvamvis propositio hæc solùm intelligatur de conis & cylindris rectis, cùm hos duntaxat Euclides definierit lib. 11. omnibus tamen conis & cylindris tam rectis, quàm scalenis conuenit, vt perspicuum est eius demonstrationem diligenter intuenti. Itaque propositio vniuersè ita proponi poterit.

Omnis conus, siue rectus, siue scalenus, tertia pars est cuiuslibet cylindri, siue recti, siue scaleni, eandem cum ipso & basim, & altitudinem habentis, licèt non sit idem axis coni & cylindri.

THEOR. 11. PROPOS. 11.

Sub eadem altitudine existentes coni & cylindri, inter se sunt, vt bases.

Sint sub eadem altitudine coni & cylindri, quorũ bases circuli A B C D, E F G H, altitudines



verò æquales IK, LM. Dico vt est basis ad basim, ita esse conum ad conum, & cylindrum ad cylindrũ. Si enim hoc non credatur, sit vt basis ABCD, ad basim EFGH, ita conus ABCDK, ad aliquam magnitudinem, nempe ad N, quæ vel maior erit, vel minor cono EFGHM. Si enim esset æqualis, *a* haberet conus ABCDK, ad conum EFGHM, & ad N, proportionem eandem: ac propterea esset conus ad conum, vt basis ad basin: qđ non conceditur. Sit ergo primùm N, minor quàm conus EFGHM, magnitudine O, ita vt conus EFGHM, æqualis sit magnitudinibus N, & O, simul. Inscribatur in circulo EFGH, quadratum EFGH, diuidanturque peripheriæ EF, FG, GH, HE, bifariam in P, Q, R, S, & adiungantur rectæ EP, PF, FQ, &c. Quoniam igitur si ex cono EFGHM, detrahatur pyramis super basin EFGH, eiusdē altitudinis, & à reliquis segmẽtis auferantur pyramides eiusdem altitudinis basium EPF, FQG, &c. atq; in hunc modũ semper fiat detractio, semper plus dimidio subtrahitur, vt in posteriore parte præcedentis propositionis ostensum est; *b* relinquetur tandem minor magnitudo, quàm O, excessus coni EFGHM, super N. Sint ergo iam segmenta coni relicta basium EP, PF, FQ, &c. (quæ quidem bases sunt circuli segmenta) simul sumpta, minora quàm O. Cùm igitur conus EFGHM, ponatur æqualis magnitudinibus N, & O, simul; si ex cono detrahantur dicta coni segmenta, & ex N, & O, ipsa magnitudo O, quæ prædicti coni segmentis maior est, erit reliqua pyramis, cuius basis polygonum EPFQGRHS, eiusdem altitudinis cũ cono, maior quàm N, reliqua magnitudo. Inscribatur in circulo ABCD, polygonum ATBVCXDY, simile polygono EPFQGRHS, vt in propos. 2. huius lib. docuimus, ducanturque circulorum diametri BD, FH. Quoniam igitur, per coroll. propos. 2. huius libri, est vt circulus ABCD, ad circulum EFGH, ita polygonum ATBVCXDY, ad polygonum EPFQGRHS: Vt autem circulus ABCD, ad circulum EFGH, ita ponitur conus ABCDK, ad magnitudinem N, *c* & vt polygonum, ad polygonũ, ita est pyramis ad pyramidem eiusdem altitudinis cum conis; Erit quoque vt pyramis ATBVCXDYK, ad pyramidem EPFQGRHSM, vt conus ABCDK, ad N. Cùm igitur pyramis ATBVCXDYK, minor sit cono ABCDK, pars toto, *d* erit & pyramis EPFQGRHSM, minor quàm N: Ostensa autem fuit & maior. Quod est absurdum. Non igitur minor est magnitudo N, cono EFGHM.

a 7. *quinti.*

b 1. *decimi.*

c 6. *duodec.*

d 14. *quinti.*

Sit secundò N, maior cono EFGHM. Cùm igitur ponatur vt circulus ABCD, ad circulum EFGH, ita conus ABCDK, ad N; Erit & conuertendo vt circulus EFGH, ad circulũ ABCD, ita N, ad conum ABCDK. Ponatur vt N, ad conum ABCDK, ita conus EFGHM, ad magnitudinẽ O. Et quia N, maior ponitur cono EFGHM; *e* maior quoq; erit conus ABCDK, quàm O. Quare erit vt circulus EFGH, ad circulum ABCD, ita conus EFGHM, ad magnitudinem O, quæ minor est cono ABCDK. Quod est absurdum. Ostensum enim est iam, non posse esse conum ad magnitudinem minorem alio cono, vt est basis illius coni ad basin huius coni. Non ergo maior est N, magnitudo cono EFGHM. Sed neq; minor est ostensa; Æqualis igitur est. Quapropter cùm ponatur, vt basis ABCD, ad basin EFGH, ita conus ABCDK, ad N; *f* Sit autem, vt conus ABCDK, ad N, ita idem conus ABCDK, ad conum EFGHM; erit quoque vt basis ABCD, ad basin EFGH, ita conus ABCDK, ad conum EFGHM.

e 14. *quinti.*

f 7. *quinti.*

g 15. *quinti.*

g Quoniam autem, vt conus ABCDK, ad conum EFGHM, ita est cylindrus ABCDK, (qui triplus est coni ABCDK;) ad cylindrum EFGHM; (qui triplus est coni EFGHM.) Erit quoque vt basis ABCD, ad basin EFGH, ita cylindrus ABCDK, ad cylindrum EFGHM. Quod tamen eodem modo confirmari poterit, quo vsi sumus in conis, si loco conorum, & pyramidum, concipiantur cylindri, & prismata. Sub eadem ergo altitudine existentes coni & cylindri, inter se sunt, vt bases. Quod erat demonstrandum.

SCHOLIVM.

Perspicuum quoq; est, hanc propositionem, quam Euclides de conis, & cylindris solis rectis proposuit, ob rationem superius traditam, extendi etiam posse ad conos, & cylindros scalenos, vt eius demonstratio manifestè indicat, ita vt propositio vniuersè proponatur in hunc modum.

Sub eadem altitudine existentes coni & cylindri, siue ambo recti sint, siue scaleni, siue vnus rectus, & alter scalenus; inter se proportionem habent, quam bases.

Conuertetur hæc propositio quoq; hoc modo.

Si

Si coni & cylindri inter ſe ſint, vt baſes; ipſi ſub eadem altitudine erunt.

QVOD quidem demonſtrabis eo modo, quo conuerſum propoſ. 32. lib. 11. oſtendimus.

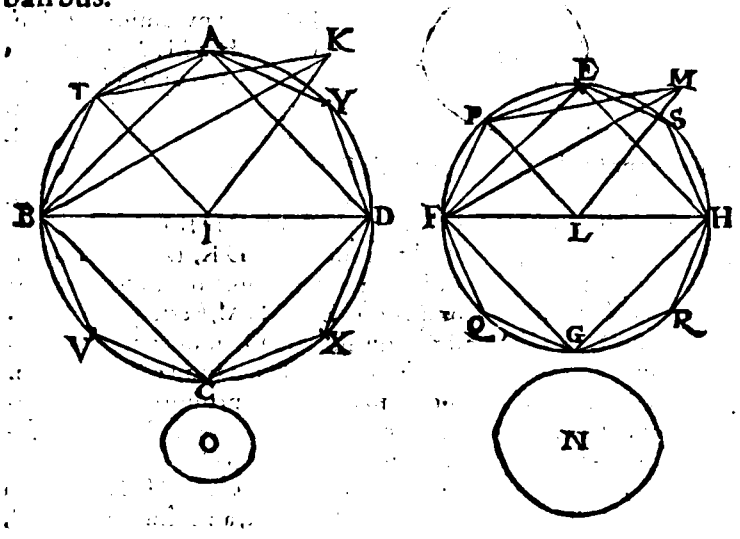
COROLLARIVM.

HINC fit, conos & cylindros eiuſdem altitudinis ſuper eandem, vel æquales baſes conſtitutos, ſiue ambo ſint recti, vel ſcaleni, ſiue vnus rectus, & alter ſcalenus, eſſe inter ſe æquales; propterea quòd eandem proportionem habent, quam baſes, quæ æquales ponuntur, vel certè vna & eadem.

ITEM ſequitur, conos & cylindros æquales ſuper eandem, vel æquales baſes, in eadem eſſe altitudine: Et conos & cylindros æquales in eadem altitudine, ſuper æquales baſes eſſe, ſi non habuerint eandem. Quod oſtendemus non aliter, ac conuerſum propoſ. 31. lib. 11. demonſtratum fuit.

THEOR. 12. PROPOS. 12. 10.

SIMILES coni, & cylindri, in triplicata ratione ſunt diametrorum, quæ in baſibus.

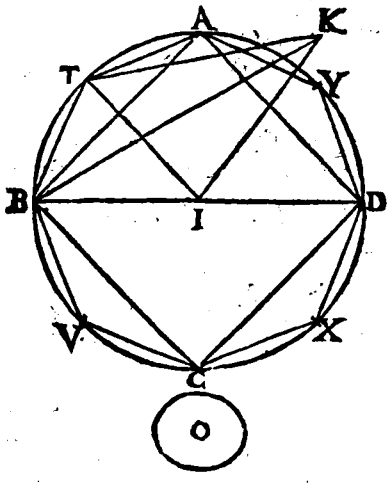


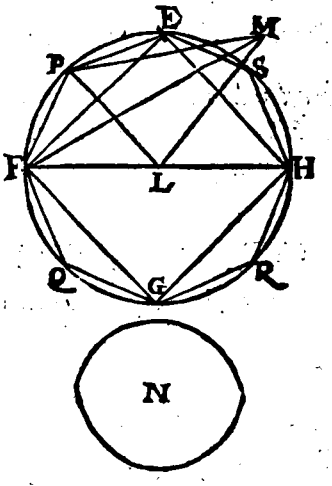
SINT ſimiles coni & cylindri, quorum baſes circuli ABCD, EFGH, axes verò IK, LM, & diametri baſium BD, FH. Dico conum ad conum, & cylindrum ad cylindrum, habere proportionem triplicatam diametri ad diametrum. Si enim hoc nõ credatur, habeat conus ABCDK, ad aliquam magnitudinem N, proportionem triplicatam diametri BD, ad diametrum FH. Eritque N, vel minor, vel maior cono EFGHM. Si enim eſſet æqualis, [a] haberet conus ABCDK, ad conum EFGHM, & ad N, proportionẽ eandem; Ac proinde proportio coni ABCDK, ad conum EFGHM, eſſet quoq; triplicata proportionis diametri BD, ad diametrum FH; quod nõ conceditur. Sit ergo primùm N, minor, q̃ conus EFGHM, magnitudine O; Fiatque eadem prorſus conſtructio figuræ, quæ in præcedenti propoſitione, ita vt rurſus pyramis EPFQGRHSM, maior oſtendatur, q̃ N. Ducantur deinde rectæ KB, KT, MF, MP, vt habeantur duo triangula BKT, FMP, pyramidum ATBVCXDYK, EPFQGRHSM; & connectantur rectæ TI, PL. Quoniam igitur coni ABCDK, EFGHM, ſimiles ponuntur, erit, ex 24. defin. lib. 11. vt diameter BD, ad diametrum FH, [b] ac propterea vt ſemidiameter BI, ad ſemidiametrum FL, ita axis IK, ad axem LM; Ac permutãdo vt BI, ad IK, ita FL, ad LM. Cùm igitur anguli BIK, FLM, recti ſint, ex defin. 3. lib. 11. quòd coni recti ponantur, propterea q; axes recti ad eorum baſes; [c] Erunt triangula BIK, FLM, æquiangula; [d] Ac propterea vt KB, ad BI, ita erit MF, ad FL. Vt autem BI, ad BT, ita FL, ad FP, ob ſimilitudinem triangulorum BIT, FLP. (Cùm enim anguli BIT, FLP, inſiſtentes ſimilibus arcubus BT, FP, ſint æquales, vt in ſcholio propoſ. 22. lib. 3. oſtenſum eſt; ſitq; vt BI, ad IT, ita FL, ad LP, ob æqualitatem tam linearum BI, IT, q̃ FL, LP; [e] erunt triangula BIT, FLP, ſimilia.) Igitur ex æquo, vt KB, ad BT, ita MF, ad FP. Rurſus quia latera KI, IB, trianguli KIB, æqualia ſunt lateribus KI, IT, trianguli KIT, & anguli dictis lateribus comprehenſi, recti, ex defin. 3. lib. 11. cùm axis IK, rectus ponatur ad circulum ABCD, [f] erunt baſes KB, KT, æquales. Eõdem modo, æquales erunt rectæ MF, MP; Ac propterea rectæ KB, KT, rectis MF, MP, proportionales erunt, cùm vtrobique ſit proportio æqualitatis. [g] Quoniam verò vt KB, ad BT, ita KT, ad eandem BT; Item vt MF, ad FP, ita MP, ad eandem FP: Erat autem vt KB, ad BT, ita MF, ad FP; Erit quoq; vt KT, ad BT, ita MP, ad FP; Et conuertẽdo vt BT, ad TK, ita FP, ad PM. Quare cùm ſit vt TK, ad KB, ita PN, ad MF; & vt KB, ad BT, ita MF, ad FP; Et vt BT, ad TK, ita FP, ad PM, vt iuti oſtenſum eſt; habebunt triangula BKT, FMP, latera proportionalia, [h] ideoq; æquiangula erunt; Ac proinde ſimilia, ex definitione. Non aliter oſtendẽtur reliqua triangula ambientia pyramides ATBVCXDYK, EPFQGRHSM, inter ſe ſimilia eſſe: Quæ cùm ſint multitudine æqualia, erunt dictæ pyramides ſimiles, ex defin. 9. lib. 11. Quocirca in triplicata proportione erunt homologorum laterum BT, FP, ex coroll. propoſ. 8. huius lib. Vt autem BT, ad FP, ita eſt BI, ad FL, ob ſimilitudinem triangulorum BIT, FLP; Et vt BI, ad FL, ita BD, ad FH. Igitur pyramis ad py-

[a] 7. quinti.
[b] 15. quinti.
[c] 6. ſexti.
[d] 4. ſexti.
[e] 6. ſexti.
[f] 4. primi.
[g] 7. quinti.
[h] 6. ſexti.
[i] 15. quinti.

ramidem habebit quoq; proportionẽ triplicatam diametrorũ B D, F H: Ponebatur autem & proportio coni A B C D K, ad N, earundem diametrorũ triplicata. Igitur erit vt pyramis A T B V C X D Y K, ad pyramidem E P F Q G R H S M, ita conus A B C D K, ad N. Quare cũ pyramis A T B V C X D Y K, minor sit cono A B C D K, pars toto, [a] erit & pyramis E P F Q G R H S M, minor q̃ N. Ostensa aũt est & maior. Quod est absurdũ. Non igitur minor est magnitudo N, cono E F G H M.

[a] 14. quinti.





Sit deinde N, maior cono E F G H M. Cùm ergo ponatur conus A B C D K, ad N, habere proportionẽ triplicatam diametri B D, ad diametrum F H; Habeat autẽ & pyramis A T B V C X D Y K, ad pyramidem E P F Q G R H S M, triplicatam proportionem earundẽ diametrorum vt proximè ostẽdimus: Erit vt conus A B C D K, ad N, ita pyramis A T B V C X D Y K, ad pyramidem E P F Q G R H S M; & conuertendo vt N, ad conũ A B C D K, ita pyramis E P F Q G R H S M, ad pyramidem A T B V C X D Y K. Quare cùm ex coroll. propos. 8. huius lib. pyramis E P F Q G R H S M, ad pyramidem A T B V C X D Y K, habeat proportionem triplicatam homologorum laterum P F, ad T B, hoc est, diametri F H, ad diametrum B D; habebit quoq; N, ad conum A B C D K, proportionem triplicatam diametri F H, ad diametrũ B D. Ponatur vt N, ad conum A B C D K, ita conus E F G H M, ad magnitudinem O. Habebit igitur & conus E F G H M, ad O, proportionem triplicatam diametri F H, ad diametrum B D. Et quia N, maior ponitur q̃ conus E F G H M, [b] erit quoq; conus A B C D K, maior q̃ O. Quapropter conus E F G H M, ad magnitudinem O, minorem cono A B C D K, proportionem habet triplicatam diametri F H, ad diametrum B D. Quod est absurdum. Ostensum enim est, nõ posse conum ad magnitudinẽ alio cono minorem, proportionem habere triplicatam eius, quam habent basium diametri. Non ergo maior est magnitudo N, cono E F G H M: Sed neq; minor est ostensa. Æqualis igitur est; [c] ac proinde conus A B C D K, eandem habet proportionem ad conum E F G H M, & ad N. Cùm ergo ponatur conus A B C D K, ad N, in triplicata proportione diametrorũ B D, & F H; erit quoq; conus A B C D K, ad conũ E F G H M, in earundem diametrorum proportione triplicata.

[b] 14. quinti.

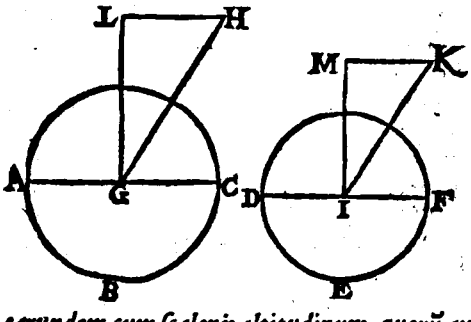
[c] 7. quinti.

[d] Quoniam verò, quam proportionẽ habent coni, eandem quoque obtinent cylindri, eorum tripli; habebit quoque cylindrus ad cylindrum proportionem diametrorum in basibus triplicatam. Quod tamen eodem modo demonstrabitur, quo vsi sumus in conis, si modò loco conorum, & pyramidum assumantur cylindri, atque prismata. Similes igitur coni, & cylindri in triplicata ratione sunt diametrorum, quæ in basibus. Quod ostendendum erat.

[d] 15. quinti.

SCHOLIVM.

Quod si maior conus, & cylindrus cum minore conferatur, perspicuum est, in secunda parte huius propositionis, Euclidem assumere, demonstratum esse propos. 8. huius lib. minorẽ pyramidem ad maiorem habere proportionem laterum homologorum triplicatam. Id quod ad defin. 10. lib. 5. monuimus contra Federicum Commandinum, & alios, qui putant referri semper debere maiorem quantitatem ad minorem, vt habeatur proportio duplicata, triplicata, &c.



Hæc porrò propositio, quamuis etiam extendatur ad similes conos & cylindros scalenos: tamen hic demonstratur in solis rectis conis & cylindris similibus, cùm in demonstratione assumãtur axes recti ad bases. Quocirca eam hac ratione ostendemus in similibus conis & cylindris scalenis. Sint similes coni, & cylindri scaleni, quorũ bases circuli A B C, D E F, axes verò G H, I K. Dico tam conum ad conum, q̃ cylindrũ ad cylindrum habere proportionem diametri ad diametrum triplicatam. Intelligantur enim super easdem bases duo coni, & cylindri recti earundem cum scalenis altitudinum, quorũ axes G L, I M. Ducanturq; per rectas G H, G L; Item per I K, I M, plana secantia bases lineis rectis A C, D F, quæ diametri basium erunt. Quoniam igitur axes G L, I M, recti sunt basibus A B C, D E F; [a] erunt & plana per G H, G L; & per I K, I M, ad easdem recta. [b] Ac propterea perpendiculares lineæ ex H, K, ad bases demissæ cadent in A C, D F, cõmunes sectiones; & proinde erunt anguli

[a] 18. vnde.

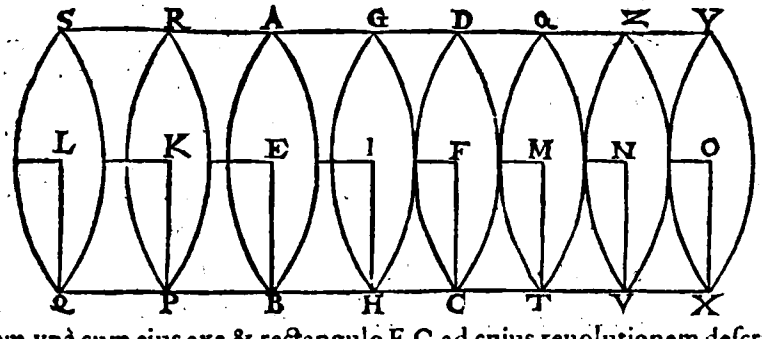
[b] 38. vnde.

guli C G H, F I K, anguli inclinationum, qui æquales inter ſe erunt, cùm coni & cylindri ſcaleni ſimiles ponantur: Sunt autem & anguli C G L, F I M, æquales, nempe recti, ex defin. 3. libri 11. [a] *Reliqui igitur H G L, K I M, æquales quoq; erunt. Quoniam verò coni A B C H, A B C L, ponuntur eſſe eiuſdem altitudinis: erit recta H L, per axium vertices ducta ipſi A C, parallela,* [b] *ideoq; angulus L, rectus. Eodemq; argumẽto rectus erit angulus M, cùm & anguli C G L, F I M, recti ſint. Non aliter & reliqui anguli H, K, æquales erunt, cùm ſint æquales eorũ alterni anguli C G H, F I K. Triangula igitur G H L, I K M, æquiangula ſunt;* [c] *atq; idcirco erit vt G H, ad G L, ita I K, ad I M; & permutando, vt G H, ad I K, ita G L, ad I M. Vt autem axis G H, ad axem I K, ita eſt A C, diameter ad D F, diametrum; & coni & cylindri ſcaleni ponantur ſimiles. Igitur & G L, axis ad I M, axem erit, vt diameter A C, ad D F, diametrum; Et proinde coni & cylindri recti A B C L, D E F M, ſimiles erunt, ex definitione.* [d] *Quare proportionem habebunt diametrorum triplicatam. Quia verò tam conus & cylindrus A B C L, cono & cylindro A B C H, (cùm eandem habeant baſim, & altitudinem,) quàm conus & cylindrus D E F M, cono & cylindro D E F K, (ob eandem rationẽ,) eſt æqualis, vt conſtat ex corollario propoſ. 11. huius lib.* [e] *Erit vt conus & cylindrus A B C L, ad conum & cylindrum D E F M, ita conus & cylindrus A B C H, ad conum & cylindrum D E F K; ideoq; proportio coni & cylindri A B C H, ad conum & cylindrum D E F K, triplicata quoq; erit diametri A C, ad diametrum D F. Quod eſt propoſitum.*

a 32. primi.
b 29. primi
c 4. ſexti.
d 12. duodecimi.
e 7. quinti.

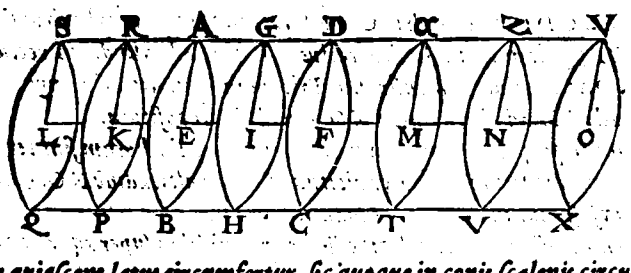
THEOR. 13. PROPOS. 13. 11.

Si cylindrus plano ſecetur aduerſis planis parallelo: Erit vt cylindrus ad cylindrum, ita axis ad axem.



Secetur cylindrus A B C D, plano G H, parallelo aduerſis planis A B, C D, quod quidem ſecet axem E F, in I. Dico vt eſt cylindrus A B H G, ad cylindrũ G H C D, ita eſſe axem E I, ad axem I F. Intelligatur enim cylindrus A B C D, in vtramque partem, vnà cum eius axe & rectangulo E C, ad cuius reuolutionem deſcriptus eſt cylindrus, protractus quantumlibet; Sumanturque in axe producto quotcunque rectæ E K, K L, æquales ipſi E I; Item quotcunque rectæ F M, M N, N O, æquales ipſi F I. Deinde per puncta I, K, L, M, N, O, ducantur rectæ I H, K P, L Q, M T, N V, O X, parallelæ, & æquales rectis E B, F C; quæ quidem ad reuolutionem rectanguli E C, deſcribẽt circulos G H, P R, Q S, T a, V Z, X Y, parallelos & æquales circulis A B, C D, ob æqualitatem ſemidiametrorum, quæ ſemper inter ſe æquidiſtantes circunferuntur. Ac propterea cylindri erunt S P, P A, A H, H D, D T, T Z, Z X, ex definitione, componentes totũ cylindrum S Q X Y. Quoniam verò tam cylindri S P, P A, A H, ſuper baſes æquales Q S, P R, B A, & ſub altitudinibus æqualibus K L, E K, I E, æquales ſunt, quàm cylindri X Z, Z T, T D, D H, ſuper æquales baſes X Y, V Z, T a, C D, & ſub altitudinibus æqualibus N O, M N, F M, I F, ex corollario propoſitionis 11. huius lib. Erit tam multiplex cylindrus S H, cylindri A H, quàm multiplex eſt axis I L, ipſius axis I E; Item tam multiplex cylindrus X G, cylindri C G, quàm multiplex eſt axis I O, ipſius axis I F. Quoniam autem ſi axis I L, (multiplex I E, primæ magnitudinis) æqualis eſt axi I O, (multiplici axis I F, ſecundæ magnitudinis) æqualis quoq; eſt cylindrus S H, (multiplex cylindri A H, tertiæ magnitudinis) cylindro X G, (multiplici cylindri C G, quartę magnitudinis) vt ex propoſitione 11. huius libri liquet. Si verò axis maior eſt axe, cylindrus quoque cylindro maior eſt; Et ſi minor, minor, in quacunque hoc contingat multiplicatione: Erit, per definitionem 6. lib. 5. ita axis I E, primus magnitudo ad axem I F, ſecundam magnitudinem, vt cylindrus A H, tertia magnitudo ad cylindrum C G, quartam magnitudinem. Si cylindrus igitur plano ſecetur aduerſis planis parallelo, erit vt cylindrus ad cylindrum, ita axis ad axem. Quod erat demonſtrandum.

SCHOLIVM.

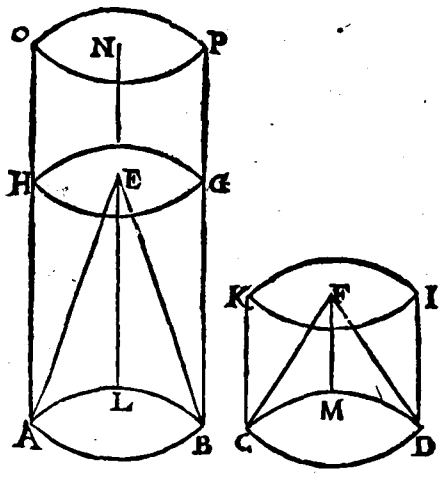


Et si hanc propoſitionem Euclides de ſolo cylindro recto demonſtrat; tamẽ eius demonſtrationem cylindro ſcaleno facilè accommodabis, ſi modò adhibeas deſcriptionem cylindri ſcaleni. ſicut in demonſtratione Euclidis aſſumpta fuit cylindri recti deſcriptio; ita vt quemad modum in conis rectis rectangulum circa quieſcens latus circumfertur, ſic quoque in conis ſcalenis circumferantur ſemidiametri L S, K R, E A, &c.

ſemper æquidiſtantes circa centra L,K,E,& c. vnà cum recta SY, ſemidiametros coniungente. Hæc enim ratione ſemper cylindri deſcribentur, vt conſtat ex ijs, quæ ſcribit Serenus in lib. 1. de Sectione cylindri.

11. # THEOR. 14. PROPOS. 14.

SVPER æqualib⁹ baſibus exiſtentes coni,& cylindri; inter ſe ſunt, vt altitudines.



SINT ſuper baſes æquales AB, CD, duo coni ABE, CDF, & duo cylindri ABGH, CDIK, quorum axes, ſeu altitudines (Nam in conis & cylindris rectis, axes ipſi ſunt altitudines) LE, MF. Dico eſſe conum ABE, ad conum CDF, & cylindrum ABGH, ad cylindrum CDIK, vt eſt altitudo LE, ad altitudinem MF. Extendatur enim cylindrus ABGH, ad partes GH, vnà cũ eius axe LE, & rectangulo AG; abſcindaturque axis EN, æqualis axi MF, & circa centrum N, intelligatur circulus OP, æqualis & parallelus circulo GH, vt fiat cylindrus GHOP, eiuſdem altitudinis cum cylindro CDIK. Quoniam igitur cylindri HP, CI, cùm habeãt æquales baſes & altitudines, æquales ſunt, ex coroll. propoſ. 11. huius lib. [a] cylindrus AG, ad ipſos eandem habebit proportionem: [b] Eſt autem cylindrus AG, ad cylindrum HP, vt axis, ſeu altitudo LE, ad axem, ſeu altitudinem EN, hoc eſt, ad altitudinẽ MF, ſibi æqualem. Igitur & cylindrus AG, ad cylindrum CI, erit quoque, vt altitudo LE, ad altitudinem MF.

a 7. quinti.
b 13. duodec.

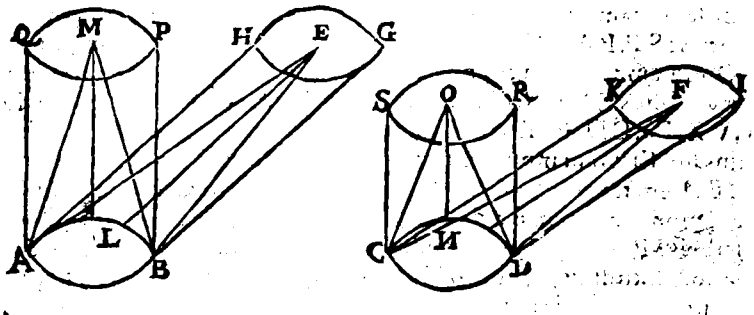
[c] Quia verò coni ABE, CDF, ſunt tertiæ partes cylindrorum AG, CI; [d] ipſi habebunt eandem cum cylindris proportionem; Ac proinde erit quoque conus ABE, ad conum CDF, vt altitudo LE, ad altitudinem MF. Super æqualibus igitur baſibus exiſtentes coni & cylindri, inter ſe ſunt, vt altitudines. Quod oſtendendum erat.

c 10. duodec.
d 15. quinti.

SCHOLIVM.

Hoc idem conuenire conis ſcalenis, hoc modo demonſtrabimus. Sint ſuper baſes æquales AB, CD, coni ABE, CDF, & cylindri ABGH, CDIK, ſcaleni, quorum altitudines LM, NO. Dico conum ABE, ad conum CDF, & cylindrum ABGH, ad cylindrum CDIK, eſſe, vt eſt altitudo LM, ad altitudinem NO. Super baſin enim AB, conſtruatur cylindrus rectus ABPQ, ſub altitudine LM; Item ſuper baſin CD, cylindrus CDRS, ſub altitudine NO.

a 14. duodecimi.



[a] Quoniam igitur eſt cylindrus rectus ABPQ, ad cylindrum rectum CDRS, vt altitudo LM, ad altitudinem NO: Eſt autem cylindro ABPQ, cylindrus ABGH: Item cylindro CDRS, cylindrus CDIK, æqualis, ex corollario propoſ. 11. huius lib. Erit quoque cylindrus ABGH, ad cylindrum CDIK, vt altitudo LM, ad altitudinem NO. Quod eſt propoſitum.

b 10. duodecimi.
c 15. quinti.

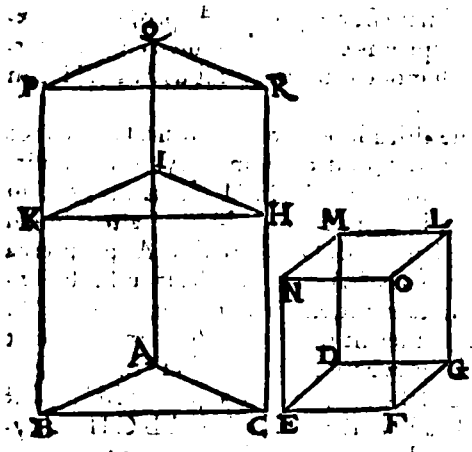
QVONIAM autem coni, [b] cùm ſint tertiæ partes cylindrorum, [c] eandem habẽt proportionem, quam cylindri; Erit quoque conus ABE, ad conum CDF, vt altitudo LM, ad altitudinem NO. Quod tamen eodem argumento, quo vſi ſumus in cylindris, confirmari poteſt, vt perſpicuum eſt, ſi ſuper baſes AB, CD, ſint coni recti ABM, CDO, earundem altitudinum cum cylindris ABPQ, CDRS.

IDEM concludetur, quamuis vnus conorum, & cylindrorum, nempe conus ABE, & cylindrus ABGH, fuerit ſcalenus, alter verò, nimirum conus CDO, & cylindrus CDRS, rectus. Nam cùm cylindrus ſcalenus ABGH, æqualis ſit cylindro recto ABPQ; ſit autem cylindrus rectus ABPQ, ad cylindrum rectum CDRS, vt altitudo LM, ad altitudinem NO, vt Euclides demonſtrauit: Erit quoque cylindrus ſcalenus ABGK, ad cylindrum rectum CDRS, vt altitudo LM, ad altitudinem NO. Quod eſt propoſitum.

d 15. quinti
e 10. duodecimi.

[d] QVONIAM verò coni eandem habent proportionem, quam cylindri, [e] cùm illi horum ſint tertiæ partes; Erit etiam conus ſcalenus ABE, ad conum rectum CDO, vt altitudo LM, ad altitudinẽ NO. Quod nihilominus oſtendetur eadem ratione, qua vſi ſumus in cylindris, vt manifeſtum eſt.

EADEM quoque hæc propoſitio conuenit priſmatis, parallelepipedis, & pyramidibus ſuper æquales baſes conſtitutis. Sint enim ſuper baſes æquales ABC, DEFG, priſmata ABCHIK, DEFGLMNO, & pyramides



pyramides ſub eiſdem altitudinibus. Dico eſſe priſma ad priſma, & pyramidem ad pyramidem, vt eſt altitudo ad altitudinem. Sint namque inſiſtentes lineæ A I, C H, B K, priſmatis A B C H I K, ad baſin A B C, perpendiculares, ita vt B K, ſit altitudo priſmatis A B C H I K; Productis autem rectis A I, C H, B K, ſumantur I Q, H R, K P, æquales altitudini priſmatis E L; & ductis rectis P Q, Q R, R P, compleatur priſma H I K P Q R, eiuſdem altitudinis cum priſmate E L. Erunt q; priſmata H I K P Q R, E L, cùm habeant & baſes, & altitudines æquales, inter ſe æqualia, ex coroll. 2. propoſ. 7. huius lib. [a] *Ac propterea priſma A B C H I K, ad priſma H I K P Q R, eandem habebit proportionem. Quæ verò ex ſcholio propoſitionis 25. lib. 11. priſma A B C H I K, ad priſma H I K P Q R, eſt vt planum B I, ad planum K Q;* [b] *Et vt planum B I, ad planum K Q, ita eſt recta B K, ad K P: erit priſma A B C H I K, ad priſma H I K P Q R, hoc eſt, ad priſma E L, vt B K, altitudo priſmatis A B C H I K, ad K P, altitudinem priſmatis H I K P Q R, hoc eſt, priſmatis E L. Quod eſt propoſitum.*

[a] 2 7. quinti.

[b] 1. lexti.

Quod ſi inſiſtentes lineæ A I, C H, B K, non ſint perpendiculares ad baſin A B C, conſtituendum erit ſuper baſin A B C, aliud priſma, cuius inſiſtentes ſint perpendiculares ad baſin, & æquales altitudini priſmatis A B C H I K. Nam cùm ex 2. coroll. propoſ. 7. huius lib. hæc duo priſmata eandem habentia altitudinem, & baſin, ſint æqualia, ſitq; priſma conſtitutum ad priſma E L, vt illius altitudo ad huius altitudinem: erit & priſma A B C H I K, ad priſma E L, vt altitudo illius, ad altitudinem huius.

[c] *Quoniam verò pyramides eandem habent proportionem cum priſmatis,* [d] *quòd illæ ſint horum tertiæ partes: Perſpicuum eſt, ita quoque eſſe pyramidem ad pyramidem, vt eſt altitudo ad altitudinem.*

[c] 15. quin.

[d] 7. duode.

Eadem prorſus eſt ratio habenda de parallelepipedis, cùm parallelepipeda comprehendantur etiam nomine priſmatum, vt dictum eſt; atq; ob id eadem illis demonſtratio poſſit accommodari.

Hæc omnia eodem ferè modo demonſtrabuntur de conis, & cylindris, nec non de pyramidibus, & priſmatis eandem habentibus baſem.

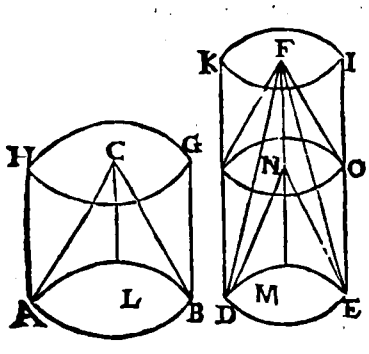
Omnia quoq; hæc facilè conuerti poſſunt, hoc modo.

Coni & cylindri tam recti, quàm ſcaleni; Item priſmata, parallelepipeda, & pyramides, proportionem habentes eandem, quam altitudines, baſes habebunt æquales.

Nam alioquin pars æqualis foret toti, vt in converſo propoſ. 31. lib. 11. oſtenſum eſt.

THEOR. 15. PROPOS. 15. 12.

Aequalium conorum, & cylindrorum reciprocantur baſes & altitudines: & quorum conorum, & cylindrorum reciprocantur baſes & altitudines, illi ſunt æquales.



Sint æquales coni A B C, D E F, & æquales cylindri A B G H, D E I K, quorum baſes A B, D E; axes, altitudinesúe L C, M F. Dico baſes & altitudines eſſe reciprocas, hoc eſt, eſſe vt A B, ad D E, ita M F, ad L C. In cylindris quidem ſic propoſitum oſtendetur. Si altitudines L C, M F, ſint æquales, cùm cylindri ponantur quoque æquales; erunt & baſes æquales, ex coroll. propoſ. 11. huius lib. Quare erit vt baſis A B, ad baſin æqualem D E, ita altitudo M F, ad altitudinem æqualem L C. Ac proinde baſes atque altitudines ſunt reciprocæ.

Quod ſi altitudines L C, M F, inæquales fuerint, ſit M F, maior, ex qua abſcindatur M N, ipſi L C, æqualis; & per N, ducatur planum O N, baſi D E, parallelum, vt in ſcholio propoſ. 15. lib. 11. docuimus, vt fiant duo cylindri D O, O K. Quoniam igitur æquales ponũtur cylindri A B G H, D E I K, [a] erit vt cylindrus A B G H, ad cylindrum D O, ita cylindrus D E I K, ad eundem cylindrum D O. [b] Eſt autem vt cylindrus A B G H, ad cylindrum D O, ita baſis A B, ad baſin D E, cùm æquales ſint altitudines: [c] Item vt cylindrus D E I K, ad cylindrum D O, ita altitudo M F, ad altitudinem M N, cùm baſes ſint æquales, immo vna & eadem D E. Igitur erit quoque vt baſis A B, ad baſin D E, ita altitudo M F, ad altitudinem M N, hoc eſt, ad huic æqualem L C; Ac propterea reciprocæ ſunt baſes & altitudines.

[a] 7. quinti.

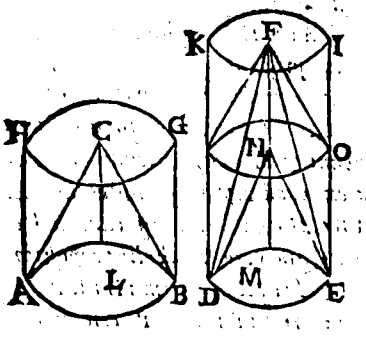
[b] 11. duodec.

[c] 14. duode.

In conis verò ita concludemus propoſitum. Si coni A B C, D E F, ſint æquales; erunt & cylindri A B G H, D E I K, æquales, [d] cùm coni ſint cylindrorum tertiæ partes. Quare vt oſtenſum

[d] 10. duod.

est, ex æqualitate cylindrorum sequetur, bases & altitudines esse reciprocas: Ac propterea ex æqualitate conorum etiam sequetur, bases & altitudines reciprocas esse. Quod tamen eodem prorsus modo demonstrari potest, quo vsi sumus in cylindris, si modò sub altitudinibus MN, NF, constituantur duo coni, vt in figura.



Sed iam bases atque altitudines reciprocentur. Dico conos & cylindros esse æquales. Quod quidem in cylindris confirmabitur hac ratione. Si altitudines LC, MF, sint æquales, cùm sit vt basis AB, ad basin DE, ita altitudo MF, ad altitudinem æqualem LC, erunt & bases AB, DE, æquales: Ac propterea cylindri super æquales bases AB, DE, & sub altitudinibus æqualibus LC, MF, æquales erunt, ex coroll. propos. 11. huius lib.

a 11. duodec.

Quod si altitudines fuerint inæquales, fiat constructio vt prius. Quia igitur ponitur vt basis AB, ad basin DE, ita altitudo MF, ad altitudinem LC, hoc est, ad huic æqualem MN, a Est autem vt basis AB, ad basin DE, ita cylindrus ABGH, ad cylindrum DO, cùm altitudines sint æquales: b Item vt altitudo MF, ad altitudinem MN, ita cylindrus DEIK, ad cylindrum DO, cùm bases sint æquales; erit vt cylindrus ABGH, ad cylindrum DO, ita cylindrus DEIK, ad eundem cylindrum DO; c Ideoque cylindrus ABGH, cylindro DEIK, æqualis erit.

b 14. duodec.

c 9. quinti.

At verò in conis hæc erit demonstratio. Si conorum ABC, DEF, bases & altitudines reciprocentur, reciprocabuntur quoque bases, & altitudines cylindrorum ABGH, DEIK, cùm eædem sint bases, altitudinesq; conorum, & cylindrorum. Quam ob rem, vt ostensum fuit, cylindri, ideoq; coni, eorum tertiæ partes, æquales erunt. Demonstrari tamen potest eodem modo, conos esse æquales, quo ostendimus cylindros æquales esse. Æqualium igitur conorum & cylindrorum reciprocantur bases & altitudines, &c. Quod erat demonstrandum.

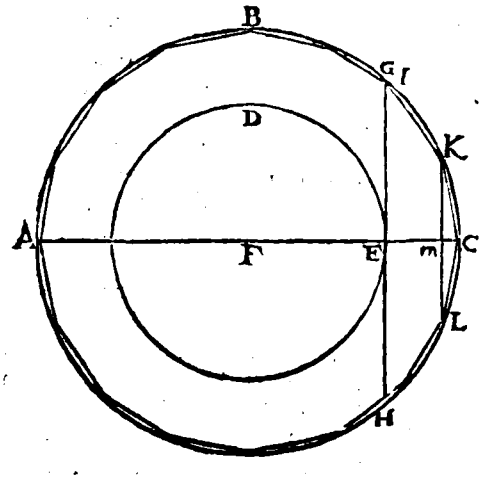
SCHOLIVM.

Non difficile erit idem ostendere de conis, & cylindris scalenis. Si enim æquales sint coni & cylindri scaleni, erunt quoq; recti, eadem cum illis bases & altitudines habentes, æquales, ex coroll. propos. 11. huius libri. Quare, vt ostensum est, bases & altitudines reciprocabuntur. Quòd si bases, & altitudines conorum & cylindrorum scalenorum reciprocentur reciprocabuntur quoq; bases & altitudines conorum & cylindrorum rectorum, si eadem sint bases, & altitudines rectorum & scalenorum. Quare, vt demonstratum est, coni & cylindri recti, æquales erunt. Ac propterea coni & cylindri scaleni, cùm sint rectis æquales, ex coroll. propos. 11. huius libri, inter se quoq; erunt æquales.

Idem facilè concludetur, licet vnus conorum & cylindrorũ sit rectus, & alter scalenus, vt perspicuum est ex ijs, quæ in scholio propos. 14. huius lib. docuimus.

13. PROBL. I. PROPOS. 16.

DVOBVS circulis, circa idem centrum existentibus, in maiori circulo polygonum æquilaterum, & parium laterũ inscribere, quod nõ tangat minorẽ circulum.



Sint duo circuli ABC, DE, circa idem centrũ F, oporteatque in maiori ABC, inscribere polygonum æquilaterum, cuius latera numero pari continentur, non tangens minorem DE. Extendatur per centrum F, recta AC, secans circulum DE, in E, puncto, & p E, ducatur GH, ad AC, perpendicularis, quæ tanget circulum DE, in E, ex corollario propos. 16. lib. 3. Quoniam igitur arcus AGC, maior est arcu GC, si ex AGC, auferatur dimidiũ AB, & ex residuo BC, dimidium BI, & ex residuo IC, dimidium IK, & sic deinceps; d relinquetur tandem minor arcus, quàm CG. Sit igitur iam arcus CK, arcu CG, minor, & subtendatur recta CK. Dico rectam CK, esse vnum latus polygoni inscribendi. Si enim arcus BI, diuidatur in partes numero & magnitudine æquales partibus arcus CI; & quadrans AB, in totidem partes æquales diuidatur, in quot diuisus est quadrans BC; nec non semicirculus AHC, in totidem partes, quot continet semicirculus ABC; deinde omnibus arcubus rectæ lineæ subtendantur, e quæ æquales quidem erunt ipsi rectæ CK, eò quòd arcus arcui CK, æquales subtendant: Descriptum erit polygonum in circulo ABC, & æquilaterum, & parium laterum. Quod quidem non tangere circulum minorem DE, ita ostendetur. Ex K, ad AC, demittatur perpendicularis KL, secans ipsam AC, in M. Quoniã igitur anguli GEM, KME, recti sunt, f erunt

d 1. decimi.

e 29. tertij.

f 28. primi.

rectæ

rectæ GH,KL, parallelę. Quare cùm recta GH, tangat circulum DE, in ſolo puncto E; recta KL, erit tota extra dictum circulum, nec vnquam ipſum continget, quòd nunquam cum recta GH, conueniat. Multò igitur minus recta CK, quæ longius à circulo DE, abeſt, quàm KL, circulum DE, tanget. Ac propterea neq; alia latera polygoni inſcripti, cùm æqualia ſint lateri CK, idemq; æqualiter cum CK, à centro F, diſtent, circulum DE, contingent. Duobus itaque circulis circa eandem quorum exiſtentibus, in maiori circulo, &c. quod erat faciendum.

a 14. tertij.

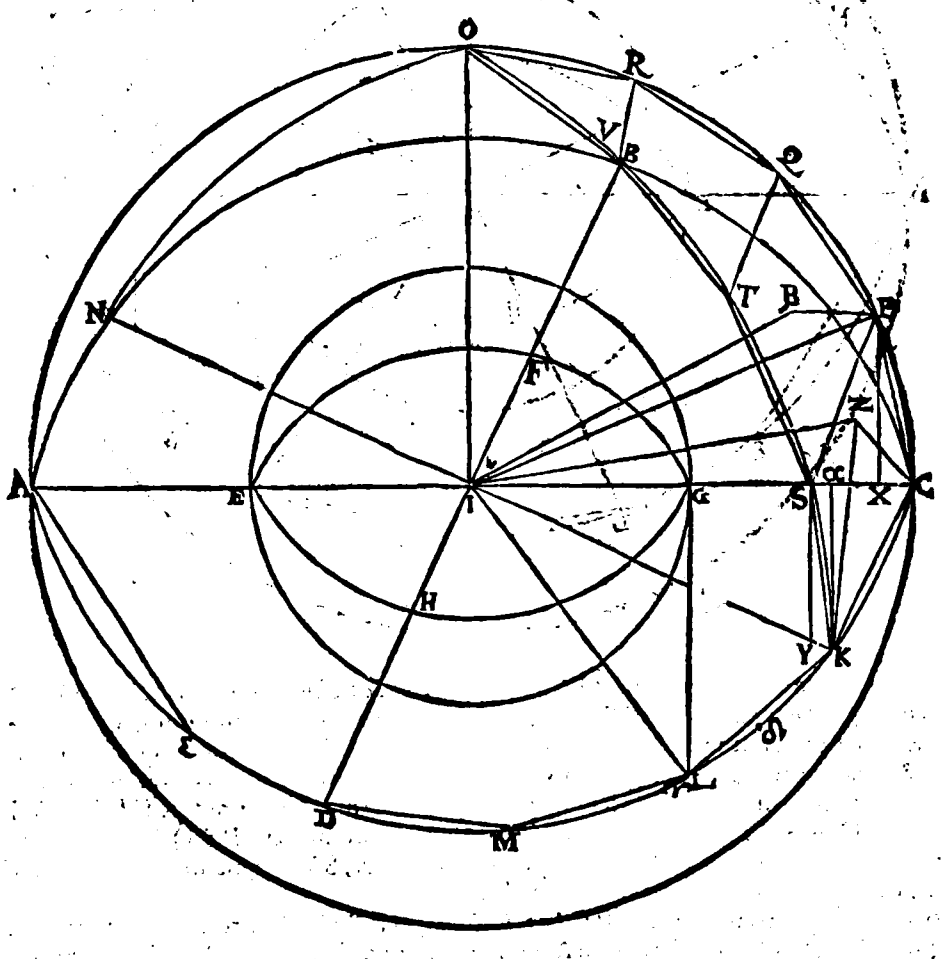
COROLEARIVM.

Hinc eſt manifeſtum, ſi ab extremitate lateris polygoni inſcripti, quod cum diametro conuenit, ad diametrum ducatur perpendicularis, hãc nullo modo circulum minorem poſſe contingere, ſed totam extra ipſum cadere. Huiuſmodi enim eſt linea KL, quæ cùm ducatur à termino puncto K, lateris CK, cum diametro AC, conuenientis, ad AC, diametrum perpendicularis, oſtenſa eſt non tangere circulum DE.

PROBL. 2. PROPOS. 17. 14.

DVABVS ſphæris circa idem centrum exiſtentibus, in maiori ſphæra ſolidum polyedrum inſcribere, quod non tangat minoris ſphæræ ſuperficiem.

SINT duæ ſpheræ ABCD, EFGH, circa idem centrum I, oporteatque in maiori ABCD, inſcribere ſolidum polyædrum, ſeu multilaterum, quod non tangat minorem ſphæram EFGH. Secentur ambæ ſphæræ plano aliquo per centrum, ſintq; communes ſectiones factæ in ſphæris plana ABCD, EFGH, quæ circuli erunt, ex deſcriptione ſphæræ, habentes idem centrum ſphærarum I. Nam ſemicirculi, ad quorum circumuolutionem ſphæræ deſcribuntur, circumducti, congruent ſectionibus ABCD, EFGH. Quare dictæ ſectiones circuli erunt. Vel certè, quia omnes



lineæ rectæ cadentes ex I, ad peripherias ſectionum ſunt æquales, cùm ducantur ex centro ſphærarum ad earum ſuperficiem; erunt ipſæ ſectiones, circuli, ex definitione circuli. Ducantur in his circulis diametri AC, BD, ſeſe in centro I, ſecantes ad angulos rectos, vt ſint quadrantes AB, BC, CD, DA, &c. Deinde in maiori circulo ABCD, inſcribatur polygonum non tangens minorem circulum EFGH. Quod quidem, vt facilius omnia demonſtrentur, in hunc modum efficiatur. Ex G, ad EG, ducatur perpendicularis Gγ, ad circumferentiam vſq; circuli ABCD, quæ circulum EFGH, tanget in G, ex coroll. propoſ. 16, lib. 3. Et rectæ Gγ, applicetur in circulo ABCD, recta

b 16. duodecimi.

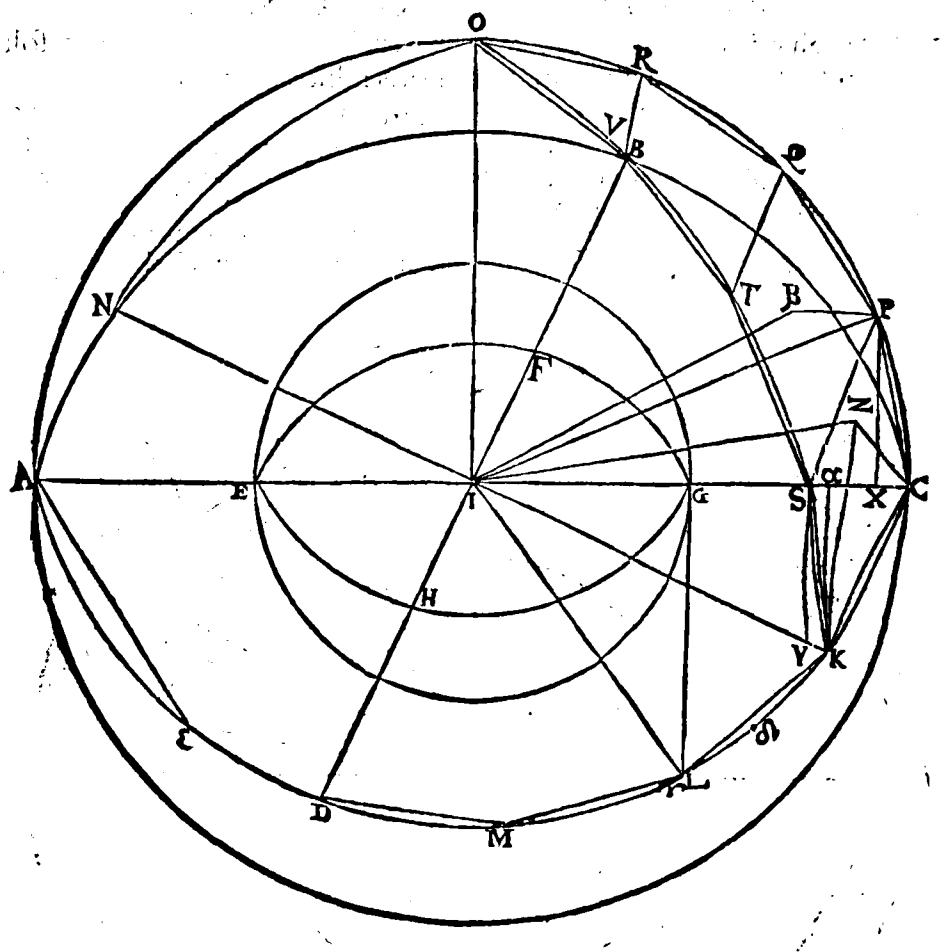
c 1. quarti.

a 19. *primi.* æqualis A ε. Quia verò si arcui C γ, intelligatur subtendi recta, vt fiat triangulum G C γ, *a* latus G γ, oppositum maiori angulo, nempe recto, maius est latere G γ, quod minori angulo opponitur, nimirum acuto; erit quoq; recta C γ, maior recta A ε; ac proinde arcus C γ, arcu A ε, maior erit, vt constat ex scholio propos. 28. lib. 3. Abscindatur ergo arcus C δ, arcui A ε, æqualis. Quod si ex quadrante C D, dimidium auferatur D L, & ex reliquo C L, dimidium L K, & sic deinceps, *b* relinquetur tandem arcus minor arcu C δ, seu arcu A ε. Sit ergo iam arcus C K, minor; Eritque recta C K, subtensa, minor quàm recta A ε, hoc est, quàm G γ, ex scholio propos. 29. lib. 3. Dico igitur, rectam C K, esse vnum latus polygoni æquilateri inscribendi. Nam cùm recta subtendés arcum C δ, minorem arcu C γ, non tangat circulum E F G H, vt ex demonstratione præcedentis propos. patet, multò minus recta C K, subtendens arcum minorem arcu C δ, eundem circulum tanget. Rursus ducta diametro K N, *c* erigatur ex centro I, ad plana circulorum A B C D, E F G H, perpendicularis I O, occurrens superficiei sphæræ maioris in O; Et per rectas O I, A C, & O I, K N, plana ducantur, *d* quæ ad circulum A B C D, recta erunt, efficientq; communes sectiones, circulos, vt iam dictum est, quorum semicirculi sint A O C, N O K. Quia verò anguli O I C, O I K, recti sunt,

b 1. *decimi.*

c 12. *vndec.*

d 18. *vndec.*



e *schol.* 22. *tertij.* ex defin. 3. lib. 11. *e* quadrantes erunt O C, O K, atque adeò cùm circuli A B C D, A O C, N O K, æquales sint, quòd eorum diametri sint & sphæræ maioris diametri, erunt quoq; quadrantes C D, O C, O K, æquales. Si igitur arcus D L, in tot partes æquales distribuatur, in quot diuisus fuit arcus C L; & quadrantes O C, O K, in arcus numero & magnitudine æquales arcubus quadrantis C D; *f* Erunt rectæ his omnibus arcubus æqualibus subtensæ, nimirum C K, K L, L M, M D; C P, P Q, Q R, R O; K S, S T, T V, V O, æquales. Coniunctis autem rectis P S, Q T, R V, demittantur ex P, & S, ad planum circuli A B C D, perpendiculares P X, S Y, *g* quæ in communes sectiones A C, N K, cadent; *h* eruntque inter se parallelæ.

f 29. *tertij.*

g 38. *vndec.*

h 6. *vndec.*

QVONIAM igitur triangulorum P C X, S K Y, anguli P X C, S Y K, recti sunt, ex defin. 3. lib. 11. *i* & anguli P C X, S K Y, æquales, quòd & æquales sint peripheriæ A O P, N O S, quibus insistūt; (Nam si ex semicirculis A O C, N O K, æqualibus, demantur arcus æquales C P, K S, reliqui arcus A O P, N O S, æquales quoq; erūt.) Erunt duo anguli P C X, P X C, trianguli P C X, æquales duobus angulis S K Y, S Y K, trianguli S K Y: Sunt autem & latera P C, S K, rectis angulis opposita, æqualia. *k* Igitur reliqua latera P X, X C, reliquis lateribus S Y, Y K, æqualia erunt. Quare cùm rectæ P X, S Y, æquales sint & parallelæ; si connectatur recta X Y; *l* æquales quoque erunt & parallelæ P S, X Y, inter sese. *m* At quia & rectæ C K, X Y, parallelæ sunt, quòd latera I C, I K, proportionaliter secta sint. (Si enim ex semidiametris I C, I K, æqualibus demantur æquales rectæ C X, K Y,

i 27. *tertij.*

k 26. *primi.*

l 33. *primi.*

m 2. *sexti.*

CX,KY,relinquentur & IX,IY,æquales: Ac proinde erit,vt IX,ad XC,ita IY, ad YK.) [a] Erunt parallelæ quoq; PS,CK,inter ſe,cùm vtraq; parallela ſit ipſi XY; [b] ideoq; eas coniungentes rectæ CP,KS, in eodem cum ipſis plano exiſtent. Totum igitur quadrilaterum CKSP, in vno erit plano. Quod ſi ex Q, & T, demittantur ad planum circuli ABCD, perpendiculares, & connectantur rectæ QC,TK, oſtendemus ſimiliter CK,QT, eſſe parallelas; atque adeò ipſas PS,QT, inter ſe parallelas eſſe, cùm eidem CK, ſint parallelę; totumq; quadrilaterum PSTQ, in vno eſſe plano. Eadem ratione in vno erit plano quadrilaterum QTVR. [c] Eſt autem & triangulum RVO, in vno plano. Si igitur eadem conſtructio exhibeatur ſuper reliqua latera KL,LM,MD, ductis ſcilicet quadrantibus OL,OM,OD; necnon in reliquis tribus quartis, ac reliquo hemiſphærio, vt tota ſphæra maior repleatur quadrilateris, & triangulis, quæ ſimilia ſint prædictis inter quadrantes OC,OK, ſuper latus CK, conſtructis; inſcriptum erit in ſphæra maiori ſolidum polyedrum circumſcriptum dictis quadrilateris atque triangulis. Hoc ergo dico non tangere ſphæram minorem EFGH.

[a] 9. vndec.
[b] 7. vndec.
[c] 2. vndec.

DVCATVR enim ex I, ad planum CKSP, perpendicularis IZ, connectanturque rectæ ZC, ZK. Cadere autē perpendicularem IZ, intra quadrilaterum CKSP, in ſcholio ſequēti oſtendemus. Quoniam igitur, ex defin. 3. lib. 11. anguli IZC, IZK, recti ſunt; [d] erit quadratum rectæ IC, quadratis rectarum IZ,ZC, & quadratum rectæ IK, quadratis rectarum IZ, ZK, æquale. Cùm ergo quadrata rectarum æqualium IC, IK, æqualia ſint, erunt & quadrata rectarum IZ, ZC, quadratis rectarum IZ, ZK, æqualia; Ac proinde dempto communi quadrato IZ, reliqua quadrata rectarum ZC, ZK, æqualia erunt, ideoq; & ipſæ rectæ ZC, ZK, æquales. Similiter oſtendemus rectas, quæ ex Z, ad PS, ducentur, æquales eſſe & inter ſe & rectis ZC, ZK. Quare circulus ex Z, ad interuallum ZC, deſcriptus per quatuor puncta C,K,S,P; tranſibit. Eademq; ratione circa reliqua quadrilatera PSTQ, QTVR, & triangulum RVO, circulos deſcribi poſſe, demonſtrabimus. Quoniam verò, vt poſtea oſtendemus, angulus CZK, obtuſus eſt; erit quadratum rectæ CK, maius quadratis rectarum ZC, ZK; ideoque cùm hæc quadrata æqualia ſint, maius erit quadratum rectæ CK, duplo quadrati rectæ ZC.

[d] 47. primi.

DVCATVR ex K, ad rectam AC, perpendicularis Kα. Cùm igitur AC, dupla ſit ipſius AI, & Aα, maior ſit, quàm AI, erit AC, minor duplo ipſius Aα. Quamobrem cùm ſit, [e] vt AC, ad Aα, ita rectangulum ſub AC,αC, ad rectangulum ſub Aα,αC, quòd baſes horum rectangulorum ſint AC, Aα, & eadem altitudo αC; erit quoque rectangulum ſub AC,αC, minus duplo rectanguli ſub Aα,αC. [f] Eſt autem rectangulum ſub AC,αC, æquale quadrato rectæ CK; & rectangulum ſub Aα,αC, æquale quadrato rectæ Kα; quòd recta CK, inter AC,αC, ſit media proportionalis; & recta Kα, inter Aα,αC, ex coroll. propoſ. 8. lib. 6. (ſi enim connecteretur recta AK, fieret triangulum rectangulum ACK.) Igitur & quadratum rectæ CK, minus erit duplo quadrati rectæ Kα. Ac propterea cùm quadratum rectæ CK, oſtenſum ſit maius eſſe duplo quadrati rectæ ZC; erit quadratum rectæ Kα, maius quadrato rectæ ZC. [g] Quoniam verò quadratum rectæ IC, æquale eſt quadratis rectarum IZ,ZC; & quadratum rectæ IK, quadratis rectarum Iα,αK: Suntque æqualia quadrata rectarum æqualium IC, IK; Erunt & quadrata rectarum IZ, ZC, æqualia quadratis rectarum Iα,αK. Si ergo ex his dematur quadratum maius, nempe rectæ αK; & ex illis minus, videlicet rectæ ZC, erit reliquum quadratum rectæ IZ, maius quadrato reliquo rectæ Iα; ideoq; recta IZ, maior quàm recta Iα. Quapropter cùm punctum α, non tangat ſphæram minorem EFGH, quòd, per coroll. propoſ. præcedentis, recta Kα, tota ſit extra dictam ſphæram; multò minus punctum Z, longius diſtans, eandem ſphæram continget. Ac proinde cùm omnia alia puncta plani CKSP, longius abſint à ſphæra EFGH, quàm punctum Z, vt mox oſtendemus, non tanget planum CKSP, ſphæram EFGH.

[e] 1. ſexti.
[f] 17. ſexti.
[g] 47. primi.

SED & expeditius ex ipſa fere conſtructione figuræ oſtendemus, planum CKSP, non tangere ſphæram minorem FFGH, ſi prius ducatur recta Iγ, hoc modo. Quoniam ex cōſtructione oſtenſum fuit, rectam CK, minorem eſſe recta Cγ: [h] Eſt autem CK, maior quàm ZC, quòd angulus CZK, obtuſus ſit, vt mox demonſtrabitur; Multò maior erit Gγ, quàm ZC; Ac proinde quadratum rectæ Gγ, maius quadrato rectæ ZC. [i] Quia verò quadratum rectæ Iγ, æquale eſt quadratis rectarum IG,Gγ; & quadratum rectæ IC, quadratis rectarum IZ,ZC; ſunt autem quadrata rectarum Iγ, IC, æqualium æqualia; erunt & quadrata rectarum IG,Gγ, quadratis rectarū IZ,ZC, æqualia. Dempto ergo illinc quadrato rectæ Gγ, & hinc quadrato rectæ ZC; relinquetur quadratum rectæ IG, minus quadrato rectæ IZ; Ac propterea recta IG, minor, quàm IZ. Quam ob rem, cùm IG, ſit ſphæræ minoris EFGH, ſemidiameter; exiſtet punctum Z, extra eandem ſphæram; Et proinde, vt prius, planum CKSP, ſphæram EFGH, nequaquam continget.

[h] 19. primi.
[i] 47. primi.

DVCATVR rurſus ex I, ad planum PSTQ, perpendicularis Iβ, eritq; β, centrum circuli circa PSTQ, deſcripti, vt demonſtratum eſt: Connexis autem rectis βP, IP, cùm angulus IβP, rectus ſit, ex tertia definitione libri vndecimi, [k] erit quadratū rectæ IP, æquale quadratis rectarū Iβ, βP. Quia verò & quadratum rectæ IC, (quod æquale eſt quadrato rectæ IP, ob æqualitatem rectarum IC, IP,) æquale eſt quadratis rectarum IZ, ZC; erunt quadrata rectarum Iβ, βP, quadratis rectarum IZ,ZC, æqualia: Eſt autem quadratum rectæ ZC, maius quadrato rectę βP, quòd & linea ZC, maior ſit, quàm linea βP, vt poſtea oſtendemus. Reliquum igitur quadratum rectæ Iβ, reliquo quadrato rectæ IZ, maius erit; ideoq; & linea Iβ, maior quàm linea IZ: Ac proinde multò magis punctum β, extra ſphæram EFGH, exiſtet, quàm punctum Z, propterea q;

[k] 47. primi.

multò minus planum P S T Q, quàm C K S P, tanget ſphæram minorem E F G H. Eodem modo demonſtrabimus, quòd neque reliqua plana ſphæram dictam contingere poſsint. Quocirca, duabus ſphæris circa idem centrum exiſtentibus, in maiori ſphæra ſolidum polyedrum inſcripſimus, quod non tangat minoris ſphæræ ſuperficiem. Quod erat faciendum.

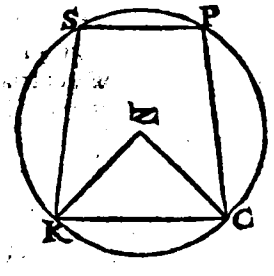
COROLLARIVM.

Ex iis, quæ demonſtrata ſunt, manifeſtum eſt, ſi in quauis alia ſphæra deſcribatur ſolidum polyedrum ſimile prædicto ſolido polyedro, proportionem polyedri in vna ſphæra ad polyedrum in altera ſphæra eſſe triplicatam eius, quam habent ſphærarum diametri. Nam ſi ex centris ſphærarum ad omnes angulos baſium dictorum polyedrorum rectæ lineæ ducantur, diſtribuentur polyedra in pyramides numero æquales, & ſimiles, quarum homologa latera ſunt ſemidiametri ſphærarum; vt conſtat, ſi intelligatur harum ſphærarum minor intra maiorem circa idem centrum deſcripta. Congruent enim ſibi mutuò linea rectæ ductæ à centris ad baſium angulos, ob ſimilitudinem baſium; Ac propterea pyramides efficientur ſimiles. Quare cùm ſingulæ pyramides in vna ſphæra ad ſingulas pyramides illis ſimiles in altera ſphæra habeant proportionem triplicatam laterum homologorum, hoc eſt, ſemidiametrorum ſphærarum, vt conſtat ex coroll. propoſ. 8. huius lib. Sint autem, vt vna pyramis ad vnam pyramidem, ita omnes pyramides, hoc eſt, ſolidum polyedrum ex ipſis compoſitum, ad omnes pyramides, id eſt, ad ſolidum polyedrum ex ipſis conſtitutum. Habebit quoq; polyedrum vnius ſphæræ ad polyedrum alterius ſphæræ proportionem triplicatam ſemidiametrorum, atque adeò diametrorũ ſphærarum, [a] *cùm ſemidiametri atq; diametri eandem habeãt proportionẽ.*

a 15. quinti.

SCHOLIVM.

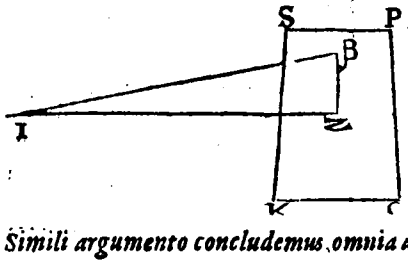
QVONIAM verò ne nimis longa demonſtratio fieret, nonnulla in ea aſſumpta fuerunt, vt vera; quæ tamen nondum ſunt demonſtrata; idcirco ea nunc breuiter à nobis erunt demonſtranda.



b 14. quinti

c 28. tertij.

PRIMVM itaq; oſtendendum eſt, punctum Z, cadere intra quadrilaterum C K S P, & angulum C Z K, eſſe obtuſum. Quod vt commodius fiat, deſcribatur circa dictum quadrilaterum ex centro Z, circulus. Quoniam igitur in figura ſuperiori, eſt vt I K, ad K C, ita I Y, ad Y X, (quòd per coroll. propoſ. 4. lib. 6. triangula I C K, I X Y, ſimilia ſint.) Eſt autem I K, maior quã I Y; [b] erit & K C, maior quàm Y X. Cùm igitur Y X, æqualis ſit oſtenſæ ipſi S P, erit quoq; K C, maior quàm S P; Ac propterea in hac figura, arcus C K, maior erit arcu S P, ex ſcholio propoſ. 28. lib. 3. [c] Quare cùm arcus C P, K S, arcui C K, ſint æquales, quòd & lineæ C P, K S, ipſi K C, lineæ ſint æquales demonſtratæ; (ſubtenduntur enim arcubus circulorum æqualibus, vt ex conſtructione figuræ ſuperioris conſtat) erunt quoque arcus C P, K S, arcu P S, maiores; Atq; idcirco quilibet arcuum C K, C P, K S, quadrantem circuli C K S P, excedet; atque à ſemicirculo ſuperabitur, ac proinde multò magis ſegmentum S I minus erit ſemicirculo. Ex quo fit, centrum Z, non eſſe in illis ſegmentis, ſed extra, nimirum intra quadrilaterum C K S P. Eadem ratione oſtendemus, perpendiculares ex I, ad plana aliorum quadrilaterorum demiſſas, qualis eſt I B, cadere intra quadrilatera; necnon & perpendicularem ex I, ad triangulum O R V, ductam, cadere intra ipſum. Quia igitur arcus C K, quadrante maior eſt, angulus C Z K, obtuſus erit, nempe recto maior, cùm angulo recto in centro ſubtendatur quadrans circuli, vt perſpicuum eſt ex ſcholio propoſ. 27. lib. 3.



d 19. primi

SECVNDO demonſtrandum eſt, omnia alia puncta quadrilateri C K S P, longius à centro I, abeſſe, quam punctum Z. Sumatur enim quodcunque aliud punctum θ, in quadrilatero C K S P, & adiungantur rectæ I θ, Z θ. Quoniam ergo angulus I Z θ, rectus eſt, ex defin. 3. lib. 11. [d] Erit latus illi oppoſitum I θ, maius latere I Z, quod minori angulo I θ Z, nimirum acuto, opponitur; Ac propterea punctum θ, longius a centro I eſtat, quam punctum Z. Simili argumento concludemus, omnia alia puncta longius diſtare.

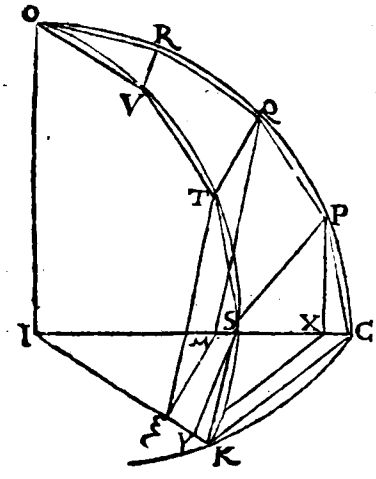
TERTIO, ac vltimo probandum eſt, rectam Z C, maiorem eſſe recta B P. Quod vt aptius fiat, demonſtrandum prius erit, rectam P S, maiorem eſſe recta Q T. Deſcribatur igitur pars ſuperioris figuræ, ea videlicet, quæ continetur ſemidiametris I C, I K, I O, & quadrantibus O C, O K, &c. Demittantur deinde ex Q, & T, ad planum circuli A B C D, in quo eſt triangulum I C K, perpendiculares Q μ, T ξ, [e] quæ in communes ſectiones I C, I K, cadent, [f] eruntq; inter ſe ſe parallelæ, vt de rectis P X, S Y, dictum eſt. Quod ſi adiungatur recta μ ξ, erunt Q T, μ ξ, parallelæ & æquales, quemadmodum oſtenſum

e 38. vndecimi.

f 6. vndec.

fuit, parallelas esse & æquales PS, XY. [a] *Quia verò μξ, ipsi CK, parallela est; quòd latera IC, IK, proportionaliter sint secta in μ, & ξ. veluti diximus de rectâ XY;* [b] *erunt quoque μξ, XY, parallelæ. Quare erit, ex corollario propos. 4. lib. 6. vt IY, ad YX, ita Iξ ad ξμ: Est autem IY, maior quàm Iξ.* [c] *Igitur & TX, maior erit quàm ξμ; Ac proinde & PS, quæ æqualis est ipsi XY, maior erit quam QT, quæ æqualis est ipsi ξμ.*

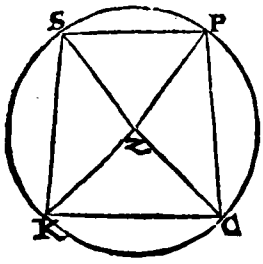
a 2. sexti.
b 30. primi
c 14. quinti

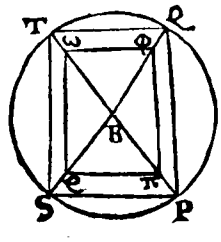


Hoc ergo demonstrato, describantur ex centris Z, β, circa quadrilatera CKSP, PSTQ, circuli, egrediunturq; è centris rectæ ZC, ZK, ZS, ZP; βP, βS, βT, βQ. Si igitur ZC, non credatur maior, quàm βP, erit vel æqualis, vel minor. Sit primùm æqualis. Quia ergo latera ZK, ZC, æqualia ponuntur lateribus βS, βP, & basis KC, maior est basi PS; [d] *erit angulus KZC, maior angulo SβP: Eadem ratione maior erit angulus SZP, angulo TβQ. At quoniam bases KS, CP, basibus ST, PQ, sunt æquales;* [e] *erunt anguli KZS, CZP, angulis SβT, PβQ, æquales. Igitur quatuor anguli ad Z, maiores erunt quatuor angulis ad β: Sunt autem & æquales cùm tam hi, quàm illi quatuor rectis sint æquales, ex coroll. 2. propos. 15. lib. 1. quod est absurdum. Non igitur æqualis est recta ZC, rectæ βP.*

d 25. primi
e 8. primi.

Sit deinde ZC, minor, quàm βP. Et abscindantur βπ, βρ, βω, βφ, ipsis ZC, ZK, ZS, ZP, æquales, connectanturq; rectæ πρ, ρω, ωφ, φπ,



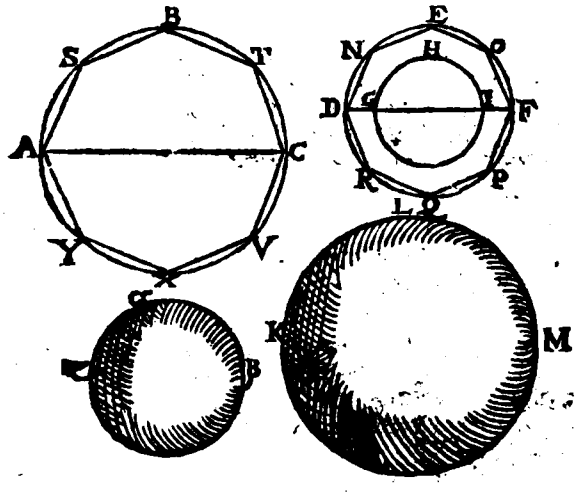


[f] *quæ parallelæ erunt rectis PS, ST, TQ, QP, eò quòd rectæ ex centris sectæ sunt proportionaliter; ac proinde, ex coroll. propos. 4. lib. 6. erit vt βS, ad SP, ita βρ ad ρπ. Cùm ergo βS, maior sit quàm βρ,* [g] *erit & SP, maior quàm ρπ. Eademq; ratione maiores erunt ST, TQ, QP, rectis ρω, ωφ, φπ; Ac propterea cùm PS, minor sit, quàm CK, & ST, PQ, æquales rectis KS, CP; & TQ, minor quam PS, erunt rectæ πρ, ρω, ωφ, φπ, minores rectis CK, KS, SP, PC. Quare cùm rectæ βπ, βρ, βω, βφ rectis ZC, ZK, ZS, ZP, sint æquales;* [h] *erunt anguli ad Z, maiores angulis ad β: Sunt autem & æquales. quòd tam illi quàm hi sint quatuor rectis æquales, ex coroll. 2. propos. 15. lib. 1. Quod est absurdum. Non igitur minor est recta ZC, quàm βP: Sed neque æqualis est ostensa; Maior igitur est. Quod erat ostendendum.*

f 2. sexti.
g 14 quinti
h 25. primi.

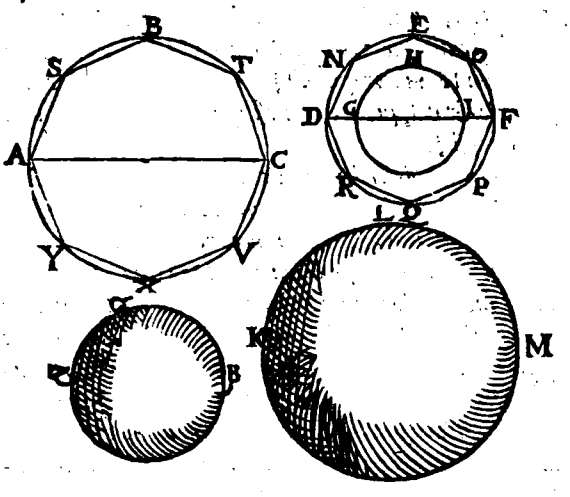
THEOR. 16. PROPOS. 18. 15.

SPHÆRAE inter se sunt in triplicata ratione suarum diametrorum.



Sint duæ sphæræ ABC, DEF, quarum diametri AC, DF. Dico sphæram ABC, ad sphæram DEF, habere proportionem triplicatam diametri AC, ad diametrum DF. Si enim hoc non concedatur, habebit sphæra ABC, ad aliam sphęram GHI, minorem, vel KLM, maiorem, quàm DEF, triplicatam proportionem diametri AC, ad diametrum DF. Habeat primùm sphæra ABC, ad sphæram GHI, minorem sphæra DEF, proportionem triplicatam diametri AC, ad diametrum DF: intelligaturq́ue sphæra GHI, concentrica sphæræ DEF. [a] *Inscribatur in sphæra maiori DEF, polyedrum DNEOFPQR, non tangens minorem sphæram GHI; Atque huic simile polyedrum ASBTCVXY, inscribatur in sphæra ABC. Quoniam igitur ponitur proportio sphæræ ABC, ad sphæram GHI, triplicata proportionis diametri AC, ad diametrum DF: Est autem, per coroll. præcedentis propos. & proportio polyedri ASBTCVXY, ad polyedrum DNEOFPQR, triplicata proportionis diametri AC, ad diametrum DF; Erit vt sphæra ABC, ad sphæram GHI, ita polyedrum ASBTCVXY, ad polyedrum DNEOFPQR. Quare cùm sphæra ABC, maior sit polyedro ASBTCVXY,* [b] *erit & sphæra GHI, maior polyedro DNEOFPQR, pars toto. Quod est absurdum. Non igitur habebit sphęra ABC, ad sphæram GHI, minorem sphæra DEF, proportionem triplicatam diametri AC, ad diametrum DF.*

a 17. duodecimi.
b 14. quinti.



HABEAT ſecundò ſphæra A B C, ad ſphæram K L M, maiorem ſphæra D E F, proportionem triplicatam diametri A C, ad diametrum D F. Cùm igitur, ex coroll. præcedentis propoſ. & polyedrum A S B T C V X Y, ad polyedrum D N E O F P Q R, habeat proportionem triplicatam diametri A C, ad diametrum D F; Erit vt ſphæra A B C, ad ſphæram K L M, ita polyedrum A S B T C V X Y, ad polyedrum D N E O F P Q R: Et conuertendo, vt ſphæra K L M, ad ſphæram A B C, ita polyedrum D N E O F P Q R, ad polyedrum A S B T C V X Y: Eſt autem ex dicto coroll. præcedentis propoſitionis polyedrum D N E O F P Q R, ad polyedrum A S B T C V X Y, in triplicata proportione diametri D F, ad diametrum A C. Igitur & ſphæra K L M, ad ſphæram A B C, erit in triplicata proportione diametri D F, ad diametrum A C. Ponatur vt ſphæra K L M, ad ſphæram A B C, ita ſphæra D E F, ad aliam ſphæram Z α β. Habebit igitur & ſphæra D E F, ad ſphæram Z α β, proportionem triplicatam diametri D F, ad diametrum A C. Et quia ſphæra K L M, maior ponitur, quàm ſphæra D E F, erit quoque ſphæra A B C, maior, quàm ſphæra Z α β. Quapropter ſphæra D E F, ad ſphæram Z α β, minorem ſphæra A B C, proportionem habet triplicatam diametri D F, ad diametrum A C. Quod eſt abſurdum. Oſtenſum enim eſt, non poſſe ſphæram ad ſphæram alia ſphæra minorem, proportionem habere triplicatam diametrorum. Non ergo habebit ſphæra A B C, ad ſphæram K L M, maiorem ſphæra D E F, proportionem triplicatam diametri A C, ad diametrum D F. Sed neque ad minorem habet, vt demonſtratum eſt: Igitur habebit ad ſphæram D E F, proportionem triplicatam diametri A C, ad diametrum D F. Sphæræ itaque inter ſe ſunt in triplicata ratione ſuarum diametrorum. Quod erat oſtendendum.

COROLLARIVM.

HINC fit, ita eſſe ſphæram ad ſphæram, vt polyedrum in illa deſcriptum ad polyedrum ſimile in hac deſcriptum. Quia tam ſphæra ad ſphæram, quàm polyedrum ad polyedrum habet triplicatam diametrorum proportionem, vt demonſtratum eſt.

FINIS ELEMENTI DVODECIMI.

EVCLIDIS

EVCLIDIS ELEMENTVM TERTIVMDECIMVM:

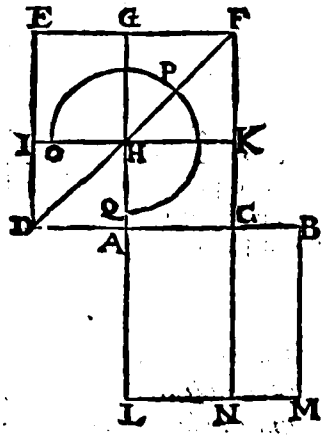
& Solidorum tertium.

THEOR. 1. PROPOS. 1. 1.

Si recta linea secundùm extremam & mediam rationem secetur; maius segmentum assumens dimidiam totius, quintuplum potest eius, quod à dimidia totius describitur, quadrati.

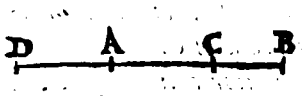


ECETVR recta AB, in C, extrema ac media ratione, sitq; maius segmentum AC. Producta autem BA, ad D, sit AD, dimidia totius AB. Dico quadratum rectæ CD, quintuplum esse quadrati rectæ AD. Describatur enim super CD, quadratum CE, in quo ducta diametro DF, ducatur AG, ipsi DE, parallela, secans diametrum in H, puncto, per quod ducatur IK, parallela ipsi CD. Producta deinde GA, perficiatur quadratũ AM, protrahaturq; FC, ad N. eruntq; ex coroll. propos. 4. lib. 2. AI, KG, quadrata rectarum AD, AC. [a] Quia ergo est vt AB, ad AC, ita AC, ad CB; [b] erit rectangulum CM, sub AB, CB, æquale ipsi KG, quadrato rectæ AC. Deinde cùm ponatur AB, dupla ipsius AD, sitque AL, ipsi AB; & AH, ipsi AD, æqualis; erit quoque AL, ipsius AH, dupla: [c] Est autem vt AL, ad AH, ita rectangulum AN, ad AK, rectangulum. Duplum igitur est AN, ipsius AK. [d] Quoniam autem AK, ipsi IG, est æquale; erit AN, æquale duobus AK, IG. Additis igitur æqualibus CM, KG; erit quadratum AM, gnomoni OPQ, æquale. Quare cùm quadratum AM, quadruplum sit quadrati AI, ex scholio propos. 4. lib. 2. quòd linea AB, dupla ponatur lineæ AD; erit & gnomon OPQ, eiusdem quadrati AI, quadruplus; Ac propterea, si gnomoni OPQ, addatur ipsum quadratum AI, quintuplum efficietur quadratum CE, quadrati AI.



[a] 3. defin. sexti.
[b] 17. sexti.
[c] 1. sexti.
[d] 43. primi.

ALITER. Ex scholio propos. 4. lib. 2. quadratum rectæ AB, quadruplum est quadrati rectæ AD, quòd linea AB, dupla lineæ AD, ponatur. [e] Est autem quadratum rectæ AB, æquale rectangulis sub AB, AC, & sub AB, BC, comprehensis; Et rursus, quod sub AB, AC, æquale est ei, quod sub AD, AC, bis; (sicut enim AB, ipsius AD, est dupla, [f] ita quoque erit rectangulum sub AB, AC, rectanguli sub AD, AC, duplum, cùm vtriusq; rectanguli eadem sit altitudo AC. Ac propterea rectangulum sub AD, AC, bis sumptum æquale erit rectangulo sub AB, AC.) [g] Quod verò sub AB, BC, æquale est quadrato rectæ AC, cùm sit vt AB, ad AC, ita AC, ad CB. Igitur quadratum rectæ AC, vnà cum rectangulo sub AD, AC, bis, quadruplum quoq; erit quadrati rectæ AD; Ac proinde quadrata rectarum AC, AD, vnà cum rectangulo sub AD, AC, bis, quintupla erunt quadrati eiusdem rectæ AD. [h] Quocirca cùm quadratum rectæ CD, æquale sit quadratis rectarum AC, AD, vnà cum rectangulo sub AD, AC, bis; Erit & quadratum rectæ CD, quadrati rectæ AD, quintuplum. Si recta igitur linea secundùm extremam & mediam rationem secetur, &c. Quod erat demonstrandum.

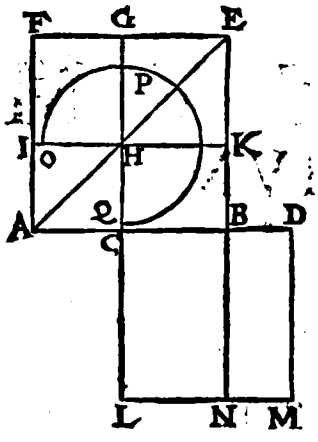


[e] 2. secundi.
[f] 1. sexti.
[g] 17. sexti.
[h] 4. secundi

THEOR. 2. PROPOS. 2. 2.

Si recta linea sui ipsius segmenti quintuplum possit; Duplæ prædicti segmenti extrema ac media ratione sectæ, maius segmentum reliqua pars est eius, quæ à principio, rectæ.

DIVISA sit recta AB, in C, positq; quintuplum segmenti AC; sumatur autem ipsius AC, dupla CD, quæ, vt post ostendemus, maior erit reliquo segmento BC. Dico si CD, secetur extrema

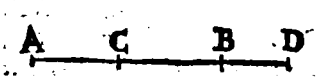


ac media ratione, maius segmentum esse CB, reliquam partem prioris lineæ. Describatur enim super AB, quadratum BF, in quo ducta diametro AE, ex C, ducatur ipsi AF, parallela CG, secans diametrũ in puncto H, per quod agatur IK, parallela ipsi AB. Producta deinde GC, perficiatur quadratũ CM, protrahaturq; EB, ad N. Erunt; ex coroll. propos. 4. lib. 2. CI, KG, quadrata rectarum AC, CB. Quia igitur quadratum BF, quintuplum ponitur quadrati CI; Si tollatur quadratum CI, relinquetur gnomon OPQ, eiusdem quadrati CI, quadruplus: Est autem & quadratum CM, quadruplum quadrati CI, ex scholio propos. 4. lib. 2. quòd recta CD, dupla sit rectæ AC. Igitur gnomon OPQ, quadrato CM, æqualis erit. Rursus quoniam CD, ponitur ipsius AC, dupla; estq; LC, ipsi CD; & CH, ipsi AC, æqualis; erit & LC, ipsius CH, dupla. [a] Cum igitur sit vt LC, ad CH, ita rectangulum LB, ad rectangulum CK; erit quoque illud huius duplum: [b] Est autem CK, ipsi HF, æquale. Æquale igitur est LB, ipsis CK, HF; Ac proinde & reliquum quadratum KG, reliquo rectangulo BM. Quoniam ergo sunt tres rectæ CD, CB, BD; estque rectangulum BM, sub CD, BD, comprehensum æquale ipsi KG, quadrato rectæ CB; [c] Erit vt CD, ad CB, ita CB, ad BD. Quamobrem, ex definitione, recta CD, secta est in B, extrema ac media ratione; estque maius segmentum CB.

a 1. sexti.
b 43. primi.
c 17. sexti.
d 4. secundi

ALITER. Quoniam quadratum rectæ AB, quintuplum ponitur quadrati rectæ AC; [d] estque quadratum rectę AB, æquale quadratis rectarum CB, AC, vnà cum rectangulo sub AC, CB, bis. Erunt & quadrata rectarum CB, AC, vnà cùm rectangulo sub AC, CB, bis, quintuplum quadrati rectæ AC. Dempto igitur quadrato rectæ AC, relinquetur quadratum rectæ CB, & rectangulum sub AC, CB, bis, quadruplum eiusdem quadrati rectæ AC. Est autem & quadratum rectæ CD, eiusdem quadrati rectæ AC, quadruplum, ex scholio propos. 4. lib. 2. Æquale igitur est quadratum rectæ CB, & rectangulum sub AC, CB, bis, quadrato rectæ CD. Cùm ergo rectangulum sub AC, CB, bis, æquale sit rectangulo sub CD, CB; (sicut enim recta CD, dupla est rectæ AC,

e 1. sexti.



[e] ita quoq; duplum erit rectangulum sub CD, CB, rectanguli sub AC, CB; cùm vtriusque rectanguli eadem sit altitudo CB; Ac propterea rectangulum sub CD, CB, æquale erit rectangulo sub AC, CB, bis.) Erit & quadratum rectæ CB, & rectangulum sub CD, CB, quadrato rectæ CD, æquale: f. At quadratum rectæ CD, æquale est rectangulis sub CD, CB, & sub CD, BD. Igitur quadratum rectæ CB, & rectangulum sub CD, CB, æquale erit rectangulis sub CD, CB, & sub CD, BD; Ac proinde dempto communi rectangulo sub CD, CB, relinquetur quadratum rectæ CB, æquale rectangulo sub CD, BD; g ideoque erit vt CD, ad CB, ita CB, ad DB. Quare ex defin. recta CD, secta est in B, extrema ac media ratione, estq; segmentum maius CB. Si igitur recta linea suiipsius segmenti quintuplum posit, &c. Quod erat demonstrandum.

f 2. secundi
g 17. sexti.

LEMMA.

QVOD autem recta CD, maior sit necessariò, quàm CB, ita ostendemus ex hypothesi. Quia quadratum rectæ CD, quadruplum est, ex scholio propos. 4. lib. 2. quadrati rectæ AC; Addito quadrato rectæ AC, erunt duo quadrata rectarũ CD, AC, quintupla eiusdem quadrati rectæ AC. Est autem quadratum rectæ AD, maius quadratis rectarũ AC, CD, cum æquale sit quadratis rectarum AC, CD, vnà cum rectangulo sub AC, CD, bis. Igitur quadratum rectæ AD, maius quoque erit quintuplo quadrati rectæ AC; Ac propterea maius quadrato rectæ AB, quod quintuplum ponitur eiusdem quadrati rectæ AC. Quare recta AD, maior erit, quàm recta AB; ideoq; dempta communi AC; maior erit reliqua CD, quàm reliqua CB. Quod est propositum.

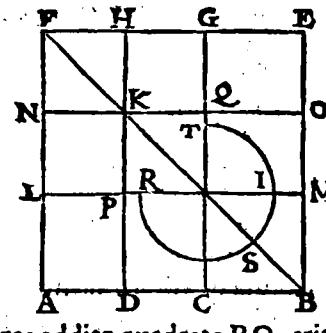
a 4. secundi.

3. THEOR. 3. PROPOS. 3.

SI recta linea secundùm extremam & mediam rationem secetur; minus segmentum assumens dimidiam maioris segmenti, quintuplum potest eius, quod à dimidia maioris segmenti describitur, quadrati.

SECETVR recta AB, in C, extrema ac media ratione, cuius maius segmentum AC, bifariam diuidatur in D. Dico quadratum rectæ BD, quintuplum esse quadrati rectæ CD. Describatur enim super AB, quadratum AE, in quo diameter BF. Deinde ex C, D, ducantur ipsis AE, BE, parallelæ CG, DH, secantes diametrum in I, K, punctis, per quæ agátur ipsis AB, EF, parallelæ LM, NO, quæ secent rectas CG, DH, in P, Q. Eruntq; ex coroll. propos. 4. lib. 2. LG, PQ, DO, quadrata rectarum AC, CD, BD. Quoniam igitur recta AC, dupla est rectæ CD, erit, ex scholio eiusdem propos. quadratum LG, quadruplum quadrati PQ. Est autem rectangulum CE, æquale

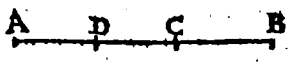
quadrato



quadrato L G. (Nam cùm sit vt A B, ad A C, ita A C, ad C B, [a] erit rectãgulum sub A B, C B, nempe C E, æquale quadrato rectæ A C, nimirum ipsi L G.) Igitur & C E, quadruplum erit quadrati P Q. Quia verò æqualia sunt quadrata N H, P Q, ob æqualitatem rectarum A D, C D; erunt earum latera H K, I Q, æqualia; [b] ac proinde rectæ E O, O M, ipsis oppositæ æquales erunt. [c] Quare rectangula I O, Q E, æqualia erunt: [d] Est autem I O, ipsi I D, æquale. Ergo & Q E, eidem I D, æquale erit; Ac proinde, addito communi rectangulo C O; totus gnomon R S T, rectãgulo C E, erit æqualis. Cùm igitur C E, ostensum sit quadruplum quadrati P Q; erit etiã gnomon R S T, eiusdem quadrati P Q, quadruplus: Ac propterea addito quadrato P Q, erit quadratũ D O, ex recta B D, quintuplũ quadrati P Q, ex recta C D.

[a] 17. sexti. [b] 34. primi. [c] 36. primi. [d] 43. primi.

ALITER. Cùm A C, diuisa sit bifariam in D, & ei addita C B; [e] erit rectangulum sub A B, B C, vnà cum quadrato rectæ C D, æquale quadrato rectæ B D. At rectangulum sub A B, B C, quadruplum est quadrati rectæ C D; (Nam cùm sit, vt A B, ad A C, ita A C, ad C B; [f] erit rectangulum sub A B, B C, æquale quadrato rectæ A C: quod cùm, ex scholio propos. 4. lib. 2. quadruplum sit quadrati rectæ C D; erit & rectangulum sub A B, B C, quadruplum eiusdẽ quadrati rectę C D.)



Ac propterea rectangulum sub A B, B C, vnà cum quadrato rectæ C D, quintuplum quadrati rectæ C D. Igitur & quadratum rectæ B D, quintuplum erit quadrati rectæ C D. Si recta ergo linea secundùm extremam & mediam rationem secetur; minus segmentum assumens dimidiam maioris segmenti, quintuplum potest eius, quod à dimidia maioris segmenti describitur, quadrati. Quod erat ostendendum.

[e] 6. secundi. [f] 17. sexti.

SCHOLIVM.

CONVERSVM huius theorematis demonstrabimus quoque cum Campano, ad hunc modum.

Si recta inæqualiter secetur, & minus segmentum assumens dimidium maioris segmenti quintuplum possit eius, quod à dimidia maioris segmenti describitur, quadrati; Recta illa linea secta erit extrema & media ratione.

Sit recta A B, diuisa inæqualiter in C, cuius maius segmentum A C, bifariam sectum sit in D; sitq; quadratũ rectæ B D, quintuplum quadrati rectæ C D. Dico rectam A B, diuisam esse in C, extrema ac media ratione. Repetita enim figura priore huius propos. erit quadratum L G, rectæ A C, quadruplum quadrati P Q, rectæ C D, ex scholio propos. 4. lib. 2. Est autem & gnomon R S T, eiusdem quadrati P Q, quadruplus. (cùm enim quadratum D O, rectæ B D, quintuplum ponatur quadrati P Q, ex recta C D; dempto quadrato P Q, relinquetur gnomon R S T, eiusdem quadrati P Q, quadruplus.) Igitur gnomon R S T, æqualis erit quadrato L G: At gnomoni R S T, æquale est rectangulum C E, vt suprà ostensum est. Ergo & quadrato L G, rectæ A C, æquale erit idem rectangulum C E, sub A B, B C, comprehensum: [a] *Ac proinde erit, vt A B, ad A C, ita A C, ad C B. Quocirca, ex definitione, secta erit A B, in C, extrema ac media ratione. Quod est propositum.*

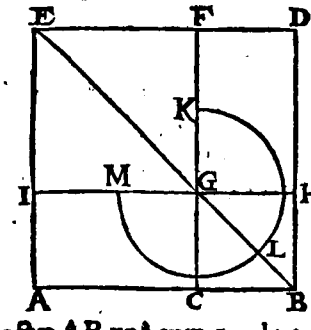
[a] 17. sexti.

ALITER. Cùm A C, diuisa sit bifariam in D, & ei addita C B; [b] *erit rectangulum sub A B, B C, vnà cũ quadrato rectæ C D, æquale quadrato rectæ B D; Ac propterea cùm quadratũ ex recta linea B D, descriptũ, quintuplum ponatur quadrati ex recta C D, descripti; erit & rectangulũ sub rectis lineis A B, B C, descriptũ, vnà cum quadrato rectæ C D, quintuplum eiusdem quadrati rectæ C D. Quare ablato quadrato rectæ C D; rectangulum sub A B, B C, quadruplum erit quadrati rectæ C D: Est autem eiusdem quadrati rectæ C D, quadruplum quadratum rectæ A C, ex scholio propos. 4. lib. 2. Igitur quadrato rectæ A C, æquale est rectangulum sub A B, B C.* [c] *Quamobrem erit, vt A B, ad A C, ita A C, ad C B; Ac proinde secta A B, in C, extrema ac media ratione, ex definitione.*

[b] 6. secundi. [c] 17. sexti.

THEOR. 4. PROPOS. 4. 5.

Si recta linea secundùm extremam & mediam rationem secetur; Quod à tota, quodq; à minore segmento, simul vtraque quadrata, tripla sunt eius, quod à maiore segmento describitur quadrati.



SECETVR recta A B, in C, extrema ac media ratione, sitq; segmentum maius A C, & minus C B. Dico quadrata rectarum A B, B C, simul tripla esse quadrati rectæ A C. Describatur enim super A B, quadratum A D, in quo ducta diametro B E, ducatur ex C, ipsi B D, parallela C F, secans diametrum in puncto G, per quod agatur H I, parallela ipsi A B. Eruntq; C H, I F, quadrata rectarum B C, A C, ex coroll. propos. 4. lib. 2. Quoniam igitur est, vt A B, ad A C, ita A C, ad C B; [a] erit rectangulum sub A B, B C, nempe A H, æquale ipsi I F, quadrato rectæ A C. Cùm ergo A H, æquale sit ipsi C D; erit gnomon K L M, vnà cum quadrato C H, duplus quadrati I F; Ac proinde, addito quadrato I F, erit quadratum A D, rectæ A B, vnà cum quadrato C H, rectæ B C, eiusdem quadrati I F, rectæ A C, triplum.

[a] 17. sexti.

a 17. sexti. ALITER. Quoniam est, vt A B, ad A C, ita A C, ad C B: a erit rectangulum sub A B, B C, æquale quadrato rectæ A C; Atq; adeò rectangulum sub A B, B C, bis, vnà cum quadrato rectæ A C, b 7. secundi triplum quadrati rectæ A C. b Sunt autem quadrata rectarum A B, B C, simul æqualia quadrato rectæ A C, vnà cum rectangulo sub A B, B C, bis. Igitur & quadrata rectarum A B, B C, tripla sunt quadrati rectæ A C. Quocirca si recta linea secundùm extremam & mediam rationem secetur; Quod à tota, quodq; à minore segmento, simul vtraque quadrata, tripla sunt eius, quod à maiori segmento describitur, quadrati. Quod erat demonstrandum.

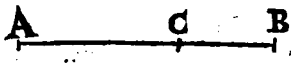
SCHOLIVM.

CONVERSVM etiam huius verum est, videlicet.

Si recta linea inæqualiter secetur, sitque quadratum totius, vnà cum quadrato minoris segmenti, triplum quadrati ex maiore segmento descripti; Recta illa linea extrema ac media ratione secabitur.

SECTA sit recta A B, inæqualiter in C, ita vt quadratum totius A B, & quadratum minoris segmenti B C, vtraq; simul tripla sint quadrati maioris segmenti A C. Dico rectam A B, sectam esse extrema ac media ratione. Constructa enim figura, vt prius; cùm quadrata A D, C H, tripla sint quadrati I F; dempto quadrato I F, erit gnomon K L M, vnà cum quadrato C H, duplus eiusdem quadrati I F: Est autem gnomon K L M, vnà cum quadrato C H, æqualis duobus rectangulis A H, C D. Igitur & rectangula A H, C D, dupla sunt quadrati I F; Ac propterea cùm æqualia sint A H, & C D; erit A H, ipsi I F, æquale. Quapropter cùm rectan-
a 17. sexti. *gulum A H, sub A B, B C, æquale sit quadrato I F, rectæ A C; a erit vt A B, ad A C, ita A C, ad C B; Ac proinde A B, diuisa erit in C, extrema & media ratione.*

b 7. secũdi. *ALITER. Cùm quadrata rectarum A B, B C, tripla sint quadrati rectæ A C; b Sint verò quadrata rectarum A B, B C, æqualia quadrato rectæ A C, & rectangulo sub A B, B C, bis;*



erit & quadratum rectæ A C, vnà cum rectangulo sub A B, B C, bis, triplum quadrati rectæ A C. Dempto ergo quadrato rectæ A C, relinquetur rectangulum sub A B, B C, bis, duplum quadrati rectæ A C; Et proinde rectangulum sub A B, B C, semel, æquale qua-
c 17. sexti. *drato rectæ A C. c Quare, vt prius, erit vt A B, ad A C, ita A C, ad C B; ideoq; A B, in C, secta erit extrema ac media ratione.*

EX Francisco Maurolyco demonstrabimus quoque theorema, quod sequitur.

Si recta linea secundùm extremam & mediam rationem secetur, tota linea assumens minus segmentum, quintuplum potest eius, quod à maiori segmento describitur quadrati. Et si recta linea inæqualiter secetur, totaque assumens minus segmentum possit quintuplum eius, quod à maiori segmento describitur, quadrati: Recta illa linea secundùm extremam & mediam rationem secta est.

SIT primùm recta A B, secta in C, extrema ac media ratione, cui addatur recta B D, minori segmento
d 8. secũdi. *B C, æqualis. Dico quadratum ex A D, quintuplum esse quadrati ex A C, maiore segmẽto. d Quoniam enim*



e 17. sexti. *quadratum ex A D, æquale est rectangulo sub A B, B C, quater contento, vnà cum quadrato ex A C: e Rectangulum autem sub A B, B C, æquale est quadrato ex A C; (quòd A B, A C, C B, sint cõtinuè proportionales.) erit rectangulum sub A B, B C, quater, quadruplum quadrati ex A C; atque adeò rectangulum sub A B, B C, quater vnà cum quadrato ex A C, quintuplum quadrati ex A C. Igitur & quadratum ex A D, (quod æquale ostensum est rectangulo sub A B, B C, quater, vnà cum quadrato ex A C,) eiusdem quadrati ex A C, quintuplum erit. quod est propositum.*

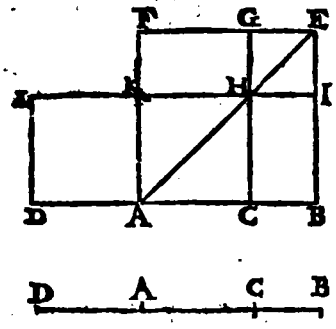
SIT deinde recta A B, secta inæqualiter in C, cui addatur recta B D, minori segmento B C, æqualis, sitq; quadratum ex A D, quadrati ex A C, maiori segmento quintuplum. Dico A B, in C, sectam esse extrema ac
f 8. secũdi. *media ratione. f Quoniam enim quadratũ ex A D, æquale est rectangulo sub A B, B C, quater, vnà cùm quadrato ex A C; erit quoque rectangulum sub A C, B C, quater, vnà cum quadrato ex A C, quintuplum quadrati ex A C; ac propterea rectangulum sub A B, B C, quater, quadruplum quadrati ex A C: hoc est, rectan-*
g 17. sexti. *gulum sub A B, B C, æquale quadrato ex A C. g Igitur erit vt A B, ad A C, ita A C, ad C B: Ac proinde A B, in C, secta est extrema & media ratione. Quod est propositum.*

4. THEOR. 5. PROPOS. 5.

Si recta linea secundùm extremam & mediam rationem secetur; apponaturq; ei æqualis maiori segmento: Tota recta linea secundùm extremam & mediam rationem secatur, & maius segmentum est, quæ à principio recta linea.

SECETVR recta A B, in C, extrema ac media ratione, sitq; maius segmentum A C, & adiiciatur ei in rectum A D, æqualis maiori segmento A C. Dico rectam B D, secari in A, extrema ac media ratione, esseq; maius segmentum A B. Describatur enim super A B, quadratum B F, in quo ducta diametro A E, ducatur ex C, ipsi B E, parallela C G, secans diametrum in H, puncto, per quod agatur ipsi B D, parallela I K, & ex D, ducatur ipsi A F, parallela D L, occurrens ipsi I K, productæ in L. Eruntque ex coroll. propos. 4. lib. 2. C K, I G, quadrata rectarum A C, B C. Quoniam igitur est

vt A B,



vt AB, ad AC, ita AC, ad CB; [a] Erit rectangulum IF, contentum sub AB, BC, æquale quadrato CK, rectæ AC. [b] Est autem CK, ipsi AL, æquale. Igitur IF, æquale erit ipsi AL; additoq; communi BK, erit rectangulum BL, contentum sub BD, DA, æquale quadrato BF, rectæ AB; [c] Ac proinde erit vt BD, ad AB, ita AB, ad DA. Quare BD, secatur in A, extrema ac media ratione, estque maius segmentum AB.

a 17. sexti. b 36. primi. c 17. sexti.

ALITER. Quoniam est vt AB, ad AC, hoc est, ad AD, ita AC, ad CB; Erit conuertendo vt DA, ad AB, ita BC, ad CA; & componendo vt DB, ad AB, ita AB, ad CA, hoc est, ad AD. Secta igitur est BD, in A, extrema ac media ratione. Itaque si recta linea secundùm extremam & mediam rationem secetur, apponaturq; ei æqualis maiori segmento: tota recta linea, &c. Quod erat demonstrandum.

SCHOLIVM.

SIMILITER cum Campano & hoc demonstrabimus.

Si recta linea secetur extrema ac media ratione, detrahaturq; ex maiori segmento segmentum minus; erit maius segmentum sectum extrema ac media ratione, & maius segmentum est illa linea, quæ prioris lineæ minus segmentum erat.

RECTA enim linea BD, extrema ac media ratione secetur in A, cuius maius segmentum AB, minus autem segmentum AD; & ex maiori segmento AB, detrahatur recta AC, æqualis minori segmento AD. Dico maius segmentum AB, diuisum esse in C, extrema ac media ratione, & maius segmentum esse rectam AC, quæ æqualis est minori segmento AD. Facta enim prioris figura constructione, cùm sit vt BD, ad AB, ita AB, ad AD; [a] *erit rectangulum BL, contentum sub BD, AD, æquale quadrato BF, rectæ AB; & ablato communi BK, erit AL, æquale ipsi IF;* [b] *Est autem AL, ipsi CK, æquale. Aequale igitur est IF, contentũ sub AB, CB, quadrato CK, rectæ AC;* [c] *Ac proinde erit vt AB, ad AC, ita AC, ad CB. Quare AB, secta est in C, extrema ac media ratione, cuius segmentũ maius est AC, minus verò segmentũ recta CB. Quod est propositũ.*

a 17. sexti. b 36. primi c 17. sexti.

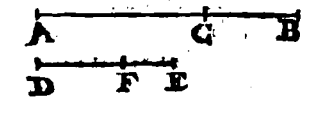
ALITER. Quoniam est vt tota BD, ad totam AB, ita AB, detracta ex BD, ad AD, hoc est, ad AC, detractam ex AB; [d] *erit quoq; ita AD, reliqua ipsius BD, hoc est, AC, ad CB, reliquam ipsius AB, vt tota DB, ad totam AB, hoc est, vt AB, ad AC; Ac propterea diuisa erit AB, in C, extrema & media ratione. Quod est propositum.*

d 19. quin.

RVRSVS & hoc demonstrabimus, quod sequitur.

Si linea secetur extrema ac media ratione, atque ex dimidio illius auferatur dimidia maioris segmenti; Erit quoque dimidia totius diuisa extrema ac media ratione, maiusq; segmentum erit dimidium maioris segmenti totius lineæ.

DIVIDATVR enim AB, extrema ac media ratione in C, sitq; DE, dimidium totius, & DF, dimidium maioris segmenti AC. Dico DE, in F, secari extrema ac media ratione, maiusq; segmentum esse DF.



Cùm enim sit vt AB, tota ad DE totam, ita AC, ablata ad DF, ablatam, cùm vtrobiq; sit proportio dupla; [e] *erit quoque reliqua CB, ad reliquam FE, vt tota ad totam: Ac proinde & CB, dupla erit ipsius FE.* [f] *Quoniam verò est, vt AB, ad AC, ita DE, dimidia illius, ad DF, dimidiam huius: Item vt AC, ad CB, ita DF, dimidia illius, ad FE, dimidiam huius; Est autem ex defin. linea secta extrema ac media ratione, AB, ad AC, vt AC, ad CB; erit quoque DE, ad DF, vt DF, ad FE; Ac proinde ex eadem defin. DE, secta erit in F, extrema ac media ratione. Quod est propositum.*

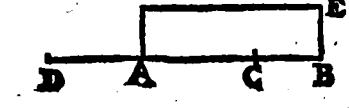
e 19. quinti f 15. quinti.

THEOR. 6. PROPOS. 6.

Si recta linea Rationalis extrema ac media ratione secetur; Vtrumq; segmentorum Irrationalis linea est, quæ vocatur Apotome.

SECETVR recta Rationalis AB, in C, extrema & media ratione. Dico vtrumque segmentum AC, CB, esse lineam Irrationalem, quæ Apotome dicitur. Addatur enim maiori segmento AC, recta AD, æqualis dimidiæ totius AB. [a] Quoniam igitur quadratum rectæ CD, quintuplum est quadrati rectæ AD; habebit quadratum rectæ CD, ad quadratum rectæ AD, proportionem,

a 1. tertiædecimi.



quam numerus ad numerum. [b] Quare commensurabilia erunt quadrata rectarum CD, AD; propterea q; ipsæ rectæ CD, AD, commensurabiles quoque existent, saltem potentia: Est autem AD, Rationalis, cùm sit dimidia lineæ Rationalis AB. Igitur & CD, Rationalis erit. Quia verò quadrata rectarum CD, AD, non habent proportionem, quam numerus quadratus ad numerum quadratum, (vt cõstat ex coroll. propos. 24. lib. 8. Habent enim proportionem quam 5. ad 1. vel 25. ad 5.) [c] erunt rectæ CD, AD, longitudine incommensurabiles: Ac proinde Rationales potentia tantùm commensurabiles. Quare si ex CD, Rationali detrahatur AD, Rationalis potentia tantùm commensurabilis; [d] erit reliqua AC, Irrationalis, quæ appellatur Apotome.

b 6. decimi. c 9. decimi. d 74. decimi

RVRSVS applicato ad AB, rectangulo AE, contento ſub AB, CB; cùm ſit vt AB, ad AC, ita
a 17. ſexti. AC, ad CB; [a] erit rectangulum AE, æquale quadrato rectæ AC. Quam ob rem quadratum Apo-
b 98. deci. tomæ AC, nimirum rectangulum AE, applicatum ſecundùm lineam Rationalem AB, [b] facit alterum latus BE, hoc eſt, rectam CB, illi æqualem, Apotomen primam. Si recta ergo linea Rationalis extrema ac media ratione ſecetur, &c. Quod erat demonſtrandum.

SCHOLIVM.

SED & hoc theorema cum Campano oſtendemus.

Si recta linea ſecundùm extremam & mediam rationem ſecetur, ſitque maius ſegmentum linea Rationalis; erit minus ſegmentum, Apotome.

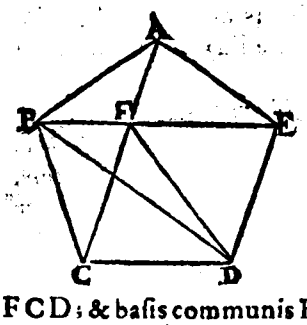
SIT recta AB, extrema ac media ratione diuiſa in C. ſit q; maius ſegmentum AC, linea Rationalis. Dico minus ſegmentum CB, eſſe Apotomen. Diuiſa enim AC, bifariam in D; erit CD, dimidia ipſius Rationalis AC, Rationalis, cùm ſit ipſi AC, commenſurabilis. [a] *Quoniam autem quadratum rectæ BD, quintuplum*
a 3. tertij decimi. *eſt quadrati rectæ CD; habebunt quadrata rectarum BD, CD, proportionẽ, quam*
A D C B *numerus ad numerum;* [b] *ac propterea commenſurabilia exiſtent. Quarè & ipſa*
b 6. decimi *rectæ BD, CD, commenſurabiles erunt, ſaltem potentia. Cùm igitur CD, ſit rationalis, erit quoque BD, Rationalis. Quia verò quadrata rectarum BD, CD, non habent proportionem, quam numerus quadratus ad numerum quadratum; (vt conſtat ex coroll. propoſ. 24. lib. 8. Habent enim proportionem, quam 5. ad 1. vel 25. ad 5.) erunt rectæ BD, CD, longitudine incommenſurabiles; Ac proinde ſi à Rationali BD, detrahatur CD, Rationalis potentia tantùm commenſurabilis;* [c] *erit reliqua CB, Irrationalis, quæ vocatur Apotome.*
c 74. deci.

7. THEOR. 7. PROPOS. 7.

SI pentagoni æquilateri tres anguli, ſiue qui deinceps, ſiue qui non deinceps ſint, æquales fuerint: Aequiangulum erit ipſum pentagonum.

SINT in pentagono æquilatero ABCDE, tres anguli, qui primùm deinceps ſint æquales A, B, C. Dico ipſum pentagonum eſſe æquiangulum. Subtendantur enim dictis angulis æqualibus rectæ BE, AC, BD; & ex puncto F, vbi ſe interſecant rectæ BE, AC, recta ducatur FD. Quoniã igitur latera AB, AE, trianguli ABE, æqualia ſunt lateribus CB, CD, trianguli CBD; & anguli quoq; ipſis contenti æquales, ex hypotheſi: [a] erunt & baſes BE, BD, & anguli AEB, CDB, æquales. [b] Sunt autẽ & anguli BED, BDE, æquales, cùm æqualia ſint oſtenſa latera BE, BD; Toti igitur anguli AED, CDE, æquales erunt. Rurſus quia latera AB, AE, trianguli ABE, æqualia ſunt lateribus BA, BC, trianguli BAC; & anguli quoque ipſis contenti æquales, ex hypotheſi: [c] Erit & baſis BE, baſi AC, æqualis, & anguli ABE, AEB, angulis BAC, BCA, æquales. Cùm ergo æquales ſint anguli ABE, BAC, trianguli ABF; [d] erunt quoq; latera BF, AF, æqualia: Ac propterea ſi ipſa demantur ex rectis æqualibus BE, AC, erunt reliquæ lineæ FE, FC, æquales. Itaque cùm latera FE, ED, trianguli FED, æqualia ſint lateribus FC, CD, trianguli FCD; & baſis communis FD; [e] erunt & anguli dictis lateribus contenti FED, FCD, æquales: Sunt autem & anguli AEB, BCA, oſtenſi æquales. Æquales igitur ſunt toti anguli AED, BCD: Ac proinde cùm angulo AED, oſtenſus ſit æqualis angulus CDE, & angulo BCD, æquales ponantur anguli ABC, BAE; erunt omnes anguli pentagoni æquales, ideoque æquiangulum erit ipſum pentagonum.

a 4. primi.
b 5. primi.
c 4. primi.
d 6. primi.
e 8. primi.



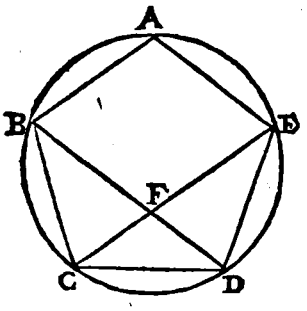
SINT ſecundò tres anguli non deinceps æquales A, C, D. Quoniam igitur latera AB, AE, trianguli ABE, æqualia ſunt lateribus CB, CD, trianguli CBD; & anguli quoque ipſis contenti, æquales, ex hypotheſi; [f] Erunt & baſes BE, BD, & anguli AEB, CDB, æquales; [g] Sunt autem & anguli BED, BDE, æquales, quòd æqualia oſtenſa ſint latera BE, BD. Igitur toti anguli AED, CDE, æquales erunt. Quare cùm æquales ponantur anguli BAE, CDE; erunt tres anguli deinceps æquales A, E, D; Ac proinde, vt iam demonſtratum eſt, pentagonum æquiangulum erit. Si pentagoni igitur æquilateri tres anguli, &c. Quod erat demonſtrandum.

f 4. primi.
g 5. primi.

11. THEOR. 8. PROPOS. 8.

SI pentagoni æquilateri, & æquianguli duos angulos, qui deinceps ſint, ſubtendant rectæ lineæ: hæ extrema & media ratione ſe mutuò ſecant, & maiora ipſarum ſegmenta æqualia ſunt pentagoni lateri.

SVBTENDANTVR in pentagono æquilatero & æquiangulo ABCDE, duobus angulis, qui ſunt deinceps C, D, rectæ DB, CE, ſe mutuò ſecãtes in F. Dico ipſas ſecari extrema ac media ratione, maio-



ne, maioraq; earũ ſegmenta F B, F E, æqualia eſſe lateri cuilibet pentagoni. [a] Deſcripto enim circulo circa pentagonum; [b] erunt quinque arcus A B, B C, C D, D E, E A, æquales. Quia verò latera C D, C B, trianguli C D B, æqualia ſunt lateribus D C, D E, trianguli D C E; & anguli quoque ipſis contenti æquales, ex hypotheſi; [c] Erunt & baſes D B, C E, & anguli C D B, D C E, æquales; Ac proinde cùm in triangulo C D F, duo anguli F C D, F D C, ſint æquales, [d] & ipſis æqualis ſit externus angulus B F C: erit angulus B F C, duplus anguli D C E: [e] Eſt autem & angulus B C E, eiuſdem anguli D C E, duplus, quòd & arcus B A E, arcus D E, ſit duplus. Igitur anguli B F C, B C F, æquales ſunt; [f] Ideoque recta B F, lateri pentagoni B C, æqualis. [g] Quoniam autem anguli D B C, E C D, arcubus æqualibus inſiſtentes, æquales ſunt; erunt duo anguli D B C, C D B, trianguli B C D, æquales duobus angulis D C F, F D C, trianguli C F D: [h] Ac proinde æquiangula erunt triangula B C D, C F D. [i] Quare erit vt B D, ad D C, hoc eſt, ad B F, æqualẽ ipſi D C, ita C D, hoc eſt, ſibi æqualis B F, ad F D: Ac propterea B D, ſecta eſt in F, extrema ac media ratione, eſtque maius ſegmentum B F, lateri pentagoni æquale, vt oſtenſum eſt. Simili ratione oſtendemus, rectam C E, ſecari in F, extrema ac media ratione, maiusque illius ſegmentum E F, æquale eſſe lateri pentagoni D E. Itaque ſi pentagoni æquilateri & æquianguli duos angulos, &c. Quod erat oſtendendum.

[a] 14. quarti. [b] 28. tertij. [c] 4. primi. [d] 32. primi. [e] 33. ſexti. [f] 6. primi. [g] 27. tertij. [h] 32. primi. [i] 4. ſexti.

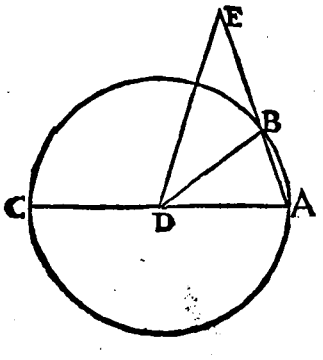
SCHOLIVM.

FACILE etiam demonſtrabimus, rectam, qua angulum pentagoni æquilateri & æquianguli ſubtendit, parallelam eſſe oppoſito lateri: hoc eſt, B D, parallelam eſſe lateri A E; & C E, lateri A E. Deſcripto enim circulo circa pentagonum; [a] *Quoniam tam duo anguli A, & B C E, quàm duo A B C, A E C, duobus rectis æquales ſunt: Sunt autem A, & A B C, inter ſe æquales in pentagono æquiangulo; erunt & reliqui anguli B C E, A E C, æquales. Cùm ergo A, & B C E, duobus ſint rectis æquales; erunt etiam A, & A E C, duobus rectis æquales:* [b] *ac proinde A B, C E, parallelæ erunt. Quod eſt propoſitum.*

[a] 22. tertij. [b] 28. primi

THEOR. 9. PROPOS. 9. 9.

SI hexagoni latus, & decagoni, in eodem circulo deſcriptorum, componantur: Tota recta linea extrema ac media ratione ſecatur, & maius eius ſegmentum eſt hexagoni latus.



IN circulo A B C, ſit latus decagoni A B, cui in rectum addatur B E, æqualis ſemidiametro circuli, ac proinde lateri hexagoni eidem circulo inſcripti. Dico E A, rectam ſectam eſſe in B, extrema ac media ratione, maiusque ſegmentum eſſe E B, latus hexagoni. Ducatur enim ex A, per centrum D, diameter A C, coniunganturque rectæ D B, D E. Quoniam igitur A B, arcus, eſt decima pars totius peripheriæ circuli; continebit arcus ſemicirculi arcum A B, quinquies; Ac proinde arcus B C, quadruplus erit arcus A B. [a] Quare & angulus B D C, anguli A D B, quadruplus erit. Rurſus quia latera B D, B E, ſunt æqualia, nempe latera hexagoni; (eſt enim B E, latus hexagoni ſemidiametro B D, æquale, ex coroll. propoſ. 15. libri 4.) [b] erunt & anguli B D E, B E D, æquales: [c] quibus cũ æqualis ſit externus A B D; erit angulus A B D, duplus anguli B E D: [d] Eſt aũt angulus A B D, æqualis angulus B A D, ob æqualitatẽ laterum D A, D B. Igitur & angulus B A D, duplus erit anguli B E D: ac proinde duo anguli D A B, D B A, ſimul quadrupli erunt anguli B E D. [e] Cùm ergo angulis D A B, D B A, æqualis ſit externus B D C; erit angulus B D C, quadruplus eiuſdem anguli B E D: Atqui idem angulus B D C, oſtenſus fuit quadruplus anguli A D B. Igitur æquales ſunt anguli A E D, A D B. Quocirca cũ duo anguli A E D, D A E, trianguli A D E, æquales ſint duobus angulis A D B, B A D, trianguli A B D; [f] erunt triangula A D E, A B D, æquiangula. [g] Igitur erit vt E A, ad A D, hoc eſt, ad E B, ipſi A D, æqualem, ita A D, hoc eſt, E B, ſibi æqualis ad B A; Atque idcircò recta E A, ſecta eſt in B, extrema & media ratione, eſtque maius ſegmentum E B, latus hexagoni. Itaque ſi hexagoni latus, & decagoni, in eodem circulo deſcriptorum, componantur: Tota recta linea extrema ac media ratione ſecatur, & maius eius ſegmentum eſt hexagoni latus. Quod erat demonſtrandum.

[a] 33. ſexti. [b] 5. primi. [c] 32. primi. [d] 5. primi. [e] 32. primi. [f] 32. primi. [g] 4. ſexti.

SCHOLIVM.

QVIA verò demonſtrauimus ad propoſ. 5. huius libri, ſi minus ſegmentum linea diuiſæ extrema ac media ratione ex maiori ſegmento detrahatur; maius ſegmentum ſecari quoque extrema & media ratione, eiusq; ſegmentum maius eſſe minus ſegmentum detractum. Hic autem oſtenſum eſt, latus hexagoni compoſitum cum latere decagoni, ſecari extrema ac media ratione: Fit, ſi latus hexagoni ſecetur extrema & media ratione, maius illius ſegmentum eſſe latus decagoni. Nam ſi hoc detrahatur ex latere hexagoni, quod eſt

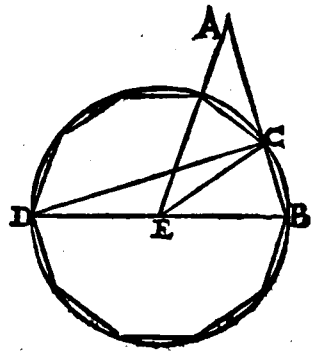
maius ſegmentum, diuiſum erit hexagoni latus extrema ac media ratione, vt ad propoſ.5. huius libri oſtendimus. Hoc tamen aliter demonſtrabimus lib.14. propoſ.4.

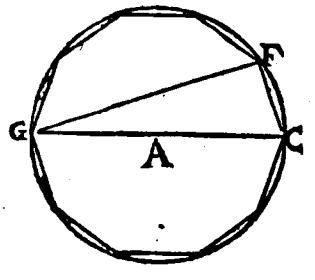
CONVERSVM quoq; huius theorematis facilè cum Campano demonſtrabimus: Videlicet.

Si lineæ diuiſæ extrema ac media ratione maius ſegmentum fuerit latus hexagoni alicuius circuli; Erit minus ſegmentum latus decagoni eiuſdem circuli. Quòd ſi minus ſegmentum fuerit latus decagoni alicuius circuli; Erit maius ſegmentum latus hexagoni eiuſdem circuli.

SIT enim AB, diuiſa in C, extrema & media ratione, ſitq; primùm AC, latus hexagoni circuli BCD. Dico minus ſegmentum CB, eſſe eiuſdem circuli latus decagoni. Coaptetur enim BC, in circulo, ita vt CA, extra circulum cadat. Et ducta ex B, per centrum E, diametro BED, connectantur recta EA, EC. Quia ergo eſt vt AB, ad AC, ita AC, ad CB; & eſt AC, latus hexagoni æquale ſemidiametro EB, ex coroll. propoſ.15. libri 4. Erit quoque vt AB, ad BE, ita EB, ad BC, [a] *ideoq; triangula ABE, EBC, æquiangula erunt, cùm habeant latera circa communem angulum B, proportionalia: eritq; angulus A, angulo BEC, æqualis. Rurſus quia latera CA, CE, æqualia ſunt, nempe latera hexagoni;* [b] *erunt anguli CAE, CEA, æquales;* [c] *quibus cùm æqualis ſit externus BCE, erit BCE, duplus anguli A:* [d] *Eſt autem angulo BCE, angulus CBE, ob æqualitatem laterum EB, EC, æqualis. Igitur & CBE, duplus erit anguli A; Ac proinde duo anguli BCE, CBE, ſimul quadrupli erunt eiuſdem anguli A.* [e] *Cùm ergo angulis BCE, CBE, æqualis ſit externus CED; erit quoque angulus CED, eiuſdem anguli A, & propterea anguli BEC, qui æqualis oſtenſus eſt angulo A, quadruplus.* [f] *Quare & arcus CD, quadruplus erit arcus BC; Ac proinde arcus ſemicirculi BCD, eiuſdem arcus BC, quintuplus exiſtet, ideoq; tota peripheria circuli decupla erit arcus BC. Quapropter recta BC, latus eſt decagoni.*

a 6. ſexti.
b 5. primi.
c 32. primi.
d 5. primi.
e 32. primi.
f 33. ſexti.



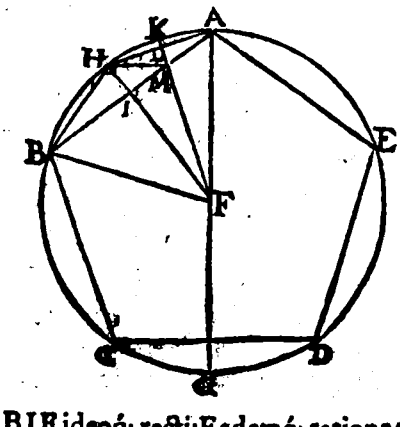


SIT deinde CB, minus ſegmentum, latus decagoni circuli BCD. Dico maius ſegmentum AC, eſſe eiuſdem circuli latus hexagoni. Coaptetur enim rurſus BC, in circulo BCD, ducaturq; diameter BED. Deinde interuallo AC, deſcribatur circulus CFG, cuius diameter CAG; eritq; ex corollario propoſ.14. lib.4. AC, latus hexagoni circuli CF. Quoniam igitur AB, ſecta eſt in C, extrema ac media ratione, eſtq; maius ſegmentum AC, latus hexagoni circuli CFG; erit, vt iam oſtenſum eſt, minus ſegmentum CB, latus decagoni eiuſdem circuli CFG. Deſcribatur ergo in circulo CFG, decagonum æquilaterum & æquiangulum CFG; Item in circulo BCD, decagonum æquilaterum, & æquiangulum BCD; eruntq; latera BC, CF, inter ſe æqualia. Quoniam verò, ſi connectantur rectæ CD, FG, anguli CDB, FGC, ſunt æquales, vt in ſcholio propoſ.22. lib.3. oſtendimus, quòd inſiſtant arcubus ſimilibus BC, CF, nempe decimis partibus peripheriarum; [g] *& ſunt quoq; anguli BCD, CFG, in ſemicirculis æquales, & nimirum recti:* [h] *Erunt quoq; latera BD, CG, inter ſe æqualia. Quam ob rem cùm diametri BD, CG, ſint æquales, æquales quoq; erunt circuli BCD, CFG. Ac proinde, cùm recta AC, ſit latus hexagoni circuli CFG, erit quoq; eadem recta AC, latus hexagoni circuli BCD. Quod eſt propoſitum.*

g 31. tertij.
h 26. primi

10. THEOR. 10. PROPOS. 10.

Si in circulo pentagonum æquilaterum deſcribatur; Pentagoni latus poteſt & latus hexagoni, & latus decagoni, in eodem circulo deſcriptorum.



In circulo ABCDE, cuius centrũ F, deſcriptũ ſit pentagonum æquilaterum. Dico quadratũ lateris AB, æquale eſſe quadrato lateris hexagoni, vnà cũ quadrato lateris decagoni eiuſdem circuli. Ducatur enim diameter AFG, & connectatur recta FB. Diuiſo deinde arcu AB, bifariam in H, connectantur rectæ AH, BH, & FH, ſecans rectam AB, in I, eritq; recta AH, latus decagoni, & BF, latus hexagoni. Rurſus diuiſo arcu AH, bifariã in K, adiungatur recta FK, ſecans rectã AH, in L, & rectam AB, in M, puncto, ad quod recta ducatur HM. Quoniã igitur arcus AH, BH, æquales ſunt; [a] *erunt & anguli ipſis inſiſtẽtes AFH, BFH, æquales. Quare cũ latera AF, FI, trianguli AFI, æqualia ſint lateribus BF, FI, trianguli BFI, & anguli ipſis contenti æquales quoq;:* [b] *erunt & baſes AI, BI, æquales, & anguli AIF, BIF, ideoq; recti: Eademq; ratione æquales erũt rectæ AL, HL, & anguli ALF, HLF, recti. Deinde ſi ex ſemicirculis æqualib. ABCG, AEDG, demãtur æquales arcus ABC, AED; relinquẽtur arcus*

a 27. tertij.
b 4. primi.

GG, DG,

D G, inter ſeſe æquales, ideoq; erit arcus C G, dimidium arcus C D. Eſt autem & arcus A H, dimidium arcus A B. Igitur cùm arcus A B, C D, æquales ſint; erunt quoq; eorum dimidij arcus C G, A H, æquales; Ac proinde cùm arcus A H, duplus ſit arcus H K, erit & arcus C G, duplus eiuſdem arcus H K. Eodem modo, quia arcus A B, B C, æquales ſunt, & eſt arcus A B, duplus arcus B H, erit etiam arcus B C, eiuſdem arcus B H, duplus. Quare arcus C G, B C, æquemultiplices ſunt, nempe dupli, arcuum H K, B H; [a] Ac propterea totus arcus B G, duplus quoque erit totius arcus B K; [b] & idcircò angulus quoque B F G, duplus anguli B F K: [c] Sed quia idem angulus B F G, ad centrum duplus eſt quoque anguli F A B; erunt idcircò anguli B F M, F A B, æquales; [d] Ac propterea triangula A B F, F B M, cùm habeant angulos F A B, M F B, æquales, & angulum A B F, communem, æquiangula erunt. [e] Quocirca erit vt A B, ad B F, ita B F, ad B M; [f] ideoque rectangulum ſub A B, B M, æquale erit quadrato rectæ B F.

a 1. quinti. b 33. ſexti. c 20. tertij. d 32. primi. e 4. ſexti. f 17. ſexti.

RVRSVS quia latera A L, L M, triáguli A L M, æqualia ſunt lateribus H L, L M, triáguli H L M, & anguli quoque ipſis contenti æquales, nempe recti: [g] erunt & baſes A M, H M, & anguli L A M, L H M, æquales. [h] Eſt autem angulus L A M, angulo H B A, æqualis, [i] & latera H A, H B, æqualia ſunt. Igitur & angulus L H M, eidem angulo H B A, æqualis erit; [i] Ac propterea triangula A B H, A H M, cùm habeát angulos A B H, A H M, æquales, & angulum H A M, communem, æquiangula erunt. [k] Quam ob rem erit vt A B, ad A H, ita A H, ad A M; [l] ideoq; rectangulum ſub A B, A M, æquale erit quadrato rectæ A H: Oſtenſum eſt autem & rectangulum ſub A B, B M, æquale quadrato rectæ B F. Igitur rectangula ſub A B, B M, & ſub A B, A M, ſimul æqualia ſunt quadratis rectarum B F, A H: [m] At verò rectangula ſub A B, B M, & ſub A B, A M, æqualia ſunt quadrato rectæ A B. Quadratum ergo rectæ A B, nempe lateris pentagoni, æquale eſt quadratis rectarũ B F, A H, lateris videlicet hexagoni, & lateris decagoni. Si igitur in circulo pentagonum æquilaterum deſcribatur, &c. Quod erat demonſtrandum.

g 4. primi. h 5. primi. i 32. primi. k 4. ſexti. l 17. ſexti. m 2. ſecũdi.

COROLLARIVM I.

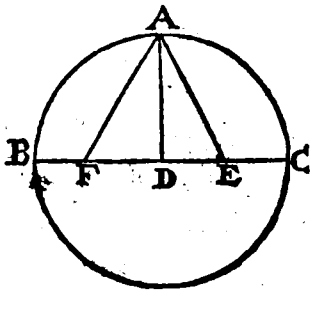
HINC ſequitur, lineam rectam, quæ ex centro diuidit arcum quempiam bifariam, diuidere quoq; rectam illi arcui ſubtenſam bifariam, & ad angulos rectos. Oſtenſum enim eſt, rectam F H, propterea quòd arcum A B, diuidit bifariam, diuidere quoq; rectam A B, bifariam in I, & ad angulos rectos. Eademq; in cæteris eſt demonſtratio.

COROLLARIVM II.

PERSPICVVM quoq; eſt, diametrum circuli ex angulo quouis pentagoni ductam diuidere & arcum, quem latus pentagoni illi angulo oppoſitũ ſubtendit, & latus ipſum oppoſitum bifariam, & ad angulos rectos. Demonſtratum enim eſt, diametrum A G, ex puncto A, ductam, diuidere arcum C D, quem latus oppoſitum C D, ſubtendit, bifariam. Quare ex prafato corollario, cùm tranſeat per centrum, ſecabit quoque latus C D, bifariam, & ad angulos rectos. Eadem demonſtratio erit in omni polygono æquilatero in circulo deſcripto, ſi numerus laterum fuerit impar, vt conſtat.

SCHOLIVM.

QVONIAM ad finẽ lib. 4. praxim quandam ex Ptolemæo tradidimus, qua vna eademq; opera in dato circulo & pentagonum, & decagonum æquilaterũ deſcribitur, eiusq; demonſtrationem in hunc locum diſtulimus; paucis nunc à nobis ea demonſtranda eſt. Sit igitur datus circulus A B C, cuius centrũ D. Ducta autem diametro B C, erigatur D A perpendicularis ad B C. Deinde diuiſa ſemidiametro C D, bifariã in E, ducatur recta E A, cui æqualis abſcindatur E F, adiungaturq; recta A F. Dico rectam A F, eſſe latus pentagoni, & D F, latus decagoni. Cùm enim C D, ſecta ſit bifariam in E, eiq; addita D F; [a] erit rectangulum ſub C F, D F, vnà cum quadrato rectæ D E, æquale quadrato rectæ E F, ideoq; quadrato rectæ E A, quæ ipſi E F, eſt æqualis. [b] Eſt autem quadratum rectæ E A, æquale quadratis rectarũ A D, D E. Igitur rectangulum ſub C F, D F, vnà cum quadrato rectæ D E, æquale eſt quadratis rectarũ A D, D E; Ac proinde, dempto communi quadrato rectæ D E, relinquetur rectangulum ſub C F, D F, æquale quadrato rectæ A D, hoc eſt, quadrato rectæ C D. [c] Quam ob rem erit vt C F, ad C D, ita C D, ad D F; propterea q; recta C F, diuiſa erit in D, extrema ac media ratione. Cùm igitur maius ſegmẽtum C D, ſit latus hexagoni circuli A B C, ex coroll. propoſ. 15. lib. 4. erit minus ſegmẽtum D F, latus decagoni eiuſdem circuli, vt demonſtrauimus ad propoſ. 9. huius lib. [d] Rurſus quoniã quadrato lateris hexagoni A D, vnà cum quadrato lateris decagoni D F, æquale eſt quadratum lateris pentagoni eiuſdem circuli; [e] Eſt autem eiſdem quadratis rectarum A D, D F, æquale quadratum rectæ A F; erit quadratum lateris pentagoni æquale quadrato rectæ A F; ac propterea recta A F, lateri pentagoni æqualis. Quod eſt propoſitum.



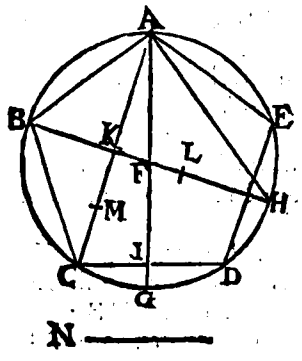
a 6. ſecũdi. b 47. primi c 17. ſexti. d 10. tertij. decimi. e 47. primi

THEOR. II. PROPOS. II. 12.

SI in circulo, Rationalem habente diametrum, pentagonum æquilaterum de-

ſcribatur: Pentagoni latus Irrationalis eſt linea, quæ vocatur Minor.

IN circulo A B C D E, habente diametrum Rationalem, deſcribatur pentagonũ æquilaterum A B C D E. Dico eius latus A B, eſſe lineam Irrationalem, quę dicitur Minor. Ducantur enim per centrum F, diametri A G, B H, ſecetq́ue A G, latus C D, in I, connectanturq́; rectæ A C, A H, quarum A C, ſecet diametrum B H, in K. Abſcindatur quoq; ex ſemidiametro F H, quarta eius pars F L; Item ex recta A C, quarta eius pars C M. Quia igitur diameter B H, ponitur Rationalis; erunt quoque F L, B F, illi commenſurabiles, cùm ſint eius partes aliquotæ, Rationales; Atque idcircò & tota B L, compoſita, [a] cùm ſit commenſurabilis vtriq; F L, B F, Rationalis erit.



[a] 16. decimi.

RVRSVS quoniam recta F B, ex centro ducta ſecat arcum A C, bifariam in B; ſecabit quoq; rectam A C, bifariam in L, & ad angulos rectos, ex coroll. 1. præcedentis propoſ. Secat autem & recta A G, rectam C D, in I, bifariam, & ad angulos rectos, ex coroll. 2. eiuſdem propoſ. Triangula ergo A C I, A F K, cũ habeãt angulos A I C, A K F, rectos, & angulum C A I, communẽ, [b] æquiangula inter ſe erũt. [c] Quamobrem erit vt C I, ad C A, ita F K, ad F A; & permutando vt C I, ad F K, ita C A, ad F A, ſiue ad F H, ipſi F A, æqualem: [d] Vt autem C A, ad F H, ita eſt C M, quarta pars ipſius C A, ad F L, quartam partẽ ipſius F H. Erit igitur vt C I, ad F K, ita C M, ad F L; & permutando vt C I, ad C M, hoc eſt, vt C D, dupla ipſius C I, ad C K, duplam ipſius C M, ita F K, ad F L; Atq; componẽdo, vt C D, C K, ſimul ad C K, ita F K, F L, ſimul, nimirum recta K L, ad F L; [e] Ac propterea erit, vt quadratũ rectæ compoſitæ ex C D, C K, ad quadratum rectæ C K, ita quadratum rectæ K L, ad quadratũ rectę F L. Quia verò ſi A C, ſecetur extrema ac media ratione, (ducta videlicet recta B D,) [f] maius eius ſegmentum æquale eſt lateri pentagoni, nimirum ipſi C D; [g] Erit quadratum rectæ compoſitæ ex C D, maiori ſegmento, & C K, dimidia totius, quintuplum quadrati rectæ C K, dimidiæ ſcilicet totius. Quare & quadratum rectæ K L, quintuplum erit quadrati rectæ F L; [h] ideoq; quadratũ rectæ K L, commenſurabile erit quadrato rectæ F L; Ac proinde rectæ K L, F L, commenſurabiles quoque erunt, ſaltem potentia: Eſt autem F L, oſtenſa Rationalis. Igitur & K L, Rationalis erit.

[b] 32. primi. [c] 4. ſexti. [d] 15. quinti. [e] 22. ſexti. [f] 8. tertiædecimi. [g] 1. tertiædecimi. [h] 6. decimi.

DEINDE quia qualium partium 4. eſt B F, talium 1. eſt F L; ac propterea qualium 5. eſt B L, talium 1. eſt F L; erit quadratũ rectæ B L, talium partium 25. qualium 1. eſt quadratũ rectæ F L, (vt in his numeris patet 1. 5. 25.) [i] habent enim quadrata proportionẽ laterum duplicatam.) Qualium verò partium 1. eſt quadratũ rectæ F L, talium 5. oſtenſum eſt quadratum rectæ K L. Qualium igitur 25. eſt quadratũ rectæ B L, talium 5. eſt quadratũ rectæ K L; ac proinde quadratũ rectæ B L, quintuplum erit quadrati rectæ K L. Quia ergo quadrata rectarum B L, K L, proportionẽ non habent, quam numerus quadratus ad numerum quadratũ, (vt patet ex coroll. propoſ. 24. lib. 8. Eſt enim eorum proportio, quæ 25. ad 5. vel 5. ad 1.) [k] Erũt rectæ B L, K L, longitudine incommenſurabiles: ideoq́ue, cùm oſtenſæ ſint Rationales, erunt Rationales potentia tantũ commenſurabiles. Quare ſi ex Rationali B L, demat̃ur Rationalis K L, potentia tantùm commenſurabilis; [l] erit reliqua E K, Irrationalis, quæ dicitur Apotome, ei verò congruens erit K L.

[i] 20. ſexti. [k] 9. decimi. [l] 74. decimi

IAM verò recta B L, poſsit plus q̃ recta K L, quadrato rectæ N. Quoniam igitur quadratũ rectæ B L, æquale eſt quadratis rectarum K L, & N; Qualium autẽ partium 5. fuit quadratũ rectæ B L, talium 1. fuit quadratum rectæ K L; Erit reliquum quadratũ rectæ N, talium partium 4. qualium 5. eſt quadratum rectæ B L; Ac propterea quadrata rectarum B L, & N, proportionem habebunt, quam numerus ad numerum. [m] Quare commenſurabilia erunt; propterea q́; rectę ipſæ B L, & N, commenſurabiles, ſaltem potentia: Eſt autem B L, oſtenſa Rationalis. Rationalis igitur erit & N. Quia verò quadrata rectarum B L, & N, proportionem non habent, quam numerus quadratus ad numerum quadratum; (vt perſpicuum eſt ex coroll. propoſ. 24. lib. 8. quòd proportio eorum ſit, quæ 5. ad 4.) [n] Erunt rectæ B L, & N, longitudine incommenſurabiles; Ac proinde Rationales potentia tantùm commenſurabiles. Quapropter cùm tota recta B L, Rationalis, longitudine ſit commenſurabilis Rationali B H; (Qualium enim partium 8. eſt B H, talium 5. eſt B L,) poſsitq́ue plus, quàm congruens K L, quadrato rectæ N, ſibi longitudine incommenſurabilis, vt oſtenſum eſt: Erit B K, Apotome quarta, ex definitione.

[m] 6. decimi. [n] 9. decimi.

POSTREMO, quia recta A B, eſt media proportionalis inter B H, B K, ex coroll. propoſ. 8. lib. 6. (quòd triangulum A B H, [o] habeat angulum B A H, rectum, à quo ducta eſt A K, ad baſin perpendicularis) [p] erit quadratũ rectæ A B, æquale rectangulo ſub B H, B K. Quocirca cùm ſuperficiem contentam ſub Rationali B H, & Apotoma quarta B K, poſsit recta linea A B. [q] Erit A B, linea Minor. Si igitur in circulo Rationalem habente diametrum, &c. Quod erat demonſtrandum.

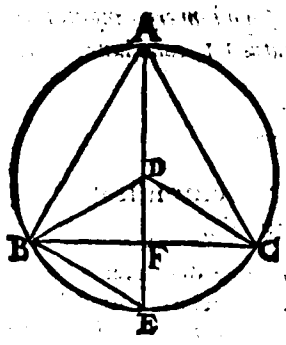
[o] 31. tertij. [p] 17. ſexti. [q] 95. decimi

8. THEOR. 12. PROPOS. 12.

SI in circulo triangulum æquilaterum deſcribatur; Trianguli latus, potentia triplum eſt eius lineæ, quæ ex centro circuli ducitur.

IN circulo A B C, cuius centrum D, triangulum æquilaterum inſcribatur A B C. Dico quadratum lateris A B, triplum eſſe quadrati ex ſemidiametro. Ducta enim diametro A E, quæ ſecet, ex

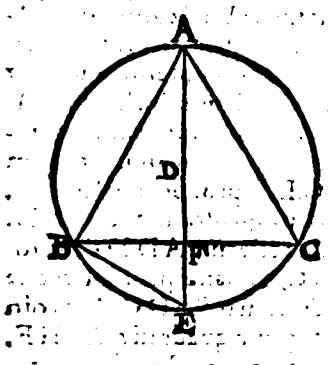
corollario



corollario 2. propoſ. 10. huius lib. arcum B C, bifariam in E, & rectam B C, bifariam quoque & ad angulos rectos in puncto F; cùm arcus B C, ſit tertia pars totius peripheriæ, erit arcus B E, eiuſdem peripheriæ ſexta pars, ideoque coniuncta recta B E, latus erit hexagoni, & æqualis ſemidiametro circuli, ex corollario propoſ. 15. libri 4. Quod etiam ita probabitur. Semicirculus A B E, continet tres ſextas partes totius circuli; arcus verò A B, cùm ſit tertia pars totius circuli, duas ſextas comprehendit eiuſdem circuli. Igitur arcus B E, ſexta pars eſt eiuſdem, ac proinde recta B E, latus eſt hexagoni, & æqualis ſemidiametro D E, ex corollario propoſ. 15. lib. 4. [a] Quoniam igitur quadratum rectæ A E, æquale eſt quadratis rectarum A B, B E, [b] quod angulus A B E, in ſemicirculo rectus ſit; Eſt autem quadratum rectæ A E, quadruplum quadrati rectæ B E, ex ſcholio propoſ. 4. lib. 2. quòd linea A E, dupla ſit lineæ B E; erunt quadrata rectarum A B, B E, ſimul, quadrupla quoque quadrati eiuſdem rectæ B E. Ac propterea qualium partium 4. ſunt quadrata rectarum A B, B E, talium partium 1. erit quadratum rectæ B E; & idcircò talium partium 3. erit quadratum rectæ A B. Quare quadratum rectæ A B, triplum eſt quadrati rectæ B E, quæ æqualis eſt ſemidiametro. Si igitur in circulo triangulum æquilaterum deſcribatur, &c. Quod erat oſtendendum.

[a] 47. primi.
[b] 31. tertij.

COROLLARIVM I.



SEQVITVR ex his, diametrum circuli potentia eſſe ſeſquitertiam lateris trianguli æquilateri in eò circulo deſcripti. Nam cùm latus A B, oſtenſum ſit potentia triplum ſemidiametri A D; poſito quadrato ex A B, 3. erit quadratum ex A D, 1. atq; adeò quadratum ex A E, quod ex ſcholio propoſitionis 4. libri 2. quadruplum eſt quadrati ex A D, erit 4. Quare quadratũ ex A E, quadrati ex A B, ſeſquitertium eſt, hoc eſt, proportionem habet, quam 4. ad 3.

ET quia ex corollario propoſitionis 8. libri 6. vt eſt A E, ad A B, ita ſe habet A B, ad A F; erit quoque latus trianguli æquilateri A B, perpendicularis A F, ex vno angulo ad baſim demiſſa potentia ſeſquitertium: quod tamen aliter demonſtrabitur ab Euclide lib. 14. propoſ. 12.

COROLLARIVM II.

HINC facilè etiam colligi poteſt, ſemidiametrum D E, bifariam ſecari in F, à latere trianguli B C. Cùm enim quadratum rectæ A B, triplum ſit quadrati rectæ B E; ſi ponatur quadratum rectæ A B, partium 12. erit quadratum rectæ B E, talium partium 4. [a] Eſt autem quadratum rectæ B E, æquale quadratis rectarum B F, F E. Igitur & talium partium 4. erunt quadrata rectarum B F, F E. Eſt autem talium partium 3. quadratum rectæ B F, (quòd quadratum rectæ A B, quadruplum ſit quadrati rectæ B F, ex ſcholio propoſitionis 4. lib. 2. Eſt enim A B, dupla ipſius B F.) Igitur talium 1. erit quadratum rectæ F E; Ac proinde quadratum rectæ B E, hoc eſt, quadratum rectæ D E, ſibi æquale, quadruplum erit quadrati rectæ F E. Quare ex ſcholio propoſ. 4. lib. 2. recta D E, dupla erit ipſius F E. Quocirca D E, bifariam ſecatur in F.

[a] 47. primi.

SCHOLIVM.

Hoc tamen corollarium aliter demonſtrabitur, hoc theoremate propoſito.

SI in circulo triangulum æquilaterum deſcribatur; Diameter ex vno angulo ducta, diuidet & angulum bifariam, & latus oppoſitum, ac inſuper ad angulos rectos; Semidiameter quoque vicisſim bifariam, & ad angulos rectos ſecabitur à latere oppoſito.

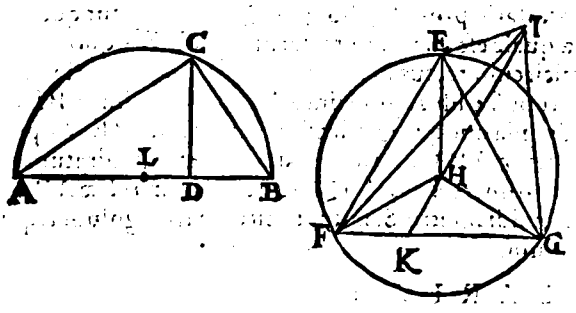
IN circulo A B C, cuius centrum D, triangulum æquilaterum inſcribatur A B C. Dico rectam A E, per centrum D, ductam, hoc eſt, diametrum, ſecare bifariam & angulum B A C, & latus B C, nec non ad angulos rectos; Semidiametrum quoque D E, ſecari à latere B C, bifariam, & ad angulos rectos. Ductis enim rectis B D, C D, B E; cùm latera A B, A D, æqualia ſint lateribus A C, A D, trianguli C A D; & baſes B D, C D, æquales quoque: [b] Erunt anguli B A D, C A D, æquales. Quod eſt primum. Deinde, cùm latera A B, A F, trianguli B A F, æqualia ſint lateribus A C, A F, trianguli C A F, & anguli ipſis contenti æquales oſtenſi: [c] Erunt & baſes B F, C F, & anguli ad F æquales, ideoq; recti. Quod eſt ſecundum. Poſtremò, cùm anguli B A E, C A E, demonſtrati ſint eſſe æquales: [d] erunt & arcus B E, C E, æquales. Quare cùm B E C, arcus ſit tertia pars circumferentiæ, erit B E, ſexta pars eiuſdẽ; Ac propterea recta B E, latus hexagoni, atq; ſemidiametro proinde B D,

[b] 8. primi.
[c] 4. primi.
[d] 26. tertij.

a 5. primi. *æquales, ex coroll. propoſ. 15. lib. 1.* [a] *Igitur anguli B D E, B E D, æquales erunt. Quoniam ergo anguli B D F,*
b 26. primi *B F D, trianguli D B F, æquales ſunt angulis B E F, B F E, trianguli E B F, & latus B F, commune;* [b] *Erunt*
& latera D F, E F, æqualia. Quod eſt tertium.

13. ## PROBL. I. PROPOS. 13.

PYRAMIDEM conſtituere; & data ſphæra complecti; & demonſtrare, quòd ſphæræ diameter potentia ſit ſeſquialtera lateris ipſius pyramidis.



SIT datæ ſphæræ diameter A B, circa quam ſemicirculus deſcribatur A B C; & ex A B, auferatur tertia pars B D, vt ſit A D, ipſius D B, dupla; at verò A B, eiuſdem D B, tripla; & ipſius A D, ſeſquialtera. Deinde ducta D C, perpendicularis ad A B, connectantur rectæ A C, B C. Ad interuallum rectæ H E, quæ æqualis ſit ipſi D C, deſcribatur circulus E F G, cuius centrum H, in quo triangulum æquilaterum inſcribatur E F G, adiunganturque rectæ H F, H G, quæ ſingulæ æquales erunt ipſi D C, cùm æquales ſint ipſi H E, ad cuius interuallum deſcriptus eſt circulus. Erigatur deinde ex H, ad planum circuli perpendicularis H I, quæ æqualis ponatur rectæ A D, & ex I, demittantur rectæ I E, I F, I G. Dico ſolidum contentum quatuor triangulis F E G, I E F, I F G, I E G, eſſe Pyramidem, ſiue Tetraedrum. Quoniam enim latera D A, D C, trianguli A D C, æqualia ſunt lateribus H I, H E, trianguli I H E, & anguli ipſis contenti, rec-
d 4. primi. ti, ex hypotheſi, & 3. defin. lib. 11. [d] erit baſis A C, baſi I E, æqualis. Non aliter oſtendemus eandem rectam A C, æqualem eſſe rectis I F, I G. Rurſus quia tres lineæ A D, D C, D B, proportionales ſunt, ex coroll. propoſ. 8. lib. 6. erit, ex coroll. propoſ. 20. lib. 6. vt A D, ad D B, ita quadratum rectæ A D, ad quadratum rectæ D C; & componendo, vt A B, ad D B, ita quadrata rectarum A D, D C, simul
b 47. primi. ad quadratum rectæ D C: [b] Sunt autem quadrata rectarum A D, D C, æqualia quadrato rectæ A C. Igitur erit quoq; vt A B, ad D B, ita quadratum rectæ A C, ad quadratum rectæ D C; Ac proin de cùm A B, ſit ipſius D B, tripla, erit quoque quadratum rectæ A C, triplum quadrati rectæ H E,
c 12. tertij. cùm H E, æqualis ſit ipſi D C: [c] Atqui & quadratum rectæ E F, triplum quoque eſt eiuſdem quadrati rectæ H E. Quadratum ergo rectæ A C, quadrato rectæ E F, æquale erit; & propterea recta A C, rectæ E F. Quare cùm recta A C, oſtenſa quoque ſit æqualis rectis I E, I F, I G; erunt quatuor triangula E F G, E F I, F G I, G E I, æquilatera & æqualia inter ſe. Conſtituta igitur iam eſt pyramis, ſeu Tetraedrum, cuius baſis E F G, vertex verò I. Dico pyramidem hanc comprehendi ſphæra data, cuius diameter A B; & diametrum ſphæræ A B, potentia ſeſquialteram eſſe lateris E F, vel A C.

EXTENDATVR perpendicularis I H, vſque ad K, vt ſit H K, ipſi D B, & tota I K, toti A B, æqualis. Quia ergo tres rectæ A D, D C, D B, proportionales ſunt, quibus æquales exiſtũt tres I H, H E, H K; erunt quoque I H, H E, H K, proportionales. Quare cùm H E, ſit ad I K, perpendicularis, & media proportionalis inter I H, H K, ſemicirculus circa I K, deſcriptus in plano rectarum I K, H E, tranſibit per E, vt mox oſtendetur: Eodemque argumento tam ſemicirculus circa eandem rectam I K, deſcriptus in plano rectarum I K, H F, tranſibit per F, quàm ſemicirculus circa eandem I K, deſcriptus in plano rectarum I K, H G, per G. Igitur quilibet horum ſemicirculorum circumductus, manente fixa diametro, ſphæram deſcribet, quæ conſtitutum Tetraedrum complectitur, cùm per omnes illius angulos E, F, G, I, incedat. Cùm ergo hæc ſphæra deſcripta æqualis ſit ſphæræ datæ, quòd diameter I K, æqualis ponatur diametro A B, comprehendetur idem Tetraedrum ſphæra data.

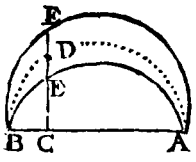
QVONIAM verò tres rectæ A B, A C, A D, proportionales ſunt, ex coroll. propoſ. 8. lib. 6. erit vt A B, ad A D, ita quadratum rectæ A B, ad quadratum rectæ A C, ex coroll. propoſ. 20. lib. 6. Eſt autem recta A B, ſeſquialtera rectæ A D, quòd qualium partium 3. eſt A B, talium 2. ſit A D. Igitur & quadratum rectæ A B, ſeſquialterum erit quadrati rectæ A C; Ac propterea cùm A B, ſit diameter ſphæræ, & A C, recta lateri pyramidis E F, æqualis; perſpicuum eſt, diametrum ſphæræ potentia ſeſquialteram eſſe lateris Tetraedri, ſeu pyramidis. Pyramidem ergo conſtituimus, & data ſphæra complexi ſumus, &c. Quod erat faciendum.

LEMMA.

QVOD autem ſemicirculus circa I K, in plano rectarum I K, H E, deſcriptus, tranſeat per E, facilè demonſtrabitur, hoc propoſito theoremate.

SI ad lineã rectam perpendicularis ducatur, quæ ſit media proportionalis inter ſegmenta lineæ; ſemicirculus circa illam lineam rectam deſcriptus, tranſibit per extremum punctum lineæ perpendicularis.

SIT

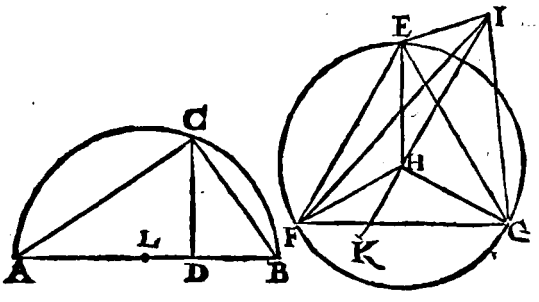


Sit enim ad AB, perpendicularis CD, & media proportionalis inter AC, & CB. Dico ſemicirculum circa AB, deſcriptum, tranſire per D. Namſi tranſeat citra D, vel vltra, nimirũ per punctum E; erit quoque CE, media proportionalis inter AC, & CB, ex coroll. propoſ. 13. lib. 6. Quare tam quadratum rectæ CD, quàm quadratum rectæ CE, [a] *æquale erit rectangulo ſub AC, CB; Ac proinde quadrata rectarũ CD, CE, inter ſe æqualia, & ipſæ rectæ CD, CE, æquales erunt, pars & totum. Quod eſt abſurdum. Tranſibit ergo ſemicirculus per D.*

a 17. ſexti.

Hinc manifeſtum eſt, ſemicirculum in ſuperiori figura deſcriptum circa IK, in plano rectarum IK, HE, tranſire per E, cùm HE, ſit ad IK, perpendicularis, & media proportionalis inter IH, HK.

COROLLARIVM I.



Hinc facilè colligemus, diametrum ſphæræ eſſe potentia quadruplam ſeſquialteram ſemidiametri circuli circa baſim pyramidis deſcripti. Cùm enim diameter ſphæræ AB, oſtenſa ſit potentia ſeſquialtera lateris pyramidis EF, erit quadratum rectæ EF, talium partium 6. qualium 9. eſt quadratũ rectæ AB: At qualium partium 6. eſt quadratũ rectæ EF, talium partium 2. eſt quadratum rectæ HE, [b] *quòd quadratum rectæ EF, triplum ſit quadrati rectæ HE. Qualium igitur partium 9. eſt quadratum rectæ AB, talium partium 2. erit quadratum rectæ HE; Ac propterea diameter ſphæræ AB, potentia eſt quadrupla ſeſquialtera ſemidiametri HE, cùm proportio quadratorum ſit, quæ 9. ad 2.*

b 12. tertij decimi.

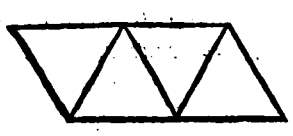
COROLLARIVM II.

Rvrsvs perpendicularis ex centro ſphæræ ad planum baſis pyramidis demiſſa, ſexta pars erit diametri ſphæræ, & tertia pars ſemidiametri. Sit enim L, centrũ ſemicirculi ACB, eritq; L, centrum quoque ſphæræ. Dico rectam LD, (quæ nimirum ex centro ſphæræ ad baſin EFG, ducitur perpendicularis; cùm AD, æqualis ſit ipſi IH, & ideò punctum D, idem quod H, quemadmodum & L, idem eſt, quod centrum ſphæræ) eſſe ſextam partem diametri ſphæræ, nempe rectæ AB, & tertiam partem ſemidiametri AL. Quoniam enim AD, dupla eſt ipſius DB; Qualium partium 4. eſt AD, talium 2. erit DB; ac proinde talium 6. tota AB, & ſemidiameter AL, talium 3. Quare ſi AD, eſt 4. & AL, 3. erit LD, 1. & idcircò LD, ſexta pars erit rectæ AB, quæ fuit partium earundem 6. & tertia pars rectæ AL, quæ fuit earundem partium 3.

Similiter, altitudo pyramidis HI, duas tertias partes continebit ipſius diametri. Eſt enim HI, eadem, quæ AD, continens duas tertias diametri, ex conſtructione.

Rvrsvs, qualium partium 9. ponetur quadratum diametri, talium 4. erit quadratum altitudinis pyramidis. Nam proportio 9. ad 4. eſt duplicata proportionis 3. ad 2. vt hîc apparet 9. 6. 4.

SCHOLIVM.



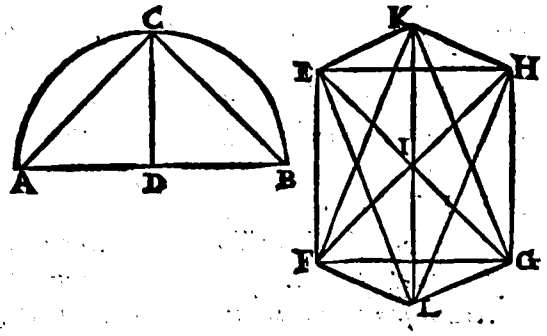
Qvod ſi ex materia aliqua conficiantur quatuor triangula æquilatera æqualia, diſponanturq;, vt hæc figura indicat, facilè ex ipſis ritè inter ſe complicatis componetur Tetraedrum, ſecundùm totam ſoliditatem. Hanc verò præxim, & ſequentes quatuor, quibus reliqua quatuor ſolida regularia in materia quauis ſenſibili conficiuntur, deſumpſimus ex Alberto Durere, non ignobili ſcriptore.

PROBL. 2. PROPOS. 14. 15.

OCTAEDRVM conſtituere, & ſphæra complecti, qua & pyramidem; & demonſtrare, quòd ſphæræ diameter potentia ſit dupla lateris ipſius octaedri.

Sit ſphæræ, quę conſtitutam pyramidem comprehendit, diameter AB, circa quam ſemicirculus deſcribatur ACB, & ex centro D, ad AB, perpendicularis ducatur DC, connectanturq; rectæ

a 4. primi. AC, BC, [a] quæ æquales inter ſe erunt. Sumpta iam recta EF, quæ æqualis ſit ipſi AC, vel BC, deſcribatur ſuper eam quadratum EFGH, in quo ducantur diametri EG, FH, ſe mutuò ſecantes in I: eruntq; rectæ IE, IF, IG, IH, æquales, cùm ſint ſemidiametri circuli circa quadratum deſcripti, vt in 4. lib. demonſtratum eſt. Deinde ex I, in vtramque partem ad planum quadrati erigatur perpendicularis KL, ponanturque IK, IL, æquales ipſi IE: Et denique ex K, & L, deducantur ad angulos quadrati rectæ KE, KF, KG, KH, LF, LE, LH, LG. Dico ſolidum contentum octo trianguli s, KEF, KFG, KGH, KEH; LFE, LEH, LHG, LFG, eſſe octaedrum, quod quæritur.



b 8. primi. Quoniam enim latera EI, IK, trianguli EIK, æqualia ſunt lateribus EI, IH, trianguli EIH; & anguli ipſis contẽti, recti; (ipſe quidẽ EIK, ex defin. 3. lib. 11. At verò EIG, [b] eò quòd ſit æqualis angulo GIH, ſibi deinceps, ob æqualitatem laterum EI, IH, GI, IH, & baſium EH, GH.) c 4. primi. [c] Erit & baſis EK, baſi EH, æqualis. Eodemque modo eidem EH, æqualis erit KH; ideoque triangulum æquilaterum erit KEH. Simili argumento concludemus, reliqua trianguli eſſe æquilatera; atque adeò æqualia triangulo KEH, cùm illorum latera æqualia ſint lateribus quadrati EFGH, ſingula ſingulis. Conſtitutum igitur iam eſt octaedrum ex octo triangulis æquilateris & æqualibus. Quòd octaedrum di co comprehendi ſphæra diametri AB, qua nimirum & pyramis conſtructa comprehenditur; & diametrum ſphæræ AB, potentia duplam eſſe lateris EF, vel AC.

QVONIAM enim IE, perpendicularis eſt ad KL, ex 3. defin. lib. 11. & media proportionalis inter ſegmenta KI, IL; (quòd tres rectæ KI, IE, IL, æquales ſint, ideoque eandem habeant proportionem.) Semicirculus circa KL, in plano rectarum KL, IE, deſcriptus, tranſibit per punctum E, ex lemmate præcedẽtis propoſitionis. Eadem ratione ſemicirculus deſcriptus circa eandem KL, in plano rectarum KL, IF, incedet per punctum F. Idemque dicendum eſt de punctis G, H. Igitur quilibet horum ſemicirculorum circumductus, manente fixa diametro KL, deſcribet ſphæram, quę complectitur octaedrum conſtitutum, cùm per omnes illius angulos incedat. Cùm ergo hæc ſphæra æqualis ſit datæ ſphæræ, cuius diameter AB; (Nam cũ rectæ AC, EF, æquales ſint, ideoq; ipſarum quadrata æqualia; Sit autem tam quadratum rectæ AC, duplum quadrati rectæ AD, q̃ quadratum rectæ EF, quadrati rectæ EI; Erunt & rectæ AD, EI, hoc eſt, KI, ſemidiametri æquales. Quare & totæ diametri AB, KL, æquales erũt; ac proinde ſphæræ ipſarum æquales exiſtent.) comprehendetur idem octaedrum data ſphæra.

d 47. primi. QVIA verò quadratum rectæ AB, [d] æquale eſt quadratis rectarum AC, BC, quę æqualia ſunt; erit quadratum rectæ AB, duplum quadrati rectæ AC. Quamobrem cùm AB, ſit diameter ſphæræ, & AC, recta æqualis lateri octaedri EF, manifeſtum eſt, diametrum ſphæræ potentia duplam eſſe lateris octaedri. Itaque octaedrum conſtituimus, & ſphæra complexi ſumus, qua & pyramidem, &c. Quod erat faciendum.

COROLLARIVM I.

Ex dictis manifeſtum eſt, in octaedro tres diametros ſe mutuò ad angulos rectos ſecare in centro ſphæræ: quales ſunt KL, EG, FH, ſecantes ſeſe in I. Omnes enim anguli ad I, oſtenſi
a 4. vndec. *ſunt recti. Atque proinde, cùm KI, recta ſit ad lineas EG, HF;* [a] *recta quoque erit ad planum*
b 18. vndec. *EFGH, per ipſas ductum;* [b] *ideoq; & plana KFLH, ELGK, per KI, ducta, recta erunt ad planũ EFGH. Immò eadem ratione, vt paucis rem complectar, tria plana EFGH, KFLH, ELGK, ſe mutuò ad angulos rectos ſecabunt; Quæ quidem plana ſunt quadrata, cùm omnia eorum latera ſint ipſius octaedri latera, ac proinde æqualia exiſtant inter ſe, comprehendantq; angulos rectos; eò quòd (cùm quadratum diametri ſphæræ duplum ſit quadrati lateris octaedri, vt oſtendimus,) quadratũ diametri HF, æquale exiſtit quadratis lateri octaedri*
c 48. primi *FK, KH.* [c] *Ita enim efficitur, vt angulus FKH, rectus ſit. Eademq; eſt ratio de cæteris angulis.*

COROLLARIVM II.

OCTAEDRVM diuiditur in duas pyramides ſimiles & æquales, quarum baſis communis, eſt quadratum EFGH, vertices verò K, & L; altitudines denique, ſemidiametri IK, IL: cuiuſmodi ſunt pyramides EFGHK, EFGHL. Nam plana vnius ſunt ſimilia & æqualia planis alterius, vt conſtat, cùm ſint triangula æquilatera, & æqualia, præter baſin communem, quæ eſt quadratum ſubduplum quadrati diametri ſphæræ, vt eſt demonſtratum.

COROLLARIVM III.

SI tetraedrum, & octaedrum in eadem ſphæra deſcribantur, erit tetraedri latus potentia

ſeſquiter-

ſeſquitertium lateris octaedri. Ponatur enim quadratum diametri ſphæræ diuiſum in ſex partes. [a] *Quoniam igitur diameter ſphæræ eſt potentia ſeſquialtera lateris tetraedri, erit quadratum lateris tetraedri talium partium 4. qualium 6. eſt quadratũ diametri ſphæræ.* [b] *Rurſus quia diameter ſphæræ eſt potentia dupla lateris octaedri, erit quadratum lateris octaedri talium partium 3. qualium 6. eſt quadratum diametri ſphæræ. Igitur cùm talium partium 4. ſit quadratum lateris tetraedri, qualium 3. eſt quadratum lateris octaedri; perſpicuum eſt, latus tetraedri potentia ſeſquitertium eſſe lateris octaedri.*

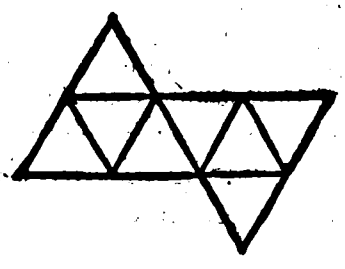
a 13. tertij decimi.

b 14. tertij decimi.

COROLLARIVM IIII.

DENIQVE, quia in quadrato EFGH, recta EH, parallela eſt rectæ FG; & in quadrato ELGK, recta EK, rectæ GL: [c] *Erit planum EHK, per EH, EK, ductum plano FGL, per FG, GL, ducto, parallelum. Cùm igitur eadem ſit ratio de cæteris baſibus octaedri, efficitur, baſes octaedri oppoſitas inter ſe parallelas eſſe.*

c 15. vndec.

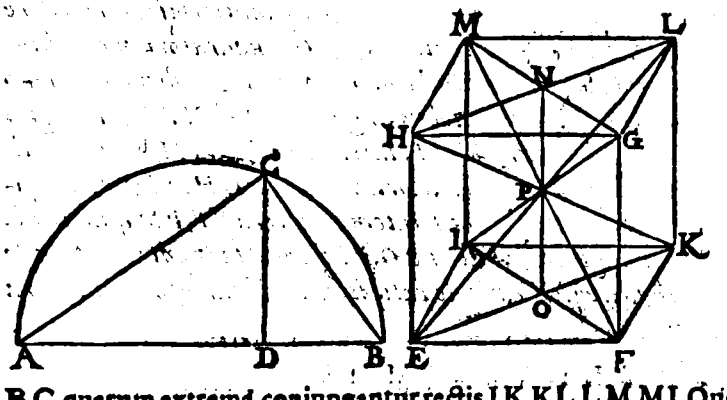


SCHOLIVM.

QVOD ſi ex materia aliqua conficiantur octo triangula equilatera, inter ſe æqualia, diſponanturq́, vt hæc figura indicat, facilè ex ipſis ritè inter ſeſe complicatis componetur octaedrum, ſecundùm to tam ſoliditatem, vt ait Albertus Durerus.

PROBL. 3. PROPOS. 15. 14.

CVBVM conſtituere; & ſphæra complecti, qua & priores figuras; & demonſtrare, quòd ſphæræ diameter potentia ſit tripla lateris ipſius cubi.



SIT ſphæræ, quæ prædictas figuras comprehendit, diameter AB, circa quam ſemicirculus deſcribatur ACB: & ex AB, auferatur tertia pars BD, vt ſit AB, ipſius BD, tripla. Deinde ducta DC, perpendiculari ad AB, connectãtur rectæ AC, BC. Super rectã EF, quæ rectæ BC, ſit æqualis, quadratum conſtituatur EFGH, ſuper quod erigantur perpẽdiculares EI, FK, GL, HM, æquales quoque ipſi BC, quarum extremæ coniungantur rectis IK, KL, LM, MI. Quoniam ergo rectæ EI, FK, ad planum EFGH, rectæ ſunt; [a] erunt rectæ EI, FK, parallelæ: Sunt autem & æquales, & vtraq; æqualis poſitæ ſit ipſi BC, hoc eſt, ipſi EF. [b] Igitur & EF, IK, parallelæ ſunt & æquales; & ideò parallelogrammum eſt EFKI. In quo, cùm lineæ EI, IK, KF, æquales ſint ipſi EF, omnes quatuor lineæ æquales exiſtunt. [c] Sunt autem & omnes quatuor anguli recti, cùm EIK, FKI, æquales ſint oppoſitis angulis rectis KFE, IEF. Igitur EFKI, quadratũ eſt. Eadem ratione quadrata erunt FKLG, GLMH, HMIE. Atq; idcircò & IKLM, quadratum erit, [d] cùm ſimile ſit & æquale quadrato oppoſito EFGH. Eſt enim EL, ſolidum parallelepipedum, [e] quòd eius plana oppoſita ſint parallela, nimirum per lineas parallelas ſe mutuò tangẽtes ducta. Quare cubus erit EL. Quem dico comprehendi ſphæra diametri AB. Sint enim planorum oppoſitorum EFKI, GHML, diametri EK, FI, GM, HL, per quas ducãtur planæ EKLH, FIMG. [f] Quia igitur tam planum EKLH, quàm FIMG, cubum bifariam ſecat; vtrumque per centrum cubi tranſibit, ex ſcholio propoſ. 39. lib. 11. per punctum videlicet P, in quo ex coroll. eiuſdem propoſ. ſe mutuò quoque bifariam diuidẽt omnes diametri cubi; Ac propterea communis planorum ſectio, recta ſcilicet NO, per idem punctum P, incedet. Quia verò plana EKLH, FIMG, rectangula ſunt, (Cùm enim HE, perpendicularis ſit duabus rectis EI, EF, ob quadrata EM, EK; & perpendicularis quoque erit ad planum EK, ideoque & ad rectam EK, ex defin. 3. lib. 11. Rectus ergo angulus eſt HEK. Eadem ratione recti erunt reliqui anguli in plano EKLH, necnon & anguli in plano FIMG. Rectangula ergo ſunt plana EKLH, FIMG.) & æqualia, quòd latera vnius æqualia ſint lateribus alterius; erunt quoque eorum diametri EL, HK, FM, GI, æquales, vt conſtat ex ſcholio propoſitionis 34. libri 1. Ac proinde & ſemidiametri PE, PL, PH, PK, PF, PM, PG, PI, æquales erunt. Quare ſemicirculus circa EL, ex centro P, deſcriptus, & circumductus; fixa manente diametro EL, ſphæram deſcribet per omnes cubi angulos tranſeuntem; quam quidem æqualem eſſe ſphæræ diametri AB, ita demonſtrabitur.

a 6. vndec.

b 33. primi.

c 34. primi.

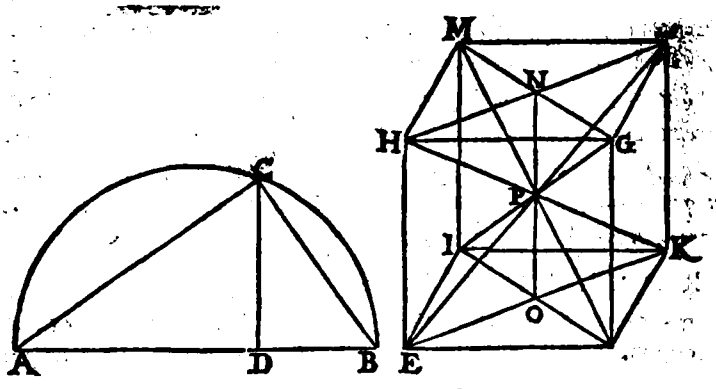
d 24. vndec.

e 15. vndec.

f 28. vndec.

g 4. vndec.

a 47. primi.



b 47. primi.

CVM quadratum rectæ EK, a æquale sit quadratis æqualiũ rectarum æqualium EF, FK, ac proinde duplũ quadrati rectæ EF, hoc est, quadrati rectæ KL: Erunt quadrata rectarum EK, KL, tripla quadrati rectæ KL: b Est autẽ quadratis rectarum EK, KL, æquale quadratum rectæ EL, quòd angulus EKL, sit rectus in rectangulo EKLH. Igitur & quadratum rectę EL, triplum erit quadrati rectę KL, hoc est, quadrati rectę BC: At verò eiusdem quadrati rectæ BC, triplum est quadratum rectæ AB. (Nam tres rectæ AB, BC, BD, proportionales sunt, ex coroll. propos. 8. lib. 6. Ac proinde ex coroll. propos. 20. lib. 6. vt est AB, ad BD, ita erit quadratum rectæ AB, ad quadratum rectæ BC. Cùm ergo AB, ipsius BD, sit tripla: erit quoque quadratum rectæ AB, quadrati rectæ BC, triplum.) Igitur quadrata rectarum EL, AB, æqualia sunt: ac propterea ipsæ rectæ EL, AB, diametri nimirum sphærarum, ideoque & ipsarum sphærę, æquales existunt.

QVIA verò ostensum est, quadratum diametri EL, triplum esse quadrati lateris cubi KL: manifestum est, diametrum sphærę potẽtia triplam esse lateris cubi. Quocirca cubum constituimus, & sphæra complexi sumus, &c. Quod erat faciendum.

COROLLARIVM I.

Ex demonstratione huius problematis manifestum est, omnes diametros cubi inter se esse æquales, seseq; mutuò bifariam in centro sphæræ secare. Atque eadem ratione rectas lineas, quæ centra quadratorum oppositorum coniungunt, bifariam diuidi in eodem centro. Demonstratum enim est, diametros cubi EL, HK, FM, GI, æquales esse, seseq; mutuò bifariam secare in centro P. Quòd verò & recta NO, coniungens centra N, & O, quadratorum oppositorum GHML, EFKI, in eodem centro P, bifariam diuidatur, hac ratione ostendetur. Duo anguli OFP, OPF, trianguli OFP, æquales sunt duobus angulis NMP, NPM, trianguli

a 29. primi

b 16. vnde.

c 15. primi.

NMP: (a Nam angulus OFP, æqualis est alterno NMP, inter lineas FI, GM, b quæ parallelæ sunt, cùm sint communes sectiones planorum parallelorum EFKI, GHML; c & anguli OPF, æqualis est oppositio ad verticem NPM.) Sunt autem & latera PF, PM, quibus adiacent, æqualia, cùm sint semidiametri. Igitur & latera PO, PN, æqualia erunt; ac proinde recta NO, bifariam secabitur in P. Eademq; est ratio de cæteris lineis coniungentibus centra aliorum quadratorum oppositorum.

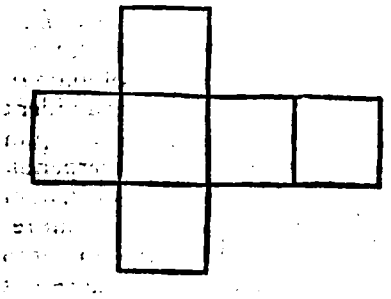
COROLLARIVM II.

RVRSVS potentia diametri sphæræ, seu cubi, æqualis est potentiis laterum tetraedri & cubi simul sumptis. d *Nam qualium partium 9. est quadratum diametri, talium 6. est quadratum lateris tetraedri:* e *Qualium verò partium 9. est idem quadratum diametri, talium 3. est quadratum lateris cubi. Igitur quadratum lateris tetraedri, & quadratum lateris cubi simul sunt partium 9. quemadmodum & quadratum diametri; Ac proinde quadratum diametri æquale est quadratis dictorum laterum. Hoc etiam manifestum est ex semicirculo circa diametrum sphæræ descripto, in quo latus tetraedri est AC, cubi verò BC.* f *Perspicuum autem est, diametrum sphæræ AB, posse & rectã AC, & rectam BC, cùm angulus ACB, sit rectus.*

d 13. tertij decimi.

e 15. tertij decimi.

f 47. primi.



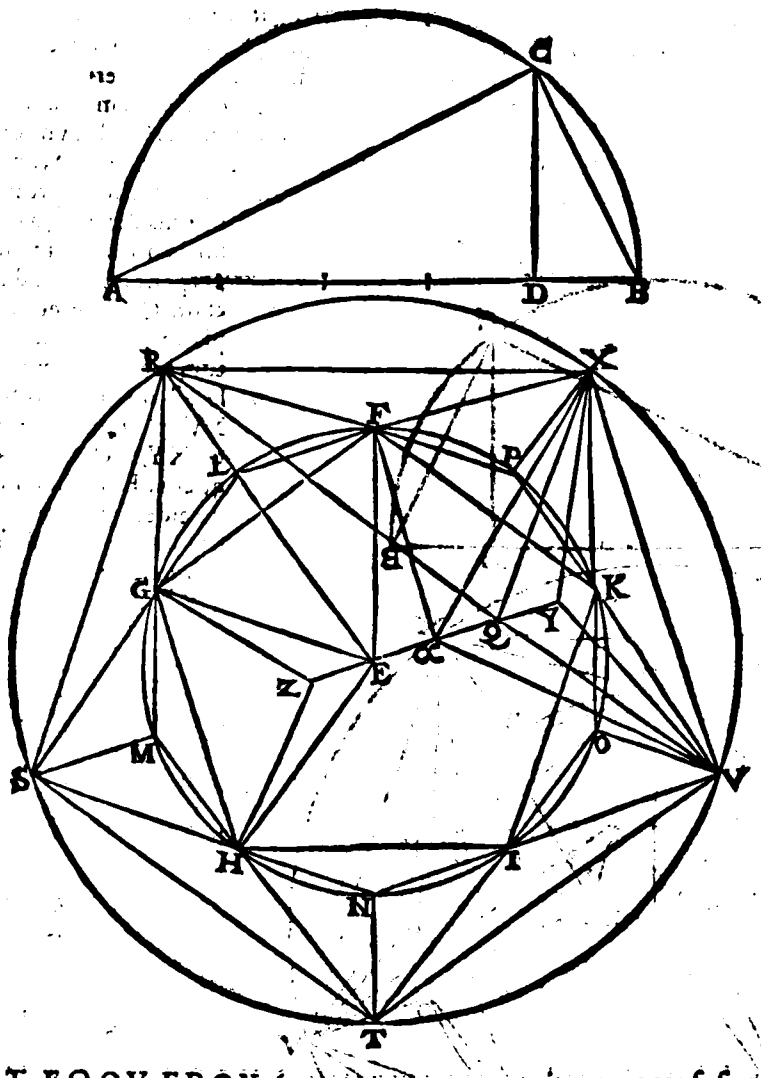
SCHOLIVM.

QVOD si ex aliqua materia conficiãtur sex quadrata inter se æqualia, disponanturq; vt hac figura indicat, facilè componetur cubus secundùm totam soliditatẽ, si dicta quadrata ritè complicentur inter se. Efficietur enim ex illis figura quædam solida, octo angulos solidos continens instar tessaræ cuiusplam, vt constat.

16. PROBL. 4. PROPOS. 16.

ICOSAEDRVM constituere; & sphæra complecti, qua & ante dictas figuras: & demonstrare, quòd Icosaedri latus Irrationalis est linea, quæ vocatur Minor.

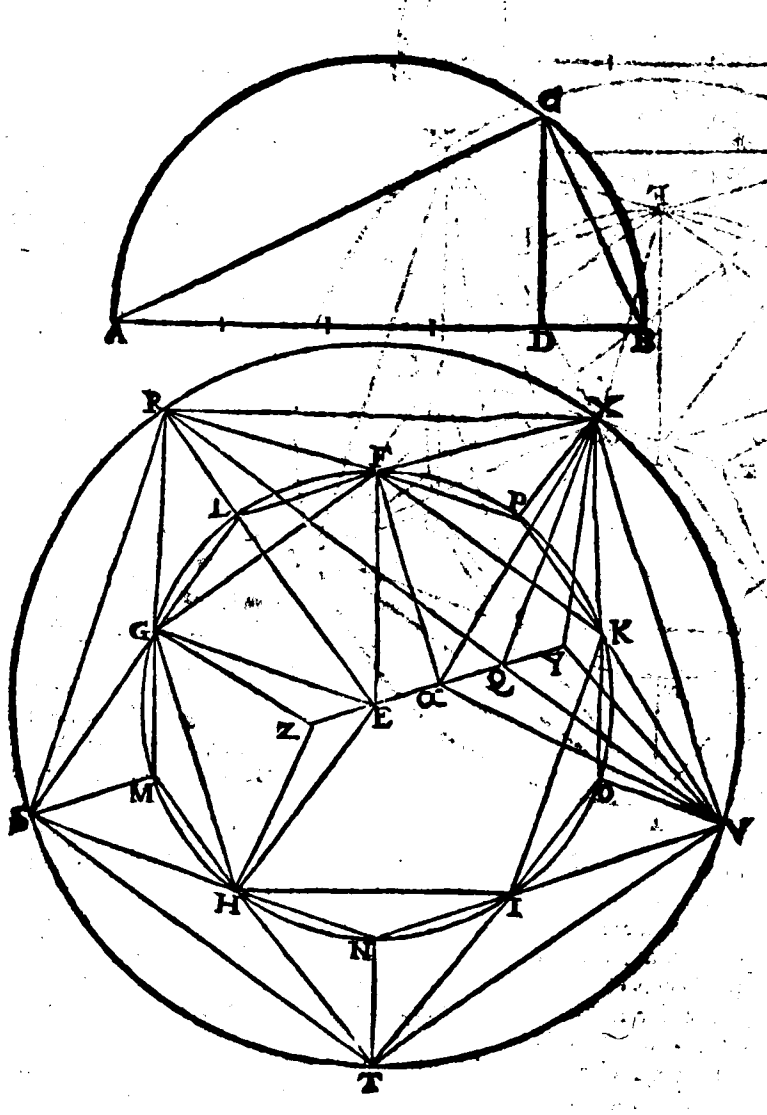
SIT



SIT sphærę, quæ prædictas figuras comprehendit, diameter AB, circa quam semicirculus describatur ACB: Et ex AB, abscindatur quinta pars BD, vt AB, ipsius BD, sit quintupla; & ipsius AD, sesquiquarta; At verò AD, ipsius BD, quadrupla. Deinde ducta DC, perpendiculari ad AB, connectantur rectæ AC, BC. Ad interuallum rectæ EF, quæ ipsi BC, sit æqualis, circulus describatur ex centro E; [a] in quo pentagonum æquilaterum, inscribatur FGHIK. Post hæc diuisis arcubus FG, GH, HI, IK, KF, bifariam in punctis L, M, N, O, P, connectantur rectæ FL, LG, GM, MH, &c. nempe latera decagoni. Deinde ex centro E, & punctis L, M, N, O, P, ad planum circuli FGHIK, perpendiculares erigatur EQ, LR, MS, NT, OV, PX, quæ æquales ponantur semidiametro EF, seu rectæ BC. Eruntq; omnes inter se æquales; [b] sed & parallelæ sunt. Igitur rectę, quę illas coniungunt, nempe EL, QR; EM, QS; EN, QT; EO, QV; EP, QX. (quas tamen omnes, vt vitaremus confusionem, non duximus) [c] binæ inter se æquales erũt: Ac proinde cùm æquales sint EL, EM, &c. semidiametro EF, æquales quoque erunt QR, QS, QT, QV, QX, & inter se, & semidiametro EF, seu rectæ BC. [d] Quia verò planum per rectas QR, QS, ductum parallelum est plano FGHIK, per rectas EL, EM, ducto: eademque ratione planum per rectas QS, QT, ductum, parallelum est plano eidem FGHIK, per rectas EM, EN, ducto, conuenit autem planum per rectas QR, QS, cum plano per QS, QT, in recta QS. Igitur efficient hæc duo plana vnum planum, per ea, quæ ad propos. 16. lib. 11. ostendimus. Non aliter ostendemus planum per QT, QV, cum hoc plano efficere vnum planum; necnon planum per QV, QX; & planum per QX, QR. Sunt ergo quinque lineæ QR, QS, QT, QV, QX, in eodem plano; Ac proinde si ex Q, ad interuallum QR, in eo plano circulus describatur, is per reliqua puncta S, T, V, X, transibit, eritque æqualis circulo FGHIK. Coniungantur puncta R, S, T, V, X, rectis RS, ST, TV, VX, XR. Quia igitur LR, PX, æquales sunt, [e] & parallelæ; si concipiatur duci recta LP; [f] erunt quoque LP, RX, æquales & parallelæ; [g] Ac proinde ex circulis æqualibus æquales arcus auferent: Aufert autem LP, quintam partem circuli FGHIK, nempe duas decimas partes FL, FP. Igitur & RX, quintam partem auferet circuli RSTVX. Simili prorsus argumento concludemus, reliquas rectas RS, ST, TV, VX, quintas partes auferre. Quamobrem pentagonum æquilaterum est RSTVX, omnia latera æqualia habens lateribus pentagoni FGHIK. Demittantur ex angulis pentagoni RSTVX, ad angulos pentagoni FGHIK, rectæ RF, RG, SG, SH, TH, TI, VI, VK, XK, XF. Quia igitur perpendicularis LR, æqualis ponitur semidiametro EF, hoc est, lateri hexagoni circuli FGHIK; & est LF, latus decagoni; [h] erit quadratum lateris pentagoni eiusdem circuli æquale quadratis rectarum LR, LF: [i] Est autem eisdem quadratis æquale quadratum rectæ FR; quòd angulus FLR, rectus sit, ex 3. definitione libri 11. Igitur quadratum rectæ FR, æquale est quadrato lateris pentagoni; ideoque recta FR, lateri pentagoni LP, seu FG, hoc est, ipsi RX, æqualis erit. Eademque ratione erunt reliquæ lineæ RG, SG, SH, &c. reliquis lateribus vtriusque pentagoni æquales: Ac propterea decem triangula RFX, RFG, RGS, SGH, SHT, THI, TIV, VIK, VKX, XKF, æquilatera erunt, & inter se æqualia, cùm eorum omnia latera æqualia sint lateribus pen-

a 11. quarti.
b 6. vndec.
c 33. primi.
d 15. vndec.
e 6. vndec.
f 33. primi.
g 28. tertij.
h 10. tertiædecimi.
i 47. primi.

tagoni æquilateri. Post hæc, perpendicularis E Q, in vtramque partem extendatur, sintque rectæ Q Y, E Z, æquales singulæ, lateri decagoni circuli F G H I K, vel R S T V X; & connectantur rectæ V Q, V Y, X Q, X Y, G E, G Z, H E, H Z. Quoniam ergo Q X, semidiameter est circuli R S T V X, hoc est, latus hexagoni, & Q Y, latus est decagoni eiusdem circuli; [a] erit quadratum lateris pentagoni X V, æquale quadratis rectarum Q X, Q Y; [b] Est autem eisdem quadratis æquale quadratum rectæ X Y, quòd angulus X Q Y, rectus sit, ex definitione tertia libri vndecimi. (Nam cùm plana circulorum F G H I K, R S T V X, parallela sint ostensa, sitque E Q, ad illius planum recta, ex constructione, erit quoque E Q, ad huius planum recta, ex scholio propositionis decimęquartę libri vndecimi, ideoq; perpendicularis ad rectam Q X, in eodem plano.) Igitur quadratum rectæ X Y, æquale est, quadrato rectæ X V, propterea quæ recta X Y, rectæ X V, æqualis. Eodemq; modo eidem X V, æqualis ostenderur V Y; Ac proinde triangulum V Y X, æquilaterũ est, Non aliter demonstrabimus, si ducantur rectæ R Y, S Y, T Y, (quas tamen, vt vitaremus confusionẽ linearum, non duximus.) quatuor triangula R Y X, R Y S, S Y T, T Y V, æquilatera esse, & æqualia triangulo V Y X, hoc est, prioribus decem, cùm omnium latera æqualia sint lateribus pentagoni. Simili argumento æquilaterum erit triãgulum G Z H, (cùm E G, sit latus hexagoni, nempe semidiameter, & E Z, latus decagoni, angulusq; G E Z, rectus, ex tertia definitione libri vndecimi,) necnon quatuor triangula H Z I, I Z K, K Z F, F Z G, (quorum tamen lineas, ne pareremus confusionem, nõ duximus,) quæ omnia prioribus quindecim æqualia erunt, eandem ob causam. Cùm igitur omnia hæc triangula viginti æquilatera sint, & æqualia, copulenturq; singula singulis per lineas rectas, nempe per eorum latera; constitutũ erit ex ipsis Icosaedrum. Quod dico comprehendi sphæra diametri A B.



[a] 10. tertij decimi.

[b] 47. primi.

Divisa enim recta E Q, bifariam in α, ducantur rectæ α F, α X, α V. Quoniam igitur latera α Q, Q V, trianguli α Q V, æqualia sunt lateribus α Q, Q X, trianguli α Q X, cùm Q V, Q X, sint semidiametri circuli R S T V X: Sunt autem & anguli α Q V, α Q X, æquales, nempe recti, ex definitione tertia libri vndecimi. [c] Erunt & bases α V, α X, æquales. Eademque ratione, si ducantur rectæ ex α, Q, ad R, S, T, ostẽdentur rectæ α R, α S, α T, æquales & inter se, & ipsis α V, α X. Rursus quia latera α Q, Q X, trianguli α Q X, æqualia sunt lateribus α E, E F, trianguli α E F, cùm Q X, E F, sint semidiametri circulorum æqualium, & E Q, diuisa sit bifariam in α: Sunt autem & anguli α Q X, α E F, æquales, nimirum recti, ex definitione tertia libri vndecimi. [d] Erunt quoque bases α X, α F, æquales: eodemque modo si ex α, E, ad G, H, I, K, rectæ ducantur, ostendentur α G, α H, α I, α K, æquales ipsi α X; Ac proinde decem lineæ ductæ ad decem angulos F, G, H, I, K; R, S, T, V, X, æquales sunt. Quoniam verò Q E, semidiameter est, hoc est, latus hexagoni circuli F G H I K; & E Z, latus decagoni eiusdem circuli; [e] erit Q Z, diuisa in E, extrema ac media

[c] 4. primi.

[d] 4. primi.

[e] 9. tertij decimi.

dia ratione, maiusque segmentum erit QE. Quare minus segmentum ZE, assumens Eα, dimidium maioris segmenti, hoc est, recta αZ, a quintuplum potest eius, quod ex Eα, describitur, quadrati: Potest autem & recta αF, quintuplum eiusdem quadrati rectæ Eα. (Nam cùm quadratum rectæ EF, quadruplum sit quadrati rectæ αE; ex scholio propositionis quartæ libri secundi, quòd recta EF, dupla sit ipsius Eα; erunt quadrata rectarum EF, Eα, simul quintupla quadrati rectæ Eα. b Cùm ergo quadratis rectarum EF, Eα, æquale sit quadratum rectæ AF; erit quoque quadratum rectæ αF, quintuplum quadrati rectæ Eα.) Igitur æqualia sunt quadrata rectarum, αZ, αF: ac proinde rectæ ipsæ αZ, αF, æquales erunt. Cùm igitur ZY, bifariá secetur in α, (propterea quòd si æqualibus αE, αQ, æquales rectæ addantur EZ, QY, totæ Zα, Yα, æquales fiunt.) Erunt omnes rectæ ductæ ex α, ad omnes angulos Icosaedri æquales. Quocirca sphæra descripta circa diametrum ZY, ex centro α, per omnes angulos Icosaedri cõstituti transibit. Hanc ergo sphæram dico æqualem esse sphærę diametri AB.

a 3. tertij decim.

b 47. primi.

c Cvm enim sit vt αZ, ad αE, ita YZ, dupla ipsius αZ, ad QE, duplam ipsius αE; d Ac propterea vt quadratum rectæ αZ, ad quadratum rectæ αE, ita quadratum rectæ YZ, ad quadratum rectæ QE; sit autem quadratum rectæ αZ, ostensum quintuplum quadrati rectæ αE; Erit quoque quadratum rectæ YZ, quintuplum quadrati rectæ QE, hoc est, quadrati rectæ BC; quòd recta QE, æqualis sit posita semidiametro EF, hoc est, rectæ BC; Est autem & eiusdem quadrati rectæ BC, quintuplum quadratum rectæ AB; (Nam cùm, ex coroll. propos. 8. lib. 6. sit vt AB, ad BC, ita BC, ad BD; erit vt AB, ad BD, ita quadratum rectæ AB, ad quadratum rectæ BC, ex coroll. propos. 20. lib. 6. Ac proinde existente AB, quintupla ipsius BD, erit etiam quadratum rectæ AB, quintuplum quadrati rectæ BC.) Quadrata igitur rectarum YZ, AB, æqualia sunt, ideoque & rectæ YZ, AB; ac propterea & sphæræ circa ipsas, æquales erunt.

c 15. quinti.

d 22. sexti.

Qvoniam denique diameter sphæræ AB, Rationalis ponitur; (Nam comparatione ipsius ostendendum est, latus Icosaedri esse lineam Irrationalem quæ Minor vocatur.) potestq; quintuplum quadrati rectæ BC, hoc est, rectæ illi æqualis EF; erit quoq; semidiameter EF, circuli FGHIK, Rationalis. (Nam quadrata rectarum AB, EF, cùm habeant proportionem, quam numerus ad numerum, nempe quam 5. ad 1. vel 10. ad 2. e erunt commensurabilia; Ac propterea & rectæ AB, EF, commensurabiles erunt, saltem potentia. Cùm ergo AB, sit Rationalis, erit & EF, Rationalis.) Quare & tota diameter circuli FGHIK, Rationalis erit; Ac propterea FG, latus pentagoni, hoc est, latus Icosaedri, f Irrationalis erit linea, quæ vocatur Minor. Icosaedrum igitur constituimus, & sphæra sumus complexi, qua & antedictas figuras; & demonstrauimus, quòd Icosaedri latus Irrationalis est linea, quæ vocatur Minor. quod erat faciendum.

e 6. decimi.

f 11. tertiæ decimi.

COROLLARIVM I.

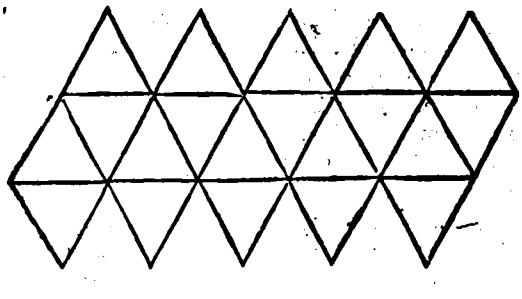
Ex dictis infertur, sphæræ diametrum esse potentia quintuplam semidiametri circuli quinque latera Icosaedri ambientis, ex quo scilicet Icosaedrum constitutum est, & qui per quinque Icosaedri angulos incedit. Ostensum enim est quadratum diametri AB, quintuplum esse quadrati rectæ BC, hoc est, semidiametri EF.

COROLLARIVM II.

Item manifestum est sphæræ diametrum esse compositam ex latere hexagoni, hoc est, ex semidiametro, & duobus lateribus decagoni eiusdem circuli: Nam YZ, diameter sphæræ componitur ex EQ, latere hexagoni, & ex QY, EZ, lateribus decagoni circuli FGHIK.

COROLLARIVM III.

Constat denique latera Icosaedri opposita, qualia sunt RX, HI, esse parallela. Nam recta RX, ostensa est parallela rectæ, quæ ex L, in P, duceretur. Cùm igitur eidem rectæ LP, sit quoque parallela recta HI, vt in scholio propositionis 27. lib. 3. demonstrauimus; (eò quòd æquales sunt arcus HL, IP; continet enim vterque tres decimas partes totius circumferentiæ,) perspicuum est, rectas RX, HI, esse parallelas. Eademq; est ratio de cæteris lateribus oppositis.



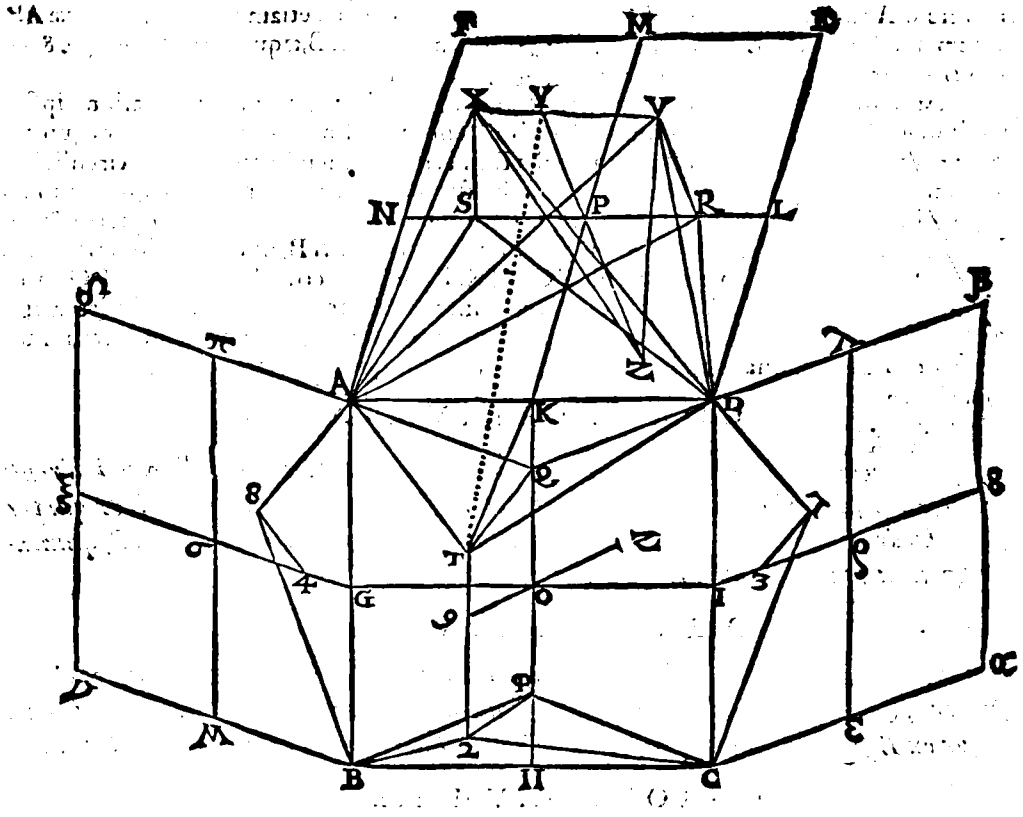
SCHOLIVM.

Qvod si ex aliqua materia conficiantur viginti triangula æquilatera inter se æqualia, disponanturque, vt hæc figura indicat, componetur Icosaedrum secundùm totam soliditatem, si rectè inter sese aptentur.

17. PROBL. 5. PROPOS. 17.

DODECAEDRVM constituere; & sphęra complecti, qua & prędictas figuras; & demonstrare, ꝙ Dodecaedri latus Irrationalis est linea, quæ vocatur Apotome.

SIT vna basis cubi data sphæra comprehensi, quadratum A B C D, cui insistat aliud æquale ad rectos angulos A D E F, vt sit communis horum sectio recta A D, (Insistunt enim omnes bases cubi sibi mutuò ad angulos rectos. Nam in præcedentibus, vt cubus constitueretur, erectæ sunt ex angulis basis E F G H, quatuor lineę E I, F K, G L, H M, ipsi basi E F G H, perpendiculares. Id quod *a* facilè apparere potest ex figura propositionis 15. huius lib. *a 18. vndec.* Quare & bases cubi per ipsas ductæ, rectæ erunt ad eandem basin E F G H.) Diuisis itaq; cunctis lateribus bifariam in punctis G, H, I, K, L, M, N, quæ rectis cõnectantur secantibus sese in O, P, centris quadratorum, vt constat ex demonstratione octaui problematis lib. 4. Secentur O K, P L, P N, extrema ac media ratione in punctis Q, R, S, ex quibus ad plana quadratorum educantur extra cubum perpendiculares Q T, R V, S X, æquales segmentis maioribus O Q, P R, P S. Coniunctis deinde rectis A T, A X, D T, D V, V X, Dico A T D V X, esse vnum ex duodecim pentagonis æquilateris, & æquiangulis Dodecaedri constituendi. Quod enim pentagonum A T D V X, sit in vno plano, ita ostendetur. Cùm *b* R V, S X, sint ad quadratum A D E F, rectæ, *b 6. vndec.* ipsæ erunt parallelæ: Ac proinde, cùm sint æquales, (quia segmenta maiora P R, P S, quibus æquales sunt positæ, æqualia sunt, cùm & lineæ sectæ P L, P N, æquales sint.) *c* erunt quoque coniungentes rectæ R S, V X, æquales & parallelæ: *d* Est autem & A D, eidem R S, siue L N, parallela, eò quòd A N, D L, parallelæ sunt & æquales. *e* Igitur & A D, V X, parallelæ sunt; *f* Ac propterea rectæ coniungentes A X, D V, in eodem cum ipsis erunt plano; ideoque trapezium A D V X, in vno existet plano: Est autem & triangulum A T D, in vno plano. Dico quòd & in eodem plano cum trapezio A D V X. Ex P, namque ducatur P Y, parallela ipsi R V, *g* quæ erit recta ad quadratum A D E F, quòd ad idem recta sit R V: Et connectantur rectæ K T, K Y. Quoniam igitur est vt O K, ad O Q, ita O Q, ad Q K, ob sectionem rectæ O K: Est autem K P, ipsi O K, æqualis; (sunt enim dimidia latera cubi;) & P Y, ipsi O Q, (cùm æqualis sit ipsi R V, quæ posita fuit æqualis ipsi O Q, maiori segmento;) Erit quoque vt K P, ad P Y, ita O Q, hoc est, Q T, illi æqualis, ad Q K. Quare cùm triangula P K Y, Q T K, duo latera habeant duobus lateribus proportionalia, sintque ad vnum angulum K, composita, *h* ita vt homologa latera sint parallela, nempe P K, & Q T, inter se, quòd vtrumque rectum sit ad quadratum A B C D; & P Y, Q K, inter se, quòd vtrumque rectum sit ad quadratum A D E F: *i* Erunt reliqua latera K Y, K T, in rectam lineam collocata; *k* Ac propterea recta T Y, in vno erit plano, ideoq; planum A T D, & planum A D V X, vnum planum constituent, per rectas T Y, A D, ductum. Quocirca pentagonum A T D V X, in vno existit plano.



c 33. primi. *d 33. primi.* *e 9. vndec.* *f 7. vndec.* *g 8. vndec.* *h 6. vndec.* *i 32. sexti.* *k 1. vndec.*

QVOD

QVOD verò sit æquilaterum, ita docebitur. Cùm latera A N, N S, trianguli A N S, æqualia sint lateribus A K, K Q, trianguli A K Q; (Sunt enim A N, A K, dimidia latera cubi, & N S, K Q, segmenta minora rectarum æqualium sectarum.) & anguli A N S, A K Q, recti; si ducatur recta A Q, [a] erunt bases A S, A Q, æquales. Rursus cùm latera A S, S X, trianguli A S X, sint æqualia lateribus A Q, Q T, trianguli A Q T; (Nam rectę A S, A Q, ostensæ sunt æquales, & S X, Q T, sunt segmenta maiora rectarũ æqualium sectarum) & anguli A S X, A Q T, recti, ex defin. 3. lib. 11. [b] Erunt quoque bases A X, A T, æquales. Quod si ducatur recta D Q, ostendemus eodem argumento, rectam D T, rectæ A T; si verò ducatur recta D R, rectam D V, rectæ D T, esse æqualem. Sunt igitur pentagoni quatuor latera X A, A T, T D, D V; æqualia; quibus etiam æquale ostendemus reliquum V X, hac ratione. [c] Quadrata rectarum P N, N S, simul tripla sunt quadrati rectæ P S, hoc est, quadrati rectæ S X; Est autem quadrato rectæ P N, æquale quadratum rectæ A N. Igitur & quadrata rectarum A N, N S, simul tripla sunt quadrati rectæ S X. [d] Cùm ergo quadratis rectarũ A N, N S, æquale sit quadratũ rectæ A S; erit quoq; quadratũ rectæ A S, triplum quadrati rectæ S X; Ac proinde quadrata rectarum A S, S X, simul, quadrupla eiusdem quadrati rectæ S X. [e] Est autem quadratis rectarum A S, S X, æquale quadratum rectæ A X. Quadratum ergo rectæ A X, quadruplum quoque erit quadrati rectæ S X, hoc est, quadrati rectæ P S, hoc est, quadrati rectæ X Y; [f] Sunt enim rectæ P S, X Y, æquales. Cùm igitur & quadratum rectæ V X, quadruplum sit eiusdem quadrati rectæ X Y, ex scholio propos. 4. lib. 2. quòd V X, dupla sit ipsius X Y; Erunt quadrata rectarum A X, V X, æqualia; Ac proinde rectæ ipsæ æquales. Quare cùm & X A, A T, T D, D V, ostensæ sint esse æquales; æquilaterum est pentagonum A T D V X.

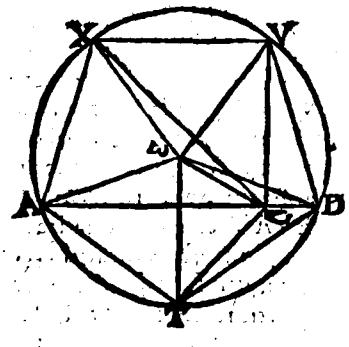
QVOD autem & æquiangulum sit, ita perspicuum fiet. Ductis rectis A R, A V; cùm P N, secta sit in S, extrema ac media ratione, eiq; addita P R, æqualis maiori segmẽto P S; [g] erit quoq; N R, secta in P, extrema ac media ratione, maiusque segmentum erit N P. [h] Quadrata igitur rectarum N R, R P, simul tripla sunt quadrati rectæ N P, hoc est, quadrati rectæ A N: Est autem quadratum rectæ R V, æquale quadrato rectæ R P. Ergo & quadrata rectarum N R, R V, tripla sunt quadrati rectæ A N; Ac proinde quadrata rectarum N R, R V, A N, quadrupla sunt eiusdem quadrati rectæ A N. [i] Sunt autem quadrata rectarum N R, A N, æqualia quadrato rectæ A R. Igitur & quadrata rectarum R V, A R, quadrupla sunt quadrati rectæ A N. [k] Cùm ergo quadratis rectarum A R, R V, æquale sit quadratum rectæ A V; Erit quoque quadratum rectæ A V, eiusdem quadrati rectæ A N, quadruplum. At verò eiusdem quadrati rectæ A N, quadruplum est quadratum rectæ A D, ex scholio propos. 4. lib. 2. quòd A D, dupla sit ipsius A N. Æqualia igitur sunt quadrata rectarum A V, A D, ideoq; & rectæ A V, A D, æquales. Simili argumento, ductis rectis D S, D X, ostendemus D X, D A, æquales esse; ac propterea tres rectas A D, A V, D X, inter se esse æquales. Quoniam igitur latera T A, T D, trianguli T A D, æqualia sunt lateribus D V, V X, trianguli D X V; & bases A D, D X, æquales quoque: [l] Erunt & anguli A T D, D V X, æquales. Non secus ostendetur angulus D V X; æqualis angulo A X V. Ac proinde, cũ in pentagono æquilatero A T D V X, tres habeantur anguli æquales A T D, D V X, A X V, [m] ipsum erit æquiangulum.

QVOD si sumantur alia duo cubi quadrata C α β D, B γ δ A, recta ad quadratum A B C D, in communibus sectionibus C D, A B, quorum singula latera bifariam secẽtur in ι, λ, I, μ, ξ, ν, G, punctis; quæ rectis iungãtur se mutuò secantibus in quadratorum centris ρ, σ. Secentur deinde O H, O K, ρ I, σ G, extrema ac media ratione in punctis φ, Q, 3, 4, ex quibus ad plana quadratorum educantur ad partes cubi exteriores, perpendiculares φ 2, Q T, 3 7, 4 8, æquales segmentis maioribus φ O, Q O, 3 ρ, 4 6, coniunganturq; rectæ T 2, 2 C, C 7, 7 D, D T, T A, A 8, 8 B, B 2, demonstrabimus eadem ratione, pentagona T 2 C 7 D, T 2 B 8 A, æquilatera esse & æquiangula, & æqualia priori A T D V X, ob communia latera T D, T A. Constructa igitur iam sunt tria pentagona tangentia cubi tria latera A D, D C, A B, & sibi mutuò cohærentia lateribus communibus T D, T A. Si igitur eadem methodo fabricentur alia nouem similia pentagona, tangentia reliqua nouem cubi latera; constitutum erit Dodecaedrum. Quod, quidem sphæra comprehendi, qua & cubus, & præcedentes figuræ comprehenduntur, hac arte demonstrabimus.

INTELLIGANTVR plana cubi opposita secari planis, quæ per rectas planorum latera bifariam secantes ducuntur, nempe planum A D E F, & eius oppositum, planis ductis per rectas K M, L N. Item planum A B C D, & eius oppositum, planis per rectas G I, H K, ductis, &c. Quoniam igitur plana secantia recta sunt ad dicta plana cubi, quòd parallela sint basibus cubi, quæ rectæ sunt ad plana A D E F, A B C D. [n] Erunt & communes eorum sectiones ad eadem cubi plana rectę. Quare cùm Y P, recta sit ad planum A D E F, ipsa producta versus Z, erit communis sectio planorum per rectas K M, L N, ductorum. Eodem pacto si ex O, ad planum A B C D, erigatur perpendicularis 9 O Z; erit ipsa communis sectio planorum, quæ per rectas G I, H K, ducuntur. [o] Quia verò dictæ communes sectiones & diametri cubi se mutuò bifariam secant; secent se mutuò bifariam in Z: Secant autem sese diametri cubi bifariam in centro sphæræ cubum complectentis, ex corollario primo, propositionis decimæquintæ huius libri. Punctum igitur Z, centrum erit sphæræ circa cubum descriptæ; Ac proinde omnes rectæ ex Z, ad omnes angulos cubi ductæ inter se æquales erunt: Quibus omnibus æquales quoque esse omnes rectas ex Z, ad omnes angulos Dodecaedri ductas, sic fiet perspicuum, ducta recta Z X. [p] Quoniam parallelæ sunt K P, O Z, quòd vtraq; recta sit ad planum A B C D; Item parallelæ sunt O K, Z P, quòd vtraq; recta sit ad planum A D E F; erit P K O Z, (debent enim duo puncta Z, intelligi esse cõiuncta) parallelo-

[a] 4. primi.
[b] 4. primi.
[c] 4. tertiæ decimi.
[d] 47. primi.
[e] 47. primi.
[f] 34. primi.
[g] 3. tertiæ decimi.
[h] 4. tertiæ decimi.
[i] 47. primi.
[k] 47. primi.
[l] 8. primi.
[m] 7. tertiæ decimi.
[n] 19. vndec.
[o] 39. vndec.
[p] 6. vndec.

grammum; [a] ac propterea PZ, æqualis erit ipsi KO, hoc est, ipsi NP, dimidio lateri cubi: Est autem & PY, ipsi PR, æqualis. Tota ergo ZY, toti NR, æqualis erit. [b] Quare cùm quadrata rectarũ NR, PR, simul tripla sint quadrati rectæ NP, quòd NR, in P, secta sit extrema & media ratione; erunt quoq; quadrata rectarum ZY, PY, hoc est, quadrata rectarũ ZY, YX, simul tripla quadrati rectæ PZ. (Est enim YX, æqualis ipsi PS, hoc est, ipsi PY:) [c] Est autem quadratis rectarum ZY, YX, æquale quadratum rectæ ZX. Igitur & quadratum rectæ ZX, triplum erit quadrati rectæ ZP, hoc est, quadrati dimidij lateris cubi. At quia eiusdem quadrati dimidij lateris cubi triplum, [d] est quoque quadratum semidiametri sphæræ cubum comprehendentis. ([d] Nam vt diameter ad latus cubi, ita est semidiameter ad dimidium lateris; [e] Ac proinde vt quadratũ diametri ad quadratum lateris, ita quadratum semidiametri ad quadratum dimidij lateris. [f] Cùm ergo quadratum diametri triplum sit quadrati lateris, erit quoque quadratum semidiametri triplum quadrati dimidij lateris.) Æquale igitur est quadratum rectæ ZX, quadrato semidiametri sphæræ, seu cubi; Ac propterea ZX, æqualis semidiametro. Eadem ratione erit ducta recta ZV, semidiametro æqualis. Vel certè quia cùm latera ZY, YX, trianguli ZYX, æqualia sint lateribus ZY, YV, trianguli ZYV, & anguli contenti recti. (cùm enim PY, sit perpendicularis ad LN, erit quoque eadem [g] ad sibi parallelam VX, perpendicularis.) [g] Erunt bases ZX, ZV, æquales: Sunt autem & ZA, ZD, ad angulos cubi, semidiametro sphæræ æquales, vt dictum est. Sunt ergo iam quatuor rectæ ductæ ex Z, centro sphæræ ad quatuor angulos pentagoni A, D, V, X, æquales semidiametro sphæræ. Vt autem ostendatur & recta ducta ZT, ad quintum angulum T, semidiametro æqualis, describatur circa pentagonum, cùm sit æquilaterum & æquiangulum, circulus ATDVX, & in planum ipsius ex Z, centro sphæræ perpẽdicularis demittatur Zω, connectanturque rectæ ωA, ωT, ωD, ωV, ωX. [h] Quoniam igitur quadratum rectæ ZA, æquale est quadratis rectarum Zω, ωA; & quadratum rectæ ZX, quadratis rectarum Zω, ωX: Sunt autem quadrata rectarum ZA, ZX, æqualia, quòd rectæ ZA, ZX, ostensæ sint æquales; Igitur & quadrata rectarum Zω, ωA, quadratis rectarum Zω, ωX, æqualia; Ac proinde dempto communi quadrato rectæ Zω, æqualia relinquẽtur quadrata rectarum ωA, ωX, ideoq; rectæ ipsæ ωA, ωX, æquales erunt. Non aliter ostendentur rectæ ωV, ωD, & inter se, & ipsis ωA, ωX, æquales, quòd & rectæ ZV, ZD, æquales sint ostensis rectis ZA, ZX. Quare cùm ex ω, cadant in circumferentiam plures rectæ lineæ æquales, quàm duæ, [i] punctum ω, centrum erit circuli; Ac proinde ωT, reliquis ex centro ductis æqualis; ideoq; quadrata rectarum Zω, ωA, æqualia erunt quadratis rectarum Zω, ωT. [k] Cùm ergo illis duobus æquale sit quadratum rectæ ZA; his verò quadratum rectæ ZT; Erunt æqualia quadrata rectarum ZA, ZT; propterea; & rectæ ZA, ZT, æquales. Quare sphæra complectens cubum, ex centro Z, descripta, comprehendet pentagonum quoque ATDVX; Eodemque modo & reliqua pentagona Dodecaedri; Ac propterea eadem sphæra comprehendetur Dodecaedrum, qua cubus.



[a] 34. primi. [b] 4. tertiædecimi. [c] 47. primi. [d] 15. quinti. [e] 22. sexti. [f] 15. tertiædecimi. [g] 4. primi. [h] 47. primi. [i] 9. tertij. [k] 47. primi.

POSTREMO cùm sit vt NP, ad PS, ita PS, ad SN: [l] erit quoque vt NL, dupla ipsius NP, ad RS, duplam ipsius PS, ita RS, dupla ipsius PS, ad rectam compositam ex SN, RL, nimirum ad duplam ipsius SN. Si igitur cubi latus NL, secetur extrema ac media ratione, maius segmentum erit SR: Sed NL, tota ita secta, Rationalis est. (Nam eius quadratum commensurabile est quadrato diametri sphæræ, quæ Rationalis ponitur; cùm sit illud tertia pars huius.) [m] Igitur maius segmentum SR, hoc est, dodecaedri latus XV, illi æquale, Irrationalis est linea, quæ vocatur Apotome. Dodecaedrum ergo constituimus, & sphæra cõplexi sumus, qua & prædictas figuras; & demõstrauimus, q; Dodecaedri latus Irrationalis est linea, q̃ vocatur Apotome. Quod erat faciendũ.

[l] 15. quinti. [m] 6. tertiædecimi.

COROLLARIVM I.

CVM ergo demonstratum sit; recta LN, extrema ac media ratione secta, maius segmentum esse rectam RS: Sit autem LN, aqualis lateri cubi, & RS, lateri Dodecaedri; Perspicuum est, si latus cubi secetur extrema ac media ratione, maius segmentum esse latus Dodecaedri in eadem sphæra descripti.

COROLLARIVM II.

SIC quoq; latus cubi aquale est linea recta subtendenti angulum pentagoni Dodecaedri eadem sphæra comprehensi. Nam AD, latus cubi subtendit angulum T, pentagoni, estq; ostensum aquale rectis AV, DX, subtendentibus angulos X, & V, eiusdem pentagoni.

QVONIAM verò recta subtendens dictum angulum pentagoni secta extrema ac media ratione, [a] facit maius segmentũ latus pentagoni; [b] ac propterea recta cõposita ex dicta recta subtendente angulum pentagoni, hoc est, ex latere cubi, & ex maiori segmento, id est, ex latere Dodecaedri, similiter diuiditur, facitq; minus segmentum latus Dodecaedri, & maius segmentum latus cubi: Efficitur, si recta linea secetur extrema ac media ratione, cuius minus segmentum sit latus Dodecaedri, maius segmentum esse latus cubi eiusdem sphæræ.

[a] 8. tertiædecimi. [b] 5. tertiædecimi.

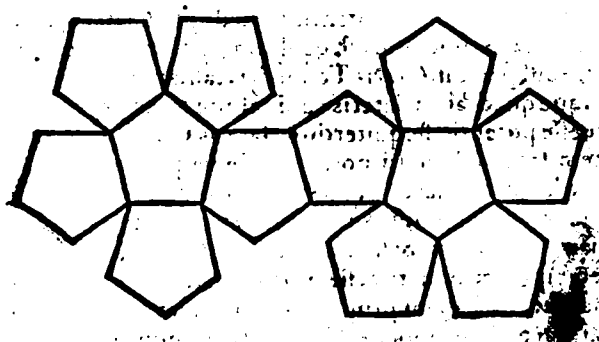
COROL-

COROLLARIVM III.

Constat etiam ex dictis, in Dodecaedro esse sex latera, quorum bina opposita sunt parallela, bifariamq; secãtur, & ad angulos rectos à tribus lineis rectis æqualibus sese in centro Dodecaedri bifariam quoque, & ad angulos rectos secantibus. Nam duo ex dictis lateribus sunt VX, T2, quæ videlicet parallela sunt lateribus cubi EF, AB; aliaq; quatuor reperiuntur super reliquas quatuor bases cubi, quorum, quæ super bases cubi oppositas existunt, parallela sunt, cùm parallela sint cubi lateribus parallelis & oppositis, secanturq;, ex demonstratis, bifariam & ad rectos angulos, à lineis rectis, quæ centra basium cubi oppositarum coniungunt; quales sunt rectæ YZ, 9Z, &c. quæ, vt demonstratum est, se mutuò intersecant in centro Z. Dico se mutuò secare bifariam & ad angulos rectos: bifariam quidem, quoniam cùm rectæ PZ, OZ, æquales sint dimidio lateri cubi; & YP, 9O æquales maioribus segmentis æqualibus PS, O9; Erunt totæ TZ, 9Z, æquales; Eademq; ratione reliquæ lineæ ex Z, ad sectiones oppositorum laterum ductæ, æquales erunt. Quare totæ tres lineæ æquales sunt, seq; bifariam in centro Z, mutuò secant: Ad angulos rectos verò, quia in parallelogrammo KOZP, angulus OZP, rectus est, cùm opponatur recto OKP. Non aliter ostendentur reliquæ lineæ rectæ centra basium coniungentes, efficere angulos rectos. Omnes enim parallelæ sunt lateribus cubi parallelis rectos angulos constituentibus, vt perspicuum est.

COROLLARIVM IIII.

*Denique constat, si recta diuidens opposita latera Dodecaedri bifariam, & ad angulos rectos, vt dictum est, secetur extrema ac media ratione, maius segmentum esse latus cubi, minus verò, latus Dodecaedri eadem sphæra comprehensi. Cùm enim quadrata rectarum ZY, YP, tripla ostensa sint quadrati rectæ PZ; erit ZY, secta in P, extrema ac media ratione, maiusq; segmentum erit PZ, ex scholio propos. 4. huius lib. Ac proinde erit vt ZY, ad ZP, ita ZP, ad PY; * ideoq; vt dupla ipsius ZY, nempe recta diuidens latera opposita Dodecaedri bi- * 15. quinti*
fariã, ad duplam ipsius ZP, nimirũ ad latus cubi, ita eadem dupla ipsius ZP, ad duplam ipsius PY, hoc est, ad latus Dodecaedri. Quare recta diuidens latera opposita Dodecaedri bifariam, secta extrema ac media ratione, facit maius segmentũ, latus cubi, minus verò, latus Dodecaedri eiusdẽ sphæræ.

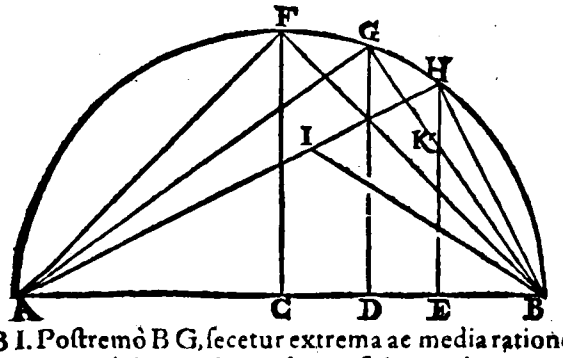


SCHOLIVM.

Quod si ex aliqua materia conficiantur duodecim pentagona æquilatera, & æquiangula, inter se æqualia, disponaturq;, vt hæc figura indicat, componetur Dodecaedrum secundùm totam soliditatem, si ritè inter se complicentur.

PROBL. 6, PROPOS. 18. 18.

Latera quinque figurarum exponere, & inter se comparare.



Sit sphæræ diameter AB, quæ in C, secetur bifariá; In D, verò ita, vt BD, sit ipsius pars tertia: In E, denique ita, vt BE, sit quinta pars eiusdem Descripto deinde circa AB, semicirculo, ducantur ad eius circumferentiam ex C, D, E, ipsi AB, perpendiculares CF, DG, EH; connectanturq; rectæ AF, BF, AG, BG, AH, BH. Post hæc ex HA, abscindatur HI, æqualis lateri Decagoni in eo circulo descripti, cuius semidiameter, seu latus Hexagoni est BH: connectaturq; recta BI. Postremò BG, secetur extrema ac media ratione in K, sitq; maius segmentum BK.

Quod igitur attinet ad expositionem laterum prædictarum figurarum, dico AG, esse latus Pyramidis, seu Tetraedri; AF, latus Octaedri; BG, latus cubi; BI, latus Icosaedri; BK, deniq; latus Dodecaedri. Quoniam. n. AG, media ꝓportionalis est inter BA, AD, ex coroll. propos. 8. lib. 6.

Erit ex coroll. propoſ. 20. eiuſdem lib. vt B A, ad A D, ita quadratum rectæ B A, ad quadratum rectæ A G: Eſt autem B A, ipſius A D, ſeſquialtera; cùm talium partium 2. ſit A D, qualium 3. eſt B A. Igitur & quadratum rectæ B A, ſeſquialterum eſt quadrati rectæ A G: [a] Ac proinde cùm diameter ſphæræ ſit potentia ſeſquialtera lateris Tetraedri; erit A G, latus Tetraedri.

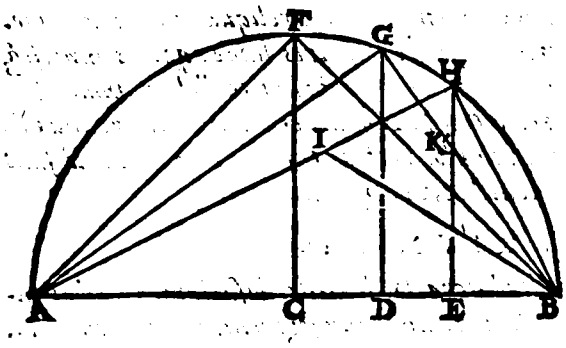
a 13. tertiædecimi.

RVRSVS quoniam A F, eſt media proportionalis inter B A, A C, ex eodem coroll. propoſ. 8. lib. 6. Ac proinde vt B A, ad A C, ita quadratum rectæ B A, ad quadratum rectæ A F, ex adducto coroll. propoſ. 20. lib. 6. Eſt autem B A, ipſius A C, dupla: Erit quadratum rectæ B A, duplum quadrati rectæ A F. [b] Quare cùm diameter ſphæræ potentia ſit dupla lateris Octaedri; erit A F, latus Octaedri. Eodem modo erit B F, latus Octaedri.

b 14. tertiædecimi.

DEINDE cùm B G, ſit media proportionalis inter A B, B D, ideoq; vt A B, ad B D, ita quadratum rectæ A B, ad quadratum rectæ B G, ex præfatis duobus corollariis lib. 6. Sit autem A B, ipſius B D, tripla, ex conſtructione: Erit quadratum rectæ A B, triplum quadrati rectæ B G. [c] Quocirca cùm ſphæræ diameter potentia ſit tripla lateris cubi; Erit B G, latus cubi.

c 15. tertiædecimi.



PRAETEREA quia, ex eiſdem corollariis, B H, eſt media proportionalis inter A B, B E, atque idcircò vt A B, ad B E, ita quadratum rectæ A B, ad quadratum rectæ B H: Eſt autem, ex conſtructione, A B, ipſius B E, quintupla: Erit quadratum rectæ A B, quintuplum quadrati rectæ B H. Cùm igitur diameter ſphæræ potentia ſit quintupla ſemidiametri circuli quinque latera Icoſaedri ambientis, ex coroll. 1. propoſ. 16. huius lib. Erit B H, ſemidiameter, hoc eſt, latus hexagoni dicti circuli: Eſt autem H I, latus decagoni eiuſdem circuli, ex cõſtructione. [d] Igitur latus pentagoni poterit B H, & H I, ſimul: Ac proinde [e] cùm quadratum rectæ B I, æquale ſit quadratis rectarum B H, H I; erit B I, latus pentagoni circuli eiuſdem. [f] Quam ob rem B I, latus eſt Icoſaedri.

d 10. tertiædecimi.

e 47. primi.

f 16. tertiædecimi.

DENIQVE, cùm B G, latus cubi ſectum ſit in K, extrema & media ratione, erit B K, maius ſegmentum, latus Dodecaedri in eadem ſphæra deſcripti, ex coroll. 1. propoſ. 17. huius lib. Expoſita ergò ſunt latera quinque figurarum regularium in eadem ſphæra deſcriptarum.

QVOD verò ad comparationem laterum iam inuentorum ſpectat; cùm demonſtratum ſit, diametrum ſphæræ eſſe potentia ſeſquialterã lateris pyramidis; potentia verò duplam lateris Octaedri, & potentia triplam lateris cubi; perſpicuum eſt, qualium partium 6. fuerit quadratum diametri, talium 4. eſſe quadratum lateris Tetraedri; talium verò 3. quadratum lateris Octaedri; & denique quadratum lateris cubi, talium 2. Ac propterea latus pyramidis, ſeu Tetraedri, eſſe potentia ſeſquitertium lateris Octaedri, potentia verò duplum lateris cubi. Item latus Octaedri potentia eſſe ſeſquialterum lateris cubi. Quapropter quadrata ex lateribus harum trium figurarum, Tetraedri nimirum, Octaedri, & cubi, nec non ex ſphæræ diametro deſcripta, proportionem inter ſe habent, quã numerus ad numerum; & Ac propterea diameter ſphæræ, & latera dictarum figurarũ lineæ ſunt commenſurabiles; atque adeò cùm diameter ſphæræ ponatur eſſe Rationalis, erunt quoque prædicta latera Rationalia. Quia verò dicta quadrata nõ habent proportionem, quam numerus quadratus ad numerum quadratum, vt conſtat ex coroll. propoſ. 24. lib. 8. [h] Erunt huiuſmodi lineæ, nimirum diameter ſphæræ, latus Tetraedri, latus Octaedri, & latus cubi, longitudine incommenſurabiles, ac proinde Rationales potentia tantùm commenſurabiles.

Diamet. 6.
Tetraed. 4.
Octaed. 3.
Cub. 2.

g 6. decimi.

h 9. decimi.

AT verò latera Icoſaedri, & Dodecaedri, quoniam ſunt lineę Irrationales, illud quidem, Minor; hoc verò Apotome, vt demonſtratum eſt, nullo modo, hoc eſt, nec longitudine, nec potentia commenſurabilia ſunt lateribus prædictis. Si enim commenſurabilia eſſent latera harum poſteriorum figurarum lateribus priorum, cùm latera priorum ſint diametro ſphæræ commenſurabilia; eſſent quoque latera poſteriorum eidem diametro commenſurabilia; Ac proinde, exiſtente diametro Rationali, forent quoque ipſa latera Rationalia. Quod eſt abſurdum, oſtenſum enim eſt, ipſa eſſe Irrationalia.

SED neque inter ſe vllo pacto commenſurabilia ſunt dicta latera Icoſaedri, & Dodecaedri. Si nam que credantur eſſe commenſurabilia longitudine inter ſe, cùm latus Dodecaedri ſit Apotome, [i] erit quoque latus Icoſaedri, Apotome. Item cùm latus Icoſaedri ſit linea Minor, [k] erit & latus Dodecaedri linea Minor. Quod ſi dicantur commenſurabilia eſſe potentia tantùm, ſequetur eodem modo, latus Dodecaedri eſſe lineam Minorem, ex eo, [l] quòd latus Icoſaedri Minor eſt. Quod eſt abſurdum. Nam ex ſcholio propoſ. 112. lib. 10. Apotome, & Minor ſunt lineæ Irrationales prorſus inter ſe differentes, ita vt neutra ſit eadem alteri.

i 104. deci.

k 106. deci.

l 16. tertiædecimi.

ITAQVE quamuis ex lateribus expoſitis quinque figurarum regularium, tria quidem priora ſint commenſurabilia & inter ſe, & diametro ſphæræ, ideoq; Rationalia exiſtant, duo verò poſteriora incommenſurabilia & inter ſe, & diametro, reliquiſq; lateribus; ac proinde Irrationalia ſint:

Cernitur

Cernitur tamen inter omnia latera prædicta hic ordo, vt latus Tetraedri maius sit latere Octaedri; Octaedri latus maius latere cubi; Latus cubi maius latere Icosaedri; Latus denique Icosaedri maius latere Dodecaedri; Hoc est, eo ordine se mutuò excedunt dicta latera, quo præfatas figuras constituximus. Quæ fortè causa fuit, cur Euclides non eodem ordine huiusmodi figuras fuerit fabricatus, quo eas definiit.

NAM latus Tetraedri maius esse latere Octaedri, perspicuum est. Cùm enim A G, latus Tetraedri subtendat maiorem arcum, quàm A F, latus Octaedri; maior erit recta A G, quàm A F, ex scholio propos. 28. lib. 3.

EODEM modo ostendemus latus Octaedri maius esse latere cubi. Nam B F, latus Octaedri maiorem arcum subtendit, quàm B G, cubi latus.

LATVS autem cubi B G, maius esse latere Icosaedri B I, hac arte demonstrabimus. Quoniam A B, tripla ponitur ipsius B D; [a] & quadrata habent proportionem laterum duplicatam; erit quadratum rectæ A B, noncuplum quadrati rectæ B D, cùm noncupla proportio sit duplicata proportionis triplæ, vt hinc apparet. 1. 9. Ac propterea qualium partium 9. ponetur quadratum rectæ A B, talium erit quadratum rectæ B D. Qualium autem partium 9. est quadratum rectæ A B, talium 5. est quadratum rectæ B G; [b] quòd illud huius triplum sit. Ac proinde talium quoque 5. sunt quadrata rectarum G D, B D, cùm æqualia sint quadrato rectæ B G. Igitur si auferatur quadratum rectæ B D, talium partium 5. relinquetur talium partium 4. quadratum rectæ G D. Quoniam verò quadratum rectæ A B, quintuplum est quadrati rectæ B H, erit quadratum rectæ B H, minus quàm talium partium 2. Nam cùm 4. ad 2. minorem habeant proportionem quintupla, quòd 10. ad 2. quintuplam proportionem habeant; [c] erit numerus, ad quem 9. habeat proportionem quintuplam, minor quàm 2. Quare quadratum rectæ G D, maius est quadrato rectæ B H, ideoque recta G D, maior quàm recta B H. Rursus quadrantis circuli, ex quo Icosaedrum constituitur, & ex linea dupla lateris decagoni H I, eiusdem circuli, per coroll. 2. propos. 16. huius lib. constat latus decagoni H I, minus esse tertia parte rectæ A B, hoc est, minus recta B D. Nam si H I, recta æqualis credatur tertiæ parti rectæ A B, erit dupla illius, æqualis duabus tertiis partibus, nempe ipsi A D; Ac propterea B H, reliquæ tertiæ parti erit æqualis, nimirum ipsi B D; Atque adeò, cùm quadratum rectæ A B, noncuplum sit ostensum quadrati rectæ B D, erit idem quadratum rectæ A B, noncuplum quadrati rectæ B H. Quod est absurdum. quintuplum enim est demonstratum. Non ergo H I, tertia pars est ipsius A B: Sed neque maior tertia parte. Si enim recta H I, dicatur maior tertia parte rectæ A B, & proinde dupla ipsius H I, maior quàm duæ tertiæ, hoc est, quàm A D, erit B H, minor quàm tertia pars B D. Quare quadratum rectæ A B, maius erit, quàm noncuplum quadrati rectæ B D. Quod magis est absurdum. Non igitur maior est H I, tertia parte ipsius A B: Sed neque æqualis tertiæ parti, vt ostendimus. Minor ergo est quàm tertiæ pars, hoc est, quàm B D. Itaque cùm rectæ G D, D B, maiores sint rectis B H, H I, vt demonstratum est, erunt quoque quadrata illarum quadratis harum maiora: [d] Est autem quadratum rectæ B G, æquale quadratis rectarum G D, D B; & quadratum rectæ B I, quadratis rectarum B, H, H I. Quadratum ergo rectæ B G, maius quoque erit quadrato rectæ B I; Ac proinde recta B G, nempe latus cubi, maior erit quàm recta B I, latus scilicet Icosaedri.

MAIVS denique esse latus Icosaedri B I, latere Dodecaedri B K, hac ratione patefiet. Cùm rectæ B G, diuisæ extrema ac media ratione, maius segmentum sit B K, & minus G K; erit rectangulum sub B G, B K, maius rectangulo sub B G, G K; atque adeò rectangula sub B G, B K, & sub B G, G K, simul maiora duplo rectanguli sub B G, G K: [e] Est autem rectangulis sub B G, B K, & sub B G, G K, æquale quadratum rectæ B G; Et duobus rectangulis sub B G, G K, æqualia sunt duo quadrata rectæ B K. (Nam cùm sit, vt B G, ad B K, ita B K, ad G K; [f] erit quadratum rectæ B K, æquale rectangulo sub B G, G K, ideoque duo quadrata rectæ B K, æqualia duobus rectangulis sub B G, G K.) Maius igitur quoque est quadratum rectæ B G, duobus quadratis rectæ B K; Atque idcircò maiora erunt tria quadrata rectæ B G, sex quadratis rectæ B K: Atqui tribus quadratis rectæ B G, æqualia sunt quinque quadrata rectæ B H. (Cùm enim quadratum rectæ A B, triplum sit quadrati rectæ B G, & quintuplum quadrati rectæ B H; erunt tam tria quadrata rectæ B G, quàm quinque quadrata rectæ B H, æqualia eidem quadrato rectæ A B, ideoque tria illa his quinque æqualia.) Igitur & quinque quadrata rectæ B H, maiora erunt sex quadratis rectæ B K; Ac proinde vnum quadratum rectæ B H, maius erit vno quadrato rectæ B K. (Si namq; æquale esset quadratum rectæ B H, quadrato rectæ B K, vel minus; forent quinque quadrata rectæ B H, minora sex quadratis rectæ B K. quod est absurdum, cùm illa quinq; hisce sex maiora sint demonstrata.) Quam ob rem & recta B H, maior erit quàm recta B K; Ac propterea cùm B I, maior sit quàm B H, multò maior erit B I, latus videlicet Icosaedri, quàm B K, latus Dodecaedri. Latera igitur quinque figurarum exposuimus, & inter se comparauimus. Quod erat faciendum.

a 20. sexti.
b 15. tertij decimi.
c 10. quinti.
d 47. primi.
e 2. secundi.
f 17. sexti.

SCHOLIVM.

INTERPRETES hoc loco demonstrant, præter dictas quinq; figuras, non posse aliam constitui figuram solidam, quæ planis & æquilateris & æquiangulis contineatur, inter se æqualibus, hac ferè ratione.

EX duobus triangulis, vel ex duabus figuris alijs, solidus angulus constitui non potest, cùm saltem tres anguli plani requirantur ad solidi anguli constitutionem.

Ex tribus autem triangulis æquilateris, constat pyramidis angulus.

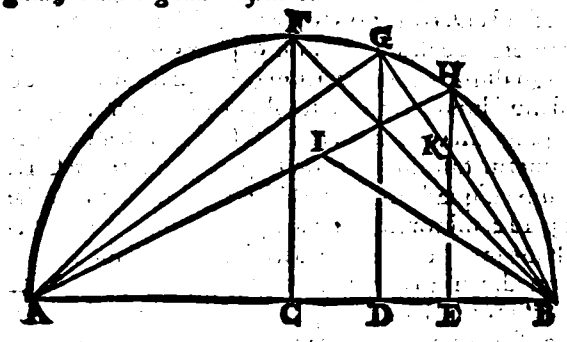
Ex quatuor, Octaedri angulus;

Ex quinque, angulus Icosaedri;

Ex sex autem huiusmodi triangulis ad idem punctum coeuntibus fieri non potest angulus solidus. Cum enim trianguli æquilateri angulus contineat duas tertias partes vnius recti, ex coroll. 3. propos. 32. lib. 1. erunt eiusmodi anguli sex, duodecim tertiæ partes vnius recti, hoc est, erunt quatuor rectis æquales. Quare ex ipsis nullus angulus solidus constituetur. [a] *Nam solidus omnis angulus, minoribus quàm quatuor rectis angulis continetur. Multò ergo minus ex pluribus, quàm sex planis eiusmodi angulis, solidus angulus constabit.*

a 20. vndecimi.

Ex tribus deinde quadratis, cubi angulus conficitur. Ex quatuor autem quadratis, nullus angulus solidus constitui potest. Rursus enim recti quatuor erunt. Multò ergo minus ex pluribus, quàm quatuor eiusmodi angulis, solidus angulus constabit.



Ex tribus denique pentagonis æquilateris, & æquiangulis, Dodecaedri angulus componitur. Cùm enim quinq; anguli pentagoni æquilateri sint sex rectis, vt ostendimus ad propos. 32. lib. 1. Ac proinde vnus angulus contineat vnum rectum, & præterea quintam partem vnius recti; continebunt tres eiusmodi anguli tres rectos, & insuper tres quintas partes vnius recti. Quare minores erunt quatuor rectis, ideoq; ex ipsis angulus solidus constituetur. Sed ex quatuor huiusmodi angulis, nullus solidus angulus compleri potest. Cum enim vnus, vt dictum est, maior sit recto, eò quòd continet vnum rectum, & insuper recti quintam partem, erunt quatuor maiores quatuor rectis. Quare nullus angulus solidus ex ipsis constituetur; Ac propterea multò minus ex pluribus, quàm quatuor eiusmodi angulis, solidus angulus constabit. Nec sanè ex aliis figuris æquilateris, & æquiangulis constitui poterit angulus solidus. Nam cùm sex anguli hexagoni æquales sint octo rectis, vt ad propos. 32. lib. 1. est demonstratum; Ac proinde vnus angulus contineat vnum rectum, & præterea duas partes sextas vnius recti; continebunt tres anguli eiusmodi tres rectos, & sex sextas partes recti, hoc est, quatuor rectos. Quare ex ipsis nullo modo componetur angulus solidus; Atque idcirco multò minus ex pluribus eiusmodi angulis, quàm tribus, angulus solidus conficietur; neque propterea ex aliis polygonis. Quilibet enim tres maiores sunt quatuor rectis. Quam ob rem perspicuum est, præter dictas quinque figuras, aliam figuram solidam non posse constitui, quæ planis æquilateris, & æquiangulis inter se æqualibus contineatur.

Nam si tria triangula æquilatera & æqualia coeant in vnum punctum ad constitutionem anguli solidi, constituetur Pyramidis contenta quatuor huiusmodi triangulis.

Si verò quatuor eiusmodi triangula conueniant ad angulum solidum componendum, efficietur Octaedrum octo triangulis eiusmodi comprehensum.

Si denique assumantur quinque talia triangula ad efformandum angulum solidum, conficietur Icosaedrum viginti triangulis eiusmodi contentum.

Quod si tria quadrata æqualia coeant in vnum punctum, vt constituant angulum solidum, fabricabitur cubus ex sex huiusmodi quadratis.

Postremo, si tria pentagona æquilatera, & æquiangula, inter se æqualia, conueniant ad constitutionem anguli solidi, componetur Dodecaedrum duodecim eiusmodi pentagona continens.

Hoc etiam loco apponere libet modum quendam ex Hypsicle Alexandrino, quo expeditè numerus laterum, & angulorum cuiuslibet figuræ regularis habeatur.

Si enim quis interrogauerit, quotnam latera quoduis Regularium Solidorum habeat; Multiplicanda sunt omnes bases in vnius basis latera, vt habeantur omnium basium latera: Quia verò bina semper latera basium in vnum conueniunt, ad constitutionem vnius lateris Regularis solidi, sumendum est dimidium omnium laterum, vt numerus laterum Regularis solidi appareat.

Exemplvm. Si quatuor triangula Pyramidis, siue Tetraedri, multiplicentur in numerum laterum vnius trianguli, vt in 3. fiunt 12. quorum dimidium est 6. numerus scilicet laterum Pyramidis. Ad eundem modum & in reliquis. Si enim sex quadrata cubum componentia multiplicentur in vnius quadrati latera, nempe in 4. fiunt 24. quorum dimidium est 12. numerus videlicet laterum cubi. Si autem octo triangula Octaedri multiplicentur in 3. numerum laterum vnius trianguli, fiunt 24. quorum dimidium est rursus 12. numerus laterum Octaedri. Si rursus 20. triangula Icosaedri multiplicentur in 3. numerum laterum vnius trianguli, fiunt 60. quorum dimidium est 30. numerus laterum Icosaedri. Si denique 12 pentagona Dodecaedrum constituentia multiplicentur in 5. numerum laterum vnius pentagoni, fiunt 60. quorum dimidium est rursus 30. numerus laterum Dodecaedri.

Quod si quis rursus interrogauerit, quotnam angulos solidos quoduis Regularium Solidorum habeat; Multiplicanda sunt omnes bases in vnius basis angulos, vt habeantur omnium basium anguli: Quia verò tres, quatuor,

quatuor, vel quinq; semper anguli basium in vnum conueniunt, ad constitutionem vnius anguli solidi, diuidendi sunt omnes anguli in numerum angulorum, qui simul coeunt ad angulum solidum constituendum, vt numerus angulorum solidorum Regularis solidi appareat.

EXEMPLVM. Si quatuor triangula Pyramidis multiplicentur in 3. numerũ angulorum vnius trianguli, fiunt 12. anguli, qui si diuidantur in 3. (Tot enim anguli constituunt vnum solidum angulum Pyramidis) faciunt 4. angulos solidos Pyramidis. Si verò 6. quadrata cubi multiplicẽtur in 4. numerum angulorum vnius quadrati, fiunt 24. anguli, qui diuisi in 3. (Tot enim anguli conficiunt vnum angulum solidum cubi.) faciunt 8. angulos solidos cubi. Si quoque octo triangula Octaedri multiplicentur in 3. numerum angulorum vnius trianguli, fiunt 24. anguli, qui diuisi in 4. (Tot enim anguli componunt solidum angulum Octaedri.) conficiunt 6. angulos solidos Octaedri. Si rursus 20. triangula Icosaedri multiplicentur in 3. numerum angulorum vnius trianguli, fiunt 60. anguli, qui diuisi in 5. (Tot enim anguli constituunt angulum solidum Icosaedri.) producunt 12. angulos solidos Icosaedri. Si denique 12. pentagona Dodecaedri multiplicentur in 5. numerum angulorum vnius pentagoni, fiunt 60. anguli, qui diuisi in 3. (Tot enim anguli conueniunt ad constituendum angulum solidum Dodecaedri.) efficiunt 20. angulos solidos Dodecaedri.

DENIQVE consideratione etiam dignum est, cubum & octaedrum reciproca esse, quod ad bases attinet, & ad angulos solidos. Nam quot bases in vno continentur, tot anguli solidi in altero reperiuntur, & contrà. Vt cubus habet sex bases, & octo angulos solidos; octaedrum verò octo continet bases, & sex angulos solidos. Sic etiã reciproca sunt Icosaedrum, & Dodecaedrum. Nam Icosaedrum habet viginti bases, & duodecim solidos angulos, at Dodecaedrũ duodecim bases possidet, & viginti angulos solidos. Solum Tetraedrũ, (hoc est Pyramis) cum nullo reciprocatur, nisi cũ seipso. Habet enim quatuor bases totidemq; solidos angulos.

FINIS ELEMENTI DECIMITERTII.

EVCLIDIS

ELEMENTVM QVARTVMDECIMVM:

& Solidorum quartum,

vt quidam arbitrantur: Vt alij verò, Hypsiclis Alexandrini de quinq; corporibus,

LIBER PRIMVS.

PROOEMIVM HYPSICLIS ALEXANDRINI AD PROTARCHUM.

BASILIDES Tyrius, Protarche, Alexandriam profectus, patriq; nostro ob disciplinæ societatem commendatus, longissimo peregrinationis tempore cum eo versatus est. Cumq; differerent aliquando de scripta ab Apollonio comparatione Dodecaedri & Icosaedri eidem sphæra inscriptorum, quam hæc inter se habeant rationem, censuerunt ea non rectè tradidisse Apollonium; quæ à se emendata, vt pater meus dicebat, literis prodiderunt. Ego autem postea incidi in alterum librum ab Apollonio editum, qui demonstrationem accuratè complectebatur de re proposita, ex eiusq; problematis indagatione magnam equidem cæpi voluptatem. Illud certè ab omnibus perspici potest, quòd scripsit Apollonius, cùm sit in omnium manibus. Quod autem diligenti, quantum coniicere licet, studio nos postea scripsisse videmur, id monimentis consignatum tibi dedicandum duximus; vt qui feliciter cùm in omnibus disciplinis, tum vel maximè in Geometria versatus, scitè ac prudenter iudices ea, quæ dicturi sumus: Ob eam verò, quæ tibi cum patre fuit, vitæ consuetudinem, quaq; nos complecteris

beneuolentiam, tractationem ipſam libenter audias. Sed iam tempus eſt, vt proœmio finem imponentes id, quod propoſitum eſt, aggrediamur.

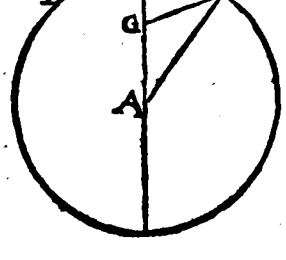
TREDECIM *libri hactenus expoſiti ab omnibus Euclidi aſcribuntur: Duo verò ſubſequentes à pleriq; Hypſicli Alexandrino & rectè, meo iudicio, tribui ſolent; in quorum quidem priori inter ſe comparantur Icoſaedrum, & Dodecaedrum, tam ſecundùm ſuperficies, quàm ſoliditates: In poſteriori verò exponuntur deſcriptiones aliquot figurarum regularium vnius intra aliam; vt hi duo libri ſint inſtar appendicis cuiuſdam elementorum Euclidis. Verùm quia plurima omittuntur ab Hypſicle ſcitu non iniucunda, quæ ſpectant ad comparationes dictorum quinque corporum regularium, eorumq; mutuas inſcriptiones vnius in alio; quatuor enim propoſitionibus duntaxat liber hic quartus decimus, quinq; verò problematibus decimus quintus abſoluitur: Viſum eſt, vt aliquam lucem huic tractationi afferremus, paulò vberius de dictis figuris regularibus in vniuerſum diſſerere, proponendo varia theoremata, atque problemata, quibus & prædicta corpora regularia inter ſe comparantur, & ſibi mutuò inſcribuntur. Qua in re maximo nobis adiumento fuiſſe Campanum, & Franciſcum Fluſſatem Candallam, qui diligentem operam, & ſedulam in hoc negotio collocauit, non negamus. Hic enim non ſolùm inſequentes duos libros quamplurimis theorematibus, problematibusq; locupletauit; verumetiam integrum librum, qui ordine decimus ſextus eſt, adiunxit, in quo proprietates illuſtres de dictis corporibus proponit. Caterum præcipuum fuiſſe Hypſiclis inſtitutum, in hoc lib. 14. diſputare de comparatione mutua Icoſaedri & Dodecaedri, facile intelligi poteſt ex eius proœmio ad Protarchum, quod ſuperius eſt poſitum.*

QVONIAM verò in hiſce duobus libris Hypſicles, & Campanus tam in numero propoſitionum, quàm in earundem ordine, & inter ſe, & à Franciſco Fluſſate, ideoq; & à nobis diſcrepant; annotauimus in margine ordinem vtriuſque duobus numeris, quorum ſuperior ordinem Hypſiclis, inferior verò Campani ſeriem indicat. Quando autem in margine vnicus tantùm numerus reperitur, nullam eſſe tunc differentiam inter Campanum & Hypſiclem, ſignificatur; Quod ſi aliquando loco ſuperioris numeri apponatur hæc nota O, intelligendum eſt, in Hypſicle dictam propoſitionem deſiderari. Idemq; in Campano intellige, ſi fortè loco numeri inferioris eadem nota poſita fuerit. Quando denique nihil in margine deprehenditur, indicio eſt, tam apud Hypſiclem, quàm apud Campanum, illam propoſitionem deeſſe.

1. # THEOR. 1. PROPOS. 1.

QVAE ex centro circuli cuiuſpiam in pentagoni eidem circulo inſcripti latus perpendicularis ducitur, dimidia eſt vtriuſque lineæ ſimul, & lateris hexagoni, & lateris decagoni eidem circulo inſcripti.

Ex centro A, circuli B C D, ducatur A E, perpendicularis ad B C, latus pentagoni in dicto circulo deſcripti. Dico A E, dimidium eſſe lineæ compoſitæ ex latere hexagoni & decagoni eiuſdem circuli. Extenſa enim A E, in vtramque partem, vt perficiatur tota diameter D F, ſumptaque E G, æquali ipſi E F; connectantur rectæ A C, C G, C F, B F. [a] Quoniam igitur perpendicularis *AE*, ſecat rectam B C, bifariam; erunt latera B E, E F, trianguli B E F, æqualia lateribus C E, E F, trianguli C E F; Cùm igitur & anguli contenti ſint æquales, nempe recti; [b] erunt baſes C F, B F, æquales; [c] ideoq; & arcus C F, B F, æquales; Ac proinde exiſtéte arcu B C, quinta parte totius circumferentiæ, erit C F, eiuſdem pars decima; atq; adeò recta C F, latus erit decagoni. Rurſus quia latera C E, E F, trianguli C E F, æqualia ſunt lateribus C E, E G, trianguli C E G, ſuntque anguli contenti recti; [d] erunt & baſes C F, C G, & anguli C F G, C G F, æquales. Quia verò arcus C F, quinta pars eſt ſemicircumferentiæ D C F, cùm ſit totius circumferentiæ decima pars; Erit talium partium 1. arcus C F, qualium 4. eſt arcus D C, hoc eſt, arcus D C, quadruplus erit arcus C F. [e] Quare & angulus D A C, quadruplus erit anguli C A F: [f] Eſt autem angulus C F D, dimidium anguli D A C, cùm illius ad circumferentiam, & huius ad centrũ eadem ſit baſis D C. Igitur angulus C F D, atq; adeò illi æqualis oſtenſus C G F, duplus erit anguli C A F: [g] Atqui angulus C G F, externus, æqualis eſt internis G A C, G C A, in triangulo G A C. Cùm igitur G A C, ſit dimidium anguli C G F, vt oſtenſum eſt, erit G C A, reliquum dimidium eiuſdem anguli C G F, ideoq; æquales erunt anguli G A C, G C A; [h] ac proinde & latera A G, C G, æqualia: Eſt autem C G, recta oſtenſa æqualis rectæ C F. Igitur & A G, recta æqualis erit eidem C F. Quare additis æqualibus G E, E F, fiet A E, æqualis duabus E F, F C, ſimul: Ac proinde tres ſimul A E, E F, F C, hoc eſt, duæ ſimul A F, F C, duplæ erunt ipſius A E, atque idcirco è contrario erit A E, ducta videlicet perpendicularis in pentagoni latus, dimidia duarum ſimul A F, F C, nempe lateris hexagoni, & decagoni. Quæ ergo ex centro circuli cuiuſpiam in pentagoni eidem circulo inſcripti latus, &c. Quod erat demonſtrandum.



a 3. tertij.
b 4. primi.
c 28. tertij.
d 4. primi.
e 33. ſexti.
f 20. tertij.
g 32. primi.
h 6. primi.

COROL-

COROLLARIVM I.

Ex his sequitur, lineam perpendicularem ductam ex centro circuli ad lineam rectam in eodem circulo aptatam, secare arcum, quem dicta hac linea recta subtendit, bifariam. Demonstratum enim est rectam A E, qua ex centro perpendicularis est ad B C, diuidere arcum B C, bifariam in F.

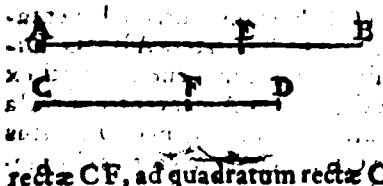
COROLLARIVM II.

Hinc quoque fit, perpendicularem ex centro ad latus pentagoni ductam, æqualem esse vtrique lineæ simul, & ei, quæ ex centro ad latus trianguli æquilateri eidem circulo inscripti ducitur perpendiculari, & dimidiæ lateris decagoni. Quoniam enim, vt in hac propositione ostensum est, perpendicularis ad latus pentagoni æqualis est dimidio lateris hexagoni, & dimidio lateris decagoni simul; Est autem perpendicularis ad latus trianguli æquilateri, ex coroll. propos. 12. lib. 13. æqualis dimidio semidiametri, seu lateris hexagoni: perspicuum est, eandem perpendicularem ad latus pentagoni esse æqualem perpendiculari ad latus trianguli, & dimidio lateris decagoni simul.

THEOR. 2. PROPOS. 4.

Si binæ rectæ lineæ extrema ac media ratione secentur; ipsæ similiter secabuntur, in easdem scilicet proportiones. 2.

Secentvr binæ rectæ A B, C D, extrema ac media ratione in E, & F. Dico ipsas in easdem proportiones secari, hoc est, esse vt A B, ad C D, ita A E, ad C F, & E B, ad F D; Item vt A E, ad E B, ita C F, ad F D, &c. Cùm enim sit, vt A B, ad A E, ita A E, ad E B; & vt C D, ad C F, ita C F, ad F D; erit rectangulum sub A B, E B, æquale quadrato rectæ A E; & rectangulum sub C D, F D, æquale quadrato rectæ C F. Quamobrem erit vt rectangulum sub A B, E B, ad quadratum rectæ A E, ita rectangulum sub C D, F D, ad quadratum rectæ C F; (est enim vtrobique æqualitatis proportio.) Ac propterea, per ea, quæ demonstrauimus in scholio propos. 22. lib. 5. vt quadruplum rectanguli sub A B, E B, ad quadratum rectæ A E, ita quadruplum rectanguli sub C D, F D, ad quadratum rectæ C F: & componendo, vt quadruplũ rectanguli sub A B, E B, & quadratum rectæ A E, ad quadratum rectæ A E, ita quadruplum rectanguli sub C D, F D, & quadratũ rectæ C F, ad quadratum rectæ C F: Sed quod quater continetur sub A B, E B, vnà cum quadrato rectæ A E, æquale est quadrato lineæ compositæ ex A B, E B; Et quod quater continetur sub C D, F D, vnà cum quadrato rectæ C F, æquale est quadrato lineæ compositæ ex C D, F D. Igitur erit quoque, vt quadratum lineæ compositæ ex A B, E B, ad quadratum rectæ A E, ita quadratum lineæ compositæ ex C D, F D, ad quadratum rectæ C F; Ac proinde, vt recta composita ex A B, E B, ad rectam A E, ita recta composita ex C D, F D, ad rectam C F: Et cõponendo vt composita recta ex A B, E B, & recta A E, hoc est, dupla ipsius A B, ad rectam A E, ita recta composita ex C D, F D, & recta C F, id est, dupla ipsius C D, ad rectam C F; Et permutando, vt dupla ipsius A B, ad duplam ipsius C D, ita A E, ad C F; Vt autem dupla ipsius A B, ad duplam ipsius C D, ita est A B, ad C D. Erit ergo vt A B, ad C D, ita A E, ad C F; Ac propterea, cùm sit vt tota A B, ad totam C D, ita A E, ablata ad C F, ablatam; erit quoque reliqua E B, ad reliquam F D, vt tota ad totam. Quare vt A E, ad C F, ita erit E B, ad F D, cùm vtraque proportio eadem sit proportioni A B, ad C D: Et permutando, erit vt A E, ad E B, sic C F, ad F D; & sic denique iuxta omnes modos arguendi ex proportionalitate, ostendemus & totas lineas, & earundem partes esse proportionales inter se. Si binæ itaq; rectæ lineæ extrema ac media ratione secentur, &c. Quod erat ostendendũ.



a 17. sexti.

b 8. secundi

c 22. sexti.

d 15. quinti.

e 19. quinti.

SCHOLIVM.

Facile hoc loco demonstrabimus hoc sequens theorema.

Latvs hexagoni ad latus decagoni in eodem circulo descriptorum eandem proportionem habet, quam recta subtendens angulum pentagoni æquilateri & æquianguli ad latus ipsius pentagoni.

Qvoniam enim a latus hexagoni cum latere decagoni efficit lineam media & extrema ratione sectam; b & recta subtendens pentagoni angulum secta extrema ac media ratione facit maius segmentum, latus ipsum pentagoni: c sit vt eadem sit proportio lateris hexagoni ad latus decagoni, maioris segmenti ad minus, quæ maioris segmenti recta angulum pentagoni subtendentis ad minus. Cùm ergo sit, vt maius segmentum ad minus, ita tota ad maius segmentum; erit quoque latus hexagoni ad latus decagoni, vt recta subtendens angulum pentagoni æquilateri & æquianguli ad latus pentagoni. quod est propositum.

a 9. tertij decimi.

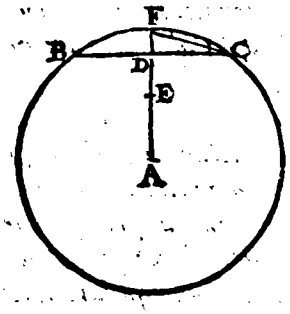
b 8. tertij decimi.

c 2. quarti decimi.

Ex hac quoque propositione & præcedenti inferemus hoc alterum theorema.

Si linea perpendicularis ex centro circuli ad latus pentagoni in eodem circulo descripti ducta secetur extrema ac media ratione, maius segmentum æquale est perpendiculari

ex eodem centro ad latus trianguli æquilateri ductæ, minus verò æquale est dimidio lateris decagoni eidem circulo inscriptorum.



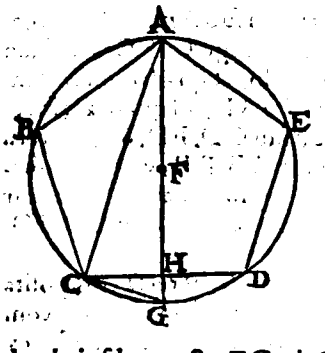
Ex centro enim A, circuli B C, ducta perpendicularis A D, ad latus B C, pentagoni eidem circulo inscripti, secetur in E, extrema ac media ratione. Dico maius segmentum A E, esse æquale perpendiculari ex A, ad latus trianguli æquilateri eiusdem circuli ductæ; minus verò segmentum E D, æquale esse dimidio lateris decagoni eiusdem circuli. Extensa namque recta A D, ad F, & connexa recta F C; erit F C, latus decagoni, cùm ex coroll. 1. propos. 1. huius libri, arcus B C, nempe quinta pars totius circumferentiæ, bifariam secetur in F; [a] *Ac proinde recta composita ex A F, latere hexagoni, & F C, latere decagoni, secta erit extrema ac media ratione, cuius maius segmentum A F, latus hexagoni, minus verò segmentum F C, latus decagoni. Quare, vt in hac propos. ostensum est, erit vt tota A D, diuisa secundum extremam ac mediam rationem, ad totam compositam ex A F, F C, similiter diuisam, ita A E, maius segmentum ad A F, maius segmentum; & E D, minus segmentum ad F C, minus segmentum:* [b] *Est autem tota A D, dimidium totius compositæ ex A F, F C. Igitur & A E, ipsius A F, semidiametri, & E D, ipsius F C, lateris decagoni dimidium erit. Cùm ergo, per corollarium propositionis 12. lib. 13. perpendicularis ex centro ad latus trianguli æquilateri ducta, æqualis sit dimidio semidiametri; perspicuum est, maius segmentum A E, æquale esse dictæ perpendiculari; minus verò E D, dimidio lateris decagoni. Quod est propositum.*

a 9. tertii decimi.

b 1. quarti decimi.

THEOR. 3. PROPOS. 3.

SI in circulo pentagonum æquilaterum describatur, quod ex latere pentagoni, & quod ex ea, quæ binis lateribus pentagoni subtenditur, recta linea, vtraque simul quadrata, quintula sunt eius, quod ex semidiametro describitur, quadrati.



DESCRIBATVR in circulo A B C D E, cuius centrum F, pentagonum A B C D E, subtendatq; recta A C, bina latera A B, B C. Dico quadrata rectarum C D, A C, simul quintupla esse quadrati ex semidiametro circuli descripti. Ducta enim ex A, per centrum recta A F G, quæ p coroll. 2. propos. 10. lib. 13. diuidat & arcum C D, & latus C D, bifariam in G, & H; erit arcus C G, decima pars totius circumferentiæ, ideoq; recta subtensa C G, latus decagoni. Quoniam igitur recta A G, dupla est rectæ F G; erit ex scholio propos. 4. lib. 2. quadratum rectæ A G, quadruplum quadrati rectæ F G: [a] Sunt autem quadrato rectæ A G, æqualia quadrata rectarum A C, C G. Igitur & quadrata rectarum A C, C G, quadrupla sunt quadrati rectæ F G; Atque adeò tria quadrata rectarum A C, C G, F G, quintupla quadrati eiusdem rectæ F G; [b] Cùm ergo quadratis rectarum F G, C G, nempe lateris hexagoni, & lateris decagoni, æquale sit quadratum rectæ C D, lateris videlicet pentagoni; Erunt quoq; quadrata rectarum A C, C D, quintupla quadrati rectæ F G, nimirum semidiametri. Si in circulo igitur pentagonum æquilaterum describatur; quod ex latere pentagoni, & quod ex ea, quæ binis lateribus pentagoni subtenditur, recta linea, vtraque simul quadrata, quintupla sunt eius, quod ex semidiametro describitur, quadrati. Quod erat demonstrandum.

a 47. primi.

b 10. tertiædecimi.

COROLLARIVM.

INFERTVR ex his theorema huiusmodi.

SI in sphæra eadem cubus, & dodecaedrum inscribantur; quadratum lateris cubi & quadratum lateris Dodecaedri, vtraque simul, quintupla sunt quadrati semidiametri circuli pentagonum Dodecaedri circumscribentis.

CIRCVMSCRIBAT enim circulus A B C D E, pentagonum vnum Dodecaedri in quapiam sphæra descripti; eritq; ex corollario secundo, propositionis decimæseptimæ, libri decimitertij, recta A C, subtendens pentagoni angulum B, latus cubi in eadem sphæra descripti. [a] *Perspicuum est autem, quadrata rectarum A C, C D, lateris scilicet cubi, & lateris Dodecaedri, quintupla esse quadrati semidiametri F G, &c.*

a 3. quartidecimi.

THEOR. 4. PROPOS. 4.

SI latus hexagoni alicuius circuli secetur extrema ac media ratione; maius illius

illius ſegmentum erit latus decagoni eiuſdem circuli.

SECETVR enim AB, latus hexagoni alicuius circuli extrema ac media ratione in C, ſitque maius ſegmentum AC. Dico AC, eſſe latus decagoni eiuſdem circuli. Sit enim AD, latus decagoni eiuſdem circuli, adiungaturque in rectum ipſi AB; [a] eritque tota compoſita BD, ex latere hexagoni, & latere decagoni, diuiſa in A, extrema ac media ratione, cuius maius ſegmentum BA: Ponitur autem & AB, ſecta in C, ſimiliter. [b] Igitur erit vt BD, tota ad maius ſui ſegmentum AB, ita AB, tota ad maius ſui ſegmentum AC: Sed eſt quoque vt BD, tota ad maius ſui ſegmentum AB, ita AB, maius ſegmentum ad AD, ſegmentum minus, per definitionem lineæ ſectæ extrema ac media ratione. Igitur erit vt AB, ad AC, ita eadem AB, ad AD; Ac propterea AC, AD, æquales erunt. Cùm ergo AD, ponatur latus decagoni illius circuli, cuius latus hexagoni eſt AB; erit & AC, eiuſdem circuli latus decagoni.

a 9. tertiædecimi.

b 2. quartidecimi.



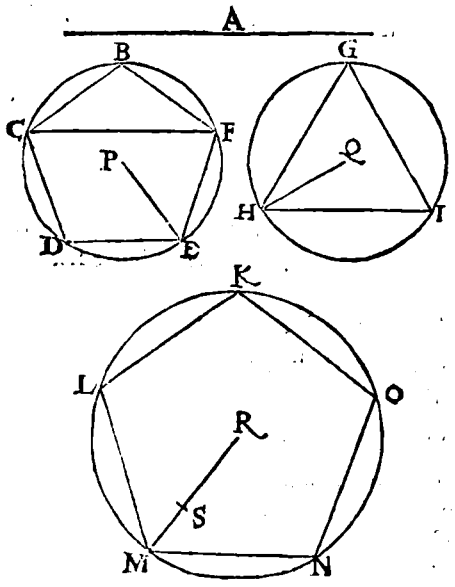
ALITER. Adiungatur ipſi AB, in rectum recta AD, æqualis maiori ſegmento AC; [c] eritque tota recta BD, diuiſa in A, extrema ac media ratione. Cùm igitur AB, maius ſegmentum ipſius, ponatur latus hexagoni alicuius circuli, erit per ea, quæ demonſtrauimus ad propoſ. 9. lib. 13. AD, minus ſegmentum eiuſdem circuli latus decagoni; Ac propterea & AC, æqualis ipſi AD, latus erit decagoni in eodem circulo deſcripti, cuius AB, latus hexagoni ponitur. Si ergo latus hexagoni alicuius circuli, &c. Quod erat oſtendendum.

c 5. tertiædecimi.

THEOR. 5. PROPOS. 5.

2.
3.

IDEM circulus comprehendit & Dodecaedri pentagonum, & Icoſaedri triangulum, eidem ſphæræ inſcriptorum.



IN ſphæra, cuius diameter A, intelligatur deſcriptum & Dodecaedrum, cuius vnũ pentagonum BCDEF, & Icoſaedrum, cuius vnum triangulum GHI. Dico eundem circulũ circumſcribere & pentagonum BCDEF, & triangulum GHI, hoc eſt, circulos BCDEF, GHI, ipſa circumſcribentes eſſe æquales. Circumſcribat enim circulus KLMNO, pentagonum KLMNO, [d] ex quo Icoſaedrum ſphæræ inſcribitur, ita vt quinque latera huius pentagoni ſint latera Icoſaedri, ideóq; quodlibet ipſorum æquale cuiuis lateri trianguli GHI. Deinde ex centris P, Q, R, ducantur rectæ PE, QH, RM; Seceturque RM, extrema ac media ratione in S; [e] eritq; maius ſegmentum RS, latus decagoni in circulo KLMNO, in quo RM, eſt latus hexagoni. Subtendat quoq; recta CF, angulum B, pentagoni Dodecaedri, quæ erit per corollarium ſecũdum, propoſ. 17. lib. 13. latus cubi in eadẽ ſphæra deſcripti. Quoniam igitur ex coroll. 1. eiuſdẽ propoſ. BF, latus Dodecaedri eſt maius ſegmentum lateris cubi CF, ſecti extrema ac media ratione; [f] erit vt tota CF, ad totam RM, ita BF, maius ſegmẽtum ad RS, maius ſegmentum; [g] Ac propterea vt quadratũ rectæ CF, ad quadratum rectæ RM, ita quadratũ rectæ BF, ad quadratũ rectæ RS; Atq; adeò, p ea, quæ demonſtrata ſunt in ſcholio propoſ. 22. lib. 5. vt triplum quadrati rectę CF, ad quintuplum quadrati rectę RM, ita triplum quadrati rectæ BF, ad quintuplum quadrati rectę RS: Eſt autẽ triplum quadrati rectæ CF, æquale quintuplo quadrati rectæ RM, (quia tam triplum quadrati lateris cubi CF, ex propoſ. 15. lib. 13. q̃ quintuplum quadrati ſemidiametri RM, ex coroll. 1. propoſ. 16. lib. 13. æquale eſt quadrato ex A, diametro ſphæræ.) Igitur & triplum quadrati rectæ BF, æquale erit quintuplo quadrati rectæ RS: [h] Quia verò quadratum rectæ MN, lateris pentagoni, æquale eſt quadrato lateris RM, hexagoni, & quadrato rectæ RS, lateris decagoni; erunt quoque quinque quadrata rectæ MN, æqualia quinque quadratis rectæ RM, & quinque quadratis rectæ RS. Igitur & quinque quadrata rectæ MN, æqualia ſunt tribus quadratis rectæ CF, (cùm hæc oſtenſa ſint æqualia quinque quadratis rectæ RM,) & tribus quadratis rectæ BF, quæ æqualia fuerunt quinque quadratis rectæ RS. Sed quoniam, ([i] cùm quadrata rectarũ CF, BF, quinque quadratis ſemidiametri PE, ſint æqualia;) tria quadrata rectæ CF, & tria quadrata rectæ BF, æqualia ſunt quindecim quadratis rectæ PE, & quinque quadrata rectæ MN, æqualia ſunt quindecim quadratis ſemidiametri QH; (Nam cũ MN, æqualis ſit oſtenſa ipſi GH, lateri Icoſaedri, ſeu trianguli æquilateri; [k] ſit autem quadratum ipſius GH, æquale tribus quadratis ſemidiametri QH; Erunt quinque quadrata rectæ GH, hoc eſt, rectæ MN, æqualia quindecim quadratis rectæ QH.) erunt quoque

d 16. tertiædecimi.

e 4. quartidecimi.

f 2. quartidecimi.

g 22. ſexti.

h 10. tertiædecimi.

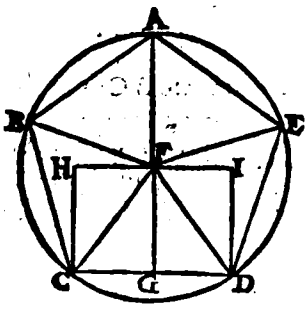
i 3. quartidecimi.

k 12. tertiædecimi.

quindecim quadrata rectæ P E, æqualia quindecim quadratis rectæ Q H; ac propterea vnũ quadratum rectæ P E, vni quadrato rectæ Q H; & idcircò ſemidiameter P E, ſemidiametro Q H, æqualis erit. Quare circuli B C D E F, G H I, æquales ſunt. Idem ergo circulus comprehẽdit, &c. Quod erat demonſtrandum.

THEOR. 6. PROPOS. 6.

3. 6. SI ex centro circuli pentagonum Dodecaedri circumſcribẽtis, perpendicularis ducatur ad vnum latus pentagoni. Erit, quod ſub dicto latere, & perpendiculari comprehenditur, rectangulum trigeſies ſumptum, Dodecaedri ſuperficiei æquale.



IN centro F, circuli circumſcribentis pentagonum Dodecaedri A B C D E, ducatur ad latus C D, perpendicularis F G. Dico rectangulum ſub F G, & C D, trigeſies ſumptum, eſſe æquale toti ſuperficiei Dodecaedri. Ductis enim rectis ex F, ad omnes angulos pentagoni, reſoluetur pentagonum in quinque triangula æqualia, ex corollario propoſ. 8. lib. 1. cùm bina latera vnius æqualia ſint binis lateribus aliorum, & baſis quoque vnius baſibus aliorum æqualis. Ducatur quoque per F, recta H I, parallela ipſi C D, occurrens duabus perpendicularibus C H, D I, ductis ex C, D, ad C D, in punctis H, & I. Eritque rectangulum C I, contentum ſub H C, hoc eſt, ſub F G, & C D. [a] Quoniam verò rectangulum C I, duplum eſt trianguli F C D, atque adeò cuiuslibet reliquorum quatuor triangulorum ipſi F C D, æqualium; erit rectangulum C I, quinquies ſumptum, æquale decem huiuſmodi triangulis, hoc eſt, duobus pentagonis Dodecaedri, cùm quinque triangula æqualia ſint vni pentagono; Atq; adeò ſextuplum rectanguli C I, quinquies ſumpti, nimirum rectangulum C I, ſumptum trigeſies, æquale quoque erit ſextuplo duorum pentagonorum, id eſt, duodecim pentagonis, hoc eſt, toti ſuperficiei Dodecaedri. Si igitur ex centro circuli pentagonum Dodecaedri, &c. Quod erat demonſtrandum.

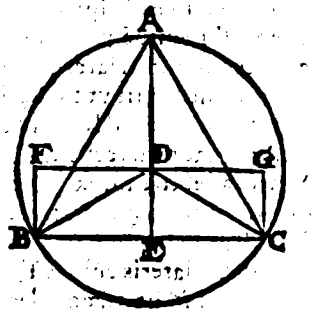
[a] 41. primi.

ALITER. Facta eadem figurę conſtructione, [b] cùm rectangulum C I, duplũ ſit trianguli F C D, hoc eſt, æqualę triangulo F C D, bis ſumpto; Erit rectangulum C I, trigeſies ſumptũ æquale triangulo F C D, bis ſumpto trigeſies, hoc eſt, ſumpto ſexageſies; ac proinde toti ſuperficiei Dodecaedri. Cùm enim vnum pentagonum Dodecaedri conſtet quinque huiuſmodi triangulis, conſtabunt duodecim pentagona, nempe tota ſuperficies Dodecaedri, ſexaginta huiuſmodi triangulis. Atque idcircò triangulum F C D, ſumptum ſexageſies æqualis erit ſuperficiei Dodecaedri.

[b] 41. primi.

THEOR. 7. PROPOS. 7.

3. 7. SI ex centro circuli triangulum Icoſaedri circumſcribentis, perpendicularis ducatur ad vnũ latus trianguli; Erit, quod ſub dicto latere, & perpendiculari comprehenditur, rectangulum trigeſies ſumptum Icoſaedri ſuperficiei æquale.



EX centro D, circuli circumſcribentis triangulum Icoſaedri A B C, ducatur ad latus perpendicularis D E. Dico rectangulum contentum ſub D E, & B C, trigeſies ſumptum, æquale eſſe toti ſuperficiei Icoſaedri. Ductis namque rectis ex D, ad omnes trianguli angulos, reſoluetur triangulum in tria triangula æqualia, ex corollario propoſitionis 8. libri 1. Sunt enim bina latera vnius binis lateribus aliorum æqualia, & baſis vnius baſibus aliorum æqualis. Ducatur quoque per D, recta F G, parallela ipſi B C, occurrens in F, & G, duabus perpendicularibus B E, C G, ex B, C, ductis ad B C; eritque rectangulum B G, contentum ſub F B, hoc eſt, ſub D E, & B C. [c] Quoniam verò rectangulum B G, duplum eſt trianguli B D C; atque adeò cuiuſlibet reliquorum duorum triangulorum ipſi D B C, æqualium: Erit rectangulum B G, ter ſumptum æquale ſex huiuſmodi triangulis, hoc eſt, duobus triangulis Icoſaedri, cùm tria talia triangula æqualia ſint vni triangulo Icoſaedri; Atque adeò idem rectangulum trigeſies ſumptum, nempe decuplum rectanguli B G, ter ſumpti, æquale erit viginti triangulis Icoſaedri, hoc eſt, toti ſuperficiei Icoſaedri, nimirum decuplo duorum triangulorum Icoſaedri. Si ergo ex centro circuli triangulum Icoſaedri, &c. Quod erat oſtendendum.

[c] 41. primi.

ALITER. Facta eadem conſtructione figuræ, [d] cùm rectangulum B G, duplum ſit trianguli D B C, id eſt, æquale dicto triangulo bis ſumpto; Erit rectangulum B G, trigeſies ſumptum, æquale triangulo D B C, ſumpto ſexageſies: Atqui ſexaginta huiuſmodi triangula conficiunt viginti triangula Icoſaedri, eò quòd tria conficiunt vnum; Igitur rectangulum B G, trigeſies ſumptum, æquale eſt toti ſuperficiei Icoſaedri.

[d] 41. primi.

COROL.

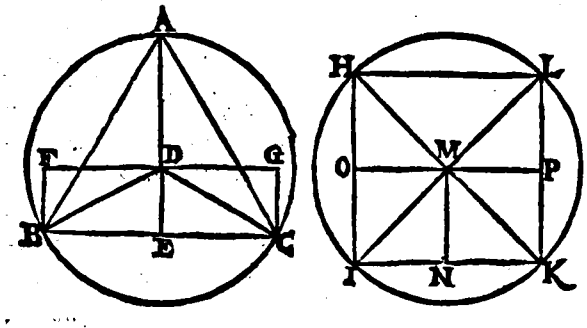
COROLLARIVM.

ITAQVE superficies cuiuslibet Dodecaedri ad superficiem cuiuscunque Icosaedri, etiamsi non describantur ambæ figuræ in eadem sphæra, est sicut rectangulum contentum sub latere Dodecaedri, & perpendiculari ducta ex centro pentagoni Dodecaedri in latus dictum, ad rectangulum contentum sub latere Icosaedri, & perpendiculari ducta ex centro trianguli Icosaedri in dictum latus. [a] *Cùm enim superficies Dodecaedri æqualis sit illi rectangulo trigesies sumpto;* [b] *Item superficies Icosaedri æqualis huic rectangulo trigesies quoque sumpto: Erit tam illud rectangulum trigesima pars superficiei Dodecaedri, quam hoc rectangulum, superficiei Icosaedri.* [c] *Quare erit superficies Dodecaedri ad superficiem Icosaedri, vt rectangulum illud, trigesima videlicet pars Dodecaedri, ad rectangulum hoc, trigesimam scilicet partem Icosaedri. Quod est propositum.*

a 6. quarti decimi.
b 7. quarti decimi.
c 15. quinti.

SCHOLIVM.

NON dissimili argumento indagabimus superficies reliquorum trium corporum regularium, Tetraedri videlicet, octaedri, & cubi. Nam si ex centro circuli triangulum Tetraedri, vel Octaedri, siue quadratum cubi, circumscribentis perpendicularis ducatur ad vnum aliquod eorum latus; Erit, quod sub dicto latere & perpendiculari continetur, rectangulum, in Tetraedro quidem sumptum sexies, superficiei Tetraedri; In Octaedro verò & cubo duodecies sumptum, superficiei Octaedri, & cubi æquale. Sit enim primò triangulum Tetraedri A B C, circumscriptum à circulo, cuius centrum D, à quo perpendicularis ducatur D E, ad latus B C, & reliqua fiant, vt de triangulo Icosaedri dictum est. Dico rectangulum B G, sexies sumptum, æquale esse superficiei Tetraedri. [d] *Quoniam enim rectangulum B G, duplum est trianguli D B C, hoc est, æquale duobus eiusmodi triangulis; erit ipsum sexies sumptum æquale duodecim talibus triangulis. Cùm igitur duodecim talia triangula constituant totam superficiem Tetraedri, nempe quatuor triangula æquilatera ipsi A B C, æqualia, eò quòd tria conficiunt vnum; Erit rectangulum B G, sexies sumptum, superficiei Tetraedri, seu Pyramidis æquale.*



d 41. primi.

SIT deinde idem triangulum A B C, Octaedri, &c. Dico rectangulum B G, duodecies sumptũ, æquale esse superficiei Octaedri. [e] *Cùm enim rectangulum B G, duplum sit trianguli D B C, hoc est, æquale duobus eiusmodi triangulis, erit idem rectangulum duodecies sumptũ æquale vigintiquatuor huiusmodi triangulis: Sed vigintiquatuor talia triangula constituunt octo triangula Octaedri, id est, totam superficiem Octaedri, propterea q; tria conficiunt vnum. Igitur rectangulum B G, duodecies sumptũ, æquale est superficiei Octaedri.*

e 41. primi.

SIT tertiò quadratum cubi H I K L, circa quod circulus ex centro M, describatur, & deducta M N, perpendiculari ad I K, ducantur ex M, ad omnes angulos quadrati rectæ lineæ, vt quadratum resoluatur in quatuor triangula æqualia; Atque per M, agatur O P, ipsi I K, parallela. Dico rectangulum I P, contentum sub O I, hoc est, sub M N, & I K, sumptum duodecies, æquale est superficiei cubi. [f] *Quoniam enim rectangulum I P, duplum est trianguli M I K, hoc est, æquale duobus talibus triangulis; Erit idem duodecies sumptum æquale vigintiquatuor eiusmodi triangulis. Quare cùm vigintiquatuor talia triangula constituant sex quadrata, id est, totam superficiem cubi, quòd quatuor talia triangula vnum quadratum conficiant; Erit rectangulum I P, duodecies sumptum æquale superficiei cubi. Quod est propositum.*

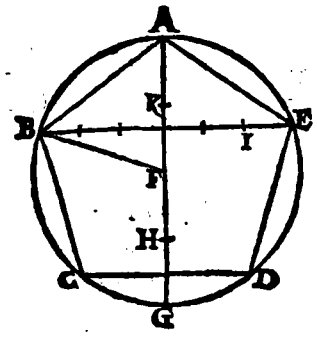
f 41. primi.

ALITER. Cùm duo rectangula I P, conficiant quadratum H I K L; (sunt enim I P, P H, æqualia, cùm recta O I, sit dimidium lateris H I, nempe æqualis ipsi M N,) constituent duodecim talia rectangula sex quadrata eiusmodi, hoc est, totam superficiem cubi.

THEOR. 8. PROPOS. 8. 4. 8.

RECTANGVLVM contentum sub tribus quartis partibus diametri alicuius circuli, & quinque sextis partibus lineæ subtendentis angulum pentagoni æquilateri in eodem circulo descripti; æquale est dicto pentagono.

IN circulo, cuius centrum F, describatur pentagonum æquilaterum A B C D E, & ducta diameter A G, diuidatur in quatuor æquales partes, quarum tres sint A H: Angulum verò A, subtendens recta B E, secetur in sex partes æquales, quarum quinque sint B I, & vna I E, ita vt B I, sit quintupla ipsius I E. Dico rectangulum comprehensum sub A H, B I, æquale esse pentagono A B C D E. Ducta enim recta B F, quoniam A H, continet tres quartas partes diametri, & A F, duas, cũ sit semidia-



meter, erit AH, ipſius AF, ſeſquialtera. Quia verò recta FA, diuidens arcũ BAE, bifariam, diuidit quoq; rectam BE, bifariam, per coroll. 1. propoſ. 10. lib. 13. in puncto K; continebit tam KB, q̃ KE, tres ſextas rectæ BE; atq; adeò cùm BI, contineat quinque, cõtinebit KI, duas; Ac proinde & KB, ipſius KI, erit ſeſquialtera. Quamobrem erit, vt AH, ad AF, ita KB, ad KI; [a] atque idcirco rectangulum ſub extremis AH, KI, æquale erit rectangulo ſub mediis AF, KB. [b] Eſt autem rectangulum ſub AF, KB, duplum trianguli ABF, cùm rectangulum, & triangulum eandem habeant baſin AF, & eandem altitudinem BK, hoc eſt, inter eaſdem ſint parallelas conſtituta. Igitur & rectangulum ſub AH, KI, duplum erit eiuſdẽ trianguli ABF: [c] Eſt autem & rectangulum ſub AH, KI, duplum rectanguli ſub AH, IE; propterea quòd & baſis KI, dupla eſt baſis IE, (continet enim KI, duas ſextas partes ipſius BE, & IE, vnam.) eademq; ſemper altitudo AH. Igitur æqualia ſunt triangulum ABF, & rectangulum ſub AH, IE; ideoque & eorum quintupla æqualia erunt. At verò pentagonum ABCDE, quintuplum eſt trianguli ABF, quòd pentagonũ in quinque huiuſmodi triangula reſoluatur, ductis rectis è centro F, vt propoſ. 6. huius lib. docuimus. [d] Rectangulum verò ſub AH, BI, quintuplum eſt rectanguli ſub AH, IE; quòd & baſis BI, quintupla ſit baſis IE, eademq; ſemper altitudo AH. Igitur pentagonum ABCDE, & rectangulum ſub AH, BI, æqualia ſunt. Rectangulum ergo contentum ſub tribus, &c. Quod erat demonſtrandum.

a 16. ſexti.
b 41. primi.
c 1. ſexti.
d 1. ſimi.

COROLLARIVM

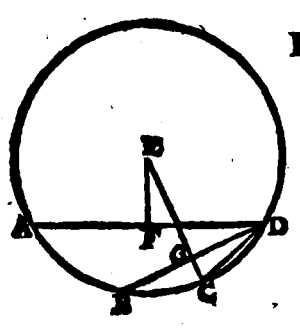
QVONIAM verò, ſi pentagonũ ABCDE, ſtatuatur baſis Dodecaedri in aliqua ſphæra deſcripti, BE, eſt latus cubi in eadem ſphæra deſcripti, ex coroll 2 propoſ. 17. lib. 13. & vnum latus trianguli Icoſaedri in eadem ſphæra conſtituti, ([a] comprehenſi videlicet eodem circulo, quo & pentagonum Dodecaedri,) ſecat Diametrum AG, in H, (cùm ex coroll. propoſ. 12. lib. 13. ſecet ſemidiametrum FG, bifariam, quemadmodum & punctum H, eandem ſemidiametrum FG, bifariam diuidit.) Manifeſtum eſt, rectangulum comprehenſum ſub perpendiculari ab angulo trianguli Icoſaedri ad vnum eius latus ducta, nempe ſub AH, & ſub quinque ſextis partibus lateris cubi eidem ſphæræ, in qua Icoſaedrum, inſcripti, nimirum ſub BI, æquale eſſe pentagono Dodecaedri in eadem ſphæra conſtituti.

a 5. quarti decimi.

THEOR. 9. PROPOS. 9.

4. 8.

SVPERFICIES Dodecaedri ad ſuperficiem Icoſaedri in eadem ſphæra deſcripti, eandem proportionem habet, quam latus cubi ad latus Icoſaedri.



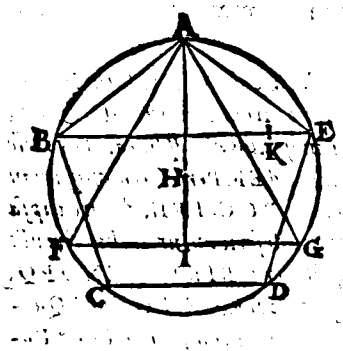
a 5. quartid.
b 2. quartid.
c 16. ſexti.
d 1. ſexti.

IN circulo ABCD, [a] circumſcribente & pentagonum Dodecaedri, & triangulum Icoſaedri, ſit latus pentagoni BD, & trianguli AD; & ex centro E, ducantur ad AD, BD, perpendiculares EF, EG: Sit denique H, latus cubi in eadem ſphæra cum Dodecaedro, & Icoſaedro deſcripti. Dico eſſe vt H, latus cubi, ad AD, latus Icoſaedri, ita ſuperficiem Dodecaedri ad ſuperficiem Icoſaedri. Quoniam enim lateris cubi H, ſecti extrema ac media ratione, maius ſegmentum eſt BD, latus Dodecaedri, ex coroll. 2. propoſ. 17. lib. 13. Rectæ autem EG, ſectæ quoque extrema ac media ratione, maius ſegmentum eſt EF, ex ſcholio propoſ. 2. huius libri. [b] Erit vt H, tota ad BD, maius ſui ſegmentum, ita EG, tota ad EF, maius ſui ſegmentum; [c] Ac proinde rectangulum ſub extremis H, EF, æquale erit rectangulo ſub mediis BD, EG. [d] Quia verò eſt, vt H, ad AD, ita rectangulum ſub H, EF, ad rectangulum ſub AD, EF, cùm baſes ſint H, AD, altitudo verò ſemper eadem EF; Erit quoque vt H, ad AD, ita rectangulum ſub BD, EG, (quod eſt æquale rectangulo ſub H, EF,) ad idem rectangulum ſub AD, EF. Quare cùm ex coroll. propoſ. 7. huius lib. ſit, vt rectangulum ſub BD, EG, ad rectangulum ſub AD, EF, ita ſuperficies Dodecaedri ad ſuperficiem Icoſaedri; Erit quoque, vt H, latus cubi, ad AD, latus Icoſaedri, ita ſuperficies Dodecaedri ad ſuperficiem Icoſaedri. Superficies itaque Dodecaedri ad ſuperficiem Icoſaedri, &c. Quod oſtendendum erat.

ALITER. [e] Circumſcribat pentagonũ Dodecaedri ABCDE, & triangulum Icoſaedri AFG, circulus idem, cuius centrum H. Ducatur deinde ex A, per centrum H, recta AI, quæ per coroll. 2. propoſ. 10. lib. 13. diuidet latus FG, bifariam, & ad angulos rectos. Connectatur denique recta BE, quæ latus erit cubi, ex coroll. 2. propoſ. 17. lib. 13. cuius quinque ſextæ partes ſint BK. Dico rurſus eſſe, vt BE, latus cubi ad FG, latus Icoſaedri, ita ſuperficiem Dodecaedri ad ſuperficiem Icoſaedri. Quoniã enim rectangulum ſub AI, BK, æquale eſt pentagono ABCDE, ex coroll. propoſ. 8. huius lib. Item rectangulum ſub AI, IF, æquale eſt triãgulo AFG, ex ſcholio propoſ. 41. lib. 1. cùm

e 5. quartid.

FG,



FG, basis trianguli dupla sit ipsius IF, basis rectanguli: Erit vt rectangulum sub AI, BK, ad rectangulum sub AI, IF, ita pentagonum ABCDE, ad triangulum AFG; [a] Est autem vt rectangulum sub AI, BK, ad rectangulum sub AI, IF, ita BK, ad IF, cùm bases sint BK, IF, & altitudo eadem semper AI. Erit igitur quoque vt pentagonum ABCDE, ad triangulum AFG, ita BK, ad IF: Ac proinde, (si primum, & tertium, nimirũ pentagonum ABCDE, & recta BK, æquè multiplicentur per numerũ 12. Item secundum, & quartum, nempe triangulum AFG, & recta IF, æquè multiplicentur per numerum 20. [b] erit quoq; vt pentagonum ABCDE, duodecies sumptum, hoc est, superficies Dodecaedri, ad triangulum AFG, vigesies sumptum, nempe ad superficiem Icosaedri, ita recta BK, duodecies sumpta ad rectam IF, vigesies sumptam: Atqui recta BK, duodecies sumpta æquiualet lateri cubi BE, decies sumpto; (Nam cùm BK, contineat quinque sextas partes ipsius BE; continebit eadem BK, duodecies sumpta sexaginta partes sextas eiusdem BE, quæ efficiunt decem integras rectas BE.) Recta verò IF, vigesies sumpta æqualis est lateri Icosaedri FG, decies sumpto; (eò quòd FG, est ipsius IF, dupla.) Erit igitur superficies Dodecaedri ad superficiem Icosaedri, vt latus cubi BE, decies sumptũ ad latus Icosaedri FG, decies sumptum; Ac propterea, [c] cùm eandem proportionem habeant decem latera cubi ad decem latera Icosaedri, quam vnum latus cubi ad vnum latus Icosaedri; perspicuum est, ita esse superficiem Dodecaedri ad superficiem Icosaedri; vt latus cubi ad latus Icosaedri. Quod est propositum.

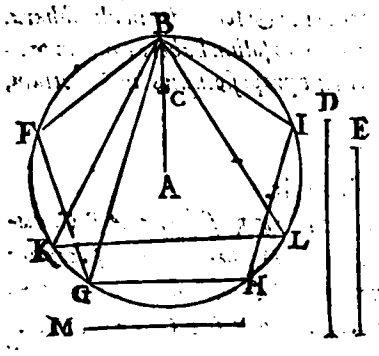
[a] 1. sexti.

[b] schol. 22. quinti.

[c] 15. quinti.

THEOR. 10. PROPOS. 10. 4. 92

Si recta linea secetur extrema ac media ratione; Erit vt recta potens id, quod à tota, & id quod à maiori segmento, ad rectam potentẽ id, quod à tota, & id, quod à minori segmento, ita latus cubi ad latus Icosaedri eidem sphæræ cũ cubo inscripti.



Secetvr recta AB, in C, extrema ac media ratione, sitque maius segmentum AC. Sit quoq; D, latus cubi, & E, latus Icosaedri in sphæra eadem cũ cubo descripti. Ex A, centro, ad interuallum AB, circulus describatur, in quo cõstituatur & pentagonum æquilaterum BFGHI, & triangulum æquilaterum BKL. Si igitur BF, ponatur latus Dodecaedri alicuius sphæræ, erit ducta recta BG, latus cubi in eadem sphæra descripti, ex coroll. 2. propos. 17. lib. 13. Quoniam verò AC, maius segmentum semidiametri AB, secta extrema ac mediâ ratione, [d] est latus Decagoni in circulo BFGHI, in quo nimirum AB, latus est Hexagoni: [e] poterit BF, latus pentagoni & totam AB, latus videlicet hexagoni, & maius segmẽtum AC, latus scilicet Decagoni in eodem circulo. Posito iam & recta M, totã AB, & minus segmentum BC, per ea, quæ ad propos. 47. lib. 1. demonstrauimus. Dico sic esse D, latus proposito cubi ad E, latus propositũ Icosaedri, vt est BF, potens totã AB, & maius segmẽtum AC, ad M, potentẽ totam AB, & minus segmẽtum BC. [f] Quoniam enim quadratum lateris trianguli æquilateri BK, triplum est quadrati semidiametri AB: [g] Item quadrata rectarum AB, BC, tripla sunt quadrati rectæ AC; Erit vt quadratum rectæ BK, ad quadratum rectæ AB, ita quadrata rectarum AB, BC, hoc est, quadratum rectæ M, ipsius æquale, ad quadratum rectæ AC. Vtrobique enim proportio est tripla. Permutando ergo erit, vt quadratum rectæ BK, ad quadratũ rectæ M, ita quadratum rectæ AB, ad quadratum rectæ AC: Est autẽ vt quadratum rectæ AB, ad quadratum rectæ AC, ita quadratum rectæ BG, ad quadratũ rectæ BF. (Nam cùm rectæ BG, secta extrema ac media ratione, maius segmentum sit BF, ex coroll. 1. propos. 17. lib. 13. eò q; BG, est latus cubi, & BF, latus Dodecaedri eiusdem sphæræ; [h] Erit vt tota AB, ad maius segmentum AC, ita tota BG, ad maius segmentum BF: [i] Ac proinde vt quadratum rectæ AB, ad quadratũ rectæ AC, ita quadratum rectæ BG, ad quadratum rectæ BF.) Igitur erit quoq;, vt quadratum rectę BG, ad quadratum rectæ BF, ita quadratum rectæ BK, ad quadratũ rectæ M: Et permutando, vt quadratum rectæ BG, ad quadratum rectæ BK, ita quadratum rectæ BF, ad quadratum rectæ M; [k] Ac propterea erit, vt recta BG, ad rectam BK, ita recta BF, potens totam AB, & maius segmentum AC, ad rectam M, potentem totam AB, & minus segmentum BC. Cùm igitur proposita latera D, E, cubi, & Icosaedri, eandem habeãt proportionẽ, quam rectæ BG, BK, vt mox ostendemus; perspicuum est, vt se habet recta BF, potens totam AB, & maius segmentum AC, ad rectam M, potentem totam AB, & minus segmentũ BC, ita se habere propositum cubi latus D, ad Icosaedri propositum latus E. Si recta itaq; linea secetur extrema, ac media ratione, &c. Quod erat ostendendum.

[d] 4. quarti decimi.

[e] 10. tertiædecimi.

[f] 12. tertiædecimi.

[g] 4. tertiædecimi.

[h] 2. quarti decimi.

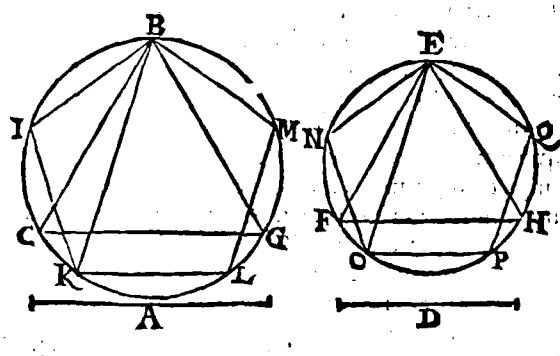
[i] 22. sexti.

[k] 22. sexti.

SCHOLIVM.

Qvod verò proposita latera cubi & Icosaedri D, & E, eiusdem sphæræ eandem habeant proportionem, quam rectæ BG, BK; demonstrabimus, hoc proposito theoremate.

QVAM propoſtionẽ habent latera cubi, & Icoſaedri eiuſdem ſphæræ, eandem habent latera cubi & Icoſaedri in quauis alia ſphæra deſcriptorum.



a 5.quarti decimi.

SIT enim A, latus cubi, & B C, latus Icoſaedri eiuſdem ſphæræ: Item D, latus cubi, & E F, latus Icoſaedri in quauis alia ſphæra. Dico ſic eſſe vt A, ad B C, ita D, ad E F. Perfectis namq; triangulis Icoſaedrorum B C G, E F H, & circa ipſa deſcriptis circulis, deſcribantur in his circulis pentagona æquilatera B I K L M, E N O P Q, connectanturq; rectæ B K, C K, E O, F O. [a] *Quoniam ergo idem circulus comprehendit & Dodecaedri pentagonum, & Icoſaedri triangulum eiuſdem ſphæræ; & ponitur B C G, triangulum Icoſaedri in eadem ſphæra deſcripti, in qua cubus lateris A: Erit B I K L M, pentagonum Dodecaedri in eadem cum ipſis ſphæra deſcripti; Ac propterea, ex corollario 2. propoſ. 17. lib. 13. recta B K, latus erit circuli eiuſdem ſphæræ, ideoq; ipſi A, æqualis. Simili argumento æqualis erit recta E O, lateri cubi D. Rurſus quia arcus B I K, E N O, ſimiles ſunt; (Nam vterque continet duas quintas partes ſuæ circunferentiæ.) Item arcus B G C, E H F; (vterque enim duas tertias partes totius circunferentiæ comprehendit.) Erunt tam anguli B C K, E F O, ex definitione ſegmentorum ſimilium, æquales inter ſe, quàm anguli B K C, E O F; interſcùm tam illi, quàm hi, in ſegmentis circulorum ſimilibus exiſtant: Ac proinde, ex coroll. 1. propoſ. 32. lib. 1. reliquus angulus C B K, trianguli B C K, reliquo angulo F E O, trianguli E F O, æqualis erit, & totum triangulum B C K, toti triangulo E F O, æquiangulum.* [b] *Quare erit, vt B K, hoc eſt, recta A, illi æqualis, nempe latus cubi, ad B C, latus Icoſaedri, ita E O, hoc eſt, recta D, illi æqualis, latus ſcilicet alterius cubi, ad E F, latus Icoſaedri. Quod eſt propoſitum.*

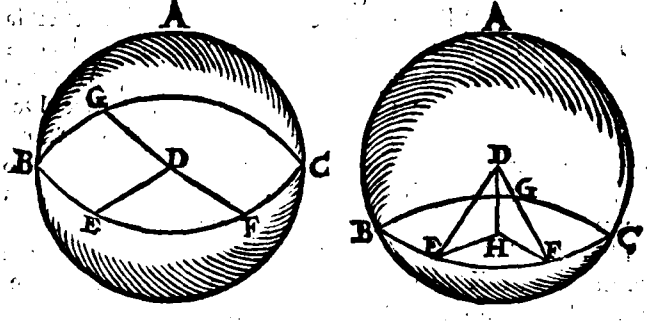
b 4.ſexti.

PERSPICVVM eſt igitur id, q̃ in demonſtratione aſſumebatur, nimirũ eandem habere proportionẽ D, & E, latera cubi & Icoſaedri in vna ſphæra, quam habẽt B G, B K, latera cubi & Icoſaedri in alia ſphæra.

EX hoc quoq; elicitur, Superficiem Dodecaedri ad ſuperficiem Icoſaedri non ſolùm habere eandem proportionem, quam latus cubi ad latus Icoſaedri in eadem ſphæra cum ipſis, vt vult propoſ. 9. huius lib. Sed etiam, quam obtinet latus cubi ad latus Icoſaedri in quacunque alia ſphæra.

LEMMA I.

Si ſphæra plano quopiam ſecetur, communis ſectio circulus erit.



SECETVR ſphæra A B C, cuius centrũ D, plano aliquo faciente communẽ ſectionem planum B E F C G. Dico B E F C G, eſſe circulum. Tranſeat enim primò planũ ſecans per centrum ſphæræ, ita vt centrum D, ſit in plano, ſeu communi ſectione B E F C G; ducanturq; ex D, centro ſphæræ ad extremitatem communis ſectionis, lineæ rectæ quotcunque D E, D F, D G. Quoniam igitur omnes hæ lineæ ductæ, quotcunque fuerint, æquales ſunt, ex definitione ſphæræ, cùm ex eius centro ad ſuperficiem cadant; erit, ex definitione circuli, figura plana B E F C G, vnica linea contenta, circulus, eiusq; centrum D, idem cum centro ſphæræ.

TRANSEAT ſecundò planum ſecans non per centrum ſphæræ: Ducatur autem ex D, centro ſphæræ ad planum ſecans perpendicularis D H; emittanturq; ex H, rectæ vtcunque H E, H F, ad extremitatẽ vſque communis ſectionis; & connectantur rectæ D E, D F. Quo-

c 47.primi.

niam igitur anguli D H E, D H F, ex defin. 3. lib. 11. recti ſunt; [c] *erit tam quadratum rectæ D E, quadratis rectarum D H, H E, quàm quadratum rectæ D F, quadratis rectarum D H, H F, æquale: Sunt autem quadrata rectarum D E, D F, æqualium ex centro ſphæræ ad eius ſuperficiem cadentium, æqualia. Igitur & quadrata rectarum D H, H E, quadratis rectarum D H, H F, æqualia erunt; & proinde, dempto communi quadrato rectæ D H, reliquum quadratum rectæ H E, reliquo quadrato rectæ H F, æquale erit. Quare & rectæ H E, H F, æquales erunt. Eodem argumento oſtendemus, omnes lineas ex H, ad extremitatem communis ſectionis cadentes eſſe æquales & inter ſe, & dictis duabus H E, H F. Figura igitur plana B E F C G,*

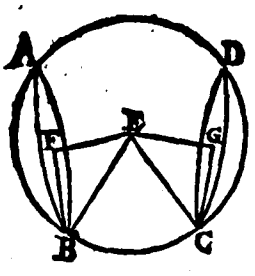
BEFCG, vnica lineæ contentâ, ex definitione circuli, circulus erit; eiusq; centrum, punctum H, in quod perpendicularis DH, cadit. Quod est propositum.

COROLLARIVM.

ITAQVE si planum secans transierit per centrum sphæræ, efficietur circulus idem centrum habens, quod sphæra. Si verò planum secans per sphæræ centrum non transierit, efficietur circulus habens aliud centrum, quàm sphæra; illud videlicet punctum, in quod cadit perpendicularis ex centro sphæræ ad planum secans ducta. Nam semper demonstrabuntur lineæ rectæ cadentes ex hoc puncto in circumferentiam circuli esse æquales, vt perspicuum est.

LEMMA II.

CIRCVLI in sphæra æquales, æqualiter distant à centro sphæræ: & circuli æqualiter distantes à centro sphæræ, æquales sunt.



IN sphæra ABCD, cuius centrum E, sint circuli æquales AB, DC. Dico ipsos æqualiter à centro E, distare. Ducantur enim ex E, ad eorum plana perpendiculares EF, EG, quæ per corollarium præcedentis lemmatis in ipsorum centra cadent, ex quibus ducantur rectæ FB, GC, ad circumferentias circulorum vtcunque, connectanturq; rectæ EB, EC. Quoniam igitur anguli EFB, EGC, recti sunt, ex definitione 3. libri 11. [a] Erit tam quadratum rectæ EB, quadratis rectarum EF, FB, quàm quadratum rectæ EC, quadratis rectarum EG, GC, æquale: Sunt autem quadrata rectarum EB, EC, æqualium, cũ cadant ex centro sphæræ ad eius superficiem, æqualia. [b] Igitur & quadrata rectarum EF, FB, quadratis rectarum EG, GC, æqualia erunt. Et proinde demptis quadratis æqualibus rectarum æqualium FB, GC, cùm sint semidiametri circulorum æqualium, erit reliquum quadratum rectæ EF, reliquo quadrato rectæ EG, æquale; Atque adeò æquales erunt rectæ perpendiculares EF, EG. Quam ob rem circuli AB, DC, æqualiter distant à centro E.

[a] à 47. primi.

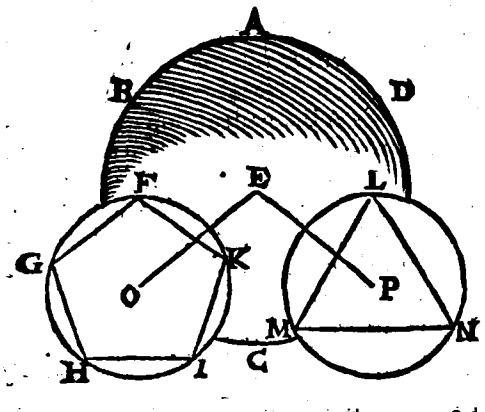
[b] 47. primi

SED iam æqualiter distent circuli AB, DC, à centro sphæræ E. Dico ipsos esse æquales. Constructa enim figura, vt prius, ostendemus eodem modo, quadrata rectarum EF, FB, æqualia esse quadratis rectarum EG, GC; Ac proinde, demptis quadratis æqualibus rectarum æqualium EF, EG, cùm circuli æqualiter ponantur distare à centro, reliquum quadratum rectæ FB, reliquo quadrato rectæ GC, æquale erit; atq; adeò æquales erunt rectæ FB, GC, semidiametri scilicet circulorũ AB, DC. Circuli igitur AB, DC, æquales sunt. Quod est propositũ.

THEOR. 11. PROPOS. 11.

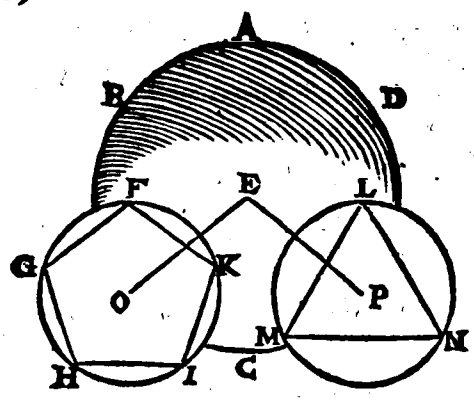
4. 10.

DODECAEDRVM ad Icosaedrum in eadem cum ipso sphæra descriptum, est vt cubi latus ad latus Icosaedri, in vna eademque sphæra.



IN sphæra ABCD, cuius centrum E, inscriptum sit Dodecaedrum, cuius vnũ pentagonũ FGHIK: Item Icosaedrum, cuius vnum triangulum LMN. Dico esse Dodecaedrum ad Icosaedrum, vt latus cubi ad latus Icosaedri, in vna eademq; sphæra, siue hæc eadem sit, quæ sphæra ABCD, siue non. Quoniam omnes anguli tam pentagoni, quàm trianguli, superficiem sphæræ tangunt; si per pentagonum, & triangulum plana ducantur, efficientur, per 1. lemma præcedens, duo circuli in sphæra FGHIK, LMN, comprehendentes pentagonum, & triangulum. [a] Quia verò idem circulus comprehẽdit & Dodecaedri pentagonum, & Icosaedri triangulum; æquales erunt idcircò circuli FGHIK, LMN. Ac propterea, per lemma 2. præcedens, æqualiter ab E, centro sphæræ distabunt, ideoque perpendiculares ex E, in plana circulorum deductæ, & in eorum centra, per coroll. lemmatis 1. cadentes, quales sunt EO, EP, æquales erunt. Non aliter ostendentur perpendiculares ex E, ad omnia pentagona Dodecaedri, & ad omnia triangula Icosaedri, deductæ æquales. Quare si ex omnibus angulis Dodecaedri ad E, ducantur rectæ lineæ, resoluetur Dodecaedrum in duodecim pyramides æqualium altitudi-

[a] 5. quartidecimi.



a 6. duodec.

dinum: Ac proinde cùm & baſes ipſarũ æquales ſint, nempe pentagona Dodecaedri, æquales inter ſe, ex coroll. propoſ. 6. lib. 12. Eodemq; modo, ſi ex omnib⁹ angulis Icoſaedri ad E, lineæ rectæ ducantur, reſolue tur Icoſaedrum in 20. pyramides inter ſe æquales, quarum altitudines æquales erunt altitudinibus pyramidum Dodecaedri. [a] Quoniam autem eſt, vt baſis FGHIK, ad baſin LMN, ita pyramis FGHIKE, ad pyramidem LMNE, cùm vtriuſque eadem ſit altitudo; Erunt quoque, per ea, quæ in ſcholio propoſ. 22. lib. 5. demõſtrauimus, vt duodecim baſes Dodecaedri, tota videlicet ſuperficies Dodecaedri, ad baſin LMN, ita duodecim pyramides Dodecaedri, hoc eſt, totum ſolidum Dodecaedri, ad pyramidem LMNE. Rurſus quia eſt (ſicut modò diximus) vt tota ſuperficies Dodecaedri, ad Icoſaedri baſin LMN, ita Dodecaedrũ ad pyramidem LMNE; erit, per idem ſcholium, vt tota ſuperficies Dodecaedri ad 20. baſes Icoſaedri, id eſt, ad totam ſuperficiem Icoſaedri, ita Dodecaedrum ad 20. pyramides Icoſaedri, nempe ad totum ſolidum Icoſaedri: [b] Atqui ita eſt Dodecaedri ſuperficies ad Icoſaedri ſuperficiem, vt cubi latus ad Icoſaedri latus eiuſdem cum ipſis ſphæræ; atq; adeò, ex ſcholio propoſ. 10. huius lib. vt latus cubi ad latus Icoſaedri cuiuſcunque alterius ſphæræ vnius. Igitur erit quoq; Dodecaedrum ad Icoſaedrum, vt latus cubi ad latus Icoſaedri cuiuſcunque ſphæræ. Quapropter Dodecaedrum ad Icoſaedrum, &c. Quod erat demonſtrandum.

b 9. quarti decimi.

COROLLARIVM.

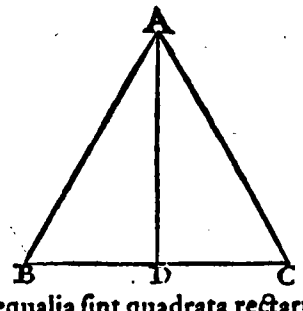
a 9. quarti decimi. b 10. quarti decimi. c 11. quarti decimi.

QVONIAM verò oſtenſum eſt quoq; [a] ita eſſe ſuperficiẽ Dodecaedri ad ſuperficiem Icoſaedri eiuſdem ſphæræ, vt latus cubi ad latus Icoſaedri in eadem cũ ipſis ſphæra: [b] Item ita eſſe cubi latus ad latus Icoſaedri vnius eiuſdemq; ſphæræ, vt eſt linea potens totã diuiſam quamcunque extrema ac media ratione, & maius ſegmentum illius, ad lineam potentem totam diuiſam eandem, & minus illius ſegmentum: [c] Item ita eſſe Dodecaedrum ad Icoſaedrũ eiuſdem ſphæræ, vt latus cubi ad latus Icoſaedri in vna eademq; ſphæra; Perſpicuum eſt, has quatuor proportiones, nimirum lateris cubi ad latus Icoſaedri; & ſuperficiei Dodecaedri ad ſuperficiem Icoſaedri; & lineæ potentis totam quamcunque ſectam extrema ac media ratione, & eius ſegmentum maius, ad potentem totam eandem, & minus ſegmentum illius; & Dodecaedri ad Icoſaedrum eiuſdem ſphæræ, eſſe inter ſe æquales.

THEOR. 12. PROPOS. 12.

o. 11.

LATVS trianguli æquilateri potentia ſeſquitertium eſt lineæ perpendicularis ab vno angulo ad latus oppoſitum deductæ.



a 5. primi. b 26. primi. c 47. primi.

IN triangulo æquilatero ABC, ducatur ex angulo A, ad latus oppoſitum BC, perpendicularis AD. Dico quadratum lateris AB, ſeſquitertium eſſe quadrati perpendicularis AD. Quoniam enim ob æqualitatem laterum AB, AC, [a] anguli B, & C, æquales ſunt & anguli ad D, recti: Erunt duo anguli B, & D, trianguli ADB, æquales duobus angulis C, & D, trianguli ADC; habent autẽ & latus AD, commune, vel AB, AC, æqualia. [b] Igitur & reliqua latera BD, CD, æqualia ſunt; ac propterea latus BC, hoc eſt, latus AB, duplum rectæ BD; & idcireò quadratũ lateris AB, quadruplum quadrati rectæ BD, ex ſcholio propoſ. 4. lib. 2. [c] Cùm igitur quadrato rectæ AB, æqualia ſint quadrata rectarum AD, BD; erunt quoque quadrata rectarum AD, BD, quadrupla quadrati rectæ BD; Ac proinde, qualium partium 4. eſt quadratum rectæ AB, vel quadrata rectarum AD, BD, talium 1. erit quadratum rectæ BD, ideoque talium 3. quadratum reliquum rectæ AD. Quare quadratum rectæ AB, partium 4. ſeſquitertium eſt quadrati rectæ AD, partium 3. Latus igitur trianguli æquilateri potentia ſeſquitertium eſt, &c. Quod oſtendendum erat.

COROLLARIVM.

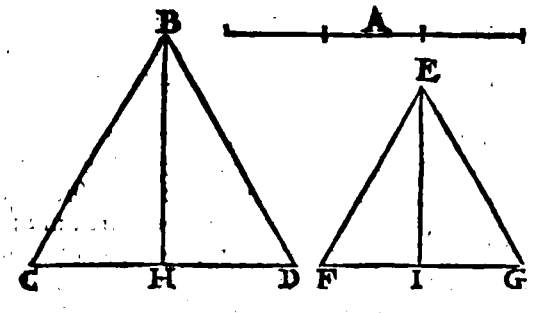
HINC manifeſtum eſt, lineam perpendicularem ex vno angulo trianguli æquilateri ad latus oppoſitũ demiſſam, ſecare & angulum & latus bifariam. Demonſtratum enim eſt BD, & CD, rectas æquales eſſe, hoc eſt, latus BC, ſecari bifariam à perpendiculari AD. Quare cùm latera AB, AD, trianguli ABD, æqualia ſint lateribus AC, AD, trianguli ACD; & baſis BD, baſi CD, æqualis; [a] Erunt & anguli BAD, CAD, æquales, id eſt, angulus BAC, bifariam ſecabitur ab eadem perpendiculari AD.

a 8. primi.

THEOR.

THEOR. 13. PROPOS. 13.

SI ſphæræ diameter fuerit Rationalis; Erit tam ſuperficies Tetraedri, quàm Octaedri in ea ſphæra, Media. 13.



SIT ſphæræ diameter Rationalis A. Dico tam ſuperficiem Tetraedri, quàm Octaedri in dicta ſphæra, eſſe Mediam. Sit enim B C D, vnum triangulum Tetraedri, & E F G, Octaedri illius ſphæræ, ducaturq; ex angulis B, & E, ad latera oppoſita C D, F G, perpendiculares B H, E I. [a] Quoniam igitur quadratum diametri A, ſeſquialterum eſt quadrati lateris Tetraedri B C, [b] & duplum quadrati lateris Octaedri E F; habebunt quadrata rectarum A, B C, E F, proportionem, quam numeri 6.4.3. [c] ideoque commenſurabilia erunt. Quare lineæ ipſæ A, B C, E F, commenſurabiles exiſtent, ſaltem potentia; Atque adeò, cùm A, ponatur Rationalis, erunt quoque Rationales B C, E F, & idcircò & earum dimidiæ Rationales erunt C H, F I.

[a] 13. tertijdecimi. [b] 14. tertijdecimi. [c] 6. decimi.

RVRSVS, [d] quia tam quadratũ rectæ B C, quadrati rectæ B H, q̃ quadratũ rectæ E F, quadrati rectæ E I, ſeſquitertium eſt; habebũt tam quadrata rectarũ B C, B H, q̃ quadrata rectarũ E F, E I, proportionem inter ſe, quam numeri 4.3. [e] ideoq; tam illa, q̃ hæc inter ſe commenſurabilia erunt. Quare & tam lineæ ipſæ B C, B H, q̃ lineæ E F, E I, commenſurabiles exiſtent. Eſt autẽ & tam C H, ipſi B C, q̃ F I, ipſi E F, dimidia videlicet toti, commenſurabilis. [f] Igitur & tam B H, C H, q̃ E I, F I, commenſurabiles inter ſe erunt; Ac proinde cùm C H, & F I, oſtenſæ ſint Rationales, erunt quoq; B H, E I, Rationales. [g] Quoniam verò tam C H, B H, q̃ F I, E I, longitudine ſunt incommenſurabiles, q̃ earum quadrata nõ habeant proportionẽ, quam numerus quadratus ad numerum quadratum, (vt conſtat ex coroll. propoſ. 24. lib. 8. Habẽt enim proportionẽ, quam 1. ad 3. [h] cùm oſtenſum ſit talium partium 1. eſſe tam quadratũ C H, q̃ F I, quadratum, qualium 3. eſt tam quadratum B H, q̃ quadratum E I.) Erunt tam C H, B H, q̃ F I, E I, Rationales potentia tantũ commenſurabiles: [i] Ac proinde tam rectangulum ſub C H, B H, Rationalibus potentia tantùm commenſurabilibus, q̃ rectangulum ſub F I, E I, Rationalibus potentia tantùm commenſurabilibus contẽtum, Medium erit: Sunt autem triangula B C D, E F G, æqualia rectangulis ſub C H, B H, & ſub F I, E I, ex ſcholio propoſ. 41. lib. 1. cùm baſes triangulorum C D, F G, duplæ ſint baſium rectangulorum C H, F I. Igitur & triangula B C D, E F G, Media erũt. Quocirca cùm tota ſuperficies Tetraedri triangulo B C D, ſit commenſurabilis; (eſt enim triangulum B C D, totius ſuperficiei quarta pars.) Item tota ſuperficies Octaedri triangulo E F G, commenſurabilis; (Eſt enim triangulum E F G, totius ſuperficiei octaua pars.) Erunt quoque, ex coroll. propoſ. 24. lib. 10. ſuperficies Tetraedri, & Octaedri, Mediæ. Si igitur ſphæræ diameter fuerit Rationalis: Erit tam ſuperficies Tetraedri, q̃ Octaedri in ea ſphæra, Media. Quod erat oſtendendum.

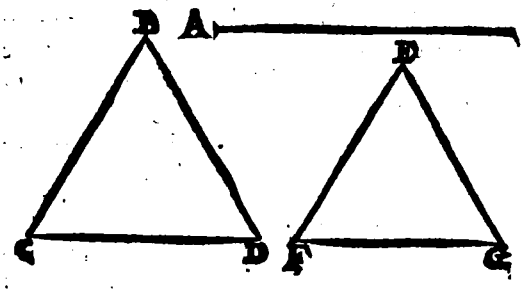
[d] 12. quarti decimi. [e] 6. decimi. [f] 12. decimi. [g] 9. decimi. [h] 12. quarti decimi. [i] 22. decimi.

COROLLARIVM.

SEQVITVR ex demonſtratione huius propoſ. omne triangulum æquilaterũ, cuius latus fuerit Rationale, eſſe ſuperficiem Mediam. Nam ex eo, q̃ latera B C, E F, & ob id eorum dimidia C H, F I, Rationalia ſunt oſtenſa, demonſtratum eſt, tam rectas C H, B H, quàm F I, E I, eſſe Rationales potentia tantùm commenſurabiles; Ac propterea rectangula ſub C H, B H, & ſub F I, E I, hoc eſt, triangula B C D, E F G, ipſis æqualia, eſſe Media. Cùm igitur eadem ſit ratio de omni triangulo æquilatero, cuius vnum latus ſit Rationale; perſpicuum eſt, quod infertur.

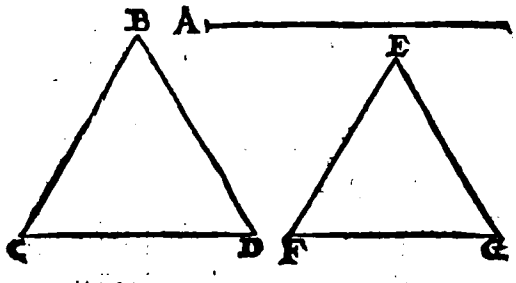
THEOR. 14. PROPOS. 14.

SI Tetraedrum, atq; Octaedrum eidem ſphæræ inſcribantur; erit baſis Tetraedri ſeſquitertia baſis Octaedri: Superficies autem Octaedri ſeſquialtera ſuperficiei Tetraedri. 14.



SIT ſphæræ diameter A, in qua deſcripti Tetraedri baſis ſit triangulũ B C D; Octaedri verò baſis triangulum E F G. Dico triangulum B C D, ſeſquitertium eſſe trianguli E F G; At verò ſuperficiem Octaedri eſſe ſeſquialteram ſuperficiei Tetraedri. [k] Quoniam enim quadratũ diametri A, ſeſquialterum eſt quadrati lateris Tetraedri C D; [l] duplum verò quadrati lateris Octaedri F G; ſit vt qualium partium 6. fuerit quadratũ diametri A, talium 4. ſit quadratum

[k] 13. tertijdecimi. [l] 14. tertijdecimi.



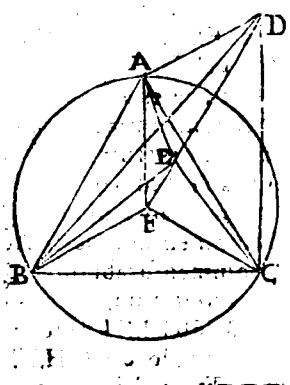
lateris C D, & talium 3. quadratum lateris F G. Quare quadratũ rectæ C D, ſeſquitertium eſt quadrati rectæ F G: Vt autem quadratum rectæ C D, ad quadratum rectæ F G, ita eſt triangulum B C D, ad triangulũ E F G. (*a* quia tam quadrata, quàm triangula proportionem inter ſe habent laterum C D, F G, duplicatã, cùm ſint ſimilia.) Igitur & triangulum B C D, ſeſquitertium eſt trianguli E F G.

a 20. & 19. *ſexti.*

RVRSVS, quoniam oſtenſum eſt triangulũ B C D, ſeſquitertium eſſe trianguli E F G; Ac propterea qualium partium 4. fuerit triangulum B C D, talium 3. eſſe triangulum E F G; Efficitur, vt triangulum E F G, octies ſumptum, hoc eſt, tota ſuperficies Octaedri, ſit earundem partium 24; At triangulum B C D, quater ſumptum, id eſt, tota ſuperficies Tetraedri, earundem partium 16. Quam ob rem ſuperficies Octaedri ſeſquialtera eſt ſuperficiei Tetraedri eiuſdem ſphæræ. Si igitur Tetraedrum, atque Octaedrum eidem ſphæræ inſcribantur, &c. Quod erat oſtendendum.

THEOR. 15. PROPOS. 15.

RECTA linea ex angulo quouis Tetraedri in ſphæra deſcripti per centrũ ſphæræ ducta, cadit in centrum baſis oppoſitæ, eſtq; perpendicularis ad dictam baſim.



SIT Tetraedrum A B C D, contẽtum quatuor triangulis æquilateris & æqualibus A B C, D A B, D B C, D C A, in ſphæra, cuius centrum E; ducaturq; ex angulo D, per E, centrum ſphæræ, recta D E F, incidens in baſim A B C, circulo inſcriptam ad punctum F. Dico F, eſſe centrum baſis A B C, & D F, perpendiculare eſſe ad eandem baſin. Ductis enim ex E, & F, ad angulos dictæ baſis rectis E A, E B, E C F A, F B, F C; quoniam rectæ E A, E B, E C, ductæ ex centro ſphæræ ad eius ſuperficiem æquales ſunt; erũt duo latera E A, E D, trianguli E A D, æqualia duobus lateribus E C, E D, trianguli C E D; Sunt autem & baſes A D, C D, æquales, cùm ſint latera triangulorũ æquilaterorum æqualium. *b* Igitur anguli A E D, C E D, æquales erunt. Ac proinde & reliqui A E F, C E F, æquales erũt, *c* eò q̃ tam A E D, A E F, q̃ C E D, C E F, duobus rectis æquiualent. Eadem ratione æquales erunt anguli B E F, C E F, ſi conſiderentur triangula B E D, C E D. Quoniam igitur latera E A, E F, trianguli E A F, æqualia ſunt lateribus E C, E F, trianguli E C F; & anguli ipſis contenti, oſtenſi æquales; *d* Erunt baſes F A, F C, æquales. Sic quoque æquales erunt F B, F C, ſi conſiderentur triangula E B F, E C F. Quare cùm tres rectæ F A, F B, F C, ex F, in circumferentiam circuli cadentes ſint æquales; *e* erit F, centrum baſis A B C, ſeu circuli eam circumſcribentis.

b 8. *primi.*
c 13. *primi.*
d 4. *primi.*
e 9. *tertij.*

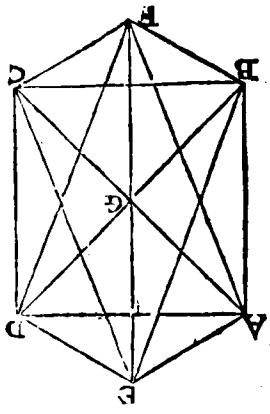
QVIA verò ex coroll. lemmatis 1. propoſ. 10. huius lib. linea perpendicularis ex E, centro ſphæræ ad planum circuli A B C, demiſſa; in centrum circuli cadit; efficitur, vt recta D E, per centrum ducta, & in centrum circuli F, cadens, perpendicularis ſit ad planũ circuli, ſeu baſis Tetraedri A B C. Nam ſi alia duceretur perpendicularis, caderet ea in centrũ circuli, per dictum coroll. Quare cùm F, quoq; ſit demonſtratum centrum eiuſdem circuli, haberet vnus idemque circulus duo centra quod eſt abſurdum. Recta igitur linea ex angulo quouis, &c. Quod demonſtrandum erat.

THEOR. 16. PROPOS. 16.

OCTAEDRVM in ſphæra deſcriptum, diuiditur in duas pyramides æquales, & ſimiles æqualium altitudinum; baſis verò vtriuſque eſt quadratum ſubduplum quadrati diametri ſphæræ.

SIT Octaedrum A B C D E F, contentũ octo triangulis æquilateris & æqualibus E A D, E A B, E B C, E C D, F B C, F B A, F A D, F D C, & in ſphæra deſcriptũ, cuius centrum G. Dico ipſum diuidi in duas pyramides æquales & ſimiles æqualium altitudinum, quarũ baſis communis eſt quadratum ſubduplum quadrati diametri ſphæræ. Ductis enim ex G, centro ſphæræ ad omnes angulos rectis lineis G A, G B, G C, G D, G E, G F, quæ æquales ſunt, cùm ſint ſemidiametri ſphæræ, ductæ videlicet è centro ad ſuperficiem ſphæræ: *f* quoniam quadratũ diametri ſphæræ, duplum eſt quadrati lateris Octaedri A B; & quadruplum quadrati ſemidiametri, A G, ex ſcholio propoſ. 4. lib. 2. Qualium partium 4. ponetur quadratũ diametri ſphæræ, talium partium 2. erit quadratum rectæ A B, & talium partium 1. quadratum rectæ A G; Ac proinde quadratum rectæ A B, duplum erit quadrati rectæ A G. Cùm ergo quadratum rectæ A G, æquale ſit quadrato rectæ B G; erit quadratum rectæ A B, æquale duobus quadratis rectarum A G, B G; *g* Ac propterea angulus A G B, rectus erit. Non aliter oſtendẽtur reliqui anguli A G D, B G C, C G D, recti. *h* Quam ob rem A G, C G, & B G, D G, in rectum erunt coniunctę; *i* atq; adeò rectæ A C, B D, ſeſe ſecantes in G, in vno exiſtent

f 14. *tertij de cimi.*
g 48. *primi.*
h 14. *primi.*
i 2. *vndec.*



exiſtent plano; [a] Ac propterea rectæ earũ extrema connectentes A B, B C, C D, D A, in eodem plano erunt cum ipſis. Quare quadrilaterum A B C D, in vno plano eſt ſitum. Diuiſum eſt ergo Octaedrum in duas pyramides A B C D E, A B C D F, quarũ baſis communis A B C D, vertices verò E, & F; quę pyramides ęquales ſunt, & ſimiles, ex defin. 10. lib. 11. cùm quælibet conſtet ex quatuor triangulis æquilateris Octaedri, quę æqualia ſunt, & ſimilia, & baſi communi A B C D. Dico iam earum altitudines eſſe æquales, & baſin A B C D, eſſe quadratum ſubduplum quadrati diametri ſphęræ. Quoniam enim oſtenſum eſt, quadratum lateris Octaedri A B, æquale eſſe duobus quadratis ſemidiametrorum A G, B G; erit quoq; quadratum lateris A E, æquale duobus quadratis ſemidiametrorum A G, E G; [b] Ac propterea angulus A G E, rectus erit. Eadem ratione rectus erit angulus D G E. Quoniam igitur recta E G, duabus rectis A G, D G, ſe mutuò ſecãtibus in G, ad rectos angulos inſiſtit, [c] ipſa recta erit ad planum A B C D, per rectas A G, D G, ductum, nempe ad baſin pyramidũ. Quare E G, altitudo eſt pyramidis A B C D E. Similiter oſtendemus F G, altitudinem eſſe pyramidis A B C D F. Cùm ergo E G, F G, ſint ſemidiametri ſphęræ æquales, perſpicuum eſt, dictas pyramides eſſe æqualium altitudinum. Rurſus quia A C, eſt diameter ſphęræ; [d] erit eius quadratum duplum quadrati lateris A D; Ac propterea æquale duobus quadratis laterũ A D, D C. [e] Quare angulus A D C, rectus eſt: Eodem modo recti erũt anguli D A B, A B C, B C D. Quare quadrilaterum A B C D, rectangulum eſt: Sed & æquilaterum, cùm eius latera ſint latera Octaedri. Igitur quadratum eſt; quod cùm ſit deſcriptum ex latere Octaedri A B; [f] conſtat ipſum eſſe ſubduplum quadrati diametri ſphęræ. Octaedrum ergo in ſphęra deſcriptum, &c. Quod erat oſtendendum.

[a] 7. vndec.
[b] 48. primi.
[c] 4. vndec.
[d] 14. tertijde cimi.
[e] 48. primi.
[f] 12. tertijde cimi.

SCHOLIVM.

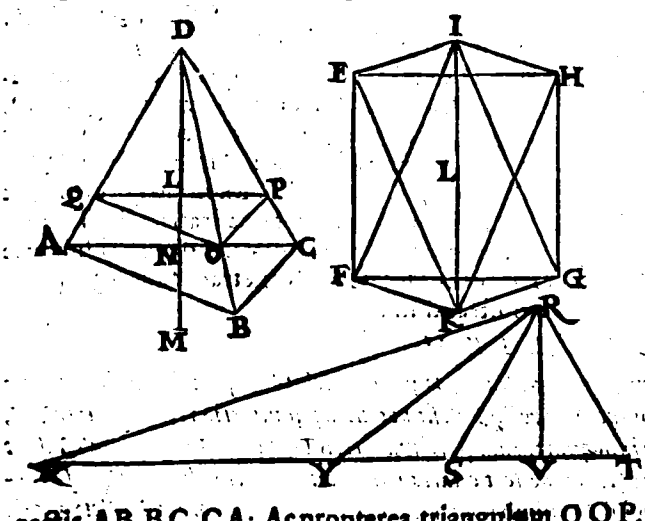
Mvltò breuius hanc propoſitionem demonſtrauimus in coroll. 2. propoſ. 14. lib. 13. ex ipſa videlicet conſtructione Octaedri. Veruntamen quia hic demonſtratur à Campano, non habita ratione conſtructionis Octaedri, viſum eſt eius demonſtrationem hoc etiam loco conſcribere.

THEOR. 17. PROPOS. 17.

TETRAEDRVM ſphęræ impoſitum ad Octaedrum in eadem ſphęra deſcriptum ſe habet, vt rectangulum ſub linea potente vigintiſeptem ſexageſimas quartas partes quadrati lateris Tetraedri, & ſub linea continẽte octo nonas partes eiuſdem lateris, comprehenſum ad quadratum diametri ſphęræ.

VEL, vt Campanus loquitur.

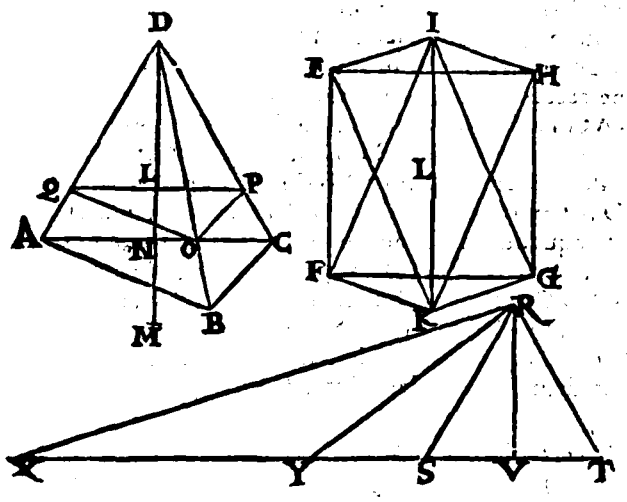
TETRAEDRVM ſphęræ impoſitum ad Octaedrum in eadem ſphęra deſcriptum ſe habet, vt rectangulum ſub linea, quæ potentia eſt ſubſeſquitertia trium quartarum partium lateris Tetraedri, & ſub linea ſuperquintupartiente vigeſimas ſeptimas partes earundem trium quartarũ partium lateris Tetraedri contentum, ad quadratum diametri ſphęræ.



SIT Tetraedrum A B C D, & Octaedrũ E F G H I K, in vna eademq; ſphęra, cuius centrum L. Ducatur ex angulo D, per centrum L, diameter ſphęræ D M, incidens in baſin A B C, ad punctum N. [g] Erit igitur N, centrum baſis A B C, & D N, perpendicularis ad eandem baſin. Quia verò pars diametri L N, inter centrum ſphęræ & baſin Tetraedri, eſt ſexta pars diametri, & tertia ſemidiametri, [p] corol. 2. propoſ. 13. lib. 13. Erit D L, ſemidiameter talium partium 3, qualium 1. eſt L N; Ac propterea D N, talium 4. Ducatur deinde, ex ſcholio propoſ. 15. lib. 11. per centrum L, planum O P Q, parallelum plano A B C; [h] Eruntq; rectæ Q O, O P, P Q, parallelæ rectis A B, B C, C A; Ac propterea triangulum Q O P, æquiangulum erit triangulo æquilatero A B C, [i] cùm anguli illius æquales ſint angulis huius, ſinguli ſingulis: At A B C, eſt æquiangulum, ex coroll. propoſ. 5. lib. 1. Igitur & Q O P, æquiangulum erit; Ac propterea & æquilaterum, ex corollario propoſ. 6. lib. 1. ideoque ſimile ipſi A B C: Sunt autem & triangula D Q O, D O P, D Q P,

[g] 15. quarti-decimi.
[h] 16. vndec.
[i] 10. vndec.

triangulis D A B, D B C, D A C, æquilateris similia, ex corollario propos. 4. lib. 6. Igitur pyramides
a 17. vndec. A B C D, Q O P D, similes sunt, ex defin. 9. lib. 11. a Rursus, quia plana parallela A B C, Q O P, secãt rectas D N, D C, proportionaliter erit vt D N, ad D L, ita D C, ad D P: Erat autem D N, ad D L, vt 4. ad 3. (cùm ostensum sit D N, esse talium partium 4. qualium 3. est D L.) Igitur & D C, ad D P, e-
b 8. duodec. rit vt 4. ad 3. Ac proinde, b cùm pyramides similes habeãt proportionem laterum triplicatã, erit pyramis A B C D, ad pyramidem Q O P D, vt 64. ad 27. hæc enim proportio triplicata est proportionis 4. ad 3. vt cõstat in his numeris 64. 48. 36. 27. Nam hi numeri sunt minimi in proportione 4.
c 20. sexti. ad 3. vt constat ex propos. 2. libri 8. Rursus c quia quadrata habent latera proportionem duplicatam, erit quadratũ rectæ D C, ad quadratũ rectæ D P, vt 64. ad 36. vt in isdem numeris constat.



d 12. quarti decimi. Sit iam triangulum æquilaterum R S T, æquale triangulo D Q P; demittaturq; ex R, ad S T, perpendicularis R V. d Eritq; latus R T, hoc est, D P, illi æquale, potẽtia sesquitertium perpendicularis R V. Ac proinde qualium partium 36. fait quadratum rectæ D P, talium 27. erit quadratũ rectæ R V: Erat autem earundẽ partium 64. quadratũ rectæ D C. Igitur linea R V, est potens viginti septem sexagesimas quartas partes quadrati lateris Tetraedri.

Rursvs, extensa T S, fiat T X, ad T S, vt 64. ad 27. ex coroll. propos. 6. libri 10. diuidaturq; T X, bifariam in Y, vt sit T Y, talium partiũ 32. qualium 27. est T S, seu illi æqualis D P. Quoniam verò proportio D C, ad D P, erat, vt 4. ad 3. nempe sesquitertia, erit D C, talium partiũ 36. qualium D P, est 27. (proportio enim 36. ad 27. est sesquitertia.) ac propterea qualium partium T Y, est 32. Quare linea T Y, continet octo nonas partes lateris Tetraedri D C. Dico igitur ita esse Tetraedrũ A B C D, ad Octaedrum E F G H I K, vt rectangulum contentũ sub recta R V, (quæ potest viginti septem sexagesimas quartas partes quadrati lateris D C.) & sub recta T Y, (quæ continet octo nonas partes eiusdem lateris.) ad quadratum diametri sphæræ.

e 1. sexti. Cvm enim ductis rectis R X, R Y, e triangulũ R T X, duplum sit trianguli R T Y, & basis T X,
f 41. primi. dupla sit basis T Y: f Est autẽ & rectangulum sub R V, T Y, duplum eiusdem trianguli R T Y; Erit
g 7. quinti. triangulum R T X, æquale rectangulo sub R V, T Y. g Ac propterea erit, vt triangulum R T X, ad
h 1. sexti. triangulum R S T, ita rectangulum sub R V, T Y, ad idem triangulũ R S T: h Est autẽ triangulum R T X, ad triangulum R S T, vt basis T X, ad basin S T, nimirũ vt 64. ad 27. Igitur & rectangulum sub R V, T Y, ad triangulum R S T, hoc est, ad triangulum D Q P, siue Q O P, sibi æquale; erit vt 64. ad 27. Fuit autẽ & pyramis A B C D, ad pyramidem Q O P D, vt 64. ad 27. Erit ergo vt rectangulum sub R V, T Y, ad triangulum Q O P, ita pyramis A B C D, ad pyramidem Q O P D: At verò vt triangulum Q O P, ad quadratum diametri sphæræ D M, ita est pyramis Q O P D, ad Octaedrum E F G H I K. (Nam cùm D N, recta sit ad planũ A B C, recta quoq; erit ad planum Q O P, ex scholio propos. 14. lib. 11. ideoq; sphæræ semidiameter D L, altitudo erit pyramidis seu Tetraedri
i 16. quarti decimi. Q O P D: i Octaedrũ aũt E F G H I K, diuiditur in duas pyramides æquales E F G H I, E F G H K, quarum basis cõmunis quadratũ E F G H, dimidium quadrati diametri sphæræ; & altitudines æquales semidiametri sphæræ L I, L K. Pyramides ergo Q O P D, E F G H I, æquales habent altitudines. Quare, ex scholio 2ppos. 5. lib. 12. erit vt basis Q O P, ad basin E F G H, ita pyramis Q O P D, ad pyramidem E F G H I; Ac propterea per ea, quæ in scholio propos. 22. lib. 5. ostendimus, vt basis Q O P, ad duplum basis E F G H, hoc est, ad quadratum diametri sphæræ D M, ita pyramis Q O P D, ad duplum pyramidis E F G H I, hoc est, ad Octaedrum E F G H I K.) Ex æquo igitur erit, vt rectangulum sub R V, potente viginti septem sexagesimas quartas partes quadrati lateris Tetraedri D C, & sub T Y, octo nonis eiusdem lateris D C, contentum ad quadratum diametri sphæræ D M, ita pyramis, seu Tetraedrum A B C D, ad Octaedrum E F G H I K. Tetraedrum ergo sphæræ impositum ad Octaedrum, &c. Quod erat demonstrandum.

SCHOLIVM.

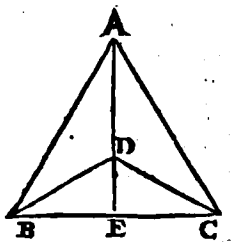
Qvoniam verò D C, talium partium 4. fuit, qualium 3. D P; continebit D P, seu illi aequalis R T, tres
s 12. quarti decimi. *quartas partes lateris Tetraedri D C: ac proinde, s cũ recta R T, sit potentia sesquitertia rectæ R V; erit R V, potentia subsesquitertia ipsius R T, nempe trium quartarum partium lateris Tetraedri. Rursus quia T Y, fuit talium partium 32. qualium 27. S T, seu D P; (tres videlicet quartæ partes lateris Tetraedri.) erit T Y, superquintupartiens vigesimas septimas partes ipsius S T, nimirum trium quartarum partium lateris Tetraedri. Quare constat, esse quoq; Tetraedrum A B C D, ad Octaedrum E F G H I K, vt rectangulum sub R V, quæ potentia subsesquitertia est trium quartarum partium lateris Tetraedri, & sub T Y, quæ superquintupartiens est vigesimas septimas partes earundem trium quartarum partium lateris Tetraedri, vt videbar Campanus.*

THEOR.

THEOR. 18. PROPOS. 18.

0. 17.

LINEA perpendicularis ex quolibet angulo trianguli æquilateri ad basin oppositam demissa; tripla est eius perpendicularis, quæ ex centro trianguli ad eandem basin deducitur.



SIT triangulum æquilaterũ A B C, cuius centrũ D. Ducatur ex A, per D, recta AE, q̃ perpendicularis erit ad B C, eamq; bifariam diuidet, ex coroll. 2. propos. 10. lib. 13. Dico AE, triplã esse rectæ D E, quæ scilicet perpendicularis est è centro ad basin ducta. Ductis enim rectis B D, C D, cũ latera D A, D B, trianguli A D B, æqualia sint lateribus D B, D C, trianguli B D C; (è centro enim ducuntur;) sit autem & basis A B, basi B C, æqualis: Erunt triangula A B D, B D C, æqualia, ex coroll. propos. 8. lib. 1. Atque eadem ratione æqualia erunt triangula A D B, A D C. Quare ob æqualitatem trium triangulorum A D B, B D C, C D A, triangulum A B C, triplum est trianguli B D C. Quoniam verò rectangulum sub A E, E B, triangulo A B C; & rectangulum sub D E, E B, triangulo B D C, æquale est, ex scholio propos. 41. lib. 1. cùm basis trianguli B C, dupla sit basis B E, vtriusq; rectanguli: Erit quoque rectangulum sub A E, E B, triplum rectanguli sub D E, E B: [a] Est autem vt rectangulum sub A E, E B, ad rectangulum sub D E, E B, eiusdem altitudinis E B, ita basis A E, ad basin D E. Igitur & A E, tripla est ipsius D E. Linea ergo perpendicularis ex quolibet angulo, &c. Quod erat ostendendum.

[a] 1. sexi.

COROLLARIVM.

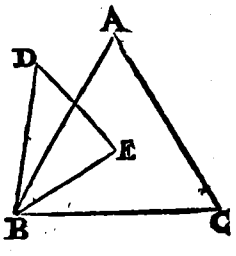
ITAQVE eadem perpendicularis A E, sesquialtera est reliquæ rectæ A D, inter angulum & centrum comprehensa. Cùm enim A E, tripla sit ipsius D E; qualium partium 3. ponetur A E, talium 1. erit D E; Reliqua igitur A D, earundem partium 2. continebit: Ac propterea A E, sesquialtera erit ipsius A D.

Ex quibus rursus fit, rectam A D, rectæ D E, duplam esse.

0. 17.

THEOR. 19. PROPOS. 19.

SI Octaedrum sphæræ inscribatur; erit semidiameter sphæræ potentia tripla eius perpendicularis, quæ ex centro sphæræ in basin quamcunq; Octaedri ducitur.



SIT basis aliqua octaedri in sphęra, cuius centrum D, descripti, triangulum æquilaterum A B C, in quod è centro sphæræ D, perpendicularis demittatur D E; ducaturque semidiameter sphæræ D B. Dico semidiametrum D B, potentia triplam esse perpendicularis D E. Cùm enim, ex coroll. lemmatis 1. propos. 10. huius lib. perpendicularis D E, in centrum circuli sphæræ, qui triangulum A B C, circumscribit, cadat, erit E, centrum trianguli. Ducta igitur recta B E; [b] quoniam quadratum diametri sphæræ duplum est quadrati lateris octaedri A B; & quadruplum quadrati semidiametri sphæræ D B, ex scholio propos. 4. lib. 2. Si ponatur quadratum diametri partium 12. erit quadratum lateris A B, 6. & quadratum semidiametri sphæræ D B, 3. [c] Quia verò quadratum lateris A B, triplum est quadrati semidiametri circuli triangulum ambientis, rectæ scilicet B E; Erit quadratum rectæ B E, talium partium 2. qualium 6. fuit quadratum lateris A B. Quare [d] cùm quadratum rectæ D B, æquale sit quadratis rectarum B E, D E; sit autem quadratum rectæ D B, ostensum partium 3. Erit reliquum quadratum perpendicularis D E, talium partium 1. Ac proinde quadratum rectæ D B, triplum est quadrati rectæ D E. Si igitur octaedrum sphæræ inscribatur, &c.

[b] 14. tertij. dec.
[c] 12. tertij. dec.
[d] 47. primi.

0. 18.

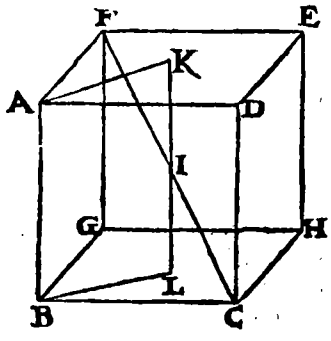
THEOR. 20. PROPOS. 20.

DVPLVM quadrati ex diametro cuiuslibet sphæræ descripti, æquale est superficiei cubi in illa sphęra collocati: Perpendicularis autem à centro sphæræ in aliquam basin cubi demissa, æqualis est dimidio lateris cubi.

SIT cubus A B C D E F G H, in sphæra descriptus, cuius centrum I, ex quo I K, perpendicularis ducatur ad vnam basin cubi, nempe ad A D E F. Dico duplum quadrati diametri sphæræ æquale esse superficiei cubi; & perpendicularẽ I K, æqualem esse dimidio lateris cubi. [e] Cùm enim quadratum diametri sphæræ triplum sit quadrati lateris cubi, hoc est, æquale tribus quadratis cubi; Erit duplum eiusdem quadrati ex diametro sphæræ descripti æquale sex quadratis cubi, id est, toti superficiei cubi.

[e] 15. tertij. dec.

PRODVCTA autem K I, ad basin oppositam B C H G, vsque in punctum L; cùm K L, recta sit ad planum A E, recta quoque erit ad planum B H, illi parallelum, per scholium propos. 14. lib. 11.



a 6. vndec.

b 16. vndec.

Rursus, [a] quia AB, KL, parallelæ sunt, quòd rectę sint ad planum AE; ducatur per ipsas planum faciens in planis oppositis parallelis AE, BH, communes sectiones, lineas rectas AK, BL, [b] quæ parallelæ quoque erunt inter se; Ac propterea parallelogrammũ erit ABLK; atque adeò recta KL, æqualis lateri cubi AB. Quoniam verò perpendicularis KL, è centro sphæræ I, cadit in bases AE, BH, ad puncta K, & L, erunt K, & L, centra circulorum dictas bases ambientium in sphæra, per coroll. lemmatis 1. propos. 10. huius lib. Quare KL, in centro I, bifariam secabitur à dicta diametro CF, vt in coroll. 1. propos. 15. lib. 13. ostendimus; Ac propterea cùm KL, ostensa sit æqualis lateri cubi, erit IK, dimidium eiusdem lateris cubi. Duplum igitur quadrati ex diametro cuiuslibet sphæræ descripti, &c. Quod ostendendum erat.

COROLLARIVM.

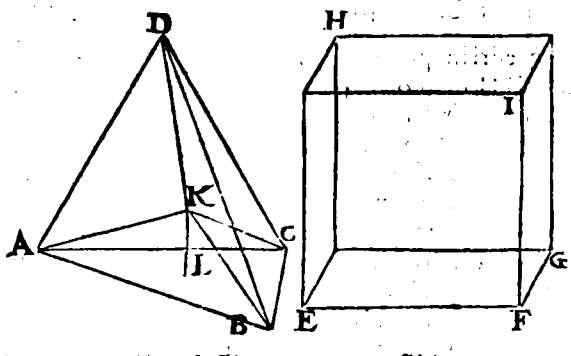
Ex dictis colligitur, solidum, quod fit ex dimidio lateris cubi in duas tertias partes quadrati diametri sphæræ dictum cubum comprehendentis, æquale esse cubo. a *Cùm enim quadratum diametri sphæræ triplum sit quadrati lateris cubi, erunt duo quadrata AE, BH, duæ tertiæ partes quadrati diametri sphæræ;* b *Perspicuum autem est, solidum, quod fit ex IK, dimidio lateris cubi in AE, tertiam partẽ quadrati diametri sphæræ, æquale esse solido, quod fit ex IL, dimidio lateris cubi in BH, tertiam partem quadrati diametri sphæræ, eò quòd dicta solida habeant & bases, & altitudines æquales. Itaque cùm dicta duo solida compleant totum cubum, manifestum est, id quod fit ex dimidio lateris cubi, in duas tertias partes quadrati diametri sphæræ, æquale esse toti cubo. Quod est propositum.*

a 15. tertii decimi.

b 31. vndecimi.

ALITER proponi potest hoc corollarium, vt dicamus, solidum, quod fit ex latere cubi in tertiam partem quadrati diametri sphæræ, æquale esse cubo. Nam cubus BE, producitur ex BA, latere cubi in quadratum AE, quod est tertia pars quadrati diametri sphæræ: Vt perspicuum est.

SCHOLIVM.



VNIVERSE autem solidũ, quod fit ex perpendiculari è centro cuiuscunque corporis regularis ad aliquam eius basim ducta in tertiam partem superficiei ipsius corporis, æquale est, oppositi corpori regulari. Sit enim corpus regulare quodcunque ABCD, contentum planis ABC, ABD, ACD, BCD, solidum autem EFGH, contentum sub EI, tertia parte superficiei corporis ABCD, & sub altitudine FG, quæ æqualis sit perpendiculari KL, ducta ex centro K, ad basin ABC. Dico solidum EFGH, æquale esse dato corpori regulari ABCD. Nam ductis ex centro K, rectis KA, KB, KC, KD, ad omnes angulos corporis, resoluetur corpus regulare in pyramides æquales, cùm æquales habeãt bases & altitudines. Cùm enim circuli dictas bases ambientes, æquales sint; ipsi æqualiter à centro distabunt. per lemma 2. propos. 10. huius lib. Ac propterea perpendiculares ex K, centro ad ipsorum plana ductæ, nempe altitudines pyramidum, æquales erunt. Quoniam verò prisma contentum sub basi ABC, & altitudine KL, triplum est pyramidis ABCK, per coroll. 1. propos. 7. lib. 12. Atque eadem ratione prismata contenta sub reliquis basibus, & eadem altitudine KL, tripla sunt suarum pyramidum; Erit prisma contentum sub tota superficie corporis regularis, & altitudine KL, (nimirum compositum ex omnibus illis prismatis) triplum corporis regularis ABCD. Quam ob rem cùm idem prisma triplum sit prismatis EFGH, quòd & illius basis tripla ponatur basis huius, per ea, quæ ad propos. 7. lib. 12. demonstrauimus, erunt solida EFGH, ABCD, æqualia. Quod est propositum.

o. 11.

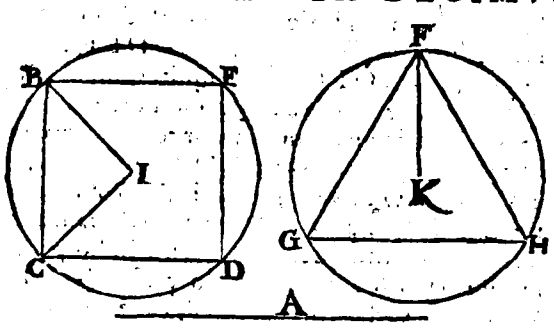
THEOR. 21. PROPOS. 21.

IDEM circulus comprehendit & cubi quadratum, & Octaedri triangulum, eiusdem sphæræ.

IN sphæra, cuius diameter A, intelligatur descriptus cubus, cuius vnum quadratum BCDE, & Octaedrum, cuius vnum triãgulum FGH. Dico eundem circulum circumscribere & quadratum BCDE, & triangulũ FGH, hoc est, circulos BCDE, FGH, ipsa circumscribẽtes, esse æquales. Sint enim rectæ è cẽtris IB, KF. a Quia igitur quadratũ diametri A, triplũ est quadrati lateris cubi BC, & quadratũ lateris BC, duplũ quadrati rectæ BI; (Nã ducta recta IC, fiet angulus BIC, rectus,

a 15. tertij decimi.

b 47. primi.



rectus, cùm ſubtendat quadrantem; [a] Ac proinde quadratum rectæ B C, æquale erit quadratis rectarum B I, I C. Quare cùm rectarum æqualium B I, I C, æqualia ſint quadrata; duplum erit quadratum rectæ B C, quadrati rectę B I.) qualium partium 6. ponetur quadratum diametri A, talium 2. erit quadratum lateris B C, & talium 1. quadratum rectæ B I. Rurſus [b] quia quadratum diametri A, duplum eſt quadrati lateris Octaedri F G; [c] & quadratum lateris F G, triplum quadrati rectæ F K, ex centro ductæ; qualium partium 6. ponetur quadratum diametri A, talium 3. erit quadratum lateris F G, & talium 1. quadratum rectæ F K. Cùm igitur & talium partium 1. oſtenſum ſit quadratum rectæ B I; æqualia erunt quadrata rectarum B I, F K; Ac propterea & rectæ ipſæ, & circuli ex ipſis deſcripti B C D E, F G H, æquales erunt. Idem ergo circulus comprehendit, &c. Quod erat oſtendendum.

[a] 47. primi.

[b] 14. tertiædecimi.

[c] 12. tertiædecimi.

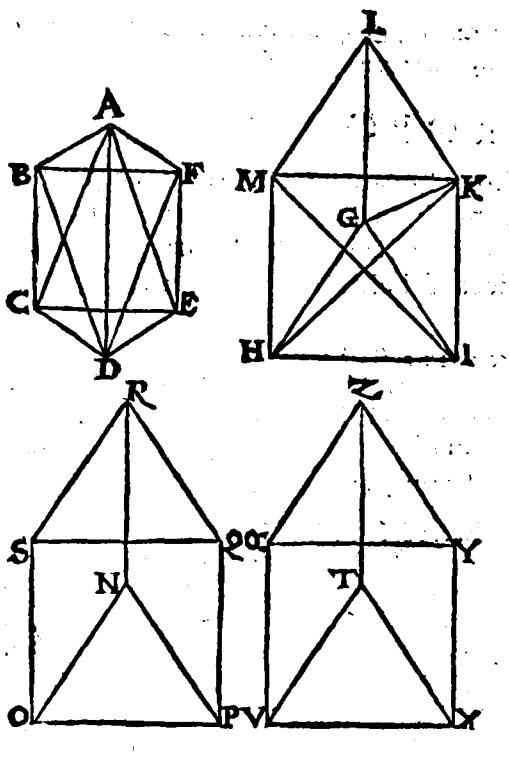
COROLLARIVM.

Hinc ſit, lineas perpendiculares cõiungentes centra circulorum, qui baſes oppoſitas tam cubi, quàm Octaedri circumſcribunt, æquales eſſe. Si enim ex centro ſphæræ ad baſes cubi & Octaedri perpendiculares ducantur, cadent hæ in centra circulorum ipſas circumſcribentiũ, ex coroll. lemmatis 1. propoſ. 10. huius lib. [a] *qui cùm ſint æquales oſtenſi, æqualiter diſtabunt à centro ſphæræ, ex lemmate 2. eiuſdem propoſ. Ac proinde æquales erunt dictæ perpendiculares. Quæ cùm ſint dimidiatæ partes rectarum, quæ centra oppoſitarum baſium connectunt; (Nam ſi producantur, perpendiculares quoque erunt ad oppoſitas baſes, ex ſcholio propoſ. 14. lib. 11. propterea quòd parallelæ ſunt oppoſitæ baſes in Octaedro, ex coroll. 4. propoſ. 14. lib. 13. quemadmodum & oppoſitæ baſes cubi parallelæ ſunt.) æquales erunt perpendiculares centra oppoſitarum baſium coniungentes tam in cubo, quàm in Octaedro. quod eſt propoſitum.*

[a] 21. quarti decimi.

THEOR. 22. PROPOS. 22.

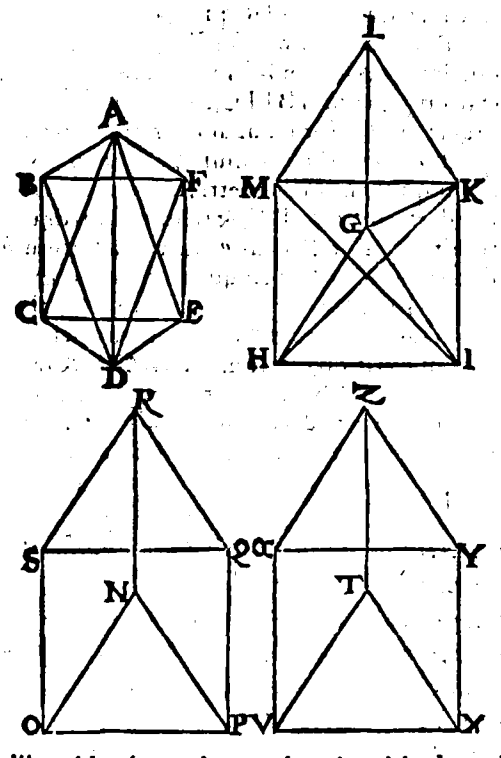
Si Octaedrum, atq; Tetraedrum eidem ſphæræ inſcribantur; Erit Octaedrum ad triplum Tetraedri, vt latus Octaedri ad latus Tetraedri.



In eadem ſphæra inſcriptum ſit & Octaedrum A B C D E F, & Tetraedrum G H I K. Dico ita eſſe, Octaedrum ad triplum Tetraedri, vt latus B F, ad latus H I. Ducta enim in Octaedro diametro A D, diuidetur Octaedrum in quatuor pyramides, quarum latus commune eſt ipſa diameter A D, & vertex communis A, nempe in B C D A, cuius baſis B C D; in B D F A, cuius baſis B D F; in C D E A, cuius baſis C D E; & in D E F A, cuius baſis D E F; quæ quidem omnes baſes infra quadratum B C E F, exiſtunt, cõtinentes cum ipſo dimidiatam partem Octaedri. Quoniam verò quælibet harum pyramidum conſtat duobus triãgulis æquilateris, Octaedri; & duobus aliis triangulis, quæ quoniam latus ipſorum commune eſt A D, diameter; & reliqua latera, ipſius Octaedri latera exiſtunt, [a] inter ſe æqualia ſunt; efficitur has quatuor pyramides æquales eſſe inter ſe, cùm contineantur planis & multitudine, & magnitudine æqualibus. Conſtituatur ſuper G H I, baſin Tetraedri, priſma G H I K L M, eiuſdem cum Tetraedro altitudinis; quod ipſius Tetraedri triplum erit, per corollarium primum, propoſitionis ſeptimę, libri duodecimi. Rurſus, ſuper baſin octaedri N O P, & T V X, baſi Tetraedri æqualem, cõſtituantur duo priſmata N O P Q R S, T V X Y Z a, eiuſdem cum Octaedro, ſeu pyramide A C D E, altitudinis. [b] Quoniam igitur G H I, hoc eſt, T V X, baſis Tetraedri ſeſquitertia eſt ipſius N O P, baſis Octaedri: Erit quoq; priſma T V X Y Z a, priſmatis N O P Q R S, ſeſquitertium, cùm priſmata eiuſdem altitudinis ſint, vt

[a] 8 primi.

[b] 14. quartidecimi.



baſes, ex iis, quæ ad propoſ. 7. lib. 12. demonſtrauimus. Eſt autẽ & Octaedrum ABCDEF, eiuſmodi priſmatis NOPQRS, ſeſquitertium: (Nam priſma æquale eſt tribus pyramidibus, ex coroll. 1. propoſ. 7. lib. 12. qualium quatuor cõtinere diximus Octaedrũ.) Igitur æquale eſt Octaedrum priſmati TVXYZ α. Quia verò priſma TVXYZ α, ad priſma GHIKLM, proportionem habet, quam altitudo illius ad altitudinem huius, ex ſcholio propoſ. 14. libri 12. Eſt autem altitudo priſmatis TVXYZ α, quod Octaedro æquale eſt, eadẽ quæ Octaedri, ex conſtructione: Erit quoque Octaedrum ad priſma GHIKLM, hoc eſt, ad triplum Tetraedri GHIK, vt altitudo Octaedri ad altitudinẽ Tetraedri: Eſt autem altitudo Octaedri, nempe perpendicularis centra baſium oppoſitarum coniungens, æqualis lateri cubi, nimirum perpendiculari centra baſium oppoſitarum connectenti, per coroll. propoſ. 21. huius lib. Atque vt latus cubi ad altitudinem Tetraedri, ita eſt latus Octaedri ad latus Tetraedri. (Nam tam quadratum lateris cubi ad quadratum altitudinis Tetraedri, quàm quadratum lateris Octaedri ad quadratũ lateris Tetraedri, eſt, vt 3. ad 4. Poſito enim quadrato diametri ſphæræ 9. erit quadratum lateris cubi 3. ex propoſ. 15. lib. 13. & quadratum altitudinis Tetraedri 4. ex coroll. 2. propoſ. 13. lib. 13. ideoq; quadratum lateris cubi ad quadratum altitudinis Tetraedri, eſt vt 3. ad 4. Rurſus poſito quadrato diametri ſphæræ 6. α erit quadratum lateris Octaedri 3. & quadratum lateris Tetraedri 4. &c.) Eſt igitur Octaedrum ad triplum Tetraedri, vt latus Octaedri ad latus Tetraedri. Si itaq; Octaedrum, atq; Tetraedrum eidem ſphæræ inſcribantur, &c. quod demonſtrandũ erat.

α 18. *tertij decimi.*

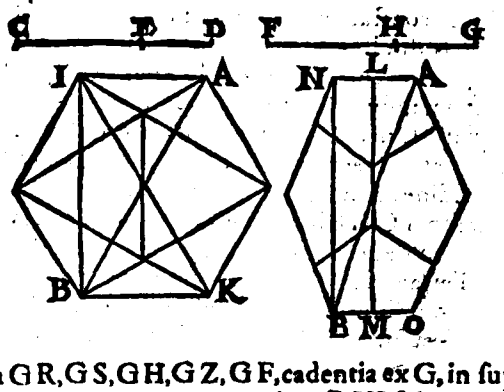
COROLLARIVM.

Ex dictis infertur, ita eſſe altitudinem Octaedri ad altitudinẽ Tetraedri, vt latus Octaedri ad latus Tetraedri. Oſtenſum enim eſt, ita eſſe latus cubi, quod quidem æquale eſt altitudini Octaedri, ad altitudinem Tetraedri, vt latus Octaedri ad latus Tetraedri. Item colligitur, ita eſſe diametrum ſphæræ ad latus Tetraedri, vt latus Octaedri ad latus cubi. α *Nam & quadratum diametri ad quadratum lateris Tetraedri, & quadratum lateris Octaedri ad quadratum lateris cubi, proportionem habet ſeſquialteram.*

α 18. *tertij decimi.*

THEOR. 23. PROPOS. 23.

Si recta linea propoſita potuerit totam aliquã lineam ſectam extrema ac media ratione, & maius eius ſegmentum; Item totam aliam ſimiliter ſectam & minus eius ſegmentum: Erit maius ſegmentum prioris lineæ latus Icoſaedri; minus autem ſegmentum poſterioris lineæ latus Dodecaedri eius ſphæræ, cuius recta linea propoſita diameter exiſtit.



Poſsit recta AB, rectam CD, & eius ſegmẽtum maius CE; Item rectam FG, & eius ſegmentum minus HG. Dico CE, eſſe latus Icoſaedri, & HG, latus Dodecaedri, eius ſphæræ, cuius AB, diameter exiſtit. Intelligatur enim in ſphæra, cuius diameter AB, deſcriptũ Icoſaedrum AIBK, & Dodecaedrũ ANBO. Latera deinde Icoſaedri oppoſita AI, BK, connectantur recta IB, quæ ſubtẽdet vnum angulum pentagoni ex Icoſaedri lateribus cõpoſiti, vt conſtat ex propoſ. 16. lib. 13. (Nam in ea figura, ducta recta ZF, erit RSHZF, pentagonum, ob quinque latera Icoſaedri æqualia GR, GS, GH, GZ, GF, cadentia ex G, in ſuperficiẽ ſphæræ, in quo recta RH, latera oppoſita RX, HI, coniungens angulum RSH, ſubtendit) clariusq; patebit ex cõſtructione Icoſaedri, quam ad finem libri 16. ex Pappo afferemus: quod etiã videre licet in aliquo Icoſaedro materiali. Quia verõ AI, BK, latera oppoſita parallela ſunt, per coroll. 3. propoſ. 16. lib. 13. α erunt anguli AIB, IBK, æqua-

α 29. *primi.*

IBK, æquales duobus rectis; Ac proinde, cùm ſint inter ſe æquales, (Ducta enim alia diametro IK; cùm latera AI, IB, trianguli AIB, æqualia ſint lateribus KB, BI; & baſes quoque AB, IK, æquales; [a] Erunt anguli AIB, IBK, æquales.) recti erunt; [b] ideoque quadratum rectæ propoſitæ AB, æquale erit quadratis rectarum AI, IB: Erat autem idem quadratum rectæ AB, æquale, ex hypotheſi, quadratis rectarum CD, CE: Igitur quadrata rectarum IB, IA, æqualia ſunt quadratis rectarum CD, CE; Ac propterea cùm CE, ſit maius ſegmentum ipſius CD, diuiſæ extrema ac media ratione; Item IA, maius ſegmentum ipſius IB, ſimiliter diuiſæ; (Nam IB, ſubtendit angulum pentagoni, cuius latus eſt IA, latus Icoſaedri. Conſtat autem, rectæ ſubtendentis angulum pentagoni, ſi ſecetur extrema ac media ratione, [c] maius ſegmentum eſſe æquale lateri eiuſdem pentagoni.) æquale erit CE, maius ſegmentum ipſi IA, lateri Icoſaedri. [d] Cùm enim ſit vt CD, ad CE, ita IB, ad IA; [e] erit quoque vt quadratum rectæ CD, ad quadratum rectæ CE, ita quadratum rectæ IB, ad quadratum rectæ IA; Ac componendo, vt quadrata rectarum CD, CE, ad quadratum rectæ CE, ita quadrata rectarum IB, IA, ad quadratum rectæ IA: Oſtenſa ſunt autem quadratis rectarum CD, CE, æqualia quadrata rectarum IB, IA; [f] Igitur & quadrato rectæ CE, æquale eſt quadratum rectæ IA; ideoq; rectæ CE, IA, æquales ſunt. Quod eſt propoſitum.

a 8. primi.
b 47. primi.
c 8. tertiædecimi.
d 23. quartidecimi.
e 22. ſexti.
f 14. quinti.

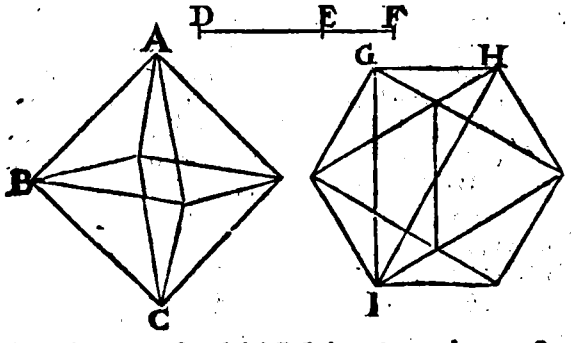
RVRSVS, latera Dodecaedri oppoſita AN, BO, ſecentur bifariam in L, & M, punctis quæ recta LM, & ipſa latera recta NB, coniungantur. Quoniam igitur NL, BM, æquales, parallelæ ſunt, per coroll. 3. propoſ. 17. lib. 13. [g] erunt quoque LM, NB, æquales & parallelæ: Eſt autem recta LM, ſecans latera oppoſita bifariam, perpendicularis ad ipſa latera oppoſita, per idem coroll. Igitur & NB, ad eadem perpendicularis erit. [h] Ac proinde quadratum rectæ propoſitæ AB, æquale erit quadratis rectarum NB, NA. Quare cùm idem quadratũ rectæ AB, æquale ſit poſitum quadratis rectarum FG, HG; æqualia erunt quadrata rectarum NB, NA, quadratis rectarum FG, HG: Ac propterea, cùm HG, ſit minus ſegmentum ipſius FG, ſectæ extrema ac media ratione: Item NA, minus ſegmentum ipſius NB, hoc eſt, ipſius LM, ſimiliter diuiſæ, per coroll. 4. propoſ. 17. lib. 13. æquale erit HG, minus ſegmentum ipſi NA, lateri Dodecaedri. Quod quidem non aliter oſtendemus, ac ſuprà demõſtrauimus CE, maius ſegmentũ æquale eſſe ipſi IA, lateri Icoſaedri. Si recta ergo linea propoſita potuerit totam aliquam lineam ſectá extrema ac media ratione, & maius eius ſegmentum; Item totam aliam ſimiliter ſectam, & minus eius ſegmentum: Erit maius ſegmentũ prioris lineæ latus Icoſaedri; minus autem ſegmentum poſterioris, &c. Quod erat oſtendendũ.

g 33. primi.
h 47. primi.

THEOR. 24. PROPOS. 24.

SI latus Octaedri potuerit maius & minus ſegmentum rectæ lineæ extrema ac media ratione ſectæ: Poterit latus Icoſaedri in eadem ſphæra deſcripti duplum minoris ſegmenti.

POSSIT latus AB, Octaedri ABC, & maius ſegmentum DE, & minus EF, rectæ DF, ſectæ extrema ac media ratione. Sit quoque eidem ſphæræ inſcriptum Icoſaedrum GHI, cuius latus GH, & ſubtendés angulum pentagoni ex lateribus Icoſaedri compoſiti GI, & diameter HI. Dico quadratum lateris GH, duplum eſſe quadrati minoris ſegmẽti EF. Cùm enim GH, ſit latus pentagoni, cuius vnum angulum ſubtendit recta GI; [i] erit GH, maius ſegmentum ipſius GI, diuiſæ extrema ac media ratione; [k] Ac proinde compoſita recta ex GI, GH, ſecabitur ſimiliter in G, puncto extrema ac media ratione. [l] Quia verò quadratum diametri HI, æquale eſt quadratis rectarum GI, GH, quòd angulus IGH, rectus ſit, vt in præcedenti propoſ. oſtenſum eſt; & quadratum lateris AB, æquale quadratis rectarum DE, EF, ponitur; Erunt, vt quadratum diametri HI, ad quadratum lateris AB, ita quadrata rectarũ GI, GH, ad quadrata rectarum DE, EF: [m] Eſt autem quadratũ diametri HI, duplum quadrati lateris Octaedri AB. Igitur & quadrata rectarum GI, GH, dupla ſunt quadratorum rectarũ DE, EF. Atqui vt quadrata rectarum GI, GH, ad quadrata rectarum DE, EF, ita eſt quadratum rectæ GH, ad quadratum rectæ EF. ([n] Nam cùm ſit vt GI, ad GH, ita DE, ad EF. [o] Erit quoq; vt quadratum rectæ GI, ad quadratum rectæ GH, ita quadratum rectæ DE, ad quadratum rectę EF; & componendo, vt quadrata rectarum GI, GH, ad quadratum rectę GH, ita quadrata rectarum DE, EF, ad quadratum rectæ EF: Et permutando, vt quadrata rectarum GI, GH, ad quadrata rectarum DE, EF, ita quadratum rectæ GH, ad quadratum rectæ EF.) Quadratum igitur rectæ GH, duplum quoque eſt quadrati rectæ EF. Quare ſi latus Octaedri potuerit maius, & minus ſegmentum, &c. Quod erat oſtendendum.

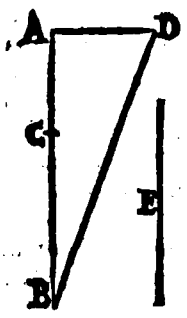


i 8. tertiædecimi.
k 5. tertiædecimi.
l 47. primi.
m 14. tertiædecimi.
n 2. quartidecimi.
o 22. ſexti.

THEOR. 25. PROPOS. 25.

SI recta linea diuiſa extrema ac media ratione cum minore ſegmento angu-

lum rectum constituat, cui recta subtendatur: Erit recta linea, quę potentia sit subdupla ipsius rectæ subtensæ, latus octaedri eius sphæræ, in qua dictum minus segmentum latus existit Dodecaedri.



LINEA recta A B, secta in C, extrema ac media ratione constituat cum recta A D, quę æqualis sit minori segmento A C, angulum rectum A, cui recta subtendatur B D, sitq; recta E, potentia subdupla ipsius B D. Dico E, latus esse Octaedri illius sphęræ, in qua A D, vel A C, latus est Dodecaedri. Cùm enim per coroll. 2. propos. 17. lib. 13. maius segmentum B C, latus sit cubi illius sphæræ, cuius minus segmentum A C, vel A D, latus est Dodecaedri; erit diameter illius sphæræ potentia tripla maioris segmenti B C, nempe lateris cubi: [a] Sunt autem & quadrata rectarum A B, A D, nempe totius lineæ, & minoris segmẽti, tripla eiusdem quadrati maioris segmenti B C. Quadratum igitur diametri sphæræ, æquale erit quadratis rectarum A B, A D, hoc est, quadrato rectæ B D: Ac proinde recta B D, diameter est sphæræ. [b] Quare cùm diameter sphæræ potentia sit dupla lateris Octaedri; Posit autem recta B D, duplum rectæ E, quòd recta E, ponatur potentia subdupla ipsius B D; Erit E, latus Octaedri eiusdem sphæræ, cuius A D, latus Dodecaedri ponitur. Si igitur recta linea diuisa, &c. Quod erat demonstrandum.

[a] 4. tertiædecimi.

[b] 14. tertiædecimi.

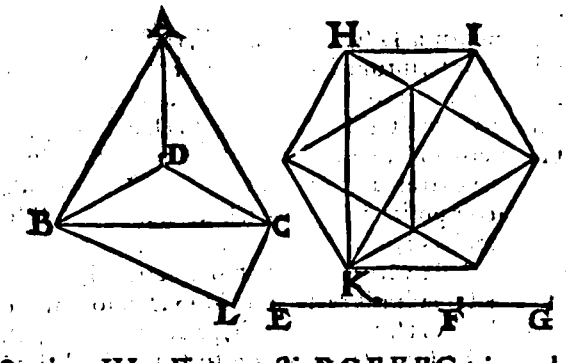
COROLLARIVM.

[a] *QVONIAM verò latus Octaedri E, potentia sesquialterum est lateris cubi B C, cuius maius segmentum est A D, latus Dodecaedri, vt constat ex iis, quæ ostendimus ad propos. 4. lib. 13. cùm B C, sit maius segmentum, & A D, minus rectæ A B, extrema ac media ratione diuisæ: Perspicuum est, si linea quæuis recta (nimirum B C,) secetur extrema ac media ratione, & alia linea (verbi gratia E,) potentia huius sesquialtera sit latus Octaedri, maius segmentum (nimirum A D,) esse latus Dodecaedri eiusdem sphæræ, in qua Octaedrum descriptum fuerit.*

[a] 18. tertiædecimi.

THEOR. 26. PROPOS. 26.

SI latus Tetraedri possit maius & minus segmentum lineæ rectæ extrema ac media ratione sectæ: latus Icosaedri eidem sphæræ inscripti potentia sesquialterum est minoris segmenti.



POSSIT Tetraedri A B C D, latus B C, maius segmentum E F, & minus F G, rectæ E G, diuisæ extrema ac media ratione; Sit quoq; H I, latus Icosaedri H I K, eiusdem sphæræ. Dico H I, rectam potentia esse sesquialterã minoris segmenti F G. Subtendat enim recta H K, vnum angulum pentagoni ex Icosaedri lateribus compositi, connectaturq; recta I K, diameter. [a] Quia igitur H I, est maius segmentum rectæ H K, diuisæ extrema ac media ratione; [b] Erit quoque composita K H I, diuisa eodem modo in H, maiusq; segmentum H K, & minus H I. [c] Fiat ex rectis B C, E F, F G, triangulum B C L, ita vt B L, recta ipsi E F, & C L, ipsi F G, sit æqualis; [d] Eritq; angulus L, rectus, quòd recta B C, ponatur posse rectas B L, C L, hoc est, rectas E F, F G: Est autem & angulus I H K, rectus, vt propos. 23. huius lib. ostendimus; [e] Estque vt B L, ad L C, ita K H, ad H I. [f] Igitur triangula B L C, K H I, æquiangula sunt. [g] Ac propterea vt K I, ad I H, ita B C, ad C L; & permutando, vt K I, ad B C, ita H I, ad C L: [h] Atqui I K, diameter est potentia sesquialtera lateris Tetraedri B C. Ergo & H I, latus Icosaedri erit potentia sesquialterum ipsius C L, hoc est, minoris segmenti F G. Si latus itaque Tetraedri possit maius, & minus segmentum, &c. Quod ostendendum erat.

[a] 8. tertiædecimi.

[b] 5. tertiædecimi.

[c] 22. primi.

[d] 48. primi.

[e] 2. quartiædecimi.

[f] 6. sexti.

[g] 4. sexti.

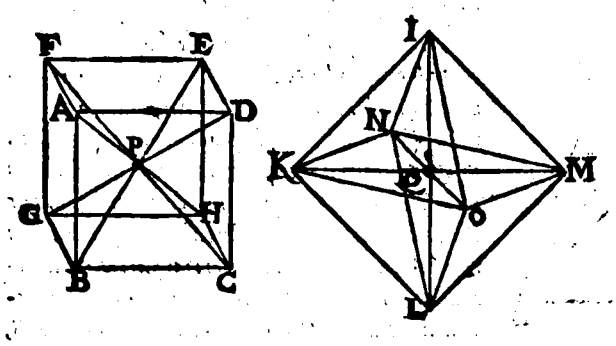
[h] 13. tertiædecimi.

THEOR. 27. PROPOS. 27.

CVBVS ad Octaedrum in eadem cum ipso sphæra descriptum, est, vt superficies cubi ad Octaedri superficiem. Item vt latus cubi ad semidiametrum sphæræ.

SINT in eadem sphæra cubus A B C D E F G H, & Octaedrum I K L M N O, quorum centra P, & Q. Dico eam esse proportionem cubi ad Octaedrum, quam habet superficies cubi ad superficiem Octaedri; nec non, quam habet cubi latus ad semidiametrum sphæræ. Ductis enim ex centris P, & Q, ad omnes angulos tam cubi, quàm Octaedri, rectis lineis, resoluetur cubus in sex pyramides æquales, quòd habeant & bases æquales, & altitudines. (Cùm enim circuli descripti circa pyramidum, seu cubi bases æquales, sint æquales, ac propterea æqualiter à centro sphæræ distent

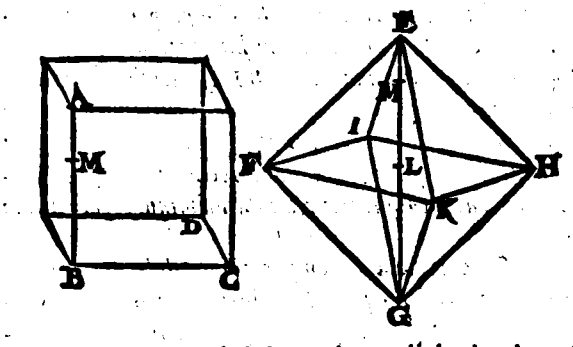
erunt



erunt lineæ perpendiculares ex centro P, ad plana circulorum, ſeu baſium dictarum ductæ, nempe altitudines pyramidum, æquales, per lemma 2. propoſ. 10. lib. 14.) Atque Octaedrum in octo pyramides æquales, eandem ob cauſam. [a] Quoniam autē idem circulus complectitur & cubi quadratum, & Octaedri triangulum; æqualiter diſtabunt baſes pyramidum cubi, & Octaedri à centro ſphæræ, per lemma prætatum: Ac propterea æquales erūt altitudines pyramidum cubi, & Octaedri. Quam ob rem erit, vt vna pyramis cubi ad vnam pyramidem Octaedri, ita baſis pyramidis cubi ad baſim pyramidis Octaedri, ex ſcholio propoſ. 6. lib. 12. Ac proinde, ex iis, quæ in ſcholio propoſ. 12. lib. 5. demonſtrauimus, vt ſextuplum pyramidis cubi, nempe cubus ipſe, ad pyramidem Octaedri, ita ſextuplum baſis pyramidis cubi, ſuperficies videlicet tota cubi, ad baſim pyramidis Octaedri; Ideoq; rurſus, ex eodē ſcholio, vt cubus ad octuplum pyramidis Octaedri, nimirum ad ipſum Octaedrum, ita ſuperficies cubi ad octuplum baſis pyramidis Octaedri, ad ipſam ſcilicet ſuperficiem Octaedri. Quod primo loco oſtendendum proponebatur.

a 21. *quarti decimi.*

Sint rurſus in eadem ſphæra cubus A B C D, & Octaedrum E F G H I K, ſitq; diameter ſphæræ, ſeu Octaedri E G, & centrum L. Auferatur autem ex A B, latere cubi tertia pars A M; Item ex ſemidiametro E L, tertia pars E N. Quoniam verò quadratum I F K H, lateris Octaedri, baſis exiſtens duarum pyramidum, in quas Octaedrum ſecari diximus propoſ. 16. huius lib. [b] ſeſquialterum eſt quadrati B D, lateris cubi B C: Eſt autem & recta A B, rectæ B M, ſeſquialtera, ex conſtructione; reciprocabuntur baſes I F K H, B D, & altitudines A B, B M: [c] Ac propterea parallelepipedum ſuper baſim I F K H, & ſub altitudine B M, æquale erit parallelepipedo ſuper baſim B D, & ſub altitudine A B, nimirum cubo A B C D. Rurſus quia recta E L, rectæ E N, tripla eſt; erit & parallelepipedum ſuper baſim I F K H, & ſub altitudine E L, triplum parallelepipedi ſuper eandem baſim, & ſub altitudine E N, vt in ſcholio propoſ. 14. lib. 12. oſtendimus. Sed & idem parallelepipedum ſuper baſim I F K H, & ſub altitudine E L, triplū eſt pyramidis I F K H E, ex coroll. 1. propoſ. 7. lib. 12. Igitur pyramis I F K H E, æqualis erit parallelepipedo ſuper baſim I F K H, & ſub altitudine E N: Atqui huius parallelepipedi duplum eſt parallelepipedum ſuper eandem baſim, & ſub altitudine L N, ex ſcholio propoſ. 14. lib. 12. quod & altitudo L N, dupla ſit altitudinis E N: [d] Item Octaedrum E F G H I K, duplum eſt pyramidis I F K H E. Æquale igitur erit parallelepipedum ſuper baſim I F K H, & ſub altitudine L N, Octaedro E F G H I K. Cæterùm quia parallelepipedum ſuper baſim I F K H, & ſub altitudine B M, eſt ad parallelepipedum ſuper eandem baſim, & ſub altitudine L N, vt altitudn B M, ad altitudinem L N, ex ſcholio propoſ. 14. lib. 12. Vt autem B M, ad L N; ita eſt A B, ad E L. (Cùm enim ſit vt A M, ad M B, ita E N, ad N L: & componendo, vt A B, ad B M, ita E L, ad L N; erit quoque permutando, vt A B, ad E L, ita B M, ad L N.) Et parallelepipedum ſuper baſim I F K H, & ſub altitudine B M, æquale eſt oſtenſum cubo A B C D; Et parallelepipedum ſuper eandem baſim, & ſub altitudine L N, æquale eſt Octaedro E F G H I K. Igitur erit quoq; vt cubus A B C D, ad Octaedrum E F G H I K, ita A B, latus cubi ad E L, ſemidiametrum ſphæræ. Quod ſecundo loco demonſtrandum proponebatur. Quocirca cubus ad Octaedrum in eadem cum ipſo ſphæra deſcriptum, &c. Quod erat oſtendendum.

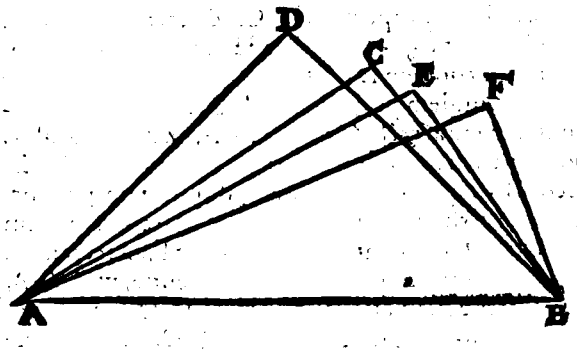


b 18. *tertij decimi.*

c 34. *vndec.*

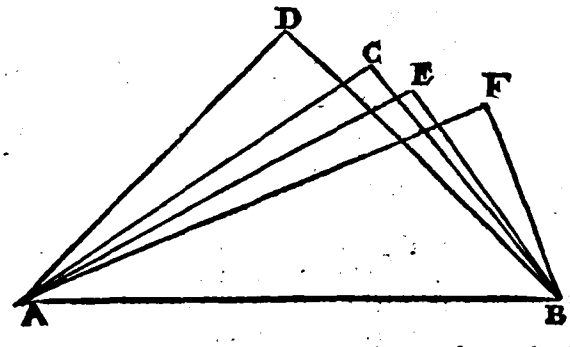
d 16. *quarti decimi.*

SCHOLIVM.



Qvia demonſtratum eſt, [a] *diametrum ſphæræ, in qua omnia quinq; corpora regularia deſcribuntur, eſſe ſeſquialteram potentia lateris Tetraedri, ita vt, ſi quadratum diametri ponatur 3. partium, earundem 2. ſit quadratum lateris Tetraedri; perſpicuum eſt, ſi ex quadrato diametri data auferatur quadratum duas tertias illius partes continens, vt in ſcholio propoſ. 33. lib. 6. oſtendimus, latus huiuſce quadrati eſſe Tetraedri latus. Vel etiam, ſi quadrato diametri conſtituantur duo quadrata æqualia, quæ*

a 13. tertii decimi.



proportionem habeant duplam, ex eodem ſcholio; maioris quadrati latus eſſe latus Tetraedri. Nam ſi ex quadrato diametri 3. partium detrahatur quadratum lateris Tetraedri 2. partium, relinquatur neceſſe eſt quadratum 1. partis, ad quod duplam habet proportionem quadratum lateris Tetraedri. Vt ſi diameter ſphæræ ponatur A B, ex cuius quadrato detrahatur quadratum rectæ AC, continens duas tertias partes, quadrati diametri A B; Vel ſi conſtituantur duo quadrata rectarũ A C, B C, quadrato diametri A B, æqualia, ita vt quadratum rectæ A C, duplum ſit quadrati rectæ B C; Erit recta A C, latus Tetraedri.

a 14. tertiidecimi. *RVRSVS,* [a] *cùm oſtenſum ſit, diametrum ſphæræ potentia duplam eſſe lateris Octaedri; Fit, ſi ex quadrato diametri A B, dematur quadratum rectæ A D, quod dimidium ſit quadrati diametri A B; Vel ſi conſtituantur duo quadrata rectarum A D, E D, quadrato diametri A B, æqualia, & inter ſe proportionem habentia æqualitatis, ſecundùm doctrinam ſcholij propoſ. 33. lib. 6. rectam A D, latus eſſe Octaedri.*

b 15. tertiidecimi. *DEINDE,* [b] *quoniam docuimus, diametrũ ſphæræ potẽtia eſſe triplam lateris cubi; Efficitur, ſi ex quadrato diametri A B, auferatur quadratum rectæ B C, quod tertia pars ſit quadrati diametri A B; Vel ſi quadrato diametri A B, conſtruantur duo quadrata æqualia rectarum A C, B C, ita vt quadratum rectæ A C, duplum ſit quadrati rectæ B C, iuxta doctrinam eiuſdem ſcholij propoſ. 33. lib. 6. Lineam rectam B C, cubi latus exiſtere. Vel certè cùm diameter A B, poſſit & latus Tetraedri, & latus cubi, ex coroll. 2. propoſ. 15. lib. 13. manifeſtum eſt, ſi ex quadrato diametri A B, auferatur quadratum lateris Tetraedri A C, relinqui quadratum lateris cubi B C: Quemadmodum è contrario, ſi ex quadrato diametri A B, tollatur quadratum lateris cubi B C, remanet quadratum lateris Tetraedri A C.*

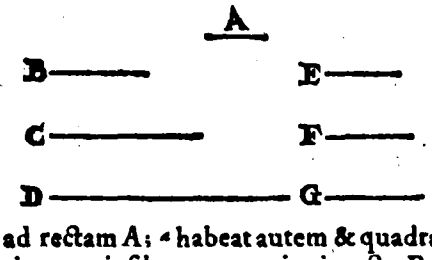
c 23. quartidecimi. *PRAETEREA, quia ſi recta aliqua potuerit totam quampiam rectam extrema ac media ratione ſectam, & maius ipſius ſegmentum;* [c] *Maius ſegmentum eſt latus Icoſaedri illius ſphæræ, cuius diameter eſt recta prior linea; Conſtat, ſi quadrato diametri A B, exhibeantur, iuxta ea, quæ in ſcholio propoſ. 33. lib. 6. demonſtrata ſunt à nobis, duo quadrata æqualia rectarum A E, E E, proportionem habentium, quam recta quæuis extrema ac media ratione diuiſa ad maius ſegmentum; Rectam minorem B E, eſſe Icoſaedri latus.*

d 23. quartidecimi. *POSTREMO, quoniam ſi recta quæpiam potuerit totam aliquam rectam diuiſam extrema ac media ratione, & minus illius ſegmentum;* [d] *Minus ſegmentum latus eſt Dodecaedri eius ſphæræ, cuius diameter prior linea: Liquet, ſi quadrato diametri A B, conſtituantur duo quadrata æqualia rectarum A F, B F, proportionem habentium, quam quæcunq; recta linea extrema ac media ratione diuiſa ad minus ſegmentum: Minorem lineam B F, latus eſſe Dodecaedri.*

HACTENVS ergo Hypſicles, Campanus, & Franciſcus Candalla de comparatione ſolidorum regularium eidem ſphæræ impoſitorum ſcripſerunt: Sequentes autem quinq; propoſ. ad idem negotium pertinentes collegi ex Cardano lib. 5. de Proportionibus, ad hunc, qui ſequitur, modum. Ad finem deinde lib. 16. nonnulla alia adiiciemus, quæ ad eorundem quinq; corporum Regularium in ſphæra deſcriptionem, eorundemq; comparationem ſpectant.

THEOR. 28. PROPOS. 28.

SI ſint quatuor lineæ rectæ continuè proportionales, nec non & aliæ quatuor, ita vt ſit eadem antecedens omnium. Erit proportio tertiæ ad tertiam proportionis ſecundæ ad ſecundam duplicata; & proportio quartæ ad quartam eiuſdem proportionis ſecundæ ad ſecundam triplicata.



SINT quatuor rectæ A, B, C, D, continuè proportionales; necnon quatuor A, E, F, G, ita vt A, recta antecedens ſit omnium. Dico proportionem C, ad F, tertiæ ad tertiã, eſſe duplicatam proportionis B, ad E, ſecundæ ad ſecundam, & proportionem D, ad G, quartæ ad quartam, eſſe triplicatam eiuſdem proportionis B, ad E, ſecundæ ad ſecũdam. Cùm enim recta C, ad rectam A, ex defin. 10. lib. 5. proportionem habeat duplicatam proportionis rectæ B,

a 20. ſexti. ad rectam A; [a] habeat autem & quadratum rectæ B, ad quadratum rectæ A, duplicatam proportionem eiuſdem proportionis rectæ B, ad rectam A: Erit vt recta C, ad rectam A, ita quadratum rectæ B, ad quadratum rectæ A. Eadem ratione erit, vt recta F, ad rectam A, ita quadratum rectæ E, ad quadratum rectæ A: Et cõuertendo, vt recta A, ad rectam F, ita quadratum rectæ A, ad quadratum rectæ E. Quoniam igitur eſt quadratum rectæ B, ad quadratum rectæ A, vt recta C, ad rectam A; & quadra-

quadr. B. Recta C.
quadr. A. Recta A.
quadr. E. Recta F.

& quadratum rectæ A, ad quadratum rectæ E, vt recta A, ad rectam F; Erit ex æquo quadratum rectæ B, ad quadratum rectæ E, vt recta C, ad rectam F: [a] Est autem proportio quadrati rectæ B, ad quadratum rectæ E, duplicata proportionis rectæ B, ad rectam E. Igitur & proportio rectæ C, ad rectam F, duplicata est proportionis rectæ B, ad rectam E. Quod est primum. *a 20 sexti.*

RVRSVS, cùm recta D, ad rectam A, ex defin. 10. lib. 5. proportionem habeat triplicatam proportionis rectæ B, ad rectam A; [b] habeat autem & cubus rectæ B, ad cubum rectæ A, triplicatam proportionem eiusdem proportionis rectæ B, ad rectam A; Erit vt recta D, ad rectam A, ita cubus rectæ B, ad cubum rectæ A. Eadem ratione erit vt recta G, ad rectam A, ita cubus rectæ E, ad cubum rectæ A; Et conuertendo, vt recta A, ad rectam G, ita cubus rectæ A, ad cubum rectæ E. Quia ergo est cubus rectæ B, ad cubum rectæ A, vt recta D, ad rectam A; & cubus rectæ A, ad cubum rectæ E, vt recta A, ad rectam G; Erit ex æquo, cubus rectæ B, ad cubum rectæ E, vt recta D, ad rectam G: [c] Est autem proportio cubi rectæ B, ad cubum rectæ E, triplicata proportionis rectæ B, ad rectam E. Igitur & proportio rectæ D, ad rectá G, triplicata est, pportionis rectæ B, ad rectam E. Quod est secundũ. Itaq; si sint quatuor lineæ rectæ, &c. Quod demonstrandũ erat. *b 33. vndec.* *c 33. vndec.*

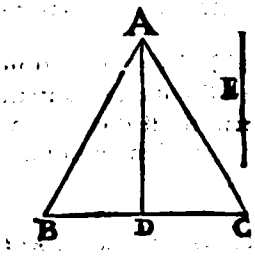
Cubus B. Recta D.
Cubus A. Recta A.
Cubus E. Recta G.

SCHOLIVM.

Hoc idem demonstrauimus ad propos. 10. lib. 8. de quotcunque numeris continuè proportionalibus duorum ordinum ab vno aliquo, eodemq; numero incipientium.

THEOR. 29. PROPOS. 29.

QVADRATVM lateris trianguli æquilateri ad ipsum triangulum habet proportionem duplicatam proportionis lateris trianguli ad lineam medio loco proportionalem inter perpendicularem ab vno angulo ad latus oppositum ductam, & dimidium ipsius lateris.



IN triangulo æquilatero A B C, ducatur ex angulo A, ad latus oppositũ B C, recta perpendicularis A D, quæ bifariam secabit latus B C, vt in coroll. propos. 12. huius lib. demonstratum est; Ac propterea B D, dimidium est lateris A B. [d] Inueniatur ergo recta E, media proportionalis inter A D, & B D. Dico quadratum lateris A B, ad triangulum A B C, habere proportionem duplicatam lateris A B, ad rectam E. Cùm enim rectangulo sub A D, B D, æquale sit triangulum A B C, vt perspicuum est ex scholio propos. 41. lib. 1. [e] Sit autem eidem rectangulo sub A D, B D, æquale quadratum rectæ E; Æqualia erunt triangulum A B C, & quadratum rectæ E. *d 13. sexti.* *e 17. sexti.*

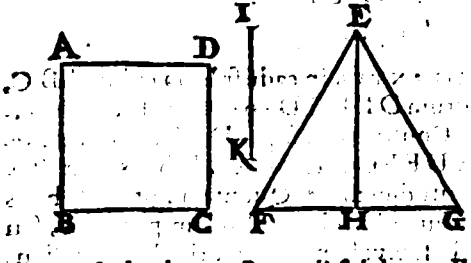
[f] Quoniam verò quadratum lateris A B, ad quadratum rectæ E, proportionem habet duplicatam lateris A B, ad rectam E; Constat, quadratum lateris A B, ad triangulum A B C, proportionem habere quoque duplicatam lateris A B, ad rectam E. Quam ob rem, quadratum lateris trianguli æquilateri, &c. Quod erat demonstrandum, *f 20. sexti.*

COROLLARIVM.

ITAQVE, si in triangulo æquilatero perpendicularis ducatur ex vno angulo ad latus oppositum; quadratum rectæ, quæ medio loco proportionalis est inter dictam perpendicularem, & dimidium lateris, æquale est ipsi triangulo. Ostensum enim est, quadratum rectæ E, quæ media proportionalis est inter A D, D B, æquale esse triangulo A B C.

THEOR. 30. PROPOS. 30.

SI cubus, & Tetraedrum in eadem sphæra describantur: erit quadratum cubi ad triangulum Tetraedri, vt latus Tetraedri ad lineam perpendicularem, quæ ex vno angulo trianguli Tetraedri ad latus oppositum deducitur.



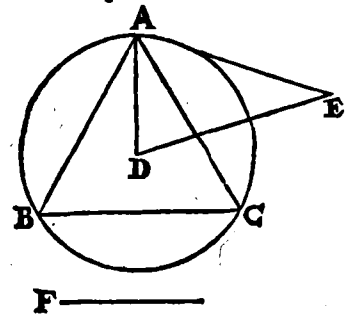
SIT quadratum cubi cuiusuis A B C D, & Tetraedri in eadem sphæra descripti triangulum E F G, in quo perpendicularis E H, ex angulo E, ad latus oppositum F G, deducta diuidens F G, latus bifariam, ex coroll. propos. 12. huius lib. Dico, esse quadratum A C, ad triangulum E F G, vt latus trianguli E F, ad perpẽdicularem E H. Posita enim inter E H, F H, media proportionali I K; [g] cùm quadratum lateris Tetraedri E F, duplum sit quadrati lateris cubi A B, [h] sit autem & duplum rectanguli sub latere E F, & dimidio eius F H, eò quòd dictum quadratum, & rectangulum eandem habeant altitudinem, nempe E F: Erit rectangulum sub E F, F H, æquale quadrato lateris A B; [i] Ac propterea A B, media proportionalis erit inter E F, F H, hoc est, tres rectæ F H, A B, E F, continuè erunt proportionales: Sunt autẽ & tres rectæ F H, I K, E H, continuè *g 18. tertij decimi.* *h 1. sexti.* *i 17. sexti.*

a 18. quartidecimi. FH. AB. IK. EF. EH. proportionales, ex conſtructione. Igitur cùm omnium antecedens ſit FH, a erit pro portio rectæ EF, ad rectam EH, tertiæ ad tertiam, proportionis rectæ AB, ad rectam IK, ſecundæ ad ſecundam duplicata. Quare cùm & quadratum AC, rectæ AB, ad quadratum rectæ IK, hoc eſt, ad triangulum EFG, (eſt enim, ex coroll. propoſ. 19. huius libri, quadratum rectæ IK, æquale triangulo EFG.) b proportionem habeat duplicatam proportionis rectę AB, ad rectam IK; Erit quadratum cubi AC, ad triangulum Tetraedri EFG, vt latus EF, ad perpendicularem EH. Quocirca ſi cubus & Tetraedrum in eadem ſphæra deſcribantur, &c. Quod erat demonſtrandum.

b 20. ſexti.

THEOR. 31. PROPOS. 31.

LATVS Tetraedri potentia ſeſquialterum eſt axis, ſeu altitudinis ipſius: Axis verò, ſiue altitudo Tetraedri potentia ſeſquitertia eſt lateris cubi in eadem ſphæra deſcripti.



c 5. quarti. SIT Tetraedri triangulum ABC, & altitudo, ſeu axis Tetraedri DE, latuſque cubi eiuſdem ſphæræ F. Dico latus Tetraedri AB, eſſe potentia ſeſquialterum axis DE: Axem verò DE, potentia ſeſquitertium lateris cubi F. Nam circa triangulum, c deſcripto circulo ABC; ad centrum D, in quod videlicet cadit axis DE, vt conſtat ex propoſ. 15. huius lib. ducatur AD, ſemidiameter, & AE, latus Tetraedri. Quia igitur quadratum lateris

d 47. primi. AE, hoc eſt, lateris AB, d æquale eſt quadratis rectarum AD, DE, e & triplum quadrati ſemidiametri AD; Fit, vt poſito quadrato lateris AB, ſeu AE, partium 6. quadratum rectæ AD, ſit earundem partium 2. Ac proinde reliquum quadratum axis DE, talium partium 4. Quapropter quadratum lateris Tetraedri ſeſquialterum eſt quadrati axis Tetraedri.

e 12. tertiidecimi.

f 18. tertiidecimi. QVONIAM verò latus Tetraedri AB, f potentia duplum eſt lateris cubi F; Erit quadratum lateris F, talium partium 3. qualium 6. poſitum eſt quadratum lateris AB; Oſtenſum eſt autem earundem 4. eſſe quadratum axis DE. Igitur quadratum axis DE, ſeſquitertium eſt quadrati lateris cubi F. Latus itaque Tetraedri potentia ſeſquialterum eſt, &c. Quod erat oſtendendum.

COROLLARIVM I.

QVIA verò, poſito quadrato lateris AB, partium 6. quadratum diametri ſphæræ talium

a 13. tertiidecimi. *partium eſt 9. a quòd diameter potentia ſit ſeſquialtera lateris Tetraedri: Earundem verò partium 4. oſtenſum eſt quadratum axis DE; perſpicuum eſt, diametrum ſphæræ potentia*

b 20. ſexti. *eſſe duplam ſeſquiquartam axis Tetraedri; Ac proinde, b cùm quadrata habeant proportionem laterum duplicatam, manifeſtum eſt, diametrum eſſe ſeſquialteram axis Tetraedri. Seſquialteræ enim proportionis duplicata eſt proportio dupla ſeſquiquarta, vt in his numeris 4. 6. 9. apparet. Id quod etiam docuimus in coroll. 2. propoſ. 13. lib. 13.*

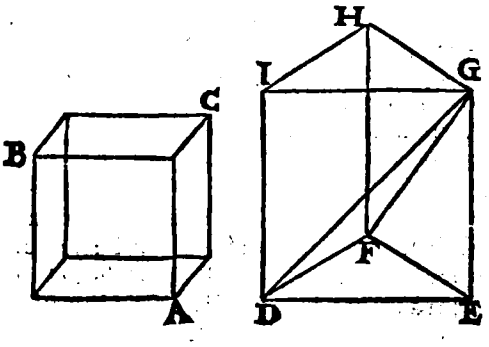
COROLLARIVM II.

CONSTAT quoque, ita eſſe axem, ſeu altitudinem Tetraedri ad latus cubi eidem ſphæræ inſcripti, vt latus Tetraedri ad perpendicularem ex vno angulo baſis ad latus oppoſitum

c 12. quartidecimi. *ductam. Quia videlicet c tam latus trianguli æquilateri, hoc eſt, latus Tetraedri, potentia ſeſquitertium eſt perpendicularis ex vno angulo ad latus oppoſitum deducta, quàm ex has propoſ. ipſe axis Tetraedri lateris cubi.*

THEOR. 32. PROPOS. 32.

CVBVS triplus eſt Tetraedri eidem ſphæræ inſcripti.



a 30. quartidecimi. DESCRIBANTVR in eadē ſphæra cubus ABC, & Tetraedrum DEFG. Dico cubum Tetraedri eſſe triplum. Conſtituatur ſuper DEF, baſim Tetraedri priſma DEFGHI, eandem habens cum Tetraedro altitudinem. a Quoniam igitur eſt baſis priſmatis, ſeu cubi ABC, ad baſim priſmatis, ſeu Tetraedri DEF, vt latus Tetraedri ad perpendicularem ductam ex angulo quouis baſis DEF, ad latus oppoſitum. Vt autem latus Tetraedri ad perpendicularem dictam, ita eſt, per coroll. 2. propoſ. 31. huius lib. altitudo Tetraedri, ac proinde priſmatis

tis DEFGHI, ad latus cubi, ideoq; ad altitudinem cubi, seu prismatis ABC; Erit basis prismatis ABC, ad basim prismatis DEFGHI, vt huius altitudo ad illius altitudinem. Quare, per ea, quæ ad propos. 9. lib. 12. demonstrauimus, æqualia erunt prismata ABC, DEFGHI, cùm ipsorum bases & altitudines reciprocentur. Atqui prisma DEFGHI, triplum est pyramidis, seu Tetraedri DEFG; ex coroll. 1. propos. 7. lib. 12. Cubus ergo ABC, triplus quoq; erit eiusdem Tetraedri DEFG. Quapropter cubus triplus est Tetraedri eidem sphæræ inscripti. Quod ostendendũ erat.

COROLLARIVM.

VNDE prisma eandem habens & basim, & altitudinem cum Tetraedro, æquale est cubo in eadem sphæra, in qua Tetraedrum, descripto. Ostensum enim est, cubum ABC, æqualem esse prismati DEFGHI, &c.

FINIS ELEMENTI DECIMIQVARTI.

EVCLIDIS ELEMENTVM QVINTVMDECIMVM:

& Solidorum quintum,

vt nonnulli putant: Vt verò alij, Hypsiclis Alexandrini de quinq; corporibus,

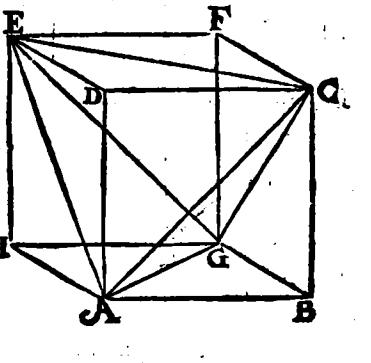
LIBER SECVNDVS.

PROBL. 1. PROPOS. 1.

1.

In dato cubo Pyramidem describere.

IN cubo dato ABCDEFGH, oporteat describere pyramidem, seu Tetraedrum. Ab vno eius angulo, nempe ab E, ducãtur in basibus tribus ipsum constituentibus tres diametri EA, EG, EC, ex quarum extremitatibus A, G, C, similiter diametri ducantur AG, GC, CA, in reliquis tribus basibus, quæ extrema priorũ trium diametrorum connectant. Quoniam igitur diametri quadratorum æqualium æquales sunt, quòd potẽtia duplæ sint laterũ æqualium quadratorum, vt in scholio propos. 47. lib. 1. demonstrauimus, perspicuum est, quatuor triangula ACE, GAC, GAE, GCE, ex dictis diametris composita, æquilatera esse, & inter se æqualia; Ac propterea pyramidem, seu Tetraedrum constitui ex ipsis. Quia verò omnes anguli Tetraedri in angulis cubi collocantur; manifestum est, ipsum in cubo esse inscriptum, ex definitione trigesima prima, libri vndecimi. Quare in dato cubo Pyramidem descripsimus. Quod faciendum erat.



PROBL. 2. PROPOS. 2.

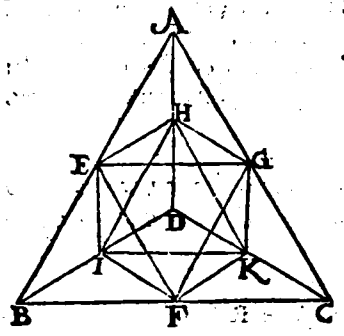
2.

In data Pyramide Octaedrum describere.

SIT in pyramide, seu Tetraedro ABCD, describendum Octaedrum. Diuisis omnibus lateribus bifariam in E, F, G, H, I, K, & ductis duodecim rectis EF, FG, GE, HI, IK, KH, EI, IF, FK, KG, GH, HE, constituentur octo triangula, quorum quidem quatuor EHI, IHK, KHG, GHE, supra planum EIKG; quatuor autem IFE, EFG, GFK, KFI, infra idem planum consistunt.

Quoniam verò latera AE,AH,trianguli AEH,æqualia ſunt lateribus AG,AH,trianguli AGH, quòd ſint dimidia rectarum æqualium AB,AD,AC; Item & anguli contenti EAH,GAH,æquales,quòd ſint anguli triangulorum æquilaterorum,ABD,ACD: [a] æquales erunt baſes EH, GH. Eademq; ratione æquales erunt rectæ EH,HI,& reliquæ eodem modo. Quare dicta octo triangula æquilatera ſunt,& æqualia inter ſe; ideoque Octaedrum componunt EIKGHF; quod quidem ex definitione 31. lib.11. intra Tetraedrum deſcriptum eſt; cùm omnes eius anguli tangant omnia latera Tetraedri,ex conſtructione. In data igitur pyramide Octaedrum deſcripſimus. Quod erat faciendum.

a 4. primi.



COROLLARIVM.

QVONIAM verò tria plana EIKG,GHIF,FKHE,quadrata ſunt æqualia, ſeſe mutuò ad angulos rectos ſecantia, vt in coroll.1.propoſ.14. lib.13. demonſtrauimus; quorum quodlibet pyramidem ABCD, ſecat biſariam. (Nam quadratum EIKG,ipſam diuidit in pyramidem HIKD,& priſma HIKGAE; necnon in pyramidem EBFI,& priſma EFCGKI; Conſtat autem pyramidem pyramidi eſſe æqualem, & priſma priſmati: [a] *Eodemq; modo reliqua quadrata GHIF,EKHE, diuidunt biſariam eandem pyramidem ABCD.) Manifeſtum eſt, ſi in Tetraedro Octaedrum inſcribatur, Tetraedrum biſariam ſecari, tribus quadratis æqualibus, quæ Octaedrum biſariam quoque, & ſeſe ad angulos rectos interſecant.*

a 3. duodecimi.

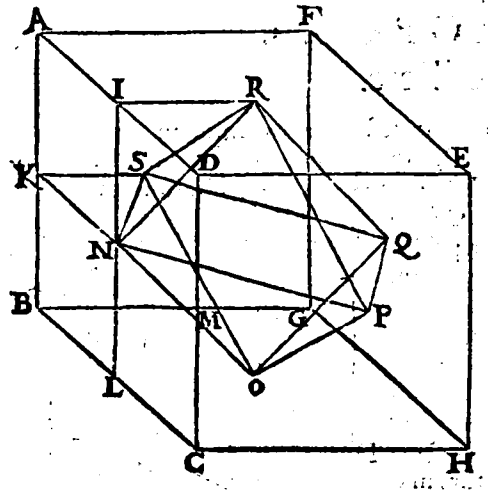
3. PROBL. 3. PROPOS. 3.

IN dato cubo Octaedrum deſcribere.

DESCRIBENDVM ſit Octaedrum in cubo dato AH. Diuidantur latera baſis ABCD, biſariam in punctis I, K, L, M, quæ connectantur rectis IL, KM, ſecantibus ſeſe in N, puncto, quod quidem centrum eſt quadrati ABCD, vt conſtat ex demonſtratione propoſitionis octauæ, *lib.4.* Deinde eadem ratione inueniantur reliquarum baſium centra O, P, Q, R, S. Erunt igitur omnes rectæ, ex dictis centris ductæ ad media puncta baſium, cuiuſmodi ſunt NI,RI,NK,SK,&c. æquales dimidiis lateribus cubi, ſeu quadratorum, vt perſpicuum eſt ex prædicta demonſtratione propoſ.8.lib. 4. Poſtremò, ſi præfata centra coniungantur duodecim rectis NO, OP, PQ, QR, RS, SN,NP,PR,RN,SO,OQ, QS; conſtituta erunt octo triangula, quorum quidem quatuor NSR, RSQ, QSO, OSN, ſupra planum NOQR; quatuor autem OPQ, QPR, RPN, NPO, infra idem planum conſiſtunt. Quoniam verò latera IN, IR, trianguli INR, æqualia ſunt lateribus KN,KS, trianguli KNS, quòd omnia ſint dimidia laterum cubi æqualium, vt dictum eſt; Item & anguli contenti, æquales; propterea quòd, cùm NI, IR, parallelæ ſint rectis BA, AF; [a] angulus NIR, æqualis ſit recto angulo KAF, in quadrato AG, eademque ratione angulus NKS, angulo recto IAF, in quadrato AE; [b] Eruat baſes NR, NS, æquales. Non aliter oſtendemus, reliquas lineas omnes & inter ſe, & his duabus æquales eſſe; ſi nimirum è centris ducantur rectæ ad dimidia laterum, hac lege, vt quælibet duæ ducantur ad dimidium illius lateris, quod commune eſt duobus cubi quadratis, quorum duo illa puncta, è quibus videlicet rectæ egrediuntur, centra exiſtunt. Ita enim vides duas rectas NI, RI, ductas eſſe ad I, dimidium lateris AD, quod commune eſt quadratis AC, AE, quorum centra ſunt puncta N, & R: Ita quoque duæ rectæ NK, SK, ductæ ſunt ad K, dimidium lateris AB, quod commune eſt quadratis AC, AG, quorum centra exiſtunt puncta N, & S, &c. Quam ob rem conſtituta octo triangula & æquilatera ſunt, & æqualia inter ſe; ideoque Octaedrum conſtituunt NOQRSP; Quod quidem ex defin.31.lib.11. intra cubum eſt deſcriptum, cùm omnes eius ſex anguli tangant cubi omnes ſex baſes in earum centris. Quam ob rem in dato cubo Octaedrum inſcripſimus. Quod faciendum erat.

a 10. vndec.

b 4. primi.



[c] ALITER. In cubo dato inſcribatur pyramis; [d] In hac deinde pyramide Octaedrum figuretur, factumque erit, quod proponitur. Cùm enim ex demonſtratione propoſitionis 2. huius libri, anguli Octaedri tangant latera pyramidis; Latera verò pyramidis, ex demonſtratione propoſ.1. huius

c 1. quintidecimi.

d 2. quintidecimi.

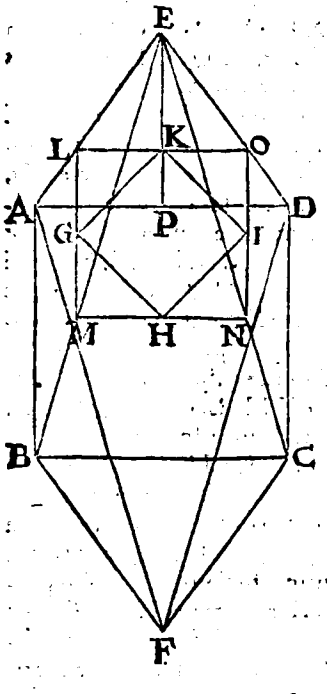
huius lib. existant in planis basium cubi, cùm sint harum basium diametri; perspicuum est, angulos Octaedri tangere quoque bases cubi; atque adeò Octaedrum cubo esse inscriptum.

COROLLARIVM.

QVIA verò diametri Octaedri in cubo descripti N Q, R O, si ducerentur, se mutuò secant ad angulos rectos, ex coroll. 1. propos. 14. lib. 13. quæ quidem coniungunt centra basium cubi oppositarum: Manifestum est, rectas lineas centra basium cubi oppositarum connectentes non solum sese mutuò bifariam, vt docuimus coroll. 1. propos. 15. lib. 13. sed etiam ad angulos rectos, vt hîc ostendimus, diuidere.

PROBL. 4. PROPOS. 4. 4.

IN dato Octaedro cubum inscribere.

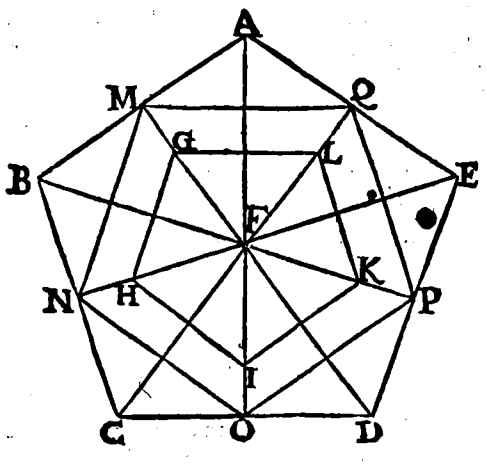


DATVM Octaedrum sit ABCDEF, in quo oporteat describere cubum. Quoniam in Octaedro sex pyramides quadrangulę continentur; quarum videlicet vertices sunt sex anguli Octaedri, & quælibet duæ Octaedrum constituunt; sit vna earum pyramis, ABCDE, cuius basis ABCD, quadratum, triangula verò æquilatera ABE, EBC, CED, DEA, sintq; horum triangulorum centra G, H, I, K, per quæ ducantur rectæ LM, MN, NO, OL, parallelæ lateribus AB, BC, CD, DA. Erunt igitur & triangula LME, EMN, NEO, OEL, æquilatera, cùm similia sint triangulis æquilateris ABE, EBC, CED, DEA, ex coroll. propos. 4. lib. 6. atque adeò inter se æqualia, propterea quòd latera habeant communia. Est enim EM, latus commune triangulis LME, EMN; Et EN, cõmune triangulis EMN, NEO; & deniq; EO, cõmune triãgulis NEO, OEL. Hinc enim fit, triangulum LME, triangulo EMN; hoc verò ipsi NEO; & hoc ipsi OEL, æquale esse. Conueniunt enim rectæ LM, MN, NO, OL, in punctis L, M, N, O, vt mox ostendemus. Quocirca & quatuor rectæ LM, MN, NO, OL, inter se æquales sunt. [a] Quia verò ducta recta EKP, tripla est rectæ KP; [b] Est autem vt EP, ad KP, ita EA, ad LA; Erit quoque EA, tripla rectæ LA. Eademque ratione EB, EC, ED, triplæ erunt rectarum MB, NC, OD. Quocirca rectæ LM, MN, NO, OL, conuenient in punctis L, M, N, O, in quibus latera ea proportione secantur, quadrilaterumque constituent LMNO. Rursus quia LO, LM, parallelæ sunt rectis AD, AB, nõ in eodem cum ipsis existentibus plano; [c] æqualis erit angulus MLO, angulo BAD, qui rectus est; cùm ABCD, quadratum sit, vt ostendimus in coroll. 1. propos. 14. lib. 13. & in propos. 16. lib. 14. Ac propterea & angulus MLO, rectus erit. Non secus demonstrabimus & reliquos angulos LMN, MNO, NOL, rectos esse. Quoniam verò tam planum per LO, LM, quàm per NM, NO, ductum, [d] parallelum est plano ABCD; ipsa quoque inter se parallela erunt, atque adeò, cùm conueniant in punctis M, & O, vnum planum efficient, ex scholio propos. 16. lib. 11. Quocirca LMNO, quadratum erit, cùm habeat & latera æqualia, & angulos rectos. Deinde, cùm latera EL, EK, trianguli ELK, æqualia sint lateribus EO, EK, trianguli EOK, & anguli quoque ipsis contenti, æquales, quòd recta EK, ex angulo E, per centrum K, trianguli æquilateri EAD, ducta bifariam secet angulum AED, per corollarium propositionis 12. libri 13. [e] Erunt & bases KL, KO, æquales, hoc est, recta LO, bifariam secabitur in K. Eadem ratione LM, MN, NO, bifariam secabuntur in G, H, I. Ac propterea rectæ GL, GM, HM, HN, IN, IO, KO, KL, cùm sint laterum quadrati LN, dimidia, æquales inter se erunt; Ideoque, cùm & angulos contineant æquales, nimirum rectos, [f] æquales erunt & rectæ GH, HI, IK, KG, centra G, H, I, K, connectentes. Quia verò hæ rectæ in plano existunt quadrati LN, angulosque comprehendunt rectos; ([g] cùm enim anguli LKG, GKI, IKO, duobus sint rectis æquales; Sint autem LKG, IKO, per corollarium 2. propositionis 32. libri 1. semirecti; rectus erit angulus GKI; Eademque ratione recti erunt anguli KGH, GHI, HIK.) quadratum erit GHIK, cùm habeat & latera æqualia, & angulos rectos. Quòd si eadem arte in reliquis quinque pyramidibus Octaedri centra triangulorum rectis coniungãtur, describentur similiter quadrata: quæ cùm latera habeant communia, æqualia inter se erunt. Quare sex huiusmodi quadrata cubum component: qui quidem ex definitione 31. libri 11. intra Octaedrum descriptus erit, cùm octo eius anguli tangant octo Octaedri bases, in earum centris. Quare in dato Octaedro cubum descripsimus. Quod faciendum erat.

[a] 11. quinti. [b] 2. sexti. [c] 10. vndec. [d] 15. vndec. [e] 4. primi. [f] 4. primi. [g] 13. primi.

PROBL. 5. PROPOS. 5. 5.

IN dato Icosaedro, Dodecaedrum inscribere. 6.



SIT ex duodecim pyramidibus pentagonis, quæ in Icoſaedro continẽtur, quarũ videlicet baſes ſunt pentagona ex quinque Icoſaedri lateribus compoſita, vertices verò, duodecim anguli Icoſaedri, vna pyramis A B C D E F, cuius baſis pentagonũ ABCDE, triangula verò æquilatera A B F, B C F, C D F, D E F, E A F, ſintq; horum triangulorum centra G, H, I, K, L, quæ rectis connectãtur lineis G H, H I, I K, K L, L G. Rurſus ex vertice F, per centra triangulorum rectæ demittantur F M, F N, F O, F P, F Q; quę, ex ſcholio propoſ. 12. lib. 13. bifariam ſecabunt latera A B, B C, C D, D E, E A, in M, N, O, P, Q: ita vt decẽ rectæ M A, M B, N B, N C, O C, O D, P D, P E, Q E, Q A, æquales ſint, quæ cũ angulos comprehendant æquales, nempe angulos pentagoni, [a] æquales quoque erunt rectæ M N, N O, O P, P Q, Q M, puncta M, N, O, P, Q, connectentes; [b] Ac proinde & anguli M F N, N F O, O F P, P F Q, Q F M, æquales erũt, quòd & latera F M, F N, F O, F P, F Q, æqualia ſint, nempe perpendiculares ex angulis triangulorum æquilaterorũ æqualiũ ad baſes oppoſitas demiſſæ. Cùm enim latera F B, B M, trianguli F B M, lateribus F B, B N, trianguli F B N, æqualia ſint, contineátq; angulos æquales, nempe triangulorum æquilaterorũ; [c] erũt baſes F M, F N, æquales; & ſic de reliquis. Quoniã verò & rectę F G, F H, F I, F K, F L, nimirũ ſemidiametri circulorũ æqualium triangula æquilatera æqualia circumſcribentium æquales ſunt, & angulos comprehendunt æquales, vt demonſtratum eſt; [d] Erunt & rectæ G H, H I, I K, K L, L G, æquales. [e] Rurſus quia tam anguli A M Q, Q M N, N M B, q̃ anguli B N M, M N O, O N C, æquales ſunt duobus rectis. [f] Sunt autẽ anguli A M Q, N M B, angulis B N M, O N C, æquales; Erunt reliqui anguli Q M N, M N O, æquales; Eademq́ue ratione reliqui anguli N O P, O P Q, P Q M, & inter ſe, & hiſce æquales erunt. Quare pentagonum erit æquilaterum & æquiangulum M N O P Q, in plano pentagoni A B C D E, exiſtens. Denique cùm rectæ F M, F N, F O, F P, F Q, æquales, proportionaliter ſecentur in G, H, I, K, L, quòd & F G, F H, F I, F K, F L, ex centris, æquales ſint; Vel certè quia F G, F H, F I, F K, F L, duplę ſunt ipſarum G M, H N, I O, K P, L Q, ex corollario propoſ. 18. lib. 14. [g] parallelæ erunt G H, H I, I K, K L, L G, ipſis M N, N O, O P, P Q, Q M; [h] Ac propterea anguli L G H, G H I, H I K, I K L, K L G, angulis æqualibus Q M N, M N O, N O P, O P Q, P Q M, ideoq́ue & inter ſe, æquales erunt. [i] Quia verò plana per rectas G H, H I, & per H I, I K, ducta, parallela ſunt plano pentagoni M N O P Q, per rectas M N, N O, O P, ducto, conueniuntq́ue in recta H I; ipſa vnum planum efficient, ex ſcholio propoſitionis 16. libri vndecimi. Eodemq; modo oſtendemus plana per I K, K L, & per K L, L G, nec non per L G, G H, ducta, idem planum conſtituere cum plano per G H, H I, I K, ducto. Quocirca G H I K L, pentagonum eſt æquilaterum & æquiangulum, cùm & latera habeat æqualia & angulos. Quòd ſi eadem arte in reliquis vndecim pyramidibus Icoſaedri centra triangulorum rectis connectantur lineis, deſcribentur ſimiliter pentagona æquilatera & æquiangula: quæ cùm latera habeant communia, æqualia inter ſe erunt. Quamobrem duodecim huiuſmodi pentagona Dodecaedrum conſtituẽt: quod quidem ex defin. 31. lib. 11. in Icoſaedro erit deſcriptum, cùm viginti anguli Dodecaedri in centris viginti baſium Icoſaedri conſiſtant. Quapropter in dato Icoſaedro Dodecaedrum deſcripſimus. Quod erat faciendum.

[a] 4. primi.
[b] 8. primi.
[c] 4. primi.
[d] 4. primi.
[e] 13. primi.
[f] 4. primi.
[g] 2. ſexti.
[h] 10. vndec.
[i] 15. vndec.

COROLLARIVM.

ITAQVE cùm omnes rectæ è centro Icoſaedri ad centra baſium, hoc eſt, ad angulos Dodecaedri ſibi inſcripti, ſint æquales; (Cùm enim ex coroll. lemmatis 1. propoſ. 10. lib. 14 perpendiculares ſint ad plana circulorum æqualium baſes Icoſaedri circumſcribentium, atq; adeò eorundem diſtantiæ exiſtant à centro ſphęræ, ſeu Icoſaedri; æquales erunt inter ſe, ex lemmate ſecundo eiuſdem propoſitionis 10. lib. 14.) Idem erit centrum Icoſaedri, atque ſibi inſcripti Dodecaedri.

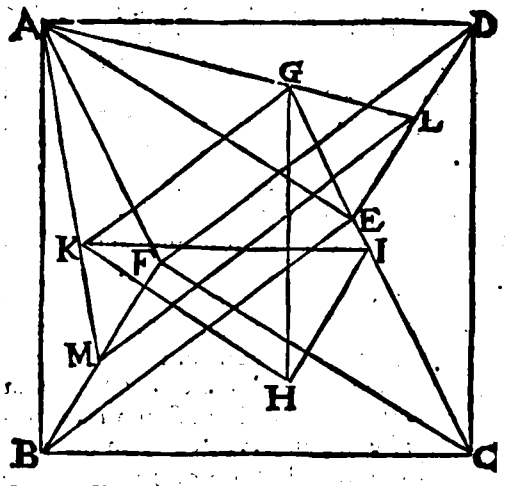
PROBL. 6. PROPOS. 6.

IN dato Octaedro Pyramidem deſcribere.

PYRAMIS deſcribenda ſit in Octaedro A B C D E F. In pyramide Octaedri ſuperiori A B C D E, ſumantur G, & H, centra triangulorum ex aduerſo ſibi reſpondentium A E D, B E C; Item in pyramide inferiori A B C D F, capiantur I, & K, centra triangulorum ex aduerſo quoque ſibi correſpondentium C F D, A F B: quæ quidẽ centra coniungantur ſex rectis G H, G I, G K, H I, H K, I K, vt fiat pyramis H I K G. Deinde ex A, demittantur per centra G, K, rectæ A L, A M, ſecantes latera oppoſita Octaedri D E, B F, bifariam in L, & M, per ſcholium propoſitionis 12. libri 13. coniungaturque recta L M, [k] quæ ipſi B E, vel F D, æqualis & parallela erit: cùm E L, B M; Item D L, F M, rectæ æquales ſint, & parallelę, nimirum dimidia laterum D E, B F, oppoſitorum in quadrato E F.

[k] 33. primi.

Quoniam



Quoniam verò rectæ AL, AM, sectæ sunt proportionaliter in G, & K, punctis, quòd AG, AK, duplæ sint ipsarum GL, KM, ex corollario propositionis 18. libri 14. [a] Erunt GK, LM, parallelæ; Ac propterea, per corollarium propositionis 4. libri 6. triangula ALM, AGK, similia. [b] Quare erit, vt AL, ad LM, ita AG, ad GK; & permutando, vt AL, ad AG, ita LM, ad GK: Est autem AL, ipsius AG, sesquialtera [c] quòd GL, sit tertia pars ipsius AL, ideoque AG, eiusdem AL, duæ tertiæ. Igitur & LM, hoc est, ipsi æqualis, DF, sesquialtera erit ipsius GK. Hac eadem arte ostendemus, & reliquarum linearum centra G, H, I, K, coniungentium sesquialtera esse latera Octaedri. Ac proinde rectas pyramidē HIKG, componentes inter se esse æquales, hoc est, triágula æquilatera æqualia ex ipsis confici, ideoq; Tetraedrū constitui: qd, cùm habeat angulos omnes in centris quatuor basium Octaedri, descriptū erit, ex defin. 31. lib. 11. in Octaedro. Quocirca in dato Octaedro pyramidem descripsimus. Quod erat faciēdum.

[a] 2. sexti.
[b] 4. sexti.
[c] 18. quartidecimi.

ALITER. [d] In Octaedro dato inscribatur cubus, [e] & in cubo pyramis, factumque erit, quod proponitur. Cùm enim cubi anguli consistant in centris basium Octaedri; & in angulis cubi collocentur quoque anguli pyramidis: perspicuum est, pyramidis angulos tangere bases Octaedri in earum centris; Ac propterea pyramidem ipsi Octaedro esse inscriptam.

[d] 4. quintidecimi.
[e] 1. quintidecimi.

COROLLARIVM I.

QVIA verò ostensum est, vtramque GK, DF, parallelam esse ipsi LM; [a] ac propterea & GK, ipsi DF, atq; adeò ipsi BE, parallelam esse; Atque eadem ratione KH, ipsis FC, EA, parallelam esse; [b] Atque idcirco planum GKH, per GK, KH, ductum, parallelum esse plano DFC, per DF, FC, nec non & plano BEA, per BE, EA, ducto; Eodemq; modo reliqua triangula pyramidis reliquis triangulis Octaedri esse parallela, binis nimirum singula; Constat, si Tetraedrum Octaedro inscribatur, quatuor bases Tetraedri, octo basibus Octaedri parallelas esse, singula videlicet binis oppositis.

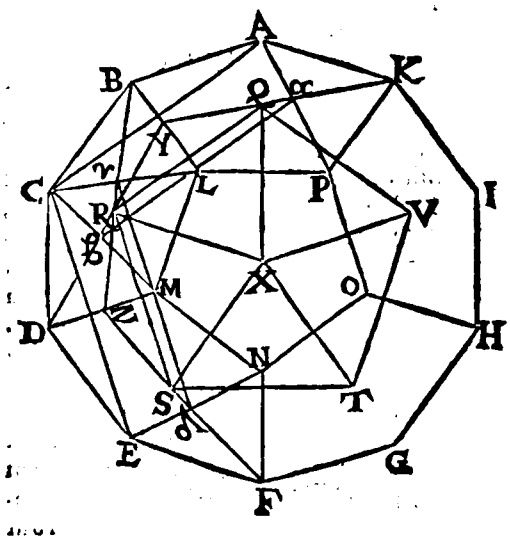
[a] 9. vndec.
[b] 15. vndec.

COROLLARIVM II.

PRAETEREA, cùm Octaedrum circumscribat & cubum, & Tetraedrum in cubo descriptum, quòd Tetraedri anguli in angulis cubi, & huius anguli in centris basium Octaedri constituantur; Atque adeò recta coniungens centra basium Octaedri opposita, sit diameter cubi, hoc est, sphæræ circumscribentis & cubum, & Tetraedrum in cubo descriptum, vt constat ex 4. propos. huius lib. Sit autem diameter sphæræ sesquialtera axis Tetraedri in ea sphæra descripti, per coroll. 1 propos. 31. lib. 14. vel per coroll. 2. propos. 13 lib. 13. Manifestum est, si in Octaedro Tetraedrū inscribatur, rectā, quæ centra basiū Octaedri oppositarū coniūgit, sesquialterā esse axis Tetraedri, h.e. perpēdicularis ab angulo Tetraedri ad basin oppositā deductæ.

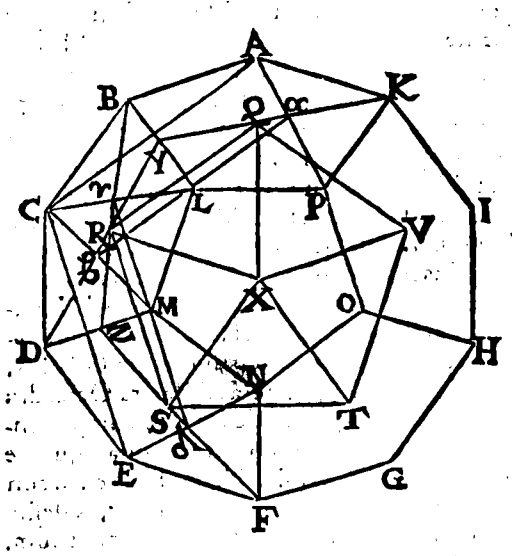
PROBL. 7. PROPOS. 7. 0. 7.

IN dato Dodecaedro Icosaedrum describere.



SIT dimidium Dodecaedri, in quo describendum est Icosaedrum, contentum sex pentagonis ABLPK, PKIHO, OHGFN, NFEDM, MDCBL, LMNOP, quorum centra Q, R, S, T, V, X, quælibet duo proxima rectis iungantur QR, RS, ST, TV, VQ, QX, RX, SX, TX, VX: Et ex angulis K, D, quos subtendant rectæ AP, CM, per centra Q, R, rectæ ducantur KY, DY, quę per corollarium 2. propositionis 10 libri 13. bifariam diuident latus oppositum BL, & ad angulos rectos, ideóque in puncto Y, conuenient: Diuidunt autem & rectæ eædem YK, YD, rectas AP, CM, bifariam, & ad angulos rectos in α, β, ex 1. coroll. eiusdem propos. φ & arcus AKP, CDM, circulorum circa pentagona descriptorum bifariam diuidant. ([a] constat enim rectas AK, PK; Item CD, MD, arcus subtendere æquales.) [b] Igitur Aα, Cβ, parallelæ sunt rectæ BY, [c] atque adeò & inter se

[a] 28. tertij.
[b] 28. primi.
[c] 9. vndec.

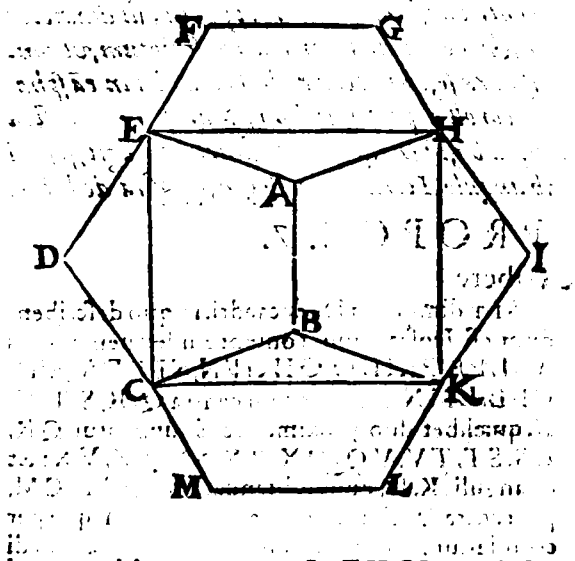


parallelæ: Sunt autem & æquales, nempe dimidia rectarum AP, CM; [a] quæ æquales sunt, cùm latera KA, KP, lateribus DC, DM, æqualia sint, angulosque contineant æquales. [b] Rectæ ergo ipsas connectentes AC, α β, æquales erunt, & parallelæ. Non aliter ostendemus, si ex angulis B, F, quos subtendant rectæ CL, EN, per centra R, S, rectæ ducantur BZ, FZ, connectanturque rectæ CE, γ δ, æquales esse ipsas CE, γ δ: [c] Sunt autem AC, CE, inter se æquales, cùm contineant angulos æquales æqualibus lineis comprehensos: (quia tam latera Dodecaedri AB, BC, quàm CD, DE, angulum pentagoni æquianguli continent, vt constat ex aliquo Dodecaedro materiali. Hi autem anguli non vergunt versùs X, vt figura monstrare videtur, sed extrorsum, vt ex eodem materiali Dodecaedro patet.) Igitur & α β, γ δ, æquales erunt. Quapropter cùm & rectæ Y α, Y β, Z γ, Z δ, æquales sint, (Nam YQ, YR, ZR, ZS, perpendiculares, distantiæ sunt æqualium rectarum BL, DM, à centris Q, R, S, circulorum æqualium, qui nimirum pentagona æqualia circumscribunt, [d] atque adeò æquales. Item Q α, R β, R γ, S δ, distantiæ sunt rectarum æqualium AP, CM, CL, EN, [e] à centris eorundem circulorum æqualium, [e] ideoque æquales; Ac proinde & totæ Y α, Y β, Z γ, Z δ, æquales erunt.) [f] Erunt quoq; anguli α Y β, γ Z δ, æquales; Ac propterea, cùm & rectæ YQ, YR, ZR, ZS, æquales sint; [g] æquales quoque erunt rectæ QR, RS, centra Q, R S, connectentes. Eadem prorsus arte æquales demonstrabuntur omnes rectæ centra pentagonorum copulantes. Quare triangula QXR, RXS, SXT, TXV, VXQ, sub quinque angulis solidis Dodecaedri L, M, N, O, P, constituta, æquilatera erunt, & æqualia. Quòd si simili modo sub reliquis quindecim angulis solidis Dodecaedri, similia triangula construantur: (Habet enim Dodecaedrum viginti angulos solidos.) quæ quidem latera habent communia, descriptum erit Icosaedrum intra Dodecaedrum, cùm duodecim anguli solidi Icosaedri consistant in centris duodecim basium Dodecaedri. In dato ergo Dodecaedro Icosaedrum descripsimus. Quod faciendum erat.

a 4. primi.
b 33 primi.
c 4. primi.
d 14. tertij.
e 14. tertij.
f 8 primi.
g 4. primi.

PROBL. 8. PROPOS. 8.

IN dato Dodecaedro cubum describere.



PROPONANTVR quatuor pentagona Dodecaedri, cui inscribendus sit cubus ABCDE, EFGHA, AHIKB, BKLMC. conuenientia ad latus AB; duo quidem ABCDE, ABKIH, secundùm latus idem commune AB; alia autem duo AEFGH, BCMLK, secundùm angulos EAH, CBK. In his verò pentagonis subtendatur angulis A, B, D, I, rectæ EH, CK, CE, HK, quadrilaterum efficientes EHKC. quod æquilaterum erit. Cùm enim omnia latera AE, AH, DE, DC, BC, BK, IH, IK, æqualia sint, angulosque contineant æquales, ex hypothesi; [b] æquales erunt bases EH, HK, KC, CE. [i] Quoniam igitur rectæ AE, BC, æquales, auferunt x circulo pentagonum ABCDE, circumscribente arcus æquales; Erunt, ex scholio propositionis 27. libri 3. rectæ AB, CE, parallelæ. Eademque ratione parallelæ erunt AB, HK. [k] Quare & EC, HK, inter se parallelæ erunt; [l] Ac propterea rectæ EH, CK, quæ ipsas connectunt, parallelæ erunt, [m] in eodemq; cum ipsis plano; ideoque parallelogrammum erit EHKC quod ostendimus esse æquilaterum. Quia verò planum ECKH, productum communem sectionem in sphæra facit circulum, per lemma propos. 10. lib. 14. circa quadrilaterum EK, descriptum. [n] Erunt tam anguli oppositi E, K, quàm C, H, duobus rectis æquales. [o] Ac propterea cùm oppositi E, & K, sint æquales, nec non & oppositi C, & H; erunt omnes quatuor anguli E, C, K, H, recti. Quare EK, quadratum erit, collocans suos angulos in quatuor angulis Dodecaedri, & latera in planis quatuor pentagonorum Dodecaedri. Si igitur in reliquis octo pentagonis similiter octo angulis octo aliæ rectæ subtendantur eodem ordine; constitutum erit solidum sex quadratis contentum; quæ cùm sint æqualia, [p] eò quòd eo-

h 4. primi.
i 28. tertij.
k 9. vndec.
l 33. primi.
m 7. vndec.
n 22. tertij.
o 34. primi.
p 4. primi.

rum

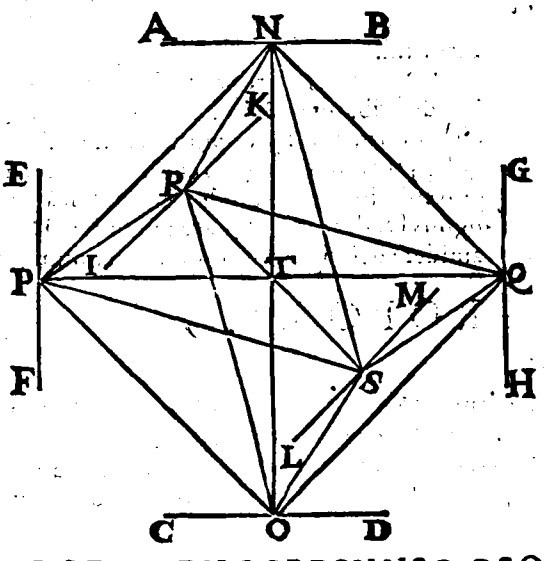
rum latera æquales angulos pentagonorum æqualibus rectis comprehẽſos ſubtendentia æqualia ſunt; cubum conſtituent intra Dodecaedrum deſcriptum, propterea quòd duodecim eius latera iacent in planis duodecim pentagonorum Dodecaedri, eiusq; octo anguli in octo Dodecaedri angulis reſident. In dato ergo Dodecaedro cubum deſcripſimus. Quod erat faciendum.

COROLLARIVM.

HINC fit, rectam, quæ ſubtendit vnũ angulum pentagoni æquilateri, & æquianguli, parallelam eſſe oppoſito lateri. Oſtenſum enim eſt, CE, ipſi AB, eſſe parallelam.

PROBL. 9. PROPOS. 9. 0. 9.

IN dato Dodecaedro Octaedrum deſcribere.

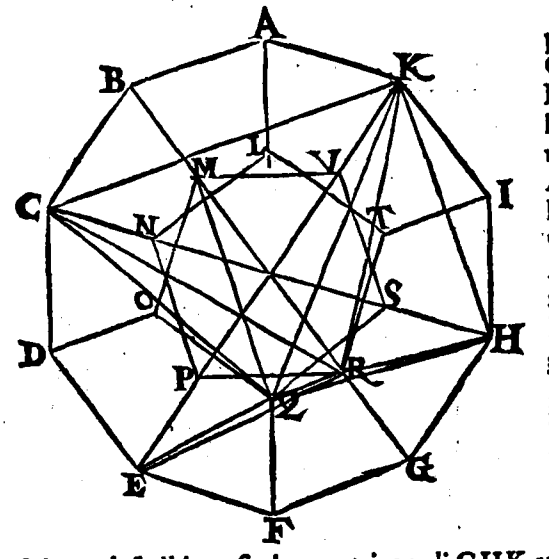


SVMANTVR in Dodecaedro, cui inſcribendum ſit Octaedrum, ſex illa latera, quæ oppoſita eſſe diximus in corollario 3. propoſitionis 17. lib. 13. nimirum AB, CD, EF, GH, IK, LM, quæ bifariam ſecentur in N, O, P, Q, R, S. Rectæ igitur NO, PQ, RS, ſectiones oppoſitorum laterum coniungentes æquales erunt, ſeque mutuò in T, centro ſphæræ bifariam, & ad angulos rectos diuident, per coroll. 3. propoſ. 17. lib. 13. atque adeò æquales quoque erunt earum dimidiatæ partes NT, OT, PT, QT, RT, ST. [a] Quocirca duodecim rectæ ſubtendentes duodecim angulos rectos NTP, PTO, OTQ, QTN, NTR, RTP, PTS, STQ, QTR, RTO, OTS, STN, quales ſunt NP, PO, OQ, QN, NR, RP, PS, SQ, QR, RO, OS, SN, æquales erunt, cùm dicti anguli æqualibus rectis contineantur; Ac proinde octo triangula NRP, PRO, ORQ, QRN, OSP, PSN, NSQ, QSO, æquilatera, & æqualia erunt, conſtituentque Octaedrum intra Dodecaedrum deſcriptum, cùm ſex anguli Octaedri tangant ſex latera Dodecaedri oppoſita, ex conſtructione. In dato igitur Dodecaedro Octaedrum deſcripſimus. Quod faciendum erat.

[a] 4 primi.

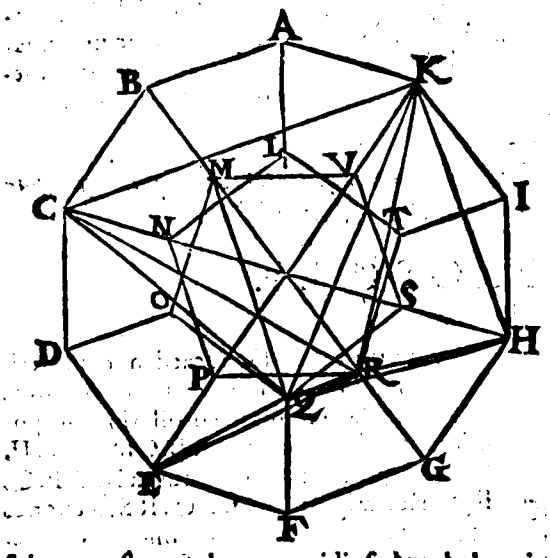
PROBL. 10. PROPOS. 10. 0. 10.

IN dato Dodecaedro, Pyramidem deſcribere.



SIT Dodecaedrum contentum duodecim pentagonis ABCNL, CDEPN, EFGRP, GHITR, IKALT, MOQSV, BCDOM, DEFQO, FGHSQ, HIKVS, KABMV, LNPRT, in quo deſcribenda ſit pyramis, ſiue Tetraedrum. Sumantur tria pentagona ABCNL, LAKIT, TLNPR, angulum ſolidum L, componentia, in quibus tres anguli C, R, K, (quorum quidem C, opponitur lateri AL, communi pentagonis CAL, ALI; At verò K, lateri LT, communi pentagonis KLT, LTP; Denique R, lateri LN, communi pentagonis RLN, LNB,) rectis connectantur CK, CR, KR; & ex punctis C, K, R, ad angulum Q, ipſi L, oppoſitum, rectæ ducantur CQ, KQ, RQ, vt ſit pyramis cõſtructa CKRQ. Ductis autem tribus diametris Dodecaedri, ſeu ſphæræ, CH, KE, RM, & connexis rectis KH, RH, RE, QE, QM, QH; [b] quoniam Dodecaedrũ in ſphæra deſcribitur; ſi planum trianguli CHK, extendatur, fiet communis eius ſectio cũ ſphæra circulus, [c] per lemma 1. propoſ. 10. lib. 14. Ac propterea angulus CKH, in ſemicirculo exiſtens, rectus erit. Non ſecus oſtendemus rectos eſſe angulos CRH, KRE, KQE, RQM, CQH. [d] Quocirca cùm in omni triangulo rectangulo quadratum lateris recto angulo oppoſiti æquale ſit quadratis laterum circa rectum angulum; ſint autem quadrata diametrorum æqualium CH, KE, RM, æqualia: Æqualia erunt quadrata rectarum CK, KH, quadratis rectarum CR, RH, & quadratis rectarum KR, RE, & quadratis rectarum KQ, QE, & quadratis rectarum RQ, QM, nec non &

[b] 17. terti. decimi.
[c] 31. tertij.
[d] 47. primi.



quadratis rectarum CQ, QH. Ablatis ergo quadratis æqualibus, rectarũ æqualium KH, RH, RE, QE, QM, & QH: (Hæ enim rectæ cùm ſubtendant angulos pentagonorum æquales æqualibus rectis comprehẽſos, [a] æquales ſunt.) æqualia remanebũt quadrata rectarum CK, CR, RK, KQ, RQ, & CQ: Ac proinde & ipſæ rectæ æquales erunt. Quare quatuor triangula CKR, CKQ, KRQ, RCQ, æquilatera ſunt, & æqualia, ideoque Tetraedrum componunt CKRQ: quod cũ habeat quatuor angulos C, K, R, Q, in quatuor angulis Dodecaedri, inſcriptum erit intra Dodecaedrum.

[a] 4. primi

ALITER. [b] In propoſito Dodecaedro cubus deſcribatur; [c] & in hoc cubo pyramis, factumq; erit, quod proponitur. Cùm enim anguli pyramidis in angulis cubi, nec non & anguli cubi in angulis Dodecaedri reſideãt; perſpicuum eſt, angulos pyramidis ſedem habere in angulis Dodecaedri. Quare pyramis in Dodecaedro deſcripta erit. Itaq; in dato Dodecaedro pyramidem deſcripſimus. Quod faciendum erat.

[b] 8. quinti decimi.
[c] 1. quinti decimi.

PROBL. 11. PROPOS. 11.

IN dato Icoſaedro cubum deſcribere.

[d] DESCRIBATVR in dato Icoſaedro Dodecaedrum; [e] & in hoc Dodecaedro cubus, factumq; erit, quod proponitur. Cùm enim anguli cubi reſideant in angulis Dodecaedri; anguli verò Dodecaedri in centris baſium Icoſaedri collocentur; tangent anguli cubi eadem centra baſium Icoſaedri: Ac propterea cubus in Icoſaedro deſcriptus erit. Quam ob rem in dato Icoſaedro cubum deſcripſimus. Quod faciendum erat.

[d] 5. quinti decimi.
[e] 8. quinti decimi.

PROBL. 12. PROPOS. 12.

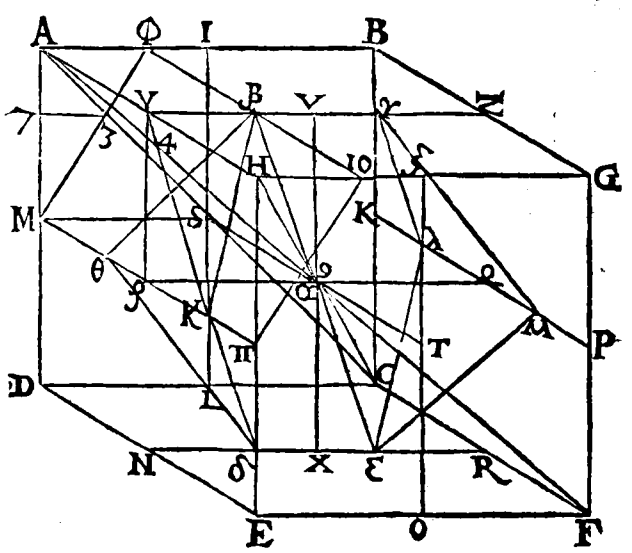
IN dato Icoſaedro Pyramidem deſcribere.

IN dato Icoſaedro [f] cubus deſcribatur, [g] & in hoc cubo pyramis factumque erit, quod proponitur. [h] Cùm enim anguli cubi tangant centra baſium Icoſaedri; [i] & anguli pyramidis angulis cubi congruant, manifeſtum eſt, angulos pyramidis attingere centra earundem baſium Icoſaedri. Ac proinde pyramidem in Icoſaedro eſſe deſcriptam. In dato igitur Icoſaedro pyramidem deſcripſimus. Quod erat faciendum.

[f] 11. quinti decimi.
[g] 1. quinti decimi.
[h] 11. quinti decimi.
[i] 1. quinti decimi.

PROBL. 13. PROPOS. 13.

IN dato cubo Dodecaedrum deſcribere.



SIT in cubo propoſito AF, deſcribendum Dodecaedrũ. Secentur ſingula latera bifariam in I, K, L, M, N, O, P, R, π, ξ, Z, Y, coniunctis rectis IL, YZ, ξO, Mπ, KP, NR, nuſquam inter ſe coeuntibus, ità vt ductæ in baſibus oppoſitis ſint inter ſe parallelæ, & à nullo puncto duæ lineæ ducãtur, ſed vna duntaxat, quę rurſus bifariam ſecentur in S, V, T, ρ, Q, X, connexis rectis ST, VX, ρQ, quæ ſe mutuò in centro κ, bifariam ſecant, & ad angulos rectos, vt in coroll. propoſ. 3. huius libri docuimus, ſuntque lateribus cubi, ſicut & priores ſex, æquales. Iam dimidia rectarum YZ, Mπ, ſecentur extrema ac media ratione in β, γ, δ, ε, vt ſint maiora ſegmenta, Yβ, Zγ, Mδ, πε, ductis rectis Yρ, Yκ, βδ, βκ. Quoniam ergo Yρ, YV, dimidio lateris cubi ſunt æquales; & ρκ, βV, ſegmenta minora rectarum æqualium YV, ρπ, æqualia quoque: [k] Sunt autem quadrata rectarum YV, βV, tripla quadrati rectæ Yβ; Erunt

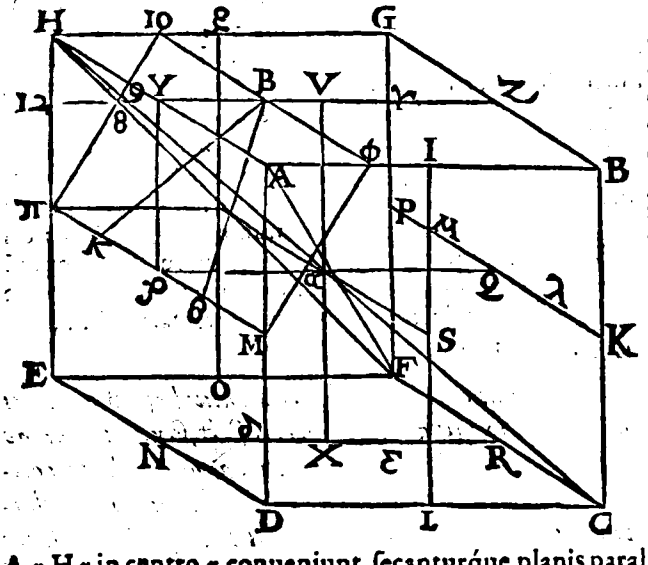
[k] 4. tertij.

runt & quadrata rectarum Y ρ, ρκ, tripla eiusdem quadrati rectæ Y β. Quare, [a] cùm quadratis rectarum Y ρ, ρκ, æquale sit quadratum rectæ Y κ, [b] quòd angulus Y ρ κ, rectus sit; Erit & quadratum rectæ Y κ, triplum quadrati rectæ Y β. Rursus, quia V Y, perpendicularis ad A Y, Y ρ, [c] recta est ad planum A E, per rectas A Y, Y ρ, ductum, rectus erit angulus β Y κ, ex defin. 3. lib. 11. [d] Ac propterea quadratum rectæ β κ, æquale quadratis rectarum Y κ, Y β, existens, quadruplum erit quadrati rectæ Y β. (quia nimirum quadrata rectarum Y κ, Y β, quadrupla etiá sunt quadrati rectæ Y β, cùm quadratum rectæ Y κ, triplum sit ostensum quadrati rectæ Y β.) Ideoq; [e] cùm quadrata proportionem habeát laterum duplicatam, dupla erit recta β κ, rectæ Y β. Quadrupla enim proportio duplicata est duplæ proportionis, vt in his numeris 1. 2. 4. appáret: Est autẽ & ϑ κ, dupla ipsius ρ κ, quòd minora segmenta ϑ β, κ ρ, rectarum æqualium M ρ, ω ρ, æqualia sint. [f] Erit igitur vt Y β, ad ρ κ, ita β κ, dupla ipsius Y β, ad ϑ κ, duplam ipsius ρ κ: Est autem Y β, maius segmentum ad ρ κ, rectam minori segmento β V, æqualem, vt tota ad maius segmentũ. Ergo & β κ, ad ϑ κ, erit vt tota ad maius segmentum; Ac proinde ϑ κ, erit maius segmentũ rectæ β κ, sectæ extrema ac media ratione. Eadem ratione ostendemus ϑ κ, maius esse segmentum rectæ β ϑ, extrema ac media ratione sectæ, si nimirum ducatur recta Y ϑ. Quibꝰ æquales erunt β ϑ, β κ, constituentes triangulum Isosceles β ϑ κ, simile illi, quod ab Euclide constructum est propos. 10. lib. 4. vt postea demonstrabimus; Ac proinde ϑ κ, erit latus pentagoni in circulo triangulum β ϑ κ, circumscribente descripti, vt perspicuum est ex 11 propos. lib. 4.

[a] 47. primi.
[b] 29. primi.
[c] 4. vndec.
[d] 47 primi.
[e] 20. sexti.
[f] 15. quinti.

Intelligatvr iam planum trianguli β ϑ κ, extendi, (ducta per β, recta β φ, ipsi M ω, parallela.) per parallelas M ω, φ 10. vt sit planum extensum φ ω, occurrens diametro A C, quadrati A B C D, in puncto 3. cubi verò diametro A F, in puncto 4. & per 3. ducatur 37. recta ipsi A φ, parallela, connectaturque M S, ς quæ parallela est vtrique A φ, 73. Quoniam igitur, per corollarij propos. 4. lib. 6. triangulum A 73. simile est triangulo A M S; [b] ac proinde vt A M, ad M S, ità est A 7. ad 73. Sunt autem A M, M S, æquales, nempe dimidia cubi latera; Erunt quoque A 7. 73. æquales. Eadem ratione erit, vt M A, ad A φ, ita M 7. ad 73. Est autem A φ, maius segmentum rectæ M A, diuisæ extrema ac media ratione, (quòd æquales sint A φ, Y β, nec non & M A, Y V, dimidia cubi latera.) Igitur & 73. hoc est, 7 A, maius segmentum erit rectæ M 7. extrema ac media ratione sectæ; [k] Ac propterea tota M A, diuisa erit extrema ac media ratione in 7. maiusque segmentum erit M 7. [l] Atqui vt M 7. ad 7 A, ita est S 3. ad 3 A. Secta est ergo & S A, extrema ac media ratione in 3. maiusq; segmentum est S 3. [m] Quia verò S ω T, parallela est ipsi M ω; quòd & recta ducta ω T, æqualis & parallela sit ipsi M S; si per S ω T, planum ducatur parallelum plano φ ω, ducto per M ω, [n] secabuntur rectæ A S, A ω, in easdem rationes, in punctis 3. & 4. cùm planum φ ω, rectas A S, A ω, secet in 3. & 4. at planum per S ω T, ductũ plano φ ω, parallelum easdem secet in S, & ω. Atque idcircò, cùm A S, secta sit in 3. extremà ac media ratione, secta erit eodem modo A ω, semidiameter cubi, in 4. maiusque segmentum erit ω 4.

[g] 33. primi.
[h] 4. sexti.
[i] 34. primi.
[k] 5. tertiid.
[l] 2. sexti.
[m] 33. primi.
[n] 17. vndec.

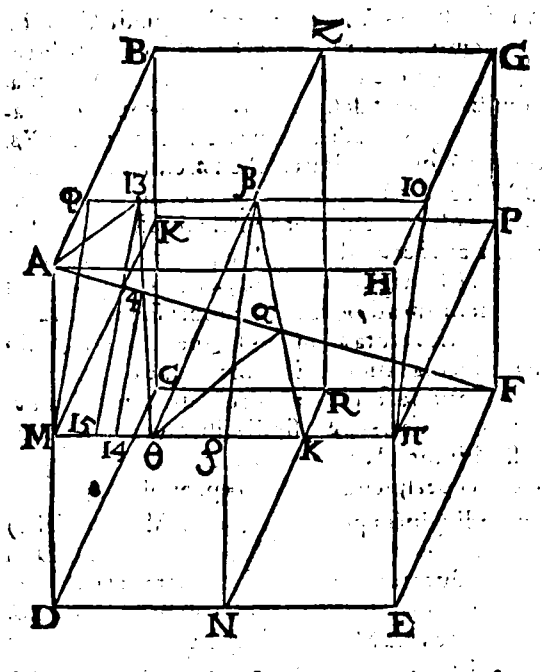


Isdem argumentis ostendemus, ducta diametro H F, quadrati E F G H, & diametro cubi H C, semidiametrum cubi secari in 9. puncto extrema ac mediá ratione à plano φ ω, vt perspicuum est, si cubus inuertatur, vt in hac figura secunda apparet. Sunt enim lineamenta omnino similia lineamentis prioris figuræ, licèt bases cubi sedes mutauerint, ita vt quadratum A C, locum quadrati H F; & quadratũ H F, locum quadrati A C, obtineat in hac secunda figura. Quod tamen in prima figura, sine hac inuersione, probabitur etiam hoc modo. Ducta diametro cubi H C, in ea figura, quam planum φ ω, secet in 9. prope punctum A, intelligaturque per rectam A H, planum plano φ ω, parallelum. Quoniam igitur rectæ A ω, H ω, in centro ω, conueniunt, secanturque planis parallelis in punctis A, H, & 4. 9; (Nam planum φ ω, eas secat in 4. & 9. planum verò per A H, ductũ plano φ ω, parallelum easdem secat in A, & H;) [o] erit vt ω 4. ad 4 A, ita ω 9, ad 9 H. Cùm ergo ω A, secta sit in 4, extrema & media ratione, erit quòq; ω H, similiter secta. quæ quidem demonstratio locum etiam habet in hac cubi inuersione in secunda figura. Ostendamus nunc, si rectæ iungantur ϑ 4, β 4, β 9, ω 9, rectilineum β 4 ϑ ω 9, in plano φ ω, existens, pentagonum esse æquilaterum, & æquiangulum.

[o] 17. vndec.

Invertatvr rursum cubus, vt quadrata A D E H, A B G H, quæ nimirum continent triangulum β ϑ κ, siue planum φ ω, hunc situm habeant, quem monstrat tertia hæc figura. Deinde in plano φ ω, recta coniuncta ϑ 4. extendatur vsque ad rectam φ 10. in punctum 13. Quoniam igitur ducta recta K P, & iunctis rectis M K, ω P, ρ planum M P, parallelum est plano A G, (quòd & rectæ P K, K M, parallelæ sint rectis G B, B A,) [q] secatque cubum bifariam; ideoque per centrum ω, transit, [p]

[p] 15. vndec.
[q] 32. vndec.



a 16. vndec.

b 4. sexti.

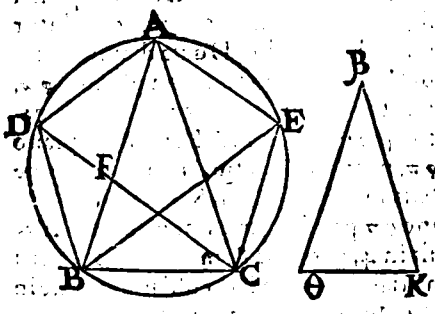
c 15. vndec.

d 17. vndec.

e 2. sexti.

ee, quæ in scholio propoſ. 15. lib. 11. oſtenſa ſunt ſi p rectas α 4 A, ∂ 4. 13, planũ extendatur, c fient α ∂, A 13. communes ſectiones planorũ M P, A G, parallelæ; Ac proinde triangula α ∂ 4. A 13 4. æquiangula erunt; b Eritq; vt α 4. ad 4. A, ita ∂ 4. ad 4. 13. Quare cùm α A, in 4. ſecta ſit extrema ac media ratione, vt oſtẽdimus; eodem modo erit ſecta ∂ 13. in 4. Rurſus plano N Z, per centrum α tranſeunti, parallelum ducatur planum p punctum 4. ex ſcholio propoſ. 15. lib. 11. ſecans planũ φ ω, recta 4. 14. c Eſt autem eidem plano N Z, parallelum planum D B. d Rectæ igitur α A, ρ M, in eaſdem rationes ſecabuntur in punctis 4. & 14. Quocirca & ρ M, in 14. ſecta erit extrema ac media ratione, minusq; erit ſegmẽtum 14. M, ideóq; æquale minori ρ ∂, ipſius M ρ. Quare cùm ex ρ 14. maiori ſegmento ipſius ρ M, auferatur ρ ∂, minus ſegmentum; Erit, vt demonſtrauimus ad propoſ. 5. lib. 13. ρ 14. diuiſa in χ, extrema ac media ratione, maiusq; ſegmentum erit ρ ∂. Poſtremò, acta per 13. recta 13. 15, rectæ 4. 14. parallela, e ſecabuntur rectæ ∂ 13, ∂ 15, proportionaliter; Ac proinde & ∂ 15. ſecta erit in 14. extrema ac media ratione, maiusque ſegmentum erit ∂ 14. f Quapropter erit vt ρ ∂, maius ſegmentum ad ∂ 14. minus, ita ∂ 14. maius ad 14. 15. minus: Vt autem ∂ 14. ad 14. 15. ita eſt tota ∂ 15. ad ∂ 14. maius ſegmentum. Igitur erit vt ρ ∂, ad ∂ 14. ita ∂ 15. ad eandem ∂ 14. Ac propterea rectæ ρ ∂, vel ρ κ, & ∂ 15. æquales erunt. Quoniam verò planum N Z, & planum illi parallelum per 4. 14. ductum, ſecantur plano ρ ω, g erunt communes ſectiones β ρ, 4. 14. parallelæ, ideóq; & 13 15, β ρ, parallelæ erunt. h angulusq; externus β ρ κ, interno 13. 15 ∂, æqualis. Cũ igitur & latera β ρ, ρ κ, lateribus 13. 15. 15 ∂, ſint æqualia, i æquales erunt quoq; rectæ β κ. 13 ∂; Ac proinde & earũ ſegmenta maiora ∂ κ, ∂ 4. (Oſtenſum enim eſt ∂ κ eſſe maius ſegmentum ipſius β κ.) æqualia erunt. Eadem arte & β 4. ipſi β γ, in prima figura oſtendetur æqualis, ſi ſimili ſitu triangulum Iſoſceles formetur ſuper baſim β γ, cuius vertex conſiſtat in puncto quod rectam I S, diuidit extrema ac media ratione. Eodemq; modo eiſdem ∂ κ β γ, æquales erunt κ γ β 9. Æquilaterũ ergo eſt pentagonum β 4 ∂ κ 9; quandoquidẽ β γ, ∂ κ, rectæ æquales ſunt, cùm componantur ex minoribus ſegmentis linearum æqualium extrema ac media ratione ſectarum, quales ſunt Y V, Z V, ω ρ M ρ. Sed & æquiangulũ, vt mox oſtendemus. Igitur hac arte duodecim triangula, nimirum ad ſingulas rectas M ω, Y Z, N R, H L, ξ O, K P; bina ipſi β ∂ κ, ſimilia, & æqualia conſtruantur, (Ita enim ad M ω, duo huiuſmodi triangula vides β ∂ κ, ∂ ∂ κ.) & ipſorũ officio duodecim pentagona ipſi β 4. ∂ κ 9, ſimilia & æqualia fabricentur, conſtituatur Dodecaedrũ, cuius duodecim quidẽ anguli in ſex rectis lineis M ω, Y Z, N R, H L, ξ O, K P, bini nimirũ in ſingulis, pcto verò reliqui in octo ſemidiametris cubi conſiſtũt, nempe in punctis, q̃ ipſas extrema ac media ratione diuidũt, qualia ſunt puncta 4. & 9 in ſemidiametris A α, & H α, ſecundæ figuræ; Ac propterea quodammodo inſcriptũ eſſe dicetur cubo huiuſmodi Dodecaedrũ, quamuis non ꝓpriè, cùm non omnes eius anguli vel in angulis, vel lateribus, vel depicti in planis cubi conſtituãtur, ſed 12. quidẽ in ſex planis cubi, octo verò in punctis, quæ octo ſemidiametros cubi extrema ac media ratione ſecant, reſideant. Quocirca in dato cubo Dodecaedrum deſcripſimus. Quod erat faciendum.

PROBLEMA.

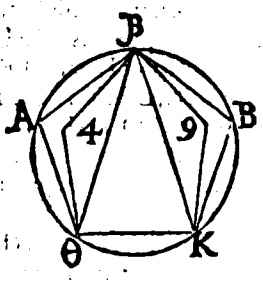


QVOD autẽ triangulũ β ∂ κ, cuius baſis ∂ κ, maius ſegmẽtum exiſtit vtriuſq; laterũ β ∂, ∂ κ, extrema ac media ratione diuiſiſimile ſit illi, quod Euclides conſtruxit propoſ. 10. lib. 4. ita demonſtrabimus. Deſcribatur circa triangulum Iſoſceles A B C, quale Euclides conſtruere docet propoſ. 10. lib. 4. circulus A D B C E, cui inſiſtãt anguli A B C, A C B, bifariã rectis B E, C D, perficiatur pentagonum æquilaterũ & æquiangulũ A D B C E, vt propoſ. 11. lib. 4. tradimus, ſecentq; ſe mutuò rectæ A B, C D, in F. a *Quoniã ergo A B, in F, ſecatur extrema ac media ratione, maiuſq; eius ſegmentum eſt A F, æquale lateri B C.* b *Erit vt A B, tota ad maius ſuũ ſegmentũ B C, ita θ κ, tota ad maius ſuum ſegmentũ κ θ: Eſt autẽ quoq; vt A B, ad A C, ita β θ, ad β κ, vtrobiq; enim eſt proportio æqualitatis. Triangula igitur β θ κ, A B C, proportionalia habentia latera, æquiangula ſunt, æqualesq; erunt anguli θ, B; Item κ, C, & β, A; propterea q; vterq; angulorum θ, κ, duplus erit anguli β; & triangula β θ κ, A B C, ſimilia.*

a 8. tertij decimi.

b 2. quartidecimi.

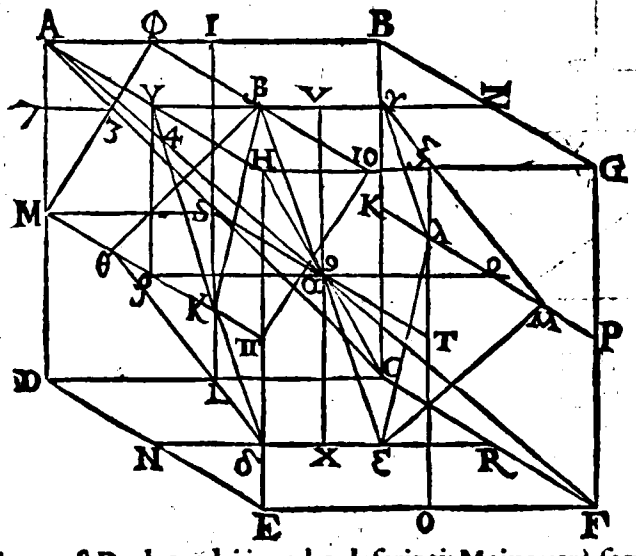
PENTA-



PENTAGONVM verò β 4 ϑ κ 9, æquilaterum, esse quoq; æquiangulum, hac ratione ostendemus. Describatur circa triangulum β ϑ κ, circulus β A ϑ κ B; qui si transeat per puncta 4, & 9, perspicuum est ex ijs, quæ ad propos. 16. lib. 4. docuimus, pentagonum, æquiangulum esse. Si verò non incedat per puncta 4, & 9. describatur in circulo dicto, iuxta doctrinam propos. 11. lib. 4. pentagonum æquilaterum & æquiangulum β A ϑ κ B. Quoniam igitur tam recta A ϑ, A β, quàm recta 4 ϑ, 4 β, æquales sunt rectæ ϑ κ, cùm & β 4 ϑ κ 9, & β A ϑ κ B, pentagonum sit æquilaterum; Erunt tam duæ rectæ ϑ A, ϑ 4, quàm duæ β A, β 4, æquales; quod fieri nõ posse demonstratum est propos. 7. lib. 1. Transit ergo circulus triangulo β ϑ κ, circumscriptus per puncta 4, & 9. Ac proinde pentagonum β 4 ϑ κ 9, æquiangulum est.

SCHOLIVM.

Ex his colligere licebit sequentes propositiones.



I.

DIAMETER Dodecaedri duo latera potest, ipsius scilicet Dodecaedri & cubi, in quo Dodecaedrum describitur.

DVCATVR enim in prima figura diameter Dodecaedri β ι, intelligaturq; cõiuncta recta γ ι, [a] *æqualis existens & parallela lateri cubi V X, φ & V γ, X ι, æquales sint, & parallelæ. Quoniam igitur angulus β V X, rectus est;* [b] *rectus quoq; erit angulus β γ ι, ad γ, constitutus;* [c] *Ac proinde quadratũ diametri β ι, æquale erit quadratis laterum β γ, γ ι, nempe Dodecaedri, & cubi.*

a 33. primi.
b 29. primi
c 47. primi.

II.

SI latus cubi secetur extrema ac media ratione, minus segmentum latus est Dodecaedri in cubo descripti: Maius verò segmentum latus cubi in hoc Dodecaedro descripti.

IN eadem enim prima figura, [d] *cùm sit vt Υ V, ad β V, ita Υ Z, dupla ipsius Υ V, ad β γ, duplam ipsius β V; Sit autẽ β V, minus segmentum ipsius Υ V, secta extrema ac media ratione: Erit & β γ, minus segmentum lateris cubi Υ Z, secti extrema ac media ratione; composita verò ex Υ β, γ Z, hoc est, recta β κ, (quæ dupla fuit ostensa ipsius Υ β, ideoq; composita ex Υ β, γ Z, æqualis) maius segmentum. Constat autem ex constructione β γ, esse latus Dodecaedri,* [e] *& β κ, seu β ϑ, esse latus cubi in dicto Dodecaedro descripti, cùm subtendat angulum pentagoni β 9 κ, vel β 4 ϑ.*

d 15. quinti
e 8. quinti-decimi.

III.

LATVS cubi æquale est duobus lateribus, Dodecaedri videlicet in ipso descripti, & Dodecaedri circa eundem cubum descripti.

NAM in prima rursus figura, latus cubi Υ Z, componitur ex latere Dodecaedri β γ, in ipso descripti, & ex recta compositæ ex Υ β, γ Z; quã constat esse latus Dodecaedri eidem cubo circumscripti. Cùm enim Υ Z, cubi latus subtendat angulum pentagoni Dodecaedri circa cubum descripti, vt perspicuum est ex 8. propos. huius lib. [f] *Sit autem latus illius pentagoni maius segmentum lateris Υ Z, secti extrema ac media ratione: Erit β ϑ, existens quoq; maius segmentum eiusdem lateris Υ Z, & æqualis duabus Υ β, γ Z, simul, vt iam demonstrauimus, latus Dodecaedri cubo lateris Υ Z, circumscripti.*

f 8. tertij d.

IIII.

RECTA duos angulos pentagonorum Dodecaedri communi lateri oppositos connectens est æqualis lateri cubi, cui Dodecaedrum inscribitur.

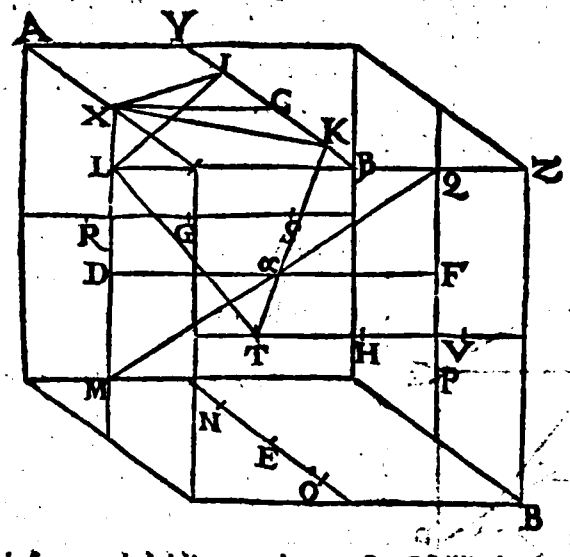
IN prima enim figura, recta connectens puncta β, A, in quibus constituuntur duo anguli pentagonorum communi lateri sunt oppositi, [g] *æqualis est rectæ V X, (quæ & β V, A X, æquales sint, & parallelæ) hoc est, lateri cubi, in quo Dodecaedrum describitur.*

g 33. primi.

PROBL. 14. PROPOS. 14.

IN dato cubo Icosaedrum describere.

CVBVS datus, in quo describendum sit Icosaedrum, sit AB, p cuius basium centra C, D, E, F, G, H, lateribus cubi rectæ lineæ parallelæ agantur nusquá inter se conuenientes, & harum medietates extrema ac media ratione secentur, ita vt maiora segmenta prope centra sint in punctis I, K, L, M, N, O, P, Q, R, S, T, V, quorũ quodlibet cum quatuor vicinioribus connectatur, vt L, cum I, K, T, & R: R, cũ L, M, I, & N, &c. vt constituãtur viginti triangula IKL, IKQ, LMR, LMT, NOM, NOP, PQV, PQS, RSI, RSN, TVK, TVO, ILR, ISQ, KTL, KQV, OPV, OTM, NSP, NMR; quorum priora duodecim subtenduntur duodecim cubi lateribus, posteriora verò octo eiusdem cubi octo angulis substernuntur. Connectantur iam rectę X C, X I, X K. Quoniam igitur
a 29. primi. latera X C, C I, trianguli X C I, æqualia sunt lateribus X C, C K, trianguli X C K; a & anguli conten
b 4. primi. ti, recti, q. X C, parallela sit ipsi A Y; b Erunt & bases X I, X K, æquales. Deinde quia linea L X, recta



c 4. primi.
d 47. primi.

est ad planum A Z, per defin. 4. lib. 11. recta quoq; erit ad lineas X I, X K. Ac propterea cũ latera L X, X I, trianguli L X I, æqualia sint lateribus L X, X K, trianguli L X K, & anguli contenti, recti; c æquales erũt bases L I, L K. Rursus d quoniam quadratũ rectæ L I, æquale est quadratis rectarum L X, X I. Et quadratũ rectæ L X, quadrato rectæ I Y; quadratum verò rectę X I, quadratis rectarum X C, C I, est æquale: Æquale erit quadratum rectæ L I, tribus quadratis rectarũ X C, C I, I Y: Sunt autem & quadrata rectarum X C, C Y, æqualia, q. eorum latera sint dimidia cubi latera. Igitur quadratũ rectæ L I, æquale est tribus quadratis rectarũ C Y, C I, I Y: Sed hæc tria quadrata quadrupla sunt quadrati rectę C I: (e Cùm enim quadrata rectarum C Y, I Y, totius, & minoris segmenti, tripla sint quadrati rectæ C I, ma-
e 4. eiusd. ioris segmenti: Addito quadrato rectæ C I, illis duobus; erũt tria quadrata rectarum C Y, C I, I Y, quadrupla eiusdem quadrati rectæ C I.) Quadratum ergo rectæ L I, quadruplum est quoq; quadrati rectæ C I; Ac propterea, cùm eiusdem quadrati rectæ C I, quadruplum sit quadratum rectæ K I, ex scholio propos. 4. lib. 2. Æqualia erunt quadrata rectarum L I, I K, ideoque & rectæ ipsæ æquales. Æquilaterum igitur est triangulum I K L, lateri cubi A G, substratum.

NON aliter ostendemus, reliqua vndecim triangula, vndecim reliquis lateribus cubi suppositis, esse æquilatera; Atq; adeò inter se æqualia, cùm eorũ latera I K, L M, N O, P Q, R S, T V, æqualia sint. Quoniam verò latera reliquorum octo triangulorũ, octo angulis cubi suppositorum, communia sunt dictis duodecim triangulis: vt in triangulo K T L, latus K L, cõmune est triangulo I K L, & latus K T, triangulo T V K; & latus T L, triangulo L M T; perspicuũ est, ea quoq; esse æqualia & inter se, & dictis duodecim triangulis. Quare omnia viginti huiusmodi triangula Icosaedrum component cubo inscriptum, cùm eius anguli omnes duodecim in sex cubi basibus consistant, bi ni nimirum in singulis. Itaque in dato cubo Icosaedrum descripsimus. Quod erat faciendum.

SCHOLIVM.

COLLIGIMVS ex hoc, propositiones sequentes.

I.

DIAMETER Icosaedri potest & latus Icosaedri, & cubi Icosaedrum ambientis.

a 33. primi. *DVCTA enim recta L Q,* a *quæ lateri cubi D F, parallela est, & æqualis, q. & D L, F Q, parallela sint, &*
b 47. primi *æquales;* b *manifestum est, quadratũ diametri Q M, æquale esse quadratis rectarum L M, lateris Icosaedri, &*
c 29. primi. *L Q, lateris cubi, in quo Icosaedrum descriptũ est,* c *cùm angulus M L Q, sit rectus, quòd & L D F, rectus sit.*

II.

BIFARIAE sectiones sex oppositorum laterum Icosaedri coniunguntur tribus rectis æqualibus, sese in centro Icosaedri bifariam, & ad angulos rectos secantibus.

NAM huiusmodi tres lineæ, nimirum D F, C E, G H, cùm coniungant centra basium cubi oppositarum, æquales sunt lateribus cubi, sesecq; per coroll. propos. 3. huius lib. bifariam, & ad angulos rectos in centro cubi, quod sit α, diuidunt. Quod quidem & centrum esse Icosaedri, ita ostendetur, ducta recta α P. Quoniam latera α F, F Q, trianguli α F Q, æqualia sunt lateribus α F, F P, trianguli α F P, angulosq; comprehendũt rectos,
d 4. primi. d *æquales erunt rectæ α Q, α P. Eademq; ratione æquales erunt omnes rectæ ex α, ad angulos Icosaedri prædeuntes. Igitur α, centrum est Icosaedri.*

III.

SI latus cubi extrema ac media ratione secetur, maius segmentum latus est Icosaedri in dicto cubo descripti.

CVM

Cvm enim CI, sit maius segmentum rectæ CI: a sitq; vt CI, ad CI, ita KI, dupla ipsius CI, ad EI, duplam ipsius CI; b erit quoq; KI, latus Icosaedri, segmentum maius lateris cubi EI. a 15. quinti. b 2. quarti decimi.

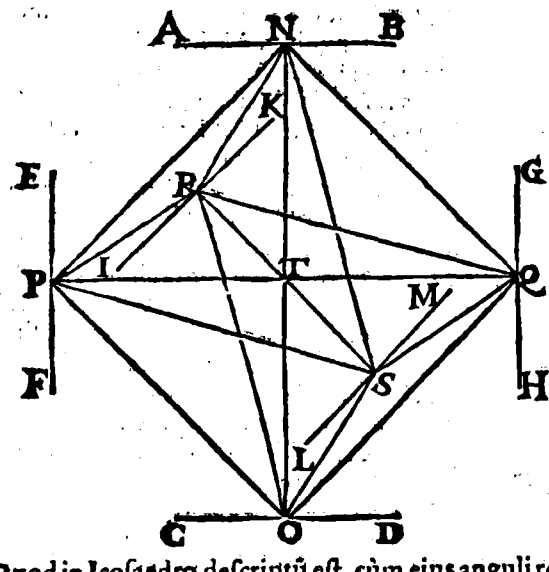
IIII.

Icosaedri tam latera, quàm triangula opposita, inter se sunt parallela.

Si enim quorumlibet duorum laterum oppositorum extrema puncta duabus diametris connectantur, fient duo triangula inter se æqualia, angulos q; alternos habentia æquales; ex 4. propos. lib. 1. qua quidem in centro conueniunt. Quare quælibet latera oppositæ parallela erunt; c Atq; idcirco, & triangulorum plana, per ipsa latera parallela ducta, inter se erunt parallela. c 15. vndec.

PROBL. 15. PROPOS. 15.

In dato Icosaedro Octaedrum describere.



Exponantvr dati Icosaedri, cui inscribendum est Octaedrum, sex latera opposita, AB, CD, EF, GH, IK, LM, quorum bifarias sectiones N, O, P, Q, R, S, iungant tres rectæ NO, PQ, RS, æquales, sese in centro T, bifariam, & ad angulos rectos secantes, per ea, quæ in scholio propos. præcedentis ostensa sunt; ducanturq; rectæ NP, NR, NS, NQ; OP, OR, OS, OQ; PR, PS; QR, QS, constituentes octo triangula SNP, SPO, SOQ, SQN; RNP, RPO, ROQ, RQN. Quia igitur latera TN, TS, trianguli TNS, æqualia sunt lateribus TN, TP, trianguli TNP, (cũ sint rectarũ æqualium dimidia.) angulosq; continent rectos, vt dictũ est; a Æquales erũt bases NS, NP: Eodemq; modo reliquæ oēs lineæ æquales erũt & hisce duab⁹, & inter se. Octo ergo dicta triangula æquilatera sunt, & inter se æqualia; Ideoq; Octaedrum constituunt. a 4. primi.

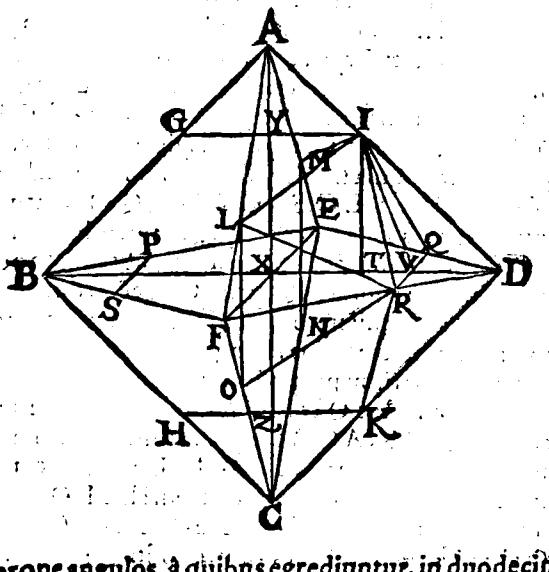
Quod in Icosaedro descriptũ est, cùm eius anguli resideant in bifariis sectionibus sex laterum Icosaedri oppositorum. In dato itaque Icosaedro Octaedrum descripsimus. Quod faciendum erat.

COROLLARIVM.

Sequitvr hinc, idem esse centrum Icosaedri, & Octaedri in eo descripti. Quoniam scilicet rectæ NO, PQ, RS, per T, centrũ Icosaedri incedentes, diametri sunt Octaedri NPOQRS, sibi inscripti. Quare T, centrũ Icosaedri, vbi se intersecant, centrũ quoq; est Octaedri.

PROBL. 16. PROPOS. 16.

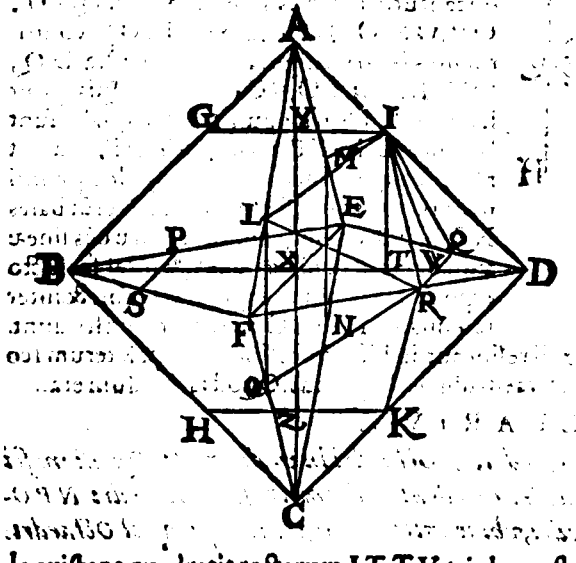
In dato Octaedro Icosaedrum describere.



Datvm Octaedrum, in quo describẽdum est Icosaedrum, sit ABCDEF. Cùm à quolibet angulo quatuor latera exeant, sumantur à singulis bina non proxima, sed sibi è regione respondentia, hoc est, quę ad angulos quadratorum Octaedri oppositos cadunt, sumendo semper bina iuxta angulos oppositos eiusdem quadrati, qualia sunt BA, BC; DA, DC, iuxta angulos oppositos B, D, quadrati ABCD; AF, AE; CE, CF, iuxta angulos oppositos A, C, quadrati AECF: (Nam à quolibet angulo sumenda sunt tantùm duo latera; at verò latera AB, AD; CB, CD, quadrati ABCD, iuxta eosdem angulos A, C, iam sumpta fuêre.) EB, ED; FD, FB, iuxta angulos oppositos E, F, quadrati EBFD; (Nam latera EA, EC; FC, FA, quadrati AECF, iuxta eosdem angulos, E, F, iam accepta sunt.) quæ omnia secentur extrema ac media ratione, hac lege, vt maiora segmẽta sint prope angulos, à quibus egrediuntur, in duodecim punctis G, H, I, K, L, M, N, O, P, Q, R, S, & à singulis ad quinque proximas sectiones quinque lineæ rectæ ducantur, vt ex R, rectæ RQ, RI, RL, RO, RK. Et ex I, rectæ IQ, IR, IM, IL, IG, & sic de cæteris, quamuis non omnes ductæ sint

ia figura, ad euitandam linearū confusionem. Quę autē sint hæc quinq; puncta proxima, puluis indicat Octaedrum materiale. Sunt enim tria in lateribus reliquis tribus, quę cum eo, in quo punctum acceptū est, pyramidem constituunt: alia autē duo sunt in duobus lateribus duorum triangulorum Octaedri, quæ habēt cōmune illud latus, in quo punctum acceptū est. Vt quia punctum acceptum est R, in latere DF, quod cum tribus DE, DA, DC, pyramidem constituit in vertice D, & est cōmune triangulis Octaedri DFA, DFC: propterea ex R, ad quinq; puncta horū quinque laterū ductę sunt lineę rectæ, & sic de cæteris. Post hæc, ductis tribus Octaedri diametris AC, BD, EF, sese in centro X, secantibus bifariam, & ad angulos rectos, ex coroll. 1. propos. 14. lib. 13. quarum AC, BD, secant rectas GI, RQ, in Y, & V: connectaturq; recta IV, agaturq; IT, parallela ipsi YX. Quoniam ergo latera DQ, DI, trianguli DQI, æqualia sunt lateribus DR, DI, trianguli DRI (Sunt enim DQ, DR, minora segmēta rectarū æqualium DR, DF) & angulos comprehendunt æquales, nempe triangulorū Octaedri ADE, ADF; [a] Erunt bases IQ, IR, æquales. Deinde cùm sit, [b] vt BG, ad GA, ita DI, ad IA; [c] erit GI, rectæ BD, parallela. Eadem q; ratione QR, ipsi EF, parallela. Ac proinde vt DI, ad IA, ita XY, ad YA. Recta igitur XA, secta, erit in Y, extrema ac media ratione. Rursus, quia est vt AX, ad XD, ita AY, ad YI, (quòd triangulum AYI, simile sit triangulo AKD, per coroll. propos. 4. lib. 6.) Est autē AX, ipsi XD, æqualis; Erit & AY, ipsi YI, æqualis. Quare YI, minus segmētum est rectæ XA. Non aliter ostendemus AY, ipsi YG, esse æqualem: ideoq; GI, rectam, bifariam in Y; similiterq; QR, in V, secari. Cùm verò latera AG, AI, trianguli AGI, æqualia sint lateribus DQ, DR, trianguli DQR, (nimirū minora segmenta minoribus segmentis æqualium rectarum) angulosq; comprehendant rectos, nempe quadratorum ABCD, DEBF.

[a] 4. primi. [b] 2. quarti decimi. [c] 2. sexti. [d] 4. sexti.



[e] 4. primi. [f] 34. primi. [g] 34. primi. [h] 4. tertij. [i] 47. primi. [k] 47. primi. [l] 8. primi.

[e] Æquales erūt bases GI, QR. Eadem ratione his æquales ostendentur rectæ HK, PS, MN, LO, quę nimirū subtendunt reliquos quadratorum ABCD, DEBF, AECF, angulos, in singulis videlicet quadratis binos oppositos, complectunturq; duo segmenta laterū minora. Deinde quia YI, minus segmentum ipsius XA, ostensum, maius est segmentum maioris segmenti XY, diuisi extrema ac media ratione, vt demonstrauimus ad propos. 5. lib. 13. Est autem XY, rectæ XV, æqualis, (cùm ambæ sint maiora segmēta æqualium rectarū XA, XD.) [f] & YI, rectæ XT; erit XT, maius segmentum ipsius XV, & idcirco TV, segmentum minus eiusdem XV, Quare quadrata rectarum XV, totius, hoc est, ipsius IT, ([g] cùm & recta IT, æqualis sit ipsi XY.) & TV, minoris segmenti, [h] tripla sunt quadrati rectæ XT, maioris segmenti. Atq; adeò quadratū rectæ IV, [i] æquale existens quadratis rectarum IT, TV, triplum est eiusdem quadrati rectæ XT, hoc est, rectę RV, quæ æqualis est ipsi XT, seu ipsi YI, ex demonstratis, cùm RV, YI, dimidia sint æqualium rectarum RQ, GI. Addito igitur quadrato rectæ RV, ipsi quadrato rectæ IV; erunt quadrata rectarum IV, VR, quadrupla quadrati rectę RV: [k] At quadratis rectarum IV, VR, æquale est quadratum rectæ IR, [l] quòd anguli IVR, IVQ, comprehensi lateribus æqualibus IV, VR; IV, VQ, & subtensi basibus æqualibus IR, IQ, æquales sint, ideoq; recti. Ergo & quadratū rectæ IR, quadruplum est quadrati rectæ VR; Ac propterea cùm eiusdem quadrati rectæ VR, quadruplum quoq; sit, per scholium propos. 4. lib. 2. quadratū rectæ QR; Æqualia erunt quadrata rectarum IR, QR, ideoq; & rectæ ipsæ æquales: Erat autem IQ, ipsi IR, æqualis. Triangulum igitur æquilaterum est IQR. Non secus demonstrabimus, æquilatera esse triangula similem situm cum IQR, habentia, nempe KQR; GIL, GIM; GPS, HPS; NHK, OHK; RLO, SLO; PMN, QMN; atque adeò triangulo IQR, æqualia, cùm latera omnium sint æqualia inter se. Quod tamen hac etiam ratione demonstrabimus. Cùm enim in quolibet horum triangulorū vnum latus subtendat angulum rectum quadrati, comprehensum duobus segmentis minoribus laterum Octaedri; duo verò reliqua subtendant duos æquales angulos triangulorum æquilaterorū, contentos singulos duobus segmentis laterū Octaedri, maiore & minore: Erunt latera vnius trianguli lateribus aliorum æqualia; ac propterea & ipsa triangula æqualia, per corollarium propositionis 8. lib. 1. Vt in triangulis IQR, GIL, latera RQ, GI, subtendentia angulos rectos QDR, GAI, quadratorum DEBF, ABCD, comprehensos minoribus segmentis DQ, DR; AG, AI, æqualia sunt. Eodem modo latera IQ, IL, æqualia erunt, cùm subtendant angulos æquales IDQ, IAL, triangulorum æquilaterorum ADE, ADF, quorum ille continetur segmentis laterum Octaedri DI, DQ, maiore & minore; hic verò segmentis AI, AL, maiore & minore quoque. Non secus latera IR, GL, æqualia erunt. Æqualia igitur sunt triangula IQR, GIL; per corollarium propositionis 8. libri 1. Atqui IQR, ostensum est esse æquilaterum: Ergo & GIL, æquilaterum est. Eadem; est ratio de cæteris habenda. Atq; hæc quidem duodecim triangula supponuntur sex angulis Octaedri, bina

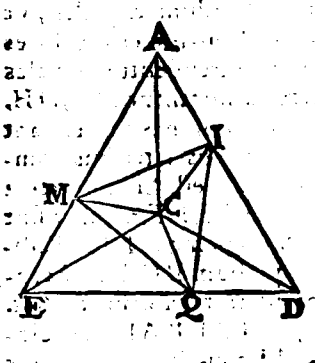
videlicet

videlicet singulis. Ex his cõsequitur reliqua octo triangula, octo basibus Octaedri imposita, videlicet GMP, in AEB; HNP, in BFC; KNQ, in CED; IMQ, in AED; GLS, in AFB; HOS, in BFC; KOR, in CFD; ILR, in AFD, aequilatera quoq; esse, & praedictis aequalia, cùm horum latera cum illorum lateribus communia sint. Viginti ergo haec triangula, quorum quina in singulis sectionibus laterum Octaedri conueniunt ad constitutionem anguli solidi, (vt vides in quinque RQI, RIL, RLO, ROK, RKQ, solidum angulum R, componentibus.) Icosaedrum componunt Octaedro inscriptum, cùm Icosaedri duodecim anguli, duodecim sectiones laterum Octaedri possideant. In dato itaque Octaedro, &c. Quod faciendum erat.

COROLLARIVM I.

COLLIGITVR ex demonstratis, si duo latera trianguli aequilateri secentur extrema ac media ratione, ita vt vnius maius segmẽtum, alterius verò minus, sit prope angulum ab ipsis comprehensum; Rectam connectentem dictas sectiones duplum posse minoris segmenti. Cùm enim in triangulo aequilatero ADE, maius segmentum lateris AD, sit DI, & DQ, minus lateris DE; sit autem recta IQ ostensa aequalis rectae GI, quae duplum potest minoris segmenti AI, [a] cùm quadratum rectae GI, aequale sit duobus quadratis aequalibus rectarum aequalium AG, AI: Perspicuum est, & rectam IQ, duplum posse eiusdem segmẽti minoris AI. a 47. primi

COROLLARIVM II.



RVRSVS fit, cùm octo Icosaedri bases collocatae sint in octo basibus Octaedri, idem esse centrum basis Octaedri, & Icosaedri. Suscipiatur namque Octaedri superioris triangulum AED, in quo collocatum est triangulum Icosaedri IMQ, sitq; C, centrum trianguli AED, ex quo rectae educantur CA, CE, CD; CI, CM, CQ. Quoniam igitur latera CA, AM, trianguli CAM, aequalia sunt lateribus CE, EQ, trianguli CEQ, (quòd haec latera sint ex centro, & maiora segmenta aequalium rectarum.) angulosq; comprehendunt aequales, nempe dimidios angulorum trianguli aequilateri, vt in scholio propos. 12. lib. 13. ostendimus; Erunt bases CM, CQ, aequales. Non secus demonstrabimus CI, aequalem esse lineis CM, CQ. Quare C, centrum erit trianguli IMQ.

COROLLARIVM III.

NON difficilè est denique ex dictis colligere, idem centrum esse Octaedri, atque sibi inscripti Icosaedri. Ductis enim ex X, centro Octaedri, duabus rectis ad quoscunque duos angulos Icosaedri, nimirum rectis XG, XO, ad angulos G, & O; cùm latera XA, AG, trianguli XAG, aequalia sint lateribus XF, FO, trianguli XFO, (Nam XA, XF, semidiametri sunt Octaedri, & AG, FO, segmenta minora laterum aequalium Octaedri, sectorum extrema ac media ratione.) angulosq; complectantur aequales, semirectos videlicet; (cùm AC, EF, diametri sint quadratorum ABCD, EAFC; ac proinde, per demonstrata in scholio propos. 34. lib. 1. angulos quadratorum bifariam secent.) [b] Aequales erunt & bases XG, XO. Eodemq; argumento ostendentur omnes aliae rectae ex X, ductae ad angulos Icosaedri aequales. Igitur X, centrum Octaedri, centrum quoque est Icosaedri. b 4. primi.

PROBL. 17. PROPOS. 17.

IN dato Octaedro Dodecaedrum describere.

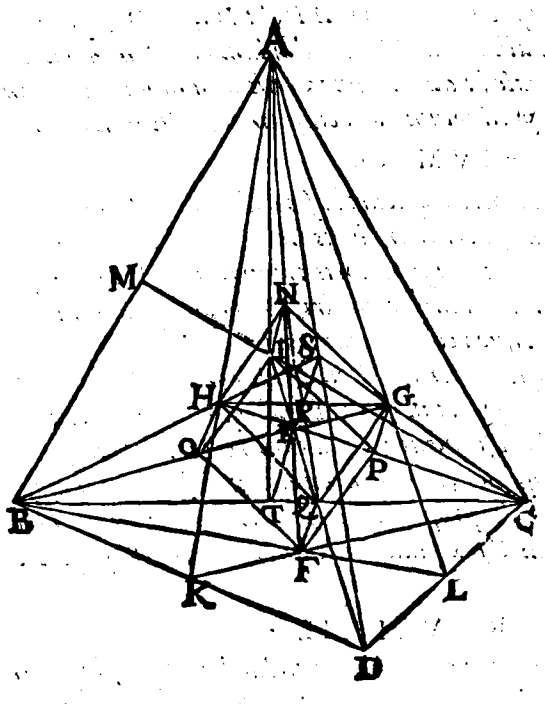
[a] INSCRIBATVR dato Octaedro Icosaedrum; [b] & in hoc Icosaedro Dodecaedrum, factúmque erit, quod iubetur. Cùm enim Dodecaedri anguli constituantur in centris basium Icosaedri, quarum octo concentricè sunt basibus Octaedri, ex coroll. 2. propos. 16. huius lib. Manifestum est, Dodecaedri octo angulos in eisdem centris octo basium Octaedri, reliquos autem duodecim in centris duodecim basium Icosaedri, quarum binae singulis sex angulis Octaedri supponuntur, residere; Ac propterea Dodecaedrum Octaedro inscriptum esse dicetur, quanquam non propriè, vt ex defin. 31. lib. 11. apparere potest. Quapropter in dato Octaedro Dodecaedrum descripsimus. Quod erat faciendum. a 16. quinti decimi. b 5. quinti decimi.

PROBL. 18. PROPOS. 18.

IN data Pyramide cubum describere.

DATVR pyramis ABCD, in qua cubus iubetur describi, sitque eius centrum E, per quod ex

quatuor angulis Pyramidis rectæ ducantur AEF, BEG, CEH, DEI, [a] quæ cadent in centra baſium oppoſitarum F,G,H,I, eruntque perpendiculares ad eaſdem baſes BCD, ACD, ABD, ABC. Per hæc centra porrò ex angulis A,B,C, rectæ ducantur AHK, AGL, AIT, BFL, BHS, CIM, CFK, CGS, ſecantes baſes oppoſitas BD, CD, AB, AD, BC, biſariam, & ad angulos rectos, ex ſcholio propoſ. 12. lib. 13. in punctis K, L, M, S, T. Secentur quoque rectæ ex ſolidis angulis per centrum E, demiſſæ AF, BG, CH, DI, biſariam in N, O, P, Q, punctis, quorum quodlibet cum tribus proximis centris baſium (centris, inquam, baſium ipſam lineam, in qua punctum eſt, circumſtantium, ita vt relinquatur centrum illius baſis, in quam perpendicularis cadit.) rectis lineis coniungantur, vt N, cum G, H, I; O, cum E, H, I; P, cum F, G, I; & Q, cum F, G, H. Dico ſolidum NF, contentum quadrilateris NO, NP, NQ, FG, FH, FI, cubum eſſe. Cùm enim latera AF, FK, trianguli AFK, æqualia ſint lateribus AF, FL, trianguli AFL, (quòd FK, FL, cùm perpendiculares ſint ad BD, CD, ex centro F, ductæ, oſtendunt æquales diſtantias rectarum æqualium BD, CD, à centro F.) angulosque contineant rectos, ex 3. defin. lib. 11. [b] Æquales erunt & baſes AK, AL, & anguli KAF, LAF. Rurſus, quia latera AN, AH, trianguli ANH, æqualia ſunt lateribus AN, AG, trianguli ANG, (ſunt enim AH, AG, ſemidiametri triangulorum æquilaterorum æqualium ABD, ACD.) angulos item comprehendunt æquales, vt demonſtrauimus; [c] Æquales erunt baſes NH, NG. Haud ſecus oſtendentur æquales rectæ QG, QH, ſi rectæ ducantur DG, DH, necnon & reliquæ, cùm omnes ſubtendant æquales angulos æqualibus lateribus comprehenſos: vt perſpicuum eſt. Si enim recta ducatur FT, cùm latera AF, FT, æqualia ſint lateribus AF, FK, (Sunt namque FT, FK, diſtantiæ rectarum æqualium BC, BD, à centro.) & anguli contenti recti, ex defin. 3. lib. 11. Æquales erunt anguli TAF, KAF. Ac proinde cùm latera AN, AL, æqualia ſint lateribus AN, AH; (Sunt enim AL, AH, ſemidiametri triangulorum æquilaterorum æqualium ABC, ABD;) angulosq; contineant æquales: [d] Æquales erũt baſes NL, NH, &c. Sunt igitur ſex dicta quadrilatera, æquilatera. Oſtendamus iam, ipſa plana eſſe, atque rectangula, vt tandem quadrata eſſe concludamus, atque adeò componere cubum NF.



ASSVMATVR quadrilaterum NQ, ductis rectis GH, NQ. Quoniam in pyramide latera BC, AD, oppoſita ſunt, hoc eſt, non coeuntia in aliquo puncto; ſi eorum puncta media S, & T, coniungantur recta ST, erit ea diameter Octaedri in pyramide deſcripti, vt conſtat ex figura propoſ. 2. huius lib. Nam punctum S, huius figuræ reſpondet puncto H, illius, & punctum T, puncto F, cùm & in illa ſint latera oppoſita, ſiue non coeuntia BC, AD. Quocirca cùm idem ſit centrum pyramidis & Octaedri in ipſa deſcripti, vt mox demonſtrabimus, tranſibit ST, per E, centrum Pyramidis, æqualesq; erunt ES, ET; nempe ſemidiametri Octaedri. Deinde quia BS, CS, perpendiculares ſunt ad AD, per ſcholium propoſ. 12. lib. 13. [e] erunt HS, GS, ex centris H, & G, tertiæ partes perpendicularium BS, CS. Quare latera BS, CS, trianguli BSC, proportionaliter ſecantur, [f] atque idcirco HG, parallela eſt lateri BC, ſecatq; latera TS, CS, trianguli TSC, (quod quidem pars eſt trianguli BSC.) proportionaliter; ideoque & SR, tertia pars eſt ipſius ST; Ac proinde duæ tertiæ partes dimidiæ SE. Rurſus, [g] quia DI, perpendicularis eſt ad triangulum ABC; erit EI, tertia pars ſemidiametri DE, ex coroll. 2. propoſ. 13. lib. 13. hoc eſt, qualium partium 3. ponetur DE, talium 1. erit EI, ac proinde talium 4, recta DI, ideoq; eius dimidium DQ, earundem partium 2. Quam ob rem reliqua EQ, talium partium erit 1. atque idcirco EQ, tertia pars erit ipſius DE. Eadem ratione EN, tertia pars erit ipſius AE; Ac propterea, cùm latera DE, AE, trianguli AED, proportionaliter ſecentur, [h] recta NQ, parallela erit lateri AD, ſecabitque latera ES, ED, trianguli DES, (quod quidem pars eſt trianguli AED.) proportionaliter, ideoque, cùm EQ, ſit tertia pars ipſius DE; tertia pars erit ER, ipſius SE; Ac proinde SR, duæ tertiæ partes eiuſdem SE. Quoniam igitur vtraque HG, NQ, ex SE, duas tertias partes abſtulit, in eodem puncto R, ſecabitur SE, à rectis HG, NQ; Atque idcirco & ipſæ HG, NQ, in eodem ſeſe puncto interſecabunt. [i] Quare in eodem ſunt plano, propterea q; & rectæ HQ, QG, GN, NH, in eodem cum ipſis plano. Planum igitur eſt quadrilaterum NQ. Eademque eſt ratio de cæteris quinque. Quod autem & rectangulum ſit, nunc demonſtremus.

CVM oſtenſa ſit HG, ipſi BC, parallela, atq; adeò triangulum SHG, ſimile triangulo SBC, ex coroll. propoſ. 4. lib. 6. [k] Erit vt SH, ad HG, ita SB, ad BC; & permutãdo, vt SH, ad SB, ita HG, ad BC:

[a] 15. quarti decimi.
[b] 4. primi.
[c] 4 primi.
[d] 4 primi.
[e] 18. quarti decimi.
[f] 2. ſexti.
[g] 15. quarti decimi.
[h] 2. ſexti.
[i] 2. vndec.
[k] 2. ſexti.

ad B C. Est autem S H, tertia pars ipsius S B: Igitur & H G, tertia pars erit lateris B C. Hac eadem ratione ostendemus N Q, tertiam esse partem lateris A D. Cùm ergo latera B C, A D, sint æqualia, erunt & eorum tertiæ partes H G, N Q, æquales. Ac proinde cùm subtendantur æqualibus lateribus H N, G N; G Q, H Q; N G, Q G; N H, Q H; [a] æquales erunt quatuor anguli, H N G, N G Q, G Q H, Q H N. Quocirca cùm ipsi sint quatuor rectis æquales, vt ostendimus ad propos. 32. lib. 1. recti erunt: idcoq; quadratum erit N Q. Eademq; ratione quadrata erunt reliqua quadrilatera: Ac propterea cubum constituent: qui ideò pyramidi dicetur inscriptus, licet impropriè, quòd quatuor eius anguli E, G, H, I, in centris quatuor basium pyramidis, quatuor verò reliqui, N, O, P, Q, in bifariis sectionibus perpendicularium ex angulis pyramidis ad eius bases ductarum resideant, vt constat. [a] 8. primi.

ALITER. In data pyramide describatur Octaedrum, & in hoc Octaedro cubus: factumq; erit, quod iubetur. Quoniam enim octo anguli cubi statuuntur in centris octo basium Octaedri, quarum quatuor sunt in quatuor basibus pyramidis, vt constat ex propos. 2. huius lib. habentque eadem centra cum ipsis, vt mox ostendemus: fit, vt quatuor anguli cubi resideát in centris quatuor basium pyramidis, quemadmodum etiam in priori demonstratione dictum est. Rursus, quia reliquæ quatuor bases Octaedri parallelæ sunt basibus pyramidis, vt constat ex figura propos. 2. huius lib. ([b] cùm enim rectæ E G, E H, parallelæ sint rectis B C, B D, [c] erunt quoq; triangula E G H, B C D, per illas rectas ducta, inter se parallela, & sic de cæteris.) fit, vt perpendiculares ab angulis pyramidis in bases oppositas demissæ, sint quoque ad illas quatuor reliquas bases Octaedri perpendiculares, ex scholio propos. 14. lib. 11. Quare cùm prædictæ bases abscindant ex pyramide pyramides similes toti, cadent illæ perpendiculares in centra dictarum basium, quemadmodum & in centra basium totius pyramidis cadunt. [d] Et quia dictæ quatuor bases Octaedri diuidunt illas perpendiculares proportionaliter cum lateribus pyramidis, hoc est, bifariam: efficitur, vt reliqui quatuor anguli cubi statuantur in mediis punctis quatuor perpendicularium, veluti prior demonstratio docuit. Constat ergo cubum in pyramide esse descriptum, vt prius. In data itaque pyramide cubum descripsimus. Quod faciendum erat. [b] 2. huius. [c] 15. vndec. [d] 17. vndec.

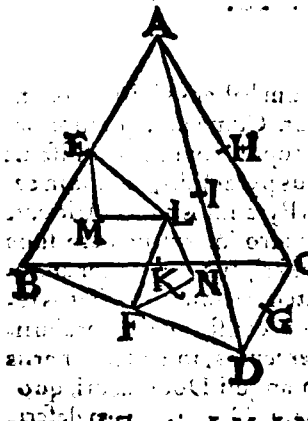
COROLLARIVM I.

CONSTAT ex his, idem esse centrum pyramidis, & cubi in ea descripti. Nam diametri cubi N F, O G, P H, Q I, cùm sint dimidiæ partes perpendicularium ex angulis pyramidis per eius centrum ad bases demissarum, per E, centrum pyramidis transeunt.

COROLLARIVM II.

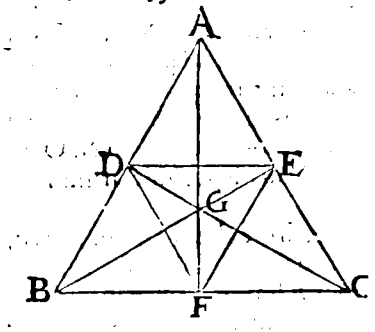
INFERTVR quoque, rectam, quæ coniungit bifarias sectiones oppositorum laterum pyramidis, transire per centrum pyramidis, triplamq; esse lateris cubi in pyramide descripti. Cùm enim E R, ex E, centro cubi, in R, centrum basis G N H Q, ducta, dimidium sit lateris cubi, vt constat; Recta R S, dupla ipsius E R, æqualis erit lateri cubi. Cùm igitur R S, ostensa sit tertia pars ipsius S T; perspicuum est, rectam S T, coniungentem S, & T, bifarias sectiones laterum oppositorum pyramidis A D, B C, transire per centrum pyramidis, triplamq; esse lateris cubi R S.

LEMMA.



IDEM autem esse centrum Pyramidis, & Octaedri in ea descripti, idemq; centrum basis pyramidis, & basis Octaedri in ea descripti, ita demonstrabimus. Sit primùm pyramis A B C D, cuius omnia sex latera bifariam secentur in E, F, G, H, I, K; & ex L, centro Pyramidis in bases A B D, B C D, perpendiculares demittantur L M, L N, quæ in centra circulorum dictas bases circumscribentium cadent, ex corollario lemmatis primi, propositionis decimæ, libri decimiquarti. Coniunctis autem rectis L E, E M, L F, F N; quoniam latera L M, M E, trianguli L M E, æqualia sunt lateribus L N, N F, trianguli L N F, (cùm enim circuli bases A B D, B C D, circumscribentes sint æquales, æqualiter distabunt ipsi à centro L, per lemma secundi, propositionis 10. lib. 14. Ac propterea eorum distantiæ L M, L N, æquales erunt. Sic quoque æquales erunt M E, N F, distantiæ rectarum æqualium A B, B D, à centris M, & N, circulorum æqualium) angulosq; comprehendunt rectos, per defin. 3. lib. 11. [a] Æquales erunt recta L E, L F. Eademq; ratione hisce æquales erunt, & inter se recta L G, L H, L I, L K. Quare cùm anguli Octaedri in pyramide descripti constituantur in punctis E, F, G, H, I, K, vt ex 2. propos. huius lib. constat: Erit L, centrum [a] 4. primi.

Octaedri, cùm ab eo omnes lineæ cadentes in eius angulos sint æquales. Cùm igitur & L, centrum fuerit pyramidis; idem erit centrum pyramidis & Octaedri in ea descripti.



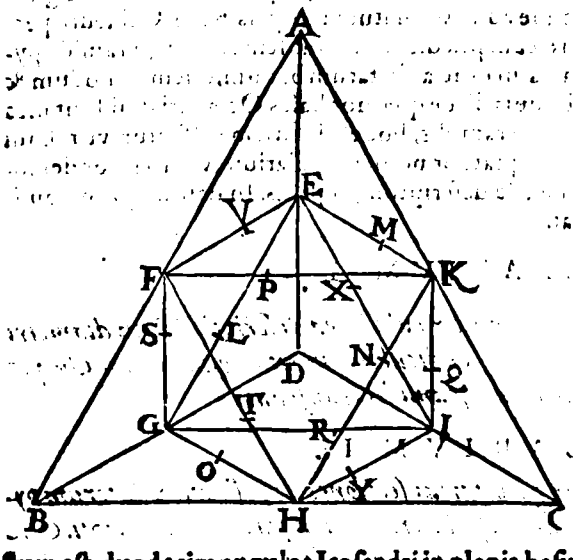
a 4. primi.

Sit deinde in basi pyramidis A B C, basis Octaedri D E F, quæ secabit illius latera bifariam, vt patet ex prop. 2. huius lib. sit autem G, centrum trianguli A B C, à quo ad angulos vtriusque basis rectæ ducantur. Quia igitur latera A G, A D, lateribus B G, B F, æqualia sunt, angulosq; continent æquales, nimirum semisses angulorum æqualium trianguli æquilateri, [a] erunt & bases G D, G F, æquales: Eadem q; ratione erit G E, vtrique G D, G F, æqualis. Igitur G, centrum est trianguli D E F. quod est propositum.

PROBL. 19. PROPOS. 19.

In data Pyramide Icosaedrum describere.

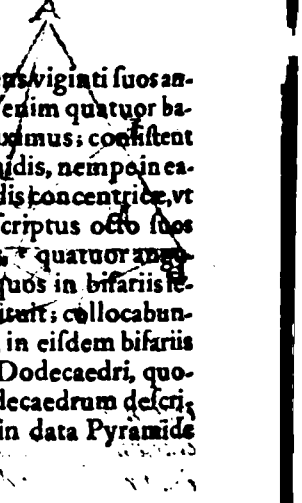
a 2. quintidecimi.



Data Pyramidi A B C D, [a] inscribatur Octaedrum E F G H I K, cuius omnia duodecim latera secentur extrema ac media ratione, hac lege, vt bina sumantur ex singulis angulis sibi respondentia, hoc est, in angulos oppositos quadratorũ Octaedri cadentia, vt in propos. 16. huius lib. diximus, qualia sunt E G, E K; H K, H G; K E, K I; G I, G F; F H, F E; I E, I H, in punctis L, M, N, O, P, Q, R, S, T, V, X, Y. Nam si quodlibet horum punctorum cum quinq; proximis coniunxerimus lineis rectis, vt M, cum V, L, X, P, & Q, &c. descriptum erit Icosaedrum in dicto Octaedro, vt constat ex propos. 16. huius lib. habens omnes duodecim angulos in duodecim præfatis sectionibus duodecim laterum Octaedri. Cùm ergo hæc ipsa latera Octaedri in planis basium Pyramidis sint ducta; manifestum est, duodecim angulos Icosaedri in planis basium pyramidis constitui, ternos scilicet in singulis, quod & serna latera Octaedri in singulis basibus pyramidis ducta sint. Nam in basi A B C, existũt latera F H, H K, K F; In A B D, latera E F, F G, G E; In B D C, latera G H, H I, I G; In A D C, denique latera I K, K E, E I. Quare dictum Icosaedrum in Pyramide descriptum erit, per defin. 11. lib. 11. cuius quidem quatuor bases M X Q, R O Y, L S V, N P T, in quatuor basibus Pyramidis existunt, vt constat. In data igitur Pyramide Icosaedrum descripsimus. Quod erat faciendum.

PROBL. 20. PROPOS. 20.

In data Pyramide Dodecaedrum describere.



b 19. quintidecimi.
c 5. quintidecimi.
d 8. quintidecimi.
e 18. quintidecimi.

Pyramidi datæ [b] inscribatur Icosaedrum, [c] & in hoc Dodecaedrum habens viginti suos angulos in centris viginti basium Icosaedri; Factumque erit, quod iubetur. Cùm enim quatuor bases Icosaedri existant in quatuor basibus pyramidis, vt in præcedenti propos. diximus; consistent quatuor anguli Dodecaedri dicto Icosaedro inscripti in quatuor basibus pyramidis, nempe in earum centris. Sunt enim dictæ quatuor bases Icosaedri quatuor basibus Pyramidis concentricæ, vt constat ex 2. coroll. propos. 16. huius lib. Deinde, [d] quia cubus Dodecaedro inscriptus octo suos angulos in octo angulis Dodecaedri collocat: Item cubus pyramidi inscriptus, [e] quatuor angulos in centris basium pyramidis, de quibus iam dictum est, quatuor autem reliquos in bifariis sectionibus perpendicularium ex angulis pyramidis in bases demissarum constituit; collocabuntur quatuor anguli Dodecaedri, cum his quatuor angulis cubi conuenientes, in eisdem bifariis sectionibus perpendicularium dictarum: supersunt autem duodecim anguli Dodecaedri, quorum bini singulis lateribus Pyramidis supponentur; Atque adeò dictum Dodecaedrum descriptum esse dicetur in pyramide proposita, etiam si non propriè. Quam ob rem in data Pyramide Dodecaedrum descripsimus. Quod faciendum erat.

PROBL. 21. PROPOS. 21.

In dato solido regulari sphæram describere.

Ex cen-

Ex centro ſphæræ datum ſolidum complectentis ad ſingulas baſes perpendiculares demittantur, quæ ex corollemmatis 1. propoſ. 10. lib. 14. cadent in centra circulorum baſes circumſcribentium, ideoque æquales erunt, quòd dicti circuli, æquales cùm ſint, æqualiter à centro diſtent, ex lemmate 2. eiuſdem propoſ. Quapropter ſphæra, cuius ſemidiametri ſunt præfatæ perpendiculares æquales, in ſolido deſcripta erit, cum eius ſuperficies conuexa ſingulas baſes in earum centris contingat.

SCHOLIVM.

ITAQVE, cum quodlibet quinque ſolidorum regularium in quatuor reliquis inſcribatur, vt ſint in vniuerſum viginti inſcriptiones, vnum duntaxat Dodecaedrum improprie deſcribitur in cubo, Octaedro, atque Pyramide, vt perſpicuum eſt ex propoſ. 13. 17. & 20. huius lib. Similiter vnus tantummodo cubus non proprie in Pyramide deſcribitur, vt ex propoſ. 18. huius lib. eſt manifeſtum. Nam, vt proprie ſolidum aliquod in ſolido dicatur deſcribi, neceſſe eſt, omnes angulos ſolidi inſcripti conſtitui vel in angulis, vel in lateribus, vel denique in planis, ſiue baſibus ſolidi, cui inſcribitur, vt defin. 31 lib. 11. expoſuimus: quæ quidem conditio Dodecaedro ſi deſcribatur in cubo, Octaedro, & Pyramide; nec non & cubo, ſi deſcribatur in Pyramide, non conuenit.

CAETERVM inter omnia quinque ſolida regularia, vnum Octaedrum reliqua quatuor mutuò ſibi inuicem ſuſcipit inſcripta. [a] *In Octaedro enim deſcribitur Icoſaedrum conſtituens duodecim ſuos angulos in duodecim punctis, quibus duodecim latera Octaedri extrema ac media ratione ſecantur. Deinde* [b] *Icoſaedro imponitur Dodecaedrum, quod eidem Octaedro inſcriptum eſt, vt conſtat ex propoſ. 17. huius lib. Poſt hac in Dodecaedro* [c] *deſcribitur cubus, cuius octo anguli, cum octo angulis Dodecaedri conuenientes, centra baſium Octaedri poſident; ac propterea & cubus ipſe in Octaedro deſcriptus eſt.* [d] *Denique in cubo Pyramis includitur, quæ ideò in Octaedro dicetur eſſe deſcripta, quòd eius anguli quatuor, cum quatuor angulis cubi conuenientes, in centris quatuor baſium Octaedri reſideant. Hoc autem priuilegium reliquis ſolidis regularibus denegari, perſpicuum eſt ex dictis.*

a 16. quintidecimi.
b 5. quintidecimi.
c 8. quintidecimi.
d 1 quintidecimi.

NEQVE verò prætereundum eſt, Dodecaedrum, ſibiq; inſcriptum cubum, & huic cubo inſcriptam pyramidem, eadem ſphæra comprehendi. [e] *Cùm enim quatuor anguli pyramidis ex octo angulis cubi quatuor poſideant,* [f] *conueniantq; omnes anguli cubi cum octo angulis Dodecaedri; liquidò conſtat, ſphæram Dodecaedro circumſcriptam complecti quoq; cubum atque Pyramidem, cum ſphæræ illius ſuperficies per horum ſolidorum angulos incedat.*

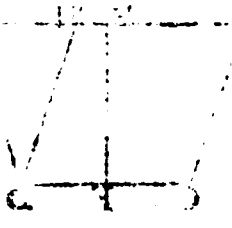
e 1. quintidecimi.
f 8. quintidecimi.

PARI ratione ex dictis manifeſtum eſt, Dodecaedrum, cubum atque Pyramidem ſimiliter inſcribi Icoſaedro, Octaedro, & Pyramidi. Illorum enim anguli in horum baſium centris conſtituuntur, vt demonſtratum eſt. In centris quidem baſium Icoſaedri propoſ. 11. & 12. In centris verò baſium Octaedri, propoſ. 17. 4. & 6. In centris denique baſium pyramidis propoſ. 20. & 18. huius lib.

VLTIMO porrò prioribus huius lib. propoſitionibus omnes delineationes inſcriptionéſve quinque ſolidorum regularium, vnius in alio, quotquot excogitari poſſent, abſoluimus, cùm in quolibet reliqua quatuor deſignauerimus. In Pyramide enim Octaedrum, cubum, Icoſaedrum, atque Dodecaedrum, propoſ. 2. 18. 19. 20. In Octaedro verò Pyramidem, cubum, Icoſaedrum, & Dodecaedrum, propoſ. 6. 4. 16. 17. In cubo deinde Pyramidem, Octaedrum, Icoſaedrum, ac Dodecaedrum, propoſ. 1. 3. 14. 15. In Icoſaedro autem Pyramidem, Octaedrum, cubum, atque Dodecaedrum, propoſ. 12. 13. 11. 5. In Dodecaedro denique, Pyramidem, Octaedrum, cubum, & Icoſaedrum, propoſ. 10. & 8. 7. deſcripſimus. At verò poſteriori vnica propoſitione, qua arte in quouis ſolido regulari ſphæra depingatur, docuimus.

FINIS ELEMENTI QVINTIDECIMI.





ELEMENTVM SEXTVMDECIMVM:

Quo variæ ſolidorum regularium ſibi mutuò inſcriptorum, & laterum eorundem comparationes explicantur, à Franciſco Fluſſate Candalla adiectum; & de quinque corporibus,

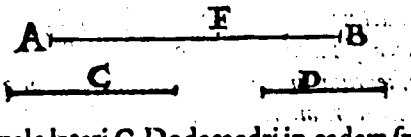
LIBER TERTIVS.

QVEMADMODVM libro 14. traditæ ſunt comparationes quam plurimæ figurarum regularium, & laterum earundem in eadem ſphæra deſcriptarum, quarum quidem deſcriptionem libro 13. expoſuit Euclides; ita etiam Franciſcus Fluſſas Candalla hoc lib. 16. inter ſe comparat eaſdem figuras regulares ſibi mutuò inſcriptas, nec non & earundem latera, quam quidem inſcriptionem præcedenti lib. 15. tradidimus. Itaque eam connexionem habet hic liber 16. cum præcedenti 15. quam quartusdecimus cum terciodecimo habuit; vt imperfecta quodammodo videri poſſit tractatio hæc quinque corporum regularium, ſi liber hic decimusſextus non adiungatur.

THEOR. 1. PROPOS. 1.

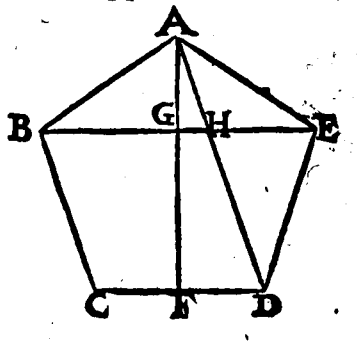
SI in Dodecaedro cubus deſcribatur, & in hoc cubo aliud Dodecaedrum: erit proportio Dodecaedri exterioris ad Dodecaedrum interius proportionis, q̃ habet maius ſegmentũ ad minus rectę lineæ diuiſæ extrema ac media ratione, triplicata.

LATVS cubi in Dodecaedro, cuius latus C, deſcripti ſit AB, & latus Dodecaedri in cubo lateris AB, deſcripti ſit D; diuidaturq; AB, latus cubi in E, extrema ac media ratione. Dico Dodecaedrum lateris C, ad Dodecaedrum lateris D, proportionem habere triplicatam proportionis, quã habet AE, maius ſegmentum ad EB, minus. Cum enim, vt in ſcholio vltimæ propoſ. lib. 15. docuimus, Dodecaedrum, cubusq; in illo deſcriptus, eadem comprehendantur ſphęra; Diuiſo autem latere cubi extrema ac media ratione, maius ſegmentum ſit latus Dodecaedri in eadẽ ſphæra cum cubo deſcripti, ex coroll. 1. propoſ. 17. lib. 13. erit AE, maius ſegmentum lateris cubi æquale lateri C, Dodecaedri in eadem ſphæra, & circa cubum illum deſcripti. Rurſus quia ex demonſtratis in ſcholio propoſ. 13. lib. 15. ſi diuidatur latus cubi extrema ac media ratione, minus ſegmentum eſt latus Dodecaedri in cubo illo deſcripti; erit EB, minus ſegmẽtum lateris cubi æquale lateri D, Dodecaedri, quod in illo cubo deſcribitur; Ac propterea erit vt C, latus Dodecaedri cubo circumſcripti ad D, latus Dodecaedri eidem cubo inſcripti, vt AE, maius ſegmẽtum ad EB, minus: Atqui Dodecaedrum lateris C, ad Dodecaedrum lateris D, proportionem habet triplicatam lateris C, ad latus D, ex coroll. propoſ. 17. lib. 12. Igitur idem Dodecaedrum lateris C, ad Dodecaedrum lateris D, proportionem quoque habet triplicatam maioris ſegmenti AE, ad minus ſegmentum EB. Quocirca ſi Dodecaedro cubus inſcribatur, &c. Quod erat demonſtrandum.



THEOR. 2. PROPOS. 2.

LINEA perpendicularis ex quouis angulo pentagoni æquilateri & æquianguli in latus oppoſitum demiſſa, ſecatur à recta illum angulum ſubtendente, extrema ac media ratione.



IN pentagono æquilatero, & æquiangulo ABCDE, ex angulo A, ad latus oppoſitum CD, perpendicularis demittatur AF. Dico AF, à recta BE, ſubtendente angulum A, ſecari in G, extrema ac media ratione. Ducta enim recta AD, quæ ſecet BE, in H; quoniam BE, recta lateri CD, ex ſcholio propoſ. 8. lib. 11. eſt parallela, [a] ſecabuntur rectæ AF, AD, proportionaliter: [b] Atqui AD, in H, ſecta eſt extrema ac media ratione, eſtq; maius ſegmentum DH. Igitur & AF, in G, ſimiliter erit ſecta. Quocirca linea perpendicularis ex quouis angulo, &c. Quod erat demonſtrandum.

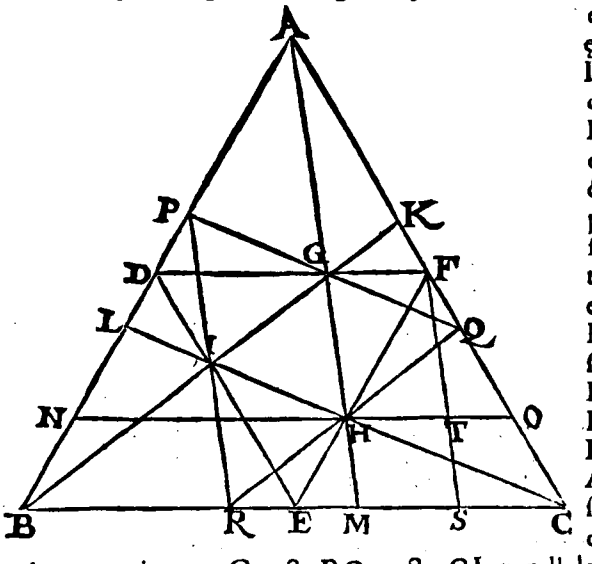
[a] 2. ſexti. [b] 18. terciidecimi.

THEOR.

THEOR. 3. PROPOS. 3.

Si ab angulis trianguli Pyramidis ducantur rectæ oppoſita latera ſecantes extrema ac media ratione, ita vt prope quemuis angulum ſit maius ſegmentũ vnius lateris, & minus alterius: Hæ ſectionibus ſuis in medio producent baſin Icoſaedri in dicta Pyramide deſcripti, inſcriptam quidem alij triangulo æquilatero, cuius anguli latera trianguli Pyramidis ſecant extrema ac media ratione, & latera ipſa bifariam ſecantur ab angulis baſis Icoſaedri.

TRIANGVLVM Pyramidis ſit A B C, cuius latera ſecẽtur bifariam in D, E, F, iunctis rectis D E, E F, F D, quibus rurſum ſectis extrema ac media ratione in G, H, I, iungantur rectæ G H, H I, I G, conſtituentes G H I, triangulum Icoſaedri in dicta Pyramide deſcripti, vt conſtat ex propoſ. 19. lib. 15. Secentur deinde latera trianguli A B C, extrema ac media ratione in K, L, M, iunctis rectis B K, C L, A M. Dico has rectas ſuis ſectionibus producere triangulum Icoſaedri G H I, hoc eſt, rectam B K, tranſire per puncta G, I; & rectam C L, per puncta H, I; & rectã A M, per puncta G, H. Ducta enim per H, recta N O, ipſi B C, parallela; erit triangulum F H O, triangulo F E C, ſimile, ex coroll. propoſ. 4. lib. 6. ideoq; & æquilaterum, cùm & F E C, æquilaterum ſit, quippe quod ſimile ſit triangulo A B C, per idem coroll. Quare H O, recta æqualis eſt rectæ F H, maiori ſegmento rectæ F E, ſeu D F, ipſi æqualis: (Eſt enim & D E F, triangulum æquilaterum, cùm eius latera ſubtendant angulos æquales trianguli æquilateri rectis æqualibus, dimidiis ſcilicet æqualium laterũ eiuſdem trianguli comprehenſos; [a] ideoq; æqualia ſint.) [b] Eſt autẽ & N H, æqualis toti D F, in parallelogrammo D H, [c] propterea quòd F H, D F, parallelæ ſunt rectis A B, B C, ſeu N O. Igitur recta N O, compoſita ex N H, tota, & H O, maiori ſegmento, [d] ſecta erit in H, extrema ac media ratione; Ac proinde, cùm tres parallelæ B C, N O, D F, ſimiliter ſint ſectæ in M, H, G, nimirum extrema ac media ratione; Recta autem A M, ex iis, quæ demonſtrauimus ad propoſ. 4. lib. 6. ſecet eaſdem ſimiliter; liquidò conſtat, ipſam A M, tranſire per puncta G, H. Haud ſecus oſtendemus B K, per puncta G, I, & C L, per puncta H, I, tranſire, ſi per G, & I, rectæ ducantur parallelæ lateribus A C, A B; Atque idcirco rectæ B K, C L, A M, ſuis ſectionibus producent triangulum Icoſaedri G H I.

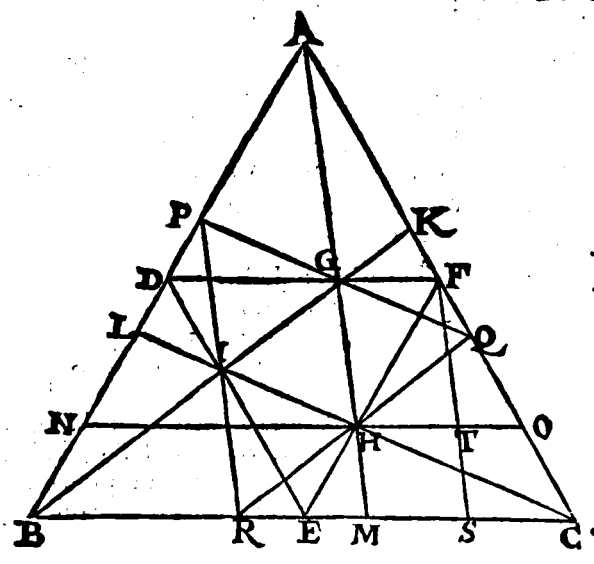


[a] 4 primi.
[b] 34. primi.
[c] 2. ſexti.
[d] 5. tertiædecimi.

AGATVR iam per G, recta P Q, rectæ C L, parallela. Quoniam igitur A F, æqualis eſt rectæ D F, ſeu rectæ F E, cuius maius ſegmentum fuit F H, hoc eſt, F O, illi æqualis; Erit quoq; F O, maius ſegmentum rectæ A F; [e] ac proinde tota A O, ſecta in F, extrema ac media ratione; [f] Eſt autem vt A F, ad F O, ita A G, ad G H, ob triangulum A H O; & vt A G, ad G H, ita A Q, ad Q C, & A P, ad P L, ob triangula A H C, A H L. Igitur & rectæ A H, A C, A L, ſecantur in G, Q, P, extrema ac media ratione, ſuntque maiora ſegmenta A G, A Q, A P. Rectæ ergo A Q, A L, ſegmenta maiora rectarum æqualium A C, A B, æquales erunt. Quia verò eſt [g] vt A Q, maius ſegmentum, ad Q C, minus, ita A L, tota ad A P, maius ſegmentum; Et eſt A Q, recta rectæ A L, æqualis: Erit & Q C, recta æqualis rectæ A P. Quare & recta A P, minus ſegmentum erit lateris A B, maiusque reliqua B P; ac propterea recta P Q, ſecabit latera B A, A C, extrema ac media ratione. Eadem ratione recta P R, quæ per I, ducitur, parallela rectæ A M, ſecabit latera C B, B A, extrema ac media ratione, ideoque in punctum P, cadet. Non aliter recta R Q, per H, ducta parallela rectæ B K, latera A C, C B, ſecabit extrema ac media ratione, atque adeò in puncta R, Q, cadet. Quoniam verò ſingula latera trianguli P Q R, cùm ſubtendant angulos æquales trianguli æquilateri æqualibus lineis comprehenſos, nimirum maiore & minore ſegmento ſingulos, [h] æqualia inter ſe ſunt; erit triangulum P Q R, ex ipſis compoſitum, æquilaterum, cuius quidem latera bifariam ſecantur ab angulis trianguli Icoſaedri G H I: (Cùm enim in triangulo A C L, recta P Q, parallela ſit lateri C L, ſecabuntur P Q, L C, in eaſdem rationes, ex iis, quæ ad propoſ. 4. lib. 6. demonſtrauimus: Diuiditur autem C L, bifariam in H, ob triangulum A C L, in quo F H, parallela eſt lateri A L, [i] ſecans proportionaliter latera C A, C L, Igitur & P Q, bifariam ſecatur in G. Eademque eſt ratio de reliquis Q R, R P.) Ac propterea triangulum Icoſaedri G H I, inſcriptum eſt triangulo æquilatero P Q R, cuius anguli diuidunt latera baſis pyramidis extrema ac media ratione, & latera ipſa bifariam ſecantur in G, H, I, ab angulis baſis Icoſaedri G H I. Quapropter, ſi ab angulis trianguli Pyramidis, &c. Quod oſtendendum erat.

[e] 5. tertiædecimi.
[f] 2. ſexti.
[g] 2. quartædecimi.
[h] 4 primi.
[i] 2. ſexti.

COROLLARIVM.

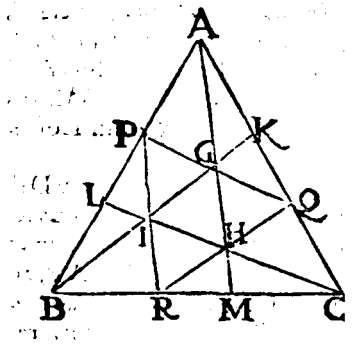


Ex hu facilè colligi poteſt, latus Icoſaedri Octaedro inſcripti, maius eſſe ſegmentum rectæ diuiſæ extrema ac media ratione, quæ ab vno angulo baſis Octaedri ductæ ſecat latus oppoſitum extrema quoque ac media ratione. Cùm enim, vt conſtat ex propoſ. 16. lib. 15. G H I, triangulum ſit Icoſaedri in Octaedro, cuius baſis D E F, deſcripti; ducatur ex angulo F, trianguli F E C, quod triangulo D E F, eſt æquale, recta F S, parallela rectæ A M, ſecans M C, H O, in S, & T. [a] *Cùm igitur M C, bifariam ſecetur in S, ob triangulum A M C;* [b] *ſitq; M S; ipſi G F, æqualis, ob parallelogrammũ G S; Erit & S C, æqualis eidem G F, minori ſegmento rectæ D F; Ac propterea cùm totæ D F, E C, æquales ſint; erit quoque reliqua E S, reliquæ D G, maiori ſegmento æqualis: Idcoq; E C, in S, ſecta erit extrema ac media ratione. Deinde* [c] *quia F E, F S, ſimiliter ſecantur; ſecatur autem F E, extrema ac media ratione; ſecabitur & F S, in T, extrema ac media ratione, maiusq; ſegmentum erit F T, recta* [d] *æqualis exiſtens lateri Icoſaedri G H, ob parallelogrammum G T. Igitur F T, latus Icoſaedri Octaedro inſcripti, maius eſt ſegmentum rectæ F S, quæ diuidit E C, latus Octaedri extrema ac media ratione, ex angulo F, demiſſa. Quod eſt propoſitum.*

a 2. ſexti.
b 34. primi
c 2. ſexti.
d 34. primi

THEOR. 4. PROPOS. 4.

MINVS ſegmentum lateris Pyramidis extrema ac media ratione ſecti, duplum eſt potentia lateris Icoſaedri in ea Pyramide deſcripti.



BASIS Pyramidis ſit A B C, cuius latera extrema ac media ratione ſecentur in K, L, M, & ductis rectis B K, C L, A M, producentibus G H I, baſim Icoſaedri in illa pyramide deſcripti, inſcriptã triangulo æquilatero P Q R, cuius anguli latera trianguli A B C, ſecent extrema ac media ratione in P, Q, R, & ipſa latera P Q, Q R, R P, bifariam diuidantur in G, H, I, vt in propoſ. præcedenti demonſtratum eſt. Dico A P, minus ſegmentum lateris Pyramidis duplum eſſe potentia lateris Icoſaedri H I. Cùm enim P Q, dupla ſit potentia minoris ſegmenti A P, ex coroll. 1 propoſ. 16. lib. 15. quadrupla verò potentia rectæ H I, ex ſcholio propoſ. 4. lib. 2. quòd P Q, recta dupla ſit rectæ P G, hoc eſt, ſibi æqualis H I, ob parallelogrammum P H; Erit P Q, potentia 4. & A P, 2. & H I, 1. Quamobrem A P, dupla erit potentia rectæ H I. Minus ergo ſegmentum lateris, &c. Quod erat demonſtrandum.

COROLLARIVM.

SEQVITVR ex his, latus Icoſaedri in Pyramide deſcripti, eſſe Apotomen. [e] *Cùm enim diameter ſphæræ potentia ſeſquialtera ſit lateris Pyramidis; ſi diameter ponatur Rationalis, erit & latus Pyramidis Rationale,* [f] *cùm diametro potentia ſit commenſurabile.* [g] *Quare minus ſegmentum lateris Pyramidis extrema ac media ratione ſecti Apotome erit; Atque adeò* [h] *cùm minori ſegmento lateris Pyramidis latus Icoſaedri potentia ſit commenſurabile; (oſtendimus enim minus ſegmentum potentia eſſe duplum lateris Icoſaedri.) Erit & latus Icoſaedri, ex ſcholio propoſ. 104. lib. 10. Apotome.*

e 13. tertiidecimi.
f 6. decimi
g 6. tertiidecimi.
h 6. decimi

THEOR. 5. PROPOS. 5.

LATVS cubi potentia dimidium eſt lateris Pyramidis in eo deſcriptæ: Latus verò Pyramidis duplum eſt longitudine lateris Octaedri ſibi inſcripti: latus denique cubi duplum eſt potentia lateris ſibi inſcripti Octaedri.

CVM

CVM enim latus Pyramidis in cubo descriptæ diameter sit basis cubi, vt constat ex propos.1. lib.15. Sit autem quadratum huius diametri duplum basis cubi, hoc est, quadrati lateris cubi, ex scholio propos. 47. lib. 1. Manifestum est, latus cubi dimidium esse potentia lateris Pyramidis in cubo illo descriptæ.

RVRSVS, quia rectæ coniungentes bifarias sectiones laterum Pyramidis constituunt Octaedrum in Pyramide descriptum, vt liquet ex propos.2. lib.15. Est autem latus trianguli æquilateri duplum rectæ coniungentis bifarias eius sectiones, cùm ea recta æqualis sit dimidio lateris trianguli, vt constat ex coroll. propos. 4. lib. 6. [a] Nam cùm sit parallela tertio lateri, auferet triangulũ æquilaterũ, &c. Perspicuũ est latus pyramidis duplũ esse longitudine lateris Octaedri sibi inscripti. [a] 2. sexti.

DENIQVE [b] quia diameter sphæræ, seu Octaedri potentia est dupla lateris Octaedri; Est autem latus cubi æquale diametro Octaedri sibi inscripti, cùm diameter Octaedri coniungat centra basium cubi oppositarum, vt in coroll. propos. 3. lib. 15. diximus: patet, latus cubi potentia esse duplum lateris Octaedri in eo descripti. Quocirca latus cubi potentia dimidium est lateris Pyramidis, &c. Quod erat ostendendum. [b] 14. tertij decimi.

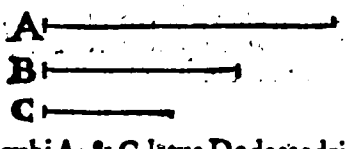
THEOR. 6. PROPOS. 6.

LATVS Dodecaedri maius segmentum est rectæ, quæ potentia est dimidia lateris Pyramidis sibi inscriptæ.

CVM enim Pyramis inscripta cubo, descripta sit quoque in Dodecaedro, cui ille cubus inscribitur, vt docuimus propos. 10. lib. 15. Sit autem latus Dodecaedri maius segmentum, ex coroll. 1. propos. 17. lib. 13. lateris cubi, qui in eo describitur; [c] existat denique latus cubi dimidium potentia lateris Pyramidis sibi inscriptæ: Apertè colligitur, latus Dodecaedri maius esse segmentum rectæ, quæ potentia dimidia est lateris Pyramidis sibi inscriptæ. Quod erat demonstrandum. [c] 5. sextidecimi.

THEOR. 7. PROPOS. 7.

SI in cubo describatur & Icosaedrum, & Dodecaedrum: Latus Icosaedri medium proportionale erit inter latus cubi, & Dodecaedri.



SIT latus cubi A, & latus Icosaedri in eo descripti B, latus denique Dodecaedri in eodem cubo descripti C. Dico B, latus Icosaedri medio loco esse proportionale inter A, latus cubi, & C, latus Dodecaedri. Cùm enim, ex iis, quę in scholio propos. 14. lib. 15. demonstrata sunt, B, latus Icosaedri maius segmentum sit lateris cubi A, & C, latus Dodecaedri, per ea, quæ in scholio propos. 13. eiusdem lib. ostendimus, minus segmentum sit eiusdem lateris cubi: Planum fit, ita esse A, totam ad B, maius segmentum; vt B, maius segmentum ad C, minus. Si in cubo itaque describatur & Icosaedrum, &c. Quod ostendendum erat.

THEOR. 8. PROPOS. 8.

LATVS Pyramidis potentia Octodecuplum est lateris cubi in ea descripti.

CVM enim, per ea, quæ propos. 18. lib. 15. sunt demõstrata, latus Pyramidis longitudine triplum sit diametri basis cubi in ea descripti, (ostensum enim est ibi, G H, diametrum basis cubi inscripti, tertiam esse partem lateris Pyramidis B C.) [d] Et quadrata proportionem habeant laterum duplicatam: Erit quadratum lateris Pyramidis noncuplum quadrati diametri basis cubi in ea descripti, cùm noncupla proportio sit triplæ duplicata, vt in his numeris 1. 3. 9. apparet. Quare, cùm quadratum diametri basis cubi duplum sit ipsius basis cubi, ex scholio propos. 47. lib. 1. fit, vt si ponatur basis cubi, hoc est, quadratum lateris cubi 1. quadratum eiusdem basis diametri sit 2. & quadratum lateris pyramidis 18. Quamobrem latus Pyramidis potentia octodecuplum est lateris cubi in ea descripti. Quod erat ostendendum. [d] 20. sexti.

THEOR. 9. PROPOS. 9.

LATVS Pyramidis potentia octodecuplum est rectæ extrema ac media ratione sectæ, cuius maius segmentum latus est Dodecaedri in pyramide descripti.

CVM enim cubus in Dodecaedro descriptus, inscriptus quoque sit Pyramidi, cui illud Dodecaedrum inscribitur, vt docuimus in scholio propos. vlt. lib. 15. [e] Erit latus Pyramidis potentia octodecuplum lateris cubi sibi, & Dodecaedro inscripti: Huius autem lateris cubi extrema ac media ratione secti maius segmentum est, ex coroll. 1. propos. 17. lib. 13. latus Dodecaedri in pyramide descripti, in quo nimirum cubus est descriptus. Igitur latus Pyramidis potentia octodecuplum est rectæ extrema ac media ratione sectæ, cuius maius segmentum latus est Dodecaedri in Pyramide descripti. Quod demonstrandum erat. [e] 8. sextidecimi.

THEOR. 10. PROPOS. 10.

SI in Octaedro Icosaedrum describatur: Erit latus Icosaedri potentia duplum minoris segmenti lateris Octaedri extrema ac media ratione diuisi.

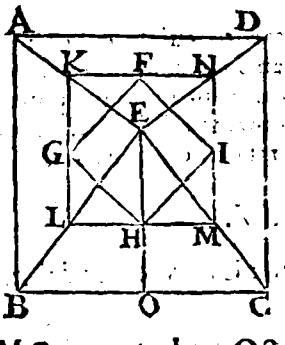
VT enim constat ex propos.16.lib.15.recta coniungens duas sectiones duorum laterum Octaedri rectum angulum continentium prope minora segmenta, (qualis fuit ibi recta G I, subtendens angulum rectum G A I, minoribus segmentis A G, A I, comprehensum;) latus est Icosaedri in Octaedro descripti. Quare, [a] cùm hoc ipsum latus Icosaedri possit duo illa minora segmenta æqualia; duplum poterit vnius minoris segmenti. Si in Octaedro ergo Icosaedrum describatur, &c. Quod erat demonstrandum.

[a] 47.primi.

THEOR. 11. PROPOS. 11.

LATVS Octaedri potentia quadruplum sesquialterum est lateris cubi in ipso descripti.

SIT vna sex pyramidum Octaedri A B C D E, cuius basis quadratum A B C D, triangula verò ad E, verticem, A B E, E B C, C E D, D E A, sintq; horum triangulorum centra F, G, H, I, per quæ rectæ ducantur K L, L M, M N, N K, rectis A B, B C, C D, D A, parallelæ. Quod si coniungantur rectæ F G, G H, H I, I F; erit F G H I quadratum cubi in Octaedro descripti, vt demonstrauimus propos. 4.lib.15. Quoniam autem ducta recta E H O, sesquialtera est rectæ E H, per coroll. propos.18.lib. 14. qualium partium 3. ponetur E O, talium 2. erit E H: [b] Atqui vt E O, ad E H, ita est E B, ad E L. Igitur qualium partium 3. continet E B, talium 2. erit E L, seu L M, sibi æqualis; Ac proptorea quadratum lateris Octaedri E B, partium erit 9. & quadratum rectæ L M, nimirum K L M N, partium 4; ideoq; & quadratū lateris cubi G H, videlicet F G H I, talium partium 2. cùm quadratum L N, duplum sit quadrati G I, sibi inscripti, per ea, quæ in scholio propos. 47. lib. 1. demonstrauimus. Est enim L N, quadratum ex diametro quadrati G I, descriptum; [c] cùm G I, diameter (si ducatur) æqualis sit lateri L M. Quapropter latus Octaedri E B, potentia quadruplum sesquialterum est lateris cubi G H, cùm eorum quadrata proportionem habeant, quam 9. 2. Latus igitur Octaedri potentia quadruplum sesquialterum est lateris cubi in eo descripti. Quod erat demonstrandum.



[b] 2. sexti.

[c] 33.primi.

COROLLARIVM

QVIA verò latus cubi extrema ac media ratione diuisum, efficit maius segmentum latus Dodecaedri, cui inscribitur, per coroll.2.propos.13.lib.15. Inscribunturq; Dodecaedrum, & cubus sibi inscriptus, eidem Octaedro, vt docuimus in scholio propos. vltima, lib.15. Perspicuum fit, Octaedri latus esse potentia quadruplum sesquialterum eius recta extrema ac media ratione diuisa, cuius maius segmentum latus est Dodecaedri Octaedro inscripti. Est enim eiusmodi recta latus cubi eidem Octaedro inscripti, cuius quadruplum sesquialterum potentia esse ostendimus latus Octaedri.

THEOR. 12. PROPOS. 12.

LATVS Icosaedri maius segmentum est eius rectæ extrema ac media rationè sectæ, quæ potentia dupla est lateris Octaedri in Icosaedro descripti.

QVONIAM Icosaedri in cubo descripti sex latera opposita in sex basibus cubi collocata sunt, quorum bifarias sectiones cõiungunt tres rectæ lateri cubi æquales, vt constat ex propos.14.lib.15. eiusq; scholio. Et in bifariis sectionibus dictorum sex laterum Icosaedri residunt sex anguli Octaedri in Icosaedro descripti, ex propos.15. eiusdem lib.15. Fit diametrum Octaedri in dicto Icosaedro descripti æqualem esse lateri cubi, in quo Icosaedrum describitur. Quare cùm, per ea, quæ ad propos.14. lib.15. ostendimus, latus Icosaedri sit maius segmentum lateris cubi prædicti extrema ac media ratione diuisi; Erit quoque idem latus Icosaedri maius segmentum diametri Octaedri in illo Icosaedro descripti. [d] Atqui diameter sphæræ, seu Octaedri dupla est potentia lateris Octaedri. Igitur latus Icosaedri maius segmentum est eius rectæ extrema ac media ratione sectæ, quæ potentia dupla est lateris Octaedri in Icosaedro descripti. Quod ostendendum erat.

[d] 14. tertij decimi.

THEOR. 13. PROPOS. 13.

LATVS cubi ad latus Dodecaedri in ipso descripti proportionem habet duplicatam eius, quam habet maius segmentum ad minus rectæ lineæ diuisæ extrema

ma ac media ratione. Latus verò Dodecaedri ad latus cubi in ipso descripti proportionem habet, quam minus segmentum ad maius eiusdem rectæ lineæ.

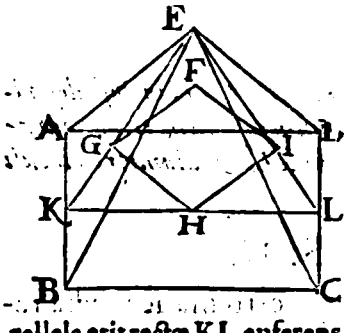
OSTENSVM est in scholio propos. 13. lib. 15. minus segmentum lateris cubi extrema ac media ratione secti, esse latus Dodecaedri in cubo illo descripti. Cùm ergo tota linea extrema ac media ratione diuisa ad minus segmentum proportionem habeat duplicatam proportionis totius lineæ ad maius segmentum, vel maioris segmenti ad minus, (quòd tota linea, maius segmentum, atque minus, sint tres rectæ continuè proportionales:) liquidò constat, proportionem lateris cubi ad latus Dodecaedri in ipso descripti esse quoq; proportionis maioris segmenti ad minus duplicatã.

PRAETEREA, cùm constet ex coroll. 1. propos. 17. lib. 13. maius segmentum lateris cubi extrema ac media ratione diuisi latus esse Dodecaedri, cui cubus inscribitur: manifestum est esse vt latus Dodecaedri, hoc est, malus segmentum, ad latus cubi in ipso descripti, hoc est, ad totam lineam extrema ac media ratione sectam, ita minus segmentum ad maius. Cùm enim sit, vt tota linea ad maius segmentum, ita maius segmentum ad minus; Erit quoque conuertendo, vt maius segmentum ad totam lineam, ita segmentum minus ad maius. Latus ergo cubi ad latus Dodecaedri, &c. Quod erat demonstrandum.

THEOR. 14. PROPOS. 14.

LATVS Octaedri sesquialterum est lateris sibi inscriptæ Pyramidis.

SIT vna sex pyramidum Octaedri ABCDE, cuius basis quadratum ABCD, triangula autem ad verticem E, sint ABE, BBC, CED, DEA, sintq; horum triangulorum centra F, G, H, I, quæ rectis iungantur FG, GH, HI, IF, quadratum cubi in Octaedro descripti constituentibus, vt docuimus in propos. 4. lib. 15. Quoniam verò Pyramis in cubo descripta, describitur quoque in Octaedro, cui cubus imponitur, vt in scholio propos. vltimę lib. 15. exposuimus; Estque latus pyramidis in cubo descriptæ diameter basis cubi, vt constat ex propos. 1. lib. 15. Erit ducta diameter GI, latus Pyramidis in Octaedro dicto descriptæ. Dico igitur latus Octaedri BC, sesquialterum esse lateris Pyramidis GI. Ductis enim rectis EGK, EIL, diuidentur latera AB, CD, bifariam in K, L, ex scholio propos. 12. lib. 13. ipsæque EK, EL, sesquialteræ erunt rectarum EG, EI, per coroll. propos. 18. lib. 14. [a] Ac propterea GI, parallela erit rectæ KL, auferens, per corollarium propositionis quartæ, libri sexti, triangulum EGI, simile triangulo EKL. Quare erit, vt EK, ad KL, ita EG, ad GI; & permutando, vt EK, ad EG, ita KL, ad GI; ideoque cùm EK, sesquialtera sit ipsius EG, erit & KL, sesquialtera ipsius GI. [b] Cùm ergo BC, æqualis sit ipsi KL, quòd & BK, CL, æquales sint, & parallelæ; Erit BC, latus Octaedri sesquialterum lateris Pyramidis GI, sibi inscriptæ. Quod erat demonstrandum.

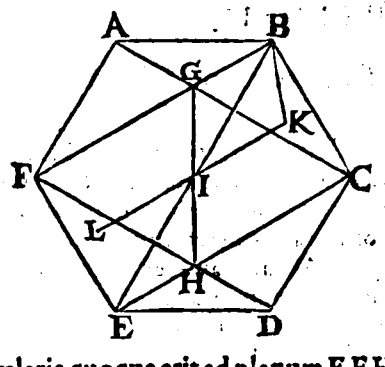


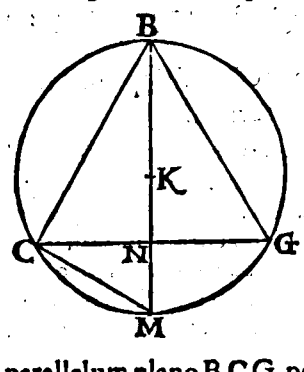
[a] 2. sexti.

[b] 33. primi.

THEOR. 15. PROPOS. 15.

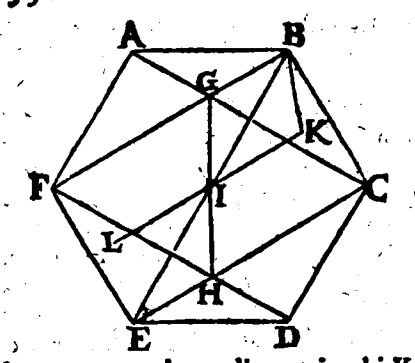
SI ex quadrato diametri Icosaedri auferatur triplum quadrati lateris cubi in eo descripti; relinquitur quadratum sesquitertium quadrati lateris Icosaedri.

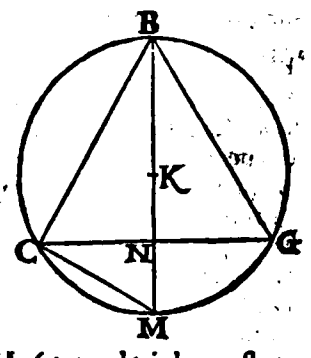




SIT Icosaedrum ABCDEFGH, cuius diameter BE, & centrum I; triangula verò opposita & parallela, per corollarium quartum, propositionis decimæquartæ, lib. 13. BCG, EFG, quorum centra K, L. Ducatur ex centro I, ad planum BCG, perpendicularis IK, cadens, ex corollario lemmatis 1. propos. 10. lib. 14. in centrum K. Producta igitur KI, perpendicularis quoque erit ad planum EFH, parallelum plano BCG, per scholium propos. 14. lib. 11. cadetque idcirco in centrum L, per coroll. præfati lemmatis. Quam ob rem, cùm cubus in Icosaedro descriptus statuat suos angulos in centris basium Icosaedri, vt constat ex propos. 11. lib. 15. atque adeò angulos oppositos in centris basium oppositarum; Erit KL, diameter cubi in Icosaedro descripti, transiens per I, centrum Icosaedri. Cùm ergo eadem ratione reliquæ diametri cubi per idem centrum I, transeant, erit I, quoq; centrum cubi inscripti, ideoq; IK, IL, semidiametri æquales: Coniuncta autem KB, semidiametro circuli triangulum BCG, circumscribentis, erit angulus BKI, rectus, ex defin. 3. lib. 11. [c] Ac proinde quadratum rectæ BI, æquale quadratis rectarum

[c] 47. primi.





BK, KI. Igitur & quadratum diametri BE, quadruplum existens quadrati semidiametri BI, vt in scholio propos. 4. lib. 2. ostendimus, æquale erit quadratis duarum rectarum, nempe diametri circuli triangulum BCG, circumscribẽtis, & KL. Sunt enim & hæc quadrata, per idem scholium, quadrupla quadratorum ex semidiametris BK, KI, descriptorum. Ablato ergo quadrato diametri cubi KL, (ª quod triplum est quadrati lateris cubi.) ex quadrato diametri Icosaedri BE; remanet quadratum diametri circuli triangulum BCG, circumscribentis. Hoc igitur dico sesquitertium esse quadrati lateris Icosaedri BC. Describatur enim ex centro K, circa triangulum æquilaterum BCG, circulus, extensaq; BK, vsque ad M, quæ secet CG, in N, ducatur quoque recta CM. Quoniam igitur BN, per centrum K, ducta, perpendicularis est ad CG, per ea, quæ ostendimus in schol. propos. 12. lib. 13. ᵇ erit recta BC, potentia sesquitertia rectæ BN: Vt autem BC, ad BN, ita est BM, ad BC, quòd BC, sit media proportionalis inter BM, & BN, ex coroll. propos. 8. lib. 6. ᶜ cùm angulus BCM, rectus sit in semicirculo existens. Recta igitur BM, potentia quoq; sesquitertia est rectæ BC; Ac propterea quadratum diametri BM, sesquitertium est quadrati lateris BC. Quapropter si ex quadrato diametri Icosaedri, &c. Quod erat demonstrandum.

ª 15. tertij decimi.

ᵇ 12. quarti decimi.

ᶜ 31. tertij.

COROLLARIVM.

Hinc fit, diametrum Icosaedri binas rectas posse, diametrum scilicet cubi in ipso descripti, & diametrum circuli triangulum Icosaedri ambientis. Ostensum siquidem est, quadratum diametri Icosaedri BE, æquale esse quadratis diametri cubi KL, & diametri circuli triangulum BCG, circumscribentis.

THEOR. 16. PROPOS. 16.

LATVS Dodecaedri minus segmentum est rectæ lineæ extrema ac media ratione diuisæ, quæ duplum potest lateris Octaedri in eo descripti.

QVONIAM diameter Octaedri in Dodecaedro descripti ª duplum potens lateris Octaedri, coniungit bifarias sectiones laterum oppositorum Dodecaedri, vt manifestum est ex propos. 9. lib. 15. Est autem rectæ dictas sectiones coniungentis diuisæ extrema ac media ratione minus segmẽtum latus Dodecaedri, ex coroll. 4. propos. 17. lib. 13. Liquet, latus Dodecaedri minus segmentum esse eius rectæ extrema ac media ratione diuisæ, quæ duplum potest lateris Octaedri in eo descripti, cùm huiusmodi recta coniungat bifarias sectiones laterum Dodecaedri oppositorum, cuius quidem minus segmentum est latus Dodecaedri, ex prædicto coroll. Itaque latus Dodecaedri minus segmentum est rectæ lineæ extrema ac media ratione, &c. Quod erat demonstrandum.

ª 14. tertij decimi.

THEOR. 17. PROPOS. 17.

DIAMETER Icosaedri potest & sui ipsius lateris sesquitertium, & lateris Pyramidis in eo descriptæ sesquialterum.

CVM cubus & Pyramis in eo descripta, in eodem Icosaedro describantur, vt docuimus in scholio propos. vltimæ lib. 15. eademq; sphæra comprehendantur; eadem erit diameter cubi, & diameter sphæræ pyramidem circundantis: ᶜ potest autem diameter sphæræ sesquialterum lateris Pyramidis. Igitur & diameter cubi in Icosaedro descripti, in quo & Pyramis describitur, sesquialterum poterit lateris pyramidis in ipso cubo, & Icosaedro descriptæ; Atqui diameter circuli basim Icosaedri circumscribentis sesquitertium potest lateris Icosaedri, vt in demonstratione propos. 15. huius libri demonstrauimus. Igitur diameter Icosaedri potens & diametrum cubi in ipso descripti, & diametrum circuli basin Icosaedri circumdantis, ex coroll. propos. 15. huius libri, potest & suiipsius lateris sesquitertium, nimirum diametrum circuli circa basim Icosaedri descripti, & lateris Pyramidis in eo descriptæ sesquialterum, nempe diametrum cubi. Quod erat demonstrandũ.

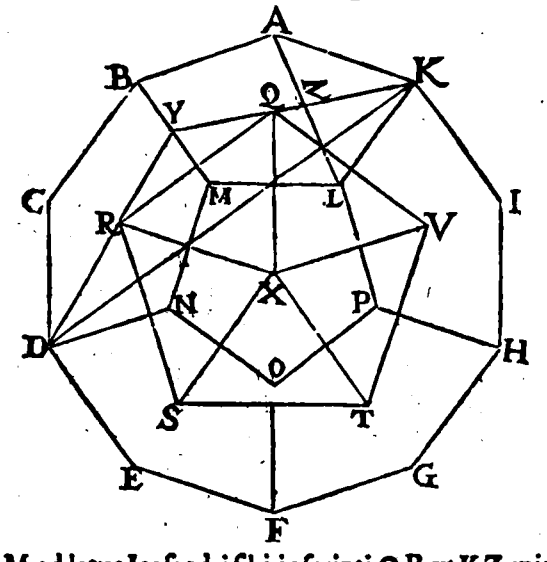
ᶜ 13. tertij decimi.

THEOR. 18. PROPOS. 18.

LATVS Dodecaedri ad sibi inscripti Icosaedri latus se habet, vt minus segmentum lineæ perpendicularis ab vno angulo pentagoni ad latus oppositum ductæ,

atque

atque extrema ac media ratione diuisæ, ad partem eiusdem lineæ inter centrum pentagoni, & latus eiusdem positæ.



SIT dimidium Dodecaedrum contẽtum sex pentagonis ABMLK, LKIHP, PHGFO, OFEDN, NDCBM, LMNOP, quorum centra Q, R, S, T, V, X, (quælibet videlicet duo proxima) iungãtur rectis QR, RS, ST, TV, VQ, QX, RX, SX, TX, VX. Constituta sunt igitur quinque triangula Icosaedri in Dodecaedro descripti, componentia angulum solidum X, in centro pentagoni LMNOP, vt ostensum est in demonstratione propos. 7. lib. 15. A duobus angulis pentagonorum D, K, in communem basim BM, p centra R, Q, rectæ demittantur DY, KY, quæ quoniam bifariam, & ad rectos angulos secant latus BM, per coroll. 2. propos. 10. libri 13. conuenient in puncto Y. Quòd si subtendatur recta AL, angulo K; secabitur [a] perpendicularis KY, in Z, extrema ac media ratione. Dico ita esse latus Dodecaedri LM, ad latus Icosaedri sibi inscripti QR, vt KZ, minus segmẽtum perpendicularis KY, ad rectam QY, inter centrũ Q, & latus BM, interceptam. Subtensa enim recta DK, quæ, p demonstrata in scholio propos. 13. lib. 15. latus est cubi, in quo Dodecaedrum propositũ describitur; erit LM, latus Dodecaedri, minus segmentum ipsius DK, si extrema ac media ratione secetur, ex eodem scholio propos. 13. lib. 15. Quoniam verò latera YD, YK, trianguli YDK, proportionaliter secantur in R, & Q, (sunt enim RD, QK, semidiametri circulorũ æqualium æquales; necnon & YR, YQ, distantiæ nimirum rectæ BM, à centris R, & Q, eorundem circulorum æqualium.) [b] parallela erit QR, ipsi DK; Ideoq; triangulum YRQ, triangulo YDK, simile, p coroll. propos. 4. lib. 6. [c] Quam ob rem erit, vt DK, ad KY, ita QR, ad QY. [d] Vt autẽ DK, tota ad totã KY, ita est LM, minus segmentum ad minus KZ. Vt igitur LM, ad KZ, ita erit QR, ad QY; Et permutando, vt LM, latus Dodecaedri ad QR, latus Icosaedri sibi inscripti, ita KZ, minus segmentũ perpendicularis KY, ad QY, inter centrum Q, & latus BM, interpositam. Latus ergo Dodecaedri ad sibi inscripti Icosaedri latus, &c. Quod erat demonstrandum.

[a] 2. sexti. decimi.

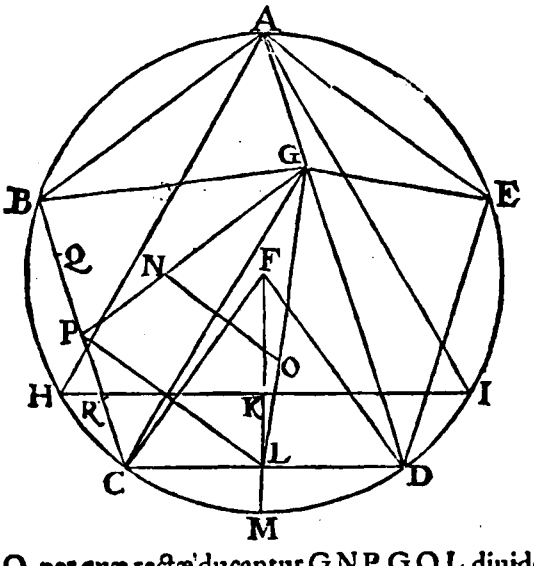
[b] 2. sexti.

[c] 4. sexti.

[d] 2. quarti decimi.

THEOR. 19. PROPOS. 19.

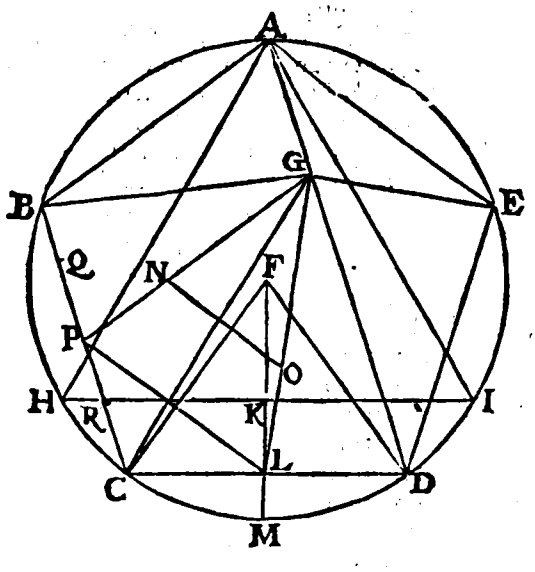
SI dimidium lateris Icosaedri extrema ac media ratione sectum fuerit, minusq; eius segmentum à toto latere Icosaedri sublatum; à reliqua quoque recta pars tursum tertia detracta: Relinquetur latus Dodecaedri in Icosaedro descripti.



CIRCA pentagonum ABCDE, ex quinque lateribus Icosaedri compositum, circulus describatur, cuius centrũ F, & super quinque latera pentagoni quinque triangula æquilatera excitentur, constituẽtia angulum solidum Icosaedri G, ex iis, quę in propos. 16. lib. 13. sunt demonstrata. In dicto deinde circulo triangulum æquilaterum inscribatur AHI. Quoniam igitur arcus ABC, AED, æquales sunt, cùm quilibet duas quintas partes totius circumferentiæ contineat, necnon & duo arcus ABH, AEI, cũ sint tertiæ partes eiusdẽ circumferentiæ; erunt reliqui arcus HC, ID, æquales; propterea q; rectæ HI, CD, parallelæ, p scholium propos. 27. lib. 3. Ad quas ex centro F, perpendicularis deducatur FKL, [e] secans rectas HI, CD, bifariam in K, & L; coniunganturq; rectæ FC, FD. Suscipiantur insuper triangulorum æquilaterorum GBC, GCD, centra N, & O, per quæ rectæ ducantur GNP, GOL, diuidentes, per scholium propositionis 12. libri 13. latera opposita BC, CD, bifariam, & ad angulos rectos. Itaque recta GO, in punctum L, in quo diuisa est CD, bifariam, cadet. Iungantur autem centra N, O, recta NO, quæ, vt constat ex demonstratis in propositione 5. lib. 15. latus erit Dodecaedri in Icosaedro descripti. Denique BP, dimidium lateris Icosaedri secetur in Q, extrema ac media ratione; & ablato minori segmento BQ,

[e] 3. tertij.

ex toto latere B C, reliquæ C Q, tertia pars detrahatur C R. Dico reliquam Q R, æqualem esse lateri Dodecaedri N O. Cùm enim F L, perpendicularis à latere trianguli æquilateri H I, secetur in K, extrema ac media ratione; (quòd F L, hac ratione secta faciat maius segmentum æquale perpendiculari F K, per coroll. propos. 2. libri 14.) sit autem maiori segmento F K, æqualis recta K M, p coroll. propos. 12. lib. 13. Erit ex iis, quę demonstrauimus ad propos. 5. lib. 13. maius segmentum K M, sectum quoque in L, à minori segmento K L, extrema ac media ratione; Ac proinde recta F M, excedit rectam F L, minore dimidiæ suiipsius segmento L M. Quoniam verò iuncta P L, est latus pentagoni æquilateri, & æquianguli in pentagono A B C D E, descripti, idemque centrum F, habentis, ex scholio vltimo, lib. 4. ideoque similis illi; erunt triangula F C D, F P L, (si recta duceretur F P.) similia, per scholium propos. 20. lib. 6. [a] Quare vt F C, ad C D, ita erit F L, ad L P; & permutando, vt F C, ad F L, ita C D, ad L P: Atqui F C, hoc est, sibi æqualis F M, excedit rectam F L, minore segmento dimidij ipsius F M, nempe minore segmento rectæ K M, vt ostendimus. Recta igitur C D, vel sibi æqualis B C, excedet quoque rectam L P, minore segmento dimidij ipsius B C, nimirum minore segmento rectæ B P, quod fuit B Q; ideoque reliqua C Q, rectæ P L, æqualis erit. Rursus, quia G P, G L, proportionaliter secantur in centris N, O; (quòd G N, G O, duplæ sint ipsarum N P, O L, per corollarium propos. 18. lib. 14.)



a 4. sexti.

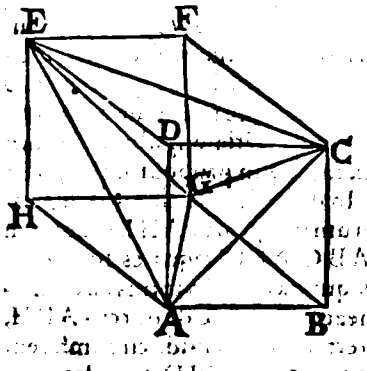
[b] parallelæ erunt P L, N O; ac proinde triangulum G N O, triangulo G P L, simile, ex corollario propos. 4. libri 6. [c] Igitur erit, vt G P, ad P L, ita G N, ad N O; & permutando, vt G P, ad G N, ita P L, ad N O: Est autem G P, ipsius G N, sesquialtera, per corollarium propos. 18. lib. 14. Quare & P L, hoc est, sibi æqualis C Q, sesquialtera erit ipsius N O; Ac proinde, cùm C Q, sesquialtera quoque sit rectæ Q R; (Nam qualium partium 3. est C Q, talium 1. est C R; per constructionem; Ac propterea earundem 2. Q R.) æqualis erit Q R, ipsi N O, lateri Dodecaedri in Icosaedro descripti. Si dimidium itaque lateris Icosaedri extrema ac media ratione sectum fuerit, &c. Quod erat demonstrandum.

b 2. sexti.
c 4. sexti.

THEOR. 20. PROPOS. 20.

CVBVS sibi inscriptæ pyramidis triplus est.

IN cubo A F, descripta sit pyramis A C E G. Dico cubum pyramidis triplum esse. Cùm enim inscriptam pyramidem æquilateram circumstét 4. pyramides, fundatæ super 4. bases ipsius, vertices verò habentes reliquos 4. angulos cubi, in quibus non resident 4. anguli pyramidis æquilateræ inscriptæ: (Nam super basin A C E, fundatur pyramis A C E D; super basin A E G, pyramis A E G H, super basin C E G, pyramis C E G F; & super basin A C G, pyramis A C G B: quæ quidem quatuor pyramides æquales sunt, ex 10. definitione libri 11. eùm contineantur planis similibus æqualibusque & multitudine & magnitudine. Quælibet enim constat tribus æqualibus & similibus triangulis, dimidiis scilicet quadratorum cubi, vt patet, & vno triangulo pyramidis æquilateræ inscriptæ.) Sit autem cubus cuiuslibet harum pyramidum sextuplus; (Nam, exempli causa, pyramis A B C G, basim habens A B C, dimidium basis cubi B D, altitudinem verò eandem, quam cubus, rectam videlicet B G, tertia pars est, per corollarium 1. propositionis 7. lib. 12. prismatis eandé basin, & altitudinem habentis. [d] Cùm igitur cubus duplus sit eiusmodi prismatis, quòd & basis cubi dupla sit basis prismatis; manifestum est pyramidem A B C G, sextam partem esse cubi, propterea que cubum pyramidis illius esse sextuplum.) Efficitur, quatuor illas pyramides circumstantes, quatuor esse sextas partes, id est, duas tertias partes cubi; Ac proinde reliquam pyramidem æquilateram A C E G, cubo inscriptam eiusdem cubi tertiam esse partem. Cubus igitur sibi inscriptæ pyramidis triplus est. Quod erat demonstrandum.



d 32. vndec.

ALITER. Cùm cubus, & in eo descripta pyramis eadem sphæra comprehendantur, vt docuimus in scholio propositionis vltimæ, lib. 15. [e] Cubus verò triplus sit pyramidis in eadem sphæra descriptæ, vt demonstratum est, perspicuè colligitur, cubum triplum esse sibi inscriptę pyramidis, quandoquidem hæc in eadem sphæra, in qua cubus, continetur.

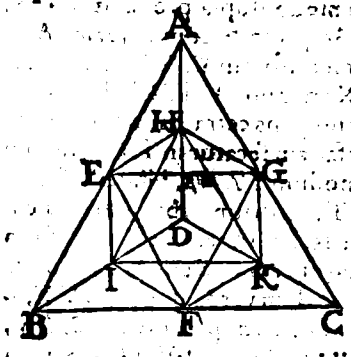
e 32. quarti decimi.

THEOR.

THEOR. 21. PROPOS. 21.

PYRAMIS ſibi inſcripti Octaedri dupla eſt.

IN pyramide ABCD, deſcriptum ſit octaedrum EIKGHF. Dico pyramidem octaedri eſſe duplam. Cùm enim octaedrum circumſtent quatuor pyramides pyramidi ABCD, ſimiles, vt prop. 3. lib. 12. demonſtratum eſt, fundatæ ſuper quatuor baſes octaedri EGH, EFI, FGK, HIK: quales ſunt pyramides EGHA, EFIB, FGKC, HIKD: (quæ quidem æquales inter ſe ſunt, ex defin. 10. lib. 11. cùm contineantur triangulis ſimilibus, æqualibuſque numero & magnitudine, quippe quæ ſimilia ſint baſibus pyramidis æquilateræ ABCD, per coroll. propoſ. 4. lib. 6. lateraque habeant æqualia, nempe dimidia laterum æqualium eiuſdem pyramidis ABCD, ex conſtructione propoſ. 2. lib. 15.) [a] Habeant autem pyramides ſimiles proportionem homologorum laterum triplicatam: Erit pyramis ABCD, octupla cuiuslibet illarum quatuor pyramidum octaedro circumpoſitarum, (cùm octupla proportio, ſit proportionis duplæ, qualem habent latera pyramidis ABCD, ad latera dictarum quatuor pyramidum, triplicata, vt in his numeris 1. 2. 4. 8. perſpicuè apparet.) hoc eſt, quælibet illarum quatuor pyramidum pars erit octaua pyramidis ABCD: Atque idcirco omnes quatuor dictæ pyramides quatuor partes octauas, id eſt, dimidium pyramidis ABCD, conficient. Quare & reliquum octaedrum EIKGHF, reliqua erit dimidiata pars eiuſdem pyramidis ABCD. Pyramis igitur ſibi inſcripti octaedri dupla eſt. Quod erat demonſtrandum.



[a] 8. duodec.

THEOR. 22. PROPOS. 22.

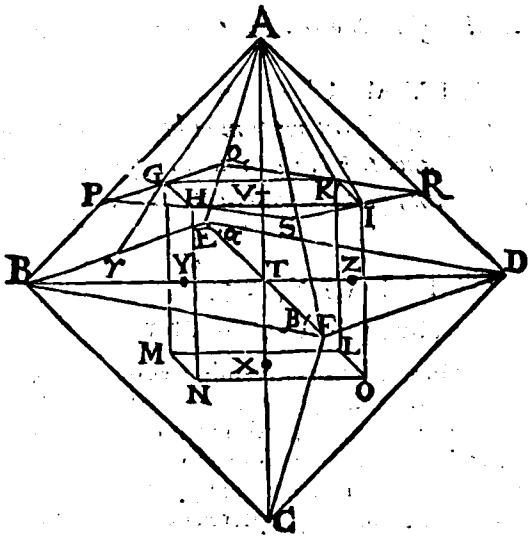
CVBVS ſibi inſcripti Octaedri ſextuplus eſt.

QVONIAM ſi pyramis in cubo deſcribatur, & in pyramide octaedrum: octaedrum in cubo quóque inſcriptum eſt, vt conſtat ex ſecunda demonſtratione propoſ. 3. lib. 15. [b] Eſt autem cubus pyramidis in eo deſcriptæ triplus, [c] & pyramis octaedri ſibi inſcripti dupla: Fit, vt qualium partium 6. ponatur cubus, taliũ 2. ſit pyramis, & earundem 1. contineat octaedrum: atq; adeò cubus octaedri ſit ſextuplus. Quare cubus ſibi inſcripti octaedri ſextuplus eſt. Quod erat demõſtrandũ.

[b] 20. ſexti decimi.
[c] 21. ſexti decimi.

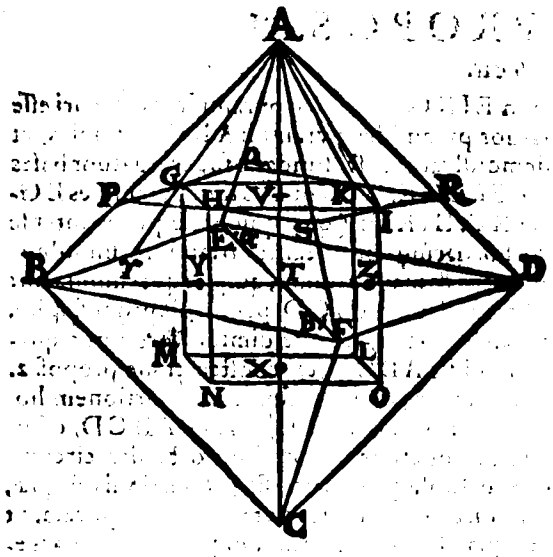
THEOR. 23. PROPOS. 23.

OCTAEDRVM ſibi inſcripti cubi quadruplum ſeſquialterum eſt.



IN octaedro ABCDEF, cubus deſcriptus ſit GHIKLMNO, angulos ſuos ſtatuens in centris baſium octaedri. Dico octaedrum cubi eſſe quadruplum ſeſquialterum. Aſſumpta .n. pyramide octaedri BEDFA, ducantur per G, K, I, H, cétra quatuor baſiũ octaedri, rectæ PQ, QR, RS, SP, lateribus BE, ED, DF, FB, parallelæ, quadratũ conſtituẽtes PQRS, vt in propoſ. 4. lib. 15. eſt demõſtratum: [d] quod quidem parallelum erit quadrato BEDF. Ducatur quoq; octaedri diameter AC, perpendicularis exiſtens ad quadratum BEDF, in centro T, per ea, quæ oſtendimus in coroll. 1. propoſ. 14. lib. 13. Ac proinde perpendicularis ad baſes cubi GI, MO, in punctis V, X, per ſcholium propoſ. 14. lib. 11. Eſt autem V, centrum quadrati PQRS: (cùm .n. plana BEDF, PQRS, parallela ſecent rectas æquales AB, AE, AD, AF, proportionaliter: erunt & AP, AQ, AR, AS, æquales. Intelligantur ductæ rectæ VP, VQ, VR, VS. [f] Quoniam igitur æqualia quadrata rectarum æqualium AP, AQ, æqualia ſunt quadratis rectarum AV, VP: AV, VQ, quòd anguli AVP, AVQ, recti ſint, per defin. 3. lib. 11. dempto communi quadrato rectæ AV: æqualia erunt reliqua quadrata rectarum VP, VQ, propterea{que} & rectæ ipſæ VP, VQ, æquales. Non aliter oſtendemus & hiſce, & inter ſe æquales eſſe rectas VR, VS. Quare V, centrum eſt quadrati PQRS.) Igitur & centrum erit quadrati GHIK, in illo deſcripti, per ſcholium vltimum lib. 4. Secantur enim latera PQ, QR, RS, SP, bifariam in G, K, I, H, vt conſtat ex demonſtratis in propoſ. 4. lib. 15. Eodem argumento concludemus X, centrum eſſe baſis LMNO: Nec non & alias diametros ductas BD, EF, per Y, Z, φ, ϑ, centra reliquarum baſium tranſire. Ducta

[d] 15. vndec.
[e] 17. vndec.
[f] 47. primi.



a 17. vndec.

iam recta A γ, per G, centrum trianguli æquilateri A B E; erit A G, dupla ipsius G γ, per coroll. propos. 18. lib. 14. a Cùm ergo plana P R, B D, parallela secent rectas A γ, A T, proportionaliter; dupla quoque erit A V, ipsius V T. Eodem modo dupla probabitur C X, ipsius X T; Ac proinde cùm æquales A T, C T, similiter secentur in V, & X; æquales erunt A V, C X: nec non V T, X T. Recta igitur V X, coniungens cætra basium cubi oppositarum, bifariam secatur in T. Quare cùm ad eundem modum Y Z, & I, bifariam secentur in T, erit T, centrum cubi; cùm, per coroll. 1. propos. 15. lib. 13. rectæ centra basium cubi oppositarum connectentes se se bifariá secent in centro. Iam verò, quoniam V X, ipsius V T, dupla est; dupla autè fuit & A V, eiusdem V T; æqualis erit A V, ipsi V X, nempe altitudini cubi. Quare pyramis G H I K A, ductis rectis A I, A K, A H, tertia pars est cubi, seu prismatis G O, per coroll. 1. prop. 7. lib. 12. cùm vtriusque eadem sit basis G I, & altitudines æquales A V, V X;

b 6. duodec.

b Est autem pyramis P Q R S A, pyramidis G H I K A, dupla, quòd & basis P Q R S, dupla sit basis G H I K, illi inscriptæ. Igitur pyramis P Q R S A, duas tertias partes cubi G O, continet. Quia verò pyramides B E D F A, P Q R S A, similes existentes, per defin. 9. lib. 11. (cùm triangula huius similia sint, ex coroll. propos. 4. lib. 6. triangulis illius.)

c 8. duodec.

c proportionem habent laterum homologorum triplicatam; Est autem latus A B, lateris A P, sesquialterum, quòd & recta A γ,

d 2. sexti.

d proportionaliter secta ipsi A B, sesquialtera sit ipsius A G; Erit pyramis B E D F A, ad pyramidem P Q R S A, vt 27. ad 8. hæc enim proportio triplicata est proportionis sesquialteræ 3. ad 2. vt in his numeris 8. 12. 18. 27. constat; Ac proinde totum octaedrum A B C D E F, duplum existens pyramidis B E D F A, proportionem habebit ad eandem pyramidem P Q R S A, quam 54. ad 8. At qualium partium 8. ponitur pyramis P Q R S A, talium 12. esse cubum G O, iam demonstratum est. (Nam numerus 8. duas tertias continet numeri 12.) Igitur octaedrum A B C D E F, ad cubum G O, proportionem habet, quam 54. ad 12. hoc est, in minimis numeris, per 35. propos. lib. 7. repertis, quam 9. ad 2. quæ quidem proportio quadrupla sesquialtera est. Octaedrum itaque sibi inscripti cubi quadruplum sesquialterum est. Quod erat ostendendum.

COROLLARIVM I.

IDEM ergo centrum est octaedri, atque cubi sibi inscripti. ostendimus enim T, vtriusque esse centrum.

COROLLARIVM II.

PERSPICVE etiam hinc inferemus, Octaedrum ad sibi inscriptum cubum eandem habere proportionem, quam eorum laterum quadrata habent.

a 11. sexti-dec.

a *Nam quadrata ipsorum laterum proportionem habent quadruplam sesquialteram, qualem videlicet demonstrauimus habere octaedrum ad sibi inscriptum cubum.*

THEOR. 24. PROPOS. 24.

OCTAEDRVM sibi inscriptæ Pyramidis tredecuplum sesquialterum est.

a 23. sexti-dec.

QVONIAM, vt ostendimus ad finem lib. 15. cubus, sibique inscripta pyramis in eodem octaedro describuntur; a Est autem octaedrum cubi in eo descripti quadruplum sesquialterum; & cubus sibi, ac proinde octaedro, inscriptæ pyramidis

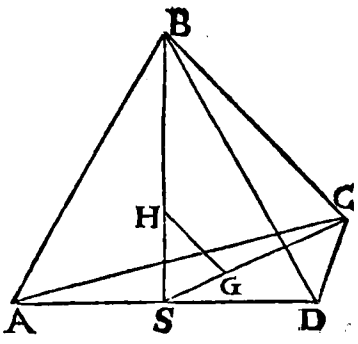
b 20. sexti-dec.

b triplus: qualium partium 2. ponetur pyramis, talium 6. erit cubus, & earundem 27. octaedrum. Habent enim 27. ad 6. proportionem quadruplam sesquialteram, & 6. ad 2. triplam. Igitur octaedrum ad sibi inscriptam pyramidem proportionem habet, quam 27. ad 2. hoc est, tredecuplam sesquialteram. Ac propterea octaedrum sibi inscriptæ pyramidis, &c. Quod erat ostendendum.

THEOR. 25. PROPOS. 25.

PYRAMIS sibi inscripti cubi noncupla est.

IN pyramide A B D C, cubus intelligatur descriptus. Dico pyramidem cubi esse noncuplam. Assumantur enim G H, centra duarum basium A C D, A B D, commune latus A D, habentium, per quæ ex angulis C, B, ad latus commune oppositum A D, rectæ ducantur C G S, B H S, diuidentes latus A D, bifariam, & ad angulos rectos, per scholium propos. 12. lib. 13. ac propterea conuenientes in medio puncto S. Connexa verò recta G H, cùm B H, C G, duplæ sint rectarum H S, G S, ex



GS, ex coroll. propoſ. 18. lib. 14. ac proinde proportionaliter ſecentur B S, C S, [a] parallelæ erunt B C, H G, & per coroll. propoſ. 4. lib. 6. triangulum H G S, triangulo B C S, ſimile. [b] Erit ergo vt B C, ad C S, ita H G, ad G S; & permutando, vt B C, ad H G, ita C S, ad G S: [c] Eſt autem C S, ipſius G S, tripla. Igitur & B C, tripla erit ipſius H G. Quoniam autem latus pyramidis deſcriptæ in cubo diameter eſt baſis cubi, vt in propoſ. 1. lib. 15. demonſtratum eſt; Recta verò connectens duo centra baſium pyramidis commune latus habentium diameter eſt baſis cubi in pyramide deſcripti, vt perſpicuum eſt ex demonſtratis in propoſ. 18. lib. 15. (Ibi enim recta G H, iungens centra G, H, baſium A C D, A B D, commune latus A D, habentium, diameter fuit baſis G N H Q, cubi deſcripti in pyramide.) Erit latus pyramidis B C, diameter baſis cubi pyramidem A B D C, circumſcribentis; G H, verò diameter baſis cubi in eadem pyramide deſcripti. Cùm ergo eandem habeant proportionem diametri quadratorum, quam latera; (Eſt enim vt diameter vnius quadrati ad ſuum latus, ita diameter alterius quadrati ad ſuum latus, quòd proportio vtraque ſit potentia dupla: Permutando ergo, vt diameter ad diametrum, ita latus ad latus.) habeat autem B C, diameter baſis cubi circũſcripti ad G H, diametrum baſis cubi inſcripti proportionem triplam, vt oſtendimus; habebit quoque latus cubi circumſcripti ad latus cubi inſcripti proportionem triplam. At verò cubi, cùm ſint parallelepipeda ſimilia, [d] proportionem habent laterum homologorum triplicatam. Cubus igitur circumſcriptus ad cubum inſcriptum pyramidi A B D C, proportionem habet, quam 27. ad 1. Hæc enim proportio triplicata eſt triplæ proportionis, vt hîc 1. 3. 9. 27. videre licet. Quam ob rem, [e] cùm cubus ad pyramidem inſcriptam proportionem habeat quam 27. ad 9. videlicet triplam; Habebit pyramis A B D C, ad cubum ſibi inſcriptum proportionem, quam 9. ad 1. nimirum noncuplam; Atque adeò pyramis ſibi inſcripti cubi noncupla eſt. Quod erat demonſtrandum.

[a] 2. ſexti.
[b] 4. ſexti.
[c] 18. quarti decimi.
[d] 33. vndec.
[e] 20. ſexti decimi.

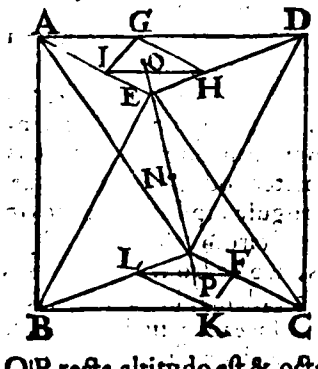
COROLLARIVM.

IGITVR cubus ad cubum deſcriptum in pyramide, quæ in priori cubo deſcribitur, proportionem habet, quam 27. ad 1. Hoc enim demonſtratum eſt ex propoſ. 33. lib. 11. in demõſtratione huius propoſitionis.

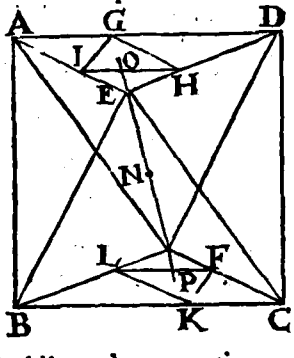
THEOR. 26. PROPOS. 26.

OCTAEDRVM ad ſibi inſcriptum Icoſaedrum proportionem habet, quam duæ baſes Octaedri ad quinque baſes Icoſaedri.

IN octaedro A B C D E F, concipiatur deſcriptum Icoſaedrum. Dico octaedrum eſſe ad Icoſaedrum, vt ſunt duæ baſes octaedri ad quinque baſes Icoſaedri. Cùm enim, vt ex demonſtratis in propoſ. 16. lib. 15. liquet, octo baſes Icoſaedri in octo baſibus octaedri reponãtur; ſint duæ baſes Icoſaedri G H I, K L M, in duabus baſibus oppoſitis octaedri A D E, B C F; atque ex N, centro octaedri, nec non & Icoſaedri (idẽ enim vtriuſq; eſt centrũ, per coroll. 3. propoſ. 16. lib. 15.) ad baſim A D E, perpendicularis ducatur N O, cadens in centrum O, trianguli A D E, ſeu circuli ipſum ambientis, ex coroll. lemm. 1. prop. 10. lib. 14. quod quidem O, centrum quoque eſt trianguli G H I, per coroll. 2. propoſ. 16. lib. 15. Cùm ergo plana oppoſita A D E, B C F, parallela ſint, ex corollario 4. propoſitionis 14. lib. 11. Recta O N, producta, perpendicularis quoque erit, per ſcholium propoſitionis 14. lib. 11. ad planum B C F, in eiuſque propterea centrum P, commune etiam triangulo K L M, cadet. Quare O P, recta, altitudo eſt & octaedri & Icoſaedri ſibi inſcripti. Quia verò octaedrum in octo pyramides, ductis rectis ex centro N, ad omnes angulos octaedri, æquales diuiditur, quarum altitudo eſt N O, dimidium altitudinis octaedri; Similiterque Icoſaedrum in 20. pyramides æquales eiuſdem altitudinis N O: Eſt autem priſma triplum pyramidis eandem cum ipſo & baſim, & altitudinem habentis, per coroll. 1. propoſ. 7. lib. 12. Erit priſma, cuius baſis A D E, & altitudo O N, æquale tribus pyramidibus octaedri: At verò priſma, cuius eadem baſis A D E, altitudo autem O P, dupla altitudinis O N, duplum eſt priſmatis, cuius baſis eadem A D E, altitudo verò O N, per ea, quæ in ſcholio propoſ. 14. lib. 12. oſtendimus. Priſma igitur, cuius baſis A D E, & altitudo O P, æquale eſt ſex pyramidibus octaedri; Atque proinde reliquis duabus octaedri pyramidibus, quæ tertiam partem illarum ſex conſtituunt, æqualis erit tertia pars priſmatis ſuper baſim A D E, & ſub altitudine O P, conſtituti; priſma videlicet, cuius baſis tertia pars eſt trianguli A D E, altitudo verò eadem O P. Hoc enim priſma tertia pars eſt priſmatis ſuper baſem A D E, & ſub altitudine O P, cùm, per ea, quæ docuimus ad prop. 7. lib. 12. priſmata eiuſdem altitudinis inter ſe ſint, vt baſes. Quare duo priſmata, quorum vnius baſis A D E, altitudo O P, alterius autem baſis tertia pars baſis A D E, & altitudo eadem O P, æqualia ſunt octaedro A B C D E F. Non ſecus demonſtra-



bimus prisma, cuius basis G H I, altitudo verò O P, æquale esse sex pyramidibus Icosaedri: propterea q; triplum huius prismatis, nempe prisma, cuius basis tripla sit basis G H I, altitudo autem eadem O P, æquales esse 18. pyramidibus Icosaedri. Reliquis igitur duabus Icosaedri pyramidibus, quæ tertiam partem sex pyramidum eiusdem Icosaedri constituunt, æqualis erit tertia pars prismatis super basem G H I, & sub altitudine O P, cõstituti; prisma scilicet, cuius basis tertia pars est trianguli G H I, altitudo verò eadem O P. Atque idcircò duo prismata, quorum vnius basis tripla sit trianguli G H I, altitudo autẽ O P, alterius verò basis tertia pars basis G H I, & altitudo eadem O P, æqualia erunt Icosaedro in dicto Octaedro descripto. Iam verò cùm duo illa prismata, Octaedro æqualia, ad duo hæc prismata, Icosaedro æqualia sint, pea, quæ ostendimus ad propos. 7. lib. 12. vt bases prismatum Octaedro æqualium, quatuor tertias partes trianguli A D E, continentes, (cùm vnius basis sit A D E, nempe tres tertiæ partes ipsius A D E, complectens, alterius verò basis tertia pars ipsius A D E.) ad bases prismatum Icosaedro æqualium, decem tertias partes trianguli G H I, comprehendentes: (cùm vnius basis tripla sit trianguli G H I, nimirum nouem tertias partes ipsius G H I, continens, alterius verò basis tertia pars ipsius G H I.) Sint autem, vt quatuor tertiæ partes trianguli A D E, ad decem partes tertias trianguli G H I: ita duæ tertiæ partes ipsius A D E, nempe dimidiũ quatuor tertiarum, ad quinque tertias partes ipsius G H I, hoc est, ad dimidium decem tertiarum: Et vt duæ tertiæ partes ipsius A D E, ad quinque tertias partes ipsius G H I, ita quoq; sint, per ea, quæ demonstrauimus in scholio propos. 22. lib. 5. sex tertiæ partes ipsius A D E, (hoc est, duæ bases octaedri triplum duarum tertiarum vnius basis constituentes, cùm sex tertias contineant.) ad quindecim tertias partes ipsius G H I: (id est, ad quinque bases Icosaedri, triplum quinque tertiarum vnius basis complectentes, cùm quindecim tertias complectantur.) Erunt quoque duo illa prismata, octaedro æqualia, hoc est, ipsummet octaedrum, ad duo hæc prismata Icosaedro æqualia, nempe ad ipsummet Icosaedrum, vt duæ bases octaedri ad quinque bases Icosaedri. Quocirca octaedrum ad sibi inscriptum Icosaedrum, proportionem habet, quam duæ bases octaedri ad quinque bases Icosaedri. Quod erat demonstrandum.

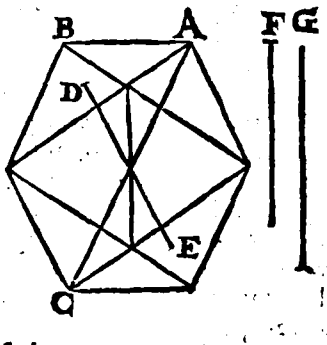


a 15. quinti.

THEOR. 27. PROPOS. 27.

ICOSAEDRVM ad sibi inscriptum Dodecaedrum proportionem habet compositam ex proportione lateris Icosaedri ad latus cubi in eadem cum Icosaedro sphæra descripti, & ex proportione triplicata eius, quam habet diameter Icosaedri ad rectam centra basium Icosaedri oppositarum coniungentem.

EXHIBEATVR Icosaedrum A B C, in quo recta D E, coniungat centra basium oppositarum, diameter autem eius sit A C; & F, sit latus Icosaedri, & G, latus cubi in eadem sphæra cum Icosaedro descripti. Dico proportionem Icosaedri A B C, ad sibi inscriptum Dodecaedrum componi ex proportione F, lateris Icosaedri ad G, latus cubi, & ex proportione triplicata diametri A C, ad rectam D E. Cùm enim, ex demonstratis propos. 5. lib. 15. Dodecaedrum in Icosaedro descriptum statuat angulos suos in centris basium Icosaedri, atque adeò oppositos angulos in centris basium oppositarum: Erit D E, diameter dodecaedri in Icosaedro A B C, descripti, cùm complet angulos ipsius oppositos in D, & E, centris basium Icosaedri oppositarum residentes. Propositis iam tribus magnitudinibus, Icosaedro scilicet A B C; Dodecaedro diametri A C, hoc est, in eadem sphæra, in qua Icosaedrum A B C, descripto, cùm vtriusq; eadem sit diameter; & Dodecaedro diametri D E, intra Icosaedrum videlicet, A B C, constructo: Proportio primæ magnitudinis, nempe Icosaedri A B C, ad tertiam, videlicet ad Dodecaedrum diametri D E, sibi inscriptum, componetur ex proportionibus primæ ad secundam, & secundæ ad tertiam, per ea, quæ ad defin. 5. lib. 6. à nobis sunt demonstrata, nimirum ex proportionibus Icosaedri A B C, ad Dodecaedrum diametri A C, in eadem sphæra cum ipso descriptum, & Dodecaedri eiusdem diametri A C, ad Dodecaedrum diametri D E, in Icosaedro A B C, descriptum. Cùm ergo Icosaedrũ A B C, ad Dodecaedrum diametri A C, eadem sphæra comprehensum, sit vt F, latus Icosaedri ad G, latus cubi: (b Nam Dodecaedrum diametri A C, ad Icosaedrũ A B C, eiusdem diametri, est vt G, latus cubi ad F, latus Icosaedri. Conuertendo igitur, erit Icosaedrum A B C, ad Dodecaedrum diametri A C, vt F, latus Icosaedri ad G, latus cubi.) At verò Dodecaedrum eiusdem diametri A C, ad Dodecaedrum diametri D E, in Icosaedro videlicet A B C, descriptum, proportionem habeat triplicatam diametri A C, ad diametrum D E, id est, ad rectam centra basium Icosaedri oppositarum coniungentem, ex coroll. propos. 2. lib. 12. Manifestum est, proportionem Icosaedri A B C, ad sibi inscriptum Dodecaedrum diametri D E, componi quoque ex proportione F, late-



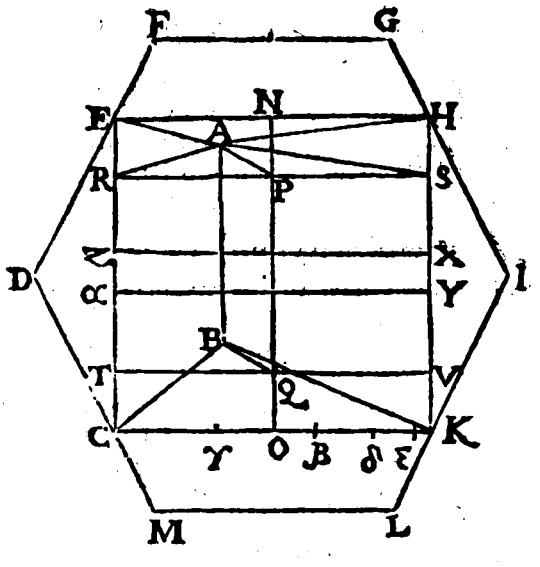
b 11. quarti decimi.

ralis

lis Icoſaedri, ad G, latus cubi, & ex proportione triplicata proportionis diametri A C, ad rectam D E. Quare Icoſaedrum ad ſibi inſcriptum Dodecaedrum proportionem habet compoſitam, &c. Quod erat demonſtrandum.

THEOR. 28. PROPOS. 28.

DODECAEDRVM excedit cubum ſibi inſcriptum parallelepipedo, cuius quidem baſis à quadrato cubi deficit rectangulo contento ſub latere cubi, tertiaque parte minoris ſegmenti eiuſdem lateris cubi: At verò altitudo ab altitudine, ſiue latere cubi, minore ſegmento eius lineæ, quæ dimidiati lateris cubi ſegmentum minus exiſtit.

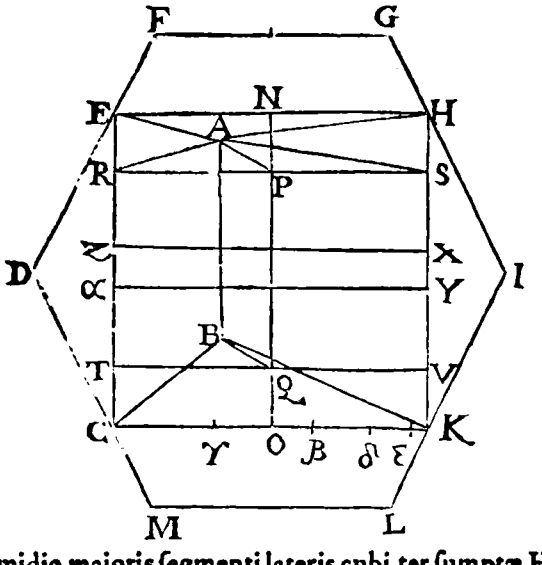


QVONIAM ex demonſtratis propoſ. 8. lib. 15. quatuor latera baſis cubi in Dodecaedro deſcripti ſubtendunt quatuor angulos quatuor baſium Dodecaedri ad vnum latus conuenientium; ſint huiuſmodi pentagona A B C D E, E F G H A, A H I K B, B K L M C, conuenientia ad latus A B; duo quidem A B C D E, A H I K B, ſecundùm latus idem commune A B, alia autem duo A E F G H, B C M L K, ſecundùm angulos E A H, C B K. His verò pentagonis inſcriptum ſit quadratum cubi E C K H, ſuper quod conſiſtat pars Dodecaedri cubum circumſcribentis, ſolidum ſcilicet C B K H A E, conſtans quinque planis C B K, E A H, A B C E, A B K H, E C K H; quorũ duo C B K, E A H, [a] triangula ſunt æqualia, cùm latera pentagoni B C, B K, æqualia ſint lateribus pentagoni A E, A H, angulosque comprehendant æquales pentagonorũ E A H, C B K. Duo verò A B C E, A B K H, trapezia ſunt æqualia quoque: (cùm enim & pentagona A B C D E, A B K I H, per hypotheſin, & triangula ex ipſis ablata C D E, H I K, [b] æqualia exiſtant; æqualia erunt & reliqua trapezia A B C E, A B K H,) Quintum denique eſt baſis cubi inſcripti E C K H. Simili modo reperientur alia quinque ſolida huic ſimilia & æqualia, per 10. definitionem libri 11. ſuper reliquas quinque cubi baſes; ita vt Dodecaedrum ſuperet cubum ſibi inſcriptum ſex huiuſmodi ſolidis. Dico igitur hunc totum exceſſum, ex ſex illis ſolidis cubum inſcriptũ circumſtantibus conflatum, æqualem eſſe parallelepipedo, cuius quidem baſis deficit à C E H K, baſe cubi, rectangulo contento ſub latere cubi C K, tertiaque parte minoris ſegmenti eiuſdem lateris cubi; at verò altitudo ab altitudine, ſeu latere cubi, minore ſegmento eius lineæ, quæ dimidiati lateris cubi ſegmentum minus exiſtit. Sectis enim lateribus E H, C K, bifariam in N, O, iunctaque recta N O, quæ parallela eſt lateri pentagoni A B, & in quam cadunt perpendiculares A P, B Q, demiſſæ in planum E K, vt conſtat ex demonſtratis propoſ. 17. lib. 13. (Exprimunt enim lineæ N O, A B, A P, B Q, huius figuræ lineas L N, V X, V R, X S, figuræ propoſ. 17. lib. 13.) Erit vtraque recta A B, P Q, maius ſegmentum lateris cubi N O, vel H K, & vtraque A P, B Q, æqualis dimidio lateris pentagoni A B, ſeu maioris ſegmenti lateris cubi, vt liquet ex eadem propoſitione 17. libri 13. Ac propterea ſi per P, Q, ducantur rectæ R S, T V, rectis E H, C K, parallelæ; erunt quoque T R, S V, maiora ſegmenta laterum E C, H K; atq; adeò E R, C T, ſimul, & H S, K V, ſimul minora eorundem laterum ſegmenta. Ductis deinde rectis A R, A S, B T, B V, conſtituantur duę pyramides E R S H A, C T V K B, quæ per corollarium propoſitionis 6. libri 12. æquales inter ſe erunt, cùm & earum baſes E R S H, T C K V, & altitudines P A, Q B, æquales ſint; conſiſtentque extra ſolidum A B T V S R. [c] Quoniam autem A S, ipſi B V, & A R, ipſi B T, æqualis eſt, & parallela, cùm coniungant æquales rectas, & parallelas A B, S V, R T, [d] parallela erunt plana triangulorum A R S, B T V, atque adeò inter ſe æqualia, ex corollario propoſitionis 8. libri 11. cùm latera vnius lateribus alterius ſint æqualia. Quare ſolidum A B T V S R, contentum duobus aduerſis triangulis æqualibus, ſimilibus, & parallelis A R S, B T V, & tribus parallelogrammis R V, A T, A V, priſma eſt, ex definitione.

IAM verò, cùm oſtenſum ſit, rectas H S, K V, minus ſegmentum efficere lateris H K, fiat illis æqualis V X, dupla nimirum vtriuſque H S, & K V; & ipſius V X, minoris ſegmẽti lateris H K, duas tertias partes contineat V Y, tertia verò pars ſit X Y, ducanturque X Z, Y [illegible], rectæ T V, parallelæ. Quoniam igitur pyramides E R S H A, C T V K B, æquales ſunt oſtenſæ; [e] vtriuſque verò earum dupla eſt pyramis ſuper baſem T X, & ſub eadem altitudine P A, vel Q B, conſtituta, [f] quòd & baſis T X, dupla ſit baſis C V, vel R H. Æqualis erit pyramis T V X Z B, vtrique pyramidi E R S H A, C T V K B, ſimul: At pyramis T V X Z B, duas tertias partes cõtinet priſmatis, cuius baſis eadem

[a] 4. primi.
[b] 4. primi.
[c] 33 primi.
[d] 15. vndec.
[e] 6. duodec.
[f] 1. ſexti.

T X,& altitudo eadē Q B,vertex verò linea recta,pars videlicet rectæ AB, quę æqualis sit ipsi V X, vt demonstrauimus in scholio propos.7.lib.12.Item eiusdem prismatis,cuius basis T X,& altitudo Q B,vertex verò pars rectæ A B, æqualis ipsi V X, duas tertias partes continet prisma, cuius basis T Y,& altitudo eadē Q B,vertex verò pars rectæ A B,æqualis ipsi V Y,ex scholio propos.25. lib.11. *a* quòd & basis T Y,duas partes tertias complectatur basis T X. Igitur & prisma,cuius basis T Y,& altitudo Q B,vertex verò pars rectæ AB,æqualis ipsi V Y,æquale erit duabus pyramidibus E R S H A, C T V K B; Ac proinde hoc prisma appositum prismati A B T V S R, efficiet prisma æquale solido C B K H A E, habens basin rectangulum contentum sub latere cubi T V, & sub recta composita ex V Y, duas tertias partes minoris segmēti V X, comprehendēte,& ex V S, maiore segmento,ideoq; à base cubi deficientē rectangulo *α* X, contento sub latere cubi *α* Y,& sub X Y,tertia parte minoris segmenti V X. Non dissimili ratione inuestigabimus alia similia quinque prismata æqualia & proximè dicto prismati,& reliquis quinque solidis super reliquas quinque cubi bases constitutis. Sex igitur huiusmodi prismata æqualia erunt sex illis solidis, excessui nimirum Dodecaedri supra cubum sibi inscriptū. Quia autem duo quælibet prismata illiusmodi inter se aptata componūt parallelepipedum eiusdem altitudinis; construētur ex sex illis prismatis tria parallelepipeda sub eadē altitudine Q B, quæ æqualis est dimidio lateris pentagoni A B, seu maioris segmēti lateris cubi, & super bases à base cubi deficientes singulas rectangulo contēto sub latere cubi,& sub tertia parte minoris segmenti eiusdem lateris cubi; Ac proinde ex tribus his parallelepipedis inter se compositis exurget parallelepipedum excessui eidem Dodecaedri supra cubū sibi inscriptum æquale, cuius basis à base cubi deficit rectangulo contēto sub latere cubi, & sub tertia parte minoris segmenti eiusdem lateris cubi; altitudo verò æqualis est tribus altitudinibus prędictorum trium parallelepipedorum,hoc est,altitudini Q B, quæ æqualis fuit dimidio maioris segmenti lateris cubi,ter sumptæ.Hanc igitur altitudinem dico ab altitudine,seu latere cubi deficere minore segmento eius lineæ, quæ dimidiati lateris cubi segmentū minus existit.Diuidatur enim C K,latus cubi extrema ac media ratione in *β*: Itemq; C *β*,maius segmentum, & *β* K,minus bifariam in *γ*,*Δ*; atque ex *β* K, abscindatur *β ι*,æqualis ipsi *β γ*, seu C *γ*,ita vt C *γ*, vel *γ β*, vel *β ι*,dimidia pars maioris segmenti C *β*, æqualis sit ipsi Q B, & C *ι*, toti altitudini præfati parallelepipedi. Potest autem ex minori segmento *β* K, abscindi recta æqualis ipsi C *γ*, dimidio maioris segmenti; quia *β* K, maior est,quàm dimidium maioris segmenti C *β*. Cùm enim sit, vt C K, ad C *β*, ita C *β*, ad *β* K; sit autem C K, minor, quàm dupla ipsius C *β*, quòd C *β*, sit ipsius maius segmentum; erit quoque C *β*, minor, quàm dupla ipsius *β* K, hoc est, erit *β* K, maior, quàm dimidium ipsius C *β*. Quoniam igitur est, vt tota C K, ad maius segmentum C *β*, ita maius segmētum C *β*, ad minus *β* K; *b* erit quoq; vt C O, dimidia ipsius C K, ad C *γ*, vel *β ι*, dimidiā ipsius C *β*, ita C *γ*, vel *β ι*, ad *β Δ*, dimidiam ipsius *β* K; Ac proinde si C O, secetur extrema ac media ratione, erit maius illius segmentum C *γ*, vel *β ι*, & minus *β Δ*. Quare & *β Δ*, minus segmentum secabit *β ι*, maius segmentum extrema ac media ratione, vt demonstrauimus ad propos.5.lib.13. eritq; maius segmentum *β Δ*, minus autē *Δ ι*. Ac propterea rursus *Δ ι*, minus segmentum secabit rectam *Δ* K, maiori segmento *β Δ*, æqualem, extrema ac media ratione, minusque segmentum erit *ι* K. Deficit igitur C *ι*, altitudo præfati parallelepipedi ab altitudine, seu latere cubi C K, minore segmēto *ι* K, rectæ *Δ* K, vel sibi æqualis rectæ *β Δ*, quæ dimidiati lateris cubi fuit segmentū minus ostensa. Constat ergo basem parallelepipedi, quo Dodecaedrum excedit sibi inscriptum cubum à base cubi deficere rectangulo contento sub latere cubi, tertiaq; parte minoris segmēti eiusdem lateris cubi; altitudinē verò ab altitudine cubi deficere minore segmento eius lineæ, quæ dimidiati lateris cubi segmentum minus existit. Quocirca Dodecaedrum excedit cubum sibi inscriptū parallelepipedo,&c. Quod erat demonstrandum.



a 1. *sexti.*

b 15. *quinti.*

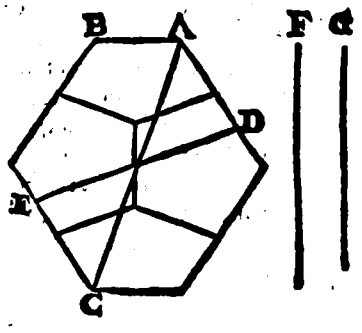
COROLLARIVM.

VNDE elicitur, Dodecaedrum à duplo cubi sibi inscripti deficere duobus parallelepipedis, quorū vnius longitudo lateri cubi est aequalis, latitudo autē tertiæ parti minoris segmēti eiusdem lateris cubi, altitudo denig, à latere cubi deficit minore segmēto eius linea, quæ dimidiati lateris cubi minus segmentū existit; Alterius verò et longitudo, et latitudo lateri cubi aqualis est, altitudo autē minus segmētū eius linea, quæ dimidiati lateris cubi segmētū minus existit, ita vt amborū altitudines simul altitudini, siue lateri cubi sint aequales. Nā si prius parallelepipedū addatur illi parallelepipedo, quo cubū à Dodecaedro superari docuimus, conficietur parallelepipedum,

lelepipedum, cuius & longitudo, & latitudo lateri cubi æqualis est; basin nimirum eandem habens, quam cubus, altitudo verò à latere cubi deficit minore segmento eius lineæ, quæ dimidiati lateris cubi minus est segmentum, hoc est, altitudine posterioris parallelepipedi. Quare si confecto iam parallelepipedo adiungatur posterius parallelepipedum, compositum erit parallelepipedum prorsus æquale cubo intra Dodecaedrum descripto; siquidem & basis, & altitudo parallelepipedi, æqualis est & basi & altitudini cubi. Atque idcircò, vt Dodecaedrum cubi inscripti duplum existat, desunt prædicta duo parallelepipeda; cùm his accedentibus ad excessum Dodecaedri supra cubum inscriptum, constituatur parallelepipedum cubo inscripto æquale, immò verò alter cubus, vt demonstratum est.

THEOR. 29. PROPOS. 29.

DODECAEDRVM ad sibi inscriptum Icosaedrum proportionem habet compositam ex proportione triplicata eius, quam habet diameter Dodecaedri ad rectam centra basium Dodecaedri oppositarum copulantem, & proportione lateris cubi ad latus Icosaedri in eadem sphæra cum cubo descripti.



IN Dodecaedro A B C, diameter sit A C, & recta coniungens centra basium oppositarum D E; At verò F, latus cubi, & G, latus Icosaedri in eadem sphæra cum cubo descripti. Dico proportionem Dodecaedri A B C, ad sibi inscriptum Icosaedrum componi ex proportione triplicata proportionis diametri A C, ad rectam D E; & ex proportione F, lateris cubi ad G, latus Icosaedri. Cùm enim anguli Icosaedri in Dodecaedro descripti reponantur in centris basium Dodecaedri, atque adeò anguli oppositi in centris basium oppositarum; erit recta D E, centra basium Dodecaedri oppositarum connectens, diameter Icosaedri inscripti; Ac propterea Dodecaedrum, cuius diameter D E, in eadem sphæra cum Icosaedro intra Dodecaedrum A B C, collocato describetur, cùm eandem habeant diametrum D E. Intellectis iam tribus magnitudinibus, Dodecaedro scilicet A B C; Dodecaedro diametri D E; & Icosaedrò eiusdem diametri D E, intra Dodecaedrum videlicet A B C, descripto; Proportio Dodecaedri A B C, primæ magnitudinis ad Icosaedrum sibi inscriptum, tertiam magnitudinē, componetur, per ea, quæ ad definitionem 5. libri 6. à nobis sunt demonstrata, ex proportionibus Dodecaedri A B C, primæ magnitudinis, ad Dodecaedrum diametri D E, secundam magnitudinem, & Dodecaedri ex diametro D E, descripti secundæ magnitudinis ad Icosaedrum in Dodecaedro A B C, descriptum, tertiam magnitudinem. Cùm ergo Dodecaedrum A B C, ad Dodecaedrum diametri D E, proportionem habeat triplicatam diametri A C, ad diametrum D E, ex corollario propositionis 17. lib. 12. [a] Dodecaedrum verò diametri D E, ad Icosaedrum eiusdem diametri D E, quod nimirum in Dodecaedro A B C, describitur, proportionem habeat, quam F, latus cubi ad G, latus Icosaedri; liquidò constat proportionem Dodecaedri A B C, ad Icosaedrum sibi inscriptum, cuius scilicet diameter D E, componi quoque ex triplicata proportione proportionis diametri A C, ad diametrum D E, rectam videlicet centra oppositarum Dodecaedri copulantem, & ex proportione F, lateris cubi, ad G, latus Icosaedri, in eadem sphæra cum cubo descripti. Dodecaedrum itaq; ad sibi inscriptū Icosaedrum proportionē habet compositam, &c. Quod erat demonstrandū.

[a] 11. quartidecimi.

THEOR. 30. PROPOS. 30.

DODECAEDRVM Pyramidis, in qua describitur, duas nonas partes continet, minus duobus parallelepipedis, quorum vnius longitudo lateri cubi in eadem pyramide descripti æqualis est, latitudo verò tertiæ parti minoris segmenti lateris eiusdem cubi, altitudo denique à latere eiusdem cubi deficit minore segmento eius lineæ, quæ dimidiati lateris cubi eiusdem minus segmentum existit; Alterius autem & longitudo, & latitudo lateri cubi prædicti est æqualis, altitudo verò minus segmentum eius lineæ, quæ dimidiati lateris cubi eiusdem segmentum minus existit, ita vt amborum altitudines simul altitudini, siue lateri eiusdem cubi sint æquales.

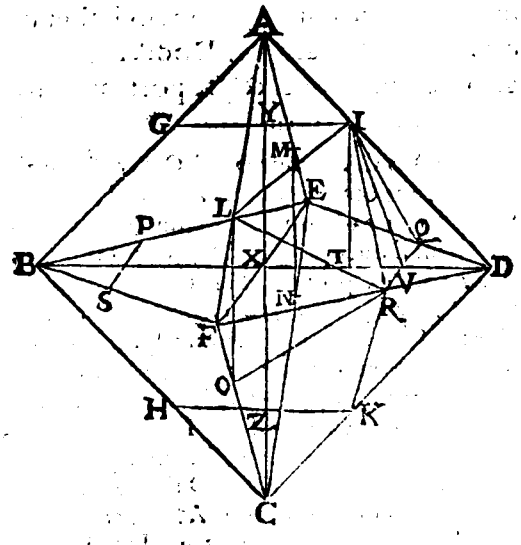
QVONIAM si in Dodecaedro intra Pyramidem descripto cubus describatur, hicidem cubus in eadem pyramide est descriptus, vt ad finem lib. 15. tradidimus; Cubus autem pyramidis, in qua describitur, nona pars est, [b] cùm pyramis cubi sibi inscripti sit noncupla. Fit, vt magnitudo dicti cubi dupla contineat duas partes nonas pyramidis Dodecaedrum, seu cubum ambientis. Quare,

[b] 15. huius decimi.

cùm Dodecaedrũ cubi ſibi inſcripti duplum ſit, ex coroll. propoſ. 28. huius lib. minus duobus illis parallelepipedis, quorũ mentio facta eſt in verbis propoſitionis huius; non obſcurè colligitur, Dodecaedrum pyramidi inſcriptum duas nonas partes cõtinere ipſius pyramidis, minus dictis duobus parallelepipedis; adeò vt ſi dicta duo parallelepipeda addantur Dodecaedro, tum demũ magnitudo exurgat duas partes nonas pyramidis complectens. Quamobrem Dodecaedrum Pyramidis, in qua deſcribitur, duas nonas partes cõtinet, minus duobus parallelepipedis, quorũ vnius longitudo lateri cubi in eadem pyramide deſcripti æqualis eſt, &c. Quod erat demonſtrandum.

THEOR. 31. PROPOS. 31.

OCTAEDRVM excedit ſibi inſcriptum Icoſaedrum Parallelepipedo, cuius baſis eſt quadratum lateris Icoſaedri, altitudo verò maius ſegmentum ſemidiametri Octaedri extrema ac media ratione ſectæ.



OCTAEDRVM, cui inſcriptum eſt Icoſaedrũ, ſit A B C D E F, repetita figura propoſ. 16. libri 15. vbi demonſtratum eſt, viginti triangula Icoſaedrum inſcriptum componentia eſſe I Q R, K Q R, G I L, G I M, G P S, H P S, N H K, O H K, R L O, S L O, P M N, Q M N, G M P, H N P, K N Q, L M Q, G L S, H Q S, K O R, I L R, quorum octo poſtrema octo baſibus Octaedri ſunt impoſita, ſecantia videlicet omnia eius latera extrema ac media ratione; item rectam I T, perpendicularem ad B D, æqualem eſſe maiori ſegmẽto X Y, ſemidiametri A X. Dico Octaedrum A B C D E F, ſuperare Icoſaedrum ſibi inſcriptum parallelepipedo, cuius baſis eſt quadratum lateris Icoſaedri Q R, altitudo verò I T, maius ſegmẽtum ſemidiametri A X. Cùm enim in quatuor baſibus Octaedri D E A, D F A, D E C, D F C, angulum ſolidum Octaedri D, conſtituentibus, poſitæ ſint quatuor baſes Icoſaedri I M Q, I L R, K N Q, K O R; remanebunt iuxta angulum ſolidum D, in eiſdem quatuor baſibus Octaedri quatuor triangula I Q D, I R D, K Q D, K R D, quibus ſi accedant duo triangula Icoſaedri, Q I R, K Q R, & commune triangulum D Q R, conſtituentur duæ pyramides ſuper communẽ baſem D Q R, nempe I D Q R, K D Q R, inter ſe æquales, p coroll. propoſ. 5. lib. 12. cùm earum altitudo ſit recta eadem I T, maius videlicet ſegmentum ſemidiametri Octaedri. (Nam quemadmodum A X, ſecta eſt à recta G I, in Y, extrema ac media ratione, ita quoq; ſecta eſt C X, à recta H K, in Z. Quare ſi ex K, ad B D, perpendicularis ducatur, altitudo nimirum pyramidis K D Q R, erit ea æqualis rectæ Z X, maiori ſegmento ſemidiametri C X, hoc eſt, ipſi I T.) Quæ quidem pyramides extra Icoſaedrum in Octaedro deſcriptum conſiſtunt. Simili modo prope ſingulos reliquos quinque angulos Octaedri conſtituentur binæ pyramides & inter ſe & dictis duabus æquales, extra Icoſaedrum prædictum: Ita vt Octaedrum ſuperet Icoſaedrum ſibi inſcriptum duodecim illis pyramidibus æqualibus. Quia verò triangulum D Q R, dimidium eſt quadrati lateris D Q; (Cùm D Q, D R, rectæ æquales ſint, minora ſcilicet ſegmenta laterum Octaedri, angulumq; contineant rectum.) erit recta Q R, diameter illius quadrati; Ac proinde quadratum ipſius Q R, duplum erit quadrati lateris D Q, ideoq; quadruplum trianguli D Q R. Priſma itaq; ſiue parallelepipedum, cuius baſis quadratũ rectæ Q R, & altitudo I T, quadruplum quoq; erit priſmatis, cuius baſis triangulum D Q R, & altitudo eadem I T, per ea, quæ demonſtrauimus ad propoſ. 7. lib. 12. Priſma autem, cuius baſis D Q R, & altitudo I T, triplum exiſtens, ex coroll. 1. propoſ. 7. lib. 12. pyramidis I D Q R, æquale eſt tribus pyramidibus earum duodecim, quas circa Icoſaedrum conſiſtere diximus. Priſma ergo, vel parallelepipedũ, cuius baſis quadratũ rectæ Q R, & altitudo I T, quadruplum quoq; eſt trium illarũ pyramidum. Quare cùm earundem trium pyramidum quadruplæ ſint omnes duodecim pyramides ſimul Icoſaedrũ ambientes; Æquale quoque erit priſma, ſeu parallelepipedum, cuius baſis quadratum rectæ Q R, lateris nimirum Icoſaedri, & altitudo I T, maius ſegmentum ſemidiametri A X, duodecim illis pyramidibus, hoc eſt, exceſſui Octaedri ſupra Icoſaedrum ſibi inſcriptum; Ac proinde Octaedrum ſuperabit Icoſaedrum dicto priſmate, vel parallelepipedo. Octaedrum ergo excedit ſibi inſcriptum Icoſaedrum parallelepipedo, cuius baſis eſt quadratum lateris Icoſaedri, &c. Quod erat oſtendendum.

a 34. primi.

COROLLARIVM.

HINC infertur, Pyramidem excedere duplum Icoſaedri ſibi inſcripti parallelepipedo, cuius baſis quadratum lateris Icoſaedri, altitudo verò recta linea bifarias ſectiones oppoſiterũ laterum Icoſaedri coniungens. Cùm enim ex demonſtratis propoſ. 19. lib. 15. conſtet, ſi Pyramidis Octaedrum

Octaedrum, & huic Octaedro Icosaedrum imponatur, Icosaedrum eidem Pyramidi esse inscriptum; [a] *Octaedrum autem superet Icosaedrum sibi inscriptũ parallelepipedo, cuius basis quadratum lateris Icosaedri, nempe recta Q R, altitudo verò maius segmentum semidiametri Octaedri, recta videlicet I T, seu T X: Fit, vt Octaedrum bis sumptum, nempe pyramis, cui inscribitur, (*[b] *quòd Pyramis dupla sit sibi inscripti Octaedri) superet idem Icosaedrũ in Octaedro, ideoq; & in Pyramide descriptum, duplo illius parallelepipedi, nimirum parallelepipedo cuius basis idem quadratum lateris Icosaedri, altitudo verò recta T Z, coniungens bifarias sectiones laterum Icosaedri oppositorum G I, H K. Hoc enim parallelepipedum illius duplum est, per demonstrata à nobis in scholio propos. 14. lib. 12. cùm altitudines duplam habeant proportionem. Quare hoc eodem parallelepipedo, cuius basis quadratum lateris Icosaedri, altitudo verò recta linea bifarias sectiones oppositorum laterum Icosaedri copulans, Pyramis duplum Icosaedri sibi inscripti excedit.*

[a] 31. sexti decimi.

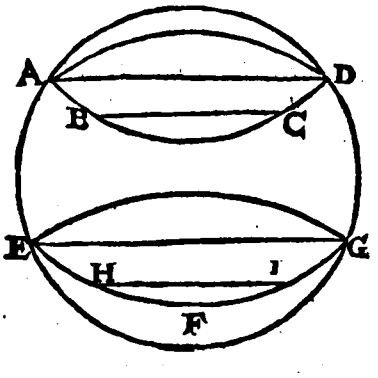
[b] 21. sexti decimi.

DE QVINQVE CORPORVM REGVLARIVM descriptione in data sphæra, ex Pappo Alexandrino.

Quoniam Euclides lib. 13. quinque corpora Regularia seorsum extra sphæram construxit, deinde verò eadem à sphæra comprehendi, noua demonstratione confirmauit; non erit abs re docere, qua ratione Pappus Alexandrinus eadem quinque corpora in data sphæra describat: præsertim cùm eius ratio multò clarior videatur, & facilior, q. constructio illa, ab Euclide prescripta. Sed prius ex eodem Pappo lemmata nonnulla præmittenda sunt, quorum aliqua etsi per elementa sphærica Theodosii demonstrantur, non tamẽ propterea ordinem Euclidis peruertere censeri possumus; quippe cùm propositiones Sphæricorum elementorũ, quibus hic indigemus, ex solis 19. prioribus propos. lib. 11. Euclidis pendeant; vt commodè ante lib. 12. at q. adeò multò magis ante hãc corporũ Regularium constructionem percipi possint. In citandis autem Theodosii propositionibus, sequemur ordinem nostrorum commentariorum, quos in eadem elementa conscripsimus. Hinc ergo initium sumamus.

LEMMA I.

Datis duobus circulis in sphæra parallelis, datáque in vno eorum linea recta; ducere in altero diametrum huic rectæ datæ parallelam.



In sphæra sint duo circuli paralleli A B C D, E F G: sitq. primũ in A B C D, data diameter A D, cui in E F G, ducẽda sit diameter parallela. Ducatur, vt in scholio propos. 18. lib. 11. docuimus, per diametrum A D, planũ rectum ad circulum A B C D, [c] *faciens in sphæra superficie circulum A E G D. Quoniam igitur circulus A E G D, circulum A B C D, bifariam, & ad angulos rectos secat, erit circulus A E G D, maximus, transibitq. per polos circuli A B C D, ex scholio propos. 15. lib. 1. Theod. ac proinde & per polos circuli E F G,* [d] *cùm paralleli eosdem polos habeant:* [e] *ideoq. eum bifariam secabit. Communis ergo sectio E G, eius diameter erit:* [f] *quæ cùm sit ipsi A D, parallela, patet propositum.*

[c] 1. 1. Theodosij.

[d] 12. Theodosij.

[e] 15. 1 Theodosij.

[f] 16. vndec.

Deinde in circulo A B C D, data recta B C, non sit eius diameter, cui ducenda sit diameter parallela in circulo E F G. [g] *Ducatur ipsi B C, per centrum circuli A B C D, diameter parallela A D; cui in circulo E F G, ducatur diameter parallela E G, vt proximè ostendimus. Quoniam igitur vtraque B C, E G, eidem A D, parallela est, ex constructione,* [h] *ipsa quoque B C, E G, inter se parallelæ erunt. Quod est propositum.*

[g] 31. primi.

[h] 19. vnde.

Eadem ratione recta B C, ducetur in circulo E F G, parallela H I, à diametro E G, diuersa, quæ ipsi B C, æqualis sit, si modò B C, maior non sit diametro E G. Nam si in circulo E F G, ducatur ipsi B C, parallela H I, & æqualis, vt ad propos. 1. lib. 4. tradidimus, factum erit, quod iubetur.

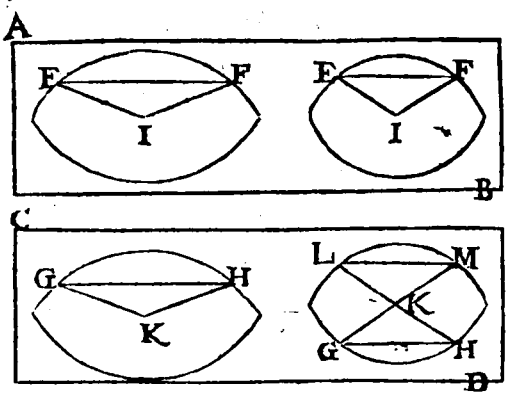
LEMMA II.

Si in planis parallelis descripti sint duo circuli, in quibus duæ rectæ parallelæ abscindant arcus similes; erunt duæ rectæ coniungentes extrema vnius rectę cum centro, parallelæ duabus rectis, quæ extrema alterius rectæ cum centro coniungunt.

In planis parallelis A B, C D, descripti sint duo circuli, in quibus rectæ E F, G H, primùm parallelæ sint, ad easdem partes centrorum I, K; auferantq. arcus similes E F, G H, ac tandem iungantur ad centra rectis E I, F I, G K, H K. Dico tam E I, G K, quàm F I, H K, parallelas esse. Quoniam enim arcus E F, G H, similes sunt, erunt anguli I, K, æquales, ex scholio propositionis 22. libri 3. [i] *Igitur reliqui anguli E, F, reliquis angulis G, H, æquales erunt.* [k] *Cùm ergo tam illi, quàm hi, sint inter se æquales; erit tam angulus E, angulo G, quàm*

[i] 32. primi.

[k] 5. primi.



angulus F, angulo H, æqualis. Quoniam igitur in planis parallelis recta E F, G H, parallela ſunt, & recta E I, G K, ad eaſdem partes plani per E F, G H, ductæ efficiunt cum ipſis æquales angulos E, G; erunt, ex ijs, quæ in ſcholio propoſ. 16. lib. 11. demonſtrauimus, E I, G K, parallelæ: Eademq; ratione F I, H K, parallelæ erunt.

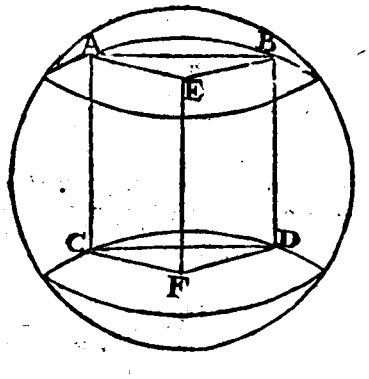
DEINDE ſint E F, G H, parallelæ, non ad eaſdem partes centrorum I, K. Dico tam E I, H K, quàm F I, G K, eſſe parallelas. Productis enim G K, H K, iungatur recta L M. Et quia latera G K, H K, lateribus L K, M K, ſunt æqualia, [a] *angulos q; ad verticem K, æquales continent;* [b] *erũt & baſes G H, L M, & anguli*

a 15. primi.
b 4. primi.
c 28. tertij.
d 27. primi.
e 9. vndec.

H, L, æquales, & anguli G, M. [c] *Igitur arcus G H, L M, æquales ſunt,* [d] *& rectæ G H, L M, inter ſe parallelæ: Ac proinde cùm vtraq; E F, L M, ipſi G H, ſit parallela,* [e] *erũt & E F, L M, parallelæ inter ſe. Quia igitur E F, L M, parallelæ ſunt, abſcindentes ad eaſdem partes centrorũ arcus ſimiles E F, L M; (Nam cùm arcus G H, ſit arcui E F, ſimilis, erit quoq; arcus L M, qui arcui G H, æqualis eſt, eidem arcui E F, ſimilis.) erunt tam E I, L K, hoc eſt, E I, H K, quàm F I, M K, hoc eſt, F I, G K, parallelæ. Quod eſt propoſitum.*

LEMMA III.

Si in ſphæra ſint duo circuli paralleli, & æquales, in quibus ductæ ſint duæ rectæ parallelæ & æquales, ad eaſdem partes centrorum; rectæ harum parallelarum extrema puncta ad eaſdem partes coniungẽtes, æquales quoque & parallelæ ſunt, & ad plana circulorum perpendiculares.



IN ſphæra ſint duo circuli paralleli & æquales A B, C D, in quibus ſint duæ rectæ æquales, & parallelæ A B, C D, ad eaſdem partes centrorum, quarũ extrema iungantur ad eaſdem partes rectis A C, B D. Dico rectas A C, B D, æquales quoq; eſſe, ac parallelas, & ad plana circulorũ perpendiculares. Quoniam enim A B, C D, parallelæ ſunt; [f] *erunt A C, B D, in eodem cum ipſis plano. Quare cùm A B, C D, ſint etiam æquales;* [g] *æquales quoq; erunt, ac parallelæ A C, B D, quod eſt primum.*

f 7. vndec.
g 33. primi.

EX centris deinde E, F, ductis rectis E A, E B; F C, F D, iunctáque recta E F, erunt tam A E, C F, quàm B E, D F, parallelæ, ex ſecundo lemmate: Sunt autem & æquales ob circulorum æqualitatem. [h] *Igitur & A C, E F, & B D, E F, parallelæ erunt, & æquales.* [i] *Quoniam verò circuli A B, C D, paralleli circa eoſdem polos ſunt,* [k] *recta per eorum polos ducta tranſibit per eorundem centra, & per centrum ſphæræ, & ad plana eorundem recta erit. Quocirca recta E F, eorundem centra coniungens, per eorum polos, & centrum ſphæræ incedet, ne duæ rectæ per eorum centra dicantur tranſire, nimirum recta E F, & recta per eorum polos extenſa. quod eſt abſurdum. Haberent enim illæ rectæ ſegmentum commune E F.* [l] *Igitur E F, ad plana circulorum A B, C D, recta eſt:* [m] *Ac propterea & vtraque A C, B D, ipſi E F, parallela, ad eadem plana erit recta. Quod eſt ſecundum.*

h 33. primi.
i 1. 2. Theodoſij.
k 10. 1. Theodoſij.
l 10. 1 Theodoſij.
m 8. vndecimi.

HAEC demonſtratio locum etiam habet, quando parallelæ A B, C D, ſunt circulorum diametri, ſed tũc E A, E B, F C, F D, erunt partes diametrorum, vt patet.

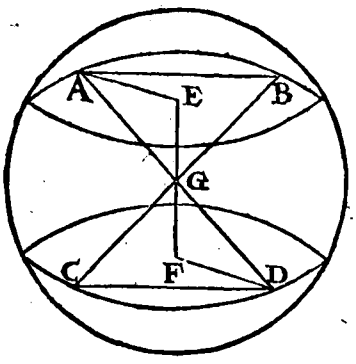
LEMMA IIII.

Si in ſphæra ſint duo circuli paralleli & æquales, in quibus ductæ ſint duæ rectæ parallelæ & æquales, non ad eaſdem partes centrorum: rectæ harũ parallelarum extrema puncta non ad eaſdem partes coniungentes, in centro ſphæræ ſe interſecant, ac proinde diametri ſphæræ erunt, & inter ſe æquales: Rectæ verò earundem parallelarum extrema puncta ad eaſdem partes connectentes, & æquales ac parallelæ inter ſe ſunt, & cum parallelis rectos angulos conſtituunt.

IN ſphæra ſint duo circuli paralleli & æquales A B, C D, & in iis duæ rectæ parallelæ & æquales A B, C D, non ad eaſdem partes centrorum, quarum puncta extrema primùm non ad eaſdem partes iungantur rectis A D, B C. Dico rectas A D, B C, in centro ſphæræ ſe interſecare, ideoq; diametros eſſe ſphæræ inter ſe æquales. Quoniam enim A B, C D, parallelæ ſunt; [n] *erunt A D, B C, in eodem cum ipſis plano; ac proinde ſe mutuò interſecabunt, vt in puncto G: quod dico eſſe centrũ ſphæræ. Connectantur enim circulorũ centra E, F, rectis*

n 7. vndec.

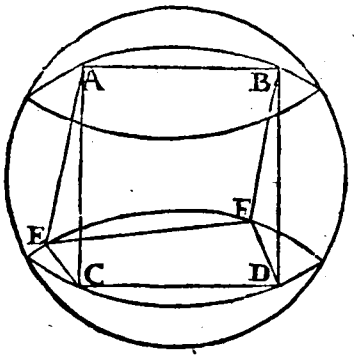
E A, E G,



EA, EG; FD, FG. [a] *Et quia anguli AGB, CGD, ad verticem aequales sunt:* [b] *item tam alterni anguli BAD, CDA, quàm alterni ABC, DCB; aequiangula erunt triangula ABG, CDG.* [c] *Igitur erit vt AB, ad BG, ita DC, ad CG: Item vt AB, ad AG, ita DC, ad DG. Cùm ergo AB, CD ponantur aequales,* [d] *erunt quoque tam BG, CG, quàm AG, DG, inter se aequales. Rursus quia AE, DF, semidiametri circulorum aequalium aequales sunt; sunt autem ex 2. lemmate & parallelæ,* [e] *ideoq; anguli alterni EAD, FDA, aequales; erunt duo latera EA, AG, duobus lateribus FD, DG, aequalia, angulosq; comprehendent aequales.* [f] *Igitur & bases EG, FG, & anguli AGE, DGF, aequales sunt.* [g] *Et quia AD, in eodem plano est, in quo parallelæ AE, DF;* [h] *& EG, FG, in eodem plano, in quo AD, AE, DF; erunt EG, FG, in rectum & continuum constituta, propter aequales angulos AGE, DGF, vt ex Proclo ad propos. 15. lib. 1. ostendimus. Quare EF, recta coniungens centra circulorum parallelorum per centrum sphæræ transibit, vt in præcedenti lemmate demonstrauimus,* [i] *perpendicularisq; ad eorum plana erit. Cùm ergo EG, FG, aequales sint ostensæ, erit G, centrum sphæræ,* [k] *propterea quòd circuli aequales AB, CD, aequaliter à centro sphæræ absunt; inaequaliter verò abessent, si centrum sphæræ in recta EF, diceretur aliud punctum quàm G. Quocirca AD, BC, diametri sphæræ sunt, & inter se propterea aequales. quod est primum.*

a 15. primi.
b 29. primi
c 4. sexti.
d 14. quinti
e 29. primi
f 4 primi.
g 7. vndec.
h 2. vndec.
i 10. 1. Theodosij.
k 6. 1. Theodosij.

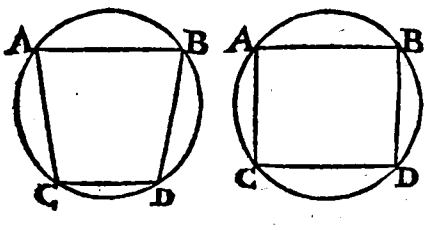
SED iam puncta extrema parallelarum aequalium AB, CD, ad easdem partes iungantur rectis AC, BD. Dico rectas AC, BD, & aequales ac parallelas inter se esse, & angulos CAB, ABD, BDC, DCA, esse rectos. Quòd enim sint parallelæ & aequales, [l] *manifestum est, cùm extrema puncta parallelarum aequalium coniungant. Quòd autem ad AB, CD, sint perpendiculares, ita ostendetur. In circulo CD, ad rectam CD, excitentur perpēdiculares CE, DF, iunganturq; EF, AE, BF. Quia igitur anguli ECD, FDC, recti sunt, erūt ex scholio propos. 31. lib. 3. arcus ECD, FDC, semicirculi, ac proinde & reliqui arcus EFD, CEF, semicirculi erūt,* [m] *& anguli EFD, CEF, recti. Quare in parallelogrāmo rectāgulo DE, rectæ CD, EF, aequales sunt,* [n] *ideoq; AB, EF, parallelæ erunt, & aequales. Igitur ex 3. lemmate AE, BF, ad plana circulorum rectæ erunt, ac proinde, ex defin. 3. lib. 11. anguli AEC, BFD, recti erūt. Recta igitur EF, perpēdicularis ad vtramque EC, EA, & ad vtrāq; FD, FB, vt ostendimus,* [o] *perpendicularis erit & ad planum trianguli AEC, per EC, EA, ducti, & ad planum trianguli BFD, per FD, FB, ducti:* [p] *ac propterea & CD, AB, ipsi EF, parallelæ, ad eadem plana triangulorum perpendiculares erunt; ideoq; ex defin. 3. lib. 11. anguli CAB, ABD, BDC, DCA, recti erunt. Quod est secundum.*



l 33. primi.
m 31. tertij.
n 9. vndec.
o 4. vndec.
p 8. vndec.

LEMMA V.

SI in sphæra sint duæ rectæ parallelæ, rectæ earum puncta extrema ad easdem partes coniungentes, æquales inter se erunt. Et si parallelæ fuerint æquales, coniungentes non solùm æquales, sed & parallelæ erunt, rectosq; cum ipsis angulos conficient.



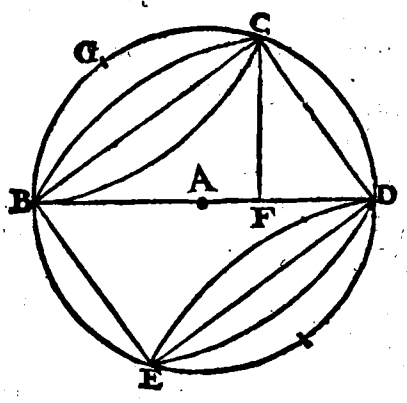
SINT in sphæra duæ parallelæ AB, CD, quarum extrema puncta ad easdem partes connectantur rectis AC, BD. Dico AC, BD, aequales esse. Quia enim parallelæ sunt AB, CD; [q] *erunt AC, BD, in eodē cū ipsis plano. Ducto igitur per ipsas plano,* [r] *fiat in sphæra circulus ABDC, in quo cùm parallelæ sint AB, CD, erunt, ex scholio propos. 27. lib. 3. arcus AC, BD, aequales:* [s] *ideoq; & rectæ AC, BD, aequales erunt. Quod si parallelæ AB, CD, fuerint aequales, ita vt quadrilaterum ABDC, in circulo habeat duo opposita latera AB, CD, parallela, & aequalia; erit ex scholio propos. 31. lib. 3. ABDC, parallelogrammum rectangulum; ac proinde anguli A, B, D, C, recti erunt. Quod est propositum.*

q 7. vndec.
r 1. 1. Theodosij.
s 29. tertij.

LEMMA VI.

IN data sphæra duos circulos æquales, ac parallelos describere, ita vt diameter sphæræ sit vtriusque diametri potentia sesquialtera.

SIT sphæra centrum A, per quod planū ductum faciat circulum maximū BCDE, cuius diameter BD, ex coroll. 1. prop. 1. lib. 1. Theod. Secta autem BD, in F, vt BF, ipsius FD, dupla sit; erit BD, talium partium 3.



qualium 2. eſt BF; ac proinde BD, ipſius BF, ſeſquialtera eſt. Ducta quoque FC, ad BD, perpendiculari, iungantur rectæ BC, DC, ductaq; DE, ipſi BC, parallela, connectatur recta BE.

a 29. primi b 31. tertij. [a] *Et quoniam tam duo anguli BCD, EDC, quàm duo BED, CBE, duobus rectis æquales ſunt.* [b] *eſtq; tam BCD, quàm BED, rectus; erit quoq; & EDC, & CBE, rectus. Igitur ex ſcholio prop. 34. lib. 1. quadrilaterum rectangulum BCDE, parallelogrammum eſt;* [c] *ideoq; recta BC, DE, æquales ſunt. Diuiſo iam arcu BC, bifariam in G, erit quoque arcus EGD, diuiſus bifariam in G, quòd ex ſcholio propoſ. 27. lib. 3. arcus quoque BE, CD, æquales ſint. Polo igitur G, & interuallis GB, GE, circuli in ſuperficie ſphæræ deſcribantur tranſeuntes per C, D, ob æqualitatem tam arcuum GB, GC, quàm GE, GD;* [d] *qui paralleli erunt, cum*

34. primi d 2. Theodoſij. e 15. 1 Theodoſij. *eoſdem habeant polos.* [e] *Et quia circulus maximus BCDE, per polos ſecat circulos BC, ED. bifariam, erunt BC, ED, diametri ipſorum, quæ cùm æquales ſint oſtenſæ, erunt & circuli BC, ED, æquales. Dico diametrum ſphæræ BD, ad vtramque diametrum BC, ED, proportionem habere potentia ſeſquialteram. Quoniam enim, ex coroll propoſ. 8 lib. 6. tres rectæ DB, BC, BF, continuè proportionales ſunt; erit ex coroll. propoſ. 20. lib. 6. vt BD, ad BF, ita quadratum ex BD, ad quadratum ex BC: Eſt autem BD, ipſius BF, ſeſquialtera, vt oſtenſum eſt. Igitur & quadratum ex BD, quadrati ex BC, atque adeò & quadrati ex DE, ſeſquialterum eſt: atque idcirco diameter ſphæræ BD, vtriuſque diametri BC, DE, potentia ſeſquialtera eſt. quod eſt propoſitum.*

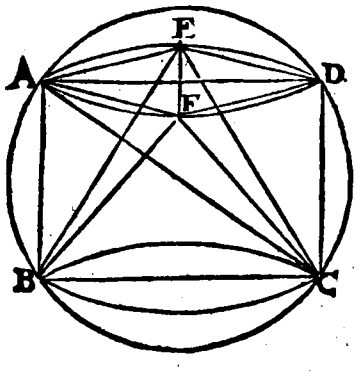
His demonſtratis, hoc modo in ſphæra data deſcribemus quinq; corpora regularia.

PROBL. 1. PROPOS. 1.

IN data ſphæra Pyramidem deſcribere.

DESCRIBANTVR in data ſphæra, ex lemmate 6. duo circuli AD, BC, æquales, & paralleli, quorum diametrorum potentia ſit ſeſquialtera diameter ſphæræ: & per eorum polos maximus circulus ducatur ABCD, [f] *qui eos ad angulos rectos, ac bifariam ſecabit, ac proinde cum eis communes ſectiones faciet diametros AD, BC. Ducatur in circulo AD, alia diameter EF, ſecans AD, ad angulos rectos in centro, &*

f 15. 1. Theodoſij.



rectæ ducantur EB, EC, FB, FC. Dico EBCF, eſſe pyramidem, hoc eſt, quatuor triangula EBC, BCF, CFE, EFB, eſſe æquilatera & æqualia. Iunctis enim rectis AE, ED, DF, FA, AB, CD, CA; erit AC, diameter ſphæræ, ex lemmate 4. & AB, DC, æquales erunt, & ad plana circulorum rectæ, ex 3. lemmate. Denique AEDF, quadratum erit in circulo AD, deſcriptum, vt conſtat ex prop. 6. lib. 4. Itaque quoniam, ex conſtructione, quadratum ex diametro ſphæræ AC, ſeſquialterum eſt quadrati ex AD, diametro circuli; ſi ponatur quadratum ex AC, 3. erit quadratum ex AD, 2. Cùm ergo quadratum ex AC, 3 æquale ſit quadratis ex AD, DC, quòd angulus ADC, rectus ſit, ex defin. 3. lib. 11. erit quadratum ex DC, 1. ac proinde quadratum ex AD, quadrati ex DC, duplum erit: Eſt autem & quadratum ex AD, quadrati ex DF, duplum, ex ſcholio prop. 47. lib. 1. Æqualia ergo ſunt quadrata ex

g 47. primi

h 47. primi *DC, DF;* [h] *quibus cùm æquale ſit quadratum ex CF, quòd angulus CDF, ex defin. 3. lib. 11. rectus ſit; erit quadratum ex CF, quadrati ex DF, quoque duplum, propterea quadrato ex AD, æquale. Recta igitur CF, rectæ AD, hoc eſt, ipſi BC, æqualis eſt. Eodem modo oſtendetur BF, eidem BC, æqualis; ideoq; BCF, triangulum eſt æquilaterum.*

RVRSVS quia quadratum ex AD, quadrati ex DC, duplum eſt oſtenſum; eſt autem, ex ſcholio propoſ. 47. lib. 1. & duplum quadrati ex DE: æqualia erunt quadrata ex DC, DE: [i] *quibus cùm æquale ſit quadratum ex CE, quòd angulus CDE, ex defin. 3. lib. 11. rectus ſit; duplum quoque erit quadratum ex CE, quadrati ex DE. Æqualia ergo ſunt quadrata ex CE, AD, propterea quæ recta CE, rectæ AD, hoc eſt, rectis BC, EF, æqualis eſt, atque adeò & recta CF, quæ ipſi EC, oſtenſa eſt æqualis. Triangulum igitur CEF, æquilaterum etiam eſt, & ipſi BCF, æquale, ob laterum æqualitatem. Non aliter demonſtrabimus, triangulum BEF, eſſe æquilaterum, & ipſis BCF, FCE, æquale. Ex quo ſequitur & BCE, triangulum æquilaterum eſſe, & aliis tribus æquale: quippe cùm latera BE, CE, ipſi BC, oſtenſa ſint æqualia. Pyramis ergo eſt EBCF, ex defin. 26. lib. 11. & in data ſphæra deſcripta, cùm eius anguli ſolidi E, B, C, F, in ſuperficie ſphæræ conſiſtant. quod eſt propoſitum.*

i 47. primi

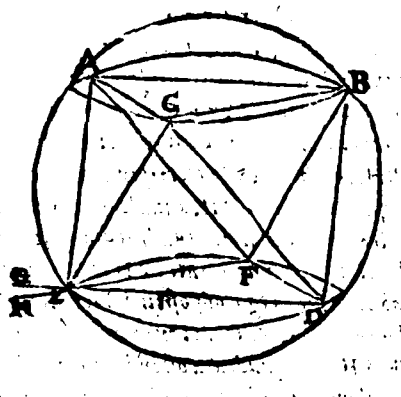
COROL-

COROLLARIVM.

HINC sequitur, diametrum sphæræ potentia esse sesquialteram lateris pyramidis in ea sphæra descriptæ. Nam latus pyramidis est æquale diametro A D, vt ostendimus, & ex constructione, diameter sphæræ potentia est sesquialtera diametri A D.

PROBL. 2. PROPOS. 2.

IN data sphæra Octaedrum describere.



DESCRIBANTVR ex lemmate 6. in data sphæra duo circuli æquales & paralleli A B C, D E F, ita vt sphæræ diameter diametri cuiuslibet eorum potentia sit sesquialtera. [a] Descripto autem triangulo æquilatero A B C, in circulo A B C, ducatur, per primum lemma, recta A B, in circulo D E F, parallela & æqualis D E, ad diuersas partes centrorum: qua latus etiam erit trianguli æquilateri in circulo D E F, descripti, ob circulorum æqualitatem. Cùm pleto ergo triangulo æquilatero D E F, erunt singula eius latera singulis lateribus trianguli A B C, æqualia & parallela: æqualia quidem, ob laterum A B, D E, æqualitatem; parallela verò, ex schol. propos. 16. lib. 11. Cùm enim parallelæ sint A B, D E, & anguli A B C, D E F, æquales; producta recta D E, F E, ad G, H, erunt quoque anguli A B C, G E H, æquales. Cùm ergo parallelæ sint A B, G E, & B C, E H, ad easdem partes plani per A B, G E, ducti; erunt quoque B C, H E, hoc est, B C, E F, parallelæ, ex illo scholio propos. 16. lib. 11. Eadem ratione parallela erit D F, ipsi A C. Connectantur denique A E, E C, C D, D B, B F, F A, vt in figura. Dico A D, octaedrum esse, hoc est, octo triangula A B C, C A E, E C D, D C B, B F A, A F E, E F D, D F B, æquilatera esse, & æqualia. Quoniam enim in circulis parallelis & æqualibus sphæra, rectæ A B, D E, æquales sunt & parallelæ ad diuersas partes centrorum, erunt, per 4. lemma, rectæ iunctæ A D, B E, (quas tamen confusionis vitandæ gratia non duximus.) diametri sphæræ, & rectæ A E, B D, æquales etiam erunt, ac perpendiculares ad ipsas A B, D E. [b] *Quadratum igitur ex B E, duobus quadratis ex B D, D E, æquale erit: Posito autem quadrato ex diametro sphæræ B E, 6. quadratum ex D E, est 3. (Nam cùm per constructionem diameter sphæræ potentia sit sesquialtera diametri circuli D E F: posito quadrato ex B E, 6. erit quadratum diametri circuli D E F, 4. At posito quadrato diametri circuli D E F, 4. quadratum lateris trianguli æquilateri D E, est 3. quòd. ex coroll. 1. prop. 12. lib. 13. diameter circuli potentia sit sesquitertia lateris trianguli æquilateri.) Igitur & quadratum ex B D, est 3. ac proinde quadrata ex D E, B D, æqualia sunt, & rectæ ipsæ D E, B D, æquales. Est autem D E, ipsi A B, per constructionem, & B D, ipsi A E, per 4. lemma, æqualis. Quatuor ergo rectæ A B, B D, D E, E A, æquales erunt, constituent q. quadratum A B D E, cùm anguli ad A, B, D, E, recti sint, ex eodem 4. lemmate.*

RVRSVS quia B C, E F, parallelæ sunt & æquales ad diuersas partes centrorum; erunt quoque iunctæ rectæ B E, C F, non ad easdem partes, diametri sphæræ, ex 4. lemmate, & rectæ B E, C E, æquales inter se, atq. ad B C, E F, perpendiculares, erit q. rursus, vt prius, quadratum B C E F. Non aliter ostendemus, A C D F, quadratũ esse; cùm iunctæ rectæ A D, C F, sint quoq. sphæræ diametri, ex 4. lemmate, &c. Cùm ergo tria quadrata A D, B E, C F, constructa sint super latera æqualia A B, B C, C A, nimirum super latera trianguli æquilateri, cùm A B, latus sit quadrati A D; & B C, quadrati B E, & C A, quadrati C F; erunt omnia triangula octo A B C, C A E, E C D, D C B, B F A, A F E, E F D, D F B, æquilatera, & inter se æqualia. Octaedrum ergo est A D, ex defin. 27. lib. 11. & in data sphæra descriptũ, cùm eius anguli solidi, A, B, D, E, C, F, sphæræ superficiem attingant. quod est propositum.

[a] 2. quarti

[b] 47. primi

COROLLARIVM

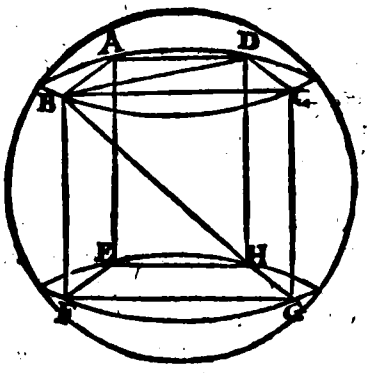
COLLIGITVR ex his, sphæræ diametrũ potentia duplam esse lateris octaedri in ea sphæra descripti. Demonstratum enim est, quadratum ex B E, diametro sphæræ duplum esse quadrati ex D E, latere octaedri.

PROBL. 3. PROPOS. 3.

IN data sphæra cubum describere.

DESCRIBANTVR ex lemmate 6. in data sphæra duo circuli æquales ac paralleli A B C D, E F G H, quorum diametrorum potentia sit sesquialtera diameter sphæræ. [c] *Descripto autem quadrato A B C D, in circulo A B C D, ducatur, per 1. lemma, recta A D, in circulo E F G H, parallela E H, & æqualis ex eadem parte centrorum, qua latus quoque erit quadrati in circulo E F G H, descripti, ob circulorum æqualitatem. Completo ergo quadrato E F G H, erunt singula eius latera singulis lateribus quadrati A B C D, æqualia, & parallela; æqualia quidem, ob laterum A D, E H, æqualitatem; parallela verò ex scholio*

[c] 6. quarti.



propoſ.16. lib.11. Nam quia parallela ſunt A D, E H, ſunt q̃ anguli æquales A D C, E H G, nimirum recti; erunt quoq; D C, H G, parallelæ, cùm ſint ad eaſdem partes plani per A D, E H, ducti, & ſic de cæteris. Iungantur denique ad eaſdem partes centrorum rectæ A E, B F, C G, D H, quæ, per lemma 3. ad plana circulorũ rectæ erũt, & inter ſe parallelæ. Dico A G, eſſe cubum, hoc eſt, ſex quadrilatera A B C D, E F G H, A D H E, B C G F, A B F E, C D H G, eſſe quadrata & æqualia. Ductis enim rectis B H, B D, erit, ex lemmate 4. B H, diameter ſphæræ; at B D, diameter circuli A B C D, quippe quæ diameter ſit quadrati circulo inſcripti. Quoniam igitur, per conſtructionem, quadratum ex B H, ſeſquialterum eſt quadrati ex B D; quadratum autem ex B D, quadrati ex B C, duplum, ex ſcholio propoſ.47. lib.1. ſi ſtatuatur quadratum ex B H, 3. erit quadratum ex B D, 2. & quadratum ex D C, 1. atque adeò quadratum ex B H, quadrati ex D C, triplum erit. Rurſus quia quadratum ex B H, eſt 3. & quadratum ex B D, 2. [a] eſt q̃ quadratum ex B H, æquale quadratis ex B D, D H, quòd angulus B D H, ex defin.3. lib.11. rectus ſit, erit quadratum ex D H, 1. Quadratum igitur ex B H, triplum eſt quadrati ex D H. Fuit autem idem quadratum ex B H, triplum quadrati ex D C. Æqualia ergo ſunt quadrata ex D C, D H, ac proinde rectæ D C, D H, æquales. Cùm ergo oppoſitis lateribus G H, C G, æquales ſint; erunt omnia quatuor latera æqualia in parallelogrammo C H. Cùm igitur & anguli recti ſint, ex defin.3. lib.11. quadratum erit G H. Eadem ratione & B E, A H, B G, quadrata oſtendentur: Sed & A C, E G, quadrata ſunt, ex conſtructione. Sunt ergo omnia ſex quadrilatera quadrata, & inter ſe æqualia, ob latorum æqualitatem. Cubus igitur eſt A G, ex defin.25. lib.11. & in data ſphæra deſcriptus, cùm eius anguli ſolidi A, B, C, D, E, F, G, H, ſuperficiem ſphæræ contingant. quod eſt propoſitum.

a 47. primi

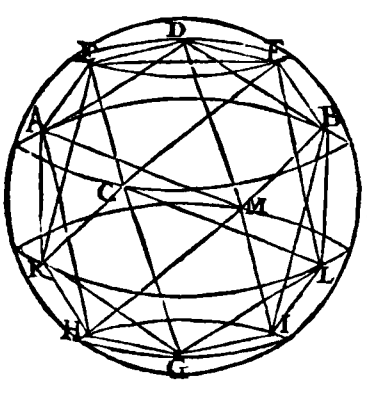
COROLLARIVM

CONSTAT ex his, diametrum ſphæræ potentia triplam eſſe lateris cubi in ea ſphæra deſcripti. Demonſtratum enim eſt, quadratum ex diametro ſphæræ B H, triplum eſſe quadrati lateris cubi D C, vel D H, vel A D, &c.

MANIFESTVM quoque eſt, eundem circulum comprehendere & quadratum cubi, & triangulum Octaedri in eadem ſphæra deſcriptorum: quia videlicet circulus A B C D, huius figuræ æqualis eſt circulo A B C, figuræ antecedentis propoſitionis. Id quod demonſtratum quoque eſt lib.14. propoſ.21.

PROBL. 4. PROPOS. 4.

IN data ſphæra Icoſaedrum deſcribere.



b 12. ſexti. c 1. quarti. d 1. 1. Theodoſij. e 12. ſexti. f 1. 1. Theodoſij. g 2. quarti.

REPERIATVR [b] recta linea, ad quam ſic ſe habeat diameter ſphæræ datæ, vt pentagoni latus ad latus hexagoni in eodem circulo cum pentagono deſcripti: Fiat q̃, ex coroll. propoſ.6. lib.10. vt numerus 3. ad 1. ita quadratum rectæ inuentæ ad quadratum alterius cuiuſdam lineæ, ad cuius interuallum, veluti ſemidiametrũ, circulus in data ſphæra deſcribatur. Hoc autem facili negotio ita fiet. Deſcripto maximo circulo in ſphæra data, [c] accommodetur in eo recta, quæ inuentæ ſemidiametri ſit dupla, cùm hæc recta minor ſit diametro ſphæræ, ſiue illius circuli maximi, vt infrà probabitur. Nam ſi per eam rectam planum ducatur rectũ ad circulum illum maximum, [d] faciet id circulum A B C, in ſphæra, cuius ſemidiameter, ex conſtructione, potentia ſubtripla eſt rectæ initio inuentæ. Deinde [e] inueniatur rurſus recta linea, ad quam ita ſe habeat data ſphæræ diameter, vt pentagoni latus ad latus decagoni in eodem circulo cum pentagono deſcripti; Fiat q̃, vt 3. ad 1. ita, per coroll propoſ.6. lib.10. quadratum rectæ inuentæ ad quadratum alterius lineæ, ad cuius interuallum alter circulus in ſphæra deſcribatur priori circulo A B C, parallelus: quod fiet, ſi in eodem illo circulo maximo accommodetur recta æqualis duplæ ſemidiametri inuentæ, & parallela prioris circuli diametro, ex iis, quæ ad propoſ.1. lib.4. demonſtrauimus, & per eam rectam planum extendatur priori circulo parallelum, hoc eſt, ad dictum circulum maximum rectum, ex ſcholio propoſ.18. lib.11. Nam per idem ſcholium, planum hoc erit circulo A B C, parallelum, [f] faciet q̃ in ſphæra circulum D E F, cuius ſemidiameter ſemidiametro inuentæ æqualis eſt. His duobus circulis ex altera parte centri ſphæræ alij duo æquales ac paralleli deſcribantur G H I, K L M: quod facile fiet, ſi illorum diametris æquales rectæ, & parallelæ in eodem illo circulo maximo ducantur, &c. [g] Deſcripto autem in circulo D E F, triangulo æquilatero D E F, ducatur

ducatur lateri E F, in parallelo circulo A B C, ex lemmate primo, recta linea A B, ex altera parte centri, parallela, quæ æqualis ſit vni lateri trianguli æquilateri in circulo A B C, deſcripti: Item huic A B, agatur ex altera parte centri, parallela K L, in circulo K L M, & æqualis: Ac denique huic K L, in circulo G H I, ducatur ex altera parte centri, parallela H I, & æqualis ipſi E F, hoc eſt, lateri trianguli æquilateri in circulo G H I, deſcripti. Completis ergo triangulis æquilateris A B C, K L M, G H I, erunt ſingula latera ſingulis lateribus trianguli D E F, parallela; nimirum A C, M L, G H, ipſi D F; at B C, M K, G I, ipſi D E: quod probabitur ex ſcholio propoſ. 16. lib. 11. vt in problemate ſecundo oſtendimus, parallelas eſſe B C, E F, ad diuerſas partes centrorum ductas. In figura non deſcripſimus ea triangula in circulis A B C, K L M, ne multitudo linearum confuſionem pareret, ſed tantùm laterum extrema puncta notauimus. Poſtremò, ex quolibet 12. punctorum quatuor triangulorum æquilaterorum ad viciniora quinque puncta ducantur quinque lineæ rectæ; videlicet ex puncto D, rectæ D E, D A, D M, D B, D F: ex G, rectæ G H, G K, G C, G L, G I, &c. vt in figura apparet. Ex quolibet enim puncto quinque rectas lineas emiſſas eſſe cernis. Dico D G, eſſe Icoſaedrum, hoc eſt, viginti triangula D E F, D E A, D A M, D M B, D F B, &c. eſſe æquilatera, & æqualia. Quod vt demonſtretur, oſtendendum prius eſt, Icoſaedrum in ſphæra deſcriptum (poſſe autem in ſphæra data deſcribi Icoſaedrum, Euclides docuit propoſ. 16. lib. 13.) ſuos 12. angulos conſtituere in quatuor circulis parallelis, quos deſcripſimus, nimirum ternos angulos in ſingulis circulis, atque eo ſitu, quo eadem puncta notauimus.

SIT igitur in ſphæra deſcriptum Icoſaedrum D G, duodecim angulos ſtatuens in punctis D, E, A, K, H, G, I, L, B, F, M, C. Et quia quinque rectæ D E, D A, D M, D B, D F, æquales ſunt, cùm ſint latera triangulorum æquilaterorum æqualium; ſi ex polo D, per E, in ſphæra circulus deſcribatur, tranſibit is per reliqua puncta A, M, B, F: ac propterea pentagonum E A M B F, in vno plano erit, nimirum in plano illius circuli. Cùm ergo eius latera ſint æqualia, vtpote latera Icoſaedri, erit illud pentagonum etiam æquiangulum, ex iis, quæ ad finem lib. 4. demonſtrata ſunt à nobis. Eadem ratione pentagonum æquilaterum, & æquiangulum erit A K C F D, ob quinque rectas æquales E A, E K, E C, E F, E D: Et K H M D E, ob quinque latera Icoſaedri inter ſe æqualia A K, A H, A M, A D, A E: Et H G C E A, ob quinque latera Icoſaedri æqualia K H, K G, K C, K E, K A: Et G I M A K, ob latera quinque Icoſaedri æqualia H G, H I, H M, H A, H K: Et I L C K H, ob quinque rectas æquales G I, G L, G C, G K, G H: Et L B M H G, ob rectas quinque æquales I L, I B, I M, I H, I G: Et B F C G I, ob quinque rectas æquales L B, L F, L C, L G, L I: Et F D M I L, ob quinque rectas æquales B F, B D, B M, B I, B L: Et D E C L B, ob rectas quinque æquales F D, F E, F C, F L, F B: Et D A H I B, ob quinque latera Icoſaedri æqualia M D, M A, M H, M I, M B: Ac tandem G L F E K, ob quinque Icoſaedri latera æqualia C G, C L, C F, C E, C K; ita vt 12. pentagona æquilatera, æquiangulaque inter ſe æqualia conſtituantur. Quoniam verò recta ſubtendens angulum pentagoni æquilateri, & æquianguli oppoſito lateri æquidiſtat, vt in ſcholio propoſ. 8. lib. 13. demonſtrauimus; erit iuncta recta A B, ipſi E F, parallela in pentagono E A M B F: & A C, iuncta ipſi D F, parallela in pentagono A K C F D: Et B C, iuncta parallela ipſi D E, in pentagono D E C L B. [a] Plana ergo per rectas D E, E F, & C B, B A, ducta parallela ſunt, [b] faciuntque circulos parallelos in ſphæra D E F, A B C. Eodem modo erit iuncta K L, ipſi H I, parallela in pentagono I L C K H: Et iuncta K M, ipſi G I, in pentagono G I M A K: Et L M, iuncta ipſi G H, in pentagono L B M H G: Ac propterea circuli in ſphæra paralleli erunt G H I, K L M. Non aliter erit A B, iuncta ipſi H I, parallela in pentagono D A H I B: Et iuncta K L, ipſi E F, in pentagono G L F E K. [c] Igitur E F, H I, cùm ſint eidem iunctæ A B, vel K L, parallelæ, inter ſe parallelæ ſunt. Eademque ratione D E, G I, cùm ſint eidem iunctæ B C, vel K M, parallelæ, inter ſe parallelæ erunt; propterea quæ plana circulorum D E F, G H I, per rectas D E, E F, & H I, G I, ductæ parallelæ erunt. Omnes ergo quatuor circuli in ſphæra D E F, A B C, K L M, G H I, paralleli inter ſe ſunt; & tam circuli D E F, G H I, inter ſe æquales, ob triangula æquilatera in illis deſcripta æqualia, quàm circuli A B C, K L M, inter ſe etiam æquales, ob triangula æquilatera æqualia in ipſis, quæ ex iunctis A B, B C, C A; & K L, L M, M K, conſtituuntur: quippe cùm latera hæc ſint rectæ ſubtendentes angulos pentagonorum æqualium.

a 15. vndec.
b 1. 1. Theodoſij.
c 9. vndec.

QVIA verò iuncta recta K B, quæ connectit non ad eaſdem partes extrema K, B, parallelarum K L, A B, in parallelis circulis non ad eaſdem partes centrorum ductarum, ſphæræ diameter eſt, & angulus B A K, rectus, ex 4. lemmate, quòd K A, connectat ad eaſdem partes extrema K, A, earundem parallelarum; [d] erit quadratum diametri K B, æquale duobus quadratis ex A B, A K. Rurſus quia in pentagono E A M B F, recta iuncta A B, angulum A M B, ſubtendit: Vt autem recta angulum pentagoni ſubtendens ad latus pentagoni, ita eſt hexagoni latus ad latus decagoni in eodem circulo deſcriptorum, ex ſcholio propoſitionis ſecundæ, libri decimiquarti, erit A B, iuncta ad E F, vel A K, ipſi E F, æqualem, vt hexagoni latus ad latus decagoni: Atque idcirco [e] cùm latus pentagoni poſſit & latus hexagoni, & latus decagoni in eodem circulo deſcriptorum; erit diameter ſphæræ K B, (quæ ambas A B, A K, poteſt, vt oſtendimus.) latus pentagoni in eo circulo, in quo A B, latus eſt hexagoni, & A K, vel E F, latus decagoni. Quare ſphæræ diameter K B, ad iunctam A B, proportionem habet, quam pentagoni latus ad latus hexagoni, at verò ad E F, eam, quam latus pentagoni habet ad latus decagoni: [f] Ac proinde cùm tam A B, latus trianguli æquilateri in circulo A B C, quàm E F, latus trianguli æquilateri in circulo D E F, potentia triplum ſit ſemidiametri ſui circuli; erunt circuli D E F, A B C, ac proinde & G H I, K L M, qui illis æquales ſunt, illi,

d 47. primi
e 10. tertiidecimi.
f 12. tertiidecimi.

quos in principio propoſitionis deſcripſimus. Ex quo patet, rectam, quæ dupla eſt ſemidiametri initio inuentæ, minorem eſſe diametro ſphæræ, vt ſuprà diximus.

His demonſtratis, facili negotio concludemus, ſolidam figuram à nobis deſcriptam D G, eſſe Icoſaedrū, cum Icoſaedro in ſphæra deſcripto, cuius baſis triangulum D E F, omnes eius anguli ſolidi cadant in terna puncta aliorum trium circulorum parallelorum, è quibus latera triangulorum eduximus; ac proinde ſingula horum latera ſingulis lateribus illius Icoſaedri congruant.

COROLLARIVM I.

Constat ex his, ſphæræ diametrum ad latus Icoſaedri in ea deſcripti habere proportionem, quam latus pentagoni ad latus decagoni in eodem circulo deſcriptorum: adeò vt ſi diameter ſphæræ fuerit latus pentagoni in aliquo circulo, latus Icoſaedri ſit latus decagoni in eodem illo circulo. Nam deſcripto Icoſaedro D G, in ſphæra, oſtenſum eſt eſſe diametrum ſphæræ K B, ad E F, latus Icoſaedri, vt latus pentagoni ad latus decagoni.

Ex quo fit, latus Icoſaedri maius eſſe ſemidiametro ſphæræ: quemadmodum & latus decagoni maius eſt ſemiſſe lateris pentagoni, quippe cùm duo latera decagoni cum vno latere pentagoni triangulum Iſoſceles conſtituant: [a] ac propterea duo latera decagoni maiora ſint latere pentagoni, ideoq; vnum latus decagoni maius dimidio lateris pentagoni.

a 20. primi

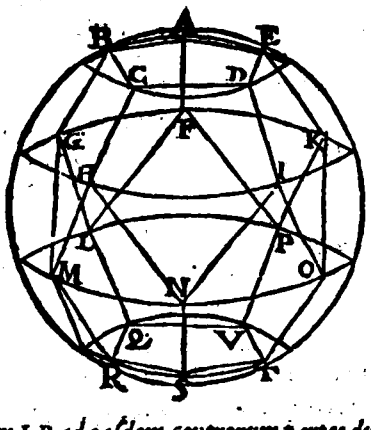
COROLLARIVM II.

Colligitvr etiam ex demonſtratis, diametrum ſphæræ eſſe potentia triplam lateris pentagoni in circulo A B C, deſcripti. Quoniam enim eſt, vt latus pentagoni ad latus hexagoni in eodem circulo A B C, deſcriptorum, ita diameter ſphæræ K B, ad iunctam A B, ex conſtructione; erit permutando, vt latus pentagoni ad diametrum ſphæræ, ita latus hexagoni ad iunctam A B: [b] Eſt autem latus hexagoni in circulo A B C, (hoc eſt, ſemidiameter) potentia ſubtriplum rectæ iunctæ A B, quòd A B, ſit latus trianguli æquilateri. Igitur & latus pentagoni in eodem circulo A B C, potentia ſubtriplum eſt diametri ſphæræ, hoc eſt, diameter ſphæræ potentia tripla eſt lateris pentagoni in circulo A B C, deſcripti.

b 12. tertiidecimi.

PROBL. 5. PROPOS. 5.

In data ſphæra Dodecaedrum deſcribere.



Describantvr in data ſphæra quatuor circuli paralleli, vt in antecedenti propoſ. A B C D E, F G H I K, L M N O P, Q R S T V, ita vt ſemidiametri circulorum A B C D E, Q R S T V, ſint potentia ſubtripla duarum rectarum, ad quas diameter ita ſe habeat, vt pentagoni latus ad latus decagoni; ſemidiametri verò circulorum F G H I K, L M N O P, potentia ſint ſubtripla duarum rectarum, ad quas diameter ſphæræ ſic ſe habeat, vt pentagoni latus ad latus hexagoni. Deſcripto autem in circulo A B C D E, pentagono A B C D E, æquilatero, & æquiangulo, ducatur eius lateri C D, ad eaſdem partes centrorum parallela H I, in circulo F G H I K, & æqualis lateri pentagoni eiuſdem circuli, ex 1. lemmate: Recta autem H I, ad diuerſas partes centrorum agatur eodem modo parallela L P, in circulo L M N O P: Huic tandem L P, ad eaſdem centrorum partes ducatur parallela Q V, in circulo Q R S T V. Completis autem pentagonis in hiſce tribus circulis, (quorum tamē latera, vt confuſionem vitaremus, non duximus, ſed eorum tantùm extrema puncta notauimus.) erunt ſingula latera eorum ſingulis lateribus pentagoni A B C D E, parallela, eo ordine, quo lateri C D, parallela ducta ſunt: quod demonſtrabitur, vt in probl. 2. oſtendimus, parallelas eſſe B C, E F, nimirum H G, P O, T V, latera iuncta, parallela erunt ipſi B C, &c. Poſtremò, ex quolibet 20. punctorum quatuor pentagonorum ad viciniora tria puncta ducantur tres rectæ, vt in figura apparet. Ex quolibet enim puncto tres rectas vides eſſe emiſſas. Dico A S, Dodecaedrum eſſe, hoc eſt, duodecim pentagona A B C D E, D E K O I, O I N S T, S T V Q R, Q R M G L, G L F A B, A F P K E, K P V T O, R S N H M, F L Q V P, C D I N H, B C H M G, æquilatera eſſe, æquiangula, & æqualia. Quod vt oſtendatur, demonſtrandum prius eſt, Dodecaedrum in ſphæra deſcriptum (poſſe autem in data ſphæra Dodecaedrum deſcribi, docuit Euclides propoſ. 17. lib. 13.) ſuos 20. angulos ſtatuere in quatuor circulis paralleli, quos deſcripſimus, quinos videlicet in ſingulis circulis, atque in eo ſitu, quo eadem 20. puncta notauimus.

Sit ergo in ſphæra deſcriptum Dodecaedrum A S, viginti angulos ſtatuens in punctis A, B, C, D, E, F, G, H, I, K, L, M, N, O, P, Q, R, S, T, V. Et quoniam recta ſubtendens angulum pentagoni æquilateri & æquianguli oppoſito lateri æquidiſtat, vt in ſcholio propoſ. 8. lib. 13. demonſtrauimus, erit iuncta G H, lateri B C, parallela in penta-

in pentagono B C H M G; & iuncta H I, lateri C D, in pentagono C D I N H; & I K, lateri D E, in pentagono D E K O I; & K F, ipſi A E, in pentagono A E K P F, & F G, ipſi A B, in pentagono A B G L F; & ſic de cæteris. Quia igitur recta A B, A E, rectæ F G, F K, parallelæ ſunt; [a] *erit & planum per F G, F K, ductum plano pentagoni A B C D E, per A B, A E, ducto parallelum. Eadem ratione eidem plano pentagoni parallelum erit planum per F G, G H, ductum; quòd hæ rectæ rectis A B, B C, ſint parallelæ. Igitur, ex ſcholio propoſ. 16. lib. 11. plana per F G, F K, & per F G, G H, ducta, inter ſe parallela ſunt, cùm eidem plano pentagoni A B C D E, ſint parallela; atque adeò, ex eodem ſcholio, cùm conueniant in recta F G, vnum planum efficient. Non aliter oſtendemus, planum quoque per F K, K I, & planum per K I, I H, & planum per I H, H G, cum plano per F K, F G, ducto, vnum planũ efficere. Plana igitur per puncta A, B, C, D, E, & per puncta F, G, H, I, K, ducta in ſphæra* [b] *efficient duos circulos parallelos A B C D E, F G H I K. Eodemq; modo plana per puncta Q, R, S, T, V, & per puncta L, M, N, O, P, ducta, circulos parallelos efficient Q R S T V, L M N O P. Eruntq; tam duo circuli A B C D E, Q R S T V, quàm duo F G H I K, L M N O P, inter ſe æquales, ob pentagona æqualia A B C D E, Q R S T V, & ob rectas F G, G H, H I, I K, K F; L M, M N, N O, O P, P L,* [c] *quæ omnes æquales ſunt, cùm ſubtendant angulos æquales in pentagonis æqualibus.*

a 15. vndec.

b 1. 1. Theodoſij.

c 4. primi.

Deinde, quia ex ſcholio propoſ. 8. lib. 13. rectæ iunctæ N D, M B, lateri C H, parallelæ ſunt in pentagonis C H N I D, B G M H C; [d] *erunt quoq; ipſæ iunctæ N D, M B, parallelæ: Sunt autem & æquales, q; æquales angulos in pentagonis æqualibus ſubtendant.* [e] *Igitur & iunctæ N M, B D, æquales erunt ac parallelæ. Eodem modo æquales erunt & parallelæ, iunctæ N O, C E, cùm connectant duas N C, O E, æquales ac parallelas, quòd vtraq; lateri D I, ſit parallela.* [f] *Circulus igitur L M N O P, circulo A B C D E, parallelus eſt, cùm ille ducatur per rectas N M, N O, hic verò per rectas B D, C E, quibus illa parallelæ ſunt oſtenſa. Non ſecus oſtendentur paralleli circuli Q R S T V, F G H I K. Omnes ergo quatuor circuli paralleli ſunt.*

d 9. vndec.

e 33. primi.

f 15. vndec.

Rvrsvs, quoniam iuncta recta E F, O V, cùm, ex ſcholio propoſ. 8. lib. 13. lateri P K, in pentagonis A E K P F, T V P K O, æquidiſtent, [g] *parallelæ ſunt; nec non & inter ſe æquales, quòd angulos æquales in pentagonis æqualibus ſubtendant,* [h] *erunt & rectæ iunctæ E O, F V, parallelæ & æquales. Quadrilaterum ergo E F V O, in vno plano eſt,* [i] *cùm E F, O V, in eodem ſint plano cum parallelis E O, F V. Eſt autem & in circulo,* [k] *propterea quòd planum, in quo exiſtit, in ſphæra circulum efficit. Igitur, ex iis, quæ ad propoſ. 31. lib. 3. demõſtrauimus, cùm in eo quadrilatero oppoſita latera æqualia ſint, quadrilaterũ rectangulum eſt E F V O; ac proinde cùm omnia latera æqualia ſint, ſubtendentia angulos æquales in pentagonis æqualibus, quadratum erit. Iuncta ergo eius diameter F O, duplum poteſt lateris F E, ex ſcholio propoſ. 47. lib. 1. hoc eſt, rectæ iunctæ F G, quòd æquales ſint F G, F E, ſubtendentes angulos pentagonorum æqualium: ideoq; qualium partium 1. ſtatuetur quadratum rectæ F G, talium 2. erit quadratum rectæ F O, & ambo quadrata ſimũl earundem partium 3. Quibus* [l] *cùm æquale ſit quadratum iunctæ rectæ O G, quæ diameter ſphæræ eſt; (Nam cùm æquales ſint iunctæ F G, O N, ſubtendentes æquales angulos pentagonorum, & inter ſe parallelæ, quòd duabus parallelis A B, S T, parallelæ ſint, ex ſcholio propoſ. 8. lib. 13. erit, ex lemmate 4. iuncta recta O F, ad F G, perpendicularis, & O G, diameter ſphæræ.) erit quoq; quadratum diametri ſphæræ 3. qualium 1. eſt quadratum rectæ F G, hoc eſt, quadratum diametri ſphæræ quadrati rectæ F G, triplum erit.* [m] *Eſt autem & quadratum lateris trianguli æquilateri triplum quadrati ſemidiametri, hoc eſt, lateris hexagoni. Igitur erit, vt quadratum diametri ſphæræ ad quadratum rectæ F G, ita quadratum lateris trianguli ad quadratum lateris hexagoni;* [n] *atq; adeò vt diameter ſphæræ ad rectam F G, ita latus trianguli æquilateri ad latus hexagoni: Vt autem recta F G ad latus trianguli in eodem circulo F G H I K, ita eſt latus pentagoni eiuſdem circuli ad latus trianguli, quòd F G, ſit latus pentagoni. Igitur ex æqualitate perturbata erit, vt diameter ſphæræ ad latus trianguli æquilateri in circulo F G H I K, ita latus pentagoni ad latus hexagoni, vt in appoſita formula apparet. Cùm ergo in figura præcedentis propoſ. ſit quoq; vt diameter ſphæræ ad latus trianguli, hoc eſt, ad iunctam rectam A B, in illa figura, ita latus pentagoni ad latus hexagoni; erit vterq; circulus A B C, K L M, illius figuræ vtriq; circulo F G H I K, L M N O P, huius figuræ æqualis.*

g 9. vndec.

h 33. primi.

i 7. vndec.

k 1. 1. Theodoſij.

l 47. primi.

m 12. tertiidecimi.

n 22. ſexti.

Diam. ſphæræ.	Latus pentag.
Recta F G.	Lat. triang.
Lat. triang.	Lat. hexag.

Præterea quia, ex ſcholio propoſ. 2. lib. 14. eſt, vt iuncta recta F G, ſubtendens angulum pentagoni A B G L F, ad A B, latus pentagoni, ita latus hexagoni ad latus decagoni: Et vt F G, latus pentagoni in circulo F G H I K, ad A B, latus pentagoni in circulo A B C D E, ita latus trianguli in circulo F G H I K, ad latus trianguli in circulo A B C D E; erit quoque vt latus trianguli in circulo F G H I K, ad latus trianguli in circulo A B C D E, ita hexagoni latus ad latus decagoni in eodem circulo cum hexagono deſcripti. Vt autem diameter ſphæræ ad latus trianguli in circulo F G H I K, ita eſt latus pentagoni ad latus hexagoni in eodem circulo cum pentagono deſcripti, vt proximè demõſtratum eſt. Igitur ex æquo erit, vt diameter ſphæræ ad latus trianguli in circulo A B C D E, ita latus pentagoni ad latus decagoni in eodem circulo cum pentagono deſcripti; vt in hac altera formula apparet. Cùm ergo in figura præcedentis propoſ. ſit quoq; vt diameter

Diam. ſphæræ.	Lat. pẽtagoni.
Lat. triang. in circulo F G H I K.	Lat. hexagoni.
Lat. triang. in circulo A B C D E.	Lat. decagoni.

ſphæra ad E F, latus trianguli in circulo D E F, ita latus pentagoni ad latus decagoni; erit vterque circulus D E F, G H I, figuræ antecedentis propoſ. vtriq; circulo A B C D E, Q R S T V, huius figuræ æqualis. Quare circuli A B C D E, F G H I K, L M N O P, Q R S T V, ſunt illi, quos in propoſ. antecedenti, & in hac deſcripſimus.

Q V I B V S demonſtratis, nullo negotio probabimus, ſolidam figuram A S, à nobis deſcriptam, eſſe Dodecaedrum: quippe cum Dodecaedro in ſphæra deſcripto, cuius baſis pentagonum A B C D E, omnes eius anguli ſolidi cadant in quina puncta aliorum trium circulorum parallelorum, è quibus latera pentagonorum eduximus; ac proinde ſingula horum latera ſingulis lateribus illius Dodecaedri congruant.

COROLLARIVM.

PERSPICVE colligitur ex his, eundem circulum comprehendere & triangulum Icoſaedri, & pentagonum Dodecaedri in eadem ſphæra deſcriptorũ: quia videlicet circulus D E F, figuræ antecedentis propoſ. æqualis eſt circulo A B C D E, figuræ huius propoſ. Id quod demonſtratum quoque eſt lib. 14. propoſ. 5.

MANIFESTVM quoq; eſt, eoſdem prorſus circulos ſuſtinere & angulos ſolidos Icoſaedri, & angulos ſolidos Dodecaedri.

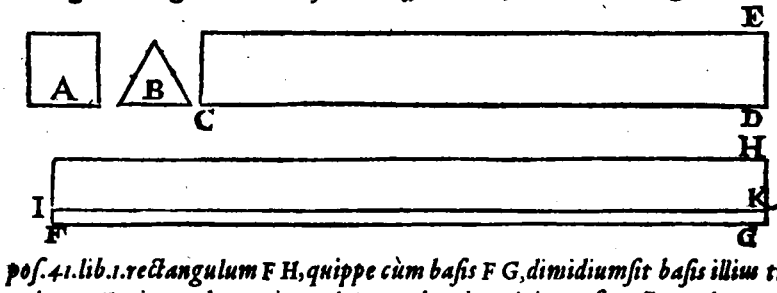
SCHOLIVM.

EX his, quæ hoc loco, & lib. 13. & 14. demonſtrauimus, facilè etiam oſtendemus, ſi omnia quinque corpora regularia in vna eademq; ſphæra deſcribantur, maximum omnium eſſe Dodecaedrum: Deinde Icoſaedrum maius reliquis tribus: Tertiò, cubum maiorem reliquis duobus: Octaedrum denique Tetraedro eſſe maius. Ex quo conſtabit, Euclidem recto ordine quinque hæc corpora conſtruxiſſe, cùm poſt Tetraedrum ſtatim Octaedrum, non autem cubum, conſtituerit. Ita enim ſemper à minoribus ad maiora progreſſus eſt. Sed prius alia nonnulla demonſtranda ſunt. Hinc ergo exordiamur.

I.

SI quadratum, & triangulum æquilaterum æqualia habeant latera; erunt viginti triangula ſimul maiora, quàm octo quadrata ſimul.

HABEANT quadratum A, & triangulum æquilaterum B, latera æqualia. Dico viginti triangula octo quadratis eſſe maiora. Sit enim rectangulum C E, cuius vnum latus C D, octuplum ſit lateris quadrati
a 1. ſexti. *A, & latus D E, lateri eiuſdem quadrati æquale: Erit q. rectangulum C E, octuplum quadrati A,* [a] *cùm ſit, vt C D, ad latus quadrati A, ita rectangulum C E, ad quadratum A, ob æqualem altitudinem. Sit quoq; rectangulum F H, cuius vnum latus F G, decuplum ſit lateris trianguli B, & latus G H, æquale perpendiculari ex vno angulo trianguli ad eius baſem demiſſa, hoc eſt, altitudini trianguli B. Et quoniam triangulum rectangulum, cuius vnum latus eſt vigecuplum lateris trianguli B, & alterum latus æquale ipſi G H, hoc eſt, altitudini trianguli B,*



b 1. ſexti. *[b] vigecuplum eſt trianguli B; Ei autem triangulo rectangulo æquale eſt, ex ſcholio propoſ. 41. lib. 1. rectangulum F H, quippe cùm baſis F G, dimidium ſit baſis illius trianguli; erit quoque rectangulum F H, vigecuplum trianguli B. Probandum igitur eſt, rectangulum F H, maius eſſe rectangulo C E.*
c 12. quartidecimi. *[c] Quoniam latus trianguli B, hoc eſt, latus D E, potentia ſeſquitertium eſt eius perpendicularis, hoc eſt, lateris G H: Latus autem F G ad latus C D, potentia proportionem habet, quam 25. ad 16. quòd F G, ſit 10. & C D, 8. hoc eſt, F G, 5. & C D, 4. Erit maior proportio F G, ad C D, quàm D E, ad G H. Eſt enim maior proportio 25. ad 16. ſupernoncupartiens ſextaſdecimas, quàm 4. ad 3. ſeſquitertia, quòd maior ſit fractio $\frac{9}{16}$. quàm*
d 12. ſexti. $\frac{1}{3}$. *[d] Fiat vt F G, ad C D, ita D E, ad H K; erit q. maior quoque proportio D E, ad H K, quàm ad G H;*
e 10. quinti *[e] ac proinde maior erit G H, quàm H K. Ducta ergo K I, ipſi F G, parallela, erit vt I K, ipſi F G, æqualis ad C D, ita*
f 14. vel 16. ſexti. *D E, ad H K.* [f] *Igitur erit I H, rectangulum rectangulo C E, æquale: ideoq; F H, maius, quàm C E. Quod eſt propoſitum.*

II.

OCTO quadrata ex ſemidiametro ſphæræ deſcripta æqualia ſunt ſuperficiei cubi in ea ſphæra deſcripti.

g 20. quartidec. *[g] QVONIAM duo quadrata ex diametro ſphæra deſcripta ſuperficiei cubi in ea ſphæra deſcripti æqualia ſunt: Duo verò eadem quadrata æqualia ſunt octo quadratis ex ſemidiametro ſphæra deſcripti, quòd quadratum diametri quadruplum ſit quadrati ſemidiametri, ex ſcholio propoſ. 4. lib. 2. efficitur, octo quadrata ſemidiametri ſphæra æqualia quoque eſſe ſuperficiei cubi eiuſdem ſphæra. Quod eſt propoſitum.*

III.

SI Octaedrum, cubus, & Icoſaedrum in eadẽ ſphæra deſcribãtur, erit perpendicularis è centro

centro ſphæræ ad vnam baſim Icoſaedri ducta, maior perpendiculari ex eodem centro ſphæræ ad vnam baſim Octaedri,& cubi ducta.

NAM [a] quia latus Octaedri maius eſt latere Icoſaedri in eadem ſphæra; erit vnum triangulum Octaedri maius quoque vno triangulo Icoſaedri. Quare ſi vtrumque ſolidum ita intra ſphæram conſtituantur, vt triangulum vnius triangulo alterius ſit parallelum, longius à centro aberit Icoſaedri triangulum, quàm triangulum Octaedri; cùm vtrumque tribus angulis ſuperficiem ſphæræ attingat: Ac proinde perpendicularis è centro ſphæræ ad baſim Icoſaedri deducta maior erit perpendiculari ex eodem centro ad baſim Octaedri. Cùm ergo perpendicularis Octaedri æqualis ſit perpendiculari cubi; [b] quòd baſis cubi, & baſis Octaedri eodem circulo circumſcribantur, ideóque æqualiter à centro diſtent; erit quoque perpendicularis Icoſaedri perpendiculari cubi maior. Quod eſt propoſitum.

a 18. tertij decimi.

b 21. quartidec.

IIII.

SI Cubus & Icoſaedrum in eadem ſphæra deſcribantur, ſuperficies Icoſaedri ſuperficie cubi maior eſt.

QVONIAM viginti triangula æquilatera ſuper ſemidiametro ſphæræ maiora ſunt octo quadratis ex eadem ſphæræ ſemidiametro deſcriptis, vt theoremate 1. demonſtrauimus: Sunt autem viginti triangula Icoſaedri maiora viginti triangulis æquilateris ſuper ſemidiametro ſphæræ conſtructis, quòd latus Icoſaedri ſemidiametro ſphæræ maius ſit, ex coroll. 1. problematis 4. ſuperioris. Igitur & viginti triangula Icoſaedri multò maiora ſunt octo quadratis ex ſphæræ ſemidiametro deſcriptis. Quam ob rem, cùm viginti triangula Icoſaedri totam ſuperficiem Icoſaedri conficiant, at octo quadrata ex ſemidiametro ſphæræ deſcripta, ſuperficiei cubi æqualia ſint, ex theoremate 2. paulò antè demonſtrato; erit quoque Icoſaedri ſuperficies maior ſuperficie cubi. Quod eſt propoſitum.

DE COMPARATIONE SOLIDITATVM quinque corporum Regularium in eadem ſphæra deſcriptorum.

HIS præmiſſis, demonſtremus iam, Dodecaedrum maius eſſe Icoſaedro: Icoſaedrum maius cubo: Cubum maiorem Octaedro: Octaedrum denique maius Tetraedro. quod hunc in modum fiet.

I.

DODECAEDRVM Icoſaedro maius eſt.

QVONIAM eſt, [c] vt cubi latus ad latus Icoſaedri, ita Dodecaedrum ad Icoſaedrum: [d] eſt autem latus cubi latere Icoſaedri maius; maius quoq; erit Dodecaedrum Icoſaedro. Quod eſt propoſitum.

c 11. quartidec.

d 18. tertiidecimi.

II.

ICOSAEDRVM cubo maius eſt.

QVONIAM perpendicularis ex centro ſphæræ in vnam baſim Icoſaedri cadens, maior eſt perpendiculari ex eodem centro in vnam baſim cubi demiſſa, vt in 3. theoremate præmiſſo oſtenſum eſt: Item ex 4. theoremate, ſuperficies Icoſaedri ſuperficie cubi maior quoque eſt; Erit ſolidum contentum ſub perpendiculari ex centro ſphæræ in vnam baſim Icoſaedri cadente, & tertia parte ſuperficiei Icoſaedri contẽtum, maius ſolido, quod ſub perpendiculari ex eodem centro ſphæræ in vnam baſim cubi cadente, & tertia parte ſuperficiei cubi continetur. Cùm ergo, vt in ſcholio propoſ. 20. lib. 14. demonſtrauimus, illud ſolidum Icoſaedro ſit æquale, & hoc cubo; maius quoq; erit Icoſaedrum, quàm cubus. Quod eſt propoſitum.

III.

CVBVS Octaedro maior eſt.

QVONIAM eſt, [e] vt latus cubi ad ſemidiametrum ſphæræ, ita Cubus ad Octaedrum: Eſt autem latus cubi ſemidiametro ſphæræ maius. (Nam [f] cùm latus cubi maius ſit latere Icoſaedri; & latus Icoſaedri, ex coroll. 1. problematis 4. ſuperioris, maius ſemidiametro ſphæræ: erit latus cubi multò maius ſemidiametro ſphæræ.) Igitur & cubus maior erit Octaedro. Quod eſt propoſitum.

e 27. quartidec.

f 18. tertiidecimi.

IIII.

OCTAEDRVM Tetraedro maius eſt.

QVONIAM baſis Octaedri minor eſt baſe Tetraedri, [g] quòd baſis Tetraedri ad baſem Octaedri proportionem habeat ſeſquitertiam; erit perpendicularis ex centro ſphæræ ad vnam baſim Octaedri demiſſa, maior perpendiculari ex eodem ſphæræ centro ad vnam baſim Tetraedri cadente: quod probabitur non aliter, quàm ſuprà theoremate 3. oſtẽdimus, perpendicularem in Icoſaedro maiorẽ eſſe perpẽdiculari in Octaedro, & cubo. Eſt autem & ſuperficies Octaedri ſuperficie Tetraedri maior, [h] cùm illa huius ſit ſeſquialtera. Igitur ſolidum contentum ſub perpẽdiculari ex cẽtro ſphæræ in vnã baſim Octaedri cadente, & tertia parte ſuperficiei Octaedri, maius eſt ſolido contẽto ſub perpendiculari ex eodẽ centro ſphæræ in vnã baſim Tetraedri deducta, & tertia parte ſuperficiei Tetraedri. Quocirca cùm, ex ſcholio propoſ. 20. lib. 14. illud ſolidũ Octaedro ſit æquale, hoc verò Tetraedro; erit quoq; Octaedrum Tetraedro maius. Quod eſt propoſitum.

g 14. quartidec.

h 14. quartidec.

ALITER. Quoniam eſt, [i] vt latus Octaedri ad latus Tetraedri, ita Octaedrum ad triplum Tetraedri:

i 22. quartidec.

Vt autem latus Tetraedri ad eius tertiam partem, ita eſt triplum Tetraedri ad tertiam eius partem, id eſt, ad ipſum Tetraedrum. Igitur ex æqualitate erit quoque, vt latus Octaedri ad tertiam partem lateris Tetraedri, ita Octaedrum ad Tetraedrum. Cùm ergo latus Octaedri maius ſit tertia parte lateris Tetraedri:

a 18. tertij decimi. b 10. quin.

(Nam [a] quia quadratum lateris Tetraedri ſeſquitertiũ eſt quadrati lateris Octaedri; habebit latus Tetraedri ad latus Octaedri proportionẽ minorem ſeſquitertia, ideoq; multò minorem tripla; [b] ac proinde tertia pars lateris Tetraedri minor erit latere Octaedri.) Erit quoq; Octaedrũ Tetraedro maius. Quod eſt propoſitũ.

c 17. quartidec.

ALITER. [c] Quoniam Tetraedrum ad Octaedrum ſe habet, vt rectangulum ſub linea potente $\frac{2}{3}\frac{7}{4}$. quadrati lateris Tetraedri, & ſub linea continente $\frac{8}{9}$. lateris Tetraedri, ad quadratum diametri ſphæræ; Eſt autem rectangulum illud minus quadrato diametri ſphæræ, quòd eius latera minora ſint ſphæræ diametro; quippe quæ ſingula minora ſint latere Tetraedri. Igitur & Tetraedrum Octaedro minus erit, hoc eſt, Octaedrum Tetraedro erit maius. Quod eſt propoſitum.

d 32 quartidecimi. e 27. quartidecimi.

ALITER. [d] Quoniam cubus triplus eſt Tetraedri; minor verò quàm triplus Octaedri: (Nam [e] cubus ad Octaedrum eſt, vt latus cubi ad ſemidiametrum ſphæræ; & latus cubi minus eſt, quàm triplum ſemidiametri ſphæræ, quòd & tota diameter, quæ cubi latere maior eſt, minorem proportionem habeat ad ſemidiametrum, quàm triplam.) Erit Octaedrum maius, quàm Tetraedrum. Quod eſt propoſitum.

EODEM prorſus ordine ſe mutuò ſuperant cõuexa ſuperficies eorundem corporum Regularium: hoc eſt, ſuperficies conuexa Dodecaedri maior eſt ſuperficie conuexa Icoſaedri: Superficies conuexa Icoſaedri maior ſuperficie conuexa cubi: Conuexa ſuperficies cubi ſuperficie Octaedri maior: Octaedri deniq; ſuperficies conuexa maior eſt conuexa ſuperficie Tetraedri.

f 9. quartidecimi. g 18. tertij decimi.

QVONIAM enim [f] eſt ſuperficies Dodecaedri ad ſuperficiem Icoſaedri, vt latus cubi ad latus Icoſaedri: Eſt autem cubi latus latere Icoſaedri maius, [g] vt ſuprà demonſtratum eſt: Erit & ſuperficies Dodecaedri ſuperficie Icoſaedri maior.

SVPERFICIEM verò Icoſaedri maiorem eſſe ſuperficie Cubi, demonſtratum eſt paulò antè theoremate quarto, ante comparationem ſoliditatum quinq; corporum Regularium.

h 27. quartidec.

DEINDE [h] quoniam eſt ſuperficies cubi ad Octaedri ſuperficiem, vt latus cubi ad ſemidiametrũ ſphæræ: Eſt autem latus cubi ſemidiametro ſphæræ maius, vt in theoremate tertio, quo oſtendimus, cubum Octaedro maiorem eſſe, demonſtratum eſt; Erit quoq; ſuperficies cubi ſuperficie Octaedri maior.

i 14. quartidec.

DENIQVE [i] quia ſuperficies Octaedri ſeſquialtera eſt ſuperficiei Tetraedri; perſpicuũ eſt, Octaedri ſuperficiem maiorem eſſe Tetraedri ſuperficie.

Vides igitur ſuperficies & ſoliditates corporũ Regularium contrario ordine reſpondere eorundem lateribus: ita vt quò maius fuerit corpus, eò maiorem quidem habeat etiam ſuperficiẽ, at eò minus latus. Nam [k] vt ſuprà demonſtratum eſt, Tetraedri latus eſt omnium maximum, eius verò ſuperficies atq; ſoliditas, vt hic demonſtrauimus, omniũ minima eſt: Item Dodecaedri latus omniũ eſt minimũ, eius verò cõuexa ſuperficies & ſoliditas omnium maxima. Deniq; quemadmodum, ſi Tetraedrum, Octaedrum, Cubus, Icoſaedrum, & Dodecaedrum in eadem ſphæra deſcripta ſint, latera eorum, eo ordine, quo propoſita ſunt, atq; ab Euclide deſcripta, ſe mutuò ſuperant, [l] vt ſuprà oſtenſum eſt; ita contrario ordine eorundem ſuperficies conuexæ, atque ſoliditates ſe mutuò ſuperant, vt hoc loco demonſtrauimus.

k 18. tertij decimi. l 18. tertij decimi.

CAETERVM prætereundum non eſt hoc loco id, quod à Pappo demonſtratum eſt lib. 5. Mathematicarum collectionum; ſoliditates videlicet quinq; corporum Regularium, ſi Iſoperimetra ſint, atq; idcirco, non in eadem ſphæra conſtructa, longè aliter ſe habere, quàm à nobis demonſtratum eſt. Nam corpus, quod plures habet baſes, maius ſemper eſt corpore pauciorum baſium: Ita vt Icoſaedrum ſuperet Dodecaedrum, Dodecaedrum maius ſit Octaedro, Octaedrum ſuperet Cubum, Cubus deniq; Tetraedro maius ſit.

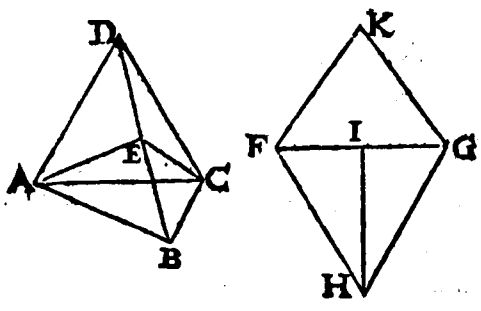
INVENTIO ANGVLI INCLINATIONIS DVArum baſium cuiuſcunq; ſolidi Regularis, vnius ad alteram, ex Iſidoro Hypſiclis præceptore.

I.

ANGVLVM inclinationis duarum Pyramidis baſium, vnius ad alteram, inuenire.

SIT Pyramis ABCD, cuius latere BD, bifariam ſecto in E, ex angulis A, & C, lateri BD, oppoſitis rectæ ducantur AE, & CE; quæ cùm perpendiculares ſint ad BD, communem ſectionem planorum ABD, CBD, in quibus exiſtunt. (a Sunt enim in triangulis AEB, AED, anguli ad E, æquales, &c.) angulum inclinationis AEC, baſium ABD, CBD, continebunt, ex defin. 6. lib. 11. Huic ergo æqualem exhibebimus in quolibet plano, hac ratione. Aſſumatur FGH, triangulum æquilaterum ſuper rectam FG, lateri pyramidis æqualem conſtructum, atq; idcirco triangulo cuicunque pyramidis propoſitæ, ipſi nimirũ ABD, æquale, in quo ducta HI, perpendiculari ad FG, conſtituatur ſuper FG, trian-

a 8. primi.



triangulum F G K, habens vtrumque latus F K, G K, æquale perpendiculari H I, hoc eſt, vtrique perpendiculari A E, C E, cùm perpendiculares H I, A E, C E, ſint æquales in triangulis æqualibus. Dico angulum F K G, æqualem eſſe angulo inclinationis A E C, baſium A B D, C B D. Cùm enim latera K F, K G, æqualia ſint lateribus E A, E C; & baſis F G, baſi A C: [a] Æquales erunt anguli F K G, A E C. Dico inſuper angulum inclinationis A E C, acutũ eſſe [b]. Cùm enim latus A D, vel illi æquale A C, ſeſquitertium ſit potentia vtriuſque perpendicularis A E, C E; qualium partium 4. ponetur quadratum rectæ A C, talium 3. erit quadratum vtriuſque rectæ A E, C E; ideoque earundem partium 6. erunt ambo ſimul quadrata rectarum A E, C E. Quare cùm in triangulo A B C, quadratum lateris A C, minus ſit quadratis ſimul laterum A E, C E, acutus erit angulus A E C, vt in ſcholio propoſ. 13. lib. 2. demonſtrauimus.

[a] 8. primi.

[b] 12. quarti decimi.

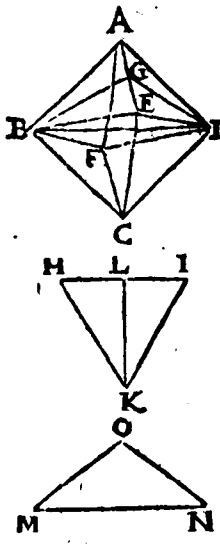
COROLLARIVM

FACILE hinc colligemus, omnes inclinationes baſium pyramidis æquales eſſe. Cùm enim ſinguli anguli inclinationum contineantur binis perpendicularibus ab angulis triangulorum ad baſes oppoſitas ductis, cuiuſmodi ſint A E, C E, ſubtendanturq; à lateribus pyramidis, quale fuit A C; [a] omnes erunt inter ſe æquales, quòd & omnes illæ perpendiculares, quæ ipſos continent, æquales ſint, nec non & latera pyramidis eoſdem ſubtendentia, ſint æqualia.

[a] 8. primi.

II.

ANGVLVM inclinationis duarũ Octaedri baſium, vnius ad alteram, reperire.



EXHIBEATVR Octaedrum A B C D E F, cuius diameter B D. Ex angulis B, & D, ad latus A E, triangulis A B E, A D E, commune, bifariamque ſectum in G, rectæ ducantur B G, D G; quæ cùm perpendiculares ſint ad A E, communem ſectionem planorum A B E, A D E, in quibus exiſtunt, (quòd in triangulis B G A, B G E, anguli ad G, æquales ſint, &c.) continebunt angulum B G D, inclinationis baſium A B E, A D E, per defin. 6. lib. 11. Huic igitur æqualem exhibebimus in plano, quolibet hac via. Sumatur H I K, triangulum æquilaterum ſuper rectam H I, lateri Octaedri æqualem fabricatum, ideóque triangulo cuicunque Octaedri propoſiti, triangulo ſcilicet A B E, æquale, in quo ducta K L, perpendiculari ad H I, conſtituatur ſuper recta M N, quæ æqualis ſit diametro Octaedri B D; hoc eſt, diametro quadrati A B C D, ex A B, latere Octaedri deſcripti, triangulum O M N, habens vtrumque latus M O, N O, perpendiculari K L, æquale, hoc eſt, vtrique perpendiculari B G, D G, cùm perpendiculares K L, B G, D G, in triangulis æqualibus æquales ſint. Dico angulum M O N, æqualem eſſe angulo inclinationis B G D, baſium A B E, A D E. Cùm enim latera O M, O N, æqualia ſint lateribus G B, G D; & baſis M N, baſi B D, [b] Æquales erunt anguli M O N, B G D. Dico præterea, angulum inclinationis B G D, eſſe obtuſum. [c] Cùm enim diameter Octaedri B D, dupla ſit potentia lateris A B; [d] latus verò A B, potentia ſeſquitertium rectæ B G: qualium partium 8. ponetur quadratum diametri B D, talium 4. erit quadratum lateris A B, earundemque 3. quadratum rectæ B G; ideoque ambo ſimul quadrata rectarum B G, D G, talium partium 6. erũt. Quare quadratũ lateris B D, in triangulo G B D, maius eſt quadratis ſimul laterũ G B, G D; Ac propterea angulus B G D, obtuſus erit, vt in ſcholio prop. 12. lib. 2. oſtẽdimus.

[a] 8. primi.

[b] 8. primi.

[c] 14. tertij decimi.

[d] 12. quarti decimi.

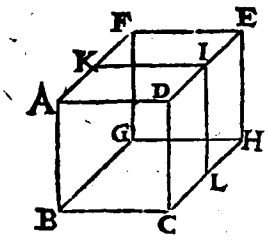
COROLLARIVM.

HINC fit, omnes inclinationes baſium Octaedri æquales eſſe. Cùm enim ſinguli anguli inclinationum contineantur binis perpendicularibus ab angulis triangulorum ad baſes oppoſitas ductis, quales ſunt B G, D G, ſubtendanturq; ab Octaedri diametris, cuiuſmodi eſt B D; [a] omnes inter ſe æquales erunt, quòd & omnes illæ perpendiculares, quæ ipſos continent, æquales ſint, nec non & diametri Octaedri eoſdem ſubtendentes, ſint æquales.

[a] 8. primi.

III.

ANGVLVM inclinationis duarum cubi basium, vnius ad alteram, inuenire.



SIT cubus ABCDEFGH, in quo secetur latus DE, bifariam in I, necnon & latera illi opposita in quadratis AE, EC, commune latus illud DE, habentibus, in punctis K, L. Deinde rectæ ducantur IK, IL; [a] quæ cùm æquales, ac parallelæ sint lateribus EF, EH, (quòd & KF, IE, inter se, nec non & IE, LH, inter se æquales existant, & parallelæ.) [b] ideoque angulos rectos ad latus DE, efficiãt, continebunt KIL, angulum inclinationis basium AE, EC, ex defin. 6. lib. 11. Quoniam verò rectæ IK, IL, parallelæ existentes rectis EF, EH, & non in eodem cùm illis plano, [c] angulum KIL, æqualem continent angulo recto FEH; Rectus erit angulus inclinationis basiũ cubi. Quare vt angulo inclinationis basium cubi æqualis in aliquo plano exhibeatur, cõstituendus erit angulus rectus. Hic enim; vt modò demonstrauimus, æqualis erit angulo inclinationis basium cubi.

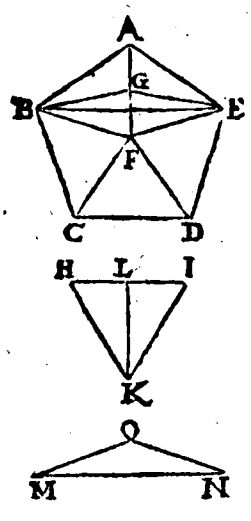
a 33. primi.
b 29 primi.
c 10. vndec.

COROLLARIVM.

QVOCIRCA, cùm eodem argumento demonstrari possit, quarumlibet duarum basium cubi angulum inclinationis esse rectum; perspicuè concluditur, omnes inclinationes basium cubi æquales inter se esse.

IIII.

ANGVLVM inclinationis duarum basium Icosaedri, vnius ad alterã, inuenire.



ESTO pyramis ABCDEF, vna ex 12. pyramidibus Icosaedri, cuius basis pentagõnum ABCDE, ex quinque Icosaedri lateribus cõpositum, vertex autem F. Diuiso itaque latere AF, bifariam in G, ducantur ex triangulorum ABF, AEF, latus AF commune habẽtium, angulis B; & E, lateri AF, oppositis rectæ BG, EG, quæ cùm, ex demonstratis in problemate 2. huius scholij perpendiculares sint ad AF, communem sectionem planorum ABF, AEF, in quibus ducuntur, comprehendent BGE, angulum inclinationis basium ABF, AEF; per 6. defin. lib. 11. Huic igitur in plano quouis exhibebimus æqualem, hac arte. Accipiatur triangulum æquilaterũ HIK, super rectam HI, lateri Icosaedri æqualem fabricatum, hoc est, cuiuis triangulo Icosaedri, ipsi videlicet ABF, æquale, in quo ducta recta KL, ad HI, perpendiculari, construatur super recta MN, quæ rectæ BE, angulum pentagoni A, subtendenti sit æqualis, triangulum OMN, habẽs vtrumque latus MO, NO, perpendiculari KL, æquale, hoc est, vtriqué perpendiculari BG, EG, cùm perpendiculares KL, BG, EG, in triangulis æqualibus sint æquales. Dico angulum MON, angulo BGE, inclinationis basium ABF, AEF, æqualem esse. Cùm enim latera OM, ON, æqualia sint lateribus GB, GE, & basis MN, basi BE; [d] Æquales erunt anguli MON, BGE. Dico hunc etiã angulũ inclinationis BGE, esse obtusum. Cùm enim BG, angulũ rectũ faciat AGB; [e] erit recta AB, maior quã recta BG; ad eundemq; modũ AE, maior erit quàm EG. Quare rectæ AB, AE, maiores quoq; erũt rectis OM, ON, cũ hæ rectis GB, GE, positæ sint æquales. Si itaq; recta BE, super rectã sibi æqualem MN, intelligatur poni; cadet angulus A, extra triangulũ MON, ita vt rectæ AB, AE, rectas OM, ON, prorsus includant. [f] Angulus ergo O, maior erit angulo BAE: At hic obtusus est. (cùm enim quinq; anguli pẽtagoni sex rectis sint æquales, per ea, quæ à nobis sunt demonstrata in scolio propos. 32. lib. 1. comprehendet quilibet illorũ rectũ, ac insuper vnius recti partẽ quintã, obtusus ergo erit, cũ recto sit maior.) Multò igitur magis obtusus erit angulus MON, hoc est, sibi æqualis BGE.

d 8. primi.
e 19. primi.
f 21. primi.

COROLLARIVM

NON obscurè quoq; ex his consequitur, omnes basium Icosaedri inclinationes inter se æquales esse. Nam cùm singuli anguli inclinationum contineantur binis perpendicularibus, ab angulis triangulorum ad bases oppositas ductis, quales sunt BG, EG, subtendanturq; à rectis, angulos pentagonorum subtẽdentibus, cuiusmodi est BE: [a] omnes inter se erũt æquales, quòd & illæ omnes perpẽdiculares, quæ ipsos continẽt, æquales sint, nec nõ & rectæ illæ omnes, quæ pentagonorum angulos subtendunt æquales æqualibus rectis comprehensos, [b] æquales erunt.

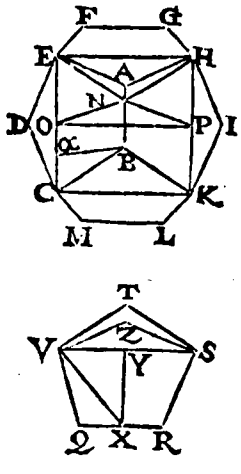
a 8. primi.
b 4. primi.

V.

ANGVLVM inclinationis duarũ basiũ Dodecaedri, vnius ad alterã, reperire.

CVM,

CVM, per ea, quæ oſtendimus in propoſ. 8. libri 15. quatuor latera cubi in Dodecaedro deſcripti, ſubtendant quatuor angulos quatuor baſium Dodecaedri ad vnum latus coëuntium; ſint huiuſmodi pentagona A B C D E, E F G H A, A H I K B, B K L M C, ad latus A B, conuenientia; duo quidem A B C D E, A H I K B, ſecundùm idem latus commune A B; alia autē duo A E F G H, B C M L K, ſecundùm angulos E A H, C B K. His portò pentagonis inſcriptum ſit quadratum cubi E C K H, cuius quatuor latera ſubtendant quatuor angulos pentagonorum D, B, I, A. Diuiſo autem latere A B, bifariam in N; ducantur ex N, in planis pentagonorum A B C D E, A B K I H, ad A B, perpendiculares N O, N P, ſecantes latera E C, H K, in O, & P, ad angulos quoque rectos, cùm rectæ E C, H K, ipſi A B, ſint parallelæ, ex ſcholio propoſ. 8. lib. 13. Comprehendūt igitur N O, N P, angulum O N P, inclinationis baſium A B C D E, A B K I H. Cui æqualem in quouis plano hac arte conſtruemus. Super rectam Q R, lateri Dodecaedri A B, æqualem, conſtituatur pentagonum æquilaterum & æquiangulum Q R S T V, hoc eſt, cuiuis pentagono Dodecaedri, nimirū ipſi A B C D E, æquale, cuius angulo T, recta ſubtendatur V S, [a] æqualis exiſtens rectæ E C, cùm & latera T V, T S, lateribus D C, D E, æqualia ſint, angulosq; contineāt æquales. Diuiſa deinde recta Q R, bifariam in X, ducatur à puncto X, ad Q R, perpendicularis X Y; propterea q; perpendicularis ad V S, cùm V S, ſint parallela ipſi Q R, ex ſcholio propoſ. 8. lib. 13. Ac poſtremò, ſuper recta V S, triangulum fabricetur V Z S, habens vtrumq; latus Z V, Z S, perpendiculari X Y, æquale. Dico angulum V Z S, æqualem eſſe angulo inclinationis O N P. Ductis enim rectis N E, N H, V X; cùm latera E A, A N, æqualia ſint lateribus H A, A N: Item lateribus V Q, Q X, angulosq; comprehendant æquales; [b] Æquales erunt & baſes N E, N H, V X, & anguli A N E, A N H, Q X V; ideoq; & reſidui ex rectis, anguli videlicet E N O, H N P, V X Y, æquales erunt. Quoniā igitur anguli E N O, E O N, trianguli E N O, æquales ſunt angulis H N P, H P N, trianguli H N P; necnon & angulis V X Y, V Y X, trianguli V X Y; (ſunt enim E O N, H P N, V Y X, oſtenſi recti.) Et latus N E, lateribus N H, V X, æquale demonſtratum; [c] Æqualia erunt reliqua latera N O, O E, reliquis lateribus N P, P H; Item lateribus X Y, Y V. Quare rectæ Z V, Z S, æquales exiſtentes ipſi X Y, rectis N O, N P, æquales erunt. Iam verò, quia O E, P H, æquales ſunt, ac parallelæ; [d] erit quoq; recta cōiuncta O P, æqualis & parallela ipſi E H, ideoq; æqualis ipſi E C, hoc eſt, rectæ V S. Quā ob rē, cùm latera Z V, Z S, lateribus N O, N P, æqualia ſint; baſis item V S, baſi O P; [e] æqualis erit angulus V Z S, angulo inclinationis O N P. Dico etiam angulum hunc O N P, inclinationis, eſſe obtuſum. Nam ducta recta B α, ipſi N O, parallela; cùm ſit quoq; N B, ipſi O α, parallela, ex ſcholio propoſ. 8. lib. 13. Parallelogrammum erit N O α B, [f] ideoque recta B α, ipſi N O, æqualis. Quia verò B C, latus pentagoni oppoſitum angulo C α B, qui rectus eſt, ([g] æqualis nimirum interno C O N.) maius eſt latere B α, hoc eſt, recta N O, vel vtraque Z V, Z S, quæ ipſi N O, oſtenſæ ſunt æquales; Erunt duæ rectæ T V, T S, maiores duabus rectis Z V, Z S. Cadit igitur punctum Z, intra triangulum T V S, ita vt rectæ T V, T S, recta Z V, Z S, includant omnino; Atque proinde angulus V Z S, ideoque illi æqualis O N P, maior eſt angulo pentagoni T: Hic verò, cùm ſit pentagoni angulus, paulò antè, cùm de inclinatione baſium Icoſaedri ageremus, demonſtratus eſt maior recto. Multò igitur maior recto erit angulus inclinationis O N P, ideoque obtuſus.



[a] 4 primi.

[b] 4 primi.

[c] 26. primi.

[d] 33. primi.

[e] 8. primi.

[f] 34. primi.

[g] 29. primi.

COROLLARIVM.

PATET igitur ex his, omnes inclinationes baſium Dodecaedri æquales eſſe inter ſe. Cùm enim ſinguli anguli inclinationum contineantur binis perpendicularibus à medio puncto lateris Dodecaedri ad duo latera cubi in Dodecaedro deſcripti ductis; quales ſunt N O, N P, ſubtendanturq; à rectis, quæ cubi inſcripti lateribus ſunt æquales, vel certè, quæ rectis ſubtendentibus angulos pentagonorum æquales ſunt, cuiuſmodi eſt recta O P, lateri cubi inſcripti E H, quod angulum pentagoni E A H, ſubtendit, æqualis; [a] *Erunt omnes inter ſe æquales,* [a] 8. primi.
cùm & omnes illæ perpendiculares, quæ ipſos continent, æquales ſint, necnon & rectæ illæ omnes, quæ eoſdem ſubtendunt, latera videlicet cubi, inter ſe etiam ſint æquales.

ELEMENTI DECIMISEXTI FINIS.

INDEX PROBLEMATVM, QVAE HISCE COMMENTARIIS CONTINENTVR:

QVORVM ea, quæ Euclidis ſunt, eodem charactere ſunt expreſſa, quo in propoſitionum demonſtrationibus vſi ſumus: quæ verò adiecta à nobis, charactere, quo ſcholia notauimus. Litera porrò A, primũ tomum, & litera B, ſecundum ſignificat. Vt autẽ faciliùs quiſque inueniat problemata, quæ cupit, digeſſimus ea ſecundùm materias, de quibus proponuntur.

ACVTANGVLVM triangulum. Vide Triangulum.

ÆQVIANGVLA, & æquilatera figura. Vide Figura intra & extra circulum, &c.

ÆQVILATERA, & æquiangula figura. Vide Figura intra & extra circulum, &c.

ÆQVILATERVM triangulum. Vide Triangulum.

ANGVLI proportionales. Vide Figuræ, anguli, & lineæ proportionales.

ANGVLVS.

Angulum datum rectilineum bifariam ſecare. pag. 29. A

Angulum datum rectilineum in quotuis partes æquales diuidere. 29.30. & 352. A

Angulum rectum datum in tres angulos æquales partiri. 61. A

Angulum rectum ad punctum in data recta linea datum conſtituere. 31. A

Angulum rectum ad extremum punctum lineæ rectæ conſtituere. 31.32. & 57. A

Angulum rectũ in data recta p lineá ex puncto extra rectam dato ductam conſtiuere. 32. A

Angulum rectum in data recta conſtituere per lineam ductã ex puncto extra rectam dato, quando punctum vicinum eſt datæ rectæ, vel prope extremum plani cuiuſpiam, vel quando recta data prope extremũ plani eſt, vel denique quando & datum punctum eſt vicinum extremo plani, & recta data eſt prope aliud extremum plani. 33. & 57. A

Angulus propoſitus, rectúsne ſit, an obtuſus, acutúsve, cognoſcere. 6. A

Angulum dato angulo rectilineo æqualem ad datam rectam lineam, datumque in ea punctum conſtituere. 42. & 43. A

Angulos rectilineos, & arcus circulorũ reperire incommenſurabiles. 359. A

Ex tribus angulis planis, quorum duo quomodocunque aſſumpti reliquo ſunt maiores, ſolidum angulum conſtituere. Oportet autem illos tres angulos quatuor rectis minores eſſe. 208. B

Ad datam rectam lineam, eiuſq; punctum angulum ſolidum cõſtituere, ſolido angulo dato æqualem. 212. B

ARCVS. Vide Circulus.

CIRCVLVS.

Circuli dati centrum reperire. 122. A

Per datum punctum in circumferentia rectam, quæ circulum tangat, ducere. 132. A

A dato puncto rectam lineam ducere, quæ datum circulum tangat. 145.146. & 167. A

Circulis duobus datis, quorum neuter alterum includat, rectam lineam ducere, quæ vtrumque circulum tangat. 146. A

Circulum per datum punctum deſcribere, qui alium datum circulum tangat. 148. A

Lineæ rectæ, quæ circulum ſecat, lineam parallelam ducere, quæ eundem circulum tangat. 150. A

Circuli ſegmento dato, deſcribere circulum, cuius eſt ſegmentum. 157. A

Circulum per tria puncta non exiſtentia, in linea recta deſcribere. 158. & 178. A

Arcum datum ſecare bifariam. 164. A

Circuli ſegmentum ſuper datam rectam deſcribere, in quo angulus exiſtens ſit æqualis dato angulo rectilineo. 168. A

A dato circulo ſegmentum abſcindere, capiens angulum, angulo dato rectilineo æqualem. 169. A

Circulis duobus datis, quorum vnus non ſit totus intra alium; circulum, qui vtrumque tangat, deſcribere. 149. A

In circulo dato rectam accommodare datæ rectæ, quæ diametro maior non ſit, æqualem. 175. A

In circulo rectam accommodare æqualem datæ rectæ, quæ circuli diametro maior non ſit, & alteri rectæ parallelam. 175. A

Dato circulo, & duobus punctis, ſiue extra circulum, ſiue intra, dummodò neutrum ſit in circumferẽtia; per ea puncta duas rectas ducere ad aliquod vnum punctum circumferentiæ, ita vt recta coniungens duo puncta, quibus duæ illæ rectæ circumferentiam ſe-

unt, parallela sit rectæ data duo puncta connectenti. 347. *A*

Datum arcum circuli in datam proportionem dividere. 351. *A*

Datum arcum, vel angulum rectilineum in quotuis partes æquales partiri. 352. *A*

Dato arcui circuli, ex cuius quadrante quadratrix descripta est, rectam lineam invenire æqualem. 353. & 354. *A*

Dato circulo quadratum æquale constituere. 355. *A*

Dato quadrato, circulum æqualem describere. 356. *A*

Circulum cuicunque rectilineo æqualem describere: Et circulo figuram rectilineā æqualem constituere, quæ cuicunque alteri similis sit. 356. *A*

Datæ rectæ lineæ circumferentiam circuli æqualem reperire. 356. & 357. *A*

Datis duobus circulis inæqualibus, dato q. arcu in vno eorum; ex altero arcum æqualem abscindere. 357. *A*

Arcus circulorum, & angulos rectilineos invenire incommensurabiles. 359. *A*

CIRCVMFERENTIA. Vide Circulus.

COMMENSVRABILES, & incommensurabiles magnitudines.

An duæ quæcunque magnitudines propositæ sint commensurabiles, nécne, explorare. 104. *B*

Duabus magnitudinibus commensurabilibus datis, maximam earum communem mensuram inuenire. 104. B

An quotlibet magnitudines propositæ sint commensurabiles, nécne, considerare. 105. *B*

Tribus magnitudinibus commensurabilibus datis, maximam earum mensuram communem inuenire. 105. B

Propositis duabus magnitudinibus commēsurabilibus, quam proportionem habeant in numeris, inuenire. 107. *B*

Rectam inuenire, ad quam ita se habeat quæuis alia data recta, vt numerus ad numerū. 108. B

Rectam inuenire, ad cuius quadratum ita se habeat quadratum alterius datæ rectæ, vt numerus ad numerum. 108. B

Propositæ rectæ lineæ inuenire duas rectas incommensurabiles, alteram quidem longitudine tantùm, alteram verò etiam potentia. 114. B

COMPOSITI inter se numeri. Vide Numerus par, &c.

COMPOSITVS numerus. Vide Numerus par, &c.

CONVS, & Cylindrus. Vide Parallelepipedum, &c.

CORPVS Regulare. Vide Figura intra & extra circulum, &c.

CVBVS numerus. Vide Numerus planus, &c.

CYLINDRVS, & Conus. Vide Parallelepipedum, &c.

DIAMETER circuli. Vide Circulus.

FIGVRA intra, & extra circulum, sphæram, atque aliam figuram.

In circulo dato triangulū describere dato triangulo æquiangulum. 176. A

Circa datum circulum triangulum describere dato triangulo æquiangulum. 176. A

In dato triangulo circulum describere. 176. & 177. A

Trianguli lateribus cognitis, invenire puncta, in quibus circulus inscriptus ipsa latera tangere debet. 177. & 178. *A*

Circulum circa datum triangulum describere. 178. A

In dato circulo quadratum describere. 179. A

Circa datum circulum quadratum describere. 179. A

In dato quadrato circulum describere. 179. A

Circa datum quadratum circulum describere. 179. & 180. A

In dato circulo pentagonum æquilaterum & æquiangulum inscribere. 181. A

Super datam rectam pentagonum æquilaterum, & æquiangulum describere. 181. *A*

Circa datum circulum, pentagonum æquilaterum, & æquiangulum describere. 182. A

Circa circulum describere quamcunque figuram regularem, quæ circulo inscribi potest. 182. *A*

In dato pentagono æquilatero & æquiangulo circulum inscribere. 183. A

In quacunque figura regulari circulum describere. 184. *A*

Circa pentagonum æquilaterum & æquiangulum circulum describere. 184. *A*

Circa quamcunque figuram regularem circulum describere. 184. *A*

In circulo hexagonum æquilaterum, & æquiangulum describere. 184. & 185. A

In circulo quintidecagonum æquilaterum & æquiangulum describere. 185. & 186. A

Figura quacunque regulari circulo inscripta, describere similem circa circulum, & in ea circulum inscribere, & circa eandem circulum describere. 190. *A*

Figura quacunque regulari circulo inscripta, inscribere aliam duplo plurium laterum. 190. *A*

Figuras regulares imparium laterum circulo inscribere beneficio Isoscelium, quorū anguli ad basim angulorum ad verticem multiplices sunt. 191. *A*

Figuras regulares parium laterum circulo inscribere beneficio Isoscelium, quorū anguli ad basim angulorum ad verticem multiplices sesquialteri sunt. 191. *A*

Figuram quamcunque regularem absque beneficio Isoscelium circulo practicè inscribere. 191. *A*

Figuram quamcunque regularem super datam rectam practicè describere. 192. *A*

Latus pentagoni, & decagoni in eodem circulo, ex Ptolemæo invenire. 192. *A.* & 261. *B*

Quadratricem lineam intra quadrātem, & quadratum describere. 349. & 350. *A*

Duobus circulis circa idem centrum existentibus, in maiori circulo polygonum æquilaterum & parium laterum inscribere, quod non tangat minorem circulum. 246 B

Ex quo fit, perpendicularem ad diametrum dictam, ab extremitate lateris polygoni inscripti, quod cum diametro conuenit, totam extra minorem circulum cadere. 247. B

Duabus sphæris circa idem centrum existentibus, in maiori sphæra solidum polyedrũ inscribere, quod nó tangat minoris sphæræ superficiem. 247. B

Ex quo fit, si in quauis alia sphæra describatur solidum polyedrum simile prædicto polyedro, proportionem polyedri in vna sphæra ad polyedrũ in altera sphæra esse triplicatam eius, quã habent sphærarum diametri. 250. B

Pyramidem constituere, & data sphęra complecti. 264. & 344. B

Octaedrum constituere, & sphæra complecti, qua & pyramidem. 265 & 345. B

Cubum constituere, & sphæra complecti, qua priores figuras. 267. & 345. B

Icosaedrum constituere, & sphæra complecti, qua & ante dictas figuras. 268. & 346. B

Dodecaedrum constituere, & sphæra complecti, qua & prædictas figuras. 272. & 348. B

Latera quinque corporum Regularium exponere, & inter se comparare. 275. B

Numerum laterum, & angulorum solidorum cuiusque corporis Regularis expeditè cognoscere. 278. B

In dato cubo pyramidem describere. 305. B

In data pyramide octaedrum describere. 305. B

In dato cubo octaedrum describere. 306. B

In dato octaedro cubum inscribere. 307. B

In dato Icosaedro dodecaedrũ inscribere. 307. B

In dato octaedro pyramidem describere. 308. B

In dato Dodecaedro Icosaedrum describere. 309. B

In dato Dodecaedro cubum describere. 310. B

In dato Dodecaedro octaedrum describere. 311. B

In dato Dodecaedro Pyramidem describere. 311. B

In dato Icosaedro cubum describere. 312. B

In dato Icosaedro Pyramidem describere. 312. B

In dato cubo Dodecaedrum describere. 312. B

In dato cubo Icosaedrum describere. 315. B

In dato Icosaedro octaedrum describere. 317. B

In dato octaedro Icosaedrum describere. 317. B

In dato octaedro Dodecaedrum describere. 319. B

In data pyramide cubum describere. 319. B

In data pyramide Icosaedrum describere. 322. B

In data pyramide Dodecaedrum describere. 322. B

In dato solido Regulari sphæram describere. 322. B

Datis duobus circulis in sphæra parallelis, datã in vno eorum linea recta, ducere in altero diametrũ huic rectæ datæ parallelam: vel etiã aliam rectam, quæ datæ rectæ sit æqualis & parallela, dummodò recta data maior non sit diametro posterioris circuli. 341. B

In data sphæra duos circulos æquales, ac parallelos describere, ita vt diameter sphæræ sit vtriusque diametri potentia sesquialtera. 343. B

Angulum inclinationis duarum basium cuiusque corporis Regularis inuenire. 352. 353. *& seq.*

FIGVRAE, anguli, & lineæ proportionales.

A data recta linea imperatã partẽ auferre. 298. A

Datam rectam lineam similiter secare, vt data altera recta secta fuerit. 298. A

Datam rectam in quotuis partes æquales secare. 29. 30. *& 299. A*

Datam rectam secare in duas partes datã proportionem habentes. 300. A

Datam rectam in quotuis partes Arithmeticè proportionales secare. 301. A

Datis duabus rectis, tertiam proportionalem inuenire. 302. A

Quotuis rectas in data proportione continuè proportionales reperire. 302. *& 303. A*

Datis tribus rectis, quartam proportionalem inuenire. 303. A

Datis duabus rectis, alias duas in eadem cum illis proportione reperire. 303. A

Datis tribus rectis, quartã inuenire, quæ sit ad tertiam, vt prima ad secundam. 303. A

Datis duabus rectis, mediam proportionalem inuenire. 304. A

Data recta, aliam rectam (quæ minor non sit, quàm dupla illius) ita secare, vt data recta sit media proportionalis inter segmenta huius. 304. A

Secta recta in duas partes vtcunque alterutram earum ita rursus partiri in duas partes, vt omnes tres partes sint continuè proportionales. 307. A

Datis duabus rectis, mediã proportionalem in Arithmetica proportionalitate inuenire. 307. A

Datis duabus rectis, minorẽ extremitatem in Arithmetica proportionalitate inuenire. 308. A

Datis duabus rectis, maiorem extremitatem in proportionalitate Arithmetica inuenire. 308. A

Datis duabus rectis, mediam proportionalem in Geometrica proportionalitate inuenire. 308. A

Datis duabus rectis, minorem extremitatem in Geometrica proportionalitate inuenire. 308. A

Datis duabus rectis, maiorem extremitatem in Geometrica proportionalitate inuenire. 308. A

Datis duabus rectis, mediam proportionalem in Harmonica proportionalitate inuenire. 308. *& 309. A*

Datis duabus rectis, minorem extremitatem in Harmonica medietate inuenire. 309. A

Datis duabus rectis, maiorem extremitatem in proportionalitate Harmonica inuenire. 309. A

A data recta dato rectilineo simile, similiterque positum rectilineum describere. 314. A

Dato rectilineo simile, similiterq; positum, & alteri dato æquale idem constituere. 327. A

Ad datam rectam, dato rectilineo, quod maius non sit parallelogrammo ad dimidiam applicato, æquale parallelogrammum applicare deficiens figura parallelogramma, quæ similis sit alteri parallelogrammo dato. 330. A

Ad datam rectam, dato rectilineo æquale parallelogrammum applicare, excedens figura parallelogramma, quę similis sit parallelogramo alteri dato. 331. A

Datam rectam terminatam extrema ac media ratione secare. 332. A

A dato rectilineo imperatam partem auferre, ita tamẽ, vt & ablatum, & id, quod reliquitur, simile sit cuiuis rectilineo dato, similiterq; positum. 338. A

Datis duobus rectilineis, tertium proportionale inuenire. 339. A

Datis tribus rectilineis, quartum proportionale inuenire. 339. A

Datis duobus rectilineis, medium proportionale inuenire. 339. A

Dato rectilineo, duo rectilinea æqualia constituere, quæ similia sint, similiterq; descripta cuicunq; rectilineo, habeantq; datam proportionem inter se. 340. A

Dato rectilineo, duo rectilinea æqualia exhibere, quæ cuiuis rectilineo similia sint, similiterq; descripta, lateraq; eorum homologa habeant inter se datam proportionem. 340. A

Datis duobus rectilineis, æquale rectilineum constituere, quod simile sit, similiterq; positum dato rectilineo. 341. A

A dato puncto in latere trianguli rectam ducere, quæ triangulum diuidat in duo segmenta, secundùm datam proportionem. 343. A

Dato rectilineo simile, similiterq; positum rectilineum describere, maius vel minus, secundùm datam proportionem. 343. A

In dato quadrato aliud quadratũ describere in data proportione, quæ dupla maior non sit. 345. A

Datum arcum circuli in datam proportionem diuidere. 351. A

Isosceles triangulum constituere, cuius vterque angulorum æqualium ad reliquum habeat proportionem datam. 352. A

FIGVRAE planę quadrilateræ. Vide Parallelogrammum, &c.

FRACTIONES numerorum. Vide Minutiæ numerorum.

FRACTVS numerus. Vide Minutię numerorũ.

IMPAR numerus. Vide Numerus par, &c.

INCOMMENSVRABILES magnitudines. Vide Commensurabiles, & incommensurabiles magnitudines.

IRRATIONALES magnitudines. Vide Rationales, & irrationales magnitudines.

ISOSCELES. Vide Triangulum.

LINEA perpendicularis. Vide Recta linea.

LINEA recta. Vide Recta linea.

LINEAE parallelæ. Vide Recta linea.

LINEAE proportionales. Vide Figuræ, Anguli, & lineæ proportionales.

MAGNITVDINES commẽsurabiles, & incommensurabiles. Vide Commẽsurabiles, & incommensurabiles magnitudines.

MAGNITVDINES proportionales in cõmuni.

Proportionem ex duabus, vel pluribus proportionibus componere. 323. A

Proportionem minorem ex maiore auferre. 323. A

MINVTIAE numerorum.

Duas minutias diuersarũ denominationũ ad alias duas eiusdem denominationis illis æquales reducere. 88. B

Integrum numerum quemcunque ad dati denominatoris minutiam reducere. 88. B

Datam minutiam duplare, ac dimidiare. 88. B

Minutiam minutiæ, aut minutiam minutiarũ ad simplicem minutiam reducere. 89. B

Datis duabus minutijs, alteratram earum ad aliam æqualem reducere, ita vt alterius numeri numeros huius inuentæ numerent, per numeros ex numeratore datæ minutiæ reductæ in denominatorẽ alterius minutiæ datæ, & ex numeratore alterius huius minutiæ datæ in denominatorem illius reductæ, productos. 90. B

Datam minutiam ad minimos terminos reducere. 91. B

Datam minutiam ad aliam æqualem datæ denominationis, quando id fieri potest, reuocare. 91. B

Minutias plures in vnam summam colligere. 91. B

Minutiam minorem ex maiore detrahere. 92. B

Minutiam per minutiam multiplicare. 93. B

Minutiam per minutiam diuidere. 93. B

Minutiam in minutiam inferere. 94. B

NVMERI proportionales in communi.

Ex datis duobus numeris, tres numeros Harmonicè proportionales inuenire, quorum extremi eandem proportionem habeant, quam dati duo numeri. 310. A

Datis duobus numeris, medium Harmonicè proportionalem inuenire. 311. A

Datis duobus numeris, minorem extremitatem in proportionalitate Harmonica inuenire. 311. A

Datis duobus numeris, maiorem extremitatem in Harmonica proportionalitate inuenire 312. A

Datis numeris quotcunque, reperire minimos omnium eandem rationẽ habentium cum ipsis. 35. B

Duos minimos numeros reperire in proportione quotuis numerorum continuè proportionalium. 35. B

Numeros reperire deinceps proportionales minimos quotcunque quis iusserit in data ratione. 40. B

Numeros quotcunque integros, & minimos continuè proportionales aliter reperire, in proportione data nõ multiplici. 41. B

Datis quotcunque rationibus in minimis numeris, reperire numeros deinceps minimos in datis rationibus. 42. B

Duobus numeris datis, considerare, an possit ipsis tertius proportionalis inueniri. 74. B

Tribus numeris datis, considerare, an ipsis quartus proportionalis possit inueniri. 75. B

Datis quotlibet numeris, considerare, an ipsis possit alius proportionalis adiungi. 75. B

Summam quotcunque numerorum continuè proportionalium inuenire. 81. B

Inuenire quotcunque numeros continuè proportionales in data proportione, quorum summa æqualis sit numero, qui ex primo in vltimum gignitur, vel ex quibuslibet duobus, qui ab extremis æqualiter distant. 85. B

Item quorum summa sit numerus quadratus, cuius radix sit medius terminus. 85. B

Duos numeros in data proportione inuenire, quorũ summa æqualis sit numero producto ex vno in alium. 85. B

NVMERVS fractus. Vide Minutiæ numerorũ.

NVMERVS Par, Impar, Primus, Pariter par, Pariter par & impariter : Pariter impar, Perfectus.

Dati duo numeri an ſint primi inter ſe, nécne, conſiderare. 13. B
Datis duobus numeris non primis inter ſe, maximam eorum communem menſuram reperire. 14. B
Dati quotuis numeri ſintne primi inter ſe, an non, conſiderare. 14. B
Datis tribus numeris non primis inter ſe, maximam eorum communem menſuram reperire. 15. B
Datis duobus numeris, minimũ numerum ab eis numeratum reperire. 35. B
Tribus numeris datis, reperire minimũ ab eis numeratum. 36. B
Datis quotuis numeris, inuenire minimum ab eis numeratum. 37. B
Numerum reperire, q̃ minimus cùm ſit, habeat datas partes. 38. B
Numerum reperire, qui minimus cùm ſit, habeat datas partes, hac lege, vt quælibet pars contineat partẽ ſubſequentem. 38. & 39. B
Primis numeris datis quotcunque, inuenire alium primum numerum ab illis diuerſum. 77. B
Omnes pariter pares tantùm reperire. 80. B
Omnes pariter impares tantùm inuenire. 81. B
Omnes pariter pares, & pariter impares inuenire. pag. 81. B
Omnes numeros perfectos inuenire. 83. B

NVMERVS Planus, Solidus, Quadratus, Cubus, ſimiles plani, ac ſolidi numeri.

Quadratum numerum inuenire, cum quo datus quinis numerus quadratum quoq; numerum conſtituat: Et à quo idem datus numerus ſubtractus relinquat quadratum. 98. 99. 100. & 103. A
Planos numeros, vel ſolidos duos non ſimiles reperire. 62. B
Planos, vel ſolidos numeros quotcunque non ſimiles inuenire. 114. B
Duos numeros planos ſimiles inuenire, pares, vel impares, vel vnum parem, & alterum imparem. 131. B
Duos numeros quadratos inuenire, ita vt compoſitus ex ipſis quadratus etiam ſit. 131. B
Duos numeros quadratos inuenire, ita vt exceſſus eorum quadratus etiam ſit. 131. & 132. B
Duos numeros quadratos inuenire, quorum exceſſus non ſit quadratus. 132. B
Duos numeros quadratos inuenire, ita vt compoſitus ex ipſis non ſit quadratus. 132. B
Duos numeros inuenire, ita vt cõpoſitus ex ipſis ad neutrum ipſorum proportionem habeat, quam quadratus ad quadratum. 133. B

OBTVSANGVLVM triangulum. Vide Triangulum.

PARALLELAE lineæ. Vide Recta linea.

PARALLELEPIPEDVM, & plana parallela.

Dato plano, per datum punctum, quod in eo non eſt, parallelum planum ducere. 202. B
A data recta linea, dato ſolido parallelepipedo ſimile & ſimiliter poſitum ſolidum parallelepipedum deſcribere. 213. B

PARALLELOGRAMMVM, & aliæ figuræ planæ quadrilateræ.

Parallelogrammum conſtruere, cuius vnus angulorum æqualis ſit dato angulo rectilineo, laterá; circa illum angulum datis duabus rectis æqualia. 56. A
Parallelogrammum ſecare bifariã per rectam per quoduis punctum ductam, quod non ſit in diametro, niſi quando diametrum ſecat bifariam. 64. A
Parallelogrammum dato triangulo æquale conſtituere in dato angulo rectilineo. 78. A
Parallelogrammo dato æquale triangulum conſtituere in dato angulo rectilineo. 79. A
Parallelogrammum dato triangulo æquale cõſtituere ſuper datam rectam, & in dato angulo rectilineo. 80. A
Parallelogrammo dato æquale triangulũ conſtituere ſuper datam rectam, & in dato angulo rectilineo. 81. A
Parallelogrammũ dato rectilineo æquale conſtituere ſuper datam rectam, & in dato angulo rectilineo. 81. A
Parallelogrammum datis quotcunque rectilineis æquale conſtituere ſuper datam rectam, et in dato angulo rectilineo. 82. A
Rectilineis duobus inæqualibus datis, exceſſum maioris ſupra minus inquirere. 82. A
Quadratum ſupra datã rectam cõſtruere. 82. A
Quadratis duobus inæqualibus datis, inuenire alia duo quadrata, quæ et æqualia inter ſe ſint, & ſimul ſumpta æqualia duobus datis ſimul ſumptis. 86. A
Quadratis quotlibet datis, ſiue æqualibus, ſiue inæqualibus, inuenire quadratum omnibus illis æquale. 87 A
Quadratis duobus datis, alteri illorũ adiungere figuram, quæ reliquo quadrato ſit æqualis, ita vt tota figura compoſita ſit etiam quadrata. 87. A
Quadratum dato rectilineo æquale conſtituere. 117. A
Dato exceſſu diametri alicuius quadrati ſupra latus eiuſdem: Inuenire latus ipſius quadrati. 118. A
Dato circulo quadratum æquale conſtituere. 355. A
Dato quadrato, circulum æqualem deſcribere. 356. A

PAR, & impar numerus. Vide Numerus par, &c.

PARITER par, pariter par & impariter, ac pariter impar. Vide Numerus par, &c.

PERFECTVS numerus. Vide Numerus par, &c.

PERPENDICVLARIS linea. Vide Recta linea.

PLANA figura intra, & extra circulum, atque aliam figuram. Vide Figura intra & extra circulum, &c.

PLANAE figuræ quadrilateræ. Vide Parallelogrammum, &c.

PLANA parallela. Vide Parallelepipedum, &c.

PLANI numeri ſimiles. Vide Numerus planus, Solidus, Quadratus, &c.

PLANVS angulus. Vide Angulus.

PLANVS numerus. Vide Numerus planus.

PORTIO circuli. Vide Circulus.

PRIMI inter ſe numeri. Vide Numerus par, &c.

PRIMVS numerus. Vide Numerus par, &c.

PRISMA. Vide Parallelepipedum, &c.

PROPORTIO Figurarum, Angulorum, & Linearum. Vide Figuræ, Anguli, & lineæ proportionales.

PROPORTIO magnitudinum in communi. Vide Magnitudines proportionales in communi.

PROPORTIONALES magnitudines in communi. Vide Magnitudines proportionales in communi.

PROPORTIONALES numeri in communi. Vide Numeri proportionales in communi.

PROPORTIO numerorum in communi. Vide Numeri proportionales in communi.

PYRAMIS. Vide Parallelepipedum, &c.

QVADRATVM. Vide Parallelogrammum, &c.

QVADRATVS numerus. Vide Numerus Planus, Solidus, &c.

QVADRILATERAE figuræ planæ. Vide Parallelogrammum.

RATIONALES, & Irrationales magnitudines.

Duas Rationales longitudine & inter ſe, & expoſitæ Rationali commenſurabiles inuenire, quarũ vna Rationali expoſitæ ſit æqualis. 122. B

Duas Rationales longitudine & inter ſe, & expoſitæ Rationali commenſurabiles inuenire, quarum neutra Rationali expoſitæ æqualis ſit. 122. B

Duas Rationales longitudine quidem inter ſe, potentia verò tantùm expoſitæ Rationali commenſurabiles inuenire. 122. B

Rationales quotcunque longitudine inter ſe commenſurabiles inuenire. 123. B

Duas Rationales potentia tantùm inter ſe commenſurabiles inuenire, quarum altera expoſitæ Rationali ſit æqualis. 124. B

Duas Rationales potentia tantùm inter ſe commmenſurabiles inuenire, quarum neutra ſit expoſitæ Rationali æqualis. 124. B

Rationales quotcunque potentia tantùm inter ſe commenſurabiles reperire. 124. & 125. B

Datis quotcunq; Rationalibus potentia ſolùm commenſurabilibus, inuenire aliam Rationalem illis omnibus potentia tantùm commenſurabilem. 125. B

Duas Medias rectas longitudine commenſurabiles: Item duas potentia tantùm commenſurabiles inuenire. 128. B

Medias inuenire potẽtia tantùm commenſurabiles, quæ Rationale comprehendant. 130. B

Medias inuenire potentia tantùm commenſurabiles, quæ Medium contineant. 131. B

Duas Rationales inuenire potentia tantũ commenſurabiles, ita vt maior, quàm minor, plus poſsit quadrato rectæ longitudine ſibi commenſurabilis. 133. B

Duas Rationales inuenire potentia tantũ commenſurabiles, ita vt maior, quàm minor plus poſsit quadrato rectæ ſibi longitudine incõmenſurabilis. 134. B

Duas Medias inuenire potentia tantùm commenſurabiles, quæ Rationale contineant, ita vt maior plus poſsit, quàm minor, quadrato rectæ ſibi longitudine commenſurabilis, vel incommenſurabilis. 134. B

Duas Medias inuenire potẽtia ſolùm commenſurabiles, quæ Medium contineant, ita vt maior plus poſsit, quàm minor, quadrato rectæ ſibi longitudine commẽſurabilis, vel incommenſurabilis. 135. B

Duas rectas inuenire potentia incommenſurabiles, quæ faciãt compoſitũ quidem ex ipſarum quadratis, Rationale, rectangulum verò ſub ipſis contentum, Medium. 136. B

Duas rectas inuenire potentia incommenſurabiles, quæ faciant compoſitum quidem ex ipſarum quadratis Medium; Rectangulum verò ſub ipſis contentum, Rationale. 137. B

Duas rectas inuenire potentia incommenſurabiles, quæ faciant & compoſitum ex ipſarum quadratis Medium, & rectangulum ſub ipſis contentum, Medium, incommenſurabile compoſito ex ipſarum quadratis. 138. B

Duas Medias inuenire longitudine, & potentia incommenſurabiles. 138. B

Sex genera linearum Irrationalium, quæ ex binis nominibus dicuntur, inuenire. 146. B

Sex genera linearum Irrationalium, quæ Apotomæ dicuntur, inuenire. 167. B

RECTA LINEA.

Rectæ datæ lineæ æqualem rectam lineam ad datum punctum ponere. 21. A

Rectam lineam æqualem datæ minori ex maiore detrahere. 22. A

Rectam lineam datam finitam bifariam ſecare. 30. A

Rectam perpendicularem ad rectam lineam ex puncto in ea dato educere. 31. A

Rectam perpendicularem ad rectam in puncto extremo erigere. 32. & 33. A

Rectam perpendicularem ad rectam ducere ex puncto extra eam dato. 32. & 33. A

Rectam perpendicularẽ ad rectam ducere ex puncto extra eam dato, quando punctum datum est vicinum datæ rectæ, vel prope extremũ plani cuiuspiã, vel quando recta data prope extremũ plani est, vel denique quãdo & datũ punctum est vicinũ extremo plani, & recta data est propè aliud extremum plani. 33. & 57. A

Rectæ datæ parallelam rectam à dato puncto ducere. 55. A

Rectam lineam à puncto extra datam rectam lineã proposito ducere, quæ cũ data recto angulum efficiat dato angulo rectilineo æqualem. 56. A

Rectam lineam datæ rectæ parallelam ducere per punctum datæ rectæ vicinum. 57. A

Inter duas rectas infinitas angulum facientes lineam rectam datæ lineæ æqualem collocare, quæ cum vtralibet earũ faciat angulum dato angulo æqualem, dummodò datus angulus, & angulus comprehensus datis rectis minores sint duobus rectis. 64. A

Rectam datam lineam finitam, in quotlibet partes æquales secare. 75. & 299. A

Rectis duabus inæqualibus datis, inuenire id, quo plus potest maior, quàm minor. 86. 87. A. & 117. B

Datis duabus rectis, siue æqualibus, siue inæqualibus, inuenire rectam, quæ illas potest. 86. A. & 117. B

Rectam lineam datam secare, vt rectangulum sub tota, & altero segmento æquale sit quadrato reliqui segmenti. 106. A

Datis duabus rectis, alterutri earum rectam adiungere, vt rectangulum sub tota composita, & adiuncta, æquale sit quadrato alterius. 173. A

Rectam lineam cuilibet arcui circuli, ex cuius quadratrice Quadratrix linea describitur, æqualem inuenire. 353. & 354. A

Duabus datis rectis inæqualibus quartam partem quadrati ex minore descripti ad maiorem applicare, ita vt deficiat figura quadrata. 119. B

Datam rectam lineam ita secare, vt rectangulum sub segmentis contentum æquale sit dato rectilineo, quod tamen maius non sit, quàm quadratum à dimidia linea descriptum. 119. B

A dato puncto in sublimi ad subiectum planũ perpendicularem rectam ducere. 200. B

Dato plano, à puncto, quod in illo datum est, perpendicularẽ rectam excitare. 200. & 201.

Per rectam in plano quouis datam planum ducere, quod ad ipsum planum sit rectum. 205. B

RECTANGVLVM parallelogrammum. Vide Parallelogrammum, &c.

RECTANGVLVM triangulum. Vide Triangulum.

REGVLARIS figura. Vide Figura intra & extra circulum, sphæram, &c.

SCALENVM triangulum. Vide Triangulum.

SEGMENTVM circuli. Vide Circulus.

SIMILES plani ac solidi numeri. Vide Numerus planus, &c.

SOLIDA Figura intra, & extra sphæram, atque aliam figuram. Vide Figura intra, & extra circulum, &c.

SOLIDI numeri similes. Vide Numerus planus, &c.

SOLIDVM Regulare. Vide Figura intra, & extra circulum, &c.

SOLIDVS angulus. Vide Angulus.

SOLIDVS numerus. Vide Numerus planꝰ, &c.

SPHAERA. Vide Figura intra & extra circulũ, sphæram, &c.

TRAPEZIVM. Vide Parallelogrammum, &c.

TRIANGVLVM.

Triangulum æquilaterum super data recta linea terminata constituere. 19. A

Isosceles super data recta constituere. 20. A

Scalenum super data recta constituere. 20. & 21. A

Triangulum ex tribus rectis lineis, quæ sunt tribus datis rectis lineis æquales, quarũ quælibet duę reliqua sint maiores, cõstituere. 41. A

Triangulum alteri dato triangulo æquilaterum, & æquiangulum constituere. 42. A

In scaleno, & Isoscele, cuius basis minor non sit vtrouis latere, duas rectas intra triangulum ducere, quarum vtraq; simul vtriq; lateri simul sit æqualis. 65. A

In æquilatero, vel Isoscele, cuius basis vtrouis latere minor sit, quælibet duæ lineæ intra triangulum ductæ, sunt simul minores duob. lateribus simul. 65. & 66. A

In scaleno, & Isoscele, cuius basis minor non sit vtrouis latere, duas rectas intra triangulum ducere, quarum vtraq; vtriq; lateri sit æqualis, vel maior. 66. A

Triangulum bifariam secare per lineam à quouis puncto in vno latere dato ductam. 71. A

Triangulo dato æquale parallelogrammũ constituere in dato angulo rectilineo. 78. A

Triangulum dato parallelogrammo æquale constituere in dato angulo rectilineo. 79. A

Triangulo dato parallelogrammũ æquale constituere super datam rectam, & in dato angulo rectilineo. 80. A

Triangulum dato parallelogrammo constituere æquale super datã rectam, & in dato angulo rectilineo. 81. A

Trianguli rectanguli cognitis duobus lateribus, in cognitionem reliqui lateris peruenire. 87. A

Amblygonium triangulũ constituere, in quo propos. 12. lib. 2. numeris possit accommodari. 108. A

Oxygonium triangulum construere, in quo propos. 13. libri 2. numeris possit accommodari. 112. & 113. A

Trianguli cuiusuis aream cognoscere. 116. A

Isosceles constituere, quod habeat vtrumq; angulorum ad basim reliquî duplum. 180. A

Isosceles oxygonium construere, cuius tertium latus vtrouis æqualium sit maius. 185. A

In dato triangulo quocunque quadratum describere. 344. & 345. A

FINIS.

INDEX
THEOREMATVM, QVAE HISCE COMMENTARIIS CONTINENTVR:

QVORVM ea, quæ ab Euclide demonſtrantur, eodem charactere ſunt notata, quo in propoſitionum demonſtrationibus vſi ſumus: quæ verò à nobis adiecta, charactere, quo ſcholia excuſimus. Litera porrò A, primum tomum, & litera B, ſecundum ſignificat. Vt autem faciliùs quiſque inueniat theoremata, quæ cupit, digeſſimus ea ſecundùm materias, de quibus demonſtrantur.

ACVTANGVLVM triangulum. Vide Triangulum.

ÆQVIANGVLA, & æquilatera figura. Vide Figura intra & extra circulum, &c.

ÆQVILATERA, & æquiangula figura. Vide Figura intra & extra circulum, &c.

ÆQVILATERVM triangulum. Vide Triangulum.

ANGVLI proportionales. Vide Figuræ, anguli, & lineæ proportionales.

ANGVLVS.

Anguli recti omnes ſunt inter ſe æquales. 16. A
Anguli oppoſiti ad verticem duarum rectarum ſe interſecantium ſunt æquales. 34. A
Anguli quatuor à duabus rectis ſe interſecantibus facti, ſunt quatuor rectis æquales. 35. A
Anguli quotcunque circa idem punctum quatuor rectis ſunt æquales. 35. A
Angulus externus trianguli maior eſt vtrouis interno oppoſito. 36. A
Angulus externus figuræ quadrilateræ maior eſſe poteſt quouis interno oppoſito. 36. A
Anguli duo trianguli quomodocunque ſumpti duobus rectis ſunt minores. 37. A
Anguli duo trianguli orthogonij, & amblygonij ſunt acuti. 37. A
Anguli omnes trianguli æquilateri, & duo Iſoſcelis ſupra baſem, acuti ſunt. 37. A
Anguli tres cuiuſcunque trianguli æquales ſunt duobus rectis: Et externus æqualis eſt duobus internis oppoſitis ſimul. 57. A
Anguli omnes interni cuiuſcunq; figuræ rectilineæ quot rectis angulis æquiualeant. 58. & 59. A
Anguli omnes externi cuiuſcunque figuræ rectilineæ, productis ſingulis lateribus ordinatim verſus eandem partem, quatuor rectis ſunt æquales. 59. A
Anguli quinque, qui fiunt ex concurſu binorum laterum pentagoni productorum æquales ſunt duobus rectis. 60. A
Angulus contactus verè angulus eſt, contra Peletarium, vbi eius ſophiſmata diſſoluuntur. 133. vſq; ad 145. A
Angulo quouis contactus dari poteſt alius minor, & hoc alius minor vſque in infinitum: Item maior, & hoc alius maior in infinitum. 133. A
Anguli contactus, quo modo inter ſe ſint æquales, et qui æquales ſint. 136. A
Anguli contactus, quotquot ſint, efficiunt aggregatum omni rectilineo acuto angulo minus. 137. A
Anguli contactus Apologia aduerſus Peletarium. 137. vſq; ad 145. A
Angulus quiſpiam poteſt in infinitũ augeri, & alius in infinitũ minui; & tamen augmentũ illius, quantumcunque ſit, minus ſemper erit decremẽto huius. 145. A
A minori angulo tranſitur ad maiorẽ, & per omnes intermedios, nunquã tamen per æqualem. 145. & 166. A
Anguli oppoſiti in quadrilatero intra circulum deſcripto æquales ſunt duobus rectis. 154. A
Angulus externus quadrilateri in circulo, æqualis eſt ei, qui opponitur angulo ei deinceps. 156. A
Angulus rectus in centro inſiſtit quadranti; acutus verò arcui quadrante minori; & obtuſus maiori. Et contrà, angulus in centro quadranti inſiſtens, rectus eſt; inſiſtens verò arcui quadrante minori, acutus; & maiori, obtuſus. 161. A
Angulus curuilineus angulo rectilineo æqualis eſſe poteſt. 245. A
Si duę rectę ſe mutuò tangentes, ad duas rectas ſe mutuò tangentes ſint parallelæ, nõ autem in eodem plano; illæ angulos æquales comprehendent. 199. B
Idem euenit, ſi omnes illæ rectæ ſint in vno plano. 199. & 200. B
Si ſolidus angulus tribus angulis planis contineatur; Ex his duo quilibet vtut aſſumpti tertio ſunt maiores. 205. B
Omnis ſolidus angulus ſub minoribus, q̃ quatuor rectis angulis planis continetur. 206. B
Si fuerint tres anguli plani, quorũ duo vtlibet aſſumpti reliquo ſint maiores, cõprehendant autem ipſos rectæ lineę æquales; fieri poteſt, vt ex lineis æquales illas rectas connectentibus triangulum conſtituatur. 207. B
Si fuerint duo plani anguli æquales, quorũ verticibus ſublimes rectæ lineæ inſiſtant, quæ cum lineis primò poſitis angulos contineãt æquales, vtrumq; vtrique; in ſublimibus autem lineis quælibet ſumpta fuerint puncta, & ab his ad plana, in quibus conſiſtunt anguli primùm poſiti, ductæ fuerint perpendiculares; à punctis verò, quæ in planis à perpendicularibus fiunt, ad angulos primũ poſitos adiunctæ fuerint rectæ lineæ: Hæ cum ſublimibus æquales angulos cõprehendẽt. 220. B

Si

Si fuerint duo anguli plani æquales, quorũ verticibus ſublimes rectæ æquales cum lineis primùm poſitis angulos continentes æquales, vtrumque vtrique: Erunt à punctis extremis linearũ ſublimium ad plana angulorum primùm poſitorum demiſſæ perpendiculares, inter ſe æquales. 221. B

ARCVS. Vide Circulus.

CIRCVLVS.

Circulus à diametro bifariam diuiditur. 8. A

Circulus à recta, quæ diameter non ſit, diuiditur non bifariam. 8. A

Si in circulo recta aliqua linea rectã quampiam bifariam ſecet, & ad angulos rectos; in ſecante centrum erit circuli. 122. A

Si in circuli peripheria duo puncta coniungantur linea recta: cadet hæc recta intra circulum. 122. & 123. A

Recta circulum in vno tantùm puncto tangit, ſi ita tangat, vt eum non ſecet. 123. A

Si in circulo recta linea per centrum ducta ſecet aliam nõ per centrum ductam bifariam: & ad angulos rectos ipſam ſecabit. Et ſi ad angulos rectos eam ſecet; bifariam quoque eam ſecabit. 123. A

Duobus circulis ex eodem centro deſcriptis, ſi ab aliquo puncto circumferentiæ exterioris recta ducatur interiorem circumferentiam ſecans: erunt eius ſegmẽta inter vtramq; circumferentiam æqualia. 124. A

In circulo duæ rectæ non per centrum extenſæ, ſe mutuò bifariam non ſecant. 124. A

Duo circuli ſe mutuò ſecantes nõ habent idem centrum. 124. A

Duo circuli ſe mutuò interius tangentes, nõ habent idem centrum. 124. & 125. A

Si in diametro circuli à puncto, quod centrum non ſit, plurimæ rectæ cadant: maxima omnium erit, in qua centrum, minima verò reliqua: aliarum autem propinquior ei, quæ per centrum, remotiore ſemper maior eſt: Duæ autem ſolùm rectæ æquales ab eodem puncto in circulum cadunt ad vtraſque partes minimæ vel maximæ. 125. A

Si intra circulum punctum ſumatur, ab eoq; in circulum rectarũ cadentiũ, vna quidem ſit maxima, vna verò minima, & reliquarũ aliæ ſint inæquales, aliæ æquales: Maxima quidẽ per centrũ tranſibit, minima verò erit reliqua pars diametri: & aliarũ maiores quidem erunt maximæ propinquiores, æquales autem à minima vel maxima, æqualiter diſtabunt. 126. A

Si extra circulum ſumatur punctũ quodpiam, ab eoque puncto ad circulum deducantur rectæ quædam lineæ, quarum vna quidem per centrum protendatur, reliquæ verò vt libet: In cauam peripheriam cadẽtium rectarum, maxima quidem eſt illa, quæ per centrum ducitur; aliarum autem propinquior ei, quæ per centrum tranſit, remotiore ſemper maior eſt, &c. 126. A

Ex puncto extra circulum ſumpto, in peripheriam concauam duæ tantùm lineæ rectæ æquales cadunt, ad vtraſque partes maximæ lineæ. 127. A

Si ex puncto extra circulum ducatur recta tangens circulum, erit ea minor omnibus ex eodem puncto in concauam peripheriam cadentibus, maior verò omnibus in conuexam peripheriam cadentibus. 127. A

Punctum in circulo, à quo plures quàm duæ rectæ æquales ad peripheriam ducuntur, centrum circuli eſt. 127. A

Circulus circulum in pluribus punctis, quàm duobus, non ſecat. 128. A

Recta per centra duorũ circulorum ſe interius tangentium ducta, cadit in circulorum contactum. 128. A

Recta per centra duorũ circulorum ſe exterius tangentium ducta, tranſit per circulorũ contactum. 129. A

Circulus circulum non tangit in pluribus punctis, quàm vno. 129. A

Si in ſemidiametro circuli producta punctum vltra centrum ſumatur, circulus ex eo puncto, vt centro, per extremum ſemidiametri punctum deſcriptus, tanget priorem circulum in eo puncto extremo, totusq; extra eundem cadet. 130. A

In circulo æquales rectæ æqualiter à centro diſtant. Et quæ æqualiter à centro diſtãt, ſunt æquales. 130. & 131. A

In circulo maxima quidem linea eſt diameter; aliarum autẽ propinquior centro, remotiore ſemper maior. 131. A

Ex puncto circumferẽtiæ in concauam peripheriam duæ tantùm rectæ æquales cadunt ad vtraſq; partes diametri. 131. A

Quæ ab extremitate diametri cuiuſque circuli ad angulos rectos ducitur, extra ipſum circulum cadet; & in locum inter ipſam rectam, & peripheriam comprehenſum, altera recta non cadet: Et ſemicirculi quidem angulus quouis acuto rectilineo angulo maior eſt, reliquus autem minor. 132. A

Recta ad extremum diametri perpendicularis circulum tangit. 132. A

Si circulum recta tangat; recta ad contactum ducta, perpendicularis eſt ad tangentem lineam. 150. A

Circulis duobus ex eodem centro deſcriptis; rectæ interiorem tangentes, & vſque ad exteriorem extenſæ, inter ſe æquales ſunt, bifariamq; in punctis contactuũ ſecantur. 151. A

Si circulum tetigerit recta, perpendicularis ad tangentem in puncto cõtactus, per centrum tranſit. 151. A

In circulo, angulus ad centrum duplus eſt anguli ad peripheriam, ſi fuerit eadem peripheria baſis angulorum. 151. A

In circulo ſpatium ad centrum, duplum eſt anguli ad peripheriam, cùm fuerit eadem peripheria baſis ſpatij, & anguli. 152. A

In circulo, qui in eodem ſegmento ſunt, anguli ſunt inter ſe æquales. 152. & 153. A

Si à duobus punctis quatuor rectæ ducantur, ex ſingulis binæ, quæ in concurſu contineant duos angulos æquales: circulus per duo illa puncta, & alterutrum illorum angulorum deſcriptus, per alterum quoque angulum tranſibit. 153. A

In circulo quadrilaterũ quodcunq; habet angulos oppoſitos duobus rectis æquales. 154. A

Si in quadrilatero anguli oppoſiti ſint duobus rectis æquales; circulus circa ipſum deſcribi poteſt. 154. *A*

Si ex ſemicirculis, aut circulis ſimilia ſegmenta detrahantur; reliqua ſegmenta ſimilia etiam ſunt. 154. *A*

Arcus, quibus anguli æquales, ſiue ad centra, ſiue ad peripherias inſiſtunt, ſimiles ſunt: Et anguli arcubus ſimilibus inſiſtentes, ſiue ad centra, ſiue ad peripherias, æquales ſunt. 155. *A*

Si duo aut plures circuli idem habeant centrum: Rectæ ex centro ductæ abſcindũt arcus ſimiles. 155. *et* 337. *A*

Si duo aut plures circuli ſe mutuò tangant interiùs; Rectæ à puncto contactus ductæ abſcindunt arcus ſimiles. 155. *A*

Si vnum latus quadrilateri in circulo producatur, angulus externus æqualis eſt angulo, qui opponitur angulo ei deinceps. 156. *A*

Segmenta ſimilia, & inæqualia non conſtituentur ſuper eadem recta linea. 156. A

Segmenta ſimilia ſuper æqualibus rectis, ſunt æqualia. 156. A

Segmenta ſimilia, & æqualia, ſunt conſtituta ſuper æquales rectas, vel ſuper eandem rectam. 157. *A*

In circulis æqualibus, vel eodem anguli æqualibus peripheriis inſiſtunt, ſiue ad centra, ſiue ad peripherias. 158. A

In circulis æqualibus, vel eodem maior angulus, maiori peripheriæ inſiſtet. 159. *A*

In circulis æqualibus, vel eodem anguli æqualibus peripheriis inſiſtentes, ſunt æquales. 159. & 160. A

In circulis æqualibus, vel eodem angulus maiori peripheriæ inſiſtens, maior eſt. 160. *A*

In circulo, duæ rectæ ſe non interſecantes & intercipientes arcus æquales, parallelæ ſunt: Et parallelæ intercipiunt arcus æquales. 160. *A*

Rectæ, quæ ex medio puncto arcus alicuius ducitur tangens circulũ, parallela eſt chordæ illius arcus. 160. *A*

Angulus rectus in centro inſiſtit quadranti; acutus verò, arcui minori quadrante; & obtuſus, maiori. Et contrà, angulus in centro inſiſtens quadranti, rectus eſt; inſiſtens verò arcui quadrãte minori, acutus; et maiori obtuſus. 161. *A*

Recta è centro ſecans rectam aliã bifariam, ſecat quoq; arcum bifariam. Et ſecans arcũ bifariam, ſecat quoq; chordam bifariam. 161. *A.* & 261. 281. *B*

In circulis æqualibus, vel eodem rectæ æquales, auferunt arcus æquales. 162. A

In circulis æqualibus, vel eodem, maior linea maiorem arcum aufert, ſi de arcubus ſemicirculo minoribus ſermo fiat; minorem verò, ſi de ſegmentis maioribus agatur. 162. *A*

In circulis æqualibus, vel eodem, ſi arcus ſint æquales, erunt & rectæ æquales. 162. A

In circulis æqualibus, vel eodem maior arcus habet chordam maiorem, ſi de arcubus ſemicirculo minoribus loquamur: minorem verò, ſi de maioribus. 162. *A*

Circuli, è quibus æquales rectæ auferunt ſimiles arcus, æquales ſunt. 163. *A*

Ex circulis inæqualibus rectæ æquales auferunt arcus diſſimiles. 163. *A*

Ex circulis inæqualibus lineæ rectæ auferentes arcus ſimiles, inæquales ſunt. 163. *A*

Rectæ lineæ auferentes arcus ſimiles inæquales ex quibuſuis circulis, inæquales ſunt. 163. *A*

Si in diametro circuli præter centrum ſumatur punctum, ab eoq; in peripheriam duæ rectæ nõ in eaſdem partes cadentes, efficiant ad diametrũ angulos æquales; rectæ illæ æquales erunt, & arcus abſcindent æquales. Et ſi lineæ ſint æquales, conſtituent ad diametrum angulos æquales, abſcindentq; arcus æquales. Si denig; abſcindant arcus æquales, erunt rectæ illæ æquales, angulosq; ad diametrum æquales conſtituent. 163. *A*

Si in diametro circuli præter centrũ ſumatur punctum, à quo ad eaſdẽ partes duo anguli æquales conſtituantur, inſiſtent hi anguli arcubus inæqualibus, maiorq; erit ille, qui à minori portione diametri remotior eſt. 164. *A.*

In ſemicirculo angulus rectus eſt; in maiore ſegmento acutus: Et in minore obtuſus. Angulus item maioris ſegmenti recto maior: minoris verò ſegmenti recto minor. 164. A

Segmentum circuli, in quo angulus rectus eſt, eſt ſemicirculus, in quo verò acutus, ſegmẽtum maius eſt: & in quo obtuſus, ſegmẽtum minus. Et ſegmentum, cuius angulus eſt recto maior, eſt maius; cuius verò angulus eſt recto minor, eſt minus. 166. *A*

Circulus ex puncto medio lateris recto angulo oppoſiti in triangulo rectangulo deſcriptus per vnum angulum, tranſit quoq; per reliquos. 167. *A*

Si per centrum circuli alius circulus deſcribatur, & per vtriuſque centrum recta ejiciatur: à puncto verò, vbi hæc recta poſteriorem circulum ſecat, ducatur recta vtcunque, ſecabitur eius portio intra priorem circulum bifariam. 167. *A*

Si circulum tangat recta, & à contactu ducatur linea vtcunque ſecans: anguli ad contingentem æquales ſunt angulis in alternis ſegmentis. 168. A

Si recta ducta ad extremitatem rectæ circulum ſecantis faciat cum ea angulos æquales angulis in alternis ſegmentis; recta illa ducta circulum tangit. 168. *A*

Si in circulo duæ rectæ ſe ſecent: rectangulum ſub ſegmentis vnius, æquale eſt rectangulo ſub ſegmentis alterius. 169. A

Si duæ rectæ ita ſe ſecent, vt rectangulum ſub ſegmentis vnius æquale ſit rectangulo ſub ſegmentis alterius: deſcribi poterit per quatuor earum puncta extrema circulus. 170. *A*

Si extra circulum ſumatur punctum, à quo ducatur recta tangens, & altera ſecans: erit quadratum tangentis æquale rectangulo ſub tota ſecante, & eius ſegmento exteriore. 170. A

Si à puncto extra circulum ducantur plures rectæ ſecantes; rectangula ſub totis ſecantibus, & ſegmentis exterioribus, æqualia ſunt. 171. *A*

Duæ rectæ tangentes circulum ab eodem puncto ductæ, ſunt æquales. 171. *A*

Ab eodem puncto duæ tantùm rectæ circulum tangentes duci poſſunt. 171. *A*

Si duæ rectæ æquales ducantur ab eodem puncto ad circulum, vna autem earum ſit tangens, erit & altera tangens. 172. *A*

Si à puncto duæ rectæ egredientes ita ſecentur in binas partes ſingulæ, vt rectangula ſub totis, & ſegmentis prope punctũ, æqualia ſint; deſcribi poterit circulus per

extremæ reliquorum ſegmentorum. 172.A

Si extra circulum punctum ſumatur, à quo ducatur recta ſecans, & altera incidens, vſq; ad circumferentiam conuexam: ſit autem quadratũ incidentis æquale rectangulo ſub tota ſecante, & eius ſegmẽto exteriore: Incidens circulum tanget. 173.A

Si à puncto duæ tangentes ad circulum ducantur, aut duæ ſecantes æquales: Recta ab eodem puncto per centrum ducta diuidit angulum ab eis comprehẽſum, bifariam. Et contrà, Recta ſecans angulum bifariam, per centrum circuli tranſit. 173.A

Æquales rectæ ex circulis inæqualibus auferunt arcus inæquales, maiorq; eſt arcus minoris circuli, quàm vt ſimilis ſit arcui circuli maioris 337.A

Æquales rectæ ex circulis inæqualibus auferunt arcus ſimpliciter inæquales, maiorq; eſt arcus circuli minoris ſimpliciter, & non ſolùm maior, quàm vt ſimilis ſit arcui circuli maioris. 337.A

Si in circulo, ductis duabus diametris ſeſe ad angulos rectos ſecantibus, altera earum producatur, eiq; ex vna parte quotquot parallelæ agantur diuidentes vtrumque quadrantem in partes æquales, ac deniq; ex puncto extremo alterius diametri per extremum punctũ proximæ parallelæ recta ducatur, cõueniens cum diametro producta: Erit tota recta inter punctum concurſus, & concauam peripheriam circuli, omnibus parallelis, vnà cum diametro, quæ producta eſt, ſimul ſumptis, æqualis. 161.A

Si ad diametrum circuli in extremis punctis duæ perpendiculares excitẽtur, & ab eiſdem extremis per vnum idemq; punctum duæ aliæ rectæ circulum ſecantes ducantur, occurrentes duabus perpendicularibus; erit rectangulum ſub vtralibet ſecantiũ, & eius ſegmento interiore comprehẽſum, quadrato diametri æquale 346.A

Si in circulo duæ diametri ſeſe ad rectos angulos ſecent, & ab vnius extremo recta ducatur vtcunq; ſecans circumferentiam, & alteram diametrum ſiue productam, ſiue intra circulum; erit rectangulum ſub duobus ſegmentis huius lineæ ductæ, quorum vnum inter extremum prioris diametri, & ſecundam diametrum, alterum verò inter idem punctum extremum, & circumferentiam interiicitur, æquale quadrato intra circulum deſcripto. 346.A

Circumferentia circuli ad eius diametrum quam proportionem plus minus, habeat. 354.A

CIRCVMFERENTIA. vide Circulus.

COMMENSVRABILES & incommenſurabiles magnitudines.

Duabus magnitudinibus inæqualibus propoſitis, ſi à maiore auferatur maius quàm dimidium; & ab eo quod reliquum eſt, rurſus detrahatur maius quàm dimidium: & hoc ſemper fiat: relinquetur tandem quædam magnitudo, quæ minor erit propoſita minore magnitudine. 102.B

Idem euenit, ſi dimidium auferatur, &c. 103.B

Si duabus magnitudinibus inæqualibus propoſitis, detrahatur ſemper minor de maiore, alterna quadam detractione, & reliqua minimè præcedentem metiatur: incommenſurabiles erunt ipſæ magnitudines. 103.B

Si duabus magnitudinibus incommenſurabilibus propoſitis, detrahatur ſemper minor de maiore, alterna quadam detractione: nunquam reliqua præcedentem metietur. 104.B

Si duabus magnitudinibus commenſurabilibus propoſitis, detrahatur ſemper minor de maiore, alterna quadam detractione: nunquam reliqua præcedẽtem metietur. 104.B

Si duabus magnitudinibus commenſurabilibus propoſitis, detrahatur ſemper minor de maiore, alterna quadam detractione, metietur quædam reliqua præcedentem. 104.B

Magnitudo metiens duas magnitudines, metitur & maximam earum menſuram communem. 105.B

Magnitudo metiens tres aut quotcunq; magnitudines, metitur quoque maximam earum menſuram communem. 106.B

Si ſint quotcunq; magnitudines, & totidem numeri, qui bini in eadem ratione ſumantur, in qua binæ magnitudines: & ex æqualitate in eadem ratione erunt magnitudines & numeri. 106.B

Commenſurabiles magnitudines inter ſe rationem habent, quam numerus ad numerum. 106.B

Commenſurabiles magnitudines proportionem habent eandem, quam numeri, per quos earum menſura communis maxima ipſas metitur. 107.B

Si duæ magnitudines inter ſe proportionem habeant, quam numerus ad numerum, commenſurabiles erunt magnitudines. 107.B

Incommẽſurabiles magnitudines inter ſe proportionem non habent, quam numerus ad numerum. 108.B

Si duæ magnitudines inter ſe proportionẽ non habeant, quam numerus ad numerum: incommẽſurabiles erunt magnitudines. 108.B

Si ſint tres quantitates continuè proportionales, & aliæ tres continuè quoq; proportionales, ſitq; vt prima illarum ad tertiam, ita prima harum ad tertiam; erit & vt prima illarum ad ſecundam, ita prima harum ad ſecundam. 109.B

Idem ſequitur ſi plures quantitates ſint, quàm tres, &c. 109.B

Quæ à rectis lineis longitudine commenſurabilibus fiunt quadrata, inter ſe proportionẽ habent, quam quadratus numerus ad quadratum numerum: Et quadrata inter ſe proportionem habentia, quam quadratus numerus ad quadratum numerum; & latera habebunt longitudine commenſurabilia. Quæ verò à rectis lineis longitudine incommenſurabilibus fiunt quadrata; inter ſe proportionem non habent; quam quadratus numerus ad quadratum numerum: Et quadrata inter ſe proportionem nõ habentia, quam quadratus numerus ad quadratum numerũ; neq; latera habebunt longitudine commenſurabilia. 109.B

Rectæ longitudine commenſurabiles, omnino & potentia ſunt commenſurabiles; quæ verò potentia commenſurabiles ſunt, non om-

nino & longitudine commenſurabiles ſunt. Et quæ longitudine ſunt incommenſurabiles, non omnino & potentia incommenſurabiles ſunt, quæ verò potentia incommenſurabiles ſunt, omnino & longitudine incommenſurabiles ſunt. 110.B

Si quatuor magnitudines ſint ꝓportionales, prima verò ſecundæ ſit commenſurabilis; & tertia quartæ commenſurabilis erit. Et ſi prima ſecundæ ſit incommenſurabilis, & tertia quartæ incommenſurabilis erit. 113.B

Recta media proportionalis inter duas rectas potentia tantùm commenſurabiles, vtrilibet illarum incommenſurabilis eſt longitudine & potentia, ac proinde appellabitur Irrationalis, ſi alterutra illarum ſtatuatur Rationalis. 115.B

Quæ eidem magnitudini ſunt commenſurabiles, & inter ſe ſunt commenſurabiles. 115.B

Si ſint duæ magnitudines commenſurabiles, altera verò ſit vni cuipiam commenſurabilis; erit & reliqua eidem commenſurabilis. 115.B

Si ſint duæ magnitudines, & altera quidem eidem ſit commenſurabilis, altera verò incommenſurabilis; incommenſurabiles erunt magnitudines. 116.B

Si ſint duę magnitudines commenſurabiles, altera autem ipſarū magnitudini cuipiam incommēſurabilis fuerit; Et reliqua eidem incommenſurabilis erit. 116.B

Quæ incommenſurabilibus ſunt commenſurabiles; & inter ſe incommenſurabiles erunt. 116.B

Si quatuor rectæ proportionales fuerint, prima verò tantò plus poſſit, quàm ſecunda, quantum eſt quadratum rectæ ſibi commenſurabilis longitudine; Et tertia tantò plus poterit quàm quarta, quātum eſt quadratum rectæ ſibi longitudine commēſurabilis. Quod ſi prima tantò plus poſſit quā ſecūda, quantum eſt quadratum rectæ ſibi incommenſurabilis longitudine; Et tertia tantò plus poterit quàm quarta, quantum eſt quadratum rectæ ſibi longitudine incommenſurabilis. 117.B

Si duæ magnitudines commenſurabiles componantur; & tota magnitudo vtriq; ipſarum commenſurabilis erit. Quod ſi tota magnitudo vni ipſarum commenſurabilis fuerit, & quæ à principio magnitudines commenſurabiles erunt. 118.B

Si tota magnitudo ex duabus compoſita, commenſurabilis ſit alteri ipſarum; eadem & reliquæ commenſurabilis eſt. 118.B

Si duæ magnitudines incommēſurabiles componantur; & tota magnitudo vtrique ipſarū incommenſurabilis erit. Quod ſi tota magnitudo vni ipſarum incommenſurabilis fuerit, & quæ à principio magnitudines incommēſurabiles erunt. 118.B

Si tota magnitudo ex duabus cōpoſita incommenſurabilis ſit alteri ipſarum; eadem & reliquæ incommenſurabilis eſt. 118.B

Si ſint duæ rectæ inæquales, quartæ autem parti quadrati; quod fit à minore, æquale parallelogrammum ad maiorem applicetur; deficiens figura quadrata, & in partes longitudine commenſurabiles ipſam diuidat: Maior tantò plus poterit quàm minor, quantum eſt quadratum rectæ ſibi longitudine commenſurabilis. Quod ſi maior tātò plus poſſit quā minor, quantum eſt quadratū rectæ ſibi longitudine commenſurabilis, quartæ autem parti quadrati, quod fit à minore, æquale parallelogrammū ad maiorem applicetur, deficiens figura quadrata; In partes longitudine commenſurabiles ipſam diuidet. 120.B

Si ſint duæ rectæ inæquales, quartæ autem parti quadrati, quod fit à minore, æquale parallelogrammum ad maiorem applicetur deficiens figura quadrata, & in partes incommēſurabiles longitudine ipſam diuidat; Maior tantò plus poterit quàm minor, quantum eſt quadratum rectæ ſibi longitudine incōmenſurabilis. Quod ſi maior tantò plus poſſit, quantum eſt quadratum rectæ ſibi longitudine incommenſurabilis, quartæ autem parti quadrati quod fit à minore, æquale parallelogrammum ad maiorem applicetur deficiens figura quadrata; In partes longitudine incommenſurabiles ipſam diuidet. 121.B

Diameter quadrati longitudine incommenſurabilis eſt latori. 253.254.A. & 47.184.B

Inuentis rectis lineis longitudine incommenſurabilibus, inuenientur & aliæ quam plurimæ magnitudines, planæ ſcilicet, atq; ſolidæ incommenſurabiles inter ſe. 185.B

COMPOSITI inter ſe numeri. vide Numerus par, &c.

COMPOSITVS numerus. vide Numerus par, &c.

CONVS, & Cylindrus. vide Parallelepipedum, &c.

CORPVS Regulare. vide Figura intra & extra circulum, &c.

CVBVS numerus. vide Numerus planus, &c.

CYLINDRVS, & Conus. vide Parallelepipedum, &c.

DIAMETER circuli. vide Circulus.

FIGVRA intra, & extra circulum, ſphæram, atque aliam figuram.

Quadrilaterum in circulo habet oppoſitos angulos duobus rectis æquales. 154.A

Si in quadrilatero anguli oppoſiti ſint duobus rectis æquales; circulus circa ipſum deſcribi poteſt. 154.A

Quadrilateri in circulo angulus externus æqualis eſt ei, qui opponitur ei deinceps. 156.A

Quadrilaterum in circulo, cuius duo latera oppoſita ſunt parallela, & æqualia, parallelogrammum eſt rectangulum. 167.A

In omni triangulo, cui circulus inſcribitur, duo quæuis latera

latera ſuperant reliquum recta linea, cuius quadratum quadruplum eſt rectanguli comprehenſi ſub recta ab angulo illis lateribus comprehenſo in cauam peripheriam ducta, & ſub ſegmento eius exteriore. Quod ſi angulus comprehenſus ſit rectus, ſuperabunt duo illa latera latus recto angulo oppoſitum diametro circuli triangulo inſcripti. Vel duo quæuis latera ſuperant reliquum duabus rectis tangentibus inter angulum illorum laterum, & circulum interpoſitis. 177.A

Si centrum circuli triangulo circumſcripti cadit intra triangulum, omnes eius anguli acuti ſunt: Si in vnũ latus, angulus oppoſitus rectus eſt: Si denique extra vnum latus, angulus oppoſitus obtuſus eſt. 178.A

In triangulo acutangulo centrum circuli circumſcripti cadit intra: In rectangulo, in latus recto angulo oppoſitum: In obtuſangulo denique extra latus angulo obtuſo oppoſitum. 178.A

Quadratum circulo circumſcriptum duplum eſt quadrati eidem circulo inſcripti. 180.A

Pentagoni circulo inſcripti, hoc eſt, æquilateri, & æquianguli, angulus quilibet cõtinet tres quintas duorum rectorum, vel ſex quintas vnius recti. 181.A

Si in circulo figura quæuis æquilatera & æquiangula deſcribatur, & ad extrema ſemidiametrorum excitentur perpendiculares, conſtituent hæ perpendiculares ſimilem figuram circulo circumſcriptam. 182.A

Hexagoni circulo inſcripti latus, æquale eſt ſemidiametro circuli. 185.A

Si in circulo ab eodem puncto inſcribantur latera duarum figurarum regularium, continebit arcus inter illa incluſus tot latera alterius figuræ inſcribendæ in eodem circulo, quot vnitatibus inter ſe differunt denominatores eorundem laterum: Figura autem inſcribenda continebit tot latera, quot vnitates ſunt in numero ex multiplicatione denominatorum producto. 186.& 187.A

Omnis figura æquilatera circulo inſcripta, eſt quoque æquiangula: at non omnis figura æquilatera circulo circumſcripta, æquiangula quoque eſt, niſi quando numerus angulorum ipſius eſt impar, &c. 187.A

Omnis figura æquiangula circulo circumſcripta, eſt quoque æquilatera: at non omnis figura æquiangula circulo inſcripta, æquiangula quoque eſt, niſi quando numerus laterum, &c. 189.A

Si bifariæ ſectiones laterum regularis figuræ rectis coniungantur, inſcripta erit ſimilis figura, idem centrum habens. 193.A

Solum triangulum æquilaterum, quadratum, & Hexagonum æquilaterum atq; æquiangulum, ex omnibus figuris regularibus, locum replent. 193.A

In figura æquilatera, & æquiangula, ſi quidem angulorum numerus impar eſt, recta linea ex quouis angulo demiſſa ſecans oppoſitum latus bifariam, diuidit quoque angulum bifariam: Et contrà, recta linea diuidens angulum bifariam, ſecat quoque latus oppoſitum bifariam. Si verò numerus angulorum eſt par, recta linea ex ex quouis angulo ad oppoſitum angulum ducta ſecat vtrumque angulum bifariam: Et cõtrà, recta linea ſecans quemuis angulum bifariam, cadit in oppoſitum angulum, eumque bifariam etiam diuidit. 183.A

Si baſis quadratricis intra quadrantem & quadratum deſcriptæ, ſtatuatur ſemidiameter alicuius circuli: eius latus, ſiue ſemidiameter quadrantis æquabitur quadranti illius circuli, &c. 354.A

Quæ in circulis polygona ſimilia; inter ſe ſunt, vt à diametris quadrata. 226.B

Si pentagoni æquilateri tres anguli, ſiue qui deinceps, ſiue qui non deinceps ſint, æquales fuerint; æquiangulum erit ipſum pentagonum. 258.B

Si pentagoni æquilateri, & æquianguli duos angulos, qui deinceps ſint, ſubtendant lineæ rectæ; hæ extrema ac media ratione ſe mutuò ſecant, & maiora ipſarum ſegmẽta æqualia ſunt pentagoni lateri. 258.B

Recta ſubtendens vnum angulum pentagoni æquilateri & æquianguli, parallela eſt oppoſito lateri. 259. & 311.B

Si hexagoni latus, & decagoni, in eodem circulo deſcriptorum componantur; tota recta linea extrema atque media ratione ſecatur, & maius eius ſegmentum eſt hexagoni latus. 259.B

Si latus hexagoni ſecetur extrema ac media ratione; maius illius ſegmentum eſt latus decagoni. 259.B

Si lineæ diuiſæ extrema ac media ratione maius ſegmentum fuerit latus hexagoni alicuius circuli; erit minus ſegmentum latus decagoni eiuſdem circuli. Quod ſi minus ſegmentum fuerit latus decagoni alicuius circuli; erit maius ſegmentum latus hexagoni eiuſdem circuli. 260.B

Si in circulo pentagonum æquilaterum deſcribatur; pentagoni latus poteſt & latus hexagoni, & latus decagoni, in eodem circulo deſcriptorum. 260.B

Diameter circuli ex angulo quouis pentagoni, vel alterius figuræ æquilateræ imparium laterum, diuidit & latus oppoſitum bifariam, & ad angulos rectos, & arcum, quem illud latus ſubtendit. 261.B

Si in circulo triangulum æquilaterum deſcribatur; Trianguli latus potentia triplum eſt eius lineæ, q̃ ex centro circuli ducitur. 262.B

Diameter circuli potentia eſt ſeſquitertia lateris trianguli æquilateri in eo circulo deſcripti. 263.B

Si in circulo triangulum æquilaterum deſcribatur; diameter ex vno angulo ducta diuidit & angulum bifariam, & latus oppoſitum, ac inſuper ad angulos rectos: Semidiameter quoque viciſſim bifariam, & ad angulos rectos ſecabitur à latere oppoſito. 263.B

Sphæræ diameter potentia eſt ſeſquialtera lateris pyramidis in ea deſcriptæ. 264. & 345.B

Diameter ſphæræ potentia eſt quadrupla ſeſquialtera ſemidiametri circuli circa baſem pyramidis in ea ſphæra exiſtentis deſcripti. 265.B

Perpendicularis ex centro ſphæræ ad baſim pyramidis in ea ſphæra exiſtentis demiſſa, ſexta pars eſt diametri ſphæræ, & tertia pars ſemidiametri. 265.B

Altitudo pyramidis intra ſphæram continet duas tertias partes diametri. Et diameter potentia eſt dupla ſeſquiquarta altitudinis pyramidis. 265.B

Sphæræ diameter potentia eſt dupla lateris Octaedri in ea deſcripti. 265.& 345.B

In octaedro tres diametri ſe mutuò ad angulos rectos ſecant. pag. 266.B

Octaedrum diuiditur in duas pyramides ſimiles & æquales; quarum baſis communis quadratum lateris octaedri, altitudo verò ſemidiameter ſphæræ vel octaedri. 266. & 292.B

Si tetraedrum, & octaedrum in eadem ſphæra deſcribantur, erit tetraedri latus potẽtia ſeſquitertium lateris octaedri. 266. 267. & 297.B

Octaedri baſes oppoſitæ ſunt inter ſe parallelæ. 267. & 345.B

Sphæræ diameter potentia eſt tripla lateris cubi in ea deſcripti. 267. & 346.B

Omnes diametri cubi æquales ſunt, ſeſeq; bifariam ſecant in centro ſphæræ. Item rectæ coniungentes centra baſium oppoſitarum ſe mutuò bifariam ſecant in eodem centro. 268.B

Potentia diametri ſphæræ, ſeu cubi æqualis eſt potentiis laterum tetraedri & cubi ſimul. 268.B

Si diameter ſphæræ ſit Rationalis linea; latus Icoſaedri in ea eſt Irrationalis linea, quæ vocatur Minor. 268.B

Sphæræ diameter potentia eſt quintupla ſemidiametri circuli quinque latera Icoſaedri ambientis. 271.B

Diameter ſphæræ compoſita eſt ex latere hexagoni, & duobus lateribus decagoni eiuſdem circuli. 271.B

Icoſaedri latera oppoſita ſunt parallela. 271. & 346.B

Si diameter circuli ſit Rationalis linea; latus Dodecaedri in ea deſcripti eſt Irrationalis linea, quæ vocatur Apotome. 272.B

Si latus cubi ſecetur extrema ac media ratione, maius ſegmentum eſt latus Dodecaedri eiuſdem ſphæræ. 274.B

Latus cubi æquale eſt rectæ ſubtendenti angulum pentagoni Dodecaedri eiuſdem ſphæræ. 274.B

Si recta ſecetur extrema ac media ratione, minus ſegmentum ſit latus Dodecaedri; maius ſegmentum erit latus cubi eiuſdem ſphæræ. 274.B

In Dodecaedro ſunt ſex latera, quorũ bina oppoſita ſunt parallela, bifariamq; ſecantur, & ad angulos rectos à tribus lineis rectis æqualibus ſeſe in centro Dodecaedri bifariam quoque, & ad angulos rectos ſecantibus. 275.B

Si recta diuidens oppoſita latera Dodecaedri bifariam, & ad angulos rectos, ſecetur extrema ac media ratione; maius ſegmentum eſt latus cubi, minus verò, latus Dodecaedri eiuſdem ſphæræ. 275.B

Plura corpora Regularia, quàm quinque, conſtitui non poſſunt. 277.B

Cubus & octaedrum: Item Icoſaedrum & Dodecaedrũ, reciprocantur, quod ad numerum baſium & angulorum attinet. Solùm tetraedrum tot baſes habet, quot angulos ſolidos. 279.B

Quæ ex centro circuli cuiuſpiam in pentagoni eidem circulo inſcripti latus perpendicularis ducitur, dimidia eſt vtriuſque lineę ſimul, & lateris hexagoni, & lateris decagoni eidem circulo inſcripti. 280.B

Perpendicularis ex centro ad latus pentagoni ducta æqualis eſt vtriq; rectæ ſimul, & ei, quæ ex centro ad latus trianguli æquilateri eiuſdem circuli ducitur, perpendiculari, & dimidio lateris decagoni. 281.B

Latus hexagoni ad latus decagoni eiuſdem circuli eandem proportionem habet, quam recta ſubtendens angulum pentagoni, ad latus ipſius pentagoni. 281.B

Si linea perpendicularis ex centro circuli ad latus pentagoni ducta ſecetur extrema ac media ratione, maius ſegmentum æquale eſt perpendiculari ex eodem centro ad latus trianguli æquilateri ductæ, minus verò æquale eſt dimidio lateris decagoni eiuſdem circuli. 281. & 282.B

Si in circulo pentagonum æquilaterum deſcribatur, quod ex latere pentagoni, & quod ex ea, quæ binis lateribus pentagoni ſubtenditur, recta linea, vtraque ſimul quadrata, quintupla ſunt eius, quod ex ſemidiametro deſcribitur, quadrati. 282.B

Si in ſphæra eadem cubus, & Dodecaedrum inſcribantur; quadratum lateris cubi, & quadratum lateris Dodecaedri, vtraq; ſimul, quintupla ſunt quadrati ſemidiametri circuli pentagonum dodecaedri circumſcribentis. 282.B

Si latus hexagoni alicuius circuli ſecetur extrema ac media ratione; maius illius ſegmentũ erit latus decagoni eiuſdem circuli. 282. & 283.B

Idem circulus comprehendit & Dodecaedri pentagonum, & Icoſaedri triãgulum, eidem ſphæræ inſcriptorum. 283. & 350.B

Si ex centro circuli pentagonum Dodecaedri circumſcribentis, perpendicularis ducatur ad vnum latus pentagoni; erit, quod ſub dicto latere, & perpendiculari comprehẽditur, rectãgulum trigeſies ſumptum, Dodecaedri ſuperficiei æquale. 284.B

Si ex centro circuli triangulũ Icoſaedri circumſcribentis, perpendicularis ducatur ad vnum latus trianguli; erit quod ſub dicto latere, & perpendiculari comprehenditur, rectangulum trigeſies ſumptum, Icoſaedri ſuperficiei æquale. 284.B

Superficies cuiuſlibet Dodecaedri ad ſuperficiem Icoſaedri cuiuſcunq; etiamſi non deſcribantur ambæ figuræ in eadem ſphæra, eſt ſicut rectãgulum ſub latere Dodecaedri, & perpendiculari ex centro pentagoni Dodecaedri in latus illud ducta contentum ad rectangulum contentum ſub latere Icoſaedri, & perpendiculari ducta ex centro trianguli Icoſaedri in illud latus. 285.B

Si ex centro circuli triangulum Tetraedri, vel Octaedri, ſiue quadratum cubi, circumſcribentis perpendicularis ducatur ad vnum latus; Erit quod ſub dicto latere & perpendiculari cõtinetur, in Tetraedro quidem ſumptum ſexies, ſuperficiei Tetraedri: In Octaedro verò & cubo, duodecies ſumptum ſuperficiei Octaedri, & cubi æquale. 285.B

Rectangulum contentum ſub tribus quartis partibus diametri alicuius circuli, & quinq; ſextis partibus lineæ ſubtendentis angulum pentagoni æquilateri in eodem circulo deſcripti, æquale eſt dicto pentagono. 285.B

Rectangulum contentum ſub perpendiculari ex angulo trianguli Icoſaedri ad vnum eius latus ducta, & ſub quinq; ſextis partibus lateris cubi in eadem ſphæra cum Icoſaedro deſcripti, æquale eſt pentagono Dodecaedri eiuſdem ſphæræ. 286.B

Superficies Dodecaedri ad ſuperficiem Icoſaedri in eadem ſphæra deſcripti, eandem proportionem

portionem habet, quam latus cubi ad latus Icoſaedri. 286.B

Si recta linea ſecetur extrema ac media ratione: erit vt recta potẽs id, quod à tota, & id, quod à maiori ſegmento, ad rectam potentem id, quod à tota, & id, quod à minore ſegmento, ita latus cubi ad latus Icoſaedri eidem ſphæræ cum cubo inſcripti. 287.B

Quam proportionem habẽt latera cubi & Icoſaedri eiuſdem ſphæræ, eandem habent latera cubi & Icoſaedri in quauis alia ſphæra deſcriptorum. 288.B

Si ſphæra plano quopiam ſecetur, communis ſectio circulus erit. 288.B

Si planum ſecans tranſit per centrum ſphæræ, fit circulus idem centrum habens cum ſphæra: Si verò non tranſit per centrum, fit circulus, cuius centrum punctum eſt, in quod cadit perpendicularis ex cẽtro ſphæræ ad circulum ducta. 289.B

Circuli in ſphæra æquales æqualiter diſtãt à cẽtro ſphæræ: Et circuli æqualiter diſtantes à centro ſphæræ, æquales ſunt. 289.B

Dodecaedrum ad Icoſaedrum in eadem cum ipſo ſphæra deſcriptum, eſt vt cubi latus ad latus Icoſaedri, in vna eademq; ſphęra. 289.B

Eadem proportio eſt lateris cubi ad latus Icoſaedri, quæ ſuperficiei Dodecaedri ad ſuperficiem Icoſaedri, & lineæ potentis totam quamcunque ſectam extrema ac media ratione, & eius ſegmentum maius, ad potentẽ totam eandem, & eius ſegmentum minus; & Dodecaedri ad Icoſaedrum eiuſdem ſphæræ. 290.B

Baſis Tetraedri ſeſquitertia eſt baſis Octaedri eiuſdem ſphæræ: Superficies autem octaedri ſeſquialtera ſuperficiei Tetraedri. 291.B

Recta ex angulo Tetraedri per centrum ſphæræ ducta, cadit in centrum baſis oppoſitæ, eſtq; perpendicularis ad baſim 292.B

Tetraedrum ad Octaedrum eiuſdem ſphæræ ſe habet, vt rectangulum ſub linea potente vigintiſeptem ſexageſimasquartas partes lateris Tetraedri, & ſub linea continente octo nonas partes eiuſdem lateris comprehenſum, ad quadratum diametri ſphæræ. 293.B

Sphæræ ſemidiameter potentia tripla eſt eius perpendicularis, quæ ex centro ſphæræ in baſim octaedri eiuſdem ſphæræ cadit. 295.B

Duplum quadrati ex diametro ſphæræ deſcripti, æquale eſt ſuperficiei cubi eiuſdem ſphæræ: perpendicularis autem à centro ſphæræ in baſim cubi demiſſa, æqualis eſt dimidio lateris cubi. 295.B

Solidum, quod fit ex dimidio lateris cubi in duas tertias partes quadrati diametri ſphæræ dictum cubum comprehendentis, æquale eſt cubo. Item quod fit ex latere cubi in tertiam partem eius quadrati. 296.B

Solidum, quod fit ex perpendiculari è centro cuiuſcunq; corporis Regularis in baſim demiſſa, in tertiam partem ſuperficiei ipſius corporis, æquale eſt propoſito corpori Regulari. 296.B

Idem circulus comprehendit & cubi quadratũ, & octaedri triangulum eiuſdem ſphæræ. 296.& 346.B

Rectæ coniungentes centra baſium oppoſitarum tam in cubo, quàm in Octaedro, æquales ſunt. 297.B

Octaedrum ad triplum Tetraedri eiuſdem ſphæræ eſt, vt latus Octaedri ad latus Tetraedri. 297.B

Altitudo Octaedri ad altitudinem Tetraedri eiuſdem ſphæræ eſt, vt latus Octaedri ad latus Tetraedri: Item diameter ſphæræ ad latus Tetraedri, vt latus Octaedri ad latus cubi. 298.B

Si recta propoſita potuerit totam aliquam rectam extrema ac media ratione ſectam, & maius eius ſegmẽtum: Item totam aliam ſimiliter ſectam, & minus eius ſegmentum; Erit maius ſegmentum prioris lineæ latus Icoſaedri; minus autem ſegmentum poſterioris lineæ latus dodecaedri eius ſphæræ, cuius recta propoſita diameter eſt. 298.B

Si latus Octaedri potuerit maius & minus ſegmentum rectæ extrema ac media ratione ſectæ; poterit latus Icoſaedri eiuſdem ſphæræ duplum minoris ſegmenti. 299.B

Si recta diuiſa extrema ac media ratione, cum minore ſegmento angulum rectum conſtituat, cui recta ſubtendatur; erit recta, quæ potentia ſit ſubdupla eius rectæ ſubtenſæ, latus Octaedri eius ſphæræ, in quo dictum minus ſegmentum latus eſt Dodecaedri. 299. & 300. B

Si recta ſecetur extrema ac media ratione, & alia recta potentia huius ſeſquialtera ſit latus Octaedri, maius ſegmentum erit latus Dodecaedri eiuſdem cum octaedro ſphæræ. 300.B

Cubus ad Octaedrum eiuſdem ſphæræ eſt, vt ſuperficies cubi ad Octaedri ſuperficiem. Item vt latus cubi ad ſemidiametrum ſphæræ. 300.B

Alia inuentio laterum quinq; corporum Regularium in eadem ſphæra deſcriptorum. 301.& 302.B

Quadratum cubi ad triangulum Tetraedri eiuſdẽ ſphæræ eſt, vt latus Tetraedri ad perpendicularem ex vno angulo, trianguli Tetraedri ad latus oppoſitum ductam. 303.B

Latus Tetraedri potentia ſeſquialterum eſt axis, vel altitudinis ipſius: Axis verò Tetraedri potentia ſeſquitertius eſt lateris cubi eiuſdem ſphæræ. 304.B

Diameter ſphæræ ſeſquialtera eſt axis Tetraedri illius ſphæræ. 304.B

Axis Tetraedri ad latus cubi eiuſdem ſphæræ eſt, vt latus Tetraedri ad perpendicularem ex vno angulo baſis ad latus oppoſitum ductam. 304.B

Cubus triplus eſt Tetraedri eidem ſphæræ inſcripti. 304.B

Priſma eandem habens & baſim, & altitudinem cum Tetraedro, æquale eſt cubo eiuſdem ſphæræ. 305.B

Si in Tetraedro Octaedrum inſcribatur; Tetraedrum bifariam ſecatur tribus quadratis æqualibus, quæ Octaedrum bifariam quoque, & ſeſe ad angulos rectos interſecant. 306.B

Rectæ connectentes centra baſium cubi oppoſitarum ſe mutuò ſecant & bifariã, & ad angulos rectos. 307.B

Idem eſt centrum Icoſaedri, atq; ſibi inſcripti Dodecaedri. 308.B

Si Tetraedrum Octaedro inſcribatur, erunt quatuor baſes Tetraedri octo baſibus Octaedri parallelæ, ſingulæ binis. 309.B

Item recta centra baſium octaedri oppoſitarum coniungens, ſeſquialtera eſt axis Tetraedri. 309.B

Diameter Dodecaedri duo latera poteſt, ipſius ſcilicet Dodecaedri & cubi, in quo Dodecaedrum inſcribitur. 315.B

Si latus cubi ſecetur extrema ac media ratione; minus ſegmentum latus eſt Dodecaedri in cubo deſcripti: Maius verò ſegmentum latus cubi in hoc Dodecaedro deſcripti. 315.B

Latus cubi æquale eſt duobus lateribus, Dodecaedri videlicet in ipſo deſcripti, & Dodecaedri circa eundem cubum deſcripti. 315.B

Recta duos angulos pentagonorum Dodecaedri communi lateri oppoſitos connectens, eſt æqualis lateri cubi, cui Dodecaedrum inſcribitur. 315.B

Diameter Icoſaedri poteſt & latus Icoſaedri & cubi Icoſaedri ambientis. 316.B

Bifariæ ſectiones ſex oppoſitorũ laterum Icoſaedri coniunguntur tribus rectis æqualibus, ſeſe in centro Icoſaedri bifariam, & ad angulos rectos ſecãtibus. 316.B

Si latus cubi extrema ac media ratione ſecetur; maius ſegmentum latus eſt Icoſaedri in eo cubo deſcripti. 316.B

Icoſaedri tam latera, quàm triangula oppoſita ſunt parallela. 317.B

Idem eſt centrum Icoſaedri, & Octaedri in eo deſcripti. 317.B

Idem eſt centrum baſis octaedri, & baſis Icoſaedri in eo deſcripti. quod intelligendum eſt de octo baſibus Icoſaedri in octo baſibus octaedri collocatis. 319.B

Idem eſt centrum octaedri, & Icoſaedri in eo deſcripti. 319.B

Idem eſt cẽtrum pyramidis, & cubi in ea deſcripti. 321.B

Recta coniungens bifarias ſectiones oppoſitorum laterũ pyramidis, tranſit per centrum pyramidis, eſtq; tripla lateris cubi in pyramide deſcripti. 321.B

Idem eſt centrum pyramidis, & octaedri in ea deſcripti. 321.B

Idem eſt centrum baſis pyramidis, & baſis octaedri in ea deſcripti, quod intelligendum eſt de quatuor baſibus octaedri in quatuor baſibus pyramidis incumbentibus. 321.B

Quæ ſolida Regularia, in quibus propriè deſcribantur, & quæ non: Et alia de hac inſcriptione mutua. 323.B

Si in Dodecaedro cubus deſcribatur, & in hoc cubo aliud Dodecaedrum; erit proportio Dodecaedri exterioris ad interius Dodecaedrum triplicata proportionis, quam habet maius ſegmentum ad minus rectæ lineæ extrema ac media ratione diuiſæ. 324.B

Si ab angulis trianguli pyramidis ducantur rectæ ſecantes oppoſita latera extrema ac media ratione, ita vt prope quemuis angulum ſit maius ſegmentum vnius lateris, & minus alterius: Hæ ſectionibus ſuis in medio producent baſim Icoſaedri in ea pyramide deſcripti, inſcriptam quidem alij triangulo æquilatero, cuius anguli latera trianguli pyramidis ſecant extrema ac media ratione, & latera ipſa bifariam ſecantur ab angulis baſis Icoſaedri productæ. 325.B

Latus Icoſaedri octaedro inſcripti, maius ſegmentum eſt rectæ diuiſæ extrema ac media ratione, quæ ab vno angulo baſis octaedri ducta ſecat latus oppoſitum extrema quoq; ac media ratione. 326.B

Minus ſegmentum lateris pyramidis extrema ac media ratione ſecti, potentia duplum eſt lateris Icoſaedri in ea deſcripti. 326.B

Latus cubi potentia dimidium eſt lateris pyramidis in eo deſcriptæ: Latus verò pyramidis duplum eſt longitudine lateris octaedri ſibi inſcripti: Latus denique cubi duplum eſt potentia lateris ſibi inſcripti octaedri. 326.B

Latus Dodecaedri maius ſegmentum eſt rectæ, quæ potentia dimidium poteſt lateris pyramidis ſibi inſcriptæ. 327.B

Si in cubo deſcribatur & Icoſaedrum, & Dodecaedrum; Latus Icoſaedri medium proportionale erit inter latus cubi, & latus Dodecaedri. 327.B

Latus pyramidis potentia octodecuplum eſt lateris cubi in ea deſcripti. 327.B

Latus pyramidis potentia octodecuplum eſt rectæ extrema ac media ratione ſectæ, cuius maius ſegmentum latus eſt Dodecaedri in pyramide deſcripti. 327.B

Si in octaedro Icoſaedrum deſcribatur; erit latus Icoſaedri potentia duplum minoris ſegmenti lateris octaedri extrema ac media ratione diuiſi. 328.B

Latus octaedri potentia eſt quadruplum ſeſquialterum lateris cubi in ipſo deſcripti. 328.B

Latus octaedri potentia eſt quadruplum ſeſquialterum rectæ extrema ac media ratione ſectæ, cuius maius ſegmentum latus eſt Dodecaedri Octaedro inſcripti. 328.B

Latus Icoſaedri maius ſegmentum eſt rectæ extrema ac media ratione ſectæ, quæ potentia dupla eſt lateris Octaedri in Icoſaedro deſcripti. 328.B

Latus cubi ad latus Dodecaedri in ipſo deſcripti proportionem habet duplicatam eius, quam habet maius ſegmentum ad minus rectæ extrema ac media ratione ſectæ. Latus verò Dodecaedri ad latus cubi in ipſo deſcripti proportionem habet, quam minus ſegmentum ad maius eiuſdem rectæ lineæ. 328.& 329.B

Latus octaedri ſeſquialterum eſt lateris ſibi inſcriptæ pyramidis. 329.B

Si ex quadrato diametri Icoſaedri auferatur triplum quadrati lateris cubi in eo deſcripti; relinquitur quadratum ſeſquitertiũ quadrati lateris Icoſaedri. 329.B

Diameter Icoſaedri binas rectas poteſt, diametrum ſcilicet cubi in eo deſcripti, & diametrum circuli triangulum Icoſaedri ambientis. 330.B

Latus Dodecaedri minus ſegmentum eſt rectæ extrema ac media ratione ſectæ, quæ duplum poteſt lateris Icoſaedri in eo deſcripti. 330.B

Diameter Icoſaedri poteſt & ſuiipſius lateris ſeſquitertium, & lateris pyramidis in eo deſcriptæ ſeſquialterum. 330.B

Latus Dodecaedri ad ſibi inſcripti Icoſaedri latus ſe habet, vt minus ſegmentum lineæ perpendicularis ab vno angulo pentagoni ad latus oppoſitum ductæ, atq; extrema ac media ratione ſectæ, ad partem eiuſdem lineæ inter centrum pentagoni, & latus eiuſdem poſitæ. 330.& 331.B

Si dimidium lateris Icoſaedri extrema ac media ratione ſecetur, minusq; eius ſegmentum, à toto latere Icoſaedri detrahatur; à reliqua quoque recta pars rurſum tertia dematur; relinquetur latus Dodecaedri in Icoſaedro deſcripti. 331.B

Cubus ſibi inſcriptæ pyramidis triplus eſt. 332.B

Pyramis ſibi inſcripti octaedri dupla eſt. 333.B

Cubus ſibi inſcripti octaedri ſexcupla eſt. 333.B

Octaedrum ſibi inſcripti cubi quadruplum ſeſquialterum eſt. 333.B

Idem eſt cẽtrum Octaedri, atq; cubi in eo deſcripti. 334.B

Octaedrum ad ſibi inſcriptum cubum eſt, vt quadratum lateris Octaedri ad quadratum lateris cubi in eo deſcripti. 334.B

Octaedrum ſibi inſcriptæ pyramidis tredecuplum ſeſquialterum eſt. 334.B

Pyramis ſibi inſcripti cubi noncupla eſt. 334.B

Cubus ad cubum deſcriptum in pyramide, quæ in priori cubo

cubo deſcribitur, eſt vt 27. ad 1. 335.B
Octaedrum ad ſibi inſcriptum Icoſaedrum proportionẽ habet, quam duæ baſes Octaedri ad quinq; baſes Icoſaedri. 335.B
Icoſaedrum ad ſibi inſcriptum Dodecaedrum proportionem habet compoſitam ex proportione lateris Icoſaedri ad latus cubi in eadem cum Icoſaedro ſphæra deſcripti, & ex proportione triplicata eius, quam habet diameter Icoſaedri ad rectam centra baſium Icoſaedri oppoſitarum coniungentem. 336.B
Dodecaedrum excedit cubum ſibi inſcriptum parallelepipedo, cuius quidem baſis à quadrato cubi deficit rectangulo contento ſub latere cubi, tertiæ q; parte minoris ſegmenti eiuſdem lateris cubi: at verò altitudo ab altitudine, ſiue latere cubi, minore ſegmento eius lineæ, quæ dimidiati lateris cubi ſegmentum minus exiſtit. 337.B
Dodecaedrum à duplo cubi ſibi inſcripti deficit duobus parallelepipedis, quorum vnius longitudo lateri cubi eſt æqualis, latitudo autem tertiæ parti minoris ſegmenti eiuſdem lateris cubi, altitudo denique à latere cubi deficit minore ſegmento eius lineæ, quæ dimidiati lateris cubi minus ſegmentum exiſtit: alterius verò & longitudo, & latitudo lateri cubi æqualis eſt, altitudo autem minus ſegmentum eius lineæ, quæ dimidiati lateris cubi ſegmentum minus exiſtit; ita vt amborum altitudines ſimul altitudini, ſiue lateri cubi ſint æquales. 338.B
Dodecaedrum ad ſibi inſcriptum Icoſaedrum proportionem habet compoſitã ex proportione triplicata eius, quam habet diameter Dodecaedri ad rectam centra baſium Dodecaedri oppoſitarum copulantem, & proportione lateris cubi ad latus Icoſaedri in eadẽ ſphæra cum cubo deſcripti. 339.B
Dodecaedrum pyramidis, in qua deſcribitur, duas nonas partes continet, minus duobus parallelepipedis, quorũ vnius longitudo lateri cubi in eadem pyramide deſcripti æqualis eſt, latitudo verò tertiæ parti minoris ſegmenti lateris eiuſdem cubi, altitudo deniq; à latere eiuſdem cubi deficit minore ſegmento eius lineæ, quæ dimidiati lateris cubi eiuſdem minus ſegmentum exiſtit: alterius autem & longitudo, & latitudo lateri cubi prædicti eſt æqualis, altitudo verò minus ſegmentum eius lineæ, quæ dimidiati lateris cubi eiuſdem ſegmentum minus exiſtit, ita vt amborum altitudines ſimul altitudini, ſiue lateri eiuſdem cubi ſint æquales. 339.B
Octaedrum excedit ſibi inſcriptum Icoſaedrum parallelepipedo, cuius baſis eſt quadratum lateris Icoſaedri, altitudo verò maius ſegmentum ſemidiametri octaedri extrema ac media ratione ſectæ. 340.B
Pyramis excedit duplum Icoſaedri ſibi inſcripti parallelepipedo, cuius baſis quadratum lateris Icoſaedri, altitudo verò recta bifarias ſectiones oppoſitorum laterum Icoſaedri coniungens. 340.B
Si in ſphæra ſint duo circuli paralleli, & æquales, in quibus ductæ ſint duæ rectæ parallelæ & æquales, ad eaſdem partes centrorum; rectæ harum parallelarum extrema puncta ad eaſdem partes cõiungentes, æquales quoq; & parallelæ ſunt, & ad plana circulorum perpendiculares. 342.B
Si in ſphæra ſint duo circuli paralleli & æquales, in quibus ductæ ſint duæ rectæ parallelæ & æquales, non ad eaſdem partes centrorum; rectæ harum parallelarum extrema puncta non ad eaſdem partes coniungentes, in centro ſphæræ ſe interſecãt, ac proinde diametri ſphæræ erunt, & inter ſe æquales: rectæ verò earundem parallelarum extrema puncta ad eaſdem partes connectentes, & æquales ac parallelæ inter ſe ſunt, & cum parallelis rectos angulos conſtituunt. 342.B
Si in ſphæra ſint duæ rectæ parallelæ; rectæ earum puncta extrema ad eaſdem partes coniungentes, æquales inter ſe erunt. Et ſi parallelæ fuerint æquales, coniungentes non ſolùm æquales, ſed & parallelæ erunt, rectosq; cum ipſis angulos conficient. 343.B
Sphæræ diameter ad latus Icoſaedri in ea deſcripti eſt, vt latus pentagoni ad latus decagoni eiuſdem circuli cuiuſlibet. 348.B
Latus Icoſaedri maius eſt ſemidiametro ſphæræ, in qua deſcribitur. 348.B
Sphæræ diameter potentia eſt tripla lateris pentagoni deſcripti in circulo, qui per tres angulos Icoſaedri eius ſphæræ incedit, paralleluſq; eſt vni triangulo Icoſaedri. 348.B
Iidem circuli ſphæræ ſuſtinent & angulos Icoſaedri, & angulos Dodecaedri in ea ſphæra deſcriptorũ. 350.B
Si quadratum, & triangulum æquilaterum æqualia habeant latera; erunt viginti triangula ſimul maiora, quàm octo quadrata ſimul. 350.B
Octo quadrata ex ſemidiametro ſphæræ deſcripta, æqualia ſunt ſuperficiei cubi in ea ſphæra deſcripti. 350.B
Si octaedrum, cubus, & Icoſaedrum in eadem ſphæra deſcribantur; erit perpendicularis ex centro ſphæræ ad vnam baſim Icoſaedri ducta maior perpendiculari ex eodem centro ſphæræ ad vnam baſim octaedri, & cubi ducta. 350. & 351.B
Icoſaedri ſuperficies maior eſt ſuperficie cubi in eadem ſphæra deſcripti. 351.B
Dodecaedrum Icoſaedro maius eſt. 351.B
Icoſaedrum cubo maius eſt. 351.B
Cubus Octaedro maior eſt. 351.B
Octaedrum Tetraedro maius eſt. 351.B
Superficies Dodecaedri ſuperficiem Icoſaedri ſuperat, & hæc ſuperficiem cubi, & hæc ſuperficiem Octaedri, atque hæc deniq; ſuperficiem Tetraedri. 352.B
Latus Tetraedri maius eſt latere Octaedri, & hoc maius latere cubi, & hoc maius latere Icoſaedri, atq; hoc deniq; maius latere Dodecaedri. 352.B
Si corpora regularia ſint Iſoperimetra; illud, quod plures habet baſes, maius eſt: Vt Icoſaedrum maius Dodecaedro, & hoc maius Octaedro, & hoc maius Cubo, atq; hoc deniq; maius Tetraedro. 352.B
Omnes inclinationes duarum baſium cuiuſque corporis Regularis æquales ſunt. 353. & 354.B

FIGVRAE, anguli, & lineæ proportionales.

Triangula & parallelogramma, quorum eadem eſt altitudo, ita ſe habent inter ſe, vt baſes. 292.A
Triangula & parallelogramma, quæ ita ſe habent inter ſe, vt baſes, æquales habent altitudines, vel eandem. 292.A
Triangula & parallelogramma, quorum æquales ſunt baſes, vel eadem, ita ſe habent inter ſe, vt altitudines. 293.A
Triangula & parallelogramma, quæ ita ſe habent inter

ſe, vt altitudines, æquales habent baſes, ſi vnam & eandem non habeant. 293.A

Si ad vnum trianguli latus parallela ducta ſit, hæc ſecabit duo latera reliqua proportionaliter. Et ſi duo latera ſecta ſint proportionaliter; recta linea ſectiones iungens, parallela erit reliquo lateri. 293.A

Si trianguli angulus bifariam ſectus ſit, ſecans autem angulum recta linea ſecet & baſim: baſis ſegmenta ita ſe habebunt inter ſe, vt reliqua duo latera. Et ſi baſis ſegmenta ita ſe habeant, vt reliqua duo latera: recta à vertice ad ſectionem ducta, bifariam ſecabit angulum trianguli. 294.A

Æquiangulorum triangulorum proportionalia ſunt latera circa æquales angulos, & homologa ſunt latera, quæ æqualibus angulis ſubtenduntur. 294.A

Recta linea vni lateri trianguli parallela, aufert triangulum toti triangulo ſimile. 295.A

Si ex duobus punctis rectæ, quorum alterum ſit extremum, alterum verò intra lineam, duæ parallelæ inter ſe educantur ad eaſdem partes, ita vt habeant eandem proportionem, quam rectæ inter ipſas, & alterum punctum extremum incluſæ: Recta coniungens extremum vnius earum, cum extremo prioris lineæ tranſibit per extremum alterius lineæ. 295.A

Si in triangulo parallela vni lateri agatur, recta ex angulo oppoſito ducta ſecat parallelam, & latus illud in eaſdem rationes. 295.A

Si duo triangula latera proportionalia habeãt; æquiangula erunt, & æquales habebunt eos angulos, ſub quibus homologa latera ſubtenduntur. 296.A

Si duo triangula vnum angulum vni angulo æqualem, & circa æquales angulos latera proportionalia habeant; æquiangula erunt, æqualesq; habebunt angulos, ſub quibus latera homologa ſubtenduntur. 296.A

Si duo triangula vnum angulum vni angulo æqualem, circa autem alios angulos latera proportionalia habeant; reliquorum verò ſimul vtrumq; aut minorem, aut non minorem recto: æquiangula erunt, & æquales habebunt eos angulos, circa quos proportionalia ſunt latera. 296.A

Si in triangulo rectangulo ab angulo recto in baſim perpendicularis ducta ſit: quæ ad perpendicularem triangula tum toti triangulo, tum ipſa inter ſe ſimilia ſunt. 297.A

Item tam perpendicularis eſt media proportionalis inter duo baſis ſegmenta, quàm vtrumlibet laterum circa rectum angulum inter totam baſim, & ſegmentum baſis ei lateri adiacens. 298.A

Si duæ rectæ ſecentur in binis punctis proportionaliter: Erunt quoq; intermediæ ſectiones in eadem proportione cum quibuſlibet ſegmentis duobus. 300.A

Si recta in quotcunque partes Arithmeticè proportionales ſecta ſit, & alia recta ſecetur in totidem partes, quæ eaſdem inter ſe, quas illæ, proportiones habeant: Erunt quoq; partes huius lineæ Arithmeticè proportionales. 301.A

Si duæ rectæ inæquales ad alias duas eandem habeant proportionem, minor ad minorem, & maior ad maiorem: Erit quoque exceſſus priorum ad exceſſum poſteriorum, vt prioru vna ad vnam poſteriorũ. 301.A

Recta à quouis puncto diametri ducta perpendicularis vſq; ad circumferentiam ſemicirculi, media proportionalis eſt inter diametri ſegmenta. 304.A

Æqualium, & vnum vni æqualem habentium angulum, parallelogrammorum, reciproca ſunt latera circa æquales angulos. Et quorũ reciproca ſunt latera circum æquales angulos, illa ſunt æqualia. 305.A

Æqualium & vnum vni æqualem habentium angulum, triangulorum, reciproca ſunt latera circum æquales angulos. Et quorum reciproca ſunt latera circa æquales angulos, illa ſunt æqualia. 305.A

Si quatuor rectæ proportionales ſint; rectangulum ſub extremis æquale eſt rectangulo ſub mediis. Et ſi rectangulum ſub extremis æquale ſit rectangulo ſub mediis, illæ quatuor rectæ proportionales ſunt. 305.A

Idem euenit, ſi parallelogramma non ſint rectangula, ſed tantùm æquiangula. 306.A

Si tres rectæ ſint proportionales; rectangulum ſub extremis quadrato mediæ æquale eſt. Et ſi rectangulum ſub extremis quadrato mediæ ſit æquale; illæ tres proportionales ſunt. 306.A

Recta, cuius quadratum æquale eſt rectangulo ſub duabus rectis quibuſcunque, media proportionalis eſt inter eas duas rectas. 306.A

Idem euenit, ſi parallelogramma non ſint rectangula, æquiangula tamen. 306.A

Triangula ſimilia inter ſe ſunt in duplicata ratione homologorum laterum. 316.A

Si tres rectæ ſint proportionales; vt eſt prima ad tertiam, ita eſt triangulum ſuper primam ad triangulum ſuper ſecundam ſimile, ſimiliterq; deſcriptum. 316.A

Similia polygona in ſimilia triangula diuiduntur, & numero æqualia, & homologa totis: Et polygona duplicatam habent rationem homologorum laterum. 317.A

Si tres rectæ ſint proportionales; vt eſt prima ad tertiam, ita eſt polygonum ſuper primã, ad polygonum ſuper ſecundam ſimile ſimiliterq; deſcriptum. 318.A

Similia polygona æquilatera, & æquiangula, diuiduntur in ſimilia triangula, & numero æqualia, & homologa totis; ductis rectis à centris circulorum ipſa circumſcribentium ad omnes angulos. 319.A

Quæ eidem rectilineo ſunt ſimilia, & inter ſe ſunt ſimilia. 319. & 320.A

Si quatuor rectæ ſint proportionales: Et ab eis rectilinea ſimilia ſimiliterque deſcripta, proportionalia ſunt. Et ſi à rectis ſimilia ſimiliterque deſcripta rectilinea, proportionalia ſint: ipſæ etiam rectæ proportionales erunt. 320.A

Æqualia rectilinea ſimilia, ſimiliterq; deſcripta, ſunt ſuper æquales rectas. 320. & 321.A

Si tres rectæ ſint proportionales; erunt quoq; rectilinea ſimilia ſimiliterq; deſcripta ab eis proportionalia, &c. 321.A

Æquian-

Æquiangula parallelogramma inter se rationẽ habent ex lateribus compoſitam. 321.A

Triangula vnum angulum vni angulo æqualem habentia proportionem habent ex lateribus circa æqualem angulum compoſitam. 323.A

Triangula vnum angulum vni angulo æqualem habentia, eandem proportionem habent, quam rectangula ſub lateribus circa angulum æqualem contenta. 323.A

Parallelogramma æquiangula eandem rationem habẽt, quam rectangula ſub lateribus circa angulum æqualem contenta. 324.A

Triangula & parallelogramma inter ſe rationem habẽt compoſitam ex proportione baſium, & proportione altitudinum. 324.A

In parallelogrammo parallelogrãma circa diametrum, & toti, & inter ſe ſunt ſimilia. 325.A

Datis duobus parallelogrammis æquiangulis, ſed non ſimilibus: ex quouis illorum alteri ſimile reſecare. 326.A

Si à parallelogrammo parallelogrammum ablatum ſit ſimile toti, & ſimiliter poſitũ, communem cum eo habens angulum; hoc circa eandem cum toto diametrum cõſiſtit. 327.A

Idem eueniet, ſi angulum habeant non communem. 328.A

Parallelogrammorum ſecundum eandem rectam lineam applicatorum, deficientiumque figuris parallelogrammis ſimilibus, ſimiliterque poſitis ei, quod à dimidia deſcribitur; maximum id eſt, quod ad dimidium applicatur, parallelogrammum ſimile exiſtens defectui. 329.A

In rectangulis triangulis, figura quæuis à latere rectum angulum ſubtendente deſcripta, æqualis eſt figuris, quæ priori illi ſimiles, & ſimiliter poſitæ à lateribus rectum angulum continentibus deſcribuntur. 332.A

Si figura, quæ ab vno latere trianguli deſcribitur, æqualis ſit eis, quæ à reliquis duobus lateribus deſcribuntur, figuris ſimilibus ſimiliterq; poſitis: angulus ſub reliquis bis lateribus comprehenſus, rectus eſt. 333.A

Si duo triangula, quæ duo latera duobus lateribus proportionalia habeant, ſecundùm vnum angulum compoſita fuerint, ita vt homologa eorum latera ſint parallela: tum reliqua latera in rectam lineam collocata reperientur. 333.& 334.A

In circulis æqualibus, anguli eandem habent rationem cum peripheriis, quibus inſiſtunt, ſiue ad centra, ſiue ad peripherias conſtituti inſiſtant: Inſuper verò & ſectores, quippe qui ad centra conſiſtunt. 334.A

In circulis æqualibus, eſt ſector ad ſectorem, vt angulus ad angulum in centro. 335.A

Vt eſt angulus in centro ad quatuor rectos, ita eſt arcus illi angulo ſubtenſus ad totam circumferentiam. Et contrà. 335.A

Similia circulorum ſegmenta eandem habent proportionem ad totas circumferentias. 336.A

Si duo aut plures circuli idem habeant centrum: Rectæ ex centro ductæ abſcindunt arcus ſimiles. 155. & 337.A

Si in circulo duæ rectæ ſe mutuò ſecent: erunt ſegmenta vnius ſegmentis alterius reciproca. 341.A

Si extra circulum ſumatur punctum aliquod, ab eoq; in circulum cadant duæ rectæ circulum ſecantes; erunt totæ, & ſegmenta extra circulum reciproca. Quod ſi ab eodem puncto rectæ ducatur circulum tangens; erit hæc media proportionalis inter quamlibet rectam, quæ circulum ſecet, & eius ſegmentũ exterius. 341.A

Si duæ rectæ ſe mutuò ſecent, & à duobus earum terminis perpendiculares ſibi mutuò demittantur: erunt duæ lineæ, quarum vna inter vnum terminorum, & ſectionem, altera verò inter ſectionem, & prioris lineæ aſſumptæ perpendicularem interiicitur; aliis duabus eodem modo incluſis reciprocè. 341.A

In parallelogrammo duæ rectæ lateribus parallelæ ſe mutuò ſecantes, diuidunt parallelogrammum in quatuor parallelogramma proportionalia. 342.A

Omne quadrilaterum à diametris diuiditur in quatuor triangula proportionalia. 342.A

In triangulo rectangulo, in quo perpendicularis ab angulo recto demiſſa ſecat baſim extrema ac media ratione; tria latera ſunt continuè proportionalia. Et ſi tria latera trianguli rectanguli ſint continuè proportionalia; perpendicularis ad baſim ex angulo recto demiſſa, ſecat baſim extrema ac media ratione. 342.A

Si ex centro per quæuis puncta lineæ Quadratricis ducantur rectæ vſq; ad peripheriam quadrantis ex eodem centro deſcripti, & ex eiſdem punctis ad baſim demittantur perpendiculares, & aliæ rectæ eidem baſi parallelæ: Erunt arcus quadrantis inter ſemidiametros interiecti, perpendicularibus, vel ſegmentis ſemidiametri intra parallelas poſitis, proportionales. 350.& 351.A

Si quadrantis & Quadratricis idem centrum ſit; erunt arcus quadrantis, ſemidiameter, & baſis Quadratricis, continuè proportionales. 353.A

Circumferentia circuli ad eius diametrum, proportio in numeris plus minus, quæ ſit. 354.A

Si ſint duæ rectæ, erit vt prima ad ſecundam, ita quadratum primæ ad rectangulum ſub illis duabus contentum. Et vt ſecunda ad primã, ita rectangulum ſub ipſis, ad quadratum primæ. 123.B

Si ſint duæ rectæ inæquales, erit vt prima ad ſecundam, ita rectangulum ſub ipſis ad quadratum ſecundæ. 134.B

Si ſint tres rectæ, erit vt prima ad tertiam, ita rectangulum ſub prima & ſecunda cõtentum, ad id, quod ſub ſecunda & tertia continetur. 135.B

Si recta linea ſecetur in partes duas inæquales; erit vt alterutra pars ad alteram, ita rectangulum ſub tota & priore parte aſſumpta, ad rectangulum ſub tota, & altera parte contentum. 136.B

Si recta ſit ſecta vtcunque: erit rectangulum ſub partibus contentum, medium proportionale inter earum quadrata. Item rectangulum ſub tota, & vna parte contentum, medium proportionale inter quadratum totius lineæ, & quadratum dictæ partis. 148.B

Si duæ rectæ parallelis planis ſecentur; In eaſdem rationes ſecabuntur. 203.& 204.B

Si ſolidum parallelepipedum plano ſecetur, adueriis planis parallelo: Erit quemadmodum baſis ad baſim, ita ſolidum ad ſolidum. 210.B

Idem conuenit in omne prisma. 211.B
Si prisma quodcunq; secetur plano oppositis planis æquidistante, sectio est figura æqualis, & similis planis oppositis. 212.B
Solida parallelepipeda sub eadem altitudine; inter se sunt, vt bases. 217.B
Si parallelepipeda inter se sint, vt bases; ipsa erunt sub eadem altitudine. 217.B
Similia solida parallelepipeda, inter se sunt in triplicata ratione homologorum laterum. 218.B
Si sint quatuor rectæ continuè proportionales, vt est prima ad quartam, ita est parallelepipedum super primam descriptum, ad parallelepipedum simile, similiterq; descriptũ super secundam. 218.B
Æqualium solidorum parallelepipedorum bases & altitudines reciprocantur. Et quorum solidorum parallelepipedorum bases & altitudines reciprocãtur; illa sunt æqualia. 218.B
Hæc quinq; quæ proximè de parallelepipedis dicta sunt, conueniunt etiam prismatis, in quibus duo plana opposita sunt triangula. 220.B
Si tres rectæ sint proportionales; quod ex illis fit solidum parallelepipedum, æquale est descripto à media linea solido parallelepipedo, quod æquilaterum quidem sit, æquiangulum verò prædicto. 221.B
Si parallelepipedum ex tribus rectis descriptum, æquale sit parallelepipedo sibi æquiangulo à media recta descripto; erunt tres rectæ continuè proportionales. 222.B
Si quatuor rectæ lineæ proportionales fuerint; & solida parallelepipeda, quæ ab ipsis & similia, & similiter describuntur, proportionalia erunt. Et si solida parallelepipeda, quæ & similia, & similiter describuntur, fuerint proportionalia; & ipsæ rectæ lineæ proportionales erunt. 222.B
Eodem modo si fuerint tres rectæ proportionales, erunt & parallelepipeda similia, similiterq; descripta ex eis, proportionalia, &c. 223.B
Idem quoque quadrat in prismata triangularium planorum oppositorum ex quatuor rectis, vel tribus, continuè proportionalibus descripta, si similia, similiterq; posita sint. 223.B
Circuli inter se sunt, quemadmodum à diametris quadrata. 227.B
Circulus ad circulum est, vt polygonum in illo descriptum ad polygonum simile in hoc descriptum. 228.B
Sub eadem altitudine existentes pyramides, & triangulares habentes bases; inter se sunt, vt bases. 230.B
Si pyramides triangulares inter se sint, vt bases; ipsæ erunt sub eadem altitudine. 231.B
Sub eadem altitudine existentes pyramides, & polygonas habentes bases, inter se sunt, vt bases. 231.B
Idem verum est de pyramidib. eiusdem altitudinis, quarum vna basim habet plurium angulorum, quam altera. 232.B
Pyramides quarumlibet basium, quæ inter se sunt, vt bases; eandem habent altitudinem. 233.B
Pyramis quælibet tertia pars est prismatis, & eandem cum illa habet & basim, & altitudinem. Siue prisma quodlibet triplum est pyramidis, quæ eandem cum ipso habet & basim & altitudinem. 233.B
Eodem modo pyramis tertia pars est prismatis habentis basem basi, & altitudinem altitudini æqualem. 234.B
Prismata eiusdem altitudinis super quascunque bases, inter se sunt, vt bases. 234.B
Si prismata quarumcunque basium inter se sint, vt bases; ipsa erunt sub eadem altitudine. 234.B
Quæ de prismatis dicta sunt, intelligi debent de iis, quæ habent plana opposita basibus æqualia, & similia. 234.B
Similes pyramides, quæ triangulares habent bases, in triplicata sunt homologorum laterum ratione. 235.B
Similes pyramides, quarum bases plura latera, quàm tria continent, habent proportionem homologorum laterum triplicatam. 235.B
Similia prismata triplicatam proportionem habent laterum homologorum. 236.B
Pyramides multangulæ similes diuiduntur in pyramides triangulares similes, & numero æquales, & homologas totis. 236.& 237.
Prismata multangula similia diuiduntur in prismata similia triangulares bases habẽtia, & numero æqualia, & homologa totis. 237.B
Æqualium pyramidum, & triangulares bases habentium, reciprocantur bases & altitudines. Et quarum pyramidum triangulares bases habentium reciprocantur bases, & altitudines; illæ sunt æquales. 237.B
Æqualium pyramidum, quarum bases non sunt triangulares, reciprocantur bases & altitudines. Et quarum pyramidum triangulares bases non habentium reciprocantur bases & altitudines, illæ sunt æquales. 237.B
Idem conuenit prismatibus. 238.B
Sub eadem altitudine existentes coni & cylindri, inter se sunt, vt bases. 239.B
Atque hoc verum est, siue coni & cylindri recti sint, siue scaleni. 240.B
Si coni & cylindri quicunq; inter se sint, vt bases, ipsi sub eadem altitudine erunt. 241.B
Coni & cylindri similes, in triplicata ratione sunt diametrorum, quæ in basibus. 241.B
Idem hoc locum habet in conis & cylindris scalenis. 242.B
Si cylindrus plano secetur aduersis planis parallelo; erit vt cylindrus ad cylindrum, ita axis ad axem. 243.B
Idem intelligatur de cylindro scaleno. 243.B
Super æqualibus basibus existentes coni, & cylindri, inter se sunt, vt altitudines. 244.B
Idem conuenit conis & cylindris scalenis. 244.B
Item prismatis, parallelepipedis, & pyramidibus super æquales bases constitutis. 244.B
Coni & cylindri tam recti, quàm scaleni: Item prismata, parallelepipeda, & pyramides, proportionem habentes eandem, quam altitudines, bases habebunt æquales. 245.B
Æqualium conorum, & cylindrorum reciprocantur

cantur baſes, & altitudines. Et quorum conorum & cylindrorum reciprocantur baſes & altitudines, illi ſunt æquales. 245.B

Idem conuenit conis & cylindris ſcalenis. 246.B

Sphæræ inter ſe ſunt in triplicata ratione ſuarum diametrorum. 251.B

Ex quo fit, ita eſſe ſphæram ad ſphæram, vt polyedrum in illa deſcriptum, ad polyedrum ſimile in hac deſcriptum. 252.B

Si recta linea ſecundùm extremam & mediam rationem ſecetur; maius ſegmentum aſſumens dimidiam totius, quintuplum poteſt eius, quod à dimidia totius deſcribitur, quadrati. 253.B

Si recta linea ſuiipſius ſegmenti quintuplum poſsit; Duplæ prędicti ſegmenti extrema ac media ratione ſectæ, maius ſegmentum reliqua pars eſt eius, quæ à principio, rectæ. 253. B

Si recta linea ſecundùm extremam & mediam rationem ſecetur; minus ſegmentum aſſumens dimidiam maioris ſegmenti, quintuplum poteſt eius, quod à dimidia maioris ſegmenti deſcribitur, quadrati. 254.B

Si recta inæqualiter ſecetur, & minus ſegmentum aſſumens dimidium maioris ſegmenti quintuplum poſsit eius, quod à dimidia maioris ſegmenti deſcribitur, quadrati: Recta illa linea ſecta erit extrema & media ratione. 255.B

Si recta linea ſecundùm extremam & mediam rationem ſecetur; quod à tota, quodq; à minore ſegmento, ſimul vtraque quadrata, tripla ſunt eius, quod à maiore ſegmento deſcribitur, quadrati. 255.B

Si recta inæqualiter ſecetur, ſitq; quadratum totius, vnà cum quadrato minoris ſegmenti, triplum quadrati ex maiore ſegmento deſcripti: Recta illa linea extrema ac media ratione ſecabitur. 256.B

Si recta ſecundùm extremam & mediam rationem ſecetur, tota linea aſſumens minus ſegmentum, quintuplum poteſt eius, quod à maiori ſegmento deſcribitur, quadrati. Et ſi recta inæqualiter ſecetur, totaq; aſſumens minus ſegmentum poſsit quintuplum eius, quod à maiori ſegmento deſcribitur, quadrati; Recta illa ſecundùm extremam & mediam rationem ſecta eſt. 256.B

Si recta linea ſecundùm extremam & mediam rationem ſecetur; apponaturque ei æqualis maiori ſegmento: Tota recta linea ſecundùm extremam & mediam rationem ſecatur, & maius ſegmentum eſt, quæ à principio, recta linea. 256.B

Si recta ſecetur extrema ac media ratione, detrahaturq; ex maiori ſegmento ſegmentum minus; erit maius ſegmentum ſectum extrema ac media ratione, & maius ſegmentum eſt illa linea, quæ prioris lineæ minus ſegmentum erat. 257.B

Si recta ſecetur extrema ac media ratione, atq; ex dimidio illius auferatur dimidia maioris ſegmenti; erit quoq; dimidia totius diuiſa extrema ac media ratione, maiusq; ſegmentum erit dimidium maioris ſegmenti totius lineæ. 257.B

Si ad rectam perpendicularis ducatur, quæ ſit media proportionalis inter ſegmenta lineæ; ſemicirculus circa illam lineam rectam deſcriptus tranſibit per extremum punctum lineæ perpendicularis. 264.B

Si binæ rectæ extrema ac media ratione ſecentur; ipſæ ſimiliter ſecabuntur, in eaſdem ſcilicet proportiones. 281.B

Si ſint quatuor rectæ continuè proportionales, necnon & aliæ quatuor, ita vt eadem ſit antecedens omnium; erit proportio tertiæ ad tertiam proportionis ſecundæ ad ſecundam duplicata; & proportio quartæ ad quartam eiuſdem proportionis ſecundæ ad ſecundam triplicata. 302.B

Si duo latera trianguli æquilateri ſecentur extrema ac media ratione, ita vt vnius maius ſegmentum, alterius verò minus ſit prope angulum ab ipſis comprehenſum; recta connectens puncta ſectionum duplum poteſt minoris ſegmenti. 319.B

Perpendicularis ex angulo pentagoni æquilateri & æquianguli in latus oppoſitum demiſſa, ſecatur à recta illum angulum ſubtendente, extrema ac media ratione. 324.B

FIGVRAE planæ quadrilateræ. vide Parallelogrammum, &c.

FRACTIONES numerorum. vide Minutię numerorum.

FRACTVS numerus. vide Minutię numerorũ.

IMPAR numerus. vide Numerus par, &c.

INCOMMENSVRABILES magnitudines. vide Commenſurabiles, & incommenſurabiles magnitudines.

IRRATIONALES magnitudines. vide Rationales, & irrationales magnitudines.

ISOSCELES. vide Triangulum.

LINEA perpendicularis. vide Recta linea.

LINEA recta. vide Recta linea.

LINEAE parallelæ. vide Recta linea.

LINEAE proportionales. vide Figuræ, Anguli, & lineæ proportionales.

MAGNITVDINES commenſurabiles, & incommenſurabiles. vide Commenſurabiles, & incommenſurabiles magnitudines.

MAGNITVDINES proportionales in cõmuni.

Si ſint tres rectæ Arithmeticè proportionales; rectangulum ſub extremis, vnà cum quadrato exceſſus, æquale erit quadrato lineæ mediæ. 100.A

Proportionum rationalium genera, & inuentio: Et proportionalitatis Arithmeticæ, Geometricæ, atq; Harmonicæ, ſiue Muſicæ, proprietates variæ. à 195.196. &c. vſq; ad 244.A

Euclides cur in defin. 6. & 8. lib. 5. quatuor magnitudines proportionales, & non proportionales per earum

æquè multiplicia definierit. 249.A

Si ſint quotcunq; magnitudines quotcunq; magnitudinum æqualium numero, ſingulæ ſingularum, æquè multiplices; quàm multiplex eſt vnius vna magnitudo, tam multiplices erunt & omnes omnium. 261.A

Si prima ſecundæ æquè fuerit multiplex, atque tertia quartæ, fuerit autem & quinta ſecundę æquè multiplex, atque ſexta quartæ: erit & compoſita prima cum quinta, ſecundę æquè multiplex, atq; tertia cum ſexta quartę. 261.A

Idem ſequitur, ſi prima & tertia, æquales ſint ſecundæ & quartæ; at quinta & ſexta, æquè multiplices ſecundæ & quartæ: Vel prima & tertia, æquè multiplices ſecundæ & quartæ; at quinta & ſexta, æquales ſecundæ ac quartæ: Vel denique ſi tam prima & tertia, quàm quinta ac ſexta, æquales ſint ſecundæ ac quartæ. 261. & 262.*A*

Si ſit prima ſecundæ æquè multiplex, atq; tertia quartæ: ſumantur autem æquè multiplices primæ ac tertię: Erit & ex æquo, ſumptarum vtraque vtriuſq; æquè multiplex, altera quidem ſecũdæ, altera autem quartæ. 262.A

Si prima ad ſecundam habeat eandem rationẽ, quam tertia ad quartam: Etiam æquè multiplices primæ & tertię, ad æquè multiplices ſecundæ & quartæ, iuxta quamuis multiplicationem eandem habebunt rationem, ſi prout inter ſe reſpondent, ita ſumptę fuerint. 262.A

Magnitudines quatuor proportionales, conuertendo quoq; proportionales ſunt. 263.A

Si magnitudo magnitudinis æquè fuerit multiplex, atq; ablata ablatæ: Etiam reliqua reliquæ ita multiplex erit, vt tota totius. 264.A

Si duæ magnitudines duarum magnitudinum ſint æquè multiplices, & detractæ quædam ſint earundem æquè multiplices: Et reliquę eiſdem aut æquales ſunt, aut æquè ipſarum multiplices. 265.A

Æquales ad eandem, eandem habẽt rationem: Et eadem ad æquales. 265.A

Eodem modo, æquales ad æquales eandem habent rationem. 266.*A*

Inęqualium magnitudinum maior ad eandem, maiorem rationem habet, quàm minor: Et eadem ad minorem, maiorem rationem habet, quàm ad maiorem. 266.A

Quæ ad eandem, eandem habent rationem, æquales ſunt: Et ad quas eadem eandem habet rationem, eæ æquales quoq; ſunt. 267.A

Ad eandem magnitudinem rationem habentium, quæ maiorem rationem habet, illa maior eſt: Ad quam autem eadem maiorem rationem habet, illa minor eſt. 268.A

Quę eidem ſunt eędem rationes, & inter ſe ſunt eædem. 268.A

Quæ eiſdem ſunt eædem rationes, & inter ſe ſunt eædem. 268.*A*

Si ſint magnitudines quotcunq; proportionales: quemadmodum ſe habuerit vna antecedentium ad vnam conſequentium, ita ſe habebunt omnes antecedentes ad omnes conſequentes. 269.A

Si prima ad ſecundam, eandem habuerit rationem, quam tertia ad quartam, tertia verò ad quartam maiorem rationem habuerit, quàm quinta ad ſextam: Prima quoque ad ſecundam, maiorem rationẽ habebit, quàm quinta ad ſextam. 269.A

Si prima ad ſecundam, eandem habuerit rationem, quàm tertia ad quartam; tertia verò ad quartam, minorem rationem habuerit, quàm quinta ad ſextam: Prima quoq; ad ſecundam, minorem rationem habebit quàm quinta ad ſextam. 269.*A*

Si prima ad ſecundam, maiorem habuerit rationem, quã tertia ad quartam; tertia item ad quartam, maiorem habuerit, quàm quinta ad ſextam: Prima quoque ad ſecũdam, maiorem habebit, quàm quinta ad ſextam. Quod ſi prima ad ſecundam, minorem habuerit rationem, quàm tertia ad quartam; tertia item ad quartam, minorem, quàm quinta ad ſextam: Prima quoque ad ſecundam, minorem rationem habebit, quàm quinta ad ſextam. 269.*A*

Si prima ad ſecundam ſit, vt tertia ad quartam; ſit autem prima maior, quàm tertia: erit & ſecunda maior quàm quarta. Et ſi æqualis, æqualis: Et ſi minor, minor. 270.A

Eodem modo, ſi ſecunda maior fuerit quàm quarta; erit & prima maior quàm tertia: Et ſi æqualis, æqualis: Et ſi minor, minor. 270.*A*

Partes cum pariter multiplicibus in eadẽ ſunt ratione, ſi prout ſibi mutuò reſpondent, ita ſumantur. 271.A

Magnitudines quatuor proportionales; viciſſim quoque proportionales ſunt. 271.A

Si ſint quatuor magnitudines proportionales, ſit autem prima maior quàm ſecunda: erit quoq; tertia maior quàm quarta: Et ſi æqualis, æqualis: Et ſi minor, minor. 271.*A*

Si compoſitæ magnitudines fuerint proportionales, hæ quoq; diuiſę proportionales erunt. 272.A

Si diuiſæ magnitudines ſint proportionales, hę quoq; compoſitæ proportionales erũt. 272.A

Si ſit, vt totum ad totum, ita ablatum ad ablatũ: erit quoq; reliquum ad reliquum, vt totum ad totum. 274.A

Si ſint quatuor magnitudines proportionales; hæ quoque per conuerſionem rationis proportionales erunt. 274.A

Si ſint tres magnitudines, & aliæ tres, quæ binę & in eadem ratione ſumantur; ſit autem ex æquo prima maior, quàm tertia; erit & quarta maior quàm ſexta; Et ſi æqualis, æqualis: Et ſi minor, minor. 274.A

Si ſint tres magnitudines, & aliæ tres, quæ binæ & in eadem ratione ſumantur, fueritque perturbata earum proportio; ex æquo autem prima maior fuerit quã tertia: Erit & quarta maior quàm ſexta: Et ſi æqualis, æqualis: Et ſi minor, minor. 275.A

Si ſint quotcunq; magnitudines, & aliæ ipſis æquales numero, quæ binæ in eadem ratione ſumantur: Et ex æqualitate in eadem ratione erunt. 275.A

Si ſit prima ad ſecundam, vt tertia ad quartam: habebunt æque multiplices primæ ac tertiæ ad ſecundam & quar-

& quartam, eandem rationem: Item æquemultiplices ſecundæ & quartæ ad primam ac tertiam. Et contrà, eandem rationem habebunt ſecunda & quarta ad æquè multiplices primæ ac tertiæ: Item prima ac tertia, ad æquè multiplices ſecundæ & quartæ. 276. A

Si ſint tres magnitudines, aliæque ipſis æquales numero, quæ binæ in eadem ratione ſumantur, fuerit autem perturbata earum proportio: Etiam ex æqualitate in eadem ratione erunt. 277. A

Si ſit prima ad ſecundam, vt tertia ad quartam; Item quinta ad ſecundam, vt ſexta ad quartam: Etiam compoſita prima cum quinta ad ſecundam erit, vt compoſita tertia cum ſexta ad quartam. 277. A

Si duæ magnitudines ad duas eandem habeãt rationem, & detractæ ex prioribus ad eaſdem poſteriores eandem quoq; habeant rationem: Et reliquæ ad eaſdem poſteriores eandem rationem habebunt. 278. A

Si quatuor magnitudines ſint proportionales: Maxima & minima reliquis duabus maiores erunt. 278. A

Si tres magnitudines ſint proportionales: Maxima & minima maiores erunt, quàm dupla reliquæ. 278. A

Si prima ad ſecundam habeat maiorem rationem, q̃ tertia ad quartam; habebit conuertendo ſecunda ad primam, minorem rationem, q̃ quarta ad tertiam. 279. A

Si prima ad ſecundam habeat minorem proportionem, quàm tertia ad quartam: habebit conuertendo ſecunda ad primam, maiorem rationem, quàm quarta ad tertiam. 279. A

Si prima ad ſecundam habeat maiorem rationem, quàm tertia ad quartam: habebit quoq; vicißim prima ad tertiam, maiorẽ rationẽ, quàm ſecunda ad quartam. 279. A

Si prima ad ſecundam habeat minorem rationẽ, quàm tertia ad quartam: habebit quoq; vicißim prima ad tertiam, minorem rationem, quàm ſecunda ad quartam. 279. A

Si prima ad ſecundam habeat maiorem rationem, quàm tertia ad quartam: habebit quoq; compoſita prima cũ ſecunda, ad ſecundam maiorem rationem, quàm compoſita tertia cum quarta, ad quartam. 280. A

Si prima ad ſecundam habeat minorem rationem, quàm tertia ad quartam; habebit quoque compoſita prima cum ſecunda, ad ſecundam minorem rationem, quàm compoſita tertia cũ quarta, ad quartam. 280. A

Si compoſita prima cum ſecunda ad ſecundam, maiorem habeat rationem, quàm compoſita tertia cum quarta ad quartam: habebit quoq; diuidendo prima ad ſecundam maiorem rationem, quàm tertia ad quartam. 280. A

Si prima cum ſecunda ad ſecundam minorem rationem habeat, quàm tertia cum quarta ad quartam: habebit quoq; diuidendo prima ad ſecundam minorem rationem, quàm tertia ad quartam. 280. A

Si compoſita prima cum ſecunda ad ſecundam habeat maiorem rationem, quàm compoſita tertia cũ quarta ad quartam, habebit per conuerſionem rationis, prima cum ſecunda ad primam, minorem rationẽ, quàm tertia cum quarta, ad tertiam. 281. A

Si prima cum ſecunda ad ſecundam, minorem habeat rationem, quàm tertia cum quarta ad quartam: habebit per conuerſionem rationis, prima cum ſecunda ad primam, maiorẽ rationem, quàm tertia & quarta ad tertiam. 281. A

Si ſint tres magnitudines, & aliæ ipſis æquales numero, ſitq; maior proportio primæ priorum ad ſecundam, q̃ primæ poſteriorum ad ſecundam; Item ſecundæ priorum ad tertiam maior, quàm ſecundæ poſteriorum ad tertiam: Erit quoq; ex æqualitate, maior proportio primæ priorum ad tertiam, quàm primæ poſteriorum ad tertiam. 281. A

Idem eueniet, ſi proportio primæ ad ſecundam eadem fuerit, quæ primæ ad ſecundam; at ſecundæ ad tertiam maior, quàm ſecundæ ad tertiam: Vel contrà, ſi proportio primæ ad ſecundam fuerit maior, quàm primæ ad ſecundam; at ſecundæ ad tertiam eadem, quæ ſecundæ ad tertiam. 281. & 282. A

Quòd ſi proportiones priorum magnitudinum minores fuerint: erit quoq; ex æqualitate minor proportio primæ ad tertiam, quàm primæ ad tertiam. 282. A

Idem eueniet, ſi proportio primæ ad ſecundam fuerit eadem, quæ primæ ad ſecundam; at ſecundæ ad tertiam minor, quàm ſecundæ ad tertiam: Vel contrà, ſi proportio primæ ad ſecundam fuerit minor, quàm primæ ad ſecundam; at proportio ſecundæ ad tertiã eadem, quæ ſecundæ ad tertiam. 282. A

Quòd ſi plures ſint magnitudines tribus, ſiue omnes proportiones in vno ordine magnitudinum ſint maiores, vel minores omnibus proportionibus in alio ordine magnitudinum; ſiue vna tantùm maior, quàm vna, vel duæ, &c. Erit maior vel minor proportio primæ ad vltimam in vno ordine, quàm primæ ad vltimam in alio ordine. 282. A

Si ſint tres magnitudines, & aliæ ipſis æquales numero, ſitq; maior proportio primæ priorum ad ſecundam, quàm ſecundæ poſteriorum ad tertiam: Item ſecundæ priorum ad tertiam maior, quàm primæ poſteriorum ad ſecundam: Erit quoque ex æqualitate, maior proportio primæ priorum ad tertiam, quàm primæ poſteriorum ad tertiam. 282. A

Idem eueniet, ſi proportio primæ priorum ad ſecundam ſit, quæ ſecundæ poſteriorum ad tertiam; at ſecundæ priorum ad tertiam maior, quàm primæ priorum ad ſecundam: Vel contrà, ratio primæ priorum ad ſecundam maior, quàm ſecundæ poſteriorum ad tertiam; at ſecundæ priorum ad tertiam eadem, quæ primæ poſteriorum ad ſecundam. 283. A

Quòd ſi in primis magnitudinibus aliquæ proportiones, vel omnes ſint minores; erit minor proportio primæ ad tertiam, quàm primæ ad tertiam. 283. A

Quòd ſi plures ſint magnitudines quàm tres in quolibet ordine: erit quoq; maior vel minor proportio primæ ad vltimam, quàm primæ ad vltimam. 283. A

Si fuerit maior proportio totius ad totum, quàm ablati ad ablatum: Erit & reliqui ad reliquum maior proportio quàm totius ad totum. 283. A

Si fuerit minor ratio totius ad totum, quàm ablati ad ablatum: Erit etiam minor ratio reliqui ad reliquum, quàm totius ad totum. 283. A

Si ſint quotcunque magnitudines, & aliæ ipſis æquales numero, ſitque maior ratio primæ priorum, ad primam poſteriorum, quàm ſecundæ ad ſecundam; & hæc maior, quàm tertiæ ad tertiam, & ſic deinceps: Habebunt omnes priores ſimul ad omnes poſteriores ſimul, maiorem rationem, quàm omnes priores, relicta prima, ad omnes poſteriores, relicta quoq; prima

minorem autem, quàm prima priorum ad primam posteriorum; maiorē denique etiam, quàm vltima priorum ad vltimam posteriorum. 283. A

Propositis quotcunque magnitudinibus, proportio primæ ad vltimam componitur ex omnibus proportionibus intermedijs, vt ex proportione primæ ad secundam, secundæ ad tertiam, &c. 288. A

Si quatuor magnitudines sint Arithmeticè proportionales, hoc est, idem excessus sit inter primam & secundam, qui inter tertiam & quartam; has vicissim quoq; erunt Arithmeticè proportionales, hoc est, idem excessus erit inter primam & tertiam, qui inter secundam & quartam. 163. & 164. B

MAGNITVDINES rationales, & irrationales. Vide Rationales, & irrationales magnitudines.

MINVTIAE numerorum.

Nullus numerus fractus, aut compositus ex integro & fracto, in se multiplicatus procreat quadratum numerum integrum. 254. A

Duæ minutiæ eundem habentes denominatorem, quarum vnius numerator sit vnitas, eandem proportionem habent, quam numeratores. 85. B

Numerator cuiusuis minutiæ ad denominatorem eandem proportionē habet, quam minutia ad integrum, cuius est minutia. 85. B

Minutia quælibet, pars est numeratoris à denominatore denominata. 86. B

Duæ minutiæ eundem habentes denominatorem, quarum neutra numeratorem habeat vnitatem, eandem proportionem habent, quàm numeratores. 86. B

Si duarum minutiarum numerator prioris in denominatorem posterioris, & posterioris numerator in denominatorem prioris ducatur; erit prior minutia ad posteriorem, vt prior numerus productus ad posteriorem. 86. B

Integrum ad summam duarum minutiarū eandem proportionem habet, quam numerus ex multiplicatione mutua denominatorum productus ad summam duorum productorum, quorum vnus ex numeratore prioris minutiæ in posterioris denominatorem, alter verò ex numeratore posterioris in denominatorē prioris gignitur. 87. B

Si duæ minutiæ eundem habeant numeratorem, erit vt prior minutia ad posteriorem, ita posterioris denominator ad denominatorem prioris. 87. B

Minutiæ, quarum numeratores ad denominatores eandem habent proportionem, æquales sunt: Et æqualium minutiarum numeratores ad denominatores eandem proportionem habent. Cuius autem numerator ad denominatorem habet maiorem proportionem, illa maior est: Et quæ maior est, eius numerator ad denominatorem habet proportionem maiorem. 87. B

Minutiæ, quarum numeratores eandem proportionem habent, quam denominatores, sunt æquales: Et minutiarum æqualium numeratores eandem habent proportionem, quam denominatores. Cuius autem numerator maiorem proportionem habet, quàm denominator, illa maior est: Et maioris numerator maiorem habet proportionem, quàm denominator. 88. B

Minutia minutiæ æqualis est minutiæ simplici, cuius numerator ex multiplicatione mutua numeratorum, denominator verò ex mutua denominatorū multiplicatione procreatur. 89. B

Duæ minutiæ, quarum numeratores in denominatores vicissim ducti gignunt numeros æquales, æquales sunt: & minutiarum æqualium numeratores in denominatores vicissim ducti, gignunt æquales numeros. Cuius verò numerator in denominatorem alterius ductus maiorem numerum gignit, illa maior est: & maioris minutiæ numerator in denominatorem alterius ductus maiorem numerum producit. 90. B

Quando minor numerus per maiorem diuiditur, numerus Quotiens est minutia, cuius numerator est numerus minor diuisus, denominator verò maior numerus diuidens. 91. B

NVMERI proportionales in communi.

Propositis quatuor numeris proportionalibus, sumptisq; primi ac tertij æquè multiplicibus iuxta quānis multiplicationem, item secundi & quarti æquè multiplicibus iuxta quamcunque etiam multiplicationem: si multiplex primi maior sit multiplice secundi, erit & multiplex tertij maior multiplice quarti: Et si æqualis, æqualis: Et si minor, minor. 251. A

Propositis quatuor numeris non proportionalibus, ita vt maior sit proportio primi ad secundum, quàm tertij ad quartum; si sumantur æquè multiplices primi, & tertij, item æquè multiplices secundi ac quarti, fieri potest, vt multiplex primi maior sit multiplice secundi, multiplex autem tertij non maior multiplice quarti. 251. & 252. A

Propositis quatuor numeris, sumptisq; æquè multiplicibus primi ac tertij iuxta quamuis multiplicationem, item æquè multiplicibus secundi ac quarti iuxta quamuis etiam multiplicationem; si multiplex primi existente maiore, quàm multiplex secundi, multiplex tertij maior quoq; sit necessariò, quàm multiplex quarti; Et si æqualis, æqualis; Et si minor, minor: Erit eadem proportio primi ad secundum, quæ tertij ad quartum. 253. A

Propositis quatuor numeris, sumptisq; primi ac tertij æquè multiplicibus, item secundi & quarti æquè multiplicibus; si quando contingat, multiplicem primi maiorem esse multiplice secundi, multiplicem verò tertij non maiorē multiplice quarti: Maior erit proportio primi ad secundum, quàm tertij ad quartum. 253. A

Datis tribus terminis Geometricè proportionalibus, siue æqualibus, siue inæqualibus: Summa ex primo semel, secundo bis, & tertio semel collecta; ac summa conflata ex secunda & tertio semel; ac tertius semel, sunt etiam Geometricè proportionales. pag. 313. A

Datis tribus terminis, siue æqualibus, siue inæqualibus, Geometricè proportionalibus: Summa ex primo bis, secundo bis, & tertio semel collecta; ac summa ex primo, secundo, & tertio semel conflata; ac denique tertius semel, sunt Arithmeticè proportionales. 313. A

Datis tribus terminis, siue æqualibus, siue inæqualibus, Geometricè proportionalibus: Summa collecta ex

primo

ex primo bis, ex ſecundo ter, & tertio ſemel; ac ſumma conflata ex ſecundo bis, & tertio ſemel; & denique ſumma ex ſecundo ſemel, & tertio ſemel coaceruata, Harmonicè proportionales ſunt. 314. A

Numerus ex multiplicatione duorum numerorum productus, ita ſe habet ad alterutrum multiplicantium, vt alter multiplicantium ad vnitatem. 6. B

Numerus ex diuiſione duorum numerorum procreatus, ita ſe habet ad vnitatem, vt diuiſus numerus ad diuidentem. 6. B

Si numerus numeri pars fuerit, & alter alterius eadem pars: Et ſimul vterq; vtriuſque ſimul eadem pars erit, quæ vnus vnius. 15. B

Idem conuenit numeris fractis. 16. B

Si vnitas numeri pars fuerit, & altera vnitas, vel numerus, alterius numeri eadem pars: Et ſimul vtraq; vnitas, vel vnitas & numerus ſimul, vtriuſq; numeri ſimul eadem pars erit, quæ vnitas numeri. 16. B

Si ſint quotcunq; numeri quotcunq; numerorum æqualium numero, ſinguli ſingulorum, eadem pars: Et omnes omnium ſimul eadem pars erũt, quæ vnus vnius. 16. B

Idem numeris fractis conuenit. 17. B

Si ſint quotcunq; numeri quotcunque numerorum æqualium numero, ſinguli ſingulorum, æquè multiplices: quàm multiplex eſt vnius vnus numerus, tam multiplices erunt & omnes omnium. 17. B

Idem verum eſt de numeris fractis. 17. B

Si numerus numeri partes fuerit, & alter alterius eædem partes: Et ſimul vterque vtriuſque ſimul eædem partes erit, quæ vnus vnius. 17. B

Idem locum habet in numeris fractis. 17. B

Si ſint quotcunque numeri quotcunq; numerorum, ſinguli ſingulorum, eædem partes: Et omnes omnium ſimul eædem partes erunt, quæ vnus vnius. 17. B

Si numerus numeri pars fuerit, qualis ablatus ablati: Et reliquus reliqui eadem pars erit, qualis totus totius. 18. B

Idem locum habet in numeris fractis. 18. B

Si numerus numeri æquè fuerit multiplex, atq; ablatus ablati: Etiam reliquus reliqui ita multiplex erit, vt totus totius. 18. B

Idem verum eſt de numeris fractis. 18. B

Si numerus numeri partes fuerit, quales ablatus ablati: & reliquus reliqui eædem partes erit, quales totus totius. 18. B

Idem in fractis numeris verum eſt. 19. B

Si numerus numeri pars fuerit, & alter alterius eadem pars: Et viciſsim, quæ pars eſt, aut partes primus tertij, eadem pars erit, vel eædem partes & ſecundus quarti. 19. B

In fractis numeris idem concludes. 19. B

Si numerus numeri partes fuerit, & alter alterius eædem partes: Et viciſsim quæ partes eſt primus tertij, aut pars, eædem partes erit & ſecundus quarti, aut pars. 19. B

Numeris fractis hoc idem conuenit. 19. B

Si fuerit vt totus ad totum, ita ablatus ad ablatum: Et reliquus ad reliquum erit, vt totus ad totum. 20. B

Idem in fractis numeris verum eſt. 20. B

Si primus ſecundum, & tertius quartum æqualiter contineat, eandemq; inſuper partẽ, aut partes: erit ſecundus primi, & quartus tertij eædem partes. Et ſi ſecundus primi, & quartus tertij eædem partes ſit; continebit primus ſecundum, & tertius quartum æqualiter, eandemq; inſuper partem, aut partes. 20. B

Idem verum eſt in numeris fractis. 20. B

Si ſint quotcunque numeri proportionales: erit quemadmodum vnus antecedentium ad vnum conſequentium, ita omnes antecedentes ad omnes conſequentes. 21. B

Verum quoq; hoc eſt in numeris fractis. 22. B

Si quatuor numeri proportionales ſint; Et viciſsim proportionales erunt. 22. B

In fractis idem cernitur. 23. B

Si ſint quotcunque numeri, & alij illis æquales multitudine, qui bini ſumantur & in eadem ratione: Etiam ex æqualitate in eadem ratione erunt. 23. B

Idem in numeris fractis verum eſt. 23. B

Duæ proportiones numerorum, quæ eidem proportioni eædem ſunt; inter ſe quoque ſunt eædem. 23. & 24. B

Si vnitas numerum quempiam metiatur, æquè autem alter numerus alterum quendam numerum metiatur: Et viciſsim æquè vnitas tertium numerũ metietur, & ſecundus quartum. 24. B

Si numerus duos numeros multiplicãs fecerit aliquos: geniti ex ipſis eandem rationem habebunt, quam multiplicati. 25. B

In fractis numeris idem verum eſt. 25. B

Si duo numeri numerum quempiam multiplicantes fecerint aliquos: geniti ex ipſis eandẽ rationem habebunt, quam multiplicantes. 25. B

In fractis idem habet locum. 25. B

Si numerus quotcunq; numeros multiplicet, vel quotcunque numeri numerum quempiam multiplicent, habebunt producti numeri eaſdem rationes, quas numeri multiplicantes. 25. B

Si quatuor numeri ſint proportionales; q̃ ex primo & quarto fit, numerus, æqualis eſt ei, qui ex ſecundo & tertio fit, numero. Et ſi, qui ex primo & quarto fit, numerus, æqualis ſit ei, q̃ ex ſecundo & tertio fit, numero; ipſi quatuor numeri proportionales erunt. 25. & 26. B

Verum eſt idem in numeris fractis. 26. B

Si duo numeri duos numeros eandem, quam illi, habentes rationem, multiplicent, antecedens nimirum illorum conſequentem horum, & conſequens antecedentem; geniti ex ipſis æquales erunt. 26. B

Idem conuenit numeris fractis. 26. B

Si maior ſit proportio primi ad ſecundum, quàm tertij ad quartum; qui ex primo & quarto fit, numerus, maior eſt eo, qui ex ſecundo & tertio fit, numero: Et contrà tam in fractis numeris, quàm integris. 26. B

Si tres numeri ſint proportionales; qui ſub extremis continetur, æqualis eſt ei, qui à medio efficitur: Et ſi qui ſub extremis continetur, æqualis ſit ei, qui à medio deſcribitur; ipſi tres numeri proportionales erunt. 27. B

In fractis idem verum eſt. 27. B

Si maior ſit proportio primi ad ſecundum, quàm ſecundi ad tertium; maior fiet numerus ex primo in tertium, quàm ex ſecundo in ſe: Et contrà, tam in numeris fractis, quàm integris. 27. B

Minimi numeri omnium eandem cum eis rationem habentium, metiuntur æquè numeros eandem cum eis rationẽ habentes, maior quidem maiorẽ, minor verò minorem. 27.B

Si tres numeri ſint continuè proportionales, & primi duo dicantur in ſua proportione minimi, metietur primus ſecundum, & ſecundus tertium. 27.& 28.B

Quotlibet numeri minimi in continuatione ſuarum proportionum, ſiue eædem ſint, ſiue diuerſæ proportiones, metiuntur æquè totidem alios numeros, qui eaſdem cum eis proportiones habent, primus primum, ſecundus ſecundum, & tertius tertium, &c. 28. B

Si ſint tres numeri, & alij ipſis multitudine æquales, qui bini ſumantur, & in eadem ratione, fuerit autem perturbata eorum proportio: etiam ex æqualitate in eadem ratione erunt. 28. B

Idem verum eſt in numeris fractis. 29. B

Si quatuor numeri tam integri, quàm fracti, proportionales ſint; & conuertendo proportionales erũt. 29.B

Si compoſiti numeri, ſiue integri, ſiue fracti, proportionales ſint; & diuiſi proportionales erunt. 29.B

Si diuiſi numeri proportionales ſint, ſiue integri, ſiue fracti; & diuiſi proportionales erunt. 29. B

Si compoſiti numeri tam fracti quàm integri, proportionales ſint; & per conuerſionem rationis proportionales erunt. 30. B

Si primus ad ſecundum eandem habeat rationem, quam tertius ad quartum: habeat autem & quintus ad ſecundum eandem rationem, quam ſextus ad quartum, tam in fractis numeris, quàm integris: Etiam compoſitus primus cum quinto ad ſecundum eandem habebit rationem, quam tertius cum ſexto ad quartum. 30. B

Si duo numeri ad duos numeros eandem habeant rationem; & detracti quidam habeant ad eoſdem eandem, tam in numeris fractis, quàm integris: Et reliqui ad eoſdem eandem rationem habebunt. 30. B

Si primus ad ſecundum eandem habeat rationem, quam tertius ad quartum; habeat autẽ & primus ad quintum eandem, quam tertius ad ſextum, tam in integris, quàm fractis numeris: Etiam primus ad compoſitum ſecundum cum quinto eandem rationem habebit, quam tertius ad quartum cum ſexto. 30. B

Si quotcunque numeri ad eundem habeant proportiones, quas alij illis multitudine æquales ad quendam aliũ eundem, tam in fractis, quàm integris numeris: habebunt quoq; omnes illi ſimul ad eundem, proportionẽ, quam hi alij omnes ſimul ad alium illum eundem. Et ſi idem numerus ad quotcunque numeros proportiones habeat, quas idem alius numerus ad alios multitudine illis æquales: habebit quoq; idem numerus ad omnes illos ſimul proportionem, quam idem alius numerus ad hos omnes ſimul. 30. B

Vltimæ nouem propoſ. lib. 9. à Campano adiectæ, qua ratione eodem modo demonſtrentur in numeris improportionalibus. 31. B

Maxima menſura quotlibet numerorum metitur ipſos per numeros minimos eandẽ cum ipſis proportionem habentes. 35.B

Si duo numeri multiplicent minimos eandem rationem habentes, maior minorẽ, & minor maiorem; producetur minimus numerus ab illis numeratus. 36. B

Si fuerint quotcunq; numeri deinceps proportionales, extremi verò ipſorum primi inter ſe ſint; ipſi minimi ſunt omnium eandem cum eis rationem habentium. 39. B

Si ſint quotuis numeri non continuè proportionales, extremi verò ipſorum ſint inter ſe primi; ipſi minimi ſunt in continuatione ſuarum proportionum. 40.B

Si tres numeri ſint minimi cõtinuè proportionales; extremi quadrati ſunt: Si autem quatuor cubi, &c. 40.& 41.B

Extremi numeri continuè proportionalium quotcunq; minimorum primi ſunt inter ſe. 41.& 42.B

Duo numeri minimi in ſua pportione metiuntur omnes medios quotcunque minimorũ in eadem ratione. 41. B

Si ſint quotcunque numeri deinceps proportionales, primus autem ſecundum non metiatur, neq; alius quiſquam vllum metietur. 44. B

Si ſint quotcunque numeri deinceps proportionales, primus autem ſecundi nõ ſit multiplex; neq; alius quiſquam vllius multiplex erit. 45. B

Si ſint quotcunque numeri deinceps proportionales, primus verò ſecundum metiatur; & quicunque alius quemlibet ſequentium metietur: Si primus autem ſecundi ſit multiplex; & quicunque alius cuiuslibet ſequentium multiplex erit. 45. B

Si ſint quotcunque numeri deinceps proportionales, primus autem, vel alius quiſquã nullum à ſecundo metiatur, neq; primus ſecundum metietur. Et ſi primus vel alius quiſquam nullius à ſecundo ſit multiplex; neq; primus ſecundi multiplex erit. 45. B

Si ſint quotcunque numeri deinceps proportionales, primus autem extremum metiatur; is etiam metietur ſecundum. 45. B

Si ſint quotcunque numeri deinceps proportionales, primus autem, vel alius quiſquam quemlibet à ſecundo metiatur; metietur & primus ſecundum. Et ſi primus, vel alius quiſquam cuiuslibet à ſecundo ſit multiplex; primus quoq; ſecundi multiplex erit. 46. B

Si inter duos numeros medij continua proportione ceciderint numeri; quot inter eos medij continua proportione cadũt numeri, tot & inter alios eandem cum illis habentes rationem medij continua proportione cadent. 46. B

Inter duos numeros duplæ, triplæ, aut quintuplæ proportionis, vel ſuperparticularis, vel ſuperbipartientis nõ poteſt cadere medius numerus proportionalis. 46.& 47. B

Item neque inter duos numeros ſola vnitate, aut binario differentes. 46.& 47. B

Ex quo fit, neq; Diapaſon, neq; Tonum in Muſicis diuidi poſſe bifariam. 47. B

Si duo numeri ſint inter ſe primi, & inter eos medij continua proportione ceciderint numeri; quot inter eos medij continua proportione cadunt numeri, totidem inter vtrumq; eorum, & vnitatem medij continua proportione cadent. 47. B

Si numerus ſeipſum multiplicans fecerit aliquẽ, & rurſum multiplicet productum, &c. omnes producti ſunt continuè proportionales ab vnitate. 48. B

Si

Si inter duos numeros & vnitatẽ continuè proportionales ceciderint numeri; quot inter vtrumque ipſorum, & vnitatem deinceps medij continua proportione cadunt numeri, totidem & inter ipſos medij continua proportione cadent. 48. B

Si quotquot numeri ſint ab vnitate continuè proportionales, ſecundus ab vnitate in ſe multiplicatus producet tertium, & ex eodem in hunc fiet quartus, & ſic deinceps. 49. B

Si ſint ab vnitate duo ordines numerorum continuè proportionalium, & multitudine æqualium; habebunt tertij ab vnitate proportionem duplicatã eius, quam habent ſecundi ab vnitate; quarti verò eiuſdem triplicatam, & quinti quadruplicatam; & ſemper deinceps vno amplius. 49. B

Si ſint ab aliquo numero eodem duo ordines numerorum continuè proportionaliũ, & multitudine æqualium; habebunt tertij ab illo numero proportionem duplicatam eius, quam habent ſecundi ab eodem; quarti verò eiuſdem triplicatam, &c. 49. B

Si inter duos numeros, & aliquẽ alium numerum aſſumptũ, continuè proportionales ceciderint numeri; quot inter vtrumque ipſorum, & aſſumptũ deinceps medij continua proportione cadunt numeri, totidem & inter ipſos medij continua proportione cadent. 50. B

Si ſint quotlibet numeri deinceps proportionales, & multiplicans quiſque ſeipſum faciat aliquos; qui ab illis producti fuerint, proportionales erunt: Et ſi numeri primùm poſiti multiplicantes iam factos fecerint aliquos; ipſi quoque proportionales erunt: Et ſemper circa extremos hoc eueniet. 52. B

Primi autem numeri producti, ſunt in duplicata ratione proportionis datorum numerorum: & ſecundo loco geniti in triplicata, &c. 52. B

Si ab vnitate quotcunque numeri ſint deinceps proportionales; minor quicunque maiorem quemlibet metitur per aliquẽ eorum, qui in proportionalibus ſunt numeris. 66. B

In numeris ab vnitate continuè proportionalibus, quantum abeſt maior quilibet à minore quouis eũ metiente, tantùm ab vnitate diſtat numerus, per quem minor maiorẽ metitur. Item quilibet numerus ſeipſum multiplicans, producit numerum tantùm ab eo diſtantem, quantum ipſe ab vnitate abeſt. Si verò minor aliquis maiorem quempiam multiplicet, procreatur numerus tantùm à maiore diſtans, quantum minor ab vnitate. 67. B

Si ab vnitate quotcunq; numeri deinceps proportionales ſint; quicunque primorum numerorum vltimũ metiuntur, iidem & eum, q vnitati proximus eſt, metientur. 67. B

Itaque neq; vllus numerus primus, qui maior ſit eo, qui proximus eſt vnitati, neque vllus minor proximum vnitati non metiens, metiri poteſt vltimum. 68. B

Si ab vnitate quotcunq; numeri deinceps proportionales ſint, qui verò poſt vnitatem, primus ſit; Maximum nullus alius metietur, præter eos, qui ſunt in numeris proportionalibus. 68. B

Si quotcunque numeri continuè proportionales, ſint minimi omnium eandem rationem habentium cũ ipſis; Numerus aliquem eorum metiens, metietur quoque alterum duorum numerorum, qui in eadem ratione ſunt minimi; vel certè ad alterum erit compoſitus. 69. B

Si tres numeri ſint deinceps proportionales, & minimi omnium eandem cũ ipſis rationem habẽtium; Duo quilibet ſimul, ad reliquum primi erunt. 73. A

Si quotcunque numeri deinceps proportionales, ſint minimi omnium eandem cum illis rationem habentium; ad quemlibet eorum reliqui omnes ſimul collecti, erũt primi. 74. B

Si duo numeri primi inter ſe fuerint; non erit vt primus ad ſecundum, ita ſecundus ad aliũ quempiam. 74. B

Si fuerint quotcunque numeri deinceps proportionales, extremi autem ipſorum primi inter ſe ſint; nõ erit vt primus ad ſecundum, ita vltimus ad alium quempiam. 74. B

Si ſint quotcunque numeri deinceps proportionales, detrahantur autem à ſecundo, & vltimo æquales ipſi primo; Erit vt ſecundi exceſſus ad primum, ita vltimi exceſſus ad omnes ipſum antecedentes. 81. B

Quolibet numero per duos quoſuis numeros diuiſo, erunt duo hi numeri Quotientibus, conuerſo ordine proportionales. 83. B

Quolibet numero per quotuis numeros diuiſo, erunt bini numeri dividentes binis Quotientibus reſpondentibus conuerſo ordine proportionales. 83. B

Quolibet numero per quotuis numeros continuè proportionales diuiſo, erũt Quotientes conuerſo ordine in eadem proportione continuè proportionales. 83. B

Si ſint quotuis numeri quicunque, & totidem alij in eiſdem proportionibus; erit vt ſumma priorũ ad quemlibet eorum, ita ſumma poſteriorum ad eum, qui illi in poſterioribus reſpondet. 83. B

Si ſint quotuis numeri quicunque, & totidem alij in eiſdem proportionibus; ſumma priorum per ipſos diuiſa ſigillatim, faciet eoſdem prorſus Quotientes, quos ſumma priorum per ipſos diuiſa facit. 84. B

Si ſumma quotuis numerorũ continuè proportionalium per eos ſigillatim diuidatur; & quotientum ſumma per ipſos Quotientes; Et horum ſecundorum Quotientum ſumma per eoſdem ſecundos Quotientes, & ſic deinceps in infinitum; procreabuntur alternis ſemper iidem primi Quotientes ordine conuerſo. 84. B

Si ſumma quotuis numerorũ continuè proportionalium per eos ſigillatim diuidatur; erit ſumma omniũ quotientum æqualis numero, qui gignitur ex multiplicatione primi in vltimum, vel ex mutua multiplicatione quorumlibet duorum mediorũ ab extremis æqualiter diſtantium, vel denique (ſi quotientum numerus fuerit impar) ex multiplicatione medij Quotientis in ſe. 84. B

Itaque quando numerus terminorum eſt impar, ſumma Quotientum eſt numerus quadratus, cuius radix eſt medius Quotiens. 85. B

Proportionum compoſitio, de qua Euclides defin. 10. lib. 5. & defin. 5. lib. 6. non eſt verè additio proportionũ, vt plerique falsò exiſtimant. 96. B

Additio proportionum, ſubtractio, multiplicatio, atq; diuiſio, quomodo fiant. 97. B

NVMERVS fractus. Vide Minutiæ numerorũ.

NVMERVS Par, Impar, Primus, Pariter par, Pariter par & impariter: Pariter impar, Perfectus.

Numeros, quotquot inſſerit quis, qui inter ſe multiplicati datum numerum gignant, reperire. 290. & 291. A

Numero per numerum diuiſo; diuiſus numerus gignitur ex multiplicatione numeri per diuiſionẽ inuenti in numerum diuidentem. 6. B

Si duobus numeris inæqualibus datis, detrahatur ſemper minor de maiore, alterna quadã detractione, neque reliquus vnquam metiatur præcedentem, quoad aſſumpta ſit vnitas: qui principio dati ſunt numeri, primi inter ſe erunt. 13. B

Si duobus numeris inter ſe primis datis, detrahatur ſemper minor de maiore, alterna quadã detractione: numquam reliquus metietur præcedentem, quoad aſſumpta ſit Vnitas. 13. B

Si datis duobus numeris inter ſe compoſitis, detrahatur ſemper minor de maiore, alterna quadam detractione: detractio ad Vnitatem vſq; non perueniet, ſed ad numerum, qui præcedentem detractum metiatur. 13. B

Numerus duos numeros metiẽs: metitur quoque maximam eorundem menſuram. 14. B

Numerus tres numeros metiens, vel plures; metitur etiam maximam eorum menſuram communem. 15. B

Omnis numerus, omnis numeri, minor maioris, aut pars eſt, aut partes. 15. B

Si duo numeri mutuò ſe multiplicantes fecerint aliquos: geniti ex ipſis æquales inter ſe erunt. 24. B

Idem in fractis numeris concludes. 24. B

Si duo numeri ſe mutuò multiplicauerint; procreabitur Vnus, idemq; numerus. 25. B

Verum hoc etiam eſt in numeris fractis. 25. B

Primi inter ſe numeri, minimi ſunt omnium eandem cum eis rationem habentium. 31. B

Minimi numeri omnium eandem cum eis rationem habentium, primi inter ſe ſunt. 31. B

Quotcunque numeri inter ſe primi, minimi ſunt in continuatione ſuarum proportionum. Et quotcunque numeri in continuatione ſuarum proportionum minimi, ſunt inter ſe primi. 32. B

Si duo numeri primi inter ſe fuerint; qui vnum eorum metitur numerus, ad reliquũ primus erit. 32. B

Si duo numeri ad quempiam primi fuerint; etiam ex illis genitus ad eundem primus erit. 32. B

Si duo numeri primi inter ſe fuerint: Etiam ex vno eorum genitus ad reliquum primus erit. 32. B

Si duo numeri ad duos numeros, vterque ad vtrumque primi fuerint: Et qui ex eis gignentur, primi inter ſe erunt. 33. B

Si duo numeri primi inter ſe fuerint; & multiplicans vterque ſe ipſum fecerit aliquem; Et geniti ex ipſis primi inter ſe erunt: Et ſi, qui in principio, genitos ipſos multiplicantes fecerint aliquos; Et hi quoque primi inter ſe erũt: Et ſemper circa extremos hoc eueniet. 33. B

Si duo numeri primi inter ſe fuerint; etiam vterque ſimul ad quemlibet illorum primus erit. Et ſi vterque ſimul ad vnum illorum primus fuerit; etiam qui in principio, numeri primi inter ſe erunt. 33. B

Numerus, qui ex duobus compoſitus ad vnum illorum primus eſt, ad reliquum quoque primus erit. 34. B

Omnis primus numerus, ad omnẽ numerum, quem non metitur, primus eſt. 34. B

Si duo numeri ſe mutuò multiplicantes fecerint aliquem; genitum autem ex ipſis metiatur aliquis primus numerus: is etiam vnum eorum, qui in principio, metietur. 34. B

Si duo numeri ſe mutuò multiplicantes fecerint aliquẽ: genitum autem ex ipſis metiatur aliquis non primus numerus, Vel certè ad ipſum ſit compoſitus: is etiam ad Vnum eorũ, qui in principio, compoſitus erit. 34. B

Omnem compoſitũ numerum, aliquis primus numerus metitur. 34. B

Omnis numerus aut primus eſt, aut eum aliquis primus metitur. 35. B

Si duo numeri numerum quempiam metiantur: Etiam minimus, quẽ illi metiuntur, eundem metietur. 36. B

Si tres numeri numerum quempiam metiantur; Etiam minimus ab eis numeratus eundem metietur. 37. B

Idem euenit in pluribus numeris. 37. B

Si numerum quiſpiam numerus metiatur; ille, quem metitur, partẽ habebit à metiente denominatam. 37. B

Si numerus partem habuerit quamlibet; metietur illum numerus à parte denominatus. 37. B

Minimus numerus, quem quotlibet numeri metiuntur; minimus eſt, habẽs partes à numeris metientibus denominatas. 38. B

Datis quotlibet numeris, idem ſemper numerus procreabitur ex eorũ mutua multiplicatione, quomodocunq; ordinem inter ſe permutent. 56. B

Si minimum numerum primi numeri metiantur; Nullus alius numerus primus illum metietur, præter eos, qui à principio metiebantur. 69. B

Demonſtratio priorum 10. *propoſitionum lib.* 2. *in numeris.* 70. B

Nullus numerus ita diuidi poteſt, vt productus ex toto in vnam partem, ſit æqualis quadrato alterius partis. 72. 73. & 79. B

Primi numeri plures ſunt, omni propoſita multitudine primorum numerorum. 76. B

Si pares numeri quotcunque componantur; totus par erit. 77. B

Si impares numeri quotcunque componantur, multitudo autem ipſorum ſit par, totus par erit. 77. B

Si impares numeri quotcunque componãtur multitudo autem ipſorum ſit impar, & totus impar erit. 77. B

Impar numerus pari numero, Vel pluribus paribus additus, facit imparem. 77. B

Si à pari numero par detrahatur; & reliquus par erit. 77. B

Si

Si à pari numero impar detrahatur, & reliquus impar erit. 78. B

Si ab impari numero impar detrahatur, reliquus par erit. 78. B

Si ab impari numero par detrahatur, reliquus impar erit. 78. B

Si impar numerus parem multiplicans fecerit aliquem, factus par erit. 78. B

Si par numerus parem multiplicans fecerit aliquem, factus par erit. 78. B

Par in se multiplicanti facit parem. 78. B

Si impar numerus imparem numerum multiplicans fecerit aliquem, factus impar erit. 78. B

Impar numerus in se multiplicatus gignit imparem. 79. B

Numerus impar numerũ parem metiens, per numerum parem eum metitur. 79. B

Numerus impar numerum imparem metiens, per numerum imparem eum metitur. 79. B

Si impar numerus parem numerum metiatur, & illius dimidium metietur. 79. B

Si impar numerus ad aliquẽ numerum primus sit, & ad illius duplum primus erit. 80. B

Immò & ad quadruplum, octuplum, sedecuplum, & sic deinceps in proportione dupla. 80. B

Numerorum à binario duplorum vnusquisque pariter par est tantùm. 80. B

Si numerus dimidium habeat imparem, pariter impar est tantùm. 80. B

Si par numerus neque à binario duplus sit, neque dimidium habeat imparem, pariter par est, & pariter impar. 81. B

Si ab vnitate quotcunq; numeri deinceps exponantur in dupla proportione, quoad totus compositus fiat primus, & totus hic in vltimum multiplicetur: Factus erit Perfectus. 82. B

NVMERVS Planus, Solidus, Quadratus, Cubus, similes plani, ac solidi numeri.

Nullus numerus compositus ex integro & fracto, vel numerus fractus in se multiplicatus procreat numerum quadratum integrum. 254. A

Plani numeri rationem inter se habent ex lateribus compositam. 44. B

Duorum quadratorum numerorum vnus medius est proportionalis numerus: Et quadratus ad quadratum duplicatam habet lateris ad latus rationem. 50. B

Medio proportionali cadente inter duos quadratos, erit is ad vtrumuis quadratorum compositus. 51. B

Duorum cuborum numerorũ duo medij proportionales sunt numeri: Et cubus ad cubum triplicatam habet lateris ad latus rationem. 51. B

Duobus medijs proportionalibus cadentibus inter duos cubos, erunt ij, & vterlibet cuborum inter se compositi. 51. B

Si quadratus numerus quadratum numerum metiatur, & latus vnius metietur latus alterius. Et si vnius quadrati latus metiatur latus alterius, & quadratꝰ quadratũ metietur. 53. B

Si cubus numerus cubum numerum metiatur, & latus vnius metietur latus alterius. Et si latus vnius cubi latus alterius metiatur, & cubus cubum metietur. 53. B

Si quadratus numerus quadratum numerum non metiatur, neque latus vnius metietur latus alterius. Et si latus vnius quadrati non metiatur latus alterius, neq; quadratus quadratum metietur. 53. B

Si cubus numerus cubum numerum non metiatur, neque latus vnius latus alterius metietur. Et si latus cubi vnius latus alterius non metiatur, neque cubus cubum metietur. 53. B

Si quadratus numerus quadrati numeri, & cubus cubi, sit multiplex, & vnius latus lateris alterius multiplex erit. Et si vnius quadrati, & cubi latus lateris alterius sit multiplex, & quadratus quadrati, & cubus cubi multiplex erit. Si verò quadratus quadrati, & cubus cubi non sit multiplex, neque latus lateris multiplex erit. Et si latus lateris non sit multiplex, neque quadratus quadrati, neq; cubus cubi erit multiplex. 54. B

Duorum similium planorum numerorum vnus medius proportionalis est numerus: Et planus ad planum duplicatam habet lateris homologi ad latus homologum rationem. 54. B

Medius numerus proportionalis inter duos planos similes, ad vtrumlibet compositus est. 54. B

Duorum similium solidorum numerorũ duo medij proportionales sunt numeri: Et solidus ad solidum triplicatam rationem habet lateris homologi ad latus homologum. 55. B

Duo numeri medij proportionales inter duos solidos similes, & vterus solidorum, sunt compositi inter se. 55. B

Si inter duos numeros vnus medius proportionalis cadat numerus, similes plani erunt illi numeri. 57. B

Si inter duos numeros duo medij proportionales cadant numeri, similes solidi sunt illi numeri. 57. B

Si tres numeri deinceps sint proportionales, primus autem sit quadratus, Et tertius quadratus erit. 58. B

Si quatuor numeri deinceps sint proportionales, primus autem sit cubus, Et quartus cubus erit. 58. B

Si duo numeri rationem habeãt inter se, quam quadratus ad quadratum, primus autem sit quadratus, & secundus quadratus erit. 59. B

Proportio quadrati numeri ad non quadratum exhiberi non potest in duobus numeris quadratis. 59. & 60. B

Duo numeri in quintupla proportione proportionẽ non habent, quam quadratus ad quadratum. 60. B

Si duo numeri rationem inter se habeãt, quam cubus ad cubum, primus autem sit cubus, & secundus cubus erit. 60. B

Proportio cubi ad non cubum, reperiri non potest in duobus numeris cubis. 60. B

Similes plani numeri rationem inter se habẽt, quam quadratus ad quadratum. 60. B

Numeri proportionẽ habentes, quam quadratus ad quadratum, ſimiles plani ſunt. 60. B

Similes ſolidi numeri rationem habent inter ſe, quam cubus ad cubum. 60. B

Numeri proportionem habentes, quam cubus ad cubum, ſimiles ſolidi ſunt. 61. B

Nulli numeri habentes duplam proportionẽ, vel ſuperparticularem, vel ſuperbipartientem: vel duo numeri primi, vel primi inter ſe, quamuis neuter primus ſit, dummodò quadrati non ſint, aut cubi; ſimiles plani ſunt, aut ſolidi. 61. B

Si ſint duo numeri plani, aut ſolidi ſimiles, ſitq; minor primus; metietur minor maiorem. 61. B

Duo numeri inter ſe primi, quorũ minor primus ſit, non poſſunt eſſe plani, vel ſolidi ſimiles. 61. B

Si duo ſimiles plani numeri multiplicantes ſe mutuò faciant quendam; productus quadratus erit. 62. B

Si duo numeri ſe mutuò multiplicantes faciãt quadratum; ſimiles plani erunt. 62. B

Duo numeri quadrati ſe mutuò multiplicantes producũt quadratum. 62. B

Si duo numeri ſe mutuò multiplicantes faciant quadratum, alter autem ſit quadratus; Et reliquus quadratus erit. 62. B

Si duo numeri ſe mutuò multiplicantes faciant non quadratum, alter autem ſit quadratus, reliquus non quadratus erit. 63. B

Quadratus multiplicans non quadratum producit non quadratum. 63. B

Si cubus numerus ſeipſum multiplicans procreet aliquem; productus cubus erit. 63 B

Si cubus numerus cubum numerum multiplicans faciat aliquem; factus cubus erit. 63 B

Si cubus numerus numerum quendam multiplicans faciat cubum; Et multiplicatus cubus erit. 63. B

Cubus non cubum multiplicans facit non cubum. 63. B

Si cubus numerum quendam multiplicans faciat non cubum; Et multiplicatus non cubus erit. 64. B

Si numerus ſeipſum multiplicãs faciat cubum; Et ipſe cubus erit. 64. B

Si compoſitus numerus numerum aliquẽ multiplicans quempiam faciat; Factus ſolidus erit. 64. B

Si ab vnitate quotcunq; numeri deinceps proportionales ſint; tertius quidem ab vnitate quadratus eſt, & vnũ intermittentes omnes; quartus autẽ eſt cubus, & duos intermittentes omnes; ſeptimus verò cubus ſimul, & quadratus, & quinq; intermittẽtes omnes. 64 B

Si ſint quotcunq; numeri ab vnitate continuè proportionales, omnes poſiti in locis imparibus, nimirum in tertio, quinto, ſeptimo, &c. ſunt quadrati. Omnes autem, qui ſequuntur proximè poſitos in locis, tertio, ſexto, nono, & alijs, quæ ternarius metitur, cuinſmodi ſunt numeri, quartus, ſeptimus, decimus, &c. ſunt cubi. Omnes verò, qui proximè ſequuntur poſitos in locis, ſexto, duodecimo, decimooctauo, & alijs, quæ metitur ſenarius, quales ſunt, ſeptimus, tertiusdecimus, decimusnonus, &c. ſunt cubi ſimul & quadrati. 65. B

Si ab vnitate quotcunq; numeri ſint deinceps proportionales, qui verò poſt vnitatem, ſit quadratus; Et reliqui omnes quadrati erunt. At ſi qui poſt vnitatem, ſit cubus; & reliqui omnes cubi erunt. 65. B

Si ab vnitate quotcunq; numeri deinceps ſint proportionales, qui verò poſt vnitatem, non ſit quadratus, neq; alius vllus quadratus erit, præter tertium ab vnitate, & vnum intermittentes omnes. At ſi, qui poſt vnitatem, nõ ſit cubus; neque alius vllus cubus erit, præter quartum ab vnitate, & duos intermittentes omnes. 66. B

Quando in numeris ab vnitate proportionalibus cuntis nuè, qui poſt vnitatem, non eſt cubus ſimul & quadratus; non neceſſe eſt, nullum alium eſſe quadratum ſimul & cubum, præter ſeptimum ab vnitate, & quinque intermittentes omnes: quia aliquando etiam quartus, eſt quadratus ſimul ac cubus, non exiſtente primo ab vnitate quadrato ac cubo ſimul. 66. B

OBTVSANGVLVM triangulum. Vide Triangulum.

PARALLELAE lineæ. Vide Recta linea.

PARALLELEPIPEDVM, & aliæ figuræ ſolidæ non Regulares, ac plana parallela.

Ad quæ plana, eadem recta linea recta eſt; illa ſunt parallela. 201. B

Si ſint duo plana parallela; recta linea, quæ ad vnũ eorum recta eſt, ad reliquum quoq; recta erit. 201. B

Si duæ rectæ ſe mutuò tangẽtes, ad duas rectas ſe mutuò tangentes ſint parallelę, non in eodem conſiſtentes plano; Parallela ſunt, quæ per illa ducuntur, plana. 202. B

Si duo plana parallela plano quopiam ſecentur; communes illorum ſectiones ſunt parallelæ. 202. B

Quæ eidem plano parallela, & inter ſe ſunt parallela; vel ſi conueniunt, vnum planum efficient. 203. B

Si in planis parallelis duo anguli ſint æquales, & lineæ vna vnius, lineæ vni alterius parallela; erit quoque altera linea alteri lineæ parallela, ſi modo ductæ ſint ex eadem parte plani per priores parallelas ducti. 203. B

Duo plana ad idem planum recta, in quo faciant communes ſectiones parallelas, parallela ſunt: Et duorum planorum parallelorum, ſi vnum cuipiam plano ad rectos ſit angulos, erit & alterum ad idem, rectum. 205. B

Si ſolidum parallelis planis contineatur; aduerſa illius plana parallelogramma ſunt ſimilia, & æqualia. 210. B

Si ſolidum parallelepipedum plano ſecetur p diagonios aduerſorum planorum; bifariam ſecabitur ſolidum ab ipſo plano. 214. B

Solida parallelepipeda ſuper eandẽ baſin conſtituta, & in eadem altitudine, quorum inſiſtentes lineæ in iiſdem collocantur rectis lineis, ſunt inter ſe æqualia. 214. B

Solida parallelepipeda ſuper eandẽ baſim conſtituta, & in eadem altitudine, quorum inſiſtentes lineæ non in iiſdem collocantur rectis lineis; inter ſe ſunt æqualia. 215. B

Solida parallelepipeda æqualia ſuper eandem baſim, ſint inſiſtentes

insistentes lineæ in eisdem collocentur rectis, siue nõ in eadem sunt altitudine. 215.B

Solida parallelepipeda super æquales bases constituta, & in eadem altitudine, æqualia sunt inter se. 215.B

Solida parallelepipeda æqualia super æquales bases, in eadem sunt altitudine. Et parallelepipeda æqualia in eadem altitudine, super æquales sunt bases, si non habuerint eandem basim. 217.B

Hæc quinque, quæ proximè dicta sunt de parallelepipedis, communicantur etiam in prismata, in quibus duo plana opposita sunt triangula. 220.B

Si solidi parallelepipedi eorum, quæ ex aduerso, planorum latera bifariam secta sint, per sectiones autem plana sint extensa: Communis sectio planorum, & solidi parallelepipedi diameter, bifariam se mutuò secabunt. 223.B

In omni parallelepipedo diametri se mutuò bifariam diuidunt in vno puncto. 224.B

Si solidum parallelepipedum plano secetur per centrum, bifariã secabitur solidum ab ipso plano. Et si solidum parallelepipedum plano secetur bifariam, per centrũ transibit ipsum planum. 224.B

Si fuerint duo prismata planorũ triangularium oppositorum æqualis altitudinis, quorũ hoc quidem basim habeat, triangulum, illud verò, parallelogrammum, duplum autem fuerit parallelogrammum trianguli: Æqualia erunt ipsa prismata. 225.B

Omnis pyramis triangularem habens basim diuiditur in duas pyramides æquales & similes inter se, triangulares habentes bases, & similes toti; Et in duo prismata æqualia, quæ duo prismata maiora sunt dimidio totius pyramidis. 228.B

Si fuerint duæ pyramides eiusdem altitudinis, triangulares habentes bases, sitautẽ illarum vtraque diuisa & in duas pyramidas æquales inter se, & similes toti, & in duo prismata æqualia; Ac eodem modo diuisa sit vtraq; pyramidum, quæ ex superiore diuisione natæ sunt, idque semper fiat: Erit vt vnius pyramidis basis ad alterius pyramidis basim, ita & omnia, quę in vna pyramide, prismata ad omnia, quæ in altera pyramide, prismata multitudine æqualia. 229.B

Pyramides, eiusdem altitudinis super eandem, vel æquales bases triangulares, sunt inter se æquales. 231.B

Pyramides triangulares æquales super eandem, vel æquales bases, eandem habent altitudinem. Et pyramides triangulares æquales, eiusdemq; altitudinis, bases habent bases æquales, vel eandem. 231.B

Pyramides eiusdem altitudinis super æquales bases quascunque, vel eandem, sunt inter se æquales. 233.B

Pyramides multangulæ æquales, & super æquales bases, vel super eandem; habent eandem altitudinem. Et pyramides multangulæ æquales, eandemq; habentes altitudinem; bases habent æquales, vel eandem. 233.B

Omne prisma triangularem habens basim, diuiditur in tres pyramides æquales inter se, triangulares bases habentes. 233.B

Prismata eiusdem altitudinis super eandem, vel æquales bases quascunque, inter se sunt æqualia. Et prismata æqualia super æquales bases, vel eandem, in eadem sunt altitudine. Et prismata æqualia eiusdem altitudinis, bases habent æquales, vel eandem. 234.B

Quæ de prismatis dicta sunt, intelligi debent de iis, quæ habent plana opposita basibus æqualia, & similia. 234. & 235.B

Omnis conus tertia pars est cylindri eandem cum ipso basim habentis, & altitudinem æqualem. 238.B

Atque hoc verum est, siue coni & cylindri sint recti, siue scaleni, licèt non sit idem axis conorum, & cylindrorum. 239.B

Coni & cylindri eiusdem altitudinis super eandem, vel æquales bases constituti, siue ambo sint recti, vel scaleni, siue vnus rectus, & alter scalenus, inter se sunt æquales. 241.B

Coni & cylindri æquales super eandẽ vel æquales bases, in eadem sunt altitudine. Et coni ac cylindri æquales in eadem altitudine, super æquales bases sunt, vel eandem. 241.B

Si in planis parallelis descripti sint duo circuli, in quibus duæ rectæ abscindant arcus similes: erunt duæ rectæ coniungentes extrema vnius rectæ cum centro, parallelæ duabus rectis, quæ extrema alterius rectæ cũ centro coniungunt. 341.B

PARALLELOGRAMMVM, & aliæ figuræ planę quadrilateræ.

Parallelogrammi cuiusque æqualia sunt & latera opposita, & anguli oppositi, atque ipsum diameter secat bifariam. 61.A

Quadrilaterum habens latera opposita æqualia, parallelogrammum est. 62.A

Quadrilaterum habens angulos oppositos æquales, parallelogrammum est. 62.A

Rhombus, & Rhomboides parallelogramma sunt. pag. 62.A

Quadratum & altera parte longius, parallelogramma sunt. 62.A

Quadrilaterum diuisum bifariam ab vna diametro, non semper est parallelogrammum. 62.A

Quadrilaterum habens omnes angulos rectos, est parallelogrammum. 62.A

Quadrati, & Rhombi angulos secat diameter quælibet bifariam. 62. & 63.A

Rhomboidis, & altera parte longioris angulos secat diameter non bifariam. 63.A

Quadrati, & altera parte longioris diametri sunt æquales. 63.A

Rhombi, & Rhomboidis diametri non sunt æquales. 63.A

Parallelogrammi cuiusque diametri se mutuò secant bifariam. 63.A

Quadrilaterum, in quo diametri se mutuò bifariam secant, parallelogrammum est. 63.A

Parallelogrammum bifariam diuiditur à recta, quæ diametrum bifariam secat: Et recta diuidens parallelogrammum bifariam, secat diametrũ quoq; bifariam. 64.A

Parallelogramma super eadẽ basi, & in eisdem parallelis constituta sunt æqualia. 67.A

Parallelogramma æqualia super eandem basim, ad eas-

demque partes constituta, sunt inter easdem parallelas. 68. A

Parallelogramma super æqualibus basibus, & in eisdem parallelis constituta, sunt æqualia. 68. A

Parallelogramma æqualia super bases æquales, & ad easdem partes constituta, in eisdem sunt parallelis: Et parallelogramma æqualia in eisdem parallelis, si non habuerint eandem basim, super æquales bases sunt constituta. 68. A

Parallelogrammorum inter easdem parallelas, quod maiorem basim habet, maius est: Et quod maius est, maiorem habet basim. 69. A

Quadrilaterum, quod ab vtraque diametro diuiditur bifariam, parallelogrammum est. 72. A

Trapezia in eisdem parallelis, & super eadem basi, quorum oppositæ bases sunt æquales, sunt æqualia. Et trapezia æqualia in eisdem parallelis, & super eadem basi, habent bases oppositas æquales. 73. A

Trapeziorum in eisdem parallelis, & super eadem basi, quod maiorem habet basim oppositam, maius est: Et quod maius est, habet basim oppositam maiorē. 73. A

Trapezia in eisdem parallelis, & super æqualibus basibus, quorū oppositæ bases sint æquales, æqualia sunt. Et trapezia æqualia in eisdem parallelis, & super æqualibus basibus, habent bases oppositas æquales. 73. A

Trapeziorum in eisdem parallelis, & super æqualibus basibus, quod maiorem habet oppositam basim, maius est: Et quod maius est, maiorem habet basim oppositam. 74. A

Parallelogrammum duplum est trianguli eandem cum eo basim habentis, & in eisdem parallelis constituti. 76. & 77. A

Parallelogrammum æquale est triangulo duplum habenti basim, & in eisdem parallelis constituto. 77. A

Parallelogrammum duplum est trianguli æqualem cum eo basim habentis, & in eisdem parallelis constituti. 77. A

Si parallelogrammū duplum fuerit trianguli, eandemq; habuerint basin, vel æquales, & ad easdem partes constituta; in eisdem erunt parallelis: Et si parallelogrammum duplum fuerit trianguli, in eisdemq; parallelis; erunt bases æquales, si non sit eadem. 77. A

Si trapezium & triangulum super eadem basi, & in eisdem fuerint parallelis, maior autem linea parallela trapezij, sit basis trianguli: erit trapezium minus duplo trianguli: Si verò minor linea parallela trapezij basis sit trianguli: erit trapezium maius duplo trianguli. 78. A

Trapezium habens duo latera opposita parallela, duplum est trianguli, quod basim habet vnū latus trapezij, continges duas parallelas, verticē verò in medio puncto lateris oppositi. 78. A

In parallelogrammo, complemēta circa diametrum æqualia sunt. 79. A

Si parallelogrammo diuiso in quatuor parallelogramma, duo aduersa sint æqualia, consistent reliqua duo circa diametrum. 79. A

Quadrata linearum æqualium sunt æqualia: Et quadratorum æqualium æquales sunt lineæ. 82. A

Quadratum ex diametro quadrati descriptum, duplum est ipsius quadrati. 86. A

Quadratum diametri figuræ alterā parte longioris, æquale est duobus quadratis laterum inæqualium. 86. A

Parallelogrammum, cuius vnus tantùm angulus detur rectus, habet omnes angulos rectos. 91. A

Rectangulum quodcunque æquale est alteri rectangulo sub duabus rectis contento, quæ duobus lateribus illius sint æquales. 92. A

Parallelogramma circa diametrum quadrati, sunt quadrata. 97. A

Quadratum cuiusque rectæ quadruplum est quadrati ipsius, cuius ille duplus est. Et si quadratum quadrati sit quadruplum, latus lateris duplum est. 97. & 309. A

Parallelogrammum ad rectam applicatum deficiēs quadrato, æquale est rectangulo sub segmentis per applicationem factis comprehenso. 332. A

PAR & impar numer⁹. Vide Numerus par, &c.

PARITER par, pariter par & impariter, ac pariter impar. Vide Numerus par, &c.

PERFECTVS numerus. Vide Numerus par, &c.

PERPENDICVLARIS linea. Vide Recta linea.

PLANA figura intra, & extra circulum, atque aliam figuram. Vide Figura intra & extra circulum, &c.

PLANAE figuræ quadrilateræ. Vide Parallelogrammum, &c.

PLANA parallela. Vide Parallelepipedum, &c.

PLANI numeri simile. Vide Numerus planus, Solidus, Quadratus, &c.

PLANVS angulus. Vide Angulus.

PLANVS numerus. Vide Numerus planus.

PORTIO circuli. Vide Circulus.

PRIMI inter se numeri. Vide Numerus par, &c.

PRIMVS numerus. Vide Numerus par, &c.

PRISMA. Vide Parallelepipedum, &c.

PROPORTIO Figurarum, Angulorum, & Linearum. Vide Figuræ, Anguli, & lineæ proportionales.

PROPORTIO magnitudinum in communi. Vide Magnitudines proportionales in communi.

PROPORTIONALES magnitudines in communi. Vide Magnitudines proportionales in communi.

PROPORTIONALES numeri in communi. Vide Numeri proportionales in communi.

PROPORTIO numerorum in communi. Vide Numeri proportionales in communi.

PYRAMIS. Vide Parallelepipedum, &c.

QVADRATVM. Vide Parallelogrammum, &c.

QVADRATVS numerus. Vide Numerus Planus, Solidus, &c.

QVADRILATERAE figuræ planæ. Vide Parallelogrammum.

RATIONALES, & Irrationales magnitudines.

Omnes Rationales lineæ non ſolùm expoſitæ Rationali, ſed etiam inter ſe ſunt commenſurabiles. 123.B
Spatium Rationali ſpatio commenſurabile, & ipſum Rationale eſt. 123.B
Quod ſub Rationalibus longitudine commenſurabilibus rectis (quomodocunque commenſurabiles ſint expoſitæ Rationali) continetur Rectangulum; Rationale eſt. 123.B
Si Rationale ad Rationalem applicetur, latitudinem efficit Rationalem, & ei, ad quam applicatum eſt, longitudine commenſurabilem. 124.B
Quod ſub Rationalibus potentia ſolùm commenſurabilibus rectis continetur rectangulum Irrationale eſt: Et recta ipſum potens, Irrationalis. Vocetur autem Media. 125.B
Recta media proportionalis inter duas Rationales potentia tantùm commenſurabiles, Irrationalis eſt, quæ vocatur Media. 126.B
Rectangulum ſub duabus Rationalibus potentia tantùm commenſurabilibus contentum, Medium dici poteſt. 126.B
Non omne rectangulum Medium continetur ſub duabus Rationalibus potentia ſolùm commenſurabilibus. 126.B
Quod à media fit, ad Rationalem applicatum, latitudinẽ efficit Rationalem, & ei, ad quam applicatum eſt, longitudine incommenſurabilem. 126.B
Omne ſpatium Medium æquale eſt rectangulo ſub duabus Rationalibus potentia tantùm commenſurabilibus contento. 126.& 127.B
Mediæ commenſurabilis, Media eſt. 127.B
Medio ſpatio commenſurabile, Medium eſt. 127.B
Non omnis Media recta cuilibet Mediæ eſt commenſurabilis. 128.B
Quod ſub Mediis longitudine commenſurabilibus rectis cõtinetur rectangulum, Medium eſt. 128.B
Quod ſub Mediis potentia tantùm commenſurabilibus rectis continetur rectangulum; vel Rationale eſt, vel Medium. 128.B
Quod ſub Mediis longitudine & potentia incommenſurabilibus continetur, nec Rationale eſt, nec Medium, ſed Irrationale aliud, quod æquale eſt rectangulo ſub lineâ Rationali, & Irrationali, quæ Media appellatur, contento. 129.B
Medium non ſuperat Medium Rationali. 130.B
Rationale ſuperat Rationale Rationali. 130.B
Duo ſpatia Irrationalia componere poſſunt ſpatium Rationale. 137.B
Duo ſpatia Rationalia componunt ſemper ſpatium Rationale. 137.B
Si duæ Rationales potentia tantùm commenſurabiles componantur; tota Irrationalis erit. Vocetur autem ex binis nominibus. 138.B
Si duæ Mediæ potentia tantùm commenſurabiles componantur, quæ Rationale contineant; tota Irrationalis erit. Vocetur autem ex binis Mediis prima. 139.B
Quod ſub lineâ Rationali, & Irrationali continetur rectangulum, Irrationale eſt. 136.B
Si duæ Mediæ potentia tantùm commenſurabiles componantur, quę Medium contineãt tota Irrationalis erit. Vocetur autem ex binis Mediis ſecunda. 139.B
Si duæ rectę potentia incommenſurabiles componantur, quæ faciant compoſitum quidem ex ipſarum quadratis Rationale, quod autẽ ſub ipſis continetur, Medium; tota recta Irrationalis erit. Vocetur autem Maior. 140.B
Si duę rectæ potentia incommenſurabiles componantur, quæ faciant compoſitum quidem ex ipſarum quadratis Medium, quod autem ſub ipſis continetur, Rationale; tota recta Irrationalis erit. Vocetur autem Rationale ac Medium potens. 141.B
Si duę rectæ potentia incommenſurabiles componantur, quæ faciant & compoſitũ ex ipſarum quadratis Mediũ, & quod ſub ipſis continetur, Medium, incommenſurabileq; compoſito ex quadratis ipſarum; tota recta Irrationalis erit. Vocetur autem bina Media potens. 141.B
Sex lineæ Irrationales compoſitæ, vt ea, quę ex binis nominibus, quę ex binis Mediis prima, quæ ex binis Mediis ſecunda, Maior, Rationale, ac Medium potens, & bina Media potens, ad vnum duntaxat punctum diuiduntur in nomina, ſingulæ. à pag. 142. vſque ad 145.B
Sex genera linearum Irrationalium, quæ ex binis nominibus dicuntur. 145.B
Si ſex ſpatia contineantur ſub Rationali, & ex binis nominibus prima, ſecunda, tertia, quarta, quinta, ac ſexta; Rectæ ea potentes Irrationales ſunt hæ ordine; ex binis Mediis prima, ex binis Mediis ſecunda, Maior, Rationale, ac Medium potens, & bina Media potens. 149. vſque ad 152.B
Quadrata ſex harum linearum Irrationalium; eius quæ ex binis nominibus, ex binis Mediis primæ, ex binis Mediis ſecundæ, Maioris, Rationale, ac Medium potentis, & bina Media potentis: ad Rationalem applicata, latitudines faciunt ordine ſex lineas ex binis nominibus. 152. vſque ad 155.B
Rectæ longitudine commenſurabiles ſex lineis Irrationalibus prædictis, ſunt quoque eiuſdem ordinis, & nominis Irrationales. 155. vſque ad 158.B
Idem euenit, ſi potentia tantùm ſint commenſurabiles.

præterquam in ea, quæ ex binis nominibus dicitur. 156. B

Si Rationale & Medium componantur, quatuor Irrationales fiunt; vel ea, quæ ex binis nominibus, vel quæ ex binis Mediis prima, vel Maior, vel Rationale, ac Medium potens. 158. B

Si duo Media inter se incommensurabilia componantur; duæ reliquæ Irrationales fiunt; vel ex Mediis secunda, vel bina Media potẽs. 159. B

Ea, quæ ex binis nominibus, & aliæ quinque Irrationales eam sequentes, & inter se, & à Media differunt. 159. & 160. B

Recta linea media proportionalis secundùm Analogiam Arithmeticam inter duo nomina cuiusuis lineæ Irrationalis, per compositionem factæ, est quoq; Irrationalis eiusdem ordinis. 160. B

Si à Rationali Rationalis auferatur potẽtia tantùm commensurabilis existens toti: (*Vel si à maiori nomine eius, quæ ex binis nominibus, minus auferatur.*) Reliqua Irrationalis est. Vocetur autem Apotome. 161. B

Si à Media auferatur Media potentia tantùm commensurabilis existens toti, quæ cum tota Rationale contineat; (*Vel si à maiori nomine eius, quæ ex binis medijs prima, minus nomen auferatur.*) Reliqua Irrationalis est. Vocetur autẽ Mediæ Apotome prima. 161. B

Si à Media auferatur Media potentia tantùm commensurabilis existens toti, quæ cùm tota Medium contineat; (*Vel si à maiori nomine eius, quæ ex binis Medijs secunda, minus nomen auferatur.*) Reliqua Irrationalis est. Vocetur autem Mediæ Apotome secunda. 162. B

Si à recta linea auferatur recta potentia incommensurabilis existens toti, quæ cum tota faciat compositũ quidem ex ipsarum quadratis Rationale; quod autem sub ipsis continetur Medium; (*Vel si à maiori nomine lineæ Maioris minus nomen auferatur.*) Reliqua Irrationalis est. Vocetur autem Minor. 162. B

Si à recta auferatur recta potentia incommensurabilis existens toti, quæ cũ tota faciat compositum quidem ex ipsarum quadratis Medium; quod autem sub ipsis continetur, Rationale; (*Vel si à maiori nomine eius, quæ Rationale ac Medium potest, minus nomen auferatur.*) Reliqua Irrationalis est. Vocetur autem cum Rationali Medium totum efficiens. 163. B

Si à recta auferatur recta potentia incommensurabilis existens toti, quę cũ tota faciat & compositum ex ipsarum quadratis, Medium; & quod sub ipsis continetur, Medium, incommensurabileq; composito ex quadratis ipsarum; (*Vel si à maiori nomine eius, quæ bina Media potest, minus nomen auferatur.*) Reliqua Irrationalis est. Vocetur autẽ cum Medio Medium totum efficiens. 163. B

Apotomæ vna tantùm congruit recta Rationalis, potentia solùm commensurabilis existẽs toti. 164. B

Mediæ Apotomæ primæ vna tantùm congruit recta Media, potentia solùm commensurabilis existens toti, & cum tota Rationale continens. 164. B

Mediæ Apotomæ secundæ vna tantũ congruit recta Media, potentia solùm commensurabilis existens toti, & cum tota Medium continens. 165. B

Minori vna tantùm congruit recta, potentia incommensurabilis existens toti, & cum tota faciens compositũ quidem ex ipsarum quadratis Rationale; quod autem sub ipsis continetur, Medium. 165. B

Ei, quæ cum Rationali Medium totum facit, vna tantùm congruit recta potentia incommensurabilis existens toti, & cum tota faciẽs compositum quidem ex ipsarum quadratis Medium; quod autem sub ipsis continetur, Rationale. 166. B

Ei, quæ cum Medio Medium totum facit, vna tantùm congruit recta, potentia incommensurabilis existens toti, & cum tota faciens & compositum ex ipsarum quadratis Medium, & quod sub ipsis continetur, Mediũ, incommensurabileque composito ex ipsarum quadratis. 166. B

Sex genera linearum Irrationalium, quæ Apotomæ dicuntur. 167. B

Si sex spatia contineantur sub Rationali, & Apotoma prima, secunda, tertia, quarta, quinta, & sexta; Rectæ ea potentes Irrationales sunt hæ ordine; Apotome, Mediæ Apotome prima, Mediæ Apotome secunda, Minor, ea quæ cum Rationali Medium totum efficit, & ea quæ cum Medio Medium totum efficit. 169. vsque ad 172. B

Quadrata harum sex linearum Irrationalium, Apotomæ, Mediæ Apotomæ primæ, Mediæ Apotomæ secundæ, Minoris, eius quæ cum Rationali Medium totum efficit, & eius, quæ cum Medio Medium totum efficit, ad Rationalem applicata, latitudines faciunt ordine sex Apotomas. 173. vsque ad 175. B

Rectæ longitudine commensurabiles sex lineis Irrationalibus prædictis, quæ per detractionem fiunt, sunt quoq; Irrationales eiusdem ordinis & nominis. 176. vsque ad 178. B

Idem eueniet, si potentia tantùm eis sint commensurabiles, præterquam in Apotoma. 176. B

Medio à Rationali detracto; Recta, quæ reliquũ spatiũ potest, vna ex duabus Irrationalibus fit, vel Apotome, vel Minor. 178. B

Rationali à Medio detracto; aliæ duæ Irrationales fiunt, vel Mediæ Apotome prima, vel cum Rationali Medium totũ efficiens. 179. B

Medio à Medio detracto, quod sit incommensurabile toti; reliquæ duæ Irrationales fiunt, vel Mediæ Apotome secunda, vel cum Medio Medium totum efficiens. 179. B

Apotome non est eadem, quæ ex binis nominibus. 179. B

Apotome, & aliæ quinque Irrationales eam sequentes, & inter se, & à Media differunt. 180. B

Tredecim lineæ Irrationales inter se diuersæ. 180. & 181. B

Quadratum Rationalis ad eam, quæ ex binis nominibus, applicatum, latitudinem facit Apotomen, cuius nomina commensurabilia sunt nominibus eius, quæ est ex binis nominibus, & in eadem proportione: & adhuc Apotome quę fit, eundem habet ordinem, quę ea, quæ est ex binis nominibus. 181.B

Quadratum Rationalis ad Apotomen applicatum, latitudinem faciteam, quæ ex binis nominibus, cuius nomina commensurabilia sunt Apotomæ nominibus, & in eadem proportione; & adhuc, quæ ex binis nominibus fit, eundem habet ordinem, quem ipsa Apotome. 182.B

Si spatium cõtineatur sub Apotoma, & ea, quæ ex binis nominibus, cuius nomina commensurabilia sunt nominibus Apotomæ, & in eadem proportione; Recta spatium potens, est Rationalis. 183.B

Rationale spatium contineri potest sub duabus rectis Irrationalibus. 183.B

A Media infinitæ Irrationales fiunt, & nulla alicui antecedentium est eadem. 183.B

Si recta linea Rationalis extrema ac media ratione secetur; vtrumque segmentorum Irrationalis linea est, quæ vocatur Apotome. 257.B

Si recta secundùm extremam & mediam rationem secetur, sit q; maius segmentum linea Rationalis; erit minus segmentum Apotome. 258.B

Si in circulo Rationalem habente diametrum, pentagonum æquilaterum describatur; pentagoni latus Irrationalis est linea, quæ vocatur Minor. 262.B

Si sphæræ diameter fuerit Rationalis; erit tam superficies Tetraedri, quàm Octaedri in ea sphæra, Media. 291.B

Triangulum æquilaterum, cuius latus est Rationale, & superficies Media est. 291.

Latus Icosaedri in pyramide descripti est Apotome. 326.B

RECTA LINEA.

Rectæ duæ lineæ non habent vnum, & idem segmentum commune. 15.A

Rectæ duæ in vno puncto concurrentes, si producantur ambæ, necessariò semutuò in eo puncto intersecabunt. 15.A

Rectæ duæ lineæ spatiũ non comprehendunt. 16. & 17.A

Rectæ duæ lineæ duabus eisdem rectis lineis super eadem recta linea æquales, vtraque vtrique, non constituentur ad aliud atq; aliud punctum, ad easdem partes, eosdemque terminos cum duabus initio ductis rectis lineis habentes. 24.A

Recta linea alteri insistẽs facit cum ea aut duos rectos angulos, aut duobus rectis æquales. 33.A

Rectæ duæ ad vnum punctum coniunctæ faciunt vnam rectam, quando alia recta ex illo puncto educta cum illis facit duos angulos non ad easdem partes duobus rectis æquales. 34.A

Rectæ duæ ad vnum punctum coniunctæ non faciunt vnam rectam, quando alia recta ex illo puncto educta cum illis facit duos angulos ad easdem partes duobus rectis æquales. 34.A

Rectæ duæ se intersecantes faciunt angulos ad verticem oppositos æquales. 34.A

Rectæ duæ se intersecantes faciũt quatuor angulos quatuor rectis æquales. 35.A

Rectæ quotcunque ad vnum punctum conuenientes faciunt omnes angulos quatuor rectis æquales. 38.A

Rectæ duæ facientes cum alia recta in eodem puncto, non ad easdem partes, angulos ad verticem æquales, in directum sunt coniunctæ. 35.A

Rectæ quatuor in eodem puncto facientes binos oppositos angulos æquales, constituunt duas rectas lineas. 35.A

Rectæ lineæ inter se æquales ex vno puncto ad rectam lineam plures quàm duæ, duci non possunt. 36.A

Rectæ lineæ ad eandem rectam perpendiculares, plures quàm vna, duci non possunt. 37.A

Recta linea faciente cum alia angulos inæquales, perpendicularis ex vno illius puncto ad hanc demissa, cadit ad partes anguli acuti. 37.A

Rectarum omnium ex vno puncto ad aliam rectam demissarum, minima est perpendicularis. 38.A

Rectæ duæ lineæ ab extremitatibus vnius lateris trianguli interius cõstitutæ, reliquis trianguli duobus lateribus minores quidem sunt, maiorem verò angulum continent. 40.A

Rectæ duæ lineæ intra triangulum, quarum vna ab extremo vnius lateris, altera verò non ab extremo ducitur, maiores esse possunt reliquis trianguli duobus lateribus, minoremq; angulum comprehendere. 41.A

Rectæ duæ lineæ parallelæ sunt, si recta in eas incidens faciat alternos angulos æquales. 47.A

Rectæ duæ lineæ parallelæ sunt, si recta in eas incidens faciat externum angulum interno ad easdem partes opposito, æqualem; aut internos ad easdem partes duobus rectis æquales. 47.A

Rectas duas lineas concurrere productas, si recta in eas incidens faciat duos internos angulos ad easdem partes duobus rectis minores: quo modo à Proclo demonstretur. 49.A

Rectas easdem duas concurrere, qua ratione à nobis demonstretur. 53.A

Rectarum linearum angulum constituentium distantia, si in infinitum producantur, omnem finitam magnitudinem excedet. 48. & 50.A

Recta linea secans vnam duarum parallelarum, productas secat & alteram. 48.A

Linea, cuius omnia puncta à recta linea, quæ in eodem cum ea plano existit, æqualiter distant, recta est. 50.A

Recta linea super aliam rectam in transuersum mota, constituens q; in suo extremo cum ea angulos semper rectos, describet altero suo extremo lineam quoque rectam. 51.A

Si ad rectam lineam duæ perpendiculares rectæ erigantur inter se æquales, quarum extrema puncta per lineam rectam coniungantur; erit perpendicularis, ex quouis puncto huius rectæ ad priorem rectam demissa, vtrilibet priorum perpendicularium æqualis. 52.A

Si ad rectam lineam duæ perpendiculares rectæ lineæ

erigantur inter ſe æquales, quarum extrema puncta per lineam rectam coniungantur; efficiet hæc recta cum vtraque perpendicularium angulum rectum. 52.A

Si in duas rectas lineas alia recta incidens faciat cum vna earum angulum internum rectum, & cum altera ex eadem parte acutum; duæ illæ rectæ minus ſemper inter ſe diſtabunt ad eas partes, vbi eſt angulus acutus, ex altera verò parte ſemper inter ſe magis diſtabunt. 52.A

Recta incidens in duas parallelas facit & angulos alternos æquales, & externum interno ad eaſdem partes æqualem, & internos duos ad eaſdem partes duobus rectis æquales. 54.A

Rectæ lineæ, eidem parallelæ, & inter ſe ſunt parallelæ. 55.A

Rectæ lineæ, eidem parallelæ, ſi inter ſe vocent, conſtituunt vnam lineam rectam. 55.A

Rectæ lineæ, quæ parallelas ad eaſdem partes connectunt, æquales ſunt, & parallelæ. 61.A

In figura æquilatera, & æquiangula parium laterum, oppoſita quælibet duo latera ſunt parallela. 66.A

Recta ſecans duo trianguli latera bifariam, reliquo lateri eſt parallela. 72.A

Si fuerint duæ rectæ, ſeceturque ipſarum altera in quotuis ſegmenta: Rectangulum comprehenſum ſub illis duabus rectis lineis, æquale eſt eis quæ ſub inſecta, & quolibet ſegmentorum comprehenduntur, rectangulis. 93.A

Si fuerint duæ rectæ lineæ, ſecenturq; ambæ in quotuis ſegmenta: Rectangulum comprehenſum ſub illis duabus rectis, æquale eſt eis, quæ ſub ſingulis ſegmentis vnius, & quolibet ſegmentorum alterius continentur, rectangulis. 94.A

Si ſint duæ rectæ lineæ, ſecenturq; ambæ vtcunq;: Rectangulum comprehenſum ſub illis duabus lineis, vnà cum rectangulo ſub vna parte vnius, & vna parte alterius comprehenſo; æquale eſt eis, quæ ſub totis lineis, & dictis partibus mutuò continentur, rectangulis, vnà cum rectangulo ſub reliquis partibus comprehenſo. 94.A

Si recta linea ſecta ſit vtcunq;, vel etiam in plura ſegmenta: Rectangula, quæ ſub tota, & quolibet ſegmentorũ comprehenduntur, æqualia ſunt ei, quod à tota fit, quadrato. 94. & 95.A

Si linea recta ſecetur in quotuis ſegmenta; quadratum, quod à tota fit, æquale eſt eis, quæ ſub ſingulis ſegmentis, & quolibet ſegmento comprehenduntur, rectangulis. 95.A

Si recta linea ſecta ſit vtcunq;: Rectangulum ſub tota, & vno ſegmentorum comprehenſum, æquale eſt & illi, quod ſub ſegmentis comprehenditur, rectangulo, & illi, quod à prædicto ſegmento deſcribitur, quadrato. 95.A

Si recta linea ſecta ſit vtcunq;: Quadratum totius æquale eſt quadratis ſegmentorum, & rectangulo comprehenſo bis ſub ſegmentis. 96.A

Si recta linea ſecetur bifariam, & non bifariam: rectangulum ſub inæqualibus ſegmentis totius comprehenſum, vnà cum quadrato intermediæ ſectionum, æquale eſt quadrato ex dimidia deſcripto. 98.A

Si recta linea bifariam ſecetur, & illi recta quædam linea in rectum adiiciatur: rectangulum comprehenſum ſub tota cum adiecta, & adiecta, vnà cum quadrato dimidiæ, æquale eſt quadrato rectæ compoſitæ ex dimidia, & adiecta. 99.A

Si recta linea ſecetur vtcunque: Quadratum totius, & quadratum vnius ſegmenti, ſimul æqualia ſunt rectangulo ſub tota & illo ſegmento bis contento vnà cum quadrato alterius ſegmenti. 101.A

Si recta linea inæqualiter ſecetur: Erunt quadrata ſegmentorum æqualia rectangulo bis ſub ſegmentis comprehenſo, vnà cum quadrato exceſſus, quo maius ſegmentum ſuperat minus. 101.A

Si recta linea ſecetur vtcunque; rectangulum quater comprehenſum ſub tota, & vno ſegmentorum, cum quadrato reliqui ſegmenti, æquale eſt quadrato rectæ compoſitæ ex tota, & priore ſegmento. 102.A

VEL.

Si linea recta ſecetur vtcunque; eiq; in rectum adiiciatur alia recta vni ſegmentorum æqualis: Quadratum totius lineæ compoſitæ æquale eſt rectangulo quater comprehenſo ſub data linea, & adiecta, ſiue dicto ſegmento, vnà cum quadrato alterius ſegmẽti. 102.A

VEL.

Si linea recta ſecetur bifariam, eique in rectum adiiciatur recta alia quantacunq;: Quadratum totius compoſitæ lineæ æquale eſt rectangulo quater comprehẽſo ſub linea compoſita ex dimidia, & adiecta, & dimidia, vnà cum quadrato adiectæ. 102. & 103.A

Si recta linea ſecetur bifariam, & non bifariam: quadrata ſegmentorum inæqualium, ſimul dupla ſunt quadrati ex dimidia, & quadrati ex intermedia ſectionum. 103.A

Si recta linea ſecetur bifariam, adiiciatur autem ei in rectum quæpiam recta linea: Quod à tota cum adiecta, & quod ab adiecta, vtraque ſimul quadrata dupla ſunt quadrati ex dimidia, & quadrati ex compoſita ex dimidia & adiecta. 104.A

Perpendicularis linea ex puncto aliquo ad rectã quampiam cadens, eſt omnium ex eodem puncto ad eandem rectam cadentium brevißima. 120.A

Si recta ſecetur extrema ac media ratione; Iſoſceles, cuius baſis maiori ſegmento ſit æqualis, vtrumuis verò laterum æqualium ſectæ lineæ, habet vtrumque angulorum ad baſim duplum reliqui. 180.A

Si ſint duæ rectæ inæquales, & ad maiorem applicetur quarta pars quadrati ex minore deſcripti, deficiens figura quadrata; Non erunt ſegmenta, quæ ex applicatione fiunt, æqualia. 127.B

Si ſint duæ rectæ inæquales, erit rectangulum ſub ipſis contentum, duplum rectanguli ſub alterutra earum, & dimidio alterius contenti. 136.B

Si recta

Si recta linea non bifariam secetur; erit compositum ex quadratis partium maius, quàm rectangulum sub partibus bis comprehensum, quadrato eius lineæ, qua maior pars minorem superat. 140.B

Si recta non bifariam secetur, & rursus non bifariam in alio puncto; erunt quadrata partium magis inæqualium simul maiora quadratis partiũ minus inæquallũ simul. 142.B

Rectæ lineæ pars quædam non est in subiecto plano, quædam verò in sublimi. 195.B

Si duæ rectæ se mutuò secent, in vno sunt plano. Atque triangulum omne in vno est plano. 196.B

Si duo plana se mutuò secent, cõmunis eorum sectio est linea recta. 196.B

Si recta linea rectis duabus se mutuò secãtibus, in communi sectione ad rectos angulos insistat: Illa ducto etiam per ipsas plano ad angulos rectos erit. 197.B

Si recta linea rectis tribus se mutuò secantibus, in communi sectione ad rectos angulos insistat; Illæ tres rectæ in vno sunt plano. 197.B

Si duæ rectæ eidem plano ad rectos sint angulos; parallelæ erunt illæ rectæ lineæ. 198.B

Si duæ sint parallelæ rectæ, in quarum vtraque sumpta sint quælibet puncta: Illa recta, quæ ad hæc puncta adiungitur, in eodem est cum parallelis plano. 198.B

Idem euenit, si rectæ non sint parallelæ, in eodem tamen existant plano. 198.B

Si duæ sint parallelæ rectæ, quarum altera ad rectos cuidam plano sit angulos: Et reliqua eidem plano ad rectos angulos erit. 198.B

Quæ eidem rectæ lineæ sunt parallelæ, sed non in eodem cum illa plano; hæ quoq; sunt inter se parallelæ. 199.B

Dato plano, à puncto, quod in illo datum est, duæ rectæ ad rectos angulos non educãtur, ad easdem partes. 201.B

Item neq; à puncto in sublimi ad subiectum planum duæ perpendiculares demittentur. 201.B

Si recta plano cuipiam ad rectos sit angulos; & omnia, quæ per ipsum, plana eidem plano ad rectos angulos erunt. 204.B

Si duo plana se mutuò secantia plano cuidam ad rectos sint angulos, communis etiam illorum sectio ad rectos eidem plano angulos erit. 205.B

Si planum ad planum rectum fuerit; & ab aliquo puncto eorum, quæ in vno sunt, planorum, ad alterum planum perpendicularis ducta fuerit; In communem sectionem cadet planorum ducta perpendicularis 223.B

RECTANGVLVM parallelogrammum. vide Parallelogrammum, &c.

RECTANGVLVM triangulũ. vide Triangulũ.

REGVLARIS figura. vide Figura intra & extra circulum, sphæram, &c.

SCALENVM triangulum. vide Triangulum.

SEGMENTVM circuli. vide Circulus.

SIMILES plani ac solidi numeri. vide Numerus planus, &c.

SOLIDA Figura intra, & extra sphæram, atque aliam figuram. vide Figura intra, & extra circulum, &c.

SOLIDI numeri similes. vide Numerus planus, &c.

SOLIDVM Regulare. vide Figura intra, & extra circulum, &c.

SOLIDVS angulus. vide Angulus.

SOLIDVS numerꝰ. vide Numerus planus, &c.

SPHAERA. vide Figura intra & extra circulum, sphæram, &c.

TRAPEZIVM. vide Parallelogrammum, &c.

TRIANGVLVM.

Triangula duo habẽt & basẽs, & angulos æquales, ipsaq; æqualia sunt, si duo latera vnius æqualia sint duobus lateribus alterius, vtrumque vtrique, angulosque contentos habeant æquales. 22.A

Isoscelium triangulorum anguli tam supra basem, quam infra, æquales sunt. 23. & 24.A

Æquilaterum triangulum habet tres angulos æquales. 24.A

Triangulum, cuius duo anguli supra basem æquales sunt, habet duo latera angulis illis opposita æqualia. 25.A

Triangulum, cuius omnes anguli æquales sunt, æquilaterum est. 25.A

Triangulum, cuius duo anguli infra basem æquales sunt, Isosceles est. 25.A

Triangula duo habent vnum angulum vni angulo æqualem, si duo latera vnum ambientia æqualia sint duobus lateribus alterum ambientibus, & basis basi. 27.A

Triangula duo æqualia sunt, & inter se æquiangula, si duo latera vnius sint æqualia duobus lateribus alterius, & basis basi. 28.A

Trianguli externus angulus maior est vtrouis interno opposito. 36.A

Trianguli duo quilibet anguli duobus rectis minores sunt. 37.A

Trianguli orthogonij, vel amblygonij duo reliqui anguli sunt acuti. 37.A

Trianguli æquilateri omnes anguli, & Isoscelis duo supra basem, acuti sunt. 37.A

Trianguli maius latus maiorem angulum subtendit. 37.& 38.A

Scalenum habet omnes tres angulos inæquales. 38.A

Trianguli maior angulus maiori lateri subtenditur. 38.A

Trianguli angulo bifariam secto, si recta secans partiatur basem inæqualiter, latera circa illum anguli inæ-

qualia ſunt, maiusq; eſt illud, quod maiori ſegmento baſis adiacet. 38.& 39.A

Trianguli angulo inæqualibus lateribus comprehenſo bifariam ſecto, recta ſecans diuidit baſim inæqualiter, maiusq; ſegmentum maiori lateri adiacet. 39.A

Trianguli angulo bifariam ſecto, ſi recta ſecans diuidat baſem bifariam, latera circa eum angulum æqualia ſunt: Et ſi æqualia ſint, recta ſecans angulum bifariam, ſecat & baſim bifariam. 39.A

Trianguli duo latera quomodocunq; ſumpta, reliquo ſunt maiora. 40.A

Triangula habentia duo latera duobus lateribus æqualia, vtrumq; vtrique, angulum verò comprehenſum angulo maiorem, habent & baſem baſe maiorem. 43.A

Triangula habentia duo latera duobus lateribus æqualia, vtrumque vtrique, baſem verò baſe maiorem, habent & angulum comprehenſum angulo maiorem. 44.A

Triangula habentia duos angulos duobus angulis æquales, vtrumq; vtriq;, vnumq; latus vni lateri æquale, ſiue quod æqualibus adiacet angulis, ſiue quod vni æqualium angulorum ſubtenditur; habent & reliqua latera reliquis lateribus æqualia, vtrumq; vtrique, & reliquum angulum reliquo angulo æqualem. 45.A

Triangula habentia eaſdem conditiones, de quibus proxime dictum eſt, ſunt inter ſe æqualia. 46.A

In triangulo æquilatero, vel Iſoſcele, recta linea ab angulo duobus lateribus æqualibus comprehenſo ducta, diuidens q; vel angulum, vel baſem bifariam, perpendicularis eſt ad baſem; & ſi quidem angulum bifariã diuidat, ſecabit quoq; baſem bifariam. Si verò baſem ſecet bifariam, diuidet quoque angulum bifariam. Et contrà, linea perpendicularis ad baſem ducta diuidit & baſem, & angulum bifariam. 46.A

Triangulum, in quo linea recta ab vno angulorum ducta ad baſem perpendicularis diuidit vel baſin, vel angulum bifariam, habet duo latera circa illum angulum æqualia: Et ſi quidem baſis diuidatur bifariam, angulus quoq; bifariam ſecabitur: ſi verò angulus bifariam ſecetur baſis quoque diuidetur bifariam. 46.A

Si duo triangula habeant duos angulos duobus angulis æquales, vtrumque vtrique, & vnum latus vni lateri æquale, quod tamen neque æqualibus adiacet angulis, neque vni æqualium angulorum opponitur; nihil colligi poteſt. 56.A

Trianguli externus angulus duobus internis oppoſitis eſt æqualis: Et omnes tres anguli duobus rectis æquales ſunt. 57.B

Trianguli cuiuſlibet omnes tres anguli ſimul æquales ſunt tribus angulis ſimul cuiuſcunq; alterius trianguli. 60.A

Iſoſceles duo anguli ſupra baſim ſemirecti ſunt, quando reliquus angulus rectus eſt. 60.A

Æquilateri trianguli quilibet angulus cõtinet duas tertias partes vnius recti, vel vnam tertiam partem duorum rectorum. 60.A

Æquilaterum triangulum à perpendiculari ex angulo ad baſim ducta diuiditur in duo ſcalena orthogonia, &c. 60.A

Triangula ſuper eadem baſi conſtituta, & in eiſdem parallelis, ſunt æqualia. 69.A

Triangula, quorum duo latera vnius æqualia ſint duobus lateribus alterius, vtrumq; vtriq;, angulum verò contentum angulo maiorem, quo pacto poſſint æqualia eſſe, & inæqualia. 69.A

Triangula ſuper æqualibus baſibus conſtituta, & in eiſdem parallelis, inter ſe ſunt æqualia. 70.A

Triangulum à recta ex angulo ad medium punctum lateris oppoſiti ducta ſecatur bifariam. 71.A

Triangula æqualia ſuper eadem baſi, & ad eaſdem partes conſtituta, in eiſdem ſunt parallelis. 71.A

Triangula æqualia ſuper æqualibus baſibus, & ad eaſdem partes conſtituta, in eiſdem ſunt parallelis. 72.A

Triangula æqualia inter eaſdem parallelas, ſi non habuerint eandem baſim, ſuper æquales baſes ſunt conſtituta. 72.A

Triangulorum inter eaſdem parallelas, quod maiorem habet baſim, maius eſt: Et quod maius eſt, maiorem habet baſim. 73.A

Si in triangulo linea recta vni laterum parallela ducatur; Recta ex angulo oppoſito ducta, diuidens q; alterutram parallelarum bifariam, diuidit quoq; alteram bifariam. 74.A

In rectangulis triangulis, quadratum lateris angulo recto oppoſiti, æquale eſt duobus quadratis ſimul reliquorum duorum laterum. 83.A

Si fuerint duo triangula rectangula, quorum latera rectis angulis oppoſita, ſint æqualia; erunt duo quadrata, reliquorum duorum laterum vnius trianguli, æqualia duobus quadratis reliquorũ duorum laterum alterius. 86.A

Si ex angulo à duobus lateribus inæqualibus trianguli cuiuſlibet comprehenſo ad baſim perpendicularis ducatur, cadens intra triangulum; ſecabitur baſis inæqualiter, maiorq; pars iuxta maius latus erit. Et contrà, ſi baſis à perpendiculari ſecetur inæqualiter, erit duo latera inæqualia, maiusq; erit prope maiorem partem baſis. 88.A

In omni triangulo, parallelogramma quæcunq; duorum laterum æqualia ſunt parallelogrammo reliqui lateris, cuius alterum latus æquale ſit, & parallelum rectæ ductæ ab angulo, quem duo illa latera continent, ad punctum, in quo conueniunt latera parallelogrammorum lateribus trianguli oppoſita, ſi ad partes anguli illius producantur. 88.A

Si quadratum vnius lateris trianguli æquale ſit duobus quadratis reliquorum duorum laterum; angulus ſub his comprehẽſus, rectus erit. 89.A

Triangulorum comparationes variæ, & quo modo fiant. 89.A

In amblygoniis triangulis, quadratum lateris angulo obtuſo oppoſiti quanto maius ſit quadratis reliquorũ duorum laterum. 105.A

In amblygoniis triangulis perpendicularis ex alterutro angulorum acutorum ad latus oppoſitum demiſſa, cadit extra triangulum ad partes anguli obtuſi. 107.A

Si in triangulo quadratum vnius lateris maius ſit quadratis aliorum duorum laterum: angulus illi lateri oppoſitus, obtuſus erit. 107.A

Si in

Si in triangulo quadratum vnius lateris maius ſit quadratis reliquorum duorum laterum, rectangulo bis comprehenſo ſub alterutro horum laterum, & ſub exteriore linea, quam ex illo latere producto recta linea ab oppoſito angulo demiſſa abſcindit: demiſſa hæc linea ad latus productum perpendicularis erit, & angulus propoſiti trianguli priori illi lateri oppoſitus, obtuſus. 107.A

In oxygoniis triangulis, quadratum lateris angulo acuto oppoſiti, quanto minus ſit quadratis aliorum duorum laterum. 109. & 110. A

In quolibet triangulo perpendicularis in latus duobus acutis angulis adiacens ex oppoſito angulo demiſſa, cadit intra triangulum. 110.A

Si in triangulo quadratum vnius lateris minus ſit quadratis reliquorum duorum laterum; angulus illi lateri oppoſitus, eſt acutus. 111.A

Si in triangulo quadratum vnius lateris minus ſit quadratis reliquorum duorum laterum, rectangulo bis comprehenſo ſub alterutro horum laterum, & ſub recta linea inter angulum priori lateri oppoſitum, & rectam lineam ab angulo alteri illi lateri oppoſito demiſſam: Linea hæc demiſſa ad alterum illud latus perpendicularis erit, & angulus propoſiti trianguli priori illi lateri oppoſitus, acutus. 111.A

Si in triangulo à quouis angulo recta linea ducatur ſecans latus oppoſitum bifariam, erunt duo quadrata laterum circa illum angulum, ſimul dupla duorum quadratorum, quorum vnum ex linea ducta, alterum verò ex dimidiato latere deſcribitur. 115.A

Trianguli angulus, qui reliquis duobus eſt æqualis, rectus eſt. 166.A

Iſoſcelis trianguli, cuius vterq; angulorum ad baſim duplus eſt reliqui, angulus reliquus continet quintam partem duorum rectorum, vel duas quintas vnius recti; vterq; verò ad baſim cõtinet duas quintas duorum rectorũ, vel quatuor quintas vnius recti. 180.A

Si recta ſecetur extrema ac media ratione; Iſoſceles, cuius baſis maiori ſegmento ſit æqualis, vtrumuis verò laterum æqualium datæ lineæ ſectæ, habet vtrumque angulorum ad baſim duplum reliqui. 180.A

Si in triangulo rectangulo ab angulo recto demittatur perpendicularis ad baſim; erit rectangulũ ſub baſe, & alterutro baſis ſegmento, æquale quadrato lateris illi ſegmento adiacentis; Rectangulũ verò ſub baſis ſegmentis æquale quadrato perpẽdicularis; Rectangulum deniq; ſub baſe, & perpendiculari æquale rectangulo ſub lateribus circa angulum rectum. 136.B

Triangulum omne in vno eſt plano. 196.B

Latus trianguli æquilateri potentia ſeſquitertium eſt perpendicularis ex vno angulo ad baſim demiſſæ. 263. & 290.B

Perpendicularis ex angulo trianguli æquilateri ad baſim oppoſitam demiſſa; tripla eſt eius perpendicularis, quæ ex centro trianguli ad eandem baſim deducitur: ſeſquialtera verò ſemidiametri circuli triangulum circumſcribentis. 295.B

Quadratum lateris trianguli æquilateri ad ipſum triangulum habet proportionem duplicatam proportionis lateris trianguli ad lineam medio loco proportionalem inter perpendicularem ab vno angulo ad latus oppoſitum ductam, & dimidium ipſius lateris. 303.B

Quadratum rectæ mediæ proportionalis inter dimidium latus trianguli æquilateri, & eius perpendicularem; æquale eſt ipſi triangulo. 303.B

FINIS.

