LES ÉLÉMENS
D'EUCLIDE
DU R. P. DECHALLES.

LES ÉLÉMENS D'EUCLIDE

Du R. P. DECHALLES, de la Compagnie de Jesus;

Et de M. OZANAM, de l'Académie Royale des Sciences.

Démontrés d'une maniere nouvelle & facile, & augmentés d'un grand nombre de Propositions & d'Usages, & d'un Traité complet des Rapports.

Par M. AUDIERNE.

Seconde Édition, revue, corrigée & augmentée par l'Auteur.

A PARIS, RUE DAUPHINE,
Chez CH. ANT. JOMBERT, Libraire du Roi pour l'Artillerie & le Génie, à l'Image Notre-Dame.

M. DCC. LIII.

Avec Approbation & Privilege du Roi.

PRÉFACE.

Le Nil qui chaque année étend ses eaux sur toute l'Egypte, enleve les bornes des terres de cette contrée; de maniere que les propriétaires sont souvent obligés, lorsque ce Fleuve est rentré dans son lit, de rechercher le terrein qu'ils possédoient avant l'inondation. Cette nécessité fit inventer aux premiers Egyptiens, les moyens de mesurer l'étendue que peut avoir un certain espace, & ils donnerent à cet Art le nom de Géométrie, *qui en notre langue signifie* Mesure de la Terre. *Mais cette Science, qui dans son origine n'avoit eu que cet objet assez simple, sortit bientôt du limon du Nil où elle avoit pris naissance, & devint, pour me servir de l'expression de Platon, l'une des aîles avec lesquelles l'homme* *s'éleva juſqu'à ces globes immenſes qui roulent ſur ſa tête. Alors, les machines furent inventées ; les édifices les plus hardis furent élevés ; les périodes des aſtres furent déterminées ; les courſes, les diſtances, les grandeurs des planetes, furent meſurées. Enfin, on conſtruiſit les vaiſſeaux, & la mer ne fut plus une barriere entre les Nations les plus éloignées.*

On a donné pluſieurs Traités d'une ſcience dont on a retiré de ſi grands avantages, & qui en procure tous les jours de nouveaux. Mais, la plus grande partie de ces ouvrages n'a pas toute la perfection que l'on pourroit ſouhaiter. Les uns, trop ſecs & trop obſcurs, ſont la cauſe que l'on ſe dégoûte de la Géométrie avant que de la connoître : les autres, au contraire, trop dénués du ſtyle qui eſt propre & particulier à cette ſcience, n'ont ni l'ordre, ni le génie qui lui convient. Ainſi, loin de donner à l'eſprit l'étendue & la juſteſſe, qui ſont les prin-

cipaux fruits que l'on doit recueillir de ce genre d'étude, ils font penser que la Géométrie est aussi problématique que la Physique. Et comme ces deux sciences ne sont pas également séduisantes, on va quelquefois jusqu'à accuser la premiere de manquer de sens commun ; elle, qui est le chef-d'œuvre du bon sens.

L'abrégé des Elémens d'Euclide du P. Dechalles, n'a point le premier de ces défauts. Ce savant Mathématicien, en y simplifiant les démonstrations, met la Géométrie à la portée des personnes qui veulent s'instruire de cette science ; & en joignant des usages à plusieurs propositions, il prévient le dégoût que l'ignorance de l'utilité de ces mêmes propositions pourroit causer. Mais, comme il étoit trop Géometre pour s'imaginer que l'on recevroit un jour des preuves, ou simplement physiques, ou totalement arithmétiques, pour des démonstrations géométriques, il n'a pas toujours été attentif à ne démon-

trer qu'en rigueur : & par-là, il n'est d'aucun secours contre ces démonstrations vicieuses qui sont devenues si communes, qu'il est bien rare que ceux qui n'étudient la Géométrie que dans les Auteurs modernes, deviennent jamais Géometres.

C'est le desir de remédier à ce dernier défaut qui m'a fait entreprendre de démontrer de nouveau ces Elémens, sans m'assujettir à suivre, ni le Pere Dechalles, ni M. Ozanam, ni aucun autre Auteur. Je me suis seulement proposé deux objets dans mon travail, dont le premier a été de ne donner que des démonstrations qui eussent toute la rigueur de celle des Anciens ; & le second, de me mettre à la portée de toutes les personnes, qui, par goût ou par état, veulent s'appliquer à ce genre d'étude. Si quelques personnes trouvent que j'ai employé plus de mots que beaucoup d'autres Auteurs, pour démontrer quelques propositions, je supplie ces personnes de ne mesurer mes démons-

trations que par la durée du tems qu'elles employeront à les comprendre ; de faire attention que j'ai toujours démontré en rigueur ; & que si elles m'entendent sans peine, & si je n'ai laissé aucun voile sur les vérités que je voulois découvrir, j'ai fait ce que je devois faire.

A l'égard d'Euclide, qui est l'Auteur de ces Elémens, il étoit de la ville de Mégare, vivoit sous le premier des Ptolomées, environ 400 ans avant la Naissance de J. C. & l'on peut dire qu'il n'y a eu de Géometres depuis lui que ceux qu'il a formés.

AVERTISSEMENT.

LEs Mathématiciens nomment *théorêmes*, les propoſitions qui ne ſont qu'expoſer une vérité : *problêmes*, celles qui propoſent quelque choſe à faire : *corollaires*, celles qui ſont des conſéquences d'autres propoſitions : & enfin, *ſcholies*, celles qui ne ſont que des remarques.

Ils nomment *hypotheſe*, les conditions auxquelles ils diſent qu'une choſe doit être : & *conſéquence*, ce qui ſuit de l'hypotheſe, & qu'il faut démontrer.

Par exemple, dans cette propoſition : *ſi un triangle eſt équilatéral, ſes trois angles ſeront égaux* ; cette partie, *ſi un triangle eſt équilatéral*, eſt l'*hypotheſe* ; & celle-ci, *ſes trois angles ſeront égaux*, eſt la *conſéquence*, qu'il faut démontrer.

C'eſt l'uſage de terminer toujours la démonſtration d'une propoſition, par la répétition de l'hypotheſe & de la conſéquence. Mais, pour abréger, on déſigne l'un & l'autre par ces quatre lettres, C. Q. F. D, s'il s'agit d'un théorême; & par ces quatre lettres, C. Q. F. F, s'il eſt queſtion d'un problême. Les quatre premieres ſignifient, *ce qu'il falloit démontrer*, & les quatre autres, *ce qu'il falloit faire.*

C'eſt auſſi par le même motif de briéveté que nous nous ſommes ſervis de quelques ſignes, dont voici l'explication.

(n) Signifie, *par le n°. qui eſt chiffré à la marge.*

[C] Signifie, *par la conſtruction.*

[D] Signifie, *par ce qui vient d'être démontré.*

[H] Signifie, *par l'hypotheſe.*

[S] Signifie, *par la ſuppoſition.*

[C & D] Signifient, *par la conſtruction, & par ce qui vient d'être démontré.*

LES

LES ÉLÉMENS D'EUCLIDE.

LIVRE PREMIER.

EUCLIDE commence ce Livre par définir les termes les plus ordinaires de la Géométrie, & par poser les principes sur lesquels il doit fonder toutes ses démonstrations. Il considere ensuite les triangles ; détermine les conditions auxquelles on doit conclure l'égalité de leurs angles, de leurs côtés, & de leurs surfaces ; & enseigne la maniere de se servir de ces figures, pour résoudre les problêmes les plus simples de la Géométrie. Il passe aux lignes paralleles ; examine à quelles marques on peut connoître si des lignes le sont ; considere les propriétés de ces lignes ; en déduit une des plus considérables des triangles ; & natu-

rellement conduit aux parallélogrammes, qui ſont des figures formées par ces mêmes lignes, il en expoſe auſſi pluſieurs propriétés; démontre quelques-uns des cas auxquels ils ſont égaux, & donne des regles pour transformer en parallélogramme une figure rectiligne quelconque. Il termine enfin ce Livre par la fameuſe propoſition du quarré de l'hypoténuſe, l'une des plus belles & des plus utiles de la Géométrie; & qui cauſa, dit-on, tant de plaiſir à Pythagore, lorſqu'il l'eut trouvée, qu'il offrit aux Muſes un ſacrifice de cent bœufs, pour les remercier de la faveur qu'elles lui avoient faite.

DÉFINITIONS.

Nº. 1. LA *Géométrie* eſt une ſcience qui conſidere l'*étendue*.

2. Ce qui eſt étendu peut ne l'être qu'en un ſens; c'eſt-à-dire, n'avoir que de la *longueur*. Il peut l'être en deux ſens; c'eſt-à-dire, avoir en même tems de la *longueur* & de la *largeur* †. Enfin, il peut l'être en trois ſens, c'eſt-à-dire, avoir en même tems de la *longueur*, de

† La largeur ſe nomme auſſi la *hauteur*.

la *largeur*, & de l'*épaiſſeur* †.

Par exemple, la diſtance d'un lieu à un autre n'eſt que longue: *ce que nous voyons du plancher d'une chambre eſt en même tems* long & large : *un mur eſt en même tems* long, large & épais.

Ainſi il y a trois genres d'étendues.

3. La longueur, la largeur, & l'épaiſſeur ſe nomment chacune *dimenſion*.

I.

4. On nomme *point*, ce qui conſidéré dans l'étendue, n'a aucune partie.

II.

5. On nomme *ligne*, ce qui n'eſt étendu qu'en un ſens.

III.

COROLLAIRE.

6. *Il ſuit de cette définition, que* les extrêmités d'une ligne ſont des points.

Démonſtration. *Les extrêmités d'une ligne ne ſont étendues, ni en deux ſens, ni en trois ſens ; puiſque* (n) *les lignes ne le ſont qu'en un ſeul.* N. 5. *Elles ne ſont point non plus étendues en un ſens ; puiſque ſi elles l'étoient, elles ſeroient des lignes* (n). *Or, les extrêmités A * & B d'une ligne AB ne ſont point des lignes ;* N. 5. Fig. 1.

† L'épaiſſeur ſe nomme auſſi la *profondeur*

puisque si elles étoient des lignes, par exemple AC & BD, elles auroient des extrémités A & C, B & D; & par conséquent, elles ne seroient point celles de la ligne AB, mais ce seroit leurs extrémités A & B qui le seroient. Ainsi, les extrémites d'une ligne ne sont étendues en aucun sens: donc elles n'ont aucune
N. 4. *partie; & par conséquent* (n) *elles sont des points. Donc C. Q. F. D.*

I.V

7. On nomme *ligne droite* †, celle qui va directement d'un point à un autre.

Fig. 1. *La ligne AB * qui en allant du point A au point B ne fait aucun détour, est une* ligne droite.

8. On nomme *ligne courbe*, celle qui ne va directement d'un point à un autre en aucune de ses parties.

Fig. 2. *La ligne CD * qui en allant du point C au point D se détourne continuellement de la ligne droite, est une* ligne courbe.

V.

9. On nomme *surface* ¶, ce qui n'est étendu qu'en deux sens.

† Il faut remarquer qu'Euclide ne considere que les lignes droites.

¶ La surface se nomme aussi *superficie* & *aire*. Son nom grec en donne une idée très-juste. Il signifie dans son sens propre, *ce qui paroît d'une chose, ce que l'on en voit.*

VI.

COROLLAIRE.

10. *Il suit de cette définition, que* les extrémités d'une surface sont des lignes.

Démonst. *Les extrémités d'une surface ne sont point étendues en trois sens, puisque* (n) *les surfaces ne le sont qu'en deux.* N. 9.
Elles ne sont point non plus étendues en deux sens; puisque si elles l'étoient, elles seroient des surfaces (n). *Or, les extré-* N. 9.
mités AD, BC, &c. d'une surface AC* Fig. 3.
ne sont point des surfaces; puisque si elles étoient des surfaces, par exemple AF, GC, &c. elles auroient des extrémités AD & EF, &c. BC & GH, &c. & par conséquent, elles ne seroient point celles de la surface AC, mais ce seroit leurs extrémités AD, BC, &c. qui le seroient. Ainsi, les extrémités d'une surface ne sont étendues, ni en trois sens, ni en deux sens. Cependant elles sont étendues, puisque les surfaces l'étant en deux sens, (n) *il faut nécessairement que ce qui ter-* N. 9.
mine l'un de ces deux sens soit étendu en l'autre. Donc elles ne sont étendues qu'en un sens; & par conséquent (n) *elles sont* N. 5.
des lignes. Donc C. Q. F. D.

VII.

11. On nomme *ſurface-plane* †, celle que tous les points d'une ligne droite toucheroient au même inſtant, en quelque ſens que l'on posât cette ligne ſur cette ſurface.

SCHOLIE.

12. *Lorſque l'on veut s'aſſurer qu'une ſurface eſt plane, on lui applique une regle en différens ſens; & l'on examine à chaque poſition, ſi cette regle la touche par-tout. Les ouvriers ne s'y prennent point autrement pour rectifier leurs ouvrages.*

13. On nomme *ſurface courbe*, celle que tous les points d'une ligne droite ne toucheroient point au même inſtant, ſi l'on poſoit cette ligne ſur cette ſurface en un certain ſens.

VIII.

14. On nomme *angle* ¶, l'ouverture de deux lignes qui ont un point commun.

Fig. 4. *L'ouverture des lignes BA * & BC*

† La ſurface plane ſe nomme un *plan*; & il faut remarquer qu'Euclide ne conſidere que ces ſurfaces.

¶ L'angle que l'on définit ici ſe nomme *angle-plan*, pour le diſtinguer d'un angle d'un autre genre, dont il n'eſt parlé qu'au onzieme Livre.

qui ont le point B commun, est un angle.

IX.

15. On nomme *côtés* d'un angle les deux lignes qui le forment.

*Les lignes BA * & BC, sont les* côtés *de l'angle B.* Fig. 4.

16. On nomme *sommet* d'un angle, le point qui est commun à ses côtés.

*Le point B * qui est commun aux lignes BA & BC, est le* sommet *de l'angle* B. Fig. 4.

SCHOLIE I.

17. *Lorsque plusieurs angles ont le même sommet, on les indique par leurs côtés; parce que la lettre qui est à leur sommet n'en désigneroit aucun en particulier. Ainsi, pour indiquer l'angle qui est à la droite de la ligne AB *, on dit,* Fig. 5. l'angle formé par les lignes AB & BC; *& pour indiquer celui qui est à la gauche de la même ligne, on dit,* l'angle formé par les lignes A B & B D. *Mais on abrege ordinairement cette expression, en disant seulement* l'angle A B C, *pour indiquer le premier; &* l'angle A B D, *pour indiquer le second. Remarquez que lorsqu'on se sert de cette expression abré-*

gée, la seconde lettre est toujours celle du sommet de l'angle dont il s'agit.

SCHOLIE II.

Fig. 4. 18. *Si l'on fait tourner la ligne BC* autour du point B, de maniere que ce point soit toujours l'extrémité commune des lignes BA & BC, plus le point C s'éloignera du point A, plus l'ouverture de ces lignes sera grande; & plus il s'en approchera, moins elle le sera. Ainsi, la grandeur de cette ouverture dépend de la position respective des lignes qui la for-*
N. 14. *ment. Mais* (n) *cette ouverture est un*
N. 15. *angle dont* (n) *ces lignes sont les côtés. Donc la grandeur d'un angle dépend de la position respective de ses côtés; & par conséquent, quelque augmentation, ou diminution, que l'on fasse aux côtés d'un angle, on n'augmente, ni ne diminue cet angle; puisque ni cette augmentation, ni cette diminution, ne changent la position respective de ses côtés.*

X.

19. On nomme réciproquement *lignes perpendiculaires*, deux lignes qui se rencontrent de maniere que l'une forme avec l'autre, prolongée s'il est nécessaire, deux angles égaux.

La ligne AB * *qui forme avec la ligne DC deux angles égaux ABC & ABD, est* perpendiculaire *à cette ligne DC.* Fig. 6.

20. On nomme réciproquement *lignes obliques*, deux lignes qui se rencontrent de maniere que l'une forme avec l'autre, prolongée s'il est nécessaire, deux angles inégaux.

La ligne AB * *qui forme avec la ligne DC deux angles inégaux ABC & ABD, est* oblique *à cette ligne DC.* Fig. 5.

21. On nomme *angle droit*, celui dont l'un des côtés est perpendiculaire à l'autre.

L'angle A * *est* droit. Fig. 7.

XI.

22. On nomme *angle obtus*, celui qui est plus grand, c'est-à-dire plus ouvert, qu'un angle droit.

L'angle B * *est* obtus. Fig. 8.

XII.

23. On nomme *angle aigu*, celui qui est plus petit, c'est-à-dire moins ouvert, qu'un angle droit.

L'angle C * *est* aigu. Fig. 9.

XIII.

24. On nomme *terme*, l'extrémité d'une étendue.

XIV.

25. On nomme *figure*, une étendue qui est terminée de tous les côtés.

26. On nomme *figures égales*, celles qui contiennent des espaces égaux.

SCHOLIE.

27. *Il ne faut point confondre les figures* égales *avec les figures* semblables. *Par exemple, une figure de trois côtés qui contient autant d'espace qu'une de quatre, est* égale *à cette figure de quatre côtés, & ne lui est point* semblable. *Un petit cercle au contraire est* semblable *à un grand, & ne lui est point* égal. *On verra au sixieme Livre les conditions que des figures doivent avoir pour être* semblables.

XV.

28. On nomme *cercle*, une figure plane qui est terminée par une seule ligne, dont tous les points sont également éloignés d'un certain point de cette figure.

Fig. 10. *La figure X * est un* cercle.

29. On nomme *circonférence* † d'un cercle, la ligne qui le termine.

† Le nom de *circonférence* se donne non-seulement à la ligne qui termine un cercle, mais aussi à toute ligne qui termine une surface quelconque. Une circonférence se nomme aussi un *périmetre*, une *périférie*, & un *circuit*.

*La ligne ABDE * est la* circonférence *du cercle X.* Fig. 10.

30. On nomme *arc* de cercle, une partie quelconque de la circonférence d'un cercle.

*La partie, par exemple AB *, de la circonférence du cercle X, est un* arc *de cercle.* Fig. 10.

31. On nomme *degré*, un arc de cercle qui est la 360me. partie de la circonférence d'un cercle : *minute*, un arc de cercle qui est la 60me. partie d'un degré : *seconde*, un arc de cercle qui est la 60me. partie d'une minute : *tierce*, un arc de cercle qui est la 60me. partie d'une seconde ; & ainsi de suite.

XVI.

32. On nomme *centre* d'un cercle, le point qui est également éloigné de tous les points de la circonférence de ce cercle.

*Le point C * est le* centre *du cercle X.* Fig. 10.

XVII.

33. On nomme *diametre* d'un cercle, une ligne droite quelconque qui passe par le centre de ce cercle, & est terminée de part & d'autre par sa circonférence.

Fig. 10. *La ligne AD* * *est un* diametre *du cercle X.*

34. On nomme *rayon* d'un cercle, une ligne droite quelconque qui est tirée du centre de ce cercle à sa circonférence.

Fig. 10. *La ligne CB* * *est un* rayon *du cercle X.*

COROLLAIRE.

35. *Il suit des Nos.* 28, 32, 33. & 34. *Premierement, que* tous les diametres d'un même cercle sont égaux : *secondement, que* le rayon d'un cercle est la moitié de son diametre : *troisiemement*, enfin, que tous les rayons d'un même cercle sont égaux.

XVIII.

36. On nomme *demi-cercle*, une figure plane qui est terminée par la moitié de la circonférence d'un cercle, & par son diametre.

Fig. 11. *La figure Y* * *est un* demi-cercle.

SCHOLIE.

Fig. 12. 37. *Si une ligne droite AB* * *ayant l'une quelconque A de ses extrémités fixe, fait une révolution entiere autour de cette extrémité, chacun de ses autres points*

D, F, &c. décrit une circonférence de cercle : si elle ne fait que la moitié d'une révolution, chacun de ses autres points ne décrit que la moitié d'une circonférence : si elle ne fait que le tiers d'une révolution, chacun de ses autres points ne décrit que le tiers d'une circonférence ; & ainsi de suite. Or, on peut toujours considérer un angle quelconque BAC, comme ayant été formé par une ligne droite AC, qui après avoir été posée sur une autre AB, s'en seroit écartée vers C en tournant autour du point fixe A, qui est le sommet de cet angle, & en décrivant avec ses autres points E, G, &c. des arcs de cercle DE, FG, &c. compris entre ces deux mêmes lignes, & qui ont ce même sommet pour centre. Donc :

Premierement. *Si différens arcs de cercles, qui sont compris entre les côtés AB & AC d'un angle quelconque BAC, ont chacun pour centre le sommet A de cet angle, le premier DE est même partie de la circonference du cercle dont AD est le rayon, que le second FG l'est de la circonférence du cercle dont AF est le rayon, que le troisieme HI l'est de la circonférence du cercle dont AH est le rayon ; & ainsi de suite. Par conséquent, tous ces arcs sont* semblables ; *c'est-à-dire, sont* *chacun d'un même nombre de degrés.*

Secondement. *Si l'un quelconque des arcs* Dk, *F*m, *&c. d'un angle BAO, est d'autant de degrés que l'un quelconque des arcs* kl, mn, *&c. d'un autre angle OAP, ces deux angles sont égaux; puisqu'alors le chemin que la ligne AO est supposée avoir fait pour s'avancer de B en O, en tournant autour du point fixe A, est parfaitement égal à celui que la ligne AP est aussi supposée avoir fait pour aller de O en P, en tournant autour du même point fixe A. Par conséquent, si l'un quelconque des arcs D*l, *F*n, *&c. d'un angle BAP, est de deux fois autant de degrés que l'un quelconque des arcs D*k, *F*m, *&c. d'un autre angle BAO, le premier angle est double du second: si l'un quelconque des arcs DE, FG, &c. d'un angle BAC, est de trois fois autant de degrés que l'un quelconque des arcs D*k, *F*m, *&c. d'un autre angle BAO, le premier angle est triple du second; & ainsi de suite.*

Or, puisque tous les arcs d'un même angle sont semblables, que deux angles sont égaux, lorsque les arcs de l'un & de l'autre sont chacun d'un même nombre de degrés, & qu'enfin un angle est double, triple, quadruple, &c. d'un autre, sui-

vant que les arcs du premier ſont de deux fois, de trois fois, de quatre fois, &c. autant de degrés que les arcs du dernier; la grandeur d'un angle eſt toujours déterminée par le nombre des degrés que l'un quelconque des arcs de cet angle contient. Par conſéquent, la meſure naturelle d'un angle, eſt un arc de cercle quelconque compris entre les côtés de cet angle, & décrit de ſon ſommet pris pour centre; & le nombre des degrés de cet arc eſt la valeur de ce même angle.

Par exemple, la meſure *de l'angle BAC, eſt celui des arcs DE, FG, &c. que l'on veut; & le nombre des degrés que cet arc contient, eſt la* valeur *de cet angle.*

COROLLAIRE.

38. *Il ſuit de cette ſcholie, qu'*un angle droit eſt de 90 degrés.

Démonſt. *Lorſqu'un angle eſt droit, l'arc de cercle qui eſt décrit de ſon ſommet, & compris entre ſes côtés, eſt le quart de la circonférence d'un cercle. Or* (n) *le quart de la circonférence d'un cercle eſt de 90 degrés. Donc un angle droit eſt de 90 degrés.* N. 31.

XX.

39. On nomme *figure rectiligne*, celle qui n'eſt terminée que par des lignes droites.

On tire la dénomination des figures, du nombre de leurs côtés, ou de celui de leurs angles. Or, lorsque l'on tire la dénomination d'une figure, du nombre de ses côtés, on nomme :

XXI. XXII. & XXIII.

40. *Trilatere*, ou *triligne*, une figure qui a trois côtés ; *quadrilatere*, ou *quadriligne*, celle qui en a quatre ; *figure de vingt côtés*, celle qui en a vingt ; *de cent côtés*, celle qui en a cent ; & en général, *multilatere*, celle qui en a plusieurs.

Et lorsque l'on tire la dénomination d'une figure, du nombre de ses angles, on nomme :

41. *Trigone*, ou *triangle*, une figure qui a trois angles : *tétragone*, celle qui en a quatre : *pentagone*, celle qui en a cinq : *exagone*, celle qui en a six : *eptagone*, celle qui en a sept : *octogone*, celle qui en a huit : *ennéagone*, celle qui en a neuf : *décagone*, celle qui en a dix : *endécagone*, celle qui en a onze : *dodécagone*, celle qui en a douze : *pentédécagone*, celle qui en a quinze ; & en général *polygone*, celle qui en a plusieurs.

On tire aussi la dénomination des triangles, de leurs côtés, ou de leurs angles. Or, lorsque l'on tire de ses côtés la dénomination

nomination d'un triangle, on nomme :

XXIV.

42. *Triangle équilatéral*, celui dont tous les côtés ſont égaux.

*Le triangle A * eſt* équilatéral. Fig. 13.

XXV.

43. *Triangle iſoſcelle*, celui qui a deux côtés égaux.

*Le triangle B * eſt* iſoſcele. Fig. 14.

XXVI.

44. *Triangle ſcalêne*, celui dont tous les côtés ſont inégaux.

*Le triangle C * eſt* ſcalêne. Fig. 15.

Et lorſque l'on tire de ſes angles la dénomination d'un triangle, on nomme :

XXVII.

45. *Triangle ortogone*, ou *rectangle*, celui qui a un angle droit.

*Le triangle A * eſt* rectangle. Fig. 16.

XXVIII.

46. *Triangle ambligone*, ou *obtus-angle*, celui qui a un angle obtus.

*Le triangle B * eſt* obtuſangle. Fig. 17.

XXIX.

47. *Triangle oxigone*, ou *acutangle*, celui dont tous les angles ſont aigus.

*Le triangle C * eſt* acutangle. Fig. 18.

48. On nomme *hypotenuse*, le côté d'un triangle rectangle, qui est opposé à l'angle droit de ce triangle.

49. On nomme *angle extérieur* d'un triangle, un angle formé par le prolongement de l'un des côtés de ce triangle.

Fig. 19. *L'angle ABC* * *est un angle* extérieur *du triangle DAB.*

A l'égard de la dénomination des quadrilateres, elle dépend tout à la fois, & de leurs côtés, & de leurs angles. Ainsi l'on nomme:

XXX.

50. *Quarré*, un quadrilatere dont tous les côtés sont égaux, & dont tous les angles sont droits.

Fig. 20. *La figure A* * *est un* quarré.

XXXI.

51. *Quarré long*, un quadrilatere dont les seuls côtés opposés sont égaux, & dont tous les angles sont droits.

Fig. 21. *La figure B* * *est un* quarré long.

XXXII.

52. *Rhombe*, ou *lozange*, un quadrilatere dont tous les côtés sont égaux, mais dont les angles ne sont pas droits.

Fig. 22. *La figure C* * *est un* rhombe.

XXXIII.

53. *Rhomboïde*, un quadrilatere dont

les seuls côtés opposés sont égaux, & dont les angles ne sont pas droits.

*La figure D * est un* rhomboïde. Fig. 23.

XXXIV.

54. On nomme *trapeze*, tout quadrilatere différent des quatre que l'on vient de définir.

XXXV.

55. On nomme *lignes paralleles*, celles dont tous les points des unes sont également éloignés de tous les points correspondans des autres.

*Les lignes AB * & CD sont* paralleles. Fig. 24.

COROLLAIRE.

56. *Il suit de cette définition, que* des lignes paralleles ne se rencontrent point.

57. On nomme *parallélogramme*, toute figure plane dont les côtés opposés sont paralleles.

SCHOLIE.

58. *Il est démontré au N°. 127, que les côtés opposés du* quarré, *du* quarré long, *du* rhombe *&* *du* rhomboïde, *sont paralleles. Ainsi, ces quatre figures sont des* parallélogrammes; *& comme les deux premieres ont tous leurs angles droits, on les appelle des* parallélogrammes rectangles, *ou seulement, des* rectangles.

Il faut même remarquer, que quoique toute figure plane dont les côtés opposés sont paralleles soit un parallélogramme, cependant on ne donne ordinairement cette dénomination qu'aux quatre figures précédentes.

59. On nomme *diagonale* d'un quadrilatere, une ligne droite tirée de l'un quelconque des angles de ce quadrilatere à l'angle opposé de ce même quadrilatere.

Fig. 25. *La ligne AC * est la* diagonale *du quadrilatere DB.*

60. Enfin, on nomme *complément* d'un parallélogramme, deux parallélogrammes formés de part & d'autre de la diagonale du premier, par deux lignes paralleles à ses côtés, chacune à chacun; & qui ont un point commun entr'elles & cette même diagonale.

Fig. 25. *Les parallélogrammes DF * & FB sont les* complémens *du parallélogramme DB.*

DEMANDES.

On demande qu'il soit permis:

Premierement, de tirer une ligne droite d'un point quelconque à quelque autre point que l'on veuille; *& par conséquent*, de prolonger une ligne droite autant qu'on le veut.

Secondement, de décrire un cercle de quelque point que l'on veuille prendre pour centre, & avec quelque rayon que l'on veuille.

61. *Troisiemement*, enfin, de prendre indifféremment l'une pour l'autre, deux quantités égales.

AXIOMES.

I.

62. Les quantités qui sont égales chacune à une même quantité, sont égales entr'elles.

II.

63. Les quantités égales étant ajoutées à des quantités égales, forment des sommes égales.

III.

64. Les quantités égales étant retranchées de quantités égales, laissent des restes égaux.

IV.

65. Les quantités égales étant ajoutées à des quantités inégales, forment des sommes inégales.

V.

66. Les quantités égales étant retranchées de quantités inégales, laissent des restes inégaux.

VI.

67. Les quantités qui ſont doubles, triples, quadruples, &c. de quantités égales, ſont égales.

VII.

68. Les quantités qui ſont les moitiés, les tiers, les quarts, &c. de quantités égales, ſont égales.

VIII.

69. Deux lignes droites, ou deux figures planes, qui étant poſées l'une ſur l'autre ne ſe ſurpaſſent point, c'eſt-à-dire, ſe couvrent réciproquement, ſont égales.

COROLLAIRE.

70. *Il ſuit de cet axiome : Premierement, que* ſi deux lignes droites égales ſont poſées l'une ſur l'autre, de maniere que l'une des extrémités de la premiere ſoit ſur l'une des extrémités de la ſeconde, l'autre extrémité de la premiere ſera ſur l'autre extrémité de la ſeconde.

71. *Secondement, que* ſi deux angles égaux ſont poſés l'un ſur l'autre, de maniere que le ſommet du premier étant ſur le ſommet du ſecond, l'un des côtés du premier ſoit ſur l'un des côtés du ſecond,

l'autre côté du premier sera sur l'autre côté du second.

IX.

72. Une quantité est égale à la somme de toutes ses parties; & par conséquent, plus grande qu'aucune de ses parties.

COROLLAIRE.

73. *Il suit de cet axiome, que* la somme des produits de toutes les parties d'une quantité multipliées chacune par un même multiplicateur, est égale au produit de cette même quantité multipliée aussi par ce même multiplicateur.

X.

74. Deux lignes droites qui ont deux points communs, sont posées l'une sur l'autre, & ne font qu'une seule ligne droite.

COROLLAIRE.

75. *Il suit de cet axiome : Premierement, que* deux lignes droites ne se rencontrent qu'en un point. *Secondement, que* deux lignes droites ne ferment point un espace.

PROPOSITION I.

PROBLÊME.

76. *Décrire ſur une ligne droite donnée, un triangle équilatéral.*

Fig. 26. IL faut décrire ſur la ligne droite AB * un triangle équilatéral.

Conſtruction. Avec la même ligne AB priſe pour rayon, décrivez du point A pris pour centre, un cercle DCB; & du point B pris pour centre, un autre cercle ACE. Du point C commune ſection des circonférences de ces deux cercles, tirez aux points A & B les lignes droites CA & CB. Le triangle ACB que ces lignes formeront avec la ligne AB, ſera équilatéral.

Démonſt. Les lignes AB & AC ſont
N. 35. égales (n), puiſque [c] elles ſont rayons
N. 35. du même cercle DCB. Or (n), les lignes AB & BC ſont auſſi égales; puiſque [c] elles ſont rayons du même cercle ACE.
N. 62. Donc (n), les lignes AB, AC, & BC
N. 42. ſont égales; & par conſéquent (n), le triangle ACB qu'elles forment, eſt équilatéral. Donc C. Q. F. F.

SCHOLIE.

SCHOLIE.

77. Pour avoir le point C, il ſuffit de décrire avec la ligne A B priſe pour rayon, & des points A & B pris pour centres, deux arcs qui ſe coupent réciproquement.* Fig. 26.

USAGE.

78. On peut ſe ſervir du triangle équilatéral pour meſurer une diſtance inacceſſible; par exemple, la largeur d'une riviere. Il faut pour cela décrire ſur une planche un triangle équilatéral ABC, & s'en ſervir de cette maniere:* Fig. 27.

On poſe horizontalement le triangle ABC, & l'on dirige ſon côté AC de maniere qu'il ſoit parallele au lit de la riviere. En regardant enſuite d'alignement au côté AB, on obſerve un point D au-delà de cette riviere; & d'alignement au côté AC, un autre point F éloigné de cinq à ſix toiſes du point A. On fait mettre un piquet en A, & un autre en F. On tranſporte enſuite le triangle ABC vers E; & l'on fait enſorte d'y trouver un point c *où l'on puiſſe poſer ce même triangle, de maniere qu'en regardant d'alignement au côté* ca, *le piquet F empêche de voir le piquet A; & d'alignement au côté* cb, *on voye le même point précédent D. Lorsque l'on est parvenu à trouver ce point C, les rayons visuels AD, Ac & cD forment un triangle ADc qui est équilatéral, & dont on peut mesurer le côté Ac. Or, il est démontré que dans un triangle équilatéral, le quarré de la perpendiculaire est triple de celui de la moitié du côté. Ainsi, lorsque l'on connoît le côté Ac, il est facile de trouver la valeur de la perpendiculaire DG; de laquelle si l'on ôte la distance HG du bord de la riviere à la ligne Ac, le reste DH est la largeur demandée.*

PROPOSITION II.

PROBLÊME.

79. *Tirer d'un point donné, une ligne droite qui soit égale à une autre.*

Fig 28. IL faut tirer du point C * une ligne droite qui soit égale à la ligne droite AB.

Const. Avec un rayon égal à la ligne AB, & du point C pris pour centre, décrivez un cercle EFD. Du même point C, tirez à un point quelconque D de la circonférence de ce cercle, une ligne droite CD. Cette ligne sera égale à la ligne AB.

Démonst. La ligne CD est [c] un rayon du cercle EFD : & [c] le rayon de ce cercle est égal à la ligne AB. Donc (n) la ligne CD est égale à la ligne AB ; N. 35.
& par conséquent C. Q. F. F.

SCHOLIE.

80. *Il suffit de prendre avec un compas la longueur de la ligne AB **; de poser ensuite l'une des pointes de ce compas au point C ; de marquer avec l'autre un point D ; & de tirer de ce point C au point D une ligne droite CD.* Fig. 28.

PROPOSITION III.

PROBLÊME.

81. *Diviser une ligne droite en deux parties, dont l'une soit égale à une autre ligne droite plus petite que la premiere.*

Fig. 29. IL faut diviser la ligne droite AB * en deux parties, dont l'une soit égale à la ligne droite CD, qui est plus petite que la ligne AB.

Const. Avec un rayon égal à la ligne CD, & de l'une des extrémités de la ligne AB, prise pour centre (par exemple, du point A) décrivez un cercle EFG. La circonférence de ce cercle divisera la ligne AB au point F, comme il est demandé.

Démonst. La partie AF de la ligne AB est [c] un rayon du cercle EFG : & [c] le rayon de ce cercle est égal à la ligne
N. 62. CD. Donc (n) la partie AF de la ligne AB est égal à la ligne CD ; & par conséquent C. Q. F. F.

SCHOLIE.

82. *Il suffit de prendre avec un compas la longueur de la ligne CD ; de poser en-*

ſuite l'une des pointes de ce compas à l'une des extrémités A ou B de la ligne AB, & de marquer avec l'autre pointe un point F ſur cette ligne.

PROPOSITION IV.

THÉORÊME.

83. *Si deux triangles ont un angle égal à un angle, & les côtés qui forment ce premier angle égaux à ceux qui forment ce ſecond angle, chacun à chacun : ils auront auſſi le troiſieme côté égal au troiſieme côté ; les autres angles égaux aux autres angles, chacun à chacun, & la ſurface égale à la ſurface.*

SI dans les triangles ABC * & DEF l'angle A eſt égal à l'angle D, le côté AB au côté DE, & le côté AC au côté DF ; le côté BC ſera égal au côté EF, l'angle B à l'angle E, l'angle C à l'angle F, & le triangle ABC au triangle DEF †. Fig. 30.

Conſt. Poſez par penſée le triangle ABC ſur le triangle DEF, de maniere que le point A étant ſur le point D, le côté AC ſoit ſur le côté DF.

† Voyez le N. 26.

Démonst. Le côté AB tombera sur le
N. 71. côté DE (n), puisque [H] l'angle A est
égal à l'angle D. Le point B tombera sur
N. 70. le point E (n), puisque [H] le côté AB
est égal au côté DE. Enfin, le point C
N. 70. tombera sur le point F (n), puisque [H]
le côté AC est égal au côté DF. Or, puisque le point A étant [c] sur le point D, le point B tombe sur le point E, & le point C sur le point F; les triangles ABC & DEF se couvrent réciproque-
N. 69. ment. Donc (n), le côté BC est égal au côté EF, l'angle B à l'angle E, l'angle C à l'angle F, & le triangle ABC au triangle DEF; & par conséquent C. Q. F. D.

COROLLAIRE.

84. Il suit de ce théorême, que *si une ligne droite divise en deux parties égales un angle quelconque d'un triangle équilatéral, ou l'angle formé par les côtés égaux d'un triangle isoscele : elle divisera en deux parties égales le côté de ce triangle qu'elle rencontrera, & lui sera perpendiculaire.*

Si dans le triangle équilatéral ou isos-
Fig. 31. cele ABC *, la ligne droite BD divise
l'angle ABC en deux parties égales ABD & CBD; elle divisera aussi le côté AC

en deux parties égales DA & DC, & lui sera perpendiculaire.

Démonst. Dans les triangles BDA & BDC, l'angle ABD est égal [H] à l'angle CBD, le côté BA au côté BC [H], & le côté BD commun; ainsi (n) le côté N. 83.
DA est égal au côté DC, & l'angle BDA à l'angle BDC. Or, puisque le côté DA est égal au côté DC, le côté AC est divisé en deux parties égales; & puisque l'angle BDA est égal à l'angle BDC, la ligne BD est perpendiculaire à ce même côté (n). Donc C. Q. F. D. N. 19.

USAGE.

85. *On peut se servir de cette proposition, de la maniere suivante, pour mesurer une distance AB * qui n'est accessible* Fig. 32.
que par ses extrémités A & B.

On choisit dans la campagne un point C d'où l'on puisse voir les extrémités A & B de cette distance, & aller directement à chacune. On pose un graphometre † *à ce point C. On dirige l'une des regles de cet instrument vers le point A, & l'autre vers le point B, afin d'avoir la grandeur de l'angle C formé par les deux rayons visuels CA & CB. Enfin, on mesure ces*

† Le *graphometre* est un instrument fait exprès pour mesurer les angles sur le terrein.

deux rayons visuels. On se retire ensuite en un endroit commode. On y forme un angle c *égal à l'angle C. On fait les côtés* ca *&* cb *de cet angle égaux aux côtés CA & CB de l'angle C, chacun à chacun; & du point* a *au point* b, *on tire la ligne droite* ab.

N. 83. *Or* (n), *cette ligne est égale à la distance inaccessible AB; puisque* [c] *les triangles ABC &* abc *ont l'angle C égal à l'angle* c, *& les côtés CA & CB qui forment le premier, égaux aux côtés* ca *&* cb *qui forment le second, chacun à chacun. Ainsi, si l'on mesure la ligne* ab, *ce sera la même chose que si l'on mesuroit la distance AB.*

Il est plus commode de rapporter sur le papier le triangle ABC par le moyen d'une échelle, que de le rapporter sur le terrein; & cette derniere maniere fait également connoître la valeur de la distance AB; parce que le côté ab *du triangle rapporté contient autant de parties de l'échelle, que la distance AB contient de fois la mesure dont on s'est servi pour mesurer les rayons visuels CA & CB, comme on le démontre par la sixieme proposition du sixieme Livre.*

PROPOSITION V.

THÉORÊME.

86. *Si dans un triangle deux côtés sont égaux, les angles qui leur sont opposés seront aussi égaux.*

SI dans le triangle ABC * le côté BA est égal au côté BC, l'angle C sera égal à l'angle A. Fig. 32

Const. Supposez qu'une ligne droite BD divise l'angle ABC en deux parties égales ABD & CBD.

Démonst. Dans les triangles BDB & BDA, l'angle CBD est égal [c] à l'angle ABD, le côté BC au côté BA [H], & le côté BD commun. Ainsi (n) l'angle C N. 83. est égal à l'angle A; & par conséquent C. Q. F. D.

COROLLAIRE.

87. Il suit de ce théorême, que *dans un triangle équilatéral, tous les angles sont égaux.*

PROPOSITION VI.

1° THÉORÊME.

88. *Si dans un triangle deux angles sont égaux, les côtés qui leur sont opposés seront aussi égaux.*

Fig. 33. SI dans le triangle ABC * l'angle A est égal à l'angle ACB, le côté BC sera égal au côté BA.

Const. Prolongez le côté AB vers E, à volonté. Tirez du point C aux points D & E pris à volonté sur la ligne AE, l'un au-dessous du point B & l'autre au-dessus, les lignes droites CD & CE.

Démonst. Si le côté BC n'étoit point égal au côté BA, il seroit égal à quelque ligne DA plus petite que ce côté, ou à quelque ligne EA plus grande que ce même côté. Or :

Premierement, le côté BC n'est point égal à une ligne DA plus petite que le côté BA; puisque s'il l'étoit, les triangles ABC & ADC, qui [H] ont l'angle ACB égal à l'angle A, & le côté AC commun, auroient aussi le côté BC égal au côté DA,
N. 83. & seroient par conséquent égaux (n); ce

qui n'eſt point, puiſque le premier ſurpaſſe le ſecond, du triangle DCB.

Secondement, le côté BC n'eſt point non plus égal à une ligne EA plus grande que le côté BA; puiſque s'il l'étoit, les triangles ABC & AEC, qui [H] ont l'angle ACB égal à l'angle A, & le côté AC commun, auroient auſſi le côté BC égal au côté EA, & ſeroient par conſéquent égaux (n); ce qui n'eſt point encore, N. 83. puiſque le premier differe du ſecond, du triangle BEC.

Donc le côté BC eſt égal au côté BA, & par conſéquent C. Q. F. D.

COROLLAIRE.

89. Il ſuit de ce théorême, que *ſi dans un triangle tous les angles ſont égaux, ce triangle ſera équilatéral.*

PROPOSITION VIII. †

THÉORÊME.

90. *Si deux triangles ont les côtés égaux aux côtés, chacun à chacun : ils auront aussi les angles égaux aux angles, chacun à chacun, & la surface égale à la surface.*

Fig. 34. SI dans les triangles ABC * & DEF le côté AC est égal au côté DF, le côté AB au côté DE, & le côté BC au côté EF ; l'angle A sera égal à l'angle D, l'angle B à l'angle E, l'angle C à l'angle F, & le triangle ABC au triangle DEF.

Const. Du point D pris pour centre, & avec le côté DE pris pour rayon, décrivez un cercle EG. Du point F pris pour centre, & avec le côté EF pris pour rayon, décrivez un autre cercle EH. Posez ensuite par pensée le triangle ABC sur le triangle DEF, de maniere que le point A étant sur le point D, le côté AC soit sur le côté DF.

Démonst. Premierement, le point C N. 70. tombera sur le point F (n) ; puisque [H]

† Nous supprimons la Proposition VII. parce qu'elle est comprise dans la VIII.

le côté AC eſt égal au côté DF. Secondement, le point B extrémité du côté AB, tombera (n) ſur la circonférence N. 35.
du cercle EG; puiſque [c] le point A ſera ſur le point D, & que [H] le côté AB eſt égal au côté DE qui [c] eſt le rayon de ce cercle. Mais (n), le même N. 35.
point B extrémité du côté BC, tombera auſſi ſur la circonférence du cercle EH; puiſque [D] le point C ſera ſur le point F, & que [H] le côté BC eſt égal au côté EF qui [c] eſt le rayon de cet autre cercle. Donc le point B tombera ſur un point commun à ces deux circonférences, & par conſéquent ſur le point E, puiſque ces deux circonférences n'ont au deſſus du côté DF que ce ſeul point de commun. Or, puiſque le point A étant [c] ſur le point D; le point C tombe ſur le point F, & le point B ſur le point E; les triangles ABC & DEF ſe couvrent réciproquement. Donc (n), N. 69.
l'angle A eſt égal à l'angle D, l'angle B à l'angle E, l'angle C à l'angle F, & le triangle ABC au triangle DEF; & par conſéquent C. Q. F. D.

PROPOSITION IX.

PROBLÊME.

91. *Diviser un angle en deux parties égales.*

Fig. 35. IL faut diviser l'angle ABC * en deux parties égales.

Const. Du point B pris pour centre, & avec un rayon BD pris à volonté, décrivez deux arcs qui coupent, l'un en un point D, & l'autre en un point E, les côtés BA & BC de l'angle ABC. Des points D & E pris pour centres, & avec le même rayon BD (ou avec un autre pris aussi à volonté, mais cependant plus grand que la moitié de la distance du point D au point E) décrivez deux arcs qui se coupent en un point F. Enfin, tirez du point B au point F une ligne droite BF. Elle divisera l'angle ABC en deux parties ABF & CBF qui seront égales.

Pour la démonstration, tirez du point F aux points D & E, les lignes droites FD & FE.

Démonst. Dans les triangles DBF & EBF, le côté BD est égal [c] au côté BE, le côté FD au côté FE [c], & le côté BF commun. Ainsi (n) l'angle ABF est égal à l'angle CBF, & par conséquent C. Q. F. F. N. 90.

COROLLAIRE.

92. Il suit de ce problême, que *pour diviser un angle en quatre parties égales, il faut commencer par le diviser en deux parties égales, & diviser ensuite chacune de ces deux parties égales en deux autres qui le soient aussi. Et ainsi de suite, pour le diviser en 8, en 16, en 32, &c.*

SCHOLIE.

93. *Il est souvent nécessaire de diviser un angle en un nombre déterminé de parties égales. Mais lorsque ce nombre n'est pas 2, 4, 8, 16, & ainsi de suite en doublant, le problême n'est plus du ressort de la Géométrie élémentaire; & il est démontré qu'on ne peut le résoudre que par celle des lignes courbes. On le nomme alors le problême de la* trisection *de l'angle. Il a été fort recherché par les anciens Géometres.*

PROPOSITION X.

PROBLÊME.

94. *Diviser une ligne droite en deux parties égales.*

Fig. 36. IL faut diviser en deux parties égales la ligne droite AB *.

Conſt. Des points A & B pris pour centres, & avec un rayon AC pris à volonté (mais cependant plus grand que la moitié de la ligne AB) décrivez deux arcs qui ſe coupent en un point C. Des mêmes points A & B pris pour centres, & avec le même rayon AC, (ou avec un autre AD pris auſſi à volonté, mais cependant toujours plus grand que la moitié de la ligne AB) décrivez deux arcs qui ſe coupent en un point D. Enfin, tirez du point C au point D une ligne droite CD. Elle diviſera la ligne AB en deux parties AE & EB qui ſeront égales.

Pour la démonſtration, tirez du point C aux points A & B, les lignes droites CA & CB. Tirez auſſi du point D aux mêmes points A & B, les lignes droites DA & DB.

Démonſt.

Démonst. Premierement, dans les triangles ACD & BCD, le côté CA est égal [c] au côté CB, le côté DA au côté DB [c], & le côté CD commun. Ainsi (n) l'angle ACD est égal à l'angle BCD. N. 90. Secondement, dans les triangles ACE & BCE, l'angle ACD est égal [D] à l'angle BCD, le côté CA au côté CB [c], & le côté CE commun : ainsi (n), le N. 83. côté AE est égal au côté EB ; & par conséquent C. Q. F. F.

COROLLAIRE.

95. Il suit de ce problême, que *pour diviser une ligne droite en quatre parties égales, il faut commencer par la diviser en deux parties égales, & diviser ensuite chacune de ces deux parties égales en deux autres qui le soient aussi ; & ainsi de suite, pour la diviser en 8, en 16, en 32, &c.*

Nous donnerons au sixieme Livre la maniere de diviser une ligne droite en tel nombre de parties égales que l'on voudra.

PROPOSITION XI.

PROBLÊME.

96. *D'un point donné sur une ligne droite, élever une perpendiculaire à cette ligne.*

Fig. 37. Il faut élever du point C * une perpendiculaire à la ligne droite AB.

Const. Du point C pris pour centre, & avec un rayon CD pris à volonté, décrivez deux arcs qui coupent, l'un en un point D & l'autre en un point E, la ligne AB prolongée s'il est nécessaire. Des points D & E pris pour centres, & avec un rayon DF pris aussi à volonté (mais cependant plus grand que le rayon CD), décrivez deux arcs qui se coupent en un point F. Enfin, tirez du point F au point C, une ligne droite FC, elle sera perpendiculaire à la ligne AB.

Pour la démonstration, tirez du point F aux points D & E, les lignes droites ED & FE.

Démonst. Dans les triangles DFC & EFC, le côté CD est égal [c] au côté CE, le côté FD au côté FE [c] & le côté FC commun. Ainſi (n), l'angle FCD eſt égal à l'angle FCE & par conſéquent (n) la ligne FC eſt perpendiculaire à la ligne AB. Donc C. Q. F. F. N. 90. N. 19.

PROPOSITION XII.

PROBLÊME.

97. *D'un point donné hors d'une ligne droite, abaiſſer une perpendiculaire à cette ligne.*

IL faut abaiſſer du point C * une perpendiculaire à la ligne droite AB. Fig. 38.

Conſt. Du point C pris pour centre, & avec un rayon CD pris à volonté, (mais cependant plus grand que la diſtance de ce point à la ligne AB) décrivez deux arcs qui coupent, l'un en un point D, & l'autre en un point E, cette ligne prolongée s'il eſt néceſſaire. Des points D & E pris pour centres, & avec le même rayon CD, (ou avec un autre DF pris auſſi à volonté, mais cependant plus grand que la moitié de la diſtance du point D au point E) décrivez deux arcs qui ſe coupent en un point F. Enfin, tirez du point C par le point F une ligne droite CG, elle ſera perpendiculaire à la ligne AB.

Pour la démonſtration, tirez du point C aux points D & E, les lignes droites CD & CE. Tirez auſſi du point F aux mêmes points D & E, les lignes droites FD & FE. Prolongez enſuite la ligne CG jusqu'au point F.

Démonſt. Premierement, dans les triangles DCF & ECF, le côté CD eſt egal [c] au côté CE, le côté FD au côté FE [c], & le côté CF commun; ainſi
N. 90. (n) l'angle DCF eſt égal à l'angle ECF. Secondement, dans les triangles DCG & ECG, l'angle DCF eſt égal [c] à l'angle ECF, le côté CD au côté CE [c],
N. 83. & le côté CG commun. Ainſi (n) l'angle CGD eſt égal à l'angle CGE; & par con-
N. 19. ſéquent (n) la ligne CG eſt perpendiculaire à la ligne AB. Donc C. Q. F. F.

PROPOSITION XIII.

THÉORÊME.

98. *Une ligne droite qui en rencontre une autre indirectement, forme avec elle, prolongée s'il est nécessaire, deux angles dont la somme est égale à celle de deux angles droits.*

LA somme des angles ABC * & ABD est égale à celle de deux angles droits. Fig. 39 & 40.

La ligne AB est perpendiculaire, ou oblique à la ligne CD.

Premier cas. *Lorsque la ligne AB * est perpendiculaire à la ligne CD.* Fig. 39.

Démonst. Les angles ABC & ABD sont deux angles droits (n); ainsi leur somme est égale à celle de deux angles droits. N. 22.

Second cas. *Lorsque la ligne AB * est oblique à la ligne CD.* Fig. 40.

Const. Du point B, élevez (n) une perpendiculaire BE à la ligne CD. N. 96.

Démonst. La somme des deux angles ABC & ABD est égale (n) à celle des trois angles EBC, EBA & ABD; celle N. 72.

N. 72. de ces trois angles eſt égale (n) à celle des deux angles EBC & EBD ; & [c] ces deux derniers angles ſont deux angles
N. 62. droits : donc (n) la ſomme des deux angles ABC & ABD eſt égale à celle de deux droits ; & par conſéquent C. Q. F. D.

COROLLAIRE.

99. Il ſuit de ce théorême, que *la ſomme de tous les angles qui ſont formés par pluſieurs lignes droites tirées d'un même point & en tout ſens, eſt égale à celle de quatre angles droits.*

Fig. 41. La ſomme de tous les angles ACB *, BCD, DCE, ECF & FCA eſt égale à celle des quatre angles droits.

Conſt. Prolongez l'un des côtés de ces angles, par exemple le côté AC, vers G à volonté.

Démonſt. La ſomme des angles ACB
N. 98. & BCG eſt égale (n) à celle de deux angles droits ; & celle des angles ACF &
N. 98. FCG l'eſt auſſi (n) : ainſi la ſomme des quatre angles ACB, BCG, ACF & FCG eſt égale à celle de quatre angles droits. Mais la ſomme de ces quatre mêmes an-
N. 72. gles ACB, BCG, &c. eſt auſſi égale (n) à celle des angles ACB, BCD, DCE,
N. 62. ECF & FCA ; donc (n) la ſomme de ces

derniers angles est égale à celle de quatre angles droits; & par conséquent C. Q. F. D.

USAGE.

100. *Puisque* (n) *un angle droit est de 90 degrés, la somme de deux angles qui sont formés par une ligne droite qui en rencontre une autre indirectement, est de 180 degrés* (n). *Ainsi, lorsque l'on connoît la valeur de l'un quelconque de ces deux angles, il est facile de trouver celle de l'autre; & par conséquent on peut se servir de cette proposition, de la maniere suivante, pour connoître sur le terrein la valeur d'un angle dans lequel on ne peut point entrer; par exemple, celle d'un angle ABC* formé par le concours de deux murs BA & BC.* N. 38. N. 98. Fig. 44.

Par le moyen d'une corde, ou de quelque autre instrument, on prolonge à volonté vers D, l'alignement de l'un AB de ces deux murs. On mesure † ensuite l'angle DBC formé par le prolongement

† La maniere la plus sûre de mesurer sur le terrein ces sortes d'angles, est de joindre leurs côtés par une ligne droite quelconque DC, afin d'avoir un triangle DBC: de mesurer ensuite, le plus exactement qu'il est possible, les côtés de ce triangle: & de chercher enfin la valeur de l'angle proposé DBC, comme nous l'avons enseigné dans notre trigonométrie.

BD & par l'autre mur ; & la différence† de cet angle à 180 degrés, est la valeur de l'angle cherché ABC.

Si l'on trouve que l'angle DBC soit, par exemple, de 117 degrés, on en conclura que l'angle ABC est de 63 degrés.

PROPOSITION XIV.

THÉORÊME.

101. *Si deux lignes droites qui sont tirées de l'extrémité d'une troisieme forment avec cette troisieme deux angles dont la somme soit égale à celle de deux angles droits, ces deux lignes ne feront qu'une seule ligne droite.*

Fig. 42. SI la somme des angles ABC* & ABD est égale à celle de deux angles droits, les deux lignes droites BC & BD ne font qu'une seule ligne droite CBD.

Const. Tirez du point B aux points E & F pris à volonté, l'un au-dessus de la ligne BD, & l'autre au-dessous, les lignes droites BE & BF.

† La différence d'un angle à 180 degrés, se nomme le *supplément* de cet angle.

Démonst.

Démonst. Si les deux lignes BC & BD ne faisoient point une seule ligne droite CBD, la ligne BC étant prolongée vers D, passeroit ou au-dessus de la ligne BD, ou au-dessous.

Or premierement, si elle passoit au-dessus, & étoit, par exemple la ligne CBE, la somme des angles ABC & ABE seroit égale à celle de deux angles droits (n). Mais [H] celle des angles ABC N. 98.
&ABD lui est aussi égale. Donc (n), la N. 61.
somme des angles ABC & ABE seroit égale à celle des angles ABC & ABD. Ce qui n'est point, puisque la premiere differe de la derniere de l'angle EBD.

Secondement, si elle passoit au-dessous, & étoit, par exemple la ligne CBF, la somme des angles ABC & ABF seroit égale à celle de deux angles droits (n). N. 98.
Mais [H] celle des angles ABC & ABD lui est aussi égale. Donc (n) la somme des N. 62.
angles ABC & ABF seroit égale à celle des angles ABC & ABD. Ce qui n'est point encore, puisque la premiere surpasse la derniere de l'angle FBD.

Donc la ligne BC étant prolongée vers D, passe sur la ligne BD; & par conséquent ces deux lignes ne font qu'une seule ligne droite CBD. Donc C. Q. F. D.

PROPOSITION XV.

THÉORÊME.

102. *Deux lignes droites qui ſe coupent, forment quatre angles, dont chacun eſt égal à celui qui lui eſt oppoſé au ſommet.*

Fig. 43. LES angles AEC * & BED ſont égaux: & il en eſt de même des angles CEB & AED.

Démonſt. Premierement, la ſomme des angles AEC & CEB eſt égale à celle
N. 98. de deux angles droits (n). Or (n), celle
N. 98. des angles CEB & BED l'eſt auſſi. Donc
N. 52. (n) la ſomme des angles AEC & CEB eſt égale à celle des angles CEB & BED; & par conſéquent, ſi l'on retranche le même angle CEB de chacune de ces deux ſommes, les reſtes qui ſeront les angles
N. 64. AEC & BED ſeront égaux (n).

Secondement, on démontre de la même maniere, que les angles CEB & AED ſont auſſi égaux; & par conſéquent C. Q. F. D.

PROPOSITION XVI.

THÉORÊME.

103. *L'angle extérieur d'un triangle eſt plus grand qu'aucun des angles intérieurs de ce même triangle, qui ſont oppoſés à cet angle.*

L'Angle extérieur BCD * du triangle ABC, eſt plus grand qu'aucun des angles intérieurs ABC & BAC qui lui ſont oppoſés. Fig. 45.

Premierement. *Pour l'angle ABC.*

Conſt. Diviſez (n) le côté BC en deux parties égales EB & EC. Tirez du point A par le point E, une ligne droite indéfinie AF. Faites (n) la ligne EF égale à la ligne EA. Enfin, tirez du point F au point C une ligne droite FC. N. 94. N. 79.

Démonſt. L'angle BCD eſt (n) plus grand que l'angle BCF. Or (n), l'angle BCF eſt égal à l'angle ABC, puiſque dans les triangles AEB & FEC, l'angle AEB eſt égal (n) à l'angle FEC qui lui eſt oppoſé au ſommet, le côté EB au côté EC [c], & le côté EA au côté EF [c]. Donc l'angle BCD eſt plus grand que l'angle ABC. N. 72. N. 83. N. 102.

Secondement. *Pour l'angle BAC.*

N. 94. *Conſt.* Diviſez (n) le côté AC en deux parties égales GC & GA. Tirez du point B par le point G, une ligne droite in-
N. 79. définie BH. Faites (n) la ligne GH égale à la ligne GB. Enfin, tirez du point H par le point C, une ligne droite indéfinie HF.

N. 72. *Démonſt.* L'angle BCD eſt (n) plus
N. 103. grand que l'angle FCD. Or (n), l'angle FCD eſt égal à l'angle ACH qui lui eſt oppoſé au ſommet : & l'angle ACH eſt
N. 83. égal (n) à l'angle BAC ; puiſque dans les triangles HGC & BGA, l'angle HGC
N. 102. eſt égal (n) à l'angle BGA qui lui eſt oppoſé au ſommet, le côté GC au côté GA [c], & le côté GH au côté GB [c]; Donc l'angle BCD eſt plus grand que l'angle BAC.

Et par conſéquent C. Q. F. D.

PROPOSITION XVII.

THÉORÊME.

104. *La somme de deux quelconques des angles d'un triangle, est plus petite que celle de deux angles droits.*

DANS le triangle ABC *, la somme des angles, par exemple BCA & B, est plus petite que celle de deux angles droits. Fig. 46.

Const. Prolongez le côté AC vers D à volonté.

Démonst. La somme des angles BCA & BCD est (n) égale à celle de deux angles droits. Or (n), l'angle BCD qui est extérieur au triangle ABC, est plus grand que l'angle intérieur B qui lui est opposé. Donc la somme des angles BCA & B est plus petite que celle de deux angles droits; & par conséquent C. Q. F. D. N. 98. N. 103.

COROLLAIRE I.

105. Il suit de ce théorême, que *si dans un triangle l'un des angles est ou droit ou obtus, les deux autres seront aigus.*

Démonst. Si dans un triangle un angle étant ou droit ou obtus, un autre l'étoit aussi, la somme de deux des angles de ce triangle seroit aussi grande, ou plus grande que celle de deux angles droits.
N. 104. Or (n), cela ne peut point être. Donc C. Q. F. D.

COROLLAIRE II.

106. Il suit de ce corollaire, que *chaque angle d'un triangle équilatéral est aigu; & qu'il en est de même de chaque angle égal d'un triangle isoscele.*

Démonst. Premierement, si l'un des angles d'un triangle équilatéral étoit ou droit, ou obtus, chaque autre angle du même triangle le seroit aussi, puisque
N. 87. (n) tous les angles d'un triangle équila-
N. 105. téral sont égaux. Mais (n) un triangle ne peut avoir ni plus d'un angle droit, ni plus d'un angle obtus. Donc C. Q. F. 1°. D.

Secondement, si l'un des angles égaux d'un triangle isoscele étoit ou droit, ou obtus, ce triangle auroit deux angles
N. 105. droits, ou deux angles obtus. Or (n), cela ne peut point être. Donc C. Q. F. 2°. D.

COROLLAIRE III.

107. Il suit aussi de ce même corollaire, que *d'un point hors d'une ligne droite, on ne peut abaisser qu'une seule perpendiculaire à cette ligne.*

Si la ligne droite CD * est perpendiculaire à la ligne droite AB, toute autre ligne droite tirée à cette ligne AB d'un point quelconque de cette perpendiculaire, lui sera oblique. Fig. 47.

Conſt. Tirez du point C pris à volonté sur la ligne CD, à un point quelconque E de la ligne AB, une ligne droite CE.

Démonſt. Si les lignes CD & CE étoient perpendiculaires chacune à la même ligne AB, l'angle CDE seroit droit (n), N. 21. & l'angle CED le seroit aussi (n). Ainsi N. 21. le triangle ECD auroit deux angles droits. Or (n), cela ne peut point être. Donc N. 105. si la ligne CD est perpendiculaire à la ligne AB, la ligne CE ne l'est point; & par conséquent C. Q. F. D.

COROLLAIRE IV.

108. Il suit encore du même corollaire, que *si d'un point quelconque d'une ligne droite qui est oblique à une autre,*

on abaisse une perpendiculaire à cette autre ; cette perpendiculaire sera du côté auquel l'oblique forme un angle aigu avec cette autre ligne.

Fig. 48. Si d'un point quelconque C * de la ligne droite CE, qui est oblique à la ligne droite AB, on abaisse une perpendiculaire à cette ligne AB ; cette perpendiculaire sera du côté de l'angle aigu CEB.

Const. Tirez du point C à un point quelconque F de la partie AE de la ligne AB, une ligne droite CF.

Démonst. Si la perpendiculaire abaissée du point C à la ligne AB, étoit une ligne droite quelconque CF tirée du côté de l'angle obtus CEA, le triangle FCE
N. 21. auroit (n) un angle droit CFE, & [H]
N. 105. un angle obtus CEA. Or (n), un triangle ne peut point avoir un angle droit & un angle obtus. Donc la perpendiculaire abaissée du point C à la ligne AB, sera du côté de l'angle aigu CEB ; & par conséquent C. Q. F. D.

COROLLAIRE V.

109. Il suit enfin du dernier corollaire, que *si de l'un des angles d'un triangle on abaisse une perpendiculaire au côté qui est opposé à cet angle, cette perpen-*

diculaire sera dans ce triangle, si les angles adjacens à ce côté sont de même espece † ; *& hors de ce triangle, si ces mêmes angles sont de différente espece.*

Premierement, si de l'angle B * du triangle ABC, dont les angles A & BCA adjacens au côté AC sont aigus, on abaisse une perpendiculaire à ce côté, elle sera dans ce triangle. Fig. 40.

Démonst. La perpendiculaire tirée de l'angle B au côté CA, doit (n) être du côté de l'angle aigu BAC, par rapport à l'oblique BA ; & du côté de l'angle aigu BCA, par rapport à l'oblique BC. Donc elle doit rencontrer le côté AC entre les points A & C ; & par conséquent, elle doit être dans le triangle ABC. Donc C. Q. F. 1°. D. N. 108.

Secondement, si de l'angle C * du triangle FCE, dont les angles CFE & CEF adjacens au côté FE sont l'un aigu, & l'autre obtus, on abaisse une perpendiculaire à ce côté, elle sera hors de ce triangle. Fig. 41.

Démonst. La perpendiculaire tirée de l'angle C au côté FE, ne peut point (n) N. 108.

† On appelle angles *de même espece*, ceux qui sont ou tous aigus, ou tous obtus ; & angles *de différente espece*, ceux dont les uns sont aigus, & les autres obtus.

être du côté de l'angle obtus CEF, par rapport à l'oblique CE. Donc il faut qu'elle soit du côté de l'angle aigu CEB; & par conséquent hors du triangle FCE. Donc C. Q. F. 2°. D.

PROPOSITION XVIII.

THÉORÊME.

110. *Si dans un triangle un côté est plus grand qu'un autre, l'angle opposé à ce premier côté sera plus grand que l'angle opposé à cet autre côté.*

Fig. 49. SI dans le triangle ABC*, le côté BC est plus grand que le côté BA, l'angle BAC sera plus grand que l'angle C.

N. 81. *Const*. Prenez (n) sur le côté BC, une partie BD égale au côté BA. Tirez ensuite du point D au point A une ligne droite DA.

N. 72. *Démonst*. L'angle BAC est (n) plus
N. 86. grand que l'angle BAD. Or (n), l'angle BAD est égal à l'angle BDA, puisque [c] les côtés BD & BA du triangle ABD
N. 103. sont égaux: & (n) l'angle BDA qui est extérieur au triangle ADC, est plus grand que l'angle intérieur C qui lui est opposé.

Donc l'angle BAC est plus grand que l'angle C ; & par conséquent C. Q. F. D.

COROLLAIRE.

111. Il suit de ce théorême : premierement, que *dans un triangle, le plus grand angle est opposé au plus grand côté* : Secondement, que *les angles d'un triangle scalêne sont inégaux*.

PROPOSITION XIX.

THÉORÊME.

112. *Si dans un triangle un angle est plus grand qu'un autre, le côté opposé à ce premier angle, sera plus grand que le côté opposé à cet autre angle.*

SI dans le triangle ABC * l'angle A est plus grand que l'angle C, le côté BC sera plus grand que le côté BA. Fig. 50.

Démonst. Si le côté BC étoit égal au côté BA, l'angle A seroit égal à l'angle C (n) : & si le côté BC étoit plus petit que le côté BA, l'angle A seroit plus petit que l'angle C (n). Or, l'angle A n'est N. 86. N. 110.

ni égal à l'angle C, ni plus petit que l'angle C, puisque [H] il le surpasse. Donc le côté BC est plus grand que le côté BA; & par conséquent C. Q. F. D.

COROLLAIRE I.

113. Il suit de ce théorême : Premierement, que *dans un triangle, le plus grand côté est opposé au plus grand angle.* Secondement, que *si les angles d'un triangle sont inégaux, ce triangle sera scalêne.*

COROLLAIRE II.

114. Il suit aussi de ce même théorême, que *de toutes les lignes que l'on peut tirer d'un même point à une même ligne droite, la perpendiculaire est la plus courte.*

Fig. 47. La ligne droite CD * qui est perpendiculaire à la ligne droite AB, est la plus courte de toutes les lignes que l'on peut tirer du point C à cette ligne AB.

Const. Tirez du point C à un point quelconque E de la ligne AB, une ligne droite CE.

Démonst. L'angle CDE est le plus N. 105. grand angle du triangle ECD (n); puis-

que la ligne CD étant [H] perpendiculaire à la ligne AB, cet angle eſt droit (n). N. 21.
Ainſi l'oblique CE eſt oppoſée à un plus grand angle que la perpendiculaire CD; & par conſéquent (n) elle eſt plus grande N. 112.
que cette perpendiculaire. Or, la même démonſtration ſubſiſte, quelque près que le point E ſoit du point D. Donc C. Q. F. D.

PROPOSITION XX.

THÉORÊME.

115. *Dans un triangle, chaque côté eſt plus petit que la ſomme des deux autres.*

DANS le triangle ABC * la ſomme Fig. 51.
des côtés, par exemple AB & BC, eſt plus grande que le côté AC.

Conſt. Prolongez le côté AB vers D, indéfiniment. Faites (n) le prolongement N. 81.
BD égal au côté BC. Enfin, tirez du point D au point C une ligne droite DC.

Démonſt. L'angle ACD eſt (n) plus N. 72.
grand que l'angle BCD. Or (n), l'angle N. 86.
BCD eſt égal à l'angle D; puiſque [C] les côtés BD & BC du triangle CBD ſont égaux. Donc l'angle ACD eſt plus

grand que l'angle D; & par conséquent
N. 112. (n) dans le triangle ADC, le côté ABD est plus grand que le côté AC. Mais [c] ce côté ABD est la somme des côtés AB & BC du triangle ABC. Donc dans le triangle ABC, la somme des côtés AB & BC est plus grande que le côté AC; & par conséquent C. Q. F. D.

PROPOSITION XXI.

PROBLÊME.

116. *Si deux lignes droites tirées des extrémités de l'un des côtés d'un triangle se rencontrent dans ce triangle, leur somme sera plus petite que celle des deux autres côtés de ce même triangle; & l'angle qu'elles formeront sera plus grand que celui qui est formé par ces deux autres côtés.*

Fig. 52. PREMIEREMENT, dans le triangle ABC* la somme ADC des deux lignes droites AD & DC, est plus petite que la somme ABEC des deux côtés AB & BC. Secondement, l'angle ADC est plus grand que l'angle B.

Const. Prolongez l'une de ces lignes, par exemple la ligne AD, jusqu'à ce qu'elle rencontre en un point E, l'un des côtés du triangle ABC.

Démonst. Premierement, dans le triangle ABE, la somme ABE des côtés AB & BE est (n) plus grande que le côté ADE. Ainsi, si & à cette somme & à ce côté on ajoute la même ligne EC, la somme ABEC sera (n) plus grande que la somme ADEC. Pareillement, dans le triangle DEC, la somme DEC des côtés DE & EC est (n) plus grande que le côté DC. Ainsi, si & à cette somme & à ce côté on ajoute la même ligne AD, la somme ADEC sera (n) plus grande que la somme ADC. Or, puisque la somme ABEC est plus grande que la somme ADEC, & que cette somme ADEC est plus grande que la somme ADC, la somme ABEC est plus grande que la somme ADC.

N. 115. N. 65. N. 115. N. 65.

Secondement, l'angle ADC qui est extérieur au triangle DEC, est (n) plus grand que l'angle intérieur DEC qui lui est opposé. Or, cette angle DEC qui est extérieur au triangle ABE, est aussi (n) plus grand que l'angle intérieur B qui lui est opposé. Donc l'angle ADC est plus grand que l'angle B. Et par conséquent C. Q. F. D.

N. 103. N. 103.

PROPOSITION XXII.

PROBLÊME.

117. *Décrire un triangle qui ait les côtés égaux à trois lignes droites données, chacun à chacune; pourvu cependant que chacune de ces lignes soit plus petite que la somme des deux autres* (n).
N. 115.

Fig. 53. IL faut décrire un triangle qui ait les côtés égaux aux lignes droites A *, B & C, chacun à chacune.

N. 79. *Conſt.* Tirez (n) une ligne droite DF, qui ſoit égale à l'une des lignes données, par exemple à la ligne A. Du point D pris pour centre, & avec un rayon égal à l'une des autres lignes données, par exemple à la ligne B, décrivez un arc de cercle EG. Du point F pris pour centre, & avec un rayon égal à la ligne C, décrivez un arc de cercle qui coupe le précédent en un point E. Enfin, tirez du point E aux points D & F, les lignes droites ED & EF. Le triangle DEF que ces lignes formeront avec la ligne DF, ſera le triangle demandé.

Démonſt. Dans le triangle DEF, le côté

côté DF est égal à la ligne A [c], le côté ED à la ligne B [c], & le côté EF à la ligne C [c]. Donc les côtés de ce triangle sont égaux aux lignes données, chacun à chacune ; & par conséquent C. Q. F. F.

USAGE.

On peut se servir de cette proposition, pour lever le plan d'un terrein quelconque. Mais comme il y a des terreins que l'on peut traverser en tel sens que l'on veut ; & d'autres au contraire dans lesquels on ne peut point entrer, cet usage a deux cas.

PREMIER CAS.

118. Lorsqu'il s'agit d'un terrein ABCDE * que l'on peut traverser en tel sens que l'on veut. Fig. 54.

On suppose que le terrein proposé est divisé en triangles ABC, CAD & DAE ; & l'on mesure les côtés de ces triangles. On fait ensuite une échelle F proportionnée à la grandeur que l'on veut donner au plan de ce terrein. Enfin, on décrit (n) N. 117.
des triangles abc, cad *&* dae, *dont chaque côté contienne autant de parties*

de l'échelle F, que chaque côté correspondant des triangles ABC, CAD & DAE contient de fois la mesure dont on s'est servi pour le mesurer; & la figure abcde *formée par les triangles* abc, cad, *&c. est le plan du terrein proposé ABCDE.*

SECOND CAS.

119. Lorsqu'il s'agit d'un terrein Fig. 55. ABCDE * dans lequel on ne peut point entrer; ou d'un terrein que l'on ne peut parcourir que vers les sommets de quelques-uns de ses angles.

On néglige deux angles à volonté, mais cependant pris de suite; par exemple, les angles E & D. On fait ensuite planter des piquets: premierement aux points I & K pris à volonté sur les côtés BA & BC de l'angle B, que nous supposons être un de ceux que l'on peut parcourir: Secondement, aux points G & M pris à volonté sur les prolongemens indéfinis des côtés AE & CD des angles A & C, que nous supposons être ceux dans lesquels on ne peut point entrer: Troisiemement, aux points H & L pris aussi à volonté sur les autres côtés AB & CB des mêmes angles. Enfin, après avoir supposé des lignes droites tirées du point I au point

K, du point G aux points A & H, & du point M aux points C & L; on mesure les côtés EA, AB, BC & CD du terrein proposé, & ceux des triangles AGH, IBK & LMC.

On fait ensuite une échelle F proportionnée à la grandeur que l'on veut donner au plan du terrein proposé. On décrit (n) *un triangle* agh *dont chaque côté contienne autant de parties de l'échelle F, que chaque côté correspondant du triangle AGH contient de fois la mesure dont on s'est servi pour le mesurer. On prolonge les côtés* ah & ga *de ce triangle, l'un vers* b *& l'autre vers* e, *jusqu'à ce que les lignes* ab & ae *contiennent aussi chacune autant de parties de cette échelle, que les côtés correspondans AB & AE du terrein contiennent de fois chacun cette mesure.* N. 117.

On décrit ensuite un triangle ibk, *de la même maniere dont on a décrit le triangle* agh, *en donnant à chacun de ses côtés le nombre des parties de l'échelle F, qui lui convient; & l'on prolonge vers* c *le côté* bk, *jusqu'à ce que la ligne* bc *contienne autant de parties de l'échelle qu'elle doit en contenir. On décrit aussi le triangle* lmc, *de la même maniere dont on a décrit les précédens; & l'on prolonge* *aussi son côté* m c *vers* d, *jusqu'à ce que la ligne* c d *contienne le nombre des parties de l'échelle qu'elle doit contenir. Enfin, du point* e *on tire au point* d *la ligne* e d; & *la figure* a b c d e *est le plan du terrein proposé ABCDE.*

A l'égard de la démonstration de ces deux pratiques, elle dépend de la 5me & 6me *propositions du* 6me *Livre.*

PROPOSITION XXIII.

PROBLÊME.

120. *Décrire sur une ligne droite donnée, un angle qui ait pour sommet un point donné sur cette même ligne, & qui soit égal à un angle donné.*

Fig 56. IL faut décrire sur la ligne droite AB *, un angle qui ait le point D pour sommet, & soit égal à l'angle C.

Const. Tirez une ligne droite EF qui rencontre en deux points quelconques E & F, les côtés de l'angle C, prolongés s'il N. 117. est nécessaire. Décrivez ensuite (n) un triangle DHG qui ait le côté DG égal †

† Si la ligne DB est plus courte que la ligne CE, on la prolonge autant qu'il est nécessaire.

à la ligne CE, le côté DH égal à la ligne CF, & le côté GH égal à la ligne EF. L'angle HDG ſera l'angle demandé.

Autre conſt. † Du point C* pris pour centre, & avec un rayon CE pris à volonté, décrivez un arc de cercle EIF, qui rencontre en deux points E & F les côtés CE & CF de l'angle C, prolongés s'il eſt néceſſaire. Du point D pris pour centre, & avec le même rayon précédent CE, décrivez un arc de cercle GKH, indéterminé vers H; mais qui rencontre en un point G la ligne AB prolongée s'il eſt néceſſaire. Du point G pris pour centre, & avec un rayon égal à la diſtance du point E au point F, décrivez un arc de cercle qui coupe le précédent en un point H. Enfin, tirez du point D par le point H une ligne droite indéfinie DH. L'angle HDG que cette ligne formera avec la ligne AB, ſera l'angle demandé. Fig. 57.

Pour la démonſtration, tirez du point E au point F une ligne droite EF; & du point G au point H, une ligne droite GH.

Démonſt. Dans les triangles DHG* & CFE, le côté DG eſt égal au côté CE [c], le côté DH au côté CF [c], Fig. 58. & 57.

† Nous donnons ces deux conſtructions, parce que la premiere eſt la plus commode ſur le terrein, & la derniere, ſur le papier.

& le côté GH au côté EF [c]. Donc
N. 90. (n) l'angle HDG est égal à l'angle C; & par conséquent C. Q. F. D.

PROPOSITION XXIV.

THÉORÊME.

121. *Si de deux triangles le premier a un angle plus grand que l'un des angles du second, & les côtés qui forment ce premier angle égaux à ceux qui forment ce second angle, chacun à chacun; il aura aussi le côté opposé à ce premier angle, plus grand que le côté opposé à ce second angle.*

Fig. 58. SI dans les triangles ABC * & DEF, l'angle B étant plus grand que l'angle DEF, le côté BA est égal au côté ED, & le côté BC au côté EF, le côté AC sera aussi plus grand que le côté DF.

N. 120. *Const.* Décrivez sur le côté ED (n), un angle DEG qui ait le point E pour sommet, & soit égal à l'angle B. Faites
N. 79. (n) la ligne EG égale au côté BC. Enfin, tirez du point G aux points D & F, des lignes droites GD & GF.

N. 72. *Démonst.* L'angle DFG est (n) plus grand que l'angle EFG. Or l'angle EFG est (n) égal à l'angle EGF, puisque [c] N. 86. EG est égal à BC, que [H] BC l'est à EF, & que par conséquent (n) les côtés EG N. 62. & EF du triangle FEG sont égaux. Enfin (n) l'angle EGF est plus grand que l'an- N. 72. gle DGF. Donc l'angle DFG est plus grand que l'angle DGF; & par conséquent (n), dans le triangle DGF, le N. 112. côté DG est plus grand que le côté DF. Mais (n) le côté AC est égal à ce côté N. 85. DG; puisque dans les triangles ABC & DEG, l'angle B est égal à l'angle DEG [c], le côté BA au côté ED [H], & le côté BC au côté EG [c]. Donc le côté AC est plus grand que le côté DF; & par conséquent C. Q. F. D.

PROPOSITION XXV.

THÉORÊME.

122. *Si de deux triangles le premier a un côté plus grand que l'un des côtés du second, & les autres côtés égaux aux autres côtés du second, chacun à chacun; il aura aussi l'angle opposé à ce premier côté, plus grand que l'angle opposé à ce second côté.*

Fig. 59. SI dans les triangles ABC * & DEF, le côté AC étant plus grand que le côté DF, le côté BA est égal au côté ED, & le côté BC au côté EF; l'angle B sera aussi plus grand que l'angle E.

Démonst. Dans les triangles ABC & DCF, le côté BA est égal [H] au côté ED, & le côté BC au côté EF [H]. Ainsi, si l'angle B étoit égal à l'angle E, le
N. 83. côté AC seroit (n) égal au côté DF; & si l'angle B étoit plus petit que l'angle E,
N. 121. le côté AC seroit (n) plus petit que le côté DF. Or, le côté AC n'est ni égal au côté DF, ni plus petit que le côté DF, puisque [H] il le surpasse. Donc l'angle B est

est plus grand que l'angle E ; & par conséquent C. Q. F. D.

PROPOSITION XXVI.

THÉORÊME.

123. *Si deux triangles ont un côté égal à un côté, & les angles adjacens à ce premier côté égaux aux angles adjacens à ce second côté, chacun à chacun : ils auront aussi le troisieme angle égal au troisieme angle ; les autres côtés égaux aux autres côtés, chacun à chacun ; & la surface égale à la surface.*

Il en sera de même, *si deux triangles ont un côté égal à un côté ; l'un des angles adjacens à ce premier côté, égal à l'un des angles adjacens à ce second côté ; & l'angle opposé à ce même premier côté, égal à l'angle opposé à ce même second côté.*

PREMIEREMENT.

SI dans les triangles ABC * & DEF, le côté AC est égal au côté DF, l'angle A à l'angle D, & l'angle C à l'angle F ; l'angle B sera égal à l'angle E, le côté AB Fig. 61.

G

au côté DE, le côté CB au côté FE, & le triangle ABC au triangle DEF †.

Conſt. Poſez par penſée le triangle ABC ſur le triangle DEF; de maniere que le point A étant ſur le point D, le côté AC ſoit ſur le côté DF.

Démonſt. Le côté AB tombera ſur le
N. 71. côté DE (n), puiſque [H] l'angle A eſt égal à l'angle D. Le point C tombera ſur
N. 70. le point F (n), puiſque [H] le côté AC eſt égal au côté DF. Enfin, le côté CB
N. 71. tombera ſur le côté FE (n), puiſque [H] l'angle C eſt égal à l'angle F. Or, puiſque le côté AC étant [C] ſur le côté DF, le côté AB tombe ſur le côté DE, & le côté CB ſur le côté FE; les triangles ABC & DEF ſe couvrent réciproque-
N. 69. ment. Donc (n) l'angle B eſt égal à l'angle E, le côté AB au côté DE, le côté CB au côté FE, & le triangle ABC au triangle DEF. Par conſéquent C. Q. F. 1°. D.

SECONDEMENT.

Fig. 61. Si dans les triangles ABC * & DEF, le côté AC eſt égal au côté DF, l'angle A à l'angle D, & l'angle B à l'angle E; l'angle C ſera égal à l'angle DFE, le côté AB au côté DE, le côté CB au côté FE,

† Voyez le N. 26.

& le triangle ABC au triangle DEF.

Conſt. Prolongez le côté DE vers H, indéfiniment. Tirez du point F aux points G & I pris à volonté ſur la ligne DH, l'un au-deſſous du point E & l'autre au-deſſus, des lignes droites FG & FI. Poſez enſuite par penſée le triangle ABC ſur le triangle DEF; de maniere que le point A étant ſur le point D, le côté AC ſoit ſur le côté DF.

Démonſt. Le côté AB tombera ſur le côté DE (n), puiſque [H] l'angle A eſt N. 71. égal à l'angle D; & le point C tombera ſur le point F (n), puiſque [H] le côté N. 70. AC eſt égal au côté DF. Ainſi il ne s'agit plus que de démontrer que le côté CB tombera ſur le côté FE.

Or, premierement, ſi le côté CB tomboit au-deſſous du côté FE, par exemple ſur la ligne FG, l'angle DGF ſeroit égal à l'angle B (n). Mais [H] l'angle B eſt N. 69. égal à l'angle DEF. Donc (n) l'angle N. 62. DGF qui eſt extérieur au triangle GEF, ſeroit égal à l'angle DEF qui lui eſt oppoſé; ce qui (n) ne peut point être. Secondement, ſi le côté CB tomboit au- N. 103. deſſus du côté FE, par exemple ſur la ligne FI, l'angle DIF ſeroit égal à l'angle B (n). Mais [H] l'angle B eſt égal à N. 69. l'angle DEF. Donc (n) l'angle DIF qui N. 62.

est intérieur au triangle EIF, seroit égal à l'angle extérieur DEF auquel il est op-
N. 103. posé; ce qui (n) ne peut point encore être.

Donc le côté CB tombera sur le côté FE. Or, puisque le côté AC étant [c] sur le côté DF, le côté AB tombe sur le côté DE, & le côté CB sur le côté FE; les triangles ABC & DEF se couvrent
N. 69. réciproquement. Donc (n) l'angle C est égal à l'angle DFE, le côté AB au côté DE, le côté CB au côté FE, & le triangle ABC au triangle DEF. Par conséquent C. Q. F. 2°. D.

USAGE.

On peut se servir de cette proposition, pour mesurer telle distance inaccessible que ce puisse être, pourvu que l'on puisse voir ses extrémités. Mais comme une distance inaccessible peut être accessible par l'une de ses extrémites, ou être entierement inaccessible, ce problême a deux cas.

PREMIER CAS.

124. Lorsque la distance inaccessible
Fig. 62. AB * que l'on veut mesurer, est accessible par l'une de ses extrémités; par exemple, par son extrémité A.

On fait planter un piquet en un point quelconque C, auquel on puisse aller di-

rectement du point A. On poſe un graphometre au point A. On dirige l'une des regles de cet inſtrument vers le point B, & l'autre vers le point C, afin d'avoir la grandeur de l'angle A, formé par les rayons viſuels AB & AC. On ôte enſuite le graphometre du point A, & l'on fait mettre un piquet à ſa place. On meſure la diſtance du point A au point C. On fait ôter le piquet du point C, & l'on y place le graphometre. Enfin, on dirige l'une des regles de cet inſtrument au point A, & l'autre au point B, afin d'avoir la grandeur de l'angle C, formé par les rayons viſuels CA & CB.

On fait enſuite une échelle G proportionnée à la grandeur que l'on veut donner au plan du triangle ABC. On tire une ligne droite DF qui contienne autant de parties de cette échelle, que la diſtance AC contient de fois la meſure dont on s'eſt ſervi pour la meſurer. On décrit † ſur cette ligne un angle D, qui ait le point D pour ſommet, & ſoit égal à l'angle A. On fait encore ſur cette même ligne un angle F, qui ait le point F pour ſommet, & ſoit égal à l'angle C. Enfin, on pro-

† Pour décrire ces angles ſur le papier, on ſe ſert ordinairement d'un inſtrument que l'on nomme un *rapporteur*.

longe s'il est nécessaire, les côtés DE & FE de ces angles, jusqu'à ce qu'ils se rencontrent en un point E; & l'on a un triangle DEF, dont le côté DE contient autant de parties de l'échelle G, que la distance AB contient de fois la mesure dont on s'est servi pour mesurer la distance AC, comme on le démontre par la quatrieme proposition du sixieme Livre.

SECOND CAS.

Fig. 63. 125. Lorsque la distance AB * que l'on veut mesurer, est entierement inaccessible.

On choisit dans la campagne deux points C & H, qui soient tels que l'on puisse aller directement de l'un à l'autre, & voir de chacun les extrémités A & B de la distance proposée. On fait mettre un piquet au point H, & un graphometre au point C. Avec cet instrument placé au point C, on prend la grandeur des angles ACH & BCH formés par les rayons visuels tirés du point C aux points A, B & H. On ôte le graphometre du point C, & l'on fait mettre un piquet à la place. On mesure la distance du point C au point H. On fait mettre le graphometre à la place du piquet H. Enfin, avec cet instrument placé à ce dernier point, on prend *la grandeur des angles BHC & AHC formés par les rayons visuels tirés du point H aux points B, A & C.*

On fait ensuite une échelle G proportionnée à la grandeur que l'on veut donner au plan du quadrilatere ABHC. On tire une ligne droite FI, qui contienne autant de parties de cette échelle, que la distance CH contient de fois la mesure dont on s'est servi pour la mesurer. On décrit sur cette ligne des angles DFI & EFI, qui aient chacun le point F pour sommet, & soient égaux l'un à l'angle ACH, & l'autre à l'angle BCH. On fait encore sur cette même ligne des angles EIF & DIF, qui aient chacun le point I pour sommet, & soient égaux l'un à l'angle BHC, & l'autre à l'angle AHC. On prolonge, s'il est nécessaire, les côtés de ces angles, jusqu'à ce qu'ils se rencontrent les uns en un point D, & les autres en un point E. Enfin, on tire du point D au point E, une ligne droite DE; & cette ligne contient autant de parties de l'échelle G, que la distance AB contient de fois la mesure dont on s'est servi pour mesurer la distance CH: comme on le démontre par les quatrieme & sixieme propositions du sixieme Livre.

Voici les raisons des opérations que nous venons de prescrire dans ce second cas.

Premierement. *Dans le triangle ACB formé par la distance proposée AB, & par les rayons visuels CA & CB, on peut observer l'angle ACB. Ainsi, on l'observe* †, *afin de construire un angle DFE de même grandeur.*

Secondement. *Le rayon visuel CA est une distance accessible par son extrémité C. Ainsi, conformément à ce que nous avons enseigné dans le premier cas, on prend un point H, & l'on observe la grandeur des angles ACH & AHC, afin de construire un triangle FDI, dont le côté FD contienne autant de parties d'une échelle G, que la distance CA contient de fois la mesure qui a servi à mesurer la distance CH.*

Troisiemement. *Enfin, le rayon visuel CB est aussi une distance accessible par son extrémité C. Ainsi, par le même principe, on prend un point H, & l'on observe la grandeur des angles BCH & BHC, afin de construire encore un trian-*

† Dans la pratique, nous n'avons point fait observer immédiatement l'angle ACB; parce que l'on déduit sa grandeur, de celle des angles ACH & BCH.

gle FEI, dont le côté FE contienne aussi autant de parties de cette échelle G, que la distance CB contient de fois la mesure qui a servi à mesurer la distance CH.

Or, par ce moyen, on parvient à construire un triangle DEF, dont le côté DE contient autant de parties de l'échelle G, que le côté AB du triangle ABC, c'est-à-dire, la distance proposée, contient de fois la mesure dont on s'est servi pour mesurer la distance CH : comme on le démontre par la sixieme proposition du sixieme Livre.

PROPOSITION XXVII.

THÉORÊME.

126. *Si deux lignes droites étant coupées par une troisieme, les angles alternes* † *sont égaux, ces deux lignes seront paralleles.*

Fig. 64. SI les angles alternes, par exemple AEF * DFE sont égaux, les lignes droites AB & CD seront paralleles.

Const. Prenez sur la ligne AB un point
N. 81. G, à volonté. Prenez ensuite (n) sur la ligne CD, prolongée s'il est nécessaire, & de l'autre côté de la ligne EF par rapport au point G, une partie FH égale à la partie EG. Enfin, tirez du point G au point F, & du point E au point H, des lignes droites GF & EH.

Démonst. Dans les triangles GEF & HFE, l'angle AEF est égal [H] à l'angle DFE, le côté EG au côté FH [C],

† On appelle *angles alternes*, deux des angles intérieurs, ou deux des angles extérieurs, qui sont formés par une ligne qui en coupe deux autres; & qui sont pris l'un d'un côté de cette ligne coupante, & l'autre de l'autre côté de cette même ligne.

& le côté EF commun. Ainsi (n), le côté GF est égal au côté EH ; & par conséquent les points G & E de la ligne AB, sont également éloignés des points F & H de la ligne CD, qui [c] leur correspondent. Or, la même démonstration subsiste, à quelque point † de la ligne AB que l'on prenne le point G. Donc tous les points de la ligne AB sont également éloignés de tous les points correspondans de la ligne CD ; & par conséquent (n), ces deux lignes sont paralleles. Donc C. Q. F. D. N. 83. N. 55.

COROLLAIRE.

127. Il suit de ce théorême, que *les côtés opposés d'un quarré, d'un quarré long, d'un rhombe & d'un rhomboïde, sont paralleles.*

Dans le quarré A *, le quarré long B, le rhombe C, & le rhomboïde D, les côtés HG & EF sont paralleles, & les côtés HE & GF le sont aussi. Fig.

† Si l'on prenoit le point G sur la partie EB, les angles compris par les côtés égaux des triangles de la démonstration, n'en seroient pas moins égaux ; puisqu'ils seroient les supplémens des angles AEF & DFE qui sont donnés égaux. Ainsi, l'on a raison de dire, que *la même démonstration subsiste, à quelque point, &c.*

Const. Tirez la diagonale EG de chacune de ces figures.

Démonst. Dans les triangles EHG &
N. 50, 51, 52 & 53. EFG, le côté HE est (n) égal au côté
GF, le côté HG au côté EF, & le
N. 90. côté EG commun. Ainsi (n), l'angle
HGE est égal à l'angle FEG, & l'angle
HEG à l'angle FGE. Or, puisque les
angles HGE & FEG qui sont alternes,
sont égaux, les côtés HG & EF sont pa-
N. 126. ralleles (n) : & puisque les angles HEG
& FGE qui sont aussi alternes, sont aussi
égaux, les côtés HE & GF sont aussi pa-
N. 126. ralleles (n). Donc C. Q. F. D.

PROPOSITION XXVIII.

THÉORÊME.

118. *Si deux lignes droites étant coupées par une troisieme, l'un quelconque des angles extérieurs est égal à l'intérieur qui lui est opposé, ces deux lignes seront paralleles.*

Il en sera de même, *si la somme de deux quelconques des angles intérieurs pris chacun du même côté de la ligne coupante, est égale à celle de deux angles droits.*

PREMIEREMENT.

SI l'angle extérieur, par exemple BGE*, est égal à l'angle intérieur DHE qui lui est opposé, les lignes droites AB & CD seront paralleles. Fig. 62.

Démonst. L'angle AGF est (n) égal à l'angle BGE qui lui est opposé au sommet, & [H] l'angle BGE est égal à l'angle DHE. Ainsi (n), l'angle AGF est égal à l'angle DHE. Or (n), puisque les angles AGF & DHE qui sont alternes, sont égaux, les lignes AB & CD sont paralleles; & par conséquent C. Q. F. 1°. D. N. 102. N. 62. N. 112.

SECONDEMENT.

Si la somme des deux angles intérieurs,
Fig. 66. par exemple BGF * & DHE, est égale à celle de deux angles droits, les lignes droites AB & CD seront paralleles.

Démonst. La somme des angles AGF
N. 98. & BGF est (n) égale à celle de deux angles droits; & [H] celle des angles BGF
N. 61. & DHE l'est aussi. Ainsi (n), la somme des angles AGF & BGF est égale à celle des angles BGF & DHE; & par conséquent, si l'on retranche le même angle BGF de chacune de ces deux sommes, les restes qui seront les angles AGF &
N. 64. DHE, seront égaux (n). Or (n), puis-
N. 126. que les angles AGF & DHE qui sont alternes sont égaux, les lignes AB & CD sont paralleles; & par conséquent C. Q. F. 2°. D.

COROLLAIRE.

129. Il suit de ce théorême, que *si deux lignes droites sont perpendiculaires chacune à une même ligne droite, elles seront paralleles.*

PROPOSITION XXIX.

THÉORÊME.

130. *Si deux lignes droites & paralleles ſont coupées par une troiſieme ligne droite, les angles alternes ſeront égaux; chaque angle extérieur ſera égal à l'intérieur qui lui eſt oppoſé; & la ſomme de deux quelconques des intérieurs pris chacun du même côté de la ligne coupante, ſera égale à celle de deux angles droits.*

PREMIEREMENT.

SI les lignes droites AB * & CD ſont paralleles, les angles alternes, par exemple AIF & DKE, ſeront égaux. Fig. 67.

Conſt. Prenez ſur la ligne AB un point G à volonté. Prenez enſuite (n) ſur la ligne CD, prolongée s'il eſt néceſſaire, & de l'autre côté de la ligne EF par rapport au point G, une partie KH égale à la partie IG. Enfin, tirez du point G au point K, & du point I au point H, des lignes droites GK & IH. N. 81.

Démonſt. Dans les triangles GIK & HKI, le côté IK eſt commun : le côté IG eſt [c] égal au côté KH : & le côté

GK l'eſt au côté IH ; puiſque les points G & I, K & H, étant [c] des points correſpondans de deux lignes AB & CD qui ſont paralleles [H], la diſtance du
N. 55. point G au point K eſt (n) égale à celle
N. 90. du point I au point H. Ainſi (n), l'angle AIF eſt égal à l'angle DKE ; & par conſéquent C. Q. F. 1°. D.

SECONDEMENT.

L'angle extérieur, par exemple BIE, ſera égal à l'intérieur DKE qui lui eſt oppoſé.

N. 101. *Démonſt*. L'angle BIE eſt (n) égal à l'angle AIF qui lui eſt oppoſé au ſommet : & l'angle AIF eſt [D] égal à ſon alterne DKE ; puiſque [H] les lignes AB & CD
N. 61. ſont paralleles. Donc (n) l'angle BIE eſt égal à l'angle DKE ; & par conſequent C. Q. F. 2°. D.

TROISIEMEMENT.

Enfin, la ſomme des angles intérieurs, par exemple BIF & DKE, ſera égale à celle de deux angles droits.

Démonſt. La ſomme des angles BIF
58. & BIE eſt (n) égale à celle de deux angles droits. Or, puiſque [H] les lignes AB & CD ſont paralleles, l'angle BIE qui eſt extérieur, eſt [D] égal à l'intérieur

DKE

DKE qui lui eſt oppoſé. Donc (n), la ſomme des angles BIF & DKE eſt égale à celle de deux angles droits; & par conſéquent C. Q. F. 3°. D. N. 61.

COROLLAIRE.

131. Il ſuit de la premiere partie de ce théorême, que *ſi une ligne droite eſt perpendiculaire à l'une quelconque de deux lignes droites qui ſont paralleles, elle ſera auſſi perpendiculaire à l'autre:* & de la ſeconde partie de ce même théorême, que *ſi de deux lignes droites paralleles, l'une eſt perpendiculaire à une troiſieme ligne droite, l'autre le ſera auſſi.*

PROPOSITION XXX.

THÉORÊME.

132. *Si deux lignes droites ſont paralleles chacune à une même ligne, elles le ſeront auſſi entre elles.*

SI les lignes droites AB * & CD ſont paralleles chacune à une même ligne EF, elles le ſeront auſſi entr'elles. Fig. 68.

Conſt. Tirez une ligne droite quelconque GH, qui coupe les lignes AB,

EF & CD, prolongées s'il est nécessaire.
N. 130. *Démonst.* L'angle AIH est (n) égal à son alterne FKG, puisque [H] les lignes AB & EF sont paralleles; l'angle FKG
N. 102. est (n) égal à l'angle EKH qui lui est opposé au sommet; enfin, l'angle EKH
N. 130. est aussi (n) égal à son alterne DLG, puisque [H] les lignes EF & CD sont
N. 62. aussi paralleles. Donc (n) l'angle AIH est égal à l'angle DLG. Or, puisque les angles AIH & DLG qui sont alternes, sont égaux, les lignes AB & CD sont
N. 126. paralleles (n); & par conséquent C. Q. F. D.

PROPOSITION XXXI.

PROBLÊME.

133. *D'un point donné hors d'une ligne droite, tirer une parallele à cette ligne.*

Fig. 69. IL faut tirer du point F * une parallele à la ligne droite AB.

Const. Tirez du point F à un point quelconque E de la ligne AB, une ligne
N. 120. droite EF. Décrivez ensuite (n) sur cette ligne FE un angle DFE, qui ayant le

point F pour sommet, soit égal & alterne à l'angle AEF. Le côté FD de cet angle, prolongé s'il est nécessaire, sera la parallele demandée.

Démonst. Les angles alternes DFE & AEF sont égaux [c]. Donc (n) les lignes AB & CFD sont paralleles; & par conséquent C. Q. F. F. N. 126.

USAGE.

134. *On peut se servir de cette proposition, de la maniere suivante, pour tirer par un point quelconque F * une parallele à une ligne droite inaccessible AB.* Fig. 70.

On choisit sur cette ligne deux points quelconques H & G que l'on puisse reconnoître. On pose ensuite un graphometre au point F; & après y avoir fait (n) *toutes les mêmes opérations que si l'on vouloit mesurer la distance inaccessible HG, on rapporte sur le papier le triangle HFG, de la même maniere dont on a rapporté en DFE le triangle ACB de la figure 63.* N. 125.

Lorsque l'on est parvenu à avoir sur le papier le triangle HFG, on y prend avec un rapporteur la grandeur de l'angle HGF. On dirige ensuite l'une des regles du graphometre au point G; & l'on fait tourner l'autre vers D, jusqu'à ce qu'elle forme *avec la premiere un angle DFG égal à cet angle HGF. Enfin, on fait planter un piquet D dans la direction de cette derniere regle; & par ce moyen, on a deux points F & D de la parallele demandée. Ainsi, si l'on fait passer par ces deux points une ligne droite CFD, elle sera cette parallele.*

PROPOSITION XXXII.

THÉORÊME.

135. *L'angle extérieur d'un triangle est égal à la somme de deux angles intérieurs de ce même triangle, qui sont opposés à cet angle.*

Fig. 71. L'ANGLE extérieur BCD * du triangle ABC, est égal à la somme des angles intérieurs B & A qui lui sont opposés.

N. 133. *Const.* Du point C, tirez (n) une parallele CE au côté AB.

N. 72. *Démonst.* L'angle BCD est (n) la somme des angles BCE & ECD. Mais puisque [c] les lignes AB & CE sont paralleles, ces angles BCE & ECD sont

N. 130. (n) égaux, l'un à son alterne B, & l'autre à l'intérieur A qui lui est opposé. Donc (n) l'angle BCD est égal à la somme N. 62. des angles B & A; & par conséquent C. Q. F. D.

COROLLAIRE I.

136. Il suit de ce théorême, que *la somme de tous les angles d'un triangle, est égale à celle de deux angles droits.*

Dans le triangle ABC *, la somme de Fig. 71. tous les angles BCA, B & A, est égale à celle de deux angles droits.

Const. Prolongez le côté AC vers D, à volonté.

Démonst. La somme des angles BCA & BCD est (n) égale à celle de deux an- N. 98. gles droits. Mais (n) l'angle BCD qui N. 135. est extérieur au triangle ABC, est égal à la somme des angles intérieurs B & A qui lui sont opposés. Donc (n) la somme N. 62. des angles BCA, B & A est égale à celle de deux angles droits; & par conséquent C. Q. F. D.

COROLLAIRE II.

137. Il suit de ce corollaire, que *si la somme de deux angles quelconques d'un triangle, est égale à celle de deux*

angles quelconques d'un autre triangle ; le troisieme angle du premier triangle sera égal au troisieme angle du second.

Fig. 72. Si dans les triangles ABC * & DEF, la somme des angles, par exemple A & C, est égal à celle des angles, par exemple D & F ; l'angle B sera égal à l'angle E.

Démonst. La somme des angles A, B,
N. 62. & C est (n) égale à celle des angles D,
N. 136. E & F ; puisque (n) elles valent chacune deux angles droits : & la somme des angles A & C est [H] égale à celle des an-
N. 64. gles D & F. Ainsi (n), si l'on retranche la troisieme somme de la premiere, & la quatrieme de la seconde, les restes seront égaux. Or, ces restes sont l'angle B & l'angle E. Donc l'angle B est égal à l'angle E ; & par conséquent C. Q. F. D.

COROLLAIRE III.

138. Il suit aussi de ce premier corollaire, que *si dans un triangle isoscele, l'angle formé par les côtés égaux est un angle droit, les autres angles seront chacun la moitié d'un angle droit.*

Fig. 73. Si dans le triangle isoscele ABC * l'angle A est droit, les angles B & C seront chacun la moitié d'un angle droit.

Démonst. La somme des angles A, B

& C eſt (n) égale à celle de deux angles N. 134.
droits. Ainſi, puiſque [H] l'angle A eſt droit, les angles B & C valent enſemble un angle droit; & par conſéquent chacun la moitié d'un angle droit, puiſque (n) ils ſont égaux. Donc C. Q. F. D. N. 86.

COROLLAIRE IV.

139. Il ſuit encore de ce même premier corollaire, que *dans un triangle équilatéral, chaque angle eſt les deux tiers d'un angle droit.*

Démonſt. Dans un triangle équilatéral, tous les angles ſont égaux. (n) Ainſi (n), N. 87. N. 1.
ils ſont chacun le tiers de deux angles droits; & par conſéquent les deux tiers d'un angle droit. Donc C. Q. F. D.

COROLLAIRE V.

140. Il ſuit enfin de ce même premier corollaire, que *la ſomme de tous les angles d'une figure rectiligne quelconque, eſt égale à celle de deux fois autant d'angles droits, moins quatre, que cette figure a d'angles, ou de côtés.*

La ſomme de tous les angles A * B, C, Fig. 74.
&c. par exemple du pentagone ABCDE,

eſt égale à celle de deux fois cinq angles droits, moins quatre, c'eſt-à-dire, à celle de ſix angles droits.

Conſt. Du point F pris à volonté dans le polygone propoſé, tirez à chaque angle A, B, C, &c. des lignes droites FA, FB, FC, FD & FE.

Démonſt. Les lignes FA, FB, FC, &c. diviſent en cinq triangles AFB, BFC, CFD, &c. le polygone propoſé; puiſque ce polygone a cinq côtés: & la ſomme de tous les angles de ces cinq triangles, eſt égale à celle de dix angles
N. 136. droits; puiſque (n) la ſomme de tous les angles d'un triangle eſt égale à celle de deux angles droits. Mais la ſomme de tous les angles de ces cinq triangles, ſurpaſſe celle de tous les angles A, B, C, &c. du polygone propoſé, de la ſomme de tous les angles qui ont leur ſommet
N. 99. au point F, laquelle (n) eſt égale à celle de quatre angles droits. Donc, ſi de la ſomme de dix angles droits, on retranche celle de quatre angles droits, le reſte qui ſera la ſomme de ſix angles droits, ſera auſſi celle de tous les angles A, B, C, &c. du polygone propoſé; & par conſéquent C. Q. F. D.

USAGE.

USAGE.

141. *Lorsque l'on connoît dans un triangle la valeur de deux angles quelconques, il est facile de trouver celle du troisieme; puisque* (n) *cette derniere valeur est toujours la différence de la premiere, à la somme de deux angles droits, c'est-à-dire* (n), *à 180 degrés.* N. 136.
N. 38.

Ainsi, si l'on sait que dans le triangle ABC * *l'angle A est, par exemple de 50 degrés, & l'angle C de 75; on en conclura que l'angle B est de 55.* Fig. 75.

PROPOSITION XXXIII.

THÉORÊME.

142. *Si dans un quadrilatere deux côtés sont égaux & paralleles, les deux autres le seront aussi.*

SI dans le quadrilatere DB *, les côtés AB & DC sont égaux & paralleles, les côtés AD & BC le seront aussi. Fig. 76.

Const. Tirez la diagonale AC.

Démonst. Dans les triangles ABC & CDA, l'angle BAC est (n) égal à son alterne DCA, puisque [H] les côtés AB N. 130.

& DC sont paralleles ; le côté AB est égal [H] au côté DC ; & le côté AC est
N. 83. commun. Ainsi (n), le côté AD est égal au côté BC ; & l'angle DAC à l'angle BCA. Or, puisque l'angle DAC est égal à l'angle BCA qui lui est alterne, ce même côté AD que nous venons de conclure égal au côté BC, lui est aussi paral-
N. 126. lele (n) ; & par conséquent C. Q. F. D.

PROPOSITION XXXIV.

THÉORÊME.

143. *Dans un parallélogramme, les côtés opposés sont égaux ; les angles opposés le sont aussi ; & la diagonale le divise en deux parties égales.*

PREMIEREMENT.

Fig. 76. DANS le parallélogramme DB *, le côté AB est égal au côté DC, & le côté AD au côté BC.

Const. Tirez la diagonale AC.

Démonst. Dans les triangles ABC & CDA, le côté AC est commun ; l'angle
N. 130. BAC est (n) égal à son alterne DCA,
N. 57. puisque (n) les côtés AB & DC sont pa-
N. 130. ralleles ; & l'angle BCA est aussi (n) égal

à son alterne DAC, puisque (n) les côtés N. 57.
BA & AD sont aussi paralleles. Donc (n) N. 123.
le côté AB est égal au côté DC, & le côté AD au côté BC; & par conséquent C.Q.F. 1°. D.

SECONDEMENT.

L'angle DAB est égal à l'angle DCB; & l'angle B à l'angle D.

Démonst. Premierement, les angles DAC & BAC sont [D] égaux aux angles BCA & DCA, chacun à chacun. Or, l'angle DAB est la somme des deux premiers; & l'angle DCB est celle des deux derniers. Donc (n) l'angle DAB est égal N. 63.
à l'angle DCB.

Secondement, dans les triangles ABC & CDA, le côté AC est commun, l'angle BAC est égal à l'angle DCA [D], & l'angle BCA à l'angle DAC [D]. Donc (n) l'angle B est égal à l'angle D; & par N. 123.
conséquent C. Q. F. 2°. D.

TROISIEMEMENT.

Enfin, la diagonale AC divise le parallélogramme DB en deux parties égales ABC & CDA.

Démonst. Dans les triangles ABC & CDA, le côté AC est, &c. Donc (n) le N. 123.
triangle ABC est égal au triangle CDA;

& par conséquent, C. Q. F. 3°. D.

COROLLAIRE I.

144. Il suit de la premiere partie de ce théorême, que *si dans un parallélogramme deux côtés de suite sont égaux, tous les côtés seront égaux.*

Fig. 65. Si dans le parallélogramme C * les côtés de suite, par exemple EF & EH, sont égaux, tous les côtés HG, EF, EH & FG seront égaux.

N. 143. *Démonst.* Le côté HG est (n) égal au côté EF qui lui est opposé; le côté EF est égal [H] au côté EH; & le côté EH est
N. 143. égal (n) au côté FG qui lui est opposé.
N. 62. Donc (n) tous les côtés sont égaux; & par conséquent, C. Q. F. D.

COROLLAIRE II.

145. Il suit de la seconde partie de ce même théorême, que *si dans un parallélogramme un angle est droit, ce parallélogramme sera rectangle.*

Fig. 65. Si dans le parallélogramme B * l'angle, par exemple E est un angle droit, ce parallélogramme sera rectangle.

Démonst. La somme des angles E, F, G & H est égale à celle de quatre angles
N. 140. droits (n). Or [H], l'angle E est droit;
N. 143. & (n) l'angle G l'est aussi, puisqu'il est

opposé à l'angle E. Donc la somme des deux autres angles H & F est égale à celle de deux angles droits. Mais (n) ces deux autres angles sont égaux, puisqu'ils sont opposés. Donc ils sont deux angles droits. Ainsi, tous les angles du parallélogramme B sont des angles droits; & par conséquent (n) ce parallélogramme est rectangle. Donc, C. Q. F. D. N. 143. N. 58.

COROLLAIRE III.

146. Il suit enfin de ces deux corollaires, que *si un parallélogramme a deux côtés de suite égaux, & un angle droit, ce parallélogramme sera un quarré.*

Si dans le parallélogramme A * les côtés de suite, par exemple HG & HE, sont égaux; & si l'angle, par exemple H est un angle droit, ce parallélogramme sera un quarré. Fig. 65.

Démonst. Dans le parallélogramme A tous les côtés HG, GF, HE & EF sont égaux (n); puisque [H] les deux de suite HG & HE le sont: & tous les angles H, G, F & E sont droits (n), puisque [H] l'angle H est droit. Ainsi (n) ce parallélogramme est un quarré; & par conséquent, C. Q. F. D. N. 144. N. 145. N. 50.

PROPOSITION XXXV.

THÉORÊME.

147. *Les parallélogrammes qui ſont ſur une même* baſe †, *entre mêmes parallelès, ont des ſurfaces égales.*

Fig. 77. LEs parallélogrammes DB * & DF qui ſont ſur une même baſe DC, & entre mêmes paralleles DC & AF, ſont égaux.

Démonſt. Dans les triangles DAE &
N. 143. CBF, le côté DA eſt (n) égal au côté CB, puiſque [H] le quadrilatere DB eſt un parallélogramme. Par la même raiſon,
N. 130. l'angle intérieur DAE eſt (n) égal à l'extérieur CBF auquel il eſt oppoſé. Enfin,
N. 130. l'angle extérieur DEA eſt auſſi (n) égal à l'intérieur CFB qui lui eſt oppoſé, puiſque [H] le quadrilatere DF eſt auſſi un
N. 123. parallélogramme. Donc (n) le triangle DAE eſt égal au triangle CBF; & par conſéquent, ſi l'on retranche de chacun

† On appelle *baſe* d'une figure, le côté ſur lequel on ſuppoſe que cette figure eſt poſée. Par conſéquent, la *hauteur* d'une figure eſt la perpendiculaire abaiſſée du ſommet de cette figure à ſa baſe.

le même triangle GBE, les restes qui seront les trapezes GA & GF, seront égaux (n). Mais puisque le trapeze GA N. 64. est égal au trapeze GF, si l'on ajoute à chacun le même triangle DGC, les sommes seront égales (n). Or ces sommes N. 63. seront les parallélogrammes DB & DF. Donc ces parallélogrammes sont égaux ; & par conséquent, C. Q. F. D.

SCHOLIE.

148. *Comme le mesurage des surfaces dépend primitivement de ce théorême, nous allons enseigner ce que l'on entend par* mesure; *& la maniere de se servir des mesures.*

DES MESURES.

On appelle mesure, *une certaine étendue dont les hommes sont convenus entre eux, pour leur servir de terme auquel ils puissent comparer les autres étendues, & juger de leur grandeur, par le nombre qu'elles contiendroient de parties, égales chacune à cette premiere étendue. Or, comme chaque partie d'une étendue ne peut être égale qu'à une étendue de même genre qu'elle, ils ont été obligés* (n) *de* N. 2.

convenir de trois sortes de mesures : savoir, de mesures linéaires, pour leur comparer les lignes ; de mesures superficielles, pour leur comparer les surfaces ; & de mesures solides, pour leur comparer les corps.

Les premieres, qui sont des lignes droites, se nomment mesures courantes ; *les autres se nomment* mesures quarrées, *parce qu'elles sont des quarrés* † ; *& les dernieres s'appellent* mesures cubiques, *parce qu'elles sont des cubes* ¶.

Du mesurage, ou de la maniere de se servir des mesures.

On appelle mesurer, *considérer combien une étendue contient de parties égales chacune à l'étendue que l'on a prise pour mesure. Or, la maniere la plus simple de connoître combien une étendue contient de parties égales chacune à une autre éten-*

† On a pris un quarré pour être la mesure des surfaces ; parce que la longueur & la largeur d'un quarré étant égales, cette figure mesure également & en même tems les deux dimensions de la surface.

¶ Le *cube* est un corps qui a la figure d'un dez à jouer. On l'a pris pour être la mesure des corps ; parce que sa longueur, sa largeur & son épaisseur étant égales, il mesure également, & en même tems, les trois dimensions des corps.

due, c'est de la diviser en parties qui soient égales chacune à cette autre étendue, & de compter ensuite ces parties. Mais, comme on ne peut juger immédiatement si deux étendues sont égales, que lorsqu'elles sont semblables, il faut toujours diviser en parties semblables à la mesure dont on doit se servir, l'étendue que l'on veut mesurer. Ainsi, puisque les mesures des lignes sont des lignes droites, que celles des surfaces sont des quarrés, & que celle des corps sont des cubes; il faut diviser en lignes droites, les lignes que l'on veut mesurer; en quarrés, les surfaces que l'on veut mesurer; & en cubes, les corps que l'on veut mesurer. Mais, il n'y a que les lignes droites qui puissent se diviser en lignes droites; les rectangles, qui puissent se diviser en quarrés; & de certains corps nommés des parallelepipedes rectangles †, *qui puissent se diviser en cubes. Donc on ne peut mesurer immédiatement que les lignes droites, les rectangles, & les parallelepipedes rectangles; & par conséquent il suffit de savoir comment on doit mesurer ces trois sortes d'étendues, pour savoir se servir des mesures. Ainsi:*

† *Voyez* la vingt-neuvieme définition du onzieme Livre.

Premierement. *Pour* mesurer *une ligne droite* (*c'est-à-dire, considérer combien de fois une ligne droite en contient une certaine autre que l'on prend pour mesure*), *on applique successivement cette mesure sur cette ligne : & autant de fois que l'on peut l'y appliquer, autant de fois cette ligne contient cette mesure ; puisque cette ligne peut être divisée en autant de parties égales chacune à cette mesure, que cette même mesure peut lui être appliquée de fois.*

Secondement. *Pour* mesurer *un rectangle* (*c'est-à-dire, considérer combien de fois il contient un certain quarré que l'on prend pour mesure*), *il faudroit appliquer successivement ce quarré sur ce rectangle : & autant de fois que l'on pourroit l'y appliquer, autant de fois ce rectangle contiendroit cette mesure ; puisque l'on pourroit le diviser en autant de parties égales chacune à cette mesure, que cette même mesure pourroit lui être appliquée de fois. Mais il n'est point praticable de porter facilement une surface quarrée, ni de l'appliquer successivement sur toute celle d'un rectangle. Ainsi, il faut résoudre ce problême, sans se servir d'une surface pour mesure actuelle. Or, voici la maniere de le faire.*

Soit le quarré M * avec lequel il faille mesurer la surface du rectangle DB. Fig. 78.

On prend une mesure courante égale au côté NO du quarré M; & l'on considere combien la base DC du rectangle proposé contient de parties égales chacune à cette mesure courante; & combien la hauteur DA en contient aussi. Or, si la base DC contient, par exemple trois de ces parties, il est évident que le rectangle DB pourroit être divisé en trois autres rectangles DE, FG & HB, qui auroient chacun une base égale à celle de la mesure M. Et si la hauteur DA contient, par exemple quatre de ces mêmes parties, il est encore évident que chacun des rectangles DE, FG, &c. pourroit être subdivisé en quatre autres DL, IP, &c. qui auroient aussi chacun la même hauteur que la mesure M. Ainsi, tout le rectangle DB pourroit être divisé en trois fois quatre, ou douze rectangles égaux chacun à la mesure M; & contient par conséquent douze parties égales chacune à cette mesure.

On verroit de la même maniere, que si la mesure courante NO se trouvoit, par exemple quatre fois $\frac{1}{2}$ dans la base d'un rectangle, & six fois $\frac{1}{3}$ dans la hauteur; on verroit, dis-je (en tirant de la même *maniere, des paralleles aux côtés par chaque point de division) que ce rectangle contiendroit 28 parties égales chacune à la mesure M, plus une partie égale à la moitié de cette même mesure; puisque ce rectangle seroit alors composé: 1°. d'un rectangle qui contiendroit 24 de ces parties: 2°. d'un rectangle qui en contiendroit $\frac{6}{2}$, ou trois: 3°. d'un rectangle qui en contiendroit $\frac{3}{3}$ ou 1: 4°. enfin, d'un rectangle qui en contiendroit $\frac{3}{2}$ tiers, ou $\frac{1}{2}$.*

D'où l'on conclud cette regle générale du mesurage des rectangles.

149. La surface d'un rectangle est égale au produit du nombre des mesures courantes qui sont contenues dans sa longueur, multiplié par le nombre des mêmes mesures qui se trouvent dans sa largeur: *ou, pour nous servir de l'expression ordinaire*, un rectangle est égal au produit de sa base multipliée par sa hauteur.

Troisiemement. *Nous ne parlerons qu'au onzieme Livre, de la maniere de mesurer les parallelepipedes rectangles.*

COROLLAIRE I.

150. Il suit du théorême qui précede cette scholie, que *la surface d'un parallélogramme quelconque, est égale à celle*

d'un rectangle qui auroit pour base l'un des côtés de ce parallélogramme, & pour hauteur, une perpendiculaire tirée de ce côté, à un point quelconque du côté qui lui est opposé, prolongé s'il est nécessaire.

Le parallélogramme DB * est égal à un rectangle qui auroit pour base, par exemple le côté DC de ce parallélogramme, & pour hauteur, une perpendiculaire tirée d'un point quelconque C de ce même côté, au côté opposé AB, prolongé s'il est nécessaire. Fig. 79.

Const. Du point C, abaissez (n) une perpendiculaire CF au côté AB, prolongé autant qu'il sera nécessaire. Prenez (n) sur la ligne BF prolongée vers E, une partie EF égale au côté DC. Enfin, tirez du point D au point E, une ligne droite DE. N. 97. N. 81.

Démonst. Le côté EF est égal [c] & parallele [H] au côté DC. Ainsi (n), le quadrilatere DF est un parallélogramme; & par conséquent un rectangle (n), puisque [c] il a un angle droit F. Or (n), le parallélogramme DB est égal à ce rectangle; puisque [c] il est sur une même base DC que lui, & entre mêmes paralleles DC & EB. Donc C. Q. F. D. N. 142. N. 145. N. 147.

COROLLAIRE II.

151. Il ſuit du corollaire précédent, & du n°. 149, que *la ſurface d'un parallélogramme quelconque, eſt égale au produit de la baſe de ce parallélogramme multipliée par ſa hauteur.*

Fig. 79. Le parallélogramme DB * eſt égal au produit de ſa baſe DC multipliée par ſa hauteur.

N. 97. *Conſt.* Du point C, abaiſſez (n) une perpendiculaire CF au côté AB, prolongé autant qu'il ſera néceſſaire. Achevez enſuite le rectangle DF, de la même maniere que dans la conſtruction précédente.

Démonſt. Le parallélogramme DB eſt
N. 150. égal au rectangle DF (n). Or (n), le rec-
N. 149. tangle DF eſt égal au produit de ſa baſe DC multipliée par ſa hauteur CF. Donc
N. 62. (n) le parallélogramme DB eſt auſſi égal au produit de la baſe DC multipliée par
N. 147. † la hauteur CF. Mais (n) cette baſe DC & cette hauteur CF ſont auſſi, l'une la baſe, & l'autre la hauteur du parallélogramme DB. Donc ce parallélogramme eſt égal au produit de ſa baſe multipliée par ſa hauteur; & par conſéquent, C. Q. F. D.

USAGE.

152. *On se sert de la construction du premier de ces deux corollaires, pour faire un rectangle DF égal à un parallélogramme quelconque DB.*

PROPOSITION XXXVI.

THÉORÊME.

153. *Les parallélogrammes qui sont sur des bases égales, & entre mêmes paralleles, ont des surfaces égales.*

LEs parallélogrammes DB * & HF Fig. 80.
qui sont sur des bases égales DC & HG, & entre mêmes paralleles DG & AF, sont égaux.

Conſt. Tirez du point D au point E, une ligne droite DE, & du point C au point F une ligne droite CF.

Démonſt. Le côté DC est [H] égal au côté HG, & le côté HG au côté EF (n). N. 143.
Ainsi (n) les côtés DC & EF sont égaux; N. 62.
& par conséquent, puisque [H] ils sont aussi paralleles, le quadrilatere DF est un parallélogramme (n). Or, puisque le qua- N. 142.

drilatere DF est un parallélogramme, il
N. 147. est (n) égal & au parallélogramme DB qui [c] est sur une même base DC que lui, & entre mêmes paralleles DG & AF; & au parallélogramme HF qui [c] est aussi sur une même base EF que lui, & encore entre mêmes paralleles DG
N. 61. & AF. Donc (n) les parallélogrammes DB & HF sont égaux; & par conséquent, C. Q. F. D.

PROPOSITION XXXVII.

THÉORÊME.

154. *Les triangles qui sont sur une même base, & entre mêmes paralleles, ont des surfaces égales.*

Fig 81. LEs triangles ABC * ADC qui sont sur une même base AC, & entre mêmes paralleles AC & BD, sont égaux.

N. 133. *Const.* Tirez (n) du point A, une parallele AE au côté CB; & du point C, une parallele CF au côté AD. Prolongez ensuite la ligne BD, jusqu'à ce qu'elle rencontre en des points E & F, les paralleles AE & CF.

Démonst.

Démonst. Les côtés AC & EB, AC & DF sont [H] paralleles, chacun à chacun; & [C] les côtés AE & CB, CF & AD le sont aussi, chacun à chacun. Ainsi (n) les quadrilateres CE & AF sont des N. 57. parallélogrammes; & par conséquent ils sont égaux (n), puisque [C] ils sont sur N. 147. une même base AC, & entre mêmes paralleles AC & EF. Mais (n) les triangles N. 145. ABC & ADC sont les moitiés, l'un du parallélogramme CE, & l'autre du parallélogramme AF. Donc (n) ces triangles N. 68. sont égaux; & par conséquent, C. Q. F. D.

USAGE.

155. *On se sert de ce théorême, de la maniere suivante : premierement*, pour faire un triangle rectangle, qui soit égal à un triangle quelconque ABC *. Fig. 82.

Const. *On tire du point B* (n) *une* N. 135. *parallele indéfinie BD au côté AC. Du point A, on éleve* (n) *une perpendicu-* N. 96. *laire AD à ce même côté. Enfin, on tire du point D au point C, une ligne droite DC; & l'on a un triangle ADC qui est le triangle demandé.*

Démonst. *Premierement, le triangle ADC est rectangle en A* [C]. *Secondement, il est égal au triangle ABC* (n); N. 154.

puisque [c] *il est sur une même base AC que cet autre triangle, & entre mêmes paralleles AC & BD. Donc C. Q. F. F.*

Secondement, pour faire un triangle
Fig. 83. & 84. égal à un autre triangle quelconque ABC*, & qui soit entre deux lignes droites quelconques paralleles AC & EF.

Const. *Du point D, auquel l'un des côtés du triangle proposé (par exemple le côté AB prolongé s'il est nécessaire), rencontre la parallele EF, tirez au sommet de l'angle C, une ligne droite DC.*
N. 133. *Du sommet de l'angle B, tirez* (n) *une parallele BG à cette ligne DC. Enfin, du point G auquel cette parallele rencontre le côté AC prolongé s'il est nécessaire, tirez au point D, une ligne droite GD. Le triangle ADG, qui* [c] *est entre les paralleles AC & EF, sera le triangle demandé.*

Fig. 83. Démonst. 1°. *Les triangles ADG* & ABC ont une partie commune ABG: &*
N. 154. *l'autre partie BDG du premier est* (n) *égale à l'autre partie BCG du second; puisque ces deux autres parties sont des triangles, qui* [c] *sont sur une même base BG, & entre mêmes paralleles BG &*
N. 65. *DC. Donc* (n) *les triangles ADG & ABC sont égaux; & par conséquent, C. Q. F. F.*

2°. *Les triangles ADG * & ABC* Fig. 84.
ont une partie commune ADC : & l'autre partie DGC du premier est (n) *égale à* N. 154.
l'autre partie DBC du second ; puisque ces deux autres parties sont des triangles, qui [c] *sont sur une même base DC, & entre mêmes paralleles DC & BG. Donc* (n) *les triangles ADG & ABC sont égaux;* N. 72.
& par conséquent, C. Q. F. F.

PROPOSITION XXXVIII.

THÉORÊME.

156. *Les triangles qui sont sur des bases égales, & entre mêmes paralleles, ont des surfaces égales.*

LEs triangles ABC * & DEF qui Fig. 85.
sont sur des bases égales AC & DF, & entre mêmes paralleles AF & GH, sont égaux.

Const. Tirez (n) du point A, une pa- N. 133.
rallele AG au côté CB; & du point F une parallele FH au côté DE.

Démonst. Les côtés AC & GB, DF & EH sont [H] paralleles, chacun à chacun; & [c] les côtés AG & CB, FH & DE le sont aussi, chacun à chacun.
Ainsi (n), les quadrilateres GC & DH N. 57.

sont des parallélogrammes ; & par con-
N. 153. séquent ils sont égaux (n), puisque [n]
ils sont sur des bases égales AC & DF,
& entre mêmes paralleles AF & GH.
N. 143. Mais (n) les triangles ABC & DEF sont
les moitiés, l'un du parallélogramme
GC, & l'autre du parallélogramme DH.
N. 68. Donc (n) ces triangles sont égaux ; &
par conséquent, C. Q. F. D.

PROPOSITION XXXIX.

THÉORÊME.

157. *Si des triangles qui sont sur une même base, ont des surfaces égales, ils seront entre mêmes paralleles.*

Fig. 86. SI les triangles ABC *, & ADC qui sont sur une même base AC, sont égaux, la ligne droite tirée du point B au point D, sera parallele à cette base.

Const. Prolongez le côté AD vers E, à volonté. Tirez du point B aux points E & F pris à volonté sur la ligne AE, l'un au-dessus du point D & l'autre au-dessous, les lignes droites BE & BF. Enfin, tirez du point C aux mêmes points E & F, les lignes droites CE & CF.

Démonst. Si la ligne BD n'étoit point parallele à la base AC, une ligne tirée du point B parallelement à cette base, passeroit ou au-dessus de la ligne BD, ou au-dessous. Or :

Premierement, si elle passoit au-dessus, & étoit, par exemple la ligne BE, les triangles AEC & ABC seroient égaux (n), N. 154.
puisque [c] ils sont sur une même base AC, & que [H] ils seroient entre mêmes paralleles AC & BE. Mais [H] les triangles ADC & ABC sont aussi égaux. Donc (n) le triangle AEC seroit égal au N. 62.
triangle ADC. Ce qui n'est point, puisque le premier surpasse le second du triangle CDE.

Secondement, si elle passoit au-dessous, & étoit, par exemple la ligne BF, on démontreroit par un raisonnement pareil au précédent, que le triangle AFC seroit égal au triangle ADC. Ce qui n'est point encore, puisque le premier differe du second du triangle CFD.

Donc la ligne BD est parallele à la base AC; & par conséquent, C. Q. F. D.

PROPOSITION XL.

THÉORÊME.

158. *Si des triangles qui sont sur des bases égales, prises chacune sur une même ligne droite, ont des surfaces égales; ils seront entre mêmes paralleles.*

Fig. 87. SI les triangles ABC * & DEF qui sont sur des bases égales AC & DF prises chacune sur la même ligne droite AF, sont égaux; la ligne droite tirée du point B au point E, sera parallele à cette ligne AF.

Const. Prolongez le côté DE vers H, à volonté. Tirez du point B aux points H & G pris à volonté sur la ligne DH, l'un au-dessus du point E, & l'autre au-dessous, des lignes droites BH & BG. Enfin, tirez du point F aux mêmes points précédens H & G, des lignes droites FH & FG.

Démonst. Si la ligne BE n'étoit point parallele à la ligne AF, une ligne droite tirée du point B parallelement à cette ligne AF, passeroit ou au-dessus de la ligne BE, ou au-dessous. Or:

Premierement, si elle passoit au-dessus, & étoit, par exemple la ligne BH, les triangles DHF & ABC seroient égaux (n); puisque [c] ils sont sur des N. 156. bases égales DF & AC, & que [H] ils seroient entre mêmes paralleles AF & BH. Mais [H] les triangles DEF & ABC sont aussi égaux. Donc (n) le triangle DHF seroit égal au triangle DEF. N. 62. Ce qui n'est point, puisque le premier surpasse le second du triangle EHF.

Secondement, si elle passoit au-dessous, & étoit, par exemple la ligne BG, on démontreroit par un raisonnement pareil au précédent, que le triangle DGF seroit égal au triangle DEF. Ce qui n'est point encore, puisque le premier differe du second, du triangle GEF.

Donc la ligne BE est parallele à la ligne AF; & par conséquent, C. Q. F. D.

PROPOSITION XLI.

THÉORÊME.

159. *Si un parallélogramme & un triangle sont sur une même base, & entre mêmes paralleles, la surface du parallélogramme sera double de celle du triangle.*

Fig. 88. LE parallélogramme DB * qui est sur la même base DC que le triangle DEC, & entre mêmes paralleles DC & AE, est double de ce triangle.

Const. Tirez la diagonale AC.

Démonst. Les triangles DEC & DAC
N. 154. sont égaux (n), puisque [H] ils sont sur une même base DC, & entre mêmes
N. 143. paralleles DC & AE. Or (n), le parallélogramme DB est double du triangle
N. 67. DAC. Donc (n) il est aussi double du triangle DEC; & par conséquent, C. Q. F. D.

COROLLAIRE.

160. Il suit de ce théorême, & du n°. 151, que *la surface d'un triangle quelconque*

quelconque est égale au produit de la base de ce triangle, multipliée par la moitié de sa hauteur.

Le triangle ABC * est égal au produit de sa base AC, multipliée par la moitié de sa hauteur. Fig. 89.

Const. Tirez du point B à la base AC prolongée autant qu'il sera nécessaire, une perpendiculaire BD (n); & une parallele BE (n). Tirez aussi du point C (n) une parallele CE au côté AB. N. 97. N. 133. N. 133.

Démonst. Le parallélogramme AE est (n) égal au produit de sa base AC multipliée par sa hauteur BD. Or (n), le triangle ABC n'est que la moitié de ce parallélogramme. Donc il n'est égal qu'à la moitié de ce produit; & par conséquent, il est égal au produit de sa base AC, multipliée par la moitié de sa hauteur BD. Donc, C. Q. F. D. N. 151. N. 159.

SCHOLIE.

On déduit de ce corollaire cette regle générale du mesurage de toutes les figures planes qui ne sont terminées que par des lignes droites.

161. Divisez en triangles la figure proposée, en tirant des lignes droites de quelques-uns de ses angles à chacun de

N. 160. ses autres angles. Mesurez ensuite (n) la surface de chacun de ces triangles; & la somme de toutes ces surfaces sera la surface demandée.

Ainsi, soit, *par exemple*, le polygone
Fig. 90. ABCDE * qu'il faille mesurer.

On le divisera en triangles, par exemple AED, ABD & BCD, par des lignes droites DA & DB. On choisira pour bases de ces triangles, les côtés qui paroîtront les plus commodes, c'est-à-dire, ceux qu'il ne sera pas nécessaire de prolonger pour leur abaisser des perpendiculaires, & qui sont ici les côtés DA & DB. Des angles E, B & C qui sont opposés à ces bases, on abaissera à ces mêmes
N. 97. *mes bases* (n) *les perpendiculaires* Ef, *Bg & Ch. On mesurera ensuite chacune de ces bases, & chacune de ces perpendiculaires. Et si la base DA contient, par exemple,* 100 *mesures courantes égales chacune au côté de la mesure quarrée dont on voudra se servir, la base DB* 70, *la perpendiculaire E*f 37, *la perpendiculaire B*g 28, *& la perpendiculaire C*h
N. 160. 23; *on en conclura* (n) *que le triangle AED contient* 1850 *de ces mesures quarrées, le triangle ABD* 1400, *le triangle BCD* 805; *& que par conséquent le polygone ABCDE en contient* 4055.

PROPOSITION XLII.

PROBLÊME.

162. *Décrire un parallélogramme dont la surface soit égale à celle d'un triangle donné, & qui ait un angle égal à un angle aussi donné.*

IL faut décrire un parallélogramme qui soit égal au triangle ABC *, & qui Fig. 91. ait un angle égal à l'angle D.

Const. Divisez (n) le côté AC en deux N. 94. parties égales AF & FC. Faites (n) sur N. 123. l'une de ces parties, par exemple sur FC, un angle GFC qui ait le point F pour sommet, & soit égal à l'angle D. Tirez du point B (n) une parallele indéfinie N. 133. BE au côté AC. Prenez sur cette parallele (n) une partie GE égale à la partie N. 81. FC. Enfin, tirez du point C au point E une ligne droite CE. Le quadrilatere FE sera le parallélogramme demandé.

Pour la démonstration, tirez du point B au point F une ligne droite BF.

Démonst. Premierement, le côté GE est [c] égal & parallele au côté FC. Ainsi (n), le quadrilatere FE est un pa- N. 141. rallélogramme, & par conséquent (n) il N. 158.

est double du triangle FBC, puisque [c] il est sur une même base FC que ce triangle, & entre mêmes paralleles AC & BE. Mais le triangle ABC est aussi dou-
N. 156. ble du même triangle FBC; puisque (n) les triangles ABF & FBC qui [c] sont sur des bases égales AF & FC, & entre mêmes paralleles AC & BE sont égaux.
N. 67. Donc (n) le parallélogramme FE est égal au triangle ABC.

Secondement, le même parallélogramme a l'angle GFC égal à l'angle D[c]. Par conséquent, C. Q. F. F.

SCHOLIE.

163. *Si l'on proposoit au contraire de* décrire un triangle qui fût égal à un pa-
Fig. 21. rallélogramme quelconque DB *, & qui eût un angle égal à l'angle G; *on le feroit de la maniere suivante.*

Const. *On prolongeroit indéfiniment le côté DC vers F, & le côté AB vers*
N. 120. *E. On feroit sur la ligne DF* (n) *un angle EDF qui auroit le point D pour sommet, & seroit égal à l'angle G. On prendroit*
N. 81. *sur cette même ligne* (n) *une partie CF égale au côté DC. Enfin, on tireroit du point E au point F, une ligne droite EF; & le triangle DEF seroit le triangle demandé.*

Pour la démonstration, *on tireroit du point E au point C, une ligne droite EC.*

Démonst. *Premierement, le triangle DEF seroit double du triangle DEC; puisque* (n) *les triangles DEC & CEF qui* [c] *seroient sur des bases égales DC & CF, & entre mêmes paralleles DF & AE seroient égaux.* N. 156. *Or* (n), *le parallelogramme DB seroit aussi double du même triangle DEC; puisque* [c] *il seroit sur une même base DC que ce triangle, & entre mêmes paralleles DF & AE. Donc* (n) *le triangle DEF seroit égal au parallélogramme DB.* N. 159. N. 67.

Secondement, le même triangle auroit [c] *l'angle EDF égal à l'angle G. Par conséquent, C. Q. F. F.*

PROPOSITION XLIII.

THÉORÊME.

164. *Les complémens d'un parallélogramme ont des surfaces égales.*

Fig. 93. LEs complémens DF * & FB du parallélogramme DB, sont égaux.

Démonst. Les triangles DAC & BCA
N. 143. sont égaux (n); & (n) il en est de même
N. 143. des triangles EAF & GFA, & des trian-
N. 64. gles IFC & HCF. Ainsi (n), si l'on retranche du triangle DAC, les triangles EAF & IFC; & du triangle BCA, les triangles GFA & HCF, les restes seront égaux. Or, ces restes seront les complémens DF & FB du parallélogramme DB. Donc les complémens de ce parallélogramme sont égaux; & par conséquent, C. Q. F. D.

PROPOSITION XLIV.

PROBLÊME.

165. *Décrire ſur une ligne droite donnée, un parallélogramme dont la ſurface ſoit égale à celle d'un triangle donné, & qui ait un angle égal à un angle auſſi donné.*

IL faut décrire ſur la ligne droite AB *, un parallélogramme qui ſoit égal au triangle C, & qui ait un angle égal à l'angle D. Fig. 94.

Conſt. Prolongez la ligne AB vers E indéfiniment. Sur le prolongement BE pris auſſi grand qu'il ſera néceſſaire, décrivez (n) un triangle BFE dont les cô- N. 117. tés ſoient égaux à ceux du triangle C, chacun à chacun. Faites (n) un parallélo- N. 162. gramme BH qui ſoit égal au triangle BFE, & qui ait l'angle GBE égal à l'angle D. Prolongez indéfiniment vers K, vers L & vers N, les côtés HG, HI & GB. Tirez par le point A (n) une paral- N. 133. lele indéfinie KM à la ligne GN. Tirez auſſi du point K par le point B une ligne droite KL. Enfin, tirez par le point L (n) N. 13

une parallele ML à la ligne AE †; & le quadrilatere MB sera le parallélogramme demandé.

Démonst. Premierement, le quadrilatere MB est un parallélogramme [c]. Secondement, il est égal au triangle
N. 62 C (n), puisqu'étant [c] l'un des complémens du parallélogramme MH, il est
N. 164. (n) égal à l'autre complément BH de ce même parallélogramme; que cet autre complément BH est égal [c] au triangle
N. 90. BFE, & que le triangle BFE est égal (n) au triangle G. Troisiemement, enfin,
N. 62. il a l'angle ABN égal (n) à l'angle D,
N. 102. puisque (n) les angles ABN & GBE qui sont opposés au sommet sont égaux, & que [c] l'angle GBE est égal à l'angle D. Par conséquent, C. Q. F. F.

SCHOLIE.

166. *Si l'on proposoit au contraire, de*
Fig. 94. *décrire sur une ligne droite AB * un triangle qui fût égal à un parallélogramme donné, & qui eût un angle égal à l'angle D, on le feroit de la maniere suivante.*

† Pour tirer la parallele KM à la ligne GN, & la parallele ML à la ligne AE, on fait la ligne KG égale à la ligne AB, & la ligne AM égale à la ligne IL. On tire ensuite du point K par le point A, la ligne KM; & du point M par le point L, la ligne ML.

Premierement, on décriroit un triangle quelconque C, double du parallélogramme proposé. On construiroit ensuite sur la ligne AB, par le problême précédent, un parallélogramme MB égal à ce triangle C, & qui eût un angle égal à l'angle D. Enfin, on tireroit la diagonale AN de ce parallélogramme; & l'on auroit un triangle ABN qui seroit le triangle demandé.

Démonst. *Premierement, le triangle ABN auroit* [c] *la ligne AB pour l'un de ses côtés. Secondement, il seroit* (n) N. 68. *égal au parallélogramme proposé: puisque* (n) *il seroit la moitié du parallélo-* N. 143. *gramme MB, de même que* [c] *le parallélogramme proposé seroit celle du triangle C; & que* [c] *le parallélogramme MB & le triangle C seroient égaux. Troisiemement, enfin, il auroit* [c] *l'angle ABN égal à l'angle D. Par conséquent, C. Q. F. F.*

PROPOSITION XLV.

PROBLÊME.

167. *Décrire un parallélogramme dont la surface soit égale à celle d'une figure rectiligne quelconque, & qui ait un angle égal à un angle donné.*

Fig. 95. IL faut décrire un parallélogramme qui soit égal à la figure rectiligne BD*, & qui ait un angle égal à l'angle E.

Const. Divisez en triangles, par exemple ABC & ACD, la figure proposée
N. 162. BD. Décrivez ensuite (n) un parallélogramme IG, qui soit égal à celui de ces triangles qu'il vous plaira, par exemple au triangle ABC, & qui ait l'angle I
N. 165. égal à l'angle E. Faites enfin (n) sur l'un des côtés de ce parallélogramme, par exemple sur le côté HG, un autre parallélogramme HK qui soit égal au triangle ACD, & qui ait l'angle GHL égal à l'angle I. La figure rectiligne IK, formée par ces deux parallélogrammes, sera le parallélogramme demandé.

Démonst. La somme des angles GHI & I est égale à celle de deux angles
N. 130. droits (n); puisque [c] le quadrilatere

IG eſt un parallélogramme. Mais [c] l'angle GHL eſt égal à l'angle I. Donc (n) la ſomme des angles GHI & GHL N. 61.
eſt égale à celle de deux angles droits ; & par conſéquent (n) les lignes droites IH N. 101.
& HL qui [c] ſont tirées du même point H de la droite GH, ne font qu'une ſeule ligne droite IHL.

Pareillement, la ſomme des angles HGK & GHL eſt égale à celle de deux angles droits (n), puiſque [c] le quadri- N. 130.
latere HK eſt un parallélogramme. Mais (n) l'angle GHL eſt égal à ſon alterne N. 130.
HGF, puiſque [c & D] les lignes IHL & FG ſont paralleles. Donc (n) la ſom- N. 61.
me des angles HGK & HGF eſt égale à celle de deux angles droits ; & par conſéquent (n) les lignes droites FG & GK, N. 101.
qui [c] ſont tirées du même point G de la droite GH, ne font qu'une ſeule ligne droite FGK.

Ainſi, la figure rectiligne IK eſt un quadrilatere, & par conſéquent un parallélogramme (n) ; puiſque [c & D] ſes N. 57.
côtés IHL & FGK ſont paralleles, & que (n) ſes côtés IF & LK qui [c] ſont N. 132.
paralleles chacun à la même HG, ſont auſſi paralleles entr'eux. Or, premierement, ce parallélogramme eſt égal (n) à N. 72.
la figure rectiligne BD ; puiſque [c] les

parties IG & HK de l'un sont égales aux parties ABC & ACD de l'autre, chacune à chacune. Secondement, il a [c] l'angle I égal à l'angle E. Par conséquent, C. Q. F. F.

SCHOLIE.

Fig. 95. 168. *Si la figure rectiligne BD* avoit plus de quatre côtés, & qu'il fallût la diviser, par exemple, en trois triangles : alors, après avoir décrit un parallélogramme IK égal aux deux premiers triangles ABC & ACD, de la maniere dont ce problême enseigne à le faire ; on décriroit sur le côté LK de ce parallélogramme, un parallélogramme égal au troisieme triangle, de la même maniere dont on a décrit sur le côté HG le parallélogramme HK égal au triangle ACD. Et ainsi de suite, si la figure proposée se divisoit en un plus grand nombre de triangles.*

USAGE.

169. *On peut se servir de cette proposition, de la maniere suivante, pour trouver la différence de deux figures rectilignes*
Fig. 96. *quelconques A * & B.*

On décrit un parallélogramme FD égal à la figure rectiligne A, & qui ait un angle F de telle grandeur que l'on veut. *Sur une ligne droite GK, égale à l'un des côtés de ce parallélogramme, par exemple au côté CF, on décrit aussi un parallélogramme KH égal à la figure rectiligne B, & qui ait un angle K égal à l'angle F. On prend sur les côtés FE & CD du plus grand de ces deux parallélogrammes, des parties FM & CL égales chacune au côté KI du moins grand. Enfin, on tire du point M au point L, une ligne droite ML; & le parallélogramme MD que cette ligne retranche du parallélogramme FD, est la différence de la figure B à la figure A.*

Si l'on vouloit une démonstration, on feroit voir que si l'on posoit les parallélogrammes KH & FL l'un sur l'autre, ils se couvriroient réciproquement. Ainsi (n), *ils sont égaux; & par conséquent, &c.* N. 64.

PROPOSITION XLVI.

PROBLÊME.

170. *Décrire un quarré ſur une ligne droite donnée.*

Fig. 97. IL faut décrire un quarré ſur la ligne droite AB *.

N. 96. *Conſt.* Du point A, élevez (n) une perpendiculaire AD à la ligne AB. Du
N. 96. point B, élevez encore (n) une perpendiculaire BC à la même ligne. Faites ces perpendiculaires égales chacune à la ligne AB. Enfin, tirez du point D au point C, une ligne droite DC. Le quadrilatere AC que ces lignes formeront avec la ligne AB, ſera le quarré demandé.

Démonſt. Les côtés AD & BC ſont
N. 129. égaux [c], & paralleles (n), puiſque [c] ils ſont perpendiculairés chacun à la
N. 141. même ligne droite AB. Ainſi (n), le quadrilatere AC eſt un parallélogramme. Or, dans ce parallélogramme, l'angle
N. 21. A eſt droit (n), & les côtés de ſuite AB
N. 14. & AD ſont égaux [c]. Donc (n) ce parallélogramme eſt un quarré; & par conſéquent, C. Q. F. F.

Autre Conſt. † Du point A *, élevez (n) une perpendiculaire AD à la ligne AB. Faites cette perpendiculaire égale à cette ligne AB. Des points D & B pris pour centres, & avec encore cette même ligne AB priſe pour rayon, décrivez deux arcs qui ſe coupent en un point C. Enfin, tirez du point C aux points D & B, des lignes droites CD & CB. Le quadrilatere AC que ces lignes formeront avec les précédentes AB & AD, ſera le quarré demandé. Fig. 98. N. 96.

Démonſt. Les côtés oppoſés du quadrilatere AC ſont égaux [c]. Ainſi (n), ce quadrilatere eſt un parallélogramme. Or, dans ce parallélogramme, l'angle A eſt droit (n), & les côtés de ſuite AB & AD ſont égaux [c]. Donc (n), ce parallélogramme eſt un quarré; & par conſéquent, C. Q. F. F. N. 127. N. 11. N. 146.

† Nous donnons ces deux conſtructions, parce que la premiere eſt la plus commode ſur le terrein, & la ſeconde ſur le papier.

PROPOSITION XLVII.

THÉORÊME.

171. *Dans un triangle rectangle, le quarré de l'hypotenuse est égal à la somme des quarrés des deux autres côtés.*

Fig. 99. DANS le triangle ABC * qui est rectangle en B, le quarré AD de l'hypotenuse AC est égal à la somme des quarrés AG & CH des deux autres côtés AB & BC.

Const. Du sommet de l'angle droit B,
N. 133. tirez (n) une parallele BL au côté AE. Du même point B, tirez aux points E & D, des lignes droites BE & BD. Enfin, tirez du point F au point C une ligne droite FC, & du point A au point I, une ligne droite AI.

Démonst. Dans les triangles ABE &
N. 63. AFC, l'angle BAE est (n) égal à l'angle FAC; puisque le premier est la somme de
N. 50. l'angle BAC, & de l'angle CAE qui (n) est un angle droit; & que le second est celle du même angle BAC, & de l'angle
N. 50. BAF qui (n) est aussi un angle droit:
N. 50. le côté AE est (n) égal au côté AC;
puisque

puiſque [H] l'un & l'autre ſont côtés du même quarré AD : enfin, le côté AB eſt (n) égal au côté AF ; puiſque [H] N. 50.
l'un & l'autre ſont auſſi côtés du même quarré AG. Donc (n) ces deux triangles N. 83.
ſont égaux. Mais (n) le premier eſt la N. 159.
moitié de la partie AL du quarré AD ; puiſque [C] il eſt ſur la même baſe AE, & entre les mêmes paralleles AE & BL que cette partie, qui [C] eſt un parallélogramme : & (n) le ſecond eſt auſſi la N. 159.
moitié du quarré AG ; puiſque [C] il eſt auſſi ſur la même baſe AF que ce même quarré, & entre les mêmes paralleles AF & CG. Donc (n) la partie N. 67.
AL eſt égale au quarré AG.

Or, on démontre de la même maniere, que les triangles CBD & CIA ſont égaux ; que le premier eſt la moitié de l'autre partie LC du quarré AD ; & que le ſecond eſt la moitié du quarré CH. Par conſéquent (n), cette autre par- N. 67.
tie LC eſt égale au quarré CH. Donc, le quarré AD qui eſt la ſomme de ces deux parties AL & LC, eſt égal à la ſomme des quarrés AG & CH ; & par conſéquent, C. Q. F. D.

COROLLAIRE.

172. Il ſuit de ce théorême, que *de*

plusieurs lignes droites qui sont tirées d'un même point à une même ligne droite; celles qui sont plus éloignées de la perpendiculaire, sont plus grandes que celles qui en sont moins éloignées.

Fig. 101 La ligne droite CF * qui est plus éloignée de la perpendiculaire CD que la ligne droite CE, est plus grande que cette derniere ligne.

Démonst. Dans le triangle FCD qui [H] est rectangle en D, le quarré de
N. 171. l'hypoténuse CF est (n) égal à la somme des quarrés des côtés CD & DF: & dans le triangle ECD qui [H] est aussi rectangle en D, le quarré de l'hypoténuse
N. 171. CE est (n) égal à la somme des quarrés des côtés CD & DE. Or, cette premiere somme est plus grande que la derniere; puisque [H] le côté DF est plus grand que le côté DE. Donc, le quarré de l'hypoténuse CF est plus grand que celui de l'hypoténuse CE; & par conséquent, la ligne CF est plus grande que la ligne CE. Donc, C. Q. F. D.

USAGE I.

173. *On se sert ordinairement de cette proposition, pour résoudre le problême suivant.*

Fig. 100. On donne les côtés A * & B de deux

quarrés ; & l'on propose de faire un quarré qui soit égal à la somme de ces deux quarrés.

Solution. *Tirez une ligne droite E D égale à l'une des lignes données, par exemple à la ligne A. Du point D, élevez* (n) *une perpendiculaire D C à cette* N. 96. *ligne E D. Faites cette perpendiculaire égale à l'autre ligne donnée B. Enfin, tirez du point C au point E une ligne droite CE, & cette ligne sera le côté du quarré demandé.*

Démonst. *Le triangle E C D est rectangle en D* [c]. *Ainsi* (n), *le quarré de* N. 171. *l'hypoténuse CE est égal à la somme des quarrés des côtés ED & DC. Mais* [c] *ces côtés sont égaux aux lignes A & B, chacun à chacune. Donc, le quarré de l'hypoténuse CE est égal à la somme des quarrés des lignes A & B ; & par conséquent, C. Q. F. F.*

COROLLAIRE.

174. Il suit de la solution du problême précédent : Premierement, que *pour faire un quarré qui soit double de celui de la ligne A *, il faut faire la perpen-* Fig. 100. *diculaire D C égale à la ligne E D.* Secondement, *que pour faire un quarré qui soit triple de celui de la même ligne A,*

il faut commencer par trouver le côté d'un quarré double, & faire ensuite la perpendiculaire DC égale à ce côté. Et ainsi de suite.

USAGE II.

175. *On se sert aussi de cette proposition, pour résoudre cet autre problême.*

Fig. 101. La longueur d'une échelle AB * est de 10 pieds, & cette échelle étant posée droite contre un mur D, elle est de même hauteur que ce mur. Si en appuyant le haut de cette échelle contre ce mur, on éloigne son pied de celui de ce même mur, de six pieds; de combien s'en faudra-t-il que la hauteur de cette échelle ainsi inclinée, ne soit égale à celle de ce mur.

Solution. *La longueur AB de l'échelle, sa hauteur AC, & la distance BC de son pied B au pied C du mur, forment un triangle ACB qui est rectangle en C.*
N. 171. *Ainsi* (n), *le quarré de la distance BC, (qui* [H] *est de 36 pieds) avec celui de la hauteur AC (qui est inconnu), doit être égal au quarré de la longueur AB, (qui* [H] *est de 100 pieds.) Mais, puisque 36 pieds, avec le quarré qui est inconnu, doit faire 100 pieds, ce quarré inconnu doit être de 64 pieds; & par con-*

séquent, son côté AC est de huit pieds. Or, puisque la hauteur AC de l'échelle est de huit pieds, & que [H] la hauteur EC du mur est de dix pieds, il s'en faut de deux pieds que la hauteur de l'échelle ne soit égale à celle du mur. Par conséquent, C. Q. F. F.

PROPOSITION XLVIII.

THÉORÊME.

176. *Si dans un triangle le quarré de l'un des côtés est égal à la somme des quarrés des deux autres côtés, ce triangle sera rectangle.*

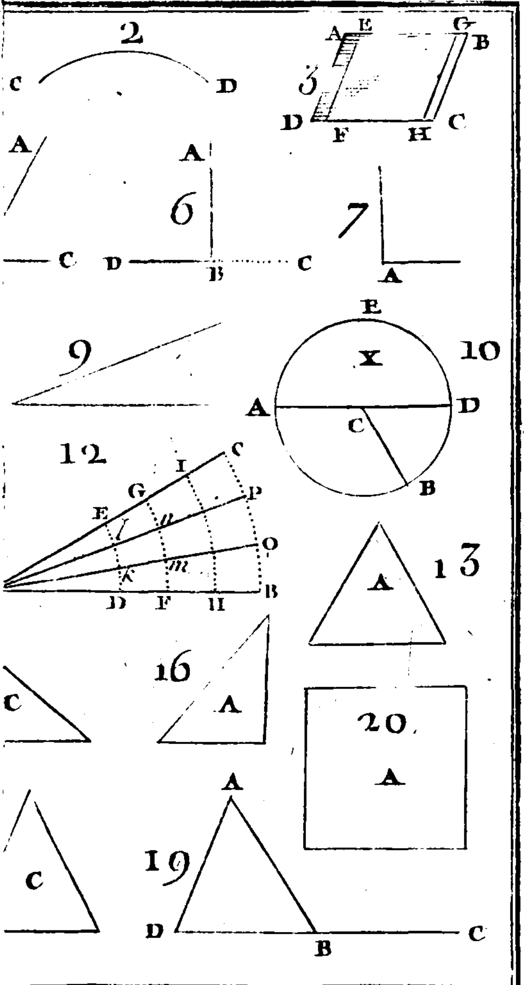
SI dans le triangle ABC *, le quarré du côté AC est égal à la somme des quarrés des deux autres côtés BC & BA, ce triangle sera rectangle. Fig. 12.

Const. De l'une quelconque des extrémités des côtés BA & BC, par exemple, de l'extrémité C du côté BC, élevez (n) une perpendiculaire CD à ce côté. N. 96.
Faites cette perpendiculaire égale à l'autre côté BA. Enfin, tirez du point B au point D, une ligne droite BD.

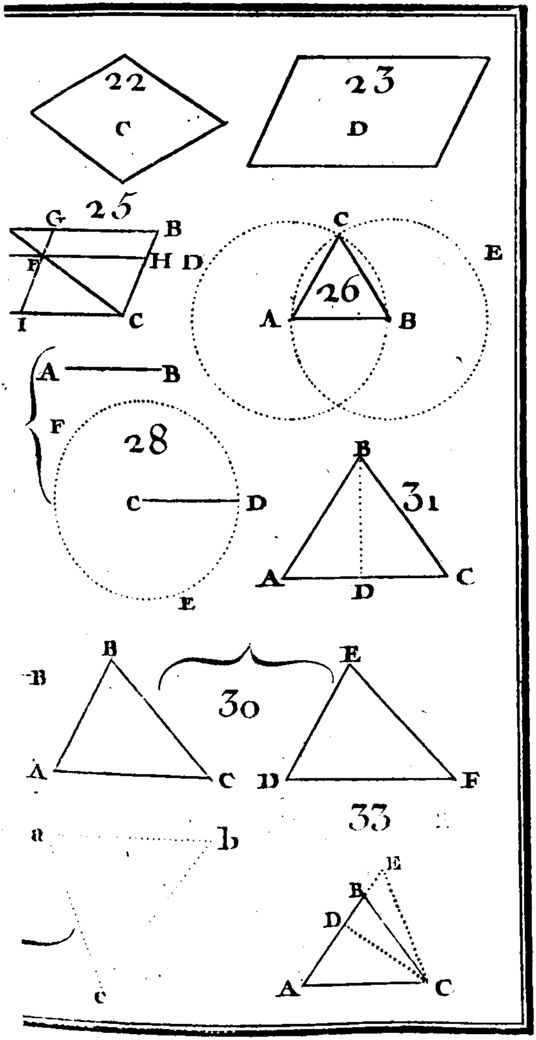
Démonst. Le quarré du côté AC est

égal [H] à la somme des quarrés des côtés BC & BA ; & par conséquent, à celle des quarrés des côtés BC & CD, puisque [C] les côtés BA & CD sont
N. 171. égaux. Mais (n), le quarré du côté BD est aussi égal à la somme des quarrés de ces mêmes côtés BC & CD ; puisque [C] le triangle BCD est rectangle en C.
N. 62. Donc (n), le quarré du côté AC est égal à celui du côté BD ; & par conséquent, ces côtés sont égaux. Ainsi, les triangles ABC & BCD ont le côté BA égal au côté CD [C], le côté AC égal au côté BD [D], & le côté BC commun. Donc
N. 90. (n), l'angle ABC est égal à l'angle BCD ; & par conséquent, puisque l'angle BCD est droit [C], l'angle ABC l'est aussi. Donc, C. Q. F. D.

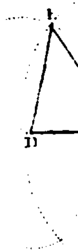
Fin du premier Livre.


2
C
D
3
A
E
G
B
D
F
H
C
A
A
6
7
C
D
B
C
A
9
E
X
10
A
D
C
B
12
C
I
G
P
E
l
n
O
m
k
D
F
H
B
13
A
16
C
A
20
A
A
19
C
D
B
C

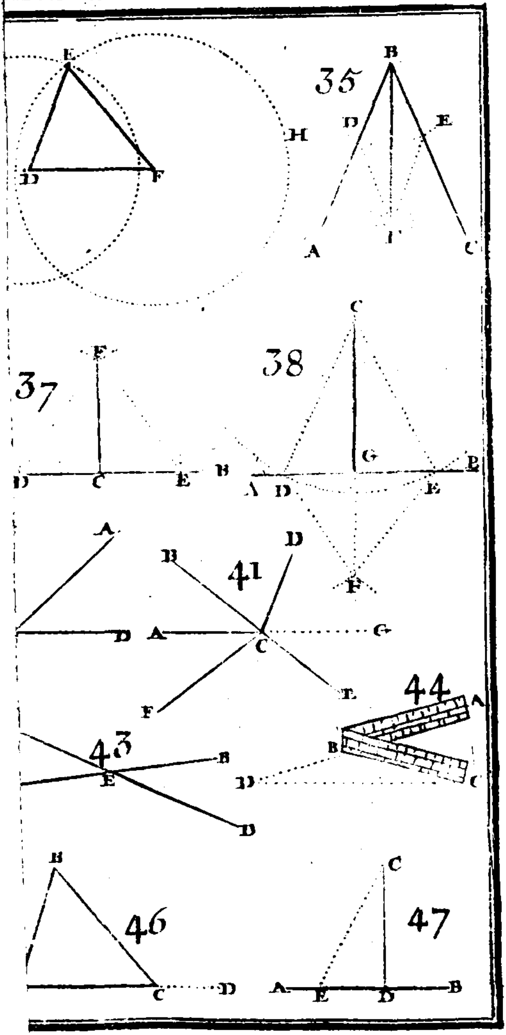
I

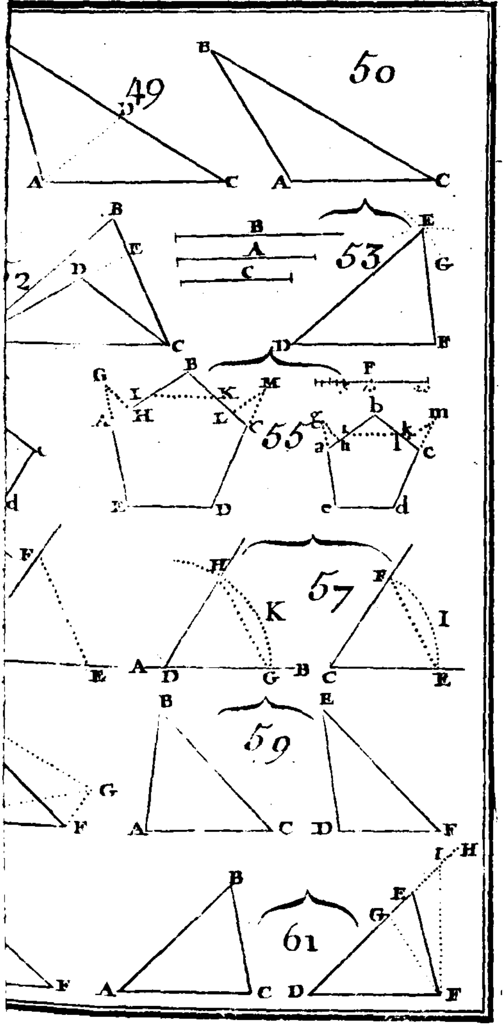

22
C
23
D
25
G
B
F
H
I
C
26
C
D
E
A
B
A
B
F
28
C
D
E
31
B
A
D
C
30
B
A
C
E
D
F
B
33
a
b
c
E
B
D
A
C

mens d

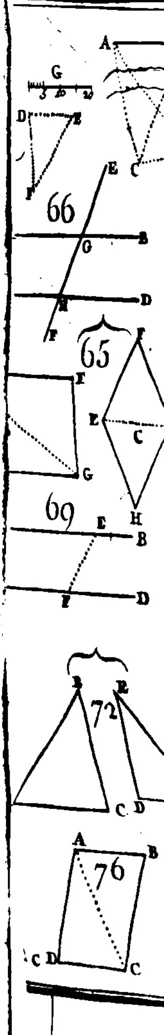


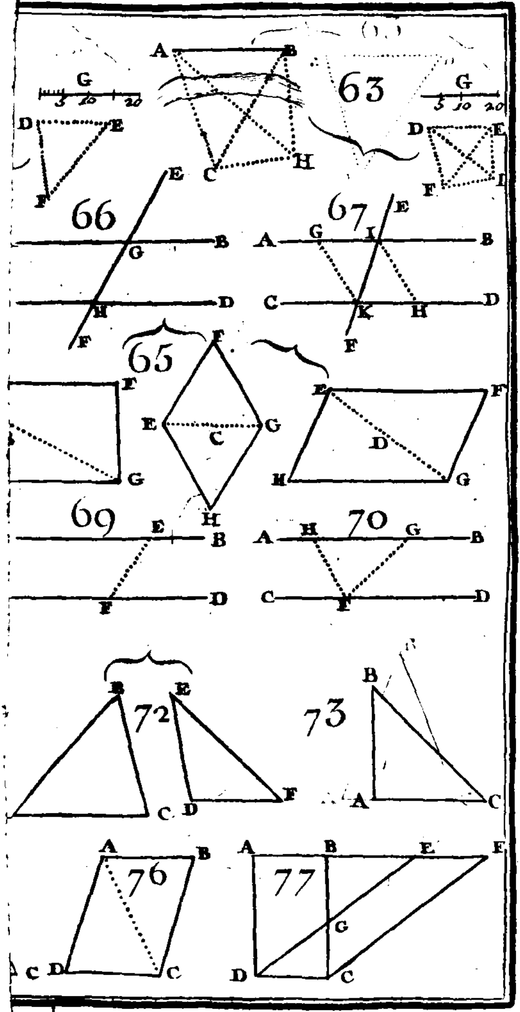
37

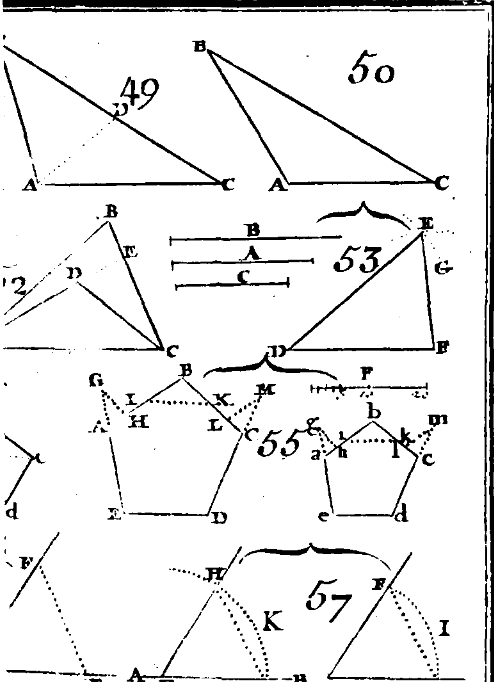

E
H
D
F
35
B
D
E
A
F
C
37
F
D
C
E
B
38
C
G
E
A
D
E
F
A
D
B
D
41
A
C
G
F
E
44
A
B
C
D
43
B
E
D
B
46
C
D
C
47
A
E
D
B


49
50
53
55
57
59
61

lemens d'Euclide

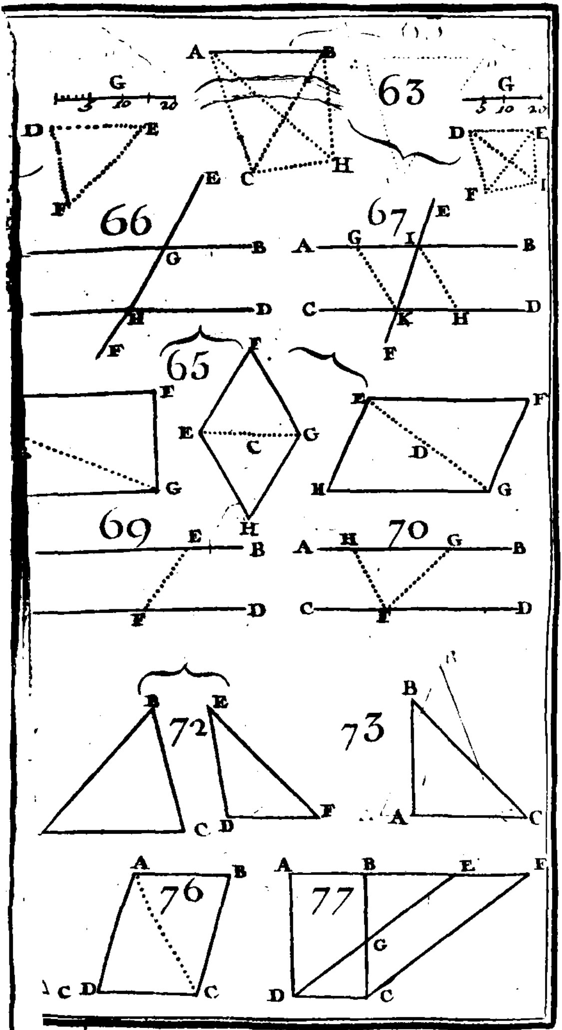


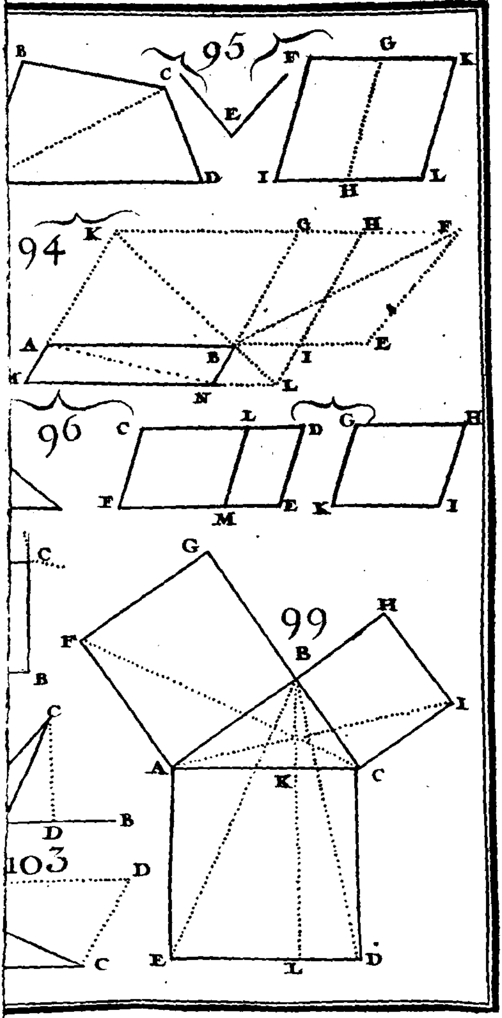

63
66
67
65
69
70
72
73
76
77

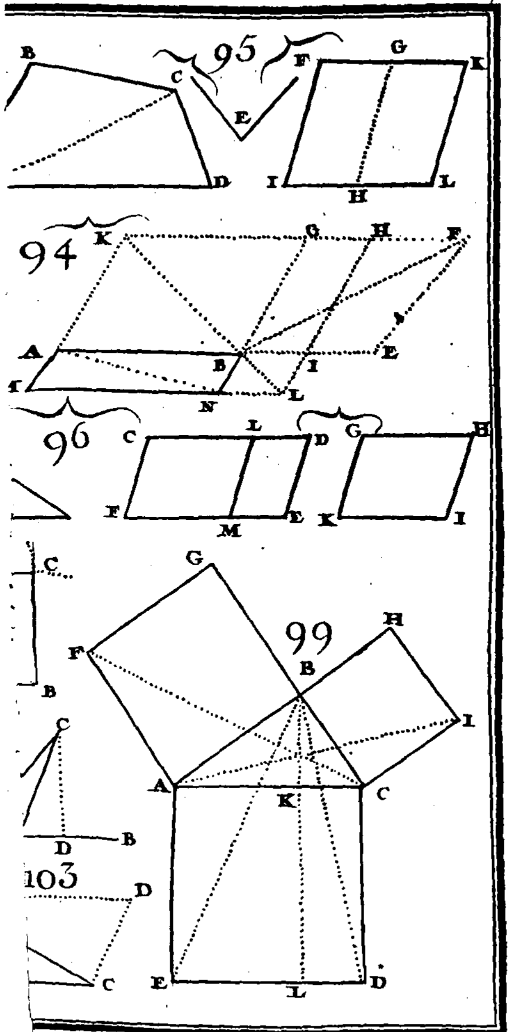


4

lemens


63
G
5 10 20
A B
D E
F
C H
G
5 10 20
D E
F I
66
E
B
G
D
H
F
67
E
A G I B
C K H D
F
65
F
E C G
H
E F
D
H G
69
E B
F D
70
A H G B
C F D
72
B E
C D F
73
B
A C
76
A B
C D C
77
A B E F
G
D C


95
94
96
99
103


95
94
96
99
103

LES ÉLÉMENS D'EUCLIDE.

LIVRE SECOND.

QUOIQUE ce Livre ne contienne que quatorze propositions, il est cependant très-considérable, puisque c'est par les principes qui y sont établis que l'on démontre les propriétés des lignes courbes, & que l'on résoud les problêmes qui en dépendent. Il est vrai qu'on peut le faire d'une maniere plus courte, par le moyen de l'algebre; mais les démonstrations que l'on tirera de ce second Livre seront toujours les plus satisfaisantes, parce qu'elles seront toujours les plus lumineuses. A l'égard de l'ordre, Euclide considere dans les premieres propositions les différens rectangles que l'on peut former des parties d'une *même ligne droite différemment divisée, & détermine de combien les uns different des autres. Il enseigne ensuite à diviser une ligne droite, suivant de certaines conditions; ce qui fait un problême dont l'usage est assez fréquent dans la Géométrie. Il démontre aussi de combien le quarré du côté opposé à l'angle obtus d'un triangle, surpasse la somme des quarrés des deux autres côtés; & de combien celui du côté opposé à un angle aigu, differe de cette somme. Enfin, il termine ce Livre par donner la maniere de faire un quarré qui soit égal à une figure rectiligne quelconque.*

DÉFINITIONS.

I.

177. ON dit, *le rectangle fait de telles lignes*, ou seulement, *le rectangle de telles lignes*, pour exprimer la surface du parallélogramme rectangle, dont l'une de ces lignes est la longueur, & l'autre la largeur.

Par exemple, on dit, le rectangle des
Fig. 1. lignes AB * & BC, *pour exprimer la surface du parallélogramme rectangle AC*

AC dont la ligne AB est la longueur, & la ligne BC la largeur.

178. On dit de même; *le quarré fait sur telle ligne*, ou seulement, *le quarré de telle ligne*, pour exprimer la surface du quarré dont cette ligne est le côté.

Par exemple, on dit, le quarré de la ligne AB *, *pour exprimer la surface du quarré AC dont cette ligne est le côté.* Fig. 1.

II.

179. On appelle *gnomon*, ce qui reste d'un parallélogramme, après en avoir retranché l'un quelconque des deux parallélogrammes dont les diagonales sont des parties de la diagonale du premier.

La figure rectiligne ABCDEF *, *est un* gnomon. Fig. 2.

AVERTISSEMENT.

180. Premierement, *lorsque deux lignes droites AB * & CD seront égales, nous prendrons indifféremment la ligne CD au lieu de la ligne AB, & la ligne AB au lieu de la ligne CD, conformément à ce qui a été demandé au* n°. 61. Fig. 4

Secondement, *lorsque nous dirons d'un quadrilatere qu'il* est rectangle [c], *cela signifiera: 1°. que ses côtés opposés seront paralleles* [c]; *& que par conséquent,*

il sera un parallélogramme : 2°. qu'il aura un angle droit [c] ; & que par consé-
N. 145. *quent, il sera rectangle* (n).

PROPOSITION I.

THÉORÊME.

181. *Si de deux lignes droites, l'une est divisée en plusieurs parties, le rectangle de ces deux lignes sera égal à la somme des rectangles faits de celle de ces lignes qui n'est point divisée, & de chaque partie de celle qui est divisée.*

Fig. 1. LE rectangle des lignes droites AB & AD (dont l'une AB est divisée, par exemple en trois parties, AE, EF & FB) est égal à la somme des rectangles faits, l'un de la ligne AD & de la partie AE; l'autre, de la même ligne AD & de la partie EF; & le dernier, encore de la même ligne AD & de la partie FB.

Const. Faites un rectangle AC dont la ligne AB soit l'un des côtés, & la ligne AD l'autre. Par chaque point de
N. 133. division E & F, tirez (n) des paralleles EG & FH à la ligne AD.

Démonst. Les lignes EG & FH sont (n) égales chacune à la ligne AD. Ainsi, puisque les quadrilateres AG, EH & FC sont rectangles [c], ils sont les rectangles, l'un de la ligne AD & de la partie AE ; l'autre, de la même ligne AD & de la partie EF ; & le dernier, encore de la même ligne AD & de la partie FB. Or, ces trois rectangles sont toutes les parties du quadrilatere AC, qui [c] est le rectangle des lignes AB & AD. Donc (n), le rectangle AC des lignes AB & AD est égal à la somme des rectangles faits de la ligne AD, & de chaque partie AE, EF & FB de la ligne AB ; & par conséquent, C. Q. F. D.

N. 141.
N. 71.

PROPOSITION II.

THÉORÊME.

182. *Si une ligne droite est divisée en plusieurs parties ; le quarré de cette ligne sera égal à la somme des rectangles faits de cette même ligne, & de chacune de ces parties.*

Fig. 6. LE quarré de la ligne AB * (qui est divisée, par exemple en trois parties AE, EF & FB) est égal à la somme des rectangles faits, l'un de cette ligne AB & de sa partie AE; l'autre, de cette même ligne AB & de sa partie EF; & le dernier, encore de cette même ligne AB & de sa partie FB.

N. 170. *Const*. Décrivez (n) un quarré AC sur la ligne AB. Par chaque point de
N. 133. division E & F, tirez (n) des paralleles EG & FH à la ligne AD.

Démonst. Les lignes AD, EG & FH
N. 62. sont (n) égales chacune à la ligne AB;
N. 143. puisque (n) les lignes EG & FH le sont chacune à la ligne AD, qui [c] est égale à cette ligne AB. Ainsi, puisque les quadrilateres AG, EH & FC sont

rectangles [c], ils sont les rectangles, l'un de la ligne AB & de sa partie AE; l'autre, de la même ligne AB & de sa partie EF; & le dernier, encore de la même ligne AB & de sa partie FB. Or, ces trois rectangles sont toutes les parties du quadrilatere AC, qui [c] est le quarré de la ligne AB. Donc (n), le quarré AC de la ligne AB est égal à la somme des rectangles faits de cette même ligne AB, & de chacune de ses parties AE, EF & FB; & par conséquent, C. Q. F. D. N. 72.

SCHOLIE.

Cette proposition ne differe de la premiere, qu'en ce que dans la premiere, les lignes AB & AD sont inégales; & que dans celle-ci, elles sont égales. Ainsi, elle n'est qu'un corollaire de cette premiere.

PROPOSITION III.

THÉORÊME.

183. *Si une ligne droite est divisée en deux parties, le rectangle de ces deux parties, avec le quarré de l'une quelconque de ces mêmes parties, sera égal au rectangle de cette ligne & de cette derniere partie.*

Fig. 7. SI une ligne droite AB* est divisée en deux parties (par exemple AE & EB) le rectangle de ces deux parties, avec le quarré de l'une de ces parties, (par exemple, de la partie AE) sera égal au rectangle de la ligne AB & de cette même partie AE.

Const. Faites un rectangle AC dont la ligne AB soit l'un des côtés, & dont l'autre côté soit une ligne AD, égale à la partie AE. Par le point de division E,
N. 133. tirez (n) une parallele EF à la ligne AD.

Démonst. Premierement, le quadri-
N. 146. latere AF est rectangle [c]. Ainsi (n), il est le quarré de la partie AE, puisque son côté AD est égal à cette partie [c].

Secondement, le quadrilatere EC est aussi rectangle [c]. Ainsi, il est le rectangle des parties AE & EB, puisque (n) son côté EF est égal à la partie AE. N. 50.

Or, ce quarré & ce rectangle sont toutes les parties du quadrilatere AC, qui [c] est le rectangle de la ligne AB & de sa partie AE. Donc (n), le rec- N. 72.
tangle EC des parties AE & EB, avec le quarré AF de la partie AE, est égal au rectangle AC de la ligne AB & de cette partie AE; & par conséquent, C. Q. F. D.

PROPOSITION IV.

THÉORÊME.

184. *Si une ligne droite est divisée en deux parties, les quarrés de ces deux parties, avec deux rectangles faits chacun de ces mêmes parties, seront égaux au quarré de cette ligne.*

SI une ligne droite AB * est divisée Fig. 8.
en deux parties (par exemple AE & EB) les quarrés de ces deux parties AE & EB, avec deux rectangles faits chacun de ces mêmes parties, seront égaux au quarré de cette ligne AB.

N. 170. *Conſt.* Décrivez (n) un quarré DB ſur la ligne AB. Tirez la diagonale AC. Par
N. 133. le point de diviſion E, tirez (n) une parallele EF à la ligne AD. Enfin, par le point G auquel cette parallele rencontre
N. 133. la diagonale AC, tirez (n) une parallele HI à la ligne AB.

Démonſt. Premierement, l'angle ex-
N. 130. térieur EGA eſt (n) égal à ſon opposé intérieur BCA; puiſque [c] les lignes
N. 86. EF & BC ſont paralleles. Or (n), l'angle BAC eſt auſſi égal au même angle BCA,
N. 50. puiſque (n) les côtés BC & AB du trian-
N. 62. gle ABC ſont égaux. Donc (n), l'angle EGA eſt égal à l'angle BAC; & par con-
N. 88. ſéquent (n), les côtés AE & EG du triangle AEG ſont égaux. Mais, ces côtés AE & EG ſont auſſi ceux du quadrilatere HE. Donc, puiſque ce quadrila-
N. 146. tere eſt rectangle [c], il eſt quarré (n); & par conſéquent, il eſt le quarré de la partie AE, puiſque cette partie eſt un de ſes côtés.

Secondement, l'angle extérieur IGC
N. 130. eſt égal (n) à ſon opposé intérieur BAC; puiſque [c] les lignes HI & AB ſont paralleles. Or [D], l'angle BCA eſt auſſi
N. 62. égal au même angle BAC. Donc (n), les angles IGC & BCA ſont égaux;
N. 88. & par conſéquent (n), les côtés IC &

GI du triangle GIC le ſont auſſi. Mais, ces côtés IC & GI ſont auſſi ceux du quadrilatere FI. Donc, puiſque ce quadrilatere eſt rectangle [c], il eſt quarré (n); & par conſéquent, il eſt le quarré N. 146.
de la partie EB, puiſque (n) cette partie N. 143.
eſt égale au côté GI.

Troiſiemement, le côté EG eſt égal (n) à la partie AE. Ainſi, puiſque le qua- N. 50.
drilatere GB eſt rectangle [c], il eſt le rectangle des parties AE & EB.

Quatriemement, enfin, le côté HG eſt égal (n) à la partie AE, & le côté N. 50.
GF l'eſt (n) à la partie EB; puiſque la N. 62.
même ligne GI eſt égale, & à ce côté (n), & à cette partie (n). Ainſi, puiſque N. 50.
le quadrilatere DG eſt auſſi rectangle N. 143.
[c], il eſt encore un rectangle des parties AE & EB.

Or, ces deux quarrés HE & FI, avec ces deux rectangles GB & DG, ſont toutes les parties du quadrilatere DB, qui [c] eſt le quarré de la ligne AB. Donc (n), les quarrés HE & FI des N. 72.
parties AE & EB, avec les deux rectangles GB & DG faits chacun de ces mêmes parties, ſont égaux au quarré DB de la ligne AB; & par conſéquent, C. Q. F. D.

COROLLAIRE I.

185. Il suit de ce théorême, que *le quarré d'une ligne est quadruple de celui de la moitié de cette même ligne.*

Fig. 9. Le quarré de la ligne AB * est quadruple de celui de la moitié de cette ligne.

N. 94. *Const.* Divisez (n) la ligne AB en deux parties égales AC & CB.

Démonst. Le quarré de la partie AC, celui de la partie CB, & le rectangle de ces deux parties sont trois choses égales; puisque [H] ces deux parties sont égales. Ainsi, deux quarrés des parties AC & CB, avec deux rectangles faits chacun de ces mêmes parties, sont égaux à quatre quarrés de la partie AC. Mais
N. 184. (n), ces deux mêmes quarrés, avec ces deux mêmes rectangles, sont aussi égaux
N. 62. au quarré de la ligne AB. Donc (n), le quarré de la ligne AB est égal à quatre quarrés de la partie AC; & par conséquent, C. Q F. D.

COROLLAIRE II.

186. Il suit aussi de la démonstration de ce même théorême, qu'*un parallélogramme qui a un angle commun avec un quarré, & dont la diagonale est une partie de celle de ce quarré, est un quarré.*

Le parallélogramme, par exemple HE*, qui a l'angle A commun avec le quarré D B, & dont la diagonale A G est une partie de la diagonale AC de ce même quarré, est un quarré. Fig. 2.

Démonst. Par quelque point de la diagonale A C que l'on tire des paralleles E F & H I, pour former avec les côtés du quarré D B un parallélogramme tel que le proposé H E, l'angle E G A sera toujours (n) égal à l'angle B C A ; & par N. 130.
conséquent (n) à l'angle BAC, puisque N. 86.
[H] les côtés BA & BC seront toujours égaux. Ainsi (n), le parallélogramme HE N. 82.
aura toujours deux côtés de suite AE & EG égaux : d'ailleurs, il sera toujours rectangle (n) ; puisque [H] il aura tou- N. 50.
jours un angle commun avec le quarré DB. Donc (n), il sera toujours un quar- N. 146.
ré ; & par conséquent, C. Q. F. D.

PROPOSITION V.

THÉORÈME.

187. *Si une ligne droite est divisée en deux parties, le rectangle de ces deux parties, avec le quarré de la moitié de leur différence, sera égal au quarré de la moitié de cette ligne.*

Fig. 10. SI une ligne droite A B * est divisée en deux parties (par exemple AE & EB), le rectangle de ces deux parties AE & EB, avec le quarré de la moitié de leur différence, sera égal au quarré de la moitié de cette ligne AB.

N. 94. *Const.* Divisez (n) la ligne AB en deux
N. 170. parties égales AK & KB. Décrivez (n) un quarré KC sur la partie KB. Tirez la diagonale DB. Par le point de division E,
N. 133. tirez (n) une parallele EF à la ligne KD. Par le point G, auquel cette parallele ren-
N. 133. contre la diagonale DB, tirez (n) une parallele HL à la ligne AB. Enfin, par
N. 133. le point A, tirez (n) une parallele AH à la ligne KD.

Démonst. Premierement, les quadri-
N. 153. lateres AI & KL sont égaux (n); puis-

que [c] ils sont des parallélogrammes sur des bases égales AK & KB, & entre mêmes paralleles AB & HL. Mais (n), N. 63. les quadrilateres EC & KL sont aussi égaux; puisqu'ils ont une partie commune EL, & que l'autre partie GC du premier & l'autre partie KG du second, qui sont les complémens du parallélogramme KC, sont égales (n). Donc (n), N. 164. les quadrilateres AI & EC sont égaux. N. 62.

Secondement, le quadrilatere EL est un quarré (n). Ainsi (n), le côté EG est N. 186. égal à la partie EB; & par conséquent, N. 50. puisque le quadrilatere AG est rectangle [c], il est le rectangle des parties AE & EB.

Troisiemement, enfin, le quadrilatere IF est aussi un quarré (n). Ainsi, il est le N. 186. quarré de la demi différence KE † des parties AE & EB; puisque (n) son côté N. 141. IG est égal à cette demi-différence.

† Lorsqu'une ligne droite quelconque AB est divisée Fig. 12. en deux parties inégales AE & EB, la partie KE qui est comprise entre son milieu K & son point de division E, est toujours la moitié de la différence de ces parties inégales. Car, si sur la plus grande partie AE on prend une partie AM égale à la plus petite EB, le reste ME est la différence de ces deux parties AE & EB. Or, les parties AK & KB sont égales, puisque [H] le point K est le milieu de la ligne AB; & les parties AM & EB sont aussi égales [c]. Donc la partie MK est égale à la partie KE; & par conséquent cette partie KE est la moitié de la différence ME.

Or, le quadrilatere EC (ou [D] son égal AI) le quadrilatere KG, & le quarré IF, sont toutes les parties du quadrilatere KC, qui [G] est le quarré de la
N. 72. moitié de la ligne AB. Donc (n), ces deux quadrilateres AI & KG (c'est-à-dire, le rectangle AG des parties AE & EB) avec le quarré IF de la demi-différence de ces parties, sont égaux au quarré KC de la moitié de la ligne AB; & par conséquent, C. Q. F. D.

USAGE.

188. *On peut se servir de cette proposition, de la maniere suivante, pour résoudre ce problême.*

Fig. 11. Un rectangle AC * a 112 pieds de surface, & 44 pieds de circonférence. Combien sa longueur AB, & sa largeur BC, contiennent-elles de pieds, chacune?

SOLUTION. Puisque [H] *le rectangle AC a 44 pieds de circonference, sa longueur AB & sa largeur BC ont ensemble 22 pieds. Ainsi, l'on suppose une ligne droite ABE de 22 pieds, dont la moitié FE n'est par conséquent que de 11 pieds; après quoi, l'on raisonne de cette maniere:*

La ligne ABE est divisée en deux par-

ties AB & BE, & le point F est son milieu. Ainsi (n), le rectangle AC de ces deux parties (qui [H] est de 112 pieds), avec le quarré de leur demi-différence FB (qui est inconnu) doit être égal au quarré de la ligne FE (lequel [H] est de 121 pieds). Donc, ce quarré qui étoit inconnu est de neuf pieds; & par conséquent, la demi-différence FB est de trois pieds. Or, puisque la ligne AF est de 11 pieds, & la demi-différence FB de trois, le côté AB est de 14 pieds, & le côté BC de huit; & par conséquent, C. Q. F. F. N. 187.

SCHOLIE.

189. *La surface d'un rectangle considérée comme une quantité discrete, n'est autre chose (n) que le produit des deux nombres qui expriment les valeurs des côtés de ce rectangle. Ainsi, l'on auroit pu énoncer de cette maniere le problême précédent.* N. 149.

Le produit de deux nombres est 112, & leur somme 22; quels sont ces deux nombres?

Et pour le résoudre, on auroit dit, par le même principe que dans l'usage précédent: le produit 112 des deux nombres demandés, avec le quarré de leur demi-

différence, doit être égal au quarré 121 de la moitié de leur somme. Donc, le quarré de leur demi-différence est 9; & par conséquent, leur demi-différence est 3. Or, puisque la moitié de la somme des deux nombres demandés est 11, & que leur demi-différence est 3, le plus grand de ces deux nombres est 14, & le plus petit est 8.

D'où l'on voit que l'on peut résoudre par cette proposition, toutes les questions numériques dans lesquelles il ne s'agit que de trouver deux nombres dont on connoît le produit & la somme.

PROPOSITION

PROPOSITION VI.

THÉORÊME.

190. *Si une ligne droite est divisée en deux parties, le rectangle de cette ligne & de l'une quelconque de ces deux parties, avec le quarré de la moitié de l'autre partie, sera égal au quarré d'une ligne qui seroit composée de cette premiere partie, & de la moitié de cette autre partie.*

SI une ligne droite AB * est divisée en deux parties (par exemple AE & EB) le rectangle de cette ligne AB, & de l'une de ces parties (par exemple de la partie EB) avec le quarré de la moitié de l'autre partie AE, sera égal au quarré d'une ligne qui seroit composée de cette premiere partie EB, & de la moitié de cette autre partie AE. Fig. 12.

Const. Divisez (n) la partie AE en deux parties égales AK & KE. Décrivez (n) un quarré KC sur la ligne KB. Tirez la diagonale DB. Par le point de division E, tirez (n) une parallele EF à la ligne KD. Par le point G, auquel cette N. 94. N. 170. N. 138.

parallele rencontre la diagonale DB,
N. 133. tirez (n) une parallele HL à la ligne AB.
N. 133. Enfin, par le point A, tirez (n) une parallele AH à la ligne KD

Démonst. Premierement, les quadri-
N. 153. lateres AI & KG sont égaux (n); puisque [c] ils sont des parallélogrammes sur des bases égales AK & KE, & entre mêmes paralleles AB & HL. Mais, les quadri-
N. 164. lateres GC & KG sont aussi égaux (n); puisqu'ils sont les complémens du paral-
N. 62. lélogramme KC. Donc (n), les quadrilateres AI & GC sont égaux.

Secondement, le quadrilatere EL est
N. 186. un quarré (n). Ainsi (n), son côté BL est
N. 50. égal à la partie EB; & par conséquent, puisque le quadrilatere AL est rectangle [c], il est le rectangle de la ligne AB & de la partie EB.

Troisiemement, enfin, le quadrilatere
N. 186. IF est aussi un quarré (n). Ainsi, il est le quarré de la moitié KE de la partie AE;
N. 143. puisque (n) son côté IG est égal à cette moitié.

Or, le quadrilatere GC (ou [D] son égal AI) le quadrilatere KL, & le quarré IF, sont toutes les parties du quadrilatere KC, qui [c] est le quarré de la ligne
N. 71. KB. Donc (n), les deux quadrilateres

AI & KL (c'eſt-à-dire, le rectangle AL de la ligne AB & de la partie EB) avec le quarré IF de la moitié KE de l'autre partie AE, ſont égaux au quarré KC de la ligne KB, laquelle eſt compoſée de la partie EB, & de la moitié KE de l'autre partie AE; & par conſéquent, C. Q. F. D.

SCHOLIE.

191. *La ligne KE * eſt la moitié de la différence des lignes AB & EB. Ainſi, la ligne KB eſt la moitié de leur ſomme; & par conſéquent, ce théorême & le précédent ne ſont qu'une même propoſition, que l'on auroit pu énoncer de cette maniere:* le rectangle de deux lignes droites quelconques, avec le quarré de la moitié de leur différence, eſt égal au quarré de la moitié de leur ſomme. Fig. 12.

USAGE.

192. *On peut ſe ſervir de cette propoſition, de la maniere ſuivante, pour réſoudre ce Problême:*

Un rectangle AC * a 216 pieds de ſurface, & ſa longueur AB ſurpaſſe de ſix pieds ſa largeur BC. Combien cette longueur & cette largeur contiennent-elles de pieds chacune? Fig. 13.

SOLUTION. *Puisque* [H] *le côté AB surpasse de six pieds le côté BC, on prend sur ce côté AB une partie AE de six pieds, & le reste EB est égal au côté BC; après quoi, l'on raisonne de cette maniere:*

La ligne AB est divisée en deux par-
N. 190. *ties AE & EB. Ainsi* (n), *le rectangle AC de cette ligne & de la partie EB,* (*lequel* [H] *est de 216 pieds*) *avec le quarré de la moitié FE de la partie AE,* (*lequel* [C] *est de neuf pieds*) *doit être égal au quarré de la ligne FB. Donc, le quarré de la ligne FB est de 225 pieds; & par conséquent, cette ligne est de 15 pieds. Or, puisque la ligne FB est de 15 pieds, & que* [C] *la ligne AF est de trois pieds, le côté AB est de 18 pieds, & le côté BC de 12; & par conséquent, C. Q. F. F.*

SCHOLIE.

193. *Par la même raison que dans la*
N. 189. *derniere scholie* (n), *on auroit pu énoncer de cette maniere le problême précédent.*

Le produit de deux nombres est 216, & leur différence six; quels sont ces deux nombres.

Et pour le résoudre, on auroit dit, par le même principe que dans l'usage précé-

dent : le produit 216 des deux nombres demandés, avec le quarré neuf de leur demi-différence, doit être égal au quarré de la moitié de leur somme. Donc, ce quarré est 225 ; & par conséquent, cette demi-somme est 15. Or, puisque la moitié de la somme des deux nombres demandés est 15, & que leur demi-différence est trois, le plus grand de ces deux nombres est 18, & le plus petit 12.

D'où l'on voit que l'on peut résoudre par cette proposition, toutes les questions numériques dans lesquelles il ne s'agit que de trouver deux nombres dont on connoît le produit & la différence.

PROPOSITION VII.

THÉORÊME.

194. *Si une ligne droite est divisée en deux parties, le quarré de l'une quelconque de ces deux parties, avec deux rectangles faits chacun de cette ligne & de son autre partie, sera égal aux quarrés de cette même ligne & de cette autre partie.*

Fig. 14. SI une ligne droite AB * est divisée en deux parties (par exemple AE & EB) le quarré de l'une de ces parties, (par exemple, de la partie EB) avec deux rectangles faits chacun de la ligne AB & de l'autre partie AE, sera égal aux quarrés de cette même ligne AB & de cette autre partie AE.

N. 170. *Const.* Décrivez (n) un quarré AC sur la ligne AB. Tirez la diagonale DB. Par
N. 133. le point de division E, tirez (n) une parallele EF à la ligne AD. Prolongez les lignes AD & EF, jusqu'à ce que leurs prolongemens AK & EL soient égaux chacun à la partie AE. Tirez du point K au point L, une ligne droite KL. Enfin,

par le point G, auquel la parallele LF rencontre la diagonale DB, tirez (n) une parallele HI à la ligne AB. N. 133.

Démonst. Premierement, le quadrilatere EI est (n) le quarré de la partie EB. N. 186.

Secondement, le côté HI est (n) égal à la ligne AB: & le côté HD l'est (n) à la partie AE; puisque la même ligne HG est égale, & à ce coté (n), & à cette partie (n). Ainsi, puisque le quadrilatere HC est rectangle [c], il est le rectangle de la ligne AB & de la partie AE. N. 145. N. 62. N. 50. N. 143.

Troisiemement, enfin, la partie EL est [c] égale à la partie AE; & la partie GE l'est (n) à la partie EB. Ainsi, le côté GL est égal à la ligne AB; & par conséquent, puisque (n) le côté KL est aussi égal à la partie AE, & que le quadrilatere KG est aussi rectangle [c], ce quadrilatere KG est encore un rectangle de la ligne AB & de la partie AE. N. 50. N. 50.

Or, ce quarré EI, & ces deux rectangles HC & KG, sont toutes les parties de la figure KDCBEL, qui [c] est la somme du quarré AC de la ligne AB, & du quarré AL de la partie AE. Donc (n), le quarré EI de la partie EB, avec deux rectangles HC & KG faits chacun de la ligne AB & de l'autre partie AE, N. 72.

eſt égal aux quarrés AC & AL de cette même ligne AB & de cette autre partie AE; & par conſéquent, C. Q. F. D.

USAGE.

195. *On peut ſe ſervir de cette propoſition, de la maniere ſuivante, pour réſoudre ce problême.*

Fig. 15. Un rectangle DB * a 432 pieds de ſurface, & 30 pieds de diagonale. Combien ſa longueur AB & ſa largeur BC contiennent-elles de pieds, chacune?

SOLUTION. On tire la diagonale AC. On ſuppoſe enſuite le plus grand côté AB diviſé en deux parties, dont l'une EB ſoit égale au plus petit côté BC; après quoi, l'on raiſonne de cette maniere:

La ligne AB eſt diviſée en deux parties AE & EB. Ainſi (n), *le quarré de la partie AE (qui eſt inconnu) avec deux rectangles DB & DB faits chacun de la ligne AB & de l'autre partie EB (leſquels pris enſemble, valent* [H] *864 pieds) doit être égal aux quarrés de cette ligne AB & de cette autre partie EB; c'eſt-à-dire,* [C], *aux quarrés des côtés AB & BC; & par conſéquent* (n), *au quarré de l'hypoténuſe AC, puiſque* [H] *le triangle ABC eſt rectangle en B.*

N. 194.

N. 171.

Mais

Mais [H], *ce quarré est de 900 pieds. Donc, celui de la partie AE qui étoit inconnu, n'est que de 36 pieds; & par conséquent, cette partie est de six pieds. Or, puisque la partie AE est de six pieds, la longueur AB du rectangle DB, qui a 432 pieds de surface, surpasse de six pieds sa largeur BC. Donc* (n), *cette longueur AB est de 24 pieds, & cette largeur BC de 18; & par conséquent, C. Q. F. F.* N. 192.

PROPOSITION VIII.

THÉORÊME.

196. *Si une ligne droite est divisée en deux parties; quatre rectangles faits chacun de ces deux parties, avec le quarré de la différence de ces deux mêmes parties, seront égaux au quarré de cette ligne.*

SI une ligne droite AB * est divisée en deux parties (par exemple AC & CB) quatre rectangles de ces deux parties, avec le quarré de la différence de ces deux mêmes parties, seront égaux au quarré de cette ligne AB. Fig. 16.

Démonst. La ligne AB est divisée en
N. 187. deux parties AC & CB. Ainsi (n), le rectangle de ces deux parties, avec le quarré de la moitié de leur différence, est égal au quarré de la moitié de cette
N. 67. ligne ; & par conséquent (n), quatre rectangles de ces deux parties, avec quatre quarrés de cette demi-différence,
N. 185. (c'est-à-dire (n), avec le quarré de la différence entiere) sont égaux à quatre quarrés de la moitié de cette ligne, c'est-
N. 185. à-dire (n), au quarré de cette ligne entiere. Donc, C. Q. F. D.

SCHOLIE.

197. *Cette proposition n'est qu'un corollaire de la cinquieme.*

PROPOSITION IX.

THÉORÊME.

198. *Si une ligne droite est divisée en deux parties, les quarrés de ces deux parties seront doubles du quarré de la moitié de cette ligne, & du quarré de la moitié de la différence de ces mêmes parties.*

SI une ligne droite AB * est divisée en deux parties (par exemple AC & CB) les quarrés de ces parties AC & CB seront doubles du quarré de la moitié de cette ligne AB, & de celui de la moitié de la différence de ces mêmes parties AC & CB. Fig. 17.

Const. Divisez (n) la ligne AB en deux parties égales AD & DB. Du point D, élevez (n) une perpendiculaire DE à cette ligne AB. Faites cette perpendiculaire égale à l'une des parties AD & DB. Tirez du point E aux points A & B, des lignes droites EA & EB. Par le point de division C, tirez (n) une parallele CF à la ligne DE. Par le point F auquel cette parallele rencontre la ligne EB, tirez (n) une parallele GF à la ligne AB. Enfin, N. 94. N. 96. N. 133. N. 133.

tirez du même point F au point A, une ligne droite FA.

Démonst. Premierement, l'angle ex-
N. 130. térieur CFB est (n) égal à son opposé intérieur DEB; puisque [c] les lignes
N. 86. CF & DE sont paralleles. Or (n), l'angle B est aussi égal à l'angle DEB; puisque les côtés DE & DB du triangle EDB
N. 62. sont égaux [c]. Donc (n), l'angle CFB est égal à l'angle B; & par conséquent
N. 83. (n), les côtés CB & CF du triangle FCB sont égaux.

Secondement, le triangle ADE est
N. 171. [c] rectangle & isoscele. Ainsi (n), le quarré du côté AE est double de celui de la moitié AD de la ligne AB.

Troisiemement, le triangle EGF est
N. 130. aussi rectangle & isoscele; puisque (n) les lignes GF & AB étant paralleles [c], les angles extérieurs EGF & GFE sont égaux, l'un à son opposé intérieur EDB qui est droit [c], & l'autre à son opposé intérieur B qui [D] est égal à l'angle
N. 171. DEB. Ainsi (n), le quarré du côté EF est aussi double du quarré du côté GF; & par conséquent, de celui de la demi-
N. 143. différence DC, puisque (n) cette demi-différence est égale à ce dernier côté. Cela posé:

Les quarrés des parties AC & CB,

(c'eſt-à-dire, des côtés AC & CF, puiſque [D] CB eſt égal à CF) ſont égaux (n) au quarré de l'hypoténuſe AF; puiſque [C] le triangle ACF eſt rectangle en C. Or (n), le quarré de cette hypoténuſe eſt égal à la ſomme des quarrés des côtés AE & EF; puiſque les angles DEA & DEB étant chacun la moitié d'un angle droit (n), le triangle AEF eſt auſſi rectangle en E: & [D] les quarrés de ces côtés AE & EF ſont doubles, l'un du quarré de la moitié AD de la ligne AB, & l'autre du quarré de la demi-différence DC des parties AC & CB. Donc (n), les quarrés des parties AC & CB ſont doubles du quarré de la moitié AD de la ligne AB, & de celui de la demi-différence DC des parties AC & CB; & par conſéquent, C. Q. F. D.

N. 171.
N. 171.
N. 138.
N. 62.

USAGE.

199. *On peut ſe ſervir de cette propoſition, de la maniere ſuivante, pour réſoudre ce problême.*

Un rectangle DB * a 70 pieds de circonférence, & 25 pieds de diagonale. Combien ſa longueur AB & ſa largeur BC, contiennent-elles de pieds, chacune? Fig. 18.

SOLUTION. Puiſque [H] *le rectangle DB a 70 pieds de circonférence, ſa lon-*

gueur AB & ſa largeur BC, ont enſemble 35 pieds. Ainſi, l'on ſuppoſe une ligne droite ABE de 35 pieds, dont la moitié AF n'eſt par conſéquent que de $17\frac{1}{2}$ *pieds; & après avoir tiré la diagonale AC, on raiſonne de cette maniere:*

La ligne AE eſt diviſée en deux parties AB & BE, & le point F eſt ſon mi-
N. 198. *lieu. Ainſi* (n), *le quarré de la ligne AF, (lequel* [H] *eſt de* $306\frac{1}{4}$ *pieds) avec celui de la demi-différence FB (qui eſt inconnu) doit être égal à la moitié de la ſomme des quarrés des parties AB & BE; c'eſt-à-dire* [C], *à la moitié de la ſomme des quarrés des côtés AB & BC;*
N. 171. *& par conſéquent* (n), *à la moitié du quarré de la diagonale AC, puiſque* [H] *le triangle ABC eſt rectangle en B. Mais* [H], *la moitié de ce quarré eſt de* $312\frac{1}{2}$ *pieds. Donc, le quarré qui étoit inconnu eſt de* $6\frac{1}{4}$ *pieds; & par conſéquent, la demi-différence FB eſt de* $2\frac{1}{2}$ *pieds. Or, puiſque la ligne AF eſt de* $17\frac{1}{2}$ *pieds, & la demi-différence FB de* $2\frac{1}{2}$ *pieds, le côté AB eſt de 20 pieds, & le côté BC de 15; & par conſéquent, C. Q. F. F.*

PROPOSITION X.

THÉORÊME.

200. *Si une ligne droite est divisée en deux parties, le quarré de cette ligne, avec celui de l'une de ces parties, sera double du quarré de la moitié de l'autre partie, & du quarré d'une ligne qui seroit composée de cette premiere partie & de la moitié de cette autre partie.*

SI une ligne droite AB * est divisée en deux parties (par exemple AC & CB) le quarré de cette ligne AB, avec celui de l'une de ces parties, (par exemple, de la partie CB) sera double du quarré de la moitié de l'autre partie AC, & du quarré d'une ligne qui seroit composée de cette premiere partie CB & de la moitié de cette autre partie AC. Fig. 19.

Const. Divisez (n) la partie AC en deux parties égales AD & DC. Du point D, élevez (n) une perpendiculaire DE à la ligne AB. Faites cette perpendiculaire égale à l'une des parties AD & DC. Par le point E, tirez (n) une parallele indé- N. 94. N. 96. N. 135.

finie EF à la ligne AB. Du même point E, tirez par le point de division C, une ligne droite indéfinie ECG. Par le point
N. 133. B, tirez (n) une ligne FBG parallele à la perpendiculaire DE, & qui rencontre les lignes EF & EG, l'une en un point F, & l'autre en un point G. Enfin, tirez du point A aux points E & G, des lignes droites AE & AG.

Démonst. Premierement, l'angle EGF
N. 130. est (n) égal à son alterne DEG, puisque les lignes FG & DE sont paralleles [c].
N. 56. Or, l'angle DEG est (n) égal à l'angle DCE, puisque les côtés DC & DE du triangle EDC sont égaux [c]; & l'angle
N. 102. DCE est (n) égal à l'angle BCG qui lui
N. 62. est opposé au sommet. Donc (n), les angles EGF & BCG sont égaux; & par
N. 88. conséquent (n), les côtés CB & BG du triangle CBG le sont aussi.

Secondement, le triangle ADE est [c]
N. 171. rectangle & isoscele. Ainsi (n), le quarré du côté AE est double de celui de la moitié AD de la partie AC.

Troisiemement, le triangle EFG est
N. 130. aussi rectangle & isoscele; puisque (n) les lignes EF & AB étant paralleles [c], les angles intérieurs EFG & FEG sont égaux, l'un à son opposé extérieur ABG
N. 130. qui est droit (n); & l'autre à son opposé

extérieur BCG qui [D] eſt égal à l'angle EGF. Ainſi (n), le quarré du côté EG N. 171.
eſt auſſi double du quarré du côté EF ; & par conſéquent, de celui de la ligne DB, puiſque (n) cette ligne eſt égale à N. 143.
ce dernier côté. Cela poſé :

Le quarré de la ligne AB, avec celui de la partie CB (c'eſt-à-dire, les quarrés des côtés AB & BG, puiſque [D] les lignes CB & BG ſont égales) eſt égal (n) au quarré de l'hypoténuſe AG ; puiſ- N. 171.
que (n) le triangle ABG eſt rectangle en N. 130.
B. Or (n), le quarré de cette hypoténuſe N. 171.
eſt égal à la ſomme des quarrés des côtés AE & EG ; puiſque les angles DEA & DEC étant chacun la moitié d'un angle droit (n), le triangle AEG eſt auſſi rec- N. 138.
tangle en E : & [D] les quarrés des côtés AE & EG ſont doubles, l'un du quarré de la moitié AD de la partie AC, & l'autre du quarré de la ligne DB. Donc (n), le quarré de la ligne AB, avec celui N. 62.
de la partie CB, eſt double du quarré de la moitié AD de la partie AC, & du quarré de la ligne DB, qui eſt compoſée de la partie CB & de la moitié DC de la partie AC ; & par conſéquent, C. Q. F. D.

SCHOLIE.

Fig. 19. 201. *La ligne DC* est la moitié de la différence des lignes AB & CB, comme nous l'avons déja observé au n°. 191. Ainsi, la ligne DB est la moitié de leur somme; & par conséquent, ce théorême & le précédent ne sont aussi qu'une même proposition, que l'on auroit pu énoncer de cette maniere.*

Les quarrés de deux lignes droites quelconques sont doubles de ceux de la moitié de la somme de ces deux lignes, & de la moitié de la différence de ces mêmes lignes.

USAGE.

202. *On peut se servir de cette proposition, de la maniere suivante, pour résoudre ce problême.*

Fig. 20. Un rectangle DB * a 35 pieds de diagonale, & sa longueur AB surpasse de sept pieds sa largeur BC. Combien cette longueur & cette largeur ont-elles de pieds, chacune?

SOLUTION. Puisque [H] *le côté AB surpasse de sept pieds le côté BC, on prend sur le côté AB une partie AE de sept pieds, & le reste EB est égal au côté BC; après quoi, l'on raisonne de cette maniere:*

La ligne AB est divisée en deux parties AE & EB. Ainsi (n), *le quarré de* N. 200.
la moitié AF de la partie AE (*lequel* [c] *est de* 12 $\frac{1}{4}$ *pieds*) *avec celui de la ligne FB* (*qui est inconnu*) *doit être égal à la moitié de la somme des quarrés de la ligne AB & de la partie EB; c'est-à-dire* [c], *à la moitié de la somme des quarrés des côtés AB & BC; & par conséquent* (n), *à la moitié du quarré de la* N. 171.
diagonale AC, puisque [H] *le triangle ABC est rectangle en B. Mais* [H], *la moitié de ce quarré est de* 612 $\frac{1}{2}$ *pieds: donc, le quarré qui étoit inconnu, est de* 600 $\frac{1}{4}$ *pieds; & par conséquent, la ligne FB est de* 24 $\frac{1}{2}$ *pieds. Or, puisque cette ligne est de* 24 $\frac{1}{2}$ *pieds, & que la ligne AF est trois* $\frac{1}{2}$ *pieds, le côté AB est de* 28 *pieds, & le côté BC de* 21; *& par conséquent, C. Q. F. F.*

PROPOSITION XI.

PROBLÊME.

203. *Diviser une ligne droite en deux parties, qui soient telles que le rectangle de cette ligne & de la plus petite de ces deux parties, soit égal au quarré de la plus grande.*

Fig. 21. Il faut diviser la ligne droite AB * en deux parties, qui soient telles que le rectangle de cette ligne & de la plus petite de ces deux parties, soit égal au quarré de la plus grande.

N. 96. *Const.* Du point A, élevez (n) à la ligne AB une perpendiculaire indéfinie
N. 81. FAD. Prenez (n) sur cette perpendiculaire, une partie AE égale à la moitié de cette ligne AB; & une partie EF égale à la distance du point E au point B. En-
N. 81. fin, prenez (n) sur la ligne AB, une partie AH égale à la ligne AF; & cette ligne sera divisée, comme il est demandé.

Pour la démonstration, faites la partie
N. 170. AD égale à la ligne AB; & (n) achevez le quarré AC. Par le point H, tirez
N. 133. (n) une parallele GHI à la ligne FD; &

par le point F, une parallele FG à la ligne AB. Enfin, tirez du point E au point B, une ligne droite EB.

Démonst. Premierement, les lignes BC & AB sont égales (n). Ainsi, puisque le quadrilatere HC est rectangle [c], il est le rectangle de la ligne AB & de la partie HB. N. 50.

Secondement, les lignes AF & AH sont aussi égales [c]. Ainsi, puisque le quadrilatere AG est rectangle [c], il est (n) le quarré de la partie AH. N. 50.

Troisiemement, enfin, les lignes FG & AF sont encore égales (n). Ainsi, puisque le quadrilatere DG est encore rectangle [c], il est le rectangle de la ligne DF & de sa partie AF. Cela posé: N. 50.

La ligne DF est divisée en deux parties DA & AF, & [c] la ligne EA est la moitié de la partie DA. Ainsi (n), le rectangle de la ligne DF & de la partie AF (c'est-à-dire [D], le rectangle DG) avec le quarré de la ligne EA, est égal au quarré de la ligne EF; & par conséquent, à celui de la ligne EB, puisque les lignes EF & EB sont égales [c]. Mais (n), les quarrés des lignes AB & EA sont aussi égaux au quarré de la même ligne EB, puisque [c] le triangle EAB est rectangle en A. Donc (n), le rectangle N. 190. N. 178. N. 64.

DG, avec le quarré de la ligne EA, est égal aux quarrés des lignes AB & EA;
N. 64. & par conséquent (n), le rectangle DG est égal au quarré de la ligne AB. Or, puisque le quarré AC de la ligne AB & le rectangle DG, qui ont une partie commune DH, sont égaux, l'autre partie HC du premier est égale à l'autre partie AG du second; & par conséquent, C. Q. F. F.

PROPOSITION XII.

THÉORÊME.

204. *Dans un triangle obtusangle, le quarré du côté opposé à l'angle obtus est égal aux quarrés des deux autres côtés, & à deux rectangles faits chacun de l'un quelconque de ces autres côtés, & de son prolongement jusqu'à la perpendiculaire.*

Fig. 22. DANS le triangle ABC * dont l'angle C est obtus, le quarré du côté AB est égal aux quarrés des autres côtés AC & CB, & à deux rectangles faits chacun de l'un quelconque de ces autres côtés, & de son prolongement jusqu'à la

perpendiculaire ; (par exemple, du côté AC & de ſon prolongement CD).

Conſt. Du point B, abaiſſez (n) une perpendiculaire BD au côté AC, prolongé autant qu'il ſera néceſſaire. N. 97.

Démonſt. La ligne AD eſt diviſée en deux parties AC & CD. Ainſi (n), le quarré de cette ligne eſt égal aux quarrés des lignes AC & CD, & à deux rectangles faits chacun de ces mêmes lignes; & par conſéquent (n), les quarrés des lignes AD & DB ſont égaux à ceux des lignes AC, CD & DB, & à deux rectangles faits chacun des lignes AC & CD. Mais, puiſque [c] les triangles ADB & CDB ſont rectangles l'un & l'autre en D, les quarrés des lignes AD & DB ſont (n) égaux au quarré du côté AB; & ceux des lignes CD & DB le ſont au quarré du côté CB. Donc (n), le quarré du côté AB eſt égal aux quarrés des côtés AC & CB, & à deux rectangles faits chacun des lignes AC & CD, c'eſt-à-dire, du côté AC & de ſon prolongement CD; & par conſéquent, C. Q. F. D. N. 184. N. 63. N. 171. N. 63.

USAGE.

205. *On peut ſe ſervir de cette propoſition, de la maniere ſuivante, pour réſoudre ce problême.*

Fig. 22. Les côtés AB *, AC & CB du triangle ABC dont l'angle C est obtus, sont, l'un de 20 toises, l'autre de 11, & le dernier, de 13. Combien la perpendiculaire abaissée de l'un des autres angles au côté opposé (par exemple, de l'angle B au côté AC) en contient-elle?

SOLUTION. L'angle C est obtus [H]. N. 204. *Ainsi* (n), *les quarrés des côtés AC & CB, (qui* [H] *sont de 290 toises) avec deux rectangles faits chacun des lignes AC & CD (lesquels sont inconnus) doivent être égaux au quarré du côté AB (lequel* [H] *est de 400 toises). Donc, ces deux rectangles qui étoient inconnus sont de 110 toises; & par conséquent, chacun de ces rectangles est de 55. Mais, puisque le rectangle des lignes AC & CD est de 55 toises, & que* [H] *la ligne AC est de 11,* N. 149. *55 sont* (n) *le produit de la ligne CD multipliée par 11; & par conséquent, cette ligne est de cinq toises. Or, puisque dans le triangle CDB qui* [H] *est rectangle en D, on connoît l'hypoténuse CB de 13 toises, avec le côté CD de cinq, on* N. 175. *trouvera* (n) *que le côté BD, qui est la perpendiculaire demandée, en contient 12; & par conséquent, C. Q. F. F.*

PROPOSITION

PROPOSITION XIII.

THÉORÊME.

206. *Dans un triangle quelconque, le quarré du côté opposé à l'un des angles aigus, avec deux rectangles faits chacun de l'un quelconque des autres côtés de sa partie comprise entre cet angle aigu & la perpendiculaire, est égal aux quarrés des autres côtés.*

DANS le triangle ABC *, le quarré du côté, par exemple AB, opposé à l'angle aigu C, avec deux rectangles faits chacun de l'un quelconque des autres côtés & de sa partie comprise entre cet angle aigu C & la perpendiculaire (par exemple, du côté AC & de sa partie DC) est égal aux quarrés des autres côtés AC & CB. Fig. 23.

Const. Du point B, abaissez (n) une perpendiculaire BD au côté AC. N. 97.

Démonst. La ligne AC est divisée en deux parties AD & DC. Ainsi (n), le quarré de la ligne AD, avec deux rectangles faits chacun des lignes AC & DC, est égal aux quarrés de ces mêmes lignes AC & DC; & par conséquent (n), les N. 194. N. 65.

quarrés des lignes AD & DB, avec deux rectangles faits chacun des lignes AC & DC, sont égaux aux quarrés des lignes AC, DC & DB. Mais, puisque [c] les triangles ADB & CDB sont rectangles l'un & l'autre en D, les quarrés des lignes
N. 171. AD & DB sont (n) égaux au quarré du côté AB; & ceux des lignes DC & DB
N. 61. le sont au quarré du côté CB. Donc (n), le quarré du côté AB, avec deux rectangles faits chacun des lignes AC & DC, (c'est-à-dire, du côté AC & de sa partie DC) est égal aux quarrés des autres côtés AC & CB; & par conséquent, C. Q. F. D.

USAGE.

207. *On peut se servir de cette proposition, de la maniere suivante, pour résoudre ce problême.*

Fig. 23. Les côtés AB*, AC & CB du triangle ABC dont l'angle C est aigu, sont l'un, de 45 toises; l'autre, de 42; & le dernier, de 39. Combien la perpendiculaire abaissée de l'un des autres angles au côté opposé (par exemple, de l'angle B au côté AC) en contient-elle?

SOLUTION. L'angle C est aigu [H].
N. 206. *Ainsi* (n), *le quarré du côté AB* (*qui* [H] *est de 2025 toises*) *avec deux rectangles*

faits chacun des lignes AC & DC (lesquels sont inconnus) doit être égal aux quarrés des côtés AC & CB (qui [H] *sont de 3285 toises). Donc, ces deux rectangles qui étoient inconnus, sont de 1260 toises; & par conséquent, chacun de ces rectangles est de 630. Mais, puisque le rectangle des lignes AC & DC est de 630 toises, & que* [H] *la ligne AC est de 42, 630 sont* (n) *le produit de la ligne* N. 149.
DC multipliée par 42; & par conséquent, cette ligne est de 15 toises. Or, puisque dans le triangle DBC qui [H] *est rectangle en D, on connoît l'hypoténuse CB de 39 toises, avec le côté DC de 15, on trouvera* (n) *que le côté BD, qui est la* N. 175.
perpendiculaire demandée, en contient 36; & par conséquent, C. Q. F. F.

SCHOLIE.

208. *Cette proposition & la précédente peuvent être fort utiles dans le toisé, & dans l'arpentage; parce qu'il est bien plus facile, dans la pratique, de mesurer les trois côtés d'un triangle, que d'abaisser une perpendiculaire de l'un des angles à l'un des côtés.*

PROPOSITION XIV.

PROBLÊME.

209. *Décrire un quarré, dont la surface soit égale à celle d'une figure rectiligne donnée.*

Fig. 24. IL faut décrire un quarré qui soit égal à la figure rectiligne A *.

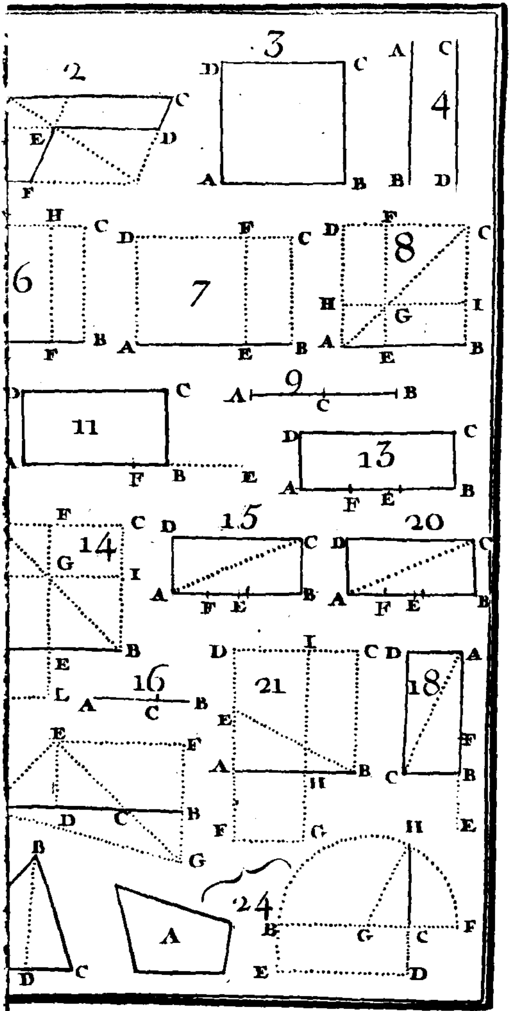
N. 167. *Const.* Décrivez (n) un rectangle BD égal à la figure proposée A. Prolongez l'un des côtés de ce rectangle, par exemple le côté BC, jusqu'à ce que le prolongement CF soit égal à l'autre côté CD.
N. 94. Divisez (n) la ligne BF en deux parties égales BG & GF. Du point G pris pour centre, & avec l'une de ces parties égales prise pour rayon (par exemple, avec la partie GF) décrivez un demi-cercle BHF. Enfin, prolongez le côté CD, jusqu'à ce qu'il rencontre en un point H la circonférence de ce demi-cercle; & le prolongement CH sera le côté du quarré demandé.

Pour la démonstration, tirez du point G au point H, une ligne droite GH.

Démonst. La ligne BF est divisée en deux parties BC & CF, & [c] le point

G eſt ſon milieu. Ainſi (n), le rectangle N. 187.
de ces deux parties (c'eſt-à-dire, le rectangle BD, puiſque les lignes CF & CD ſont égales [c]) avec le quarré de la ligne GC, eſt égal au quarré de la ligne GF; & par conſéquent, à celui de la ligne GH, puiſque (n) les lignes GF & GH N. 35.
ſont égales. Mais (n), les quarrés des N. 171.
lignes GC & CH ſont auſſi égaux au quarré de la même ligne CH; puiſque [c] le triangle GCH eſt rectangle en C. Donc (n), le rectangle BD, avec le N. 62.
quarré de la ligne GC, eſt égal aux quarrés des lignes GC & CH; & par conſéquent (n), le rectangle BD eſt égal au N. 64.
quarré de la ligne CH. Or [c], ce même rectangle eſt auſſi égal à la figure rectiligne A. Donc (n), le quarré de la ligne N. 62.
CH eſt égal à cette figure; & par conſéquent, C. Q. F. F.

Fin du ſecond Livre.


2
3
4
6
7
8
9
11
13
14
15
20
16
21
18
24

LES ÉLÉMENS
D'EUCLIDE.

LIVRE TROISIEME.

EUCLIDE, après avoir démontré dans les deux premiers Livres les propositions fondamentales de la Géométrie, examine dans celui-ci les propriétés des lignes droites qui vont se terminer à la circonférence d'un cercle. Il considere ensuite la maniere dont les circonférences des cercles peuvent ou se toucher, ou se couper. Il détermine aussi ce qui doit être la mesure des angles qui sont formés dans un cercle, par des lignes droites tirées chacune d'un même point de sa circonférence. Enfin, il résoud quelques problêmes qui concernent encore le cercle, & démontre dans les dernieres propositions, les propriétés caractéristiques de cette figure.

DÉFINITIONS.

I.

210. ON nomme *cercles égaux*, ceux dont les diametres, ou dont les rayons, ſont égaux.

II.

211. On dit d'une ligne droite, qu'elle *touche* une figure, lorſqu'elle a un point commun avec la circonférence de cette figure, & qu'étant prolongée de part & d'autre, elle ne peut avoir que ce ſeul point de commun avec cette même figure.

Fig. 1. *La ligne AB* * touche *le cercle X*.

212. On nomme *tangente*, une ligne droite qui touche une figure.

Fig. 1. *La ligne AB * eſt une* tangente *au cercle X*.

213. On nomme *ſécante*, une ligne droite qui étant prolongée, s'il eſt néceſſaire, a plus d'un point commun avec une figure.

Fig. 1. *La ligne CD * eſt une* ſécante *du cercle X*.

III.

III.

214. On dit que des figures se *touchent*, lorsque leurs circonférences ont un point commun, & ne peuvent avoir que ce seul point de commun.

IV.

215. On dit que des lignes droites sont *également éloignées* d'un certain point, lorsque les perpendiculaires qui sont tirées de ce point à chacune de ces lignes, sont égales.

*Les lignes AB * & CD sont* également *éloignées du centre K du cercle X, si les perpendiculaires KG & KH sont égales.* Fig. 1.

216. On dit qu'une ligne droite est *plus éloignée* qu'une autre d'un certain point, lorsque la perpendiculaire qui est tirée de ce point à cette premiere ligne, est plus grande que la perpendiculaire qui est tirée de ce même point à cette autre ligne.

*La ligne EF * est* plus éloignée *que la ligne AB du centre K du cercle X, si la perpendiculaire KI est plus grande que la perpendiculaire KG.* Fig. 1.

217. On nomme *corde*, une ligne droite qui est tirée de l'une des extrémi-

tés d'un arc à l'autre extrémité du même arc.

Fig. 3. *La ligne AC* * *est la* corde *de l'arc ABC.*

218. On dit d'une corde, qu'elle *tend* l'arc dont elle est la corde.

Fig. 3. *La corde AC* * tend *l'arc ABC.*

V.

219. On nomme *segment* de cercle, une figure plane qui est terminée par un arc de cercle & par une corde.

Fig. 3. *La figure ABC* * *est un* segment *de cercle.*

VI.

220. On nomme *angle du segment*, un angle qui est formé par la corde qui tend l'arc de ce segment, & par une tangente à ce même arc, tirée de l'une de ses extrémités.

Fig. 4. *L'angle ABC* * *est l'angle du* segment *CDB.*

VII.

221. On dit d'un angle, qu'il est *inscrit dans* un segment, ou seulement, qu'il est *dans* un segment, lorsqu'il a son sommet dans l'arc de ce segment, & que ses côtés passent par les extrémités de cet arc.

*L'angle E * est* dans *le segment CEB.* Fig. 4.

VIII.

222. On dit d'un angle, qu'il *s'appuie* sur la ligne ou droite, ou courbe, qui est tirée de l'extrémité de l'un de ses côtés à l'extrémité de l'autre.

*L'angle B ** s'appuie *sur l'arc ADC.* Fig. 5.

IX.

223. On nomme *secteur* de cercle, une figure plane qui est terminée par un arc de cercle, & par deux rayons de ce même cercle.

*Les figures ABCD * & ABCE sont* Fig. 6. *chacune un* secteur *de cercle.*

X.

224. Enfin, on dit que des segmens de cercles sont *semblables*, lorsque les angles qui sont inscrits dans chacun de ces segmens, sont égaux.

*Les segmens ABC * & DEF sont* Fig. 7. semblables, *si les angles B & E qui sont inscrits, l'un dans le segment ABC, & l'autre dans le segment DEF, sont égaux.*

PROPOSITION I.

PROBLÊME.

125. *Trouver le centre d'un cercle donné.*

Fig. 8. Il faut trouver le centre du cercle X*.

Conſt. Tirez dans le cercle X une
N. 94. corde AB, à volonté. Diviſez (n) cette corde en deux parties égales AE & EB. Du point E, élevez à cette même corde
N. 96. (n) une perpendiculaire CD, qui ſe termine de part & d'autre à la circonférence.
N. 94. Enfin (n), diviſez auſſi cette perpendiculaire en deux parties égales CF & FD; & le point F ſera le centre demandé.

Pour la démonſtration. Du point G pris à volonté dans le cercle X; (mais cependant hors de la perpendiculaire CD) tirez aux points A, E & B, des lignes droites GA, GE & GB.

Démonſt. Si le centre du cercle X étoit un point hors de la perpendiculaire CD (par exemple, le point G) les triangles AGE & BGE, qui [c] ont le côté AE égal au côté BE, & le côté GE com-
N. 35. mun, auroient auſſi (n) le côté GA égal
N. 90. au côté GB. Ainſi (n), l'angle GEA ſeroit égal à l'angle GEB; & par conſé-

quent (n), la ligne GE seroit perpendi- N. 19.
culaire à la ligne AB. Mais (n), la ligne N. 21.
GE n'est point perpendiculaire à la ligne AB, puisque l'angle GEB n'est qu'une partie de l'angle CEB qui est [c] un angle droit. Donc, le point G n'est pas le centre du cercle X; & par conséquent, puisque la même démonstration subsisteroit, à quelque point de ce cercle que l'on prît le point G, pourvu que ce fût hors de la perpendiculaire CD, le centre demandé n'est pas hors de cette perpendiculaire. Or, puisque le centre demandé est dans cette perpendiculaire, & que [c] le point F est le seul point de cette ligne qui soit également éloigné des points C & D de la circonférence, le
point F est (n) ce centre; & par consé- N. 32.
quent, C. Q. F. F.

COROLLAIRE.

226. Il suit de la démonstration de ce problême, que *si dans le cercle une corde en coupe une autre perpendiculairement, & par le milieu, cette premiere corde sera le diametre de ce cercle.*

PROPOSITION II.

THÉORÊME.

227. *Si une ligne droite a plus d'un point commun avec la circonférence d'un cercle, elle passera dans ce cercle.*

Fig. 9. LA ligne droite AB * qui a les points A & B communs avec la circonférence du cercle X, passe dans ce cercle.

Const. Prenez sur la ligne AB un point D, à volonté; mais qui soit cependant entre les points A & B. Tirez ensuite du centre C du cercle X aux points A, D & B, des lignes droites CA, CD & CB.

Démonst. Dans le triangle ACD,
N. 105 l'angle extérieur CDB est (n) plus grand
N. 86. que son opposé intérieur A. Mais (n), l'angle B est égal à l'angle A; puisque
N. 35. (n) les côtés CA & CB du triangle ACB sont égaux. Donc, l'angle CDB est plus grand que l'angle B. Or, puisque dans le triangle DCB, l'angle CDB est plus
N. 112. grand que l'angle B, le côté CB est (n) plus grand que le côté CD. Donc l'extrémité D de ce dernier côté est dans

le cercle X ; & par conséquent, puisque [c] la ligne AB passe par cette extrémité, elle passe dans ce cercle. Donc, C. Q. F. D.

PROPOSITION III.

Théorême.

228. *Dans le cercle, si une ligne droite qui passe par le centre divise en deux parties égales une corde qui n'y passe point, elle lui sera perpendiculaire : & si elle lui est perpendiculaire, elle la divisera en deux parties égales.*

Premierement.

Si dans le cercle X *, la ligne droite CD qui passe par le centre F, divise en deux parties égales AE & EB la corde AB qui n'y passe point, elle sera perpendiculaire à cette corde. Fig. 10.

Const. Tirez du centre F aux points A & B, des lignes droites FA & FB.

Démonst. Dans les triangles AFE & BFE, le côté AE est [H] égal au côté EB, le côté FA au côté FB (n), & le N. 35. côté FE commun. Donc (n), l'angle N. 90. CEA est égal à l'angle CEB ; & par con-

N. 19. séquent (n), la ligne CD est perpendiculaire à la corde AB.

SECONDEMENT.

Fig. 10. Si dans le cercle X *, la ligne droite CD qui passe par le centre F, est perpendiculaire à la corde AB qui n'y passe point, elle la divisera en deux parties égales AE & EB.

Conſt. La même que la précédente.

Démonſt. Les triangles AEF & BEF sont [H] rectangles l'un & l'autre en E.
N. 171. Ainsi (n), les quarrés des côtés AE & EF sont égaux au quarré de l'hypoténuse AF; & ceux des côtés EB & EF le sont
N. 35. à celui de l'hypoténuse BF. Mais (n), ces
N. 62. hypoténuses sont égales. Donc (n), les quarrés des côtés AE & EF sont égaux à ceux des côtés EB & EF; & par con-
N. 64. séquent (n), le quarré du côté AE est égal à celui du côté EB. Or, puisque les quarrés des côtés AE & EB sont égaux, ces côtés le sont aussi.

Par conséquent, C. Q. F. D.

PROPOSITION IV.

THÉORÊME.

229. *Dans le cercle, si deux cordes se coupent à un point qui n'est pas le centre, elles ne se diviseront point chacune en deux parties égales.*

DANS le cercle X*, les cordes AB & CD qui se coupent au point F qui n'est pas le centre, ne se divisent point chacune en deux parties égales. Fig. 119

Const. Tirez du centre E au point d'intersection F, une ligne droite EF.

Démonst. Si le point F étoit le milieu de chacune des cordes AB & CD, la ligne EF qui [c] passe par le centre E, seroit (n) perpendiculaire à chacune de ces cordes. Ainsi (n), chaque angle EFB & EFD seroit un angle droit; & par conséquent, ces deux angles seroient égaux. Or (n), ces deux angles ne sont point égaux, puisque le second n'est qu'une partie du premier. Donc, le point F n'est pas le milieu de chacune des cordes AB & CD; & par conséquent, C. Q. F. D.

N. 228. N. 21. N. 72.

PROPOSITION V.

THÉORÊME.

230. *Les cercles dont les circonférences se coupent, n'ont point le même centre.*

Fig. 12. LEs cercles ABC * & DCB dont les circonférences se coupent aux points B & C, n'ont point le même centre.

Démonst. Dans le cercle, le centre est également éloigné de tous les points de
N. 32. la circonférence (n). Ainsi (n), les cir-
N. 35. conférences des cercles qui ont le même cêntre, sont paralleles ; & par consé-
N. 56. quent (n), elles ne se coupent point. Or, les circonférences des cercles ABC & BDC ne sont point paralleles, puisque [H] elles se coupent aux points B & C. Donc, ces cercles n'ont point le même centre ; & par conséquent, C. Q. F. D.

PROPOSITION VI.

THÉORÊME.

231. *Les cercles dont les circonférences se touchent, n'ont point le même centre.*

Les cercles ABC * & DBE dont les circonférences se touchent au point B, n'ont point le même centre. Fig. 13.

Démonst. Dans le cercle, le centre est également éloigné de tous les points de la circonférence (n). Ainsi (n), les circonférences des cercles qui ont le même centre, sont paralleles; & par conséquent (n), elles ne se touchent point. Or, les circonférences des cercles ABC & DBE ne sont point paralleles, puisque [H] elles se touchent au point B. Donc, ces cercles n'ont point le même centre; & par conséquent, C. Q. F. D. N. 32. N. 35. N. 56.

PROPOSITION VII.

THÉORÊME.

232. *Si d'un point pris dans un cercle, mais qui n'en est pas le centre, on tire à la circonférence plusieurs lignes droites :* Premierement, *celle qui passera par le centre sera la plus grande ; & celle qui y passeroit, si elle étoit prolongée, sera la plus petite :* Secondement, *celles qui seront plus près du centre, seront plus grandes que celles qui en seront plus éloignées :* Troisiemement, *enfin, il pourra y en avoir deux égales ; & il ne pourra y en avoir plus de deux.*

PREMIEREMENT.

Fig. 14. DANS le cercle X *, la ligne droite DAEB qui passe par le centre E, est la plus grande de toutes les lignes droites qu'il est possible de tirer du point A qui n'est pas le centre à la circonférence ; & la ligne droite A C qui passeroit par le centre E, si elle étoit prolongée, est la plus petite.

Const. Du point D pris à volonté sur la circonférence, tirez au centre E &

au point A, des lignes droites DE & DA.

Démonst. Premierement, dans le triangle AED, la somme des côtés AE & ED est (n) plus grande que le côté AD. Or (n), la ligne AEB est égale à cette somme, puisque (n) les lignes EB & ED sont égales. Donc, la ligne AEB est plus grande que le côté AD.
N. 115.
N. 63.
N. 35.

Secondement, dans le même triangle AED, le côté ED est (n) plus petit que la somme des autres côtés EA & AD. Or (n), la ligne EAC est égale à ce côté ED. Donc cette ligne est plus petite que la somme de ces autres côtés; & par conséquent, si l'on retranche la même ligne EA, & de cette ligne & de cette somme, le reste AC de cette ligne sera plus petit que le reste AD de cette somme.
N. 115.
N. 35.

Or, la même démonstration subsiste, à quelque point de la circonférence que l'on prenne le point D. Donc, de toutes les lignes droites qu'il est possible de tirer du point A à cette circonférence, la ligne AEB est la plus grande, & la ligne AC la plus petite; & par conséquent, C. Q F. 1°. D.

SECONDEMENT.

Si du point A * pris dans le cercle X, Fig. 15.

mais qui n'en est pas le centre, on tire à la circonférence les lignes droites AC & AD, la ligne AC qui est le plus près du centre E, sera la plus grande.

Const. Tirez du centre E aux points C & D, des lignes droites EC & ED.

Démonst. Dans les triangles AEC &
N. 72. AED, l'angle AEC est (n) plus grand que l'angle AED, le côté EC est égal au
N. 35. côté ED (n), & le côté EA commun.
N. 121. Donc (n), le côté AC est plus grand que le côté AD; & par conséquent, C. Q. F. 2°. D.

TROISIEMEMENT.

Fig. 16. Enfin, du point A * pris dans le cercle X, mais qui n'en est pas le centre, on peut tirer à la circonférence des lignes droites égales; & l'on ne peut en tirer plus de deux.

Const. Tirez du point A par le centre E, une ligne droite AEB. Du point C pris à volonté sur la circonférence, tirez aux points A & E, des lignes droites CA
N. 120. & CE. Décrivez sur la ligne AEB (n), un angle AED qui ait le point E pour sommet, & soit égal à l'angle AEC. Enfin, tirez du point A au point D, une ligne droite AD.

Démonst. Premierement, dans les

triangles AED & AEC, l'angle AED est [c] égal à l'angle AEC, le côté ED au côté EC (n), & le côté EA commun. N. 35.
Donc (n), le côté AD est égal au côté N. 83.
AC; & par conséquent, on peut tirer du point A à la circonférence, deux lignes droites égales.

Secondement [D], toute ligne droite qui étant tirée du point A à la circonférence, sera plus près du centre E que ne l'est la ligne AD, sera plus grande que cette ligne AD: & toute ligne droite qui étant tirée du même point A à la même circonférence, sera plus éloignée du centre E que ne l'est la ligne AD, sera plus petite que cette même ligne AD. Donc, la ligne AD est la seule ligne droite égale à la ligne AC, qu'il soit possible de tirer du point A à la circonférence; & par conséquent, on ne peut tirer de ce point à la circonférence, plus de deux lignes droites égales.

Or, la même démonstration subsiste, à quelque point de la circonférence que l'on prenne le point C. Donc, C. Q. F. 3°. D.

PROPOSITION VIII.

THÉORÊME.

233. *Si d'un point pris hors d'un cercle, on tire à la circonférence plusieurs lignes droites :* Premierement, *celle qui passera par le centre sera la plus grande ; & celle qui y passeroit, si elle étoit prolongée, sera la plus petite :* Secondement, *si elles traversent le cercle, celles qui seront plus près du centre, seront plus grandes que celles qui en seront plus éloignées ; mais si elles n'entrent point dans ce cercle, celles qui seront plus près du centre, seront au contraire plus petites que celles qui en seront plus éloignées :* Troisiemement, *enfin, deux de celles qui traverseront le cercle pourront être égales, & deux de celles qui n'y entreront point pourront aussi l'être ; mais, des unes comme des autres, il ne pourra y en avoir plus de deux.*

PREMIEREMENT.

Fig. 17. AU cercle X *, la ligne droite AEC qui passe par le centre E, est la plus grande de toutes les lignes droites qu'il est

est possible de tirer du point A, pris hors de ce cercle, à sa circonférence ; & la ligne droite AB qui passeroit par le centre E, si elle étoit prolongée, est la plus petite.

Const. Du point D pris à volonté sur la circonférence, tirez au centre E & au point A, des lignes droites DE & DA.

Démonst. Premierement, dans le triangle AED, la somme des côtés AE & ED est (n) plus grande que le côté AD. Or, N. 115.
(n), la ligne AEC est égale à cette somme, puisque (n) les lignes EC & ED sont N. 63. N. 35.
égales. Donc, la ligne AEC est plus grande que le côté AD.

Secondement, dans le même triangle AED, le coté EBA est (n) plus petit N. 115.
que la somme des autres côtés ED & DA. Donc, si du côté EBA, l'on retranche le rayon EB, & de la somme des côtés ED & DA le rayon ED, le reste AB de ce côté sera plus petit que le reste AD de cette somme.

Or, la même démonstration subsiste, à quelque point de la circonférence que l'on prenne le point D. Donc, de toutes les lignes droites qu'il est possible de tirer du point A à cette circonférence, la ligne AEC est la plus grande, & la ligne AB la plus petite ; & par conséquent, C. Q. F. 1° D.

SECONDEMENT.

Fig. 18. Si du point A * pris hors du cercle X, on tire à la circonférence des lignes droites AF & AD qui traversent ce cercle, la ligne AF qui est le plus près du centre E, sera la plus grande. Mais, si du point
Fig. 19. A * pris hors du cercle Y, on tire à la circonférence des lignes droites AF & AD qui n'entrent point dans ce cercle, la ligne AF qui est la plus éloignée du centre E, sera alors la plus grande.

Fig. 18. & 19. *Const.* Du centre E *, tirez aux points F & D, des lignes droites EF & ED.

Démonst. Dans les triangles AEF &
N. 72. AED, l'angle AEF est (n) plus grand que l'angle AED, le côté EF est égal au
N. 35. côté ED (n), & le côté AE commun.
N. 121. Donc (n), le côté AF est plus grand que le côté AD; & par conséquent, C. Q. F. 2°. D.

TROISIEMEMENT.

Fig. 20. & 21. Enfin, du point A * pris hors du cercle X, on peut tirer à la circonférence deux lignes droites égales qui traversent ce cercle, & deux lignes droites égales qui n'y entrent point; mais, des unes comme des autres, on ne peut en tirer plus de deux.

Const. Tirez du point A au centre E, une ligne droite AE. Du point C, pris à volonté ſur la circonférence, tirez aux points A & E, des lignes droites CA & CE. Décrivez ſur la ligne AE (n), un angle AED qui ait le point E pour ſommet, & ſoit égal à l'angle AEC. Enfin, tirez du point A au point D, une ligne droite AD. N. 120.

Démonſt. Premierement, dans les triangles AED & AEC, l'angle AED eſt [c] égal à l'angle AEC, le côté ED au côté EC (n), & le côté AE commun. N. 35. Donc (n), le côté AD eſt égal au côté N. 83. AC; & par conſéquent, on peut tirer du point A à la circonférence deux lignes droites égales AC * & AD qui traverſent Fig. 20. le cercle, & deux lignes droites égales AC * & AD qui n'y entrent point. Fig. 21.

Secondement [D], toute ligne droite qui étant tirée du point A * à la circon- Fig. 20. & 21. férence, ſera plus près du centre E que ne l'eſt la ligne AD, ſera plus grande que cette ligne AD, *dans le premier cas*, & plus petite, *dans le ſecond:* & toute ligne droite qui étant tirée du même point A à la circonférence, ſera plus éloignée du centre E que ne l'eſt la ligne AD, ſera plus petite que cette même ligne AD, *dans le premier cas;* & plus grande, *dans le ſecond.* Donc, *dans l'un comme dans l'autre cas*, la ligne AD eſt la ſeule ligne droite égale à la ligne AC, qu'il ſoit poſſible de tirer du point A à la circonférence; & par conſéquent, *dans l'un comme dans l'autre cas*, on ne peut tirer de ce point à la circonférence, plus de deux lignes droites égales.

Or, la même démonſtration ſubſiſte, à quelque point de la circonférence que l'on prenne le point C. Donc, C. Q. F. 3°. D.

PROPOSITION IX.

THÉORÊME.

234. *Dans le cercle, un point duquel on peut tirer à la circonférence plus de deux lignes droites égales, eſt le centre.*

Fig. 22. SI dans le cercle X*, les lignes droites AB, AC & AD qui ſont tirées chacune du même point A à la circonférence, ſont égales, ce point ſera le centre.

Démonſt. D'un point qui n'eſt pas le
N. 232. centre d'un cercle, on ne peut (n) tirer à la circonférence plus de deux lignes droites égales. Or, on peut tirer du point A

à la circonférence du cercle X plus de deux lignes droites égales ; puisque [H] les trois lignes AB, AC & AD le sont. Donc, ce point est le centre de ce cercle ; & par conséquent, C. Q. F. D.

PROPOSITION X.

THÉORÊME.

235. *La circonférence d'un cercle ne peut couper à plus de deux points, celle d'un autre cercle.*

LA circonférence du cercle ABC * qui coupe aux deux points B & C celle du cercle BDC, ne peut pas la couper à un troisieme point. Fig. 23

Démonst. Si la circonférence du cercle ABC pouvoit couper à trois points celle du cercle BDC, ces deux circonférences pourroient avoir trois points communs. Ainsi, les trois lignes droites que l'on pourroit tirer du centre E du cercle ABC à ces trois points, se termineroient toutes trois & à la circonférence du cercle ABC, & à celle du cercle BDC. Mais (n), si ces lignes se terminoient toutes trois à la circonférence du cercle ABC, elles seroient égales ; puisqu'elles seroient des N. 371

rayons de ce cercle. Donc, du point E,
N. 230 (qui (n) n'eſt pas le centre du cercle BDC, puiſqu'il eſt celui du cercle ABC) on pourroit tirer à la circonférence de ce cercle BDC trois lignes droites égales. Or
N. 232. (n), cela n'eſt point poſſible. Donc, la circonférence du cercle ABC ne peut point couper à plus de deux points celle du cercle BDC; & par conſéquent, C. Q. F. D.

PROPOSITION XI.

THÉORÊME.

236. *Si la circonférence d'un cercle touche intérieurement celle d'un autre cercle, le point auquel elle la touchera ſera dans la même ligne droite que les centres de ces deux cercles.*

Fig. 24. LE point B * auquel la circonférence du cercle DBE touche intérieurement celle du cercle ABC, le centre H du cercle ABC, & le centre du cercle DBE, ſont chacun dans une même ligne droite.

Conſt. Tirez du centre H du cercle ABC au point du contact B, une ligne droite HB. Du point I, pris à volonté dans le cercle DBE, (mais cependant hors de la ligne HB) tirez au point B, une ligne droite IB. Enfin, tirez du point H par le point I, une ligne droite HIC.

Démonst. Dans le triangle HIB, la somme des côtés HI & IB est (n) plus grande que le côté HB. Mais (n), ce côté HB est égal à la ligne HC; & (n) cette ligne est plus grande que la ligne HE. Donc, la somme des côtés HI & IB est plus grande que la ligne HE; & par conséquent (n), si & de cette somme & de cette ligne on retranche la même ligne HI, le reste IB de cette somme sera plus grand que le reste IE de cette ligne. Or, la même démonstration subsiste, à quelque point du cercle DBE que l'on prenne le point I, pourvu que ce soit hors de la ligne HB. Donc (n), aucun point du cercle DBE, pris hors de la ligne HB, ne peut être le centre de ce cercle; & par conséquent, ce centre est dans cette ligne. Mais [c], le point de contact B, & le centre H du cercle ABC sont aussi dans cette même ligne. Donc, le point de contact B, le centre H du cercle ABC, & le centre du cercle DBE sont chacun dans la ligne droite HB; & par conséquent, C. Q. F. D.

N. 115. N. 35. N. 72. N. 66. N. 323.

PROPOSITION XII.

Théorême.

237. *Si la circonférence d'un cercle touche extérieurement celle d'un autre cercle, le point auquel elle la touchera, sera dans la même ligne droite que les centres de ces deux cercles.*

Fig. 25. Le point C * auquel la circonférence du cercle X touche extérieurement celle du cercle Y, le centre A du cercle X, & le centre du cercle Y, sont chacun dans une même ligne droite.

Const. Tirez du centre A du cercle X par le point de contact C, une ligne droite indéfinie ACB. Du point D pris à volonté dans le cercle Y (mais cependant hors de la ligne ACB) tirez aux points A & C, des lignes droites DA & DC.

Démonst. Dans le triangle ACD, la
N. 115. somme des côtés AC & CD est (n) plus grande que le côté AD. Donc, si de la somme de ces côtés AC & CD on retranche le rayon AC, & du côté AD le rayon AE, le reste DC de cette somme

sera

fera plus grand que le reste DE de ce côté ; & par conséquent, puisque (n) le reste DE est encore plus grand que la ligne DF, la ligne DC sera plus grande que la ligne DF. Or, la même démonstration subsiste, à quelque point du cercle Y que l'on prenne le point D, pourvu que ce soit hors de la ligne ACB. Donc (n), aucun point du cercle Y, pris hors de la ligne ACB, ne peut être le centre de ce cercle ; & par conséquent, ce centre est dans cette ligne. Mais [c], le point de contact C, & le centre A du cercle X, sont aussi dans cette même ligne. Donc, le point de contact C, le centre A du cercle X, & le centre du cercle Y, sont chacun dans la ligne droite ACB ; & par conséquent, C. Q. F. D.

N. 71.

N. 38.

PROPOSITION XIII.

THÉORÊME.

238. *Si la circonférence d'un cercle touche celle d'un autre cercle intérieurement, ou extérieurement, elle ne la touchera qu'en un seul point.*

PREMIEREMENT.

Fig. 16. LA circonférence du cercle FDG *, qui touche celle du cercle EDB au point D, intérieurement, ne la touche qu'à ce seul point.

Const. Tirez du point de contact D par les centres C & A, une ligne droite
N. 236. DCA (n). Du point B, pris à volonté sur la circonférence du cercle EDB, tirez aux mêmes centres C & A, des lignes droites BC & BA.

Démonst. Dans le triangle ACB, la
N. 115. somme des côtés AC & CB est (n) plus
N. 35. grande que le côté AB. Mais (n), ce côté AB est égal à la ligne AD. Donc, la somme des côtés AC & CB est plus grande que la ligne AD; & par conséquent, si & de cette somme & de cette ligne on retranche la même ligne AC,

le reste CB de cette somme sera plus grand que le reste CD de cette ligne. Or, la même démonstration subsiste, à quelque point de la circonférence du cercle EDB que l'on prenne le point B, pourvu que ce ne soit pas au point de contact D. Donc, la ligne CB sera toujours plus grande que le rayon CD du cercle FDG; & par conséquent, son extrémité B sera toujours hors de ce cercle. Mais, puisque le point B est toujours hors du cercle FDG (excepté seulement lorsqu'il est pris sur le point D) la circonférence de ce cercle ne peut toucher celle du cercle EDB qu'à ce seul point D; & par conséquent, C. Q. F. 1°. D.

SECONDEMENT.

La circonférence du cercle Y *, qui touche celle du cercle X au point D, extérieurement, ne la touche qu'à ce seul point. Fig. 27.

Conſt. Tirez par le point de contact D & par les centres A & C, une ligne droite ADC (n). Du point B, pris à volonté sur la circonférence du cercle X, tirez aux mêmes centres A & C, des lignes droites BA & BC. N. 237.

Démonſt. Dans le triangle ABC, la

N. 115. ſomme des côtés AB & BC eſt (n) plus grande que le côté ADC. Donc, ſi de la ſomme de ces côtés AB & BC, on retranche le rayon AB, & du côté ADC le rayon AD, le reſte CB de cette ſomme ſera plus grand que le reſte CD de ce côté. Or, la même démonſtration ſubſiſte, à quelque point de la circonférence du cercle X que l'on prenne le point B, pourvu que ce ne ſoit pas au point de contact D. Donc, la ligne CB ſera toujours plus grande que le rayon CD du cercle Y; & par conſéquent, ſon extrémité B ſera toujours hors de ce cercle. Mais, puiſque le point B eſt toujours hors du cercle Y (excepté ſeulement lorſqu'il eſt pris ſur le point D) la circonférence de ce cercle ne peut toucher celle du cercle X qu'à ce ſeul point; & par conſéquent, C. Q. F. 2°. D.

PROPOSITION XIV.

THÉORÊME.

239. *Dans le cercle, les cordes qui sont égales sont également éloignées du centre, & celles qui sont également éloignées du centre, sont égales.*

PREMIEREMENT.

SI dans le cercle X * les cordes AB & CD sont égales, elles seront également éloignées du centre E. Fig. 28.

Const. Du centre E, abaissez (n) une perpendiculaire EF à la corde AB, & une perpendiculaire EG à la corde CD. Du même centre E, tirez aux points A & C, des lignes droites EA & EC. N. 97.

Démonst. Les triangles AFE & CGE sont (n) rectangles, l'un en F & l'autre en G. Ainsi (n), les quarrés des côtés AF & FE sont égaux au quarré de l'hypoténuse AE; & ceux des côtés CG & GE le sont à celui de l'hypoténuse CE. Mais (n), ces hypoténuses sont égales. Donc (n), les quarrés des côtés AF & FE sont égaux à ceux des côtés CG & GE; & par conséquent, puisque [H] les côtés N. 21. N. 171. N. 35. N. 62.

N. 228. AF & CG, qui (n) sont les moitiés des cordes AB & CD, sont égaux, les côtés
N. 215. FE & GE le sont aussi. Mais (n), ces côtés FE & GE sont les distances du centre E aux cordes AB & CD. Donc, ces cordes sont également éloignées de ce centre; & par conséquent, C. Q. F. 1°. D.

SECONDEMENT.

Fig. 28. Si dans le cercle X *, les cordes AB & CD sont également éloignées du centre E, elles seront égales.

Const. La même que la précédente.

Démonst. On démontre de la même maniere dont on vient de le faire, que dans les triangles AFE & CGE, les quarrés des côtés AF & FE sont égaux à ceux des côtés CG & GE. Donc, puis-
N. 215. que [H] les côtés FE & GE, qui (n) sont les distances du centre E aux cordes AB & CD, sont égaux, les côtés AF
N. 228. & CG le sont aussi. Mais (n), ces côtés AF & CG sont les moitiés des cordes AB & CD, chacun de chacune. Donc
N. 67. (n), ces cordes sont égales; & par conséquent, C. Q. F. 2°. D.

PROPOSITION XV.

THÉORÊME.

240. *Dans le cercle, la corde qui passe par le centre est la plus grande, & les cordes qui sont plus près du centre, sont plus grandes que celles qui en sont plus éloignées.*

PREMIEREMENT.

DANS le cercle X *, la corde AB qui passe par le centre C, est la plus grande que l'on puisse tirer dans ce cercle. Fig. 29.

Const. Tirez une corde DE à volonté, mais qui ne passe point par le centre C. Du même centre C, tirez aux points D & E, des lignes droites CD & CE.

Démonst. Puisque (n) la corde AB est N. 3 un diametre du cercle X, elle est (n) N. 35. égale à la somme des côtés CD & CE du triangle DCE. Or (n), la somme de N. 119. ces côtés est plus grande que le côté DE. Donc, la corde AB est aussi plus grande que ce côté; & par conséquent, puisque la même démonstration subsiste, par quelque endroit du cercle X que l'on tire la corde DE (pourvu que ce ne soit pas par le centre C) la cordè AB qui [H] paſſe par ce centre, eſt la plus grande qu'il ſoit poſſible de tirer dans ce cercle. Donc, C. Q. F. 1°. D.

SECONDEMENT.

Fig. 30. Dans le cercle X *, la corde AB, qui eſt plus près du centre C, eſt plus grande que la corde DE qui en eſt plus éloignée.

Conſt. Tirez du centre C aux points A, D, E & B, des lignes droites CA, CD, CE & CB.

Démonſt. Dans les triangles ACB &
N. 72. DCE, l'angle ACB eſt (n) plus grand que l'angle DCE, le côté CA eſt égal
N. 35. au côté CD (n), & le côté CB au côté
N. 35. CE (n). Donc (n), le côté AB eſt plus
N. 121. grand que le côté DE; & par conſéquent, C. Q. F. 2°. D.

PROPOSITION XVI.

THÉORÊME.

241. *Si de l'une des extrémités du diametre d'un cercle, on éleve une perpendiculaire à ce diametre, cette extrémité sera le seul point que cette perpendiculaire aura de commun avec ce cercle : & de cette même extrémité, on ne pourra tirer aucune ligne droite entre cette même perpendiculaire & ce même cercle.*

PREMIEREMENT.

SI de l'extrémité B * du diametre AB du cercle X, on éleve une perpendiculaire BC à ce diametre, le point B sera le seul point que cette perpendiculaire aura de commun avec ce cercle. Fig. 32.

Const. Du point E, pris à volonté sur la perpendiculaireBC, (mais qui soit cependant différent du point B) tirez au centre D, une ligne droite ED.

Démonst. Dans le triangle DEB, l'angle B est droit [H]. Donc (n), il est plus grand que l'angle DEB; & par consé- N. 105.

N. 112. quent (n), le côté DE est plus grand que le côté DB. Or, la même démonstration subsiste, à quelque point de la perpendiculaire BC que l'on prenne le point E; pourvu que ce ne soit pas au point B. Donc, le côté DE sera toujours plus grand que le rayon DB; & par conséquent, son extrémité E sera toujours hors du cercle X. Mais, puisque le point E est toujours hors de ce cercle (excepté seulement lorsqu'il est pris sur le point B) la perpendiculaire BC ne peut avoir que ce seul point B de commun avec ce même cercle; & par conséquent, C. Q. F. 1°. D.

SECONDEMENT.

Fig. 32. Du point B*, on ne peut tirer aucune ligne droite entre la perpendiculaire BC & le cercle X.

Const. Du point B, tirez entre le diametre AB & la perpendiculaire BC, une ligne droite quelconque BF. Du centre
N. 97. D, abaissez (n) une perpendiculaire DE à cette ligne.

N. 21. *Démonst.* Le triangle DEB est (n)
N. 105. rectangle en E. Donc (n), l'angle DEB est plus grand que l'angle DBE; & par
N. 112. conséquent (n), le côté DB est plus grand que le côté DE. Mais, puisque le

rayon DB eſt plus grand que le côté DE, l'extrémité E de ce côté eſt dans le cercle X; & par conſéquent, puiſque la ligne BF paſſe par cette extrémité, elle paſſe dans ce cercle. Or, la même démonſtration ſubſiſte, quelque près de la perpendiculaire BC que l'on tire la ligne BF. Donc, on ne peut tirer aucune ligne droite entre cette perpendiculaire & le cercle X; & par conſéquent, C. Q. F. 2°. D.

COROLLAIRE I.

242. Il ſuit de la premiere partie de ce théorême, que *ſi une ligne droite qui eſt tirée de l'une des extrémités du diametre d'un cercle, eſt perpendiculaire à ce même diametre, elle ſera* (n) *une tangente à ce cercle.* N. 212.

COROLLAIRE II.

243. Il ſuit de ce corollaire, que *pour tirer une tangente à un cercle, d'un point donné ſur la circonférence, il faut tirer un diametre qui ſe termine à ce point; & de ce même point, élever* (n) *une perpendiculaire à ce diametre.* N. 94.

SCHOLIE.

244. *L'angle formé par une tangente*

Fig 33. *AB * & par un arc AC, s'appelle un angle de* contingence. *Il ne peut être di-*
N. 241. *visé par aucune ligne droite* (n)*; mais il peut l'être en une infinité de parties, par*
N. 238. *des arcs AD, AE, &c.* (n)*: & ces deux propriétés opposées, ont donné lieu à beaucoup de raisonnemens métaphysiques, dont aucun n'est satisfaisant.*

Celui de tous ces raisonnemens qui paroît avoir été le moins mal reçu, prétend que les arcs AD, AE, &c. ne divisent point l'angle CAB; mais qu'ils touchent chacun la ligne AB à un point d'autant plus long, que les diametres des cercles dont ils sont des arcs, sont plus grands. Je demande si ces points plus longs les uns que les autres, sont bien géométriques? Et si l'on conçoit bien clairement,
N. 4. *qu'une chose qui* (n) *n'a aucune longueur, puisse être plus longue qu'une chose pareille, qui n'a de même aucune longueur?*

De ce qu'une ligne droite divise un angle rectiligne, & ne peut diviser un angle de contingence, on conclud que l'angle de contingence est plus petit qu'aucun angle rectiligne. Mais, cette conséquence est-elle juste, & celle-ci ne seroit-elle pas plus exacte? Donc, un angle de contingence & un angle rectiligne, ne sont point de même genre.

PROPOSITION XVII.

PROBLÊME.

245. *D'un point donné hors d'un cercle ; tirer une tangente à ce cercle.*

IL faut tirer du point A * pris hors du cercle B D, une tangente à ce cercle. Fig. 34.

Conſt. Tirez du point A au centre C, une ligne droite AC. Du même centre C, & avec la ligne AC, priſe pour rayon, décrivez un cercle AE. Du point B auquel cette ligne AC coupe la circonférence du cercle BD, élevez (n) une perpendiculaire BE à cette même ligne AC. N. 96. Du point E auquel cette perpendiculaire rencontre la circonférence du cercle AE, tirez au centre C une ligne droite EC. Enfin, tirez du point A au point D, auquel cette ligne coupe la circonférence du cercle BD, une ligne droite AD. Cette derniere ligne ſera la tangente demandée.

Démonſt. Dans les triangles CDA & CBE, le côté CD eſt égal au côté CB (n), le côté CA au côté CE (n), & l'an- N. 31. N. 31.

N. 83. gle C est commun. Donc (n), l'angle CDA est égal à l'angle CBE; & par
N. 21. conséquent, puisque (n) le dernier est un angle droit, le premier en est aussi
N. 21. un. Mais (n), puisque l'angle CDA est un angle droit, la ligne AD est perpendiculaire au rayon CD. Or [c], cette perpendiculaire est tirée de l'extrémité
N. 242. D de ce rayon. Donc (n), elle est une tangente au cercle BD; & par conséquent, C. Q. F. F.

PROPOSITION XVIII.

THÉORÊME.

246. *Si une ligne droite touche un cercle, la ligne droite qui sera tirée du centre au point de contact, sera perpendiculaire à cette tangente.*

Fig. 35. DANS le cercle X*, la ligne droite AB qui est tirée du centre A au point de contact B, est perpendiculaire à la tangente CD.

Const. Tirez du centre A à un point quelconque E de la ligne CD (mais qui soit cependant différent du point B) une ligne droite AE.

Démonst. Si quelque ligne droite tirée du centre A, mais différente de la ligne AB (par exemple la ligne AE) pouvoit être perpendiculaire à la tangente CD, le triangle BAE seroit rectangle en E (n). N. 21.
Ainsi (n), l'angle AEB seroit plus grand N. 105.
que l'angle ABE; & par conséquent (n), N. 112.
le côté AB seroit plus grand que le côté AE. Or (n), cela ne peut point être, N. 72.
puisque (n) ce même côté AB est égal N. 35.
à la partie AF du côté AE. Donc, aucune ligne droite tirée du centre A, mais différente de la ligne AB, ne peut être perpendiculaire à la tangente CD. Donc, la ligne AB est perpendiculaire à cette tangente; & par conséquent, C. Q. F. D.

PROPOSITION XIX.

THÉORÊME.

247. *Si une ligne droite touche un cercle; la perpendiculaire à cette tangente, qui sera tirée du point de contact, passera par le centre.*

Fig. 96. DANS le cercle X *, la perpendiculaire AB à la tangente CD, qui est tirée du point de contact A, passe par le centre.

Conft. Du point E, pris à volonté (mais cependant hors de la perpendiculaire AB) tirez au point A, une ligne droite EA.

Démonft. Si le point E étoit le centre du cercle X, la ligne EA feroit perpen-
N. 246. diculaire à la tangente CD (n). Ainsi
N. 21. (n), l'angle EAD feroit un angle droit;
N. 62. & par conséquent (n), il feroit égal à
N. 72. l'angle BAD. Mais (n), cela ne peut point être. Donc, le point E n'est pas le centre du cercle X. Or, la même démonstration subsiste, à quelque point hors de la perpendiculaire AB que l'on prenne le point E. Donc, le centre du cercle X est dans cette perpendiculaire; & par conséquent, C. Q. F. D.

PROPOSITION

PROPOSITION XX.

THÉORÊME.

248. *Dans le cercle, l'angle qui a ſon ſommet au centre, eſt double de celui qui a le ſien dans la circonférence, s'ils s'appuient tous les deux ſur le même arc.*

DANS le cercle X *, l'angle AEC qui a ſon ſommet au centre E, & qui s'appuie ſur le même arc AC que l'angle ABC, qui a le ſien dans la circonférence, eſt double de cet angle ABC. Fig. 37. & 38.

Conſt. Tirez du point B, par le centre E, une ligne droite BED.

Démonſt. L'angle AED, qui eſt extérieur au triangle AEB, eſt (n) égal à la N. 135. ſomme des angles intérieurs ABD & BAE qui lui ſont oppoſés. Or (n), ces N. 86. angles intérieurs ſont égaux, puiſque (n) N. 35. les côtés EA & EB le ſont. Donc, l'angle AED eſt double de l'angle ABD. Mais on démontre de la même maniere, que l'angle DEC eſt auſſi double de l'angle DBC. Ainſi :

Premierement (*fig.* 37.) chaque partie AED & DEC de l'angle AEC, eſt double de chaque partie correſpondante ABD & DBC de l'angle ABC. Donc, l'angle AEC eſt auſſi double de l'angle ABC.

Secondement (*fig.* 38.) l'angle AED eſt double de l'angle ABD; & la partie DEC du premier, eſt double de la partie DBC du ſecond. Donc, l'autre partie AEC du même premier, eſt auſſi double de l'autre partie ABC du même ſecond.

Par conſéquent, C. Q. F. D.

COROLLAIRE.

249. Il ſuit de ce théorême, que *dans le cercle, l'angle qui a ſon ſommet dans la circonférence, n'a pour meſure que la moitié de l'arc ſur lequel il s'appuie.*

Fig. 37. & 38. Dans le cercle X*, l'angle ABC qui a ſon ſommet B dans la circonférence, a pour meſure la moitié de l'arc AB ſur lequel il s'appuie.

Conſt. Tirez du centre E aux points A & C, des lignes droites EA & EC.

Démonſt. L'angle AEC a pour meſure

N. 17. tout l'arc AC (n). Or (n), l'angle ABC

N. 248. n'eſt que la moitié de l'angle AEC. Donc, il n'a pour meſure que la moitié de l'arc AC; & par conſéquent, C. Q. F. D.

PROPOSITION XXI.

THÉORÊME.

250. *Dans le cercle, les angles qui sont dans le même segment* (n), *sont égaux.* N. 222.

DANS le cercle X *, les angles B & D, qui sont dans le même segment ABDC, sont égaux. Fig. 39.

Démonst. Les angles B & D ont chacun leur sommet dans la circonférence du cercle X, & s'appuient chacun sur le même arc AEC; ainsi (n), ils ont chacun pour mesure la moitié de cet arc. N. 49. Or (n), puisque ces angles ont chacun la même mesure, ils sont égaux; & par conséquent, C. Q. F. D. N. 17.

PROPOSITION XXII.

THÉORÊME.

251. *Dans le cercle, la somme de deux angles opposés d'un quadrilatere inscrit †, est égale à celle de deux angles droits.*

Fig. 40. DANS le cercle X *, la somme des angles opposés (par exemple BAD & BCD) du quadrilatere inscrit ABCD, est égale à celle de deux angles droits.

Const. Tirez les diagonales AC & BD.

Démonst. Dans le triangle ABD, la somme des angles BAD, ABD & ADB
N. 136. est égale à celle de deux angles droits (n).
N. 250. Or (n), l'angle ACD est égal à l'angle ABD, puisque ces deux angles sont dans le même segment ABCD; & l'angle ACB est égal à l'angle ADB, puisque ces deux angles sont aussi dans le même
N. 61. segment BCDA. Donc (n), la somme des angles BAD, ACD & ACB, (c'est-

† On dit d'une figure, qu'elle est *inscrite* dans une autre, lorsque tous les angles ont leur sommet dans la circonférence de cette autre. *Voyez* les définitions du quatrieme Livre.

à-dire (n), la ſomme des angles BAD N. 72.
& BCD) eſt égale à celle de deux angles droits; & par conſéquent, C. Q. F. D.

Autre Démonſt. L'angle BAD a pour meſure la moitié de l'arc BCD (n); & N. 249.
l'angle BCD a pour meſure la moitié de l'arc BAD (n). Donc, la ſomme de ces N. 249.
deux angles a pour meſure la moitié de la circonférence du cercle X. Mais (n), N. 38.
la moitié de la circonférence d'un cercle eſt la meſure de la ſomme de deux angles droits. Donc, la ſomme des deux angles BAD & BCD & celle de deux angles droits, ont chacune la même meſure; & par conſéquent, elles ſont égales. Donc, C. Q. F. D.

PROPOSITION XXIII.

THÉORÊME.

252. *Si des segmens de cercle qui ont la même corde, sont vers un même côté, ils ne seront point semblables.*

Fig. 41 LEs segmens de cercle ABC * & ADC qui ont la même corde AC, & sont vers le même côté, ne seront point semblables.

Const. Du point B, pris à volonté sur l'arc du plus grand segment, tirez aux points A & C, des lignes droites BA & BC. Du point D auquel la ligne BC coupe l'arc du plus petit segment, tirez au point A une ligne droite DA.

Démonst. L'angle ADC, qui est exté-
N. 103. rieur au triangle ABD, est (n) plus grand que l'angle intérieur B qui lui est opposé.
N. 224. Or (n), puisque l'angle ADC, qui est inscrit dans le segment ADC, n'est point égal à l'angle B qui est inscrit dans le segment ABC, ces deux segmens ne sont point semblables; & par conséquent, C. Q. F. D.

PROPOSITION XXIV.

THÉORÊME.

253. *Si des ſegmens de cercle qui ont des cordes égales, ſont ſemblables, ils ſeront égaux.*

LES ſegmens de cercle ABC * & DEF qui ont des cordes égales AC & DF, & qui ſont ſemblables, ſont égaux. Fig. [illegible]

Conſt. Poſez par penſée le ſegment ABC ſur le ſegment DEF, de maniere que le point A étant ſur le point D, la corde AC ſoit ſur la corde DF.

Démonſt. Le point C tombera ſur le point F (n), puiſque [H] la corde AC eſt égale à la corde DF. Ainſi, la corde DF ſera commune aux ſegmens ABC & DEF; & par conſéquent, ſi l'arc ABC tomboit ou en-dedans, ou en-dehors, de l'arc DEF, deux ſegmens de cercle qui auroient la même corde DF, & ſeroient vers le même côté, pourroient être ſemblables. Or (n), cela n'eſt point poſſible. Donc, l'arc ABC tombera ſur l'arc DEF; & par conſéquent, les ſegmens N. 70. N. 252.

ABC & DEF se couvriront réciproque-
(N. 69.) ment. Mais (n), puisque ces segmens se couvrent réciproquement, ils sont égaux; & par conséquent, C. Q. F. D.

PROPOSITION XXV.

PROBLÊME.

254. *Trouver le centre d'un arc de cercle donné.*

Fig. 43. IL faut trouver le centre de l'arc de cercle CBD.

Const. Prenez sur l'arc CBD trois points à volonté; par exemple, les points C, B & D. Tirez du point B aux points C & D, des cordes BC & BD. Divisez
N. 94. (n) chacune de ces cordes en deux parties égales BE & EC, BF & FD. Enfin,
N. 96. du point E, élevez (n) une perpendiculaire EA à la corde BC; & du point F, une perpendiculaire FA à la corde BD. Le point A, auquel ces perpendiculaires se rencontreront, sera le centre demandé.

Pour la démonstration. Tirez du point A aux points C, B & D, des lignes droites AC, AB & AD.

Démonst. Dans les triangles AEC & AEB,

AEB, qui (n) sont rectangles l'un & l'autre en E, le côté EC est égal au côté EB [c], & le côté EA est commun. Donc (n), le côté AC est égal au côté AB. Or, en comparant le triangle AFB au triangle AFD, on démontre de la même maniere, que le côté AB est égal au côté AD. Donc, on peut tirer du point A à l'arc CBD plus de deux lignes droites égales; & par conséquent (n), ce point est le centre de cet arc. Donc, C. Q. F. D.

N. 11.
N. 85.
N. 234.

PROPOSITION XXVI.

THÉORÊME.

255. *Dans les cercles égaux, si des angles qui ont leurs sommets dans les circonférences sont égaux, les arcs sur lesquels ces angles s'appuient le seront aussi.*

SI dans les cercles G * & H, qui sont égaux, les angles B & DEF sont égaux, les arcs AIC & DKF, sur lesquels ces angles s'appuient, le seront aussi. Fig. 44.

Const. Tirez du point A au point C, une ligne droite AC; & du point D au point F, une ligne droite DF. Tirez aussi du centre G aux points A & C, des lignes droites GA & GC; & du centre H aux points D & F, des lignes droites HD & HF.

Démonst. L'angle B a son sommet dans la circonférence [H], l'angle G a le sien au centre [C], & [C] ces deux angles s'appuient sur le même arc AIC;
N. 248. ainsi (n), l'angle G est double de l'angle B. Or, on démontre de la même maniere, que l'angle H est double de l'angle DEF. Donc, puisque [H] les angles B & DEF sont égaux, les angles G & H
N. 67. le sont aussi (n); & par conséquent, puisque dans les triangles AGC & DHF, le
N. 210. côté GA est (n) égal au côté HD, & le côté GC au côté HF, le côté AC est
N. 88. égal au côté DF (n).

Ainsi, les segmens ABC & DEF,
N. 224. qui sont semblables (n), puisque [H] les angles B & DEF sont égaux, ont des
N. 253. cordes égales AC & DF. Donc (n), ces segmens sont égaux; & par conséquent, si du cercle G on retranche le segment ABC, & du cercle H le segment DEF, les restes, qui seront les segmens AIC &
N. 64. DKF, seront aussi égaux (n). Mais, puisque ces derniers segmens sont égaux, & qu'ils ont des cordes égales AC & DF,
N. 253. ils ont aussi (n) des arcs égaux AIC &

DKF; & par conséquent, C. Q. F. D.

COROLLAIRE.

256. Il suit de ce théorême, que *dans les cercles égaux, si des angles qui ont leurs sommets aux centres sont égaux, les arcs sur lesquels ces angles s'appuient le seront aussi.*

PROPOSITION XXVII.

THÉORÊME.

257. *Dans les cercles égaux, si des angles qui ont leurs sommets dans les circonférences, s'appuient sur des arcs égaux, ces angles le seront aussi.*

SI dans les cercles G * & H, qui sont égaux, les arcs AIC & DKF sont égaux, les angles B & DEF, qui s'appuient sur ces arcs, le seront aussi. Fig. 40

Const. Tirez du point E aux points L & M, pris à volonté sur la circonférence du cercle H, l'un au-dessous du point F & l'autre au-dessus, des lignes droites EL & EM.

Démonst. Si l'angle B n'étoit point égal à l'angle DEF, il le seroit à quelque angle DEL plus petit que cet angle, ou à quelque angle DEM, plus grand que ce même angle. Or :

Premierement, l'angle B n'est point égal à un angle DEL plus petit que l'angle DEF; puisque s'il l'étoit, l'arc AIC
N.255. seroit égal à l'arc DKL (n). Mais [H], le même arc AIC est aussi égal à l'arc DKF.
N. 62. Donc (n), l'arc DKL seroit égal à l'arc
N. 72. DKF. Ce qui ne peut point être (n).

Secondement, l'angle B n'est point non plus égal à un angle DEM plus grand que l'angle DEF; puisque s'il l'étoit,
N. 255. l'arc AIC seroit égal à l'arc DKM (n). Mais [H], le même arc AIC est aussi égal
N. 62. à l'arc DKF. Donc (n), l'arc DKM seroit égal à l'arc DKF. Ce qui ne peut
N. 72. point encore être (n).

Donc, l'angle B est égal à l'angle DEF; & par conséquent, C. Q. F. D.

COROLLAIRE.

258. Il suit de ce théorême, que *dans les cercles égaux, si des angles qui ont leurs sommets aux centres, s'appuient sur des arcs égaux, ces angles le seront aussi.*

PROPOSITION XXVIII.

THÉORÊME.

259. *Dans les cercles égaux, les cordes égales tendent des arcs égaux.*

DANS les cerclès B * & E, qui sont égaux, si les cordes AC & DF sont égales, les arcs AGC & DHF seront égaux. Fig. 43.

Const. Tirez du centre B aux points A & C., des lignes droites BA & BC; & du centre E aux points D & F, des lignes droites ED & EF.

Démonst. Dans les triangles ABC & DEF, le côté BA est égal au côté ED N. 210. (n), le côté BC au côté EF (n), & le N. 210. côté AC au côté DF [H]. Donc (n), N. 90. l'angle B est égal à l'angle E. Or, puisque les angles B & E, qui [c] ont leurs sommets aux centres des cercles égaux B & E, sont égaux, les arcs AGC & DHF, sur lesquels ces angles s'appuient [c], sont aussi égaux (n); & par consé- N. 256. quent, C. Q. F. D.

PROPOSITION XXIX.

THÉORÊME.

160. *Dans les cercles égaux, les arcs égaux ſont tendus par des cordes égales.*

Fig. 45. DANS les cercles B * & E, ſi les arcs AGC & DHF ſont égaux, les cordes AC & DF ſeront égales.

Conſt. La même que la précédente.

Démonſt. Les angles B & E qui [c] ont leurs ſommets aux centres des cercles égaux B & E, s'appuient ſur des arcs AGC & DHF qui ſont auſſi égaux [H].
N. 158. Donc (n), ces angles ſont égaux; & par conſéquent, puiſque dans les triangles ABC & DEF, le côté BA eſt égal au
N. 210. côté ED (n), & le côté BC au côté EF
N. 210. (n), le côté AC eſt égal au côté DF (n).
N. 83. Donc, C. Q. F. D.

PROPOSITION XXX.

PROBLÊME.

261. *Diviser un arc de cercle en deux parties égales.*

IL faut diviser en deux parties égales, l'arc de cercle ABC *. Fig. 46.

Const. Tirez de l'extrémité A de l'arc ABC à son autre extrémité C, une ligne droite AC. Divisez (n) cette ligne en N. 94.
deux parties égales DA & DC. Enfin (n), N. 96.
élevez du point D une perpendiculaire DB à cette même ligne. Cette perpendiculaire divisera l'arc ABC en deux parties BEA & BFC, qui seront égales.

Pour la démonstration. Tirez du point B aux points A & C, des lignes droites BA & BC.

Démonst. Dans les triangles BDA & BDC, qui (n) sont rectangles l'un & N. 21.
l'autre en D, le côté DA est égal au côté DC [c], & le côté DB commun. Donc (n), le côté BA est égal au côté BC. N. 83.
Or (n), puisque les cordes BA & BC N. 259.
sont égales, les arcs BEA & BFC sont égaux; & par conséquent, C. Q. F. F.

COROLLAIRE.

262. Il suit de ce problême, que *pour diviser un arc de cercle en quatre parties égales, il faut commencer par le diviser en deux parties égales ; & diviser ensuite chacune de ces deux parties égales, en deux autres qui le soient aussi. Et ainsi de suite, pour le diviser en 8, en 16, en 32, &c.*

PROPOSITION XXXI.

THÉORÊME.

263. *L'angle qui est inscrit dans un demi-cercle, est droit : celui qui est inscrit dans un segment plus grand qu'un demi-cercle, est aigu : enfin, celui qui est inscrit dans un segment plus petit qu'un demi-cercle, est obtus.*

PREMIEREMENT.

Fig. 47. L'ANGLE ABC * qui est inscrit dans le demi-cercle ATBC, est un angle droit.

Const. Prolongez le côté CB vers N, indéfiniment, & tirez du point B au centre O, une ligne droite BO.

Démonst. L'angle ABN, qui est extérieur au triangle ABC, est (n) égal à la somme des angles intérieurs C & A qui lui sont opposés. Mais (n), l'angle OBC est égal à l'angle C, puisque (n) les côtés OC & OB du triangle COB sont égaux: & l'angle OBA est égal à l'angle A, puisque (n) les côtés OA & OB du triangle AOB sont aussi égaux. Donc (n), l'angle ABN est égal à la somme des angles OBC & OBA; & par conséquent (n), à l'angle ABC. Or (n), puisque les angles ABN & ABC, sont égaux, la ligne AB est perpendiculaire à la ligne NBC. Donc (n), l'angle ABC est un angle droit; & par conséquent, C. Q. F. 1°. D. N. 155. N. 86. N. 35. N. 35. N. 61. N. 72. N. 19. N. 22.

SECONDEMENT.

L'angle EFG *, qui est inscrit dans le segment EQFG, plus grand qu'un demi-cercle, est un angle aigu. Fig. 47.

Const. Tirez du point G par le centre P, un diametre GQ; & du point F au point Q, une ligne droite FQ.

Démonst. L'angle EFG est (n) plus petit que l'angle QFG. Or [D], l'angle QFG est un angle droit, puisque [C] le ségment QFG dans lequel il est inscrit, est un demi-cercle. Donc, l'angle EFG est plus petit qu'un angle droit; & par N. 72.

N. 23. conséquent (n), il est un angle aigu. Donc, C. Q. F. 2°. D.

TROISIEMEMENT.

Fig. 47. Enfin, l'angle IKL * qui est inscrit dans le segment IVKL, plus petit qu'un demi-cercle, est un angle obtus.

Const. Tirez du point L par le centre R, un diametre LS; & du point K au point S, une ligne droite KS.

N. 72. *Démonst*. L'angle IKL est (n) plus grand que l'angle SKL. Or [D], l'angle SKL est un angle droit, puisque [C] le segment SVKL dans lequel il est inscrit, est un demi cercle. Donc, l'angle IKL est plus grand qu'un angle droit; & par
N. 22. conséquent (n), il est un angle obtus. Donc, C. Q. F. 3°. D.

SCHOLIE.

On démontre ordinairement ce théorême, de la maniere suivante.

Fig. 47. *Les angles ABC *, EFG & IKL ont*
N. 249. *pour mesure* (n), *l'un la moitié de l'arc ADC, l'autre, la moitié de l'arc EHG; & le dernier, la moitié de l'arc IML. Or* [H], *les moitiés de ces arcs sont, l'une, le quart de la circonférence d'un cercle, l'autre, moins que ce quart; & la derniere, plus que ce même quart. Donc*

(n), *les angles proposés sont ; l'un, un angle droit, l'autre, un angle aigu, & le dernier, un angle obtus ; & par conséquent, C. Q. F. D.* N. 38, 23 & 22.

PROPOSITION XXXII.

THÉORÊME.

264. *Dans le cercle, les angles dans les segmens, & les angles des segmens, sont alternativement † égaux.*

DANS le cercle H *, qui est divisé par la corde CD en deux segmens CFD & CEGD, l'angle F qui est dans le segment CFD, est égal à l'angle DCB du segment CEGD; & l'angle E qui est dans le segment CEGD, est égal à l'angle DCA du segment CFD. Fig. 48.

Const. Tirez du point de contact C par le centre H, un diametre CG; & du point G au point D, une ligne droite GD.

Démonst. Premierement, la somme des angles DCA & DCG est (n) égale à l'angle ACG, qui (n) est un angle droit, N. 72. N. 246.

† On entend par *alternativement*, que l'angle dans le segment & l'angle du segment doivent être pris, l'un d'un côté de la ligne coupante, & l'autre, de l'autre côté de la même ligne.

puisque [c] la ligne CG est tirée du point
N. 156. de contact C par le centre H. Or (n), la somme des angles G & DCG est aussi
N. 263. égale à un angle droit; puisque (n) le triangle CDG est rectangle en D. Donc
N. 62. (n), la somme des angles DCA & DCG est égale à celle des angles G & DCG;
N. 64. & par conséquent (n), l'angle DCA est égal à l'angle G.

N. 251. Mais (n), la somme des angles opposés G & F du quadrilatere FDGC qui est inscrit dans le cercle H, est égale à celle
N. 98. de deux angles droits; & (n) celle des angles DCA & DCB l'est aussi. Donc
N. 62. (n), la somme des angles G & F est égale à celle des angles DCA & DCB; & par conséquent, puisque [D] les angles G & DCA sont égaux, les angles F & DCB le sont aussi.

Secondement, la somme des angles F & E du quadrilatere FDEC, qui est aussi
N. 251. inscrit dans le cercle H, est (n) égale à
N. 98. celle de deux angles droits. Or (n), celle des angles DCB & DCA l'est aussi. Donc
N. 62. (n), la somme des angles F & E est égale à celle des angles DCB & DCA; & par conséquent, puisque [D] les angles F & DCB sont égaux, les angles E & DCA le sont aussi.

Donc, C. Q. F. D.

COROLLAIRE.

265. Il ſuit de ce théorême, que *dans le cercle, l'angle du ſegment a pour meſure la moitié de l'arc qui eſt tendu par la corde de ce ſegment.*

Dans le cercle H *, l'angle DCA a pour meſure la moitié de l'arc DFC; & l'angle DCB, la moitié de l'arc DGEC. Fig. 48.

Conſt. Des points F & E, pris à volonté, l'un dans l'arc DFC, & l'autre dans l'arc DGEC, tirez aux points D & C, des lignes droites FD & FC, ED & EC.

Démonſt. L'angle DCA eſt égal à l'angle E (n). Or (n), l'angle E a pour meſure la moitié de l'arc DFC. Donc, l'angle DCA a auſſi pour meſure la moitié du même arc. N. 264. N. 249.

Pareillement, l'angle DCB eſt égal à l'angle F (n). Or (n), l'angle F a pour meſure la moitié de l'arc DGEC. Donc, l'angle DCB a auſſi pour meſure la moitié du même arc. N. 264. N. 249.

Par conſéquent, C. Q. F. D.

PROPOSITION XXXIII.

PROBLÊME.

266. *Décrire ſur une ligne droite donnée, un ſegment de cercle qui ſoit capable † d'un angle donné.*

Fig. 49. IL faut décrire ſur la ligne droite AB *, un ſegment de cercle, qui ſoit capable de l'angle C.

N. 110. *Conſt.* Décrivez ſous la ligne AB (n), un angle BAD qui ait le point A pour ſommet, & qui ſoit égal à l'angle C. Du
N. 96. même point A, élevez (n) une perpen-
N. 94. diculaire AE à la ligne AD. Diviſez (n) la ligne AB en deux parties égales AF &
N. 96. FB. Du point F, élevez auſſi (n) une perpendiculaire FE à cette même ligne AB. Enfin, du point E, auquel les deux perpendiculaires ſe rencontrent, pris pour centre, & avec la ligne EA, priſe pour rayon, décrivez un arc AGB. Le ſegment AGB, que cet arc formera avec la ligne AB, ſera le ſegment demandé.

† On dit d'un ſegment, qu'il eſt *capable* d'un certain angle, lorſque les angles que l'on peut inſcrire dans ce ſegment ſont égaux à ce certain angle.

Pour la démonstration. Achevez le cercle AGBH.

Démonst. La ligne AD est une tangente au cercle AGBH (n) ; puisque [c] N. 242.
elle est tirée de l'extrémité A du rayon EA auquel elle est perpendiculaire. Donc (n), l'angle BAD est l'angle du segment N. 210.
AHB ; & par conséquent (n), il est égal N. 264.
à un angle quelconque inscrit dans le segment AGB. Mais [c], le même angle BAD est aussi égal à l'angle C. Donc (n), N. 62.
un angle quelconque inscrit dans le segment AGB sera égal à l'angle C ; & par conséquent, C. Q. F. F.

PROPOSITION XXXIV.

PROBLÊME.

267. *Diviser un cercle en deux segmens, dont l'un soit capable d'un angle donné.*

IL faut diviser le cercle X * en deux Fig. 50.
segmens, dont l'un soit capable de l'angle E.

Const. Du point C, pris à volonté sur la circonférence, tirez (n) une tangente N. 248.
AB au cercle X. Décrivez sur cette tan-

N. 120. gente (n), un angle DCB qui ait le même point précédent C pour sommet, & soit égal à l'angle E. Le côté DC divisera le cercle X, comme il est demandé.

Démonst. L'angle DCB est l'angle du
N. 210. segment CGD (n). Ainsi (n), il est égal
N. 264. à un angle quelconque inscrit dans le segment CFD. Mais [c], le même angle DCB est aussi égal à l'angle E. Donc
N. 62. (n), un angle quelconque inscrit dans le segment CFD, sera égal à l'angle E; & par conséquent, C. Q. F. F.

PROPOSITION XXXV.

THÉORÊME.

268. *Dans le cercle, si deux cordes s'entrecoupent, le rectangle des parties de l'une sera égal au rectangle des parties de l'autre.*

Fig. 51, 52, 53, & 54. DANS le cercle X*, le rectangle des parties AF & FB de la corde AB, est égal au rectangle des parties CF & FD de la corde CD.

Les cordes AB & CD passent chacune par le centre du cercle; ou une seule y passe, & est perpendiculaire, ou oblique à celle

celle qui n'y passe point ; ou enfin, aucune n'y passe.

PREMIER CAS.

*Lorsque les cordes AB * & CD passent chacune par le centre F.* Fig. 51.

Démonst. Les parties AF, FB, CF & FD sont toutes égales (n). Ainsi, le rectangle des deux premieres est égal à celui des deux dernieres. N. 35.

SECOND CAS.

*Lorsqu'une seule des cordes AB * & CD (par exemple, la corde AB) passe par le centre E, & est perpendiculaire à l'autre corde CD qui n'y passe point.* Fig. 52.

Const. Tirez du point C, au centre E, une ligne droite CE.

Démonst. La ligne AB est divisée en deux parties AF & FB, & (n) le point E est son milieu. Ainsi (n), le rectangle de ces deux parties, avec le quarré de la ligne EF, est égal au quarré de la ligne EB ; & par conséquent, à celui de la ligne EC, puisque (n) ces lignes EB & EC sont égales. Mais (n), les quarrés des lignes CF & EF sont aussi égaux au quarré de la même ligne EC ; puisque [H] le N. 35. N. 187. N. 35. N. 171.

triangle CFE est rectangle en F. Donc
N. 62. (n), le rectangle précédent, avec le quarré de la ligne EF, est égal aux quarrés des lignes CF & EF; & par conséquent (n), ce même rectangle est égal
N. 64. au quarré de la ligne CF. Or, le quarré de cette ligne CF est la même chose que le rectangle des parties CF & FD; puisque (n) ces parties sont égales. Donc, le
N. 228. rectangle des parties AF & FB est égal à celui des parties CF & FD.

TROISIEME CAS.

Fig. 53. *Lorsqu'une seule des cordes AB * & CD (par exemple, la corde AB) passe par le centre F, & est oblique à l'autre corde CD qui n'y passe point.*

Const. Tirez du point D au centre E, une ligne droite DE; & du même centre
N. 97. E, abaissez (n) une perpendiculaire EG à la corde CD.

Démonst. La ligne CD est divisée en
N. 228. deux parties CF & FD, & (n) le point
N. 187. G est son milieu. Ainsi (n), le rectangle de ces deux parties, avec le quarré de la ligne GF, est égal au quarré de la ligne
N. 63. GD; & par conséquent (n), ce même rectangle, avec les quarrés des lignes GF & EG, est égal à ceux des lignes GD &

EG. Mais (n), les quarrés des lignes GF N. 171.
& EG sont égaux au quarré de la ligne EF; & ceux des lignes GD & EG le sont au quarré de la ligne ED, puisque [c] les triangles EGF & EGD sont rectangles l'un & l'autre en G. Donc (n), N. 61.
le rectangle précédent, avec le quarré de la ligne EF, est égal au quarré de la ligne ED.

Or, la ligne AB est aussi divisée en deux parties AF & FB, & (n) le point N. 35.
E est aussi son milieu. Donc (n), le rec- N. 187.
tangle de ces deux parties, avec le quarré de la ligne EF, est égal au quarré de la ligne EB; & par conséquent, à celui de la même ligne précédente ED, puisque (n) ces lignes EB & ED sont égales. N. 35.

Donc (n), le rectangle des parties AF N. 62.
& FB, avec le quarré de la ligne EF, est égal au rectangle des parties CF & FD, avec le quarré de la même ligne EF; & par conséquent (n), ce premier rectan- N. 64.
gle est égal au dernier.

QUATRIEME CAS.

Enfin, lorsqu'aucune des lignes AB * Fig. 54.
& CD ne passe par le centre E.

Const. Tirez par le centre E & par le point F, un diametre GH.

Démonst. Le rectangle des parties AF & FB est [D] égal à celui des parties GF & FH, puisque [C] la corde GH passe par le centre E. Or, par la même raison, le rectangle des parties CF & FD est aussi égal à celui des mêmes parties GF
N. 62. & FH. Donc (N), le rectangle des parties AF & FB est égal à celui des parties CF & FD.

Par conséquent, C. Q. F. D.

PROPOSITION XXXVI.

THÉORÊME.

269. *Si de deux lignes droites qui sont tirées d'un même point, pris hors d'un cercle à la circonférence, l'une coupe ce cercle, & l'autre le touche; le rectangle fait de la sécante & de sa partie extérieure, sera égal au quarré de la tangente.*

Fig. 55. & 56. LE rectangle de la sécante AC * & de sa partie extérieure AD, est égal au quarré de la tangente AB.

La sécante AC passe par le centre du cercle, ou elle n'y passe point.

PREMIER CAS.

*Lorsque la sécante AC * passe par le centre E.* Fig. 55.

Const. Tirez du centre E au point de contact B, une ligne droite EB.

Démonst. La ligne AC est divisée en deux parties AD & DC, & (n) le point E est le milieu de la partie DC. Donc (n), le rectangle des lignes AC & AD, avec le quarré de la ligne ED, est égal au quarré de la ligne EA. Mais (n), les quarrés des lignes AB & EB sont aussi égaux au quarré de la même ligne EA; puisque (n) le triangle ABE est rectangle en B. Donc (n), le rectangle précédent, avec le quarré de la ligne ED, est égal aux quarrés des lignes AB & EB; & par conséquent (n), puisque (n) les lignes ED & EB sont égales, ce rectangle est égal au quarré de la ligne AB.

N. 35. N. 190. N. 171. N. 246. N. 62. N. 64. N. 35.

SECOND CAS.

Lorsque la sécante AC ne passe point par le centre E.* Fig. 56.

Const. Tirez du centre E aux points A, D & B, des lignes droites EA, ED & EB. Du même centre E, abaissez (n) une perpendiculaire EF à la corde DC. N. 97.

Démonst. La ligne AC est divisée en
N. 228. deux parties au point D, & (n) le point
F est le milieu de la partie DC. Donc
N. 190. (n), le rectangle des lignes AC & AD,
avec le quarré de la ligne DF, est égal
au quarré de la ligne AF; & par consé-
N 63. quent (n), ce même rectangle, avec les
quarrés des lignes DF & FE, est égal à
N. 171. ceux des lignes AF & FE. Mais (n), les
quarrés des lignes DF & FE sont égaux
au quarré de la ligne ED; & ceux des
lignes AF & FE le sont au quarré de la
ligne EA; puisque [c] les triangles DFE
& AFE sont rectangles l'un & l'autre en
N. 61 F. Donc (n), le rectangle précédent,
avec le quarré de la ligne ED, est égal
au quarré de la ligne EA.

N. 171. Or (n), les quarrés des lignes AB &
EB sont aussi égaux au quarré de la même
N. 246. ligne EA; puisque (n) le triangle ABE
N. 62. est rectangle en B. Donc (n), le même
rectangle précédent, avec le quarré de
la ligne ED, est égal aux quarrés des
N. 64. lignes AB & EB; & par conséquent (n),
N. 35. puisque (n) les lignes ED & EB sont
égales, ce rectangle est égal au quarré de
la ligne AB.

Donc, C. Q. F. D.

COROLLAIRE I.

270. Il ſuit de ce théorême, que *ſi pluſieurs lignes droites qui ſont tirées d'un même point, pris hors d'un cercle à la circonférence, coupent ce cercle, les rectangles faits de ces lignes & de leurs parties extérieures, chacun de chacune, ſeront égaux.*

Le rectangle de la ſécante AB * & de ſa partie extérieure AE, eſt égal au rectangle de la ſécante AC & de ſa partie extérieure AF. Fig. 57.

Conſt. Du point A, tirez (n) une tangente AD au cercle X. N. 249.

Démonſt. Le rectangle de la ſécante AB & de ſa partie extérieure AE; & celui de la ſécante AC & de ſa partie extérieure AF, ſont égaux l'un & l'autre au quarré de la même tangente AD (n). N. 269.
Donc (n), ils le ſont entr'eux; & par conſéquent, C. Q. F. D. N. 62.

COROLLAIRE II.

271. Il ſuit auſſi de ce même théorême, que *les tangentes à un cercle, qui ſont tirées d'un même point, ſont égales.*

Les tangentes AB * & AC ſont égales. Fig. 58.

Conſt. Tirez du point A une ſécante quelconque AD.

Démonſt. Le quarré de la tangente AB
N. 269. & celui de la tangente AC ſont (n) égaux l'un & l'autre au rectangle de la ſécante AD & de ſa partie extérieure AE. Donc
N. 62. (n), ils ſont auſſi égaux entr'eux; & par conſéquent, ces tangentes ſont égales. Donc, C. Q. F. D.

COROLLAIRE III.

272. Enfin, il ſuit de ce corollaire, que *du même point on ne peut tirer plus de deux tangentes au même cercle.*

Fig 58. Du point A *, on ne peut tirer plus de deux tangentes au cercle X.

Démonſt. S'il étoit poſſible de tirer du point A plus de deux tangentes au cercle X, on pourroit, d'un point pris hors d'un cercle, tirer à la circonférence plus
N. 271. de deux lignes droites égales; puiſque (n) les tangentes qui ſont tirées d'un même
N. 233. point ſont égales. Or (n), d'un point pris hors d'un cercle, on ne peut point tirer à la circonférence plus de deux lignes droites égales. Donc, il n'eſt point poſſible de tirer du point A plus de deux tangentes au cercle X; & par conſéquent, C. Q. F. D.

USAGE.

USAGE.

273. *On peut se servir de ce théorême, de la maniere suivante, pour mesurer le diametre d'un cercle X * dans lequel on ne peut point entrer.* Fig. 57.

On prend hors du cercle proposé, un point à volonté; par exemple, le point A. De ce point, on tire (soit avec des cordes, soit autrement) deux tangentes AB & AC à ce même cercle. On divise ensuite (n) *en deux parties égales BAD & CAD, l'angle BAC formé par ces deux tangentes. Enfin, on mesure l'une de ces mêmes tangentes, par exemple la tangente AB; & l'on mesure aussi la ligne AD, qui, si elle étoit prolongée, passeroit par le centre* (n). *Cela posé:* N. 91. N. 233.

Le rectangle de la sécante AE & de sa partie extérieure AD est connu; puisque (n) *il est égal au quarré de la tangente AB que l'on vient de mesurer: & la partie AD est aussi connue, puisque l'on vient aussi de la mesurer. Ainsi, l'on divise par la valeur de cette partie, celle du quarré de cette tangente; & le quotient est la valeur de la sécante AE. Or, lorsque l'on a trouvé cette valeur, on en retranche celle de cette même partie AD; le reste est la valeur du diametre demandé DE. Donc, C. Q. F. F.* N. 269.

PROPOSITION XXXVII.

THÉORÊME.

274. *Si deux lignes droites, qui ſont tirées d'un même point hors d'un cercle à la circonférence, ſont telles que le rectangle fait de l'une & de ſa partie extérieure ſoit égal au quarré de l'autre, cette autre ſera une tangente à ce cercle.*

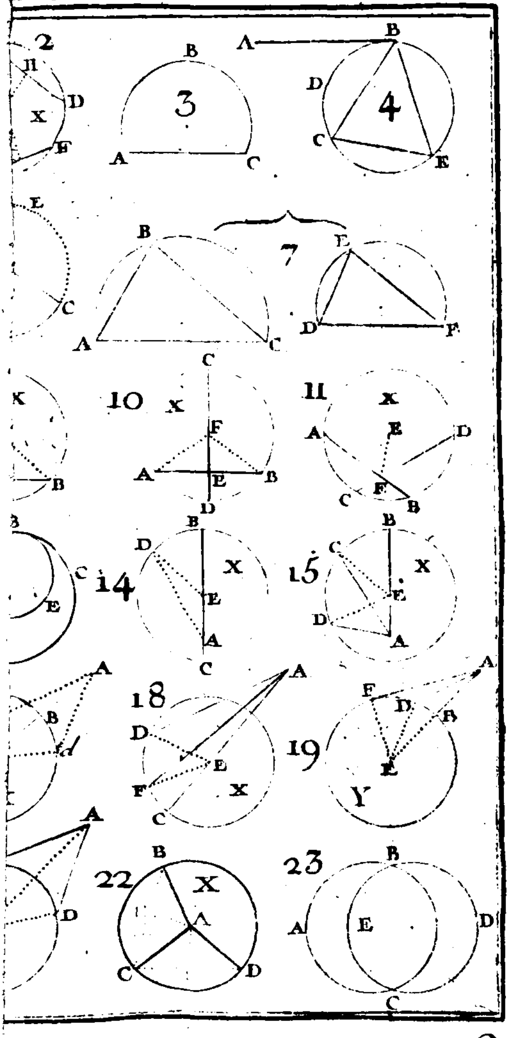
Fig. 60 SI le rectangle de la ſécante AC * & de ſa partie extérieure AD, eſt égal au quarré de la ligne AB, cette ligne AB ſera tangente au cercle X.

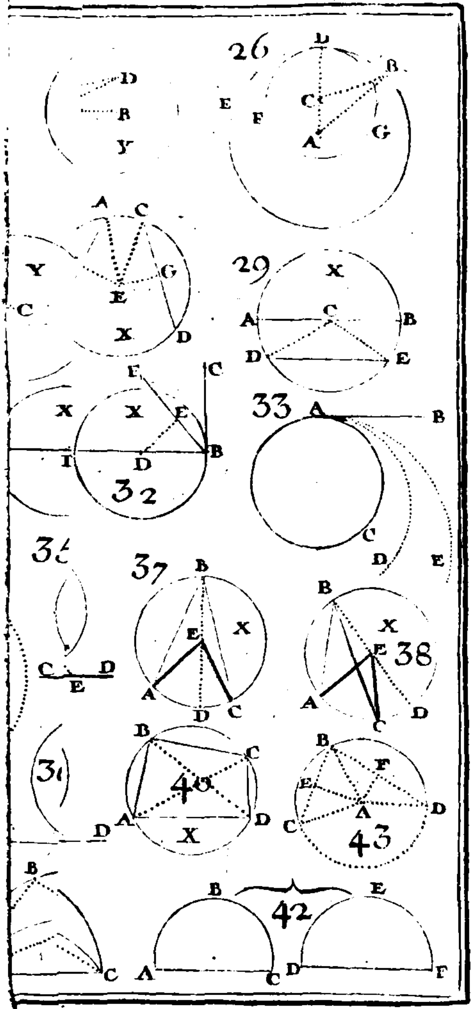
N. 245. *Conſt.* Tirez du point A (n), une tangente AF au cercle X. Tirez auſſi du même point A au centre E, une ligne droite AE.

Démonſt. Le rectangle de la ſécante AC & de ſa partie extérieure AD, eſt
N. 269. (n) égal au quarré de la tangente AF. Or [H], le même rectangle eſt auſſi égal
N. 62. au quarré de la ligne AB. Donc (n), le quarré de cette tangente & celui de cette ligne, ſont égaux; & par conſéquent, ces deux lignes ſont égales. Ainſi, les triangles AEB & AEF ont le côté AB égal

au côté AF [D], le côté EB au côté EF (n), & le côté AE commun. Donc (n), N. 35.
l'angle B eſt égal à l'angle F; & par con- N. 90.
ſéquent, puiſque (n) le dernier eſt un N. 246.
angle droit, le premier en eſt auſſi un.
Or (n), puiſque l'angle B eſt un angle N. 21.
droit, la ligne AB eſt perpendiculaire au rayon EB. Donc, puiſque [c] elle eſt tirée de l'extrémité B de ce rayon, elle
eſt une tangente au cercle X (n); & par N. 242.
conſéquent, C. Q. F. D.

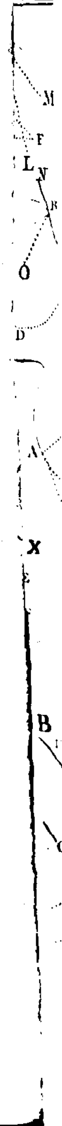
Fin du troiſieme Livre.

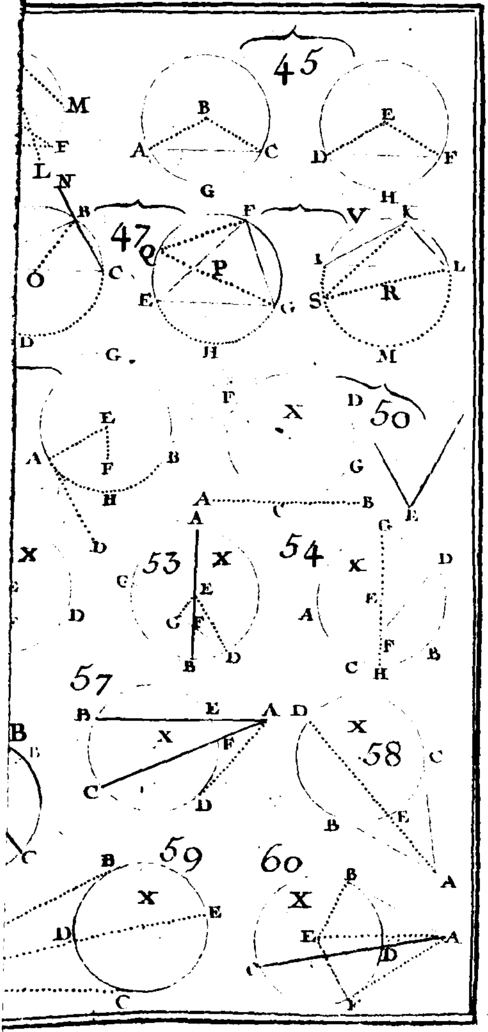

2
3
4
7
10
11
14
15
18
19
22
23



26
29
32
33
37
38
40
42
43

uens




45
47
50
53
54
57
58
59
60

LES ÉLÉMENS D'EUCLIDE.

LIVRE QUATRIEME.

EUCLIDE commence ce Livre par déterminer les conditions que des figures doivent avoir, afin que l'on puisse dire des unes qu'elles sont inscrites dans les autres ; & des autres au contraire, qu'elles sont circonscrites aux premieres. Il donne ensuite la maniere d'inscrire dans le cercle, tous les polygones réguliers † primitifs, que l'on peut y inscrire géométriquement ; & celle de circonscrire au cercle tous ceux de ces mêmes polygones qu'il est possible de lui circonscrire géométriquement. Enfin, il

† On dit d'une figure, qu'elle est *réguliere*, lorsque tous ses côtés sont égaux, & que tous ses angles le sont aussi.

enseigne ce que l'on doit faire, tant pour inscrire le cercle dans ces sortes de polygones, que pour le leur circonscrire.

Au reste, ce Livre est d'autant plus beau, qu'il contient moins de propositions; puisqu'il suffit pour faire voir la maniere dont il faut s'y prendre, soit pour inscrire dans une figure, soit pour lui circonscrire, toutes les figures qu'il est possible d'y inscrire, ou de lui circonscrire géométriquement.

DÉFINITIONS.

I.

275. On dit d'une figure rectiligne, qu'elle est *inscrite* dans une autre, lorsque chaque angle de cette figure a son sommet dans la circonférence de cette autre.

Fig. 1. *La figure ABCD* * *est* inscrite *dans la figure EFGH.*

II.

276. On dit d'une figure rectiligne, qu'elle est *circonscrite* à une autre, lorsque chaque côté de cette figure touche chaque angle de cette autre.

*La figure EFGH * est* circonscrite *à* Fig. 1.
la figure ABCD.

III.

277. On dit d'une figure rectiligne, qu'elle est *inscrite* dans un cercle, lorsque chaque angle de cette figure a son sommet dans la circonférence de ce cercle.

*La figure ABCD * est* inscrite *dans le* Fig. 2.
cercle X.

IV.

278. On dit d'une figure rectiligne, qu'elle est *circonscrite* à un cercle, lorsque chaque coté de cette figure touche ce cercle.

*La figure ABCD * est* circonscrite *au* Fig. 3.
cercle X.

V.

279. On dit d'un cercle, qu'il est *inscrit* dans une figure rectiligne, lorsqu'il touche chaque côté de cette figure.

*Le cercle X * est* inscrit *dans la figure* Fig. 3.
ABCD.

VI.

280. On dit d'un cercle, qu'il est *circonscrit* à une figure rectiligne, lors-

que la circonférence de ce cercle touche chaque angle de cette figure.

Fig. 2. *Le cercle X * est* circonscrit *à la figure ABCD.*

VII.

281. Enfin, on dit d'une ligne droite, qu'elle est *inscrite* dans un cercle, lorsqu'elle se termine de part & d'autre, à la circonférence de ce cercle.

Fig. 2. *Les lignes droites AB *, BC, AD & DC, sont* inscrites *dans le cercle X.*

PROPOSITION I.

PROBLÊME.

282. *Inscrire dans un cercle donné, une ligne droite qui soit égale à une ligne droite donnée, pourvu cependant que cette ligne donnée, ne soit pas plus*
N. 240. *grande que le diametre de ce cercle* (n).

Fig. 4. IL faut inscrire dans le cercle BECF *, une ligne droite qui soit égale à la ligne droite A.

Const. Prenez sur la circonférence du cercle proposé, un point B à volonté. De ce point, pris pour centre, & avec un rayon égal à la ligne A, décrivez un arc de cercle FEG. Enfin, tirez du même point B au point E, une ligne droite BE, elle sera la ligne demandée.

Démonst. Le rayon du cercle FEG est [c] égal à la ligne A. Or [c], la ligne BE est un rayon de ce cercle. Donc (n), N. 55. elle est égale à la ligne A. D'ailleurs (n), N. 281. elle est inscrite dans le cercle BECF, puisque [c], elle se termine de part & d'autre, à la circonférence de ce cercle. Par conséquent, C. Q. F. F.

SCHOLIE.

283. *On auroit pareillement résolu ce problême, en tirant une ligne droite du point B au point F.*

PROPOSITION II.

PROBLÊME.

284. *Inscrire dans un cercle donné, un triangle qui soit équiangle † à un triangle donné.*

IL faut inscrire dans le cercle EGH *, Fig. [illegible] un triangle qui soit équiangle au triangle ABC.

† On appelle *triangles équiangles*, ceux qui ont leurs angles égaux, chacun à chacun.

Conſt. Du point E, pris à volonté ſur
N. 243. la circonférence, tirez (n) une tangente DF au cercle propoſé. Décrivez ſur cette
N. 120. tangente (n), un angle DEG qui ait le point de contact E pour ſommet, & ſoit égal à l'angle A; & un angle FEH qui ait le même point E pour ſommet, & ſoit égal à l'angle C. Enfin, tirez du point G au point H, une corde GH. Le triangle GEH que cette corde formera avec les cordes EG & EH, ſera le triangle demandé.

Démonſt. L'angle H qui eſt dans le
N. 264. ſegment GHE, eſt (n) égal à l'angle DEG du ſegment EKG. Or [c], l'angle A eſt auſſi égal au même angle DEG.
N. 62. Donc (n), l'angle H eſt égal à l'angle A.

Pareillement, l'angle G qui eſt dans
N. 264. le ſegment EGH, eſt (n) égal à l'angle FEH du ſegment EIH. Or [c], l'angle C eſt auſſi égal au même angle FEH.
N. 62. Donc (n), l'angle G eſt égal à l'angle C.
N. 137. Ainſi (n), le triangle GEH eſt équian-
N. 277. gle au triangle ABC. D'ailleurs (n), il eſt inſcrit dans le cercle EGH; puiſque [c] tous ſes angles ont leurs ſommets dans la circonférence de ce cercle. Par conſéquent, C. Q. F. F.

SCHOLIE.

285. *On auroit pareillement résolu ce problême, en faisant l'angle DEG égal à l'angle C, ou à l'angle B; & l'angle FEH égal à l'angle A, ou à l'angle B.*

PROPOSITION III.

PROBLÊME.

286. *Circonscrire à un cercle donné, un triangle qui soit équiangle à un triangle donné.*

IL faut circonscrire au cercle DEF *, un triangle qui soit équiangle au triangle ABC. Fig. 4.

Const. Prolongez indéfiniment de part & d'autre, l'un des côtés du triangle ABC, par exemple, le côté AC. Tirez un rayon GF, à volonté. Décrivez sur ce rayon (n) un angle FGE qui ait le centre G pour sommet, & soit égal à l'angle BCM; & un angle FGD qui ait aussi le même centre G pour sommet, & soit égal à l'angle BAL. Enfin (n), élevez du point F, une perpendiculaire HK au rayon GF; du point E, une perpendiculaire IK au rayon GE; & du point D, une per- N. 120. N. 96.

pendiculaire IH au rayon GD. Ces perpendiculaires formeront un triangle HIK, qui sera le triangle demandé.

Démonst. Les angles GFK & GEK sont deux angles droits [c]. Ainsi, puis-
N. 140. que (n) la somme de tous les angles d'un quadrilatere est égale à celle de quatre angles droits, la somme des angles FGE & K est égale à celle de deux angles
N. 98. droits. Mais (n), la somme des angles BCM & BCA, est aussi égale à celle de
N. 62. deux angles droits. Donc (n), la somme des angles FGE & K est égale à celle des angles BCM & BCA; & par conséquent
N. 64. (n), puisque [c] les angles FGE & BCM sont égaux, les angles K & BCA le sont aussi.

Or, on démontre de la même maniere, que l'angle H est égal à l'angle BAC.
N. 137. Ainsi (n), le triangle HIK est équiangle
N. 278. au triangle ABC. D'ailleurs (n), il est
N. 242. circonscrit au cercle DEF; puisque (n) tous ses côtés touchent ce cercle. Par conséquent, C. Q. F. F.

PROPOSITION IV.

PROBLÊME.

187. *Inſcrire un cercle dans un triangle donné.*

IL faut inſcrire un cercle dans le triangle ABC *. Fig. 7.

Conſt. Diviſez (n) deux des angles du N. 91. triangle propoſé (par exemple, les angles A & C) chacun en deux parties égales DAB & DAC, DCB & DCA. Du point D, auquel les lignes DA & DC ſe rencontrent, abaiſſez (n) une perpendiculaire N. 97. DG au côté AC. Enfin, du même point D, pris pour centre, & avec cette perpendiculaire priſe pour rayon, décrivez un cercle EGF, il ſera le cercle demandé.

Pour la démonſtration. Abaiſſez (n) N. 97. du même point D, une perpendiculaire DE au côté AB; & une perpendiculaire DF au côté BC.

Démonſt. Dans les triangles DAE & DAG, qui ſont rectangles l'un en E & l'autre en G, l'angle DAB eſt égal à l'angle DAC [c], & le côté DA eſt commun. Ainſi (n) le côté DE eſt égal au N. 125. côté DG.

Or, on démontre de la même maniere, que la ligne DF eſt auſſi égale au même
N. 55. côté DG. Donc (n), les lignes DG, DE & DF ſont toutes trois, rayons du même cercle EGF. Mais [c], tous les côtés du triangle ABC paſſent par les extrémités G, E, & F de ces rayons, & ſont perpendiculaires à ces mêmes rayons. Donc
N. 242. (n), le cercle EGF touche tous les côtés
N. 279. de ce triangle; & par conſéquent (n), il y eſt inſcrit. Donc, C. Q. F. F.

PROPOSITION V.

PROBLÊME.

288. *Circonſcrire un cercle, à un triangle donné.*

IL faut circonſcrire un cercle, au trian-
Fig. 8. gle ABC *.
N. 94. *Conſt.* Diviſez (n) deux des côtés du triangle propoſé (par exemple, les côtés AB & AC) chacun en deux parties égales AD & DB, AE & EC. Du point
N. 96. D, élevez (n) une perpendiculaire DF au côté AB; & du point E, une perpendiculaire EF au côté AC. Du point F, auquel ces perpendiculaires ſe ren-

contrent, tirez au point A une ligne droite FA. Enfin, du même point F pris pour centre, & avec cette ligne FA prise pour rayon, décrivez un cercle AGC, il sera le cercle demandé.

Pour la démonstration. Tirez du point F aux points B & C, des lignes droites FB & FC.

Démonst. Dans les triangles BDF & ADF, qui [c] sont rectangles l'un & l'autre en D, le côté DB est égal au côté DA [c], & le côté DF est commun. Ainsi (n), le côté FB est égal au côté FA. N. 83.

Or, on démontre de la même maniere, que la ligne FC est aussi égale au même côté FA. Donc (n), les lignes FA, FB N. 31. & FC, sont toutes trois, rayons du même cercle AGC. Mais [c], chaque angle A, B & C, du triangle ABC, a pour sommet l'extrémité de l'un de ces rayons. Donc (n), la circonférence du cercle AGC N. 34. passe par les sommets de tous les angles de ce triangle; & par conséquent (n), ce N. 28. cercle est circonscrit à ce triangle. Donc, C. Q. F. F.

SCHOLIE.

289. *On propose quelquefois ce problême, de la maniere suivante:* Faire

passer la circonférence d'un cercle par
Fig. 8. trois points donnés A *, B & C, pourvu cependant que ces trois points ne soient pas dans une même ligne droite.

Pour le résoudre, on joint les trois points donnés, par des lignes droites AB, AC & BC; & l'on a un triangle ABC,
N. 188. *auquel on circonscrit un cercle* (n).

PROPOSITION VI.

Problême.

190. *Inscrire un quarré, dans un cercle donné.*

Il faut inscrire un quarré, dans le cercle
Fig. 9. FGH *.

Const. Tirez un diametre AC, à vo-
N. 96. lonté. Elevez (n) un autre diametre BD perpendiculaire à ce diametre AC. Tirez du point A aux points B & D, des lignes droites AB & AD; & du point C aux mêmes points B & D, des lignes droites CB & CD. Le quadrilatere ABCD que ces lignes formeront, sera le quarré demandé.

Démonst. Les angles AEB, BEC, CED, &c. qui ont chacun leur sommet

au

au centre E, sont égaux (n). Donc (n), N. 19. N. 256
les arcs AFB, BGC, CHD, &c. le sont
aussi; & par conséquent (n), les cordes N. 260.
AB, BC, CD, &c. sont égales. De plus
(n), les angles A, B, C, &c. sont des N. 263.
angles droits; puisque [c] ils sont chacun
dans un demi-cercle. Donc, le quadrilatere ABCD a tous sés côtés égaux, &
tous ses angles droits; & par conséquent (n), il est un quarré. N 50.

Or (n), ce quarré est inscrit dans le N. 277.
cercle FGH, puisque [c] tous ses angles
ont leurs sommets dans la circonférence
de ce cercle. Donc, C. Q. F. F.

COROLLAIRE.

291. Il suit de ce problême: Premierement, que *pour inscrire dans le cercle
un octogone régulier, il faut commencer
par y inscrire un quarré: & diviser ensuite*
(n) *en deux parties égales, chaque arc* N. 261.
AFB *, *BGC, &c. afin d'avoir des arcs* Fig. 9.
*AF, FB, BG, &c. qui soient chacun
la huitieme partie de la circonférence.*

Secondement, que *pour inscrire dans
le cercle un polygone régulier de 16 côtés,
il faut commencer par y inscrire un octogone régulier: & diviser ensuite* (n) *chaque arc AF* *, *FB, &c. en deux parties* N. 261. Fig. 9.
égales, afin d'avoir des arcs qui soient

chacun la seizieme partie de la circonférence.

Et ainsi de suite, pour inscrire dans le cercle les polygones réguliers de 32 côtés, de 64 côtés, &c.

PROPOSITION VII.

PROBLÊME.

292. *Circonscrire un quarré, à un cercle donné.*

Fig. 10. IL faut circonscrire un quarré au cercle ABCD *.

Const. Tirez un diametre AC, à vo-
N. 96. lonté. Elevez (n) un autre diametre BD perpendiculaire à ce diametre AC. Elevez
N. 96. aussi (n) des points A & C, des perpendiculaires EH & FG au même diametre AC; & des points B & D, des perpendiculaires EF & HG au diametre BD. Le quadrilatere HF que ces perpendiculaires formeront, sera le quarré demandé.

Démonst. Les lignes EH, BD & FG,
N. 129. sont paralleles (n), puisque [c] elles sont perpendiculaires chacune à la même ligne AC: & les lignes EF, AC & HG, sont
N. 119. aussi paralleles (n), puisque [c] elles sont

aussi perpendiculaires chacune à la même ligne BD. Ainsi :

Premierement, les quadrilateres HB & AF sont des parallélogrammes (n). N. 57.
Donc (n), les côtés EH & BD sont N. 143.
égaux, & les côtés EF & AC le sont aussi ; & par conséquent (n), puisque (n) N. 62. N. 35.
le côté BD est égal au côté AC, le côté EH l'est au côté EF.

Secondement, le quadrilatere AB est aussi un parallélogramme (n). Donc, N. 57.
puisque l'angle AIB est un angle droit (n), l'angle E en est aussi un (n). N. 21. N. 148.

Troisiemement, enfin, le quadrilatere HF est encore un parallélogramme (n). N. 57.
Donc, puisque [D] il a deux côtés de suite égaux EH & EF, & un angle droit E, il est un quarré (n). N. 146.

Or (n), ce quarré est circonscrit au N. 278.
cercle ABCD, puisque (n) tous ses cô- N. 242.
tés touchent ce cercle. Par conséquent, C. Q. F. F.

PROPOSITION VIII.

PROBLÊME.

293. *Inſcrire un cercle, dans un quarré donné.*

Fig. 10. IL faut inſcrire un cercle, dans le quarré HF *.

Conſt. Tirez les diagonales EG & HF. Du point I, auquel ces diagonales ſe coupent, abaiſſez (n) une perpendiculaire ID au côté HG. Enfin, du même point I, pris pour centre, & avec cette perpendiculaire priſe pour rayon, décrivez un cercle DCBA, il ſera le cercle demandé.

N. 97. (pent)

N. 97. *Pour la démonſtration.* Abaiſſez (n) du même point I, les perpendiculaires IC, IB & IA aux côtés FG, EF & EH, chacune à chacun.

Démonſt. Dans les triangles ICG & IDG, qui [c] ſont rectangles l'un en C & l'autre en D, l'angle EGF eſt égal à
N. 138. l'angle EGH (n), puiſque (n) les triangles
N. 50. EFG & EHG ſont rectangles & iſoſceles,
N. 123. & le côté IG eſt commun. Ainſi (n), le côté IC eſt égal au côté ID.

Or, on démontre de la même maniere,

que la ligne IB est égale à la ligne IC, & la ligne IA à la ligne IB. Donc (n), les lignes ID, IC, IB & IA, sont toutes quatre rayons du même cercle DCBA. Mais [c], tous les côtés du quarré HF passent par les extrémités D, C, &c. de ces rayons, & sont perpendiculaires à ces mêmes rayons. Donc (n), le cercle DCBA touche tous les côtés de ce quarré; & par conséquent (n), il y est inscrit. Donc, C. Q. F. F.

N. 31. N. 242. N. 279.

PROPOSITION IX.

PROBLÊME.

294. *Circonscrire un cercle à un quarré donné.*

IL faut circonscrire un cercle au quarré ABCD *. Fig. 5.

Const. Tirez les diagonales AC & BD. Du point E, auquel ces diagonales se coupent, pris pour centre, & avec la ligne EA, prise pour rayon, décrivez un cercle FGH, il sera le cercle demandé.

Démonst. Dans le triangle AEB, les angles CAB & DBA sont égaux (n), puisque (n) les triangles ABC & BAD N. 138. N. 50.

N. 88. sont rectangles & isosceles. Ainsi (n), le côté EB est égal au côté EA.

Or, on démontre de la même maniere, que la ligne EC est égale à la ligne EB,
N. 35. & la ligne ED à la ligne EC. Donc (n), les lignes EA, EB, EC & ED, sont toutes quatre rayons du même cercle FGH. Mais [c], chaque angle A, B, &c. du quarré ABCD, a pour sommet l'extrémité de l'un de ces rayons. Donc
N. 34. (n), la circonférence du cercle FGH passe par les sommets de tous les angles
N. 280 de ce quarré; & par conséquent (n), ce cercle est circonscrit à ce quarré. Donc, C. Q. F. F.

PROPOSITION X.

PROBLÊME.

295. *Décrire sur une ligne droite donnée, un triangle isoscele, qui soit tel que chacun de ses angles égaux, soit double de son autre angle.*

Fig. 11. IL faut décrire sur la ligne droite AB* un triangle isoscele, qui soit tel que chacun de ses angles égaux soit double de son autre angle.

Conſt. Diviſez (n) la ligne AB en deux parties AC & CB, qui ſoient telles que le rectangle de cette ligne & de ſa plus petite partie CB, ſoit égal au quarré de ſa plus grande partie AC. Du point A, pris pour centre, & avec la même ligne AB priſe pour rayon, décrivez un arc de cercle BDG, indéfini. Du point B pris pour centre, & avec la partie AC priſe pour rayon, décrivez un arc de cercle qui coupe le précédent à un point D. Enfin, tirez de ce point aux points A & B, des lignes droites DA & DB. Le triangle BAD, que ces lignes formeront avec la ligne AB, ſera le triangle demandé. N. 203.

Pour la démonſtration. Tirez du point C au point D, une ligne droite CD; & (n) circonſcrivez un cercle ACDE au triangle ACD. N. 288.

Démonſt. Le rectangle de la ligne AB & de la partie CB, eſt [c] égal au quarré de la partie AC; & par conſéquent, à celui de la ligne BD; puiſque [c] cette ligne & cette derniere partie ſont égales. Ainſi (n), la ligne BD eſt une N. 274. tangente au cercle ACDE. Donc (n), N. 220. l'angle CDB eſt l'angle du ſegment CFD; & par conſéquent (n), il eſt égal à l'an- N. 264. gle A, dans le ſegment CED.

Ainſi, puiſque (n) l'angle DCB, qui eſt N. 135.

extérieur au triangle ACD, est égal à la somme des angles intérieurs CDA & A
N. 61. qui lui sont opposés, il est aussi (n) égal à celle des angles CDA & CDB; c'est-à-dire, à l'angle BDA. Mais (n), l'angle
N. 86. B est aussi égal au même angle BDA,
N. 35. puisque (n) les côtés AD & AB du trian-
N. 62. gle BAD sont égaux. Donc (n), l'angle DCB est égal à l'angle B; & par consé-
N. 88. quent (n), les côtés BD & CD du triangle BDC sont égaux. Or, puisque le côté BD qui [c] est égal au côté AC, l'est aussi au côté CD, les côtés AC & CD
N. 62. du triangle ACD sont égaux (n); & par
N. 86. conséquent (n), l'angle CDA est aussi égal à l'angle A.

Enfin, puisque les angles CDB & CDA sont égaux chacun au même angle A, l'angle BDA, qui est la somme de ces deux premiers angles, est double de l'angle A; & par conséquent, C. Q. F. F.

COROLLAIRE.

296. Il suit de ce problême, que *si dans un triangle isoscele, l'angle formé par les côtés égaux, est la moitié de chacun des deux autres angles, il sera les deux cinquiemes d'un angle droit.*

Fig. 12. Si dans le triangle BAC *, l'angle A est la moitié de chacun des deux autres angles

angles ABC & ACB, il sera les deux cinquiemes d'un angle droit.

Const. Divisez (n) en deux parties égales, chaque angle ABC & ACB. N. 91.

Démonst. Les cinq angles A, ABD, CBD, ACE & BCE, sont égaux [c]. Ainsi, ils sont chacun la cinquieme partie de la somme des trois angles du triangle BAC. Mais (n), cette somme est égale à celle de deux angles droits. Donc, chaque angle A, ABD, &c. est la cinquieme partie de la somme de deux angles droits; & par conséquent, les deux cinquiemes d'un angle droit. Donc, C. Q. F. D. N. 136.

SCHOLIE.

297. *Si l'on vouloit que la ligne donnée AB * fût le côté adjacent aux angles égaux du triangle demandé, on commenceroit par décrire sur cette ligne le triangle BAD, de la même maniere dont nous venons de le faire. On décriroit ensuite* (n) *sur cette même ligne un angle qui fût égal à l'angle B, & qui eût le point A pour sommet. Enfin, on prolongeroit le côté de cet angle & le côté BD de l'angle B, jusqu'à ce qu'ils se rencontrassent à un point; & le triangle que ces côtés prolongés formeroient avec la ligne AB, seroit le triangle demandé.* Fig. 117. N. 120.

PROPOSITION XI.

PROBLÊME.

298. *Inscrire dans un cercle donné un pentagone régulier.*

Fig. 13. IL faut inscrire dans le cercle ABC * un pentagone régulier.

N. 295. *Const*. Décrivez (n) sur une ligne droite GF prise à volonté, un triangle isoscele FGH, dont chaque angle F & H, soit
N. 284. double de l'angle G. Inscrivez (n) dans le cercle ACE, un triangle EBD qui soit équiangle à ce triangle FGH. Divi-
N. 91. sez (n) chaque angle BED & BDE en deux parties égales BEC & CED, BDA & ADE. Enfin, tirez du point B aux points A & C, des lignes droites BA & BC; du point E aux points A & D, des lignes droites EA & ED; & du point C au point D, une ligne droite CD. Le polygone ABCDE que ces lignes formeront, sera le pentagone demandé.

Démonst. Tous les angles BEC, CED, EBD, ADE & BDA, sont égaux, puisque [c] chaque angle BED & BDE est
N. 255. double de l'angle EBD. Donc (n), tous

les arcs BC, CD, DE, EA & AB, sont aussi égaux; & par conséquent (n), toutes N. 260.
les cordes BC, CD, &c. sont égales.

Mais, puisque tous les arcs BC, CD, &c. sont égaux, les arcs AEDC, BAED, CBAE, &c. sur lesquels les angles ABC, BCD, CDE, &c. s'appuient, le sont aussi; & par conséquent (n), tous ces N. 257.
angles sont égaux.

Ainsi, tous les côtés du pentagone ABCDE sont égaux, & tous ses angles le sont aussi. Donc, ce pentagone est régulier. D'ailleurs (n) il est inscrit dans N. 277.
le cercle ACE, puisque [c] tous ses angles ont leurs sommets dans la circonférence de ce cercle.

Par conséquent, C. Q. F. D.

COROLLAIRE I.

299. Il suit de ce problême : Premierement, que *pour inscrire dans le cercle un décagone régulier, il faut commencer par y inscrire un pentagone régulier: & diviser ensuite* (n) *chaque arc AB**, *BC,* N. 261. Fig. 13.
&c. en deux parties égales, afin d'avoir des arcs qui soient chacun la dixieme partie de la circonférence.

Secondement, que *pour inscrire dans le cercle un polygone régulier de 20 côtés,* *il faut commencer par y inscrire un décagone régulier : & diviser ensuite* (n) *en deux parties égales, chaque arc de ce décagone, afin d'avoir des arcs qui soient chacun la vingtieme partie de la circonférence.*

N. 261.

Et ainsi de suite, pour inscrire dans le cercle les polygones réguliers de 40 côtés, de 88 côtés, &c.

COROLLAIRE II.

300. Il suit aussi de la démonstration de ce même problême, que *chaque angle d'un pentagone régulier est les six cinquiemes d'un angle droit.*

PROPOSITION XII.

PROBLÊME.

301. *Circonscrire à un cercle donné un pentagone régulier.*

Fig. 14. IL faut circonscrire au cercle ACD *, un pentagone régulier.

N. 298. *Const.* Inscrivez (n) dans le cercle ACD, un pentagone régulier ABCDE. Tirez ensuite du centre L à chaque angle

A, B, C, &c. des rayons LA, LB, LC, &c. Enfin (n) élevez du point A, N. 96. une perpendiculaire KF au rayon LA; du point B, une perpendiculaire FG au rayon LB; du point C, une perpendiculaire GH au rayon LC; & ainſi de ſuite. Ces perpendiculaires formeront un polygone FGHIK, qui ſera le pentagone demandé.

Pour la démonſtration. Tirez du centre L à chaque angle F, G, H, &c. du polygone FGHIK, des lignes droites LF, LG, LH, &c.

Démonſt. Premierement, les triangles LAF & LBF ont le côté AF égal au côté BF (n), puiſque [c] ces côtés ſont N. 271. des tangentes qui ſont tirées du même point F; le côté LA égal au côté LB (n), N. 35. & le côté LF commun. Donc (n), l'an- N. 90. gle ALF eſt égal à l'angle BLF; & par conſéquent, l'angle ALB eſt double de l'angle BLF. Mais, on démontre de la même maniere, que l'angle CLB eſt auſſi double de l'angle BLG. Donc, puiſque les angles ALB & CLB, qui s'appuient ſur des arcs égaux BA & BC, ſont égaux (n), les angles BLF & BLG N. 258. le ſont auſſi (n); & par conſéquent, puiſ- N. 68. que les angles LBF & LBG ſont auſſi égaux [c], & que le côté LB eſt com-

mun aux triangles LBF & LBG, le côté
N. 123. BF est égal au côté BG (n).

Or, on démontre que les côtés CG & BG sont égaux, de la même maniere dont on a démontré que les côtés AF & BF l'étoient; que les côtés CH & CG sont égaux, de la même maniere dont on a démontré que les côtés BF & BG l'étoient; & ainsi de suite. Donc, tous les côtés AF, BF, BG, CG, &c. sont égaux; & par conséquent, tous les côtés KF, FG, GH, &c. le sont aussi.

Secondement. Les angles LFA &
N. 90. LFB sont égaux (n), puisque [D] les triangles LAF & LBF ont tous leurs côtés égaux, chacun à chacun. Les an-
N. 137. gles LFB & LGB sont égaux (n), puisque les triangles LBF & LBG, qui [C] sont rectangles l'un & l'autre en B, ont [D] l'angle BLF égal à l'angle BLG. Les
N. 90. angles LGB & LGC sont égaux (n), puisque [D] les triangles LBG & LCG ont tous leurs côtés égaux, chacun à chacun: & ainsi de suite. Donc, tous les angles LFA, LFB, LGB, LGC, &c. sont égaux; & par conséquent, tous les angles KFG, FGH, GHI, &c. le sont aussi.

Ainsi, tous les côtés du pentagone FGHIK sont égaux, & tous ses angles le

ſont auſſi. Donc, ce pentagone eſt régulier. D'ailleurs (n), il eſt circonſcrit au N. 278.
cercle ACD, puiſque (n) tous ſes côtés N. 242.
touchent ce cercle. Par conſéquent, C. Q. F. F.

COROLLAIRE.

302. Il ſuit de la conſtruction de ce problême, que *pour circonſcrire à un cercle un polygone régulier quelconque, il faut commencer par y en inſcrire un ſemblable à celui que l'on veut circonſcrire : tirer enſuite des rayons, du centre de ce cercle à chaque angle de ce polygone inſcrit : & élever enfin des extrémités de ces rayons, des perpendiculaires à ces mêmes rayons, chacune à chacun.*

PROPOSITION XIII.

PROBLÊME.

303. *Inſcrire un cercle dans un pentagone régulier.*

IL faut inſcrire un cercle dans le pentagone ABCDE *. Fig. 15.

Conſt. Diviſez (n) deux des angles du N. 91.
pentagone propoſé (par exemple les

angles A & B, chacun en deux parties égales FAE & FAB, FBA & FBC. Du point F, auquel les lignes FA & FB se
N. 97. rencontrent, abaissez (n) une perpendiculaire FG au côté AB. Enfin, du même point F, pris pour centre, & avec cette perpendiculaire prise pour rayon, décrivez un cercle GIL, il sera le cercle demandé.

N. 97. *Pour la démonstration.* Abaissez (n) du même point F, une perpendiculaire FH au côté BC; une perpendiculaire FI au côté CD; & ainsi de suite. Du même point F, tirez aux angles C, D & E, des lignes droites FC, FD & FE.

Démonst. Dans les triangles CBF & ABF, l'angle FBC est égal à l'angle FBA [c], le côté BC au côté BA [H],
N. 85. & le côté FB commun. Donc (n), l'angle FCB est égal à l'angle FAB; & par conséquent, puisque les angles BAE & BCD sont égaux [H], & que [c] l'angle FAB est la moitié de l'angle BAE, l'angle FCB est aussi la moitié de l'angle BCD. Or, on démontre de la même maniere, que les lignes FD & FE divisent aussi les angles D & E, chacun en deux parties égales †. Cela posé :

† Toute cette premiere partie est de plus dans notre démonstration que dans celles que l'on donne ordinaire-

Dans les triangles FHB & FGB, qui [c] sont rectangles, l'un en H & l'autre en G, l'angle FBC est égal à l'angle FBA [c], & le côté FB est commun. Donc, (n), le côté FH est égal au côté FG. N. 123.

Or, on démontre de la même maniere, que la ligne FI est égale à la ligne FH, la ligne FK à la ligne FI, & la ligne FL à la ligne FK. Donc (n), les lignes FG, N. 35. FH, FI, FK & FL, sont toutes cinq rayons du même cercle GIL. Mais [c], tous les côtés du pentagone ABCDE passent par les extrémités G, H, I, &c. de ces rayons, & sont perpendiculaires à ces mêmes rayons. Donc (n), le cercle GIL N. 242. touche tous les côtés de ce pentagone ; & par conséquent (n), il y est inscrit. N. 279. Donc, C. Q. F. F.

COROLLAIRE.

304. Il suit de la construction de ce problême, que *pour inscrire un cercle dans un polygone régulier quelconque, il*

ment. Mais, nous avons cru devoir l'ajouter, parce que les démonstrations ordinaires supposent gratuitement que les lignes FC, FD & FE, divisent les angles C, D & E, en deux parties égales. Au surplus, nous faisons cette remarque, pour faire voir qu'un Auteur a quelquefois de bonnes raisons pour être un peu plus long qu'un autre ; & qu'il est à propos de se tenir en garde, contre les *il est évident*, contre les *& cætera*, & contre les *ainsi de suite*.

faut faire précisément les mêmes choses que s'il s'agissoit d'en inscrire un dans un pentagone régulier.

PROPOSITION XIV.

PROBLÊME.

305. *Circonscrire un cercle à un pentagone régulier.*

IL faut circonscrire un cercle au pentagone ABCDE *.

Fig. 16

N. 91. *Const.* Divisez (n) deux des angles du pentagone proposé (par exemple, les angles A & B) chacun en deux parties égales FAE & FAB, FBA & FBC. Du point F, auquel les lignes FA & FB se rencontrent, pris pour centre, & avec la ligne FA, prise pour rayon, décrivez un cercle ACE, il sera le cercle demandé.

Pour la démonstration. Tirez du point F aux points C, D & E, des lignes droites FC, FD & FE.

Démonst. Dans les triangles CBF & ABF, l'angle FBC est égal à l'angle FBA [c], le côté BC au côté BA [11],

N. 83. & le côté BF commun. Donc (n), l'angle FCB eſt égal à l'angle FAB ; & par conſéquent, puiſque les angles BAE & BCD ſont égaux [H], & que [c] l'angle FAB eſt la moitié de l'angle BAE, l'angle FCB eſt auſſi la moitié de l'angle BCD. Or, on démontre de la même maniere, que les lignes FD & FE diviſent auſſi les angles D & E, chacun en deux parties égales †. Cela poſé :

Dans le triangle AFB, les angles FAB & FBA ſont égaux (n), puiſque [c] ils N. 68. ſont les moitiés des angles BAE & ABC, qui ſont égaux [H]. Donc (n), le côté N. 88. FB eſt égal au côté FA.

Or, on démontre de la même maniere, que la ligne FC eſt égale à la ligne FB, la ligne FD à la ligne FC, & la ligne FE à la ligne FD. Donc (n), les lignes FA, N. 35. FB, &c. ſont toutes cinq rayons du même cercle ACE. Mais [c], chaque angle A, B, &c. du pentagone ABCDE a pour ſommet l'extrémité de l'un de ces rayons. Donc (n), la circonférence du cercle N. 34. ACE paſſe par les ſommets de tous les angles de ce pentagone ; & par conſéquent (n), ce cercle eſt circonſcrit à ce N. 280. pentagone. Donc, C. Q. F. F.

† Cette premiere partie eſt auſſi ajoutée à la démonſtration ordinaire, pour la même raiſon que l'on a dite à la remarque du problême précédent.

COROLLAIRE.

306. Il suit de ce problême, que *pour circonscrire un cercle à un polygone régulier quelconque, il faut faire précisément les mêmes choses que s'il s'agissoit d'en circonscrire un à un pentagone régulier.*

PROPOSITION XV.

PROBLÊME.

307. *Inscrire dans un cercle donné un exagone régulier.*

Fig. 17. IL faut inscrire dans le cercle ACE *, un exagone régulier.

Const. Prenez sur la circonférence du cercle proposé, un point A à volonté. De ce point pris pour centre, & avec un rayon égal à celui de ce même cercle, décrivez deux arcs qui coupent la circonférence, l'un à un point B, & l'autre à un point F. Des points B, A & F, tirez par le centre G, des lignes droites BE, AD & FC. Enfin, tirez du point A aux points B & F, des lignes droites AB & AF; du point C aux poinis B & D, des lignes droites

CB & CD; & du point E, aux points D & F, des lignes droites ED & EF. Le polygone ABCDEF que ces lignes formeront, sera l'exagone demandé.

Démonst. Le triangle AGB est équilatéral [c]. Ainsi (n), l'angle AGB est N. 139.
les deux tiers d'un angle droit; & par la même raison, il en est de même de l'angle AGF. Donc, puisque (n) les trois angles N. 98.
AGB, AGF & FGE, valent ensemble deux angles droits, l'angle FGE est aussi les deux tiers d'un angle droit. Mais (n), N. 104.
l'angle DGE est égal à l'angle AGB; l'angle DGC à l'angle AGF; & l'angle BGC à l'angle FGE. Donc (n), tous les N. 62.
angles qui ont leurs sommets au centre G, sont égaux. Ainsi (n), tous les arcs N. 256.
AB, BC, CD, &c. le sont aussi; & par conséquent (n), toutes les cordes AB, N. 260.
BC, CD, &c. sont égales.

Mais, puisque tous les arcs AB, BC, &c. sont égaux, les arcs AEC, BFD, CAE, &c. sur lesquels les angles ABC, BCD, CDE, &c. s'appuient, le sont aussi; & par conséquent (n), tous ces N. 257.
angles sont égaux.

Ainsi, tous les côtés de l'exagone ABCDEF sont égaux, & tous ses angles le sont aussi. Donc, cet exagone est régulier. D'ailleurs (n), il est inscrit dans le N. 2[illegible] cercle ACE ; puiſque tous ſes angles ont leurs ſommets dans la circonférence de ce cercle. Par conſéquent, C. Q. F. F.

COROLLAIRE I.

308. Il ſuit de ce problême : Premiement, que *pour inſcrire dans le cercle un triangle équilatéral, il faut commencer par y inſcrire un exagone régulier*
Fig. 17. *ABCDEF * : & tirer enſuite des lignes droites, du point A au point C, du point C au point E, & du point E au point A.*

Secondement, que *pour inſcrire dans le cercle un dodécagone régulier, il faut commencer de même par y inſcrire un*
N. 261. *exagone régulier : & diviſer enſuite* (n)
Fig. 17. *chaque arc AB *, BC, &c. en deux parties égales, afin d'avoir des arcs qui ſoient chacun la douzieme partie de la circonférence.*

Et ainſi de ſuite, pour inſcrire dans le cercle les polygones réguliers de 24 côtés, de 48 côtés, &c.

COROLLAIRE II.

309. Il ſuit de la démonſtration de ce même problême, que *chaque angle d'un exagone régulier, eſt les quatre tiers d'un angle droit.*

COROLLAIRE III.

310. Il ſuit encore de la démonſtration de ce même problême, que *le côté de l'exagone régulier, eſt égal au rayon du cercle dans lequel cet exagone eſt inſcrit.*

COROLLAIRE IV.

311. Enfin, il ſuit de ce corollaire, que *pour inſcrire dans le cercle un exagone régulier, il n'y a qu'à prendre avec un compas, la grandeur du rayon, & la porter ſix fois ſur la circonférence.*

PROPOSITION XVI.

PROBLÊME.

312. *Inſcrire dans un cercle donné un pentédécagone régulier.*

Fig. 18. IL faut inſcrire dans le cercle DEG *, un pentédécagone régulier.

Conſt. Inſcrivez dans le cercle propoſé,
N. 308. un triangle équilatéral ABC (n) ; & un
N. 298. pentagone régulier DBEFG (n). L'arc AG, qui ſe trouvera intercepté entre l'angle A du triangle équilatéral & l'angle G du pentagone, ſera la quinzieme partie de la circonférence.

Démonſt. L'arc BAD eſt [c] le tiers, ou les cinq quinziemes de la circonférence ; & [c] l'arc BDAG en eſt les deux cinquiemes, ou les ſix quinziemes. Donc, l'arc AG en eſt le quinzieme ; & par conſéquent, C. Q. F. F.

COROLLAIRE.

313. Il ſuit de ce problême, que *pour inſcrire dans le cercle un polygone régulier de 30 côtés, il faut commencer par*

y

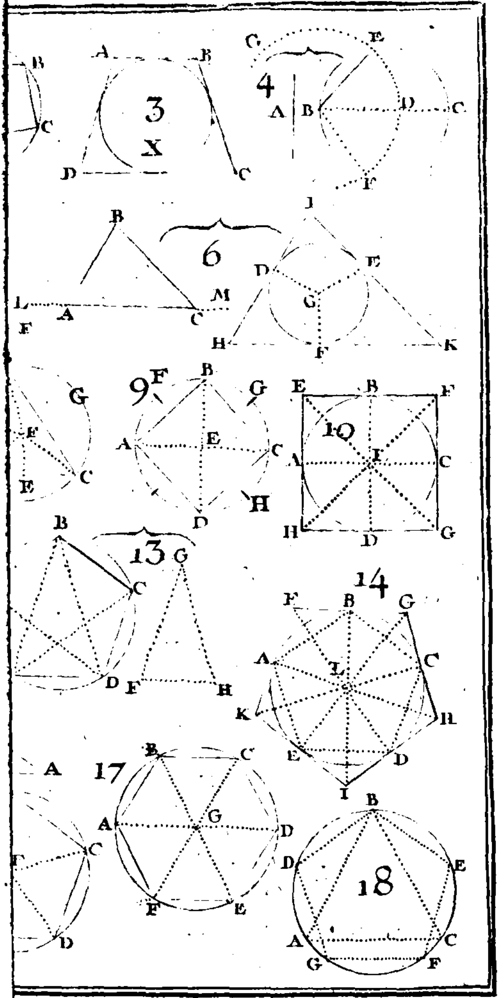
y inſcrire un pentédécagone régulier : & diviſer enſuite (n) *l'arc AG, en deux* N. 251.
parties égales, afin d'avoir des arcs qui ſoient chacun la trentieme partie de la circonférence.

Et ainſi de ſuite, pour inſcrire dans le cercle les polygones réguliers de 60 côtés, de 120 côtés, &c.

SCHOLIE.

314. *Il faut remarquer que l'on ne peut inſcrire géométriquement dans le cercle, aucun polygone régulier différent de ceux dont il eſt parlé dans ce Livre.*

Fin du quatrieme Livre.


3
X
4
6
9
10
13
14
17
18

LES ÉLÉMENS D'EUCLIDE.

LIVRE CINQUIEME.

JUSQU'ICI on n'a considéré les lignes & les surfaces qu'en elles-mêmes. Il s'agit à présent de comparer entr'elles les premieres ; de faire la même chose à l'égard des dernieres ; & de déterminer l'égalité, ou l'inégalité, des rapports qui résultent de ces comparaisons. Mais, il est nécessaire d'avoir auparavant une connoissance exacte des rapports en général ; & c'est à la donner, cette connoissance, qu'Euclide destine ce cinquieme Livre. Il le commence par les definitions des termes qui sont en usage dans les comparaisons. Il établit ensuite les principes des rapports ; compare ces rapports les uns aux autres ;

donne des regles pour connoître leur égalité, ou leurs différentes sortes d'inégalités, & démontre les propriétés de ceux qui sont égaux. Ce Livre renferme les regles d'une excellente logique, & la matiere qui y est traitée fait l'ame de la Géométrie. Mais il faut avouer qu'il est obscur dans son Auteur, si chargé de propositions inutiles, & en même tems si défectueux par le nombre de propositions nécessaires qui ne s'y trouvent point, que je n'ai pu m'empêcher d'y faire les changemens les plus considérables. Ainsi :

Premierement. *Je l'ai augmenté d'un nombre de propositions suffisant pour le rendre complet sur les rapports. Mais, pour ne point interrompre l'ordre d'Euclide, je ne présente ces propositions que sous les titres de corollaires ; & lorsque j'en substitue quelques-unes à celles que j'ai supprimées comme totalement inutiles, j'ai soin de le marquer par un *.*

Secondement. *Comme je ne traite ici des rapports qu'en général, je me sers des lettres de l'alphabet, pour représenter les quantités en général. Ainsi, ces lettres A, B, C, D, &c. signifient également des nombres, des lignes, des surfaces, des corps, des sons, des tems, des vitesses, &c.*

Troisiemement. *Pour m'exprimer de la maniere la plus courte qu'il m'est possible, je me sers de ce signe* +, *pour représenter ce mot* plus; *de cet autre signe* —, *pour représenter ce mot*, moins; *enfin, de cet autre signe* ×, *pour représenter ces deux mots*, multiplié par. *Ainsi, A+B signifie la* somme *des quantités qui sont représentées par les lettres A & B; A—B signifie leur* différence; *& A × B signifie leur* produit.

Quatriemement. *Enfin, j'ai ajouté plusieurs questions, à la fin de ce Livre, afin de donner quelque idée de l'usage que l'on peut faire des proportions.*

A l'égard des figures, je me suis fait d'autant moins de difficulté d'en déranger l'ordre, que de la maniere dont je démontre ce Livre, elles sont assez inutiles.

DÉFINITIONS.

I.

315. ON nomme *rapport*, ou *raison*, ce qu'une quantité est à l'égard d'une autre.

Par exemple, le rapport *d'une ligne de* 12 *pieds à une de* 4 *pieds, est d'être* grande *à l'égard de cette ligne de 4 pieds: & celui d'une ligne de 12 pieds à une de* 48 *pieds, est d'être* petite *à l'égard de cette ligne de 48 pieds.*

Mais, on ne juge cette ligne de 12 *pieds* grande *par rapport à celle de* 4 *pieds, que parce qu'on la considere, ou comme la* surpassant, *ou comme la* contenant *plus d'une fois. On ne juge pareillement cette même ligne de* 12 *pieds* petite *par rapport à celle de* 48 *pieds, que parce qu'on la considere, ou comme en* différant, *ou comme ne la* contenant *point une fois. Ainsi, une quantité est* grande *ou* petite *à l'égard d'une autre, ou* égale *à une autre, en deux manieres; & par conséquent, il y a deux sortes de rapports.*

316. Lorsque l'on compare une quantité à une autre, en considérant la maniere † dont celle que l'on compare *differe* de celle à laquelle on la compare, le rapport qui est entre ces deux quantités, se nomme *rapport arithmetique.*

Par exemple, si l'on considere qu'une ligne de 18 *pieds est* plus grande *qu'une ligne de 6 pieds, parce qu'elle la* surpasse

† Je dis la *maniere*, &c. parce que la différence de 12 à 14, n'est point la même que celle de 12 à 10. On n'a pas fait attention que la premiere est *positive*, & que l'autre est *négative*.

de 12 *pieds ; qu'une ligne de* 25 *pieds est* égale *à une autre ligne aussi de* 25 *pieds, parce qu'elle n'en* differe *point ; enfin, qu'une ligne de* 9 *pieds est* plus petite *qu'une ligne de* 15 *pieds, parce qu'elle en* differe *de* 6 *pieds ; tous ces rapports seront* arithmétiques.

317. Lorsque l'on compare une quantité à une autre, en considérant la maniere dont celle que l'on compare *contient* celle à laquelle on la compare, le rapport qui est entre ces deux quantités se nomme *rapport géométrique*, ou seulement, *rapport* †.

Par exemple, si l'on considere qu'une ligne de 18 *pieds est* plus grande *qu'une ligne de* 6 *pieds, parce qu'elle la* contient 3 *fois ; qu'une ligne de* 25 *pieds est* égale *à une autre ligne aussi de* 25 *pieds, parce qu'elle la* contient *une fois précisément ; enfin, qu'une ligne de* 9 *pieds est* plus petite *qu'une ligne de* 15 *pieds, parce qu'elle n'en* contient *que les trois cinquiemes*, (*ou, ce qui est la même chose, parce qu'elle n'en est que les trois cinquiemes*) ; *tous ces rapports seront* géométriques.

318. On nomme *terme antécédent*, la quantité que l'on compare ; & *terme*

† C'est de ce dernier seul, dont nous traiterons ici.

conséquent, celle à laquelle on la compare.

Par exemple, si l'on compare une ligne de 12 *pieds à une de* 8 *pieds, cette ligne de* 12 *pieds sera l'*antécédent *du rapport qui est entre ces deux lignes ; & celle de* 8 *pieds en sera le* conséquent.

319. On nomme *exposant*, ou *dénominateur*, d'un rapport, le quotient de l'antécédent de ce rapport, divisé par le conséquent.

Par exemple, le quotient 4 *de* 12 *divisé par* 3, *est l'*exposant *du rapport d'une ligne de* 12 *pieds à une de* 3 *pieds, parce qu'il fait connoître que ce rapport est d'être* quadruple *de cette ligne de* 3 *pieds.*

Pareillement, le quotient $\frac{2}{3}$ *de* 8 *divisé par* 12, *est l'*exposant *du rapport d'une ligne de* 8 *pieds à une de* 12 *pieds, parce qu'il fait connoître que ce rapport est d'être les* deux tiers *de cette ligne de* 12 *pieds.*

II.

320. ON nomme rapport d'*égalité*, celui dont l'antécédent est égal au conséquent.

Par exemple, le rapport d'une ligne de 12 *pieds à une autre ligne aussi de* 12 *pieds, est un rapport d'*égalité.

321. On nomme rapport d'*inégalité*, celui dont l'antécédent n'eſt point égal au conſéquent.

*Par exemple, le rapport d'une ligne de 12 pieds à une de 8 pieds, eſt un rapport d'*inégalité.

*Pareillement, le rapport d'une ligne de 8 pieds à une de 12 pieds, eſt auſſi un rapport d'*inégalité.

322. On nomme rapport *multiple* †, ou d'*inégalité majeure*, celui dont l'antécédent eſt plus grand que le conſéquent.

Par exemple, le rapport d'une ligne de 12 pieds à une de 8 pieds, eſt un rapport multiple.

323. On nomme rapport *ſous-multiple*, ou d'*inégalité mineure*, celui dont l'antécédent eſt plus petit que le conſéquent.

† On dit qu'une quantité eſt *multiple* d'une autre, lorſqu'on la conſidere comme étant le produit de cette autre multipliée par un nombre quelconque, entier ou fractionnaire, mais cependant, plus grand que l'unité.

On dit, au contraire, qu'une quantité eſt *ſous-multiple* d'une autre, lorſqu'on la conſidere comme étant le produit de cette autre multipliée par un nombre fractionnaire quelconque; mais cependant, plus petit que l'unité.

Enfin, on dit que des quantités ſont *équi-multiples*, ou *multiples pareils* d'autres quantités, lorſqu'on les conſidere comme étant les produits de ces autres quantités multipliées chacune par un même nombre quelconque, entier ou fractionnaire, plus grand ou plus petit que l'unité.

Par exemple, le rapport d'une ligne de 8 pieds à une de 12 pieds, est un rapport sous-multiple.

III.

324. ON dit que l'on *compose* un rapport, lorsque l'on ajoute le conséquent à l'antécédent, pour comparer la somme à ce même conséquent.

Par exemple, du rapport de 18 à 6, on forme par composition †, *celui de 24 à 6.*

325. On dit que l'on *divise* un rapport, lorsque l'on retranche le conséquent de l'antécédent, pour comparer le reste à ce même conséquent.

Par exemple, du rapport de 18 à 6, on forme par division ¶, *celui de 12 à 6.*

326. On dit que l'on *convertit* un rapport, lorsque l'on ajoute le conséquent à l'antécédent, pour comparer la somme à ce même antécédent.

Par exemple, du rapport de 18 à 6, on forme par conversion §, *celui de 24 à 18.*

327. On dit que l'on *renverse* un rapport, lorsque l'on prend le conséquent de ce rapport, pour en faire l'antécédent d'un autre; & l'antécédent, pour en faire le conséquent.

† Componendo. ¶ Dividendo. § Convertendo.

Par exemple, du rapport de 18 à 6, on forme par inversion †, *celui de 6 à 18; & ces deux rapports de 18 à 6, & de 6 à 18, se nomment respectivement, rapports* inverses.

328. Enfin, on dit que l'on *échange* deux rapports, lorsque l'on prend l'antécédent du second, pour en faire le conséquent du premier; & le conséquent du premier, pour en faire l'antécédent du second.

Par exemple, des rapports de 18 à 6, & de 24 à 8, on forme par échange ¶, *ceux de 18 à 24, & de 6 à 8; & ces deux derniers rapports sont nommés* alternes, *à l'égard des deux premiers.*

IV.

329. ON dit qu'un rapport est *plus grand* qu'un autre, lorsque son exposant (n) est plus grand que celui de cet autre rapport. Nº 318.

Par exemple, le rapport d'une ligne de 15 pieds à une de 5 pieds, est plus grand *que celui d'une ligne de 18 pieds à une de 9 pieds, parce que le quotient 3 de 15 divisé par 5, est plus grand que le quotient 2 de 18 divisé par 9.*

Pareillement, le rapport d'une ligne

† Invertendo. ¶ Permutando, ou Alternando.

de 16 *pieds à une de* 20 *pieds, est* plus grand *que celui d'une ligne de* 8 *pieds à une de* 12 *pieds; parce que le quotient* $\frac{4}{5}$ *de* 16 *divisé par* 20, *est plus grand* † *que le quotient* $\frac{2}{3}$ *de* 8 *divisé par* 12.

330. On dit que des rapports sont *égaux*, ou sont *les mêmes*, lorsque leurs
N. 319. Exposans (n) sont égaux.

Par exemple, le rapport d'une ligne de 24 *pieds à une de* 8 *pieds, est* égal *à celui d'une ligne de* 18 *pieds à une de* 6 *pieds; parce que le quotient* 3 *de* 24 *divisé par* 8, *est le même que celui de* 18 *divisé par* 6.

Pareillement, le rapport d'une ligne de 10 *pieds à une de* 15 *pieds, est* le même *que celui d'une ligne de* 14 *pieds à une de* 21 *pieds; parce que le quotient* $\frac{2}{3}$ *de* 10 *divisé par* 15, *est égal à celui de* 14 *divisé par* 21.

SCHOLIE.

351. *Pour marquer que des rapports sont égaux, tels que sont, par exemple, les rapports de* 24 *à* 8, *de* 18 *à* 6, *de*

† Pour connoître lequel de ces quotiens est le plus grand, lorsqu'ils sont des nombres fractionnaires de différente dénomination, on réduit les fractions à un même dénominateur.

21 à 7, &c. on les ſépare les uns des autres par quatre points rangés en quarré, de cette maniere: 24. 8 :: 18. 6 :: 21. 7 :: *&c. Et pour exprimer cette égalité, on ſe ſert de différentes expreſſions, dont les plus ordinaires ſont les ſuivantes.*

Premierement, 24 ſont à 8, ce que 18 ſont à 6, ce que 21 ſont à 7, &c.

Secondement, 24 contiennent 8, de la même maniere dont 18 contiennent 6, dont 21 contiennent 7, &c.

Troiſiemement, 24 ſont multiples de 8, de la même maniere dont 18 ſont multiples de 6, dont 21 ſont multiples de 7, &c.

Quatriemement. Enfin, 24, 18 & 21, ſont équi-multiples de 8, 6 & 7.

332. On nomme *proportion*, l'égalité de pluſieurs rapports.

Par exemple, l'égalité qui eſt entre le rapport de 24 à 8, & celui de 18 à 6, ſe nomme proportion.

COROLLAIRE.

333. *Il ſuit de cette définition, qu'*une proportion ne peut point avoir moins de trois termes.

Démonſt. *Puiſque la proportion conſiſte dans l'égalité des rapports, il faut* *au moins deux rapports pour former une proportion. Or, on ne peut point former deux rapports égaux, avec moins de trois quantités ; puisqu'après avoir formé un rapport en comparant une quantité à une autre, il faut nécessairement comparer l'une de ces deux quantités à une troisieme, pour former un second rapport qui soit égal au premier. Donc, il faut au moins trois quantités, pour former une proportion ; & par conséquent, C. Q. F. D.*

334. On nomme *proportion continue*, ou *progression*, une proportion dont chaque conséquent sert d'antécédent au terme qui le suit immédiatement.

Par exemple, cette proportion, 3. 9 :: 9. 27 :: 27. 81 :: 81. *&c. s'appelle une* proportion continue, *ou une* progression.

SCHOLIE.

335. *Pour marquer que des quantités sont en* proportion continue, *telles que sont, par exemple celles-ci*, 3. 9. 27. 81. 243, *&c. on les fait précéder par une petite ligne entre quatre points, de cette maniere*, $\div$ 3. 9. 27. 81. 243, *&c.*

On peut remarquer que cette propor-

tion est nommée continue, *parce que les rapports qui la forment sont liés les uns aux autres, par un terme commun : & que les autres proportions sont appellées* discretes, *parce que les rapports qui les forment sont séparés les uns des autres.*

336. Les quantités qui forment des rapports égaux, se nomment *quantités proportionnelles.*

Par exemple, 24, 8, 18 & 6, *sont des* quantités proportionnelles, *parce que* 24. 8 :: 18. 6.

337. Le premier & le dernier terme d'une proportion, se nomment les termes *extrêmes*; & les autres s'appellent les termes *moyens.*

Par exemple, 24 & 6 *sont les* extrêmes *de cette proportion*, 24. 8 :: 18. 6; & 8 & 18 *en sont les* moyens.

338. On dit que deux rapports sont *réciproques*, lorsqu'ils sont tels qu'en renversant l'ordre des termes de l'un ou de l'autre, ils deviennent égaux.

Par exemple, le rapport de 8 *à* 24 *est* réciproque *à celui de* 18 *à* 6, *parce que si l'on renverse l'ordre de ses termes, on a cette proposition*, 24. 8 :: 18. 6; & *si l'on renverse au contraire l'ordre des termes du rapport de* 18 *à* 6, *on a cette* *autre proportion*, 8. 24 :: *6*. 18.

339. Les quantités qui forment des rapports réciproques, ſe nomment quantités *réciproquement* proportionnelles.

Par exemple, 8. 24, 18 *&* 6, *ſont des quantités* réciproquement *proportionnelles, parce que* 24. 8 :: 18. *6*.

340. Lorſque pluſieurs quantités d'une part, & autant d'une autre, ſont telles que celles de la premiere part étant comparées chacune à chacune, forment des rapports égaux chacun à chacun de ceux que forment celles de la ſeconde part, comparées auſſi chacune à chacune; l'égalité de ces rapports ſe nomme *proportion d'égalité*.

Par exemple, $\begin{cases} 12. & 4. & 28. & 14. & \&c. \\ 18. & 6. & 42. & 21. & \&c. \end{cases}$
forment ce que l'on appelle une proportion d'égalité, *parce que* 12. 4 :: 18. *6*; 4. 28 :: *6*. 42; 28. 14 :: 42. 21, *&c.*

341. Lorſque les rapports qui forment une proportion d'égalité, ſont rangés de maniere que le premier du premier rang eſt égal au premier du ſecond rang, le ſecond du premier rang au ſecond du ſecond rang, le troiſieme, &c. au troiſieme, &c. & ainſi de ſuite; cette proportion ſe nomme proportion d'égalité *ordonnée*, ou *bien rangée*.

L'exemple précédent (n) *est une proportion d'égalité* ordonnée. N. 340.

342. Lorsque les rapports qui forment une proportion d'égalité, sont rangés de maniere que le premier du premier rang est égal au dernier du second rang, le second du premier rang au pénultieme du second rang, le troisieme, &c. à l'antépénultieme, &c. & ainsi de suite, jusqu'à ce que l'on vienne à comparer le dernier rapport du premier rang au premier du second rang; cette proportion se nomme proportion d'égalité *troublée*, ou *mal rangée*.

Par exemple, $\begin{cases} 20. & 12. & 4. & 28. \\ 15. & 105. & 35. & 21. \end{cases}$ *forment ce que l'on appelle une proportion d'égalité* troublée; *parce que* 20. 12 :: 35. 21; 12. 4 :: 105. 35; *&* 4. 28 :: 15. 105.

V.

343. ON dit qu'un rapport est *composé* d'autres rapports, lorsqu'on le considere comme étant formé de ces autres rapports multipliés les uns par les autres: *c'est-à-dire*, comme étant le rapport du produit des antécédens de ces autres rapports, au produit de leurs conséquens.

Par exemple, si l'on considere que le rapport d'une ligne de 30 pieds à une de 5 pieds, est d'être sextuple *de cette ligne de 5 pieds, ce rapport sera* simple. *Mais, si l'on considere que cette ligne de 30 pieds n'est* sextuple *de celle de 5 pieds, que parce qu'elle est le* double *du* triple *de cette ligne de 5 pieds; alors, ce même rapport sera* composé *d'un rapport double, & d'un rapport triple.*

Pareillement, si l'on considere que le rapport d'une ligne de 30 pieds à une de 72 pieds, est d'être les $\frac{5}{12}$ de cette ligne de 72 pieds, ce rapport sera simple. *Mais, si l'on considere que cette ligne de 30 pieds n'est les $\frac{5}{12}$ de celle de 72 pieds, que parce qu'elle est les $\frac{2}{3}$ des $\frac{3}{4}$ des $\frac{5}{6}$ de cette ligne de 72 pieds; alors ce même rapport sera* composé *des rapports de 2 à 3, de 3 à 4, & de 5 à 6.*

COROLLAIRE.

344. *Il suit de cette définition, que* si l'on a plusieurs quantités entre lesquelles il puisse † y avoir rapport; celui de la

† Il faut que des quantités soient de même genre, afin qu'il puisse y avoir des rapports entr'elles. Il n'y a, par exemple, aucun rapport, d'une aulne à un louis d'or, d'une ligne à une surface, &c.

premiere à la derniere sera composé des rapports de la premiere à la seconde, de la seconde à la troisieme, de la troisieme à la quatrieme ; & ainsi de suite.

Si l'on a les quantités suivantes ; par exemple, une ligne de 3 pieds, une de 8 pieds, une de 4 pieds, & une de 12 pieds ; le rapport de cette ligne de 3 pieds à celle de 12 pieds, sera composé du rapport de cette même ligne de 3 pieds à celle de 8 pieds, du rapport de cette ligne de 8 pieds à celle de 4 pieds, & du rapport de cette ligne de 4 pieds à celle de 12 pieds.

Démonst. *La ligne de 3 pieds est les $\frac{3}{8}$ de celle de 8 pieds ; celle de 8 pieds est le double de celle de 4 pieds ; & celle de 4 pieds est le tiers de celle de 12 pieds. Donc, cette ligne de 3 pieds est les $\frac{3}{8}$ du double du tiers de celle de 12 pieds ; & par conséquent* (n), *son rapport à cette* N. 343. *ligne de 12 pieds est composé des rapports de 3 à 8, de 2 à 1, & de 1 à 3. Mais* [H], *ces rapports sont ceux de la premiere ligne à la seconde, de la seconde à la troisieme, & de la troisieme à la quatrieme. Donc, C. Q. F. D.*

345. On nomme rapports *composans*, ceux dont la multplication a produit un rapport composé.

Par exemple, les rapports de 2 à 5, de 3 à 4, & de 5 à 6, sont les rapports composans *du rapport de cette ligne de*
N. 343. *30 pieds* (n) *à celle de 72 pieds.*

346. On dit qu'un rapport est *doublé* † d'un autre, lorsqu'on le considere comme étant composé de cet autre répété deux fois.

Par exemple, si l'on considere que le rapport d'une ligne de 36 pieds à une de 4 pieds, est d'être le triple *du* triple *de cette ligne de 4 pieds, ce rapport sera* doublé *d'un rapport triple.*

Pareillement, si l'on considere que le rapport d'une ligne de 9 pieds à une de 16 pieds, est d'être les trois quarts *des* trois quarts *de cette ligne de 16 pieds, ce rapport sera* doublé *de celui de 3 à 4.*

347. Enfin, on dit qu'un rapport est *triple* d'un autre, lorsqu'on le considere comme étant composé de cet autre répété trois fois : qu'il est *quadruplé* d'un autre, lorsque, &c. & ainsi de suite.

Par exemple, si l'on considere que le rapport d'une ligne de 56 pieds à une de 7 pieds, est d'être le double *du* double *du* double *de cette ligne de 7 pieds ; ce rapport sera* triplé *d'un rapport double.*

† Je pense que le vrai terme devroit être *redoublé*, de même que *retriplé*, dans la définition suivante, &c.

Pareillement, si l'on considere que le rapport d'une ligne de 64 pieds à une de 125 pieds, est d'être les quatre cinquiemes *des* quatre cinquiemes *des* quatre cinquiemes *de cette ligne de 125 pieds, ce rapport sera* triplé *de celui de 4 à 5.*

COROLLAIRE I.

348. *Il suit du corollaire précédent* (n), *& des deux dernieres définitions,* N. 344.
que dans une progression, le rapport du premier terme au troisieme est doublé de celui du premier au second : le rapport du premier terme au quatrieme, est triplé de celui du premier au second : le rapport du premier terme au cinquieme, est quadruplé de celui du premier au second ; & ainsi de suite.

Dans cette progression ∺ A. B. C. D. E. F. G. &c. le rapport de A à C est doublé de celui de A à B : le rapport de A à D est triplé de celui de A à B : le rapport de A à E est quadruplé de celui de A à B ; & ainsi de suite.

Démonst. *Si A est, par exemple, le triple de B, B sera* (n) *le triple de C;* N. 344.
C sera le triple de D ; & ainsi de suite. Donc, premierement, le rapport de A à

C, sera d'être le triple du triple de C; &
N. 346. *par conséquent* (n), *il sera doublé de celui de A à B; secondement, le rapport de A à D sera d'être le triple du triple du*
N. 347. *triple de D; & par conséquent* (n), *il sera triplé de celui de A à B. Et ainsi de suite.*

Pareillement, si A est, par exemple, les $\frac{2}{3}$ de B, B sera les $\frac{2}{3}$ de C, C sera les $\frac{2}{3}$ de D; & ainsi de suite. Donc, premierement, le rapport de A à C sera d'être les $\frac{2}{3}$
N. 346. *des $\frac{2}{3}$ de C; & par conséquent* (n), *il sera doublé de celui de A à B: Secondement, le rapport de A à D sera d'être les $\frac{2}{3}$ des*
N. 347. *$\frac{2}{3}$ des $\frac{2}{3}$ de D; & par conséquent* (n), *il sera triplé de celui de A à B. Et ainsi de suite.*

Or, la même démonstration subsiste, quel que soit l'exposant du rapport du premier terme A au second terme B. Donc, C. Q. F. D.

Autre Démonst. *Premierement, le rap-*
N 344. *port de A à C est* (n) *composé de celui de*
N. 332. *A à B, & de celui de B à C. Or* (n), *le rapport de B à C est le même que celui de A à B. Donc, le rapport de A à C est composé de celui de A à B répété deux*
N. 346. *fois; & par conséquent* (n), *il est doublé de ce dernier rapport.*

Secondement, le rapport de A à D est (n) *composé de celui de A à B, de celui de B à C, & de celui de C à D. Or* N. 344.
(n), *le rapport de B à C, & celui de C à D, sont chacun le même que celui de A à B. Donc, le rapport de A à D est composé de celui de A à B répété trois fois;* N. 332.
& par conséquent (n), *il est triplé de ce dernier rapport.* N. 347.

Troisiemement, enfin, on démontre par un raisonnement pareil, que le rapport de A à E est quadruplé de celui de A à B: que le rapport de A à F est quintuplé de celui de A à B; & ainsi de suite.

Par conséquent, C. Q. F. D.

COROLLAIRE II.

349. *Il suit de ce corollaire, que* dans une progression, le second terme est le produit du premier multiplié par la premiere puissance de l'exposant du rapport du second terme au premier : le troisieme terme, est le produit du premier multiplié par la seconde puissance du même exposant : le quatrieme terme, est le produit du premier multiplié par la troisieme puissance de ce même exposant; & ainsi de suite.

Dans cette progression $\div$ *A.B.C.D. E. F. G. &c. B est le produit de A multiplié par la premiere puissance de l'exposant du rapport de B à A : C est le produit de A multiplié par la seconde puissance du même exposant : D est le produit de A multiplié par la premiere puissance de ce même exposant ; & ainsi de suite.*

Démonst. *Si l'exposant du rapport de B à A est par exemple 3, B sera le triple de A ; & par conséquent, le produit de A multiplié par 3 : C sera le triple du triple de A ; & par conséquent, le produit de A multiplié par 9 : D sera le triple du triple du triple de A ; & par conséquent, le produit de A multiplié par 27 ; & ainsi de suite. Or, 3 est la premiere puissance de l'exposant 3 ; 9 est sa seconde puissance ; 27 est sa troisieme puissance ; & ainsi de suite.*

Pareillement, si l'exposant du rapport de B à A est, par exemple $\frac{2}{3}$, *B sera les* $\frac{2}{3}$ *de A ; & par conséquent, le produit de A multiplié par* $\frac{2}{3}$ *: C sera les* $\frac{2}{3}$ *des* $\frac{2}{3}$ *de A ; & par conséquent, le produit de A multipliée par* $\frac{4}{9}$ *: D sera les* $\frac{2}{3}$ *des* $\frac{2}{3}$ *des* $\frac{2}{3}$ *de A ; & par conséquent, le produit de A multiplié par* $\frac{8}{27}$ *; & ainsi de suite. Or,* $\frac{2}{3}$ *est la premiere puissance de l'exposant* $\frac{2}{3}$,

$\frac{4}{9}$

$\frac{4}{9}$ est sa seconde puissance; $\frac{8}{27}$ est sa troisieme puissance; & ainsi de suite.

Mais, la même démonstration subsiste; quel que soit l'exposant du rapport du second terme B au premier terme A. Donc, C. Q. F. D.

AXIOMES.

I.

350. Les rapports qui sont égaux chacun à un même rapport, sont égaux entr'eux.

II.

351. Si de deux rapports égaux, l'un est plus grand qu'un troisieme, l'autre le sera aussi.

III.

352. Si une quantité est double, triple, quadruple, &c. d'une autre; le quotient † de cette premiere quantité divisée par une troisieme, sera aussi double,

† Par ce mot *quotient*, nous entendons, ce qui exprime la *maniere* dont une quantité en contient une autre. Ainsi, lorsque nous disons, *le quotient de A divisé par C, est le même que celui de B divisé aussi par C*; on doit entendre la même chose que si nous disions, *la maniere dont A contient C, est la même que celle dont B contient aussi C.* Nous faisons cette remarque, parce que plusieurs personnes ont une idée si peu juste de ce qu'on appelle un *quotient*, qu'elles s'imaginent que le dividende doit toujours être plus grand que le diviseur.

triple, quadruple, &c. de celui de cette autre quantité diviſée par cette même troiſieme. Et au contraire.

Par exemple, ſi A eſt double de B, le quotient de A diviſé par C, ſera double de celui de B diviſé auſſi par C. Si A eſt triple de B, le quotient de A diviſé par C, ſera triple de celui de B diviſé auſſi par C; & ainſi de ſuite.

Au contraire, ſi A eſt la moitié de B, le quotient de A diviſé par C, ſera la moitié de celui de B diviſé auſſi par C. Si A eſt le tiers de B, le quotient de A diviſé par C, ſera le tiers de celui de B diviſé auſſi par C. Et ainſi de ſuite.

IV.

353. Si une quantité eſt double, triple, quadruple, &c. d'une autre, le quotient d'une troiſieme quantité diviſée par cette premiere, ſera la moitié, le tiers, le quart, &c. de celui de cette même troiſieme quantité diviſée par cette autre. Et au contraire.

Par exemple, ſi A eſt double de B, le quotient de C diviſé par A, ſera la moitié de celui de C diviſé par B. Si A eſt triple de B, le quotient de C diviſé par A, ſera le tiers de celui de C diviſé par B. Et ainſi de ſuite.

Au contraire, si A est la moitié de B, le quotient de C divisé par A, sera double de celui de C divisé par B. Si A est le tiers de B, le quotient de C divisé par A, sera triple de celui de C divisé par B. Et ainsi de suite.

PROPOSITION VII. †

THÉORÊME.

354. *Si deux quantités sont égales, elles auront chacune le même rapport à une troisieme quantité; & une troisieme quantité aura le même rapport à chacune d'elles.*

PREMIEREMENT.

SI A * est égal à B, le rapport de A à C sera le même que celui de B à C. Fig. 7.

Démonst. Puisque [H] A est égal à B, le quotient de A divisé par C, est le même que celui de B divisé aussi par C. Donc (n), le rapport de A à C est aussi le même que celui de B à C; & par conséquent, C. Q. F. 1°. D. N. 330.

† Nous supprimons les six premieres propositions, parce qu'elles sont totalement inutiles.

SECONDEMENT.

Fig. 7. Si A * est égal à B, le rapport de C à A sera le même que celui de C à B.

Démonst. Puisque [H] A est égal à B, le quotient de C divisé par A, est le même N. 330. que celui de C divisé par B. Donc (n), le rapport de C à A est aussi le même que celui de C à B; & par conséquent, C. Q. F. 2°. D.

PROPOSITION VIII.

THÉORÊME.

355. *Si deux quantités sont inégales, la plus grande aura un plus grand rapport à une troisieme quantité, que la plus petite; & une troisieme quantité aura un plus grand rapport à la plus petite qu'à la plus grande.*

PREMIEREMENT.

Fig. 8. SI A * est plus grand que B, le rapport de A à C sera plus grand que celui de B à C.

Démonst. Puisque [H] A est plus grand que B, le quotient de A divisé par C, est plus grand que celui de B divisé aussi par

C. Donc (n), le rapport de A à C est N. 325.
aussi plus grand que celui de B à C; & par conséquent, C. Q. F. 1°. D.

SECONDEMENT.

Si A * est plus grand que B, le rapport Fig. 22.
de C à B sera plus grand que celui de C à A.

Démonst. Puisque [H] A est plus grand que B, le quotient de C divisé par B, est plus grand que celui de C divisé par A. Donc (n), le rapport de C à B est aussi N. 325.
plus grand que celui de C à A; & par conséquent, C. Q. F. 2°. D.

PROPOSITION IX.

THÉORÊME.

356. *Si deux quantités ont chacune le même rapport à une troisieme quantité, elles seront égales; & si une troisieme quantité a le même rapport à chacune d'elles, elles le seront aussi.*

PREMIEREMENT.

SI le rapport de A * à C est le même Fig. 23.
que celui de B à C, A sera égal à B.

Démonst. Puisque [H] le rapport de A à C, est le même que celui de B à C, le

N. 330. quotient de A divisé par C, est (n) le même que celui de B divisé aussi par C. Donc, A est égal à B ; & par conséquent, C. Q. F. 1°. D.

SECONDEMENT.

Fig. 7. Si le rapport de C * à A est le même que celui de C à B, A sera encore égal à B.

Démonst. Puisque [H] le rapport de C à A est le même que celui de C à B, le
N. 330. quotient de C divisé par A, est (n) le même que celui de C divisé par B. Donc, A est égal à B ; & par conséquent, C. Q. F. 2°. D.

PROPOSITION X.

THÉORÊME.

357. *Si de deux quantités, l'une a un plus grand rapport que l'autre à une troisieme quantité; celle qui aura le plus grand rapport, sera la plus grande. Et si une troisieme quantité a un plus grand rapport à l'une de ces deux quantités qu'à l'autre, celle à laquelle elle aura le plus grand rapport, sera la plus petite.*

PREMIEREMENT.

SI le rapport de A * à C est plus grand que celui de B à C, A sera plus grand que B. Fig. 8.

Démonst. Puisque [H] le rapport de A à C est plus grand que celui de B à C, le quotient de A divisé par C, est (n) plus grand que celui de B divisé aussi par C. Donc (n), A est plus grand que B; & par conséquent, C. Q. F. 1°. D. N. 329. N. 352.

SECONDEMENT.

Si le rapport de C * à B est plus grand que celui de C à A, B sera plus petit que A. Fig. 8.

Démonst. Puisque [H] le rapport de C à B est plus grand que celui de C à A, le
N. 329. quotient de C divisé par B est (n) plus grand que celui de C divisé par A. Donc
N. 353. (n), B est plus petit que A; & par conséquent, C. Q. F. 2°. D.

SCHOLIE.

358. *Ces quatre premieres propositions ne sont que des axiomes, que l'on auroit pu énoncer de cette maniere :*

Fig. 7. Si A * & B sont égaux, ils seront également grands à l'égard de C; & C sera aussi grand à l'égard de A, qu'à l'égard de B.

Fig. 8. Si A * est plus grand que B, il sera plus grand à l'égard de C, que B ne l'est à l'égard aussi de C: & C sera plus grand à l'égard de B, qu'à l'égard de A.

Fig. 7. Si A * & B sont également grands à l'égard de C, ils seront égaux : & si C est aussi grand à l'égard de A, qu'à l'égard de B; A & B seront encore égaux.

Fig. 8. Enfin, si A * est plus grand à l'égard de C, que B ne l'est à l'égard aussi de C; A sera plus grand que B : & si C est plus grand à l'égard de B, qu'à l'égard de A, B sera plus petit que A.

PROPOSITION

PROPOSITION XI. ¶

THÉORÊME.

359. *Les quantités qui sont équimultiples d'autres quantités, ont entr'elles le même rapport que ces dernieres.* †

SI l'on multiplie A & B chacun par un même nombre quelconque, le rapport des produits sera le même que celui de A à B.

Le nombre par lequel on multiplie A & B, est ou entier, ou fractionnaire.

PREMIER CAS.

Lorsque le nombre par lequel on multiplie A & B, est un nombre entier.

Il faut démontrer, par exemple, que 7A. 7B :: A. B.

¶ La onzieme d'Euclide est le premier axiome de ce Livre, n. 350.

† On peut aussi énoncer ce théorême, des deux manieres suivantes :

1°. *On ne change point un rapport, en multipliant, ou en divisant, par un même nombre, chacun de ses termes.*

2°. *Les quantités qui sont doubles, triples, quadruples, &c. d'autres quantités, ont entr'elles le même rapport que ces dernieres. Et il en est de même, de celles qui en sont les moitiés, les tiers, les quarts, &c.*

Démonst. Le quotient de A divisé par
N. 352. B, est (n) la septieme partie de celui de 7A divisé aussi par B, puisque A est la
N. 353. septieme partie de 7A. Mais (n), le quotient de 7A divisé par 7B, est aussi la septieme partie de celui de 7A divisé par B, puisque 7B est septuple de B.
N. 68. Donc (n), les quotiens de A divisé par B, & de 7A divisé par 7B, sont égaux;
N. 330. & par conséquent (n), 7A. 7B :: A. B.

SECOND CAS.

Lorsque le nombre par lequel on multiplie A & B est un nombre fractionnaire.

Il faut démontrer, par exemple, que $\frac{2}{3}$ A. $\frac{2}{3}$ B :: A. B.

Démonst. Le quotient de A divisé par
N. 352. B, est (n) une fois & demie celui de $\frac{2}{3}$ A divisé aussi par B, puisque A est une fois
N. 353. & demie $\frac{2}{3}$ A. Mais (n), le quotient de $\frac{2}{3}$ A divisé par $\frac{2}{3}$ B, est aussi une fois & demie celui de $\frac{2}{3}$ A divisé par B, puisque B
N. 67. est une fois & demie $\frac{2}{3}$ B. Donc (n), les quotiens de A divisé par B, & de $\frac{2}{3}$ A divisé par $\frac{2}{3}$ B, sont égaux; & par con-
N. 330. séquent (n), $\frac{2}{3}$ A. $\frac{2}{3}$ B :: A. B.

Or, dans l'un comme dans l'autre cas, la démonstration reste pareille, quel que ſoit le nombre par lequel on multiplie A & B. Par conſéquent, C. Q. F. D.

COROLLAIRE I.

360. Il ſuit de ce théorême, que *le produit de deux quantités quelconques, eſt moyen proportionnel entre les quarrés de ces deux mêmes quantités.* †

Le produit de A multiplié par B, eſt moyen proportionnel entre le quarré de A & celui de B.

Démonſt. Si l'on multiplie A & B, chacun par A, on aura (n), $A \times A . A \times B ::$ N. 359.
$A . B$: & ſi l'on multiplie A & B chacun auſſi par B, on aura (n), $A \times B . B \times B ::$ N. 359.
$A . B$. Donc, les rapports de $A \times A$ à $A \times B$, & de $A \times B$ à $B \times B$, ſont égaux chacun au même rapport de A à B : & par conſéquent (n), $A \times A . A \times B ::$ N. 350.
$A \times B . B \times B$. Donc, C. Q. F. D.

COROLLAIRE II.

361. Il ſuit auſſi de ce même théorême, que *ſi quatre quantités ſont proportionnelles, le produit des moyennes,*

† Ce corollaire ſe trouve ſouvent énoncé de cette maniere : *Le produit des racines de deux quarrés, eſt moyen praoportionnel entre ces deux mêmes quarrés.*

(ou celui des extrêmes) sera moyen proportionnel entre le produit des antécédentes & celui des conséquentes.

Dans cette proportion, A. B :: C. D, le produit de B multiplié par C, (ou celui de A multiplié par D) est moyen proportionnel entre le produit de A multiplié par C, & celui de B multiplié par D.

Démonst. Si l'on multiplie A & B cha-
N. 359. cun par C, on aura (n), A × C. B × C ::
A. B : & si l'on multiplie aussi C & D
N. 359. chacun par B, on aura (n), B × C. B × D ::
C. D. Or [H], les rapports de A à B, &
N. 350. de C à D, sont égaux. Donc (n), ceux de A × C à B × C, & de B × C à B × D, le sont aussi; & par conséquent, ∺ A × C, B × C. B × D.

Mais, si l'on transpose les deux rapports proposés, en les écrivant ainsi, C. D :: A. B, on démontrera que ∺ A × C. A × D. B × D, de la même maniere dont nous venons de démontrer la proportion précédente. Par conséquent, C. Q. F. D.

COROLLAIRE III.

362. Il suit enfin de ce même théorême, que *si quatre quantités sont propor-*

tionnelles, le quarré d'une antécédente sera au produit de cette antécédente multipliée par sa conséquente, comme le quarré de l'autre antécédente, est au produit de cette autre antécédente multipliée aussi par sa conséquente.

Si A. B :: C. D, le quarré de A sera au produit de A multiplié par B, comme le quarré de C est au produit de C multiplié par D.

Démonst. Si l'on multiplie A & B chacun par A, on aura (n), A × A. A × B :: A. B: & si l'on multiplie aussi C & D chacun par C, on aura (n), C × C. C × D :: C. D. Or [H], les rapports de A à B, & de C à D, sont égaux. Donc (n), ceux de A × A à A × B, & de C × C à C × D, le sont aussi; & par conséquent, C. Q. F. D.

N. 359. N. 359. N. 350.

*PROPOSITION XII. †

THÉORÊME.

363. *Si quatre quantités sont proportionnelles, le produit des extrêmes sera égal à celui des moyennes.*

SI A. B :: C. D, le produit de A multiplié par D, sera égal à celui de B multiplié par C.

Démonst. Si l'on multiplie A & B cha-
N. 359. cun par D, on aura (n), A × D. B × D ::
A. B : & si l'on multiplie aussi C & D
N. 359. chacun par B, on aura (n), B × C. B × D ::
C. D. Or [H], les rapports de A à B, &
N. 350. de C à D, sont égaux. Donc (n), ceux
de A × D à B × D, & de B × C à B × D,
N. 356. le sont aussi; & par conséquent (n), A × D
est égal à B × C. Donc, C. Q. F. D.

COROLLAIRE.

364. Il suit de ce théorême, que *si trois quantités sont en progression, le*

† La douzieme d'Euclide, est le second corollaire de la dix-huitieme de ce Livre, n°. 389.

produit des extrêmes sera égal au quarré de la moyenne.

*PROPOSITION XIII.†

PROBLÊME.¶

365. *Trouver le quatrieme terme d'une proportion dont les trois premiers termes sont donnés.*

IL faut trouver le quatrieme terme d'une proportion dont les trois premiers termes sont 28, 32 & 49.

Solution. Multipliez l'un par l'autre, les moyens 32 & 49. Divisez par le premier terme 28, le produit 1568. Le quotient 56, sera le terme demandé.

Démonst. Puisque dans une proportion, le produit des extrêmes est égal à celui des moyens (n), 28 fois le terme demandé doit produire autant que 32 fois 49. Or, 32 fois 49 produisent 1568. Donc, 28 fois le terme demandé produit aussi 1568; & par conséquent, ce terme N. 363.

† La treizieme d'Euclide, est le second axiome de ce Livre, n°. 351.

¶ On donne ordinairement à ce problême, les noms de *regle de Proportion*, *regle de Trois*, *regle d'Or*, &c.

est le quotient 56 de 1568, divisés par 28. Donc, C. Q. F. F.

COROLLAIRE.

366. Il suit de la solution de ce problême, que *pour trouver le troisieme terme d'une progression dont les deux premiers termes sont donnés, il faut multiplier le second terme par lui-même, & diviser ensuite le produit, par le premier terme.*

---

*PROPOSITION XIV.†

THÉORÊME.

367. *Si quatre quantités sont telles que le produit des extrêmes soit égal à celui des moyennes, elles seront proportionnelles.*

SI les quantités A, B, C & D, sont telles que le produit de A multiplié par D, soit égal à celui de B multiplié par C; le rapport de A à B sera le même que celui de C à D.

† La quatorzieme d'Euclide, est la quinzieme de ce Livre, n°. 369.

Démonst. Si l'on compare chaque produit $A \times D$, & $B \times C$, à celui des conséquentes B & D; on aura (n), $A \times D. B \times D :: A. B$: & $B \times C. B \times D :: C. D$. Or (n), les rapports de $A \times D$ à $B \times D$, & de $B \times C$ à $B \times D$, sont égaux; puisque [H] les produits $A \times D$, & $B \times C$, le sont. Donc (n), les rapports de A à B, & de C à D, sont aussi égaux; & par conséquent, C. Q. F. D. N. 359. N. 354. N. 350.

COROLLAIRE.

368. Il suit de ce théorême, que *si trois quantités sont telles que le produit des extrêmes soit égal au quarré de la moyenne, elles seront en progression.*

PROPOSITION XV. †

THÉORÊME.

369. *Si le premier terme d'une proportion est plus petit, aussi grand, ou plus grand que le troisieme, le second sera aussi plus petit, aussi grand, ou plus grand que le quatrieme.*

PREMIEREMENT.

Fig. 10. DAns la proportion * A. B : : C. D, si A est plus petit que C, B sera aussi plus petit que D.

Démonst. Puisque [H] A est plus petit
N. 355. que C, le rapport de A à B est (n) plus petit que celui de C à B. Mais [H], le rapport de C à D est égal à celui de A à B.
N. 351. Donc (n), il est aussi plus petit que celui
N. 357. de C à B; & par conséquent (n), B est plus petit que D. Donc, C. Q. F. 1°. D.

SECONDEMENT.

Fig. 11. Dans la proportion * A. B : : C. D, si A est égal à C, B le sera à D.

Démonst. Puisque [H] A est égal à C,
N. 354. le rapport de A à B est (n) égal à celui

† La quinzieme d'Euclide, la onzieme de ce Livre, n°. 359.

de C à B. Mais [H], le rapport de A à B est aussi égal à celui de C à D. Donc (n), N. 350. les rapports de C à B, & de C à D, sont égaux; & par conséquent (n), B est égal N. 356. à D. Donc, C. Q. F. 2°. D.

TROISIEMEMENT.

Dans la proportion * A. B :: C. D, si Fig. 12. A est plus grand que C, B sera aussi plus grand que D.

Démonst. Puisque [H] A est plus grand que C, le rapport de A à B est (n) plus N. 355. grand que celui de C à B. Mais [H], le rapport de C à D est égal à celui de A à B. Donc (n), il est aussi plus grand que N. 351. celui de C à B; & par conséquent (n), N. 357. B est plus grand que D. Donc, C. Q. F. 3°. D.

USAGE.

370. *On se sert de cette proposition, pour examiner si les termes d'une proportion sont rangés dans l'ordre qu'ils doivent l'être; & par conséquent, pour connoître si une regle de Trois est* directe *ou* inverse.

PROPOSITION XVI.

THÉORÊME.

371. *Si quatre quantités de même genre † sont proportionnelles, elles le seront aussi étant échangées.*

Fig. 16. SI le rapport de A * à B est égal à celui de C à D, le rapport de A à C sera aussi égal à celui de B à D.

Démonst. Puisque [H] A. B :: C. D, A contient B de la même maniere dont
N. 330 C contient D (n). Donc A & C sont équimultiples de B & de D; & par con-
N. 359. séquent (n), A. C :: B. D. Donc, C. Q. F. D.

COROLLAIRE I.

372. Il suit de ce théorême, que *si quatre quantités sont proportionnelles, elles le seront aussi étant renversées.*

Si le rapport de A à B est égal à celui de C à D, le rapport de B à A sera aussi égal à celui de D à C.

† On ne peut faire d'échange, que lorsque tous les termes d'une proportion sont de même genre. Puisque, si A étant, par exemple, une ligne, C étoit une surface, il n'y auroit aucun rapport de A à C.

Démonst. A. B :: C. D [H]. Donc (n), en échangeant, A. C :: B. D. Mais, puisque A. C :: B. D, B. D :: A. C. Donc (n), en échangeant encore, B. A :: D. C; & par conséquent, C. Q. F. D. N. 371. N. 371.

COROLLAIRE II.

373. Il suit aussi de ce même théorême, que *si quatre quantités sont proportionnelles, le quarré d'une antécédente sera à celui de sa conséquente, comme le produit des antécédentes est à celui des conséquentes.*

Si A. B :: C. D, le quarré de A sera à celui de B, comme le produit de A multiplié par C, est à celui de B multiplié par D.

Démonst. A. B :: C. D. [H]. Donc (n), en échangeant, A. C :: B. D. Mais N. 371. (n), A×A. A×C :: B×B. B×D. N. 361. Donc (n), en échangeant encore, A×A. N. 371. B×B :: A×C. B×D; & par conséquent, C. Q. F. D.

PROPOSITION XVII.

THÉORÊME.

374. *Si quatre quantités ſont proportionnelles, elles le ſeront auſſi étant diviſées.*

Fig. 17. SI le rapport de A * à B eſt égal à celui de C à D, le rapport de A—B à B, ſera auſſi égal à celui de C—D à D.

Démonſt. Le quotient de A—B diviſé par B, eſt plus petit d'une unité que celui de A diviſé par B : & le quotient de C—D diviſé par D, eſt auſſi plus petit d'une unité que celui de C diviſé par D.
N. 380. Mais (n), les quotiens de A diviſé par B, & de C diviſé par D, ſont égaux, puiſ-
N. 64. que [H] A. B :: C. D. Donc (n), ceux de A—B diviſé par B, & de C—D diviſé par D, le ſont auſſi ; & par conſé-
N. 330. quent (n), A—B. B :: C—D. D. Donc, C. Q. F. D.

COROLLAIRE I.

375. Il ſuit de ce théorême, que l'*on ne change point un rapport, en retranchant de chacun de ſes termes, pourvu que ce que l'on retranche du premier terme*

soit à ce que l'on retranche du second, comme ce premier terme est au second.

Si le rapport de A à B est égal à celui de C à D, la différence des antécédentes A & C, sera à celle des conséquentes B & D, ce que A est à B.

Démonst. A. B :: C. D [H]. Donc (n), en échangeant, A. C :: B. D. Mais (n), en divisant, A—C. C :: B—D. D. Donc (n), en échangeant encore, A—C. B—D :: C. D, & par conséquent, ce que A est à B. Donc, C. Q. F. D. N. 372. N. 374. N. 372.

COROLLAIRE II. †

376. Il suit de ce corollaire, que *si deux quantités qui sont divisées chacune en deux parties, sont telles, que ces deux quantités, & leurs premieres parties soient proportionnelles ; ces deux mêmes quantités, & leurs secondes parties le seront aussi.*

Si le rapport de A*+B à C+D est égal à celui de A à C, il le sera aussi à celui de B à D. Fig. 5.

Démonst. Puisque [H] A+B. C+D :: A. C ; si l'on retranche A de A+B, & C de C+D, les restes B & D seront entr'eux (n) ce que A+B est à C+D ; & par conséquent, C. Q. F. D. N. 375.

† Ce corollaire est la cinquieme d'Euclide.

COROLLAIRE III. †

377. Il suit de ce second corollaire, que *si deux quantités, qui sont proportionnelles à deux autres, sont divisées chacune en deux parties, dont les deux premieres soient proportionnelles à ces deux autres quantités, les deux dernieres le seront aussi.*

Fig. 6. Si les rapports de A* + B à C + D, & de A à C, sont égaux chacun à celui de G à H; le rapport de B à D lui sera aussi égal.

Démonst. Puisque [H] les rapports de A+B à C+D, & de A C, sont égaux chacun à celui de G à H, A+B. C+D ::
N. 350. A. C (n). Donc (n), B. D :: A. C; & par
N. 376.
N. 350. conséquent (n), B. D :: G. H. Donc, C. Q. F. D.

† Ce corollaire est la sixieme d'Euclide.

PROPOSITION

PROPOSITION XVIII.

THÉORÊME.

378. *Si quatre quantités sont proportionnelles, elles le seront aussi étant composées.*

SI le rapport de A * à B est égal à celui Fig. 17.
de C à D; le rapport de A+B à B, sera aussi égal à celui de C+D à D.

Démonst. Le quotient de A+B divisé par B, est plus grand d'une unité que celui de A divisé par B: & le quotient de C+D divisé par D, est aussi plus grand d'une unité que celui de C divisé par D.
Mais (n), les quotiens de A divisé par B, N. 330.
& de C divisé par D, sont égaux; puisque [H], A. B :: C. D. Donc (n), ceux N. 64.
de A+B divisé par B, & de C+D divisé par D, le sont aussi; & par conséquent (n), A+B. B :: C+D. D. Donc, N. 330.
C. Q. F. D.

COROLLAIRE I.

379. Il suit de ce théorême, que *si quatre quantités sont proportionnelles, elles le seront aussi étant converties.*

Si le rapport de A à B est égal à celui de C à D, le rapport de A+B à A, sera aussi égal à celui de C+D à C.

N. 372. *Demonst.* A. B :: C. D [H]. Donc (n), en renversant, B. A :: D. C; & par con-
N. 378. séquent (n), en composant, A+B. A :: C+D. C. Donc, C. Q. F. D.

COROLLAIRE II. †

380. Il suit aussi de ce même théorême, que *l'on ne change point un rapport, en ajoutant à chacun de ses termes, pourvu que ce que l'on ajoute au premier terme soit à ce que l'on ajoute au second, comme ce premier terme est au second.*

Fig. 1. Si le rapport de A * à B est égal à celui de C à D, la somme des antécédentes A & C, sera à celle des conséquentes B & D, ce que A est à B.

N. 371. *Démonst.* A. B :: C. D [H]. Donc (n),
N. 378. en échangeant, A. C :: B. D. Mais (n), en composant, A+C. C :: B+D. D.
N. 371. Donc (n), en échangeant encore, A+C. B+D :: C. D, & par conséquent, ce que A est à B. Donc, C. Q. F. D.

COROLLAIRE III.

381. Il suit de ce second corollaire,

† Ce Corollaire est la premiere & la douzieme d'Euclide.

que *dans une progression, un conséquent quelconque, moins son antécédent, est à cet antécédent, ce que le dernier terme, moins le premier, est à la somme de tous les termes qui précedent le dernier.*

Dans cette progression, $\div$ A. B. C. D. E. F. G; B—A. A :: G—A. A+B +C+D+E+F.

Démonst. Puisque [H] A, B, C, D, E, F. & G, sont en progression, A. B :: B. C :: C. D :: D. E :: E. F :: F. G, (n). N. 334.
Donc (n), A est à B, comme la somme N. 380.
des antécédens A, B, C, D, E & F, est à celle des conséquens B, C, D, E, F & G; & par conséquent (n), en ren- N. 372.
versant, B. A :: B+C+D+E+F +G. A+B+C+D+E+F.
Mais (n), en divisant, B—A. A :: N. 374.
B+C+D+E+F+G—A—B —C—D—E—F. A+B+C+ D+E+F. Donc, puisque le troisieme terme B+C+&c. ne vaut que G—A, B—A. A :: G—A. A+B+C+ D+E+F; & par conséquent, C. Q. F. D.

COROLLAIRE IV.

382. Enfin, il suit de ce dernier corollaire, que *dans une progression, si le second terme est double du premier; le*

dernier, moins le premier, sera égal à la somme de tous les termes qui précedent le dernier : si le second terme est triple du premier ; le dernier, moins le premier, sera double de cette somme : si le second terme est quadruple du premier ; le dernier, moins le premier, sera triple de cette même somme : & ainsi de suite.

Dans cette progression, $\div\!\!\cdot$ A. B. C. &c. Dont Z représente le dernier terme ; & S, la somme de tous les termes qui précedent Z : si B est double de A, Z—A sera égal à S : si B est triple de A, Z—A sera double de S : si B est quadruple de A, Z—A sera triple de S : & ainsi de suite.

N. 381. *Démonst.* B—A. A :: Z—A. S, (n). Donc.

Premierement, si B est double de A, B—A sera égal à A ; & par conséquent, Z—A le sera aussi à S.

Secondement, si B est triple de A, B—A sera double de A ; & par conséquent, Z—A le sera aussi de S.

Troisiemement, si B est quadruple de A, B—A sera triple de A ; & par conséquent, Z—A le sera aussi de S. Et ainsi de suite.

* PROPOSITION XIX. ¶

PROBLÊME.

383. *Diviser une quantité donnée, proportionnellement aux parties aussi données d'une autre quantité.* †

IL faut diviser 225 en parties, qui soient proportionnelles aux parties 36, 48 & 66, de 150.

Solution. Cherchez (n) les quatriemes termes 54, 72 & 99 de ces trois proportions, 150. 225 :: 36. * :: 48. * :: 66. *; ils seront les parties demandées. N. 365.

Démonst. Suivant ce qui est proposé, il faut que 36 soit à la premiere partie demandée, ce que 48 est à la seconde, ce que 66 est à la troisieme. Ainsi, les trois parties données sont les antécédens d'une proportion, dont les trois parties demandées sont les conséquens. Mais (n), dans une proportion, la somme des antécédens est à celle des conséquens, N. 380.

¶ La dix-neuvieme d'Euclide, est le premier corollaire de la dix-septieme de ce Livre, n°. 375.

† On donne ordinairement à ce problême, le nom de *regle de Compagnie*.

ce que un antécédent quelconque eſt à ſon conſéquent. Donc, la ſomme 150 des trois parties données, eſt à la ſomme 225 des trois parties demandées; ce que la premiere partie donnée 36, eſt à la premiere partie demandée; ce que la ſeconde partie donnée 48, eſt à la ſeconde partie demandée, ce que, &c; & par conſéquent, pour trouver ces trois
N. 365. parties demandées, il faut (n) faire les trois regles de proportion, qui ſont ordonnées par la ſolution. Donc, C. Q. F. F.

*PROPOSITION XX. †

THÉORÊME.

384. *Si l'on multiplie, ou si l'on divise, par ordre les termes de deux proportions; les produits, ou les quotiens, seront proportionnels.* ¶

PREMIEREMENT.

SI l'on multiplie les termes de cette proportion, A. B :: C. D, par ceux de cette autre proportion, E. F : G. H, chacun par chacun; les produits A × E, B × F, C × G & D × H, seront proportionnels.

Démonst. A. B :: C. D, [H] : & (n) en échangeant, A. C :: B. D. Donc, si l'on multiplie les deux premiers termes chacun par E, & les deux derniers, chacun par F, on aura (n), A × E, C × E :: B × F. D × F; & par conséquent (n), en échangeant encore, A × E. B × F :: C × E. D × F. N. 371. N. 359. N. 371.

Pareillement, E. F :: G. H, [H] : & (n) N. 371.

† La vingtieme d'Euclide, est le corollaire de la vingt-deuxieme de ce Livre, n°. 390.

¶. On énonce quelquefois ainsi ce théorême : *Les rapports qui sont composés de rapports égaux, sont aussi égaux.*

en échangeant, E. G :: F. H. Donc, si l'on multiplie aussi les deux premiers termes chacun par C, & les deux derniers,
N. 359. chacun par D; on aura (n), $C \times E. C \times G ::$
N. 371. $D \times F. D \times H$; & par conséquent (n), en échangeant encore, $C \times E. D \times F ::$ $G \times G. D \times H$.

Ainsi, les rapports de $A \times E$ à $B \times F$, & de $C \times G$ à $D \times H$, sont égaux chacun au même rapport de $C \times E$ à $D \times F$.
N. 350. Donc (n), $A \times E. B \times F :: C \times G. D \times H$; & par conséquent, C. Q. F. 1°. D.

SECONDEMENT.

Si l'on divise les termes de cette proportion, A. B :: C. D, par ceux de cette autre proportion, E. F :: G. H, chacun par chacun; les quotiens $\frac{A}{E}$ †, $\frac{B}{F}$, $\frac{C}{G}$ & $\frac{D}{H}$ seront aussi proportionnels.

Démonst. Si l'on multiplie $\frac{A}{E}$ & $\frac{B}{F}$ chacun par le même produit $E \times F$, on

† Pour représenter le quotient d'une quantité divisée par une autre, on écrit le dividende sur une petite ligne, & le diviseur au dessous. C'est ainsi que dans l'Arithmétique, on écrit, par exemple $\frac{13}{4}$, pour représenter le quotient de 13 divisé par 4.

aura

aura (n), $\frac{A}{E} . \frac{B}{F} :: A \times F . B \times E$: & si N. 359.
l'on multiplie aussi $\frac{C}{G}$ & $\frac{D}{H}$ chacun par
le même produit $G \times H$, on aura (n), $\frac{C}{G} .$ N. 359.
$\frac{D}{H} :: C \times H . D \times G$. Mais [D], les rapports de $A \times F$ à $B \times E$, & de $C \times H$ à $D \times G$, sont égaux; puisqu'ils sont les produits des termes de ces deux proportions $A . B :: C . D$, & $F . E :: H G$, multipliés par ordre. Donc (n), les rapports N. 359.
de $\frac{A}{E}$ à $\frac{B}{F}$, & de $\frac{C}{G}$ à $\frac{D}{H}$, sont aussi égaux ; & par conséquent, C. Q. F. 2°. D.

COROLLAIRE.

385. Il suit de la premiere partie de ce théorême, que *les puissances pareilles des termes d'une proportion, sont proportionnelles* : & de la seconde partie, que *les racines pareilles des termes d'une proportion, sont aussi proportionnelles.*

*PROPOSITION XXI. †

THÉORÊME.

386. *Les quarrés sont entr'eux en rapports doublés de ceux de leurs racines: les cubes, en rapports triplés: les quatriemes puissances, en rapports quadruplés: & ainsi de suite.*

LE rapport du quarré de A au quarré de B, est doublé de celui de A à B: celui du cube de A au cube de B, en est triplé; celui de la quatrieme puissance de A à la quatrieme puissance de B, en est quadruplé: & ainsi de suite.

Démonst. Si A étant, par exemple, les $\frac{5}{6}$ de B, on multiplioit A & B, chacun par B; le produit $A \times B$ seroit aussi
N. 359. (n), les $\frac{5}{6}$ du produit $B \times B$. Mais, au lieu de multiplier A par B, on le multiplie par A, qui [H] est les $\frac{5}{6}$ de B. Donc, le produit $A \times A$ est les $\frac{5}{6}$ des $\frac{5}{6}$ du produit $B \times B$. Or, puisque $A \times A$ est les $\frac{5}{6}$ des $\frac{5}{6}$ de $B \times B$, le rapport de $A \times A$ à $B \times B$ est celui de 5 à 6, ré-

† La vingt-unieme d'Euclide est le corollaire de la vingt-troisieme de ce Livre, n°. 392.

pété deux fois. Donc (n), il est doublé de ce dernier rapport ; & par conséquent, de celui de A à B, qui est le même [H]. N. 344.

Pareillement, si l'on multiplioit A × A & B × B, chacun par B, le produit A × A × B seroit encore (n) les $\frac{5}{6}$ des $\frac{5}{6}$ du produit B × B × B. Mais, au lieu de multiplier A × A par B, on le multiplie par A, qui [H] est les $\frac{5}{6}$ de B. Donc, le produit A × A × A est les $\frac{5}{6}$ des $\frac{5}{6}$ des $\frac{5}{6}$ du produit B × B × B. Or, puisque A × A × A est les $\frac{5}{6}$ des $\frac{5}{6}$ des $\frac{5}{6}$ de B × B × B, le rapport de A × A × A à B × B × B est celui de 5 à 6 répété trois fois. Donc (n), il est triplé de ce dernier rapport ; & par conséquent, de celui de A à B, qui est le même [H]. Et ainsi de suite. N. 359. N. 347.

Or, la démonstration reste pareille, quel que soit l'exposant du rapport de A à B. Donc, C. Q. F. D.

COROLLAIRE I.

387. Il suit de ce théorême, que *dans une progression, le quarré du premier terme est au quarré du second, ce que le premier terme est au troisieme : le cube du premier terme est au cube du se-*

cond, ce que le premier terme est au quatrieme : la quatrieme puissance du premier terme est à la quatrieme puissance du second, ce que le premier terme est au cinquieme : & ainsi de suite.

Dans cette progression ∺ A. B. C. D. E. F. &c, le quarré de A est à celui de B, ce que A est à C : le cube de A est au cube de B, ce que A est à D : la quatrieme puissance de A est à la quatrieme puissance de B, ce que A est à E : & ainsi de suite.

Démonst. Le rapport du quarré de A au quarré de B, & celui de A à C,
N. 386. sont doublés, l'un (n) & l'autre (n), du
N. 348. même rapport de A à B. Donc, ils sont égaux.

Pareillement, le rapport du cube de A au cube de B, & celui de A à D,
N. 386. sont triplés, l'un (n) & l'autre (n), du
N. 348. même rapport de A à B. Donc, ils sont aussi égaux. Et ainsi de suite.

Par conséquent, C. Q. F. D.

COROLLAIRE II.

388. Il suit de ce corollaire : Premierement, *que pour trouver une moyenne proportionnelle entre deux quantités quel-*
N. 365. *conques A & B, il faut chercher* (n) *le*

quatrieme terme de cette proportion, *A. B :: A × A. * ; & extraire ensuite la racine quarrée de ce quatrieme terme.*

Secondement, que *pour trouver la premiere de deux moyennes proportionnelles entre deux quantités quelconques A & B, il faut chercher* (n) *le quatrieme terme de cette proportion*, *A. B :: A × A × A. * ; & extraire ensuite la racine cube de ce quatrieme terme.* N. 365.

Troisiemement, que *pour trouver la premiere de trois moyennes proportionnelles entre deux quantités quelconques A & B, il faut chercher* (n) *le quatrieme terme de cette proportion A. B :: A × A × A × A. * ; & extraire ensuite la racine quatrieme de ce quatrieme terme.* N. 365.

Et ainsi de suite.

PROPOSITION XXII.

THÉORÊME.

389. *Dans une proportion d'égalité ordonnée, le premier & le dernier terme du premier rang, & le premier & le dernier terme du second rang, sont proportionnels.*

Fig. 18. SI les quantités A * B & C, D, E & F, forment une proportion d'égalité ordonnée : le rapport de A à C sera le même que celui de D à F.

N. 341. *Démonst.* (n) A. B :: D. E; & B. C.
N. 371. :: E. F. Donc (n), en échangeant, A. D :: B. E, & B. E :: C. F.

Ainsi, les rapports de A à D, & de C à F, sont égaux chacun au même rap-
N. 350. port de B à E. Donc (n), A. D ::
N. 371. C. F; & par conséquent (n), en échangeant, A. C :: D. F. Donc, C. Q. F. D.

COROLLAIRE.

390. Il suit de ce théorême, & du nº. 369, que *dans une proportion d'éga-*

lité ordonnée, si le premier terme du premier rang est plus petit, aussi grand, ou plus grand, que le dernier; le premier terme du second rang sera aussi plus petit, aussi grand, ou plus grand, que le dernier.

PROPOSITION XXIII.

THÉORÊME.

391. *Dans une proportion d'égalité troublée, le premier & le dernier terme du premier rang, & le premier & le dernier terme du second rang, sont proportionnels.*

SI les quantités A*, B & C, D, E & F, forment une proportion d'égalité troublée; le rapport de A à C sera le même que celui de D à F. Fig. 19.

Démonst. (n) A. B :: E. F; & B. C :: D. E. Donc, si l'on multiplie par ordre les termes de ces deux proportions, on aura (n) A × B. B × C :: E × D. F × E. Mais, si l'on divise les deux premiers termes chacun par B, & les deux derniers, chacun par E; on aura (n) A. C :: D. F. Par conséquent, C. Q. F. D.

N. 342. N. 384. N. 359.

COROLLAIRE.

392. Il suit de ce théorême, & du n°. 369, que *dans une proportion d'égalité troublée, si le premier terme du premier rang est plus petit, aussi grand, ou plus grand, que le dernier; le premier terme du second rang sera aussi plus petit, aussi grand, ou plus grand, que le dernier.*

PROPOSITION XXIV.

THÉORÊME.

393. *Si six quantités sont telles, que les quatre premieres soient proportionnelles; & que la cinquieme, la seconde, la sixieme, & la quatrieme, le soient aussi: la somme de la premiere & de la cinquieme sera à la seconde, ce que la somme de la troisieme & de la sixieme est à la quatrieme.*

Fig. 2. SI les six quantités AB *, G, DE, H, BC & EF, sont telles que AB. G :: DE. H, & que BC. G :: EF. H; le rapport de AB+BC à G, sera le même que celui de DE+EF à H.

Démonst. [H] AB. G :: DE. H; & BC. G :: EF. H. Donc (n), en échan- N. 371.
geant, AB. DE :: G. H, & BC. EF :: G. H; & par conséquent (n), AB. DE N. 350.
:: BC. EF.

Mais (n), en échangeant encore, AB. N. 371.
BC :: DE. EF. Donc (n), en compo- N. 378.
sant, AB+BC. BC :: DE+EF. EF; & par conséquent, en échangeant une troisieme fois, AB+BC. DE+EF :: BC. EF.

Or [D], G. H :: BC. EF. Donc (n), N. 350.
AB+BC. DE+EF :: G. H; & par conséquent, en échangeant pour la quatrieme fois, AB+BC. G :: DE+EF. H. Donc, C. Q. F. D.

PROPOSITION XXV.

THÉORÊME.

394. *Si quatre quantités ſont proportionnelles, la ſomme de la plus grande & de la plus petite, ſera plus grande que celle des deux autres.*

Fig. 20. SI les quatre quantités AC *, DF, *ab* & *de* (dont AC eſt la plus grande, & *de* la plus petite) ſont proportionnelles; la ſomme de AC & de *de* ſera plus grande que celle de DF & de *ab*.

N. 81. *Conſt.* Prenez (n) ſur la ligne AC, une partie AB égale à la ligne *ab*; & ſur la ligne DF, une partie DE égale à la ligne *de*.

Démonſt. AC. DF :: *ab*. *de*, [H].
N 375. Ainſi (n), AC — *ab*. DF — *de* :: AC.
N. 369. DF; & par conſéquent (n), puiſque [H] AC eſt plus grande que DF, AC — *ab* (c'eſt-à-dire BC) eſt auſſi plus grande que DF — *de* (c'eſt-à-dire EF).

Mais [C], AB + *de* eſt égale à DE
N. 65. + *ab*. Donc (n), puiſque [D] BC eſt

plus grande que EF, AB + *de* + BC, (c'est-à-dire, AC + *de*) sera aussi plus grande que DE + *ab* + EF (c'est-à-dire, DF + *ab*). Par conséquent, C. Q. F. D.

USAGES

des Progressions.

QUESTION PREMIERE.

395. *On suppose qu'un pere de famille a eu deux enfans; que chacun de ces deux enfans en a eu deux autres; & ainsi de suite: & l'on demande de combien de personnes a dû être sa quinzieme génération.*

SOLUTION. Le nombre de personnes demandé est le quinzieme terme d'une progression, dont le premier terme est 2, & dont l'exposant du rapport du second terme au premier, est aussi 2. Or (n), dans une progression, le quinzieme terme est le produit du premier, multiplié par la quatorzieme puissance de l'exposant du rapport du second terme au premier. Donc, si l'on éleve l'exposant 2 à sa quatorzieme puissance, que l'on trouvera de 16384; & si l'on multiplie

N. 349.

le premier terme (lequel est aussi 2) par cette quatorzieme puissance, le produit 32768 sera le nombre demandé.

Autre Question.

Un tuteur doit à son pupile 12000 *l. de capital, avec les intérêts des intérêts au denier* 20, *pendant* 8 *années. On demande combien il doit payer à la fin de cette huitieme année.*

SOLUTION. Ce capital, avec les intérêts des intérêts, pendant 8 années, est le huitieme terme d'une progression, dont le premier est 12000; & dont l'exposant du rapport du second au pre-
N. 349. mier, est $\frac{21}{20}$. Ainsi (n), si l'on multiplie 12000 par la septieme puissance de $\frac{21}{20}$, le produit 16885 liv. 4. s. 1 den. *p. p.* sera la dette demandée.

QUESTION II.

596. *Un particulier a* 20 *diamans d'une très-grande beauté. Il propose de les vendre, à condition qu'on lui payera* 6 *den. du premier,* 18 *du second,* 54 *du troisieme; & ainsi de suite. On demande le prix de ces* 20 *diamans.*

SOLUTION Le prix demandé est la somme de tous les termes d'une progression qui en a 20, dont le premier est 6; & dont l'exposant du rapport du second au premier, est 3. Or (n), dans une progression de 20 termes, dont l'exposant du rapport du second au premier est 3; la somme des 19 premiers termes est la moitié de la différence du premier terme au vingtieme. Ainsi, l'on commencera par chercher le vingtieme terme que (n) l'on trouvera de 6973568802. De ce vingtieme terme, on retranchera le premier (lequel est 6) & il restera 6973568796. On prendra la moitié de ce reste, afin d'avoir la somme 3486784398 des 19 premiers termes. Enfin, à cette somme on ajoutera le vingtieme terme; & la somme 10460353200 deniers, ou 43584805 liv. sera le prix demandé.

N. 382.
N. 395.

QUESTION III.

397. *Un particulier a mis 70 louis d'or sur un vaisseau, pour commercer dans les Pays étrangers. Au bout d'un an, ce vaisseau a rapporté les 70 louis, avec un certain profit. On a remis le tout sur un autre vaisseau, qui au bout d'un*

an, a rapporté le même profit que le premier, à proportion. Ayant ainsi continué à faire la même chose chaque année, le vaisseau qui est revenu à la fin de la dixieme, a rapporté 35840 *louis, tant pour capital que pour gain. On demande en quelle proportion ce capital a augmenté chaque année.*

SOLUTION. Il s'agit de trouver l'exposant du rapport qui regne dans une progression de 10 termes, dont le premier est 70, & le dernier 35840. Or
N. 349. (n), dans une progression, le dixieme terme est le produit du premier multiplié par la neuvieme puissance de l'exposant du rapport du second au premier. Donc, si l'on divise 35840 par 70, le quotient 512 sera cette neuvieme puissance; & par conséquent, si l'on extrait la racine neuvieme de ce quotient, le nombre 2 que l'on trouvera pour cette racine, sera cet exposant. Ainsi, la seconde mise a été double de la premiere; la troisieme, double de la seconde; & ainsi de suite.

QUESTION IV.

598. *Un particulier a de très-beaux chevaux. Il consent de les vendre tous à la même personne, si elle veut lui payer*

4 deniers du premier, 12 du second, 36 du troisieme, & ainsi de suite; de maniere que le dernier reviendroit à 708588 deniers. On demande combien ce particulier a de chevaux à vendre.

SOLUTION. Il s'agit de trouver le nombre des termes d'une progression, dont on connoît le premier terme 4, le dernier, 708588; & l'exposant 3 du rapport du second au premier. Or (n), N. 349.
puisque 708588 est le dernier terme d'une progression, il est le produit du premier terme 4, multiplié par une certaine puissance de l'exposant 3, plus petite d'une unité que le nombre des termes que l'on cherche. Ainsi, si on le divise par 4, le quotient 177147 sera cette certaine puissance; & par conséquent, pour connoître ce nombre des termes, il faut chercher le degré de cette puissance. Or, pour le trouver, on élevera l'exposant 3 de puissance en puissance, jusqu'à ce que l'on parvienne à former ce même nombre 177147. Et comme ce ne sera qu'en élevant à la onzieme puissance que l'on y parviendra, on en conclura que la progression dont il s'agit a 12 termes; & que par conséquent, le nombre des chevaux demandé est 12.

QUESTION V.

399. *Un particulier a 10 tableaux. Le dernier lui revient à 137781 livres; le pénultieme ne lui coûte que le tiers du dernier; l'antépénultieme, le tiers du pénultieme; & ainsi de suite. On demande combien il a acheté le premier.*

SOLUTION. Il s'agit de trouver le premier terme d'une progression, qui en a 10, & dont on connoît le dernier 137781, avec l'exposant 3 du rapport
N. 349. du second au premier. Or (n), ce dernier terme est le produit du premier, multiplié par la neuvieme puissance de cet exposant. Donc, si l'on éleve 3 à sa neuvieme puissance (que l'on trouvera de 19683) & si l'on divise ensuite 137781 par cette neuvieme puissance, le quotient 7 sera le premier terme; & par conséquent, le prix demandé du premier tableau.

QUESTION VI.

400. *Une personne a dépensé 9450 liv. en six ans, de maniere que la dépense de la seconde année a été double de celle de la premiere; la dépense de la troisieme année,*

année, double de celle de la ſeconde; & ainſi de ſuite. On demande combien cette perſonne a dépenſé chaque année.

SOLUTION. Il s'agit de trouver tous les termes d'une progreſſion, qui en a 6, dont la ſomme de tous ces termes eſt 9450, & dont l'expoſant du rapport du ſecond au premier eſt 2. Or (n), ces N. 332.
termes ſont proportionnels à ceux de telle autre proportion que l'on veuille prendre, pourvu qu'elle ſoit ſemblable à celle dont il s'agit, c'eſt-à-dire, pourvu qu'elle ait le même expoſant. Donc (n), N. 380.
ſi l'on prend cette progreſſion, par exemple, ∺ 1. 2. 4. 8. 16. 32, la ſomme 63 de tous ſes termes ſera à ſon premier terme, ce que la ſomme 9450 de la progreſſion demandée, eſt auſſi à ſon premier terme; & par conſéquent, ſi l'on cherche (n) le quatrieme terme 150 de cette proportion, 63. 1 :: 9450. N. 365.
*, ce quatrieme terme ſera le premier de la progreſſion demandée. Or, lorſque l'on connoîtra ce premier terme, on trouvera facilement les cinq autres; & par conſéquent, ce que la perſonne propoſée a dépenſé chaque année.

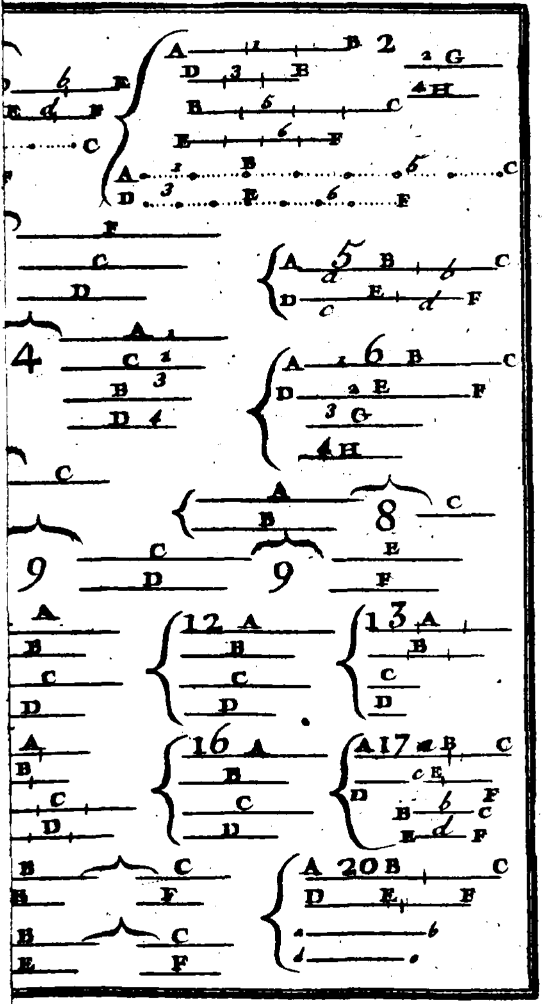
QUESTION VII.

401. *Un particulier dit que si l'on vouloit lui acheter son cheval, à condition de lui payer 3 deniers du premier clou de ses fers, 6 du second, 12 du troisieme, & ainsi de suite; il le vendroit 13107 l. 3 sols 9 den. On demande combien ce cheval a de clous à ses fers.*

SOLUTION. Il s'agit de trouver le nombre des termes d'une progression, dont on connoît le premier terme 3; la somme de tous les termes, 3145725 deniers; & l'exposant 2 du rapport du
N. 382. second terme au premier. Or (n), dans une progression dont le second terme est double du premier; le dernier terme, moins le premier, est égal à la somme de tous ceux qui le précedent. Donc, la somme 3145725 de tous les termes de la progression dont il est ici question, est composée de deux fois le dernier terme, moins une fois le premier; & par conséquent, si l'on ajoute à cette somme le premier terme, lequel est 3, on aura une somme 3145728, qui sera double de ce dernier terme. Mais, puisque 3145728 est le double du dernier terme, sa moitié 1572864 sera ce dernier ter-

me. Ainsi, il ne s'agira plus que de trouver le nombre des termes d'une progression, dont on connoîtra le premier terme 3, le dernier 1572864, avec l'exposant 2 du rapport du second au premier; ce qui fait une question toute semblable à la quatrieme.

Fin du cinquieme Livre.


2
5
4
6
8
9
9
12
13
16
17
20

LES ÉLÉMENS D'EUCLIDE.

LIVRE SIXIEME.

APRÈS avoir enſeigné la doctrine des rapports en général, dans le Livre précédent, il s'agit d'appliquer dans celui-ci cette doctrine, aux lignes droites, aux ſurfaces planes & aux angles. Ainſi, Euclide ſe commence par démontrer ce que les parallélogrammes qui ont des hauteurs égales, doivent être les uns à l'égard des autres; & du rapport que ces figures ont entr'elles, il conclut celui qui doit ſe trouver entre les triangles, lorſqu'ils ſont dans le même cas. Il examine enſuite les conditions que les triangles doivent avoir, pour être ſemblables; & donne la maniere de ſe ſervir de ceux qui le ſont, non-ſeu-

lement pour résoudre tous les problêmes qui concernent les lignes proportionnelles, mais aussi pour tracer une figure qui soit semblable à telle figure rectiligne que l'on voudra proposer. Il considere ensuite les figures réciproques, & en déduit une des propriétés les plus considérables des lignes proportionnelles. Enfin, il compare entr'elles les figures semblables, pour en déterminer les rapports; & après avoir rendu générale la quarante-septieme du premier Livre, en faisant voir que ce qu'il y a démontré des quarrés, est également vrai de toutes les figures semblables qui sont décrites sur les côtés d'un triangle rectangle, il termine ce Livre par enseigner la maniere de connoître aussi les rapports que les Secteurs ont entr'eux.

DÉFINITIONS.

I.

402. ON nomme figures *semblables*, celles dont les angles sont égaux, chacun à chacun, & dont les côtés qui forment ces angles égaux, sont proportionnels.

Fig. 1. *Les figures ABC* * *& DEF sont* semblables, *si l'angle A étant égal à l'angle*

D, l'angle B à l'angle E, & l'angle C à l'angle F ; AB est à DE, ce que AC est à DF, ce que BC est à EF.

II.

403. On dit de deux figures, qu'elles sont *réciproques*, lorsque les dimensions de l'une sont les extrêmes d'une proportion, dont les dimensions de l'autre sont les moyens.

Les figures AC * *& EG sont* réciproques, *si AB. EF :: EH. AD.* Fig. 2.

III.

404. On dit d'une ligne droite, qu'elle est divisée en *moyenne & extrême raison*, lorsqu'étant divisée en deux parties, toute cette ligne est à la plus grande de ces deux parties, ce que cette plus grande partie est à la plus petite.

*La ligne AB * est divisée en* moyenne & extrême raison *au point C, si AB. AC :: AC. CB.* † Fig. 3.

IV.

405. On appelle *hauteur* d'une figure, la perpendiculaire abaissée du sommet

† On donne ce nom à cette maniere de diviser une ligne, parce que l'on prend sur cette même ligne, & les extrêmes, & le moyen de la proportion.

de cette figure à sa base, prolongée s'il est nécessaire.

Fig. 4. *La perpendiculaire FE * est la* hauteur *de la figure AC.*

AXIOME.

406. Les figures qui sont semblables chacune à une même figure, sont aussi semblables entr'elles.

Fig. 28. *Si les figures A * & B sont semblables chacune à la figure C, la figure A est semblable à la figure B.*

PROPOSITION I.

THÉORÊME.

407. *Les parallélogrammes qui ont des hauteurs égales, sont entr'eux comme leurs bases.*

Fig. 5. SI les hauteurs des parallélogrammes AC * & EG sont égales, le parallélogramme AC sera au parallélogramme EG, ce que AB est à EF.

N. 95. *Const.* Divisez (n) la plus petite AB des deux bases AB & EF, en tel nombre de parties égales qu'il vous plaira; par exemple,

exemple, en quatre parties égales AI, IL, &c. Prenez sur la base EF, une partie EP égale à la partie AI. Enfin (n), N. 138.
tirez par chaque point de division I, L, &c. des paralleles IK, LM, &c. au côté AD; & par le point P, une parallele PQ au côté EH.

Démonst. Premierement, les parallélogrammes AK, IM, LO, NC & EQ, sont égaux (n); puisqu'ils ont des bases N. 153.
égales [c], & des hauteurs égales [H]. Ainsi, le parallélogramme AC est 4 fois le parallélogramme EQ, de même que la base AB est 4 fois la partie EP; & par conséquent (n), AC. EQ :: AB. EP. N. 332.

Secondement. La base EF contient exactement la partie EP, ou elle ne la contient qu'avec un reste.

Or, si la base EF contient exactement la partie EP, par exemple, 6 fois; cette partie sera le $\frac{1}{6}$ de cette base. Donc, si l'on divise cette même base en 6 parties égales EP, PR, &c. & si par chaque point de division P, R, &c. on tire des (n) paralleles PQ, RS, &c. au côté N. 134.
EH; cette partie EP sera l'une de ces 6 parties égales, de même que le parallélogramme EQ sera l'un des 6 parallélogrammes égaux (n) EQ, PS, &c. en N. 153.

lesquels ces paralleles diviseront le paral-
N. 312. lélogramme EG; & par conséquent (n) on aura EQ. EG :: EP. EF.

Mais, si la base EF ne contient la partie EP qu'avec un reste, c'est-à-dire, si elle la contient, par exemple, 6 fois, avec un reste qui en soit, par exemple, les $\frac{2}{3}$; alors cette partie sera les $\frac{3}{20}$ de cette base. Donc, si l'on divise cette même base en 20 parties égales, & si
N. 133. par chaque point de division on tire (n) des paralleles au côté EH; cette partie EP contiendra 3 de ces 20 parties égales, de même que le parallélogramme EQ contiendra 3 des 20 parallélogrammes
N. 153. égaux (n), en lesquels ces paralleles diviseront le parallélogramme EG; & par
N. 312. conséquent (n) on aura encore, de même que dans le cas précédent, EQ. EG :: EP. EF.

Ainsi [D], AC. EQ :: AB. EP; &
N. 389. EQ. EG :: EP. EF. Donc (n), AC. EG :: AB. EF; & par conséquent, C. Q. F. D.

Corollaire I.

408. Il suit de ce théorême, que *les triangles qui ont des hauteurs égales sont entr'eux comme leurs bases*.

Si les hauteurs des triangles ABC * & DEF sont égales, le triangle ABC sera au triangle DEF, ce que AC est à DF. Fig. 6.

Conſt. Tirez (n) du point A, une parallele AG au côté CB; du point B, une parallele BG au côté AC; du point F, une parallele FH au côté DE; & du point E, une parallele EH au côté DF. N. 133.

Démonſt. Les parallélogrammes GC & DH sont entr'eux (n), ce que AC est à DF; puisque [H] ils ont des hauteurs égales. Or (n), les triangles ABC & DEF sont les moitiés de ces parallélogrammes. Donc (n), ils sont aussi entr'eux, ce que AC est à DF; & par conséquent, C. Q. F. D. N. 407. N. 143. N. 359.

COROLLAIRE II.

409. Il suit de ce corollaire, que *la surface d'un polygone régulier quelconque, est égale à celle d'un triangle dont la hauteur est égale à une perpendiculaire tirée du centre de ce polygone à l'un de ses côtés, & la base, à la circonférence de ce même polygone.*

La surface, par exemple, du pentagone régulier ACE *, sera égale à celle du triangle FGH, si la hauteur GL étant Fig. 7.

égale à la perpendiculaire IK, la base FH l'est à la circonférence ABCDE.

Const. Tirez du centre I à chaque angle A, B, C, &c. des lignes droites IA, IB, IC, &c.

Démonst. Le polygone ACE est quintuple du triangle EID; puisque (n) les
N. 90. triangles EID, DIC, CIB, BIA & AIE,
N. 408. sont égaux. Mais (n), le triangle FGH est aussi quintuple du même triangle EID; puisque les hauteurs GL & IK sont égales [H], & que la base FH est aussi égale à la circonférence ABCDE, qui, dans cet exemple, est quintuple de
N. 67. la base ED. Donc (n), le polygone ACE est égal au triangle FGH. Or, la même démonstration subsiste, quel que soit le nombre des côtés de ce polygone. Par conséquent, C. Q. F. D.

Corollaire III.

410. Il suit de ce second corollaire, que *la surface d'un cercle est égale à celle d'un triangle dont la hauteur est égale au rayon de ce cercle, & la base, à la circonférence de ce même cercle.*

Démonst. Plus un polygone régulier a de côtés, moins il differe du cercle dans lequel il est inscrit; & quelque grand que

l'on imagine le nombre de ces côtés, on peut encore concevoir un autre polygone qui en ait un plus grand nombre, & qui differe par conséquent encore moins de ce cercle, sans que l'imagination puisse jamais épuiser, ni la multitude de ces côtés, ni cette approximation au cercle. Or, si sans déterminer la multitude des côtés d'un polygone régulier, on en imagine un qui en ait un si grand nombre, que sa différence au cercle dans lequel il sera inscrit, devienne absolument insensible; ce polygone se confondra avec ce cercle, de maniere que l'on pourra, même en rigueur, prendre indifféremment le polygone pour le cercle, & le cercle pour le polygone. Mais (n), la N. 409.
surface de ce polygone, quel qu'il soit, sera égale à celle d'un triangle dont la hauteur feroit égale à une perpendiculaire abaissée du centre de ce polygone à l'un de ses côtés; & la base, à la circonférence de ce même polygone. Donc, puisque cette surface, cette perpendiculaire, & cette circonférence, pourront être prises pour la surface, le rayon, & la circonférence du cercle dans lequel ce même polygone sera inscrit; on peut en conclure que la surface de ce cercle sera

aussi égale à celle d'un triangle dont la hauteur seroit égale au rayon de ce cercle; & la base, à la circonférence de ce même cercle. Par conséquent, C. Q. F. D.

SCHOLIE.

411. *Si nous disons, dans le corollaire précédent, que* le cercle & le polygone inscrit seront confondus ensemble, de maniere que l'on pourra prendre indifféremment l'un pour l'autre; *nous ne prétendons point faire entendre par-là, que ce cercle soit lui-même ce polygone; puisque, quoi que l'on en dise, cela ne peut jamais être.*

En effet, si les cercles étoient, comme on le dit ordinairement, des polygones d'une infinité de côtés; un cercle ne seroit plus grand qu'un autre, que parce qu'il seroit, ou un polygone d'un plus grand nombre de côtés, ou un polygone dont les côtés seroient plus grands.

Or, premierement, si un cercle est plus grand qu'un autre, ce n'est point parce qu'il est un polygone d'un plus grand nombre de côtés; puisque si cela étoit, les cercles ne seroient point des figures semblables.

Secondement, si un cercle est plus

*grand qu'un autre, ce n'est point non plus parce qu'il est un polygone dont les côtés sont plus grands ; puisque si cela étoit, un cercle ne seroit, par exemple, 10000 fois plus grand qu'un autre, que parce que ce cercle & cet autre seroient deux polygones ; dont chaque côté du grand seroit centuple de chaque côté du petit. Or, ce côté centuple auroit un milieu : & ce milieu, par exemple K *, ne* Fig. 7.
se confondroit point avec les extrémités E & D ; puisqu'il en seroit réellement éloigné de part & d'autre, de 50 parties, égales chacune au côté du petit polygone. Ainsi (n)*, la ligne droite I E, qui seroit* N. 114.
tirée du centre I à l'extrémité E, seroit rigoureusement plus grande que la perpendiculaire IK, abaissée du même centre I au milieu K du côté ED ; & par conséquent, toutes les lignes droites qui seroient tirées du centre à la circonférence, ne seroient point rigoureusement égales.

Et si l'on objecte que ce polygone ayant une infinité † de côtés, ces 50 parties

† Que le nom d'*infini* ne fasse point illusion. Ce n'est qu'un terme que les Géometres emploient assez ordinairement pour résoudre de certaines questions difficiles, de la même maniere, à-peu-près, dont les Philosophes se servent de celui d'*instinct*, pour expliquer la nature de l'ame des bêtes.

égales sont absolument insensibles ; nous prendrons un polygone dix millions de fois plus grand, cent millions de fois plus grand ; si grand enfin, que l'on sera forcé d'avouer que toutes les lignes droites qui seront tirées de son centre à sa circonférence, ne seront plus rigoureusement égales †. *Or, une figure dans laquelle toutes les lignes droites que l'on pourra tirer du centre à la circonférence, ne seront point rigoureusement égales, ne sera point un cercle.*

Donc, il n'y a point de milieu : ou les cercles ne sont point des figures semblables, ou il y a des cercles dont les rayons ne sont point rigoureusement égaux ; ou enfin, les cercles ne sont point des polygones. Or, premierement, c'est une des vérités les plus incontestables de la Géométrie, que les cercles sont des figures semblables : secondement, par la défini-
N. 28. *tion du cercle* (n), *on ne peut admettre*

† Il ne faut pas dire que l'excès du rayon IE sur le rayon IK, étant insensible dans un petit cercle, il le sera de même dans un grand ; parce que son accroissement sera toujours proportionnel à celui des rayons. Il est vrai que cet accroissement sera proportionnel : mais, il est vrai aussi, en Géométrie comme en Physique, que ce qui est insensible dans le petit, devient très-considérable dans le grand. La millieme partie d'un pouce est absolument insensible : la millieme partie d'une lieue, est de 13 pieds 8 pouces, & plus.

pour cercle, qu'une figure plane dans laquelle toutes les lignes droites tirées du centre à la circonférence, seront rigoureusement égales. Donc, les cercles ne sont point des polygones; & par conséquent, C. Q. F. D.

PROPOSITION II.

THÉORÊME.

412. *Si dans un triangle, une ligne droite est parallele à l'un des côtés, elle coupera les deux autres proportionnellement: & si elle coupe deux côtés proportionnellement, elle sera parallele au troisieme.*

PREMIEREMENT.

SI dans le triangle ABC *, la ligne DE est parallele au côté AC; BD sera à DA, ce que BE est à EC. Fig. 8.

Const. Tirez du point A au point E, une ligne droite AE; & du point D au point C, une ligne droite DC.

Démonst. Les triangles DAE & DCE sont égaux (n), puisqu'ils sont [c] sur une même base DE, & [H] entre mêmes N. 154.

N. 354. paralleles DE & AC. Ainsi (n), le rapport du triangle BDE au triangle DAE, est égal à celui du même triangle BDE
N. 408. au triangle DCE. Mais (n), le rapport du triangle BDE au triangle DAE est le même que celui de BD à DA; puisque
N. 405. (n) ces triangles ont chacun pour hauteur une perpendiculaire abaissée du point E à la ligne droite AB: & le rapport du triangle BDE au triangle DCE est le même que celui de BE à EC; puisque
N. 405. (n) ces triangles ont aussi chacun pour hauteur une perpendiculaire abaissée du
N. 350. point D à la ligne droite CB. Donc (n), le rapport de BD à DA, est le même que celui de BE à EC; & par conséquent, C. Q. F. 1°. D.

SECONDEMENT.

Fig. 8. Si dans le triangle ABC *, BD est à DA, ce que BE est à EC; la ligne DE sera parallele au côté AC.

Conſt. La même que la précédente.

Démonſt. Par les mêmes raisons que dans la démonstration précédente, le rapport du triangle BDE au triangle DAE, est le même que celui de BD à DA: & le rapport du triangle BDE au triangle DCE, est le même que celui de BE à EC. Or [H], le rapport de BD à DA, eſt égal à celui de BE à EC. Donc (n), le rapport du triangle BDE au triangle DAE, eſt auſſi égal à celui du même triangle BDE au triangle DCE; & par conſéquent (n), les triangles DAE & DCE ſont égaux. Mais (n), puiſque les triangles DAE & DCE qui ſont ſur une même baſe DE, ſont égaux, les lignes DE & AC ſont paralleles; & par conſéquent, C. Q. F. 2°. D.

N. 30.
N. 356.
N. 157.

PROPOSITION III.

THÉORÊME.

413. *Si dans un triangle, une ligne droite qui est tirée de l'un des angles à l'un des côtés, divise cet angle en deux parties égales, elle divisera ce côté en deux parties qui seront proportionnelles aux deux autres côtés: & si elle divise ce côté en deux parties qui soient proportionnelles aux deux autres côtés, elle divisera cet angle en deux parties égales.*

PREMIEREMENT.

Fig. 9. SI dans le triangle ABC *, la ligne BD divise l'angle B en deux parties égales ABD & CBD; AD sera à DC, ce que AB est à BC.

Const. Prolongez le côté AB vers E, jusqu'à ce que le prolongement BE soit égal au côté BC. Tirez du point E au point C, une ligne droite EC.

Démonst. L'angle ABC, qui est exté-
N. 155. rieur au triangle CBE, est (n) égal à la somme des angles intérieurs BCE & E

qui lui sont opposés. Mais (n), ces angles N. 86.
intérieurs sont égaux ; puisque [c] le côté BE est égal au côté BC. Donc, l'angle ABC est double de chacun de ces mêmes angles ; & par conséquent, l'angle CBD, qui [H] est la moitié de cet angle ABC, est égal à l'angle BCE. Or (n), puisque N. 116.
les angles CBD & BCE, qui sont alternes, sont égaux, les lignes BD & EC sont paralleles. Donc (n), dans le triangle N. 412.
AEC, AD. DC :: AB. BE ; & par conséquent, puisque [c] BE est égal à BC, AD. DC :: AB. BC. Donc, C. Q. F. 1°. D.

SECONDEMENT.

Si dans le triangle ABC *, AD est à Fig. 9.
DC, ce que AB est à BC ; la ligne BD divisera l'angle B en deux parties égales ABD & CBD.

Const. La même que la précédente.

Démonst. Dans le triangle AEC, la ligne BD est parallele au côté EC (n) ; N. 412.
puisque [H] AD. DC :: AB. BC, & que [c] BE est égal à BC. Ainsi (n), N. 130.
l'angle extérieur ABD est égal à l'intérieur E qui lui est opposé ; & l'angle CBD, à l'angle BCE, qui lui est alterne. Mais (n), les angles E & BCE sont N. 86.
égaux, puisque [c] les côtés BC & BE

†N. 62. le font. Donc (n), les angles ABD & CBD le font auffi; & par conféquent, C. Q. F. 2°, D.

PROPOSITION IV.

THÉORÊME.

414. *Si des triangles font équiangles; leurs côtés pareils † feront proportionnels.*

Fig. 10. SI dans les triangles ABC * & CDE, l'angle A eft égal à l'angle DCE, l'angle B à l'angle D, & l'angle BCA à l'angle E; le côté AC fera au côté CE, ce que le côté AB eft au côté CD, & le côté BC au côté DE.

Conft. Pofez les triangles ABC & CDE fur une même ligne droite AE, de maniere que les angles égaux DCE & A étant oppofés, les angles égaux BCA & E le foient auffi. Prolongez enfuite les côtés AB & ED, jufqu'à ce qu'ils fe rencontrent à un point F.

Démonft. Les lignes BC & FE font
M. 128 paralleles (n); puifque [H] l'angle exté-

† Dans les figures femblables, on appelle côtés *homologues*, ou côtés *pareils*, ceux qui font oppofés aux angles égaux.

rieur BCA eſt égal à l'intérieur E qui lui eſt oppoſé : & il en eſt de même des lignes CD & AF; puiſque [H] l'angle extérieur DCE eſt auſſi égal à l'intérieur A, qui lui eſt auſſi oppoſé. Ainſi (n), le N. 57.
quadrilatere BD eſt un parallélogramme; & par conſéquent (n), les côtés CD & N. 141.
BF ſont égaux, de même que les côtés BC & FD. Cela poſé ;

Premierement, dans le triangle AFE, la ligne BC eſt parallele au côté FE [D]. Donc (n), AC. CE :: AB. BF; & par N. 412.
conſéquent, puiſque [D] CD eſt égal à BF, AC. CE :: AB. CD.

Secondement, dans le triangle AEF, la ligne CD eſt auſſi parallele au côté AF [D]. Donc (n), AC. CE :: FD. DE; N. 412.
& par conſéquent, puiſque [D] BC eſt égal à FD, AC. CE :: BC. DE.

Donc, C. Q. F. D.

USAGE.

415. *Lorſqu'un triangle dans lequel on ne connoîtra qu'un côté, ſera équiangle à quelque autre dont les trois côtés ſeront connus, il ſera facile de trouver chacun des deux côtés inconnus ; puiſque les côtés des triangles qui ſont équiangles étant proportionnels* (n), *ces côtés incon-* N. 414.
nus ſeront les quatriemes termes de deux

proportions, dont les autres termes seront les côtés connus de ces mêmes triangles.

Ainsi, si l'on sait que dans le triangle
Fig. 11. *ABC* le côté AC est, par exemple, de 9 parties égales, le côté AB de 6, & le côté BC de 5; & si dans le triangle DEF qui est équiangle au triangle ABC, on connoît que le côté DF est, par exemple,*
N. 365. *de 27 toises : on trouvera* (n) *que le côté DE est de 18 toises, & le côté EF de*
N. 414. 15; *puisque* (n) *AC*, (9). *DF*, (27) :: *AB*, (6). *DE*, (18) :: *BC*, (5). *EF*, (15).

Au reste, il faut remarquer que cette proposition est de toutes les propositions de la Géométrie, celle qui est la plus considérable, & dont on fait le plus fréquemment usage. C'est sur elle que toute la trigonométrie est fondée; & particulierement le Traité que j'en ai donné, & qui se trouve à Paris, chez HERISSANT *Fils, rue Notre-Dame.*

PROPOSITION

PROPOSITION V.

THÉORÊME.

416. *Si des triangles ont leurs côtés proportionnels, ils seront équiangles.*

SI dans les triangles ABC * & DEF, le côté AC est au côté DF, ce que le côté AB est au côté DE, & le côté BC au côté EF; l'angle A sera égal à l'angle EDF, l'angle B à l'angle E, & l'angle C à l'angle EFD. Fig. 12.

Conſt. Décrivez sous la ligne DF (n), deux angles GDF & GFD, dont le premier ait le point D pour sommet, & soit égal à l'angle A, & dont le dernier ait le point F pour sommet, & soit égal à l'angle C. N. 120.

Démonſt. Le rapport de AB à DG est (n) égal à celui de AC à DF; puisque [c] les triangles ABC & DGF sont équiangles. Mais [H], le rapport de AB à DE est aussi égal à celui de AC à DF. Donc (n), le rapport de AB à DG est le même que celui de AB à DE; & par conséquent (n), DG est égal à DE. N. 414. N. 350. N. 356.

Pareillement, le rapport de BC à GF

N. 414. est (n) égal à celui de AC à DF; puisque [c] les triangles ABC & DGF sont équiangles. Mais [H], le rapport de BC à EF est aussi égal à celui de AC à DF.
N. 350. Donc (n), le rapport de BC à GF est le même que celui de BC à EF; & par
N. 356. conséquent (n), GF est égal à EF.

Ainsi, les triangles DEF & DGF ont les côtés égaux aux côtés, chacun à cha-
N. 90. cun. Donc (n), ils ont aussi les angles égaux aux angles, chacun à chacun. Mais [c], les angles du triangle ABC sont aussi égaux à ceux du triangle DGF,
N. 62. chacun à chacun. Donc (n), les angles du triangle ABC, & ceux du triangle DEF sont égaux, chacun à chacun; & par conséquent, C. Q. F. D.

PROPOSITION VI.

THÉORÊME.

417. *Si deux triangles ont un angle égal à un angle, & les côtés qui forment ce premier angle, proportionnels à ceux qui forment ce second angle, ils seront équiangles.*

SI dans les triangles ABC * & DEF, l'angle A est égal à l'angle EDF, & si le côté AC est au côté DF, ce que le côté AB est au côté DE; l'angle B sera égal à l'angle E, & l'angle C à l'angle EFD. Fig. 12.

Const. La même que celle de la proposition précédente.

Démonst. Dans les triangles DEF & DGF, l'angle EDF est (n) égal à l'angle N. 62. GDF; puisque l'un [H], & l'autre [C], sont égaux au même angle A: le côté DE est égal au côté DG, par une démonstration toute pareille à celle de la proposition précédente; & le côté DF est commun. Donç (n), l'angle EFD est N. 83. égal à l'angle GFD, & l'angle E à l'angle G; & par conséquent, ces deux triangles ont les angles égaux aux angles, chacun à chacun. Mais [c], les angles du triangle ABC sont aussi égaux à ceux du triangle DGF, chacun à chacun. Donc (n), les angles du triangle ABC & ceux du triangle DEF sont égaux, chacun à chacun; & par conséquent, C. Q. F. D.

N. 62.

PROPOSITION VII.

THÉORÊME.

418. *Si deux triangles ont un angle égal à un angle, les côtés qui forment l'un quelconque des autres angles du premier, proportionnels aux côtés qui forment l'un quelconque des autres angles du second; & le troisieme angle du premier, de même espece que le troisieme angle du second: ces deux triangles seront équiangles.*

Fig. 13. SI dans les triangles ABC * & DEF, l'angle B est égal à l'angle E; si le côté AB est au côté DE, ce que le côté AC est au côté DF; & si enfin les angles C & EFD sont de même espece; ces deux triangles seront équiangles.

Conſt. Prolongez le côté EF vers G, à volonté. Tirez du point D aux points G & H, pris à volonté, l'un au-deſſous du point F, & l'autre au-deſſus, des lignes droites DG & DH.

Démonſt. Si l'angle A eſt égal à l'angle EDF, les triangles ABC & DEF seront équiangles; puiſque (n), l'angle B étant égal à l'angle E [H], & l'angle A à l'angle EDF, les angles C & EFD seront auſſi égaux. Ainſi, il s'agit de démontrer que l'angle A eſt effectivement égal à l'angle EDF. Or: N. 137.

Premierement, l'angle A n'eſt point égal à un angle EDG, plus grand que l'angle EDF; puiſque s'il l'étoit, les triangles ABC & DEG, qui [H] ont l'angle B égal à l'angle E, & qui auroient auſſi [S] l'angle A égal à l'angle EDG, auroient encore (n) l'angle C égal à l'angle G. Donc, le rapport de AB à DE, qui [H] eſt égal à celui de AC à DF, le seroit auſſi (n) à celui de AC à DG; & par conſéquent (n), DF seroit égal à DG. Mais, ſi DF étoit égal à DG, le triangle FDG seroit iſoſcele. Donc (n), l'angle EFD seroit obtus, puiſque (n) les angles DFG & G seroient néceſſairement aigus; & par conſéquent, puiſque [D] l'angle C seroit égal à l'an- N. 137. N. 414. N. 356. N. 98. N. 106.

gle G, les angles C & EFD ne seroient point de même espece.

Secondement, l'angle A n'est point non plus égal à un angle EDH, plus petit que l'angle EDF; puisque s'il l'étoit, les triangles ABC & DEH, qui [H] ont l'angle B égal à l'angle E, & qui auroient aussi [S] l'angle A égal à l'angle
N. 137. EDH, auroient encore (n) l'angle C égal à l'angle EHD. Donc, le rapport de AB à DE, qui [H] est égal à celui de
N. 414. AC à DF, le seroit aussi (n) à celui de
N. 356. AC à DH; & par conséquent (n), DF seroit égal à DH. Mais, si DF étoit égal à DH, le triangle FDH seroit isoscele.
N. 98. Donc (n), l'angle EHD seroit obtus;
N. 106. puisque (n) les angles DHF & EFD seroient nécessairement aigus; & par conséquent, puisque [D] l'angle C seroit égal à l'angle EHD, les angles C & EFD ne seroient point encore de même espece.

Or [H], ces angles doivent être de même espece. Donc, l'angle A n'est égal, ni à un angle EDG, plus grand que l'angle EDF, ni à un angle EDH, plus petit que ce même angle; & par conséquent, C. Q. F. D.

COROLLAIRE.

419. Il suit du n°. 402, & des n°. 414, 416, 417 & 418, *que dans tous les cas auxquels les triangles sont équiangles, ils sont semblables.*

PROPOSITION VIII.

THÉORÊME.

420. *La perpendiculaire abaissée de l'angle droit d'un triangle rectangle, au côté opposé, divise ce triangle en deux autres qui lui sont semblables.*

LA perpendiculaire BD * divise le Fig. 14.
triangle rectangle ABC en deux triangles ABD & BDC, qui sont semblables au triangle ABC.

Démonst. Dans les triangles ABC & ADB, qui [H] sont rectangles, l'un en B & l'autre en D, l'angle A est commun. Donc (n), l'angle C est égal à N. 137.
l'angle ABD.

Pareillement, dans les triangles ABC & BDC, qui [H] sont aussi rectangles, l'un en B & l'autre en D, l'angle C

N. 137. est commun. Donc (n), l'angle A est égal à l'angle CBD.

N. 419. Or (n), puisque les triangles ABC, ADB & BDC sont équiangles, ils sont semblables; & par conséquent, C. Q. F. D.

COROLLAIRE.

421. Il suit de ce théorême, que *la perpendiculaire abaissée de l'angle droit d'un triangle rectangle, au côté opposé, est moyenne proportionnelle entre les segmens* ¶ *de ce côté.*

Fig. 14. Dans le triangle ABC * qui est rectangle en B. AD. DB :: DB. DC.

N. 420. *Démonst.* Puisque (n) les triangles

N. 414. ADB & BDC sont équiangles; (n) AD, (*qui est opposé à l'angle ABD du premier* †) est à DB, (*qui est opposé à l'angle C du second*), ce que DB, (*qui est opposé à l'angle A du premier*), est à DC, (*qui est opposé à l'angle CBD du second*). Par conséquent, C. Q. F. D.

¶ On se sert assez ordinairement en Géométrie, du terme de *segment*, au lieu de celui de *partie*; parce qu'il n'est point équivoque.

† Nous indiquons ici les angles opposés, afin de faire voir aux commençans qu'ils n'auront aucune difficulté à ranger proportionnellement les côtés de deux triangles semblables, si pour former chaque rapport, ils prennent toujours un côté du premier triangle, & un côté du second, qui soient opposés à des angles égaux.

PROPOSITION

PROPOSITION IX.

PROBLÊME.

422. *Couper telle partie que l'on voudra d'une ligne droite donnée.*

IL faut couper, par exemple, les trois cinquiemes de la ligne droite AB *. Fig. 152

Conſt. Tirez du point A, une ligne droite indéfinie AH, qui forme avec la ligne AB, un angle quelconque HAB. Enſuite, (puiſque l'on demande des cinquiemes) prenez à volonté ſur la ligne AH, 5 parties égales AC, CD, &c; & du point G, auquel la cinquieme partie ſe termine, tirez au point B, une ligne droite GB. Enfin, (puiſque l'on demande 3 parties) tirez (n) de l'extré- N. 135.
mité E de la troiſieme partie, une parallele EI à la ligne GB; & la partie AI ſera les $\frac{3}{5}$ demandés.

Démonſt. L'angle extérieur AIE eſt
(n) égal à ſon oppoſé intérieur ABG; N. 130.
puiſque [c] les lignes EI & GB ſont pa-
ralleles. Ainſi (n), les triangles AEI & N. 137.
AGB, qui ont l'angle A commun, ſont
équiangles; & par conſéquent (n), AE. N. 414.

AG :: AI. AB. Or [c], la partie AE
M. 330. eſt les $\frac{3}{5}$ de la ligne AG. Donc (n), la partie AI eſt auſſi les $\frac{3}{5}$ de la ligne AB; & par conſéquent, C. Q. F. F.

PROPOSITION X.

PROBLÊME.

423 *Diviſer une ligne droite, de la même maniere dont une autre ligne droite eſt diviſée.*

Fig. 16. IL faut diviſer la ligne droite AB *, de la même maniere dont la ligne droite CD eſt diviſée.

Conſt. Tirez du point A, une ligne droite indéfinie AI, qui forme avec la ligne AB, un angle quelconque BAI. Prenez ſur cette ligne AI, une partie AG égale à la partie CK, une partie AH égale à la partie CL, & une partie AI égale à la ligne CD. Tirez du point I au
M. 331. point B, une ligne droite IB. Enfin (n), tirez des points G & H, des paralleles GE & HF à la ligne IB. Les parties AE & AF, ſeront les parties demandées.

Démonſt. L'angle extérieur AGE eſt
M. 330. (n) égal à ſon oppoſé intérieur AIB;

puiſque [c] les lignes GE & IB ſont paralleles. Ainſi (n), les triangles AEG & ABI, qui ont l'angle A commun, ſont équiangles; & par conſéquent (n), AE. AB :: AG. AI. N. 137. N. 414.

Pareillement, l'angle extérieur AHF eſt (n) égal à ſon oppoſé intérieur AIB; puiſque [c] les lignes HF & IB ſont paralleles. Ainſi (n), les triangles AFH & ABI, qui ont l'angle A commun, ſont équiangles; & par conſéquent (n), AF. AB :: AH. AI. N. 130. N. 137. N. 414.

Mais [c], les parties CK & CL, & la ligne CD, ſont égales aux parties AG, AH & AI, chacune à chacune. Donc (n), AE. AB :: CK. CD; & AF. AB :: CL. CD. Par conſéquent, C. Q. F. F. N. 61.

PROPOSITION XI.

PROBLÊME.

414. *Trouver une troisieme proportionnelle à deux lignes droites données.*

Fig. 17. IL faut trouver une troisieme proportionnelle aux deux lignes droites A * & B.

Const. Tirez deux lignes droites indéfinies DE & DC, qui forment un angle quelconque CDE. Prenez sur la ligne DE, une partie DF égale à la ligne A, & une partie FG égale à la ligne B. Prenez aussi sur la ligne DC, une partie DH égale à la même ligne B. Tirez du point F au point N. 133. H, une ligne droite FH. Enfin (n), tirez du point G, une parallele GI à la ligne FH; & la partie HI sera la troisieme proportionnelle demandée.

Démonst. Dans le triangle DIG, la ligne FH est [c] parallele au côté GI. N. 412. Donc (n), DF. FG :: DH. HI; & par N. 61. conséquent (n), puisque [c] la ligne A est égale à la partie DF, & la ligne B à la partie FG & à la partie DA, A. B :: B. HI. Donc, C. Q. F. F.

PROPOSITION XII.

PROBLÊME.

425. *Trouver une quatrieme proportionnelle à trois lignes droites données.*

IL faut trouver une quatrieme proportionnelle aux trois lignes droites A *, B & C. Fig. 180

Conft. Tirez deux lignes droites indéfinies EF & ED, qui forment un angle quelconque DEF. Prenez fur la ligne EF, une partie EG égale à la ligne A, & une partie GH égale à la ligne B. Prenez auffi fur la ligne ED, une partie EI égale à la ligne C. Tirez du point G au point I, une ligne droite GI. Enfin (n), tirez du point H, une parallele HK à la ligne GI; & la partie IK fera la quatrieme proportionnelle demandée. N. 133.

Démonft. Dans le triangle EKH, la ligne GI eft [c] parallele au côté HK. Donc (n), EG. GH :: EI. IK; & par conféquent (n), puifque [c] la ligne A eft égale à la partie EG, la ligne B à la partie GH, & la ligne C à la partie EI, A. B :: C. IK. Donc, C. Q. F. F. N. 412. N. 61.

PROPOSITION XIII.

PROBLÊME.

426. *Trouver une moyenne proportionnelle entre deux lignes droites données.*

Fig. 19. IL faut trouver une moyenne proportionnelle entre les lignes droites A * & B.

Conſt. Tirez une ligne droite indéfinie CD. Prenez ſur cette ligne, une partie CE égale à la ligne A, & une partie EF
N. 94. égale à la ligne B. Diviſez (n) la partie CF en deux parties égales CG & GF. Du point G, pris pour centre, & avec l'une de ces parties égales, priſe pour rayon,
N. 96. décrivez un demi-cercle CIF. Enfin (n), du point E, élevez dans ce même demi-cercle, une perpendiculaire EH à la ligne CD; & cette perpendiculaire ſera la moyenne demandée.

Pour la démonſtration. Tirez du point H aux points C & F, des lignes droites HC & HF.

Démonſt. L'angle CHF eſt un angle
N. 263. droit (n), puiſque [c] il eſt inſcrit dans le demi-cercle CIF. Ainſi [c], la ligne EH

est une perpendiculaire abaissée de l'angle droit du triangle rectangle CHF au côté opposé CF ; & par conséquent (n), CE. EH :: EH. EF. Mais [c], la ligne A est égale à la partie CE, & la ligne B à la partie EF. Donc (n), A. EH :: EH. B ; & par conséquent, C. Q. F. F.

N 421

N. 62.

SCHOLIE.

427. *Il est quelquefois nécessaire de trouver plus d'une moyenne proportionnelle entre deux lignes droites données : mais, il est démontré qu'il n'est point possible de le faire par la Géométrie élémentaire. Cependant, plusieurs personnes, qui en toute autre chose ne manquent point de bon sens, le cherchent toujours avec ardeur, de même que la* trisection *de l'angle, la* quadrature *du cercle, &c. Il est bon que les jeunes gens sachent, qu'indépendamment de la présomption ridicule qu'il y a à faire ces sortes de recherches, il y a mille contre un à parier, que quiconque se flate de faire de pareilles découvertes, ne sait pas les premiers élémens de la Géométrie.*

La proposition dans laquelle il ne s'agit de trouver que deux moyennes proportionnelles, est connue sous le nom de problême de la duplication du cube.

PROPOSITION XIV.

THÉORÊME.

428. *Dans les parallélogrammes équiangles, si les surfaces sont égales, les côtés seront réciproquement proportionnels : & si les côtés sont réciproquement proportionnels, les surfaces seront égales.*

PREMIEREMENT.

Fig. 20. SI les parallélogrammes AC * & FC, qui sont équiangles, sont égaux, le côté DC sera au côté CE, ce que le côté GC est au côté CB.

Const. Disposez les parallélogrammes AC & FC, de maniere que les côtés CE & CG de l'un, deviennent les prolongemens des côtés DC & BC de l'autre. Prolongez ensuite les côtés AB & FE, jusqu'à ce qu'ils se rencontrent à un point H.

Démonst. Puisque [H] les parallélogrammes AC & FC sont égaux, ils ont
N. 354. chacun (n) le même rapport au parallélo-
N. 407. gramme BE. Or (n), le rapport du côté DC au côté CE, est égal à celui du pa-

rallélogramme AC au parallélogramme BE : & le rapport du côté GC au côté CB, l'est à celui du parallélogramme FC au même parallélogramme BE. Donc (n), le rapport du côté DC au côté CE, est aussi le même que celui du côté GC au côté CB; & par conséquent, C. Q. F. 1°. D. N. 350.

SECONDEMENT.

Si dans les parallélogrammes AC * & FC, qui sont équiangles, le côté DC est au côté CE, ce que le côté GC est au côté CB, ces parallélogrammes seront égaux. Fig. 102

Const. La même que la précédente.

Démonst. [H] le rapport du côté DC au côté CE, est le même que celui du côté GC au côté CB. Or (n), le rapport du parallélogramme AC au parallélogramme BE, est égal à celui du côté DC au côté CE : & le rapport du parallélogramme FC au même parallélogramme BE, l'est à celui du côté GC au côté CB. Donc (n), les parallélogrammes AC & FC, ont chacun le même rapport au parallélogramme BE; & par conséquent (n), ces deux parallélogrammes sont égaux. Donc, C. Q. F. 2°. D. N. 407. N. 350. N. 354.

PROPOSITION XV.

THÉORÊME.

429. *Dans les triangles qui ont un angle égal à un angle, si les surfaces sont égales, les côtés qui forment ces angles égaux seront réciproquement proportionnels : & si les côtés qui forment ces angles égaux sont réciproquement proportionnels, les surfaces seront égales.*

PREMIEREMENT.

Fig. 21. SI les triangles ABC * & EDC, qui ont l'angle ACB égal à l'angle ECD, sont égaux, le côté AC sera au côté CD, ce que le côté EC est au côté CB.

Const. Disposez les triangles ABC & EDC, de maniere que les côtés CD & CE de l'un, deviennent les prolongemens des côtés AC & BC de l'autre. Tirez ensuite du point B au point D, une ligne droite BD.

Démonst. Puisque [H] les triangles ABC & EDC sont égaux, ils ont cha-
N. 354 cun (n) le même rapport au triangle
N. 408. CBD. Or (n), le rapport du côté AC

au côté CD, est égal à celui du triangle ABC au triangle CBD : & le rapport du côté EC au côté CB, l'est à celui du triangle EDC au même triangle CBD. Donc (n), le rapport du côté AC au côté CD, est aussi le même que celui du côté EC au côté CB ; & par conséquent, C. Q. F. 1°. D. N. 350.

SECONDEMENT.

Si dans les triangles ABC * & EDC, qui ont l'angle ACB égal à l'angle ECD, le côté AC est au côté CD, ce que le côté EC est au côté CB, ces triangles seront égaux. Fig. 22.

Const. La même que la précédente.

Démonst. [H]Le rapport du côté AC au côté CD, est le même que celui du côté EC au côté CB. Or (n), le rapport du triangle ABC au triangle CBD, est égal à celui du côté AC au côté CD : & le rapport du triangle EDC au même triangle CBD, l'est à celui du côté EC au côté CB. Donc (n), les triangles ABC & EDC, ont chacun le même rapport au triangle CBD ; & par conséquent (n), ces deux triangles sont égaux. Donc, C. Q. F. 2°. D. N. 408. N. 350. N. 356.

PROPOSITION XVI.

THÉORÊME.

430. *Si quatre lignes droites sont proportionnelles, le rectangle des extrêmes sera égal à celui des moyennes : & si quatre lignes droites sont telles, que le rectangle des extrêmes soit égal à celui des moyennes, elles seront proportionnelles.*

PREMIEREMENT.

Fig. 122. SI AB *. EF : : EH. AD, le rectangle des extrêmes AB & AD, sera égal à celui des moyennes EF & EH.

Const. Faites un rectangle AC, dont la ligne AB soit l'un des côtés, & la ligne AD, l'autre. Faites aussi un rectangle EG, dont la ligne EF soit l'un des côtés, & la ligne EH, l'autre.

Démonst. Les parallélogrammes AC & EG sont équiangles, puisque [c] ils sont rectangles : & leurs côtés sont réciproquement proportionnels, puisque [H] AB. EF : : EH. AD. Donc (n), ces parallélogrammes sont égaux ; & par conséquent, C. Q. F. 1°. D.

N. 428.

SECONDEMENT.

Si les quatre lignes droites AB *, EF, EH & AD, sont telles que le rectangle des extrêmes AB & AD, soit égal à celui des moyennes EF & EH; la premiere sera à la seconde, ce que la troisieme est à la quatrieme. Fig. 22.

Const. La même que la précédente.

Démonst. Les parallélogrammes AC & EG sont équiangles, puisque [c] ils sont rectangles : & [H] leurs surfaces sont égales. Donc (n), leurs côtés sont réciproquement proportionnels; & par conséquent, AB. EF :: EH. AD. Donc, C. Q. F. 2°. D. N. 428.

COROLLAIRE I.

431. Il suit de la seconde partie de ce théorême, que *dans le cercle, si deux cordes s'entrecoupent, leurs parties seront réciproquement proportionnelles.*

Dans le cercle X (*Liv.* 3, *Fig.* 51, 52, 53 & 54.) la partie AF de la corde AB, est à la partie CF de la corde CD, ce que la partie FD de la même corde CD, est à la partie FB de la corde AB.

Démonst. Le rectangle des parties AF & FB, est (n) égal à celui des parties N. 26[illegible]

N. 430. CF & FD. Donc (n), AF. CF :: FD. FB ; & par conséquent, C. Q. F. D.

COROLLAIRE II.

432. Il suit encore de la même seconde partie, que *si d'un même point pris hors d'un cercle, on tire deux sécantes, ces deux sécantes, & leurs parties extérieures, seront réciproquement proportionnelles.*

Au cercle X (*Liv.* 3, *Fig.* 57.) la sécante AB est à la sécante AC, ce que la partie AF est à la partie AE.

Démonst. Le rectangle de la sécante
N. 270. AB & de la partie AE, est (n) égal à celui de la sécante AC & de la partie AF.
N. 430. Donc (n), AB. AC :: AF. AE; & par conséquent, C. Q. F. 2°. D.

PROPOSITION XVII.

THÉORÊME.

433. *Si trois lignes droites sont en proportion continue, le rectangle des extrêmes sera égal au quarré de la moyenne : & si trois lignes droites sont telles, que le rectangle des extrêmes soit égal au quarré de la moyenne, elles seront en proportion continue.*

PREMIEREMENT.

SI ∺ AB *. EF. AD, le rectangle des extrêmes AB & AD, sera égal au quarré de la moyenne EF. Fig. 13.

Const. Faites un rectangle AC, dont la ligne AB soit l'un des côtés, & la ligne AD, l'autre. Décrivez ensuite (n) un quarré EG, sur la ligne EF. N. 170.

Démonst. Les parallélogrammes AC & EG sont équiangles, puisque [c] ils sont rectangles ; & leurs côtés sont réciproquement proportionnels ; puisque [H], AB. EF :: EF. AD, & que (n) EH est égal à EF. Donc (n), ces paral- N. 50. N. 428.

lélogrammes ſont égaux ; & par conſéquent, C. Q. F. 1°. D.

SECONDEMENT.

Fig. 23. Si les trois lignes droites AB *, EF & AD, ſont telles que le rectangle des extrêmes AB & AD, ſoit égal au quarré de la moyenne EF ; la premiere ſera à la ſeconde, ce que la ſeconde eſt à la troiſieme.

Conſt. La même que la précédente.

Démonſt. Les parallélogrammes AC & EG ſont équiangles, puiſque [c] ils ſont rectangles : & [H] leurs ſurfaces ſont
N. 428. égales. Donc (n), leurs côtés ſont réciproquement proportionnels ; & par con-
N. 50. ſéquent, AB. EF :: EH. AD. Mais (n),
N. 61. EF eſt égal à EH. Donc (n), AB, EF :: EF. AD ; & par conſéquent, C. Q. F. 2°. D.

COROLLAIRE.

454. Il ſuit de la ſeconde partie de ce théorême, que *ſi d'un même point pris hors d'un cercle, on tire une tangente & une ſécante, cette tangente ſera moyenne proportionnelle entre cette ſécante & ſa partie extérieure.*

Au

Au cercle X (*Livre 3, Fig. 55 & 56.*) la ſécante AC eſt à la tangente AB, ce que cette même tangente AB eſt à la partie AD.

Démonſt. Le rectangle de la ſécante AC & de ſa partie AD, eſt (n) égal au quarré de la tangente AB. Donc (n), AC. AB :: AB. AD; & par conſéquent, C. Q. F. D. N. 269. N. 433.

PROPOSITION XVIII.

PROBLÊME.

435. *Décrire sur une ligne droite donnée, une figure rectiligne qui soit semblable à une autre figure rectiligne aussi donnée.*

Fig. 24. IL faut décrire sur la ligne droite EF*, une figure rectiligne qui soit semblable à la figure rectiligne DB.

Const. Divisez en triangles, par exemple ACB & ADC, la figure proposée DB. Décrivez ensuite sur la ligne EF
N. 120. (n), un angle GEF qui ait le point E pour sommet, & soit égal à l'angle CAB; & un angle F qui ait le point F pour sommet, & soit égal à l'angle B. Décri-
N. 120. vez aussi sur la ligne EG (n), un angle GEH qui ait le point E pour sommet, & soit égal à l'angle CAD; & un angle EGH qui ait le point G pour sommet, & soit égal à l'angle ACD. La figure rectiligne HF, que les côtés de ces angles formeront sur la ligne EF, sera la figure demandée.

Démonst. Premierement, l'angle HEF

eſt égal à l'angle DAB ; puiſque [c] les angles GEF & GEH, CAB & CAD, ſont égaux, chacun à chacun : l'angle F eſt égal à l'angle B [c] : l'angle FGH eſt égal à l'angle BCD ; puiſque les angles EGF & ACB ſont égaux (n), & que N. 137. [c] les angles EGH & ACD le ſont auſſi : enfin, l'angle H eſt égal à l'angle D (n). N. 137.

Secondement, EF. AB :: FG. BC (n), puiſque [c] les triangles EGF & N. 414. ACB ſont équiangles. Pareillement, EH. AD :: HG. DC (n), puiſque [c] N. 414. les triangles EHG & ADC ſont auſſi équiangles. Enfin (n), EF. AB :: EH. N. 350. AD ; puiſque (n) les triangles équian- N. 414. gles EGF & ACB, donnent EF. AB :: EG. AC, & que les triangles équiangles EHG & ADC, donnent auſſi EH. AD :: EG. AC.

Ainſi, dans les figures rectilignes HF & DB, les angles ſont égaux aux angles, chacun à chacun ; & les côtés qui forment ces angles égaux, ſont proportionnels. Donc (n), ces figures ſont ſemblables ; N. 402. & par conſéquent, C. Q. F. F.

SCHOLIE.

436. Si la figure propoſée avoit un

plus grand nombre de côtés, elle se diviseroit en un plus grand nombre de triangles, que l'on rapporteroit l'un après l'autre sur les côtés des triangles de la figure **HF**; *de la même maniere dont nous venons de rapporter le triangle* **ADC** *sur le côté* **EG**.

USAGE.

437. *On se sert de cette proposition, pour lever le plan d'un bâtiment, d'une ville, d'un champ, d'une forêt, &c, & même celui d'un pays; parce que lever un plan, c'est décrire sur une ligne droite donnée, une figure semblable à celle de la chose dont on veut lever le plan.*

PROPOSITION XIX.

THÉORÊME.

438. *Les triangles semblables sont entre eux en rapports doublés de ceux de leurs côtés pareils.*

SI les triangles ABC * & DEF sont Fig. 25. semblables, le rapport du premier au second, sera doublé de celui du côté AC au côté DF.

Const. Cherchez (n) une troisieme pro- N. 424. portionnelle aux côtés AC & DF. Prenez sur le côté AC, une partie AG égale à cette troisieme proportionnelle. Tirez ensuite du point B au point G, une ligne droite BG.

Démonst. Puisque [H] les triangles ABC & DEF sont semblables, AB. DE :: AC. DF (n). Mais [C], AC. DE :: N. 414. DF. AG. Donc (n), AB. DE :: DF. AG; N. 350. & par conséquent, puisque [H] l'angle A est égal à l'angle D, les triangles ABG & DEF sont égaux (n). Or (n), puisque N. 429. ces triangles sont égaux, le triangle ABC N. 354. a le même rapport au premier qu'au dernier. Ainsi, puisque (n) son rapport au N. 408.

premier, est le même que celui du côté AC au côté AG; son rapport au dernier, est aussi le même. Mais (n), le rapport qui est entre ces deux côtés, est doublé de celui du côté AC au côté DF. Donc, le rapport du triangle ABC au triangle DEF, en est aussi doublé; & par conséquent, C. Q. F. D.

n. 348.

PROPOSITION XX.

THÉORÊME.

459. *Les polygones semblables peuvent être divisés en un pareil nombre de triangles, semblables chacun à chacun; ils sont proportionnels à ceux de ces triangles qui se correspondent: enfin, ils sont entr'eux en rapports doublés de ceux de leurs côtés pareils*

PREMIEREMENT.

Fig. 26. SI les polygones EB * & KG sont semblables, on pourra les diviser l'un & l'autre, en un pareil nombre de triangles, qui seront semblables, chacun à chacun.

Const. Du sommet de l'un quelconque des angles du polygone EB (par exemple, du point A) tirez aux points C & D, des lignes droites AC & AD. Du point F, qui correſpond au point A, tirez aux points H & I, des lignes droites FH & FI.

Démonſt. Puiſque [H] les polygones EB & KG ſont ſemblables, il y a dans le premier autant d'angles oppoſés à l'angle A, qu'il y en a dans le ſecond d'oppoſés à l'angle F. Or [c], on a diviſé le premier polygone, par des lignes droites tirées de l'angle A à chaque angle oppoſé à l'angle A; & le ſecond, par des lignes droites tirées de l'angle F à chaque angle oppoſé à l'angle F. Donc, on a diviſé chacun de ces polygones, par un pareil nombre de lignes droites; & par conſéquent, on les a diviſés l'un & l'autre, en un pareil nombre de triangles.

Or, ces triangles ſont ſemblables. Car premierement, les triangles ABC & FGH le ſont (n); puiſque (n) les angles B & G ſont égaux, & que AB. FG :: BC. GH. Secondement, les triangles AED & FKI le ſont (n); puiſque (n) les angles E & K ſont égaux, & que AE. FK :: ED. KI. Troiſiemement, enfin, les triangles ACD & FHI le ſont auſſi (n). Car 1°. l'angle ACD eſt égal à

N. 417. N. 402. N. 417. N. 402. N. 41[illegible]

N. 64. l'angle FHI (n), puisque les angles BCD
N. 402. & GHI sont égaux (n), & que les angles BCA & GHF le sont aussi [D] :
N. 350. N. 402. 2°. CD. HI :: CA. HF (n); puisque (n)
N. 414. CD. HI :: CB. HG, & que (n) les triangles semblables ABC & FGH donnent aussi, CA. HF :: CB. HG.

Par conséquent, C. Q. F. 1°. D.

SECONDEMENT.

Fig. 26. Si les polygones EB * & KG qui sont semblables, sont pareillement divisés chacun en un égal nombre de triangles, par exemple, AED, ACD & ABC, FKI, FHI & FGH; le polygone EB sera au polygone KG, ce que l'un quelconque des triangles du premier, par exemple, le triangle AED, est au triangle correspondant FKI.

Démonst. Le rapport du triangle AED au triangle FKI, est doublé de celui du
N. 438. côté ED au côté KI (n) : le rapport du triangle ACD au triangle FHI, est aussi
N. 438. doublé du même rapport; puisque (n) il est doublé du rapport du côté CD au
N. 402. côté HI, qui (n) est le même que celui de ED à KI : enfin, le rapport du triangle ABC au triangle FGH, est encore dou-
N. 438. blé du même rapport; puisque (n) il est doublé du rapport du côté AB au côté

EG,

FG, qui (n) eſt auſſi le même que celui N. 402.
de ED à KI. Donc (n), le triangle AED N. 350.
eſt au triangle FKI, ce que le triangle ACD eſt au triangle FHI, ce que le triangle ABC eſt au triangle FGH; & par conſéquent (n), le polygone EB, N. 380.
(qui eſt la ſomme des triangles antécédens AED, ACD & ABC) eſt au polygone KG (qui eſt celle des triangles conſéquens FKI, FHI & FGH) ce que le triangle antécédent AED eſt à ſon triangle conſéquent FKI.

Donc, C. Q. F. 2°. D.

TROISIEMEMENT.

Enfin, ſi les polygones EB * & KG Fig. 26.
ſont ſemblables, ils ſeront entr'eux en rapport doublé de celui de leurs côtés pareils; par exemple, de celui du côté ED au côté KI.

Démonſt. Le rapport du polygone EB au polygone KG, eſt le même que celui du triangle AED au triangle FKI [D].
Or (n), le rapport qui eſt entre ces deux N. 438.
triangles, eſt doublé de celui du côté ED au côté KI. Donc, le rapport qui eſt entre ces deux polygones, en eſt auſſi doublé; & par conſéquent, C. Q. F. 3°. D.

COROLLAIRE.

440. Il ſuit de la derniere partie de ce théorême, que *ſi trois lignes droites ſont en proportion continue, un polygone quelconque décrit ſur la premiere, ſera à un polygone ſemblable, & ſemblablement décrit ſur la ſeconde, ce que cette premiere ligne eſt à la troiſieme.*

Fig. 27. Si les trois lignes droites A *, B & C, ſont en proportion continue, un polygone quelconque décrit ſur la ligne A, ſera à un polygone ſemblable, & ſemblablement décrit ſur la ligne B, ce que la ligne A eſt à la ligne C.

Démonſt. Le rapport d'un polygone décrit ſur la ligne A, à un polygone
N. 439. ſemblable décrit ſur la ligne B, eſt (n) doublé du rapport qui eſt entre ces deux
N. 348. lignes. Or (n), le rapport de la ligne A à la ligne C, eſt auſſi doublé de ce même
N. 350. rapport. Donc (n), le rapport d'un polygone décrit ſur la ligne A, à un polygone ſemblable décrit ſur la ligne B, eſt le même que celui de la ligne A à la ligne C; & par conſéquent, C. Q. F. D.

USAGE.

441. *On se sert de ce corollaire, pour résoudre les deux problêmes suivans.*

PREMIER. Connoître le rapport d'un polygone quelconque EB * à un polygone semblable KG. Fig. 261

Solution. *Cherchez* (n) *une troisieme proportionnelle à deux quelconques des côtés pareils des polygones EB & KG; par exemple, aux côtés ED & KI. Le polygone EB sera* (n) *au polygone KG, ce que le côté ED sera à cette troisieme proportionnelle.* N. 424 N. 440

SECOND. Décrire un polygone, qui soit semblable, par exemple, au polygone EB *, & qui en soit, par exemple, les deux tiers. Fig. 262

Solution. *Cherchez* (n) *une moyenne proportionnelle entre l'un quelconque des côtés du polygone EB, & les deux tiers de ce côté; par exemple, une moyenne proportionnelle KI, entre le côté ED & ses deux tiers. Décrivez ensuite sur cette moyenne* (n), *un polygone KG, semblable au polygone proposé EB; & ce polygone sera les deux tiers du polygone EB. Car* (n), *puisque* [c] *les trois lignes ED,* N. 426 N. 436 N. 440

KI & les deux tiers de ED, sont en proportion continue, le polygone EB, décrit sur la premiere, est au polygone semblable KG, décrit sur la seconde, ce que la premiere est à la troisieme, qui [c] *est les deux tiers de cette premiere.*

PROPOSITION XXII. †

THÉORÊME.

442. *Si quatre lignes droites ſont proportionnelles, les polygones ſemblables, & ſemblablement poſés ſur les deux premieres, ſeront proportionnels aux polygones ſemblables, & ſemblablement poſés ſur les deux dernieres: & ſi deux polygones ſemblables ſont proportionnels à deux autres polygones auſſi ſemblables, les côtés pareils des premiers ſeront proportionnels aux côtés pareils des derniers.*

PREMIEREMENT.

SI AB *. CD :: EF. GH, les polygones AIB & CKD, qui ſont ſemblables, & ſemblablement poſés ſur les deux premieres, ſeront proportionnels aux polygones EM & GO, qui ſont auſſi ſemblables, & ſemblablement poſés ſur les deux dernieres. Fig. 29.

Démonſt. Le rapport du polygone AIB au polygone CKD, eſt (n) doublé N. 435.

† La vingt-unieme propoſition eſt un axiome, que nous avons mis à la ſuite des définitions, n°. 406.

de celui du côté AB au côté CD, puisque [H] ces polygones sont semblables: & le rapport du polygone EM au poly-
N. 435. gone GO, est (n) doublé de celui du côté EF au côté GH, puisque [H] ces polygones sont aussi semblables. Or [H], le rapport du côté AB au côté CD, est le même que celui du côté EF au côté GH. Donc, le rapport du polygone AIB au polygone CKD, est aussi le même que celui du polygone EM au polygone GO; & par conséquent, C. Q. F. 1°. D.

SECONDEMENT.

Fig. 29. Si les polygones AIB * & CKD, qui sont semblables, sont proportionnels aux polygones EM & GO, qui sont aussi semblables; les côtés, par exemple AB & CD des deux premiers, seront proportionnels aux côtés EF & GH des deux derniers.

Démonst. Si les quatre lignes droites AB, CD, EF & GH n'étoient point proportionnelles; une quatrieme proportionnelle aux trois premieres, seroit ou plus grande, ou plus petite, que la ligne
N. 435. GH. Ainsi, si (n) l'on décrivoit sur cette quatrieme, un polygone qui fût semblable au polygone GO, & semblablement

posé ; il feroit auffi (n) plus grand, ou N. 439.
plus petit, que le polygone GO ; & par conféquent, il ne feroit point proportionnel aux polygones AIB, CKD & EM. Mais [D], lorfque quatre lignes droites font proportionnelles, les polygones femblables, qui font femblablement pofés fur elles, font auffi proportionnels. Donc, puifque les polygones femblables AIB, CKD, &c. qui feroient femblablement pofés fur les lignes AB, CD, EF, & une quatrieme plus grande ou plus petite que GH, ne feroient point proportionnels, ces lignes ne font point proportionnelles ; & par conféquent, les lignes AB, CD, EF & GH, le font. Donc, C. Q. F. 2°. D.

COROLLAIRE.

443. Il fuit de la premiere partie de ce théorême, que *fi trois lignes droites font en proportion continue, les polygones femblables, & femblablement pofés fur ces trois lignes, feront auffi en proportion continue :* & de la feconde partie, que *fi trois polygones femblables font en proportion continue, leurs côtés pareils feront auffi en proportion continue.*

PROPOSITION XXIII.

THÉORÊME.

444. *Les parallélogrammes équiangles sont entr'eux en rapport composé de ceux de leurs côtés.*

Fig. 30. SI les parallélogrammes AC * & GE sont équiangles, ils seront entr'eux en rapport composé de celui du côté AB au côté BE, & de celui du côté BC au N. 243. côté BG; c'est-à-dire (n) ce que le produit de AB multiplié par BC, est à celui de BE multiplié par BG.

Const. Disposez les parallélogrammes AC & GE, de maniere que les côtés, par exemple BE & BG, deviennent les prolongemens des côtés AB & CB. Décrivez ensuite sur le côté AB, un rectangle AI, dont le côté IB soit égal au côté CB, & sur le côté BE, un rectangle BL, dont le côté BM soit égal au côté BG. Enfin, prolongez les côtés DC & FE, jusqu'à ce qu'ils se rencontrent à un point H; & les côtés KI & LE, jusqu'à ce qu'ils se rencontrent à un point N.

Démonst. Le parallélogramme AC est

(n) au parrallélogramme BH, ce que le N. 350.
rectangle AI eſt au rectangle BN, puiſ-
que (n) ces parallélogrammes, de même N. 407.
que ces rectangles, ſont entr'eux, ce que
AB eſt à BE. Mais (n), le parallélogramme N. 350.
BH eſt au parallélogramme GE, ce que
le rectangle BN eſt au rectangle BL;
puiſque (n) ces parallélogrammes ſont N. 407.
entr'eux, ce que CB eſt à BG, que ces
rectangles ſont entr'eux, ce que IB eſt
à BM, & que [c] CB eſt à BG, ce que
IB eſt à BM. Donc (n), le parallélo- N. 389.
gramme AC eſt au parallélogramme GE,
ce que le rectangle AI eſt au rectangle
BL. Mais (n), le rectangle AI eſt le pro- N. 143.
duit de AB multiplié par IB, & le rec-
tangle BL eſt celui de BE multiplié par
BM. Donc, le parallélogramme AC eſt
au parallélogramme GE, ce que le pro-
duit de AB, multiplié par IB, eſt à celui
de BE multiplié par BM; & par conſé-
quent (n), ce que le produit de AB mul- N. 62.
tiplié par BC, eſt à celui de BE multi-
plié par BG, puiſque [c] BC eſt égal à
IB, & BG à BM. Donc, C. Q. F. D.

Corollaire.

445. Il ſuit de ce théorême, que *les triangles qui ont un angle égal à un*

angle, sont entr'eux en rapport composé de ceux des côtés qui forment ces angles égaux.

PROPOSITION XXIV.

THÉORÊME.

446. *Les parallélogrammes qui ont un angle commun, & leurs diagonales sur une même ligne droite, sont semblables.*

Fig. 31. LEs parallélogrammes GE * & DB, qui ont l'angle A commun, & dont les diagonales AF & AC sont sur la même ligne droite AC, sont semblables.

Démonst. Premierement, l'angle ex-
N. 130. térieur AEF est (n) égal à son opposé intérieur B, puisque les lignes EF & BC, qui sont paralleles chacune à la même
N. 132. ligne AD, le sont aussi entr'elles (n).
N. 62. L'angle AGF est (n) égal à l'angle D, puisque les angles AEF & B, qui [D]
N. 143. sont égaux entr'eux, le sont aussi (n), l'un à l'angle AGF, & l'autre à l'angle D.
N. 62. Enfin (n), l'angle GFE est égal à l'angle
N. 143. DCB, puisque (n) le même angle DAB est égal & à l'un & à l'autre.

Secondement, AE. AB :: EF. BC

(h), puisque (n) les triangles AFE & ACB, qui ont l'angle CAB commun, & l'angle AEF égal à l'angle B [D], sont équiangles. Pareillement, AG. AD :: GF. DC; puisque (n) ces dernieres lignes sont égales aux précédentes, chacune à chacune; savoir, GF à AE, DC à AB, AG à &c. N. 414., N. 137., N. 143.

Ainsi, dans les parallélogrammes GE & DB; les angles sont égaux aux angles, chacun à chacun; & les côtés qui forment ces angles égaux, sont proportionnels. Donc (n), ces parallélogrammes sont semblables; & par conséquent, C. Q. F. D. N. 402.

PROPOSITION XXV.

PROBLÊME.

447. *Décrire un polygone, qui soit semblable à un autre polygone donné, & égal à un troisieme aussi donné.*

IL faut décrire un polygone, qui soit semblable au polygone BCD *, & égal au polygone A. Fig. 32.

Const. Décrivez (n) sur l'un des côtés du polygone BCD, par exemple, sur le N. 167.

côté BD, un rectangle BE, qui ſoit égal à ce polygone ; & ſur l'un des côtés de ce rectangle, par exemple, ſur le côté DE, un rectangle DH, qui ſoit égal au po-
N. 426. lygone A. Cherchez enſuite (n) une moyenne proportionnelle DI, entre les
N. 435. côtés BD & DG. Enfin (n), décrivez ſur cette moyenne, un polygone DKI, qui ſoit ſemblable au polygone BCD, & il ſera le polygone demandé.

Démonſt. Les polygones BCD & DKI
N. 440. ſont entr'eux (n), ce que BD eſt à DG ; puiſque ces polygones ſont ſemblables [c], & que [c] ∺ BD. DI. DG. Mais
N. 407. (n), les rectangles BE & DH ſont auſſi
N. 350. entr'eux, ce que BD eſt à DG. Donc (n), le polygone BCD eſt au polygone DKI, ce que le rectangle BE eſt au rectangle
N. 369. DH ; & par conſéquent (n), puiſque [c] le premier polygone & le premier rectangle ſont égaux, le dernier polygone & le dernier rectangle le ſont auſſi. Mais [c], ce dernier rectangle eſt égal au po-
N. 62. lygone A. Donc (n), le dernier polygone lui eſt auſſi égal. D'ailleurs [c], ce même dernier polygone eſt ſemblable au polygone BCD. Par conſéquent, C. Q. F. F.

PROPOSITION XXX. †

PROBLÊME.

448. *Diviser en moyenne & extrême raison une ligne droite donnée.*

IL faut diviser la ligne droite AB *, en moyenne & extrême raison. Fig. 33.

Conft. Divisez (n) la ligne AB en deux parties, qui soient telles que le rectangle de cette ligne & de la plus petite partie CB, soit égal au quarré de la plus grande AC, & elle sera divisée, comme il est demandé. N. 203.

Démonft. Le rectangle des lignes AB & CB est égal au quarré de la ligne AC [c]. Donc (n), $\div$ AB. AC. CB; & par conséquent (n), la ligne AB est divisée, comme il est demandé. Donc, C. Q. F. F. N. 438. N. 404.

† Nous supprimons les propositions 26, 27, 28 & 29, parce qu'elles sont inutiles.

PROPOSITION XXXI.

THÉORÊME.

449. *Dans un triangle rectangle, le polygone quelconque décrit sur l'hypoténuse, est égal à la somme des deux autres polygones semblables, & semblablement posés sur les autres côtés.*

Fig. 34. SI les polygones X *, Y & Z, qui sont décrits sur les côtés AC, AB & BC du triangle rectangle ABC, sont semblables, & semblablement posés sur ces côtés; le polygone X, qui est sur l'hypoténuse AC, sera égal aux polygones Y & Z qui sont sur les autres côtés.

N. 97. *Const.* Du point B, abaissez (n) une perpendiculaire BD à l'hypoténuse AC.

Démonst. Puisque [H] les polygones
N. 414. X & Y sont semblables, & que (n) les
N. 420. triangles ABC & ADB qui (n) le sont aussi, donnent ∺ AC. AB. AD, le
N. 440. polygone X est au polygone Y (n), ce
N. 372. que AC est à AD; & par conséquent (n), en renversant, le polygone Y est au polygone X, ce que AD est à AC.

Pareillement, puisque [H], les polygones X & Z sont semblables, & que (n) les triangles ABC & BDC, qui (n) le sont aussi, donnent ∺ AC. BC. DC, le polygone X est au polygone Z (n), ce que AC est à DC; & par conséquent (n), en renversant, le polygone Z est au polygone X, ce que DC est à AC. N. 414 N. 420. N. 440. N. 372.

Ainsi, les six quantités Y, X, AD, AC, Z & DC, sont telles que les quatre premieres sont proportionnelles, & que la cinquieme, la seconde, la sixieme & la quatrieme, le sont aussi. Donc (n), la somme Y+Z de la premiere & de la cinquieme, est à la seconde X, ce que la somme AD+DC de la troisieme & de la sixieme, est à la quatrieme AC; & par conséquent, puisque cette derniere somme AD+DC, est égale à AC, la premiere Y+Z est égale à X. Donc, C. Q. F. D. N. 393.

PROPOSITION XXXIII.

THÉORÊME.

450. *Dans les cercles égaux, les secteurs sont entr'eux, comme les arcs qui les terminent.*

fig. 35. SI les cercles B * & E sont égaux, le secteur ABC sera au secteur DEF, ce que l'arc AHC est à l'arc DMF.

N. 262. *Const.* Divisez (n) le plus petit AC des deux arcs AC & DF, en tel nombre de parties égales qu'il vous plaira; par exemple, en quatre parties égales AG, GH, &c. Prenez sur l'arc DF, une partie DK égale à la partie AG. Enfin, tirez du centre B aux points G, H, &c. des rayons BG, BH, &c; & du centre E au point K, un rayon EK.

Démonst. Les secteurs ABG, GBH,
N. 7. HBI, IBC & DEK, sont égaux (n). Ainsi, l'on démontrera que le secteur ABC est au secteur DEF, ce que l'arc AHC est à l'arc DMF, par un raisonnement tout

† Nous supprimons la proposition 32, parce qu'elle est inutile.

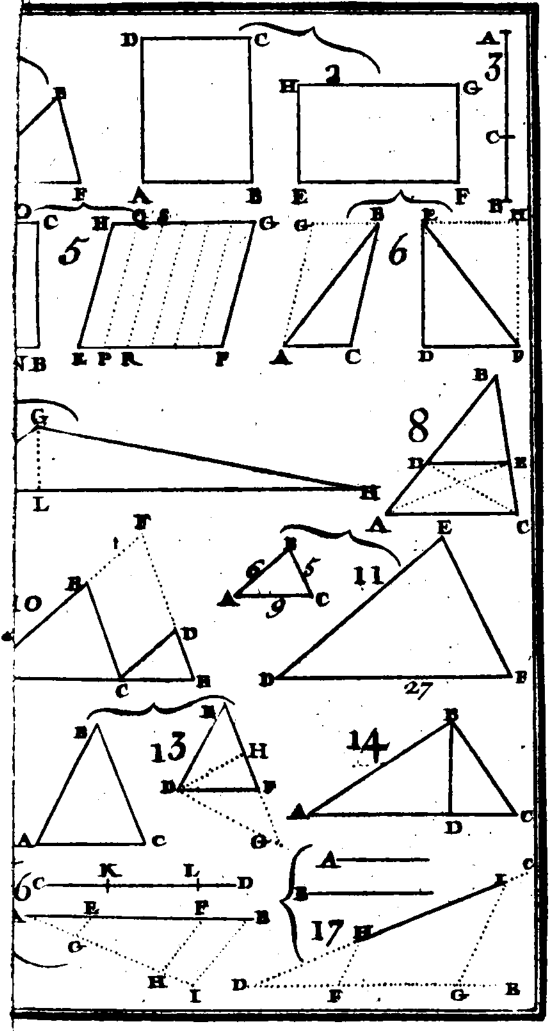
pareil

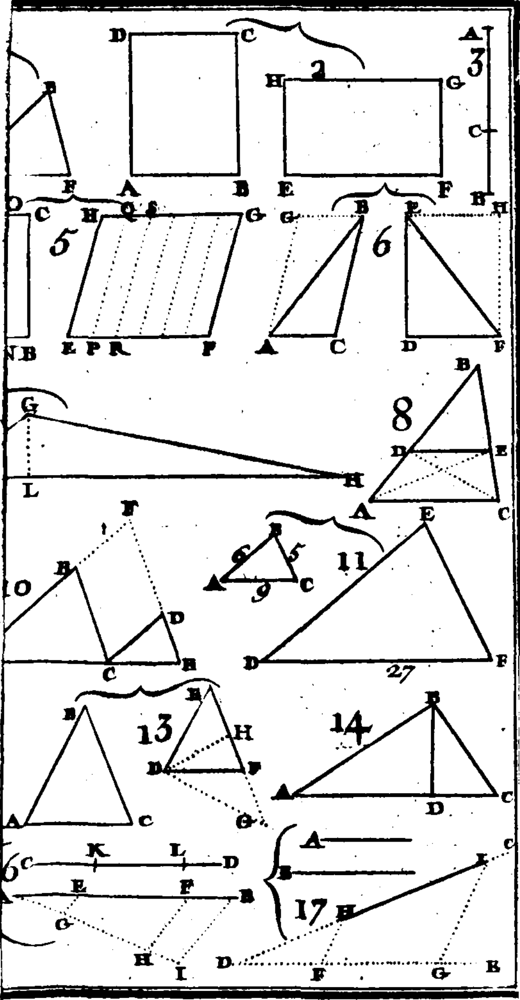
pareil à celui dont on s'est servi au n°. 407, pour démontrer que les parallélogrammes dont les hauteurs sont égales, sont entr'eux comme leurs bases. Par conséquent, C. Q. F. D.

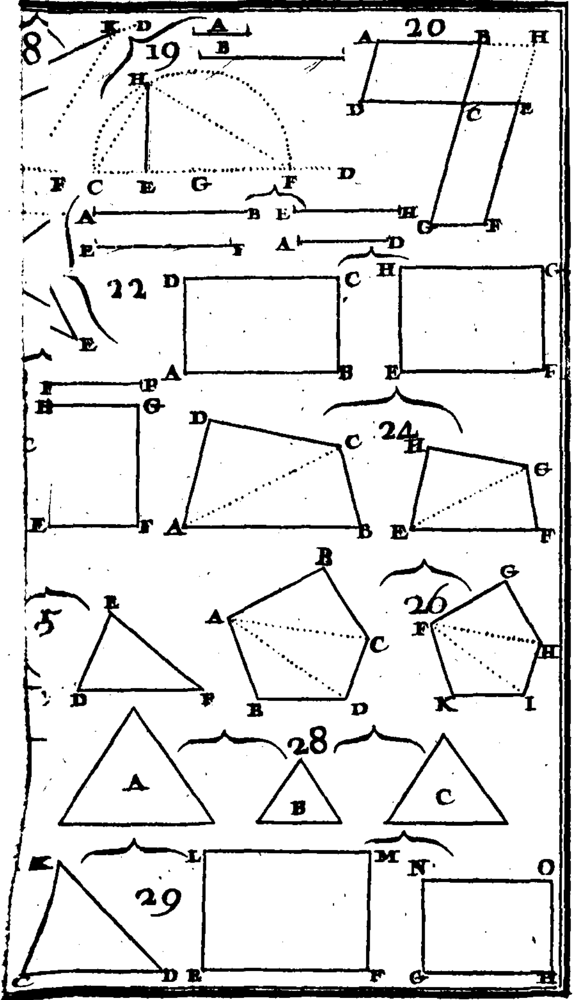
COROLLAIRE.

451. Il suit de ce théorême, que *dans le cercle, le secteur est au cercle, ce que l'arc du secteur est à la circonférence du cercle.*

Fin du sixieme Livre.


D C A B 2 H G E F 3 A C B
F O C H G 5 G E P R F 6 G B A C E H D F
NB
G L H
8 B D E A C
F E D C E 10
6 5 9 A C B 11 E D F 27
13 E H D F G B A C
14 B A D C
6 C K L D A E F B G H I
17 A B C H I D F G E

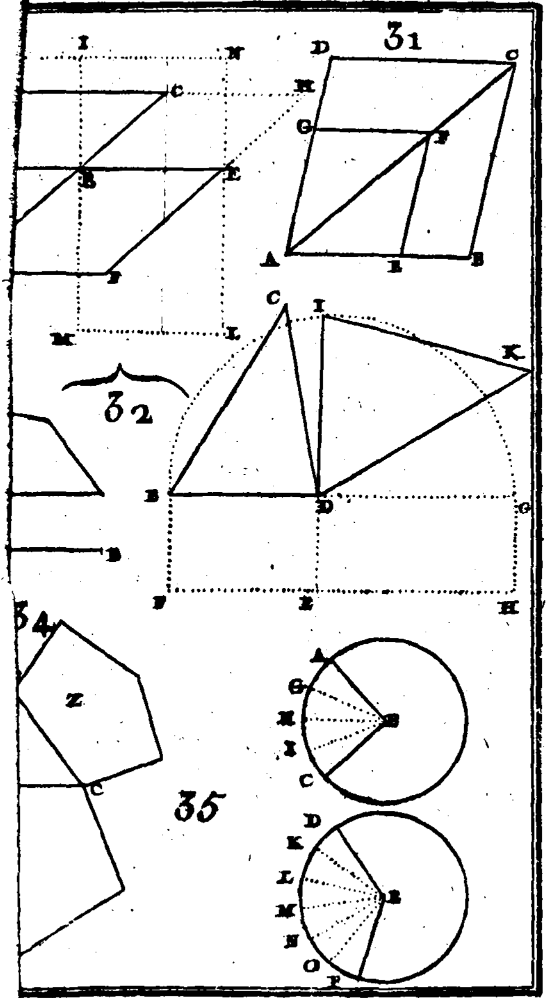

D
C
2
H
G
3
A
C
B
E
F
B
F
A
B
E
F
B
O
C
H
Q
S
G
5
G
B
P
H
6
NB
E
P
R
F
A
C
D
F
G
L
H
8
B
D
E
A
C
F
E
B
6
5
11
A
C
9
10
B
D
C
E
D
F
27
B
E
13
H
D
F
G
14
B
A
C
D
A
C
6
C
K
L
D
A
E
F
B
B
17
H
I
C
G
H
I
D
F
G
B



8
19
20
22
24
26
5
28
29

de
fic
tic
pe
&
d'E

le n
de c
mên
dere
inco
à d'a
nom


31
I
N
C
H
B
E
F
M
L
D
C
G
F
A
E
B
32
C
I
K
B
D
G
F
E
H
34
Z
C
35
A
G
H
I
B
C
D
K
L
E
M
N
O
F

LES ÉLÉMENS D'EUCLIDE.

LIVRE ONZIEME. ¶

LEs principes des lignes & des ſurfaces ont été établies dans les Livres précédens ; ainſi, il ne reſte plus à parler que de ceux des ſolides. Mais, il eſt néceſſaire de conſidérer auparavant, les différentes poſitions que les lignes droites & les plans peuvent avoir à l'égard d'autres plans : & cet objet ſeroit celui du onzieme Livre d'Euclide, ſi les perſonnes qui ont raſ-

¶ Nous ſupprimons le ſeptieme Livre, le huitieme & le neuvieme, parce que ces trois Livres ne traitent que de certaines propriétés des nombres : & nous faiſons la même choſe à l'égard du dixieme, parce qu'il ne conſidere les quantités, que pour déterminer celles qui ſont *incommenſurables* ; c'eſt-à dire, celles, qui relativement à d'autres, ne peuvent point être exprimées par des nombres.

semblé les écrits de ce Géometre, n'avoient pas confondu ce Livre avec le douzieme, qui traite des solides, de maniere que de 14 Livres d'Elémens, elles n'en ont fait que 13. Cette faute est irréparable, à cause du grand nombre d'Auteurs qui citent cet ouvrage. Ainsi, tout ce que nous avons pu faire, a été de ne point interrompre l'ordre des propositions : mais de diviser ce onzieme Livre en deux parties, dont la premiere comprend le onzieme d'Euclide, & la seconde, ce qui auroit dû faire le douzieme.

Au reste, cette premiere partie est absolument nécessaire, pour la Trigonométrie sphérique, la Gnomonique, l'Astronomie, les Sections coniques, la Coupe des pierres, &c, & la derniere, pour le Mesurage des solides.

DÉFINITIONS.

I.

452. ON nomme *corps*, ou *ſolide*, ce qui eſt étendu en trois ſens.

COROLLAIRE.

453. *Il ſuit de cette définition, que* les extrémités d'un corps ſont des ſurfaces.

Démonſt. *Les extrémités d'un corps ne ſont point étendues en trois ſens, puiſque ſi elles l'étoient, elles ſeroient des corps* (n). *Or, ſi les extrémités d'un corps* N. 452. *étoient des corps, elles auroient d'autres corps pour extrémités; & par conſéquent, elles ne ſeroient point celles de ce premier corps; mais, ce ſeroit ces autres corps qui le ſeroient.*

Elles ne ſont point non plus étendues ſeulement en un ſens. Car, puiſque (n) N. 452. *les corps ſont étendus en trois ſens, il faut néceſſairement que ce qui termine les corps, termine deux de ces ſens. Or, ce qui n'eſt étendu qu'en un ſens, ne peut point en terminer deux.*

Cependant, les extrémités d'un corps ſont étendues. Donc, elles ne le ſont qu'en

N. 9. *deux ſens ; & par conſéquent* (n) *, elles ſont des ſurfaces. Donc , C. Q. F. D.*

II.

454. On dit d'une ligne droite, qu'elle *eſt dans un plan*, lorſque toutes ſes parties ſont dans ce plan, prolongé s'il eſt néceſſaire.

Fig. 1. *Les lignes droites CD * & EF*, ſont dans le plan X.

455. On dit de deux lignes droites, qu'elles *ſont dans le même plan*, lorſque l'on peut concevoir un plan, dans lequel ces deux lignes ſeroient en même tems.

456. On dit de deux plans, qu'ils *ſont dans le même plan*, lorſqu'étant prolongés, ils ſe rencontreroient de maniere qu'ils ne formeroient plus qu'un ſeul plan.

457. Enfin, on nomme *commune ſection* de deux plans, une ligne qui eſt commune à ces deux plans.

Fig. 2. *La ligne AB *, qui eſt en même tems dans le plan X & dans le plan V, eſt la* commune ſection *de ces deux plans.*

III.

458. On dit d'une ligne droite, qu'elle eſt *perpendiculaire* à un plan, lorſqu'elle l'eſt à toutes les lignes de ce

plan, avec lesquelles elle peut avoir un point commun.

*La ligne AB * sera* perpendiculaire *au plan X; si elle l'est aux lignes CD, EF, &c. qui sont dans ce plan, & avec lesquelles elle a le point B commun.* Fig. 1.

IV.

459. On dit d'une ligne droite, qu'elle est *inclinée* à un plan, lorsqu'elle formeroit un angle aigu, avec une autre ligne droite qui seroit tirée du point auquel cette premiere ligne rencontre ce plan, au point auquel une perpendiculaire abaissée d'un point quelconque de cette même premiere ligne à ce même plan, le rencontreroit.

*La ligne droite AB * sera* inclinée *au plan X, si elle forme un angle aigu ABC†, avec la ligne BC qui est tirée du point B au point C, auquel la perpendiculaire AC rencontre ce plan.* Fig. 3.

V.

460. On dit d'un plan, qu'il est *perpendiculaire* à un autre, lorsque les lignes droites qui sont tirées dans l'un de ces plans, perpendiculairement à leur commune section, sont aussi perpendiculaires à l'autre plan.

† L'angle aigu ABC * s'appelle l'*inclinaison* de la ligne AB au plan X. Fig. 3.

Fig. 2. *Le plan Y * sera* perpendiculaire *au plan X, si les lignes droites CD, EF, &c. qui sont tirées dans le plan Y perpendiculairement à la commune section AB, sont aussi perpendiculaires au plan X.*

VI.

461. On dit d'un plan, qu'il est *incliné* à un autre, lorsque les lignes droites qui seroient tirées chacune dans chacun de ces plans, d'un même point de leur commune section, & perpendiculairement à leur commune section, formeroient des angles aigus.

Fig. 3. *Le plan Y * sera* incliné *au plan X, si les lignes droites BA & BC qui sont tirées, l'une dans le plan Y, & l'autre dans le plan X, perpendiculairement à la commune section ED, forment un angle aigu ABC †.*

VII.

462. On dit que des plans sont *également, ou semblablement*, inclinés à d'autres plans, chacun à chacun, lorsque leurs inclinaisons sont égales.

VIII.

463. On dit que des plans sont *parallèles*, lorsque tous les points des uns sont

Fig. 3. † L'angle aigu ABC * s'appelle l'*inclinaison* du plan Y au plan X.

également

également éloignés de tous les points correspondans des autres.

COROLLAIRE.

464. *Il suit de cette définition, que* des plans paralleles ne se rencontrent point.

IX.

465. On dit que des solides sont *semblables*, lorsqu'ils sont terminés par un pareil nombre de surfaces, semblables chacune à chacune.

466. On dit que des solides sont *semblables & égaux*, lorsqu'ils sont terminés par un pareil nombre de surfaces, semblables & égales, chacune à chacune.

467. Enfin, on dit que des solides sont *égaux*, lorsqu'ils contiennent des espaces égaux.

X.

468. On nomme *angle solide*, un angle formé par plus de deux angles plans, qui ont chacun le même point pour sommet, & ne sont point dans le même plan.

*L'angle A * qui est formé par les angles plans EAD, DAC, &c. qui ont chacun le même point A pour sommet, & ne sont point dans le même plan, est un* angle solide. Fig.

XI.

469. On nomme *pyramide*, un solide terminé par plus de deux plans triangulaires, qui ont chacun le même point pour sommet, & dont les côtés qui sont opposés à ce sommet, sont chacun dans le même plan.

Fig. 6. *Le solide ABCD* * *qui est formé par les triangles ABD, DBC & ABC, qui ont chacun le même point B pour sommet, & dont les côtés AD, DC & AC, sont chacun dans le même plan ADC* †, *est une* pyramide.

470. On nomme *pyramides triangulaires*, celles dont les bases sont des triangles : *pyramides quadrilatérales*, celles dont les bases sont des quadrilateres : *pyramides pentagones*, celles dont les bases sont des pentagones, & ainsi de suite.

XII.

471. On nomme *prisme*, un solide qui est terminé de deux côtés par deux plans quelconques, égaux, semblables & paralleles ; & de chaque autre côté, par un parallélogramme.

Fig. 7. *Le solide X* * *qui est terminé de deux côtés par les exagones CF & LI* ¶, *égaux,*

† Ce plan s'appelle la *base* de la pyramide.

¶ Ces deux plans s'appellent les *bases* du prisme.

semblables & paralleles ; & de chaque autre côté, par les parallélogrammes AG, HF, IE, &c. est un prisme.

472. On nomme *prismes triangulaires*, ceux dont les bases sont des triangles : *prismes quadrilatéraux*, ceux dont les bases sont des quadrilateres : *prismes pentagones*, ceux dont les bases sont des pentagones ; & ainsi de suite.

XIII.

473. On nomme *sphere*, un solide qui est terminé par une seule surface, dont tous les points sont également éloignés d'un certain point de ce solide.

*Le solide X * est une* sphere. Fig. 84

XIV.

474. On nomme *centre* d'une sphere, le point qui est également éloigné de tous les points de la surface de cette sphere.

*Le point C * est le* centre *de la sphere X.* Fig. 84

XV.

475. On nomme *diametre* d'une sphere, une ligne droite quelconque qui passe par le centre de cette sphere, & est terminée de part & d'autre à sa surface.

*La ligne AB * est un* diametre *de la sphere X.* Fig. 84

476. On nomme *rayon* d'une sphere,

une ligne droite quelconque qui est tirée du centre de cette sphere à sa surface.

Fig. 8. *La ligne CB* * *est un* rayon *de la sphere X.*

XVI.

477. On nomme *axe* d'une sphere, un diametre fixe de cette sphere, sur lequel elle tourne.

Fig. 8. *Le diametre AB* * *sera l'*axe *de la sphere X, si ce diametre étant immobile à l'égard de cette sphere, elle tourne sur lui.*

XVII.

478. On nomme *cône*, une espece de pyramide, dont la base est un cercle.

Fig. 9. *Le solide ABCD* * *est un* cône.

XVIII.

479. On nomme *axe* d'un cône, une ligne droite qui est tirée du sommet de ce cône, au centre de sa base

Fig. 9. *La ligne BE* * *est l'*axe *du cône ABCD.*

XIX.

480. On nomme *cône droit*, celui dont l'axe est perpendiculaire à la base; & *cône incliné*, celui dont l'axe est incliné à la base.

XX.

481. On nomme *cylindre*, une es-

pece de prisme, dont les bases sont des cercles égaux & paralleles.

Le solide X * *est un* cylindre. Fig. 10.

XXI.

482. On nomme *axe* d'un cylindre; une ligne droite qui est tirée du centre de la base supérieure de ce cylindre, au centre de sa base inférieure.

La ligne GH * *est l'*axe *du cylindre X*. Fig. 10.

XXII.

483. On nomme *cylindre droit*, celui dont l'axe est perpendiculaire à la base; & *cylindre incliné*, celui dont l'axe est incliné à la base.

XXIII.

484. On dit que des cônes sont *semblables*, lorsque leurs axes sont proportionnels aux diametres de leurs bases; & il en est de même des cylindres.

XXIV.

485. On nomme *exaëdre*, ou *cube*, un prisme qui est terminé par six quarrés.

XXV.

486. On nomme *tétraëdre*, une pyramide qui est terminée par quatre triangles équilatéraux & égaux.

XXVI.

487. On nomme *octaëdre*, un solide

qui eſt terminé par huit triangles équilatéraux & égaux.

XXVII.

488. On nomme *dodécaëdre*, un ſolide qui eſt terminé par douze pentagones réguliers & égaux.

XXVIII.

489. On nomme *icoſaëdre*, un ſolide qui eſt terminé par vingt triangles équilatéraux & égaux †.

XXIX.

490. Enfin, on nomme *parallelepipede*, un ſolide qui eſt terminé par ſix plans paralleles.

XXX.

491. On dit d'un ſolide, qu'il eſt *inſcrit* dans un autre, lorſqu'il a tous ſes angles dans la ſurface de cet autre.

XXXI.

492. Enfin, on dit d'un ſolide, qu'il eſt *circonſcrit* à un autre, lorſque ſa ſurface touche tous les angles de cet autre.

† Ces cinq derniers ſolides ; ſavoir, l'*exaëdre*, le *tétraëdre*, &c. s'appellent les *cinq corps réguliers*.

PREMIERE PARTIE.

DES PLANS.

PROPOSITION I.

THÉORÊME.

493. *Toutes les parties d'une ligne droite sont dans le même plan.*

UNE ligne droite AB * dans le plan X, & une ligne droite BC hors de ce plan, ne sont point une seule ligne droite. Fig. 11.

Const. Dans le plan X, élevez du point B (n), une perpendiculaire BE à la ligne AB, & une perpendiculaire BD à la ligne BE. N. 96.

Démonst. La somme des angles EBA, & EBD est (n) égale à celle de deux angles droits. Ainsi (n), les lignes BA & BD, qui [c] sont tirées du même point B de la ligne droite BE, ne sont qu'une seule ligne droite ABD ; & par conséquent, les lignes AB & BC, ne sont point une seule ligne droite. Donc, C. Q. F. D. N. 21. N. 101.

PROPOSITION II.

THÉORÊME.

494. *Deux lignes droites qui ont un point commun, sont dans le même plan.*

Fig. 12. LEs lignes droites AB * & CD qui ont le point E commun, sont dans le même plan.

Const. Tirez d'un point quelconque A, de la ligne AB à un point quelconque D de la ligne CD, une ligne droite AD.

Démonst. La partie A E est dans le plan du triangle A E D, puisqu'elle est l'un des côtés de ce triangle : & par une raison pareille, la partie DE y est aussi. Ainsi, les lignes AB & CD ont chacune une partie dans un même plan ; & par N. 493. conséquent (n), elles y sont aussi. Donc, C. Q. F. D.

PROPOSITION III.

THÉORÊME.

495. *La commune ſection de deux plans, eſt une ligne droite.*

LA commune ſection AB * des plans CD & EF, eſt une ligne droite. Fig. 15.

Démonſt. Si la ligne AB n'alloit pas directement du point A au point B, elle ne ſeroit point (n) la commune ſection des plans CD & EF; puiſque ſi elle ſe courboit, ou vers E, ou vers F, elle ne ſeroit point dans le plan CD; ſi elle ſe courboit, ou vers C, ou vers D, elle ne ſeroit point dans le plan EF; & ſi elle ſe courboit vers tout autre côté, elle ne ſeroit ni dans le plan CD, ni dans le plan EF. Or [H], cette ligne eſt la commune ſection de ces plans. Donc, elle va directement du point A au point B; & par conſéquent (n), elle eſt une ligne droite. Donc, C. Q. F. D. N. 457. N. 7.

PROPOSITION IV.

THÉORÊME.

496. *Si de trois lignes droites qui ont un point commun, l'une est perpendiculaire aux deux autres, elle le sera aussi à leur plan.*

Fig. 14. SI la ligne droite AB * est perpendiculaire aux lignes droites CD & EF, avec lesquelles elle a le point B commun, elle le sera aussi à leur plan X.

Const. Du point B, pris pour centre, & avec tel rayon qu'il vous plaira, prenez sur les lignes CD & EF, des parties égales BC, BE, BD & BF. Tirez du point C au point E, une ligne droite CE, & du point F au point D, une ligne droite FD. Par le point B, tirez dans le plan X, une ligne droite quelconque GH, qui rencontre les précédentes CE & FD, à deux points quelconques G & H. Enfin, tirez du point A aux points C, G, E, D, H & F, des lignes droites AC, AG, AE, AD, AH & AF.

Démonst. Premierement, dans les triangles ABC, ABE, ABD & ABF,

qui [H] sont tous rectangles en B, les côtés BC, BE, BD & BF, sont égaux [C], & le côté AB est commun. Ainsi (n), N. 83.
les côtés AC, AE, AD & AF, sont aussi égaux.

Secondement, dans les triangles EBC & DBF, l'angle EBC est (n) égal à l'an- N. 102.
gle DBF qui lui est opposé au sommet, & [C] les côtés BC & BE sont égaux aux côtés BD & BF, chacun à chacun. Ainsi (n), le côté CE est égal au côté N. 83.
FD, & l'angle BCE à l'angle BDF.

Troisiemement, dans les triangles GBC & HBD, le côté BC est égal au côté BD [C], l'angle BCE à l'angle BDF [D], & (n), l'angle CBG à l'angle N. 102.
DBH qui lui est opposé au sommet. Ainsi (n), le côté CG est égal au côté N 123.
DH, & le côté BG au côté BH.

Quatriemement, dans les triangles ACE & ADF, le côté AC est égal au côté AD [D], le côté AE au côté AF [D], & le côté CE au côté FD [D]. Ainsi (n), l'angle ACE est égal à l'angle N. 90.
ADF.

Cinquiemement, dans les triangles ACG & ADH, l'angle ACE est égal à l'angle ADF [D], le côté AC au côté AD [D], & le côté CG au côté DH [D].

N. 83. Ainſi (n), le côté AG eſt égal au côté AH.

Sixiemement, enfin, dans les triangles ABG & ABH, le côté AG eſt égal au côté AH [D], le côté BG au côté BH [D], & le côté AB eſt commun.
N. 90. Ainſi (n) l'angle ABG eſt égal à l'angle
N. 19. ABH; & par conſéquent (n), la ligne AB eſt perpendiculaire à la ligne GH.

Or, la même démonſtration ſubſiſte, en quelque endroit du plan X que l'on tire la ligne GH, pourvu qu'elle paſſe par le point B. Donc, la ligne AB eſt perpendiculaire à toutes les lignes de ce plan, avec leſquelles elle peut avoir un
N. 458. point commun; & par conſéquent (n), elle l'eſt auſſi à ce même plan. Donc, C. Q. F. D.

PROPOSITION V.

THÉORÊME.

497. *Si de quatre lignes droites qui ont un point commun, l'une est perpendiculaire aux trois autres, ces trois dernieres seront chacune dans le même plan.*

SI la ligne droite AB * est perpendiculaire aux lignes droites BC, BD, & BE, avec lesquelles elle a le point B commun, ces trois dernieres lignes seront chacune dans le même plan. Fig. 15.

Démonst. Puisque [H] les lignes BC & BD ont le point B commun, elles sont dans un même plan X (n). Ainsi, si la ligne BE est la commune section de ce plan & d'un autre plan quelconque, les lignes BC, BD & BE, seront chacune dans un même plan, puisqu'alors (n), cette ligne BE sera aussi dans le plan X. N. 494. N. 455.

Or, la ligne BE est la commune section de ce dernier plan & du plan Y, qui est celui des lignes AB & BE. Car, puisque [H] la ligne AB est perpendicu-

laire aux lignes BC & BD, elle l'est
N. 496. aussi (n) au plan X de ces lignes; & par
N. 458. conséquent (n), à toutes les lignes de ce plan, avec lesquelles elle peut avoir un point commun. Or, elle a nécessairement le point B commun avec la commune section de ce même plan & du plan Y. Donc, elle est perpendiculaire à cette commune section. Mais, de toutes les lignes droites que l'on peut tirer du point B, dans le plan Y, la ligne BE est la seule à laquelle cette ligne AB puisse être perpendiculaire; puisque [H] elle l'est à cette derniere ligne, & que du même point on ne peut élever dans un même plan, qu'une seule perpendiculaire à une même ligne droite. Donc, cette ligne BE est la commune section du plan X & du plan Y; & par conséquent, C. Q. F. D.

PROPOSITION VI.

THÉORÊME.

498. *Si deux lignes droites sont perpendiculaires chacune au même plan, elles seront paralleles.*

SI les lignes droites AB * & CD sont perpendiculaires chacune au plan X, elles seront paralleles. Fig. 16.

Const. Tirez du point B au point D, une ligne droite BD. Du point D, élevez dans le plan X (n), une perpendiculaire DE à cette ligne BD. Faites cette perpendiculaire égale à la ligne AB. Enfin, tirez du point B au point E, une ligne droite BE; & du point A aux points E & D, des lignes droites AE & AD. N. 96.

Démonst. Les lignes AB & CD sont (n) perpendiculaires chacune à la ligne BD, puisque [H] elles le sont chacune au plan X. Ainsi (n), si elles sont chacune dans le même plan, elles seront paralleles. N. 458. N. 129.

Or, ces lignes sont chacune dans le même plan. Car, puisque les triangles

ABD & BDE, qui ont le côté BD commun, & le côté AB égal au côté DE
N. 458. [c], ſont rectangles, l'un en B (n), & l'autre en D [c], le côté AD eſt égal au
N. 83. côté BE (n). Ainſi, les triangles ADE & ABE, qui ont le côté AE commun, & le côté AB égal [c] au côté DE, ont encore le côté AD égal au côté BE; &
N. 90. par conſéquent (n), l'angle ADE eſt
N. 458. égal à l'angle ABE. Mais (n), ce dernier angle eſt droit. Donc, l'angle ADE
N. 21. l'eſt auſſi. Ainſi (n), la ligne DE eſt perpendiculaire à la ligne AD; & par conſéquent, puiſqu'elle l'eſt auſſi & à la
N. 458. ligne BD [c], & à la ligne CD (n), cette ligne CD eſt dans le même plan
N. 497. que les lignes AD & BD (n). Or, la ligne AB y eſt auſſi; puiſqu'elle eſt l'un des côtés du triangle ADB, dont ces lignes AD & BD ſont les autres côtés. Donc, les lignes AB & CD ſont chacune dans le même plan; & par conſéquent, C. Q. F. D.

COROLLAIRE.

499. Il ſuit de la démonſtration de ce théorême, que *ſi deux lignes droites ſont paralleles, elles ſeront chacune dans le même plan.*

PROPOSITION

PROPOSITION VII.

THÉORÊME.

500. *Si une ligne droite en rencontre deux autres qui sont paralleles, elle sera dans le même plan que ces dernieres.*

SI les lignes droites AB * & CD sont paralleles, la ligne droite EF qui les rencontre aux points E & F, sera dans le même plan qu'elles. Fig. 17.

Démonst. Si l'on suppose que le plan des paralleles AB & CD soit coupé par un autre plan quelconque qui passe par les points E & F, la commune section de ces deux plans y passera aussi. Ainsi, ces deux points seront communs, & à cette commune section, & à la ligne droite EF. Mais (n), cette même commune section sera aussi une ligne droite. Donc (n), la ligne droite EF sera cette commune section. Or, puisque la ligne EF est la commune section du plan des paralleles AB & CD & d'un certain autre plan, elle est (n) dans le même plan que

N. 455.
N. 74.
N. 457.

ces paralleles ; & par conséquent, C. Q. F. D.

PROPOSITION VIII.

THÉORÊME.

501. *Si de deux lignes droites qui sont paralleles, l'une est perpendiculaire à un plan, l'autre le sera aussi au même plan.*

Fig. 16. SI la ligne droite AB*, qui est parallele à la ligne CD, est perpendiculaire au plan X, la ligne CD le sera aussi.

Const. La même que celle du n°. 498.

Démonst. Les lignes AD & BD rencontrent [c] les lignes AB & CD, qui
N. 500. sont paralleles [H]. Ainsi (n), ces quatre lignes sont chacune dans le même plan.
N. 496. Or (n), la ligne DE est perpendiculaire à ce plan ; puisqu'elle l'est & à la ligne BD [c], & à la ligne AD, par une démonstration pareille à celle du n°. 498.
N. 458. Donc (n), elle est aussi perpendiculaire à
N. 131. la ligne CD. Mais (n), la ligne BD est aussi perpendiculaire à cette même ligne

CD. Donc (n), cette ligne CD est perpendiculaire au plan X; & par conséquent, C. Q. F. D. N. 496.

PROPOSITION IX.

THÉORÊME.

502. *Si deux lignes droites sont paralleles chacune à une même ligne, elles le seront aussi entr'elles, quand même elles ne seroient point dans le même plan que cette derniere.*

SI les lignes droites AB * & CD, qui ne sont point dans le même plan que la ligne EF †, sont paralleles chacune à cette derniere ligne, elles le seront aussi entr'elles. Fig. 18.

Const. Du point G, pris à volonté sur la ligne EF, abaissez (n) une perpendiculaire GH à la ligne AB, & une perpendiculaire GI à la ligne CD. N. 97.

Démonst. La ligne EF est (n) perpendiculaire & à la ligne GH, & à la ligne N. 131.

† Nous supposons ici que les trois lignes proposées ne sont point dans le même plan; puisque si elles y étoient, cette proposition seroit la même que la trentieme du premier Livre, n°. 132.

N. 496. GI. Ainsi (n), elle l'est aussi au plan de ces lignes. Mais [H], les lignes AB & CD sont paralleles chacune à cette ligne
N. 501. EF. Donc (n), elles sont aussi perpendiculaires chacune à ce même plan ; & par
N. 498. conséquent (n), elles sont aussi paralleles entr'elles. Donc, C. Q. F. D.

PROPOSITION X.

THÉORÊME.

503. *Si deux angles dont les sommets regardent le même côté, ont leurs côtés paralleles, chacun à chacun, ils seront égaux, quand même ils ne seroient point dans le même plan.*

Fig. 19. SI les côtés BA * & BC sont paralleles aux côtés ED & EF, chacun à chacun, les angles ABC & DEF seront égaux, quand même ils seroient dans des plans différens.

Const. Prenez à volonté sur les côtés des angles proposés, des parties égales BA & ED, BC & EF. Tirez ensuite, des points A, B & C, aux points D, E & F, des lignes droites AD, BE & CF, & des points A & D aux points

C & F, des lignes droites AC & DF.

Démonst. Puisque dans le quadrilatere AE, les côtés BA & ED sont égaux [c] & paralleles [H], le côté AD est (n) égal N. 1422 & parallele au côté BE. Mais (n), le côté N. 142. CF est aussi égal & parallele au même côté BE; puisque dans le quadrilatere CE, les côtés BC & EF sont aussi égaux [c] & paralleles [H]. Donc (n), les cô- N. 622. tés AD & CF du quadrilatere CD sont & 142. égaux & paralleles; & par conséquent (n), le côté AC est égal au côté DF. N. 1424.

Ainsi, dans les triangles ABC & DEF, le côté BA est égal au côté ED [c], le côté BC au côté EF [c], & le côté AC au côté DF [D]. Donc (n), l'angle ABC N. 904. est égal à l'angle DEF; & par conséquent, C. Q. F. D.

PROPOSITION XI.

PROBLÊME.

504. *D'un point donné hors d'un plan, abaisser une perpendiculaire à ce plan.*

Fig. 20. IL faut abaisser du point A *, une perpendiculaire au plan X.

Const. Tirez à volonté dans le plan X, une ligne droite BC. Abaissez du point
N. 97. A (n), une perpendiculaire AD à cette ligne. Du point D, élevez dans le même
N. 96. plan (n), une perpendiculaire DE à cette
N. 97. même ligne. Enfin (n), abaissez du point A, une perpendiculaire AE à la ligne DE; & elle sera la perpendiculaire demandée.

Pour la démonstration. Tirez par le
N. 133. point E (n), une parallele FG à la ligne BC.

Démonst. La ligne BC est perpendi-
N. 496. culaire au plan du triangle ADE (n), puisque [c] elle l'est & à la ligne AD, & à la ligne DE. Ainsi, puisque [c] la ligne FG est parallele à cette ligne BC,
N. 501. elle est aussi (n) perpendiculaire au même
N. 458. plan; & par conséquent (n), la ligne AE

est perpendiculaire à cette ligne FG. Mais [c], la même ligne AE est aussi perpendiculaire à la ligne DE. Donc (n), N. 496. elle l'est au plan X; & par conséquent, C. Q. F. F.

PROPOSITION XII.

PROBLÊME.

505. *D'un point donné dans un plan, élever une perpendiculaire à ce plan.*

IL faut élever du point A *, une perpendiculaire au plan X. Fig. 211.

Conſt. Du point B, pris à volonté hors du plan X, abaissez (n) une perpendiculaire BC à ce plan. N. 504. Tirez ensuite par le point A (n), une parallele AD à cette ligne BC, N. 133. & elle sera la perpendiculaire demandée.

Démonſt. La ligne BC est perpendiculaire au plan X [c]. Ainsi, puisque [c] la ligne AD est parallele à cette ligne BC; elle est aussi (n) perpendiculaire au même plan; N. 501. & par conséquent, C. Q. F. F.

PROPOSITION XIII.

THÉORÊME.

506. *D'un même point, on ne peut ni élever, ni abaisser, plus d'une perpendiculaire au même plan.*

Fig. 22. ON ne peut du point A *, élever plus d'une perpendiculaire au plan X, ni du point B, lui en abaisser plus d'une.

Démonst. Les lignes droites qui sont perpendiculaires chacune au même plan,
N. 498. sont paralleles (n). Ainsi (n), elles n'ont
N. 56. aucun point commun; & par conséquent, C. Q. F. D.

COROLLAIRE.

507. Il suit de ce théorême, que *si deux plans sont perpendiculaires, toute ligne droite qui sera tirée d'un point quelconque de l'un de ces plans, perpendiculairement à l'autre, passera par leur commune section.*

Fig. 23. Si le plan Y * est perpendiculaire au plan X, toute perpendiculaire à ce dernier

nier plan, qui sera tirée d'un point quelconque A du premier, passera par leur commune section CD.

Const. Abaissez du point A (n), une perpendiculaire AB à la commune section CD. N. 97

Démonst. La ligne AB est dans le plan Y, puisque [c] ses points A & B y sont. Ainsi, puisque [c] elle est perpendiculaire à la commune section CD, elle l'est aussi au plan X (n). Or, cette ligne, qui N. 466
(n) est la seule perpendiculaire à ce plan, N. 506.
que l'on puisse tirer du point A, passe par la commune section CD. Donc, toute ligne droite qui étant tirée du même point ne passera pas par cette commune section, ne sera point perpendiculaire à ce plan; & par conséquent, C. Q. F. D.

PROPOSITION XIV.

THÉORÊME.

508. *Si une même ligne droite est perpendiculaire à deux plans, ces plans seront paralleles.*

SI la ligne droite AB * est perpendiculaire & au plan AD, & au plan BC, ces plans seront paralleles. Fig. 24

S f

Conſt. Du point D, pris à volonté dans
N. 133. le plan AD, tirez (n) une parallele DC à la ligne AB. Tirez enſuite, des points A & B aux points D & C, des lignes droites AD & BC.

Démonſt. Les lignes AD & BC ſont
N. 500. chacune dans le même plan (n); puiſque [c] elles rencontrent les lignes AB & DC qui ſont paralleles [c]. Ainſi, puiſ-
N. 458. que (n) elles ſont perpendiculaires chacune à la même ligne AB, elles ſont auſſi
N. 129. paralleles (n). Donc, le quadrilatere AC eſt un parallélogramme; & par con-
N. 143. ſéquent (n), le point D eſt auſſi éloigné du point C, que le point A l'eſt du point B. Or, la même démonſtration ſubſiſte, à quelque point du plan AD que l'on prenne le point D. Donc, tous les points de ce plan ſont également éloignés de tous les points correſpondans
N. 463. du plan BC; & par conſéquent (n), ces deux plans ſont paralleles. Donc, C. Q. F. D.

PROPOSITION XV.

THÉORÊME.

509. *Si deux angles qui sont dans des plans différens, ont leurs côtés paralleles, chacun à chacun, ces plans seront aussi paralleles.*

SI les côtés BA * & BC, ED & EF des angles ABC & DEF, qui sont l'un dans le plan X & l'autre dans le plan Y, sont paralleles chacun à chacun, ces plans seront aussi paralleles. Fig. 251

Const. Abaissez du point B (n), une perpendiculaire BG au plan Y. Tirez ensuite (n), du point G auquel cette perpendiculaire rencontre ce plan, une parallele GI au côté EF; & une parallele GH au côté ED. N. 504. N. 133.

Démonst. Les lignes BC & GI sont paralleles entr'elles (n); puisqu'elles le sont l'une [H] & l'autre [C] à la même ligne EF: & par une raison pareille, les lignes BA & GH sont aussi paralleles. Ainsi (n), la ligne BG est perpendiculaire à la ligne BC, puisque (n) elle l'est à la ligne GI; & à la ligne BA, puisque N. 502. N. 131. N. 458.

N. 458. (n) elle l'eſt à la ligne GH ; & par conſéquent (n), elle eſt auſſi perpendiculaire
N. 496. au plan X. Or, puiſque la ligne BG, qui [c] eſt perpendiculaire au plan Y, l'eſt auſſi au plan X [D], ces deux plans
N. 508. ſont paralleles (n) ; & par conſéquent, C. Q. F. D.

PROPOSITION XVI.

THÉORÊME.

510. *Si deux plans qui ſont coupés par un troiſieme, ſont paralleles, leurs communes ſections ſeront auſſi paralleles.*

Fig. 26. SI les plans X * & Y, qui ſont coupés par le plan Z, ſont paralleles, leurs communes ſections AB & CD ſeront auſſi paralleles.

Démonſt. Lorſque des lignes droites qui ſont chacune dans le même plan, ne ſont point paralleles, elles ſe rencontrent, ſi on les prolonge autant qu'il eſt néceſſaire. Or, les communes ſections
N. 495. AB & CD ſont des lignes droites (n),
N. 457. qui ſont chacune dans le plan Z (n) : mais étant prolongées autant qu'on le voudra, elles ne ſe rencontreront point ; puiſque

(n) elles sont aussi l'une dans le plan X, N. 457.
& l'autre dans le plan Y, qui (n) ne se N. 464.
rencontrent point. Donc, elles sont paralleles; & par conséquent, C. Q. F. D.

PROPOSITION XVII.

THÉORÊME.

511. *Si des plans qui coupent plusieurs lignes droites, sont paralleles, ces lignes seront coupées proportionnellement.*

SI les plans X *, Y & Z, qui coupent les lignes droites AB & CD, Fig 27.
sont paralleles, AE sera à EB, ce que CF est à FD.

Const. Tirez du point A au point D, une ligne droite CD.

Démonst. Dans le triangle BAD, la ligne EG est parallele au côté BD (n); N. 510.
puisque cette ligne & ce côté sont les communes sections des plans Y & Z, qui sont paralleles [H], & du plan BAD. Ainsi (n), AE. EB :: AC. GD. Or, on N. 412.
démontre par des raisons pareilles, que dans le triangle ADC, CF. FD :: AG. GD. Donc (n), AE. EB :: CF. FD; & N. 350.
par conséquent, C. Q. F. D.

PROPOSITION XVIII.

Théorême.

512. *Si une ligne droite eſt perpendiculaire à un plan, tous les plans dans leſquels cette perpendiculaire ſe trouvera, ſeront auſſi perpendiculaires à ce même plan.*

Fig. 28. SI la ligne droite AB * qui eſt dans le plan Y, eſt perpendiculaire au plan X; le plan Y ſera auſſi perpendiculaire au plan X.

Conſt. Du point F, pris à volonté dans
N. 133. la commune ſection CD, tirez (n) une parallele EF à la ligne AB.

Démonſt. Puiſque [H] la ligne AB eſt perpendiculaire au plan X, la ligne EF qui lui eſt parallele [c], eſt auſſi perpen-
N. 501. diculaire au même plan (n); & par con-
N. 458. ſéquent (n) à la commune ſection CD. Or, il en eſt de même de toutes les paralleles à la ligne AB que l'on peut tirer
N. 460. dans le plan Y. Donc (n), ce plan eſt perpendiculaire au plan X; & par conſéquent, C. Q. F. D.

PROPOSITION XIX.

THÉORÊME.

513. *Si deux plans qui se coupent sont perpendiculaires chacun à un troisieme, leur commune section lui sera aussi perpendiculaire.*

Si les plans Y * & Z sont perpendiculaires chacun au plan X, leur commune section AB lui sera aussi perpendiculaire. Fig. 29.

Démonst. La commune section AB doit être en même tems dans le plan Y & dans le plan Z (n). Or, si elle inclinoit vers C, ou vers D, elle ne seroit point dans le plan Z; si elle inclinoit vers E, ou vers F, elle ne seroit point dans le plan Y; & si elle inclinoit vers tout autre côté, elle ne seroit dans aucun de ces plans. Donc, elle n'incline vers aucun côté; & par conséquent, elle est perpendiculaire. Donc, C. Q. F. D. N. 457.

SECONDE PARTIE.

DES SOLIDES.

PROPOSITION XX.

THÉORÊME.

514. *Si trois angles plans forment un angle solide, chacun de ces angles sera plus petit que la somme des deux autres.*

Fig. 30. LA somme de deux quelconques des trois angles plans BAC *, CAD & BAD, qui forment l'angle solide A (par exemple, celle des angles BAC & CAD) est plus grande que l'angle BAD.

Const. Sur le côté AB du plus grand
N. 120. des angles proposés, décrivez (n) un angle BAE qui ait le point A pour sommet, & soit égal à l'angle BAC. Prenez à volonté sur les côtés AC & AE, des parties égales AC & AE. Du point B, pris à volonté sur le côté AB, tirez au point C une ligne droite BC; & par

le point E, une ligne droite BED. Enfin, tirez auſſi du point C au point D, une ligne droite CD.

Démonſt. Les triangles BAC & BAE ont [c] l'angle BAC égal à l'angle BAE, le côté AC au côté AE, & le côté AB commun. Donc (n), le côté BC eſt égal N. 85.
au côté BE; & par conſéquent, puiſque (n) dans le triangle BCD, la ſomme des N. 115.
côtés BC & CD eſt plus grande que le côté BED, ſi de cette ſomme on retranche le côté BC, & de ce côté le côté BE, le reſte CD de cette ſomme ſera plus grand que le reſte ED de ce côté. Ainſi, dans les triangles CAD & EAD, le côté AC eſt égal au côté AE [c], & le côté AD eſt commun; mais le côté CD eſt plus grand que le côté ED. Donc (n), N. 12[illegible]
l'angle CAD eſt auſſi plus grand que l'angle EAD; & par conſéquent, puiſque les angles BAC & BAE ſont égaux [c], la ſomme des angles BAC & CAD eſt plus grande que l'angle BAD, qui eſt celle des angles BAE & EAD. Donc, C. Q. F. D.

PROPOSITION XXI.

THÉORÊME.

515. *La somme de tous les angles plans qui forment un angle solide, est plus petite que celle de quatre angles droits.*

Fig. 31. LA somme des angles plans BAC *, CAD & BAD, qui forment l'angle solide A, est plus petite que celle de quatre angles droits.

Démonst. Dans le triangle BCD, la somme des angles BCD, CDB & CBD, est égale à celle de deux angles droits
N. 132. (n). Or (n), les angles ACB & ACD
N. 514. valent plus que l'angle BCD, puisque l'angle C est un angle solide : & par une raison pareille, les angles ADC & ADB valent plus que l'angle CDB ; & les angles ABC & ABD, plus que l'angle CBD. Donc, les six angles ACB, ACD, ADC, ADB, ABC & ABD, valent plus de deux angles droits. Mais
N. 132. (n), ces six mêmes angles ne valent que six angles droits, avec les angles BAC, CAD & BAD ; puisqu'avec ces trois

derniers, ils sont tous les angles des triangles BAC, CAD & BAD. Donc, ces trois derniers angles ne valent point quatre angles droits; & par conséquent, C. Q. F. D.

COROLLAIRE.

516. Il suit de ce théorême, que *les seules figures régulieres dont les angles puissent former des angles solides, ne sont que les triangles équilatéraux, les quarrés & les pentagones.*

PROPOSITION XXIV. †

THÉORÊME.

517. *Si tous les plans qui terminent un solide sont paralleles, chacun à chacun, ils seront des parallélogrammes, dont les opposés seront égaux & semblables.*

SI tous les plans AC*, EG, ED, &c. qui terminent le solide X, sont paralleles, chacun à chacun, ils seront des Fig. 324.

† Nous supprimons les propositions 22 & 23, parce qu'elles sont inutiles.

parallélogrammes, dont les opposés AC & EG, ED & FC, &c. seront égaux & semblables.

Démonst. Les côtés AD & BC sont
N. 510. paralleles (n), puisqu'ils sont les communes sections des plans paralleles [H] AH & BG & du plan AC : & par une raison pareille, les côtés AB & DC sont aussi paralleles. Or, on démontre de la même maniere le parallélisme des côtés, dans les quadrilateres EG, ED,
N. 57. FC, &c. Ainsi (n), tous ces quadrilateres sont des parallélogrammes. Mais
N. 143. (n), puisque tous ces quadrilateres sont des parallélogrammes, 1°. les côtés AB & EF du quadrilatere EB sont égaux, & les côtés AD & EH du quadrilatere ED le sont aussi : d'ailleurs, les angles
N. 503. DAB & HEF sont égaux (n) ; puisque
N. 143. (n) leurs côtés AD & AB, EH & EF, sont paralleles chacun à chacun. Ainsi, les parallélogrammes AC & EG sont égaux & semblables. 2°. Par des raisons pareilles, les parallélogrammes ED & FC, EB & HC, sont aussi égaux & semblables. Par conséquent, C. Q. F. D.

PROPOSITION XXVIII. †

THÉORÊME.

518. *Si un plan coupe diagonalement deux des plans opposés d'un parallelepipede, il divisera ce solide en deux parties, qui seront égales & semblables.*

DANS le parallelepipede X *, le plan AG, qui coupe diagonalement les deux parallélogrammes opposés ED & FC, divise ce solide en deux parties égales & semblables EGA & DBH. Fig. 351

Démonst. Le plan EB est égal & semblable au plan HC, & le plan EG au plan AC; puisque dans les parallelepipedes, les plans opposés sont égaux & semblables (n). Or, le plan EAH est aussi égal & semblable au plan DHA, & le plan FBG au plan CGB; puisque (n) les parallélogrammes sont divisés par leurs diagonales, en deux parties égales & semblables. Donc (n), les solides EGA & DBH, qui sont terminés par

N. 517. N. 143. N. 466.

† Nous supprimons les propositions 25, 26 & 27, parce qu'elles sont inutiles.

ces plans & par un plan commun AG, ſont égaux & ſemblables ; & par conſéquent, C. Q. F. D.

PROPOSITION XXIX.

THÉORÊME.

519. *Les parallelepipedes qui ſont ſur une même baſe, & entre mêmes plans paralleles, ſont égaux.*

Fig. 34. & 35. LEs parallelepipedes X * & Y, qui ſont ſur la même baſe BD, & entre les mêmes plans paralleles AC & EOL, ſont égaux.

Les côtés EF & IK ſont chacun dans la même ligne droite ; ou ils n'y ſont point.

PREMIER CAS.

Fig. 34. *Lorſque les côtés EF * & IK ſont chacun dans la même ligne droite EK.*

Démonſt. Le plan AH eſt égal & ſemblable au plan DG, & le plan AM au plan DL ; puiſque dans les parallelepipedes, les plans oppoſés ſont égaux & ſemblables (n). Le plan HI eſt auſſi égal &
N. 517.

ſemblable au plan GK ; puiſque (n) les N. 517.
plans EG & IL ſont égaux & ſemblables l'un & l'autre au plan BD. Enfin, par une démonſtration pareille à celle du n°. 147, le plan AEI eſt égal & ſemblable au plan DFK ; & le plan BHM au plan CGL. Donc (n), les ſolides AME N. 466.
& DLF qui ſont terminés par ces plans, ſont égaux ; & par conſéquent, ſi l'on retranche de chacun le même ſolide NMF qui leur eſt commun, les reſtes, qui ſeront les ſolides AOE & DOK, ſeront auſſi égaux (n). Mais, puiſque ces ſoli- N. 64.
des ſont égaux, ſi l'on ajoute à chacun le même ſolide DBN, les ſommes ſeront égales (n). Or, ces ſommes ſeront les N. 63.
parallelepipedes X & Y. Donc, ces parallelepipedes ſont égaux.

SECOND CAS.

*Lorſque les côtés AF * & IK ne ſont* Fig. 35.
point chacun dans la même ligne droite.

Conſt. Prolongez les côtés EF, HG, MI & LK, juſqu'à ce qu'ils ſe rencontrent à des points N, O, P & Q. Tirez enſuite, des points A, B, C & D, aux points N, O, P & Q, des lignes droites AN, BO, CP & DQ.

Démonſt. Le plan QO eſt [c] égal

semblable, & parallele au plan DB;
N. 490. ainsi (n), le solide DBOQ est un parallelepipede. Or, ce parallelepipede & le parallelepipede X sont égaux [D]; puisque [C] ils sont sur la même base BD & entre les mêmes plans paralleles AC & EOL, & qu'ils ont leurs côtés NO & EF dans la même ligne droite EO: & ce même parallelepipede & le parallelepipede Y sont aussi égaux [D]; puisque [C] ils sont aussi sur la même base BD & entre les mêmes plans paralleles AC & EOL, & que leurs côtés NQ & IM sont aussi dans la même ligne
N. 62. droite NM. Donc (n), les parallelepipedes X & Y sont égaux.

Par conséquent, C. Q. F. D.

Corollaire.

520. Il suit de ce théorême, que *les parallelepipedes qui sont sur des bases égales, & entre mêmes plans paralleles, sont égaux.*

Scholie.

521. *Comme le mesurage des solides dépend primitivement de celui des parallelepipedes rectangles, nous allons enseigner*

enseigner la maniere de mesurer ces figures, conformément à ce que nous avons promis au n°. 149.

Mesurer un solide, c'est (n) *considérer combien de fois il contient un certain cube que l'on prend pour mesure. Ainsi, pour savoir mesurer un parallelepipede rectangle, il s'agit de savoir déterminer la maniere dont il contient le cube que l'on veut prendre pour mesure.* N. 148.

Or, il est évident que si le parallélogramme AC, qui est l'une des faces d'un parallelepipede rectangle quelconque DL que l'on se propose de mesurer, contient, par exemple, 4 quarrés AF, HG, &c. égaux chacun à la base* st *du cube M (que nous supposons être la mesure dont on veut se servir) ce parallelepipede pourroit être divisé en quatre autres EK, FL, &c. qui auroient chacun une base AF, HG, FD, &c. égale à cette base* st. *Et si la hauteur AI contient, par exemple, 3 fois la hauteur* su *de cette mesure M, il est encore évident que chacun des parallelepipedes EK, FL, &c. pourroit être subdivisé en trois autres, qui auroient aussi la même hauteur que cette même mesure M. Ainsi, tout le parallelepipede rectangle DL pourroit être divisé* Fig. 36.

en 4 fois 3, ou 12 solides égaux chacun à la mesure M, & contient par conséquent 12 parties égales chacune à cette mesure.

D'où l'on conclut cette regle générale du mesurage des parallelepipedes rectangles.

522. La solidité † d'un parallelepipede rectangle est égale au produit du nombre des mesures quarrées qui sont contenues dans sa base, multiplié par le nombre des mesures courantes qui se trouvent dans sa hauteur : *ou, pour nous servir de l'expression ordinaire*, un parallelepipede rectangle est égal au produit de sa base multipliée par sa hauteur.

Et cette regle convient également à un Fig. 37. *parallelepipede incliné quelconque X* *. N. 519. *Car, puisque* (n) *ce parallelepipede incliné est égal à un parallelepipede rectangle Y qui seroit sur une même base AB que lui, & entre mêmes plans paralleles AB & GH, on aura également la solidité du parallelepipede incliné X, comme celle du parallelepipede rectangle Y, en multipliant la base AB par la hauteur EF. Or, c'est la même chose de multiplier cette base par la hauteur EF, ou de la multiplier par la hauteur CD, puisque*

† La solidité se nomme aussi le *volume*;

les plans AB & GH étant paralleles, ces hauteurs ſont égales.

PROPOSITION XXXII. ¶

THÉORÊME.

523. *Les parallelepipedes dont les hauteurs ſont égales, ſont entr'eux comme leurs baſes.*

SI les hauteurs des parallelepipedes AL * & MX ſont égales, le parallelepipede AL ſera au parallelepipede MX, ce que le parallélogramme AC eſt au parallélogramme MO. Fig. 38.

Conſt. Diviſez la plus petite AC des deux baſes AG & MO, en tel nombre de parallélogrammes égaux qu'il vous plaira; par exemple, en trois parallélogrammes égaux AF, EH & GC. Décrivez enſuite ſur le côté MR (n), un N. 165. parallélogramme MS qui ſoit égal au parallélogramme AF, & qui ait l'angle RMN pour l'un de ſes angles. Enfin,

¶ Nous ſupprimons les propoſitions 30 & 31, parce qu'elles ſont inutiles.

faites passer par chaque ligne de division EF & GH, des plans EI & GK paralleles au plan BL; & par la ligne PS, un plan PT parallele au plan NX.

Démonst. Les parallelepipedes AI,
N. 520. EK, GL & MT, sont égaux (n); puisqu'ils ont des bases égales [c], & des hauteurs égales [H]. Ainsi, l'on démontrera que le parallelepipede AL est au parallelepipede MX, ce que la base AC est à la base MO, par un raisonnement tout pareil à celui dont on s'est servi au n°. 407, pour démontrer que les parallélogrammes qui ont des hauteurs égales, sont aussi entr'eux comme leurs bases. Par conséquent, C. Q. F. D.

PROPOSITION XXXIII.

THÉORÊME.

524. *Les parallelepipedes ſemblables ſont entr'eux en rapport triplé de ceux de leurs côtés pareils.*

SI les parallelepipedes AD * & BM ſont ſemblables, le rapport du premier au ſecond, ſera triplé de celui du côté AB au côté BC. Fig. 37.

Conſt. Diſpoſez les parallelepipedes AD & BM, de maniere que les côtés BC & BG du plan ſupérieur BO, déviennent les prolongemens des côtés AB & FB du plan inférieur AF. Prolongez enſuite le parallelepipede AD, juſqu'à ce que les plans MC & CK ſoient un même plan MQN; & le parallelepipede BM, juſqu'à ce que les plans LH & HK ſoient auſſi un même plan LHK.

Démonſt. Le parallelepipede AD eſt au parallelepipede BK (n), ce que la baſe AF eſt à la baſe BN : la baſe AF eſt à la baſe BN (n), ce que le côté AB eſt au côté BC : le côté AB eſt au côté BC N. 523. N. 407.

N. 465. (n), ce que le côté FB eſt au côté BG †: N. 407. le côté FB eſt au côté BG (n), ce que la baſe FC eſt à la baſe BO : enfin, la baſe N. 523. FC eſt à la baſe BO (n), ce que le parallelepipede BK eſt au parallelepipede N. 350. BL. Donc (n), le parallelepipede AD eſt au parallelepipede BK, ce que le même parallelepipede BK eſt au parallepipede N. 334. BL; & par conſéquent (n), ces trois parallelepipedes ſont en proportion continue.

Pareillement, le parallelepipede BK N. 523. eſt au parallelepipede BL (n), ce que la baſe FC eſt à la baſe BO : la baſe FC eſt N. 407. à la baſe BO (n), ce que le côté FB eſt au côté BG : le côté FB eſt au côté BG N. 465. (n), ce que le côté HB eſt au côté BI : le N. 407. côté HB eſt au côté BI (n), ce que la baſe HC eſt à la baſe BP : enfin, la baſe N. 523. HC eſt à la baſe BP (n), ce que le parallelepipede BL eſt au parallelepipede BM. N. 350. Donc (n), le parallelepipede BK eſt au parallelepipede BL, ce que le même parallelepipede BL eſt au parallelepipede N. 334. BM; & par conſéquent (n), ces trois derniers parallelepipedes ſont auſſi en proportion continue.

† Les côtés pareils des ſolides ſemblables ſont proportionnels, puiſque les ſolides ne ſont ſemblables, que parce que les plans qui les terminent le ſont auſſi.

Ainſi, les quatre parallelepipedes AD, BK, BL & BM, ſont en proportion continue ; & par conſéquent (n), le rapport N. 348.
du premier au dernier eſt triplé de celui du premier au ſecond. Mais (n), le rap- N. 523.
port du premier au ſecond eſt le même que celui de la baſe AF à la baſe BN ; & par conſéquent (n), le même que N. 407.
celui du côté AB au côté BC. Donc (n), N. 62.
le rapport du parallelepipede AD au parallelepipede BM, eſt triplé de celui du côté AB au côté BC ; & par conſéquent, C. Q. F. D.

COROLLAIRE.

525. Il ſuit de ce théorême, & du n°. 348, que *ſi quatre lignes droites ſont en proportion continue, un parallelepipede quelconque décrit ſur la premiere, ſera à un parallelepipede ſemblable, & ſemblablement poſé ſur la ſeconde, ce que cette premiere ligne eſt à la quatrieme.*

PROPOSITION XXXIV.

THÉORÊME.

526. *Dans les parallelepipedes, si les solidités sont égales, les bases & les hauteurs seront réciproquement proportionnelles: & si les bases & les hauteurs sont réciproquement proportionnelles, les solidités seront égales.*

PREMIEREMENT.

Fig. 40. SI les parallelepipedes Y * & X sont égaux, la base CD sera à la base AB, ce que la hauteur AE est à la hauteur CG.

Const. Prenez sur la hauteur CG, une partie CF égale à la hauteur AE. Faites ensuite passer par le point F, un plan FH parallele à la base CD.

Démonst. La base CD est à la base AB
N. 523. (n), ce que le solide CH est au solide X, ou [H] Y: le solide CH est au solide Y
N. 523. (n), ce que la base CI est à la base CK:
N. 407. enfin (n), la base CI est à la base CK, ce que la hauteur CF, ou [C] AE, est
N. 350. à la hauteur CG. Donc (n), la base CD est à la base AB, ce que la hau-

teur

teur AE eſt à la hauteur CG; & par conſéquent, C. Q. F. 1°. D.

SECONDEMENT.

Si dans les parallelepipedes Y * & X, la baſe CD eſt à la baſe AB, ce que la hauteur AE eſt à la hauteur CG, ces parallelepipedes ſeront égaux. Fig. 441

Conſt. La même que la précédente.

Démonſt. Le ſolide CH eſt au ſolide X (n), ce que la baſe CD eſt à la baſe N. 525. AB : la baſe CD eſt à la baſe AB [H], ce que la hauteur AE, ou [c] CF, eſt à la hauteur CG : la hauteur CF eſt à la hauteur CG (n), ce que la baſe CI eſt N. 407. à la baſe CK : enfin (n), la baſe CI eſt N. 523. à la baſe CK, ce que le ſolide CH eſt au ſolide Y. Donc (n), le ſolide CH eſt N. 350. au ſolide X, ce que le même ſolide CH eſt au ſolide Y; & par conſéquent (n), N. 356. les ſolides Y & X ſont égaux. Donc, C. Q. F. 2°. D.

PROPOSITION XXXVI. †

THÉORÊME.

527. *Si trois lignes droites sont en proportion continue, deux parallelepipedes équiangles qui seront décrits, l'un avec ces trois lignes, & l'autre avec la moyenne, seront égaux.*

Fig. 41. SI dans les parallelepipedes X * & Y qui sont équiangles, le côté AC est moyen proportionnel entre les côtés AB & AD, & si les côtés EG, EF & EH, sont égaux chacun au côté AC, ces parallelepipedes seront égaux.

N. 97. *Const.* Abaissez du point C (n), une perpendiculaire CI au côté AB; & du point G, une perpendiculaire GK au côté EF.

Démonst. Puisque [H] les parallélogrammes BD & FH sont équiangles, le
N. 444. premier est au second (n), ce que le produit du côté AB, multiplié par le côté AD, est à celui du côté EF multiplié

† Nous supprimons la proposition 35, parce qu'elle est inutile.

par le côté EH. Or (n), ces produits N. 363
ſont égaux ; puiſque [H], AB. EF :: EH.
AD. Donc, ces parallélogrammes le ſont
auſſi. Mais (n), les perpendiculaires CI N. 1253
& GK ſont auſſi égales ; puiſque dans les
triangles ACI & EGK, qui [c] ſont
rectangles l'un en I, & l'autre en K, le
côté AC eſt égal au côté EG [H], &
l'angle CAB à l'angle GEF [H]. Donc,
les ſolides X & Y ont des baſes égales,
& des hauteurs égales ; & par conſé-
quent (n), ils ſont égaux. Donc, C. Q. N. 520
F. D.

PROPOSITION XXXVII.

THÉORÊME.

528. *Si quatre lignes droites ſont proportionnelles, les parallelepipedes ſemblables, & ſemblablement poſés ſur les deux premieres, ſeront proportionnels aux parallelepipedes ſemblables, & ſemblablement poſés ſur les deux dernieres : & ſi deux parallelepipedes ſemblables ſont proportionnels à deux autres parallelepipedes auſſi ſemblables, les côtés pareils des premiers ſeront proportionnels aux côtés pareils des derniers,*

PREMIEREMENT.

Fig. 41. SI AB *. CD : : EF. GH, les parallelepipedes V & X, qui ſont ſemblables, & ſemblablement poſés ſur les deux premieres, ſeront proportionnels aux parallelepipedes Y & Z, qui ſont auſſi ſemblables, & ſemblablement poſés ſur les deux dernieres.

Démonſt. La même que celle de la premiere partie du n°. 442, en y ſubſtituant les noms de *parallelepipede* & de *rapport triplé*, à ceux de *polygone* & de *rapport doublé*.

SECONDEMENT.

Si les parallelepipedes V * & X qui Fig. 42.
sont semblables, sont proportionnels aux parallelepipedes Y & Z qui sont aussi semblables, les côtés, par exemple, AB & CD des deux premiers, seront proportionnels aux côtés EF & GH des deux derniers.

Démonst. La même que celle de la seconde partie du n°. 442, en y substituant le nom de *parallelepipede*, à celui de *polygone*.

SCHOLIE.

529. *Tout ce que nous démontrons des parallelepipedes, depuis la proposition* 519 *inclusivement, convient pareillement aux prismes triangulaires; parce qu'un prisme triangulaire quelconque FDA* *, Fig. 43.
peut toujours être considéré comme étant la moitié d'un parallelepipede EN, coupé diagonalement par un plan CF. Or, puisque ce que nous disons des parallelepipedes convient pareillement à tous les

prismes triangulaires, il convient aussi à tous les prismes en général; puisqu'il n'y a point de prisme, quel qu'il soit, qui ne puisse être divisé en prismes triangulaires; par la même raison qu'il n'y a point de polygone qui ne puisse être divisé en triangles.

PROPOSITION XL. †

THÉORÊME.

530. *Si deux prismes triangulaires qui ont pour bases, l'un un triangle, & l'autre un parallélogramme double de ce triangle, ont des hauteurs égales, ils seront égaux.*

Fig. 43. DANS les prismes triangulaires FDA & MKG, dont les hauteurs sont égales, si le triangle EDF, qui est la base du premier, n'est que la moitié du parallélogramme LI qui est celle du second, ces prismes seront égaux.

N. 518. *Démonst.* Les prismes FDA & MKG sont (n) les moitiés, l'un du parallele-

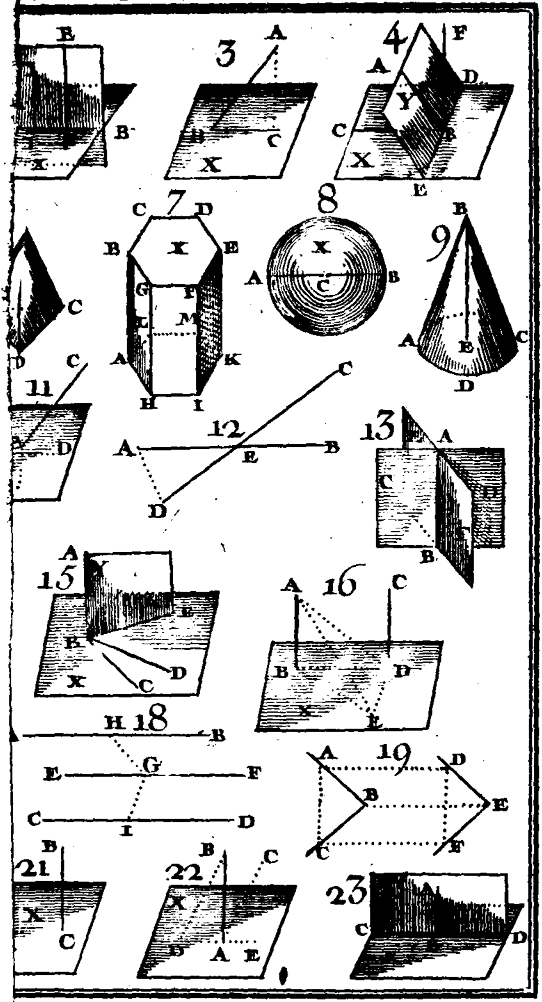
† Nous avons fait de la trente-huitieme proposition, un corollaire de la treizieme, n°. 507 : & nous supprimons la trente-neuvieme, parce qu'elle est inutile.

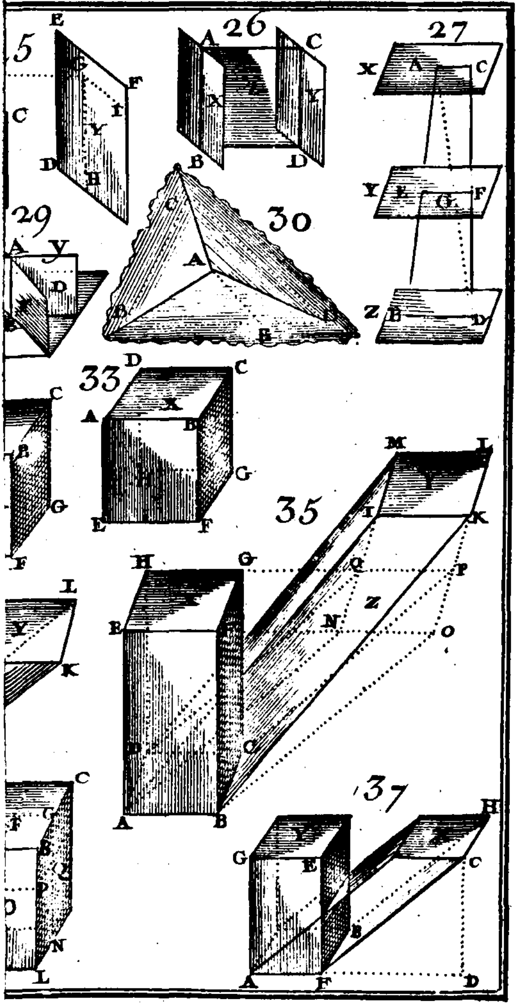
pipede EN, & l'autre du parallelepipede LO. Or (n), ces parallelepipedes ſont égaux, puiſqu'ils ont des hauteurs égales [H]; & que le triangle EDF n'étant [H] que la moitié du parallélogramme LI, les baſes EP & LI ſont auſſi égales. Donc (n), les priſmes FDA & MKG ſont égaux; & par conſéquent, C. Q. F. D.

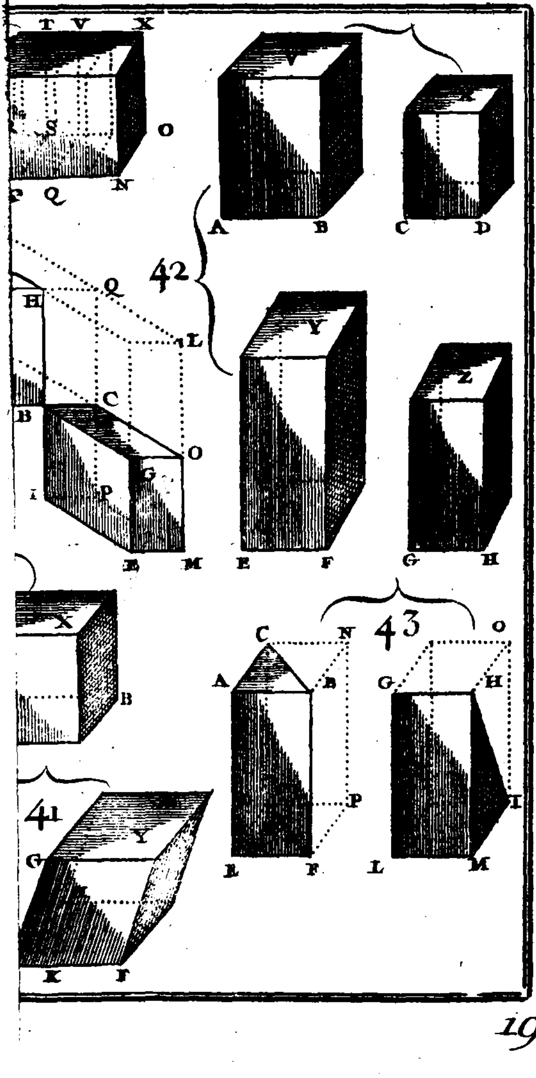
N. 520.

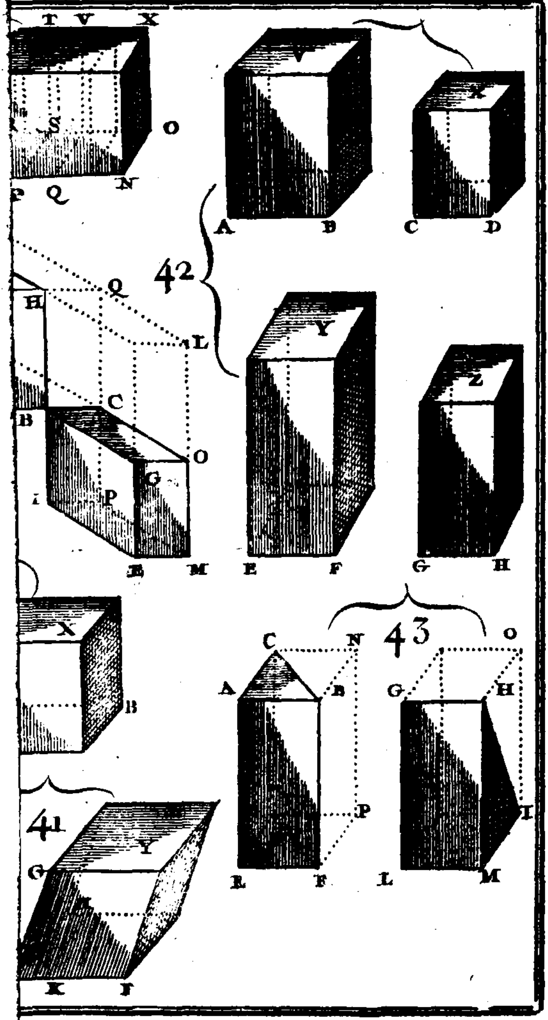
N. 68.

Fin du onzieme Livre.


3
4
7
8
9
11
12
13
15
16
18
19
21
22
23


5
26
27
29
30
33
35
37


T V X
S O
Q N
A B C D
42
Q
H L
C
B O
G
I P
E M E F G H
Y
Z
43
C N O
A B G H
X
B
P
41
Y
G
L
E F L M
K F


T V X
S
O
P Q N
V
X
A B C D
42
Q
H
L
C
B
O
G
I P
E M E F G H
Y
Z
X
B
43
C N O
A B G H
P I
E F L M
41
Y
G
K I

LES ÉLÉMENS D'EUCLIDE.

LIVRE DOUZIEME.

CE Livre est le dernier de ceux des Elémens d'Euclide qui sont nécessaires. Les deux premieres propositions suivent si naturellement la vingt-deuxieme du sixieme Livre, qu'il est surprenant qu'on ait pu les transporter ici. La troisieme & la quatrieme deviennent inutiles, parce qu'elles ne servent qu'à démontrer la cinquieme; & nous le faisons d'une maniere différente de celle d'Euclide. Ainsi, nous les supprimons, & nous mettons à leur place les deux seules du treizieme Livre qui soient utiles. Toutes les propositions qui suivent, depuis la cinquieme jusqu'à la quinzieme inclusivement, *considerent les pyramides, les cylindres & les cônes. Nous supprimons aussi la seizieme & la dix-septieme, qui ne sont d'aucun usage. Mais, comme Euclide ne parle, ni de la solidité de la sphere, ni de sa surface, nous substituons à ces deux propositions, notre démonstration de cette solidité, & celle des démonstrations ordinaires de cette surface, qui nous paroît la plus simple. Enfin, la dix-huitieme proposition, qui est la derniere de ce Livre, détermine les rapports que les spheres ont entr'elles.*

PROPOSITION I.

THÉORÊME.

551. *Si des polygones qui sont inscrits dans des cercles, sont semblables, ils seront entr'eux comme les quarrés des diametres de ces cercles.*

Fig. 1. SI les polygones ACE * & FHK, qui sont inscrits, l'un dans le cercle X, & l'autre dans le cercle Y, sont semblables, ils seront entr'eux ce que le quarré du diametre BL est à celui du diametre GM.

Conſt. Tirez des points B & L aux points D & C, des lignes droites BD & LC; & des points G & M aux points I & H, des lignes droites GI & MH.

Démonſt. Puiſque [H] les polygones ACE & FHK ſont ſemblables, l'angle BCD eſt égal à l'angle GHI (n), & les N. 402. côtés BC & CD ſont proportionnels aux côtés GH & HI (n). Ainſi (n), les trian- N. 402. gles BCD & GHI ſont équiangles; & N. 417. par conſéquent, l'angle BDC eſt égal à l'angle GIH. Mais, puiſque ces deux angles ſont égaux, l'angle BLC qui (n) N. 250. eſt égal au premier, & l'angle GMH qui (n) l'eſt au ſecond, ſont auſſi égaux N. 250. (n). Donc, puiſque (n) les triangles BCL N. 52. & GHM ſont rectangles, l'un en C, & N. 263. l'autre en H, ils ſont auſſi équiangles (n); & par conſéquent (n), les quatre N. 137. lignes BC, GH, BL & GM, ſont pro- N. 414. portionnelles. Or [H], les polygones ACE & GHK ſont des figures ſemblables, & ſemblablement poſées ſur les deux premieres; & (n) les quarrés des N. 402. diametres BL & GM ſont auſſi des figures ſemblables, & ſemblablement poſées ſur les deux dernieres. Donc (n), N. 440. ces deux polygones ſont entr'eux comme ces deux quarrés; & par conſéquent, C. Q. F. D.

PROPOSITION II.

THÉORÊME.

532. *Les cercles sont entr'eux, comme les quarrés de leurs diametres.*

Fig. 1. LE cercle X * est au cercle Y, ce que le quarré du diametre BL est à celui du diametre GM.

N. 410. *Démonst.* On peut (n) supposer dans le cercle X, un polygone régulier, d'un si grand nombre de côtés, que sa différence à ce cercle soit absolument insensible, & s'en imaginer aussi un pareil dans le cercle Y. Or, puisque [s] ces polygones seront semblables, ils seront
N. 531. entr'eux (n) ce que le quarré du diametre BL est à celui du diametre GM. Donc, puisque [s] les cercles X & Y ne different point de ces mêmes polygones, ils sont aussi entr'eux, ce que le quarré du diametre BL est à celui du diametre GM; & par conséquent, C. Q. F. D.

COROLLAIRE.

533. Il suit de ce théorême, que *les cercles sont entr'eux comme les polygones semblables qui y sont inscrits.*

---

*PROPOSITION III.

THÉORÊME.

554. *Si une ligne droite est composée des côtés d'un exagone & d'un décagone, réguliers l'un & l'autre, & inscrits chacun dans le même cercle, elle sera divisée en moyenne & extrême raison,*

SI les parties EF * & DE de la ligne droite DF sont les côtés d'un exagone & d'un décagone, réguliers l'un & l'autre, & inscrits chacun dans le même cercle, cette ligne sera divisée en moyenne & extrême raison au point E. Fig. 1.

Const. Des points D & E, pris pour centres, & avec un rayon égal à la partie EF, décrivez deux arcs qui se coupent à un point G. De ce point, pris pour centre, & avec le même rayon, décrivez un cercle EDC. Enfin, tirez du même centre G aux points D, E & F, des lignes droites GD, GE & GF.

Démonst. L'angle EGD est de 36
N. 37. degrés, puisque (n) il a pour mesure l'arc DE, qui [H] est la dixieme partie
N. 86. de la circonférence. Ainsi (n), puisque [c] le triangle DGE est isoscele, l'an-
N. 135. gle GED est de 72 degrés. Mais (n), cet angle qui est extérieur au triangle GEF, est double de l'angle F; puisque [c] ce triangle est aussi isoscele. Donc, l'angle F est aussi de 36 degrés; & par conséquent, puisque l'angle D est commun aux triangles GFD & DGE, ces
N. 137. deux triangles sont équiangles (n). Or
N. 414. (n), puisque ces deux triangles sont équiangles, DF. DG :: DG. DE. Donc
N. 61. (n) puisque [c] EF est égal à DG; DF.
N. 404. EF :: EF. DE; & par conséquent (n), C. Q. F. D.

COROLLAIRE.

535. Il suit de ce théorême, que *si une ligne droite est divisée en moyenne & extrême raison, les deux segmens seront les côtés d'un exagone & d'un déca-*

gone, réguliers l'un & l'autre, & inscrits chacun dans le même cercle.

---

*PROPOSITION IV.

THÉORÊME.

536. *Le quarré du côté du pentagone régulier qui est inscrit dans un cercle, est égal à la somme des quarrés des côtés de l'exagone régulier & du décagone régulier, qui seroient aussi inscrits chacun dans le même cercle.*

LE quarré du côté AB * du pentagone régulier ACE, qui est inscrit dans le cercle G, est égal aux quarrés des côtés de l'exagone régulier & du décagone régulier, qui seroient aussi inscrits chacun dans le même cercle. Fig. 18.

Const. Divisez (n) l'arc AFB, en deux parties égales AF & FB; & l'arc FHB, aussi en deux parties égales FH & HB. Tirez ensuite, du centre G aux points A, F, H & B, des lignes droites GA, GF, GH & GB; & du point F aux points A, I & B, des lignes droites FA, FI & FB. N. 261.

Démonst. L'angle AGB est de 72 de-
N. 37. grés, puisque (n) il a pour mesure l'arc AFB, qui [H] est la cinquieme partie de
N. 86. la circonférence. Ainsi (n), puisque [c] le triangle AGB est isoscele, l'angle GBA est de 54 degrés. Or, l'angle AGH est aussi
N. 37. de 54 degrés, puisque (n) il a aussi pour mesure l'arc AFH, qui [c] est les trois quarts de l'arc AFB. Donc, puisque l'angle GAB est commun aux triangles AGB & AIG, ces deux triangles sont équian-
N. 137. gles (n). Ainsi (n), AB. AG : : AG. AI;
N. 414. N. 433. & par conséquent (n), le rectangle de AB & de AI est égal au quarré de AG.

Mais (n), l'angle GHF † est égal à
N. 83. l'angle GHB, & le côté HF au côté HB; puisque les arcs FH & HB étant égaux [c], les triangles HGF & HGB qui ont le côté GF égal au côté GB, & le côté GH commun, ont aussi (n) l'angle FGH égal à l'angle BGH.
N. 37. Ainsi, puisque le côté HI est commun aux triangles FHI & BHI, le côté FI est égal au côté BI (n); & par conséquent,
N. 83. le triangle FIB est isoscele. Or, le triangle AFB l'est aussi, puisque les côtés AF

† Le peu d'espace de la figure nous a obligés d'indiquer par une seule lettre H, & le milieu de l'arc FHB, & le point auquel le rayon GH coupe la corde FB.

&

& FB sont égaux (n). Donc, puisque N. 260.
l'angle ABF est commun à ces deux
triangles, ils sont équiangles (n). Ainsi N. 137.
(n), AB. FB :: FB. IB; & par consé- N. 414.
quent (n), le rectangle de AB & de IB N. 433.
est égal au quarré de FB.

Donc, la somme des rectangles faits, l'un du côté AB & de la partie AI, & l'autre du même côté AB & de la partie IB, est égale à celle des quarrés des lignes
AG & FB. Mais (n), cette premiere N. 182.
somme est la même chose que le quarré du côté AB, puisque les lignes AI & IB sont toutes les parties de ce côté; & les lignes AG & FB sont les côtés, l'une
(n) de l'exagone régulier, & l'autre [c] N. 510.
du décagone régulier, qui seroient inscrits chacun dans le cercle G. Donc, le quarré du côté AB est égal aux quarrés des côtés de l'exagone régulier & du décagone régulier, qui seroient inscrits chacun dans le cercle G; & par conséquent, C. Q. F. D.

USAGE.

537. *On déduit de cette proposition, & du corollaire qui la précede, une solution du problême suivant, qui est beaucoup plus simple que celle que nous en avons donnée au n°. 298.*

Inſcrire un pentagone régulier, dans
Fig 11. un cercle donné CFI. *

CONST. *Tirez un diametre CD, à vo-*
N. 96. *lonté. Elevez du centre E* (n), *une per-
pendiculaire EF à ce diametre. Diviſez*
N. 94. (n) *le rayon CE, en deux parties égales
CG & GE. Tirez du point G au point F,
une ligne droite GF. Prenez ſur le dia-
metre CD, une partie GH égale à cette
ligne GF. Enfin, tirez du point F au
point H, une ligne droite FH; & cette
ligne ſera égale au côté du pentagone de-
mandé.*

DÉMONST. *La ligne CH eſt diviſée en
deux parties CE & EH, &* [c] *le point*
N. 190. *G eſt le milieu de la partie CE. Ainſi* (n),
*le rectangle des lignes CH & EH, avec
le quarré de la partie GE, eſt égal au
quarré de la ligne GH; & par conſéquent,
à celui de la ligne GF; puiſque* [c] *les*
N. 171. *lignes GH & GF ſont égales. Mais* (n),
*les quarrés des lignes GE & EF ſont
auſſi égaux au quarré de la même ligne*
N. 62. *GF. Donc* (n), *le rectangle précédent,
avec le quarré de la ligne GE, eſt égal
aux quarrés des lignes GE & EF; & par*
N. 64. *conſéquent* (n), *ce même rectangle eſt
égal au quarré de la ligne EF; ou, ce*
N. 35. *qui eſt la même choſe* (n), *à celui de la
ligne CE.*

Ainsi (n), *CH. CE* :: *CE. EH. Donc* N. 433.
(n), *la ligne CH est divisée en moyenne* N. 404.
& extrême raison au point E ; & par conséquent, puisque (n), *la partie CE est le* N. 310.
côté de l'exagone régulier inscrit dans le cercle CFI, la partie EH est (n) *celui du* N. 535.
décagone régulier inscrit dans le même cercle. Mais (n), *la ligne EF est aussi le* N. 310.
côté de ce même exagone. Donc, puisque (n) *le quarré de la ligne FH est égal aux* N. 171.
quarrés des lignes EF & EH, il est égal à ceux des côtés de l'exagone régulier & du décagone régulier, inscrits chacun dans le cercle CFI ; & par conséquent (n), N. 536.
cette ligne est égale au côté du pentagone régulier inscrit aussi dans le même cercle. Donc, C. Q. F. F.

PROPOSITION V.

THÉORÊME.

538. *Si deux pyramides qui ont le même point pour sommet, ont chacune pour base l'une des deux parties d'un même parallélogramme divisé par sa diagonale, elles seront égales.*

Fig. 3. LEs pyramides AECB & AECD, qui ont le même point A pour sommet, & les parties ECB & ECD du même parallélogramme BD pour bases, sont égales.

Const. Prenez sur la ligne AB un point F, à volonté; & faites passer par ce point, un plan FH parallele à la base BD.

Démonst. Les plans FH & BD sont N. 510. paralleles [c]. Ainsi (n), les lignes FG & BC qui sont les communes sections de ces plans & du plan BAC, sont paralleles; de même que les lignes IH & ED, qui sont aussi les communes sections de ces mêmes plans & du plan EAD. Mais, les lignes BC & ED sont encore paralleles; puisque [H] le quadrilatere BD est un parallélogramme. Donc (n), les lignes FG & IH ſont paralleles. N. 502

Or, on démontrera de la même maniere, que les lignes FI & GH ſont auſſi paralleles. Donc, le quadrilatere FH eſt auſſi un parallélogramme; & par conſéquent (n), les triangles IGF & IGH, N. 143 qui ſont les coupes des pyramides propoſées, ſont égaux.

Mais, la même démonſtration ſubſiſte, par quelque endroit du ſolide ABD que l'on faſſe paſſer le plan FH. Donc, à quelque endroit que l'on coupe les pyramides AECB & AECD par un plan parallele à leurs baſes, les ſections ſont égales; & par conſéquent, ces pyramides le ſont auſſi. Donc, C. Q. F. D.

PROPOSITION VII. †

THÉORÊME.

539. *Tout priſme triangulaire peut être diviſé en trois pyramides égales.*

LE priſme triangulaires ACE * peut être diviſé en trois pyramides égales. Fig. 41

† Nous ſupprimons la ſixieme propoſition, pour en faire le quatrieme corollaire de la ſeptieme, n°. 543.

Const. Faites passer par les points A, F & D, un plan AFD; & par les points B, F & D, un plan BFD.

Démonst. Les pyramides FABD & FAED ont le même point A pour sommet, & leurs bases sont les parties ABD & AED du même parallélogramme EB;
N. 538. ainsi, elles sont égales (n). Or, les pyramides FABD & FBCD sont aussi égales
N. 538. les (n); puisqu'elles ont le même point D pour sommet, & que leurs bases sont les parties BAF & BCF du même parallélo-
N. 62. gramme AC. Donc (n), les trois pyramides FABD, FAED & FBCD, sont égales; & par conséquent, C. Q. F. D.

Corollaire I.

540. Il suit de ce théorême, qu'*une pyramide triangulaire est le tiers d'un prisme de même hauteur qu'elle, & de même base.*

Fig. 5. La pyramide ABCD * est le tiers d'un prisme de même hauteur qu'elle, & de même base.

Const. Supposez sur la base BCD, un prisme BM, qui soit de même hauteur que la pyramide proposée.

Démonst. La pyramide ABCD est une des trois pyramides égales en lesquelles

on pourroit (n) diviser le prisme BM. N. 539.
Donc, elle est le tiers de ce prisme; & par conséquent, C. Q. F. D.

COROLLAIRE II.

541. Il suit de ce corollaire, qu'*une pyramide quelconque est le tiers d'un prisme de même hauteur qu'elle, & de même base.*

La pyramide, par exemple, EFHK *, Fig. 52 est le tiers d'un prisme de même hauteur qu'elle, & de même base.

Const. Supposez sur la base FHK, un prisme FN qui soit de même hauteur que la pyramide proposée. Faites ensuite passer par les points G, L & Q, un plan LQ; par les points G, K & Q, un plan KQ; & par les points G, I & Q, un plan IQ. Faites aussi passer par les points E, G &.L, un plan GEL; par les points E, G & K, un plan GEK; enfin, par les points E, G & I, un plan GEI.

Démonst. Les pyramides triangulaires ELGF,. EKGL, EIGK & EIHG sont (n) les tiers des prismes triangulaires N. 540. OLGF, RKGL, NIGK & QIHG, chacune de chacun. Donc, la pyramide EFHK, qui est la somme de toutes ces pyramides triangulaires, est aussi le tiers du prisme FN, qui est la somme de tous ces prismes triangulaires; & par conséquent, C. Q. F. D.

COROLLAIRE III.

542. Il suit de ce second corollaire, & des n°. 521 & 529, que *la solidité d'une pyramide quelconque, est égale au produit de la base de cette pyramide, multipliée par le tiers de sa hauteur.*

COROLLAIRE IV.

543 Il suit encore de ce second corollaire, que *les pyramides qui ont des hauteurs égales, sont entr'elles comme leurs bases.*

Fig. 5. Si les hauteurs des pyramides ABCD * & EFHK sont égales, ces pyramides seront entr'elles ce que la base BCD est à la base FHK.

Const. Supposez sur les bases BCD & FHK, des prismes BM & FN qui soient de même hauteur que les pyramides proposées.

Démonst. Puisque [c] les prismes BM & FN ont des hauteurs égales, ils sont
N. 529. entr'eux (n) ce que la base BCD est à
N. 541. la base FHK. Or (n), les pyramides ABCD

ABCD & EFHK sont les tiers, l'une du prisme BM, & l'autre du prisme FN. Donc (n), elles sont aussi entr'elles ce que la base BCD est à la base FHK; & par conséquent, C. Q. F. D. N. 559.

COROLLAIRE V.

544. Enfin, il suit de ce quatrieme corollaire, que *les pyramides qui ont des hauteurs égales, & des bases égales, sont aussi égales.*

PROPOSITION VIII.

THÉORÊME.

545. *Les pyramides semblables sont entre elles en rapports triplés de ceux de leurs côtés pareils.*

SI les pyramides ABCD * & EFGH Fig. 6. sont semblables, le rapport de la premiere à la seconde, sera triplé de celui du côté BC au côté FG.

Const. Supposez sur la base BCD, un prisme quelconque BI, qui soit de même hauteur que la pyramide ABCD. Supposez aussi sur la base FGH, un prisme FK semblable au prisme BI.

Démonst. Le côté BC est au côté FG
N. 402. (n), ce que la hauteur du prisme BI est à celle du prisme FK; puisque [c] ces
N. 402. prismes sont semblables. Mais (n), le côté BC est aussi au côté FG, ce que la hauteur de la pyramide ABCD est à celle de la pyramide EFGH; puisque [H] ces pyramides sont aussi semblables.
N. 350. Donc (n), la hauteur du prisme BI est à celle du prisme FK, ce que la hauteur de la pyramide ABCD est à celle de la pyramide EFGH; & par conséquent, puisque [c] la hauteur du prisme BI est la même que celle de la pyramide ABCD,
N. 369. la hauteur du prisme FK est aussi (n) la même que celle de la pyramide EFGH. Cela posé:

Puisque [c] les prismes BI & FK sont semblables, le rapport du premier au second, est triplé de celui du côté BC
N. 524. au côté FG (n). Or (n), le rapport de la
N. 359. pyramide ABCD à la pyramide EFGH, est le même que celui de ce premier
N. 541 prisme au second; puisque (n) ces pyramides sont les tiers de ces prismes, chacune de chacun. Donc, le rapport de la pyramide ABCD à la pyramide EFGH,

eſt auſſi triplé de celui du côté BC au côté FG; & par conſéquent, C. Q. F. D.

PROPOSITION IX.

THÉORÊME.

546. *Dans les pyramides, ſi les ſolidités ſont égales, les baſes & les hauteurs ſeront réciproquement proportionnelles: & ſi les baſes & les hauteurs ſont réciproquement proportionnelles, les ſolidités ſeront égales.*

PREMIEREMENT.

SI les pyramides ABCD * & EFGH Fig. 71 ſont égales, la baſe BCD de la premiere ſera à la baſe FGH de la ſeconde, ce que la hauteur de la ſeconde eſt à celle de la premiere.

Conſt. Suppoſez ſur les baſes BCD & FGH, des priſmes BI & FK qui aient les mêmes hauteurs que les pyramides propoſées.

Démonſt. Les priſmes BI & FK ſont triples (n), l'un de la pyramide ABCD, N. 541. & l'autre de la pyramide EFGH. Donc,

N. 67. ils sont égaux (n), puisque [H] ces pyramides sont égales; & par conséquent
N. 526. (n), la base BCD du premier est à la base FGH du second, ce que la hauteur du second est à celle du premier. Mais [c], ces bases & ces hauteurs sont les mêmes que celles des pyramides ABCD & EFGH. Donc, la base BCD de la pyramide ABCD est à la base FGH de la pyramide EFGH, ce que la hauteur de cette derniere pyramide est à celle de la premiere; & par conséquent, C. Q. F. 1°. D.

SECONDEMENT.

Fig. 7. Si dans les pyramides ABCD * & EFGH, la base BCD de la premiere est à la base FGH de la seconde, ce que la hauteur de la seconde est à celle de la premiere, ces pyramides seront égales.

Const. La même que la précédente.

Démonst. La base BCD du prisme BI est à la base FGH du prisme FK, ce que la hauteur de ce dernier prisme est à celle du premier; puisque [c] ces bases & ces hauteurs sont les mêmes que celles des pyramides ABCD & EFGH, qui

[H] ſont réciproquement proportionnelles. Donc, ces priſmes ſont égaux (n); N. 526.
& par conſéquent, puiſque (n) les pyra- N. 541.
mides ABCD & EFGH ſont les tiers de ces mêmes priſmes, elles ſont auſſi égales (n). Donc, C. Q. F. D. N. 68.

PROPOSITION X.

THÉORÊME.

547. *Un cône eſt le tiers d'un cylindre de même hauteur que lui, & de même baſe.*

LE cône ABC * eſt le tiers du cylin- Fig. 8.
dre AE, de même hauteur que lui & de même baſe.

Démonſt. Une pyramide eſt terminée par autant de triangles, & un priſme eſt terminé par autant de pallélogrammes; que le polygone qui ſert de baſe à l'une ou à l'autre, a de côtés. Ainſi, ſi conformément à ce que nous avons dit au n°. 410, on conſidere le cercle AC comme étant un polygone d'un ſi grand nombre de côtés, que, même en rigueur, ce polygone ne differe point de ce cercle; alors, le cône ABC & le cylindre AE deviendront, l'un une pyramide & l'autre un prisme, qui ayant l'une & l'autre autant de faces que ce même polygone auroit de côtés, ne différeront point non plus, l'une de ce même cône, ni l'autre de ce même cylindre. Mais (n) une pyramide quelconque est le tiers d'un prisme de même hauteur qu'elle, & de même base. Donc, puisque [H] le cône ABC & le cylindre AE ont chacun & la même hauteur, & la même base, ce cône est aussi le tiers de ce cylindre; & par conséquent, C. Q. F. D.

N. 541

COROLLAIRE.

548. Il suit de ce théorême & de sa démonstration, que *la solidité d'un cylindre est égale au produit de la base de ce cylindre, multipliée par sa hauteur*; & par conséquent, que *la solidité d'un cône est égale au produit de la base de ce cône, multipliée par le tiers de sa hauteur.*

PROPOSITION XI.

THÉORÊME.

549. *Les cylindres qui ont des hauteurs égales, sont entr'eux comme leurs bases : & il en est de même des cônes, lorsqu'ils sont dans le même cas.*

DÉMONSTRATION.

SUIVANT ce que nous avons démontré dans la proposition précédente, les cylindres peuvent être pris pour de certains prismes, & les cônes, pour de certaines pyramides. Or (n), tous les prismes qui ont des hauteurs égales, sont entr'eux comme leurs bases; & (n) toutes les pyramides qui ont des hauteurs égales, sont aussi de même entr'elles. Donc, lorsque les cylindres, ou les cônes, ont des hauteurs égales, ils sont aussi entr'eux comme leurs bases; & par conséquent, C. Q. F. D.

N. 523.
N. 543.

PROPOSITION XII.

THÉORÊME.

550. *Les cylindres semblables sont entr'eux en rapports triplés de ceux de leurs côtés pareils*, (par exemple, *de ceux des diametres de leurs bases*) : *& il en est de même des cônes semblables.*

DÉMONSTRATION.

SUIVANT ce que nous avons dit dans la démonstration du n°. 547, les cylindres peuvent être pris pour de certains prismes, & les cônes, pour de
N. 524. certaines pyramides. Or (n), tous les prismes semblables sont entr'eux en rapports triplés de ceux de leurs côtés pa-
N. 545. reils ; & (n) toutes les pyramides semblables le sont de même entr'elles. Donc, lorsque les cylindres, ou les cônes, sont semblables, ils sont aussi entr'eux en rapports triplés de ceux de leurs côtés pareils ; & par conséquent, de ceux des diametres de leurs bases, puisque ces diametres sont des côtés pareils de ces solides. Donc, C. Q. F. D.

PROPOSITION XIII.

THÉORÊME.

551. *Si un cylindre est coupé par un plan parallele à sa base, les segmens du cylindre seront entr'eux comme les segmens de l'axe.*

SI le plan EF *, qui coupe le cylindre AC, est parallele à la base DC, les segmens AF & EC du cylindre, seront entr'eux comme les segmens HI & IG de l'axe HG. Fig. 8.

Const. Divisez le plus petit HI des deux segmens HI & IG, en tel nombre de parties égales qu'il vous plaira; par exemple, en deux parties égales HM & MI. Prenez ensuite sur le segment IG, une partie GK égale à la partie HM. Enfin, faites passer par les points M & K, des plans NO & PQ paralleles chacun à la base DC.

Démonst. Les segmens AO, NF & PC, sont égaux (n); puisque [c] ils ont des hauteurs égales HM, MI & GK, & des bases égales NO, EF & DC. Ainsi, l'on démontrera cette proposition, N. 549.

de la même maniere dont on a démontré la premiere du sixieme Livre, n°. 407. Par conséquent, C. Q. F. D.

PROPOSITION XIV.

THÉORÊME.

552. *Les cylindres qui ont des bases égales, sont entr'eux comme leurs hauteurs: & il en est de même des cônes, lorsqu'ils sont dans le même cas.*

PREMIEREMENT.

Fig. 10. SI les bases NO * & HG des cylindres NB & HF sont égales, ces cylindres seront entr'eux, ce que la hauteur KP du premier est à la hauteur ML du dernier.

Const. Prolongez le cylindre NB, jusqu'à ce que la hauteur PI, du prolongement NC, soit égale à la hauteur ML du cylindre HF.

Démonst. Les cylindres HF & NC
N. 549. sont égaux (n); puisque [c] ils ont des hauteurs égales ML & PI, & des bases
N. 551. égales HG & DC. Or (n), les cylindres NB & NC sont entr'eux ce que la hau-

teur KP eſt à la hauteur PI ; puiſque [c] ces cylindres ſont les ſegmens du cylindre AC. Donc (n), les cylindres NB N. 51.
& HF ſont auſſi entr'eux, ce que la hauteur KP eſt à la hauteur PI, ou ML ; & par conſéquent, C. Q. F. 1°. D.

SECONDEMENT.

Si les baſes NO * & HG des cônes Fig 10.
NKO & HMG ſont égales, ces cônes ſeront entr'eux, ce que la hauteur KP du premier eſt à la hauteur ML du dernier.

Conſt. Suppoſez ſur les baſes NO & HG, des cylindres NB & HF, qui aient les mêmes hauteurs que les cônes propoſés.

Démonſt. Les cylindres NB & HF ſont entr'eux [D], ce que la hauteur KP eſt à la hauteur ML ; puiſque [H] les baſes NO & HG ſont égales. Or (n), N. 547.
les cônes NKO & HMG ſont les tiers de ces cylindres, chacun de chacun. Donc (n), ils ſont auſſi entr'eux comme N. 359.
ces mêmes hauteurs ; & par conſéquent, C. Q. F. 2°. D.

PROPOSITION XV.

THÉORÊME.

553. *Dans les cylindres, & de même dans les cônes, si les solidités sont égales, les bases & les hauteurs seront réciproquement proportionnelles : & si les bases & les hauteurs sont réciproquement proportionnelles, les solidités seront égales.*

DÉMONSTRATION.

SUIVANT ce que nous avons dit dans la démonstration du n°. 547, les cylindres peuvent être pris pour de certains prismes; & les cônes, pour de certaines pyramides. Ainsi, ce que nous avons démontré des prismes au n°. 526, & des pyramides au n°. 546, convient pareillement, l'un aux cylindres, & l'autre aux cônes. Par conséquent, C. Q. F. D.

PROPOSITION XVI.

THÉORÊME.

554. *Une demi-sphere est les deux tiers du cylindre dans lequel elle est inscrite.*

LA demi-sphere ALB * est les deux tiers du cylindre AK dans lequel elle est inscrite. Fig. 4

Const. Faites passer par l'axe HL, un plan quelconque AIKB. Prenez ensuite sur ce même axe un point *n*, à volonté; & faites aussi passer par ce point, un plan Q*s*M parallele à la base IRK. Enfin, tirez du centre H, au point *o* auquel la commune section QM de ces plans rencontre la surface de la demi-sphere, & aux extrémités I & K de la commune section du plan AIKB & de la base IRK, des lignes droites H*o*, HI & HK.

Démonst. Le triangle *on*H est rectangle en *n* (n). Ainsi (n), le cercle qui N. 246. & 130. auroit pour rayon la ligne H*o*, seroit N. 449. égal aux cercles dont les lignes *no* & *n*H seroient les rayons. Mais (n), les N. 524

lignes *n*M & *Ho* sont égales; puisque
N. 143. la même ligne *HB* est égale à l'une (n)
N. 474. & à l'autre (n) : & (n) les lignes *np* &
N. 414.
N. 137. *n*H sont aussi égales; puisque (n) le triangle H*np* est équiangle au triangle
N. 61. isoscele HLK. Donc (n), le cercle qui a pour rayon la ligne *n*M, est égal aux cercles dont les lignes *no* & *np* sont les rayons; & par conséquent, puisque ces trois cercles sont les coupes, l'un du cylindre AK, l'autre de la demi-sphere ALB, & le dernier, du cône IHK, la coupe de ce cylindre est égale à celles de cette demi-sphere & de ce cône.

Or, la même démonstration subsiste, par quelque endroit du cylindre AK que l'on fasse passer le plan Q*s*M. Donc, à quelque endroit que l'on coupe ce cylindre par un plan parallele à sa base, sa coupe est égale à celle de la demi-sphere ALB & du cône IHK. Ainsi, cette demi-sphere & ce cône valent ensemble ce cylindre; & par conséquent,
N. 537. puisque (n) ce même cône est le tiers de ce même cylindre, cette demi-sphere en est les deux tiers. Donc, C. Q. F. D.

COROLLAIRE I.

555. Il ſuit de ce théorême, qu'*une ſphere eſt les deux tiers du cylindre dans lequel elle eſt inſcrite.*

COROLLAIRE II.

556. Il ſuit de ce corollaire, que *la ſolidité d'une ſphere, eſt égale au produit de l'un quelconque de ſes grands cercles* †, *multiplié par les deux tiers de ſon diametre.*

† Dans la ſphere, on nomme *grands cercles*, ceux qui paſſent par le centre.

PROPOSITION XVII.

THÉORÊME.

557. *Chaque grand cercle d'une ſphere, eſt égal au quart de la ſurface de cette même ſphere.*

DÉMONSTRATION.

ON peut conſidérer une ſphere comme étant diviſée en un grand nombre de petits ſolides, qui auront chacun leur ſommet au centre de cette ſphere, & leur baſe dans ſa ſurface. Or, ſi l'on ſuppoſe dans une même ſphere un ſi grand nombre de ces ſolides, que la convexité de la baſe de chacun devienne abſolument inſenſible, ils ſeront autant de petites pyramides qui auront chacune le rayon de cette ſphere pour
N. 542. hauteur. Ainſi (n), pour avoir la ſolidité de chacun en particulier, il faudra multiplier ſa baſe par le tiers de ce rayon; & par conſéquent, pour avoir la ſolidité de tous enſemble, qui ſera celle de la ſphere même, il faudra multiplier par le

le tiers de ce même rayon, la somme de toutes les bases; c'est-à-dire, la surface même de la sphere.

Mais, puisque [D] l'on a la solidité d'une sphere, en multipliant sa surface par le tiers de son rayon, on aura aussi la même solidité, en multipliant le quart de cette même surface par le quadruple du tiers de ce même rayon; c'est-à-dire, par les deux tiers du diametre. Or (n), N. 556. on a encore la même solidité, en multipliant aussi l'un des grands cercles de cette même sphere par les deux tiers du même diametre. Donc, ce grand cercle, & le quart de la surface de la sphere, sont deux surfaces égales; & par conséquent, C. Q. F. D.

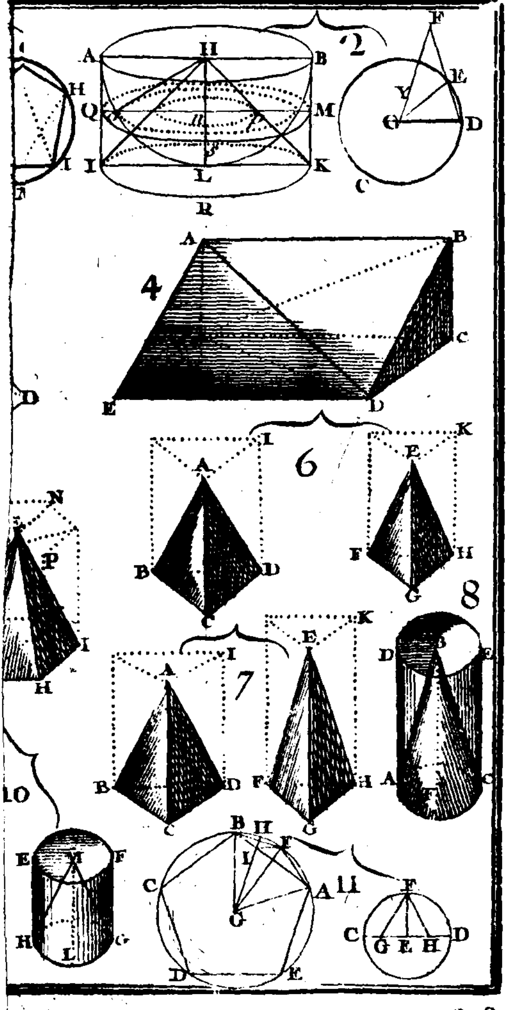
COROLLAIRE I.

558. Il suit de ce théorême, que *la surface d'une sphere, est quadruple de celle de l'un quelconque des grands cercles de cette même sphere.*

COROLLAIRE II.

559. Il suit de ce corollaire, que *la surface d'une sphere, est égale à celle du cylindre dans lequel cette même sphere est inscrite.*

Démonst. La surface d'un cylindre est égale au produit de la circonférence de sa base, multipliée par sa hauteur.
N. 61. Ainsi, puisque (n) le cylindre dans lequel une sphere est inscrite, a l'un des grands cercles de cette sphere pour base, & le diametre de ce cercle pour hauteur; sa surface est égale au produit de la circonférence de l'un de ces grands cercles, multipliée par son diametre.
N. 410. Mais (n), la surface de ce grand cercle est égale au produit de cette même circonférence multipliée seulement par le quart de ce même diametre. Donc, la surface de ce cylindre est quadruple de celle de ce grand cercle; & par consé-
N. 538. quent, puisque (n), la surface de la sphere en est aussi quadruple, la surface de ce cylindre & celle de cette sphere
N. 67. sont égales (n). Donc, C. Q. F. D.


2
4
6
7
8
10
11

PROPOSITION XVIII.

THÉORÊME.

560. *Les spheres sont entr'elles en rapports triplés de ceux de leurs diametres.*

DÉMONSTRATION.

LES spheres sont (n) les deux tiers N. 555.
des cylindres dans lesquels elles sont
inscrites ; ainsi (n), elles ont entr'elles N. 559.
les mêmes rapports que ces cylindres.
Or (n), ces cylindres sont semblables ; N. 484.
& par conséquent (n), ils sont entr'eux N. 550.
en rapports triplés de ceux de leurs axes.
Donc, les spheres sont aussi entr'elles en rapports triplés de ceux des axes des cylindres dans lesquels elles sont inscrites ; & par conséquent, puisque ces axes sont les diametres de ces mêmes spheres, elles sont entr'elles en rapports triplés de ceux de leurs diametres. Donc, C. Q. F. D.

Fin des Elémens d'Euclide.

APPROBATION.

J'Ai lû par ordre de Monſeigneur le Chancelier, les Œuvres de M. Ozanam, contenant *le Dictionnaire, le Cours & les Récréations Mathématiques, un Traité d'Arpentage, la Géométrie-Pratique, l'Uſage du Compas de proportion, la Méthode pour lever les Plans, & les Elémens d'Euclide.*

Les Ouvrages de M. Ozanam ayant ſervi juſqu'ici d'école à preſque tous ceux qui ſe ſont appliqués aux Mathématiques depuis qu'elles ont été regardées en Europe comme la baſe de toutes les Sciences; il y a apparence que cette nouvelle édition de ſes Œuvres ſera auſſi bien reçue du Public que l'ont été les précédentes. A Paris, le 24 Février 1746.

BELIDOR.

PRIVILEGE DU ROI.

LOUIS, par la grace de Dieu, Roi de France & de Navarre : A nos amés & féaux Conseillers, les Gens tenans nos Cours de Parlement, Maîtres des Requêtes ordinaires de notre Hôtel, Grand-Conseil, Prévôt de Paris, Baillifs, Sénéchaux, leurs Lieutenans Civils, & autres nos Justiciers qu'il appartiendra, SALUT. Notre bien amé CHARLES-ANTOINE JOMBERT, Libraire à Paris, & ordinaire pour notre Artillerie & pour le Génie, Nous a fait exposer qu'il desireroit faire réimprimer & donner au Public, des Livres qui ont pour titre : *Œuvres de Mathématique de feu M. Ozanam, de l'Académie des Sciences, Secrets des Arts & Métiers, le Teinturier parfait, l'Art de la Verrerie, l'Art de tourner, du Pere Plumier*, s'il nous plaisoit lui accorder nos Lettres de Privilege pour ce nécessaires. A CES CAUSES, voulant favorablement traiter l'Exposant, Nous lui avons permis & permettons par ces Présentes de faire imprimer lesdits Ouvrages en un ou plusieurs Volumes, & autant de fois que bon lui semblera, & de le vendre, faire vendre & débiter par tout notre Royaume, pendant le tems de *neuf* années consécutives, à compter du jour de la date des Présentes : Faisons défenses à toutes sortes de personnes de quelque qualité & condition qu'elles soient, d'en introduire d'impression étrangere dans aucun lieu de notre obéissance ; comme aussi à tous Libraires & Imprimeurs, d'imprimer, faire imprimer, vendre, faire vendre, débiter ni contrefaire lesdits Livres, ni d'en faire aucuns Extraits sous quelque prétexte que ce soit, d'augmentation, correction, changement ou autres, sans la permission expresse & par écrit dudit Exposant, ou de ceux qui auront droit de lui, à peine de confiscation des Exemplaires contrefaits, de trois mille livres d'amende contre chacun des contrevenans, dont un tiers à Nous, un tiers à l'Hôtel-Dieu de Paris, & l'autre tiers audit Exposant, ou à celui qui aura droit de lui, & de tous dépens, dommages & intérêts. A la charge que ces Présentes seront enregistrées tout au long sur le Registre de la Communauté des Libraires & Imprimeurs de Paris, dans trois mois de la date d'icelles, que la réimpression desdits Livres sera faite dans notre Royaume & non ailleurs, en bon papier & beaux caracteres, conformément à la feuille imprimée & attachée pour modele sous le contre-scel des Présentes; que l'Impétrant se conformera en tout aux Réglemens de la Librairie, & notamment à celui du 10 Avril 1725; qu'avant de les exposer en vente les Manuscrits & imprimés qui auront servi de copie à la réimpression desdits Livres, seront remis dans le même état où l'Approbation y aura été donnée, ès mains de notre très-cher & féal Chevalier, le Sieur DAGUESSEAU, Chancelier de France, Commandeur de nos Ordres, & qu'il en sera ensuite remis deux Exemplaires dans notre Bibliotheque publique, un dans celle de notre Château du Louvre, & un dans celle de notredit très-cher & féal Chevalier, le Sieur DAGUESSEAU, Chancelier de France, Commandeur de nos Ordres, le tout à peine de nullité des Présentes; du contenu desquelles vous mandons & enjoignons de faire jouir ledit Exposant & ses ayans cause pleinement & paisiblement, sans souffrir qu'il leur soit fait aucun trouble ou empêchement. Voulons que la copie des Présentes, qui sera imprimée tout au long au commencement, ou à la fin desdits

Livres, soit tenue pour dûement signifiée, & qu'aux copies collationnées par l'un de nos amés, féaux Conseillers & Secretaires, foi soit ajoutée comme à l'original. Commandons au premier notre Huissier ou Sergent sur ce requis, de faire pour l'exécution d'icelles tous actes requis & nécessaires, sans demander autre permission, & nonobstant clameur de haro, Charte Normande & Lettres à ce contraires : CAR tel est notre plaisir. Donné à Paris le vingt-deuxieme jour du mois d'Avril, l'an de grace mil sept cens quarante-six, & de notre regne le trente-unieme. Par le Roi en son Conseil.

SAINSON.

Regiſtré ſur le Regiſtre XI. de la Chambre Royale des Libraires & Imprimeurs de Paris, N°. 615, fol. 543. conformément aux anciens Réglemens, confirmés par celui du 28 Février 1733. A Paris, le 5 Mai 1746.

VINCENT, *Syndic.*