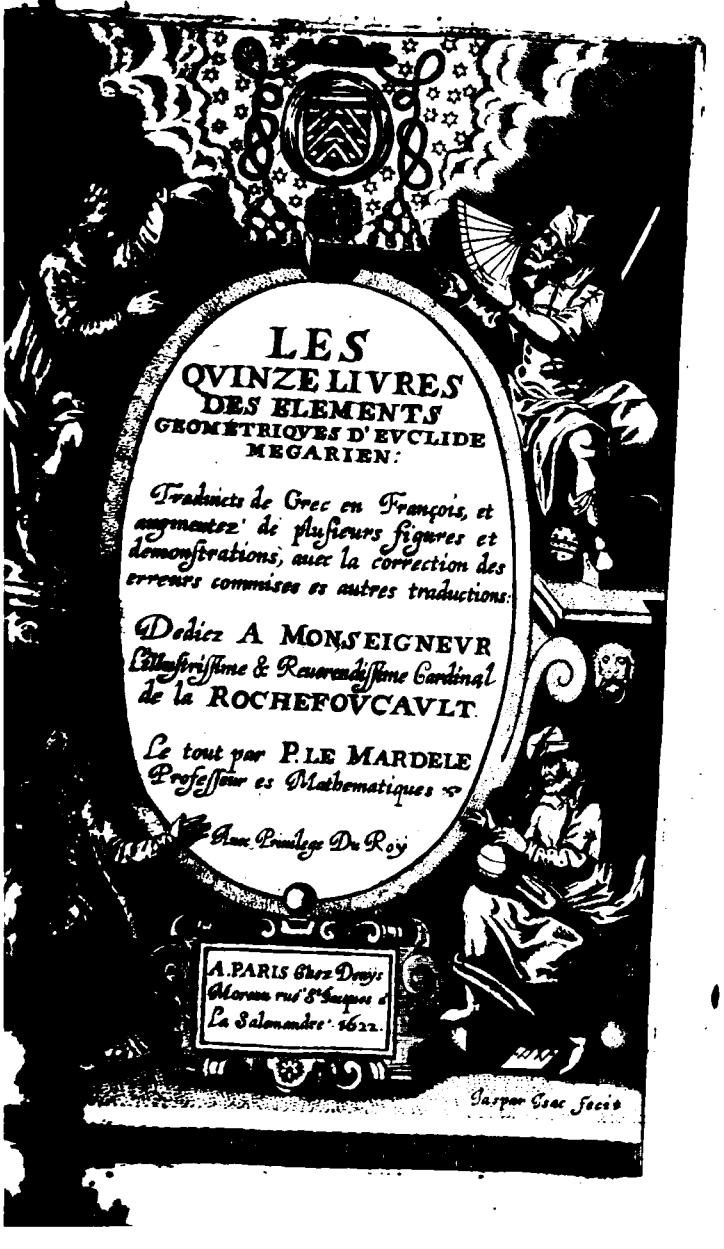
Notes du mont Royal

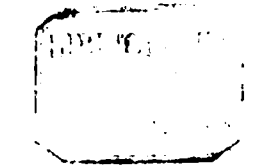
www.notesdumontroyal.com

Cette œuvre est hébergée sur « *Notes du mont Royal* » dans le cadre d'un exposé gratuit sur la littérature.

SOURCE DES IMAGES

Google Livres


LES
QVINZE LIVRES
DES ELEMENTS
GEOMETRIQVES D'EVCLIDE
MEGARIEN:
Traduicts de Grec en François, et augmentez de plusieurs figures et demonstrations, auec la correction des erreurs commises es autres traductions.
Dedicz A MONSEIGNEVR
L'Illustrissime & Reuerendissime Cardinal
de la ROCHEFOVCAULT.
Le tout par P. LE MARDELE
Professeur es Mathematiques.
Auec Priuilege Du Roy.
A PARIS Chez Denys
Moreau rue S. Iacques à
La Salamandre. 1622.
Iacques Isaac fecit



Bayerische
Staatsbibliothek
München

A MONSEIGNEVR

MONSEIGNEVR L'ILLVSTRISSIME CARDINAL DE LA ROCHE-FOVCAVLT, EVESQVE DE SENLIS, GRAND Aumoſnier de France, &c.

MONSEIGNEVR,

I'ay touſiours cogneu le grand ſoin que vous auez que les bonnes lettres refloriſſent en France, & ſur tout en ceſte noble & ancienne Vniuerſité de Paris, voire la premiere de tout l'Vniuers: Et ſpecialement au Royal College des Profeſſeurs; Auquel vous entendez que ſe facent leçons publiques, à chaque heure du iour, auſſi exactes comme eſt grande la capacité de ceux qui honorez de leur charge peuuent ſeruir d'honneur & d'ornement

à noſtre Siecle, faiſant leur deuoir conformement à voſtre intention. C'eſt ce qui m'a enhardy (MONSEIGNEVR) *d'oſer preſenter à voſtre grandeur ce mien ouurage & labeur, eſperant qu'elle l'acceptera d'vne main fauorable, tant pour l'excellence du ſubiect, lequel eſt tres neceſſaire pour auoir vne parfaicte cognoiſſance, non ſeulement de la Philoſophie, mais auſsi de toutes les autres ſciences & arts: Ce qu'a fort bien monſtré ce diuin Philoſophe Platon par cete inſcriptiõ qu'il auoit fait appoſer à l'entree de ſon Academie,* ἀγεωμέτρητος εἰσίτω; *que pour la bonne affection de celuy qui l'a mis en noſtre langue, ſelon le vray texte de l'Autheur, auec ſes figures & demonſtrations, & auec les correctiõs de pluſieurs erreurs, dont les editions vulgaires eſtoient tachees. Si ce mien labeur vous eſt agreable* (MONSEIGNEVR) *vous m'inciterez à trauailler à d'autres parties de Mathematique, qui ſer-*

uiront grandement au public & aux autres ſciences ; d'auſſi bon coeur que ie deſire eſtre à iamais,

MONSEIGNEVR,

Voſtre tres-humble & tres-obeïſſant ſeruiteur,

P. LE MARDELE'.

AV LECTEVR.

IL y a quelque temps (Amy Lecteur) que (desirant seruir au public) ie m'estois adonné à traduire en François, les quinze liures des Elements Geometriques d'Euclide, afin de les mettre en lumiere : mais voyant que d'autres les y auoient desia mis, sçauoir le sieur Donnot, & apres luy vn nommé Henrion; ie ne poursuiuis. Toutesfois ayant leu leurs traductions, & trouué qu'ils n'auoient totalement suiuy le texte d'Euclide; & specialement que Henrion ne l'auoit iamais veu, comme monstre son œuure, & que son liure n'estoit qu'vne transcriptiõ ou coppie de celuy dudit sieur Donnot; tachee d'vn grand nombre d'erreurs, laquelle il auoit faict imprimer & vendu luy mesme pour en tirer quelque proffit: Cela m'a donné subiect de poursuiure ma traduction commencee sur le texte Grec

d'Euclide, auec les demonſtrations des propoſitions, où i'ay auſſi adiouſté pluſieurs figures & demonſtrations qui ne ſont aux ſuſdites traductions, pour faciliter l'intelligence des propoſitions; D'auantage i'ay corrigé pluſieurs fautes des Interpretes; & auſſi celles de Henrion, non toutes neantmoins: mais quelques vnes ſeulement, pour aduertir ledit Henrion qu'autre choſe eſt de coppier, & autre choſe de traduire: car pour traduire il faut à tout le moins entendre la langue de l'Autheur, autrement il n'y auroit ſi petit copiſte qui ne peuſt faire des liures, coppiant les œuures de autres comme il a faict, leſquelles corrections tu trouues en ſuitte des propoſitions. Au reſte ie te ſupplie (Amy Lecteur) de ſupleer au defaut, ſi en ceſte premiere edition tu trouues quelques lettres changees ou autrement, par la faute des Imprimeurs, n'y ayant rien neantmoins que tu ne corriges facilement par le diſcours precedent ou ſuiuant; eſperant (ſi tu as ce labeur pour agreable) de mettre la main à d'autres œuures non encore mis en noſtre langue Françoiſe par aucun. Adieu.

IN EVCLIDEM EX GRECO IN SERMONEM VERNACVLVM CONVERSVM.

EPIGRAMMA.

TVrpibus Euclidem næuis, mendiſq; ſcatentẽ
Purgatum nobis MARDELE *deproperas.*

Euclidem Græcum feciſti MARDELE *Gallum,*
Quod Gallo-Græcus, Laus ea tota tua eſt.

PETRVS VALLENS Græcarum Literarum Profeſſor Regius.

DOMINO LE MARDELE EVCLIDIS INTERPRETI VNICO

HActenus Euclidi bellũ indixiſſe videntur
Nec libros doctis expoſuiſſe libris.
Nam tot ſpurcarunt diuina volumina mendis,
Auſi diuinum contaminare virum,

MARDELE *opus fuerat qui Mars deleret*
& æreum
Inſperſum maculis, emacularet opus.

IANVS CÆCILIVS FREY,
Doctor Medicus & Philoſophorum
Profeſſorum Decanus.

AD AVTHOREM.

SI ſummo, rerum proportio, ſique figura
Artifici tantum monſtrat ineſſe decus.

Quàm liber hic cùm nil niſi ſit proportio, multas
Ingenij vires arguet eſſe tui.

ANTONIVS DE VILLON,
In alma Vniuerſitate Pariſienſi
Profeſſor Philoſophus.

Priuilege du Roy.

OVVS par la grace de Dieu Roy de France & de Nauarre, A nos amez & feaux, les gens tenans nos Cours de Parlement à Paris, Tholoſe, Roüen, Bordeaux, Dijon, Grenoble & Bretagne, Baillifs, Preuoſts, Seneſchaux deſdits lieux, Lion, Poictiers, Orleans, Tours, Bourges, Angers, Champagne & à tous nos autres Iuſticiers ou leurs Lieutenans, ſalut. Noſtre bien aymé Denis Moreau, Marchand Libraire en noſtre ville de Paris, nous auroit remonſtré qu'il a recouuert vn liure intitulé, *Les quinze liures des Elements Geometriques d'Euclide, traduits de Grec en François, & augmentés de pluſieurs demonſtrations & figures, par Pierre le Mardelé Profeſſeur és Mathematiques*, lequel liure il deſireroit mettre en lumiere & faire imprimer, s'il auoit ſur ce nos lettres neceſſaires, humblement requerant icelles. A CES CAVSES auons par ces preſentes permis & accordé, permettons & accordons audit Moreau de faire imprimer par tel Imprimeur que bon luy ſemblera, tant de fois qu'il luy plaira ledit liure que deſſus : & ce pour neuf ans finis & accomplis du iour qu'il aura eſté acheué d'imprimer, en vertu des preſentes. Faiſant tres-expreſſes inhibitions & defences à tous Imprimeurs & Libraires de Paris, Lyon, Roüen, & autres villes de noſtre Royaume, & à toutes autres perſonnes de quelque condition & qualitez qu'ils ſoient, de l'imprimer ou faire imprimer, en quelque maniere

que ce ſoit à peine de mille liures d'amende, dont moitié nous appartiendra, & l'autre moitié au ſuppliant, & auſſi de confiſcation de ceux qui ſe trouuerront imprimez ſans le conſentement dudit Moreau ſuppliant: meſmes ſi aucuns Imprimeurs ou Libraires de cettuy noſtre Royaume, ou eſtrangers traffiquans en iceluy, en ſont trouuez ſaiſis d'autre impreſſion que de celle qu'aura fait faire ledit Moreau: Voulons qu'il ſoit procedé contre eux extraordinairement, & ſoient condamnez en pareille ſomme & amende que s'ils les auoient imprimez ou faict imprimer. A la charge toutesfois qu'iceluy Moreau mettra deux deſdits liures en noſtre Biblioteque publique de ceſte ville de Paris, auparauant que de les expoſer en vente ſuiuant noſtre reglement, à peine d'eſtre deſcheu du preſent priuilege. Si vous mandons & à chacun de vous endroit ſoy, enjoignons que du contenu en ces preſentes nos lettres de priuilege & permiſſion, vous faſſiez & laiſſiez iouyr & vſer plainement & paiſiblement ledit ſuppliant, faiſant ceſſer tous troubles & empeſchemens au contraire de ce faire. Vous donnons pouuoir, authoté & mandement ſpecial, & de proceder à l'encontre de ceux qui y contreuiendront par toutes voyes deuës & raiſonnables, & par les peines ſuſdictes. Nonobſtant oppoſitions ou appellations quelconques, pour leſquelles & ſans preiudice d'icelles ne voulons eſtre differé: Et pour ce que de ces preſentes ledit Moreau pourroit auoir affaire en diuers lieux: Nous voulons qu'au vidimus d'icelles, faict par l'vn de nos amez & feaux Conſeillers, Notaires &

Secretaires, foy ſoit adiouſtee comme au preſent original, & auſſi qu'en mettant au commencement ou à la fin dudit liure vn bref ou extraict des preſentes cela ait force & vertu de ſignifications tout ainſi que ſi l'original eſtoit particulierement ſignifié à chacun : CAR TEL EST NOSTRE PLAISIR. Donné à Paris, le 12. iour d'Auril, l'an de grace mil ſix cens vingt & deux, & de noſtre regne le trezieſme.

Par le Roy en ſon Conſeil,

RENOVARD.

PREFACE.

D'où les diſciplines Mathematiques ont pris leur nom, & de leur diuiſion.

LEs diſciplines Mathematiques leſquelles traictẽt de la quãtité, ont prins leur nom de μάθημα, ou μάθησις, qui eſt à dire, diſcipline ou doctrine: Et ſeules entre les autres ont acquis ce nom pour deux raiſons ſelon les bons autheurs. La premiere eſt que les Pythagoriciens & Platoniciens eſtimans que les ames raiſonnables eſtoient en nombre certain & determiné, & paſſoient de corps en autre (ce que la foy Chreſtienne tient pour faux) teſmoignent que les Mathematiques ont obtenu ce nom, d'autant que par icelles nous acquerons le reſouuenir de la ſcience, dont noſtre ame eſtoit douëe auparauant (ſelon leur erreur) qu'elle dõnaſt forme au corps. Ce que Platõ taſche de prouuer par vn exẽple familier, au dialogue inſcrit Menon, *où il introduit Socrate interrogeant*

vn enfant ſur quelques queſtions Geometriques, de la dimenſion du quarré. A quoy bien qu'il reſpondiſt au commencement comme enfant, neantmoins peu à peu il en vint iuſques là, qu'il reſpondit les meſmes choſes que s'il auoit aprins par vn long-temps la Geometrie. La 2. eſt d'autant (comme veulent les autres) que ces arts ſeuls gardent la raiſon & moyen de la ſcience: procedans touſiours de principes auparauant cogneus, pour demonſtrer leurs concluſions, qui eſt le propre deuoir & office de la doctrine ou diſcipline, comme enſeigne Ariſtote 1. des Poſterieures. Et les Mathematiciens ne prennent iamais rien qui ne ſoit prouué: mais voulans enſeigner quelque choſe, ſi ce qui a eſté monſtré auparauant en depend, ils le prennent pour conced; monſtrans ce qui n'a eſté enſeigné: Ce que les autres arts & diſciplines ne font touſiours, prenant quelquesfois pour confirmer leur dire choſes non emonſtrees. Or les Pythagoriciens ſuiuis preſque de tous les Mathematiciens & Philoſophes ont diuiſé toutes les Mathematiques en 4. parties: ſçauoir en l'Arithmetique, la Muſique, la Geometrie, & l'Aſtronomie. Car d'autãt que toute quantité qui eſt l'obiect de la Mathematique eſt diſcrete ou continue, la diſcrete qui contient ſous ſoy les nombres: la continue qui contient ſous ſoy toutes les grandeurs: & l'vne & l'autre ſe pouuant conſiderer tant ſelon ſoy

que comparee à vn autre : Il leur a ſemblé à propos d'inſtituer les 4. ſuſdites parties qui traitaſſent des deux eſpeces de quantité, ſelon les raiſons dictes. Partant l'Arithmetique traitte de la quantité diſcrete ſelon ſoy, recherchant & expliquant toutes les paſſions & proprietez des nombres. La Muſique traitte auſſi de la quantité diſcrete, ou du nombre comparé à autre choſe, ſçauoir entant qu'il conſidere les accords des ſons & l'harmonie. La Geometrie diſpute de la quantité continuë auſſi ſelon ſoy, & comme immobile. L'Aſtronomie finalement conſidere la meſme quantité continuë en tant qu'elle eſt mobile, comme ſont les corps celeſtes, en tant qu'ils tournent par vn mouuement continuel. Or toutes les autres parties qui traictent de la quantité en quelque façon que ce ſoit, comme ſont la Perſpectiue, le Geographie & ſemblables, ſe peuuent rapporter comme à leurs chefs deſquels elles dependent, à ces 4. parties ſuſdites, dont la Geometrie & l'Arithmetique ſont appellees pures : mais la Muſique & l'Aſtronomie, mixtes. Les diſciplines Mathematiques ſont auſſi diuiſees en vne autre maniere par Geminus ancien Geometre & autres, comme rapporte Proclus en ſes commentaires ſur le premier liure d'Euclide. De ce voy Barocius.

Diuiſion de la Geometrie, & des Elements d'Euclide.

LA Geometrie eſt diuiſee en la contemplation des plans, laquelle ſelon le terme general eſt dicte Geometrie, & en la doctrine des ſolides laquelle proprement & particulierement les Mathematiciens appellent Stereometrie. Car la Geometrie en general ſe propoſe ce but, de conſtituer les plans & les ſolides, & ceux qui ſont ja conſtituez de les comparer entr'eux ou les diuiſer. Et l'on ne doit s'eſmerueiller, que y ayant trois genres de grandeurs, ſçauoir la ligne, la ſuperficie, & le corps, l'on faict mention ſeulement de la contemplation des deux derniers proprement, & non de la ligne & du poinct. D'autant que comme dit Proclus, la Geometrie traicte principallement des figures leſquelles conſiſtent toutes ſeulement aux plans ou aux ſolides, car les poincts & les lignes ne conſtituent aucune figure ſans les plans ou ſolides, & partant n'eſtoit neceſſaire d'en traiter à part. Donc Euclide nous voulant laiſſer vne parfaicte cognoiſſance en ſes Elements de la Geometrie; Il traitte aux ſix premiers liures des plans: Et aux cinq derniers il diſpute ſubtilement des ſolides recherchant leurs plus belles proprietez. Mais d'autant que toutes les choſes

ſes Geometriques, & principalement ces cinq corps reguliers appellez ſelon la couſtume, corps Platoniques, ne pouuoient eſtre traictez ſans la cognoiſſance des lignes commenſurables & incommenſurables, Euclide a adiouſté le 10. liure, deuant ſa Stereometrie, afin d'auoir tous les documents requis à l'intelligence & dimenſion des grandeurs, auquel 10. l. il diſcourt ſubtilement & amplement de telles lignes. Et voyant derechef que ce traicté des lignes commenſurables & incommenſurables ne ſe pouuoit entendre ſans la cognoiſſance des nombres: Deuant le 10. l. il traicte des proprietez & paſſions d'iceux nombres aux 7. 8. & 9. liures. Parquoy tout ce volume des Elements Geometriques comprins en 15. liures (dont les treze premiers ſont attribuez à Euclide ſans aucune controuerſe: mais les deux derniers ſont eſtimez par quelques vns eſtre à Hypſicle Alexandrin) pourra eſtre diuiſé en quatre parties, dont la premiere contiendra les ſix premiers liures qui traictent des plans; La ſeconde les trois ſuiuants, laquelle recherche les paſſions & proprietez des nombres; La troiſieſme contenant le dixieſme liure ſeulement, diſpute des lignes commenſurables & incommenſurables. Et la quatrieſme finalement, ſçauoir les cinq derniers liures, contient la ſcience des ſolides ou corps. La premiere partie eſt diuiſée derechef en trois

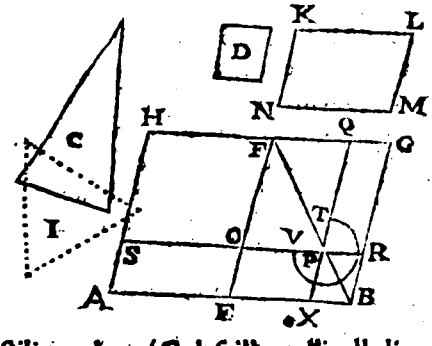
Car aux 4. premiers liures est traicté des plans absolument, recherchant leur egalité ou inegalité. Au cinquiesme est disputé des proportions des grandeurs en general. Et au sixiesme finalement les proportions des figures planes sont examinees. Mais il sera aussi exposé en son lieu, ce que Euclide traicte en chacun de ses liures.

Que c'est entre les Mathematiciens que Probleme, Theoreme proposition, Lemme.

TOute demonstration Mathematique est diuisee par les anciens autheurs, en Probleme, & Theoreme. Ils appellent Probleme celle demonstration qui commande & enseigne à construire quelque chose. Comme si quelqu'vn vouloit demonstrer, que l'on peut constituer vn triangle equilateral sur vne ligne droicte, donnee & terminee, telle demonstration sera appellee Probleme, d'autant qu'elle enseigne par quel moyen vn triangle equilateral doit estre constitué sur vne ligne droicte terminee. Ou ce genre de demonstration est appellé Probleme à la similitude du Probleme des Dialecticiens. Car comme en Dialectique, le Probleme est celle question, de laquelle l'vne & l'autre partie de la contrauerse ou contradiction (comme il

THEOREME 8. PROP. 18. xxvij

A vne ligne droicte donnee appliquer vn parallelogramme, egal à vne figure rectiligne donnee; defaillant d'vne figure parallelogramme, laquelle soit semblable à vn autre parallelogramme donné. Mais il faut que la figure rectiligne donnee à laquelle il en faut appliquer vne egale, ne soit plus grãde que celle qui est appliquee à la moitié de la ligne donnee; les defauts estans semblabes, à celuy qui est appliqué sur la moitié, & à celuy qui doit defaillir d'vn semblable.



Soit la ligne donnee AB, à laquelle il faut appliquer vn parallelogrãme egal au rectiligne donné C, defaillant d'icelle ligne AB, d'vn parallelogramme semblable à vn autre parallelogramme donné D.

La ligne AB, estant couppee en deux egalement au poinct E, sur la moitié EB, [a] soit descrit le parallelogramme EG, semblable & sembla- [a] 18.6.

blement posé à D, & soit accomply le tout BH: Si donc AF, est egal à C; estant appliqué à AB, de faillant du parallelogramme EG, qui est faict sẽblable à D: l'on aura le requis. Mais si AF, est plus grand que C (car il ne doit estre moindre, puis que par la proposition precedente, c'est le plus grand de tous les appliquez, les defauts estant sẽblables, l'on n'en pourroit appliquer aucun à AB, egal à C, mais tous seroient moindres. Parquoy Euclide a adiousté: Mais il faut que le rectiligne donné, &c.) EG, egal à iceluy,
b 25. sera aussi plus grand que C, [b] soit donc plus grãd de I. comme il est monstré en suitte de la 45. du 1. & soit constitué KM, semblable & semblablement posé à D, ou à EG, mais egal à l'excez I; De sorte que EG, soit egal à C, & à KM ensẽble, & partãt plus grand que KM. Dõc puis que cõme EF, à FG, ainsi NK, à KL, à cause de la sẽblãce, les costez EF, FG, serõt aussi plus grãds que NK, KL, car s'ils estoient egaux à iceux ou moindres, EG seroit pareillement egal à NL, ou moindre, cõme il appert. Ayãt donc retranché FO, FQ, egales à KN, KL, & ayant faict le parallelogramme OQ, il sera egal à KM, & sẽblable & semblablement posé à iceluy, & partant à EG: [c] Et aussi
c 26.6. à l'entour d'vn mesme diametre que EG, lequel diametre soit BF; & ayant prolongé QP, OP, le parall. AP, sera appliqué à la ligne AB, defaillant de PB, [d] qui est semblable & semblable-
d 24.6. ment posé à EG, & partant aussi à D. Ie dis que
e 36.1. AP, est egal au rectiligne C. [e] Car puis que PG, est egal à PE, le cõplement au cõplement; Si on adiouste le commun PB, le parall. BQ, sera egal à ER, c'est à dire, à ES, [f] lequel est egal à ER; Les

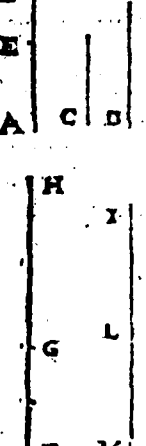
bases

ou egale ou plus grande: Donc puis que F, multiple de la 1. & de la 3. C, eſt plus petite que chacune D, & E, equimultiples de la 2. & 4. A & B, ou egale, ou plus grande, il y aura pareillement meſme raiſon de la 1. C, à la 2. A, que de la 3. C, à la 4. B, ce qui eſt propoſé.

L'on pouuoit monſtrer ceſte 2. partie plus briefuement par la raiſon inuerſe: car ayãt deſia eſté demonſtré qu'il y a meſme raiſon de A à C, que de B, à C, en changeant, c il y aura meſme raiſon de C, à A, que de C à B. Donc les grandeurs egales, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer. c corol. 4. 5.

THEOREME 8. PROP. 8. viij

Des grandeurs inegales, la plus grande a plus grande raiſon à vne meſme grandeur que la plus petite. Et vne meſme grandeur a plus grande raiſon à la plus petite grandeur qu'à la plus grande.



Soiẽt les grãdeurs inegales AB, plus grande & C, plus petite; & ſoit vne 3. grandeur quelcõque D. Ie dis que AB, a plus grande raiſon à D, que C à la meſme D: & au contraire que D, a plus grande raiſon à C, que à AB; Car de la plus grande AB, ſoit retranchee AE, egale à C, & ſoit poſee AB, premiere grandeur, C, 3. & D, 2. & 4. puis ſoient priſes HG, & GF, equimultiples de AE, & EB, en ſorte que GH, multiple de AE ſoit plus grãde que D, & FG, multiple de EB, ne ſoit moindre que la meſme D; mais egale ou plus grande. Or d'autant que HG, GF,

a 2. 5. ſont equimultiples de AE, EB, a la toute HF, ſera autant multiple de la toute AB, que GH, l'eſt de AE, c'eſt à dire de C, egale à AE : pareillement ſoit priſe IK, multiple de D, prochainement plus grande que HG, à ſçauoir double ſi eſtant priſe double elle n'eſt plus grande que HG, ſoit priſe triple ou quadruple, &c. Dõc eſtant retranchee LK, egale à D, IL, ne ſera plus grande que HG, (autrement IK, ne ſeroit multiple de D, prochainement plus grãde que HG, mais IL, ſeroit auſſi plus grande que GH. Que ſi IK, eſt double de D, il eſt manifeſte que IL, n'eſt plus grãde que HG, puiſque HG, n'eſt poſee moindre que D, c'eſt à dire que IL) & partant HG, ſera egale à IL, ou plus grande. Et d'autant que FG, eſt poſee plus grãde que D, & LK, egale à D; FG, ſera auſſi plus grande que LK. Donc HG, n'eſtant moindre que IL, comme il eſt demonſtré : mais egale ou plus grande, la toute FH, ſera plus grande que IK. Partant puis que FH, HG, ſont equimultiples de AB, 1. & C, 3. & IK, multiple de D, poſee pour 2. & 4. mais FH, multiple de la 1. eſt plus grande que IK, multiple de la 2. & HG, multiple de la 3. n'eſt plus grande que IK, multiple de la 4. mais moindre par l'hypotheſe (car IK, multiple de D

b 8. def. eſt priſe plus grande que HG,) b il y aura plus grande raiſon de AB, 1. à D, 2. que de C, 3. à D, 4.

Secondemẽt d'autant que IK, multiple de D, 1. (ſoit priſe D, pour 1. & 3. & C, 2. & AB, 4.) eſt plus grande que HG, multiple de C, 2. mais IK, multiple de D, 3. n'eſt plus grande que FH, multiple de AB, 4. mais moindre FH, eſtant plus grande que IK, comme il eſt monſtré; il y aura plus grã-

parlent) eſt probable, comme eſt ceſte queſtion; Sçauoir ſi le tout eſt diſtingué reellement de ſes parties priſes enſemble. Ainſi auſſi ceſte Propoſition entre les Mathematiciens, par laquelle ils commandent de conſtituer ou conſtruire quelque choſe, dont le contraire peut auſſi eſtre faict, s'appelle Probleme. Comme ſi quelqu'vn ſe propoſe de pouuoir conſtituer vn triangle equilateral ſur vne ligne droicte terminee, il faict vn Probleme: d'autant qu'vn triangle non equilateral, ſçauoir vn Iſoſcele ou Scalene, peut auſſi eſtre conſtitué ſur la meſme ligne. Semblablement quiconque propoſe de couper vn angle rectiligne en deux parties egales, il exhibe vn Probleme, d'autant que le meſme angle peut auſſi eſtre diuiſé en parties non egales: Mais toutesfois il y a grande difference entre le probleme des Dialecticiens, & des Mathematiciens. Car au probleme de Dialectique, laquelle partie que l'on veut de la contradiction eſtant priſe, eſt confirmee probablement ſeulement; de ſorte que l'on eſt touſiours en doute laquelle partie d'icelle eſt vraye: Mais au probleme Mathematique, quelconque partie que quelqu'vn prenne, il la prouuera par vne demonſtration certaine, de ſorte qu'il ne reſtera aucun doute. Car ſi le Geometre ordonne de quelconque poinct d'vne ligne droicte propoſee, mener vne ligne perpendiculaire, il le fera auec vne raiſon

conſtante & euidente; & faut dire le ſemblable s'il veut mener vne ligne non perpendiculaire. Or ils appellent Theoreme ceſte demonſtration, laquelle examine ſeulement quelque paſſion ou proprieté d'vne ou pluſieurs quantitez enſemble. Comme ſi on veut demonſtrer qu'en tout triangle, les trois angles ſont egaux à deux angles droicts: Ils appelleront telle demonſtration, Theoreme, d'autant qu'il ne commande pas ou enſeigne de conſtituer vn triangle ou quelque autre choſe: mais il contemple tant ſeulement ceſte paſſion de quelconque triangle, que les angles d'iceluy ſoiēt egaux à deux droits: D'où ceſte demonſtration eſt dite Theoreme de la contemplation meſme: & au Theoreme il ne ſe peut nullement faire que l'vne & l'autre partie de la contradiction ſoit veritable: Car ayant demonſtré, que tous les trois angles de tout triangle ſont egaux à deux angles droicts; il ne ſe peut faire qu'ils ſoient auſſi inegaux à 2. droits: & ainſi des autres. Dōc, pour dire en vn mot, ceſte queſtion Mathematique, qui enſeigne à faire ou conſtruire quelque choſe, & dont la partie appoſee peut auſſi eſtre faite, s'appelle Probleme. Mais celle là qui enſeigne quelque choſe où il n'y a rien à conſtruire, & de laquelle la partie oppoſee eſt perpetuellement fauſſe, eſt appellee Theoreme. Parquoy ſi quelqu'vn propoſoit en façon de Probleme vouloir conſtituer vn

angle droict, en vn demicercle, il seroit tout à faict digne d'estre mocqué & estimé ignorant en Geometrie; puis que tous les angles au demi cercle sont droicts: cõme il sera demõstré 31.p.3.l. Parquoy ceste Proposition doit estre appellee Theoreme & non pas Probleme. Au reste tant le Probleme que le Theoreme, entre les Mathematiciens est dict Proposition, d'autant que l'vn & l'autre nous propose quelque chose, comme appert par les exemples susdits: & touſiours les demonstrations des Problemes se concluent par ces mots: Ce qu'il falloit faire. Mais celles des Theoremes, par ceux cy: Ce qu'il falloit demõstrer. Or aux demonstratiõs des Problemes & Theoremes estans requis fort souuent quelques autres Theoremes ou Problames moins principaux, & qui peuuent estre facilement entendus de ceux qui sont premierement demonstrez; Iceux sont quelquesfois inserez par les Geometres entre les Theoremes & Problemes, desquels il s'agit principalement, afin qu'ils puissẽt estre plus briefuemẽt demonstrez, & ils les appellent Lemmes, d'autant qu'ils sont pris seulement pour d'autres demonstrations, & d'iceux n'est instituee vne dispute principale ainsi que des autres. Donc la demonstratiõ ou construictiõ de ce qui est pris pour la demonstration de quelque Theoreme ou Probleme principal, afin que la demonstration se face plus promptement & briefuement peut estre appellee Lemme.

Que c'eſt que principes entre les Mathematiciens.

Toute doctrine & diſcipline eſtant engendree, comme dit Ariſtote, d'vne preexiſtente cognoiſſance, & demonſtrant ſes concluſions par de certains principes prins & concedez: Mais aucune ſcience, ſelon l'opinion du meſme Ariſtote & des autres Philoſophes, ne demonſtrãt ſes principes: Touſiours les diſciplines Mathematiques auront leurs principes, par leſquels, poſez & concedez, elles puiſſent confirmer leurs Problemes, & Theorémes.

Or entre les Mathematiciens, il y a de trois genres de principes. Au premier ſe trouuent toutes les definitions, que quelques-vns auec Ariſtote appellent ſuppoſitions, ou hypotheſes, comme veut Proclus: Et par icelles ſont expliquez les termes de l'art, afin qu'en traictant la ſcience, ne ſoyons trompez par l'ambiguité & obſcurité des noms, & ne tombions en des paralogiſmes. Au ſecond genre ſont les petitions ou demandes, leſquelles ſont tellement claires & manifeſtes en la ſcience que l'on traicte, qu'elles n'ont beſoin d'aucune preuue; mais demandẽt ſeulement le conſentement de l'auditeur, afin qu'il n'y ait aucune heſitation ou difficulté en la

de raiſon de D,1. à C,2. que de D,3. à AB, 4. ce qui eſtoit propoſé. Donc des grandeurs inegales &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.

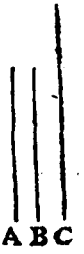
THEOREME 9. PROP. 9. ix

Les grandeurs qui ont meſme raiſon à vne meſme grandeur, ſont egales entr'elles; Et celles là auſquelles vne meſme grãdeur a meſme raiſon, ſont auſſi egales entr'elles.

Premierement que A & B, ayent meſme raiſon à C. Ie dis qu'elles ſont egales entr'elles.

Autrement elles ſeroient inegales, tellement que l'vne ſeroit plus grande. Soit donc A plus grande & B moindre, s'il eſt poſſible, donc [a] il y aura plus grande raiſon de A plus grande à C, que de B, plus petite à la meſme C, ce qui eſt contre l'hypotheſe; donc A & B, ne ſont inegales, mais egales. a 8. 5.

Secondement que C, ait meſme raiſon à A, que à B. Ie dis derechef que A, & B ſont egales entr'elles; car ſi l'vne eſtoit plus grãde, ſçauoir A, & B, moindre: C, [b] auroit plus grande raiſon à B, plus petite qu'à A, plus grande, ce qui eſt cõtre l'hypotheſe; donc A ne ſera plus grãde que B, ains egale. Donc les grandeurs qui ont, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.

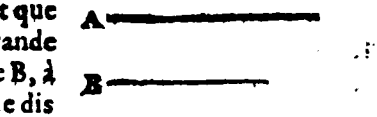


b 8. 5.

THEOREME 10. PROP. 10. x

Des grandeurs qui ont raiſon à vne meſ-

me grandeur, celle-là qui a plus grande raiſon, eſt la plus grande: mais celle là, à laquelle vne meſme grandeur a plus grande raiſon eſt la plus petite.



Premierement que A, ayt plus grande raiſon à C que B, à la meſme C. Ie dis que A, eſt plus grãde que B: Car ſi A, eſtoit egale à B, icelles a A & B, auroient meſme raiſon à C. Et ſi A eſtoit plus petite que B, b la plus grande B, auroit plus grande raiſon à C, que la plus petite A, ce qui eſt contre l'hypotheſe. Donc A, n'eſt egale à B, ny plus petite, mais plus grande.

a 7.5.
b 8.5.

Secondement que C, ayt plus grande raiſon à B, qu'à A. Ie dis que B, eſt moindre que A: Car B, ne ſera egale à A, c autrement C, auroit meſme raiſon à A, & B; ce qui eſt contre l'hypotheſe: B ne ſera auſſi plus grande que A, d'autant que C auroit plus grande raiſon à la moindre A, que à B plus grande; ce qui eſt d'auantage contre l'hypotheſe; Donc B, eſt moindre que A, ce qui eſt propoſé. Partant des grandeurs qui ont raiſon, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.

c 7.5.
d 8.5.

xj THOREME 11. PROP. 11.

Les raiſons qui ſont de meſme, à vne meſme raiſon, ſont auſſi de meſme entr'elles.

SCHOLIE.

Semblablement s'il y a trois lignes droictes proportionelles: les rectilignes semblables & semblablement descrits sur icelles seront proportionaux, &c. Car si l'on prend la ligne du milieu & son rectiligne deux fois, l'on aura quatre lignes proportionelles. Donc par mesme moyen quatre rectilignes proportionaux, comme demonstre icy Euclide. Donc puis que ce qui est descrit sur la seconde est egal, voire mesme chose que ce qui est descrit sur la tierce; Ce qui est proposé, est manifeste.

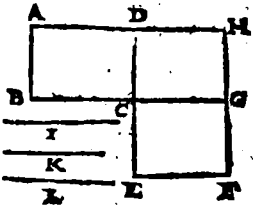
xx iiij

THEOREME 17. PROP. 23.

Les parallelogrammes equiangles, sont l'vn à l'autre en raison composee de celles de leurs costez.

Soient les parallelogrammes equiangles AC, CF, ayant les angles BCD, ECG, egaux. Ie dis que la raison de AC, à CF, est cõposee de la raison de BC, à CG, & DC, à CE: C'est à dire, si on prend trois lignes droictes I, K, L, de sorte que I, soit à K, comme BC, à CG, & K, à L, comme DC, à CE; le parallelogramme AC, sera au parallelogramme CF, comme I, à L, qui est la raison composee de I, à K, & de K, à L, par la 5. definition de ce liure.

Car soient disposez les parallelogrammes selon les angles egaux au poinct C, de sorte que BC, CG, facent vne seule ligne droicte: ce qu'estant ainsi; Puis que les angles BCD, ECG, sont egaux, EC, C



D, seront aussi vne ligne droicte, comme nous auons dit à la 14. & soient prolongees AD, FG, au poinct H, faisant le parallelogramme CH: Et soit prinse quelconque droicte ligne I, & à BC, CG, & I, soit [a] trouuee la 4. proportionelle K. Item aux trois DC, CE, & K, la 4. proportionelle L: [b] D'autant donc que comme BC, à CG, ainsi AC, à CH: mais comme BC, à CG, ainsi I à K, par l'hypotheſe: Pareillement [c] comme AC, à CH, ainsi I, à K. Par la meſme raiſon on monſtrera que comme HC eſt à CF, ainsi K, eſt à L: Car comme DC, à CE, [d] ainsi HC, à CF. Donc puis que K, eſt poſé à L, comme DC, à CE, pareillement HC, ſera à CF, comme K, à L; [e] Donc en raiſon egale AC, ſera à CF, comme I, à L, mais la raiſon de I, à L, eſt compoſee des raiſons de BC, à CG, & DC, à CE, par la 5. definition du 5. Donc la raiſon du parallelog. AC, au parallelog. CF, eſt compoſee de ces meſmes raiſons. Donc les parallelogrammes equiangles, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.

a 12. 6.
b 1. 6.
c 11. 5.
d 1. 6.
e 22. 5

SCHOLIE.

Le meſme ſera demonſtré plus briefuement en ceſte maniere, eſtans conioinctes les parallelogrammes comme auparauant: D'autant que comme AC, eſt à CH, ainsi BC, à CG, & comme CH, à CF, ainsi DC, à CE: Mais la raiſon de AC, à CF, eſt compoſee des raiſons entremoyennes AC, à CH, & CH, à CF, par la definition, la meſme raiſon de AC, à CF, ſera auſſi compoſee des raiſons de BC, à CG, & de DC, à CE, leſquelles ſont egales à icelles moyennes. Ce que eſt propoſé.

demonſtration. Au troiſieſme ſont les axiomes ou maximes, ou communes notions de l'eſprit, leſquelles non ſeulement en la ſcience propoſee, mais auſſi en toutes les autres, ſont tellement manifeſtes & euidentes, que celuy qui conceura fort bien ces meſmes mots & termes, ne s'en pourra en aucune façon departir, qu'il n'y conſente facilement : Leſquels principes Euclide met deuant les demonſtrations de ſes concluſions, afin que par iceux comme eſtans bien entendus de chacun, il puiſſe deduire des Theoremes admirables, leſquels perſonne n'accorderoit auparauant qu'eſtre confirmez par raiſons euidentes & certaines. Mais ſuyuons noſtre Autheur.

PREMIER LIVRE, DES ELEMENTS GEOMETRIQVES d'Euclide.

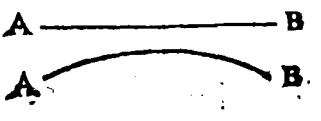
DEFINITIONS.

1. Le poinct eſt, ce qui n'a aucune partie.

EVCLIDE nous a faict entendre, par la negation des parties (& ce auec raiſon) que c'eſt en la quantité continuë que le poinct, principe & fõdemẽt de ſon ſuject. Car les principes eſtants differẽts des choſes deſquelles ils ſont principes, & les proprietez & accidents de tels principes eſtants incogneus, on monſtre en quelque façon ces principes, niant qu'ils ſoient les choſes dont ils ſont principes, ou qu'ils ayent quelque choſe de commun auec icelles: Vray eſt que pour faire de ſemblables definitiõs, ou pluſtoſt deſcriptiõs, il faut auoir expliqué & faict cognoiſtre les choſes que no⁹ excluõs; ainſi qu'a faict Porphyre en ſon Introduction definiſſant l'accidẽt, ὃ ἔστι μὲν ὅτε ὑπάρχει ἐν ὑποκειμένῳ, ἔστι δὲ ὅτε καὶ ἀπῇ, ἢ οὐδὲν ἂν ὑποκείμενον φθείροιτο·

μέρος, Ce qui n'eſt n'y genre, n'y difference n'y eſpece, n'y propre, & eſt touſiours au ſuject. Mais cela euſt eſté fort eſloigné, & plus propre au Phyſicien qu'au Geometre d'enſeigner que c'eſt que diuiſible en general. Ceſt pourquoy il l'a obmis ſe contentant d'en definir apres quelques eſpeces comme, la ligne & la ſurface deſquelles il conſidere pluſieurs & diuerſes affections en ſes *6.* prem. liu.

2. La lign. eſt vne lógueur sãs larg.

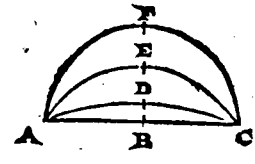


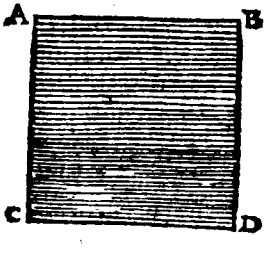
La ligne eſt la premiere eſpece de quantité, laquelle a tant ſeulement vne dimenſion, à ſçauoir, longitude, ſans aucune latitude, n'y profondité & n'eſt autre choſe que le flus ou coulement du poinct, lequel eſtant totalement indiuiſible, laiſſera de ſon mouuement imaginaire, quelque veſtige en long, exempt de toute latitude. Comme ſi le poinct A eſt entendu couler de A à B, le veſtige A B, qu'il a faict par ſon flus ou coulement ſera appellé ligne, puis que l'interualle cõpris entre les deux poincts A & B, eſt vrayement vne longitude, defaillant de toute latitude, d'autant que le poinct par le flus duquel elle eſt produite n'a aucune dimenſion : Quelques vns diſent que ceſt vne quãtité qui a vn interuale, car la ligne peut eſtre diuiſée ou couppée en vne ſeule maniere, à ſçauoir ſelon la longitude.

3. Les extremités de la ligne, ce ſont poincts.

Euclide enſeigne icy quels ſont les termes ou extremitez de la ligne, diſant que la ligne eſt terminée ou finie de part & d'autre, de poincts, non pas que toute ligne ait des termes; car comment pourroit-on aſſigner des termes à vne ligne infinie? ou trouuer extremité à vne ligne circulaire: Mais il faut entendre que toute ligne finie eſt terminée de poincts à ſes extremitez. Comme la ligne precedente AB, eſt terminée des poincts A & B. Et faut entendre le meſme de toutes autres lignes finies ou terminées.

4. La ligne droicte eſt celle, qui eſt egalement eſtenduë entre ſes poincts.





Les Mathematiciens ont de trois ſortes de lignes, la droicte, la circulaire, laquelle ils appellent courbe, & la mixte qui eſt cõpoſée de l'vne & de l'autre: Euclide deſcrit en ce lieu la droite, qu'il dit eſtre celle-là laquelle eſt egalemẽt eſtenduë entre ſes poincts, ceſt à dire, en laquelle aucun des poincts, de tous ceux qui ſont poſez entre les extremitez, n'eſt plus eſleué ou abaiſſé; & en vn mot c'eſt le plus court chemin d'vn poinct à l'autre, ou

comme dit Archimede la plus courte de celles qui ont meſmes extremitez. Icelle nous peut eſtre aucunement exprimée par quelque fil bien delié & tendu autant qu'il ſe peut faire. Proclus expoſant cette definition dit, que vne ligne eſt egalement eſtenduë entre ſes poincts quand elle occupe vn eſpace ou interualle egal, à celuy qui eſt poſé entre ſes poincts extrémes; comme par exemple la ligne ABC, ſera dicte droicte d'autant qu'elle occupe autant d'interualle qu'il y a de diſtance du poinct A au poinct C, mais les lignes A D C, A E C, A F C, ne ſeront droictes, d'autant qu'elles obtiennent plus d'eſpace que la diſtance de A à C. Platon definit ainſi la droicte ligne: La ligne droicte eſt celle de laquelle les parties du milieu ombragent les extrémes: comme ſi en la ligne A B C, le poinct B, ou quelque autre du milieu auoit la force de cacher, & le poinct A extréme la vertu d'illuminer, le poinct B empeſcheroit touſiours que le poinct extréme C, ne fuſt illuminé de A, ce qui n'arriueroit aux lignes non droictes comme A D C, A F C, comme il eſt manifeſte. Euclide ne definit icy les lignes non droictes, qui peuuent toutes eſtre dictes obliques mais il definira la circulaire à la 15. def. reiettant les autres qui ne ſont d'aucun vſage en ſes Elements. Et y en a de pluſieurs genres, deſquelles traicté Apollonius, Nicomedes, Archimede, &c. Or comme la ligne eſt produicte par le flus continuel du poinct, ainſi la ſuperficie eſt formée de la ligne ſe mouuant de trauers laquelle ſe definiſt ainſi.

5. La ſuperficie eſt, ce qui a tant ſeulement longueur & largeur.

Apres la ligne qui eſt la premiere eſpece de la quantité continuë, & qui a vne ſeule dimenſion, il definit la ſuperficie qui eſt la ſeconde eſpece, & qui a deux dimenſions, ſçauoir longueur & largeur ſans toutesfois aucune profondité. Comme la quantité A B E D, contenuë entre les lignes A B, C D, A C, B D, (en la figure precedente, pag. 3.) conſiderées ſelon la longitude A B, ou C D, & ſelon la latitude A C ou B D, sãs aucune profondité eſt appellée ſuperficie: La latitude extréme de tout corps entenduë ſans aucune ſolidité nous repreſente icelle. Et comme dit Proclus les vmbres des corps nous la repreſentent quaſi naifuement: ſi l'on entend auſſi vne ligne ſe mouuoir de trauers, elle deſcrira vne ſuperficie, cõme diſent les Mathematiciens; comme ſi on entend la ligne A B ſe mouuoir vers la ligne D C, elle deſcrira la ſuperficie A B C D; De ſorte que comme la ligne commence à vn poinct & finit à vn poinct auſſi la ſuperficie terminée de lignes commence à vne ligne & finit à vne ligne. Quelques vns diſent que c'eſt le terme du corps; d'autres que ceſt vne quantité contenuë de deux interualles. Car la ſuperficie peut eſtre diuiſée ou couppée en deux manieres à ſçauoir ſelon la longitude, & latitude.

6. Mais les extrémitez de la ſuperficie ſont lignes.

Cette definition ne difere de la ſuperieure

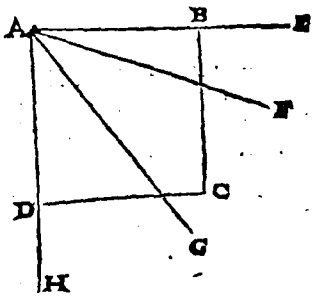
où ont eſté definis les termes de la ligne. Car il dit que les extremitez de la ſuperficie ſont lignes; tout ainſi que les extremitez des lignes ſont poincts. Comme en la ſuperficie de la derniere figure ABCD, les extremitez ſont AB, BD, DC, CA. Et ainſi en toute autre ſuperficie qui a extremitez, faut entendre des lignes aux extremitez: Et non en la ſuperficie Spherique, de laquelle vn corps Spherique eſt enclos. Il y a auſſi quelque ſuperficie qui eſt encloſe d'vne ſeule ligne, comme la ſuperficie circulaire, comme il ſera monſtré en la definition du cercle.

7. Superficie plane, eſt celle qui eſt egalement eſtenduë entre ſes lignes.

Cette definitiõ a quelque ſympatie auec celle de la ligne droicte. Car la ſuperficie qui eſt egalement eſtenduë entre ſes lignes, en ſorte que les parties du milieu ne ſont point plus eſleuées n'y abaiſſées que les extrémes, eſt appellée ſuperficie plane, comme ſeroit la ſuperficie de quelque marbre bien poly & vny, auquel toutes les parties ſont diſpoſées, ou colloquées directement; & comme la ligne droicte eſt le plus court chemin d'vn poinct à l'autre, auſſi telle ſuperficie eſt le plus court chemin d'vne ligne à l'autre.

Les autres definiſſent la ſuperficie, diſans que ceſt celle-là, de laquelle toutes les parties du milieu ombragent les extrémes: Ou que ceſt la plus courte ou briefue de toutes celles

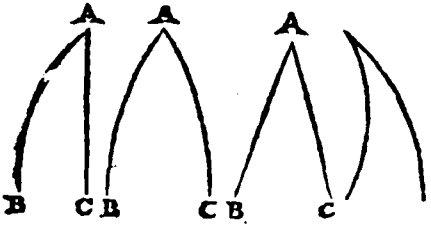
qui ont meſmes extremitez. Ou celle-là (comme veut Heron ancien Geometre) à toutes les parties de laquelle vne ligne droicte peut-eſtre accommodée. Comme par exemple, la ſuperficie ABCD, doit à lors eſtre appellée plane, ſi la ligne AE eſtant entenduë ſe mouuoit à l'entour au poinct A, demeurant fixe, en ſorte qu'elle ſoit comme AE, puis comme AF, & comme AG, & que finallement paruenant du poinct E au poinct H, ne rencontre rien en la ſuperficie de plus eſleué ou abaiſſé l'vn que l'autre, mais tous les poincts de la ſuperficie ſont touchez de la ligne, ou en quelque maniere racles. Et telle ſuperficie eſt celle que nous pouuons entendre eſtre deſcrite par le mouuement ou flus d'vne ligne droicte en trauers. Et faut noter que les Mathematiciens ont couſtume d'appeller aſſez ſouuent cette ſuperficie, Plan, de ſorte que quand ils parlent du Plan, il faut entendre, par ce mot Plan, la ſuperficie plane. Toutes autres ſuperficies ſont appellées courbes ; comme ſont celles des vouſtes ou arcades, colonnes, corps Spheriques & autres. Mais la ſuperficie courbe eſt diuiſée en conuexe & concaue; La conuexe eſt comme l'exterieure ſuperficie d'vn globe ou corps Spherique, d'vn cylindre, d'vn cone, &c.



La concaue eſt comme la ſuperficie interieure d'vne voulte ou arcade, ou d'vn orbe, &c.

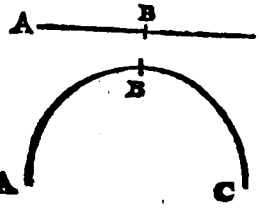
8. Angle plan eſt l'inclination de deux lignes, leſquelles ſe touchent l'vne l'autre en vn plan, & ne ſe rencontrent directement.

Euclide nous enſeigne icy que ceſt qu'angle plan, diſant que quand deux lignes ſe rencontrent l'vne l'autre en vne ſuperficie plane n'eſtant conſtituées directement, de tel rencontre ou inclination l'vne à l'autre, il ſe faict vn angle, lequel eſt appellé angle plan, d'autant qu'il eſt cõſtitué en vne ſuperficie plane cõme ABC.



Or deux lignes droictes ne ſe rencontrent directement, quand vne d'icelles eſtant prolongée de la part où elles ſe rencontrent, ne tombe ſur l'autre, mais la couppe; ou auſſi toſt s'eſloigne du poinct d'attouchement : ce qui ſoit dit à cauſe de l'angle d'attouchement ou de contingence, qui ſe faict de l'attouchement de deux cercles, ou d'vne ligne droicte qui touche le cercle, comme il eſt monſtré à la 16. prop. du 3. liure. Et comme Clauius le monſtre auſſi ſur la meſme 16. prop. contre Iacques

Pelletier, qui dit que la ligne droicte qui touche le cercle, ou bien les cercles qui se touchent ne font angle.



Que si deux lignes droictes se touchent l'vne l'autre estant estenduës directement, sçauoir, en sorte que l'vne d'icelles estant prolongée conuienne auec l'autre il ne se fera aucun angle de ce rentre, attendu qu'il n'y a aucune inclination, mais les deux feront vne seule ligne: comme les lignes droictes AB, CB, qui se rencontrent directement au poinct B. Semblablement il ne se fera aucun angle au poinct B par le rencõtre des lignes courbes AB, CB, puis que celle que l'on voudra des deux estant prolongée selon son inflectiõ & obliquité tombera sur l'autre, partant seront dictes estre estenduës directement selon leur rencontre. Il est donc necessaire que les lignes droictes qui font angle se couppent l'vne l'autre au poinct où est faict l'angle si elles sont prolongées. Mais les lignes courbes ou bien vne droicte & vne courbe peuuent faire angle encore qu'elles ne s'entrecouppent, & suffit qu'elles s'entretouchent en sorte qu'auſſi tost apres l'attouchement elles s'esloignent l'vne de lautre.

Or la quantité de tout angle consiste en la seule inclination & non en la longueur des lignes, car le prolongement des lignes n'augmente point leur inclination & partant n'y

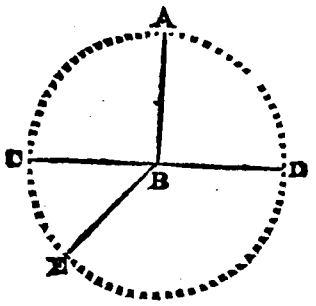
la quantité de l'angle.

Il y a encore deux autres genres d'angles, le premier comprend les angles ſolides, conſiderez aux corps ſolides dont traicte Euclide en la Stereometrie. L'autre comprend les Spheriques, conſtituez en la ſuperficie de la ſphere, par les circonferences des plus grands cercles, deſquels traicte Menelaus en ſes Elements ſpheriques, mais il s'agit ſeulement icy des angles plans.

9. Or quand les lignes qui comprennent l'angle ſont droictes, l'angle ſera appellé rectiligne.

Tout angle plan eſt faict ou de deux lignes droictes & eſt appellé angle rectiligne, & de celuy-cy traicte ſeulement Euclide: ou de deux lignes courbes, & ſera appellé curuiligne, ou d'vne ligne droicte & d'vne courbe & ſera appellé mixtiligne; leſquels on peut conſiderer en la premiere figure de la precedente definition aux angles A B C.

10. Quand vne ligne droicte tombant ſur vne autre ligne droicte, faict les angles de ſuitte, ou d'vne part & d'autre egaux entre eux, l'vn & l'autre d'iceux angles egaux eſt droict: Et la ligne droicte tombante eſt dicte perpendiculaire à celle-là ſur laquelle elle tombe.



L'vſage de l'ãgle droict, de la ligne perpẽdiculaire, & de l'angle obtus & agu eſt fort frequent en la Geometrie. Euclide definit icy l'angle droict, & aux deux ſuiuantes definitions, l'angle obtus & agu. Or tout angle rectiligne eſt droict, obtus ou agu. Il dit donc que quand vne ligne droicte tombe ſur vne autre ligne droicte en ſorte qu'elle ne s'incline ou penche point plus d'vn coſté que de l'autre elle faict les angles de ſuitte egaux & chacun d'iceux angles eſt appellé angle droict; comme ſi la ligne droicte AB, laquelle tombant ſur la droicte CD, faict les angles deſuite au poinct B, ſçauoir ABC, ABD, egaux entr'eux, chacun d'iceux ſera appellé angle droict & AB ſera dicte perpendiculaire à CD, ſur laquelle elle tombe. Pareillemẽt CB, ſera dicte perpendiculaire à AB, encore que CB face ſeulement vn angle droict auec AB, car ſi AB eſtoit prolongée de la part de B, directement il ſe feroit vn angle egal à l'autre ABC. Et pour ſçauoir ſi vne ligne panche poinct plus d'vn coſté que d'autre, ſoit deſcrite vne circonference comme ACED, du poinct B à tel interualle qu'on voudra (moyennant que l'interualle pris n'excede les lignes qui conſtituent l'angle) & ſi la partie de la circon-

ference A C compriſe entre les deux lignes AB, CB eſt egale à la partie de la meſme circonference A D, compriſe entre les lignes AB, DB, cela denote que la ligne AB ne s'incline de coſté n'y d'autre, par ce moyen les angles ABC, ABD ſont egaux entr'eux de part & d'autre: Partant pour conclure qu'vn angle eſt droict, ou que la ligne qui conſtituë l'angle eſt perpendiculaire à vne autre, il eſt neceſſaire & ſuffit auſſi de monſtrer que l'angle de ſuitte ou de l'autre coſté eſt egal. Pareillement ſi vn angle eſt dit droict, ou que la ligne qui conſtituë iceluy ſoit perpendiculaire à l'autre on pourra colliger que l'angle de ſuitte luy eſt ſemblablement egal.

11. Langle obtus eſt celuy qui eſt plus grand qu'vn droict.

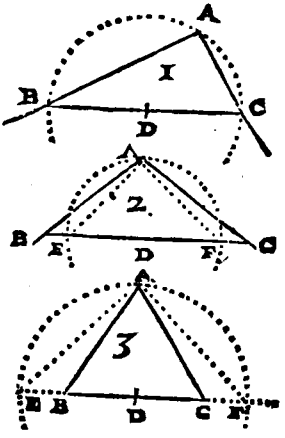
12. Mais l'agu eſt celuy qui eſt plus petit qu'vn droict.

Quand vne ligne droicte tombant ſur vne autre ligne droicte ne faict les angles de ſuitte, ceſt à dire de coſté & d'autre egaux, l'vn ny l'autre n'eſt droict mais l'vn eſt plus grand qu'vn droict & l'autre plus petit; & le plus grand eſt appellé angle obtus, & le plus petit, angle agu: comme par exemple ſoit la ligne EB (en la preced. figure fol. 11.) laquelle tõbant ſur CD fait les 2. angles de coſté & d'autre EBC, EBD inegaux ſçauoir EBD, plus grand, & EBC plus petit, à cauſe que la circonference ED eſt plus grande que la circonference EC: l'angle EBD plus grand ſera dict obtus & EBC

plus petit ſera agu. De ces definitions l'on peut colliger que l'angle droict n'admet aucune varieté: en ſorte que l'vn ſoit plus grand que l'autre ou plus petit, puis que la ligne perpendiculaire qui conſtituë l'angle droict ne ſincline poinct plus d'vn coſté que d'autre: mais l'angle obtus & l'angle agu peuuent eſtre augmentez ou diminuez en diuerſes manieres, attendu que la ligne droicte qui conſtituë iceux peut ſ'esloigner ou approcher diuerſement de celle ſur laquelle elle tombe, comme il eſt manifeſte.

Mais d'autant que pour conſtituer vn angle plan il faut que deux lignes ſe rencontrent, & quelques fois y a pluſieurs angles conſtituez à vn meſme poinct, les Mathematiciens pour euiter confuſion, ont de couſtume, d'exprimer chacun angle par 3 lettres, deſquelles celle du milieu monſtre le poinct auquel les deux lignes conſtituent l'angle, & les extrémes denotent les lignes qui contiennent l'angle. Comme par exemple l'angle obtus (en la precedente figure) eſt entendu, par l'angle EBD conſtitué au poinct B & contenu par les deux lignes droictes EB, DB ſe rencõtrant au poinct B, & l'angle agu eſt entendu par l'angle EBC. Ce qu'il faut noter diligemment, pour facilement diſcerner les angles deſquels il eſt faict mention aux demonſtrations.

Or quand l'on nous propoſe vn angle, ſi nous voulons examiner s'il eſt droict, obtus ou agu, nous le ferons en cette maniere. Soit l'angle A, contenu des deux lignes droictes AB, AC, ayant mené la ligne droicte quelconque



BC, soustendant l'angle A, & l'ayant diuisée en deux egalemẽt au poinct D, d'iceluy comme centre & de l'interualle DA, soit descrit vne circonference : Si elle passe par les poincts B & C, *a* l'ãgle A sera droit au demy cercle: Mais si le mesme demy cercle couppe la ligne droicte BC comme par E & F l'angle BAC sera obtus, car ayant mené AE, AF, *b* l'angle EAF sera droict au demy cercle, lequel n'est qu'vne partie de l'angle BAC, partant BAC plus grand que le droict EAF sera obtus. Comme l'on void à la 2. figure. Si finalement le mesme demy cercle couppe la ligne BC prolongée de part & d'autre aux poincts E & F, l'angle BAC sera agu d'autant qu'ayant mené les droictes lignes EA, FA, *c* l'angle EAF, au demy cercle EAF sera droict, lequel est plus grand que l'angle BAC.

a 31. 3.

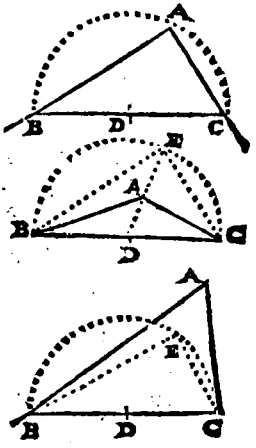
b 31. 3.

c 31. 3.

Autrement nous obtiendrons la mesme chose en ceste maniere. Soit descrit du poinct D, auquel la ligne soustendant l'angle A est couppée en 2. egalement, le demy cercle à l'interualle DB, ou BC, s'il passe par le poinct A, *d* l'angle donné sera droict à sçauoir au demy cercle. Mais si le mesme demy cercle passe au

d 31. 3.

dessus du poinct A, l'angle donné sera obtus, (comme en la 2. figure:) car ayant mené la droicte ligne DE, couppant la circonference au poinct E. Soiēt ioinctes les droictes lignes EB, EC, *e* l'angle BEC au demy cercle sera droict. Donc puis que l'angle BAC, *f* est plus grand que l'angle BEC, l'angle donné A sera plus grand qu'vn droict, c'est à dire obtus, (en la 2. figure.) Si finalement le demy cercle couppe les lignes AB, AC, ou vne, l'angle donné sera agu. Car ayant pris le poinct E, entre icelles lignes AB, AC, en la circonference, soient ioinctes les droictes lignes EB, EC, *g* l'angle BEC sera droict au demy cercle *h* lequel estant plus grād que l'angle A, iceluy A sera moindre qu'vn droict; c'est à dire agu.



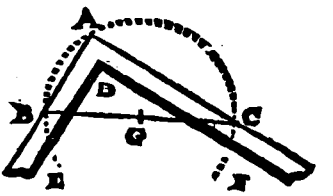
e 31. 3.

f 21. 1.

g 31. 1.
h 21. 1.

L'on pourroit dire qu'il n'est a propos de citer les propositions d'Euclide qui seront par apres demonstrées pour faire ces demonstrations, d'autant que cela est esloigné de la pureté des demonstrations Geometriques. Ce qui toutefois ne doit estre trouué estrange, attendu qu'icelles ne sont necessaires aux demonstrations d'Euclide qui sont cy apres, & suffira icy d'entendre la practique seulement de ce

qui eſt demonſtré, iuſques à ce que l'on ait veu les propoſitions citées cy deſſus.



L'õ cognoiſtra le meſme plus facilement par le moyen d'vne regle ou equierre deuëment fabriquée (comme ce void en la figure ABC), repreſentant vn inſtrument faict de deux regles A B, A C conioinctes à angles droicts au poinct A. Car ſi le coſté A C dudit inſtrument eſt appliqué ſur la ligne A C en ſorte que le poinct A de l'inſtrument tombe ſur le poinct A de l'angle BAC, & à lors ſi l'autre coſté AB de l'inſtrument, tombe ſur la ligne AB de l'angle BAC l'angle A ſera droict, mais ſil tombe au dedans l'angle ſera obtus & ſi au dehors, il ſera agu, comme il eſt manifeſte.

Et pour examiner ſi l'inſtrument eſt deuëment fabriqué, ſoit deſcrit vn demy cercle comme BAC du centre G, & à tel interualle qu'on voudra & ayant mené le diametre BC ſoit appliqué l'angle de l'inſtrument à quelconque poinct de la circonference comme au poinct A, & que l'vn des coſtez comme AF, paſſe par l'extremité du diametre B : ſi l'autre AC paſſe auſſi par l'extremité du diametre, C l'inſtrument ABC, ſera deuëment fabrique;

*31. 3. * Car à lors l'angle BAC au demy cercle ſera droit, en la meſme maniere l'on l'examinera par le dedans, appliquant le poinct D à la circonferen ce

conference, comme il a eſté dit.

13. Terme, eſt l'extremité de quelque choſe.

Il y a trois ſortes de termes ſelon cette definition. Car le poinct eſt le terme ou l'extremité de la ligne; la ligne eſt le terme de la ſuperficie, & la ſuperficie le terme du corps: mais le corps ne peut rien terminer, d'autant qu'il ne ſe trouue aucune quantité qui ayt plus de trois dimenſions. Et toute choſe terminee, excede ſon terme d'vne dimenſion, comme il eſt manifeſté par les exemples propoſez.

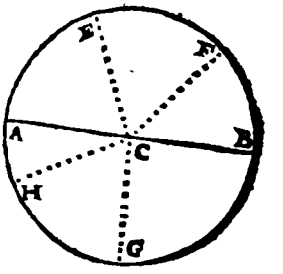
14. Figure eſt, ce qui eſt contenu ſous vn terme, où ſous pluſieurs termes.

Toute quantité terminee ne peut pas eſtre appellee figure, autrement la ligne terminee ou finie ſeroit figure: mais ſeulement celles qui ont longueur & largeur comme ſont les ſuperficies terminees; ou longueur, largeur & profondité, comme ſont, les ſolides terminez, ſeront appellez du nom de figure; car iceux ſeulement ſont dicts eſtre contenus de termes: mais la ligne finie eſt ſeulement terminee de deux poincts & non enuironnee. Donc les termes doiuent enclorre la quantité appellee figure, & non ſeulement la terminer; auſſi les ſuperficies infinies ou les corps infinis, n'eſtant enclos d'aucun terme, ne doiuent aucunement eſtre appellez figures. Les figures contenuës d'vn ſeul terme ſont le cercle, l'ellypſe, la ſphere, ſpheroide & autres ſemblables: & les figures encloſes de pluſieurs termes, ſont le triangle, le quarré, le cube, &c.

15. Le cercle, eſt vne figure plane, contenuë ſous vne ſeule ligne appellee circonference, à laquelle toutes les lignes droictes menees

d'vn seul poinct, de ceux qui sont posez au dedans de la figure sont egales entr'elles.

Il definit icy le cercle qui est la plus parfaicte de toutes les figures ; nous enseignant que la figure plane, qui est enuironnee d'vne seule ligne, à laquelle ligne, toutes les droictes lignes menees d'vn seul poinct de ceux qui sont au dedans de la figure, sont egales entr'elles.



Comme si vne superficie ou espace est enclos d'vne seule ligne, sçauoir, A, E F B G H, & que d'vn poinct au dedans, comme de C, toutes les lignes droictes menees au terme, A E F B G, H, sçauoir, C A, C E, C F, C B, C G, C H, soient egales entr'elles: telle figure plane est appellee cercle, & le terme ou ligne enuironnant ceste figure est appellee circonference. L'on peut aussi definir le cercle en ceste maniere. Le cercle est vne figure plane, laquelle est descrite par vne ligne droicte finie, menee à l'entour d'vn des poincts extremes, lequel demeure fixe, iusques à ce qu'elle soit retournee de rechef au mesme lieu où elle a commencé de mouuoir : comme si l'on entend la droicte ligne A C, se mouuoir à l'entour du poinct C, lequel demeure fixe, iusques à ce qu'elle retourne au mesme poinct A, où elle a commencé son mouuement, elle descrira tout l'espace circulaire & le poinct extreme A, descrira la circonference, A E F, B G H, & le poinct fixe C, est celuy-là duquel toutes les lignes droictes menees à la circonference sont égales entr'elles, d'autant que

C A, menee à l'entour, meſure également toutes les lignes droictes qui peuuent eſtre menees de C, à la circonference.

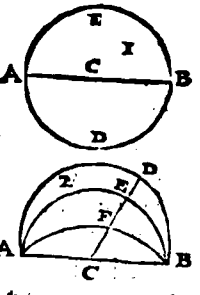
16. Mais ce poinct, eſt appellé centre du cercle.

Ce poinct, dit-il, qui eſt au dedans du cercle, ſçauoir celuy duquel toutes les lignes droictes, menees à la circonference ſont égales entr'elles, eſt appellé le centre du cercle; comme eſt le poinct C; en la precedente figure; D'où il eſt manifeſté que le pole d'vn cercle en la ſphere, duquel toutes les lignes droictes tombantes à la circonference du cercle, ſont egales, comme dit Theodoſe en ſes Elemens ſpheriques, ne doit eſtre appellé cẽtre du cercle; attendu que ce poinct qui eſt appellé pole du cercle, eſt en la ſuperficie de la ſphere, & non en la ſuperficie du cercle; qui eſt vne condition requiſe afin qu'vn poinct ſoit dict centre.

17. Le Diametre du cercle eſt vne ligne droicte menee par le centre; & terminee de part & d'autre à la circonference du cercle, laquelle diuiſe le cercle en deux egalement.

Si au cercle on mene vne ligne droicte par le cẽtre, ſe finiſſant à la circonference de part & d'autre comme la ligne droicte A B, (en la precedente figure) menee par centre C, & finiſſant en la circonference de part & d'autre, telle ligne eſt appellee le diametre du cercle, & icelle couppe auſſi le cercle par la moitié, puis qu'iceluy diametre paſſe par le milieu, ſçauoir par le centre; & partãt couppe auſſi la circonference du cercle en deux parties égales. Ce que toutefois Thales Mileſius (à ce que dit Proclus) a ainſi demonſtré.

Soit entendu ou conceu en l'entendement que la portion du cercle, A D B, ſoit accommodee à l'autre portion A E B, en ſorte que le diamerre A B, ſoit commun à l'vne & à l'autre portion: ſi la circonference A D B, conuient totalement auec la circonference A E B, il eſt manifeſte que ces deux portions faictes par le diametre ſont egales entr'elles, attendu que l'vne n'excede l'autre: mais ſi A D B, ne conuient auec A E B, elle tombera au deſſus ou au deſſous:



S'il eſt ainſi ſoit menée la droicte ligne E D, du centre C, coupant les circonferences A D B, A E B, aux poinctes D, & E, (comme il ſe voyd en la 2. fig.) les deux lignes droictes C D, C E, menées du centre à la circonference d'vn meſme cercle ſeront égales entr'elles par la difinition du cercle, ce qui eſt impoſſible, l'vne eſtant partie de l'autre: Donc les circonferences A B D, A E D, ſeront égales; ce qu'il falloit demonſtrer.

De ceſte demonſtration il s'enſuit que le diametre couppe non ſeulement la circonference, mais auſſi toute la ſuperficie du cercle en deux également: Car puis que les demies circonferences conuiennent entr'elles comme il eſt monſtré, les ſuperficies contenuës entre le diametre & l'vne & l'autre circonference conuiendront auſſi entr'elles puis que l'vne n'excede l'autre, & partant ſeront égales.

18. Le demi-cercle eſt vne figure contenuë ſous le diametre, & ſous la ligne retran-

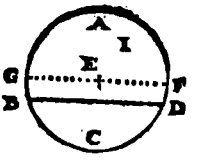
chée de la circonference du cercle.

Comme par exemple, la figure A D B, au cercle precedent contenuë sous le diametre A B, & la circonference A D B, est appellée demi-cercle, d'autant que c'est la moitié du cercle, comme nous auons monstré en la definition precedente. Semblablement la figure A E B, est demi-cercle, & le mesme poinct C, par lequel le diametre est diuisé en deux également est le centre au cercle & au demi-cercle.

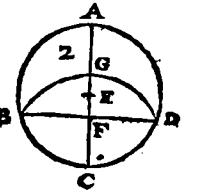
Si vne ligne droicte comme B D, coupant le cercle en deux portions, ne passe par le centre E, elle le couppera en deux portions inégales, comme B A D; B C D, desquelles B A D, en laquelle est le centre, est la plus grande. Ce qui se peut ainsi demonstrer.

Soit mené le diametre G F, parallele à B D, ou non, pourueu que B D, G F, ne s'entrecouppent: D'autant que G F, est le diametre du cercle A B C, Il le couppera en deux également, & partant le demicercle G A F, sera égal au demicercle G E F, mais G E F, est plus grand que B C D, le tout que sa partie, donc G A F, égal à G C F, sera aussi plus grand que B C D, & partant la portion totale B A D, qui est plus grande que G A F, le tout que sa partie sera encore bien plus grande que la portion B C D, ce qui estoit proposé. *a.* 17. *def.* *b.* 9. *ax.*

Mais Clauius prouue cecy autrement comme s'enſuit.



Soit conceu que le diametre A C, ſoit mené par le centre E, perpendiculaire à B D. Donc ſi les portions B A D, B C D, ſont dictes égales, & que la portion B C D, ſoit entenduë ſe mouuoir à l'entour de la ligne droicte B D, en ſorte qu'elle tombe ſur B A D, elles conuiendront entr'elles & la droicte ligne F C, conuiendra ſur la ligne F A, à cauſe des angles droicts au poinct F, qui ſont égaux entr'eux par la 10. def. eſtant de ſuitte, donc la droicte ligne F C, qui eſt maintenant la meſme que F A, ſera plus grãde que E A, qui n'eſt qu'vne partie de F A. Donc puis que E C, eſt égale à E A, eſtans menées toutes deux du centre E, à la circonference, F C, ſera pareillemẽt plus grande que E C, la partie que le tout; ce qui eſt impoſſible. Donc la portion B C D, ne conuiendra ſur la portion B A D, mais tombera au dedans, comme eſt la portion B G D, de ſorte que la droicte ligne F G, qui ſera alors la meſme que F C, puiſſe eſtre plus petite que E A, ou E C; Or ſi elle eſtoit dite tomber dehors: comme ſi le cercle eſtoit B C G D, duquel le centre fuſt E, & la portion B C D, tombaſt hors B G D, telle qu'eſt la portion B A D. De rechef F A, qui ſeroit lors la meſme que F C, ſeroit plus grande que E G, c'eſt à dire que E F C, & partant la partie F C, ſeroit de rechef plus grande que le tout E C, ce qui eſt abſurde. Donc il eſt manifeſte que la portion B A D, en laquelle eſt le



centre E, eſt plus grande que l'autre portion B C D; puis que B C D, eſt égale à B G D, qui eſt partie de la portion B A D; car puis qu'il eſt monſtré que la portion, B C D, menée à l'entour de la ligne droicte B D, ne peut conuenir ſur la portion, B A D, ny tomber hors icelle, elle tombera totalement au dedans comme eſt B G D.

19. PORTION ou ſection de cercle eſt vne figure contenue ſous vne ligne droite, & parde la circonference du cercle.

Euclide repete cette definition au troiſieſme liure parquoy n'en dirons icy autre choſe.

20. Figures rectilignes ſont celles qui ſont contenuës ſous des lignes droictes.

Apres la definition du cercle, Euclide voulant faire les deſcriptions de diuerſes figures, il enſeigne auparauant, quelles figures ſont dictes rectilignes: Car il doit traicter principalement d'icelles, aux liures ſuiuants.

Donc toutes les figures planes encloſes de tous coſtez de lignes droictes ſont appellées figures rectilignes. D'où il eſt manifeſte que les figures planes enuironnées de lignes courbes ſont appellées curuilignes: Mais celles qui ſont circonſcrites en partie de lignes droictes & en partie de courbes ſont appellées mixtes. Or diuers genres de figures ſeront maintenant deſcrites par Euclide.

21. Figures trilateres, ſont celles qui ſont contenuës ſous trois coſtez.

Quand Euclide dit icy que les figures rectilignes trilateres ſont celles qui ſont enuironnées de trois lignes droictes, il nous monſtre clairement, com-

ment il faut definir le triangle: Car puis qu'aux figures rectiligues il y a autant d'angles que de coſtez ou de lignes droictes, deſquelles, elles ſont conſtituées: le triangle ſera vne figure contenuë ſous trois lignes droictes, duquel les eſpeces ſeront cy apres declarées.

22. Les figures quadrilateres ſont, celles qui ſont contenuës ſous quatre coſtez.

Semblablement le quadrangle ou quadrilatere eſt vne figure; contenuë de quatre lignes droictes, de laquelle les diuerſes eſpeces ſeront incontinent declatées.

23. Les figures multilateres ou de pluſieurs coſtez, ſont celles qui ſont contenuës ſous plus de quatre lignes droictes.

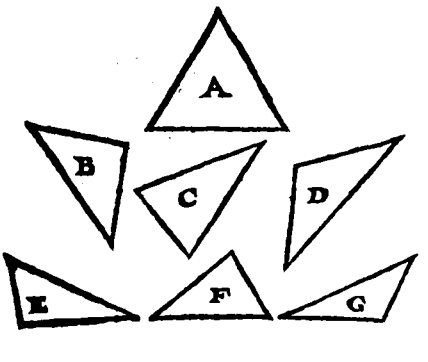
D'autant que les eſpeces des figures rectilignes ſont innombrables, à cauſe du progrés infini des nombres. Car trois lignes droictes enuironnant vne figure conſtituent la premiere eſpece, ſous laquelle ſont contenues tous les triangles; quatre lignes droictes conſtituent la ſeconde eſpece, laquelle comprend tous les quadrangles ou quadrilateres; 5. lignes droites cõpoſent la 3. eſpece, 6. la 4. & ainſi de ſuitte infiniment: Donc afin qu'Euclide ne ſoit contrainct de pourſuiure ceſte infinité il appelle toutes autres figures rectiligues, circonſcrites de plus de 4 lignes droites de ce nom general, Multilateres, ſe contentant de la denominatiõ des trilateres & quadrilateres, peut eſtre à cauſe qu'il parle principalement de celles cy, en ces liures & que par la cognoiſſance d'icelles, l'on entendra facilement la definition des autres &c.

24. Or des figures trilateres, celle qui a trois coſtez égaux, s'appelle triangle equilateral.

25. Mais triangle Iſoſcele, celle qui a deux coſtez égaux tant ſeulement.

26. Et ſcalene, qui a les trois coſtez inégaux.

Par ces trois definitions il expoſe les trois eſpeces de triangles, la premiere & plus ſimple deſquelles; eſt le triangle equilateral, ou de trois coſtez égaux, comme eſt le triangle A. La ſeconde eſt le triangle Iſoſcele qui a ſeulement deux coſtez egaux comme les trois B, C, D, & la troiſieſme eſt le ſcalene qui a tous les trois coſtez inégaux, comme ſont les triangles E, F, G: Les equilateres ſont touſiours vniformes d'autãt que leurs angles ſont touſiours egaux: Mais les Iſoſceles & ſcalenes, ſe diuerſifient en infinies manieres, comme l'on peut cognoiſtre par ceſte figure.



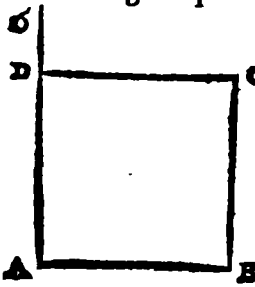
27. Au ſurplus des figures trilateres, le triangle ortogone ou rectangle, eſt celuy là qui a vn angle droict.

28. L'amblygone, eſt celuy qui a vn angle obtus ou mouſſu.

29. L'oxygone eſt celuy qui a tous les trois angles agus.

Il a expoſé les triangles en les conſiderãt premierement ſelon leurs coſtez, il le faict maintenant ſelon la conſideration des angles; & d'autant qu'il y a tant ſeulement trois genres diuers d'angles rectilignes, comme nous auons declaré, auſſi y a il trois genres de triangles, ſcauoir eſt le rectangle, qui eſt celuy qui a vn angle droit, lequel peut eſtre ſcalene ou Iſoſcele, comme ſont les triangles B & E, (en la precedente figure,) le triangle amblygone peut eſtre pareillement Iſoſcele ou ſcalene & non equilateral, comme ſont D & G, mais tout triangle oxygone ou acutangle, peut eſtre equilateral iſoſcele ou ſcalene, ce que l'on peut conſiderer aux triangles A, C, F,

Il faut icy noter qu'en tout triangle deux des lignes eſtans priſes pour deux coſtez, le troiſieſme reſtant a couſtume d'eſtre appellé, par les Mathematiciens, la baſe du triangle, ſoit qu'iceluy ſoit le coſté infime du triangle ou non: de ſorte que chacune des lignes qui encloſt le triangle peut eſtre priſe pour baſe.

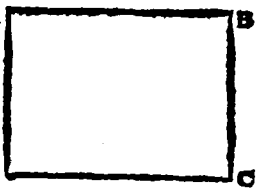


30. Or des figures quadrilateres; le quarré eſt celuy qui eſt equilatere & equiangle, c'eſt à dire qui a les quatre coſtez égaux & les angles droicts.

Après les figures trilateres il expoſe les quadrilateres, en declarant ſeulemẽt de cinq ſortes, les quatre premieres deſquelles, ſont regulieres, mais la derniere & cinquieſme eſt irreguliere. Donc la premiere figure quadrilatere eſt appellée quarré, de laquelle tous les coſtez ſont égaux entr'eux & tous les angles droicts, comme eſt la figure A B C D, & partant le quadrangle equilatere & non rectangle ou au contraire, rectangle & non equilatere ne ſera appellé quarré.

31. Le quarré long eſt vne figure rectangle mais non equilatere.

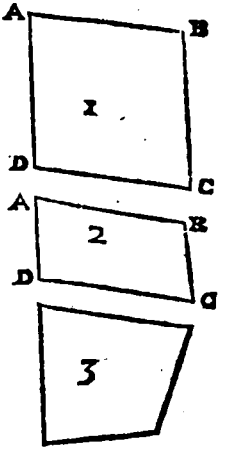
La ſeconde figure quadrilatere, eſt appellée par les Grecs ἑτερόμηκες, c'eſt à dire, plus longue d'vne part, qui eſt celle qui a les quatre angles droicts, mais n'a pas les quatre coſtez égaux entr'eux, combien que les coſtez oppoſez ſoient egaux entr'eux comme eſt ceſte figure A B C D, où les coſtez A B, D C, oppoſez ſont egaux entr'eux, & A D, B C, pareillement.



32. Rhombe eſt vne figure equilatere, mais n'eſt pas rectangle.

Ceſte figure qui eſt la 3. entre les quadrilateres a les 4 coſtez égaux, mais les quatre angles ne ſont droicts, combien que les angles oppoſez ſoient égaux entr'eux, deux à deux, comme en la premiere des trois figures ſuiuantes, les angles A, & C, ſont égaux entr'eux & non droicts pareillement B, & D,

33. Rhomboide, eſt vne figure, laquelle a les coſtés oppoſez égaux, & les angles oppoſez auſſi égaux, mais n'eſt pas equilatere n'y rectangle.

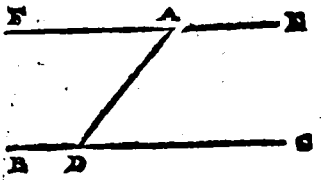


Ceſte figure appellée Rhõboide n'a pas les coſtez égaux n'y aucun angle droict, mais a ſeulemẽt les coſtez oppoſez & les angles oppoſez égaux entr'eux (cõme en la figure 2.) les coſtez AD, BC, ſont égaux entr'eux, pareillement A B, D C; & les angles oppoſez A & C ſemblablement B, & D, égaux entr'eux. Donc ces 4. figures quadrilateres peuuent eſtre dictes regulieres mais toutes les autres quadrilateres ſont irregulieres.

34. Mais outre ces figures, toutes les autres quadrilateres ſont appellées trapezes.

Toutes les autres figures quadrilateres qui differẽt des ſuſdictes, c'eſt à dire qui ne ſont n'y quarrez ny quarrez longs, n'y rhombes n'y rhõboides, ſont appellées trapezes, & ſont irregulieres, attendu qu'elles peuuent eſtre de diuerſes manieres &c. voyez la figure troiſieſme & derniere.

35. Paralleles ſont lignes droictes, leſquelles eſtant en vn meſme plan, & prolongées infiniment de part & d'autre, ne ſe rencontrent de coſté n'y d'autre.

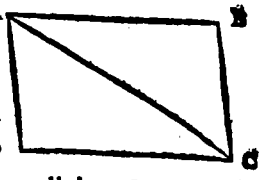


Afin que les droites lignes ſoient paralleles ou equidiſtantes il ne ſuffit pas qu'eſtãt prolongées de part & d'autre infiniment qu'elles ne viennẽt à vn poinct ou ne ſe couppẽt iamais; mais il eſt neceſſaire qu'elles ſoiẽt auſſi en vne meſme ſuperficie plane. Car pluſieurs lignes droictes, n'eſtãt en vne meſme ſuperficie plane, prolongées à l'infini, ne s'entrecouppẽt iamais à vn point, & toutesfois ne ſont dictes paralleles; telles que ſeroient deux lignes poſées de trauers, entenduës au milieu de l'air, & ne ſe touchant point; celles là diſie ne peuuent iamais ſe coupper. Donc les lignes droictes leſquelles ſont en vne meſme ſuperficie plane & qui eſtant prolongées à l'infini de coſté & d'autre, (comme par exemple les lignes F E, B C, ne s'entrecouppent iamais, ſeront dictes paralleles ou également diſtantes. Poſidonius, definit ainſi les peralleles: Paralleles (dit-il) ſont celles là leſquelles ne s'abaiſſent n'y ne s'eſleuent en vn plan, mais ont toutes les perpendiculaires egales, leſquelles ſont menées, de tous les poincts pris en l'vne, ſur l'autre:

Euclide finit icy les definitions de ſon premier liure mais d'autant qu'il eſt faict mention en iceluy des figures parallelogrammes, & de leurs complements, nous auons eſtimé qu'il ne ſera inutile d'expliquer les deux definitions ſuiuantes; pour plus facilement entendre les demonſtrations.

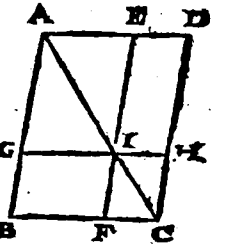
36. Parallelogramme eſt vne figure, quadrilatere, de laquelle les coſtez oppoſez ſont

paralleles ou equidistants.



Comme si en la figure A B C D, le costé A B, est parallele au costé opposé C D, & A C, parallele à B D, elle sera appellée parallelogramme, c'est à dire figure de lignes paralleles; & y en a de quatre sortes, scauoir le quarré & quarré long qui sont aussi appellées parallelogrammes rectãgles; le rhombe & le rhomboide, parallelogrammes non rectangles; d'où l'on peut colliger qu'il y a tant seulement de 4 sortes de parallelogrammes.

37. Mais quand en vn parallelogrãme, l'on mene vn diamattre, ou diagonale, & deux lignes droites paralleles aux costez, couppantes le diametre à vn mesme poinct, en sorte que le parallelogramme soit diuisé par icelles lignes paralleles, en quatre parallelogrammes; ces deux là par lesquels le diametre ne passe, sont appellez complements; mais les deux autres, par lesquels le diametre passe; sont dicts, estre à l'entour du diametre.



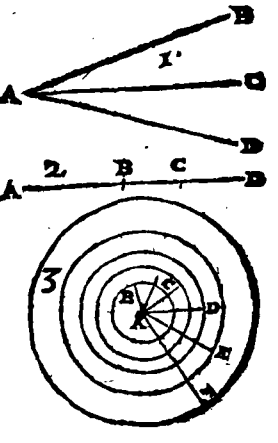
Soit le parallelogramme A B C D, auquel ayant mené le diametre A C, & la ligne E F, couppant iceluy au poinct I, & parallele à A B, C D; semblablement H G, couppant iceluy diametre au mesme poinct I, & parallele à A D, B C, : il est ma-

nifeſte que tout le parallelogramme eſt diuiſé en quatre parallelogrammes, deux deſquels, ſcauoir D G, & G B, par leſquels le diametre ne paſſe, ſont appellez par les Geometres complements ou ſupplements des parallelogrammes reſtants A G, G C, qui ſont dictes eſtre à l'entour du diametre, d'autant que le diametre paſſe par iceux.

PETITIONS OV DEMANDES.

1. De tout poinct donné, à tout autre poinct donné, mener vne ligne droicte.
2. Prolonger directement vne ligne droicte donnée & terminee, infiniment.
3. De quelconque centre & interualle, deſcrire vn cercle.

Ceſte premiere demande ſera manifeſte ſi l'on conſidere ce qui a eſté dit cy deuant de la ligne. Car puis que la ligne eſt vn flus imaginaire du poinct & par ce moyen la ligne droicte eſt vn flus procedant de droict chemin, il aduiendra, que ſi l'on entend quelque poinct ſe mouuoir à vn autre, vne ligne droicte ſera menée d'vn poinct à l'autre: ce que demande Eu-



clide par ceſte premiere petitiõ. Comme l'on void icy la ligne droicte A B, menée du poinct A, au poinct B, & du meſme poinct A, la ligne droite A C, menée au poinct C, Item A D, &c.

Que ſi l'on entend ce poinct ſe mouuoir encore plus outre directemẽt, la ligne droicte terminée, ſera continuée, & ceſte production ſe pourra faire infiniment; puis que nous pouuons entendre ce poinct ſe mouuoir infiniment. Comme ſi la ligne droicte A B, eſt continuée au poinct C, puis au poinct D, &c.

Maintenant ſi nous conceuons en l'entendement, quelconque ligne droicte terminée, appliquée ſelon vne des extremitez à vn poinct fixe, ſe mouuoir à l'entour d'iceluy iuſque à ce qu'elle retourne où elle a commencé ſon mouuement, elle aura deſcrit vn cercle qui eſt le requis de la 3. petitiõ, Cõme l'on peut voir par exemple en ces cinq lignes A B, A C, A D, A E, A F, leſquelles menées à l'entour du centre A, ont deſcrit des cercles ſelon la quantité ou interualle de chacune.

Clauius adiouſte ceſte quatrieſme.

4. Semblablement, quelconque grandeur eſtant donnee, pouuoir prendre vne autre plus grande ou plus petite.

Car toute quantité continuë peut eſtre augmenté par addition; mais par diuiſion, peut eſtre diminuée infiniment: dont il ne ſe peut donner quantité continuë ſi grande qu'il ne s'en puiſſe donner encore vne plus grande: ny vne ſi petite qu'il ne s'en puiſſe donner encore vne plus petite. Cecy eſt auſſi, veritable aux nombres, par addition. Car chacun nombre peut eſtre augmenté infiniment par l'addition conti-

tion continuelle de l'vnité, combien qu'en la diminution d'iceluy on paruienne à l'vnité indiuisible.

COMMVNES SENTENCES, OV NOTIONS.

1. Les choſes qui ſont egales à vne meſme, ſont auſſi egales entr'elles.

De ceſte premiere notion, il eſt euident, qu'vne choſe plus grande, ou plus petite qu'vne des égales, ſera auſſi plus grande ou plus petite que l'autre. Et ſi l'vne des choſes égales eſt plus grande ou plus petite que quelque grandeur, l'autre ſera pareillement plus grande ou plus petite que la meſme grandeur.

2. Et ſi à choſes egales, l'on adiouſte choſes egales, les touts ſont egaux.

3. Et ſi de choſes egales, on retranche choſes egales, les reſtes ſont egaux.

4. Et ſi à choſes inegales, on adiouſte choſes egales, les touts sont inegaux.

Semblablement il eſt manifeſte, que ſi à choſes inégales l'on adiouſte choſes inégales, à la plus grande, la plus grande, & à la plus petite, la plus petite, que les touts ſont inegaux, celuy là plus grand & ceſtui-cy plus petit.

5. Et ſi de choſes inegales l'on oſte choſes egales, les reſtes ſont inegaux.

Il s'enſuit d'icy, que ſi de choſes inegales on oſte choſes inegales, ſcauoir de la plus grande moins, & de la plus petite plus, les reſtes ſont inégaux: ſcauoir eſt celuy là plus grand & celuy cy plus petit. Or en toutes ces notions, excepte la premiere, par le mot de quantitez egales faut enten-

dre auſſi vne meſme, commune à pluſieurs: Car ſi à choſes egales l'on adiouſte vne choſe commune, les tous ſeront egaux: Et ſi de choſes egales l'on retranche vne choſe commune, les reſtes ſeront auſſi egaux: Et ſi à choſes inegales l'on adiouſte vne meſme choſe commune; ou à vne meſme choſe commune, on adiouſte choſes inegales, les touts ſeront inegaux: Et ſi de choſes inegales l'on retranche vne meſme choſe commune, ou d'vne meſme choſe commune on retranche choſes inegales, les reſtes ſeront inegaux.

6. Et les choſes qui ſont doubles d'vne meſme, ſont auſſi egales entr'elles.

D'où s'enſuit, que ce qui eſt double d'vne des choſes egales, eſt auſſi double de l'autre.

Semblablemẽt les choſes qui ſont triples, quadruples, quintuples &c. d'vne meſme choſe ſont egales entr'elles, comme il eſt manifeſte.

7. Et les choſes qui ſont moitiez d'vne meſme, ſont auſſi egales entr'elles.

Au contraire il s'en enſuit que les choſes egales entr'elles, ſont moitiez d'vne meſme. Semblablement, les choſes leſquelles ſont tierces parties, ou quartes ou cinquieſmes &c. ſont auſſi egales entr'elles.

En ces deux maximes, par vne meſme quantité, on doit auſſi entendre les quantitez egales: Car les choſes doubles, triples &c. de choſes egales ſont pareillement egales entr'elles: Item les choſes leſquelles ſont moitiez, ou tierces parties, ou quartes &c. de choſes egales ſont auſſi egales entr'elles.

8. Et les choſes qui conuiennent entr'elles, ſont auſſi egales entr'elles.

C'eſt à dire que deux quantitez deſquelles l'vne eſtant ſuperpoſée à l'autre, l'vne n'excede l'autre, mais toutes deux conuiennent entr'elles, ſont egales. Comme deux lignes droictes ſeront dictes egales entr'elles, quand l'vne eſtant poſée ſur l'autre celle qui eſt poſée deſſus conuiẽt totalement auec l'autre, de ſorte qu'elle ne l'excede ny n'eſt excedée d'icelle: De meſme auſſi deux angles rectilignes ſerõt egaux entr'eux, quãd l'vn eſtant poſé ſur l'autre; celuy qui eſt ſuperpoſé, n'excede point l'autre & n'eſt excedé d'iceluy, mais les lignes qui conſtituent celuy là tõbent totalemẽt ſur celles qui conſtituẽt ceſtuicy: Car cela eſtant ainſi les inclinations des lignes ſont egales, combien que quelquesfois icelles lignes ſoient inegales entr'elles: mais il faut entẽdre, que les grandeurs qui conuiennẽt entr'elles ſont egales, ſelon cela ſeulement enquoy elles conuiennent. Or la longitude conuient ſeulement à la longitude, la ſuperficie à la ſuperficie & l'inclination des lignes à l'inclination des lignes. &c.

Clauius voulant conuertir ceſte maxime, dit ainſi. *Et au contraire, les choſes qui ſont egales entr'elles conuiennent entr'elles, ſi l'vne eſt poſée ſur l'autre.* Ce qui toutesfois ne peut eſtre, car ſi l'on deſcrit vn quarré, & ſur le diametre d'iceluy on deſcrit encore vn autre quarré; le premier quarré deſcrit ſera egal à la moitié du dernier, c'eſt à dire à vn triangle Iſoſcele, & neantmoins ne pourront pas conuenir, eſtans poſez l'vn ſur l'autre: L'on peut faire auſſi vn angle curuiligne egal à vn angle droict, à vn angle obtus & à vn angle agu, cõme a monſtré ledit Clauius apres Proclus au liure 5. leſquels ne conuiendront toutesfois pas, eſtans ſuperpoſez chacun au lieu. Finalement l'on peut faire vn triangle recti-

ligne egal a vn autre triangle rectiligne, leſquels ne conuiendront pas auſſi, eſtans ſuperpoſez l'vn à l'autre, comme il eſt manifeſte &c. Donc ceſte maxime ne ſe pourra conuertir vniuerſellement, Mais bien ainſi: *Les lignes droites egales conuiennẽt entr'elles, eſtant poſées les vnes ſur les autres : pareillement les angles rectilignes egaux, comme auſſi les ſuperficies planes ſemblables & egales &c.*

9. Et le tout eſt plus grand que ſa partie.

Clauius interrompt icy l'ordre d'Euclide voulant inferer les deux axiomes ſuiuants, neceſſaires pour prouuer le 12. qui eſt le 10. ſelon Euclide, leſquels nous auons auſſi adiouſtez, pour le meſme ſubiect. Neantmoins, l'ordre des maximes d'Euclide eſt noté à la marge.

0. 10. Deux lignes droictes n'ont pas vne meſme commune ſection.

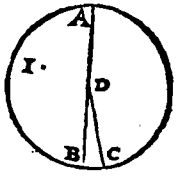
Entendant la nature de la ligne droicte l'on entendra facilement que deux lignes droictes ne peuuent auoir aucune partie commune, tant petite qu'elle puiſſe eſtre, outre vn ſeul poinct, auquel elles s'entrecouppent, eſtant prolongées.

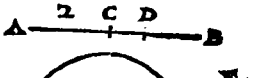
Ceqe toutesfois Proclus demõſtre ainſi. Que 2. lignes droites AB, AC, s'il eſt poſſible ayẽt vne meſme partie cõmune AD, du cẽtre D. & de l'interualle DA, *a* ſoit deſcrit vn cercle couppãt les lignes propoſées aux poincts B & C; *b* Dõc les circõferences AB & ABC, ſerõt egales entr'elles, (car ce ſont les circõferẽces de demicercles egaux, puis que ABC, ADC, ſont poſez demidiametres.) La partie & le tout, ce qui eſt abſurde. Donc deux lignes droictes n'ont pas vne meſme partie ou ſection commune,

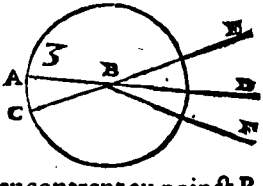
a. 3. *pet.*
b. 17. *def.*

ce qui eſt propoſé.

Toutesfois deux lignes droictes peuuent auoir vne commune ſection, quand elles conſtituent vne ſeule ligne droicte. Comme en ceſte figure 2. les lignes droictes AD, BC, ont vn commun ſegmẽt CD, d'autant qu'elles conſtituent vne ſeule ligne droicte AB. Mais quand elles ſont differentes cõme AB, AC en la fig. 1. demonſtree par Proclus, elles ne peuuent auoir de ſection commune.







II. Deux lignes droictes ſe rencontrant à vn poinct, ſi elles ſont toutes deux prolongées, elles s'entrecoupperont neceſſairement au meſme poinct.

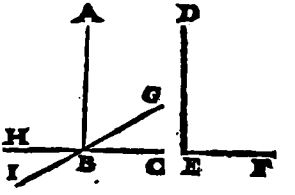
Cet axiome depend de la nature de la ligne droicte, lequel eſt ainſi demonſtré. Que les deux lignes droictes AB, CB, ſe rencontrent au poinct B. Ie dis que ſi elles ſont prolongées elles s'entrecouperont au meſme poinct B, ſcauoir que CB, tombera au deſſus de AB, ſi elle eſt prolongée, comme au poinct E. Car ſi CB, produicte ne tomboit au deſſus elle conuiendroit auec AB, prolongée, de ſorte qu'elle paſſeroit par D, & ainſi AB D, CB D, auroient vne meſme commune ſection, ce qui eſt demonſtré impoſſible. Ou bien tomberoit au deſſous de AB, comme à F, en ſorte que CBF, ſeroit vne ligne droicte. Donc du centre B, ſoit deſcrit vn cercle à quelconque interualle,

couppant A B, C B, prolongees à D & F. D'autant que l'vne & l'autre ligne droicte A B D, C B F, passe par le centre B, *a* tant A C D, que C F sera demy cercle, *b* partãt les circonferences A C D, & C F, seront egales, la partie, & le tout ce qui est absurde.

a. 18. *def.*

b. 17. *def.*

X. 12. Tous les angles droicts sont egaux entr'eux.



Cet axiome est manifeste par la 10. defi. &c. toutesfois Proclus tasche de le demõstrer ainsi. Soiẽt deux angles droits A B C, D E F. Ie dis qu'ils sont egaux entr'eux, autrement l'vn sera plus grand, soit donc A B C, plus grand s'il est possible. Donc si l'on conçoit en l'entendement que le poinct E, soit appliqué au poinct B, & la droicte ligne D E, à la droicte A B; la droicte ligne E F, tombera entre A B, B C, comme est B G, d'autant que l'angle D E F, est posé moindre que A B C, *a* soit prolongee C B, directement à H, car puis que l'angle A B C est droict; *b* l'angle A B H, de suitte luy sera egal, & droict pareillement: & partant plus grand que l'angle A B G, *b* & ayant prolongé G B directement à I, B I tombera au dessous de C B, comme il est demonstré au precedent axiome; parquoy puis que l'angle A B G, est posé droict *b* l'angle A B I, de l'autre costé sera egal à iceluy: partant l'angle A B H, sera plus grand pareillement que l'angle A B I, la partie que le tout; ce qui est absurde: Donc les 2. angles droicts proposez ne sont inegaux; ce qui est proposé. Et ainsi des autres.

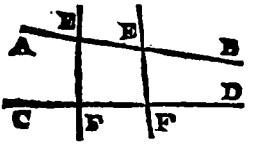
a 2. *P.*

b. 1. *def.*

Pappus enſeigne en ce lieu que cet axiome ne peut eſtre cõuerty; car tout angle egal à vn angle droict n'eſt pas droict, comme nous auons dit à la 8. comme ſentence; mais ſeulement, tout angle rectiligne egal à vn angle droict eſt auſſi droict. Ce que l'on peut prendre pour maxime.

13. Et ſi ſur deux lignes droictes, tombe vne autre ligne droicte, faiſant les angles internes & de meſme part, moindres que deux droictes; icelles deux lignes droictes eſtãt prolongees infiniment, ſe coupperont l'vne l'autre, de la part où les deux angles ſont moindres que deux droicts. XI.

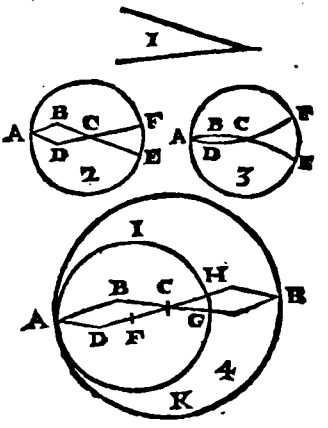
Comme ſi vne ligne droicte EF, tombãt ſur les 2. A B, C D, faict les 2. angles internes B E F, D F E, de meſme part B D, moindres que deux droicts; Euclide dit qu'icelles eſtant prolongees de la part B D, où les angles ſont faits moindres que deux droicts, que finalement elles ſe coupperont à vn poinct. Ce qui eſt manifeſte, car quand les deux angles internes, & de meſme part ſont egaux à deux droicts; les deux lignes ne ſe peuuent coupper nulle part, & ſont touſiours egalement diſtantes l'vne de l'autre, comme il ſera demonſtré à la 28 propoſition de ce liure: parquoy ſi les angles internes de meſme part ſont moindres, il eſt neceſſaire que l'eſpace d'entre les lignes s'etreciſſe de plus en plus & de l'autre part qu'il s'eſlargiſſe pareillement; donc icelles lignes, en fin s'entrecouperont à vn poinct.



XII. 14. Deux lignes droictes ne contiennent pas vn eſpace.

Cet axiome n'a aucune difficulté. Car ſi deux lignes font angle à vn poinct, elles ſe dilateront touſiours de part & d'autre de plus en plus, eſtant prolongees, cõme il eſt manifeſté par l'exemple propoſé: Donc afin qu'vn eſpace ſoit enclos, il faut adiouſter au moins vne 3. ligne. Proclus toutesfois demõſtre ce principe en ceſte maniere. S'il ſe peut faire, que 2. lignes droictes A B C, A D C, encloſt vne ſurface cõme A B C D, de ſorte qu'icelles lignes droictes ſe rencõtrent aux poincts A & C, *a* prenant C, pour centre & à l'interualle C A, ſoit *b* deſcrit vn cercle, *b* & ſoient prolõgees les droictes lignes A B C, A B D, directement à la circonference aux poincts, E & F, partant puiſque les droictes lignes A C E, A C F, paſſent par le centre C, *c* les demy-cercles A E, & A E F, ſeront egaux, & par ainſi la circonference A E, egale à la circonference A E F, la partie au tout, ce qui eſt impoſſible. Donc deux lignes droictes ne contiẽnent point d'eſpace, ce qui eſt propoſé.

a. 3. *pe.*
b. 2. *pet.*
c. 17. *def.*



Mais d'autãt que par aduenture, l'aduerſaire dira que les lignes droictes A B C, A D C, conuiendront de rechef à vn poinct de la circonference, ſi elles ſont prolõgees

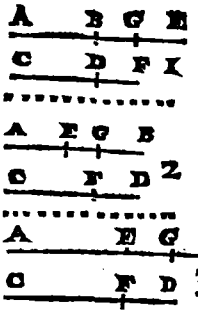
comme au poinct E ou F, & partant qu'il ne s'ensuiura que la partie ſoit egalé au tout: nous demõſtrerons de rechef le meſme axiome en cette maniere. Qu'elles conuiennent donc au poinct E: & prenãt quelcõque poinct F en la droite ligne A D C; A F, ſera moindre que F E, puis qu'elle eſt moindre que A F C, c'eſt à dire que C H E, laquelle eſt egale à A F C, & partant beaucoup moindre que F E, donc le cercle deſcrit du cẽtre F, à l'interualle F A, couppera F E, au poinct H, & partant auſſi C G E, au poinct G. D'autant donc que A F H, eſt le diametre du cercle, A I H, ſera demicercle, comme il eſt monſtré à la 17. def. Mais la portion A I G, retranchée par la droicte ligne A B G, en laquelle n'eſt le centre, ſera moindre que le demicercle, comme nous auons monſtré à la 18. def. Donc la circonference A I G, eſt moindre que la circonference A I H, le tout que la partie; ce qui eſt abſurde. Or que la portion A I G, ſoit moindre que le demi-cercle, nous le monſtrerons cõme auparauant. Ce principe eſt auſſi manifeſte par la definition de la ligne droicte: Car puis que la ligne droicte eſt le plus brief interualle d'vn poinct à l'autre; l'on ne pourra mener qu'vne ſeule ligne droicte d'vn poinct à vn autre, parquoy ſi la ligne A B C, eſt droicte, la ligne A D C, ne pourra eſtre droicte. Il eſt euident auſſi par la definition de Platon: car ſi A B C, eſt droicte, les parties du milieu ombragent les extremes de la meſme. Donc les poincts du milieu de la ligne A D C, n'ombragent pas les extremitez, puis que la veuë eſt portée ſelõ la droicte A B C, dõc A D C, n'eſt pas ligne droicte.

A ces axiomes d'Euclide Clauius a adiouſté les ſuiuants, pris d'autres Geometres non

moins neceſſaires aux futures demonſtrations des problemes & theorémes, tant d'Euclide que des autres Mathematiciens, que ceux que nous a baillé Euclide.

15. Si à choſes egales, l'on adiouſte choſes inegales, l'excés des toutes, ſera egal à l'excés des adiouſtées.

Proclus a pris cet axiome, & le ſuiuant de Pappus. Aux quantitez inegales A B, C D, ſoient adiouſtees les quantitez inegales, B E, D F, & ſoit B E, plus grande que D F, & de B E, ſoit oſté B G, egale à D F, en ſorte que G E, ſoit l'excés par lequel la quantité adiouſtee B E, excede la quantité adiouſtée D F, D'autãt donc qu'aux quantitez egales A B, C D, on a adiouſté les egales B G, D F, *a* les toutes A G, C F, ſeront egales : parquoy il eſt manifeſte que la toute A E, excedera la toute C F, du meſme exces G E, par lequel la grandeur D E, adiouſtee, eſt excedee de la grandeur B E, adiouſtee : ce qui eſt propoſé. Soit veuë la premiere Figure.



a.2.c.f.

16. Si à choſes inegales on adiouſte choſes egales, l'excés des toutes, ſera egal à l'excés de celles qui eſtoient au commencement.

En la meſme 1. figure, aux grandeurs inegales B E, D F, ſoient adiouſtées les egales A B C D. & de la plus grande B E, ſoit oſtée B G, egale à D F, en ſorte que G F, ſoit l'excés; par lequel la quantité B

E, excede la quantité D F. D'autant donc qu'aux quantitez egales B G, D F, l'on a adiousté les egales, A B, C D, *a* les toutes A G, C F, ſeront egales, partant toute la quantité A E, excedera la toute C F, du meſme excés G E, par lequel la plus grande quantité B E, excede la moindre B F, ce qui eſt propoſé. *a. 2. cſ.*

17. Si de choſes egales on retranche choſes inegales, l'excéz des reſtantes ſera egal à l'excez des retranchees. o

Des quantitez egales A B, C D, ſoient retranchées les inegales B E, D F, & ſoit E G, l'excés par lequel la quantité B E, excede la quantité D F; en ſorte que B G, ſoit egale à D F. D'autant donc que des grandeurs egales A B, C D, l'on a retranché les egales B G, D F, *b* les reſtantes A G, C F, ſeront egales. Il eſt donc manifeſte que le reſte A E, eſt excedé du reſte C F, du meſme excés E G, par lequel la grandeur retranchee B E, excede la grandeur retranchee D F. Ce qui eſt propoſé. Soit veuë la fig. 2. *b. 3. cſ.*

18. Si de choſes inegales, on retranche choſes egales, l'excez des reſtantes ſera egal à l'excez des toutes. o

Des grãdeurs inegales A B, C D, ſoiẽt retrãchées les egales A E, C F, & ſoit B G, l'excés par lequel la totale quãtité A B, excede la toute C D, de ſorte que A G, ſoit egal à C D. d'autant que des grandeurs egales A G, C D, ſont retranchées les egales A E, C F; E G, F D, demeureront egales. Partant le reſte E B, excedera le reſte F D, du meſme excés B G, par lequel la toute A B, excede la toute C D, ce qui eſt propoſé: ſoit veuë la 3. figure.

En ces 4. maximes, par ce mot de quantitez egales faut auſſi entendre vne ſeule quantité commune à pluſieurs: car ſi à vne meſme choſe cõmune on adiouſte choſes inegales, l'excés des toutes ſera egal à l'excés des adiouſtées. Et ſi à choſes inegales l'on adiouſte vne meſme choſe commune, l'excés des toutes ſera egal à l'excés de celles qui eſtoient au cõmencement. Et ſi d'vne choſe commune, on oſte choſes inegales, l'excés des reſtes ſera egal à l'exces des retranchés. Et ſi de choſes inegales on oſte vne choſe cõmune l'excés des reſtes ſera egal à l'excés des toutes. Comme ſi à 5. & à 3. on adiouſte 6. les produits ſeront 11. & 9. deſquels l'excés 2. eſt le meſme excés de 5. & 3. Derechef ſi à 5. & à 3. l'on adiouſte 6. l'on aura 11. & 9. deſquels l'excés 2. eſt le meſme de 5. & 3. Semblablement ſi de 8. on oſte 5. & puis 2. les reſtes ſeront 3. & 6. deſquels l'excés eſt 3. le meſme que de 5. & 2. Finalemẽt ſi de 10. & de 7. on oſte 3. les reſtes ſerõt 7. & 4. deſquels l'excés eſt 3. le meſme que d'iceux 10. & 7.

o 19. Le tout eſt egal à toutes ſes parties priſes enſemble.

D'autant que toutes les parties priſes enſemble, conſtituent le tout, duquel elles ſont parties, la verité de cet axiome eſt manifeſte.

o 20. Si vn tout eſt double d'vn tout & le retranche du retranche; le reſte ſera auſſi double du reſte.

Comme par exemple, d'autant que le nombre total 20. eſt double du tout 10. & le retranche de celuy-là 6. eſt double du retrãche de ceſtui-cy 3. le reſte de ce premier, ſcauoir 14. ſera auſſi double du reſte de ce dernier, ſçauoir de 7. ce qui ſera demon-

ſtré vniuerſellement à la 5. propoſition du cinquieſme liure, &c.

De ce que deſſus on peut colliger, auec Proclus & Geminus, cette difference, entre les demandes & les maximes ou actiomes, que puis que les vns & les autres ſont cogneus d'eux-meſmes & indemonſtrables; que celles-là ſont de la nature des Problémes, d'autant que par icelles on requiert que quelque choſe ſoit faicte; mais ceux-cy reſſemblent les theorémes, puis que par iceux il n'eſt requis qu'aucune choſe ſoit faicte, mais eſt ſeulement propoſé quelque ſentence tres-cogneuë. Mais la demande ou petition differe du probléme en ce que la conſtruction de la demande n'a beſoin d'aucune demonſtration, mais perſonne n'accorde la conſtruction du probléme ſans demonſtration, d'autant que quelque choſe de dificile eſt propoſé à conſtruire. Semblablement il y a difference entre l'Axiome & le Theoréme; car celuy-là ne doit eſtre demonſtré, mais celuy-cy ne doit aucunement eſtre concedé, qu'il ne ſoit demonſtré. Car perſonne ne demandera la preuue ou demonſtration de cette propoſition : *Les choſes leſquelles ſont egales à vne meſme ſont pareillement egales entr'elles.* Mais de celle-cy chacun deſirera la demonſtration : *De tout triangle, les trois angles internes ſont egaux à deux droicts.* Et faut entendre le meſme des autres axiomes & theoremes, & auſſi des demandes & problémes.

Il eſt certain pareillement, que des demandes ou petitions, les vnes ſont propres à la Geometrie, comme ces trois qu'Euclide nous à propoſez; quelques-vnes communes, à la Geometrie & à l'Arithmetique, telle qu'eſt cettuy-cy: *Vne quanti-*

te pouuoir estre infiniment augmentee. Car tant le nõbre que la grandeur, peut estre augmentee, par addition, en sorte que l'on ne peut iamais trouuer de fin à cette augmentation. L'on dira le mesme des Axiomes ou communes sentences. Car le 8. 10. 11. 12. & quatorziesme conuiennent à la Geometrie seulement; mais tous les autres sont appliquees aux demonstrations Geometriques & Arithmetiques. Car tout ainsi comme les grandeurs egales, retranchees des grandeurs egales, laissent grandeurs egales, soit que ces grandeurs soient lignes, ou superficies, ou corps: ainsi pareillement les nombres egaux retranchez de nõbre egaux, laissent des nombres egaux; & ayant dict cecy de ces trois genres de principes, venons aux demonstrations, par lesquelles l'on cognoistra plus parfaictement la nature de tous les principes. Car il y a plusieurs principes tels entre les Mathematiciens, qu'ils ne sont pas facilement entendus, qu'auparauant l'on n'ait cogneu leur vsage aux demonstrations: ce que l'experience monstrera assez.

„ Or la methode & ordre que nous tiendrons en
„ nos demonstrations ne sera differente de celle de
„ Clauius: sçauoir qu'à chaque proposition nous
„ apposerons deux nombres, l'vn desquels posé en
„ la margé, denote l'ordre qu'a suiuy Campanus de
„ la tradition des Arabes, aux propositions d'Eu-
„ clide; mais l'autre est mis en l'ordre mes-
„ me des propositions, qui monstre la dispo-
„ sition des propositions, selon la tradition de
„ Theon, & laquelle nous voyons encore estre ob-
„ seruee aux exemplaires Grecs, & duquel Theon
„ nous nous sommes seruis en nostre traduction. A

cauſe que les propoſitions d'Euclide ſont citees par quelques Geometres ſelon l'ordre de Campanus & par d'autres ſelon l'ordre de Theon & ces deux interpretes ſont quelquesfois differents en l'ordre ou diſpoſition des propoſitions, principalement au 6. 7. & 10. liure. Et afin que le cours de la demonſtration ne fuſt interrompu, nous auons cité les principes & propoſitions d'Euclide en la marge, auec vne lettre de l'alphabet, laquelle lettre eſt auſſi miſe dans le diſcours là où la propoſition ſe doit citer, laquelle eſt eſcrite en marge apres la meſme lettre. Ce que l'on entendra facilement par ce qui s'enſuit.

1. Defi. Premiere definition & ainſi des autres, comme 4. def. 18. def. &c.
1. Pet. ou Premiere petitiõ ou premiere demãde.
1. Dem.
1. c. 5. ou. Premiere commune ſentence, ou pre-
1. c. 11. miere commune notion.
1. Pre. ou. Premiere propoſition du premier
1. 1. liure.
1. 2. Premiere propoſition du ſecond liure.
2. 3. Seconde prop. du troiſiéme liure.
9. 6. Neufiéme prop. du ſixiéme liure.
23. 11. Vingt & troiſiéme propoſition de l'vnziéme liure.
12. 14. Douziéme propoſition du quatorziéme liure, &c.
Scho. 17. Scholie de la dix-ſeptiéme propoſition
10. du dixiéme liure.
Coroll. Corollaire de la 32. propoſition du pre-
32. 1. mier liure.

Et faut entendre le meſme des autres.

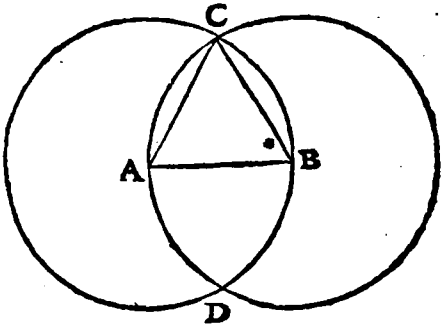
LIVRE PREMIER.

PROBLEME I.

PROPOSITION I.

Sur vne ligne droicte donnee & terminee, descrire vn triangle equilateral.

SOit la ligne droicte donnee A B, sur laquelle il faut descrire vn triangle equilateral. Du poinct A, pris pour centre & de l'interualle de A B, soit descrit le cercle B C D: De rechef du point B, pris pour centre & du mesme interualle B A, soit descrit vn autre cercle A C D, coupant le premier aux points C, & D, duquel que l'on voudra desquels, sçauoir de C, soient menees les lignes droictes C A, C B. Ie dis que le triangle A B C, descrit sur la ligne droite proposee A B, est equilateral.



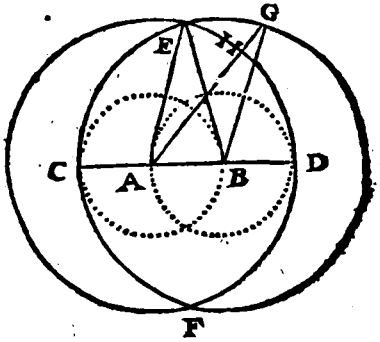
Car

Car d'autãt que les lignes droictes A B, & A C, ſont menees du centre A, à la circonference du cercle B C D, [a] A C, ſera egale à A B. De rechef, d'autant que les lignes droictes B A, B C, ſont menees du centre B, à la circonference du cercle A C D, [b] B C, ſera egale à B A, mais A C, eſt auſſi monſtree egale à A B, donc tant A C, que B C, ſera egale à A B, [c] & partant egales entr'elles: Donc le triangle A B C, eſt equilateral. Donc ſur vne ligne droicte, &c. Ce qu'il falloit faire.

[a] 15. def.
[b] 15. def.
[c] 1. e.

SCHOLIE.

Si quelqu'vn deſiroit deſcrire vn triangle iſoſcele, ou vn ſcalene ſur vne ligne droicte propoſee, comme a fait Proclus, il le fera en cette maniere. Soit la ligne droicte donnee A B, à l'entour de laquelle ſoient deſcrits deux cercles comme cy-deſſus, puis ſoit prolongee A B, de part & d'autre directement, aux circonferences, comme aux poincts C, & D, & du poinct A, comme centre, à l'interualle A D, ſoit deſcrit vn cercle E D F: Semblablement du poinct B, & de l'interualle B C, ſoit deſcrit le cercle C E F, coupant le cercle E D F, aux poincts E, & F, & duquel qu'on voudra d'iceux comme de E, ſoient menees les lignes droictes E A, E B. Ie dis que le triangle A E B, deſcrit ſur la ligne A B, eſt Iſoſcele.



Car d'autant que A E, eſt egale à A D, [a] *eſtant me-*

[a] 15. def.

nees du centre, & AD, est double de AB, estant [b] B A, BD, egales entr'elles, AE, sera aussi double de AB. De rechef, d'autant que BE, est egale à BC, & BC, double de BA, puis que AB, AC, sont [c] egales entr'elles, BE, sera aussi double de AB, donc puis que tant AE, que BE, est double de la mesme AB, [d] icelles AE, BE, seront egales entr'elles, & chacune plus grande que AB, donc le triangle AEB, est Isoscele.

[b] 15. def.
[c] 15. def.
[d] 6. e. s.

Mais maintenant, si du poinct A, on mene la droicte ligne AG, autre que AE, ou AD, à la circonference EGF, couppant la circonference EHD, au poinct H, & du poinct G, au poinct B, l'on mene la droicte ligne GB, le triangle AGB, descrit sur la ligne AB, sera Scalene. Car d'autant que AH, est egale à AD, & BG, egale à [e] BC: Mais tant AD, que BC, a esté mõstree double de AB, donc tant AH, que BG, sera aussi double de AB, & partant chacune plus grande que AB, Or la toute AG, [f] est plus grande que AH, elle sera donc aussi plus grande que BG, egale à AH, donc le triangle ABG, est scalene, duquel le plus grand costé est AG, le moyen, est BG, & le plus petit est AB.

[e] 15. d.
[f] 9. e. s.

SCHOLIE.

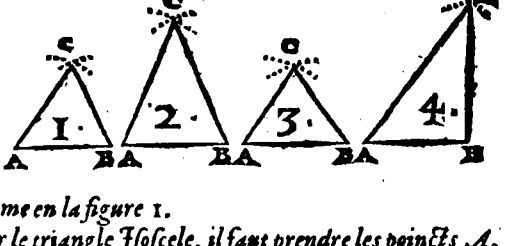
Il faut noter que quand on trouuera ce mot, ligne, posé simplement, ou deux lettres, comme AB, ou autres, faut entẽdre vne ligne droicte; & ce mot angle, ou trois lettres posees simplement sans autre explication faut entendre, angle rectiligne, & la lettre du milieu denote touſiours l'angle, dont est question, &c.

PRACTIQVE.

Pour descrire sur vne ligne proposee vn triangle equilateral, Isoscele, ou Scalene l'on le fera en cette maniere.

Pour descrire vn triangle equilateral sur la ligne

AB, des centres A, & B, & de l'interualle AB, faut deſcrire deux arcs s'entre-coupans au poinct C, & mener les deux lignes droictes CA, & CB, comme en la figure 1.



Pour le triangle Iſoſcele, il faut prendre les poincts A, & B, mais l'interualle plus grande que AB, ou plus petite & deſcrire deux arcs ſe couppans au poinct C, & mener les lignes AC, CB, comme l'on void en la figure 2. & 3.

Pour le ſcalene faut prendre A, pour centre & l'interualle plus grande que AB, & deſcrire l'arc C, puis prẽdre B, pour centre & l'interualle plus grande que la premiere & deſcrire vn autre arc qui coupe le premier au meſme poinct C, & tirer les lignes CA, CB, comme en la figure 4.

PROBLEME 2. PROP. 2.

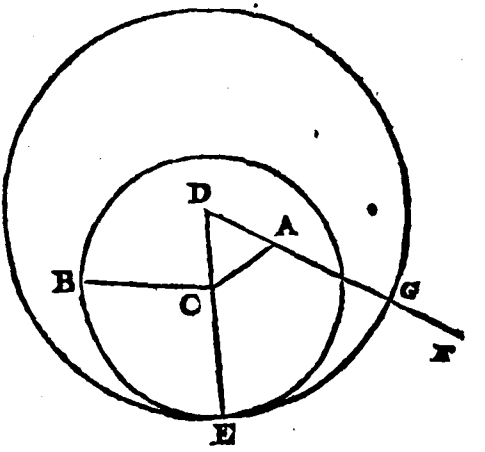
A vn poinct donné, poſer vne ligne droicte, egale à vne ligne droicte donnee. ij.

Soit le poinct donné A, & la ligne droicte donnee BC, il faut poſer vne ligne droicte au poinct A, egale à BC, c'eſt à dire du poinct A, mener vne ligne droicte egale à BC.

Du poinct A, ſoit menee la ligne droicte AC, ſur laquelle ſoit [a] deſcrit vn triangle equilateral ACD, les deux coſtez duquel DA, DC, ſoient prolongez directement vers E, & F, puis du poinct [a] 1. du premier

C, pris pour centre & de l'interuallo CE, soit descrit le cercle BE: De rechef du centre D, & de l'interualle DE, soit descrit le cercle EG, couppant DF, au poinct G. Ie dis que AG, est la ligne requise.

D'autant que le poinct C, est le centre du cercle BE, [b] la ligne CB, sera egale à CE. Et d'autant que D, est le centre du cercle EG, la ligne DG, sera egale à [c] DE, desquelles lignes egales DG, DE, si l'on retrãche DA, DC, egales, (estant les costez d'vn triangle equilateral) [d] restera AG, egale, à [d] 3. cõ. s. CE: mais BC, est monstree egale à CE, donc AG, sera egale à CB, [e] puis que chacune est egale à CE: Donc au poinct A, l'on a posé la ligne droicte AG, egale à la ligne droicte donnee BC: Ce qu'il falloit faire.



[b] 15. def.

[c] 15. def.

[e] 1. cõ. s.

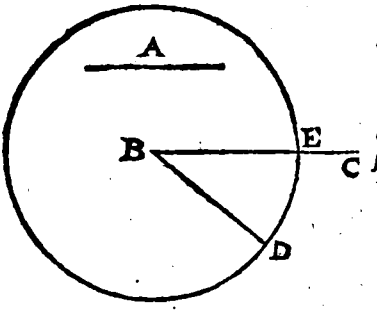
PROBLEME 3. PROP. 3.

iij. De deux lignes droictes inegales dõnees, oster de la plus grande, vne ligne droicte egale à la plus petite.

Soient deux lignes droictes inegales proposees A, & B C, la plus grande desquelles soit B C: Il faut retrancher de la plus grande B C, vne ligne droicte egale à la plus petite A: Soit posee au poinct B, ou C, la ligne droicte [a] B D, egale à A, & du poinct B, prins pour centre, & de l'interualle B D, soit descrit le cercle D E, coupant B C, au poinct E, Ie dis que B E, est ostee egale à A.

[a] 2. Premier.

Car puis que B, est le centre du cercle D E, la ligne droicte BE, [b] sera egale à B D, mais A, est egale à B D, par la cõstructiõ, dõc BE, sera egale à A [c] chacune estant egale à B D: dõc de deux lignes droictes inegales nous auons &c. Ce qu'il falloit faire.



[b] 15. def.

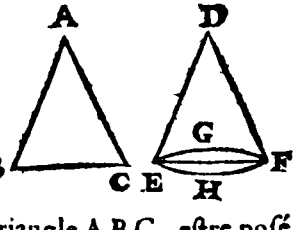
[c] 1. com. sent.

THEOREME 1. PROP. 4.

Si deux triangles ont deux costez egaux à deux costez, chacun au sien, & l'angle contenu d'iceux costez egaux egal à l'angle: Ils auront la base egale à la base, & le triangle sera egal au triangle, & les autres angles sousstendans iceux costez egaux; egaux aux autres angles, chacun au sien. iiij.

Soient les deux triangles A B C, D E F, ayans deux costez sçauoir A B, A C, egaux aux deux costez D E, D F, chacun au sien, sçauoir A B, egal

à D E, & A C, egal à D F, & l'ãgle A, egal à l'angle D, (lesquels sont contenus d'iceux costez egaux) ie dis que la base B C, sera egale à la base E F.



Car si l'on entend le triangle A B C, estre posé sur le triangle D E F, le poinct A, posé sur le poinct D, & la ligne droicte A B, sur D E, [a] le poinct B, conuiendra sur le poinct E, puis que A B, est egale à D E: & puis que l'angle A, est égal à l'angle D, la ligne A C, tõbera sur D F, & le poinct C, conuiendra sur [b] le poinct F, puis que A C, est égale à D F: mais le poinct B, conuient au poinct E, donc la base B C, conuiendra sur la base E F, & partant [c] égales: car le poinct B, tombant sur le poinct E, & le poinct C, sur le poinct F, si la base B C, ne tomboit sur E F, elle passeroit par au dessus comme E G F, ou au dessous comme E H F, ce qui est impossible, attendu que deux lignes [d] droictes ne encloſt point d'espace, donc B C, conuiendra sur E F, & partant égales, & tout le triangle A B C, égal à tout le triangle D E F, & les autres angles B, & C, égaux aux autres angles E, & F, chacun au sien, sçauoir B, à E, & C, à F, puis qu'ils conuiennẽt entr'eux, & que le triangle conuient sur le triangle. Donc si deux triangles ont deux costez égaux à deux costez, &c. ce qu'il falloit demõstrer.

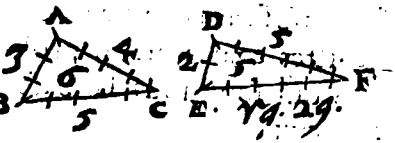
a 8. ax. f.
b 8. ax. f.
c 8. 10. f.
d 14. e f.

SCHOLIE.

Euclide met fort à propos deux conditions en ce theoreme: La premiere est que deux costez d'vn triangle soiẽt égaux aux deux costez de l'autre chacun au sien: la seconde que l'angle contenu des deux costez de l'vn soit

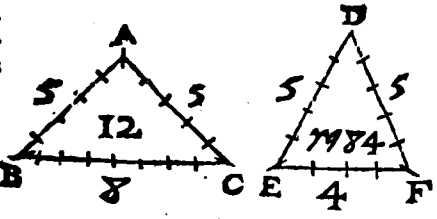
égal à l'angle de l'autre, contenu des deux costez égaux, aux deux costez du premier. Car l'vne de ces conditions defaillant, ny les bases ny les autres angles ne pourront iamais estre egaux, comme demonstre Proclus sur ceste proposition: car encores que les triangles puissent quelquefois estre egaux, la derniere condition defaillant, comme demonstré Clauius au scholie de la 37. prop. de ce liure toutesfois cela aduient assez rarement.

Car soient les angles A, & D, des triangles A B C, & D E F, egaux, sçauoir droicts, & les deux costez egaux aux deux costez, non chacun au sien, mais les deux ensemble A B, A C, egaux deux ensemble D E, D F. Et soit A B, 3. A C, 4. qui feront estans adiouſtez 7. mais D E, soit 2. & D F, 5. qui assemblez font aussi 7. Ce qu'estant ainsi la base B C, sera 5. & la base E F, par 9. 29. laquelle est plus grande que 5. mais moindre que 6. Semblablement l'aire ou plan du triangle A B C, sera 6. & l'aire du triangle D E F, sera 3. & finalement les angles sur la base B C, inegaux aux angles sur la base E F, lesquelles choses nous monstrerions icy si non qu'il y a plusieurs choses à ce requises, qui n'ont encore esté demonstrées.



De rechef soient les costez A B, A C, du triangle A B C, egaux aux deux costez D E, D F, du triangle D E F, chacun au sien, & soit vn chacun d'iceux de 5. & que les angles A & D, contenus d'iceux costez soient inegaux & soit A, plus grand que D; lesquelles choses estans ainsi, la base B C, sera plus grande que la base E F, comme il sera demonstré en la 24. proposition de ce liure. Que si nous posons la base B C, 8. & la base E F, 4. l'aire du triangle A B C, sera 12. mais l'aire du triangle

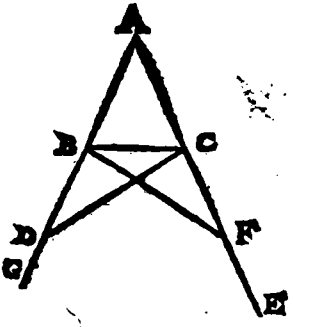
DEF, sera la q. de ce nõbre 84. laquelle est plus grande que 9. mais plus petite que 10. ce qui est



cogneu entre les Geometres. Donc afin que de deux triangles, les baſes, & les angles, & les triangles meſmes ſoiẽt egaux entre eux, il eſt neceſſaire que l'vn & l'autre coſté de l'vn ſoit egal à l'vn & l'autre coſte de l'autre, & pareillement que les angles contenus d'iceux coſtez ſoient auſſi egaux, comme a fort bien dict Euclide.

THEOREME 2. PROP. 5.

V. Des triangles Iſoſceles, les angles qui ſont à la baſe ſont egaux entr'eux: Et les lignes droictes egales eſtant prolongees, les angles qui ſont ſous la baſe ſeront egaux entr'eux.



Soit le triangle Iſoſcele A B C, ayant le coſté A B, egal au coſté A C. Ie dis que les angles A B C, & A C B, ſur la baſe B C, ſont egaux entr'eux: ſemblablemẽt que ſi l'on prolonge les coſtez egaux A B, A C, directement aux poincts G, & E, les angles C B G, B C E, ſous la baſe B C, ſont auſſi egaux entre eux.

En la ligne B G, ſoit prins le poinct cõtingent D, &

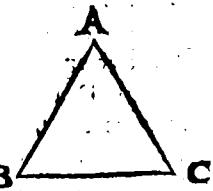
de la plus grande A E, prolongee infiniment soit [a] retrãchee A F, egale à A D, puis soiẽt menees les lignes droictes D C, & F B; D'autãt que le costé A B, est egal au costé A C, par l'hypothese & A D, egal à A F, par la cõstruction; les deux costez C A, A D, du triangle C A D, seront egaux aux deux costez B A, A F, du triangle B A F, chacun au sien, & l'angle A, contenu d'iceux costez, commun, [b] la base B F, sera egale C D, & les autres angles egaux aux autres angles chacun au sien, sçauoir A B F, egal à A C D, & l'angle D, egal à l'angle F. Et d'autant que la toute A D, est monstree egale à A F, si l'on oste d'icelles les egales A B, A C, [c] le reste B D, sera egal au reste C F, mais D C, est monstree egale à F B. Dõc les deux costez B D, D C, sont egaux aux deux C F, F B, chacun au sien & l'angle D, mõstré egal à l'angle F, lesquels sont contenus d'iceux costez, & la base B C, commune, [d] tout le triangle D B C, sera egal à tout le triangle F C B, & les autres angles egaux aux autres angles chacun au sien, sçauoir l'angle D B C, egal à l'angle F C B, & l'angle D C B, egal à l'angle F B C; Mais les angles A B F, & A C D, sont mõstrez egaux aux premiers triangles, A B F, A C D, donc si l'on retranche d'iceux les angles egaux D C B, & F B C, les angles [e] A B C, A C B, qui resteront sur la base B C, seront egaux entr'eux; & les angles D B C, & F C B, sous la base B C, sont aussi demonstrez egaux entr'eux. Donc les angles sur la base & sous la base sont egaux entr'eux. Partant des triangles Isosceles &c. Ce ce qu'il falloit demonstrer.

[a] 3. primier.
[b] 4. primier.
[c] 3. cõf.
[d] 4. primier.
[e] 3. cõf. sont.

SCHOLIE.

Il eſt manifeſte que le meſme aduiendra aux triangles equilateraux, encore que Euclide ſemble auoir entendu ſa propoſition, des triangles Iſoſceles ſeulement. Car les deux coſtez A B, A C, eſtans egaux entr'eux au triangle A B C, ſoit que le troiſiéme B C, ſoit egal à chacun d'iceux, comme il aduient au triangle equilatere, ou inegal cõme au triangle Iſoſcele, l'on monſtrera par la ſuſdicte demonſtration que tant les angles ſur la baſe, que ſous la baſe ſont egaux entr'eux.

COROLLAIRE.



De cette 5. prop. il s'enſuit pareillement que tout triangle equilateral eſt equiangle, c'eſt à dire que les trois angles de quelconque triangle equilateral ſont egaux entre eux. Car ſoit le triangle equilateral A B C, d'autant que les deux coſtez A B, A C, ſont egaux [a] les deux angles B, & C, ſur la baſe B C, ſeront egaux. Semblablement d'autant que le deux coſtez A B, B C, ſont egaux, les deux angles A & C, ſur la baſe A C, ſeront egaux: partant tous les trois angles A, B, & C, ſeront egaux. ce qu'il falloit demonſtrer.

[a] 5. premier.

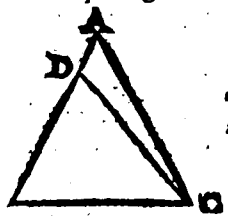
THEOREME 3 PROP. 6.

vj. Si deux angles d'vn triangle ſont egaux entr'eux, les coſtez ſouſtendans iceux angles egaux, ſeront auſſi egaux entr'eux.

Soit le triangle A B C, ayant l'angle B, egal à

l'angle ACB. Ie dis que le costé AB, opposé à l'angle ACB, est egal au costé AC, opposé à l'angle B.

Car s'il est inegal l'vn d'iceux sera plus grand, soit donc AB, plus grand, s'il est possible & soit retranchée [a] DB, egale à BC, & menee DC: D'autant que DB, est egale à AC, & BC, cómune, les deux costez DB, BC du triangle DBC, seront egaux aux deux costez AC, CB, du triangle ACB, chacun au sien & l'angle B, est egal à l'angle ACB, par l'hypothese, [b] la base AB, sera egale à la base DC, & tout le triangle ACB, egal à tout le triangle DBC, le tout egal à sa partie ce qui est absurde: partant AB, ne sera inegal à AC. Donc si deux angles d'vn triangle &c. Ce qu'il falloit demonstrer.



[a] 3. premier.

[b] 4. premier.

COROLLAIRE.

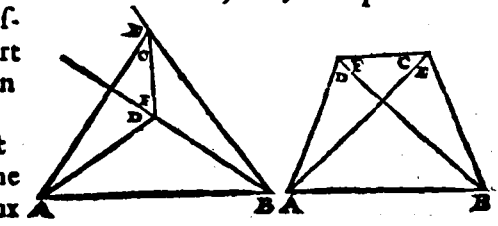
Il s'ensuit de cette proposition que tout triangle equiangle, c'est à dire duquel tous les angles sont egaux entr'eux, est equilateral. Car puis qu'il a esté demonstré, que d'autant que les angles B, & C, sont egaux; les costez soustendans AB, AC, sont aussi egaux, on conclurra de mesme, que puis que A, & B, sont egaux, les costez soustendans AC, CB. seront aussi egaux, & ainsi des deux autres &c. Dõc les trois costez seront egaux, & partant le triangle est equilateral.

THEOREME 4. PROP. 7. vij.

Si deux lignes droictes menees des extremitez d'vne autre ligne droicte se ren-

contrēt à vn meſme poinct, l'on ne pourra mener des meſmes extremitez à vn autre poinct & de meſme part, deux autres lignes droictes egales aux premieres chacune à la ſienne.

Soit la ligne droicte A B, des extremitez de laquelle A, & B, ſoiēt menees deux lignes droictes, à quelcōque poinct C, ſçauoir A C, B C, ie dis que des meſmes extremitez A, & B, l'ō ne peut mener de meſme part & à vn autre poinct comme D, deux



autres lignes droictes egales aux premieres A B, B C, chacune à la ſienne.

Car s'il eſt poſſible des extremitez A, & B ſoient menees A D, B C, à vn autre poinct D, vers C, egales aux premieres A C, B C, chacune à la ſienne, ſçauoir A D, egale à A C, ayant meſme extremité A, & B D, egale à B C, ayant meſme extremité B, & ſoit conioincte D C: & ſi le poinct D, eſt dans le triāgle (cōme en la 1. figure) ſoient prolongees B C, B D, directement, de la part de E, & F, tant qu'il ſera expedient.

D'autant que la ligne B D, eſt poſee egale à B C, l'angle F, ſeul, ſera egal à C, E, pris pour vn ſeul angle, [a] puis qu'ils ſont tous deux ſous la baſe D C, du triāgle B D C, en la 1. figure, ou deſſus en la 2. figure. Mais tout l'angle E, C, eſt plus grand que l'angle C, tout ſeul, [b] le tout que la partie, donc

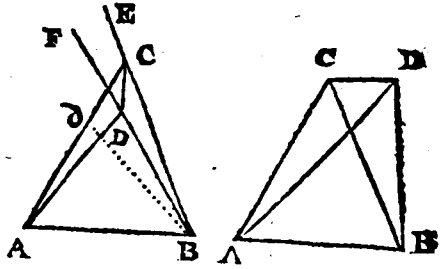
a 5. 1.

b 9. c. 5.

l'angle F, ſera auſſi plus grand que l'angle C. De rechef puis que la ligne AC, eſt poſee egale à la ligne AD, l'angle C, ſeul ſera egal à F, & D, pris pour vn ſeul angle, c puis qu'iceux angles C, & F, D, ſõt ſur la baſe DC, du triangle ADC, mais nous auons monſtré que l'angle F, eſt plus grand que l'angle C, donc le meſme angle F, ſera auſſi plus grand que l'angle F, D, la partie que ſon tout, ce qui eſt impoſſible. Donc ſur &c. ce qu'il falloit demonſtrer. c 5. 1.

Les autres interpretes demonſtrent autrement cette propoſition, comme s'enſuit.

Soit faicte la meſme conſtruction de la precedente figure: Puis que AD, eſt poſee egale à AC, d les deux angles ADC, ACD, ſur la baſe DC, du triangle ADC, ſeront egaux entr'eux, mais l'angle ADC, eſt plus grand que l'angle FDC, e le tout que ſa partie, donc l'angle ACD, egal à ADC, ſera auſſi plus grand que FDC, & partãt l'ãgle total ECD, qui eſt plus grãd que ACD, ſera encore bien plus grand que FDC. De rechef d'autant que la ligne BD, eſt poſee egale à BC, f les deux angles ECD, FDC, ſous la baſe DC, du triangle BCD, ſeront egaux entr'eux, mais l'angle ECD, a eſté demonſtré bien plus grand que FDC. il ſera donc egal & bien plus grand, ce qui eſt impoſſible. d 5. 1. e 9. 1. f 5. 1.



Finalement d'autant que A D, A C, ſont poſees egales (ſoit veuë la derniere figure où le poinct D, eſt hors le triangle) les deux angles [g] A C D, A D C, ſur la baſe C D, du triangle A C D, ſont egaux entr'eux, mais l'angle A C D, eſt plus grãd que [h] C D, le tout que ſa partie, donc A D C, ſera auſſi plus grand que B C D, & partant l'angle B D C, qui eſt plus grand que A D C, ſera encore bien plus grand que B C D. De rechef puis que B C, B D, ſont poſees egales, les deux angles B C D, B D C, ſur [i] la baſſe C D, du triangle B C D, ſeront egaux entr'eux, mais nous auons monſtré que l'angle B D C, eſt bien plus grand que l'angle B C D, il ſera donc egal à iceluy & bien plus grand; ce qui eſt impoſſible. Mais ſi quelqu'vn dict que le poinct D, eſt en vne des lignes A C, B C, comme au poinct D, en la ligne A C, (où eſt tiree la ligne B D, denotee par poincts) cela eſtãt, il s'enſuiura cõme dict eſt que la partie A D, ſera egale à ſon tout A C, ce qui eſt auſſi impoſſible. Donc ſur vne meſme ligne &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.

g 5. 1.

h 9. c. ſ.

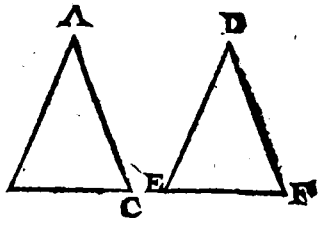
i 5. 1.

THEOREME 5. PROP. 8.

viij. Si deux triangles ont deux coſtez egaux à deux coſtez, chacun au ſien; & qu'ils ayent la baſe egale à la baſe, ils auront auſſi l'angle contenu d'iceux coſtez egaux, egal à l'angle.

Soient les deux triangles A B C, D E F, ayans les deux coſtez A B, A C, egaux aux deux D E, D F, chacun au ſien ſçauoir A B, egal à D E, & A C, egal à D F, & la baſe B C, egale à la baſe E F. Ie dis

que l'angle A, eſt egal à l'angle D, leſquels angles sõt contenus d'iceux coſtez egaux.



Car ſi l'on entẽd que le triangle A B C, ſoit poſé ſur le triangle D E F, ſçauoir le poinct B, ſur le poinct E, & la baſe B C, ſur la baſe E F, le poinct C, cõuiendra au poinct F, [a] puis que B C, E F, ſont egales, & les deux lignes droictes B A, & C A, cõuiendront ſur les deux E D, F D, eſtans egales à [b] icelles chacune à la ſienne & le poinct A, ſur le poinct D, & partant l'angle A, ſera egal à l'angle D. Autrement elles ſe rencontreroiẽt à vn autre poinct, ce qui eſt impoſſible, [c] puis que ſi deux lignes droictes menees des extremitez d'vne autre ligne droicte ſe rencontrent à vn meſme poinct &c. Donc A, ſera egal à D. Donc ſi 2. triangles &c. ce qu'il falloit demonſtrer.

[a] 8. cõ. ſ.
[b] 8. cõ. ſ.
[c] 7. premier.

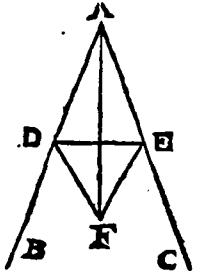
COROLLAIRE.

L'on peut colliger de cette propoſition que les autres angles ſont auſſi egaux aux autres angles chacun au ſien & tout le triangle à tout le triangle. Car puis que l'angle A, eſt monſtré egal à l'angle D, les coſtez A B, A C, eſtans egaux à D E, E F, chacun au ſien, il s'enſuit [a] que le triangle eſt egal au triangle & les autres angles egaux aux autres angles chacun au ſien.

[a] 4. premier.

PROBLEME 4. PROP. 9.

ix. Couper vn angle rectiligne donné, en deux egalement.



Soit l'angle rectiligne donné B A C, qu'il faut diuiſer en deux egalement, c'eſt à dire en deux angles egaux. Soit prins le point contingent D, en la ligne A B, & de la plus grande A C, prolongee infiniment [a] ſoit retranchee A E, egale à A D, & menee D E, [b] ſur laquelle ſoit deſcrit le triangle equilateral D F E, & menee A F. Ie dis que l'angle B A C, eſt diuiſé en deux angles egaux. Car d'autant que D A, a eſté priſe egale à A E, & A F, commune, les deux coſtez D A, A F, ſont egaux aux deux E A, A E, chacun au ſien, & la baſe D F, egale à la baſe E F, eſtans les coſtez d'vn triangle equilateral, [c] l'angle D A F, ſera egal à l'angle E A F, & partant l'angle B A C, ſera diuiſé en deux egalement. Dõc l'angle rect. &c. Ce qu'il falloit faire.

a 1. Premier.

b 1. Pre.

c 8 Premier.

PRACTIQVE.

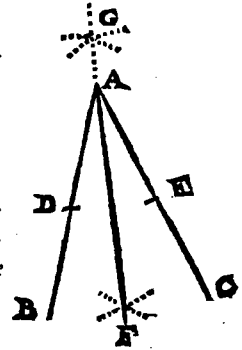
La practique de cette propoſition ſe peut faire ainſi. Soit l'angle B A C, à diuiſer en deux egalement: du poinct A, comme centre à quelconque interualle ſoient coupees A D, A E, egales; puis des poincts D, & E, comme centres, du meſme interualle ou moindre, ou plus grand, comme il ſera plus expedient, ſoient deſcrits deux arcs s'entrecoupãs au poinct F, au deſſous du poinct A, vers B, & C,

ou au

vn au deſſus vers G, puis ſoit menee la droicte ligne AF, ou GAF, laquelle diuisera l'angle BAC, en 2. egalement. Voyez la ſuiuant figure.

SCHOLIE.

Il appert par ce que deſſus que l'on peut diuiſer tout angle rectiligne en 4. 8. 16. 32. ou 64. parties egales & ainſi de ſuite procedant par augmentation double. Car apres que l'on a diuiſé vn angle rectiligne en deux angles egaux, faut de rechef diuiſer chacun d'iceux en 2. egalement & l'on aura quatre angles egaux & faire ainſi de ſuitte.

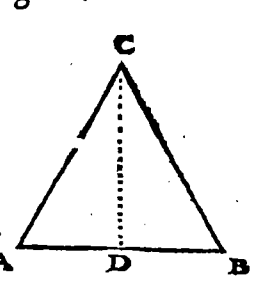


PROBLEME 5. PROP. 10. x.

Couppet vne ligne droicte donnee & terminee, en deux parties egales.

Soit la ligne droicte dõnée & terminee AB, qu'il faut diuiſer en deux egalement.

Sur icelle AB, ſoit [a] deſcrit le triangle equilateral ABC, puis ſoit diuiſé l'ãgle [b] ACB, en deux egalement, par la ligne droicte CD. Ie dis que AB, eſt diuiſee en deux egalement au poinct D.



[a] 1. Premier.

[b] 9. Premier.

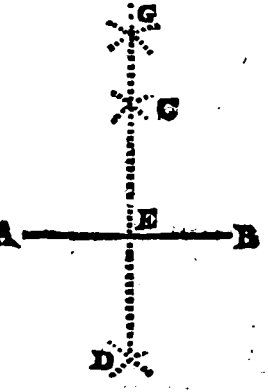
Car d'autant que AC, eſt egale à CB (car elles ſont les coſtez d'vn triangle equilateral,) & CD,

est cõmune, les deux costez AC, C D, sont egaux aux deux B C, CD, chacũ au sien, & l'angle ACD, egal à l'angle B C D, par la construction, la base AD, [c] sera egale à la base B D : partant A B, sera diuisee en deux egalement. Ce qu'il falloit faire.

[c] 4. Premier.

PRACTIQVE.

Pour diuiser A B, en deux egalement, des poincts A, & B, comme centres, en ouurant le compas en sorte que l'ouuerture excede la moitié de la ligne A B, soient descrits deux arcs s'entrecouppans au poinct C, au dessus de la ligne, semblablement des mesmes centres & à mesme interualle, soient descrits deux autres arcs au dessous de A B, s'entre-coupãs au poinct D, & soit menee la droicte ligne CD, elle couppera A B, en deux egalement au poinct E: Ou bien apres auoir descrit deux arcs s'entre-coupans au poinct C, des centres A & B, des mesmes centres & à plus grande interualle que le premier soient descrits deux autres arcs au dessus de C, s'entre-coupans au poinct G, & soit menee la droicte ligne GCE, elle couppera A B, au poinct E.



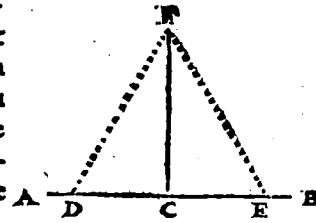
SCHOLIE.

Il est manifeste qu'en la mesme maniere l'on peut diuiser la ligne droicte A B, en quatre parties, puis en huict, & ainsi consequemment, comme nous auons dict en la proposition precedente, de la diuision de l'angle.

PROBLEME 6. PROP. 11. xj.

Sur vne ligne droicte donnee, & d'vn poinct donné en icelle, mener vne ligne droicte, à angles droicts.

Soit la droicte ligne donnee A B, & le poinct donné en icelle C, il faut du poinct C, mener vne ligne droicte & à angles droicts, à la ligne donnee A B.



En la partie A C, soit prins le poinct contingent D, puis soit posee ou prise [a] C E, egale à C D, puis sur D E, soit [b] descrit le triangle equilateral D F E, & soit menee C F. Ie dis qu'icelle est à angles droicts à la ligne A B.

[a] 3. ou 5. Premier.
[b] 1. Premier.

Car d'autant que C D, est egale à C E, & C, F, commune, les triangles D C F, & E C F, auront les deux costez D C, C F, egaux aux deux costez E C, C F, chacun au sien, & les bases D F, E F, egales, estant les costez d'vn triangle equilateral, [c] les angles au poinct C, seront egaux, donc l'vn & l'autre sera droict, [d] partant C F, sera à angles droicts à A B, Donc sur vne ligne droicte &c. Ce qu'il falloit faire.

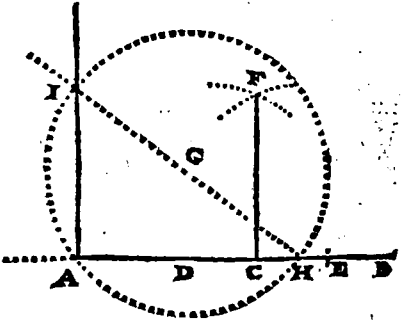
[c] 8. Premier.
[d] 10. def.

SCHOLIE.

Clauius dict, qu'ayant pris le poinct D, en la ligne A C, il faut retrancher C E, egale à C D, par la 3. prop. du 1. ce qui ne se pourra pas touſiours faire, attendu que la reſtante C B, peut eſtre moindre que la ligne C D, priſe,

ou que le poinct donné C, peut estre le mesme qu'vn de ceux de l'extremité A, ou B, mais Theon, faict mieux ainsi: εἰλήφθω δὴ τῆς α κ, τυχὸν σημεῖον τὸ δ, καὶ κείσθω τῇ κ δ ἴση ἡ κ ε, καὶ συνεστάτω δὴ τῆς δ ε, τρίγωνον ἰσόπλευρον, τὸ φ δ ε, καὶ ἐπιζεύχθω ἡ, φ κ, *&c. c'est à dire, soit pris le poinct contingent, ou à l'aduenture D, en la ligne C A, & soit*

22. *posee* [a] *C E, egale à C D, & sur D E, soit constitué le triãgle equilateral F D E, & conioinct F C, &c. Or quand Theon dict, soit posee C E, egale à C D, faut entendre soit prise egale, ou prolongee s'il est besoin &c. Et Henrion dict, du poinct C, soient prises les deux lignes egales C D, C E, par la troisiéme proposition, ce qui ne se pourra pas aussi tousiours faire, pour les raisons susdictes.*



La practique de cette proposition se fera comme i'ensuit: Si sur la ligne A B, on veut mener vne ligne à angles droicts: du poinct C, en icelle soient prises de part & d'autre parties egales C E, C D, & des poincts D, & E, comme centres soient descrits deux arcs s'entre-coupans au poinct F, à telle interualle que l'on voudra, pourueu qu'il excede D C, ou E C, puis soit menee C F, icelle sera à angles droicts à A B.

Mais si le poinct donné est à l'extremité A, soit pris le poinct G, hors la ligne, en sorte toutesfois que le cercle descrit du poinct G, comme centre & de l'interualle G A, puisse coupper la ligne donnee à quelque poinct, comme H,

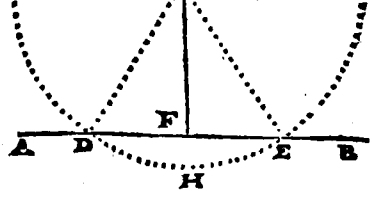
& soit descrit la circonference I A H, du centre G, & de l'interualle G A, couppant A B, au poinct H, & du poinct H, par G, soit menee la ligne H G I, couppant la circonference au poinct I, puis soit menee la droicte ligne A I, icelle sera à angles droicts, comme il sera demonstré à la 31. prop. du 3. l. Et encore que A, ne fust le poinct de l'extremité (ce qui aduiendroit, si la ligne estoit prolongee comme à K,) en la mesme maniere l'on meneroit A I, à angles droicts.

PROBLEME 7. PROP. 12.

xij.

Sur vne ligne droicte donnee & infinie; d'vn poinct donné, lequel n'est en icelle; mener vne ligne perpendiculaire.

Soit la ligne droicte donnee A B, & le poinct donné C, hors icelle; duquel il faut mener vne ligne droicte, perpendiculaire sur A B. Soit pris de l'autre part de A B, le poinct contingent H. Et du poinct C, comme centre, & à l'interualle C H, soit descrit le cercle D E, couppant A B, aux poincts D, & E, puis soit [a] diuisee D E, en deux egalemẽt au poinct F, & soit menee C F. Ie dis que C F, est perpendiculaire à A B.



a 10. 1.

Car d'autant que D F, est egale à E F, par la construction & F C, commune, les deux costez D F, F C, du triangle D F C, sont egaux aux deux costez E F, F C, du triangle E F C, chacun au sien, & la

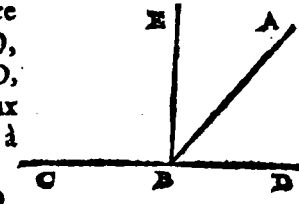
base C D, egale à la base C E, estant toutes deux menees du centre C, à la circonference, [b] les angles de part & d'autre au poinct F, seront egaux, [a] & partant l'vn & l'autre droict. Donc C F, est menee perpendiculaire à A B. [c] Ce qu'il falloit faire.

b 1.8

c 10 def.

THEOREME 6. PROP. 13.

Quand vne ligne droicte tombant sur vne ligne droicte, faict angles, ou elle fera deux angles droicts, ou egaux à deux droicts.



Que la ligne droicte A B, tombant sur C D, face deux angles A B D, A B C. Ie dis qu'iceux sont droicts ou egaux à deux droicts.

Car si l'angle A B D, est egal à A B C, [a] ils seront tous deux droicts, s'il est inegal, [b] soit menee B E, à angles droicts à C D, donc E B D, & E B C, seront droicts. Or d'autant que les deux angles D B A, & A B E, sont [c] egaux au droict E B D, toutes les parties prises ensemble à leur tout, [d] si on adiouste le commun, E B C, les trois D B A, A B E, & E B C, seront egaux aux deux droicts, D B E, & E B C. De rechef, d'autant que les deux angles A B E, & E B C, sont egaux à leur tout [c] A B C, si on adiouste le cõmun D B A, les deux angles [d] D B A, & A B C, serõt egaux aux trois D B A, A B E, & E B C; mais ces trois ont esté monstrez egaux à deux droicts, donc D B A, & A B C, seront aussi egaux à deux droicts. Donc, quand vne ligne droicte &c. Ce qu'il falloit demonstrer.

a 10. d.

b 11. 1.

c 19. c. f.

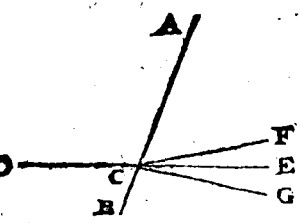
d 2. c. f.

SCHOLIE.

Cette proposition semble dependre de quelque cõmune notion de l'esprit. Car de ce que l'angle A B C, excede l'angle droict E B C, le reste A B D, est excedé, d'autant par l'angle droict E B D, Car comme en celuy là, l'excez est l'angle A B E, ainsi en celuycy le defaut est le mesme angle A B E, parquoy l'on pourra conclurre de là, qu'ils sont egaux à deux droicts; attendu que l'excez de l'vn est le deffaut de l'autre.

THEOREME 7. PROP. 14. xiv.

Si à quelque ligne droicte, & à vn poinct en icelle, sont menees deux lignes droictes, non de mesme part, faisant les angles de part & d'autre egaux à deux droicts: icelles lignes droictes se rencontreront directement l'vne l'autre.



Soit la droicte ligne A B, & le poinct en icelle C, auquel soient menees les droictes lignes D C, E C, de part & d'autre de A B, faisant les angles D C A, & A C E, egaux à deux droicts. Ie dis que D C, & E C, se rencontrent directement, c'est à dire que D C E, est vne ligne droicte: autrement D C, estant prolongee vers E, tomberoit au dessus de C E, où au dessous; qu'elle tombe donc premierement au dessus, s'il est possible, comme au poinct F, en sorte que D C F, soit ligne droicte.

D'autãt que la droicte ligne AC, tombant ſur la droicte DCF, faict les deux angles DCA, & ACF, [a] leſquels ſeront droicts ou egaux à deux droicts: mais les deux DCA, & ACE, ſont egaux à deux droicts par l'hypotheſe, & tous [b] les angles droicts ſont egaux entr'eux, dõc les deux angles droicts DCA, & ACF, ſont egaux aux deux angles droicts DCA, & ACE; oſtant donc le commun DCA, [c] reſtera ACF, egal à ACE, la partie à ſon tout [d] ce qui eſt impoſſible: La meſme abſurdité arriuera ſi l'on veut dire que DC, eſtant prolongee, tombera au deſſous de CE, comme au poinct G: Partant DC, & EC, ſe rencontreront directement. Donc ſi a quelque ligne &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.

[a] 13. premier.
[b] 12. cõ. ſ.
[c] 3. c ſ.
[d] 9. cõ. ſ.

SCHOLIE 1.

Cette propoſition eſt la conuerſe de la precedente, où il a eſté monſtré que ſi DCE, eſt ligne droicte, les angles ACD, ACE, ſont egaux à deux droicts: En celle cy il eſt monſtré que ſi les angles ſuſdicts ſont egaux à deux droicts que les deux, lignes droictes DC, EC, ſont vne ſeule ligne droicte.

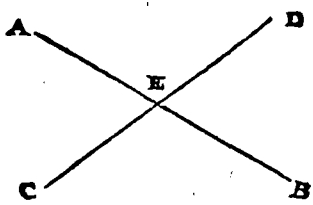
SCHOLIE 2.

Henrion a traduict ou pluſtoſt coppié cette propoſition ainſi; Si à l'extremité d'vne ligne droicte &c. *Ce qui n'eſt conforme au texte d'Euclide*; ἐὰν πρός τινι εὐθείᾳ καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ σημείῳ, δύο εὐθεῖαι μὴ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη κείμεναι τὰς ἐφεξῆς γωνίας δυσὶν ὀρθαῖς ἴσας ποιῶσιν, ἐπ' εὐθείας ἔσονται, ἀπολλαγείς, αἱ εὐθεῖαι. *C'eſt à dire; ſi à quelque ligne droicte, & à vn poinct en icelle, deux lignes droictes eſtant menees non de meſme part, font les angles de ſuitte, ou de coſté & d'autre, egaux à deux droicts,*

icelles lignes droictes ſeront l'vne à l'autre, en ligne droicte, ou ſe rencontreront directement l'vne l'autre, ou ſeront poſees directement. D'où il eſt facile à entendre, que lintention d'Euclide, eſt de mener icelles lignes dont eſt queſtion, non ſeulement à l'extremité, mais auſſi indifferemment à tout autre poinct de la ligne propoſee, ce qui eſt tres-manifeſte par la demonſtration. Or ledict Henriõ n'entendant la l'angue de l'Autheur, qu'il pretendoit traduire en la ſienne, ſçauoir la Grecque, il ne deuoit adiouſter foy à vn ſeul, de la coppie duquel il s'eſt ſeruy, mais voir les autres qui ont mieux traduit.

THEOREME 8. PROP. 15. XV.

Si deux lignes droictes ſe couppent l'vne l'autre, elles feront les angles au ſommet egaux entr'eux.



Soient les deux lignes droictes, A B, C D, s'entrecouppantes au poinct E: Ie dis qu'elles font les angles au ſommet egaux entr'eux, à ſçauoir l'angle A E D, egal à l'angle C E B, & A E C, egal à B E D.

D'autant que D E, tombe ſur A B, les deux angles A E D, D E B, [a] ſeront egaux à deux droicts. De rechef d'autant que B E, tombe ſur C D, les deux angles C E B, B E D, par la meſme raiſon ſerõt egaux à deux droicts, & tous les angles droicts ſont egaux [b] entr'eux, donc les deux A E D, D E B, ſeront egaux aux deux C E B, B E D, donc ſi l'on oſte l'angle commun D E B, [c] reſtera

[a] 13. premier.

[b] 12. cõ ſ.

[c] 3. c. ſ.

l'angle A E D, egal à l'angle C E B: Semblablemẽt l'on monſtrera que l'angle A E C, eſt egal à l'angle D E B. Donc, ſi deux lignes droictes ſe couppent, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.

COROLLAIRE. 1.

Euclide collige de la demonſtration de ce Theoréme, (ſelon la ſentence de Proclus) que deux lignes droictes ſe couppant l'vne l'autre, font 4. angles egaux à 4. droicts; Car il a eſté demonſtré que tant les deux angles A E D, D E B, que les 2. C E B, B E D, ſont egaux à deux droicts par la 13. Donc les angles conſtituez au poinct E, vaudront deux fois deux droicts; partant egaux à quatre droicts.

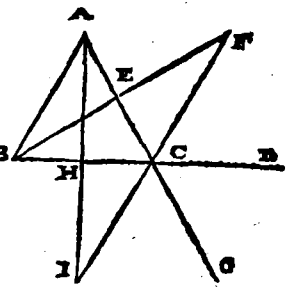
COROLLAIRE. 2.

Par la meſme raiſon nous colligerons que tous les angles conſtituez à vn meſme poinct, ſont tant ſeulement egaux à 4. angles droicts. Car ſi du poinct E, en la precedente figure, l'on mene tant de lignes droictes que l'on voudra, les quatre angles conſtituez au poinct E, ſeront diuiſez en plu-
a 19. diſ. ſieurs parties leſquelles ſont egales a à leurs touts, priſes enſemble. Donc ces 4. eſtant egaux à quatre droicts, par le 1. corollaire, toutes leurs parties priſes enſemble ſeront pareillement egales à quatre droicts. D'où il eſt manifeſte que tout eſpace cõſtituë en vn plan à l'entour de quelque poinct, vaut quatre angles droicts comme afferment tous les Autheurs, d'autant que tous les angles qui peuuent eſtre conſtituez à l'entour de ce poinct, ſont egaux à quatre droicts. Semblablement il eſt manifeſte que tant de lignes que l'on voudra, s'en-

tre-coupantes, feront les angles au poinct de la section egaux à quatre droicts.

THEOREME 9. PROP. 16. xvj.

De tout triangle, vn costé estant prolongé, l'angle exterieur est plus grand que chacun des interieurs & opposez.



Au triangle A B C, le costé B C, soit prolongé au poinct D. Ie dis que l'angle exterieur A C D, est plus grand que chacun des interieurs & opposez, sçauoir est, plus grand que C A B, & semblablement plus grand que C B A.

Car soit coupé le costé A C, en deux [a] egalement au poinct E, & par E, soit menee B E F, & soit faicte [b] E F, egale à E B, & ioincte F C. [a] 10. premier. [b] 2. premier.

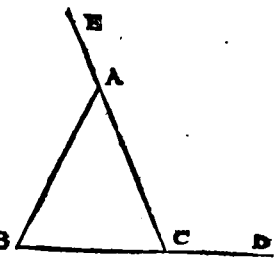
D'autant que A E, est egale à E C, & E F, à E B, les deux costez A E, E B, du triangle A E B, seront egaux aux deux F E, E C, du triangle F E C, chacun au sien & les angles au sommet E, contenus d'iceux costez [c] sont egaux, la base A B, sera egale à la base [d] F C, & tout le triangle à tout le triangle & les autres angles egaux aux autres angles, chacun au sien, cõtenus d'iceux costez egaux, sçauoir E C F, egal à E A B: Mais le tout [e] A C D, est plus grand que E C F, il sera donc aussi plus grand que son egal E A B. Semblablement, ayant couppé B C, en deux egalement, au poinct H, & [c] 15 Premier. [d] 4. premier. [e] 9. c.s.

mené A H I, en ſorte que H I, ſoit egale à H A, & ioinct C I, & prolongé le coſte A C, au poinct G, l'on monſtrera que l'angle exterieur B C G, eſt plus grand que l'interieur & oppoſé A B C, & partant A C D, qui eſt [f] egal à B C G, ſera auſſi plus grand que A B C. Donc de tout triangle vn coſté &c. Ce qu'il falloit de monſtrer.

f 15. premier.

xvij. THEOREME 10. PROP. 17.

De tout triangle, deux angles, ſont plus petits que deux droicts, de quelque façon qu'ils ſoient prins.



Soit le triangle A B C. Ie dis que deux des angles d'iceluy, ſont plus petits que deux droicts de quelque façon qu'ils ſoient pris.

Car premierement le coſté B C, eſtant prolongé au poinct D, l'on monſtrera que les deux angles B, & A C B, ſont moindres que deux droicts.

D'autant que l'angle exterieur A C D, eſt plus grand que [a] l'oppoſé interieur B. Si l'on adiouſte le commun angle A C B, [b] les deux A C D, & A C B, ſeront plus grands que B, & A C B; mais A C B, & A C D, ſont egaux [c] à deux droicts, donc B, & A C B, ſont plus petits que deux droicts. Semblablemẽt le coſté C A, eſtant prolongé au poinct E, l'on monſtrera que C A B, & A B C, ſont plus petits que deux droicts &c. Donc de tout triangle &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.

a 16. Premier.
b 4. ax. f.
c 13. premier.

DE PROCLVS.

Il eſt manifeſté de ce Theoréme, que l'on ne peut mener d'vn meſme poinct plus d'vne ligne droicte perpendiculaire ſur vne meſme ligne droicte. Car ſi faire ſe peut ſoient menees du poinct A, à la ligne B C, deux perpendiculaires A B, A C, les deux angles internes B, & C, du triangle A B C, ſeront egaux à deux droicts, l'vn & l'autre eſtant droict, ce qui eſt abſurde. [a] *Car nous auons monſtre que deux angles de tout triangle de quelque façon qu'ils ſoient prins, ſont moindres que deux droicts. Donc l'on ne pourra mener plus d'vne ligne perpendiculaire &c. Ce qui eſtoit propoſé. Voyez le petit triangle de la figure ſuiuante.*

[a] 17. Premier.

COROLLAIRE 1.

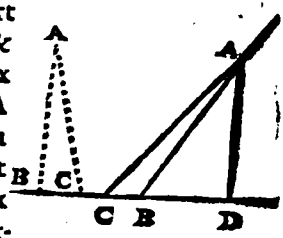
De ces demonſtrations, il s'enſuit auſſi que tout triangle qui a vn angle droict ou obtus, a les autres aguts. Car puis qu'il eſt monſtré que deux quelconques angles de tout triangle ſont moindres que deux droicts; il eſt neceſſaire que ſi vn angle eſt droict ou obtus, qu'vn chacun des autres ſoit agu, autrement deux angles d'vn triangle ſeroient droicts ou plus grands que deux droicts.

COROLLAIRE 2.

Il s'enſuit auſſi de cette propoſition que ſi vne ligne droicte, faict deux angles inegaux auec vne autre ligne droicte, l'vn obtus & l'autre agu, que la ligne perpẽdiculaire tiree de quelconque poinct d'icelle ſur cét autre, tombera de la part de l'angle agu.

Que A B, face auec C D, deux angles inegaux, ſçauoir A B D, agu & A B C, obtus, & de quelconque poinct A, ſoit menee A D, perpendiculai-

reà CB. Ie dis que A D, tombera de la part de l'angle agu A B D; autrement qu'elle tombe s'il eſt poſſible de la part de l'angle obtus ABC, & ſoit A C. Donc les deux angles ſçauoir l'obtus A BC, & le droict ACB, au triangle A B C, ſeront plus grands que deux droicts, ce qui eſt abſur-



a 17. Premier. de, attẽdu qu'ils ſont a mondres que deux droicts, donc la perpendiculaire tiree du poinct A, ſur AB, ne tombera de la part de l'angle obtus. Partant de la part de l'angle agu.

COROLLAIRE 3.

Semblablement il eſt manifeſte de cette propoſition que tous les angles d'vn triangle equilateral, & les deux angles ſur la baſe d'vn triangle Iſoſcele ſont aguts: Car puis b que deux quelconques angles du triãgle equilateral, & les 2. de deſus la baſe du triangle Iſoſcele ſont egaux entr'eux; & tant c ces deux-là que ces 2. icy ſõt moindres que deux droicts, chacun d'iceux ſera moindre qu'vn droict; c'eſt à dire agu. Car ſi vn eſtoit droict ou obtus, les deux ſeroient egaux à deux droicts ou plus grands que deux droicts.

b 5. Premier.

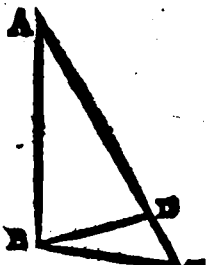
c 17. Premier.

xviij. ## THEOREME 11. PROP. 18.

De tout triangle, le plus grand coſté ſouſtient le plus grand angle.

Soit le triangle A B C, ayant le coſté A C, plus grand que le coſté A B. Ie dis que l'angle ABC,

eſt plus grand que l'angle A C B.



Car puis que A C, eſt plus grand que A B, ſoit retranchee, [a] A D, egale à A B, & ſoit ioincte B D.

[a] 3. Premier.

D'autant que A B, A D, ſont egaux, les [b] deux angles A B D, A D B, ſeront egaux, mais l'externe A D B, eſt plus grand [c] que l'interne & oppoſé C, donc ſon egal A B D, ſera auſſi plus grand que C, & partant le tout A B C, encore bien plus grand que l'angle C : Par meſme raiſon l'on monſtrera que l'angle eſt plus grand que l'angle A. Donc de tout triangle le plus &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.

[b] 5. Premier.

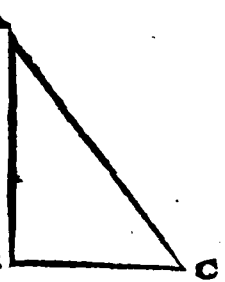
[c] 16. 1.

COROLLAIRE.

Il s'enſuit de cette propoſition, que les trois angles d'vn triangle ſcalene ſont inegaux. Car ſoit le triangle ſcalene, duquel le plus grand coſté ſoit A C, le plus petit ſoit B C, & le moyen A B. (ſoit veuë la figure de la prop. ſuiuante) Ie dis que tous les angles d'iceluy ſont inegaux. Car puis que le coſté A C, eſt poſé plus grand que le coſté A B, par cette prop. l'angle B, ſera plus grand que l'angle C ; par la meſme raiſon l'angle C, ſera plus grand que l'angle A, d'autant que le coſté A B, eſt poſé plus grand que le coſté B C. Donc les trois angles ſont inegaux, B, le plus grand, C, le moyen & A, le plus petit.

xix. ## THEOREME 12. PROP. 19.

De tout triangle, le plus grand angle est soustenu du plus grand costé.



Soit le triangle A B C, ayant l'angle B, plus grand que l'angle C. Ie dis que le costé A C, qui soustient l'angle B, est plus grand que A B, qui soustient l'angle C.

Car s'il n'est plus grand, il sera egal ou plus petit; si egal, l'angle B, [a] sera egal à l'angle C, ce qui est absurde, car B, est posé plus grand. Si le costé A C, est dict estre plus petit que A B, l'angle B, soustenu du plus petit costé A C, sera plus petit que l'angle C, soustenu [b] du plus grand costé AB, ce qui est plus absurde, car l'angle B, est plus grãd que l'angle C, par l'hypothese. Donc le costé AC, sera plus grand que A B. Semblablement l'on monstrera que le costé A C, est plus grand que le costé BC, posant l'angle C, plus grand que l'angle A. Donc de tout triangle &c. Ce qu'il falloit demonstrer.

[a] 5. Premier.

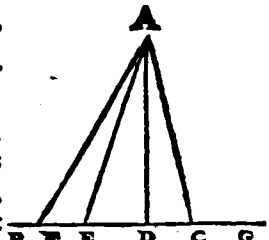
[b] 18. 1.

COROLLAIRE.

De cette proposition, il s'ensuit que de toutes les droictes lignes menees d'vn mesme poinct sur vne ligne droicte, celle qui est perpendiculaire est la plus petite.

Car soient menees du poinct A, sur B C, les lignes droictes A D, A E, AF, A G, desquelles A D, soit per-

soit perpendiculaire à B C. Ie disqu'icelle est la plus petite. Car puisqu'au triangle A D E, les deux angles A D E, & A E D, sont moindres que deux droits & A D E, est droict, A E D, sera moindre qu'vn droict c'est à dire agu, partant A E, sera plus grande que A D. En la mesme maniere l'on demonstrera que chacune des autres est plus grande que A D. Donc la perpendiculaire A D, sera la plus petite.



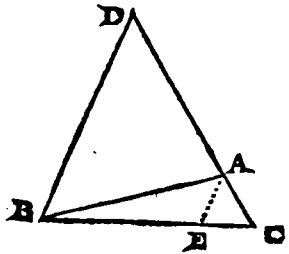
a 17. 1.

b 19. 1.

THEOREME 13. PROP. 20. XX.

De tout triangle, deux costez sont plus grands que l'autre, en quelque façon qu'ils soient pris.

Soit le triangle A B C. Ie dis que deux costez sont plus grands, que l'autre, en quelque façon qu'ils soient pris, sçauoir B A, & A C, prisensemble sont plus grands que B C: semblablement A C, C B, plus grands que A B: finalement A B, B C, plus grands que A C.



Soit prolongé le costé C A, vers D, en sorte que A D, soit posee egale à A B, & soit menée B D.

a 2. 1.

D'autant que les deux costez A D, A B, sont

faicts egaux, les deux angles [b] ſur la baſe B D, ſçauoir D, & A B D, ſeront egaux; mais l'angle C B D, [c] eſt plus grand que A B D, il ſera donc auſſi plus grand que D: partant au triangle C B D, le coſté C D, oppoſé au plus [d] grand angle C B D, ſera plus grand que le coſté B C, oppoſé au plus petit angle D; Mais le coſté C D, eſt egal aux deux A B, A C, (car puis que A D, eſt egal à A B, ſi l'on adjouſte le commun [e] A C, le total C A D, ſera egal à A C, A B,) donc les deux coſtez A C, A B enſemble ſeront plus grands que l'autre coſté B C. Semblablement l'on demonſtrera que deux autres coſtez, tels que l'on voudra, ſont plus grands que l'autre. Donc de tout triangle &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.

[b] 5. 1.
[c] 9. cõf.
[d] 19. 1.
[e] 2. cõ f.

AVTREMENT.

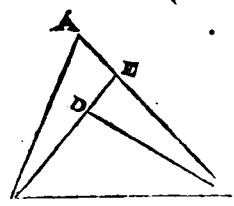
Ce theoréme eſt demonſtré par d'autres ſans prolonger aucun coſté, en cette ſorte.

Soit diuiſé l'angle B A C, en 2. egalemẽt par la ligne A E. D'autãt que le coſté C E, du triangle A C E, eſt prolongé vers B, l'angle externe [b] A E B, ſera plus grand que l'interne & oppoſé E A C, il ſera donc auſſi plus grand que ſon egal B A E. Donc au triãgle A B E, le coſté A B, oppoſé au plus grand angle A E B, ſera [c] plus grand que le coſté B E, oppoſé au plus petit angle E A B. Semblablement l'on monſtrera que le coſté A C, eſt plus grand que E C, d'autant que l'angle [d] C E A, eſt plus grand que E A B, c'eſt à dire que E A C, ſon egal, &c. Partant les deux A B, A C, ſeront plus grands que B C, & ainſi des autres, diuiſant chacun des autres angles en deux egalement.

[a] 9. 1.
[b] 16. 1.
[c] 19. 1.
[d] 16. 1.

THEOREME 14. PROP. 21. xxj.

Si sur l'vn des costez d'vn triangle, & des extremitez d'iceluy sont menees deux lignes droictes au dedans, se rencõtrant à vn poinct. Icelles seront plus petites que les deux autres costez du triangle; mais elles contiendront vn plus grand angle.



Au triangle ABC, sur les extremitez B, & C, du costé BC, soient cõstituees les deux lignes droictes BD, CD, se rencontrant au poinct D. Ie dis que BD, CD, ensemble sont plus petites que les costez BA, CA, ensemble; mais l'angle BDC, est plus grand que l'angle BAC.

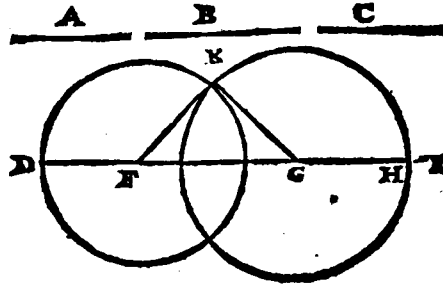
Car soit prolõgee BD, au poinct E, du costé AC. D'autant qu'au triangle BAE, les deux costez BA, AE [a] sont plus grands que l'autre BE, si l'on adiouste le commun CE, [b] les costez BA, AC, seront plus grands que BE, EC. [a] 20. 1. [b] 4. cõ. s.

De rechef, d'autant qu'au triangle CED, les deux costez CE, ED, sont [c] plus grands que l'autre CD, si l'on adiouste le commun DB, les deux CE, EB, seront [d] plus grands que CD, DB: mais BA, AC, ont esté monstrez plus grands que BE, EC, donc BA, AC, seront encore plus grands que BD, CD, ce qui estoit premierement proposé. Secondement, d'autant que l'angle externe BDC, est [e] plus grand que l'interne DEC, & le mesme DEC, est plus grand que BAC, pour la mes- [c] 20. 1. [d] 4. cõ. s. [e] 16. 1.

mé cauſe, à plus forte raiſon l'angle B D C, ſera plus grand que l'angle B A C: ce qui eſtoit ſecondement propoſé. Donc ſi ſur l'vn des coſtez &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.

xxij. ## PROBLEME 8. PROP. 22.

De trois lignes droictes egales à trois lignes droictes donnees, conſtituer vn triangle: mais il faut que deux, de quelque façõ qu'elles ſoient priſes, ſoient plus grandes que l'autre; d'autant que de tout triangle, deux coſtez de quelque façon qu'ils ſoient prins, ſont plus grands que l'autre.



Soient les trois lignes droictes donnees A, B, C, deux deſquelles, priſes de quelque façon que l'on voudra ſoient plus grandes que l'autre; il faut conſtituer vn triangle qui ayt les trois coſtez egaux aux trois lignes donnees A, B, C.

Soit priſe quelque ligne droite D E, prolongee infiniment vers E, & d'icelle ſoit priſe D F, égale à A, & F G, egale à B, finalement G H, egale à C, & du poinct F, comme centre à l'interualle F D,

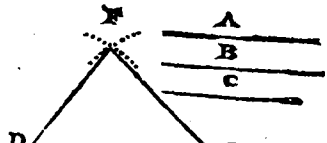
a 3. 1.

soit descrit le cercle D K : Derechef du centre G & de l'interualle G H, soit descrit le cercle H K, & soient menees F K, & G K. Ie dis que le triangle F K G, est fait de trois lignes egales aux trois lignes donnees A, B, C.

Car d'autant que le poinct F est le centre du cercle D K, la ligne[b] F K sera égale à F D, mais A est prise egale à D, donc F K & A, seront[c] égales entr'elles. Derechef, d'autant que G est le centre du cercle H K, la ligne G K, sera egale à G H, par la mesme raison, mais la ligne C, est égale à G H, par la construction, donc G K & C seront égales, & F G, est prise egale à B, donc les trois lignes droictes K F, F G, G K, sont egales aux 3. lignes droites donnees, A, B, C &c. ce qu'il falloit faire.

[b] 15. 1.
[c] 1. cõs.

PRACTIQVE.



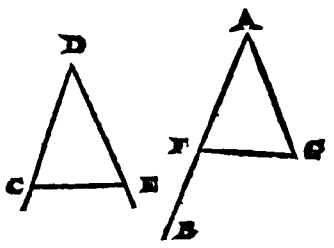
Soit prise D E, égale à quelqu'vne des lignes, A, B, C, sçauoir à B, que nous voulons estre la base; puis du poinct E, & à l'interualle de A, soit descrit l'arc F. Semblablement du poinct D, & à l'interualle de C, soit descrit vn autre arc qui coupe le premier au poinct F, & soient menees les lignes droictes, D F, E F, le triangle D E F, sera constitué, duquel les trois costez seront egaux aux trois lignes donnees A, B, C.

PROBLEME 9. PROP. 23. xxiij.

A vne ligne droicte donnee, & à vn poinct donné en icelle, constituer vn an-

gle rectiligne égal à vn angle rectiligne donné.

Soit la droicte ligne donnee AB, & le poinct A, dõné en icelle ; & l'angle rectiligne donné CDE, il faut à la ligne AB, & au poinct A, en icelle constituer vn angle rectiligne egal à l'angle rectiligne donné.



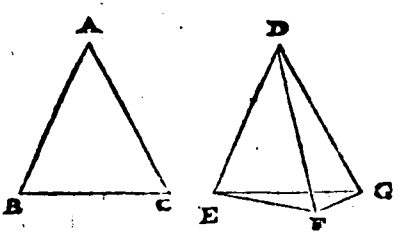
Soient prins les poincts contingens C & E, en l'vne & l'autre ligne DC, DE, & soit menee CE: Puis de trois lignes droictes egales aux trois, DC, CE, ED, [a] soit constitué le triangle AFG, de sorte que AF, soit posee egale à DC, AG, à DE, & FG à CE. D'autant donc que les deux costez AF, AG, du triangle AFG, sont egaux aux deux DC, DE, du triangle DCE, chacun au sien & la base FG, égale à la base CE; l'angle FAG, sera [b] égal à l'angle CDE. Donc à la ligne donnee AB, & au poinct donné en icelle A, nous auons constitué vn angle rectilique égal à l'angle rectiligne donné, CDE. Ce qu'il falloit faire.

[a] 22. I.

[b] 8. I.

xxiv. THEOREME 15. PROP. 24.

Si deux triangles ont deux costez egaux à deux costez, chacun au sien, & l'angle cõtenu d'icelles lignes droictes égales plus grand que l'angle: ils auront la base plus grande que la base.



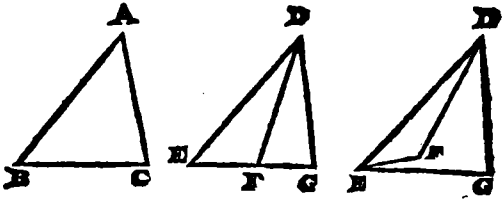
Soient les deux triangles A B C, D E F, ayãt les deux costez A B, A C, egaux aux deux D E, D F, chacun au sien, sçauoir A B, égal à D E, & A C. à D F; mais l'angle A plus grand que l'angle E D F. Ie dis que la base B C, sera plus grande que la base E F. Car puis que l'angle A, est plus grand que E D F, à la ligne E D, & au point D, en icelle soit constitué l'angle [a] E D G, egal à l'angle A, & soit prise D G, egale à vne des deux A C, ou D F, & soient menees E G, & F G: D'autant donc que les triangles A B C, D E F, ont les deux costez A B, A C, égaux aux deux D E, E G, chacun au sien, & l'angle A, egal à l'angle E D G, contenus d'iceux costez egaux, [b] la base B C, sera egale à la base E G. Derechef, d'autant que D G est égale à D F, le triangle D G F est isoscele, & partant [c] les deux angles D G F, D F G, sur la base seront egaux: mais l'angle D G F, [d] est plus grand que l'angle E G F, donc D F G, son egal, sera aussi plus grand que E G F, & partant le tout E F G, encore plus grãd que E G F. Donc au triangle E F G, le costé E G, qui soustient le plus grand angle [e] E F G, sera plus grand que E F, qui soustient le plus petit E G F; mais B C, est monstree egale à E G, donc B C, sera aussi plus grande que E F.

[a] 23. 1.
[b] 4. 1.
[c] 5. 1.
[d] 9 cõ. s.
[e] 19. 1.

Secondement que la base E G, tombe sur E F, [f] elle sera egale à la base B C, comme auparauant. Mais E G, est plus grande que E F, le

[f] 4. 1.

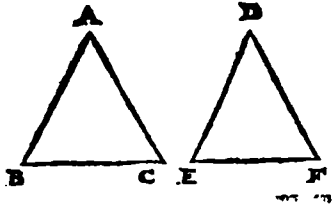
tout que ſa partie, donc BC, [g] ſera auſſi plus gran-
[g] 9.c.f. de que EF.



Finalement que EG, tombe au deſſous de EF:
[h] 21.1. D'autant que les deux coſtez DG, EG, [h] ſont plus grands que les deux DF, FE, & DF, eſt faict
[i] 5.c.f. egal à DG, [i] oſtãt DG, DF, egales demeurera DF, plus petite que EG, ou BC, que nous auons monſtree egale à EG. Donc ſi deux triangles &c. Ce qu'il falloit faire.

THEOREME 16. PROP. 25.

xxv. Si deux triangles ont deux coſtez egaux à deux coſtez, chacun au ſien; & qu'ils ayẽt la baſe plus grande que la baſe: Ils auront l'angle contenu d'icelles lignes droites egales plus grand que l'angle.



Soient deux triãgles ABC, DEF, ayãt les deux coſtez AB, AC, egaux aux deux DE, DF, chacun au ſien, mais la baſe BC, plus grande que la baſe EF. Ie dis que l'angle A, ſera plus grand que l'angle D.

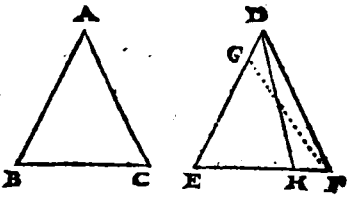
Car ſi A, n'eſtoit plus grãd il ſeroit ou egal ou pl⁹

petit. Si egal, les costez AB, AC, estant egaux aux deux DE EF, chacun au sien [a] la base BC, seroit egale à EF. Ce qui est absurde, car BC, est posee pl⁹ grande. Si plus petite; AB, AC, estãt egaux à DE, EF, chacun au sien, BC, seroit [b] plus petite que EF, ce qui est plus absurde, car elle est plus grãde par l'hypothese. Donc puis qu'il ne peut estre egal ny plus petit, il sera plus grand. Donc si deux triãgles &c. Ce qu'il falloit demonstrer.

[a] 4. 1
[b] 24. 1

THEOREME 17. PROP. 26.

Si deux triangles ont deux angles egaux à deux angles, chacnn au sien, & vn costé egal à vn costé; sçauoir est, ou celuy qui est adiacent à iceux angles egaux, ou bien celuy qui soustient, vn d'iceux angles egaux: ils auront les autres costez egaux aux autres costez, chacun au sien, & l'autre angle egal à l'autre angle.



Soient les deux triangles ABC, DEF, ayant les deux angles B, & C, egaux aux deux angles E, & DFE, chacun au sien sçauoir B egal à E, & C, egal à DFE; Et soit premieremẽt le costé BC adiacent aux angles B, & C, egal à EF, adiacent aux angles E, & DFE. Ie dis que les autres costez AB, AC, sont egaux aux autres costez DE, DF, chacun au sien, sçauoir AB, à DE, & AC, à DF, lesquels soustẽdent les angles egaux,

& que l'autre angle sçauoir A, est egal à l'autre angle D.

Car si AB, n'est egal à DE, l'vn d'iceux sera plus
a 3. 1. grand; soit donc DE, plus grand, s'il est possible duquel soit retrãché GE, a egal à AB, & soit menee GF. D'autãt que les deux costez AB, BC, du triangle ABC, sont egaux aux deux GE, EF, du triangle GEF, chacun au sien, & l'angle B, egal à l'angle
b 4. 1. E, par l'hypothese, la base b GF, sera egale à la base AC, & tout le triangle GEF, egal à tout le triangle ABC, & l'angle GFE, egal à l'angle C, mais l'angle DFE, est posé egal à l'angle C, par l'hypothese, donc l'angle GFE, sera pareillement egal à l'angle DFE, la partie à son tout, ce qui est absurde. Donc le costé AB, n'est pas inegal à DE. Donc puis les deux costez AB, BC, sont egaux aux deux DE, EF, chacun au sien, & les angles B, & E, egaux contenus d'iceux costez, la
c 4. 1. base c AC, sera egale à la base DF, & les autres angles A, & D, egaux; ce qui estoit proposé.

Secondement soient les costez AB, DE, egaux, soustendans les angles egaux C, DFE. Ie dis de rechef que les autres costez AC, CB, sont egaux aux autres costez DF, FE, chacun au sien, BC, à EF & AC à DF, & l'autre angle A egal à l'autre angle D. Car si BC, n'est egal à EF, soit l'vn d'i-
d 3. 1. ceux sçauoir EF, plus grand, d du quel soit pris EH, egale à BC, & menee DH.

D'autant donc que les deux costez AB, BC, sont egaux aux deux DE, EH, & les angles B, & E, cõtenus d'iceux, sont posez egaux, la base est egale
e 4. 1. à la base & l'angle DHE, e egal à l'angle C, mais l'angle DFE, est posé egal à l'angle C. Donc l'angle DHE, sera egal au mesme angle DFE, l'ex-

terne à ſon interne & oppoſé; ce qui eſt[e] abſurde: donc BC, n'eſt inegal à EF. Donc par la 4. prop. de ce liure l'on colligera comme auparauant que les deux autres coſtez ſont egaux aux deux autres, & l'autre angle egal à l'autre angle. Donc ſi deux triangles, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer. e 16. 1.

COROLLAIRE.

Il eſt facile à colliger de ceſte propoſition que tout le triangle eſt auſſi égal à tout le triangle, car en conſequence que les 2. coſtez AB, BC, ſont égaux au 2. DE, EF, la baſe AC, eſt[a] égale à la baſe DF, & tout le triangle eſt auſſi égal à tout le triangle: Ce qu'auions deſia demonſtré. a 4. 1.

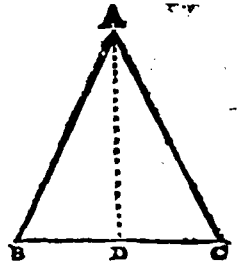
En ſuitte de ceſte propoſition, Clauius met deux Theoremes fort neceſſaires en Geometrie; leſquels nous n'obmettrons. Le premier eſt tel.

Au triangle equilateral, ou iſoſcele, la ligne droicte menee de l'angle contenu des deux coſtez egaux, & diuiſant l'angle ou la baſe en deux parties egales, icelle ligne eſt perpendiculaire à la baſe; & ſi elle diuiſe l'angle en deux parties égales, elle couppera pareillement la baſe en deux également. Mais ſi elle couppe la baſe en deux parties égales, elle diuiſera ſemblablement l'angle en deux parties égales, & au contraire, la ligne menee perpendiculaire à la baſe, diuiſé, & la baſe & l'angle en deux parties égales.

Soit le triangle ABC, duquel les deux coſtez AB, AC, ſoient egaux, & que l'angle A, ſoit premieremẽt diuiſé en 2. egalement par la ligne droicte AD, ie dis qu'icelle AD, eſt perpendiculaire à la baſe BC, & qu'elle couppe la baſe BC, en 2. egalement: Car puis que A

B, eſt égale à A C, & A D, cõmune les deux coſtez B A, A D, ſeront egaux aux deux C A, A D, & l'angle B A D, egal à l'angle C A D, [a] *la baſe B D, ſera égale à la baſe C D, & les angles au poinct D egaux, & partant droicts.*

a 4. 1.



Secondement que A D, diuiſe la baſe B C en 2. parties égales. Ie dis que A D, eſt perpendiculaire à B C, & qu'elle diuiſe l'angle B A C en 2. angles égaux. car puiſque B D eſt egale à C D, & A D commune, les deux coſtez B D, D A, ſeront egaux aux deux C D, D A, & la baſe A B, eſt égale à la baſe A C, par l'hypoteſe, les angles au poinct D [b] *ſeront egaux, & partant droicts;* [c] *& les angles au poinct A auſſi egaux.*

b 8. 1. c Coroll. 8. 1.

Tiercement ſoit A D, perpendiculaire à B C. Ie dis que la baſe B C, & l'angle A ſont diuiſez en deux également. Car les angles B & C ſur la baſe B C, [d] *ſont egaux, & les deux angles au poinct D egaux, puis que A D eſt perpendiculaire: donc puis que les deux angles B & D, du triangle A B D, ſont egaux aux deux D & C, du triangle A D C, chacun au ſien, le coſté A D, oppoſé aux angles égaux B & C commun, les* [e] *autres coſtez B D, C D ſeront egaux, & les autres angles au poinct A, egaux. Ce qu'il falloit demonſtrer.*

d 5. 1. e 26. 1.

L'AVTRE THEOREME EST TEL.

Le triangle auquel vne ligne droicte menee perpendiculairement d'vn des angles ſur la baſe, diuiſe la baſe ou l'angle en deux egalement, a les deux coſtez contenans ledit angle, egaux: & ſi la baſe eſt diuiſee en deux parties égales, l'angle ſe-

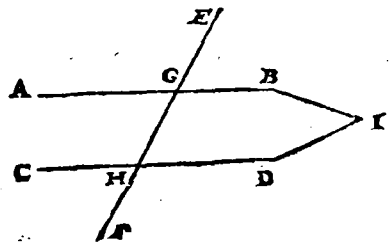
ra ſemblablement diuiſé en deux parties egales: mais ſi l'angle eſt diuiſé en deux parties egales, la baſe ſera pareillement diuiſee en deux parties gales.

Au ſuſdit triangle A B C, ſoit A D perpendiculaire à B C, & qu'elle diuiſe premierement la baſe B C en deux egalement. Ie dis que les coſtez A B, A C ſont egaux, & les angles au poinct A, egaux: Car d'autant que les deux coſtez B D, D A, ſont egaux aux deux C D, D A, & contiennent angles egaux, ſçauoir droicts: les baſes c *A B, A C ſeront egales; & les angles au poinct A egaux, ce qui eſtoit premierement propoſé.* c 4. 1.

Secondement que la perpendic. A D, couppe l'angle A en deux également. Ie dis que les coſtez A B, A C, ſont egaux, & B D, C D, auſſi egales: car puis que les 2. angles D & A, du triangle A B D, ſont egaux aux 2. D & A, du triangle A C D, & le coſté A D, adiacent à iceux eſt commun; f *les coſtez A B, A C, & les coſtez B D, C D, ſeront pareillement egaux. Ce qui eſtoit ſecondement propoſé.* f 26. 1.

THEOREME 18. PROP. 27.

Si vne ligne droicte tombant ſur deux autres lignes droictes, faict les angles alternes egaux entr'eux: icelles lignes droictes ſeront paralleles entr'elles. xxvij.



Que la ligne droicte EF, tombant ſur les deux lignes droictes AB, CD, face les angles alter-

nes AGH, GHD, egaux entr'eux. Ie dis que AB, CD, ſont paralleles.

Car ſi elles ne ſont paralleles, eſtant prolongees infiniment de part & d'autre, elles ſe rencontreront, de la part de AC, ou de BD; autrement elles ſeroient paralleles, ſelon la definition des paralleles: qu'elles ſe rencontrent dõc, s'il eſt poſſible, de la part de BD, cõme au poinct I; par ainſi GIH, ſera vn triangle, duquel [a] l'angle externe AGH, ſera plus grand que l'interne & oppoſé GHD, ce qui eſt abſurde, car AGH, eſt egal à GHD, par l'hypotheſe: Donc AB, CD, ne ſe rencontreront, & [b] partant ſeront paralleles. Semblablement, l'on demonſtrera qu'elles ne ſe peuuent rencontrer de la part de A, C. Donc ſi vne ligne droicte, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.

[a] 16. 1.

[b] 34. def.

THEOREME 19. PROP. 28.

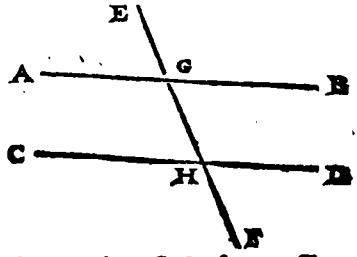
xxviij. Si vne ligne droicte tombant ſur deux lignes droictes, faict l'angle externe egal à l'interne & oppoſé & de meſme part; ou les internes, & de meſme part, egaux à deux droicts: icelles lignes droictes ſeront paralleles entr'elles.

Que la ligne droicte EF, tombant ſur les lignes droictes, AB, CD, face premierement l'angle externe AGE, egal à ſon interne & oppoſé, de meſme part, GHC. Ie dis que AB, CD, ſont paralleles entr'elles.

Car d'autãt que l'angle GHC, eſt egal à l'angle EGA, par l'hypotheſe, & que l'angle BGH, [a] eſt egal au meſme angle EGA, eſtant tous deux au sõmet G, les deux BGH, & GHC, leſquels ſont al-

[a] 15. 1.

ternes & opposez, [b] seront aussi égaux entr'eux; partant [c] A B, C D, seront paralleles entr'elles. [b] 1. e.f. [c] 27. pre.



Secondement que E F, tombant sur A B, C D, face les angles internes, & de mesme part sçauoir A G H, & C H G, égaux à deux droicts. Ie dis que A B, C D, sont aussi paralleles: Car puis que A G E, A G H, sont [d] egaux à deux droicts; & que les deux internes A G H, & C H G, sont posez egaux à deux droicts, les deux angles A G E, A G H, seront egaux aux deux A G H, C H G, ostant donc le commun A G H [e] demeurera A G E, externe egal à son interne & opposé de mesme part, G H C; donc A B, C D, seront paralleles, par la premiere partie de ceste proposition: Partant si vne ligne, &c. Ce qu'il falloit demonstrer. [d] 13. pre. [e] 3. e.f.

THEOREME 20. PROP. 29. xxix.

Si vne ligne droicte, tõbe sur deux lignes droictes paralleles; elle fera les angles alternes egaux entr'eux, & l'externe egal à sõ interne & opposé, & de mesme part; & les deux internes & de mesme part, egaux à deux droicts.

Que la ligne droicte E F, tombe sur les deux paralleles A B, C D, (voyez la figure precedente) Ie dis premierement que les angles alternes A G H, D H G, sont egaux entr'eux.

Car s'ils ne ſont egaux, ſoit l'vn d'iceux, ſçauoir A G H, plus grand. D'autant donc que l'angle A G H, eſt plus grand que l'angle D H G, ſi
a 4. e.f. l'on adiouſte le commun B G H, a les deux A G H, B G H, ſeront plus grands que les deux B G
b 13. 1. H, D H G, mais les deux A G H, B G H, b ſont egaux à deux droicts, donc B G H, D H G, ſerõt plus petits que deux droicts; partant A B, C D,
c 13. e.f. ne ſeront paralleles, c ce qui eſt abſurde: car elles ſont poſees paralleles, Donc l'angle A G H, n'eſt plus grand que D H G, partant egal. S'il eſtoit dict eſtre plus petit, il en arriueroit la meſme abſurdité.

Secondement; Ie dis que l'angle extreme E G B, eſt egal à ſon interne & oppoſé de meſme part, G H D. Car d'autant que l'angle G H D. eſt monſtré egal à l'angle A G H, & que l'angle E G B,
d 15. 1. d eſt egal au meſme angle A G H, les angles E G B,
e 1. e.f. & G H D, e ſeront egaux entr'eux: ainſi l'on mõſtrera que E G A, eſt egal à G H C.

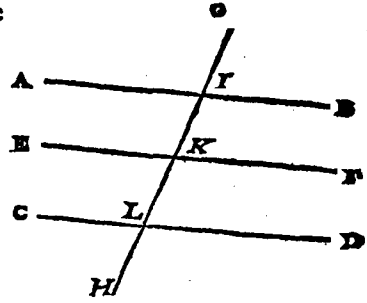
Tiercement; Ie dis, que les deux angles internes & de meſme part B G H, G H D, ſont egaux à deux droicts.

Car puis que l'angle externe E G B, eſt monſtré egal à G H D, ſi on adiouſte le commun B G H,
f 3. e.f. f les deux angles B G H G H D, ſerõt egaux aux
g 13. 1. deux E G B, B G H, g mais E G B, B G H, ſont egaux à deux droicts: donc B G H. G H D, ſeront auſſi egaux à deux droicts: par meſme raiſon les deux A G H, G H C, ſeront monſtrez egaux à deux droits. Donc ſi vne ligne droicte tombe, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.

THEO-

THEOREME 21. PROP. 30. XXX.

Les lignes droictes, paralleles à vne mesme ligne droicte, sont aussi paralleles entr'elles.



Que chacune des lignes droictes, A B, C D, soit parallele à la droicte, E F. Ie dis qu'elles sont paralleles entr'elles.

Car soit menee G H, touppant icelles aux poincts I, K, L. D'autant que la droicte ligne G H, tombe sur les paralleles A B, E F, l'angle A I K, sera egal [a] à l'alterne F K I. De rechef, d'autant que G H, tombe sur les paralleles C D, E F, l'angle D L K, sera egal [b] à l'angle I K F, l'interne à l'externe ou l'externe à l'interne & oppose de mesme part, mais A I K, est egal au mesme I K F, donc, A I K, & D L K, [c] seront egaux entr'eux, lesquels estans alternes, [d] les lignes A B, C D, seront paralleles. Donc, les lignes &c. Ce qu'il falloit demonstrer.

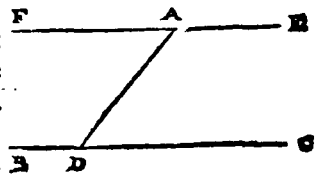
[a] 29. 1.
[b] 29. 1.
[c] 1. e. s.
[d] 28. 1.

SCHOLIE.

Que si quelqu'vn dict que A I, B I, sont paralleles à E F, & toutesfois ne sont paralleles entr'elles. Il faut respondre que A I, & B I, ne sont pas deux lignes, mais seulement les deux parties d'vne mesme ligne. Car il faut entendre que toutes paralleles se prolongent infiniment. Mais il appert que A I, rencontre B I, estans prolongee.

xxxj. PROBLEME 10. PROP. 31.

D'vn poinct donné mener vne ligne droicte, parallele à vne ligne droicte donnee.



Soit le poinct donné A, duquel il faut mener vne ligne droicte, parallele à la ligne droicte donnee B C. Soit prins le poinct contingent D, en la ligne donnee BC, & soit menee A D, faisant vn angle quelconque A D C, auec B C, & au poinct A, de la ligne droicte donnee A D, soit constitué [a] l'angle rectiligne F A D, egal à l'angle rectiligne donné A D C, & soit prolongee directement F A, vers E. D'autant que les deux angles alternes FAD, CDA, sont egaux, par la construction, la ligne A F, [b] sera parallele à B C, & menee du poinct donné A. Ce qu'il falloit faire.

[a] 23. 1.

[b] 27. 1.

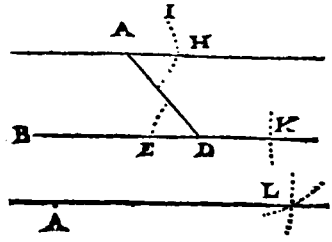
SCHOLIE.

Or le poinct doit estre assigné en tel lieu que la ligne droicte proposee estant prolongee directement, ne rencontre icelluy. Ce que l'on peut colliger manifestement de la construction du mesme probleme. Car du poinct donné, il faut mener vne ligne faisant quelque angle auec icelle ligne donnee, ce qui ne se pourroit faire si le poinct estoit posé directement auec icelle.

PRACTIQVE.

La practique de cette proposition se pourra faire facile-

ment en cette maniere. Soit le poinct A, duquel il faut mener vne ligne parallele à BC. Soit menee AD, faisant angle auec BC, puis des poincts A, & D, comme centres & de mesme interualle, soient descrits les arcs EF, GI, (de sorte toutesfois que l'interualle n'excede DA, ny DB,) & soit prins GH, egal à EF, & menee AH, elle a sera parallele à BC.



a 27. 1.

Autrement, en la ligne BC, soit prins le poinct contingent K, & du poinct A, comme centre & à l'interualle BK, soit descrit l'arc L, puis du poinct K, comme centre & de l'interualle AB, soit couppé icelluy arc par vn autre arc au poinct L, & soit menee la ligne droicte AL, icelle sera parallele à BC.

THEOREME 22. PROP. 32. xxxij.

De tout triangle, l'vn des costez estant prolongé, l'angle externe est egal aux deux internes & opposez: & les trois angles internes de tout triangle, sont egaux à deux droicts.

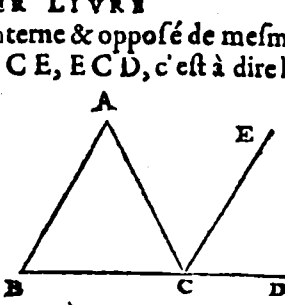
Soit le triangle ABC, duquel vn des costez, sçauoir, BC, soit prolongé au poinct D. Ie dis premierement que l'angle externe ACD, est egal aux deux internes & opposez A, & B. Car du poinct C, soit mence a CE, parallele à BA.

a 31. 1.

D'autant que AC, tombe sur les paralleles AB, CE, les angles alternes b A, & ACE, sont egaux, derechef d'autant que BD, tombe sur les paralleles AB, CE, les angles B, & ECD, seront

b 29. 1.

c 29. 1. c egaux, l'externe à l'interne & opposé de mesme part, partant les deux A C E, E C D, c'est à dire le tout A C D, sera egal aux deux A, & B, l'externe, aux deux internes & opposez; ce qui estoit proposé.



Secondement, ie dis que les trois angles internes du mesme triangle A B C, sçauoir A, B, & A C B, sont egaux à deux droicts.

Car d'autant que A, & B, sont egaux à l'angle A C D, comme nous auons monstré, si l'on ad-
d 2. ax. f. iouste l'angle commun A C B, les trois d A, B, & A C B, seront egaux aux deux A C B, & A C D, mais les deux A C B, A C D, sont egaux à deux
e 13. 1. e droicts, donc les trois A, B, & A C B, sont egaux à deux droicts. Donc de tout triangle &c. Ce qu'il falloit demonstrer.

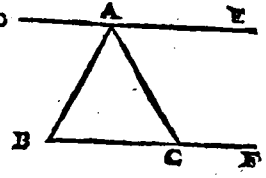
SCHOLIE.

Puis qu'il a esté demonstré par la 16. prop. que l'angle externe de tout triangle est plus grand que chacun des internes & opposez; & icy est monstré que le mesme externe est egal aux deux internes & opposez ensemble, il est manifeste que, lequel que l'on voudra des deux internes & opposez, est excedé de l'angle externe, de la quantité de l'autre angle interne & opposé. Comme au triangle precedent, l'angle A, interne & opposé, est excedé par l'externe A C D, de la quantité de l'autre angle interne & opposé B, & l'angle interne B, est excedé de l'externe A C D, de la quantité de l'angle A, d'autant que l'angle A C D, externe a esté monstré egal aux deux A, & B.

Derechef, d'autant qu'il est demonstré par la 17. prop.

que deux angles de quelconque triangle en quelque façon qu'ils soient prins sõt moindres que deux droicts, & icy que tous les trois sont egaux à deux droicts, il est manifeste que deux des angles, defaillent de deux droicts, de la quantité de l'autre angle du triangle. Comme au mesme triangle, les deux angles [illegible], & B, defaillent de deux droicts de la quantité de l'angle A C B.

Or les premiers de tous ceux qui ont monstré que tout triangle auoit les trois angles egaux à deux droicts, comme rapporte Eudemus, ont esté les Pythagoriciens: comme s'ensuit. Soit le triangle A B C, & par le poinct A, soit [a] menee la ligne D E, parallele à A C.



a 31. 1.

D'autant que les angles alternes [b] D A B, & A B C, sont egaux; si l'on adiouste les angles egaux, E A C, & A C B, (car ceux cy sont aussi alternes,) les deux angles [c] D A B, E A C, seront egaux aux deux A B C, A C B. Donc si l'on adiouste l'angle commun, B A C, les trois angles, D A B, B A C, C A E, [d] seront egaux aux trois angles A B C, B A C, & B C A; mais les trois D A B, B A C, C A E, [e] sont egaux à deux droicts. Donc les trois internes du triangle A B C, sont aussi egaux à deux droicts. Ce qui est proposé.

b 29. 1.

c 2. e. s.

d 2. cõ s.

e 13. 1.

De cecy nous conclurons facilement, si le costé B C, est prolongé à F, que l'angle externe A C F, est egal aux deux internes & opposez A B C, B A C. Car d'autant que les trois angles A B C, B A C, A C B, sont egaux à deux droicts cõme nous auons monstré. Mais les [f] deux A C B, A C F, sont aussi egaux à deux droicts, donc ces trois là sont egaux à ces deux icy, donc en ostant le cõmun A C B, demeurera l'angle [g] externe A C F, egal aux deux internes & opposez, B, & B A C.

f 13. 1.

g 3. cõ s.

La premiere partie de la proposition d'Euclide pourra aussi estre facilement conuertie. Sçauoir est que si d'vn angle d'vn triangle l'on mene vne ligne droicte, de sorte que l'angle externe soit egal aux deux internes & opposez, icelle ligne droicte & le costé du triangle se rencontreront directement. Car [redacted] point C, soit mence C D, & que l'angle A C D, soit eg[redacted]ux deux internes B, & A, Ie dis que B C, C D, se rencontrent directement.

Car puis que l'angle A C D, est egal aux deux B, & A, si l'on adiouste le commun A C B, les deux angles [h] *A C B,* [h] 2. cõ. *& A C D, seront egaux aux trois, A, B, & A C B,* [i] 32. 1. *mais ces trois là sont* [i] *egaux à deux droicts, donc ces deux cy A C B, A C D, seront aussi egaux à deux droicts,* [k] 14. 1. *k partant B C, C D, seront constituees directement.*

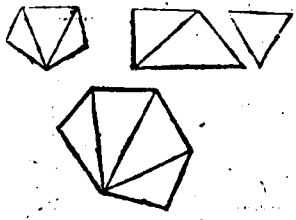
Sçauoir combien vallent d'angles droicts tous les angles de quelconque figure rectiligne.

De cette trente-deuxiesme proposition nous colligerons en deux manieres, à combien d'angles droicts sont egaux, tous les angles internes, de chaque figure rectiligne. La premiere maniere sera telle que s'ensuit.

Tous les angles de quelque figure rectiligne que ce soit, sont egaux à deux fois autant d'angles droicts, qu'icelle est en nombre entre les figures rectilignes.

C'est à dire que tous les angles de la premiere figure, qui est le triangle, sont egaux à deux fois vn droict, c'est à dire [l] 32. 1. *à deux droicts. comme il est demonstré.* [l] *Mais les angles de la seconde figure rectiligne qui est la figure de quatre costez sont egaux à deux fois deux droicts c'est à dire à quatre droicts. Les angles de la troisiesme figure rectiligne qui est le pẽtagone sont egaux à trois fois deux droicts, c'est à dire à six droicts: & ainsi de suitte. Or vne figure*

rectiligne tient tel ordre entre les figures rectilignes que denotte le nombre de ses costez ou de ses angles, apres en auoir retranché deux : d'autant que deux lignes droictes n'encloſt poinct de ſuperficie & partant ne conſtituent poinct de figure, parquoy il faut à tout le moins trois lignes droictes pour conſtituer vne figure rectiligne, deſquelles ſera faict le triangle, qui a trois costez & autant d'angles, deſquels deux eſtant oſtez reſtera vn. Ainſi la figure de vingt costez ou vingt angles ſera la 18. entre les figures rectilignes, car deux eſtant oſtez de 20. reſte 18. & faut entendre le meſme des autres figures. Partant la figure contenue de 20. costez, puis qu'elle eſt la 18. aura 20. angles egaux à 36. angles droicts, ſçauoir eſt à deux fois 18. droicts comme nous auons dict premierement. Semblablement tous les dix angles de la figure rectiligne contenuë de 10. costez, ſeront egaux à 16. droicts, puis qu'vne telle figure eſt la huictiéme entre les figures rectilignes. Or cecy ſera ainſi demonſtré. Toute figure rectiligne peut eſtre diuiſee en autant de triangles, qu'elle eſt en nombre entre les figures rectilignes, ou qu'elle a d'angles, ou de costez, deux eſtant oſtez.

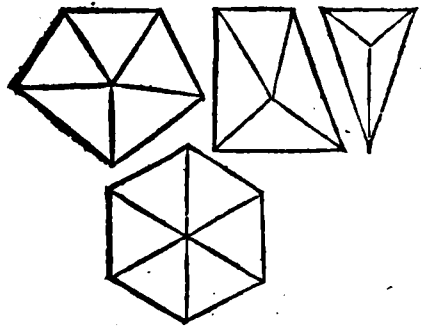


Car de chacun angle d'icelle l'on peut mener des lignes droictes à tous les angles oppoſez, mais aux deux angles prochains l'on n'en peut pas mener. Parquoy la figure ſera diuiſee en autant de triangles, qu'icelle a d'angles, deux eſtant oſtez. Ainſi, l'on void que le triangle ne peut eſtre diuiſé en autres triangles ; mais la figure quadrilatere peut eſtre diuiſee en deux triangles, le pentagone ou figure de cinq costez, peut eſtre diuiſee en trois, l'exagone en 4. &c. Donc puis que les angles de ces triangles, con-

ſtituent tous les angles de la figure rectiligne propoſee; & que tous les angles de quelconque triangle ſont egaux à deux droicts; il eſt euident que tous les angles de quelque figure rectiligne que ce ſoit, ſont egaux à deux fois autãt de droicts qu'il y a de triangles en icelle, c'eſt à dire quantieſme elle eſt entre les figures rectilignes. Ce qui ſe void manifeſtement aux figures propoſees.

La ſeconde maniere, par laquelle l'on peut ſçauoir la valeur des angles de quelconque figure rectiligne, eſt telle.

Tous les angles d'vne figure rectiligne quelconque elle ſoit, ſont egaux à deux fois autant de droicts, quatre eſtant oſtez, qu'elle a de coſtez, ou d'angles.



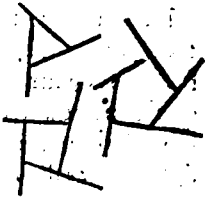
C'eſt à dire, que les angles de quelconque triangle ſont egaux à deux fois trois droicts, quatre eſtant oſtez, c'eſt à ſçauoir à deux droicts. Ainſi les angles de la figure contenue de 20. coſtez, ſeront egaux à 20. fois deux droicts, 4. eſtant oſtez, c'eſt à dire à 36. angles droicts &c. Et la demonſtration en eſt telle. Si de quelconque poinct prins en la figure l'on mene des lignes droictes à tous les angles, l'on conſtituera autant de triangles que ladicte figure a de coſtez ou d'angles, puis donc [a] *que les angles de quelconque triangle ſont egaux à deux*

[a] 32. 1.

droicts, tous les angles d'iceux trianzles ſeront egaux à deux fois autant d'angles droicts, que la figure a de coſtez.

Mais les angles des meſmes triangles, leſquels ſont conſtituez à l'entour du poinct prins au dedans de la figure n'appartiennent pas aux angles de la figure rectiligne propoſee, comme il appert. Parquoy ſi ces angles là ſont oſtez, les autres angles des triangles, conſtituant les angles de la figure propoſee, ſeront pareillemẽt egaux à deux fois autant de droicts, ceux qui ſont conſtituez au tour du poinct prins au dedans de la figure eſtant oſtez, que la figure a d'angles ou de coſtez. Or tous ces angles là, conſtituez à l'entour de ce poinct prins en la figure, en quelque nombre qu'ils ſoient, ſont egaux à 4. droicts tant ſeulement, comme nous auons colligé de la 15. prop. Partant tous les angles de quelconque figure rectiligne ſont egaux à deux fois autant de droicts, 4. eſtant oſtez, qu'icelle figure contient d'angles ou a de coſtez. Ce qui eſt propoſé.

Or de ceſte maniere ainſi demonſtree il eſt manifeſte que ſi chacun des coſtez de quelcõque figure rectiligne eſt prolongé d'ordre, vers meſme part, tous les angles externes ſont egaux à quatre droicts. Car vn chacun externe auec ſon interne de ſuitte, [2] ſont egaux à deux droicts, & partãt tous les internes, enſemble auec tous les externes ſont egaux à deux fois autant de droicts, que la figure a d'angles, ou de coſtez. Or les internes ſeulement ſont egaux à deux fois autant de droicts moins 4. comme nous auons monſtré. Donc ſi l'on oſte les internes, les externes demeureront tant ſeulement egaux à 4. droicts, leſquels defaillent des angles internes, afin que les internes & externes enſemble ſoient egaux à deux fois autant de droicts, qu'il y a de coſtez à cõtenir la figure. Pour exemple. En tout trian-



[2] 13. 1.

gle, les angles internes & externes enſemble ſont egaux à ſix angles droicts.

[b] 32. 1. *Car puiſque les internes ſont egaux [b] à deux droicts, les externes ſeront ſeulement egaux à quatre droicts. Au quadrilatere ou figure de quatre coſtez, les angles externes & internes enſemble ſont egaux à huict droicts. Donc d'autant que les internes ſeulement, ſont egaux à quatre droicts comme nous auons monſtré, les ſeuls externes ſeront auſſi egaux à quatre droicts. Au pentagone, ou quinqu'angle, c'eſt à dire en la figure de cinq coſtez ou de cinq angles, les angles internes & externes enſemble ſont egaux à dix droicts. Mais d'autãt que les internes sõt egaux à ſix droicts, comme nous auons demonſtré, les angles externes demeureront egaux à quatre droicts tant ſeulement. Toutes leſquelles choſes ſe peuuent voir par les figures cy appoſees. Et faut entendre le meſme en toutes les autres figures.*

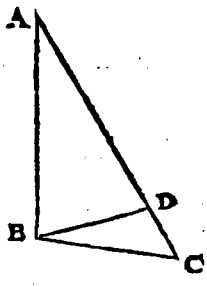
COROLLAIRE. 1.

De cette 32. prop. l'on peut colliger, que les trois angles de quelconque triangle prins enſemble, ſont egaux aux trois angles prins enſemble de quelconque autre triangle: D'autant que tant les trois de l'vn que les trois de l'autre [a] ſont egaux à deux angles droicts. Donc ſi deux angles d'vn triãgle ſont egaux à deux angles d'vn autre triangle, le troiſiéme de l'vn, ſera auſſi egal au troiſiéme de l'autre.

[a] 32. 1.

SCHOLIE.

Clauius adiouſte icy, & Henrion apres luy. Et iceux triangles ſeront equiangles. *Ce qui n'eſt pas touſiours vray; Car au triangle A B C, ſoit menee la ligne droicte B D, diuiſant le triangle, comment que ce ſoit, en deux A B D, B D C. D'autant que l'angle externe B D A,*



[a] *est egal aux deux internes & opposez, C, & C B D, si on adiouste le commun A B D,* [b] *les deux angles A B D, A D B, du triangle A D B, seront egaux aux deux A B C, & A C B, du triangle A C B, & l'angle A, est commun à tous les deux triangles; & toutesfois ces deux triangles A B C, A B D, ne sont equiangles, combien que deux angles de l'vn soient egaux à deux angles de l'autre, & le 3. au troisiéme; puis que chacun des angles de l'vn n'est egal à chacun des angles de l'autre. Et faudroit qu'il y eust ainsi.*

[a] 32. 1.

[b] 2. cõ. f.

Donc si deux angles d'vn triangle, sont egaux à deux angles d'vn autre triangle, chacun au sien, l'autre angle de celuy-là sera egal à l'autre angle de cestuy-cy, & iceux triangles seront equiangles.

COROLLAIRE. 2.

Il est aussi euident qu'en tout triangle isoscele duquel l'angle contenu des costez egaux est droict, qu'vn chacun des autres qui sont sur la base est demi-droict. Car ces deux ensemble constituent vn droict: [a] puis que les trois sont egaux à deux droicts, & que le troisiesme est posé droict; partant puis que les deux restans sont egaux entr'eux, vn chacun d'iceux sera demi-droict. Mais si l'angle contenu des costez egaux est obtus vn chacun des autres sera moindre que demi-droict: & les deux ensemble moindres qu'vn droict, si finalement l'angle susdict est agu, vn chacun des autres sera plus grand que demi-droict: d'autant que les deux ensemble sont plus grands qu'vn droict &c.

[a] 32. 1.

COROLLAIRE 3.

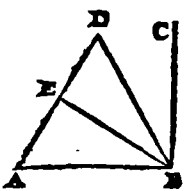
Il eſt pareillement manifeſte, que chacun angle du triãgle equilateral, eſt les deux tiers d'vn droict, ou le tiers de deux droicts. Car les deux angles droicts, [a] auſquels ſont egaux les trois angles d'vn triangle equilateral, eſtant diuiſez en trois angles, conſtituent chacun angle, de deux tiers d'vn droict.

[a] 32. 1.

COROLLAIRE 4.

Il eſt auſſi euident que ſi l'on mene vne ligne perpendiculaire d'vn des angles du triangle equilateral, ſur le coſté oppoſé, l'on conſtituera deux triangles ſcalenes, vn chacun deſquels aura vn angle droict, adiacent à la perpendiculaire, vn autre ſera les deux tiers d'vn droict ſçauoir celuy, qui eſt auſſi angle, du triangle equilateral, finalement l'autre ſera le tiers d'vn droict.

SCHOLIE.

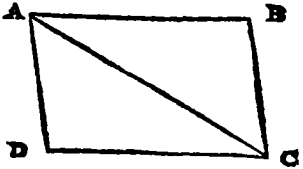


Du troiſieſme corollaire on trouuera vne methode par laquelle l'angle droict peut eſtre diuiſé en trois angles egaux. Car ſoit faict l'angle droict A B C, & ſur A B, ſoit [a] *conſtitué vn triangle equilateral: & d'autãt* [*] *que l'angle A B D, faict les deux tiers de l'angle droict A B C, l'angle C B D, ſera la tierce partie du meſme angle droict. Donc ſi l'on diuiſe l'angle* [b] *A B D, en deux egalement par la ligne B E, chacun des deux angles A B E, & E B D, ſera pareillement la tierce partie d'vn droict, partant l'angle droict A B C, eſt diuiſé en trois angles egaux. Ce qui eſt propoſé.*

[a] 1. Premier.
[*] Coroll. 3. 32. 1.
[b] 9. 1.

THEOREME 23. PROP. 33. xxxiij.

Les lignes droictes, lesquelles conioingnent deux lignes droictes egales & paralleles & de mesme part: icelles sont pareillement egales & paralleles.



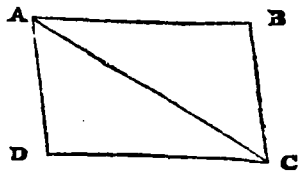
Soient A B, C D, egales & paralleles, & que les lignes droictes A D, B C, conioignēt icelles de mesme part A D, & B C. Ie dis que les lignes A D, & B C, sont aussi egales & paralleles.

Car soit menee A C. D'autant que A C, tombe sur les paralleles A B. D C, [a] les angles B A C, D C A, alternes seront egaux entr'eux. Et d'autant que A B, est egale à D C, par l'hypothese, & A C, commune, les deux costez B A, A C, du triangle B A C, sont egaux aux deux D C, C A, du triangle D C A, chacun au sien, & l'angle B A C, egal à l'angle D C A, contenus d'iceux costez egaux, la base [b] A D, sera egale à la base B C, & tout le triangle A B C, à tout le triangle D C A, & les autres angles aux autres angles, chacun au sien, sçauoir D, egal à B, & D A C, egal à B C A, lesquels estant alternes [c] les lignes A D, B C, seront paralleles, mais elles sont aussi monstrees egales; elles seront donc egales & paralleles. Donc les lignes &c. Ce qu'il falloit demonstrer.

[a] 29. 1.
[b] 4. 1.
[c] 27. 1.

xxxiv. THEOREME 24. PROP. 34.

Les coſtez & les angles oppoſez des figures ou eſpaces parallelogrammes, ſont egaux entr'eux : Et le diametre couppe iceux parallelogrammes en deux egalement.



Soit le parallelogramme ABCD, auquel ſoit mené le diametre AC. Ie dis que les coſtez oppoſez AB, DC, & AD, BC ſont egaux entr'eux : pareillement que les angles oppoſez BAD, BCD, & B, & D, ſont auſſi egaux entr'eux, & que le diametre AC, diuiſe ledit parallelogramme en deux egalement, c'eſt à dire en deux triangles egaux.

Car puis que AB, DC, ſont paralleles & que AC, tombe ſur icelles, [a] les angles alternes BAC, DCA, ſont egaux entr'eux. De rechef puis que AD, BC, ſont paralleles, les angles alternes BCA, DAC, ſont auſſi egaux : donc puis que les deux angles BAC, BCA, du triangle ABC, ſont egaux, aux deux DAC, DCA, du triangle ADC, chacun au ſien, & le coſté adiacent à iceux angles egaux cõmun à tous les deux triangles ; [b] les deux coſtez AD, DC, ſeront egaux aux deux autres AB, BC, chacun au ſien, ſçauoir AB, egal à ſon oppoſé DC, & AD, egal à BC, oppoſé & l'angle B, egal à l'angle D ; Et d'autant que les deux angles au poinct A, ſont monſtrez egaux aux deux,

[a] 29. 1.

[b] 26. 1.

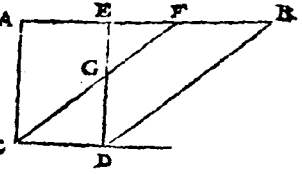
au poinct C, l'angle total A, ſera egal à ſon oppoſé total C; Donc les coſtez & les angles oppoſez ſont egaux entr'eux.

Mais d'autant qu'aux triangles A B C, A D C, les deux coſtez A B, B C, ſont egaux aux deux C D, D A, chacun au ſien, & les angles D, & B, contenus d'iceux coſtez ſont egaux, comme il a eſté monſtré; [c] tout le triangle A B C; ſera egal à tout le triangle A D C, partant le diametre diuiſe le parallelogramme en deux egalement. Donc les coſtez & les angles &c. Ce qu'il falloit demonſtrer. [c] 4.1.

xxxv.

THEOREME 25. PROP. 35.

Les parallelogrammes conſtituez ſur vne meſme baſe, & entre meſmes paralleles, ſont egaux entr'eux.



Soient les parallelogrammes A C D E, F C D B, conſtituez ſur meſme baſe C D; & entre meſmes paralleles, A B, C D. Ie dis qu'ils ſont egaux entr'eux.

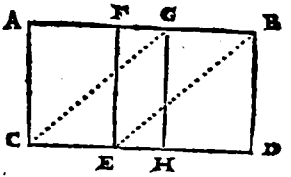
Car d'autant que A C D E, eſt parallelogramme, [a] A E, eſt egale à C D; par meſme raiſon F B, eſt egale à C D; [b] partant A E, F B, ſont egales entr'elles: donc ſi on adiouſte la commune E F, [c] la toute A F, ſera egale à la toute E B; [d] mais A C, eſt auſſi egale à E D. Donc les deux coſtez F A, A C, du triangle F A C, ſont egaux aux deux, B E, E D, du triangle B E D, chacun au ſien; & les angles A, & E, contenus d'iceux co- [a] 34.1. [b] 1.e.f. [c] 2. e.f. [d] 34.1.

ſtez, [e] ſont egaux, l'externe à l'interne, ou au cõtraire: donc la baſe [f] F C, ſera egale à la baſe B D; & tout le triangle F A C, à tout le triangle B E D, deſquels ſi on oſte le commun triangle E G , [g] le trapeze A E G C, reſtera egal, au trapeze B F G D, auſquels trapezes, ſi on adiouſte derechef le commun triangle C D G, [h] tout le parallelogramme A C D E, ſera egal, à tout le parallelogramme B D C F: Donc les parallelogrammes conſtituez ſur meſme baſe, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.

e 29. 1.
f 4. 1.
g 3. c. ſ.
h 2. c. ſ.

xxxvi. THEOREME 26. PROP. 36.

Les parallelogrammes conſtituez ſur baſes egales, & entre meſmes paralleles, ſont egaux entr'eux.



Soient les parallelogrammes A C E F, & B G H D, conſtituez ſur baſes egales C E, H D, & entre meſmes paralleles A B, C D. Ie dis qu'ils ſont egaux entr'eux.

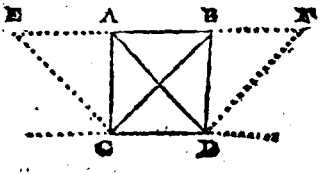
Car ſoient menees les lignes droictes C G, E B, d'autant que G B, [a] eſt egale à H D, & C E, eſt poſee egale à la meſme H D, les deux [b] G B, & C E, ſeront egales entr'elles, leſquelles eſtant paralleles par l'hypotheſe, les lignes C G, E B, qui les conioignent [c] ſeront auſſi egales & paralleles, & B G C E, ſera parallelogramme. Partant le parallelogramme A C E F, ſera egal au parallelogramme G C E B, [d] eſtant ſur meſme baſe C E, & entre meſmes paralleles. Par les meſmes raiſõs le parallelogramme G H D B, ſera egal au meſme paralle-

a 34. 1.
b 1. c. ſ.
c 33. 1.
d 35. 1.

parallelogramme G C E B, eſtant ſur meſme baſe G B, & entre meſmes paralleles. Donc les parallelogrammes A C E F, & D B G H, * ſont egaux entr'eux; partant les parallelogrammes conſtituez &c. Ce qu'il falloit demonſtrer. * 1. 6. ſ.

THEOREME 27. PROP. 37. xxxvij

Les triangles conſtituez ſur meſme baſe & entre meſmes paralleles, ſont egaux entr'eux.

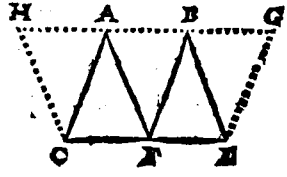


Soient les triãgles A C D, B C D, conſtituez ſur meſme baſe C D, & entre meſmes paralleles A B, C D. Ie dis qu'ils ſont egaux entr'eux.

Soit menee C E, parallele à D A, * & D F, parallele à C B, rencontrant A B, prolongee de part & d'autre aux poincts E, & F, les figures A D C E, B C D F, ſeront parallelogrammes, leſquels eſtãt conſtituez ſur meſme baſe C D, & entre meſmes paralleles, ſeront egaux entr'eux; mais les diametres A C, B D, les diuiſent en deux egalement. Donc leurs moitiez qui ſont les triangles propoſez A C D, B C D, ſeront auſſi egaux entr'eux. Donc les triangles &c. Ce qu'il falloit demonſtrer. * 31. 1. b 35. 1. c 34. 1. d 7. 6. ſ.

xxxviij. ## THEOREME 28. PROP. 38.

Les triangles constituez sur bases egales, & entre mesmes paralleles sont egaux entr'eux.



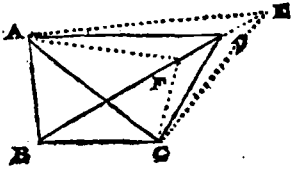
Soient les triangles ACF, BFE, constituez sur bases egales CF, FE, & entre mesmes paralleles AB, CD. Ie dis qu'ils sont egaux, entr'eux.

Car soient menees CH, EG, paralleles à FA, FB, rencontrant AB, prolongee de part & d'autre aux poincts H, & G; AFCH, & BFEG, seront parallelogrammes, & egaux entr'eux, desquels les triãgles proposez ACF, BFE, sont les moitiez; partant iceux triãgles seront aussi egaux entr'eux. Donc les triangles constituez &c. Ce qu'il falloit demonstrer.

[a] 31. 1.
[b] 36. 1.
[c] 34. 1.
[d] 7. c. s.

THEOREME 29. PROP. 39.

xxxix. Les triangles egaux constituez sur mesme base, & de mesme part, sont aussi entre mesmes paralleles.



Sur la base BC, & de mesme part AD, soient constituez deux triangles egaux ABC, DBC. Ie dis qu'ils sont aussi entre mesmes paralleles, c'est à dire que la ligne droicte menee de A, à D, est parallele à BC.

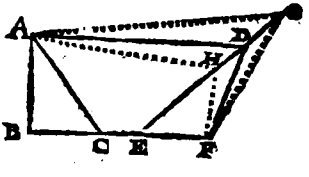
Car ſi A D, n'eſtoit parallele à B C, l'on en pourroit mener vne parallele à icelle B C, qui paſſeroit au deſſus de A D, ou au deſſous : ſoit donc menee [a] A F, parallele à B C, ſi A D, ne luy eſt parallele; & ſoit conioincte C F. [a] 31.

D'autant que A F, B C, ſont paralleles, le triangle F B C, ſera egal au triangle [b] A B C, mais le triangle D C B, eſt egal au meſme triangle A B C, par l'hypotheſe, donc les triangles [c] F B C, & D C B, ſeront egaux entr'eux, la partie & le tout; ce qui eſt abſurde. [b] 37. 1. [c] 1. c. ſ.

Si l'on dict que la ligne parallele à B C, menee du poinct A, vers D, paſſera au deſſus de A D, il en arriuera la meſme abſurdité, donc A D, eſt parallele à B C. Partant les triangles egaux &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.

THEOREME 30. PROP. 40. [x l.]

Les triangles egaux, conſtituez ſur baſes egales, & de meſme part; ſont auſſi entre meſmes paralleles.



Sur les baſes egales B C, E F, & de meſme part A, D, ſoient conſtituez les triangles egaux A B C, D E F. Ie dis qu'ils ſont entre meſmes paralleles, c'eſt à dire que la ligne menee du poinct A, à D, eſt parall. B F.

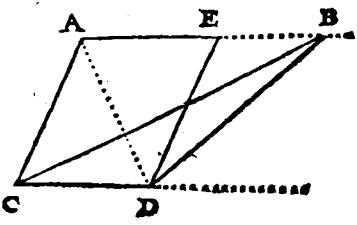
Car autrement on pourroit mener vne ligne parallele à B F, du poinct A, laquelle tomberoit au deſſous de A D, ou au deſſus.

Soit donc menee A G, parallele à [a] B F, s'il eſt [a] 31. 1.

possible & soit conioincte G F. D'autant que les lignes A G, B F, sont paralleles, le triangle G E F,
b 38 1. sera b egal au triangle A B C, mais le triangle D F E, est egal au mesme triangle A B C, par l'hy-
c 1 cō. f. pothese; Donc les triangles D F E, c & G E F, seront egaux entr'eux; la partie & le tout, ce qui est absurde. Si la parallele est dicte passer au dessus de A D, il en arriuera la mesme absurdité. Donc A D, est parallele à D F. Partant les triangles egaux &c. Ce qu'il falloit demonstrer.

XLI. THEOREME 31. PROP. 41.

Si vn parallelogramme a mesme base qu'vn triangle & est entre mesmes paralleles que le triangle, le parallelogramme, sera double du triangle.



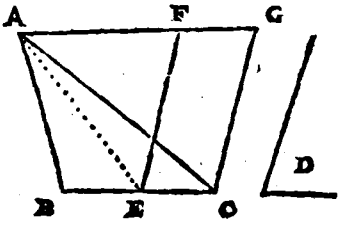
Entre les paralleles A B, C D. & sur la base C D, soit constitué le parallelogramme A C D E, & le triangle B C D. Ie dis que le parallelogramme est double du triangle B C D.

Car ayant mené le diametre A D, le triangle A
a 37 1. C D, a sera egal au triangle B C D; mais le parallelogramme A C D E, est double du triangle A
b 34 1. C D, d'autant b que les triangles A C D, A E D, sont egaux, donc le mesme parallelogramme A C
c 6. cō. f. D E, c est aussi double du triangle B C D.

PROBLEME II. PROP. 42. xlij.

Constituer vn parallelogramme egal à vn triangle donné, en vn angle rectiligne donné.

C'est à dire, qui ait vn angle egal à vn angle rectiligne donné.



Soit le triangle donné A B C, & l'angle rectiligne donné D, il faut constituer vn parallelogramme egal au triangle dõné A B C, en vn angle egal à l'angle D, c'est à dire, qui ait vn angle egal à l'angle D.

Soit diuisé vn des costez du triangle lequel qu'on voudra, sçauoir B C, en deux [a] egalement au poinct E, & soit conioincte A E, & soit faict l'angle C E F, [b] egal à l'angle donné D, puis soit menee [c] A F, parallele à B C, rencontrant E F, au poinct F: soit aussi du poinct C, menee C G, parallele à E F, rencontrant A F, prolongee au poinct G, & l'on aura constitué le parallelogramme F E C G, en l'angle C E F, qui est egal à l'angle donné D, lequel parallelogramme, ie dis estre egal au triangle donné A B C.

[a] 10. 1.
[b] 23. 1.
[c] 31. 1.

D'autant que les triangles A B E, A E C, sont egaux [d] estant constituez sur bases egales B E, E C, & entre mesmes paralleles A F, B C, le triangle total A B C, sera double du triangle A E C. Mais

[d] 38. 1.

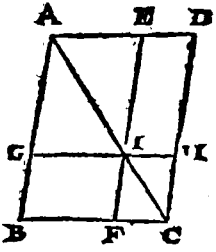
a 41. 1. le parallelogramme F E C G, est a aussi double du mesme triangle A E C, donc le triangle A B C,
f 6. e. f. f & le parallelogramme F C, seront egaux entr'eux, & le parallelogramme F C, a l'angle C E F, egal à l'angle donné D, par la construction. Partant nous auons constitué vn parallelogramme, &c. Ce qu'il falloit faire.

SCHOLIE.

La practique tant de cette proposition que de la suiuante est facile à entendre par la construction d'icelles.

xliij. THEOREME 32. PROP. 43.

En tout parallelogramme, les complemens des parallelogrammes qui sont à l'entour du diametre, sont egaux entr'eux.



Au parallelogramme AB, C D, soient les parallelogrammes G E, F H, à l'entour du diametre A C, & les complements D G, G B, comme nous auons dict à la 37. definition. Ie dis qu'iceux complements sont egaux entr'eux.

a 34. 1. Car puisque les triangles A B C, & A D C, a sõt egaux entr'eux (car le diametre A C, diuise le parallelogramme en deux egalement) & que les deux triangles A G I, A E I, sont aussi egaux entr'eux par la mesme raison, si ces deux derniers
b 3. e. f. sont retranchez des deux premiers b les trapeses G B F C I, E D H C I, demeureront egaux en-

tr'eux; mais les triangles FIC, & HIC, [c] ſont auſſi egaux entr'eux, donc s'ils ſont oſtez d'iceux trapeſes, les complements [d] DG, & GB, demeureront egaux. Donc en tout parallelogramme &c. Ce qu'il falloit demonſtrer. [c] 34. 1. [d] 3. cõſ.

SCHOLIE

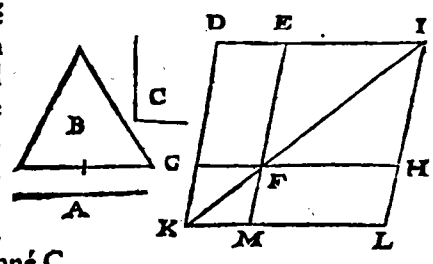
Henrion a coppié cette propoſition d'vn autre qui l'a ainſi traduite. En tout parallelogramme, les ſupplements des parallelogrammes qui ſont ſur le diametre, ſont egaux entr'eux. Mais s'il ſçauoit lire le texte d'Euclide & l'entendre, il auroit bien peu voir qu'il y a ainſi, παντὸς παραλληλογράμμου τῶν περὶ τὴν διάμετρον παραλληλογράμμων τὰ παραπληρώματα ἴσα ἀλλήλοις ἐστίν. C'eſt à dire; de tout parallelogramme, les complements des parallelogrammes qui ſont à l'entour du diametre, ſont egaux entr'eux. D'où il eſt facile à voir qu'il faut traduire, ces mots, περὶ τὴν διάμετρον, à l'entour du diametre, & non pas, ſur le diametre, comme dict Henrion, puis que ſelon Euclide, vne figure eſt dicte eſtre ſur vne ligne, quand icelle ligne eſt vn des coſtez de ladicte figure. Or ledict Henrion deuoit au moins voir le Latin de Clauius ou autres, où il y a, circa diametrum, & prendre vn dictionnaire pour en voir la ſignification, s'il ne la pouuoit entendre.

PROBLEME 12. PROP. 44. XLIV.

A vne ligne droicte donnee, appliquer vn parallelogramme egal à vn triangle donné, en vn angle rectiligne donné.

Soit la ligne droicte donnee A, & le triangle B, & l'angle rectiligne donné C; il faut appliquer vn parallelogramme à la ligne donnee A, egal au tri-

gle donné C, en vn angle egal à l'angle C, c'eſt à dire, qui ait vn angle egal à l'angle donné C.

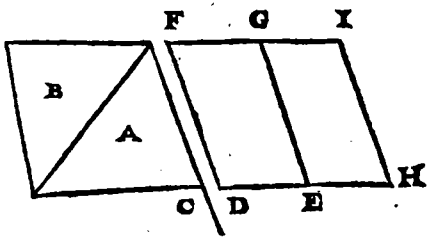


Soit conſtitué le parallelogramme D E F G, [a] egal au triangle donné B, ayant l'angle G F E, egale à C, puis ſoit prolongee G F, au poinct H, en ſorte que F H, ſoit egale à A, & par H, ſoit menee H I, [b] parallele à F E, rencontrant D E, prolõgee au poinct I: par apres ſoit mené le diametre I F, par le poinct F, rencontrant D G, prolongee à K; & par K, ſoit menee K L, [c] parallele à G H, rencontrant I H, prolõgee à L, & ſoit prolongee E F, au poinct M. Ie dis que le parallelogramme L M F H, eſt le requis. Car il a le coſté F H, egal à la ligne donnee A, par la conſtruction & l'angle H F M, [d] eſt egal à l'angle E F G, lequel eſt faict egal à l'angle C, donc H F M, ſera auſſi egal à C: & finalement le parallelogramme F L, [e] eſt egal au parallelogramme G E, le complement, au cõplement, lequel G E, eſt faict egal au triangle B. Donc F L, ſera auſſi egal à B. Donc à vne ligne droicte donnee &c. Ce qu'il falloit faire.

a 42. 1.
b 31. 1.
31. 1.
c
43. 1.
d 15. 1.
e

XLV. PROBLEME 13. PROP. 45.

Conſtituer vn parallelogramme egal à vne figure rectiligne donnee, en vn angle rectiligne donné.



Soit le rectiligne donné AB, diuisé en deux triangles, & l'angle rectiligne donné C: il faut constituer vn parallelogramme egal au rectiligne donné A,B, qui ait vn angle egal à l'angle rectiligne donné C.

Soit faict le parallelogramme D G, [a] egal au triangle A, ayant l'angle F D E, egal à l'angle rectiligne donné C, puis à la ligne G E, soit appliqué le parallelogramme E I, egal [b] au triangle B, ayant l'angle G E H, egal à l'angle C, & l'on aura, ce qui est requis. [a] 42. 1. [b] 44. 1.

Car d'autant que chacun des angles F D E, & G E H, est faict egal à l'angle C, [c] ils seront egaux entr'eux. Donc si l'on adiouste l'angle G E D, [d] les deux G E D, G E H, seront egaux aux deux G E D, F D E, mais F D E, G E D, [e] sont egaux à deux droicts, donc G E D, G E H, seront aussi egaux à deux droicts, [f] partant D E H, sera vne ligne droicte. Par les mesmes raisons l'on prouuera que F G, G I, font vne ligne droicte. Or puisque chacune des lignes D F, H I, est egale & parallele [g] à E G, elles seront egales & paralleles entr'elles, & les lignes droictes [i] F I, D H, qui les cõioignent [h] seront aussi egales & paralleles, partant D I, sera parallelogramme, faict des deux D G, E I, egaux aux deux triangles A B. Donc le parallelogramme D I, est egal au rectiligne A B, [c] 1. e. s. [d] 2. 68 s. [e] 29. 1. [f] 14. 1. [g] 34. 1. [i] 30. 1. [h] 33. 1.

ayant l'angle D, egal à l'angle rectiligne donné C. Ce qu'il falloit faire.

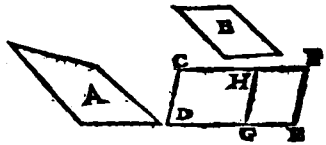
SCHOLIE.

Semblablement s'il y auoit plusieurs rectilignes donnez, l'on constituera vn parallelogramme egal à iceux, les ayant reduicts en triangles, & ayant constitué autant de parallelogrammes egaux à iceux triangles, chacun au sien par la 44. prop. cõme nous auons faict en ce probléme. Car puisque tous ces parallelogrammes font vn seul parallelogramme, comme il a esté icy demonstré, l'on aura constitué vn parallelogramme, egal à tous les rectilignes proposez.

Or la practique de ce probléme peut estre entenduë de celle de la precedente proposition plusieurs fois repetee.

Nous rapporterons icy, vn probléme de Pelletier fort vtile, qui est tel.

Deux figures rectilignes estans proposees, trouuer l'excez de la plus grande par dessus la plus petite. C'est à dire la difference entre les deux.



Soient les rectilignes donnez A, & B, & soit A, le plus grand; il faut sçauoir de cõbien le rectiligne A, excede le moindre, B. Soit faict le parallelogramme CDEF, en quelconque angle D, [a] egal au rectiligne A, & sur la ligne CD, soit faict le parallelogramme CDGH, au mesme angle D, egal au plus petit rectiligne, B.

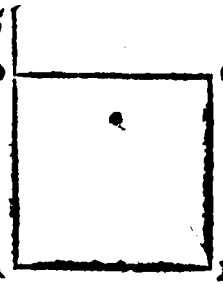
[a] 54 1.

D'autant que le parallelogramme CDEF, excede le parallelogramme CDGB, du parallelogramme GF, la

figure A, excedera pareillement la figure B, du meſme parallelogramme G F. Ce qui eſt propoſé.

PROBLEME 14. PROP. 46. XLVj.

D'vne ligne droicte donnee, deſcrire vn quarré.



Soit la droicte ligne donnee A B, de laquelle il faut deſcrire vn quarré: du poinct A, ſoit menee la droicte ligne A G, [a] à angles droicts à A B, & ſoit poſee [b] A D, egale à A B, & du poinct D, ſoit menee [c] D C, parallele, à A B: ſemblablement ſoit menee B C, parallele à A D, la figure A B C D, ſera parallelogramme, & partant le coſté [d] D C, egal à A B, & A D, egal à B C, mais A D, eſt poſee egale à A B, donc B C, [e] ſera auſſi egale à A B, partant A B C D, ſera equilatere. Ie dis qu'il eſt auſſi rectangle.

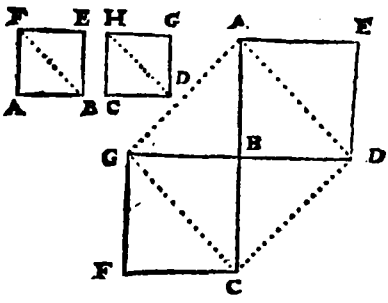
[a] 11. Premier.
[b] 2. 1.
[c] 31.
[d] 34. 1.
[e] 1. e. ſ.

Car d'autant que A D, B C, ſont paralleles [f] les angles A, & B, ſont egaux à deux droicts, mais A, eſt faict droict. Donc B, ſera auſſi droict: & les deux oppoſez D, & C, [g] ſont egaux à iceux & partant droicts. Donc le parallelogrãme A C, eſt rectãgle & equilatere, & partãt ſera quarré. Donc d'vne ligne droicte donnee, nous auons deſcrit vn quarré. Ce qu'il falloit faire.

[f] 28. 1.
[g] 34. 1.

THEOREME DE PROCLVS.

Les quarrez de lignes egales ſont egaux entr'eux: & des quarrez egaux, les lignes ſont egales.



Soiẽt premierement les lignes droictes A B, C D, egales. Ie dis que les quarrez d'icelles A B E F, C D G H, sont semblablement egaux entr'eux; Car ayant mené les diametres B F, D H, les deux costez B A, A F, du triangle B A F, sont egaux aux deux D C, C H, du triangle D C H, chacun au sien, puis que par la definition du quarré A F, C H, sont egales à A B, C D. Mais les angles A, & C, [a] 4. 1. sont egaux, sçauoir droicts. [a] Donc les triangles [b] 34. 1. B A F, D C H, seront egaux; lesquels [b] estant les moitiez des quarrez, les quarrez totals, seront aussi egaux. Ce qui est proposé.

Soient derechef les quarrez A B D E, B C F G, egaux. Ie dis pareillement que les lignes d'iceux A B, B C, sont egales. Car soient conioincts iceux quarrez à l'angle B, de sorte que les droictes lignes A B, B C, soient constituees directement; d'autant que les angles A B G, A B D, sont droicts, [c] 34. 1. les lignes droictes G B, B D, [c] seront aussi constituees directement. Et soient menez les diametres A D, C G, & soient conioinctes les lignes droictes A G, C D.

D'autant donc que les quarrez A B D E, B C F G, sont egaux, les triangles A B D, B C G, leurs moitiez seront aussi egaux; adiouſtant donc le cõmun triangle B C D, tout le triangle A C D, sera

egal à tout le triangle G D C. Partant puis que les triangles A C D, G D C, ſont conſtituez ſur meſme baſe C D, & de meſme part ; [d] ils ſeront auſſi entre meſmes paralleles : donc A G, C D, ſont paralleles. Et d'autant que au quarré B C F G, le coſté B C, eſt egal à C F, & C G, eſt commun, les deux coſtez B C, C G, ſeront egaux aux deux F C, C G, chacun au ſien, & la baſe F G, du triangle F C G, egale à la baſe G B, du triangle B C G, car ce ſont les coſtez du quarré, donc [e] l'angle F C G, ſera egal à l'angle B C G, & partant chacun ſera demi-droict, car le total F C B, eſt droict: ſelon le meſme diſcours les deux angles B A D, E A D, ſeront chacun demi-droict, & les 2. A D B, B G C, auſſi demi-droicts, & partant les deux alternes D A C, G C A, ſeront egaux entr'eux chacun eſtant demi droict. Donc A D, C G, [f] ſeront paralleles & A G C D, ſera parallelogramme : [g] & partant les lignes droictes A D, C G, ſeront egales. D'autant donc qu'aux triangles A B D, B C G, les coſtez A D, C G, ſont egaux, & les angles auſquels ces coſtez ſont adiacents, ſont auſſi egaux entr'eux eſtant demi-droicts, comme nous venons de monſtrer ; [h] les deux autres coſtez, A B, B D, ſeront egaux aux deux autres coſtez G B, B C, chacun au ſien. Ce qui eſt propoſé.

d 39. 1.

e 8. 1.

f 27. 1.

g 34. 1.

h 26. 1.

SCHOLIE.

Cecy ſe peut demonſtrer plus briefuement ſi l'on entend que l'vn des quarrez ſoit poſé ſur l'autre. Car ſi les lignes ſont egales, l'vne eſtant poſee ſur l'autre, elles cõuiendront entr'elles. Et puis que les angles ſont auſſi egaux, ſçauoir droicts, ils conuiendront ſemblablement entr'eux, & partant tout le quarré conuiendra ſur tout le quarré. Mais ſi les quarrez ſont egaux, ils conuiendront entr'eux, à

cause de l'egalité des angles. Donc les lignes conuiendront aussi : autrement, l'vn des quarrez seroit plus grand que l'autre. Or la practique de ce problème 46. est fort facile. Car si à l'vne des extremitez de la ligne donnee, comme au poinct A, l'on mene AD, à angles droicts, & egale à la mesme ligne droicte donnee AB, & des poincts B, & D, comme centres & à l'internalle AB, l'on descrit deux arcs qui s'entre-coppent au poinct C, & que l'on mene les lignes droictes, BC, DC, l'on aura descrit vn quarré. Car puisque ABCD, selon la construction est vne figure equilatere, c'est à dire, de costez egaux, & partant a les costez opposez egaux, elle sera parallelogrãme (comme l'on peut colliger des definitions des figures quadrilateres) & ayant l'angle A, droict, par la con-

f 29. 1. *struction, f l'angle B, sera aussi droict & leurs opposez*

k 34. 1. *k D, & C, droicts, &c.*

xlvij. ## THEOREME 33. PROP. 47.

Aux triãgles rectangles, le quarré du costé qui soustient l'angle droict, est egal aux quarrez des costez qui contiennent le mesme angle droict.

Soit le triangle ABC, qui ait l'angle BAC, droict, & des trois costez AB, BC, CA, soiẽt a descrits les

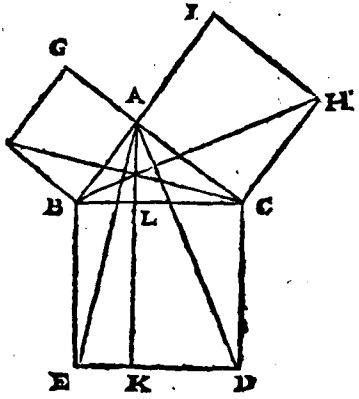
a 46. 1. trois quarrez BD, CI, & AF. Ie dis que le quarré BD, descrit du costé BC, qui soustient l'angle droict A, est egal aux deux quarrez CI, & AF, descrits des costez, qui contiennent ledict angle droict.

Soit menee AK, b parallele à BE, ou à CD, coup-

b 31. 1. pant BC, au poinct L, & soient ioinctes les droictes lignes AD, AE, CF, BH ; d'autant que les

c 14. 1. angles BAC, BAG, sont droicts, c GA, AC, feront vne seule ligne droicte : par mesme raison BA,

AI, feront auſſi vne ligne droicte. Derechef d'autant que les angles ABE, CBE, ſõt egaux, eſtãt droicts, ſi l'on adiouſte l'angle commun ABC, le tout ABE, ſera [d] egal au tout CBF: ſemblablement le tout ACD, ſera egal au tout BCH; D'autant donc que les deux coſtez AB, BE, du triangle ABE, ſont egaux au deux CB, BF, du triangle CBF, chacun au ſien, comme il appert par la definition des quarrez, & les angles ABE, CBF, contenus d'iceux coſtez ſont monſtrez egaux; [e] iceux triangles ABE, CBF, ſeront egaux: mais le parallelogramme AF, eſt [f] double du triãgle CBF, eſtant ſur meſme baſe & entre meſmes paralleles, & le parallelogramme BK, double du triangle ABC, par la meſme raiſon: partant le quatré AF, [g] ſera egal au parallelogramme BK. Par meſme diſcours on monſtrera que le parallelogramme LD, eſt egal au quarré CI. Donc le quarré EC, ſera egal aux deux quarrez, AF, CI. Donc aux triangles rectangles &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.



d. 2. e. ſ.

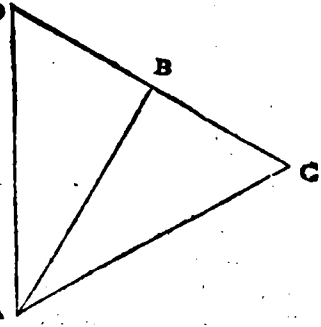
e. 4. 1.

f. 41. 1.

g. 6. e. ſ.

xlviij. ## THEOREME 34. PROP. 48.

Si le quarré descrit d'vn des costez d'vn triangle est egal aux quarrez des deux autres costez d'iceluy; l'angle contenu sous les deux autres costez du triangle est droict.



Au triangle A B C, le quarré du costé A C, soit egal aux quarrez des costez A B, B C. Ie dis que l'angle A B C, est droict.

Soit menee B D, egale à B C, & à angles a droicts à A B, & soit ioincte A D; puis que A B D, est droict, le quarré de A D, b est egal aux 2. quarrez de A B, B D, mais le quarré de B D, est egal au quarré de B C, puis que les lignes B D, B C, sont faictes egales, parquoy le quarré de A D, sera egal aux quarrez de B A, B C. Donc puis que le quarré de A C, est egal aux mesmes quarrez B A, B C, c iceux quarrez de A C, & A D, serõt egaux, & partant les lignes A D, A C, egales. D'autant donc qu'aux triangles A B D, A B C, les deux costez B D, B A, sont egaux aux deux B A, B C, chacun au sien, & les bases A C, A D, egales, les angles au poinct B, contenus d'iceux d costez seront egaux entr'eux, mais A B D, est faict droict, dõc A B C, sera aussi droict: partant le quarré &c. Ce qu'il falloit demonstrer.

a 11. 1.

b 47. 1.

c 1. ct. 1.

d 8. 1.

Fin du premier liure.

LIVRE

LIVRE SECOND DES ELEMENTS D'EVCLIDE.

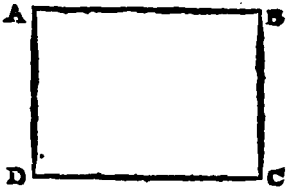
DEFINITIONS.

1. Tout parallelogramme rectangle, eſt dict eſtre contenu ſous deux lignes droictes, qui contiennent l'angle droict.

EVCLIDE traicte en ce ſecond liure, des puiſſances des lignes droictes, recherchant la quantité des quarrez des parties de toute ligne droicte diuiſée, & des parallelogrammes rectangles contenus ſous les parties de la meſme ligne diuiſée, tant comparez entr'eux qu'auec le quarré de la toute, &c. Et pour cette cauſe, il explique premieremẽt icy, par ces deux definitions, deux choſes qui ſont neceſſaires pour bien entendre ce qui doit eſtre demonſtré cy-apres.

En la premiere il declare ſous quelles lignes eſt dict eſtre contenu le parallelogramme rectangle, & que c'eſt à dire, vn parallelogramme eſtre contenu ſous deux lignes droictes. Ce que pour plus facilement entendre; il faut premierement ſçauoir que tout parallelogramme rectangle eſt ce-

luy qui a tous les angles droicts : & y en a de deux sortes, sçauoir le quarré & quarré plus long d'vne part; ou quarré long : car en iceux tous les angles sont droicts, comme nous auons dict aux definitions. Et en tout parallelogramme, si vn seul angle est donné droict, les trois autres seront necessairement droicts. Pour exemple, au parallelogramme A B C D, soit l'angle A, droict. Ie dis que les trois autres B, C, D, sont aussi droicts. Car puis que A B D, C,

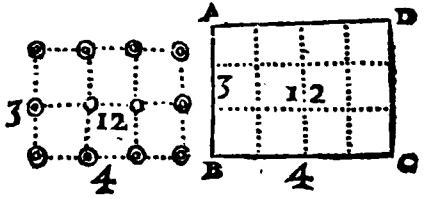


a 29. 1. sont paralleles, a les 2. angles internes A, & B, sont egaux à deux droicts; mais A, est droict par

b 34. 1. l'hypothese, dõc B, sera droict aussi. Mais b d'autant que chacũ est egal à son opposé comme l'angle A, à l'angle C, & l'angle B, à l'angle D, les angles D, & C, seront droicts aussi.

Donc Euclide dict que tout parallelogramme rectangle est dict estre contenu sous deux lignes droictes qui contiennent vn angle droict, comme le parallelogramme rectangle A B C D, est dict estre contenu sous A B, A D, ou sous A D, D C, ou finalement sous A B, B C, d'autant que chaques deux de ces lignes ainsi prises expriment la grandeur ou espace de tout le parallelogramme, sçauoir vne comme A B, ou D C, sa longitude, & l'autre comme A D, ou B C, sa latitude. Dont estant exprimees deux lignes au parallelogramme rectangle, qui contiennent l'angle droict on conçoit incontinent toute la quantité d'iceluy, & on entend aussi sa longitude & latitude. Il aduient aussi, que par le mouuement imaginaire d'v-

ne des lignes selon l'autre, est constitué tout ce parallelogramme. Car si on conçoit en l'entendement, que la droicte ligne A B, se meut de trauers selon A D, en sorte qu'elle constituë touſiours vn angle droict auec A D, iusques à ce que le poinct A, soit paruenu au poinct D, & le poinct B, au poinct C, tout le parallelogramme A B C D, sera descrit : le mesme aduiendra si A D, est posee se mouuoir de trauers selon A B. Donc à bon droict vn parallelogramme rectangle est dict estre contenu sous deux telles lignes droictes.



Or cecy a auſſi grãde affinité, & conuenance auec la multiplication d'vn nombre par vn autre. Car tout ainſi que de la multiplication de 3. par 4. est produict 12. qui est constitué en forme de parallelogramme, d'où il est dit estre contenu sous 3. & 4. ainſi le parallelogramme A B C D, contenu sous les deux lignes droictes A B, C D, desquelles celle-là soit 3. palmes ou autres meſures, & celle-cy 4. contient 12. palmes quarrees, qui est faict du paſſage ou mouuement imaginaire de la ligne A B, de 3. palmes, en la ligne, ou selon la ligne B C, de 4. palmes, comme repreſente la figure: Ce qui est cogneu aux Arithmeticiens & aux Geometres, & est demonſtré par Regiomontanus au liure 1. des triangles, propoſition 16. D'où vient que quelques-vns diſent que le parallelogramme rectangle est conſtitué ou faict du produit de deux lignes qui ſont

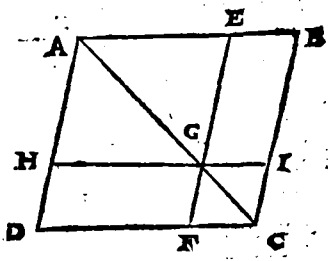
autour de l'angle droict, l'vne par l'autre: comme le precedent parallelogramme eſt produit de la ligne A B, en B C, ou (ce qui eſt le meſme) de la ligne B C, en A B. car le meſme parallelogramme eſt produit, ſoit que la plus petite ligne ſoit appliquee à la plus grande, ou la plus grande à la plus petite: ſemblablement auſſi on produit vn meſme nombre, ſoit que le moindre ſoit multiplié par le plus grand, ou le plus grand par le moindre, comme il eſt demonſtré par Euclide lib. 7. prop. 16. car 12. eſt auſſi bien produit de 3. en 4. que de 4. en 3.

» Le lecteur ſera icy aduerty, qu'en ce ſecond li-
» ure & autres ſuiuans; le parallelogramme rectan-
» gle eſt appellé par Euclide, rectangle ſimplemẽt;
» ce que les autres Geometres obſeruent auſſi; en
» ſorte que par le nom, de rectangle, il faudra touſ-
» iours entendre parallelogramme rectangle. De re-
» chef afin que des meſmes lettres ne ſoient tant de
» fois repetees, les Geometres ont de couſtume
» d'exprimer le parallelogramme, tant rectangle
» que non rectangle, par deux lettres ſeulement, ſça-
» uoir celles qui ſont oppoſees diametralement:
» comme pour denoter le parallelogramme cy ap-
» poſé, on dira le parallelogramme A C, ou bien
» B D.

2. De tout eſpace parallelogramme, l'vn & lequel qu'on voudra des parallelogrammes, deſcrits à l'entour du diametre d'iceluy, auec les deux complements, ſoit appellé Gnomon.

Au parallelogramme A B C D, ſoit rectangle,

ou non, ſçauoir lequel ſoit diuiſé en quatre parallelogrãmes comme nous auons monſtré en la 37. definitiõ du premier liure, deſquels E H, I F, ſont dicts eſtre à l'entour du diametre & les deux autres B G, G D, ſont dicts complements, la figure compoſee duquel qu'on voudra des parallelogrammes qui ſont à l'entour du diametre comme de I F, auec les deux complements B G, G D, telle qu'eſt la figure, E B C D H G E, eſt appellee Gnomon: par la meſme raiſon, la figure F D A B I G F, compoſee du parallelogrãme E H, qui eſt à l'entour du diametre, & des deux complements B G, G D, ſera appellee Gnomon.

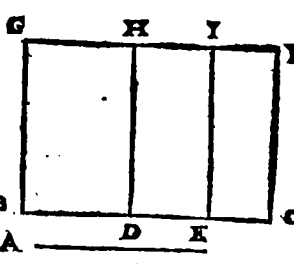


THEOREME 1. PROP. 1.

I.

S'il y a deux lignes droictes, & que l'vne d'icelles ſoit couppee en tant de parties que l'on voudra, le rectangle contenu ſous icelles deux lignes droictes, eſt egal au rectangle contenu ſous la non couppee, & ſous chacune des parties de la couppee.

Soient deux lignes droictes A, & B C, deſquelles B C, ſoit couppee en tant de parties, que l'on voudra B D, D E, E C. Ie dis que le rectangle compris ſous A, & B C, eſt egal à tous les rectangles enſemble compris ſous la ligne A, non diuiſee & ſous chacun des ſegmens de la diuiſee ſçauoir ſous A, & B D, ſous A, & D E, & ſous A, & E C.



Soit le rectangle B F, comprins sous A, & B C, c'est à dire que B G, soit posee egale à A, ce que l'on fera ainsi. Soiēt menees B G, & C F, [a] à angles droicts à la ligne droicte B C, & chacune posee egale à A, & soit conioincte la [b] ligne droicte G F; B G, & C F, seront [b] paralleles, à cause des angles droicts B, & C, & aussi egales [c] entr'elles [c] puis que chacune est posee egale à A, donc les lignes droictes G F, B C, qui les conioignent [d] seront aussi egales & paralleles, partant B F, sera rectangle, & contenu sous B C, & A, c'est à dire B G, son egale, selon la premiere definition de ce liure. Puis par les poincts D, & E, soiēt menees D H, E I, [e] paralleles à B G, & partant [f] paralleles [f] entr'elles. Et puis que par la mesme construction, B H, & B I, sont parallelogrammes, les lignes droictes D H, E I, [g] seront egales à B G, c'est à dire à A. Puis donc que B G, est egale à A, le rectangle B H, sera contenu sous la non couppee A, & le segment B D; & le rectangle D I, contenu, sous A & le segment D E, pareillement E F, sera contenu sous A, & le segment E C. Or puis, que toutes ces parties là, prises ensemble, sont egales à leur tout B F, il est euident que le rectangle comp. des 2. sera egal aux rectangles comp. de A, & chacun des segments de B C. Donc s'il y 2. lignes ce qu'il falloit demonstrer.

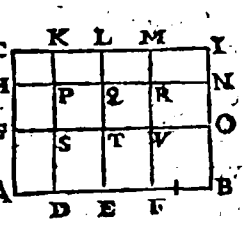
[a] 11. 1.
[b] 28. 1.
[c] 1. e. f.
[d] 33. 1.
[e] 31. 1.
[f] 30. 1.
[g] 34. 1.

SCHOLIE.

Ces theorémes ſuiuants ſe peuuẽt auſſi demonſtrer par les nombres ; comme s'enſuit. Soient deux nombres propoſez 6. & 10. & ſoit diuiſé le dernier en trois parties 5. 3. & 2. Ie dis que 60. qui eſt le nombre produit de 6. en 10. eſt egal aux trois nombres 30. 18. & 12. qui ſont faicts de 6. en 5, & 3. & 2. Ce qui eſt manifeſte.

Federic Commandin demonſtre icy les deux Theorémes ſuiuants.

1. S'il y a deux lignes droictes, & que toutes deux ſoient couppees, en tant de parties que l'on voudra : le rectangle contenu ſous icelles deux lignes droictes, eſt egal aux rectangles contenus ſous chacune partie de l'vne appliquee à chacune partie de l'autre.



Soient les deux lignes droictes contenant l'angle droict A, leſquelles ſoient couppees ſelon les parties A D, D E, E F, F B, A G, G H, H C. Ie dis que le rectangle contenu ſous A B, A C, eſt egal aux rectangles enſemble contenus ſous A D, A G, A D, G H, A D, H C; D E, A G, D E, G H, D E, H C; E F, A G, E F, G H, E F, H C; F B, A G, F B, G H, F B, H C : Soit accomply le rectangle A B I C, & ſoient menees D K, E L, F M, a paralleles à A C, ou B I, ſemblablement ſoient menees H N, G O, paralleles à A B, a 31. 1.

ou C I, lesquelles couppent les premieres aux poincts P, Q, R, S, T, V.

D'autant donc que le rectangle A S, est contenu sous A D, A G, & G P, sous A D, G H, & H K, sous A D, H C, [b] (puis que G S, H P, sont egales à la mesme A D) semblablement les rectãgles D T, S Q, P L, sont contenus sous D E, A G, D E, G H, D E, H C, [c] (d'autant que D S, S P, P K, sont egales aux mesmes A G, G H. H C, & S T, & P Q, egales à D E,) & par mesme raison E V, T R, Q M, sont contenus sous E F, A G, E F, G H, E F, H C, & aussi les rectangles, F Q, V N, R I, sont contenus sous F B, A G, F B, G H, F B, H C; il est manifeste que le rectangle contenu sous A B, A C, est egal aux rectangles contenus sous chacune des parties de l'vne appliquee à chacune partie de l'autre. Ce qui est proposé.

[b] 34. 1.

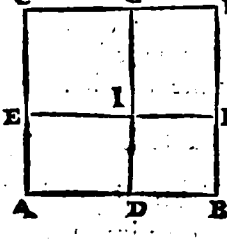
[c] 34. 1.

2. PROBLEME DE COMMANDIN.

S'il y a deux lignes droictes, lesquelles soient couppees comme l'on voudra, le rectangle contenu sous les toutes, auec le rectangle contenu sous vne partie de l'vne & vne partie de l'autre, est egal aux rectangles contenus sous les toutes, & lesdictes parties reciproquement auec le rectangle contenu des autres parties.

Soient deux lignes droictes A B, A C, contenãt l'angle droict A, lesquelles soient couppees comme l'on voudra aux poincts D, & E. Ie dis que le rectangle contenu sous A B, A C, auec le rectan-

gle contenu ſous les parties A D, E C, eſt egal aux rectangles contenus ſous A B, E C; A C, A D, auec le rectangle contenu ſous D B, A E. Soit paracheué le rectangle A F, & ſoit menee par le poinct D, la ligne droicte D G, parallele à A G, ou B, F, & par le poinct E, ſoit menee la ligne droicte E H, couppant D G, à I, parallele à A B, ou C F.



D'autant donc que le rectangle A F, eſt egal aux rectangles E F, D H, A I, ſi l'on adiouſte le commun E G, les rectangles A F, E G, contenus ſous les toutes A B, A C, & les parties, A D, E C, ſont egaux aux rectangles E F, A G, D H, contenus ſous A B, E C, A C, A D, D B, A E. Ce qui eſt propoſé.

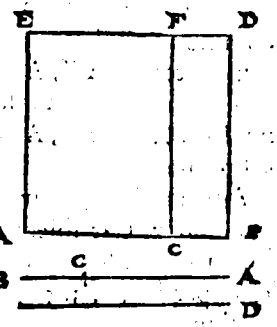
Aux nombres, ces meſmes problémes ſont auſſi manifeſtez. Car ſoient propoſez ces deux nombres 10. & 8. le premier deſquels ſoit diuiſé en trois parties, 2. 3. 5. & le dernier en deux 3. & 5. il eſt manifeſte que 80. nõbre produict de 10. par 8. eſt égal aux ſix nõbres 6. 9. 10. 15. 15. 25. qui sõt produicts de chacune des parties 2. 3. 5. multipliees par chacune des parties 3. 5. leſquels adiouſtez enſemble font 80. cõme vouloit le premier theoréme de Federic Commandin.

Derechef, ſi les meſmes nombres ſont diuiſez comme l'on voudra, ſçauoir le premier en 3. & 7. mais le dernier en 2. & 6. Il eſt ſemblablement manifeſte que 80. nombre produict de 10. multiplié par 8. auec 18. nombre produict de 3. par 6.

est egal aux trois nombres 60. 24. & 14. qui sont produicts de 10. multipliez par 6. & de 8. par 3. & de l'autre partie 7. multiplié par l'autre partie 2. puisque tant d'vne part que d'autre se trouue 98. comme veut le second theoréme de Federic.

ij. THEOREME 2. PROP. 2.

Si vne ligne droicte est couppee comme l'on voudra, les rectangles contenus sous la toute & chacune des parties, sont egaux au quarré de la toute.



Soit la ligne droicte donnee A B, diuisee comme l'on voudra au poinct C. Ie dis que les rectangles contenus sous la toute A B, & les parties A C, C B, ensemble sont egaux au quarré de A B.

a 46. 1. Car soit descrit [a] A D, quarré de la ligne totale A B, & par C, soit [b] menee C F, parallele à A E, ou B D, elle sera [c] egale à A E, c'est à dire à A B, à laquelle A E, est egale, par la definition du quarré. D'autant donc que A E, est egale à A B, le rectangle A F, sera contenu sous la toute A B, & le segment, A C. Semblablement d'autant que C F, est egale à A B, le rectangle C D, est contenu sous la toute A B, & l'autre segment C B. Donc puis que les rectangles C D, A F, sont egaux au quarré A D, il est manifeste que les rectangles

b 31. 1.

c 34. 1.

contenus ſous la toute AB, & chacun des ſegmens AC, CB, ſont egaux au quarré de la toute AB. Donc ſi vne ligne eſt couppee &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.

AVTREMENT.

Soit priſe D, egale à AB. D'autant AB, eſt diuiſee par C, le rectangle contenu ſous la non couppee D, & la couppee, AB, (qui eſt le quarré de la toute AB) ſera egal c *aux deux rectangles compris ſous la non couppee D, (c'eſt à dire ſous AB, egale à D,) & vn chacun des ſegmens AC, CB. Ce qui eſt propoſé.* c 2. 1.

SCHOLIE.

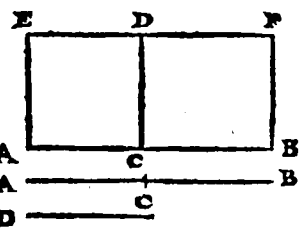
Combien que Euclide propoſe ce ſecond theoréme d'vne ligne droicte diuiſee comme l'on voudra, en deux ſeulement; neantmoins ſi la ligne eſt deuiſee en tant de parties que l'on voudra, l'on monſtrera en la meſme maniere que tous les rectangles enſemble, contenus de la toute & de chacun des ſegmens ſont egaux au quarré de la toute, comme il eſt euident par les figures precedentes.

Cecy ſe peut voir auſſi par les nombres comme s'enſuit. Ce nombre 10. *ſoit diuiſé en* 7. *&* 3. *Ie dis que* 70. *&* 30. *qui ſont faicts de* 10. *multiplié par* 7. *& par* 3. *ſont egaux à* 100. *qui eſt le quarré de* 10. *comme il eſt euident.*

Semblablement ſi le nombre 10. *eſt diuiſé en pluſieurs parties comme* 3. 2. 4. *&* 1. *les nombres* 30. 20. 40. *&* 10. *produicts du nombre* 10. *multiplié par* 3. 2. 4. *&* 1. *ſont egaux à* 100. *quarré du meſme nombre* 10.

THEOREME 3. PROP. 3.

iij. Si vne ligne droicte eſt couppee comme l'on voudra; le rectangle contenu ſous la toute & vne des parties, eſt egal au rectangle contenu ſous icelles parties, & au quarré de la partie premierement priſe.



Soit la ligne droicte AB, couppee cõme l'on voudra, ſçauoir par le poinct C. Ie dis que le rectangle cõtenu ſous la toute AB, & vne des parties, ſçauoir AC, (ſoit que AC, ſoit la plus grande ou la plus petite) eſt egal au rectangle contenu ſous les parties AC, CB, & au quarré de la ſuſdite partie AC. Car ſoit deſcrit AD, quarré de la partie AC, &
a 31. 1. par le poinct B, ſoit menee BF, [a] parallele à AE, rencontrant ED, prolongee à F.

D'autant donc que la ligne droicte AE, eſt egale au ſegment AC, par la definition du quarré. Le rectangle AF, ſera contenu ſous la toute AB, & la partie AC. Derechef d'autant que CD, eſt egale à CA, par la meſme raiſon; le rectangle CF, ſera contenu ſous les parties AC, CB, Donc puis
c 31. 1. que le rectangle AF, [c] eſt egal au quarré AD, & au rectangle CF; il eſt manifeſte que le rectangle contenu ſous la toute AB, & le ſegment AC, eſt egal au rectangle contenu ſous les parties AC, CB, & au quarré de AC, premierement priſe. Donc ſi vne ligne droicte eſt &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.

AVTREMENT.

Soit prise D, egale à la partie AC. D'autant que la droicte ligne AB, est diuisee au poinct C, le rectangle compris sous D, & AB, (c'est à dire sous AB, AC, car D, est egale à AC) est = egal au rectangle contenu c 1. 2.
sous D, & CB, c'est à dire, sous AC, CB, & au rectangle contenu sous D, & AC, c'est à dire au quarré du segment AC. Ce qui est proposé.

SCHOLIE.

Pour accommoder ce theoréme aux nombres, soit le nombre 10. diuisé en 7. & 3. Ie dis que le nombre 70. produict de 10. multiplié par 7. est egal à 21. nombre produict des deux segments 7. & 3. multipliez l'vn par l'autre, & au nombre 49. quarré de la premiere partie 7. ce que l'operation mesme demonstre. Semblablement, le nombre 30. produict de 10. multiplié par 3. est egal à 21. produict de 3. en 7, & au nombre 9. qui est le quarré du 3. nombre premierement dict, ou pris.

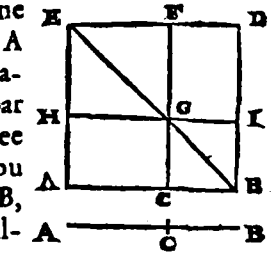
THEOREME 4. PROP. 4. jv.

Si vne ligne droicte est couppee comme l'on voudra: le quarré de la toute est egal aux quarrez des parties, & à deux fois le rectangle contenu sous icelles parties.

La ligne droicte AB, soit diuisee comme l'on voudra au poinct C. Ie dis que le quarré de la toute AB, est egal aux quarrez des parties AC, CB, & à deux fois le rectangle contenu sous AC, CB.

Soit descrit le quarré de la ligne AB, sçauoir AD, & ayant mené le diametre BE, soit menee

par le poinct C, la ligne droicte CF, parallele à AE, ou à BD, couppãt le diametre au poinct G, & par celuy poinct G, ſoit menee IGH, parallele à AB, ou à DE, & le quarré de AB, ſera diuiſé en quatre parallelogrammes.



D'autant qu'au triangle ABE, les deux coſtez AB, AE, ſont egaux, les deux angles ABE, AEB, a ſur la baſe EB, ſont egaux, mais l'angle A, eſt droict, au quarré, & le trois angles A, AEB, & ABE, b ſont egaux à deux droicts, & partant les deux ABE, AEB, chacun demi-droict, eſtant egaux entr'eux: & d'autant que HI, AB, ſont paralleles, l'angle externe GHE, c ſera egal à ſon interne & oppoſé A, & partant droict, mais les trois angles du triangle d EGH, ſont egaux à deux droicts, & GEH, eſt monſtré eſtre demi-droict, & EHG, droict, donc l'autre HGE, ſera auſſi demi-droict, donc au triangle EGH, les deux angles GEH, EGH, ſeront egaux, eſtans chacun demi-droict, partant les deux coſtez oppoſez HE, e HG, ſeront egaux: mais les deux coſtez EF, FG, oppoſez f ſont egaux à iceux chacun au ſien, dõc le parallelogrãme HF, ſera quarré ayant tous les coſtez egaux & les angles droicts, car vn des angles ſçauoir EHG, eſtant droict tous les quatre ſeront droicts cõme il eſt monſtré à la premiere definition de ce liure. L'on monſtrera par les meſmes raiſons que CI, eſt quarré, partant FH, & CI, ſont les quarrez des parties AC, CB, puis que HG, eſt egale à AC.

a 5. 1.
b 32. 1.
c 29. 1.
d 32. 1.
e 6. 1.
f 34. 1.
g 34. 1.

Les rectangles A G, G D, ſeront pareillement contenus ſous les ſegments A C, C B; d'autant que C G, G I, ſont egales à C B, à cauſe du quarré C I, & F G, eſt egale à G H, à cauſe du quarré F H, c'eſt à dire [h] à A C. Partant puis que le quarré A D, eſt egal aux deux quarrez H F, & C I, & aux deux rectangles A G, G D; il eſt manifeſte que A D, quarré de la toute A B, eſt egal aux quarrez des parties A C, C D, & à deux fois le rectangle contenu des meſmes parties A C, C B. Donc ſi vne ligne droicte &c. Ce qu'il falloit demonſtrer. [h] 34. 1.

AVTREMENT.

D'autant que la ligne droicte A B, eſt diuiſée par le poinct C, [i] le quarré de la toute A B, eſt egal aux rectangles contenus ſous la toute A B, & chacune des parties A C, C B: mais le rectangle contenu ſous A B, A C, [k] eſt egal au rectangle contenu ſous A C, C B, & au quarré de la partie A C: ſemblablement, le rectangle contenu ſous A B, C B, eſt egal au rectangle ſous C B, A C, & au quarré de C B. Donc le quarré A B, eſt auſſi egal aux quarrez de A C, C B, & aux rectangles contenus ſous A C, C B, & ſous C B, A C. Ce qui eſt propoſé. [i] 2. ſec. [k] 3. ſec.

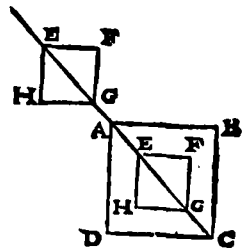
COROLLAIRE 1.

Par ces demonſtrations il eſt manifeſte que les parallelogrammes deſcrits à l'entour du diametre du quarré, ſont quarrez.

Cela eſt apparent par la premiere demonſtratiõ de ce theoréme, où il eſt demonſtré que les rectãgles C I, F H, qui ſont à l'entour du diametre B E, ſont quarrez. Car en tous autres quarrez ce ſera la meſme demonſtration.

Ce Corollaire toutesfois se doit entendre des parallelogrammes qui sont à l'entour du diametre du quarré & qui ont quelque angle commun auec le quarré total, comme sont les parallelogrammes C I, F H. Car celuy-là, a l'angle A B D, commun auec le quarré, & cestuy-cy l'angle A E D.

Il est aussi veritable de quelconques parallelogrammes, qui sont à l'entour du diametre du quarré, mesme estant prolongé, encore qu'ils n'ayent aucun angle commun auec le quarré, pourueu que leurs costez soient paralleles aux costez du quarré.



Car à l'entour du diametre A C, du quarré B D, soit le parallelogramme F H, soit qu'il soit dedans le quarré ou qu'il soit dehors, lequel toutesfois ait les costez paralleles aux costez du quarré. Ie dis que F H, est quarré.

29. 1. Car puis que A B, E F, sont paralleles, 1 les angles, B A C, F E G, seront egaux, l'externe à l'interne, & par mesme raison les angles B C A, F G E, seront aussi egaux : mais les angles B A C, B C A, sont demy-droicts, comme il a desia esté demonstré. Donc les angles F E G, F G E, seront
m 6. 1. aussi demy-droicts, m & partant les costez E F, F
n 32. G, opposez à iceux seront egaux n & l'angle F, se-
o 34 1. ra droict, donc puis que les costez E F, F G, o sont egaux à leurs opposez G H, H E, le parallelogramme F H, sera equilateral; mais il est aussi rectangle, comme nous auons monstré à la premiere definition de ce liure, d'autant que l'vn des angles F,

gles, F, eſt demonſtré droict. Donc FH, ſera quarré. Ce qui eſt propoſé.

COROLLAIRE II.

Il s'enſuit auſſi de la demonſtration de cette propoſition que le diametre de quelconque quarré, diuiſe les angles d'iceluy en deux egalement. Car il a eſté demonſtré que les angles, AFB, DEB, ſont demi-droicts. Ce qui ſe peut auſſi demonſtrer par la 34. & 8. propoſition du 1. liure.

SCHOLIE.

Ce theoréme 4. ſera ainſi monſtré par les nombres. Soit le nombre 10. diuiſé comme l'on voudra en 7. & 3. il eſt euident que 100. qui eſt le quarré du nombre total, eſt egal à 49. & 9. qui ſont les quarrez des parties 7. & 3. auec 21. nombre produict de 7. multiplié par 3. prins deux fois. Car 49. 9. 21. & 21. font 100.

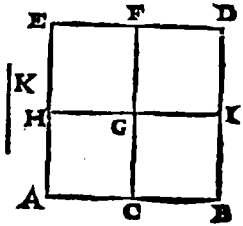
Par ce 4. Theoréme, il ſera facile de demonſtrer cét autre.

Si vne ligne droicte eſt double d'vne ligne droicte, le quarré deſcrit de celle là, eſt quadruple du quarré deſcrit de celle cy. Et ſi vn quarré eſt quadruple d'vn quarré le coſté de celuy-là ſera double du coſté de ceſtuy-cy.

Soit premierement la ligne AB, double de la ligne K. Ie dis que le quarré de la droicte ligne AB, eſt quadruple du quarré de la droicte ligne K.

Car ayant diuiſé AB, en 2. egalement au poinct C, ſi l'on faict la conſtruction comme en ce qua-

trieſme Theoréme, il y aura quatre parallelogrammes A G, C I, I F, F H, leſquels ſeront quarrez, & egaux entr'eux, puis que tous leurs coſtez ſont egaux & les angles droicts, comme il eſt facile à demonſtrer par la 34. propoſition du liure 1. Partant puiſque le quarré A D, eſt egal aux quatre quarrez A G, C I, I F, F H, le quarré de la ligne A B, ſera quadruple du quarré de la ligne A C, c'eſt à dire de la ligne K, qui eſt egale à A C, car tant l'vne que l'autre eſt moitié de la ligne A B.



a 4. ſec. *Autrement, le a quarré de la ligne A B, eſt egal aux quarrez de A C, C B, & a deux fois le rectãgle cõtenu ſous A C, C B. Dõc puis que les quarrez de A C, C B, sõt egaux; le rectangle contenu ſous les egales A C, C B, ſera pareillement quarré, & partant egal au quarré de A C; il eſt manifeſte que le quarré de A B, eſt quadruple du quarré de A C; puis qu'il eſt egal à quatre quarrez, vn chacun deſquels eſt egal au quarré de A C.*

Secondement ſoit le quarré de la ligne droicte A B, quadruple du quarré de la ligne droicte K. Ie dis que le coſté A B, eſt double du coſté K. Car ayant diuiſé A B, en deux egalement au poinct C, de ſorte que A B, ſoit double de A C; le quarré de A B, ſera quadruple du quarré de A C, comme il a deſia eſté monſtré. Mais il eſt double du quarré de K, par l'hypotheſe. Donc le quarré de K, & de A C, ſont egaux, & partant la ligne K, & la ligne A C, ſeront egales, mais A B, eſt double de A C, par la conſtruction. Elle ſera donc auſſi double de K.

Au ſurplus l'on peut colliger de cette quatrieſme propoſition, le moyen de trouuer vn nombre quarré, auec lequel quelconque nombre donné eſtant adiouſté conſtituera pareillement vn nombre quarré. Car ſi du nombre donné l'on oſte l'vnité, le nombre, qui ſera produict de la moitié du reſte multiplié par ſoy-meſme, ſera le nombre quarré requis. Comme ſi le nombre donné eſtoit 15. & qu'on vouluſt trouuer vn nombre quarré auec lequel 15. eſtant adiouſté face auſſi vn nombre quarré; nous oſterõs 1. de 15. & reſtera 14. duquel la moitié eſt 7. que nous prendrons; & 49. nombre produict de cette moitié 7. multiplié par ſoy-meſme, ſera celuy auec lequel le nombre donné 15. eſtant adiouſté conſtituera 64. nombre quarré duquel la racine eſt 8. qui eſt vn nombre plus grand, d'vn, que 7. coſté du quarré trouué.

La raiſon en eſt telle. D'autant que A D, quarré de la ligne droicte, A B, a eſt egal aux deux quarrez F H, C I, deſcrits des parties AC, CB, auec deux fois le rectangle contenu ſous AC, CB; ſi nous poſons que le Gnomon H B F, qui eſt le nõbre propoſé vaut quinze, lequel Gnomon auec le quarré F H, conſtitue tout le quarré A D, & que le quarré C I, ſoit poſé eſtre 1. & pareillement ſon coſté C B, 1. lequel que l'on voudra des deux rectangles A G, D G, ſera 7. & partant le ſegment A C, ſera auſſi 7. afin que A C, 7. appliqué à C B, 1. face 7. Donc le quarré F H, ſera 49. Et tout le coſté A B, ſera 8. ſçauoir, qui excedera le coſté du quarré F H, de l'vnité. C'eſt donc là, la raiſon pourquoy l'on oſte vn du nombre donné, c'eſt à dire du Gnomon HBF, & que l'on poſe la moitié du reſte pour le coſté du quarré F H, requis. a 4. ſec.

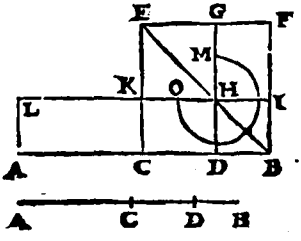
Or pour euiter les fractions, il faut que le nombre donné ſoit impair, afin qu'ayant retranché l'vnité le reſte ſe puiſſe diuiſer en 2. parties egales. La reigle eſt neantmoins veritable quelconque ſoit le nombre propoſé.

Nous ferons le meſme, ſi du nombre donné nous oſtons quelque nombre quarré, & diuiſons la moitié du reſte par le coſté du nombre quarré retranché. Car le quotient ſera le coſté du quarré requis. Comme ſi le Gnomon H B F, valloit 45. duquel nombre l'on oſtaſt 9. nombre quarré, pour le quarré C I, duquel le coſté ſeroit 3. la moitié du reſte 36. eſt 18. pour le rectangle A G, lequel diuiſé par 3. c'eſt à dire par C G, coſté du quarré retranché, C I, le quotient ſera 6. pour le coſté G H, le quarré duquel qui eſt F H, ſçauoir 36. adiouſté au Gnomon H B F. ſçauoir à 45. faict vn nombre quarré, 81. Or pour euiter les fractions, il faudra prendre vn tel nombre, que apres en auoir oſté quelque nombre quarré, le nombre reſtant ait vne moitié telle, qu'elle ſe puiſſe diuiſer exactement par le coſté du quarré oſté.

Semblablement nous trouuerons vn nombre quarré, duquel, quelconque nombre propoſé eſtant oſté, reſtera pareillement vn nombre quarré. Car ſi du nõbre propoſé l'on oſte 1. & à la moitié du reſte l'on adiouſte 1. l'on aura le coſté du quarré requis. Soit derechef le nombre donné 15. duquel vn oſte, la moitie du reſte 14. ſera 7. auquel ayant adiouſté 1. l'on aura 8. coſté du quarré requis. Car ſi de 64. quarré d'iceluy 8. l'on oſte 15. demeurera 49. nombre quarré duquel le coſté eſt 7. qui eſt touſiours moindre que le coſté du quarré trouué, de l'vnité. La raiſon de cette reigle eſt auſſi facile par la meſme figure de de ceſte propoſition 4. Car ſi nous poſons pour le Gnomon H F B, 15. pour le nombre propoſé, lequel Gnomon eſtant ſouſtraict du quarré A B, reſte le quarré F H, & que nous conſtituons le quarré C I, de 1. & partant ſon coſté C B, 1. chacun des deux rectangles A G, D G, ſera 7. & par ainſi le ſegment A C, ſera auſſi 7. comme il eſt dict cy-deuant, & toute la ligne A B, ſera 8. &c.

THEOREME 5. PROP. 5. V.

Si vne ligne droicte est couppee en 2. parties egales, & en 2. parties inegales, le rectãgle contenu des parties inegales de la toute, auec le quarré de la partie du milieu, est egal au quarré de la moitié de la toute.



La ligne droicte A B, soit diuisee au point C, en 2. parties egales & en 2. parties inegales au poinct D. Ie dis que le rectangle cõtenu sous A D, & D B, parties inegales de la toute A B, auec le quarré de la partie du milieu C D, est egal au quarré de C B, moitié de la toute A B.

Car soit descrit C F, quarré [a] de C B, & soit mené le diametre B C, & par le poinct D, soit menee [b] D G, parallele à B F, ou C E, couppant le diametre au poinct H, & par le poinct H, soit menee I K, parallele à A B, & du poinct A, menee A L, parallele à C E, rencontrant I K, prolongee au poinct L, les parallelogrammes K G, D I, à l'entour du diametre B E, seront [a] quarrez & partãt D H, egale à D B, & K H, à C D; dõc le rectãgle A H, sera contenu sous A D, D B; & K G, sera le quarré de C D, lequel A H, auec K G, est egal au quarré C F. Car d'autant [b] que les complements C H, & G F. sont egaux, si l'on adiouste le commun quarré D I, le parallelogramme D F, sera egal au parallelogramme C I. Mais le parallelogram-

[a] 46. 1.

[b] 31. 1.

[a] Corall. 1. 4. 2.

[b] 43. 1.

me A K, eſt [c] egal au parallelogramme C I, eſtant conſtituez ſur baſes egales AC,& CB, entre meſmes paralleles A B, L I, donc A K, ſera egal à D F, auſquels ſi l'on adiouſte C H, commun, le Gnomon MNO, ſera egal au rectangle A H, parquoy puis que le Gnomon M N O, & le quarré K G, ſont egaux au quarré C F, le rectangle A H, auec le quarré K G, ſera egal au meſme quarré C F. Donc ſi vne ligne droicte eſt couppee &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.

[c] 30. 1.

SCHOLIE.

Autrement, ce theoréme ſera demonſtré auec Maurolycus, en la meſme maniere qu'il eſt auſſi monſtré aux nombres, par le Moyne Barlaam, ce que nous ferons auſſi auec le meſme Maurolycus, iuſques à l'vnzieſme propoſition excluſiuement.

D'autant que le quarré de C B, eſt egal [d] *aux quarrez de C D, & de D B, & a deux fois le rectangle contenu ſous D B, C D, mais le rectangle contenu ſous D B, CB,* [e] *eſt egal au rectangle contenu ſous D B, CD, & au quarré de D B; le quarré de C B, ſera egal à l'autre quarré de C D, auec l'autre rectangle contenu ſous DB, C D, & au rectãgle cõtenu ſous DB, CB, ou ſous DB, AC. Mais le rectãgle cõtenu ſous DB, & la toute AD,* [f] *eſt egale aux rectangles contenus ſous D B, AC, & ſous DB, CD. Donc le quarré de C B, ſera egal au quarré de C D, auec le rectangle contenu ſous D B, A D; c'eſt à dire le rectangle contenu ſous A D, D B, auec le quarré de C D, ſera egal au quarré de C B, ce qu'il falloit demonſtrer.*

[d] 4. ſec.

[e] 3. ſec.

[f] 1. ſec.

Le meſme eſt auſſi manifeſte aux nombres. Soit diuiſé 10. en deux parties egales 5. & 5. & en 2. parties inegales 7. & 3. de ſorte que le nõbre du milieu entre les ſections

inegales du tout eſt 2. ſçauoir celuy par lequel la moitié 5. excede le moindre 3. Il eſt euident que 21. nombre produit de 3. multiplié par 7. auec 4. qui eſt le quarré de 2 eſt egal à 25. qui eſt le quarré de 5. moitié du nombre propoſé.

Par cette 5. propoſition nous trouuerons par vne autre maniere vn nombre quarré auec lequel quelconque nombre donné fera pareillement vn nombre quarré. Car ſi au nombre donné l'on adiouſte 1. & de la moitié du tout l'on oſte 1. le reſte fera le coſté du quarré requis: comme ſi le nombre donné eſt 15. y adiouſtant 1. ce ſeront 16. de la moitié duquel 8. ſi l'on oſte 1. reſteront 7. coſté du quarré, 49. auec lequel le nombre propoſé 15. eſtant adiouſté, le tout ſera 64. nombre quarré, duquel le coſté eſt 8. qui excede touſiours 7. de l'vnité, lequel eſt le coſté du quarré trouué. La raiſon de cette reigle eſt facile par la demonſtration de cette 5. propoſition. Car puis que le rectangle A H, auec le quarré K G, eſt egal g *au quarré de C F, ſi le rectangle A H, eſt poſé de 15. comme le nombre dõné; & le quarré D I, ſoit vn, & partant le coſté D B, pareillement 1. la ligne droicte A D, ſera 15. afin que A D, appliquee à D B, face 15. qui ſera le rectangle AH: adiouſtant donc l'vnité, toute la ligne A B, ſera 16. de la moitié duquel nombre 8. oſtant 1. reſtera 7. pour C D, coſté du quarré K G.* g 5. ſec.

Pour euiter les fractions faut que le nombre ſoit impair, afin qu'ayant adiouſté 1. le nombre ſe puiſſe partir en 2. egalement.

Au cõtraire nous trouuerõs vn nombre quarré, duquel ſi l'on oſte quelque nombre quarré, le reſte ſera pareillement nõbre quarré. Car ſi au nombre donné l'on adiouſte 1. la moitié du tout ſera le coſté du quarré requis. Comme ſi derechef le nombre 15. eſt propoſé, y adiouſtãt 1. la moitié

du tout ſera 8. coſté du quarré requis 64. Car ſi l'on oſte le nombre donné 15. le reſte ſera 49. nombre quarré duquel le coſté eſt 7. qui eſt touſiours moindre que le nombre du coſté du quarré trouué, de 1. La raiſon de cecy eſt auſſi manifeſte par la figure de ceſte 5. propoſition. Car ſi le rectangle A H, qui eſt é du quarré C F, laiſſe le quarré K G, eſt poſé de 15. qui eſt le nombre donné; & le quarré D I, ſoit 1. & partant D B, ſon coſté auſſi 1. la toute A B, ſera 16. & ſa moitié C B, 8. &c.

VI. THEOREME 6. PROP. 6.

Si vne ligne droicte eſt couppee en deux parties egales & qu'on luy adiouſte quelque ligne droicte directement, le rectangle contenu ſous la toute auec l'adiouſtee, & l'adiouſtee, auec le quarré de la moitié; eſt egal au quarré deſcrit de la ligne compoſee de la moitié & de l'adiouſtee comme d'vne.

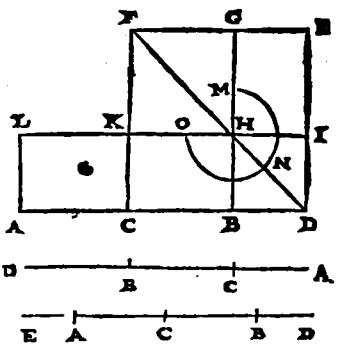
La ligne droicte A B, ſoit diuiſee par C, en deux egalement, & ſoit adiouſtee directement à icelle la droicte ligne B D. Ie dis que le rectangle contenu ſous la toute compoſee de A B, B D, ſçauoir A D, & l'adiouſtee, B D, auec le quarré de la moitié C B, eſt egal au quarré de la ligne C D, compoſee de la moitié C B, & de l'adiouſtee B D.

Sur C D, ſoit deſcrit le quarré, C F, & ayant mené le diametre D F, par B, ſoit menee B G, parallele à D E, ou C F, couppant le diametre au poinct H, & par H, ſoit menee I K, parallele à C D, & par A, ſoit menee A L, parallele à C F,

rencontrant I K, prolongee au poinct L. Donc BI, & K G, ſeront quarrez : & D I, ſera egale à B D, [b] & K H, eſt egale à C B, parquoy le rectangle A I, ſera contenu ſous A D, D B, & K G, ſera le quarré de C B, leſquels rectangle A I, & quarré K G ſont egaux au quarré C E. Car d'autãt

[a] Coroll. 1. 4. 2.

[b] 34. I.



que le parallelogramme A K, eſt egal au parallellogramme CH, [c] puis que les baſes A C, CB ſont egales : & le parallelogramme H E, eſt egal au meſme CH [d], ie complement au complement; A K & H E, ſeront egaux entr'eux : donc leur adiouſtant le commun CI, le Gnomon M N O, ſera egal au rectangle A I, partant puis que le gnomon M N O, auec le quarré K G, eſt egal au quarré C E, le rectãgle A I, auec le quarré K G, ſera auſſi egal au quarré C E. Donc ſi vne, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.

[c] 36.

[d] 43.

SCHOLIE.

Autrement, d'autant que le [d] *quarré de C D, eſt egal aux quarrez de CB, B D, & à deux fois le rectangle contenu ſous D B, C B, c'eſt à dire aux quarrez de C B, B D, & aux rectangles contenus ſous D B, C B, & ſous D B, A C, (prenant vne fois A C, pour CB, qui luy eſt egale) Mais le rectangle contenu ſous D B, & la ſomme A D,*

[d] 4 ſec.

e 1. sec. *e eſt egal aux rectangles ſous D B, A C; D B, C B; & ſous D B, D B; (qui eſt le quarré de D B.) Donc le quarré de C D, eſt egal à l'autre quarré de C B, auec le rectangle contenu ſous D B, A D: c'eſt à dire le rectangle contenu ſous A D, D B, auec le quarré de C B, eſt egal au quarré de C D, ce qu'il fallost demonſtrer.*

Si l'on conſidere attentiuement, l'on trouuera que ceſte 6. prop. ſe peut demonſtrer facilement par la precedente 5. Ce qu'a fort bien cogneu le docte Breſcius. Car ſoit la ligne droicte A B, coupee en deux egalement au poinct C, & à icelle ſoit adiouſtee B D, directement. Ie dis que le rectangle contenu ſous la toute A D, compoſee de A B, & B D, & l'adiouſtee B D, auec le quarré de la moitié C B, eſt egal au quarré de C D, compoſee de la moitié & de l'adiouſtee. Car ſoit adiouſtee à A D, la droicte ligne A E, de l'autre part, egale à B D: la toute E D, ſera coupee au poinct C egalement, & au poinct B, inegalement: & d'autant que E A, A C, ſont egales à D B, B C, pareillement la droicte ligne E B, ſera egale à la droicte A D, puis que E A eſt faicte egale D B, & A B, eſt commune à toutes les deux. Donc le rectangle contenu ſous les parties inegales E B, B D, auec le quarré de la ſection d'entre deux C B, c'eſt à dire le rectangle contenu ſous A D, B D, auec le quarré de la moitié C B, ſera egal au quarré de la moitié C D, C'eſt à dire au quarré de C D, compoſé de C B, moitié de la donnee A B, & de l'adiouſtee B D, Ce qui eſt propoſé.

Pour appliquer ce theoreme aux nombres, ſoit diuiſé 8. en deux egalement, ſçauoir en 4. & 4. & ſoit adiouſté 2. l'on peut voir comme le nombre 20. produit de tout le nombre compoſé 10, multiplié par l'adiouſté 2. auec 16. quarré de la moitié 4. eſt egal à 36. quarré de 6. compoſé de la moitié 4. & de l'adiouſté 2.

De ce theoréme l'on collige auſſi une tres-belle propric-

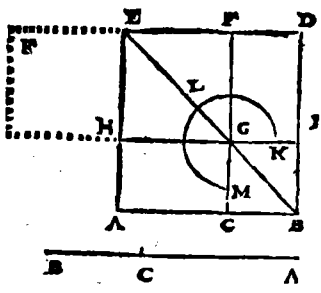
té de la proportionalité Arithmetique, laquelle consiſte touſiours en vn meſme excés des quantitez proportionelles. Car puis que A D, excede C D, de la grandeur A C, c'eſt à dire de C B; & C D excede B D, de la meſme quantité B C, les trois lignes A D, C D, B D, auront la proportionalité arithmetique, d'autant que la premiere A D, excede la 2. C D, du meſme excés que la ſeconde C D, excede la troiſieſme B D. Parquoy puis qu'il eſt demonſtré que le rectangle contenu ſous les extrémes A D, B D, auec le quarré de l'excés C B, eſt egal au quarré de la moyenne C D, l'on collige manifeſtement, qu'en toute proportionalité arithmetique de trois lignes, le rectangle contenu ſous les extrémes, auec le quarré de l'excés eſt egal au quarré de la moyenne: Car trois lignes proportionelles ſelon l'arithmetique, ſe pourront touſiours conioindre, en ſorte qu'elles feront vne ligne qui ſe pourra diuiſer en 2. egalement, laquelle ſoit egale à l'excés entre la premiere & la tierce, & de la tierce. Comme il appert ſi les trois lignes droictes ſont donnees A D, C D, B D. Car ſi de la premiere A D, l'on oſte D C, egale à la moyenne, & de ceſte moyenne D C, l'on oſte la tierce D B, la ligne A B (qui eſt l'excés entre la premiere & la tierce) ſera coupee en deux egalement au poinct C, & à icelle adiouſtee la tierce B D. Car puis que B C, eſt l'excés entre la moyenne C D, & la tierce B D, qui doit eſtre egale à icelle A C, ſçauoir à l'excés entre la premiere A D, & la moyenne C D, à cauſe de la proportionalité arithmetique, A B ſera neceſſairement coupee en deux parties egales par le poinct C, & y a meſme raiſon des autres; laquelle choſe ſe void aux nombres qui ont vn meſme excés: car en ces nombres 4. 7. 10. qui ont meſme excés 3. le nombre 40. produit des extremes 4. & 10. auec 9. quarré de l'excés eſt egal à 49. nombre quarré: produit du moyen nombre 7.

Par ceſte 6. prop. l'on trouuera vn nombre quarré, auec

lequel quelconque nombre proposé estant adiousté, sera pareillement vn nombre quarré: l'operation se fera en la mesme maniere qu'en la 4. prop. &c.

THEOREME 7. PROP. 7.

vij. Si vne ligne droicte est couppee comme l'on voudra: les deux quarrez ensẽble, sçauoir celuy de la toute, & celuy de l'vn des segmẽts, sont egaux à deux fois le rectãgle contenu sous la toute & ledict segment, & au quarré de l'autre segment.



Soit la ligne droicte A B, couppee comme l'on voudra au poinct D. Ie dis que le quarré de la toute A B, & le quarré du segment A C, ensemble sont egaux à deux fois le rectangle contenu sous la toute A B, & ledict segment A C: & au quarré de l'autre segment C B. Soit descrit le quarré de la ligne A B, sçauoir le quarré A D, & ayant mené le diametre B E, par C, soit menee C F, parallele à A E, ou B D, couppant le diametre au poinct G, par lequel soit mené H I, parallele à A B, Par le 1. coroll. de la 4. proposition, C I, H F, seront quarrez. Et a d'autant que G H, est egale à A C, la figure H F, sera le quarré du segmẽt A C. De rechef d'autãt que A E, est egale à A B, le rectangle A F, sera conte-

a 34. 1.

nu ſous la toute AB, & le ſegment AC. Par la meſme raiſon le rectangle HD, ſera contenu ſous les meſmes AB, AC, d'autant que DE, & EH, ſont egales à AB, AC, à cauſe des quarrez AD, HF. D'autant donc que le quarré AD, eſt egal aux rectangles AF, FI, c'eſt à dire au Gnomon KLM, & au quarré CI; ſi l'on adiouſte le quarré commun HF; les quarrez AD, HF, ſeront egaux aux rectangles AF, DH, (chacun deſquels eſt contenu ſous la toute AB, & le ſegment AC,) & à CI, quarré de l'autre ſegment CB: Donc ſi vne ligne droicte &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.

SCHOLIE.

Autrement, d'autant que le quarré de AB, [b] *eſt egal aux quarrez de AC, CB, & à deux fois le rectangle contenu ſous AC, CB, ſi l'on adiouſte le quarré commun de AC, les quarrez de AB, AC, ſeront egaux au quarré de AC, deux fois & au quarré de CB, & à deux fois le rectangle contenu ſous AC, CB. Mais le rectangle contenu ſous AB, AC,* [c] *eſt egal au rectangle contenu ſous AC, CB, & au quarré de AC, & partant deux fois le rectangle contenu ſous AB, AC, eſt egal à deux fois le rectangle contenu ſous AC, CB, & à deux fois le quarré de AC, donc les quarrés de AB, AC, ſont egaux à l'autre quarré de CB, & à deux fois le rectangle contenu ſous AB, AC. Ce qu'il falloit demonſtrer.*

[b] 4. ſec.

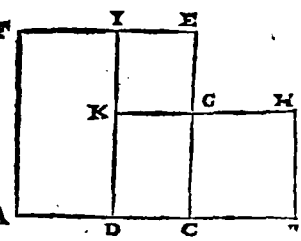
[c] 3. ſec.

Aux nombres, ſoit diuiſé le nombre 10. *comme l'on voudra en* 6. *&* 4. *Donc* 100. *nombre quarré de tout le nombre* 10. *&* 36. *nombre quarré de la partie* 6. *ſont egaux au nombre* 120. *qui eſt faict de* 10. *multiplié par* 6. *prins deux fois, & à* 16. *quarré de l'autre partie* 4. *comme il appert: ainſi de meſme:* 100. *nombre quarré de* 10.

& 16. nombre quarré de 4. ſont egaux à 80. faict de 10. multiplié par 4. prins deux fois, auec le nombre 36. quarré de l'autre partie. 6.

Nous adiouſterons icy le Theoréme ſuiuant, prins de Federic Commandin.

Si vne ligne droicte eſt couppee en parties inegales: les quarrez d'icelles parties, ſont egaux au rectangle, contenu deux fois ſous leſdictes parties, & au quarré de la ligne, par laquelle la plus grande partie excede la plus petite.



Soit la ligne droicte A B, couppee en parties inegales A C, C B, & ſoit A C, la plus grande partie: & ſoit priſe A D, egale à la moindre partie C B, afin que D C, ſoit l'excez, par lequel la partie A C, excede la partie C B. Ie dis que les quarrez des parties A C, C B, ſont egaux à deux fois le rectangle contenu ſous A C, C B, & au quarré de la ligne D C.

Car ſoient conſtituez les quarrez A E, C H, & ſoit menee D I, parallele à C E, & prolongee H G, au poinct K: d'autant donc que A D, eſt egale à C B, ſi l'on adiouſte la commune D C, la toute A C, c'eſt à dire C E, ſera egale à la toute D B: mais C G, eſt auſſi egale à C B, d'autant que C H, eſt vn quarré, donc la reſtante G E, ſera egale à la reſtante D C: & partant puis que I E, eſt auſſi egale

à D C, G E & I E, seront egales, & par ainsi E K, sera le quarré descrit de l'excés D C. Mais d'autant que les rectangles A I, D H, sont contenus sous les parties A C, C B, (car A C, est egale tant à l'vne qu'à l'autre A F, D B, & C B, egale tant à l'vne qu'à l'autre, A D, B H) il est manifeste que les quarrez de A E, & C H, descrits des parties A C, C B, sont egaux aux rectangles A I, D H, qui sont contenus sous les parties A C, C B, & à I G, quarré de l'excés D C. Ce qui est proposé.

SCHOLIE.

Aux nombres, soit diuisé le nombre 10. inegalement en 4. & 6. De sorte que la plus grande partie excede la moindre de 2. il est euident que 16. & 36. quarré des parties, lesquels adiouſtez font 52. sont egaux à 24. nombre produit de 4. multiplié par 6. prins deux fois & à 4. qui est le nombre quarré de l'excés 2. comme vouloit le theoréme.

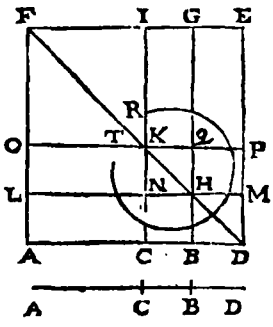
THEOREME 8. PROP. 8. viij.

Si vne ligne droicte est couppee, comme l'on voudra : quatre fois le rectangle, contenu sous la toute & vn des segments, auec le quarré de l'autre segment, est egal au quarré descrit de la toute & dudict segment, comme d'vne.

Soit A B, diuisee cõme l'on voudra au poinct C. Ie dis que quatre fois le rectangle contenu sous la toute A B, & le segmẽt C B, auec le quarré de l'autre segmẽt A C, est egal au quarré de la ligne cõpo-

ſee de la toute A B, & dudict ſegment C B, commed'vne.

Car ſoit prolongee A B, vers D, & ſoit poſee B D, egale à B C, & ſur la toute A D, ſoit deſcrit le quarré A E, & ayant mené le diametre D F, ſoient menees C I, B G, paralleles à D E, couppant le diametre aux poincts H, & K, par leſquels ſoient menees L M, O P, paralleles, à A D, leſquelles couppent les premieres paralleles, aux poincts N, & Q.



Premierement les parallelogrammes O I, N Q, B M, L G, C P, qui ſont à l'entour du diametre D F, ſeront quarrez par le 1. coroll. de la quatrieſme propoſition: & d'autant [a] que O K, eſt egale à A C; O I, ſera le quarré du ſegment A C. De rechef puiſque N H, eſt egale [b] à C B; N Q, ſera le quarré du ſegment C B, & partant egal au quarré B M, puis que C B, & B D, ſont egales. Partant chacune des lignes B H, H Q, eſt egale au ſegment C B; & par ainſi les deux rectangles A H, L Q, ſeront comprins ſous la toute A B, & le ſegment C B, [c] puis que L H, eſt egale à A B. Par meſme raiſon N G, H E, ſeront comprins ſous A B, & C B, puis que les lignes droictes N H, H M, [d] ſont egales à C B, & B D; & G H, E M, egales à F L, c'eſt à dire à L H, ou A B, ſon egale. Et d'autant que les quarrez N Q, B M, ſont egaux, ſi l'on adiouſte le commun rectangle K G; B M, & K G, enſemble

[a] 34. 1.
[b] 34. 1.
[c] 34. 1.

enſemble ſeront egaux au rectangle N G. Parquoy les cinq rectangles A H, L Q, H E, B M, & K G, qui conſtituẽt le Gnomon R S T, ſont egaux à quatre fois le rectangle contenu ſous la toute A B, & le ſegment C B. Or puis que le Gnomon R S T, & le quarré O I, ſont egaux au quarré A E; quatre fois le rectangle contenu ſous la toute A B, & le ſegment C B, auec le quarré de l'autre ſegment A C, eſt egal au quarré de la ligne A D, compoſee de A B, & dudict ſegment C B. Donc ſi vne ligne droicte eſt couppee comme, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.

SCHOLIE.

Autrement, d'autant que le quarré de A D, [c] *eſt egal aux quarrez de A B, B D, & à deux fois le rectangle contenu ſous A B, B D, c'eſt à dire aux quarrez A B, B C, qui ſont L G, B M, auec deux fois le rectangle contenu ſous A B, B C: mais les quarrez de A B, B C,* [f] *ſont egaux à 2. fois le rectangle contenu ſous A B, B C, & au quarré de A C: le quarré de A D, ſera egal à quatre fois le rectangle contenu ſous A B, B C, & au quarré de A C. Ce qu'il falloit demonſtrer.*

[c] 4. ſec.

[f] 7. ſec.

Maintenant ſoit diuiſé le nombre 10. cõme bon voudra en 6. & 4. le nõbre 240. qui eſt faict du tout 10. multiplié par la partie 6. quatre fois, auec le nombre 16. quarré de l'autre partie 4. c'eſt à dire 256. eſt egal au nombre quarré de 16. qui eſt compoſé du nombre donné 10. & de ladicte partie 6. comme il eſt manifeſte. En la meſme maniere le nombre 160. qui eſt faict du tout 10. quatre fois multiplié par la partie 4. auec 36. quarré de l'autre partie 6. c'eſt à dire 196. eſt egal au quarré du nombre 14. compoſé de 10. & 4. comme il eſt euident. Par ceſte propoſition 8.

autrement que par les precedentes, nous trouuerons vn nombre quarré, auec lequel quelconque nombre donné eſtant adiouſté ſera ſemblablement vn nombre quarré. Car ſi de la quatrieſme partie du nombre donné l'on oſte 1. le reſte ſera le coſté du nombre quarré requis. Comme ſi le nombre donné eſt 32 ſoit oſté 1. de ſa quarte partie 8. le reſte 7 ſera le coſté du quarré requis, lequel ſera 49. auec lequel le nombre propoſé 32. adiouſté faict 81. duquel le coſté eſt 9. touſiours plus grand de l'vnité, que la quatrieſme partie du nombre donné. La raiſon de cecy eſt facile. Car puis que le rectangle A H, prins 4. fois auec le

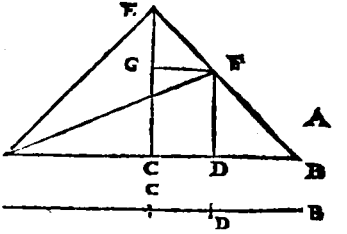
§ 8. ſec. *quarré O I, 8 eſt egal au quarré A E, ſi le rectangle A H, eſt poſé 8. qui eſt la 4. partie du nombre donné, & le quarré C H, & auſſi ſon coſté ſoit poſé 1. la ligne A B, ſera 8. afin que appliquee à C B, 1. elle face 8. eſtant donc 1. le reſte ſera A C, coſté du quarré O I, 7. Ce qui eſt requis. Pour euiter les fractions il faut que le nombre ſe puiſſe diuiſer en quatre parties egales.*

Au contraire nous trouuerons ſemblablement vn nombre quarré, duquel eſtant ſouſtraict quelconque nombre donné, reſte auſſi vn nombre quarré. Car ſi à la quatriéme partie du nombre donné, l'on adiouſte 1. l'on aura le coſté du quarré requis. Soit derechef le nombre donné 32. ſi à la 4. partie 8. l'on adiouſte 1. l'on aura 9. du quarré duquel 81. ſi l'on oſte le nombre propoſé 32. reſtera le nombre quarré 49 duquel le coſté 7. eſt touſiours moindre que la 4 partie du nombre donné de 1. La raiſon eſt, d'autant que ſi la quatrieſme partie du Gnomon R S T, (qui eſtant oſté du quarré A E, demeure O I,) c'eſt à dire le rectangle A H, que nous auons monſtré eſtre la 4. partie du Gnomon R S T, ſoit poſé de 8. qui eſt la 4. partie du nombre donné 32. & le quarré B M, ſoit 1. & partant ſon coſté B D, auſſi 1. la ligne A B, ſera 8. comme il eſt dict: donc tout le coſté A D, ſera 9. du quarré duquel A E, 81. ſi

l'on oſte le Gnomon R S T, que nous auons poſé 32. le reſte quarré O I, ſera 49. duquel le coſté A C, eſt 7. D'autant que A B, eſtoit 8. & C B, c'eſt à dire B D, ſon egale, 1. lequel A C, eſt touſiours, de l'vnité moindre que la 4. partie du nombre donné, comme il eſt dict.

THEOREME 9. PROP. 9. ix.

Si vne ligne droicte eſt couppee en 2. parties egales, & en 2. parties inegales: les quarrez des ſegments inegaux de la toute, ſont doubles du quarré de la moitié, & du quarré de la ſection du milieu.



Soit couppee la droicte ligne A B, en deux egalemẽt au poinct C, & en 2. inegalemẽt au poinct D. Ie dis que les quarrez des ſegments inegaux, A D, D B, enſemble, ſont doubles des quarrez enſemble, qui ſont faicts dẽ la moitié A C, & de la ſection du milieu C D.

Du poinct C, ſoit menee C E, à angles droicts à A B, & poſee egale à A C, & ſoient conioinctes A E, E B; & de D, ſoit auſſi menee D F, à angles droicts à A B, couppãt E B, au poinct F, par lequel ſoit menee F G, parallele à A B, couppant C E, au poinct G, & finalement ſoit ioincte A F. D'autant qu'au triangle A C E, les deux oſtez A C, C E, ſont egaux, les 2. angles C A E, C E A, ſeront egaux; mais A C E, eſt droict: donc a 5. 1.

b 32. 1. les deux b autres vaudront vn droict, & partant l'angle A E C, ſera demi-droict. Par la meſme raiſõ, l'angle B E C, ſera mõſtré demi-droict, & par conſequent le tout A E B, ſera droict. De rechef, c 29. 1. d'autant qu'au triangle F G E, l'angle E G F, c eſt egal au droict E C B, l'externe à l'interne; les deux d 32. autres d ſeront egaux à vn droict: mais il eſt demonſtré que l'angle F E G, eſt demi-droict; donc E F G, ſera auſſi demi-droict, & partant tous deux egaux: e 6. 1. e donc les coſtez E G, G F, ſeront egaux entr'eux. En la meſme maniere l'on monſtrera que les deux lignes F D, & D B, ſont egales entr'elles.

Or d'autant qu'au triangle A C E, l'angle C, eſt f 47. 1. droict, le f quarré du coſté A E, ſera egal au deux quarrez de A C, C E, leſquels ſont egaux entr'eux, eſtant les lignes A C, C E, egales, donc le quarré de A E, ſera double du quarré de A C. Derechef, d'autant qu'au triangle E G F, l'angle G, eſt droict g 47. 1. & les deux coſtez G E, G F, egaux, g le quarré de E F, ſera double du quarré de G F, c'eſt à dire du quarré de C D, qui eſt h egale à G F. Donc les 2. h 34. 1. quarrez de A E, & E F, ſont doubles des deux quarrez de A C, & C D: Mais iceux quarrez de i 47. 1. A E, & E F, i ſont egaux au quarré de A F; & le quarré de A F, egal aux deux quarrez de A D, D F. Donc les deux quarrez de A D, D F, ſont doubles des deux quarrez de A C, C D; mais le quarré de D F, eſt egal au quarré de D B, car icelles lignes ſont monſtrees egales. Pareillement donc les quarrez des ſegments A D, D B, ſeront auſſi doubles des quarrez de A C, & C D, moitié de la ligne A B, & de la ſection du milieu. Donc ſi vne ligne &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.

SCHOLIE.

Autrement, d'autant que le quarré de la ligne A D, eſt k *egal aux deux quarrés de A C, C D, & à deux fois le rectangle contenu ſous A C, C D; ſi l'on adiouſte le commun quarré de D B, les deux quarrez de A D, & de D B, ſeront egaux aux trois quarrez de A C, C D, & D B, & à deux fois le rectangle contenu ſous A C, C D, ou ſous B C, C D; mais les quarrez de B C, ou A C; & de C D, ſont* l *egaux au quarré de D B, & à deux fois le rectangle contenu ſous B C, C D. Donc les quarrez de A D, D B, ſont egaux, à deux fois les quarrez de A C, C D, & partant doubles d'iceux. Ce qu'il fallоit demonſtrer.*

k 4. ſec.

l 7. ſec.

Commandin demonſtre cette propoſition autrement en cette maniere.

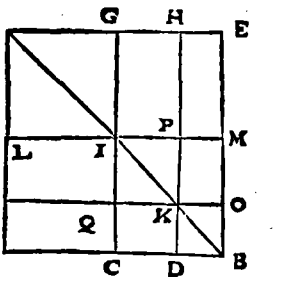
D'autant que A C, eſt egale à C B, & C B, excede C D, de D B; A C, excedera pareillement la meſme C D, de D B. Partant, comme il a eſté demonſtré à la ſeptieſme propoſition de ce liure, les quarrez de A C, C D, ſont egaux à deux fois le rectangle contenu ſous A C, C D, & au quarré de D B, parquoy les quarrez de A C, C D, & deux fois le rectangle contenu ſous A C, C D, auec le quarré de D B, ſont doubles des quarrez de A C, C D: mais le quarré de A D, eſt m egal aux quarrez de A C, C D, & à deux fois le rectangle contenu ſous A C, C D. Donc les quarrez de A D, D B, ſont doubles des quarrez de A C, C D.

m 4. ſec.

De rechef, ſoit le nombre 10. *diuiſé egalement en* 5. *& inegalement en* 7. *& 3. la moyenne ſe-*

ction ſera 2. comme il eſt dict en la 5. propoſition. Les quarrez des parties inegales 7. & 3. qui ſont 49. & 9. ſont doubles de 25. & 4. quarrez de la moitié & de la moyenne ſection, comme il eſt manifeſte.

Nous pourrons auſsi demonſtrer cette neufieſme propoſition par la conſtruction comme les precedentes en cette maniere.



Soit deſcrit le quarré A E, de toute la ligne A B, & ayant mené le diametre B F, par les poincts C, & D, ſoient menees C G, D H, paralleles aux coſtez B E, ou A F, couppant le diametre B F, aux poincts I, & K, par leſquels ſoient menees L M, N O, paralleles à A B, ou E F, couppant les premieres aux poincts I, & K. D'autant que, par le Coroll. 1. de la 4. propoſition de ce liure, L G, Q P, D O, C M, N H, ſont quarrez, & L I, 34. 1. eſt egale à A C, & Q K, à C D, & N K, à A D; les parallelogrãmes N H, & D O, ſeront les quarrez des parties inegales A D, D B, & L G, P Q, quarrez de la moitie A C, & de la moyenne ſection C D. Ie dis que ceux là ſont doubles de ceux-cy.

Car d'autant que les quarrez N H, D O, excedent les quarrez L G, Q P, du quarré D O, & des deux rectangles N I; I H; mais le quarré D O, & les rectãgles N I, I H, ſont egaux aux quarrez L G, Q P, comme il ſera preſentement demonſtré; il

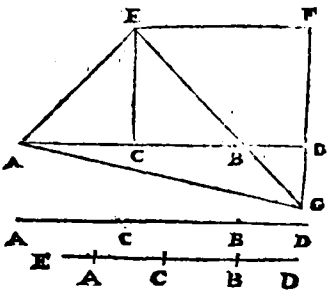
eſt manifeſte, que les quarrez N H, D O, ſont doubles des quarrez L G, Q P, puis que ceux cy ſont deux fois contenus en ceux-là. Or que ces trois rectangles D O, N I, I H, ſoient egaux aux quarrez L G, Q P, il ſera ainſi demonſtré. Le rectangle N I, [o] eſt egal au rectangle Q M, d'autant que N Q, Q O, [p] ſont egales aux egales A C, C B. Donc le rectangle N I, contient le quarré Q P, & plus le rectangle K M. Si donc K M, D O, I H, ſont egaux au quarré L G, neceſſairement D O, N I, I H, ſeront egaux aux deux quarrez, L G, Q P. Or que R M, D O, I H, ſoient egaux au quarré L G, nous le demonſtrerons ainſi. Les rectangles [q] K M, D O, enſemble ſont egaux à P E, d'autant que B M, M E, ſont egales, puis que B M, eſt egale à C B, à cauſe du quarré C M, [r] & M E, eſt egale, à F L, c'eſt à dire à L I, à cauſe du quarré L G, [s] c'eſt à dire à A C; adiouſtant donc le commun quarré I H, les rectangles K M, D O, I H, ſeront egaux à I E, c'eſt à dire au quarré L G, [t] d'autant que I E, L G, ſont egaux à cauſe des lignes droictes L I, I M, [u] leſquelles ſont egales aux egales A C, C B. Ce qui eſt propoſé.

o 36. 1.
p 34. 1.
q 36. 1.
r 34. 1.
s 34. 1.
t 36. 1.
u 34. 1.

THEOREME 10. PROP. 10. X.

Si vne ligne droicte eſt couppee en deux parties egales, & qu'on luy adiouſte directement quelque ligne droicte: les deux quarrez enſemble de la toute auec l'adiouſtee, & de l'adiouſtee ſont doubles, du quarré deſcrit de la moitié, & du quarré de la ligne compoſee de la moitié, & de l'adiouſtee comme d'vne.

Soit couppee A B, en deux egalement au poinct C, & soit adiouſtee directement à icelle B D. Ie dis que les deux quarrez de A D, & de D B, ensemble ſont doubles des quarrez ensemble, qui ſont deſcrits de A C, & C D.



Car ſoit menee C E, à angles droicts à la ligne A B. & poſee egale à la moitie A C, & ſoient conioinctes les droictes lignes A E, E B, & par D, ſoit menee D F, parallele à C E, rencontrant E B, prolongee au poinct G, & par E, ſoit menee E F, parallele à C D, couppant D F, au poinct F, & ſoit conioincte la droicte A G; l'on monſtrera maintenant que l'angle A E B, eſt droict comme en la precedente propoſition, & C E B, demi droict;

[a] 29. 1. [a] & partant ſon alterne E G F, pareillement demi-

[b] 34. 1. droict; mais l'angle [b] F, eſt droict eſtant oppoſé

[c] 32. 1. au droict C, au parallelogramme C F. [c] Donc l'autre F E G, ſera auſſi demi droict, & partant egal à

[d] 6. 1. E G F, parquoy E F, [d] F G, oppoſees aux angles F E G, E G F, ſont pareillement egales. Par le meſme diſcours on monſtrera que B D, D G, ſont egales, d'autant que l'angle B D G, eſt droict & B G D, demi droict &c.

[e] 47. 1. D'autant donc que le quarré de A E, [e] eſt egal aux quarrez egaux des lignes droictes egales A C, C E, icéluy quarré de A E, ſera double du quarré de A C. De rechef d'autant que le quarré de E G,

[f] 47. 1. [f] eſt egal aux quarrez egaux des lignes droictes

egales E F, F G, icelluy quarré de EG, ſera pareillement double, du quarré de E F, ou de C D, ſon egale, car g C D, eſt egale à E F: donc les deux quarrez de A E, EG, ſont doubles des quarrez de de A C, C D. Mais le quarré de A G, eſt egal aux h quarrez de A E, E G, & partant double des quarrez de A C, C D, & les quarrez de A D, D G, h ſont egaux au quarré de AG. Dõc les quarrez de A D, D G, ſont doubles des quarrez deſcrits de AC, CD. Donc puis que le quarré de D G, eſt egal au quarré de ſõ egale BD: les quarrez de AD, DB, ſeront pareillement doubles des quarrez deſcrits de A C, CD. Partant ſi vne ligne droicte eſt coupée en deux egalement &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.

g 34. 1.

h 47. 1.

SCHOLIE.

Autrement, d'autant que le quarré de AD, i eſt egal aux quarrez de AC, CD, & à deux fois le rectangle contenu ſous AC, CD, ou ſous BC, CD, ſi l'on adiouſte le commun quarré de BD, les deux quarrez de AD, & de BD, ſeront egaux aux trois quarrez, de AC, CD, BD, & à deux fois le rectangle contenu ſous BC, CD. k mais les quarrez de CD, & BC, c'eſt à dire les quarrez de AC, CD, ſont egaux au quarré de BD, & à deux fois le rectangle contenu ſous BC, CD. Donc les quarrez de AD, BD, ſont egaux aux quarrez de AC, CD, deux fois; & partant, les quarrez de, AD, BD, ſont doubles des quarrez AC, CD. Ce qu'il falloit demonſtrer.

i 4. ſec.

k 7. ſec.

Commandin demonſtre cecy autrement. D'autant que AC, eſt egale à CB, & CD, excede CB, de BD, la meſme CD, excedera pareillement AC, du meſme excés BD, partant comme il a eſté monſtré à la 7. pro. de ce liure, les quarrez de AC, CD, ſont egaux à deux fois

le rectangle contenu ſous A C, C D, & au quarré de B D; & pour ceſte cauſe les quarrez A C, C D, & deux fois le rectangle contenu ſous A C, C D, auec le quarré de B D, ſont doubles des quarrez de A C, C D:
mais le quarré de A D [l] *eſt egal aux quarrez de A C, C D, & à deux fois le rectangle contenu ſous A C, C D. Donc les quarrez de A D & de B D, ſont doubles des quarrez, de A C, C D.*

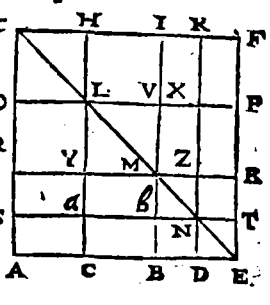
l 4. ſec.

Le nombre 10. ſoit diuiſé en deux parties egales 5. & 5. auquel ſoit adiouſté quelconque nombre 3. de ſorte que tout le nombre compoſé ſoit 13. Donc les nombres quarrez 169. & 9. des nombres 13. & 3. ſont doubles des nombres quarrez 25. & 64. qui ſont produicts de ces nombres 5. & 8. comme il eſt manifeſte.

Ceſte 10. propoſition ſe peut auſsi facilement demonſtrer par la 9. precedente, comme la 6. a eſté demonſtrée cy-deuant par la 5. Car ſoit la ligne droicte A B, couppee en deux egalement par le poinct C, & à icelle ſoit adiouſtee quelconque ligne B D. Ie dis que les 2. quarrez de A D, B D, enſemble ſont doubles des deux quarrez A C, & C D, enſemble. Car adiouſtant à la droicte A D, de la part de A, la droicte ligne A E, egale à l'adiouſté B D; la toute E D, ſera couppee en deux egalement au poinct C, & inegalement au poinct B, d'autant que E A, A C, ſont egales à D B, B C. Pareillement E B, ſera egale à A D, d'autant que E A, eſt egale à D B, & A B, eſt commune à l'vne & à l'autre. [m] *Donc les quarrez des lignes E B, B D, c'eſt à dire de A D, B D, ſont doubles des quarrez des lignes E C, C B, c'eſt à dire de C D, A C, ce qui eſt propoſé.*

m 9. 2.

Si l'on veut demonſtrer cette 10. *propoſition par la conſtruction comme la* 9. *precedente a eſté demonſtree, l'on le fera en cette maniere.*



Ayant prolongé A D, au poinct E, en ſorte que D E, ſoit egale à B D, adiouſtee, & ayant deſcrit le quarré A F, de la toute A E, & mené le diametre E G, ſoient menees par les poincts C, B, D, les lignes droictes C H, B I, D K, paralleles à A G, E F, couppantes le diametre EG, aux poincts L M N, par leſquels ſoient menees O P, Q R, S T, paralleles aux coſtez A E, G F, couppant les premieres aux poincts V, X, Y, Z, a, b.

D'autant que tous les rectangles qui ſont à l'entour du diametre [n] G E, ſont quarrez, [o] & S N, eſt egale à A D, & O L, à A C, & a N, à C D, le rectangle S K, ſera le quarré de A D, & D T, ſera le quarré de D E, ou de B D, & O H, a X, quarrez de A C, C D. Ie dis que les quarrez S K, D T, enſemble, ſont doubles des quarrez O H, a X, enſemble.

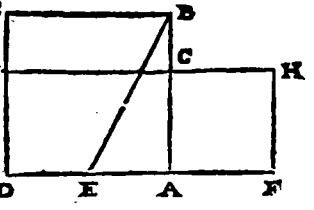
[n] *Coroll.* 1. 4. 2.
[o] 34. 1.

Car d'autant que les quarrez S K, D T, excedẽt les quarrez O H, a X, du quarré D T, & des rectangles, S L, L K: mais le quarré D T, & les rectangles SL, LK, ſont egaux aux quarrez, O H, a X, comme il ſera maintenant demonſtré; il appert manifeſtemẽt que les quarrez SK, DT, ſont doubles des quarrez O H, a X, puis que ceux-cy ſont

contenus deux fois en ceux-là. Or que ces trois rectangles D T, S L, L K, soient egaux aux quarrez O H, ⍺ X, il sera ainsi demonstré. Le re-
P 36. 1. ctangle Q L, P est egal au quarré O H, à cause
q 34. 1. que les lignes Q O, O G, sont egales q d'autant que Q O, est egale à Y L; & Y L, egale à O G, à cause des quarrez egaux Y V, O H, des coste z
r 34. 1. egaux O L, L V. Semblablement S Y, est r egal à ⍺ M, & L I, à Y V, & V K, à V Z, & D T, à b Z. Donc les cinq rectangles Q L, S Y, L I, V K, D T, c'est à dire les trois rectangles D T, S L, L K, sont egaux aux cinq rectangles O H, ⍺ M, Y V, V Z b Z, c'est a dire aux deux quarrez O H, ⍺ X. Ce, qui est proposé.

23. PROBLEME 1. PROP. 11.

Coupper vne ligne droicte donnee de telle sorte, que le rectangle contenu sous la toute & vn des segments, soit egal au quarré de l'autre segment.



Soit la ligne droicte A B, qu'il faut coupper en sorte que le rectangle cõtenu sous la toute A B, & vn des segments, sçauoir le moindre, soit egal au quarré de l'autre segment, sçauoir le plus grand.

Soit descrit le quarré A C, de la ligne droicte A B, & ayant diuisé le costé D A, en deux egalement au poinct E, soit menee E B, & soit prolon-

gee D A, au poinct F, de sorte que E F, soit posee egale à E B, & de A B, soit retranchee A G, egale à A F, car A B, est plus grande que A F: [a] puis que E A, A B, sont plus grandes que E B, ou E F, son egale: ostant donc la partie commune E A, restera A B, plus grande que A F. Ie dis que A B, est couppee au poinct G, en sorte que le rectangle cõtenu sous A B, B G, est egal au quarré de A G, de sorte que B G, est le plus petit, & A G, le plus grãd. Car soit descrit A H, quarré de A G, & prolongé le costé H G, vers I, en sorte que H I, couppe D C, au poinct I, laquelle [b] sera parallele à F D, & B C, partant C G, & D H, seront parallelogrammes rectangles, & C G, sera contenu sous la toute A B, & le segment B G, car C B, est egale à A B, lequel rectangle est egal au quarré G F, de l'autre segment A G. D'autant que D A, estant couppee en deux egalement à E, à laquelle l'on a adiousté A F, [c] le rectangle contenu sous D F, F A; c'est à dire le rectangle D H, (car F H, est egale à F A,) auec le quarré de la moitié A E, est egal au quarré E F; c'est à dire au quarré de E B, qui est egale à E F: mais le quarré de E B, est egal [d] aux quarrez de E A, & A B. Parquoy le rectangle D H, auec le quarré de A E, sera aussi egal aux quarrez de A E, A B: ostant donc le commun quarré de A E, restera le rectangle D H, egal au quarré A B, qui est le quarré A C. Donc si l'on oste le commun rectangle D G, restera le rectangle G C, egal au quarré G F. Ce qui est proposé. Nous auons donc couppé &c. Ce qu'il falloit faire.

[a] 20. 1.
[b] 34. 1.
[c] 6. 2.
[d] 47. 1.

SCHOLIE.

Ce probléme ne peut en aucune maniere eſtre demonſtré par les nombres. Car aucun nombre ne peut eſtre diuiſé de telle ſorte en deux, que le nombre produit du tout multiplié par vne des parties, ſoit egal au nombre quarré de la partie reſtante, comme il ſera demonſtré à la 14. propoſition du 9. liure, où les 10. theorémes precedents de ce liure, ſeront demonſtrez par les nombres.

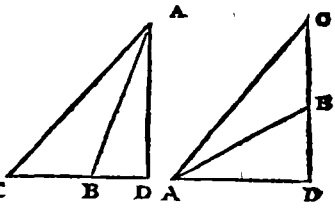
La practique de cette propoſition n'eſt dificile, car par le poinct A, où ſe doit terminer le plus grand ſegment de la ligne donnee AB, ayant mené AD, à angles droicts egale à AB, & couppé icelle AD, en deux egalement; ſi à l'interualle EB, l'on couppe EA, prolongee en F; AF, ſera egale au plus grand ſegment AG, comme il a eſté demonſtré.

xij. ## THEOREME 11. PROP. 12.

Aux triangles amblygones, le quarré du coſté qui ſouſtient l'angle obtus, eſt plus grand que les quarrez des coſtez qui contiennent l'angle obtus, de deux fois le rectangle contenu ſous l'vn des coſtez qui ſont à l'entour de l'angle obtus, ſçauoir celuy, ſur lequel eſtant prolongé, tombe la perpendiculaire, & la ligne priſe au dehors entre la perpendiculaire & l'angle obtus.

Soit le triangle A B C, ayant l'angle A B C, obtus & du poinct A, ſur le coſté CB, prolongé de la
a 12. 1. part de l'angle obtus a ſoit menee la perpendiculaire A D. Ie dis que le quarré du coſté A C, oppoſé à l'angle obtus eſt plus grand que les quarrez

des costez A B, B C, qui contiennent l'angle obtus, de deux fois le rectangle contenu sous C B, B D. C'est à dire, le quarré du costé A C, est egal aux deux quarrez des costez A B, B C, & à deux fois le rectangle contenu sous C B, B D.



Car puis que C D, est diuisee comment que ce soit par B, [b] le quarré de C D, est egal aux 2. quarrez de C B, B D, & à deux fois le rectangle contenu sous C B, B D; adiouſtãt dõcle cõmun quarré de A D, les 2. quarrez de C D, & D A, seront egaux aux trois quarrez des lignes C B, B D, D A, & à deux fois le rectangle contenu sous C B, B D: mais le quarré de A C, [c] est egal aux deux quarrez de C D, D A. Iceluy quarré de A C, sera donc aussi egal aux trois quarrez, de C B, B D, D A, & à 2. fois le rectangle contenu sous C B, B D. Donc puis que le quarré de B A, est [d] egal aux deux quarrez de B D, D A; le quarré de A C, sera egal aux quarrez de C B, B A, & à deux fois le rectangle contenu sous C B, B D. Ce qui est proposé. Donc aux triangles amblygones &c. Ce qu'il falloit demonstrer.

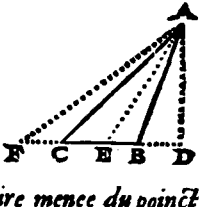
[b] 4. sec.

[c] 47. 1.

[d] 47. 1.

SCHOLIE.

Euclide demonstre en ce lieu, de combien le quarré du costé opposé à l'angle obtus, au triangle amblygone, est plus grand que les quarrez des deux autres costez: en la suiuante 13. proposition, il monstrera de combien le quarré du costé opposé à l'angle agu, est moindre que les quarrez des deux autres costez.



Or que la perpendiculaire menee du poinct A, tombe ſur le coſté B C, prolongé de la part de l'angle obtus, nous le demonſtrerons en brief. Soit au triangle A B C, l'angle obtus A B C, & le coſté C B, prolongé de la part de B. Je dis que la perpendiculaire menee du poinct A, tombe hors le triangle ſur le coſté C B, prolongé, comme A D.

Car ſi elle tomboit dans le triangle, comme eſt la droicte A E, les deux angles A B E, A E B, ſeroient plus grands que 2. droicts, puis que celuy là eſt obtus & cetuy-cy droict, ce qui a eſt abſurde. Mais ſi elle tomboit hors le triangle ſur le coſté B C, prolongé de la part de C, telle qu'eſt la droicte ligne A F; de rechef au triangle A B F, les deux angles A B F, A F B, ſeroient plus grands que deux droicts, puis que celuy-là eſt obtus & ceſtuy-cy droict. Ce qui eſt abſurde.

a 17. 1.

SCHOLIE.

Henrion a mis en ce theoréme: de la quantité de deux fois le rectangle compris du coſté contenant l'angle obtus, &c. *Mais s'il entendoit le texte d'Euclide, il trouveroit ainſi.* ἐν τοῖς ἀμβλυγωνίοις τρίγωνοις, τὸ ἀπὸ τῆς τὴν ἀμβλεῖαν γωνίαν ὑποτεινούσης πλευρᾶς τετράγωνον, μεῖζόν ἐστι τῶν ἀπὸ τῶν τὴν ἀμβλεῖαν περιεχουσῶν πλευρῶν τετραγώνων, ᾧ περιέχεται δὶς ὑπό τε μιᾶς τῶν περὶ τὴν ἀμβλεῖαν γωνίαν, ἐφ' ἣν ἐκβληθεῖσα ἡ κάθετος πίπτει, καὶ ἀπολαμβανομένης ἐκτὸς ὑπὸ τῆς καθέτου πρὸς τῇ ἀμβλείᾳ γωνίᾳ. *C'eſt à dire aux triangles amblygones, le quarré du coſté qui ſouſtient l'angle obtus eſt plus grand que les quarrez des coſtez, qui contiennent l'angle obtus de la quantité de deux fois le rectãgle cõtenu ſous l'vn des coſtez qui ſont à l'entour de l'angle obtus, ſçauoir celuy ſur lequel eſtant prolongé tombe la*

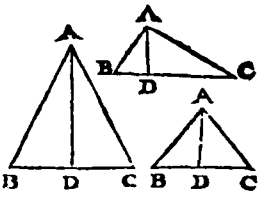
tombe la perpendiculaire, & la ligne prise au dehors entre la perpẽdiculaire & l'angle obtus: il est dõc manifeste qu'il faut traduire τὴν μεῖζον πλευρὰν τῆς ἀμβλειᾶς γωνίας, *&c.* sous l'vn des costez qui sont autour de l'angle obtus, ou qui contiennẽt l'ãgle obtus, *&* nõ du costé contenãt l'angle obtus, *cõme il dict attendu aussi qu'vn costé ne contient pas vn angle &c. En la 5. proposition de ce liure, où il y a*, le rectangle contenu sous les parties inegales de la toute, *il a laissé ce mot* τῆς ὅλης, de la toute, *ce qu'il ne deuoit faire, tant par ce qu'il est au texte d'Euclide, que d'autant (comme il est demonstré) que le rectangle sous A D, D B, parties inegales de la toute A B, auec le quarré de la partie du milieu, est egal au quarré de la moitié de la toute, & non pas le rectangle sous A C, C D, qui sont aussi parties inegales. Voyez la figure de la 5. proposition: neantmoins il est excusable puis qu'il a faict comme en sa coppie.*

THEOREME 12. PROP. 13. xiij.

Aux triangles oxygones, le quarré du costé qui soustient l'angle agu, est moindre que les quarrez des costez qui contiennent l'angle agu, de deux fois le rectangle contenu sous l'vn des costez qui sont autour de l'angle agu, sçauoir celuy sur lequel tombe la perpendiculaire, & la ligne prise au dedans, entre la perpendiculaire & l'angle agu.

Soit le triangle oxygone A B C, & de l'angle agu A, soit menee la perpendiculaire, tombant sur le costé B C. Ie dis que le quarré du costé A B, op-

posé à l'angle agu A C B, eſt moindre que les quarrez des coſtez A C, C B, qui ſont autour de l'angle agu C, de deux fois le rectangle contenu ſous B C, C D, c'eſt à dire, le quarré du coſté A B, auec deux fois le rectangle contenu ſous B C, C D, eſt egal aux deux quarrez des coſtez A C, C B.



Car puis que la droicte ligne B C, eſt diuiſee comment que ce ſoit au poinct D, les quarrez de
a 7. ſec. a BC, & de CD, ſont egaux à deux fois le rectãgle contenu ſous B C, C D, & au quarré de B D. Adiouſtant donc le commun quarré de D A, les trois quarrez de B C, C D, D A, ſeront egaux à deux fois le rectangle contenu ſous B C, C D, & aux 2.
b 47. 1. quarrez de B D, D A: b mais le quarré de C A, eſt egal aux deux quarrez de C D, D A. Donc les deux quarrez de B C, C A, ſont egaux à deux fois le rectangle contenu ſous B C, C D, & aux deux
c 47. 1. quarrez de B D, D A. Donc puis c que le quarré de A B, eſt egal aux deux quarrez de B D, DA; les deux quarrez de B C, C A, ſeront egaux à deux fois le rectangle contenu ſous B C, C D, & au quarré de A B, ce qui eſt propoſé. En la meſme maniere l'on demonſtrera que les quarrez de AB, B C, ſont egaux à deux fois le rectangle contenu ſous, C B, B D, & au quarré de A C, c'eſt à dire que le quarré du coſté A C, eſt plus petit que les quarrez des coſtez A B, B C, de deux fois le rectangle contenu ſous C B, B D. Donc aux triangles oxygones &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.

SCHOLIE.

De trois propositions, sçauoir la 47. du liure 1. & de la 12. & 13. de cetuy-cy, nous cognoissons quel est le quarré de quelconque costé d'vn triangle, comparé auec les quarrez des deux autres costez, sçauoir, s'il est egal à iceux, ou plus grand ou plus petit, & de combien il est plus grand ou plus petit, en tant que l'angle opposé à iceluy sera droict, obtus ou agu.

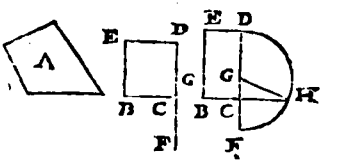
Or combien que Euclide propose ce theoréme, seulement des triangles oxygones, sçauoir, qui ont tous les angles agus; le mesme toutesfois est aussi veritable des triangles rectangles, & amblygones, comme il appert par les deux derniers triangles, en la figure precedente. Car necessairement les deux autres angles de ces triãgles sont agus, comme il se peut colliger manifestement, de la 17. ou 32. du premier liure. Il faut

seulement obseruer cecy que aux triangles rectangles & amblygones, la perpendiculaire se doit mener de l'angle droict, ou obtus, mais aux oxygones, duquel que l'on veut, indifferemment. Partant, ce faisant la perpendiculaire tombera tousiours dedans le triangle, comme Euclide l'a pris en la demonstration: ce qui sera facilement ainsi demonstré. Au triangle A B C, soient les deux angles A B C, A C B, agus, & l'angle B A C, soit droict ou obtus, ou agu. Ie dis que la perpendiculaire menee du poinct A, tombera dans le triangle. Car si elle tomboit dehors sur C B, prolongee de la part de B, comme est A E, au triangle A B E, l'angle d externe A B C, agu, seroit plus grand que l'interne & opposé A E B, qui est droict, ce qui est absurde. Mais si elle d 16.1.

tomboit dehors outre B C, prolongee de la part de C, comme eſt la droicte ligne A F, il s'en enſuiuroit la meſme abſurdité, comme il eſt manifeſte.

xiv. PROBLEME 2. PROP. 14.

Conſtituer vn quarré, egal à vn rectiligne donné.



Soit le rectiligne dõné, auquel il faut conſtituer vn quarré egal. Soit [a] conſtitué le parallelogramme rectangle B C D E, egal au rectiligne A, duquel vn des coſtez, comme D C, ſoit prolongé à F, & ſoit faicte C F, egale à C B. Et ſoit diuiſee D F, en deux egalement au poinct G, lequel ſera meſme que le poinct C, ou non; que s'il tombe ſur le poinct C, la droicte ligne B C, (puis qu'elle eſt faicte, egale à C F,) ſera egale à C D. Partant le rectangle B D, [b] ſera quarré, puis que les coſtez B E, E D, ſont egaux aux oppoſez B C, C D; l'on aura donc le requis. Mais ſi le poinct G, ne tombe ſur le poinct C, du poinct G, comme centre, & de l'interualle G F, ou G D, ſoit deſcrit le demi-cercle F H D, & ſoit prolongee B C, iuſques au poinct de la circonference H, ſoit auſſi menee G H. Ie dis maintenant que le quarré de la droicte ligne C H, eſt egal au rectiligne A.

a 45. 1.

b 34. 1.

Car d'autant que D F, eſt diuiſee en deux egalement à G, & inegalement à C, le rectangle contenu ſous D C, C F, ſçauoir le rectangle B D, [c] auec le quarré de G C, eſt egal au quarré de G F, ou de

c 5. ſec.

G H, ſon egale ; mais le quarré de G H, eſt a egal aux deux quarrez G C, C H, donc le rectangle B D, auec le quarré de G C, eſt auſſi egal aux deux quarrez de G C, C H. Donc ſi l'on oſte le commun quarré de G C, demeurera le rectangle B D, c'eſt à dire le rectiligne A, egal au quarré de C H. Donc nous auons conſtitué vn quarré egal à vn rectiligne donné. Ce qu'il falloit faire. a 34. 1.

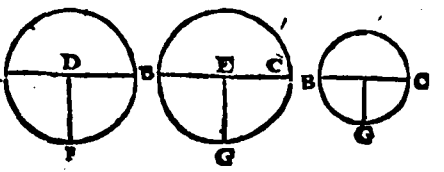
Fin du ſecond liure.

LIVRE TROISIESME,
DES ELEMENTS D'EVCLIDE.

DEFINITIONS.

1. Cercles egaux, ſont ceux deſquels les diametres ſont egaux; ou deſquels les lignes droictes menees des centres aux circonferences ſont egales.

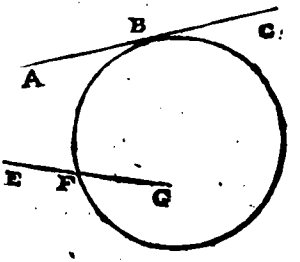
D'AVTANT qu'Euclide demonſtre en ce troiſiéme liure, diuerſes proprietez des cercles; il explique auparauãt quelques termes, dont l'vſage ſera frequẽt en iceluy. Il enſeigne donc premierement, que ces cercles-là ſont egaux, deſquels



les diametres ou demi-diametres ſont egaux. Car puis que le cercle eſt deſcrit de la reuolutiõ du demi diametre, à l'ẽtour d'vne de ſes extremitez fixe & immobile, comme il eſt dict au premier liure, il eſt manifeſte que ces cercles-là ſont egaux deſ-

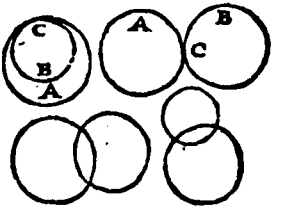
quels les demi-diametres ou les lignes droictes menees des centres aux circonferẽces sont egales: ou desquels les diametres entiers sont egaux: comme si les diametres A B, B C, sont egaux; ou les droictes lignes D F, E G, menees des centres D, & E, les cercles A F B, B G C, seront egaux: au contraire si les cercles sont egaux, les diametres, ou lignes droictes menees des centres aux circonferences seront egales. Il appert de cecy que les cercles desquels les diametres ou les lignes droictes menees des centres aux circonferences sont inegales, sont inegaux; & partant celuy duquel le diametre est plus grand, est aussi plus grand: & au contraire des cercles inegaux, les diametres sont inegaux.

2. Vne ligne droicte est dicte toucher le cercle, laquelle touchant le cercle, si elle est prolongee, ne le couppe poinct.



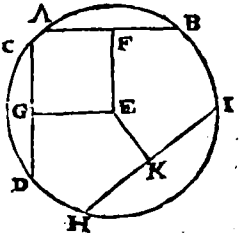
Comme A B, sera dicte toucher le cercle, si elle le touche tellemẽt à B, qu'estant prolongee vers C, ne le couppe point. Mais d'autant que E F, atteint tellement le mesme cercle au poinct F, qu'estant prolongee au poinct G, le couppe & tombe au dedans, elle ne sera dicte toucher le cercle, mais le coupper.

3. Les cercles sont dicts se toucher l'vn l'autre, lesquels en se touchant l'vn l'autre, ne se couppent poinct.



Semblablement les deux cercles A C, B C, sont dicts se toucher à C, s'ils se touchent tellement, qu'ils ne se couppent point, soit que l'vn soit dedans l'autre, ou dehors. Que si deux cercles s'attaignẽt autrement, ils seront dicts se coupper.

4. Au cercle, les lignes droictes sont dictes estre egalement distantes du centre, quand les perpendiculaires, qui sont menees du centre sur icelles, sont egales. Mais celle-là est dicte estre plus éloignee du centre, sur laquelle tombe la plus grande perpendiculaire.

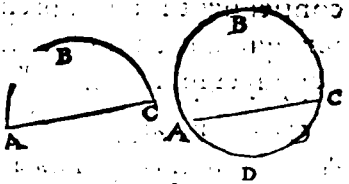


Comme les deux lignes droictes A B, C D, au cercle A B C D, seront dictes estre egalement distantes du centre si les perpendiculaires E F, E G, sont egales: mais la ligne C D, sera dicte estre plus éloignee du centre E, que la ligne H I, si la perpendiculaire E G, est plus grande que la perpendiculaire E K.

5. Segment ou section de cercle, est vne figure compriſe ; ſous vne ligne droicte, & la circonference du cercle.

Si au cercle A B C D, on mene vne droicte ligne A C, comment que ce ſoit, tant la figure A B C, contenuë ſous la droicte ligne A C, & la circonference A B C, que la figure A D C, contenuë ſous la meſme A C, & la circonferẽce A D C, ſera dicte ſegment ou ſection de cercle. D'où on peut colliger qu'il y a trois ſortes de ſegments, ſçauoir le demi-cercle, quand la ligne droicte qui auec la circonference, conſtituë le ſegment, paſſe par le centre ; le ſegment plus grand que le demi-cercle, quand le centre du cercle eſt au dedans d'iceluy, comme A B C ; & le plus petit ſegment, quand la figure dicte ſegment eſt moindre que le demi-cercle, comme A D C. La ligne droicte A C, s'appelle auſſi, chorde, & la circonference A B C, ou A D C, arc. *Voyez la figure cy-apres.*

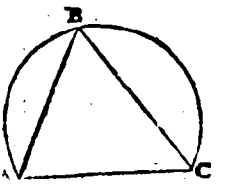
6. L'angle du ſegment ou de la ſection, eſt celuy qui eſt compris ſous vne ligne droicte & la circonference du cercle.



Euclide definit maintenant trois gẽres d'angles, qui ſont conſiderez aux cercles. En premier lieu l'angle du ſegment : comme eſt l'angle mixte B A C, ou B C A, contenu ſous la ligne droicte A C, & la

circonference A B C : que ſi le ſegment eſt vn demi-cercle, il ſera appellé angle du demi-cercle, ſi le ſegment eſt plus grand, il ſera appellé angle, du grand ſegment; ſi plus petit que le demi-cercle, l'angle ſera dict, angle du petit ſegment.

7. Mais vn angle eſt au ſegment ou en la ſection, lors que l'on prend quelque poinct en la circonference du ſegment, & d'iceluy ſont menees deux lignes droictes ſur les extremitez de la ligne droicte, laquelle eſt la baſe du ſegment, & c'eſt celuy-là diſie qui eſt contenu ſous icelles lignes droictes menees.

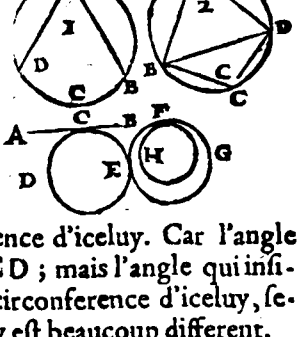


Soit vn ſegment de cercle A B C, la baſe duquel ſoit la droicte ligne A C, & d'vn poinct quelconque B, pris en la circonference, ſoient menees deux lignes droictes A B, A C, aux poincts A, & C, qui ſont les extremitez de la baſe A C, l'angle rectiligne A B C, cõtenu d'icelles, eſt dict eſtre au ſegment.

8. Mais quand les lignes droictes qui contiennent l'angle, prennent ou embraſſent quelque circonference, l'angle eſt dict s'appuyer ſur icelle.

Comme l'angle D A B, contenu des deux lignes droictes A B, A D, qui embraſſent la circonference B C D, ſera dict eſtre ou s'appuyer ſur icelle; & ne differe du precedent, que de voix ſeulement.

car si l'on mene vne ligne droicte de B, à D, pour baſe, il ſera dict eſtre au ſegment, ſelon la precedente definition, & par celle-cy, s'appuyer ſur la circonference B C D : Toutesfois ſe rapportent à diuerſes choſes: car l'angle au ſegment ſe refere au ſegmẽt auquel il eſt; & l'angle appuyé ſur la circõference, ſe rapporte à la circonference, qui eſt la baſe d'iceluy. Donc ſi l'on prend quelque ſegment de cercle B C D, au cercle A B C D, l'angle qui eſt en ce ſegmẽt ne ſera le meſme, que celuy qui inſiſte ou eſt appuyé ſur la circonference d'iceluy. Car l'angle qui eſt en iceluy ſera B C D ; mais l'angle qui inſiſte ou eſt appuyé ſur la circonference d'iceluy, ſera l'angle B A D; qui luy eſt beaucoup different.



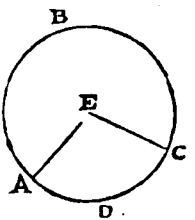
En quoy Clauius a repris Oronce & Pelletier, leſquels n'ont faict differẽce entre iceux angles; & a monſtré au ſcholie de la derniere propoſition du 6. liure que l'angle au ſegment, & l'angle appuyé ſur vne circonference ſe referent à diuers arcs.

Outre ces trois ſortes d'angles ſuſdits, les Geõmetres conſiderent auſſi vn angle de contingence, qui eſt contenu d'vne ligne droicte touchant le cercle & de la circonference du cercle, ou de deux circonferences ſe touchant l'vne l'autre au dehors ou au dedans. Comme par exemple ſi la droicte ligne A B, touche le cercle C E D, au poinct C, l'angle mixte A C D, ou B C E, ſera dict, angle de contingence, ou d'attouchement. Semblablement l'angle curuiligne C E F, ou E F H, faict des

circonferences des cercles ſe touchans, ſera dict angle de contingence, ou d'attouchement.

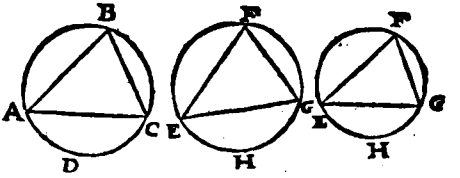
9. Secteur du cercle eſt vne figure, contenuë ſous deux lignes droictes qui conſtituent vn angle au centre, & la circonference compriſe entre icelles lignes.

Comme la figure A E C D, contenuë ſous les lignes droictes A E, E C, qui font angle au centre E, & ſous la circonference A D C, compriſe entre A, & C, extremitez d'icelles lignes, eſt appellé ſecteur du cercle.



10. Semblables ſegments ou ſections de cercles ſont celles, qui reçoiuent angles egaux; ou eſquelles les angles ſont egaux entr'eux.

Cõme ſi aux cercles ABCD, EFGH, les angles rectilignes B, & F, aux ſections ABC, EFG, ſont egaux, icelles ſections qui reçoiuent iceux angles egaux, ou eſquelles sõt iceux angles egaux, ſeront dictes ſemblables ſections, & les circonferences A B C, E F G, pareillement, ſeront ſemblables: c'eſt à dire que la ſection ABC, ſera telle



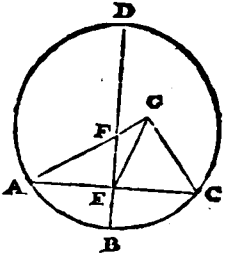
partie de tout le cercle A B C D, que la section E F G, eſt partie du cercle EFGH, & la circonference A B C, ſera auſſi meſme partie de toute la circonference ABCD, que la circonference EFG, l'eſt de toute la circonference E F G H.

Par meſme raiſon les arcs ou circonferences, auſquelles inſiſtent ou ſont appuyez angles egaux, ſont auſſi ſemblables, comme ſont les arcs ou circonferences A D C, EHG, ſur leſquelles ſont appuyez les angles egaux B, & *F*.

De ces choſes l'on peut colliger que ſemblables ſections d'vn meſme cercle, ou de cercles egaux, ſont auſſi egales entr'elles, eſtant meſmes parties d'vne meſme choſe ou de choſes egales.

PROBLEME 1. PROP. 1.

Vn cercle eſtant donné, trouuer le cẽtre.



a 10. 1.

Soit le cercle donné A B C D, duquel il faut trouuer le centre. Soit menee vne ligne quelconque en iceluy, A C, a laquelle ſoit diuiſee en deux egalemẽt au poinct E, & par E, ſoit menee B D, à angles droicts, ſe terminant de part & d'autre en la circonference aux poincts B, & D: & ſoit diuiſee en deux egalement au poinct F. Ie dis que F, eſt le centre du cercle propoſé.

Car en icelle aucun autre poinct ne peut eſtre le centre; attendu que tout autre poinct la diuiſe inegalement. Donc ſi F, n'eſt le centre du cercle, ſoit

le poinct G, le centre, hors icelle BD, duquel soiēt menees les lignes droictes G A, G E, G C.

D'autant donc qu'au triangle A E G, les deux costez A E, E G, sont egaux aux deux C E, E G, du triangle CEG; & la base A G, egale à la base CG;
b 8. 1. (car elles sont dictes estre menees du centre) b les angles A E G, C E G, seront egaux; & partant droicts: mais l'angle A E F, est droict par la construction, donc les droicts A E F, A E G, sont egaux, la partie & le tout, ce qui est absurde. Donc G, n'est le centre du cercle; ny par mesme raison tout autre poinct hors la ligne D B, donc F, sera le centre. Partant nous auons trouué le centre du cercle donné. Ce qu'il falloit faire.

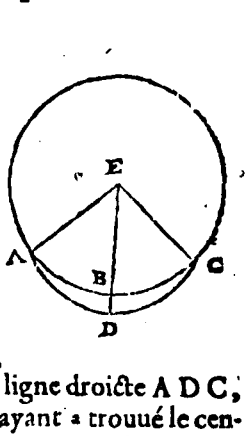
COROLLAIRE.

De cette proposition il est euident, que si au cercle, vne ligne droicte est couppee en deux egalemēt & à angles droicts, par vne autre ligne droicte, le centre du cercle sera en icelle couppante, pourueu qu'elle se termine de part & d'autre en la circonference, ou à tout le moins qu'elle ne soit moindre que le demi-diametre du cercle, ou que la couppee passe par le centre: attendu qu'il est demonstré que le centre du cercle ABCD, ne peut estre ailleurs qu'au poinct F, de la ligne B D, laquelle couppe A C, en deux egalement & à angles droicts.

ij. ## THEOREME 1. PROP. 2.

Si en la circonference du cercle l'on prend deux poincts tels qu'on voudra; la ligne

droicte conioincte à iceux poincts tombera dedans le cercle.



Soit le cercle A B C, en la circonference duquel soient prins deux poincts tels que on voudra, A, & B. Ie dis que la ligne droicte menee de A, à B, tombe dans le cercle, en sorte qu'elle le couppera.

Car si elle ne tombe au dedans qu'elle tombe dehors, s'il est possible, telle qu'est la ligne droicte A D C, comme veut l'aduersaire, & ayant [a] trouué le centre E, d'iceluy, soiēt menees les droictes lignes E A, E C, & E D, à quelconque poinct D, de la ligne A D C, en sorte qu'elle couppe la circonference du cercle A B C, au poinct B. [a] 1. 3.

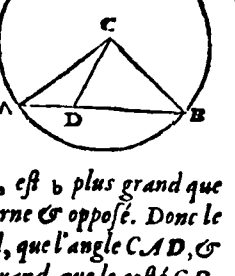
D'autant que les deux costez E A, E C, du triāgle E A C, duquel la ligne A D C, est posee pour base, sont egaux (estant menez du centre) [b] les angles E A D, E C D, seront egaux: mais l'angle externe [c] E D A, est plus grand que son interne & oppose E C D, puis que le costé C D, est prolongé au poinct A. Donc le mesme angle E D A, sera aussi plus grand que l'angle E A D, qui est egal à E C D. Partant E A, opposee au plus grand angle E D A, [d] sera plus grande que E D, opposee au plus petit E A D. Donc E B, egale à E A, seroit aussi plus grande que E D, la partie que le tout. Ce qui est absurde. Donc la ligne droicte menee de A, à B, ne tombera hors le cercle, mais au dedās. Semblablement nous monstrerons qu'elle ne tō-

[b] 5. 1.
[c] 16. 1.
[d] 19. 1.

bera ſur la circonference. Donc ſi au cercle, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.

SCHOLIE.

Ce theoréme ſe peut auſsi demonſtrer affirmatiuement en cette maniere. Que la droicte ligne A B, conioigne les poincts A, & B, en la circonference du cercle A B, duquel le centre eſt C. Ie dis que la droicte ligne A B, tombe dans le cercle.



Car ſoit prins quelque poinct en icelle ligne entre les poincts A, & B, comme D, & du centre ſoient menees les droictes lignes C A, C D, C B. D'autant que les deux coſtez C A, C B,
a 5. 1. *du triangle C A B, ſont a egaux, les deux angles C A B, C B A,*
b 16. 1. *ſeront egaux: mais l'angle C D A, eſt b plus grand que l'angle C B D; l'externe que l'interne & oppoſé. Donc le meſme angle C D A, ſera plus grand, que l'angle C A D, & partant le coſté c C A, ſera plus grand que le coſté C D.*
c 19. 1. *Donc puis que C A, eſt menee du centre iuſques à la circonference, la ligne droicte C D, ne paruiendra pas iuſques à la circonference. Donc le poinct D, tombera dans le cercle. Le meſme ſera demonſtré de tout autre poinct prins en A B. Donc toute la ligne A B, tombe dans le cercle. Ce qui eſt propoſé.*

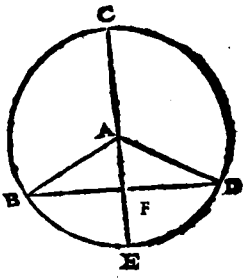
COROLLAIRE

De la demonſtration de cette deuxieſme propoſition, il eſt manifeſte, que la ligne droicte qui touche le cercle en ſorte, qu'elle ne le couppe point, qu'elle le touche ſeulement à vn poinct. Car ſi el-
a 2. 3. 10. *le le touchoit à deux poincts a la partie de la ligne d'en-*

gne d'entre iceux poincts, tomberoit dans le cercle. Et partant le coupperoit : ce qui eſt contre l'hypotheſe.

THEOREME 2. PROP. 3. iij.

Si dans le cercle quelque ligne droicte paſſant par le centre, couppe quelque autre ligne droicte, qui ne paſſe poinct par le centre, en deux egalement, elle la couppera auſſi à angles droicts. Et ſi elle la couppe à angles droicts, elle la couppera auſſi en deux egalement.



Soit le cercle, BCDE, & ſoit la ligne EC, paſſant par le cẽtre A, laquelle couppe la ligne droicte BD, qui ne paſſe poinct par le centre, en deux egalement, au poinct F. Ie dis que la ligne CE, eſt à angles droicts à la ligne BD.

Car ayant mené les deux lignes AB, AD, les deux coſtez AF, FB, du triangle AFB, ſont egaux aux deux coſtez AF, FD, du triangle AFD; & les baſes AB, AD, ſont egales. [a] Donc les angles AFB, AFD, ſeront egaux: [b] c'eſt à dire droicts, ce qui eſtoit premierement propoſé. [a] 8. 1. [b] 10. *def.*

Soit maintenant CE, à angles droicts à BD. Ie dis que BD, eſt couppee en deux egalement au poinct F, par la ligne droicte CE. Car les deux lignes AB, AD, eſtant egales, [c] les deux angles [c] 5. 1.

A B D, A D B, seront egaux sur la base B D, du triangle isoscele A B D. D'autãt donc que les deux angles A F B, A B F, du triangle A B F, sont egaux aux deux A F D, A D F, du triangle A D F; & que les costez A B, A D, opposez aux angles droicts au
d 26. 1. poinct F, sont semblablement egaux: d les costez F D, F B, seront egaux: ce qui estoit secondement proposé. Donc si au cercle &c. Ce qu'il falloit demonstrer.

Cette deuxiesme partie se pouuoit ainsi demon-
e 47. 1. strér, soit A F, à angles droicts à B D, e le quarré de A B, sera egal aux deux quarrez de A F, F B, semblablement le quarré de A D, sera egal aux deux quarrez de A F, F D; mais les quarrez de A B, A D, sont egaux, puis qu'icelles lignes sont egales. Donc les quarrez de A F, F B, seront egaux aux quarrez de A F, F D, parquoy ostant le quarré cõmun de A F, les quarrez de F B, & F D, demeureront egaux; & partant leurs costez F D, F B, seront egaux.

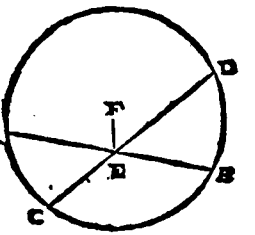
COROLLAIRE.

D'icy il s'ensuit qu'en tout triangle isoscele ou equilateral, que la ligne qui couppera la base en deux egalement, sera perpendiculaire à la base: pourueu qu'elle soit menee de l'angle opposé à la base, sur la base; (ce que a oublié Clauius), autrement la conclusion seroit nulle, car vne ligne en couppera bien vn autre en deux egalement, & ne sera toutesfois à angles droicts à icelle couppee: & au contraire la ligne perpendiculaire à la base, menee de l'angle opposé, la couppera en deux egalement. Car de ce que, au triangle B A D, A F, couppe B D, en deux egalement, il a esté de-

monſtré que les angles au poinct F, ſont droicts. Et de ce que les angles au poinct F, ſont droicts, il a eſté monſtré que A F, couppe, B D, en deux egalement.

THEOREME 3. PROP. 4. iv.

Si au cercle deux lignes droictes ſe couppent l'vne l'autre, n'eſtant point menees par le centre, ne elles ſe coupperont point l'vne l'autre en deux egalement.



Au cercle A C B D, ſoiēt menees les deux lignes droictes A B, C D, ne paſſant point par le centre, & ſe couppant l'vne l'autre au poinct E. Ie dis qu'elles ne ne ſe couppent pas en deux egalement l'vne l'autre encore que, quelquesfois l'vne le puiſſe eſtre.

Car qu'elles ſe couppent, s'il eſt poſſible, en deux egalement l'vne l'autre, en ſorte que A E, ſoit egale à E B, & C E, à E D; [a] & ayant trouué le centre F, d'iceluy ſoit menee F E, au poinct E, où elles ſe couppent. D'autant que F E, [b] paſſant par le centre, couppe A B, ne paſſant par le centre, en deux egalement à E, elle la couppera à angles droicts: Donc l'angle F E B, ſera droict: par meſme raiſon elle couppera auſſi C D, à angles droicts. Donc l'angle F E D, ſera auſſi droict & partant egal à l'angle F E B, la partie au tout, ce qui eſt impoſſible: elles ne ſe coupperont donc l'vne l'autre en 2. egalement. Donc ſi au cercle &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.

[a] 1. 3.

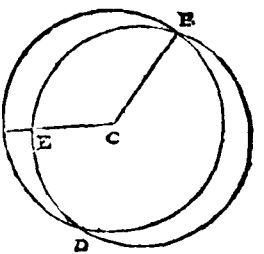
[b] 3. du 3.

SCHOLIE.

Henrion en ſa demonſtration dict ainſi: Ie dis que l'vne ou l'autre eſt couppee inegalement, *d'où il eſt euident qu'il n'a pas bien entendu la propoſition, puis que toutes deux ſont couppees chacune en deux inegalement, ou quelquefois vne toute ſeule, eſt couppée en deux inegalement & l'autre non, comme il eſt facile à colliger par la demonſtration.*

v. THEOREME 4. PROP. 5.

Si deux cercles ſe couppent l'vn l'autre, ils n'auront pas meſme centre.



Que les deux cercles A B D, E B D, ſe couppent l'vn l'autre aux poincts B, & D. Ie dis qu'ils n'auront pas meſme centre.

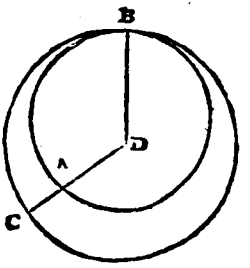
Autrement s'ils ont meſme centre, ſoit C, le centre de tous les deux, ſi faire ſe peut, & ſoit ioincte C B, au poinct de la ſection, & ſoit menee C E A, couppant les circonferences aux poincts E, & A.

D'autant que C, eſt le centre du cercle A B D; la ligne C A, ſera egale à C B. Derechef d'autant que C, eſt le centre du cercle B E D, la ligne C E, ſera egale à C B, mais C A, a eſté monſtree egale
a 1. 16 ſ. à C B; a donc C A, & C E, ſeront egales, la partie & le tout, ce qui eſt impoſſible; partant C, n'eſt pas le centre des deux cercles. Donc ſi deux cer-

cles se couppent &c. Ce qu'il falloit demonstrer.

THEOREME 5. PROP. 6. vj.

Si deux cercles se touchent l'vn l'autre au dedans; ils n'auront pas mesme centre.



Soient les deux cercles A B, C B, se touchants l'vn l'autre au dedans, au poinct B. Ie dis qu'ils n'ont pas mesme centre.

Car s'il est possible, soit D, le centre de tous les deux, & soit conioincte la ligne droicte D B, & soit menee comme l'on voudra la ligne D A C, couppant les circonferences, aux poincts A, & C, d'autant que D, est le centre du cercle B C, la ligne D C, sera egale à D B. Derechef, d'autant que D, est aussi le centre du cercle A B, la ligne D A, sera egale à D B, mais D C, est aussi demonstrée egale à D B, donc D A, [a] & D C, seront egales, la partie & le tout: ce qui est impossible. Donc le poinct D, n'est pas le centre de tous les deux cercles A B, & C B; partãt si deux cercles se touchent l'vn l'autre au dedans &c. Ce qu'il falloit demonstrer.

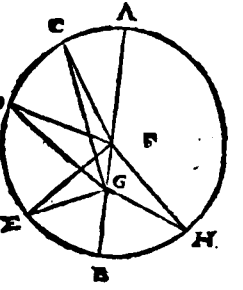
[a] 1. cõ. ſ.

SCHOLIE.

Euclide propose ce theoréme seulement des cercles qui se touchent au dedans; d'autant qu'il est tres-manifeste; que les cercles qui se touchent au dehors ne peuuent auoir vn mesme centre, attendu que l'vn est au dehors de l'autre.

vij. THEOREME 6. PROP. 7.

Si au diametre du cercle, l'on prend quelque poinct, lequel ne ſoit point le centre du cercle; & de ce poinct, à la circonference tombent quelques lignes droictes, la plus grande ſera celle-là en laquelle eſt le centre; mais la plus petite ſera celle qui reſte. Des autres touſiours la plus proche de celle qui paſſe par le centre, eſt plus grande que celle qui en eſt plus eſloignee: & de ce meſme poinct tomberont ſeulement deux lignes droictes egales, à la circonference, de part & d'autre de la plus petite.



Au diametre A B, du cercle A C D E B, duquel le centre eſt F, ſoit pris quelconque poinct outre le centre, lequel ſoit G, & d'iceluy tombent tant de lignes droictes que l'on voudra à la circonference du cercle, ſçauoir G C, G D, G E. Ie dis que G A, en laquelle eſt le centre, eſt la plus grande de toutes celles qui ſont menees d'iceluy poinct G, à la circonference, & que la plus petite eſt la reſtante G B, laquelle parfaict le diametre: en apres que G C, plus proche de G A, laquelle paſſe par le centre, eſt plus grande que G D, qui eſt plus eſloignee de la meſme G A, & par meſme raiſon que G D, eſt plus

grande que G E, & ainſi des autres: & finalement du poinct G, l'on peut mener ſeulement de part & d'autre de la plus petite, deux lignes droictes egales entr'elles à la circonference.

Car ſoient menees du centre F, aux poincts C, D, E, les droictes lignes F C, F D, FE. D'autant que les deux coſtez G F, F C, du triangle G F C, [a] ſont plus grandes que l'autre GC, mais G F, FC, ſont egales à G F, F A, c'eſt à dire à la toute G A, icelle G A, ſera auſſi plus grande que GC, & par meſme raiſon plus grãde que G D, & ainſi des autres. Donc G A, ſera la plus grande de toutes celles qui tombent du poinct G, à la circonference. [a] 20. 1.

Secondement d'autant qu'au triangle E F G, le coſté E F, [b] eſt plus petit que les deux EG, GF: mais E F, eſt egale à F B: donc F B, ſera moindre que les deux F G, G E. Donc la partie commune F G, eſtant oſtee, demeurera encore G B, plus petite que G E. Et par meſme raiſon G B, ſera mõſtree plus petite que chacune des autres G D, & G C: partant G B, eſt la plus petite de toutes celles qui ſont menees du poinct G, à la circonferẽce. [b] 20. 1.

Tiercement. D'autant que les deux coſtez G F, FC, du triangle G F C, ſont egaux aux deux G F, F D, du triangle G F D, & l'angle G F C, eſt plus grand que l'angle G F D, le tout que ſa partie; [c] la baſe G C, ſera plus grande que la baſe G D: par meſme raiſon G C, ſera plus grande que G E; ſemblablement G D, ſera plus grande que G E. Donc la ligne plus proche de celle qui paſſe par le centre eſt plus grande que celle qui en eſt plus eſloignee. [c] 24. 1.

Finalement ſoit faict l'angle B F H, de l'autre part de la ligne F B, egal à l'angle B F E, & ſoit menee la droicte ligne G H. D'autant donc que les

deux coſtez E F, F G, du triãgle E F G, ſont egaux aux deux coſtez H F, F G, du triãgle H F G, chacun au ſien, & que les angles E F G, H F G, contenus d'iceux coſtez, ſont egaux par la conſtruction, [d] les droictes lignes G E, G H, de part & d'autre de la moindre ligne G B, ſeront egales entr'elles. Or que nulle autre puiſſe eſtre egale à chacune d'icelles; il eſt manifeſte. Car ſi du poinct G, l'on en mene vne autre de la part de H, elle tombera au deſſous de H, & partant plus petite que G H, eſtãt plus eſloignée de celle qui paſſe par le cẽtre, comme il a eſté demonſtré, & partant auſſi plus petite que G E, egale à G H. Si elle paſſe au deſſus de G H, elle ſera plus grande pour la meſme raiſon. Donc l'on peut mener deux lignes droictes egales entr'elles ſeulemẽt de part & d'autre de la plus petite. Partant ſi au diametre &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.

[d] 4. 1.

SCHOLIE.

Henrion dict, tant à la fin de cette propoſition que de la ſuiuante. Et deux lignes droictes, tant ſeulement venant d'iceluy poinct, de part & d'autre du diametre ſont egales. *Ce qui n'eſt pas vray, car l'on peut mener pluſieurs lignes droictes egales, d'iceluy poinct, de part & d'autre; mais il deuoit mettre, comme il y a dedans Euclide:* δύο δὲ μόνον εὐθεῖαι ἴσαι προσπεσοῦνται ἀπὸ τοῦ σημείου πρὸς τὸν κύκλον, ἐφ' ἑκάτερα τὰ ἐλαχίστης: *Mais deux lignes droictes egales tant ſeulement, tombent ou peuuent eſtre menees de ce poinct, au cercle, de part & d'autre de la plus petite:* au cercle, *c'eſt à dire à la circonference; car Euclide prẽdict,* κύκλος, *pour* περιφέρεια, *ce qui appert auſſi, tant par la 9. propoſition cy-apres que autres,* ἀπὸ κύκλου λαφθῇ τὸ σημεῖον ἴσαι, ἀπὸ δὲ τοῦ σημείου πρὸς τὸν κύκλον

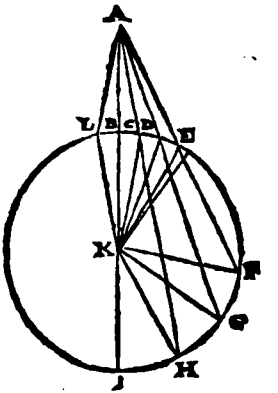
πρὸς κύκλου πλείους ἢ δύο ἴσαι, τὸ λαφθὲν σημεῖον κέντρον ἐστὶ τοῦ κύκλου. Si au cercle on prend quelque poinct, au dedans, & d'iceluy poinct tombent ou sont menees plus de deux lignes droictes egales, au cercle, c'est à dire à la circonferẽce; le poinct pris est le cẽtre du cercle. Il deuoit dõc adiouster, au cercle; ou à la circonference, *& ne s'asseurer pas à la traduction Françoise, desia faicte, laquelle il a prise.*

Il reprend le sieur Donnot en cette proposition, par ce que ledict Donnot dict, qu'vne ligne coupe le centre, & commet la mesme faute en la 13. proposition de ce liure à la fin de la demonstration, disant: Il faudroit que la ligne droicte menee par les deux centres E, & K, couppast les deux poincts d'attouchement &c. *& croy qu'il ne l'auroit pas corrigé en sa seconde edition, si on ne luy eust monstré.*

THEOREME 7. PROP. 8. viij.

Si hors le cercle l'on prend quelque poinct, & d'iceluy poinct, l'on mene quelques lignes droictes au cercle, l'vne desquelles passe par le centre, & les autres où l'on voudra: de toutes les lignes droictes qui tombent en la circonference conuexe; la plus grande est celle qui passe par le centre; mais des autres, touſiours la plus proche de celle qui passe par le centre, sera plus grande que celle qui en est plus esloignee: mais de celles qui tombent à la circonference conuexe; la plus petite est celle qui est posee entre le poinct & le diametre: Et

des autres, celle là laquelle eſt plus proche de la plus petite eſt touſiours moindre, que celle qui en eſt plus eſloignee : & de ce poinct, ſeront menees tant ſeulement deux lignes droictes egales entr'elles cercle, au de part & d'autre de la plus petite.



Du poinct A, pris hors le cercle B C D E, duquel le centre eſt K, ſoient menees des lignes droictes couppant le cercle, deſquelles A I, paſſe par le centre, mais les autres A H, A G, A F, comme l'on voudra. Ie dis que la plus grande de toutes eſt A I, qui paſſe par le centre : en apres que A H, qui eſt plus proche de A I, qui paſſe par le centre, eſt plus grande que A G, qui eſt plus eſloignee d'icelle A I : & par meſme raiſon A G, eſt plus grand que A F. Et au contraire que la droicte ligne A B, compriſe entre le diametre & le poinct A, eſt la plus petite de toutes celles qui ſont hors le cercle : & que A C, laquelle eſt plus proche de la plus petite A B, eſt moindre que A D, plus eſloignee d'icelle A B, & par meſme raiſon A D, eſt moindre que A E : Finalement du poinct A, de part & d'autre de la plus petite A B, l'on peut mener ſeulement deux lignes droictes egales entr'elles, au cercle.

Car du centre K, ſoient menees les lignes droictes K C, K D, K E, K F, K G, K H. D'autant que les deux coſtez A K, K H, du triangle A K H, [a] ſont plus grands que A H; mais A K, K H, ſont egales à A K, K I, c'eſt à dire à la toute A K I; la droicte ligne A I, ſera auſſi plus grande que A H. Par meſme raiſon A I, ſera auſſi plus grande que chacune des autres A G, A F. Donc A I, eſt la plus grande de toutes celles qui ſont menees du poinct A, dans le cercle. [a] 20. 1.

Secondement, d'autant que les coſtez A K, K H, du triangle A K H, ſont egaux aux deux A K, K G, du triangle A K G, & que l'angle total A K H, eſt plus grand que l'angle A K G, ſa partie; [b] la baſe A H, ſera plus grande que la baſe A G. Par meſme raiſon A H, ſera plus grande que A F: ſemblablement A G, ſera plus grande que A F; partant la ligne plus proche de celle qui paſſe par le centre, eſt plus grande que la plus eſloignee. [b] 24. 1.

Tiercement, d'autant qu'au triangle A C K, la ligne droicte A K, [c] eſt plus petite que les deux autres A C, C K; ſi l'on retranche les egales B K, C K: demeurera encore A B, moindre que A C; par raiſon ſemblable A B, ſera moindre que A D, & moindre auſſi que A E. Parquoy A B, eſt la plus petite de toutes les lignes tirees du poinct A, hors le cercle à la circonference conuexe. [c] 20. 1.

4. D'autant que dans le triangle A D K, tombent les deux lignes droictes A C, C K, venant des extremitez du coſté A K, [d] icelles A C, C K, ſeront moindres que A D, D K. Donc ayant oſté les egales C K, D K, reſtera encore A C, moindre que A D, & pareillement A C, ſera moindre que A E; & A D, auſſi moindre que A E. Donc la li- [d] 21. 1.

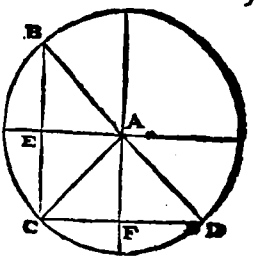
gne plus proche de la moindre ligne A B, eſt plus petite que la plus eſloignee.

En dernier lieu, ſoit faict l'angle A K L, egal à l'angle A K C, & ſoit menee A L. D'autant donc que les deux coſtez A K, K C, du triangle A K C, ſont egaux aux deux A K, K L, du triangle A K L; mais les angles A K C, A K L, contenus d'iceux
e 4. 1. coſtez, ſont egaux; e les lignes droictes A C, A L, de part & d'autre de la plus petite A B, ſeront egales entr'elles. Et aucune autre tiree du poinct A, à ladite circonferẽce, ne ſera egale à aucune d'icelles: car elle tomberoit au deſſous de A L, vers B, & partant plus petite que A L, c'eſt à dire que A C, egale à A L, ou de l'autre part de A L, & partant plus grande comme nous auons demonſtré. Donc l'on ne pourra mener que deux lignes droictes egales ſeulement à la circonference de part & d'autre de la moindre A B. Donc ſi l'on prend quelque poinct hors le cercle &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.

ix. ## THEOREME 8. PROP. 9.

Si au dedans du cercle l'on prend quelque poinct; & d'iceluy poinct tombent plus de deux lignes droictes egales, à la circonference: le poinct prins eſt le centre du cercle.

Soit le cercle B C D, au dedans duquel ſoit prins le poinct A, & du poinct A, à la circonference B C D, tombent plus de deux lignes droictes egales entr'elles A B, A C, A D. Ie dis que le poinct A, eſt le centre du cercle.



Car soient conioinctes les lignes droictes BC, CD, lesquelles soient couppees en deux egalement, par les poincts E, & F, & par le poinct A, soient menees les droictes lignes A E, AF, & prolongees de part & d'autre en la circonferẽce. D'autant donc que E B, est egale à E C, & E A, commune, les deux costez A E, E B, du triangle AEB, sont egaux aux deux A E, E C, du triangle A E C, & la base A B, est egale à la base A C; par l'hypothese, [a] l'angle A E B, sera egal à l'angle A E C, & [a] 8. 1. [b] partant l'vn & l'autre droict. Par mesme raison [b] 10. def. l'on monstrera que les angles au poinct F, sont droicts. Partant puis que les droictes lignes A E, A F, diuisent les droictes B C, C D, en deux egalement & à angles droicts en chacune d'icelles couppantes A E, A F, sera le centre du [c] cercle, [c] Coroll. estant prolongees à la circonference. Donc le 1. 3. poinct A, par lequel elles s'entre-couppent sera le centre du cercle, ne pouuant estre ailleurs qu'au poinct commun où elles s'entre-couppent, estant en l'vne & en l'autre. Donc si dedans le cercle l'on prend &c. Ce qu'il falloit demonstrer.

THEOREME 9. PROP. 10. X.

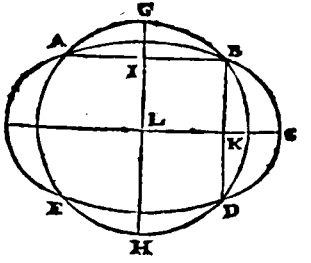
Vn cercle ne couppe pas vn cercle, à plus de deux poincts.

Que le cercle A B C D E F, couppe le cercle A G D B H E, en plus de deux poincts s'il est possible A, B, & D, & ayant conioinct les lignes droi-

ctes AB, BD, [a] soient diuisees icelles en deux egalement, aux poincts, I, & K, & par iceux poincts soient [b] menees IL, KL, à angles droicts aux lignes AB, BD, & soient prolongees de part & d'autre à la circonference.

[a] 10. 1.

[b] 11. 1.



D'autant que les droictes lignes IL, & KL, couppent les droictes lignes AB, BD, en deux egalement & à angles droicts, au cercle AGBDHE, l'vne & l'autre passera [c] par le centre d'iceluy, partant le poinct L, par lequel elles se couppent sera le centre dudict cercle. En la mesme maniere nous demonstrerons que le poinct L, est le centre du cercle ABCDEF. Donc deux cercles se couppants l'vn l'autre auront mesme centre: [d] ce qui est impossible. Donc vn cercle &c.

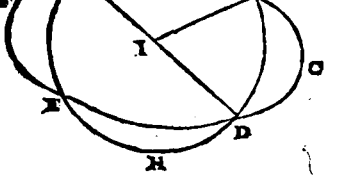
[c] Coroll. 1. 3.

[d] 5. troi.

AVTREMENT.

Que les mesmes cercles ce couppent si faire se peut à plus de 2. poincts A, B, & D, [e] *& soit trouué I, centre du cercle AGBDHE, duquel soiẽt menees IA, IB, ID: lesquelles seront egales entr'elles par la def. du cercle. D'autant donc que au cercle ABCDEF, l'on a prins le poinct I, duquel tombent plus de deux lignes droictes*

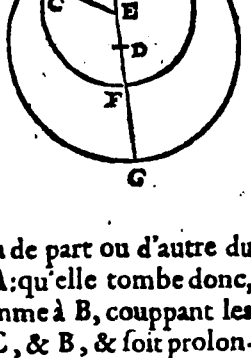
[e] 1. 3.



egales, à la circonference, iceluy poinct I, f sera le centre du cercle A B C D E F, mais le mesme poinct I, estoit aussi le centre de A G B D H E, donc deux cercles se couppans l'vn l'autre auront vn mesme centre. g Ce qui est absurde. f 9. 3. g 5. 3.

THEOREME 10. PROP. 11. (xi.

Si deux cercles se touchent l'vn l'autre au dedans, & que l'on prenne les centres d'iceux, la ligne droicte conioignant iceux centres, estant prolongee, tombera à l'attouchement des cercles.

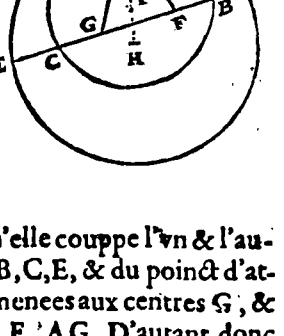


Que les deux cercles A B G, A C F, se touchent l'vn l'autre au dedans, au poinct A, & soit trouué a le centre du cercle A B G, lequel soit D. & le centre de A C F, lequel soit E. Ie dis que la ligne droicte menee de D, à E, & prolongee tombera au poinct de l'attouchement A. a 1. 3.

Autrement elle tombera de part ou d'autre du poinct de l'attouchement A: qu'elle tombe donc, s'il est possible ailleurs, comme à B, couppant les circonferences és poincts C, & B, & soit prolongee directement B E D, (qui est dicte estre ligne droicte) de l'autre part à la circonferẽce, au poinct G, par ainsi B E D G, sera le diametre du cercle A B G, & du poinct E, au poinct de l'attouchement A, soit menee E A. D'autant donc que au

diametre G E B, du cercle A B G, l'on a pris le poinct E, outre le centre D, la ligne E B, ſera la
b 7. 3. plus petite [b] de toutes celles qui ſont menees du poinct E, à la circonferenſe du cercle A B G, & partant plus petite que E A, mais E C, eſt egale à E A, puis que E C, E A, ſont menees du centre E, du cercle A C F, à la circonference A C, donc E B, ſera auſſi plus petite que E C, le tout que ſa partie: Donc D E, prolongee ne pourra tom berail leurs que au poinct d'attouchement A, comme e- la ligne D E A. Partant ſi deux cercles &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.

Demonſtration de Clauius & autres interpretes.



Que le cercle A B C, touche le cercle A D E, au dedans au poinct A, & ſoit F, le centre du cercle A B C, & G, cen-
a 6. 3. tre de A D E, [a] lequel ſera different de l'autre. Ie dis que la ligne droicte qui paſſe par G, & F, prolongee tombera à l'attouchement A.

Car ſi elle n'y tombe, qu'elle couppe l'vn & l'autre cercle aux poincts D, B, C, E, & du poinct d'attouchement A, ſoient menees aux centres G, & F, les droictes lignes A F, A G. D'autant donc qu'au triangle A F G, les deux coſtez G F, F A,
b 20. 1 ſont plus [b] grands que le coſté G A, mais G A, eſt egale à G D, (d'autant que G, eſt poſé le centre du cercle A E D;) G F, F A, ſeront plus grandes que G D,

que G D, ayant donc osté la commune GF, FA, demeurera plus grande que F D. Donc puis que F A, est egale à F B, (puis que F, est posé le centre du cercle A B C,) F B, sera aussi plus grande que F D, le tout que sa partie, ce qui est absurde.

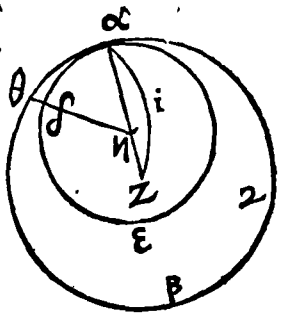
Que si quelqu'vn veut dire que F, est le centre du cercle A D E, & G, le centre du cercle A B C, l'on argumentera en cette maniere. Au triangle A FG, les deux costez FG, GA, sont plus grãds que le costé FA: mais FA, est egale à FE, (puis que F, est posé le centre du cercle A DE,) donc F G, G A, sont plus grandes que F E, ostãt donc la commune F G, demeurera G A, plus grande que GE: donc puis que G A, est egale à G C, (d'autant que G, est posé le centre du cercle A B C;) la ligne GC, sera pareillement plus grande que GE, la partie que le tout, ce qui est absurde. Donc, &c.

SCHOLIE.

Aucun des interpretes d'Euclide que i'aye veu, n'a encore entendu cette demonstration, n'entendant pas celle de Theon, comme l'on peut voir par leurs demonstrations, & mesme par celle que Clauius pretend faire apres les autres, en laquelle il cõclud vne absurdité, d'où il ne peut inferer, sinon, que les poincts qu'il a pris pour centres, ne sont point les vrais centres: car d'vne absurdité demonstree, on ne peut tirer, sinon que le fondement d'où elle a esté deduicte, est faux: & Clauius ayant supposé deux poincts pour centres ne l'estant point, & les vrays centres ne luy ayant pas esté niez; il conclud vne absurdité, que la partie est plus grande que le tout, d'où s'ensuit que les poincts qu'il a pris pour vrays centres ne le sont pas: mais il ne s'ensuit point que la ligne menee par les centres des deux cercles qui se touchent au dedans à vn poinct, estant prolongee

tombera au poinct de l'attouchement. Ce qu'il falloit demonstrer.

Mais voyons comme faict Theon, & faisons vne figure qui responde à son discours, encore que personne n'en ait faict.



Δύο γὰρ κύκλοι οἱ αβγ αδε ἁπτέσθωσαν ἀλλήλων ἐντὸς, καὶ τὸ α σημεῖον, καὶ εἰλήφθω τοῦ μὲν αβγ κύκλου κέντρον τὸ ζ, τοῦ δὲ αδε τὸ η· λέγω ὅτι ἡ ἀπὸ τοῦ η ἐπὶ τὸ ζ ἐκβαλλομένη ἐπὶ τὸ α σημεῖον πεσεῖται. μὴ γὰρ ἀλλ' εἰ δυνατὸν πιπτέτω ὡς ἡ ζηδθ, καὶ εἰλήφθωσαν αἱ αι, ηζ ἴσαι τῇ ζθ (ἴση γὰρ ἡ ζι τῇ ζθ, ἀπὸ κέντρου γὰρ ἄμφω) μείζονές εἰσιν, κοινὴ ἀφῃρήσθω ἡ ζη· λοιπὴ ἄρα ἡ ιη λοιπῆς τῆς ηθ μείζων ἐστὶν ἴση οὖσα τῇ να τῇ ηλ. καὶ ἐπεὶ ηδ ἄρα, τῆς ηθ μείζων ἐστὶν, ἀλλ' ἐστὶν τῆς μείζονος ὅσον ἀφῄρηται ἴση ἀφῄρηται ἀπὸ τοῦ ζδ ἴση τῇ ηι ἐπιζευχθεῖσα δὴ εἰθεῖα, ὡς τὸ χ τῷ α συναφὴς ποιεῖται δηλονότι καὶ τοῦ ἄρα· ἐφάψεται ἄρα, ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Que les deux cercles αζγ, αδε, se couppent l'vn l'autre au dedans au poinct α, & soit pris le centre du cercle αζγ, sçauoir ζ, & η, celuy de αδε. Ie dis que la ligne droicte menee de η, à ζ, & prolongee tombera au poinct d'attouchement α, s'il n'est ainsi, qu'elle tombe s'il est possible, comme est ζηδθ & soient conioinctes αι ζα. D'autant donc que αη, ηζ, sont plus grandes que αι ζ, c'est à dire que ζθ, car ζι & ζθ, sont egales, car elles sont toutes deux menees du centre,) si on oste la commune ζη, la restante ηα sera plus grande que la restante ηθ, mais ηα, est egale à ηδ, donc ηδ,

ſera plus grande que ν θ, la plus petite que la plus grande, c'eſt à dire la partie que le tout, ce qui eſt impoſſible. Donc la ligne droicte menee de ζ, à ν, & prolongee ne paſſera pas par autre poinct que celuy d'attouchément, elle tombera donc à iceluy. Ce qu'il falloit demonſtrer.

Pour vne plus grande facilité, ie mettray icy la conſtruction de cette propoſition, telle qu'elle doit eſtre entenduë.

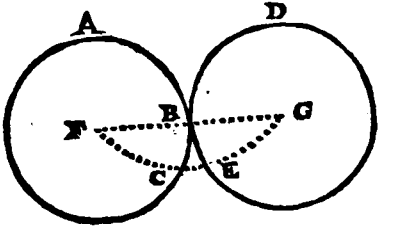
Soient les deux cercles α β γ, α δ ε, ſe touchants au dedans au poinct α, & ſoit pris a ζ, centre du cercle α β γ, & ν centre de α δ ε. Ie dis que la ligne menee de ζ, à ν, & prolongee tombera au poinct α, c'eſt à dire ſi du poinct ν, à α, on mene la droicte ligne ν α, les deux lignes ζ ν, ν α, feront vne ſeule ligne droicte, autrement elles feront angle au poinct ν, de part ou d'autre, ſoit de la part de ι, s'il eſt poſſible & ſoit la ligne α ι ζ, entenduë droicte comme en la ſeconde propoſition de ce liure; partant ζ ν, prolongee tombera de l'autre part de l'angle α ν ζ, comme eſt ζ ν δ θ, qu'il faut conceuoir comme vne ligne droicte. *Et c'eſt ainſi que l'entend Theon. Sa demonſtration eſt facile, entendant cecy.* a 1. 3.

THEOREME 11. PROP. 12. xij.

Si deux cercles ſe touchent l'vn l'autre, au dehors, la ligne droicte menee d'vn centre à l'autre, paſſera par l'attouchement.

Soient deux cercles A B C, D B E, ſe touchans au dehors au poinct B, & le centre de A B C, ſoit F, & celuy de D B E, ſoit G. Ie dis que la ligne

droicte menee de F, à G, passe par le poinct d'attouchement B.



Car soit menée la droicte ligne F B, & la droicte G B. toutes deux au poinct d'attouchemẽt B, les deux font vne seule ligne droicte, partant la ligne droicte menee de F, à G, passe par B. Car, s'il n'est ainsi, elles feront angle de part ou d'autre au poinct B: qu'elles facent donc angle vers C E, s'il est possible, & soit menee de F, à G, vne droicte ligne F C E G, couppant les circonferences aux poincts C, & E. D'autant donc que les deux costez B F, B G, du triangle B F G, (car F B, G B, sont posez faire angle au poinct B, & F C E G, est vne ligne droicte, comme accorde l'aduersaire) sont [a] plus grands que l'autre costé F C E B, mais F C, est egale à F B, & G E, [b] egale à G B, estant menees des centres, donc F C, & G E, qui ne sont qu'vne partie de la toute F C E G, seront aussi plus grandes qu'icelle F C E G, la partie que le tout, (puis que F C E G, contient encore C E, outre F C, G E,) ce qui est impossible. Donc si deux cercles &c. Ce qu'il falloit demonstrer.

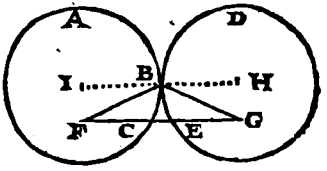
[a] 20. 1.

[b] 15. def. 1.

Mais voyons la demonstration des autres, lesquels sont comme en la precedente, ce qui est dict de celle-là, se doit entendre de celle-cy.

Soient les deux cercles A B C, D B E, se tou-

chans l'vn l'autre au dehors au poinct B. Et soit F, pris le centre du cercle A B C, & G, le centre du cercle D B E. Ie dis que la ligne droicte menee du poinct F, au poinct G, passera par l'attouchement B.



Car si elle n'y passe, qu'elle passe par les poincts C, & E, couppant les circonferences des cercles ; & soient menees des centres F, & G, au poinct d'attouchement B, les droictes lignes F B, G B.

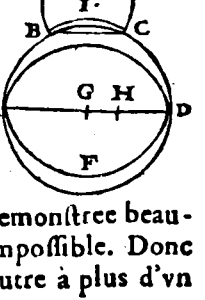
D'autant qu'au triangle F B G, les deux costez B G, B F, [a] sont plus grands que le costé F G: [a] 20. 1. mais B F, est egale à F C, (puis que F, est posé le centre du cercle A B C) & G B, est egale à G E; (d'autant que G, est posé le centre du cercle D B E,) donc les droictes lignes E C, G E, seront aussi plus grandes que la droicte F G, la partie que le tout, (car la toute F G, contient encore la partie moyenne C E, outre les deux F C, G E) ce qui est absurde; partant si deux cercles &c. Ce qu'il falloit demonstrer.

THEOREME 12. PROP. 13. xiij.

Vn cercle ne touche poinct vn cercle à plus d'vn poinct : soit qu'il le touche au dedans ou au dehors.

Que les deux cercles A B C D, A E D F, se touchent au dedans s'il est possible à plus d'vn poinct sçauoir, au poinct A, & D, & soient prins les cen-

tres d'iceux cercles, G, & H, [a] lesquels seront [a 6. 3.]
diuers, donc la ligne menee par les [b] centres G, [b 11. 3.]
& H, prolongee de part & d'autre tombera aux poinct de l'attouchement A, & D, comme A G H D. Et d'autant que G, est le centre du cercle A B C D, la ligne A G, sera egale à G D, donc A G, sera plus grande que H D, (estant egale à G D, plus grande) partant A H, sera encore bien plus grãde que H D. Derechef d'autant que H, est le centre du cercle A F D, la ligne A H, sera egale à H D, mais elle a esté demonstree beaucoup plus grande, ce qui est impossible. Donc vn cercle n'en touche pas vn autre à plus d'vn poinct, au dedans.

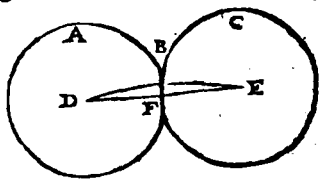


Ie dis aussi qu'il ne le touche au dehors. Car s'il est possible que le cercle B K C, touche le cercle A B C D, au dehors à plus d'vn poinct, sçauoir B, & C, & que l'on mene la droicte ligne B C, elle tombera [c] dans l'vn des cercles & partant [c 2. 3.]
hors l'autre, ce qui est contre la mesme 2. proposition de ce liure. Donc vn cercle n'en touche pas vn autre au dehors à plus d'vn poinct. Ce qu'il falloit demonstrer.

Clauius demonstre ainsi cette derniere partie.

Que les cercles A B, C B, se touchent à plus d'vn poinct au dehors proche le poinct F, & du centre D, au centre E, soit menee la droicte ligne D E, laquelle passera par [c] le poinct d'attouche- [c 11. 3.]
ment F. Donc s'ils se touchent aussi à vn autre

poinct que F, qu'ils se touchent à B. Donc ayant mené les droictes lignes D B, E B, icelles D B, E B, seront egales à D F, E F, c'est à dire à D E: f mais elles sont plus grandes, ce qui est absurde. Dõc les cercles ne se touchent pas au dehors à plus d'vn poinct.



f 20. 1.

SCHOLIE.

Clauius se trompe vn peu icy, disant que D B, E B, seront plus grandes que D E, par la 20. du 1. voulant dire que D B E, est vn triangle, ce qui ne peut estre, g *car ayant posé que les cercles se touchent aux poincts B, & F, il faut accorder par necessité, que D B E, D F E, sont toutes deux lignes droictes. Donc s'il eust dict en sa conclusiõ, que si deux cercles se touchoient au dehors à plus d'vn poinct, il s'ensuiuroit que deux lignes droictes encloroient vn espace* h *ce qui est impossible, il eust bien conclu.*

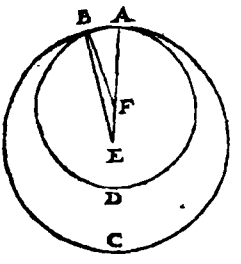
g 12.

h 12. e.s.

SCHOLIE DE CLAVIVS.

Si l'on considere bien la demonstration d'Euclide par laquelle il a prouué, qu'vn cercle ne touche pas vn cercle à plus d'vn poinct; icelle semble principalement conclure, qu'vn cercle ne touche vn cercle à deux ou plusieurs poincts, lesquels soient fort distants, & non pas qu'vn mesme attouchement ne puisse auoir plusieurs poincts. Encore que le mesme puisse estre facilement demonstré presque par le mes-

me discours. Or afin que cecy demeure totalement confirmé, sçauoir, qu'vn cercle ne peut toucher vn cercle à plus d'vn poinct; nous monstrerons brieuement qu'à vn mesme attouchement n'y peut auoir plus d'vn poinct.



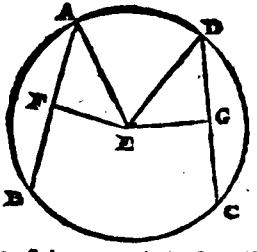
Car, que le cercle A B C, touche le cercle A B D, proche le poinct A, & par les
a 6. 1. centres E, & F, a lesquels seront diuers, soit menee la droicte ligne E F; laquelle
b 11. 1. estant prolongee b tombera necessairement au poinct d'attouchement, comme au poinct A. Ie dis que ces cercles se touchent tant seulement au poinct A: car s'ils se touchent aussi à vn autre poinct, comme à B, ayant mené du poinct B, aux centres E, & F, les droictes li-
c 20. 1. gnes B E, B F; Les lignes E F, c F B, seront plus grandes que E B; mais E B, est egale à E A; puis que l'vne & l'autre est menee du centre E; donc E F, F B, seront aussi plus grandes que E A: parquoy ayant osté la commune E F, demeurera F B, plus grande que F A, ce qui est absurde; attendu que F B, F A, sont menees de mesme centre F, à la circonference, & partant sont egales selon la definition du cercle: donc les cercles A B G, A B D, se toucheront l'vn l'autre seulement au poinct A, & non ailleurs.

Ainsi le demonstre Clauius; mais voyons s'il se trompe point, & en quoy.

Clauius dict, si les deux cercles se touchent aussi au poinct B, qu'ayant mené du poinct B, aux centres F, & E, les droictes lignes B F, B E, les lignes B F, F E, seront plus grandes que B E, pretendant constituer vn triangle, ce qui est impossible, car posant que les cercles se touchent au poinct B, les lignes E F, F B, menees par les centres E, F, a feront vne seule ligne droicte, & partant toute autre ligne menee de E, à B, sera courbe, Mais il deuoit dire pour sa cõclusion que les lignes droictes E F B, E F A, auroient vn cõmun segment, ce qui est impossible: ou bien ayant acheué le diametre c'est à dire prolongé A E, iusque à C, monstrer qu'il s'ensuiuroit, que le demi-cercle ou la circonference B C, seroit egale à A B C, la partie au tout, ce qui est impossible. a 11. 3.

THEOREME 13. PROP. 14. xiv.

Au cercle les lignes droictes egales, sont egalement distantes du centre: & celles qui sont egalement distantes du centre, sont egales entr'elles.



Au cercle A B C D, duquel le centre est E, soiẽt les deux lignes droictes egales A B, D C. Ie dis qu'elles sont egalement distantes du centre E.

Car du centre E, soient menees E F, E G, perpendiculaires à A B, & C D, & soient conioinctes E A, E D: les lignes E F, E G, coupperont a A B, & C D, en deux egalement, lesquelles estant posees egales, leurs moitiez A F, D G, seront aussi egales. a 3. 3.

D'autant donc que les quarrez des lignes egales
b 47.1. E A, E D, ſont egaux ; & b que le quarré de E A, eſt egal aux quarrez de A F, F E, ſemblablement le quarré de E D, egal aux quarrez de D G, & G E: les quarrez de A F, F E, ſeront pareillement egaux aux quarrez de D G, G E : donc ayant oſté les quarrez egaux des lignes droictes egales A F, D G, les quarrez de F E, G E, demeureront egaux; donc
c 4.def.3. E F, E G, ſeront egales. Partant c A B, C D, ſeront egalement diſtantes du centre E.

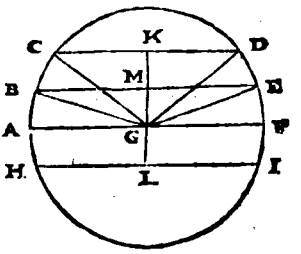
Derechef, ſoient A B, C D, egalement diſtantes du centre E. Ie dis qu'elles ſont egales entr'elles : car demeurant ainſi la conſtruction, nous
d 4. d.3. monſtrerons que E F, E G, d ſont egales, & qu'elles diuiſent
e 3. troi. e A B, C D, en deux egalement, & les quarrez des lignes droictes egales E A, E D, ſont
f 47.1. egaux entr'eux : mais le quarré de A E, f eſt egal aux deux quarrez de A F, F E, & celuy de E D, auſſi egal aux deux de D G, G E ; donc les quarrez de A F, F E, ſont egaux aux quarrez de D G, G E, ayant donc oſté les quarrez egaux des egales E F, E G, demeurerõt les quarrez de A F, D G, egaux & partant les lignes A F, D G, egales, donc leurs doubles A B, C D, auſſi egales: donc au cercle &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.

15. THEOREME 14. PROP. 15.

Au cercle la plus grande ligne eſt le diametre ; mais, des autres, touſiours celle qui eſt plus proche du centre, eſt plus grande que celle qui en eſt plus eſloignee

Au cercle A B C D, duquel le centre eſt G, ſoit le diametre A F : & la ligne droicte plus proche

du centre H I, & la plus esloignee C D. Ie dis que la plus grande de toutes est le diametre A F; & H I, plus grande que C D.

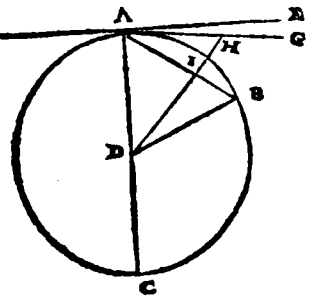


Car soient menees du centre G, les perpendiculaires, G K, G L, à C D, H I, & d'autant que C D, est plus esloignee du centre que H I, la perpendiculaire G K, sera plus grãde [a] que G L. Soit donc retranchee de G K, la ligne G M, egale à G L, & par M, soit menee B M E, perpendiculaire à G K; & soient conioinctes les droictes lignes G B, G C, G D, G E. D'autant donc que les perpendiculaires G M, G L, sont egales, B E, H I, seront egalement distantes du [b] centre & [c] partant egales entr'elles. Derechef d'autant que G B, G E, sont [d] plus grandes que B E, mais sont egales au diametre A F; le diametre A F, sera aussi plus grand que B E. Par mesme raison l'on monstrera que A F, est la plus grande de toutes les autres lignes. Finalement d'autant que les costez G B, G E, du triangle B G E, sont egaux aux costez G C, G D, du triangle C G D, & l'angle B G E, [e] est plus grand que l'angle C G D, [e] la base B E, sera plus grande que la base C D. Et partant H I, qui a esté monstrée egale à B E, sera pareillement plus grande que C D. Donc au cercle, le diametre &c. Ce qu'il falloit demonstrer.

[a] 4. de 3.
[b] 4. d. 3.
[c] 14. pr.
[d] 20. 1.
[e] 24. 1.

xvj. THEOREME 15. PROP. 16.

La ligne droicte menee de l'extremité du diametre du cercle, à angles droits à iceluy diametre ; tombera hors le cercle, & en l'eſpace comprins entre icelle ligne droicte & la circonference, ne tombera pas d'autre ligne droicte : & l'angle du demicercle eſt plus grand que tout angle rectiligne agu, mais le reſte eſt plus petit.



Soit le cercle A B C, duquel le centre eſt D, & le diametre A B, de l'extremité duquel A, ſoit menee la droicte ligne A E, à angles droicts à iceluy. Ie dis qu'elle tombe hors le cercle: car s'il n'eſt ainſi, s'il eſt poſſible, qu'elle tombe au dedans cõme eſt A B, & ſoit menee D B: [a] les angles D A B, D B A, ſeront egaux, mais D A B, eſt droict; dõc D B A, ſera droict auſſi, ce qui eſt abſurde, [b] puis que les deux angles d'vn triangle ſont moindres que deux droicts : ſemblablement nous monſtrerons qu'elle ne tombera auſſi ſur la circonference. Donc au dehors. Ie dis maintenant qu'entre A E, & la circonference B A, ne peut pas tomber vne autre ligne droicte menee du poinct A. Que A G, y tombe, s'il eſt poſſible, ſur laquel-

[a] 5. 1.

[b] 17. 1.

le ſoit menee D H, perpendiculaire à A G, coupant la circonference à I; D H, tombera de la part del'angle agu D A G. [c] D'autant qu'au triangle D A H, [d] les deux angles D H A, D A H, ſont moindres que deux droicts, & D H A, eſt droict par la conſtruction, D A H, ſera moindre qu'vn droict, & partant D A, c'eſt à dire D I, egale à icelle; [e] ſera plus grande que D H, la partie que le tout, ce qui eſt impoſſible. Donc aucune ligne droicte ne tombera entre la circonference A B, & la droicte ligne perpendiculaire A E, mais coupera le cercle.

[c] Coroll. 17. 1.
[d] 17. 1.
[e] 19. 1.

Ie dis finalement que l'angle du demi-cercle contenu du diametre A C, & de la circonference B A, eſt plus grand que tout angle rectiligne agu, & le reſte qui eſt l'angle de contingence contenu de la droicte ligne A E, & de la circonference A B, eſt plus petit que tout angle rectiligne agu. Car puis qu'il eſt monſtré que toute ligne droicte tiree du poinct A, au deſſous de la perpendiculaire A E; tombe dans le cercle, elle ſera neceſſairement auec la ligne A C, vn angle rectiligne agu moindre que l'angle du demi-cercle; mais auec A E, cõſtituera vn angle rectiligne agu plus grand que l'angle de contingence, attendu que celuy-là eſt vne partie de l'angle du demi cercle, mais ceſtuy-cy quelque tout, au reſpect de l'angle de continge; ce qui eſt manifeſte eſtant menee la droicte ligne A B, comment que ce ſoit au deſſous de A E. Car puis qu'icelle A B, tombe dans le cercle comme il eſt demonſtré, l'angle rectiligne agu C A B, eſt moindre que l'angle du demi-cercle, contenu ſous le diametre A C, & la circonference A B C, puis que celuy-là eſt partie de ceſtuy-cy.

Mais l'angle de contingence contenu sous la tangente AE, & la circonference ABC, est moindre que l'angle rectiligne BAE, puis qu'il est partie d'iceluy. Donc l'angle du demi-cercle est plus grand que tout angle rectiligne agu, & le reste, angle de contingence, moindre. Donc, la ligne menee de l'extremité &c. Ce qu'il falloit demonstrer.

COROLLAIRE.

Il est d'icy manifeste que la ligne droicte tiree de l'extremité du diametre, à angles droicts touche le cercle: car il est demonstré qu'elle tombe dehors le cercle. Parquoy elle atteint le cercle à ce poinct extréme du diametre seulemẽt. Cõme si du poinct A, en la circonference du cercle ABC, il falloit mener vne ligne qui touchast le cercle au poinct A, nous menerons vne ligne droicte de A, au centre D, & à icelle nous menerons AE, à angles droicts: & icelle touchera le cercle au poinct A, comme il est demonstré.

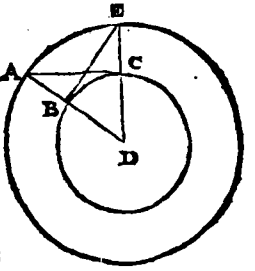
xvj. ## PROBLEME 2. PROP. 17.

D'vn poinct donné mener vne ligne droicte, qui touche vn cercle donné.

Soit le poinct donné A, & le cercle donné BC, il faut mener vne ligne droicte du poinct A, qui touche le cercle BC.

Soit trouué le centre D, & ioincte la ligne droicte AD, laquelle couppe le cercle au poinct B, & du centre D, & de l'interualle DA, soit descrit le cercle AE, & du poinct B, soit menee BE, à an-

gles droicts à A D, couppant le cercle A E, au poinct E, & finalement soit menee D E, couppant le cercle B C, au poinct C, & soit ioincte C A. Ie dis que A C, touche le cercle donné au poinct C.



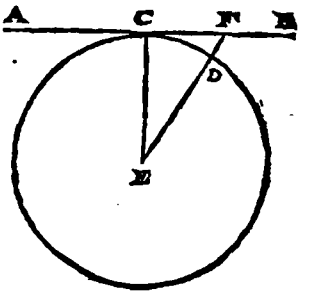
Car puis que les deux costez B D, D E, du triangle B D E, sont egaux aux deux C D, D A, du triangle C D A, chacun au sien comme il appert par la definition du cercle, & l'angle D, contenu d'iceux costez est commun : les [a] baſes B E, C A, & les angles D B E, D C A, seront egaux ; mais D B E, est droict par la construction: donc D C A, sera droict aussi. Dõc puis que C A, est menée de l'extremité C, du demi diametre D C, à angles droicts, elle [b] touchera le cercle. Donc du poinct donné A, l'on a mené A C, touchant le cercle B C, au poinct C, ce qu'il falloit faire. [a] 4. 1. [b] *Coroll.* 16. 3.

SCHOLIE.

La practique de cette propoſition ſe peut colliger de la meſme demonſtration. Mais nous l'enſeignerons plus facilement à la 31. propoſition de ce liure.

THEOREME 16. PROP. 18. xviij.

Si quelque ligne droicte touche vn cercle & du centre à l'attouchement l'on cõioinct quelque ligne droicte, la ligne conioincte ſera perpendiculaire à la touchante.



Que la droicte ligne A B, touche le cercle C D, au poinct C, duquel soit trouué le cẽtre E, & d'iceluy soit menee la droicte ligne E C, au poinct d'attouchement C. Ie dis que E C, est perpendiculaire à A B.

Car si elle ne l'est, soit menee E F, perpendiculaire à A B, couppant la circonference au poinct D. D'autant qu'au triangle C E F, [a] les deux angles E C F, E F C, sont moindres que deux droicts, & E F C, est droict, par la construction; E C F, sera moindre qu'vn droict. Partant [b] E C, c'est à dire E D, son egale sera moindre que E F, la partie que le tout, ce qui est impossible. Donc E C, est perpendiculaire à A B. Partant si vne ligne droicte &c. Ce qu'il falloit demonstrer.

a 17. 1.

b 19. 2.

Autrement. Si E C, n'est perpendiculaire à A B, l'vn des angles au poinct C, sera obtus, & l'autre agu. Soit E C B, agu, lequel estant plus grand que l'angle du demi-cercle E C D, l'angle du demi-cercle sera plus petit que quelque angle rectiligne agu: [c] *ce qui est absurde.*

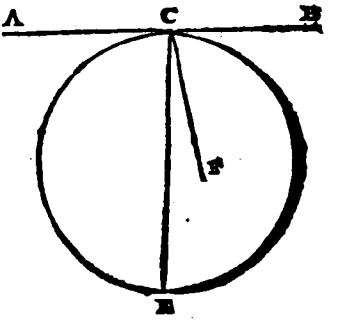
c 16. 3.

xviij. THEOREME 17. PROP. 19.

Si quelque ligne droicte touche vn cercle & de l'attouchement l'on mene vne ligne droicte, à angles droicts à la touchante, en icelle menee sera le centre du cercle.

Que la

Que la droicte ligne A B, touche le cercle C D E, au poinct C, & du poinct C, soit menee C E, à angles droicts à A B. Ie dis qu'en C E, est le centre du cercle.



Car s'il est hors icelle, qu'il soit au poinct F, s'il est possible duquel soit menee la droicte ligne F C, [a] laquelle sera perpendiculaire à A B. Partant l'angle droict F C B, sera egal à l'angle droict E C B, la partie au tout: ce qui est impossible. Donc le centre du cercle ne sera hors la ligne C E. Donc si vne ligne droicte &c. Ce qu'il falloit demonstrer. [a] 18. 1.

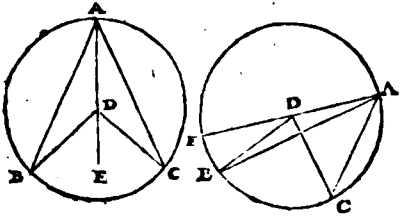
THEOREME 18. PROP. 20. 21.

Au cercle, l'angle qui est au centre, est double de l'angle qui est à la circonference; quand ils ont pour leur base vne mesme circonference.

Soit le cercle A B C, au centre duquel D, soit constitué l'angle B D C, & l'angle A B C, à la circonference lesquels ayent vne mesme circonference B C, pour base; Ie dis que l'angle B D C, est double de l'angle B A C.

Car soit conioincte la droicte ligne A D, & prolongee à E; D'autant que les deux lignes D A, D B, sont egales, les deux angles D A B, D B A,

a 5. 1. a seront egaux : mais l'angle externe B D E, est
b 32. 1. egal b aux deux internes D A B, D B A, & partant
sera double
de l'vn d'i-
ceux, cõme
de D A B.
Semblable-
ment, nous
monstrerons
que l'angle
C D E, est double de l'angle D A C, parquoy le
tout B D C, sera double du tout B A C. Ce qui
est propoſé.



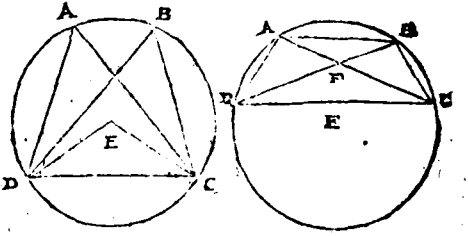
De rechef que l'angle C A B, n'encloe poinct l'angle C D B, & soit ioincte A D, & prolongee à E. D'autant que les deux costez D A, D C, sont
c 5. 1. egaux c les deux angles D A C, D C A, seront
d 32. 1. egaux : mais l'angle externe C D E, est egal d à iceux, donc il sera double de D A C, mais l'angle E D B, au centre est double de E A B, comme il est demonstre, donc reste B D C, sera dou-
e 20. 6. ble du reste B A C. e Car quand le tout est double du tout & le retranche du retranche, le reste sera double du reste. Donc au cercle l'angle du centre &c. Ce qu'il falloit demonstrer &c.

xxj. ## THEOREME 19. PROP. 21.

Au cercle, les angles qui sont en vn mesme segment, sont egaux entr'eux.

Soit le cercle A B C D, & au segment C B A, soient les deux angles D A C, C B D. Ie dis qu'ils sont egaux entr'eux.

Car soit trouué le centre E, & d'iceluy soient ioinctes les lignes E D, E C. D'autant que l'angle



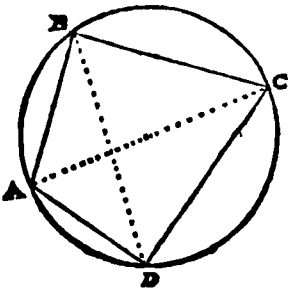
D E C, est constitué au centre, il sera double de l'angle D A C, qui est à la circonference, car ils ont mesme circonference D C, pour base: par mesme raison il sera double de l'angle C B D. Dõc chacun des deux angles A, & B, sera moitié de D E C, & partant egaux entr'eux. Donc, au cercle les angles qui sont &c. Ce qu'il falloit demonstrer. a 20. 3.

Theon demonstre seulement que les angles qui sont en la plus grande section sont egaux entr'eux; mais l'on monstrera le mesme si les angles sont en la petite section, comme l'on void en la deuxiesme figure: car ayant mené la ligne droicte A B, soit prise la portion B C D A, qui est le plus grand segment, les angles A D B, B C A, en iceluy, seront egaux entr'eux, comme nous auons demonstré en la premiere figure, & les deux A F D, B F C, sont a *aussi egaux entr'eux, donc* b *l'angle D A F, sera egal à l'angle C B F, lesquels sont au plus petit segment D A B C. Ce qui estoit proposé.* a 15. 1. b Coroll. 1. 32. 1.

THEOREME 20. PROP. 22. xxij.

Les angles oppoſez des figures de qua-

tre costez inscrites au cercle, sont egaux à deux droicts.



Soit le cercle ABCD, auquel soit inscrite la figure quadrilatere AC. Ie dis que les deux angles opposez BAD, BCD, sont egaux à deux droicts.

Car soient conioincts les deux diametres AC, BD; D'autant que les deux angles ACD, ABD, sont en vn mesme segment ABCD, ils seront egaux entr'eux, par mesme raison les deux angles BCA, BDA, au segment BCDA, seront aussi egaux entr'eux, donc l'angle total BCD, sera egal aux deux angles ABD, ADB: Donc ayant adiousté l'angle commun BAD, les deux BCD, BAD, seront egaux aux trois angles, BDA, DBA, & BAD, du triangle, ABD: mais les trois angles du triangle ABD, [b] sont egaux à deux droicts; donc les deux angles opposez BAD, BCD, seront aussi egaux à deux droicts. Semblablement l'on monstrera que les deux angles opposez aux poincts D, & B, sont egaux à deux droicts. Donc les angles opposez des figures &c. Ce qu'il falloit demonstrer.

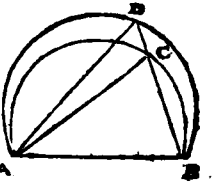
[a] 21. 3.

[b] 32. 1.

xxiij. THEOREME 21. PROP. 23.

Sur vne mesme ligne droicte, l'on ne pourra constituer deux segments de

cercles ſemblables & inegaux & de meſme part.



Car s'il eſt poſſible, ſoient conſtituez deux ſegments de cercles, ſẽblables & inegaux: ſur la ligne A B, & de meſme part A C B, A D B, iceux ſegments ſe coupperont ſeulement aux poincts A, & B, a puis qu'vn cercle ne couppe vn autre cercle à plus de deux poincts. Donc la circonferẽce d'vn des ſegmẽts ſera hors la circonference de l'autre: Soit donc menee la ligne droicte B C D, couppãt les circonferẽces aux poincts C, & D, & ſoiẽt ioinctes A D, A C. D'autant que les ſegments A C B, A D C, ſont poſez ſemblables, par la 10. def. de ce liure, l'angle A C B, ſera egal à l'angle A D B, ce qui eſt abſurde: b car l'externe A C B, eſt plus grand que l'interne A D B. Ils ne ſont donc pas ſegments ſemblables: donc ſur vne meſme ligne &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.

a 10. 3.

b 16. 1.

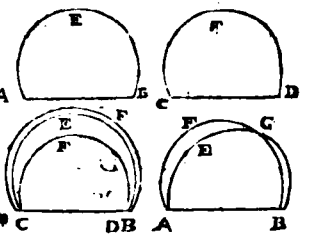
THEOREME 22. PROP. 24. xxiv.

Semblables ſegments de cercles, conſtituez ſur lignes droictes egales; ſont egaux entr'eux.

Sur les lignes droictes egales A B, C D, ſoient conſtituees les ſections de cercles ſemblables A E B, C F D. Ie dis qu'elles ſont egales entr'elles.

Car les lignes A B, C D, eſtant egales conuiendront entr'elles, ſi on entend qu'elles ſoient po-

sees l'vne sur l'autre, sçauoir A B, sur C D, & le segment A E B, conuiendra sur le segment C F D: autremẽt le segment A E C, tombera au dehors du segment C F D, ou au dedans, ou partie dehors & partie dedans, & partant sur vne mesme ligne droicte seront constituez semblables segments de cercles & inegaux [a] ce qui est absurde: que s'il tomboit en partie au dehors & partie au dedans, ils se coupperoiẽt en plus de deux poincts comme à B, & G, ce qui est impossible, [b] car vn cercle ne coupe vn cercle en plus de deux poincts: Dõc ils conuiendront & partant seront egaux entr'eux. Donc sur lignes droictes &c. Ce qu'il falloit demonstrer.



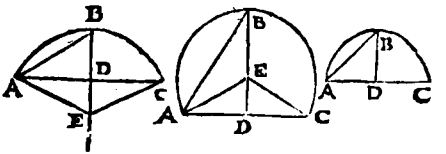
a 14. 1.

b

XXV.

PROBLEME 3. PROP. 25.

Le segment d'vn cercle estant donné, descrire le cercle, duquel il est le segment.



Soit le segmẽt de cercle A B C, duquel il faut descrire le cercle dont il est le segment, soit ioincte A C, & diuisee en deux egalement au poinct D, par lequel soit menee D B, à angles droicts à A C, & ioincte A B, l'angle D B A, sera plus grand que l'angle D A B, ou egal ou plus petit.

Premierement soit plus grand (ce qui aduiendra quād le segmēt sera moindre que le demi-cercle (car alors BD, prolongee passera [a] par le centre qui est hors le segmēt, puis qu'il est plus petit, [b] & DA, sera plus grāde que DB, car DB, est le reste du diametre, partant [c] DBA, sera plus grand que DAB) soit faict l'angle BAE, egal à DBA, & que la droicte ligne AE, couppe BD, prolongee à E. Ie dis que E, est le centre du cercle duquel ABC, est le segment. [a] Coroll. 1. 3. [b] 7. 5. [c] 18. 1.

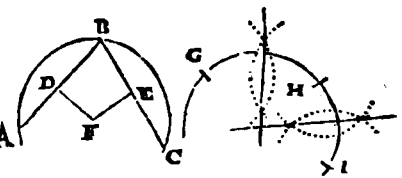
Car ayant mené EC, les deux costez AD, DE, du triangle ADE, seront egaux aux deux CD, DE, du triangle CDE, & les angles contenus d'iceux sont droicts, [d] partant AE, EC, egales: mais EA, est aussi egale à ED, [e] puisque les angles EAB, EBA, sont egaux: Donc les trois EA, EB, EC, sont egales. [f] Donc E, sera le centre du cercle ABC, puisque d'iceluy poinct, tombēt plus de deux lignes droictes egales, à la circonference. [d] 4. 1. [e] 6. 1. [f] 9. 3.

Secondement soient les angles DBA, DAB, egaux: [g] DA, sera egale à DB, mais BC, est aussi egale à DB, estant AC, diuisee en deux egalement au poinct D, toutes les trois DC, DB, DA, seront egales; [h] partant D, sera le centre du cercle & le segment proposé sera demi-cercle. [g] 6. 1. [h] 9. 3.

Finalement si l'angle DBA, est plus petit que DAB, soit faict l'angle BAE, egal à ABE, & soit ioincte EC. Ie dis que E, est le centre du cercle, car l'on monstrera par les mesmes raisons cy-dessus que les trois lignes EA, EB, EC, sōt egales, & partant aussi le segment proposé excedera le demi-cercle. Donc vn segment de cercle estant donné, nous auons descrit le cercle, du-

quel il eſt le ſegment. Ce qu'il falloit faire.

SCHOLIE.



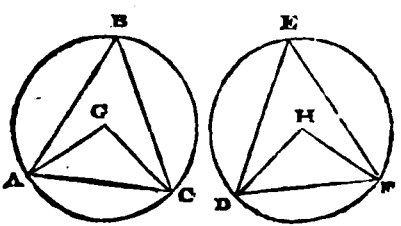
Autrement ayant prins trois poincts à l'aduenture au ſegment donné A, B, C, ſoient menees deux lignes A B, B C, & diuiſees en [a] *deux egalement à D, & E, puis menees les lignes D F, E F,* [b] *à angles droicts, leſquelles ſe rencontreront, comme à F, (car ſi on menoit vne ligne droicte de D, à E, DEF, EDF, ſeroient plus petits que deux droicts) donc* [c] *F, ſera le centre du cercle &c. en la meſme maniere l'on fera paſſer vne circonference par trois poincts donnez, non en droicte ligne.*

[a] 10. 1.
[b] 11. 1.
[c] Coroll. 1. 3.

THEOREME 23. PROP. 26.

XXV.

Aux cercles egaux, les angles egaux, ſont appuyez ſur circonferences egales, ſoit qu'ils y ſoient appuyez, eſtant conſtituez aux centres, ou aux circonferences.



Soient les cercles egaux A B C, D E F, aux centres deſquels G, & H, ſoient conſtituez les angles A B E, D H F, egaux; item que les angles B, & E, ſoient conſtituez aux cir-

conferences auſſi egaux : Ie dis que les circonferences A C, D E, ſur leſquelles ils ſont appuyez ſont egales.

Car ſoient ioinctes les lignes droictes A C, D F: D'autant que les deux coſtez G A, G C, du triangle A G C, ſont egaux aux deux H D, H F, du triangle D H F, à cauſe de l'egalité des cercles, & les angles G, & H, egaux par l'hypotheſe, [a] les baſes A C, D F, ſeront egales ; mais les angles B, & E, conſtituez aux circonferẽces ſont auſſi egaux par l'hypotheſe & appuyez ſur les meſmes baſes, donc les ſegments A B C, D E F, ſeront [b] ſemblables [c] & partant egaux : leſquels eſtant ſouſtraicts des cercles egaux, demeureront les ſegments A C, D F, egaux, & partant les circonferences A C, D F, egales. Ce qu'il falloit demonſtrer.

[a] 4. 1.
[b] 10. d. 3.
[c] 24. 3.

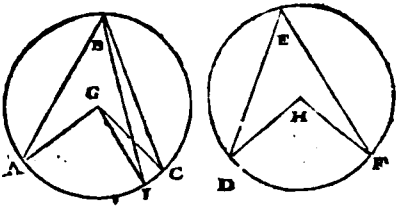
SCHOLIE.

En cette propoſition & aux trois ſuiuantes ce qui eſt dict des cercles egaux : doit auſſi eſtre entendu, d'vn meſme cercle ; car ce ſera la meſme demonſtration.

THEOREME 24. PROP. 27. xxvj.

Aux cercles egaux les angles appuyez ſur circonferences egales ſont egaux entr'eux ; ſoit qu'ils y ſoient appuyez eſtant conſtituez aux centres, ou bien eſtant conſtituez aux circonferences.

Aux cercles egaux A B C, D E F, deſquels les centres ſont G, & H, ſoient premierement conſtituez les angles A G C, D H F, aux centres, ayãt pour baſes les circonferences egales A C, D F. Ie dis qu'ils ſont egaux entr'eux.



Car s'ils ne ſont egaux ſoit l'angle G le plus grand, & ſoit faict l'angle A G I, egal à l'angle G H F, [a] donc la circonference A I, ſera egale à la circonference D F; mais la circonference A C, eſt egale à la circonference D F, par l'hypotheſe, partant A I, & A C, ſeront egales entr'elles, la partie au tout, ce qui eſt impoſſible. Donc les angles A G C, D H F, ſont egaux.

[a] 26. 3.

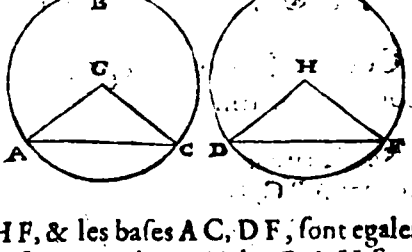
Secondement ſoient conſtituez les angles B, & E, aux circonferences, ayant circonferences egales A C, D F, pour baſes: par les meſmes raiſons: on monſtrera qu'ils ſont egaux entr'eux. Ce qu'il falloit demonſtrer.

xxvij. THEOREME 25. PROP. 28.

Aux cercles egaux, les lignes droictes egales oſtent circonferences egales, ſçauoir la plus grande à la plus grande & la plus petite à la plus petite.

Aux cercles egaux A B C, D E F, ſoient les lignes droictes egales A C, D F. Ie dis que la plus grande circonference A B C, eſt egale à la plus grande D E F, & la moindre A C, egale à la moindre D F.

Car ſoient prins les centres G, & H, & ſoient ioinctes les droictes lignes A G, G C, D H, H F,



Les deux costez G A, G C, du triangle A G C, sont egaux aux deux H D, H F, du triangle D H F, & les bases A C, D F, sont egales par l'hypothese, partant les [a] angles G, & H, sont egaux: [b] Donc les circonferences A C, D F, sur lesquelles ils sont appuyez seront egales, lesquelles estant ostees des cercles egaux, demeureront les circonferences A B C, D E F, aussi egales: Donc aux cercles &c. Ce qu'il falloit demonstrer.

[a] 8. 1.
[b] 26. 3.

THEOREME 26. PROP. 29. xxviij

Aux cercles egaux, les circonferences egales, soustendent lignes droictes egales.

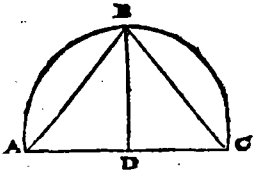
Soient les cercles egaux A B C, D E F, ausquels soient prises les circonferences A B C, D E F, egales, & soient iointes les droictes lignes A C, D F. Ie dis qu'icelles lignes droictes qui les soustendẽt sont egales. *Voyez la figure precedente.*

Car soient pris les centres G, & H, & soient conioinctes les droictes lignes A G, G C, D H, H F. D'autant que les deux costez A G, G C, du triangle A G C, sont egaux aux deux D H, H F, du triangles D H F, [a] & les angles G, & H, egaux, puis qu'ils sont appuyez sur egales circõferences, [b] les bases qui sont les droictes lignes A C, D F, sont egales. Donc aux cercles egaux &c. Ce qu'il falloit demonstrer.

[a] 27. 3.
[b] 4. 1.

xxix. PROBLEME 4. PROP. 30.

Coupper en deux egalement vne circonference donnee.



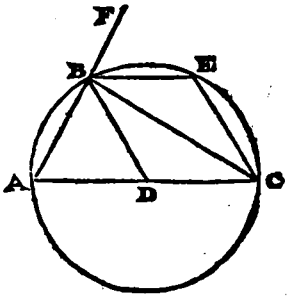
Soit la circonference donnee A B C, laquelle il faut coupper en deux parties egales: soit ioincte la ligne droicte A C, laquelle soit diuisee en
a 10. 1. deux parties egales, a par le poinct D, par lequel
b 11. 1. soit menee la droicte D B, à b angles droicts à A C, & soient ioinctes les lignes droictes A B, C B, elle est couppee en deux egalemẽt par le poinct B.

Car puis que A D, C D, sont egales & D B, commune, les deux costez A D, D B, du triangle A D B, seront egaux aux deux C D, D B, du triangle C D B, & les angles au poinct D, sont egaux
c 4. 1. sçauoir droicts c les bases A B, C B, sont egales,
d 28. 3. & d partant les circonferences A B, C B, aussi egales: nous auons donc couppé vne circonference en deux egalement. Ce qu'il falloit faire.

xxx. THEOREME 27. PROP. 31.

Au cercle, l'angle qui est au demi cercle est droict: mais celuy qui est au plus grand segment est plus petit qu'vn droict; & celuy qui est au plus petit segment, est plus grand qu'vn droict. Et d'auantage, l'angle du plus grand segment, est plus grand qu'vn

droict; mais l'angle du pluspetit ſegment, eſt plus petit qu'vn droict.



Soit le cercle A B C, & le diametre d'iceluy A C, & le centre D, & ſoient ioinctes les droictes lignes A B, C B, itẽ B E, E C. Ie dis premierement que l'angle A B C, au demi-cercle eſt droict.

Car ſoit menee B D, au centre D, & prolongee A B, au poinct F. D'autant que D A, D B, ſont egales, les angles [a] D A B, D B A; ſeront egaux entr'eux, par meſme raiſon les deux angles D B C, D C B, ſeront auſſi egaux, car D B, D C, ſont auſſi egales entr'elles, partant les deux D B A, D B C, c'eſt à dire le total A B C, eſt egal aux deux B A C, B C A, mais l'angle externe C B F, [b] eſt egal aux deux meſmes angles internes & oppoſez B A C, B C A. Donc les deux angles A B C, C B F, ſeront egaux entr'eux, & partant droicts, donc l'angle A B C, au demi-cercle eſt droict; ce qui eſt premierement propoſé

[a] 5. 1.

[b] 32. 1.

Ie dis ſecondement que l'angle B A C, au plus grand ſegment B A C, eſt plus petit qu'vn droict. Car d'autant qu'au triangle A B C, les deux angles A B C. B A C, [c] ſont plus petits que deux droicts; & A B C, eſt demonſtré droict: l'angle B A C, ſera plus petit qu'vn droict. Ce qui eſt ſecondement propoſé.

[c] 17. 1.

Tiercement ie dis que l'angle B E C, au plus pe-

tit segment B E C, est plus grand qu'vn droict. Car d'autant qu'au quadrilatere A B E C, descrit
d 22.3. au cercle, les deux angles opposez d E, & A, sont egaux à deux droicts & l'angle B A C, est monstré plus petit qu'vn droict, l'autre B E C, sera plus grand qu'vn droict. Ce qui estoit tiercement proposé.

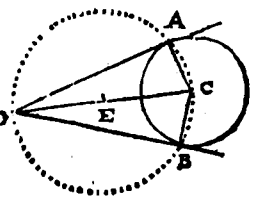
Quartement, ie dis que l'angle du plus grand segment B A C, qui est l'angle A B C, contenu de la circonference A B, & de la ligne droicte B C, est plus grand qu'vn droict. Car puis que l'angle droict A B C, est cõtenu des lignes droictes A B, B C, est vne partie d'Iceluy, le tout A B C, contenu de la circonference A C, & de la ligne droicte B C, sera plus grand qu'vn droict. Ce qui estoit quartement proposé.

Finalement. Ie dis que l'angle du plus petit segment qui est l'angle C B E, contenu de la ligne droicte C B, & de la circonference E B C, est plus petit qu'vn droict; car iceluy est plus petit que l'angle droict, F B C, la partie que le tout, ce qui estoit finalement proposé. Donc au cercle, l'angle qui est au demi cercle &c. Ce qu'il falloit demonstrer.

COROLLAIRE

D'icy est manifeste que l'angle d'vn triangle qui est egal aux deux autres, est droict: D'autant que l'angle contigu à iceluy (qui est faict hors le triangle, le costé estant prolongé) est egal aux mesmes. Ce qui appert de la premiere demonstration. Ou d'autant qu'il est la moitié des trois angles du triãgle, lesquels vallent deux droicts.

SCHOLIE.

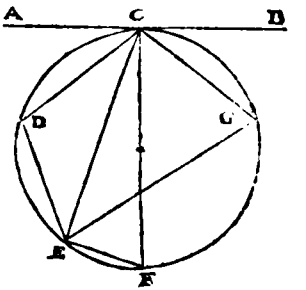


De la premiere demonſtration de cette propoſition nous colligerons facilement comme l'on pourra mener deux lignes d'vn poinct hors vn cercle donné qui toucheront iceluy cercle de part & d'autre. Soit donc le cercle donné A B, & hors iceluy le poinct D, duquel ie veux mener vne ligne qui touche le cercle, ou deux de part & d'autre. Soit trouué le centre C, & du poinct D, au centre C, ſoit menee la ligne droicte D C, & diuiſee en deux egalement au poinct E, & de E, comme centre, & à l'interualle E C, ſoit deſcrit le cercle A D B, couppant le cercle donné aux poincts A, & B, & ſoient ioinctes les droictes lignes D A, D B. Ie dis que l'vne & l'autre touchera le cercle aux poincts A, & B, car ayant menè les droictes lignes A C, & B C, l'vn & l'autre [a] angle A, & B, ſera droict au demi-cercle, donc par le corollaire de la ſeiziesme propoſition de ce liure D A, & D B, toucheront le cercle aux poincts A, & B.

[a] 31. 1.

THEOREME 28. PROP. 32. xxxj.

Si quelque ligne droicte touche vn cercle, & de l'attouchement l'on mene quelque ligne droicte au cercle, le couppant, les angles qu'elle faict auec la touchante ſerõt egaux aux angles qui ſont aux ſegments alternes.



Que la ligne droicte A B, touche le cercle C D E, au poinct C, duquel soit menee la ligne droicte C E, couppant le cercle en deux segments A C D E, C G F E, ausquels soient constituez les angles D, & G. Ie dis que l'angle A C E, est egal à l'angle qui est au segment alterne C G F E; & l'angle D C E, est egal à l'angle qui est aussi au segment alterne C D E.

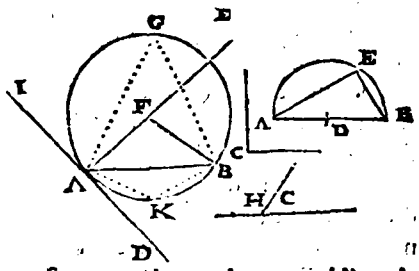
Car soit menee la ligne C E, par le centre & soit
a 18. 3. ioincte E F, la ligne a C F, sera perpendiculaire à
b 31. 3. A B, b & l'angle C E F, sera droict, & partant les deux restans, E F C, E C F, seront egaux à vn droict, comme à l'angle droict A C F; donc si l'on oste le commun E C F, demeurera l'angle A C E, egal à l'angle E F C, lequel est egal à l'angle G,
c 21. 3. c d'autant qu'ils sont en vn mesme segment; Donc l'angle A C E, sera aussi egal à l'angle G. Et d'autant qu'au quadrilatere D E G C, descrit au cercle les deux angles opposez D, & G, sont
d 22. 3. egaux d à deux droicts & les deux A C E, e B C E,
e 13. 1. sont aussi egaux à deux droicts, si l'on oste les deux egaux A C E, C G E, demeurera l'angle B C E, egal à l'angle D, au segment alterne C D E. Donc si vne ligne droicte &c. Ce qu'il falloit demonstrer.

Si la couppante passe par le centre A, f la propo-
f 18. & 31. 3. sition est manifeste.

PROBLEME

PROBLEME 5. PROP. 33. xxxij.

Sur vne ligne droicte donnee, descrire vn segment de cercle, lequel reçoiue vn angle egal à vn angle rectiligne donné.



Soit la droicte ligne dõnee A B, & l'angle donné C, lequel soit premieremẽt droict: Il faut descrire vn segment de cercle, auquel l'angle constitué soit egal à l'angle donné C. Soit diuisee la droicte ligne A B, en deux egalement par le poinct D, & du poinct D, cõme centre & à l'interualle D A, soit descrit le demi-cercle, auquel soit faict l'angle A E B, [a] lequel est droict, & partant egal à l'angle droict donné C. [a] 31. 3.

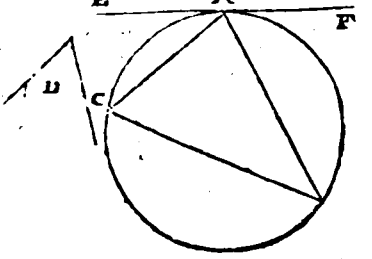
Soit secondement l'angle donné C, agu: au poinct A, de la ligne donnee A B, soit faict l'angle D A B, egal à l'angle agu, C; & du poinct A, soit menee A E, à angles droicts à A D, laquelle tombera au dessus de A B: puis soit faict l'angle A B F, egal à l'angle F A B, & que B F, couppe la droicte ligne A E, au poinct F: [b] les lignes F A, F B, seront egales. Partant si du centre F, à l'interualle F A, l'on descrit le cercle A G, il passera par le poinct B. Ie dis donc que l'angle qui sera faict au segment A G B, descrit sur la ligne A B, sera egal à l'angle [b] 6. 1.

C. Soit donc faict l'angle A G B, audict segment: d'autant que A E, passe par le centre & de l'extremité A, est menee A D, à angles droicts à icelle, c Coroll. 1. 3. D A le touchera le cercle au poinct A. C'est d 32. 3. à pourquoy l'angle D A B, c'est à dire l'angle donné C, sera egal à l'angle G, au segment alterne A G B.

Tiercement soit l'angle donné H, obtus. Soit faict de rechef l'angle I A B, egal à l'angle H, & du poinct A, soit menee A E, à angles droicts à A I, laquelle tombera au dessus de A B; soit faict le reste, comme deuant, l'on aura descrit sur la ligne A B, le segment A K B, auquel l'angle K, est egal à l'angle obtus donné H. Car l'angle I A B, c'est à e 32. dire l'angle donné H, c'est egal à l'angle K, au segment alterne A K B, car c'est la mesme demonstration. Donc sur vne ligne droicte donnee &c. Ce qu'il falloit faire.

xxxiij. PROBLEME 6. PROP. 34.

D'vn cercle donné, retrancher vn segment, qui reçoiue vn angle egal à vn angle rectiligne donné.



Soit le cercle donné A B C, duquel il faut retrancher vn segment, auquel l'angle constitué soit egal à vn angle donné, D. 17. 3. Soit menee la droicte ligne E

F, touchant le cercle au poinct A. Puis soit faict l'angle F A B, egal à l'angle donné D, & soient menees les droictes lignes A C, B C. Ie dis que l'angle A C B, au segment osté A C B, est egal à l'angle donné D.

Car l'angle F A B, qui est faict egal à l'angle dõné D, est [b] egal à l'angle C, au segment alterne A C B, Donc iceluy angle C, sera pareillement egal à D. Nous auons donc osté du cercle donné le segment A C B, &c. Ce qu'il falloit faire. [b] 32. 3.

THEOREME 29. PROP. 35. xxxiv.

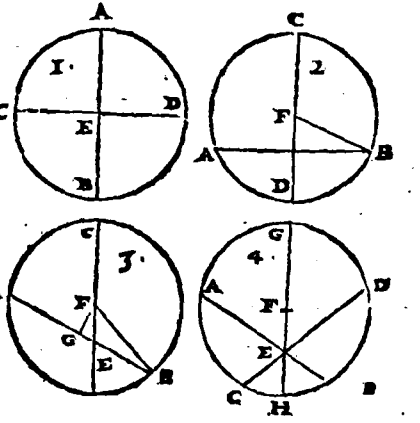
Si au cercle deux lignes droictes se couppent l'vne l'autre; le rectangle contenu sous les deux parties de l'vne, est egal au rectangle contenu sous les deux parties de l'autre.

Au cercle A B C, que les deux lignes A B, C D, se couppent au poinct E. Ie dis que le rectangle contenu sous A E, E B, est egal au rectangle contenu sous C E, E D.

Soit premierement le poinct de l'interfection E, le centre du cercle, comme en la premiere figure, les quatre segments seront egaux, chacun estant le demi-diametre du cercle: donc il est manifeste que le rectangle contenu sous les deux parties de l'vne est egal au rectangle contenu sous les deux parties de l'autre.

Secondement que C D, seulement passe par le centre F, couppant A B, en deux egalement au poinct E; [a] & partant à angles droicts, & soit cõioincte la droicte ligne B F. D'autant que C D, est [a] 3. troi.

diuisee en deux egalement au centre F, & inegalement au poinct E, le rectangle contenu sous les
b 5. 2. segments inegaux C E, E D, b auec le quarré de la moyẽne sectiõ F E, est egal au quarré de la moi-
c 47. 1. tié F D, c'est à dire de F B, mais le quarré de c F B, est egal aux deux quarrez de FE, EB; Dõc le rectãgle cõtenu sous CE, ED, auec le quarré de FE, sera aussi egal au deux quarrez de F E, E B; parrant si l'on oste le commun quarré de F E, demeurera le rectangle contenu soꝰ CE, ED, egal au quarré de E B, c'est à dire au rectãgle, sous A E, E B, car puis qu'elles sont egales, le rectangle contenu sous les deux, est quarré, selon la premiere definition de ce liure. *Voyez la deuxiesme figure.*



Tiercement que C D, passant par le centre F, couppe A B, en deux inegalement au poinct E, & soit diuisee icelle A B, en deux egalemẽt au poinct
d 3. 3. G, & soient menees G F, & F B; F G, d sera perpendiculaire à A B. D'autant donc que C D, est diuisee en deux egalement à F, & inegalement à
e 5. 2. E, le rectangle contenu sous C E, E D, e auec le quarré de la moyenne section F E, sera egal au

quarré de la moitie F D, c'eſt à dire au quarré de F B, ſon egale; mais le quarré de F B, [f] eſt egal au deux quarrez F G, G B; donc le rectangle contenu ſous C E, E D, auec le quarré de F E, eſt auſſi egal aux deux quarrez de F G, G B, & le quarré de F E, [g] eſt egal auſſi aux deux quarrez de F G, G E, partant le rectangle ſous C E, E D, auec les deux quarrez de F G, G E, eſt egal aux deux quarrez F G, G B; oſtant donc le quarré commun, F G, reſtera le rectangle contenu ſous C E, E D, auec le quarré de G E, egal au quarré de G B, mais le rectangle contenu ſous A E, E B, auec le quarré de G E, [h] eſt auſſi egal au quarré de G B, (puis que A B, eſt diuiſee en deux egalement au poinct G, & inegalement au poinct E.) Donc le rectangle contenu ſous C E, E D, auec le quarré de G E, eſt egal au rectangle ſous A E, E B, auec le meſme quarré de G E, oſtant donc le quarré commun de G E, demeurera le rectangle contenu ſous C E, E D, egal au rectangle contenu ſous A E, E B. Ce qui eſt propoſé. *Voyez la troiſieſme figure.*

[f] 47. 1.

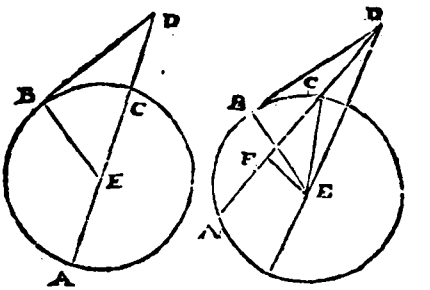
[g] 47. 1.

[h] 5. 2.

Quartement que A B, ny C D, ſe couppants au poinct, E, ne paſſent par le centre, & ſoit mené le diametre G H, par le poinct E, (comme en la quatrieſme figure) l'on monſtrera comme auparauant que le rectangle contenu ſous A E, E B, eſt egal au rectangle ſous G E, E H; & le rectangle ſous C E, E D, auſſi egal au rectangle ſous G E, E H, & partant egaux entr'eux, ſoit qu'vne d'icelles A B, C D, ſoit couppee en deux egalement ou non. Dõc ſi au cercle deux lignes &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.

XXXV. THEOREME 30. PROP. 36.

Si l'on prend quelque poinct hors le cercle, & d'iceluy tombent deux lignes droictes au cercle, l'vne desquelles couppe le cercle & l'autre le touche ; Le rectangle contenu sous toute la couppante, & sa partie de dehors prise entre le poinct, & la circonference conuexe, est egal au quarré de la touchante.



Hors le cercle A B C, soit prins le poinct D, & d'iceluy soit menee D A, couppãt le cercle par le poinct C, & D B ; le [a] touchant au poinct B. Ie dis que le rectangle contenu sous la toute A D, & sa partie D C, est egal au quarré de D B.

[a] 17. 3.

Que D A, passe premierement par le centre E, & soit ioincte la droicte ligne E B, [b] laquelle sera perpendiculaire à D B. D'autant que C A, est diuisee en deux egalement à E ; & à icelle est adiousstee C D, le rectangle contenu sous A D, D C, [c] auec le quarré de E C, c'est à dire de E B, son egale, est egal au quarré de E D ; mais le quarré de E D, [d] est egal aux deux quarrez de D B, & B E, donc le rectan-

[b] 18. 3.

[c] 6. 2.

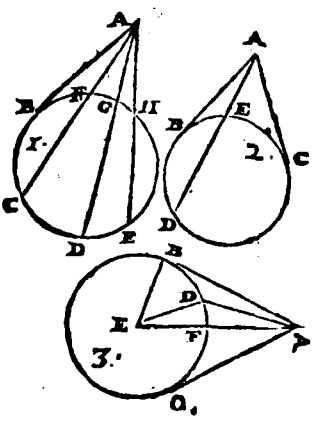
[d] 47. 1.

gle contenu sous A D, D C, auec le quarré de B E, sera aussi egal aux deux quarrez de D B, B E, donc, ostant le quarré commun de E B, restera le rectangle sous A D, D B, egal au quarré de D B, touchante. Ce qui est proposé.

Secondement que D A, couppante, ne passe par le centre E, & soit diuisee A C, en deux egalemẽt au poinct F, & soient ioinctes les droictes lignes E B, E F, E C; la ligne E B, sera [e] perpendiculaire à D B, & [f] E F, à A C. D'autant donc que A C, est diuisee en deux egalement au poinct F, & à icelle est adiouſtee D C, [f] le rectangle cõtenu sous A D, D C, auec le quarré de F E, est egal au quarré de F D. Donc adiouſtant le commun quarré de E F, le rectangle contenu sous A D, D C, auec les deux quarrez de C F, F E, est egal aux deux quarrez de D F, F E; mais le quarré de E C, c'est à dire de E B, son egale [g] est egal aux deux quarrez de C F, F E, donc le rectangle sous A D, D C, auec le quarré E B, est egal aux deux quarrez de D F, F E, & le quarré de D E, est [h] aussi egal aux deux quarrez de D F, F E, partant le rectangle sous A D, D C, auec le quarré de B E, sera egal au quarré de D E, lequel est egal [i] aux deux quarrez de D B, B E, donc le rectangle sous A D, D C, auec le quarré de B E, est egal aux deux quarrez de D B, B E, ostant donc le commun quarré de B E, demeurera le rectangle sous A D, D C, egal au quarré D B. Ce qu'il falloit demonstrer.

e 18 1.
f 3. troi.
f 6. 2.
g 47. 1.
h 47. 1.
i 47. 1.

COROLLAIRE 1.



De cette propoſition, il eſt manifeſte, que ſi de quelcõque poinct pris hors le cercle, l'on mene pluſieurs lignes droictes couppãt le cercle; les rectangles compris ſous chacune des toutes & ſa partie exterieure sõt egaux entr'eux. Car ſi du poinct A, (en la premiere figure) l'on mene A C, A D, A E, & A B, le touchant, le rectangle ſous A C, A F, ſera [a] egal au quarré de A B. Semblablement le rectangle ſous A D, A G, & le rectangle ſous A E, A H, & partant egaux entr'eux.

[a] 36. tr.

COROLLAIRE. 2.

Il eſt auſſi manifeſte que deux lignes droictes menees d'vn meſme poinct, touchant le cercle ſont egales entr'elles. Comme ſoient les deux A B, A C, qui touchent le cercle aux poincts B, & C, (en la deuxieſme figure.) Ie dis qu'elles ſont egales entr'elles. Car ſoit menee A D, couppant le cercle au poinct E: tant le quarré de A B, que le quarré de A C, [b] ſera egal au rectangle contenu ſous A D, A E, & partant egaux entr'eux, & donc les lignes A B, A C, pareillement egales entr'elles.

[b] 36. tr.

COROLLAIRE 3.

Semblablement il eſt manifeſte, que d'vn poinct pris hors le cercle l'on peut mener ſeulemẽt deux lignes droictes qui touchent le cercle: Car ſi outre les deux A B, A C, l'on en peut mener vne troiſieſme A D, touchant le meſme cercle: ayant menés les droictes lignes E B, E D, du centre E, les angles A B E, A D E, ſeront droicts & partant egaux entr'eux, ce qui eſt abſurde, car ſi on mene la droicte ligne A E, l'angle ſera plus grãd que l'angle A B E.

[c] 18. 3.

[d] 21. 1.

COROLLAIRE 4.

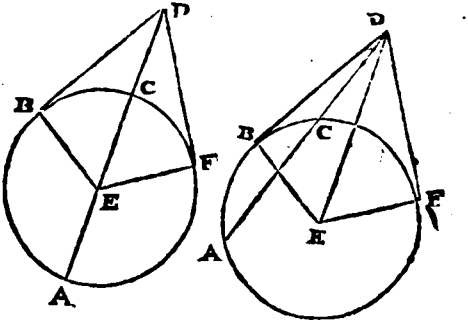
Il eſt finalement euident, que ſi deux lignes droictes ſont menees de quelconque poinct, hors le cercle à la circonference conuexe, & que l'vne d'icelles touche le cercle, l'autre le touchera pareillement &c.

THEOREME 31. PROP. 37. xxxvj.

Si hors le cercle l'on prẽd quelque poinct, & d'iceluy poinct, tombent au cercle deux lignes droictes, vne deſquelles couppe le cercle & l'autre l'atteint. Et que le rectangle contenu ſous la toute couppante, & ſa partie de dehors, priſe entre le poinct & la circonference conuexe ſoit egal au quarré de l'atteignante, icelle atteignante touchera le cercle.

Hors le cercle A B C, ſoit pris le poinct D, du-

quel ſoit menee DA, couppãt le cercle au poinct C, & D B, l'atteignant au poinct B: & ſoit le rectangle cõtenu ſous A D, DC, egal au quarré de D B Ie dis que D B, touche le cercle au poinct B.



[a] 17. 3. Car ſoit [a] menee A F, touchant le cercle & ſoit trouué le centre E, & ſoient ioinctes EB, EF: & ſi D A, ne paſſe pas le centre E, ſoit ioincte auſſi D
[b] 18. 3. E: l'angle [b] D F E, ſera droict: Et d'autant que
[c] 36. 3. D F, touche le cercle, [c] le quarré d'icelle ſera egal au rectangle contenu ſous D A, D C, mais le quarré de D B, eſt egal au meſme rectangle ſous D A, D C, par l'hypotheſe. Donc les quarrez de D B, D F, ſeront egaux entr'eux & DB, & D F, auſſi e-
[d] 15. d. 1. gales. [d] Mais EB, EF, ſont egale donc les deux coſtez DB, BE, du triangle DBE, ſont egaux aux 2. D F, FE, du triangle DFE, chacun au ſien & la baſe
8. D E, commune, [e] & les angles B, & F, ſeront
[f] 18. egaux, mais DFE, [f] eſt droict, donc D B E, ſera auſſi droict: Donc par le corollaire de la ſeizieſme propoſition de ce liure DB, touchera le cercle. Ce qui eſt propoſé. Donc ſi l'on prẽd quelque poinct &c. Ce qui falloit demonſtrer.

Fin du troiſieſme liure.

LIVRE QVATRIESME,
DES ELEMENTS D'EVCLIDE.

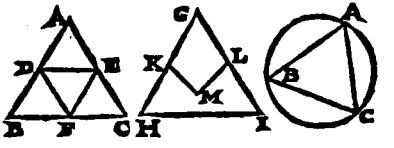
DEFINITIONS.

1. Vne figure rectiligne eſt dicte eſtre inſcrite en vne figure rectiligne, quand chacun des angles de la figure inſcrite, touche chacun coſté de celle en laquelle elle eſt inſcrite.

EVCLIDE traictant en ce quatrieſme liure de diuerſes inſcriptions de figures aux cercles, & des deſcriptiõs des meſmes figures à l'entour du cercle: Item des inſcriptions du cercle aux meſmes figures, & des deſcriptions du cercle à l'entour d'icelles, il expoſe en peu de definitions, que c'eſt à dire vne figure eſtre inſcrite en vne figure, ou eſtre deſcrite à l'entour, commençant aux figures rectilignes. Cõme pour exemple, ſi chacun des angles D, E, F, du triangle interne D E F, touchent, chacun des coſtez du triangle A B C, externe, le triangle D E F, ſera dict eſtre inſcrit au triangle A B C. Mais d'autant que l'angle M, du triangle K

L M, ne touche le coſté H I, du triangle G H I, le triangle K L M, ne ſera dict eſtre inſcrit en l'autre, encore qu'il ſoit tout au dedans, & que deux des angles de l'vn touchent deux coſtez de l'autre.

2. Semblablement vne figure eſt dicte eſtre deſcrite à l'entour d'vne figure; quand chacun coſté de la circonſcrite, touche chacun angle, de celle à l'entour de laquelle elle eſt deſcrite.



Au contraire le triãgle A B C, ſera dict eſtre deſcrit à l'entour du triangle D E F, d'autant que chacun des coſtez de celuy-là touche chacun des angles de cetuy-cy; mais le triangle G H I, ne ſera dict eſtre deſcrit à l'entour du triangle K L M, puis que le coſté H I, ne touche l'angle M. Il faut entendre le meſme des inſcriptions & circonſcriptions des autres figures rectilignes; &c. Et les figures rectilignes ſont proprement dictes eſtre inſcrites ou circonſcrites, quand le nombre des coſtez eſt egal & le nombre des angles egal, combien qu'il ne ſoit du tout neceſſaire, &c.

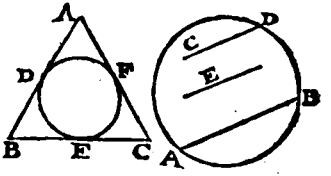
3. Vne figure rectiligne eſt dicte eſtre inſcrite, en vn cercle, quand vn chacun angle de l'inſcrite, touche la circonference du cercle.

Comme, ſi les angles A, B, C, du triangle A B C,

touchent la circonference du cercle A B C, ledict triangle, sera dict estre inscrit au cercle. Et si quelqu'vn des angles ne touchoit la circonference, le triangle ne seroit dict estre inscrit au cercle.

4. Mais vne figure rectiligne est dicte estre descrite à l'entour du cercle, lors que chacun costé de la circonscrite, touche la circonference du cercle.

Pour exemple; si les costez du triangle A B C, touchent la circonferenee du cercle D E F, le triangle, sera dict estre descrit à l'entour du cercle.



5. Semblablement le cercle est dict estre inscrit en vne figure, lors que la circonference du cercle, touche chacun costé de la figure en laquelle il est inscrit.

6. Mais vn cercle est dict estre descrit à l'entour d'vne figure, quand la circonference du cercle, touche chacun angle de la figure, à l'entour de laquelle il est descrit.

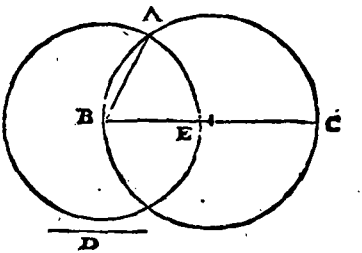
Pareillement le cercle D E F, (en la figure de la 4. def.) sera dict estre inscrit au triangle A B C, mais le cercle A B C, en la fig. de 2. d. sera dict estre descrit à l'entour du triangle A B C; & faut entendre ainsi des autres figures rectilignes qui sont dictes estre inscrites au cercle, ou descrites à l'en-

tour, ou aufquelles le cercle eſt dict eſtre inſcrit, ou deſcrit à l'entour.

7. Vne ligne droicte eſt dicte eſtre accommodee ou adaptee au cercle, quand les extremitez d'icelle, ſont en la circonference du cercle.

j. PROBLEME 1. PROP. 1.

Au cercle donné, accommoder vne ligne droicte, egale à vne ligne droicte donnee, laquelle ne ſoit pas plus grande que le diametre du cercle.



Soit le cercle A BC, auquel il faut accommoder vne ligne droicte egale à la donnee D, laquelle n'excede le diametre du cercle dõné. D'autant que [a] le diametre eſt la plus grãde de toute les lignes accommodees au cercle. [a] 15. 3.

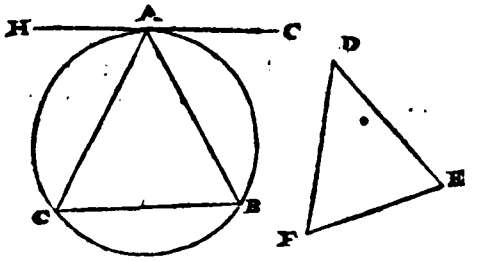
Soit mené le diametre BC; ſi D, eſt egale à BC, l'on aura accommodé la ligne droicte B C, au cercle egale à la donnee D. Mais ſi D, eſt moindre que le diametre B C, ſoit retranchee [b] B E, egale à D, & de B, comme centre à l'interualle BE, ſoit deſcrit le cercle A E, couppant A B, au poinct A, & ſoit menee B A, icelle ſera accommodee au cercle A B C, egale à D. Car BA, [c] eſt egale à BE, [b] 3. 1. [c] 15 def.

& D, auſſi egale à B E, par la conſtruction, partant B A, & D, ſeront egales entr'elles, & les extremitez de B A, ſont en la circonference, eſtant menee de l'extremité du diametre au poinct de la ſection des deux cercles. Donc nous auõs accommodé au cercle, vne ligne droicte &c. Ce qu'il falloit faire.

PROBLEME 2. PROP. 2. ij.

Dedans vn cercle donné, inſcrire vn triangle equiangle à vn triangle donné.

Soit le cercle donné A B C, auquel il faut inſcrire vn triangle equiangle au triangle donné D F E.



Soit menee H G, touchant le cercle au poinct A, & ſoit faict l'angle G A B, egal à l'angle F, [a] & l'angle H A C, egal à l'angle E, menãt les droictes lignes A B, A C, iuſques à la circonference aux poincts B, & C, & ſoit ioincte la ſtroicte ligne C B. Ie dis que le triangle A B C, inſcrit au cercle donné, eſt equiangle au triangle D E F. [a] 17. 3.

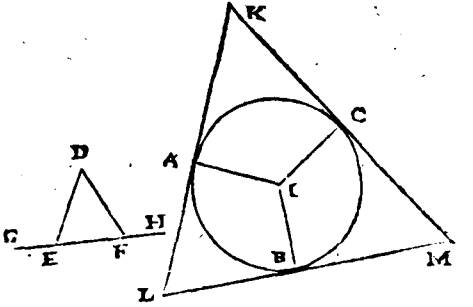
Car [a] puis que H G, touche le cercle & A B, le couppe, l'angle G A B, qui eſt faict egal à l'angle F, [a] ſera egal à l'angle C, au ſegmẽt alterne, doncles an- [a] 32. 3.

gle C,& F, ſeront egaux entr'eux. Semblablemẽt d'autant que l'angle H A C, qui eſt egal à l'angle
b 32. 3. E, par la conſtruction, b eſt egal à l'angle B, au ſegment alterne, les angles B, & E, ſeront egaux: donc puis les deux angles B, & C, du triangle A B C, ſont egaux aux deux E, & F, du triangle D E F,
c 32. 1. les deux autres c A, & D, ſeront pareillement egaux entr'eux. Donc le triangle A B C, eſt equiãgle au triangle D E F. Donc en vn cercle donné &c. Ce qu'il falloit faire.

iij. PROBLEME 3. PROP. 3.

A l'entour d'vn cercle donné, deſcrire vn triangle, equiangle à vn triangle dõné.

Soit le cercle donné A B C, à l'entour duquel il faut deſcrire vn triangle, equiãgle au triangle donné D E F. Ayant prolongé le coſté E F, de part



& d'autre aux poincts G, & H, ſoit prins le centre I, & ſoit menee I A, au poinct contingent A, & au poinct I, d'icelle ſoit faict l'angle A I B, egal à l'angle D E G, & B I C, egal à D F H, & les extremitez

mitez A, B, & C, soient menees à angles droicts les droictes lignes K L, L M, M K, lesquelles se rencontreront aux poincts, K, L, M, d'autant que si on ioinct la droicte A B, les deux angles L A B, L B A, seront moindres que deux droicts, n'estant que partie des deux droicts I A L, I B L, partant [a] A L, B L, se rencontreront au poinct L, & ainsi des autres; donc le triangle L K M, est descrit à l'entour du cercle A B C, & est equiangle au triãgle donné D E F: [b] Car tous les costez touchent le cercle aux poincts A, B, C. Et d'autant que tous les angles du quadrilatere A I B L, sont egaux à quatre droicts comme il est monstré à la 32. du 1. liu. & les deux aux poincts A, & B, sont droicts, les deux A I B, A L B, demeureront egaux à deux droicts, & partant egaux aux deux D E G, D E F, qui [c] sont aussi egaux à deux droicts, dõc si on oste les egaux A I B, D E G, demeurera A L B, egal à D E F; ainsi l'angle M, sera monstré à l'angle D F E. Donc le troisiesme [d] angle K, sera egal au troisiesme D. Partant le triangle K L M, sera equiangle au triangle D E F. Donc, à l'entour d'vn cercle &c. Ce qu'il falloit faire.

[a] 31. d. 1.
[b] Coroll. 16. 3.
[c] 13. 1.
[d] 32. 1.

PROBLEME 4. PROP. 4. iv.

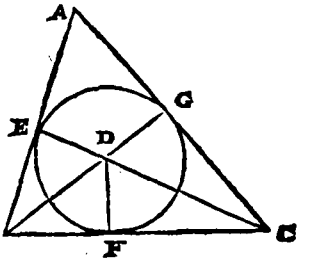
Dans vn triangle donné, descrire vn cercle.

Soit le triangle donné A B C, dans lequel il faut escrire vn cercle.

Soien [a] diuisez les deux angles B, & C, chacun en deux egalement, par les droictes lignes B D, C D, se rencontrant au poinct D: [b] & d'iceluy

[a] 9. 1.
[b] 12. 1.

soient menees les perpendiculaires DG, DE, DF, sur les trois costez AB, BC, CA. D'autant que les deux angles DBF, DFB, du triangle DFB, sont egaux aux deux DBE, DEB, du triangle DEB, chacun au sien, & le costé DB, commun : [c] les deux costez DE, DF, seront pareillement egaux. Par mesme raison les costez DF, DG, seront egaux, aux triangles DCF, DCG. Donc les trois DG, DF, seront egales entr'elles, & le cercle descrit du poinct D, comme centre à l'interualle DE, passera par les autres poincts G, & F, & [d] touchera les costez du triangle aux poincts E, F, G, puis que les costez sont à angles droicts aux semi-diametres DE, DF, DG. Donc au triangle donné, nous auons descrit vn cercle. Ce qu'il falloit faire.



c 26. 1.

d Cappell. 16. 3.

V. PROBLEME 5. PROP. 5.

A l'entour d'vn triangle donné descrire vn cercle.

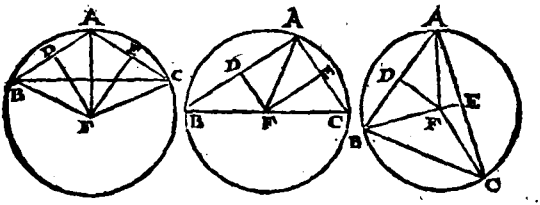
Soit le triangle donné ABC, à l'entour duquel il faut descrire vn cercle.

Soient [a] diuisez les deux costez AB, AC, en deux egalement aux poincts D, & E, desquels soiēt menees DF, EF, [b] à angles droicts à iceux costez, & se rencontrans au poinct F, (car si on menoit DE, les deux angles FDE, FED, seroient moin-

a 10. 1.

b 11. 1.

dres que deux droicts) & le poinct F, ſera dans le triangle ou au coſté; ou dehors. Soient ioinctes F A, FB, FC: d'autant que les deux, coſtez AD,



D F, du triangle A D F, ſont egaux aux deux B D, D F, du triangle B D F, & les angles au poinct D, droicts; [c] les baſes F A, F B, ſeront egales. Par meſme raiſon F A, F C, auſſi egales, donc les trois F A, FB, F C, ſeront egales entr'elles, partant le cercle deſcrit du poinct F, comme centre, à l'interualle de F A, paſſera auſſi par les deux autres poincts B, & C. Donc à l'entour du triangle donné nous auons deſcrit vn cercle. Ce qu'il falloit faire. [c] 4. 1.

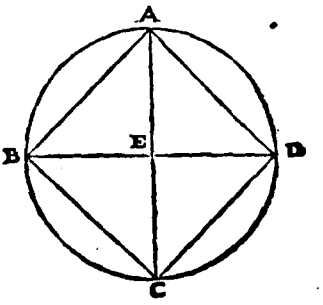
COROLLAIRE

Il eſt manifeſte de cette demonſtration que ſi le centre tombe au dedans du triangle, [d] que tous les angles ſont agus eſtans au plus grand ſegment du cercle: mais s'il tombe au coſté, l'angle [e] oppoſé à iceluy coſté ſera droict, au demi-cercle: Finalement s'il tombe hors le triangle, l'angle oppoſé [f] ſera obtus, eſtant au plus petit ſegment du cercle. [d] 31. 3. [e] 31. 3. [f] 31. 3.

Au contraire, ſi le triangle eſt oxygone, le centre tombera en iceluy; ſi rectangle, il tombera au coſté qui ſouſtient l'angle droict: Et ſi amblygone il tombera dehors.

vj. PROBLEME 6. PROP. 6.

Dans vn cercle donné, inscrire vn quarré.



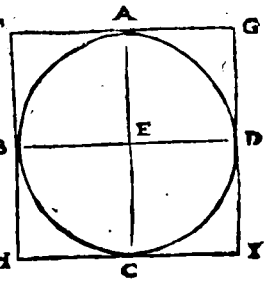
Soit le cercle donné A B C, duquel le centre est E, auquel il faut inscrire vn quarré. Soient menez deux diametres AC, BD, qui se coupent à angles droicts au centre E, & soient ioinctes les droictes lignes A B, B C, C D, D A. Ie dis que A B C D, est le quarré inscrit au cercle donné.

Car d'autant que les deux costez EA, EB, du triangle A E B, sont egaux aux deux E A, E D, du triangle EAD, estant tous menez du centre, & les
a 4. 1. angles contenus d'iceux estant droicts [a] les bases AB, A C, seront egales, & par mesme raison B C, C D, egales; & semblablement C D, D A, & D A, A B. Donc A B C D, sera vn quarré, ayant tous les costez egaux & tous les angles A, B, C, D,
b 31. 1. droicts, [b] chacun estant au demi-cercle. Donc en vn cercle, &c. Ce qu'il falloit faire.

Autrement, d'autãt que les quatre angles au poinct E, sont egaux estant droicts, les quatre arcs ausquels ils
c 26. 3. *insistent* [c] *seront egaux; & partant les quatre droictes*
d 29. 3. *lignes* [d] *soustendantes seront egales, donc tous les costez du quadrilatere A B C D, sont egaux entr'eux, & tous*
e 31. 3. *les angles sont droicts chacun estant* [e] *au demi-cercle. Donc A B C D, sera vn quarré.*

PROBLEME 7. PROP. 7. vij.

A l'entour d'vn cercle donné, descrire vn quarré.



Soit le cercle donné A B C, dont le centre est E, à l'entour duquel il faut descrire vn quarré.

Soient menez deux diametres se couppans à angles droicts au centre E, & par les poincts A, B, C, D, soient menees les lignes droictes, F G, F H, H I, I G, à angles droicts aux diametres, lesquelles se rencontreront aux poincts F, H, I, G, d'autant que si on mene B A, les deux angles F B A, F A B, seront moindres que deux droicts, & ainsi des autres. Ie dis que F G I H, est vn quarré descrit à l'entour du cercle donné. Car puis que les deux angles A E B, F B E, sont droicts, F H, & A C, [a] seront paralleles; semblablement G I, & A C; donc F H, [b] & G I, seront paralleles, & par les mesmes raisons F G, H I, aussi paralleles. Or d'autant que A C H F, est parallelogramme, [c] les costez opposez A C, F H, seront egaux, & les angles opposez C, & F, egaux, mais E C H, est droict, donc A F H, sera droict: par mesme raison les angles H, I, G, seront monstrez droicts, & les costez H I, I G, G F, egaux aux diametres A C, B D, & partant egaux entr'eux, donc F H I G, aura les

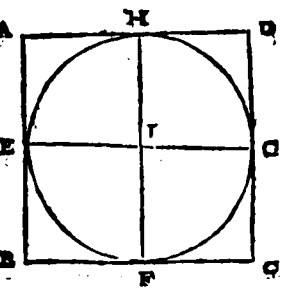
[a] 28. 1.
[b] 30. 1.
[c] 34. 1.

quatre coſtez egaux & les quatre angles droicts, partant ſera quarré, duquel tous les [d] coſtez touchent le cercle. Donc à l'entour d'vn cercle donné nous auons deſcrit vn quarré. Ce qu'il falloit faire.

[d] *Coroll.* 16. 3.

viij. PROBLEME 8. PROP. 8.

Dans vn quarré donné, inſcrire vn cercle.



Soit le quarré donné ABCD, auquel il faut inſcrire vn cercle. Ayãt diuiſé les coſtez en deux egalement aux poincts E, F, C, H, ſoiẽt menees les droictes lignes EG, FH, ſe coupp-pant au poinct I. [a] Or d'autant que AD, BC, ſont egales & paralleles, leurs moitiez AH, BF, ſeront egales & paralleles; [a] & partant AB, ſera egale & parallele à FH. Semblablement CD, ſera egale & parallele à la meſme FH: Pareillement AD, BC, ſeront egales & paralleles à EG; Donc AI, IB, CI, ID, ſeront parallelogrammes, & partant les lignes IE, IF, IG, IH, ſeront egales à AH, EB, DH, AE, mais celles-cy ſont egales entr'elles eſtant les moitiez des egales AD, AB, &c. Donc IE, IF, IG, IH, ſont egales, partant le cercle deſcrit du poinct I, comme centre & à l'interualle de IE, paſſera auſſi par les poincts F, G, H, & [b] touchera tous les coſtez, [c] puis que les angles aux poincts E, F, G, H, ſont droicts, & ſera

[a] 34. 1.

[a] 33. 1.

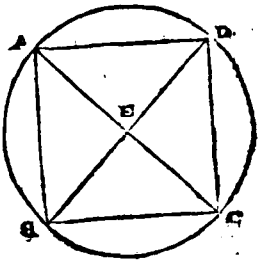
[b] *Coroll.* 16. 3.

[c] 29. 1.

inscrit au quarré A C. Donc en vn quarré donné, nous auons descrit vn cercle. Ce qu'il falloit faire.

PROBLEME 9. PROP. 9. ix.

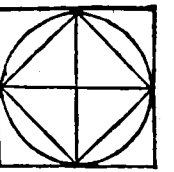
A l'entour d'vn quarré donné, d'escrire vn cercle.



Soit le quarré donné A B C D; à l'entour duquel il faut descrire vn cercle: soient menez les deux diametres A C, B D, se couppans au poinct E. D'autant que les costez A B, A D, du triangle A B D, sont egaux, [a] les angles A B D, A D B, seront egaux: mais l'angle B A D, est droict au quarré: [b] donc A B D, A D B, seront demi-droicts. Semblablement nous monstrerons que tous les autres angles, qui sont aux poincts A, B, C, D, sont demi droicts, & partant egaux entr'eux. Donc puis que les angles E A D, E D A, sont egaux entr'eux, [c] les lignes E A, E D, seront egales; & par mesme raison E A, E B, seront egales; & aussi E B, E C, semblablement E C, E D. Partant le cercle descrit du centre E, à l'interualle E A, passera par les autres poincts B, C, D. Donc à l'entour d'vn quarré donné nous auons descrit vn cercle: Ce qu'il falloit faire.

[a] 5. 1.
[b] 32. 1
[c] 6. 1.

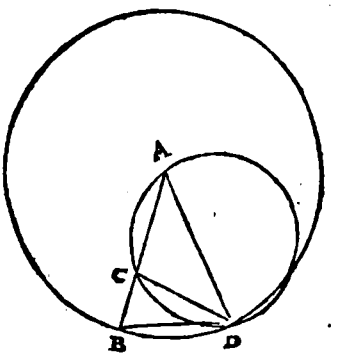
SCHOLIE.



Mais, si à vn cercle donné l'on circonscrit vn quarré, & au mesme cercle l'on inscrit vn autre quarré, le quarré circõscrit sera double du quarré inscrit. Car d'autant que le costé du quarré circonscrit est egal au diametre du cercle, comme il est euident par la septiesme propositiõ de ce liure, c'est à dire au diametre du quarré inscrit ; mais le quarré du diametre est double du quarré duquel il est diametre, comme nous auons monstré à la quarante-septiesme proposition du premiere liure; Donc ce qui est proposé est veritable.

PROBLEME 10. PROP. 10.

Constituer vn triangle isoscele; qui ait vn chacun des angles qui sont à la base, double de l'autre.



Soit prise vne ligne quelconque, AB, laquelle soit diuisee au poinct C, en sorte que le rectangle contenu sous[a] AB, BC, soit egal au quarré de de AC. Puis du cẽtre A, & de l'interualle AB, soit descrit vn cercle [b] auquel soit accommodee la droicte ligne BD, egale à AC, & soit ioincte AD. Ie dis que le triã-

[a] II. 2.

[b] I. 4.

gle A B C, eſt iſoſcele, & à vn chacun des angles A B D, A D B, double de l'autre angle A.

Car ayant mené C D, ſoit [c] deſcrit à l'entour du triangle A C D, le cercle D C A. D'autant que le rectangle contenu ſous A B, B C, eſt egal au quarré de C A, c'eſt à dire de B D, ſon egale, & A B, couppe le cercle [d] A C D, la ligne B D, le touchera au poinct D. Partant l'angle B D C, ſera [e] egal à l'angle A, au ſegment alterne C A D, adiouſtant l'angle commun C D A, l'angle total A D B, ſera egal aux deux C A D, C D A, mais l'angle externe D C B, eſt [f] egal aux meſmes angles A, & A D C. Donc l'angle B C D, eſt egal A D B, c'eſt à dire à [g] A B D, qui luy eſt egal : partant [h] C D, D B, ſeront egales: mais B D, eſt egale à A C, par la conſtruction : Donc C D, ſera egale à C A ; & partant [i] les deux angles C A D, C D A, ſeront egaux ; donc l'angle A D B, qui eſt monſtré egal aux deux C A D, C D A, ſera double de l'angle A, & partant l'angle A B D, ſera auſſi double du meſme angle A. Nous auons donc conſtitué vn triangle &c. Ce qu'il falloit faire.

[c] 5. 4.
[d] 17. 3.
[e] 32. 3.
[f] 32. 1.
[g] 5. 1.
[h] 6. 1.
[i] 5. 1.

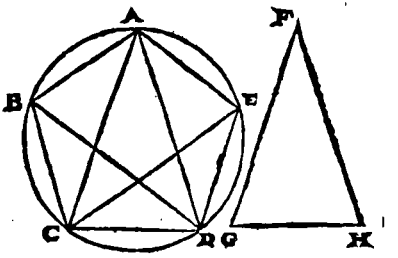
COROLLAIRE.

Or d'autãt que les trois [k] angles du triangle A B D, ſont egaux à deux droicts, c'eſt, à dire à cinq cinquieſmes de deux droicts ; il eſt manifeſte que l'angle A, eſt la cinquiéme partie de deux droicts ; & chacun des deux D, & B, en eſt 2. cinquieſmes parties. Semblablement A, eſt les 2. cinquiéme d'vn droict ; & lequel que l'on voudra B, ou D, eſt les 4. cinquiémes ; [l] d'autãt que tous les trois ſont egaux à deux droicts, c'eſt à dire à 10. cinquiémes parties d'vn droict.

[k] 32. 1.
[l] 32. 1.

11. PROBLEME 11. PROP. 11.

En vn cercle donné, inscrire vn pentagone, equilateral & equiangle.



Soit le cercle dõné ABCD, auquel il faut inscrire vn pẽtagone equilateral & equiãgle. [a] Soit construict le triangle isoscele FGH, qui ait chacun des angles G, & H, double de l'angle F, [b] & au cercle ABCD, soit inscrit le triangle ACD, equiangle au triãgle FGH, & l'vn & l'autre des angles ACD, ADC, soit [c] diuisé en deux egalement par les lignes DB, CE; & soient ioinctes les lignes droictes, AB, BC, CD, DE, EA. Ie dis que le pentagone ABCDE, inscrit au cercle est equilateral & equiangle.

[a] 10. 4.
[b] 2. 4.
[c] 9. 1.

Car d'autant qu'vn chacun des angles ACD, ADC, est double de l'angle CAD, estant diuisez chacun en deux egalement, les cinq angles ADB, BDC, CAD, DCE, ECA, seront egaux: [d] partant les arcs AB, BC, CD, DE, EA; sur lesquels iceux angles sont soustenus, sont egaux, [e] Donc les droictes lignes AB, BC, CD, DE, EA, qui les soustendent seront egales. Partant le pentagone ABCD, est equilateral. Derechef d'autant que les arcs AB, ED, sont egaux, si l'on ad-

[d] 26. 3.
[e] 29. 3.

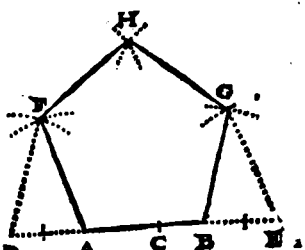
iouſte le commun BCD, le tout ABCD, ſera egal au tout EDCB; [f] Donc les angles AED, BAE, appuyez ſur iceux, ſeront egaux; en la meſme maniere vn chacun des autres angles ſeront egaux. Car ils ſont appuyez ſur arcs egaux, vn chacun deſquels eſt compoſé de trois arcs egaux. Donc le pentagone eſt equiangle, lequel eſtant monſtré auſſi equilatere, nous aurons inſcrit au cercle vn pentagone equiangle & equilatere. Ce qu'il falloit faire. f 27. 3.

COROLLAIRE

D'icy il s'enſuit, que l'angle du pentagone equilateral & equiangle; eſt les 3. cinquieſmes de deux droicts; ou les 6 | 5 d'vn droict. [g] Car puis que les trois angles, BAC, CAD, DAE, ſont egaux, eſtant appuyez ſur les arcs egaux BC, CD, DE; mais CAD, eſt 1 | 5 partie de deux droicts ou 2 | 5 d'vn droict: le tout BAE, ſera les 3 | 5 de deux droicts, ou 6 | 5 d'vn droict. g 27. 3.

SCHOLIE.

Si l'on veut deſcrire vn pentagone equilateral & equiangle ſur vne ligne droicte propoſee, l'on le fera facilement en cette façon. Soit la ligne droicte propoſee AB, laquelle ſoit [a] diuiſee en la moyenne & extreme raiſon au poinct C,



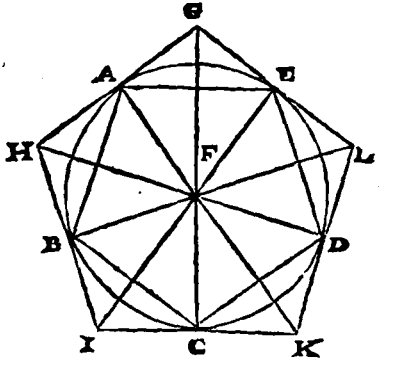
a 11. 2.

& ſoit prolongee AB, de part & d'autre aux poincts D, & E, en ſorte que AD, BE, ſoient egaux au plus grand ſegment AC: & à l'interualle de AB, des deux poincts

A, & D, soient descrits deux arcs se coupppans au poinct F: semblablement des poincts B, & E, & de mesme intervalle soient descrits deux autres arcs se coupppans au poinct G. Finalement des poincts F, & G; & au mesme intervalle soient descrits deux autres arcs se diuisans au poinct H, & soient ioinctes les droictes lignes AF, FH, HG, GB. Ie dis que le pentagone AFHGB, descrit sur la ligne AB, est equilateral & equiangle, &c.

xij. PROBLEME 12. PROP. 12.

A l'entour d'vn cercle donné, descrire vn pentagone, equilateral & equiangle.



Soit le cercle donné ABCD, à l'entour duquel il faut descrire vn pentagone equilateral & equiãgle. Soit [a] descrit en iceluy vn pẽtagone equilateral & equiangle ABCDE, & soit pris le centre F, & soiẽt menees les droictes lignes FA, FB, FC, FD, FE, par l'extremité desquelles soiẽt menees GH, HI, IK, KL, LG, à angles droicts à icelles, & se rencontrant aux poincts G, H, I, K, L. Car puis que les angles GAE, GEA, sont moindres que deux droicts, estant partie des deux droicts FAG, FEG, [b] les lignes AG, EG, se rẽ-

[a] 11.3.

[b] 13.e.f.

contreront au poinct G, & les autres de mesme. Et d'autant qu'elles [c] touchent le cercle, le pentagone G H I K L, sera descrit à l'entour du cercle; lequel ie dis estre equilateral & equiangle. [c] Coroll. 16. 3.

Car ayant mené les droictes lignes, F G, F H, F I, F K, F L, les deux quarrez de F A, A H, [d] seront egaux au quarré de F H, & semblablement les quarrez de F B, B H, seront egaux au mesme quarré F H; partant les deux quarrez de F A, A H, seront egaux aux deux de F B, B H: ostant donc les quarrez egaux des egales F A, F B, les quarrez de A H, & B H, demeureront egaux, donc les lignes A H, B H, seront egales. D'autant donc que les 2. costez A F, F H, du triangle A F H, sont egaux à B F, F H, du triãgle B F H, chacun au sien & la base A H, egale à la base B H, comme il est monstré [d] l'angle A F H, sera egal à l'angle B F H, Donc les [e] angles A H F, B H F, aussi egaux. Donc l'ãngle A F B, est double de l'angle B F H, & l'angle A H B, double de l'angle B H F. Par le mesme discours, nous monstrerons que l'angle B F C, est double de l'angle B F I, & l'angle B I C, double de l'angle B I F. Puis donc [f] que les angles A F B, B F C, sont egaux, estant appuyez sur circonferences egales A B, B C, [g] estant soustendues des lignes droictes egales, A B, B C; leurs moitiez B F H, B F I, seront egales. Partant, puis que les deux angles B F H, H B F, du triangle B F H, sont egaux aux deux B F I, I B F, du triangle I F B, & le costé B F, adiacent à iceux, cõmun, [h] les costez B H, B I, seront egaux, & les angles B H F, B I F, egaux. Donc la ligne H I, est double de la ligne H B. Par la mesme raison nous monstrerons que G H, est double de H A. Mais H B, H A, sont [d] 47. 1. [e] 8. 1. [f] 27. 3. [g] 28. 3. [h] 26. 1.

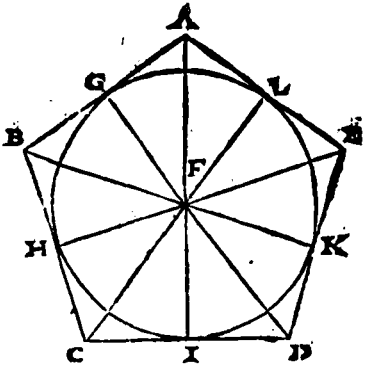
monſtrees egales. Donc les doubles d'icelles, ſçauoir HI, HG, ſeront egales. Semblablemẽt nous monſtrerons que les droictes lignes IK, KL, LG, ſont egales à chacune des lignes droictes HI, HG. Donc le pentagone G H I K L, eſt equilateral.

Derechef d'autant qu'il eſt monſtré que les angles B H F, B I F, ſont egaux, & qu'ils ſont moitiez des angles B H A, B I C; leurs doubles B H A, B I C, ſerõt egaux. Par la meſme raiſon les angles IKL, KLG, LGH, ſeront egaux à chacun des angles B H A, B I C. Donc le pentagone G H I K L, eſt equiangle: Partant eſtant monſtré equilateral, l'on aura deſcrit à l'entour du cercle vn pentagone equilateral & equiangle. Ce qu'il falloit faire.

PROBLÈME 13. PROP. 13.

xiij.

En vn pentagone donné, lequel eſt equilateral & equiangle, inſcrire vn cercle.



Soit le pentagone donné A BCDE, equilateral & equiangle, auquel il faut inſcrire vn cercle.

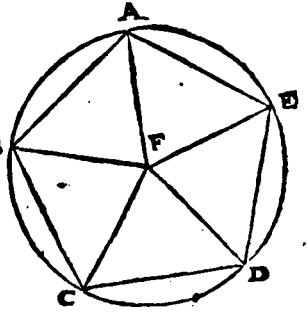
Soient diuiſez deux des angles
*9.1. d'iceluy, BAE, A B C, en deux egalement par les droictes lignes A F, B F, leſquelles ſe rencon-

treront au poinct F. [b] Puis que les deux angles FA B, F B A, ſont moindres que deux droicts eſtant moitiez des deux A, & B, qui ſont moindres que quatre droicts, comme il eſt demonſtré à la 32. 1. Puis ſoient menees les droictes lignes F C, FD, F E. D'autant que les 2. coſtez A B, B F, du triangle ABF, ſont egaux à CB, BF, du triangle CBF, chacun au ſien & ABF, C B F, contenus d'iceux, egaux par la conſtructiõ; les [d] baſes AF, C F, & les angles B A F, BCF, ſont egaux. Et puis que les angles du pentagone A, & C, ſont poſez egaux, & BAF, eſt moitié de B A E, par la conſtruction, l'angle B C F, ſera moitié de B C D. Donc B C D, eſt diuiſé en deux egalement; par meſme raiſon nous monſtrerons que les deux autres D, & E, ſont diuiſez en deux egalement: maintenant du poinct F, [e] ſoient menees les perpendiculaires F G, F H, F I, F H, F L, ſur les coſtez du pentagone. D'autant que les deux angles F G A, FAG, du triangle FAG, ſont egaux aux deux F L A, FAL, du triangle F A L, & le coſté A F, oppoſé à vn des angles egaux commun, [f] F G, F L, ſeront egales. Semblablement l'on monſtrera que les autres perpendiculaires F H, F I, F K, ſont egales à chacune de celles-là, donc le cercle deſcrit du centre F, à l'interualle F G, paſſera pareillement par tous les poincts H, I, K, L; & d'autant que les coſtez du pentagone [g] touchent, iceluy puis qu'ils font angles droicts auec les ſemidiametres, F G, F H, &c. L'on aura inſcrit vn cercle au pentagone donné. Ce qu'il falloit faire.

[b] 13. 6. ſ.
[d] 4. 1.
[e] 12. 1.
[f] 26. 1.
[g] *Coroll.* 16. 1.

xiiij. PROBLEME 14. PROP. 14.

A l'entour d'vn pentagone donné, lequel eſt equilateral & equiangle deſcrire vn cercle.



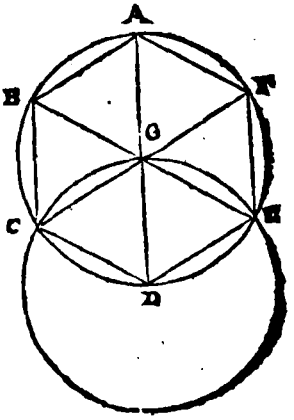
Soit le pentagone donné A B C D E, equilateral & equiangle, à l'entour duquel il faut deſcrire vn cercle. Ayant diuiſé les deux angles B A E, A B C, en deux
a 9. 1. egalement par les lignes droictes, leſquelles ſe rencontreront au poinct F, au dedans du pentagone, cõme il a eſté demonſtré en la precedente propoſition, & ayant conioinct les droictes lignes F C, F D, F E, nous monſtrerons, comme au precedent probléme, que les autre angles, C, D, & E, ſont diuiſez en deux egalement: Donc tous les demy-angles ſeront egaux entr'eux, puis que tous les angles totals ſont poſez egaux.

D'autant donc que au triangle A F B, les deux
b 6. 1. angles F A B, F B A, ſont egaux; b les lignes F A, F B, ſeront egales. Par meſme raiſon les autres F C, F D, F E, ſeront egales à chacune d'icelles. Partant le cercle deſcrit du centre F, à l'interualle de F A, paſſera auſſi par les poincts, B, C, D, E. Donc à l'entour d'vn pentagone &c. Ce qu'il falloit faire.

PROBLEME

PROBLEME 15. PROP. 15. XV.

En vn cercle donné, inscrire vn hexagone equilateral & equiangle.



Soit le cercle donné A B C D E F, auquel il faut inscrire vn hexagone equilateral & equiangle. Ayant prins le centre G, & mené le diametre A D, soit descrit le cercle C G E, du poinct D, comme centre & de l'interualle D G, lequel couppe le cercle dõné aux poincts C, & E, desquels soient menees les droictes lignes C F, E B, par le centre G, & soient conioinctes les lignes droictes A B, B C, C D, D E, E F, F A, l'on aura inscrit l'hexagone A B C D E F, au cercle donné, lequel ie dis estre equiangle & equilateral.

Car par la definition du cercle les trois lignes G C, C D, D G, seront egales entr'elles & le triangle C D G, sera equilateral, partant les trois [a] angles d'iceluy seront egaux entr'eux, lesquels [b] estant egaux à deux droicts, lequel qu'on voudra d'iceux cõme C G D, sera le tiers de deux droicts : par mesme raison l'angle D G E, sera la tierce partie de deux droicts : mais les angles C G D, D G E, E G F, [c] sont egaux à deux droicts, donc l'autre angle E G F, sera aussi la tierce partie de 2. droicts.

[a] 5. 1.
[b] 32. 1.
[c] 13. 1.

Donc les trois angles C G D, D G E, E G F, ſont egaux entr'eux, auſquels les angles C G B, B G A, & A G F, eſtant d egaux, au ſommet, les ſix angles au centre G, ſeront egaux entr'eux. e Parquoy les circonferences ſur leſquelles ils s'appuyent, ſont egales, f & partant les droictes lignes A B, B C, C D, D F, F A, egales. Parquoy, l'hexagone A B C D E F, ſera equilateral.

d 15. 1.
e 26. 3.
f 29. 3.

Derechef, d'autant que la circonference B C, eſt egale à A F, ſi l'on adiouſte la commune C D E F, les circonferences B C D E F, & A F E D C, ſeront egales; g Donc les angles A B C, B A F, appuyez ſur icelles ſeront egaux: nous monſtrerons ſemblablement que les autres angles de l'exagone, C, D, E, F, ſont egaux à chacun d'iceux A, & B, par ce que chacun d'iceux eſt appuyé ſur vn arc compoſé de quatre circonferences egales. Donc l'hexagone eſt auſſi equiangle. Donc en vn cercle donné, &c. Ce qu'il falloit faire.

g 27. 3.

COROLLAIRE.

De cette propoſition il eſt manifeſte que le demi-diametre du cercle eſt egal au coſté de l'hexagone inſcrit en iceluy. Car D G, demi-diametre eſt egal à D C, coſté de l'hexagone par la definition du cercle.

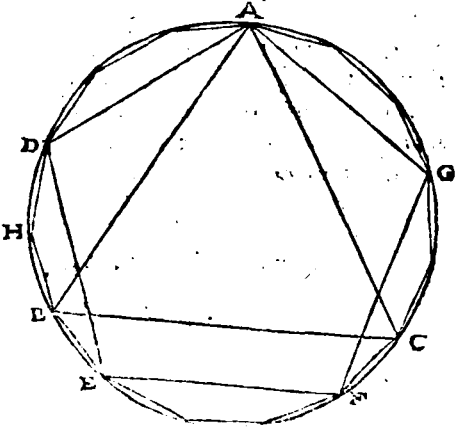
xvj.

PROBLEME 16. PROP. 16.

En vn cercle donné, inſcrire vn quindecagone equilateral & equiangle.

Soit le cercle A B C, auquel il faut inſcrire vn quindecagone equilateral & equiangle. Soit inſ-

crit en iceluy le triangle equilateral A B C, [b] les trois arcs A B, B C, C A, seront egaux, à cause des trois costez ou des trois angles egaux, A, B, C. [b] 26. ou 28. 3.



De rechef soit inscrit au mesme cercle vn pentagone equilateral & equiangle, A D E F G, ayant vn des angles appliqué au poinct A, [d] les cinq arcs A D, D E, E F, F G, G A, seront egaux. Et puis que la circonference du cercle doit estre diuisee en quinze parties egales, l'arc A B. en contiendra cinq, & l'arc A D. trois, estant l'arc A B, la tierce partie de toute la circonference, & A D, la cinquiesme partie, partant le reste D B, en contiendra deux parties. [e] Donc ayant diuisé l'arc D B, en deux egalement au poinct H, B H, sera la quinziesme partie de toute la circonference : Donc menant la droicte B H, elle soustiendra la quinziesme partie de toute la circonference ; [f] partant si l'on accommode au cercle quatorze autres lignes droictes egales à B H, l'on aura descrit au cercle vn quindecagone equilateral : [g] lequel est aussi equiangle, puis que chacun des angles sont appuyez sur arcs egaux, chacun desquels est compo- [c] 11. 4. [d] 28. 3. [e] 30. 3. [f] 1. 4. [g] 27. 3.

ſé de 13. arcs egaux, comme il eſt manifeſte. Donc en vn cercle donné, nous auons deſcrit vn quindecagone. Ce qu'il falloit faire.

Semblablement, ſuiuant ce qui eſt dict cy-deuant du pentagone à la 12.13. & 14. propoſitions nous deſcrirons à l'entour du cercle donné vn quindecagone equilateral & equiangle. Pareillement au quindecagone equilateral & equiangle nous inſcrirons vn cercle; & finalement à l'entour du quindecagone, nous deſcrirons vn cercle.

Fin du quatrieſme liure.

LIVRE CINQVIESME, DES ELEMENTS D'EVCLIDE.

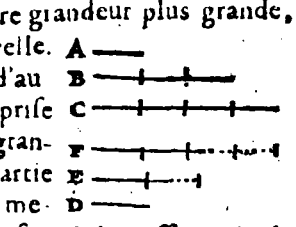
DEFINITIONS.

1. Vne grandeur eſt partie d'vne autre grandeur; la plus petite de la plus grande, lors que la plus petite meſure la plus grande.

EVCLIDE a traicté aux quatre liures precedens, de la quantité continuë cõſidereeabſolument; Mais aux deux ſuiuants, il diſpute de la meſme quantité, non abſolument, mais en tant que l'vne ſe refere à l'autre, c'eſt à dire, qu'en tant qu'elle eſt comparee auec vne autre, elle a quelque raiſon. En ce cinquiéme liure, il enſeigne les proportions des quantitez continuees en general, ne les referant à aucune eſpece de quantité, comme à vne ligne, ſuperficie, ou à quelque corps. Mais au ſixieme il monſtre ſpecialement, quelle raiſon ont les lignes entr'elles, les angles, les circonferences des cercles, les triangles, & autres figures planes. Et pour donc garder ſa methode, il definit premie-

re nent les termes, dont il ſera beſoin aux demonſtrations.

Il dict donc qu'vne grandeur plus petite, laquelle meſure quelque autre grandeur plus grande, eſt appellee partie d'icelle. Comme pour exemple, d'autant que la grandeur A, priſe trois fois, meſure la grandeur B. A, ſera dicte partie de B, & priſe 4. fois meſure C; la grandeur A, ſera dicte auſſi partie de C. Mais d'autant que D, ne meſure E, ny F, car priſe 2. fois elle excede E, & priſe trois fois elle deffaut à F, & priſe quatre fois, elle excede icelle; D, ne ſera dicte partie des grandeurs E, & F.



Or entre les mathematiciens, il y a de deux ſortes de partie: l'vne qui meſure ſon tout; de ſorte qu'eſtant repetee quelque nombre de fois, elle conſtituë ſon tout: comme 4. conferé auec 12. 16. 20. & eſt dicte, partie aliquote. L'autre ne meſure ſon tout, car priſe quelque nombre de fois elle l'excede, ou deffaut à iceluy; comme 4. conferé auec 6. 7. 9. 18. 30. & eſt dicte partie aliquante. Euclide definit donc icy ſeulement, la partie aliquote; tant à cauſe qu'elle meſure ſeulement ſon tout; (car la partie aliquante, n'eſt dicte meſurer ſon tout,) que d'autant, comme il appert au ſeptieſme liure la partie aliquante, aux nombres, n'eſt pas appellee partie, par Euclide, mais parties. Car 4. n'eſt pas partie de 6. mais en eſt les deux tierces parties, &c.

2. Vne grandeur, eſt multiple d'vne autre plus petite, quand la plus grande eſt meſuree de la plus petite.

Comme en l'exemple precedent, tant la grandeur B, que C, eſt multiplice de la grandeur A, d'autant que la grandeur A, meſure tant l'vne que l'autre B, & C; mais ny la grandeur E, ny F, ne doit eſtre dicte multiplice de la grandeur D, d'autant que D, ne meſure ny l'vne ny l'autre. Donc, partie, ſe refere, à multiplice, & multiplice à partie, de ſorte qu'vne moindre quantité, en meſurant vne plus grande, eſt dicte partie de la plus grande; Mais la plus grande, qui eſt meſuree de la plus petite, eſt dicte multiplice de la plus petite.

Il eſt donc aſſez manifeſte, que la partie, cy deuant definie, eſt celle qui meſure exactement ſon tout, ſans qu'il reſte rien.

Or quand deux moindres grandeurs, en meſurent deux autres plus grandes egalement, c'eſt à dire, que ſi vne des moindres eſt contenuë autant de fois exactement en vne des plus grandes, que l'autre moindre eſt cõtenuë de fois en l'autre plus grande; ces deux grandeurs plus grandes ſeront dictes equimultiplices, des deux moindres. Et en faut dire de meſme, ſi pluſieurs moindres grandeurs meſurent egalement, pluſieurs autres grandeurs, plus grandes.

3. Raiſon, eſt vne habitude de deux grandeurs de meſme genre, comparees l'vne à l'autre, ſelon la quantité.

Quand deux quantitez de meſme genre, comme deux nombres, deux lignes, deux ſuperficies, deux ſolides, &c. ſont comparez entr'eux, ſelon la quantité, c'eſt à dire ſelon que l'vne eſt plus grande que l'autre, ou moindre, ou egale; telle comparaiſon, ou mutuelle habitude, eſt appellee raiſon, ou (comme veulent d'autres) proportiõ. Parquoy ſi on compare vne ligne auec vne ſuperficie; ou vn nombre auec vne ligne, cette comparaiſon ne ſera appellee raiſon, d'autant que, ny la ligne & la ſuperficie, ny le nombre & la ligne ne ſont quantitez de meſme genre. Semblablement ſi on confere vne ligne auec vne autre ligne, ou vne ſuperficie auec vne ſuperficie, ſelon la qualité, c'eſt à dire ſelon que l'vne eſt blanche & l'autre noire, ou que l'vne eſt chaude & l'autre froide, &c. combien que toutes deux ſoient de meſme genre, telle comparaiſon toutefois, ne ſera dicte, raiſon ou proportion, puis qu'elle n'eſt faicte ſelon la quantité.

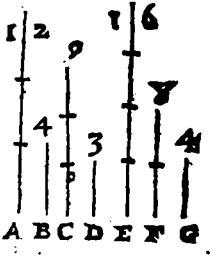
Or combien que la raiſon ou proportion, ſe trouue proprement entre les ſeules quantitez, toutesfois les choſes, leſquelles reçoiuent en quelque maniere, la nature de la quantité, comme les temps, les ſons, les voix, les lieux, les mouuements, les poids, & les puiſſances, ſont pareillement dictes auoir raiſon, ſi l'on conſidere leur habitude ſelon la quantité. Comme quand nous diſons qu'vn temps eſt plus grand, qu'vn autre, ou moindre, ou que deux temps ſont egaux &c. cette habitude, ſera appellee proportion ou raiſon; Car alors les temps ſont conſiderez, ſelon la maniere de quelques quantitez.

Au reſte, en toute proportion, la quantité qui

se refere à vne autre, est dicte par Euclide & autres Geometres, antecedent de la raison. Mais celles-là à laquelle vne autre se refere, est dicte, consequent de la raison. Comme pour exemple en la raison d'vne ligne de six palmes, à vne ligne de trois palmes, la ligne de six, sera dicte antecedent, de la raison, & la ligne de trois consequent, & au contraire si on compare la ligne de trois à la ligne de six, la ligne de trois, sera dicte antecedent & celle de six consequent.

4. Proportion est vne similitude de raisons.

Ce que i'appelle en ce lieu, proportiõ, les Grecs, l'appellent ἀναλογία; analogie, & plusieurs Latins proportionalité. Tout ainsi donc que l'habitude de deux quantitez entr'elles est dicte raison, ainsi la comparaison de deux, ou plusieurs raisons entr'elles, s'appelle proportion. Comme si la raison de la quantité A, à la quãtité B, est semblable à la raison de C, à D, l'habitude d'entre ses raisons, sera appellee proportion. En la mesme maniere, si la raison de E, à F, est semblable à celle de F, à G cette similitude, sera appellee proportion. Or il y a plusieurs



sortes de proportion, ou habitude de raisons (& nous appellerons, la comparaison, de deux quantitez, raison, mais l'habitude des raisons, proportion.) descrites par les Autheurs, principalement par Boesius, & Iordanus, desquelles celles-cy ont esté plus en vsage entre les anciens, sçauoir

la proportion, Arithmetique, Geometrique, Muſique, ou Armonique. Mais Euclide traicte ſeulement de la proportion Geometrique en ce liure: Et y en a de deux ſortes, l'vne continuë, en laquelle les quantitez entre-moyẽnes ſont priſes 2. fois, en ſorte qu'il ne ſe faict aucune interruptiõ de raiſons, mais chaque quantité entre-moyenne, eſt conſequent, de la quantité precedente, & antecedent de la ſuiuante. Comme ſi on dict qu'il y a meſme raiſon de E, à F, que de F, à G, cette proportion, s'appellera continuë. Mais l'autre, ſera dicte, diſcrete ou non continuë, en laquelle chacune des quantitez entre-moyennes, eſt priſe vne fois, ſeulement, en ſorte qu'il ſe faict interruption de raiſons, & aucune quantité, n'eſt antecedent & conſequent, mais antecedent, ſeulemẽt, ou conſequent. Comme ſi on dict qu'il y a meſme raiſon de A, à B, que de C, à D, cette proportion, ſera appellee diſcrete, ou non continuë.

De la diuiſion de la raiſon.

Euclide diuiſe la raiſon en rationelle & irrationelle. La rationelle eſt celle-là, laquelle peut eſtre exprimee par les nombres, comme la raiſon d'vne ligne de vingt pieds à vne ligne de dix pieds, car cette raiſon eſt monſtree par ces deux nombres 20. *&* 10. *L'irrationelle eſt celle-là, laquelle ne peut eſtre exprimee par les nombres, comme eſt la raiſon du diametre d'vn quarré au coſté du meſme quarré: car cette raiſon ne peut eſtre trouuee aux nombres, comme demonſtre* Euclide, *liure* 10.

D'autres diſent que la raiſon rationelle eſt celle qui eſt entre deux quelconques quantitez commenſurables; mais l'irrationelle eſt celle qui eſt entre deux quantitez incom-

mensurables. Or les quantitez sont dictes commensurables, lesquelles ont vne commune partie aliquote, ou sont mesurees par vne mesme commune mesure, comme vne ligne de vingt pieds, & vne ligne de 8. car vne ligne de quatre pieds, est partie aliquote de toutes les deux, semblablement vne ligne de deux pieds, est partie aliquote d'icelles, & partant, tant quatre que deux mesurera tant la ligne de 20. que la ligne de 8.

Mais les quantitez incommensurables sont celles qui n'ont aucune partie aliquote, ou aucune commune mesure qui les puisse mesurer. Comme est le diametre d'vn quarré & le costé d'icelluy quarré. Car combien que chacune de ces lignes ait infinies parties aliquotes, comme la moitié, le tiers, & autres parties; toutesfois aucune partie aliquote de l'vne, si petite qu'elle soit, ne peut pas mesurer l'autre, comme demonstre Euclide, liu. 10. prop. derniere: auquel liure sont monstrees plusieurs autres lignes incommens. outre ces deux. Partant la seule raison rationelle se trouue aux nombres: mais tant la rationelle que l'irrationelle se trouue en la quantité continuë.

La raison est aussi diuisee, en raison d'egalité, & d'inegalité. La raison d'egalité, est celle qui est entre deux quantitez egales comparees entre elles. Comme entre 20. & 20. entre 100. & 100. entre vne ligne de douze pieds & vne ligne de douze pieds: mais la raison d'inegalité est celle qui est entre deux quantitez inegales comparees entr'elles, comme entre 20. & 10. entre 8. & 40. entre vne ligne de six pieds & vne de deux, &c. Or ces deux genres de raison ont celà de commun, auec les premieres, que toute raison d'egalité est necessairement rationelle & non au contraire. Semblablement toute raison irrationelle est necessairement raison d'inegalité & non au contraire, &c.

Dorechef, la raison d'inegalité (car nous auons laissé

la raiſon d'egalité attendu qu'elle ne ſe peut ſubdiuiſer, puis que toutes quantitez egales, ſoient grandes ou petites, ont touſiours meſme raiſon d'egalité) eſt ſubdiuiſee en raiſon d'inegalité maieure, & d'inegalité mineure. La raiſon d'inegalité maieure eſt quand la plus grande quantité eſt comparee à la plus petite, comme la raiſon de 20. à 10. Item la ligne de huict pieds à la ligne de ſix pieds, &c. La raiſon d'inegalité mineure, eſt quand la moindre quantité eſt comparee à la plus grande, comme la raiſon de 10. à 20. Item de la ligne de ſix pieds à la ligne huict pieds, &c. Or cette raiſon n'eſt en vain & ſuperflue, comme pluſieurs doutent: car il n'y a pas meſme raiſon de 4. à 2. que de 2. à 4. mais different beaucoup, entr'elles, leur vſage eſtant beaucoup diuers, comme il eſt manifeſte à ceux qui ſont aucunement verſez en la Geotrie, & en l'Algebre.

Ce ſont icy les generales diuiſions de la raiſon entant qu'elle contient toutes les raiſons nulle exceptee; Or maintenant nous ſubdiuiſerons tant la raiſon de maieure inegalité que de mineure inegalité, entant qu'elles comprennent ſeulement les raiſons rationelles; d'autant que nous deuons parler au 10. liure des quantitez qui ont raiſon irrationelle.

Donc la raiſon rationelle d'inegalité maieure, eſt diuiſee en cinq genres, ſçauoir en la raiſon multiplice, ſuperparticuliere, ſuperpartiente, multiplice ſuperparticuliere, & multiplice ſuperpartiente. Semblablement la raiſon de mineure inegalité eſt diuiſée ſelõ les meſmes genres, pourueu que à chacun terme de la raiſon l'on mette deuant, cette propoſition (Sub) c'eſt à dire ſous, comme en la raiſon ſubmultiplice, ou ſous multiplice ſous ſuperparticuliere, ſous ſuperpartiente, ſous multiplice ſurperparticuliere, ſous multiplice ſuperpartiente.

Or de ces cinq genres ou eſpeces, les trois premiers ſont

simples, mais les deux derniers sont composez de ces trois premieres, comme il est manifeste.

De la raison multiplice.

Raison multiplice est vne habitude d'vne plus grande quantité à vne plus petite, quand la plus grande contiene la plus petite, certain nombre de fois precisement, comme deux fois, trois fois, 10. fois, cent fois. De sorte que la plus petite mesure la plus grande: comme est la raison de ce nombre 20. au nombre 4. car 20. contient quatre cinq fois. Item la raison d'vne ligne de trente pieds à vne ligne de cinq pieds &c.

Or celle-cy contient sous soy infinis genres: Car si la plus grande quantité de la raison multiplice, contient la moindre deux fois seulement, elle sera appellee raison double: si trois fois, elle sera dicte, triple, si 10. fois, decuple, si cent fois, centuple &c.

De ces choses, nous definirons facilement toutes les especes de raison multiple. Car la raison octuple ne sera rien autre chose, qu'vne habitude, d'vne plus grande quantité à vne moindre, quand la plus grande contient la moindre huict fois: En la mesme maniere on definira les autres raisons multiples: comme la raison quintuple, telle qu'est 40. à 8. de laquelle raison la plus grande quantité contient la moindre cinq fois: Item la raison d'vne ligne de 10. pieds à vne ligne de cinq pieds, est celle en laquelle la plus grande quantité contient la moindre deux fois, & ainsi des autres.

De la raison superparticuliere.

La raison superparticuliere est vne habitude d'vne plus grande quantité à vne moindre, quand la plus grande

contient la plus petite vne fois seulement, & en outre vne partie aliquote d'icelle moindre, sçauoir la moytié, le tiers, ou le quart &c. Comme est la raison de 3. à 2. car 3. contient 2. vne fois & en outre l'vnité qui est moitié de 2. Ainsi pareillement vne ligne de douze pieds a raison superparticuliere à vne ligne de neuf pieds, car la premiere ligne douze contient la derniere 9. vne fois & en outre vne ligne de trois pieds, qui est la tierce partie de neuf pieds.

Cette raison se diuise pareillement en infinis genres, car si cette partie aliquote contenue en la plus grande quantité, est moitié de la moindre quantité, la raison constituee sera appellee sesquialtere; si c'est la tierce partie, elle sera appelle sesquitierce; si la quatriesme, sesquiquarte; & si la milliesme, sesquimilliéme.

Donc par ce mesme terme les definitions de toutes les raisons superparticulieres seront faciles. Comme la raison sesquihuictiesme ou sesquioctaue, est quand la plus grande quantité contient la moindre vne fois, & en outre la huictiéme partie de la moindre comme est la raison de 9. à 8. Item de 45. à 40. & faut entendre de mesme des autres.

De la raison superpartiente.

La raison superpartiente est l'habitude d'vne plus grande quantité à vne plus petite, quand la plus grande contient la plus petite vne fois seulement, & en outre, quelques parties aliquotes d'icelle moindre, lesquelles prises ensemble, ne font pas vne partie aliquote. Comme est la proportion de 8. à 5. Car 8. contient 5. vne fois, & de plus, trois vnitez, chacune desquelles est partie aliquote, sçauoir la cinquiéme partie de ce nõbre 5. mais ce nõbre de 3. cõposé de ces trois vnitez n'est pas partie aliquote de 8.

I'ay dict que ces parties aliquotes, ne doivent constituer vne partie aliquote, à cause de plusieurs raisons, qui du commencement semblent estre superpartientes, lesquelles toutesfois sont superparticuliers, comme est la raison entre 10. & 8. Car combien que le nombre 10. contienne 8. vne fois & de plus deux vnitez, chacune desquelles est la 8. partie de 8. toutesfois d'autant que le nombre de deux composé de ces deux vnitez est la quatriesme partie de 8. ceste raison ne doit estre appellee superpartiente, mais superparticuliere, sçauoir sesquiquarte: partant afin que deux quantitez soient dictes auoir raison superpartiente, il est necessaire que la plus grande quantité contienne la moindre vne fois & plusieurs parties aliquotes d'icelle, moindre, lesquelles prises ensemble ne doivent constituer vne partie aliquote; Ce qu'aucuns ne considerant, confondent beaucoup les genres des raisons entr'eux.

De la raison multiple superparticuliere.

La raison multiple superparticuliere, est l'habitude d'vne plus grande quantité à vne plus petite, quand la plus grande contient la plus petite certain nombre de fois, comme deux, trois, quatre, &c. & en outre vne partie aliquote de la moindre, comme est la raison de 9. à 4. Car 9. contient 4. deux fois, & en outre: (en quoy elle conuient auec la multiplice, comme auec la double,) contient l'vnité, qui est la quatriesme partie, du moindre nombre (& en cela ceste raison est semblable à la superparticuliere, sçauoir à la sesquiquarte,) de sorte que ceste raison, sera dicte à bon droict, estre composee, de la multiplice & de la superparticuliere.

Or ceste raison, tout ainsi que la multiple, est diuisee en plusieurs genres, comme en double superparticuliere, triple

ſuperparticuliere, &c. entant que la plus grande quantité, contient la moindre deux fois, ou trois fois, & en outre, vne partie aliquote de la moindre quantité.

Derechef vn chacun de ces genres eſt ſubdiuiſé en pluſieurs, eu eſgard à la raiſon ſuperparticuliere; Car, pour exemple, la raiſon triple ſuperparticuliere, contient ſous ſoy, la triple ſeſqualtere, (ſçauoir quand la plus grande quantité contient trois fois la moindre, & outre, la moitié, d'icelle moindre,) la triple ſeſquitierce; la triple ſeſquiquarte & ainſi des autres.

De la raiſon multiple ſuperpartiente.

Finalement, la raiſon multiple ſuperpartiente, eſt l'habitude d'vne plus grande quantité, à vne moindre, quãd la plus grande contient la moindre, certain nombre de fois, & en outre quelques parties aliquotes de la moindre, leſquelles priſes enſemble ne font pas vne partie aliquote; comme eſt la raiſon de 11. à 3. I'ay dict, ne faiſant pas vne partie aliquote, pour la raiſon alleguee, en la raiſon ſuperpartiente. Car ſi icelles parties aliquotes faiſoient vne partie aliquote, elle ne ſeroit pas raiſon multiple ſuperpartiente, mais multiple ſuperparticuliere.

Comme la raiſon de 20. à 6. ne doit eſtre dicte multiple ſuperbipartiente ſixieſmes, combien que 20. contienne 6. trois fois & deux ſixieſmes, d'autant que deux ſixieſmes font vne tierce partie. Parquoy elle ſera appellee raiſon triple ſeſquitierce.

Or cette raiſon eſt diuiſee, premierement en egard à la raiſon multiple. Comme, en multiple double ſuperpartiente, triple ſuperpartiente, &c.

En apres chacun d'icelles, en egard au nombre des parties, contient ſous ſoy, infinis genres: comme ſous la triple ſuperpatiente, eſt contenue la triple ſuperbipatiente,

tiente, la triple ſupertripartiente, &c.

Finalement, chacune d'icelles en conſideration de la denomination des parties aliquotes, eſt encore diuiſee en infinis genres. Comme la triple ſupertripartiente eſt diuiſee en triple ſubpertripartiente quatrieſmes, en triple ſupertripartiente cinquiémes &c. De toutes leſquelles, les definitions, & les exemples ſeront faciles, par ce qui a eſté dict &c.

Des raiſons rationelles, de moindre inegalité.

Toute ce qui a eſté dict iuſques icy, des cinq genres, des raiſons rationelles, de plus grande inegalité, doit pareillement eſtre entendu, des cinq genres correſpondants, de moindre inegalité, apoſant neantmoins touſiours, cette propoſition (ſub) c'eſt à dire, ſous, comme il a eſté dict. Car ſi aux exemples cy-deuant propoſez, on conferee les moindres quantitez auec les plus grandes, l'on aura les raiſons de moindre inegalité correſpondãtes. Car tout ainſi que la raiſon de 100. à 1. eſt centuple, ainſi la raiſon de 1. à 100. eſt ſubcentuple ou ſous centuple; & comme la raiſon de 11. à 3. eſt triple ſuperbipartiente tierces, ainſi la raiſon de 3. à 11. eſt ſubtriple, ſuperbipartiente tierces, & ainſi des autres.

Des denominateurs, des raiſons rationnelles.

D'autant que l'vſage des denominateurs des raiſons rationelles, cy-deſſus expoſees, n'eſt pas peu vtile, il ne ſera hors de propos, denſeigner icy, par quels nombres elles ſont denommees. Le denominateur de quelconque raiſon, eſt le nombre, qui exprime diſtinctement & apper-

tement, l'habitude d'vne quantité à l'autre: comme le denominateur de la raiſon octuple eſt 8. pour ce que ce nombre huict monſtre, que la plus grande quantité de la raiſon octuple, contient la moindre huict fois. Semblablement le denominateur de la raiſon, ſeſquiquinte eſt eſt $1\frac{1}{5}$, d'autant que ce nombre ſignifie que la plus grande quantité de la raiſon ſeſquiquinte, contient la moindre vne fois, & la cinquieſme partie d'icelle moindre; & faut entendre de meſme, des denominateurs des autres raiſons. C'eſt pourquoy (comme i'eſtime) Euclide, au 6. liure, & pluſieurs autres Mathematiciens, appellent le denominateur de quelconque raiſon, la quantité d'icelle: Car le denominateur, (comme nous auons dict) monſtre, combien grande eſt vne quantité, au reſpect d'vne autre, ſçauoir de celle, auec laquelle elle eſt conferee, comme il appert par les exemples propoſez.

Or de ces choſes, que nous auons dictes, l'on peut facilement colliger le denominateur de quelconque raiſon. Car le denominateur de la raiſon multiple, quelconque elle ſoit, eſt vn nombre entier, qui contient autant d'vnitez, que la plus grande quantité de la raiſon contient de fois la moindre; comme pour exemple, le denominateur de la raiſon double, eſt deux, de la raiſon octuple, eſt huict, centuple eſt 100. &c. Mais les denominateurs des raiſons ſubmultiples, correſpondantes aux multiples, ſont parties aliquotes, denommees des denominateurs des raiſons multiples auſquelles correſpondent les denommees.

Comme le denominateur de la raiſon ſousdouble eſt $\frac{1}{2}$. ſubquintuple eſt $\frac{1}{5}$. ſubcentuple eſt $\frac{1}{100}$. &c. & ainſi nous trouuerons les denominateurs des autres raiſons ſubmultiples. Partant le denominateur de quelconque rai-

son submultiple est vn nombre rompu, ou vne fraction, de laquelle le numerateur est touſiours l'vnité, mais le denominateur est vn nombre denommant la raiſon multiple correſpondante, comme il appert par ces exemples. Donc il ne ſera diſficile de trouuer le denominateur, de quelconque raiſon multiple, ou ſubmultiple, entendant bien ce qui eſt dict: D'autant que la prolation meſme demonſtre le denominateur de la raiſon, comme il eſt manifeſte, par les exemples propoſez.

Le denominateur de quelconque raiſon ſuperparticuliere, eſt l'vnité, auec celle partie aliquote, que la plus grande quantité, doit contenir outre la moindre. Comme le denominateur de la raiſon, ſeſquialtere, eſt 1 $\frac{1}{2}$. ſeſquihuictieſme eſt 1. $\frac{1}{8}$ ſequicentieſme eſt 1. $\frac{1}{100}$. &c. & ne ſera diſficile de trouuer le denominateur de quelconque raiſon ſuperparticuliere, puis que la prolation meſme de la raiſon exprime le denominateur, par ſa partie aliquote; comme il eſt euident par les exemples propoſez. Mais les denominateurs des raiſons ſuperparticulieres, correſpondantes, ſont fractions, deſquelles les numerateurs, ſont plus petits que les denominateurs d'icelles, de l'vnité ſeulement chacun au ſien, comme le denominateur de la raiſon ſubſeſquialtere, eſt $\frac{2}{3}$. ſubſeſquihuictieſme eſt $\frac{8}{9}$. ſubſequicentiéme eſt $\frac{100}{101}$ &c. Or on trouuera le denominateur de quelconque raiſon ſubſuperparticuliere, ſi au lieu du numerateur de la fraction, on prend le denominateur de la partie aliquote exprimé en la raiſon, & pour le denominateur de la meſme fraction, l'on prend vn nombre plus petit de l'vnité, Comme le denominateur de de la raiſon ſubſequidixiéme eſt $\frac{10}{11}$, puis que le numerateur de cette fraction eſt le nombre denommant la partie dixiéme, ſçauoir 10. mais le denominateur de la meſme fraction, excede le numerateur de l'vnité, le denominateur de la raiſon ſubſequiſeptiéme eſt $\frac{7}{8}$. celuy de la raiſon

subsesquiquinte, est $\frac{5}{6}$ *&c. Pareillement nous trouuerons le denominateur de quelconque raison subsuperparticuliere, si nous reduisons le denominateur de la raison superparticuliere correspondãte en vne fraction, de laquelle fraction le numerateur excedera tousiours le denominateur de l'vnité, lequel est aussi denominateur de la partie aliquote, dont est faict mention, en la raison proposee, puis nous transposons les termes de cette fraction: en sorte que le numerateur soit faict denominateur, & le denominateur numerateur; nous aurons le denominateur de la raison superparticuliere proposee; comme si on propose la raison subsequiseptiéme: d'autant que le denominateur de la raison sesquiseptiéme qui luy est correspondante, est* $1\frac{1}{7}$, *qui se reduit en cette fraction* $\frac{8}{7}$, *de laquelle le numerateur est plus grand que le denominateur de la partie aliquote, de l'vnité: parquoy si nous transposons cette fraction en cette maniere* $\frac{7}{8}$ *nous dirons que le denominateur de la raison subsequiseptiéme est* $\frac{7}{8}$ *&c.*

Le denominateur de quelconque raison superpartiente, est l'vnité auec les parties aliquotes, (ne faisant vne partie aliquote) lesquelles la plus grande quantité doit contenir outre la moindre. Comme le denominateur de la raison surpertripartiente septiémes est $1\frac{3}{7}$, *supertripartiente 20. est* $1\frac{3}{20}$ *&c. Et est facile à trouuer: d'autant que la prolation mesme de la raison monstre le propre denominateur; comme il appert par les exemples cy dessus. Mais le denominateur de quelconque raison subsuperpartiente, est vne fraction de laquelle le numerateur est moindre que le denominateur d'autãt d'vnitez, que la plus grande quantité de la raison proposee, contient des parties aliquotes outre la moindre. Comme le denominateur de la raison subsuperpartiente septiémes, est* $\frac{7}{10}$ *de la desubsupertripartiente vingtiémes est* $\frac{10}{23}$ *&c. Or le denominateur de quelconque raison subsupertripartiente sera trouué, si pour*

le numerateur de la fraction on prend le denominateur des parties aliquotes, contenuës en la raiſon propoſee, auquel ſi on adiouſte le nombre des meſmes parties, on aura le denominateur d'icelle fraction. Comme le denominateur de la raiſon ſubſuperquatripartiente vnziémes eſt $\frac{11}{15}$, d'autant que le denominateur de cette fraction, eſt le nombre denommant les parties vnziémes, ſçauoir 11. auquel eſt adiouſté 4. le nombre des quatre parties aliquotes, afin de faire 15. denominateur de la meſme fraction. Mais le denominateur de la raiſon ſubſupertripartiente cinquiémes eſt cette fraction $\frac{5}{8}$, car le numerateur d'icelle eſt le nombre denommant les parties cinquiémes, ſçauoir 5. mais le denominateur de la meſme fraction, 8. eſt faict du numerateur 5. & de 3. nombre des trois parties aliquotes: Et ainſi des autres denominateurs que l'on trouuera auſſi en cette maniere. Soit reduit le denominateur de la raiſon ſuperpartiente correſpondante en vne fraction, de laquelle le numerateur excedera le denominateur, qui denomme auſſi les parties aliquotes exprimees, d'autant d'vnitez qu'il y a de parties aliquotes. Car les nombres de cette fraction eſtant tranſpoſez, en ſorte que le numerateur ſoit faict denominateur, & le denominateur numerateur; l'on aura le denominateur de la raiſon propoſee ſubſuperpartiente. Comme le denominateur de la raiſon ſubſupertripartiente cinquiémes eſt $\frac{5}{8}$, pour ce que le denominateur de la raiſon ſupertripartiente cinquiémes eſt $1\frac{3}{5}$ qui eſt reduit en cette fraction $\frac{8}{5}$, laquelle faict $\frac{5}{8}$ en tranſpoſant les nombres, & faut faire de meſme pour trouuer les denominateurs des autres raiſons &c.

Le denominateur de quelconque raiſon multiple ſuperparticuliere, eſt vn nombre entier denommant la raiſon multiple propoſee, auec la partie aliquote, que la plus grande quantité doit contenir, outre la moindre; comme le denominateur de la raiſon triple ſeſquiſeptiéme eſt $3\frac{1}{7}$,

la quintuple ſeſquineufiéme, eſt $5\frac{2}{9}$ *&c. & eſt tres facile d'exprimer le denominateur de quelconque raiſon multiple ſuperparticuliere; d'autant que la prolation de la raiſon monſtre diſtinctement, & le denominateur de la raiſon multiple, & la partie aliquote, comme l'on peut voir par les exemples propoſez. Or le denominateur de quelconque raiſon ſubmultiple ſuperparticuliere eſt vne fraction, de laquelle le numerateur eſt vn nombre denommant les parties aliquotes exprimees en la raiſon. Cõme le denominateur de la raiſon ſubtriple ſeſquiſeptiéme, eſt* $\frac{7}{21}$ *la ſubquintuple ſeſquineufiéme eſt* $\frac{9}{45}$ *&c. Or ce denominateur ſera trouué, ſi pour le numerateur de la fraction, on prend le denominateur de la partie aliquote, lequel eſtant multiplié par le denominateur de la raiſon multiple, ſi l'on adiouſte l'vnité au produit, l'on aura le denominateur de la meſme fraction. Comme pour exemple, le denominateur de la raiſon ſubquadruple ſeſquiſexte eſt* $\frac{6}{25}$, *d'autant que le numerateur 6. denomme les parties ſixiémes, & icelluy multiplié par 4. denominateur de la raiſon quadruple, & ayant adiouſté au produit 24. l'vnité, à fin que le denominateur de la meſme fraction ſoit faict 25. &c. Autrement l'on trouuera le meſme denominateur ſi l'on reduict en vne fraction, le denominateur de la raiſon multiple ſuperparticuliere correſpondante, comme nous auons dit cy deſſus. Comme ſi on propoſe la raiſon ſubquadruple ſeſquiſexte: d'autant que le denominateur de la raiſon quadruple ſeſquiſexte correſpondante eſt* $4\frac{1}{4}$ *laquelle ſera reduite à* $\frac{17}{4}$. *dont ſi on change l'ordre des termes d'icelle fraction on aura* $\frac{6}{25}$ *pour le denominateur de la raiſon ſubquadruple ſeſquiſixiéme: & ainſi des autres.*

Le denominateur de quelconque raiſon multiple ſuperpartiente, eſt vn nombre entier denommant la raiſon multiple exprimee en icelle, auec les parties aliquotes, que doit contenir la plus grãde quãtité par deſſus la moindre,

lesquelles parties aliquotes ne constituent vne partie aliquote. Comme le denominateur de la raison triple superquinpartiente huictiémes, est $3\frac{5}{8}$, de la quadruple superbipartiente cinquiémes est $4\frac{2}{5}$. Et pour trouuer les denominateurs n'y a aucune difficulté, puis qu'ils sont exprimez distinctemẽt & apertement en chaque raison proposee, multiple superpatiente, sçauoir tant le denominateur de la raison multiplice, contenue en icelle, que les parties aliquotes, comme il est manifeste par les exemples proposez. Mais le denominateur de quelconque raison submultiple superpartiente, est vne fraction de laquelle le numerateur est vn nombre, denommant les parties aliquotes d'icelle raison.

Comme le denominateur de la raison subtriple superquintupartiente huictiémes, est $\frac{8}{29}$ subquadruple superbipartiente cinquiémes, est $\frac{5}{22}$. Or le denominateur de ces raisons submultiples superpartientes sera trouué, si pour le numerateur de la fraction on prend le denominateur des parties aliquotes, lequel estant multiplié par le denominateur de la raison multiple, & ayant adiousté au produit, le nombre des parties aliquotes, l'on obtiendra le denominateur de la mesme fraction. Comme le denominateur de la raison subdouble superoctupartiente treisiémes, est $\frac{13}{34}$ parce que le numerateur de cette fraction 13. denomme les parties treisiémes, lequel multiplié par 2. denominateur de la raison double, & au nõbre produit 26. on adiouste le nombre des 8. parties, on fera 34. denominateur de la mesme fraction &c. Autrement l'on trouuera le mesme denominateur, reduisant le denominateur de la raison correspondante, en vne fraction, & transpusant les termes, comme nous auons desia dit cy deuant. Comme pour exemple, soit proposee la raison, subquintuple, supertripartiente dixiémes, pour trouuer le denominateur d'icelle; l'on reduira en vne fraction, le denominateur de la raison

correſpondante quintuple ſupertripartiente dixiémes, qui eſt $5\frac{3}{10}$, *& l'on aura cette fraction* $\frac{53}{10}$: *& en permutant les termes, c'eſt à dire poſant* 10. *au lieu de* 53. *& 53. au lieu de* 10. *l'on aura* $\frac{10}{53}$ *pour le denominateur de la raiſon ſubquintuple ſupertripartiente dixiémes : & ainſi des autres.*

Finalement, le denominateur de la raiſon d'egalité eſt touſiours l'vnité : d'autant qu'en cette raiſon, les quantitez doiuent eſtre egales entr'elles ; & partant l'vne doit contenir l'autre vne fois, & non plus, qui eſt ce que ſignifie l'vnité.

5. Les grandeurs ſont dictes auoir raiſon l'vne à l'autre, leſquelles eſtans multipliees, ſe peuuent exceder l'vne l'autre.

D'autant qu'Euclide en la troiſieſme definition a appellé l'habitude de deux grandeurs de meſme genre, raiſon, il enſeigne maintenant en ceſte cinquieſme definition quelle choſe eſt requiſe, afin que deux quantitez de meſme genre, ſoient dictes auoir raiſon entr'elles. Car toutes les lignes ny tous les angles plans ; encores bien qu'ils ſoient de meſme genre de quantité, n'ont pas raiſon entr'eux, comme nous dirons incontinent. Il dict donc que les grandeurs ſont dictes auoir raiſon entr'elles, deſquelles, laquelle que l'on voudra eſtant multipliee peut eſtre augmentee de telle ſorte qu'elle excede l'autre, de ſorte que ſi l'vne ou l'autre encore que multipliee n'excede iamais l'autre, elles ne ſeront dictes auoir raiſon ou proportion : comme le Diametre & le coſté d'vn meſme quarré, ſeront dicts auoir raiſon, combien qu'elle ſoit irrationelle, laquelle

ne ſe peut exprimer par aucun nombre, d'autant que le coſté multiplié par 2. ou pris deux fois excede le diametre : Car puis que les deux coſtez du quarré auec le diametre conſtituent vn triangle Iſoſcele; [a] les 2. coſtez du quarré ſeront plus grands que le diametre dit celuy. Ainſi pareillement la circonference du cercle & le diametre d'iceluy auront proportion; (combien qu'elle ne ſoit encore cognuë) d'autant que le diametre multiplié par quatre ou pris quatre fois excede la circonference, puiſque toute circonference de cercle, comme il eſt demonſtré par Archimede, contient tant ſeulement trois fois le diametre du meſme cercle, & de plus vne particule, peu moindre que la ſeptieſme partie du diametre. En la meſme maniere, pluſieurs figures curuilignes auront raiſon auec des figures rectilignes, comme a monſtré Proclus ſur le premier d'Euclide. Or que toutes les lignes ny tous les angles plans n'ont pas raiſon entr'eux ſelon cette definition, il eſt manifeſte : car vne ligne finie n'a aucune raiſon à vne ligne infinie, puis qu'en quelque maniere qu'elle ſoit multipliee, elle ne peut exceder la ligne infinie, ny vn angle rectiligne n'a raiſon à vn angle de contingence: Car [b] l'angle de contingence ne peut exceder vn angle rectiligne.

[a] 20. 1.

[b] 16. 3.

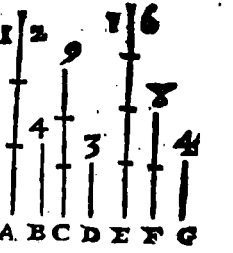
6. Les grandeurs ſont dictes eſtre en meſme raiſon, la premiere à la ſeconde, & la troiſieſme à la quatrieſme, quand les equimultiples de la premiere & de la troiſieſme, aux equimultiples de la ſeconde & de la

quatrieſme, par quelque multiplication que ce ſoit, ou defaillent enſemble, ou enſemble ſont egaux, ou excedent enſemble vn chacun à vn chacun, ſi l'on prend ceux-là qui s'entre-reſpondent.

Euclide monſtre en ce lieu, quelles conditions ſont requiſes aux magnitudes pour eſtre dites auoir meſme raiſon, ce que pour expoſer, il eſt contraint de ſe ſeruir des equimultiplices d'icelles, afin qu'il comprenne toutes les raiſons des grandeurs, tant rationelles que irrationelles. Soient donc quatre grandeurs A, premiere, B, ſeconde, C, troiſieſme, D, quatrieſme, & ſoient priſes les equimultiplices quelcõques de la premiere A & de la troiſieſme, C, ſçauoir E, equimultiplice de A & F, de C. Item ſoient priſes autres quelconques equimultiplices, de la ſeconde B, & de la quatrieſme D, ſçauoir G, equimultiplice de B & H, de D, ſoit que ces deux derniers ſoient autant multiplices de la ſeconde & de la quatrieſme que les 2. premieres le ſont de la premiere & de la troiſieſme ou non. Que ſi maintenant l'on confere entr'elles les grandeurs qui ont eſté priſes equimultiplices, ſçauoir celles qui s'entre-reſpondent comme la multiplice de la premiere & la multiplice de la ſeconde qui ſont E, & G; Item la multiplice de la tierce, & la multiplice de la quatrieſme entr'elles, ſçauoir F & H, & s'il ſe trouue touſiours qu'elles ont tel raport l'vne à l'autre, que ſi E, multiplice de la premiere grandeur, A, eſt moindre que G, multiplice de la ſeconde grandeur,

B, que F multiplice de la troiſieſme grandeur C, ſoit auſſi moindre que H, multiplice de la quatrieſme grandeur D: ou ſi E, eſt egale à G, auſſi F ſoit egale à H, ou finalement ſi E eſt plus grande que G, auſſi F ſoit plus grande que H, ce qui eſt defaillir enſemble l'vn & l'autre, de l'vn & de l'autre, ou eſtre egaux enſemble, ou exceder enſemble, de ſorte qu'en aucun genre de multiplices le contraire ne ſe puiſſe trouuer; c'eſt à dire que E, ne ſoit iamais moindre que G, que F, ne ſoit auſſi moindre que H, & que iamais E, ne ſoit egale à G, ſi F, n'eſt auſſi egal à H, & Finalement que E ne ſoit iamais plus grande que G, que F, ne ſoit auſſi plus grande que H. Si donc on trouue que les equimultiplices pris en quelque façon que ce ſoit, ſe raportent perpetuellement entre eux comme dict eſt, l'on dira qu'il y a meſme raiſon de la premiere grandeur, A, à la ſeconde B, que de la troiſieſme grandeur, C à la quatrieſme D: Que ſi on trouuoit quelques fois, meſme en vn ſeul genre des multiplices, que le multiple E, defaut du multiple de G, mais le multiplice F, ne defaut de H, ou que E, eſt egal à G, & F, n'eſt egal à H; ou finalement E, excede G, & F, n'excede H, combien qu'en infinis autres façons de multiplices, la ſuſdite condition ſe troue; en aucune façon, les grandeurs propoſees ne ſeront dites auoir meſme raiſon entr'elles, mais diuerſes, comme il ſera manifeſte de la huictieſme definition. Au contraire s'il y a meſme raiſon

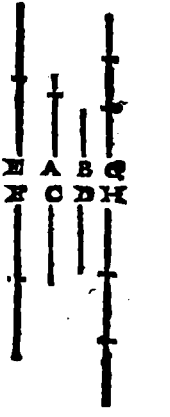
de la premiere à la ſeconde, comme de la troiſieſme à la quatrieſme, il s'enſuiura que les equimultiples de la premiere & de la troiſieſme, ſeront tous deux egales, aux equimultiples de la ſeconde & de la quatrieſme, ou toutes deux moindres ou toutes deux plus grandes en quelconque multiplication que ce ſoit: Et s'il n'y auoit meſme raiſon de la premiere à la ſeconde que de la troiſieſme à la quatrieſme, auſſi les equimultiples de la premiere & troiſieſme n'excederont enſemble les equimultiples de la ſeconde & quatrieſme, ou ne ſeront egales ou plus petites &c. Or il faut noter icy, que ceſte deffinition ſe doit auſſi entendre de trois grandeurs, pourueu que la ſeconde ſoit priſe deux fois, afin d'en auoir quatre &c.

17. Les grandeurs qui ont meſme raiſon, ſoient appellees homologues, ou proportionnelles.

Comme ſi des grandeurs A, B, C, D, il y a meſme raiſon de A à B, que de C à D, icelles grandeurs A, B, C, D, ſeront dites proportionnelles, ſemblablement s'il y a meſme raiſon de E à F, que de F à G, les grandeurs E, F, G, ſeront dites proportionnelles: Or il y a quelques magnitudes proportionnelles continuellement; entre leſquelles ſe trouue la proportion continuë, comme ſont les grandeurs E F G; mais quelques vnes ſont proportionelles non

contiuuellement, mais ſeparément, comme ſont les grandeurs A, B, C, D, car en ceux-cy, y a interruption de raiſons, mais en ceux-là non, comme il eſt dit en la quatrieſme definition.

8. Mais quand des equimultiples, le multiple de la premiere grandeur excedera celuy de la ſeconde, mais le multiple de la troiſieſme grandeur n'excedera pas celuy de la quatrieſme, alors la premiere grandeur ſera dicte auoir plus grande raiſon à la ſeconde, que la troiſieſme à la quatrieſme.

Euclide declare en ceſte definition, quelle condition doiuent auoir quatre grandeurs, afin que la premiere ſoit dite auoir plus grande raiſon à la ſeconde, que la troiſieſme à la quatrieſme, diſant que ſi on prend les equimultiplices de la premiere & de la troiſieſme, ſemblablemẽt autres equimultiplices de la 2. & de la 4. & qu'il ſe troue quelquesfois (bien que non pas touſiours) que le multiple de la 1. grandeur ſoit plus grand que le multiple de la 2. mais le multiple de la 3. n'eſt pas plus grand que le multiple de la quatrieſme, mais moindre ou egal, l'on dira qu'il y aura plus grande raiſon de la premiere grãdeur à la ſecõde, que de la troiſieſme à la quatrieſme, comme il eſt manifeſte en l'exemple propoſé, auquel l'on a pris les triples de la 1. grandeur A, & de la 3. C, ſçauoir



E,&F,mais de la secõde B,& de la quatrieſme D, l'on a pris les quadruples G & H,Et d'autant que E, multiple de la premiere eſt plus grand que G, multiple de la ſeconde, mais F, multiple de la troiſieſme n'eſt pas plus grand que H, multiple de la quatrieſme; mais moindre; l'on dira qu'il y aura plus grande raiſon de A, premiere grandeur à B,ſeconde, que de C,troiſieſme à D,quatrieſme.

Or il n'eſt pas neceſſaire, afin que de quatre grandeurs, la premiere ſoit dicte auoir plus grãde raiſon à la ſeconde que la troiſieſme à la quatrieſme,que les equimultiplices ſelon quelconque multiplication ayent telle habitude, que le multiplice de la premiere excede le multiplice de la ſeconde, mais que le multiplice de la tierce n'excede le multiplice de la quarte; mais c'eſt aſſez que ſelon quelque multiplication ils ayent telle habitude; car il ſe peut faire quelquesfois que tant le multiple de la premiere eſt plus grand que le multiple de la ſeconde, que le multiple de la troiſieſme de celuy de la quatrieſme, ſemblablement que comme le multiple de la premiere eſt moindre que le multiple de la ſeconde, que celuy de la troiſieſme, eſt auſſi moindre que celuy de la quatrieſme: toutesfois d'autant que cela n'aduient pas en toute multiplication, mais quelquesfois le multiple de la premiere excede celuy de la ſeconde,mais le multiple de la troiſieſme eſt moindre ou egal au multiple de la quatrieſme: pour ceſte cauſe la premiere grandeur ſera dite auoir plus grande raiſon à la ſeconde que la troiſieſme à la quatrieſme, & non meſme comme l'on void en l'exemple propoſé,

où 3. a plus grande raiſon à 2 que 4. à 3.
15. 9. 12. 3. 2. 10. 18. 14.
20. 12. 16. 4. 3. 15. 12. 21.

Donc afin que quatre grandeurs ſoient dictes proportionelles, il eſt neceſſaire que les equimultiplices d'icelles priſes ſelon quelconque multiplication, defaillent enſemble, ſoient egales enſemble, ou excedent enſemble, comme il a eſté expoſé en la 6. definition.

Mais afin que la premiere ſoit dicte auoir plus grande raiſon à la ſeconde que la troiſieſme à la quatrieſme. Il ſuffit que ſelon quelque multiplication, le multiple de la premiere excede le multiple de la ſeconde, mais celuy de la troiſieſme n'excede celuy de la quatrieſme, encore que ſelon infinies autres multiplications, les equimultiples de la premiere & de la tierce, excedent enſemble les equimultiples de la ſeconde & de la quatrieſme. &c.

Mais ſi au contraire le multiple de la premiere grandeur defaut du multiple de la ſeconde, le multiple de la troiſieſme ne defaut du multiple de la quatrieſme, la premiere grandeur ſera dicte auoir moindre raiſon à la ſeconde que la troiſieſme à la quatrieſme, combien que ſelon plusieurs autres multiplications, les equimultiplices de la premiere & de la troiſieſme defaillent enſemble des equimultiplices de la ſeconde & de la quatrieſme, comme l'on void aux meſmes nõbres de l'exemple propoſé, la raiſon de 2. à 3. ſera moindre que de 3. à 4. &c.

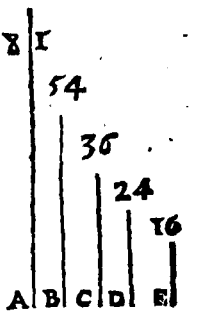
9. La proportion ne peut eſtre conſtituee en moins de trois termes.

D'autant que toute Analogie qui eſt dicte proportion, eſt vne ſimilitude de raiſons, & qu'en toute raiſon il y a le terme antecedent, & le terme conſequent, il eſt neceſſaire qu'en toute proportion, y ayt à tout le moins, deux termes antecedens & deux conſequens, Partant ſi la proportion n'eſt continuë, ſeront requis, à tout le moins quatre termes ou grandeurs; mais ſi la proportion eſt continuë, il y aura du moins trois termes, d'autant que celuy du milieu eſt pris deux fois, puis qu'il eſt conſequent d'vne raiſon, & antecedent de l'autre, & c'eſt icy le moindre nombre des termes de la proportion. Car en deux termes quelconques ſe trouue ſeulement raiſon, & non proportion.

10. Quand il y a trois grandeurs proportionelles, la premiere à la troiſieſme, eſt dicte auoir la raiſon doublee de la premiere à la ſeconde: mais quand quatre grandeurs ſont proportionelles, la premiere à la quatrieſme, eſt dicte auoir la raiſon triplee, de la premiere à la ſeconde, & touſiours de meſme ordre, vne de plus iuſques à ce que la proportion ſoit accomplie.

Comme ſi les grandeurs A, B, C, D, E, ſont continuellement proportionelles, de ſorte qu'il y ayt meſme raiſon de A à B, que de B à C, & de C à D, & D à E: La raiſon de la premiere grandeur A, à la troiſieſme grandeur, C, ſera dicte doublee de la raiſon que la premiere grandeur A, a à la ſeconde grãdeur, B, d'autant qu'entre

tre A, & C, y a deux raiſons, leſquelles ſont egales à la raiſon de A à B, à ſçauoir la raiſon de A à B & de B, à C, De ſorte que la raiſon de A, à C, prend la raiſon de A, à B, doublee, c'eſt à dire miſe deux fois d'ordre: mais la raiſon de la premiere grandeur A à la quatrieſme D, eſt dicte triplee de la raiſon que la premiere grandeur, A, a à la ſeconde grandeur B, d'autant qu'entre A, & D, ſont trois raiſons, qui ſont egales à la raiſon de A à B, à ſçauoir la raiſon de A à B, de B, à C, & de C à D, tellement que la raiſon de A à D, encloſt ou cõprend en quelque façon la raiſon de A à B, triplee, c'eſt à dire poſee trois fois d'ordre: Ainſi pareillement la raiſon de A à E ſera dicte quadruplee de la raiſon de A à B, d'autant que quatre raiſons ſe trouuent entre A & E, qui ſont egales à la raiſon de A à B. &c.

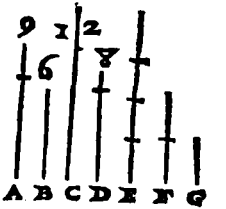


Que ſi au contraire, y a meſme raiſon de E à D, que de D à C, & de C à B, que de B à A; la raiſon de E à C ſera dicte doublee de la raiſon de E à D: mais la raiſon de E à B, ſera dicte triplee de la raiſon de E à D; ainſi pareillement la raiſon de E à A, ſera dicte quadruplee de la raiſon de E à D. &c.

II. Les grandeurs ſont dictes homologues, ou de ſemblable raiſon, les antecedétes aux antecedentes, & les conſequentes aux conſequentes.

Il a deſiny auparauant que la proportion eſt vne ſimilitude de raiſons, il enſeigne maintenant que non ſeulement en quelque proportion les raiſons ſont dictes ſemblables; mais auſſi les termes meſmes, ou quantitez ſont dictes ſemblables ou homologues, diſant que les grandeurs antecedentes ſont appellees homologues, ou ſemblables entr'elles en raiſon, & de meſmes les conſequentes entr'elles; afin d'entendre en pluſieurs demonſtrations, quels coſtez des figures comparez entr'eux, doiuent eſtre les antecedents des raiſons, & quels les conſequents comme il ſera declaré au 6. liure.

S'il y a donc meſme raiſon de A à B, que de C, à D, la quantité A, ſera dicte ſemblable à la quãtité de C, & B, ſemblable à D: Car à cauſe de la ſimilitude des raiſons, il eſt neceſſaire, que l'vne & l'autre grandeur antecedente ſoit egale à l'vne & l'autre conſequente, ou de meſme façon plus grande ou plus petite, autrement l'vne & l'autre antecedente n'auroit meſme raiſon à l'vne & l'autre conſequente. En voicy l'exemple. Aux magnitudes propoſees, auſquelles les antecedentes ſont en meſme façon plus grandes que les conſequentes, à ſçauoir la moitié plus grandes: en voicy vn autre exemple. Aux magnitudes continuellement proportionelles, E, F, G, ou tant E & F, ſont homologues que F, & G, comme il eſt manifeſte, & pour ceſte cauſe, Euclide en la ſixieſme & huictieſme definition commande de prendre les equimultiplices de la premiere & troiſieſme gran-



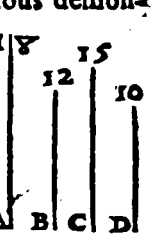
deur, c'eſt à dire des antecedentes: ſemblablemẽt de prendre autres equimultiplices de la ſeconde & quatrieſme grandeurs; à ſçauoir des conſequentes, car icelles ſont ſemblables aux magnitudes proportionelles, comme il eſt manifeſte par ceſte definition: mais aux grandeurs non proportionelles, ſont diſſemblables.

12. La raiſon alterne eſt prendre l'antecedent comparé à l'antecedent, & le conſequent au conſequent.

Il explique icy quelques façons d'argumenter aux proportions, dont l'vſage eſt fort frequent entre les Geometres; leſquelles façons d'argumenter ſont 6. en nombre, la premiere eſt dicte raiſon alterne, ou permutee: la ſeconde eſt dicte inuerſe, ou raiſon au cõtraire: la troiſieſme, compoſition de raiſon ou proportion conioincte, la quatrieſme, diuiſion de raiſon ou proportion deſioincte, ou ſeparee; la cinquieſme conuerſion de raiſon, ou proportion renuerſee: finalement la ſixieſme eſt appellee raiſon d'egalité, ou egale proportion.

Donc raiſon alterne ou permutee eſt, dit-il, quand quatre grandeurs proportionelles eſtant propoſees, l'on infere qu'il y a meſme raiſon de l'antecedent de la premiere raiſon, à l'antecedent de la derniere, que du conſequent de la premiere au conſequent de la derniere: comme ſi nous poſons qu'il y ayt meſme raiſon de A, à B, que de C, à D, & partant nous concluons, qu'il y a meſme raiſon de A à C, que de B, à D, nous ſommes dicts argumenter en raiſon permutee. Les Autheurs Grecs vſent en ceſte argumentation preſ-

que de ceſte façon de parler; comme A, eſt à B, ainſi C, eſt à D, donc en permutant, ou au contraire, A, ſera à C, comme B à D. Or nous demonſtrerõs la verité de ceſte illation à la 16. propoſition de ce liure. Et en ceſte façon d'argumenter, il eſt neceſſaire que toutes les quatre grandeurs ſoient de meſme genre; afin qu'il puiſſe y auoir raiſon entre icelles, priſes deux à deux cõme l'on voudra: car ce n'eſt pas bien argumenter de dire, comme la ligne A eſt à la ligne B, ainſi le nõbre C, au nombre D, donc en permutant, comme la ligne A au nombre C, ainſi la ligne B, au nombre D: attendu qu'il n'y a aucune proportion d'vne ligne à vn nombre, & au contraire, comme il eſt manifeſte de la cinquieſme definition. Mais aux autres façons d'argumenter, ſuiuantes, les premieres grandeurs peuuent eſtre d'vn genre de quantité, & les dernieres d'vn autre, comme il ſera manifeſte par les demonſtrations de ce cinquieſme liure.



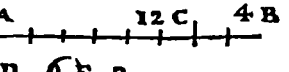
13. Raiſon inuerſe ou tranſpoſee eſt prendre le conſequent comme antecedent, pour le comparer à l'antecedent, comme ſi c'eſtoit le conſequent.

Comme ſi d'autant que A, eſt à B, comme C, eſt à D, nous inferons que B, eſt à A, comme D, eſt à C, (voyez la figure precedente,) nous ſerons dits argumenter par raiſon inuerſe. En ceſte maniere d'argumenter les autheurs parlent quaſi en ceſte façon: comme A, eſt à B, ainſi C, eſt à D, donc

en changeant, ou au contraire B, ſera à A, cõme D, à C: laquelle maniere d'argumenter ſera demonſtree eſtre veritable au Corollaire de la quatrieſme propoſitiõ de ce liure. Finalemẽt les deux premieres grandeurs peuuent eſtre d'vn genre, & les dernieres d'vn autre: car l'on pourra fort bien inferer: comme la ligne A, eſt à la ligne B, ainſi le triangle ou le nombre C, eſt au triangle, ou au nombre D. Donc en changeant, comme la ligne B, eſt à la ligne A, ainſi le triangle ou le nombre D eſt au triangle, ou au nombre C, comme il ſera euident par le Corollaire de la quatrieſme propoſition.

14. Compoſition de raiſon eſt quand l'on prend l'antecedent auec le conſequent, comme vn, pour le comparer au meſme conſequent.

Comme s'il y a meſme raiſon de A C, à C B, que de D F, à F E; & de là on collige qu'il y a meſme raiſon de la toute, A B, à ſçauoir de l'antecedent auec le conſequent, à C B conſequent, que de la toute D E (ſçauoir l'antecedent auec le conſequent) à F E, conſequent. Ceſte façon d'argumẽter ſera appellee compoſition de raiſon, d'autant que de l'antecedent & du conſequent eſt compoſé vn autre nouueau antecedent.



Or les Autheurs Grecs vſent de ceſte façon de parler en ceſte argumentation: Comme A C, eſt à C B, ainſi D F, à F E, donc en compoſant com-

me A B, ſera à C B, ainſi D E, à F E, ceſte maniere d'argumenter, ſera demonſtree à la dix-huictieſme propoſition de ce liure.

L'on peut adiouſter deux autres moyens d'argumenter à celuy-cy. Le premier peut eſtre dict, compoſition de raiſon conuerſe; à ſçauoir lors qu'on prend l'antecedent & conſequent comme vn; pour le cõparer à l'antecedent: cõme ſi d'autant que A C, eſt à C B, ainſi D F, à F E, nous inferons, donc comme A B, compoſé de l'antecedent & du conſequent, eſt à l'antecedent A C, ainſi D E, compoſée de l'antecedent & du conſequent eſt à l'antecedent D F: lequel moyen d'argumenter nous monſtrerons eſtre vallable à la *18.* propoſition de ce liure, en laquelle nous pourrons vſer de ceſte maniere de parler; donc par conpoſition de raiſon conuerſe.

L'autre maniere d'argumenter peut eſtre dicte compoſition de raiſon contraire, laquelle ſe faict lors que l'on compare vne meſme grandeur antecedente, à l'antecedente; & à la conſequente comme à vne ſeule; comme ſi A C, eſt à C B, ainſi D F, eſt à F E, & nous inferons par compoſition de raiſon contraire, donc comme A C, antecedente eſt à la toute A B, compoſee de l'antecedente & de la conſequente, ainſi D F, antecedent ſera à D E, compoſee de l'antecedente & de la conſequente: Et nous demonſtrerons ceſte maniere d'argumenter valable à la dix-huictieſme propoſition de ce liure.

15. Diuiſion de raiſon eſt lors qu'on prend l'excez par lequel l'antecedent ſurpaſſe le conſequent, pour le comparer au meſme conſequent.

Comme ſi l'on dict, qu'il y ayt meſme raiſon de la toute A B, à C B, que de la toute D E, à F E, voyez la precedente figure, donc il y aura meſme raiſon de A C, excez par lequel l'antecedent ſurpaſſe le conſequent, à C B, conſequent, que de D F, excez par lequel l'antecedent ſurpaſſe le conſequent, à F E. conſequent. Or en ceſte diuiſiõ de raiſon les autheurs parlent ainſi; donc en diuiſant &c. mais ceſte illation ſera demonſtree à la 17. propoſition de ce liure.

Or à ce moyen d'argumenter l'on y en peut adiouſter deux autres, le premier deſquels nous pouuons appeller diuiſion de raiſon conuerſe, à ſçauoir quand le conſequent eſt comparé à l'excez par lequel l'antecedent ſurpaſſe le cõſequent: Comme ſi A B, eſt à C B, ainſi D E, eſt à F E, & nous concluons par diuiſion de raiſon conuerſe, donc comme C B, conſequent ſera à A C, excez par lequel l'antecedent ſurpaſſe le conſequent, ainſi F E, conſequent ſera à D F, excez par lequel l'antecedent ſurpaſſe le conſequent: mais nous demonſtrerons la certitude de ceſte maniere d'argumenter à la 17. propoſition de ce liure.

Or il eſt manifeſte, qu'afin que l'vne & l'autre de ces façons d'argumenter, ayt lieu, ſçauoir celle-cy & celle d'Euclide, que l'antecedent doit eſtre plus grand que le conſequent, autrement la diuiſion ne ſe pourroit faire.

L'autre moyen d'argumenter, ſe peut appeller diuiſion de raiſon contraire; qui ſe faict quand

l'antecedent eſt comparé auec l'excez, par lequel le conſequent ſurpaſſe l'antecedent, comme quand nous diſons: comme AC, eſt à AB, ainſi DF, eſt à DE: donc par diuiſion de raiſon contraire, AC, antecedent ſera pareillement à CB, excez par lequel le conſequent ſurpaſſe l'antecedent, comme DF, antecedent eſt à FE, excez par lequel le conſequent ſurpaſſe l'antecedent: laquelle maniere d'argumẽter nous demonſtrerons auſſi en la 17 propoſition de ce liure.

Finalement il eſt manifeſte, qu'en ceſte diuiſion de raiſon contraire, que le conſequent doit eſtre plus grand que l'antecedent, afin que l'on puiſſe prendre l'excez par lequel le conſequent ſurpaſſe l'antecedent.

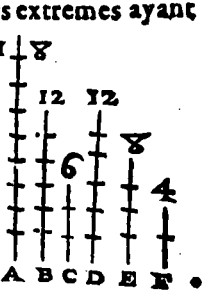
16. Conuerſion de raiſon eſt prendre l'antecedent pour le comparer à l'excez, par lequel l'antecedent ſurpaſſe le meſme conſequent.

Comme ſi nous diſons en ceſte maniere: comme toute la grandeur AB, eſt à CB, ainſi la toute DE, eſt à FE, donc auſſi, la meſme AB, ſera à AC, excez par lequel l'antecedent ſurpaſſe le cõſequent, comme DE, eſt à DF; nous ſerons dicts argumenter par conuerſion de raiſon: dont les Autheurs parlent preſque en ceſte maniere; Donc par cõuerſion de raiſon, &c. mais ce moyẽ d'argumenter ſera confirmé au Corollaire de la 19. propoſition de ce liure. Voyez la figure precedente.

Il eſt auſſi euident, qu'en ce moyen d'argumenter par conuerſion de raiſon, que l'antecedent doit exceder le conſequent, afin que l'excez par lequel l'antecedent ſurpaſſe le conſequent puiſſe eſtre pris.

17. Raiſon egale ou de l'egalité, eſt quand il y a pluſieurs grandeurs, & d'autres egales à icelles en multitude, qui ſoient prises deux à deux, & en meſme raiſon : quand comme aux premieres grandeurs la premiere eſt à la derniere des meſmes, ainſi aux ſecondes grandeurs, la premiere eſt à la derniere des meſmes. Autrement, c'eſt prendre les extrémes par la ſouſtraction des moyennes.

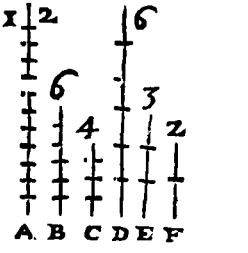
Soient pluſieurs grandeurs A, B, C, d'vne part & autant de l'autre, D, E, F, leſquelles ſoient de deux en deux, en meſme raiſon, c'eſt à dire comme A eſt à B, ainſi D eſt à E, & comme B, eſt à C, ainſi E eſt à F. Si donc pour ceſte cauſe l'on infere qu'il y a meſme raiſon de A, premiere des premieres grandeurs à C, derniere des meſmes, que de D, premiere des ſecondes grandeurs à F, derniere des meſmes, ceſte façon d'argumenter ſera appellee raiſon egale, ou raiſon d'egalité, à ſçauoir, en laquelle les grandeurs extremes ayant ſouſtraict les moyẽnes, ſont dites auoir vne meſme raiſõ entre elles, comme il eſt exprimé en l'autre definition. Mais d'autant qu'il eſt permis d'argumenter aux proportions, en deux manieres, par l'egalité : à ſçauoir en l'vne, quand nous prenons les grandeurs de deux en deux, en meſme raiſon, en procedant d'ordre, & en l'autre quand l'ordre eſt changé, Euclide



explique aux deux definitions ſuiuantes que c'eſt que proportion ordonnee & proportion perturbee ou troublee.

18. Proportion ordonnee eſt, lors que, comme l'antecedent eſt au conſequent, ainſi l'antecedent eſt au conſequent: & cõme le conſequent eſt à quelque autre, ainſi le conſequent eſt auſſi à quelque autre.

Comme ſi A eſt à B, ainſi comme D, eſt à E, & de rechef, cõme B, cõſequẽt eſt à quelque autre, ſçauoir à C, ainſi E, cõſequent eſt à quelque autre cõme à F: telle façõ d'argumenter ſera appellee ordõnee, d'autant qu'on garde vn meſme ordre, tant aux premieres grandeurs qu'aux ſecondes, puis que de part & d'autre, l'on compare premierement la premiere auec la ſeconde, &



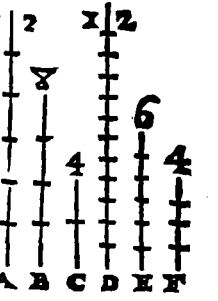
puis apres la ſeconde auec la tierce. Donc quand en la maniere d'argumenter par egalité, la proportion ordonnee eſt gardee, il eſt demonſtré en la propoſition 22. de ce liure, que ce moyen d'argumenter eſt bon.

19. Proportion perturbee eſt, lors que trois grandeurs ſont poſees d'vne part & d'autres egales en multitude à icelles, & comme aux premieres grandeurs, l'antecedent eſt au conſequent, ainſi aux ſecondes grandeurs, l'antecedent eſt au conſequent: mais comme aux premieres grandeurs, le conſequent eſt à quelque autre,

ainſi aux ſecondes grandeurs quelque autre eſt à l'antecedent.

C'eſt à dire, quand trois grandeurs ſont poſees d'vne part, & autant d'vne autre, la premiere des premieres eſt à la ſeconde des meſmes, comme la ſeconde des ſecondes à la troiſieſme des meſmes, & comme la ſeconde des premieres eſt à la troiſieſme des meſmes, ainſi la premiere des ſecondes eſt à la ſeconde des meſmes.

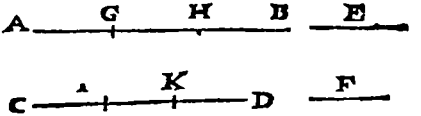
Comme s'il y a meſme raiſon de A à B, que de E à F, puis apres aux premieres grandeurs, comme B, conſequent eſt à quelque autre ſçauoir à C, ainſi aux ſecondes grandeurs quelque autre, à ſçauoir, D eſt à E, antecedent. Et ceſte façon d'argumenter ſera appellee, proportion perturbee, d'autant qu'on n'obſerue pas meſme ordre, aux proportions des magnitudes, d'autant que aux premieres grandeurs, la premiere eſt comparée auec la ſeconde, mais aux ſecondes grandeurs, la ſeconde eſt comparee auec la tierce: & de rechef aux premieres grandeurs, la ſeconde eſt comparée à la tierce, mais aux ſecondes, la premiere eſt comparee auec la ſeconde. Donc quand en la maniere d'argumenter par l'egalité, l'on obſerue la proportion troublee, il eſt demonſtré que ceſte argumentation eſt bonne, en la 23. propoſition de ce liure: Finalement tant la proportion troublee, que ordonnee, infere touſiours par egalité, qu'il y a meſme proportion des extremes, bien que l'on poſe plus de trois grandeurs, comme il ſera



manifeſte de la vingtdeuxieſme & vingt troiſieſme propoſition de celiure.

THEOREME 1. PROP. 1.

S'il y a tant de grandeurs qu'on voudra egales en multitude à d'autres grandeurs, & equimultiples d'icelles, chacune de la ſienne; comme l'vne des grandeurs ſera multiple d'vne; ainſi les toutes ſeront multiples des toutes.



Soient tant de grandeurs que l'on voudra, A B, C D, equimultiplices d'autant d'autres grandeurs E, F, ie dis que les grandeurs A B, C D, enſemble ſont autant multiplices de E & F, enſemble, que A B, toute ſeule eſt multiple de E, toute ſeule, ou C D, de F.

Car puis que A B, C D, ſont equimultiples de E, F, ſi A B, eſt diuiſee ſelon les grandeurs A G, G H, H B, egales chacunes à E, & C D, pareillement ſelon G I, I K, K D, egales chacunes à F. Or chacune pourra eſtre diuiſee en parties totalement egales à E, & F, puis que A B, C D, ſont equimultiplices de E, F, & partant E, ſera contenue exactement autant de fois, en A B, que F, en C D, comme il apert par la ſeconde definition de celiure, les grandeurs A G, G H, H B, ſeront autant en nombre, que C I, I K, K D, mais d'au-

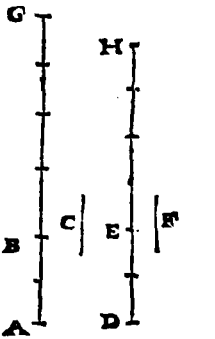
tant que A G, & E ſont egales entr'elles, ſi l'on leur adiouſte les egales C I, & F; [a] A G & C I, enſemble ſeront egales à E & F, enſemble: ſemblablement G H, & I K enſemble, ſeront egales à E, & F enſemble, & auſſi H B, & K D, aux meſmes E & F, donc autant de fois que E eſt contenue en A B, ou F, en C D, autant de fois E & F, enſemble ſeront contenues en A B, C D, enſemble: partant comme A B, eſt multiplice de E, ainſi A B, C D, enſemble ſeront multiplices de E, & F, enſemble, par la ſeconde definition de ce liure. Donc s'il y a tant de grandeurs & c. ce qu'il falloit demonſtrer.

[a] 2. com. ſent.

THEOREME 2. PROP. 2.

Si la premiere eſt autant multiple de la ſeconde, que la troiſieſme l'eſt de la quatrieſme. & que la cinquieſme ſoit auſſi autant multiple de la ſeconde que la ſixieſme, l'eſt de la quatrieſme; la compoſee de la premiere & de la cinquieſme, ſera autant multiple de la ſeconde, que la compoſee de la troiſieſme & de la ſixieſme l'eſt de la quatrieſme.

Soit la premiere grandeur A B, autant multiple de la ſeconde C, que D E, troiſieſme l'eſt de F, quatrieſme: De rechef ſoit B G, cinquieſme autant multiple de C, ſeconde, que E H, 6. l'eſt de F, quatrieſme. Ie dis que A G, compoſee de la premiere A B, & de la cinquieſme B G, eſt autant multiple de C, deuxieſme que D H, compoſee de la troiſieſme D E, & de la ſixieſme E H, eſt multiple de F, quatrieſme.



Car puis que A B, & D E, ſont equimultiples de C, & de F, il y aura en A B, autant de grandeurs egales à C, qu'il y a en D E, d'egales à F: ſemblablement il y aura en B G, autant de grandeurs egales à C, qu'il y en a en E H, d'egales à F, ſi donc l'on adiouſte à egales multitudes A B, D E, egales multitudes B G, E H, toutes les multitudes A G, D H, ſeront egales en nombre, partant C, ſera contenu autant de fois en A G, que F, eſt contenu en D H. Donc A G, (compoſé de la 1. & 5.) ſera autant multiple de C, 2. que D H, (compoſée de la 3. & 6.) l'eſt de F, 4. Donc ſi la premiere eſt autant multiplice de la ſeconde &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.

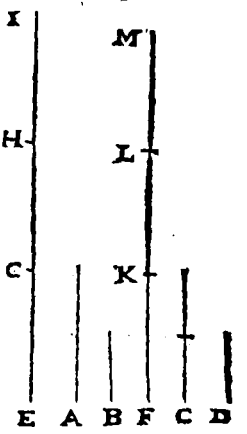
iij

THEOREME 3. PROP. 3.

Si la premiere eſt autant multiple de la ſeconde, comme la troiſieſme l'eſt de la quatrieſme, & l'on prend les equimulti-

ples de la premiere & de la troiſieſme, en raiſon egale, la grandeur priſe multiple de la premiere, ſera auſſi autant multiple de la ſeconde, que la grandeur priſe multiple de la troiſieſme le ſera de la quatrieſme.

Soit la premiere grandeur A, autant multiple de B, ſecõde, que C, troiſieſme l'eſt de D quatrieſme, & que l'on prenne E & F, equimultiples de la premiere & de la troiſieſme A, & E, ie dis qu'en raiſon egale, E, ſera autant multiple de B, ſeconde que l'eſt F, de D, quatrieſme: Car puiſque E, & F, ſont equimultiples de A & C; ſi l'on diuiſe E en grandeurs egales à A, comme en E G, G H, H I, Item F, en grandeurs egales à C: comme en F K, K L, L M: il y aura en E, autant de parties egales à A, qu'il y en a en F, d'egales à C, D'autant donc que E G, eſt egale à A, & F K, egale à C, mais A & C, ſont equimultiplices de B & D, par l'hypotheſe; E G, & F K, ſeront auſſi equimultiplices des meſmes B & D, ſemblablement G H, K L, & H I, L M, ſeront equimultiplices des meſmes B & D; D'autant donc que E G, premiere grandeur eſt autant multiple de la ſeconde B, que F K, tierce eſt multiple de la quatrieſme D, Item G H, cinquieſme eſt autant mul-



a 1.cinq. tiple de B, 2. que K L 6. eſt multiple de la 4. D, E H, compoſee de la premiere & de la cinquieſme ſera autant multiple de la 2. B, que F L, cõpoſee de la troiſieſme & de ſixieſme eſt multiple de la quatrieſme D. De rechef d'autant que E H, premiere eſt autant multiplice de B, 2. que F L, 3. l'eſt de D, 4. comme nous venons de demonſtrer; mais H I, 5. eſt autant multiple de la 2. B,
b 2.cinq. que L M, 6, l'eſt de D, 4. [b] E I, compoſee de la 1. & de la 5. ſera autãt multiple de la 2. B, que F M, compoſee de la 3. & de la 6. l'eſt de D, 4. & ainſi des autres s'il y a plus de parties en E, & F. Si donc la premiere eſt autant multiple de la ſeconde &c. ce qu'il falloit demonſtrer.

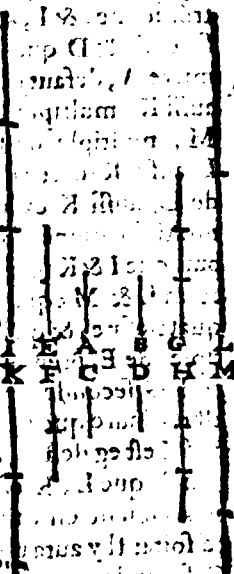
iiij

THEOREME 4. PROP. 4.

Si la premiere a meſme raiſon à la ſeconde, que la troiſieſme à la quatrieſme, auſſi les equimultiples de la premiere & de la troiſieſme auront meſme raiſon aux equimultiples de la ſeconde & de la quatrieſme, ſelõ quelque multiplication que ce ſoit, ſi elles ſont priſes ainſi qu'elles s'entre-reſpondent.

Soit

Soit la raiſon de A, premiere à B, ſeconde, meſme que celle de C, troiſieſme à D quatrieſme, & ſoient priſes E & F equimultiples de A, premier & C, troiſieſme, Item G & H, equimultiples de B, ſecond & D, quatrieſme ſelon quelque multiplication que ce ſoit, ſoit que E & F ſoient autant multiples de A, & C, que G, & H le ſont de B & D, ou moins: dis qu'il y a meſme raiſon de E multiple de A, premiere à G multiple de B ſeconde, comme de F, multiple de C, troiſieſme à H, multiple de D, quatrieſme.



Car ſi on conſtituë de re chef, E, premiere grandeur, & G, ſeconde F, troiſieſme, & H, quatrieſme, & que l'on prenne I, & K quelconques equimultiples de E & F, premiere & troiſieſme, Item L & M quelconques equimultiples de G, ſeconde & H quatrieſme: D'autant que E, premiere eſt autant multiple de A ſeconde que F troiſieſme l'eſt de C quatrieſme, & que l'on a pris I & K equimultiples de E & F premiere & troiſieſme, en raiſon egale, I & K ſeront auſſi equimultiples de A & C, ſeconde & quatrieſme: Par meſme raiſon L & M ſont equimultiples de B & D, & d'autant que A eſt à B, comme C à D, & que l'on a pris I & K equimultiples de A & C premiere & 3. ſ.

troisiesme, & L, & M, aussi equimultiples de B, seconde & D, quatriesme; [b] si I multiple de la premiere A, defaut de L, multiple de la seconde B, aussi K, multiple de la troisiesme C, defaudra de M, multiple de la quatriesme D: si I est egale à L, aussi K sera egale à M, & finalement si I excede L, aussi K excedera M, selon quelconques multiplications qu'elles soient prises. Partant puis que I & K sont equimultiples de E, F, & F. Item L & M equimultiplices de G seconde & H quatriesme, & qu'il est demonstré que si I, multiplié de E, premiere est moindre que L multiplice de G, seconde; que K multiplice de F troisiesme est moindre que M multiplice de H quatriesme, & si I est egale à L, K est egale à M; & si I est plus grande que L, K est plus grande que M, & que cela aduient en quelconque multiplication que ce soit: [c] Il y aura mesme raison de la premiere à la seconde que de F troisiesme à H quatriesme. Donc si la premiere a mesme raison à la seconde, que la troisiesme à la quatriesme, &c. Ce qu'il falloit demonstrer.

b 6. def.

c 6. def.

COROLLAIRE.

Par ceste demõstratiõ, est manifeste la preuue de la saiso inuerse expliquee par Euclide, [a] qui est, que si quatre grandeurs sont proportionnelles, quelles le seront aussi prises à rebours ou au contraire; c'est à sçauoir si A est à B, comme C à D, en raison inuerse comme B sera à A ainsi C à D: Car puis que comme A, est à B, ainsi C, est à D; [f] E & F, equimultiplices de A & C, premiere & troisiesme seront toutes deux plus grandes, egales, ou moindres que G & H, equimultiples

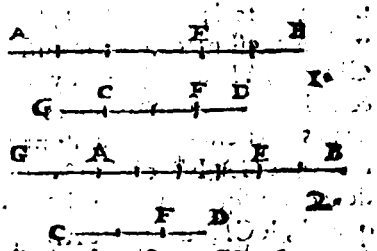
a 13. d.

f 6 def.

de B & D deuxiesme & quatriesme en quelque multiplication que ce soit. Donc au contraire, G & H seront toutes deux plus petites, egales ou plus grandes que E, & F, & partant il y aura mesme raison de B à A, que de D, à C. 5 6. def.

THEOREME 5. PROP. 5.

Si vne grandeur est autant multiple d'vne grandeur, que la retranchee l'est de la retranchee: aussi le reste sera autant multiple du reste comme la toute l'est de la toute.



Soit la toute AB, autant multiple de la toute CD, comme la retranchee AE, l'est de la retranchee CF. Ie dis que la restante EB, est autant multiple de la restante FD, que la toute AB l'est de la toute CD: Car soit prise CG, de laquelle EB, soit autant multiple que AE l'est de CF, ou la toute AB de la toute CD: D'autant donc que AE, EB, sont equimultiples de CF, GC, a la toute AB, sera autant multiple de la toute GF, comme AE, l'est de CF, c'est à dire les toutes des toutes comme vne seule d'vne seule: mais AB, est posee autant multiple de CD, que AE de CF, donc AB, sera autant multiple de GF, que de GD; b partant GF, CD, sont egales: donc ostant la commune CF, demeurera DF, egale à CG: donc EB, sera autant multiple de FD, que de CG, mais EB est autant multiple de CG par l'hypothese, que AE, l'est de CF, c'est à dire que a 1. 5. b 6. com. sent.

la toute AB, de la toute CD; Partant le reſte EB, ſera autant multiple du reſte FD, que la toute AB, de la toute CD; ce qui eſt propoſé.

Autrement ſoit la toute AB, autant multiple de la toute CD, que la retranchee AE, de la retranchee CF. Ie dis que le reſte EB, eſt autant multiple du reſte FD, que la toute AB, de la toute CD: Car ayant pris GA, autant multiplice de FD, comme AE, l'eſt de CF, ou la toute AB, de la toute CD: D'autant que AE, GA ſont equimultiples de CF, FD, [c] la toute GE ſera autant multiple de la toute CD, comme AE, de CF: mais AB, eſt pareillement auſſi autant multiple de CD, que AE, de CF, par l'ypotheſe. Donc GE, & AB, ſont equimultiplices de CD; [d] & partant egales entr'elles, oſtant dont la commune AE, reſteront GA, EB, egales: & partãt equimultiples de FD, puiſque GA eſt priſe autãt multiple de FD, que AE, de CF, ou la toute AB, de la toute CD: Dõc le reſte EB, ſera autant multiple du reſte FD, que la toute AB, de la toute CD; ce qui eſt propoſé. Donc ſi vne grandeur eſt autant multiplice, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.

c 1. 5.

d 6. 18. ſens.

vj

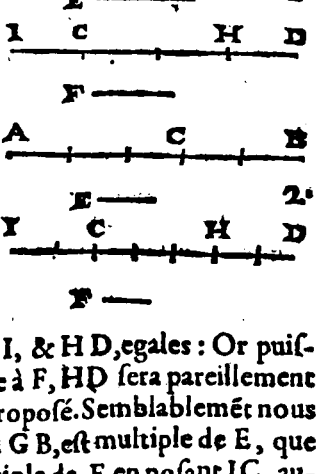
THEOREME 6. PROP. 6.

Si deux grandeurs ſont equimultiples de deux autres grandeurs, & d'icelles l'on retranche quelques equimultiples des meſmes grandeurs, ou les reſtes ſeront egaux aux meſmes, ou equimultiples d'icelles.

Soient les grandeurs AB, CD, equimultiples de E, & F, & les retranchees AG, CH, equimultiples des meſmes E, & F. Ie dis que les reſtes GB, HD, ſont egales à E, & F, ou equimultiples d'icelles.

Car ſoit premierement G B, egale à E, ie dis que H D, ſera egale à F; ſoit poſee C I, egale à F: D'autant que A G, premiere eſt autant multiple de F ſecõde que C H, troiſieſme l'eſt de F quatrieſme, & que G B, cinquieſme eſt egale à E, & I C, ſixieſme, egale à F quatrieſme: [a] A B, compoſee de la premiere, & de la cinquieſme, ſera autant multiple de E, deuxieſme que I H, cõpoſee de la troiſieſme & ſixieſme l'eſt de F, quatrieſme, mais C D eſt autant multiple de C F, par l'hypotheſe, que A B, l'eſt de E, donc H I, & C D, ſõt equimultiples de F; [b] & partant egales entr'elles: donc oſtant la commune C H, demeureront C I, & H D, egales: Or puiſque C I, eſt poſee egale à F, H D ſera pareillement egale à F: Ce qui eſt propoſé. Semblablemẽt nous demonſtrerons, que ſi G B, eſt multiple de E, que H D, ſera autant multiple de F, en poſant I C, autant multiple de F, que G B, l'eſt de E, &c.

[a] 2. 5.



[b] 6. ẽ. ſens.

Autrement: D'autant que A B, C D, ſont equimultiples de E, & F; Il y aura en A B, autant de grandeurs egales à E, qu'en C D, d'egales à F: De rechef, d'autant que A G, C H ſont equimultiples des meſmes E, F, il y aura pareillement en A G, autant de grandeurs egales à E, qu'il y en a en C H, d'egales à F. Si donc d'egales multitudes

[a] 1. & 2. def.

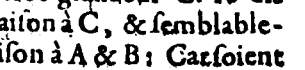
AB, CD, l'on oſte egales multitudes A G, CH, demeureront les multitudes G B, H D, egales; Donc G B, contiendra autant de fois E, que H D, contiendra F, ſi vne fois ſeulement G B, H D, ſeront egales à E, F, ſi plus d'vne fois equimultiples. Ce qui eſtoit propoſé.

vij

THEOREME 7. PROP. 7.

Les grandeurs egales ont meſme raiſon à vne meſme grandeur, & vne meſme grandeur a meſme raiſon aux egales.

Soient deux grandeurs egales entr'elles A & B, & ſoit quelconque tierce grandeur C. Ie dis que A & B ont meſme raiſon à C, & ſemblablement que C, a meſme raiſon à A & B; Car ſoient priſes D, & E, equimultiples des egales A, B, [a] icelles D, E, ſerõt egales entr'elles. De chef ſoit priſe F, multiple quelconque de C: D'autant dõc que D & E ſont egales; & equimultiples de A, B, 1. & 3. l'vne & l'autre ſera plus petite que F, ou egale, ou plus grande, ſelon quelconque multiplication qu'elles ſoient priſes. Donc puis que D, & E equimultiples de la 1. A & de la 3. B, ſont toutes deux plus grandes que F, multiple de la 2. & de la 4. C, (car C, eſt poſee comme pour deux grandeurs) ou egales, ou moindres; [b] il y aura meſme raiſon de A 1. à C 2. que de B 3. à C 4.



a 6. ax. ſeme.

b 6. def. 5.

En la meſme maniere nous demonſtrerons que F, eſt moindre que chacune des grandeurs D, E,

ou egale ou plus grande: Donc puis que F, multiple de la 1. & de la 3. C, est plus petite que chacune D, & E, equimultiples de la 2. & 4. A & B, ou egale, ou plus grande, il y aura pareillement mesme raison de la 1. C à la 2. A, que de la 3. C, à la 4. B; ce qui est proposé.

L'on pouuoit monstrer ceste 2. partie plus briefuement par la raison inuerse: car ayant desia esté demonstré qu'il y a mesme raison de A à C, que de B, à C, en changeant, [c] *il y aura mesme raison de C à A, que de C à B. Donc les grandeurs egales &c. ce qu'il falloit demonstrer.* [c] Coroll. 4. 5.

THEOREME 8. PROP. 8. viij

Des grandeurs inegales, la plus grande a plus grande raison à vne mesme grandeur que la plus petite. Et vne mesme grandeur a plus grande raison à la plus petite grandeur qu'à la plus grande.

Soiét les grãdeurs inegales, AB, plus grande & C, plus petite; & soit vne 3. grandeur quelcõque D. Ie dis que AB, a plus grande raison à D, que C, à la mesme D: & au contraire que D, a plus grande raison à C, que à B; Car de la plus grande AB soit retranchee AE, egale à C, & soit posee AB, premiere grandeur, C, 3. & D 2. & 4. puis soient prises FG, & GH, equimultiples de AE, & EB, en sorte que FG, multiple de AE, soit, plus grande que D, & GH, multiple de EB, ne soit moindre que la mesme D; mais egale ou plus grande. Or d'autant que FG, GH,

21. 5. sont equimultiples de AE, la toute FH, sera autant multiple de la toute AB, que FG, l'est de AE, c'est à dire de C, egale à AE: pareillement soit prise IK, multiple de D, prochainement plus grande que HG, à sçauoir double si estant prise double elle n'est plus grande que HG, soit prise, triple ou quadruple &c. Dõc estãt retrãchee LK, egale à D, IL, ne sera plus grande que HG, (autrement IK, ne seroit multiple de D, prochainement plus grande que HG. Mais IL, seroit aussi plus grande que GH. Que si IK, est double de D, il est manifeste que IL, n'est plus grande que HG, puisque HG, n'est posee moindre que D; c'est à dire que IL) & partãt HG, sera egale à IL, ou plus grande. Et d'autant que FG, est posee plus grande que D, & LK, egale à D; FG, sera aussi plus grande que LK. Donc HG, n'estant moindre que IL, comme il est demonstré: mais egale ou plus grande, la toute FH, sera plus grande que IK. Partant puis que FH, HG, sont equimultiples de AB, 1. & CE, & IK, multiple de D; posee pour 2. & 4. mais FH multiple de la 1 est plus grande que IK, multiple de la 2. & HG, multiple de la 3. n'est plus grande que IK, multiple de la 4. mais moindre par l'hypothese, (car IK, multiple de D, est prise plus grande que HG,) [b] il y aura plus
b 8. def. grande raison de AB, 1. à D, 2. que de de C, 3. à D, 4.

Secondement d'autant que IK, multiple D, 1. (soit prise D, pour 1. & 3. & C 2. & AB 4.) est plus grande que HG, multiple de C, 2. mais IK, multiple de D, 3. n'est plus grande que FH, multiple de AB, 4. mais moindre, FH, estant plus grande que IK, comme il est monstré; il y aura plus gran-

de raison de D, 1. à C, 2. que de D 3. à A B, 4. ce qui estoit proposé. Donc des grandeurs inegales &c. Ce qu'il falloit demonstrer.

THEOREME 9. PROP. 9. ix

Les grandeurs qui ont mesme raison à vne mesme grandeur, sont egales entr'elles; Et celles-là ausquelles vne mesme grandeur a mesme raison, sont aussi egales entr'elles.

Premierement que A & B, ayent mesme raison à C, ie dis qu'elles sont egales entr'elles.

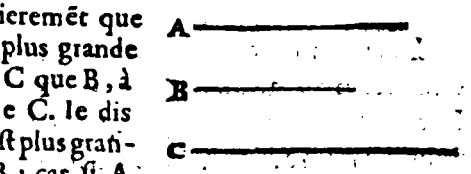
Autrement elles seroient inegales, tellement que l'vne seroit plus grande. Soit donc A plus grande & B moindre, s'il est possible, donc [a] il y aura plus grande raison de A plus grande à C, que de B, plus petite à la mesme C, ce qui est contre l'hypothese; donc A & B, ne sont inegales, mais egales. [a] 8. 5.

Secõdemẽt que C, ayt mesme raisõ à A que à B; Ie dis de rechef que A & B sõt egales entr'elles; car si l'vne estoit plus grande, sçauoir A, & B, moindre, C, [b] auroit plus grande raison à B, plus petite qu'à A, plus grande, ce qui est contre l'hypothese; donc A ne sera plus grande que B, ains egale. Donc les grandeurs qui ont &c. Ce qu'il falloit demonstrer. [b] 8. 5.

THEOREME 10. PROP. 10. x

Des grandeurs qui ont raison à vne mes-

me grandeur, celle-là qui a plus grande raiſon, eſt la plus grande: mais celle-là à laquelle vne meſme grandeur a plus grande raiſon eſt la plus petite.



Premieremẽt que A, ayt plus grande raiſon à C que B, à la meſme C. Ie dis que A, eſt plus grande que B : car ſi A eſtoit egale à B, icelles[a] A & B auroient meſme raiſon à C. Et ſi A eſtoit plus petite que B,[b] la plus grande B, auroit plus grande raiſon à C, que la plus petite, A, ce qui eſt contre l'hypotheſe, donc A n'eſt egale à B, ny plus petite, mais plus grande.

[a] 7. 5.
[b] 8. 5.

Secondement que C, ayt plus grande raiſon à B, qu'à A. Ie dis que B, eſt moindre que A : Car B, ne ſera egale à A; [c] autrement C, auroit meſme raiſon à A & B; ce qui eſt contre l'hypotheſe, B ne ſera auſſi plus grande que A, d'autant que C, auroit plus grande raiſon à la moindre, A, que à B, plus grande: ce qui eſt d'auantage contre l'hypotheſe; Donc B, eſt moindre que A, ce qui eſt propoſé. Partant des grandeurs qui ont raiſon, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.

[c] 7. 5.
[d] 8. 5.

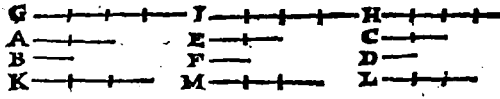
xj

THEOREME II. PROP. II.

Les raiſons qui ſont de meſme, à vne meſme raiſon, ſont auſſi de meſme entre elles.

Soit la raiſon de A à B, cõme celle E à F, & comme E à F ainſi C à D. Ie dis que comme A eſt à B, ainſi C eſt à D.

Car ſoient priſes les equimultiples quelconques de toutes les antecedẽtes A, E, C, leſquelles ſoient G, H, I, ſemblablement ſoient priſes K, M,



L, equimultiples quelconques des conſequentes B, F, D: D'autant que A, 1. eſt à B, 2. comme E, 3. à F 4. [a] ſi G, multiple de A, 1. defaut de K, multiple de B 2. I, multiple de E 3. defaudra auſſi de M, multiple de F, 4. & ſi G eſt egale à K, I, ſera egale à M; & ſi G, eſt plus grande que K, I, ſera plus grãde que M: [b] Mais (cõme il ſera demonſtré en la meſme maniere) ſi I, eſt moindre que M, ou egale, ou plus grande, pareillement H ſera moindre que L, ou egale ou plus grande, d'autant que par l'hypotheſe il y a meſme raiſon de E 1. à F, 2. que de C, 3. à D 4. Parquoy ſi G, multiple de A 1. eſt plus petite que K, multiple de B, 2. H, multiple de C, 3. ſera plus petite que L, multiple de D, 4. & ſi G eſt egale ou plus grande que K, auſſi H ſera egale ou plus grande que L, & ſera demonſtré qu'il en aduiendra de meſme, en quelconques autres equimultiples, [c] partant il y aura meſme raiſon de A 1. à B 2. que de C 3. à D 4. Donc les raiſons qui ſont de meſme, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.

[a] 6. def. 5.

[b] 6. def. 5.

[c] 6. def. 5.

SCHOLIE.

En la meſme maniere, les raiſons qui ſont de meſme

à d'autres, ſont auſſi de meſmes entr'elles comme ſi A eſt à B, cõme C à D. & que E ſoit à F, cõme A eſt à B, & G à H cõme C à D, pareillement cõme E ſera à F, ainſi G à H.

Car d'autant que les raiſons de E à F, & C à D, ſont de meſme à la raiſon de A à B, d comme E ſera à F, ainſi C à D, de rechef d'autant que les proportions de E à F, d 11. 5. *& G à H, ſont de meſme à la proportion de C, à D, e pareillement comme E ſera à F, ainſi G à H.*

e 11 5 *A*, 3. *B*, 2. *C*, 6. *D*, 4.
E, 9. *F*, 6. *G*, 12. *H*, 8.

De rechef ſi les raiſons de A à B, C, à D, & de E à F, ſont de meſme entr'elles: & que comme A eſt à B. ainſi G eſt à H, & comme C, à D, ainſi I à K, & comme E à F, ainſi L à M, les raiſons de G à H, I à K, & L à M, ſeront pareillement de meſme entr'elles: car comme nous venons de demonſtrer en ces dernieres raiſons, comme G eſt à H ainſi I eſt à K:

A, 3. *B*, 2. *C*, 6. *D*, 4. *E*, 9. F 6.
G, 12. *H*, 8. *I*, 18. *K*, 12. *L*, 30. *M*, 20.

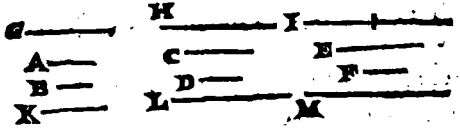
D'autãt que ces proportiõs ſont sẽblables aux proportiõs de A à B, & de C à D, en la meſme maniere cõme I, ſera à K, ainſi L, ſera à M, d'autãt que les proportions de I à K, & L, à M, ſont de meſme aux proportions de C à D, & E à F; leſquelles ſont egales, ſemblablement comme G à H, ainſi L à M, puis que ces proportions ſont de meſme aux proportiõs de A, à B & E à F, leſquelles ſont poſees egales: Et eſt la meſme raiſon de pluſieurs.

xij

THEOREME 12. PROP. 12.

Si tant de grandeurs que l'on voudra ſont proportionelles: comme l'vne des antecedentes ſera à l'vne des conſequẽtes: ainſi toutes les antecedentes ſeront à toutes les conſequentes.

Ce qui a eſté demonſtré en la premiere propoſition, de la proportion multiple, il eſt icy demonſtré de tout genre de proportion & meſme de l'irrationelle.



Soient donc tant de grandeurs que l'on voudra, A, B, C; D, E, F, proportionelles, c'eſt à dire, ſoit A à B, comme C, à D, & comme E à F. Ie dis que comme vne des antecedentes eſt à vne des conſequentes, ſçauoir comme A à B, ainſi toutes les antecedentes enſemble A, C, E, ſont à toutes les conſequentes enſemble B, D, F.

Car ſoient priſes G, H, I, equimultiples des antecedentes A, C, B, & K, L, M, equimultiples des conſequentes B, D, F, a les toutes G, H, I, enſemble ſeront autãt multiples des toutes A, C, E, enſemble qu'vne ſeule l'eſt d'vne ſeule; ſçauoir comme G, de A, & les toutes K L M, enſemble ſeront autant multiples de toutes B, D, F, enſemble qu'vne ſeule l'eſt d'vne ſeule, ſçauoir comme K de B, mais d'autant que par l'hypotheſe, il y a meſme raiſon de A, 1. à B, 2, que de C, 3. à D, 4. & comme vn autre E, 3. à F, 4. b il aduiendra que ſi G multiple de A, 1. defaut de K, multiple de B, 2. pareillement H multiple de C, 3. defaudra de L, multiple de D, 4. & I, de M; Et ſi G eſt egale à K, ou plus grande, pareillement H ſera egale à L, & I à M, ou plus grande: & partant ſi G, eſt plus petite ou egale, ou plus grande que K, les toutes G, H, I, enſemble ſeront plus petites que les toutes K, L, M, enſemble ou egales, ou plus grandes; c Parquoy comme A, 1. eſt

a 1. 5.

b 6. def 5.

c 6. def 5.

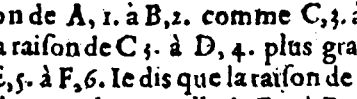
à B, 2. ainsi A, C, E, 3. sera à B, D, F 4. donc s'il y a tant de grãdeurs proportionelles que l'on voudra &c. Ce qu'il falloit demonstrer.

THEOREME 13. PROP. 13.

xiij Si la premiere a mesme raison à la seconde que la troisiesme à la quatriesme; Mais la troisiesme a plus grande raison à la quatriesme que la cinquiesme à la sixiesme: aussi la premiere aura plus grande raison à la seconde, que la cinquiesme à la sixiesme.

Soit la raison de A, 1. à B, 2. comme C, 3. à D, 4. Mais soit la raison de C 3. à D, 4. plus grande que celle de E, 5. à F, 6. Ie dis que la raison de A 1. à B 2. est est plus grande que celle de E, 5. à F, 6.

Car soient prises G, H, I, equimultiples des antecedentes A, C, E; & K, L, M, equimultiples des consequentes B, D, F: D'autant qu'il y a mesme raison de A 1. à B, 2. que de C, 3. à D, 4. a il adviendra que si G multiple de A 1. excede K, multiple de B, 2. que H, multiple de C, 3. excedera L, multiple de D, 4. &c. mais quand H, excede L, b il n'est necessaire que I, excede M, mais sera quelquesfois egale ou plus petite; d'autant qu'il y a plus grande raison de C 1. à D, 2. que de E, 3. à F, 4. Donc si G excede K necessairement I, n'excedera M, c: Il y aura donc plus grande raison de A 1. à B, 2. que de E, 5. à F, 6.



a 6. def. 5.
b 8. def. 5.
c 8. def. 5.

Partant ſi la premiere a meſme raiſon à la ſeconde, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.

SCHOLIE.

Mais ſi la raiſon de C, 3. à D, 4. eſt moindre que celle de E, 5. à F, 6. Il y aura pareillement moindre raiſon de A, premiere à B, ſeconde, que de E, cinquieſme à F, ſixieſme, car ſi la raiſon de C à D, eſt moindre que celle de E à F, c'eſt à dire, la raiſon de E, 1. à F, 2. eſt plus grande que celle de C, 3. à D; [d] il aduiendra que ſi I, excede M, il ne ſera neceſſaire que H excede L, mais quelquesfois ſera plus petite ou egale: [e] mais ſi H defaut de L, ou luy eſt egale, auſſi G, defaudra de K, ou luy ſera egale: [f] d'autant que la raiſon de C, 1. eſt poſee à D, 2. meſme que A, 3. à B 4. partant ſi I excede M, neceſſairement G, n'excedera K, & par ainſi, il y aura plus grande raiſon de E, 1. à F, 2. que de A, 3. à B, 4. c'eſt à dire la raiſon de A à B, eſt moindre que celle de E à F, ce qui eſt propoſé.

[d] 8. def. 5.
[e] 8. def. 5.
[f] 8. def. 5.

En la meſme maniere ſi la premiere a plus grande raiſon à la ſeconde que la troiſiéme à la quatriéme; & que la troiſiéme ayt plus grande raiſon à la quatriéme, que la cinquiéme à la ſixiéme: pareillement la premiere aura beaucoup plus grande raiſon à la ſeconde que la cinquiéme à la ſixiéme.

Mais ſi la premiere a moindre raiſon à la ſeconde, que la troiſiéme à la quatriéme, mais que la troiſiéme ayt moindre raiſon à la quatriéme, que la cinquiéme à la ſixiéme, pareillement la premiere aura beaucoup moindre raiſon à la ſeconde que la cinquiéme à la ſixiéme.

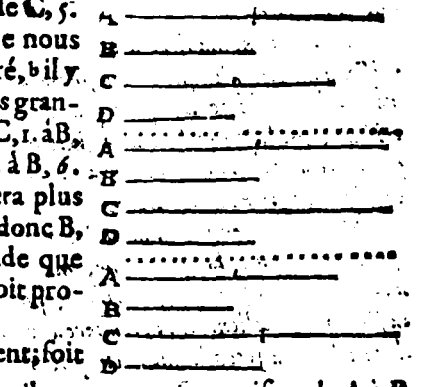
THEOREME 14. PROP. 14. xiv

Si la premiere, a meſme raiſon à la ſe-

conde que la troiſieſme à la quatrieſme, & que la premiere ſoit plus grande que la troiſieſme, la ſeconde ſera auſſi plus grande que la quatrieſme : Et ſi la premiere eſt egale à la troiſieſme, auſſi la 2. ſera egale à la quatrieſme; & ſi plus petite, plus petite.

Soit A, premiere grandeur à B, ſeconde, comme C, troiſieſme, à D, quatrieſme. Ie dis que ſi A, 1. eſt plus grande que L, 3, que B, 2. ſera auſſi plus grande que D, 4. Et que ſi A, 1. eſt egale à C, 3. que B, 2. ſera egale à D, 4. finalement ſi A, 1. eſt plus petite que C, 3. que B, 2. ſera plus petite que D, 4.

Premierement ſoit A, 1. plus grande que C, 3.
a 8. 5. a il y aura plus grande raiſon de A plus grande à B, que de C, plus petite à la meſme B. Donc d'autant que C, premiere eſt à D, 2. comme A, 3. à B, 4. mais la raiſon de A, 3. à B, 4. eſt plus grande que la raiſon de C, 5. à B, 6. comme nous
b 13. 5. auons monſtré, b il y aura donc plus grande raiſon de C, 1. à B, 2. que de C, 5. à B, 6. c partant D ſera plus
c 10. petite que B, donc B, ſera plus grande que D: ce qui eſtoit propoſé.



Secondement, ſoit
7. 5. A egale à C. d il y aura meſme raiſon de A à B que de C, à B; d'autant donc que les raiſons de C à D, & de C à B, ſont de meſme à la raiſon de A à B,

à B, e les raisons de C, à D, & de C, à B, seront de mesme entr'elles; f partant B, & D, seront egales: Ce qui est proposé. e 11. 5. f 9. 5.

Finalement soit A, plus petite que C; g, il y aura plus grande raison de la plus grande C, à B, que de la plus petite A, à la mesme B: D'autant donc que C, 1. est à D, 2. comme A, 3. à B, 4. Mais la raison de A, 3. à B, 4 est plus petite que celle de C, 5. à B, 6. h Il y aura pareillement moindre raison de C, 1. à D, 2. que de C, 5. à B, 6. i partant B, sera plus petite que D. Ce qui est proposé. Donc si la premiere a mesme raison à la 2. &c. Ce qu'il falloit demonstrer. g 8. 5. h 13. 5. i 10. 5.

SCHOLIE,

Que si la 2. est plus grande egale, ou moindre que la 4. pareillement selon la mesme raison, la premiere sera plus grande, egale ou moindre que la 3. Car soit premierement B, plus grande que D, comme en la 1. figure. Ie dis que A, est plus grande que C: Car puis que B, est plus grande que D; k Il y aura plus grande raison de C, à D, que de C à B. Donc d'autant que A, 1. est à B seconde, comme C, 3. est à D, 4. Mais la raison de C, 3. à D 4. est monstree plus grande que celle de C, 5. à B, 6. l pareillement la raison de A, 1. à B, 2. sera plus grande que celle de C, 5. à B, 6. m Partant A, sera plus grande que C. Ce qui est proposé. k 8. 5. l 13. 5. m 10. 5.

Secondement soit B, egale à D, (comme en la 2. figure) Ie dis que A, est egale à C: Car puisque B, est egale à D; n C, sera à B, comme à D; Mais A, est pareillement à B, comme C, à D: o Donc comme A, sera à B, ainsi C, sera à B; & partant A, sera egale à C: Ce qui est proposé. n 11. 5. o 9. 5.

Tiercement; soit B, moindre que D, comme en la 3.

figure. Ie dis que A, eſt moindre que C: Car puis que B, eſt moindre que D: p Il y aura moindre raiſon de C, à D, que C, à B: D'autant donc que comme A, 1. eſt à B, 2. ainſi C, 3. eſt à D, 4. Mais la raiſon de C, 3. à D, 4. eſt monſtree moindre que celle de C, 5. à B, 6. q Pareillement la raiſon de A, 1. à B, 2. ſera moindre que celle de C, 5. à B 6. r Donc C, ſera plus grande que A, & partant A, plus petite que C. Ce qui eſt propoſé.

p 8. 5.

b 13. 5.

r 10. 5.

Ceſte demonſtration ſe peut faire plus briefue; Si B, eſt plus grande que D, & A, ſoit dicte non plus grande que C, mais moindre ou egale, t B ſera pareillement plus petite que D, ou egale, ce qui eſt contre l'hypotheſe, & eſt la meſme raiſon en tout autre cas.

f 14. 5.

Ou ainſi; Si A, eſt à B, comme C, à D, en changeant B, ſera à A, comme D, à C. Donc ſi B eſt plus grande ou egale, ou moindre que D: Pareillement t A ſera plus grande ou moindre, ou egale à C.

t 14. 5.

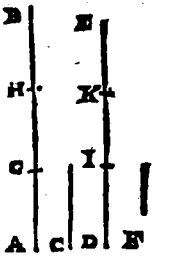
Or Euclide n'a pas demonſtré, ſi la premiere eſt plus grande ou egale, ou moindre que la 2. que la 3. ſera plus grande ou egale, ou moindre que la 4. (duquel moyen d'argumenter vſent toutesfois pluſieurs Geometres tant des Anciens que des modernes:) D'autant que cela eſt manifeſte à cauſe de la ſimilitude des raiſons. De là s'enſuit que ſi l'vne & l'autre eſt raiſon de plus grande inegalité, que l'vne & l'autre grandeur antecedente, c'eſt à dire la premiere & la tierce ſera plus grande que l'vne & l'autre grandeur conſequente, c'eſt à dire la 2. & la 4. Mais ſi l'vne & l'autre eſt raiſon de moindre inegalité, l'vne & l'autre grandeur antecedente ſera plus petite que l'vne & l'autre conſequente, & ſi d'egalité, ſera egale.

Pour exemple; ſi comme A, eſt à B, ainſi C à D, l'vne & l'autre raiſon ſera de plus grande inegalité ou d'egalité, ou de moindre inegalité. Partant ſi A, 1. eſt plus

grande que B.2. C,3. ſera plus grande que D. 4. & ſi egale, egale, & ſi moindre moindre. Ce qui eſt propoſé.

THEOREME 15. PROP. 15. XV

Les parties ſont entr'elles, comme ſont leurs equimultiples entr'elles; ſi elles ſont priſes comme elles s'entre-reſpondent.



Soient A B, & D E equimultiples des grandeurs C, & F. Ie dis que comme C, eſt à F, ainſi A B, eſt à D E: Car puiſque A B, eſt autant multiple de C que D E, l'eſt de F, la grandeur C, ſera autant de fois cõtenuë en A B, que F, eſt contenuë de fois en D E;

Soit donc diuiſee A B, ſelon les parties A G, G H, H B, chacune egale à C, & D E, ſelon les parties D I, I k, K E, chacune egale à F: Et d'autant que A G, & C, ſont egales, & D I, & F, auſſi egales, [a] A G, ſera à D I, comme C, ſera à F, par meſme raiſon G H, ſera à I K, & H B, à K E, comme C, à F; [b] Et partant A G, G H, H B, auront meſme raiſon à D I, I K, K E: Parquoy comme A G, ſera à D I, c'eſt à dire comme C, à F, ainſi A B, ſera à D E, à ſçauoir toutes les antecedentes enſemble A G, G I, I B, à toutes les conſequentes enſemble D I, I K, K E; Ce qui eſt propoſé. Donc les parties entr'elles ſont, &c. Ce qu'il faloit demonſtrer.

[a] 7. 5.
[b] 11. 5.
[c] 12. 5.

SCHOLIE.

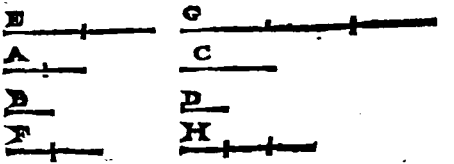
Henrion, qui a copié le liure du Sieur Donnot, n'ayant

point trouué ces mots traduicts (λαφθέντα καταλλήλως) *c'eſt à dire, eſtant priſes comme elles s'entreſpondent, les a laiſſez, ſe contentant de mettre ce qu'il a trouué traduict; ce qu'il ne deuoit faire neantmoins, s'il l'euſt peut entendre, puis qu'Euclide ne les a obmis, comme il appert par ſon texte.* Τὰ μέρη τῶν ὡσαύτως πολλαπλασίων, τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον, λαφθέντα καταλλήλως. *C'eſt à dire; les parties ou grandeurs, ont meſme raiſon que leurs equimultiples, ſi elles ſont priſes comme elles s'entre-reſpondent. Or cecy defaillant (eſtant priſes comme &c.) l'on pourroit inferer que, comme, AB, eſt à DE, ainſi F, ſeroit à G, ou comme C, à F, ainſi DE, à AB, ce qui eſt manifeſtement faux, &c.*

THEOREME 16. PROP. 16.

xvj

Si quatre grandeurs ſont proportionelles; elles ſeront auſſi alternatiuement proportionelles.



Car ſoit A, à B, comme C, eſt à D. Ie dis que alternatiuement ou en permutant, A, ſera à C, comme B, à D.

Soient priſes E, & F, equimultiples de A, & B, premiere & ſeconde. Item G, & H, equimultiples de C, 3. & D, 4. E, ſera à F, comme A, eſt à
a 15. 5. B: a Puis que E, F, ſont equimultiples de A, B; Par la meſme raiſon G, ſera à H, comme C, à D:

Or puis que les raiſons de E à F, & C, à D, ſont de meſme à la raiſon de A à B; [b] elles ſeront de meſme entr'elles. De rechef d'autãt que les raiſons de E, à F, & G, à H, ſont de meſme à la raiſon de C, à D; [c] elles ſeront auſſi de meſme entre elles; c'eſt à dire comme E, premiere ſera à F, 2. ainſi G, 3. à H, 4. [d] Partant ſi E, premiere eſt plus grande que G, 3. F, 2. ſera plus grãde que H, 4. & ſi E, eſt egale ou plus petite que G, auſſi F, ſera egale ou plus petite que F, en quelconque multiplication que ſoient priſes E, F, & G, H: [e] Donc A, 1. ſera à C, 2. comme B, 3. à D, 4. puis que E, F, equimultiples de la 1. & 3. A, & B, ſont toutes 2. plus grandes que G, & H, equimultiples de la 2. & 4. C, D, ou toutes deux egales, ou toutes deux plus petites &c. Ce qui eſt propoſé. Partant ſi quatre grandeurs, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.

[b] 11. 5.
[c] 11. 5.
[d] 14. 5.
[e] 6 def. 5

SCHOLIE.

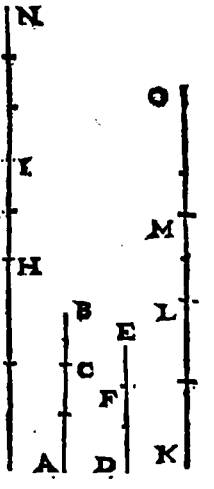
Or ceſte demonſtration a lieu ſeulement quand les 4. grandeurs ſont de meſme genre: Car ſi A, B, eſtoient d'vn genre & les 2. autres C, D, d'vn autre; Pareillemẽt les multiples E, F, ſeroient d'vn genre ſçauoir de celuy de A, B: & les multiples G, H, d'vn autre; ſçauoir de celuy de C, D; Partant E, ne pourroit eſtre dicte plus grande que G, ou egale, ou moindre: Parquoy l'on ne concluroit rien de la 6. definition de ce liure. Donc la raiſon permutee pourra ſeulement auoir lieu, quand les quatre grandeurs ſeront de meſme genre. Ce que n'entendant aucuns Philoſophes, tombent en de grandes erreurs, vſurpans icelle en choſes de diuers genre.

THEOREME 17. PROP. 17.

Si les grandeurs composées sont proportionelles, aussi estant diuisées elles seront proportionelles.

Soient les grandeurs composées AB, CB, & DE, FE, proportionelles; c'est à dire soit AB, à CB, comme DE, à FE. Ie dis qu'icelles estant diuisées seront aussi proportionelles, c'est à dire comme AC, sera à CB, ainsi DF, à FE, selon le mesme sens que nous l'auons exposé à la sixiesme definition.

Car soient prises les equimultiples de AC, CB, DF,
§ 3. 5. FE, de mesme ordre, à sçauoir GH, HI, KL, LM; [a] Et GI, sera autant multiple de AB, comme GH, l'est de
§ 1. 5. AC, c'est à dire comme KL, est multiple de DF; [b] Ainsi KM, est pareillemẽt multiple de DE. Donc GI, KM, sont equimultiples de AB, DE. Derechef soient prises IN, MO, equimultiples de CB, FE; D'autant que HI, premiere est autant multiple de CB, 2. que LM, 3. de FE,



3. 5. 4. Item IN, 5. autant multiple de CB, 2. que MO, 6. l'est de FE, 4. [c] HN, composée de la 1. & 5. sera autant multiple de la 2. CB, que LO, composée de la 3. & 6. l'est de FE, 4. Partant puis

que AB,1. eſt à CB,2. cõme DE,3. FE, 4; & que l'on a pris les equimultiples de la premiere, & de la 3. AB, DE; ſçauoir GI, KM, ſemblablemẽt de la 2. & 4. CB, FE, les equimultiples HN, LO.[d] Il arriuera que ſi GI, multiple de la premiere AB, defaut de HN, multiple de la 2. CB, auſſi KM, multiple de la 3. DE, defaudra de LO, multiple de la 4. FE; & ſi egale, egale, & ſi plus grande, plus grande: Que ſi tant GI, defaut de HN, que KM, de LO, ayant oſté les communes HI, LM, pareillement GH, defaudra de IN, & KL, de MO, & ſi GI, eſt egale à HN, & KM, à LO, ayant oſté les communes HI, LM; GH, ſera egale à IN, & KL, à MO: Et ſi finalement GI, excede HN, & KM, LO, oſtant les communes HI, LM, GH, excedera pareillement IN, & kL, MO; Partant puis que GH, KL, ont eſté priſes equimultiples de AC, 1. & de DF, 3. ſemblablement IN, MO, equimultiples de CB, 2. & FE, 4. & il eſt monſtré en quelconque multiplication que les equimultiples ſoient priſes, que les equimultiples de la 1. & 3. defaillent enſemble des equimultiples de la 2. & 4. ou enſemble ſont egales, ou excedent; [e] Comme, AC, 1, à CB, 2. DF, 3. ſera à FE, 4. Ce qui eſt propoſé. Donc ſi les grandeurs compoſees &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.

[d] 6. def. 5.

[e] 6. def. 5.

SCHOLIE.

De ces choſes nous demonſtrerons facilement ce moyen d'argumenter, lequel nous auons appellé diuiſion de raiſon conuerſe, à la 15, definition: C'eſt à dire ſi comme AB, eſt à CB, ainſi DE, à FE; que pareillement

comme CB, ſera à AO, ainſi FE, ſera à DF: ce qui eſt euident. Car d'autant que comme AB, eſt à CB, ainſi
f 17. 5. *DE, eſt à FE f en diuiſant comme AC, ſera à CB, ainſi DF, ſera à FE. Donc en changeant comme CB, ſera AC, ainſi FE ſera à DF. ce qui eſt propoſé: voyez la figure precedente, en la page. 346.*

L'on demonſtrera auſſi facilement, ce moyen d'argumenter, qu'à la 15. definition, nous auons appellé contraire diuiſion de raiſon; & auquel la grandeur antecedente eſt plus petite que la conſequente, & non plus grande, cõme en la diuiſion de raiſon, qu'Euclide a definie, comme celle que nous auons prochainemẽt demõſtré.

Car ſoit comme AC à AB, ainſi DF à DE, ie dis que par contraire diuiſion de raiſon, que AC ſera pareillement à CB, comme DF, eſt à FE. Car d'autant que comme AC eſt à AB, ainſi DF, eſt à DE. Ie dis pareillement, que par diuiſion de raiſon contraire, comme AC eſt à CB, ainſi DF, eſt à FE. Car d'autant que comme AC eſt à AB, ainſi DF à DE, en changeant
g 17. 5. *comme AB, ſera à AC ainſi DE, ſera à DF; g Donc en diuiſant comme, comme CB, ſera à AC, ainſi FE, ſera à DF: & partant en changeant de rechef, comme AC, ſera à CB, ainſi DF ſera à FE, ce qui eſt propoſé.*

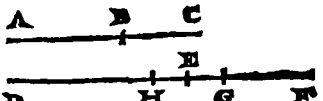
xviij. THEOREME 18. PROP. 18.

Si les grandeurs diuiſees ſont proportionelles: eſtant compoſees, elles ſeront auſſi proportionelles.

Soient les grandeurs diuiſees, A B, B C; D E, E F, proportionelles; c'eſt à dire, comme A B, eſt à B C, ainſi D E ſoit à E F. Ie dis, qu'eſtant compoſees elles ſont proportionelles; c'eſt à di-

re que comme A C, est à B C, ainsi D F, est à E F.

Car si A C, n'est pas à B C, comme D F, est à E F; D F, aura mesme raison à quelque autre grandeur moindre que E F, ou plus grãde que la mesme E F; que A C à B C.



Premieremẽt, que D F, ait mesme raison, à G F, moindre que E F; que A C, à B C, s'il se peut faire. D'autant donc que comme, A C, à B C, ainsi de D F, à G F; [a] en diuisant comme A B, est à B C; ainsi D G, sera à G F; Mais comme A B, à B C, ainsi D E, à E F, par l'hypothese: [b] Donc comme D G, premiere à G F, 2. ainsi D E, 3. à E F, 4. Et puis que D G, premiere est plus grande que D E, 3. [c] pareillement G F, 2. sera plus grande que E F, 4. la partie que son tout; ce qui est impossible.

a 17.5.
b 11.5.
c 14.5.

Secondement; que D F, ait mesme raison à H F, plus grande que E F, s'il se peut faire, que A C, à B C. D'autant que A C, est à B C, comme D F, à H F, [d] en diuisant comme A B, sera à B C, ainsi D H, à H F. Mais comme A B, à B C, ainsi est D E, à E F, par l'hypothese. [e] Donc comme D H, 1. à H F, 2. ainsi D E, 3. à E F, 4. [f] Et puis que D H, 1. est plus petite que D E, 3. pareillement H F, 2. sera moindre que E F, 4. le tout que sa partie ce qui est absurde: Donc D F, n'aura pas mesme raison à G F, moindre que E F, ou à H F, plus grande; que A B, à B C. Donc D F, sera à E F, comme A C, à B C, ce qui est proposé, partant si les grãdeurs diuisees, &c. Ce qu'il falloit demonstrer.

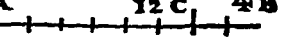
d 17.5.
e 11.5.
f 14.5.

SCHOLIE.

De ceste demonstration, nous confirmerons ces deux

moyens d'argumenter, que nous auons deſcrits à la 14. Deſin. Nous auons appellé le premier, compoſition de raiſon conuerſe: qui eſt tel, Soit comme A C, à C B, ainſi D F, à F E. Ie dis, par compoſition de raiſon conuerſe, que comme A B, eſt à A C, ainſi D E, eſt à D F.

Car d'autãt que comme A C, eſt à C B, ainſi D F, à F E, en changeãt, comme B C, ſera à C A, ainſi F E, ſera à D F. [k] *Donc en compoſant comme A B,*



k 18. 5. *ſera à C A, ainſi D E, ſera à D F; Ce qui eſt propoſé.*

Le moyen d'argumenter, que nous auons appellé compoſition de raiſon contraire, eſt tel. Soit derechef comme A C, à C B, ainſi D E, à E F. Ie dis par compoſition de raiſon contraire, que comme A C, eſt à A B, ainſi D F, à D E. Car d'autant que comme A C, eſt C B, ainſi D F, à F E, en changeant comme B C, à A C, ainſi E F, à D F,

l 18. 5. *Donc* [l] *en compoſant comme A B, à A C, ainſi D F, à D E: Et partant en changeant derechef comme A C, à A B, ainſi D E, à D E; Ce qui eſt propoſé.*

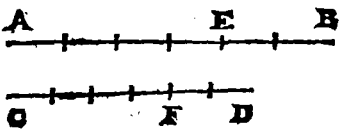
xix THEOREME 19. PROP. 19.

Si comme le tout eſt au tout, ainſi le retranché, au retranché; auſſi le reſte ſera au reſte, comme le tout au tout.

Soit la toute A B, à la toute C D, comme la retranchee A E, à la retranchee E F. Ie dis que le reſte E B, ſera au reſte F D, comme la toute A B, eſt à la toute C D.

Car puiſque A B, eſt à C D, comme A E, à C F, [a] en changeant A B, ſera

a 16. 5.



à AE, comme CD, à CF: [b] Donc en diuiſant EB, ſera à AE, comme FD, à CF: Partant en permutant derechef, EB, ſera à FD, comme AE, à CF: c'eſt à dire comme la toute AB, à la toute CD: Puiſque AB, eſt poſee à CD, comme AE, à CF. Donc ſi comme le tout &c. Ce qu'il falloit demonſtrer b 17.5.

COROLLAIRE.

D'icy ſera demonſtré le moyen d'argumenter és proportions, qui eſt pris de la conuerſion de raiſon ſelon la 16. definition.

Car ſoit comme AB, à CB, ainſi DE, à FE Ie dis que par conuerſion de raiſon, comme AB, eſt à AC, ainſi DE, à DF: Car puis que comme AB, eſt à CB, ainſi DE, eſt à FE, [d] en diuiſant AC. ſera à CB, comme DF, à FE. Donc en changeant, comme CB, à AC, ainſi FE, à DF: [e] Et partant, en compoſant, comme AB, ſera à AC, ainſi DE, à DF; Ce qui eſt propoſé. d 17.5 e 18.5.

THEOREME 20. PROP. 20. XX.

S'il y a trois grandeurs, & d'autres egalles à icelles en nombre, leſquelles ſoient priſes de deux en deux, & en meſme raiſon: Et qu'en raiſon egale, la premiere ſoit plus grande que la troiſiéme, auſſi la quatriéme, ſera plus grande que la ſixiéme; Et ſi egale, egale; Et ſi plus petite, plus petite.

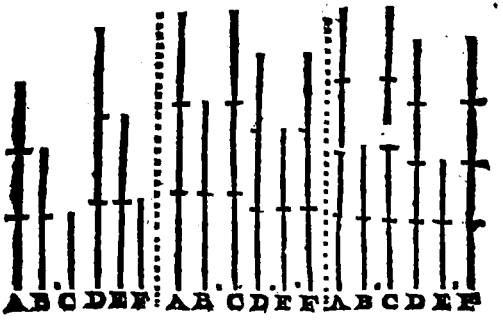
Soient trois grandeurs A, B, C, & autres trois D, E, F; Et ſoit A, à B, comme D, à E, Et B, à C,

comme E à F. Et premierement A, premiere, ſoit plus grande que C, 3. Ie dis que D, 4. ſera plus grande que F 6.

a 8.5. Car puis que A, eſt plus grande que C; [a] Il y aura plus grande raiſon de A, à B, que de C à B. Mais

b 13.5. comme A à B, ainſi D à E, [b] Il y aura donc plus grande raiſon de D, à E, que de C, à B. Mais comme C à B, ainſi F, à E, (car puis que comme B. à C, ainſi E, à F, en changeant, comme C, ſera à B, ainſi F ſera à E.) Il y a pareillement donc plus grande raiſon de D, à E, que de F à E. [c] Partant D, ſera

c 10.5. plus grande que F; Ce qui eſt propoſé.



Secondement, ſoit A, egale à C. Ie dis que D,

d 7.5. ſera egale à F. Car puis que A eſt egale à C; [d] Comme A, ſera à B, ainſi C à B. Mais comme A eſt à B,

e 11.5. ainſi D, eſt à E, [e] Donc D, ſera à E, comme C à B, mais comme C, eſt à B, ainſi F, à E, (par raiſon inuerſe comme auparauant:) Partant D, ſera pareil-

f 9.5. lement à E, comme F à E: [f] Donc D, & F, ſeront egales. Ce qui eſt propoſé.

Tiercement, ſoit A moindre que C: Ie dis que D, eſt moindre que F. Car puis que A eſt moin-

g 8.5. dre que C, [g] Il y aura moindre raiſon de A, à B,

que de C à B ; Mais comme A, à B, ainsi D, à E, Il [h] y aura donc moindre raison, de D, à E, que h 13.5.
de C à B. Mais par raison inuerse, comme deuant, comme C, est à B, ainsi F, est à E. Donc il y a moindre raison de D à E. que de F, à E, [i] Partant D, i 10.5.
sera moindre que F; Ce qui est proposé. Donc, s'il y a trois grandeurs, &c.

THEOREME 21. PROP. 21. xxi.

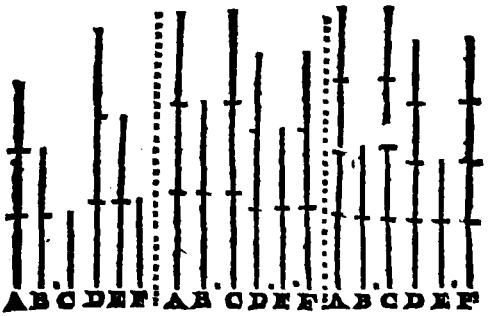
S'il y a trois grandeurs, & d'autres egales à icelles en nombre, lesquelles soient prises deux à deux & en mesme raiſõ; & que leur proportion soit troublee, ou sans ordre. Mais qu'en raison egale la premiere soit plus grande que la troisiesme; la quatriesme sera aussi plus grande que la sixiesme & si egale, egale, & si plus petite, plus petite.

Soient trois grandeurs A, B, C, & autres trois D, E, F, lesquelles soient prises de deux en deux, & en mesme raison; & soit leur proportion troublee, ou sans ordre, c'est à dire; Soit comme A, à B, ainsi E, à F, & comme B, à C, ainsi D à E: Mais soit premierement A, premiere plus grande que C, 3. Ie dis que D, 4. sera aussi plus grande que F, 6.

Car puis que A, est plus grande que C, il y au- a 8.5.
ra plus grande raison de A, à B, que de C, à B: mais comme A, est à B, ainsi E, est à F; [b] Il y a pareille- b 13.5.
ment donc plus grande raison de E, à F, que de C, à B, mais d'autant que comme B, est à C, ainsi D, est à E, par raison inuerse, comme C, à B, ainsi E, à

D: Parquoy il y aura auſſi plus grande raiſon de E, à F, que de E, à D, & partant [c] D, ſera plus grande que F. Ce qui eſt propoſé.

c 10.5



Secondement ſoit A, egale à C. Ie dis que D, ſera egale à F: car puis que A, eſt egale à C, [d] comme A, ſera à B, ainſi C, ſera à B, mais comme A, eſt à B, ainſi E, eſt à F. Donc [e] comme C, eſt à B, ainſi E, ſera à F: Mais par raiſon inuerſe, comme C, eſt à B, ainſi E eſt D, comme auparauant. Donc comme E, ſera à F, ainſi E, ſera à D; [f] & partant D, ſera egale à F. Ce qui eſt propoſé.

d 7.5. e 11.5. f 9.5.

Finalement, ſoit A, moindre que C. Ie dis que D, ſera moindre que F: Car puis que A, eſt moindre que C, [g] il y aura moindre raiſon de A, à B, que de C, à B: mais comme A, eſt à B, ainſi E, eſt à F. [h] Il y a donc moindre raiſon de E, à F, que de C, à B; Mais d'autant que comme auparauant par raiſon inuerſe, comme C, eſt à B ainſi E, eſt à D, [i] il y aura moindre raiſon de E, à F, que de E, à D, [i] Parquoy D, ſera moindre que F. Ce qui eſt propoſé Si donc trois grandeurs, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.

g 8.5. h i 10.5.

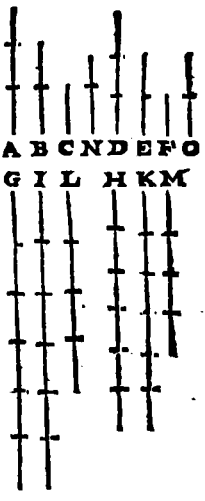
xxij

THEOREME 22. PROP. 22.

S'il y a tant de grandeurs que l'on vou-

dra,& d'autres egales à icelles en nombre, leſquelles ſoient priſes de deux en deux, & en meſme raiſon: Icelles en raiſon egale ſeront proportionelles.

Soient premierement trois grandeurs A,B,C, & autres trois D,E,F,& ſoit A, à B, comme D, à E, & B,à C,comme E à F. Ie dis qu'en raiſon egale A,eſt à C,comme D,eſt à F.



Car ſoient priſes G,H, equimultiples de A,D,& I,K,equimultiples de B,E, & L,M,de C,F: Et puis que A,1.eſt à B,2. cõme D,3.à E,4.[a] Pareillemẽt G,multiple de A,1. ſera à I,multiple de B,2, comme H, multiple de D,3.à K, multiple de E, 4. Par meſme raiſon, puiſque B,1.eſt à C,2. comme E,3.à F, 4.[b] I,multiple de B,1. ſera à L, multiple de C,2. comme K, multiple de E,3. ſera à M, multiple de F,4. D'autant donc qu'il y a trois grandeurs,G,I,L, & autres trois H,K,M,leſquelles ſont priſes de deux en deux, & en meſme raiſon;[c] Il aduiendra que ſi G,1.excede L,3.que H,4. excedera M,6.& ſi egale,egale,&ſi plus petite,plus petite: Parquoy,puis que G,H,equimultiples de la premiere A,& de D,3. ou defaillent enſemble de L,M,equimultiples de C,2. & de F,4. ou enſemble ſont egales, ou enſemble excedent en quelconque multiplication que ſoient priſes ces equimultiples:[d] A,1. ſera à C,2. comme D,3. eſt à F, 4. Ce qui eſt propoſé.

a 4.5.

b 4.5.

c 20.5.

d 6. def. 5.

Derechef ſoient plus de trois grandeurs, en ſorte que C, ſoit auſſi à N, comme F, à O : Ie dis d'auantage que comme A, ſera à N, ainſi D, ſera à O; Car puis qu'il eſt deſia monſtré en trois grandeurs, que A, eſt à C, comme D, à F : mais C, eſt poſé à N, comme F, à O, il y aura trois grandeurs A, C, N, & autres trois D, F, O, leſquelles ſont priſes de deux en deux en meſme raiſon. Donc en raiſon egale demonſtree en trois grandeurs, derechef comme A, ſera à N, ainſi D, à O: Semblablement, l'on monſtrera le meſme en cinq grandeurs, par quatre, comme il a eſté demonſtré en quatre, par trois, & ainſi de pluſieurs. Partant, s'il y a tant de grandeurs, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.

SCHOLIE.

Nous n'obmettons icy vn theoreme, lequel eſt fort vſité entre les Anciens Mathematiciens, qui eſt tel.

Si la premiere, a meſme raiſon à la ſeconde, que la troiſieſme à la quatrieſme; les equimultiples de la premiere & de la troiſieſme auront auſſi meſme raiſon à la ſeconde & à la quatrieſme: Semblablement les equimultiples de la ſeconde & de la quatrieſme auront auſſi meſme raiſon à la premiere & à la troiſieſme: Et au contraire la ſeconde & la quatrieſme auront meſme raiſon aux equimultiples de la premiere & & de la troiſieſme, pareillement auſſi la premiere & la troiſieſme auront meſme

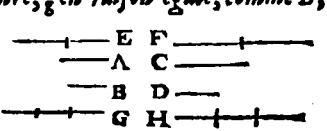
raiſon

raiſon aux equimultiples de la ſeconde & de la quatrieſme.

Soit A,1. à B,2. comme C,3. à D,4. & ſoient priſes E, F, equimultiples de A,C: Et G, H, equimultiples de B,D. Ie dis que E, eſt à B, comme F, à D; Pareillement que G, eſt à A comme H, à C, & au contraire: que B, eſt à E, comme D, à F, ſemblablement que A, eſt à G, comme C, à H.

Car, d'autant que E, eſt à A, comme F, à C, par la conſtruction, puis que E, F, ſont equimultiples de A, C: & A, eſt à B, comme C, à D, par l'hypotheſe, c *en raiſon egale,* c 22. 5. *comme E, eſt à B, ainſi F, ſera à D: Derechef puis que G, eſt à B, comme H, à D: d'autant que de part & d'autre y a meſme proportion multiple, par la conſtruction; & comme B, eſt à A, ainſi D, à C; (car puis que A, eſt poſée à B, comme C, à D, en raiſon inuerſe, comme B, ſera à A, ainſi D, à C,* f *en raiſon egale G, ſera à A, comme H, à C.* f 22. 5.

Secondement, d'autant que comme B, eſt à A, ainſi B, à C, par raiſon inuerſe; & comme A, à E, ainſi C, à F; Puis que par la conſtruction y a meſme proportion ſous-multiple de part & d'autre, g *en raiſon egale, comme B,* g 22. 5.



ſera à E, ainſi D, à F. Derechef puiſque A, eſt poſé à B, comme C, à D; Et comme B, eſt à G, ainſi D, eſt à H: D'autant que par la conſtruction en l'vn & l'autre y a meſme raiſon ſous-multiple, h *en raiſon egale,* h 22. 5. *comme A, à G, ainſi C, à H. Ce qui eſt propoſé.*

D'où eſt manifeſte vn moyen d'argumenter, duquel ſe ſeruent le plus ſouuent les Geometres: ſpecialement, Archimedes, Apollonius Pergæus, Theon & autres à ſçauoir, cõme A, eſt à B, ainſi C, à D. Donc comme E, double, ou triple, ou quadruple, & c. de A, eſt à C: ainſi pa-

reillement F, double, triple, ou quadruple &c. de C, ſera à D. Semblablement, comme A, eſt à B, ainſi C, à D; Donc comme A, eſt au double, triple, ou quadruple &c. de B, ſçauoir à G, ainſi pareillement C, ſera au double, triple, ou quadruple, &c. de D, ſçauoir à H.

xxiij THEOREME 23. PROP 23..

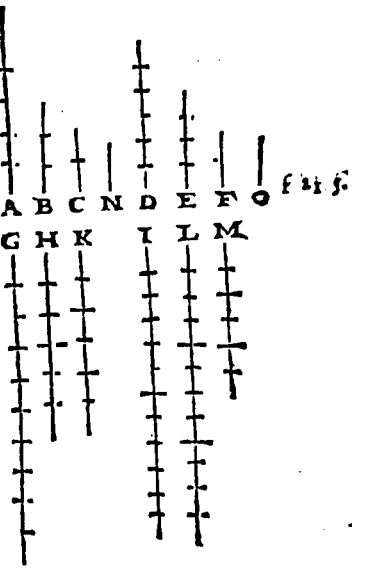
S'il y a trois grandeurs, & d'autres egales à icelles, en nombre, priſes de deux, en deux, & en meſme raiſon: & que leur proportion ſoit troublee, en raiſon egale; elles ſeront auſſi en meſme raiſon.

Soient trois grandeurs A, B, C, & autres trois D, E, F, priſes de deux en deux, & en meſme raiſon; & que leur proportion ſoit troublee; c'eſt à dire, ſoit A, à B, comme E, à F, & B, à C, comme D, à E. Ie dis qu'en raiſon egale, comme A, ſera à C, ainſi D, ſera à F.

Car ſoient priſes G, H, I, equimultiples de A, B, D, ſemblablement K, L, M, equimultiples de C, E, F, comme [a] A, ſera à B, ainſi G, ſera à H, puis que G, H, ſont equimultiples de A, B: mais cõme A, à B, ainſi E, à F, [b] Donc comme G, à H, ainſi E, à F, [c] mais comme E, à F, ainſi L, à M, puis que L, M, ſont equimultiples de E, F; [d] Donc G, ſera pareillement à H, comme L, à M. Derechef d'autant que B, 1. eſt à C, 2. comme D, 3. à E, 4. [e] pareillement H, multiple de la premiere B, ſera à K, multiple de C, 2. comme I, multiple de D, 3. eſt à L, multiple de E, 4. Or d'autant qu'il y a trois grandeurs G, H, K, & autres trois I, L, M, leſquelles ſont priſes, deux à deux en meſme raiſon,

a 15. 5.
b 11. 5.
c 15. 5.
d 11. 5.
e 4. 5.

eſtant leur proportion troublee; Puis qu'il eſt monſtré que G, eſt à H, comme L, eſt à M, & comme H, à K, ainſi I, à L: ſi G, I. excede K, 3. I, 4. excedera pareillement M, 6. & ſi egale, egale, & ſi plus petite, plus petite; Partant puis G, I, equimultiples de la premiere A, & de D, 3. ſont toutes 2. plus grandes ou egales, ou plus petites, que K, M, equimultiples de la 2. C, & de la 4. F; & Comme A, 1. ſera à C, 2. ainſi D, 3. ſera à F, 4. Ce qui eſt propoſé. Donc s'il y a trois grandeurs &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.



SCHOLIE.

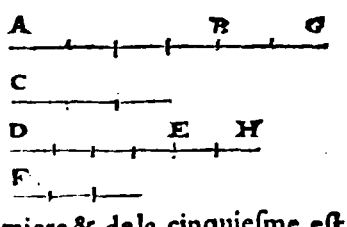
Que s'il y a plus de trois grandeurs, & que leur proportion ſoit troublee, ſçauoir ſi A, eſt à B, comme F, eſt à O, & B, à C, comme E, à F, & C, à N, comme D, à E. Ie dis que A, ſera à N, comme D, à O: Encore bien que la proportion d'egalité, ne ſoit en vſage entre les Geometres en plus de trois grandeurs, quand la proportion eſt troublee: Qui eſt la cauſe pourquoy Euclide a propoſé le Theoreme precedent de tant de grandeurs que l'on voudra, & celuy-cy de trois ſeulement. Encore qu'il ſoit auſſi veritable de pluſieurs; Ce qui ſera ainſi demonſtré. Puis qu'il

a esté dsia demonstré en trois grandeurs, que A, est à C, cõme F, à O, mais C, est à N, par l'hypothese comme D, à E, il y aura trois grandeurs A, C, N, & autres trois D, E, O, lesquelles prises deux à deux, sont en mesme raison, leur proportion estant troublee. Donc derechef en raison egale demonstree en trois grandeurs, comme A, sera à N, ainsi D, sera à O; Semblablement le mesme sera demonstré en 5. grandeurs, par quatre, comme il a esté demonstré en 4. par trois, & ainsi de plusieurs. Ce qui est proposé.

xxiiij

THEOREME 24 PROP. 24.

Si la premiere a mesme raison à la seconde que la troisiesme à la quatriesme; Et que la cinquiesme ayt aussi mesme raison à la seconde, que la sixiesme à la quatriesme: Aussi la composee de la premiere & de la cinquiesme aura mesme raison à la seconde, que composee de la troisiesme & de la sixiesme à la quatriesme.



Soit A B, premiere à C, 2. cõme D E, 3. à F, 4. Pareillement soit B G, S à C, 2. comme E H, 6. à F, 4. Ie dis que A G, composee de la premiere & de la cinquiesme est à C, 2. comme D H, composee de la troisiesme & de la 6. est à F, 4.

Car puis que B G, est à C, comme E H, à F, en changeant comme C, sera à B G, ainsi F, sera à E

H: Donc d'autãt que A B, eſt à C, cõme D E, eſt à F, & que C, eſt à B G, cõme F, eſt à E H; [a] En raiſon egale à A B, ſera à B G, comme D E, eſt à E H: [b] Donc en compoſant la toute A B, ſera à B G, comme la toute D H, à E H: Partant puis que derechef A G, eſt à B G, comme D H, à E H, & B G, à C, comme E H, eſt à F: [c] En raiſon egale, A G, ſera à C, comme D H, eſt à F. Ce qui eſt propoſé: Donc ſi la premiere, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.

a 22. 5.
b 17. 5.
c 22. 5.

SCHOLIE.

Ceſte propoſition eſt veritable, ſoit que les grandeurs A B, B G, & C, ſoient de meſme genre que les grandeurs D E, E H, & F, ou non: comme il eſt manifeſte de ceſte demonſtration.

Preſque en la meſme maniere cecy ſera demonſtré en tout genre de proportion. Ce qui a eſté demonſtré au 6. theoreme de ce liure, tant ſeulement aux grandeurs multiples, ſçauoir eſt.

Si deux grandeurs ont meſme proportion à deux grandeurs, & que quelques vnes retranchees ayent meſme proportion à icelles; les reſtantes auront auſſi meſme proportion à icelles.

Que A G, D H, ayent meſme proportion à C, & F, c'eſt à dire ſoit A G, à C, comme D H, à F: Semblablement les retranchees, A B, D E, ayent meſme proportion à icelles C, F: De ſorte que A B, ſoit pareillemẽt à C, cõme D E, à F. Ie dis que les reſtantes B G, E H, ont meſme proportion à icelles C F, c'eſt à dire que B G, eſt à C, comme E H, eſt à F. Car puis que comme A B, eſt

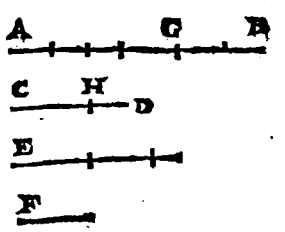
à C, ainſi D E, eſt à F, par raiſon inuerſe, comme C, à A B, ainſi F, à D E: D'autant donc que A G
d 22. 5. eſt à C, comme D H, eſt à F, & C, à A B, comme F eſt à D E,[d] en raiſon egale A G, ſera à A B, comme D H, eſt à D E; [e] Pareillement en diuiſant
e 17. 5. comme B G, ſera à A B, ainſi E H, à D E: Et partant, puis que de rechef B G, eſt à A B, comme E H, à D E, & A B, à C, comme D E, à F, ſera
f 22. 5. raiſon egale B G, ſera à C, comme E H, à F. Ce qui eſt propoſé.

THEOREME 25. PROP. 25.

XXV.

Si quatre grandeurs ſont proportionelles: la plus grande & la plus petite ſont plus grandes que les deux autres.

Soit A B, à C D, comme E, à F, & ſoit A B, plus grande de toutes, & F, plus petite. Ie dis que les deux A B, & F, enſemble ſont plus grandes que les deux C D, & E, enſemble.



Car de la grandeur A B, ſoit retranchee A G, egale à E, & de C D, ſoit auſſi retranchee C H, egale à F. Doc A G, ſera à C H, comme E, à F, c'eſt à dire comme A B, à C D: Partant puis que la toute A B, eſt à la toute C D, comme la retranchee A G, eſt à la
g 19. 5. retranchee C H, [g] Pareillement comme la toute A B, à la toute C D, ainſi le reſte G B, au reſte H D: Mais A B (puis qu'elle eſt la plus grande de toutes) eſt plus grande que C D. Donc G B, ſe-

ra auſſi plus grande que H D : Mais d'autant que A G, & E, ſont egales, ſi l'on adiouſte à icelles, les egales F, & C H, à ſçauoir F, à A G, & C H, à E, A G, & F, enſemble ſeront egales à E, & C H, enſemble : Donc adiouſtant les inegales G B, & H D : A B, & F, enſemble ſeront plus grandes que E, & C D, enſemble ; Puis que G B, eſt plus grande que H D. Ce qui eſt propoſé : Si donc quatre grandeurs ſont proportionnelles, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.

SCHOLIE.

Or il s'enſuit neceſſairement que ſi la grandeur antecedente, d'vne proportion eſt la plus grande de toutes, que la conſequente de l'autre proportion ſera la plus petite de toutes : cõme on peut voir en l'exẽple propoſé. Car puis que comme A B, eſt à C D, ainſi E, à F, & à B, premiere eſt plus grande que E, 3. C D, 2. ſera plus grande que F, 4. Semblablement d'autant que A B, eſt plus grande que C D, pareillement E, ſera plus grande que F, à cauſe de la meſme proportion de A B, à C D, & de E, à F, comme nous auons monſtré au ſcholie de la 14. propoſition. Que ſi au contraire l'antecedente d'vne proportion eſt la plus petite de toutes, la conſequente de l'autre ſera la plus grande, comme il appert, ſi l'on dit que F, eſt à E, comme C D, eſt à A B. Or les quatre grandeurs doiuent pareillement eſtre toutes de meſme genre, autrement vne grandeur ne pourroit eſtre compoſee de la plus grande & de la plus petite ; ny meſme des deux reſtantes.

En ce lieu Federic Commandin adiouſte vn autre theoreme, non beaucoup diſſemblable de ceſte vingtcinquieſme à ſçauoir.

Si trois grandeurs ſont proportionelles: la plus grande & la plus petite ſeront plus grandes que le double de l'autre.

Soit comme A, à B, ainſi B, à D, & ſoit A, plus grande, & D, plus petite. Ie dis que A, & D, enſemble ſont plus grandes que le double de B. Car ayant pris C, egale à B, comme A, ſera à B, ainſi C, ſera à D. Donc A, & D, enſemble, ſeront plus grandes que B, & D, enſemble [b] comme nous venons de demonſtrer, c'eſt à dire que la double de B. Ce qui eſt propoſé.

b 25.5.

Icy Euclide finit le cinquieſme liure: mais d'autant que Campanus & quelques autres adiouſtent quelques autres propoſitions, deſquelles les bons autheurs s'aydent fort ſouuent, & les citent comme ſi elles eſtoient d'Euclide, comme Archimede, Apollonius, Iean de Mont Royal & autres; nous les auons adiouſtees en ſuitte de ceux d'Euclide, apres Commandin & Clauius.

xxvj THEOREME 26. PROP. 26.

Si la premiere a plus grande raiſon à la ſeconde que la troiſieſme à la quatrieſme; par raiſon inuerſe, la ſeconde aura moindre raiſon à la premiere que la quatrieſme à la troiſieſme.

Que A, ayt plus grande raiſon à B, que C, à D. Ie dis que la raiſon de B, à A, eſt moindre que celle de D, à C.

Car ſoit entendu que E, eſt à B, comme C, eſt D, la raiſon de A, à B, ſera pareillement plus grande que celle de E, à B; [a] & partant A, ſera plus grande que E; [b] parquoy il y aura moindre raiſon de B, à A, plus grande, que de B, à E, plus petite: Mais comme B, eſt à E, ainſi par raiſon inuerſe, D, eſt à C. Donc la raiſon de B, à A, eſt pareillement moindre que D, à C, Ce qui eſt propoſé.

a 10.5.
b 8.5.

SCHOLIE,

En la maniere ſi A, a moindre raiſon à B, que C, à E, par conuerſion de raiſon B, aura la grande raiſon à A, que D, à C, &c.

xxvij

THEOREME 27. PROP. 27.

Si la premiere a plus grande raiſon à la ſeconde que la tierce à la quarte; auſſi en changeant la premiere aura plus grande raiſon à la tierce que la ſeconde à la quarte.

Que A, 1. ayt plus grande raiſon à B, 2. que C, 3. à D, 4. Ie dis qu'en permutant, A, 1. aura plus grande raiſon à C, 3. que B, 2. à D, 4. Car ſoit poſee E, à B, comme C, eſt à D; A, aura pareillement plus grande raiſon à B, que E, à B; [a] Parquoy A, ſera plus grande que E: [b] Et partant il y aura plus grande raiſon de A, à C, que de E, à C: [c] mais d'autant qu'en changeant, comme E, eſt à C, ainſi B, eſt à D, (E, eſtant poſee à B, comme C, à D) Donc A, aura auſſi plus grande raiſon à C, que B, à D. Ce qui eſt propoſé. Voyez la ſuiuante fig.

a 10. 5.
b 8. 5.
c 6. 5.

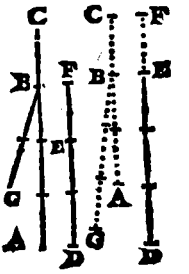
SCHOLIE.

Nous monſtrerons ſemblablement que ſi la premiere a moindre raiſon à la ſeconde, que la tierce à la quarte, en changeant la premiere aura moindre raiſon à la tierce, que la ſeconde à la quarte.

Car ſoit la raiſon de A, à B, moindre que celle de C, à D. Ie dis qu'en chan-
a 27. 5. *geant, A, aura moindre raiſon à C, que B, à D.*
b 26. 5. *Car d'autant qu'il y a moindre raiſon de A, à B, que de C, à D; Il y aura plus grãde raiſon de C, à D, que de A, à B;*[a] *Donc en changeant, il y aura plus grande raiſon de C, à A, que de D, à B,*[b] *& par conuerſion de raiſon, il y aura moindre raiſon de A, à C, que de B, à D. Ce qui eſt propoſé.*

xxviij. THEOREME 28. PROP. 28.

Si la premiere a plus grande raiſon à la ſeconde, que la tierce à la quarte: La compoſee de la premiere auec la ſeconde aura auſſi plus grãde raiſon à la ſecõde, que la cõpoſee de la tierce auec la quarte, à la quarte.



Car, que A B, ayt plus grande raiſon à B C, que D E, à E F. Ie dis qu'en compoſant A C, aura plus grande raiſon à B C, que D F, à E F. Car ſoit poſee, G B, à B C, comme D E, à E F, Il y aura auſſi plus grande raiſon de A B, à B C, que de G B,
a 10. 5. à B C;[a] partant A B ſera plus

grande que G B. Adiouſtant donc la commune B C; A C, ſera plus grande que G C, [b] Et partant A C, aura plus grande raiſon à B C, que G C, à B C: mais en compoſant [c] G C, eſt à B C, comme D F, à E F, (puiſque G B, eſt poſee à B C, comme D E, à E F.) Donc, A C, aura plus grande raiſon à B C, que D F, à E F. Ce qui eſt propoſé. [b] 8. 5. [c] 17. 5.

SCHOLIE.

Que ſi A B, a moindre raiſon à B C, que D E, à E F, auſſi en compoſant A C, aura moindre raiſon à B C, que D E, à E F: Car ſoit poſee G B, à B C, comme D E, à E F: Il y aura auſſi moindre raiſon de A B, à B C, que de G B, à B C; [a] Partant A B, ſera moindre que G B, adiouſtant B C; A C, ſera moindre que G C. [b] Donc il y aura moindre raiſon de A C, à B C, que de G C, à B C: Mais en compoſant comme G C, à B C, ainſi D F, à F E (G B, eſtant poſee à B C, comme D E, à E F. Il y aura donc auſſi moindre raiſon de A C, à B C, que D F, à F E. Ce qui eſt propoſé. Voyez la figure preced. de poincts. [a] 10. 5. [b] 8. 5.

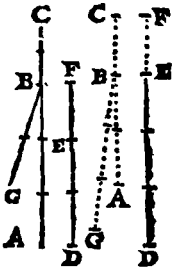
xxix

THEOREME 29. PROP. 29.

Si la compoſee de la premiere auec la ſeconde, a plus grande raiſon à la ſeconde, que la compoſee de la tierce auec la quarte, à la quarte: En diuiſant la premiere aura auſſi plus grande raiſon à la ſeconde que la tierce à la quarte.

Que A C, ait plus grande raiſon à B C, que D F, à E F. Ie dis qu'en diuiſant A B, aura auſſi plus grande raiſon à B C, que D E, à E F. Car ſoit poſee G C, à B C, comme D F, eſt à E F, la raiſon de

a 10. 5. A C, à B C, sera aussi plus grande que de G C, à B C: a Parquoy A C, sera plus grande que G C:
8. 5. Donc ostant B C, cõmune restera A B, plus grande que G B, b partant il y aura plus grande raison
c 17. 5. de A B, à B C, que de G B, à B C. c Mais en diuisant comme G B, est à B C, ainsi D E, à E F,



(G C, estant posee à B C, comme D F, à E F,) il y aura donc aussi plus grande raison de A B, à B C, que de D E, à E F. Ce qui est proposé.

SCHOLIE.

Que si A C, a moindre raison à B C, que D F, à E F; aussi en diuisant A B, aura moindre raison à B C, que D E, à E F: Car soit posée G C, à B C, comme D F, à E F; Il
a 10. 5. *y aura aussi moindre raison de A C, à B C, que de G C, à B C, a Parquoy A C, sera moindre que G C. Donc ostant*
b 8. 5. *B C, cõmune, restera A B, moindre que G B, b partant il y aura moindre raison de A B, à B C, que de G B, à*
c 17. 5. *B C: c Mais en diuisant comme G B, à B C, ainsi D E, à E F, (estant posee G C, à B C, comme D F, à E F.) Donc il y aura aussi moindre raison de A B, à B C, que de D E, à E F. Ce qui est proposé.*

xxx THEOREME 30. PROP. 30.

Si la composee de la premiere auec la seconde, a plus grande raison à la seconde, que la composee de la tierce auec la quarte, à la quarte. Par conuersion de raison, la premiere auec la seconde aura moindre rai-

son à la premiere, que la tierce auec la quarte à la tierce.

Que A C, ayt plus grande raiſon à B C, que D F, à E F. Ie dis par conuerſion de raiſon, que A C, a moindre raiſon à A B, que D F, à D E.

Car A C, ayant plus grande raiſon à B C, que D F, à E F, [a] en diuiſant A B, aura plus grande raiſon à B C, que D E, à E F. Donc par conuerſion de raiſon, il y aura moindre raiſon de B C, à A B, que de E F, à [c] DE, & en cõpoſant il y aura moindre raiſon de la toute A C, à A B, que de la toute D F, à D E. Ce qui eſt propoſé.

a 10. 5.
b 8. 5.
c 17. 5.

SCHOLIE.

Semblablement, ſi A C, a moindre raiſon à C B, que D F, à E F. Par conuerſion de raiſon A C, aura plus grande raiſon à A B, que D F à D E: Car puis qu'il y a moindre raiſon de A C, à B C, que de D F, à E F; il y aura plus grande raiſon de D F, à E F, que de A C, à B C: [a] Donc par conuerſion de raiſon. Il y aura moindre raiſon de D F, à D E, que de A C, à A B: c'eſt à dire qu'il y aura plus grande raiſon de A C, à A B, que de D F, à D E. Ce qui eſt propoſé.

a 30. 5

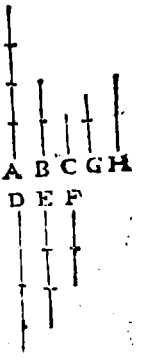
xxxj

THEOREME 31. PROP. 31.

S'il y a trois grandeurs & d'autres egales à icelles en nombre; & qu'il y ait plus

grande raiſon de la premiere des premieres à la ſeconde, que de la premiere des dernieres à la ſeconde. Semblablement qu'il ayt plus grande raiſon de la ſeconde des premieres à la tierce, que de la ſeconde des dernieres à la tierce: En raiſon egale, il y aura auſſi plus grande raiſon de la premiere des premieres à la tierce, que de la premiere des dernieres à la tierce.

Soient trois grandeurs A, B, C, & autres trois D, E, F, & qu'il y ait plus grande raiſon de A, à B, que de D, à E, & de B, à C, que de E, à F. Ie dis qu'en raiſon egale, il y aura plus grande raiſon de A, à C, que de D, à F.



Car ſoit poſee G, à C, comme E, à F: Donc il y aura auſſi plus grande raiſon de B, à C, que de G, à C:
a 10. 5. [a] Parquoy B, ſera plus grande que
b 8. 5. G; Partant [b] il y aura plus grande raiſon de A, à G, moindre que de A, à B, plus grande: Mais la raiſon de A, à B, eſt poſee plus grande que de D, à E: Donc il y aura encor, plus grande raiſon de A, à G, que de D, à E. Soit poſee de rechef, H, à G, comme D, à E: il y aura donc auſſi plus grande raiſon de A, à G, que de H à G;
c 10. 5. [c] Partant A, ſera plus grande que H. [d] Donc A,
d 8. 5. plus grande, aura plus grande raiſon à C, que H,
e 22. 5. moindre, à la meſme C; mais comme H, eſt à C, ainſi D, eſt à F, en raiſon egale (puis que comme D, eſt à E, ainſi H, eſt à G, & comme E, à F,

ainſi G, à C) Donc il y aura auſſi plus grande raiſon de A, à C, que de D, à F. Ce qui eſt propoſé.

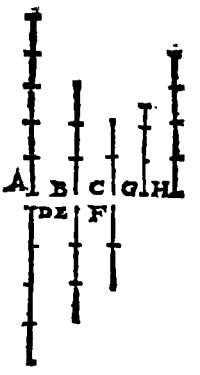
SCHOLIE.

Semblablement on demonſtrera, que ſi la premiere des premieres, a moindre raiſon à la ſeconde, que la premiere des dernieres à la ſeconde; mais la ſeconde des premieres a moindre raiſon à la tierce, que la ſeconde des dernieres à la tierce, auſſi en raiſon egale la premiere des premieres aura moindre raiſon à la tierce, que la premiere des ſecondes à la tierce.

THEOREME 32. PROP. 32. xxxij

S'il y a trois grandeurs, & d'autres egales à icelles en nombre, & qu'il y ayt plus grande raiſon de la premiere des premieres à la ſeconde, que de la ſeconde des dernieres à la tierce; Pareillement qu'il y ayt plus grande raiſon de la ſeconde des premieres à la tierce, que de la premiere des dernieres à la ſeconde: En raiſon egale, il y aura auſſi plus grande raiſon de la premiere des premieres à la tierce, que de la premiere des dernieres à la tierce.

Soient trois grandeurs A, B, C, & autres trois D, E, F, & que A, ayt plus grande raiſon à B, que E, à F, & B, à C, que D, à E. Ie dis qu'en raiſon egale, A, aura plus grande raiſon à C, que D, à F.



Car ſoit poſee G, à C, cõme D, à E. Donc B, aura auſſi plus grande raiſon à C, que
a 10. 5. G, à C, a Partant B, ſera plus
b 8. 5. grande que G; b Parquoy il y aura plus grande raiſon de A, à G, moindre, que de la meſme A, à B, plus grande: Mais il y a plus grande raiſon de A, à B, que de E, à F. Donc il y aura encore plus grande raiſon de A, à G, que de E, à F. Soit poſee de rechef, H, à G, comme E, à F. Il y aura donc plus grande raiſon de A, à G, que de
c 10. 5. H, à G. c Donc A, ſera plus grande que H, par-
d 8. 5. quoy d A, aura plus grande raiſon à C, que H,
e 23. 5. moindre à la meſme C; e Mais comme H, à C, ainſi D, à F, en raiſon egale, (D, eſtant à E, comme G, à C, & comme E, à F, ainſi H, à G,) il y a donc auſſi plus grande raiſon de A, à C, que de D, à F. Ce qui eſt propoſé.

SCHOLIE.

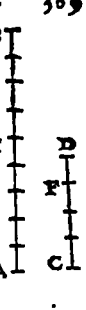
Semblablement on monſtrera, que ſi les raiſons des premieres ſont moindres, auſſi la raiſon des extremes ſera moindre, &c.

xxxiij **THEOREME 33. PROP. 33**

S'il y a plus grande raiſon du tout au tout, que du retranché au retranché; Il y aura auſſi plus grande raiſon du reſte au reſte que du tout au tout.

Que

Que la toute A B, ayt plus grande raiſon à la toute C D, que la retranchée A E, à la retranchée C F, dis que le reſte E B, aura plus grande raiſon au reſte F D; que la toute A B, à la toute C D:



Car puis qu'il y a plus grande raiſon de A B, à C D, que de A E, à C F, [a] en permutant il y aura auſſi plus grande raiſon de A B, à A E, que de C D, à C F; [b] Donc par conuerſion de raiſon, il y aura moindre raiſon de A B, à E B, que de C D, à F D, [c] Donc en changeant il y aura auſſi moindre raiſon de A B, à C D, que de E B, à F D, ſçauoir le reſte E B, aura plus grande raiſon au reſte F D, que la toute A B, à la toute C D. Ce qui eſt propoſé.

a 17. 5.
b 30. 5.
c 17. 5.

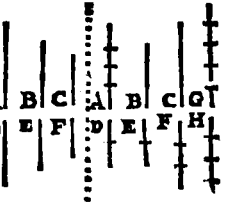
SCHOLIE.

Que ſi A B, a moindre raiſon à C D, que A E, à C F, le reſte E B, aura auſſi moindre raiſon au reſte F D, que A B, à C D. Comme il appert par la demonſtration.

THEOREME 34. PROP. 34. xxxiv

S'il y a tant de grandeurs que l'on voudra, & d'autres egales à icelles en nombre, & qu'il y ait plus grande raiſon de la premiere des premieres à la premiere des dernieres, que de la ſeconde à la ſeconde, & de la ſeconde à la ſeconde, que de la tierce à la tierce; & ainſi de ſuite; Toutes les premieres enſemble auront plus grande raiſon à toutes les dernieres enſemble, que

toutes les premieres, la premiere ostee, à toutes les dernieres, la premiere aussi ostee; Mais moindre raison que la premiere des premieres, à la premiere des dernieres: & finalement aussi plus grande raison que la derniere des premieres à la derniere des dernieres.



Soient premierement trois grandeurs A, B, C, & autres trois D, E, F, & soit la raison de A, à D, plus grande que de B, à E; & de B, à E, que de C, à F. Ie dis que A, B, C, ensemble ont plus grande raison à D, E, F, ensemble que B, C, ensemble à E, F, ensemble: mais moindre que A, à D: Et finalement plus grande que C, à F.

Car puis qu'il y a plus grande raison de A, à D, que de B, à E, [a] en permutant il y aura plus grande raison de A, à B, que de D, à E; [b] Donc en cõposant, il y aura plus grande raison de A, B, ensemble à B, que de D, E, ensemble à E, [c] & en permutant derechef, il y aura plus grande raison de A, B, ensemble à D E, ensemble que de B, à E: Partant la toute A, B, ayant plus grande raisõ à la toute D, E, que la retrãchee B, à la retrãchee E; [d] la restãte A, aura aussi plus grãde raison à la restãte D, que la toute A, B, à la toute D E: Semblablement, il y aura plus grande raison de B, à E, que de la toute B. C, à la toute E F, donc il y aura encore plus grande raison de A, à D, que de la toute B, C, à la toute E, F; [e] Donc en permutant il y aura plus grande raison de A, à B, C, que

a 27. 5.
b 28. 5.
c 27. 5.
d 33. 5.
e 27. 5.

de D, à E, F; [f] Donc en composant, il y a plus grande raison de la toute A, B, C, à B, C, que de la toute D, E, F, à E F; [g] Et en permutãt derechef il y a plus grande raison des toutes A, B, C, ensemble aux toutes D, E, F, ensemble que de B, C, à E F. Ce qui est premierement proposé. f 28. 5. g 27. 5.

Partant y ayant plus grande raison de la toute A, B, C, à la toute D, E, F, que de la retranchee B C, à la retranchee E F: [h] Il y aura aussi plus grande raison de la restante A, à la restante D, que de la toute A, B, C, à la toute D, E, F. Ce qui est secondement proposé. h 33. 5.

Mais d'autant qu'il y a plus grande raison de B, à E, que de C, à F; [i] En permutant il y aura aussi plus grande raison de B, à C, que de E, à F; [k] Et en composant, plus grande raison de la toute B C, à C, que de la toute E, F à F; [l] Et en permutãt derechef, plus grande raison de B, C, à E F, que de C, à F. Mais il y a plus grande raison de A, B, C, à D, E, F, cõme il est mõstré, que de B C, à E F; Dõc il y aura encore plus grande raison des toutes A, B, C, aux toutes D, E, F, que de la derniere C, à la derniere F. Ce qui est tiercement proposé. i 27. 5. k 28. 5. l 27. 5.

Soient puis aprés quatre grandeurs de part & d'autre auec la mesme hypothese: c'est à dire, soit aussi plus grande raison de C, 3. à F, 3. que de G, 4. à H, 4. Ie dis qu'il s'ensuit la mesme chose: Car cõme il est desia monstré en trois grandeurs, il y a plus grande raison de B, à E, que de B, C, G, à E, F, H: Donc il y aura encore plus grande raison de A, à D, que de B, C, G, à E, F, H; [m] Donc en changeant il y aura plus grande raison de A, à B, C, G, que de D, à E, F, H: [n] Et en composant, plus grande raison de A, B, C, G, à B, C, G, que m 27. 5. n 28. 5.

o 27. 5. de D, E, F, H, à E, F, H; o Et en changeant plus grande raiſon de A, B, C, G, à D, E, F, H, que de B, C, G, à E, F, H. Ce qui eſt premierement propoſé.

Donc, y ayant plus grande raiſon de la toute A, B, C, G, à la toute D, E, F, H, que de la retranchee B, C, G, à la retranchee E, F, H, p la reſtãte A, aura plus grande raiſon à la reſtãte D, que de la toute A, B, C, G, à la toute D, E, F, H: Ce qui eſt ſecondement propoſé.

p 35. 5.

Mais comme il eſt demonſtré en 3. grandeurs, d'autant qu'il y a plus grande raiſon de B, C, G, à E, F, H, que de G, à H; & plus grande de A, B, C, G, à D, E, F, H, que de B, C, G, à E, F, H: comme il a eſté monſtré, il y aura beaucoup plus grande raiſon de A, B, C, G, à D, E, F, H, que de la derniere G, à la derniere H. Ce qui eſt tiercement propoſé.

En la meſme façon on conclura le meſme en 5. grandeurs, par 4. & en 6. par 5. &c. Comme il eſt monſtré en 4. par trois.

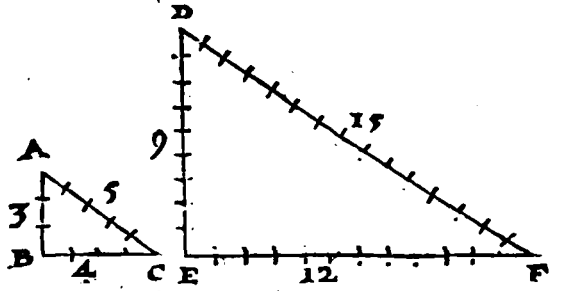
Fin du cinquieſme liure.

LIVRE SIXIESME
DES ELEMENTS D'EVCLIDE.

DEFINITIONS.

1. Semblables figures rectilignes, ſont celles qui ont les angles egaux, vn chacun au ſien, & les coſtez qui ſont autour des angles egaux, proportionaux.

COMME les triangles A B C, D E F, ſeront dicts ſemblables, s'ils ſont equiangles : c'eſt à dire que l'angle A, ſoit egal à l'angle D, & l'angle B, à



l'angle E, & l'angle C, à l'angle F : Et ſemblable-

ment que les coſtez autour des angles egaux ſoient proportionaux: ſçauoir eſt comme A B, eſt à A C, ainſi D E, ſoit à D F, & comme A B, à B C, ainſi D E, à E F: & comme A C, à C B, ainſi D F, à F E.

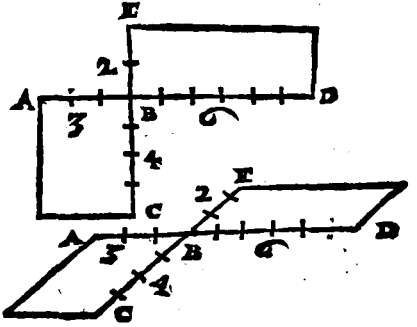
Que ſi chacun des angles de l'vne des figures eſt egal à chacun des angles de l'autre: mais les coſtez à l'entour des angles egaux ne ſont proportionaux, ou au contraire: telles figures ne ſeront dictes ſemblables; comme ſont le quarré & le quarré long: Car icelles figures ont les angles egaux, ſçauoir eſt, droicts: mais les coſtez de l'vne ne ſont proportionaux aux coſtez de l'autre: Ceux du quarré ayant raiſon d'egalité, & ceux du quarré long, autour de l'angle droict, raiſon d'inegalité: D'où il appert que toutes les figures rectilignes, equiangles & equilateres, ayant les coſtez & les angles egaux en nombre, ſont ſemblables combien qu'elles ſoient inegales.

2. Les figures ſont reciproques, quand les raiſons antecedentes & conſequentes ſont en l'vne & en l'autre figure.

Ou ainſi

Les figures ſont reciproques, quand les termes antecedens & conſequents des raiſons, ſont en l'vne & en l'autre figure.

Car par les raisõs antecedentes & cõsequẽtes, faut entendre les termes antecedents & conſequẽts de la proportiõ:

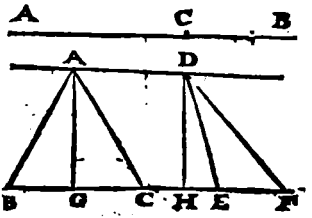


Comme s'il y a 2. rectangles A C, E D, & que comme A B, eſt à B D, ainſi E B, eſt à B C, icelles figures ſeront dictes reciproques: D'autant qu'en l'vne eſt le terme antecedent de la premiere raiſon, ſçauoir A B, & le conſequent de la ſeconde raiſon, ſçauoir B C; Et en l'autre eſt le terme conſequent de la premiere raiſon B D, & l'antecedent de la ſeconde E B; Telles figures ſont auſſi dictes egales entr'elles; comme il ſera apres demonſtré.

3. Vne ligne droicte eſt dicte eſtre couppee ſelon la moyenne & extréme raiſon, lors que la toute eſt au plus grand ſegment, comme le plus grãd ſegment eſt au moindre.

Si quelconque ligne droicte comme A B, eſt diuiſee de telle ſorte au poinct C, inegalement: que la toute A B, ſoy au plus grand ſegment A C, cõme iceluy meſme plus ſegmẽt A C, eſt au plus petit C B; elle ſera dite eſtre diuiſee ſelõ la moyẽne & extreme raiſon: Laquelle diuiſion Euclide enſeignera à la 30. propoſition de ce liure.

4. La hauteur de quelconque figure, eſt la ligne perpẽdiculaire menee du ſommet ſur la baſe.



Si du ſommet A, de triangle A, B, C, l'on mene A G, perpẽdiculaire ſur la baſe B C, la quantité d'icelle perpendiculaire ſera la hauteur ou altitude du triangle A B C : De meſme auſſi la perpendiculaire D H, menee du ſommet D, du triangle D E F, ſur la baſe E F, prolongee de la part de E, ſera la hauteur d'iceluy triangle D E F : Partant ſi les perpendiculaires de deux figures menees des ſommets ſur leurs baſes, (ſoit que les baſes ſoient prolongees ou non) ſont egales : telles figures ſeront dictes auoir meſme hauteur : Or telles perpẽdiculaires ſerõt egales quãd les baſes des figures & les ſommets ſeront conſtituez entre meſmes paralleles, comme ſont A G, D H.

Car puis que les angles A G H, D H G, internes, & de meſme part ſont egaux à deux droicts, ou pour mieux dire, droicts: [a] A G, D H, ſeront paralleles, mais A D, G H ſont auſſi paralleles: D'autant que les triangles ſont poſez eſtre conſtituez entre meſmes paralleles, donc A D, H G, ſera parallelogrãme, [b] & partant les coſtez A G, D H, ſeront egaux. Donc iceux triangles ſeront dicts auoir meſme hauteur. Que ſi aux meſmes triangles l'on poſe C, & F, pour les ſommets, & A B, D E, pour les baſes, iceux triangles ne ſeront pas dits auoir meſme hauteur : Car

a 28. 1.

b 34. 1.

pendiculaire menee de F, à la baſe D E, n'eſt pas egale à la perpendiculaire menee de C, ſur la baſe A B; ces triangles ne pouuant eſtre conſtituez entre meſme paralleles, comme il eſt manifeſte.

5. Vne raiſon eſt dicte eſtre compoſee de raiſons, quand les quantitez des raiſons multipliees entr'elles, font quelque raiſon.

D'autant que le denominateur de quelconque raiſon exprime la quantité de la grandeur antecedente, au reſpect de la conſequente; (comme le denominateur de la raiſon quadruple, à ſçauoir 4. monſtre qu'en toute raiſon quadruple la grandeur antecedente contient quatre fois la conſequente: mais le denominateur de la raiſon ſubquadruple à ſçauoir $\frac{1}{4}$, demonſtre que la grandeur antecedente eſt la quatrieſme partie de la conſequente, &c. (le denominateur a de couſtume d'eſtre appellé par les Geometres, la quantité de la raiſon: de ſorte que c'eſt meſme choſe que la quantité de quelque raiſon, & le denominateur d'icelle.) Donc ceſte definition nous enſeigne qu'vne raiſon eſt dicte eſtre compoſee de deux ou pluſieurs raiſons, quand les denominateurs ou quantités d'icelles multipliees entr'elles feront icelle raiſon: (ou comme traduict Zambert) feront la quantité ou denominateur d'icelle raiſon: Cõme la raiſon duodecuple eſt dicte eſtre compoſee de la double, & ſextuple: D'autant que le denominateur de la raiſon duodecuple, à ſçauoir 12. eſt produict de la multiplication du denominateur de la raiſon double, & ſçauoir de 2. par le denominateur de la ſextuple; c'eſt à dire par 6. Ainſi la

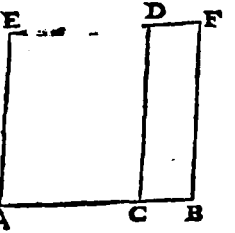
meſme raiſon duodecuple eſt dicte eſtre compoſee de la triple & la de quadruple: Car de la multiplication de 3. par 4. eſt produict le denominateur 12. de la raiſon duodecuple. Semblablement, la raiſon trigecuple eſt dicte eſtre compoſee de la double, triple & quintuple. Car les denominateurs d'icelles 2. 3. 5. multipliez entr'eux produiſent 30. denominateur d'icelle raiſon trigecuple: Ainſi la raiſon double eſt dicte eſtre cõpoſee de la ſeſquialtere & ſeſquitierce: D'autant que du denominateur de la ſeſquialtere qui eſt $1\frac{1}{2}$ multiplié par $1\frac{1}{3}$ denominateur de la ſeſquitierce eſt produict 2. denominateur de la double. De rechef la meſme raiſon double eſt compoſee de la ſeſquiſeptiéme & de la ſupertripartiente quatriémes: car les denominateurs de ces raiſons $1\frac{1}{7}$, $1\frac{3}{4}$ multipliez entr'eux produiſent 2. denominateur de la double: Semblablemẽt la meſme raiſon double ſera dicte eſtre compoſee de la ſubſequiquarte, & de la double ſeſquialtere: D'autant que les denominateurs d'icelles $\frac{4}{5}$ & $2\frac{2}{4}$ multipliez entr'eux produiſent pareillement le meſme denominateur de la raiſon double, ſçauoir 2. & c. Donc ſi on propoſe tant de grandeurs qu'on voudra de ordre A, B, C, D, ſçauoir A, à B, en raiſon double, B, à C, triple, & C, à D, quintuple, la raiſon des extremes A, & D, ſera trigecuple, laquelle ſera dicte eſtre compoſee des raiſons moyennes; Car ſi on multiplie le denominateur de A, à B, qui eſt 2. par celuy de B, à C, 3. l'on aura 6. denominateur de la raiſon, de A, à C, donc A, à C, a raiſon ſextuple: De rechef, multipliant 6. denominateur de la raiſon de A, à C, par celuy de C, à D, 5. l'on aura 30. denominateur de

la raiſon de A, à D. Parquoy A, ſera à D, en raiſon trigecuple &c. 60.30.10.2.

A, B, C, D

Et cecy ſoit dict des 5. deffinitions d'Euclide ſur ce 6. liure, auſquelles ſera adiouſtee la ſuiuante, pour rendre plus intelligibles, tant les 27. 28. 29. & 30. prop. de ce 6. liure, que de pluſieurs autres du 10. qui eſt telle.

6. Vn parallelogramme eſtant appliqué ſelon quelque ligne droicte, eſt dict defaillir d'icelle, d'vn parallelogramme, quād il n'occupe pas toute ladicte ligne, mais eſt dict exceder, quand il occupe vne plus grande ligne, que celle, ſelon laquelle il eſt appliqué: En ſorte toutesfois que le parallelogramme excedant ou defaillant ayt meſme hauteur que le parallelogramme, duquel il defaut, ou excede, & cōſtituë auec iceluy vn ſeul parallelogramme.



Soit la ligne A B, ſur laquelle ſoit cōſtitué le para'. lelogrāme A D, n'occupāt toute la ligne A B, mais laiſſant C: ayant acheué le parallelogrāme A F, le parallelogrāme A D, appliqué ſelon la ligne A B, ſera dit defaillir d'icelle, du parallelogrāme, C F, de ſorte que C F, ſera appellé le defaut.

Derechef ſoit A C, ſur laquelle ſoit conſtitué le parallelogramme A F, ayant le coſté A B, plus grand que A C, auquel ſoit menee C D, parallele à B F, le parallelogramme A F, appliqué ſelon

A C, ſera dict exceder A C, du parallelogramme C F, en ſorte que C F, ſoit dict l'excez.

Or ce defaut ou excez aux rectangles, peut eſtre quarré ou quarre long : & aux parallelogrammes non rectangles, rhombe ou rhomboyde, comme il eſt manifeſte.

SCHOLIE.

Clauius, qui a tiré ceſte 6. definition tant de la 27. que autres ſuiuantes propoſitions de ce liure a manqué à la fin d'icelle, où il dit : Ita tamen, vt parallelogrãmum deficiens, aut excedens eandem habeat altitudinem cum parallelogrammo applicato conſtituatque cum eo totũ vnum parallelogrammũ: *C'eſt à dire, En ſorte toutesfois que le parallelogramme defaillãt ou excedãt ayt meſme hauteur que le parallelogrãme appliqué, & cõſtituë auec iceluy vn ſeul parallelogrãme.* Au lieu qu'il doit dire, *en ſorte toutesfois que le parallelogrãme defaillant, ou excedant ayt meſme hauteur que l'excez, ou defaut &c. Car le parallelogramme defaillant ou excedant, eſt celuy meſme qui eſt appliqué, donc il ne doit dire qu'il doit auoir meſme hauteur que luy-meſme & conſtituer auec luy meſme vn ſeul parallelogramme: attendu qu'il ne ſe peut faire autrement: mais bien qu'il doit eſtre de meſme hauteur que le defaut ou excez. Or que le parallelogramme defaillant ou excedant ſoit celuy meſme qui eſt appliqué, & l'autre qui conſtitue vn parallelogramme auec luy, ſoit le defaut ou excez, il appert aſſez tant par le texte d'Euclide. que le comment de Theon*; πάντων τῶν παρὰ τὰς αὐτὰς διῃρημένων παραλληλογράμμων. καὶ ἐλλειπόντων εἴδει παραλληλογράμμοις ὁμοίοις τε καὶ ὁμοίως κειμένοις τῷ ὅλῳ τῷ ἀπὸ τῆς ἡμισείας ἀναγραφομένῳ μείζων ἐστί, τὸ ὅλον τὸ ἀπὸ τῆς ἡμισείας παραβαλλόμενον παραλληλόγραμμον. ὅμοιον ὂν, τῷ ἐλλείμματι. c'eſt à dire: de tous les parallelogrammes

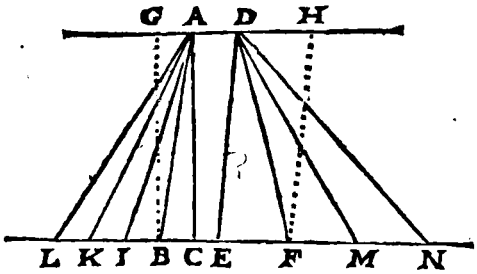
appliquez ſelon vne meſme ligne droicte, & defaillants de figures parallelogrammes ſemblables, & ſemblablement poſees au parallogramme qui eſt d'eſcrit ſur la moitié, le plus grand eſt celuy qui eſt appliqué ſur la moitié eſtant ſemblable au defaut: Et Theon παραβεβλήσθω, ἐφ' ἧς αβ, ὅμοιον τῷ α δ παραλληλόγραμμον ἐλλεῖπον εἴδει παραλληλογράμμῳ, *&c. Et ſoit appliqué ſelon la ligne droicte A B, le parallelogramme A D, defaillant d'vne figure parallelogramme, &c.*

Henrion a faict la meſme faute, coppiant touſiours ce qu'il trouue ſoit qu'il entende le ſens, ou non.

THEOREME 1. PROP. 1.

Les triangles & les parallelogrammes qui ont meſme hauteur, ſont entr'eux comme leurs baſes.

Soient deux triangles A B C, D E F, ayant meſme hauteur, deſquels les baſes ſont D C, E F. Semblablement ſoient deux parallelogrammes, C G, E H, auſſi de meſme hauteur, & ſur les meſmes baſes B C, E F. Ie dis que le triangle A B C, eſt au triangle D E F, & le parallelogramme C G, au parallelogramme E H, comme la baſe B C, eſt à la baſe E F: C'eſt à dire que ſi la baſe B C, eſt priſe pour premiere grandeur, la baſe, E F, ſeconde; mais le triangle A B C, ou le parallelogramme C G, troiſieſme, & le triangle D E F, ou le parallelogramme E H, 4. les equimultiples de la 1. & 3. grandeur ſeront toutes deux plus grandes ou toutes 2. égales, ou toutes 2. plus petites que les equimultiples de la 2. & 4. comme veut la *6.* definition du *5.*



Car ſoient conſtituez, tant les triangles que les parallelogrammes, entre meſmes paralleles GH, LN: (Alors ils aurõt meſme hauteur, puiſque eſtant conſtituez entre meſmes paralleles, les perpẽdiculaires menees des ſõmets ſur les baſes ſeront egales, comme il eſt dit en la 4. definition,) & de BL, ſoient priſes BI, IK, KL, chacune egale à la baſe BC: Semblablement de FN, ſoient priſes FM, MN, chacune egale à EF; & des ſommets A, & D, ſoient menees les droictes lignes AI, AK, AL, DM, DN; les triangles ABC, AIB, AKI, ALK, eſtant conſtituez ſur baſes egales & entre meſmes paralleles ſeront egaux entr'eux: par meſme raiſon les triangles DEF, DFM, DMN, ſeront auſſi egaux entr'eux. Or d'autant que CL, contient autant de parties egales à BC, que le triangle ACL, contient de triangles egaux au triangle ABC, comme il eſt monſtré, CL, ſera autant multiple de CB, que le triangle ACL, l'eſt du triangle ABC,: Pareillement d'autant que EN, contient autant de parties egales à EF, que le triangle DEN, contiẽt de triangles egaux au triangle DEF, comme nous auons monſtré,

a 4. def.

a 28. 1.

EN, sera autant multiple de EF, que le le triangle DEN, l'est du triangle DEF: Mais d'autant que si la base CL, est egale à la base EN, [b] necessairement le triangle ACL, sera egal au triangle AEN, estans entre mesmes paralleles, & partãt si CL, est plus grande que EN, le triangle ACL, sera plus grand que le triangle DEN, & si moindre moindre; Donc la droicte ligne CL, & le triangle ACL, equimultiples de la premiere grandeur BC, & de la troisiesme ABC, defaudront tous deux de la droicte ligne EN, & du triangle DEN, equimultiples de la 2. grandeur EF, & de la 4. DEF, ou seront tous deux egaux, ou tous deux plus grands, estant prises les grãdeurs comme elles s'entrerespondent: [c] Parquoy il y aura mesme raison, de la 1. BC, à la 2. EF, que de la 3. ABC, à la 4. DEF, sçauoir du triangle au triangle: Donc comme la base à la base, ainsi le triangle au triangle. Ce qui est proposé.

b 38. 1.

c 6. def. 5.

Pour la seconde partie: D'autant que [d] cõme le triangle ABC, est au triangle DEF, ainsi le parallelogramme CG, [e] (qui est double du triangle ABC) au parallelogramme EH, ([f] qui est double du triangle DEF,) il est manifeste que le parallelogramme [g] sera aussi au parallelogramme, comme la base à base. Ce que l'on peut aussi prouuer par le mesme discours, dont nous auons vsé en la demonstration des triangles, si premierement des poincts I, K, L, l'on mene des paralleles à BG, & aussi de MN, à FH. Donc les triangles & les parallelogrammes, &c. Ce qu'il falloit demonstrer.

d 15. 5.

e 34. 1.

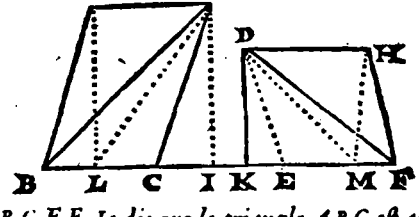
f 34. 1.

g 11. 5.

SCHOLIE.

Nous adiouſterons icy le theoreme ſuiuant, prin de Commandin.

Les triangles & les parallelogrammes, conſtituez ſur baſes egales, ou ſur vne meſme baſe, ſont entr'eux comme leurs hauteurs.



Soient 2. triangles A B C, D E F, & 2. parallelogrãmes, A B, D F, ayant les baſes egales B C, E F. Ie dis que le triangle A B C, eſt au triãgle D E F, & le parallelogrãme A B, au parallogrãme D F, comme la hauteur A I, à la hauteur D K.

Car poſant I L, K M, egales à B C, E F: Et menant a 38. 1. *L A, M D;* [a] *Le triangle A L I, ſera egal à A B C, eſtant ſur baſes egales L I, B C, & entre meſmes paralleles A G, I B: En la meſme maniere le triangle D K M,* b 7. 5. *ſera egal à D E F;* [b] *Donc comme A B C, à D E F: ainſi* c 1. 6. *A L I, à D K M;* [c] *Mais comme A L I, à D K M, ainſi A I, à D K: (car poſant A I, D K, pour baſes les hauteurs L I, K M, ſeront egales) Donc A B C, ſera auſſi à* d 15. 5. *D E F, comme A I, à D K. Ce qui eſt propoſé.*

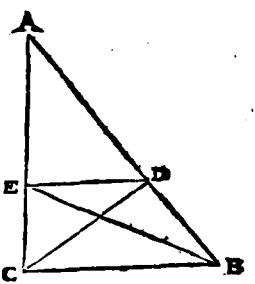
Mais d'autant que, [d] *cõme A B C, eſt à D E F, ainſi le parallelogrãme A B, double du triãgle A B C, eſt au paralle-* e 34. 1. *logramme D F,* [e] *double de D E F;* [f] *le parallelogramme A B, ſera auſſi au parallelogramme D F, comme A I,* f 11. 5. *à D K. Ce que l'on peut auſſi monſtrer menant L G, M H,*

M H; l'on conclura le mesme si les triangles & les parallelogrãme sont constituez sur vne mesme base, &c.

THEOREME 2. PROP. 2. ij

Si à l'vn des costez d'vn triangle, l'on mene quelque ligne droicte parallele, elle couppera les costez du triangle proportionellement : Et si les costez sont couppez proportionellement, la ligne droicte conioignant les poincts des sections, sera parallele à l'autre costé du triangle.

Au triangle A B C, soit premieremẽt la ligne droicte B E, parallele au costé B C. Ie dis que les costez A B, A C, sont couppez proportionnellement aux poincts D & E, c'est à dire que A D, est à D B, comme A E, à E C.



Car ayant mené les droictes lignes C D, B E, [a] les triangles D E B, D E C, constituez sur la base D C, & entre mesmes parralleles D E, B C, seront egaux entr'eux : partant comme le triangle A D E, est au triangle D F B, ainsi le mesme A D E, sera au triãgle DEC; [c] Mais comme A D E, est à D, E B, ainsi la base AD, est à la base D B. (Puis que ces triangles sont de mesme hauteur, comme il apert (si par le point E, on mene vne ligne parallele à A B:) Et par mesme raison, comme le triangle A D E, au triangle DEC, ainsi la base A E, à la base E C, [d] donc comme A D, est à D B,

[a] 37. 1.
[b] 7. 5.
[c] 1. 6.
[d] 11. 5.

ainſi A E, eſt à E C, (puis que ces 2. raiſons ſont de meſme à la raiſon du triangle A D E, au triangle D E B, & du meſme triangle A D E, au triangle D E C. Ce qui eſt propoſé.

Secondement que la droicte ligne D E, coupe les coſtez A B, A C, proportionellement. Ie dis que D E, eſt parallele à l'autre coſté C B.

g 1.6. Car de rechef ayant mené B E, C D [g]; Comme la baſe A D, ſera à la baſe D B, ainſi le triangle A D E, au triangle D E B, puis qu'ils ſont de meſme hauteur; Mais comme A D, eſt à D B, ainſi A E, à E C, par l'hypotheſe [f] Donc comme le triangle A D E, ſera au triangle D E B, ainſi A E, ſera à E C: Mais derechef comme la baſe A E, eſt [g] à la baſe E C, ainſi le triangle A D E, au

h 11. 5. triangle D E C, eſtant de meſme hauteur: [h] Donc comme le triangle A D E, eſt au triangle D E B,

i 9. 5. ainſi le meſme triangle A D E, au triangle D E C; [i] Donc les trangles D E B, D E C, ſeront egaux:

k 39. 2. Et partant puis qu'ils ſont conſtituez ſur meſme baſe: [k] ils ſeront auſſi entre meſme paralleles. Donc D E eſt parallele à B C. Ce qui eſt propoſé. Partant ſi à l'vn des coſtez, &c. Ce qui falloit demonſtrer.

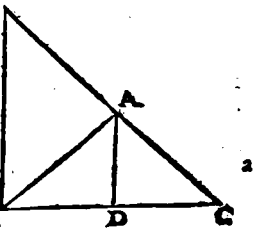
iij

THEOREME 3. PROP. 3.

Si vn angle d'vn triangle eſt couppé en deux parties egales, & que la ligne droicte qui couppe l'angle couppe auſſi la baſe; les ſegmens de la baſe auront meſme raiſon entr'eux que les autres coſtez du triangle: Et ſi les ſegments de la baſe ont meſme raiſon entr'eux que les autres co-

ſtez du triangle, la ligne droicte menee du ſommet au poinct de la ſection, couppe l'angle du triangle en deux egalement.

Soit le triangle A B C, dont l'angle B A C, ſoit couppé en deux egalement par la ligne droicte A D, qui couppe auſſi la baſe au poinct D. Ie dis premierement que comme B A, eſt à A C, ainſi B D, eſt à D C.



Car ſoit menee B E, parallele à D A, rencontrant C A, prolongee vers E; Or elles ſe rencontreront puis que les angles C & C B E, ſont moindres que deux droicts, [a] car C, & C D A, ſont moindres que deux droicts [b] & C D A, eſt egal à C B E, l'externe à l'interne: C & C E B, ſeront pareillement moindres que deux droicts & l'angle E B A, [c] ſera egal à ſon alterne B A D, & l'angle E, egal à l'externe D A C. Donc puis que les deux angles B A D, D A C, ſont egaux par l'hypotheſe; les angles E B A, & E, ſeront egaux entr'eux, [d] partant les lignes A B, A E, egales entr'elles. [e] Donc comme E A, ſera à A C, ainſi B A, ſera à la meſme A C, [f] mais comme E A, eſt à A C, ainſi B D, eſt à D C, puis que au triangle B E C, la droicte ligne D A, eſt parallele au coſté B E: Donc comme B A, ſera à A C, ainſi [g] B D, ſera à D C. Ce qui eſt propoſé.

a 17. 1.
b 29. 4.
c 29. 1.
d 6. 1.
e 7. 5.
f 2. 6.
g 15 1.

Secondement ſoit comme B A, à A C, ainſi B D, à D C: Ie dis que la droicte ligne A D, couppe l'angle B A C, en deux egalement: Car

soit menee de rechef la droicte ligne B E, par le poinct B, parallele à D A, rencontrant C A, prolongee au poinct E: D'autant donc que comme B A, est à A C, ainsi B D, est à D C, par l'hypothese
h 2. 6. h mais comme B D, est à D C, ainsi E A, est à A C: (puis qu'au triangle B C E, la ligne A D, est
i 11 5. parallele au costé B E) i comme B A, sera à A C, ainsi E A, à la mesme A C. k Donc B A, & A E, se-
k 9. 5. ront egales entr'elles, l partant les angles A B E,
l 5. 1. & E, sont egaux, m donc puis que l'angle A B E,
m 29. 1. est egal à son alterne B A D, & l'angle E, egal à son externe D A C, les deux B A D, D A C, seront egaux entr'eux: Ce qui est proposé. Donc si l'angle d'vn triangle &c. Ce qu'il falloit demonstrer.

iiij

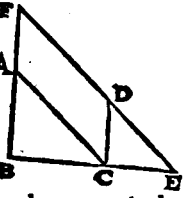
THEOREME 4. PROP. 4.

Des triangles equiangles, les costez qui sont autour des angles egaux sont proportionaux: Et les costez qui soustiennent les angles egaux sont homologues, ou de mesme raison.

Soient les triangles equiangles A B C, D E C, c'est à dire que les angles A B C, D C E, soient egaux, & A, & D: semblablement A C B, & E. Ie dis que comme le costé A B, est à B C, ainsi D C, à C E, & comme B C, à C A, ainsi C E, à E D: Et finalement comme A B, à A C, ainsi D C, à D E; Car ainsi les costez à l'entour des angles egaux sont proportionaux; & les costez qui soustiénent les angles egaux sont homologues, ou de mesme raison, c'est à dire que tout les antecedents sont opposez à angles egaux, & les conse-

quents pareillement.

Soient constituez B C, C E, en ligne droicte, en sorte que l'angle externe D C E, soit egal à l'interne A B C; Pareillement l'externe A C B, egal à l'interne D E C; & d'autant que les deux angles A B C, A C B, sont moindres que deux droicts, mais D E C, est egal à A C B, les deux angles B, & E, seront moindres que deux droicts [b] parquoy B A, E D, prolongees de la part de A, & D, se rencontreront. Soient donc icelles prolongées, & se rencontrent au poinct F. Mais d'autant que l'angle externe D C E, est egal à l'interne & oppose A B C; [c] C D, B F, seront paralleles, & par mesme raison C A, E F, aussi paralleles, l'angle externe A C B, estant egal à l'interne D E C: Donc A C D F, est parallelogramme, [d] partant A F, egale à C D, & C A, à D F; Donc d'autant qu'au triangle B E F, la ligne A C, est parallele à E F, [e] A B, sera à A F, c'est à dire à D C, son egale: Comme B C, à C E; [f] Donc en changeant comme A B, à B C, ainsi D C, à C E. Derechef puis qu'au mesme triangle B E F, la ligne C D, est parallele au costé B F, [g] comme B C, sera à C E, ainsi F D, c'est à dire C A, (qui est egale à F D) à E D. [h] Donc en changeant comme B C, à C A, ainsi C E, à E D; partant puis que comme A B, à B C, ainsi D C, à C E, & comme B C, à C A, ainsi C E, à E D: [i] en raison egale A B, sera à C A, comme D C, à E D: ce qui est proposé. Donc des triangles equiangles, &c. Ce qu'il falloit demonstrer.



a 17. 1.
b 13. com. s.
c 28.
d 34. 1.
e 2. 6.
f 16. 5.
g 2. 6.
h 16. 5.
i 22. 5

COROLLAIRE.

D'icy il s'enſuit, que ſi en vn triangle on mene vne ligne parallele' à vn des coſtez, elle oſtera vn triangle ſemblable au tout: Cõme au triangle F B E, où la ligne C D, eſt menee parallele à B F. Ie dis que le triangle D C E, eſt ſemblable au triangle F B E; Car iceux ſont equiangles[k] puis que les angles E D C, E C D, ſont egaux aux externes F, & B, chacun au ſien, & l'angle E, commun: l partant comme il eſt demonſtré, ils ont les coſtez au tour des angles egaux proportionnaux: Donc ſelon la definition ils ſont ſemblables.

k 29. 1.

l 4. 6.

SCHOLIE.

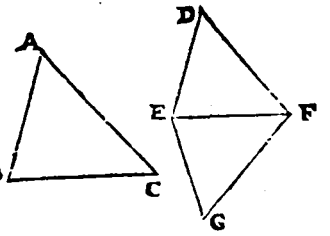
Henrion a obmis ce corollaire, ce qu'il ne deuoit faire, attendu qu'il s'en ſert aux demonſtrations, & le cite, tant à la 4. propoſition du 15. liure qu'autres propoſitions, & ce faiſant il confirme ſes demonſtrations par des choſes qu'il n'a demonſtrees.

THEOREME 5. PROP. 5.

Si deux triangles ont les coſtez proportionaux, iceux triangles ſeront equiangles, & auront les angles egaux, ſous leſquels les coſtez de meſme raiſon ſont ſouſtendus.

Soient deux triangles A B C, D E F, qui ayent les coſtez proportionaux: & ſoit A B, à B C, comme D E, à E F, & comme B C, à C A, ainſi E F, à F D, & finalement comme A B, à A C, ainſi D E, à D F. Ie dis que ces triangles ſont

equiangles ; à sçauoir que l'angle A, est egal à l'angle D, & l'angle B, à l'angle E, & l'angle C, à l'angle F: ainsi les costez homologues ou de mesme raison sont opposez aux angles egaux.



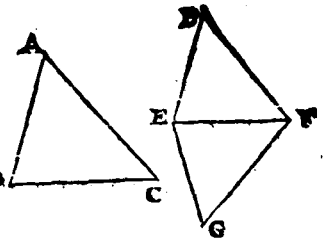
Car soit fait l'angle FEG, egal à l'angle B, & E F G, egal à C, les 2. lignes EG, FG, se rencõtrerõt au poinct G: Et a l'autre angle G, sera egal à l'autre angle A; Dõc les triãgles ABC, GEF, sont equiãgles: b Partant comme A B, à B C, ainsi G E, à E F: mais comme A B, à B C, ainsi D E, à E F, par l'hipotheſe; c Donc comme G E, à E F, ainsi D E, à la mesme E F: d parquoy G E, D E, seront egales. Derechef e puis que B C, est à C A, comme E F, à F G, f mais comme B C, à C A, ainsi E F, à F D, par l'hypotheſe; Comme E F, sera à F G, ainsi la mesme E F. sera à F D, g donc F G, & F D, seront egales; Partant puis que les costez G E, G F, sont egaux aux costez D E, D F, chacun au sien, & la baſe E F, h cõmune les angles G, & D, seront egaux; i Donc les autres angles G E F, G F E, seront egaux aux autres D E F, D F E, chacun au sien. Parquoy puis que l'angle G, est egal à l'angle A, aussi D, son egal sera egal à A, par mesme raison D E F, egal à B, & D F E, egal à C. Ce qui est proposé. Donc si deux triangles, & c. Ce qu'il falloit demonstrer.

a 32. 1.
b 4. 6.
c 11. 5.
d 9 5.
e 4. 6.
f 11. 5.
g 9. 5.
h 8. 1.
i 4. 1.

vj THEOREME 6. PROP. 6.

Si deux triangles ont vn angle egal à vn angle, & les costez autour d'iceux angles egaux proportionaux, iceux triangles seront equiangles, & auront les angles egaux, sous lesquels les costez de mesme raison sont soustendus.

Soit l'angle B, du triangle A B C, egal à l'angle E, du triangle D E F: & soient les costez A B, B C, proportionaux aux costez D E, E F, c'est à dire soit A B, à B C, comme D E, à E F. Ie dis que les autres angles sont egaux aux autres angles, sçauoir l'angle A, egal à l'angle D, & l'angle C, à l'angle F: ainsi les angles egaux sont opposez aux costez homologues ou de mesme raison.



Car soit fait l'angle F E G, egal à B, & E F G, egal à C, le triangle G E F, sera equiangle au triangle A B C, comme il est monstré en la precedente proposition: [a] Partant comme A B, à B C, ainsi G E, à E F: mais comme A B, à B C, ainsi D E, à E F, par l'hypothese: [b] Donc comme D E, à E F, ainsi G E, à la mesme E F; [c] Doc D E, G E, seront egales, par quoy puis que les costez D E, E F, sont egaux aux costez G E, E F, & les angles contenus d'iceux aussi egaux (car l'angle B, au-

a 4. 6.
b 11. 5.
c 9. 5.

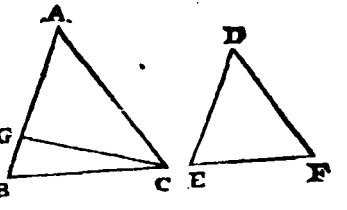
quel l'angle G E F, eſt faict egal, eſt egal à D E F, par l'hypotheſe, dõc les deux angles au poinct E, d 4.n
ſeront egaux) d les autres angles D, & E F D, ſeront egaux aux autres G, & E F G. Donc puis que l'angle G, eſt egal à l'angle A, & E F G, egal à C; les angles D, & E F D, ſeront auſſi egaux aux angles A, & C, & partant les triangles A B C, D E F, ſeront equiangles, ce qui eſt propoſé. Donc ſi deux triangles, & c. Ce qu'il falloit demonſtrer.

THEOREME 7. PROP. 7. vij

Si deux triangles ont vn angle egal à vn angle, & à l'entour d'vn autre angle les coſtez proportionnaux; Mais des autres enſemble l'vn & l'autre ſoit moindre, ou non moindre qu'vn droict: les triangles ſeront equiangles, & auront les angles egaux à l'entour deſquels les coſtez ſont proportionaux.

Soit l'angle A. du triangle A B C, egal à l'angle D, du triangle D E F, & les coſtez A C, C B, à l'entour de l'angle A C B, proportionaux à D F F E, à l'entour de l'angle F, c'eſt à dire, ſoit A C, à C B, comme D F, à F E, à telle condition toutesfois, que chacun des autres angles B, & E, ſoit moindre qu'vn droict ou non moindre. Ie dis qu'iceux triangles ſont equiangles, à ſçauoir que les angles A C B, & F, à l'entour deſquels les coſtez ſont proportionaux, & les angles B, & E, ſont egaux.

Car ſoit premierement tant B, que E, moindre qu'vn droit: cela eſtant, ſi les angles A C B, & F ne ſont egaux,



a 32. 1. ſoit A C B, plus grand que F, & ſoit faict A C G, egal à F: Donc puis que A, eſt poſé egal à D, a l'au-
b 4. 6. tre angle A G C, ſera egal à E: Partant les triangles A G C, D E F, ſeront equiangles. b Parquoy comme A C, ſera à C G, ainſi D F, à E F: mais
c 11. 5. comme D F, à F E, ainſi A C, à C B, par l'hypo-
d 9. 5. theſe: c Donc comme A C, à C G, ainſi la meſ-
e 5. 1. me A C, à C B: Et d partant C G, C B, ſeront
f 13. 1. egales, e & les angles C B G, C G B, ſeront egaux. Donc puis que l'angle B. eſt poſé moindre qu'vn droict, C G B, ſera auſſi moindre qu'vn droict, & partant A G C, ſera plus grand qu'vn droict; f Puis que A G C, C G B, ſont egaux à deux droicts: Or l'angle A G C, eſt monſtré egal à l'angle E. Donc l'angle E, ſera auſſi plus grand qu'vn droict: Mais il eſt moindre qu'vn droict par l'hypotheſe. Ce qui eſt impoſſible.

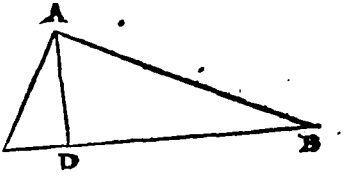
Secondement ſoit tant l'angle B, que E, non moindre qu'vn droict; Comme auparauant l'angle B, ſera egal à C G B, & partant C G B, ſera non moindre qu'vn droict; & par ainſi les angles C B G, C G B, au triangle B C G, ne ſeront pas moindre que deux droicts: mais plus grands ou egaux à deux droicts, ce qui eſt abſurde: g Car ils
g 17. 1. ſont moindres que deux droicts, donc les angles
h 32. 1. A C B, & F, ne ſont pas inegaux: mais egaux, & partant h les autres angles B, & E, ſont egaux: Ce

qui eſt propoſé: Donc ſi deux triangles, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.

THEOREME 8. PROP. 8. viij

Si au triangle rectangle, l'on meine vne ligne perpendiculaire de l'angle droict, ſur la baſe, les triangles qui ſont de part & d'autre de la perpendiculaire ſont ſemblables au tout & entr'eux.

Au triangle A B C, l'angle B A C, ſoit droict, duquel ſoit menee la perpendiculaire A D, ſur la baſe C B. Ie dis que les triangles A D B, A D C, ſont ſemblables à tout le triangle A B C, & entr'eux.



Car puis qu'aux triãgles A B C, D B A, les angles B A C & A D B, ſont droicts, & l'angle B, commun; [a] Les autres A C B, & D A B, ſeront egaux. Donc le triangle D B A, eſt equiangle au triangle A B C, [b] & partant ils auront les coſtez à l'entour des angles egaux proportionnaux & c. C'eſt à dire, que C B, ſera à B A, cõme B A, à B D; Et comme B A, à A C, ainſi B D, à D A: & comme B C, à C A, ainſi B A, à A D, car ainſi les coſtez de meſme raiſon ſont oppoſez aux angles egaux, comme veut la 4. prop. de ce liure. Parquoy le triangle A D B, eſt ſemblable à tout le triangle A B C. Par meſme raiſon on monſtrera que le triangle A D C, eſt ſemblable au

[a] 32. 1.
[b] 4. 6.

meſme triangle A B C: Car les angles B A C, & A D C, ſont droicts, & l'angle C, commun;
c 32. 1. c Partant les autres angles A B C, & C A D, ſont
d 4. 6. egaux, d parquoy comme B C, à C A, ainſi C A, à C D, & comme C A, à A B, ainſi C D, à D A, & comme C B, à B A, ainſi C A, à A D: Car ainſi les coſtez de meſme raiſon ſont oppoſez aux angles egaux, par la 4. propoſitiõ 6. Tout de meſme l'on demonſtrera que les triangles A D B, A D C, ſont ſemblables entr'eux; Puis que les angles A D B, A D C, ſont droicts, & A B D, C A D, ſont monſtrez egaux, & auſſi les angles B A D, A C D,
e 4. 6. egaux: e Et partant comme B D, à D A, ainſi D A, à D C; & comme D A, à A B, ainſi D C, à C A, & comme A B, à B D, ainſi C A, à A D. Donc ſi au triangle rectangle l'on mene vne ligne perpendiculaire, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.

COROLLAIRE.

De ceſte propoſition il eſt euident que la perpendiculaire menee de l'angle droict ſur la baſe, au triangle rectangle, eſt moyenne proportionelle entre les deux ſegments de la baſe: Semblablement vn chacun des coſtez qui contiennent l'angle droit, eſt moyen proportionel entre toute la baſe, & le ſegment de la baſe qui eſt adiacent ou touche iceluy coſté.

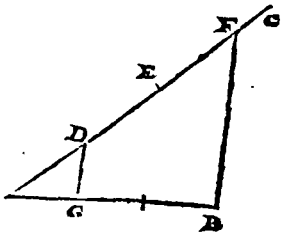
Car il eſt demonſtré que comme B D, eſt à D A, ainſi D A, eſt à D C, & partant D A, eſt moyẽne proportionelle entre B D, & C D: Semblablement comme C B, eſt à B A, ainſi B A, à B D; & par ainſi B A, eſt moyenne proportionelle entre C B, B D: Finalement il eſt monſtré

que comme B C, eſt à C A, ainſi C A, eſt à C D; Et partant C A, eſt moyenne proportionelle entre B C, C D. Ce qui eſt propoſé.

PROBLEME 1. PROP. 9.

D'vne ligne droicte donnee en oſter vne partie demandee.

Soit la ligne droicte donnee A B, de laquelle il faut oſter la tierce partie, ou autre telle que l'on voudra.



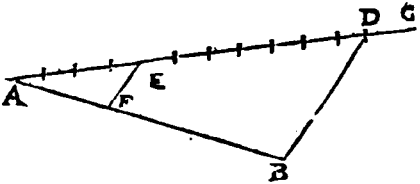
De A, ſoit menee A C, faiſant angle quelconque auec A B, comme C A B; Et de A C, ſoient priſes autant de parties egales, de telle grãdeur qu'on voudra, que la partie à ſouſtraire denote, (car A C, doit eſtre auſſi grande qu'il ſera de beſoin) comme en l'exemple propoſé il faut prendre trois parties egales A D, D E, E F: puis ſoit conioincte F B, à laquelle par le poinct D, ſoit menee D G, parallele à F B; Ie dis que A G, eſt la troiſieſme partie demandee de A B.

Car puis qu'au triangle A B F, D G, eſt parallele au coſté F B: [a] comme F D, à D A, ainſi B G, à G A, [b] donc en compoſant comme F A, à D A, ainſi B A, à G A: mais F A. eſt triple de A D, par la conſtruction: Donc B A, ſera auſſi triple de A G: & partant A G, ſera la tierce partie demandee de A B. Donc d'vne ligne droicte donnee; &c. Ce qu'il falloit faire.

[a] 2. 6.
[b] 18. 5.

SCHOLIE.

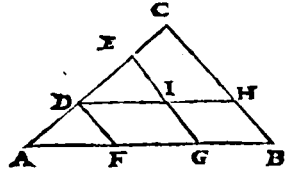
Mais si de A B, on vouloit oster vne partie nõ aliquote, mais vne partie qui en cõtiẽne plusieurs lesquels ne font vne partie aliquote, comme $\frac{4}{11}$ de A B; Il faudra prendre 11. parties egales en A C, cõme iusques à D, & ayant mené D B, faut mener E F, parallele à icelle, du poinct E, terme des 4. parties A E, la ligne A F, sera la partie requise: Car derechef comme D A, à A E, ainsi B A, à A F; Et par conuersion de raison comme A E, à A D, ainsi A F, à A B: mais A E, est $\frac{4}{11}$ de A D, par la construction, donc A F, sera mesme partie de A B. Ce qui est proposé: Semblablement on ostera quelconque autre partie, non aliquote, &c.



PROBLEME 2. PROP. 10.

Coupper vne ligne droicte donnee non couppee: semblablement à vne ligne droicte donnee & couppee.

Soit la ligne droicte A B, qu'il faut coupper, semblablemẽt cõme la ligne droicte A C, est couppee aux poincts D, & E, c'est à dire en partie proportionelle aux parties A D, D E, E F, soient conioinctes les deux



lignes donnees au poinct A, faisant angle quelconque B A C, & soit conioincte la ligne droicte B C, puis de D, & E, soient menees D F, E G, paralleles à B C. Ie dis que A B, est couppee semblablement à F, & G, comme A C, est couppee par D, E: a C'est à dire comme A D, à D E, ainsi A F, à F G. Donc les parties A F, F G, sont proportionelles à A D, D E. Que si on mene D H, parallele à F B, couppant E G, au poinct I: b Derechef comme D E, sera à E C, ainsi D I, à I H, c'est à dire ainsi F G, à G B; c D'autant que F G, est egale à D I, & G B, à I H, parquoy les parties F G, G B, seront aussi proportionelles à D E, E C, Et est la mesme raison s'il y auoit d'auantage de parties, &c. Partant nous auons couppé, &c. Ce qu'il falloit faire.

a 2. 6.
b 2. 6.
c 34. 1.

SCHOLIE.

Par ce probleme on diuisera vne ligne en tant de parties egales que l'on voudra: comme si on vouloit diuiser A B, en 11. parties egales, soit menee A C, faisant angle auec A B, & en A C, soient prises 11. parties egales, sçauoir A D, & menee D B, puis de tous les poincts de diuision, soient menees sur A B, des lignes paralleles à D B, comme est E F, l'on aura le requis, voyez la figure du scholie precedent.

PROBLEME 3. PROP. 11.

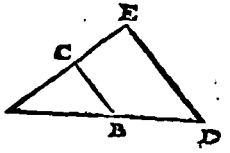
xj.

A deux lignes droictes donnees, trouuer la troisiesme proportionelle.

Soient deux lignes droictes A B, AC, disposees en sorte qu'elles facent angle quelconque A, aus-

quelles il faut trouuer la troisiéme proportionelle c'est à dire cõme AB, est à AC, ainsi AC, soit à vne 3.

Soit prolongee AB, posee antecedente, à D, & soit prise BD, egale à AC, consequente ou moyenne; puis ayant mené BC, par D, soit menee DE, parallele à BC, rencontrant AC, prolongee à E. Ie dis que CE, est la troisiesme proportionelle, c'est à dire que comme AB, est à AC, ainsi AC, à CE.



Car puis qu'au triangle ADE, BC, est parallele à DE, [a] Comme AB, sera à BD, ainsi AC, sera à CE: [b] mais cõme AB, à BD: Ainsi la mesme AB, à AC, egale à BD; Donc comme AB, à AC, ainsi AC, à CE, ce qui est proposé. Donc à deux lignes droictes, &c. Ce qu'il falloit faire.

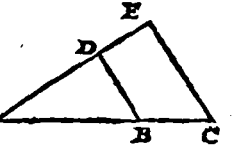
a 2. 6.
b 7. 5.

xij

PROBLEME 4. PROP. 12.

A trois lignes droictes donnees, trouuer la quatriesme proportionelle.

Soient les trois lignes droictes donnees AB, BC, AD, ausquelles il faut trouuer la quatriesme proportionelle; sçauoir comme AB, à BC, ainsi AD, à la quatriesme. Soient disposees les deux premieres selon vne ligne droicte, laquelle soit AC: Mais la troisiesme AD, auec la premiere AB, face vn angle quelconque A, puis soit conioincte BD, à laquelle par C, soit menee CE, parallele rencontrant

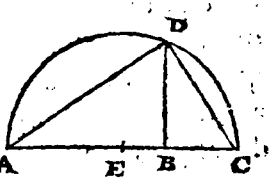


trant AD, prolongee AE. Ie dis que DE, est la quatriesme proportionelle.

Car puis qu'au triangle ACE, BD, est menee parallele au costé CE, a comme AB, sera à BC, ainsi AD, à DE: Partant DE, est la quatriesme proportionelle; Parquoy à trois lignes droictes donnees, &c. Ce qu'il falloit faire. a 2. 6

PROBLEME 5. PROP. 13. ix

A deux lignes droictes donnees, trouuer la moyenne proportionelle.



Soient deux lignes droictes AB, BC, ausquelles il faut trouuer la moyenne proportionelle. Estant disposees selon la ligne droicte AC: soit diuisee AC, en deux egalement au poinct E, & du poinct E, comme centre à l'interualle EA, ou EC, soit descrit le demy cercle ADC: puis du poinct B, à AC, soit menee la perpendiculaire BD, iusques à la circonference à D. Ie dis que BD, est moyenne proportionelle entre AB, BC.

Car ayant mené AD, CD, a l'angle ADC, sera droict au demy cercle: & puis que de l'angle droict du triangle rectangle ADC, la perpendiculaire DB, est menee sur la base AC, icelle BD, sera moyenne b proportionelle entre AB, BC. Donc à deux lignes droictes, &c. Ce qu'il falloit faire. a 31. 3 b coroll. 8. 6

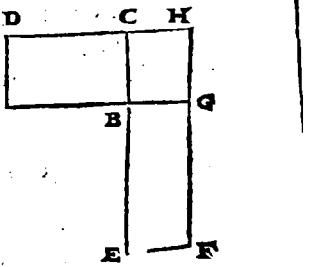
SCHOLIE.

Par ceſte demonſtration il eſt manifeſte que la ligne droicte menee de quelconque poinct du diametre du cercle à la circonference, perpendiculaire à iceluy diametre, eſt moyenne proportionelle entre les ſegments du diametre faicts par la perpendiculaire: Car il ſera ſemblablement demonſtré, ayant mené les lignes des extremitez du diametre au poinct de la circonference, d'où eſt menee la perpendiculaire.

xiij

THEOREME 9. PROP. 14.

Les coſtez qui ſont autour des angles egaux, des parallelogrammes egaux qui ont vn angle egal à vn angle, ſont reciproques: Et les parallelogrammes qui ont vn angle egal à vn angle, & les coſtez autour des angles egaux reciproques, ſont egaux.



Soient deux parallelogrammes egaux A C, B F, ayant les angles A B C, E B G, egaux. Ie dis que les coſtez d'alentour d'iceux angles ſont reciproques, c'eſt à dire, comme A B, à B G, ainſi E B à B C; Car ſoient coniоincts iceux parallelogrammes ſelon les angles egaux: de ſorte que A B, B G, facent vne ligne droicte; E B, B C, [a] feront auſſi vne ligne droicte comme il eſt euident: & Soient prolongees D C, F G, iuſqu'à ce qu'elles ſe rencontrent à H; D'autant donc

a 2. c.ſ. 13. & 14. 1.

que les parallelogrammes DB, BF, ſont egaux; [a] 27. 5.
[a] Comme DB, ſera à BH, ainſi BF, au meſme BH: mais comme DB, à BH, [b] ainſi la baſe AB, à la baſe BG. D'autant que les parallelogrammes ſont de meſme hauteur; ſemblablement comme BF, à BH, ainſi la baſe EB, à la baſe BC. [c] Donc comme AB, à BG, ainſi EB, à BC. Ce qui eſt propoſé. [b] 1. 6. [c] 11. 5.

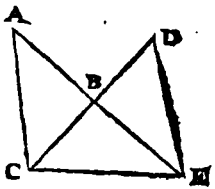
Au contraire ſoient les coſtez à l'entour des ſuſdicts angles egaux reciproques, ſçauoir comme AB, à BG, ainſi EB, à BC. Ie dis que les parallelogrammes DB, BF, ſont egaux.

Soit faict la meſme conſtruction. Puis que AB, eſt à BG, comme EB, à BC: [d] mais comme AB, à BG, ainſi DB, à BH, & comme EB, à BC, ainſi BF, au meſme BH, [e] pareillement DB, ſera à BH, comme BF, au meſme BH; [f] Et partant les parallelogrammes DB, BF, ſeront egaux. Donc les coſtez, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer. [d] 1. 6. [e] 11. 5. [f] 9. 5.

THEOREME 10. PROP. 15. xiv

Les coſtez qui ſont autour des angles egaux des triangles egaux & qui ont vn angle egal à vn angle, ſont reciproques: Et les triangles qui ont vn angle egal à vn angle, & les coſtez qui ſont autour des angles egaux reciproques, ſont egaux.

Soient deux triangles egaux ABC, DBE, ayant les angles au poinct B, egaux. Ie dis que les coſtez qui ſont à l'entour d'iceux angles ſont reciproques; C'eſt à dire, com-



me AB, à BE, ainsi DB, à BC.

Soient cõioincts iceux selon les angles egaux, de sorte que AB, BE, facent vne ligne droicte, cela estant DB, BE, feront aussi vne ligne droicte, comme il est dict à la precedente: & soit menee CE, ; D'autant que les triangles ABC, DBE, sont egaux, [a] comme ABC, sera à BCE, ainsi
a 7. 5. DBC, au mesme BCE: mais comme le triangle ABC, au triangle BCE, [b] ainsi la base AB, à la ba-
b 1. 6. se BE, estant iceux de mesme hauteur, & semblablement comme DBE, à BCE, ainsi est la base
c 11. 5. DB, à la base BC, : [c] Donc comme AB, à BE, ainsi DB, à BC. Ce qui est proposé.

Maintenant soient les costez autour des angles egaux au poinct B, reciproques, à sçauoir, comme AB, à BE: ainsi DB, à BC. Ie dis que les triangles ABC, DBE, sont egaux.

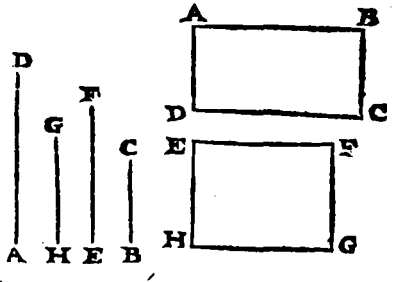
Soit faicte la mesme construction: D'autant que comme AB, est à BE, ainsi DB, à BC: mais
1. 6. comme AB, à BE, [d] ainsi le triangle ABC, au triangle BCE, & comme DB, à BC, ainsi le triã-
e 11. 5. gle DBE, au mesme triangle BCE, [e] Donc comme ABC, est à BCE, ainsi DBE, sera au mesme
f 9. 5. BCE, & partant les triangles ABC, DBE, seront egaux. Donc les costez qui sont autour des angles, &c. Ce qu'il falloit demonstrer.

XV

THEOREME 11. PROP. 16.

Si quatre lignes droictes sont proportionelles le rectangle contenu sous les extrémes, est egal au rectangle contenu sous les moyennes: Et si le rectangle contenu

ſous les extrémes eſt egal au rectangle contenu ſous les moyennes; Icelles quatre lignes droictes ſeront proportionelles.



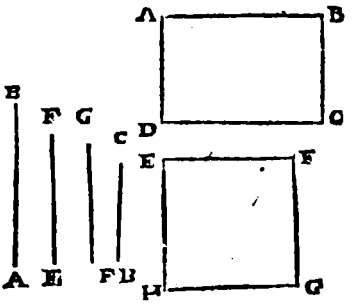
Soient les quatre lignes droictes AB, FG, EF, BC, proportionelles, à ſçauoir comme AB, à FG, ainſi EF, à BC: & ſoit le rectangle AC, contenu ſous les extrémes AB, BC, & le rectangle EG, contenu ſous les moyennes EF, FG. Ie dis qu'iceux rectangles AC, EG, ſont egaux: Car puis que les angles B, & F, ſont egaux eſtant droicts, & que AB, eſt à FG, comme EF, à BC, les coſtez qui ſont autour des angles egaux B, & F, ſeront reciproques: [a] Partant les parallelogrammes AC, EG, ſeront egaux. Ce qui eſt propoſé. [a] 14. 6.

Au cõtraire ſoiẽt les rectangles AC, EG, egaux. Ie dis que les quatre lignes AB, FG, EF, BC, ſont proportionelles, ſçauoir comme AB, à FG, ainſi EF, à BC.

Car puis que les rectangles AC, EG, ſont egaux, ayant les angles B, & F, egaux, ſçauoir droicts, les coſtez qui ſont autour d'iceux angles ſeront reciproques; à ſçauoir, comme AB, à FG, ainſi EF, à BC: partant ſi quatre lignes droictes, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer. [b] 14. 9.

xvj THEOREME 12. PROP. 17.

Si trois lignes droictes ſont proportionelles: le rectangle contenu ſous les extrémes eſt egal au quarré de la moyenne; Et ſi le rectangle contenu ſous les extrémes eſt egal au quarré de la moyenne; les trois lignes droictes ſeront proportionelles.



Soient trois lignes droictes proportionelles, AB, EF, BC: ſçauoir, comme AB à EF, ainſi EF, à BC: & ſoit le rectangle AC, contenu ſous les extrémes AB, BC, & le quarré de la moyenne EF, ſoit EFGH. Ie dis que le rectangle AC, & le quarré EG, ſont egaux.

Car ſoit priſe la ligne FG, egale à EF: les quatre lignes droictes AB, EF, FG, BC, ſeront proportionelles: à ſçauoir, comme AB, à EF, ainſi FG, à BC; Et le quarré EG, ſera contenu ſous les moyennes EF, FG, eſtant EF, FG, egales: [a] Parquoy le rectangle AC, contenu ſous les extrémes AB, BC, eſt egal au quarré EG, c'eſt à dire au rectangle contenu ſous les moyennes EF, FG. Ce qui eſt propoſé.

a 16. 6.

Mais ſoient egaux le rectangle AC, & le quarré EG. Ie dis que comme AB, eſt à EF, ainſi, EF,

eſt à BC: Car les rectangles AC, EG, eſtant egaux; Comme AB, ſera à EF, ainſi FG, à BC: [b] Mais comme FG, à BC, ainſi EF, egale à icelle FG, eſt à la meſme BC: Partant comme AB, à EF, ainſi EF, à BC. Donc ſi trois lignes droictes, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.

[b] 16. 6.
[c] 7. 5.

COROLLAIRE.

De la derniere partie de ce theoreme, il s'enſuit que toute ligne droicte eſt moyenne proportionelle entre deux autres quelconques lignes droictes, qui contiennent vn rectangle egal au quarré d'icelles: Car de ce que les droictes lignes AB, BC, contiennent vn rectangle egal au quarré de la droicte ligne EF, il a eſté monſtré que comme AB, eſt à EF, ainſi EE, eſt à BC. Parquoy EF, eſt moyenne proportionelle entre AB, BC.

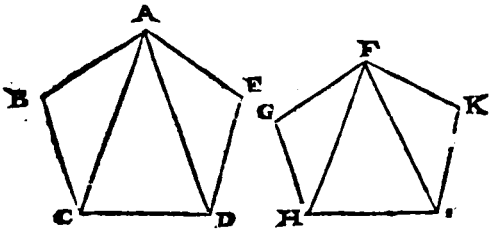
PROBLEME 6. PROP. 18.

xix

Sur vne ligne droicte donnee, deſcrire vne figure rectiligne ſemblable, & ſemblablemẽt poſée à vne figure rectiligne dõnée.

Soit la ligne droicte donnee AB, ſur laquelle il faut deſcrire vne figure rectiligne ſemblable, & ſemblablement poſee à la figure rectiligne CDEFG. De quel angle qu'on voudra comme de F, ſoient menees à chacun des angles oppoſez, les lignes droictes FC, FD, leſquelles diuiſent le rectiligne en trois triangles CDF, DEF, FGC: Puis ſoit faict l'angle BAI, egal à l'angle DCF: & l'angle ABI, egal à CDF; Or AI, BI, ſe rencontreront à I, eſtant les angles IAB,

I B, A, moindres que 2. droicts, eſtant



a 17. 1.
b 32. 1.

faicts egaux à FCD, FDC, a (qui ſont moindres
c 17. 1. que 2. droicts) b Et l'autre AIB, ſera egal à l'autre CFD, & le triangle AIB, equiangle au triangle CFD. Derechef l'angle IBH, ſoit faict egal à FDE; & BIH, egal à DFE. c D'autant que les deux angles EDF, EFD, ſont moindres que 2. droicts, les deux HBI, HIB, egaux à iceux ſeront pareillement moindres que deux droicts; Et partant BH, IH, ſe rencontreront au poinct H, & le triãgle BHI, ſera equiangle au triangle DEF, par la meſme raiſon. D'auantage ſoit faict le triangle AIK, equiangle au triangle CFG, par meſme raiſon; & ainſi des autres, s'il y a d'auantage de triangles. Ie dis que le rectiligne ACHIk, eſt ſemblable, & ſemblablement poſé au rectiligne CDEFG: Car puis que l'angle IAB, eſt, faict egal à FCD, & IAK, à FCG, le tout BAK, ſera egal à DCG: Et par meſme raiſon ABH, eſt egal à CDE, & les autres egaux aux autres cõme il appert par la conſtruction, puis chacune
d 4. 6. partie de l'vn eſt faicte egale à chacune des par-
f 22. 5. ties de l'autre: partant le rectiligne ABHIK, ſera equiãgle à CDEFH: d Or d'autant que comme AB, eſt à BI, ainſi CD, à DF, & comme BI, à BH, ainſi DF, à DE: f en raiſon egale AB, ſera à BH,

comme CD, à DE, partant les coſtez autour des angles egaux A B H, C D E, ſont proportionaux: [g] Tout de meſme, les coſtez autour des angles egaux E, & H, ſont proportionaux à cauſe des triangles B H I, D E F, equiangles. [h] Derechef H I, eſt à I B, comme E F, à F D, & I B, à I A, comme F D, à F C, & I A, à I K, comme F C, à F G: [i] Donc en raiſon egale H I, ſera à I K, comme E F, à F G: Parquoy les coſtez autour des angles egaux H I K, E F G, ſont proportionaux, & ainſi des autres; Partant puis que les rectilignes ſont equiangles & les coſtez autour des angles egaux proportionaux; ils ſont ſemblables, & ſemblablement deſcrits: Donc ſur vne ligne droicte, &c. Ce qu'il falloit faire.

g 4. 6.

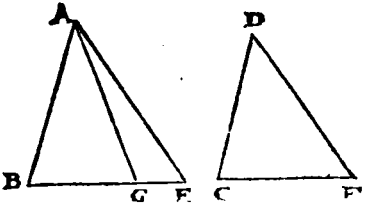
h 4. 6.

i 22. 5.

xvij

THEOREME 13. PROP. 19.

Les triangles ſemblables, ſont entr'eux en raiſon doublee de leurs coſtez de meſme raiſon.



Soient les triangles ſemblables A B C, D E F, ayant les angles B, & C, egaux. Item C, & F, & cõme A B, à B C, ainſi D E, à E F. Ie dis qu'ils ſont entr'eux en raiſon doublee de leurs coſtez de meſme raiſon B C, & E F, ou A B, D E, ou A C, D F; C'eſt à dire ſi on trouue la troiſieſme proportionelle B G, le triangle A B C, ſera au triangle D E F, comme B C, eſt à B G. Puis que par la 10. definition du 5. la raiſon doublee eſt telle.

a 11. 6. Car[a] ſoit donc BG, troiſieſme proportionelle & ſoit conioincte AG, D'autant que comme AB, eſt à BC, ainſi DE, à EF; en changeant comme AB, ſera à DE, ainſi BC, à EF: mais comme BC, à EF, ainſi EF, à BG, par la conſtruction; b Donc b 11. 5. comme AB, à DE, ainſi EF, à BG: partant puis que les triangles ABG, DEF, ont les coſtez autour des angles egaux B, & E, reciproques; c ils c 15. 6. feront egaux entr'eux: Donc comme le triangle d 7. 5. ABC, ſera au triangle DEF, d ainſi le meſme triangle ABG, ſera au triangle ABG: Mais comme le e 1. 6. triangle ABC, eſt au triangle ABG, e ainſi la baſe BC, à la baſe BG, eſtant de meſme hauteur. Donc comme le triangle ABC, eſt au triangle DEF, ainſi BC, eſt à BG: Or puis que les trois lignes BC, EF, BG, ſont continuellement proportionelles, la raiſon de la premiere BC, à la 3. BG, ſera dicte doublee de la raiſon de BC, premiere à EF, 2. Donc auſſi le triangle ABC, ſera au triangle DEF, en raiſon doublee du coſté BC, au coſté EF. Donc les triangles ſemblables, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.

COROLLAIRE.

Il eſt manifeſte de ceſte demonſtration, que s'il y a trois droictes lignes proportionelles, comme la premiere ſera à la troiſieſme, ainſi le triangle deſcrit ſur la premiere ſera au triangle ſemblable, & ſemblablement deſcrit ſur la ſeconde: Ayant eſté demonſtré que comme BC, eſt à BG, ainſi ABC, à DEF.

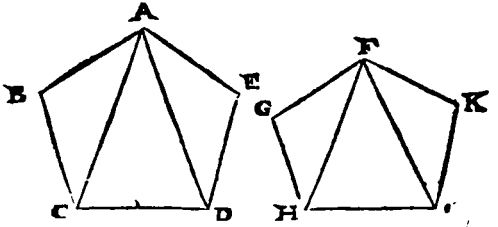
xviij

THEOREME 14. PROP. 20.

Les polygones ſemblables ſe diuiſent

en nombre egal de triangles ſemblables, & proportionaux à leurs touts: Et les poligones ſont l'vn à l'autre en raiſon doublee de leurs coſtez de meſme raiſon.

Soient les polygones ABCDE, FGHIK, ayant les angles egaux BAE, GFH: Item les angles B, & G, & ainſi de ſuitte, & qu'ils ayent auſſi les coſtez proportionaux à l'entour d'iceux angles, ſçauoir eſt, comme AB, à BC, ainſi FG, à GH; & coõme BC, à CD, ainſi GH, à HI, &c. Ie dis premierement que ces polygones ſe peuuent diuiſer en nombre egal de triangles ſemblables.



Car des angles A, & F, ſoient menees AC, AD FH, FI, aux angles oppoſez C, D, H, I, ils ſeront diuiſez en nombre egal de triangles: Et d'autant que les angles B, & G, ſont poſez egaux, & les coſtez autour d'iceux proportionaux, [a] les triangles ABC, FGH, ſeront equiangles, ayant les angles BAC, GFH, & BCA, GHF, oppoſez aux coſtez homologues egaux: [b] Et partant auront les coſtez autour des angles egaux proportionaux, & par ainſi ſeront ſemblables par meſme raiſon, les triangles AED, FKI, ſeront ſẽblables, ayant les angles EAD, KFI, & ADE, FIK, egaux: Et d'auantage, [c] puis que comme AC, à CB, ainſi

a 6. 6.

b 4. 6.

c 4. 6.

FH, à HG, à cauſe de la ſimilitude des triangles ABC, FGH; Mais comme BC, à CD, ainſi GH, à HI, par l'hypotheſe, pour la ſimilitude des polygones[d] en raiſon egale comme AC, à CD, ainſi FH, à HI: Et d'autant que l'angle BCD, eſt poſé egal à GHI: mais le retranché BCA, eſt monſtré egal au retranché GHF, le reſtant ACD, ſera egal au reſtant FHI,[e] partant puis que les triangles ACD, FHI, ont les angles ACD, FHI, egaux & les coſtez autour d'iceux proportionaux: Ils ſeront equiangles; & partant ſemblables, & ainſi des autres, s'il y en a d'auantage.

d 22. 5.
e 6. 6.

Secondement ie dis que ces triangles ſont proportionaux à leurs touts: c'eſt à dire que chacun des triangles en vn des polygones, à telle raiſon à ſon triangle correſpondant en l'autre polygone, que tout le polygone a tout le polygone: Car d'autant que les triangles ABC, FGH, ſont ſemblables, ils ſeront l'vn à l'autre en raiſon doublee de leurs coſtez, de meſme raiſon AC, FH: Et par meſme diſcours les triangles ACD, FHI, ſont en raiſon doublee des meſmes coſtez AC, FH; Parquoy cõme le triangle ABC, eſt au triangle FGH, ainſi le triãgle ACD, ſera au triangle FHI, puis q; la raiſõ de l'vn & l'autre eſt la raiſõ doublee du coſté AC, à FH: ſẽblablement on cõclura que le triangle ADE, eſt au triangle FIK, comme le triangle ACD, au triangle FHI: & ainſi de ſuitte s'il y auoit d'autres triangles. Donc les triangles de l'vn des polygones ſont proportionaux au triangles de l'autre: de ſorte que les triangles de l'vn ſont antecedents des proportions, & les triangles de l'autre conſequents. Or comme vn des antecedents eſt à vn des conſequents,

ainsi tous les antecedents sont à tous les conse- f 12. 5.
quents. Donc comme chacun des triangles d'vn des polygones est à son triangle correspondant de l'autre polygone, ainsi tout le polygone sera à tout le polygone; Partant les triangles seront proportionaux à leurs touts.

Finalement. Ie dis que les polygones sont entr'eux en raiſõ doublee de leurs costez de mesme raison; c'est à dire si aux costez homologues, pour exemple A B, F G, on trouue la troisiesme proportionelle, que le polygone A B C D E, sera au polygone F G H I K, comme la ligne A B, 1. est à la 3. proportionelle trouuee: Car puis que comme le triangle A B C, est au triangle F G H, ainsi le polygone A B C D E, au polygone F G H I K; Mais le triangle A B C, est au triangle F G H, en raison doublee g du costé A B, au costé F G, pareillement h les polygones seront l'vn à l'autre en raison doublee des mesmes costez A B, F G. Donc semblables polygones &c. Ce qu'il falloit demonstrer. g 19. h 11. 5.

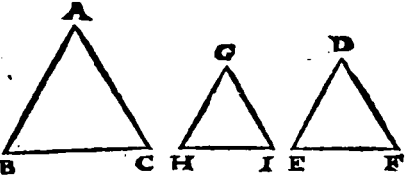
COROLLAIRE.

De cecy il est manifeste, que s'il y a trois lignes propottionelles, comme la premiere sera à la 3. ainsi le polygone descrit sur la premiere, sera au polygone semblable, & semblablement descrit sur la seconde: Ou bien le poligone descrit sur la seconde, sera au polygone semblable, & semblablement descrit sur la troisiesme, comme la premiere est à la troisiesme. Ce qui est euident, ayãt esté demonstré que le polygone est au polygone comme la premiere A B, est à la troisiesme proportionelle.

THEOREME 21. PROP. 21.

xx Les figures rectilignes, semblables à vne mesme figure rectiligne, sont aussi semblables entr'elles.

Soient les figures rectilignes ABC, & DEF, semblables à GHI. Ie dis qu'elles sont semblables entr'elles.



Car puis que les angles de ABC, sont egaux à ceux de[a] GHI, à cause de la similitude, & ceux de DEF, à ceux de GHI, pour la mesme cause; [b] les angles de ABC, seront egaux aux angles de DEF: Derechef à cause de la mesme similitude, les costez de ABC, sont proportionaux à ceux de GHI, sçauoir ceux qui sõt autour des angles egaux. Item les costez de DEF, sont proportionaux aux costez de GHI, pour la mesme cause. [c] Donc les costez de ABC, seront aussi proportionaux, aux costez de DEF, sçauoir ceux qui enuironnent angles egaux; partant selon la definition ABC, & DEF, seront semblables. Donc les figures rectilignes, &c. Ce qu'il falloit demonstrer.

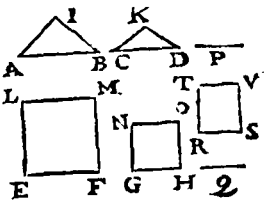
a 1. def. 6.
b 1. 6. f.
c 11. 5.

xxj

THEOREME 19. PROP. 22.

Si quatre lignes droictes sont proportionelles, les figures rectilignes sem-

blables & semblablement descrites sur icelles seront proportionelles : Et si les figures rectilignes semblables & semblablemẽt descrites sur telles lignes droictes, sont proportionelles, icelles lignes droictes seront aussi proportionelles.



Soient premierement quatre droictes lignes AB, CD, EF, GH, proportionelles, sçauoir comme AB, à CD, ainsi EF, à GH, & soiẽt constituees 2. figures rectilignes quelconques sur AB, CD, semblables & semblablement descrites ABI, CDK, pareillement sur EF, GH, soient constituez deux autres rectilignes quelconques EM, GO. Ie dis que ces figures sont proportionelles, à sçauoir comme AIB, à CDK, ainsi EM, à GO.

Car[a] à AB, CD, soit trouuee la troisiesme proportionelle P; & à EF, GH, la troisiesme proportionelle Q. [b] En raison egale comme AB, sera à P, ainsi EF, à Q: mais comme AB, est à P, ainsi [c] le rectiligne ABI, est au rectiligne CDK, semblable & semblablement descrit: par mesme raison comme EF, est à Q, ainsi le rectiligne EM, au rectiligne GO. Donc [d] comme ABI, à CDk, ainsi EM, à GO. Ce qui est proposé.

[a] 11. 6.
[b] 22. 5.
[c] *coroll.* 20. 6.
[d] 11. 5.

Secondement soient les rectilignes ABI, CDK, EM, GO, proportionaux. Ie dis que les quatre lignes droictes AB, CD, EF, GH, sont proportionelles, à sçauoir comme AB, à CD, ainsi EF, à GH.

Car aux trois lignes AB, CD, EF, soit trouuee la quatrieſme proportionelle RS, ſur laquelle ſoit deſcrit le rectiligne RV, ſemblable & ſemblablement poſé au rectiligne EM, & partant au rectiligne GO. D'autant donc que comme AB, à CD, ainſi EF, à RS; pareillement, comme il eſt deſia monſtré, comme ABI, ſera à CDK, ainſi EM, à RV, mais comme ABI, à CDK, ainſi EM, à GO. Donc comme EM, à RV, ainſi EM, à GO, partant RV, GO, ſeront egaux: leſquels eſtant ſemblables & ſemblablement poſez, ils ſeront neceſſairement conſtituez ſur lignes droictes egales RS, GH, comme nous monſtrerons incontinent, partant comme EF, ſera à RS, ainſi EF, à GH. Mais comme EF, eſt à RS, comme AB, à CD, par l'hypotheſe. Donc comme AB, à CD, ainſi EF, à GH. Partant ſi quatre lignes &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.

c 12. 6.
f 21. 6.
g 11. 5.
h 9. 5.
h 7. 5.
i 11. 5.

LEMME.

Or que les rectilignes egaux, ſemblables & ſemblablement deſcrits, comme ſont GO, RV, ſoient conſtituez ſur lignes droictes egales on le monſtrera ainſi: Car ſi GH, RS, ſont inegales, ſoit GH, plus grande. Donc puis qu'à cauſe de la ſimilitude des rectilignes, comme GH, eſt à HO, ainſi RS, à SV, & que GH, eſt poſee plus grãde que RS, pareillement HO ſera plus grãde que SV, & partant le rectiligne GO, plus grand que le rectiligne RV, puis que RU, peut eſtre conſtitué au dedans d'iceluy; Ce qui eſt abſurde eſtant contre l'hypotheſe. Donc GH, RS, ne ſeront pas inegales. Ce qui eſt propoſé.

SCHOLIE

SCHOLIE.

Semblablement, s'il y a trois lignes droictes proportionelles: les rectilignes semblables & semblablement descrits sur icelles seront proportionaux, & c. Car si l'on prend la ligne du milieu & son rectiligne deux fois, l'on aura quatre lignes proportionelles. Donc par mesme moyen quatre rectilignes proportionaux, comme demonstre icy Euclide. Donc puis que ce qui est descrit sur la seconde est egal, voire mesme chose que ce qui est descrit sur la tierce; Ce qui est proposé, est manifeste.

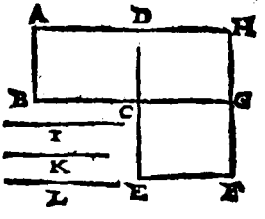
THEOREME 17. PROP. 23.

xxiiij

Les parallelogrammes rectangles, sont l'vn à l'autre en raison composee de celle de leurs costez.

Soient les parallelogrãmes equiangles A C, C F, ayant les angles B C D, E C G, egaux. Ie dis que la raison de A C, à C F, est cõposee de la raison de B C, à C G, & D C, à C E. C'est à dire si on prend trois lignes droictes I, K, L, de sorte que I, soit à K, comme B C, à C G, & K, à L, comme D C, à C E; le parallelogramme A C, sera au parallelogramme C F, comme I, à L, qui est la raison composee de I, à K, & de K, à L, par la 5. definition de ce liure.

Car soient disposez les parallelogrammes selon les angles egaux au poinct C, de sorte que B C, C G, facent vne seule ligne droicte: ce qu'estant ainsi; Puis que les angles B C D, E C G, sont egaux, E C, C



D, feront auſſi vne ligne droicte, comme nous auons dit à la 14. & ſoient prolongees AD, FG, au poinct H, faiſant le parallelogramme CH: Et ſoit priſe quelconque droicte ligne I, & à BC, CG, & I, ſoit [a] trouuee la 4. proportionelle k. Item aux trois DC, CE, & K, la 4. proportionelle L: [b] D'autant donc que comme BC, à CG, ainſi AC, à CH: mais comme BC, à CG, ainſi I, à K, par l'hypotheſe: Pareillement [c] comme AC, à CH, ainſi I, à K, par la meſme raiſon on monſtrera que comme HC, eſt à CF, ainſi K, eſt à L: Car comme DC, à CE, [d] ainſi HC, à CF. Donc puis que K, eſt poſé à L, comme DC, à CE, pareillement HC, ſera à CF, comme K, à L; [e] Donc en raiſon egale AC, ſera à CF, comme I, à L, mais la raiſon de I, à L, eſt compoſee des raiſons de BC, à CG, & DC, à CE, par la 5. definitiõ du 5. Donc la raiſon du parallalelog. AC, au parallelog. CF, eſt compoſee de ces meſmes raiſons. Donc les patallelogrammes equiangles, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.

a 12. 6.
b 1. 6.
c 11. 5.
d 1. 6.
e 22. 5.

SCHOLIE.

Le meſme ſera demonſtré plus briefuement en ceſte maniere, eſtans conioincts les parallelogrammes comme auparauant: D'autant [a] que comme AC, eſt à CH, ainſi BC, à CG, & comme CH, à CF, ainſi DC, à CE; Mais la raiſon de AC, à CF eſt cõpoſee des raiſons entremoyennes AC, à CH, & CH, à CF, par la definition, la meſme raiſon de AC, à CF, ſera auſſi compoſee des raiſons de BC, à CG, & de DC, à CE, leſquelles ſont egales à icelles moyennes. Ce qui eſt propoſé.

a

Nous adiousterons icy quelques theoremes, assez vtiles pris de Commandin.

I.

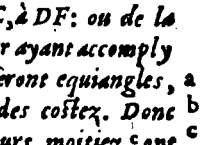
Les triangles qui ont vn angle egal, à vn angle, sont en raison composee des costez qui contiennent l'angle egal.

Soient les triangles ABC, DEF, ayans l'angle C, egal à F. Ie dis que la raison de ABC, à DEF, est composee des costez, c'est à dire de la raison de BC, à EF, & de AC, à DF: ou de la raison de BC, à DF, & de AC, à EF. Car ayant accomply les parallelogrammes CG, FH: ils seront equiangles, a partant leur raison sera composee b des costez. Donc puis que les triangles ABC, DEF, leurs moitiez c ont mesme raison qu'iceux: La raison de ABC, à DEE, sera aussi composee des raisons des costez BC, AC, aux costez EF, DF. a 23. 6. b 34. 1. c 15. 5.

2.

Composer vne raison de deux, ou de plusieurs raisons.

Il sera facile à colliger de la demonstration de ceste 23. prop. Car soient les 3. raisons A, à B, C à D, & E, à F; proposées en lignes. Il faut composer vne raison d'icelles: à Comme A, à B, ainsi G, soit faict à H: & comme C, à D, ainsi H, à I, & comme E, à F, ainsi I, à K. Ie dis que la raison de G, à K, est composee des 3. raisons donnees: car icelle estant composee des raisons de G, à H, H, à I, & de I, à K, par la 5. definition de ce liure, elle sera aussi composee des raisons de A, à B, C, à D, & de E, à F: Puis que celles là, sont prises egales à celles-cy.



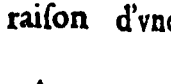
d 12. 6.

3.

Oſter vne moindre raiſon d'vne plus grande.

Soit la raiſon de A, à B, moindre qu'il faut oſter de celle de C, à D, plus grande; a *Soit faict cõme A, à B, ainſi C, à E, & ſoit E, terme moyen entre C, & D. Ie dis que la raiſon de A, à B, eſt oſtee, de celle de C, à D, & que la reſtante eſt E, à D: Car puis que la raiſon de C, à D, eſt compoſee de celles de C, à E, & E, à D: ſi la raiſon de C, à E; c'eſt à dire de A, à B, eſt oſtee, reſtera la raiſon de E, à D, &c.*

a 11. 6.

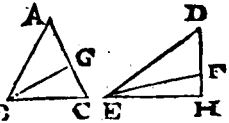


4.

Les triangles qui ont vn angle egal à vn angle, ſont en meſme raiſon, que les rectangles contenus ſous les coſtez comprenants l'angle egal.

Soient les triangles A B C, D E F, ayans l'angle A, egal à D. Ie dis que A B C, eſt à D E F, comme le rectangle ſous A B, B C, au rect. ſous E D, D F: Car ayant mené B G, E H, perpendiculaires à A C, D F, les triangles A B G, D E H; ſeront a *equiangles.* b *Donc comme G B, à B A, auſſi H E, à E D: mais comme G B, à B A, c ainſi le rectangle ſous B G, A C, au rectangle ſous A B, A C, (car G B, B A, eſtans poſees pour baſes la hauteur d'iceux, ſera la meſme A C) ſemblablement cõme H E, à E D, ainſi le rectangle ſous E H, D F, au rectangle ſous D E, D F.* d *Donc le rectangle ſous B G, A C, eſt au rectangle ſous A B, A C, comme le rectangle ſous E H, D F, au rectangle ſous D E, D F: Et en changeant le rectangle ſous B G, A C, eſt au rectangle ſous E H, D F,*

a. corol. 1. 32. 1.
b 4. 6.
c 1. 6.
d 11. 5.



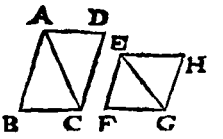
comme le rectangle sous AB, AC, au rectangle sous DE, DF; Mais comme le rectangle sous BG, AC, est au rectangle sous EH, DF, [c] *ainsi le triangle ABC, est* [c] 15. 5.
à DEF, [f] *les triangles estant moitiez des rectangles (car* [f] 41 1.
ils ont mesmes bases auec iceux AC, DF, & mesmes hauteurs BG, EH, partant sont entre mesmes paralleles) Donc ABC, sera aussi à DEF, comme le rectangle sous AB, AC, au rectangle sous DE, DF. Ce qui est proposé.

COROLLAIRE.

D'où il s'ensuit que les parallelogrammes equiangles sont aussi en mesme raison, que les rectangles contenus sous leurs costez estant doubles de tels triangles.

5.

Les parallelogrammes equiangles entr'eux, sont en mesme raison que les rectangles contenus sous les costez d'iceux, contenants l'angle egal.



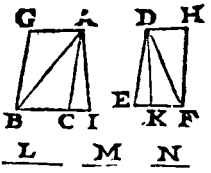
Soient les parallelogrammes BD, FH, equiangles entr'eux, dont les angles B, & F, sont egaux. Ie dis que comme BD, est à FH, ainsi le rectangle sous AB, BC, au rectangle sous EF, FG: car ayant mené les diametres AC, EG, soustendans les angles egaux, B, & F, les triangles ABC, EFG, auront l'angle B, egal à F: partant (comme nous auons demonstré) comme le triangle ABC, sera à EFG, ainsi le rectangle sous AB, BC, au rectangle sous EF, FG. [a] *Donc puis que les parallelogrãmes BD, FH, sõt en mesme raison que les triangles ABC, EFG,* [b] *ceux là estants doubles de ceux-cy,* [c] *comme*

[a] 15. 5.
[b] 34. 1.
[c] 11. 5.

BD, ſera à FH; ainſi parcillement le rectangle ſous AB, BC, au rectangle ſous EF, FG. Ce qui eſt propoſé.

6.

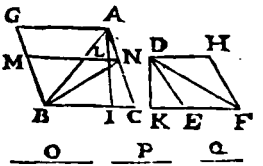
Les triangles & les parallelogrammes ſont entr'eux, en raiſon compoſee, de la raiſon des baſes & de la raiſon des hauteurs.



Soient les triangles ABC, DEF, & les parallelogrammes CG, EH, dont les hauteurs ſont AI, DK. Ie dis que leur raiſon eſt compoſee de celle de la baſe BC, à EF, & de la hauteur AI, à DK: Car ſoient premierement les hauteurs egales, & les baſes auſſi egales, ou bien inegales: Et ſoit faict, comme BC, à EF, ainſi L, à M: mais comme AI, à DK, ainſi M, à N. Ce que eſtant, M, ſera egale à N, d'autant [a] *que AI, eſt auſſi poſee egale à DK.* [a] *Partant L. ſera à N,* [b] *comme L, à M, c'eſt à dire comme BC, à EF;* [b] *Mais comme BC, à EF, ainſi le triangle ABC, à DEF, & le parallelogramme CG, à EH, parallelogramme.* [c] *Donc auſſi comme L, à N, ainſi ABC, à DEF, & CG, à EH: mais la raiſon de L, à N, eſt compoſee de la raiſon de L, à M, c'eſt à dire de la raiſon de la baſe BC, à la baſe EF, & la raiſon de M, à N, c'eſt à dire de la hauteur AI, à la hauteur DK. Donc la raiſon du triangle ABC, à DEF, & du parallelogramme CG, au parallelogramme, EH, eſt compoſee des meſmes raiſons. Ce qui eſt propoſé.*

[a] 7. 5.
[b] 1. 6.
[c] 11. 5.

Soient maintenant AI, DK, inegales, & AI, plus grande, mais les baſes BC, EF, egales ou inegales. Soit faict comme AI, à DK, ainſi O, à P, & comme BC, à EF, ainſi P, à Q; & priſe IL, egale à DK; & par L, ſoit



menee LM, parallele à BC, couppant AC, à N, & conioincte BN. D'autant que le triangle ABC, eſt à NBC, & le parallelogramme CG, à CM, comme la hauteur AI, à IL, ou à DK, egale à IL, c'eſt à dire comme O, à P. Comme il eſt monſtré à la 1. propoſ. de ce liure par Com. les triangles & les parallelogrammes ayans meſme baſe BC: & comme le triangle NBC, à DEF, & le parallelogramme CM, à EH, ainſi [d] la baſe BC, à EF: (ayant meſme hauteur) c'eſt à dire [a] ainſi P, à Q: [e] En raiſon egale, ABC, ſera à DEF, & CG, à EH, comme O, à Q; Partant la raiſon de O, à Q, eſtant compoſee de la raiſon de O, à P, c'eſt a dire de la raiſon de la hauteur AI, à la hauteur DK, & de la raiſon de P, à Q: c'eſt à dire de la raiſon de la baſe BC, à la baſe EF; De ces meſmes raiſons ſera compoſee la raiſon du triangle ABC, au triangle DEF, & du parallelogramme CG, au parallelogramme EH. Ce qui eſt propoſé. d 1. 6. e 22. 6.

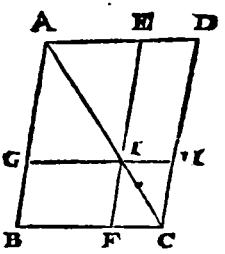
Semblablement on monſtrera que la raiſon du triangle DEF, dont la hauteur eſt moindre, au triangle ABC, & du parall. EH, à CG, eſt compoſee de la raiſon de la baſe EF, à BC, & de la raiſon de la hauteur DK, à la hauteur AI, car ſi comme EF, eſt à BC, ainſi Q, eſt faict à P, & comme DK, à AI, ainſi P, à O, & le reſte ſoit faict comme parauant: [f] le triangle DEF, ſera à NBC, & le parall. EH, au parall. CM, comme EF, à BC, c'eſt à dire comme Q, à P. Item le triangle NBC, au triangle ABC, & le parall. CM, à CG, comme LI, ou DK, à AI, c'eſt à dire comme P, à O, comme il eſt demonſtré à la 1. prop. de ce l. par Com. [g] Donc en raiſon egale comme DEF, ſera à ABC, & EH, à CG, ainſi Q, à O: Partant puis que la raiſon de Q, à O, eſt compoſee de la raiſon de Q, f 1. ſ. 5. g 22. 5.

à P, c'eſt à dire de la raiſon de la baſe EF, à la baſe C & de la raiſon de P, à O, c'eſt à dire de la raiſon de hauteur DK, à la hauteur AI; la raiſon de DEF, à BC, & de EH, à CG, ſera auſſi compoſee des meſme raiſons. Ce qui eſt propoſé.

xxij

THEOREME 18. PROP. 24.

Les parallelogrammes qui ſont à l'entour du diametre, de tout parallelogramme, ſont ſemblables à leur tout & entr'eux.



Soit le parallegramme ABC, auquel ſoit mené le diametre AC, & par quelconque poinct d'iceluy, comme par I, ſoient menees EF, GH, paralleles aux coſtez AB, AD. Ie dis que les parallelogrammes EG, FH, à l'entour du diametre ſont ſemblables au tout BD, & entr'eux.

Car ils ſont equiangles au tout, d'autant que l'angle A, eſt commun au parall. GE, & au tout BD, [a] & l'externe AEI, egal à l'interne D, & l'ex-

a 29. 1. terne AGI, egal à l'interne B, & EIG, externe egal à l'interne IFB, c'eſt à dire à BCD, egal à iceluy IFB; parquoy le parallelogramme EG, eſt equiangle à BD: Par la meſme raiſon FH, eſt equiangle au meſme BD. Or que EG, FH, ayent

b 29. 1. auſſi les coſtez autour des angles egaux proporou cor. 4 tionaux au coſtez du tout BD: il ſera ainſi de-
6. monſtré. [b] Puis que le triangle AGI, eſt equian-

gle à ABC, & le triangle AEI, equiangle au triangle ADC, comme AB, ſera à BC, ainſi AG, à GI, & par ainſi les coſtez autour des angles egaux B, & G, ſeront proportionaux. De chef[c] comme BC, à CA, ainſi GI, à IA: ſemblablement comme CA, à CD, ainſi IA, à IE. [d] Donc en raiſon egale cõme BC, à CD, ainſi GI, à IE, & partãt les coſtez autour des angles egaux BCD, GIE, ſont proportionaux. L'on monſtrera ſemblablement que les coſtez autour des autres angles egaux ſont proportionaux. Donc par la 1. definition de ce liure, le parall. EG, ſera ſemblable à tout le parallelogramme BD, & par meſme raiſon le parallelogramme FH, ſemblable au meſme BD; [e] Et partant ſemblables auſſi entr'eux. Donc les parallelogrammes, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.

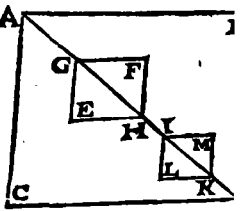
[c] 4. 6
[d] 22. 5.
[e] 21. 6.

SCHOLIE.

Henrion a adiouſté à ceſte propoſition, ces mots, ayans vn angle commun au total. *Ce qu'il ne deuoit faire, n'eſtant au texte d'Euclide, comme il appert.* παντὸς παραλληλογράμμου τοῦ περὶ τὴν διάμετρον παραλληλογράμμα, ὅμοιά ἐστι τό τε ὅλῳ καὶ ἀλλήλοις, *C'eſt à dire: De tout parallelogramme, ou en tout parallelogrãme, les parallelogrammes qui ſont à l'entour du diametre, ſont ſemblables entr'eux, & au tout. Or ce qui l'a incite à corriger ainſi Euclide, a eſté comme ie croy ce qui eſt en ſuitte de la demonſtration de Clauius, qui dit*; Intelligenda autem ſunt parallelogramma circa diametrum totius eſſe talia, quæ habeant vnum angulum cum toto parallelogrammo communem, vt manifeſtum eſt ex forma demonſtrationis; *c'eſt à*

dire, M, il faut entendre que les parallelogrãmes à l'e
tour du diametre du total, ſoient tels qu'ils ayent ⁊
angle commun auec le total, comme il eſt manifeſte p
la forme de la demonſtration.

Ce qui ne doit toutesfoiſe ſtre ainſi reſtraint, veu que l'
peut demonſtrer ſans ceſte reſtriction que les paralle
grammes à l'entour du diametre du total, n'ayans au
angle commun auec le tout, & ayans les coſtez paral
les à ceux du total, ſont ſemblables entr'eux, & au
tal: Car ſoit le parallelogramme CD, & ſon diametre
B, au tour duquel ſoient conſtituez EF, LM, paralle
grammes. Iceux ſont ſemblables entr'eux, & au to
a 29. 1. *car GE, AC, eſtant paralleles, & AB, tombant*
icelles les angles a *CAG, EGB, ſont egaux, l'exter*
l'interne, & auſſi CBH, & EHG, eſtant CB, EH,
paralleles; b *Donc C, ſera auſſi egal à E, parquoy A*
b 32. 1. *GEH, ſeront equiangles, & ſemblablement ADB,*
c 4. 6. *H;* c *& auront les coſtez,*
autour des angles egaux
proportionaux, ſçauoir
comme AC, à CB, ainſi
GE, à FH, & comme C
B, à BA, ainſi EH, à HG:
& comme AB, à BD,



d 22. 5. *ainſi GA, à HF,* d *donc*
en raiſon egale comme CB, à BD, ainſi EH, à HI
ainſi des autres. Donc tous les angles de EF,
egaux à ceux de CD, chacun au ſien, eſtãt les 2. au p
A, egaux aux 2. au poinct G, & les 2. au poinct B,
aux 2. au poinct H, & les coſtez autour des angles
proportionaux: e *Ainſi EF, ſera ſemblable à CD,*
e 1. d. 6. *meſmes raiſons LM, ſera ſemblable au meſme C*
f 21. 6. f *partant ſemblables entr'eux, & au total.*

PROBLEME 7. PROP. 25. XXV

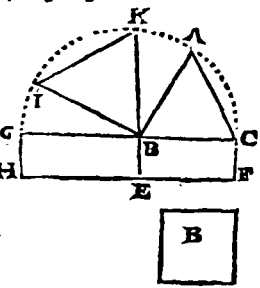
Descrire vne figure rectiligne, semblable à vne figure rectiligne donnee, laquelle soit egale à vne autre proposee.

Soiēt 2. rectilignes ABC, & B, il faut constituer vn rectiligne semblable à ABC, & egal à l'autre B. Sur CB, costé du rectiligne ABC, auquel on en doit faire vn semblable, [a] soit constitué le parall. CE, en quelconque angle egal au rectiligne ABC: Et sur BE, soit faict le parallelogramme BH, egal à B, ayant l'angle EBG, egal à BCF, & les lignes CB, BG, feront vne seule ligne droicte comme il est monstré à la 45. prop. du 1. l. [b] Maintenant soit trouuee la moyēne proportiō BK, entre CB, BG, [d] sur laquelle soit constitué le rectiligne BIK, sēblable & sēblablement posé au rectiligne ABC. Ie dis que BIK, est egal à l'autre rectiligne B.

a 44. ou 45. 1.

b 13. 6.

d 18. 6.



Car puis que CB, BK, BG, sont proportionelles [d] comme CB, premiere est à BG, 3. ainsi le rectiligne sur la 1. CB, au rectiligne BIK, sur la 2. BK, semblable, & semblablement descrit: [d] Mais cōme CB, à BG, ainsi le parall. CE, au parall. BH, de mesme hauteur. [e] Doc cōme CE, à BH, ainsi ABC, à BIK, [f] mais cōme CE, à BH, ainsi ABC, à B; [g] d'autāt que ABC, & CE, sōt egaux, & BH, & B, aussi egaux, [h] doc cōme ABC, à B, ainsi ABC, à BIK,

d coroll. 19. ou 20. 6.

d 1. 6.

e 11. 5.

f 7. 5.

g 11. 5.

h 9. 5.

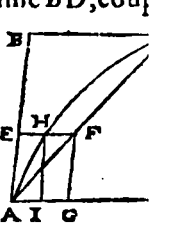
[b] Donc B, & IBK, ſeront egaux; mais KIB, ſemblable & ſemblablement poſé à ABC, par la conſtruction. Donc nous auons deſcrit, & Ce qu'il falloit faire.

xxiij THEOREME 19. PROP. 26.

Si d'vn parallelogramme, l'on retranche vn parallelogramme ſemblable tout, & ſemblablement poſé, ayant vn angle commun auec le tout; Il conſiſte à l'entour d'vn meſme diametre auec le tout

Du parallelogramme BD, ſoit retranché parallelogramme EG, ſemblable & ſemblablement poſé au tout BD, & ayant l'angle EA commun auec iceluy. Ie dis que EG, conſiſte l'entour de AC, diametre du tout BD.

Car ſoiēt menees AF, CF, leſquelles ſi elles font vne ligne droicte: il eſt euident que EG, ſe l'entour d'vn meſme diametre auec BD. Qu elles ne font vne ligne droicte, ſoit menee diametre de tout le parallelogrāme BD, coupe le coſté EF, au poinct H, par lequel ſoit menee HI, parall. à FG. Or d'autant que les parallelogrammes BD, EI, ſont à l'entour d'vn meſme diametre AHC, [a] Ils ſeront ſemblables & ſemblablement poſez. [b] Partant comme BA, à AD, ainſi EA, à AI; mais comme BA, à AD, FA, eſt à AG: d'autant que BD, EG, ſont blables par l'hypotheſe, & ſemblablemen



a 24. 6.

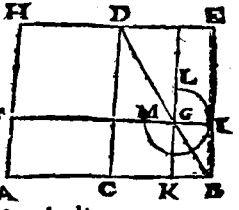
b 1. d. 6.

sez. c Donc comme EA, à AI, ainsi EA, à AG, d & partant AI, AG, seront egales, la partie à son tout, ce qui est absurde. Donc AF, FC, font vne seule ligne droicte, c'est à dire les parallelogrammes BD, EF, consistent à l'entour d'vn mesme diametre. Ce qu'il falloit demonstrer: Que si l'on dit que la droicte ligne AHC, couppe le costé FG, il aduiendra la mesme absurdité, &c. c 11. 5. d 9. 5

THEOREME 20. PROP. 17. xxvj

De tous les parallelogrammes appliqués selon vne mesme ligne droicte, & defaillans de figures parallelogrammes semblables & semblablement posees à celuy qui est descrit sur la moitié; Le plus grand est celuy-là, lequel est appliqué sur l'autre moitié, & semblable au defaut.

Soit la ligne AB, diuisee en deux egalement à C, & sur la moitié CB, soit constitué vn parallelogramme quelconque CE, duquel le diametre soit BD. Donc si le parallelogramme ABEH, est acheué, le parallelogramme AD, constitué sur la moitié AC, sera appliqué selon AB, & defaillant du parallelogramme CE, & semblable au defaut CE. Ie dis que le parallelogramme AD, appliqué à la moitié AC, & defaillant du parallelogramme CE, est le plus grand de tous. Ceux qui sont appliquez selon la ligne AB, & defaillent de parallelogrammes semblables &



ſemblablement poſez à CE.

Car ayant prins le poinct contingent G, au diametre BD, par lequel ayant mené les droictes lignes FGI, KG, paralleles à AB, BE, le parallelogramme FK, ſera appliqué ſelon AB, & [a] defaillant du parallelogramme KI, [a] qui eſt ſemblable à CE, & ſemblablement poſé eſtant autour d'vn meſme diametre auec CE: [b] Mais d'autãt que les cõplements CG, GE, ſont egaux, ſi on adiouſte le commun KI; CI, & KE, ſeront egaux; [c] mais CI, eſt egal à CF, eſtant ſur baſes egales AC, CB, donc CF, & KE, ſeront auſſi egaux; Et ayant adiouſté le commun CG, le parallelogramme AG, & le gnomon LM, ſeront egaux. Partant puis que CE, eſt plus grand que le gnomon LM, (car il contient le parallelogramme GD, plus que le gnomon) AD, [d] egal à CE, à cauſe des baſes egales AC, CB, ſera auſſi plus grand que AG, du meſme parallelogramme DG: ſemblablement on monſtrera que AD, eſt plus grand que tous autres parallelogrammes qui ſont appliquez ſelon AB, en ſorte que le poinct G, ſoit entre les poincts B, & D, c'eſt à dire qui occuppent vne ligne plus grande que la moitié AC, mais ont moindre altitude que AD, pourueu que les defauts ſoiẽt ſemblables à CE.

a 24. 6.
b 43. 7.
c 36. 1.
d 36. 1.

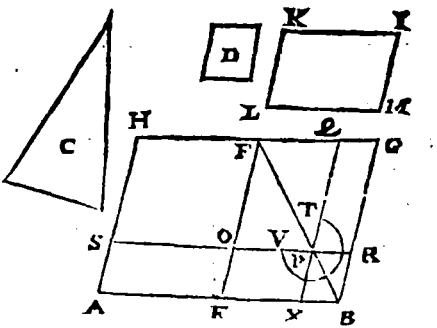
Autrement l'on demonſtrera AD, eſtre plus grand que AG, en ceſte maniere: [e] les parallelogrammes FD, DI, ſont egaux, puis que les baſes HD, DE, ſont egalles: mais DI, eſt plus grand que GE: c'eſt à dire que le complement CG, [f] (lequel eſt egal à GE) du parall. DG. Donc FD, ſera auſſi plus grand que CG, du meſme parall. DG, & partant adiouſtant le commun CF, AD, ſera plus grand que AG, du meſme parallelogramme DG.

e 36. 1.
f 43. 1.

THEOREME 8. PROP. 28.

xxvij

A vne ligne droicte donnee appliquer vn parallelogramme, egal à vne figure rectiligne donnee; defaillant d'vne figure parallelogramme, laquelle ſoit ſemblable à vn autre parallelogramme donné. Mais il faut que la figure rectiligne donnee à laquelle il en faut appliquer vne egale, ne ſoit plus grãde que celle qui eſt appliquée à la moitié de la ligne donnee; les defauts eſtant egaux, à celuy qui eſt appliqué ſur la moitié, & à celuy qui doit defaillir d'vn ſemblable.



Soit la ligne dõnee AB, à laquelle il faut appliquer vn parallelogrãme egal au rectiligne donné C, defaillant d'icelle ligne AB, d'vn parallelogramme ſemblable à vn autre parallelogramme donné D.

La ligne AB, eſtant couppee en deux egalement au poinct E, ſur la moitié EB, [a] ſoit deſcrit le parallelogramme EG, ſemblable & ſembla- [a] 18. 6

blement posé à D, & soit accomply le tout B
Si donc AF, est egal à C; estant appliqué à
defaillant du parallelogramme EG, qui est f
semblable à D: l'on aura le requis, mais si AF
plus grand que C, (car il ne doit estre moin
puis que par la proposition precedente, c'e
plus grand de tous les appliquez, les defa
estãt semblables, l'on n'en pourroit applique
cun à AB, egal à AC, mais tous seroient m
dres. Parquoy Euclide a adiousté: Mais il
que le rectiligne donné, &c.) E G, egal à ice
b 25. sera aussi plus grand que C, [b] soit donc plus g
de I, comme il est monstré en suite de la 45
1. 9, & soit constitué k M, semblable & sem
blement posé à D, ou à E G, mais egal à l'exc
De sorte que E G, soit egal à C, & à K M, ensi
& partant plus grãd que k M. Dõc puis que c
E F, à F G, ainsi N K, à κ L, pour la semblanc
costez; E F, F G, serõt aussi plus grãds que N κ
car s'ils estoient egaux à iceux ou moindres
seroit pareillement egal à N L, ou moindre,
c 26. 6. me il appert. Ayant donc retranché F O, F Q,
les à κ N, K L, & ayant faict le parallelogra
O Q, il sera egal à K M, & sẽblable & sembl
ment posé à iceluy, & partant à E G: cEt
à l'entour d'vn mesme diametre que E G, le
d 24. 6. diametre soit B E, & ayant prolongé Q P, O
c 45. 1. parall. A P, sera appliqué à la ligne A B, d
lant de P B: [d] qui est semblable & sembl
ment posé à E G, & partant aussi à D. Ie di
A P, est egal au rectiligne C. [e] Car puis que
36. 1. est egal à P E, complement à complement,
adiouste le commun P B, le parall. B Q, ser
à E R, c'est à dire à E S, lequel est egal à E R

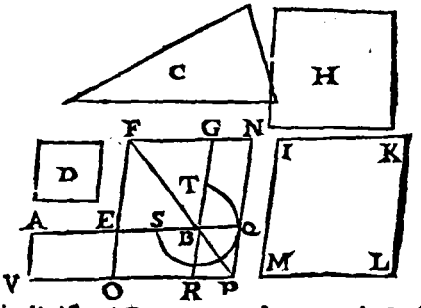
baſes AE, EB, eſtant egales. Parquoy ſi aux egaux AO, BQ, on adiouſte le commun EP, AP, ſera egal au gnòmon TV, mais le gnomon TV, eſt egal au rectiligne C, (car puis que le parallelogramme EG, eſt egal à C, & IL, enſemble, ſi on oſte les egaux, QO, LI, le gnomon TV, demeurera egal à G:) Donc AP, ſera auſſi egal au meſme C. Donc à la ligne AB, &c. Ce qu'il falloit faire.

xxviij

THEOREME 9. PROP. 29.

A vne ligne droicte donnee appliquer vn parallelogramme egal à vne figure rectiligne donnee, excedant icelle d'vn parallelogramme ſemblable à vn autre donné.

Soit la ligne droicte donnee AB, à laquelle il faut appliquer vn parallelogramme egal au rectiligne donné C; excedant AB, d'vn parallelogramme ſemblable à vn autre parallelogramme donné D.



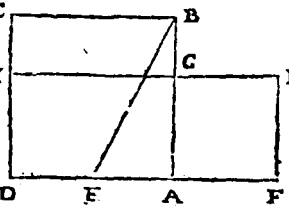
Soit diuiſee AB, en 2. egalement à E; Et ſur a 18. 6.
la moitié EB, ſoit deſcrit le parallelogramme E

b 14. 2. G, semblable à D, & semblablement posé; b puis soit faict le quarré H, egal au rectiligne C, & au
c 25. 6. parallelogramme EG; c auquel soit faict le parallelogramme I L, egal, mais semblable à EG, & semblablement posé: parquoy IL, sera plus grand que EG, puis qu'il est egal au quarré H, qui est faict egal à C, & à EG, ensemble. Donc puis que à cause de la similitude de MK, EG, comme MI, à IK, ainsi EF, à FG, les costez MI, IK, seront aussi plus grands que EF, FG. Car si IM, IK, estoient egales à EF, FG, ou moindres, MK, seroit egal à EG, ou moindre, comme il est manifeste. Donc ayant prolongé FE, FG, en sorte que FO, FN, soient egales à IM, IK,, & ayant accomply le parallelogramme ON; iceluy sera semblable & sembla-
d 26. 6. blement posé à EG, puis qu'il est egal à MK, & semblable & semblablement posé. d Parquoy ON, EG, sont constituez à l'entour d'vn mesme diametre FP: ayant prolongé AB, GB, à Q, & R, & PO, iusques à ce qu'elle conuienne auec AV, parallele à FO, au poinct V: le parallelogramme AP, sera appliqué à la ligne AB, l'excedant du pa-
e 24. 6. rallelogramme QR, e lequel est semblable à EG,
f 36. 1. & partant à D. Ie dis donc que AP, est egal au
g 43. 1. rectiligne C, f Car puis que AO, ER, sont egaux: g & ER, est egal au complement BN, AO, sera aussi egal à BN. Donc adiouſtant le commun OQ, AP, sera egal au gnomon ST, mais ledict gnomon est egal au rectiligne C, (car puis que MK, c'est à dire ON, est egal à C, & EG, ensemble, si on oste le commun EG, demeurera le gnomon ST, egal à C.) Donc AP, sera aussi egal au rectiligne C: donc à vne ligne droicte, &c. Ce qu'il falloit faire.

PROBLEME 10. PROP. 30. xxix

Couppervne ligne droicte propoſee & terminee, ſelon la moyenne & extréme raiſon.

Soit la ligne droicte terminee A B, qu'il faut couper ſelon la moyenne & extréme raiſon: Ayant deſcrit ſur icelle le quarré AC, a au coſté DA, ſoit appliqué le rectangle DH, egal au quarré AC, excedant DA, du parallelogramme AH, ſemblable à ieeluy quarré; en ſorte que AH, ſera pareillement quarré, attendu que le quarré ſeulement eſt ſemblable au quarré. Mais que IH, couppe AB, au poinct C. Ie dis que AB, eſt couppee ſelon la moyenne & extreme raiſon. a 29. 6.



Car puis que le rectiligne DH & le quarré AC, ſont egaux, ſi on oſte le cõmun AI; FG, & GC, demeureront egaux, leſquels ayant les angles egaux AGH, BGI, à ſçauoir droicts, b les coſtez qui ſont autour d'iceux, ſeront reciproques, à ſçauoir IG, c'eſt à dire AB, ſon egale eſt à GH, c'eſt à dire à A G, egale à GH: comme AG, eſt à GB, Parquoy la toute AB, eſtant au plus grand ſegment AG, comme ledit ſegment AG, eſt au plus petit GB: AB, eſt coupee ſelon la moyenne & extréme raiſon par la definition. Donc nous auons couppé, &c. Ce qu'il falloit faire. b 14. 6.

Autrement nous demonſtrerons que AB, eſt

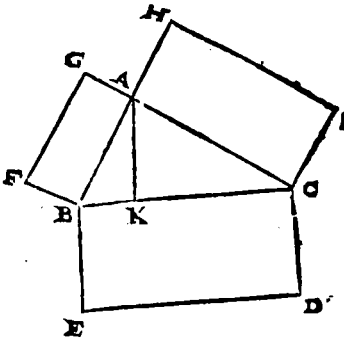
couppee au poinct G, ſelon la moyenne & e
tréme raiſon : puis qu'il y a trois lignes donne
AB, AG, GB, & que le rect. GC, contenu ſou
premiere AB, & la 3. GB, eſt egal au quarré de
c 17. 6. moyenne AG: c Icelles ſeront proportionell
à ſçauoir comme AB, 1. eſt à AG, 2. ainſi A
2. ſera à GB, 3. Donc par la definition, AB,
couppee au poinct G: ſelon la moyenne & extr
me raiſon.

d 11. 2. Autrement nous ferons tout le probleme, d
diuiſee AB, au poinct G, en ſorte que le rectan
cõtenu ſous la toute AB, & le ſegment GB, i
egal au quarré de l'autre ſegment AC. Ie dis
AB, eſt coupee à G, ſelon la moyenne & ext
c 17. 6. me raiſon. c Car derechef comme auparauant
B, A G, GB, ſeront proportionelles. Don
propoſition eſt manifeſte.

THEOREME 21. PROP. 31.

Aux triangles rectangles, la figure c
crite ſur le coſté qui ſouſtient l'an
droict; eſt egale aux deux figures
coſtez qui contiennent l'angle droi
ſemblables à icelle, & ſemblablem
deſcrites.

Soit le triangle rectangle ABC, ayant l'a
A, droict; & ſoit deſcrit ſur B C, quelconqu
gure rectiligne BD, à la quelle ſur les coſt
a 18. 6. A, AC, ſoient conſtituees A F, A I, sembla
& ſemblablement deſcrites. Ie dis que B D
egale aux deux AF, AI.



Car ayant mené la perpendiculaire Ak; du poinct A, ſur BC: [b] comme BC, ſera à CA, ainſi CA, ſera à Ck. Parquoy comme BC, 1. à Ck, 3. ainſi la figure BD, deſcrite ſur la premiere, ſera à la figure CH, ſur la 2. [c] ſemblable & ſemblablement deſcrite, & par conuerſion de raiſon: comme Ck, à BC, ainſi la figure CH, à la figure BD: ſemblablement on monſtrera que comme Bk, eſt à BC, ainſi la figure BG, eſt à la figure BD, puis que les 3. lignes BC, BA, Bk, ſont proportionelles. Donc d'autant que comme Ck, 1. grandeur eſt à BC, 2. ainſi CH, 3. eſt à BD, 4. Item comme Bk, 5. grandeur eſt à BC, 2. ainſi BG, 6. eſt à BD, 4. [d] Comme la 1. Ck, auec la 5. Bk, ſera à la BC, 2. ainſi la 3. CH, auec la 6. BG, ſera à BD, 4. mais CK, 1. & Bk, 5. enſemble ſont egales à la 2. BC: Donc la 3. CH, & la 6. BG, enſemble ſeront pareillement egales à la 4. BD. Ce qui eſt propoſé.

b *coroll.* 8. 6.

c *coroll.* 19. *ou* 20. 6.

d 24. 5.

Autrement [c] puis que le triangle kAC, eſt ſemblable au triangle ABC, & que leurs coſtez BC, CA, ſont de meſme raiſon; (car comme BC, à CA, au triangle ABC, ainſi AC, à Ck, au triangle Ack,) [d] le triangle kAC, ſera au triangle ABC, en raiſon doublee de CA, à BC: [e] Mais la figure CH, eſt à la figure BD, auſſi en raiſon doublee

c 8. 6.

d 19. 6.

e 19. *ou* 20. 6.

f 11. 5. de CA, à BC, f Donc le triangle KAC, ſera au triangle ABC, comme la fig. CH, à la figure BD; par meſme raiſon on monſtrera que comme le triangle KAB, eſt au triangle ABC, ainſi la figure BG, à la fig. BD. Derechef d'autant donc que cõme KAC, premiere grandeur eſt à ABC, 2. ainſi CH, 3. eſt à BD, 4. Item comme KBA, 5. à ABC,
g 24. 5. 2. ainſi BG, 6. à BD, 4. g Comme KAC, premiere auec KBA, 5. ſera à la 2. ABC, ainſi CH, 3. & BG, 6. enſemble ſera à la 4. BD. Mais KAC, KBA, 1. & 5. enſemble ſont egales à la 2. ABC, donc CH, BG, 3. & 6. enſemble ſeront pareillement egales à BD, 4. Ce qui eſt propoſé.

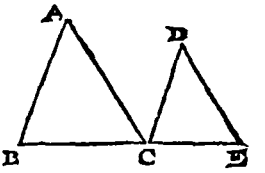
Autrement: comme le quarré de AC, 1. grandeur eſt au quarré de BC, 2. grandeur, ainſi la fi-
h 19. ou 20. 6. gure CH, 3. grandeur à la figure BD, 4. grandeur; h Puis qu'elles ſont toutes en raiſon doublee des coſtez AC, BC, ſemblablement comme le quarré de AB, 5. grandeur eſt au quarré de BC, 2. grandeur, ainſi la figure BG, 6. grandeur eſt à la
i 24. 5. figure BD, 4. grandeur, i partant comme la premiere grandeur auec la 5. à ſçauoir le quarré de AC, auec le quarré de AB, ſera à la 2. c'eſt à dire au quarré de BC: ainſi la 3. grandeur auec la 6. à ſçauoir la figure CH, auec la figure BG, eſt à la
k 47. 1. 4. à ſçauoir à la figure BD: k Mais les quarrez de AC, AB, enſemble ſont egaux au quarré de BC, donc les figures CH, BG, enſemble ſeront auſſi egales à la figure BD. Ce qui eſt propoſé: Donc aux triangles rectangles, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.

XXX THEOREME 22. PROP. 32.

Si deux triangles qui ont deux coſtez

proportionaux à deux coſtez ſont diſpoſez ſelon vn angle, en ſorte que leurs coſtez de meſme raiſon ſoient auſſi paralleles: les autres coſtez d'iceux triangles ſe rencontreront directement.

Soient les 2. triangles ABC, DEF, ayãt les coſtez AB, AC, proportionaux à DC, DE, ſçauoir comme AB, à AC, ainſi DC, à DE, & ſoient diſpoſez ſelon l'angle ACD, de ſorte que les coſtez de meſme raiſon AB, DC; & AC, DE, ſoient paralleles entr'eux. Ie dis les autres coſtez BC, CE, feront vne ligne droicte.



Car puis que AB, DC, ſont paralleles, [a] l'angle A, ſera egal à ACD, alterne: & par meſme raiſon l'angle D, ſera egal au meſme ACD; Et partant A, & D, ſeront egaux entr'eux: d'autant donc que les triangles ABC, DCE, ont les coſtez à l'entour des angles egaux A, & D, proportionaux; [b] Ils ſeront equiangles, & auront les angles B, & DCE, egaux. Donc adiouſtant les egaux A, & ACD, les deux B, & A, ſeront egaux aux deux DCE, & ACD: C'eſt à dire à l'angle total ACE, Derechef adiouſtant le commun ACB, les trois angles du triangle ABC, ſeront egaux aux deux angles ACB, ACE: [c] Mais iceux trois angles ſont egaux à deux droicts, donc les deux ACE, & ACB, ſeront egaux à deux droicts, [d] & partant BC, CE, feront vne ligne droicte: Donc ſi deux triangles qui ont deux coſtez, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.

a 29. 1

b 6. 6.

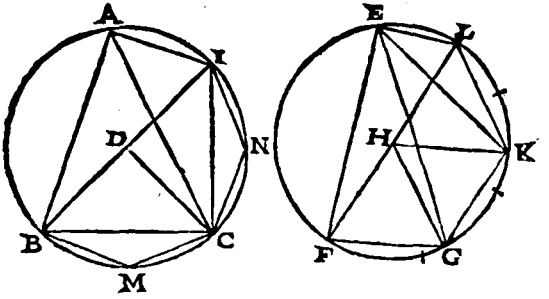
c 32. 1.

d 14. 1.

THEOREME 23. PROP. 33.

xxxij Aux cercles egaux, les angles ont meſme raiſon entr'eux, que les circonferences ſur leſquelles ils ſont appuyez, ſoit qu'ils ſoient appuyez eſtant conſtituez aux centres ou aux circonferences: En outre les ſecteurs ſont auſſi de meſme entr'eux, d'autant qu'ils ſont conſtituez au centre.

Soient 2. cercles egaux A B C, E F G, dont les centres ſoient D,& H,& ſoient les angles B D C,F H G,au centre,ou B A C,F E G, à la circonference. Ie dis que comme l'arc B C, eſt à l'arc F G,ainſi l'angle B D C,eſt à l'angle F H G,& l'angle B A C,à l'angle F E G, & en outre le ſecteur B D C,au ſecteur F H G.



Car ayant mené les droictes lignes B C, F G' a 1. 4. a ſoient appliquees aux cercles, C I,egale à B C, & G K, K L,chacune egale à F G, & ſoiẽt menees les droictes lignes I D, K H, L H. Donc d'au- b 28. 3. tant que B C, C I,ſont egales, b les arcs B M C,

CNI, seront pareillement egaux : [c] & partant les angles BDC, CDI, seront egaux : par mesme raison les arcs FG, GK, KL, & les angles FHG, GHK, KHL, seront egaux. Donc l'angle BDI, sera autant multiple de l'angle BDC, que l'arc BCI, est multiple de l'arc BC. Par la mesme raison l'angle FHL, sera autant multiple de l'angle FHG, que l'arc FGL, l'est de l'arc FG : puis que les angles BDI, FHL, sont diuisez chacun en autant de parties egales que les arcs BI, FL, sur lesquels ils sont appuiez : partant si l'arc BCI, est egal à l'arc FGKL, [d] de neceſſité l'āgle BDI, sera egal à l'angle FHL, & si l'arc est plus grand que l'arc, l'angle sera plus grand que l'angle, & si plus petit, plus petit. Parquoy l'arc BCI, & l'angle BDI, equimultiplices de la 1. 293. grādeur, BC, BDC, seront ensēble ou plus grāds, ou egaux, ou plus petits que l'arc FGKL, & l'āgle FHL, equimultiplices de la 2. grandeur FG, & de la 4. FHG, s'ils sont prins comme ils s'entrerespondent. [e] Parquoy comme l'arc BC, 1. grandeur à l'arc FG, 2. ainsi l'angle BDC, 3. à l'angle FHG, 4. On monstrera le mesme des angles de la circonference.

c 27. 3.

d 27. 3.

e 6. def. 5.

Secondement, ie dis que comme la circonference, à la circonference, ainsi le secteur au secteur. Soient constituēz aux segments BC, CI, les angles BMC, CNI, [f] lesquels seront egaux insistans aux arcs egaux BAC, CBAI, parquoy les segmens BMC, CNI, seront sēblables: [g] & partant egaux entr'eux ; estans constituez sur lignes droictes egales BC, CI, Donc adiouſtant les triangles BDC, CDI, [h] qui sont pareillement egaux, les secteurs BDC, CDI, seront faicts

f 27. 3.

g 24. 3.

h 4. 1.

egaux. Parquoy le secteur BDI, sera autant m
tiplice du secteur BDC, que l'arc BCI, l'e
l'arc BC. Semblablement le secteur FHL,
monstré autant multiplice du secteur FHG,
l'arc FGKL, l'est de l'arc FG. Mais d'autant
si l'arc BCI. est egal à l'arc FGKL, aussi le sec
BDI, est egal au secteur FHL; (comme il a
monstré aux secteurs BDC, CDI,) & si
grand, plus grand, & si moindre moindre:
tant l'arc BCI, & le secteur BDI, equimult
de la premiere grandeur BC, & de la 3. B
defaudront ensemble, de l'arc FGKL, & d
cteur FHL, equimultiplices de la 2. gran
FG, & de la 4. FHG, ou ensemble seront e
ou excederont; s'ils sont prins comme ils s
i 6. def 5. trerespondent. i Partant comme l'arc
1. grandeur est à l'arc FG, 2. ainsi le sec
BDC, 3. au secteur FHG, 4. Donc aux ce
egaux, &c. Ce qu'il falloit demonstrer.

COROLLAIRE I.

Il est manifeste de cecy, que le secteur e
secteur, comme l'angle est à l'angle: C
raison de l'vn & de l'autre; sçauoir de l'a
BDC, à l'angle FHG, & du secteur BDC, a
k 11. 5. cteur FHG, est de mesme à la raison de l'arc
à l'arc FG. k Parquoy elles seront de me
entre elles.

COROLLAIRE II.

Il est pareillement manifeste que comme
gle au centre est à 4. droicts, ainsi l'arc qui

ſtend iceluy angle eſt à toute la circonference. Et au contraire comme 4. angles droicts ſont à l'angle qui eſt au centre, ainſi toute la circonference eſt à l'arc qui ſouſtend ledit angle.

Car comme l'angle au centre, eſt à l'angle droict au centre, [l] *ainſi l'arc qui ſouſtend iceluy angle eſt au quart de la circonference du cercle ou au quadrat, qui ſouſtend iceluy angle droict. Parquoy comme l'angle au centre ſera* [m]*, au quadruple de l'angle droict: c'eſt à dire à 4. droicts, ainſi l'arc ſouſtendu à iceluy angle ſera au quadruple de quadrant: c'eſt à dire à toute la circonference, par ce que nous auons demonſtré à la 22. prop. du liure 5. Ce qui eſt premierement propoſé. D'autant donc que comme l'angle au centre eſt à 4. droicts, ainſi l'arc qui ſouſtend iceluy angle eſt à toute la circonference; Par cõuerſion de raiſon cõme 4. angles droicts, à l'angle au centre ainſi toute la circõference ſera à l'arc qui ſouſtend iceluy angle au centre. Ce qui eſt ſecondement propoſé.*

l 33.6.

m 33.6.

Mais cecy peut auſſi eſtre ainſi demonſtré: [m] *Puis que cõme l'angle droict au centre eſt à l'angle au cẽtre: Ainſi le quadrant ou quarte partie de la circonference qui ſouſtend iceluy angle droict eſt à l'arc qui ſouſtend iceluy angle au centre non droict; Pareillement comme le quadruple de l'angle droict, c'eſt à dire 4. droicts, ſera à l'angle au centre, par ce que nous auons monſtré à la 22. prop. du 5. liure, ainſi le quadruple du quadrant, c'eſt à dire toute la circonference ſera à l'arc qui ſouſtend iceluy angle. Ce qui eſt propoſé.*

m 33.

SCHOLIE.

En ſuitte de cette propoſition nous demonſtrerons icy les Theorémes ſuiuants.

I.

Les angles qui ſont appuyez ſur ſemblables arcs de cercles, ſoit qu'ils ſoient aux centres ou aux circonferences ſont egaux entr'eux: Et au contraire les arcs auſquels inſiſtent angles egaux, ſoit aux centres ou aux circonferences ſont egaux.

Aux cercles ABCD, EFGH, dont les centres ſont I, *&* K, *ſoient les arcs* BCD, FGH, *ſemblables, ſur leſquels ſoient appuyez les angles* I, *&* K, *aux centres,* A, E, *aux circonferences, ie dis que tant ceux-là que ceux cy ſont egaux entr'eux. Car ſoient conſtituez en iceux arcs, les angles* C, *&* G, [a] *qui ſeront egaux:* [b] *mais tant les* 2. C *&* A, *que les* 2. G *&* E, *ſont egaux à deux droicts; oſtant donc les egaux* BCD, FGH, A *&* E, *demeureront egaux,* [c] *deſquels* I, *&* K, *eſtant doubles,* [d] *ils ſeront auſſi egaux. Ce qui eſt propoſé.*

a 10. d. 3.
b 22. 3.
c 20. 3.
d 6. c. ſ.

Soient derechef, tant les angles I, *&* K, *que* A, *&* E, *inſiſtans aux arcs,* BCD; FGE, *egaux entr'eux. Ie dis qu'iceux arcs ſont ſemblables. Car* A *&* E, *eſtant egaux:* [e] *tant les* 2. A, C, *que* E, G, *eſtãt egaux à* 2. *droicts* [f] *les reſtes* C, G, *ſeront egaux,* [g] *partant les ſegments auſquels ils ſont* BCD, FGH, *ſont ſemblables. Mais ſi* I, *&* K, *ſont egaux aux centres, leurs moitiez* A *&*

e 22. 3.
f 10 d.
g 7. c. ſ.

E, ſont auſſi egaux. Donc, comme auparauant, les arcs BCD, FGH, ſont ſemblables. Ce qu'il falloit demonſtrer.

2.

Aux cercles egaux, ſi on prend circonferences inegales, moindres que le demy-cercle, la plus grande circonference ſouſtiendra vne plus grande ligne. Mais aux ſegments plus grands que le demy cercle la plus petite ligne ſouſtiendra vne plus grande circonference que la plus grande.

Aux cercles egaux ABC, DEF, dont les centres ſont G, H, ſoient les arcs moindres que le demy cercle, AC, DF, & ſoit AC, plus grand & DF, plus petit; & partant ABC, moindre & DEF, plus grand. Ie dis que la ligne droicte menee de A à C, eſt plus grande que la droicte ligne menee de D à F. Car apres auoir mené les lignes droictes GA, GC, AC, HD, HF; puis que l'arc AC, eſt poſé plus grand que l'arc DF, ſoit retranché CI, egal à DF, & ſoit menee la droicte ligne GI, Les angles IGC, & H ſeront egaux, b mais AGC, eſt plus grand que IGC, il ſera donc auſſi plus grand que H; Derechef les coſtez GA, GC, eſtant egaux aux coſtez HD, HF, chacun au ſien eſtant menez des centres de cercles egaux, & l'angle AGC, monſtré plus grand que DHF, la baſe AC, ſera plus grande c que la baſe DF, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer. Soit veuë la 2. figure.

a 27. 3.

b 9. ef.

c 24. 1.

Fin du ſixieſme Liure.

LIVRE SEPTIESME DES ELEMENTS D'EVCLIDE.

DEFINITIONS.

1. L'vnité, eſt ſelon laquelle vne chacune choſe, de celles qui ſont, eſt dicte vne.

EVCLIDE a traicté iuſques icy de la premiere partie de la Geometrie, ſçauoir de celle là laquelle conſidere les plans : Il reſte l'autre partie laquelle traicte des ſolides. Mais auparauãt il luy a eſté neceſſaire de traicter des lig. commenſ. & incomenſ. d'autant que la cognoiſſance d'icelles eſt requiſe à l'explication & demonſtration des proprietez de pluſieurs corps ſolides, & principalemẽt de ceux que l'on nomme reguliers; de ſorte que ſans icelles le traicté des ſolides auroit eſté imparfaict, & d'auantage que ſans icelles lignes, pluſieurs coſtez tant des plans que des ſolides, ſi l'on veut reduire la Geometrie, en vſage & pratique, ne peuuent eſtre exprimez ny entendus, car pluſieurs des coſtez, ſont ces lignes que les Grecs appel-

lent ἄλογοι ; ceſt à dire irrationelles, ou ſi elles ne ſont irrationelles, elles ſont incommenſurables en longitude entr'elles, partant ne ſont meſurees par les nombres. Or d'autant que l'explication & intelligence de ces lignes eſt comme enuelopee & conioincte auec les nombres, en ſorte que ſans iceux ne peuuent eſtre cogneuës, il a eſté beſoin de traicter des nombres auparauant. C'eſt pourquoy en ce ſeptieſme Liure & aux deux ſuiuants, il explique les affections & proprietez des nombres en tant qu'ils peuuent ſeruir à la Geometrie, à fin qu'au dixieſme Liure, auec plus de facilité & plus amplemẽt il face les demonſtrations des lignes commenſurables & nicommenſurables.

Commençant donc ſelon ſa couſtume par les principes, il definit premierement l'vnité ; en ſeignant que c'eſt celle, ſelon laquelle, chaque choſe, de celles qui ſont, eſt dicte, vne ; car ſelon l'vnité, nous auons de couſtume d'appeller vn corps, vn corps, vn animal vn animal, vne pierre, vne pierre, & ainſi des autres choſes. Au reſte l'vnité ne reçoit aucune diuiſion aux nombres, tout de meſme que le poinct aux grandeurs.

2. Nombre, eſt vne multitude compoſee d'vnitez.

C'eſt à dire que ſi on poſe tant d'vnitez que l'on voudra enſemble, la collection d'icelles, s'appelle, nombre, d'où il eſt manifeſte, qu'en tout nombre il y a autant de parties qu'il y a d'vnitez qui le conſtituent : de ſorte que l'vnité eſt partie de chacun nombre denommee par iceluy nombre, duquel elle eſt partie. Comme le

nombre 8. composé de huict vnitez, se diuise en autant de parties, sçauoir en huict vnitez, chacune desquelles est dicte partie huictiesme du nombre huict, &c. D'où il s'ensuit que tous les nombres sont commensurables entr'eux, puis qu'ils sont tous mesurez par vne mesme mesure sçauoir par l'vnité comme il est dict: Ce qui ne peut pas conuenir à toutes les grandeurs comme il sera monstré au dixiesme liure.

3. Vn nombre est partie d'vn autre nombre; le plus petit du plus grand, lors que le plus petit mesure le plus grand.

Cette definition est semblable à celle du cinquiesme liure par laquelle Euclide definit la partie de la quantité continue. Car comme là, icy il definit la partie aliquote, laquelle est dicte mesurer exactemẽt son tout. Comme 6. est dict partie de 18. d'autant qu'il le mesure exactement sans qu'il reste rien: semblablement chacun de ces nombres, 3. 4. 6. 8. est partie de 576. puis chacun le mesure exactement. Or toute partie prend son nom du nombre par lequel elle mesure vn autre, comme 6. est dicte septiesme partie de 42. d'autant que 6. mesure 42. par 7. c'est à dire est contenu en 42. sept fois exactement, & ainsi des autres.

4. Mais vn nombre, est dict parties d'vn autre, plus grand, quand le plus petit ne mesure le plus grand.

Comme 4. ne sera dict partie de 6. d'autãt que 4. plus petit ne mesure 6. precisement; mais sera dict les deux parties de 6. sçauoir $\frac{2}{3}$. & 5. sera dict

parties

parties de 18. ſçauoir $\frac{5}{18}$ d'autant que l'vnité qui eſt leur commune meſure eſt contenu cinq fois en 5. & dix-huict fois en 18.

5. Vn nombre eſt dit multiple d'vn autre plus petit, lors que le plus petit meſure le plus grand.

Tout ainſi qu'vn nombre qui en meſure preciſement vn plus grand, eſt dict partie du plus grand, auſſi le plus grand qui eſt meſuré par le plus petit, eſt dict multiple du plus petit; & tout ainſi auſſi qu'vn nombre qui n'en meſure exactement vn plus grand n'eſt dict partie du plus grand mais parties, auſſi le plus grand ne ſera dit multiple du plus petit, par lequel il n'eſt meſuré. Comme 4. eſt partie de 24. d'autant qu'il meſure 24. preciſement, & pareillement 24. eſt dict multiple de 4. puis qu'il eſt meſuré de 4. Et 30. multiple de 6. d'autant que 6. meſure 30. &c.

6. Nombre pair, eſt celuy qui peut eſtre diuiſé en deux egalement.

Comme tous les nombres ſuiuants 4. 10. 40. 100. 1000. ſont dicts nombres pairs, d'autant que chacun peut eſtre diuiſé en deux parties egales, dont les moitiez ſeront 2. 5. 20. 50. 500.

7. Mais nombre impair eſt celuy qui ne ſe peut diuiſer en deux egalement, ou qui difere du nombre pair, de l'vnité.

Comme tous ces nombres icy, 5. 11. 15. 37. 101. ſont appellez nõbres impairs, d'autant qu'ils ne peuuent eſtre diuiſez en 2. egalement; ou bien d'autant qu'ils ſont differents de l'vnité des

nombres pairs 4. 10. 14. 36. 100. &c.

8. Nõbre pairement pair, eſt celuy qu'vn nombre pair meſure par vn nombre pair.

Comme 32. ſera dict pairement pair, d'autant que 8. nombre pair le meſure par 4. qui eſt auſſi nombre pair. 24. ſera auſſi toſt dit nombre pairement pair, puiſque 4. nombre pair, le meſure par 6. nombre pair, &c.

9. Et nombre pairement impair, eſt celuy qu'vn nombre pair meſure, par vn nombre impair.

C'eſt à dire que ſi vn nombre pair meſure vn nombre pair par vn nõbre impair, le meſuré ſera appellé pairement impair. Comme 30. que 2. nombre pair meſure par 15. nombre impair. Et 6. nombre pair meſure le meſme 30. par 5. nombre impair, &c.

10. Mais nombre impairement impair, eſt celuy lequel vn nombre impair meſure par vn nombre impair.

Comme 45. lequel eſt meſuré de 9. nombre impair par 5. nombre auſſi impair, eſt dict nombre impairemẽt impair: Et 15. auſſi qui eſt meſuré de 5. par 3. Et ceux cy 9. 21. 25. 27. 33. 35. &c. ſont dicts impairement impairs.

11. Nombre premier, eſt celuy lequel l'vnité ſeule meſure.

C'eſt à dire que ſi vn nombre ne peut eſtre meſuré par aucun autre. Mais par l'vnité ſeulement en ſorte qu'il ne puiſſe eſtre dit pairement pair, ou pairement impair, ou impairement impair, iceluy ſera appellé nombre premier, com-

me ſont ceux-cy. 2.3.5.7.11.13.17.19.23.29.31.&c. Car la ſeule vnité les meſure.

12. Nombres premiers entr'eux, ſont ceux-là, leſquels ont la ſeule vnité pour commune meſure.

C'eſt à dire que ſi deux ou pluſieurs nombres ſont propoſez, & qu'il ne ſe puiſſe trouuer aucun nombre qui meſure chacun d'iceux preciſement outre la ſeule vnité, iceux ſeront dicts premiers entr'eux; comme, 15. & 8. ou 3. & 5. ſont premiers entr'eux, d'autant qu'il n'y a que l'vnité qui ſoit commune meſure d'iceux, &c.

13. Nombre compoſé, eſt celuy lequel, quelque nombre peut meſurer.

Les Geometres appellent nombre compoſé celuy, que quelque autre nombre meſure outre l'vnité. Comme 15. qui eſt meſuré par 5. & 3. Or il eſt manifeſte que tous les nombres pairs, outre le binaire ſont nombres compoſez, eſtant tous meſurez par 2. d'où il s'enſuit que tous les nombres premiers, outre le binaire ſont impairs, le binaire eſtant le premier des impairs.

14. Mais nombres compoſez entr'eux, ſont ceux-là leſquels ſont meſurez par quelque nombre cõme cõmune meſure.

Deux ou pluſieurs nombres, leſquels ſont meſurez par quelque nombre outre l'vnité, comme par leur commune meſure, ſont dicts compoſez entr'eux, iaçoit que chacun de ſoy ne ſoit compoſé. Cõme 15. & 24. ſont compoſez, entr'eux d'autant que 3. meſure l'vn & l'autre, comme commune meſure: auſſi 7.21. & 35. ſont compo-

ſez entr'eux; car le premier d'iceux meſure ſoy meſme & les deux autres, encore qu'il ſoit premier de ſoy.

15. Vn nombre eſt dit en multiplier vn autre, quand il en eſt produict quelqu'vn, qui eſt compoſé autant de fois du multiplié, qu'il y a d'vnitez au multipliant.

Comme 6. ſera dit multiplier 8. quand 8. ſera compoſé autant de fois, qu'il y a d'vnitez au multipliant 6. ſçauoir ſix fois, & qu'il ſera procreé vn autre nombre ſçauoir 48. Auſſi en changeant 8. ſera dit multiplier 6. ſi on poſe 6. huict fois ſçauoir autant qu'il y a d'vnitez en 8. & que l'on ſera le meſme 48. Ainſi vn nombre ſera dit eſtre produit de deux nombres ſe multipliants l'vn l'autre; comme 63. de 7. & 9. &c.

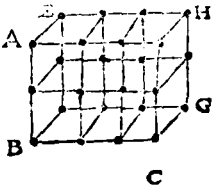
16. Mais quand deux nombres ſe multipliant l'vn l'autre en produiſẽt quelqu'vn, celuy qui eſt produict, eſt appellé plan. Et les nombres qui ſe multiplient l'vn l'autre ſeront dicts coſtez d'iceluy.

Tout nombre produict de la mutuelle multiplication de 2. nombres, eſt appellé plan, d'autant que ſes vnitez eſtant diſpoſees en long & en large repreſentent vn parallelogramme rectangle, les coſtez duquel ſont les deux nombres ſe multipliants, ... comme il a eſté dict au 2. liure. ..... Comme 24. produict de 4. par 6. 4 ..... eſt dict nombre plan. Duquel les ..... coſtez ſont 4. & 6. d'autant que 6 ſes vnitez diſpoſees en long & large, repreſen-

tent vn parallelogramme rectangle, &c.

17. Quand trois nombres se multiplians l'vn l'autre en produisent quelqu'vn, celuy qui est procreé, sera appellé solide. Et les nombres qui se multiplient l'vn l'autre seront appellez costez d'iceluy.

Comme d'autant que ces trois nombres, 2.3.4. se multiplians l'vn l'autre produisent 24. car 2. par 3. produict 6. & 6. par 4. produict 24. ou biẽ 2. par 4. faict 8. & 8. par 3. faict 24. ce nombre 24. sera appellé solide; & les nombres 2.3.4. sont les costez. D'autant que ses vnitez disposees en long, large & profondité, representent quelque figure solide, appellee parallelipede, cõme il sera exposé au liu. vnzieſme, dont les 3. dimensions sont exprimees par les trois nombres qui se multiplient. Car si on multiplie 2. par 4. on aura 8. pour le nombre de la base BG, du solide AC, lõgue de 4. vnitez & large de 2. & si cette base est multipliee par 3. on produira tout le nombre du solide, 24. haut de 3. vnitez, &c.



18. Nombre quarré est, celuy qui est egalement egal; ou qui est contenu sous deux nombres egaux.

C'est à dire, produict de 2. nombres egaux multipliez l'vn par l'autre.

Ce nombre plan qui est egalement egal, c'est à dire qui selon ses vnitez disposees en long & en large refere vn parallelogramme re-

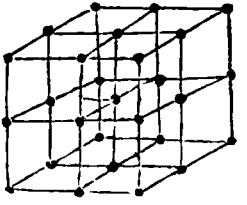
ctangle dont la longitude eſt egale . . . . .
à la latitude, de ſorte que tous ſes . . . . .
coſtez ſont egaux ou qui eſt pro- 5 . . . . .
duict de 2. nombres egaux, & par- . . . . .
tant eſt contenu ſous iceux eſt ap- . . . . .
pellé quarré cõme 25. cõtenu ſous 5
5. & 5. c'eſt à dire produict de la mutuelle multiplicatiõ des deux 5. l'vn par l'autre. Car ſes vnitez eſtant redigees en forme plane, il repreſente vn quarré parfaict, ayant 5. vnitez à chaque coſté, partant egalement egal.

Mais l'vn ou l'autre des coſtez de la multiplication deſquels il eſt produict, eſt appellé racine du quarré.

19. Nombre cube eſt, celuy qui eſt egalement egal egalement. Ou qui eſt contenu ſous trois nombres egaux.

Ou produict de 3. nombres egaux l'vn par l'autre.

Il appelle cube ce ſolide, qui eſt egalement egal egalement, c'eſt à dire duquel les vnitez diſpoſees en long, large & profond, repreſentent vn cube Geometrique en ſorte que toutes ſes dimenſions, ſçauoir longitude, latitude, hauteur ou profondité, ſoient egales; Ou qui eſt produict de 3. nombres egaux, comme 27. qui eſt contenu ſous ces trois nombres 3. 3. 3. car 3. fois 3. font 9. & 3. fois 9. font 27. Car toutes ſes vnitez redigees en forme de ſolide repreſentent vn cube Geometrique y ayant 3. ſelon



chacune dimenſionEt chacun de ces 3. nombres, eſt appellé des Geometres coſté du cube, & de pluſieurs Arithmeticiens racine cubique.

20. Les nombres ſont proportionaux. Quand le premier eſt autant multiple du ſecond, ou meſme partie, ou meſmes parties que le troiſieſme du quatrieſme.

Ou bien quand le premier contient autant de fois le ſecond, & en outre vne meſme partie d'iceluy, ou meſmes parties, que le troiſieſme le quatrieſme.

A fin de comprendre tous les nombres proportionaux en tout genre de proportion, d'inegalité, (comme ſont tous les nombres inegaux.) Nous auons adiouſté ces mots comme Clauius, (ou bien quand le premier contient autant de fois le ſecond, & en outre vne meſme partie ou meſmes parties d'iceluy, que le troiſieſme, le quatrieſme.) Car la vulgaire definition d'Euclide (laquelle Clauius penſe eſtre corrompuë) comprend ſeulement les nombres proportionaux en la proportiõ multiple, & ſubmultiple & aux autres proport. de moindre inegalité. Car en la proportion multiple il y a 4. nombres proportionaux, quand le premier eſt autant multiple du ſecond que le troiſieſme du quatrieſme, & en la ſubmultiple, quand le premier eſt meſme partie du ſecond, que le troiſieſme du quatrieſme, & aux autres proportions de moindre inegalité; Quand le premier eſt meſmes parties du ſecond que le troiſieſme du quatrieſme, comme veut la definition d'Euclide: mais par icelle l'on ne peut comprendre quels ſont les nombres proportionaux en la raiſon ſuperparticuliere, ſu-

perpartiente, multiple ſuperparticuliere. & multiple ſuperpartiente; car en toutes ceux-cy le premier nombre n'eſt pas autant multiple du ſecond que le troiſieſme du quatrieſme ny meſme partie ny meſmes parties; Mais le premier contient le ſecõd, & le troiſieſme le quatrieſme egalement, ſçauoir vne fois ou plus & en outre vne meſme partie d'iceluy ou meſmes parties comme il eſt manifeſte par la def. 4. *l.* 5.

Parquoy ces nombres 12. 4. 9. 3. ſont proportionaux, eſtant le premier autant multiple du ſecond, que le troiſieſme du quatrieſme, ſçauoir triple. Item 4. 12 3. 9. Car 4. eſt telle partie de 12. ſçauoir tierce, que 3. de 9. Derechef, 6. 8. 9. 12. ſont proportionaux d'autant que 6. eſt meſmes parties de 8. que 9. de 12. ſçauoir les $\frac{3}{4}$. finalement 7. 6. 14. 12. & 7. 4. 14. 8 & 11. 5. 22. 10. & 12. 5. 24. 10. ſont nombres proportionaux, car au premier exemple: le premier nombre contient vne fois le ſecond, & le troiſieſme 1. fois le quatrieſme, & en outre la $\frac{1}{6}$. partie. Au 2. exemple: le premier contient 1. fois le 2. & le troiſieſme le quatrieſme & en outre $\frac{3}{4}$. parties. Au troiſieſme exemple 2. fois & $\frac{1}{5}$. partie. Et au dernier, le premier contient 2. fois le 2. & le 3. le quatrieſme, & en outre $\frac{2}{3}$. parties: & autrement les nombres ne ſeront nullement proportionaux. Donc toutes & quantes fois que 4. nombres ſont poſez proportionaux, il faudra accorder, que ſi les plus grands ſont comparez aux moindres, le premier, & le troiſieſme ſeront equimultiples du 2. & du 4. ou bien le premier & le 3. contiendront egalement le 2. & le 4. & en outre meſme partie ou meſmes parties: Et au contraire ſi le premier & le troi-

fieſme ſont accordez equimultiples : ou bien que le premier ſoit dit contenir autant de fois le 2. que le 3. le 4. & en outre meſme partie ou meſmes parties, on colligera que les nombres ſont proportionaux. Que ſi on compare les moindres aux plus grands, & qu'ils ſoient dicts auoir meſme proportion, il faudra confeſſer que le premier eſt meſme partie du 2. que le 3. du 4. ou meſmes parties ; & au contraire ſi le premier eſt poſé meſme partie du 2. que le 3. du 4. ou meſmes parties, on conclurra qu'iceux nombres ſont proportionaux.

Mais Euclide definit ſeulement, ces nombres proportionaux là, leſquels ont meſme proportion d'inegalité. Car s'il eſt queſtion de la proportion ou raiſon d'egalité, il eſt manifeſte, que le premier doit eſtre egal au ſecond & le 3. au 4. à fin qu'ils ſoient dicts proportionaux.

Or de cette definition on collige manifeſtement que les nombres egaux ont meſme raiſon à vn meſme, & au contraire vn meſme aux egaux. Item que les nombres qui ont meſme raiſon à vn meſme, ou auſquels vn meſme nombre à meſme raiſon, ſont egaux. Car puis que les nombres egaux ſont equimultiples, ou meſme partie ou meſmes parties d'vn meſme ; ou le contiennent egalement, & en outre, meſme partie ou meſmes parties : Item puis qu'vn meſme nombre eſt equimultiple de nombres egaux, ou meſme partie ou meſmes parties ; ou contient iceux egalement, & en outre meſme partie ou meſmes parties d'iceux : il eſt manifeſte que nombres egaux ont meſme raiſon à vn meſme, ou vn meſme à nombres egaux, ſelon cette defi-

nition. Derechef, d'autant que les nombres qui ont meſme raiſon à vn meſme, ſont equimultiples d'iceluy, ou meſme partie, ou meſmes parties, ou le contiennent egalement & en outre meſme partie ou meſmes parties. Et vn nombre qui à meſme raiſon à quelques vns, eſt equimultiple d'iceux ou meſme partie ou meſmes parties, ou les contient egalement, & en outre meſme partie ou meſmes parties d'iceux: ſelon cette definition, il eſt manifeſte que les nombres qui ont meſme raiſon à vn, ou auſquels vn meſme à meſme raiſon ſont egaux entr'eux.

Semblablement; l'on infere qu'il y a plus grande raiſon d'vn plus grand nombre à vn meſme, que d'vn plus petit. Et au contraire, vn meſme à plus grande raiſon à vn plus petit qu'à vn plus grand: Item que celuy des nombres qui a plus grande raiſon à vn meſme eſt le plus grand, & celuy auquel vn meſme à plus grande raiſon eſt le plus petit: toutes leſquelles choſes ſont faciles, entendant bien cette definition.

Cette definition conuient auſſi aux nombres rompus, ſoit que les nombres ſoient entiers enſẽble ou non. Car ces 4. nõbres ſont proportionaux $\frac{3}{4}, \frac{3}{8}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}$. le premier eſtant autant multiple du 2. que le 3. du 4. ſçauoir double, ce qui appert ſi on reduit les 2. premiers en meſme denomination, ſçauoir à $\frac{6}{8}$. & $\frac{3}{8}$. & les 2. autres à $\frac{2}{4}$. & $\frac{1}{4}$. Semblablemẽt, ces quatre ſont proportionaux; $2\frac{3}{8}$. $4\frac{9}{12}$. $1\frac{1}{4}$. $2\frac{5}{10}$. puis que le premier eſt telle partie du ſecond, que le troiſieſme du quatrieſme; ſçauoir la moitié, ce qui eſt manifeſte les reduiſant en meſme denomination, ſçauoir à $\frac{19}{8}$. $\frac{38}{8}$. & $\frac{5}{4}$. & $\frac{10}{4}$. &c.

21. Les nombres plans ſemblables & ſolides, ſont ceux là qui ont les coſtez proportionaux.

A fin qu'vn nombre plan ſoit ſemblable à vn nombre plan, il n'eſt pas neceſſaire que deux coſtez de l'vn tels que l'on voudra ſoient proportionaux à 2. coſtez de l'autre tels que l'on voudra ; mais ſuffit que l'vn ait deux coſtez quels qu'ils ſoient proportionaux à 2. quelconques coſtez de l'autre.

Comme les nombres plans 24. & 6. ſont ſemblables, d'autant que les coſtez de celuy là, 6. & 4. ſont proportionaux, aux coſtez de cetuy-cy, 3. & 2. combien que les autres coſtez de ce premier 8. & 3. ou 12. & 2. ne ſoient proportionaux à ceux cy 3. & 2.

Semblablement, il n'eſt pas requis que à fin que 2. nombres ſolides ſoient ſemblables, que 3. des coſtez de l'vn tels qu'on voudra ſoient proportionaux à 3. de l'autre tels qu'on voudra, mais ſuffit que trois coſtez ſoient proportionaux à 3. coſtez, quels qu'ils ſoient, car ainſi s'ils ſont reduicts en forme de ſolide ſelon leurs vnitez, leurs longitudes, latitudes & altitudes ſeront proportionelles. Comme les nombres ſolides 192. & 24. ſont ſemblables, les coſtez de celuy-là, 8. 6. 4. eſtant proportionaux aux coſtez de cetuy-cy, 4. 3. 2. combien que les autres coſtez de ce premier 12. 8. & 2. ou 16. 4. 3. ne ſoient proportionaux à ceux-cy, 4. 3. 2. &c.

22. Nombre parfaict eſt, celuy-là qui eſt egal à toutes ſes parties aliquotes.

C'eſt à dire que ce nombre là, auquel toutes ſes parties priſes enſemble ſont egales (ſçauoir toutes ſes parties aliquotes) eſt appellé des Mathematiciens nombre parfaict. Cõme *6.28.496.* Car le premier contient ces 3. parties aliquotes 1.2.3. leſquelles toutes enſemble font 6. Toutes celles du ſecond ſont 1.2.4.7.14. la ſomme deſquelles faict 28. Et celles du troiſieſme 1.2.4.8.16.31.62.124.148. toutes leſquelles aſſemblees font 496. &c.

Que ſi toutes les parties aliquotes d'vn nombre priſes enſemble ſont plus grandes qu'iceluy, il ſera dit abondant, ſi moindres, il ſera appellé diminué.

D'où il appert que ce mot, partie, eſt pris par Euclide pour partie aliquote ſeulement, car autrement tout nombre ſeroit nõbre parfaict, tout nombre eſtant egal à toutes ſes parties, ſi chaque nombre plus petit peut eſtre dit partie d'vn plus grand, ſoit qu'il le meſure ou nom.

A ces definitions d'Euclide nous adiouſterons les ſuiuantes apres Clauius & autres.

23. Vn nombre eſt dit meſurer vn nombre par celuy-là, lequel multipliant, ou eſtãt multiplié produict le meſme nõbre.

Comme 4. ſera dit meſurer 12. par 3. d'autant que 4. multiplié par 3. produict 12. Item 3. ſera dit meſurer le meſme 12. par 4. puis que 4. multipliant 3. produict 12. &c.

24. Proportion ou raiſon de nombres eſt vne habitude d'vn nombre à vn autre, ſelon ce que l'vn eſt multiple de l'autre, ou partie, ou parties, ou bien le contient vne

fois ou quelques fois,& en outre quelque partie ou parties d'iceluy.

Comme ſi on compare 20. auec 4. ſelon ce que 20.eſt multiple de 4. ſçauoir quintuple,cette comparaiſon ou habitude ſera dicte raiſon ou proportion.

25. Deux nombres ſont dicts termes ou racines de la proportion, auſquels l'on n'en peut trouuer deux plus petits en la meſme raiſon ou proportion.

26. Quand trois nombres ſont proportionaux, le premier eſt dit auoir au troiſieſme la raiſon doublee de celle du premier au ſecond: Et quand il y en a quatre, le premier eſt dit eſtre en raiſon triplee, du premier au ſecond: Et ainſi d'vn meſme ordre, vn de plus iuſques à ce que la proportion ſoit acheuee.

27. S'il y a tant de nõbres que l'on voudra d'ordre,la raisõ du premier au dernier,eſt dicte eſtre cõpoſee, des raisõs du premier au ſecond, & du ſecond au troiſieſ. & du troiſieſme au quatrieſ.& ainſi d'ordre,iuſques à ce que la proportion ſoit acheuee.

PETITIONS OV DEMANDES.

A tout nõbre donné,en pouuoir prẽdre tãt que l'on voudra d'egaux ou multiples.

2. A tout nombre donné en pouuoir prendre vn plus grand.

Combien que le nombre ne puiſſe eſtre diminué infiniment, mais paruient à l'vnité indiuiſible, il peut neantmoins eſtre augmenté infiniment, par la continuë addition de l'vnité. Parquoy quelconque nombre eſtant propoſé l'on en peut trouuer vn plus grand, ſçauoir celuy qui eſt produict de l'addition de l'vnité, ou de pluſieurs vnitez, au nombre donné.

COMMVNES SENTENCES

1. Les nombres equimultiples de nombres egaux, ou d'vn meſme nombre, ſont egaux entr'eux.
2. Les nombres deſquels vn meſme nombre eſt equimultiple, ou deſquels, nombres egaux ſont equimultiples, ſont egaux entr'eux.
3. Les nombres qui ſont meſme partie ou meſmes parties de nombres egaux ou d'vn meſme nombre ſont egaux entr'eux.
4. Les nombres deſquels vn meſme nombre ou nombres egaux ſont meſme partie, ou meſmes parties, ſont egaux entre eux.
5. L'vnité meſure tout nombre, par les vnitez qui ſont en iceluy, c'eſt à dire, par le meſme nombre.

Car l'vnité eſtant priſe autant de fois, qu'il y a d'vnitez au nombre propoſé, conſtituë iceluy: c'eſt pourquoy elle le meſure par les vnitez qui

ſont en iceluy, c'eſt à dire par le meſme nombre conſtitué de ſes vnitez.

6. Tout nombre meſure ſoy-meſme par l'vnité.

Puis que chacun nombre pris vne fois eſt egal à luy meſme, il eſt manifeſte que tout nombre ſe meſure ſoy-meſme par l'vnité.

7. Si vn nombre multipliant vn nombre, en produict quelqu'vn, le multipliant meſurera le produict, par le multiplié: mais le multiplié meſurera le meſme par le multipliant.

Car que B, multipliant A, produiſe C. Ie dis que A, meſure C, par B, & B, meſure le meſme C, par A: Car [a] puis que B, eſtãt autãt de fois cõpoſé qu'il y a d'vnitez en A, conſtitue C, il eſt manifeſte que B, meſure C, par A; & par meſme raiſon A, meſure le meſme C par B; puis que B, multipliant le meſme A, produict le meſme C, comme il ſera demonſtré à 16. pr. de ce l.

A....4 B...3
C.....12

[a] 15. def.

8. Si vn nombre en meſure vn autre, celuy par lequel il le meſure, meſure le meſme par les vnitez qui ſont au meſurant; c'eſt à dire par le meſme nombre meſurant.

Comme d'autant que le nombre 6. meſure 18. par 3. iceluy 3. meſurera le meſme 18 par 6. c'eſt à dire par les vnitez qui ſont en 6. Car puis que 6. meſure 18. par 3. le nombre 18. ſera [b] produict de la multiplication de 6. par 3. ou de 3. par 6. Donc

[b] 23. def.

par le precedent axiome, 3. meſurera 18. par 6.

9. Si vn nombre meſurant vn nombre, multiplie celuy par lequel il le meſure, ou eſt multiplié par iceluy, il produira celuy-là lequel il meſure.

Car, que le nombre A, meſure C, par B. Ie dis que A, multipliant B, ou multiplié de B, produira C. a Car A, eſt dit meſurer C, par le nombre, lequel multipliant, ou eſtant multiplié produict C. Donc A, eſtant poſé meſurer C, par B; il eſt manifeſte que A, multipliant B, ou eſtant multiplié par iceluy produira C.

a 15. def.

A....4. B...3.
C.....12.

10. Le nombre qui meſure tant d'autres nombres que l'on voudra, meſure auſſi le compoſé d'iceux.

Que le nombre A, meſure BC, & CD. Ie dis qu'il meſure auſſi leur compoſé BD. Car puis

A....4 10
B....4 E....4 C....4 F....4 G....4 D

que A, meſure BC, CD; tant BC, que CD, ſera multiple de A, diuiſant donc BC, ſelon les parties BE, EC, egales à A, & CD, ſelon CF, FG, GD, egales à A; BD, compoſé de toutes les parties BE, EC, CF, FG, GD, egales à A, ſera multiple de A. Donc A, meſure B. Ce qui eſt propoſé.

11. Le nombre qui meſure quelconque autre nombre; meſure auſſi tout nombre que celuy-là meſure.

Que le nombre A, meſure B, & B, meſure CD.

Ie

Ie dis que A, mesure aussi CD, que B, mesure. Car puis que B, mesure CD, iceluy CD, sera multiple de B. Diuisant donc CD, en CE, ED, egaux à B; A, mesurera CE, ED, puis que A, est posé mesurer B, nombre egal, tant à CE, que à ED. [a] Donc A, mesurera aussi CD, composé de CE, ED. Ce qui est proposé.

A...3
B.....9
C.....9 E.....9 D

[a] 10. ax.

12. Le nombre qui mesure le tout & le retranché, mesure aussi le reste.

Que A, mesure le tout BC, & le retranche BD. Ie dis qu'il mesurera aussi DC, reste. Car puis que A, mesure BC, & BD, tant BC, que BD, sera multiple de A, ou BD, sera egal à A; Donc ayant diuisé tant BC, que BD, en parties egales à A, le reste DC, sera vne seule partie de BC, egale à A, ou plusieurs, partant DC, sera egal à A, ou multiple d'iceluy. Dõc A, mesurera DC: Ce qui est proposé.

A...3
B.....9 D..3 C
B.....9 D.....6 Q
B...3 D.....6

THEOREME 1. PROP. 1.

Si de deux nombres inegaux proposez, on retranche tousiours alternatiuement le plus petit du plus grand, & que le restant ne mesure iamais son precedent iusques à ce que l'on ait prins l'vnité; les nõbres proposez au commencement, seront premiers entr'eux.

Soient deux nombres inegaux proposez AB, CD, le moindre desquels CD, soit retranché tant de fois que l'on pourra du plus grand AB: & reste EB, qui soit osté de CD, aussi autant de fois qu'il sera possible, & le reste FD, de EB: & qu'en cette alternatiue soustraction le nombre restant, ne mesure iamais le precedent duquel il a esté soustraict, iusques à ce que l'on paruienne à l'vnité GB, qui mesure le nombre precedent FD. Ie dis que les nombres AB, CD, sont premiers entr'eux, c'est à dire qu'ils ont la seule vnité pour commune mesure.

Car s'ils ne sont premiers entr'eux, ils seront mesurez par quelque nombre, lequel soit H, commune mesure d'iceux outre l'vnité. D'autant donc que H, mesure CD, & CD; AE, (CD, estant partie de AE, ou egal à iceluy puis qu'estant osté de AB, reste EB)

A.....10 E..2 G.1 B
C...3 F..2 D
H-----

a 11.ẽ.ſ. [a] H mesurera aussi AE. Mais H, mesure le tout
b 11 cõ.ſ. AB. [b] Il mesurera donc aussi le reste EB. Mais EB,
c 11.cõ.ſ. mesure CF. [c] Donc H, mesurera le mesme CF; &
d 12.cõ.ſ. partãt puis qu'il mesure le tout CD, [d] il mesurera
e 11 cõ.ſ. aussi le reste FD, & puisque FD, mesure EG; [e] H,
f 12.cõ.ſ. mesurera aussi EG. Mais H, mesuroit le tout EB, [f] donc H, mesurera pareillement l'vnité restante GB, le tout sa partie, ce qui est absurde. Donc aucun nombre outre l'vnité ne mesurera AB, CD: & partant serõt premiers entr'eux. Parquoy si de deux nombres, &c. Ce qu'il falloit demonstrer.

SCHOLIE.

Commandin demonstre icy la proposition suiuante.

Si de deux nombres proposez, & composez entr'eux, on soustraict tousiours le moindre du plus grand alternatiuement ; l'on ne paruiendra pas iusques à l'vnité.

Car si on paruenoit à l'vnité, a les nombres proposez seroient premiers entr'eux : Ce qui est absurde estant posez, composez entr'eux. a 1. 7.

De ces choses nous cognoistrons, si deux nombres quelconques estant proposez, seront premiers entr'eux ou non. Car si ostant tousiours alternatiuement le plus petit du plus grand, le reste ne mesure son precedent iusques à ce que l'on ait pris l'vnité, ils seront b premiers entr'eux : autrement ils seront composez entr'eux, &c. b 1. 7.

PROBLEME 1. PROP. 2. ij.

Trouuer la plus grãde cõmune mesure de 2. nombres dõnez non premiers entr'eux.

Soient proposez deux nombres AB, CD, non premiers entr'eux, desquels il faut trouuer la plus grande commune mesure. Soit retranché le plus petit CD, de AB, plus grand, autant de fois qu'il sera possible, & reste EB, lequel soustraict de CD, laisse FD, & ainsi de suitte tousiours le plus petit soit retranché du plus grand, par vne soustraction alterne : par laquelle on paruiendra à vn nombre qui mesurera le precedent. Car si on paruenoit à l'vnité, a AB, CD, seroient premiers entr'eux : ce qui est contre l'hypothese. Que l'on paruienne donc à FD, lequel soustraict du precedent tant

A.....16 E.....6 B
G.....6 F..2 D
G------

a 1. 7.

que faire ce peut, ne reste rien. Ie dis que FD, est la plus grande commune mesure de AB, CD.

Car qu'il les mesure tous deux nous le monstrerons ainsi. D'autant que FD, mesure EB; & EB, mesure CF, [b] FD mesurera le mesme CF, & mesurant soy-mesme, [c] il mesurera aussi le tout CD, composé des deux CF, FD. Mais CD, mesure AE, [d] donc FD, mesurera aussi AE. Et puis que FD, mesure aussi EB, [e] il mesurera le tout AB, composé de AE, EB. Donc FD mesure les 2. nombres AB, & CD. Il est aussi la plus grande commune mesure, car s'il n'est ainsi en soit vne autre plus grande que FD, comme G, s'il se peut faire: D'autant donc que G, mesure AB, & CD, estant la commune mesure; & CD, mesure AE, iceluy G, [f] mesurera aussi AE, [g] & partant EB: mais EB, mesure CF. [h] Donc G, mesurera aussi CF, [i] il mesurera donc aussi le reste FD, le plus grand le plus petit, ce qui est impossible. Donc vn plus grand que FD, ne mesure AB, CD, & partant FD, est leur plus grande commune mesure.

b 11. def. 5.
c 10. c. 5.
d 11. c. 5.
e 10.
f 11. def. 5.
g 12. def. 5.
h 11. c. 5
i 12. c. 5.

Mais si le moindre nombre CD, mesure le plus grand AB, en telle sorte qu'estant soustraict d'iceluy tant de fois qu'il sera possible il ne reste rien, CD, sera la plus grande commune mesure des deux, attendu qu'il mesure soy-mesme, comme il appert par cette figure. Donc de 2. nombres, &c. Ce qu'il falloit demonstrer.

A.....10 B
C.....5 D

COROLLAIRE.

De cette demonstration il est manifeste que le nombre qui en mesure deux autres, mesure aussi

la plus grande commune meſure d'iceux.

Cecy eſt colligé de celle partie, par laquelle il eſt monſtré que FD, eſt la plus grande commune meſure de AB, CD. Car il eſt là monſtré que ſi G, meſure AB, CD, il meſure auſſi FD, leur plus grande commune meſure.

SCHOLIE.

Par ce qui eſt dict cydeuant, nous trouuerons facilement auec Campanus, ſi tant de nombres propoſez que l'on voudra ſont premiers entr'eux ou non. Car ſoient 3. nombres propoſez: Premieremẽt i'experimente, ſi A, & B ſont premiers entr'eux: que s'ils ſõt premiers entr'eux, les 3. A, B, C, ne ſeront compoſez entr'eux, ne pouuants auoir aucune commune meſure, outre l'vnité, puis que A, & B, ſont premiers entr'eux. Schol. 1.7.

Mais ſi A, & B ſont compoſez entr'eux, ſoit trouuee leur plus grande commune meſure D: que ſi D, meſure le nombre C, il eſt euident que les 3. A, B, C, ſeront compoſez entr'eux, ayants D, pour commune meſure.

A.....10
B.....7
C.....5
22.7.

Que ſi D, plus grande commune meſure de A, & B, ne meſure C; C, & D, ſeront premiers entr'eux ou non: ſi premiers, les 3. A, B, C, ne ſeront compoſez entr'eux, mais premiers.

Car s'ils ſont dicts eſtre compoſez entr'eux, de ſorte qu'ils ayent vn nombre pour commune meſure, icelle meſurera D, [b] *plus grande commune meſure de A, & B, & meſurant auſſi C: C, D, ne ſeront premiers entr'eux, ce qui eſt contre l'hypotheſe.*

A.....18.
B.....12.
C.....9
D...3.
b coroll. 2.7.

Mais si C, & D, ne sont premiers entr'eux, les 3. A, B,
c 2. 7. *C, seront composez entr'eux.* [c] *Car ayant trouué E, plus*
d 11. c. 7. *grande commune mesure de C, & D; Puis*
que E, mesura D, & D, mesure A, & B, A.....9
[c] *E, mesurera aussi les mesmes A, & B,* B.....6
parquoy puis que E, mesure pareillement C.....5
C, le nombre E, mesurera les 3, A, B, C, D...3
& partant seront composez entr'eux. Ce
qui est proposé.

Semblablement nous examinerons si plus de 3. nom-
bres sont premiers entr'eux ou com-
posez. Car s'il y à quatre nombres A.....16
proposez, il faudra premierement B.....12
faire l'experience de trois, s'il y en à C.....6
cinq, faudra faire l'experience de 4. D....4 E..2
&c. Et faut faire au reste selon ce
que nous auons dict, de trois nombres proposez.

iij

PROBLEME 2. PROP. 3.

Trouuer la plus grande commune mesure de trois nombres donnez, non premiers entr'eux.

Soient proposez trois nombres non premiers entr'eux A, B, C, dont il faut trouuer la plus grande commune mesure.

a 2. 7. Soit [a] trouué D, la plus grande commune mesure de A, & B, si D, mesure aussi C, il est manifeste que D, est la plus grande commune mesure des 3. A, B, C. Car si vn plus grand nombre que D, est dict mesurer les 3. A, B, C, le

A.....16 D....4
B.....12 E..2
C.....6 F------

mesme, [b] mesurera aussi D, plus grande commune mesure de A, & B, le plus grand, le plus petit, ce qui est impossible. Mais si D, ne mesure C, au moins D, & C, seront composez entr'eux. Car A, B, C, estant composez, quelconque commune mesure d'iceux, [c] mesurera aussi D, plus grande commune mesure de A, & B. Donc puis qu'icelle commune mesure, mesure aussi C; D, & C, seront composez entr'eux [c] & soit E, leur plus grande commune mesure. [d] Ie dis que E, est la plus grande cõmune mesure des 3. A, B, C. Car d'autant que E, mesure C, & D, mais D, mesure A, & B; E, mesurera les mesmes A, & B, & partant il mesurera les trois A, B, C. Or que E, soit la plus grande commune mesure il est euident: car s'il se peut faire soit F, commune mesure d'iceux plus grande que E. D'autant que F, mesure A, & B, il [f] mesurera aussi D, leur plus grande commune mesure, mais il mesure aussi C, donc F, mesurant D, & C, mesurera pareillement E, leur commune mesure, le plus grand nombre le moindre. Ce qui est impossible, donc vn plus grand nombre que E, ne mesure A, B, C, & partant E, est leur plus grande commune mesure. Donc de trois nombres, &c. Ce qu'il falloit faire.

b *coroll.* 2. 7.

c 7e or. 2.

d 2. 7.

e 11. 6.

f cor. 2. 7.

COROLLAIRE.

Il est manifeste de cette demonstration, qu'vn nombre qui en mesure trois, mesure pareillement leur plus grande commune mesure.

Cela est aussi colligé de la derniere partie de la demonstration, où il est monstré que puis que F, mesure A, B, C, qu'il mesurera E, leur plus grande commune mesure, &c.

Semblablement s'il y a plus de 3. nombres proposez non premiers entr'eux pour trouuer leur plus grande commune mesure ce probleme aura lieu. Car s'il y a 4. nombres, il faudra premierement trouuer la plus grande commune mesure de trois. Et si 5. de 4. &c. Et faudra operer qu'reste comme il a esté dict de trois nombres.

iiij THEOREME 2. PROP. 4.

Tout nombre plus petit, est partie ou parties de tout nombre plus grand.

Soient deux nombres proposez, A, plus petit, & B, plus grand: ie dis que A, est partie, ou parties de B. Car soient premierement A, & B, premiers entr'eux. D'autant donc que chaque vnité de A, est partie de B, il est manifeste que A, est parties de B, sçauoir autant de parties qu'il y a d'vnitez en A.

A.....7
B.....10

Secondement soient A, & B, non premiers entr'eux, mais composez, & que A, mesure B, cela estant[a] il appert que A, est partie de B.

[a] 23. def. 7

A.....5
B.....10

Mais si A, ne mesure B, [b] soit trouué C, leur plus grande commune mesure; & soit diuisé A, selon les parties AD, DE, EF, chacune egale à C. [c] D'autant donc que C, est partie de B, puis qu'il le mesure, AD, sera aussi partie de B: semblablement DE, & EF; & partant tout le nombre A, est parties de B, à sçauoir autant de parties que C, est contenu de fois en AF, donc tout nombre

[b] 2. 7.

[c] 3. def.

A..2 D..2..E..2 F
B.....10
C..2

plus petit, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.

THEOREME 3. PROP. 5.

Si vn nombre eſt telle partie d'vn nombre, qu'vn autre l'eſt d'vn autre: l'vn & l'autre enſemble ſera telle partie de l'vn & l'autre enſemble, qu'vn ſeul l'eſt d'vn ſeul.

C'eſt à dire: Si quatre nombres, le premier eſt telle partie du 2. que le 3. du 4. le premier & 3. enſemble ſeront telle partie du 2. & du 4. enſemble que le premier l'eſt du ſecond.

Soient quatre nombres A, B C, D, EF, & ſoit A, 1. telle partie de BC, 2. que D. 3. l'eſt de EF, 4. Ie dis que l'vn & l'autre, A, & D, 1 & 3. enſemble, eſt telle partie de l'vn & l'autre BC, 2. & EF, 4. enſemble, que A, ſeul eſt partie de BC, ſeul ou D, de EF.

Car ayãt diuiſé les nõbres BC, & EF, ſelon les parties BG, GC; EH, HF, egales à A, & à D, il y aura en BC, autãt de parties egales à A, qu'en EF, d'egales à D, puis que A, eſt telle partie de BC, que D, l'eſt EF. D'autant donc que A, & BG, ſont egaux; ſi l'on adiouſte à iceux les egaux D, & EH, A, & D, enſemble ſeront egaux à BG, & EH, enſemble: ſemblablement A, & D, enſemble ſeront egaux à GC, & HF, enſemble. Et ainſi de ſuitte, s'il y auoit d'auantage de parties en BC, & EF; & partant l'vn & l'autre A, & D, enſemble ſeront meſme partie de l'vn & de l'autre

A.....6 D....4
B.....6 G.....6 C E....4 H....4 F

BC, & EF, enſemble, que A, l'eſt de BC, ou D, de EF. Donc ſi vn nombre eſt, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.

SCHOLIE.

Commandin a demonſtré le Theoreſme ſuiuant.

Si vn nombre eſt autant multiple d'vn nombre, qu'vn autre l'eſt d'vn autre, l'vn & l'autre enſemble ſera autant multiple de de l'vn & l'autre enſemble qu'vn ſeul l'eſt d'vn ſeul.

Soit A, autant multiple de B, que C, de D. Ie dis que A, C, enſemble ſera autant multiple de B, D, enſemble que A de B. Car A, eſtant multiple de B, & C, autant multiple de D; B, ſera quelque partie de A, & D, meſme partie de C. [a] *Donc B, D, enſemble ſera meſme partie de A, C, enſemble que A de B. Ce qu'il fallait demonſtrer. Ce que l'on doit auſſi entendre de pluſieurs, &c.*

A.....8
B....4
C.....6
D...3

[a] 5. 7.

vj THEOREME 4. PROP. 6.

Si vn nombre eſt telles parties d'vn nombre qu'vn autre l'eſt d'vn autre: l'vn & l'autre enſemble ſera telles parties de l'vn & l'autre enſemble, qu'vn ſeul l'eſt d'vn ſeul.

C'eſt à dire, Si de 4. nombre le 1. eſt telles parties du 2. que le 3. du 4. le 1. & 3. enſemble, ſeront telles parties du 2. & 4. enſemble que le 1. du ſecond.

Soit le nombre AB, 1. meſmes parties de C, 2. que DE, 3. l'eſt de F, 4. Ie dis que l'vn & l'autre AB, 1. & DE, 3. enſemble ſont meſmes parties de C, 2. & F, 4. enſemble que AB, de C, ou DE, de F.

Car ayant diuiſé AB, DE, ſelon les parties AG, GB, DH, HE, des nombres C, & F; AB contiendra autant de parties de C, que DE, de F, puis AB, eſt telles parties de C, que DE, l'eſt de F: Donc d'autant que AG, eſt telle partie de C, que DH, de F, a l'vn & l'autre AG, DH, enſemble ſera telle partie de l'vn & l'autre C, & F, enſemble que AG, l'eſt de C, ou DH, de F: Par meſme raiſon GB, HE, enſemble ſera meſme partie de C, & F, enſemble que GB, l'eſt de C, ou HE, de F: & ainſi de ſuitte, s'il y a d'auantage de parties en AB, DE: partant l'vn & l'autre AB, DE, enſemble ſera meſmes parties de l'vn & l'autre C, & F, enſemble que AB, l'eſt de C, ou DE, de F. Donc ſi vn nombre eſt telles parties, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.

A...3 G...3 B
C.....9.
D....4 H....4 E
F.....12

a 25. 7.

THEOREME 5. PROP. 7. vij

Si vn nombre eſt telle partie d'vn nombre que le retranché de retranché : le reſte ſera auſſi telle partie du reſte que le tout l'eſt du tout.

Soit le nombre AB, meſme partie de CD, que le retranché AE, l'eſt du retranché CF. Ie dis que le reſte EB, eſt meſme partie du reſte FD, que le tout AB, du tout CD.

Car ſoit prins GC, duquel EB, ſoit telle partie que AE, l'eſt de CF, ou le tout AB du tout CD. D'autãt dõc que AE, eſt meſme partie de CF, que
a 5.7. EB, de GC, [a] l'vn & l'autre AE, EB enſemble ſera telle partie de CF, GC, enſemble que AE, l'eſt de CF, c'eſt à dire que le tout AB, l'eſt du tout CD; & partant AB, eſtant telle partie tant de FG, que de CD, iceux FG, CD, ſeront egaux entr'eux: oſtant donc le commun CF; GC, FD, demeureront egaux: donc EB, ſera telle partie de FD, que de GC, c'eſt à dire que le tout AB, du tout CD. Donc ſi vn nombre eſt telle partie, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.

SCHOLIE.

Nous demonſtrerons auſsi le Theoreſme ſuiuant prins de Commandin.

Si vn nombre eſt autant multiple d'vn nombre que le retranché du retranché; le reſte ſera auſſi autant multiple du reſte que le tout, du tout.

Soit AB, autant multiple du tout CD, que le retranché AE, du retranché CF, Ie dis que le reſte EB, eſt autant multiple du reſte FD, que le tout AB, du tout CD. Car AB, AE, eſtant equimultiples, de CD, CF, au contraire le tout CD, A.....6E....4B
ſera meſme partie du tout AB, que C...3F..2D
a 7 ſept. *CF, retranché de AE, retranché, par-*
quoy le reſte FD *ſera meſme partie du reſte EB, que le tout CD, du tout AB. Partant au contraire, EB ſera autant multiple de FD, que le tout AB, du tout CD. Ce qui eſtoit propoſé.*

THEOREME 6. PROP. 8. viij

Si vn nombre eſt telles parties d'vn autre nombre, que le retranché du retranché: le reſte ſera auſſi telles parties du reſte, que le tout l'eſt du tout.

Soit le nombre AB, meſmes parties de CD, que le retranché AE, du retranché CF. Ie dis que le reſte EB, ſera meſmes parties du reſte FD, que le tout AB, l'eſt du tout CD.

Car ſoit pris GH, egal à AB; GH, ſera donc auſſi meſmes parties de CD, que AB, de CD, c'eſt à dire que AE, de CF.

A.....6 K.....6 E....4 B
C.....18 F.....6 D
G.....6 L..2 I.....6 M..2 H

Ayant donc diuiſé GH, ſelon GI, IH, parties de CD, & AE, ſelon AK, KE, parties de EF, le nombre des parties GI, IH, ſera egal au nombre des parties AK, kE, & tant GI, que IH, ſera telle partie de CD, que AK, ou KE, l'eſt de CF. Et puis que CD, eſt plus grand que CF, tant GI, que IH, partie de CD, ſera plus grande que Ak ou KE, partie de CF. Ayant donc pris GL, IM, egaux à AK, KE; GL, ſera meſme partie de CF, que Ak, du meſme CF, ou que GI, de CD, & partant le tout GI, eſtant meſme partie du tout, CD que le retranché GL, du retranché CF, [a] le reſte LI, a 7. 7.
ſera telle partie du reſte FD, que le tout GI, du tout CD: Ainſi MH, ſera monſtré meſme partie de FD, que le tout GI, ou IH, du tout CD. Donc puis que tãt GI, que IH, eſt meſme partie de CD, que LI, & MH, de FD, l'vn & l'autre GI, IH, en-

ſemble ſeront telles parties de CD, que LI, & MH, enſemble de FD. Mais GH, eſt meſmes parties de CD, que AB, du meſme CD, (AB, GH, eſtant egaux.) Donc LI, MH, enſemble ſeront meſmes parties de FD, que AB, de CD. Mais d'autant que ſi des egaux AB, GH, l'on oſte les egaux AK, KE, & GL, IM, le reſte EB, ſera egal au reſte LI, & MH, enſemble: & partant le reſte EB, ſera meſmes parties du reſte FD, que le tout AB, du tout CD, à ſçauoir que LI, MH, enſemble du meſme FD. Donc ſi vn nombre, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.

ix THEOREME 7. PROP. 9.

Si vn nombre eſt telle partie d'vn nombre qu'vn autre eſt partie d'vn autre; Auſſi en changeant le premier ſera telle ou telles parties du troiſieſme que le ſecõd du quatrieſme.

C'eſt à dire; Si de 4. nombres le 1. eſt telle partie du 2. que le 3. du 4. auſſi en changeant le 1. ſera telle partie ou parties du 3. que le 2. du 4.

Soit le nombre A, telle partie de BC, que D, de EF, eſtant A, & BC, moindres que D, & EF, chacun au ſien.

Ie dis qu'en changeant A, ſera telle ou telles parties de D, que BC, eſt partie ou parties de EF. Car ayant diuiſé BC, EF, ſelon les parties BG, GC, chacune egale à A, & EH, HF, chacune egale à D: le nombre des parties de BC, ſera egal au

A....4
B....4 G....4 C
D.....6
E.....6 H....4 F

nombre des parties de EF. Mais BG, GC, eſtant egaux entr'eux & moindres que EH, HF, auſſi egaux entr'eux, d'autãt que le tout BC, eſt moindre que le tout EF, par l'hypotheſe; BG, ſera meſme partie de EH, ou meſmes parties que GC, de HF, [2] & partant BG, GC, enſemble ſçauoir BC, 2. ſera meſme partie ou meſmes parties de EH, HF, enſemble c'eſt à dire EF, 4. que BG, de EH, c'eſt à dire que A, 1. l'eſt de D, 3. Donc ſi vn nombre, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer. [2] 5. ou 6. 7.

THEOREME 8. PROP. 10. X

Si vn nombre eſt telles parties d'vn nombre qu'vn autre eſt parties d'vn autre: Auſſi en chãgeant le premier ſera telles parties ou partie du troiſieſme, que le ſecond du quatrieſme.

C'eſt à dire, Si de 4. nombres le 1. eſt telles parties du 2. que le 3. du 4. auſſi en permutant le 1. ſera telle ou telles parties du 3. que le 2. du 4.

Soit le nombre AB, telles parties de C, que DE, l'eſt de F. Ie dis qu'en chãgeant AB, ſera telles parties ou partie de DE, que C, l'eſt de F, eſtãt AB, CD, moindres que DE, EF, chacun au ſien.

Car ayant diuiſé AB, DE, ſelon AG, GB, parties de C, & DH, HE, parties de F, il y aura autant de parties en AB, qu'en DE, & tant AG, que GB, ſera telle partie de C, que DH, ou HE, de F. [2] donc en changeant AG, ſera meſme [2] 9. 7.

A..2 G..2 B
C.....6
D.....5 H.....5 E
F.....15

partie ou parties de DH,& GB, de HE,que C,de F,& partant AG,ſera,meſme partie ou parties de DH,& que GB,de HE. [b] Donc AG, GB, enſemble, c'eſt à dire AB, 1. ſera meſme partie ou parties de DH, HE, enſemble, c'eſt à dire de DE, 3. que AG,de DH,c'eſt à dire que C, 1. de F,4. Dõc ſi vn nombre eſt telles parties,&c. Ce qu'il falloit demonſtrer.

[b] 5. ou 6. 7.

xj THEOREME 9. PROP. 11.

Si comme le tout eſt au tout, ainſi le retranché eſt au retranché: auſſi le reſte ſera au reſte comme le tout au tout.

Soit le tout AB,au tout CD,comme le retranché AE,au retranché CF. Ie dis que le reſte EB, eſt au reſte FD, comme le tout AB, eſt au tout CD.

Car puis que AB, eſt à CD,comme AE,eſt à CF, [a] parties AB, eſtant plus petit que CD, ſera meſme partie ou meſmes parties de CD,que AE,de CF. Donc le reſte EB, ſera meſme partie ou parties du reſte FD, que AB, de CD. [c] Partãt EB,ſera à FD,comme AB,à CD. Ce qu'il falloit demonſtrer.

A....4 E..2 B
C.....8 F....4 D

[a] 20.d.7
[b] 7.ou 8.ſept.
[c] 20. def.7. conuer.

SCHOLIE.

Cette demonſtration à lieu quand AB, eſt moindre que CD, mais ſi AB, eſt plus grand que CD, il ſera neantmoins ainſi demõſtré: Car CD, meſure AB, ou non, s'il le meſure: d'autant que AB, eſt à CD, ainſi AE, à CF,

AB,

AB, [a] *sera autant multiple de CD, que AE, de CF.* [b] *Partant le reſte EB, autant multiple du reſte FD, que le tout AB, du tout CD;* [c] *Donc le reſte EB, ſera au reſte FD, comme le tout AB, au tout CD.*

A.....8 E.....6 B
C....4 F...3 D

[a] 20. d. 7
[b] Schol. 7. 7.
[c] 20. d. conuert.

Mais que CD, ne meſure AB: A.....6 E...3 B
Derechef, d'autant que comme C....4 F..2 D
AB, à CD, ainſi AE, à CF, [d] *CD, ſera meſmes parties de AB, que CF, de AE,* [e] *donc le reſte FD, ſera telles parties du reſte EB, que le tout CD, du tout AB;* [f] *parquoy le reſte EB, ſera au reſte FD, comme le tout AB, au tout CD. Ce qu'il falloit demonſtrer.*

[d] 20. d. 7
[e] 8. 7.
[f] 20. d. conuert.

THEOREME 10. PROP. 12. xiij

S'il y a tant de nombres que l'on voudra proportionaux; comme vn des antecedens ſera à vn des conſequents; ainſi tous les antecedents ſeront à tous les conſequents.

Soient tant de nombres que l'on voudra, A, B, C, D, E, F; proportionaux; à ſçauoir comme A, à B, ainſi C, à D, & cõme C, à D, ainſi E, à F. Ie dis que tous les antecedents A, C, E, enſẽble ſont à tous les conſequents B, D, F, enſemble comme A, ſeul antecedent eſt à B, ſeul conſequent.

A.....4 C..2 E...3
B.....8 D....4 F.....6

Dautãt donc, que à cauſe de la meſme proport. A, eſt [a] telle partie ou telles parties (A, C, E, eſtans moindres) de B, que C, de D, & E, de F; [b] A, & C, enſẽble ſera telle partie ou parties de B, & D, en-

[a] 20. d.
[b] 5 ou 6, 7.

ſemble que A, de B, ou E, de F. Derechef, d'autant que A, & C, enſemble comme vn eſt meſme partie ou meſmes parties de B, & D, enſemble comme vn que E, de F, [c] les deux A, & C, enſemble comme vn, & F, enſemble ſeront meſme partie ou meſmes parties des deux B, & D, enſemble comme vn & F, enſemble, que A, de B. [d] Partant y aura meſme raiſon de A, C, E, enſemble à B, D, F, enſemble que de A, à B.

c 5. 7.

d 20. d. 7.

SCHOLIE.

Cette demonſtration a auſſi lieu ſeulement, quand les antecedens ſont moindres que les conſequents: Que s'ils ſont plus grands, il ſera auſſi demonſtré. Car B, meſurera A, ou non, s'il le meſure, nous dirons ainſi. D'autant que A, eſt à B, comme C, à D; A, ſera autant multiple de B, que C, de D.

a 20. d. 7.

b Schol. 5. 7.

[b] Donc A, & C, enſemble ſera autant multiple de B, D, enſemble que A, de B. [c] Donc comme A, à B, ainſi A, C, enſemble à B, D, enſemble.

c 20. d. conuert.

Que ſi B, ne meſure A, nous argumenterons ainſi. D'autant que cõme A, eſt à B, ainſi C, à D; B, ſera [d] telles parties de A, que D, de C, [e] dõc B, & D, enſemble ſera telles parties de A, C, enſẽble que B, de A, partant [f] comme A, à B, ainſi A, C, enſemble à B, D, enſemble.

d 20. d. 7.

e 6. 7.

f 20. d. 7. cõuer.

A.....9 C...3
B.....6 D..2

Nous demonſtrerons le meſme encore qu'il y ait pluſieurs nombres, ayant premierement demonſtré le ſuiuant.

Les raiſons des nombres qui ſont de meſme à vne meſme raiſon, sõt auſſi de meſme entr'elles.

Soit comme A, à B, ainſi C, à D, mais comme C à D, ainſi E, à F. Ie dis que comme A, à B, ainſi E, à F. Car ſoit

A, plus grand que B: D'autant que comme A, à B, ainsi C, à D, B, sera telle partie ou parties de A, que D, de C. Derechef C, estant à D, comme E, à F, telle ou telles parties que D, est de C, telle ou telles parties F, sera de E.

A.....9 C...3 E.....6
B.....6 D...2 F.....4

g 20. d. 7.

Donc telle ou telles parties que B, est de A; F, sera mesme partie ou parties de E, donc h *comme A, à B, ainsi E, à F.*

h 20. d. 7. cõuer.

Mais soit A, est moindre que B, puis que comme A, est à B, ainsi C, à D, telle partie ou parties que A sera de B, telle partie ou parties C, sera de D. Derechef C, estant à D, comme E, à F, E, sera telle partie ou parties de F, que C, de D, donc A, est telle partie ou parties de B, que E, est de F; donc comme k *A, est à B, ainsi E, à F. Ce qu'il fallois demonstrer.*

A.....6 C...2 E.....4
B.....9 D...3 F.....6

i 20. d.

k 20. d. conuert.

Cecy estant demonstré soient les nombres proportionaux A, B, C, D, E, F, sçauoir comme A, à D, ainsi B, à E, & C, à F; Semblablement nous demonstrerons, que cõme A, est à D, ainsi AB, à DE, & d'autãt que cõme A, à D, ainsi C, à F; par ce que nous venõs de demõstrer, cõme AB, à DE, ainsi C, à F; ainsi nous demonstrerons que comme AB, à DE, ainsi ABC, à DEF: donc comme A, à D, ainsi A, B, C, à D, E, F, & ainsi des autres nombres autant qu'il y en aura de proportionaux: Cecy respond à ce qui est demonstré des grandeurs 12. 5.

A.....8 B.....4 C.....4
D.....4 E.....3 F.....2

THEOREME 11. PROP. 13. xliij

Si quatre nombres sont proportionaux; aussi en chãgeant ils serõt proportionaux.

Soit A, à B, comme C, à D. Ie dis qu'en changeant A, sera à C, comme B, à D.

Car, d'autant que A, est à B, comme C, à D, [a] A, est mesme partie ou parties de B, que C, de D. Donc [b] en changeant A, sera mesme partie ou parties de C, que B, de D; & [c] partant comme A, sera à C, ainsi B, sera à D. Ce qu'il falloit demonstrer.

a 20. d.
b 9. ou 10. sept.
c 20. d.

A..2
B....4
C.....6
D.....12

SCHOLIE.

Cette demonstration a aussi lieu, quand les antecedents sont moindres que les consequents, & que A, est moindre que C; mais s'ils sont plus grands & A, soit plus grand que B, & moindre que C, nous dirons ainsi: D'autant que comme A, à B, ainsi C, à D; [a] B, sera mesme partie ou parties de A, que D, de C. [b] Donc en permutãt B, sera mesme partie ou parties de D, que A, de C. [c] Donc comme A, à C, ainsi B, à D.

a 20. d.
b 9. ou 11. sept.
c 20. d.
7 cõuer.
d 9. ou 10. sept.
e 20. d.
7. cõuer.
f 20. d. 7.
g 20. d. conuer.

A.....4
B...3
C.....8
D.....6

Que si A, est plus grand que B, & que C, on dira ainsi. D'autant que comme A, à B, ainsi C, à D; D, sera mesme partie ou parties de C, que B, de A; Donc en permutant C, sera mesme partie ou parties de A, que D, de B. [c] Donc comme A, à C, ainsi B, à D.

A.....9
B.....6
C...3
D..2

Finalement si A, est moindre que B, & plus grand que C, on argumentera ainsi. D'autant que comme A, à B, ainsi C, à D, C, [f] est mesme partie ou parties de D, que A, de B; Donc en changeant D, sera mesme partie ou parties de B, que C, de A: [g] Donc comme A, est à C, ainsi B, à D. Ce qu'il falloit demonst.

A....4
B.....8
C..2
D....4

THEOREME 12. PROP. 14. xv

S'il y a tant de nombres que l'on voudra, d'vne part & autant d'vne autre ; lesquels soient prins de deux en deux, & en mesme raisõ ; aussi en raison egale ils seront en mesme raison.

Soient tant de nombres que l'on voudra A, B, C, & autant d'autres D, E, F, & soit comme A, à B, ainsi D, à E, & comme B, à C, ainsi E, à F. Ie dis qu'en raison egale comme A, est à C, ainsi D, est à F.

Car d'autant que cõme A, est à B, ainsi D, est à E, [a] en changeant comme A, sera à D, ainsi B, sera à E: semblablement puis que comme B, est à C, ainsi E, à F, en changeant comme B, sera à E, ainsi C, à F. Donc comme A, est à D, ainsi C, sera à F. (Car puis que l'vne & l'autre raison de A, à D, & de C, à F, est de mesme à la raison de B, à E, comme il a esté demonstré, [b] icelles seront aussi de mesme entr'elles,) [c] & partant en changeant comme A, sera à C, ainsi D, sera à F. Ce qu'il falloit demonstrer.

A.....12 B.....8 C....4 D.....9 E.....6 F...3

a 13.7.

b Schol. 12. 7.

c 13.7.

THEOREME 13. PROP. 15. xvj

Si l'vnité mesure quelque nombre, & qu'vn autre nombre en mesure autant de fois quelque autre ; aussi en chan-

geant l'vnité meſurera le troiſieſme nombre autant de fois que le ſecõd meſurera le quatrieſme.

Que l'vnité A, meſure BC, autant de fois que D, meſurera EF. Ie dis qu'en permutant BC, meſurera EF, autant de fois que A, meſure D.

Car ayant diuiſé BC, ſelon les vnitez BG, GH, HC, & EF, ſelon les parties EI, IK, KF, chacune egale à D. Il y aura en EF, autãt de parties egales à D, qu'il y a d'vnitez en BC, donc BG, ſera meſme partie de EI, que GH, de IK, & HC, de KF,[a] Donc comme BG, à EI, ainſi GH, à IK, & HC, à KF,[b] partant comme BG, à EI, ainſi BG, GH, GC, à EI, IK, KF, tous les antecedents à tous les cõſequents, c'eſt à dire BC, à EF,[c] donc BC, ſera meſme partie de EF, que BG, de EI, c'eſt à dire que A, de D. Partant ſi l'vnité, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.

A.1
B.1 G.1 H.1 C
D..2
E..2 I..2 K..2 F

a 20.d. 7.
b 12. 7.
c 20.d. 7.

xvij THEOREME 14. PROP. 16.

Si deux nõbres ſe multipliants l'vn l'autre en produiſent quelques vns, les produicts d'iceux ſeront egaux entr'eux.

Que les deux nombres A, & B, ſe multiplians l'vn l'autre facent C, & D, ſçauoir que A, multipliant B, face C, & B, multipliant A, face D. Ie dis que C, & D, ſont egaux entr'eux.

Car d'autant que A, multipliant B, produict C, B, ſera autant en C, que l'vnité en A, & partant

a 15.d. 7

mesurera C, autant de fois que l'vnité mesure A. [b] Donc en permutant A, mesurera C, autant de fois que l'vnité mesurera B: derechef puis que B, multipliant A, produict D; [c] A, sera autant de fois en D, que l'vnité en B, & partant mesurera D, autant de fois que l'vnité mesure B: mais A, mesuroit aussi C, autant de fois que l'vnité mesure B, donc A, mesure C, & D, egalement, partant C, & D, sont egaux entr'eux: Donc si, &c. Ce qu'il falloit demonstrer.

b 15.7.

c 15.d.

Vnité. 1
A...3 B....4
C.....12
D.....12

THEOREME 15. PROP. 17. xviij

Si vn nombre en multipliant deux autres, en produict quelques vns, les produicts d'iceux auront mesme raison entr'eux que les multipliez.

Soit le nõbre A, lequel multipliant B, & C, face D, & E. Ie dis que cõme B, est à C, ainsi D, est à E.

Car d'autant que A, multipliant B, faict D; [a] B, sera autant de fois contenu en D, que l'vnité en A: semblablement C, sera autant de fois en E, que l'vnité au mesme A, & partant B, mesurera autant de fois D, que C, mesure E. Donc B, sera telle partie de D, que C, de E: [b] & partant comme B, sera à D, ainsi C, sera à E, [c] & en changeant comme B, à C, ainsi D à E. Donc si vn nombre multipliant, &c. Ce qu'il falloit demonstrer.

Vnité. 1
A...3
B..2 C....4
D.....6 E.....12

a 15. d.

b 20 d.

c 13.7.

xix THEOREME 16. PROP. 18.

Si deux nombres multipliants quelque nombre en produiſent quelques vns; les produicts d'iceux auront meſme raiſon, que les multiplians.

Que les nombres A, & B, multiplians C, facent D, & E. Ie dis que comme A, eſt à B, ainſi D à E.

Car puis que D, eſt produict de C, multiplié par A, [a] le meſme D, ſera produict de A, multiplié par C, ſemblablement E, eſtãt produict de C, par B, le meſme E, ſera produict de B, par C. D'autant donc que le meſme nombre C, multipliant A, & B, faict D, & E, [b] comme A, ſera à B, ainſi D ſera à E. Donc ſi deux nombres, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.

A..2 B....4
C...3
D.....6 E.....12

a 16.7.

b 17.7.

SCHOLIE.

Encore qu'Euclide propoſe ce Theoreſme & le precedent de deux nombres ſeulement, il l'entend neantmoins de tant de nombres que l'on voudra: puis que la demonſtration de tant que l'on voudra, eſt la meſme demonſtration de deux reperee autant de fois qu'il eſt beſoin, prenant touſiours les nombres de deux en deux.

Qu'ainſi ne ſoit, que A, multipliant tant de nombres que l'on voudra B, C, D, ou B, C, D, multipliãt A, facẽt E, F, G. Ie dis que les produicts E, F, G, ſont en meſme raiſon que les multipliez ou multiplians B, C, D, car E, F, eſtans produicts de A, en B, C, ou de B, C, en A, [a] il y aura meſme raiſon de E, à F, que de B, à C: ſemblablement F,

a 17. ou 18. 7.

G, eſtant produicts de A, en C, D, ou de C, D, en A, il y aura meſme raiſon

de F à G, que de A...
C, à D; & ainſi B..2 C...3 D....4
de ſuitte, s'il y a E.....6 F.....9 G.....12
d'auantage de nõbres: partant E, F, G, ſont en meſme raiſon que B, C, D. Donc ſi vn nombre en multiplie 2. ou tant que l'on voudra ou ſi 2. ou tant que l'on voudra en multiplient vn les produicts auront meſme raiſon, que les multiplians, ou multipliez.

Campanus & Clauius diſent en leur ſcholie, qu'ils ont accommodé ce Theoreſme & le precedent à tant de nombres que l'on voudra, mais s'ils auoient bien entendu Euclide, ils auroient trouué qu'Euclide meſme les y a accommodez premier qu'eux, puis que ce qu'il a propoſé de 2. eſt monſtré de tant que l'on voudra, eſtant repeté, & n'en pouuant faire de demonſtration que de 2. à la fois, qui eſt la raiſon pour laquelle Euclide ne l'a propoſé que de deux, &c.

Henrion qui chante touſiours comme les autres, quoy qu'ils diſent, faict de meſme.

xx

THEORESME 17. PROP. 19.

Si quatre nombres ſont proportionaux, le produict du premier & du quatrieſme ſera egal au produict du ſecond & du troiſieſme nombre: & ſi le nõbre produict du premier & du quatrieſme eſt egal au produict du ſecond & du troiſieſme; iceux quatre nombres ſeront proportionaux.

Soient quatre nombres proportionaux, A, B,

C, D, ſçauoir comme A, à B, ainſi C, à D; & que A, 1. multipliant D, 4. face E, & B, 2. multipliant C, 1. face F. Ie dis que E, & F, ſont egaux entr'eux.

Car derechef, que A, multipliant C, face G. D'autant que A, multipliant C, & D, faict G & E, [a] cõme C, ſera à D, c'eſt à dire comme A, à B, ainſi G, ſera à E. Derechef d'autant que A, & B, multipliant C, font G, & F, [b] comme A, ſera à B, ainſi G, ſera à F. Partant [c] comme G, ſera à E, ainſi le meſme G, ſera à F, donc E, & F, ſeront egaux, par ce qui eſt en ſuitte de la 20. def.

A...3	B..2
C.....6	D....4
E.....12	
F.....12	
G.....18	

a 17. 7.
b 18. 7.
c Schol. 12. 7.

Maintenant ſoit E, produict de A, 1. par D, 4. egal à F, produict de B, 2. par C, 3. Ie dis que les 4. nombres A, B, C, D, ſont proportionaux, à ſçauoir comme A, à B, ainſi C, à D. Soit derechef produict G, de A, multiplié par C. D'autant que A, multipliant C, & D, faict G, & E, [c] comme C, ſera à D, ainſi G, à E, ou à F, egal à E. Car G, a meſme raiſon à E, & F, egaux, comme il eſt monſtré à la 20. def. Derechef d'autant que A, & B, multipliant C, font G, & F; comme A, à B, ainſi le meſme G, à F; partant les raiſons de A, à B, & C, à D, eſtant de meſme à la raiſon de G, à F, [c] elles ſeront de meſme entr'elles; & par ainſi comme A, ſera à B, ainſi C, à D. Donc ſi 4. nombres, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.

c 17. 7.
d 18. 7.
c Schol. 12. 7.

THEOREME 18. PROP. 20.

Si trois nombres ſont proportionaux, le produict des extrémes eſt egal au pro-

duict de celuy du milieu. Et ſi le produit des extrémes eſt egal au produict de celuy du milieu ; iceux trois nombres ſeront proportionaux.

Soient trois nombres proportionaux, A, B, C, à ſçauoir A, à B, comme B, à C. Ie dis que le produict de A, 1. multiplié par C, 3. eſt egal au produict de B, moyen par ſoy meſme.

Car ſoit pris D, egal à B; comme A, ſera à B, ainſi D, ſera à C; [a] & partant le produict de A, par C, ſera egal au produict de B, par D, c'eſt à dire de B, par ſoy meſme.

A.....9
B.....6 D.....6
C.....4.

a 19.7.

Maintenant ſoit le produict de A, 1. par C, 3. egal au produict de B, moyen multiplié par ſoy meſme. Ie dis que A, B, C, ſont proportionaux.

Car derechef ſoit pris D, egal à B: Comme A, ſera à B, ainſi D, à C, [b] & le produict de A, par C, ſera egal au produict de B, par D, egal à B, c'eſt à dire de B, par ſoy meſme. Partant les trois nombres A, B, C, ſont proportionaux. Donc ſi trois nombres, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.

b 19.

THEOREME 19. PROP. 21. xxj

Les nombres plus petits de tous ceux qui ont meſme raiſon auec iceux, meſurent egalement les nombres qui ont meſme raiſon auec iceux; à ſçauoir le plus grãd, le plus grãd, & le plus petit le plus petit.

Soient les nombres AB, & CD, les plus petits en la mesme raison que 2. autres E, & F, à sçauoir que AB, soit à CD, comme E, à F. Ie dis que AB, & CD, mesurent egalement E, & F, sçauoir AB, plus grand E, plus grand & CD, plus petit F, plus petit: c'est à dire AB, antecedent E, antecedent & CD, consequent F, consequēt.

A...3 G..2 B
C..2 H.1 D
E.....10
F.....6

Car puis que AB, est à CD, cōme E, à F; [a] en changeant comme AB, à E, ainsi CD, à F, & partant AB, CD, estant moindres que E, & F, [b] AB, sera telle ou telles parties de E, que CD, de F. Mais ils ne peuuent estre parties: car s'il se peut faire soient diuisez AB, CD, en AG, GB, & CH, HD, parties de E, & F, les parties AG, GB, seront egales en nombre à CH, HD, & partant AG, sera mesme partie de E, que CH, de F. [c] Donc comme AG, sera à E, ainsi CH, sera à F, [d] & en changeant comme AG, sera à CH, ainsi E, à F, ou AB, à CD, & partant AG, CH, moindres que AB, CD, auront mesme raison que AB, CD. Ce qui est impossible, puis que AB, CD, sont les plus petits en leur proportion par l'hypothese. Donc AB, & CD, ne seront mesmes parties de E, & F. Partant mesme partie. parquoy AB, CD, mesureront E, & F, egalement, Donc les plus petits nombres, &c. Ce qu'il falloit demonstrer.

a 13. 7.
b 20. d.
c 20. d.
d 13. 7.

THEOREME 20. PROP. 22.

S'il y a trois nombres d'vne part, & autant d'vne autre, lesquels soient pris de deux en deux, & en mesme raisō, et que

leur proportion ſoit troublee ; auſſi en raiſon egale, ils ſeront en meſme raiſon.

Soient trois nombres A, B, C, & autant d'autres D, E, F, leſquels ſoient pris deux à deux, & en meſme raiſon, & ſoit leur proportion troublee, ſçauoir comme A, eſt à B, ainſi E, à F, & comme B, eſt à C, D, à E. Ie dis qu'en raiſon egale comme A, eſt à C, ainſi D, eſt à F.

Car puis que cõme A, eſt à B, ainſi E, eſt à F, [a] le produict de A, 1. par F, 4. ſera egal au produict de B, 2. par E, 3. Et puis que B, eſt à C, comme D, à E, [b] le produict de C, par D, ſera egal au meſme produict de B, par E. Et partant le produict de A, premier par F, 4. ſera egal au produict de C, 2. par D, 3. [c] Donc il y aura meſme raiſon de A, 1. à C, 2. que de D, 3. à F, 4. Partant s'il y a trois, &c. Ce qu'il falloit demonſtaer.

A....4 D.....12
B...3 E.....8
C..2 F.....6

a 19. 7.
b 19. 7.
c 19. 7.

SCHOLIE.

D'autant que de ces ſix moyens d'argumenter és proportions, que Euclide a expliqués aux grandeurs & demõſtré au 5. l. il en demonſtre icy deux ſeulemẽt és nombres, ſçauoir celuy qui eſt pris de la raiſon permutee, prop. 13. & celuy de l'egalité prop. 14. & 22. de ce l. il ne ſera hors de propos, de demonſtrer icy les quatre autres moyens d'argumenter en nombres, comme ont faict Clauius & autres.

I.

Si quatre nombres ſont proportionaux; En raiſon inuerſe, ou en changeant, ils

seront aussi proportionaux.

Soit comme A, à B, ainsi C, à D. Ie dis qu'en changeant ou en raison inuerse, comme B, sera à A, ainsi D, à C.

A.....6 C...3
B....4 D..2

a 13. 7. *Car A, estant à B, comme C, à D,* [a] *en permutant A, sera à C, comme B,*

b 13, 7. *à D. Derechef B, estant à D, comme A, à C,* [b] *en changeant B, sera à A, comme D, à C. Ce qui est proposé.*

2.

Si les nõbres composez sõt proport, iceux estant diuisez seront aussi proportionaux.

Soit comme AB, à CB, ainsi DE, à FE. Ie dis qu'en diuisant comme AC, sera à CB, ainsi DF, à FE.

a 13. 7. *Car AB, estant à CB, comme DF, à FE,* [a] *en changeant comme le tout AB, au tout DE, ainsi le retranché*

b 11. 7. *CB, au retranché FE:* [b] *Et partãt cõme le tout AB, au tout DE, ainsi le reste AC, au reste DF, c'est à dire AC, à DF, comme CB, à FE. Donc* [c] *en permut. cõme AC, à CB, ainsi DF, à FE. Ce qui est proposé.*

A.....6 C...3 B
D....4 F..2 E

c 13. 7.

En cette maniere on demonstrera la diuision de la raison conuerse, & contraire, comme au 5. liure. Car soit premierement, cõme AB, à CB, ainsi DE, à FE. Ie dis que par diuision de raison cõuerse, que cõme CB, à AC, ainsi FE, à DF. Car AB, estant à CB, comme DE, à FE, en diuisant AC, sera à CB, cõme DF, à FE, & en changeant comme CB, à AC, ainsi FE, à DF. Ce qui est proposé.

Soit finalement comme AC, à AB, ainsi DF, à DE. Ie dis que par diuision de raison contraire, que comme AC, est à CB, ainsi DF, à FE: Car d'autant que comme AC, à AB, ainsi DF, à DE, en raison conuerse comme AB, à AC, ainsi DE, à DF; Donc en diuisant comme CB, à AC, ainsi FE, à DF, & en raison conuerse cõme

AC, *à* CB, *ainſi* DF, *à* FE. *Ce qui eſt propoſé.*

3.

Si les nombres diuiſez ſont proportionaux; iceux eſtant compoſez ſeront auſſi proportionaux.

Soit comme AB, *à* BC, *ainſi* DE, *à* EF. *Ie dis qu'en compoſant que comme* AC, *ſera à* BC, *ainſi* DF, *à* EF.

Car AB, *eſtant à* BC, *comme* DE, *à* EF. [a] *En permutant comme* AB, *à* DE, *ainſi* BC, *à* EF; *& partant* AB, [b] BC, *enſemble ſera à* DE, EF, *enſemble, comme* BC, *à* EF; [c] *& en changeant* AB, BC, *enſemble c'eſt à dire le tout* AC, *à* BC, *comme* DE, EF, *enſemble, c'eſt à dire le tout* DF, *à* EF. *Ce qui eſt propoſé.*

a 13.7. b 12.7. c 13.7.

A.....6 B...3 C
D....4 E..2 F

Semblablement la compoſition de raiſon conuerſe, & contraire ſera icy demõſtrée comme au 5. *l. Car ſoit premierement comme* AB, *à* BC, *ainſi* DE, *à* EF. *Ie dis que par compoſition de raiſon conuerſe, que cõme* AC, *à* AB, *ainſi* DF, *à* DE: *car puis que comme* AB, *à* BC, *ainſi* DE, *à* EF, *par conuerſion de raiſon comme* BC, *à* AB, *ainſi* EF, *à* DE, *& en compoſant comme* AC, *à* AB, *ainſi* DF, *à* DE. *Ce qui eſt propoſé.*

Secondement ſoit derechef comme AB, *à* BC, *ainſi* DE, *à* EF. *Ie dis que par compoſition de raiſon contraire, comme* AB, *à* AC, *ainſi* DE, *à* DF, *Car* AB, *eſtant à* BC, *comme* DE, *à* EF, *en raiſon conuerſe, comme* BC, *à* AB, *ainſi* EF, *à* DE. *Donc en compoſant comme* AC, *à* AB, *ainſi* DF, *à* DE: *& par conuerſion de raiſon, comme* AB, *à* AC, *ainſi* DE, *à* DF. *Ce qui eſt propoſé.*

4.

Si les nombres compoſez ſont proportionaux; par conuerſion de raiſon, iceux ſeront auſſi proportionaux.

Soit comme AB, *à* CB, *ainsi* DE, *à* EF. *Ie dis que par conuersion de raison, comme* AB, *à* AC, *ainsi* DE, *à* DF.

Car AB, *estant à* CB, *comme* DE, *à* FE, [a] *en permutãt comme le tout* AB, *au tout* DE, *ainsi le retranché* CB, *au retranché* FE, [b] *& partant comme le tout* AB, *au tout* DE, *ainsi le reste* AC, *au reste* DF. [c] *Donc en permutant comme* AB, *à* AC, *ainsi* DE, *à* DF, *Ce qui est proposé.*

A.....6 C...3 B
D....4 F..2 E

a 13. 7.
b 11. 7.
c 13. 7.

xxj THEOREME 21. PROP. 23.

Les nombres premiers entr'eux, sont les plus petits de tous ceux qui ont la mesme raison auec iceux.

Soient les nombres A, & B, premiers entr'eux: Ie dis qu'ils sont les plus petits de tous ceux qui ont mesme raison qu'iceux.

Car s'il n'est ainsi soiẽt s'il est possible C, & D, plus petits en la mesme raison. D'autant que C, & D, sont plus petits en la mesme raison de A, & B, [a] C, mesurera A, & D, mesurera B, egalement, & partant selon vn mesmenombre, lequel soit E, de sorte que C, mesure autãt de fois A, & D autãt de fois B, que l'vnité est en E: Dõc puis que l'vnité mesure E & C mesure A, egalement, [b] en egangetnt l'vnité mesurera C, & E, mesurera A, egalement. Derechef puis que l'vnité mesure E, & D le nombre B, egalement: [c] aussi en changeant l'vnité mesurera D, & E mesurera B egalement: partant puis que E, mesure A, & B, iceluy E, sera

A.....7 B.....5
C----D--- E--

a 11. 7.
b 15. 7.
c 15. 7.

E, sera cõmune mesure d'iceux: parquoy ils ne seront premiers entr'eux, mais composez; ce qui est impossible, & contre l'hypothese. Donc A, & B, sont les plus petits en la mesme raison. Donc les nombres premiers, &c. Ce qu'il falloit demonstrer.

THEOREME 22. PROP. 24. xxij

Les plus petits nombres de tous ceux qui ont la mesme raison auec iceux, sont premiers entr'eux.

Soient les nombres A, & B, les plus petits de tous ceux qui ont mesme raison auec iceux. Ie dis qu'ils sõt premiers entr'eux, c'est à dire qu'ils n'auront aucun nombre pour commune mesure, outre l'vnité.

Car s'ils ne sont premiers, ils auront vne commune mesure, laquelle soit C: donc que C, mesure A, autant de fois que l'vnité est en D: & B, autant de fois que l'vnité est en E. D'autant donc que C, est contenu autant de fois en A, que l'vnité est en D, (puis qu'il mesure A, selon D,) & que le mesme C, est contenu autant de fois en B, que l'vnité est en E: D, & E, multiplians C, produiront A, & B. Parquoy il y aura mesme raison de A, à B, que de D, à E: partant puis que D, & E, parties de A, & B, sont plus petits qu'iceux A, & B: A, & B, ne seront les plus petits de tous ceux qui ont la mesme raison auec eux. Ce qui est absurde. Donc A, & B, sont premiers entr'eux. Et partant les plus

A.....8 B.....f
C
D---E---

a 9. cõf. b 18. 7

petits nombres, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.

xxiv THEOREME 23. PROP. 25.

S'il y a deux nombres premiers entr'eux; le nombre qui en meſure vn d'iceux, ſera premier à l'autre.

Soient les deux nombres A, & B, premiers entr'eux, & que C, meſure A. Ie dis que C, eſt premier à l'autre, B.

Car ſi B, & C, ne ſont premiers entr'eux, ils auront quelque nombre pour commune meſure, lequel ſoit D, s'il eſt poſſible. D'autant donc que D, meſure C, & C, meſure A, a D meſurera auſſi A: mais il meſure auſſi B. Donc A, & B, ne ſont premiers entr'eux ayant D, pour cõmune meſure: Ce qui eſt impoſſible & contre l'hypotheſe. Donc C, ſera premier à B. Partant s'il y a deux nombres premiers entr'eux, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.

A.....6 B.....5
C...3 D---

a 11.68.1.

xxv THEOREME 24. PROP. 26.

Si deux nombres ſont premiers à quelque autre nombre; le produict d'iceux ſera auſſi premier à cet autre.

Soit l'vn & l'autre nombre A, & B, premier à C, & ſoit D, produict de A, multiplié par B, ou de B, par A. Ie dis que D, ſera auſſi premier à C.

Car ſi C, & D, ne ſont premiers entr'eux ſoit E, leur commune meſure, meſurant D, au-

tant de fois qu'il y a d'vnitez en F. D'autant donc que E, est autant de fois en D, qu'il y a d'vnitez en F; a F multipliãt E, produira D. b Et au contraire E, multipliant F, produira le mesme D: mais D, est produict de A, par B. Donc puis que le nombre produict de E, premier par F, 4. est mesme que celuy de A, 2. par B, 3. c il y aura mesme raison de E, 1. à A, 2. que de B, 3. à F, 4. Mais d'autant que A, & C, sont premiers entr'eux, & E, est posé mesurer C, d E, sera premier à A, & partant E, & A, estant premier entr'eux, e seront les plus petits en leur raison. f Donc ils mesureront egalement B, & F, qui ont la mesme raison, à sçauoir E, mesurera B, & A, mesurera F. Partant puis que E, mesure l'vn & l'autre B, & C; B & C, ne seront premiers entr'eux. Ce qui est absurde & cõtre l'hypothese. Donc D, sera premier à C: Partant si deux nombres, &c. Ce qu'il falloit demonstrer.

a 29. 8. f.
b 16. 7.

A.....7 B...3
C.....8
D.....21
E—— F——

c 19. 7.
d 25. 7.
e 23. 7.
f 21. 7.

THEOREME 25. PROP. 27. xxvi

Si deux nombres sont premiers entr'eux; le produict de l'vn d'iceux sera premier à l'autre.

Soient A & B, premiers entr'eux, & C, produict de A, par soy-mesme. Ie dis que C, est premier au restant B.

Car soit prins D, egal à A, il sera aussi premier à B. Donc A, & D, estant premiers à B, a le produict de A, multiplié par D, c'est à dire de A, par

a 26. 7.

ſoy-meſme à ſçauoir C, A....4 B.....5
ſera premier au meſme C.....16
B. Ainſi le produict de B, D....4
par ſoy-meſme ſera mõſtré premier à A. Partant ſi deux nombres, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.

xxvij THEOREME 26. PROP. 28.

Si deux nombres ſont premiers à deux autres nombres, l'vn & l'autre à l'vn & à l'autre; Les produicts d'iceux ſerõt auſſi premiers entr'eux.

Soit l'vn & l'autre nombre A, & B, premier à l'vn & à l'autre C, & D, & ſoit produict E, de A, par B, & F, produict de C, par D. Ie dis que E, & F, ſont premiers entr'eux.

Car puis que tant A, que B, eſt A.....5 B...3
5 7 premier à C, [a] E, produict d'iceux E.....15
ſera premier au meſme C. De- C....4 D..2
chef A, & B, eſtans premiers à F.....8
D; E produict d'iceux ſera auſſi premier au meſme D. D'autant donc que C, &
7 D ſont premiers à E; [b] F, produict d'iceux ſera auſſi premier à E. Donc ſi deux nombres, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.

THEOREME 27. PROP. 29.

Si deux nombres ſont premiers entr'eux; & l'vn & l'autre ſe multipliant ſoy-meſme en faict quelqu'vn, les produicts d'iceux ſeront premiers entr'eux: Et ſi les

nombres proposez au commẽcement, multipliãs iceux produicts en font quelques vns, iceux seront aussi premiers entr'eux: Et cecy aduiendra tousiours enuiron les extrémes.

Soient A,& B,premiers entr'eux,& C,produict de A, par soy-mesme, & D, produict de B, aussi par soy-mesme. Ie dis que C, D, sont aussi premiers entr'eux, & si derechef E, est le produict de C,par A,& F,de D,par B,Ie dis que E,F,sont aussi premiers entr'eux.

Car puis que A,B,sont premiers entr'eux,[a] C, produict de A, par soymesme, sera premier à l'autre B: & semblablemẽt B,& C, estant premiers entr'eux, D, produict de B, par soy-mesme sera aussi premier à C,& partant les deux produicts C,D,premiers entr'eux. Derechef, d'autãt que A,& B,sont premiers entr'eux,[b] C, produict de A,par soy-mesme sera premier à B: & D, produict de B,par soy-mesme premier à A: mais C, est aussi monstré premier à D. Donc l'vn & l'autre A,C,sera premier à l'vn & à l'autre B, D, [c] & partant E,produict de A, par C, sera premier à F, produict de B,par D. Que si encore G,est le produict de A,par E,& H de B, par F: Puis que A, & C, sont premiers à B; [d] E, produict d'iceux sera aussi premier à B: par mesme raison F, sera premier à A: D'autant donc que l'vn & l'autre A, E, est premier à l'vn & à l'autre B, F, [e] le nombre G, produict de A,en E,sera premier à H,produict de B,en F,&ainsi de suitte s'il y en a d'auãtage. Dõc

A ..3 B..2		
C.....9 D....4		a 27. 7.
E 27 F 8.		
G 81 H,16.		
		b 27. 7.
		c 28. 7.
		d 26. 7.
		e 28. 7.

ſi deux nombres, &c. Ce qu'il falloit demõſtrer.

xxix THEOREME 28. PROP. 30.

Si deux nombres ſont premiers entr'eux, l'vn & l'autre enſemble ſera premier à chacun d'iceux: Et ſi l'vn & l'autre enſemble eſt premier à quelqu'vn d'iceux, les nombres propoſez au commencement ſeront auſſi premiers entr'eux.

Soient AB, BC, premiers entr'eux. Ie dis que l'vn & l'autre enſemble AC, ſera premier à AB, & à BC.

Car ſi AC, AB, ne ſont premiers entr'eux, ils ſeront meſurez par quelque nõbre, outre l'vnité, lequel ſoit D, ſ. e. p. Donc puis que D, meſure le tout AC, & le retranché AB, il meſurera auſſi le reſte BC, donc AB, BC, ne ſeront premiers entr'eux, puis que D, les meſure. Ce qui eſt abſurde & contre l'hypotheſe. Donc AC, ſera premier à AB, & à BC.

A.....8 B.....5 C
D---

a 12. de ſ

Soit maintenant AB, BC, enſemble premier à quelqu'vn d'iceux ſçauoir à AB. Ie dis que AB, BC, ſõt premiers entr'eux. Autremẽt ils ſeront meſurez par quelque nõbre outre l'vnité, lequel ſoit D. b Dõc D, meſurãt AB, BC, meſurera auſſi le cõpoſé d'iceux AC, & partant AC, AB, ne ſont premiers entr'eux, ce qui eſt abſurde & contre l'hypotheſe. Donc AB, BC, ſont premiers entr'eux. Et ſemblablement, ſi AC, eſt premier à BC. Dõc ſi deux nombres, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.

b 10. de ſ

COROLLAIRE.

Il s'ensuit de cecy que le nombre, lequel estãt composé de 2. autres, est premier à vn d'iceux, il sera aussi premier à l'autre. Car si AC, est premier à AB, iceux AB, BC, seront premiers entr'eux, par la 2. partie de cette proposition. Donc AC, sera aussi premier à BC : par la premiere partie de la mesme prop. Ce qui estoit proposé.

THEOREME 29. PROP. 31. xxxij

Tout nombre premier, est premier à tout autre nõbre, lequel il ne mesure point.

Soit le nombre A, premier, lequel ne mesure B. Ie dis que A, est premier à B, c'est à dire que A, & B, sont premiers entr'eux, encore que B, soit nombre composé.

Car autremẽt ils seront mesurez par quelque nombre, outre l'vnité, lequel soit C. s.e.p. A.....5 B.....8 C-----

Dõc C, ne sera le mesme que A; A estant posé ne mesurer B. Donc A, estãt mesuré par vn autre nõbre C; A ne sera premier, ce qui est impossible, & contre l'hypothese. Donc tout nombre premier, &c. Ce qu'il falloit demonstrer.

THEOREME 30. PROP. 32. xxxiij

Si deux nõbres sẽ multiplians l'vn l'autre, en font quelque autre: & que que'que nõbre premier mesure leur produict, il me-

surera aussi vn des nombres proposez au commencement.

Soient A, & B, lesquels se multiplians l'vn l'autre facent C, lequel soit mesuré par D, nombre premier. Ie dis que D, mesurera à tout le moins l'vn d'iceux A. B, s'il ne les mesure tous deux.

Car que D, ne mesure A, mais qu'il mesure C, autant de fois qu'il y a d'vnitez en E. De sorte que C, soit produict de D, par E, lequel C, est produict de A, par B. D'autant donc que C, produict de D, 1. par E, 4. est egal au produict de A, 2. par B, 3.[a] Il y aura mesme raison de D, premier à A, 2. que de B, 3. à E, 4.[b] Mais D, 1. estant premier à A, puis qu'il ne le mesure,[c] D, & A, seront les plus petits de leur raison:[d] partant mesurerõt egalement B, & E, à sçauoir D, plus petit mesurera B, plus petit & A, plus grãd, E, plus grand. Donc si D, ne mesure A, il mesurera B: semblablement on monstrera que si D, ne mesure B, au moins qu'il mesurera A. Donc si deux nombres, &c. Ce qu'il falloit demonstrer.

A....4 B.....6
C.....24
D...3 E.....8

a 19. 7.
b 31. 7.
c 23. 7.
d 21. 7.

XXX

THEOREME 31. PROP. 33.

Tout nombre composé, est mesuré par quelque nombre premier.

Soit le nombre A, composé Ie dis que quelque nombre premier le mesure.

Car estant composé, il[a] sera mesuré par quelque nombre, lequel soit B; que si B, est premier,

a 13. d.

la propoſition eſt manifeſte. Mais ſi B, eſt compoſé, il ſera auſsi meſuré par quelque nombre, lequel ſoit C; qui ſera premier ou compoſé: ſi premier, puis qu'il meſure B, &
B, meſure A, [b] iceluy C, premier meſurera auſsi A. Donc A ſera meſuré par vn nombre premier. Mais ſi C, eſt compoſé il ſera meſuré par vn autre nombre. Or d'autant qu'vn nombre ne ſe diminuë infiniment, on viendra en fin à quelque nombre qu'aucun autre ne meſurera, & partant à vn nombre premier, lequel meſurant tous les precedens [c] il meſurera auſsi le nombre compoſé A.

A.....18 B 11. 8 f.
B.....6 C...3
c 11. 8 f.

THEOREME 32. PROP. 34. xxxj

Tout nombre eſt premier; ou biẽ meſuré par quelque nombre premier.

Soit vn nombre tel qu'on voudra A. Ie dis qu'il eſt premier, ou bien qu'il eſt meſuré par quelque nombre premier.

Car puis que tout nombre eſt premier ou compoſé, ſi A, eſt premier, la propoſition eſt manifeſte: mais s'il eſt compoſé, [a] il ſera meſuré par quelque nombre premier. Partant tout nombre eſt premier ou eſt, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.

A.....9
a 33. 7.

PROBLEME 33. PROP. 35. xxxiv

Tant de nombres que l'on voudra eſtant donnez, trouuer les plus petits nom-

bres qui ont la meſme raiſon auec iceux.

Soient propoſez tant de nombres qu'on voudra A, B, C, en quelque proportion que ce ſoit, il faut trouuer les plus petits, qui ont la meſme raiſon.

Car ou A, B, C, ſõt premiers entr'eux ou non, ſi premiers, [a] ils ſeront les plus petits de tous ceux qui ont la meſme raiſon: Mais s'ils ſont compoſez: [b] ſoit trouué D, leur plus grande commune meſure, lequel meſure iceux A, B, C, par E, F, G. Ie dis que E, F, G, ſont les plus petits de tous ceux qui ont la meſme raiſon de A, B, C; Car d'autant que D, meſure A, B, C, par E, F, G, [c] D, multipliant E, F, G, produira A, B, C, [d] donc E, F, G, auront meſme raiſon que A, B, C.

A.....6 B....4 C.....8
D..2
E...3 F..2 G....4
H----I----K----
L----

a 23. 7.
b 3. 7.
c 9. c ſ.
d Schol. 18. 7.

Ie dis auſſi que E, F, G, ſont les plus petits, car s'il n'eſt ainſi, ſoient H, I, K, plus petits en la meſme raiſon, [d] leſquels meſureront A, B, C, egalement: Qu'ils les meſurent donc par L. cela eſtant ainſi, [e] L. multipliant H, I, K, produira A, B, C, [f] & en changeant L. meſurera A, B, C, par H, I, K. D'autant donc que E, 1. multipliant D, 4. & H, 2. multipliãt L, 3. produit le meſme A; [g] cõme E, 1. à H, 2. ainſi L, 3. ſera à D, 4. Mais E, eſt plus grãd que H, donc L, ſera plus grand que D, & partant puis que L, meſure A, B, C; D, ne ſera la plus grande commune meſure des nombres A, B, C. Ce qui eſt contre l'hypotheſe: donc E, F, G, ſont les plus petits en la raiſon de A, B, C. Partant s'il y a tant de nombres, &c. Ce qu'il falloit faire.

d 21. 7.
e 9. c ſ.
f 8. cõ ſ.
g 19. 7.

COROLLAIRE.

Il eſt manifeſte de cecy que la plus grande commune meſure de tant de nombres qu'on voudra, les meſure par les plus petits nombres de tous ceux qui ont la meſme raiſon auec iceux. Car il a eſté monſtré que E, F, G, par leſquels D, plus grãde commune meſure de A, B, C, meſure iceux A, B, C, ſont les plus petits en la raiſon de A, B, C, & ainſi de tous autres.

SCHOLIE.

Par ce que deſſus, nous pourrons trouuer les 2. plus petits nombres qui ſont en meſme raiſon que tant de nombres continuellement proportionaux que l'on voudra. Comme ſi on propoſe A, B, C, D, E, continuellement proportionaux, ſoit qu'ils ſoient les moindres en la continuation de la raiſon de A, à B, ou non; nous en trouuerons 2. les plus petits en la meſme raiſon, ſi par ce probleme nous prenons F, & G, les plus petits en la raiſon de A, à B, ſçauoir ceux par leſquels I, *plus grande commune meſure d'iceux les meſure.*

Au ſurplus il aduient quelques fois qu'vn d'iceux nombres E, F, G, trouuez par cette propoſition eſt l'vnité ſçauoir quand D, plus grande commune meſure eſt egal à vn d'iceux A, B, C, comme il appert par cet exemple.

A 16. B 24. C 36. D 54. E 81.
I, 8.
F, 2. G, 3.

Or il eſt manifeſte que les nombres E, F, G, à lors trouuez ſont plus petits en la cõtinuatiõ de leurs proportiõs, puis qu'il ne ſe peut

A...3 B.....6 C.....9
D...3
E.1 F..2 G...3

donner vn nombre moindre que l'vnité.

xxxvj

PROBLEME 4. PROP. 36.

Deux nombres eſtant donnez, trouuer le plus petit nombre lequel ils meſurent.

Soient les deux nombres propoſez A, & B, il faut trouuer le plus petit nombre qu'ils peuuent meſurer.

Soient premierement A, & B, premiers entre-eux, & ſe multiplians l'vn l'autre facent C. Ie dis que C, eſt le requis. Or qu'ils le meſurẽt il eſt manifeſte. Car C, eſtant produict de A, par B, ou de B, par A; [a] A meſurera C, par B, & B, le meſme C, par A.

A.....4 B.....5
C.....20
D----------
E-----F---

a 7. e. ſ.

Donc A, & B, meſurent C. Et ſi C, n'eſt le plus petit; que A, & B, en meſurent vn autre plus petit, ſçauoir D. ſ. e. p. Et que A, meſure D, par E, & B, le meſme D, par F, [b] ainſi D, ſera produict tant de A, par E, que de B, par F, & au contraire. D'autant donc que le meſme D, eſt produit de A, 1. par E, 4. & de B, 2. par F, 3. [c] Comme A, 1. ſera à B, 2. ainſi F, 3. à E, 4. Donc A, & B, (eſtant poſez premiers entr'eux, [d] & partãt les plus petits en leur raiſon) ils meſureront E, & F, l'vn cõme l'autre, à ſçauoir A, meſurera F, & B, meſurera E. Mais d'autant que A, multipliãt B, & E, faict C & D; C, ſera à D. comme B à E: & partant puis que B, meſure E, cõme il eſt monſtré; C, meſurera auſſi D, le plus grand le plus petit. Ce qui eſt impoſſible. Partant C, eſt le plus petit de tous ceux que meſurent A, & B.

b 9. e. ſ.

c 19. 7.

d 23. 7.

e 21. 7.

f 17. 7.

Secondement soient A, & B, non premiers entr'eux,[g] & soient trouuez C, & D, les plus petits en la mesme raison, à fin qu'il y ait 4. nombres proportionaux sçauoir cõme A, à B, ainsi C, à D, par ainsi le produict de[h] A, 1. par D, 4. sera egal au produict de C, 2. par B, 3. lequel produict soit E; Ie dis que E, est le plus petit nõbre que mesurent A, & B: qu'ils le mesurent, il est manifeste, car E, estant produict tant de A, en D, que de B, en C, tant A, que B, mesurera E. Et s'il n'est le plus petit, que A, & B, en mesurent vn autre plus petit que E, sçauoir F. Or que A, mesure F, par G, & B, le mesme F, par H, donc[k] F, sera le produict tant de A, par G, que de B, par H. D'autant donc que le mesme F, est faict de A, 1. en G, 4. & de B, 2. en H, 3. comme A, 1. à B, 2. ainsi H, 3. à G, 4. Partant C, & D, estants les plus petits en la raison de A, à B, ou de H, à G,[m] ils mesurent H, & G, egalement, sçauoir C, mesurera H, & D, mesurera G: mais d'autant que A, multipliant D, & G, faict E, & F,[n] E, sera à F, comme D, à G, & partant D, mesurant G, comme il est monstré, E, mesurera aussi F, le plus grand le plus petit, ce qui est impossible. Donc E, est le plus petit. Partant deux nombres, &c. Ce qu'il falloit faire.

g 35. 7.

h 19. 7.

A ...4 B.....6
C..2 D...
E.....12
F----------
G---H---

i 7. c. f.

k 9. cõ. f.

l 19. 7.

m 21. 7.

n 17. 7.

Si le plus petit nombre mesure le plus grand, le plus grand sera le requis, &c.

COROLLAIRE.

D'icy il s'ensuit que si 2. nombres multipliẽt les plus petits ayants la mesme raison, le plus grand

le plus petit, & le plus petit le plus grand, le produict ſera le plus petit nombre qu'iceux meſurẽt. Car C, & D, eſtans propoſez les plus petits en la raiſon de A, à B, il a eſté demonſtré que E, produict de A, plus petit par D, plus grand, & de B, plus grand par C, plus petit, eſt le plus petit nombre meſuré par A, & B.

xxxv THEOREME 33. PROP. 37.

Si deux nombres meſurent quelque autre nombre. Le plus petit qu'ils meſurẽt, meſurera auſſi le meſme nombre.

Que les deux nombres A, & B, en meſurent quelque autre CD, & ſoit E, le plus petit que A, & B, meſurent. Ie dis que E, meſurera CD.

Car ſi E, ne meſure CD, ayant oſté E, de CD, tant de fois que l'on pourra, il reſtera vn nombre moindre que E, qu'il reſte FD, plus petit que E, s'il eſt poſſible, de ſorte que E, meſure le retranché CF. D'autant donc

A..2 B...3
C------ F---D
E.....6

a 11. *e ſ.* que tãt A, que B, meſure E, & E, meſure CF: a tãt A, que B, meſurera auſſi CF Donc puis que A, & B, meſurent le tout CD, & le retranché CF, b ils

b 12. *e ſ.* meſureront auſſi le reſte FD, Or FD, eſt plus petit que E; donc E. n'eſt le plus petit nõbre que A, & B, meſurent. Ce qui eſt contre l'hypothese. Donc ſi 2. nombres, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.

PROBLEME 5. PROP. 38.

xxxvj Trois nombres eſtant donnez, trouuer le plus petit nombre qu'ils meſurent.

Soient trois nombres proposez A,B,C, il faut trouuer le plus petit nombre qu'ils peuuẽt mesurer.

Soit [a] D, le plus petit que A & B, mesurent; C, le mesurera ou non, s'il le mesure: Ie dis que c'est le plus petit que les 3. A,B,C, mesurent: autrement soit E, plus petit que D, mesuré par A,B,C, donc A, & B, mesurãt E, moindre que D: D, ne sera le plus petit mesuré par A, & B, ce qui est contre l'hypothese.

A...3 B....4 C.....6 D.....12 E-------

[a] 36.7.

[c] 36. 7.

Si C, ne mesure D, soit [c] E, le plus petit mesuré par C, D. Ie dis qu'il sera le plus petit que A, B, C, mesurent. Car A,B, mesurãt D, & D, mesurãt E, [d] A,B, mesureront aussi E, mais C, mesure pareillemẽt E. Dõc les 3. A,B,C, mesurẽt E. Et si on dit que E, ne soit le plus petit, soit F, moindre que E, mesuré par A, B, C, s'il est possible: Donc puis que A, & B, mesurent F; D, plus petit mesuré par iceux [e] mesurera aussi F, & C; D, mesurant F; (car A,B,C, le mesurent) E, le plus petit nombre mesuré par C, D, [f] mesurera pareillement F, le plus grãd le plus petit; ce qui est absurde. Partant E est le plus petit que A. B, C, mesurent. Donc 3. nombres estant, &c. Ce qu'il falloit faire.

A..2 B...3 C....4 D.....6 E.....12 F-----

[d] 11. c.f.

[e] 37. 7.

[f] 37.7.

COROLLAIRE.

D'icy il s'ensuit que si trois nombres mesurent quelque nombre, que le moindre nombre qu'ils mesurent mesure aussi ce mesme nombre. Car en

la derniere partie de cette demonſtration, de ce que A, B, C, eſtoient poſez meſurer F, il a eſté demonſtré que E, qui eſt le moindre nombre meſuré par iceux, meſure auſſi F.

SCHOLIE.

En cette maniere, plus de 3. nombres eſtant donnez nous trouuerons le plus petit nombre qu'ils meſurent. Car ſi quatre nombres ſont donnez faut faire la queſtion de 3. ſi 5. faut trouuer le plus petit que 4. meſurent, & faire au reſte comme il eſt dit de 3. &c.

xxxvij THEOREME 34. PROP. 39.

Si vn nombre meſure vn autre nombre; celuy lequel il meſure, aura vne partie denommee du meſurant.

Que le nombre B, meſure le nombre A. Ie dis que A, aura vne partie denommee de B.

Car que B, meſure A, autant de fois qu'il y a d'vnitez en C. D'autant donc que l'vnité meſure C, & B meſure A, egalement; [a] en changeant l'vnité meſurera B, & C, meſurera A, egalement, & partant l'vnité ſera meſme partie de B, que C, de A, [b] mais l'vnité eſt vne partie de B, denommee du meſme B, donc C, ſera vne partie de A, denommee par B. Partant ſi vn nombre, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.

A.....12
B....4. C...3

a 15. 7.

b 2. d. 7.

THEOREME 35.

THEOREME 35. PROP. 40. xxxviij

Si vn nombre a vne partie quelconque, le nombre denommé de cette partie le mesurera.

Soit le nombre A, ayant la partie B, par laquelle le nombre C, est denommé. Ie dis que C, mesure A.

Car puis que B, partie de A, est denommée de C, mais l'vnité est vne partie de C, denommee du mesme C; l'vnité mesurera C; & B, mesurera A, egalement: [a] Donc en changeant l'vnité mesurera B, & C, mesurera A, egalement. Donc si vn nombre, &c. Ce qu'il falloit demonstrer.

A.....15
B...3 C.....5

a 15. 7.

PROBLEME 6. PROP. 41. xxxix

Trouuer le plus petit nombre, qui ayt les parties donnees.

Soient les parties donnees A, B, C; il faut trouuer le plus petit nombre ayant les mesmes parties.

Soient D, E, F, denommez des parties A, B, C, & [a] soit G, le plus petit que D, E, F, mesurent. Ie dis que G, est le plus petit ayant les parties donnees A, B, C. Car puis que D, E, F, mesurent G; [b] G, aura les parties denommees par D, E, F, c'est à dire les parties

D..2 *A, seconde*
E...3 *B, tierce*
F....4 *C, quarte.*
G.....12
H-------

a 38. 7.

b 39. 7.

A,B,C, eſtant denommees de D, E, F. Ie dis que G, eſt auſſi le plus petit ayant telles parties. Car s'il n'eſt ainſi, que vn autre plus petit que G, ait les meſmes parties A, B, C, lequel ſoit H. D'autãt dõc
c 40.7. que H, a les parties A, B, C, c les nombres D, E, F, denommez d'icelles parties A, B, C, meſureront H, donc H, eſtant moindre que G; G, ne ſera le plus petit nombre meſuré par D, E, F: ce qui eſt contre l'hypotheſe. Donc vn plus petit nombre que G, n'aura pas les parties donnees A, B, C, mais G, ſera le plus petit. Partant nous auõs, &c. Ce qu'il falloit faire.

Fin du ſeptieſme liure des Elements.

LIVRE HVICTIESME DES ELEMENTS D'EVCLIDE.

THEOREME 1. PROP. 1.

S'il y a tant de nombres que l'on voudra continuellement proportionaux, & que les extrémes ſoient premiers entre-eux; ils ſont les plus petits de tous ceux qui ont meſme raiſon auec iceux.

SOIENT tant de nombres que l'on voudra, A, B, C, continuellement proportionaux; & ſoient les extrémes A, & C, premiers entr'eux. Ie dis que A, B, C, ſont les plus petits de tous ceux qui ont la meſme raiſon qu'iceux.

Car s'il n'eſt ainſi ſoient D,E,F, plus petits qu'iceux en la meſme raiſon, s'il eſt poſſible. D'autãt dõc qu'il y a tant de nombres que l'on veut d'vne part A, B, C, & autant d'autre D, E, F, leſquels

A.....8 D----
B.....12 E----
C.....18 F----

prins de 2. en deux ſont en meſme raiſon;[a] en raiſon egale, comme A, ſera à C, ainſi D, à F: [b] Mais A, & C, ſont les plus petits de leur raiſon, eſtant premiers entr'eux par l'hypotheſe. [c] Donc tant A, que C, meſurera D, & F, egalement, le plus grand le plus petit, ce qui eſt impoſſible. Donc A, B, C, ſont les plus petits de leur raiſon. Partant s'il y a tant, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.

a 14. 7.
b 23. 7.
c 21. 7.

ij PROBLEME 1. PROP. 2.

Trouuer tant de nombres que l'on voudra continuellement proportionaux, les plus petits en vne raiſon donnee.

Soient A, & B, les plus petits de leur raiſon, il faut premierement trouuer trois nombres les plus petits en la raiſon donnee de A, à B.

Que A, multipliant ſoy-meſme produiſe C, & multipliant B, produiſe D, & B, par ſoy-meſme face E. Ie dis que C, D, E, ſont les plus petits en la raiſon de A, à B, & ſont continuellement proportionaux.

A 2. B 3.
C 4. D 6. E 9.
F 8. G 12. H 18. I 27

Car d'autant que A, multipliant A, & B, faict C, & D; [a] comme A, eſt à B, ainſi C, à D. Derechef, puis que B, multipliant A, B, faict D, & E; [b] comme A, eſt à B, ainſi D, à E; donc C, D, E, ſont continuellement proportionaux en la raiſon de A, à B. Ils ſont auſſi les plus petits. Car d'autant que les extrémes C, & E, ſont produicts de A, & B, multipliez chacun par ſoy-meſme; [c] Mais A, & B, ſont premiers entr'eux eſtant les plus petits de leur raiſon, [d] les extrémes C, &

a 17. 7.
b 17. 7.
c 14. 7.
d 19. 7.

e, ſeront auſſi premiers entr'eux.[e] Donc C, D, E, ſont les plus petits en la raiſon de A, à B. e 1. 8.

Secondement que A, multipliant les 3. nombres C, D, E, produiſe F, G, H, & B, multipliant E, face 1. Ie dis que les 4. nombres F, G, H, I, ſont les plus petits en la meſme raiſon donnee de A, à B, & continuellement proportionaux. Car puis que A, multipliant C, D, E, a produict F, G, H,[f] F, G, H, auront meſme raiſon que C, D, E, c'eſt à dire que A, B. Derechef, puis que A, & B, multipliant E, ont faict H, & I,[g] comme A, à B, ainſi H, à I. Donc F, G, H, I, ſont continuellement proportionaux en la raiſon donnee de A, à B. Ils ſont auſſi les plus petits : Car A, & B eſtant les plus petits en leur raiſon,[h] ils ſeront premiers entr'eux : mais C, & E, ſont produicts de A, & B, par eux meſmes, & F, & I, ſont auſſi produicts de A, & B, en C, E, ſçauoir F, de A, en C, & I, de B, en E,[i] F, I, extrémes ſeront auſſi premiers entr'eux.[k] Partant F, G, H, I, ſont les plus petits de leur raiſon, qui eſt la raiſon de A, à B. Par meſme raiſon nous en trouuerons 5. ou 6. &c. Donc nous auõs trouué. Ce qu'il falloit faire. f Schol. 18. 7. g 18. 7. h 24. 7. i 29. 7. k 1. 8.

AVTRE DEMONSTRATION.

Soit la raiſon donnee de C, à D; s'ils ne ſont les plus petits de leur raiſon,[a] ſoiẽt pris d'autres qui ſoient les plus petits en la meſme raiſon, A, & B. a 35. 7.

A 2. B 3.	2. 3.
C 4. D 6. E 9.	4. 6. 9.
F 8. G 12. H 18. I 27.	8. 12. 18. 27.
K 16. L 24. M 36. N 54. O 81.	16. 24. 36. 54. 81.
P 32. Q 48. R 72. S 108. T 162. V 243.	32. 48. 72. 108. 162.

A, multipliant ſoy-meſme faict C, & multi-

pliant B, faict D; B, ſe multipliant faict E. Donc puis que A, multipliant A, & B, faict C, & D, les [a] produicts ſeront en la raiſon des multipliez c'eſt à dire en la raiſon de A, à B. [b] Et B, multipliãt A, & B, à faict D, E, donc D, E, ſeront cõme A, à B. Derechef A, multipliant C, D, E, faict F, G, H. qui ſeront en la raiſon de C, D, E, multipliez, c'eſt à dire de A, à B. Et d'autant que A, B, multiplians E, font H, I, donc H, I, ſeront en la raiſon de A, à B, par la 18. du 7. l. Derechef A, multipliant F, G, H, I, à faict K, L, M, N, qui ſeront en la raiſon de F, G, H, I, c'eſt à dire de A, à B. Et puis que A, B, multipliant I, à faict N, O; NO, ſeront en la raiſon de H, à I, c'eſt à dire de A, à B, & ainſi des autres. Partant premieremẽt trois les plus petits ſont contin. proport. puis quatre, en apres cinq & puis 6. & ainſi l'on en trouuera tant que l'on voudra. Or qu'ils ſoient les plus petits en la raiſon donnee on le monſtrera ainſi. D'autãt que C, E, ſont procreez de A, & B, par eux-meſmes: mais A, & B, [c] ſont premiers entr'eux, eſtant les plus petits de leur raiſon: [d] Donc C, E, ſeront premiers entr'eux, & partant [e] C, D, E, eſtant continuellement proportionaux ſeront les plus petits de leur raiſon: Ainſi F, I, [f] ſont premiers entreeux, & F, G, H, I, eſtant continuellement proport. ils [g] ſeront les plus petits de leur raiſon.

a 17. 7.
b 17. 7.
18. 7.
c 24. 7.
d 29. 7.
e 1. 8.
f 29. 7.
g 1. 8.

En apres il faut monſtrer que A, C, F, K, P; B, D, G, L, Q; E, H, M, R, ſont continuellemẽt proport. En cette ſorte: Cõme A, à B, ainſi C, à D; & en chãgeant, comme A, à C, ainſi B, à D, & comme C, à D, ainſi F, à G, & en permutant C, eſt à F, comme D, à G; & ainſi des autres K, P, L, Q. En apres comme D, à E, ainſi G, à H, & en changeant

13. 7.

comme D,à G,ainſi E,à H. Mais comme G,à H, ainſi L,à M,& en permutant comme G,à L, ainſi H,à M;Mais comme L,à M,ainſi Q à R, en permutant comme L,à Q,ainſi M,à R. Puis comme H,à I,ainſi M,à N,& en permutant comme H,à M,ainſi I,à N. Mais comme M,à N, ainſi R,à S, & en permutant, comme M,à R, ainſi N,à S. Donc A, C,F, k, P;B,D,G,L,Q;E,H,M,R,ſont continuellement proportionaux:ſemblablement on monſtrera que B, E, I, O, V; A, D, H, N, T;C,G,M,S;F, L,R, ſont continuellement proportionaux, &c.

Finalement il faut monſtrer que les moyens proportionaux,peuuent eſtre procreez de la multiplication des extrémes entr'eux: comme D,eſt faict de A en B; G eſt produict de A, en D, & de B,en C; d'autant que comme A, à B, ainſi C,à D, dõc le produit des extrémes A,D,eſt egal au pro- 19.7.
duit des moyens. Derechef,cõme A,à B,ainſi D, à E,donc le cõtenu ſous A, E, eſt egal au cõtenu ſous B, D, ſçauoir H, donc H, peut eſtre faict de A,en E,& qui plus eſt y a eſté faict par la conſtruction. En apres comme A,à B,ainſi F,à G;mais A, multipliant G, a faict L; donc B, multipliant F. Fera L. Derechef A, extréme multipliant I,autre extréme a faict N, par la conſtruction : Et combien que M,ſoit faict de A,en H,par la conſtruct. il ſe peut neantmoins faire de C, en E : D'autant que cõme A,à C,ainſi E,à H; Mais M,eſt faict de A, en H, donc M, ſera faict auſſi de C,en E. Finalement cõme A,à B,ainſi k,à L,mais A,multipliant L,par la conſtruct.à faict Q. Donc B,multipliant K,fera Q. Et comme A,à F,ainſi E, à M; mais A, multipliant M,à faict R, donc E, multi-

pliant F, fera R. Et comme A, eſt à C, ainſi I, à N; mais A, multipliant N, à faict S, donc C, multipliant I, fera S; & T, par la conſtruct. à eſté faict de A, en O, & ainſi de ſuitte on pourra prouuer que les moyens proportionaux ſont faicts de la multiplication des extrémes.

COROLLAIRE 1.

Il s'enſuit de ces propoſitions que ſi 3. nomb. ſont continuellement proport. & les plus petits de leur raiſon, les extrémes ſeront quarrez: & ſi 4. ſont continuellement proportionaux, les extrémes ſeront cubes. Car C, E, extrémes ſont produicts de A, & B, chacun par ſoy-meſme; Et F, & I, extrémes des 4. ſont produicts de A, & B, multipliez chacun par ſon quarré C, & D, &c.

COROLLAIRE 2.

Il ſ'enſuit auſſi que les extrémes des nombres continuellement proportionaux trouuez les plus petits en la raiſon donnee, par cette propoſition, [a] 24. & 29. 7. ſont premiers entr'eux, [a] ayant eſté demonſtré que CE, FI, ſont premiers entr'eux.

COROLLAIRE 3.

Il appert auſſi que 2. nombres les plus petits en la raiſon donnee, meſurent tous les moyẽs quelcõques des plus petits en la meſme raiſon, eſtans produits de la multiplicatiõ d'iceux par quelques autres nombres, comme D, moyen qui eſt produict de A, par B, & G, H, moyens de A, par D, & E, ou de B, par C, D, &c.

SCHOLIE.

Il s'enſuit d'icy que tant A C F K que B E I O V, ſont cõt- [a] 39. 7. *pr. depuis l'vnité. Car A, meſurant ſon produit C: a C, aura vne partie denõmee de A, mais l'vnité eſt part. de A, denom. de A. Dõc l'vnité ſera meſme part. de A, que A, de C. Donc comme l'vnité à A, ainſi A, à C, ainſi des autr.*

THEOREME 2. PROP. 3. iij

S'il y a tant de nombres que l'on voudra continuellement proportionaux, les plus petits de tous ceux qui ont la meſme raiſon auec iceux; les extrémes ſeront premiers entr'eux.

Soient A, B, C, D, les plus petits de leur raiſon continuellement proportionaux. Ie dis que les extrémes A, & D, ſont premiers entr'eux.

Car ſoiēt [a] trouuez E, F, les plus petits en la raiſon de A, à B, ou B, à C, ou C, à D; [b] E, F, ſeront premiers entr'eux. Puis ſoiēt trouuez les 3. G, H, I, les plus petits en la raiſon de E, à F, & auſſi les 4. K, L, M, N, & ainſi de ſuitte, iuſques à ce que K, L, M, N; ſoient egaux en nōbre à A, B, C, D. D'autant que A, B, C, D, ſont les plus petits de leur raiſon; & K, L, M, N, egaux en nombre à iceux, eſtāt auſſi les plus petits en la meſme raiſon, ils ſeront egaux à iceux chacun au ſien, ſçauoir A, à k, & D, à N. [d] Or K, & N, ſont premiers entr'eux. Donc A, & D, ſont auſſi premiers entr'eux. Done s'il y a tant de nomb. &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.

[a] 35. 7.
[23. 7.]
[b] 2. 8.

A, 8. B, 12. C, 18. D, 27.
E, 2. F, 3.
G, 4. H, 6. I, 9.
K, 8. L, 12. M, 18. N, 27.

[d] 2. cor. 2. 8.

PROBLEME 2. PROP. 4. iiij

Eſtant donnees tant de raiſons que l'on voudra és plus petits nombres d'icelles, trouuer tant de nombres qu'on voudra

continuellement proportionaux, les plus petits selon les raisons donnees.

Soient premieremẽt donnees les 2. raisons de A, à B, & de C, à D; aux plus petits nombres d'icelles: il faut trouuer 3. nombres continuellemẽt proport. & les plus petits selon icelles raisons.

Ayant [a] trouué E, le plus petit nombre mesuré par B, C, 2. & 3. soit trouué F, autant de fois mesuré par A, que E, par B; & G, autant de fois mesuré par D, que E, par C; F, E, G, seront continuellement proportionaux les plus petits selon les raisons donnees.

A, 6. B, 5. C, 4. D, 3.
H, 4. F, 24. E, 10. G, 15.
I---K----L----

[a] 36. 7.

Car d'autant que A, & B, mesurent egalement F, & E, c'est à dire par vn mesme nombre; qu'ils le mesurent par H. Cela estant [b] A, & B, multiplians H, produiront F, & E. [c] Parquoy comme A, à B, ainsi F, à E. Semblablement C, & D, mesurant egalement E, G; comme C, à D, ainsi E, sera G. Donc F, E, G, sont continuellement proportionaux, selon les raisons de A, à B, & de C, à D.

[b] 9. 8. f.
[c] 18. 7.

Ie dis qu'ils sont aussi les plus petits; car s'il n'est ainsi, soient I, K, L, plus petits en icelles raisons chacun au sien, s'il est possible. D'autant donc que A, & B, sont les plus petits en leur raison: [d] iceux mesureront egalement I, & K, estans en mesme raison, sçauoir B, consequent mesurera K, consequent: Par la mesme raison C, D, mesureront egalement K, & L, sçauoir C, antecedent, K antecedent. Donc B, & C, mesurans K; [e] E, plus petit mesuré par B, & C, mesurera aussi K, le plus grand le plus petit. Ce qui est absurde.

[d] 21. 7.
[e] 37. 7.

Donc F, E, G, ſont les plus petits.

Soient 3. raiſons donnees aux plus petits nombres de A, à B, C, à D, & de E, à F: Et il faut trouuer 4. nombres les plus petits continuellement proportionaux ſelon les raiſons donnees. [a] Ayant trouué derechef G, le plus petit que meſurẽt B, & C, 2. & 3. ſoit trouué, H, autant de fois meſuré par A, que G, par B; & I, autant de fois meſuré par D, que G, par C: cela eſtant E, meſurera I, ou non: Qu'il le meſure premierement; & autant de fois que I, eſt meſuré par E, ſoit K, autant de fois meſuré par F. Ie dis que H, G, I, K, ſont continuellement proportion. & les plus petits ſelon les raiſons donnees comme a eſté monſtré. [a] 36.7.

A,6.B,5.C,4.D,3.E,5.F,7.
H,24. G,20. I.15. K,21.
L---D---N----O---

Maintenant que E, ne meſure I. [a] Et ayant trouué K, le plus petit que E, & I, meſurent, ſoit L, autant de fois meſuré par G, & M, par H, que K, par I; & ſoit auſſi N, autant de fois meſuré par F, que K, par E. Ie dis que M, L, K, N, ſont les plus petits ſelon les raiſons donnees. [a] 36.7.

Car H, G, I, meſurans M, L, K, egalement, comme cy deuant M, ſera à L, comme H, à G, & L, à K, comme G, à I, mais par la meſme raiſon H, eſt à G, comme A, à B; & G, à I, comme C, à D, (A, B, meſurant H, G, & C, D, G, I, egalement.) Donc comme [b] A, à B, ainſi M, à L, & comme C, à D, ainſi L, à K. Mais comme E, à F; K, eſt auſſi à N; [b] Schol. 12.7.

A,9.B,5.C,4.D,3.E,2.F,7.
H.24. G,20. I,15.
M,48.L,40.K,30. N,105.
O---P----Q---R----

(E, F, meſurans egalement k, N.) Donc M, L, K, N, ſont continuellement proportionaux, ſelon les raiſons donnees.

Ils ſont auſſi les plus petits, car s'il n'eſt ainſi, ſoient O, P, Q, R, plus petits ſelon les meſmes raiſons s'il eſt poſſible. D'autant donc que A, B, ſont les plus petits de leur raiſon, [c] ils meſureront egalement O, P, en la meſme raiſon, ſçauoir B, conſequent meſurera P, conſequent. Et par meſme raiſon C, D, meſureront P, Q, egalement: ſçauoir C, antecedent P, antecedent: Parquoy B, C, meſurans P; [d] G, plus petit nombre meſuré par B, C, meſurera le meſme P. Or eſtant monſtré que comme G, à I, ainſi L, à K, c'eſt à dire ainſi P, à Q; en changeant comme G, à P, ainſi I, à Q: Et partant G, meſurant P; I, meſurera Q: mais E, meſure auſſi Q: [e] puis que E, F, les plus petits de leur raiſon meſurent egalement Q, R, en la meſme raiſon, ſçauoir E, antecedent Q, antecedent. Donc I, E, meſurans Q; [f] K, plus petit nombre meſuré par I, E, meſurera auſſi Q; le plus grand le plus petit. Ce qui eſt abſurde. Parquoy M, L, K, N, ſont les plus petits: Et ainſi de ſuitte, s'il y a d'auantage de raiſons donnees aux plus petits nombres, &c. Donc eſtant donnees, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.

c 21. 7.

d 37. 7.

e 21. 7.

f 57.

THEOREME 3. PROP. 5.

Les nombres plans ſont l'vn à l'autre en raiſon compoſee de leurs coſtez.

Soient deux nombres plans A, B, & les coſtez de A, ſoient C, D, & ceux de B, ſoient E, F. Ie dis

que la raiſon de A, à B, eſt cõpoſee des raiſons des coſtez, ſçauoir de la raiſon de C, à E, & de D, à F.

Car que D, multipliant E, produiſe G. D'autant que D, multipliant C, E, a produict A, & G; [a] A, ſera à G, comme C, à E; & puis que E, multipliãt D, F, a produict G, B; [b] G, ſera à B, comme D, à F,: Partant A, G, B, ſont cõtinuellement proportionaux, ſelon les raiſons de C, à E, & de D, à F, coſtez. Mais [c] la raiſon de A, à B, eſt compoſee des raiſons de A, à G, & de G, à B, dõc la meſme raiſon de A, à B, ſera compoſee des raiſons de C, à E, & de D, à F, coſtez. Donc les nombres plans, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.

A, 24. B, 48.
G, 18.
C, 4. D, 6. E, 3. F, 16.

a 17.7.
b 17.7.
c 17.d. 7.

SCHOLIE.

Henrion reprend Donnot au ſcholie de la 14. prop. du ſeptieſme liure, à cauſe qu'il cite les propoſitions du 5.l. pour appuyer les demonſtrations du 7.8. & 9.l. Et ledit Henrion cite le meſme 5. liure pour appuyer les demonſtratiõs tant de cette propoſition que de la 11. cy apres & autres. D'où il eſt facile à colliger qu'il ne ſçait ce qu'il veut dire, puis qu'il commet les meſmes fautes, dont il reprend les autres. Or que l'on doiue citer le 5.l. ou non, il ſera dit ailleurs.

THEOREME 4. PROP. 6.

vj

S'il y a tant de nombres que l'on voudra continuellement proportionaux, & que le premier ne meſure le ſecond, auſſi pas vn autre ne meſurera pas vn autre.

Soient A,B,C,D,continuellement proportionaux,& que A,1. ne meſure B, ſecond. Ie dis que pas vn autre n'en meſurera pas vn autre.

Car qu'aucun ne mere ſon prochain ſuiuãt, il eſt manifeſte, d'autant que A,B,C,D,ſont continuellement proportionaux,& que A,ne meſure B, [a] il ne ſera partie d'iceluy, mais parties; [b] parquoy B, qui eſt les meſmes parties de C, ne meſurera auſſi C; ny C; D. Ie dis auſſi que pas vn autre n'en meſurera pas vn autre comme A, ne meſurera C:[c] Car ayãt trouué F,G,H,les plus petits en la raiſon de A,à B, ou de A, B, C, en raiſon egale comme A,à C,ainſi F,à H. Mais puis que comme A,eſt à B,ainſi F,à G,& que A,ne meſure B; F,ne meſurera auſſi G:Parquoy,F, ne ſera l'vnité, autrement F, meſureroit G, l'vnité meſurant tout nombre. Donc [d] F, & H, eſtãt premiers entr'eux,& F,n'eſtant l'vnité F,ne meſurera H; & partant A,ne meſurera auſſi C. Car il eſt monſtré que comme A, à C, ainſi F, eſt à H : ſemblablement on monſtrera que B, ne meſurera D, prenant 4 nombres en la raiſon de A,à B, & les plus petits, & que pas vn autre n'en meſurera pas vn autre, &c. Donc s'il y a, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.

A,16.B,24.C,36.D,54
F,4. G,6. H,9.

a 3.& 4. d. 7.
b 20. d. 7.
c 2.8.ou 35.7.
d 3. 8.

vij THEOREME 5. PROP. 7.

S'il y a tant de nombres que l'on voudra continuellement proportionaux. &que le premier meſure le dernier,il meſurera auſſi le ſecond.

Soient tant de nombres que l'on voudra continuellement proportionaux, A, B, C, D, E, & que A, 1. mesure E, dernier. Ie dis que A, premier mesurera aussi B, 2.

Car si A, n'est dit mesurer B, 2. [a] aussi pas vn autre n'en mesurera pas vn autre : partant A, 1. ne mesurera E, dernier. Ce qui est absurde, A, estant posé mesurer E. Donc s'il y a tant de nombres, &c. Ce qu'il falloit demonstrer.

A, 3. B, 6. C, 12. D, 24. E, 48. [a] 6. 8.

THEOREME 6. PROP. 8. viij

Si entre deux nombres tombent des nombres moyens proportionaux, en proportion continuë : autant qu'il en tombera entre iceux, de moyens continuellement proportionaux, il en tombera autant de moyens continuellemẽt proportionaux entre d'eux autres qui auront la mesme raison.

Soient A, & B, & qu'entre iceux tombent les moyens C, D, continuellement proportionaux, & soit comme A, à B, ainsi E, à F. Ie dis qu'il tombera autant de nombres moyens continuellement proportionaux entre E, & F, qu'entre A, & B.

Car ayãt pris G, H, I, K, les plus petits en la raison de A, à C, & egaux en nombre à A, C, D, B : en raison egale comme A, sera à B, & partant comme E, à F, ainsi G, à K : [b] parquoy G, & K, estant premiers entr'eux, puis qu'ils sont les extrémes [a] 2. 8. [b] 3. 8.

c 23. 7: des plus petits nombres,[c] & par ainsi les plus petits de leur raison;[d] G, mesurera E, egalement &, K, mesurera F. Donc autant de fois que G, & K, mesurent E, F, soient

d 21. 7.

2. autres nombres L, M, autant de fois mesurez par H, I, de sorte que G, H, I, K, mesurent E, L, M, F, egalement chacun le sien.[e] Parquoy G, H, I, k, multiplians le nombre par lequel ils mesurent E, L, M, F, ils produiront E, L, M, F,[f] donc E, L, M, F, seront en mesme raison que G, H, I, k, mais G, H, I, k, sont continuellement proportionaux, donc E, L, M, F, le seront aussi, & estãt egaux en nombre à A, B, C, D, il tombera autant de moyens proportionaux entre E, & F, qu'entre A, & B. Partant si entre, &c. Ce qu'il falloit demonstrer.

A, 24. C, 36. D, 54. B, 81.
G, 8. H, 12. I, 18. K, 27.
E, 32. L, 48. M, 72. F, 108

e 9. ẽ. s.

f Schol. 18. 7.

SCHOLIE.

Il est manifeste de cette demonstration que non seulement, il tombe autant de moyens proportionaux entre E, & F, qu'entre A, & B, mais aussi que la proportion de E, L, M, F, est la mesme que de A, C, D, B, estant demonstré que la proportion de E, L, M, F, est la mesme que celle de G, H, I, K, qui sont en mesme raison que A, C, D, B, par la construction, donc E, L, M, F, sont aussi en mesme proportion que A, C, D, B.

Il appert aussi de ce Theoreme, qu'entre nombres, en raison double, ou superparticuliere, ou superbipartiente, qu'il ne peut tomber vn nombre moyen proportionel. Car la raison double, és moindres nombres, estant trouuee entre le binaire & l'vnité, & la superparticuliere entre nombres differents seulement de l'vnité; & la superbipartiente

partienſe entre nombres, dont la difference eſt le binaire. Si entre deux nombres en raiſon double, ſuperparticuliere, ou ſuperbipartiente tombe vn moyen proport. a Il en tombera auſſi entre le binaire & l'vnité, ou entre les nombres differents de l'vnité ſeulement, ou du binaire, ſçauoir entre 2. nombres plus petits, qui ont la meſme raiſon qu'iceux, ce qui ne ſe peut faire. Car il eſt manifeſte qu'entre l'vnité & le binaire, ny entre 2. nombres differents de l'vnité ſeulement, ne tombe aucun nombre, tant s'en faut qu'il y puiſſe tomber vn nombre moyen proportionel. a 8. 8.

Semblablement entre deux nombres differents du binaire, tombe ſeulement vn nombre qui diſere de l'vn & de l'autre de l'vnité, lequel nous demonſtrerons ne pouuoir nullement eſtre moyen proportionel entre iceux, en cette maniere. Que AB, & CD, different entr'eux du binaire (ſoit que CD, ſoit vnité, & AD, ternaire ou non,) entre leſquels tombe EF, moindre que AB, de l'vnité, & plus grand que CD, de l'vnité. Ie dis que EF, n'eſt moyen proportionel entre AB, CD. Car ſi on dit que AB, eſt à EF, comme EF, à CD: eſtant AG, egal à EF, de AB,

à fin que le reſte ſoit l'vnité	A..2G.B	A.....6G.B
GB, & de EF; EH, egal à CD,	E. H. F	E.....5H.F
à fin qu'il reſte auſſi l'vnité	C. D	C.....5 D

HF: Pareillement comme le tout AB, ſera au tout EF, ainſi le retranché AG, au retranché EH; AG, EH, eſtãt egaux à EF, CD, par la conſtruction. Donc le reſte GB, ſera auſſi au reſte HF, c'eſt à dire l'vnité à l'vnité, comme le tout AB, au tout EF, le plus grãd au plus petit. Ce qui eſt abſurde. Donc EF n'eſt moyen proportionel entre AB, & CD.

Donc entre nombres de raiſon triple, ne peut tomber vn moyen proportionel: Autrement il en tomberoit auſſi b 8. 8.

entre 3. & 1. qui ſont les plus petits de la raiſon triple, qui different entr'eux du binaire, ce que venons de demonſtrer ne ſe pouuoir faire.

c 8.8. *Semblablement entre les nombres de raiſon quintuple ne peut tomber vn moyen proportionel.* c *Car il en tomberoit auſſi vn moyen proporti. entre 5. & 1. plus petits nombres de la raiſon quintuple : Ce que nous monſtrerons ne ſe pouuoir faire. Car qu'il en tombe vn moyen propor. entre le quinaire AB, & l'vnité C, ſçauoir le binaire ou le ternaire D. En ſorte que AB, ſoit à D, comme D, à C : Et en changeant C, à D, comme D, à AB: & d'autant que l'vnité C, meſure D; D, meſurera auſſi AB. Mais le binaire, ou le ternaire D, meſure auſſi le ſenaire AE, donc D, meſure*

A.....5 B. E
D..2 D...3
C.

d 11.e.ſ. *auſſi le tout AE, & le retranché AB;* d *Et partant D, meſurera auſſi BE, vnité reſtante ce qui eſt abſurde.*

De rechef, qu'il tombe s'il ſe peut faire, vn moyen proportionel entre le quinaire AB, & l'vnité C, ſçauoir D, quaternaire. Donc nous monſtrerons comme auparauant que D, meſure le quinaire AB,

A....4 E. B
D....4
C.

e 11.cõ.ſ. *mais le quaternaire D, meſure auſſi le quaternaire AE, donc D, meſure le tout AB, & le retrãche AE,* e *& partant le nombre D, meſurera auſſi l'vnité reſtante EB; Ce qui eſt abſurde. Donc entre 5. & l'vnité ne tombera aucun moyen proportionel, ny entre quelconques nombres en raiſon quintuple.*

ix

PROBLEME 7. PROP. 9.

Si deux nombres ſont premiers entr'eux & entre iceux tombent des nombres moyens continuellement proportionaux: autant qu'il tombera de nombres

moyens continuellement proportionaux entr'eux, il en tombera autant entre vn chacun d'iceux & l'vnité.

Soient deux nombres A, & B, premiers entre-eux, entre lesquels tombent C D, continuellemẽt proportionaux. Ie dis qu'il en tombera autant entre A, & l'vnité de continuellement proportionaux, & autant entre B, & l'vnité qu'entre A, & B.

Car ayant posé l'vnité,[a] soient trouuez E, F, les plus petits en la raison de A, à C;[b] & soient pris les 3 G, H, I, en la mesme raison, puis les 4. K, L, M, N; & ainsi de suitte iusques à ce que les nombres pris soient autant que A, C, D, B. Or A, B, extrémes estãt premiers entr'eux,[c] A, C, D, B, serõt les plus petits en la raison de E, à F; mais K, L, M, N, qui sont autant que A, C, D, B, sont aussi les plus petits en la mesme raison, par la construction, donc K, L, M, N, sont egaux à A, C, D, B, chacun au sien, à sçauoir K, à A, & N, à B, à fin qu'il n'y en aye de plus petits que les plus petits. Mais (cõme il est manifeste par la demonstration de la 2. proposition 8.) E, multipliant soy-mesme a produict G, & multipliant G, a produict K; E,[d] mesurera G, par E, & G, mesurera K, aussi par E;[e] mais l'vnité mesure E, par E, donc l'vnité mesure E, & E, mesure G, & G, mesure K, egalement, & partant l'vnité est mesme partie, de E, & E, de G, que G, de K.[f] Partant l'vnité & E, G, K, sont continuellement proportionaux: semblablement l'vnité & F, I,

A, 8. C, 12. D, 18. B, 27. a 35. 7.
Vnité 1.
E, 2. F, 3. b 2. 8.
G, 4. H, 6. I, 9.
K, 8. L, 12. M, 18. N, 27.
c 1. 8.
d 7. cõ. f.
e 5. cõ. f
f 20. d.

N, ſont continuellement proportionaux. Donc tant E, G, K, que F, I, N, auec l'vnité eſtãt egaux en nombre à K, L, M, N, il tombera autant de nombres continuellement proportionaux entre l'vnité & K, ou A, ſon egal; & entre l'vnité & N, ou B, ſon egal; qu'entre A, & B. Donc ſi deux nombres, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.

x

THEOREME 8. PROP. 10.

Si entre deux nombres & l'vnité tombent des nombres continuellement proportionaux; autant qu'il en tombe de continuellement proportionaux entre chacun d'iceux & l'vnité, il en tõbera autant de continuellement proportionaux entre iceux.

Soient deux nombres A, B, & l'vnité C, & qu'entre l'vnité C, & A, tombẽt quelques nombres continuellement proportionaux D, & E, & entre l'vnité C, & B, tombent F, G. Ie dis qu'il en tombera autant de continuellement proportionaux entre A, & B.

Car ſoit H, produict de D, en F, & I, produict de D, en H, & K, produict de F, en H. C, eſtant à D, comme D, à E, & D, à E, comme E, à A; [a] & C, meſurãt D, par les vnitez qui sõt en D; D, meſurera E, auſſi par les vnitez qui ſont en D, & E, meſurera A, auſſi par les vnitez qui ſont en D; [b] donc D, par ſoy produita E, & E, par D, produira A. Semblablement F, par ſoy produi-

A, 8. I 12. K, 18. B, 27.
E, 4. H, 6. G, 9.
D, 2. F, 3.
C, 1.

a 5. c. f.

b 9. c. f.

ra G,& G,par F,produira B. D'autant donc que D,multipliant D,& F,produict E,& H,[b] comme D,à F, ainsi E, à H: par mesme raison puis que F, multipliant F, & D,a faict H, & G, comme D, à F,ainsi H,à G: Donc E,H,G, seront continuellement proportionaux. Derechef D,multipliant E, & H,a faict A,& I, donc comme E [c] sera à H,ainsi A,à I:& puis que D,& F,multipliant H,font I, & k,[d] comme D,sera à F,ainsi I,à k.[e] Semblablement k,sera à B,comme H,à G. Donc A,I, K, B, sont continuellement proport. partant entre A, & B,tombent 2. moyens continuellement proportionaux, sçauoir autant qu'entre A,& l'vnité; ou B,& la mesme vnité. Donc si entre deux nombres,&c. Ce qu'il falloit demonstrer.

[b] 17. 7.
[c] 17.7.
[d] 18.7.
[e] 17.7.

THEOREME 9. PROP. 11. xj

Entre deux nombres quarrez il y a vn nombre moyen proportionel : & le quarré est au quarré en raison doublee du costé au costé.

Soient deux nombres quarrez A,B;& leurs costez C, D. Ie dis qu'entre A, & B, il y a vn nombre moyen proportionel : & que le quarré A, est au quarré B, en raison doublee du costé C, au costé D.

Car soit E,produict de C, en D,ou de D,en C; D'autãt que C, par soy-mesme a faict A,[a] nombre quarré & par D,a faict E,[b] comme C,est à D, ainsi A à E. Derechef puis que D, multipliant C,a faict E, & multipliant soy-mes-

A,9. E,21. B,49.
C,3. D,7.

[a] 18. d.
[b] 17. 7.

c 18. d. c 17. 7. me, a faict B, nombre quarré, [c] comme C, ſera à D, ainſi E, à B. Donc A, E, B, ſeront continuellement proportionaux en la raiſon des coſtez C, & D. Donc entre A, & B, tombe vn nombre moyen proportionel E.

d 16. d. 7 ou 10. d. 5. Secondement puis que A, E, B, ſont continuellement proportionaux [d] A, premier ſera à B, 3. en raiſon doublee de A, premier à E, 2. qui eſt la meſme raiſon du coſté C, au coſté D. Donc entre 2. nombres quarrez, &c. Ce qu'il falloit demõſtrer.

xj

THEOREME 10. PROP. 12.

Entre deux nombres cubes, il y a deux nombres moyens proportionaux: Et le cube eſt au cube en raiſon triplee du coſté au coſté.

Soient 2. nombres cubes A, & B, & leurs coſtez C, D. Ie dis qu'entre A, & B, tombent deux moyens continuellement proportionaux; & que le cube A, eſt au cube B, en raiſon triplee du coſté C, au coſte D.

Car que C, ſe multipliant face E, & D, ſe multipliant face F; & C, D, ſe multiplians l'vn l'autre facent G, & multiplians G, facent H, I.

A, 27. H, 36. I, 48. B, 64.
E, 9. G, 12. F, 16.
C, 3. D, 4.

D'autant que C, multipliant C, & D, a faict E, G,
a 17. 7. [a] comme C, ſera à D, ainſi E, à G. Semblablemẽt
b 17. 7. puis que D, multipliant D, C, a faict G, & F, [b] comme C, eſt à D. ainſi G, à F; Partant E, F, G, ſont continuellement proportionaux en
c 19. d. la raiſon de C, à D. Derechef d'autant que [c] C,

multipliant E, a faict A, cube, & multipliant G, a faict H, par la construction [d] A, sera à H, cõme E, à G, c'est à dire cõme C, à D: semblablement puis que par la construction D, multipliant G, a faict I, & multipliant F, a faict [e] B, cube; I, sera [f] à B, comme G, à F, c'est à dire cõme C, à D: [g] Mais H, est aussi à I, comme C, à D, d'autant que C, D, multiplians G, ont faict H, & I, donc A, H, I, B, sont continuellement proportionaux en la raison de C, à D. Donc entre les cubes A, & B, tombent 2. moyens proportionaux H, & I. d 17.7. e 19. d. f 17.7. g 18.7.

Secondement d'autant que A, H, I, B, sont continuellement proportionaux, A, 1. sera à B, 4. en raison triplee de A, 1. à H, 2. c'est à dire du costé C, au costé D; car C, est à D, comme A, à H. Donc entre deux cubes, &c. Ce qu'il falloit demonstrer.

THEOREME 11. PROP. 13. xij

S'il y a tant de nombres que l'on voudra continuellement proportio. & que chacun multipliant soymesme en face quelques vns, les produicts d'iceux seront proportio. Et si les nombres pris au commencement multiplians leurs produits en font quelques vns, iceux faicts seront aussi proportionaux, & tousiours cela aduiendra enuiron les extrémes.

Soient A, B, C, continuellement proportionaux, lesquels multipliez chacun par soy-mesme facent D, E, F, & que A, B, C, multiplians dere-

chef, D, E, F, facent G, H, I, & ainſi de ſuitte. Ie dis que D, E, F, & G, H, I, ſont continuellement proportionaux.

A, 2. B, 4. C, 8.
D, 4. N, 8. E, 16. O, 32. F, 64.
G, 8. P, 16. Q, 32. H, 64. R, 128. S, 256. I, 512.

Car que A, & B, ſe multiplians l'vn l'autre facent N, & B, C, facent O; puis A, multipliant N, E, face P, & Q, & B, multipliant O, F, face R, S. D'autant que A, multipliant A, & B, à faict D, N, [a] comme A, à B, ainſi D, à N, par la meſme raiſon puis que B, multipliant A, & B, a faict N, E, comme A, eſt à B, ainſi N, à E, donc D, N, E, ſont continuellement proportionaux en la raiſon de A, à B. Derechef puis que B, multipliant B, & C, a faict E, & O; [b] comme B, à C, ainſi E, à O, ſemblablement puis que C, multipliant B, & C, a faict O, & F, comme B, à C, ainſi O, à F. Partant E, O, F, ſont continuellement proportionaux en la raiſon de B, à C, ou de A, à B: Donc D, N, E, eſtãt continuellemẽt proportionaux en la meſme raiſon; en raiſon egale comme D, à E, ainſi E, à F: Donc D. E, F, ſont continuellement proportion. En apres puis que A, multipliant D, N, E, a faict GP Q; [c] G, P, Q, ſeront en meſme raiſon que D, N, E, c'eſt à dire que A, à B. Et puis que A, & B, multiplians E, ont faict Q, H, [d] comme A, à B, ainſi Q, à H. Donc G. P, Q, H, ſont proportionaux en la raiſon de A, à B: ſemblablement puis que B, multipliãt E, O, F, a faict H, R, S; [e] H, R, S, ſerõt proportionaux en la raiſon de E, O, F; c'eſt à dire de B, à C, ou de A, à B. Finalement puis que B, C,

a 17. 7.
b 17. 7.
c Schol. 18. 7.
d 18. 7.
e Schol. 18. 7.

multiplians F, ont faict S, I, fS, sera à I, comme B, à C, ou A, à B. Partant H, R, S, I, sont proportionaux en la raison de A, à B, donc puis que G, P, Q, H, sont aussi en continuelle proportion en la raison de H, R, S, I, en raison egale comme G, sera à H, ainsi H, à I. Partãt G, H, I, sont continuellement proportionaux. Donc s'il y a tant de nombres, &c. Ce qu'il falloit demonstrer. f 18. 7.

THEORESME 12. PROP. 14. xiij

Si vn nombre quarré mesure vn nombre quarré, aussi le costé mesurera le costé: Et si le costé mesure le costé, aussi le quarré mesurera le quarré.

Soit A, nombre quarré dont le costé est C, mesurant B, nombre quarré dont le costé est D. Ie dis que C, costé de A, mesurera D, costé de B.

Car que C, D, se multiplians l'vn l'autre facent E. D'autant que C, multipliant C, D, a faict A, E, [a] comme C, sera à D, ainsi A, à E: semblablemẽt puis que D, multipliant C, D, a faict E, B, [b] E, sera à B, comme C, à D, c'est à dire comme A, à E: Donc A, E, B, sont continuellement proportionaux en la raison de C, à D. Mais A, premier mesure B, dernier, donc [c] A, mesurera aussi E, second. Partant puis que C, est à D, comme A, à E, & A, mesure E, donc le costé C, mesurera le costé D.

A, 4. E, 12. B, 36.
C, 2. D, 6.
a 17. 7.
b 17. 7.
c 7. 8.

Secondement que le costé C, mesure le costé D. Ie dis que le quarré A, mesure le quarré B. [d] Car comme il a esté demonstré, A, E, B, sont con-
d 11. 8.

tinuellement proportionaux en la raiſon de C, à D: mais C, meſure D, donc A, meſurera E, & E, meſurera B;[c] Donc A, meſurera auſſi B. Partant ſi vn nombre quarré, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.

c 11. 8. 1.

xiiij THEOREME 13. PROP. 15.

Si vn nombre cube meſure vn nombre cube; auſſi le coſté meſurera le coſté: Et ſi le coſté meſure le coſté, auſſi le cube meſurera le cube.

Soit A, nombre cube, dont le coſté eſt C, meſurant B, nombre cube, dont le coſté eſt D. Ie dis que C, coſté de A, meſurera D, coſté de B.

Car que C, D, chacun multipliant ſoy-meſme face E, F, & ſe multiplians l'vn l'autre facēt G; & finalement multiplians G, facent H, I. D'autant que comme il appert par la demonſtration de la 12. propoſition 8. tant E, G, F, que A, H, I, B, ſont continuellement proportionaux en la raiſon de C, à D; Mais A, 1. meſure B, dernier, [a] A, premier meſurera auſſi H, ſecond. Donc A, eſtant à H, comme C, à D; C, coſté meſurera auſſi D, coſté.

A,8.H,24.I,72.B,216.
E,4. G,12. F,36.
C,2. D,6.

a 7. 8.

Maintenant que le coſté C, meſure le coſté D, Ie dis que le cube A, meſurera le cube B. Car par les raiſons cy deſſus comme C, à D, ainſi A, à H; A, H I. B, eſtant continuellement proportionaux en la raiſon de C, à D, comme il eſt monſtré 12. p. 8. Parquoy C, coſté meſurant le coſté D; auſſi A,

meſurera H: mais H, meſure I, & I, meſure le cube B, (eſtans continuellement proportionaux.) [b] Donc A, meſurera auſſi le cube B. Donc ſi vn nombre cube, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer. b 11. c. 8.

THEOREME 14. PROP. 16. xiv

Si vn nombre quarré ne meſure vn nombre quarré, auſſi le coſté ne meſurera le coſté: Et ſi le coſté ne meſure le coſté, auſſi le quarré ne meſurera le quarré.

Soient les nombres quarrez A, & B, & leurs coſtez C, & D; & que A, quarré ne meſure le quarré B. Ie dis que le coſté C, ne meſurera auſſi le coſté D.

Car s'il eſt poſſible, que le coſté C, meſure le coſté D: [a] A, 16. B, 81. C, 4. D, 9. Donc le quarré A, meſurera le quarré B, ce qui eſt abſurde: car il eſt poſé ne le meſurer: Parquoy C, coſté ne meſurera le coſté D. a 14. 8.

Maintenant. Ie dis que ſi le coſté C, ne meſure le coſté D, que auſſi le quarré A, ne meſurera le quarré B. Car ſi A, eſt dit meſurer B; [b] le coſté C, meſurera auſſi le coſté D: ce qui eſt abſurde; car il eſt poſé ne le meſurer. Partant le quarré A, ne meſurera le quarré B. Donc ſi vn nombre quarré, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer b 14. 8.

THEOREME 15. PROP. 17. xv

Si vn nombre cube ne meſure vn nombre cube, auſſi le coſté ne meſurera le coſté;

Et si le costé ne mesure le costé, aussi le cube ne mesurera le cube.

Soient les nombres cubes A, & B, & leurs costez C, & D, & que A, ne mesure B. Ie dis que le costé C, ne mesure le costé D.

a 15.8. Car que le costé C, mesure le costé D, s'il est possible.a

A,8.	B,27.	
C,2.	D,3.	

Donc le cube A, mesurera le cube B, ce qui est absurde, car il est posé ne le mesurer. Donc C, ne mesure D.

Maintenant que le costé C, ne mesure le costé D. Ie dis que le cube A, ne mesurera le cube B.

b 15.8. Car si A, est dit mesurer B;b le costé C, mesurera aussi le costé D, ce qui est absurde: Car il est posé ne le mesurer. Donc le cube A, ne mesure le cube B. Parquoy si vn nombre cube, &c. Ce qu'il falloit demonstrer.

xvj THEOREME 16. PROP. 18.

Entre deux nombres plans semblables, il y a vn nombre moyen proportionel: Et le plan est au plan en raison doublee des costez homologues, ou de semblable raison.

Soient les nombres A, B, plans semblables; & les costez de A, soient C, D, & les costez de B, soiēt

a 21.d 7 E, F; (a lesquels costez sont proport.) de sorte que C, D, se multiplians font A; & E, F, font B, & comme C, est à D, ainsi E, est à F. Ie dis qu'entre A, & B, tombe vn moyen proportionel, & que le plan A, est plan. B, en raison doublee des costez

homologues CE, DF.

Car que DE, se multipliãs l'vn l'autre facent G. D'autant que comme C, est à D, ainsi E, à F, en changeant C, sera à E, comme D, à F; & puis que D, multipliant C, E, a faict A, & G, [b] A, sera à G, comme C, à E, c'est à dire comme D, à F. Et puis que E, multipliant D, F, à faict G, & B, [c] G, sera à B, comme D, à F. Donc A, G, B, sont continuellemẽt proportionaux en la raison de C, à E, ou de D, à F, donc entre A, & B, y a vn moyen proportionel G.

A. 12. G, 18. B, 27.
C, 6. D, 2. E, 9. F, 3.
[b] 17. 7.
[c] 17. 7.

Mais d'autant que A, G, B, sont continuellement proportionaux. A, [d] est à B, en raison doublee de A, à G, c'est à dire de C, à E, ou de D, à F. Donc le plan A, est au plan B, en raison doublee de C, à E, ou de D, à F, costez de mesme raison. Donc entre deux nombres plans, &c. Ce qu'il falloit demonstrer.

[d] 26. d. 7.

THEOREME 17. PROP. 19. xviij

Entre deux nombres solides semblables il y a deux nombres moyens proportionaux; Et le solide est au solide en raison triplee du costé homologue au costé homologue, ou de semblable raison.

Soient deux nombres solides semblables A, B les costez de A, soient C, D, E, & de B, soiẽt F, G, H; a C, D, E, sont proportionaux à F, G, H, sçauoir comme C, à D, ainsi F, à G, & comme D, à E, ainsi G, à H. Ie dis qu'entre A, & B, se trouuent deux moyens proportionaux, & A, est à B, en raison

a 22. d.

triplee des coſtez homologues, C, F, ou D, G, ou E, H.

Car que CD, ſe multiplians l'vn l'autre facent I; Et F, G, facent K, & D, F, facent L: finalement E, H, multiplians L, facent M, N. D'autant donc que C, D, E, ſont proportionaux à F, G, H, en chãgeant ils ſeront auſſi proportionaux, ſçauoir comme C, à F, ainſi D, à G, & E, à H. Et puis que D, multipliant C, F, à faict I, L; [b] comme C, à F, ainſi I, à L. Pareillement puis que F, multipliant D, G, a faict L, & K; [c] comme D, eſt à G, ainſi L, à K. Parquoy I, L, K, ſont continuellement proportionaux en la raiſon de C, à F, ou de D, à G, ou de E, à H. Et d'autant que H, ſolide eſt produict de la mutuelle multiplication des coſtez C, D, E; & I, eſt faict de C, en D, ou de D, en C; E, multipliant I, fera A: ſemblablement B, ſolide eſtãt faict de la mutuelle multiplication de F, G, H, & K, de F, en G, ou de G, en F; H, multipliant K, fera B. Parquoy puis que E, multipliãt I, & L, a faict A, & M; [d] A, ſera à M, comme I, à L, c'eſt à dire comme C, à F, ou D, à G, ou E, à H; Par meſme raiſon, puis que H, multipliant L, K, a faict N, & B; [e] N, ſera à B, comme L, à K, c'eſt à dire comme C, à F, ou D, à G, ou E, à H. [f] Mais M, eſt à N, comme E, à H, puis que E, H, multiplians L, ont faict M, & N, donc A, M, N, B, ſont continuellement proportionaux en la raiſon de C, à F, ou de D, à G, ou E, à H. Partant entre A, & B, ſolides ſemblables tombent deux nombres moyẽs continuellement proportionaux.

A, 30. M, 60. N, 120. B, 240.
I, 6. L, 12. K, 24.
C, 2. D, 3. E, 5. F, 4. G, 6. H, 10.

b 17.7.
c 17.7.
d 17.7.
e 17.7.
f 18.7.

Secondement puis que A, M, N, B, ſont conti-

nuellement proportionaux, [g] A, eſt à B, en raiſon triplee de A à M; mais A, eſt à M, cõme C, à F, ou D, à G, ou E, à H, dõc A, ſera à B, en raiſon triplee de C, à F, ou de D, à G, ou de E, à H, coſtez de ſemblable raiſon. Donc entre deux ſolides, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer. g 10. d. 5 & 26. d. 7.

THEOREME 18. PROP. 20. xvij

Si entre deux nombres tombe vn nombre, moyen proportionel: iceux nombres ſeront plans ſemblables.

Soient deux nombres A, & B, entre leſquels tombe vn moyen proportionel C. Ie dis que A, & B, ſont plans ſemblables.

Car ayant pris D, E, les plus petits en la raiſon de A, C, B; [a] D, & E, meſureront egalement A, & C. Qu'ils les meſurent par F, ils meſureront auſſi egalement C, B, en la meſme raiſon: que ce ſoit par G. [b] Donc F, multipliant D, & E, produira A, & C; [c] & G, multipliãt D, E, produira C, B. D'autant donc que E, multipliant F, & G, à produict C, B; [d] comme C, ſera à B, ainſi F, à G: mais comme C, à B, ainſi eſtoit D, à E. Donc D, ſera à E, comme F, à G; & en permutant comme D, à F, ainſi E, à G: mais d'autant que F, multipliant D, a faict A; A, ſera nombre plan, & ſes coſtez ſeront D F. Semblablement puis que G, multipliãt E, a fait B; B, ſera auſſi plan, duquel les coſtez ſeront E, G. Et iceux coſtez eſtants monſtrez proportionaux, ſçauoir comme D, à F, ainſi E, à G; [e] A, & B, ſeront plans ſembla- A, 18, C, 24. B, 32. D, 3. E, 4. F, 6. G, 8. a 21. 7. b 9. c. f. c 9. c. f. d 17. 7. e 21. d. 7.

bles. Donc ſi entre deux nombres, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.

xix

THEOREME 19. PROP. 21.

Si entre deux nombres tombent deux moyens proportionaux ; iceux ſeront ſolides ſemblables.

Soient A, & B, entre leſquels tombent deux moyens proportionaux C, & D. Ie dis que A, & B, ſont nombres ſolides ſemblables.

a 22. 8. Car [a] ſoient pris E, F, G, les plus petits en la raiſon de A, C, D, B. D'autant qu'entre E, & G, tõbe vn moyen

A, 8. C, 12. D, 18: B, 27.
E, 4. F, 6. G, 9.
H, 2. I, 2. M, 2. K, 3. L, 3. N, 3.

b 20. 8. proportionel F; [b] E, & G, ſeront plans ſemblables. Soiẽt HI, ſoſtez de E, & K, L de G. Et d'autãt que

c 21. 7. E, F, G, meſurẽt A, C, D, egalemẽt [c] eſtant les plus petits en la meſme raiſon, qu'ils les meſurent par

d 21. 7. M. [d] Et puis que E, F, G, meſurent auſſi C, D, B, par la meſme raiſon, que ce ſoit par N, de ſorte que M, multipliant E, F, G, face A, C, D: & N, multipliant auſſi E, F, G, face C, D, B. Or E, eſt produict de ſes coſtez H, I, multipliez l'vn par l'autre: & G, eſt produict des coſtez k, & L. Donc A, eſt produict de H, I, M, entr'eux, & B, de K, L,

f 21. d. 7. N: partant [f] A, eſt nombre ſolide, ayant les coſtez H, I, M, & B, auſſi ſolide ayant les coſtez K, L, N: Mais puis que M, & N, multiplians F, font C, &

g 18. 7. D, comme il eſt monſtré. [g] C, ſera à D, comme

h 17. 7. M, à N: mais [h] C, D, ſont en meſme raiſon que E, F, puis que N, multipliant E, F, a faict C, D, & auſſi E, F, ſont en meſme raiſon que H, K, ou I, L.

Donc

Donc H, sera à K, & I, à L, comme M, à N, & en changeant H, sera à I, comme K, à L, & I, à M, comme L, à N; donc les costez H, I, M, sont proportionaux aux costez K, L, M. Partant les nombres A, & B, sont solides semblables. Donc si entre deux nomb. &c. Ce qu'il falloit demonstrer. [1] 21. 7.

THEOREME 20. PROP. 22. XX

Si trois nombres sont continuellement proportionaux; & que le premier soit quarré; Aussi le troisiesme sera quarré.

Soient trois nombres A, B, C, continuellemẽt proportionaux, & que A, premier soit quarré. Ie dis que C, troisiesme sera aussi quarré.

Car puis qu'entre A, & C, tombe vn moyen proportionel; [2] A, & C, seront plans semblables: partant A, estant quarré, C, semblable à iceluy, sera aussi quarré: Donc s'il y a trois nombres, &c. Ce qu'il falloit demonstrer. B, 9. B, 54 C, 324. [2] 20. 8.

THEOREME 21. PROP. 23. XXI

Si quatre nombres sont continuellement proportionaux, & que le premier soit cube; aussi le quatriesme sera cube.

Soient quatre nombres A, B, C, D, continuellement proportionaux, & que A, premier soit cube. Ie dis que D, quatriesme sera aussi cube.

Car puis qu'entre A, & D, tombent deux moyens proportionaux, B & C; [2] A, & D, seront [2] 21. 8.

ſolides ſemblables
Partant A, eſtant cube D, sẽblable à iceluy ſera auſſi cube. Donc ſi quatre nõbres sõt continuellement, &c. Ce qu'il falloit demõſtrer.

A,27. B,45. C,75. D,125.

SCHOLIE.

D'autant que comme nous auons dit à la 21. definition du 7. l. Deux nombres plans ou ſolides peuuent eſtre ſemblables pourueu que deux coſtez quels qu'ils ſoiẽt de l'vn ſoient proport. à deux de l'autre quels qu'ils puiſſẽt eſtre, encore que deux quelconques coſtez que l'on voudra de l'vn ne ſoiẽt proportionaux à deux quels que l'õ voudra de l'autre, l'on pourra nier à bon droict, que de 2. nomb. plans ſemblables, ſi l'vn eſt quarré que l'autre ſoit auſſi quarré, & de deux nombres ſolides ſemblables, ſi l'vn eſt cube l'autre ſoit auſſi cube: ce qui eſt neantmoins accordé en ces deux demonſtrations precedentes. Car ces 2. nomb. 36. & 64. eſtans propoſez ſemblables, il ſuffit que à deux coſtez du premier 3. & 12. on trouue deux coſtez du dernier proportionaux comme 4. & 16. d'où il s'enſuit qu'encore que le premier ſoit quarré ayant deux coſtez egaux 6. & 6. quelqu'vn pourroit douter meſme nier que l'autre euſt auſſi deux coſtez proportionaux aux 2. coſtez egaux du premier, c'eſt à dire auſſi egaux entr'eux & partant eſtre quarré. Cõme il eſt auſſi manifeſte de ces deux coſtez du premier, 4. & 9. ou 2. ou 18. auſquels ne correſpondent deux autres coſtez au dernier proportion. à iceux. Donc ſi à ces deux coſtez du premier l'on ne trouue deux coſtez au dernier proportionaux, encore bien que ces nombres ſoient ſemblables, l'on ne ſera tenu d'accorder ſans demonſtration qu'il y puiſſe auoir deux coſtez au dernier proportionaux à ces deux 6. & 6. & auſſi

egaux entr'eux. Ce qu'il faut auſsi entendre des ſolides. C'eſt pourquoy nous auons icy mis ces deux demonſtrations de Clauius.

Soient trois nombres A, B, C, continuellement proportionaux, & que A, premier ſoit quarré. Ie dis que C, troiſieſme ſera quarré.

Car ayant pris trois nombres D, E, F, les plus petits en la raiſon de A, à B, & de B, à C; a D, meſurera A, & F, meſurera C, egalement: Et les extrémes D, F, b eſtant quarrez, & A, eſtant quarré par l'hypotheſe, c il tombera entre A, & D, quarrez vn moyen proportionel comme G. Mais d'autant que en raiſon egale comme A, à C, ainſi D, à F: & en permutant comme A, à D, ainſi C, à F. d Il tombera auſsi vn moyen proportionel entre C, & F, comme H. e Donc F, premier meſurant C, dernier, il meſurera auſsi H, ſecond. Mais ayant prins I, coſté du quarré F, que I, meſure le nõbre K, autãt deſois que F, meſure H, en ſorte que H, à F, & K, à I, ayt meſme raiſon multiple: Et ſoit pareillemẽt L, quarré de K, f partãt puis que le quarré L, eſt au quarré F, en raiſon doublee du coſté K, au coſté I, c'eſt à dire de H, à F: mais C, à F, eſt auſsi en raiſon doublee de la meſme raiſon de H, à F, par la def. puis qu'en changeant C, H, F, ſont auſsi proport. L, ſera à F, comme C, à F: & partant L, & C, ſont egaux. Donc L, eſtant quarré par la conſtruction, C, ſera auſsi quarré.

A, 36. B, 48. C, 64.
G, 18. H, 32.
D, 9. E, 12. F, 16.
L, 64. K, 8. I, 4.

a 21.7.
b 1 cor. 2.8.
c 11 8.
d 8.8.
e 7.8.
f 11. 8.

Soient quatre nombres A, B, C, D, continuellement proportionaux, & que A, premier ſoit cube. Ie dis que D, 4. ſera cube auſsi.

Car ayant trouué 4. nombres E, F, G, H, les plus petits en la raiſon de A, à B, de B, à C, & de C, à D: a E, meſurera A, & H, meſurera D, egalemẽt: & E, H, extrémes

a 21.7.

b 1.cor. 2.8. *des quatre plus petits,* [b] *eſtants cubes, & A, eſtant auſſi*
c 11.8. *cube par l'hypotheſe, entre* [c] *E, A, cubes tomberont deux moyens proportionaux, leſquels ſoient I, K : mais d'autant qu'en raiſon egale comme A, à C, ainſi E,*

A,64.B,160.C,400.D,1000.
K,32. M,500.
I,16. L,250.
E, 8. F,20. G,50. H,125.
P,1000. O,10. N,5.

d 8.8. *à H, & en changeant comme A, à E, ainſi D, à H;* [d] *il tombera auſſi entre H, D, deux moyens proportionaux,*
e 8.8. *qui ſoient L, M. Donc* [e] *puis que H, premier meſure D, dernier, il meſurera auſſi L, ſecond. Apres ayant prins N, coſté du cube H, que N, meſure autant de fois O, que H, meſure L, en ſorte que L, ſoit à H, & O, à N, en meſme raiſon multiple. Soit auſſi P, cube de O. Partant*
f 11.8. *puis que le cube P, eſt au cube H, en raiſon triplee du coſté O, au coſté N, c'eſt à dire de L, à H: & D, eſt auſſi à H, en raiſon triplee de L, à H, par la definit. puis qu'en changeant D, M, L, H, ſont auſſi proport. P, ſera à H, comme D, à H. Partant P, D, ſeront egaux. Donc P, eſtant cube par la conſtruction, D, ſera cube auſſi. Ce qu'il falloit demonſtrer.*

xxij

THEOREME 22. PROP. 24.

Si deux nombres ſont en meſme raiſon l'vn à l'autre que nõbre quarré à nombre quarré: & que le premier ſoit quarré, le ſecond ſera auſſi quarré.

Soient deux nombres A, & B, leſquels ayent meſme raiſon l'vn à l'autre que le nõbre quarré C, au nombre quarré D, & au A, premier ſoit quarré. Ie dis que B, ſecond, eſt auſſi quarré.

Car d'autant que C, & D, ſont quarrez [a] il tombera entr'eux vn moyen proportionel, lequel ſoit E. [b] Il en tombera donc auſſi vn entre A, & B, qui ſõt en la meſme raiſon, lequel ſoit F. D'autant donc que les trois nombres A, F, B, ſont continuellement proportionaux, & A, premier eſt quarré [c] B, troiſieſme ſera auſſi quarré. Partant ſi deux nombres, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.

A, 36. F, 48. B, 64.
C, 9. E, 12. D, 16.

[a] 11. 8.
[b] 8 8.
[c] 22. 8.

COROLLAIRE.

Il eſt manifeſte de ce qui eſt demonſtré cy-deſſus, que la proportion de tout nombre quarré à quelconque nombre non quarré que ce ſoit, ne peut eſtre exhibee en deux nombres quarrez. Car ſi ainſi eſtoit, [d] les deux premiers nombres qui ont la meſme raiſon que les quarrez de la proportion exhibee ſeroient auſſi quarrez, puis que le premier eſt poſé quarré. Ce qui eſt abſurde, car le ſecond eſt poſé non quarré. D'où enſuit que les nõbres qui ſont en raiſon double, ne ſont entr'eux comme nombre quarré à nombre quarré. Car tous ces nombres doubles icy, 4. 8. 16. 32. 64. 128. &c. ſeroient quarrez. Car le premier 4. eſtant quarré, [e] 8. ſeroit auſſi quarré, & auſſi 16. & 32. &c. ce qui eſt impoſſible. Car entre 4. & 8. entre 8. & 16. entre 16. & 32. &c. [f] tomberoit vn moyen proportionel s'ils eſtoient quarrez: veu que toutesfois il eſt monſtré au Scholie de la 8. propoſition de ce liure, qu'entre aucuns nombr. de proportion double, il ne peut tomber de moyen proportionel.

[d] 24 8.
[e] 24. 8.
[f] 1. 8.

Semblablement les nombres qui ſont en raiſon quintuple n'auront meſme raiſon que nombre quarré à nõbre quarré: Car ſi ainſi eſtoit, g il tomberoit entr'eux vn moyen proportionel. h Donc il en tomberoit auſsi vn moyen proportionel entre 5. & 1. qui ſont les plus petits nombres en la raiſon quintuple, i mais nous auons monſtré le contraire.

g 11 8.
h 18. 8.
i Schol. 8 8.

xxiij THEOREME 23. PROP. 25.

Si deux nombres ont meſme raiſon l'vn à l'autre, qu'vn nombre cube à vn nombre cube, & que le premier ſoit cube auſſi le ſecond ſera cube.

Soit A, à B, comme le cube C, au cube D, & que A, premier ſoit cube. Ie dis que B, ſecond ſera auſsi cube.

Car d'autant que A, eſt à B, cõme C, à D: a mais entre C, & D, cubes tombent deux moyens proportionaux, leſquels ſoient E, & F. b Donc entre A, & B, tomberõt auſsi deux moyens proportionaux, qui ſoient G, & H. Donc d'autant que les quatre nombres A, G, H, B, ſont continuellement proportionaux, & A, premier eſt cube: c B, quatrieſme ſera auſsi cube: Partant ſi deux nombres ont, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.

A, 8. G, 12. H, 18. B, 27.
C, 64. E, 96. F, 144. D, 216.

a 12. 8.
b 8 8.
c 23. 8.

COROLLAIRE.

Il eſt auſsi manifeſte par ce qui eſt monſtré cy deſſus, que la raiſon de quelconque nombre cube

que ce ſoit, à quelcõque nõbre non cube que ce ſoit ne ſe peut retrouuer en deux nombres cubes. Car ſi elle s'y retrouuoit [d] les 2. premiers nombres ayans la meſme raiſon que les cubes de la proportion trouuee, ſeroiẽt auſsi cubes, puis que le premier eſt poſé cube. Ce qui eſt abſurde, car le ſecond eſt poſé non cube. [d] 25 8.

THEOREME 24. PROP. 26. xxiiij

Les nombres plans ſemblables, ont meſme raiſon entr'eux, que nombre quarré à nombre quarré.

Soient les nombres A, & B, plans ſemblables. Ie dis que A, eſt à B, comme vn nombre quarré à vn nombre quarré.

Car puis que A, & B, ſont plans ſemblables, [a] il tombera entr'eux vn moyen proportionel, lequel ſoit C. Donc ayant prins les trois nombres D, E, F, les plus petits en la raiſon de A, C, B, les extrémes D, & F, ſeront quarrez, partant puis qu'en raiſon egale A, eſt à B, comme D, à F, il eſt manifeſte que A, ſera à B, comme vn nombre quarré à vn nombre quarré, ſçauoir comme le nombre quarré D. au nombre quarré F. Donc les nombres plãs ſemblables, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.

A, 20. C, 30. B, 45.
D, 4. E, 6. F, 9.

[a] 18. 8.

[b] 1. cor. 2. 8.

SCHOLIE.

Mais la conuerſe de cette propoſition eſt auſsi vraye, laquelle nous demonſtrerons ainſi, priſe de Commandin.

Les nombres plans qui ont meſme proportion

entr'eux, que nombre quarré à vn nombre quarré ſont plans ſemblables.

Que les nombres plans A, B, ayent meſme raiſon entr'eux que les quarrez C, D. Ie dis que A, B, ſont plans ſemblables.

b 11. 8. *Car d'autant qu'entre les quarrez C D, tombe vn moyen* [b] *proportionel:* A,8. B,18. C,16. D,36.

c 8. 8. *& comme C, eſt à D, ainſi A, à B, il*

d 20. 8. *tombera auſſi vn moyen proportionel entre A, & B. à Parquoy A, & B, ſont plans ſemblables.*

Il appert de cecy que les nombres plans, qui ne ſont ſemblables n'ont pas meſme raiſon entr'eux que nombre quarré à nombre quarré: car s'ils auoiẽt meſme raiſon, ils ſeroient plans ſemblables comme il eſt demonſtré, ce qui eſt abſurde, car ils ſont poſez non ſemblables.

XXV THEOREME 25. PROP. 27.

Les nombres ſolides ſemblables ont meſme raiſon entr'eux, qu'vn nombre cube à vn nombre cube.

Soient les nombres A, & B, ſolides ſemblables. Ie dis que A, eſt à B, comme vn nombre cube à vn nombre cube.

Car d'autant que A, & B, ſont ſolides ſemblables; [a] entre iceux il tombera deux moyens proportionaux, leſquels ſoient C, & D. Et ayant prins les quatre nombres E, F, G, H, les plus petits en la raiſon de A, C, D, B les extrémes E, & H, ſeront cubes. Partant puis qu'en raiſon egale A, eſt B, [b] comme E, à H, il appert que A, ſera à B, comme le nombre cube E, à

A,16. C,24. D,36. B,54. E,8. F,12. G,18. H,27.

a 19. 8.

b *cor.* 1. 2. 8.

vn autre nombre cube, à ſçauoir à H. Donc les nombres ſolides ſemblables ont meſme raiſon entr'eux que, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.

SCHOLIE.

Nous demonſtrerons apres Clauius icy la conuerſe de cette propoſition.

Les nombres qui ſont l'vn à l'autre comme nombre cube à nombre cube, ſont ſolides ſemblables.

Car que A, & B, ayent meſme raiſon entr'eux que les cubes C, & D. Ie dis que A, B, ſont ſolides ſemblables. Car A, eſtant à B, comme C, à D; [a] *& qu'entre C, D, cubes il tombe 2. moyens proportionaux,* [b] *il en tombera auſſi 2. entre A, & B.* [c] *Donc A, B, ſont ſolides ſemblables. De toutes ces choſes il eſt manifeſte, qu'aucuns nombres en raiſon double, ou ſuperparticuliere, ou ſuperbipartiente ne ſont plans ſemblables, ou ſolides. Car s'ils eſtoient plans ſemblables,* [d] *il tomberoit vn moyen proportionel entr'iceux.* [e] *Ce qui eſt abſurde. Ils ne ſeront auſſi ſolides ſemblables, ne pouuant tõber entr'iceux 2. moyens proportionaux: car autrement* [f] *il en tomberoit auſſi 2.* [g] *entre les plus petits de la meſme raiſon, ce qui ne ſe peut eſtant ſeulemẽt differẽts entr'eux de l'vnité ou du binaire, entre leſquels 2. moyens proport. ne peuuent tomber.*

A, 16. B, 54. C, 64. D, 216.

a 11. 8. b 8. 8. c 21. 8. d 18. 8. e Schol. 8 8. f 8. 8. g Schol. 8 8.

Ainſi, deux quelconques nombres premiers ne ſont plans ſemblables ou ſolides, ne pouuants auoir les coſtez proportionaux: Car quelconque nombre plan, qui eſt nombre premier, a ſeulement pour coſtez ſoy & l'vnité, bien qu'improprement. Comme ces nombres plans 19. & 23. ont pour coſtez 1. & 19. 1, & 23. eſtants produicts de la multiplication d'iceux coſtez, leſquels ne ſont proper-

tionaux comme il appert. Mais quelconque nombre solide, eſtant auſsi nombre premier, a ſeulement 2. vnitez pour coſtez & ſoy-meſme. Comme ces ſolides 29. & 47. ont pour coſtez, 1. 1. 29. & 1. 1. 47. eſtants produicts de la multiplication d'iceux, or il eſt manifeſte qu'iceux ne peuuent eſtre auſsi proportionaux.

Derechef 2. quelconques nombres premiers entr'eux qui ne ſont quarrez ou cubes (combien qu'aucun d'iceux ne ſoit premier) ne peuuent eſtre plans ſemblables ou ſolides: Car ſi 2. tels nombres premiers entr'eux eſtoient dits
h 18. & 19. 8. *plans ou ſolides ſemblables,* [h] *il tomberoit entr'eux vn ou deux moyens proportionaux: parquoy les 2. extrémes eſtants poſez premiers entr'eux, tous les trois ou quatre ſeroient premiers entr'eux, aucune commune meſure ne les pouuant meſurer, à cauſe des 2. extrémes premiers en-*
i 23. 7. *tr'eux.* [i] *Partant ils ſeront les plus petits continuellement*
k c. 28. *proportionaux:* [k] *Donc les 2. extrémes ſeront quarrez ou cubes. Ce qui eſt abſurde, n'eſtants quarrez, ny cubes par l'hypotheſe.*

Ils enſuit de ces choſes que ſi 2. nombres ſont plans ou ſolides ſemblables, deſquels le moindre ſoit premier, le
l 31. 7. *moindre meſurera le plus grand, autrement ils ſeroient premiers, & partant ne ſeroient plans ou ſolides ſemblables comme il eſt demonſtré, ce qui eſt contre l'hypotheſe.*

D'où il appert que 2. nombres premiers entr'eux dont le moindre eſt premier ne ſont plans ou ſolides ſemblables; car autrement le moindre meſureroit le plus grand, comme il a eſté dit; parquoy meſurant auſsi ſoy-meſme ils ne ſeroient premiers entr'eux, mais compoſez, ce qui eſt contre l'hypotheſe.

Dont il ſera facile de trouuer 2. nombres plans ou ſolides non ſemblables. Car prenant deux nombres en raiſon double, ou ſuperparticuliere ou ſuperbipartiente, ou deux nombres premiers, ou 2. premiers entr'eux, deſquels

l'vn ny l'autre ne soit quarré ou cube, par ce qui a esté dit, iceux seront plans ou solides non semblables.

Derechef quelcõques 2. nombres dont l'vn est quarré l'autre non, sont plans dissemblables comme 16. & 20. Car s'ils estoient plans semblables, m ils seroient entr'eux, comme nombre quarré à nombre quarré. n Donc 16. estant quarré 20. seroit aussi quarré. Ce qui est absurde, estant posé non quarré. m 26. 8. n 24. 8.

Semblablement quelconques 2. nombres, dont l'vn est cube & l'autre non cube, sont solides non semblables, comme 27. & 40. Car s'ils estoient solides semblables o ils seroient entr'eux comme nombre cube à nombre cube. p Donc 27. estant cube 40. seroit aussi cube, ce qui est absurde, car il est posé non cube. o 27. 8. p 25. 8.

Fin du huictiesme liure des Elements.

LIVRE NEVFIESME DES ELEMENTS D'EVCLIDE.

THEOREME 1. PROP. 1.

Si deux nombres plans semblables se multiplians l'vn l'autre en produisent quelqu'vn; Le produict sera quarré.

SOIENT deux nombres plans semblables A, B, & que A, multipliant B, ou B, multipliant A, face C. Ie dis que C, est nombre quarré.

Car soit D, produict de A, par soy mesme D, sera nombre quarré. Donc d'autant que A, multipliãt A, & B, a produict D, & C, [a] comme A, 6. B, 54. A, sera à B; D, sera à C. D, 36. E, 108. C, 324. Mais entre A, & B, [b] plans semblables, tombe vn moyen proportionel, [c] il en tombera donc aussi vn entre D, & C, lequel soit E, à fin que D, C, E, soient continuellement proportionaux: mais D, premier est quarré par la construction; [d] Donc C, 3. sera aussi quarré. Partant si 2. nõbres plans, &c. Ce qu'il falloit demõstrer.

a 17. 7.
b 18. 8.
c 8. 9.
d 22. 8.

THEOREME 2. PROP. 2.

Si deux nombres ſe multiplians l'vn l'autre, font vn quarré; iceux ſont plans ſemblables.

Que les deux nombres A, & B, ſe multiplians l'vn l'autre facent C, nombre quarré. Ie dis que A, B, ſont plans ſemblables.

Car ſoit D produit de A, par ſoy meſme, D, ſera quarré. D'autant que A, multipliant A, & B, a produict D, & C, [a] comme A, eſt à B, ainſi D, eſt à C. [b] Mais entre D, & C, nombres quarrez, il tombe vn moyen proportionel. [c] Donc entre A, & B, tombera auſſi vn moyen proportionel; [d] partant A, & B, ſont plans ſemblables: Donc ſi deux nõbres ſe multiplians, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.

A, 6. B, 54. D, 36, C, 324.

[a] 17. 7. [b] 11. 8. [c] 8. 8. [d] 20. 8.

THEOREME 3. PROP. 3. iij

Si vn nombre cube ſe multipliant ſoy meſme en produict quelqu'vn; Le produict ſera cube.

Que le nombre cube A, ſe multipliãt ſoy-meſme face B. Ie dis que B, eſt nombre cube.

Car ſoit prins C, coſté de A, cube, & ſoit D, le produict de C, par ſoy-meſme, & par ainſi le cube A, ſera produict de C, par D. D'autant donc que C, multipliant ſoy-meſme a faict D: [a] iceluy C, meſurera D, par C; [b] mais l'vnité meſure auſſi

[a] 7. c. 7. [b] 5. c. 7.

C, par C. Donc l'vnité ſera meſme partie de C,
c 20.d. denommee de C, que C, de D; & partant, c comme l'vnité à C, ainſi C, à D. Derechef d'autant que C, multipliant D, a faict
d 7.c.f. A; d D, meſurera A, par C.

	A, 8.	
Mais C, meſure D, par C.	E, 16.	D, 4.
Donc C, ſera meſme partie	F, 32.	C, 2.
e 20.d. de D, que D, eſt de A; e par-	B, 64.	*Vnité.*

tant comme C, à D, ainſi D, à A, mais comme C. eſt à D, ainſi l'vnité eſtoit à C. Donc cõme l'vnité eſt à C, ainſi C, à D, & D, à A. Donc entre l'vnité & A, tombent deux moyens
f 7 cõ f. proportionaux C, & D. f Mais d'autant que A, me-
g 5. cõ f. ſure B, par A, (car A, ſe multipliant faict B;) g & l'vnité meſure A, par A; l'vnité ſera meſme partie
h 20.d. de A, que A, de B; h & partãt l'vnité ſera à A, comme A, à B. Donc puis qu'entre l'vnité & A, tom-
i 8. 8. bent deux moyens proportionaux C, & D; i il en tombera autant entre A, & B, qui ſoient E, & F. Donc puis que les quatre nombres A, E, F, B, ſont continuellemẽt proportionaux & A, premier eſt
k 13.8. cube, k E, 4. ſera pareillement cube: Donc ſi vn nombre cube, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.

iiij. THEOREME 4. PROP. 4.

Si vn nombre cube multipliant vn nombre cube, en faict quelqu'vn : le produict ſera cube.

Que le nombre cube A, multipliant le nombre cube B, face C. Ie dis que C, eſt cube.
a 3.9. Car que A, ſe multipliant face D; a D, ſera cube. Et d'autant que A, multipliant A, & B, a faict

D, & C, [b] comme A, sera à B, ainsi D, sera à C. [c] Mais entre les cubes A, & B, tombent deux moyens proportionaux. [d] Donc entre D, & C, tombera aussi 2. moyens proportionaux, [e] partant D, estant cube, C, sera aussi cube. Donc si vn nombre cube, &c. Ce qu'il falloit demonstrer.

		b 17. 7.
		c 12. 8.
A, 8.	B, 27.	
D, 64.	C, 216.	d 8. 8.
		e 23. 8.

THEOREME 5. PROP. 5. V

Si vn nombre cube multipliant quelque autre nombre, produict vn cube : le multiplié sera aussi cube.

Que le nombre cube A, multipliant B, face C, nombre cube. Ie dis que B, est aussi nombre cube. Car soit D, produit de A, multiplié par soy-mesme ; [a] D sera cube. D'autãt donc que A, multipliant A, & B, a faict D, & C, [b] comme A, sera à B, ainsi D, à C ; [c] mais entre les cubes D, & C, tombe 2. moyẽs proportionaux. [d] Donc entre A, & B, tomberõt aussi deux moyẽs proportionaux. [e] Et partant A, estant cube B, sera aussi cube. Donc si vn nombre cube, &c. Ce qu'il falloit demonstrer.

		a 3. 9.
A, 8.	B, 27.	
D, 64.	C, 216.	b 17. 7.
		c 12. 8.
		d 8. 8.
		e 22. 8.

THEOREME 6. PROP. 6. VI

Si vn nombre se multipliant soy-mesme, faict vn cube, iceluy sera aussi cube.

Soit le nombre A, lequel se multipliant soy

meſme face B, nombre cube. Ie dis que A, eſt auſſi cube.

Car ſoit C, produit de B, A, 8. B, 64. C, 512. par A; C, ſera nombre cube, [a] comme il eſt manifeſte. D'autant donc que B, cube multipliant vn autre nombre, ſçauoir A, a produict C, nombre cube, [b] A ſera auſſi cube. Donc ſi vn nombre cube, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer

[a] 19. d.

[b] 5. 9.

vij THEOREME 7. PROP. 7.

Si vn nombre compoſé multipliant quelque nombre, en faict quelque autre; le produict ſera ſolide.

[r] Soit le nombre compoſé A, lequel multipliant quelque nombre B, face C. Ie dis que C, ſera ſolide.

Car puis que A, eſt A, 6. B, 11. C, 66. D, 2. E, 3. compoſé, [a] quelque autre nombre outre l'vnité le meſurera: Dõc que D, meſure A, par E, cela eſtant, [b] D, multipliant E, produira A. Donc puis que B, multipliant le meſme A, a faict C; C, ſera produict de la mutuelle multiplication des trois nombres D, E, B; Et partant C, ſera ſolide, duquel les coſtez ſont D, E, B. Donc ſi vn nombre compoſé, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.

[a] 13. d.

[b] 9. ſ.

[c] 17. d. 7.

viij THEOREME 8. PROP. 8.

Si depuis l'vnité tant de nombres que l'on voudra ſont continuellement proportionaux;

tionaux ; le 3. depuis l'vnité eſt quarré, & tous les autres qui en laiſſent vn: Mais le quatrieſme eſt cube, & tous les autres qui en laiſſent deux, & le ſeptieſme eſt cube & quarré enſemble; & tous les autres qui en laiſſent cinq.

Soient, tant de nombres que l'on voudra, depuis l'vnité continuellement proportionaux, ſçauoir A, B, C, D, E, F, G, H, I K, L, M. Iedis que B, troiſieſme depuis l'vnité eſt quarré: Et tous les autres qui en intermettent, ou laiſſent vn, comme ſont D, F, H, K, M, mais le quatrieſme eſt cube & tous les autres qui en laiſſent deux, comme F, I, M, & le ſeptieſme F, eſt cube & quarré enſẽble, & tous ceux qui en laiſſent cinq ſçauoir M.

Vnité A, 3. B, 9. C, 27. D, 81. E, 243. F, 729. G, 2187. H, 6561. I, 19683. K, 59049. L, 177147. M, 531441.

Car d'autant que l'vnité eſt à A, comme A, à B, l'vnité meſurera A & A, meſurera B, egalément: [a] Mais l'vnité meſure A par A, donc A, meſurera auſſi B, par A; [b] Donc A, multipliant A, produira B: partant B, eſt quarré; Or d'autant [c] que B, C, D, ſont continuellement proportionaux & B, eſt quarré; D, ſera auſſi quarré; ſemblablement puis que D, E, F, ſont continuellement proportionaux, & que D, eſt quarré, [d] F, ſera auſſi quarré: & tous les autres qui en laiſſent vn.

a 5. c. f.
b 9. c. f.
c 22. 8.

De rechef, d'autant que l'vnité eſt à A, comme

B, à C, l'vnité meſurera A, & B, meſurera C,
e 5.e.f. egalement: e Mais l'vnité meſure A, par A, donc
B, meſurera C, auſſi par A; f Et partant B, mul-
f 9.e.f. tipliant A, produira C: Donc puiſque A ſe multi-
g 17.d.7 pliant ſoy-meſme faict B, & multipliant B, fait
C, g C, ſera cube. Mais d'autant que C, D, E, F,
h 23. 8. ſont continuellement proportionaux, & que C,
premier eſt cube, F, 4. h ſera auſſi cube: Par meſ-
me raiſon puis que F, G, H, I, ſont continuelle-
ment proportionaux, & que F, eſt cube, I, ſera
auſſi cube; & tous les autres qui en laiſſent deux.

Finalement d'autant que F, ſeptieſme depuis l'vnité eſt monſtré quarré, & cube: Iceluy ſera cube & quarré enſemble, & en la meſme maniere M, 7. depuis F, laiſſant G, H, I, K, L, ſera cube & quarré enſemble, & auſſi tous les autres qui en laiſſent cinq. Donc ſi depuis l'vnité, il y a tant de nombres &. Ce qu'il falloit demonſtrer.

ix

THEOREME 9. PROP. 9.

Si depuis l'vnité il y a tant de nombres que l'on voudra continuellement proportionaux, & que celuy qui ſuit apres l'vnité ſoit quarré, auſſi tous les autres ſeront quarrez: Et ſi celuy qui eſt apres l'vnité eſt cube, auſſi tous les autres ſeront cubes.

Soient tant de nombres que l'on voudra depuis l'vnité continuellement proportionaux, A, B, C, D, E, F, & premierement que A', prochain de l'vnité ſoit quarré. Ie dis que tous les autres ſont quarrez.

Car puis que A, B, C, D, E, F, ſont continuelle-

ment proportionaux depuis l'vnité, [a] B, 3. depuis l'vnité eſt quarré, & tous les autres qui en laiſſent vn ſçauoir D, & F. Et d'autant que [a] 8.9.

Vnité. A,4.B,16.C,64. D,256.E,1024.F,4096.

A, B, C, ſont continuellement proportionaux, & que A, eſt quarré par l'hypotheſe; [b] C, troiſieſme ſera auſſi quarré: ſemblablement prenant C, D, E, continuellement proportionaux, puis que C, premier eſt quarré, [c] E, 3. ſera auſſi quarré: Partant tous les nombres A, B, C, D, E, F, ſont quarrez, & ainſi des autres &c. [b] 22. 8. [c] 22. 8.

Maintenant que A, proche de l'vnité ſoit cube. Ie dis que les autres ſont cubes.

Vnité A8.B64.C512.D4096.E32768.F262144

Car d'autant que depuis l'vnité, A, B, C, D, E, F, ſont continuellement proportionaux, [d] C, quatrieſme depuis l'vnité eſt cube, & tous les autres qui en laiſſent deux, ſçauoir F. Or que les autres B, D, E, ſoient auſſi cubes, nous le monſtrerons ainſi: D'autant que l'vnité eſt à A, comme A, à B, l'vnité meſurera A, & A, le nombre B, egalement: [e] Mais l'vnité meſure A, par le meſme A. Donc A, meſurera B, auſſi par A; [f] Partant A, multipliant ſoy-meſme produira B, [g] Mais A, eſt cube, donc B, ſera auſſi cube. Et d'autant que A BCD, ſont continuellement proportionaux, & que A eſt cube, [h] auſſi D, ſera cube: d'auantage puis que B, C, D, E, ſont continuellement proportionaux, & que B, eſt cube; [i] E, ſera auſſi cube, donc A, B, C, D, E, F, ſont tous cubes: & ainſi de ſuite s'il y en auoit d'auantage. Donc ſi depuis lvnité &c. Ce qu'il falloit demonſtrer. [d] 8.9. [e] 5. 6. ſ. [f] 9. 6. ſ. [g] 3.9. [h] 23. 8. [i] 23. 8.

THEOREME 10. PROP. 10.

Si depuis l'vnité, il y a tant de nombres que l'on voudra continuellement proportionaux, & que celuy qui eſt apres l'vnité ne ſoit quarré, auſſi pas vn autre ne ſera quarré, outre le troiſieſme depuis l'vnité, & tous les autres qui en laiſſent vn: Et ſi celuy qui eſt apres l'vnité n'eſt cube, auſſi aucun autre ne ſera cube, outre le quatrieſme depuis l'vnité, & tous les autres qui en laiſſent deux.

Soient depuis l'vnité tant de nombres que l'on voudra continuellement proportionaux, A, B, C, D, E, F, G, H, I, & premierement que A, proche de l'vnité, ne ſoit quarré. Ie dis que aucun autre ne ſera quarré excepté B, le 3. depuis l'vnité, & tous les autres qui en laiſſent vn, ſçauoir, D, F. H.

Vnité A, 2. B, 4. C, 8. D, 16. 32. F, 64. G, 128. H, 256. I, 512.

Car ſi outre ceux-cy, il y en a d'autre quarré, ſoit E, quarré: [a] D'autant donc que D, eſt quarré, & que comme D, eſt à E, ou E, à F, ainſi A, eſt à B, & en raiſon conuerſe, comme E, à D, ou F, à E, ainſi B à A; B, ſera à A, comme le nombre quarré E, au nombre quarré D, ou comme le quarré F, au quarré E: [b] mais B, troiſieſme depuis l'vnité eſt quarré. [c] Donc A, premier apres l'vnité ſera quarré. Ce qui eſt abſurde, car il n'eſt quarré par l'hypotheſe, donc E, ne ſera quarré. Par les meſmes raiſons nous monſtrerons qu'aucun autre n'eſt quarré outre les ſuſdicts.

a 8. 9.
b 8. 9.
c 24. 8.

Soit maintenant A, proche de l'vnité, non cube. Ie dis que aucun autre n'eſt cube, outre C, quatrieſme depuis l'vnité, & tous ceux qui en laiſſent deux, ſçauoir F, I. Car ſi quelque autre eſt cube, que ce ſoit D; [d] Dõc puis que F, eſt cube, & que en raiſon egale cõme D, eſt à F, ainſi A, à C, puis que D E F; Et A B C, ſont en meſme raiſon, & en raiſon conuerſe, comme F, à D, ainſi C, à A; C, ſera à A, cõme le nõbre cube, F, au nõbre cube D: [e] Mais C, quatrieſme depuis l'vnité eſt cube; [f] Donc A, premier apres l'vnité ſera auſſi cube Ce qui eſt contre l'hypotheſe, donc D, n'eſt pas cube, par les meſmes raiſons on monſtrera qu'aucun autre outre les ſuſdicts ne peut eſtre cube. Partant ſi depuis l'vnité &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.

d 8. 9.

e 8. 9.

f. 25. 9.

THEOREME II. PROP. II. xi

Si depuis l'vnité il y a tant de nombres que l'on voudra continuellement proportionaux; le plus petit meſure le plus grand par quelcun de ceux qui ſont entre les nombres proportionaux.

Soient depuis l'vnité tant de nombres que l'on voudra continuellement proportionaux, A, B, C, D, E, F, G. Ie dis que chacun moindre meſure, chaque plus grand, comme C, meſure G, par quelqu'vn des nombres, A, B, C, D, E, F.

Vnité A 3. B 9. C 27. D 81. E 243. F 729, G 2187.

Car d'autant qu'en raiſon egale, comme C, eſt à G, ainſi l'vnité eſt à D: (Car C, D, E, F, G,

sont en meſme raiſon continuë, que l'vnité
a 20. d. & A,B,C,D) a l'vnité meſurera D; & C, le nombre G, egalement: b Mais l'vnité meſure D, par
b 5. e. f. le meſme D. Donc C, meſurera auſſi G, par D: Par meſme raiſon E, meſurera F, par A. puis que comme E, eſt à F, ainſi l'vnité eſt à A, &c. Ainſi A, meſurera G, par F, puis qu'en raiſon egale, comme A, eſt à G, ainſi l'vnité à F, &c. & ainſi de ſuitte: partant ſi depuis l'vnité &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.

SCHOLIE.

De ce qui eſt demonſtré cy-deſſus, Il appert que le plus grand nombre eſt autant esloigné du plus petit qui le meſure, que le nombre par lequel le plus petit meſure le plus grand l'eſt de l'vnité; attendu qu'il y doit auoir meſme raiſon du plus petit au plus grand que de l'vnité à celuy, par lequel le plus petit meſure le plus grand, comme il eſt manifeſte par la demonſtration.

Vnité 1. A, 3. B, 9. C, 27. D, 81. E, 243. F, 729. G, 2187.

Partant B, meſurera F, par D; & C, meſurera F, par C, à ſçauoir par ſoy meſme, &c. D'autant qu'entre B, & F, y a trois nombres; & entre l'vnité, & D, trois auſſi: Et tant entre C, & F, qu'entre l'vnité, & C, y a deux nombres interpoſez.

Derechef, il appert de cecy que chacun de ces nombres multiplié par ſoy-meſme, produira vn nombre, lequel entre les nombres proportionaux ſera autant esloigné d'iceluy multiplié, que le meſme l'eſt de l'vnité: Mais ſi vn moindre en multiplie vn plus grand, le produict ſera autant esloigné du plus grand que le moindre l'eſt de l'vnité. D'autant que ſi vn nõbre qui meſure vn nombre

multiplie celuy par lequel il le meſure, [c] *celuy-là lequel il meſure eſt produit. Donc C, multipliant ſoy-meſme produira F, puis que F, eſt autant eſloigné de C, que C, l'eſt de l'vnité. Et partant C, meſurera F, par C, comme nous auons dit: ſemblablement B, multipliant D, fera le meſme F, d'autant que D, meſure F, par B, &c. & ainſi des autres.* c 9.c.ſ.

THEOREME 12. PROP. 12. xj

Si depuis l'vnité il y a tant de nombres continuellement proportionaux que l'on voudra, tous les nombres premiers qui meſurent le dernier, les meſmes meſureront auſſi celuy qui eſt proche de l'vnité.

Soient tant de nombres que l'on voudra continuellement proportionaux depuis l'vnité, A, B, C, D. Ie dis que tous les nombres premiers qui meſurent le dernier D, les meſmes meſureront auſſi A, prochain de l'vnité.

Vnité A, 6 B, 36. C, 216. D, 1296.
E, 3.

Car ſoit E, nombre premier lequel meſure le dernier D. Ie dis que E, meſurera auſſi A: Car s'il ne le meſure, [a] iceluy E, ſera premier à A; D'autant donc que A & E, ſont premiers entr'eux, & A, ſe multipliant ſoy-meſme faict B, [b] comme il appert; [c] B, ſera premier à E. Donc puis que A, & B, ſont premiers à E, [d] & C, eſt produict de A, en B, [e] C, ſera premier à E. De rechef puis que A, & C, ſont pareillement premiers à E; [f] Et que D, eſt produict de A, en C, [g] D, ſera premier à E, Donc E, ne meſure D. Ce qui eſt contre l'hypotheſe. Donc E, meſure A. Par-

a 31. 7.
b ſchol. 11. 9.
c 27 7.
d ſchol. 11. 9.
e 26. 7.
f ſchol. 11. 9.
g 26. 7.

tant si depuis l'vnité il y a tant de nombres continuellement proportionaux &c. Ce qu'il falloit demonstrer.

COROLLAIRE.

Partant aucun nombre premier plus grand que celuy qui est proche de l'vnité, ny aucun moindre, ne mesurant celuy qui est proche de l'vnité ne mesurera le dernier; car s'il le mesuroit, il mesureroit aussi celuy qui est proche de l'vnité, comme il est demonstré. Ce qui est contre l'hypothese.

SCHOLIE.

Henrion a coppié ainsi ceste proposition de la traduction Françoise.

Si depuis l'vnité, il y a tant de nombres que l'on voudra continuellement proportionaux, autant de nombres premiers mesureront le nombre d'apres l'vnité, qu'il y en aura qui mesureront le dernier.

Ce qui n'est conforme à la demonstration ny au texte d'Euclide. Comme s'ensuit : Ἐὰν ἀπὸ μονάδος ὁποσοιοῦν ἀριθμοὶ ἀνάλογον ὦσιν, οἱ ὑπ' αὐτῶν δύο ἑκάτερος πρώτων ἀριθμῶν μετρηθήσεται, ὑπὸ οὗ καὶ ὁ πρὸς τῇ μονάδι μετρηθήσεται. *C'est à dire; si depuis l'vnité tant de nombres que l'on voudra sont proportionaux, par quelconques nombres premiers qu'est mesuré le dernier, par les mesmes sera mesuré celuy qui est proche de l'vnité*, ou bien, *tous les nombres premiers qui mesurent le dernier, les mesmes mesureront celuy qui est proche de l'vnité*, & non autant &c. *cõme dit Henriõ: car il s'ensuiuroit selon son dire, que si quelques nombres premiers mesurent le der-*

nier, qu'autant d'autres nombres premiers, (car autant peuuent n'eſtre pas les meſmes) quels qu'ils ſoient meſureront celuy qui eſt proche de l'vnité, ce qui eſt faux; Mais les meſmes ſeulement qui meſurent le dernier, meſureront celuy qui eſt proche de l'vnité, comme dit Euclide, & comme il eſt demonſtré.

THEOREME 13. PROP. 13. xiij

Si depuis l'vnité il y a tant de nombres que l'on voudra continuellement proportionaux; & que celuy d'apres l'vnité ſoit premier: aucun autre ne meſurera le plus grand, outre ceux qui ſont entre les proportionaux.

Soient tant de nombres que l'on voudra continuellement proportionaux depuis l'vnité, A B C D, dont A, proche de l'vnité ſoit premier. Ie dis qu'aucun autre nombre ne meſurera D plus grand, outre A,B,C.

Vnité A, 5. B, 25. C, 125. D, 625.
H--- G--- F--- E---

Car que quelque autre cõme E, meſure D, s'il eſt poſſible, E, ſera premier ou compoſé; ſi premier, & meſurant D extreme a il meſurera auſſi A, premier proche de l'vnité. Ce qui eſt abſurde, donc E, n'eſt premier: mais compoſé, b & partant meſuré par quelque nombre premier, qui ne peut eſtre autre que A, car E, meſurant D, tout nombre premier meſurant E; meſurera auſ-

a 12. 9.

b 33. 7.

d 12 9. si D: mais mesurant D, plus grand, d il mesurera aussi A, premier proche de l'vnité, ce qui est absurde. Donc autre nombre premier que A, e *schol.* 11.9. ne mesure E: donc que A, mesure E, par F. e Donc e 17. 7. A, multipliant F, faict E, D; e Et partant E, sera à D, comme F, à C. Parquoy E, mesurant D; F, mesurera C, & semblablement on monstrera que F, n'est premier: mais composé, lequel sera f *schol.* 11. 9. demonstré, comme auparauant estre seulement mesuré par A, premier. Que A, mesure donc F, par G. f Donc A, multipliant G, B, produict F C, f 17. 7. f parquoy F, sera à C, comme G, à B, mais F, mesure C, donc G, mesure aussi B. Derechef si G, est premier mesurant B: g Il mesurera aussi A, g 12.9. premier ce qui est absurde. Donc G, est composé, lequel sera seulement mesuré par A, comme h *schol.* 11. 9. il a esté demonstré de E. Que A, mesure donc G, par H, parquoy A, h multipliant A H, fera B, G: h 17. 7. h Donc comme G, à B, ainsi H, à A, mais G, mesure B, donc H, mesurera aussi A, premier: parquoy H, est egal au mesme A. Mais A, est moyen i 20. 7. proportionel entre H, & G, i puis que B, produict des extremes, G H, est egal au mesme B, quarré de A, moyen. Ce qui est impossible: partant aucun nombre ne mesurera D, plus grand, outre k 11. 9. ABC, desquels k le moindre mesure tousiours le plus grand. Donc si depuis l'vnité &c. Ce qu'il falloit demonstrer.

xiv

THEOREME 14. PROP. 14.

Le plus petit nombre mesuré par certains nombres premiers, ne sera mesuré par aucun autre nombre premier, que par ceux qui le mesuroient au cõmencement.

Soit A, le plus petit nombre que peuuent mesurer les nombres premiers B, C, D. Ie dis qu'aucun autre nombre premier, outre B, C, D, ne mesure A, Car s'il est possible que E, nombre premier, different de B, C, D, mesure A, par F. D'autant que E, mesure A, par F, [a] E, 1 multipliant F, fera A. [b] Parquoy chacun des nombres B, C, D, mesurerõt l'vn des deux E, F. Ils ne mesurerõt pas E, premier autre qu'iceux, donc F, qui est plus petit que A, ce qui est absurde; Car A, est posé le plus petit qui puisse estre mesuré par les nombres B, C, D, premiers. Donc le plus petit nombre. Ce qu'il falloit demonstrer.

A, 30. B, 2. C, 3. D, 5.
E---F---

[a] 9. e.f.
[b] 32. 7.

SCHOLIE.

Demonstration en nombres, des 10. premiers theoremes qu'Euclide a demonstrez en lignes au second liure, par Barlaam Moyne.

THEOREME. 1.

Si deux nombres sont proposez, l'vn desquels soit diuisé en tant de nombres que l'on voudra, le nombre plan faict des deux nombres proposez au commencement est egal aux nombres plans, faicts du nombre non diuisé & de chacune des parties du nombre diuisé

Soient 2. nombres AB, & C, desquels AD, soit diuisé en AD, DE, EB, & soit F, produict de C, en AB; & GH, de C, en AD,

A...3.D..2.E,B C..2.
F.....12.
G.....6H....4I..2K

& HI, de C, en D E, & I K, de C, en E B; Ie dis que F, eſt egal à G H, H I, I K, c'eſt à dire à tout G K, compoſé des trois.

Car puis que C, multipliant A B, a faict F, [a] A B, meſurera F, par C; c'eſt à dire A B, ſera partie de F, denommee de C; Semblablement A D, ſera partie de G H, & D E, de H I, & E B, de I K, denommee de C, ſçauoir meſme partie que A B, de F. Mais par ce qui eſt demonſtré à la 5. du 7. l. Le tout A B, eſtãt meſme partie du tout G K, que A D, de G H, [b]; le tout A B, ſera auſſi meſme partie du tout G K, que A B, de F; Partant [b] F & G K, ſont egaux. Ce qu'il falloit demonſtrer.

[a] 7. c. ſ.

[b] 4. c ſ.

THEOREME 2.

Si vn nõbre eſt diuiſé en deux part. les deux nõbres plans qui ſont faicts du tout, & d'vne chacune partie, ſont egaux enſemble, au quarré faict du tout.

Soit A B, diuiſé en A C, C B. Ie dis que les nombres produicts du tout A B, par A C, C B, parties d'iceluy ſont egaux enſemble au nombre quarré du tout A B: Car ſoit pris D, egal à A B, [a] le nombre faict de D, c'eſt à dire de A B, en A B, ſçauoir le quarré de A B, ſera egal aux nombres faicts de D, c'eſt à dire de A B, en A C, & en C B; Ce qui eſt propoſé.

D.....6
A....4C..2B

[a] 1. the. ſc. 14. 9.

Que ſi A B, eſt diuiſé en plus de 2. parties A C, C D, D B. Il ſera demonſtré en la meſme maniere. Car ſemblablement le nombre faict de E, c'eſt à dire de A B; en A B, ſçauoir le quarré de A B, eſt egal aux nombres faicts de E, c'eſt à dire de A B, en chacune partie A C, C D, D B.

E.....6
A...3C..2D. B

THEOREME 3.

Si vn nombre eſt diuiſé en deux parties : le nombre plan faict du tout, & d'vne des parties, eſt egal au plan qui eſt faict des parties & au quarré faict de la partie premierement priſe.

Soit AB, diuiſé en AC, CB. Ie dis que le nombre produit du tout AB, en la partie AC, eſt egal au contenu ſous les parties AC, CB, & au quarré de ladicte partie AC : Car ayant pris le nombre D, egal à la partie AC : [b] *le nombre faict de D, c'eſt à dire de AC, en AB, (ou ce qui eſt le meſme) de AB, en AC, eſt egal aux nombres faicts de D : c'eſt à dire de AC, en CB, & de D, c'eſt à dire de AC, en AC, c'eſt à dire au quarré de AC. Ce qui eſt propoſé.*

D....4
A....4C.....6B

[b] 1.the. 5.14. 9.

THEOREME 4.

Si vn nombre eſt diuiſé en deux nombres : le quarré faict du tout eſt egal aux quarrez faicts des parties, & à deux fois le nombre plan, contenu ſous icelles parties.

Soit AB, diuiſé en AC, CB. Ie dis que le nombre quarré faict de AB, eſt egal aux quarrez des parties AC, CB, & à 2. fois le nombre faict de la partie AC, en la partie CB. [c] *Car le nombre quarré de AB, eſt egal aux nombres faicts de AB, en AC, & en CB. Mais le nombre faict de AB, en AC,* [d] *eſt egal au nombre produit de AC, en CB, auec le quarré de AC. Semblablement le nombre faict de AB, en CB, eſt de meſme egal au nombre produit de AC, en CB, auec le quarré de CB. Donc le nombre quarré faict de AB, eſt egal aux nombres quarrez des parties AC, CB, auec 2. fois le nombre faict de AC, en CB. Ce qui eſtoit propoſé.*

6 4
A..... C.... B

[c] 2.the. 5.14. 9.

[d] 3.the. 5.14. 9.

THEOREME 5.

Si vn nombre pair eſt diuiſé en deux parties egales, & en 2. inegales, le nombre plan contenu ſous les parties inegales, auec le nombre quarré, du nombre moyen entre les deux ſections, eſt egal au quarré qui eſt produict de la moitié du nombre.

Soit AB, nombre pair diuiſé en deux parties egales AC, CD; & en 2. inegales AD, DB. Ie dis que le nombre contenu ſous les parties inegales du tout AD, DB, auec le quarré du nõbre moyen CD, (qui eſt l'excez entre la moitié AC, ou CB, & l'vne ou l'autre des parties inegales AD, DB) eſt egal au quarré, faict de la moitié CB.

Car le nombre quarré de CB, [a] *eſtant egal au quarré des parties CD, DB, & a 2. fois le nombre plan contenu* [b] *ſous CD, DB, mais le nombre de CB, en DB,* [b] *eſtant faict egal au nombre contenu ſous CD, DB, vne fois & au quarré de DB: ſi on prend ce nombre de CB, en DB, pour le quarré de DB, & le nombre faict de CD, en DB, le nombre quarré de CB, eſtant auſſi egal au quarré reſtant de CD, & à l'autre nombre faict de CD, DB, vne fois & au nombre CB, c'eſt à dire au nombre produit de AC, en DB.* [c] *Mais le nombre faict du tout AD, en DB, eſt egal, aux nombres faicts de CD, en DB, & de AC, en DB. Donc le quarré de CB, ſera egal au quarré de CD, & au nombre faict de AD, en DB: c'eſt à dire le nombre faict de AD, en DB, auec le quarré de CD, ſera egal au quarré de CB. Ce qui eſt propoſé.*

a 4. the.

b 3. the.

8
A.....5 C...3 D..2 B

c 1. the. preced.

THEOREME 6.

Si vn nombre pair eſt diuiſé en deux parties egales & qu'on luy adiouſte quelque autre nombre: le nombre faict du tout auec l'adiouſté, en l'adiouſté, auec le quarré de la moitié du nom-

bre est egal au quarré du nombre composé de la moitié & de l'adiousté.

Car que AB, *soit diuisé egalement en* AC, CB, *& soit adiousté à iceluy* BD. *Ie dis que le produict du tout* AB, *& de l'adiousté* BD, *comme d'vn, c'est à dire de* AD, *en* DB, *adiousté, auec le quarré de la moitié* CB, *est egal au quarré faict de* CB, *moitié & de l'adiousté* BD, *comme d'vn, c'est à dire au quarré de* CD.

Car a le quarré de CD, *estant egal aux 2. quarrez des parties* CB, BD, *& au nõbre cõtenu sous* CB, BD, *2. fois, à sçauoir aux quarrez des parties* CB, BD, *& au nombre contenu sous* CB, BD, *& à* AC, BD; *Mais le nombre faict de* AD, *b en* BD, *estant egal aux nombres contenus sous* CB, BD, *& sous* AC, BD, *& sous* BC, BD, *c'est à dire au quarré de* BD: *si on prend ce nombre faict de* AD, *en* BD, *pour le quarré de la partie* BD, *auec les nombres faicts de* CB, *en* BD, *& de* AC, *en* BD, *le quarré de* CD, *sera aussi egal à l'autre quarré de* CB, *& au nombre faict de* AD, *en* BD, *c'est à dire le nombre faict de* AD, *en* BD, *auec auec le quarré de* CB, *est egal au quarré de* CD. *Ce qui est proposé.*

a 4. the. schol. 9. 14.
b 1. the. schol. 9. 14.

THEOREME 7.

Si vn nombre est diuisé en deux parties, le quarré du tout, auec le quarré de l'vne des parties est egal à deux fois le nombre faict du tout en ladicte partie, & au quarré de l'autre partie.

Soit AB, *diuisé en 2.* AC, CB. *Ie dis que le quarré du tout* AB, *auec le quarré de* CB, *est egal à 2. fois le nombre, faict du tout* AB, *en ladicte partie* CB, *& au quarré de l'autre partie* AC.

Car le quarré du tout AB, *estant egal aux quarrez des parties* AC, CB, *& a 2. fois le nombre faict de*

A.....5.C...3B 8

a 4. the. preced.

AC, en CB, si le quarré de CB commun est adiousté, les quarrez de AB, CB, ensemble seront egaux aux
b 3. the. prec. *3. quarrez de AC, CB, & CB, & à 2. fois le nõbre fait de AC, en CB: Mais le nombre faict de AB, en CB; est egal au*[b] *nombre faict de AC, en CB, & au quarré de CB: & partant à 2. fois le nombre fait de AB, en CB, est egal à 2. fois le nombre faict de AC, en CB, & à 2. fois le quarré de CB. Donc si au lieu du nombre qui est faict 2. fois de AC, en CB: auec 2. fois le quarré de CB, on prend le nombre faict de AB, en CB. 2. fois; les quarrez des nombres AB, CB, ensemble sont egaux à 2. fois le nombre faict de AB, en CB, & au quarré de l'autre partie AC. Ce qui est proposé.*

THEOREME 8.

Si vn nombre est diuisé en 2. parties: quatre fois le nombre plan faict du tout en vne partie, auec le quarré de l'autre partie, est egal au quarré du nombre composé du tout & de la partie premierement prise.

Soit AB, diuisé, en AC, CB. Ie dis que le nombre plan, faict quatre fois du tout AB, en la partie CB, auec le quarré de l'autre partie AC, est egal au quarré du nombre composé du tout AB, & de la partie premierement dicte C, B.

Car soit posé BD: egal à la-
a 4. the. prec. *dicte partie CB: le quarré du tout AD, composé de AB, & BD, ou de ladicte partie CB,*[a] *estant egal aux quarrez des nombres AB, BD, & à 2. fois le nombre faict, de AB, en BD, c'est à dire aux quarrez de AB, CB, &*
b 7. the. prec. *à 2 fois le nombre de AB, en CB, & les quarrez de AB, CB, ensemble*[b] *estant egaux à 2. fois le nombre contenu sous AB, CB, & au quarré de AC: Si au lieu des quarrez de AB, CB, on prend 2. fois le nombre faict de A*

A....4C...3B...3D
7

B, en

B, *en* CB, *auec le quarré de* AC: *le quarré faict de* AD *ſera egal au nombre faict de* AB, *en* CB, 4. *fois & au quarré de l'autre partie* AC. *Ce qui eſt propoſé.*

THEOREME 9.

Si vn nombre pair eſt diuiſé en deux parties egales, & en deux inegales: les quarrez des parties inegales enſemble, ſont doubles des quarrez enſemble, faicts de la moitié du nombre & de la ſection du milieu.

Soit diuiſé AB, *en parties egales* AC, CB, *& en non egales* AD, DB. *Ie dis que les quarrez des parties inegales* AD, DB, *ſont doubles des quarrez de* AC, *moitié &* CD, *nombre moyen (qui eſt l'excez entre la moitié* AC, *ou* CB, *& l'vne ou l'autre des parties inegales* AD, DB.) *Car puis que le quarré du nombre* AD, *a eſt egal aux quarrez de* AC, CD, *& a deux fois le nombre de* AC, *en* CD: *ſi on adiouſte le commun quarré de la partie* DB, *les quarrez des parties* AD, DB, *ſeront egaux aux quarrez des parties* AC, CD, DB, *& a deux fois le nombre faict de* AC, *c'eſt à dire de* CB, *en* CD: *Mais les quarrez faicts de* CB, *c'eſt à dire de* AC, *&* CD, *b ſont egaux au quarré de* DB, *& a 2. fois le nombre faict de* CB, *en* CD. *Donc ſi au lieu du quarré de* DB, *auec le produict de* CB, *en* CD, 2. *fois, on prend les quarrez de* AC, CD: *les quarrez des parties* AD, DB, *ſeront egaux à 2. fois les quarrez des parties* AC, CD: *& partant les quarrez des parties* AD, DB, *ſeront doubles des quarrez faicts des parties AC, CD. Ce qui eſt propoſé.*

A.....5C...3D..B

a 4. 2. pro.

b 7. 2. proc.

THEOREME 10.

Si vn nombre pair eſt diuiſé en deux parties egales, & qu'on luy en adiouſte quelque autre: le quarré du nombre, compoſé du tout & de

l'adiousté,& le quarré de l'adiousté ensemble sõt doubles, du quarré faict de la moitié & de celuy qui est faict du nombre composé de la moitié & de l'adiousté.

Soit AB, nombre pair diuisé en deux parties egales AC, CB, & à iceluy AB, soit adiousté BD. Ie dis que le quarré de AD, composé de tout AB, & de l'adiousté BD, & le quarré du nõbre adiousté BD, les 2. ensemble sont doubles des quarrez de AC, moitié, & de CD, composé de CB, BD, moitié & adiousté.

Car le quarré de AD, a *estant egal aux quarrez des parties AC, CD, & a deux fois le nombre plan de AC, c'est à dire de CB, en CD, si on adiouste le commun quarré de BD: les quarrez de AD, BD, seront egaux aux quarrez des parties AC, CD, BD, & a 2. fois le nombre plan de CB, en CD. Mais les quarrez de CB, CD,* b *sont egaux au quarré de BD, & à 2. fois le nombre plan de CB, en CD: & le quarré de AC, est egal au quarré de CB. Donc si au lieu du quarré de BD, & de deux fois le nombre plan de CB, en CD, on prend les quarrez des nombres de CB, CD,: c'est à dire de AC, CD, les quarrez de AD, BD, seront egaux aux quarrez de AC, CD, 2. fois. Parquoy les quarrez de AD, BD. seront doubles des quarrez de AC, CD. Ce qui estoit proposé.*

a 4. the. preca.

b 7. the. preca.

A....4C....4B..2D

SCHOLIE.

Or le theoreme qui respond à la 11. *du* 2. *à sçauoir:* Diuiser vn nombre en telle sorte que le nombre plan faict du tout & de l'vne des parties, soit egal au nombre quarré de l'autre partie, *ne se peut faire par les nombres ce qui sera ainsi demonstré. Car s'il est possible soit diuisé AB, en AC, CB, en sorte que le nom-*

bre plan faict du tout AB, *en la partie* CB, *soit egal au quarré de l'autre partie* AC. *Donc 4. fois le nombre faict de* AB, *en* CB, *sera quadruple du quarré de* AC, *partant 4. fois le nombre plan de* AB, *en* CB, *auec le quarré de* AC, *sera quintuple du quarré de la partie* AC. *Mais 4. fois le nombre plan de* AB, *en* CB, *auec le quarré de* AC, *est quarré,* [a] *estant egal au quarré faict du nombre composé de* AB, *& de* CB: *Donc les 2. nombres quarrez (sçauoir celuy qui est faict de* AB, *en* CB, *4. fois auec le quarré de* AC; *Et le quarré de* AC,) *ont mesme raison que 5. à 1. ou 25 à 5.* [b] *Ce qui est absurde. Donc le nombre* AB, *ne peut estre diuisé en 24. 8. sorte que le nombre plan faict du tout en vne des parties soit egal, au quarré de l'autre partie. Ce qui estoit proposé.*

A---C---B

a *the. 8. prec.*

b *coroll.*

THEOREME 15. PROP. 15. XV.

Si trois nombres sont continuellement proportionaux; & les plus petits de tous ceux qui ont la mesme raison, auec iceux. Le composé de deux tels qu'on voudra d'iceux sera premier au restant.

Soient trois nombres ABC, les plus petits de tous ceux qui ont la mesme raison auec iceux. Ie dis que le composé de deux quels qu'on voudra d'iceux comme de A & B, est premier à C, restant, & le composé de BC, premier à A, & de AC, premier à B.

Car ayãt [a] pris DE, les plus petits en la mesme raison, il appert par la demonstration de la 2. p. 8. 33. 7.

a *schol.*

que A, eſt quarré de D, & C, quarré de E, & B, produit de D, en E. [b] Et le compoſé de DE, multiplié par D, produira vn nombre egal au compoſé de AB: [c] Mais DE, [c] eſtans premiers entr'eux, [d] le compoſé d'iceux ſera premier à E, : [c] & partant auſſi premier à C, quarré de E: & par la meſme raiſon D, ſera premier à C, [f] & le nombre produit du compoſé de DE, multiplié par D, ſera auſſi premier à C, lequel produict eſt monſtré egal au compoſé de AB, donc le compoſé de AB, eſt premier à C.

De rechef le compoſé de DE, [g] eſtant premier tant à D, qu'à E, le produict d'iceluy compoſé, multiplié par E, ſera auſſi premier à D; [h] mais le meſme produict eſt egal à C, quarré de E, & à B, enſemble produict de D, en E: donc le compoſé de BC, ſera auſſi premier à D. [i] Et partant premier à A, quarré de D.

Finalement [k] puis que DE, ſont premiers entr'eux, [l] & premiers à leur compoſé; B, produit d'iceux, [m] ſera auſſi premier à leur compoſé. [n] Et le produit du compoſé de DE, multiplié par ſoy-meſme ſera premier à B: [o] Mais le meſme produit eſt egal à A, & C, & à 2. fois B, enſemble, donc le compoſé de A, & C, & de 2. fois B, eſt premier à B: oſtant donc 2. fois B, le reſte compoſé de AC, ſera premier à B. Car s'il n'eſtoit ainſi, ils ſeroient compoſez entr'eux, & leur commune meſure meſurant le compoſé de AC, [p] & B, meſureroit auſſi le compoſé de AC, & de 2. fois B. Parquoy le compoſé de AC, & de 2. fois B, ne ſeroit premier à B, ce qui eſt abſurde, eſtant demonſtrez premiers entr'eux. Partant le

b the. 3. ſchol. 14. 9.
c 24. 7.
d 30. 7.
e 27. 7.
f 26. 7.
g 26. 7.
h the 3. ſc. 14. 9.
i 27. 7.
k 24. 7.
l 30. 7.
m 26. 7.
n 27. 7
o the. 4 ſc. 14. 9. pro. c. ſ.
p 10. c. ſ.

A, 9. B 12. C 16. D 3. E 4.

composé de AC, eſt premier à B. Donc ſi trois nombres ſont &c, Ce qu'il falloit demonſtrer.

THEOREME 16. PROP. 16. xvij

Si deux nombres ſont premiers entr'eux: comme le premier eſt au ſecond, ainſi le ſecond ne ſera pas à quelque autre.

Soient A & B, premiers entr'eux. Ie dis que comme A, eſt à B, ainſi B, n'eſt à vn autre: c'eſt à dire qu'à 2. nombres premiers, il n'y a point de 3. proportionel.

Car s'il eſt poſſible comme A, 5. B, 7. C--- A, eſt à B, qu'ainſi B, ſoit à vn autre, ſçauoir à D.

D'autant que A & B, ſont premiers entr'eux, [a] 23. 7.
[a] & les plus petits qui ſoient en la meſme raiſon:
[b] Ils meſureront egalement B & C, en la meſme raiſon, ſçauoir A, meſurera B, & B, meſurera C: mais A, ſe meſure auſſi ſoy-meſme. Donc A, meſurera A & B, premiers entr'eux, ce qui eſt abſurde: Donc comme A, eſt à B, ainſi B n'eſt à C: [b] 21. 7.

Semblablement comme B, eſt à A, ainſi A, ne ſera à quelque autre. Donc ſi deux nombres, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.

THEOREME 17. PROP. 17. xviij

S'il y a tant de nombres que l'on voudra continuellement proportionaux: & que les extremes ſoient premiers entr'eux, comme le premier ſera au ſe-

cond ainſi le dernier ne ſera à quelque autre.

Soient continuellement proportionaux tant de nombres que l'on voudra ABCD, deſquels les extremes A D, ſont premiers entr'eux. Ie dis que comme A, eſt à B, ainſi D, ne ſera à quelque autre.

Car s'il n'eſt ainſi; comme A, eſt à B, qu'ainſi D, ſoit à quelque autre, à ſçauoir à E; A, 8. B, 12. C, 18. D, 27. E. D'autant donc que comme A, eſt à B, ainſi D, à E, en permutant cõ A, à D, ainſi B, à E: Mais A, D, eſtans premiers entr'eux, [a] ſont les plus petits de leur raiſon; [b] Donc ils meſureront B, & E, egalement, ſçauoir A, meſurera B, & D, meſurera E. Mais comme A, eſt à B, ainſi B, eſt à C, donc puis que A, meſure B, auſſi B, meſurera C: [c] & partant A, meſurera auſſi C: & d'autant que comme B, eſt à C, ainſi C, à D; mais B, meſure C, auſſi C, meſurera D: Parquoy A, meſurant C, [d] meſurera pareillement D, & A, meſure auſſi ſoy-meſme: Donc A, meſure A, & D, premiers entr'eux, ce qui eſt impoſſible, donc comme A, eſt à B, ainſi D, n'eſt à quelque autre, ſçauoir à E. Semblablement comme D, eſt à C, ainſi A, n'eſt à vn autre: partant s'il y a &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.

a 23. 7.
b 21. 7.
c 11. 8. ſ.
d 11. 8 ſ.

PROBLEME 1. PROP. 18.

xix

Deux nombres eſtans donnez; conſiderer s'il eſt poſſible de trouuer vn troiſieſme proportionel à iceux.

Soient les deux nombres A & B, donnez il faut considerer si l'on peut trouuer vn troisiesme nombre proportionel à iceux : Car ou les nombres A & B, sont premiers entr'eux, ou non ; si premiers [a] il ne se peut trouuer de troisiesme proportionel.

S'ils ne sont premiers que B, multipliant soy-mesme face C, ou A, mesure C, ou non: s'il le mesure, soit par D. Ie dis qu'il se peut trouuer vn troisiesme proportionel qui est D. Car puis que A, mesure C, par D; [b] C, sera le produit de A, par D: mais le mesme C, est produit de B, par soy-mesme. Dõc C, cõtenu sous les extremes A & D, est egal au produit du milieu, B, multiplié par soy-mesme, [c] donc les 3. A, B, D, sont continuellement proportionaux, sçauoir comme A, à B, ainsi B, à D: Donc D, sera le 3. proportionel.

A, 4. B, 7. a 16. 9.
A, 4. B, 6. D, 9. C, 36.
b 9. c. f.
c 20. 7.

Mais si A, ne mesure C. Ie dis que l'on ne pourra trouuer vn troisiesme proportionel.

Car s'il n'est ainsi, soit D, troisiesme proportionel. D'autant que comme A, est à B, ainsi B, à D, le nombre produit de A, & D, extremes sera egal au produict, B, moyen multiplié par soy-mesme: c'est à dire à C. Donc puis que C, est fait de A, par D: [c] A, mesurera C, par D; ce qui est absurde, estant posé ne le mesurer. Donc on ne peut trouuer vn 3. prop, à A & B, puis que A premier ne mesure C, produict de B, 2. par soy-mesme, &c. Donc deux nombres estans donnez, &c. Ce qu'il falloit faire.

A, 6. B, 4. D, 00. C, 16,
d 20. 7.
e 7. c. f.

PROBLEME 2. PROP. 19.

Trois nombres eſtant donnez, conſiderer s'il eſt poſſible d'en trouuer vn quatrieſme proportionel à iceux.

Soient les trois nombres donnez A, B, C, continuellement proportionaux ou non; ſçauoir ſi on peut trouuer vn quatrieſme proportionel, c'eſt à dire

comme A, eſt à A, 8. B, 12. C, 18. E, 27. D, 216.
B, ainſi C, eſt A, 4. B, 6. C, 9. E. 18. D, 72.
à vn autre.

Que B, multipliant C, face D; A, meſurera D, ou non: qu'il le meſure par E. Ie dis que E, eſt le quatrieſme proportionel. Car puis que A, meſure D, par E: [a] D, ſera le produit de A, par E, mais D, eſt auſſi produit de B, par C, par la conſtruction. Donc le produit des extrémes A & E, eſt egal au produit des moyens B, C. [b] Donc comme A, à B, ainſi C, à E:

a 9. 6. ſ.

b 19. 7

Mais ſi A, ne meſure D. Ie dis que lon ne pourra trouuer

vn quatrieſme proportionel; car autremẽt ſoit E,

A, 4. B, 6. C, 9. E.... D, 54.
A, 3. B, 14. C, 10. E,.... D, 40.

4. proportionel s'il eſt poſſible. D'autant donc que les quatre nombres A, B, C, E, ſont continuellement proportionaux, [c] le nombre contenu ſous les extrémes A, & E, ſera egal au nombre contenu ſous les moyens BC, ſçauoir à D. Donc puis que D, eſt faict de A, multiplié par E; [d] Iceluy A, meſurera D, par E, contre l'hypotheſe: ſem-

c 19. 7.

d 7 6. ſ.

blablement nous examinerons ſi comme A, eſt à B, ainſi C, eſt à vn autre: donc trois nombres, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.

THEOREME 18. PROP. 20. xxj

Les nombres premiers ſont en plus grãde multitude, que quelconque multitude de nombres premiers propoſés.

C'eſt à dire que ſi on propoſe tant de nombres premiers que l'on voudra, il s'en trouuera encore d'autres.

Soient tant de nõbres premiers propoſez que l'on voudra A, B, C. Ie dis qu'il y a encore d'autres nombres premiers: Car [a] ayant pris D, le plus petit que peuuent meſurer A, B, C, & qu'on luy adiouſte l'vnité EF, le tout DF, eſt premier ou non; s'il eſt premier l'on a le requis, car A, B, CF, D, F, ſont en plus grand nõbre que la multitude propoſee, A, B, C. [a 36. 7.]

A, 2. B, 3. C, 5.
30 1
D----- E. F

Mais ſi DE, n'eſt premier, [b] il ſera meſuré par quelque nombre premier, ſoit par G. Ie dis que G, n'eſt pas vn des nombres propoſez A, B, C, car s'il eſtoit vn d'iceux, puis que A, B, C, meſurent DE; G, meſureroit auſſi DE. Donc meſurant le tout DF, & le retranché DE, [c] il meſureroit auſſi le reſtant EF, ſçauoir vn nombre, l'vnité, ce qui eſt impoſſible. Donc G, premier n'eſt vn des propoſez A, [b 34. 7.]

A, 3. B, 5. C, 7.
105 1
D----- E. F
35
G----- [c 11. 1.]

B, C, partant A, B, C, G, premiers ſont en plus grand nombre que les propoſez A, B, C, & ainſi à l'infiny l'on pourra trouuer d'autres nombres premiers. Donc les nombres premiers, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.

xxij THEOREME 19. PROP. 21.

Si tant de nombres pairs que l'on voudra ſont adiouſtez; le tout ſera pair.

Soient adiouſtez tant de nombres pairs que l'on voudra AB, BC, CD. Ie dis que tout le cõpoſé AD, eſt pair.

a 6. 7. Car d'autant [a] que tout nombre pair peut eſtre diuiſé en deux parties egales, les moitiez de AB, BC, CD, ſeront la moitié du tout AD: mais toutes les moitiez enſemble ſont egales à toutes les autres moitiez enſemble, partant AD, eſt pair. &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.

6 4 8
A.....B....C.....D

xxiij THEOREME 21. PROP. 22.

Si tant de nombres impairs que l'on voudra, ſont adiouſtez; & que la multitude d'iceux ſoit pair: le tout ſera pair.

Soient adiouſtez tant de nombres impairs que l'on voudra; deſquels la multitude AB, BC, CD, DE, ſoit pair. Ie dis que le tout eſt pair.

Car puis que AB, BC, CD, DE, ſont impairs vn chacun ſera different du nombre pair de l'v-

nité, ſelon la definition. Parquoy ſi d'vn chacun l'on retranche l'vnité, vn chacun des reſtans ſera pair:[a] partant le compoſé d'iceux ſera pair: Mais la multitude des vnitez retranchees eſt auſſi pair.[b] Donc le tout compoſé AE, ſera pareillement pair. Partant ſi tant de nombres impairs, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.

3 5 7 9
A...B.....C.....D.....E
24

a 21. 9.
b 21. 9.

THEOREME 21. PROP. 23.

xxiij

Si tant de nombres impairs que l'on voudra ſont adiouſtez, & que la multitude d'iceux ſoit impair: le tout ſera auſſi impair.

Soient adiouſtez tant de nombres impairs que l'on voudra, deſquels la multitude comme AB, BC, CD, eſt impair. Ie dis que le tout compoſé AD, eſt impair.

Car puiſque le nombre impair differe du nombre pair de l'vnité par la definition; ayant retranché l'vnité ED, du nombre impair CD, le reſte CE, ſera pair.[a] Mais AC, compoſé des impairs AB, BC, pairs en multitude, eſt pair:[b] Donc auſſi AE, compoſé des pairs AC, CE, ſera pair. Partant ſi l'on adiouſte l'vnité ED, le tout AD, ſera impair, puis que l'impair differe du pair de l'vnité, par la definition. Donc ſi tant de nombres impairs, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.

3 5 7
A...B.....C.....E.D
15

a 21.9
b 21.9

xxv

THEOREME 22. PROP. 24.

Si d'vn nombre pair l'on retranche vn nõbre pair, le reſte ſera auſſi pair.

Du nombre pair AB, ſoit retranché le nombre pair CB. Ie dis que le reſtant AC, eſt auſſi pair.

1 5. 4
A. D.....C.....B

Car ſi AC, n'eſt pair, ſoit retranchee l'vnité AD, le reſte DC, demeurera pair (puis que le nombre impair differe du nombre pair de l'vnité) [a] Partant le compoſé DB, ſera pair; Donc adiouſtant l'vnité AD, au compoſé DB, pair, le tout AB, ſera impair; Ce qui eſt impoſſible, car il eſt pair par l'hypotheſe. Donc AC, ne ſera impair.

a 21. 9.

xxvj

THEOREME 23. PROP. 25.

Si d'vn nombre pair l'on retranche vn nõbre impair: le reſte ſera auſſi impair.

De AB, nombre pair ſoit retranché CB, impair. Ie dis que le reſte AC, ſera impair. Car de CB, ayant retranché l'vnité CD, le reſte DB, ſera pair. Donc d'autant que le tout AB, eſt poſé pair; le reſte AD, ſera pair. Ayant donc oſté l'vnité CD, le reſtant AC, ſera impair. Donc ſi d'vn nombre pair l'on oſte vn, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.

7 1 4
A.....C.D....B

a 24. 9.

THEOREME 24. PROP. 26. xxvij

Si d'vn nombre impair, l'on retranche vn nombre impair : le reſte ſera pair.

Du nombre impair AB, ſoit retranché le nombre impair CB. Ie dis que le reſte AC, eſt pair.

Car ayant retranché l'vnité des nombres impairs AB, CB; les reſtans AD, CD, ſeront pairs. D'autant donc que du nombre pair AD, le nombre pair CD, eſt retranché: [a] le reſte AC, ſera pair. Donc ſi d'vn nombre impair, on retranche vn nombre, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.

4 6 1
A....C.....D.B

[a] 24.9.

THEOREME 25. PROP. 27. xxviij

Si d'vn nombre impair l'on retranche vn nombre pair, le reſte ſera impair.

Soit AB, nombre impair, duquel ſoit retranhcé le pair CB. Ie dis que le reſtant AC, eſt impair: Car de l'impair AB, ſoit retranché l'vnité AD; le reſte DB, ſera pair: duquel CB, pair eſtant retranché, [a] le reſte DC, ſera auſſi pair: Partant l'vnité AD, adiouſtee, AC, ſera impair. Donc ſi d'vn nombre impair l'on &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.

1 4 6
A.D....C.....B

[a] 24.9.

xxix THEOREME 26. PROP. 28.

Si vn nombre impair multipliant vn nõbre pair, en faict quelqu'vn; le produict ſera pair.

Soit le nombre A, impair, lequel multipliant B, nombre pair, face C. Ie dis que C, eſt pair: Car puis que C, eſt produit de A, par B; iceluy C, ſera compoſé d'autant de nombres egaux à B, qu'il y a d'vnitez en A. Mais B, eſt pair, donc C, ſera compoſé d'autant de nombres pairs egaux à B, qu'il y a d'vnitez en A, & partant [a] C, ſera pair. Donc ſi vn nombre impair multipliant &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.

3 4
A...B....
12
C.....

[a] 21. 9.

SCHOLIE.

Semblablement ſi vn nombre pair multiplie vn nombre pair le produict ſera pair. Car derechef C, ſera compoſé d'autant de nombre pairs egaux à B, qu'il y a d'vnitez en A, &c. figu. ſui.

COROLLAIRE.

Il s'enſuit auſſi qu'vn nombre pair multiplié par ſoy-meſme produira vn nombre pair; comme il eſt manifeſte ſi on poſe les nombres pairs A & B, egaux.

A....4 B....4
C.....16

xxx THEOREME 27. PROP. 29.

Si vn nombre impair multipliant vn nombre impair en faict quelqu'vn, le produict ſera impair.

Soit faict le nombre C, de A, impair multipliant B, impair. Ie dis que C, est impair.

Car puis que C, est produict de A, en B, iceluy C, sera composé d'autant de nombres egaux à B, qu'il y a d'vnitez en A. Partant puis que tant A que B, est nombre impair ; C, sera composé d'autant de nombres impairs egaux à B, qu'il y a d'vnitez en A, nombre impair, parquoy la multitude d'iceux sera impair. [a] Donc C, sera nombre impair : Partant si vn nombre impair. Ce qu'il falloit demonstrer.

3 5
A... B.....
15
C.....

a 23. 9.

COROLLAIRE.

Il s'ensuit de cecy qu'vn nombre impair multiplié par soy-mesme, produict vn nombre impair : comme il est manifeste, si les nombres impairs A & B sont posez egaux.

3 3
A...B...
C...!... ...
9

SCHOLIE.

Campanus a aussi demonstré les deux theoremes suiuants.

Vn nombre impair qui mesure vn nombre pair, il le mesure par vn nombre pair.

Que le nombre A, impair mesure le nombre pair B, par C. Ie dis que C, *est pair. Car si* C, *est impair,* B, [b] *produit de* A, *impair par* C, *pair sera impair : ce qui est absurde, car il est pair par l'hypothese : Donc* C, *est pair.*

3 4
A... C...
12
B... .....

b 29. 9.

Vn nombre impair mesurant vn nombre impair ; Il le mesure par vn nombre impair.

Que le nombre A, impair mesure le nombre impair B,

par C. Ie dis que C, eſt impair. Car ſi C, eſt pair ; [b] *B, produit de A, impair par C, pair, ſera pair: Ce qui eſt abſurde, puis que B, eſt poſé impair. Donc C, eſt impair.*

b 28.9.

A, 3. C, 5. B, 20.

xxxiij

THEOREME 28. PROP. 30.

Si vn nombre impair meſure vn nombre pair, il meſurera auſſi ſa moitié.

Soit le nombre A, impair lequel meſure B, nombre pair. Ie dis que A, meſurera auſſi la moitié de B.

Car que A, meſure B, par C, par la prop. antec. demonſt. de Camp. le nombre C, ſera pair. Et partant aura vne moitié. Parquoy puis que A, meſure B, par C ; [a] C, meſurera auſſi B, par A ; & par ainſi C, ſera vne partie de B, denommee de A, comme il eſt enſeigne à la 3. definition du 7. liure : Mais d'autant que comme C, eſt à ſa moitié, ainſi B, eſt auſſi à ſa moitié : & en changeant comme C, à B, ainſi la moitié de C, à la moitié de B. Mais C, eſt vne partie de B, denommée de A, comme il eſt monſtré ; auſſi la moitié de C, ſera vne partie de la moitié de B, denommeé de A, [b] partant A, meſurera la moitié de B. Donc ſi vn nombre impair meſure vn nombre pair &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.

3	4
A...	C....
	12
B.....	

a 8.c.ſ.

b 40.7.

xxxiv

THEOREME 29. PROP. 31.

Si vn nombre impair eſt premier à quelque nombre : Il ſera auſſi premier au double d'iceluy.

Soit

Soit le nombre impair A, premier au nombre B, duquel le double soit C. Ie dis que A, est aussi premier à C.

Car si A & C, ne sont premiers entr'eux; Ils seront mesurez par quelque nõbre, lequel soit D, lequel sera necessairement impair: Car s'il est pair, mesurant A, impair[a] A, produict de D, pair, multiplié par le nombre par lequel il le mesure, sera pair. Ce qui est absurde, car A, est posé impair: Partant D, impair mesurant C, pair, (car C, est pair puis qu'il a vne moitié B,) [b] mesurera aussi B, sa moitié: mais il mesure aussi A. Donc D, mesure iceux A, B, premiers entr'eux. Ce qui est absurde, donc A, est premier à C. Donc si vn nombre &c. Ce qu'il falloit demonstrer.

5 8
A.....B.....
16
C.....D---

[a] 28. 9.

[b] 30. 9.

THEOREME 30. PROP. 32. XXXV

De tous les nombres qui suiuent le binaire, en progression double; vn chacun est pairement pair seulement.

Soient tant de nombres doubles que l'on voudra depuis le binaire A, sçauoir B, C, D, E. Ie dis que B, C, D, E, sont tant seulement pairement pairs. Qu'il soit ainsi, il est manifeste, car ayant posé l'vnité: puis que A, est binaire, & B, C, D, E, doubles depuis le binaire, iceux seront continuellement proportionaux, depuis l'vnité, sçauoir en proportion double. [a] Donc A, mesurera vn chacun d'iceux B, C, D, E, & chacun

[a] 11. 9.

moindre mesurera le plus grand suiuant par

Vnité A, 2. B, 4. C, 8. D, 16. E, 32.

quelqu'vn d'iceux A,B,C,D,E, lesquels estant tous pairs à sçauoir doubles depuis le binaire, vn nombre pair mesurera vn chacun d'iceux B, C, D, E, par vn nombre pair, partant chacun sera pairement pair selon la definition.

Or qu'ils soient pairement pairs tãt seulemẽt, il est manifeste: Car puis que A, B, C, D, sont continuellement proportionaux depuis l'vnité, & que A, prochain de l'vnité est nombre premier, à sçauoir binaire; [b] aucun autre ne mesurera vn chacun d'iceux, excepté iceux A,B,C,D,E, lesquels estant tous pairs, vn nombre pair mesurera chacun d'iceux par vn nombre pair tant seulement: & partant vn chacun est pairement pair seulement. Donc des nombres, &c. Ce qu'il falloit demonstrer.

b 13. 9.

xxxvj THEOREME 31. PROP. 35.

Si vn nombre a sa moitié impair, iceluy est pairement impair, tant seulement.

Soit le nombre A, duquel B, moitié est impair. Ie dis que A, est seulement pairement impair.

Car d'autant que B, impair est moitié de A, le nombre binaire C, mesurera A, nombre pair, par icelle moitié C, impair; [a] Donc A, est pairement impair. Ie dis aussi qu'il

10
A.....
5 2
B.....C..
D---E---

a 9. d.

l'eſt ſeulement; car ſoit B, moitié de A & C, binaire. Si A, n'eſt pairement impair ſeulement il ſera auſſi pairement pair. Donc quelque nombre pair le meſurera par vn nombre pair. Que D, pair le meſure par E, auſſi pair; [b] par ainſi A, ſera produict de D, par E: Mais le meſme A, eſt produict de C, binaire par B, moitié de A. Donc le nombre produict de C, premier par B, 4. eſt egal à celuy qui eſt produict de D, 2. par E, 3. [c] partant ſt comme C, à D, ainſi E, à B. Mais C, binaire meſure D, nombre pair, donc E, nombre pair meſurera auſſi B, impair: ce qui eſt abſurde. Donc A, n'eſt pairement pair: Il eſt donc ſeulement pairement impair. Donc ſi vn nombre a vne moitié, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.

[b] 9. 7. ſ.

[c] 19 7.

THEOREME 32. PROP. 34. xxxvij

Si vn nombre pair n'eſt de ceux qui ſont doubles depuis l'vnité, & n'a ſa moitié impair; Il eſt pairement pair & pairement impair.

Soit A, de ceux qui ne ſont doublez depuis l'vnité, & que ſa moitié ſoit pair. Ie dis que A, eſt pairement pair, & pairement impair. Qu'il ſoit pairement pair il eſt euident: Car puis que ſa moitié eſt pair, le binaire qui eſt pair le meſurera par icelle moitié: partant ſera pairement pair.

20
A... ... ...

[a] 9. 7.

Il eſt auſſi pairement impair: car iceluy A, eſtant diuiſé en deux egalement, & ſa moitié

derechef diuiſee en deux, & ainſi de ſuite, l'on paruiendra en fin à vn nombre impair (premier qu'au binaire puis qu'il n'eſt de ceux qui ſont doubles depuis l'vnité) lequel meſurera A, par vn nõb. pair: Car s'il le meſuroit par vn nombre impair, [b] puis qu'vn nombre impair multipliant vn nombre impair faict vn nombre impair, A, ſeroit impair. Ce qui eſt impoſſible, puis qu'il eſt poſé pair: Donc puis qu'vn nombre impair meſure A, par vn nombre pair, & qu'vn nõb. pair le meſure auſſi par vn nõbre pair, [c] A, ſera pairemẽt pair & pairement impair. Donc ſi vn nombre pair &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.

b 29. 9.

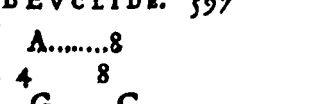
THEOREME 33. PROP. 35.

xxxviij

S'il y a tant de nombres que l'on voudra continuellemẽt proportionaux, & que l'on retranche tant du ſecond que du dernier, vn nombre egal au premier: comme l'excez du ſecond ſera au premier, ainſi l'excez du dernier ſera à tous les antecedents.

Soient tant de nombres que l'on voudra continuellement proportionaux A, B C, D, E F; & que de B C, ſecõd & de E F, dernier, on retranche C G, & F H, egaux chacun au premier A. Ie dis que comme le reſte B G; ſera à A, ainſi E H, ſera à A, B C, & D enſemble.

Car ſoit retrãché FI, egal à BC, & FK, egal à D. D'autant que FI, eſt egal à BC, & le retranché FH, eſt egal au retranché CG,



le reſte IH, ſera egal au reſte BG. Mais d'autant que comme A, eſt à BC, ainſi BC, eſt à D, & D, à EF; & par conuerſion de raiſon comme EF, à D, ainſi D, à BC, & BC, à A; mais KF, eſt egal à D, & IF, à BC, & HF, à A: Pareillement comme EF, ſera à KF, ainſi KF, à IF; & IF, à HF: Donc en diuiſant comme EK, à KF, ainſi KI, à IF, & IH, à HF; & [a] partant auſſi tous les nombres EK, KI, IH, ſeront à tous les nombres KF, IF, HF, c'eſt à dire le tout EH, à D, BC, & A, enſemble (auſquels KF, IF, HF, ont eſté pris egaux) comme IH, à HF, c'eſt à dire comme BG, à A; car BG, & A, ſont egaux à IH, & HF. Donc s'il y a tant &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.

[a] 12. 7.

THEOREME 34. PROP. 36. xxxix

Si depuis l'vnité l'on prend tant de nombres que l'on voudra continuellement proportionaux, en proportion double, iuſques à ce que le tout compoſé ſoit faict nombre premier: & qu'iceluy tout multiplié par le dernier en face quelqu'vn: Le produict ſera nombre parfaict.

Soient A,B,C,D, continuellement proportionaux depuis l'vnité & en proportion double, le cõposé desquels & de l'vnité soit E, nombre premier, & que E, multiplié par D, dernier face F. Ie dis que F, est nombre parfaict.

Soiẽt prisE,G,H,I,en proportiõ double,depuis E,& egaux en multit. à A,B,C,D. D'autant donc que A, B, C, D, & E, G,H,I, sont egaux en multitude, & pris de 2. en 2. sont en mesme raison estans tous en proportion double,en raison ega-
a 14. 7. le, [a] comme A, sera à D, ainsi E,à I; [b] & partant
b 19. 7. le produict de A, 1. par I,4. sera egal au produict de D, 2. par E, 3. Mais F, est le produict de D, en E; donc F, sera aussi le produict de A, en I.
c 7. c. f. 7. [c] Donc I, mesurera F, par A binaire; parquoy F, sera double de I,& partant E,G,H,I,F, sont continuellement proportionaux en raison double, Soient retranchez de G,2. & F, dernier K, & L, egaux à E, premier,desquels les excez sont M, & N.

Vnité A..2B..4C-8D-16
E, 31 G---62H---124. I.248 F-------496
K31. M. 31 L 31.
O----- P---- N 465

d 35. 9. [d] Comme M, sera à E,ainsi N, sera à tous ses antecedents E,G,H, I, ensemble; Mais M,est egal à E,estant moitié de G, double de E. Donc N, sera egal à E, G,H,I, ensemble; mais L,est egal à l'vnité & à A,B,C,D, ensemble estant posé egal à E,ou K. Donc le tout L N, c'est à dire F; est egal à l'vnité & aux nombres, A,B,C,D,E,F,G
f 7. c. f. H, I ensemble: [e] Parquoy puis que l'vnité, & chacun des nombres A,B,C,D,E,F,G,H,I,me-

sure F, (car puis que F, est faict de E, en D; [c] D, mesurera F, [f] & partant l'vnité & A, B, C, qui mesurent D, mesureront aussi F: Et de rechef, puis que I, comme il est monstré mesuré F, E, G, H, qui mesurent I, [g] à cause de la proportion double mesureront aussi F) & aucun autre ne mesurera F, comme nous monstrerons incontinent: L'vnité & A, B, C, D, E, G, H, I, seront toutes les parties que F peut auoir; ausquelles toutes ensemble F, estant monstré egal, [h] iceluy F, sera nombre parfaict. f 11. 6. f. g 11. 6. f. h 22. def. 7.

Et s'il est possible que quelque autre mesure F, outre les susdits, sçauoir O, par P, icela estant, F, sera le produict de O, par P: mais le mesme F, est aussi produict de E, par D; partant le nombre produit de E, premier par D, 4. est mesme que le produit de P, 2. par O, 3. [k] Donc comme E, à P, ainsi O, à D. [l] Mais puis que A, B, C, D, sont continuellement proportionaux depuis l'vnité, & que A, proche de l'vnité est premier, aucun autre ne mesurera D, dernier, outre ceux de la prop. A, B, C: Or O, est different de A, B, C, par l'hypothese, donc O, ne mesurera D. Mais comme O, à D, ainsi E, à P. Donc E, aussi ne mesurera P: [m] partant E, estant premier, E, & P, seront premiers entr'eux; [n] & par ainsi les plus petits de leur raison; [o] parquoy E, mesurera O, & P, mesurera D, egalement estant en la mesme raison. [p] Mais aucun nõb. ne mesure D, excepté A, B, C, donc P, sera mesme qu'vn d'iceux A, B, C. Qu'il soit mesme que B: Et soient pris E, G, H, doubles depuis E, en telle multitude que B C D, [q] en raison egale comme B, à D, ainsi E, à H: [r] Mais le produict de B, en H, est egal au produit de i 9. 6. f. k 19. 7. l 13. 9. m 31. 7. n 23. 7. o 21. 7. p 13. 9. q 14. 7. r 19. 7.

D, en E, & le produit de D, en E, a eſté monſtré egal au produict de P, en O. Donc le nombre faict de P, par O, eſt le meſme que de
§ 19. 7. B, par H: § Donc comme P, à B, ainſi H, à O: Mais P, eſtoit meſme que B; donc H, ſera meſme que O, ce qui eſt abſurde; Car O, a eſté poſé autre qu'auçun des nombres A, B, C, D, E, G, H, I. Donc A, B, C, D, E, G, H, I, ſeuls meſurent le nombre F, lequel ils compoſent. Donc ſi depuis l'vnité, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.

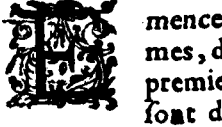
Fin du neufieſme Liure.

LIVRE DIXIESME DES ELEMENTS D'EVCLIDE.

DEFINITIONS.

1 Commenſurables grandeurs ſont celles-là, leſquelles ſont meſurees par vne meſme commune meſure.

EVclide ſelon ſa couſtume, commence icy par l'explication des termes, dont il doit vſer: Et declare premierement quelles grandeurs ſont dictes commenſurables, & quelles, incommenſurables, definiſſant que celles-là ſont dictes commenſurables, leſquelles ſont meſurees par vne meſme commune meſure, ou grandeur. Comme les 2. grandeurs A & B, leſquelles vne meſme meſure, comme C, meſure (car C, repetee 6. fois meſure A, & repetee 3. fois meſure B) ſeront dictes commenſurables: En la meſme maniere vne ligne de 20. palmes & vne de 13. ſeront dictes commen-



ſurables, puis que tant la ligne d'vne palme que celle de demie palme &c. les meſure toutes deux. Semblablement les ſuperficies ſont dictes commenſurables, leſquelles ſont meſurees par vne meſme ſuperficie, & les corps ſolides ſont auſſi dicts commenſurables leſquels ſont meſurez par vn meſme corps ou ſolide.

2 Mais les grandeurs incommuſurables, ſont celles-là leſquelles n'ont aucune commune meſure.

Telles grandeurs ſont le diametre de quelconque quarré, & le coſté du meſme quarré dont il eſt le diam. D'autant qu'il n'y a aucune commune grandeur qui les puiſſe meſurer l'vn & l'autre; comme il ſera demonſtré par Euclide à la derniere propoſition de ce liure. Il y a auſſi pluſieurs autres lignes incommenſurables, c'eſt à dire qui n'ont aucune commune meſure; pluſieurs deſquelles il explique en ce l. & enſeigne la maniere de les trouuer. Derechef les ſuperficies & les ſolides ſont dicts incommenſurables, leſquels n'admettent aucune commune meſure.

3. Les lignes droictes ſont commenſurables en puiſſance, quand les quarrez d'icelles ſont meſurez par vn meſme eſpace ou ſuperficie.

Des lignes droictes, les vnes ſont commenſurables en longitude, ſçauoir celles qui ſont meſurees par vne meſme ligne, & ſont dictes

ſimplement ou abſoluëment commenſurables, quelques autres ſont dictes incommenſurables; c'eſt à dire qui n'ont aucune commune meſure, comme il a eſté expoſé 1. & 2. d. Derechef des lignes qui ſont incommenſurables en longitude, les vnes le ſont de telle ſorte, que les quarrez d'icelles ſont commenſurables, comme vne ligne de 2. toiſe, & vne autre qui ſera $\sqrt{q}$ 8. (c'eſt à dire de laquelle le quarré contiendra 8. toiſes) ſont dictes commenſ. en puiſſ. leurs quarrez 4. & 8. eſtant meſurez par vne meſme ſuperficie. Ainſi vne ligne de 3. t. & vne de 6. ſeront auſſi commenſurables en puiſſance, puis que leurs quarrez 9. & 36. ſont meſurez par vne meſme ſuperficie, ſçauoir par 1. ou par 6. Item vne ligne qui ſera $\sqrt{qq}$ de 20. & vne qui ſera $\sqrt{qq}$ 125. ſont commenſ. en puiſſ. car leurs quarrez $\sqrt{q}$ 20. & $\sqrt{q}$ 125. ſont comm. eſtant comme 5. à 2. & $\sqrt{q}$ 5. ſera en $\sqrt{q}$ 20. 2. fois & en $\sqrt{q}$ 125. 5. fois. Ce que

l'on entendra plus facilement par ceſte figure, où la ligne AB, eſt 3. & ſon quarré AN, 9. dont le

diametre eſt B M, auquel A B, eſt incommenſurable comme il a eſté dict à la 2. deſi. & ayant mene B D, egale au diametre B M, & deſcrit le quarré B F, iceluy ſera 18.[a] eſtant double du quarré de B A, & ſon coſté ſera $\sqrt{q}$ 18. commenſ. en puiſſ. à B A, car E, meſure l'vn & l'autre quarré, ſçauoir A N, 9. fois & B F, 18. fois. E triplé meſure auſſi B F, 6. fois & A N, 3. fois.

[a] 17. 1.

Maintenant ſi on entend que le quarré E, face $\sqrt{q}$ 6. le quarré de la ligne A B, ſera $\sqrt{q}$ 486. Et le quarré de B D, ſera $\sqrt{q}$ 1944. & $\sqrt{q}$ 6. meſurera l'vn & l'autre, & $\sqrt{q}$ 54. triple de $\sqrt{q}$ 6. meſurera auſſi ces deux quantitez.

4. Mais les lignes droictes ſont incõmenſurables en puiſſance, quand les quarrez d'icelles ne peuuent eſtre meſurez par aucune commune meſure.

Les autres lignes incommenſurables, dont les quarrez ſont auſſi incõmenſurables, ſont dictes incommenſurables en puiſſance: comme vne ligne de 2. toiſes, & vne ligne qui ſera $\sqrt{\sqrt{6.}}$ ſerõt incommenſurables en puiſſance, n'y ayant aucun commun eſpace qui puiſſe meſurer leurs quarrez 4. & $\sqrt{q}$ 6. ainſi $\sqrt{q}$ 8. & $\sqrt{qq}$ 12. ſont auſſi incommenſurables en puiſſance, d'autant que aucune ſuperficie ne meſure leurs quarrez 8. & $\sqrt{q}$ 12. De rechef comme en la figure de la 3. def. la ſuperficie rect. P B, ſoit $\sqrt{q}$ 162. à laquelle[a] ſoit faicte egale la ſuperficie quarree B H, la ligne G B, ou B D, ſon egale ſera incommenſ. en puiſſance à B C, ou B I, car[b] B C, eſt moyenne proportionelle entre G B, B A, ou B N, egale à B A. Donc

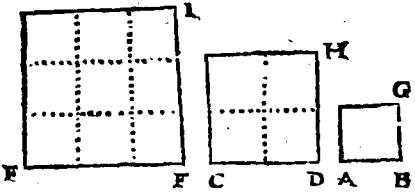
[a] 14. 2.

[b] 17. 6.

GB, BC, BN, estant continuellement proport. [c] GD, quarré de GB, est à BH, quarré de BC, comme GB, 1. à BN, 3. Mais GB, est incomm. à BN, comme il a esté dit 2. def. [d] Donc le quarré de GB, qui est GD, sera incommens. au quarré de BC, c'est à dire à BH: partant GB, BC, ou BI, son egale sont incõmens. en puissance. C'est à dire que leurs quarrez sont incommens. Et personne ne doit trouuer cecy estrange que ceste demonstration soit appuyee sur des propositions cy-apres, attendu qu'elle n'est necessaire pour la demonstration d'aucune d'icelles.

[c] 20. 6
[d] 10. 10.

Or toutes les lignes droictes commensurables en longitude le sont aussi en puiss. puis que le quarré de leur commune mesure, mesure les



quarrez d'icelles comme [a] ppert par ceste figure. Car comme AB, mesure CD, EF, ainsi son quarré AG, mesure CH, EI, non pas que toutes les lignes droictes commens. en puiss. le soient aussi en longit. comme il appert par la fig. de la 3. d. ou les lignes AB, BD, sont monstrees incom. en longit. lesquelles sont monstrees commens. en puiss. & comme il sera aussi demonstré en ce liure.

5. Ces choses estant ainsi, il est monstré 1. manifeste qu'à toute ligne droicte pro-

posee, infinies lignes droictes en multitude, sont commensurables & infinies incommensurables: les vnes en longitude & puissance, les autres en puissance seulement. Or que ceste ligne droicte proposee soit appellee rationelle.

Si on propose quelque ligne droicte de grandeur cogneuë & determinee: de toutes les lignes comparees auec icelle, quelques vnes seront commensurables en longitude & puissance à icelle, quelques vnes en puiss. seulement. Item quelques vnes seront incõmens. en longit. seulement à icelle; & quelques vnes en longit. & puiss. comme il sera monstré en ce liu.

Mais ceste ligne proposee, à raison de laquelle les autres sont dictes commens. ou incommens. est dicte des Grecs ῥητὴ: c'est à dire rationelle; d'autant qu'elle est tousiours posee de grandeur cogneuë, & que selon icelle on ratiocine; mais les autres cõparees auec icelle ne sont pas tousiours cogneuës: combien que selon icelles prises seperement elles soient cogneuës, chacune d'icelles pouuãt estre diuisee en telles parties egales que l'on voudra.

6. Et les lignes droictes commensurables à ceste ligne rationelle, soit en longitude & puissance, ou en puissance seulement: soient appellees aussi rationelles.

Il enseigne que les autres lignes commens. comment que ce soit à la ligne dicte rationelle,

ſont auſſi rationelles, non par ſupoſition, comme icelle; mais entant qu'eſtant comparees auec icelle, elles ſe trouuent commenſ. à icelle en longitude & puiſſance, ou en puiſſance ſeulement.

7. Et les lignes incommenſurables à ceſte ligne rationelle, ſoient appellees irrationelles.

Puis qu'en la precedente definition Euclide a appellé les lignes commenſ. en long. & puiſſ. ou en puiſſ. ſeulement à la rationelle propoſee, rationelles, il eſt manifeſte par ceſte def. que celles qui ſont incommenſ. à la rationelle propoſee en longit. & puiſſ. & non en longit. ſeulement ſont irrationelles.

8. Et le quarré deſcrit de la rationelle propoſee, ſoit appellé rationel.

Tout ainſi que la ligne qui eſt poſee pour cogneuë & determinee, eſt dicte rationelle: tout de meſme le quarré deſcrit d'icelle eſt appellé rationel d'autant qu'il eſt auſſi cogneu & certain, & en comparaiſon d'iceluy les autres ſuperficies ſont dictes commenſ. ou incommenſ.

9. Et les figures commenſ. à ce quarré rationel, ſoient appellees rationelles.

Toutes les ſuperficies planes commenſ. au quarré de la rationelle propoſee, ſont dictes rationelles, non toutesfois par poſition comme iceluy: mais entant qu'eſtant comparees audit quarré elles ſont trouuees commenſ. à iceluy, ou incommenſ. Tout ainſi auſſi que les li-

gnes comment que ce ſoit commenſ. à la ligne poſee rationelle, ſont appellees rationelles.

10. Mais les figures incommenſurables au quarré rationel ſoient appellees irrationelles, ou ſourdes.

Ainſi que les lignes incommenſ. à la ligne poſee rationelle, ſont dictes irrationelles: auſſi les ſuperficies planes incommenſ. au quarré de la ligne rationelle ſont appellees irrationelles.

11. Et les lignes droictes qui peuuent icelles figures irrationelles, ſoient dictes irrationelles & ſourdes; ſçauoir ſi elles ſõt quarrees leurs coſtez ſoient irrationaux, mais ſi ce ſont autres rectilignes quelconques, les lignes qui peuuent des quarrez egaux à icelles figures irrationelles ſoient irrationelles.

Il appelle les lignes qui peuuent des eſpaces incommenſurables au quarré de la ligne rationelle; irrationelles: de ſorte que ſi ces eſpaces irrationaux ſont quarrez leurs coſtez ſeront dicts irrationaux; s'ils ne ſont quarrez: mais ſont autres rectilignes, les lignes droictes qui deſcriuent des quarrez egaux à iceux eſpaces incommenſ. ſeront dictes irrationelles: car vne ligne droicte eſt dicte pouuoir vne figure quand le quarré deſcrit d'icelle lig. eſt egal à icelle figure.

En ſuitte de ces definitions d'Euclide nous adiouſterõs icy (apres Commaudin) vne demande & trois communes ſentences, dont vſe Euclide en ce liure.

DEMANDE

DEMANDE.

Que l'on puisse multiplier quelconque grandeur tant de fois qu'elle puisse exceder quelconque grandeur proposee de mesme genre.

Car 2. grandeurs inegales de mesme genre estãt propolees, la plus grãde n'estant infinie, & la moindre pouuant estre augmentee infiniment; il est manifeste que la moindre peut estre multipliee tant de fois qu'elle excede la plus grande, ce qui appert aussi par la 5. definition du 5. liure.

Communes sentences, ou notions.

1. Vne grandeur mesurant tant de grandeurs que l'on voudra, mesure aussi la grandeur composee d'icelles.

2. Vne grandeur qui mesure quelconque grandeur; mesure pareillement toute autre grandeur que celle-là mesure.

3. Vne grandeur mesurant toute vne grandeur, & la retranchee d'icelle, mesure aussi le reste.

Ces communes sentences sont monstrees en nombres au 7. liure, aux 3. dernieres communes sentences qui est la mesme chose qu'aux grandeurs &c.

Faut entendre que les propos. sont notees en la marge par 2. nõb. & que le superieur denote l'ordre de Theon, & l'inferieur l'ordre de Campanus, que s'il n'y a qu'vn seul nombre; c'est à dire qu'ils ne different &c.

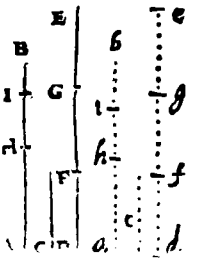
THEOREME PREMIER. PROP. 1.

Deux grandeurs inegales estant proposees, si de le la plus grande l'on re-

trãche plus de la moitié; & du reſte encore plus de la moitié, & que cela ſe face touſiours ainſi en continuant, il demeurera en fin quelque grand. plus petite que la moindre grand. propoſee.

Soient 2. grandeurs inegales AB, & C, propoſees, dont AB, eſt la plus grande. Ie dis que ſi de AB, on retranche plus de la moitié, & du reſte encore plus de la moitié, & ainſi touſiours en continuant, il reſtera en fin quelque grandeur moindre que C, plus petite grandeur propoſee.

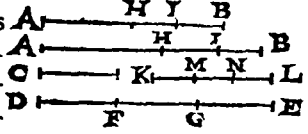
Car ſoit C, multipliee tant de fois que le produit excede AB, & ſoit DE, produict; de ſorte que DE, ſoit multiple de C, & prochainement plus grande que AB: Et ſoit diuiſee DE, ſelon les part. DF, FG, GE, chacune egale à C, & de AB, ſoit retranché plus de la moitié AH, & du reſte HB, auſſi plus de la moitié HI, & ainſi touſiours iuſques à ce que les parties de AB, ſoiẽt egales en nombre à celles de DE. Soient donc AH. HI, IB, autant que DF, FG, GE: D'autant que DE, eſt plus grande que AB, & que de DE, on a oſté DF, moins que la moitié (ou la moitié, ſi DE, eſtoit ſeulement double de C) & de AB, plus de la moitié AH, le reſte FE, ſera plus grand que le reſte HB. De rechef FE, eſtant plus plus grande que HB; ſi de FE, on oſte la moitié FG (ou moins que la moitié, ſi FE, eſtoit plus grande que le double de C) mais de HB



plus de la moitié HI, le reſte G E, ſera pareillement plus grand que le reſte I B: Mais G E, eſt egale à C, donc C, ſera auſſi plus grande que IB, derniere partie de AB. Partant de AB, il demeure vne grandeur plus petite que C. Donc 2. grandeurs inegales, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.

Il en aduiendra de meſme ſi on oſte la moitié A H, & du reſte HB, la moitié HI. Car ſemblablement IB, reſte ſera plus petite que G E; c'eſt à dire que C.

Autrement ayant faict la conſtruction comme auparauant ſoit prinſe kL, autant multiple de IB, que DE, de C. Donc KL, eſtant diuiſee en KM, MN, NL, parties egales chacune à I B, il y aura autant de parties en KL, qu'en DE: mais AH, eſtant plus grãde que HB (ou egale ſi on a oſté ſeulement la moitié de AB) & HB, plus grande que IB; A H, ſera auſſi plus grande que IB, c'eſt à dire que KM. Derechef d'autant que HI, eſt plus grande que IB, ou egale; mais IB, eſt egale à MN: HI, ſera auſſi plus grande que MN, ou egale à icelle; & partant la toute AI, ſera plus grande que KN, parquoy adiouſtant les egales IB, NL, la toute AB, ſera plus grande que la toute KL: Mais DE, eſt plus grande que AB. Donc DE, ſera encore bien plus grande que KL; Parquoy DE, eſtant à C, comme KL, eſt à IB. (Car KL, eſt prinſe autant multiple de IB, que DE, de C) pareillement C, ſera plus grande que IB, Et par ainſi IB, reſte plus petite que C: Ce qu'il falloit demonſtrer.



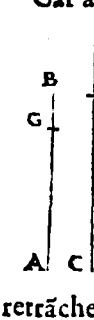
[a] 14. 5.

ij

THEOREME 2. PROP. 2.

Deux grandeurs inegales eſtant propoſees, ſi l'on retranche touſiours alternatiuement la plus petite de la plus grande, & que la grandeur reſtante ne meſure iamais ſa precedente: Icelles grandeurs ſeront incommenſurables.

Soient 2. grandeurs inegales propoſees AB, C D, deſquelles la moindre AB ſoit retranchee de la plus grande CD, & le reſte de CD, ſoit retranché de AB, & ainſi touſiours alternatiuement la moindre ſoit oſtee de la plus grande, & que le reſte ne meſure iamais ſa grandeur precedente. Ie dis que AB, CD, ſont incommenſurables.



Car autrement elles ſeront meſurees par quelque commune meſure, laquelle ſoit E, s'il eſt poſſible. Donc E, ſera egale à AB, ou moindre. Et ayant oſté AB, de CD, tant de fois que l'on pourra, qu'il reſte FD, moindre que AB, de ſorte que AB, meſure CF. Derechef ayant oſté FD, de AB, qu'elle laiſſe GB, moindre qu'icelle FD, de ſorte que FD, meſure AG, & ſoit faict ce retrãchemẽt touſiours ainſi: [a] Il demeurera en fin de CD, ou AB, de quelque grand. moindre que E. Car d'autant que AB, oſtee de CD, laiſſe FD, moindre que ſoy, CF, retranchee ſera plus grande que la moitié de CD, car ſi CF, eſtoit la moi-

a I. 10.

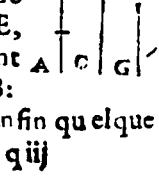
tié ou moindre que la moitié de CD; AB, pourroit encor estre retranchee de CD. Semblablement AG, retranchée de AB, sera plus grande que la moitié de AB; & aduiendra tousiours ainsi: Retrãchant donc tousiours plus de la moitié, il restera en fin quelque grandeur moindre que E:) Soit donc GB, reste moindre que E. D'autant que E, mesure AB, & AB, mesure CF; E, mesurera aussi CF. Mais E, mesure la toute CD; Donc E, mesurera aussi le reste FD, & FD, mesure AG, donc E, mesurera aussi AG. Mais E, mesure la toute AB: Donc E, mesurera aussi le reste GB, la plus grande la plus petite. Ce qui est absurde. Donc aucune grandeur ne mesurera AB, CD: Parrant seront incommensurables. Donc si 2 grandeurs inegales, &c. Ce qu'il falloit demonstrer.

b 1. 10. c 2. e. f. d 3. e. f. e 2. e. f. f 3. e. f.

PROBLEME 1. PROP. 3. iij

Deux grandeurs cõmens. estant donnees; trouuer la plus grande commune mesure d'icelles.

Soient 2. grandeurs commensurables proposees AB, CD, dont il faut trouuer la plus grande commune mesure. D'autant que AB, CD, sont commensurables de la plus grande CD, soit ostee AB, moindre, tant de fois que l'on pourra, & qu'il reste E, D, & de AB, soit ostee ED, aussi tant de fois que l'on pourra, & reste FB: Et faisãt tousiours ainsi alt. restera en fin quelque



a 2. 10. grandeur qui mesurera sa precedente: Autrement AB, CD, seroient incommens. contre l'hypothese, Que FB, mesure donc ED. Ie dis que FB, est la plus grande commune mesure de AB, CD.

Car puis que FB, mesure ED, & ED, mesure
b 2. e. f. AF, [b] FB, mesurera AF: mais FB, mesure soy-
c 1. e. f. mesme; [c] elle mesurera donc aussi la toute AB:
d 2. e. f. [d] Partant FB, mesurera aussi CE, qui est mesuree
e 1. e. f. de AB. Donc puisque FB, mesure aussi ED, la mesme FB, mesurera la toute CD: Elle mesure donc AB, & CD, partant est leur commune mesure. Ie dis qu'elle est la plus grande.

Car s'il n'est ainsi soit G, la plus grande cō. mes. s'il est possible: D'autant donc que G, mesure
f 2. e. f. AB, & CD, & que AB, mesure CE, [f] G, mesu-
g 3. e. f. rera aussi CE; Mais G, mesure CD, [g] donc G, mesurera aussi ED reste, (puis que G, mesure la toute CD, & la retranchee CE) mais ED, mesure A
h 2. e. f. F. [h] Donc G, mesurera aussi AF, & mesurant la
i 3. e. f. toute AB, [i] elle mesurera aussi le reste FB, plus petite que soy: ce qui est absurde. Donc FB, est la plus grande commune mesure de AB, CD.

Or si la moindre AB, mesure la plus grande, de sorte qu'estant retranchee de CD, il ne reste rien: AB, sera la plus grande commune mesure des deux puisque AB, mesure soy-mesme, partant deux grandeurs &c. Ce qu'il falloit faire.

COROLLAIRE.

De ceste demonstration il est manifeste, qu'vne grandeur laquelle mesure 2. grandeurs, mesure aussi leur plus grande commune mesure,

comme l'on peut colliger de ceſte partie de la demõſtration, par laquelle il eſt mõſtré que FB, eſt la plus grãde cõmune meſure de AB, CD; car là il eſt monſtré que ſi G, meſure AB, CD, qu'elle meſure auſſi leur plus grande commune meſure FB.

PROBLEME 2. PROP. 4.

iv

Trois grandeurs commenſurables eſtant donnees; trouuer la plus grande commune meſure d'icelles.

Soient 3. grandeurs commenſurables propoſees ABC, deſquelles il faut trouuer la plus grãde commune meſure.

Soit premierement[a] trouuee D, plus grande commune meſure de A, B, ſi D, meſure auſſi C, il appert que D, eſt la plus grande commune meſure des 3. ABC: Car ſi vne grandeur plus grande que D, meſure ABC, la meſme[b] meſurera auſſi D, plus grande commune meſure de A, & B, la plus grande la plus petite, ce qui eſt abſurde. Mais ſi D, ne meſure C, au moins C, & D, ſeront commenſurables. Car puis que ABC, ſont commenſ. quelconque commune meſure d'icelles meſurera[c] D, plus grande commune meſure de AB; Donc icelle commune meſure meſurant auſſi C: D, & C, ſeront commenſ.[d] Soit donc E, plus grande commune meſure de C, & D. Ie dis que E, eſt la plus grande commune meſure de ABC; Car d'autant que E, meſure D, & C; Et D, meſure A & B,[e] E, me-

a 3. 10.

b *corol.* 3. 10.

c *corol.* 3. 10.

d 3. 10.

e 2. *c.ſ.*

surera aussi A,B, Mais E,mesure aussi C, donc E, est la commune mesure de A B C. Ie dis que E, est aussi la plus grande commune mesure d'icelles; car autremẽt soit F; plus grande c. m. que E. D'autant donc que F, mesure A & B,[f] elle mesurera aussi D, leur plus grande cõmune mesure; Mais F,mesure aussi C, elle[g] mesurera donc aussi E, plus grand commune mesure de C,& D; sçauoir la plus grande la plus petite: ce qui est absurde; Donc E, est la plus grande commune mesure de ABC. Partant trois grandeurs &c. Ce qu'il falloit faire.

f corol. 3. 10.

g corol. 3. 10.

COROLLAIRE.

Il est aussi manifeste qu'vne grandeur qui mesure 3. grandeurs, mesure aussi la plus grande commune mesure d'icelles. Car il a esté demonstré que puis que F,mesure ABC, elle mesurera aussi leur plus grande commune mesure E.

Semblablement s'il y a plus de 3. grandeurs commenſ. données on trouuera leur plus grande commune mesure. Comme s'il y en a 4. l'on fera premierement la question de 3. si 5. on fera la question de 4. &c. & ce mesme corollaire aura lieu.

THEOREME 3. PROP. 5.

Les grandeurs commensurables, ont mesme raison l'vne à l'autre, que nombre à nombre.

Soient les grandeurs A & B, commensurables. Ie dis qu'elles sont entr'elles comme vn

nombre eſt à vn autre nombre.

Car[a] ſoit C, leur plus grand commune meſure, & autant de fois que C, meſure A, que l'vnité F meſure autant de fois vn nombre commune D, & autant de fois que C, meſure B, que l'vnité meſure auſſi le nõbre E. D'autãt dõc que la grandeur C, & l'vnité F, meſurent la grandeur A, & le nombre D, egalement, la grandeur A, contiendra C, autant de fois que le nombre D, contient l'vnité: Partant comme A, à C, ainſi le nombre D, à l'vnité. Mais comme C, eſt à B, ainſi l'vnité eſt à E; (puis que C, meſure B, & l'vnité meſure E, egalement)[b] Donc en raiſon egale A, ſera à B, comme le nombre D, au nombre E. Partant les grãdeurs cõmenſ. ſont entr'elles &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.

a 1. 10.

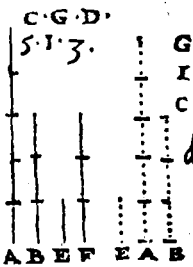
b 22. 5.

THEOREME 4. PROP. 6. vj

Si deux grandeurs ont meſme raiſon entr'elles que nombre à nombre: Elles ſeront commenſurables.

Que les 2 grandeurs A, & B, ayent meſme raiſon entr'elles que les nombres CD. Ie dis qu'elles ſont commenſurables.

Car que la grandeur A, soit entenduë estre diuisee en autant de parties egales que C contient d'vnitez, à vne desquelles parties soit egale la grandeur E, & soit quelque autre grandeur F, mesuree autant de fois par E, que l'vnité mesure le nombre D: D'autant que



E, est autant de fois en A, que l'vnité au nombre C, la grandeur A, & le nombre C, contiendront E, & l'vnité egalement, partant A, sera à E, comme C, à l'vnité. Mais E, est à F, comme l'vnité à D, (E, mesurant F, & l'vnité mesurant D, egalement) donc en [a] raison egale, A, sera à F, comme le nombre C, au nombre D: Mais A, est [b] aussi à B, comme le nombre C, au nombre D, par l'hypothese; [b] Donc comme A à B, ainsi A à F: [c] Partant B & F, sont egales, donc E, mesurant F, mesurera aussi B, egalé à F: Mais E, mesuroit aussi A; partant E, mesure A, & B, [d] donc A B, sont commens. Partãt si 2. grandeurs &c. Ce qu'il falloit demonstrer.

a 22. 5.
b 11. 5.
c 9. 5.
d 1. d.

Autrement soit entenduë la grandeur A, diuisee en autant de parties egales qu'il y a d'vnitez au nombre C, à vne desquelles parties soit egale la grandeur E. D'autant donc que comme E, à A, ainsi l'vnité au nõb. C, (E, mesurant A, & l'vnité le nombre C egalement) Mais A, est posee à B, comme le nombre C, au nombre D. [e] Donc en raison egale, comme E, [f] à B, ainsi l'vnité à D, mais l'vnité mesure le nombre D; Donc E, mesurera B, & E, mesure aussi A, [f] donc A &

e 22. 5.
f 1. d.

B, ayant E, pour commune mesure seront commens. Ce qui est proposé. Soit veuë la 2. partie de la fig.

COROLLAIRE.

De la premiere demonstation de ce theoreme, il appert comment on pourra trouuer vne ligne droicte à laquelle quelconque autre ligne droicte proposee soit comme nombre à nombre: Car (voyez la 1. fig.) soit trouuee vne ligne à laquelle soit la ligne proposee A, comme nombre C, au nombre D; Faut diuiser A, en autant de parties egalles qu'il y a d'vnitez en C, & prendre F, cõtenant autãt des mesmes parties de A, qu'il y a d'vnitez en D; par ainsi A, sera à F, comme le nombre C, au nombre D. Comme il est demonstré.

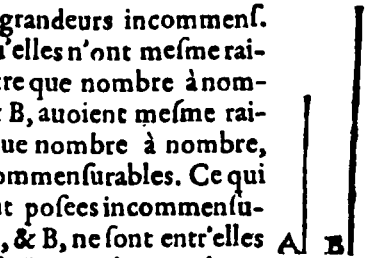
Il appert aussi par quel moyen on trouuera vne ligne droicte au quarré de laquelle soit le quarré d'vne autre ligne droicte donnee comme nomb. à nombre: comme pour exemp. soit trouuee vne ligne au quarré de laquelle soit le quarré de la ligne A, comme le nombre C, au nombre D, soit premierement trouuee F, à laquelle soit A, comme C, à D, comme il est dit, [a] puis soit trouuee la moyẽne proportionelle entre A, & F: [b] A, la ligne trouuee, & F, estant continuell, proportionelles, le quarré de A, sera au quarré la moyenne: comme A, à F; Mais A, est à F, comme le nombre C, au nombre D. Donc le quarré de A, sera au quarré de la moyẽne prop. comme le nombre C, au nombre D.

a 13. 6
b cor. 20. 6.

vij o. THEOREME 5. PROP. 7.

Les grandeurs incommensurables n'ont pas mesme raison entr'elles, que nombre à nombre.

Soient les grandeurs incommens. A & B. Ie dis qu'elles n'ont mesme raison l'vne à l'autre que nombre à nombre. [a] Car si A & B, auoient mesme raison entr'elles que nombre à nombre, elles seroient commensurables. Ce qui est absurde estant posees incommensurables. Donc A, & B, ne sont entr'elles cõme nõb. à nõb. Partant les grandeurs incomens. &c. Ce qu'il falloit demonstrer.

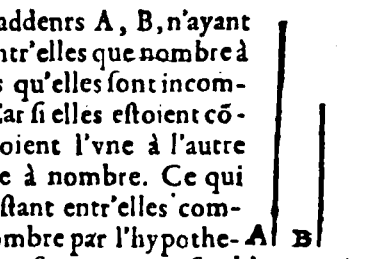


a 6. 10.

viij o. THEOREME 6. PROP. 8.

Si deux grandeurs n'ont mesme raison entr'elles que nombre à nombre: icelles grandeurs seront incommens.

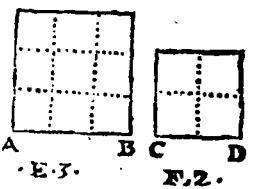
Soient les graddenrs A, B, n'ayant mesme raison entr'elles que nombre à nombre. Ie dis qu'elles sont incommensurables. Car si elles estoient cõmens.[a] elles seroient l'vne à l'autre comme nombre à nombre. Ce qui est absurde. n'estant entr'elles comme nombre à nombre par l'hypothese. Donc A & B, ne sont commensurables: partant si deux grandeurs &c. Ce qu'il falloit demonstrer.



a 5. 10.

THEOREME 7. PROP. 9. ix

Les quarrez descrits de lignes droictes commensurables en longitude, ont mesme raison entr'eux, que nombre quarré à nombre quarré. Et les quarrez qui ont mesme raison entr'eux que nombre quarré à nombre quarré, auront aussi les costez commensurables en longitude. Mais les quarrez descrits de lignes droictes incommensurables en longitude, n'ont mesme raison entr'eux que nombre quarré à nombre quarré: Et les quarrez qui n'ont mesme raison entr'eux que nombre quarré à nombre quarré, n'auront les costez commensurables en longitude.



E.3. F.2.
G.9. H.4.

Soient premierement les lignes droictes AB, CD, commensurables en longitude. Ie dis que le quarré de AB, est au quarré de CD, comme nombre quarré à nombre quarré.

Car AB, CD, estant commensurables en longitude, AB, sera à CD, comme nombre à nom- 5. 10.

bre, & ſoit comme le nombre E, au nombre F. Et les quarrez de E, & F, ſoient G, & H: Donc puis que AB, eſt à CD, comme E, à F: [b] Mais le quarré de AB, eſt au quarré de CD, en raiſon [c] doublee du coſté AB, au coſté CD. Et [c] le nombre quarré G, eſt au nombre quarré H, auſſi en raiſõ doublee du coſté E, au coſté F; le quarré de AB, ſera au quarré de CD, comme le nombre quarré G, au nombre quarré H: D'autant que ces deux raiſons ſont doubles de raiſons egales. Ce qui eſt propoſé.

b 20. 6.

c 11. 8.

Secondement ſoit le quarré de AB, au quarré de CD, comme le nombre quarré G, au nombre quarré H. Ie dis que AB, CD, ſont commenſ. en longit. Car ſoient E, & F, coſtez de G, & H. D'autant donc que le quarré de AB, eſt au quarré de CD, comme le nombre quarré G, au nombre quarré H; [d] Mais le quarré de AB, eſt au quarré de CD, en raiſon double du coſté AB, au coſté CD: [e] Et le nombre quarré G, au nombre quarré H, auſſi en raiſon doublee du coſté E, au coſté F. Donc AB, ſera à CD, comme E, à F; leurs raiſons doublees eſtant egales: [f] Partant AB, CD, ſont commenſurables en longitude.

d 20. 6.

e 11. 8.

f 6 10.

Tiercement ſoient A, B, incommenſ. en longitude. Ie dis que leurs quarrez ne ſont entr'eux comme nombre quarré à nombre quarré. Car ſi le quarré de A, eſtoit au quarré de B, comme nombre quarré à nombre quarré, A, & B, ſeroiẽt commenſ. en longitude comme il a eſté monſtré; ce qui eſt contre l'hypotheſe: Donc le quarré de A, n'eſt au quarré B, comme *n. q. à n. q.* Ce qui eſt propoſé.

Finalement que les quarrez de A & B, ne soient entr'eux comme nombre *q.* à nomb. *q.* Ie dis que A, & B, sont incommens. en longit. Car s'il n'est ainsi leurs quarrez sont entr'eux comme nomb. *q.* à nomb. *q.* comme il est demonstré: Ce qui est contre l'hypothese. Donc A B, ne sont commens. en longit. ce qui est proposé. Partant les quarrez &c. Ce qu'il falloit demonstrer.

COROLLAIRE

De ces choses ainsi demonstrees, il est manifeste que les lignes droictes commens. en longit. sont aussi commens. en puissance: Mais que celles qui sont commens. en puissance ne le sont pas toutes en longit. Et que celles qui sont incommensurables en long. ne le sont pas toutes en puiss. Mais les incommensurables en puiss. le sont toutes en longitude.

Car les quarrez des [a] lignes commens. en longit. estant entr'eux comme nomb. quarré à nõb. *q.* c'est à dire commme nomb. à nomb. simplement; bi eux seront commens. [c] & partant leurs costez commens. en puiss. Donc les lignes droictes commens. en long. le sont aussi toutes en puissance. [a] 9. 10. [b] 6. 10. [c] 3. d.

En apres, puis que les lignes dont les quarrez ne sont entr'eux comme nomb. *q.* à nomb. *q.* Mais simplement comme nomb. à nomb. [d] sont commensurables en puiss. [e] (leurs quarrez estant commens.) [f] mais non en longit. Il est manifeste que les lignes commens. en puissance, ne le [d] 3. d. [e] 9. 10. [f] 9. 10.

ſont pas touſiours en lõgit. mais ſeulemẽt les lignes commenſ. en puiſſ. dont les quarrez ſont entr'eux comme nomb. *q.* à nomb quarré ſont auſſi commenſ. en longit, comme il appert par la 2. partie de ce theoreme.

Derechef d'autant que les lignes dont les quarrez ne ſont entr'eux comme nomb. *q.* à nomb. *q.* Mais ſeulement comme nomb. à nõb. ſont incommenſ. en longit. mais commenſ. en puiſſ. cõme il eſt dit: Il appert que les lignes incommenſ. en longit. ne le ſont toutes en puiſſ. mais ſeulement les lignes incommenſurables en longitude, dont les quarrez ne ſont entr'eux comme nombre à nomb. [g] ſont auſſi incommenſurables en puiſſ. leurs [h] quarrez eſtant incommenſurables.

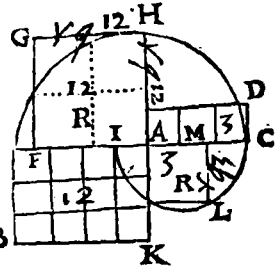
g 4. d.
h 8. 10.

Finalement il eſt manifeſte que les lignes incommenſurables en puiſſance le ſont auſſi en longitude: car ſi elles eſtoient commenſurables en longitude elles le ſeroient en puiſſ. comme il eſt euident de la 1. partie de ce corollaire. Ce qui eſt abſurde, eſtant poſees incommenſ. en puiſſ.

SCHOLIE.

Pour mieux entendre les 2. premieres parties de ce theoreme faut ſçauoir que les lignes droictes commenſurables en longitude dont les quarrez ſont entr'eux comme nombre q. à nomb. q. ne ſont pas ſeulement celles qui ſont explicables par nombre; Mais auſſi celles qui ne s'y peuuent expliquer; pour l'intelligence dequoy, nous mettrons icy ces deux ſuperficies rectangulaires AB, de 12. pieds ou autres meſures, & AD,

& AD, de 3. pieds, lesquelles sont commens. la moindre mesurant la plus grande 4. fois precisement & ayant fait le quarré AG, egal au rect. AB. & AL, egal à AD; le quarré AG, sera



14. 2.

12. & AL, 3. & leurs costez seront Vq 12. & Vq, 3. lesquelles ne se peuuent expliquer par aucun nombre, estant la Rz ou costé de 12. plus de 3. & moins que 4. & la Rz de 3. plus de 1. & moins que 2. Et neantmoins AG, 12. estant quadruple de AL, 3. son costé AH, sera double du costé AM, comme nous auons monstré en suite de la 4. prop. du 2. l. Et partant commensurables.

THEOREME 8. PROP. 10. xj x

Si quatre grandeurs sont proportionelles, & que la premiere soit commensurable à la seconde; la troisiesme sera aussi commensurable à la quatriesme. Et si la premiere est incommensurable à la seconde, la troisiesme sera aussi incommensurable à la quatriesme.

Soient 4. grandeurs ABCD. proportionelles, & soit A, 1. commensurable à B, 2. Ie dis que C, 3. sera commens. à D, 4.

Car d'autant que A & B sont commens.[a] elles a 5. 10. seront entr'elles comme nombre à nombre:

Soit donc A à B, comme le nõbre E, au nombre F: mais comme A, eſt à B, ainſi C, eſt à D: par l'hypotheſe; Donc C, ſera auſſi à D, comme le nombre E, au nombre F. [b] Partant C, & D, ſont commenſurables entr'elles.

b 6. 10.

Soit maintenant A incommenſurable à B. Ie dis que C eſt auſſi incommenſurable à D. Car puis que A, & B, ſont incommenſurables: [c] A ne ſera à B, comme nombre à nombre: mais comme A eſt à B, ainſi C à D, par l'hypotheſe, donc C ne ſera à D, comme nombre à nombre. [d] Partant C & D, ſont incommenſ. entr'elles. Donc ſi 4. grandeurs ſont proport. &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.

c 7. 10.

d 8. 10.

LEMME.

Trouuer deux nombres plans, leſquels n'ayẽt meſme raiſon entr'eux que nombre quarré à nombre quarré.

a 26. 8. *Puis [a] que les nombres plans ſemblables ont meſme raiſon entr'eux que nombre quarré à nombre quarré, tous les nombres plans diſſemblables ſont tels que requiert ce lemme. Et tous les nombres premiers ſont tels, & les nomb. en raiſon double, ſuperparticuliere, ou ſuperpartiente. Et meſme tous les nombres pris 2. à 2. dont l'vn eſt quarré, & l'autre non, comme 16. & 30. car s'ils*

b 26. 8. *eſtoient plans ſemblables: [b] ils ſeroient entr'eux comme nomb. quarré à nomb. quarré; Et l'vn eſtant quarré comme 16. [c] l'autre 30. le ſeroit auſſi: ce qui eſt abſurde. Car il eſt poſé non quarré.* 16. 30.

PROBLEME 4. PROP. 11.

x
xj

Trouuer deux lignes droictes incommenſurables à vne ligne droicte propoſee: à ſçauoir l'vne en longitude ſeulement, & l'autre en longitude & puiſſance.

c. à d. à la lig. droicte appellee rationelle.

Soit la ligne droicte propoſee A, à laquelle il faut premierement trouuer vne ligne droicte incommenſurable en longitude ſeulement.

Soient[a] trouuez 2. nombres BC, n'eſtans entr'eux comme nombre quarré à nomb. quarré; [b]puis ſoit trouuee la ligne D, au quarré de laquelle ſoit le quarré de A, comme le nombre B au nombre C. Ie dis que D eſt incommenſ. à A en longit. ſeulement: Car le quarré de A, eſtant au quarré de D, comme le nomb. B, au nomb. C: Mais B, & C ne ſont nomb. quarrez, donc le quarré de A, ne ſera au quarré de D: comme nomb. quarré à nomb. quarré: [c] donc A & D, ſeront incommenſ. en longit. Et puis que les quarrez de A & D ſont entr'eux comme nomb. à nomb. ils ſeront commenſ. [d] Partant A & D, commenſ. en puiſſ. elles ſeront donc incommenſ. en longit. ſeulement.

a *lemme preced.*
b *corol.* 6. 10.
c 9. 10.
d 6. 10.

Maintenant pour trouuer vne ligne droicte

incommenſ. en longit. & puiſſance à la ligne
c 13. 6. propoſee A, ſoit trouuee E, moyenne proportionelle entre A & D. Ie dis que E, eſt la requiſe. Car AED, eſtant continuell. proport. le
f corol. 20. 6. f quarré de A ſera au quarré de E, comme A à D,
g 10. 10. mais A eſt incommenſ. en longit. à D, comme il eſt monſtré: g Donc le quarré de A ſera incõmenſ. au quarré de E; Partant AE, ſont incom-
h corol. 9. 10. menſ. en puiſſ. par la def. h & par conſequent auſſi en longit. Parquoy nous auons trouué 2. lignes droictes. &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.

Schol. Les nõb. prins eſtant 5. & 4. le moyen proportionel entr'eux ſera $\sqrt{q}$ 20. qui exprime la longitude de D. Mais entre 5. & $\sqrt{q}$ 20. le moyen proport. eſt $\sqrt{qq}$ 500. quantité de E, ſi on confere maintenant 5. & $\sqrt{q}$ 20. il eſt manifeſte qu'ils ſont incommenſ. en longit. & non en puiſſ. leurs quarrez 25. & 20. eſtant commenſ. Mais 5. & $\sqrt{qq}$ 500. ſont incommenſ. en longit. & puiſſance.

xij viij

THEOREME 9. PROP. 12.

Les grandeurs commenſurables à vne meſme grandeur, ſont auſſi commenſurables entr'elles.

Soit l'vne & l'autre grandeur A & B, commenſ. à C. Ie dis que A & B ſont cõmenſ. entr'elles. Car puis que A & C, ſont commenſurables
a 5. 10. a A ſera à C, comme nomb. à nombre, & ſoit comme le nombre D, au nomb. E. Et CB, eſtant auſſi commenſurable C e ſera à B, comme nomb. à nomb. Soit donc comme le nombre F, au

nomb. G. Et[b] soient trouuez les 3. nomb. H I K, continuell. proport. & les plus petits en la raison de D à E, & de F, à G. Et H sera à I, comme D à E, c'est à dire comme A à C, & I à K, comme F à G, c'est à dire comme C à B. Donc A estant à C, comme H à I, & C à B, comme I à K; en raison egale A sera à B, comme H à K: Partant A & B seront commens.[c] estant entr'elles comme le nombre H, au nombre K. Donc les grandeurs &c. Ce qu'il falloit demonstrer.

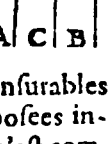
[b] 4. 8.

[c] 6. 10.

THEOREME 10. PROP. 13. xiij o.

S'il y a deux grandeurs, & que l'vne soit commensurable à vne mesme grandeur, & l'autre incommensurable: Icelles grandeurs seront incommensurables entr'elles.

Soient 2. grandeurs A & B, desquelles A soit commensurable à C, & B incommensurable à la mesme C. Ie dis que A & B sont incommens. entr'elles.



Car si B; est dicte estre commens. à A; C estant posee commens. à la mesme A:[a] B & C seroient commensurables entr'elles: ce qui est absurde estant posees incommensurables entr'elles. Donc A n'est com-

[a] 12. 10.

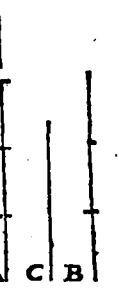
mensà B: Partant s'il y a 2. grandeurs &c. Ce qu'il falloit demonstrer.

xiij viij

THEOREME 11. PROP. 14.

S'il y a deux grandeurs commensurables & que l'vne d'icelles soit incommensurable à quelque grandeur ; l'autre sera aussi incómens. à la mesme.

Soient deux grandeurs cõmens. A & B, desquelles A soit incommens. à quelque autre grandeur C. Ie dis que B, sera aussi incommens. à la mesme C. Car si B, est dicte estre commens. à C, & partant aussi C commens. à B, [a] A & C seroient commensurables entr'elles : ce qui est absurde, estant posees incõmens. Dõc B C sont incõmens. entr'elles: Partant si 2. grandeurs &c. Ce qu'il falloit demonstrer.



a 14.10.

SCHOLIE.

De ce theoreme les interpretes d'Euclide colligent le suiuant fort vtile à ce qui est demonstré cy-apres.

Les grandeurs commensurables à des grandeurs incommensurables entr'elles ; seront aussi incommensurables entr'elles.

Soient 2. grandeurs A & B, incommensurables, ausquelles C & D soient commensurables, sçauoir C à A, & D à B. Ie dis que C & D sont incommensurables entr'elles. Car d'autant que A & C sont commensurables, & A est incommensurable à B, [a] *la re-*

a 14.10.

stante C, *sera aussi incommensurable à* B. *Derechef, d'autant que* D *&* B, *sont posees commensurables, &* [b] *14 10.* B *est monstree incommensurable à* C; [b] *la restante* D, *sera pareillement incommensurable à la mesme* C. *Ce qui est proposé: voyez ceste figure cy-dessous.*

SCHOLIE.

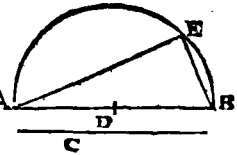
Soient incõmensurables entr'elles Vq 8. *& Vq* 27. *ausquelles soient commensurables, Vq* 32. *& Vq* 147 *à sçauoir la premiere à la premiere & la derniere à la derniere: Vq* 32. *& Vq.* 147. *seront aussi incommensurables entr'elles comme il apert.*

LEMME.

Deux lignes droictes inegales estant donnees trouuer de combien la plus grande peut plus que la plus petite.

Soient deux lignes droictes inegales proposees AB & C. donc AB, est la plus grande; Il faut trouuer de combien AB, *peut plus que* C.

Soit diuisee AB *en deux egalement au poinct* D, *& de* D, *comme centre, & à l'interualle* DA, *ou* DB, *soit descrit le demy cercle AEB:* [c] *auquel soit accommodee la droicte ligne AE, egale à* C, *& conioincte EB. Ie dis que* AB, *peut plus que* C *du quarré de* EB, [d] *car puis que l'angle* E, *est droict au demy cercle;* [e] *le quarré de A*



[c] 1. 4. [d] 31. 3 [e] 47.

B, eſt egal aux quarrez de AE, EB; Partant AB, pourra plus que AE: c'eſt à dire que C, du quarré de la ligne BE. Ce qui eſt propoſé.

SEMBLABLEMENT.

Deux lignes droictes egales, ou inegales, eſtant propoſees; trouuer vne autre ligne droicte pouuant icelles.

Soient les 2. lignes droictes AE, EB, leſquelles eſtant conſtituees à angle droict au poinct E, & ayant mené AB icelle AB; pourra les deux AE, EB, le quarré de AB, eſtant egal aux 2. quarrez de AE, EB.

f 47. 1.

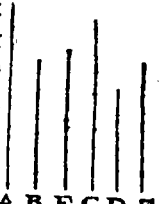
xiv xij

THEOREME 12. PROP. 15.

Si quatre lignes droictes ſont proportionelles, & la premiere peut plus que la ſeconde, du quarré d'vne ligne qui ſoit cõmenſurable en longitude à icelle: La troiſieſme pourra plus auſſi que la 4. du quarré d'vne ligne qui luy ſera commenſurable en longitude: Et ſi la premiere peut plus que la ſeconde du quarré d'vne ligne incommenſurable en longitude à icelle; La troiſieſme pourra auſſi plus que la quatrieſme du quarré d'vne ligne incommenſurable en longitude à icelle.

Soient les quatre lignes droictes A, B, C, D, proportionelles, & que A, 1. puiſſe plus que B, 2. du quarré de la droicte ligne E, & C, 3. plus que D, 4. du quarré de la droicte ligne F. Ie dis

que si E, est commensurable en longitude à A, que F sera aussi cõmensurable en longitude à C. Et si E est incommens. en longit. à A; F sera incommens. en longit. à C. Car puis que A est à B, cõme C à D; [a] aussi comme le quarré de A sera au qu. B, ainsi le quarré de C, au quarré de D: Mais le quarré de A est egal aux quarrez de BE, par l'hypothese, & le quarré de C, aux quarrez de D F; Donc comme les quarrez de B, E, ensemble seront au quarré de B, ainsi les quarrez de D F, au quarré de D; & en diuisant comme le quarré de E, au quarré de B, ainsi le quarré de F, au qaurré de D. [b] Donc comme E, est à B, ainsi F, à D: & en changeant comme B, à E, ainsi D à F; Donc A estant à B, comme C à D, & B à E, comme D à F, en raison egale comme A, sera à E, ainsi C, sera à F. [c] Partant si A, est commensurable en longit. à E, aussi C sera commens. à F, en longit. Et si incommens. incommensurable. Donc si quatre lignes &c. Ce qu'il falloit demonstrer.



[a] 22. 6.

[b] 22. 6.

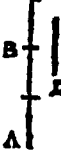
[c] 10. 10.

THEOREME 13. PROP. 16.

xv ix

Si deux grandeurs commensurables sont composees; la toute sera aussi commensurable à chacune d'icelles: Et si la toute est commensurable à vne d'icelles, les grandeurs proposees au commencement seront commensurables entr'elles.

Soient composees les 2. grandeurs commens. AB, BC. Ie dis que la toute AC, est aussi commens. à chacune d'icelles: Car[a] soit D, cõmune mesure de AD, BC. D'autant donc que D, mesure AB, BC, elle[b] mesurera aussi la toute AC; Donc puis que D, mesure AC, & AB; AC, & AB, seront commensurables. Semblablement puis que D, mesure AC, & BC; AC & BC, seront aussi commensurables. Donc AC, sera commensurable à chacune d'icelles AB, BC.



a 3. 10.
b 1. e. f.

Soit maintenant la toute AC, commensurable à vne d'icelles, AB, BC, desquelles elle est cõposee, sçauoir à AB. Ie dis que AB, BC, sont commensurables entr'elles. Car soit D, commune mesure de AC, AB. Donc D, mesurant la toute AC, & la retranchee AB; elle mesurera aussi le reste BC. Partant AB, BC, seront commensurables entr'elles, D, mesurant l'vne & l'autre, &c. Donc si deux grandeurs, &c. Ce qu'il falloit demonstrer.

c 3. 10.
d 3. e. f.

COROLLAIRE

D'icy il s'ensuit, que si vne grandeur composee de deux, est commensurable à vne d'icelles, qu'elle sera aussi commens. à l'autre. Comme si AC, est commens. à AB, elle sera aussi cõmens. à BC, restante. Car comme il est monstré en la derniere partie de ce theoréme, D, commune mesure de la toute AC, & de AB, retranchee mesurera le reste BC. Partant AC, BC, sont commensurables.

e 3. e. f.

SCHOLIE.

Soient AB ∛q 8. & BC ∛q 18. commensurables: AC ∛q 50. composee d'icelles sera aussi commensurable à chacune des deux. Car ∛q 50. est à ∛q 8. comme 5. à 2. nombre à nombre, & ∛q 50. est à ∛q 18. comme 5. à 3. [f] *Partant elles sont commensurables en* f 6 10. *longitude.*

THEOREME 14. PROP. 17. xvi ix

Si deux grandeurs incommensurables sont composees, la toute sera aussi incommensurable à chacune d'icelles: Et si la toute est incommensurable à vne d'icelles, les grandeurs proposees au commencement, seront incommensurables.

Soient composees les deux grandeurs incommensurables AB, BC. Ie dis que la toute AC, est aussi incommensurable à chacune d'icelles AB, BC; car s'il n'est ainsi, elle seroit commensurable, à tout le moins à vne: Soit donc commensurable à AB, s'il est possible; [a] & soit D, leur commune mesure. Donc puis que D, mesure la toute AC, & la retranchee AB, [b] elle mesurera aussi le reste BC. Donc AB, BC, seront commensurables ayant D, pour commune mesure. Ce qui est absurde: car elles sont posees incommensurables.

a 3. 10.

b 3. 1. ef.

Soit maintenant la toute AC, incommensurable à vne d'icelles, sçauoir à AB. Ie dis que

AB, BC, ſont incommenſurables. Car s'il n'eſt ainſi : [c] la toute AC, ſera commenſurable à chacune d'icelles AB, BC ; ce qui eſt abſurde & contre l'hypotheſe. Donc AB, BC, ſont incommenſurables. Ainſi on demonſtrera AC, AB, incommenſurables. Donc ſi 2. grandeurs, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.

c 16. 10.

COROLLAIRE.

Il s'enſuit de ces demonſtrations, que ſi vne grandeur compoſee de deux eſt incommenſurable à vne d'icelles, qu'elle l'eſt auſſi à l'autre. Comme ſi AC, eſt incommenſ. à AB, elle le ſera pareillement à BC. Car ſi AC, eſtoit commenſ. à BC ; [d] AC, ſeroit auſſi commenſurable au reſte AB. Ce qui eſt abſurde : car elles ſont poſees incommenſ. Donc AC, n'eſt commenſ. à BC. Ce qui eſt propoſé.

d *coroll.* 16. 10.

SCHOLIE.

Il eſt manifeſte que ſi cés nombres incommenſ. 8. *&* *Vq.* 28. *ſont compoſez : tout le compoſé* 8 + *Vq* 28. *ſera incommenſ. à chacun d'iceux. Semblablement Vq* 10. *&* *Vq* 27. *ſi chacun eſt conferé auec le compoſé Vq* 27 + *Vq* 10. *& ainſi des autres.*

LEMME 1.

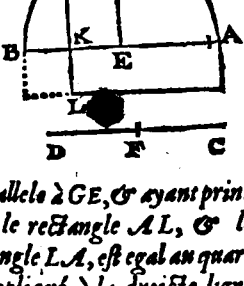
Si à vne ligne droicte l'on applique vn parallelogramme deffaillant d'vne figure quarree, le parallelogramme appliqué eſt egal au rectangle, lequel eſt contenu ſous les ſegmens de la ligne droicte, faicts par l'application.

Ce Lemme est facile par la 28. prop. du 6. liure.

LEMME 2.

Deux lignes droictes inegales estant donnees, appliquer à la plus grande vn parallelogramme, egal au quart du quarré de la plus petite ; deffaillant d'vne figure quarree.

Cecy se peut faire par la 28. du 6. & en ceste maniere. Soit la droicte ligne AB, plus grande, & CD, plus petite : Il faut faire le requis. Sur AB, soit descrit le demy cercle AGB, & ayant coupé CD, en 2. egalemẽt au poinct F, soit prinse EH, egale à CF, ou à DF, & du poinct H, soit menee HI, parallele à BE, & du poinct I, soit menee IKL, parallele à GE, & ayant prins KL. egale à KB, soit acheué le rectangle AL, & le quarré LB. Iedis que le rectangle LA, est egal au quart du quarré de CD ; & est appliqué à la droicte ligne AB, deffaillant de la figure quarree LB. [a] *Car d'autant que KI est moyenne proportionnelle entre AK, KB,* [b] *le rectangle AL, contenu sous les extremes AK, KB, sera egal au quarré de KI, c'est à dire au quarré de EH ;* [c] *(car EH, est egale à KI.) c'est à dire au quarré de CF ;* [d] *qui est la quarte partie du quarré de CD. Ce qui estoit proposé.*



[a] *schol.* 13. 6.
[b] 17. 6.
[c] 34. 1.
[d] *corol.* 4. 2.

Le mesme se fera ainsi par les nombres.

Soit AB 20. CD 18. [a] *puis que IH, est moyenne proportionnelle entre GH, & le reste du diametre ; IH, sera √q 19. ou KE, son egale. Donc BK, sera 10. − √q 19. mais KA, 10. + √q 19. Et soit multiplié AK,*

par KB, *le rectangle* LA, *sera* 81. *Mais le quarré de* CD, *est* 324. *Dont la quarte partie* 81. *est egale au rectangle* LA. *Or* LB, *est quarré, car le rectangle sous* AB, KL, *est* 200. — *Vq* 7600. *Mais le rectangle* LA, *estant osté d'icelury demeure l'espace* LB, 119. — *Vq* 7600. *lequel est quarré comme monstre l'analysie, dont le costé est* 10 — *Vq* 19.

LEMME 3.

S'il y a deux lignes droictes inegales, & qu'à la plus grande l'on applique vn rectangle egal au quart du quarré de la plus petite, deffaillant d'vne figure quarree, les segmens faicts par ceste application seront inegaux.

Soient les lignes droictes AB, CD, *& le reste faict, ainsi qu'il est dict en la precedente figure. Ie dis que* BK, *n'est egal à* AK. *Car s'ils estoient egaux, puis que par le lemme premier, le parallelogramme appliqué à* AB, *deffaillant de la figure quarree descrite de* KB, *est egal au rectangle contenu sous les segmens* AK, KB, *& le rectangle contenu sous* AK, kB, *soit quarré, ledit parallelogramme sera vn quarré descrit de* AK, *moitié de* AB; *& partant le quarré de* AB, *sera quadruple du mesme parallelogramme. Mais le quarré de* CD, *est aussi quadruple de mesme parallelogramme appliqué, c'est à dire de la quatriesme partie du quarré de* CD, *par l'hypothese. Donc les quarrez de* AB, CD, *sont egaux; & partant les lignes droictes* AB, CD, *egales. Ce qui est absurde, car elles sont posees egales.*

schol. a 4. 2.

xviij xiij

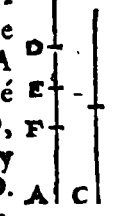
THEOREME 15. PROP. 18.

S'il y a deux lignes droictes inegales, & à la

plus grande l'on applique vn parallelogramme egal à la quatrieſme partie du quarré de la plus petite defaillant d'vne figure quarree, & qu'il diuiſe icelle plus grande en parties commenſurables en longitude: la plus grande pourra plus que la moindre du quarré d'vne ligne qui luy ſera commenſurable en longitude. Et ſi la plus grãde peut plus que la plus petite, du quarré d'vne ligne qui luy ſoit commenſurable en longitude, & qu'on applique vn parallelogrãme ſur la plus grande egal au quart. du quarré de la plus petite defaillant d'vne figure quarree, il diuiſera icelle en parties commenſurables en longitude.

Soient deux lignes droictes inegales AB, & C, & à la plus grãde AB, ſoit appliqué vn parallelogramme egal à la quatrieſme partie du quarré de C, defaillant de AB, d'vne figure quarree, & ſoit contenu ſous AD, DB, & qu'il face les ſegmens AD, DB, commenſurables en longitude. Ie dis que AB peut plus que C, du quarré d'vne ligne qui luy eſt commenſurable en longitude. D'autant que[b], AD eſt plus grande que DB: Soit diuiſee AB, en deux egalement au poinct E, & ſoit priſe EF egale à ED, cela eſtant puis que les toutes EA, EB ſont egales, & les retranchees EF, ED pareillement, les reſtes AF, BD, ſeront auſſi egales. Et d'autant que AB, eſt

diuisee egalement par E, & inegalement à D; e le rectangle sous AD, DB, auec le quarré de ED, sera egal au quarré de EB: Et partant 4. fois le rectangle sous AD, DB, & 4. fois le quarré de ED sera egal à 4. fois le quarré de EB. Mais le quar. de C, est egal à 4. fois le rect. sous AD, DB: (le rect. sous AD, DB, estant posé egal au quar. du quarré de C) d & le quarré de FD, est egal à 4. fois le quarré de ED, moitié de FD; d Et le quarré de AB, egal à 4. fois le quarré de EB, moitié de AB. Donc les quarrez de C, & FD, sont egaux au quarré de AB: Parquoy AB, peut plus que C, du quarré de FD.



e 5. 2.

d schol. 4. 2.

Ie dis aussi que FD, est commens. en longit. à AB: Car AD, DB, estant posees commens. en longit. e la toute AB, sera aussi commens. en longit. à sa partie DB: Mais la composee de DB, AF, est aussi commens. en longit. à DB, (la composee de AF, DB, egales estant double de BD.) Donc AB, & la composee de AF, DB estant commens. en longit. chacune à DB: f AB. & la composee de AF, DB, seront commens. en longit. entr'elles. Partant AB, composee de AF, DB, comme d'vne & de FD, estant commens. en longit. à la composee de AF, DB, sa partie; la mesme AB, sera g commens en longit. à la restante FD. Donc AB peut plus que C du quarré de FD commens. en longitude à AB.

e 16. 10.

f 12. 10.

g coral. 16. 10.

Maintenant, que AB, puisse plus que C, du quarré d'vne ligne commens. en longit. à icelle, & soit appliqué à icelle vn parallelogramme, comme dit est, faisans les segmens AD, DB.

Ie dis

Ie dis que A D, D B, ſont commenſ. en longit. entr'eux: Car demeurant la meſme conſtruction l'on demonſtrera pareillement que AB, peut plus que C du quarré de FD; Parquoy AB, eſtant poſee pouuoir plus que C, du quarré d'vne ligne droicte commenſ. en longit. à icelle; AB, ſera commenſ. en longit. à FD. Donc la toute AB, compoſee de FD, & AF, DB, comme d'vne eſtant commenſ. en long à FD, la meſme AB, [h] ſera auſſi commenſ. en longit. à la reſtante compoſee de AF, DB, mais la compoſ. de AF, DB, eſt auſſi commenſ. en longit. à DB, (eſtant double d'icelle) [i] donc AB, DB, eſtant commenſ. en longit. à la compoſee de AF, DB, ſeront commenſ. entr'elles: Partant la toute AB, compoſee de AD, DB, eſtant commenſ. en longit. à D B; [k] AD, DB, ſeront commenſ. en longit. entr'elles. Donc s'il y a &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.

h *corol.* 16. 10.
i 12. 10.

SCHOLIE.

Soit AB, 30. *C*, 24. *les ſegmẽts de* AB *ſont* 6. *&* 24. [a] *&* [b] *celle par laquelle la plus grande peut plus que la moindre eſt* 18. *commenſ. en longit. à* 30.

a *l.* 2. *lemme* 17. 10.
b 47. 1

THEOREMË 16. PROP. 19.

xviij
xiiij

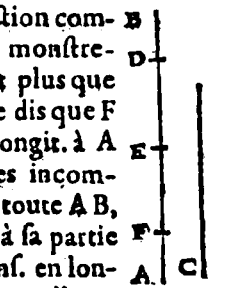
S'il y a deux lignes droictes inegales, & à la plus grande l'on applique vn rectangle egal à la quarte partie du quarré de la plus petite, deffaillant d'vne figure quarree; & qu'il diuiſe icelle en parties incommenſurables en longitude; la

plus grande pourra plus que la plus petite du quarré d'vne ligne qui ſera incommenſurable en longitude à icelle. Et ſi la plus grande peut plus que la plus petite du quarré d'vne ligne incommenſurable en longitude à icelle, & qu'on applique à la plus grande vn parallelogramme egal à la quarte partie du quarré de la moindre, defaillant d'vne figure quarree, il diuiſera icelle en parties incommenſurables en longitude.

a 2 *lemme* 17. 10. Soient 2. lignes droictes inegales AB & C, & à AB, plus grande ſoit appliqué vn parallelogramme egal à la quarte partie du quarré de la moindre C, defaillant d'vne figure quarree lequel face en AB, les parties AD, DB, incommenſurables en longit. Ie dis que AB, peut plus que C, du quarré d'vne ligne qui luy eſt incommenſurable en longitude.

Car ayant faict la conſtruction comme en la precedente, nous monſtrerons comme là, que AB peut plus que C, du quarré de FD. Et ie dis que FD, eſt incommenſurable en longit. à AB: car AD, DB, eſtant poſees incommenſurables en longis. b la toute AB, ſera incommenſ. en longit. à ſa partie DB: Mais DB, eſt commenſ. en longit. à la compoſee de AF, DB, (celle-cy eſtant double de celle-là) donc puis que de

b 17. 10.



lignes commēſ. DB,& la compoſee de AF,DB, l'vne,ſçauoir DB,eſt incommenſ. en longit. à AB: [c] la reſtante compoſ. de AF,DB,ſera auſſi incommenſ. en longit. à AB: Partant AB, compoſee de AF,DB,comme d'vne & de FD,eſtant incommenſ. en longit. à la compoſee de AF,DB, la meſme AB, [d] ſera auſſi incommenſ. en longit. au reſte FD:donc AB,peut plus que C, du quarré de FD, qui luy eſt incommenſurable en longitude. c 14.10. d corol. 17.10.

Maintenant, que AB puiſſe plus que C, du quarré d'vne ligne qui luy ſoit incommenſ. en longit. & qu'on applique à AB, vn parallelogramme egal au quart du quarré de C, defaillant d'vne figure quarree,& faiſant en AB, les parties AD,DB;Ie dis que AD, DB, ſont incommenſurables en longit. Car demeurant la meſme conſtruction nous monſtrerons comme auparauāt que AB,peut plus que C,du quarré de FD; parquoy puis que AB,eſt poſee pouuoir plus que C,du quarré d'vne ligne qui luy eſt incommenſ. en long. AB, ſera incommenſ. en long. à FD: Donc la toute AB, compoſee de FD,& de AF,DB, comme d'vne,eſtant incommenſ. en longit. à FD: La meſme AB, [e] ſera incommenſ. en longit. au reſte compoſ. de AF, DB: Mais la compoſee de AF, DB, eſt commenſurable en longitude à DB, (celle-là eſtant double de celle-cy) Donc puis que de 2. lignes commenſurables ſçauoir la compoſee de AF,DB,& DB; Icelle compoſ. de AF, DB,eſt incommenſ. en longitude à AB,[f] la reſtante DB, ſera incommenſ. en longit. à la meſme AB: partant la toute AB, compoſee de AD, e corol. 17.10. f 14.10.

g 7.10. DB, eſtant incommenſ. en longit. à DB, g icelles AD, DB, ſeront incommenſ. en longit. entr'elles. Parquoy s'il y a 2. lignes droictes inegales, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.

SCHOLIE.

Soit AB, 30. & C, 14. Donc les ſegments AD, DB, ſeront 15. + Vq 176. & 15. — Vq 176. incommenſurables entr'eux, a *comme il appert: Et ED, par laquelle la plus grande peut plus que la moindre eſt Vq 704. incommenſ. en longit. à 30. Il aduient de meſme de 12. Vq 96. Car les ſegments du plus grand ſont 6 + Vq 12. & 6 — Vq 16. & ce dont le plus grand peut plus que le moindre eſt Vq 48. incommenſ. en longit. à 12.*

a 2. lemme 17. 10.

Iuſques icy Euclide a traicté des grandeurs rationelles & irrationelles: Il traictera des rationelles & mediales cy apres.

LEMME. 1.

Eſtant monſtré que les lignes commenſ. en longit. le ſont auſſi en puiſſance: Mais que celles qui ſont commenſ. en puiſſ. ne le ſont pas touſiours en longit. Il eſt euident que s'il y a quelque ligne droicte commenſ. en longit. à la rationelle propoſee, qu'elle doit eſtre appellee rationelle & commenſ. à icelle non en longit. ſeulement, mais auſſi en puiſſance. Car les lignes commenſ. en longit. le ſont touſiours en puiſſ. Mais s'il y a quelque ligne commenſ. en puiſſ. & longit à la rationelle propoſee: elle ſera auſſi dicte rationelle & commenſ. à icelle en longit. & puiſſ. Et ſi derechef il y a quelque ligne commenſ. en puiſſ. à la rationelle propoſee, laquelle luy ſoy incommenſ. en longit. elle ſera dicte rationelle commenſ. en puiſſ. ſeulement à icelle.

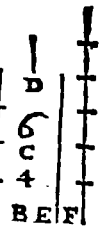
Lemme 2. de Proclus.

Il appelle rationelles, les lignes commenſ. en longit. & puiſſ. à l'expoſee rationelle, ou en puiſſ. ſeulement. Il y a auſſi d'autres lignes qui ſont incommenſ. en longit. à l'expoſee: mais commenſ. en puiſſ. ſeulement; Et partant ſont dictes derechef rationelles & commenſurables entr'elles, en tant que rationelles commenſ. diſ-je entr'elles en longit. & puiſſ. ou en puiſſ. ſeulement: Et ſi en longitude elles ſont dictes rationelles commenſ. en longit. entr'elles; afin que l'on les entende auſſi commenſ. en puiſſ. Mais ſi elles ſont commenſ. en puiſſ. ſeul. entr'elles; ſeront dictes rationelles commenſ. en puiſſ. ſeulement entr'elles.

SCHOLIE.

De ces choſes l'on peut colliger qu'il y a 3. ſortes de lignes rationelles commenſ. en longit. entr'elles. Car de 2. lignes rationelles commenſ. en longit entr'elles, l'vne eſt egale à la rationelle propoſee: & partant toutes 2. commenſ. en longit. à la rationelle; ou l'vne ny l'autre ne luy eſt egale, & toutesfois toutes 2. commenſurables en longitude à icelle rationelle propoſee. Ou finalement l'vne & l'autre eſt commenſ. à l'expoſee rationelle en puiſſ. ſeulement. Or l'on trouuera ces 3. ſortes de lignes comme s'enſuit. Soit A rationelle propoſee diuiſee en 4. parties egales, ſçauoir en autant qu'il y a d'vnitez au nombre B. Et prenant quelque autre nombre C, ſoit D, egale à vne des parties de A, & autant de fois que D meſure A, qu'elle en meſure auſſi quelque autre E, autant de fois. Et autant de fois que l'vnité eſt en C, que D, en meſurera auſſi quelque au-

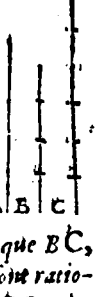
tre F. D'autant donc que A, E, sont composees de parties egales en multitude, & chacune desquelles parties est egale à D. Icelles seront egales. Derechef D, mesurant les 3. AEF, elles seront commens. en longit. Parquoy EF, estant commens. en longit. à la rationelle proposee A, sont rationelles. Mais elles sont monstrees commens. en longit. entr'elles estant D, leur commune mesure: Donc EF, sont trouuees rationelles commens. en longit. entr'elles & à l'exposee rationelle A. l'vne desquelles sçauoir E, est egale à icelle A.



Maintenãt que D, mesure 2. quelcõques lignes C, E par 2. nomb. FG, differens de B, en sorte que l'vne ny l'autre CE, ne soit egale à A. les 3. ACE, seront commens. en longit. comme a esté dit, ayant D, pour cõmune mesure. Donc CE, sont rationelles commens. en longit. à la ration. proposee A. Et le sont aussi entr'elles: Donc 2. lignes rationelles sont trouuees sçauoir CE, commens. en longit. entr'elles, & à la rationelle proposee A, Dont l'vne ny l'autre n'est egale à A, exposee rationelle.

a 11. 10. Finalement a soit trouuee B, incommensurable en longit. seulement à la rationelle exposee A; & ayant couppé B en tant de parties egalles que l'on voudra, soit prise C, composee de tant de parties egales que l'on voudra, chacune desquelles soit egale à vne des parties de B. Cel, estant BC, seront commens. en longit. & chacune sera commensurable en puiss. seulement à A. Car AB, estant commens. en puiss. le quarré de A, sera commens. au quarré de B: mais le quarré de C, est aussi commens.

au quarré de B, eſtant BC, commenſ. en longit. & partant en puiſſ. [b] *Donc les quarrez de A & C, ſeront auſſi commenſ. entr'eux. Parquoy C, eſt commenſ. en puiſſ. à A; & puis que des 2. BC, commenſ. en longit. l'vne ſçauoir B, eſt incommenſ. en longit. à A;* [c] *l'autre C, ſera auſſi incommenſ. en longit. à la meſme A. Donc C, eſt ſeulement commenſ. en puiſſ. à A, & puis que BC, commenſ. en puiſſ. à la rationelle expoſee A, ſont rationelles: L'on aura trouué 2. lignes rationelles, BC, commenſ. en longit. entr'elles. Mais commenſ. en puiſſ. ſeulement à la rationelle expoſee A. Ce qui eſt propoſé,*



b 12. 10.

c 14. 10.

Que ſi on deſire trouuer quelcõques lignes rationelles commenſ. en longit. entr'elles (voyez la 2 fig.) ſoit priſe quelconque meſure D, & ſoient compoſees tant de lignes que l'on voudra ACE: D'autant de parties egales à D, qu'il y a d'vnitez en autant de nombres inegaux BFG: Car ACE, ayans D, pour cõmune meſure ſeront commenſ. en longit.

Au reſte il eſt manifeſté que toutes les lignes rationelles ne ſont pas ſeulement commenſ. à vne expoſee rationelle: mais auſſi le ſont entr'elles. [d] *Car d'autant que les rationelles ſont celles qui ſont commenſ. à la rationelle propoſee, en longit. & puiſſance ou en puiſſ. ſeulement:* [e] *Mais celles-là leſquelles ſont commenſ. à vne meſme ſont auſſi commenſurables entr'elles. Il appert que quelconques lignes rationelles ſont commenſurables entr'elles.*

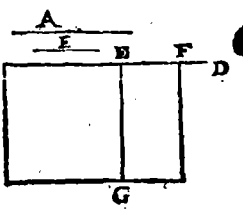
d 6. d.

e 12. 10.

LEMME 3.

S'il y a 2. lignes droictes propo. cõme la premiere ſera à la ſeconde; ainſi le quarré faict de

la premiere ſera au rectangle contenu ſous les 2. & comme la ſeconde à la premiere, ainſi le rectangle contenu ſous icelles au quarré de la premiere.



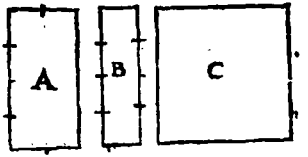
Soient les 2. lignes AB. Ie dis que comme A, eſt à B, ainſi le quarré de A au rectangle ſous AB. De CD, ſi grande qu'il ſera de beſoin ſoit priſe CE, egale à A, & du reſte ED, ſoit auſſi priſe EF, egale à B, & ſoit deſcrit CG, quarré de CE; & accomply le rectangle GF, contenu ſous CE, EF: [a] *D'autant donc que comme CE, à EF, c'eſt à dire A à B, ainſi le parallelogramme CG, c'eſt à dire le quarré de A, eſt au parallelog. GF, contenu ſous A & B: la propoſ. eſt manifeſte. Semblablement comme B, à A, ainſi le rectangle FG, au quarré GC. Ce qui eſt propoſé.*

a 1. 6.

LEMME 4.

L'eſpace ou ſuperf. commenſurable à vne eſpace rationel, eſt auſſi rationel.

Soit l'eſpace rationel A, commenſ. à l'eſp. ratio. B. Ie dis que A, eſt rationel: car ſoit C, quarré de la rationelle propoſee:

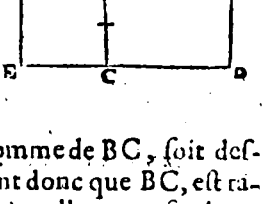


a 9. d. [a] *D'autant que B, eſt rationel, il ſera commenſ. au quarré rationel C: mais A, eſt auſſi commenſ. à B. Donc*
b 12. 10. *A & C,* [b] *eſtant commenſurables à B, ſeront commenſ. entr'eux. Partant l'eſp. A, eſtant cõmenſ. à C q. de la*
c 6. d. *rationelle propoſee,* [c] *eſt ratio. Ce qu'il falloit demõſtrer.*

THEOREME 17. PROP. 20. xix xv

Le rectangle contenu sous deux lignes rationelles commensurables en longitude, selon quelqu'vne des manieres deuant dictes ; est rationel.

Soit la rationelle exposee A, & le rectangle B D, contenu sous BC, CD, rationelles commens. en longit. selon quelqu'vne des manieres [a] cy deuant dictes. Ie dis qu'iceluy est rationel.



a *schol.* 19. 10.

Car de l'vne d'icelles comme de BC, soit descrit le quarré BE, D'autant donc que BC, est rationelle commens. à la rationelle proposee A, ou en longit. & puiss. ou en puiss. seulement : [b] son quarré BE, sera commens. au quarré de A; [c] Mais le quarré de A, est rationel, [d] donc BE, commens. à iceluy sera rationel : mais BC, c'est à dire EC, CD, estant commens. en longit. (car elles sont posees ration. commens. en longit. entr'elles.) Et comme [f] EC, est à CD, ainsi EB, à BD: [g] EB, BD, seront aussi commensurables ; [h] Parquoy BD, commensurable à l'espace rationel, BE, est aussi rationel. Donc le rectangle contenu sous deux lignes ration. commens. &c. Ce quil falloit demonstrer.

b 3 *d.* c 8 *d.* d 9. *d.* f 1. 6. g 10. 10. h 4. *lemme* 19. 10.

SCHOLIE.

Soit BC, 3. & CD, 4. le plan ED, sera 12, ou

bien soit la ligne BC, ℽq 3. & CD, ℽq 12. le rectangle BD, contenu sous BC, CD, sera ℽq 36. c'est à dire 6. Semblablement si on pose BC, ℽq 8. & CD, ℽq 18. le plan faict d'iceux est ℽq 144. C'est à dire 12. tous lesquels plans sont rationaux, ces nombres ayans mesme raison entr'eux que nombre q. à nombre q.

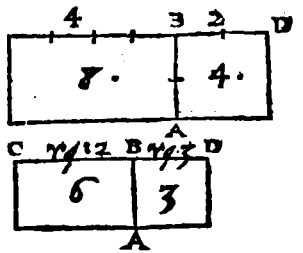
xx
xvj

THEOREME 18. PROP. 21.

Si vn rectangle rationel est appliqué à vne ligne rationelle: il faict la latitude rationelle commensurable en longitude à la ligne à laquelle il est appliqué.

C'est à dire si vn rectangle rationel a vn costé rationel, il aura aussi l'autre costé rationel, & iceux costez seront entr'eux commens. en longitude.

a 45. 1. Soit la rationelle AB, a à laquelle soit appliqué le rect. rationel AC, faisant la latitude BC. Ie dis que BC, est rationelle commensurable en longitude à AB.



Car sur AB, soit descrit le quarré AD, b lequel sera rationel: mais comme le rectangle CA, est au quarré AD: c ainsi CB, est à BD, ou à BA, son egale: Or le rectangle AC, & le quarré AD, sont rationaux: & partant commensurables. d Donc CB, & BD, ou BA, seront commensura-

b 8. d.
c 1. 6.
d 10. 10.

bles en longit. Mais AB, est rationelle, donc [c] 6. d.
[c]BC, sera aussi rationelle. Partant si vn espace rationel &c. Ce qu'il falloit demonstrer.

SCHOLIE.

Soit l'espace AC, 6. & la ligne droicte AB, √q 3. CB, sera √q 12. laquelle est commensurable en longit. à √q 3. estant double d'icelle. Derechef soit AC, 12. & la ligne droicte AB, √q 8. CB, sera √q 18. & √q 18. est à √q 8. comme 3. à 2. Car si √q 18. est diuisee par √q 8. le quotient sera √q 2. $\frac{1}{4}$ c'est à dire √q $\frac{9}{4}$ qui est $\frac{3}{2}$.

LEMME 1.

Vne ligne droicte pouuant vn espace irrationel est irrationelle.

Soit quelconque ligne droicte pouuant vn espace irrationel, c'est à dire que le quarré d'icelle soit egal à quelque superficie irrationelle. Je dis qu'icelle ligne est irrationelle: Car autrement le [a] quarré d'icelle [a] 10. 10.
sera rationel, ce qui est absurde, estant posé irrationel: Donc elle est irrationelle. Ce qui appert aussi par la 11. definition.

LEMME 2.

Trouuer 2. lignes droictes rationelles commensurables en puissance seulement.

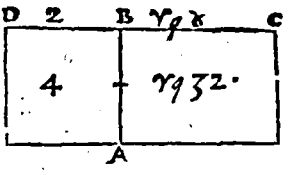
Soit trouuee [a] vne ligne droicte incommens. en longit. seulement à vne ligne droicte rationelle proposee, icelles seront les requises; Car estant commens. en puiss. seulement elles [b] seront aussi rationelles. [a] 11. 10. [b] 6. d. [d] 11. 10.

Et si à la ligne trouuee on trouue encore vn autre ligne incommens. en puiss. seulement moindre ou plus grande que la rationelle proposee [d] les 3. seront commens. en puiss. seulement. [c] Et partant rationelles. [c] 12. [c] 6. d.

THEOREME 19. PROP. 22.

xxj xix

Le rectangle contenu sous deux lignes droictes rationelles, commensurables en puissance seulement, est irrationel: & la ligne droicte pouuant iceluy est irrationelle. Soit icelle appellee mediale.



Soit le rectangle AC, contenu sous les 2. lignes rationelles AB, BC, cõmensurables en puissance seulement. Ie dis que AC, est irrationel, & la ligne qui peut iceluy est aussi irrationelle, & icelle soit appellee mediale: Car sur AB, rationelle soit descrit le quarré AD. [a] Donc AD, sera rationel; Et d'autant que AB, ou DB, son egale est incommensurable en longitude à BC, & que comme DB, est à BC, [b] ainsi DA, est à AC; [c] AD, sera aussi incommensurable à AC: mais le quarré AD, est rationel, donc [d] le rectangle AC, sera irrationel. [e] Partant la ligne droicte qui peut le rectangle AC: C'est à dire de laquelle le quarré est egal à AC, est irrationelle. Soit icelle appellee mediale, ou moyenne proportionelle entre AB, BC: D'autant que le quarré d'icelle [f] est egal au rectangle AC, contenu sous AB, BC. Donc le rectangle &c. Ce qu'il falloit demonstrer.

a 8. def.
b 1. 6.
c 10. 10.
d 10. d. e lem. 1. 21. 10.
f 17. 6.

SCHOLIE.

Il faut icy entendre que toute ligne moyenne proportionelle, entre deux lignes rationelles commenſ. entr'elles, en puiſſance ſeulement, ſera appellee mediale. [f] *Car puis que le quarré d'icelle eſt egal au rectangle contenu ſous telles lignes rationelles, lequel nous auons monſtré irrationel, le coſté d'iceluy ſçauoir la moyenne proportionelle entre icelles rationelles, ſera irrationelle, laquelle ſera appellee mediale. D'où nous deſcrirons facilement la ligne mediale diſans que:* C'eſt vne ligne irrationelle moyenne proportionelle entre 2. lignes rationelles commenſ. entr'elles en puiſſance ſeulement. Ou bien celle-là qui peut vn rect. contenu ſous 2. lignes rationelles commenſ. entr'elles en puiſſance ſeulement. Car ceſte ſeule ligne ſera appellee en ce lieu mediale. [f] 17. 6.

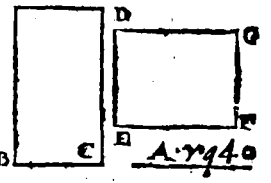
Et le quarré d'icelle ou rectangle irrationel qu'elle peut eſt auſſi medial, d'autant qu'il eſt moyen proportionel entre les quarrez d'icelles lignes rationelles commenſ. entr'elles en puiſſ. ſeulement: tout de meſme qu'icelle eſt moyenne proportionelle entre icelles lignes rationelles. Or tout rectangle medial n'eſt pas touſiours contenu ſous 2. lignes rationelles commenſ. en puiſſ. ſeulement, comme eſt le medial AC; comme il ſera monſtré à la 25. & 26. de ce liure.

Soit la ligne droicte AB, 2. & BC, Vq 8. le rectangle AC ſera Vq 32. lequel eſt irrationel, il ſera auſſi appellé medial. Or la ligne qui peut iceluy qui eſt Vqq 32. eſt appellee mediale.

xxij xx

THEOREME 20. PROP. 23.

Le quarré d'vne ligne mediale appliqué à vne ligne rationelle, faict la latitude rationelle, & incommensurable en longitude à la ligne à laquelle il est appliqué.



Soit la mediale A, & la rationelle B C, à laquelle soit a 45. appliqué le rectangle BD, egal au quarré de la mediale A, faisant la latitude ou costé CD. (Ou pour l'appliquer plus briefuement que par la 45. du 1. aux 2. lignes b 11. 6. BC, & A, soit trouuee la troisiesme proportio- c 17. 6. nelle CD, le rectangle BD, contenu sous BC. CD, sera egal au quarré de A,) Ie dis que CD, est rationelle, incommensurable en longitude à BC.

d 22. 10. Car d'autant que A, est mediale, d elle peut vn rectangle contenu sous deux lignes rationelles commensurables en puissance seulement. lequel soit EG, sous EF, FG, rationelles; mais e 14. 6. elle peut aussi BD, donc BD, & EG, sont egaux, & estant equiangles, ils auront les costez reciproques autour des angles egaux sçauoir comme BC, à EF, ainsi FG, à CD; Partant com- f 22. 6. me f le quarré de BC, au quarré de EF, ainsi le quarré de FG, au quarré de CD. Mais le quarré de BC, est commensurable au quarré de g 10. 10. EF; BC, EF, estant rationelles: g Donc le quar-

ré de FG, eſt auſſi commenſurable au quarré de CD, donc FG, CD, ſont au moins commenſurables en puiſſance; Mais FG, eſt poſee rationelle. Donc CD, ſera auſſi rationelle. Ie dis auſſi qu'elle eſt incommenſurable en longitude à BC: Car d'autant que EF, FG, ſont rationelles commenſurables en puiſſance ſeulemẽt, & comme EF, à FG, h ainſi le quarré de EF, au rectangle EG; ile quarré de EF, ſera incommenſurable au rectangle EG: & partant auſſi au rectangle BD. Mais le quarré de EF, eſt commenſurable au quarré de CD, (EF, CD, eſtant monſtrees rationelles) Donc le k quarré de CD, & le rectãgle BD, ſont incommenſurables: mais le quarré de CD, eſt au rectangle BD, comme CD, à BC. m Donc CD, BC, ſont incommenſurables en longitude: Donc CD, eſt rationelle commenſurable en puiſſance ſeulement à la rationelle BC, c'eſt à dire incommenſurable en longitude. Ce qu'il falloit demonſtrer.

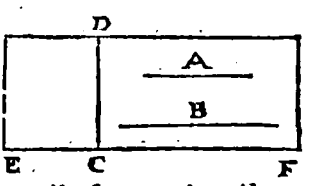
h 3. 11. 19. 10.
i 10. 10.
k 13. 10. 13. 11. 19. 10.
m 10. 10.

SCHOLIE.

Soit le quarré de A, γq 40. *&* BC, 2. *Donc ſi l'on applique à* BC, γq 40. *la latitude qu'elle ſera: c'eſt à dire, l'autre coſté* CD, *ſera* γq 10. *leſquels ſont entr'eux, comme* 5: 2. *qui n'eſt comme nombre quarré à nombre quarré, & partant incommenſurables en longitude: mais commenſurables en puiſſance. Derechef ſoit* CE, γq 5. *à laquelle* γq 40. *appliquee ſera* γq 8. *pour la latitude ou coſté* CD, *qui ſont entr'eux comme* 5. *à* 8, *& partant commenſ. en puiſſ. ſeulement comme il eſt dit.*

THEOREME 21. PROP. 24.

La ligne droicte commensurable à vne ligne mediale, est aussi mediale.



Soit A, mediale & à icelle A, soit B, commensurable. Ie dis que B, est mediale.

Car soit exposee CD, rationelle, à laquelle soit appliqué le rectangle DE, egal au quarré de la mediale A, faisant la latitude EC; Donc EC, est rationelle incommensurable en longitude à CD. De rechef à CD, soit appliqué le rectangle DF, egal au quarré de B, faisant la latitude CF. Donc d'autant que A & B, sont posees commensurables, leurs quarrez: c'est à dire les rectangles DE, DF, egaux à iceux seront commensurables: mais comme ED. à DF, ainsi la ligne EC, est à CF. Donc EC, CF, sont commens. en longitude: Mais EC, est demonstree rationelle & incommensurable en longitude à CD; donc CF, est aussi rationelle, & incommensurable en longitude à CD. Donc EC, CF, sont rationelles commensurables en puiss. seulement; & partant la ligne droicte B, pouuant le rect. DF, contenu sous icelles CD, CF, est mediale. Ce qu'il falloit demonstrer.

a 45. 1.
b 23 10.
c 1. 6.
d 10.10.
e 14. 1.
f 22.10.

COROLLAIRE.

De ceste demonstration, il est manifeste qu'vn espace

espace medial commensurable à vn espace medial est aussi medial : car apres qu'il a esté demõstré que DF, est commensurable au rect. medial DE; de là on a monstré que DF, est aussi medial contenu sous les rationelles CD, CF, commens. en puissance seulement.

SCHOLIE.

Soit $\mathcal{A}\sqrt{qq}$ 48. & B $\sqrt{qq}$ 243. CD 3. *Donc* EC, *sera* $\sqrt{q}$ 5. $\frac{1}{3}$ *mais* DF, $\sqrt{q}$ 27. *lesquelles sont entr'elles comme* 4. *à* 9. *Mais si* $\mathcal{A}$ *estoit* $\sqrt{q}$ 12. & B $\sqrt{q}$ 27. & CD 3. EC, *seroit* $\sqrt{q}$ $3\frac{1}{3}$ & CF, $\sqrt{q}$ 3. *lesquelles sont comme* 2. *à* 3.

LEMME 1.

Ce qui a esté dit des lignes rationelles au lẽme de la 19. propo. sera icy dit des mediales : sçauoir que la ligne droicte commens. en longit. à vne mediale sera aussi mediale & commens. à icelle, non seulement en longit. mais aussi en puissance : Car vniuersellement les lignes commeusurables en longit. sont aussi commensurable en puiss. mais s'il y a quelque ligne droicte commensurable en longit. & puiss. à vne ligne mediale, elle sera dicte mediale commens. à icelle en longitude & puissance : Que si quelque ligne est commens. à vne mediale en puiss. & incommens. à icelle en longit. elle sera aussi dicte mediale commensurable en puissance seulement à icelle.

LEMME 2.

Trouuer deux lignes droictes mediales commensurables en longitude : semblablement en trouuer deux commensurables en puissance seulement.

Soit vne mediale A, à laquelle soient trouuees deux lignes droictes commens. B & C; celle-là en longitude, & celle-cy en puissance; l'vne & l'autre BC, commens. à la mediale A, sera mediale. Donc puis que A & B sont commensurables en longitude, & A, C, en puissance seulement: les lignes A, B, serant trouuees mediales commens. en longit. & A, C, aussi mediales commensurables en puiss. seulement. Ce qui est proposé.

A ——————
B ——————
C ——————

a 24.10.

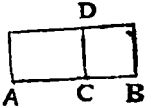
SCHOLIE.

Combien que toute ligne droicte commensurable à vne mediale, soit mediale; toutesfois toute ligne mediale n'est pas commensurable à quelconque ligne mediale que ce soit; D'autant que deux mediales se peuuent trouuer, lesquelles sont totalement incommensurables, scauoir est en longitude & puissance, comme il est manifeste par la 36. proposition de ce liure par laquelle est monstree la maniere de trouuer deux mediales incommens. en longitude & puissance.

THEOREME 22. PROP. 25.

Le rectangle contenu sous deux lignes droictes mediales, commensurables en longitude, est medial.

Soit le rectangle AD, contenu sous les mediales AC, CD, commens. en longitude. Ie dis que AD, est medial: Car sur la mediale CD, soit descrit le quarré BD, lequel sera



medial. [a] Et d'autant que comme AC, eſt à CB, ainſi AD, à DB: Mais AC, CB, c'eſt à dire AC, CD, ſont commenſurables en longitude, AD, DB, ſeront auſſi commenſurables: Partant l'eſpace AD, commenſurable à l'eſpace medial DB: [b] eſt medial: Donc le rect. &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.

a 1. 6.

b *corol.* 24. 10.

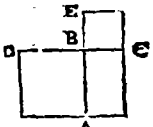
SCHOLIE.

Soient les mediales commenſ. en longit. AC, *Vqq* 32. *&* CD, *Vqq* 2. *le rectangle* AD, *contenu ſous icelles ſera Vqq* 64. *c'eſt à dire Vq* 8. *Car Vqq* 32. *& Vqq* 2. *ſont commenſ. en longit. ſçauoir comme* 2. *à* 1. *car ſi on diuiſe Vqq* 32. *par Vqq* 2. *le quotient ſera Vqq* 16. *c'eſt à dire* 2.

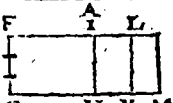
THEOREME 23. PROP. 26.

XXV
XXIIJ

Le rectangle contenu ſous 2. lignes droictes mediales commenſurables en puiſſance ſeulement; eſt rationel ou medial.



Soit le rectangle AC, contenu ſous les mediales AB, BC, commenſ. en puiſſ. ſeulement. Ie dis que AC, eſt rationel ou medial.



Car de AB, BC, mediales ſoient deſcrits les quarrez AD, CE, [a] leſquels ſeront mediaux. Et ſoit expoſee la rationelle FG, [b] à laquelle ſoient appliquez les rectangles FH, HL, LM, egaux à AD, AC, CE; [c] FM, ſera vn ſeul rectangle. Et AD, CE, eſtant mediaux, leurs egaux rectangles FH, LM, ſeront auſſi mediaux,

a *ſchol.* 22. 10.

b 45. 1.

lesquels appliquez à [c]FG, KL, rationelles (car KL, est egale à FG) & faisant les latitudes GH, KM; [d] les lignes GH, KM, seront rationelles incommuens. en longit. à FG; ou KL. Et d'autant que AB, BC, sont commens. en puiss. entr'elles, leurs quarrez AD, CE, & partant leurs egaux rectangles FH, LM, seront commens. [e] Mais comme FH, à LM, ainsi GH, à KM, [f] donc GH, KM, seront commens. en longit. Donc puis qu'il est monstré que GH, KM, sont rationelles & commens. en longit. entr'elles, & commens en puiss. seulement à la rationelle proposee, estant monstrees incommēsurables en longitude à icelle; [g] le rectangle sous GH, KM, sera rationel [h] Et d'autant que comme DB, est à BC, ainsi AD, à AC: & comme AB, à BE, ainsi AC, à CE; (DB, BC, estant egales à AB, BE, chacune à la sienne) comme AD, sera à AC, ainsi AC, à CE: Partant AD, AC, CE, seront proportionaux; Parquoy FH, HL, LM, leurs egaux rectangles sont conti. proportionaux: [i] mais GH, HK, KM, sont en mesme raison que les rect. FG, HL, LM, elles seront dōc proportionelles, [l] & le rectangle contenu sous GH. KM, est egal au quarré de HK: mais le rect. sous GH, kM, est monstré rationel: Donc le quarré de HK, sera aussi rationel, donc HK, sera rationelle, [m] & partant commensurable à FG, exposee rationelle ou à son egale HI, sçauoir en longitude & puissance ou en puiss. seulement: Et si HK, est commensurable en longit. à HI; c'est à dire à son egale FG, [n] le rect. IK, ou son egal AC, sera rationel, & si en puiss. seulement, [o] le rectangle IK, sera medial, ou son egal AC: Donc le rectangle AC, contenu

c 34. 1.
d 23. 10.
e 1. 6.
f 10. 10.
g 10. 10.
h 1. 6.
i 1. 6.
l 17. 6.
m 6. d.
n 20. 10.
o 22 12.

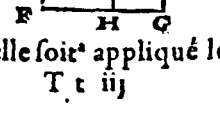
sous AB, BC, mediales commens. en puissance seulement est rationel ou medial. Partant le rect. contenu &c. Ce qu'il falloit demonstrer.

SCHOLIE.

Soient AB, BC, mediales com. en puiss. seulemẽt & soit AB, √qq 54. & BC, √qq 24. le rect. sous icelles sera 1296. i. 6. qui est rationel. Derechef soit AB, √qq 128. BC √qq 72. le rect. d'icelles sera √qq 9216. i. √qq 6. medial. Or que √qq 54. & √qq 24. Item √qq 128. & √qq 72. soient commens. en puiss. seul. il appert: Car si on diuise √q54. par √qq 24. le quotient sera √qq 2/4 c'est à dire √q 1/2 Donc √qq 54. sera à √qq 24. comme √q 3. à √q 2. Derechef si √qq 128. est diuisee par √qq 72. prouiendra √q 4/3 Partant √qq 128. & √qq 72. seront entr'elles, comme √q 4. à √q 3. Ce qui sera aussi manifeste par la 28. & 29. propositions.

THEOREME 24. PROP. 27. xxij xxij

Vne espace ou figure Mediale, n'excede pas vne figure mediale, d'vne figure Rationelle.



Soit A B, figure mediale, laquelle excede la mediale A C, de la figure DB. Ie dis que DB, n'est pas rationelle.

Car soit DB, rationelle, s'il est possible: & soit exposee la rationelle EF, sur laquelle soit[a] appliqué le [a] 45. 1.

rectangle EG, egal à la mediale AB, & le rectangle EH, egal à la mediale AC, par ainsi le reste HI, sera egal à la rationelle DB. Et EG, EH, seront mediaux estant egaux aux mediaux AB, AC, & HI, rationel, estāt egal à la fig. rationelle DB, & EG, EH, estant appliquez sur la rationelle EF, [b] ils auront les autres costez FG, FH, rationaux incommens. en longit. à EF. Derechef puis que HI, rationel est appliqué à la rationelle EF, [c] c'est à dire à HK, son egale; la ligne [d] HG, sera rationelle cōmens. en longit. à la mesme EF, ou HK. Mais FH, est rationelle incommensurable en longitude à EF. [e] Donc FH, est incommensurable en longitude à HG: [f] mais comme FH, à HG, ainsi le quarré de FH, au rectangle contenu sous FH, HG, [g] donc le quarré de FH, est incommens. au rectangle contenu sous FH. HG. Mais les quarrez de FH, HG, sont commensurables entr'eux, (car l'vn & l'autre sont descrits sur les rationelles FH, HG) & [h] partant les deux quarrez FH, HG, ensemble sont commens. au quarré de FH; Et 2. fois le rectangle sous FH, HG, est commensurable au rectangle FH, HG, l'vn estant double de l'autre. Donc les deux quarrez de FH, & HG, ensemble [i] sont incommensurables à deux fois le rectangle sous FH, HG. Donc le composé des quarrez FH, HG, & du rectangle deux fois sous FH, HG, c'est à dire le quarré de FG, egal [k] à iceux quarrez & rectangles, [l] est incōmensurable au cōposé des quarrez FH, HG, [m] lequel est rationel estant commensurable au quarré rationel de FH. Donc puis que le quarré de FG, est incommēsurable au composé des deux quar-

b 23.10.
c 34.1
d 21.10.
e 14.10.
f *lem.* 3. 19.10.
g 10 10.
h 16.10.
i *schol.* 14. 10.
k 4. 2.
l 17.10
m *lem.* 4 12 10

rez FH, HG, qui eſt rationel; il ſera irrationel, & FG, irrationelle; Ce qui eſt abſurde, car elle a eſté monſtrée rationelle cõmenſ. en longit. à EF. Donc HI, ou ſon egal DB, n'eſt pas rationel. Donc vne figure &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.

n 10. d.
o 11 d.

SCHOLIE.

Soit AD, CB, prinſes pour vne ſeule ligne Vqq 19683. mais AD, Vqq 3888. & CD, Vqq 1875. Donc le rect. gle AB, ſera Vq 6075. & AC, Vq 2700. eſtant celuy-cy de celuy-là reſtera DB, Vq 675. L'on trouuera le meſme rect. eſtant AD, de AD, CB, comme d'vne, & multipliant la reſtante CB Vqq 243. par DC, le rect. DB, ſera auſſi Vq 675. Et ſi la rationelle EF, eſt 3. FH, ſera Vq 300. & HG, Vq 75. Or que DB, ſoit mediale il eſt manifeſte par les nombres.

AVTRE SCHOLIE

Vne figure rationelle excede vne figure rationelle d'vne figure rationelle. Car que EG, figure rationelle excede EH, rationelle de HI. Ie dis que HI, eſt rationelle; Car EG, EH, eſtant ration. [a] elles ſeront commenſ. au quarré de la rationelle EF, [b] & partant commenſ. entr'elles. Donc le tout EG, compoſé de EH, KG, eſtant commenſ. à EH, [c] il ſera auſſi commenſ. à l'autre partie KG. Mais EG, eſt rationel: [d] dont KG, ſera auſſi rationel. Ce qui eſt propoſé.

a 9 d.
b 12. 10.
c corol. 16. 10.
d lem 4. 19. 10.

PROBLEME 4. PROP. 28.

xxvij o.

Trouuer deux lignes mediales, commenſurables en puiſſance ſeulement; contenant vn rectangle Rationel.

a *lem* 2. 21 10. b 13.16. c 12.6. Soient exposees [a] les deux rationelles AB, commens. en puissance seulement, [b] & soit trouué C, moyenne propor. entre A & B, & comme A, est à B, [c] ainsi C, soit à D. Ie dis que CD, sont mediales commensurables en puissance seulement, lesquelles contiennent vn rectangle rationel.

Car puis que AB, sont posees rationelles cõmens. en puissance seulement [d] le rectangle contenu sous AB, sera irrationel appellé medial; [e] Mais C, peut iceluy rectangle, partant elle sera mediale: Et puis que comme A est à B, ainsi C à D, & AB, sont commens. en puiss. seulement [f] CD seront aussi commens. en puiss. seulement: & [g] partant D, commensurable à la mediale C, sera aussi mediale.

d 22.10. e 17.6. f 10.11. g 14.10.

A
C
B
D

Donc nous auons trouué CD, mediales commensurables en puissance seulement. Ie dis qu'elles contiennent vn rectangle rationel: Car puis que A est à B, comme C, à D, en changeant A sera à C comme B, à D: mais comme A à C, ainsi C à B; Donc C sera aussi à B, cõme B à D: partant B, moyenne propart. entre C & D, pourra [h] le rectangle cont. sous CD, mais le quarré de B, ligne rationelle est rationel; donc le rectangle sous CD, sera aussi rationel. Partãt nous auons trouué CD, mediales commensurables en puissance seulement, qui contiennent vn rectangle rationel. Ce qu'il falloit faire.

h 17.6.

SCHOLIE.

Soit A. vq 20. *B vq* 12. *partant C, moyenne pro-*

port. ſera Vqq 240. Et A eſtant à B, comme C, à D; D, ſera Vqq 86. $\frac{2}{3}$ Mais Vqq 240. & Vqq 86. $\frac{2}{3}$ ſont commenſ. en puiſſ. ſçavoir comme 5. à 3. Et le rect. contenu ſous icelles eſt Vqq 20736. c'eſt à dire 12. egal au quarré de Vq 12. qui eſt auſſi 12. Semblablement ſi A, eſtoit Vq 20. & B Vq 80. C ſeroit Vqq 32000. & D Vqq 1280. & le rect. ſous CD, eſt Vqq 40960000. c'eſt à dire 80 egal au quar. de Vq 80. qui eſt auſſi 80.

PROBLEME 5. PROP. 29. xxviij

Trouuer deux lignes mediales commenſurables en puiſſance ſeulement; leſquelles contiennent vn rectangle Medial.

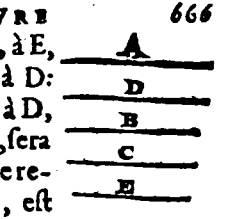
Soient[a] priſes les trois rationelles A, B, C, commenſurables en puiſſance ſeulement; [b] & entre A & B, ſoit trouuée la moyẽne proportionelle D, puis ſoit faict[c] comme B à C, ainſi D à E. Ie dis que D & E, ſont mediales commenſurables en puiſſance ſeulement, & contiennent vn rectangle Medial. a *lem.* 2. b 21. 10. c 13. 6. c 12. 6.

Car puis que A & B ſont Rationelles commenſurables en puiſſ. ſeulement, le rectangle ſous A & B, & partant le quarré de D egal[d] à iceluy[e] ſera irrationel, lequel eſt dit Medial, & la ligne D, pouuant iceluy mediale. Et puis que B, eſt à C, comme D à E, & B, C, ſont rationelles cõmenſ. en puiſſance ſeulement [f] D & E, ſont auſſi commenſ. en puiſſance ſeul. Donc puis que D, eſt mediale, gE, commenſ. en puiſſ. ſeulement à D, ſera auſſi mediale. Ie dis que D & E, contiennent vn rectangle medial. Car d'au- d 17. 6. e 22. 10. f 10. 10. g 24 10.

tant que B est à C, comme D, à E, en changeant comme B, sera à D: ainsi C à E; mais comme B, à D, ainsi D à A; donc comme D, sera à A, ainsi C, sera à E. h Donc le rectangle contenu sous D & E, est egal au rect. sous AC: mais le rect. contenu sous A, C, rationelles commens. en puissance seulement est irrationel & medial. i Donc le rectangle sous DE, est aussi medial, donc D, E, sont les mediales requises. Ce qu'il falloit faire.

h 16. 6.

i 21. 10.



SCHOLIE 1.

Soit A 20. B Vq 200. C Vq 80. Partant D, moyenne proport. sera Vqq 80000. Mais comme B à C, ainsi D, à E, laquelle sera Vqq 12800. Or Vqq 80000. & Vqq 12800. sont comme 5. à 2. & partant commens. en puiss. Et le rect. contenu sous icelles est Vqq 1024000000. c'est à dire Vq 32000. egal au rect. contenu sous 20. & Vq 80.

SCHOLIE. 2.

Ce probleme est necessaire à ce qui est cy-apres.

Trouuer deux nombres plans semblables.

Soient pris 4. nombres quelconques proportionaux, A, B, C, D, sçauoir que A, soit à C, comme B à D. Or A multipliant B, face E, & C, multipliant D, face F; EF, seront nombres plans semblables, attendu qu'ils ont les costez proportionaux, comme il est manifeste par la construction.

A, 6.	C, 12.
B, 4.	D, 8.
E, 24.	F, 96.

a 18. 29. prop. *Or a puis qu'il a esté demonstré*

au 9. l. que si vn nombre impair, ou vn nombre pair, multiplie vn nombre pair, il sera produit vn nombre pair. Mais si vn nombre impair multiplie vn nombre impair, il produira vn nombre impair; Il est manifeste par quelle maniere l'on pourra trouuer 2. nombres plans semblables, lesquels soient tous deux nombres pairs, ou tous deux impairs: ou bien l'vn soit pair & l'autre impair. Car si les costez pris sont nombres pairs, leurs plãs seront aussi pairs; mais si les nombres sont impairs, leurs plans seront aussi impairs, mais si les costez d'vn des nombres sont nombres impairs, & les costez de l'autre sont pairs, le nombre plan de ceux-là sera impair: mais de ceux-cy pair. Semblablement ce seront plans pairs, si vn chacun à vn costé nombre pair, & l'autre impair &c.

LEMME 1.

Trouuer deux nombres quarrez tels, que le composé des deux, soit aussi nombre quarré.

Soient b *trouuez 2. nombres plans semblables AB, & C, tous deux pairs ou tous deux impairs.* c *Et d'autant que si on oste vn nombre pair d'vn nombre pair, ou d'vn nombre impair vn nombre pair le reste est pair; ayant osté BD de AB, lequel DB, soit egal à C, le reste AD, sera pair, lequel diuisé en deux egalement à E. Ie dis que le nombre faict de AB, en BD,* d *lequel est nombre quarré, composé auec le quarré du nombre ED,* A...5..E..5...,D...8....1B18 *faict vn nombre quarré.* C.....8

Car d'autant que le nombre AD, est diuisé en deux egalement par E, & à

b *schol. preced.*
c *14. & 15. 9.*
d *1. 9.*

e 6. the. 14. 9. ou 6 2. *iceluy eſt adiouſté DB, le nombre produit de AB, en BD, auec le quarré du nombre DE, eſt egal au quarré du nombre EB. Donc les deux nombres quarrez, ſçauoir celuy qui eſt faict de AB, en BD, & le quarré du nombre DE, compoſez, ſont vn nombre quarré ſçauoir celuy qui eſt produit de BE. Ce qui eſt propoſé.*

COROLLAIRE

De ce qui eſt dit cy-deſſus il eſt manifeſte que lors que AB, & C, ſont ſemblables, en la meſme maniere l'on a trouué les deux quarrez des nombres BE, ED; l'excez deſquels, ſçauoir le nombre faict de AB, en BD, eſt auſſi nombre quarré.

Mais ſi on prend les nombres AB, & C, non ſemblables & neantmoins tous deux pairs ou impairs; en la meſme maniere l'on aura trouué les deux quarrez des nombres BE, ED, l'excez deſquels ſçauoir le nombre qui eſt faict de AB, en BD; n'eſt pas nombre quarré. Car s'il eſtoit nombre quarré: f les nombres AB, BD, c'eſt à f 2. 9. dire AB & C, ſeroient plans ſemblables. Ce qui eſt abſurde: car ils ſont poſez non ſemblables.

SCHOLIE.

Partant s'il faut trouuer 2. nombres quarrez l'excez deſquels ſoit auſſi nombre quarré; nous prendrons comme auparauant 2. nombres plans ſemblables, tous 2. pairs ou impairs, comme AB & C, & ferons au reſte comme il eſt dit au lemme prochain 1. Car les quarrez de BE, ED, ſont les requis. Car le quarré de BE excede

le quarré de ED, du nombre produit de AB en BD, qui eſt auſſi quarré.

A...5...E..5...D...8.....B
.....8

Mais s'il faut trouuer deux quarrez dont l'excez ne ſoit quarré : Il faudra prendre 2. nombres plans AB, & C, non ſemblables, tous deux pairs ou impairs, & faire au reſte comme il eſt dit : Car il ſera monſtré ſemblablement que le quarré de BE, eſt egal au quarré de DE, auec le nombre produit de AB, en BD; partant l'excez des quarrez de BE, & ED, eſt le nombre produit de AB, en BD, lequel n'eſtant quarré ; (car s'il eſtoit quarré, AB, BD ſeroient plans ſemblables: ce qui eſt contre l'hypotheſe) l'on a trouué le requis.

A.3...E.3..D..7.....B
C...7.....

Nous ferons ce dernier plus facilement, ſi nous diuiſons quelconque nombre quarré en deux nombres, l'vn deſquels ſoit quarré, & l'autre non. Comme ſi 36. eſt diuiſé en 16. nombre quarré, & 20. non quarré ; le nombre quarré 36. excedera le nombre quarré 16. du nombre 20. non quarré. Pareillement 36. eſtant diuiſé en 25. & 11. le quarré 36. excedera le quarré 25. du nombre non quarré 11. & ainſi des autres.

LEMME 2.

Trouuer deux nombres quarrez, tels que le compoſé d'iceux ſoit nombre non quarré.

Soient trouuez deux nombres plans ſemblables AB, & C pairs ou impairs, & ſoit faicte la conſtruction en ſorte que le quarré faict de la multiplication des nõbres ſemblables AB, DB, l'vn par l'autre, auec le quar- a 2. lem. preced.

ré de DE, soit egal au quarré de BE, puis soit retranché de DE, l'vnité EF. Donc le quarré de DF, sera moindre que le quarré de BE, puis que le costé DF, est moindre que le costé DE. Ie dis que les nombres quarrez, l'vn desquels est faict de AB, en BD, & l'autre de DF, par soy-mesme; composez ne font pas vn nombre quarré.

Car si le compose d'iceux est quarré, il sera plus grand que le quarré de BF, ou egal ou moindre, ce qui ne se peut. Car s'il est plus grand que le quarré de BF, le costé d'iceluy sera plus grand que le costé BE; partant egal au nombre BE, ou plus grand. (Car il ne sera moindre, puis qu'entre BE, BF, differents de l'vnité, il n'y a poinct de milieu, afin de ne diuiser l'vnité; mais ledit costé serait milieu entr'eux, s'il estait posé plus grand que BF, & moindre que BE.) S'il est dit egal, de sorte que le nombre quarré composé d'un quarré de AB, en BD, & du quarré de BF; soit egal au quarré de BE, puis que le nombre produit de AB, en BD, auec le quarré de DE: b est monstré egal au mesme quarré de BE, le nombre de AB, en BD, auec le quarré de DF, sera egal au nombre faict de AB, en BD, auec le quarré de DE: estant donc le commun sçauoir celuy de AB, en BD, le restant quarré de DF, sera egal au restant quarré de DE: & partant le costé DF, egal au costé DE, la partie à son tout. Ce qui est impossible: Donc le costé du quarré composé des quarrez, dont l'vn est faict de AB en BD, & l'autre de DF par soy-mesme, n'est egal au nombre BE. Mais il n'est aussi plus grand: car s'il est possible soit egal à BI, qui soit plus grand que BE, de sorte que ce dit nombre quarré composé soit egal au quarré de BI.

A.a.H..2I.i. E. F.i. G..3.D...8.....B
C.....8

b lem. prece.

D'autant donc que le quarré de BI, plus grand costé est plus grand que le quarré de BE, moindre costé: Pareillement le composé des quarrez dont l'vn est produict de AB, en BD, & l'autre de DF, par soy-mesme (puis que ce composé est posé egal au quarré de BI) sera plus grand que le quarré de BE. Mais le quarré de BE [c] *est monstré egal au nombre faict de AB en BD, auec le quarré de DE: ostant donc le cõmun de AB, en BD, le restant quarré de DF, sera plus grand que le restant quarré de DE, & partant le costé DF, plus grand que le costé DE; la partie que le tout. Ce qui est impossible: donc le costé du quarré composé des quarrez de AB, en BD, & de DF, par soy-mesme, n'est pas plus grand que le costé BE; mais il est aussi monstré qu'il n'est pas egal ny plus petit que BE. Donc ce dit quarré composé n'est pas plus grand que le quarré de BF.*

[c] lem. [prec.]

Mais s'il est possible soit le nombre de AB, en BD, auec le quarré de DF, egal au quarré de BF; & soit mis le nombre AH, double de l'vnité EF. D'autant que le tout AD, est double du tout ED (car AD est diuisé en deux egalement par E) & le retranché AH, double de l'vnité retranchee EF; le reste HD, sera aussi double du reste FD, & partant HD est diuisé en 2. egalement à F: [e] *Parquoy le nombre faict de HB, en BD, auec le quarré de DF, est egal au quarré de BF. Mais le nombre faict de AB, en BD, auec le quarré de DF, est posé egal au mesme quarré de BF. Donc le nombre faict de HB, en BD, auec le quarré de DF, est egal à celuy qui est faict de AB, en BD, auec le quarré de DF: & ayant osté le commun quarré de DF, le nombre faict de HB, en BD, demeurera egal à celuy que est faict de AB, en BD. Partant puis que HB, AB, multiplians vn mesme nõb. BD, produisent nõbres egaux,* [f] *& que les multiplians ont mesme propors. que les produicts, &*

[d] 7. 7. [e] 6. the. [14. 9.]

[f] 18. 7.

B, ſera egal à AB, la partie au tout, ce qui eſt impoſſible. Donc le nombre de AB, en BD, auec le quarré de DF, n'eſt egal au quarré de BF.

Soit finalement s'il eſt poſſible, le nombre de AB, *en* B *D, auec le quarré de DE, moindre que le quarré de BF, & partant le coſté d'iceluy moindre que le coſté de* BF, *lequel ſoit* B *G, de ſorte que le nombre de AB, en* BD, *auec le quarré de DF: ſoit egal au quarré de BG. Or ſoit pris AI, double de EG. D'autant donc que le tout AD, eſt double du tout* ED, *& le retranché AI, du retrãché EG: Derechef le reſte* ID, *ſera double du reſte GD, & partãt I D ſera diuiſé en* G, *en deux egalement;* g *Donc le nombre produit de IB, en* BD, *auec le quarré de DG, eſt egal au quarré de BG. Mais le nombre faict de* AB *en* BD, *auec le quar. de DF eſt poſé egal au meſme quarré de BG. Donc le nombre faict de IB, en* BD, *auec le quarré de* DG, *eſt egal au nombre faict de* AB, *en* BD, *auec le quarré de* DF, *eſtant donc les quarrez de* DG, DF: *Dont le quarré de* DG, *eſt le moindre, demeurera celuy qui eſt faict de IB, en* BD, *plus grand que celuy de AB, en* BD, *la partie que le tout, ce qui eſt abſurde. Donc le nombre faict de AB, en* BD, *auec le quarré de* DF, *n'eſt moindre que le quarré de* B F: *Mais il eſt auſſi monſtré n'eſtre plus grand, ny egal. Dont le nombre faict de AB en* BD, *auec le quarré de* DF, *n'eſt pas nombre quarré. Ce qui eſt propoſé.*

g the. 6. 14. 9.

SCHOLIE. 3.

De ces choſes nous trouuerons facilement deux nombres, tels que le compoſé des deux n'ayt meſme proportion à l'vn ny à l'autre d'iceux, que nombre quarré à nombre quarré. Car ſi on trouue deux nombres quarrez ſelon le lemme precedent, tels que le compoſé d'i-

ceux

ceux ne ſoit quarré. Icelluy n'aura meſme proportion à l'vn ny l'autre deſdits quarrez, que nombre quarré à nombre quarré.

Nous obtiendrons la meſme choſe ſi nous diuiſons quelconque nombre quarré en deux nombres non quarrez: ainſi le quarré total n'aura meſme proportion à l'vn ny à l'autre de ceux auſquels il eſt diuiſé, que nombre quarré à nombre quarre.

PROBLEME 6. PROP. 30. xxix xvij

Trouuer deux lignes rationelles commenſurables en puiſſance ſeulemẽt, en ſorte que la plus grãde puiſſe plus que la moindre du quarré d'vne ligne droicte cõmenſurable en longitude à icelle.

Soit expoſee la rationelle AB, [a] & ſoient trouuez deux nomb. qu. CD, CE, deſquels l'excez ED ne ſoit quarré; [b] puis comme le nombre CD, eſt au nombre DE; ainſi le quarré de AB, ſoit au quarré de quelque l. AF: & ſoit accomodee AF, au demy cercle deſcrit ſur AB, & conioincte FB. D'autant que l'angle F [c] eſt droict au demy cercle, [d] le quar. de AB, ſera egal aux 2 quarrez de AF, FB, c'eſt à dire que AB pourra plus que AF, du quarré de FB, & le q. de AB, eſtant au qu. de AF, comme CD, à DE, nombre à nombre: [e] Iceux quarrez de AB, AF, ſeront commenſurables; Et puis que le quarré de AB, eſt rationel, eſtant deſcrit ſur la rationelle AB, le quarré de AF, ſera auſſi rationel, & partant AF, rationelle, dont AB, AF, ſont ra-

a *ſchol.* 2. 29. 10

b *corol.* 6. 10.

c 31. 3.

d 47. 1.

e 6. 10.

tionelles, & commenſurables au moins en puiſſance ; & les quarrez de AB, AF, n'eſtant entr'eux comme nombre quarré à nombre quarré,
f 9. 10. icelles AB, AF, ſeront incommenſurables en longitude ; mais elles ſont monſtrees commenſurables en puiſſance, donc AB, AF, ſont rationelles commenſurables en puiſſance ſeulement.

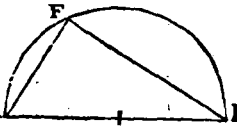
Maintenant puis que comme CD, eſt à DE, ainſi le quarré de AB, eſt au quarré de AF, par conuerſion de raiſon, comme le nombre quarré CD ſera au nombre quarré CE, ainſi le quarré de AB, au quarré de BF: (car comme CD, excede ED, par CE, nombre quarré, ainſi le quarré AB, excede le quarré de AF du quarré de FB)
g 9. 10. g Partant les lignes droictes AB, BF, ſont commenſurables en longitude ; Donc nous auons trouué AB, AF, rationelles commenſurables en puiſſance ſeulement, telles que AB, plus grande peut plus que AF, du quarré de BF, commenſurable en longitude à icelle. Ce qu'il falloit faire.

xxx xviij

PROBLEME 7. PROP. 31.

Trouuer deux lignes rationelles, commenſurables en puiſſance ſeulement, en ſorte que la plus grande puiſſe plus que la plus petite, du quarré d'vne ligne incommenſurable en longitude à icelle.

a 2. *lem.* 29. 10. Soit expoſee la rationelle AB, a & trouuez les deux nombre quarrez CE, ED, tels que CD,



composé d'iceux ne soit nombre quarré; Ou soit diuisé CD, nombre quarré en 2. nombres non quarrez CE, ED, ainsi le tout ne sera à aucun d'iceux, comme nombre quarré à nombre quarré.

C 144. E 16 D C 160 D
C --- 6 --- E --- 3 D

[b] Puis soit trouuee AF, au quarré de laquelle soit le quarré de AB, comme CD, est à DE, & soit accommodee AF, au demy cercle descrit sur AB, & soit conioincte FB. [c] Donc AB, pourra plus que AF, du quarré de FB; Et AB, AF, seront rationelles commensurables en puissance seulement. Comme il appert par la demonstration precedente. Mais d'autant que par conuersion de raison (comme cy-deuant) comme CD, à CE, ainsi le quarré de AB, est au quarré de BF: Mais CD, CE, ne sont entr'eux comme nombre quarré à nombre quarré; pareillement les quarrez de AB, BF, ne seront entr'eux comme nombre quarré à nombre quarré; [d] Partant les lignes AB, FB, sont incommensurables en longitude. Dont nous auons trouué 2. rationelles AB, AF, commensurables en puissance seulement, telles que AB, plus grande peut plus que AF, moindre du quarré de FB, incommensurable en longitude à icelle. Ce qu'il falloit faire.

b corol. 6. 10.

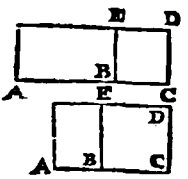
c 31. 3.

d 9. 10.

LEMME.

S'il y a deux lignes droictes inegales, comme la plus grande sera à la plus petite, aussi le rectangle contenu sous icelles, est au quarré de la plus petite.

Soient deux lignes droictes inegales AB, BC, constituees directement, dont AB, est plus grande. Je dis que comme AB, est à BC, ainsi le rectangle sous AB, BC, est au quarré de BC: Car soit descrit le quarré de BC, & soit acheué le rectangle AD, le rectangle AE, sera contenu sous AB, BC, puis que EB est egale à BC[a]: Il est donc manifeste que comme AB est à BC, ainsi le rectangle AE, est au quarré EC.



a 1. 6.

Semblablement comme la moindre à la plus grande, ainsi le rectangle contenu sous icelles est au quarré de la plus grande, comme il est manifeste, par la 2. fig. en laquelle AB, est moindre que BC.

xxxj xiv xv

PROBLEME 8. PROP. 32.

Trouuer deux Mediales commensurables en puissance seulement, lesquelles contiennent vn rectangle Rationel, en sorte que la plus grãde puisse plus que la plus petite, du quarré d'vne ligne commensurable en longitude à icelle.

230.10

Soient[a] trouuees A & B, rationelles commensurables en puiss. seulement, telles que A, plus grande puisse plus que B moindre, du quarré d'vne ligne commensurable en longitude à icelle,[b] & soit C, moyenne proportionelle entre A & B:[c] & comme A est à B, ainsi C soit à D.

b 13. 6.
c 12. 6.

D'autant que A, B, ſont rationelles commenſurables en puiſſance ſeulement; [b] le rectangle ſous A, B, eſt irrationel, & la ligne C, pouuant iceluy mediale: Et A eſtant à B, comme C à D; & A, B, commenſurables en puiſſ. ſeulement: [c] CD, ſeront auſſi commenſ. en puiſſ. ſeulement, [d] partant D, commenſ. à la mediale C eſt mediale. Donc on a trouué deux mediales C, D, commenſ. en puiſſ. ſeulement. Ie dis qu'elles comprennent vn rectangle rationel: car puis que A eſt à B, comme C, à D, auſſi en changeant A ſera à C, comme B à D; mais comme A eſt à C, ainſi C eſt à B: C ſera pareillement à B, comme B à D. Partant le rectangle ſous C, & D, ſera egal au quarré de B; Parquoy le quarré de B, rationelle eſtant rationel, le rectangle ſous C & D, ſon egal ſera auſſi rationel; Donc C, D, contiennent vn rectangle rationel. Mais d'autant que A eſt à B, comme C à D; & A peut plus que B, du quarré d'vne ligne commenſ. en longitude à icelle par la conſtruction; [f] C pourra auſſi plus que D, du quarré d'vne ligne qui luy eſt commenſ. en longit. Donc nous auons trouué deux mediales C D, commenſurables en puiſſance ſeulement, qui contiennent vn rectangle rationel, & la plus grande C, peut plus que la moindre D, du quarré d'vne ligne commenſurable en longit. à icelle. Ce qu'il falloit faire.

[b] 12. 10.
[c] 10. 10.
[d] 24. 10.
[e] 17. 6.
[f] 15. 10.

Mais ſi [g] A, B ſont trouuees rationelles commenſ. en puiſſ. ſeulement, de ſorte que A puiſſe plus que B, du quarré d'vne ligne incommenſ. en longit. à icelle, & que le reſte ſoit faict comme auparauant, on monſtrera ſemblablement que C, D, ſont mediales commenſurables en

[g] 31. 10.

puiſſ. ſeulement qui contiennent vn rect. rationel : en ſorte que C, peut plus que B, du quarré d'vne ligne qui luy eſt incommenſurable en longitude.

SCHOLIE.

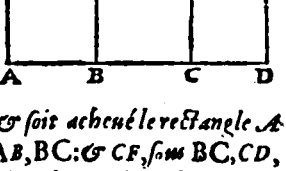
Soit A, 8. *&* B, $\sqrt{q}$ 28. *le rect. ſous icelles ſera* $\sqrt{q}$ 1792. *& la ligne droicte* C, *ſera* $\sqrt{qq}$ 1792. *mediale. Et ſoit comme* 8. *à* $\sqrt{q}$ 28. *ainſi* $\sqrt{qq}$ 1792. *à vne autre, qui ſoit* D, *icelle ſera* $\sqrt{qq}$ 343. *Donc* $\sqrt{qq}$ 1792. *&* $\sqrt{qq}$ 343. *ſont* 2. *mediales commenſ. en puiſſ. ſeulement qui contiennent vn rationel ſçauoir* 28. *& la plus grande peut plus que la moindre du q. d'vne lig. commenſ. en longit à icelle. Car ſi du quarré de la plus grande l'on oſte le quarré de la moindre : c'eſt à dire ſi de* $\sqrt{q}$ 1792. *on oſte* $\sqrt{q}$ 343. *reſtera* $\sqrt{q}$ 567. *&* $\sqrt{qq}$ 1792. *&* $\sqrt{qq}$ 567. *ſont* 2. *mediales commenſ en longit. entr'elles eſtant comme* 4. *à* 3. *Car diuiſant l'vne par l'autre en prouient* $\sqrt{qq}\ 1\frac{1}{3}$ *qui eſt* $1\frac{1}{3}$ *c'eſt à dire* $\frac{4}{3}$. *Derechef ſoit* A 8. B $\sqrt{q}$ 20. *le rect. ſous icelles ſera* $\sqrt{q}$ 1280. *& la ligne droicte* C $\sqrt{qq}$ 1280. *& ſoit comme* 8. *à* $\sqrt{q}$ 20. *ainſi* $\sqrt{qq}$ 1280. *à vne autre, ſçauoir à* D, *icelle* D *ſera* $\sqrt{qq}$ 125. *Donc* $\sqrt{qq}$ 1280. *&* $\sqrt{qq}$ 125. *ſont* 2. *mediales conten. vn rect. rationel ſçauoir* 20. *& la plus grande peut plus que la moindre du q. d'vne ligne incommenſ. en longit à icelle.*

Mais ſoit A 3. *&* B $\sqrt{q}$ 6. *le rect. ſous icelles ſera* $\sqrt{q}$ 54. *& la ligne droicte* C $\sqrt{qq}$ 54. *Et comme* 3. *à* $\sqrt{q}$ 6. *ainſi* $\sqrt{qq}$ 54. *ſoit à vne autre, ceſt autre ſera* $\sqrt{qq}$ 24. *Donc* $\sqrt{qq}$ 54. *&* $\sqrt{qq}$ 24. *ſont* 2. *mediales commenſ. en puiſſance ſeulement qui contiennent vn rect. rationel ſçauoir* 6. *& la plus grande peut plus que la moindre du quarré d'vne ligne qui luy eſt incommenſ. en longitude.*

LEMME

S'il y a trois lignes droictes proposees comme la premiere sera à la troisiesme ; ainsi le rectangle contenu sous la premiere & la seconde ; à celuy qui est contenu sous la seconde & la troisiesme.

Soient 3. lignes droictes constituees directement, AB, BC, CD. *Ie dis que comme* AB, 1. *est à* CD, 3. *ainsi le rectangle contenu sous* AB, BC, *est au rectangle sous* BC. CD. *Car sur* BC, *soit*



descrit le quarré BCDE, *& soit acheué le rectangle* AF; AE, *sera contenu sous* AB, BC: *&* CF, *sous* BC, CD, *puis que* BE, CG, *sont egales chacune à* BC; [a] *Or il est manifeste que* AE, *est à* CF: *comme* AB, *à* CD. [a] 1. 6.

PROBLEME 9. PROP. 33. xxxij xxvj

Trouuer 2. li. Mediales commensurables en puissance seulement ; lesquelles contiennent vn rectangle Medial ; en sorte que la plus grande puisse plus que la plus petite du quarré d'vne ligne qui luy soit commensurable en longitude.

Soient trouuees [a] les trois rationelles A, B, C, commens. en puissance seulement, en sorte que A puisse plus que C, du quarré d'vne ligne qui luy soit commensurable en longitude ; [b] pre- [a] 9. 10. [b] *lem.* 2. 11. 10.

mierement A C, rationelles commenſurables en puiſſance ſeulement, en ſorte que la plus grande puiſſe plus que la moindre du quarré d'vne ligne qui luy ſoit commenſurable en longitude; [b] & B, commenſurable en puiſſ. ſeulement à l'vne & à l'autre; [c] puis ſoit priſe D, moyenne proportionelle entre A, B; [d] & comme D, à B, ainſi C ſoit à E. D'autant que comme A, eſt à C, [e] ainſi le rectangle ſous A, B, eſt au rectangle ſous B, C; [f] mais le quarré de D, eſt egal au réctangle ſous AB: Et le rectangle ſous D, E, eſt egal au rectãgle ſous B, C: [f] puis que DB, CE, ſont proportionelles, pareillement comme A, à C, ainſi le quarré de D, ſera au rectangle ſous D, E. [g] Mais comme le quarré de D, eſt au rectangle de D, E, ainſi D eſt à E. Donc comme A, eſt à C, ainſi D à E: mais A, C, ſont commenſurables en puiſſance ſeulemẽt. [h] donc D, E, le ſeront auſſi; [i] mais d'autant que D, pouuant le rectangle de A, B, rationelles commenſurables en puiſſ. ſeulement eſt irrationelle, & mediale; [k] E, commenſurable à D ſera auſſi mediale: Nous auons dont trouué deux mediales D, E commenſ. en puiſſance ſeul. Et d'autant que le rectangle ſous D, E, eſt monſtré egal au rectangle de B, C, [l] medial, (puis que B, C, ſont rationelles commenſurables en puiſſance ſeulement) le rectangle ſous D E, ſera auſſi medial: Finalement puis que nous auons monſtré que comme A, eſt à C, ainſi D à E; mais A peut plus que C, du quarré d'vne ligne qui luy eſt cõmenſurable en longitude par la conſtruction, [m] D pourra auſſi plus que E du quarré d'vne li-

A
D
B
E
C

c 13. 6.
d 12. 6.
e lem. preced.
f 17 16.
f 16. 6.
g lem. 3.
19. 10.
h 10.10.
i 22.10.
k 24.10.
l 22.10.
m 15.10

gne qui luy ſera commenſurable en longitude. Nous auons donc trouué deux Mediales DE, commenſ. en puiſſance ſeulement qui contiennent vn rectangle medial, & la plus grande D, peut plus que la plus petite E, du quarré d'vne ligné qui luy eſt commenſurable en longitude. Ce qu'il falloit faire.

Mais ſi les rationelles ſuſdictes auoient eſté trouuees en ſorte que A peuſt plus que C, du quarré d'vne ligne incommenſ. en longitude à icelle, la mediale D, pourroit plus que E, du quarré d'vne ligne incommenſ. en longit. à icelle: & ayant acheué la conſtruct. comme auparauant, l'on demonſtrera ſemblablement que DE, ſont trouuees mediales commenſurables en puiſſ. ſeulement contenant vn rect. medial, en ſorte que la plus grande peut plus que la moindre du quarré d'vne ligne incommenſ. en longit. à icelle &c.

SCHOLIE.

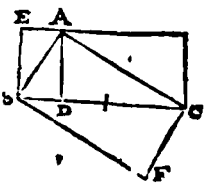
Soit A, 8. B √q 48. C √q 28. le rect. ſous AB, ſera √q 3072. & la droicte ligne D *√qq 3072. qui eſt mediale. Soit comme* A *à* C, *ainſi* D *à vne autre qui ſoit* E: E *ſera √qq 588. Donc √qq 3072. & √qq 588. ſont 2. mediales commenſ. en puiſſ. ſeul. conten. vn medial, & la plus grande peut plus que la moindre du quarré d'vne ligne commenſ. en longit. à icelle: Car oſtant le moindre du plus grand, c'eſt à dire de √q 3072. √q 588. le reſte ſera 972. & √qq 3072. & √qq 972. ſont 2. mediales commenſ. en longitude entr'elles ſçauoir comme 4. à 3. Car diuiſant √qq 3072. par √qq 972. le quotient ſera √qq*

$3\frac{1}{81}$ *qui* $1\frac{1}{3}$ *c'eſt a dire* $\frac{4}{3}$. *Derechef ſoit* $\mathcal{A}$ 8. B $\sqrt{q}$ 48. C $\sqrt{q}$ 20. D *ſera auſſi* $\sqrt{qq}$ 3072. *ſoit com.* $\mathcal{A}$ *à* C, *ainſi* D *à vne autre qui ſoit* E, E *ſera* $\sqrt{qq}$ 300. *Donc* $\sqrt{qq}$ 3072. *&* $\sqrt{qq}$ 300. *ſont* 2. *mediales commenſ. en puiſſ. ſeul. contenant vn medial la plus grande pouuant plus que la moindre du q. d'vne ligne qui luy eſt incommenſ. en longit. à icelle. Mais ſoit* $\mathcal{A}$ $\sqrt{q}$ 6. B $\sqrt{q}$ 3. C $\sqrt{q}$ 2. D *ſera* $\sqrt{qq}$ 18. *Et ſoit comme* A *à* C, *ainſi* $\sqrt{qq}$ 18. *à vne autre qui ſoit* E: E *ſera* $\sqrt{qq}$ 2. *Donc* $\sqrt{qq}$ 18. *&* $\sqrt{qq}$ 2. *ſont* 2. *mediales commenſ en puiſſ. ſeulement qui contiennent vn rect. medial dont la plus grande peut plus que la moindre du quarré d'vne ligne incommenſurable en longitude à icelle.*

LEMME. 1.

Soit le triangle ABC, ayant l'angle BAC, droict, duquel ſoit menee la perpendiculaire AD. Ie dis que le rectangle contenu ſous CB, BD eſt egal au quarré de AB: Et le rect. contenu ſous BC, CD, eſt egal au quarré de AC: Et le rect. ſous BD, DC, eſt egal au quarré de AD; Finalement le rectangle contenu ſous BC, AD, eſt egal au rectangle contenu ſous AB, AC.

a *corol.* 8. 6. b 17. 6. *D'autant que* AB, [a] *eſt moyenne proportionelle entre* CB, BD: *le rectangle contenu ſous* CB, BD, [b] *ſera egal au qu. de* AB, *par la meſme raiſon le rectangle ſous* BC, CD, *ſera egal au quarré de* AC, [b] *puis que* AC, *eſt moyenne proportionelle entre* BC, CD.



De rechef [b] *d'autant que AD est moyenne proportionelle entre BD, DC, semblablement le rectangle sous BD, DC, sera egal au quarré de AD.*

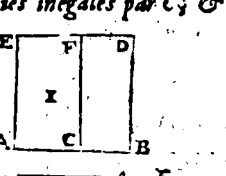
Finalement d'autant [c] *que les triangles ABC, ABD, sont semblables, comme BC, sera à AC, ainsi AB, sera à AD. Donc le rect. contenu sous BC, AD, sera egal au rect. contenu sous AB, AC. Ce qui sera aussi monstré ainsi: Soit acheué le rect. CE, contenu sous BC, AD: Semblablement le rect. AF, contenu sous AB, AC.* [c] *D'autant donc que le rectangle CE, est double du triangle ABC, & que le rectangle AF, est double du mesme triangle, iceux rectangles CE, AF, seront egaux entr'eux. Ce qui est proposé.*

c 8. 6.
d 16. 6.
e 41. 1.

LEMME 2.

Si vne ligne droicte est couppee en 2. parties inegales, comme la plus grande partie est à la plus petite, ainsi le rectangle sous la toute & la plus grande partie, est au rectangle sous la toute & la moindre partie,

Soit couppee AB, en 2. parties inegales par C, & soit AC, la plus grande partie. Ie dis que comme AC, est à CB, ainsi le rectangle sous AB, AC, est au rectangle sous AB, CB. Car sur AB, soit deserit le quarré ADE, & soit menée CF, parallele à AE, le rectangle AF, sera contenu sous AB, AC, & CD, sera contenu sous MB, CB, puis que tant AE, que CF, est egale à AB: [f] *D'autant donc que comme AC, est à CB, ainsi AF, a*



f 1. 6.

CD, la proposition est manifeste.

Semblablement, comme la moindre partie BC, à la plus grande CA, ainsi BF, *contenu sous* AB, BC, *la toute & la moindre partie est à* CE, *contenu sous* AB, CA, *la toute & la plus grande partie.*

LEMME 3.

S'il y a deux lignes droictes inegales, & que la plus petite soit couppee en deux parties egales: le rectangle contenu sous icelles lignes, sera double de celuy qui est contenu sous la plus grande ligne, & sous la moitié de la moindre.

Soient deux lignes droictes inegales AB, BC, *contenant l'angle droict* ABC, *& soit couppé* BC, *moindre en deux egalement au poinct D. Ie dis que le rectangle sous* AB, BC, *est double du rect. sous* AB, BD: *Car soit acheué le rectangle* AC, *contenu sous* AB, BC, *& soit menee* DE, *parallele à* AB; BE, *sera contenu sous* AB, *&* BD, *moitié de la moindre.* [g] *D'autant que* AC, *est double de* BE, *puis que la base* BC, *est double de la base* BC; *la proposition est enidente.*

g 1. 6.

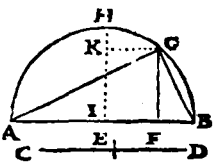
Semblablement si BC, (*laquelle soit plus grande*) *est couppee en deux egalement, le rect. contenu sous* AB, BC *est double de celuy qui est contenu sous* AB *moindre &* BD, *moitié de la plus grande, comme il appert par la 2. figure. Voyez la figure & 3. precedente.*

PROBLEME 10. PROP. 34.

Trouuer deux lignes droictes incommensurables en puissance, lesquelles facent le composé de leurs quarrez Ra-

tionel; mais le rectangle contenu sous icelles Medial.

Soient trouuees deux rationelles AB, CD, commensurables en puiss. seulement, telles que la plus grande AB, puisse plus que la plus petite CD, du quarré d'vne ligne qui luy soit incommensurable, en longitude: Et ayant couppé CD, en deux egalement à E; [b] soit appliqué à AB, vn rectangle egal au quarré de CE, c'est à dire egal au quart du quarré de CD, defaillant d'vne figure quarree, & soit celuy qui est contenu sous AF, FB: & ayant descrit le demy cercle AGB, soit menee FG à angles droicts, & conioinctes AG, GB. D'autant que AB, peut plus que CD, du quarré d'vne ligne qui luy est incōmens. en longit. & qu'on a appliqué à AB, vn rectangle contenu sous AF, FB, egal au quart du quarré de CD, defaillant d'vne figure quarree, [c] AF, sera incommens. en longit. à FB. [d] Mais comme AF à FB, ainsi le rectangle sous AB, AF, au rectangle sous AB, FB; [e] mais le rectangle sous AB, AF, est egal au quarré de AG, & le rectangle sous AB, FB, egal au quarré de BG, puis que l'angle AGB, est droict [f] au demy cercle: Donc comme AF à FB, ainsi le quarré de AG au quarré de GB, & partant puis que AF, FB sont incommens. en longit.; [g] les quarrez de AG, GB, seront incōmens. [h] Donc les lignes AG, GB, sont incommens. en puiss. Et d'autant que le quarré de la rationelle AB, est rationel, [i] & egal aux quarrez



a 31.10.

b *lem.* 17. 10.

c 19.10.

d *lem.*2. 33. 10.

e *lem.*1. 33. 10.

f 31.3.

g 10.10.

h 4. d.

i 47. 1.

de AG GB, le cõposé des quarrez de AG, GB, est aussi rationel: Derechef d'autant que le rect: sous AF, FB, k qui faict egal au quarré de CE, l est egal au quarré de FG (puis que l'angle AG B, est droict, & FG, perpendi. à AB) les quarrez de FG CE, seront egaux, & partant les lignes FG, CE, egales: parquoy CD, double de CE, sera aussi double de FG; m Donc le rectangle sous AB, CD, sera double du rectangle sous AB, FG, n mais le rectangle contenu sous les rationelles AB, CD, commensurables en puissance seulement, est medial; Donc le rectangle sous AB, FG, commensurable à iceluy, estant sa moitié, o est aussi medial. Mais le rectangle contenu sous AG, GB, p est egal au rectangle contenu sous AB, FG. Donc le rectangle contenu sous AG, GB, q est aussi medial: mais le composé des quarrez de AG, GB, est monstré Rationel: Donc nous auons trouué deux lignes droictes AG, GB, incommens. en puissance, qui font le composé de leurs quartez rationel, & le rectangle contenu sous icelles medial. Ce qu'il falloit faire.

k *lem.* 1. 31. 10. l 17. 6.

m *lem.* 3. 33 10. n 22. 10.

o *corol.* 24. 10. p *lem.* 1. 33. 10. q *lem* 1. 24. 10.

SCHOLIE.

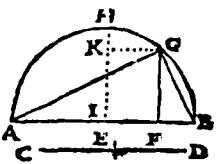
Soit AB, 12. *&* CD. $\sqrt{q}$ 6. *& soit* AB *diuisee en* AF, FB, *faisant* AC, 6. + $\sqrt{q}$ 12. *&* FB 6. — $\sqrt{q}$ 12. *partant* FG, *moyenne proportionelle entre* AF, FG, *sera* $\sqrt{q}$ 24, *Dont la double* CD, *est* $\sqrt{q}$ 96. *Donc* CD *faisant* $\sqrt{q}$ 96. FG *sera* $\sqrt{q}$ 24. *Et* AF. 6. + $\sqrt{q}$ 12. FB *sera* 6. — $\sqrt{q}$ 12. *Partant* AG *sera* $\sqrt{q}$ 72. + $\sqrt{q}$ 1728. *&* GB $\sqrt{q}$ 72. — $\sqrt{q}$ 1728. *Partant* AG, GB *sont les requises. Car elles sont incommens. en puissance contenã. vn rect. medial qui est* $\sqrt{q}$ 3456. *& le*

composé de leurs quarrez 144. est rationel.

PROBLEME 11. PROP. 35. xxxiv xxviij

Trouuer deux lignes droictes incommensurables en puissance, lesquelles facent le composé de leurs quarrez Medial; Et le rectangle contenu sous icelles Rationel.

Soient [a] trouuees 2. mediales AB, CD, commensurables en puissance seulement, contenant vn rectangle Rationel : en sorte que AB, plus grande puisse plus que CD, moindre du quarré d'vne ligne incommensurable à icelle en longit. Et soit faict au reste comme en la 34. p. l'on monstrera ainsi qu'en icelle 34. p. que AG, GB, sont incõm. en puiss. Et le quarré de la mediale AB, ([b] egal aux quarrez de AG, GB) estant medial, le composé d'iceux quarrez de AG, GB, sera aussi medial. Derechef comme en la 34. p. le rect. sous AB, CD, sera monstré double du rectangle sous AB, FG, & partant commensurables: Parquoy le rect. sous AB, CD, estant Rationel par la construction, le rect. sous AB, FG, commens. à iceluy sera aussi Rationel. [c] mais le rect. sous AG, GB, est egal au rectangle sous AB, FG, donc le rect. sous AG, GB, est aussi Rationel. Or le composé des quarrez de AG, GB, est monstré Medial. Donc AG, GB, sont trouuees incommens. en puiss. faisant le



[a] 32. 10.

[b] 47. 1.

[c] 1. *lem.* 33 10.

composé de leurs quarrez Medial, mais le rect. sous icelles Rationel. Ce qu'il falloit faire.

SCHOLIE.

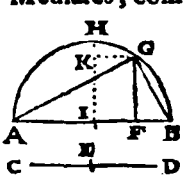
Soit la ligne AB $\sqrt{qq}$ 864. CD $\sqrt{qq}$ 384. ED, ou FG, son egale sera $\sqrt{qq}$ 24. & AF, $\sqrt{qq}$ 54. + $\sqrt{qq}$ 6. FB $\sqrt{qq}$ 54. — $\sqrt{qq}$ 6. Donc AG, sera $\sqrt{q}$ ($\sqrt{q}$ 126. + $\sqrt{q}$ 72.) Mais GB, $\sqrt{q}$ ($\sqrt{q}$ 216. — $\sqrt{q}$ 72.) incommens. en puiss. faisant le composé de leurs quarrez, sçauoir $\sqrt{q}$ 864. Medial, & le rect. sous icelles Rationel.

PROBLEME 12. PROP. 36.

xxxv xxix

Trouuer deux lignes droictes incommensurables en puissance, faisant le composé de leurs quarrez Medial, & le rectangle contenu sous icelles Medial, & incommensurable au composé de leurs quarrez.

a 33. 10. Soient a trouuees AB, CD, Mediales, commensurables en puissance seulement, contenant vn rectangle Medial; en sorte que AB, plus grande puisse plus que CD, moindre, du quarré d'vne ligne incommensurable en longit. à icelle: & ayant faict au reste comme en la 34. p. Ie dis que AG, GB, sont les lignes requises.



Car comme en la 34. p. l'on monstrera que AG, GB, sont incommensurables en puissance.

Et

Et d'autant que le quarré de AB, mediale eſt Medial, (b eſtãt egal aux quar. de AG, GB) le compoſé des quarrez de AG, GB, ſera auſſi Medial: Derechef le rectangle ſous AB, CD, eſt double du rect. ſous AB, FG, (c comme il eſt monſtré) & partant commenſurables: Donc par la conſtruction le rect. ſous AB, CD, eſtant Medial, le rect. ſous AB, FG, (c'eſt à dire le rect. ſous AG, GB, d ſon egal) e eſt auſſi Medial: mais AB, eſtant poſee incommenſ. en longit. à CD, & CE, eſt commenſ. en longit. à la meſme CD; CD, eſtant double de CE, f AB, CE, ſeront incommenſ. en longit. Mais comme AB, à CE, g ainſi le quarré de AB, au rect. ſous AB, CE: C'eſt à dire au rect. ſous AB, FG, c'eſt à dire ſous AG, GB: h (car les rectangles ſous AB, FG, & ſous AG, GB, ſont egaux) donc i le quarré de AB, eſt incommenſ. au rect. ſous AG, GB. Partant AG, GB, ſont trouuees incommenſ. en puiſſance; faiſant le compoſé de leurs quarrez medial, & le rect. ſous icelles Medial, & incommenſurable au compoſé de leurs quarrez. Ce qu'il falloit faire.

b 47 1.
c 34. 10.
d 1. *lem.* 33 10.
e *corol.* 24. 10.
f 13. 10.
g 3. *lem.* 19. 10.
h *lem.* 1. 33. 10.
i 10. 10.

SCHOLIE.

Soit AB, √qq 720. CD √qq 320. Donc CE, ou ſon egale FG, ſera √qq 20. & AF √qq 45 + √qq 5. Mais FB √qq 45. — √qq 5. & AG √q (√q 180. + √q 60) & GB √q (√q 180. — √q 60.) leſquelles ſont incommenſurables en longitude faiſant le compoſé de leurs quarrez Medial, & le rect. Medial &c.

De ce probleme nous obtiendrons facilement le ſuiuant.

Trouuer deux lignes mediales incommenſura-

bles en longitude & puiſſance.

D'autant qu'il a eſté demonſtré que tant le compoſé des quarrez de AG, GB, que le rectangle ſous icelles eſt Medial, & iceluy rect. eſt incommenſ. au compoſé desdits quarrez: la ligne qui peut iceluy compoſé Medial, & la ligne qui peut le rectangle Medial ſeront auſſi Mediales incommenſ. tant en longitude qu'en puiſſ. Car ſi elles eſtoient commenſ. en puiſſ. leurs quarrez ſeroient auſſi commenſurables: c'eſt à dire le compoſé des quarrez de AG, GB, & le rect. ſous AG, GB; Ce qui eſt contre l'hypotheſe. Partant ſi on prend AB, qui peut le compoſé des quarrez de AG, GB, & vne autre ligne droicte pouuant le rect. ſous AG, GB, c'eſt à dire la moyenne proport. entre AG, GB, l'on aura trouué deux mediales incommenſ. en longit. & puiſſance. Ce qui eſt propoſé.

ICY COMMENCENT LES SIX. DES LIGNES Irrationelles par compoſition.

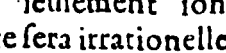
xxxvj. xxx THEOREME 25. PROP. 37.

Si deux lignes Rationelles commenſurables en puiſſance ſeulement ſont compoſees; la toute ſera irrationelle. Soit icelle appellee de deux noms.

Soient compoſees 2. rationelles trouuees: [a] A B, BC, commenſ. en puiſſance ſeulement. Ie dis que la toute AC, eſt irrationelle.

a *lem.* 2. 21. 10.

Car AB, eſtant incommenſurables en longit. à BC: & [b] comme AB à BC, ainſi le rectangle ſous AB, BC au quarré de BC: [c] le rectangle ſous AB, BC, ſera incommenſurable au quarré



b *lem.* 31. 10.

c 10. 10.

de BC: Mais 2. fois le rect. sous AB, BC, est commens. a iceluy rect. sous AB, BC: & le quarré de AB, est commens. au quarré de BC (estant rationaux) [d] parquoy le composé des quarrez de AB, BC, est commens. au quarré de BC. [e] Partãt le composé de 2. fois le rect. sous AB, BC, & le composé des quarrez de AB, BC, sont incommensurables. Parquoy le quarré de AC composé des quarrez de AB, BC, & de 2. fois le rect. sous AB, BC ([f] car le quarré de AC, est egal à iceux 2. quarrez de AB, BC, & aux 2. rect. sous AB, BC) [g] est incommẽsurable au composé des quarrez de AB, BC: mais le composé des quarrez de AB, BC, est Rationel estant monstré commens. au quarré de la Rationelle BC. Donc le quarré de AC, incommens. au quarré de la Rationelle BC, est [h] irrationel; Partant AC sera irrationelle, Or soit icelle ligne appellee de deux noms, ou comme disent les autres, Binome, d'autãt qu'elle est composé de 2. noms, c'est à dire de 2. lignes rationelles AB, BC, commensurables en puiss. seulement. Donc si 2. lignes Ration. com. en puiss. seul. sont compos. la toute sera irrationelle. Ce qu'il falloit demonstrer.

d 16. 10.
e *schol.* 14. 10.
f 4. 2.
g 17. 10
h 10. *d.*

SCHOLIE.

Soit AB 2. BC $\sqrt{q}$ 3. AC *sera* 2. + $\sqrt{q}$ 3. *& son quarré* 7. + $\sqrt{q}$ 48. *Car le quarré de* AB *est* 4. *& le quarré de* BC. 3. *mais le rect. sous* AB, BC, $\sqrt{q}$ 12. *dont le double est* $\sqrt{q}$ 48.

Partant 2. *lignes irrationelles sont procreees de* 2. *Rationelles commensurables en puissance seulement* [a] *Car la moyenne proportionelle entre icelles est Irrationelle,*

a 22. 10.

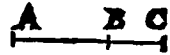
laquelle eſt appellee Mediale : & la compoſee d'icelles eſt Irrationelle laquelle eſt appellee de deux noms ou Binome.

b 37.10.

xxxvij xxxj THEOREME 26. PROP. 38.

Si deux lignes Mediales commenſurables en puiſſance ſeulement contenant vn rectangle Rationel ſont compoſees : la toute ſera Irrationelle. Or ſoit icelle appellee premiere de deux Mediales.

a 28.10. Soient compoſees deux Mediales a trouuees, AB, CD, commenſ. en puiſſ. ſeulement contenant vn rectangle Rationel. Ie dis que la toute AC eſt Irrationelle: b Car AB eſtant à BC, comme le rectangle ſous AB, BC, eſt au quarré de BC, c & AB, BC incommenſurables en longitude, c le rect. ſous AB, BC, ſera incommenſurable au quarré de BC. Mais 2. fois le rect. ſous AB, BC, eſt commenſurable au rect. ſous AB, BC, & le compoſé des quarrez de AB, BC, eſt commenſurable au quarré de BC. (car AB, BC, eſtant commenſurables en puiſſ. leurs quarrez ſeront commenſurables, & d partant le compoſé d'iceux ſera commenſurable au quarré de BC:) Donc 2. fois le rect. ſous AB, BC, & le compoſé des quarrez de AB, BC, e ſont commenſurables : Donc le compoſé des quarrez de AB, BC, & de 2. fois le rect. ſous AB, BC, (qui f eſt le quarré de AC) g eſt incommenſurable au compoſé de 2. fois le rect. ſous AB, BC!



b *lem.* 31. 10.
c 10.10.
d 16.10.
e *ſchol.* 14. 10.
f 4. 2.
g 17.10.

Mais le rect. sous AB, BC est commensurable à 2. fois le rect. sous AB, BC, estant moitié d'iceluy, [h] Donc le quarré de AC, est incommens. au rect. sous AB, BC, mais le rect. sous AB, BC, est posé Rationel. [i] Donc le quarré de AC, est Irrationel: [k] Et partant AC, sera Irrationelle. Mais soit icelle appellee premiere de 2. mediales, ou comme disent les autres, Bimediale premiere. Donc si deux Mediales commens. en puissance seulement sont compo. &c. Ce qu'il falloit demonstrer.

h 13. 1.
i 10. d.
k 11. d.

SCHOLIE.

Soit la ligne AB, √qq54. BC √qq24. la ligne totale AC, sera √qq54. + √qq24. Irrationelle appellee premiere de deux Mediales, ou Bimediale premiere.

LEMME

Le rectangle contenu sous vne ligne Rationelle, & vne Irrationelle est Irrationel.

Soit le rect. ABCD, contenu sous AB Rationelle, & BC, Irrationelle. Ie dis qu'iceluy Rect. est Irrationel: car s'il est dit estre Rationel; [a] estant appliqué à la Rationelle AB, il feroit la latitude BC, Rationelle: Ce qui est absurde, car BC, est posee irrationelle. Donc le rect. AC, n'est Rationel: mais Irrationel. Ce qui est proposé.

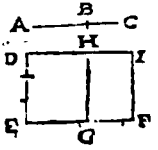
a 21. 10

xxxvij
xxxij

THEOREME 27. PROP. 39.

Si deux lignes Mediales commensurables en puissance seulement contenant vn rectangle medial, sont composees: la toute sera Irrationelle: & soit icelle appellee seconde de deux Mediales.

a 19.10. Soient composees 2. mediales [a] trouuees AB, BC, commensurables en puissance seulement contenant vn rect. Medial. Ie dis que la toute AC est irrationelle.



Car soit exposee la Rationelle DE, à laquelle [b] soit appliqué le rect. DF, egal au quarré de AC: & DG, egal au composé des quarrez de AB, BC, & le quarré de AC, (ou DF, son egal rectangle) [c] estant egal aux 2. quarrez de AB, BC, & à 2. fois le rect. sous AB, BC, le reste HF, sera egal au rect. sous AB, BC, 2. fois: mais le rect. sous AB, BC. estant posé medial, le double d'iceluy qui luy est commensurable, [d] sçauoir HF, sera aussi medial. Derechef puis que les quarrez de AB, BC, Mediales commens. en puiss. sont commensurables, [e] leur cõposé, sçauoir DG, sera commens. à chacun d'iceux; & estant mediaux, [f] DG, sera Medial. Donc puis que les Mediaux DG, HF, sont appliquez à la Rationelle DE, & [g] HF, son egale, [h] bles latitudes EG, GF: seront Rationelles incommens. en longit. à DE. Derechef AB, BC, estant incommens. en longitude. Et comme A

b 45.1.
c 4.2.
d *corol.* 24.10.
e 16 10.
f *corol.* 24. 10.
g 34.1.
h 23.10.

B, à BC, ainsi le quarré de AB, au rectangle sous AB, BC, [k] le quarré de AB sera incommens. au rect. sous AB, BC: Mais le composé des quarrez de AB, BC, est monstré commens. au quarré de AB: & 2. fois le rect. sous AB, BC est commens. au rect. sous AB, BC, estant double d'iceluy. Donc le composé des quarrez de AB, BC, & 2. fois le rect. sous AB, BC, ou leurs egaux rectangles [l] DG, HF, sont incommensurables. [m] Parquoy DG, estant à HF, comme EG, à GF, [n] EG, GF seront incommens. en longit. Et estãt monstrees Rationelles; elles seront Rationelles commens. en puiss. seulement. [o] Partant la toute EF, sera Irrationelle, parquoy [p] le rect. DF, sous DE, Rationelle, & EF irrationelle, sera Irrationel, & le quarré de AC, egal à iceluy EF. est aussi Irrationel: Parquoy AC, est irrationelle, Soit appellee seconde de 2. Mediales, ou Bimediale seconde. Donc si 2. Mediales commens. &c. Ce qu'il falloit demonstrer.

i 3. lem. 19. 10.
k 10. 10
l schol. 14. 10.
m 1. 6.
n 10. 10.
o 7 10 lem.
p 8. 10.

SCHOLIE.

Soit la ligne AB, √qq 18. BC √qq 8. la ligne totale AC, sera √qq 18. + √qq 8. dont le quarré est √q 50. + √q. 48. laquelle ligne AC, est Irrationelle nommee seconde de 2. Mediales ou Bimediale seconde.

LEMME.

Si vne ligne droicte est couppee en deux inegalement, le composé des quarrez des parties sera plus grand, que deux fois le rectangle contenu sous icelles parties, du quarré de la ligne, dont la plus grande partie excede la moindre.

Soit AB, coupee à D, non egalement & soit AD la plus grande partie en laquelle soit prise DC, egal à DB, de sorte que AC, soit l'excez par lequel AD excede DB, ou DC, egale à DB. Ie dis que les quarrez de AD, DB, ensemble sont plus grands que 2. fois le rect. angle sous AD, DB, du quarré de AC. Car les quarrez de AD, DC, [a] est ãt egaux à 2. fois le rect. sous AD, DC, & au quarré de AC; & DC, est egale à DB, les quarrez de AD, DB seront aussi egaux à 2. fois le rect. sous AD, DB, & au quarré de AC: partant les quarrez de AD, DB, sont plus grands que 2. fois le rect. sous AD, DB, du quarré de AC. Ce qui est proposé.

a 7. 2.

COROLLAIRE.

De là s'ensuit que les quarrez des parties inegales simplement sont plus grands que 2. fois le rect. sous les parties inegales.

xxxix xxxiij

THEOREME 28. PROP. 40.

Si deux lignes droictes incommensurables en puissance, faisant le composé de leurs quarrez Rationel, & le rectangle contenu sous icelles Medial, sont composees : la toute sera Irrationelle : Soit icelle appellee Maieure.

a 34 10. Soient composees deux lignes droictes [a] trouuees AB, BC, incommensurables en puissan-

ce, faisant le composé de leurs quarrez Rationel, mais le rect. sous icelles Medial. Ie dis que la toute AC est Irrationelle.

Car d'autant que le rectangle sous AB, BC, est posé medial, 2. fois le rect. sous AB, BC, commensurable à iceluy: [b] sera aussi medial, & partant Irrationel. Or le composé des quarrez de AB, BC, est posé Rationel: [c] Donc 2. fois le rect. sous AB, BC, sera incommensurable à iceluy; [d] Partant le quarré de AC, composé des quarrez de AB, BC, & de 2. fois le rect. sous AB, BC, sera incommens. au composé des quarrez de AB, BC: & ce composé des quarrez de AB, BC, estant posé Rationel: [e] le quarré de AC, incōmens. à iceluy sera Irrationel: [f] & AC, irrationelle: soit icelle appellee Maieure. Partant si &c. Ce qu'il falloit faire.

b *corol.* 24.10.
c 10. *d.*
d 17.10
e 10. *d.*
f 11. *d.*

SCHOLIE.

Soit la ligne AB $\sqrt{q}(32.+\sqrt{q}704.)$ *&* BC $\sqrt{q}(32.-\sqrt{q}704.)$ *Donc la toute* AC *sera* $\sqrt{q}(32.+\sqrt{q}704.)+\sqrt{q}(32.-\sqrt{q}704.)$ *laquelle est irrationelle, appellee ligne Maieure.*

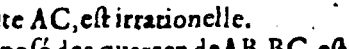
THEOREME 29. PROP. 41. xl xxxiv

Si deux lignes droictes incommensurables en puissance sont composees; lesquelles facent le composé de leurs quarrez Medial: Mais le rectangle contenu sous icelles Rationel; la toute sera Irrationelle. Soit appellee pouuant vn Rationel & vn Medial.

Soient composees deux lignes droictes trouuees, AB. BC, incommensurables en puissance, faisant le composé de leurs quarrez medial, mais le rect. contenu sous icelles Rationel. Ie dis que la toute AC, est irrationelle.

a 35. 10.

Car le composé des quarrez de AB, BC, estant Medial: mais 2. fois le rect. sous AB, BC, Rationel, sa moitié



sçauoir le rect. vne fois sous A B, B C, estant posé Rationel b le composé des quarrez de AB, BC, est incommensurable à 2. fois le rect. sous AB, BC. c Donc le composé des quarrez de AB, BC, & 2. fois le rect. sous AB, BC: c'est à dire le quarré de A C, est incommensurable à 2. fois le rect. sous AB, BC, lequel estant Rationel, comme a esté dit: d le quarré de AC, incommens. à iceluy est Irrationel, e & partant AC, Irrationelle: Soit dicte pouuant vn Rationel & vn medial. Donc si deux lignes droictes incommens. en puiss. &c. Ce qu'il falloit demonstrer.

b 10. d.
c 17. 10.
d. 10. d.
e 11. d.

SCHOLIE.

Soit la ligne AB $\sqrt{q}(\sqrt{q}13.\frac{1}{2} + \sqrt{q}4.\frac{1}{2})$ & BC $\sqrt{q}(\sqrt{q}13.\frac{1}{2} - \sqrt{q}4.\frac{1}{2})$ *afin que la toute* AC *soit* $\sqrt{q}(\sqrt{q}13.\frac{1}{2} + \sqrt{q}4.\frac{1}{2} + \sqrt{q}, \sqrt{q}13.\frac{1}{2} - \sqrt{q}4.\frac{1}{2}.)$

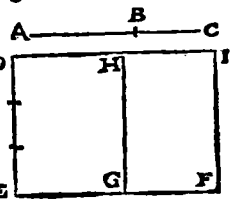
xlj xxxv

THEOREME 30. PROP. 42.

Si deux lignes droictes incommensurables en puissance sont composees, lesquelles facent le composé de leurs quarrez Medial, & le rectangle con-

tenu ſous icelles medial; & incommēſurable au compoſé de leurs quarrez : la toute ſera Irrationelle ; Soit icelle appellee pouuant deux Mediaux.

Soient compoſees deux lignes droictes[a] trouuees AB, BC, incommēſurables en puiſſance, faiſant le compoſé de leurs quarrez Medial, & le rect. contenu ſous icelles medial & incommenſurable au compoſé de leurs quarrez. Ie dis que la toute AC, eſt irrationelle. a 36.10.



Car ſoit expoſee DE Rationelle[b] à laquelle ſoit appliqué le rect. DF, egal au quarré de AC, & DG, egal au compoſé des quarrez de AB, BC. Et le quarré de AC, eſtant egal au compoſé des quarrez de AB, BC, & à 2. fois le rect. ſous AB, BC, le reſte HF, ſera egal à 2. fois le rect. ſous AB, BC. Mais puis que tant le compoſé des quarrez de AB, BC, c'eſt à dire le rect. DG, que le rect. ſous AB, BC, [d] & partant le compoſé de 2. fois le rect. ſous AB, BC, c'eſt à dire HF, (luy eſtant commenſurable) eſt poſé medial, DG, HF, appliquez à la Rationelle DE, [e] feront les latitudes EG, GF, Rationelles incommenſ. en longit. à DE. Derechef le compoſé des quarrez de AB, BC: c'eſt à dire le rect. DG, eſtāt poſé incommenſurable au rect. ſous AB, BC, & 2. fois le rect. ſous AB, BC, ſçauoir HF, eſtant commenſurable au meſme rect. ſous AB, BC, [...]

b 45 1.

c 4. 2.

d corol. 24. 10.

e 23.10.

estant double) [f]DG, HF, seront incommens.
[f] 13.10. [g] Parquoy EG, estant à GF, comme DG, à HF,
[g] 1. 6. [h] EG, GF seront incommens. en longitude, &
[h] 10.10. estant monstrees Rationelles: Icelles EG, GF
seront Rationelles commensurables en puissan-
[i] 37. 10. ce seulement: [i] partant la toute EF, composee
d'icelles est irrationelle: Donc le rect. DF, con-
tenu sous DE, Rationelle, & EF Irrationelle,
[k] *lem.* 38. 10. [k] est irrationel: Et partant le quarré de AC,
egal à iceluy est aussi irrationel, [l] & la ligne AC
pouuant iceluy est irrationelle. Soit dicte pou-
uant deux mediaux. Donc si deux lignes &c. Ce
qu'il falloit demonstrer.

SCHOLIE.

Soient AB, BC incommens. en puiss. dont les quarrez adioustez font vn medial, & le rect. sous icelles medial sçauoir, AB $\sqrt{q}(\sqrt{q}5. + \sqrt{q}2.)$ *&* $BC\ \sqrt{q}(\sqrt{q}5. - \sqrt{q}2.)$ *AC totale sera* $\sqrt{q}(\sqrt{q}5. + \sqrt{q}2.) + \sqrt{q}(\sqrt{q}5. - \sqrt{q}2.)$ *&c.*

LEMME

Si vne ligne droicte est couppee en parties inegales, & derechef en autres parties inegales; les quarrez des parties plus inegales ensemble seront plus grands que les quarrez des parties moins inegales ensemble.

Soit couppee AB, inegalement à C, & derechef inegalement à D, & soient les premieres parties AC, CB, plus inegales que les dernieres AD, DB. Ie dis que les quarrez de AC, CB, ensemble sont plus grands que

les quarrez de AD, DB, enſemble: Car ayant diuiſé AB, en 2. egalement à E, le poinct D, tombera entre E C, ou AE: Qu'il tombe premierement entre E C: D'autant donc que le rectangle ſous AC, CB, auec le quarré de EC, a eſt egal au quarré de EB: Semblablement le rectangle ſous AD, DB, auec le quarré de ED, eſt egal au meſme quarré de EB, le rectangle ſous AC, CB, auec le quarré de EC. ſera egal au rectangle ſous AD, DB, auec le quarré de ED; eſtant donc les quarrez inegaux, des lignes droictes inegales EC, ED. puis que le quarré de EC, eſt plus grand que le quarré de ED, le rectangle ſous AC, CB, ſera moindre que le rectangle ſous AD, DB; Et partant 2. fois le rectangle ſous AC, CB, ſera moindre que 2. fois le rectangle ſous AD, DB. b Mais d'autant que 2. fois le rectangle ſous AC, CB, auec les quarrez de AC, CB, ſont egaux au quarré de AB, & pareillement 2. fois le rectangle ſous AD, DB, auec les quarrez de AD, DB, ſont egaux au meſme quarré de AB, 2. fois le rectangle ſous AC, CB, auec les quarrez de AC, CB, ſeront egaux à deux fois le rectangle ſous AD, DB, auec les 2. quarrez de AD, DB; Parquoy puis que deux fois le rectangle contenu ſous AC, CB, a eſté monſtré moindre que 2. fois le rectangle ſous AD, DB, les quarrez reſtans de AC, CB, ſeront plus grands que les autres quarrez de AD, DB. Ce qui eſt propoſé.

a 5. 2.

b 4. 2

Maintenant que D, tombe entre AE, d'autant que les parties AC, CB, ſont poſées plus inegales que AD, DB: AD (qui eſt la plus petite des dernieres) ſera plus grande que CB, (qui eſt la moindre des premieres) & partant puis que AE, EB, ſont egales, la reſtante EC, ſera plus grande que la reſtante DE: c partant le rect.

c 5. 2.

sous AC, CB, *auec le quarré de* EC, *estant egal au quarré de* EB. *Semblablement le rectangle sous* AD, DB, *auec le quarré de* DE, *estant egal au quarré de* AE, *c'est à dire au mesme quarré de* EB; *le rectangle sous* AC, CB, *auec le quarré de* EC, *sera egal au rectangle sous* AD, DB, *auec le quarré de* DE; *Donc nous demonstrerons comme de premier que les quarrez de* AC, CB, *sont plus grands que les quarrez de* AD, DB. *Ce qui est proposé.*

xlij xxxvj

THEOREME 31. PROP. 43.

La ligne de deux noms, peut estre diuisee en ses noms, à vn poinct seulement.

Soit AB, de deux noms ou binome, diuisee au poinct C, en ses noms, de sorte que AC, CB, soient Rationelles commensurables en puissance seulement selon la 37. p. 10. Ie dis que AB, ne peut estre diuisee en d'autres noms à vn autre poinct, c'est à dire en d'autres lignes que AC, CB, qui soient Rationelles commensurables en puiss. seulement.

Car s'il est possible, soit diuisee derechef en ses noms à D. Il est manifeste que AB, n'est diuisé à C, en deux egalement; car AC, CB, seroient commensurables en longitude contre l'hypothese: ny semblablement à D. Donc AC, est couppee tant à C, que à D, inegalement; Partant AC, CB, sont parties moins inegales que AD, DB, ou plus inégales. [a] Parquoy les quarrez de AC, CB, seront moindres que les

a *lem.* 42. 10.

quarrez de AD, DB, ou plus grands, (car les parties AD, ne seront egales aux parties de AC, CB, chacune à la sienne, sçauoir la plus grande à la plus grande, & la moindre à la moindre, de quelque part que tombe le poinct D, autrement AB, seroit diuisee à la seconde diuision au mesme poinct qu'à la premiere) Mais d'autant que si de choses egales on oste choses inegales, [b] l'excez des restantes est egal à l'excez des re- [b 16. c.s. 1.] tranchees: Mais les quarrez de AC, CB, auec 2. fois le rectangle sous AC, CB, sont egaux aux quarrez de AD, DB, auec deux fois le rectangle sous AD, DB; [c] Puis que tant ceux-là que ceux-cy sont egaux au quarré de AB: il [c 4. 2.] s'ensuit que l'excez du composé des quarrez de AC, CB, & du composé des quarrez de AD, DB, sera egal, ou le mesme que du composé de 2. fois le rectangle sous AC, CB, & de deux fois le rectangle sous AD, DB: Mais l'excez des composez des quarrez de AC, CB, & AD, DB, est Rationel (car AC, CB, estant Rationelles, & partant leurs quarrez Rationaux, & leur composé [d] estant commensurable à chacun d'i- [d 16. 10.] ceux, [e] sera Rationel; par la mesme raison le [e 10. d.] composé des quarrez de AD, DB, sera rationel, [f] donc puis qu'vn Rationel excede vn Rationel, d'vn rationel. Il est manife. quel'excez des co- [f schol. 17. 10.] posez des quarrez de AC, CB, & de AD, DB, est rationel.) Donc l'excez de 2. fois le rect. sous AC, CB, & de deux fois le rect. sous AD, DB, est aussi Rationel. [g] Mais le rectangle sous AC, CB, estant Medial deux fois le rectangle sous AC, CB, commensurable à iceluy [h] est aussi Medial: Semblablement 2. fois le rectangle sous [g 22. 10.] [h corol. 24. 10.]

117.10. AD, DB, eſt auſſi Medial: Parquoy vn medial n'excedant vn medial d'vn Rationel, l'excez de deux fois le rectãgle ſous AC, CB, & de deux fois le rectangle ſous AD, DB, ne ſera eſpace Rationel: Mais nous auons monſtré qu'il eſt Rationel, ce qui eſt abſurde. Donc AB, ne peut eſtre diuiſee en ſes noms à vn autre poinct qu'à C. Partant eſt diuiſee en ſes noms à vn poinct ſeulement. Ce qu'il falloit demonſtrer

SCHOLIE.

Henrion dit en la demonſtration de ceſte prop. Si AD, & DB, ſont parties plus grandes que AC, CB, par le lemme qui ſuit la 42. prop. 10. le compoſé des quarrez de AC, & CB, ſera plus grand que le compoſé des quarrez de AD, & DB, &c. *Ce qui eſt abſurde; Car ſi* AD, & DB, (*comme il dit*) *ſont parties plus grandes que* AC, & CB, *au contraire le compoſé des quarrez de* AD, & DB, *ſera plus grand que le compoſé des quarrez de* AC, & CB, *chacun des premiers deſcrits ſur lignes plus grandes, eſtant plus grand que chacun des derniers deſcrits ſur lignes moindres, & ce qu'il dit ne conuient nullement audit lemme qu'il cite: D'auantage ſelon le lemme allegué les parties qu'il veut dire, ſçauoir* AD, & DB, *ne peuuent eſtre plus grandes que* AC, & CB, *car ſi cela eſtoit la toute* AB, *compoſee de* AD, & DB, *plus grandes, ſeroit plus grande que la meſme* AB, *compoſee de* AC, & CB, *moindres, ce qui eſt ridicule de dire qu'vne choſe ſoit plus grãde qu'elle meſme: Mais il deuoit dire que ſi* AD, & DB, *ſont parties moins inegales que* AC, & CB, *le compoſé des quarrez de* AC, & CB, *parties plus inegales eſt plus grand que le compoſé*

posé des quarrez de AD, & DB, parties moins inegales, comme veut le lemme cité: &c. Quant à moy ie croy que s'il entendoit bien ce qu'il dit, ou plustost ce qu'il doit dire, qu'il auroit corrigé ses fautes à la seconde Edition de son liure.

THEOREME 32. PROP. 44. xliij xxxviii

La ligne de deux Mediales premiere, est diuisee en ses noms à vn poinct seulement.

Soit AB, bimediale premiere, ou de deux mediales premiere, diuisee en ses noms par le poinct C, en sorte que AC, CB, soient mediales commens. en puiss. seulement, contenant vn rectangle Rationel comme il est a dit. Ie dis que AB ne peut estre diuisee en ses noms à vn autre poinct. a 38. 10.

Car s'il est possible, soit icelle aussi diuisee à D, en sorte que AD, DB soient Mediales commẽs. en puissance seulement, & contenant vn rect. Rationel: De quelque part que tombe le poinct D, l'on monstrera comme en la precedente, que l'excez de 2. fois le rect. sous AC, CB, & de 2. fois le rect. sous AD, DB, est le mesme que l'excez des composez des quarrez de AC, CB, & de AD, DB: Mais l'excez desdits rectangles est Rationel; (Car le rect. sous AC, CB, estant Rationel, 2. fois le rect. sous AC, CB, commens. à iceluy, est aussi Rationel & semblablement 2. fois le rect. sous AD, DB, sera Rationel; &

b *schol.* 27. 10. vne figure Rationelle : [b] excedant vne figure Rationelle, d'vne figure Rationelle; l'excez de 2. fois le rect. ſous AC, CB, & de 2. fois le rect. ſous AD, DB, eſt rationel.) Donc l'excez des compoſez des quarrez de AC, CB, & des quarrez de AD, DB, eſt rationel : mais AC, CB, eſtant Mediales commenſ. en puiſſ. leurs quarrez ſeront Mediaux & commenſurables. [c] Parc 16. 10. quoy leur compoſé ſera commenſurable à chacun d'iceux : [d] & partant Medial : par la meſme d *corol.* 24. 10. raiſon le compoſé des quarrez de AD, DB, eſt Medial, [e] & vn eſpace Medial n'excedant pas e 17. 10. vn Medial d'vn Rationel, l'excez des compoſez des quarrez de AC, CB, & de AD, DB, ne ſera Rationel : Mais nous l'auons monſtré Rationel : Ce qui eſt abſurde. Donc AB, premiere de deux Mediales ou Bimediale premiere, ne peut eſtre diuiſee en ſes noms à vn autre poinct que C. Partant eſt diuiſee en ſes noms à vn poinct ſeulement. Ce qu'il falloit demonſtrer.

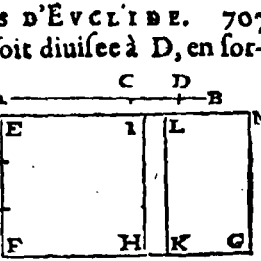
xliv xxxviij

THEOREME 33. PROP. 45.

La ligne de deux Mediales ſeconde, eſt diuiſee en ſes noms à vn poinct ſeulement.

Soit la ligne AB, de deux mediales ſeconde ou bimediale ſeconde, diuiſee en ſes noms au poinct C, de ſorte que AC, CB, ſoient mediales commenſurables en puiſſance ſeulement, & a 39. 10. contenãt vn rectangle medial, comme il eſt dit. Ie dis que AB, ne peut eſtre diuiſee en d'autres noms à vn autre poinct comme à D.

Car s'il se peut faire soit diuisee à D, en sorte que AD, DB, soient aussi mediales commens. en puiss. seulement, & contiennent vn rect. medial: Nous demonstrerons comme à la 43. que les quarrez de AC, CB, sont plus grands ou plus petits que les quarrez de AD, DB: Soit exposee E F, rationelle à laquelle soit [a] applique le rect. EG, egal au quarré de AB, & EH, egal aux quarrez de AC, CB, donc le reste IG, sera egal à deux fois le rect. sous AC, CB, [b] puis que le quarré de AB, est egal à iceux quarrez de AC, CB, & à 2. fois le rect. sous AC, CB. Semblablement si à EF, on applique EK, egal aux quarrez de AD, DB, le reste LG, sera egal à 2. fois le rect. sous AD, DB; Et puis que les quarrez de AC, CB, sont inegaux aux quarrez de AD, DB; les rectangles EH, EK qui leur sont egaux serõt aussi inegaux, & partant FH, FK, seront inegales. Derechef les quarrez de AC, CB, estant plus grands que [c] deux fois le rect. contenu sous AC, CB; EH. sera plus grand que IG, & partant EH plus grand que la moitié de EG, & la ligne FH, plus grande que la moitié de FG: par mesme raison FK, sera monstree plus grande que la moitié de FG, donc les parties FH, HG, sont inegales aux parties de FK, KG, chacune à la sienne: Mais d'autant que AC, CB, sont mediales commens. en puiss. leurs quarrez sont mediaux & commensurables: Donc le composé [d] d'iceux EH, sera commens. à vn chacun d'i-



[a] 45. 1.
[b] 4. 2.
[c] lem. 39. 10.
[d] 16. 10.

e *corol.* 24. 10. ceux,[e] & partant medial: par mesme raison EK, f 23. 10 sera medial. Donc[f] EH, EK, appliquez à la rationnelle EF, font les latitudes FH, FK, rationelles incommensurables en longitude à EF. Semblablement puis que le rectangle sous AC, CB, est posé medial, deux fois le rectangle sous AC, C g *corol.* 24. 10. B, cõmensurable à iceluy[g], i. IG est aussi medial; Donc estant appliqué à la rationelle HI, HG h 23. 10. sera rationelle[h] incommens. en longit. à HI: Semblablemẽt nous monstrerõs LG, estre medial, & KG, rationelle incõmensurable en lon- i *lem.* 3. 19. 10. gitude à KL. Derechef puis que AC, à CB sont incõm. en longit. & que cõme AC, à CB, ainsi le quarré de AC, au rectangle sous AC, CB, le k 10. 10. quarré de AC, sera incommens. au rect. sous AC, CB: Mais le composé des quarrez de AC, l 16. 10. CB, est commens. au quarré de AC, (car AC, CB, estant commens. en puiss. c'est à dire leurs quarrez estant commens.) le composé d'iceux. sera commẽs. à chacun d'iceux, sçauoir au quarré de AC: Mais deux fois le rect. sous AC, CB, est commens. au rect. sous AC, CB. Donc le m *schol.* 14. 10. composé des quarrez de AC, CB; c'est à dire le rect. [m] EH, est incommens. à deux fois le rect. n 1. 6. sous AC, CB, c'est à dire à IG. Partant puis que o 10. 10. EH, [n] est à IG, comme FH, à HG; [o] FH, HG, seront incommens. en longit. mais elles sont p 37. 10. monstrees rationelles, & partant rationelles commens. en puiss. seulement: [p] Donc la toute FG, est irrationelle, qui est appellee de deux noms, & diuisee en ses noms au poinct H. Semblablement nous demonstrerons aussi que FG, q 43. 10. de deux noms, est diuisee en autres noms à vn autre poinct K: [q] Ce qui est impossible. Donc A

B, bimediale seconde, n'est diuisee en ses noms à vn autre poinct que C. Partant est diuisee en ses noms à vn poinct seulement. Ce qu'il falloit demonstrer.

THEOREME 36. PROP. 46. xlv xxxix

La ligne Maieure est diuisee en ses noms à vn poinct seulement.

Soit la li. Maieure AB, diuisee en ses noms au poinct C, en sorte que AC, CB, soient incommens. en puiss. [a] faisant le composé de leurs quarrez rationel, & le rectangle sous icelles medial. Ie dis que AB, ne peut estre diuisee à vn autre poinct, en d'autres noms, sçauoir lesquels soient lignes incommēs. en puissance faisant le composé de leurs quarrez rationel, & le rect. sous icelles medial.

a 4. 01.

Car s'il se peut faire, soit diuisee en d'autres noms par D: Comme [b] il a esté demonstré, l'excez du composé des quarrez AC, CB, & du cōposé des quarrez de AD, DB, est le mesme que celuy de 2. fois le rectangle sous AC, CB, & de 2. fois le rect. sous AD, DB; mais l'excez des composez desdits quarrez est rationel: (car puis que l'vn & l'autre composé est posé rationel, l'excez [c] d'iceux sera aussi Rationel) donc l'excez de 2. fois le rect. sous AC, CB, & de deux fois le rectangle sous AD, DB, est rationel. Mais d'autant que le rect. sous AC, CB, est posé medial, 2. fois le rect. [d] de AC, CB, est aussi medial, estant commens. semblablement le rect. sous

b 43.10

c *schol.* 27. 10.

d *corol.* 24.10.

c 27.10. AD, DB, 2. fois, eſt medial. c Donc puis qu'vn medial n'excede vn medial d'vn rationel, l'excez de 2. fois le rect. ſous AC, CB, & de 2. fois le rect. ſous AD, DB, ne ſera pas rationel. Mais nous auons monſtré qu'il eſt auſſi rationel: ce qui eſt abſurde. Donc AB, ne ſe peut pas diuiſer en ſes noms à vn autre poinct que C. Partant elle ſe diuiſe en ſes nõs à vn poinct ſeulement. Ce qu'il falloit demonſtrer.

xlvj xl

THEOREME 35. PROP. 47.

La ligne pouuant vn Rationel & vn Medial, eſt diuiſee en ſes noms, à vn poinct ſeulement.

Soit AB, pouuant vn rationel & vn medial diuiſee en ſes noms, au poinct C, en ſorte que AC, CB, ſoient incommenſ. en puiſſ. faiſant le compoſé de leurs

* 41.30 quarrez medial, & le rectangle ſous icelles rationel. Ie dis que AB, ne peut eſtre diuiſee en d'autres noms à vn autre poinct, leſquels ſoient auſſi lignes incommenſ. en puiſſ. faiſant le compoſé de leurs quarrez medial; & le rectangle contenu ſous icelles rationel.

Car ſoit diuiſee en d'autres noms s'il eſt poſſible à D: de quelque part que tombe le poinct D, nous monſtrerons comme en la 43. p. que l'excez de 2. fois le rect. ſous AC, CB, & de 2. fois le rect. ſous AD, DB. eſt le meſme que l'excez du compoſé des quarrez de AC, CB. & du compoſé des quarrez de AD, DB: mais l'excez deſdits

rectangles est rationel [b] comme il est monstré: Donc l'excez du composé des quarrez de AC, CB, & de AD, DB, est aussi rationel; mais les cõposez d'iceux quar. sont posez mediaux: [c] Dõc l'excez d'iceux ne sera rationel, vn medial n'excedant vn Medial d'vn Rationel: Mais il est monstre Rationel, ce qui est absurde. Donc AB. n'est diuisee en ses noms à vn autre poinct que C. Partant à vn poinct seulement. Ce qu'il falloit demonstrer.

b 44 10

c 17. 10

THEOREME 36. PROP. 48. xlvij xlj

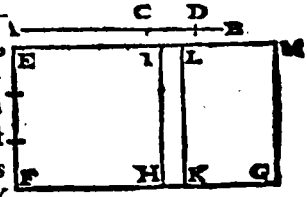
La ligne pouuant deux Mediaux, est diuisee en ses noms à vn poinct seulement.

Soit AB, pouuant deux mediaux, diuisee en ses noms à C, en sorte que AC, CB, soient incommens. faisant le composé de leurs quarrez medial, & le rectangle sous icelles Medial, & incommens. [a] au composé de leurs quarrez. Ie dis que AB, ne peut estre diuisee à vn autre poinct en d'autres noms, qui soient aussi lignes incommens. en puiss. faisant ce qui est dit.

a 42. 10.

Car s'il est possible, soit diuisee en d'autres noms par D: faisant la mesme construction qu'en la 45. proposition, nous demonstrerons comme en icelle que les parties FH, HG, sont inegales aux parties FK, KG, chacune à la sienne. D'autant donc que le composé des quarrez de AC, CB, est posé medial, EH, son egal est aussi medial: & puis que le rect. sous AC, CB, est aussi posé medial, IG, egal au double d'i-

b *coral.* celuy b eſt medial, eſtant commenſurables. Doc
24. 10. EH, IG, mediaux appliquez à la rationelle EF,
c 1. 10. c ſont FH, HG, rationelles incommenſ. en longit. à EF (car H eſt egale à EF:) Ainſi nous prouuerons que FK, KG, ſont rationelles incõm. en longit. à EF; mais puis que le cõpoſé des quarrez de AC, CB, c'eſt à dire, EH, eſt incommẽſurable à 2. fois le rect. ſous AC, CB, par l'hypotheſe: C'eſt à dire à IG; d Et comme EH, à IG, ainſi FH, à HG; FH,
d 1. 6.
e 10. 10. HG. ſont e incommenſ. en longitude: mais elles ſont monſtrees rationelles. Donc FH, HG, ſont rationelles commenſ. en puiſſ. ſeulement: Donc la toute FG, eſt irrationelle, appellée de deux noms, & diuiſee en ſes noms à H; ainſi nous monſtrerons que FG, eſt auſſi diuiſee en d'autres noms à vn autre poinct K, ce qui eſt demonſtré impoſſible. f Donc AB, pouuant deux
f 43. 10. mediaux n'eſt diuiſee en ſes noms à vn autre poinct qu'à C. Donc à vn poinct ſeulement. Ce qu'il falloit demonſtrer.



SECONDES DEFINITIONS.

Vne ligne Rationelle eſtant expoſee, & vne ligne de 2. nõs, (laquelle ils appellent binome) diuiſee en ſes noms, de laquelle le plus grãd nom puiſſe plus que le moindre, du quarré d'vne ligne droitte qui luy eſt commenſurable en longitude.

1 Si le plus grand nom eſt commenſurabl

en longitude à la Rationelle expoſee : la toute ſoit appellee, premiere de deux noms, ou binome premier.

2. Mais ſi le moindre nom eſt commenſurable en longitude à la Rationelle expoſee; Soit appellee ſeconde, de deux noms, ou binome ſecond.

3. Que ſi l'vn ne l'autre d'iceux noms n'eſt commenſurable en longitude à la rationelle expoſee; Soit appellee troiſieſme de deux noms, ou binome troiſieſme.

Derechef ſi le plus grand nom peut plus que le moindre, du quarré d'vne ligne droicte, qui luy ſoit incommenſurable en longitude.

4. Si le plus grand nom eſt commenſurable en longitude à la Rationelle expoſee; Soit appellee, quatrieſme de deux noms ou binome quatrieſme.

5. Mais ſi le moindre nom eſt commenſurable en longitude à la rationelle expoſee; Soit appellee cinquieſme de deux noms.

6. Que ſi l'vn ny l'autre d'iceux noms n'eſt commenſurable en longitude à la Rationelle expoſee; Soit appellee ſixieſme.

Theon appelle icy les definitions des Binomes, ſecondes definitions, à cauſe des premieres qui ſont au commencement de ce liure 10. d'Euclide, encore qu'elles ſoient peut eſtre de luy; de Theon, diſie, & non d'Euclide.

xlviij xlij

PROBLEME 13. PROP. 49.

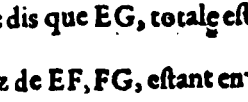
Trouuer vne ligne premiere de deux noms : ou Binome premier.

Ayant [a] trouué 2. nombres quarrez AB, CB, dont l'excez AC, ne ſoit quarré, de ſorte que AB, CB, ſoient entr'eux comme nombre quarré à nomb. q. Mais AB, AC, ne ſoient entr'eux comme nomb. q. à nomb. quarré: & ſoit expoſee vne l. rationelle D, à laquelle ſoit priſe EF, commenſ. en longit. EF, commenſ. à D Rationelle ſera auſſi [b] Rationelle; Puis ſoit FG, au q. de laquelle ſoit le quarré de EF, comme le nombre AB, au nomb. AC. Ie dis que EG, totale eſt Binome premier.

[a] *ſchol.* 29. 10.

[b] *coro.* 6. 10.

Car puis que les quarrez de EF, FG, eſtant entr'eux comme les nombres AB, AC, [c] ſont commenſurables; EF, FG, ſeront commenſ. au moins en puiſſance: mais EF, eſt monſtree Rationelle, donc FG, l'eſt auſſi; Et AB, n'eſtant à AC, comme nomb. q. à nombre quarré, les quarrez de EF, FG, ne ſeront entr'eux comme nomb. q. à nomb. quarré: [d] Donc EF, FG, ſont incommenſ. en longit. Et partant Rationelles commenſ. en puiſſ. ſeulement; [e] & la toute EG, eſt Irrationelle, appellee de 2. noms: Ie dis qu'elle eſt auſſi premiere. Car le quarré de EF, eſtant au quarré de FG, comme AB, à AC, nomb. à nomb. & AB, eſtant plus grand que AC, le quarré de EF, ſera plus grand que le quar-



[c] 6. 10.

[d] 9. 10.

[e] 37. 10.

ré de FG. Qu'il ſoit donc plus grand du quarré de H. D'autant que comme le nombre AB, eſt au nomb. AC, ainſi le quarré de EF, au quarré de FG: par conuerſion de raiſon, comme AB, ſera à CB: (ſçauoir à l'excez, dont AB, antecedent excede AC, conſequent:) ainſi le quarré de EF, eſt au quarré de H, ſçauoir à l'excez dont l'antecedēt quarré de EF, excede le conſequent qu. de FG. Mais AB, CB, ſont nombres quarrez, donc les quarrez de EF, & H ſont entr'eux comme nomb. quarré à nomb. quarré: ſpartant EF, & H ſont commenſ. en longit. Donc puis que le plus grand nom EF peut plus que le moindre FG, du quarré de H, commenſurable en longit. à icelle: & le meſme EF, eſt auſſi commenſ. en longit. à D, Rationelle expoſee: EG, ſera premiere de deux noms, ou binome premier. ſelon la def. Donc nous auons trouué vn Binome premier. Ce qu'il falloit faire. f *lem.* 14. 18. g 9.

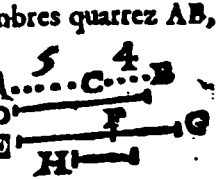
SCHOLIE.

Soit la ligne Rationelle propoſee D, 8. & EF, ſoit 6. & comme AB, 9. nombre quarré eſt à AC, 5. nombre non quarré, ainſi 36. quarré EF, 6. ſoit à vn autre; ſçauoir au quarré de FG, qui ſera trouué de 20. Donc FG ſera √q 20. & EG, toute ſera 6. + √q 20. Binome premier, comme il eſt manifeſte de ce qui eſt dit cy-deſſus.

PROBLEME 14. PROP. 50. xlix xliij

Trouuer vne ligne, ſeconde de deux noms: ou binome ſecond.

Ayant trouué deux nombres quarrez AB, CD, comme en la precedente; & eſtant expoſee la rationelle D; ſoit priſe F G, commenſ. en longit. à icelle; FG, ſera donc auſſi rationelle: Et comme le nombre AC eſt au nombre AB, [a] ſoit le quarré de FG, au quarré de EF. Ie dis que EG, eſt binome ſecond.



a *corol.* 6. 10.

Car les quarrez de FG, EF, eſtant entr'eux cõme les nombres AC, AB, [b] iceux ſeront commenſ. & les lignes FG, EF, commenſ. au moins en puiſſ. & FG eſt monſtrée rationelle: Donc EF, l'eſt auſſi: mais puis que AC, ny AB, ne ſont entr'eux comme nomb. quarré à nomb. quarré, les quarrez de FG, EF, ne le ſeront auſſi comme nomb. quarré à nomb. quarré. [c] Et partant EF, FG, incommenſ. en longit. & par ainſi rationelles commenſ. en puiſſ. ſeulement; [d] & la toute EG, irrationelle, qui eſt appellee binome. Ie dis que c'eſt la ſeconde; Car puis que le quarré de FG, eſt au quarré de EF, comme le nombre AC, au nombre AB, & par cõuerſiõ de raiſon le qu. de EF, au qu. de FG, cõme AB, à AC; & que AB eſt plus grand que AC: le quarré de EF, ſera plus grãd que le quarré de FG. [e] Qu'il ſoit donc plus grand, du quarré de H: nous mõſtrerons comme en la preced. que H, eſt commenſ. en longit. à EF. Or puis que le plus grand nom EF, peut plus que le moindre FG, du quarré de H, commenſ. à icelle en longit. Et le moindre nom FG eſt commenſ. en longit. à la rationelle expoſee D; EG, par la definit. ſera la ſeconde de deux noms. Donc nous auons trouué

b 6. 10.

c 9. 10.

d 37. 10.

e *lem.* 14 10.

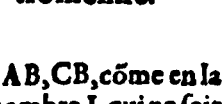
vn binome ſecond. Ce qu'il falloit faire.

SCHOLIE.

Soit la ligne FG, prinſe pour ſecond nom 5. nombre Rationel, & ſoit faict comme AC, 5. au nombre quarré AB 9. ainſi 25. quarré du nombre prins, ſoit à vn autre: ſçauoir à 45. quarré de EF: Donc EF, ſera ✓q 45. Partant la toute EG, ſera ✓q 45. + 5. binome ſecond.

PROBLEME 15. PROP. 51.

Trouuer vne troiſieſme ligne de deux noms: ou binome troiſieſme.



Ayant pris deux nombres AB, CB, cõme en la 49. prop. ſoit pris vn autre nombre I, qui ne ſoit à AB, ny à AC, comme nombre quarré à nombre quarré. Ce que l'on fera prenant I, nombre non quarré prochainemẽt plus grand que AC: cela eſtant, il ne ſera à AB, comme nombre quarré à nombre quarré. Derechef n'eſtant quarré prochain. plus grand que AC, il ſera different de 1. de AC, ou de 2. Donc entre I & AC il ne [a] tombera vn moyen proportionel, partãt ne ſerõt plans ſemblables: & ne ſeront entr'eux comme nomb. quarré à nombre quarré. Maintenant ſoit propoſee D, rationelle, & comme I à AB, ainſi le quarré de

[a] *ſchol. 8. 8.*

D, [b] soit au quarré de EF. [c] Donc les quarres de D, & EF, seront commens. & D & EF commens. au moins en puiss. & D estant rationelle, EF le sera aussi. Et d'autant que I, n'est à AB, c'est à dire le q. de D, n'est au quar. de EF, cõme nõb. quarré à nomb. quarré; [d] D & EF seront incõmens. en longit. [e] Derechef soit FG, au quarré de laquelle soit le quarré de EF, comme AB, à AC. [f] Ceux quarrez seront commens. & EF, FG, au moins commensurables en puiss. Donc EF, estant monstree rationelle, FG, sera aussi rationelle, & d'autant que AB, n'est à AC: c'est à dire le quarré de EF n'est au quarré de FG, comme nomb. quarré à nomb. quarré, EF, , FG [g] seront incommens. en longitude. Donc EF, FG, sont rationelles commens. en puissance seulement; [h] partant la toute EG, irrationelle appellee de 2. noms. Ie dis que c'est la troisiesme.

b *coroll.* 6. 10.
c 6 10.
d 9 10.
e *coroll.*
f 6. 10.
g 9. 10.
h 37 10.

Car puis que comme I, est à AB, ainsi le quarré de D au quarré de EF, & comme AB, à AC, ainsi le quarré de EF, au quarré FG, en raison egale comme I à AC, ainsi le quarré de D, au quarré de FG; Mais I, & AC, ne sont entr'eux comme nomb. quarré à nomb. quarré: Donc les quarrez de D & FG, ne seront aussi comme nombre quarré à nomb. quarré; Donc [i] D & FG, sont incommens. en longitude: mais d'autant que comme AB, à AC, ainsi le quarré de EF, au qu. de FG; Mais AB est plus grand que AC, donc le quarré de EF sera plus grãd que le quarré de FG: [k] qu'il soit donc plus grãd du quarré de H, nous monstrerons comme en la 49. prop. que H est commens. en longit. à EF: D'autant donc que le plus grand nom EF, peut plus que le moindre

i 9. 10
X *lem.* 14. 10.

FG, du quarré de H, commenſ. en longit. à icelle, & que l'vne ny l'autre EF, FG, n'eſt commenſ. en longit. à la rationelle propoſé D, comme il eſt demonſtré; EG, par la def. ſera la troiſieſme de deux noms: Donc nous auons trouué vn binome troiſieſme. Ce qu'il falloit faire.

SCHOLIE.

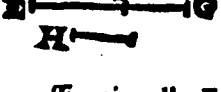
Soit la ligne Rationelle propoſee D,12. *& comme* 1,6. *eſt au nombre quarré* AB, 9. *ainſi* 144. *quarré de* D, *ſoit à vn autre; ſçauoir au qu. de* EF: *ſçauoir à* 216. *Donc* EF *ſera* √q 216. *pour le plus grãd nõ: Derechef cõme le nomb. quar.* AB,9. *eſt au nomb.* AC,5. *ainſi le quarré trouué* 216. *ſoit à vn autre: ſçauoir au quarré de* FG, *qui ſera trouué de* 120. *Donc* FG *ſera* √q 120. *moindre nom, partant la toute* EG *ſera* √q 216. + √q 120. *Binome troiſieſme &c.*

PROBLEME 16. PROP. 52.

lij xlv

Trouuer vne ligne quatrieſme de deux noms; ou binome quatrieſme.

Ayant trouué 2. nombres AC, CB, tels que le compoſé AB; [a] ne ſoit à aucun d'iceux comme nomb. quarré à nomb. quarré. Soit propoſee D, rationelle, & priſe EF, commenſ. en longit. à icelle: Doncicelle EF, ſera auſſi rationelle. Et ayant faict le reſte comme en la 49. prop. nous monſtrerons comme là que la toute EG, eſt de



a *ſchol.* 3.29.10.

deux noms. Ie dis que c'eſt la quatrieſme. Car le quarré de EF, (comme en la 49.) ſera plus grand que le quarré de FG: Que ce ſoit donc du q. de H. Et par conuer. de raiſon cõme en la 49. cõme AB, eſt à CB, ainſi le quarré de E F, eſt au quarré de H; mais AB, n'eſtãt à CB, comme nõbre quarré à nombre quarré, le quarré de EF ne ſera au quarré de H, comme nombre quarré à
b 9. 10. nombre quarré. Donc[b] EF, & H, ſont incommenſ. en longitude: Et puis que le plus grand nom EF peut plus que le moindre FG, du quarré de H incommenſ. en longit. à icelle, & le plus grand nom EF, eſt commenſ. en longit. à la rationelle D; EG, par la def. ſera binome quatrieſme. Donc nous auons trouué [illegible]requis Ce qu'il falloir faire.

SCHOLIE.

Soit D, *Rationelle expoſee* 8. *& la ligne* EF, *priſe pour le plus grand nom ſoit* 6. *& comme le nombre quarré* AB 9. *à* AC, 6. *nombre non quarré, ainſi* 36, *quarré de* EF, 6. *ſoit à vn autre, ſçauoir au quarré de* FG, *qui ſera trouué de* 24. *Partant* FG, *moindre nom ſera* √q 24. *Donc la tonte* EG, *ſera* 6. + √q 24. *Binome quatrieſme.*

lij xlvij

PROBLEME 17. PROP 53.

Trouuer vne cinquieſme ligne de deux noms.

Ayant trouué deux nombres AC, CB, comme en la precedente, ſoit faict la conſtruction comme en 150. c'eſt à dire ſoit priſe FG, commenſ.

menſ. en longit. à l'expoſee rationelle D: Il ſera monſtré comme en la 50. prop. que EG, eſt binome. Ie dis auſſi que c'eſt le cinquieſme: car on demonſtrera comme en la meſme 50. que le quarré de EF, ſera plus grand que le quarré de FG. Qu'il ſoit donc plus grand du quarré de H; Mais d'autant que par conuerſion de raiſon (comme il eſt monſtré en la 49. comme AB, eſt à CB, ainſi le quarré de EF, eſt au quarré de H) il ſera monſtré comme en la precedente que EF, & H ſont incommenſ. en longit. Partant puis que le plus grand nom EF, peut plus que le moindre FG, du quarré de H, incommenſ. en longit. à icelle, & le moindre nom FG, eſt commenſ. en longit. à la rationelle expoſee D. par la def. EG, ſera binome cinquieſme. Donc nous auons trouué le requis. Ce qu'il falloit faire. *Voyez la fig. preced.*

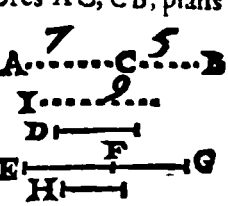
SCHOLIE.

Soit la ligne D, Rationelle expoſee, & ſoit FG, moindre nom 2. & comme le nombre AC, 6. eſt au nombre quarré AB, 9. ainſi 4. quarré de FG 2. ſoit à vn autre, ſçauoir au quarré de EF, qui ſera trouué de 6. Donc EF, ſera √q 6. pour le plus grand nom: Partant la toute AG, ſera √q 6. + 2. binome cinquieſme.

PROBLEME 18. PROP. 54. liij xlvij

Trouuer vne ligne ſixieſme de deux noms: ou Binome ſixieſme.

Ayant trouué deux nombres AC, CB, plans non semblables, l'vn ny l'autre desquels ne soit quarré, & le composé d'iceux AB, ne soit aussi quarré, & ne soit à l'vn ny l'autre comme nombre q. à nombre quar. (ce que l'on fera, diuisant quelque nombre non quarré en deux nombres premiers entr'eux. a Car ainsi le tout sera premier à chacun d'iceux, b & partant ne sera à aucun d'iceux cõme nõb. quarré à nõb. q.) Et soit pris quelconque autre nombre I qui ne soit à AB, ny à AC: comme nombre quarré à nombre quarré. Et soit vne Rationelle proposee D: & comme I est à AB, ainsi soit faict le quarré de D: c au quarré de EF, Et le reste comme en la 51. Nous monstrerons comme en icelle que D & EF, sont incommens. en longit. & que la toute EG est Binome. Ie dis aussi que c'est la sixiesme: Car il sera demonstré comme en la 51. prop. que D & FG, sont incommens. en longit. & que le quarré de EF est plus grand que le quarré de FG. Soit donc plus grãd du q. de H, nous demonstrerons aussi comme en la 49. que par conuersion de raison, comme AB est à CB, ainsi le quarré de EF est au quarré de H. Donc puis que AB n'est à CB, & partant le quarré de EF au quarré de H, comme nombre quarré à nombre quarré; d E F & H seront incommens en longit. Donc puis que le plus grand nom EF, peut plus que le moindre FG, du quarré de H, incommens.



a 30. 7.
b *schol* 27. 8.
c *coroll.* 6. 10.
d 9. 10.

en longit. à icelle, & aucune d'icelles EF, FG, n'eſt com. menſ. en longit à l'expoſée Rationelle D, ſelon la definit. EG, ſera Binome ſixieſme. Donc nous auons trouué vn Binome 6. Ce qu'il falloit faire.

SCHOLIE.

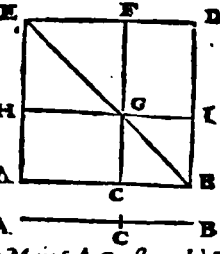
Soit D, *rationelle prop.* 9. *&* *comme* I, 9. *eſt à* AB, 12. *ainſi le quarré de* D, *qui eſt* 144. *ſoit à vn autre ſçauoir au quarré de* EF; *qui ſera trouué de* 192. *Donc* EF *ſera* √q 192. *plus grand nom. Derechef comme* AB 12. *à* AC, 7. *ainſi le quarré de* EF, 192. *ſoit à vn autre ſçauoir au quarré du moindre nom* FG, *on trouuera* 112. *Donc* FG, *ſera* √q 112. *&* *la toute* EG, *ſera* √q 192. + √q 112. *Binome ſixieſme.*

LEMME.

Si vne ligne droicte eſt couppee comme l'on voudra, le rectangle contenu ſous les parties, eſt milieu proportionel, entre les quarrez d'icelles parties: Item le rectangle contenu ſous la toute & vne partie eſt milieu proportionel entre le quarré de la toute, & le quarré de ladicte partie.

Soit couppee AB, *comment que ce ſoit à* C, *&* *ſur icelle ſoit deſcrit le quarré* AD, *&* *ſoit mené le diametre* BE; *&* *par* C, *ſoit auſſi menee* EF *parallele à* BD, *ou* AE, *couppant le diametre par* G, *&* *par* G, *ſoit menee* IH, *parallele à* AB; FH, CI, [a] *ſeront les quarrez des parties* AC, CB: *&* *l'vn &* *l'autre des rect.* DG, GA, *ſera contenu ſous leſdites parties: Mais les rect.* C [a] *corol. 4. 2.*

D, AI, *ſont contenus ſous la toute* AB *& la partie* CB; *Ie dis que* D G, *eſt milieu proportionel entre les quarrez* F H, C I : *mais* C D *eſt milieu proportionel entre les quarrez* AD, CI. *Car d'autant que comme* H G, *à* GI, [b] *ainſi tant le rect.* FH, *eſt à* DG, *que* AG, *à* CI ; *comme* FH *ſera à* DG *ainſi* AG, *à* CI: *Mais* [c] AG, *eſt egal à* D G. *Donc comme* FH, *eſt à* DG, *ainſi* DG, *à* CI: *donc* D G, *eſt milieu proportionel, entre les quarrez* FH, CI.



b 1. 6.
c 43. 1.
d 1. 6.

Derechef d'autant [d] *que cõme* AB *eſt à* CB, *ainſi tant* AD *eſt à* CD, *que* AI *à* CI : *comme* AD *ſera à* CD, *ainſi* AI, *à* CI, *mais* AI *eſt egal à* CD: *Donc comme* AD, *à* CD, *ainſi* CD, *ſera auſſi à* CI; *donc* CD; *eſt milieu proportionel entre les quarrez* AD, CI. *Semblablement* AF, *ſera milieu proportionel entre les quarrez* AD, FH.

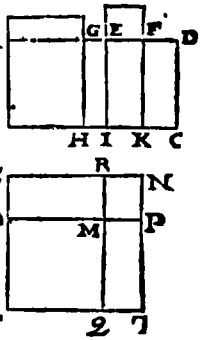
liv lviij

THEOREME 37. PROP. 55.

Si vn eſpace e conſutenous vne ligne Rationelle, & vne ligne premiere de deux noms ; La ligne droicte pouuant iceluy eſpace eſt irrationelle: laquelle eſt appellee de deux noms.

Soit l'eſpace ou rectangle AC, contenu ſous la Rationelle AB, & ſous AD, premiere de 2. noms, ou binome premier. Ie dis que la droicte ligne qui peut l'eſpace AC eſt Irrationelle, appellee Binome.

Car soit AE, le plus grand nom de AD. Dõc AE, ED, seront Rationelles commens. en puiss. seulement selon la definition; & AE, pourra plus que ED, du quarré d'vne ligne commẽs. en longit. à icelle, & AE, sera commensurable à la Rationelle exposee A B. Soit couppee E D, en 2. egalement à F: D'autant donc que AE peut plus que ED, du quarré d'vne ligne commens. en longit. à icelle : si on applique à AG, vn rect. egal au quart du quarré de ED, c'est dire au quarré de EF; contenu [a] sous AG, GE; Et defaillant d'vne figure quarree. [b] Il diuisera icelle en parties commens. en longit. donc AG, GE, sont commens. en longit. entr'elles: Maintenant soient menees GH, EI, FK, paralleles à AB, DC: [c] & soit le quarré L M, egal au parallelogramme AH. & le quarré MN, egal au parallelogramme GI, & soient conioincts iceux quarrez au poinct M, en sorte que MO, MP, facent vne ligne droicte OP: Donc MQ MR, feront aussi vne ligne droicte QR, [d] comme il appert. Et ayant acheué le rectangle L N, O M, M P, estant egales à QM, MR. (à cause des quarrez LM, MN) & partant la toute OP, à la toute QR, & OP, [e] estant aussi egale tant à S N, qu'à L T, & QR, à LS, TN, le rect. LN, sera equialtere, & partant quarré.



Mais le rect. sous AG, GE, estant faict egal au quarré de EF, [f] comme AG; à EF, ainsi EF, à GE:

a *lem.* 2. 17. 10.
b 18. 10.
c 14. 2.
d 15. 13.
e 34. 1.
f 17. 6.

g 1. 6. & g partant comme AH, à EK, ainſi EK, à GI, donc EK, eſt moyen proportionel entre AH, GI: c'eſt à dire entre leurs egaux quarrez LM, MN: h Mais TM, eſt moyen proportionel entre LM, MN: Donc TM, eſt egal à EK: i Donc MS eſtant egal à TM, k & FC, egal à EK, MS, ſera auſſi egal à FC. Parquoy tout le quarré LN ſera egal à tout le rectangle AC: partant la toute OP, peut l'eſpace AC, contenu ſous AB, Rationelle & AD, Binome premier. Ie dis que OP, eſt Irrationelle; appellé Binome: Car puis que AG, GE, ſont monſtrees commenſ. en longit. la toute AE ſera commenſ. en longit. à chacune d'icelles: Mais AE (eſtant le plus grand nom de AD, Binome premier) eſt commenſ. en longit. à la Rationelle AB, donc AG, GE, ſont commenſurables en longitude à la meſme AB, m comme il appert: partant AB eſtant Rationelle, AG, GE, ſeront Ration. donc n les rect. AH, GI, contenus ſous les Rationelles commenſ. en longit. ſont Rationaux; & auſſi leurs egaux quarrez LM, MN, & partant OM MP, ſeront Rationelles.

h *lem.* 54. 10. i 43. 1. k 36. 1. l 16. 10. m 12. 10. n 20. 10.

Et AE, eſtant incommenſ. en longit. à ED, & AG monſtree commenſ. en longit. à AE: & EF, commenſ. en longit. à ED, eſtant moitié d'icelle, o AG, EF ſeront incõm. en lõgit entr'elles: p parquoy AH, EK eſtant en meſme raiſon que AG, EF, q c'eſt à dire leurs egaux LM, MT, ſont incommenſ. r Donc OM, MP, ſont incommenſ. en longit. (ſ ayant meſme raiſon que LM, MT: Mais OM, MP, ſont monſtrees Rationelles, elles ſont donc Rationelles commenſ. en puiſſance ſeulement, t Parquoy la toute OP, pouuant l'eſpace AC, eſt irrationelle appellee Binome. Donc ſi vn eſpace eſt contenu &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.

o *ſchol.* 14. 10. p 1. 6. q 10 10 r 10. 10. ſ 1. 6. t 37. 10.

SCHOLIE.

Soit la rationelle AB 5. *&* AD, 4. + √q 12. EF, *ou* FD *sera* √q 3 *& si à* AE, *on applique vn parallelogramme egal au quarré de* EF *defaillant d'vne figure quarree,* AG, *sera* 3. *&* GE 1. *partant* AH, *sera* 15. GI. 5. *&* EK, *ou* FC √q 75. *Parquoy le tout* AC, *sera* 20. + √q 300. *tels espaces sont par les reccus, appellez Binomiaux, ou de deux noms.*

Trouuer le costé ou Racine quarrée de l'espace Binomial.

Soit l'espace Binom. 20. + √q 300. *dont il faut trouuer le costé soit diuisé le plus grand nom en* 2. *telles parties que le product d'icelles soit egal au quart du quarré du moindre nom, scauoir à* 75. *la plus grande partie sera* 15. *& la moindre* 5. *Ie dis que* √q 15. + √q 5 *sera le costé du quarré egal à* 20. + √q 300. *Car la ligne de* 2. *noms scauoir* √q 15. + √q 5. *estant diuisee en* 2. *parties le quarré de la toute sera egal aux quarrez des parties, & à deux fois le rect. sous icelles parties. Donc le quarré de* √q 15. *est* 15. *& celuy de* √q 5. *est* 5. *& le rect. sous* √q 15. *&* √q 5. *est* 75. *Dont le double est* √q 300. *& le tout fait* 20. + √q 300. *egal au quarré de* √q 15. + √q 5. *Donc* √q 15. + √q 5. *sera le costé du quarré de l'espace Binomial* 20. + √q 300. *& ainsi des autres.*

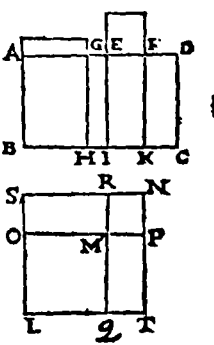
THEOREME 38. PROP. 56. lix. xlix.

Si vn espace est contenu sous vne ligne Rationelle, & vne ligne seconde de

deux noms; la ligne droicte pouuant iceluy espace est Irrationelle, laquelle est appellee premiere de deux Mediales.

Soit l'espace AC, contenu sous la Rationelle AB, & AD, Binome second. Ie dis que la ligne droicte pouuant AC, est Irrationelle, appellee premiere de deux mediales, ou Bimediale premiere.

Car soit AE, plus grand nom de AD, donc AE, ED, sont Rationelles commens. en puiss. seulement selon la definit. Et AE, peut plus que ED, du quarré d'vne ligne commens. en longit. à icelle; & ED, sera commens. en longit. à la Rationelle exposee AB, Soit couppee ED, en 2. egalement à F: & ayant faict le reste comme en la precedente: l'on demonstrera comme en icelle que OP, peut l'espace contenu sous AB, Rationelle & AD Binome second. Ie dis que OP est Irrationelle appellee Bimediale premier.



Car AE estant incommens. en longit. à ED moindre nom de AD, Bimediale seconde, commens. en longitude à AB, Rationelle; [a] AE, AB sont incommens. en longit. Et AG, GE, estant [b] monstrees commens. en longit. [c] la toute AE, sera commens. en longit. à chacune d'icelles. Parquoy AE, plus grand nom de AD estant Rationelle, AG, GE, seront aussi Rationelles. Donc

a 13. 10.
b 55. 10.
c 16. 10

puis que tant AG, que GE, eſt commenſ. en longit à AE; Mais AE, incommenſ. en longit. à AB, Rationelle, [d] l'vne & l'autre AG, GE, eſt incõmenſ. en longit. à la meſme AB: Donc tant AB, AG, que AB, GE ſont Rationelles commenſ. en puiſſance ſeulement: [e] partant les rect. AH, GI, ou leurs egaux quarrez LM, MN, ſont mediaux: Et partant OM, MP, mediales: Mais AG, GE eſtant commenſ. en longit. [f] AH, GI, eſtant én meſme raiſon, & partant leurs egaux quarrez LM, MN, ſeront cõmenſurables, donc OM, MP, ſont cõmenſ. au moins en puiſſance. Et puis que AE, ED ſont incommenſ. en longit. & AG eſt monſtree commenſ. en longit. à AE: Et EF, eſt commenſ. en longit. à ED, eſtant moitié d'icelle, [g] AG, EF, ſeront incommenſ. en longit. Donc AH, EK, ayant meſme raiſon, [h] ou leurs egaux rect. LM, MT, ſont incommenſurables: [i] & partant OM, MP ſont incommenſ. en longitude, [k] ayant meſme raiſon. Donc OM. MP, eſtant monſtrees mediales & commẽſ. elles, ſeront Mediales commenſ. en puiſſ. ſeulement: Finalement ED, moindre nom eſtant cõmenſurable en longit. à AB, c'eſt à dire à EI: mais EF, eſt auſſi commenſ. en longit. à ED; [l] EI, EF, ſerõt cõmenſ. en longit. Parquoy EI eſtant Rationelle, EF, ſera auſſi Rationelle. Donc [m] EK, eſt rect. Rationel: mais MT, contenu ſous OM, MP, eſt egal à EK, donc MT, eſt Rationel: partant OM, MP, ſont Mediales commenſurab. en puiſſ. ſeulement contenant vn rect. Rationel; [n] & par ainſi OP, eſt irrationelle, appellee Bimediale premiere. Donc Si vn eſpace eſt contenu &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.

d 14. 10.
e 22. 10.
f 10. 10.
g *ſchol.* 14. 10.
h 10. 10.
i 10. 10
k 1. 6.
l 12. 10.
m 20. 10
n 38. 10.

SCHOLIE.

Soit AB, 6. & AD, √q 12. + 3. EF, ou FD, 1½ & ſi à AE on applique vn parallelograme egal au quarré de EF, defaillant d'vne figure quarree A G, ſera √q 6¾ GE, √q ¾. Donc le parallelogramme AH eſt √q 24. GK √q 27. & EL, 9. & le tout AC, √q 432. + 18. Or pour trouuer ſa racine faut diuiſer √q 432. en 2. parties telles que le produict d'icelles parties ſoit egal au quarré du q. de 18. c'eſt à dire à 81. cõme il eſt dit, la plus grande partie ſera √q 108. + √q 27. leſquelles eſtans aſſẽblees feront √q 243. mais la moindre partie ſera √q 108. — √q 27. & ayant oſté √q 27. de √q 108. demeure √q 27. Donc la plus grande partie eſt √q 243. & la moindre √q 27. Parquoy la racine de l'eſpace Binomial √q 432. + √q 18. ſera √qq 243. + √qq 27.

Ivj I

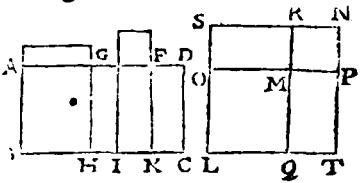
THEOREME 39. PROP. 57.

Si vn eſpace eſt contenu ſous vne ligne Rationelle, & vne ligne troiſieſme de deux noms; la ligne droicte pouuant iceluy eſpace eſt Irrationelle; laquelle eſt appellee ſeconde de deux mediales.

Soit l'eſpace AC, contenu ſous A B Rationelle & A D, Binome troiſieſme. Ie dis que la droicte ligne pouuant A C, eſt Irrationelle, appellee Bimediale ſeconde.

Car ſoit A E, plus grand nom de AD. Donc AE, ED, ſeront rationelles commenſ. en puiſſ. ſeulement ſelon la def. Et AE, pourra plus que

ED, du quarré d'vne ligne commenſ. en longit. à icelle: & l'vne ny l'autre AE, ED, ne ſera commenſ. en longit à la Rationelle expoſee AB. Soit couppee ED, en 2. egalement à F, & ſoit faict au reſte cõme en la 55. p. l'on demonſtrera ainſi qu'en icelle 55. prop. que OP, peut l'eſpace AC. Et comme en la precedente 56. p. que OM, MP, ſont mediales commenſ. en puiſſance ſeulement; puis que AE eſt poſee incommenſurable en longit. à AB, Rationelle, comme la meſme AE, eſtoit là incommenſ. en longit à AB. Mais ED, EF, eſtant commenſ. en longit. Et ED, incommenſ. en longit. à la Rationelle AB; c'eſt à dire EI; [a] EF ſera auſſi incommenſ. en longit. à EI. mais EF, EI, ſont Rationelles, EF eſtant moitié de ED Rationelle; & EI, egale à la Ration. AB. Donc EF, EI, ſont Rationelles commenſ. en puiſſance ſeulement. [b] Partant EK eſt Medial. Donc MT ſon egal eſt auſſi Medial contenu ſous OM, MP Mediales: partant OM, MP, eſtant mediales commenſ. en puiſſance ſeulement contenant vn eſpace medial: [c] OP ſera irrationelle appellee Bimediale ſeconde. Donc ſi vn eſpace eſt contenu &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.



[a] 14. 10

[b] 22. 10

[c] 22. 10.

SCHOLIE.

Soit AB, 6. AD, $\sqrt{q}$ 18. + $\sqrt{q}$ 10. EF, *ſera* $\sqrt{q}$ $2\frac{1}{2}$. *Et ſi à AE on applique vn parallelogramme contenu ſous* AG, GE, *egal au quarré de* EF, *defaillant*

d'vne figure quarree, AG, ſera Vq 12. $\frac{1}{2}$ & GE $\frac{1}{2}$ partant AH eſt Vq 450. Gk Vq 18. & EL Vq 90. Et tout le parallelogramme AC eſt 648. + Vq 360. Soit diuiſee Vq 648. en 2. parties telles que leur contenu ſoit egal au quart du quarré de Vq 360. c'eſt à dire à 90. la plus grande partie ſera Vq 450. & la moindre Vq 18. Donc la racine ou coſté du rect. Binom. AC, Vq. 648. + Vq 360. eſt V qq. 450. + V qq 18.

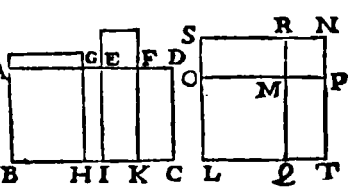
1 vij
lj

THEOREME 40. PROP. 58.

Si vn eſpace eſt contenu ſous vne ligne Rationelle, & vne ligne quatrieſme de deux noms : la droicte ligne pouuant iceluy eſpace eſt Irrationelle ; laquelle eſt appellee Maieure.

Soit l'eſpace ou rect. AC, contenu ſous AB, Rationelle, & AD binome quatrieſme. Ie dis que la ligne pouuant AC eſt Irrationelle appellee Maieure.

Car ſoit AE le plus grand nom de AD : donc AE, ED ſeront rationelles cõmenſ. en puiſſ. ſeulement ſelon la definit. & AE, pourra plus que ED du quarté d'vne ligne incommenſurable à icelle en longitude, & AE, ſera commenſurable en longitude à AB. Car ayant couppé ED, en 2. egale-



ment à F, soit faict le reste comme en la 55. prop.
[a] Donc A G, GE, seront incommens. en lon- a 19.10.
gitude: Maintenant on demonstrera comme en la 55. prop. que OP, peut l'espace AC. Ie dis que OP est irrationelle appellee Maieure. Car A G, GE, estant incommens. en longitude: [b] AH, GI, b 10.10.
ayant mesme raison sont incõm. & partant leurs egaux quarrez LM, MN, incommens. Parquoy OM, MP. sont incommens. en puissance. Mais AE plus grand nom estant commens. en longit. à A B, Rationelle, sera aussi Rationelle; [c] Et le c 20.10
rect. AI sous icelles Rationel: lequel estant egal au composé des quarrez LM, MN; iceluy composé de LM, MN, est Rationel. Et d'autant que ED, moindre nom est incommens. en longit. à la Rationelle AB; EF sa moitié sera aussi incommens. en longit. à AB: Et EF est Rationelle, estant commens. à ED, Rationelle. Donc EF, AB, sont Rationelles commens. en puiss. seulement. [d] parquoy Ek contenu sous icelles, d 21.10
& partant MT son egal contenu sous OM, MP, est Medial, parquoy OM, MP, estant incommens. en puiss. & faisant le composé de leurs quarrez LM, MN, Rationel, & le rect. MT, sous c 40.10
icelles Medial: [e] la toute OP sera Irrationelle, laquelle est appellee Maieure. Donc si vn espace &c. Ce qu'il falloit demonstrer.

SCHOLIE.

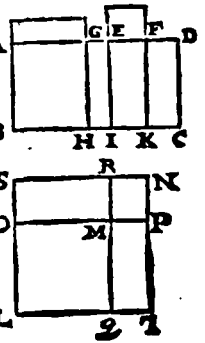
Soit AB, 6. & AD, 6. + √q 24. EF, *sera* √q 6. *ayant appliqué à* AE, *vn parallelogramme contenu sous* AG, GE, *egal au quarré de* EF, *defaillant d'vne figure quarree* AG, *sera* 3. + √q 3, & GE 3. — √q 3.

Donc AH eſt 18. + √*q* 108. *& GK* 18. — √*q* 108. *& EK. ou FC* √*q* 216. *Et le tout* AC 36. + √*q* 864. *Donc ſi on diuiſe* 36. *en* 2. *parties telles que leur produict ſoit egal à* 216. *la plus grande partie ſera* 18. + √*q* 108. *& la moindre* 18. — √*q* 108. *partant la racine quarree de l'eſpace Binom.* 36. + √*q* 864. *eſt* (18. + √*q* 108) + √*q*(18. — √*q*108.)

THEOREME 41. PROP. 59.

Si vn eſpace eſt contenu ſous vne ligne Rationelle & vne ligne cinquieſme de deux noms: la ligne droicte pouuant iceluy eſpace eſt Irrationelle; laquelle eſt appellee pouuant vn Rationel & vn Medial.

Soit l'eſpace AC contenu ſous AB Rationelle & AD, binome cinquieſme. Ie dis que la droicte ligne qui peut AC eſt Irrationelle, appellee pouuant vn Rationel & vn Medial.



Car ſoit AE plus grand nom de AD: Donc par la def. AE, ED, ſont Rationelles commenſ. en puiſſ. ſeulement; Et AE peut plus que ED, du quarré d'vne ligne incommenſ. en longit. à icelle: & ED eſt commẽſ. en longit. à AB, expoſee Rationelle. Soit couppee ED, en 2. egalement à F, & ſoit faict comme en la 55. prop.

[a] Donc AG, GE, seront incommensurables en longitude. Et comme en la 55. prop. on monstrera que OP, peut l'espace AC. Ie dis que OP est Irrationelle, appellee, pouuant vn Rationel, & vn Medial: Car comme en la precedente p. O M, MP, seront incommens. en puissance. Et AE, moindre nom estant Rationelle, & incommens. en longit. à la Rationelle[b] AE, AB, seront AB; Rationelles commens. en puiss. seulement Parquoy le rect. AI, sous icelles est Medial. Mais AI est egal au composé des quarrez LM, MN: donc iceluy composé sera Medial. Derechef ED estant posée Rationelle commens. en longit. à la Rationelle AB, estant le moindre nom de AD, Binome 5. EF, moitié de ED, sera aussi commens. en longit. à AB, & Rationelle. [c] Donc EK, contenu sous EI, EF, Rationelles commens. en longit. & partant son egal rect. MT, sous OM, MP, est Rationel. Partant OM, MP, estant incommens. en longit. & faisant le composé de leurs quarrez LM, MN, Medial; Mais le rect. MT, sous icelles Rationel: [d] la toute OP sera Irrationelle: Dicte pouuant vn Rationel, & vn Medial. Donc si vn espace est contenu &c. Ce qu'il falloit demonstrer.

a 19. 10.
b 22. 10.
c 20. 10.
d 42. 10.

SCHOLIE.

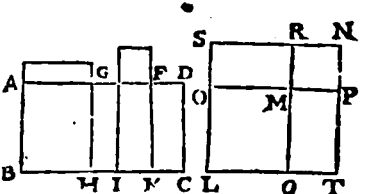
Soit AB, 6. AD, $\sqrt{q}$ 24. + 4. *EF, sera* 2. *& à* A E, *soit appliqué le parallelogramme sous* AG, GE, *egal au quarré de* EF, *defaillant d'vne figure quarree,* AG, *sera* $\sqrt{q}$ 6. + $\sqrt{q}$ 2. GE $\sqrt{q}$ 6. — $\sqrt{q}$ 2. Et AH, $\sqrt{q}$ 216. + $\sqrt{q}$ 72. GK $\sqrt{q}$ 216. — $\sqrt{q}$ 72. FK 12. *& le tout* AC $\sqrt{q}$ 864. + 24. *Donc si on diuise* $\sqrt{q}$ 864.

en deux telles parties que leur produict soit egal à 144. la plus grande partie sera √q 216. + √q 72. & la moindre √q 216. — √q 72. la racine quarree de l'espace Binom. AC, *√q 864. + 24. est √q (√q 216. + √q 72.) + √q (√q 216. — √q 72.*

lix liij

THEOREME 42. PROP. 60.

Si vn espace est contenu sous vne ligne Rationelle, & vne ligne sixiesme de deux noms: la droicte ligne pouuant iceluy espace est Irrationelle, laquelle est nommee pouuant deux Mediaux.



Soit le rect. ou espace AC, contenu sous AB, Rationelle, & AD, Binome sixiesme. Ie dis que la droicte ligne pouuant AC, est Irrationelle, dicte pouuant deux mediaux.

Car soit AE le plus grand nom: donc AE, ED, sont Rationelles commens. en puiss. seulement, selon la definition; Et AE, pourra plus que ED, du quarré d'vne ligne qui luy est incommens. en longitude. Et l'vne ny l'autre AE, ED, ne sera commens. en longit. à AB Rationelle: Ayant faict comme és precedentes, [a] AG, GE, sont incommens. en longitude. Et on monstrera comme en la 58. prop. que OP peut l'espace AC, & comme en la 58. prop. que OM, MP, sont incommens. en puissance. Derechef

a 19.10.

comme

comme en la precedente, le composé des quarrez à L M, M N sera medial: mais cõme en la 58. p. M T, sous O M, M P sera aussi medial. Et d'autant que de A E, E F, celle-là est incommens. en longit. à E D, & ceste-cy commens. à E D; b A E, E F seront incommens. en longitude. c Donc A I, E K, sont incommens. d ayant mesme raison que A E, E F. Parquoy le composé des quarrez L M, M N, egal à A I, & M T egal à E K, sont incommensurables. Donc O M, M P estant incommens. en puissance, & faisant le composé de leurs quarrez L M, M N medial & M T, rect. sous icelles medial, & incommensurable au composé de leurs quarrez: e La toute O P sera irrationelle, laquelle est dite pouuant deux mediaux. Donc si vn espace est contenu sous, &c. ce qu'il falloit demonstrer.

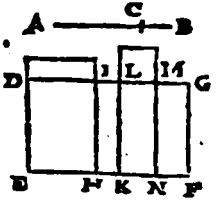
b 13. 10.
c 10. 10.
d 1. 6.
e 42 10.

SCHOLIE.

Soit A B 5. A D √ q. 10. + √ q 8, E F sera √ q 2. si à A E, on applique le parall. sous A G, G E egal au quarré de E F, & defaillant d'vne figure quarree, A G, sera √ q. 2. $\frac{1}{2}$ + √ q $\frac{1}{2}$, G E √ q 2. $\frac{1}{2}$ — √ q $\frac{1}{2}$ & Å H √ q 62 $\frac{1}{2}$ + √ q 12 $\frac{1}{2}$, G k √ q 62 $\frac{1}{2}$ — √ q 12 $\frac{1}{2}$ & E K √ q 50, & le tout A C √ q. 250 + √ q 200. soit diuisee √ q 250. en 2. telles parties que leur produit soit egal à 50; la plus grande partie sera √ q 62 $\frac{1}{2}$ + √ q 12. $\frac{1}{2}$ & la moindre √ q 62 $\frac{1}{2}$ — √ q 12 $\frac{1}{2}$ Donc la racine quarree d'icelluy espace binomial √ q 250 + √ q 200, est √ q. (√ q 62 $\frac{1}{2}$ + √ q 12 $\frac{1}{2}$ + √ q (62 $\frac{1}{2}$ — √ q 12 $\frac{1}{2}$.)

THEOREME 43. PROP. 61.

lx liiij Le quarré d'vne ligne de deux noms, ou binome, appliqué sur vne ligne Rationelle, faict la latitude, binome premier.



Soit AB, binome, dont A C est le plus grand nom, [a] & sur D E rationelle proposee, soit appliqué le rect. D F, egal au quarré de A B, faisant D G, latitude. Ie dis que D G est binome premier.

a 45 1.

Car à D E rationelle soit [a] appliqué D H, egal au quarré de A C; & à H I, soit appliqué I K egal au quarré de C B; donc le reste L F sera egal à 2. fois le rect. sous A C, C B: les [b] quarrez de A C, C B & 2. fois le rect. sous A C, C B, estant egaux au quarré de A B; tout ainsi que le rect. D F, est egal au mesme quarré de A B par la construction.

b 4 2.

Soit diuisee L G, en 2. egalement à M & menee M N parallelle à L K, G F: l'vn & l'autre rect. L N, M F, sera egal au rect. sous A C, C B. [c] Et A C, C B estant rationelles commens. en puiss. seulement, la toute A B estant Binome; les quarrez de A C, C B seront rationaux, & partant commensurables. [d] Et leur composé estant commens. à chacun d'iceux, icelui composé sera aussi rationel, auquel D K estant egal par la construction, D K sera aussi rationelle: & puis

c 37. 10.

d 16. 10.

qu'iceluy D K eſt appliqué à la rationelle D E, il ſera la latitude D L, rationelle & commenſ. en longit. à D E.

Derechef puis que A C, C B ſont rationelles commenſ. en puiſſ. ſeulement, [e] le rect. ſous icelles ſera medial, & partant 2. fois le rect. ſous A C, C B, commenſ. à iceluy, c'eſt à dire L F ſera medial. Dõc L F appliqué à L K, Ratio. [g] fait la latitude L G, rationelle, incommenſ. en longit. à L K, c'eſt à dire à D E: mais D L eſt monſtree commenſ. en longit. à D E, [h] Donc D L, L G ſont incommenſ. en longitude. Donc icelles ſont rationelles commenſ. en puiſſ. ſeulement, [i] & partant D G, eſt binome, ou de deux noms. Ie dis qu'elle eſt premiere.

[e] 22. 10. [f] coroll. 24 10. [g] 23. 10. [h] 13. 10. [i] 37. 10.

Car, le rect. ſous A C, C B eſtant [k] milieu proportionel entre les quarrez de A C, C B; L N ſera auſſi milieu proportionel, entre D H, I K; [l] partant D I, L M, I L, ayant meſme raiſon que D H, L N, I K; L M, ſera auſſi moyenne proportionelle entre D I, I L. [m] Partant le rect. ſous D I, I L, ſera egal au quarré de L M. Et les quarrez de A C, C B, eſtant commenſ. puis que A C, C B ſont poſees commenſ. en puiſſance, D H, I K egaux à iceux ſeront commenſurables. [n] Donc D I, I L, ayant meſme raiſon ſeront commenſ. en longit. Mais puis que D K eſt plus grand que L F, [o] les quarrez de A C, C B eſtant plus grands que 2. fois le rect. ſous A C, C B; D L, ſera plus grande que L G, ([p] D L, L G ayant meſme raiſon que D K, L F.) Donc puis que D L eſt plus grande que L G, & à D L, eſt appliqué le rect. ſous D I, I L egal au quarré de L M, c'eſt à dire au quart du quarré de L G,

[k] lemme 54. 10. [l] 1. 6. [m] 17 6. [n] 10 10. [o] lemme 39. 10. [p] 1 6.

moindre & defaillant d'vne figure quarree, (car le rect. sous D I, I L, est monstré egal au quarré de L M) & D L, est diuisé à I, en D I, I L commens. en longitude, comme il est demonstré 118.10. Donc D L plus grande pourra plus que L G moindre du quarré d'vne ligne commens. en longit. à icelle: parquoy D G, estant monstrée de deux noms, & que D L plus grand nom peut plus que le moindre L G du quarré d'vne ligne qui luy est commens. en longit. & que le mesme D L plus grand, est commens. en longit. à la rationelle proposée D E; par la def. D G sera premiere de deux noms. Donc le quarré d'vne ligne de deux noms, &c. Ce qu'il falloit demonstrer.

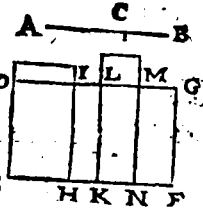
SCHOLIE.

Soit A B V q 15. + q 5, & D E 5. D H sera 15 & I K 5. & L N V q 75 & M F, V q 75. Partant si à D E, on applique D H, il fera la latitude D I 3. & si on applique I K il fera I L, 1. Que si à la mesme on applique L N, sçauoir V q 75. il fera la latitude L M + q 3. & M G sera aussi V q 3. Donc la toute D G est 4 + V q 12. premiere de deux noms.

THEOREME 44. PROP. 62.

Le quarré d'vne ligne premiere de deux mediales appliqué sur vne ligne Rationelle; faict la latitude seconde de deux noms.

c'eſt à dire Binome ſecond.



Soit A B, premiere de deux Mediales dont le plus grand nom eſt A C [a] Et à la rationelle D E ſoit appliqué le rect. D F egal au quarré de A B, faiſant la latitude ou coſté D G. Ie dis que D G eſt binome 2. Car ſoit fait comme en la precedente, de ſorte que D H, I K ſoient derechef egaux aux quarrez de A C, C B, & L N, M F egaux chacun au rect. ſous A C, C B. Dautant donc que A C, C B, compoſant A B bimediale premiere, [b] ſont mediales commenſ. en puiſſ. ſeulement, contenant vn rect. rationel; les quarrez de A C, C B, & partant leurs egaux rectangles D H, I K ſont commenſ. & mediaux. Et partant le tout D K eſtant commenſ. à chacun d'iceux D H, I K, [d] ſera auſſi medial; lequel eſtant appliqué à D E rationelle, [e] ſa latitude D L, ſera rationelle incomm. en longit. à D E. Derechef le rect. ſous A C, C B eſtãt rationel, le double d'iceluy ſçauoir L F ſera auſſi rationel, lequel eſtant appliqué à L K rationelle, [f] ſa latitude L G ſera rationelle commenſ. en longit. à L K, c'eſt à dire à D E. Donc puis que L G eſt commenſ. en longit. à D E, & D L, incommenſ. en longit. à D E, [g] D L, L G ſeront incommenſ. en longit. & eſtant monſtrees rationelles, elles ſeront rationelles commenſ. en puiſſance ſeulement. [h] Et partant la toute D G eſt de deux noms: Et comme en la precedente on mõ-

[a] 45.1.
[b] 38.10.
[c] 16.10.
[d] *coroll.* 24. 10.
[e] 23. 10.
[f] 21.10.
[g] 13. 10
[h] 37.10.

ſtrera que D L eſt le plus grand nom, & peut plus que L G moindre, du quarré d'vne ligne qui luy eſt commenſ. en longit. & le moindre nom L G eſtant monſtré commenſ. en longit. à la rationelle expoſee D E, ſelon la def. D G ſera ſeconde de deux noms, ou binome ſecond. Donc le quarré d'vne ligne premiere de deux mediales, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.

SCHOLIE.

Soit A B $\sqrt{qq\,48 + \sqrt{qq\,27}}$; *&* D E 4: D H, *ſera* $\sqrt{q\,48}$ *&* I K $\sqrt{q\,27}$. L N *ou* F M 6. *Donc ſi à* D E *on applique* D H, *la latitude* D I *ſera* $\sqrt{q}$ *de* 3. *& ſi à la meſme on applique* I K; I L *ſera* $\sqrt{q\,1\,\frac{1}{16}}$ *ainſi* L N *appliqué ſera* L M $1\,\frac{1}{2}$ *c'eſt à dire* M G, *egal à icelluy. Et* D I, I L, *c'eſt à dire* $\sqrt{q\,3}$, *&* $\sqrt{q\,1\,\frac{1}{16}}$ *eſtant commenſ. en longit. la toute* D L *ſera* $\sqrt{q\,9.\ \frac{1}{16}}$ *Donc la toute* D G, *ſera* $\sqrt{q\,9\,\frac{1}{16}} + 3$. *ſeconde de deux noms.*

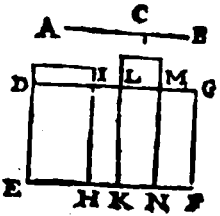
THEOREME 45. PROP. 63.

lxij lxj.

Le quarré d'vne ligne ſeconde de deux mediales, appliqué à vne ligne Rationelle, fait la latitude, binome troiſieſme.

Soit A B, ſeconde de deux mediales ou bimediale ſeconde, dont le plus grand nom eſt A C; [a] & à la rationelle D E ſoit appliqué le rect. D F egal au quarré de A C, faiſant la latitude

a 45. 1.



DG, Ie dis que DG eſt binome troiſieſme.

Car ayant fait la conſtruction comme en la 61. D'autant que AC, CB, faiſant la toute AB, bimediale ſeconde, [b] ſont mediales commenſ. en puiſſ. ſeulement, contenant vn medial; les quarrez de AC, CB; & partant leurs egaux rect. DH, IK, ſont commenſur. & mediaux: Parquoy le tout DK, [c] eſtant commenſ. à chacun d'iceux, [d] ſera auſſi medial: & eſtant appliqué à la rationelle DE [e] fera la latitude DL, Rationelle, incõmenſ. en longit. à DE. De rechef le rect. ſous AC, CB eſtant medial, le double d'iceluy, ſçauoir LF ſera auſſi medial, lequel eſtant appliqué à la rationelle Lk, [f] l'autre coſté ou latitude LG ſera rationelle incommenſ. en longit. à Lx, c'eſt à dire à DE. Et puis que AC eſt incommenſ. en longit. à CB; Et comme AC à CB, [g] ainſi le quarré de AC au rect. ſous AC, CB; [h] le quarré de AC, eſt auſſi incommenſ. au rect. ſous AC, CB. Mais le compoſé des quarrez de AC, CB [i] eſt commenſ. au quarré de AC, (eſtãt iceux quarrez commenſurables deſcrits de lignes poſees commenſ. en puiſſance) & 2. fois le rect. ſous AC, CB, eſt commenſ. au rect. ſous AC, CB, eſtant double d'iceluy. Donc le compoſé des quarrez de AC, CB, c'eſt à dire le rect. DK, [k] eſt incommenſ. à 2. fois le rect. ſous AC, CB, c'eſt à dire au rect. LF. Donc DL, LG, ayãt meſme raiſon que DK, LF, [l] ſont incommenſ. en longitude. Mais elles ſont monſtrees rationelles; donc DL, LG, ſont rationelles commenſ. en puiſſ. ſeulement, partant [m] la toute DG eſt Binome. Et comme en la 61. p. on monſtrera que DL, eſt le plus grand nom, &

b 39. 10.
c 16 10. d coroll. 24 10.
e 23. 10.
f 23. 10.
g lemme 3 9. 10.
h 10. 10.
i 16. 10.
k ſchol. 14. 10.
l 10. 10.
m 37 10.

peut plus que L G, moindre, du quarré d'vne ligne qui luy eſt cõmenſ. en long. & l'vne ny l'autre D L, L G, eſtant monſtree n'eſtre cõmenſ. en longit. à la rationelle, propoſee par la def. D G, ſera Binome troiſieſme. Partant le quarré d'vne ligne ſeconde de deux mediales, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.

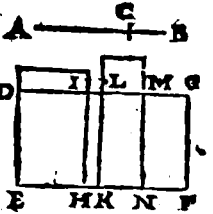
SCHOLIE.

Soit A B $\sqrt{qq72} + \sqrt{qq8}$ & D E 4. *DH ſera* $\sqrt{q72}$ *IK* $\sqrt{q8}$, L N *ou* M F $\sqrt{q4}$. *Donc ſi à DE on applique DH, la latit. D I ſera* $\sqrt{q4\frac{1}{2}}$: *mais ſi on applique I K, la lat. I L, ſera* $\sqrt{q\frac{1}{2}}$ & *ſi L N, ou M F eſt appliq. L M ou M G ſera* $\sqrt{q1\frac{1}{2}}$. *Mais ſi D I, I L ſont adiouſt. c'eſt à dire* $\sqrt{q4\frac{1}{2}}$ & $\sqrt{q\frac{1}{2}}$ D L, *ſera* $\sqrt{q8}$. *donc la toute D G eſt* $\sqrt{q8} + \sqrt{q6}$ *binome troiſieſme.*

THEOREME 46. PROP. 64.

lxiiij lvij

Le quarré d'vne ligne Maieure, appliqué à vne ligne rationelle, fait la latitude Binome quatrieſme.



Soit la maieure AB, dont le plus grand nom eſt AC;
145. 1. [a] Et à la rationelle DE ſoit appliqué le rect. DF egal au quarré de A B, faiſant la latitude D G. Ie dis que D G eſt Binome quatrieſme.

Car ſoit faite la conſtruction comme en la 61.

p. Dautant que AC, CB, faisant la maieure, AB, [b] sont incommens. en puiss. & font le composé de leurs quarrez rationel & le rect. sous icelles medial : DK egal au composé d'iceux quarrez sera aussi rationel ; mais LF double du rect. sous AC, CB ; medial. Dautant donc que DK est appliqué à la rationelle DE, [c] DL, sera rationelle commens. en longit. à DE. Semblablement LF medial estant appliqué à la rationelle Lk, [d] LG sera rationelle incommens. en longit. à Lk, c'est à dire à DE, [e] Donc puis DL est commens. en longitude à DE, & LG, incommensurable ; DL, LG seront incommens. en longit. Mais elles sont monstrees rationelles ; donc DL, LG, sont rationelles commens. en puissance seulement, [f] partant DG est Binome. Maintenant comme il est monstré en la 61 p. le rect. sous DI, IL est egal au quarré de LM, mais dautant que les quarrez de AC, CB sont incommens. (estant AC, CB incommens. en puissance,) leurs egaux rect. DH, IK, seront aussi incommensurables, [g] & partant DI, IL, estant en mesme raison, sont incommens. en longit. Mais comme il est monstré en la 61. p. DL est plus grande que LG, & à DL, on a appliqué vn rect. contenu sous DI, IL, egal au quarré de LM, c'est à dire à la quarte partie du q. de LG, defaillant d'vne figure quarree lequel diuise DL, à I en parties incommens. en longit. [h] DL, pourra plus que LG du quarré d'vne ligne qui luy est incommens. en longit. Parquoy DL (plus grand nom de DG Binome) estant monstree commensur. en longit. à DE rationelle proposee ; DG, par la def. sera binome quatriesme ; Donc le

b 45.10.
c 21.10.
d 23.10.
e 13.10.
f 37.10.
g 10.10
h 19.10.

quarré d'vne ligne Maieure appliqué à vne ligne rationelle, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.

SCHOLIE.

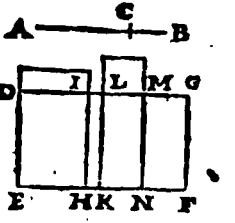
Soit AB $\surd q(10 + \surd q 37\frac{1}{2}) + \surd q 10 - \surd q 37\frac{1}{2}$ *&* DE 5. DH *ſera* $10 + \surd q 37.\frac{1}{2} - I$ $k 10 - \surd q 37\frac{1}{2}$ L N *ou* M F $\surd q 62\frac{1}{2}$. *Partant ſi à* DE *on applique* DH, *faiſãt la latitude* DI; DI: *ſera* $2 + \surd q 1\frac{1}{2}$. *Mais ſi on applique* I K *faiſant la lat.* I L, *icelle ſera* $2 - \surd q 1\frac{1}{2}$, *& ſi on applique* L N *ou* M F, L M *ou* M G *ſera* $\surd q 2\frac{1}{2}$. *que ſi on compoſe* DI, IL, *c'eſt à dire* $2 + \surd q 1\frac{1}{2}$ *&* $2 - \surd q 1\frac{1}{2}$ D L *ſera* 4. *parquoy la toute* D G *eſt* $4 + \surd q 10$. *Binome quatrieſme.*

lxiiij. lviij.

THEOREME 47. PROP. 65.

Le quarré d'vne ligne, pouuant vn Rationel & vn Medial, appliqué à vne ligne Rationelle, fait la latitude, Binome cinquieſme.

Soit AB pouuant vn rationel & vn medial, dont le plus grand nom eſt AC^2 &
451. à DE rationelle ſoit appliqué le rect. D F egal au quarré de AB, faiſant la latitude de DG. Ie dis que DG eſt 5. de 2. noms ou binome cinquieſme. Soit fait comme en la 62. prop.



Dautant donc que AC, CB qui font AB, pouuant vn rationel & vn medial, [b] ſont incommenſ. en puiſſ. faiſant le compoſé de leurs quarrez medial, & le rect. ſous icelles rationel : DK, egal au compoſé des quarrez de AC, CB, ſera medial ; & LN egal au rect. ſous AC, CB, & partant le double d'iceluy, ſçauoir LF, ſera rationel. Donc DK medial appliqué à DE rationelle, [c] faict D L, latitude, rationelle, incommenſ. en longit. à DE rationelle : Mais LF, rationel appliqué à la rationelle L k, [d] faict la latitude L G, rationelle commenſ. en longit à L k, c'eſt à dire à D E. [e] Dautant donc que L G, eſt commenſ. en longit. à D E, rationelle, & D L, incommenſurable en longit. D L, L G, ſeront incommenſ. en longit. parquoy D L, L G ſont rationelles commenſ. en puiſſance ſeulement ; [f] & partant D G eſt binome. Maintenant on monſtrera comme en la 61. que le rect. ſous D I, I L, eſt egal au quarré de L M ; & comme en la precedente, que D L eſt le plus grand nom, & peut plus que L G, du quarré d'vne ligne qui luy eſt incommenſ. en longit. Parquoy le moindre nom L G, eſtant monſtré commenſ. en longit. à la rationelle expoſée D E ; par la def. D G ſera binome cinquieſme. Donc le quarré d'vne ligne pouuant vn rationel & vn medial ; &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.

[b] 41.10.
[c] 23.10.
[d] 21.10.
[e] 13.10.
[f] 37.10.

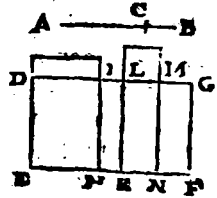
SCHOLIE.

Soit A B $\sqrt{q}(\sqrt{q}125+5)+\sqrt{q}(\sqrt{q}125-5)$ *& D E ſoit* 5. *D H ſera* $\sqrt{q}125+5$, I K $\sqrt{q}125-5$. *L N, ou M* F 10. *Et ſi à D E on applique D H faiſant la lat. D I ; D I ſera* $\sqrt{q}5+1$. *Et ſi on applique I K, fai-*

sant IL; IL, *sera* √ 95 — 1: *Et si on applique* LN *ou* MF, LM, *ou* MG *sera* 2. *&* DI, IL *estant adiouſtees, ſçauoir* √ q 5. + 2. *&* √ q 5 — I, DL *sera* √ q 20. *Donc la toute* DG; *eſt* √ q 20 + 4. *Binome cinquieſme.*

lxv. lix. THEOREME 48 PROP. 66.

Le quarré d'vne ligne pouuant deux Mediaux, appliqué à vne ligne Rationelle, faict la latitude, binome ſixieſme.



Soit A B pouuant deux mediaux dont le plus grand nom eſt A C; [a] & à DE rationelle ſoit appliqué le rect. DF égal au quarré de A B, faiſant la latitude D G. Ie dis que D G eſt binome ſixieſme. Car ayant fait la conſtruction comme en la 61. p. Dautant que AC, CB, faiſant AB pouuant deux mediaux [b] ſont incommenſ. en puiſſ. & font le compoſé de leurs quarrez medial, & le rect. ſous icelles medial & incommenſ. au compoſé de leurs quarrez; tant D K egal à iceluy compoſé, que LF egal à 2. fois le rectangle ſous AC, CB eſt [c] medial: & DK, LF, mediaux eſtans appliquez à la rationelle DE; [c] leurs latitudes DL, LG, ſeront [d] rationelles incommenſ. en longit. à DE rationelle. [d] Et d'autant que le compoſé des quarrez de AC, CB, eſt incommenſ. au rect. ſous AC, CB; & 2. fois le rect. ſous AC, CB, eſt commenſ. à iceluy rect. ſous AC, CB, eſtans

a 45. 1.
b 42. 10
c 23. 10.
d 42. 10.

double d'iceluy ; [e] le composé desdits quarrez, c'est à dire DK, est incommens. à 2. fois le rect. sous AC, CB, c'est à dire à LF. Parquoy DL, LG, ayant mesme raison que DK, LF, [f] sont incommens. en longit. Donc DL, LG, sont rationelles commens. en puiss. seulement, [g] partant DG est binome. Et on demonstrera comme en la precedente que DL, est le plus grand nom, & peut plus que LG, du quarré d'vne ligne qui luy est incommens. en longit. & estant monstré que DL, ny LG, n'est commens. en longit. à DE rationelle exposee, par la def. DG, sera binome sixiesme. Donc le quarré d'vne ligne pouuant deux mediaux, &c. Ce qu'il falloit demonstrer.

[e] 13. 10.
[f] 10. 10.
[g] 37. 10

SCHOLIE.

Soit AB √q(√q252 + √q72) + √q(√q252 − √q72) & DE 6: DH sera √q252 + √q72: IK √q252 − √q72. LN ou MF √q180. Et à DE soit appliqué DH, la late. CI sera √q7 + √q2. De rechef soit appliqué IK, la lat. IL, sera √q7 − √q2. Finalement soit appliqué LN, ou ME, LM, ou MG, sera √q5. Donc la tote DG, est √q28 + √q20. binome sixiesme.

THEOREME 49. PROP. 67.

lxvj
lx.

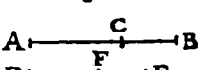
La ligne commensurable en longitude à la ligne de deux noms, ou binome, est aussi ligne de deux noms, & de mesme ordre.

Soit AB ligne de deux noms ou binome quelconque diuisee en ſes noms, dont le plus grand eſt AC, & le moindre CB; & ſoit DE commenſ. en longit. à AB. Ie dis que DE eſt auſſi binome, & de meſme ordre que AB.

a 12. 6. Car comme la toute AB eſt à la toute DE [a] ainſi la retranchee AC, ſoit à la retranchee DF:

b 19. 5. [b] Donc le reſte CB, ſera au reſte FE, comme la toute AB à la toute DE. Et d'autant que DE eſt

c 10.10. poſee commenſ. en longit. à AB, [c] DF ſera auſſi cõmenſ. en longit. à AC, & FE, à



d 37.10. CB: [d] Mais AC, CB noms de AB, binome, ſont rationelles, donc DF, FE, ſont auſſi rationelles. Derechef puis que comme AC, eſt à DF, ainſi CB à FE; & en permutant comme AC à CB, ainſi DF à FE: Mais AC, CB, ſont com-

e 10.10. menſ. en puiſſ. ſeulement. [e] Donc DF, FE, ſont auſſi commenſ. en puiſſ. ſeulement. Donc DF, FE ſont rationelles commenſ. en puiſſance ſeu-

f 37. 10. lement: [f] Et partant DE eſt binome. Ie dis que DE eſt auſſi de meſme ordre que AB. Car AC, peut plus que CB, du quarré d'vne ligne qui luy eſt commenſ. ou incommenſurable. Que ſi AC peut plus que CB, du quarré d'vne ligne qui luy

g 15.10. ſoit commenſ. en longit. [g] DF pourra plus que FE du quarré d'vne ligne qui luy ſera commenſ. en longitude. Que ſi AC eſt commenſ. en longit. à la rationelle expoſee, de ſorte que AB

h 11.10. ſoit binome premier, [h] DF ſera auſſi commenſ. en longit. à la meſme rationelle, l'vne & l'autre eſtant rationelle, & DF eſtant auſſi commẽſ. en longit. à AC. Parquoy DE ſelon la def. eſt binome premier, c'eſt à dire de meſme ordre.

Mais si CB est commens. en longit. à la rationelle exposee. de sorte que AB, soit binome second ; semblablement FE sera commens. en longit. à la rationelle exposee. Parquoy DE, par la def. est binome second. Finalement si l'vne ny l'autre AC, CB, n'est commens. en longit. à la rationelle exposee ; de sorte que AB, soit binome troisiesme ; si l'vne ny l'autre DF, FE n'est commens. en longit. à la rat. expos. Donc DE par la def. est binome troisiesme. 112.10.

Mais si AC peut plus que CB du quarré d'vne ligne qui luy soit incommens. en longit. *DF pourra plus que FE du quarré d'vne ligne qui luy sera incommens. en longitude. Parquoy nous monstrerons comme auparauant que DE est binome quatriesme, ou cinquiesme ou sixiesme ; selon que AB sera binome quatriesme ou cinquiesme ou sixiesme. Donc la ligne cõmensur. en longitude &c. Ce qu'il falloit demonstrer. k 15.10.

THEOREME 50. PROP. 68. lxvij. lxj.

La ligne droicte commensurable à vne ligne Bimediale ; icelle est aussi Bimediale & de mesme ordre.

Soit AB bimediale quelconque diuisee en ses noms, dont AC est le plus grand & CB, le moindre ; & soit DE commens. en longitude à icelle. Ie dis que DE est aussi bimediale & de mesme ordre que AB.

Car a comme la toute AB est à la toute DE, ainsi la retranchee AC, soit à la retranchee DF: b Donc le reste CB sera au reste FE comme la toute AB, à la toute DE. Parquoy DE estant posee commens. en longit. à AB, c DF sera commens. en long. à AC, & FE, à CB: Mais AC, CB sont mediales, d Donc DF, FE commẽs. à icelles sont aussi mediales: Derechef AC estãt à DF comme CB à FE, en permutant comme AC est à CB, DF sera à FE: e Mais AC, CB sont commens. en puiss. seulement: f Donc DF, FE seront aussi commens. en puiss. seul. Et estant monstrees mediales; icelles DF, FE seront mediales commens. en puiss. seulement: g parquoy DE sera bimediale. Ie dis qu'elle est de mesme ordre que AB. Car puis que comme AC, à CB, ainsi DF, à FE: h mais comme AC, à CB, ainsi le quarré de AC au rect sous AC, CB, & comme DF, à FE, ainsi le q. de DF au rect. sous DF, FE: comme le q. de AC, sera au rect. sous AC, CB, ainsi le q. de DF, sera au rect. sous DE, EF: & en permutant comme le q. de AC, au q. de DF, ainsi le rect. sous AC, CB, au rect. sous DE, EF: Mais le q. de AC est commens. au q. de DF; estant AC, DF, monstrees commens. en longit. i Donc le rect. sous AC, CB, sera commens. au rect. sous DF, FE. Parquoy si le rect. sous AC, CB est Rationel, en sorte que AB, soit Bimediale premiere; le rectangle sous DF, FE commens. à iceluy sera aussi Rationel, k Et partant DE, sera bimediale premiere. Mais si le rectangle sous AC, CB, estoit medial en sorte que AB fust Bimediale seconde: le rect. sous DF, FE, commens.

a 12. 6. b 19. 5. c 10. 10. d 24. 10. e 18. 10. f 10. 10. g 18. ou. 19. 10. h lem. 1. 19. 10. i 10. 10. k 18. 10.

commenſ. à icelluy, [l] ſeroit auſſi medial, partant [b] DE, ſeroit Bimediale ſeconde. Partant la ligne droicte commenſurable, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.

[l] coroll. 24. 10.
[m] 39. 10.

THEOREME 31. PROP. 69. lxviij lxij

La ligne droicte commenſurable à vne ligne Maieure, eſt auſſi ligne Maieure.

Soit la ligne Maieure AB diuiſee en ſes noms à C, & ſoit DE commenſ. à icelle en longit. & puiſſ. ou en puiſſ. ſeulement. Ie dis que DE eſt auſſi Maieure.

Car ſoit faict comme cy deuant; en ſorte que AC, CB, ayent meſme raiſon à DF, FE, que la toute AB, à la toute DE: Dautant donc que AB, DE ſont commenſ. ou en longit. & puiſſ. ou en puiſſance ſeulement; [a] tant AC, DF, que CB, FE ſeront commenſ. de meſme façon. Derechef d'autant que comme AC, à DF, ainſi CB à FE. Et en permutant comme AC, à CB, ainſi DF, à FE; [b] comme le quarré de AC, ſera au quarré de CB; ainſi le q. de DF au q. de FE: Et en compoſant comme le compoſé des quarrez de AC, CB au q. de CB, ainſi le cõpoſé des qq. de DF, FE au quarré de FE. Et par conuerſion de raiſon, comme le q. de CB au cõpoſé des qq. de AC, CB, ainſi le q. de FE, au cõpoſé des qq. de DF, FB: Et en permutant comme le q. de CB, au q. de FE, ainſi le compoſé des qq. de AC, CB, au compoſé des quarrez de

[a] 10. 10.
[b] 22. 6.

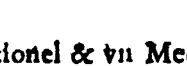
DF, FE. Mais le q. de CB eſt commenſ. au q. de FE; CB FE eſtant monſtrees commenſ. ſoit en
c 10.10. longit. & puiſſ. ou en puiſſ. ſeulement. c Donc le compoſé des qq. de AC, CB eſt commenſ. au
d 40.10 compoſé des qq. de DF, FE: Mais le compoſé des qq. de d AC, CB eſt rationel, puis que AC,
e 9. d. CB compoſent la Maieure AB; e Donc le compoſé des quarrez de DF, FE eſt auſſi Rationel.

Derechef puis que comme AC eſt à CB, ainſi
f lem. 3. DF à FE; f Mais comme AC à CB ainſi le q. de A
19. 10. C au rect. ſous AC, CB; & comme DF à FE, ainſi le q. de DF au rect. ſous DF, FE. Comme le q. de AC ſera au rect. ſous AC, CB: ainſi le q. de DF, ſera au rect. ſous DF, FE: Et en changeant comme le q. de AC, au quarré de DF, ainſi le rect. ſous AC, CB, au rect. ſous DF, FE: Mais le q. de AC eſt commenſ. au q. de DF;
g 10.10. eſtant AC, DF monſtrees commenſ. ou en longit. & puiſſ. ou en puiſſ. ſeulement. g Donc le rect.
h 40 10. ſous AC, CB eſt auſſi commenſ. au rect. ſous D
i coroll. F, FE: h Mais le rect. ſous AC, CB eſt medial: i
24.10. Donc le rect. ſous DF, FE, commenſ. à iceluy, eſt auſſi medial: mais AC eſtant à CB, comme
x 40.10. DF, à FE, k Et AC, CB ſont incommenſ. en
10.10. puiſſ. (compoſant la Maieure AB.) l DF, FE ſeront auſſi incommenſ. en puiſſ. Donc DF, FE eſtant incommenſ. en puiſſ. & faiſant le compoſé de leurs quarrez Rationel, & le rect. ſous
m 40.10. icelles medial, comme il eſt monſtré: m la toute DE ſera ligne Maieure. Donc la ligne commenſurable, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.

THEOREME 52. PROP. 70. lxix lxiij

La ligne commẽsurable à vne ligne pouuant vn Rationel & vn Medial est aussi ligne pouuant vn Rationel & vn Medial.

Soit AB, pouuant vn Rationel & vn Medial diuisee en ses noms à C, & soit DE commens. à icelle en longit. & puiss. ou en puiss. seulement. Ie dis que DE peut aussi vn Rat. & vn Medial.



Car ayant faict la mesme construction que cy deuãt, nous monstrerons comme en la precedente, que le composé des quarrez de AC, CB, [a] est commens. au composé des qq. de DF, FE; Mais le composé des quarrez de AC, CB est Medial; puis que AC, CB composent AB pouuant vn rationel & vn medial; [b] Donc le composé des qq. de DF, FE commens. à iceluy est aussi medial. Semblablement comme en la precedente p. le rect. sous AC, CB, [c] qui est Rationel sera commens. au rect. sous DF, FE, [d] & partant le rect. sous DF, FE, sera Rationel. Finalement comme en la mesme precedente p. DF, FE seront incommens. en puissance. Donc DF, FE estant incommens. en puissance, & faisant le composé de leurs qq. medial, & le rect. sous icelles Rationel, comme il est demonstré; e la toute DE, sera ligne pouuant vn Rationel & vn Medial. Partant la ligne commensurable, &c. Ce qu'il falloit demonstrer.

a 41.10.
b 6coroll. 24.10.
c 41.10.
d 9.def.
e 41.10.

lxix. lxiij.

THEOREME 43. PROP. 71.

La ligne commenſ. à vne ligne pouuant deux Mediaux, eſt auſſi ligne pouuant deux Mediaux.

Soit AB pouuant deux Mediaux diuiſee en ſes noms à C, & DE commenſ. à icelle en longit. & puiſſ. ou en puiſſ. ſeulement. Ie dis que DE peut auſſi deux Mediaux.

Car, la conſtruction faite comme auparauant, l'on monſtrera comme en la 69. propoſition, que le compoſé des quarrez de AC, CB eſt commenſ. au compoſé des qq. de DF, FE: Et le rect. ſous AC, CB, commenſ. au rect. ſous DF, FE. [a] Parquoy tant le compoſé des qq. de AC, CB, que le rect. ſous AC, CB eſtant medial; [b] Auſſi tant le compoſé des qq. de DF, FE, que le rect. ſous DF, FE ſera medial: Mais DF, FE ſont incommenſ. en puiſſ. comme auparauant. Finalement, [c] le compoſé des qq. de AC, CB, & le rect. ſous AC, CB, eſtant incommenſ. par l'ypotheſe, puis que AB peut deux Mediaux; Mais le compoſé des qq. de DF, FE, eſt monſtré commenſ. au compoſé des qq. de AC, CB, & le rect. ſous DF, FE, monſtré commenſ. au rect. ſous AC, CB, [d] le compoſé des qq. de DF, FE, & le rect. ſous DF, FE ſeront incommenſ. Partant DF, FE eſtant incommenſ. en puiſſance, & faiſant le compoſé de leurs qq. Medial, & le rect. ſous icelles Medial, & incommenſ. au compoſé de leurs quarrez; [e] DE ſera ligne pou-

a 42. 10.
b coroll. 24. 10.
c 42. 10.
d. ſchol. 14. 10.
c 42. 10.

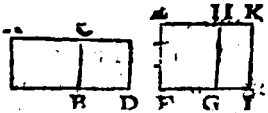
uant deux Mediaux. Partant la ligne commenſ. à la ligne pouuant, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.

THEOREME 54. PROP. 72. lxxj lxv.

Si vne ſuperficie Rationelle & vne Mediale ſont compoſees, il ſe fait quatre Irrationelles, ſçauoir celle qui eſt dicte Binome, ou Bimediale premiere, ou ligne Maieure, ou ligne pouuant vn Rationel & vn Medial.

C'eſt à dire, que la ligne pouuant tout le compoſé eſt vne de ces quatre Irrationelles, ſçauoir celle qui eſt dite Binome, ou Bimediale premiere, &c.

Soit l'eſpace ou ſuperficie A B Rationelle cõpoſee auec la Mediale C D. Ie dis que la droicte ligne qui peut tout l'eſpace A D, eſt premiere de deux noms. i. Binome premier, ou Bimediale premiere ou ligne Maieure, ou ligne pouuant vn Rationel & vn Medial.



Car l'eſpace A B, ſera plus grand que C D. ou moindre ne pouuant eſtre egal. Car A B, eſtant Rationel ſi C D eſtoit egal à iceluy il ſeroit auſſi rationel contre l'ypotheſe. Soit premierement A B plus grand que C D: & à la Rationelle propoſee E F ſoit appliqué le rect. E G, egal à A B, & à H G, ſoit appliqué H I, egal à C D, De ſorte que le tout E I, ſoit egal au tout A D. 2 45. 2

Et AB eſtant Rationel & CD Medial, EG ſera auſſi Rationel & HI Medial; leſquels appliquez
b 21.10. à la Rationelle EF; [b] EH ſera rationelle com-
c 23.10. menſ. en longit. à EF; [c] Mais HK Rationelle incommenſ. en longit. à EF. Derechef EG, HI eſtant incommenſ. comme il appert par les defi-
d.1. 6. nit. EG eſtant Rationel & HI, Irrationel, ſça-
e 19.10. uoir Medial: EH, [d] HK ayant meſme raiſon [e] ſe-
f 37.10. ront incommenſ. en longit. Et partant ſont Rationelles commenſ. en puiſſ. ſeulement: [f] Donc EK eſt Binome. Et AB eſtant poſé plus grand que CD, c'eſt à dire EG, plus grand que HI; EH ſera auſſi plus grande que HK. EH, HK ayãt meſme raiſon que EG, HI. Maintenant EH plus grand nom pourra plus que HK moindre du quarré d'vne ligne commenſ. en longit. à icelle ou incommenſ. Si EH peut plus que HK du quarré d'vne ligne commenſ. en longitude à icelle; EK ſera Binome premier par la definit. eſtant EH plus grand nom monſtré commenſ. en longit. à la Rationelle EF. Parquoy la ligne pouuant l'eſpace EI, contenu ſous la Rationelle EF & EK Binome premier; & partant
§ 55.10. l'eſpace AB, compoſé du Rationel AB, & du Medial CD; § eſt irrationelle appellee Binome.

Mais ſi EH peut plus que HK du quarré d'vne ligne qui luy ſoit incommenſ. en longit. EK ſera Binome quatrieſme, par la def. eſtant EH plus grand nom monſtree commenſ. en longit. à la Rationelle EF. Donc la ligne droicte pouuant l'eſpace EI, contenu ſous EF Rationelle, & EK Binome quatrieſme, & partant auſſi
h 58.10. l'eſpace AD h eſt irrationelle appellee Maieure,

Soit maintenant AB plus grand irrationel & Medial, & CD plus petit Rationel: ayant fait la construction comme auparauant, EH sera incommens. en longit. à EF & HK commens. Et partant EH, HK Rationelles commens. en puissance seulement, & la toute Ek Binome. Donc EH plus grand nom, pourra plus que HK, du quarré d'vne ligne qui luy sera commens. en lõgit. ou incommens. si commens. & EH est monstrée incommens. en longit. à la Rationelle proposee, EK par la def. sera Binome second. Donc la ligne pouuant l'espace EI, (ou AD) contenu sous EF, Rationelle, & EK Binome second est irrationelle i appellee Bimediale premiere. Si incommens. EK sera Binome cinquiesme, Donc la droicte ligne pouuant l'espace EI, (qui est AB) contenu sous EF, Rationelle, & Ek Binome cinquiesme k est irrationelle dicte pouuant vn Rationel & vn Medial. Donc si vn espace Rationel & vn Medial sont composez, &c. Ce qu'il falloit demonstrer.

i 56 10.

k 59.10.

SCHOLIE.

Soit l'espace Rationel AB 7. & le Medial CD √q 48 la ligne pouuant iceux espaces adiouſtez ensemble sera 2 + √q 3 Binome premier: Si AB estoit 21 & CD √q 432 la ligne pouuant iceux sera √q 12 + 3. Binome second; si AB est 14. CD √q 192: la ligne pouuant iceux sera √q 8 + √q 6 Binome troisiesme. Et si AB est 6. & CD √q 32. Icelle sera 2 + √q 2 Binome quatriesme: Mais si AB est 3 & CD √q 8. elle sera 4 √q 2 + 1, Binome cinquiesme: Et si AB est 5. & CD √q 24. la ligne pouuant leur composé sera √q

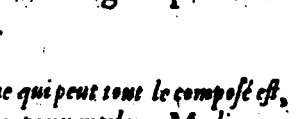
3 + √ q 2. Binome 6: Mais ſi AB eſt 4. & CD √ q 8 la ligne pouuant leur compoſé ſera √ qq 8 + √ qq 2 Bimediale premiere: Et ſi AB eſt 6. & CD √ q 12, icelle ligne ſera √ q (6 + 12) ou √ q (3 + √ q 6) + √ q 3 — √ q 6.) Finalement ſi AB eſt 2. & CD √ q 8 la ligne pouuant iceux eſpaces ſera √ q (√ q 8 + 2) ou √ q (√ q 2 + 1) + √ q (√ q 2 — 1.)

THEOREME 55. PROP. 73.

lxxij. lxvj.

Si deux ſuperficies Mediales, incommenſurables entre elles ſont compoſees, les deux autres lignes irrationelles ſont faictes, ſçauoir ou la Bimediale ſeconde ou la ligne pouuant deux Mediaux.

C'eſt à dire, que la ligne qui peut tout le compoſé eſt, ou bimediale ſeconde, ou pouuant deux Mediaux.



Soient compoſez 2. Mediaux incommenſ. AB, CD. Ie dis que la droicte ligne qui peut tout, l'eſpace AD, eſt Bimediale ſeconde, ou pouuant deux Mediaux.

Car derechef AB ſera plus grand que CD ou moindre: & egal non, autrement AB, CD ſeroient commenſurables, ce qui eſt contre l'ypotheſe. Soit premierement plus grand, & ſoit fait tout comme en la precedente. Et AB, CD, eſtant poſez Mediaux & incommenſ. leurs egaux EG, HI, ſeront auſſi Mediaux & incom-

mens.[a] Partant EH, HK ayant mesme raison,[b] seront incommens. en longit. (Et EG, HI; Mediaux, estant appliquez, à la Rationelle EF,[c] l'vne & l'autre EH, HK est Rationelle incommens. en longit. à la Rationelle EF. Donc EH, HK sont rationelles commens. en puiss. seulement:[d] partant la toute EK est Binome. Mais puis que AB, est posé plus grand que CD, comme en la precedente prop. EH sera le plus grand nom de EK. Partant pourra plus que HK, du quarré d'vne ligne qui luy est commens. en longit. ou incommensurable. Si EH, peut plus que HK du quarré d'vne ligne qui luy soit commens. en longit. tant EH, que HK estant monstree incommens. en longit. à EF Rationelle par la def. EK sera Binome troisiesme. Donc la droicte ligne pouuant l'espace EI, contenu sous EF, Rationelle, & EK Binome troisiesme, & partant l'espace AD,[e] est Irrationelle dicte Bimediale seconde.

a 1. 6.
b 10.10
c 23.10.
d 37.10.
e 57.10.

Si EH peut plus que HK du quarré d'vne ligne incommens. en longit. à icelle, tant EH, que HK estant incommens. en longit. à EF Rationelle; EK sera Binome sixiesme par la defin. Donc la ligne pouuant EI, ou AD;[f] est irrationelle: dicte pouuant deux Mediaux. Que si AB, estoit moindre que CD, on demonstrera semblablement ce qui est proposé. Partant si deux superficies Mediales incommens. entr'elles, sont composees, &c. Ce qu'il falloit demonstrer.

f 60.10.

SCHOLIE.

Soit AB 7 q 50 & CD 1 q 48. la ligne pouuant

leur compoſé ſera √qq 18 + √qq 8. Bimediale ſeconde: ou ſoit AB √q 12 & CD √q 8. la ligne pouuant iceux ſera √q (√q 12 + √q 8,) ou √q. (√q 3 + √q 1) + √q (√q 3 — √q 1) pouuant deux Mediaux.

COROLLAIRE.

De toutes ces choſes on collige facilement que la ligne de deux noms ou Binome, & les autres lignes irrationelles ſuiuantes icelle, ſont differentes entr'elles & de la ligne Mediale.

Car le quarré d'vne ligne Mediale appliqué à
a 23.10. vne ligne rationelle, a fait la latitude Rationelle incommenſurable en longit. à icelle Rationelle à laquelle il eſt appliqué.

Mais le quarré de la ligne de deux noms, appliqué à vne ligne Rationelle, b fait la latitude
b 61.10. premiere de deux noms ou Binome premier.

Et le quarré d'vne Bimediale premiere appliqué à vne ligne Rationelle, c faict la latitude
c 62.10. Binome ſecond.

Et le quarré d'vne Bimediale ſeconde appliqué à vne ligne Rationelle: d fait la latitude
d 63.10. Binome troiſieſme.

Mais le quarré d'vne ligne Maieure appliqué à vne rationelle; e faict la latitude Binome
e 64.10. quatrieſme.

Et le quarré d'vne ligne pouuant vn Rationel & vn Medial appliqué à vne ligne Rationel-
f 65.10. le, f fait la latitude Binome cinquieſme.

Finalement le quarré d'vne ligne pouuant deux Mediaux, appliqué à vne ligne Rationel-
g 66.10. le, g fait la latitude Binome ſixieſme.

Or puiſque toutes ces latitudes different de la latitude de la mediale & entr'elles (ſçauoir de la latitude de la mediale, ceſte-cy eſtant Rationelle, & celles-là irrationelles:) Mais entr'elles d'autant qu'elles ne ſont Binomes de meſme ordre. Il eſt manifeſte que toutes les lignes irrationelles dont il a eſté parlé iuſques icy, ſont differentes entr'elles.

ICY COMMENCENT LES SIXAINES des lignes Irrationelles par le retranchement.

THEOREME 56. PROP. 74. lxxiij lxviij

Si d'vne ligne Rationelle on retranche vne ligne Rationelle, commenſurable en puiſſance ſeulement à la toute: la reſtante eſt Irrationelle: Soit appellée Apotome, ou reſidu.

De la Rationelle AB, ſoit retranchée AC, Rationelle, commenſ. en puiſſ. ſeulemẽt à la toute AB. Ie dis que le reſte BC eſt Irrationelle.

A C B

Car, comme AB, à AC, ainſi le quarré de AB, au rect. ſous AB, AC: & AB, AC, eſtant incommenſ. en longit. Le quarré de AB ſera incommenſ. au rect. ſous AB, AC: Mais le compoſé des quarrez de AB, AC, eſt commenſ. au quarré de AB, (car AB, AC eſtant poſees commenſ. en puiſſ. les quarrez de AB, AC, ſeront commenſurables: c Et partant leur com- a lem. 3. 19. 10. b 10. 10. c 16 10.

posé commens. au quarré de AB.) Mais 2. fois le rect. sous AB, AC est commens. au rect. sous AB, AC. [d] Donc le composé des quarrez de A B, AC, & 2. fois le rect. sous A B, AC, sont incommens. [c] Or le composé des quarrez de AB, AC est egal à 2. fois le rect. sous AB, AC & au quarré de BC. [f] Donc le composé des quarrez de AB, AC est incommens. au restant quarré de B C: Parquoy le composé des qq. de AB, AC, estant rationel; (estant commens. au q. de la Rationelle AB.) le quarré de BC sera irrationel: & partant B C irrationelle. Or soit icelle appellee Apotome, que les autres appellent Residu. Donc si d'vne ligne rationelle, &c. Ce qu'il falloit demonstrer.

d. scol. 14. 10. c. 7. 2

f corol. 17. 10.

SCHOLIE.

Soit AB 2. AC √ q 3. B C restante sera 2 — √ q 3.

lxxiv lxix

THEOREME 57. PROP. 75.

Si d'vne ligne Mediale on retranche vne ligne Mediale, commensurable en puissance seulement à la toute, laquelle contienne vn rectangle Rationel auec la toute, le reste est irrationel: Soit appellé residu Medial premier.

De AB Mediale soit retranchee AC Mediale commens. en puiss. seulement à A B, & que le

rect. sous AB, AC soit Rationel. Ie dis que la restante CB est irrationelle.

Car AB, AC estant com- A C B
mens. en puiss. les quarrez de
AB, AC seront com. a Et par- a 16.10.
tant le cõposé d'iceux sera com. au quar. de AC.
Mais le q. de AC Mediale est irrationel & Medial: b corol.
b donc le composé des quarrez de AB, AC cõ- 24.10.
mens. à iceluy, est irrationel & Medial, & le rect.
sous AB, AC estant posé Rationel; 2. fois le
rect. sous AB, AC sera rationel: Parquoy le cõ-
posé des quarrez de AB, AC sera incommens. à c. 7. 2.
2. fois le rect. de AB, AC. c Donc puis que le
composé des quarrez de AB, AC est egal à 2.
fois le rect. sous AB, AC & au quarré de BC: 2.
fois le rect. sous AB, AC, auec le quarré de BC,
sera aussi incommens. à 2. fois le rect. sous AB,
AC. d Parquoy 2. fois le rect. sous AB, AC, & d 17.10.
le quarré de BC, sont incommensurables: Et 2.
fois le rect. sous AB, AC estant Rationel, le
quarré de BC sera irrationel: Et partant BC ir-
rationelle. Or soit appellee Apotome ou residu
Medial premier. Partant si d'vne ligne Mediale
on retranche vne ligne Mediale commens. en
puiss. seulement à la toute, &c. Ce qu'il falloit
demonstrer.

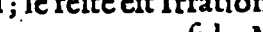
SCHOLIE.

Soit AB γ qq 54. & AC retranchee γ qq 24; la restante CB sera ι qq 54 — ι qq. 24. lxxv lxx.

THEOREME 58. PROP. 76.

Si d'vne ligne Mediale on retranche vne

ligne Mediale, commensurable en puissance seulement, à la toute; laquelle contienne auec la toute, vn rectangle Medial; le reste est Irrationel: Soit appellé Apotome ou residu Medial second.



De la Mediale AB, soit retranchee la mediale AC, commens. en puiss. seulement, à AB; & soit le rectangle sous AB, AC, medial. Ie dis que la restante BC est irrationelle.

Car dautant que les quarrez de AB, AC commens. en puiss. sont commensurables; [a] leur composé sera commens. à chacun d'iceux: mais chacun d'iceux quarrez est medial, (estant AB, AC, posees Mediales) [b] donc leur composé est medial, estant commensurable, à chacun d'iceux. Derechef, puis que le rect. sous AB, AC est posé medial; [c] le double d'iceluy, sçauoir 2. fois le rect. sous AB, AC, sera aussi medial; [d] Donc puis que le composé des quarrez de AB, AC, est egal à 2. fois le rectangle sous AB, AC, & au quarré de BC; le composé des quarrez de AB, AC, qui est medial, excedera 2. fois le rect. sous AB, AC, (qui est aussi Medial) du quarré de BC. [e] Mais vn Medial n'excede vn Medial d'vn rationel; Donc le quarré de BC, ne sera rationel: Donc irrationel, & BC irrationelle: Soit appellée apotome second, de la ligne Mediale. Partant si d'vne ligne, &c. Ce qu'il falloit demonstrer.

a 16. 10.
b corol. 24. 10.
c corol. 24. 10.
d 7. 2.
e 27. 10.

SCHOLIE.

Soit AB ✕ qq 18 *AC* √ qq 8 *BC sera* √ qq 18 — √ qq 8.

THEOREME 59. PROP. 77. lxxvj lxxj

Si d'vne ligne droicte, on retranche vne ligne droicte, incommensurable en puissance à la toute, faisant auec la toute le composé de leurs quarrez Rationel, & le rectangle contenu sous icelles Medial. La restante est Irrationelle: Soit icelle appellee Mineure.

De la ligne droicte A B, soit A C B retranchee A C incommensurable en puissance, à icelle A B;
Et soit le composé des quarrez de A B, A C rationel, mais le rectangle sous A B, AC, medial.
Ie dis que la restante B C, est irrationelle.

Car le composé des quarrez de AB, AC estant Rationel; Mais le rect. sous AB, A C, & partãt le double d'iceluy, [a] qui luy est commens. c'est à dire 2. fois le rect. sous A B, AC, Medial; c'est à dire irrationel: [b] le composé des quarrez de AB, AC sera incommens. à 2. fois le rect. sous AB, AC, [c] Mais le composé des quarrez de AB, AC, est egal à 2. fois le rect. sous AB, AC, & au quarré de BC. Donc le composé des quarrez de AB, A C, [d] sera incommens. au restant quarré de BC. Mais le composé des quarrez de AB, A C est posé rationel. Dõc le quarré de BC incommens. à iceluy est irrationel, & la ligne B C irrationelle. Soit appellee Mineure: Donc si d'vne ligne droicte, &c. Ce qu'il falloit demonstrer.

a corol. 24. 10.
b 10 19.
c. 7. 2.
d corol. 17. 10.
e 10. de
f

SCHOLIE.

Soit AB $\sqrt{q}(32+\sqrt{q}704)$ AC $\sqrt{q}(32-\sqrt{q}704)$ BC sera $\sqrt{q}(32+\sqrt{q}704)-\sqrt{q}(32-\sqrt{q}704.)$

lxxvij. lxxij. **THEOREME 60. PROP. 78.**

Si d'vne ligne droicte est retranchee vne ligne droicte, incommens. en puiss. à la toute; faisant auec la toute, le compose de leurs quarrez Medial: Mais le rectangle contenu sous icelles Rationel; la restante est Irrationelle. Soit appellee, ligne faisant auec vn espace Rationel vn tout Medial.

Soit la ligne AB, de laquelle AC est retranchee AC incommēs. en puiss. à AB: Et soit le composé de leurs quarrez Medial; & le rectangle sous icelles Rationel. Ie dis que la restante BC est Irrationelle.

Car le composé des quarrez de AB, AC estant Medial, c'est à dire irrationel; & le rect. sous AB, AC, & partant le double d'iceluy, sçauoir, 2. fois le rect. sous AB, AC, Rationel: a le compos. é des quarrez de AB, AC, sera incommens. à 2. fois le rect. sous AB, AC. b Mais le composé des quarrez de AB, AC est egal à deus fois le rect. sous AB, AC, & au quarré de BC.

a 10. def.

b 7. 2.

Done

Donc 2. fois le rect. sous AB, AC, auec le quarré de BC est incommens. à 2. fois le rect. sous AB, AC. c Partant 2. fois le rect. sous AB, AC & le quarré de BC sont incommensurables. Donc 2. fois le rect. sous AB, AC, estant Rationel: d le quarré de BC sera Irrationel; & la ligne BC Irrationelle. Soit appellee, ligne faisant auec vn espace Rationel vn tout Medial. D'autant que le quarré d'icelle, adiousté auec 2. fois le rect. sous AB, AC, qui est Rationel, fait vn tout Medial: Donc si d'vne ligne droicte est retranchee vne ligne droicte incommensurable en puissance, &c. Ce qu'il falloit demonstrer. c 17. 10. d 10. def

SCHOLIE.

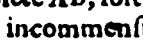
Soit $AB \sqrt{q}(\sqrt{q}\,13\frac{1}{2} + \sqrt{q}\,4\frac{1}{2})$ $AC \sqrt{q}(\sqrt{q}\,13\frac{1}{2} - \sqrt{q}\,4\frac{1}{2})$ BC sera $\sqrt{q}(\sqrt{q}\,13\frac{1}{2} + \sqrt{q}\,4\frac{1}{2}) - \sqrt{q}(\sqrt{q}\,13\frac{1}{2} - \sqrt{q}\,4\frac{1}{2})$.

lxxviij lxxiij

THEOREME 61. PROP. 79.

Si d'vne ligne droicte, on retranche vne ligne droicte, incommensurable en puissance à la toute; laquelle auec la toute face le composé de leurs quarrez Medial, & le rectangle contenu sous icelles Medial, & incommensurable au composé de leurs quarrez: la restante est Irrationelle: Soit appellee faisant vn tout Medial auec vn rectangle Medial.

De la droicte AB, soit retrãchee AC, incommensurable en puissance à AB; & soit tant le composé de leurs quarrez, que le rect. sous icelles Medial, & incommens. au composé des quarrez d'icelles. Ie dis que la restante BC, est Irrationelle.



Car d'autant que le composé des quarrez de AB, AC, est egal à 2. fois le rect. sous AB, AC & au quarré de BC; le composé des quarrez de AB, AC, posé Medial, excedera 2. fois le rect. sous AB, AC, qui est Medial (estant commens. au Medial contenu sous AB, AC) du quarré de BC: Mais vn Medial n'excede vn Medial d'vn Rationel; parquoy le quarré de BC n'est Rationel, donc Irrationel, & BC, Irrationelle: Soit appellee faisant vn tout Medial auec vn Medial; dautant que le quarré d'icelle auec le rect. sous AB, AC, qui est Medial, faict tout le composé des quarrez de AB, AC, qui est aussi Medial. Donc si d'vne ligne, &c. Ce qu'il falloit demonstrer.

a 27. 2.

b corol. 24. 10.

c 27. 10.

SCHOLIE.

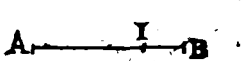
Soit AB $\sqrt{q}(\sqrt{q}13\frac{1}{2}+3)$ *AC* $\sqrt{q}(\sqrt{q}13\frac{1}{2}-3)$ *BC sera* $\sqrt{q}(\sqrt{q}13\frac{1}{2}+3)-\sqrt{q}(\sqrt{q}13\frac{1}{2}-3)$.

LEMME.

S'il y a mesme excez entre vne premiere grandeur & vne seconde; qu'entre vne troisiesme & vne quatriesme; aussi en permutant il

y aura vn mesme excez entre la premiere grandeur & la troisiesme, qu'entre la seconde & la quatriesme.

Soient 4. grandeurs AB, CD, EF, GH, & soit IB, l'excés d'entre AB, & CD, egal à KF, excés d'entre EF, GH. Ie dis qu'il y a vn mesme excés entre AB, & EF, qu'entre CD, GH. Car d'autant que IB, est l'excés d'entre AB, & CD; AI, sera egale à CD. Semblablement EK sera egal à GH. Donc il y aura mesme excés entre AI, & EK, qu'entre CD & GH, puis que ces grãdeurs cy sont egales à celles-là chacune à la sienne. a Mais l'excez des toutes AB, EF, est le mesme excés d'entre AI, EK; puis que IB, KF, sont posées egales : Donc il y aura pareillement mesme excés entre AB, & EF, qu'entre CD, & GH. Ce qui est proposé.



a. 16. c. 5.

COROLLAIRE.

Il appert de ces choses, que quatre grandeurs ayans mesme proportion Arithmetique, qu'en permutant elles auront aussi mesme proportion Arithmetique. D'autant que telle proportion consiste au mesme excés qu'auons monstré estre mesme entre la 2. & 3. grandeurs, qu'entre la 2. & 4. s'il y a mesme excés entre la premiere & la 2. qu'entre la 3. & la 4. sçauoir si 4. grandeurs ont mesme proportion Arithmetique. lxxix

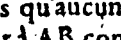
THEOREME 62. PROP. 80. lxxiv

Au Residu ou Apotome conuient tant

seulement, vne seule ligne droicte Rationelle, commensurable en puissance seulement à la toute.

Soit AB, residu à laquelle conuienne BC Rationelle commens. en puiss. seulement à la toute AC. Ie dis qu'aucune autre Rationelle ne peut conuenir à AB, commens. en puiss. seul. à la toute.

Car s'il est possible conuienne à icelle vne autre Rationelle BD, commens. en puiss. seulem. à AD. Et BC estant Rationelle, AC commens. en puiss. seulem. à icelle, sera Rationelle. Donc AC, BC, sont Rationelles commens. en puiss. seulem. Semblablement, AD, BD, seront Rationelles commens. en puiss. seulement. Mais y ayant mesme excez entre le composé des quarrez de AC, BC & 2. fois le rect. sous AC, BC, qu'entre le composé des quarrez de AD, BD, & 2. fois le rect. sous AD, BD; (car l'excez entre le composé des quarrez de AC, BC, & 2. fois le rect. sous AC, BC, est



a 7. 2. le quarré de AB; a le composé des quarrez de AC, BC, estant egal à 2. fois le rect. sous AC, BC; & au quarré de AB; semblablement le quarré de AB, est l'excés entre le composé des quarrez de AD, BD, & 2. fois le rect. de AD, BD (le cõ-

b 7. 2. posé b des quarrez de AD, BD estant egal à 2. fois de AD, BD, & au quarré de AB,) c aussi en

c schol. prec. changeant il y aura mesme excés entre le composé des quarrez de AC, BC, & le composé des quarrez de AD, BD, qu'entre 2. fois le

rect. de AC, BC, & 2. fois le rect. de AD, BD. Mais l'excez entre iceux composez est Rationnel, [d] iceux composez estans Rationaux: (car AC, CB estant Rationaux commens. en puiss. seulem. leurs quarrez seront Ration. & commens. [e] Donc leur composé sera commens. à chacun d'iceux, [f] & partant Rationel. Semblablement le composé des quarrez de AD, BD [f] sera monstré Rationel.) Donc l'excez entre 2. fois le rect. sous AC, BC, & 2. fois le rect. sous AD, BD, est vn espace Rationel: Et puis que [g] le rect. sous AC, BC, Rationelles commens. en puiss. seulement est Medial; [h] le double d'iceluy, sçauoir 2. fois le rect. sous AC, BC, sera Medial: Par mesme raison le rect. sous AD, BD est Medial. [i] & vn Medial n'excede vn Medial d'vn Rationel. Donc l'excez entre 2. fois le rect. sous AC, BC, & 2. fois le rect. sous AD, BD, n'est espace Rationel. Mais il est monstré Rationel. Ce qui est absurde. Donc aucune autre Rationelle ne conuient à AB, commens. en puiss. seul. à la toute, outre BC. Partant au residu Medial premier, &c. Ce qu'il falloit demonstrer.

d schol. 27 10.
e 16.10.
f 9 def.
g 22.10.
h corol. 24.10.
i 27.10.

lxxx
lxxv

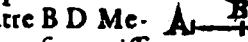
THEOREME 63. PROP. 81.

Au residu Medial premier, ne conuient qu'vne seule ligne Mediale, commensurable en puissance seulement à la toute, contenant auec la toute vn rectangle Rationel.

Soit AB, residu Medial premier, & à icelle

conuienne BC Mediale commenſ. en puiſſance ſeulement à la toute A C, & le rect. ſous A C, BC ſoit Rationel. Ie dis qu'aucune autre Mediale ne conuient à AB, qui ſoit commenſ. en puiſſ. ſeul. à la toute; & qui contienne auec la toute vn rect. Rationel.

Car s'il eſt poſſible conuienne vn autre B D Mediale, commenſ. en puiſſ. ſeul. à la toute, & ſoit le rect. ſous A D, B D, Rationel. Et B C eſtant Mediale commenſ. en puiſſ. ſeul. à AC, a AC ſera Mediale, donc AC; B C ſont Medialles commenſ. en puiſſ. ſeul. Et puis qu'il y a meſme excés entre le compoſé des quarrez de AC, BC, & le compoſé des quarrez de AD, BD, qu'entre deux fois le rect. ſous AC, BC, & 2. fois le rectangle ſous A D, B D, comme il eſt monſtré en la precedente: Mais l'excés entre iceux rect. b eſt Rationel; l'vn & l'autre eſtant Rationel (car le rect. ſous A C, B C eſtant poſé Rationel; 2. fois le rect. ſous AC, BC, cõme enſ. à iceluy eſt Rationel; & par meſme raiſon 2. fois le rect. ſous AD, B D eſt Rationel.) Donc l'excez entre le compoſé des qq. de AC, BC & celuy des qq. de AD, BD eſt Ratio. Et AC, BC eſtant Medialles commenſ. en puiſſ. ſeul. leurs quarrez ſeront Mediaux & commenſ. c Donc leur compoſé eſt commenſ. à chacun d'iceux; d Et partant Medial: Par meſme raiſon le compoſé des qq. de AD, BD, ſera Medial. e Mais vn Medial n'excedant vn Medial d'vn Rationel, l'excez d'entre le compoſé des quarrez de A C, BC, & celuy des quarrez de A D, B D, n'eſt Rationel. Mais il



a 24.10.

b ſchol. 27.10.

c 16 10.

d corol. 24.10.

e

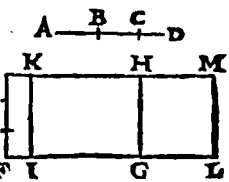
eſt monſtré Rationel. Ce qui eſt abſurde. Donc vne autre Mediale ne conuient à AB, outre BC, qui ſoit commenſ. en puiſſ. ſeul. à la toute, & contienne vn rect. Rationel auec la toute. Dõc au Reſidu Medial premier, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.

lxxxj lxxvj

THEOREME 64. PROP. 82.

Au reſidu Medial ſecond, ne peut conuenir qu'vne ſeule ligne droicte Mediale, commenſurable en puiſſance ſeulement à la toute, & contenant vn rectangle Medial auec la toute.

Soit AB reſidu Medial ſecond à laquelle conuienne BC Mediale commenſ. en puiſſ. ſeulement à la toute AC. Et ſoit le rect. ſous AB, AC Medial. Ie dis qu'aucune autre Mediale ne conuient à AB, commenſ. en puiſſ. ſeulement à la toute, & contenant auec icelle toute vn rect. Medial.



Cars'il eſt poſſible cõuienne BD Mediale cõmenſ. en puiſſ. ſeulem. à la toute AD, & ſoit le rect. ſous AD, BD Medial, & ſoit expoſee EF, Rationelle; a à laquelle ſoit appliqué EG rect. egal au compoſé des quarrez de AC, BC. Et à EF ſoit auſſi appliqué EI rect. egal au q. de AB: puis EL; rect. egal compoſé des quarrez de AD, BD. b Dautant donc que le compoſé des qq.

a 45 1.

b 7. 2.

de AC, BC, eſt egal à 2. fois le rect. ſous AC, BC & au q. de AB; KG, ſera egal à 2. fois le rect. ſous AC, BC. Ainſi KL ſera egal à 2. fois le rectangle ſous AD, BD. Et AC, BC eſtant Medi-
d 16. 10. ales commenſ. en puiſſ. ſeul. (Car BC eſtant
e corol. poſee Mediale, e AC commenſ. en puiſſ. à icelle, ſera auſſi Mediale,) leurs quarrez ſeront
d 16. 10. Mediaux & commenſ. d Donc leur compoſé eſt
e corol. commenſ. à chacun d'iceux; e & partant Medial; Donc EG, egal à iceluy compoſé eſt auſſi Medial, & EG eſtant appliqué à EF Rationelle, f EH ſera Rationelle incommenſ. en longit.
f 23. 10. à EF. De rechef le rect. ſous AC, BC eſtant Me-
g corol. dial; g le double d'iceluy ſçauoir KG, ſera Me-
24. 10. dial. Et eſtant appliqué à KI Rationelle, h KH,
h 23. 10. ſera Rationelle incommenſ. en longit. à KI, c'eſt à dire à EF: & puis que AC, BC, ſont in-
i lem. 3. commenſ. en longit. & comme AC, à BC,
12. 10. ainſi le q. de AC, au rect. ſous AC, BC; k le q. de
k 10. 10. AC ſera incommenſ. au rect. ſous AC, BC: Mais le compoſé des qq. de AC, BC, c'eſt à dire le rect. EG, eſt commenſ. au q. de AC (car AC, BC eſtant poſees commenſ. en puiſſ.
l 16. 10. leurs qq. ſeront commenſ. l Donc leur compoſé commenſ. à chacun d'iceux, ſçauoir au q. de AC.) Et le double du rect. ſous AC, BC, ſçauoir KG eſt commenſ à iceluy rect. ſous AC, BC. m Donc EG eſt incommenſ. à KG, donc
m ſchol. 24. 10. n EH, KH, ayant meſme raiſon que EG, KG, o
n 1. 6. ſont incommenſ. en longit. Et eſtant monſtrees
o 10. 10. Rationelles; elles ſeront Rationelles commenſ. en puiſſ. ſeulement. Parquoy de EH Rationelle eſtant retranchee la rationelle KH com-
p 74. 10. menſ. en puiſſ. ſeulement à EH; p EH, ſera re-

sidu, & K H conuenable à icelle. Ainsi on mõstrera que E K est residu & K M, conuenable à icelle. Donc au residu ne conuient vne seule ligne Rationelle commens. en puiss. seulement à la toute. Ce qui est absurde, comme il est q demonstré, Donc au residu Medial, &c. Ce qu'il falloit demonstrer. 80.10.

THEOREME 65. PROP. 83. lxxxij lxxviij

A la ligne Mineure conuient vne seule ligne droicte incommensurable en puissance à la toute; & faisant auec la toute le composé de leurs quarrez Rationel: & le rectangle sous icelles Medial.

Soit AB Mineure & BC conuenable à icelle, incommensurable en puissance à la toute AC, faisant le composé des quarrez de AC, BC Rationel; Mais le rect. sous AC, BC Medial: Ie dis qu'aucune autre ligne ne cõuient à AC, faisant le mesme.

Car autrement qu'vne autre BD conuienne à AB, incommens. en puiss. à la toute AD, faisant le composé des qq. de AD, BD Rationel, & le rect. sous AD, BD Medial. D'autant donc que comme il est demonstré en la 80. prop. l'excez du composé des qq. de AC, BC, & du composé des qq. de AD, BD, est le mesme que celuy d'entre 2. fois le rect. sous AC, BC, & de deux fois le rect. sous AD, BD:

a Schol. 27. 10. Mais l'excez d'entre iceux composez [a] est Rationel l'vn & l'autre estant posé rationel. Donc l'excez entre deux fois le rectangle sous AC, BC, & deux fois le rect. sous AD, BD, est espace rationel: Mais il est aussi non rationel, (car le rect. sous AC, BC, estant posé medial, 2. fois le b corol. 24. 10. rectãgle sous AC, BC, double d'iceluy [b] est aussi medial: semblablement, 2. fois le rectangle sous c 27. 10 AD, DB, sera medial, [c] donc l'vn n'excedera l'autre d'vn rationel. Ce qui est absurde. Donc vne autre ligne ne conuient à AB, outre BC, incommensurable en puiss. à la toute, &c. Donc à ligne Mineure, &c. Ce qu'il falloit demonstrer.

lxxxiij lxxviij.

THEOREME 66. PROP. 84.

A la ligne faisant auec vn espace Rationel vn tout medial, conuient vne seule ligne droicte incommensurable en puissance à la toute, & faisant auec la toute le composé de leurs quarrez Medial. Mais le rectangle contenu sous icelles Rationel.

Soit AB, faisant vn tout medial auec vne espace rationel, à laquelle conuienne BC, incommensurable en puissance à la toute AC, & faisant le composé des qq. de AC, BC, medial, & le rectangle sous AC, BC, rationel. Ie dis que à AB, n'en conuient vne autre faisant les mesmes choses.

Car s'il est possible en conuienne vne autre BD, incommensurable en puissance à la toute AD, & faisant le composé des qq. de AD, BD, me-

dial & le rectangle sous AD, BD, rationel. D'autant que comme il est monstré en la 80. prop. il y a mesme excez entre le composé des qq. de AC, BC, & le cõposé des qq. de AD, BD, qu'estre 2. fois le rect. sous AC, BC, & 2. fois le rect. sous AD, BD. Mais l'excez entre iceux rect. est espace rationel, cõme il est mõstré en 81. p. donc l'excez d'entre iceux composez des qq. est aussi espace rationel: Mais il n'est pas aussi rationel, l'vn & l'autre estant medial; [a] vn medial n'excedant vn medial d'vn rationel. Ce qui est absurde. Donc vne autre ligne que BC, ne conuient à AB, incommens. en puissance à la toute. Dõc à la ligne faisant, &c. Ce qu'il falloit demonst. *Voyez la figure precedente p.* [a] 227. 10

lxxxiv.
lxxix.

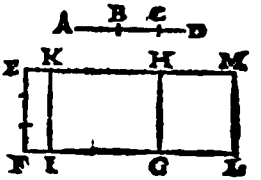
THEOREME 67. PROP. 85.

A vne ligne faisãt auec vn espace medial, vn tout medial, conuient vne seule ligne droicte incommensurable en puissance à la toute, & faisant auec la toute le composé de leurs quarrez Medial & le rectangle contenu sous icelles Medial, & incommensurable au composé de leurs quarrez.

Soit AB, faisant auec vn espace medial, vn tout medial, à laquelle conuienne BC, incommens. en puissance à la toute AC, & faisant le composé des quarrez de AC, BC, medial & le rectangle sous icelles medial & incommẽsurable au composé d'iceux quarrez de AC, BC. Ie dis que aucune autre ligne ne peut conuenir à AB, fai-

ſant les meſmes choſes.

Car s'il eſt poſſible, que BD, luy conuienne incommenſurable en puiſſance à la toute AD, faiſant ce que dit eſt.



Et ſoit fait comme en la 82. D'autant que le compoſé des quarrez de AC, BC, eſt medial EG, ſon egal eſt auſſi medial. [a] Donc EH, eſt rationelle incommenſurable en longitude à EF. Derechef d'autant que le rectangle ſous AC, BC, eſt medial, le double d'iceluy KG, eſt auſſi medial, [b] donc KH, eſt rationelle incommenſurable en longitude à EF. Et d'autant que KG, eſt commenſurable au rectangle ſous AC, BC, eſtant double d'iceluy rect. Mais le rect. ſous AC, BC, eſt poſé incommenſ. au compoſé des quarrez de AC, BC; [c] kG, ſera auſſi incommenſurable à iceluy compoſé, c'eſt à dire à EG, & partant EH, KH, eſtant en meſme raiſon, que EG, KG, [d] ſont incommenſ. en longitude. Mais elles ſont monſtrees rationelles, partant ſont rationelles commenſurables en puiſſance ſeulement. Oſtant donc de la rationelle EH, la rationelle KH, commenſurable en puiſſance ſeulement à EH; [e] EK, ſera reſidu & à icelle conuenant kH: Semblablement nous monſtrerons que EK, eſt reſidu, à laquelle conuient KM. Donc vne ſeule ligne ne conuient à vn reſidu, &c. Ce qui eſt abſurde. [f] Eſtant monſtré le contraire, &c. Donc à vne ligne faiſant, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.

a 23.10.
b 23.10.
c 14.10.
d 10.10.
e 74 10.
f 80.10.

DEFINITIONS TROISIESMES.

Vne ligne rationelle eſtant propoſee & vn reſidu, quand la toute compoſee du reſidu & de la conuenable ou adiouſtee, peut plus que la conuenable, du quarré d'vne ligne qui luy eſt commenſurable en longitude.

1. Si la toute eſt commenſurable en longitude à la rationelle propoſee; le reſidu ſoit appellé, Reſidu premier.

2. Mais ſi la conuenable ou adiouſtee, eſt commenſurable en longitude à la rationelle propoſee, ſoit appellé reſidu ſecond.

3. Et ſi ny la toute, ny la cõuenable, n'eſt commenſurable en longitude à la rationelle propoſee, ſoit appellé reſidu troiſieſme.

Derechef ſi la toute peut plus que la conuenable, du quarré d'vne ligne droicte incommenſurable en longitude à icelle.

4. Si la toute eſt commenſurable en longitude, à la rationelle propoſee; ſoit appellee reſidu quatrieſme.

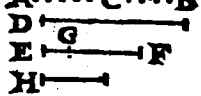
5. Mais ſi la conuenable eſt commenſurable en longitude à la rationelle propoſee, ſoit appellee reſidu cinquieſme.

6. Et ſi ny la toute, ny la cõuenable, n'eſt commenſurable en longitude à la rationelle propoſee, ſoit appellee reſidu ſixieſme.

lxxxv lxxx. PROBLEME 19. PROP. 86.

Trouuer vn apotome, ou residu premier.

a schol 2 29.10. Ayant a trouué 2. nombres quarrez AB, CB, dont l'excez AC, ne soit quarré. Soit proposee D, rationelle, & soit EF, commensurable en lõgitude à icelle; EF sera aussi rationelle, & b comme le nombre AB, à AC, soit faict le quarré de EF, au quarré de GF. Ie dis que EG, est residu premier.



b cor. 6. 10. c 6.10. Car d'autant que les c quarrez de EF, GF, estant entr'eux comme les nombres AB, AC, sõt cõmensurables: EF, GF, seront commensurables au moins en puissance. Donc puis que EF, est monstree rationelle, GF, le sera aussi. Et puis que AB, AC, ne sont entre-eux comme nombres quarrez, les quarrez, de EF, GF, ne seront l'vn à l'autre comme d 9.10. nombre quarré à nombre quarré. d Partant EF, GF, sont incommensurables en longitude: elles sont donc rationelles commensurables en e 74.10. puissance seulement, e partant le reste EG, est residu. Ie dis qu'elle est residu premier. Car que EF plus grãde puisse plus que GF, du quarré de H. Et d'autant que comme le nombre AB, est au nõbre AC, ainsi le quarré de EF: au q. de GF par cõuersiõ de raison, cõme AB, à CB. ainsi le q. de EF, au q. de H. Mais AB, CB, sont nombres quarrez, donc le quarré de EF, sera au quarré de H f 9. 10. comme nomb. q. au nomb. q. donc EF, & H, sont

commensurables en longitude. D'autant donc que la toute EF, peut plus que GF, conuenable du quarré de H, commensurable en longitude à icelle, & la toute EF, est commensurable en longitude à la rationelle exposee D, par la definitiõ, EG, sera residu premier. Donc nous auons trouué vn residu premier. Ce qu'il falloit faire.

SCHOLIE.

Soit D rationelle proposee 9. & EF, 6. le nombre AB, 9. & CB, 4. & comme AB, 9. nombre q. est à AC, 5. ainsi 36. q. de EF, soit à vn autre sçauoir au q. de FG, qui sera trouué de 20. Donc FG, sera √q. 20. Donc EG, sera 6. — √q. 20. apotome ou residu premier.

Et faut entendre que apotome ou residu est le reste de 2. lignes ou de 2. nombres rationaux, le moindre estant soustraict du plus grand, & se trouue tout ainsi que le binome posant le signe — au lieu du signe +. Comme apres auoir trouué ce binome 6. + √q. 20. changeant + en — le residu sera 6. — √q. 20.

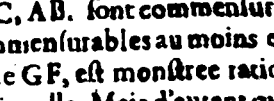
PROBLEME 20. PROP. 87.

Trouuer vn residu second.

Ayant trouué 2. nombres AB, CB, comme en la precedente, & proposé la rationelle D, soit prise GF, commensurable en longitude à icelle, a cor. GF, sera aussi rationelle. Et a comme le nombre AC, au nombre AB, ainsi le quarré de GF, soit faict au quarré de EF. Ie dis que EG, est apotome second. a 6.10. b 6.10.

Car les quarrez, de GF, EF, estant entr'eux

comme les nombr. AC, AB. ſont commenſurables, & GF, EF, commenſurables au moins en puiſſance. Et puis que GF, eſt monſtree rationelle EF, ſera auſſi rationelle. Mais d'autant que les nombres AC, AB, & par meſme moyen les quarrez de GF, EF, ne ſont entr'eux comme nombre quarré à



e 9. 10. nombre quarré, e GF, EF, ſeront incommenſurables en longitude. Donc

d 74 10. GF, EF, ſont rationelles commenſurables en puiſſance ſeulement, d & partant EG, reſtante, eſt reſidu. Ie dis auſſi qu'elle eſt reſidu ſecond. Car que EF, puiſſe plus que GF, du quarré de H. D'autant donc que comme AC, à AB, ainſi le quarré de GF, au quarré de EF, & en raiſon conuerſe comme AB, à AC, ainſi le quarré de EF, au quarré de GF: maintenant nous monſtrerons comme en la precedente que la ligne H, eſt commenſurable en longitude à EF: parquoy la toute EF, pouuant plus que la conuenable GF, du quarré de H, commenſurable en longitude à icelle, & que icelle conuenable GF, eſt commenſurable en longitude à la rationelle expoſee D, par la definition EG, ſera apotome ou reſidu ſecond. Donc nous auons trouué vn apotome ſecond. Ce qu'il falloit demonſtrer.

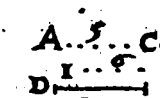
SCHOLIE.

Soit FG, 5. & comme AC, 5. au nombre q. AB, 9. ainſi 25. q. du nombre pris ſoit à vn autre ſi auoir à 45. q. de EF, donc EF, ſera √q. 45. Partant EG, ſera √q. 45. — 5 reſidu ſecond.

PROBLEME 21. PROP. 88. 87.

Trouuer vn apotome ou residu troisiesme. 21.

Ayant trouué 2. nombres AB, CB, comme en la 86. soit pris vn autre nombre 1. comme est enseigné en la 51. qui ne soit à l'vn ny l'autre comme nombre quarré à nombre quarré. Et ayant proposé D, rationelle, soit faict comme I, à AB, [a] ainsi le quarré de D, au quarré de EF, [b] & iceux quarrez de D, & EF, seront entr'eux comme les nombres I, & AB, & partant commensurables, & partant D, & EF, commens. au moins en puissance: Et D estant rationelle, EF, sera aussi rationelle. Et d'autant que les nombres I, & AB, & partant les quarrez de D, & EF, ne sont entr'eux, comme nombre quarré à nombre quarré [c] D, & EF, seront incommensurables en longitude. [d] De rechef comme AB, est à AC, ainsi le q. de EF, soit au quarré de GF. Ie dis que EG, est residu troisiesme. Car [e] puis les quarrez de EF, GF, estant entr'eux comme les nombres AB, AC, sont commensurables EF, GF, seront commensurables au moins en puissance; & EF, estant mise rationelle, GF, sera aussi rationelle. Et d'autant que AB, AC, & par ainsi les quarrez de EF, GF, ne sont entr'eux cõme nombres quarrez, [f] EF, GF, seront incommensurables en longitude. Donc EF, GF, sont rationelles cõ-



a corol. 6. 10.
b 6 10.
c 9. 10.
d corol. 6 10.
e 6. 10.
f 9. 10.

mensurables en puissance seulement, & partant GF, estant retranchee de EF, commensurable à
874.10. icelle en puissance seulement, ſ EG, sera residu. Ie dis qu'elle est residu troisiesme. Car d'autant que cõme I, à AB, ainsi le quarré de D, au quarré de EF, & comme AB, à AC, ainsi le quarré de EF, au quarré de GF; en raison egale, comme I, à AC, ainsi le quarré de D, au quarré de GF, or I, & AC, ne sont entr'eux cõme nõb. qq. Dõc les qq. de D, & GF, ne seront entr'eux comme nombre quarré à nombre quarré, ᵇ Donc D, & GF,
ᵇ 9.10. sont incommensur. en longitude. Donc l'vne ny l'autre EF, GF, n'est commensurable en longitude à la rationelle proposee D. Maintenant que EF, plus que GF, du quarré de H, nous monstrerons comme en la 86. que H, est commensurable en longit. à EF. Parquoy puis que EF toute peut plus que la commensurable GF du quarré de H, commensurable en longitude à icelle, & que l'vne ny l'autre EF, GF n'est commensurable en longit. à la rationelle proposee D. par la def. EG, sera residu troisiesme. Donc nous avons trouué vn residu troisiesme. Ce qu'il falloit faire.

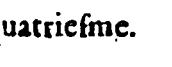
SCHOLIE.

Soit D Rationelle proposee 12. & comme I, 6 est au nomb. q: AB 9. ainsi 144. q. de D, soit à vn autre, sçavoir au quarré de EF 216. Donc EF sera √ q 216. Derechef comme AB 9 est à AC 5. ainsi 216. soit à vn autre, sçavoir au q. de FG, qui sera trouué de 120 Donc FG sera √ q 120 partant EG sera √ q 216 — √ q 120 residu troisiesme.

PROBLEME 22. PROP. 89.

Trouuer vn residu quatrieſme. 88 85.*

Ayant trouué 2. nõbres AC, CB, [a] tels que leur composé ne ſoit à l'vn ny à l'autre, comme nombre quarré à nombre quarré; ſoit expoſee D rationelle, à laquelle ſoit EF, commenſ. en longitude; EF, ſera auſſi Rationelle: Et ayant fait au reſte comme en la 86. prop. nous monſtrerons comme là que EG, eſt reſidu. Ie dis auſſi qu'elle eſt reſidu quatrieſme. Car que EF, puiſſe plus que GF, du quarré de H: Et d'autant que comme AB, à AC, ainſi le quarré de EF, au quarré de GF, en raiſon conuerſe comme AB, ſera à CB, ainſi le quarré de EF, au quarré de H; Donc puis que AB, CB, ne ſont entr'eux comme nombres quarrez; [b] EF, & H, ſeront incommenſ. en longitude. D'autant donc que la toute EF, peut plus que la conuenable GF, du quarré de H, incommenſurable en longitude à icelle; & la meſme toute EF, eſt commenſ. en longitude à la rationelle D; EG, par la def. ſera reſidu quatrieſme. Nous auons donc trouué le reſidu quatrieſme. Ce qu'il falloit faire.



a ſchol. 3. 29. 10.

b 9. 10

SCHOLIE.

Soit D Rationelle 8. & EF 6. & comme AB nombre q. 9. eſt à AC 6. nombre nõ q. ainſi 36. q. de EF ſoit à vn autre, ſçauoir au q. de FG, qui ſera trouué de

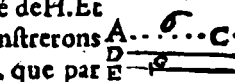
24. partant FG *sera* V *q* 24. *Donc* EG *sera* 6 — V *q* 24. *apotome ou residu quatrieſme.*

89.

84. PROBLEME 23. PROP. 90.

Trouuer vn reſidu cinquieſme.

Ayant trouué 2. nombres A C, C B, comme en la precedente; ſoit conſtruit comme en la 87. prop. c'eſt à dire ſoit priſe GF, commenſ. en lõgit. à la rationelle D, &c. Donc comme en la 87. nous monſtrerons que EG, eſt reſidu; Ie dis auſſi qu'il eſt cinquieſme. Car que EF, puiſſe plus que GF, du quarré de H. Et d'autant que nous monſtrerons tout ainſi qu'en la 86. que par conuerſion de raiſon, comme A B à CB, ainſi le quarré de EF, au quarré de H; derechef comme en la precedente, EF, & H ſeront incommenſurables en long. & la conuenable GF, eſt commenſ. en longit. à la rationelle propoſee D; par la definition, EG, ſera reſidu cinquieſme. Donc nous auons trouué vn reſidu cinquieſme. Ce qu'il falloit faire.



SCHOLIE.

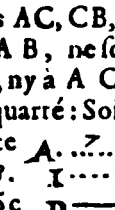
Soit D Rationelle propoſee, & ſoit FG 2. & comme AC 6. à AB 9. ainſi 4. quarré de FG 2. ſoit à vn autre ſçauoir au q. de E F, Donc E F ſera V q. 6. Donc E G ſera V q 6. — 2. reſidu cinquieſme.

xc.

lxxxv. PROBLEME 24. PROP. 91.

Trouuer vn residu sixiesme.

Ayant trouué 3. nombres AC, CB, & I, comme en la 54. en sorte que A B, ne soit à AC, ny à CB, & I, ne soit à AB, ny à A C, comme nombre quarré à nombre quarré: Soit exposee la rationelle D. Et au reste soit fait comme en la 88. prop. Nous monstrerons dõc comme en icelle 88. que D, & E F, sont incommens. en longit. Et que EG est residu sixiesme. Car comme en la 88. D, & G F, seront aussi incommens. en longitude; & partant l'vne ny l'autre E F, G F, n'est commens. en longit. à la rationelle proposee D. Maintenant que EF, puisse plus que G F, du quarré de H, laquelle nous monstrerons incommensurable en longitude à E F, comme en la 89. Donc puis que la toute EF, peut plus que la conuenable GF, du quarré de H, incommensurable en longit. à icelle, & EF, ny GF, n'est commensurable en longitude à la rationelle exposee D; par la def. E G, sera residu sixiesme. Donc nous auons trouué vn residu sixiesme. Ce qu'il falloit faire.



SCHOLIE.

Soit D, 81. 9. & comme I 9. à AB 12. ainsi 144. q. de 12. à vn autre, sçauoir au q. de EF, qui sera 192. Donc EF sera √ q 192. Puis comme 12. à 7. ainsi le q. de de EF 192 à vn autre sçauoir au q. de F G qui sera

112. *Donc FG sera √q 112. Et partant EG √q 192 — √q 112. residu sixiesme.*

Mais l'on trouuera aussi les susdits residus comme Theon en ceste maniere.

Comme pour exemple, pour trouuer le residu premier:

49.10. *Soit trouué AB binome premier: dont le plus grand nom est AC & le moindre CB; & de AC ayant esté CD egale à CB. Ie dis que AD est residu premier.*

Car puis que AC, BC sont rationelles commenſ. en puiſſ. seulement A C, D C *seront aussi rationelles commenſ. en puiſſ. seulement.* b *Donc AD est residu: & AC pouuant plus que CB, c'est à dire que DC du quarré d'vne ligne qui luy est commenſurable en longitude, & AC, est commenſurable en longitude à la rationelle exposée par la def. du Binome premier: par la def. du residu premier; AD sera residu premier: & semblablement on trouuera les residus des autres Binomes, estant les moindres nombres des plus grands.*

D C A B

b 74.10.

&c.

lxxxvj THEOREME 68. PROP. 92.

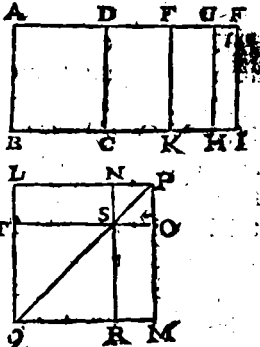
Si vn espace est contenu sous vne ligne Rationelle, & vn residu premier; la ligne droicte pouuant iceluy espace est residu.

Soit l'espace AC, contenu sous la rationelle AB, & le residu premier AD. Ie dis que la ligne qui peut l'espace AC, est residu.

Car soit DE, commensable à AD; Donc AE, DE, par la def. du residu premier seront Rationelles commenſ. en puiſſance seulement; & la tou-

te AE, commenſ. en longit. à la Rationelle AB; & la toute AE, pourra plus que la conuenable DE, du quarré d'vne ligne commenſurable en longitude à icelle. Soit couppee DE en 2. également à F, & ſoit appliqué à AE, vn rect. egal au quarré de EF, [a] c'eſt à dire egal au quart du quarré de DE, & defaillant d'vne figure quarree, ſçauoir ſous AG, GE. Et d'autant que AE peut plus que DE, du quarré d'vne ligne qui luy eſt commenſurable en longit. AG, GE [b] ſeront commenſ. en longitude. Parquoy c'vne & l'autre ſera commenſurable en longit. à la toute AE: Mais la toute AE, eſt commenſurable en longit. à la rationelle AB. Donc [d] tant AG, que GE, eſt commenſ. en longit. à AB, [e] Et partant rationelle. Donc ayant mené GH, EI, [e] paralleles à AB, rencontrant BC prolongee à H & I, ſi l'vn & l'autre rect. AH, GI, & contenu ſous deux Rationelles commenſurables en longit. ſera Rationel. Derechef, d'autant que l'vne & l'autre DF, FE, eſt commenſ. en longitude à DE; & DE incommenſ. en longitude à la Rationelle AB; [f] car ſi elle eſtoit commenſ. en longit. AE eſtant auſſi commenſ. en longit. à AB, [g] AE, DE ſeroient auſſi commenſ. en longitude, ce qui eſt abſurde, car elles ſont poſees cõmenſurables en puiſſ. ſeulement) [h] l'vne & l'autre d'icelles DE, FE, ſera auſſi incommenſ. en

a lem. 2



17. 10.

b 18. 10.

c 16. 10.

d 15. 10.

e 6. def

f 20. 10.

g 12. 10.

h 14. 10.

longit. à la Rationelle AB. Et d'autant que l'vne & l'autre DF, FE, est commens. à la Rationelle DE, elles sont Rationelles; partant, tant AB, DF, que AB, FE, seront rationelles com-
i 22. 10 mensur. en puissance seulement; Donc ayant mené FK parallelle à AB; il'vn & l'autre rect. DK, FI, contenu sous les Rationelles commen-
k 14.10. surables en puiss. seulement, est Medial.

Maintenant soit k fait le quarré LM, egal à A
l 26. 6. H; & NO egal à GI, ayant vn angle commun auec LM, sçauoir LPM, l Donc les qq. LM, NO seront à l'entour d'vn mesme Diametre, lequel soit PQ; & soit parfaicte la fig. comme l'on void.
m 17.6. D'autant donc que le rect. sous AG, GE, est egal au quarré de FE, par la construction: m les trois
n 1. 6. lignes AG, FE, GE, seront proportionelles; n & partant AH, FI, GI, ayant mesme raison; FI, sera moyen proportion entre AH, GI, c'est à dire entre les quarrez LM, NO, egaux à iceux
o lem. 14. 10. rect. o Mais LO, est aussi moyen proportionel,
p 16.10. entre les mesmes LM, NO. Donc les rect. FI, LO, sont egaux: p Mais DK est egal à FI, & MN à LO. Donc le tout DI, est egal à tout le gnomon RO, ON, NP auec le quarré NO. Mais le tout AI, est egal aux qq. LM, NO, par la cõstruction, donc le reste AC, sera egal au reste quarré TR. Donc TS peut l'espace AC. Ie dis que TS est residu.

Car d'autant que les espaces AH, GI, sont monstrez rationaux & à iceux sont egaux LM, NO, iceux quarrez LM, NO, seront rationaux, & partant TO, SO, rationelles. Derechef, puis que FI, est monstré Medial, LO, egal à iceluy sera aussi Medial. Donc LO, NO.

ſont incommenſ. l'vn eſtant rationel & l'autre irrationel. q Donc les lignes TO, SO, ayant meſme raiſon que LO, NO, r ſont incommenſ. en longit. s Partant le teſte TS. eſt reſidu. Donc ſi vn eſpace, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer. q 1. 6. r 10. 10. s 74. 10.

SCHOLIE.

Soit AB 6. AC 7 — V q 13, DE *ſera* V q 13 & DF *ou* FG V q 3 1/4 *& ſi à* AE *on applique vn rect. ſous* AG, GE *egal au q. de* FE *comme il a eſté monſtré, defaillant d'vne ſſg. q.* AG *ſera* 6 1/2, GE 1/2 *Donc* AH *eſt* 39 *&* GI. 3. *& le tout* AI 42. *Mais* DI, *eſt* V q 468 *&* DK *ou* FI V q 117 — 3 *&* GI. 3. *Donc* AC *eſt* q 2 — V q 468. *reſidu premier. pour trouuer ſon coſté, ſoit diuiſé* 42. *en* 2. *telles parties que leur produit ſoit egal au quart du q. de* 468. *c'eſt à dire à* 117. *la plus grande partie ſera* 39. *la moindre* 3. *& partant* V q 39 — V q 3 *ſera le coſté de l'eſpace reſidu* 42 — V q 468.

THEOREME 69. PROP. 93.

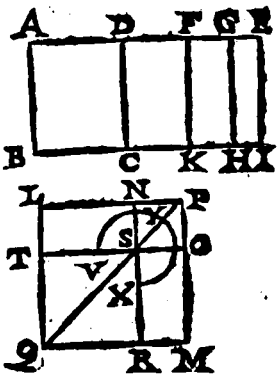
92. 87.

Si vn eſpace eſt contenu ſous vne ligne Rationelle; & vn reſidu ſecond : La ligne droicte pouuant iceluy eſpace eſt reſidu Medial premier.

Soit le rectangle ou eſpace AC, contenu ſous AB Rationelle, & AD reſidu ſecond. Ie dis que la ligne pouuant AC, eſt reſidu Medial premier.

Car ſoit DE conuenable à AD; Donc AE, DE par la def. du reſidu ſecond ſeront Ratio-

nelles commensurables en puiſſ. ſeulement; & la conuenable D E cõmenſ. en longit. à la Rationelle A B. Et finalement A E, pourra plus que DE du q. d'vne ligne commenſ. en longit. à icelle. Soit coupeeDE en 2. egalement à F & au reſte, ſoit fait comme en la preceden-



a 18. 10. te: Comme en la 92. p. a AG, G E ſeront commenſ. en longit. b Et partant chacune ſera cõmenſ. à la toute AE; Mais AE eſt incommenſ. en longit. à A B Rationelle: (car ſi elle eſtoit

b 16. 10. commenſ. en longit. à A B, DE eſtant poſee commenſ. en long. à la meſme AB; c A E, D E, ſeroient commenſ. en longit. entr'elles: ce qui eſt abſurde, eſtans poſees commenſ. en puiſſan-

c 12. 10. ce ſeulement. d Donc tant AG, que G E eſt incommenſ. en long. à AB. Mais AG, GE commenſ. à E Rationelle, ſont Rationelles, Donc tant AB, AG, que AB, GE ſont rationelles com-

d 14. 10. menſ. en puiſſ. ſeulement: e Donc tant le rect. A H, que GI, contenu ſous les Rationelles cõmenſ. en puiſſ. ſeulement eſt Medial. Derechef tant DF, que FE eſtant commenſ. en longit. à DE, poſee commenſ. en longit. à AB Rationelle, D F, FE, ſeront commenſ. en longit. à A B

e 22. 10. Rationelle, comme il appert par la 11. prop. & partant Rationelles. f Donc tant le rectangle D K, que FI, contenu ſous les Rationelles commenſ. en longit. eſt Rationel. Et on monſtrera

f 20. 10.

comme en la 92. prop. que TS peut l'espace A C, Ie dis que TS est residu Medial premier.

Car AG, GE estant commens. en longit. [g] AH, GI ayant mesme raison qu'icelles seront cõmens. Et partant aussi leurs egaux quarrez LM, NO, commens. Donc les costez TO, SO, seront au moins comm. en puiss. Mais TO, SO sont Mediales, estant les qq. LM, NO, egaux à AH, GI (mõstrez Mediaux) Mediaux. Et d'autãt que FI. & partant son egal LO, est Rationel; & [h] par ainsi incommens. au Medial NO; [h] TO, SO ayant mesme raison qu'iceux, seront incommens. en longit. Et estant monstrees Mediales & commens. icelles TO, SO, seront Mediales commens. en puiss. seulement: & contenant le rect. LO monstré Rationel; [i] TS sera residu Medial premier. Donc si vn espace est contenu, &c. Ce qu'il falloit demonstrer.

[g] 10.10.

[h] 10.10.

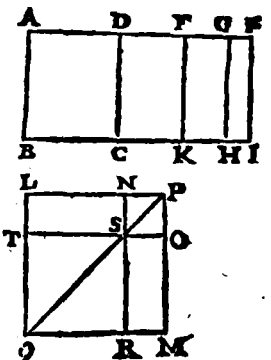
[i] 75.10.

SCHOLIE.

Soit AB 4. AD √q 48 — 6, DE sera 6 & DF ou FE 3. Et si à AE on applique vn rect. sans AG, GE, egal en q. de FE, & defaillant d'vne fig. q. AG sera √q 27. GE √q 3. Et AH √q 432. GI √q 48 & AI, √q 768: Mais DI 24 DK ou FI 12 & FH 12 — √q 48. Donc AC est √q 768 — 24. residu second. Et pour trouuer le costé de son quarré soit diuisee √q 768. en 2. telles parties que leur produit soit egal au quart du quarré de 24. c. à dire à 144. la plus grande partie sera √q 432. la moindre √q 48. partant √q 432 — √q 48 est le costé de l'espace dit √q 768 — 24.

91. 88. THEOREME 70. PROP. 94.

Si vn eſpace eſt contenu ſous vne ligne Rationelle & vn reſidu troiſieſme; la ligne droicte pouuant iceluy eſpace eſt reſidu Medial ſecond.



Soit l'eſpace ou rectangle A C contenu ſous AB Rationelle, & ſous AD reſidu troiſieſme. Ie dis que la ligne qui peut A C eſt reſidu Medial ſecond.

Car ſoit D E conuenable à AD: Donc AE DE ſelon la def. du reſidu troiſieſme ſerõt Rationelles commenſ. en puiſſ. ſeulement, & AE, ny D E ne ſera commenſ. en longit. à la Rationelle AB. & AE pourra plus que D E du quarré d'vne ligne commenſ. en longit. à icelle. Soit couppee D E à F en 2. egalement, & ſoit acheué le reſte de la cõſtruction comme en la 92. Derechef comme en icelle 92. AG, GE ſeront commenſ. en longitude entr'elles; a Et partant tant AG, que G E cõmenſ. en longit. à la toute AE. Mais AE eſt poſee incommenſ. en long. à AB Rationelle. Dõc b tant AG, que GE ſera incommenſ. en longit. à AB. Donc tant A G que G E commenſ. à AB Rationelle eſtant Rationelle; tant AB, AG, que

a 16. 10.

b 14. 10.

AE, GE ſont Rationelles commenſ. en puiſſance ſeulement : c Partant l'vn & l'autre rect. AH, GI ſera Medial. Derechef DE eſtant poſee incommenſ. en longit. à A B Rationelle ; D F & FE commenſ. en longit à DE ; d ſera auſſi incommenſ. en long. à AB. Donc D F & F E, eſtant commenſ. à DE Rationelle ; tant AB, DF, que AB, FE, ſeront Rationelles commenſ. en puiſſance ſeulement. e Et partant, tant le rect. D K que FI, ſera Medial : Et comme en la 92. on monſtrera que TS peut l'eſpace AC. Ie dis que TS eſt reſidu Medial ſecond.

c 22. 10.

d 14. 10.

e 22. 10.

Car AH, GI eſtant monſtrez Mediaux, leurs egaux quarrez LM, NO, ſeront auſſi Mediaux, & partant TO, SO Mediales. f Et puis que AH, GI, (ayant meſme raiſon que AG, GE mõſtrees commenſ.) ſont commenſ. les qq. LM, NO ſeront auſſi commenſ. Donc TO, SO ſont commenſ. au moins en puiſſ. Mais d'autant que AE, DE ſont commenſ. en puiſſ. ſeulement, c'eſt à dire incommenſ. en longit. & GE eſt mõſtree commenſ. en longit. à AE & FE commẽſ. en long. à DE ; g GE, FE, ſeront incommenſ. en longit. h Et partant GI, FI, ayant meſme raiſon que GE, FE, c'eſt à dire leurs egaux N O, L O, ſont incommenſ. parquoy TO, SO ayans meſme raiſon que LO, NO, ſont incommenſ. en longit. Et eſtant monſttees Mediales & commenſ. elles ſeront Mediales commenſ. en puiſſ. ſeulement : & contenant L O Medial : (car puis que L O eſt egal à FI, comme il appert par la 92. lequel eſt monſtré Medial ; LO ſera auſſi Medial) i TS ſera reſidu Medial ſecond. Partant ſi vn eſpace eſt contenu ſous vne ligne Rationelle, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.

f 10. 10.

g chol. 14. 10.

h 10. 10.

i 76. 10.

SCHOLIE.

Soit AB 6. AD √q 27 — √q 15 DE ſera √q 15 & DE ou FE √q 3 ¼ & ſi à AE on applique vn rect. ſous AG, GE egal au q. de FE & defaillant d'vne fig. q. AG ſera √q 18. ¾ GE √q 3¾ & partant AE eſt √q 675. GI √q 27 & le tout AI √q 972. Mais DI √q 540 EI √q 135 & FH √q 135 — √q 27. Donc AC eſt √q 972 — √q 540 reſidu troiſieſme. Soit donc diuiſé √q 972 en 2. telles parties que leur produit ſoit egal à √q 135. la plus grande ſera √q 672 & la moindre √q 27. Donc √q 672 + √q 27 eſt le reſidu q. de l'eſpace reſidu √q 972 — √q 540.

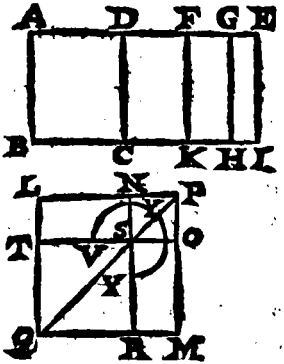
THEOREME 71. PROP. 95.

94. 89. Si vn eſpace eſt contenu ſous vne ligne Rationelle & vn reſidu quatrieſme; la ligne droicte pouuant iceluy eſpace eſt ligne Mineure.

Soit l'eſpace ou rect. AC contenu ſous AB Rationelle & AD reſidu quatrieſme. Ie dis que la ligne droicte pouuant AC eſt Mineure.

Car ſoit DE conuenable à AD. Donc AE, DE ſeront Rationelles commenſ. en puiſſ. ſeulement par la def. du reſidu quatrieſme; & AE commenſ. en longit. à AB Rationelle; & icelle AE pourra plus que DE du quarré d'vne ligne incommenſ. en longit. à icelle. Soit couppee DE en 2. egalement à F; & le reſte faict comme au-

parauant: [a] Donc A G, G E ſeront incommenſ. en longit. puis que A E peut plus que D E du q. d'vne ligne incommenſ. en longit. à icelle; & à A E eſt appliqué vn rect. ſous A G, G E; egal au quart du q. de D E, defaillant d'vne figure q. Et A E eſtant Rationelle & commenſ. en longit. à la Rationelle A B; [b] le rect. A I ſera Rationel. Derechef D E eſtant Rationelle & incommenſ. en longit. à A B Rationelle; [c] D I & partant ſa moitié F I ſera Medial. Et dauantage A G, G E eſtant incommenſ. en long. [d] A H, G I ayant meſme raiſon ſeront incommenſ. Et comme en la 92. on demonſtrera que T S peut l'eſpace A C. Ie dis que T S eſt Mineure.



Car le cõpoſé des qq. L M, N O, deſcrits de T O, S O, eſt egal au rect. A I, par la conſtruction: Mais iceluy eſt monſtré Rationel, donc le compoſé des qq. de T O, S O, ſera Rationel. Semblablement F I eſtant monſtré Medial, L O, contenu ſous T O, S O, egal à iceluy ſera Medial. Finalement A H, G I eſtant monſtrez incommenſ. leurs egaux q. L M, N O, ſeront incommenſ. & partant T O. S O, incommenſ. en puiſſance, Donc T O, S O, eſtant incommenſ. en puiſſ. & le compoſé de leurs qq. eſtant Rationél; & le rect. ſous icelles Medial; [e] la reſtante T S ſera Mineure. Partant ſi vn eſpace eſt contenu ſous. &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.

[a] 19. 10.
[b] 20. 10.
[c] 21. 10.
[d] 10. 10.
[e] 77. 10.

SCHOLIE.

Soit AB 6. AD 7 — √q 14 DE sera √q 14 & DF ou FE √q 3½ : Mais si à AE on applique vn rect. sous AG, GE egal au q. de FE, defaillant d'vne figure q. AG sera 3½ + √q 8¾ GE, 3½ — √q 8¾ & AH est √q 21 + √q 315 GI, 21 — √q 315 & le tout AI 42. Mais DI est √q 504 FI √q 126 — AC 42 — √q 504. residu quatrieſme. Donc ſi 42. eſt diuiſé en 2. telles parties que leur produit ſoit egal au quart de √q 504 c'eſt à dire à 126. la plus grande partie ſera 21 + √q 126 & la moindre 21 — √q 126. Donc √q (21 + √q 126) — √q (21 — √q 126) eſt le coſté du q. ou eſpace reſidu 42 — √q 504.

95.

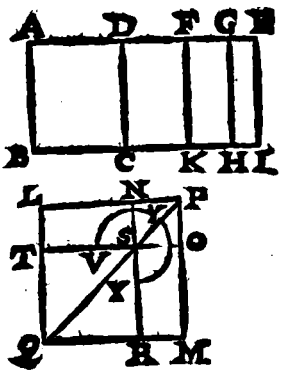
90. THEOREME 72. PROP. 96.

Si vn eſpace eſt contenu ſous vne ligne Rationelle, & vn reſidu cinquieſme, la ligne droicte, qui peut iceluy eſpace, eſt ligne faiſant auec vn eſpace Rationel vn tout Medial.

Soit l'eſpace AC, contenu ſous la Rationelle AB, & le reſidu cinquieſme AD. Ie dis que la ligne qui peut l'eſpace AC, eſt celle qui auec vn rationel fait vn tout Medial. Que DE, conuienne à AD, par la def. du reſidu cinquieſme AE, DE, ſerõt Rationelles commenſ. en puiſſ. ſeulemẽt, & DE, commenſ. en longit. à la Rationelle AB: Finalement AE, pourra plus que DE, du quarré d'vne ligne incommenſ. en longit. à icelle. Soit

couppée

couppée DE en 2. egalement à F, & soit fait au reste comme cy deuant. Donc comme en la precedente. AG, GE, seront incommenſ. en longit. Et d'autant que AE eſt rationelle incommēſ. en longit. à AB Rationelle, comme il eſt dit en la 93. le rect. AI, [a] ſera medial.



a 22. 10

Item puis que DE, eſt rationelle commenſ. en long. à AB, rationelle, [b] le rect. DI, & partāt ſa moitié FI eſt rationel. Derechef comme en la precedente, AH, GI, ſont incommenſ. & comme il eſt monſtré en la 92. TS, pourra l'eſpace AC. Ie dis que TS, eſt la ligne laquelle auec vn eſpace Rationel fait vn tout Medial.

b 20. 10

Car d'autant qu'il eſt monſtré que AI, eſt Medial; le compoſé des quarrez LM, NO, des lignes TO, SO, egal à iceluy, eſt Medial. Et FI eſtant rationel, comme nous auons monſtré, le rect. LO, contenu ſous TO, SO, egal à iceluy, eſt auſſi Rationel; & TO, SO, ſont incommenſ. en puiſſ. comme il eſt monſtré en la precedente. Donc, puis que le compoſé de leurs quarrez eſt Medial, & le rect. ſous icelles rationel; [c] la reſtante TS, eſt la ligne qui auec vn rationel, fait vn tout Medial. Donc ſi vn eſpace &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.

c 78. 10

SCHOLIE.

Soit AB 6. AD √q 56 — 4 DE ſera 4. & DF ou FE 2. Que ſi à AE on applique vn rect. ſous AG, GE egal au q. de FE, & defaillant d'vne figure q. AG ſera √q 14 + √q 10. GE √q 14 — √q 10: & AH eſt √q 504 + √q 360 GI √q 504 — √q 360; & le tout AI √q 2016. Mais DI eſt 24, FI 12 & AG √q 2016 — 24 reſidu 5. Soit diuiſee √q 2016 en deux telles parties que leur produit ſoit egal à 144, la plus grande ſera √q 504 + √q 360 & la moindre √q 504 — √q 360; parquoy √q (√q 504 + √q 360) — √q (√q 504 — √q 360.) eſt le coſté du q. dudit eſpace reſidu √q 2016 — 24.

96. 91. ### THEOREME 73. PROP. 97.

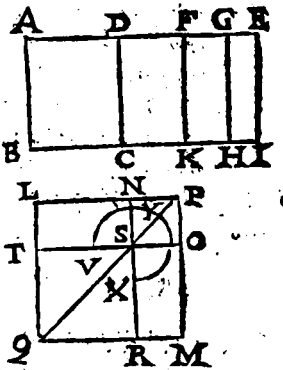
Si vn eſpace eſt contenu ſous vne ligne Rationelle & vn reſidu ſixieſme ; la ligne droicte pouuant iceluy eſpace eſt celle-là, laquelle auec vn rectangle Medial fait vn tout Medial.

L'eſpace AC, ſoit contenu ſous la Rationelle AB, & AD, reſidu ſixieſme. Ie dis que la ligne droicte qui peut l'eſpace AC, eſt celle, qui auec vn eſpace Medial, fait vn tout Medial.

Car à icelle AD, conuienne DE, Donc AE, DE, par la definition du reſidu ſixieſme ſont Rationelles commenſ. en puiſſ. ſeulement, & l'vn ny l'autre n'eſt commenſurable en longitude

à la Rationelle AB; Et finalement AE pourra plus que DE du quarré d'vne ligne incommens. en longit. à icelle. Soit couppee DE en 2. egalement à F, & soit fait le reste de la construction comme auparauant. Donc comme en la 95. AG, GE seront incommens. en longit. Et puis que tant AE, que DE, est Rationelle incommens. en longit. à la rationelle AB; [a] tant AI, que DI, & partant FI moitié de DI sera Medial. Et AH, GI, comme en la 95. seront incommens. Et d'autant que AE, DE, sont commens. en puiss. seulemẽt; [b] AI, DI, qui sont en mesme raison, sont incommens. & DI, FI, estant commens. [c] FI, sera incommens. à AI; maintenant nous monstrerons comme en la 92. que TS, peut AC; Et ie dis que TS, est celle qui auec vn Medial fait vn tout Medial.

a 22.10.



b 10.10.

c 14.10.

Car d'autant que AI, est monstré Medial, le composé des quarrez LM, NO, des droictes lignes TO, SO, egal à icelluy est Medial. Item FI estant monstré Medial, SO, son egal contenu sous TO, SO, est Medial. Derechef FI, estant incom. à AI, cõme est mõstré, LO, cõtenu sous TO SO, sera incommens. au cõposé des qq. de TO SO, puis que LO, est egal à FI, & le cõposé des quarrez de TO, SO, egal à AI. Finalement TO, SO, sont incommens. en puiss. comme il est monstré en la 95. Donc puis que le composé de

leurs quarrez eſt Medial, & le rect. ſous icelles medial, & incommenſ. au compoſé des quarrez d'icelles, [d] la reſtante TS. eſt celle qui auec vn Medial, fait vn tout Medial. Donc ſi vn eſpace eſt contenu, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.

d 79. 10.

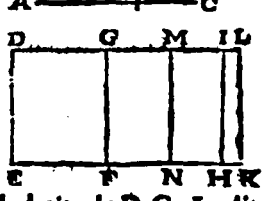
SCHOLIE.

Soit AB 6, AD √q 32 — √q 20, DE ſera √q 20 & DF, ou FE ∛q 5. Mais ſi à AE on applique vn rect. ſous AG, GE egal au q. de FE, & deſuillant d'vne figure q. AG ſera √q 8 + √q, 3 GEV q 8 — ∛q 3 : & partant AH ſera √q 288 + √q 108, GI √q 288 — √q √q 108 & le tout AI √q 1152. Mais DI, eſt ∛q 720 DK √q 18 & AC √q 1152 — √q 720 reſidu ſixieſme; & ſon coſté ſera trouué eſtre √q (√q 288 + √q 108) — √q (∛q 288 — √q 108.

xcvij. xcij.

PROBLEME 74. PROP. 98.

Le quarré d'vn reſidu appliqué à vne ligne Rationelle, fait la latitude reſidu premier.



Soit AB, reſidu, & BC, ſa conuenable, en ſorte que AC, BC, ſoient Rationelles commenſ. en puiſſ. ſeulement; [a] & à DE, rationelle ſoit appliqué le rect. DF, egal au quarré de AB, faiſant la latitude DG. Ie dis que DG, eſt reſidu premier. Car à DE, ſoit ap-

a 45. 1.

pliqué le rect. DH, egal au quarré de AC, & à HI, soit appliqué IK, egal au quarré de BC; en sorte que le tout DK, soit egal au composé des quarrez de AC, CB.

Et b d'autant que le composé des quarrez de AC, BC, est egal à 2. fois le rect. sous AC, BC & au quarré de AB, si l'on oste le quarré de AB, & le rect. DF, le rect. GK, demeurera egal à deux fois le rectangle sous AC, BC, Donc GL estant diuisee en deux egalement à M, & menee MN, parallelle à DE; MK, sera egal au rect. sous AC, BC: Et d'autant que AC, BC, sont Rationelles, leurs quarrez seront rationaux, & partant commens. Donc puis que le composé des quarrez de AC, BC, est cõmens. à chacun d'iceux, icelux composé, c'est à dire son egal rect. DK, sera Rationel: Lequel estant appliqué à la Rationel, le DE; d DL, sera Rationelle commens. en longit. à DE. Derechef, puis que AC, BC, sont Rationelles commens. en puiss. seul. le rect. sous icelles, & son double GK, est Medial. Lequel estant appliqué à la Rationelle GF; e GL, sera Rationelle, incommens. en longitude à GF, c'est à dire à DE. Et d'autant que DK Rationel, & GK, Medial, c'est à dire irrationel, sont incommens. DL, f GL; ayant mesme raison que DK, GK, seront incommens. en longit. Donc estãt monstrees Rationelles, elles seront Rationelles commens. en puiss. seulem. g Et partant DG, restante, sera resida. Ie dis qu'elle est premiere.

b 7. 2.

c 16. 10.

d 21. 10.

e 23. 10.

f 10. 10.

g 74. 10

Car d'autant h que le rect. sous AC, BC, c'est à dire MK, est moyen proportionnel entre les quarrez de AC, BC, c'est à dire entre DH, IK;

h lem. 54. 10.

DH, MK, IK, ſont continuellement proportionaux, & les lignes DI, ML, IL, conti. proport. eſtant en meſme raiſon. i Parquoy le rect. ſous DI, IL, eſt egal au quarré de ML, c'eſt à dire au quart du quarré de GL. Et d'autant que les quarrez de AC, BC, ou leurs egaux DH, Ik, ſont commenſ. k DI, IL, eſtant en meſme raiſon, ſeront commenſ. en longit. Partant DL, GL, eſtãt inegales, & à la plus grande eſt appliqué vn rectangle ſous DI, IL, egal au quart du quarré de GL, moindre, defaillant d'vne figure quarree, & DI, eſtant monſtree commenſ. en longit. à IL; l DL, pourra plus que GL, du q. d'vne ligne qui luy eſt commenſ. en longit. Parquoy DG, eſtãt monſtree reſidu, & la toute DL, pouuoir plus que GL, ſa conuenable du quarré d'vne ligne qui luy eſt commenſ. en longitude; & que la meſme toute DL, eſt commenſ. en longit. à la Rationelle DE; par la def. DG, ſera reſidu premier. Donc le quarré d'vn reſidu appliqué à vne ligne Rationelle fait l'autre coſté, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.

i 17. 6.

k 10. 10.

l 18. 10.

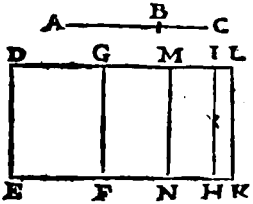
SCHOLIE.

Soit AB √q 33 — √q 3 BC √q 3, DE Rationelle 6 & à DE ſoit appliqué DH egal au q. de AC qui eſt 33 faiſant la latitude DI: DI ſera 5 ½ — & ſi à icelle on applique IK egal au q. de CB qui eſt 3 faiſant la latit. IL; IL ſera ½ — & la toute DL, 6. Detechef ſi à DE on applique GN qui eſt V q 99 faiſant la latit. GM; GM ſera √ q 2 ¼ — & par meſme raiſon ML, eſt V q 2 ¾ — & la toute GL V q 11 Dont DG eſt 6 — √ q 11 reſidu premier.

THEOREME 75. PROP. 99. 98. 93.

Le quarré d'vn reſidu Medial premier appliqué à vne ligne Rationelle, faict la latitude reſidu ſecond.

Soit AB, reſidu Medial premier, & B C ſa cõuenable, de ſorte que A C, B C ſoient Mediales commenſ. en puiſſ. ſeulement, & contenant vn Rationel : a Et à DE, Rationelle, ſoit appliqué le rect. D F, egal au quarré de AB faiſant la latitude D G. Ie dis que D G, eſt reſidu ſecond. a 45. 1.



Car ſoit faict cõme en la precedente ; de ſorte que DH, IK, ſoiẽt egaux aux quarrez de AC, BC, & GK, egal à 2. fois le rect. ſous A C, BC, & partant MK egal à vne fois iceluy rect. Dautant donc que AC, BC, ſont Mediales commenſ. en puiſſ. ſeulement & leurs quarrez, c'eſt à dire, leurs egaux DH, I K Mediaux & commenſ. b & partant le tout D K, ſera commenſ. à chacun d'iceux. c Donc Medial. Et D K eſtant appliqué à la rationelle DE, d DL ſera Rationelle incommenſ. en longit. à DE. Derechef d'autant que le rect. ſous AC, BC, eſt poſé rationel, le double d'iceluy G K, ſera auſſi rationel. Lequel eſtant appliqué à la Rationelle DE; e GL, ſera Rationelle commenſ. en longitude à DE, Mais d'autant que DK, Medial, c'eſt à dire irrationel, & GK, Rationel, ſont incom- b 16. 10. c corol. 24. 10. d 23. 10. e 21. 10.

f10.10. mens. f DL, LG, estant en mesme raison seront incommens. en longitude. Et estant monstrees Rationelles DL, LG, seront rationelles com-
874.10. mens, en puiss. seulement, & partant la restante DG, est residu. Ie dis qu'elle est second. Car cõme en la precedente, on monstrera que la toute DL, peut plus que la conuenable GL, du quarré d'vne ligne commens. à icelle en longit. Partant GL, estant monstree commens. en longit. à la Rationelle DE, icelle DG, par la def. sera residu second. Donc le quarré d'vn residu Medial, &c. Ce qu'il falloit demonstrer.

SCHOLIE.

Soit AB √q q 972 — √q 108 B C √q 108: Et DE Rationelle soit 6. & si à DE on applique DH egal au q. de AC qui est √q 972. faisant la latit. DF; DI sera √q 27. Et si à la mesme on applique IK egal au q. de CB √q 108 faisant la lat. IL: IL, sera √q 3. & la toute DL √q 48. Derechef si à DE on applique GN egal au rest. sans 8C, CB qui est 18. faisant la latitude GM: GM sera 3 & ML 3 & la toute GL 6. Donc DG est √q 48 — 6. residu second.

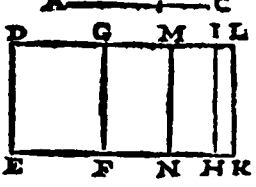
xcix. xciv.

THEOREME 78. PROP. 100.

Le quarré d'vn residu Medial second, appliqué à vne ligne Rationelle, fait la latitude residu troisiesme.

Soit A B, residu Medial second; & B C, sa conuenable, en sorte que AC, B C, soient Me-

diales commenſ. en puiſſ. ſeulement, & contenant vn Medial: & à la Rationelle DE, ſoit appliqué DF, egal au quarré de AB, faiſant la latitude [a] DG. Ie dis que DG, eſt reſidu troiſieſme. Soit faict comme auparauant: L'on monſtrera comme en la precedente que DK, eſt Medial, & partant DL, rationelle incommenſ. en longitude à DE, & d'autãt que le rect. ſous AC, BC eſt Medial, & partant le double d'iceluy, ſçauoir GK; [c] GL ſera auſſi Rationelle incommenſ. en longitude à DE.



a 45. 1.

Mais d'autant que AC, BC, ſont incommenſ. en longit. Et comme AC, à BC, [d] ainſi le quarré de AC, au rect. ſous AC, BC; [e] le quarré de AC, ſera incommenſ. au rect. ſous AC, BC: [f] Mais le compoſé des quarrez de AC, BC, eſt commenſ. au quarré de AC, eſtant iceux quarrez cõmenſ. deſcrits de lignes commenſ. en puiſſ. & 2 fois le rect. ſous AC, BC, eſt commenſ. au dit rect. ſous AC, BC. [g] Donc le compoſé des quarrez de AC, BC, c'eſt à dire DK eſt incommenſ. à 2. fois le rect. ſous AC, BC, c'eſt à dire à GK. [h] Et partant DL, GL, eſtant en meſme raiſon que DK, GK ſont incommenſ. en longitude, & ſont monſtrees Rationelles. Donc DL, GL, ſont Rationelles commenſ. en puiſſance ſeulement; [i] & partant DG, reſtante, eſt reſidu. Ie dis qu'elle eſt troiſieſme. Car nous monſtrerons comme en la 98. que la toute DL, peut plus que GL, ſa conuenable du quarré d'vne ligne qui luy eſt commenſ. en longit. Donc puis

b 23. 10.
c 25. 10.
d 1em. 6.
e 19. 10.
f 10. 10.
g 1. 10. 14. 10.
h 10. 10.
i 74. 10.

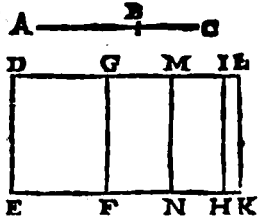
que DL, ny GL, n'eſt commenſ. en longitude à la Rationelle DE, comme il eſt monſtré. DG, ſera reſidu troiſieſme par la definition. Donc le quarré d'vn reſidu, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.

SCHOLIE.

Soit AB √ qq 8 8 2 — √ qq 1 8 BC √ qq 1 8 & DE Rationelle 6. Et ſi à DE on applique le rect. DH egal au q de AC faiſant la latitude DI; DI ſera √ q 24 ½ & appliquant IK egal au q. de CB faiſant la latitude IL: IL, ſera √ q ½ & la toute DL √ q 32. Dauantage ſi à DE on applique GN egal au rect. ſous AC, BC qui eſt √ q 126 faiſant la lat. GM: GM ſera √ q 3 ½: & la toute GL √ q 14. Donc DG eſt √ 32 — √ q 14. reſidu troiſieſme.

100. THEOREME 77. PROP. 101.

95. Le quarré d'vne ligne Mineure, appliqué à vne ligne Rationelle, fait la latitude reſidu quatrieſme.



Soit la ligne Mineure AB, & ſa conuenable BC, de ſorte que AC, BC, ſoient incommēſ. en puiſſ. faiſant le compoſé de leurs quarrez Rationel, & le rectan-
245. 1. gle ſous icelles AC, BC, Medial; & à la Rationelle DE, ſoit appliqué l'eſpace DF, egal au q.

de AB, faisant la latitude DG. Ie dis que DG est residu quatriesme. Soit faict comme aux precedentes.

D'autant que le composé des quarrez de AC, BC, c'est à dire DK, leur egal est Rationel; DL, [b] sera Rationelle commens. en longit. à DE. Et puis que le rect. sous AC, BC, & partant le double d'iceluy GK est Medial; [c] GL, sera Rationelle incommens. en longit. à DE. Derechef, d'autant que DK Rationel, & GK, irrationel, sçauoir Medial, sont incommens. [d] DL, GL, estant en mesme raison sont incommens. en longit. Et estant monstrees Rationelles, DL, GL, sont Rationelles commens. en puiss. seulem. [e] partant DG, restante est residu. Ie dis qu'elle est residu quatriesme. Car AC, BC estant incommens. en puiss. leurs quarrez, ou leurs egaux rect. DH, IK, seront incommens. [f] Et partant DI, IL. incommens. en longit. Et puis que le rect. sous DI, IL, est egal au quarré de ML, c'est à dire au quart du quarré de GL; comme est demonstré en la 98. DL, [g] pourra plus que GL du quarré d'vne ligne incommens. en longit. à icelle; puis qu'à DL, plus grande est appliqué le rectangle sous DI, IL, egal au quart du quarré de GL, moindre & defaillant d'vne figure quarree, & diuisant DL en parties incommens. en longitude DI, IL. Donc puis que DL, totale, peut plus que sa conuenable GL, du quarré d'vne ligne incommens. en longit. à icelle, & la toute DL, est monstree commens. en longit. à la Rationelle DE; par la def. DG, sera residu quatriesme. Partant le quarré d'vne ligne Mineure, &c. Ce qu'il falloit demonstrer.

b 21 10.
c 23. 10.
d 10.10.
e 74.10.
f 10.10.
g 19 10.

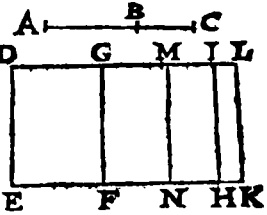
SCHOLIE.

Soit AB $\sqrt{q}(\sqrt{q}\,21 + \sqrt{q}\,315) - \sqrt{q}(\sqrt{q}\,21 + \sqrt{q}\,315)$ *BC* $\sqrt{q}(\sqrt{q}\,21 - \sqrt{q}\,315:)$ *Mais la Rationelle DE soit 6. Et à DE appliquant DH, egal au q. de AC, faisant DI, latit. DI, sera* $3\frac{1}{2} + \sqrt{q}\,8\frac{3}{4}$ *& si on applique IK egal au q. de CB faisant IL lat. IL, sera* $3\frac{1}{2} - \sqrt{q}\,8\frac{3}{4}$, *& la toute DL 7. Et si à DE on applique GN egal au rect. sous AC, CB, sçavoir à* $\sqrt{q}\,126$, *faisant GM latit. GM sera* $\sqrt{q}\,3\frac{1}{2}$ *& la toute GL,* $\sqrt{q}\,14$. *Donc DG est* $7 - \sqrt{q}\,14$. *residu quatrieſme.*

CI. 96.

THEOREME 78. PROP. 102.

Le quarré d'vne ligne, laquelle auec vn eſpace Rationel, faict vn tout Medial, appliqué à vne ligne Rationelle, faict la latitude, reſidu cinquieſme.



Soit AB, faiſant auec vne ſuperficie Rationelle vn tout Medial & ſa conuenable BC, en ſorte que AC, BC, ſoiẽt incommenſ. en puiſſance faiſant le compoſé de leurs quarrez Medial, & le rect. ſous icelles Rationel: [a] & à DE Rationelle ſoit appliqué DF, egal au quarré de AB, faiſant DG, latitude. Ie dis que DG, eſt reſidu cinquieſme.

[a] 45. 1.

Car ſoit fait comme cy deuant. D'autant que

le composé des quarrez de AC, BC, ou son egal DK est Medial; b DL, sera Rationelle incommens. en longit. à DE. Et d'autant que le rect. sous AC, BC, ou le double d'iceluy, GK, est Rationel; c GL, sera Rationelle, commens. en longitude à DE. Et d'autant que DK, Medial, ou irrationel, & GK, rationel sont incommens. d DL, GL, ayant mesme raison seront incommens. en longit. Mais elles sont monstrees Rationelles, Donc DL, GL, sont Rationelles commens. en puiss. seulement: e Donc la restante DG, est residu. Ie dis qu'elle est cinquiesme. Car comme en la precedente, on monstrera que DL, toute peut plus que GL, conuenable du quarré d'vne ligne incommens. en longit. à icelle. Donc puis que la conuenable GL, est monstree commens. en longit. à la Rationelle DE, par la def. DG, sera residu cinquiesme. Donc le quarré, &c. Ce qu'il falloit demonstrer.

b 23.10.

c 21.10.

d 10.10.

e 74.10

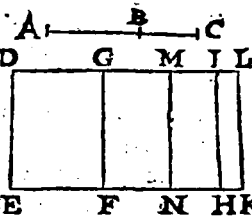
SCHOLIE.

Soit AB $\sqrt{q}(\sqrt{q}\,288+\sqrt{q}\,207)-\sqrt{q}(\sqrt{q}\,288-\sqrt{q}\,207)$ *BC* $\sqrt{q}(\sqrt{q}\,288-\sqrt{q}\,207)$ *Et* DE *Rationelle soit* 6. *si à* DE *on applique* DH *egal au q. de AC faisant* DI *latit.* DI *sera* $\sqrt{q}\,8+\sqrt{q}\,5\frac{1}{4}$ *& appliquant* IK *egal au q. de CB faisant* IL *latit.* IL *sera* $\sqrt{q}\,8-\sqrt{q}\,5\frac{1}{4}$ *: & la toute* DL, $\sqrt{q}\,32$. *Derechef si, à* DE *on applique* GN, *egal au rect. sous AC, CB faisant* GM *latit.* GM *sera* $1\frac{1}{2}$ *& la toute* GL 3. *Parquoy* DG *est* $\sqrt{b}\,32-3$ *residu cinquiesme.*

cij. 97.

THEOREME 79. PROP. 103.

Le quarré d'vne ligne faisant auec vn espace Medial, vn tout Medial, appliqué à vne ligne Rationelle, faict la latitude Residu sixiesme.



Soit AB, faisãt auec vn Medial, vn tout Medial, & soit BC, sa conuenable, en sorte que AC, BC, soient incommens. en puiss. faisant le composé de leurs qq. Medial, & le rect. sous icelles medial & incommens. au composé de leurs quarrez: [a] Et à DE, Rationelle soit appliqué DF, egal au quarré de AB, faisant DG, latitude. Ie dis que DG, est residu sixiesme. Soit faict comme aux precedentes.

a 45. 1.

D'autant que tant le composé des quarrez de AC, BC, ou DK son egal, que le rectangle sous AC, BC, & partant le double d'iceluy GK, est Medial; [b] tant DL, que GL, sera Rationelle incommens. en longit. à DE. Et le rect. sous AC, BC, estant incommens. au composé des quarrez d'icelles AC, BC; & le rectangle sous AC, BC, & le double d'iceluy GK, commens. [c] GK, sera incommens. à iceluy composé, c'est à dire à DK. Et [d] partant DL, GL, ayant mesme raison que DK, GK seront incommens. en longit. Et elles sont mõstrees Rationelles. [d] Donc DL, GL sont Rationelles commens. en puiss. seulement;

b 23. 10.

c 14. 10

d 10. 10

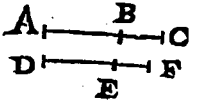
[e] Partãt DG, ſt Reſidu. Ie dis qu'elle eſt ſixieſme. Car comme en la 101. nous monſtrerons que la toute DL, peut plus que la conuenable GL, du quarré d'vne ligne incommenſ. en longitude à icelle. Donc puis que DL, ny GL, n'eſt commenſ. en longit. à la Rationelle DE; par la def. DG ſera reſidu ſixieſme, Donc le quarré, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer. e 74. 10.

SCHOLIE.

Soit $AB\sqrt{q}(\sqrt{q}396+\sqrt{q}288)-pq(\sqrt{q}396-\sqrt{q}288;)BC$ $\ell q(\sqrt{q}396-\sqrt{q}288.)$ *& la Rationelle* DE 6. *appliquant à* DE *le rect.* DH *egal au q. de* AB *faiſant* DI *latit.* DI *ſera* ℓq 11 $+\sqrt{q}$ 8: *& appliquant* IK *egal au q. de* CB *faiſant* IL *latit.* IL *ſera* $\sqrt{q}$ 11$-\sqrt{q}$8, *& la toute* DL *ſera* $\sqrt{q}$ 44. *Derechef appliquant à* CD, *le rect.* GN *egal au rect. ſous* AC, CB. *faiſant* GM *latit.* GM *ſera* ℓq 3 *& la toute* GL ℓq 12. *Donc* DG *eſt* $\sqrt{q}$ 44$-\sqrt{q}$12, *reſidu ſixieſme.*

THEOREME 80. PROP. 104. ciij. 98.

La ligne droicte commenſurable en longitude à vn reſidu, eſt auſſi reſidu & de meſme ordre.



Soit AB, reſidu & BC, ſa conuenable, en ſorte que AC, BC, ſoient Rationelles commenſ. en puiſſance ſeulement, & ſoit DE, commenſ. en longit. à AB. Ie dis que DE, eſt reſidu, & de meſme ordre que AB.

Car ſoit comme AB, à DE, a ainſi BC, à EF. a 12. 6.

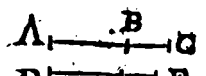
b12.5. bDõc la toute AC, ſera à la toute DF, ainſi cõme
c10.10. AB, à DE, ou BC, à EF. D'autant donc que AB, DE, ſont poſees commenſ. en longit. cAC, DF, & BC, EF, ſeront auſſi commenſ. en longit. Et d'autant que AC, BC, ſont Rationelles, leurs commenſ. DF, EF ſeront Rationelles. Derechef d'autant que comme AC, à DF, ainſi BC, à EF; & en permutant comme AC, à BC, ainſi DF, à EF; & AC, BC ſont commenſ. en puiſſance ſeulement; d Donc DF, EF, ſeront auſſi com-
d10.10. menſ. en puiſſ. ſeulement: & eſtant monſtrees rationelles, e la reſtante DE, eſt reſidu. Ie dis
e74.10. qu'elle eſt de meſme ordre que AB. Car premierement que AC, puiſſe plus que BC, du q. d'vne ligne commenſ. en longit. à icelle. Cela eſtant f DF, pourra plus que EF, du quarré d'vne
f15. 10. ligne commenſ. en longit. à icelle. Donc ſi AC, eſt commenſ. en longit. à la Rationelle expoſee, afin que AB, ſoit reſidu premier; DF g ſera auſſi commenſ. en longit. à la Rationelle expo-
g12.10. ſee, puis que tant la Rationelle expoſee, que DF, eſt commenſ. en longitude à la meſme AC. Donc par la def. DE, ſera reſidu premier, ſçauoir de meſme ordre que AB. Mais ſi BC, eſt commenſ. en longit. à la Rationelle; en la meſme façon EF ſera commenſurable en longitude à la Rationelle; Partant l'vne & l'autre AB, DE, par la definition ſera reſidu ſecond. Finalement ſi l'vne ny l'autre AC, BC, n'eſt
h14.10. commenſ. en longit. à l'expoſee Rationelle; h auſſi l'vne ny l'autre DF, EF, ne ſera commenſ. en longit. à la meſme Rationelle. Donc tant l'vne que l'autre AB, DE, ſera reſidu troiſieſme par la definition.

Mainte-

Maintenant que AC, puisse plus que BC, du quarré d'vne ligne incommens. en longitude à icelle. Cela estant i DF, pourra plus que EF, du quarré d'vne ligne qui luy sera incommens. en longit. Parquoy nous monstrerons comme auparauãt, que DE, est residu quatriesme, cinquiesme ou sixiesme. Donc la ligne droicte, &c. Ce qu'il falloit demonstrer. i 15.10.

THEOREME 81. PROP. 105. civ. 99.

La ligne droicte commensurable à vn residu Medial: est aussi residu Medial & de mesme ordre.



Soit AB, residu, & BC sa conuenable en sorte que AC, BC soient Mediales commens. en puiss. seulem. & soit DE commens. à icelle. Ie dis que DE est aussi residu & de mesme ordre que AB.

Car comme AB est à DE, a ainsi BC soit à EF. b Donc la toute AC sera à la toute DF, cõme AB à DE, & BC à EF. D'autant donc que AB, DE sont posees commens. c BC, EF & AC DF seront aussi commens. Et AC, BC estant Mediales; DF, d EF, commens. à icelles seront aussi Mediales. Derechef AC estant à DF; comme BC à EF, & en changeant comme AC à BC, ainsi DF à EF; Mais AC, BC sont commens. en puiss. seulement; e Donc DF, EF seront cõmens. en puiss. seul. Parquoy DF, EF estant mõstrees Mediales, f la restante DE sera residu Me- a 22. 6. b 12. 5. c 10.10. d 24.10. e 10.10. f 75.10. ou 76.

dial. Ie dis qu'elle eſt de meſme ordre que AB. Car puis que comme AC, à BC ainſi DF à EF: Et comme g AC à BC ainſi le q. de AC au rect. ſous AC, BC. Et comme DF à EF, ainſi le q. de DF au rect. ſous DF, EF: Donc comme le quarré de AC au rect. ſous AC, BC, ainſi le quarré de DF au rect. ſous DF, EF: Et en changeant comme le quarré de AC au q. de DF, ainſi le rectangle ſous AC, BC au rect. ſous DF, EF. Donc le quarré de AC eſtant commenſ. au q. de DF, AC, DF eſtant monſtrees commenſ. h le rectangle ſous AC, BC ſera commenſ. au rect. ſous DF, EF. Donc ſi le rect. ſous AC, BC eſt Rationel, de ſorte que AB, ſoit reſidu Medial premier; le rect. ſous DF, EF, commenſ. à iceluy ſera auſſi Rationel: i Et partant DE ſera reſidu Medial premier: Mais ſi le rect. ſous AC, BC eſt Medial, en ſorte que AB, ſoit reſidu Medial ſecond; le rect. ſous DF, EF, commenſ. à iceluy l ſera auſſi Medial, m partant DE ſera reſidu Medial ſecond. Donc la ligne droicte commenſ. au reſidu Medial, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.

g lem 3. 19. 10.

h 10. 10.

i 75 10.

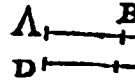
l 24. 10.

m 76. 10.

civ. 99.

THEOREME 82. PROP. 106.

La ligne droicte commenſ. à vne ligne Mineure, eſt auſſi ligne Mineure.



Soit la ligne Mineure AB & BC ſa conuenable: De ſorte que AC, BC ſoient incõmenſ. en puiſſ. faiſant le compoſé de leurs quarrez AC, BC, Rationel, & le rectan-

gle ſous AC, BC Medial: Et ſoit DE commenſ. à AB. Ie dis que DE eſt Mineure.

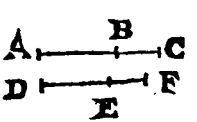
Car ſoit faict comme auparauant, en ſorte que AB, BC, ayent meſme raiſon à DE, EF que AC & à DF; comme en la precedente DF, EF ſeront commenſ. à AC, BC ſoit en longit. & puiſſ. ou en puiſſ. ſeulement: Et puis que comme AC à DF ainſi BC à EF, & en changeant comme AC à BC, ainſi DE, à EF: a comme le q. de AC au q. de BC, ainſi le quarré de DF, au quarré de EF, & en compoſant comme le compoſé des quarrez de AC, BC au quarré de BC, ainſi le compoſé des quarrez de DF, EF, au quarré de EF: & en permutant comme le compoſé des qq. de AC, BC, au compoſé des qq. de DF, EF, ainſi le quarré de BC au quarré de EF: Mais le quarré de BC eſt commenſ. au q. de EF; BC, EF, eſtant monſtrees commenſ. b Donc le compoſé des quarrez de AC, BC eſt commenſ. au compoſé des quarrez de DF, EF. Mais le compoſé des quarrez de AC, BC, eſt poſé Rationel; c Donc le compoſé des quarrez de DF, EF eſt Rationel. Derechef comme il eſt monſtré en la precedente prop. le rect. ſous AC, BC, eſt commenſ. au rectangle ſous DF, EF: Mais le rect. ſous AC, BC eſt poſé Medial. d Donc le rect. ſous DF, EF, ſera auſſi Medial: Et puis que comme AC à BC, ainſi DF à EF, & AC, BC ſont incommenſ. en puiſſ. DF, EF ſeront auſſi incommenſ. en puiſſ. Partant DF, EF eſtant incommenſ. en puiſſ. & faiſant le compoſé de leurs quarrez Rationel, & le rect. ſous icelles Medial; f DE ſera Mineure. Donc la ligne droicte commenſ. &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.

a 22. 6.
b 10 12.
c 9. def.
d corol. 24. 10.
e 10. 10.
f 77. 10.

THEOREME 83. PROP. 107.

cvij. cj. La ligne droicte commenſurable à vne ligne laquelle auec vn eſpace Rationel, fait vn tout Mediàl : eſt auſſi ligne faiſant auec vn eſpace Rationel vn tout Medial.

Soit AB faiſant auec vne ſuperficie Rationelle vn tout Medial, & BC conuenable à icelle, de ſorte que AC, BC, ſoient incommenſ. en puiſſ. & facent le compoſé de leurs quarrez Medial, & le rect. ſous icelles Rationel. Et ſoit D E commenſurable à AB, comment que ce ſoit. Ie dis que D E fait auec vn eſpace Rationel vn tout Medial.



Car ayant fait la conſtruction comme auparauant, on monſtrera comme en la precedente p. que le compoſé des quarrez de AC, BC, eſt commenſ. au compoſé des qq. de DF, EF. Donc celuy-là eſtant poſé Medial, a celuy-cy ſera auſſi Medial. Derechef comme en la 105. prop. on monſtrera que le rect. ſous AC, BC eſt commenſ. au rect. ſous DF, EF: Donc celuy-là eſtāt poſé Rationel, b ceſtuy-cy ſera auſſi Rationel: Et finalement comme il eſt monſtré en la precedēte prop. DE, EF, ſont incommenſ. en puiſſ. parquoy DF, EF eſtant incommenſ. en puiſſ. & faiſant le compoſé de leurs quarrez Medial, & le rect. ſous icelles Rationel; c DE fera auec vn eſpace Rationel, vn tout Medial. Ce qu'il falloit demonſtrer.

a corol. 24. 10.

b 9 def.

c 78. 10.

THEOREME 84. PROP. 108.

cvij.
cij.

La ligne droicte commenſurable à vne ligne, laquelle auec vn eſpace Medial, fait vn tout Medial; icelle eſt auſſi ligne faiſant auec vn eſpace Medial vn tout Medial.

Voyez la figure precedente.

Soit AB faiſant auec vne ſuperficie Mediale vn tout Medial; & BC conuenable à icelle, en ſorte que AC, BC ſoient incommenſ. en puiſſ. faiſant le compoſé de leurs quarrez Medial, & le rectãgle ſous icelles Medial, & incommenſ. au compoſé de leurs quarrez. Et ſoit DE commenſ. à AB, comment que ce ſoit. Ie dis que DE, auec vn eſpace Medial fait vn tout Medial.

Car ayant fait la conſtruction comme auparauant: on monſtrera comme en la prop. 106. que le compoſé des quarrez de AC, BC eſt commẽſ. au compoſé des quarrez de DF, EF. Donc le cõpoſé des quarrez de AC, BC eſtant poſé Medial; [a] celuy des quarrez de DF, EF, ſera auſſi Medial. Derechef comme en la 105. on monſtrera que le rect. ſous AC, BC, eſt commenſ. au rect. ſous DF, EF. Donc celuy-là eſtant Medial, ceſtuy-cy ſera auſſi Medial. [b] Et comme en la 106. DF, EF ſeront auſſi incommenſ. en puiſſ. Finalement, d'autant que le compoſé des quarrez de DF, EF eſt commenſ. au compoſé des quarrez de AC, BC, comme il eſt dit. Et le rect. ſous DF, EF eſt commenſ. au rect. ſous AC, BC. Mais

[a] corol. 24. 10.

le composé des quarrez de AC, BC, & & le rect. sous AC, BC sont posez incommens. b Donc le composé des quarrez de DF, EF, & le rect. sous DF, EF seront incommens. Parquoy DF, EF estant incommens. en puiss. & le composé de leurs quarrez Medial, & le rect. sous iceulx Medial & incommens. au composé de leurs quarrez: c DE fait auec vn espace Medial, vn tout Medial. Donc la ligne droicte commens. à vne ligne, &c. Ce qu'il falloit demonstrer.

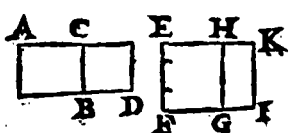
b 5. h. 14 10.

c 72.

a cviij. c iij.

THEOREME 85. PROP. 109.

Si vn espace Medial est retranché d'vn Rationel: la ligne droicte qui peut le reste de l'espace, est vne de ces deux Irrationelles, sçauoir Residu ou Mineure.



De la superficie ou espace Rationel AD soit retranché le Medial CD. Ie dis que la ligne qui peut le reste AB, est residu ou Mineure.

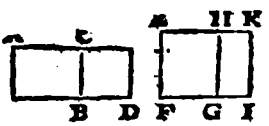
a 45. 1 Car soit exposee EF, Rationelle a à laquelle soit appliqué le rect. EG egal à AB, & à GH, le rect. HI, egal à CD, ne sorte que le tout EI, soit b 21. 10. egal au tout AD. D'autant donc que EI egal à AD Rationel, est Rationel; b EK sera Rationelle commens. en longit. à EF Rationelle. Derechef d'autant que HI, egal à CD Medial, est Medial; c HK sera Rationelle incommens. en

longit. à EF. Parquoy EK estant commens. en longitude à EF, Mais HK, incommensurable en longitude à la mesme EF; d EK, HK seront incommens. en longit. Et estant Rationelles: elles seront Rationelles commens. en puissance seulement: e Et partant le reste EH est Residu, & HK conuenable à icelle. Donc EK peut plus que HK du quarré d'vne ligne qui luy est commens. en longit. ou incommens. Si EK peut plus que HK du quarré d'vne ligne qui luy soit commens. en longit. La toute EK estant aussi monstree commens. en longit. à EF Rationelle; par la def. EH sera Residu. 1. Parquoy la ligne pouuãt l'espace EG contenu sous EF Rationelle, & le Residu premier EH, c'est à dire l'espace AB, egal à iceluy, f est Residu. Mais si EK peut plus que HK du quarré d'vne ligne qui luy soit incommens. en longit. La toute EK estant monstree commens. en longit. à EF Rationelle; selon la def. EH sera residu quatrieſme. Partant la ligne pouuant l'espace EG, contenu sous EF, Rationelle, & EH residu quatrieſme, c. à dire l'espace AB egal à iceluy, g est Mineure. Donc si vn espace Medial est osté d'vn rationel, &c. Ce qu'il falloit demonstrer. d 13. 10. e 74. 10 f 92 13 g 95. 10

THEOREME 86. PROP. 110. cix. civ.

Si vne superficie Rationelle est retranchee d'vne Mediale, il se faict deux autres Irrationelles, sçauoir, ou vn Residu Medial premier, ou vne ligne faisant auec vn espace Rationel, vn tout Medial.

C'eſt à dire que la ligne pouuant le reſte de l'eſpace eſt reſidu Medial premier, ou ligne faiſant auec vn Rationel, vn tout Medial.



Du Medial A D ſoit retranché le Rationel CD. Ie dis que la ligne pouuant l'eſpace reſtant AB, peut eſtre ou reſidu Medial premier, ou ligne faiſant auec vn eſpace rationel vn tout Medial. Soit faite la meſme conſtruction qu'auparauant. D'autant que EI egal au Medial A D eſt Medial; a EK ſera rationelle incommenſ. en longit. à EF. Et d'autant que HI egal au rationel C D eſt rationel; b HK ſera rationelle commenſ. en longit. à EF. Donc HK eſtant commenſ. en longit. à EF; Mais EK incommenſ. en longit. à la meſme EF; c HK, EK ſeront incommenſ. en longit. & ſont rationelles. Elles ſont donc rationelles commenſ. en puiſſ. ſeulement: d Donc le reſte EH eſt reſidu, & HK cõuenable à icelle. Dõc EK peut plus que HK du q. d'vne ligne qui luy eſt commenſ. en longit. ou incommenſ. ſi commenſ. & la conuenable HK eſtant monſtree commenſ. en longit. à EF rationelle; par la def. EH ſera reſidu ſecond. Donc la ligne pouuant l'eſpace EG contenu ſous EF rationelle, & EH reſidu ſecond, c'eſt à dire AB egal à iceluy e eſt reſidu Medial premier: Mais ſi EK peut plus que HK du quarré d'vne ligne incommenſ. en longit. à icelle, la conuenable HK eſtant monſtree commenſ. en longit. à EF Rationelle; EH ſera reſidu cinquieſme par la def. Donc la ligne pouuant l'eſpace EG contenu ſous EF rationelle, & le reſidu cinquieſme EH, c'eſt à dire AB egal à

a 23.10.
b 21.10.
c 13.10.
d 74.10.
e 93.10.

iceluy eſt la ligne qui auec vn rationel fait vn tout Medial. Donc vn eſpace, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer. f 96.10.

THEOREME 87. PROP. III. CX. CV.

Si vne ſuperficie Mediale eſt retranchee d'vne ſuperficie Mediale, incommenſurable à la toute; il ſe faict deux autres Irrationelles, ſçauoir vn reſidu Medial ſecond, ou vne ligne faiſant auec vne ſuperficie Mediale vn tout Medial.

C'eſt à dire, que la ligne pouuant le reſte de l'eſpace, eſt reſidu Medial ſecond; ou ligne faiſant auec vn eſpace Medial vn tout Medial.

Voyez la figure precedente.

Soit le Medial CD, oſté du Medial AD, & incommenſurable [illegible] tout AD. Ie dis que la ligne pouuant l'eſpace [illegible]nt AB, eſt reſidu Medial ſecond: ou ligne faiſant auec vne ſuperficie Mediale vn tout Medial.

Car ayant faict la meſme conſtruction qu'auparauant, d'autant que EI, HI egaux aux Mediaux AD, CD, ſont Mediaux [a] EK, HK ſeront Rationelles incommenſ. en longit. à EF: Et AD, CD, c'eſt à dire EI, HI, eſtans poſez incommenſurables, [b] EK, HK, ayant meſme raiſon ſeront incommenſ. en longit. & ſont Rationelles: Donc elles ſont Rationelles commenſ. en puiſſ. ſeulement; [c] Partant EH reſtante eſt reſidu; & HK eſt commenſurable à icelle. Donc EK a 23.10. b 10.10. c 74.10.

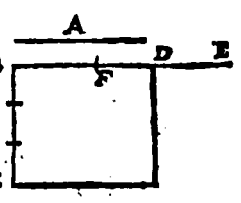
peut plus que HK du quarré d'vne ligne qui luy eſt commenſ. en longit. ou incommenſ. Si du q. d'vne ligne qui luy ſoit commenſ. en longitude, l'vne & l'autre EK, HK eſtant monſtree n'eſtre commenſ. en longit. à EF, Rationelle; ſelon la def. EH ſera reſidu troiſieſme. Parquoy la ligne pouuant l'eſpace EG, contenu ſous la Rationelle EF & le reſidu troiſieſme EH, c'eſt
d 94.10 à dire AB, egal à iceluy; [d] eſt reſidu Medial ſecond. Mais ſi EK peut plus que HK du quarré d'vne ligne incommenſ. en longit. à icelle, l'vne ny l'autre EK, HK n'eſtant commenſ. en longit. à EF Rationelle comme il eſt demonſtré par la def. EH, ſera reſidu ſixieſme. Donc la ligne pou-
e 97.10 uant EG contenu ſous EF Rationelle, & EH reſidu ſixieſme, c'eſt à dire AB egal iceluy, [e] eſt celle laquelle auec vn eſpace Medial fait vn tout Medial. Partant vne ſuperficie Mediale, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.

exi. cvj. THEOREME 8[illegible] PROP. 112.

La ligne appellee [illegible]me ou Reſidu, n'eſt pas la meſme que la ligne de deux noms ou Binome.

Soit A reſidu quelconque. Ie dis que A n'eſt pas la meſme que le Binome.

Car ſoit A Bino. s'il eſt
a 45.1. poſſ. & ayãt expoſé la Rationelle BC; [a] ſoit appliqué à BC, le rect. CD egal au q. de A. D'autant donc que A eſt reſidu;



b la latitude BD sera residu premier. Soit doc DE conuenable à icelle; Donc par la definition du residu premier, BE, DE seront Rationelles commens. en puiss. seulement, & BE pourra plus que DE du q. d'vne ligne qui luy sera commens. en longit. & BE sera commens. en longit. à BC Rationelle. Derechef A estant aussi posee estre Binome: c la mesme latitude BD sera Binome premier, Soit BF son plus grand nom. Donc par la def. du Binome premier BF, FD sont Rationelles commens. en puiss. seulement, & BF, pourra plus que FD du q. d'vne ligne commens. en longit. à icelle, & BF sera commens. en longit. à la Rationelle BC. Donc tant BE que BF estant commens. en longit. à BC; d BE, BF seront aussi commens. en longit. entr'elles. Parquoy la toute BE estant commens. en longit. sa partie BF, la mesme BE sera aussi cõm. en lõg. à à l'autre partie FE; & partant BE estant Rationelle, FE sera aussi Rationelle. Et d tant que des deux BE, FE commens. en longit. BE est incommens. en longit. à DE; (BE, DE estant Rationelles commens. en puiss. seulement) f la restante FE sera incommens. en longit. à la mesme DE. Mais tant FE, que DE est monstree Rationelle. Donc FE, DE sont Rationelles commens. en puiss. seulement; parquoy la restante FD, g est Residu, & partant Irrationelle; Mais elle est aussi monstree Rationelle. Ce qui est absurde. Donc A estant Residu n'est pas la mesme que Binome, &c. Ce qu'il falloit demonstrer.

b 98 10

c 61. 10.

d 12. 10.

e coroll. 15. 10.

10.

14. 10.

f 74 10.

COROLLAIRE.

Des choses demonstrees l'on pourra colliger,

que le residu, & les autres Irrationelles suiuantes icelle residu, ne sont ny Mediales ny mesmes entr'elles.

Car le quarré d'vne Mediale appliqué à vne rationelle, [a] fait la latitude Rationelle, incommens. en longit. à la Rationelle proposee. a 23 10.

Mais le quarré du residu, appliqué à vne ligne Rationelle, [b] fait la latitude residu premier. b 58.10.

Et le quarré du residu Medial premier, appliqué à vne ligne Rationelle, [c] fait la latitude residu second. c 99.10.

Mais le quarré du residu Medial second appliqué à vne ligne Rationelle, [d] fait la latitude, residu troisiesme. d 100 10

En apres le quarré de la Mineure, appliqué à vne ligne Rationelle, [e] fait la latitude, residu quatriesme. e 101. 10

Mais le quarré d'vne ligne, laquelle auec vn espace Rationel, fait vn tout Medial, appliqué à vne ligne Rationelle, [f] fait la latitude residu cinquiesme. f 102. 10.

Finalement, le quarré d'vne ligne, qui auec vn espace Medial, fait vn tout Medial, [g] appliqué à vne ligne Rationelle, fait la latitude, residu sixiesme. g 103. 10.

Partant ces latitudes estant differentes de la latitude de la Mediale & entr'elles; de la latitude Mediale (dis-je) puis que celle-cy est rationelle, & celles-là irrationelles: Mais entr'elles d'autant qu'elles ne sont pas residus de mesme ordre; il est manifeste, que le residu & les autres Irrationelles suiuantes, different entr'elles & de la Mediale.

Mais d'autant qu'il est monstré en ce Theore-

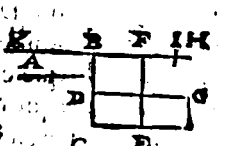
me, que le residu n'est la mesme que le Binome: Et que les quarrez du residu & des autres 5. irrationelles suiuãtes appliquees à vne ligne rationelle, font les latitudes, residu premier, second, troisiesme, quatriesme, cinquiesme & sixiesme: Mais les quarrez du Binome, & des autres 5. Irrationelles suiuantes, appliquez à vne ligne rationelle, font les latitudes Binome premier, 2. 3. 4. 5. & sixiesme. Il est manifeste, que les latitudes du residu & des autres 5. Irrationelles suiuantes, ne sont pas les mesmes que les latitudes, des Binomes, & des 5. autres Irrationelles suiuantes. d'autant qu'aucun residu, n'est la mesme que quelque Binome. Donc le residu & ses suiuantes different du Binome & de ses suiuantes. Parquoy tant celles-là que celles-cy different de la Mediale; de sorte que quelconque ligne rationelle estant proposee, il y aura treize lignes Irrationelles differentes entr'elles, desquelles nous auons discouru iusques icy, qui sont les suiuãtes.

1. La ligne Mediale.
2. La ligne Binome ou de deux noms.
3. La Bimediale premiere.
4. La Bimediale seconde.
5. La ligne Maieure.
6. La ligne pouuant vn rationel & vn Medial.
7. La ligne pouuant deux Mediaux.
8. Le residu ou Apotome.
9. Le residu Medial premier.
10. Le residu Medial second.
11. La ligne Mineure.
12. La ligne faisant auec vne superficie rationelle vn tout Medial.
13. La ligne faisant auec vne superficie Mediale vn tout Medial.

THEOREME 89. PROP. 113.

cxij. c.

Le quarré d'vne ligne Rationelle estant appliqué à vne ligne Binome, faict la latitude residu, de laquelle les noms sont commensurables & proportionaux aux noms du Binome, & en outre le residu est de mesme ordre que le Binome.



Soit A Rationelle, & BC Binome dõt le plus grand nom. est BD; [a] & à BC soit appliqué le rect. BE egal au quarré de A, faisant BF latitude. Ie dis que BF est residu, de laquelle les noms, c'est à dire, la ligne totale & sa conuenable sont commens. aux noms BD, DC, de BC Binome, & en mesme raison; & dauantage BF residu est de mesme ordre que BC Binome.

a 45. 1.

Car [b] derechef à DC moindre nom, soit appliqué CG egal au q. de A, & partant à BE faisant DG latit. & soit BH, egale à DG. Et BE, CG estant egaux; [c] comme BC sera à DC ainsi DG, ou son egale BH, à BF. Et en diuisant comme BD à DC ainsi HF à FB: Mais BD est plus grande que DC, Donc HF sera plus grande que FB. Soit posee FI, egale à FB; [d] Et soit comme HI à IF ainsi FB à BK. Donc en composant HF, sera à IF, ou à son egale FB comme FK à BK. Mais

b 45. 1.

c ou 16. 6.

d 21. 10.

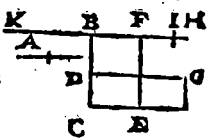
comme HF à BF, ainsi BD est monstree à DC. Donc aussi comme BD sera à DC, ainsi FK à BK. Mais BD, DC (noms du Binome BC) sont Rationelles commens. en puiss. seulement: e Donc FK, BK sont commensurables en puiss. seulement. e 10.1 0.

Derechef HF, estant à BF, comme FK à BK; f les antecedentes HF, FK ensemble, sçauoir HK toute, sera à FB, BK consequentes, c'est à dire à FK toute, comme FK à BK: partant FK est moyenne proportionelle entre HK, BK. g Donc comme HK premiere à BK 3. ainsi le q. de HK 1. au quarré de FK 2. Mais d'autant que CG, Rationel (estant egal au q. de A, Rationelle, appliqué à DC Rationelle, h fait la latit. DG Rationelle commens. en longit. à DC; HB egale à DG sera aussi Rationelle commens. en longit. à DC: Et estant monstré que comme BD à DC ainsi FK est à BK. Mais comme FK à BK, ainsi HK à FK; aussi comme BD sera à DC, ainsi HK à FK: Donc comme le q. de BD au quarré de DC, ainsi le q. de HK au quarré de FK. Mais le q. de BD est commens. au q. de DC. (BD, DC, noms de BC Binome, estant Rationelles commens. en puiss.) k Donc le quarré de Hk sera aussi commens. au q. de FK. Mais comme le q. de HK au quarré de FK ainsi HK à BK; l Donc HK est commens. en longit. à BK; m Et partant au reste BH. Mais BH est monstree Rationelle, donc HK commens. à icelle est Ration. Et partant BK commens. à HK est Ratio. Donc FK estant mõstree commens. en puiss. seul. à BK; FK sera aussi rationelle. Donc FK, BK estant ratio. & monstrees commens. en puiss. seulem. n Le reste BF

f 12. 5. g coroll. 20. 6. h 11. 10. i 21. 6. k 10. 10. l 10. 10 m coroll 16. 10. n 74. 10

ſera reſidu, & BK ſera conuenable à icelle. Ce qui eſt premier. propoſé.

Mais d'autant que la toute HK eſt monſtree commenſ. en longit. à ſa partie BK; o BK, BH
b 16 10 ſeront cõmenſ. en longit. Donc BH eſtãt monſtree commenſ. en longit. à DC, p BK ſera auſſi commenſ. en longit. à DC, comme il appert par la 12 p. du 10. Et eſtant monſtré que comme BD à DC, ainſi FK à BK. & en permutant comme BD à FK, ainſi DC à BK, mais DC, BK ſont monſtrees commenſ. en longit. q Donc BD, FK ſeront auſſi commenſ. en longit. Donc FK eſtant
q 10. 10. commenſ. en longit. à BD, & BK à DC; FK, BK noms du reſidu BF, ſeront commenſ. en longit. à BD, DC, noms de BC Binome. Ce qui eſt 2. propoſé.



Item eſtant demonſtré que comme BD eſt à DC ainſi FK à BK: FK BK noms du reſidu ſeront en meſme raiſon que BD, DC, noms de BC Binome. Ce que tiercement propoſé.

Finalement, BD peut plus que DC du quarré d'vne ligne commenſ. en longit. à icelle ou incommenſ. Si elle peut plus du quarré d'vne ligne com. en lõg. à icelle, BD eſtant à DC, cõme EK
r 15. 10. à BK, r FK pourra auſſi plus que BK du quarré d'vne ligne qui luy ſera commenſ. en longit. Et ſi
s 15. 10. BD peut plus que DC du q. d'vne ligne incommenſ. en longit. à icelle, s FK pourra plus que BK du quarré d'vne ligne incommenſurable en longitude à icelle. Et ſi BD eſt commenſurable en longit. à la Ration. expoſee, FK monſtree cõmenſ. en longit. à BD ſera auſſi commenſ. en longit. à la meſme rationelle, comme il appert par

la 12.

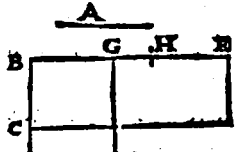
la 12.p.10. Mais si DC est commens. en longitude à la ration. BK par la mesme raison sera commens. en longit. à la mesme ration. Et finalemẽt si BD, ny DC n'est commens. en longit. à la ration. t FK, ny BK ne sera aussi commens. en longit. à la ration proposee. Donc B F residu est de mesme ordre que BC, Binome, comme il appert par les secondes & troisiesmes definitions. Ce qui est quarrement proposé. Partant le quarré d'vne ligne rationelle appliqué, &c. Ce qu'il falloit demonstrer. t 14.10

SCHOLIE.

L'on pourra aussi sans aucune difficulté appliquer icecy aux nombres, entendant ce qui a esté dit cy deuant.

THEOREME 90. PROP. 114. cxiij.

Le quarré d'vne ligne Rationelle appliqué à vn residu, faict la latitude Binome, dont les noms sont commensurables aux noms du residu; & en mesme raison: Et en outre le Binome est de mesme ordre que le residu.



Soit A, Rationelle, & BC, residu, à laquelle cõuienne G D, a & à BC, soit appliqué le rect. CE, egal au quarré de A, faisant la latitude B E. Ie dis que BE est Binome, dont les noms sont commens. a 45. 1.

à B D, C D, noms du residu BC, & en mesme raison, & BE, Binome de mesme ordre que BC, residu.

Car soit aussi appliqué à BD, totale, le rect. BF egal au quarré de A, c'est à dire à CE, faisant BG, latitude. D'autant que BF, CE, sont egaux
b 14. ou 16. 6. b comme BE, sera à BG, ainsi BD, à BC; & par conuersion de raison, comme BE, à GE, ainsi B
c 19. 6 D, à CD. Soit aussi couppé, E G, c à H selon la raison de BE, à GE, afin que EH, soit à HG, cõme BE, à GE; Mais comme BE, toute à GE toute, ainsi EH, retranchee de B E, à HG, retranchee de GE; BH, reste de BE, sera aussi à HE, reste de GE, comme la toute BE, à la toute G E: mais comme BE, estoit à GE, ainsi EH, à HG; Donc aussi comme BH, sera à HE, ainsi EH, à G H; partant HE, est moyenne proportionelle en-
d 20. 6. tre BH, GH: d parquoy comme BH, premiere à GH troisiesme, ainsi le quarré de BH, premiere, au quarré de HE, seconde: Mais comme BD, à CD, ainsi BE à GE, c'est à dire BH, à HE; Et B
e 10. 10. D, C D, noms du residu B C, estãt Rationelles commens. en puiss. seulement, e BH, HE, sont aussi commens. en puiss. & partant les qq. de B H, HE, commens. Donc BH, GH estant en mesme raison que les quarrez de BH, HE, comme il est demonstrée, sont commens. en longit. Et la toute BH, estant commens. en longit. à sa par-
f 16. 10. tie GH, telle sera aussi commens. en longit. à l'autre partie BG; Mais BD, estant Rationelle; sçauoir plus grand nom du residu BC, & le rect. BF, Rationel estant egal au quarré de A Ratio-
g 21. 10. nelle, g sa latitude B G sera Rationelle com-
h 12. 10. mens. en longit. à BD. Donc h BH, est commẽs.

en longit. à la meſme Rationelle B D. Et partãt eſt Rationelle, BH, BG, eſtant monſtrees commenſ. en longit. Et puis que BH, HE, ſont mõſtrees commenſ. en puiſſ. ſeulement, & BE, Rationelle, HE commenſurable à icelle eſt auſſi Rationelle. Donc BH, HE, ſont Rationelles commenſ. en puiſſ. ſeulement: i Donc BE, eſt Binome. Ce qui eſt premier. i 37. 10.

Mais eſtant monſtré que BH, eſt à HE, cõme BD, à CD, & en changeant BH, à BD, comme HE, à CD, mais BH, eſt k monſtree commenſ. en longit. à B D; k HE ſera auſſi commenſ. en lõg. à D, parquoy B H, HE, noms de BE, binome, ſont commenſ. en longit. à BD, CD, noms du reſidu B C. Ce qui eſt ſecondement propoſé. k 10. 10

Ils ſont auſſi en meſme raiſon eſtant demonſtré que BH, eſt à HE, comme BD à CD. Ce qui eſt tierc. propoſé.

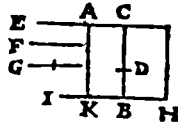
Finalement; ou BD, peut plus que CD, du q. d'vne ligne qui luy eſt commenſ. en longit. ou incommenſ. ſi commenſ. BH, pourra auſſi plus que HE l du quarré d'vne ligne qui luy ſera cõmenſ. en longit. Et ſi incommenſurable; elle pourra plus du quarré d'vne ligne qui luy ſera incommenſ. en long. Et ſi BD, eſt commenſ. en longit. à la Rationelle expoſee, m B H, le ſera auſſi, eſtant commenſ. en longit. à BD commẽſ. en long. à la Rat. Mais ſi CD, eſt commenſ. en longit. à la Rationelle; HE par la meſme raiſon le ſera auſſi. Si l'vne ny l'autre B D, CD, n'eſt commenſ. en longit. à la Rationelle, auſſi n BH ny HE, ne luy ſera commenſ. en longit. Donc par les ſecondes & troiſieſmes definitions, B E eſt Binome de meſme ordre que BC, reſidu. Ce l 15. 10. m 12. 10. n 14. 10.

qui eſtoit 4. propoſé. Donc le quarré d'vne ligne Rationelle, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.

cxvj.

o. THEOREME 91. PROP. 115.

Si vn eſpace eſt contenu ſous vn reſidu, & ſous vne ligne appellee Binome, de laquelle les noms ſont commenſurables aux noms du reſidu, & en meſme raiſon; la ligne droicte pouuant iceluy eſpace eſt Rationelle.



Soit l'eſpace AB contenu ſous AC, reſidu & ſous CB Binome, dont les nõs CD, DB ſont commenſ. aux noms CE, AE du reſidu AC, & en meſme raiſon, ſçauoir CD, à DB, cõme CE à AE: & que F, puiſſe l'eſpace AB. Ie dis que F eſt Rationelle.

a 45. 1. b 113. 10

Car ayant expoſé la Rationelle G, a ſoit appliqué à CB, Binome, le rect. CH egal au q. de G. b Donc la latit. BH ſera reſidu. Dont les nõs HI, BI ſont commenſ. en longit. aux noms CD, DB, & en meſme raiſon, ſçauoir HI, à BI, comme CD, à DB; & partant comme CE à AE; & en permutant comme la toute HI; à la toute CE, ainſi la retranchee BI à la retranchee AE; c Donc la reſtante BH ſera à la reſtante AC, cõme la toute HI à la toute CE. d Mais HI, eſt commenſ. en longit. à CE; tant HI, que CE eſtant commenſ. en longit. à CD. e Donc BH eſt commenſ. en longit. à AC; Et partant HC

c 19. 5. d 11. 13. e 10. 10.

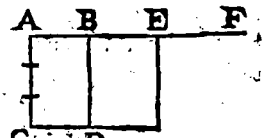
est commens. à BA; [f] HC estant à BA comme HB à AC. Mais HC estant egal au q. de la Rationelle G, est Rationel. Donc BA commens. à iceluy sera Rationel; Partant F pouuant iceluy sera Rationelle. Donc si vn espace est contenu sous vn residu, &c. Ce qu'il falloit demonstrer. f 1. 6.

COROLLAIRE.

De cecy est manifeste qu'vn espace Rationel peut estre contenu sous 2. lignes irrationelles: Car AB contenu sous AC, CE, residu & Binome qui sont irrationelles, est monstré Rationel.

THEOREME 92. PROP. 116. cxv. cxvij.

De la ligne Mediale se font infinies Irrationelles, & aucune n'est la mesme que quelqu'vne des antecedentes.



Soit AB Mediale. Ie dis que d'icelles sont faictes infinies Irrationelles, aucune desquelles n'est la mesme que quelqu'vne des treize antecedentes, [a] dont est fait mention.

Car la Rationelle AC estant proposee, soit l'espace AD contenu sous AB mediale & AC, Rationelle. [b] Donc AD contenu sous AC, Rationelle & AB Irrationelle est Irrationel. Soit BE pouuant iceluy espace AD; [c] BE sera Irrationelle. Ie dis que DE n'est aucune des 13. [d] de-

a 6rol 112. 10.
b lem. 8 10
c 11. def d cor. l 112 10

e 43. 10. uant dictes. Car puis que le quarré de la Mediale appliqué à AC rationelle e fait la latit. rationelle incommenſ. en longit. à AC, & les quarrez des autres 12. Irrat. appliquez à AC ration. font les latit. ou Binomes ou reſidus, comme il appert par les prop. 61. 62. 63. 64. 65. 66. 98. 99. 101. 102. & 103. de ce liure. Mais le q. de ceſte Irrationelle BE appliqué à la meſme rationelle AC fait la latit. AB Mediale, il eſt manifeſte que BE Irrationelle differe de toutes ces 13. Puis que ſon q. appliqué à vne ligne ration. faict la latit. differente des latitudes faictes par les qq. de ces 13. lignes appliquez à la meſme rationelle. Que ſi on accomplit le rect. DE contenu ſous BD rationelle & BE irrationelle, f iceluy ſera irrationel. Soit donc EF pouuant iceluy, g qui ſera irrationelle. Ie dis derechef que EF n'eſt meſme qu'aucune des 13. ſuſdictes, ny meſme auſſi que BE. Ce qui eſt manifeſte. Puis que le q. de EF appliqué à la rationelle faict la latit. BE. Mais les quarrez d'icelles 13. & auſſi le q. de BE appliquez à la meſme rationelle font les lat. differentes à BE, comme il eſt demonſtré: Semblablement on trouuera infinies autres irrationelles differentes entre elles & des ſuſdictes. Partant de la Mediale ſe font infinies irrationelles, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.

f lem. 38 10.

g 11. def

SCHOLIE.

Soit AC 2. & AB √ qq. 2. AD rect. ſera √ qq 32. Donc BE pouuant iceluy ſera √ qqq 32 parquoy le rectangle DE ſera √ qqq 512. & EF √ qqqq 512 & ainſi de ſuitte infinimens.

THEOREME 93. PROP. 117. cxviij. vij.

Qu'il nous soit proposé demonstrer que aux figures quarrees, le diametre est incommensurable en longitude au costé.

Soit le quarré AB CD, dont le diamettre est AC. Ie dis que AC diametre est incommens. en longit. au costé AB.

Car autrement il seroit cõmens. en longit. à AB; a Et partant AC, AB seroient entre eux cõme nomb. à nõb. Soit AC à AB comme le nombre EF au nomb. G, Et soient EF & G les plus petits de leur raison. Dõc AC estant à AB cõmme EF à G, le quarré de AC sera aussi au q. de AB comme le nomb. q. de EF au nomb. q. de G. (b car les quarrez estant en raison doublee de leurs costez: & les costez ayãt egales raisons, les raisons des quarrez seront aussi egales, estant doublees d'egales raisons) Mais le quarré de AC est c double du q. de AB (AB, BC estant egaux) Donc le q. du nomb. EF sera double du q. du nomb. G. Et partant le q. de EF, ayant vne moitié, & se pouuant donc diuiser en 2. egalement sera pair par la def. Donc EF qui le produit sera aussi pair (car s'il estoit impair, & se multipliant soy-mesme il produit son quarré, iceluy quarré seroit aussi impair d puis qu'vn nombre impair multipliant vn nombre

a 5 10.

b 10 6. 11. 8.

c 47. 1.

d 29. 9.

impair produit vn nombre impair: ce qui eſt abſurde; car il eſt monſtré pair:) Mais E F & G
e 24. 7. eſtant les plus petits de leur Raiſon, e ſont premiers entr'eux; & E F eſtant monſtré pair, G ſera impair. (car s'il eſtoit auſſi pair, le binaire meſureroit E F & G, & partant ne ſeroient premiers entr'eux. Ce qui eſt abſurde.) Maintenãt
f 11. 8. ſoit diuiſé le nomb. pair E F en 2. egalement à H. D'autant donc que E F eſt double de E H, f & les quarrez ſont en raiſon doublee de leurs coſtez: le q. de E F ſera quadruple du q. de E H. (Car la proportion quadruple eſt doublee de la proportion double, comme il appert par ces nõbres 4. 2. 1.) partant le q. de E F eſtant double du q. de G & quadruple du q. de E H, le q. de E F eſt de quatre telles parties egales, que le q. de G en eſt 2. & le q. de E H 1. Donc le q. de G eſt double du q. de E H, eſtant cõme 2 à 1. Et partant comme il a eſté dit du nombre E F, le q de G, ayant vne moitié ſera pair, & iceluy G auſſi pair. Mais il eſt auſſi monſtré impair. Ce qui eſt abſurde. Donc le Diametre A C n'eſt commenſ. en longit. au coſté A B. Partant incommenſ. en longitude.

Autrement. S'il eſt poſſible, ſoit le Diametre A C, commenſ. en longit. au coſté A B; & que A C, A B ſoient entr'eux comme les nomb. E F & G qui ſoient les plus petits de leur raiſon; & partant premiers entr'eux. Donc G ne ſera l'vnité (car le q. de A C eſtant double du q. de A B. & comme le q. de A C au quarré de A B, ainſi le quarré du nomb. E F, au q. du nomb. G. comme il eſt dit en la premiere demonſtr. le quarré de E F ſera auſſi double du q. de G. Si donc G eſt

l'vnité, & partant ſon q. auſſi l'vnité, le q. de EF ſera binaire. Ce qui eſt abſurde) partant nombre. Et d'autant que comme il eſt deſia monſtré le q. de EF eſtant double du q. de G, le q. de G meſurera le q. de EF; a Et partant G, coſté meſurera EF coſté. Donc G meſurant auſſi ſoy-meſme, EF & G ſeront compoſez entr'eux, ayãt G pour commune meſure. Mais ils ſõt auſſi premiers entr'eux: Ce qui eſt abſurde. Donc le Diametre AC n'eſt commenſ. en longit. au coſté AB. Partant nous auõs monſtré qu'aux figures quarrees le Diametre eſt incõmenſ. en lõgit. &c. Ce qu'il falloit demonſtrer. a 14. 8.

SCHOLIE.

Ceſte propoſition ſe peut auſſi ainſi demonſtrer.

Le quarré de AC 2 eſtant double du q. de AB, & vne grandeur double d'vne autre, eſtant à ceſte autre comme 2 à 1. ou 4. à 2. &c. le quarré de AC ſera au q. de AB comme 2. à 1. ou 4. à 2. &c. b qui n'eſt comme nõb. q. à nomb. q. c parquoy le Diametre AC & le coſté AB ſont incommenſ. en longitude. Donc &c. Ce qu'il falloit demonſtrer. a 47 1. b corol 24 8. c 9. 10.

Soit AB 1. a AC ſera √ q. 2. Donc la raiſon du coſté du quarré au Diametre ſera comme 1 à 2. ſçauoir incommenſ. en longitude. a 47 1.

Fin du dixieſme Liure.

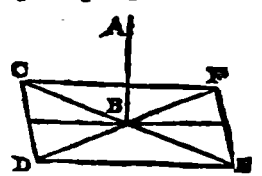
LIVRE VNZIESME DES ELEMENS D'EVCLIDE. ET LE I. des solides.

DEFINITIONS.

1. SOLIDE est ce qui a longueur, largeur, & profondeur.

2. Mais les termes du solide sont superficies.

3. Vne ligne droicte est esleuee à angles droicts sur vn plan; quand elle faict angles droicts auec toutes les lignes droictes qui la touchent, au mesme plan proposé.

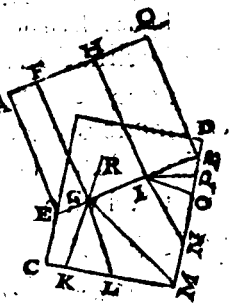


Soit la ligne droicte AB esleuee sur le plan CDEF & du poinct B soient menees tant de lignes que l'õ voudra au mesme plan; BC, BD, BE, BF, faisant les angles CBA, DBA, EBA, FBA, droicts : nous dirons que la ligne

droicte AB eſt perpendiculaire ou eſleuee à angles droicts au plan propoſé.

4. Vn plan eſt eſleué perpẽdiculairement ſur vn plan : quand toutes les lignes menees ſurl'vn d'iceux plans à angles droicts à la ligne de commune ſection, ſont à angles droicts à l'autre plan.

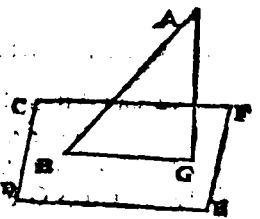
Soit le plan AB droict eſleué ſur le plan CD, en ſorte que la ligne AQ ſoit en l'air & ſoit BC leur cõmune ſection. Et en icelle pris les poincts G & I, & menees GF, IH, perpendiculaires à EB commune ſection: ſi FG, HI, ſont perpendiculaires à l'autre plan CD. c'eſt à dire ſi elles ſont angles droicts auec GK, GL, GM, IN, IO. IP, &c. le plan AB ſera à angles droicts au plan CD n'eſtant encliné de part ny d'autre. Car KG eſtant prolongee à R & l'angle FGK eſtant poſé droict. FGR ſera droict auſſi: & ainſi des autres, &c. Parquoy le plan AB ſera à angles droicts au plan CD. Et quand vn plan eſt à angles droicts à quelqu'autre, auſſi les lignes perpendiculaires menees en l'vn d'iceux à la commune ſection, ſeront auſsi perpendiculaires à l'autre plan.



5. L'inclination d'vne ligne droicte eſt l'angle contenu ſous icelle ligne & vne

5. L'inclination d'vne ligne droicte à vn plan, eſt l'angle agu contenu ſous icelle, & vne autre ligne droicte menee au plan de l'inclinante par le poinct auquel tombe vne ligne droicte perpendiculaire menee du ſommet de l'inclinante ſur iceluy plan.

Soit la ligne droicte A B, inclinee au plan C D E F, & du poinct du ſõmet A ſoit menee vne ligne perpendiculaire, ſçauoir A G, & ſoit cõioincte B G, l'angle agu A B G, ſera l'inclination de la ligne A B au plan C D E F.



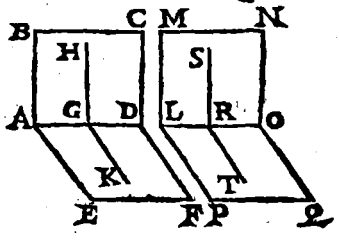
6. L'inclination d'vn plan à vn autre eſt l'angle agu contenu ſous les lignes droictes menees ſur l'vn & l'autre plan à angles droicts à la ligne de commune ſection, & à vn poinct d'icelle, leſquelles ne ſont point perpendiculaires entr'elles.

Voyez la figure ſuiuante.

Soient 2. plans inclinez l'vn ſur l'autre A B C D, E A D F: dont la commune ſection eſt A D, & en icelle ayant pris quelconque poinct G, & d'iceluy mené les droites lignes G H, G K en l'vn & l'autre plan à angles droicts, à A D: l'angle H G K ſera l'inclinatiõ du plan A C, au plan A D E F.

7. Vn plan eſt dit eſtre ſemblablement incliné à vn plan, & vn autre à vn autre, quand les angles ſuſdits des inclinations ſont egaux entr'eux.

Soient 2. plans ABCD, EADF, inclinez entr'eux; & 2. autres LM NO, PLOQ, aussi inclinez l'vn à l'autre; & que les angles d'inclination HGK, S R T soient egaux, l'inclination du plan AC, au plan AF sera dite semblable à l'inclination du plan LN, au plan LQ.



SCHOLIE.

Henrion a mis ainsi ceste definition, vn plan est dit estre semblablement incliné à vn plan, lors que les susdits angles d'inclination sont egaux entr'eux, *laissant ces mots d'Euclide* κὴ ἐναντίως κεκλίσθαι, *&c. c'est à dire*, & vn autre à vn autre. *Ce qu'il ne deuoit faire, attendu que l'inclination de deux plans n'est pas dite semblable, qu'entant qu'elle est comparee à l'inclination de deux autres.*

8. Plans parallelles sont ceux lesquels ne se rencontrent point, estans prolongez.

9. Semblables figures solides sont celles-là lesquelles sont contenuës sous semblables plans, egaux en nombre.

10. Egales & semblables figures solides, sõt celles qui sõt cõtenuës de plãs semblables,

egaux en multitude & grandeur.

11. Angle ſolide eſt la rencontre de plus de deux lignes droictes ſe touchantes à vn poinct, & n'eſtant en vne meſme ſuperficie, ſe faiſant inclination à toutes les lignes.

Autrement Angle ſolide eſt celuy qui eſt contenu ſous plus de deux angles plans ſe rencontrans à vn meſme poinct, & n'eſtant en vne meſme ſuperficie.

12. Pyramide eſt vne figure ſolide contenuë de pluſieurs plans, ſe rencontrans ou terminans à vn meſme poinct, eſtans menez d'vn autre plan qui eſt pour la baſe de la Pyramide.

13. Priſme eſt vne figure ſolide contenuë de plans, deux deſquels, qui ſont oppoſez, ſont egaux ſemblables & parallels; mais les autres ſont parallelogrammes.

14. Sphere eſt vne figure contenuë, quãd vn demicercle eſt mené à l'entour d'vn diametre demeurant fixe, iuſques à ce qu'il ſoit poſé derechef où il a commencé de mouuoir.

C'eſt à dire que la Sphere eſt vne figure ſolide, contenuë de la ſuperficie deſcrite par la reuolution d'vn demicercle mené à l'entour d'vn Diametre fixe ou immobile, iuſques à ce qu'il ſoit retourné au poinct où il a commencé ſon mouuement.

SCHOLIE.

Henrion a mis ainſi ceſte definition qui eſtoit deſia traduitte de meſme, Sphere eſt vne figure cõtenuë par le demicercle, lors que ſon Diametre, &c. *Ce qui eſt fort mal traduit, puis que le demicercle eſt vne figure plane qui ne contient aucun corps ſolide, comme eſt la Sphere, & ce qui ne correſpond auſſi au texte d'Euclide, qui eſt tel*, Σφαῖρά ἐστιν, ὅταν ἡμικυκλίου μενούσης τῆς διαμέτρου περιενεχθὲν τὸ ἡμικύκλιον εἰς τὸ αὐτὸ πάλιν ἀποκατασταθῇ, ὅθεν ἤρξατο φέρεσθαι, τὸ περιληφθὲν σχῆμα. C'eſt à dire, la Sphere eſt vne figure *ſolide* contenuë *de la ſuperficie deſcrite*, lors qu'vn demicercle eſt mené à l'entour d'vn Diametre demeurant immobile iuſques à ce qu'il ſoit reſtitué ou reuienne derechef où il a commencé de mouuoir. *Et quiconque entend ra bien les definitions precedentes, & la ſuitte du diſcours d'Euclide, trouuera qu'il le faut ainſi traduire, & qu'Euclide meſme l'entend ainſi, &c.*

15. Laxe de la Sphere, eſt la ligne droicte fixe, à l'entour de laquelle ſe meut ou tourne le demicercle.

16. Mais le centre de la Sphere eſt le meſme que celuy du demicercle.

17. Le Diametre de la Sphere eſt vne ligne droicte menee par le centre, & ſe terminant de part & d'autre en la ſuperficie de la Sphere.

18. Cone eſt la figure qui eſt contenuë, quand l'vn des coſtez qui contiennent l'angle droict d'vn triangle rectangle demeurant fixe, le triangle eſt mené à l'entour, iuſques à ce qu'il retourne au lieu où il a commencé de mouuoir. Et ſi la ligne droicte immobile eſt egale à l'autre coſté, qui eſt meu à l'entour de l'angle droict; le cone ſera rectangle; ſi elle eſt moindre il ſera amblygone; & ſi elle eſt plus grande, il ſera oxygone.

C'eſt à dire, le cone eſt vn ſolide contenu ſous la ſuperficie deſcrite par vn triangle rectangle, quand iceluy triangle eſt mené à l'entour de l'vn des coſtez qui contiennent l'angle droict, iceluy coſté demeurant fixe, iuſques à ce que ledit triangle ſoit reuenu où il a commencé ſon mouuement.

19. Laxe du Cone eſt la ligne droicte immobile, à l'entour de laquelle tourne ou ſe meut le triangle.

20. Mais la baſe du Cone eſt le cercle deſcrit par l'autre coſté mené à l'entour.

Sçauoir par l'autre des deux qui contiennent l'angle droict.

21. Cylindre eſt la figure qui eſt contenuë, quand l'vn des coſtez d'vn parallelogramme rectangle, de ceux qui ſont autour d'vn angle droict, demeurant immobile, le

le parallelogramme eſt mené à l'entour, iuſques à ce qu'il ſoit conſtitué derechef où il a commencé de mouuoir.

C'eſt à dire, le cylindre eſt vn ſolide contenu ſous la ſuperficie deſcrite par la reuolution d'vn parallelogramme rectangle, mené à l'entour de l'vn des coſtez qui contiennent vn angle droict, iceluy coſté demeurant fixé, iuſques à ce qu'il ſoit reuenu où il a commencé ſon mouuement.

22. L'axe du cylindre eſt la ligne droicte immobile, à l'entour de laquelle eſt mené le parallelogramme.

23. Mais les baſes du cylindre ſont les cercles deſcrits des deux coſtez oppoſez menez à l'entour.

24. Cones & cylindres ſemblables ſont ceux, deſquels les axes & les diametres des baſes ont meſme proportion entr'eux.

25. Le cube eſt vne figure ſolide contenuë ſous ſix quarrez egaux.

26. Le tetraedre eſt vne figure ſolide contenuë ſous quatre triangles egaux & equilateres.

27. L'octaedre eſt vne figure ſolide contenuë ſous huict triangles egaux & equilateres.

28. Le Dodecaedre eſt vne figure ſolide, contenuë ſous douze pentagones egaux, equilateres & equiangles.

29. L'Icoſaedre eſt vne figure ſolide, contenuë ſous vingt triangles egaux & equilateres.

30. Parallelipede eſt vne figure ſolide, cõtenuë ſous ſix figures quadrilateres, deſquelles les oppoſees ſont paralleles.

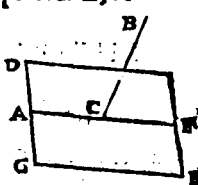
31. Vne figure ſolide eſt dite eſtre inſcrite en vne figure ſolide, quãd to⁹les angles de la figure inſcrite ſont conſtituez, ou aux angles ou aux coſtez, ou finalement aux plans de la figure, en laquelle elle eſt inſcrite.

32. Reciproquement vne figure ſolide eſt dite eſtre circonſcrite à vne figure ſolide, quand les angles ou les coſtez, où finalement les plans de la figure circonſcrite, touchent tous les angles de la figure à l'entour de laquelle elle eſt deſcrite.

THEOREME 1. PROP. 1.

Vne partie d'vne ligne droicte ne peut eſtre en vn plan propoſé, & vne partie en l'air.

Car soit la ligne droicte AB, vne partie de laquelle sçauoir AC, soit sur le plan DE, & l'autre partie CB, soit en l'air, s'il est possible, & soit menee CF. D'autant donc que AC, partie de AB, ligne droite est posee sur le plan DE, & l'autre partie CB demeure en l'air, la partie du plan DE sçauoir de C à F, sera plus base ou plus deprimee que l'autre partie, sçauoir de A à C: partant la superficie DE, ne sera pas contenuë également entre ses lignes. Ce qui est absurde, estant posé DE, superficie plane. Donc vne ligne droicte n'aura pas vne partie sur vn plan, & l'autre en l'air &c. Ce qu'il falloit demonstrer. a 7. d. 1.



Autrement; soit, s'il est possible, vne partie de la ligne droicte AB, sçauoir AC sur le plan proposé DE, & l'autre partie CB, en l'air: Donc au plan DE, il y aura quelque ligne droicte posee directement à AC, comme CF. Parquoy les 2. lignes droictes AB, AF ont vn commun segmẽt AC: a Ce qui est absurde. Donc vne partie d'vne ligne droicte n'est pas sur vn plan & l'autre en l'air. Ce qu'il falloit demonstrer. a 10. c. 1.

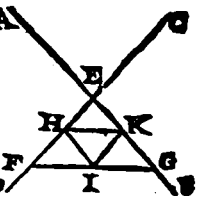
SCHOLIE.

b C'est icy la commune demonstration de tous les interprètes, en laquelle AB estant posee ligne droicte, l'aduersaire pourra touſiours nier & à bon droict, que la partie AC puisse estre directement prolongee à autre poinct qu'à B. Parquoy l'on sera contrainct de se seruir de la definition du plan comme nous auons faict en nostre demonstration:

Henrion dit que AB, ne seroit pas ligne droicte; sans en donner aucune raison.

THEOREME 1. PROP. 2.

Si deux lignes droictes se couppent l'vne l'autre, elles sont en vn mesme plan. Et tout triangle est en vn mesme plan.



Que AB, CD se couppent l'vne l'autre à E. Et en EB, EA D, ayant pris les poincts F & G, comme l'on voudra, soit menee FG, pour faire le triangle EFG. Ie dis que le triangle EFG est en vn mesme plã. Item que AB, CD sont aussi en vn mesme plan.

Car si quelque partie du triangle EFG, sçauoir EH IG, est en vn plan & quelque partie, sçauoir la restante FHI est en l'air; ou au contraire. EH, GI, parties de EF, GF seront aussi en vn plan: Mais les autres parties HF, IF, seront en l'air; ou au contraire; a ce qui est demonstré impossible. Que si EFIK partie du mesme triangle est dite estre en vn mesme plan; Mais l'autre partie GIK en l'air; ou au contraire, par la mesme raison EK, FI, parties de EG, FG, seront en vn plan, mais les parties KG, IG, seront en l'air ou au contraire.

a 1. 11.

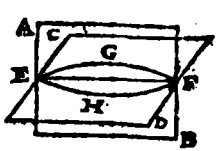
Finalement si FHKG, partie du mesme triangle est accordee estre en vn plã: & l'autre partie EHK en l'air, ou au contraire, FH, GK parties de

FE, GE, seront aussi en vn mesme plan, & les autres parties HE, KE, en l'air, ou au contraire, Ce qui est absurde, b comme il est demonstré. Partant le triangle EFG est en vn mesme plan; & ainsi de tout autre triangle. b 1. 11.

Mais d'autant que EF, EG, costez du triangle EFG sont au mesme plan qu'iceluy: c Mais CD AB totales sont au mesme plan que EF, EG. c 1. 11. Donc AB, CD seront en vn mesme plan, sçauoir en celuy auquel nous auons demonstré, estre le triangle EFG. Donc si deux lignes droictes, &c. Ce qu'il falloit demonstrer.

THEOREME 3. PROP. 3. iij.

Si deux plans se couppent l'vn l'autre, la commune section d'iceux est vne ligne droicte.

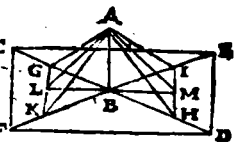


Que les plans AB, CD, se couppent l'vn l'autre, & soit EF, leur commune section. Ie dis que EF, est ligne droicte.

Car s'il n'est ainsi soit menee la droicte ligne EGF au plan AB; & au plan CD, la droicte li. EHF. Donc EGF, EHF lignes droictes ayant mesmes termes E & F encloent vne superficie: a Ce qui est absurde. Donc EF commune section sera ligne droicte. Partant si deux plans se couppēt l'vn l'autre, &c. Ce qu'il falloit demonstrer. a 14. 6. f. 1.

iv. THEOREME 4. PROP. 4.

Si deux lignes droictes se couppent l'vne l'autre, & au poinct de leur commune section est menee vne autre ligne droicte, à angles droicts: elle sera aussi à angles droicts sur le plan d'icelles.



Soit AB à angles droicts sur CD, EF, menee du point de leur commune section, Ie dis que AB est aussi à angles droicts au plan, où sont menees CD, EF.

a 2.11. Car puis qu'elles se coupppent à B; a elles seront en vn mesme plan, qui soit CEDF. Soient prises BG, BH egales entr'elles, & aussi BI, BK, & menees GK, IH, & au mesme plan soit menee par le poinct B; LM couppant GK, IH, à L & M: & du poinct A en l'air soiēt menees au mesme plan les lignes droictes, AG, AL, AK, AH, AM, AI. D'autant donc que les costez BG GK, du triangle BGK, sont egaux par la construction à BH, BI, du triangle BHI; b & les angles GBK, HBI, contenus d'iceux sont egaux au

b 15.1.

c 4.1. sommet B: c les bases GK, HI, seront egales entr'elles, & les angles BKG, BIH egaux aussi entr'eux. d Derechef KBL, IBM estant egaux au

d 15.1. sommet B, les 2. angles KBL, BKL du triangle BKL, seront egaux aux 2. IBM, BIM, du triangle BIM; & les costez adiacens BK, BI sont aussi egaux par la construction: e Donc les 2. au-

tres costez KL, LB, sont egaux aux 2. autres IM, MB chacun au sien.

Dauantage les costez AB, BG, du triangle AB G, estant egaux à AB, BH, du triangle ABH, par la construction; & les angles contenus d'iceux, ABG, ABH egaux, estant posez droicts; f les bases AG, AH seront egales; & par mesme discours AI, AK, egales.

En apres les costez AI, IH du triangle A I H, estant egaux à AK, k G, du triangle A K G, & les bases AH, AG, monstrees egales; g les angles AIH, AKG cõtenus d'iceux costez seront egaux. Partant les costez AK, KL, estant egaux à AI, IM & les angles AKL, AIM, contenus d'iceux, monstrez egaux; h les Bases AL, AM, seront egales.

Finalement les costez AB, BL du triangle AB L estant egaux à AB, BM, du triangle ABM; & les bases AL, AM, monstrees egales; i les angles ABL, ABM, contenus d'iceux costez seront aussi egaux, & droicts k estant de suitte: Donc AB, fait angles droicts auec LM, l laquelle touche icelle à B au plan proposé. Par mesme raison on monstrera que AB, faict angles droicts auec toutes les lignes droites qui la touchẽt au poinct B, au mesme plan. Et ainsi on pourra prendre sur ledit plan tant de lignes qu'on voudra, qui feront angles droicts auec icelle la rencontrant à B, par les raisons que dessus. Partant m AB, sera à angles droicts au plan CE DF, mené par C D, E F. Donc si deux lignes, &c. Ce qu'il falloit demonstrer.

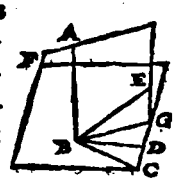
f 4. 1.
g 8. 1.
h 4. 1.
i 8. 1.
k 10. def 3.
l 13. d. 11.
m 3. d. 11.

V. THEOREME 5. PROP. 5.

Si à trois lignes droictes se touchantes l'vne l'autre, vne autre ligne droicte est cõstituee à angles droicts au poinct de la commune section; Icelles trois lignes droictes sont en vn mesme plan.

Soit la ligne droicte A B à angles droicts aux trois B C, B D, B E, se touchãtes à B, & menee du poinct B qui est leur commune section. Ie dis qu'icelles B C, B D, B E sont en vn mesme plan.

a 2. 11. Car a puis que deux, quelles que l'on voudra, sont en vn mesme plan, puis qu'estant prolongees de la part de B elles se couperont l'vne l'autre à B: soient B C, B D en vn mesme plan F C; & s'il est possible B E ne soit au mesme plan,



b 5. 11. mais esleuee en l'air; b Mais A B, B E estant en vn mesme plan, puis qu'elles se couppent à B: soiẽt toutes 2. au plã A E. Et d'autãt que les plans F C, A E, se rencontrent l'vn l'autre à B; estant pro-

c 3. 11. longez, ils se coupperont neceſſairement. c Soit donc la ligne droicte B G, leur commune sectiõ.

d 4. 11. D'autant que A B est posee à angles droicts à B C, B D; d elle sera aussi à angles droicts au plan F

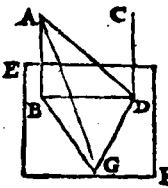
e 3. d. 11. G mené par icelles; e Et partant sera aussi à angles droicts à B G, qui touche icelle à B. Parquoy les angles droicts A B E, A B G estans au plan A G mené par A B, B E seront egaux entr'eux, la partie & le tout, ce qui est absurde. Donc les 2. li. B C,

BD estant en vn mesme plan FC; BE, ne sera esleuee en l'air, mais en mesme plan qu'icelles. Partant si à trois lignes, &c. Ce qu'il falloit demonstrer.

THEOREME 6. PROP. 6.

vj.

Si deux lignes droictes sont à angles droicts sur vn mesme plan; lesdites lignes droictes seront paralleles.



Soient les 2. lignes droictes AB, CD, à angles droicts au plan EF, menees de B, & D. Ie dis qu'elles sont paralleles.

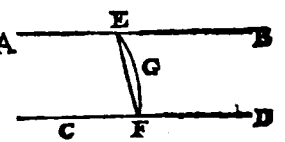
Car ayant mené BD au plã EF, [a] les angles ABD, CDB seront droicts: Et au mesme plan EF, soit menee DG perpendiculaire à BD; & soient posees AB, DG egales & conioinctes BG, GA, AD. D'autant donc que les costez AB, BD, du triãgle BAD, sont egaux à GD, DB, du triangle GDB, par la construction: & les angles ABD, GDB, contenus d'iceux aussi egaux, estãt droicts, les bases AD, GB seront egales. Derechef, [b] les costez AB, BG, du triangle ABG, estant egaux à GD, DA, du triangle GDA, & la base AG commune; [c] les angles ABG, GDA seront egaux: [d] Mais ABG est droict; donc GDA sera droict. Et l'angle GDC estant droict, aussi GD sera à angles droicts aux trois BD, DA, DC. [e] Partant DB, DA, DC seront en vn mesme plã, c'est à dire, CD sera au plan mené par DB, DA,

a 5. d. 11.
b 4. 1.
c 8. 1.
d 3. d. 11.
e 5. 11.

f 2. 11. f Mais AB est au mesme plan que DB, DA. Doc CD sera en mesme plan que AB: Parquoy les angles internes ABD, CDB estãt droicts, & AB, CD seront paralleles: Donc si deux lignes droictes sont, &c. Ce qu'il falloit demonstrer.

vij. THEOREME 7. PROP. 7.

S'il y a deux lignes droictes paralleles, en l'vne & l'autre desquelles soient pris des poincts comme l'on voudra: La ligne droicte menee par iceux poincts, est en vn mesme plan que les paralleles.



Aux paralleles AB, CD, soient pris deux poincts comme l'on voudra E & F, & soit menee EF conioignant iceux. Ie dis que EF est au mesme plan que AB, CD, paralleles.

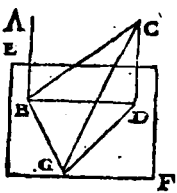
Car si EF, n'est au mesme plan, soit en vn autre & que cet autre couppe le plan des paralleles par E & F, & que la commune section d'iceux
a 3. 11. plans soit EGF, a qui sera ligne droicte. Doc les 2. lignes droictes EF, EGF, ayant mesmes termes E & F, encloront vn espace. Ce qui est absurde. Donc la droicte ligne EF ne sera hors le plan de AB, CD paralleles. Partant, s'il y a deux lignes droictes paralleles, &c. Ce qu'il falloit demonstrer.

SCHOLIE.

Ceſte propoſition eſt auſſi veritable, encore que AB, CD, ne ſoient paralleles, pourueu qu'elles ſoient en vn meſme plan, comme il appert par la demonſtration.

THEOREME 8. PROP. 8. viij.

S'il y a deux lignes droites paralleles, l'vne deſquelles ſoit à angles droicts à quelque plan : l'autre ſera auſſi à angles droicts au meſme plan.



Soient AB, CD paralleles, & CD à angles droicts au plan EF. Ie dis que AB eſt auſſi à angles droicts au plan EF.

Car eſtant menee BD au plan EF; a l'angle CDB ſera droict: b Mais les 2. CDB, ADB ſont egaux à 2. droicts; donc ABD ſera droict. Maintenant ſoit menee BG au plan EF perpendiculaire à BD: & ſoient poſees egales BG, CD; & conioinctes DG, GC, CB. D'autant donc que les coſtez CD, DB du triangle CDB, ſont egaux à GB, BD, du triangle GBD par la cõſtruction, & les angles CDB, GBD, contenus d'iceux auſſi egaux, eſtant droicts: c les baſes CB GD ſeront egales. Derechef les coſtez CD, DG du triangle CDG eſtant egaux à GB, BC, du triangle GBC, & la baſe CG commune: d les angles CDG, GBC contenus deſdits coſtez ſe-

a 5. d. 11.
b 29. 1.
c 4. 1.
d 8. 1.

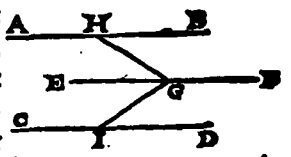
c 5. d. 11. ront egaux: Mais[c] CDG eſt droict ; donc GBC ſera auſsi droict. Parquoy G B ſera perpendiculaire à B D, B C ſe couppant l'vne l'autre à B, eſtant prolongees (puis qu'elles font angle à B;) Partant[f] ſera perpendiculaire au plan mené par f 4. 11. BD, BC: Mais AB eſt auſſi au meſme plã, g de BD g 7. 11. BC eſtant au meſme plan que AB, CD, paralleles; les poincts B, C, D, eſtant aux paralleles A B, h 5. d. 11 CD; donc[h] GB, ſera auſsi perpendiculaire à BA. i 4. 11. Parquoy AB eſtant perpendiculaire à BG, BD, AB ſera auſsi perpendiculaire au plan mené par BG, BD, c'eſt à dire au plan EF; Donc s'il y a 2. lignes droictes paralleles, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.

THEOREME 9. PROP. 9.

ix.

Les lignes droictes paralleles à vne meſme, n'eſtant en vn meſme plan qu'icelle : Icelles ſont auſſi paralleles entr'elles.

Soient AB, C D paralleles à EF : n'eſtant en meſme plan que E F. Ie dis que AB, CD ſont anſsi paralleles entr'elles.

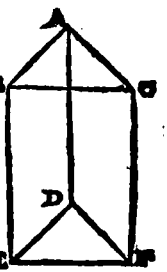


Car de quel poinct qu'on voudra de E F, comme de G, ſoient menees 2. perpendiculaires à EF, ſçauoir GH au plan des paralleles AB, EF, & GI au plan des paralleles CD, EF. Donc EG eſtant perpendiculaire à GH, GI ſe touchantes l'vne l'autre à a 4. 11. G; a elle ſera auſsi perpendiculaire au plan mené

par GH GI. Parquoy AB, EF estant paralleles; & EF, perpendiculaire au plan mené par GH, GI; b AB sera aussi perpendiculaire au mesme plan. b 8. 11.
Semblablement CD, EF estant paralleles, & EF perpendiculaire au plan mené par GH, GI; c CD c 8. 11.
sera aussi perpendiculaire au mesme plan: Donc d AB, CD estant perpendiculaires au plan mené d 8. 11.
par GH, GI, seront paralleles entr'elles. Partant les lignes droictes paralleles, &c. Ce qu'il falloit demonstrer.

THEOREME 10. PROP. 10. X.

Si deux lignes droictes se touchantes l'vne l'autre, sont paralleles à deux lignes droictes se touchantes l'vne l'autre, & n'estant en vn mesme plan: Icelles contiendront angles egaux.



Soient AB, AC, s'entretouchant à A, paralleles à DE, DF, s'entretouchant à D; & AB, AC ne soient en mesme plan que DE, DF. Ie dis que les angles BAC, EDF contenus d'icelles sont egaux.

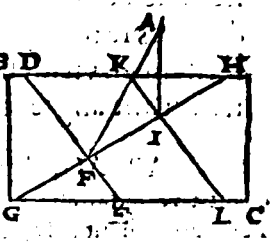
Car soient posees AB, DE, egales entr'elles, & aussi AC, DF entr'elles; & menees BC, EF, BE, AD, CF. Donc AB, DE estant egales & paralleles; a BE, AD seront aussi egales & paral- a 33. 1.
leles: Par mesme raison CF, AD seront paralleles & egales. Parquoy BE, CF estant egales &

b 9. 11. paralleles à AD; b seront paralleles & egales entr'elles: c Et partant BC, EF paralleles & egales
c 33. 1. entr'elles. Donc puis que les costez AB, AC, du triangle BAC, sont egaux à DE, DF, du triangle DEF par la construction chacun au sien, & la base BC monstree egale à la base EF. d les angles
d 8. 1. BAC, EDF seront egaux. Donc si deux lignes droictes, &c. Ce qu'il falloit demonstrer.

xi.

PROBLEME 11. PROP. 11.

D'vn poinct donné en l'air mener vne ligne droicte perpendiculaire sur le plan qui est au dessous.



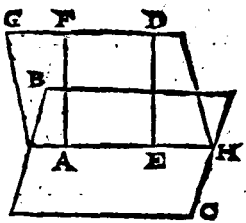
Soit le poinct A en l'air, duquel il faut mener vne ligne perpendiculaire sur le plan BC. Soit menee DE au dit plan BC comme
a 12. 1. l'on voudra à a laquelle soit menee AF perpendiculaire. Et au plan BC par F, soit menee GH
b 11. 1. perpendiculaire à DE, b à laquelle de A, soit menee AI perpendiculaire. Ie dis que AI, est perpendiculaire audit plan BC.

c 31. 1. Car c au plan BC soit menee KL parallele à DE par I; puis que DF est à angles droicts à FA, &
d 4. 11. à FH par la construction; & d partant perpendi-
c 8. 11. culaire au plan mené par FA, FH; c aussi KI sera
f 2. 11. perpendiculaire au plan mené par FA, FH. f
g 3. d. 11. Mais AI, estant au mesme plan que FA, FH, & touchant KI à I; l'angle KIA sera droict: Par-

tant AI sera à angles droicts à KI, LF. Donc AI sera perpendiculaire au plan BC.[c] Donc nous avons mené vne ligne perpendiculaire du poinct A, en haut, au plan BC. Ce qu'il falloit faire. c 4. 11.

PROBLEME 2. PROP. 12. xij.

A vn plan donné, & d'vn poinct donné en iceluy, mener vne ligne droicte à angles droicts.

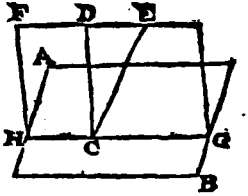


Soit le poinct donné A au plan BC duquel il faut mener vne ligne perpendiculaire audit plan BC. De quelconque[a] poinct D, donné en haut soit menee DE perpendiculaire au plan BC. Que si elle tombe au poinct A, on a le requis: Mais si le poinct E tombe ailleurs: ayant mené vne ligne droicte par E & A,[b] soit menee AF, parallele à DE au plan GH, mené par DE, EA. Ie dis que AF est perpendiculaire au plan donné BC. Car DE, AF, estant paralleles, & DE perpendiculaire au plan BC par la construction:[c] AF sera aussi perpendiculaire au mesme plan BC. Partant à vn plan donné, & d'vn poinct donné en iceluy, &c. Ce qu'il falloit faire. a 11. 11. b 31. c 8. 11.

THEOREME 11. PROP. 13. xiij.

A vn plan donné d'vn mesme poinct

donné en iceluy l'on ne pourra pas mener deux lignes droictes en l'air à angles droicts de meſme part.



Soit le plan donné AB. Ie dis que du poinct C donné en iceluy, l'on ne peut leuer deux perpendiculaires au plan AB, de meſme part.

a 2. 11. Car, s'il eſt poſſible, ſoient menees 2. perpendiculaires CD, CE, a au plã AB, & par CD, CE, qui ſont en vn meſme plã, ſoit mené le plan FG, coupant le plan AB par la ligne droicte GH. Donc EC, DC eſtant perpendiculaires au plan AB, b les angles ECG, DCG, ſeront droicts, & partãt egaux, la partie & le tout. Ce qui eſt abſurde. Donc à vn plan donné, d'vn poinct, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.

b 3. d. 11.

xiv. THEOREME 12. PROP. 14.

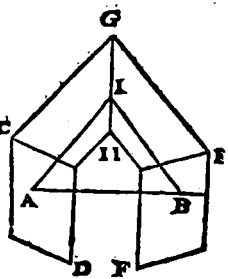
Les plans auſquels vne meſme ligne droicte eſt à angles droicts: I ceux ſont parallels.

Soit la droicte ligne AB, à angles droicts aux plans CD, EF. Ie dis que CD, EF, ſont plans parallels.

Car s'il n'eſt ainſi, eſtant prolongez ils ſe rencontreront l'vn l'autre. Que ce ſoit de la part de CE; & que GH, ſoit la ligne de leur commune ſection,

section, à en laquelle ayant pris le poinct I, comment que ce soit; soient menees les droictes lignes IA. IB, aux plans GCD, GEF. D'autant donc que AB, est posee à angles droicts aux plans GCD, GEF, b les deux angles IAB, IBA, seront droicts au triangle ABI. c Mais ils sont moindres que deux droicts. Ce qui est absurde. Donc les plans CD, EF prolongez ne se rencontrent iamais. Ils sont donc paralleles. Partant les plãs ausquels, &c. Ce qu'il falloit demonstrer.

a 13. 11.



b 3. def.

c 17. 1.

THEOREME 13. PROP. 15. XV.

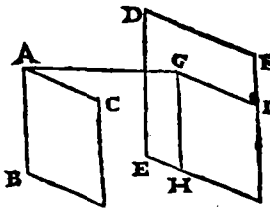
Si deux lignes droictes se touchantes l'vne l'autre, sont paralleles à deux autres lignes droictes se touchantes pareillement l'vne l'autre; n'estant pas toutesfois en vn mesme plan: Les plans, lesquels sont menez par icelles lignes sont parallels.

Soient 2. lignes droictes AB, AC, se touchantes à A, paralleles aux 2. DE, DF, se touchantes à D, n'estant en vn mesme plã que les premiers. Ie dis que les plans BC, EF, menez par icelles sont parallels.

Car du poinct A, a au plan EF, soit menee la

a 11. 11.

perpendiculaire AG, rencontrant le plan EF, au
b 3. 11. poinct G. Puis b du poinct G, soient menees G H, GI, au plan EF, paralleles à DE, DF. Donc AB, GH, estãt
c 9. 11. paralleles à DE; c elles seront paralleles
d 10. 11. entr'elles; d Et partant les angles BAG,
e 3. def. AGH, sont egaux à 2. droicts; e Mais AGH, est droict; donc BAG, sera droict aussi. Semblablement l'on conclura que l'angle CAG est droict. Partant GA, estant à angles droicts aux 2. AB,
f 4. 11. AC, elle f sera aussi à angles droicts au plan BC, mené par AB AC, Mais AG, est aussi à angles
g 14. 11. droicts au plan EF, par la construction. g Donc les plans BC, EF, sont parallels. Partant si deux lignes droictes se touchantes, &c. Ce qu'il falloit demonstrer.

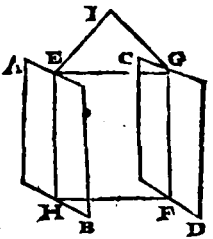


xvj. THEOREME 14. PROP. 16.

Si deux plans parallels, sont couppez par quelque autre plan: les lignes de leurs communes sections seront paralleles.

Soient les plans parallels AB, CD, couppez par le plan EF. Ie dis que leurs communes sections EH, GF, sont lignes paralleles. Car si elles ne sont paralleles, estant prolongees, elles se rencontreront l'vne l'autre, estant au plan coupant, EF. Qu'elles se rencõtrent donc au poinct

I. D'autant a donc que toute la ligne droicte H EI, est en vn mesme plan, sçauoir en AB prolongé; semblablement, toute la ligne droicte FGI, est aussi en vn mesme plan, sçauoir en CD, prolongé; les plans AB, CD, se rencontreront aussi au poinct I, estant prolongez. a 1. 11.

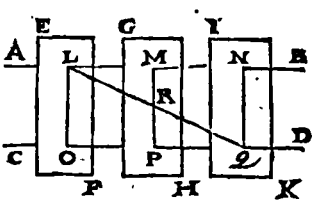


Ce qui est absurde, estans posez parallels. Donc EH, GF, sont paralleles. Partant, si deux plans parallels sont couppez, &c. Ce qu'il falloit demonstrer. xvij.

PROBLEME 15. PROP. 17.

Si deux lignes droictes sont couppees par des plans parallels: Icelles seront couppees proportionellement.

Soient les lignes droictes AB, CD, couppees par les plans paralleles, EF GH, IK, aux points L, M, N, O, P, Q. Ie dis que AB, CD, sont couppees proportionellement, c'est à dire que les segmens d'icelles, compris entre iceux plãs sont proportionaux; sçauoir comme LM, à MN, ainsi OP, à PQ.

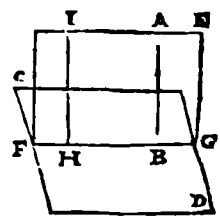


Car ſoient menees les droictes lignes LO, NQ, aux plans EF, IK, & ſoit conioincte LQ, rencontrant le plan GH, au poinct R, duquel aux poincts MP, ſoient menees RM, RP, au meſme plan GH: a Le triangle LNQ, ſera en vn meſme plan; ſemblablement LOQ auſſi en vn meſme plan. Mais d'autant que les plans paralleles GH, IK ſont couppez par le plan du triangle LNQ; b leurs communes ſections, ſçauoir les lignes MR, NQ ſeront paralleles; par meſme raiſon RP, LO, ſeront paralleles. c Partant comme LR, ſera à RQ ainſi LM, à MN; ſemblablement, comme LR, à RQ, ainſi OP, à PQ; d Dõc comme LM, à MN, ainſi OP, à PQ. Donc ſi deux lignes droictes, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.

a 2. 11.
b 16. 11.
c 2. 6.
d 11. 5.

xviij. THEOREME 16. PROP. 18.

Si vne ligne droicte, eſt à angles droicts à quelque plan: Tous les plans menez par icelle, ſeront auſſi à angles droicts au meſme plan.



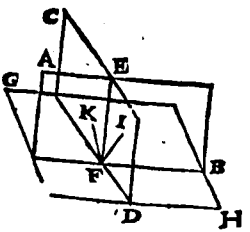
Soit la ligne AB, à angles droicts au plan. CD. Ie dis que tous les plans menez par AB, ſont à angles droicts au meſme plan CD.

Car par AB, ſoit mené le plan EF, couppant le plan CD, par la ligne droite FG. Et ayãt pris le poinct

H, comment que ce soit, en FG; a soit menee H I, au plan EF, parallele à AB. Donc AB, IH, a 31. 1.
estant paralleles; & AB, posee à angles droicts au plan CD; b IH, sera aussi à angles droicts au b 8. 11.
mesme plan CD: c partant perpendiculaire à la c 3. def.
commune section FG: Par mesme raison toutes les lignes qui sont menees paralleles à AB, au plan EF, seront à angles droicts au plan CD, & partant perpendiculaires à la commune section FG. d Donc le plan EF, sera à angles droicts au d 4. def.
plan CD. par les mesmes raisons, on monstrera que tous les autres plans menez par AB, sont à angles droicts au plan CD. Donc si vne ligne droicte est à angles droicts à quelque plan, &c. Ce qu'il falloit demonstrer.

THEOREME 17. PROP. 19. xix.

Si deux plans s'entrecouppans, sont à angles droicts à quelque plan; leur ligne de commune section sera aussi à angles droicts au mesme plan.



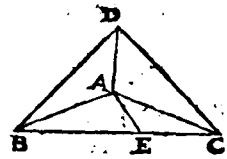
Soient les deux plans AB, CD, se couppans l'vn l'autre, par la ligne droicte E F, à angles droicts au plan G H. Ie dis que EF, ligne de leur commune section est aussi à angles droicts au mesme plan GH.

Car, ou EF, est à angles droicts à BF, DF, cō-

munes sections des plans AB, CD, auec le plan GH, ou non. Que si EF, est à angles droicts à B
a 4. 11. F, DF, a elle le sera aussi au plan GH; mené par icelles. Mais si EF, est dite estre à angles droicts à l'vne ou l'autre BF, DF, tant seulement, qu'elle le soit à BF. D'autant donc que le plan AB,
b 4. d. f. est posé à angles droicts au plan GH; b la ligne EF, (laquelle au plan AB, est menee perpendiculaire à BF, commune section d'iceluy auec le plan GH) sera à angles droicts au plan GH. L'ō
c 4. d. conclura le mesme si EF, est concedee à angles droicts à DF; Car lors EF sera perpendiculaire c au plan GH, estant posee perpēdiculaire à DF, commune section du plan CD, auec le plan GH; & menee au plan CD, qui est à angles droicts au plan GH, Finalement si EF, n'est à
11. 1. angles droicts, à BF, ny à DF; soit menee du poinct F, au plan AB, la ligne FI, perpendiculaire à BF commune section auec le plan GH; semblablement au plan CD, soit menee FK, perpendiculaire à DF, commune section d'ice-
d 4. def. luy, auec le plan GH. D'autant donc que le plan AB, est posé à angles droicts au plan GH, d la ligne IF, (laquelle est menee au plan AB, perpendiculaire à BF, commune section d'iceluy auec le plan GH,) sera à angles droicts au plan GH. Par mesme raison KF, sera à angles droicts, au
e 13. 11. mesme plan GH. Partant du poinct F, au plan GH, sont menees deux perpēdiculaires. e Ce qui est absurde. Parquoy EF, sera à angles droicts au plan GH. Donc si deux plans s'entrecouppans sont à angles droicts à quelque plan, &c. Ce qu'il falloit demonstrer.

THEOREME 18. PROP. 20. XX.

Si vn angle ſolide, eſt contenu de trois angles plãs : Deux d'iceux pris de quelque façon que ce ſoit, ſont plus grands que le troiſieſme.



Soit l'angle ſolide A, cõtenu de trois angles plans BAC, CAD, DAB. Ie dis que deux leſquels que l'on voudra, ſont plus grands que l'autre.

Car ſoit s'il eſt poſſible, l'vn d'iceux comme BAC plus grand que les deux autres BAD, DAC, & au plan mené par AB, AC, [a] ſoit faict l'angle BAE, egal à l'angle BAD, & la droicte ligne AE, [a] 23 1. egale à AD. Puis du meſme plan mené par E, ſoit menee BC, couppant AB, AC, à B & C, & menees BD, DC. D'autant donc que les coſtez AD, AB, du triangle BAD, ſont egaux aux coſtez AE, AB, du triangle BAE, chacun au ſien & les angles contenus d'iceux auſſi egaux par la conſtruction, [b] les baſes BD, BE, ſeront egales. [b] 4. 1. Mais d'autant que les coſtez DB, DC, ſont plus grands que le coſté BC, ſi l'on retranche les lignes droictes egales BD, BE, demeurera CD, plus grande que CE. Puis donc que les coſtez AD, AC, du triangle DAC, ſont egaux aux coſtez AE, AC, du triangle, EAC, chacun au ſien ; & la baſe CD, plus grande que la baſe CE, [d] l'angle CAD, ſera plus grand que l'angle CAE. Adiou- [c] 20. 1. [d] 25. 1.

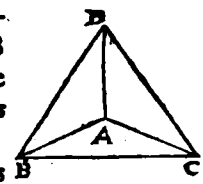
ſtant dõc les angles egaux, BAD, BAE, les deux angles CAD, BAD, ſeront plus grands que les deux CAE, BAE, c'eſt à dire que l'angle total BAC, qui eſtoit poſé le plus grand de tous. Partant deux leſquels que l'on voudra ſont beaucoup plus grands que l'autre. Donc ſi vn angle ſolide, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer. *s'il eſt dit egal, il aduiendra la meſme abſurdité.*

xj.

THEOREME 19. PROP. 21.

Tout angle ſolide eſt contenu ſous des angles plans, leſquels ſont plus petits que quatre angles plans droicts.

C'eſt à dire que tous les angles plans, ſous leſquels eſt contenu quelconque angle ſolide, ſont moindres que quatre droicts.



Soit l'angle ſolide A, contenu ſous trois angles plans B AC, BAD, DAC. Ie dis que ces trois angles ſont moindres que quatre droicts.

Car ayant mené les lignes droictes BC, CD, DB, l'on aura conſtitué trois angles ſolides, B, C, D, chacun deſquels eſt cõtenu ſous trois angles, plans, ſçauoir B, ſous CB A, ABD, DBC. Mais C, ſous BCA, ACD, DCB: Et D, ſous CDA, ADB, & BDC. a Mais les 2. angles CBA, ABD, eſtant plus grands que l'angle CBD. Et ſemblablement les 2. BCA, ACD plus grands que BCD. & les deux CDA, ADB, ſont plus grands que CDB: les ſix angles, CBA, ABD, BCA, ACD, CDA, ADB, ſont plus

a 20. 11.

grands que les trois angles, CBD, BCD, CDB.

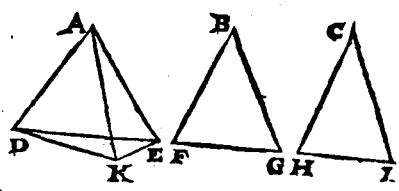
Mais ces trois sont egaux à deux droicts, donc ces six, sont plus grands que deux droicts. Donc [b] puis que ces six-là, auec les trois au poinct A, sont egaux à six droicts, à cause des trois angles BAC, CAD, DAB, ([c] Car les 3. angles de tout triangle sont egaux à 2. droicts.) si l'on oste ces six-là, qui sont plus grands que deux droicts; les trois qui constituent l'angle solide A, demeurerontmoindres que quatre droicts. Dõc tout angle solide, &c. Ce qu'il falloit demonstrer.

[b] 32. 1.

[c] 32. 1.

THEOREME 20. PROP. 22. xij.

S'il y a trois angles plans, deux desquels, pris comme l'on voudra, sont plus grands que l'autre; mais qu'iceux soient contenus de lignes droictes egales; il se peut faire, que des lignes droictes conioignantes icelles lignes egales, l'on constituëra vn triangle.



Soient 3. angles plans A, B, C, cõtenus de lignes droictes egales, AD, AE, BF BG, CH, CI, deux desquels pris comme l'on voudra sont plus grands que le troisiesme. Ie dis que des trois lignes droictes, DE, FG, HI, qui conioignent icelles lignes egales, l'on peut con-

ſtituer vn triangle: c'eſt à dire que des 3. DF, FG HI, deux telles qu'on voudra, ſont plus grandes
a 22. 1. que l'autre; a car cela eſtant l'on conſtituera facilement vn triangle.

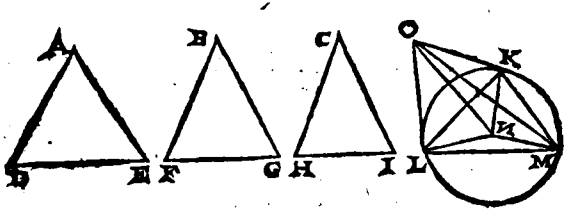
Si les trois angles A, B, C, ſont egaux, b les baſes
b 4. 1. DF, FG, HI, ſont egales; partant 2. telles qu'on voudra d'icelles plus grandes que la troiſieſme: Mais ſi 2. angles ſont ſeulement egaux, & le
c 4. 1. troiſieſme moindre, c 2. des baſes ſeront ſeule-
d 24. 1. mẽt egales, & d la baſe du 3. moindre que chacune des autres: partãt derechef les 2. qu'elles qu'õ voudra ſont plus grandes que l'autre. Que ſi l'vn d'iceux angles comme A, eſt plus grand, ſoit que les 2. autres B & C, ſoient egaux ou non; e la baſe DE, ſera auſſi plus grande de tou-
e 24. 1. tes. Parquoy DE, FG, ſeront plus grands que H I: & DE, HI, plus grandes que FG. Ie dis maintenant que FG, HI, ſont plus grandes que DE.
f 23. 1. f Car ſoit fait l'angle DAK, egal à l'angle B, & ſoit poſee AK, egale à AD: Donc le poinct K, tombera au deſſous de DE; d'autant que la circonference du cercle deſcrit à l'interualle AD, du centre A, paſſe par les poincts D, K, E, à cauſe de l'egalité des lignes, AD, AK, AE; puis ſoiẽt conioinctes DK, & KE. D'autant donc que les 2. angles B, & C, ſont poſez plus grands que l'angle DAE, & B, eſt egal à l'angle DAK, par la conſtruction, l'angle C, ſera plus grand que l'autre angle KAE; & d'autant que les coſtez A D, AK, du triangle ADK, ſont egaux aux coſtez BF
g 4. 1. BG, du triangle BFG; & les angles contenus d'iceux, DAK, & B, ſont egaux; g la baſe D K, ſera egale à la baſe F G. Derechef, puis que les coſtez CH, CI, du triangle CHI, ſont egaux aux

costez AK, AE, du triangle AKE ; & l'angle C, monstré plus grand que l'angle KAE ; [h] la base HI, sera plus grande que la base KE. Partant puis que DK est monstree egale à FG ; FG, HI, seront plus grandes que DK, KE ; mais DK, KE, sont plus grandes que DE ; donc FG, HI, seront encore plus grandes que DE. Ce qui est proposé. h 24. 1. i 20. 1.

xxiij.

THEOREME 3. PROP. 23.

Constituer vn angle solide de trois angles plans, deux desquels prins comme l'on voudra sont plus grands que l'autre : Mais il faut que ces trois angles soient plus petits que quatre droicts.



Soient les trois angles plans A, B, C, plus petits que quatre droicts, desquels 2. pris comme on voudra soient plus grands que l'autre : Il faut faire vn angle solide de 3. angles plans egaux aux 3. A, B, C.

Soient les 6. lignes AD, AE, BF, BG, CH, CI, posees egales ; contenant lesdits angles A, B, C, soustenus des bases DE, FG, HI, Et a pouuât faire vn triangle de DE, FG, HI, soit faict le a 22. 11.

triangle LMK b ayant les trois costez egaux à
b 22. 11. DE, FG, HI, à l'entour duquel c soit descrit le
c 5. 4. cercle KML & du centre N, soient menees N
d 12. 11. M, NL, NK: d Et ayant mené en l'air NO per-
e 11. pendiculaire, e & retranchee telle que son q. a-
14. 10. uec le quarré de NL soient egaux au quarré d'vn des costez desdits angles plans, & soient menees LO, KO, MO. Ie dis que LMOK est angle solide contenu de trois angles plans egaux à A, B, C.

Car NL, NM, NK estant egales, & NO perpendiculaire à icelles; LO, MO, kO, seront
f 47. 1. egales, f pouuant autant l'vne que l'autre. Et d'autant qu'elles peuuent autant que l'vn des costez des angles plans donnez, elles seront egales aux costez d'iceux angles plans; les bases, LM MK, KL, estant egales aux bases des angles don-
g 8. 1. nez g les trois angles au poinct O, seront egaux aux 3. donnez A, B, C.

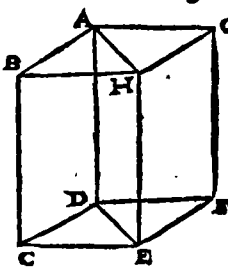
SCHOLIE.

Si on obiecte que NO, perpendiculaire ne peut touſiours eſtre retranchee, en ſorte que ſon quarré auec le quarré de NL ſoient egaux au quarré de l'vn des coſtez des triangles donnez: cõme ſi iceluy coſté eſtoit egal ou plus petit que NL: Ie reſpõs que cela n'arriue point non pas ſeulement qu'il ſoit egal à NL: Car ſi LN, & NM eſtoient egaux à AD, AE, & la baſe ML, egale à la baſe DE (& ainſi des autres triangles) h *les 3. angles au poinct N ſeroient egaux aux 3. A, B, C: Ce qui eſt manifeſtement faux; les 3. angles A, B, C, eſtant poſez*
h 8. 1.
c corol. 23. 1. *plus petits que quatre droicts,* i *& les 3. au poinct N eſtant egaux à quatre droicts.*

THEOREME 21. PROP. 24. xxiv.

Si vn solide est contenu sous des plans parallels: les plans opposez d'iceluy, sont parallelogrammes semblables & egaux.

Soit le solide parallelipede ABCD, contenu (selõ la 30. def. de 6. figures quadrilateres) AC, CF, FH, HA, AF. BE, dont les opposees sont paralleles. Ie dis que tous ces plans opposez deux à 2. sont parallelogrammes semblables & egaux.



Car puis que les plans parallels BG, CF, sont couppez par le plan AC, [a] leurs communes sectiõs AB, CD seront paralleles. Semblablement les plans parallels AF, BE, estant couppez par le plan AC, leurs communes sections AD, BC, seront aussi paralleles, Donc la figure quadrilatere ABCD, est parallelogramme. Ainsi l'on monstrera que les autres figures quadrilateres sont parallelogrammes. Ie dis maintenant que les parallelogrammes opposez, sont semblables & egaux. Car puis que AB, BH, sont paralleles à DC, CE, & non en vn mesme plan, mais en plans opposez, [b] les angles ABH, DCE, serõt egaux: Par mesme raison les autres angles du parallelogramme BG, seront egaux aux autres du parallelogramme CF. [c] Mais d'autant

a 16. 11.

b 10. 11.

c 34. 1.

que AB, eſt egale à DC, au parallelogramme AC, & BH, egale à CE au parallelogramme BE, comme AB ſera à BH, ainſi DC, à CE, & partãt cõme BH, à HG, ainſi CE, à EF, &c. Et pour la meſme raiſon: les coſtez des parallelogrammes BG, CF, à l'entour des angles egaux ſeront proportionaux, parquoy iceux parallelogrammes
d 34. 1. ſeront ſemblables: maintenant ayant mené les diametres AH, DE, d puis que les coſtez AB, BH du triangle ABH, ſont egaux à DC, CE, du triã-
e 10. 11. gle DCE, e & l'angle ABH, egal à DCE, comme
f 4. 1. il eſt monſtré f les triangles ABH, DCE, ſont
g 34. 1. egaux entr'eux. g Donc les triangles ABH, DCE, eſtant moitiez des parallelogrammes BG, CF, ils ſeront egaux entr'eux. Sẽblablement nous demonſtrerons que les parallelogrammes oppoſez, AC, GE, & AF, BE, ſont ſemblables & egaux entr'eux. Donc ſi vn ſolide eſt contenu ſous des plans parallels, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.

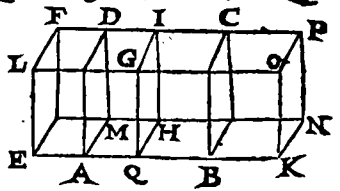
XXV. THEOREME 22. PROP. 25.

Si vn ſolide parallelipede eſt couppé par vn plan parallel aux plans oppoſez, comme la baſe ſera à la baſe, ainſi le ſolide ſera au ſolide.

Soit ABCD, ſolide parallelipede couppé par le plan IQ parallel. à AD, BC, plans oppoſez. Ie dis que le ſolide AI, ſera au ſolide IB comme la baſe AH à la baſe HB.

Car AB eſtant prolongee vers E & K, ſoit poſee AE egale à AQ & BK à BQ, & acheuez les

parallelogrammes, EM, BN, & les solides AF, P B. Donc AE, AQ estant egales, [a] E M, M Q parallelogrãmes seront egaux, [b] & L D, DG, plans opposez egaux & semblables. Et ainsi A L, A G, semblables & egaux à MF, MI, qui sont plans opposez, & ainsi des autres. [c] Et le solide AF, est egal au solide A I: & le solide BI, au solide BP. Par quoy le solide EI, est autant multiple du solide AI, que la base EH, de la base AH: & QP, solide autant multiple de CQ solide que la base QN, de la base BH. Donc de mesme façon que EH sera plus grande egale ou moindre que AH, ainsi EI solide sera plus grand egal ou moindre que le solide AI. Item de mesme façon la base QN, sera plus grãdr egale ou moindre que HB, ainsi le solide QP sera plus grand egal ou moindre que le solide QC. Soient donc quatre grandeurs AH, HB, bases, & AI, QC solides (dont de la premiere & 3. à sçauoir de AH base & AI, solide) on a prins les equimultiples EH base & IE solide: Et aussi de la 2. & 4, (sçauoir de BH base, & BQ solide) les equimultiples QN, PQ, base & solide; lesquels sont monstrez plus grands egaux ou moindres en quelconque multiplication qu'on les prenne; [d] Donc comme la base AH, à la base HB, ainsi le solide AI, au solide CQ: Partant si vn solide parallelipede, &c. Ce qu'il falloit demonstrer.



a 21. 6.

b 24. 11.

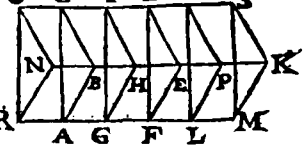
c 9. d. 11.

d 6. d. 5.

SCHOLIE.

Ceſte propoſition conuient à tous priſmes. Car quelconque priſme eſtant couppé par vn plan parallel aux oppoſez, comme la baſe ſera à la baſe, ainſi le ſolide au ſolide. Soit le priſme ABCDEF, dont les plus oppoſez ſont les triangles ABC, DEF, couppé par GHI plan parallel aux oppoſez. Ie dis que comme la baſe AI, à IF baſe, ainſi le ſolide AGHICB au ſolide GFEDIA. Car ſoit prolongé le priſme ABCDEF de coſté & d'autre tant qu'il ſera beſoing, & de AF prolongee, priſe AR egale à GA; & FL, LM, egales à FG; & par R, L, M, ſoient entendus les plans RNO, LPQ, MKS parallels à ABC, GHI. FED.

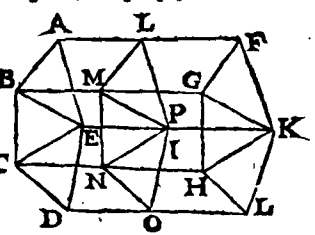
Donc les plans ABC, GHI eſtant couppez par AI; [a] AC, GI, *communes ſection d'iceux ſeront parallele*s Et AD eſtant parallelogramme AG, CI, *ſont auſſi paralleles; Parquoy* AI *eſt parallelogramme. Et ſemblablemẽt* AH, CH, *parallelogrammes. Et* AC, AB, *coſtez du triangle* ABC *eſtant egaux à* GI, GH *du triangle* GIH, ([b] AC *eſtant egal à* GI, & AB, *à* GH.) [c] *les angles* BAC, HGI *ſont egaux* ([d] AB, AC, *eſtant parallel. à* GH, IG *non en meſme plan*) [d] *les triangles* ABC, GHI, *ſont equiangles & egaux entr'eux:* [e] Et *auront les coſtez autour des angles egaux proportionaux, partant ſeront ſemblables: Parquoy* AGHICB *ſolide contenu des plans oppoſez*, ABC, GHI, *ſemblables & egaux, & des parallelogrammes* AI, GB, BI, *eſt priſme. Et ainſi* ARNOCB, FEDIHG, FEDQPL, LMKSQP. *ſont priſmes,*



a 16. 11.
b 34. 1.
c 10. 11.
d 4. 1.
e 4. 6.

&

& les parallelogram. AI, CK eſtant ſemblables & egaux, & AH, BK, & HC, BO, tous les plans du priſme AGHICB ſont ſemblables & egaux à tous ceux de ARNOCB, f donc iceux priſmes ſont egaux: ſemblablement GFEDIH, & les autres ſont egaux. Donc f 10 def. 11.
RGHION, eſt autant multiple de AGHICB, que la baſe RI, de la baſe AI: Et GMRSIH, autant multiple de GFEDIH que la baſe GS, de la baſe DG. Et puis que ſi la baſe IR, multiple de AI, 1. gr. eſt egale à la baſe GS (multiple de la baſe DG, 2. gran.) le priſme RGHION (multiple du priſme AGHICB 3.) ſera egal au priſme GMKSIH) multiple du priſme GFEDIH, 4. grand.) Et ſi IR eſt plus grande que GS, le priſme ſera auſſi plus grand que le priſme; & ſi moindre, moindre les prenant en quelque multiplication que ce ſoit. g *Comme la baſe AI, premiere grandeur, eſt à la baſe GD, deuxieſme grandeur, ainſi le priſme AG HIB, 3. eſt au priſme GFEDIH, 4. grand. Et ainſi on monſtrera que le priſme eſt au priſme comme la baſe AH, à la baſe EG, &c. Ce qui eſtoit propoſé.* g 6. d.



Soit derechef ÆBCDEFGHLK priſme, dont les plans oppoſez ſoient polygones, ſçauoir eſt pentagones, & ſoit couppé par le plan LMNOP. Ie dis que comme la baſe CM, eſt à la baſe NG, ainſi le ſolide ABCDELMNOP, au ſolide LMNOPFGHIK. Car les plans parallels oppoſez eſtans reſous en triangles, le priſme ſera reduit en autant de priſmes qu'il y a de triangles aux plans oppoſez. Donc comme la baſe EP à la baſe MK, ainſi le priſme ABEPML, au priſme E

MPKGF, par ce qui eſt demonſtré. Et par meſme raiſon comme la baſe CP à la baſe NK, ainſi le priſme BCEP
h 11. 6. *MN, au priſme MNPKGH, & le priſme CDEPNO, au priſme NOPKHI. Mais* h *comme BP à MK, & CP à NK, ainſi la ligne EP, à la ligne PK, c'eſt à dire comme CN, à NH: Et comme CN, à NH, ainſi CM à NG. Donc les priſmes ABEPML, BCEPMN, CDEPNO,*
i 11. 9 *ont meſme raiſon aux priſmes LMPKGF, MNPKGH, NOPKHI, que CM à NG, & partant meſme raiſon entr'eux.* i *Mais comme vn eſt à vn, ainſi tous enſemble à tous enſemble. Donc comme le priſme BCEPMN au priſme MNPKGH, c'eſt à dire comme la baſe CM, à la baſe NG, ainſi le priſme ABCDELMNOP, compoſé de trois, ſera au priſme LMNOPGHIK compoſé de 3. Ce qui eſt propoſé. Et ainſi de quelconque autre priſme.*

COROLLAIRE.

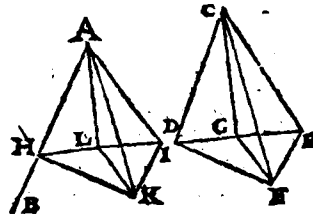
De ces choſes s'enſuit, que ſi quelconque priſme eſt couppé par vn plan equidiſtant aux plans oppoſez, que la ſection eſt vne figure egale & ſemblable aux plans oppoſez. Ayant eſté demonſtré au premier priſme, que le triangle GHI, eſt egal & ſemblable au triangle ABC, & partant au triangle DEF. Et y a meſme demonſtration en tous. Et faut dire le ſemblable des parallelipedes.

xxvj.

PROBLEME 4. PROP. 26.

A vne ligne droicte dõnee, & à vn poinct en icelle, conſtituer vn angle ſolide, egal à vn angle ſolide donné.

Soit le poinct A en AB, auquel il faut constituer vn angle solide egal à l'ãgle solide donné C, contenu sous trois angles plans D C E, D C F, F C E, n'estans en vn mesme plan.



Soit [a] menee de F, au plan passant par C D, C E, la perpendiculaire F G, & conioinctes D F, D G, E F, E G, C G. Puis soit retrãchee A H, egale à C D, [b] & soit fait l'angle H A I, egal à D C E, & A I, egale à C E. Derechef au plan mené par A H, A I, soit constitué l'angle H A L, egal à D G G, qui est au plan mené par C D, C E, & A L, egale à C G. Et [c] de L, au plan où sont A H, A L, A I, soit menee L K, perpendiculaire, & posee egale à F G, & conioincte K A. Ie dis que l'angle solide A, contenu sous les trois angles plans, H A I, H A K, & A I, est egal à C, angle solide donné.

[a] 11. 11.
[b] 23. 1.
[c] 12. 11.

Car ayant conioinct H K, H L, I K, I L; d'autant que les costez A H, A L, du triangle A H L, sont egaux aux costez C D, C G, du triangle C D G, chacun au sien, & les angles H A L, D C G, egaux par la construction, [d] les bases H L, D G, seront egales. Derechef ayant osté les angles egaux H A L, D C G, des egaux H A I, D C E, les restans L A I, G C E, sont egaux; Donc puis que les costez A L, A I, du triangle A L I, sont egaux à C G, C E, du triangle C G E, chacun au sien, par la construction; [e] L I, G E seront egales. D'autant donc que les costez L H, L K, sont egaux aux costez G D,

[d] 4. 1.
[e] 4. 1.

f 3. def. g 4. 1. GF, & les angles HLk, DGF, f droicts, g les baſes HK, DF, ſont egales. Partant les coſtez AH, AK, du triangle AHK eſtant egaux à CD, CF, du triangle CDF, par la conſtruction (car puis que AL, LK, ſont egaux à CG, GF, par la conſtruction, & contiennent angles egaux ſçauoir h droicts, les baſes AK, CF ſont egales) k les angles HAK, DCF ſeront egaux. Finalement L

h 3. def. i 4. 1. k 8. 1. l 3. def. m 4. 1. I, LK eſtant egaux à GE, GF, & les angles ILK, EGF, droicts m les baſes IK, EF, ſeront egales: Donc puis que les coſtez AI, AK, du triangle AIK, ſont egaux à CE, CF, du triangle CEF, par

n 4. 1. la conſtruction; n les angles IAK, ECF, ſeront egaux. Donc les 3. angles plans HAI, HAK, KAI, compoſans l'angle ſolide A, ſont egaux aux 3. angles plans, DCE, DCF, FCE, compoſans l'angle ſolide C; partant l'angle ſolide A, eſt egal à l'angle ſolide C. Donc, à vne ligne droicte, &c. Ce qu'il falloit faire.

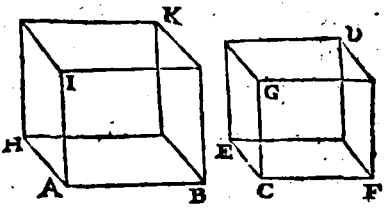
xxvij. ## PROBLEME 5. PROP. 27.

D'vne ligne droicte donnee, deſcrire vn ſolide parallelipede, ſemblable & ſemblablement poſé à vn ſolide parallelipede donné.

De la droicte ligne donnee AB, qu'il faille deſcrire vn ſolide parallelipede, ſemblable, & ſemblablement poſé au parallelipede CD donné.

a 26. 11. A a la ligne AB, & au poinct A, en icelle ſoit fait vn angle ſolide egal à l'angle ſol. donné C, en

ſorte que les trois angles plans HAI, IAB, BAH ſoient egaux aux 3. ECG, GCF, FCE. b Et comme CF à CG, ſoit faicte AB, à AI, & cõme CG, à CE, ainſi AI, à AH, & en raiſon egale, comme CF, ſera à CE, ainſi AB, à AH; & ſoit parfaict le parallelipede AK, ſçauoir eſtant accomplis les parallelogrammes BH, HI, IB, & par les poincts I, B, H, ayant mené les plãs IK, BK, HK, qui ſont paralleles aux parallelogrammes BH, HI, IB. Ie dis que le parallelipede AK, eſt ſemblable & ſemblablement poſé au paral. CD. Car puis que les angles BAH, FCE, ſont egaux, & les coſtez autour d'iceux proportionaux, ſçauoir comme BA, à AH, ainſi FC, à CE, par la conſtruction, les parallelogrammes HBEF, ſont ſemblables, & ſemblablement poſez. Semblablement HI, EG & IB, GF. Donc les 3. plans BH, HI, IB, du ſolide AK, ſont ſemblables & ſemblablement poſez, aux trois FE, EG, GF, du ſolide CD. c Mais trois leſquels que l'on voudra d'iceux ſont egaux & ſemblables aux 3. autres oppoſez. Parquoy les ſix plans du ſolide Ax ſont ſemblables & ſemblablement poſez aux ſix plans du ſolide CD; d Partant les ſolides Ax, CD, ſont ſemblables & ſemblablement poſez. Donc d'vne ligne droicte, &c. Ce qu'il falloit faire.



b 12. 6.

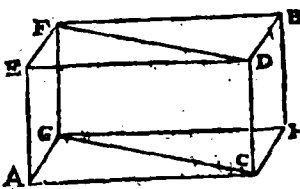
c 24. 11.

d 9. def.

xxviij. THEOREME .25 PROP. 28.

Si vn solide parallelipede, est couppé par vn plan mené par les lignes diagonales des plans oppoſez: Le solide sera couppé par ce plan, en deux egalement.

Soit AB parallelipede & aux plans oppoſez AH, EB, les diametres C G, D F. Et tant C D que GF estant parallele & egale[a] AE, estãt C E, GE, parallelogramme, [b] CD, GF seront egales & paralleles entr'elles, [c] & partant CG, DF, qui les conioignent aussi egales & parall. & en vn meſme plan. Ie dis que le plan qui passe par CG, DF, couppe le parallelipede AB, en 2. egalement.



a 34. 1. b 9. 11. c 33. 1.

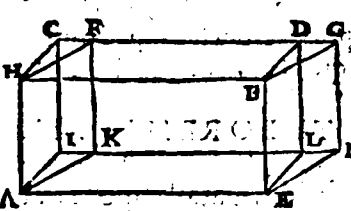
Car [d] puis que les plans AH, EB ſont parallelogrammes egaux & ſemblables, leurs moitiez, ſçauoir les triangles AGC, GCH, EFD, FDB, seront egaux entr'eux: mais les coſtez autour des angles egaux GAC, CHG, FED, DBF, ſont proportionaux, [e] donc leſdicts triangles seront auſſi ſemblables. [f] Et le parallelogramme AF, eſtant egal & ſemblable au parall. CB; & AD, à GB, & CF, commun, les 2. triangles AGC, EFD & les parallelogrammes AF, AD, CF, du priſme ACGFED, ſont egaux & ſemblables aux 2. triã-

d 24. 11. e 6. 6. f 24. 11.

gles HCG, BDF, & aux parallelogrammes CB BG, CF, du prisme, HGCDBF; g partant iceux prismes seront egaux, lesquels composans le parallelipede AB, il sera couppé en 2. egalement. Donc si vn solide parallelipede, &c. Ce qu'il falloit demonstrer. g 10. def

THEOREME 24. PROP. 29. XXIX.

Les solides parallelipedes constituez sur vne mesme base, & de mesme hauteur, & desquels les lignes insistentes sont colloquees en mesmes lignes droictes, sont egaux entr'eux.



Sur la base AB, & de mesme hauteur, c'est à dire entre mes mes plans paralleles, soiēt constituez 2. parallelipedes ACDE, AFGE, desquels les lignes insistentes menées des quatre angles de la base, sont colloquees en mesmes lignes droictes, sçauoir, AI, AK, EL, EM en la ligne droicte IM; & HC, HF, BD, BG, en la droicte ligne CG. Ie dis que les parallelipedes ACDE, AFGE, sont egaux entr'eux.

Car a puis que les parallelogrammes AL, AM constituez sur mesme base AE, & entre mesmes paralleles sont egaux entr'eux; ostant le cōmun trapeze AL, les triangles AIK, ELM, de- a 35. 1.

meureront egaux. b Mais d'autant que tous les coſtez du triangle AIK ſont egaux à tous les coſtez du triangle HCF, chacun au ſien, c iceux ſeront equiangles & egaux: d Et auront les coſtez autour des angles egaux proportionaux: & partant ſeront ſemblables entr'eux: Et par meſme raiſon le triangle ELM, ſera ſemblable & egal au triangle BDG. e Derechef le parallelogramme AC eſt egal & ſemblable au parallel. ED; & ſemblablement le parall. AF, au parallel. EG: f Mais IF, eſt egal à LG, les baſes IK, LM, eſtant egales (cat IL, kM, eſtant egales chacune à AE, ſont egales entr'elles, & oſtant KL, commune, demeurent IK, LM, egales) g Donc tous les plans du priſme AIxFCH, ſont egaux & ſemblables à tous les plans du priſme ELMGDB, h Donc iceux priſmes ſeront egaux; partant ſi on adiouſte le commun ſolide AHFKLDBE, les parallelipedes ſeront faits egaux, ſur meſme baſe, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.

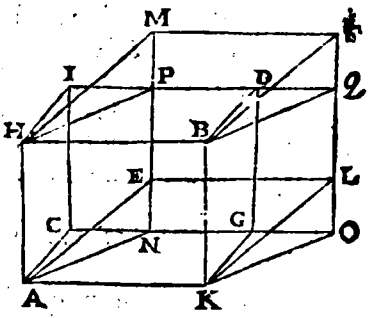
b 34. 1.
c corol. 8 1.
d 4. 6.
e 24. 11.
f 36. 1.
g 34. 1.
h 10. def

XXX. THEOREME 25. PROP. 30.

Les ſolides parallelipedes, conſtituez ſur vne meſme baſe, & de meſme hauteur, & deſquelles les lignes inſiſtentes ne ſont pas colloquées en meſmes lignes droictes: ſont egaux entr'eux.

Sur la baſe AB, & en meſme hauteur, c'eſt à dire entre meſmes plans paralleles, ſoient conſtituez les parallelipedes AIDx, AMFK deſquels les lignes inſiſtentes menees des quatre angles

de la base, AC, AE, KG, KL, HI, HM, BD, BF, ne sont pas en mesmes lignes droictes, c'est à dire, O I, G D estant prolongees ne passent pas par les poincts, M E, F, L, ny CG, I D, prolongees, &c. Ie dis que les parallelipedes AIDK, AMFk sont egaux entr'eux.



Car puis que les plans C D, EF, opposez à la base AB, sont en vn mesme plan, à cause de la mesme hauteur des parallelipedes; soient prolongees au mesme plan les lignes C G, I D, desquelles CG, couppe E M, L F, prolongees aux poincts, N, O; & ID, les mesmes aux poincts P, Q; Et soient cõioinctes les droictes lignes AN, KO, HP, BQ.

a 34. 1. D'autant[a] donc que PQ, MF, sont egales, estant opposees au parallelogramme FP; & MF, est egale à HB; PQ & HB seront egales: mais elles sont paralleles H D B estant parallelogramme. b Donc HB, PQ, sont egales & paralleles, & partant HPQB, est parallelogramme par mesme raison, HPNA, ANOK, KOQB, seront parallelogrammes, & NOQP, est aussi parallelogrãme. c Donc APQR, est parallelipede. c parquoy le parallelipede AIDK, est egal au parallelipede APQK, ayant mesme base AB, & les lignes insistantes sont colloquees en mesmes lignes droi-

b 33. 1.

c 29. 1.

ctes CO, IQ. Semblablement le parallelipede AMFK, ſera egal au meſme APQK ayant meſme baſe AB, & les lignes inſiſtantes eſtant aux meſmes droictes lignes NM, OF. Parquoy les parallelipedes AIDK, AMFK, ſont egaux entr'eux. Donc les ſolides parallelipedes, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.

SCHOLIE.

Tant ceſte prop. que la precedente ſe peut ainſi conuertir.

Les ſolides parallelipedes egaux ſur meſme baſe, ſoit que les lignes inſiſtentes ſoient colloquees en meſmes lignes droictes ou non, ſont de meſme hauteur.

Car ſi l'vn eſt dit plus haut, & d'icelluy eſtant coupé vn parallelipede de meſme hauteur que l'autre, a *le coupé & l'autre ſeront egaux: & cet autre eſtant poſé egal au tout, le coupé ſera auſſi egal au tout: ce qui eſt abſurde.*

a 29. ou 30. 11.

xxxj. xxxij.

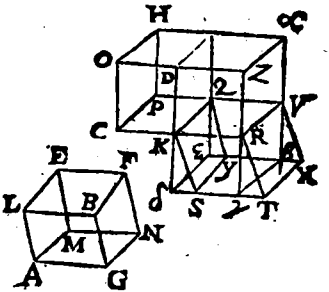
THEOREME 26. PROP. 31.

Les ſolides parallelipedes conſtituez ſur baſes egales & de meſme hauteur: ſont egaux entr'eux.

Soient les parallelipedes AEFG, CHIK, conſtituez ſur baſes egales, AB, CD, & de meſme hauteur. Ie dis qu'iceux ſont egaux entr'eux.

Car ſoient premierement les lignes inſiſtantes AM, GN, LE, BF, perpendiculaires à la baſe AB & les inſiſtantes CP, KQ, OH, DI, perpendicu-

laires à la baſe CD. Cela eſtant ainſi, toutes leſdites perpendiculaires ſeront egales entr'elles, eſtant les parallelipedes de meſme hauteur; ſoit prolongee directement CK, & poſee κR, egale à LB, & l'angle RKS, au plã prolongé OK, faict egal à l'angle BLA, & KS, poſee egale à LA, & accomply le parallel. KT, ſur lequel ſoit conſtitué le parallel. QSTV, ſelon la hauteur de la perpendic. RQ. D'autant que les coſtez KR, RS, ſont egaux à LB, LA, & les angles RKS, BLA, egaux, les parallelogrammes KT, LG, ſont egaux & ſemblables; derechef d'autant que les coſtez kQ, KS ſont egaux à LE, LA, a & les angles QKS, ELA, droicts, KQ, LE, eſtant poſees à angles droicts aux plans κT, LG, les parallel. QS, EA, ſont egaux & ſemblables. Semblablement les coſtez κR, CQ, eſtant egaux à LB, LE, & les angles QκR, ELB, droicts les parallel. κV, LF, ſont auſſi egaux & ſemblables. Parquoy; b puis que les 3. plans KT, QS, κV, du parallelipede QSTV, ſont egaux & ſemblables aux trois plans LG, EA, LF, du parallelipede AEFG; c tãt ceux là que ceux-cy eſtant egaux aux 3. autres oppoſez, c les parallelipedes QSTV, EAGF, ſont egaux entr'eux.



a 3. def. 11.

b 24. 11.

c 24. 11. & 10. def

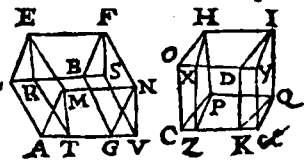
Que DK, TS prolongees, ſe rencontrent à ſ, & IQ, XY, à ε. & ſoit accomply le parallelipede Qſ7V, & HI, βV, prolongees ſe rencontrent à

α & OD, γ R, à Z, & ſoit accomply le parallelipede IκRγ. D'autant que les parallelipedes QSTV, Qδγ V, ont meſme baſe KV, & meſme hauteur, ſçauoir entre meſme plans paralleles κV δX, les lignes d'iceux inſiſtantes KS, κδRT, Rγ, QY, Qε, VX, Vε, ſont collo-
d 19. 11. quees en meſmes lignes droictes δT, εX, d'iceux ſeront egaux entr'eux. Mais le parallelipede QSTV, eſt egal au parallelipede EAGF, Donc Qδγ V, ſera egal au meſme EAGF.

e 35. 1. Mais e d'autant que kT, κγ parall. ſont egaux entr'eux, & kT egal à LG; κγ, ſera auſſi egal à LG; c'eſt à dire à CD, les
f 7 5. baſes LG, CD, eſtant poſees egales f partant
g 25. 11. comme CD, à Dk, ainſi κγ à DR, g Mais comme la baſe CD, à la baſe DR, ainſi le ſolide CHIK, au ſolide κIαR, le parallelipede CHαR eſtãt couppé par le plan Iκ, parallel. aux plans oppoſez CH, αR. Semblablement comme kγ, à DR, ainſi le ſolide Qδγ V, au ſolide IKRS; puis
h 9. 5. que les parallelipede Iδγα, eſt couppé par le plan κV, parallel. aux plans oppoſez Dδγβ. Donc les parallelipedes CHIK, Qδγ V, ayant meſme raiſon au meſme ſolide IKRα, ſçauoir que les baſes egales GD, Kγ, à la baſe DR. Dõc puis que le parallelipede Qδγ V, eſt monſtré egal au parallelipede AEFG, les parallelipedes AEFG, CHIK, ſeront auſſi egaux. Ce qui eſt propoſé.

Maintenant que AM, GN, LE, BF, & CP, KQ, OH, DI, ne ſoient perpendiculaires aux ba-
i 11. 11. ſes AB, CD: i Et des poincts E, F, M, N, ſoient menees perpendiculaires ER, FS, MT, NV, au plan de la baſe AB; & des poincts H, I, P, Q, au

plan où eſt la baſe CD, ſoient menees les perpendic. HX, IY, PZ, Qα Icelles ſeront egales, les altitudes deſdits parallelip. eſtant egales, Soient menees RS, SV, VT, TR, & XY, Zα, αI, ZX, pour faire les parallelip. ETVF, HZαI, leſquels eſtant de meſme hauteur, & les lignes inſiſtantes perpendiculaires, ils ſeront egaux entr'eux, comme il eſt monſtré.



Mais [k] ETVF eſt egal à AEFG, ayant meſme baſe & meſme hauteur. Et le parallelip. HZαI, eſt egal par meſme raiſon à CHIK. Donc AEFG, CHIK, ſont egaux entr'eux : L'on fera ſemblable demonſtration, ſi les lignes inſiſtentes d'vn parallelip. ſont perpend. à la baſe & de l'autre non. Partant les ſolides parallelip. &c. Ce qu'il falloit demonſtrer. k 29. ou 30. 11.

SCHOLIE.

Ceſte 31. prop. ſe peut auſſi cõuertir ainſi.

Les ſolides parallelipedes egaux, conſtituez ſur baſes egales, ſont de meſme hauteur. Et les parallelipedes egaux qui ſont en meſme hauteur ſont ſur baſes egales, s'ils n'ont point vne meſme baſe.

Car ſi l'vn eſt dit eſtre plus haut que l'autre, eſtant retranché d'iceluy vn parallelipede de meſme hauteur que l'autre; [a] le retranché ſera egal : Parquoy le tout eſtant poſé egal à cet autre, le retranché ſera egal au tout : ce qui eſt abſurde. Mais s'ils ſont de meſme hau- a 31. 11.

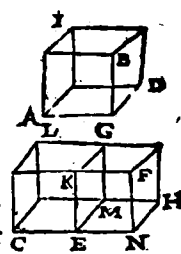
teur, & que l'on croye que la base de l'vn soit plus grãde que la base de l'autre; estant retranchee d'icelle vne base egale à l'autre, & entendant sur la retranchee vn parallelipede de mesme hauteur, on demonstrera semblablement que la partie est egale au tout. Ce qui est absurde.

THEOREME 27. PROP. 32.

xxxiij.

Les solides parallelipedes de mesme hauteur, sont entr'eux comme leurs bases.

Soient les 2. parallelipedes ABCD, EFGH, de mesme hauteur constituez sur les bases AB, EF. Ie dis que le solide est au solide, comme la base à la base.



a 45. 1. Car a soit faict sur EK, le parallelogramme IK egal au parallelogramme AB, ayant l'angle IEK, egal à l'angle ENP. Or les parallelogrammes EF, IK, constitueront le total parallelogramme FI, comme il est demonstré en la 45. du li. 1. Donc si les autres plans du parallelip. EFGH, sont prolongez de la part de EG, & que l'on accomplisse vn total parallelip. IFLH; b les parallelip. ABC D, IK LM, seront egaux, estant constituez sur bases egales AB, IK, par la construction, & de meſme hauteur par l'hypotese. c Partant comme le solide IkLM, au solide EFGH, ainsi le solide ABCD au meſme EFGH: d Mais IkLM,

b 31. 11.

c 7. 5.

d 25. 11.

est à EFGH, comme la base IK, ou la base AB, son egale à la base EF. Donc le solide ABCD, sera aussi solide EFGH, comme la base AB, à la base EF. Donc les solides parallelip. de mesme hauteur, sont entr'eux comme leurs bases, &c. Ce qu'il falloit demonstrer.

SCHOLIE.

On conuertira ainsi ceste prop.

Si les solides parallelipedes sont entr'eux cõme leurs bases; ils seront de mesme hauteur.

Car si on dit qu'ils ne soient de mesme hauteur: De *la plus grande hauteur, ayant retranché vne egale à la moindre, & mené vn plan parallel à la base*, a *comme la base sera à la base, ainsi le parallelipede sera au parallelipede retranché: Mais il estoit aussi de mesme au parallelipede total.* b *Donc le retranché est egal au tout. Ce qui est absurde.* a 32. 11. b 9. 5.

THEOREME 28. PROP. 33. xxxiv.

Les solides semblables parallelipedes, sont l'vn à l'autre en raison triplee de leurs costez homologues, ou de mesme raison.

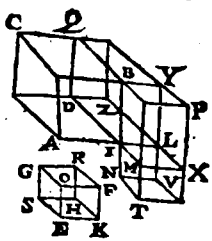
Soient les semblables parallelipedes ABCD, EFGH, sur bases semblables AB, EF, esquelles les costez de mesme raison sont AI, Ex. Ie dis que le parallelipede ABCD, est au parallelipede EF, GH, en raison triplee des costez homologues AI, Ex.

Car ſoit prolongee AI, à L, & ſoit IL, egale à Ek ou GR; Et DI, à M, & ſoit IM, egale à Hk, ou GO, & BI, à N, & ſoit IN, egale à kF, ou GS. Puis ayãt accomply les parallelogr. LM, NL, IT, ſoit acheué le parallelipede TXIV. D'autant que les coſtez IL, IM, ſont egaux aux coſtez GR, GO; a & les angles contenus d'iceux egaux, l'angle LIM, eſtant egal à AID, qui à cauſe des parallelip. ſemblabl. eſt egal à Ekh, ou RGO; les parallelogrammes IX, GF, ſeront ſemblables & egaux, & ſemblablement LN, RS, & IT, GE. Donc les 3. plans IX, LN, IT, du parallelipede TXIV, ſont ſemblables & egaux aux 3. plans, GF, RS, GE, du parallelipede EFGH; b Mais 3. plans de chacun ſont ſemblables & egaux aux trois autres oppoſez. c Donc les parallelipedes TXIV, EFGH, ſont ſemblables & egaux. Derechef ayant accomply les parallelogrammes MB, BI, LM, ſoit acheué le parallelip. MPBL; & les parallelogrammes IY, DL; IQ accomplis ſoit auſſi parfaict le parallelip. IYQZ.

a 15. 1.

b 24. 11.

c 10. def



D'autant donc, qu'à cauſe des ſemblables parallelipedes ABCD, EFGH, comme AI, à EK, c'eſt à dire à IL, ainſi DI, à Hk, c'eſt à dire à IM. & BI, à Fk, c'eſt à dire à IN. d Mais comme AI à IL, ainſi le parallelogramme AD, à DL, & comme DI, à IM, ainſi le parallelogramme DL, à LM; & comme BI, à IN, ainſi le parallelogramme BL, à LN. Donc comme AD, à DL, ainſi DL, à LM; & BL, à LN.

d 1. 6.

Mais

e Mais comme la baſe AD, à la baſe DL, ainſi le parallelip. ADCB, au parallelip. DLYQ: Et comme la baſe DL, à la baſe LM, ainſi le parallelip. DLYQ, au parallelip. LMBP; & comme la baſe BL, à la baſe LN, ainſi le parallelipede LMBP, au parallelip. LNTX. Partant comme à ADCB, à DLYQ ainſi DLYQ à LMBP, & LMBP, à LNTX. Parquoy les quatre grandeurs ADCB, DLYQ, LMBP, LNTX, ſont continuellement proportionelles; f partant la premiere ADCB, eſt à la 4. LNTX, c'eſt à dire à EFGH, en raiſon triplee de ADCB, premiere à DLYQ, 2. g Mais comme ADCB, à DLYQ, ainſi la baſe AD, à la baſe DL; h Et comme AD, à DL, ainſi la ligne AI, à IL, c'eſt à dire à Ek. Donc le parallelipede ADBC, eſt au parallelipede EFGH, en raiſon triplee des coſtez homologues, ſçauoir de AI, à Ek. Partant les ſolides ſemblables parallelipedes, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.

e 32. 11.

f 10. def 5.

g 32. 11.

h 1. 6.

COROLLAIRE.

De cecy eſt manifeſte, que ſi 4. lignes droictes ſont cõtinuellement proportionelles comme la 1. eſt à la 4. ainſi le parallelipede deſcrit ſur la 1. ſera au parallelipede ſemblable, & ſemblablement deſcrit ſur la 2. i D'autant que comme il eſt demonſtré, tant parallelip. eſt au paralleli. que la 1. ligne à la 4. en raiſon triplee de la 1. ligne à la deuxieſme, ſçauoir des coſtez homologues.

i 10. def 5.

THEOREME 29. PROP. 34.

xxxiv. xxxv.

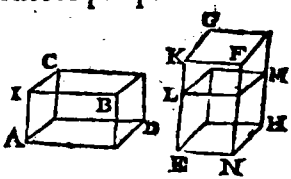
Les baſes & les hauteurs des ſolides pa-

rallelipedes egaux, ſont reciproques: Et les ſolides parallelipedes deſquels les baſes & les hauteurs ſont reciproques, ſont egaux.

Soient les parallelipedes egaux ADCB, EHGF, ſur les baſes AD, EH. Ie dis que leurs baſes & leurs hauteurs ſont reciproques; c'eſt à dire cõme la baſe AD eſt à la baſe EH, ainſi la hauteur EK à la hauteur AI.

Car ſi les hauteurs ſont egales eſtant les parallelipedes poſez egaux [a] les baſes ſeront egales: Donc comme la baſe AD, à la baſe EH, ainſi la hauteur EK à la hauteur AI, partant les baſes & les hauteurs ſont reciproques.

a ſchol. 31. 11.



Que ſi les hauteurs AI, EK ſont inegales; ſoit EK plus grande de laquelle ſoit retrãchee EL egale à AI, & ſoit entendu le plan LM parallele à la baſe EH couppant le parallelip. D'autant donc que les ſolides ADCB, EHGF ſont egaux; [b] comme ADCB, à EHML, ainſi EHGF à EHML: [c] Mais comme le ſolide ADCB, au ſolide EHML, ainſi la baſe AD, à la baſe EH, les hauteurs AI, EL eſtant poſees egales. Et comme le ſolide EHGF au ſolide EHML, ainſi par la meſme raiſon la baſe KN à la baſe LN, puis que par ceſte raiſon, EHGF, EHML, ſolides ont meſme hauteur, KN, LN eſtant poſees pour baſes; car ils ſeront entre meſmes plans paralleles KN, GH. Donc comme la baſe AD à la baſe

b 7. 5.
c 32. 11.

EH, ainsi la base KN à la base LN : d Mais comme KN à LN, ainsi la ligne EK à la ligne EL, c'est à dire à AI, egale à EL. Donc cõme la base AD à la base EH, ainsi la hauteur EK à la hauteur AI: Donc les hauteurs & les bases sont reciproques. d 1. 6.

Soient maintenant les bases & les hauteurs reciproques. Ie dis que les parallelipedes sont egaux. Car si les hauteurs EK, AI, sont egales ; la base AD estant posee à la base EH comme la hauteur EK à la hauteur AI; les bases AD, EH seront egales : e Parquoy les parallelipedes AD CB, EHGF seront egaux entr'eux, ayant bases egales & mesme hauteur. e 31. 11.

Mais si la hauteur EK est plus grande, soit retranchee EL, egale à AI, & soit entendu le plan LM, parallele à EH. D'autant donc que cõme la base AD est à la base EH, ainsi la hauteur EK à la hauteur AI, par l'hypotese, c'est à dire à EL, egale à AI; f Mais comme la base AD, à la base EH, ainsi le solide ADCB, au solide EHML, les hauteurs AI, EL estant posees egales : g Et comme EK à EL, ainsi κN à LN: h Mais comme la base κN, à la base LN, ainsi le solide EHGF, au solide EHML; les solides EHGF, EHML ayant mesme hauteur ; si on pose κN, LN, pour bases; Car ainsi ils seront entre plans paralleles κN, GH, comme le solide ADCB sera au solide EHML, ainsi le solide EHGF au mesme solide EHML, i partant les solides ADCB, EHGF, seront egaux, &c. Ce qu'il falloit demonstrer. f 32. 11. g 1. 6. h 32. 11. i 9. 5.

SCHOLIE.

Or l'on doit noter que les hauteurs des solides doivent

eſtre perpendiculaires : parquoy ne l'eſtant, faudroit faire comme à la fin de la 31. de ce liure. Toutes les choſes demonſtrees aux 6. dernieres prop. ſçauoir 29. 30. 31. 32. 33. & 34. conuiennent auſſi aux priſmes qui ont 2. plans oppoſez triangulaires, les hypotheſes ſuſdites eſtant obſeruees : Car à 2. tels priſmes de meſme hauteur, conſtituez ſur meſme baſe ou baſes egales eſtant appoſés 2. autres priſmes egaux & ſemblables à iceux, on fera 2. parallelipedes de meſme hauteur cõ-

a 29.30. *ſtituez ſur vne meſme baſe ou ſur egales.* a *Donc tels*

ou 31.11. *parallelipedes ſeront egaux : Et partant auſſi les priſmes donnez, ſçauoir leurs moitiez.*

Derechef aux 2. ſuſdicts priſmes de meſme hauteur conſtituez ſur diuerſes baſes, eſtant adiouſtez 2. autres priſmes egaux & ſemblables à iceux, on fera auſſi

b 32. 11. *2. parallelipedes de meſme hauteur.* b *Parquoy le parallelipede ſera au parallelipede comme la baſe à la baſe;* c *Et partant le priſme au priſme, ſçauoir la moitié*

c 15. 5. *d'vn des parallelipedes à la moitié de l'autre, comme la meſme baſe à la baſe: ſi les baſes des priſmes ſont parallelogrammes, ou comme le triangle au triangle, ſçauoir comme la moitié d'vne des baſes à la moitié de l'autre, ſi les baſes des priſmes ſont triangles.*

Dauantage ſi aux 2. priſmes ſemblables ſuſdits, ſont adiouſtez 2. autres priſmes ſemblables & egaux à iceux, 2. parallelipedes ſemblables ſeront conſtituez:

d 33. 11. *d qui ſeront entr'eux en raiſon triplee de la raiſon de leurs coſtez homologues. Donc leurs priſmes, ſçauoir eſt*

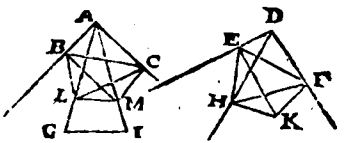
e 15. 5. *leurs moitiez,* e *ayant meſme raiſon que les parallelipedes, ſeront en raiſon triplee de la raiſon de leurs coſtez homologues, qui ſont auſſi coſtez homologues des priſmes.*

Finalement ſi auſdits 2. priſmes egaux, ſont adiouſtez 2. autres priſmes egaux & ſemblables à iceux,

deux parallelipes egaux, de meſme hauteur que les priſmes ſeront compoſez. f *Parquoy les baſes & les hauteurs des parallelipedes eſtant reciproques, & les baſes des priſmes eſtant les meſmes, ou les triangles qui ſont moitiez d'icelles; g ayant meſme raiſon: les baſes des priſmes & leurs hauteurs ſeront reciproques.* f 34. 11. g 15. 5.

THEOREME 30. PROP. 35. xxxvij.

S'il y a deux angles plans egaux, au ſommet deſquels ſoient eſleuees deux lignes droictes en l'air, contenant angles egaux auec les lignes premierement poſees, chacun au ſien: Et aux lignes eſleuees en l'air, l'on prend quelconques poincts, & d'iceux on mene des lignes perpendiculaires, aux plans où ſont les angles premierement poſez; Mais des poincts qui ſont faits aux plans par les perpendiculaires, ſont conioinctes des lignes droictes: icelles contiendront angles egaux auec les lignes menees en l'air.



Soient 2. angles egaux BAC, EDF, & des ſommets A, & D, ſoient menees en l'air AG, DH, en ſorte que l'angle BAG, ſoit egal à EDH, & CAG, à FDH: Et des poincts G

& H, pris en AG, DH, soient menees GI, HK, perpendiculaires aux plans des angles BAC, EDF, & conioinctes IA, KD. Ie dis que les angles GAI, HDK. sont egaux entr'eux.

Car si AG, DH, sont inegales de la plus grande AG, soit prise AL, egale à DH, & de L, soit menee LM, parallele à GI, au plan du triangle AGI: d'autant que GI, LM, sont paralleles, & GI
a 8. 11. est à angles droicts au plan de l'angle BAC; a LM sera aussi à angles droicts au mesme plan: des poincts M, K, soient menees les perpendiculaires MB, MC, KE, KF, à AB, AC, DE, DF; & conioinctes BC, BL, LC, EF, EH, HF. Et d'autãt
b 3 def. que LM, est angles droicts au plan BAC, b elle
c 47. 1. sera angle droict auec AM, menee au mesme plan. c Parquoy le quarré de AL, sera egal aux
d 47. 1. quarrez de AM, ML; d Mais le quarré de AM, est egal aux quarrez de AC, CM, l'angle ACM, estant droict par la constitution. Donc le quarré de AL, est egal aux quarrez, de AC, CM, ML:
e 47. 1. e Mais le quarré de CL, est egal aux quarrez de C
f 3. def. M, ML, f l'angle CML, estant droict. Donc le quarré de AL. est egal aux quarrez de AC, CL;
g 48. 1. g partant l'angle ACL, sera droict. h Derechef,
h 47. 1. puis que le quarré de AL, i est egal aux quarrez
i 47. 1. de AM, ML, k Mais le quarré de AM, est egal
x 47. 1. aux quarrez de AB, BM, l'angle ABM, estant droict par la construction; le quarré de AL, est egal aux quarrez de AB, BM, ML: Mais le quarré de BL est egal aux quarrez de BM, ML
m 3. def. m l'angle BML estant droict. Donc le quarré de
n 48. 1. AL, est egal aux quarrez de AB, BL; n partant l'angle ABL, sera droict: Par mesme raison DFH, DEH, seront monstrez droicts. D'autant donc

que les angles ABL, LAB, du triangle LAB, ſont egaux à DEH, HDE du triangle DEH; Et AL, DH, ſont egaux; o les autres coſtez AB, BL ſeront egaux aux autres DE, EH. Semblablemẽt AC, CL, ſeront egales à DF, FH. Parquoy les coſtez AB, AC, du triangle ABC, ſont egaux à DE, DF, du triangle DEF; & les angles contenus d'iceux BAC, EDF, egaux par l'hypotheſe; p les baſes BC, EF, ſeront egales, & ABC, ACB, egaux à DEF, DFE, chacun au ſien. Mais les touts ABM, ACM, ſont egaux aux touts DEK, DFK; eſtans tous droicts, donc les reſtans MBC, MCB, ſeront egaux aux reſtans kEF, kFE. Partant BC, EF, eſtant monſtrez egaux; les coſtez q BM, CM, ſeront egaux aux coſtez EK, FK. D'autant donc que AC, CM, du triangle ACM, ſont monſtrez egaux à DF, FK du triangle DFK, & ACM, DFK, droicts; les r baſes AM, DK, ſeront egales entr'elles; & BL, EH eſtant monſtrees egales, leurs quarrez ſeront egaux. f Mais d'autant que le quarré de BL, eſt egal aux quarrez de BM ML, & le qu. de EH, egal aux quarrez de EK, KH; t BML. EKH, eſtans droicts, les quarrez de BM, ML, ſeront egaux aux quarrez de EK, KH. Ayant donc oſté les quarrez egaux de BM, EK, monſtrees egales, les quarrez reſtans de LM, HK, ſeront egaux & partant LM, HK, egales. Parquoy puis que les coſtez AL, AM, du triangle ALM, ſont egaux à DH, DK, du triangle DHK, & la baſe LM, egale à la baſe HK; u les angles LAM, HDK ſeront egaux. Donc ſi deux angles plãs &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.

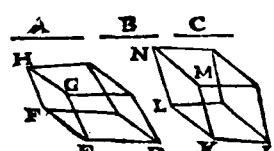
o 26. 1.
p 4. 1.
q 26. 1.
r 4. 1.
f 47. 1. t 3. def.
u 8. 1.

COROLLAIRE.

Partant s'il y a deux angles plans egaux, des ſommets deſquels l'on ait mené en l'air des lignes droictes egales, contenant angles egaux auec les lignes premierement poſees, chacun au ſien. Les perpendiculaires menees des extremitez d'icelles lignes eſleuees en l'air ſur les plans des angles premierement poſez, ſeront egales entr'elles. Car les angles plans BAC, EDF, eſtant poſez egaux, & AL, DH, eſleuees en haut conſtituant angles egaux LAB, HDE, & LAC, HDF, il a eſté demonſtré que LM, HK, perpendiculaires ſont egales entr'elles.

xxxviij THEOREME 31. PROP. 36.

S'il y a trois lignes droictes proportionelles: Le ſolide parallelipede conſtitué d'icelles, eſt egal au ſolide parallelipede, deſcrit de la moyenne, pourueu qu'il ſoit equilateral, mais equiangle au ſuſdit.



Soient A, B, C, continuellement proportionelles, & ſoit conſtitué l'angle ſolide E, de 3. angles plãs quelconques, DEF, DEG, FEG, en ſorte que DE, ſoit egale à A; & EF, à B, & EG, à C. Et ayant accomply les parallelogrammes, DF, FG, GD,

soit acheué le parallelipede DH, qui est dit estre contenu des trois lignes A, B, C, ou faict d'icelles. [a] Puis à la droicte IK, & à vn poinct d'icelle K, soit fait l'angle solide K, egal à l'angle solide E, des trois angles plans IKL, IKM, LKM, qui soient egaux aux 3. DEF, DEG, FEG, en sorte que IK, KL, KM, soient egales chacune à la moyenne B. Et ayant accomply les parallelogrammes IL, LM, MI, soit acheué le parallelipede IN, qui est dit estre cõtenu sous la ligne B, ou descrit d'icelle. Ie dis que le solide DH est egal au solide IN. Car puis que comme DE, à IK, ainsi KM, à EG, (DE estant prise egale à A, & IK, KM, à B; & EG, à C.) & les angles DEG, IKM egaux à B: [b] les parallelogrammes DG, IM, seront egaux, ayant les costez autour des angles egaux reciproques: Mais d'autant que les angles plans DEG, IKM sont egaux, du sommet desquels sont menees les lignes EF, KL, en l'air, contenant angles egaux auec les lignes premierement posees par la construction, chacun au sien; les perpendiculaires menees de F, L, au plan des bases DG, IM, sçauoir les hauteurs des parallelipedes DH, IN, si les bases sont DG, IM, [c] egales entr'elles [d] Partant les parallelipedes DH, IN, ayant les bases DG, IM, egales, & les hauteurs aussi egales, seront egaux entr'eux. Donc si trois lignes droictes sont proportionelles, &c. Ce qu'il falloit demonstrer.

a 26. 11.

b 14. 6.

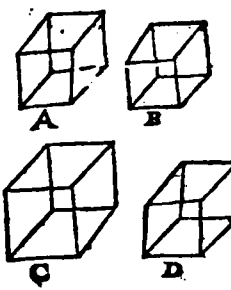
c corol. 35. 11.

d 31. 11.

THEOREME 32. PROP. 57. xxxix.

Si quatre lignes droictes sont proportio-

nelles: les ſolides parallelipedes ſemblables & ſemblablement deſcrits d'icelles, ſeront auſſi proportionaux: Et ſi les ſolides parallelipedes, leſquels ſont auſſi ſemblables & ſemblablement deſcrits, ſont proportionaux: Icelles lignes droictes ſeront auſſi proportionelles.



Soient quatre lignes proportionelles A, B, C, D, ſçauoir comme A à B, ainſi C, à D. Et ſoient conſtituez ſur A & B, deux parallelipedes A, & B, ſemblables & ſemblablement deſcrits; item ſur C & D, deux autres C & D, ſemblables & ſemblablement poſez, ſoit que ceux-cy ſoient ſemblables à ceux-là, ou non. Ie dis que comme le ſolide A, eſt au ſolide B, ainſi le ſolide C, au ſolide D.

a 33. 11. Car a puis que le ſolide A, eſt au ſolide B, en raiſon triplee de la droicte ligne A, à la droicte B; Item le ſolide C, au ſolide D, en raiſon triplee, de la ligne droicte C, à la droicte D: les raiſons des ſolides A, à B, & C à D, ſeront egales; d'autant qu'elles ſont triplees des raiſons egales, ſçauoir de la raiſon de la ligne droicte A, à la droicte B, & de la ligne droicte C, à la droicte D. Ce qui eſt premierement propoſé.

Secondement soit comme le solide A, au solide B, ainsi le solide C, au solide D. Ie dis que cõme la ligne droicte A, est à la ligne droicte B, ainsi la droicte ligne C, est à la droicte D. b Car puis que le solide A, est au solide B, en raison triplee, de la raison de la ligne A, à la ligne B; Item le solide C, est au solide D, en raison triplee de celle de la ligne C, à la ligne D: les raisons des lignes A, à B, & de C, à D, seront egales; D'autãt que les raisons d'icelles triplees, sçauoir du solide A, au solide B, & du solide C, au solide D; sont posees egales. Ce qu'il falloit secondement demonstrer. b 33. 11.

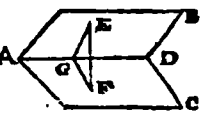
SCHOLIE.

Semblablement si trois lignes droictes sont proportionelles, les parallelipedes semblables & semblablement descrits d'icelles seront proportionaux, &c. Car la moyenne estant posee 2. fois auec son solide, les 4. solides seront proportionaux, comme il est demonstré. Car le solide de la 2. ligne estant egal au solide de la 3. & la 2. egale à la 3. la prop. est manifeste.

THEOREME 33. PROP. 38. xl.

Si vn plan est perpendiculaire à vn plan; & de quelque poinct de ceux qui sont en l'vn des plans, l'on mene vne ligne perpendiculaire à l'autre plan: La perpendiculaire menee tombera sur la cõmune section des plans.

Soit le plan AB, perpendiculaire au plan AC, & leur commune section soit AD ; & du point E, du plan AB soit menee vne perpendiculaire au plan AC. Ie dis qu'icelle tõbera sur la commune section AD.



Car autrement qu'elle tombe ailleurs, s'il est possible, comme à F, [a] & de F, au plan AC, soit menee FG, perpendiculaire à AD ; & soit conioincte EG, au plan AB. D'autant donc que FG, [b] est perpendiculaire à la commune section AD, [b] elle sera aussi perpendiculaire au plan AB, [c] Et partant perpendic. aussi à GE. [c] Mais EF, est aussi perpend. à FG. Donc au triangle EFG, les deux angles, EFG, EGF, sont droicts, ce qui est [d] absurde, [d] estãs moindres que deux droicts. Dõc la perpendiculaire menee de E, au plan AC, ne tombera hors la commune section, dõc sur icelle. Partant si vn plan est perpendiculaire à vn vn plan, &c. Ce qu'il falloit demonstrer.

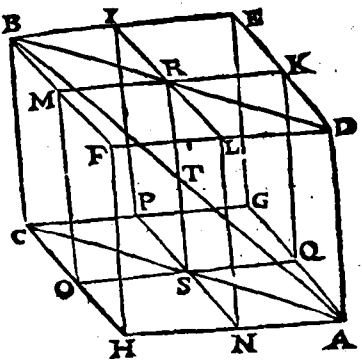
a 12. 1.
b 4. def.
c 3 def.
d 17. 1.

xxx. THEOREME 34. PROP. 39.

Si les costez des plans opposez d'vn solide parallelipede, sont couppez en deux egalement : & que par les sections, l'on mene des plans, la commune section des plans, & le diametre du solide parallelipede, se coupperont egalement l'vn l'autre.

Soient les plans opposez AC, BD, du plan pa-

rallelipede AB, desquels tous les costez soient couppez en deux egalement aux poincts, I, K, L, M, N, O, P, Q, par lesquels soient menez deux plans IN, KO, dont la commune section soit RS; soit aussi mené le diametre AB. Ie dis que la droicte ligne RS, & le diametre AB, se couppent en deux egalement.



Car ayant conioinct RB, RD, SA, SC; soient considerez deux triangles, AQS, COS. D'autant donc que les costez AQ, QS, du triangle AQS, sont egaux aux costez CO, OS, du triangle COS; (car AQ, CO, sont moitiez des egales AG, CH, [a] Et QS, OS, sont egales aux 2. egales AN, HN, estant AS, HS, parallelogrammes) [b] Et l'angle AQS, egal à l'alterne COS: les [c] bases AS, CS, seront egales, & les angles ASQ, CSO, egaux. [d] Mais les angles ASQ, ASO, sont egaux à deux droicts; Donc CSO, ASO, sont aussi egaux à deux droicts: [e] Partant AS, CS, feront vne seule ligne droicte: Semblablement BR, DR, seront monstrees egales, & faire vne seule ligne droicte. Derechef, d'autant que tant AD, que BC. est parallele & egale à FH, à cause des parallelogrammes AF, FC, [f] elles seront aussi paral-

[a] 34. 1. [b] 29. 1. [c] 4. 1. [d] 13 1. [e] 14. 1. [f] 9. 11.

leles entr'elles & egales. g Parquoy AC, BD; qui les conioignent aux extremitez, ſont auſſi egales & paralleles; Donc leurs moitiez AS, BR, ſont egales. Mais d'autant que AC, BD, ſont paralleles, h AB, RS, ſeront en vn meſme plan auec icelles, partant ſe coupperont l'vne l'autre, ſçauoir au poinct T. Mais i puis que les 2. angles AST, ATS, du triangle AST, ſont egaux aux 2. BRT, BTR du triangle BRT, & le coſté AS, au coſté BR: k les autres coſtez TA, TS, ſeront egaux aux autres TB, TR: Partant AB, RS, ſe couppent l'vne l'autre en deux egalement au poinct T. Parquoy ſi les coſtez oppoſez, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.

g 33. 1.

h 7. 11.

i 29 & 15. 1.

k 26. 1.

COROLLAIRE.

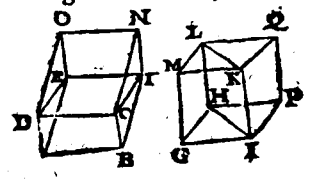
Il s'enſuit de ceſte demonſtration qu'en tout parallelipede, tous les diametres ſe couppent l'vn l'autre en 2. egalement à vn poinct; ſçauoir au poinct T, où ils diuiſent en deux parties egales (comme il eſt monſtré icy) la ligne RS. Et tout plan couppant le parallelipede en 2. egalement, paſſe par le centre d'iceluy comme par le poinct T.

THEOREME 35. PROP. 40.

xxxj.

Si deux priſmes ſont de meſme hauteur, deſquels l'vn ait vn parallelogramme pour baſe, & l'autre vn triangle: Et que le parallelogramme ſoit double du triangle, iceux priſmes ſeront egaux.

Soient deux prismes d'egale hauteur, ABCD EF, GHIKLM, dont celuy-là ait pour base le parallelogrãme ABCD, & cestuy-cy le triãgle GHI, & soit le parallelogramme AC double du triangle GHI. Ie dis qu'iceux prismes sont egaux.



Car soient accomplis les parallelipedes AN, GQ prolongeant les plans des triangles, pour faire les parallelogrammes BN, AO, GP, MQ; Car ayant mené NO, PQ, on aura constitué 2. parallelip. AN, GQ de mesme hauteur que les prismes; & desquels les plans opposez sont parallels, comme il est facile à colliger de la 15. p. de ce li. 2. D'autant donc que le parallelogramme GP est double du triangle GHI. & le parallelogr. AC, est posé double du mesme triangle GHI, les paral. AC, GP serõt egaux. b Partãt AN GQ, de mesme hauteur, & sur bases egales AC, GP, sõt egaux entr'eux. Dõc leurs moitiez, sçauoir les prismes ABCDEF, GHIKLM, (c Car les parallelip. AN, GQ sont couppez chacun en 2. prismes egaux, par les diametres des plans opposez CF, DE, HI, LK) sont aussi egaux entr'eux. Donc si deux prismes, &c. Ce qu'il falloit demonstrer.

a 34. 11.

b 31. 11.

c 32. 11.

Fin de l'vnzieſme liure.

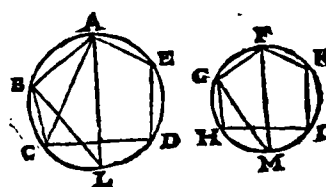
LIVRE DOVZIESME DES ELEMENS D'EVCLIDE, ET LE second des solides.

THEOREME 1. PROP. 1.

Les Polygones semblables, inscrits aux cercles, sont l'vn à l'autre, comme les quarrez descrits des diametres des cercles.

SOIENT deux polygones semblables ABCDE, FGHIk, descrits aux cercles, desquels les diametres sont AL, FM. Ie dis que le polygone ABCDE, est au polygone FGHIK, comme le quarré du diametre AL, au quarré du diametre FM.

Car soient menees AC, FH, soustendantes les angles egaux ABC, FGH, & soient conioinctes BL



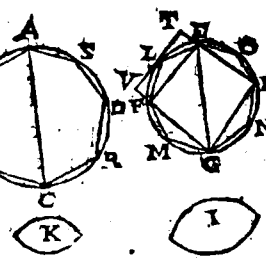
(*Soit tiree vne li. de F à H, qui eſt laiſſee en la figure.*)
GM. Dõc à cauſe de la ſẽblance des polygones A a. ſix 6.
B eſtãt à BC cõme FG à GH, a les triãgles ABC, FGH, ſeront equiangles, ayant les coſtez autour des angles egaux ABC, FGH, proportionaux: b. 21. 5.
b mais l'angle ALB, eſt égal à l'angle ACB; & l'angle FMG, égal à FHG: donc ALB, FMG ſeront egaux: Parquoy ABL, FGM eſtant auſſi c. 32. 3.
egaux, c ſçauoir droicts aux demicercles; d les d. 32. 1.
reſtans BAL, GFM ſeront egaux. e Donc comme AL à AB, ainſi FM à FG; & en changeant, f. 22. 6.
comme AL, à FM, ainſi AB à FG. f Partant comme le quarré de AL, au quarré de FM, ainſi le polygone ABCDE, deſcrit ſur la droicte ligne AB, au polygone FGHK deſcrit ſur FG; puis que tant les quarrez que les polygones ſont figures ſemblables & ſemblablement deſcrites. Donc, les polygones ſemblables, &c. ce qu'il failloit demonſtrer.

THEOREME 2. PROP. 2.

Les cercles ſont l'vn à l'autre comme les quarrez de leurs diametres.

Soient les 2. cercles ABCD, EFGH, dont les dametres ſont AC, EG. Ie dis que comme le quarré de AC eſt au quarré de EG, ainſi le cercle ABCD, eſt au cercle EFGH: c'eſt à dire que ſi on entend que comme le quarré de AC eſt au q. de EG ainſi le cercle ABC ſoit à quelque autre figure 4. proportionelle, comme à I, que I eſt egale au cercle EFGH.

Car s'il n'eſt ainſi, I ſera moindre ou plus grande: Que I ſoit donc premierement plus petite, ſi



faire ce peut, & le cercle EFGH, ſoit plus grand que I, de la figure K. a Mais pouuant retrancher, plus de la moitié du cercle EFGH, & du reſte plus de la moitié, tant de fois qu'il demeure à la fin vne grandeur, moindre que K: ſoit b inſcrit en iceluy cercle le q. EFGH; c qui ſera plus grād que la moitié du cercle. Si les 4. ſegments du cercle ſont moindres que K, l'on a le requis: Sinon ſoient coupees les arcs EF, FG, GH, HE, en 2. egalement par L, M, N, O, & ſoit inſcrit l'octogone au cercle, menant EL, LF, FM, MG, GN, NH, HO, OE. Il appert qu'il y aura 4. triāgles egaux dans les 4. ſegments egaux, & que chacun comme FLE, excedera la moitié de ſa ſection, le triangle Iſoſcele ELF, d eſtant moitié du rectangle de meſme hauteur, deſcrit ſur la baſe EF, comme EV, qui eſt plus grand que la ſection FLE. Maintenant ſoient les 8. figures reſtantes FM, MG, &c. plus petites que K: Car ſi ainſi n'eſtoit faudroit diuiſer les arcs derniers, & touſiours inſcrire des polygones, dont le dernier auroit les coſtez doubles en multitude à ceux de ſon precedent, & oſter touſiours plus de la moitié de chaque ſegment, à ſçauoir ſon triangle Iſoſcele: Il eſt euident que les dernieres ſections ſeront en fin moindres que K. Finalement ſoient donc leſdites 8. ſections reſtantes moindres que K. Il eſt manifeſte que ledit octo-

a 10.10.
b 6.4.
c Schol. 9.4.
d 41.1.

gone ſera plus grand que I; I & K enſemble eſtant egales au cercle EF, GH. Soit auſſi deſcrit vn octogone ſemblable dans le cercle ABCD; couppans en deux egalement chacun des demicercles ABC, ADC, par B & D, & chaque partie de rechef en 2. egalement par P, Q R, S. & ayant conioint des lignes droictes à tous leſdits poincts. Il eſt manifeſte que la figure octogone inſcrite ſera ſemblable à l'octogone inſcrit au cercle E F G H. e Et ledit octogone du cercle A B C D, ſera à l'octogone du cercl. E F G H comme le quarré du diametre A C au q. du diam. EG: mais comme le q. de AC au q. de EG, ainſi le cercle A B C D eſt à I; f donc comme le polygone AQS, au polygone EMO, ainſi le cercle ABC ſera à I. Mais le polygone AQS eſt moindre que le cercle ABC, g dõc le polygone EMO ſera moindre auſſi que I. ce qui eſt abſurde, eſtant monſtré plus grand. Donc la figure I ne peut eſtre moindre que le cercle EFGH. e 1. 12. f 11. 5. g 14. 5.

Elle ne peut auſſi eſtre plus grande; car le cercle ABC eſtant à I. comme le q. de AC au q. de EG; en changeant I ſera au cercle ABC, comme le q. de EG au q. de AC: mais ſoit entendu que cõme I eſt au cercle ABC, ainſi le cercle EFG à quelque autre comme à K: donc h comme I eſt plus grande que le cercle EFG, ainſi le cercle ABC ſera plus grand que K. i & le cercle A B C ſera à K comme le q. de ABC, au q. de EFG: Ce qui eſt contre la premiere partie de ceſte propoſition, où eſt monſtré qu'vn des cercles eſtant à vne figure en la raiſon des q. des diametres: que telle figure ne peut eſtre moindre que l'autre cercle: donc I ne peut eſtre plus grande que le h 14. 5. i 11. 5.

cercle EFG, ny moindre comme en la 1. partie: partant egale. Donc les cercles, &c. ce qu'il falloit demonſtrer.

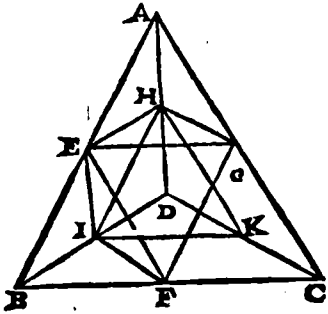
COROLLAIRE.

De là s'enſuit que comme le cercle eſt au cercle, ainſi le polygone deſcrit en celuy là eſt au polygone ſemblable deſcrit en cetuy cy; Puis que tant le cercle eſt au cercle, que le polygone au polygone, comme le quarré du diametre au q. du diametre: comme il eſt demonſtré.

THEOREME 3. PROP. 3.

iij. Toute Pyramide ayant la baſe triangulaire, ſe peut diuiſer en deux pyramides egales, & ſemblables entr'elles, ayants les baſes triangulaires, & ſemblables à la toute; Et en deux priſmes egaux, leſquels deux priſmes ſont plus grands que la moitié de toute la pyramide.

Soit la pyramide dont la baſe eſt le triangle ABC, & le ſommet D. Soient couppez tous ſes coſtez en 2. egalement par E, F, G, H, I, K, & & coniointes EF, FG, GE, HI, IK, KH, HE, EI, IF. Ainſi elle eſt diuiſee en 2. pyramides AEGH, HIKD, dont les baſes ſont les triangles AEG, HIK, & les ſommets HD; & en deux ſolides EBFGHI, CFGHIK, dõt la baſe de celuy là eſt le parallelogrãme EBFG, & les triangles EHG, BIF, mais la baſe de celuy-cy eſt le triãgle CFG,



auquel eſt oppoſé le triãgle KIH, leſquels priſmes ont pour terme commun le parallelogramme FGHI; compoſans auec les 2. pyramides, la pyramide totale: Ie dis que ces 2. pyramides ſont egales & ſemblables entr'elles & ſemblables à la toute; & que ces 2. priſmes ſont egaux entr'eux & plus grands que la moitié de toute la pyramide.

Car AD, DB, coſtez du triangle ADB, eſtant couppez en 2. egalement & partant proportionnellement a HI, AB ſeront paralleles; & auſſi Ik, BC, & Hk, AC, & EG, BC, & EF, AC; & FG, AB; & EH, BD; EI, AD; & IF, DC & HG, DC, paralleles par meſme raiſon. b Mais FG, HI, eſtant paralleles à AB, ſont paralleles entr'elles; & ainſi GH, FI, eſtant paralleles à DC, le ſont auſſi entr'elles; donc AEIH, HEBI, IDHE; EBFG, GHKC, CKIF, FGHI, ſont parallelogrammes. Mais HE, HG eſtant paralleles à DB, DC; les c angles EHG, BDC, ſont egaux; par meſme raiſon HEG, DBC, & HGE, DCB, ſeront egaux. d Partant les coſtez du triãgle HEG ſont proportionaux aux coſtez du triãgle DBC, à l'entour des angles egaux: parquoy le triangle HEG, eſt ſemblable au triangle DBC. e Mais les triangles HAE, HAG, AEG, ſont auſſi ſemblables aux triangles DAB, DAC, ABC. f Donc la pyramide AEGH, eſt ſemblable à la pyramide

a 2 6.
b 9.11.
c 10.11.
d 4 6.
e corol. 4.6.
f 9.d.11.

ABCD. De rechef HI, HK, eſtant paralleles à
g 10.11 AB, AC; g les angles IHk, BAC, ſeront egaux:
& ſemblablement HIK, ABC, & HKI, ACB
h 4.6. egaux. h Parquoy les coſtez du triangle HIk,
ſont proportionaux aux coſtez du triangle ABC
autour des angles egaux, & le triangle HIK eſt
ſemblable au triangle ABC: mais les triangles
i corol. DHI, DIK, DKH, ſont i ſemblables aux trian-
4. 6. gles DAB, DCB, DCA, donc la pyr. k HIKD
k 9.d.11 eſt auſſi ſemblable à la pyram. ABCD: Mais les
triangles AHE, HDI, eſtant ſemblables au trian-
l corol. gle à ADB, comme l il eſt monſtré m ſeront auſſi
4. 6. ſemblables entr'eux, & eſtāt conſtituez ſur AH,
m 21.6. HD egales, n ils ſeront egaux: par meſme rai-
n Lem- ſon AHG, HDK, ſeront egaux & ſemblables
me 22. 6. eſtant monſtrez ſemblables au triangle ADC, &
conſtituez ſur lignes egales AH, HD: & ainſi les
triangles AEG, HIK ſeront egaux & ſemblables,
o 34. 1. eſtant monſtrez ſemblables au triangle ABC, &
poſez ſur AE, HI, egales, o eſtant coſtez oppoſez
du parallelo. AEHI. Item EHG, IDK ſerōt egaux
p 34. 1. & ſemblables, eſtant monſtrez ſemblables au
triangle BDC, & ayant HE, DI egales, p au pa-
rallelog HEID. Donc les pyramides AEGH,
q 10. d. HIKD q ſont egales & ſemblables, tous les
14. triangles de l'vne eſtant monſtrez egaux & ſem-
blables à tous les triangles de l'autre.

a 34. 1. De rechef a EH, HG, GE eſtant egales & pa-
ralleles à BI, IF, FB, aux parallelogr. EHIB, FG
b corol. HI, BFGE; les triangles EHG, BFI. b ſeront
8. 1. equiangles & egaux entr'eux, & partant ſembla-
c 15. 11. bles; c mais ils ſont auſſi paralleles EH, HG, par
leſquelles le plan EHG eſt mené eſtant paralle-
les à BI, IF, par leſquelles eſt mené le plan BIF.

Donc le solide BIFGHE, contenu des 2. triangles EHG, BIF, egaux, semblables & paralleles opposez, & des 3. parallelogrammes EGFB, BEHI, IFGH est prisme par la definition. Ainsi le solide CFGHIK sera monstré prisme d car FC, CG, GF estant egales & paralleles à IK, KH, HI, aux parallelogr. CFIK, CGHK, FGHI, les triangles CFG, HIK seront egaux & equiangles entr'eux & partant semblables: e Mais ils sont paralleles, CF, CG, par lesquelles est mené le plan CFG, estant paralleles à KI, KH, par lesquelles passe le plan KIH. Donc le solide CFGHIK contenu des deux triangles opposez CFG, HIK, egaux semblables & paralleles, & des trois parallelogrammes, CFIK, KHGC, IFGH, est prisme: Et iceux prismes EBFGHI, CFGHIK sont de mesme hauteur, sçauoir entre les plans paralleles BCGE, HIK, & la base quadrangulaire estant double de la triangulaire. f Ils seront egaux entr'eux.

d 34. 11.
e 15 11.
f 40. 11.

Finalement le prisme EBFGHI, estant plus grand que la pyramide EBFI le tout que sa partie; mais EBFI, pyram. est egale & semblable à la pyram. AEGH, & aussi à la pyram. HIKD, comme il est manifeste par l'egalité & similitude des triangles: Les prismes EBFGHI, CFGHIK, seront plus grands que les pyram. AEGH, HIKD: Partant iceux prismes excedent la moitié de la pyram. totale ABCD; mais icelles pyram. defaillent de la moitié de la mesme totale. Car vn tout estant diuisé en 2. parties inegales, la plus grande partie excede la moitié d'iceluy, & la moindre defaut d'icelle moitié. Donc toute pyramide ayant la base triangulaire, &c. Ce qu'il

falloit demonſtrer.

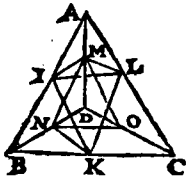
THEOREME 4. PROP. 4.

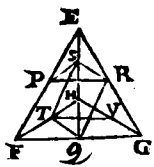
iv. S'il y a deux Pyramides de meſme hauteur ayant les baſes triangulaires; & que chacune d'icelles ſoit diuiſee en deux pyramides egales entr'elles, & ſemblables à la toute; & en deux priſmes egaux; Et que ſemblablement l'vne & l'autre des pyramides prouenuës de ceſte premiere diuiſion ſoit diuiſee; & que cela ſe face touſiours de meſme façon: Comme la baſe de l'vne des pyramides ſera à la baſe de l'autre; ainſi auſſi tous les priſmes qui ſont en l'vne des pyramides ſeront à tous les priſmes de l'autre, egaux en multitude.

Soient ſur les baſes triangulaires ABC, EFG, 2. pyramides ABCD, EFGH de meſme hauteur, dont les coſtez ſoient diuiſez en 2. egalement, & conioinctes des lignes droictes des diuiſions comme en la precedente, en ſorte que chacune ſoit diuiſee en deux pyramides egales entr'elles & ſemblables à la toute, ſçauoir en AILM, MNOD, EPRS, STVH; & en deux priſmes egaux IBKLMN, CKLMNO, PFQRST, GQRSTV; comme veut la precedente: Et que les pyramides faictes AILM, MNOD; EPRS, STVH ſoient entẽduës eſtre diuiſees de meſme, & ainſi de ſuite. Ie dis que tous les priſ-

mes faicts en la pyramide ABCD, ſont à tous les priſmes faicts en la pyramide, E F G H, egaux aux premiers en multitude, comme la baſe ABC, à la baſe EFG.

Car puis que comme B C à C K, ainſi F G à G Q, l'vne & l'autre ligne eſtant diuiſee en deux egalement; & les triangles A B C, LKC, eſtant ſemblables & ſemblablement poſez: a Itẽ les EFG, RQG: b auſſi comme le triangle ABC ſera au triang. LKC, ainſi le triangle EFG au triang. RQG. & en changeant, comme ABC à EFG, ainſi LKC, à RQG, mais cõme LKC à RQG ainſi le priſme CKLMNO au priſme GQRSTV, comme ſera monſtré incontinent, & partant ainſi le priſme IBkLMN, au priſme P F Q R S T, ceux-cy eſtant egaux à ceux-là: Et comme vn priſme ſeul, ſçauoir IBKLMN à vn ſeul priſ. P F Q R S T: c ainſi les 2. priſmes IBKLMN, CKLMNO, enſemble, ſont aux 2. PFQRST, GQRSTV enſemble. Donc auſſi comme la baſe A B C, à la baſe E F G, ainſi les 2. priſmes en la pyram. A B C D, au 2. en la pyramide E F G H: ſemblablement on monſtrera que les 2. priſmes qui ſont aux pyramides AILM, MNOD, faictes en la pyram. AB C D, ſont aux 2. priſmes qui ſont aux pyram. EPRS. STVH, faictes en la pyram. EFGH, comme les baſes A I L, M N O, de ces pyram. là ſont aux baſes EPR, STV, de celles-cy: & ainſi de ſuitte faiſant touſiours la meſme diuiſion. Mais com-





a corol. 4. 6.
b 22. 6.
c 12. 5.

me ces baſes là celles-cy, ainſi LKC, baſe qui eſt egale à celles là & ſemblable, eſt à la baſe RQG, qui eſt egale & ſemblable à celles cy, comme il eſt demõſtré en la precedente, c'eſt à dire, ainſi la baſe ABC, à la baſe EFG. Donc auſſi comme la baſe ABC à la baſe EFG, ainſi les priſmes de chaque pyram. faicte en la pyramide de ABCD, ſeront aux priſmes de chaque pyram. faicte en la pyram. EFGH. Partant auſſi comme les priſmes de la pyram. ABCD aux priſmes de la pyr. EEGH, ainſi les priſmes tant de la pyra. AILM, ſont aux priſmes de la pyram. EPRS, que ceux de la pyram. MNOD, à ceux de STVH, & ainſi de ſuitte. Parquoy puis que comme 2. priſmes de la pyram. ABCD, ſont à 2. priſmes de la pyr. EFGH, d ainſi tous les priſmes qui ſont aux pyramides ABCD, AILM, MNOD, &c. enſemble, ſont à tous les priſmes enſemble, qui ſont aux pyramides, EFGH, EPRS, STVH, &c. Si ceux-cy ſont egaux en multitude à ceux là. Pareillement cõme la baſe ABC à la baſe EFG. ainſi tous les priſmes de la pyramide ABCD à tous les priſmes de la pyramide EFGH. Partant ſi deux pyramides de meſme hauteur ayant les baſes triangulaires, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.

d 12. 5.

LEMME.

Or que comme LKC *eſt à* RQG, *ainſi le priſme* CKLMNO *au priſme* GQRSTV, *on le monſtrera ainſi: ſoient entendues des perpendiculaires menees des ſommets* D, H *ſur les baſes* ABC, EFG, *leſquelles ſeront les hauteurs egales des pyramides* ABCD, EFFH. *D'autant donc que les plans paralleles* ABC, MNO,

a coupent 2. lignes droictes, ſçauoir DC, & la perpendiculaire menee de D, proportionellement, mais DC eſt couppee en 2. egalement à O; la perpendiculaire menee de D. ſera auſſi couppee en 2. egalement au poinct, où elle rencontre le plan MNO: par meſme raiſon la perpend. menee de H ſera couppee en 2. egalement par le plan STV; parquoy les perpend. totales eſtant poſees egales, leurs moitiez, ſçauoir la hauteur des priſmes ſeront egales; donc les priſmes CKLMNO, GQRSTV ayant hauteurs egales, b ſeront entr'eux comme les baſes IKC, RQG. a 17. 11. b 34. 11.

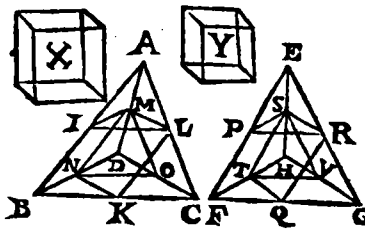
SCHOLIE.

Henrion a pris la demonſtration de ceſte propoſition de Clauius, mot pour mot, où eſt cité le coroll. de la 4. prop. du 6. liur. lequel Coroll. il n'a pas mis en ſon liure, encore qu'il le cite auſſi à d'autres propoſ. cy apres comme à la 4. du 15. l. &c. tellement que ceux qui auront ſon liure auroient auſſi beſoin d'auoir celuy de Clauius.

THEOREME 5. PROP. 5. V.

Les Pyramides qui ſont de meſme hauteur, & ayant les baſes triangulaires, ſont l'vne à l'autre comme leurs baſes.

Soient ABCD, EFGH, pyramides de meſme hauteur, dont les baſes ſont les triangles ABC, EFG. Ie dis que la pyramide eſt à la pyramide comme la baſe à la baſe. Car s'il n'eſt ainſi, ſoit poſé comme la baſe ABC, à la baſe EFG, ainſi la pyramide ABCD, au ſolide X qui ſera moindre ou plus grand que la pyramide EFGH. Soit



premiement plus grande de Y. Et ſoit diuiſee la pyram. EFGH en 2. pyr. egales & en 2. priſmes egaux, ſelon la 3. p. 12. De rechef les 2. pyram. faictes en EFGH, ſoient pareillement diuiſees en 2. pyramides egales & en deux priſmes egaux, & ainſi de ſuite. D'autant donc que ſi de la pyramide E F G H, on oſte plus de la moitié, ſçauoir les 2. priſmes, P F Q R S T, G Q R S T V;
a 3. 12. plus [a] grãds que la moitié de la pyram. EFGH.
b 1. 10. Item des pyram. reſtantes EPRS, STVH, plus de la moitié, ſçauoir leurs priſmes & ainſi de ſuitte; Il [b] reſtera en fin vne moindre grãdeur que Y, excez de EFGx, ſur le ſolide X. Soit donc maintenant la grandeur reſtãte moindre: Mais la pyr. EFGH eſtant poſee egale aux ſolides X, Y, les priſmes reſtans en la pyram. EFGH, ſeront plus grands que X. Soit diuiſee la pyram. ABCD en 2. pyram. egales & en 2. priſmes egaux: & auſſi ſemblablement, les pyram. faictes, A I L M, M N O D', en 2. pyram. egales & en 2. priſmes egaux; & cela ſoit faict autant de fois qu'en la
c 4. 12. pyram. E F G H. [c] D'autant donc que tous les priſmes en la pyram. A B C D, ſont à tous ceux de la pyram. EFGH, egaux en nombre, comme la baſe A B C à la baſe E F G, c'eſt à dire comme la pyram. A B C D à X. Mais tous les priſmes en la pyram. A B C D, eſtant moindres que la toute
d 14. 5. A B C D; [d] Auſſi tous les priſmes en la pyram.

EFGH, seront moindres que le sol. X. Mais ils sont aussi monstrez plus grands. Ce qui est absurde. Donc X n'est moindre que EFGH.

Soit en apres le solide X plus grand que la pyram. EFGH. Donc la pyram. ABCD estant posee à X comme la base ABC à la base EFG: par conuersion de raison X sera à ABCD, comme la base EFG à la base ABC. Comme X est à ABCD pyram. ainsi la pyram. EFGH, soit posee au solide Y. Et X estant posé plus grand que EFGH, e la pyram. ABCD, sera plus grande c 14.5. que Y. Donc comme la base EFG, est à la base ABC, ainsi la pyram. EFGH, à Y. qui est moindre que la pyramide ABCD. Ce qui est absurde. Estant desia monstré que comme la base est à la base, ainsi la pyramide ne peut estre à vn solide moindre que la pyramide. Donc le solide X n'est plus grand que la pyramide EFGH, & aussi est monstré n'estre moindre, partant egal. Parquoy puis que comme la base ABC est à la base EFG, ainsi la pyramide ABCD, est posee à X. f Mais ABCD pyram. est à X, comme à la f 9.5. pyram. EFGH egale à X solide. Aussi comme la base ABC à la base EFH, ainsi la pyr. ABCD, à la pyramide EFGH. Donc les pyramides de mesme hauteur, &c. Ce qu'il falloit demonstrer.

SCHOLIE.

En conuertissant. Si les pyramides triangulaires sont l'vne à l'autre comme leurs bases, elles seront de mesme hauteur. Car si on croit l'vne plus haute que l'autre; de la plus haute en soit couppé vne egale à la moindre. Et menees des lignes droittes à tous les angles de la ba-

se, du poinct de la section: Comme la base à la base,
g 9.5. *ainsi la pyramide à la pyramide lors cõstituees; mais elle estoit ainsi ainsi à toute la pyr.:* g *Parquoy la pyramide constituee sera egale à la toute: la partie à son tout. Ce qui est impossible.*

COROLLAIRE.

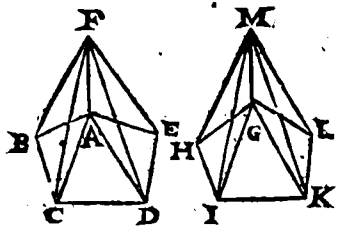
D'icy il aduient que les pyramides de mesme hauteur constituees sur mesme base, ou bases egales triangulaires sont egales entr'elles; ayants mesme raison que leurs bases qui sont posees egales, ou vne mesme.

Il s'ensuit au contraire que les pyramides triangulaires egales, constituees sur vne mesme base ou bases egales, sont de mesme hauteur. Et que les pyramides triangulaires egales ayant mesme hauteur, ont bases egales ou vne mesme, lesquelles 2. choses on monstrera par la premiere partie de ce corollaire, par mesme discours dont on a vsé en la demonstration de la conuerse de la p. 30. & 31. li. 11. Si vne autre pyramide est constituee, tant en la hauteur que sur la base retranchee.

VI. THEOREME 6. PROP. 6.

Les pyramides qui sont de mesme hauteur, & ayans les bases polygones, sont l'vne à l'autre comme leurs bases.

Soient les pyramides ABCDEF, GHIKLM. Dont les bases ABCDE, GHIKL ont les costez egaux en multitude. Ie dis que la pyramide est à la pyramide comme la base à la base.

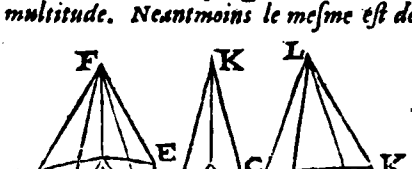


Car ayant reduit les baſes en triangles egaux en nombre, chacune pyramide ſera diuiſee en autant de pyramides triangulaires. a Mais puis que comme la baſe A B C eſt à la baſe A C D, ainſi la pyramide ABCF, à la pyram. ACDF, en compoſant comme la baſe A B C D, à la baſe A C D, ainſi la pyram. ABCDF, à la pyram. A C D F: b Mais de rechef, comme la baſe A C D, à la baſe A D E, ainſi la pyramide A C D F, à la pyram. A D E F: Donc en raiſon egale comme la baſe A B C D, à la baſe A D E, ainſi la pyramide A B C D F, à la pyram. A D E F: Donc en compoſant comme la baſe A B C D E, à la baſe A D E; ainſi la pyram. A B C D E F ſera à la pyram. A D E F. Par meſme raiſon, comme la baſe G H I K L, ſera à la baſe G K L, ainſi la pyram. G H I K L M à la pyra. G K L M: & par raiſon, conuerſe comme la baſe G K L à la baſe G H I K L, ainſi la pyram. G K L M, à la pyram. G H I K L M. c De rechef, d'autant que comme la baſe A D E eſt à la baſe G K L, ainſi la pyramide A D E F, à la pyram. G K L M; Il y aura 4. baſes A B C D E, A D E, G K L, G H I K L en meſme raiſon que les 4. pyramides A B C D E F, A D E F, G K L M, G H I K L M Donc en raiſon egale comme la baſe A B C D E, à la baſe G H I K L, ainſi la pyramide A B C D E F à la pyramide G H I K L M. Et partant les pyramides qui ont, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.

a 5. 12.
b 5. 12.
c 5. 12.

SCHOLIE.

Combien qu'il ſoit parlé en la demonſtration de cette p. des pyram. de meſme hauteur ſeulement, ſelon les interp. dont les baſes polygones ont les coſtez egaux en multitude. Neantmoins le meſme eſt demonſtré des



pyramides de meſme hauteur dõt la baſe de l'vne a plus de coſtés que celle de l'autre. Car en premier lieu ſoient 2. pyram. de meſme hauteur, ABCDEF, GHIK, & la baſe de la premiere ſoit polygone, ſçauoir pentagone, & celle de la ſeconde triangulaire. Ie dis que la pyram. eſt à la pyram. comme la baſe à la baſe: car ayant reduit le pentagone en triangles

a 5. 12. *la pyram. ſera diuiſee en autant de pyramides. 2 Et puis que comme la baſe ABC premiere grandeur à la baſe GHI 2. grand. ainſi la pyram. ABCF 3. à la pyram. GHIK 4. & ſemblablement comme la baſe ACD 5. à gr. à la baſe GHI, 2. ainſi la pyram. ACDF, 6. à*

b 24. 5. *la pyram. GHIK 4. gr. b Comme la baſe ABCD premiere & 5. enſemble ſera à la baſe GHI 2. ainſi la pyram. ABCDF 3. & 6. ſera à la pyram. GHIK 4. gr. De rechef d'autant que comme la baſe ABCD, eſt à la baſe GHI, ainſi la pyram. ABCDF eſt à la pyram.*

c 5. 12. *GHIK, comme il eſt demonſtré; c & que comme la baſe ADE 5. grand. eſt à la baſe GHI 2. ainſi la pyram.*

d 24. 5. *ADEF 6. à la pyram. GHIK 4. d La baſe ABCDE ſera à la baſe GHI, comme la pyram. ABCDEF eſt à la pyram. GHIK. Ce qui eſt propoſé. Et faut faire auſſi touſiours*

touſiours s'il y a d'auantage de triangle en la baſe polygone, &c.

Or la pyramide ABCDEF eſtant à la pyram. GHIK (comme eſt demonſtré,) comme la baſe polygone ABCDE, eſt à la baſe triangl. GHI: auſſi en changeant comme GHI ſera à ABCDE, ainſi GHIK ſera à ABCDEF pyram. Partans 2. quelconques pyram. dont l'vne à la baſe polygone, & l'autre triangulaire ſont touſiours comme leurs baſes, de quelque façon que l'on commence. Car ſoit que la demonſtration commence au polygone & à ſa pyram. comme appert par la demonſtr. toutesfois en changeant on peut commencer au triangle & à ſa pyramide comme dit eſt.

Secondement ſoient 2. pyermides de meſme hauteur ABCDEF, GHIKL, dont les baſes ſont polygones, & y a plus de coſtez en vne baſe qu'en l'autre. Ie dis que la pyramide eſt à la pyramide, comme la baſe à la baſe. Car ayant reduit le polygone ABCDE en triangles ABC, ACD, ADE; la pyramide ſera diuiſee en autant de pyramides. Et puis que comme la baſe triang. ABC, 1. gr. eſt à la baſe polygone GHIK 2. gr. ainſi la pyramide ABCF, 3. eſt à la pyramide GHIKL, 4. Et comme la baſe ACD, 5 eſt à la baſe GHIK, 2. grandeur, ainſi la pyramide ACDF, 6. eſt à la pyramide GHIKL, 4. e Auſſi comme la baſe ABCD e 24. 5.
1. grandeur auec la 5. ſera à la baſe GHIk, 2. ainſi la pyramide ABCDEF, 3. & 6. grandeur, ſera à la pyramide GHIKL, 4. grandeur. Derechef d'autant que comme la baſe ABCD, 1. grandeur à la baſe GHIK, 2. ainſi la pyramide ABCDEF, 3. à la pyramide GHIKL, 4. comme nous venons de demonſtrer: Et auſſi comme la baſe ADE, 5. grandeur à la baſe GHIK, 2. ainſi la pyramide ADEF, 6. à la pyramide GHIKL, 4. comme il eſt monſtré auparauant f auſſi comme f 24. 5.

la baſe ABCDE premiere grandeur auec la 5. à la baſe GHIK 2. ainſi la pyramide ABCDEF 3. gr. auec la 6. à la pyramide GHIKL, 4. grandeur. Ce qui eſt propoſé. On procedera de meſme s'il y a pluſieurs triangles en la baſe ABCDE. Or ceſte 6. propoſition, & ce qui eſt demonſtré en ce ſcholie ſe conuertit ainſi.

Les pyramides de quelconques baſes qui ſont entr'elles comme leurs baſes : ſont de meſme hauteur.

Ce qui ſera demonſtré tout de meſme que les choſes qui ont eſté dites au ſchol. de la 5. p. de ce liure ont eſté demonſtrees.

COROLLAIRE.

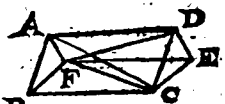
Il eſt auſſi manifeſte de là, que les pyramides de meſme hauteur conſtituees ſur baſes egales multilateres ou ſur vne meſme, ſont egales entr'elles ayant meſme proportion que leurs baſes qui ſont poſees egales ou vne meſme.

Derechef il s'enſuit au contraire que les pyramides multilateres egales, & conſtituees ſur baſes egales ou vne meſme, ont meſme hauteur. Et que les pyramides multilateres egales ayant meſme hauteur, ont les baſes egales, ſi elles ne ſont ſur vne meſme. Ces 2. choſes ſeront demonſtrees comme nous auons dit au corol. de la 5. p. de ce liure.

THEOREME 7. PROP. 7.

Tout priſme ayant la baſe triangulaire, peut eſtre diuiſé en trois pyramides

egales entr'elles, ayant les baſes triangulaires.



Soit le priſme ABCD EF, dont les deux triangles oppoſez ſont egaux & ſemblables ABF, DCE. Ie dis qu'iceluy priſme peut eſtre diuiſé en trois pyramides triangulaires egales entr'elles.

Car aux trois parallelogrammes ſoient menez trois diametres ſçauoir AC au parall. ABCD: CF au parall. BCEF, & FD au parall. ADEF: a D'autant que les triangles ABC, ADC, ſont egaux, b & que comme la baſe ABC, eſt à la baſe ADC, ainſi la pyramide ABCF, à la pyramide ADCF; ces pyramides ayans meſme hauteur, ſçauoir la perpendiculaire menee du ſommet F, au plan ABCD; les pyramides ABCF, ADCF, ſeront egales entr'elles: ſemblablement les pyramides ADFC, EFDC, conſtituees ſur les baſes egales ADF, EFD, & en meſme hauteur, ſçauoir de la perpendiculaire menee du ſõmet C ſur le plan ADEF, ſeront egales: mais la pyr. ADCF, eſt la meſme que la pyramide ADFC, celle là eſtant contenue de quatre plans, ſçauoir de la baſe ADC, & des triangles ADF, ACF, DCF, & celle cy des meſmes 4. plans. Donc les 3. pyramides ABCF, ADCF, EFDC, ou CDEF (qui eſt la meſme que EFCD) compoſans tout le priſme, ſont egales entr'elles. Partant tout priſme ayant la baſe triangulaire, &c, Ce qu'il falloit demonſtrer.

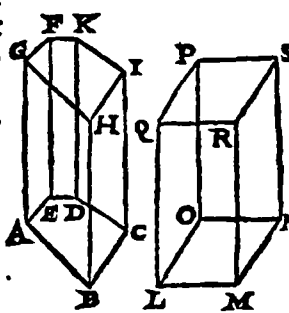
a 34 1
b 5. 12

COROLLAIRE.

Il s'enſuit de cecy que toute pyramide eſt la tierce partie du priſme, qui a meſme hauteur, & meſme baſe qu'icelle, ou egales, ou bien tout priſme eſt triple de la pyramide qui a meſme hauteur qu'iceluy & meſme baſe, ou egales.

SCHOLIE.

Les priſmes qui ſont ſous meſme hauteur, quelconques ſoient les baſes, ſont entr'eux comme leurs baſes.



Soient 2. priſmes de meſme hauteur ABC DEFGHIK, LMNOPQRS, dont les baſes ſont multilateres. Ie dis que comme la baſe AC eſt à la baſe LN, ainſi le priſme eſt au priſme. Car ſi de tous les angles de l'vne & l'autre on mene des lignes à vn poinct du plan ſuperieur oppoſé à la baſe, l'on fera 2. pyramides de meſme hauteur que les priſmes ayant meſmes baſes, donc par le coroll. de ceſte p. chacune de ces pyram. ſera la tierce partie de ſon priſme.

a 15. 5. *Partant comme la pyramide à la pyramide, ainſi le priſme ſera au priſme: mais la pyram. eſt à la pyram.*

b 6. 12. *comme la baſe à la baſe,* b *comme il eſt demonſtré. Donc comme la baſe à la baſe, ainſi le priſme au priſme, ce qui eſt propoſé.*

COROLLAIRE. 2.

D'où il s'enſuit que les priſmes de meſme hauteur ſur vne meſme baſe, ou baſes egales quelconques, ſont egaux entr'eux: puis qu'ils ont meſme raiſon que leurs baſes qui ſont poſees egales ou vne meſme: Au contraire les priſmes egaux ſur baſes egales, ou vne meſme ſont de meſme hauteur; & les priſmes egaux de meſme hauteur ont les baſes egales ou vne meſme. Ce qui ſera demonſtré comme à la conuerſe de la 31. p. 11.

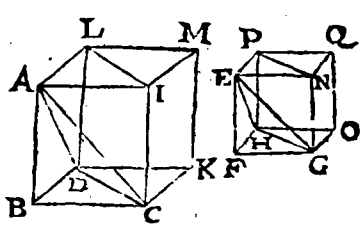
Henrion (*ſelon ſa couſtume*) *a coppié ceſte prop. tout de meſme qu'elle eſtoit deſia traduitte, ſans conſiderer ſi elle eſt conforme ny au texte d'Euclide ny à la demõſtration, ainſi.* Tout priſme eſt diuiſé en trois pyramides egales, ayant les baſes triangulaires. *Ce qui n'eſt pas vray, comme il eſt manifeſte, par ce qui a eſté dit cy deſſus, & meſme par le corollaire qu'il a pris de Clauius, où il dit;* Il s'enſuit de cecy que toute pyramide eſt la tierce partie de tout priſme qui a meſme hauteur & meſme baſe qu'icelle, &c. *Donc ſi vne pyramide a pour exemple la baſe quadrilatere, elle ſera la tierce partie d'vn priſme qui aura auſſi la baſe quadrilatere & meſme hauteur qu'icelle; & icelluy pourra eſtre diuiſé en 3. telles pyramides qui auront les baſes quadrilateres & non triangulaires:* Et *auſſi Euclide ne la pas ainſi propoſé: mais cõme s'enſuit:* πᾶν πρίσμα τριγώνον ἔχον βάσιν, διαιρεῖται εἰς τρεῖς πυραμίδας ἴσας ἀλλήλαις, τριγώνους βάσεις ἐχούσας *C'eſt à dire,* Tout priſme ayant la baſe triangulaire, ſe diuiſe en trois pyramides egales entr'elles, ayant les baſes triangulaires: *Or tout*

prisme qui a la base quadrilatere est diuisé en 2. prismes ayant les bases triangulaires, chacun desquels est diuisé en 3. pyram. egales ayant les bases triangulaires. comme il est monstré, & 2. d'icelles prises ensemble font vne seule pyramide ayant la base quadrilatere, laquelle est la tierce partie de tout le prisme. Donc tout prisme n'est pas diuisé en 3. pyramides egales entr'elles ayant les bases triangulaires : mais bien tout prisme ayant la base triangulaire, comme dit Euclide, & c.

THEOREME 8. PROP. 8.

Les pyramides semblables, & qui ont les bases triangulaires, sont en raison triplee de leurs costez homologues.

Soient ABCD, EFGH, pyramides semblables ayant les bases triangulaires ABC, EFG. Ie dis qu'elles sont en raison triplee des costez de mesme raison BC, FG.



Car soient acheuez les parallippedes BM, FQ, les pyramides estant semblables les angles plans A BC, EFG sont egaux, & comme AB, à BC, ainsi EF, à FG, les paralleiogram. BI, FN, seront semblables : Semblablement les angles ABD, EFH estant egaux, & comme AB, à BD, ainsi EF, à FH : Item les angles DBC, HFG egaux, & comme DB, à BC, ainsi HF, à FG : les

parallelogram. AL, Bk, ſeront ſemblables aux parallelogr. FP, FO. [a] Mais tant les 3. BI, Bk, BL, du parallelip. BM, ſont egaux & ſemblables aux 3. oppoſez DM, AM, CM, que les 3. FN, FO, FP, du parallelip. FQ, le ſont aux 3. oppoſez HQ, EQ, GQ. Donc les 6. plans contenant le ſolide BM, ſont egaux aux 6. du ſolide FQ. [b] Parquoy les parallelip. BM, FQ, ſont ſemblables : mais d'autant que les lignes LI, PN, eſtant menees les [c] priſmes DBCILA, HFGNPE ont meſme raiſon que les parallelip. BM, FQ, leurs doubles, & les pyramides ABCD, EFGH, meſme raiſon que leſdits priſmes triples d'icelles ; [d] les pyramides auront auſſi meſme raiſon que les parallelip. Mais [e] les parallelip. BM, FQ, eſtant en raiſon triplee de leurs coſtez homologues BC, FG ; les pyramides ABCD, EFGH, ſeront auſſi en raiſon triplee de BC, à FG. Donc les pyramides, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.

[a] 14. 11.
[b] 9. d. 1.
[c] 15. 5.
[d] 11. 5.
[e] 33. 11.

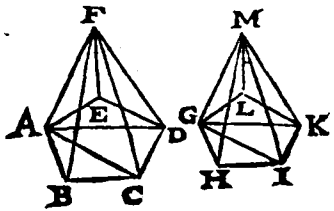
COROLLAIRE.

Il eſt auſſi manifeſte, que les pyramides ſemblables dont les baſes ont plus de trois coſtez, ſont en raiſon triplee de leurs coſtez homologues.

Car ſoient ABCDEF, GHIKLM, pyr. ſemblables ayant rectilignes ſemblables de pluſieurs coſtez pour baſes. Ie dis que ces pyramides ſont en raiſon triplee des coſtez homologues AB, GH. Car de A & G, ayant mené les lignes AC, AD, GI, GK, aux angles oppoſez ; [a] les baſes ſembl. ſeront diuiſees en nombre

[a] 20. 6.

egal de triãgles ſemblables, ſçauoir ABC, ACD, ADE, ſeront ſemblables à GHI, GIK, GKL. Donc les pyram. eſtant ſemblables les triangles AFB,



GMH ſont ſemblables, & l'angle FAB, egal à MGH, & comme FA, à AB, ainſi MG, à GH: mais comme AB, à AC, ainſi GH, à GI, les triangles ABC, GHI, eſtant ſembl. Partant en raiſon egale, comme FA, à AC, ainſi MG, à GI. Derechef d'autant que comme AC, à CB, ainſi GI, à IH; ABC, GIH, eſtant ſemblables: & comme GB à CF, ainſi IH, à IM; BCF, HIM, triang. eſtant, ſembla. à cauſe des pyramides ſemblables; & en raiſon egale, comme AC à CF, ainſi GI à IM; donc eſtant comme FA à AC, ainſi MG à GI, & comme AC à CF, ainſi GI à IM: auſſi en raiſon egale comme FA à FC, ainſi MG à MI:

b 5. 6. bDonc AFC, GMI, ſeront equiangles, partant ſemblables. Mais AFB, BFC, ABC, ſont auſſi ſembla.

c 8.d.11 aux triang. GMH, HMI, GHI. Donc c les pyram. ABCF, GHJM, ſont ſemblab. & ſemblablement

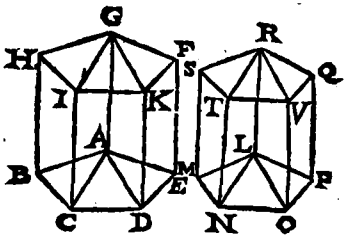
d 8.11. auſſi ACDF, GHIKM: & ADEF, GKLM. d Donc les pyr. ABCF, ACDF, ACDEF, ſeront à GHIM, GIKM, GKLM, chacune à la ſienne en raiſon triplee des coſtez homologues AB, CD, DE, à GH, IK, KL, chacun au ſien: y ayant donc vne meſme raiſon de AB, CD, DE, à GH, IK. kL; les pyram. ABCF, ACDF, ADEF, auront vne meſme raiſon, ſçauoir

e 12. 5. triplee à GHIM. GIkM, GkLM. Donc e comme vne ſeule ABCF, à vne ſeule GHIM, ainſi toutes enſemble, ſçauoir la toute ABCDEF, à toutes, ſçauoir

à la toute GHIKLM. f Donc la pyram. ABEF, eſtant à la pyr. GHIM, en raiſon triplee des coſtez homologues AB, GH, la pyr. ABCDEF, ſera auſſi à la pyr. GHIKLM, en raiſon triplee de AB à GH. Ce qui eſtoit propoſé. f 8. 12.

SCHOLIE.

Par meſme raiſon les priſmes ſemblables ſeront en raiſon triplee de leurs coſtez homologues. Car ſoient ABCDEFGHIK, LMNOPQRSTV, priſmes ſemblables. Ie dis qu'ils ſont en raiſon triplee de leurs coſtez homologues. Car ſi de A & L, on mene AC, AD, LN, LO, à les triangles ABC, CAD, DEA, ſeront ſemblables aux trian. LMO, LNO, OPL: & ſi de G & K, on mene auſſi GI, Gk, RT, RV, les trian. GHI, GIK, GkF, ſeront ſemblables à RST, RTV, RVQ, & aux deuant dits, tous les plans oppoſez des priſmes eſtant ſemblables par la definition du priſme. Et les parallelog. CH, NS, eſtãt ſemblables par la ſimilitude des priſmes, comme CI, à CB, ainſi TN, à NM: mais comme BC à CA, ainſi NM à NL, les triangles eſtans ſemblables. Donc en raiſon egale comme CI à CA, ainſi TN à NL. Derechef l'angle ſolide N, eſtant egal à l'angle ſolide C, par la ſimilitude des priſmes, l'vn eſtant poſé ſur l'autre, l'angle MNO, conuiendra ſur l'angle BCD, & TNM, ſur ICB, & TNO, ſur ICD: mais la ligne NL, conuient auſſi ſur CA, les angles LMN, BCA eſtant egaux:



a 10. 6.

Donc IAC, TNL sont egaux, & les costez autour d'iceux estant monstrez proportionaux, les parallelo. CG, NR, seront semblables : mais les parallelog. CH, HA, sont sembl. à NS, SL, & les triangles ABC, GHI, à LMN, RST. b *Partant les prismes ABCI GH, LMNTRS sont semblables. Ainsi les prismes CDAGIK, NOLRTV seront monstrez semblables, & aussi AEDKGF, LPOVRQ. Donc les prismes ABCIGH, CDAGIK, AEDKGF sont à LMNT RS, NGLRTV, LPOVRQ chacun au sien, en raison triplee des costez homologues BC, CD, DE, à MN, NO, OP chacun au sien :* c *comme il appert. Parquoy on demonstrera en la mesme maniere que les prismes AB CDEFGHIK, LMNOPQRSTV sont en raison triplee des costez homologues BC, MN, tout ainsi qu'il a esté demonstré cy devant aux pyramides de plusieurs angles.*

b 8.d.11

c 34.11

D'où l'on collige que les pyramides multangles semblables, se diuisent en pyramides triangulaires semblables, & egales en nombre & homologues à leurs touts. Ce qui est manifeste de la demonstration du precedent corollaire.

Il s'ensuit aussi que les prismes multangles semblables, se diuisent en prismes semblables ayant les bases triangulaires, & egaux en nombre & homologues à leurs touts, comme il appert de la demonstration de ce scholie.

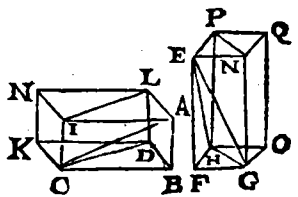
vij

THEOREME 9. PROP. 9.

Les bases & les hauteurs des pyramides egales, ayant les bases triangulaires sont reciproques : Et les pyramides

ayant les baſes triangulaires, deſquelles les baſes & les hauteurs ſont reciproques ſont egales.

Soient les pyramides ABCD, EFGH, egales ayant les baſes triangulaires. Ie dis que les baſes ABC, EFG, & les hauteurs ſont reciproques : c'eſt à dire comme ABC, à EFG, ainſi la hauteur de la pyr. EFGH, à la hauteur de la pyramide ABCD.



Car ayant acheué les parallelipedes BM, FQ, de meſme hauteur que les pyramides, & ayant mené LI, PN, les priſmes DBCILA, HFGNPE, (eſtant triplees des pyramides poſees egales) ſeront egaux entr'eux, & partant les parallelip. BM FQ auſſi egaux, eſtant doubles des priſmes; [a] & partant [a] 34. 11. leurs baſes & leurs hauteurs ſeront reciproques, c'eſt à dire, comme la baſe BI, à la baſe FN, ainſi la hauteur du ſolide FQ, à la hauteur du ſolide BM; [b] Mais comme la baſe BI, à la baſe FN, [b] 15. 5. ainſi le triangle ABC, au triangle EFG. Donc auſſi comme la baſe ABC à la baſe EFG, ainſi la hauteur de la pyram. EFGH, à la hauteur de la pyram. ABCD, puis que les hauteurs des pyramides ſont meſmes que celles des parallelipedes. Donc les baſes & les hauteurs des pyramides egales ſont reciproques.

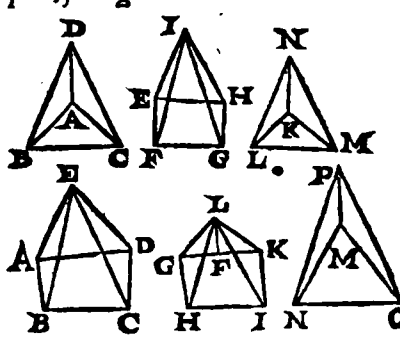
Soient maintenant les baſes & les hauteurs reciproques. Ie dis que les pyramides ſont egales. Car ayant faict la conſtruction, comme au-

parauant. c D'autant que comme ABC eſt à
c 15. 5. EFG, ainſi le parall. BI, au parallelog. FN, &
les hauteurs des parallelip. & des pyramides
eſtant meſmes; les baſes des parallelip. & leurs
d 34 11. hauteurs ſeront auſſi reciproques. d Partant les
parallelip. BM, FQ ſeront egaux: Donc les
priſmes DBCILA, HFGNPE, leurs moitiez,
ſont auſſi egaux: & partant auſſi les pyramides
tierces parties des priſmes auſſi egales. Donc
les baſes & les hauteurs des pyramides, &c. Ce
qu'il falloit demonſtrer.

SCHOLIE.

Semblablement les baſes & les hauteurs des pyramides egales (dont les baſes ne ſont triangulaires) ſont reciproques: & les pyramides (dont les baſes ne ſont triangulaires) ayant les baſes & les hauteurs reciproques, ſont egales.

Car ſoient premieremẽt 2. pyramides egales, l'vne deſquelles ſçauoir ABCD, ait la baſe triangulaire, & EFGH,



non: Et ſoit faict KLM, triangle egal à la baſe EFGH n n triangulaire, & ſur iceluy la pyramide KLMN, de meſme hauteur que la pyramide FI. Donc les pyramides EFGHI, KLMN, ayant baſes egales & meſme

hauteur; e seront egales. Mais EFGHI, pyr. a esté posee egale à ABCD, pyr. Donc ABCD, KLMN, seront aussi egales: & ayant les bases triangulaires, f comme la base ABC, à la base KLM, ou à EFGH son egale, ainsi la hauteur de la pyr. KLMN, c'est à dire, la hauteur de EFGH, sera à la hauteur de ABCD. Donc les pyram. egales ABCD, EFGHI, ont les bases & les hauteurs reciproques.

e schol. 6. 12. f 9. 12.

Soient maintenant leurs bases & leurs hauteurs reciproques. Ie dis que ces pyram. sont egales: Car (demeurant la mesme construction) la base ABC, estant posee à la base EFGH, comme la hauteur de la pyram. EFGHI, à la hauteur de la pyram. ABCD, aussi la base ABC, sera à la base KLM, comme la hauteur de la pyr. KLMN, sera à la hauteur de la pyr. ABCD: g Donc les les pyr. ABCD, KLMN, sont egales. Mais comme il est demonstré, h la pyram. KLMN, est egale à la pyr. EFGHI, donc ABCD, sera aussi egale à EFGHI, ce qui est proposé.

g 9. 12. h schol. 6. 12.

Soient en apres les pyramides egales ABCDE, FGHIKL, dont les bases ayent plusieurs angles: & derechef soit faict le triangle MNO, egal à la base ABCD, & MNOP, pyr. soit faicte de mesme hauteur que ABCDE; donc, i comme il est demonstré MNOP, sera egale à ABCDE, laquelle a esté posee egale à FGHIKL, pyr. Donc la pyr. MNOP, sera aussi egale à FGHIkL, donc, comme il est demonstré cy devant, comme la base MNO, c'est à dire, la base ABCD, sera à la base FGHIK, ainsi la hauteur de FGHIKL, pyr. sera à la hauteur de MNOP: c'est à dire, à la hauteur de ABCDE (car ces hauteurs sont posees egales.) Partant les pyr. ABCDE, FGHIKL, ont les bases & les hauteurs reciproques.

i schol. 6. 12.

Mais soient les bases & les hauteurs d'icelles pyr.

reciproques. Ie dis qu'elles sont egales: Ce *que l'on demonstrera comme auparauant.*

Or on demonstrera que toutes ces choses conuiennent aussi à tout prisme. Car si les prismes sont egaux, les pyramides de mesme hauteur qu'iceux ayant mesme base seront egales entr'elles, [k] *estant les tierces parties des prismes;* [l] *ou les deux tierces parties si les bases sont parallelogrammes: Donc comme nous venons de demonstrer les bases & hauteurs d'icelles pyr. seront reciproques: & ces bases & hauteurs estant les mesmes que des prismes, les bases & les hauteurs des prismes seront reciproques.*

k coroll. 7. 12. l schol. 7. 1.

Derechef, si les bases & les hauteurs des prismes sõt reciproques, les bases & hauteurs des pyramides ayant mesmes bases & hauteurs que les prismes seront aussi reciproques: Donc comme a esté demonstré les pyramides sont egales: & partant aussi les prismes estant triples ou sesquialteres d'icelles pyr. Ce *qui est propose.*

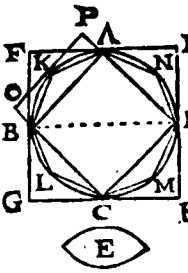
viij THEOREME 10. PROP. 10.

Tout cone est la tierce partie du cylindre qui a mesme base qu'iceluy, & la hauteur egale.

Soit vn cone & vn cylindre ayant mesme base, sçauoir le cercle ABCD, & de mesme hauteur. Ie dis que le cone est le tiers du cylindre.

Car autrement le cylindre sera plus grand ou moindre que le triple du cone. Soit premierement plus grand s'il est possible, comme de la grandeur du solide E. C'est à dire, que du cylindre (dont le cercle ABCD est la base) estant retranché E, le reste sera triple du cone, dont le

meſme cercle AC, eſt la baſe. En iceluy cercle ſoit inſcrit le quarré ABCD, & diuiſé en 2. triangles par BD, diametre, ſur leſquels tri. ſoient entendus eſtre conſtituez 2. priſmes de meſme hauteur que le cylindre: Et le quarré eſtant plus grand que la moitié du cercle,



a comme il appert, il eſt euident que ces 2. priſmes excederont la moitié du cylindre: mais ſi (les deux priſmes oſtez) les reſtez du cylindre ſont plus grands encore que E; ſur les baſes deſdits reſtes ou ſegments, ſoiēt faicts les 4. tri. Iſoſceles AKB, BLC, CMD, DNA, ſur leſquels ſoient imaginez 4. priſmes de meſme hauteur que le cone ou cylindre duquel le cercle ABCD eſt la baſe. Il eſt manifeſte que ces triangles Iſoſceles ſont plus de la moitié des baſes des ſegments reſtans du cylindre, eſtant moitiez des rect. de meſme hauteur, comme BP. Parquoy ces 4. priſmes ſeront plus de la moitié des quatre ſegments: Mais ſi les 8. petits ſegments reſtans du cylindre ne ſont plus petits que E, ſoit touſiours ainſi ſouſtrait plus de la moitié, de ce qui reſte, b & en fin il reſtera vne grandeur moindre que E; & pour abreger ſoient ces huict ſegments plus petits que E. Il eſt donc euident que la colonne compoſee de ces 6. priſmes ayant pour baſe le polygone inſcrit au cercle AC, & de meſme hauteur que le cylindre dōné, ſera plus que triple de ce cone, ſelon ce qui eſt dit cy deſſus. Mais chacun priſme

a ſcho. 9. 4.

b 1. 10.

estant triple de sa pyramide de mesme hauteur & qui a base egale, e pouuant estre diuisé en 5. telles pyramides egales : Il s'ensuit que tous ces prismes faisant la colonne qui a pour base le polygone inscrit au cercle AC, c'est à dire, ceste colonne de masme hauteur que le cylindre est triple de ces 6. pyra. qui font la pyramide seule, ayant le mesme polygone pour base, & de mesme hauteur qu'icelle colonne. Donc ladite pyramide sera plus grande que le cone de mesme hauteur ayant le cercle AC pour base. Ce qui est absurde, la pyramide n'estant que partie du cone. Partant le cylindre n'est plus grand que le triple du cone.

e 7. 12.

Soit donc plus petit, s'il est possible de la quantité de E ; c'est à dire que ostant E du cone que le reste soit le tiers du cylindre. Maintenant du cone dont le cercle AC, est la base, soit osté plus de la moitié, sçauoir la pyramide de mesme hauteur, dont la base est le quarré ABCD, & du reste, sçauoir des 4. segments K, L, M, N, soit osté plus de la moitié, sçauoir la pyramide de chacun segment de mesme hauteur qu'iceluy segment, & ayant pour base le triangle Isoscele en iceluy segment : & soit continué ce retranchement iusques à ce que les segments restans soient plus petits que E ; d ce qui aduiendra : Et pour abreger soient ces 8. petits segments plus petits que E. Il est donc manifeste que la pyramide de mesme hauteur que le cone, ayant cet octogone pour base, est plus grande que le tiers du cylindre donné, estant plus grande que le cone, ayant retranché d'iceluy E. Mais ce cone ainsi retranché est le tiers du cylindre donné, &

d. 1. 10.

la

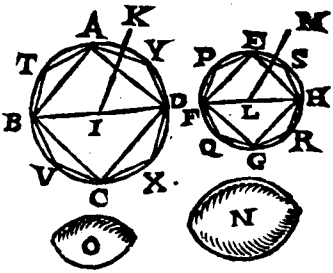
la pyramide auſſi le tiers de la colonne de meſme hauteur ayant pour baſe le meſme octogone, comme il a eſté dit cy deſſus. Donc icelle colonne ſeroit plus grande que le cylindre donné, dont elle eſt partie. Ce qui eſt abſurde. Partant le cylindre donné n'eſt plus petit ny plus grand que le triple du cone, donc egal. Partant tout cone eſt la tierce partie du cylindre, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer. *

THEOREME 11. PROP. 11. ix

Les cones & les cylindres qui ſont de meſme hauteur, ſont l'vn à l'autre comme leurs baſes.

Soient les conet & les cylindres de meſme hauteur, dont les baſes ſont ABC, EFG, & les hauteurs ou axes IK, LM. Ie dis que comme la baſe eſt à la baſe, ainſi le cone eſt au cone, & le cylindre au cylindre: c'eſt à dire, que ſi on entend que comme le cercle ou baſe ABC, eſt au cercle EFG, ainſi le cone BIK, eſt à quelque autre ſolide, comme N, que N ſera egal à FLM. Car s'il n'eſt ainſi il ſera plus grand ou moindre, ſoit premierement plus petit, & de la quantité de O, s'il eſt poſſible, partant N, & O, ſeront egaux au cone FLM, & du cone FLM, comme en la 10. p. ſoit oſté plus de la moitié, à ſçauoir vne pyramide de meſme hauteur que le cone, dont la baſe ſoit le quarré EFGH, & du reſte auſſi plus de la moité, à ſçauoir 4. pyramides de meſme hauteur, ayant pour baſes les 4. trian. iſoſceles EPF, FQG, GRH, HSE, & ainſi de

a 1.10. suitte; a il restera en fin à vne grandeur moindre que O; laquelle pour abreger soit les 8. petits segmens: Il s'ensuit que la pyram. FM, de mesme hauteur



que le cone FM, dont la base est l'octogone EPFQGRHS, sera plus grande que N. Dedans le cercle ABCD, soit inscrit vn polygone semblable au polygone inscrit en la base circulaire EFGH, & sur iceluy soit entendu estre vne pyramide de mesme hauteur que le cone BIK:

b corol. 2.12. b Mais comme le cercle ABC, est au cercle EFG, ainsi le polygone TVXY, est au polygone PQRS; mais comme le cercle ABC, au cercle

c 6.12. EFG, ainsi le cone BK à N: c & comme le polygone au polygone, ainsi la pyramide à la pyr.

d 11.5. de mesme hauteur que les cones: d Donc la pyramide ATBVCXDYK, sera à la pyramide EPFQGKHSM, comme le cone BIK, au solide N: mais ATBVCXDYG, estant moindre

e 14.5. que le cone BIK, la partie que le tout; e aussi la pyram. EPFQGRHSM, sera moindre que N: mais elle a esté monstree plus grande, ce qui est absurde. Donc N, n'est moindre que le cone EFGHM.

Secondement que N, soit plus grand que EFGHM. Donc estant posé comme le cercle ABC, au cercle EFG, ainsi le cone BK à N, par conuersion de raison, comme le cercle EFG, au cercle ABC, ainsi N, au cone BK: & comme N, à

BK, ainsi le cone EFGHM, soit posé à O. Et N estant posé plus grand que le cone FM; f le cone BK, sera aussi plus grand que O. Partant puis que comme le cercle EFG, est au cercle ABC, ainsi N, au cone BK; g Comme le cercle EFGH, au cercle ABC, ainsi le cone FM, à O; plus petit que le cone BK. Ce qui est absurde: estant desia monstré que le cone ne peut estre à vne autre grandeur moindre que l'autre cone, comme la base de celuy là, à la base de celuy cy. Donc N, n'est plus grand ny plus petit que le cone FM, partant egal. Donc estant posé comme la base ABCD, à la base EFGH, ainsi le cone BK à N; h Mais comme le cone BK, est à N, ainsi le mesme cone BK, au cone FM; aussi comme la base ABCD, à la base EFGH, ainsi le cone ABCDK, au cone EFGHM,

f 14. 5.

g 11. 5.

h 7. 5.

Mais i d'autant que comme le cone ABCDK, au cone EFGHM, ainsi le cylindre ABCDK (qui est triple du cone ABCDK) au cylindre EFGHM (qui est triple du cone EFGHM) aussi comme la base ABCD, sera à la base EFGH, ainsi le cylindre ABCDK, sera au cylindre EFGHM. Ce qui se peut aussi demonstrer ainsi que des cones, si au lieu des cones & des pyramides on entend des cylindres & des prismes. Donc les cones & les cylindres, &c. Ce qu'il falloit demonstrer.

i 15. 5.

COROLLAIRE.

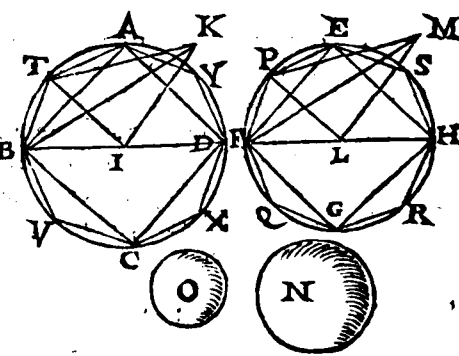
D'où il s'ensuit que les cones & cylindres constituez sur mesme base, ou bases egales, &

de meſme hauteur ſont egaux : & au contraire les cones & cylindres egaux conſtituez ſur meſme baſe, ou ſur egales, ſont de meſme hauteur, & les cones & cylindres egaux de meſme hauteur, ſont auſſi ſur baſes egales; ou vne meſme, ce qui ſera demonſtré comme en la conuerſe de la 31. p. 11.

THEOREME 12. PROP. 12.

Les cones & les cylindres ſemblables, ſont l'vn à l'autre en raiſon triplee des diametres de leurs baſes.

Soient des cones & cylindres ſemblables, dont les baſes ſont les cercles ABC, EFG, & les axes IK, LM, & les diametres des baſes BD, FH. Ie dis que le cone eſt au cone, & le cylindre au cylindre, en raiſon triplee du diametre au diametre.



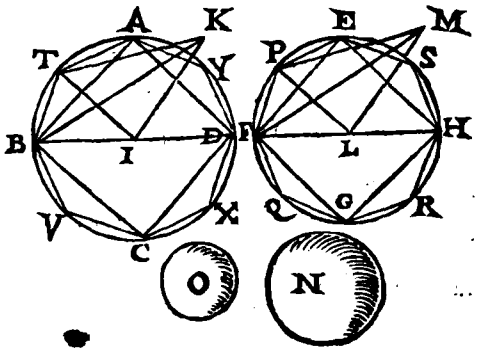
S'il n'eſt ainſi, ſoit le cone ABC DK, à quelque autre grandeur N, plus grande ou moindre que le cone EFGHM, en raiſon triplee du diametre BD, au

diametre FH. Et ſoit premierement N, moindre que le cone EFGHM, de O; & ſoit faicte la meſme conſtruction qu'en la precedente propoſition de ſorte que la pyramide EPFQGRHM, ſoit derechef monſtree plus grande que N, & menees les droictes lignes KB, kT, MF, MP, pour auoir 2. triangles, BKT, EMP, des pyramides ATBVCXDYK, EPFQGRHSM; & ſoient conioinctes TI, PL. D'autant donc que les cones ABCDK, EFGHM, ſont poſez ſemblables; a l'axe Ik, ſera à l'axe LM, comme le diametre BD, au diametre FH; Partant comme le ſemidiametre BI, au ſemidiametre FL, ainſi l'axe Ik, à l'axe LM; & en changeant, comme BI, à IK, ainſi FL, à LM. Donc puis que les angles BIK, FLM; c ſont droicts, les cones eſtans poſez droicts, partant les axes perpendic. à leurs baſes. d les triangles BIK, FLM, ſeront equiangles; e donc comme KB, à BI, ainſi MF, à FL. Mais comme BI, à BT, ainſi FL, à FP, à cauſe de la ſemblance des triãgles BIT, à FLP, (Car puis que BIT, FLP, appuyez ſur arcs ſemblables f ſont egaux; & que comme BI, eſt à IT, ainſi FL, à LP, tant par l'egalité des lignes, BI, IT, que FL, LP, g les triangles BIT, FLP, ſont ſemblables) & en raiſon egale comme KB, à BT, ainſi MF, à FP. Derechef d'autant que les coſtez KI, IB, du triãgle KIB, ſont egaux à KI, IT, du triangle KIT, & les angles contenus d'iceux h droicts, l'axe Ik, eſtant poſé perpendicul. au cercle ABC, i les baſes KB, KT, ſeront egales. Et ſemblablement MF, MP, egales: partant KB, KT,

a 24 d. 11.
b 15. 5.
c 3. d 11.
d 6. ſix. e 4. 6.
f ſchol. 3. 6.
g 6. ſix.
h 3. d 11.
i 4. 1.

proportionnelles à MF, MP, y ayant proportion d'egalité de part & d'autre. k Mais d'autant que comme KB, à BT, ainsi KT à la mesme BT; Item comme MF, à FP, ainsi MP, à la mesme FP: mais comme kB, estoit à BT, ainsi MF à FP; pareillement comme KT, sera à BT, ainsi MP, à FP, & par conuersion, comme BT, à TK, ainsi FP, à PM; partant puis que comme Tκ, est à κB, ainsi PN, à MF, & comme κB, à BT, ainsi MF, à FP, & comme BT, à Tκ, ainsi FP à PM, comme il est monstré. Les triangles BKT, FMP, auront les costez proportionnaux, l partant equiangles; & m semblables. Et semblablement les autres triangles, à l'entour des pyramides ATBVCXDYK, EPFQGRHSM, seront semblables entr'eux: lesquels estant egaux en multitude icelles n pyramides seront semblables: o & seront en raison triplee de leurs costez homologues BT, FP: Mais comme BT, à FP, ainsi BI, à FL, par la similitude des triangles BIT, FLP, p & comme BI, à FL, ainsi BD, à FH. Donc la pyram. sera à la pyramide en raison triplee des diametres BD, FH; mais la cone ABCDK, estoit posé à N, en raison triplee des mesmes diametres. Donc comme la pyramide ATBVCXDYK, à la pyramide EPFQGRHSM, ainsi le cone ABCDκ. à N. Parquoy puis que la pyramide ATBVCXDYk, est moindre que le cone ABCDk, la partie que le tout; q la pyramide EPFQGRHSM, sera moindre que N. Mais elle est monstree plus grande. Ce qui est absurde. Donc N, n'est plus grande que le cone EFGHM.

l 6. fix
m 1. d. 6
d 9. d. 11
o coro. 8. 12.
p 11. 5.
q 14. 5.



Secondement soit N, plus grande que le cone EFGHM. Donc le cone ABCDK, eſtant poſé à N, en raiſon triplee du diametre BD, à FH, & la pyramide ATBVCXDYK, eſtant à la pyramide EPFQGRHSM, en raiſon triplee des meſmes diametres, comme il eſt monſtré: comme le cone ABCDK, ſera à N, ainſi la pyr. ATBVCXDYK, à la pyr. EPFQGRHSM; & en changeant comme N, au cone ABCDK, ainſi la pyr, EPFQGRHSM, à la pyram. ATBVCXDYK. r Partant la pyr. EPFQGRHSM, eſtant à la pyr. ATBVCXDYK, en raiſon triplee des coſtez homologues PF, à TB, c'eſt à dire, du diametre FH, au diametre BD; N ſera auſſi au cone ABCDK, en raiſon triplee du diametre FH, au diametre BD. Comme N, eſt au cone ABCDK, ainſi le cone EFGHM, ſoit poſé à O; Donc le cone EFGHM, ſera auſſi à O, en raiſon triplee du diametre FH, au diametre BD, & N, eſtant poſee plus grande que le cone EFGHK, ſ le cone ABCDK, ſera auſſi plus grand que O. Partant le cone EFGHM, ſera à O, moindre que le cone ABCDK, en rai-

r corol. 8. 12.

ſ 14. 5.

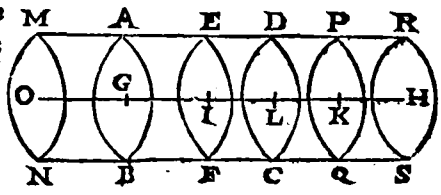
ſon triplee du diametre FH, au diametre BD: ce qui eſt abſurde; car il eſt monſtré que le cone ne peut eſtre en raiſon triplee des diametres des baſes, à vne autre grandeur moindre que l'autre cone. Donc N, n'eſt plus grande que le cone EFGHM, & eſt monſtree n'eſtre moin-
t 7. 5. dre, partant egale. Parquoy t le cone ABCDK, a meſme raiſon au cone EFGHM, que à N. Donc puis que le cone ABCDK, eſt à N, en raiſon triplee des diametres BD, FH, le cone ABCDK, ſera auſſi au cone EFGHM, en raiſon triplee des meſmes diametres.

v 15. 5. Mais v d'autant que les cylindres ſont en meſme raiſon que les cones dont ils ſont triples, le cylindre ſera au cylindre en meſme raiſon triplee des diametres des baſes. Ce qui ſera demonſtré comme aux cones, ſi au lieu des cones & des pyramides on prend des cylindres & des priſmes, Donc les cones & les cylindres ſemblables ſont en raiſon triplee, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.

xj THEOREME 13. PROP. 13.

Si vn cylindre eſt couppé par vn plan parallele aux plans oppoſez: Comme le cylindre ſera au cylindre, ainſi l'axe ſera à l'axe.

Soit le cylindre ABCD, couppé par le plan EF, qui ſoit parallele aux plans oppoſez AB, CD, & couppant l'axe à I. Ie dis que comme le cylindre AE, eſt au cylindre EC, ainſi l'axe GI, à l'axe IL.



Que ainſi ne ſoit, ayant prolongé l'axe GL, de part & d'autre, ſoit poſee GO, egale à GI; & LK, KH, chacune egale à IL: & ſoit entendu le cylindre eſtre prolongé de part & d'autre à O, & H, cela eſtant, il eſt manifeſte que les cylindres AN, AF, EC, CP, QR, ſont tous ſur baſes egales; Et[a] partant AN, AF, ayant meſme hauteur, c'eſt à dire les axes egaux IG, GO, ſont egaux entr'eux: Semblablement FD, DQ, QR, eſtant de meſme hauteur ſont auſſi egaux entr'eux: Parquoy l'axe IO eſt autant multiple de l'axe GI, que le cylindre EN, du cylindre AF, & l'axe IH, autant multiple de l'axe IL, que le cylindre FR, du cylindre FD, comme il eſt manifeſte. Donc ſi l'axe OI, multiple de GI, premeire grandeur, eſt egal, plus grand ou moindre que IH multiple de IL, 2. grandeur, auſſi le cylindre EN, multiple du cylindre EB, 3. grandeur, ſera plus grand, egal ou moindre que le cylindre FR, multiple du cylindre FD, 4. gr. en quelconque multiplication que ce ſoit: [b] Parquoy comme l'axe à l'axe, ainſi le cylindre ſera au cylindre. Donc ſi vn cylindre, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.

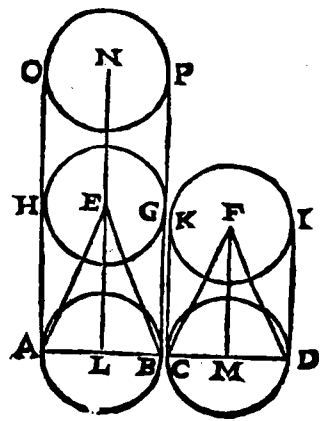
[a] corol. 11. 12.

[b] 6. d. 5.

THEOREME 14. PROP. 14. xj

Les cones & les cylindres conſtituez

sur baſes egales; ſont ent'eux comme leurs hauteurs.



Soient ſur les baſes egales AB, CD, deux cones ABE, CDF, & 2. cylindres ABGH, CD IK, dont les axes ou hauteurs (car aux cones & cylindres, les axes qui sõt à angles droits, sõt leurs hauteurs) ſont LE, MF. Ie dis que le cone ABE, eſt au cone CFD, & le cylindre AG, au cylindre CI, comme la hauteur LE, à la hauteur MF.

Car ſoit prolongé le cylindre AG, de la part de GH, auec ſon axe LE, & le rectangle AG, & ſoit priſe l'axe EN, egal à l'axe MF, & à l'entour du centre N, ſoit entendu le cercle OP, egal & parallel à GH, afin que le cylindre GO, ſoit faict de meſme hauteur que le cylindre CI. D'autant donc que les cylindres HP, CI, ayant baſes & hauteurs egales [a] ſont egaux; [b] le cylindre AG, aura meſme raiſon à iceux: [c] mais le cylindre AG, eſt au cylindre HP, comme l'axe ou hauteur LE, à l'axe ou hauteur EN, c'eſt à dire, à la hauteur MF, ſon egale. Donc le cylindre AG, ſera auſſi au cylindre CI, comme la hauteur LE, à la hauteur MF.

a coro'. 11. 12.
b 7. 5.
c 13. 12.

Mais d d'autant que les cones ABE, CDF, sont les tierces parties des cylindres AG, CI; e Ils seront en mesme raison que les cylindres; partant le cone ABE, sera au cone CDF, comme la hauteur LE, à la hauteur MF. Donc les cones & les cylindres, &c. Ce qu'il falloit demonstrer. d 10. 12. e 15. 5.

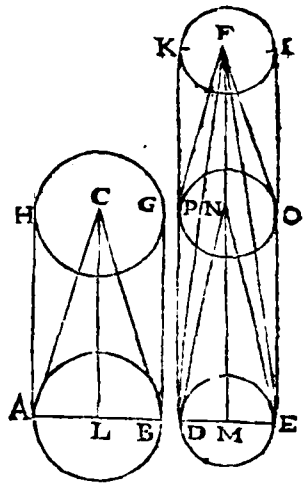
THEOREME 15. PROP. 15. xij

Les bases & les hauteurs des cones & des cylindres egaux sont reciproques: Et les cones & les cylindres desquels les bases & les hauteurs sont reciproques, sont egaux.

Soient les cones ABC, DEF egaux, & les cylindres AG, DI aussi egaux, dont les bases sont AB, DE, & les axes ou hauteurs LC, MF. Ie dis que les bases & les hauteurs sont reciproques, c'est à dire, comme AB, est à DE, ainsi MF, à LC.

Car si les hauteurs LC, MF, sont egales, les cylindres estans posez egaux, a les bases seront egales: Donc comme AB à DE, ainsi MF, à LC. Donc les bases & les hauteurs sont reciproques. Que si l'vne est plus grande comme FM, soit retranchee MN, egale à LC; & soit entendu le plan PO, par N, & parallele à DE, couppant le cylindre DI, en 2. Donc les cylind. AG, DI, estant posez egaux, b comme AG, sera à DO, ainsi DI, à DO; c mais comme le cylindre AG, au cylind. DO, ainsi la base AB, à la base DE, les hauteurs CL, MN, a coro. 11. 12. b 7. 5. c 11. 12.

d 14. 12 estãs egales. d Itẽ comme DI, à DO, ainsi la hauteur MF à MN, les baſes eſtant egales, ſçauoir vne meſme DE: Donc auſſi comme la baſe AB, à la baſe DE, ainſi la hauteur MF, à la hauteur MN, c'eſt à dire, à ſon egale LC. Donc les baſes & les hauteurs ſont reciproques. Et ſi les cones ABC, DEF, ſont



e 10. 12. egaux, les cyl. AG, DI ſeront egaux. e les cones eſtant les tiers des cylindres, donc de l'egalité des cylindres, il s'enſuit que les baſes & les hauteurs ſont reciproques, comme il eſt monſtré: & partant de l'egalité des cones il s'enſuiura auſſi que les baſes & les hauteurs ſont reciproques. Ce qui ſe peut auſſi demonſtrer par le diſcours dont on s'eſt ſeruy aux cylindres, conſtruiſant 2. cones, comme appert en la figure.

• Maintenant ſoient les baſes & les haureurs reciproques. Ie dis que les cones & les cylindes ſont egaux: Si les hauteurs ſont egales eſtant entr'elles cõme les baſes, icelles baſes ſerõt auſſi

f corol. 11. 12. egales: f Partant les cylindres ſeront egaux. Si inegales: ſoit faicte la conſtruction comme auparauant. Donc la hauteur MF, eſtant poſee à la

hauteur LC, c'est à dire, à MN son egale, cõme la base AB, à la base DE: g mais comme AB, à DE, ainsi le cylindre. AG, au cyl. DO, de mesme hauteur. h Item comme la hauteur M F, à la hauteur, MN, ainsi le cyl. DI, au cylin. DO, les bases estant egales: comme le cylind. AG, au cyl. DO, ainsi DI, au mesme cylindre DO: i partant le cylindre AG, sera egal au cylindre DI. g 11.12. h 14.12. i 9.5.

Et si les bases & les hauteurs des cones ABC, DEF, sont reciproques, les bases & les hauteurs des cyl. AG, DI, estant les mesmes bases & hauteurs des cones serõt reciproques: Donc cõme il a esté monstré, les cyl. & partant les cones tierces parties d'iceux seront egaux. L'on peut toutesfois faire la mesme demonstration aux cones qui a esté faicte au cyl. Donc les bases & les hauteurs, &c. Ce qu'il falloit demonstrer.

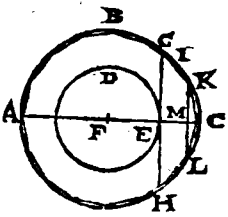
PROBLEME 1. PROP. 16. xiij

Deux cercles estant à l'entour d'vn mesme centre, inscrire au plus grand cercle vn polygone equilateral, & pair en nombre de costez, lequel ne touche point le moindre cercle.

Soient 2. cercles ABC, DE, à l'entour d'vn mesme centre F, & il faut inscrire au plus grãd vn polygone equilateral ne touchant le moindre DE, & duquel les costez soient en nombre pair.

Soit menee AC, par le centre F, couppant le cercle DE, en E: & par E, soit menee GH,

perpendiculaire à AC, [a] qui touchera le cercle E ; D'autant donc que l'arc AGC, eſt plus grand que l'arc GC, ſi de AGC, on oſte la moitié AB, & du reſte BC, la moitié BI, & du reſte IC, la moitié IK, & ainſi de ſuitte, [b] Il reſtera en fin vn arc moindre que CG. Soit maintenant l'arc Ck, moindre que CG, & ſoit CK, ſouſtendante. Ie dis que CK, eſt vn coſté du polygone qui doit eſtre inſcrit : Car ſi l'arc BI, eſt diuiſé en parties egales en nombre & grandeur, aux parties de l'arc CI; & le quart de cercle AB, ſoit diuiſé en autant de parties egales, qu'il y a de parties egales en l'arc BC, & auſſi le demi cercle AHC, en autant de parties qu'en contient le demi-cercle ABC : puis ſoient menees les lignes droictes ſouſtendantes tous les arcs, [c] leſquelles ſeront egales à la droicte ligne Ck, d'autant qu'elles ſouſtendent arcs egaux à l'arc CK; & on aura deſcrit vn polygone au cercle ABC, equilateral, & en nombre pair de coſtez, lequel ne touchera le moindre cercle DE : Car de K, à AC, ſoit menee vne perpendiculaire KL, couppant AC, à M. D'autant que les angles GEM, KME, ſont droicts, [d] HG, KL, ſeront paralleles. Partant GH, touchant le cercle DE, au poinct E, la droicte ligne KL, ſera toute hors ledit cercle, & ne l'ateindra iamais, ne rencontrant iamais GH : donc la droicte ligne CK, qui eſt plus eſloignee du cercle DE, touchera encore moins le cercle DE, que KL: & partant



a corol. 16.3.

b 1.10.

c 29.3.

d 29.1.

ny les autres costez du polygone inscrit, estant egaux au costé CK, & partant seront autant esloignez du centre F, que CK, ne toucheront le cercle DE. e Donc deux cercles estans. Ce qu'il falloit demonstrer. e 14. 3.

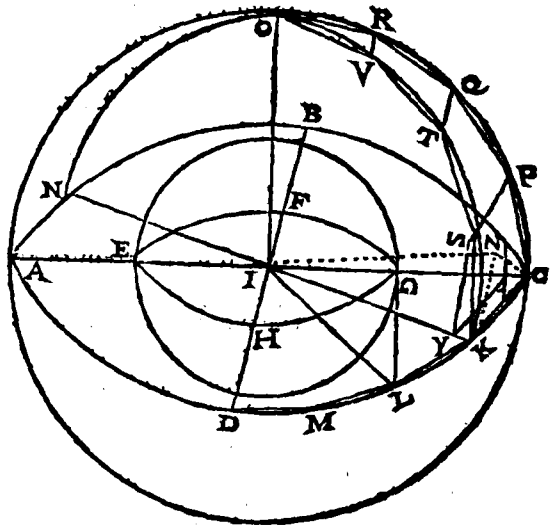
COROLLAIRE.

Il est d'icy manifeste que si de l'extremité du costé du polygone inscrit, lequel rencontre le diametre, est menee vne ligne perpendiculaire au diametre; icelle ne pourra aucunement toucher le moindre cercle, mais tombera toute hors iceluy. Car telle est la ligne KL, laquelle menee de l'extremité K, du costé CK, rencontrant le diametre AC, perpendiculaire au diametre AC, est monstree ne toucher le cercle DE.

PROBLEME 2. PROP. 17. vix

Deux spheres estant à l'entour d'vn mesme centre, inscrire en la plus grande sphere vn solide polyedre, lequel ne touche point la superficie de la plus petite sphere.

Soient 2. spheres ABCD, EFGH, à l'entour d'vn mesme centre I, & en la plus grande ABCD, il faut inscrire vn solide polyedre, c'est à dire, de plusieurs costez, lequel ne touche point la superficie de la moindre sphere EFGH.



Soient couppees les 2. ſpheres par quelque plã mené par le centre I, & ſoient les communes ſections faictes és deux ſpheres les plãs ABCD, EFGH, leſquelles ſeront cercles par la defi. de la ſphere ayant meſme centre I, que les ſpheres: car les demi-cercles par la reuolution deſquels ſont deſcrites les ſpheres, conuiendront auec les ſections ABCD, EFGH: parquoy leſdites ſections ſeront cercles, ou d'autant que toutes les lignes droictes menees du centre I, aux circonferences des ſections ſont egales: Et en iceux ſoient menez les diametres AC, BD, ſe couppans au centre I, à angles droicts: [a] Puis au plus grand cercle ABCD, ſoit inſcrit vn polygone ne touchant point le moindre EFGH, & ſoient CK, KL, LM, MD, coſtez du quart CD, & ſoit menee KN, par le centre I, & [b] de I, ſoit menee IO,

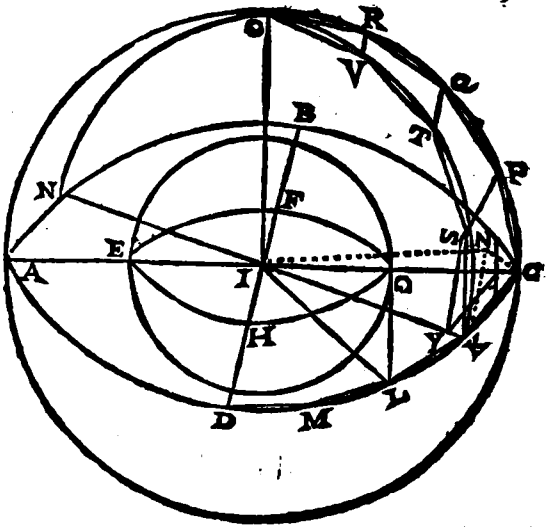
a 16.12.

b 12.11.

IO, perpend. au plan des cercles ABCD, EF GH, rencontrant à O, la superficie de la plus grande sphere. Et par AC, IO, & Nk, IO, soiēt menez les plans AOC, NOK; ils seront demi-cercles, les plus grands entre ceux de la sphere, ayans mesme centre, comme dit est, & IO, ligne de commune section des plans des demi-cercles NOK, AOC, estant perpendiculaire au plan du cercle ABCD. c Iceux demicercles seront aussi perpendic. au plan du cercle ABCD: & les 3, demi-cercles ADC, AOC, NOK estant egaux, estant leurs diametres egaux, leurs moitiez, sçauoir les quartes OC, OK, DC, seront egales: parquoy OC, OK, contiendront chacune autant de costez du poligone que DC. Soient iceux costez CP, PQ, QR, RO, RS, ST, TV, VO, & menees SP, TQ, VR, & de P, S, les perpendiculaires PX, SY, d elles tomberont sur IC, Ik, comunes sections des quartes IOC, IOK, & le plan ICD, esleuees perpendiculairement sur iceluy plan, e icelles seront aussi paralleles: & soit aussi menee XY: Maintenant les arcs PC, SK, estant egaux, f & les lignes droictes soustendantes PC, SK aussi egales, les angles PXC, SYk droicts; g & les angles PCX, SkY egaux, estant appuyez sur circonferences egales AOP, NOS: les 2. angles PCX, PXC, du triangle PXC, sont egaux aux 2. angles SkY, SYk, & les costez PC, SK, egaux, h les 2. autres costez PX, XC, seront egaux aux deux autres costez SY, YK, chacun au sien. Donc les diametres AC, Nk estant egaux, & les segmēts CX, KY aussi egaux, AX, NY, seront aussi egaux: & IX, IY egales. Parquoy comme IX,

c 18. 11.
d 38. 11.
e 6. 11.
f 29. 3.
g 27. 3.
h 26. 1.

i 2.6. à XC, ainsi IY, à YK. i Donc XY, est parallele
k 33.1. à KC, & PX, SY, estant monstrees egales &
l 9.11. paralleles SP, YX k seront aussi egales & paral-
m 7.11. leles. Et l SP, KC, serõt para. m & SK, PC, en vn
meſme plã auec icelles; Dõc toute la figure qua-
drilatere SKCP, est en vn meſme plan: ainsi on
monstrera que chacun des quadrilateres TP,
VQ, à toutes ſes parties en vn meſme plan, & le
triangle ORV ſemblablement: & ſi des points
P, Q, R, S, T, V, on mene des lignes au cen-
tre I: on ſe pourra imaginer vne figure ſolide
compoſee de 4 pyramides entre OC, & Ox,
deſquelles le ſommet est au centre I, & leurs
baſes ſont les quadrilateres CS, PT, QV, & le
triangle OVR: & faiſant ſur les autres coſtez
xL, LM, MD, ainsi que ſur C x, & auſſi ſur
les 3. autres quartes CB, BA, AD, l'on aura in-
ſcrit vn polyedre en la ſphere propoſee: Ie dis
qu'il ne touche la moindre ſphere EFGH. Car
ayant mené la ligne IZ, du centre I, perpendi-
culaire au plan CS, elle ſera plus grande que
IG, demi-diametre de la moindre ſphere. Car
pour inſcrire le polygone eſtant menee GL,
perpend. à AC, du point G, laquelle eſtant plus
grande que Cx, coſté dudit polygone inſcrit,
n 2.11. comme il est manifeſte, ſoit menee IL, & auſſi
CZ, kZ. n Les angles IZC, IZK eſtant droicts:
o 47.1. o le quarré de IC, ſera egal aux 2. quarrez de
IZ, CZ, & le quarré de IK, egal aux qq. de
IZ, ZK; parquoy les qq. des diametres eſtant
egaux, les qq. de IZ, Zk, ſeront egaux aux qq.
de IZ, CZ, donc ſi on oſte le commun q. de IZ,
les qq. de CZ, KZ, demeureront egaux: &
partant xZ, CZ egales: Et ayant mené des li-



gnes de Z, à S, & P, on monſtrera par les meſmes raiſons qu'elles ſeront egales tant entr'elles qu'à CZ, Zk, partant ſi de Z, pris pour centre l'on deſcrit vn cercle à l'interuale de l'vne d'icelles, il paſſera par tous les poincts CkSP, & partant ſera deſcrit à l'entour dudit quadrilatere, dont les 3. coſtez CP, Ck, kS, ſont egaux p ſouſtendant arcs egaux de cercles egaux, & le 4. SP, plus petit : Car puis que les triangles ICk, IXY, ſont ſemblables & le coſté IC, plus grand que le coſté IX, q Ck, ſera auſſi plus grand que YX, c'eſt à dire que SP, monſtré egal à YX, l'angle CZk, ſera plus grand qu'vn droict (car les 4. lignes menees du poinct Z, aux poincts k, C, P, S, eſtant monſtrees egales, les 4. triangles qui ſe font dont les ſommets ſont au poinct Z, r auront les 4. angles à

p 29. 3.

q 14. 5.

Z, egaux à 4. droicts: & les baſes des 3. triangles SZk, KZC, CZP, eſtant monſtrees egales, ſ les 3. angles oppoſez à icelles ſeront egaux, parquoy chaque 2. oppoſez au ſommet Z, ſeront egaux à 2. droicts, & la baſe CK, eſtãt monſtree plus grande que SP, t l'angle CZK, ſera plus grand que SZP: partant plus grand qu'vn droict) & par ainſi le plus grand du trian. CZK, donc le coſté CK, ſera plus grand que CZ, & GL eſtant plus grande que CK, ſera auſſi plus grande que CZ, parquoy le quarré de GL, ſera plus grand que le q. de CZ: x & les qq. de IG, GL, eſtant egaux aux qq. de IZ, CZ (tant ces 2. là que ces 2. cy eſtant egaux au q. du demi-diametre, puis que les triangles IGL, ICZ ſont rectangles) & le q. de GL, eſtant plus grand que le q. de CZ, le q. de IZ ſera auſſi plus grand que le q. de IG, & partant IZ, plus grande que IG. Donc le plan CKSP, ne touchera la moindre ſphere EFGH: & ainſi on monſtrera que tous les autres plans du polyedre inſcrit en la plus grande ſphere ne toucheront la ſuperficie de la moindre ſphere EFGH: Partant deux ſpheres eſtant à l'entour d'vn meſme centre, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.

ſ 141.

t 25. 1.

v 19. 1.

x 47. 1.

COROLLAIRE.

De ceſte demonſtration s'enſuit que ſi en vne autre ſphere eſt deſcrit vn ſolide polyedre ſemblable au ſuſdict, qu'iceux ſerõt en raiſon triplee des diametres des ſpheres, dãs leſquelles ils ſont inſcrits: car eſtans ſemblables par la definition des ſolides ſemblables, ils contiendront en

leur conuexité autant de plans semblables l'vn que l'autre : parquoy se pourront diuiser en autant de pyramides semblables l'vn que l'autre, ayant toutes le demi-diametre de leurs spheres pour vn de leurs costez : donc estant prises vne à vne seront en raison triplee de leurs a costez homol. qui sont les demidiametres des spheres, b & les toutes aux toutes aussi en raison triplee des demi-diametres : c Et partant aussi en raison triplee des diametres entiers.

a corol. 8. 12.
b 12. 5.
c 15. 5.

LEMME.

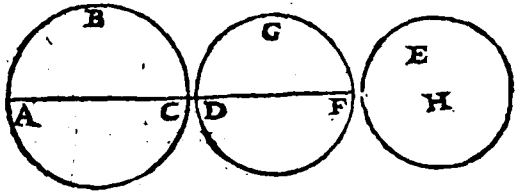
Or *que la perpendiculaire menee du centre I, au plan CPSK, tombe sur le milieu d'iceluy comme au poinct Z, il est manifeste. car l'angle ICP estant agu, comme il appert par la 16. du 3. la perp. menee du centre I, tombera de la part de l'angle agu ICP ; & si on entend vne ligne menee de I, à P, elle fera aussi angle agu auec la ligne droicte IC, qui seroit IPC, de la part auquel tomberoit la mesme perpendiculaire, & partant entre C & P : Ce que l'on peut demonstrer de toute autre menant des lignes & circonf. entre PS, & KC : pourquoy la perpendiculaire IZ, tombera sur ledit plan. Ce qu'il falloit demonstrer.*

THEOREME 16. PROP. 18. XV

Les spheres sont l'vne à l'autre en raison triplee de leurs diametres.

Soient les spheres ABC, DGF, dont les diametres sont AC, DF. Ie dis que ABC, est à DGF, en raison triplee du diametre AC, au diametre

DF: C'eſt à dire, que ſi on entend que comme la raiſon triplee de AC, à DF, ainſi la ſphere ABC, eſt à quelque autre ſphere, comme à E, qu'icelle ſera egale à la ſphere DGF.



Car s'il n'eſt ainſi elle ſera plus grande ou plus petite: Soit E, premierement moindre que DEF, s'il ſe peut faire. Donc E, pourra eſtre encloſe dans DGF, les mettant toutes 2. à l'entour d'vn meſme centre. a Parquoy en DGF, pourra eſtre inſcrit vn ſolide polyedre qui ne touchera la moindre E. Et par meſme raiſon on pourra auſſi deſcrire vn ſolide polyedre en l'autre, qui b ſera à celuy qui eſt deſcrit en DGF, en raiſon triplee du diametre AC, au diametre DF: mais la ſphere ABC, eſt poſee en telle raiſon à la ſphere E; c donc cõme la ſphere ABC, à la ſphere E, ainſi le polyedre de ABC, ſera à celuy de DGF: mais ABC, eſt plus grande que ſon polyedre, le tout que ſa partie: d donc E, ſera plus grande que le polyedre de DGF, la partie que le tout; ce qui eſt abſurde; parquoy ABC, n'eſt pas à vne autre ſphere moindre que DGF, en raiſon triplee du diametre AC au diametre DF.

a 17. 12.
b coro. 17. 12.
c 11. 5.
d 14. 5.

Maintenant ſoit E, plus grande que DGF, s'il eſt poſſible: & eſtant poſé que comme la ſphere ABC, eſt à la ſphere E, ainſi la raiſon triplee du diametre AC, au diametre DF: en changeant E ſera à ABC, en raiſon triplee de DF, à AC. Pa-

reillement l'on peut entendre que comme E, eſt à ABC, ainſi DGF, eſt à vne quatrieſme proportionnelle, e qui ſera moindre que ABC; E, eſtant poſee plus grande que DGF: parquoy ceſte 4. pourra eſtre inſcrite en ABC: f Et DGF, ſera à icelle 4. inſcrite en ABC, en raiſon triplee de DF, à AC: Ce qui eſt monſtré abſurde. Donc E n'eſt plus grande ny moindre que DGF, partant egale: Partant les ſpheres, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer. e 14. 5. f 11. 5.

COROLLAIRE.

Il eſt manifeſte de ceſte demonſtration que vne ſphere eſt à vne autre ſphere, comme le polyedre deſcrit en celle là au polyedre ſemblable, & ſemblablement deſcrit en cette cy: eſtant demonſtré que tant les ſpheres que les polyedres inſcrits en icelles ſont en raiſon triplee de leurs diametres.

Fin du douzieſme Liure.

LIVRE TREZIESME DES ELEMENS DE V. CLIDE.

& le 3. des Solides.

THEOREME 1. PROP. 1.

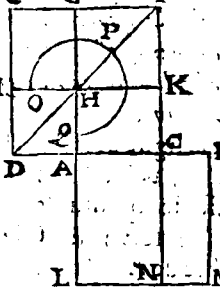
Si vne ligne droicte eſt couppee en la moyenne & extreme raiſon, le plus grand ſegment comprins auec la moitié de la toute, peut le quintuple du quarré de la moitié de la toute.

C'eſt à dire, que le quarré du plus grand ſegment & de la moitié de la toute, comme d'vne ſeule ligne eſt quintuple du quarré de la moitié de la toute.

SOIT la ligne droicte AB, couppée à C, en la moyenne & extreme raiſon, dont AC, eſt le plus grand ſegmẽt, & ſoit prolongee BA, à D, & poſee AD egale à la moitié de la toute AB. Ie dis que le quarré de CD, eſt quintuple du quarré de AD.

Car ſur CD, ſoit deſcrit le q. DF, & ayant mené le diametre DF, ſoient menees AG, IK, couppant iceluy par H paralleles à DC, CF, & prolongeant GA, ſoit accomply le quarré AM: &

prolongee FC, à N: a A
I, KG, seront les quarrez
de AD, AC, b & d'au-
tant que comme AB, à
AC, ainsi AC, à CB,
c le rectangle CM,
contenu sous AB, CB,
sera egal à KG, quarré
de AC: & AB estant po-
sée double de AD, &
AL, egale à AB, & AH,
à AD: AL, sera aussi doublee de AH: d mais
comme AL, à AH, ainsi le rectang. AN, au
rect. AK; donc AN, est double de AK: e mais
d'autant que Ak, est egal à IG; AN sera egal
aux deux AK, IG. Adiouſtant donc les egaux
CM, KG, le quarré AM, sera egal au gnomon
OPQ; f partant le quarré AM, estant quadru-
ple du qu. AI, puis que DA, est posée moitié de
AB, le gnomon OPQ, sera quadruple du mes-
me AI; parquoy si à OPQ, on adiouſte AI, le
quarré FD, sera faict quintuple du quarré AI.
Dõc si vne ligne, &c. Ce qu'il falloit demõstrer.



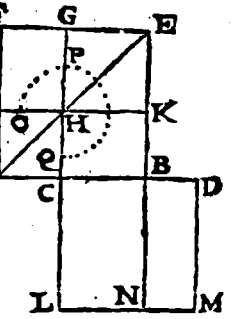
a coro. 4. 2.
b 3. d. 6.
c 17. 6.
d 1. 6.
e 43. 6.
f schol. 4. 2.

THEOREME 2. PROP. 2.

Si vne ligne droicte peut le quintuple de son segment, la ligne double dudit segment, estant couppee selon la moyenne & extreme raison, l'autre partie est le plus grand segment de la ligne premierement couppee.

C'eſt à dire, ſi le quarré d'vne ligne droicte eſt quintuple du quarré d'vne partie d'icelle: le double de ceſte partie eſtant couppé en la moyenne & extréme raiſon le plus grand ſegment eſt l'autre partie de ladite ligne.

f 9.12.



Soit la ligne droicte AB, diuiſee par C, & qu'elle puiſſe le quintuple de AC, & ſoit priſe CD, double de AC. Ie dis que CD, eſtant couppee ſelon la moyenne & extreme raiſon CB, ſera le plus grand ſegment de la toute CD, partie reſtante de la premiere AB. Car ayant acheué la conſtruction comme en la precedente CI, KG, ſeront les quarrez de AC, CB, & d'autant que le quarré BF, eſt poſé quintuple du quarré CI; ſi on oſte le quarré CI, demeurera le gnomon OPQ, quadruple du meſme quarré CI: Mais le quarré CM, eſt quadruple du quarré CI, puis que CD eſt double de AC, donc le gnomon OPQ, ſera egal à CM; Derechef, d'autant que CD eſt poſée double de AC, & LC, eſt egale à CD, & CH, à AC; LC, ſera double de CH. Donc puis que comme LC, eſt CH, ainſi le rectangle LB, au rectangle CK; celuy-là ſera auſſi double de cettuy-cy: mais CK, eſt egal à HF. Donc LB, eſt egal à CK, HF; & partant le quarré reſtant KG, au rectang. reſtant BM. D'autant donc que le rect. BM, contenu ſous CD, BD, eſt egal à KG, quarré de CB. Comme CD, ſera à CB,

a coro. 4.2.

b ſchol. 4.2.

c 1.6.

d 43.1.

e 17.6.

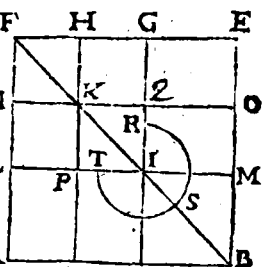
ainſi CB, à BD. Partant CD eſt couppee à B, en la moyenne & extreme raiſon, & CB, eſt le plus grand ſegment. Ce qu'il falloit demonſtrer.

THEOREME 3. PROP. 3. iij

Si vne ligne droicte eſt couppee, ſelon la moyenne & extréme raiſon ; la ligne faicte du moindre ſegment & de la moitié du plus grand, peut le quintuple du quarré deſcrit de la moitié du plus grand ſegment.

C'eſt à dire, le quarré du moindre ſegment auec la moitié du plus grand, comme d'vne ſeule ligne eſt quintuple du quarré de la moitié du plus grand.

Soit la droicte ligne AB, diuiſee par C, ſelon la moyenne & extréme raiſon, dont AC, eſt le plus grand ſegment : lequel ſoit diuiſé à D, en 2. egalement. Ie dis que le quarré de BD eſt quintuple du quarré de CD.



Car ſur AB, ſoit deſcrit le quarré AE, dont le diamẽtre ſoit BF ; puis par C, & D, ſoient menees CG, DH, paralleles à AF, BE, & couppant BF, par I, & K, par leſquels ſoient menees LM, NO, paralleles à AB, EF, couppantes CG, DH, à P, & Q, [a] LG, PQ, NH, DO, ſont les

[a] corol. 4. 2.

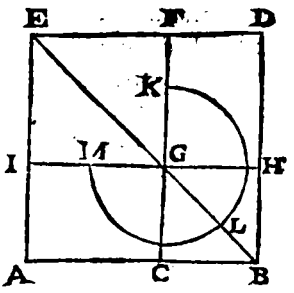
quarrez de AC, CD, BD. D'autant donc que
b scho. 4. 2. AC, eſt double de CD, b le quarré LG, ſera quadruple du quarré PQ. Mais le rectangle CE, eſt egal au quarré LG (car puis que comme AB,
c 17. 6. à AC, ainſi AC à CB, c le rectangle ſous AB, CB, ſçauoir CE, eſt egal au quarré de AC, ſçauoir à LG) donc CE, ſera auſſi quadruple de PQ. Mais d'autant que les quarrez NH, PQ ſont egaux, AD, CD, eſtant egales, leurs coſtez
d 34. 1. HK, IQ, ſeront egaux; d & partant EO, OM,
e 36. 1. oppoſez à iceux: e donc les rectangles IO, QE,
f 43. 1. ſeront egaux: f mais IO, eſt egal à ID; donc QE, ſera egal au meſme ID; adiouſtant donc le commun rectangle CO; tout le gnomon RST, ſera egal au rect. CE. Et CE eſtant monſtré quadruple du quarré PQ; le gnomon RST, ſera auſſi quadruple du meſme quarré PQ: adiouſtant le commun q. PQ, le q. DO, deſcrit de BD, ſera quintuple du q. PQ, deſcrit de CD. Donc ſi vne ligne, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.

THEOREME 4. PROP. 4.

Si vne ligne droicte, eſt couppee ſelon la moyenne & extreme raiſon; l'vn & l'autre q. ſçauoir celuy de la toute, & celuy du moindre ſegmẽt, enſemble ſont triples du quarré deſcrit du plus grand ſegment.

Soit la droicte ligne AB, couppee à C, en la moyenne & extréme raiſon, & ſoit AC, le plus grand ſegment CB, moindre. Ie dis que les

quarrez de AB, & de BC enſemble, ſont triples, du quarré de AC. Car ſur AB, ſoit deſcrit le quarré AD, & ayant mené BE diametre, & par C, ſoit menee CF, parallele à BD, & HI, à AB, couppãtes le diametre à G. a CH, IF, ſeront les quarrez de BC, AC. Et d'autant que comme AB, à AC, ainſi AC à CB, b le rectangle AH, contenu ſous AB, BC, eſt egal à IF, quarré de AC. Donc AH, eſtant egal à CD, le gnomon KLM, auec le q. CH, ſera double du q. IF. Parquoy adiouſtant IF; AD, q. de AB, auec CH, q. de BC, ſera triple de IF, quarré de AC. Donc ſi vne ligne droicte, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.



a corol. 4. 2.

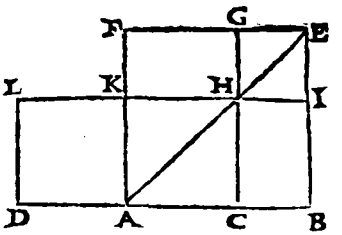
b 17. 6.

THEOREME 5. PROP. 5. iv

Si vne ligne droicte eſt couppee ſelon la moyenne & extréme raiſon, & que l'on adiouſte à icelle vne ligne egale au plus grand ſegment: la ligne droicte totale eſt couppee, en la moyenne & extreme raiſon; & le plus grand ſegment eſt la ligne droicte, qui eſtoit au commencement.

Soit AB, couppee à C, en la moyenne & extreme raiſon, & ſoit AC plus grand ſegment, & à iceluy ſoit adiouſté directement AD, egale

au plus grand segmẽt AC. Le disque BD, est couppee à A, en la moyenne & extreme raison, & que le plus grand segment est AB.



Car sur AB soit descrit le quarré BF, & mené AE diametre, & CG, parallele à BE, couppant AE, au poinct H, par lequel soit menee IK, parallele à BD, & par D, DL, parallele à AF, rencontrant IK, prolongee à L. a Et CK, IG, seront les quarrez de AC, BC. D'autant donc que comme AB, est à AC, ainsi AC, à CB, b le rectang. IF, contenu sous AB, BC, sera egal à CK, quarré de AC; c mais CK, est egal à AL, donc IF est aussi egal à AL, adioustant dõc le commun BK, le rectangle BL, contenu sous BD, DA, sera egal à BF, quarré de AB; d partant comme BD, sera à AB, ainsi AB, à AD; Parquoy BD est couppé à A, en la moyenne & extrême raison, & AB, est le plus grand segment. Ce qu'il falloit demonstrer.

a corol. 4. 2.

b 17. 6.

c 36. 1.

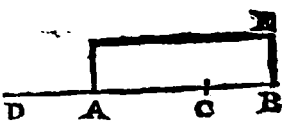
d 17. 6.

vj THEOREME 6. PROP. 6.

Si vne ligne droicte rationelle, est couppee selon la moyenne & extréme raison; l'vn & l'autre des segments est ligne Irrationnelle, laquelle est appellee apotome ou residu.

Soit la ligne droicte rationelle AB, couppee à

C, en la moyenne & extréme raiſon. Ie dis que tãt l'vnque l'autre des ſegments A C, CB, eſt ligne irrationelle, appellee reſidu.



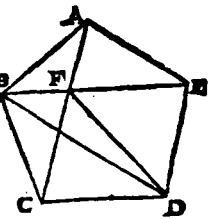
Car ſoit adiouſté au plus grand ſegment AC, la ligne droicte AD, egale à la moitié de la toute AB, a D'autant donc que le quarré de CD, eſt quintuple du quarré de AD, le quarré de CD, ſera au quarré de AD, comme nombre à nombre. b Parquoy les quarrez de CD, AD, ſeront commenſurables; & partant les lignes CD, AD, commenſurables au mõins en puiſſance: Mais AD, eſt rationelle eſtant moitié de AB rationelle. Donc CD, ſera auſſi rationelle. c Mais d'autant que les quarrez de CD, AD, ne ſont l'vn à l'autre comme nombre quarré à nombre quarré (eſtant comme 5. à 1. ou 25. à 5.) d CD, AD, ſeront incommenſurables en longitude, & partant rationelles commenſur. en puiſſance ſeulement. Parquoy ſi de CD Rationelle on oſte AD, rationelle commenſ. en puiſſance ſeulement; e la reſtante AC, ſera irrationelle, qui eſt appellee reſidu. Derechef le rect. AE, eſtant appliqué à AB, contenu ſous AB, CB; puis que comme AB, à AC, ainſi AC, à CB, f le rect. AE ſera egal au q. de AC; parquoy le quarré du reſidu AC, c'eſt à dire, le rectan. AE, appliqué ſelon la rationelle AB, g faict l'autre coſté BE. c'eſt à dire, CB, egale à icelle, reſidu premier. Donc ſi vne ligne droicte Rationelle, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.

a 1. 13.
b 6. 10.
c coro. 24. 8.
d 9. 10.
e 74. 10.
f 17. 6.
g 98 10

vij THEOREME 7. PROP. 7.

Si trois angles d'vn pentagone equilateral, soit qu'ils soient d'ordre ou non d'ordre, sont egaux: iceluy pentagone sera equiangle.

Au pentagone ABCDE, equilateral soient trois angles egaux, premierement d'ordre A, B, C. Ie dis qu'il est equiangle.



Car à iceux angles egaux soient soustendantes BE, AC, BD, & de F, où s'entrecouppent BE, AC, soit menee ED. D'autant que les costez AB; AE, du triãgle ABE, sont egaux à CB, CD, du triangle CBD, & les angles contenus d'iceux posez egaux; les bases BE, BD, & les angles AEB, CDB, sont egaux. Mais les angles BED, BDE, sont aussi egaux, les costez BE, BD, estant monstrez egaux. Donc les touts AED, CDE, seront egaux. Derechef les costez AB, AE, du triangle ABE, estant egaux à BA, BC, du triangle BAC, & les angles contenus d'iceux egaux, par l'hypothese, la base BE, sera egale à AC, & les angles ABE, AEB egaux, à BAC, BCA, chacun au sien. Dõc puis que les angles ABE, BAC, du triangle ABF, sont egaux; les costez BF, AF, seront aussi egaux; donc s'ils sont ostez des egales BE, AC, les restes FE, FC. seront egales. Partant les costez FE, ED, du triangle FED, estant egaux à FC,

a 4. 1.
b 5. 1.
c 4. 1.
d 6. 1.

FC, CD, du triangle FCD, & FD, commune; e FED, FCD, contenus d'iceux costez seront egaux: mais AEB, BGA, sont monstrez egaux; donc les touts AED, BCD, sont egaux, partant CDE, estant monstré egal à AED, & les angles ABC, BAE, & BCD, estant posez egaux; iceluy pentagone sera equiangle. e 8. 1.

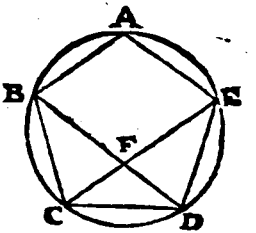
Soient secondement les 3. angles A, C, D, non d'ordre egaux: D'autant donc que les costez AB, AE, du triangle ABE, sont egaux aux costez CB, CD, du triangle CBD, & les angles contenus d'iceux posez egaux: f les bases BE, BD, & les angles AEB, CDB seront egaux: g mais les angles BED, BDE sôt aussi egaux, les costes BE, BD, estant mstrez egaux: Donc les touts AED, CDE sont egaux, donc BAE, CDE, estans posez egaux, les trois angles de suitte A, E, D, seront egaux. Donc comme il est desia monstré le pentagone sera equiangle. Donc si trois angles d'vn pentagone, &c. Ce qu'il falloit demonstrer. f 4. 1. g 5. 1.

THEOREME 8. PROP. 8. viij

Si deux lignes droictes soustendent deux angles d'vn pentagone equiangle & equilateral, lesquels sont d'ordre, icelles se couppent l'vne l'autre en la moyenne & extréme raison, & les plus grands segments d'icelles sont egaux au costé du pentagone.

Soient 2. lignes droictes DB, CE, soustendantes les 2. angles C & D, au pentagone equiangle & equilateral ABCDE, & se couppantes

l'vne l'autre au poinct F.



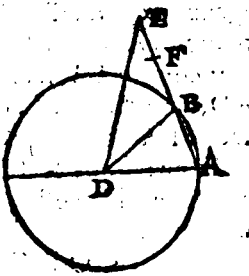
Ie dis qu'elles se couppent en la moyenne & extreme raiſon; & que leurs plus grands ſegments FB, FE, ſont egaux à chacun coſté du pentagone

a 14.4. Car a ayant deſcrit vn cercle à l'entour du
b 28.3. pentagone, b les cinq arcs AB, BC, CD, DE, EA, ſeront egaux: Et d'autant que les coſtez CD, CB, du triangle CDB, ſont egaux aux coſtez DC, DE, du triangle DCE; & les angles contenus d'iceux poſez egaux; les baſes DB,
c 4.1. CE, & les angles CDB, DCE ſeront egaux; parquoy au triangle CDF, les 2. angles FCD;
d 5.1. FDC, eſtant egaux; d Et BFC, externe egal à
e 32. 6. iceux: BFC, ſera double de DCE: e mais l'angle BCE, eſt auſſi double du meſme DCE; d'autant que l'arc BAE, eſt double de l'arc DE.
f 6.1. Donc les angles BFC, BCF ſont egaux; f & par-
g 27.3. tant BF, egale au coſté du pentagone BC. g Mais d'autant que les angles BBC, ECD, appuyez ſur arcs egaux, ſont egaux; les deux angles DBC, CDB, du triangle BCD, ſont egaux aux 2. DC
h 32.1. F, FDC, du triangle CFD; h partant les trian-
i 4.6. gles BCD, CFD, ſont equiangles; i partant comme BD. à DC, c'eſt à dire, à BF. egale à DC, ainſi CD, c'eſt à dire, BF, ſon egale; eſt à FD; Donc BD eſt couppee à F, en la moyenne & extreme raiſon, & le plus grand ſegment BF; eſt monſtré egal au coſté du pentagone. Semblablement on monſtrera que CE, eſt couppee à F, ſelon la moyenne & extreme raiſon, &

que son plus grand segment EF, est egal au costé du pentagone. Donc si, &c. Ce qu'il falloit demonstrer.

THEOREME 9. PROP. 9. ix

Si le costé de l'hexagone, & le costé du decagone, inscrits en vn mesme cercle sont composez: La ligne droicte totale est couppee en la moyenne & extreme raison & le plus grand segment d'icelle est le costé de l'hexagone.



Au cercle ABC, soit la droicte ligne AB, costé du decagone, à laquelle soit adiousté BE, directement, egale au demi diametre du cercle, & partant au costé de l'exagone descrit au mesme cercle. Ie dis que EA est couppee à B, en la moyenne & extreme raison, & que le plus grand segment est EB, est le costé de l'hexagone.

Car de A, soit mené le diametre AC, & du centre D, soient conioinctes DB, DE. D'autant que l'arc AB, est la dixiesme partie de toute la circonference du cercle: l'arc du demi cercle contiendra l'arc AB cinq fois. Partant l'arc BC, sera quadruple de l'arc AB; a parquoy l'angle BDC, sera aussi quadruple de l'angle ADB. De rechef d'autant que les costez BD, BE sont

a 32. 1

corol. 15. 4. egaux, ſçauoir coſtez de l'hexagone, (b car BE, coſté de l'hexagone eſt egal au demi-diam. BD.)
c 5. 1. d 32. 1. c Les angles BDE, BED, ſerõt egaux: d auſquels l'externe ABD, eſtant egal: ABD, ſera double de
e 5. 1. BED: e mais BAD, eſt egal à ABD, les coſtez DA, DB, eſtant egaux: Donc BAD, ſera auſſi double de BED; partant les 2. DAB, DB
f 32. 1. A, enſemble, ſeront quadruples de BED. f Dõc puis que l'angle externe BDC, eſt egal aux deux DAB, DBA, l'angle externe BDC, ſera quadruple du meſme BED; mais le meſme angle BDC, a eſté monſtré quadruple de ADB. Dõc les angles AED, ADB ſont egaux; partant les 2. angles AED, DAE, du triangle ABE, eſtant
g 32. 1. h 4. 6. egaux aux 2. ADB, BAD du triangle ABD, g les triangles ADE, ABD, ſeront equiangles. Partant comme EA, ſera à AD, ou à EB, egale à AD, ainſi AD, c'eſt à dire, EB, ſon egale à BA; Donc EA eſt couppee à B, en la moyenne & extreme raiſon, & EB eſt le coſté de l'exagone. Donc ſi le coſté, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.

COROLLAIRE.

De ceſte demonſtration il eſt manifeſte que ſi le coſté de l'hexagone eſt couppé en la moyene & extreme raiſon, ſon plus grand ſegment ſera le coſté du decagone deſcrit au meſme cercle. Car du coſté de l'exagone BE, eſtant priſe BF, partie egale à AB: comme la toute AE, ſera à la toute BE, ainſi la retranchée BE, à la retranchee BF: a donc le reſte AB, c'eſt à dire, BF, a 19. 5. ſera au reſte FE, comme la toute AE, à la toute BE, ou BE, retranché de AE, à BF, retranchee

de BE; b partant BE, sera couppee comme AE, en la moyenne & extreme raſon à F,& BF, plus grand ſegment eſt egal à AB, coſté du decagone. b 3. d. 6.

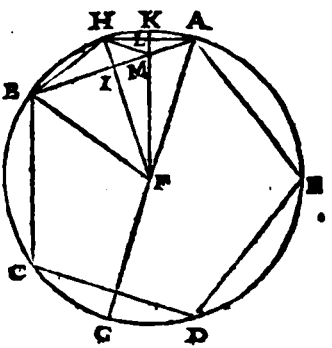
THEOREME 10. PROP. 10. x

Si vn pentagone equilateral eſt inſcrit au cercle; le coſté du pentagone, peut le coſté de l'hexagone,& le coſté du decagone inſcrits au meſme cercle.

C'eſt à dire, que le q. du coſté du pentagone equilateral inſcrit au cercle, eſt egal aux 2. quarrez enſemble, du coſté de l'hexagone, & du decagone inſcrits au meſme cercle.

Au cercle ABCD, dont le centre eſt F, ſoit inſcrit le pentagone equilateral ABCDE. Ie dis que le quarré de AB coſté du pentagone eſt egal au quarré du coſté de l'hexagone, & au quarré, du coſté du decagone, du meſme cercle.

Car ſoit mené le diametre AFG, & conionte FB, puis ayant diuiſé l'arc AB, en 2. egalement à H, ſoient conionctes les lignes droictes AH, BH, & FH, couppant la droicte ligne AB, à I; la ligne droicte AH, ſera le coſté du decagone, & BF, coſté de l'hexagone. Derechef ayant diuiſé l'arc AH, en 2. egalement à K, ſoit conionc-te FK, couppant la droicte ligne AH, au poinct L, & la droicte AB, par le poinct M, auquel ſoit menee HM. D'autant donc que les arcs AH, BH, ſont egaux, a les angles AFH, BFH, ap- a 27. 3.
puyez ſur iceux, ſeront egaux. Parquoy les co-



ſtez AF, FI, du triangle AFI, eſtant egaux à BF, FI, du triangle BFI, & les angles contenus d'iceux auſſi
b 4.1. egaux, [b] les baſes AI, BI, ſeront egales, & les angles AIF, BIF egaux, & partant droicts: Par meſme raiſon, les droictes lignes AL, HL ſeront egales, & les angles ALF, HLF droicts.

Puis ſi des demicercles egaux ABCG, AEDG, on oſte les arcs egaux ABC, AED, demeureront les arcs CG, DG, egaux entr'eux, partant l'arc CG, ſera moitié de l'arc CD. Mais l'arc AH, eſt moitié de l'ac AB. Donc les arcs AB, CD eſtant egaux; leurs moitiez qui ſont les arcs CG, AH ſeront egaux; donc puis que l'arc AH, eſt double de l'arc Hk, l'arc CG ſera auſſi double de l'arc Hk. Semblablemẽt d'autant que les arcs AB, BC, ſont egaux, & l'arc AB, eſt double de l'arc BH, l'arc BC, ſera auſſi double du meſme BH. Parquoy les arcs CG, BC, ſont equimultiples, ſçauoir doubles des arcs Hk,
c 1.5. BH. [c] Et partant tout l'arc BG, ſera auſſi dou-
d 33. 6. ble de tout l'arc BK; [d] & partant l'angle BFG,
e 20.3. double de l'angle BFK; [e] mais d'autant que le meſme angle BFG, au centre, eſt auſſi double de l'angle FAB; les angles BFM, & FAB, ſe-
f 32. 1. ront egaux; [f] & partant les triangles, ABF, FBM, ayans les angles FAB, MFB egaux, & l'an-

gle ABF commun, seront equiangles ; g partant comme AB, à BF, ainsi BF, à BM : h donc le rectangle contenu sous AB, BM, sera egal au quarré de la droicte ligne BF. g 4. 6. h 17. 6.

Derechef d'autant que les costez AL, LM, du triangle ALM, sont egaux à HL, LM, du triangle HLM, & les angles contenus d'iceux egaux, sçauoir droicts ; i les bases AM, HM, & les angles LAM, LHM, seront egaux : k mais l'angle LAM, est egal à l'angle HBA, d'autant que les costez HA, HB, sont egaux. Donc l'angle LHM, sera aussi egal au mesme HBA ; l partant les triangles ABH, AHM, ayant les angles ABH, AHM, egaux, & HAM commun, seront equiangles. m Parquoy comme AB, à AH, ainsi AH, à AM. n Donc le rect. sous AB, AM, sera egal au quarré de AH : mais le rect. sous AB, BM, est monstré egal au quarré de BF ; donc les rectangles sous AB, BM, & sous AB, AM ensemble, sont egaux aux quarrez de BF. AH. o Mais les rectangles sous AB, BM, & sous AB, AM, sont egaux au quarré de AB ; donc le q. de AB, sçauoir du costé du pentagone, est egal aux quarrez de BF, AH, costé de l'hexagone & costé dudecagone. Donc si au cercle, &c. Ce qu'il falloit demonstrer. i 4. 1. k 5. 1. l 32. 1. m 4. 6. n 17. 6. o 2 second.

COROLLAIRE.

Il est manifeste de ceste demonstration que la ligne droicte menee du centre qui diuise vn arc en 2. egalement, diuise aussi la ligne droicte soustendante iceluy, à angles droicts & en 2. egalement : estant monstré que FH diuisant l'arc

AB en 2. egalement diuisé, aussi la ligne droicte AB, en 2. egalement & angles droicts à I, & est la mesme demonstration de tous les autres.

Il est aussi manifeste que le diametre du cercle mené de l'angle du pentagone diuise aussi l'arc soustendent le costé opposé à iceluy angle en 2. egalement, & aussi ledit costé en 2. egalement & à angles droicts : estant demonstré que le diametre AG, diuise en 2. egalement l'arc CD, soustendu du costé CD. Donc par ce qui est demonstré, il couppe aussi en 2. egalement & à angles droicts ledit costé CD : on fera la mesme demonstration de tout polygone equilateral inscrit au cercle : le nombre des costez estant impair.

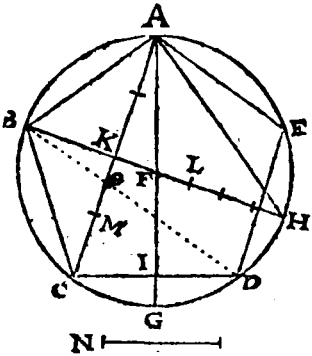
xij THEOREME 11. PROP. 11.

Si au cercle duquel le diametre est Rationel, est inscrit vn pentagone equilateral, le costé du pentagone est ligne Irrationelle; appellee mineure.

Au cercle ABCD, ayant le diametre Rationel, soit inscrit vn pentagone equilateral ABCDE. Ie dis que le costé AB, est ligne Irrationelle, appellee mineure.

Car soient menez les diametres AG, BH, se couppans au centre F, & que AG, couppe CD, à I, & soient conioinctes AC, AH, dont AC, couppe BH, à K ; & soit prise FL, quarte partie de FH, & CM, quarte partie de AC, D'autant que BH, est posee Ratio-

nelle FL, BF, parties aliquotes d'icelluy ſeront Rationelles luy eſtant commenſurables ; & partant la toute BL, compoſee d'icelles, [a] eſtant cõmenſ. à chacune d'icelles FL, BF, ſera rationelle.



a 16.10

Derechef FB, menee du centre, couppant l'arc ABC, en 2. egalement à B, [b] elle couppera la droicte ligne AC, auſſi en 2. egalement à K, & à angles droicts: [c] mais AG, couppe CD, à I, en 2. egalement, & à angles droicts. Donc les triangles ACI, AFK, ayans les angles CIA, AKF, droicts, & CAI commun, [d] ſeront equiangles. [e] Donc comme CI, à CA, ainſi FK, à FA; & en changeant comme CI, à FK, ainſi CA à FA, ou à FH, egale à FA: [f] mais comme CA, à FH, ainſi CM, quarte partie de CA, à FL, quarte partie de FH. Donc comme CI, à FK, ainſi CM, à FL, & en changeant comme CI, à CM, c'eſt à dire, comme CD, double de CI, à CK, double de CM, ainſi FK, à FL, & en compoſant comme CD, CK, enſemble à CK, ainſi FK, FL enſemble, ſçauoir KL, à FL, & [g] partant comme le quarré de la compoſee de CD, CK, au quarré de CK, ainſi le quarré de KL, au quarré de FL. Mais d'autant que ſi AC, eſt couppee en la moyenne & extreme raiſon (eſtant menee BD) [h] ſon plus grand ſegment

b coro. 10.13
c coro. 10.13
d 32.1.
e 3 6.
f 15.5.
g 22.6.
h 8.13.

OA ſera egal au coſté du pentagone, ſçauoir
à CD ; i le quarré de la compoſee de CD, ou
i 11. 13. OA, plus grand ſegment, & de ÇK, moitié de
la toute ; ſera quintuple du quarré de CK, moi-
tié de la toute. Parquoy le quarré de KL, ſera
k 6. 10. auſſi quintuple du quarré de FL, k donc le q.
de KL, ſera commenſ. au quarré de FL ; & par-
tant KL, FL, auſſi commenſ. au moins en puiſ-
ſance. Mais FL, eſt monſtree Rationelle, donc
KL, ſera auſſi Rationelle. En apres d'autant que
BF, eſt quatre telles parties que FL, 1. & telles 5.
parties que eſt BL ; FL en eſt 1. le quarré de
BL, ſera 25. telles parties que le quarré de FL,
l 20. 4. 1. (comme appert par ces nombres 1. 5. 25. l car
les quarrez ſont en raiſon doublee de leurs co-
ſtez.) Mais le quarré de KL, eſt monſtré eſtre 5.
telles parties que le quarré de FL, eſt 1. Donc le
quarré de BL, ſera 25. telles parties que le quar-
ré de KL, en eſt 5. Donc le quarré de BL, ſera
m coro. quintuple du quarré de KL. m D'autant donc que
24. 8. les quarrez de BL, KL, ne ſont entr'eux comme
nombre quarré à nombre quarré (eſtant com-
n 9. 10. me 25. à 5. ou 5. à 1.) n BL, KL, ſeront in com-
menſ. en longit. & eſtant monſtrees Rationel-
les, elles ſeront Rationelles commenſ. en puiſ-
ſance ſeulement. Donc ſi de la Rationelle BL,
on oſte la Rationelle KL, commenſ. en puiſſ.
o 74 10 ſeulement, o la reſtante BK, ſera Irrationelle,
dicte reſidu & ſa conuenable ſera KL.

Mais maintenant que BL, puiſſe plus que
KL du quarré de N. D'autant que le quarré de
BL, eſt egal aux quarrez de KL, & N. Mais le
quarré de BL, eſtoit 5. telles parties que le quar-
ré de KL, 1. le reſte quarré de N, ſera 4. telles

parties, que le quarré de BL, en eſt 5. Donc les quarrez de BL, & N, ſeront entr'eux comme nombre à nombre. p Partant commenſur. & BL, & N, commenſ. au moins en puiſſ. Mais BL eſt monſtree Rationelle. Donc N, le ſera auſſi: r Et les quarrez de BL, & N, n'eſtant entr'eux comme nombre quarré à nombre quarré (eſtant comme 5. à 4.) BL, s & N, ſeront incommenſurab. en longit. partant Rationelles commenſurables en puiſſance ſeulement. Parquoy la toute BL, eſtant Rationelle comme. en longit. à la rationelle BH (car BL, eſt 5. telles parties que BH, 8.) & pouuant plus que ſa conuenable KL, du quarré de N, monſtree incommenſ. en longit. à icelle: BK ſera reſidu 4. par la definition.

p 6. 10.

r coro. 24. 8.

s 9. 10.

Finalement, a d'autant que AB, eſt moyenne proportionelle entre BH, BK (le triangle ABH ayant l'angle BAH droict, dont eſt mené AK, pendic. à la baſe) b le q. de AB, ſera egal au rect. ſous BH, BK. Partant AB, pouuant la ſuperficie contenuë ſous la Rationelle BH, & le reſidu quatrieſme BK; c AB, ſera ligne mineure. Donc ſi au cercle, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.

a coro. 8. 6.

b 31. 3.

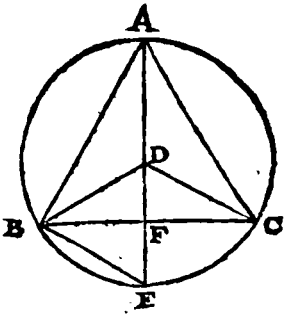
c 17. 6.

d 95. 10.

THEOREME 12. PROP. 12. viij

Si vn triangle equilateral eſt inſcrit au cercle; le coſté du triangle eſt triple en puiſſ à la ligne menee du centre du cercle à la circonference.

C'eſt à dire, que le quarré du coſté du triangle equilateral, inſcrit au cercle eſt triple du quarré de ſon demi diametre.



Au cercle ABC, dont le centre eſt D, ſoit inſcrit le triangle equilateral ABC. Ie dis que le quarré du coſté AB, eſt triple du quarré du demi-diametre.

Car ayant mené le diametre AE, coupant l'arc BC, en 2. egalement à E: a & la droicte ligne BC, auſſi en 2. egalement, & à angles droicts à F. L'arc BC, eſtant la 3. partie de la circonference; l'arc BE, ſera la ſixieſme; & BE, ligne droicte eſtant menee ſera le coſté de l'exagone; b & egale au demi diametre. c D'autant donc que le quarré de AE, eſt egal aux quarrez de AB, BE, d eſtant l'angle ABE droict, au demi cercle. e Mais le quarré de AE, eſt quadruple du quarré de BE: puis que AE, eſt double de EB; les quarrez de AB, BE, enſemble, ſeront pareillement quadruples du meſme quarré de BE, & partant telles 4. parties que ſont les quarrez de AB, BE, le q. de BE, en ſera 1. & par ainſi le q. de AB, ſera 3. telles parties. Donc le quarré de AB, eſt triple du quarré de BE, laquelle eſt egale au demi diametre. Donc ſi vn triangle, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.

a coro. 10. 13.
b coro. 15. 4.
c 47. 1.
d 31. 3.
e ſchol. 4. 2.

COROLLAIRE.

De ces choſes il s'enſuit que le diametre du cercle eſt ſeſquilatere en puiſſance au coſté du triangle equilateral deſcrit au meſme cercle. C'eſt à dire, que le q. du diametre eſt en raiſon ſeſquialtere ou comme 4. à 3. au q. du coſté du triangle equilateral inſcrit au meſme cercle. Car le q. de AB, eſtant monſtré triple du q. du demi diametre AD, le q. de AB, eſtant poſé de 3. le q. de AD, ſera 1. & partant le q. de AE, a quadruple du q. de AD ſera 4. Parquoy le q. de AE eſt ſeſquilatere du q. de AB; c'eſt à dire, comme 4. à 3. b Et d'autant que comme AE à AB, ainſi AB à AF, perpendiculaire menee d'vn angle ſur le coſté. Le q. de AB, ſera auſſi comme 4. à 3. au q. de AF.

a ſchol. 4. 2. 1

b coro. 8. 6.

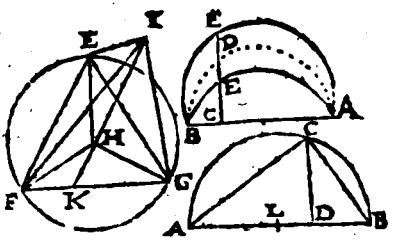
Secondement l'on peut colliger que DE, demi diametre eſt couppé en 2. egalement à F, par le coſté BC, du triangle ABC. Car le q. de AB, eſtant triple du q. de BE: ſi on poſe ledit q. de AB, de 12. le quarré de BE, ſera 4. c Mais le q. de BE, eſt egal aux quarrez de BF, FE, donc les qq. de BF, FE, ſeront 4. mais le q. de BF, eſt 3. (le d q. de AB, eſtant quadruple du q. de BF: car AB, eſt double de BF) donc le q. de FE, ſera 1. Partant le 4. de BE quadruple du q. de FE. Donc DE, ſera double de FE: Parquoy DE, eſt couppee en 2. egalement à F.

c 47. 1.

d ſcho. 4. 2.

PROBLEME 1. PROP. 13.

Cõstituer vne pyramide, & l'enuironner d'vne sphere dõnee: & monstrer que le diametre de la sphere, est sesquialtere en puissance au costé de la pyramide.



Soit AB, diametre de la sphere donnee, à l'entour duquel soit descrit ACB demi cercle: & soit prise BD, tierce partie de AB, de sorte que AD, soit double de DB, & AB, triple de la mesme DB, & sesquialtere de AD, & ayant mené CD, perpendiculaire à AB, soient iointes AC, CB. Et soit descrit le cercle FEG, de l'interuale HE, posee egale à DC, du centre H, auquel soit inscrit le triangle equilateral EFG, & conioinctes HF, HG, chacune desquelles sera egale à DC, estant egales à HE, & de H, soit leuee HI, à angles droicts au plan du cercle, & posee egale à AD, & de I, menees IE, IF, IG. Ie dis que le solide, contenu des 4. triangles FEG, IEF, IFG, IEG, est pyramide ou tetraedre.

Car d'autant que les costez DA, DC; du

triangle ADC, ſont egaux, à HI, HE, du triangle IHE, [a] & les angles contenus d'iceux poſez droicts. [b] La baſe AC, ſera egale à la baſe IE. Semblablement AC, ſera monſtree egale à IF, IG. Derechef d'autant que les 3. lignes AD, DC, DB, ſont proportionelles: comme AD, à DB, ainſi le quarré de AD, au quarré de DC; & en compoſant, comme le AB, à DB, ainſi les quarrez de AD, DC enſemble, au quarré de DC: mais [c] les quarrez de AD, DC, ſont egaux au quarré de AC. Donc auſſi comme AB, à DB, ainſi le quarré de AC, au q. de DC; partant AB eſtant triple de DB, auſſi le q de AC, ſera triple du q. HE, eſtant HE, egale à DC: [f] Or le q. de EF, eſt auſſi triple du meſme q. de HE. Donc le q. de AC, ſera egal au q. de EF, & partant AC, egale à EF. Parquoy AC, eſtant monſtree auſſi egale, à IE, IF, IG, les 4. triangles EFG, EFI, FGI, GEI, ſeront equilateraux & equi angles entr'eux. L'on a donc conſtitué vne pyramide ou tetraedre; dont la baſe eſt EFG, & le ſommet I. Ie dis qu'icelle pyramide eſt comprinſe en la ſphere donnee, dont le diametre eſt AB, & le diametre de la ſphere AB, eſt ſeſquialtere en puiſſance au coſté FF, ou AC.

a 3 d. 11.
b 4. 1.
c coro. 8. 6.
d coro. 2. 6.
e 47. 1.
f 21. 13.

Soit prolongee IH perpendiculaire, à K, de ſorte que HK, ſoit egale à DB, & la toute IK, à la toute AB; D'autant donc que les 3. AD, DC, DB, ſont proportionelles, auſquelles IH, HE, HK ſont egales, IH, HE, HK ſeront auſſi proportionelles. Parquoy HE, eſtant perpendiculaire à IK, & moyenne proportionelle entre IH; HK, le demi-cercle deſcrit à l'entour de IK, au plan

de IK, HF, passera par E, comme il sera monstré incontinent. Semblablement tant le demicercle descrit à l'entour de IK, au plan de Iκ, HF, passera par F, que le demi cercle descrit à l'entour de IK, au plan de Iκ, HG, par G Donc chacun d'iceux demi cercles mené à l'ẽtour le diametre demeurant fixe, descrira vne sphere, laquelle cõprendra le tetraedre cõstitué, puis quelle passe par tous les angles d'iceluy E, F, G, I: & icelle estant egale à la donnee, le diametre Iκ, estant posé egal au diametre AB; la sphere donnee cõprendra le mesme tetraedre.

Mais d'autant f que AB, AC, AD, sont proportionellés: comme AB, à AD. g ainsi le q. de AB sera au q. de AC: mais AB, est posee sesquialtere de AD. Donc le quarré de AB, sera sesquialtere du quarré de AC; & partant puis que AB, est le diametre de la sphere, & AC, egale à EF, costé de la pyramide. Il est manifeste que le diametre de la sphere est sesquialtere en puissance, au costé du tetraedre ou pyramide. Donc nous auons constitué, &c. Ce qu'il falloit faire.

f coro. 8. 6

g coro. 20. 6.

LEMME.

Or que le demi cercle descrit à l'entour de Ik, au plan de Iκ. HE, passe par E, il sera demonstré par ce theoreme.

Si à vne ligne droicte on mene vne perpendiculaire, qui soit moyenne proportionelle entre les segments de la ligne, le demi cercle descrit à l'entour d'icelle ligne passera par l'extremité de la perpendiculaire.

Car

Car soit CD, perpend. à AB, & moyenne proportionnelle entre AC, CB. Ie dis que le demi cercle descrit à l'entour de AB, passera par D : car s'il passoit au dessus ou au dessous, sçauoir par E ; a CE *sera aussi moyenne proport. entre AC, & CB :* b *Donc tant le q. de CD, que le q. de CE, sera egal au rect. sous AC, CB ; Partant les qq. de CD, CE, sont egaux entre eux : & CD, CE, la partie & le tout, ce qui est absurde. Donc le demi cercle passera par D. D'où il s'ensuit que le demi cercle descrit à l'entour de* Ik, *au plan de IK, HE passera par* E ; *HE estant perpend. à* Ik, *& moyenne proport. entre IH, HK.*

a coro. 13. 6.
b 17. 9.

COROLLAIRE.

De cecy on peut colliger que le diametre de la sphere est quadruple sesquialtere en puissance au demi-diametre du cercle descrit au tour de la base de la pyramide. Car le diametre de la sphere AB, estant monstré sesquialtere en puissance au costé de la pyramide EF : le q. de EF, sera de 6. telles parties que le q. de AB, en est 9. Mais le q. de HE, est deux telles parties que le q. de EF, en est 6. c Iceluy q. de EF, estant triple du q. de HE : Donc le q. de HE, sera de 2. telles parties que le q. de AB en est 9. Partant le diametre de la spere AB, est quadruple sesquialtere en puiss. au demi-diametre HE, les qq. estant comme 9. à 2.

c 12. 13

Dercchef. la perp. menee du centre de la sphere au plan de la base de la pyramide sera la 6. partie du diametre de la sphere & la tierce partie du demidiametre : Car soit L, le centre du demi cercle ABC, il sera aussi le centre de la

ſphere. Ie dis que LD (laquelle eſt menee du centre de la ſphere à la baſe EFG, perpend. A D, eſtant egale à IH, & partant le poinct D, meſme que le poinct H, tout ainſi que L, eſt le meſme que le centre de la ſphere) eſt la 6. partie du diametre de la ſphere, ſçauoir de AB, & la tierce partie du demidiametre AL. Car AD eſtant double de DB; DB ſera 2. telles parties que AD en eſt 4. & partant la toute AB 6. telles parties, & le ſemidiametre 3. telles parties. Donc ſi AD, eſt 4. & AL 3. LD ſera 1. Parquoy LD, ſera la 6. partie de AB, qui eſtoit de 6. telles parties, & la tierce partie de AL, qui eſtoit de trois telles parties.

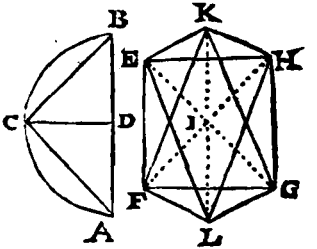
Semblablement la hauteur de la pyramide HI, ſera deux tierces parties du meſme diametre: car HI, eſt la meſme que AD, contenant $\frac{2}{3}$ du diametre par la conſtruction.

Derechef le quarré de la hauteur de la pyramide ſera de 4. telles parties, que le quarré du diametre eſt poſé en eſtre 9. Car la raiſon de 9. à 4. eſt doublee de la raiſon de 3. à 2. comme il appert icy 9.6.4.

PROBLEME 2. PROP. 14.

Conſtituer vn octaedre, & l'enuironner d'vne meſme ſphere que la pyramide, & mõſtrer que le diametre de la ſphere eſt double en puiſſance, du coſté d'iceluy octaedre.

Soit AB, le diametre de la ſphere, compre nant la pyramide conſtituee, à l'entour duque



soit descrit le demi cercle ACB, & du centre D, soit menee DC, perpend. à AB, & conioinctes AC, BC, a qui seront egales entre elles. Et prenant EF, egale à AC, ou BC, soit descrit sur icelle le quarré EFGH, auquel soient menez les diametres EG, FH, se couppans à I: Et IE, IF, IG, IH, seront egales, b estans demi diametres du cercle descrit à l'entour du quarré. Puis de I, soit menee κL, de part & d'autre perpen. au plan du quarré; Et Iκ, IL, posees egales à IE: & de κ, & L, soient menees KE, KF, KG, κH, LF, LE, LH, LG. a 4. 4.

b 9. 4.

Ie dis que le solide contenu des 8. triangles, κEF, kFG, KGH, kEH; LFE, LEH, LHG, LFG, est l'octaedre demandé. Car d'autant que les costez EI, Iκ, du triangle EIK, sont egaux à EI, IH, du triangle EIH; & les angles contenus d'iceux droicts, (sçauoir EIk, c droict, & EIG, d estant egal à GIH de suitte, pour l'egalité des costez EI, IH, & GI, IH, & des bases EH, GH) e la base EK, sera egale à la base EH.

c 3. d. 11.
d 8. 1.
e 4. 1.

Semblablement kH, sera egale à EH; partant κEH, sera triangle equilateral: Et ainsi nous conclurons que les autres triangles seront equilateraux; & par ainsi egaux au triangle KEH, estans leurs costez egaux aux costez du q. EFGH, chacun à chacun. Donc l'octaedre est constitué de 8. triangles equilateres & egaux. Lequel ie dis estre contenu de la sphere, dont le

diametre eſt AB, & de laquelle la pyramide conſtruicte eſt contenue, & le diametre de la ſphere AB, eſt double en puiſſance au coſté EF, ou AC.

f 3. d. 11 Car d'autant f que IE, eſt perpend. à kL, & moyenne proportionelle entre les ſegments kI, IL; (eſtant kI, IE, IL egales, & partant en meſme proportion) le demi cercle deſcrit à l'entour de KL, au plan de kL, IE, g paſſera par E. Semblablement le demi cercle deſcrit à l'entour de kL, au plan de KL, IF, paſſera par F. Et de meſme des poincts G, & H. Douc chacun de ces demi cercles mené à l'entour du diametre fixe kL, deſcrira vne ſphere, laquelle cõprend l'octaedre conſtitué; puis qu'elle paſſe par tous les angles d'iceluy. Donc ceſte ſphere eſtant egale à la donnee dont le diametre eſt AB (car AC, EF, eſtant egales, & partant leurs qq. egaux, & tant le q. de AC, double du quarré de AD, que le quarré de FE, du quarré de EI: AD, EI, c'eſt à dire, kI demidiametres ſeront egaux, donc les toutes AB, kL diametres, ſeront egales; & partant leurs ſpheres egales) le meſme octaedre ſera contenu de la ſphere donnee.

g 1éme preced.

h 47. 1. Mais d'autant que le q. de AB, h eſt egal aux quarrez egaux de AC, BC; le quarré de AB, ſera double du q. de AC. Parquoy AB, eſtant le diametre de la ſphere, & AC egale au coſté de l'octaedre EF, il eſt manifeſte que le diametre de la ſphere eſt double en puiſſ. du coſté de l'octaedre. Partant nous auons conſtitué, &c. Ce qu'il falloit faire.

COROLLAIRE.

D'icy il eſt manifeſte qu'en l'octaedre les 3. diametres ſe couppent à angles droicts au centre de la ſphere, comme KL, EG, FG à I. tous les angles à I, eſtant monſtrez droicts : donc kI, eſtant perpend. à EG, FH, [a] le ſera auſſi au plã par EG, FH ; [b] partant les plans κFLH, ELG k, menez par kI, ſeront à angles droicts à EFG H. Et par meſme raiſon ſe coupperont à angles droicts ; leſquels ſont auſſi quarrez, ayant pour coſtez ceux de l'octaedre, qui ſont egaux, & les angles droicts. D'autant (le q. du diam. de la ſphere eſtãt double du q. du coſté de l'octoaedre, comme il eſt monſtré) que le q. du diam. metre HF eſt egal aux quarrez des coſtez de l'octaedre FK, KH, [c] l'angle FKH, ſera droict ; & ainſi des autres.

[a] 4. 11.
[b] 8. 11.
[c] 48. 1.

Il eſt auſſi euident que l'octaedre peut eſtre diuiſé en 2. pyramides ſemblables & egales, ayant pour baſe commune le q. EFGH, & 4. triangles egaux & ſemblables tant de part que d'autre, &c.

Il s'enſuit auſſi que ſi le tetraedre & l'octaedre ſont deſcrits en vne meſme ſphere ; le coſté du tetraedre ſera ſeſquialtere en puiſſance au coſté de l'octaedre. Car poſant que le quarré du diametre de la ſphere ſoit diuiſé en 6. parties. [d] Dõc le diametre de la ſphere eſtant ſeſquialtere en en puiſſ. au coſté du tetraedre, le quarré du coſté du tetraedre ſera quatre telles parties que le quarré du diametre de la ſphere en eſt ſix.

[d] 13. 13.

Derechef, [e] le diametre de la ſphere eſtant

[e] 14. 13.

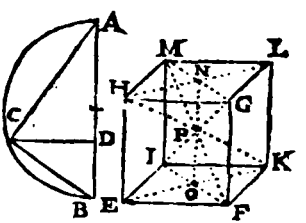
double en puiſſ. au coſté de l'octaedre, le q. du coſté de l'octaedre ſera de 3. telles parties, que le q. du diametre de la ſphere en eſt 6. Donc le q. du coſté du tetraedre eſtant 4. telles parties, que le q. du coſté de l'octaedre en eſt 3. Il eſt manifeſte que le q. du coſté du tetraedre eſt ſeſquialtere au quarré du coſté de l'octaedre.

Finalement, puis au q. EFGH, EH, eſt parallele
f 15. 11. à FG, & au q. ELGK, EK eſt parallele à GL: f le plan EHK, mené par EH, EK, ſera parallele au plan FGL, mené par FG, GL, & y ayant meſme raiſon des autres baſes de l'octaedre, il s'enſuit que les baſes oppoſees de l'octaedre ſont paralleles entr'elles.

iiij

PROBLEME 3. PROP. 15.

Conſtituer vn cube: & l'enuironner d'vne meſme ſphere que les precedentes figures; & demonſtrer que le diametre de la ſphere eſt triple en puiſſance du coſté d'iceluy cube.

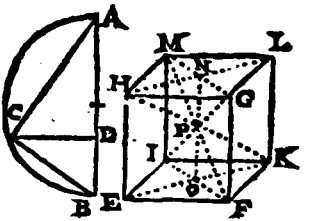


Soit AB, diametre de la ſphere qui contient les precedentes figures, à l'entour duquel ſoit deſcrit ACB demi cercle: & de AB ſoit priſe DB, tierce partie, puis ayant mené DC, perpendicul. à AB, ſoient conioinctes AC, BC. Et ſoit deſcrit EFGH, quarré de EF, qui ſoit priſe egale à BC; ſur lequel ſoiēt

menees à angles droicts EI, FK, GL, HM, auſſi egales à BC, aux extremitez deſquelles ſoient conioinctes IK, KL, LM, MI. D'autant donc que EI, FK, ſont à angles droicts au plan EFGH; [a] EI, FK ſeront paralleles: mais elles ſont egales, chacune eſtant poſee egale à BC, c'eſt à dire, à EF. [b] Donc EF, Iκ, ſont paralleles & egales; partant EFκI, parallelogramme, auquel EI, Ik, κF, eſtant chacune egales à EF, toutes les 4. ſont egales. [c] Mais tous les 4. angles ſont droicts, eſtant EIK, FκI, egaux aux droicts oppoſez κFE, IEF. Donc EFκI, eſt q. par meſme raiſon FKLG, GLMH, HMIE, ſeront quarrez: par ainſi IKLM, ſera quarré, [d] eſtant ſemblable & egal au quaré oppoſé EFGH: car EL eſt ſolide parallelippede, ayans les plans oppoſez paralleles, ſçauoir eſt, menez per des lignes paralleles ſe touchant l'vne l'autre. Parquoy EL ſera cube, lequel ie dis eſtre comprins de la ſphere dont AB eſt le diametre: Car ſoient Eκ, FI, GM, HL, diametres des plans oppoſez EFκI. GHML, par leſquels ſoient menez les plans EKLH, FIMG. [f] D'autant que tant le plan EKLH, que FIMG, couppe le cube en 2. egalemẽt: l'vn & l'autre paſſera par le centre du cube, ſçauoir par P. Auquel [g] ſe diuiſent auſſi tous les diametres du cube entr'eux en 2. egalement; partant la commune ſection des plans, ſçauoir NO, paſſera par le meſme poinct P. Mais d'autant que les plans EKLH, FIMG, ſont rectangles (car HE, eſtant perpendiculaire à EI, EF, à cauſe des quarrez EM, EK; [i] elle ſera auſſi perpendiculaire au plan Eκ, [κ] & partant à la ligne EK, donc l'angle HEκ, eſt droict, par

[a] 6. 11.
[b] 33. 11
[c] 34. 11
[d] 24. 11
[e] 15. 11.
[f] 28. 11
[g] coroi 39. 11.
[i] 4. 11.
[k] 3. d. 11

mesme raison les autres angles au plan ExLH, seront droicts, & au plan FIMG aussi. Donc les plans EKLH, FIMG, sont rectangles) & egaux, les costez de l'vn estant egaux aux costez de l'autre; & leurs diametres EL, HK, FM, GI, sont egaux; comme il est manifeste de la 34. du 1. Partant PE, PL, PH, Pk : PF, PM, PG, PI, seront egaux. Parquoy le demi cercle à l'entour de EL, descrit du centre P, & mené à l'entour, le diametre EL, demeurant fixe, descrira vne sphere passant par tous les angles du cube qui sera demonstree egale, à la sphere dont le diametre est AB.



Car puis que le quarré de Ek, est egal[l] aux quarrez egaux de EF, Fk, & partant double du quarré EF: c'est à dire, du quarré de KL: les quarrez de Ex KL, seront triples du quarré de KL. [m] Mais le quarré de EL, est egal aux quarrez de Ek, kL, l'angle EKL, estant droict, au rectangle EKLH, donc le quarré de EL, sera triple du quarré de KL, c'est à dire, du quarré de BC: mais le quarré de AB, est triple du mesme quarré de BC, [n] (car AB, BC, BD, sont proportionelles, [o] partant comme AB, à BD, ainsi le quarré de AB, au quarré de BC. Donc puis que AB, est triple de BD, le quarré de AB, sera aussi triple du quarré de BC) Donc les quarrez de EL, AB, sont egaux: parquoy EL, AB diametres des spheres seront egaux, & partant icelles spheres aussi egales. Mais d'au-

l 47. 1.
m 47. 1.
n coro. 8. 6.
o coro. 20. 6.

tant que le quarré du diametre EL, eſt monſtré triple du quarré du coſté du cube KL: il eſt manifeſte, que le diametre de la ſphere eſt triple en puiſſance au coſté du cube. Partant nous auons, &c. Ce qu'il falloit faire.

COROLLAIRE. 1.

De cecy eſt manifeſte, que tous les diametres du cube ſont egaux entr'eux, & ſe couppent en 2. egalement au centre de la ſphere: & par meſme raiſon, que les lignes droictes conioignantes les centres des quarrez oppoſez, ſe diuiſent en 2. egalement au meſme centre. Car il eſt demonſtré que les diametres du cube, EL, HK, FM, GI, ſont egaux, & ſe couppent en 2. egalement au centre P. Que NO, conioignant les centres N, & O, des quarrez oppoſez, ſoit auſſi couppee egalement en 2. au meſme centre, nous le monſtrerons: les 2. angles OFP, OPF, du triangle OPF, ſont egaux à NMP, NPM, du triangle NMP (car p OFP, eſt egal à NMP, alterne, entre FI, GM, q paralleles, eſtant communes ſections des plans paralleles EK, GM, r & OPF, egal à NPM, oppoſé au ſommet.) Mais les coſtez adiacens PF, PM, ſont egaux eſtant demi diametres: Donc PO, PN, ſeront auſſi egaux: partant NO, ſera couppee en deux egalement à P. Et ainſi des autres lignes conioignant les centres des quarrez oppoſez.

p 29. 1.
q 16. 11.
r 15. 1.

COROLLAIRE 2.

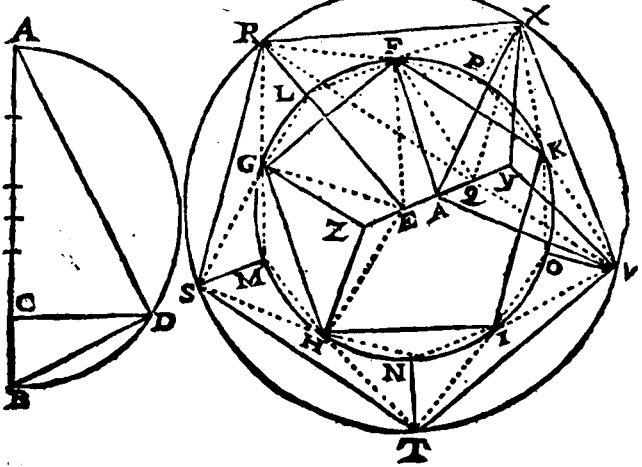
Dorechef, la puiſſance du diametre de la ſphere, ou du cube, eſt egale aux puiſſances des coſtez du tetraedre & du cube enſemble: s Car le quarré du diametre eſt 9. telles parties que le quarré du coſté du tetraedre en eſt 6. t Mais iceluy quarré du diametre eſt de 9. telles partie que le quarré du coſté du cube en eſt trois; Donc le quarré du coſté du tetraedre, & le quarré du coſté du cube enſemble, ſont de 9. parties tout ainſi que le quarré du diametre. Partant le quarré du diametre eſt egal aux quarrez deſdits coſtez. Cela eſt auſſi manifeſte du demi cercle deſcrit à l'entour du diametre de la ſphere, où le coſté du tetraedre eſt AC, & du cube eſt BC; v Mais il appert que le diametre de la ſphere AB, peut la ligne AC, & BC, puis ACB, eſt angle droict.

s 13. trezi.
t 15. 13.
v 47. 1.

xvj' PROBLEME 4. PROP. 16.

Conſtituer vn Icoſaedre, & l'enuironner d'vne meſme ſphere que les figures deuant dictes; & monſtrer que le coſté de l'Icoſaedre, eſt ligne Irrationelle, laquelle eſt appellee mineure.

Soit AB, diametre de la ſphere contenant les precedentes figures, à l'entour duquel ſoit deſcrit le demi cercle ACB; & ſoit priſe BD, cin-



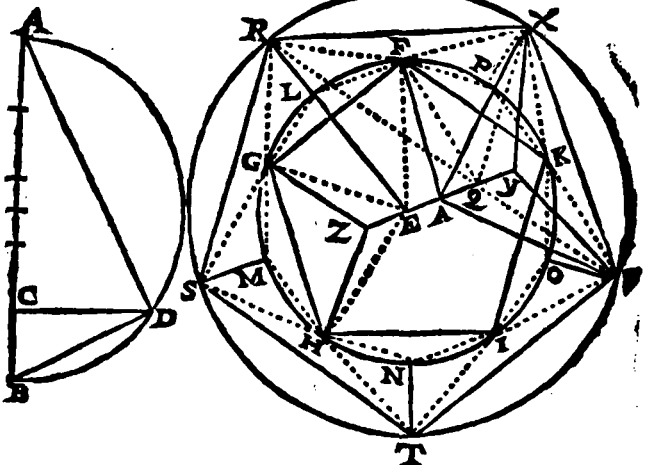
quieſme partie de AB ; afin que AB ſoit quintuple de BD, & de AD, ſeſquiquarte ; mais AD, quadruple de BD. Puis ayant mené DC, perpendiculaire à AB : ſoient menees AC, BC. Et à l'interualle de EF, qui ſoit egale à BC, ſoit deſcrit vn cercle du centre E, [a] auquel ſoit deſcrit vn pentagone equilatere FGHIK. En apres ayant diuiſé les arcs FG, GH, HI, IK, KF, en 2. egalement par L, M, N, O, P, ſoient conioinctes les droictes lignes FL, LG, GM, MH, &c. à ſçauoir les coſtez du decagone. Puis du centre E, & des poincts LMNOP, ſoient erigees des perpendiculaires au plan du cercle FGHIK : ſçauoir EQ, LR, MS, NT, OV, PX, leſquelles ſoient poſees egales au demi diametre EF, ou à BC, & elles ſeront toutes egales entr'elles : [b] mais elles ſont paralleles. Donc les lignes droictes qui les conioignent, ſçauoir EL, QR, EM, QS, EN, QT : EO, QV, EP, QX, (leſ-

[a] 11. 4.

[b] 6 11.

quelles toutesfois nous n'auons toutes menees pour euiter confuſion) c ſeront egales entr'elles deux à deux: & partant EL, EM, eſtant egales au demi diametre EF, QR, QS, QT, QV, QX, ſeront auſſi egales, & entr'elles, & au demi diametre EF, ou à BC: d mais d'autant que le plan mené par QR, QS, eſt parallele au plan FGHIK, mené par EL, EM, par meſme raiſon le plan mené par QS, QT, eſt parallele au meſme plan FGHIK, mené par EM, EN: mais le plan mené par QR, QS, conuient auec le plan par QS, QT, à la ligne droicte QS, donc ces 2. plans feront enſemble vn ſeul plan, comme il ſera incontinent demonſtré. Semblablement le plan par QT, QV, & cettuy cy ſeront vn ſeul plan, & auſſi le plan par QV, QX, & le plan auſſi par QX, QR. Il y a doc 5. lignes egales en vn meſme plan QR, QS, QT, QV, QX. Partant ſi de Q, à l'interualle QR, on deſcrit vn cercle en iceluy plan, il paſſera par les autres points R, S, T, V, X, & ſera egal au cercle FGHIK: Soient conioinctes par R, S, T, V, X, les lignes RS, ST, TV, VX, XR. f D'autant que LR, PX, ſont egales & paralleles, ſi on entend vne ligne droicte menee de L, à P, g LP, RX, ſeront auſſi egales & paralleles: partant en cercles egaux, elles oſteront arcs egaux: mais LP, prend la 5. partie du cercle FGHIK, ſçauoir les $\frac{1}{10}$ FL, FP. Donc RX, prendra auſſi la 5. partie du cercle RSTVX. Tout de meſme nous conclurons que les autres lignes droictes RS, ST, TV, VX, prennent les cinquieſmes parties. Parquoy RSTVX, eſt pentagone equilatere, ayant tous les coſtez egaux, au pentagone FGHIK. Car des angles

c 33. 1.
d 15. 1.
f 6. 11.
g 33. 1.
h 28. 3.



du pentagone RSTVX, ſoient menees aux angles du pentagone FGHIK, les lignes droictes RF, RG, SG, SH, TH, TI, VI, Vκ, XK, XF. D'autant donc que Lκ, perpen. eſt poſee egale au demi diametre EF, c'eſt à dire, au coſté de l'hexagone du cercle FGHIK, & LF, eſtãt coſté du decagone, i le quarré du coſté du pentagone du meſme cercle, ſera egal aux quarrez de LR, LF: k mais le quarré de FR, eſt egal aux meſmes quarrez; l l'angle FLR, eſtant droict: Donc le quarré de FR, eſt egal au quarré du coſté du pentagone, donc FR, ſera egale au coſté du pentagone LP, ou FG, c'eſt à dire, à KX. Et par meſme raiſon les autres lignes RG, SG, SH, &c. ſeront egales aux autres coſtez de l'vn & l'autre pentagone: & partant les dix triangles RFX, RFG, RGS, SGH, SHT, THI, TIV, VIK, VKX, XκF, ſeront equilateres entr'eux & egaux, leurs coſtez eſtant egaux à ceux du pentagone equilateral: puis apres ſoit prolon-

i 10.13.
k 47.1.
l 3.d.11

gee la perpendiculaire EQ, de part & d'autre, en ſorte que QY, EZ, ſoient egales chacune au coſté du decagone du cercle FGHIK, ou RST VX, & ſoient conioinctes VQ, VY, XQ, XY, GE, GZ, HE, HZ. D'autant que QX, eſt demi diametre du cercle RSTVX; c'eſt à dire, coſté l'hexagone, & QY, eſt coſté du decagone du meſme cercle, m le quatré du coſté du pentagone XV, eſt egal aux quarrez de QX, QY; n mais le quarré de XY, eſt egal aux meſmes quarrez, l'angle XQY, o eſtant droict (Car les plans des cercles FGHIk, RSTVX, eſtant monſtrez paralleles, & EQ, eſtant perpendic. au plan de celuy là par la conſtruction, p EQ, ſera auſſi perpendic. au plan de cettuy cy comme il appert; & partant perpend. à QX, au meſme plan) Donc le quarré de XY, eſt egal au q. de XV, donc XY ſera egale à XV ainſi XV, ſera monſtree egale à VY: partant le triangle VYX, eſt equilateral. Ainſi on demonſtrera, ſi on mene les lignes droictes RY, SY, TY (leſquelles toutesfois n'ont eſté menees pour euiter confuſion) que les 4. triangles RYX, RYS, SYT, TYV, ſont equilateres & egaux au triangle VYX, c'eſt à dire, aux 10. premiers, tous leurs coſtés eſtant egaux aux coſtez du pentagone. Semblablement GZH, ſera equilatere, (puis que EG, eſt le coſté de l'hexagone, ſçauoir le demi diametre, & EZ coſté du decagone, & l'angle GEZ q droict) & auſſi les quatre triangles HZI, IZK, KZF, FZG (deſquels nous n'auons mené les lignes pour euiter confuſion) tous leſquels ſeront egaux aux 15. premiers chacun au ſien pour la meſme cauſe. Donc ces 20. triangles eſtant equilateres & egaux, & chacun ſoit conioinct à chacun par des lignes droictes,

m 10.13
n 47. 1.
o 3.d.11
p 14.11
q 3.d.11

ſçauoir leurs coſtez ; l'on aura conſtitué d'iceux vn Icoſaedre: lequel ie dis eſtre compris de la ſphere dont AB eſt le diametre.

Car ſoit diuiſee EQ, en 2. egalement par α, & menees α F, α X, α V. D'autant que les coſtez α Q, QV, du triangle α QV, ſont egaux à α Q, QX, du triangle α QX, puis que QV, QX, ſont demi diametres du cercle RSTVX : mais les angles α QV, α QX, ſont r egaux, ſçauoir droicts : s les baſes α V, α X, ſeront egales. Semblablement ſi on mene des lignes droictes de α, Q, à R, S, T, les droictes lignes α R, α S, α T, ſeront monſtrees egales & entr'elles & à α V, α X. Derechef d'autant que les coſtez α Q, QX, du triangle α QX, ſont egaux à α E, EF du triangle α EF, puis que QX, EF, ſont demi diametres de cercles egaux; & que EQ, eſt diuiſee en 2. egalement par α. Mais les angles α QX, α EF, ſont egaux, t ſçauoir droicts, les baſes α X, α F ſont egales: Semblablement ſi de α, E, on mene des lignes droictes à G, H, I, K, on monſtrera α G, α H, α I, α K, egales à α X : & partant les 10. lignes menees aux 10. angles F, G, H, I, K ; R, S, T, V, X, ſont egales. Mais d'autant que QE, eſt demi diametre, c'eſt à dire, coſté de l'hexagone du cercle FGHIK, & EZ, coſté du decagone du meſme cercle, x QZ, ſera diuiſee en E, en la moyenne & extreme raiſon, & le plus grand ſegment ſera QE. Parquoy le moindre ſegment ZE, prenant E α, moitié du plus grand, c'eſt à dire, α Z, y peut le quintuple du quarré deſcrit de E α : Mais α F, peut auſſi le quintuple du meſme quarré de E α (car le quarré de EF, z eſtant quadruple

r 3. d. 11. s 4. 1.

t 3. d. 11. v 4. 1.

x 9. 13.

y 3. 13.

z ſchol. 4. 2.

du quarré de α E, eſtant EF, double de E α; les quarrez de EF, E α enſemble ſeront quintuples du quarré de E α. a Et le quarré de AF, eſtant
a 47.1. egal aux quarrez de EF, E α: le quarré de α F, ſera auſſi quintuple, du quarré de E α) Donc les quarrez de α Z, α F ſeront egaux, & partant α Z, α F egales, donc puis que ZY, eſt couppee en 2. egalement à α (d'autant que ſi on adiouſte aux egales α E, α Q, les egales EZ, QY, les toutes Z α, Y α, ſont faictes egales) toutes les lignes droictes menees de α, à tous les angles de l'Icoſaedre ſeront egales. Parquoy la ſphere deſcrite à l'entour du diametre ZY, du centre α, paſſera par tous les angles de l'Icoſaedre conſtitué. Ie dis qu'elle eſt egale à la ſphere du diametre AB.

Car b puis que comme α Z, à α E, ainſi YZ,
b 15. 5 double de α Z, à QE, double de α E: c par ainſi
c 22.6. comme le q. de α Z, au q. de α E, ainſi le q. de YZ, au q. de QE, & le q. de α Z, eſtant monſtré quintuple du quarré de α E, auſſi le q. de YZ, ſera quintuple du quarré de QE, c'eſt à dire, du q. de BC; QE, eſtant poſee egale au demi diametre EF; c'eſt à dire, à BC: mais le q.
d coro. de AB, eſt auſſi quintuple du meſme q. de BC
8. 6. (car AB, eſtant à BC, comme BC, à BD, e com-
e coro. me AB, ſera à BD, ainſi le q. de AB, au q. de
20. 6. BC, & partant eſtant AB, quintuple de BD, le quarré de AB, ſera auſſi quintuple du q. de BC) Donc les quarrez de YZ, AB, ſont egaux, parquoy YZ, AB, auſſi egales, & partant les ſpheres deſcrites à l'entour d'icelles ſeront egales.

Finalement d'autant que le diametre de la ſphere AB, eſt poſé Rationel (car en comparaiſon

raiſon d'iceluy il faut monſtrer que le coſté de l'Icoſaedre eſt ligne Irrationelle appellee ligne mineure) & peut le quintuple du quarré de BC, ou de EF, ſon egale; EF demidiametre du cercle FGHIK, ſera auſſi rationelle (car les quarrez de AB, EF, eſtant entr'eux comme nombre à nõbre, ſçauoir cõme 5. à 1. ou 10. à 2. ſeront commenſ. Partant AB, EF, commenſ. au moins en puiſſ. Donc puis que AB, eſt rationelle, EF le ſera auſſi.) Parquoy tout le diametre du cercle FGHIK, ſera rationel. Parquoy FG, coſté du pentagone, c'eſt à dire de l'Icoſaedre, ſera ligne Irrationelle, appellee mineure. Donc nous auons conſtitué, &c. Ce qu'il falloit faire. f 6. 10. g 11. 13.

COROLLAIRE. 1.

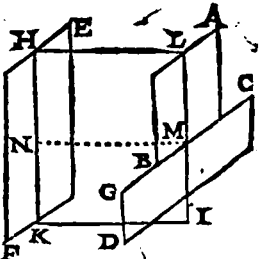
De cecy l'on peut conclurre, que le diametre de la ſphere eſt quintuple en puiſſance au demidiametre du cercle, qui enuironne les cinq coſtez de l'Icoſaedre, ſçauoir de celuy duquel l'Icoſaedre eſt conſtitué, & qui paſſe par les 5. angles de l'Icoſaedre. Car il eſt monſtré que le quarré du diametre AB, eſt quintuple du q. de BC; c'eſt à dire, du demi diametre EF.

2. Pareillement il eſt manifeſte que le diametre de la ſphere, eſt compoſé du coſté de l'hexagone, c'eſt à dire du demi diametre, & de 2. coſtez du decagone d'vn meſme cercle: car YZ, diametre de la ſphere eſt compoſé de EQ, coſté de l'hexagone, & de QY, EZ, coſtez du decagone FGHIK.

3. Il appert finalement que les coſtez de l'Icoſaedre oppoſez, comme RX, HI, ſont paral-

leles : car RX, eſt monſtree parallele à la droicte ligne quiſeroit menee de L, à P. Donc HI, eſtãt auſſi parallele à la meſme LP (les angles alternes HIL & IL P, faicts de la droicte menee de L
g 27. 3. à P, g eſtans egaux ſouſtendans arcs egaux, ſçauoir chacun $\frac{3}{10}$ de la circonference.) Il eſt manifeſte que RX, HI ſont paralleles, & ainſi des autres coſtez oppoſez.

LEMME.



Or que 2. plans paralleles à vn autre leſquels conuiennent à vne meſme ligne, facent vn ſeul plan, il ſera ainſi demonſtré. Soient les plans AB, CD, paralleles au plan EF, & ſe rencontrans ſelon la ligne CG. Je dis que AB, CD, ſont vn ſeul plan : Car que le plan HI, couppe les trois plans AB, CD, EF, par Hk, LM, MI. D'autant que AB, EF, ſont parallele-
a 16. 11. *les, a leurs communes ſections LM, Hk ſeront paralleles, & par meſme raiſon IM, Hk, auſſi paralleles: Parquoy LM, IM, eſtans paralleles à Hk, & en vn meſme plan HI, & ſe rencontrant à M, elles ſe rencontreront directement (car les 2. angles LMN, IMN,*
b 29. 1. *b ſeront egaux aux 2. au poinct N, chacun à ſon alterne:*
c 14. 1. *partant à 2. droicts, c donc LMI ſera ligne droicte)*
d 1. 11. *partant les plans AB, CD, en ſont vn ſeul, d d'autant que la ligne LI, eſt toute en vn ſeul plan. Ce qui eſt propoſé.*

SCHOLIE.

Henrion ayant pris la demonſtration de ceſte propoſition de Clauius mot pour mot, dit en icelle ſçauoir au commencement de la page 802.

Mais que le plan tiré par les lignes QR, QS, conuient auec le plan mené par les lignes QS, QT, en la ligne droicte QS; il eſt euident par les choſes demonſtrees à la 16. prop. de 11. l. que ces 2. plans en font en ſeul, &c.

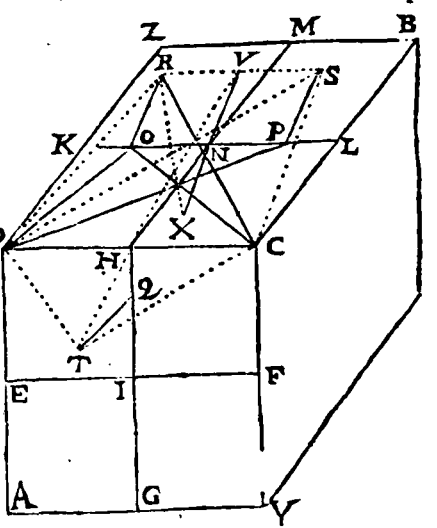
Mais il ne conſidere pas que Clauius a demonſtré en ſuitte de la 16. prop. de 11. l. que 2. plans paralleles à vn autre ſe rencontrans à vne meſme ligne font vn ſeul plan: mais luy (Henrion diſie) ne l'ayãt pas demonſtré en ſon l. à la meſme 16. il ſe meſprend fort, & monſtre manifeſtement qu'il coppie les propoſitions de Clauius ſans les entendre. D'auantage ce bon Docteur à la 5. prop. du 14. l. coppiant ces meſmes mots de Donnot, prenant la demonſtration dudit Donnot: (Ce que nous auons monſtré eſtre poſſible par la 2. p. 14. qu'vn meſme cercle comprend, & le triangle de l'Icoſaedre, & le pentagone du dodecaedre) *n'a pas eu l'eſprit de voir que l'ordre des propoſitions de Donnot, & des ſiennes eſt changé: car il a pris la 4. de Donnot, & la miſe pour 2. en ſon liure, donc au lieu de la 2. de Donnot qu'il penſe citer, il cite la 4. où ce qu'il veut dire n'eſt pas demonſtré: en quoy il eſt manifeſte qu'il coppie ſeulement ce qu'il trouue eſcrit, ſans auoir eſgard à autre choſe.*

PROBLEME 5. PROP. 17.

xvij

Constituer vn dodecaedre & l'enuirõner d'vne mesme sphere que les figures deuant dites : & monstrer que le costé du dodecaedre est ligne Irrationelle, laquelle est appelleeResidu.

Soient posez 2. plans du cube deuant dit à angles droicts l'vn à l'autre AC, BD, dont les costez soient couppez chacun en 2. egalement par E, G, F, H, K, L, M, & menees les lignes EF, GH, KL, HM, s'entrecouppantes aux
a 30. 6. poincts I & N; puis IH, KN, NL, soient a coup-



pees en la moyenne & extreme raison par O, P, Q, dõt les plus grands segmẽs sont IQ, PN, N
b 12. 11. O. b Et aux parties exterieures des plans BD, CA, soient menees OR, PS, QT, perpendiculaires egales à PN, NO, IQ, &

conioinctes DT, DR, SR, CT, CS. Ie dis que DRSCT, est pentagone equilatere & equiangle, & est sur vn mesme plan.

Qu'il ne soit ainsi, soient conioinctes DP, DO, DS au plan DB, & DS; Puis que NK, est couppee en la moyenne & extreme raison à O, & NO est le plus grand segment, c les quarrez de NK, & de KO, seront triples du quarré de NO. Et NK, KD, estant egales, & ON, OR, aussi egales par la construction, les qq. de DK, kO, seront aussi triples du q. de NO, c'est à dire, du q. de OR: mais le q. de DO, est egal aux 2. qq. de DK, KO, (d l'angle OKD, estant droict) donc le q. de DO, est aussi triple du q. de OR: Parquoy adiouſtant ledit quarré de OR, les 2. qq. de DO, OR, seront quadruples du q. de OR: mais le q. de DR, est egal aux 2. qq. de DO, OR (e l'angle DOR estant droict) il sera dõc aussi quadruple du quarré de OR. Et RS, estant double de RO, f son q. sera aussi quadruple du q. de RO: parquoy DR, RS seront egales. Par la mesme raison les 3. autres costez DT, TC, CS, seront monstrez egaux entr'eux & à DR. RS: partant le pentagone est equilateral.

c 4.13.
d 47.1.
e 47.1.
f schol. 4.2.

Il est aussi en vn mesme plan: car soit menee NV, parallele à OR; & soient aussi menees VH, TH, icelles se rencontreront directement & VHT, sera vne seule ligne droicte. Car HI, estant couppee selon la moyenne & extreme raison à Q, g IH sera à IQ, comme IQ, à QH: Et IH, HN, sont egales, & NV, IQ, & QT, QI, aussi egales: parquoy comme HN, à NV, ainsi QT, à QH: Doncles triangles VNH, HQT, ayant 2. costez proportionaux à 2.

g 3 d 6.

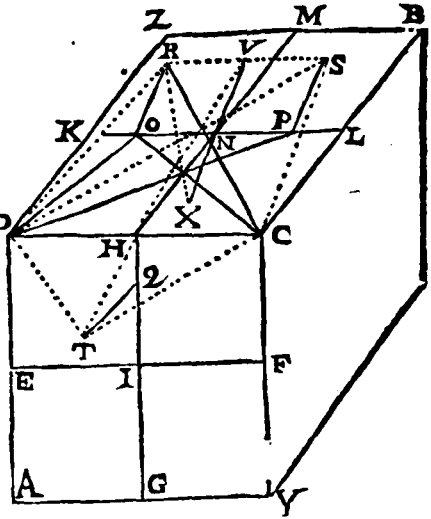
costez, & estant conioincts à l'angle H, en sorte que les costez de mesme raison NH, QT, & NV, QH, h sont paralleles estant perpendiculaires aux plans AC, DB ; i la ligne VHT, sera vne seule ligne droicte ; k laquelle estant en vn mesme plan ; Il s'ensuit que tout le pentagone DTCSVR, mené par icelle est en vn mesme plan.

h 6. 11.
i 32. 6.
k 1. 11.

Il est aussi equiangle. Car KN, estant couppee en la moyenne & extreme raison, & ON plus grand segment, si on adiouste KN, à NP, egale au plus grand segment NO, la toute KP, sera couppee en la moyenne & extreme raison à N, & KN, sera le plus grand segment ; m donc les qq. de KP, & NP, ou de PS, egale à NP, sont triples du q. de KN, ou du q. de KD, egale à KN. Et adiouſtant le q. de KD, auec les 2. qq. de KP, & PS ; ces 3. qq. seront quadruples du q. de KD : mais le q. de PD, n est egal aux 2. qq. de PK, KD, donc les 2. qq. de DP, PS, seront quadruples du q. de KD : o mais le q. de DS, est egal aux 2. qq. de DP, PS, donc le q. de DS, sera aussi quadruple du q. de KD. Et le q. de DC, p est aussi quadruple du q. de DK (DC estant double de DK : parquoy DC, DS, seront egales. Et tous les costez du pentagone estant egaux, les 2. triangles DRS, DTC, auront les costez DR, RS egaux à DT, TC, chacun au sien, & les baſes DS, DC, egales ; q donc l'angle DRS, sera egal à DTC, ainsi sera monstré que l'angle RSC, est egal à l'angle DTC : parquoy 3. angles du pentagone estant egaux, r il sera equiangle ; & estant equilatere, sur DC, l'vn des 12. costez egaux du cube. Et si sur chacun

l 5. 13.
m 4. 13.
n 47. 1.
o 47. 1.
p scho. 4. 2.
q 8. 1.
r 7. 13.

costé. des 11. restans, est construict vn pentagone l'on aura vne figure solide contenue de 12. pentagone equilateres & equiangles, laquelle sera Dodecaedre par la definition.



Il peut aussi estre inscrit en la sphere proposee: car VN, estant perpendicul. au plan BD, menee de N, centre d'iceluy plan, estant prolongee, s elle couppera la diagonale du cube en 2. egalement à X, t qui sera le centre de la sphere enuironnant le cube, & XN est egale à la moitié du costé du cube. Soit menee XR: les qq. de KP, NP, estant v monstrez triples du q. de KN; & VX, estãt egale à KP, & RV, à NP. (NX estant egale à KN, & VN, à NP) Parquoy les qq. de RV, VX, sont triples du q. de KN: mais le q. de RX x est egal aux 2. qq. de RV, VX, parquoy le q. de RX, sera aussi triple du q. de KN. y Mais le q. du diametre de la sphere descrite à l'entour du cube, est triple du q. du

s 39. 11. t corol. 15. 13.

v 4. 13.

x 47. 1.

y 15. 13.

costé du mesme cube : & les parties estant en
z 15.5. mesme raison que leurs equimultiples, z le q. du demi diametre sera triple au q. du demi costé: mais KN, est moitié du costé du cube. Donc RX, sera demi diametre de la sphere descrite autour du cube AB, dont le centre est X : Semblablement on monstrera que toutes les lignes droictes menees de X aux autres angles du dodecaedre sont egales aux demi diametres de la sphere descrite autour du cube : Donc vne mesme sphere peut estre circonscrite au cube & au dodecaedre.

Finallement le costé du dodecaedre est ligne Irrationelle appellee residu. Car les 2. demi costez du cube KN, NL, estant couppez en la
a 15. 5. moyenne & extreme raison ; a la toute KL, sera aux 2. plus grands segments ensemble, sçauoir à OP, comme OP, qui sont les 2. mesmes plus grands segments, aux 2. moindres sçauoir à la ligne composee de PL, KO : Donc si KL, costé du cube est couppée en la moyenne & extreme raison, OP sera le plus grand segment: mais KL, couppee de ceste maniere est Rationelle (son q. estant commensurable au q. du
b 15.13. diametre de la sphere, posé Rationel : b estant le tiers d'iceluy) parquoy OP, plus grand
c 6. 13. segment ou RS, costé du dodecaedre son egale sera ligne Irrationelle appellee residu. Partant nous auons faict le requis. Ce qu'il falloit faire.

COROLLAIRE.

Il s'ensuit de ceste demonstration que le costé

du cube eſtant couppé en la moyenne & extreme raiſon, que le plus grand ſegment eſt le coſté du dodecaedre inſcrit en la meſme ſphere.

Et le coſté du cube eſt egal à la droicte ligne ſouſtendante l'angle du pentagone du dodecaedre. Mais d'autant qu'icelle eſtant couppee en la moyenne & extreme raiſon, c le plus grand ſegment eſt coſté du pentagone : d la ligne droicte compoſee de ladite ſouſtendante l'angle du pentagone, c'eſt à dire, du coſté du cube & du plus grand ſegment, ſçauoir du coſté du dodecaedre eſt ſemblablement diuiſee, & le moindre ſegment eſt coſté du dodecaedre, & le plus grand ſegment eſt le coſté du cube : Il s'enſuit qu'vne ligne droicte eſtant couppee en la moyenne & extreme raiſon, le moindre ſegment ſera le coſté du dodecaedre, & le plus grand ſera le coſté du cube inſcrit en la meſme ſphere.

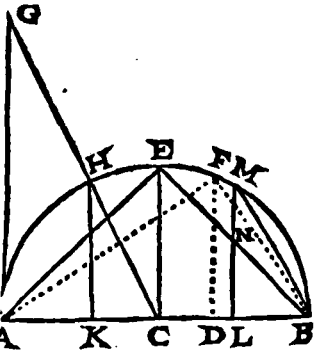
c 8. 13.
d 5. 13.

PROBLEME 6. PROP. 18. xviij

Expoſer les coſtez des cinq figures precedentes, & les comparer entr'eux.

C'eſt à dire, trouuer les coſtez des cinq figures inſcrites en vne ſphere, & leur raiſon, le diametre eſtant donné.

Soit expoſé le diametre de la ſphere AB ; & ſoit couppé à C, en 2. egalement, & à D, en ſorte que AD, ſoit double de DB : & deſcrit le demicercle AEB, & menees CE, DF, à angles droicts à AB, de C & D, & conioinctes AF, FB,



EB. Partant d'autant que AD, est double de DB, AB, sera triple de BD : & par conuersion de raison BA, sesquialtere de AD; mais cõme BA, à AD, ainsi le quarré de BA, au quarré de AF: a car le triãgle AFB, est equiangle au triangle AFD. Donc le quarré de BA, est sesquialtere du quarré de AF: mais le diametre de la sphere est aussi sesquialtere en puissance au costé de la pyramide; & AB, est le diametre de la sphere, donc AF, est egal au costé de la pyramide. Derechef, d'autant que AD, est double de DB; AB, sera triple de BD : mais comme AB, à BD : ainsi le quarré de AB, au quarré de FB; donc le quarré de AB, est triple du quarré de BF. c Mais le diametre de la sphere est triple en puissance au costé du cube, & AB est le diametre de la sphere : donc BF, est le costé du cube: Et AC, estant egale à CB, AB sera double de BC: mais comme AB, à BC, ainsi le quarré de AB, au quarré de BE; Donc le quarré de AB est double du quarré de BE, d & le diametre de la sphere est double en puiss. du costé de l'octaedre: & AB est le diametre de la sphere donnee ; parquoy BE, est costé de l'octaedre. De A, soit menee AG, à angles droicts à AB, & posee egale à icelle AB. Et ayant conioinct GC, couppant la circonfe-

a 8. 6.

b 1. trezi.

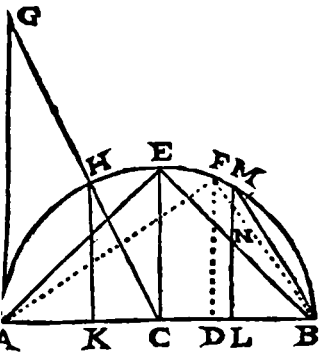
c 15. 13.

d 14. 13.

rence à H, de H, ſoit menee HK, perpendicul. à AB; d'autant que AG, eſt double de AC (car GA, eſt egale à AB) [c] mais comme GA, à AC, ainſi HK, à KC; HK, ſera double de KC; [f] donc le quarré de HK, eſt quadruple du quarré de KC, donc les quarrez de HK, KC, c'eſt à dire le quarré de HC, eſt quintuple du quarré de KC: mais HC, eſt egale à CB, donc le q. de BC, eſt quintuple du quarré de Ck. Et d'autant que AB, eſt double de BC, deſquelles AD eſt double de DB, la reſtante BD ſera double de CD: parquoy BC eſt triple de CD. [h] Donc le quarré de BC, eſt noncuple du q. de CD: mais le quarré de BC, eſt quintuple du quarré de CK, donc le quarré de CK, eſt plus grand que le quarré de CD, & KC plus grand que CD. Soit poſee CL, egale à KC, & de L, menee LM, à angles droicts à AB, & ioincte MB; Et d'autant que le quarré de BC, eſt quintuple du quarré de KC; & BA, double de CB, & KL, double de CK: [k] le quarré de AB, ſera quintuple du q. de KL: [l] mais le diametre de la ſphere eſt quintuple en puiſſance, du demi diametre du cercle duquel l'Icoſaedre eſt deſcrit, & AB eſt le diametre de la ſphere; donc KL, eſt coſté de l'hexagone dudit cercle. D'auantage d'autant que le diametre de la ſphere, eſt compoſé du coſté de l'hexagone, & des 2. coſtez du decagone deſcrits au meſme cercle, & AB, eſt le diametre de la ſphete, KL, coſté de l'hexagone, & AK, egal à LB: l'vne & l'autre AK, LB, ſera coſté du decagone deſcrit au meſme cercle, duquel eſt deſcrit l'Icoſaedre: & d'autant que le coſté du decagone eſt LB, & celuy de l'exagone ML: car il

c 4. 6.
f ſchol. 4. 2.
g 19. 5.
h 20. 6.
k 15. 5.
l coroll. 16. 13.
m coro 16. 13.

eſt egal à KL, l'eſtant auſſi à HK : car elles ſont egalemẽt diſtãtes du centre: & l'vne & l'autre HK, KL, eſt double de HC : MB, ſera le coſté du pentagone : car ce qui eſt du pentagone, eſt le meſme que de l'Icoſaedre. Donc MB, eſt coſté de l'Icoſaedre Et d'autant que FB, eſt coſté du cube. Soit couppee en la moyenne & extreme raiſon, à N, & BN, ſont le plus grand ſegment; NB, ſera le coſté du dodecaedre, & le diametre de la ſphere eſtant monſtré ſeſquialtere en puiſſance au coſté de la pyramide AF, & double en puiſſ. à BE, coſté de l'octaedre, & triple en puiſſance à FB, coſté du cube; deſquelles parties le diametre de la ſphere eſt ſix en puiſſ. des meſmes parties, le coſté de la pyramide ſera 4. de l'octaedre 3. & du cube 2. Donc le coſté de la pyramide eſt ſeſquitiers en puiſſance du coſté de l'octaedre, & du coſté du cube double en puiſſ. Et le coſté de l'octaedre eſt ſeſquialtere en puiſſ. au coſté du cube: donc les coſtez ſuſdits des 3. figures, ſçauoir de la pyramide, de l'octaedre, & du cube ſont entr'eux en proportion Rationelle: mais les 2. autres ſçauoir de l'Icoſaedre, & du dodecaedre, ne ſont en proportions rationelles, ny entr'eux, ny aux ſuſdits, ſçauoir la Mineure & Reſidu.



14.13.

10.13.

16.13.

cor. 17. 13.

Mais nous demonſtrerons ainſi, que le coſté BM, de l'Icoſaedre, eſt plus que le coſte BN du Dodecaedre.

Car d'autant que le triangle FDB, eſt equiangle à FAB, comme DB, ſera à BF, ainſi FB, à BA; & y ayant 3. lignes proportionelles, comme la premiere ſera à la troiſieſme, ainſi le q. de la premiere au q. de la ſeconde. Donc comme DB, à BA, ainſi le q. de DB, au q. de BF, & par conuerſion de raiſon, comme AB, à BD, ainſi le q. de FB, au q. de BD. Mais AB, eſt triple de BD; donc le q. de FB, eſt triple du q. de BD. Mais le q. de AD eſt quadruple du q. de DB: car AD eſt double de DB; donc le q. de AD, eſt plus grand que le q. de FB; d'autant que AD, eſt plus grande que FB; partant AL, à bien plus grande que FB. Et AL, eſtant couppee en la moyenne & extreme raiſon, la plus grande portion eſt LK, d'autant que κL, eſt coſté de l'hexagone, & κA du decagone, & FB eſtant couppee en la moyenne & extreme raiſon, la plus grande portion eſt BN, donc KL, eſt plus grande que BN, mais KL, eſt egale à LM; donc LM, eſt plus grande que BN. Mais BM, eſt plus grande que ML; donc MB, coſté de l'Icoſaedre ſera plus grande que BN, coſté du Dodecaedre.

a 8.6. b coro. 20.6. 20.6. 9. 13. 19. 1.

Autrement, d'autant que AD, eſt double de DB; AB, ſera triple de BD, mais comme AB, à BD, ainſi le quarré de AB, au quarré de BF, d'autant que le triangle FAB, eſt equiangle au triangle FBD: donc le q. de AB, eſt triple du q. de BF: mais le q. de AB, eſt monſtré quintuple du q. de KL; donc 5. q. de κL, ſont egaux

cor. 20. 6. 8.6.

à trois de B.F : mais 3. de B F, ſont plus grands que 6. de ceux qui ſont faicts de BN ; donc auſſi 3. de KL, ſont plus grands que 6. de BN. Donc vn de KL eſt plus grand qu'vn de BN, partant KL, eſt plus grande que BN : mais KL, eſt egale à LM. Donc LM, eſt plus grande que BN; parquoy MB, eſt encore bien plus grande que BN, Ce qu'il falloit demonſtrer.

Mais nous demonſtrerons ainſi, que trois de FB, ſont plus grands que 6. de ceux de BN.

D'autant que BN, eſt plus grande que NF, le rectangle, ſous FB, BN, ſera plus grand que le rectangle ſous BF, FN, donc celuy qui eſt contenu de FB, BN, auec celuy de BF, FN, eſt plus grand que le double de celuy qui eſt contenu ſous BF, FN, mais celuy qui eſt contenu de FB, BN, auec le contenu ſous BF, FN, eſt le quarré de FB. Mais celuy qui eſt contenu ſous BF, FN, eſt egal au q. de BN. Car FB, eſt couppee en la moyenne & extreme raiſon à N, & le rect. contenu ſous les extremes eſt egal au q. de la moyẽne. Donc le quarré de FB, eſt plus grand que le double du qu q. de BN : parquoy vn quarré de FB, eſt plus grand que deux de BN, & partant trois de FB, ſont plus grands que 6. de ceux qui ſont faicts de BN. Ce qu'il falloit demonſtrer.

2. ſecõd 176.

SCHOLIE.

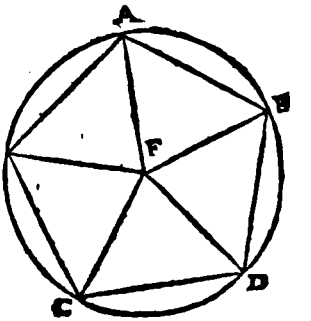
Ie dis qu'outre les cinq figures deſia dictes, que l'on ne peut conſtituer d'autre figure, laquelle ſoit contenue de figures equilateres & equiangles egales entr'elles.

Car de 2. triangles ou de deux autres plans l'on ne

conſtituera pas vn angle ſolide : mais de 3. triangles on conſtituel'angle de la pyramide: de 4. celuy de l'octaedre: de 5. celuy de l'Icoſaedre : mais de 6. triangles equilateres & equiangles conſtituez à vn poinct, vn angle ſolide n'eſt faict. Car l'angle d'vn triangle equilatere eſtant les $\frac{2}{3}$ d'vn droict, 6. ſeront egaux à 4. droicts : ce qui ne ſe peut faire. Car tout angle ſolide eſt contenu de 4. angles moindres que 4. droicts, par meſme raiſon l'angle ſolide, n'eſt conſtitué de plus de ſix angles plans. Partant l'angle du cube eſt contenu de 3. quarrez, & ne ſe peut faire qu'il ſoit contenu de 4. car il y auroit derechef 4. angles droicts. L'angle du dodecaedre eſt contenu de 3. pentagones equiangles & equilateres : mais il ne peut eſtre contenu de 4. Car l'angle du pentagone equilatere eſtant faict d'vn droict, & de la cinquieſme partie d'vn droict, ce ſeront 4. angles plus grands que 4. droicts : ce qui ne ſe peut faire ; & des autres figures polygones ne peut eſtre conſtitué vn angle ſolide, pour les abſurditez qui s'en enſuiuent. Donc outre les figures deſia dictes, n'eſt conſtituee d'autre figure ſolide, contenue de figures equilateres & equiangles. Ce qu'il falloit demonſtrer. 21. 11.

Or nous demonſtrerons en ceſte maniere que l'angle du pentagone equilatere & equiangle, eſt faict d'vn droict, & de la cinquieſme partie d'vn.

Soit le pentagone equilateral & equiangle ABCDE, à l'entour duquel ſoit deſcrit le cercle ABCDE, & ſoit pris le centre d'iceluy, lequel ſoit F, & ſoient conioinctes FA, FB, FC, FD, FE, qui coupperont les angles du pentagone ABCDE, en 2. egalement. Et d'autant que les cinq angles au poinct F, ſont egaux à 4. droicts, & ſont egaux entr'eux,



vn d'iceux, comme AFB, ſera contenu d'vn droict, moins la cinquieſme partie: donc les 2. autres FAB, ABF, valent vn droict, & la cinquieſme partie: mais l'angle FBA, eſt egal à l'angle FBC, donc le tout ABC, angle du pentagone eſt contenu d'vn droict & de la cinquieſme partie d'vn droict. Ce qu'il falloit demonſtrer.

Fin du trezieſme Liure.

LIVRE QVATORZIEME DES ELEMENS D'EVCLIDE.

& le 4. des Solides.

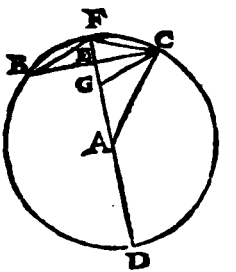
THEOREME 1. PROP. 1.

La ligne droicte perpendiculaire menee du centre, au costé du pentagone inscrit au cercle, est la moitié de l'vn & l'autre costé, sçauoir de celuy de l'hexagone, & du decagone ensemble: inscrits au mesme cercle.

SOIT le cercle ABC, dont le centre est A, d'où soit menee AE, perpendiculaire à BC, costé du pentagone inscrit au mesme cercle. Ie dis que AE, est moitié du costé de l'hexagone, & du decagone ensemble inscrits au mesme cercle.

Car ayant mené AE, de part & d'autre, pour parfaire le diametre DF, & pris EG, egale à EF; soient conioinctes AC, CG, CF, BF. a D'autant que AE, couppe BC, en 2. egalement: les 2. costez BE, EF, du triangle BEF, seront egaux a 3. troi.

à CE, EF, du triangle CE F; & les angles contenus d'iceux eſtant egaux, ſçauoir droicts; [b] les baſes C F, BF, ſeront egales, [c] & les arcs BF, CF, egaux: Donc BFC, eſtant la cinquieſme partie de toute la circonference, CF ſera la dixieſme: partant CF, ligne droicte eſt coſté du decagone. Derechef les coſtez CE, EF, du triangle CEF, eſtant egaux à CE, EG, du triangle CEG, & les angles contenus d'iceux droicts, [d] les baſes CF, CG, ſeront egales, & les angles CFG, CGF, egaux, & l'arc CF, eſtant la 5. partie de la demie circonference DCF, eſtant la dixieſme partie de la toute; l'arc DC, ſera quadruplé de CF. [e] Parquoy l'angle DAC, le ſera auſſi de CAF: [f] mais l'angle CFD, à la circonf. eſt moitié DAC, au centre. Donc CFD, & partant CGF, monſtré egal à iceluy ſera double de CAF. [g] Or CGF externe, eſt egal aux 2. internes GAC, GCA, au tria. GAC, & GAC, eſtant mõſtré moitié de CGF; GCA, ſera moitié dumeſme CGF: & partant GAC, GCA egaux; [h] & GA, GC egales: mais CG eſt monſtree egale à CF, donc AG, ſera auſſi egale à CF. Donc adiouſtant les egales GE, EF; AE, ſera egale à CF, FE enſemble: donc les trois enſemble AE, EF, FC, c'eſt à dire, les 2. enſemble AF, FC, ſeront doubles de AE; & au contraire AE, perpendic. au coſté du pentagone, ſera moitié des 2. enſemble AF, FC, ſçauoir du coſté de l'hexagone & du decagone. Donc la ligne droicte, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.



b 4.1.
c 28.3.
d 4.1.
e 33.6.
f 20.3.
g 32.1.
h 6.1.

COROLLAIRE.

D'où il s'enſuit que la perpendiculaire menee du centre à la droicte ligne accommodee au cercle, couppe l'arc ſouſtend. icelle ligne en 2. egalement, eſtant demonſté que AE, menee du cẽtre A, perp. à CB, diuiſe l'arc BC, en 2, egal. à F. 2. Que la perpend. du centre au coſté dudit pentag. eſt egale à la perpend. du meſme centre menee ſur le coſté du triangle equilateral, & à la moitié du coſté du decagone inſcrit au meſme cercle. Car comme il eſt icy demonſtré, la perp. menee du centre au coſté du pentagone, eſt egale à la moitié du coſté de l'hexagone & du decagone enſemble: mais la perpend. menee du centre ſur le coſté du triangle equilateral, [a] eſt egale à la moitié du demi diametre, ou coſté de l'hexagone: Donc il eſt manifeſte que la meſme perpend. menee du centre au coſté du pentagone, eſt egale à la perp. menee au coſté du triang. equilateral, & à la moitié du coſté du decagone enſemble.

[a] 2 corol. 12. 13.

iv
ij

THEOREME 2. PROP. 2.

Si deux lignes droictes ſont couppees en la moyenne & extreme raiſon: elles ſeront ſemblablement couppees, ſçauoir en meſmes proportions.

Soient AB, CD, couppees en la moyenne & extreme raiſon à E & F. Ie dis qu'elles ſont ſemblablement couppees, c'eſt à dire, comme AB, à CD, ainſi AE, à CF, & EB, à FD. Item com-

me AE, à EB, ainſi CF, à FD, &c.

Car puis que cõme AB, eſt à AE, ainſi AE, à EB, & comme CD, à CF, ainſi CF à FD, a le rect. ſous AB, EB, ſera egal au q. de AE, & le rect. ſous CD, FD, egal au q. de CF. Donc comme le rectangle ſous AB, EB, ſera au q. de AE, ainſi le rect. ſous CD, FD au q. de CF (y ayant proport. d'egalité de part & d'autre) b Parquoy comme le quadruple du rect. ſous AB, EB, au q. de AE, ainſi le quadr. du rect. ſous CD, FD, au q. de CF: & en compoſant comme le quadruple du rect. ſous AB, EB, & le q. de AE, à iceluy q. de AE; ainſi le quadruple du rect. ſous CD, FD, & le q. de CF, au q. de CF: c mais 4. fois le rect. ſous AB, EB, auec le q. de AE, eſt egal au q. de AG, compoſee de AB, EB. Et 4. fois le rect. ſous CD, FD, auec le q. de CF, eſt egal au q. de CH, compoſee de CD, FD. Donc cõme le q. de AG compoſee de AB, EB, au q. de AE, ainſi le q. de CH, comp. de CD, FD, au q. de CF; d Partant comme AG, à AE: ainſi CH, à CF: Et en compoſant cõme AG, & AE, c'eſt à dire la double de AB, eſt à AE: ainſi CH, & CF, c'eſt à dire, la double de CD, eſt à CF: & en permutant comme la double de AB, à la double de CD, ainſi AE à CF. e Mais comme la double de AB, à la double de CD, ainſi AB, à CD: Donc comme AB, ſera à CD, ainſi AE, à CF: partant puis que comme la toute AB, eſt à la toute CD, ainſi la retranchee AE, à la retranchee CF; f auſſi la reſtante EB, ſera à la reſtante FD, comme la toute à la

a 17. 6.
b 5. ho. 22. 5.
c 8. 2.
d 22. 6.
e 15. 5.
f 19. 5.

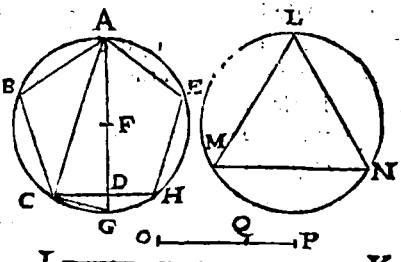
toute : g donc comme AE, à CF, ainsi EB, à FD, & en changeant comme AE à EB, ainsi CF, à FD : & ainsi selon toute autre maniere d'argumenter és proportions, on monstrera que les lignes totales & leurs parties sont proportionelles entr'elles. Donc si deux lignes droictes, &c. Ce qu'il falloit demonstrer. g 11. 5.

ij

THEOREME 5. PROP. 3. v

Vn mesme cercle contient le pentagone du Dodecaedre, & le triangle de l'Icosaedre inscrits en vne mesme sphere.

Premier que demonstrer ceste proposition, il faut monstrer que le quarré du costé du pentagone auec le q. de la ligne soustendante vn angle d'iceluy, est quintuple du q. du demi diametre du cercle, où est inscrit ledit pentagone.



Soit CH, costé du pentagone inscrit en vn cercle, CA, la ligne qui soustend vn des angles du pentagone, & FG, demi diametre, a coupant CH, & l'arc CGH, en 2. egalement. Ie dis que les qq. de CA, & CH ensemble, sont quintuples du q. de FG. a corol. 10. 13.

Car la ligne droicte CG, estant menee sera le costé du decagone; b & le q. de AG, sera qua- b scho. 4. 2.

druple du q. de FG demi diametre: parquoy les
c 47. 1. 2. qq. de AC, CG, c egaux audit q. de AG, ſeront auſſi quadruples du q. de FG. Donc les 3. qq. de AC, CG, GF enſemble ſeront quintuples du q. de GF: mais les qq. de CG, & de G
d 10. 13. F, enſemble coſtez de l'hexagone & du decagone, d ſont egaux au q. de CH coſté du pentagone: donc les qq. de AC, & de CH, ſont quintuples du q. de GF. Ce qui eſt propoſé. *Maintenant.*

Soit IK, le diametre de la ſphere contenant le dodecaedre & l'Icoſaedre, & ſoit ABCHE, vn pentagone d'iceluy dodecaedre, & LMN, triangle de l'Icoſaedre. Ie dis qu'vn meſme cercle contient le pentagone ABCHE, & le triangle LMN, c'eſt à dire, que les cercles qui les circonſcriuent ABCHE, LMN ſont egaux, & que ce n'eſt qu'vn meſme. Car ayant mené
a coroll. 17. 13. AC, ſouſtendant l'angle B du pentagone, a AC ſera le coſté du cube inſcrit en la meſme ſphere.

Soit priſe OP, telle que le q. de IK, diametre de la ſphere ſoit quintuple du q. de OP, & OP,
b coro. 16. 13. ſera egale au demi diametre du cercle où eſt inſcrit l'Icoſaedre. Et OP, ſoit couppee en la moyenne & extreme raiſon à Q; OQ plus grand ſegment ſera coſté du decagone inſcrit au
c coroll. 9. 13. meſme cercle duquel OP, c eſt le demi diame-
d 7. 13. tre ou coſté de l'hexagone: mais d CA eſtant diuiſee en la moyenne & extreme raiſon, ſon plus grand ſegment eſt AB, coſté du pentagone.
e 2. 14. e Donc cõme AC toute, à OP, toute, ainſi le plus grand ſegment AB, au plus grand ſegment OQ.
f 22. 6. f Donc comme le quarré de AC, au q. de OP,
g. 4. 5. ainſi le q. de AB, au q. de OQ. g Et comme le triple du q. de AC, au quintuple du q. de OP,

ainſi le triple du q. de AB, au quintuple du q. de OQ; mais le triple du q. de AC, eſt egal au quintuple du q. de OP (h le q. de Ik, diametre de la ſphere eſtant poſé egal tant au triple du q. de AC coſté du cube, qu'au quintuple du q. de OP.) Parquoy le triple du q. de AB, ſera auſſi egal au quintuple du q. de OQ. i Mais ML, coſté du triangle de l'Iſoſaedre eſt egal au coſté du pentagone inſcrit au cercle duquel OP eſt demi diametre. Donc le q. dudit coſté k eſtãt egal aux qq. de OP, OQ coſtez du decagone & de l'hexagone, 5. fois le q. de ML, ſera egal à 5. fois le q. de OP, & à 5. fois celuy de OQ: ou à à 3. fois le q. de BA, & à 3. fois le q. de AC: Dõc les qq. de BA, AC, eſtant quintuples du q. du demi diametre FA (comme il eſt demonſtré) 3. fois le q. de AB, & 3. fois le q. de AC, ſeront egaux à 15. fois le q. de FA, demi diametre. Mais 5. fois le q. de ML, coſté du triangle equilateral eſt egal à 15. fois le q. du demi diametre du cercle LMN (chacun l q. de ML, eſtant triple du q. du demi diametre) parquoy les 3. q. de BA, AC eſtant egaux aux 5. de ML, les 15. de FA demi diametre ſeront egaux aux 15. du demi diame. du cercle LMN. Parquoy chacun q. d'iceux ſera egal à chacun q. & le demidiametre au demi dia. Donc les cercles ſeront egaux ABC, LMN. Partant vn meſme cercle &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.

h 15

i cor 1. 16. 13.

k 10. 13.

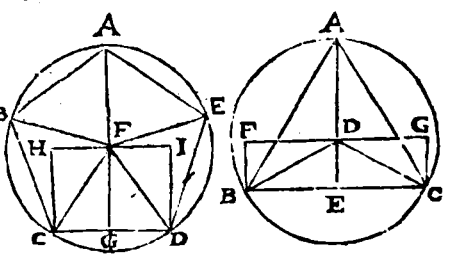
l 14. 13.

iij vj

THEOREME 4. PROP. 4.

Si du centre du cercle circonſcriuant le pentagone du dodecaedre, eſt menee vne ligne droicte perpendiculaire à vn coſté d'iceluy pentagone : trente fois le rectangle contenu ſous ledit coſté & la perpendiculaire, ſera egal à la ſuperficie du dodecaedre.

Du centre F, du cercle circonſcriuant le pentagone du dodecaedre ABCDE, ſoit menee FG, perpend. ſur le coſté CD. Ie dis que trente fois le rect. contenu ſous FG, CD, eſt egal à toute la ſuperficie du dodecaedre.



Car du cẽtre F, ayant mené les lignes droictes à tous les angles du pentagone, FA, FB, FC, FD, FE, le pentagone ſera diuiſé en 5. triangles egaux, a commme il appert, tous coſtez eſtant egaux, & toutes les baſes : Soit conſtitué le rect. CI, contenu ſous CD, FG. b D'autant que le rect. CI, eſt double du triangle FCD, & par conſequent double de chacun des 4. triangles reſtans egaux à FCD, le rect. CI, pris 5. fois ſe-

a corol. 8. 1.

b 41. 1.

ra egal à 10. tels triangles, c'eſt à dire à 2. pentagones du dodecaedre (ces triangles eſtans egaux à vn pentagone) partant le ſextuple du rect. CI. (c'eſt à dire, 6. rect. tels que CI) pris 5. fois, ſçauoir trente fois le rect. CI, ſera auſſi egal au ſextuple de 2. pentagones, (c'eſt à dire, à 12. pentagones) ſçauoir à toute la ſuperficie du dodecaedre. Donc ſi du centre, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.

Semblablement on demonſtrera que ſi du centre du cercle circonſcriuant le triangle de l'Icoſaedre ABC, on mene vne perpendiculaire DE, ſur vn coſté ſçauoir ſur BC, le rectangle BG, contenu ſous BC, DE, pris 30. fois ſera egal à la ſuperficie de l'Icoſaedre.

Car le rect. BG, eſtant double du triangle DBC, c'eſt à dire, egal audit triang. pris 2. fois; le rect. BG, pris 30. fois ſera egal au triangle DBC, pris 60. fois: mais 60. tels triangles que DBC, font 20. triangles de l'Icoſaedre, puis que 3. en font vn, comme il appert au triangle ABC, où les coſtez DA, DB, DC ſont egaux, & les 3. baſes AB, BC, CA egales par l'hypotheſe. Donc BG, pris 20. fois ſera egal à toute la ſuperficie de l'Icoſaedre. 41. 1.

COROLLAIRE.

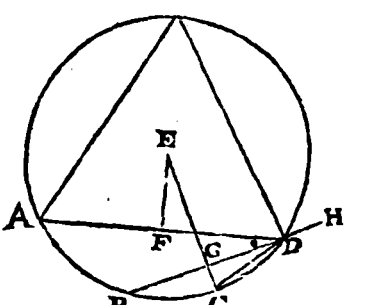
D'où il s'enſuit que le rect. CI, eſt au rect. BG, ainſi toute la ſuperficie du dodecaedre à la ſuperficie de l'Icoſaedre. 15. 5.

iv THEOREME 5. PROP. 5.

Comme la superficie du dodecaedre est à la superficie de l'Icosaedre, ainsi le costé du cube est au costé de l'Icosaedre inscrits en vne mesme sphere.

a 3. 14. Au cercle ABCD, a enuironnnant le pentagone du dodecaedre, & le triangle de l'Icosaedre, soit BD, costé du pentagone, & AD, costé du triangle; & du centre E, soient menees EF, FG, perpendiculaires à AD, BD, & soit FG, prolongee à la circonference au poinct C, & menee CD; EC couppera l'arc BCD, en 2. egalement, & CD sera costé du decagone b cõme auons monstré.

b 1. 14.



Et soit prolongé BD, à H en sorte que BH, soit egale au costé du cube inscrit en la mesme sphere. Ie dis maintenant que la superficie du dodecaedre, est à la superficie de l'Icosaedre, comme BH, costé du cube est à AD, costé de l'Icosaedre.

Car EC, estant costé de l'hexagone, & CD, costé du pẽtagone inscrits en vn mesme cercle, EC, CD, prise comme vne seule, c sera couppee en la moyenne & extreme raison, & EC le

c 9. 13.

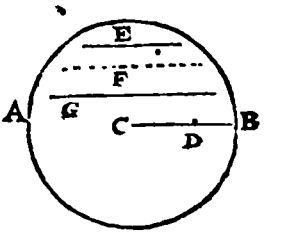
plus grand ſegment, [d] & EG eſt moitié de la toute compoſee de EC, CD, & EF, eſt moitié du plus grand ſegment EC (le demi-diametre eſtant couppé en 2. egalement par AD.) Et EG eſtant couppee en la moyenne & extreme raiſon, la moitié EF, ſera le plus grand ſegment, comme il eſt manifeſte: car la moitié du plus grand ſegment, & la moitié du moindre, faict la moitié de la toute: [f] les toutes eſtant entr'elles comme leurs parties: mais B H, coſté du cube eſtant couppee en la moyenne & extréme raiſon, [g] BD coſté du dodecaedre ſera ſon plus grand ſegment; partant comme la toute BH, à BD ſon plus grand ſegment, ainſi la toute EG, ſera à EF ſon plus grand ſegment: [i] Donc le rect. ſous BH, EF extremes, ſera egal au rect. ſous BD, EG moyennes: & le rect. ſous BH, EF, [k] eſtant au rectangle ſous A D, EF, comme BH eſt à AD; comme BH ſera à AD, ainſi le rect. ſous BD, EG (monſtré egal au rect. ſous BH, EF) ſera au rectangle ſous A D, EF. Partant le rect. ſous [l] BD, EG, eſtant au rect. ſous AD, EF, comme la ſuperficie du dodecaedre à celle de l'Icoſaedre: auſſi comme BH, coſté du cube ſera à AD, coſté de l'Icoſaedre, ainſi la ſuperficie du dodecaedre, ſera à la ſuperficie de l'Icoſaedre. Ce qu'il falloit demonſtrer.

d 1. 14.
e coro. 12. 13.
f 15. 5.
g coro. 17. 13.
h 2. 14.
i 16. 6.
k 1. 6.
l corol. 4. 14.

THEOREME 6. PROP. 6.

Si vne ligne droicte eſt couppee en la moyenne & extreme raiſon; comme

le quarré de la toute, & le quarré du plus grand ſegment, ſont aux quarrez de la toute, & du plus petit ſegment: Ainſi le quarré du coſté du cube, eſt au quarré du coſté de l'Icoſaedre, inſcrit en vne meſme ſphere que le cube.



Soit le cercle AB, contenant le triangle de l'Icoſaedre, & le pentagone du dodecaedre, dont le demi diametre CB, ſoit couppé en la moyenne & extreme raiſon à D, & ſon plus grand ſegment ſoit CD, [a] qui ſera le coſté du decagone inſcrit au meſme cercle. Et ſoit poſee E, coſté du dodecaedre, F, coſté de l'Icoſaedre, & G, coſté du cube. Ie dis que le q. de G, eſt au q. de F, comme les 2. qq. de CB, CD, ſont aux 2. qq. de CB, DB.

a cor. 9. 13.

Car E, eſtant coſté du pentagone, & F, coſté du triangle inſcrit au cercle propoſé: Si G, coſté du cube eſt couppé en la moyenne & extreme raiſon, [b] E, ſera ſon plus grand ſegment: parquoy F, eſtant coſté du triangle inſcrit au cercle donné, [c] ſon q. ſera triple du q. du demi diametre CB, [d] & les qq. de CB, DB, ſont triples du q. de CD. Donc le q. de F, eſt au q. de CB, comme les 2. qq. de CB, DB, ſont au q. de CD: Et en permutant le q. de F, ſera aux 2. qq. de CB, DB, comme le q. de CB, au q. de CD.

b corol. 17. 13.

c 12. 13.

d 4. 13.

Or comme le quarré de CB, eſt au quarré de CD, ainſi le q. de G, au q. de E (puis que [c] comme CB, toute eſt à ſon plus grand ſegment CD, ainſi G, toute eſt à E, ſon plus grand ſegment. [f] Donc comme le q. de CB, ſera au q. de CD, ainſi le quarré de G, au q de E:) [g] Partant comme le q, de F, eſt aux qq. de CB, DB, ainſi le q. de G, au q. de E: & en changeant comme le q. de F, au q. de G, ainſi les qq. de CB, DB. ſont au q. de E, qui eſt le coſté du pentagone, [h] egal aux qq. de CB, CD, coſtez de l'hexagone & du decagone qui ſont inſcrits en vn meſme cercle: partant le q. de G, coſté du cube eſt au q. de F, coſté de l'Icoſaedre, comme les qq. de CB. CD, ſont aux qq. de CB, DB. Parquoy ſi vne ligne droicte, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.

[c] 2. 14.
[f] 22. 6.
[g] 11. 5.
[h] 10. 13

THOREME 7. PROP. 7.

Comme le coſté du cube eſt au coſté de l'Icoſaedre: Ainſi le ſolide du Dodecaedre eſt au ſolide de l'Icoſaedre inſcrits en vne meſme ſphere.

D'autant que le pentagone du dodecaedre, & le tria. de l'Icoſ. inſcrits en vne meſme ſphere, [a] ſõt deſcrits en vn meſme cercle ou cercles egaux. Et qu'en [b] la ſphere les cercles egaux ſont egalement diſtans du centre: car les perpend. menees du centre de la ſphere au plan des cercles, [c] ſont egales & tombent aux centres d'iceux cercles: Donc les perpendiculaires menees du centre de la ſphere au centre du cercle contenant

[a] 13. 14.
[b] 6 ſph. theod.
[c] coro. 1. th.

le pentagone du dodecaedre, & le triangle de l'Icosaedre sont egales: Parquoy les pyramides ayant pour bases les pentagones du dodecaedre, & les triangles de l'Icosaedre sont de mesme hauteur : [d] mais les pyramides de mesme hauteur sont entr'elles cõme leurs bases: Dont comme le pentagone au triangle, ainsi la pyramide qui a pour base le pentagone du dodecaedre, & le centre de la sphere pour sommet est à la pyramide dont la base est le triangle de l'Icosaedre, & le centre de la sphere est le sommet. Donc aussi comme 12. pentagones sont à 20. triangles, ainsi 12. pyramides ayant les bases pentagonales sont à 20. pyramides ayant les bases triangulaires: mais 12. pentagones sont la superficie du dodecaedre, & 20. triangles sont la superficie de l'Icosaedre : Donc comme la superficie du dodecaedre à la superficie de l'Icosaedre, ainsi 12. pyramides ayant les bases pentagonales à 20. pyramides qui ont les bases triangulaires : Et 12. pyramides ayant les bases pentagonales, sont le solide du dodecaedre; & 20. pyr. ayant les bases triangulaires sont le solide de l'Icosaedre: Donc comme la superficie du dodecaedre à la superficie de l'Icosaed. [e], ainsi le solide du dodecaedre, au solide de l'Icosaed. mais comme la superficie du dodecaedre à la superficie de l'Icosaedre ainsi est monsté le costé du cube au costé de l'Icosaedre. Donc comme le costé du cube au costé de l'Icosaedre, ainsi le solide du dodecaedre au solide de l'Icosaedre. Ce qu'il falloit demonstrer.

d 5. & 6. n.

e 5. 14.

f 11. 5.

Fin du quatorzieſme Liure.

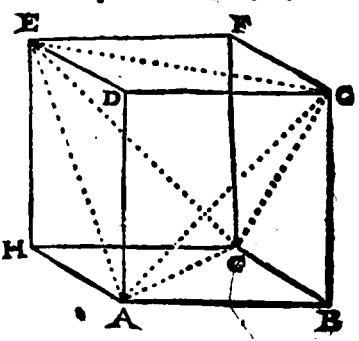
LIVRE QVINZIESME DES ELEMENTS D'EVCLIDE.

& le 5. des Solides.

PROBLEME 1. PROP. 1.

En vn cube donné inſcrire vne pyramide.

SOIT le cube donné ABCDE FGH. Il faut deſcrire en iceluy vne pyramide, ou tetraedre; D'vn angle d'iceluy E, ſoient menees aux baſes conſtituant iceluy, trois diametres EA, EG, EC, de l'extremité deſquelles A, G, C, ſoient auſſi menez les diametres AG, GC, CA, aux autres 3. baſes qui conioignent les extremitez des 3. premiers diametres: D'autant que les diametres des quarrez egaux ſont egaux entr'eux, eſtant dou-

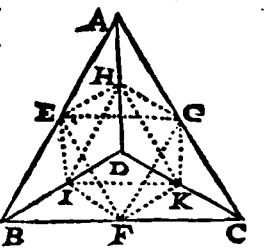


bles en puiſſ. des [a] coſtez de quarrez egaux. Il
a 47.1. eſt manifeſte que les 4. triangles ACE, GAC, GAE, GCE, compoſez deſdits diametres, ſont equilateres & egaux entr'eux, partant conſtituent vne pyramide; & tous les angles de la py-
b 31. d. 11. ramide eſtans colloquez aux angles du cube, [b] il eſt manifeſte, qu'elle eſt inſcrite dans le cube. Donc en vn cube donné nous auons deſcrit vne pyramide. Ce qu'il falloit faire.

PROBLEME 2. PROP. 2.

ij

En vne pyramide donnee deſcrire vn octaedre.



Soit la pyramide donnee ABCD, où il faut deſcrire vn octaedre. Ayant diuiſé tous les coſtez en 2. egalement à E, F, G, H, I, K, & mené EF, FG, GE, HI, IK, KH, EI, IF, FK, KG, GH, HE, on aura conſtitué 8. triangles, 4. deſquels EHI, IHK, KHG, HGE, ſont ſur le plan EIKG; mais les 4. autres IFE, EFG, GFK, KFI, au deſſous du meſme plan. Mais d'autant que les coſtez AE, AH, du triangle AEH, ſont egaux à AG, AH, du triangle AGH, eſtant moitiés des egales AB, AD, AC, & les angles contenus d'icelles EAH, GAH egaux, eſtant angles de triangles equila-
a 4 1. teres ABD, ACD. [a] Les baſes EH, GH, ſeront egales: & par meſme raiſon EH, HI, &

les

les autres pareillement, parquoy iceux 8. triangles sont equilateres & egaux entr'eux : & partant composent l'octaedre EIGHF, [b] lequel est descrit en la pyramide, puis que tous les angles touchent tous les costez de la pyramide, par la construction. Donc en vne pyramide nous auons descrit vn octaedre. Ce qu'il falloit faire. [b] 12. d. 11.

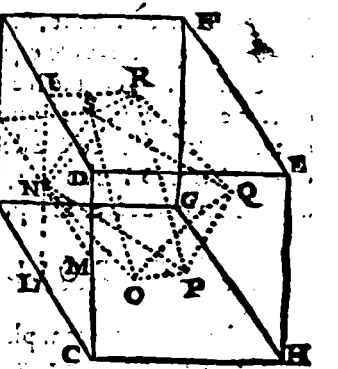
COROLLAIRE.

Or d'autant que les 3. plans EIKG, GHIF, FKHE, [a] sont quarrez egaux, se couppans à angles droicts : chacun desquels couppe la pyramide ABCD, en 2. egalement. (car le quarré EK, la diuise en la pyramide HIKD, & au prisme HIKGAE : & aussi en la pyramide EBFI, & au prisme EFCGKI : mais il appert que la pyramide est egale à la pyramide, & le prisme au prisme : semblablement les autres quarrez GI, & FH, diuisent en 2. egalement la mesme pyramide ABCD) Il est manifeste que si au tetraedre, on inscrit vn octaedre, que le tetraedre sera couppé en 2. egalement par 3. quarrez egaux, lesquels se couppent entr'eux à angles droicts, & le tetraedre en 2. egalement. [a] corol. 1. 14. 11. [b] 3. 12.

PROBLEME 3. PROP. 14. iij

En vn cube donné inscrire vn octaedre.

Soit le cube donné AH, auquel il faut inscrire vn octaedre Soient diuisez les costez de la base ABCD, en 2 egalement par I, K, L, M, lesquels soient conioincts par IL, KM, se couppantes



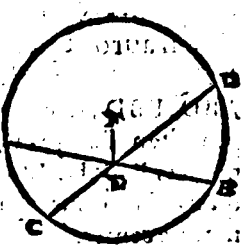
l'vne l'autre par M, qui est le centre du q. BD, comme il appert de la demonstration de la 8. du 4. Et ainsi on trouuera les centres des autres bases O, P, Q, R, S, donc toutes les droictes lignes menees desdits centres au milieu des bases, comme sont NI, RI, NK, SK, &c. sont egales aux moitiez des costez du cube, ou des quartez, comme appert par la demon. 8. 4. Finalement si lesdits centres sont conioincts par NO, OP, PQ, QR, RS, SN, NP, PR, RN, SO, OQ, QS, on aura 11.8 constitué 8. triangles; 4. desquels NSR, RSQ, QSO, OSN, sont sur le plan NOQR, & les autres 4, OPQ, QPR, RPN, NPO, au dessous du mesme plan. Mais d'autant que les costez IN, NR, du triangle INR, sont egaux à KN, RS, du triangle KNS, estans tous moitiez des costez egaux du cube, comme il est dict: Item les angles contenus d'iceux sont egaux: car NI, IR, estans paralleles à BA, AF; a l'angle 10.11. NIR, est egal au droict KAF, au qu. AG, par mesme raison NRS egal au droict IAF, au quarré AE; b ses bases NR, NS, seront egales. Ainsi nous demonstrerons toutes les autres lignes egales, & entr'elles & à des deux. Si des centres on mene des lignes droictes au milieu des costez, en sorte que chaque deux soient menees

b 4.1.

monstré que les angles au poinct F, sont droicts. Et de ce que les angles au poinct F, sont droicts, il a esté monstré que AF, couppe BD, en deux egalement.

THEOREME 3. PROP. 4. iv

Si au cercle deux lignes droictes se couppent l'vne l'autre, n'estãt point menees par le centre, elles ne se coupperont point l'vne l'autre en deux egalement.



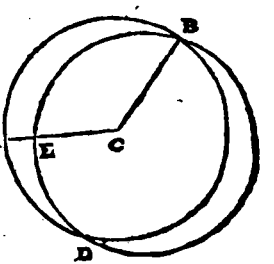
Au cercle ABCD, soiẽt menees les 2. lignes droictes AB, CD, ne passant point par le centre, & se couppant l'vne l'autre au poinct E. Ie dis qu'il ne se peut faire qu'elles se couppent l'vne l'autre en deux egalement. Car si l'vne d'icelles passe par le centre. Il est manifeste qu'elle ne sera pas couppee en 2. egalement: Car elle peut estre seulement diuisee au centre en 2. egalement, par lequel centre l'autre est posee ne passer: mais si l'vne ny l'autre ne passe point par le centre: encore que l'vne d'icelles puisse estre quelquesfois couppee en 2. egalement par l'autre; l'autre toutesfois ne sera couppee en 2. egalement.

Car qu'elles se couppent, s'il est possible, en 2. egalement l'vne l'autre, en sorte que AE, soit egale à EB, & CE, à ED; a & ayant trouué le cẽtre F, d'iceluy soit menee FE, au poinct E, où a 1. 3.

elles se couppent. D'autant que FE, passant par
3.du.3 le centre, couppe AB, ne passant par le centre, en 2. egalement à E, elle la couppera à angles droicts: Donc l'angle FEB, sera droict: par mesme raiſõ elle couppera aussi CD, à angles droits: Donc l'angle FED, sera aussi droict: & partant egal à l'angle FEB, la partie au tout, ce qui est impossible: elles ne se coupperont donc l'vne l'autre en 2. egalement. Donc si au cercle, &c. Ce qu'il falloit demonstré.

THEOREME 4. PROP. 5.

Si deux cercles se couppent l'vn l'autre, ils n'auront pas mesme centre.



Que les deux cercles ABD, EBD, se couppent l'vn l'autre aux poincts B, & D. Ie dis qu'ils n'auront pas mesme centre.

Autrement s'ils ont mesme centre, soit C, le centre de tous les 2. si faire se peut, & soit ioincte CB, au poinct de la section, & soit menee CEA, couppant les circonferences aux poincts E, & A.

D'autant que C, est le centre du cercle ABD, la ligne CA, sera egale à CB. Derechef d'autant que C, est le centre du cercle BED, la ligne CE, sera egale à CB, mais CA, a esté monstree egale
a.1.co.1. à CB; a donc CA, & CE, seront egales, la partie & le tout, ce qui est impossible; partãt C, n'est pas le centre des deux cercles. Donc si deux cer-

raiſon egale CD, ſera à DE, cõme HI, à IK, partant les coſtez autour des angles egaux CDE, HIK, ſont proportionaux : g Tout de meſme, les coſtez autour des angles egaux E, & K, ſont proportionaux à cauſe des triangles AED, FKI, equiangles. h Derechef EA, eſt à AD, comme KF, à FI, & AD, à AC, comme FI, à FH, & AC, à AB, comme HF, à FG i Donc en raiſon egale EA, ſera à AB, comme KF, à FG ; Parquoy les coſtez autour des angles egaux EAB, KFG, ſont proportionaux, & ainſi des autres : Partant puis que les rectilignes ſont equiangles, & les coſtez autour des angles egaux proportionaux, ils ſont ſemblables & ſemblablement deſcrits : Donc ſur vne ligne droicte, &c. Ce qu'il falloit faire.

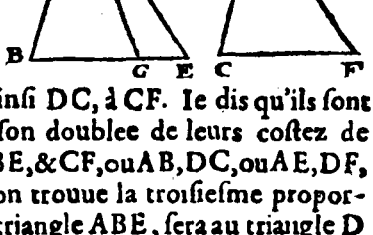
g 4.6.

h 4.6.

i 22. 5.

THEOREME 13. PROP. 19. xvij

Les triangles ſemblables, ſont entr'eux en raiſon doublee de leurs coſtez de meſme raiſon.



Soient les triangles ſemblables ABE, DCF, ayant les angles B, & C, egaux. Itẽ E, & F, & cõme AB, à BE, ainſi DC, à CF. Ie dis qu'ils ſont entr'eux en raiſon doublee de leurs coſtez de meſme raiſon BE, & CF, ou AB, DC, ou AE, DF, c'eſt à dire, ſi on trouue la troiſieſme proportionelle BG, le triangle ABE, ſera au triangle DCF, comme CF, eſt à BG. Puis que par la 10. definition du 5. la raiſon doublee eſt telle.

Car [a] ſoit donc BG, troiſieſme proportionelle & ſoit conioinct AG. D'autant que comme AB, eſt à BE, ainſi DC, à CF; en changeant cõme AB, ſera à DC, ainſi BE, à CF: mais comme BE, à CF, ainſi CF, à BG, par la conſtruction; [b] Donc comme AB, à DE, ainſi CF, à BG: partant puis que les triangles ABG, DCF, ont les coſtez autour des angles egaux B, & C, reciproques: ils ſeront egaux entr'eux: Donc comme le triangle ABE, ſera au triangle DCF, [d] ainſi le meſme triãgle ABE, ſera au triangle ABG: Mais comme le triangle ABE, eſt au triangle ABG, [e] ainſi la baſe BE, à la baſe BG, eſtant de meſme hauteur. Donc comme le triangle ABE, eſt au triangle DCF, ainſi BE, eſt à BG. Or puis que les trois lignes BE, CF, BG, ſont cõtinuellement proportionelles, la raiſon de la premiere BE, à la 3. BG, ſera dite doublee de la raiſon de BE, premiere à CF, 2. Donc auſſi le triangle ABE, ſera au triangle DCF, en raiſon doublee du coſté BE, au coſté CF. Donc les triangles ſemblables, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.

a 11. 6.
b 11. 5.
c 15. 6.
d 7. 5.
e 1. 6.

COROLLAIRE.

Il eſt manifeſte de ceſte demonſtration, que s'il y a 3. droictes lignes proportionelles, comme la premiere ſera à la troiſieſme, ainſi le triangle deſcrit ſur la premiere ſera au triangle ſemblable, & ſemblablement deſcrit ſur la ſeconde: Ayant eſté demonſtré que comme BE, eſt à BG, ainſi ABE, à DCF.

THEOREME 14. PROP. 20.

xviij

Les polygones ſemblables ſe diuiſent

au milieu du costé commun à deux quarrez du cube, desquels ces 2. poincts d'où viennent les lignes droictes sont les centres: ainsi que NI, & RI, qui sont menees à I, moitié du costé AD, commun aux quarrez AC, AE, dont les cẽtres sont N, & R: Pareillement NK, SK, sont menees à K, milieu de AB, commun aux quarrez AC, AG, dont les centres sont N, & S, &c. Partant on a constitué 8. triangles equilateres & equiangles entr'eux, qui constituent l'octaedre NOQRSP; [c] Qui est descrit au cube, puis que tous ses six angles touchẽt toutes les 6 bases du cube, à leurs centres. Dõc au cube dõné nous auons inscrit vn octaedre. Ce qu'il falloit faire. c d. 31. 11.

Autrement. [d] Au cube soit descrit vne pyramide: [e] & en icelle pyramide soit descrit vn octaedre, & on aura faict, ce qui est proposé. Car puis que selõ la demonstration de la 2. prop. de ce l. les angles de l'octaedre, touchent les costez de la pyramide; mais les costez de la pyramide, par la demonstration de la 1. prop. de ce l. sont aux plans des bases du cube, estant les diametres d'icelles bases: Il est manifeste, que les angles de l'octaedre, touchent pareillement les bases du cube: & partant que l'octaedre est inscrit au cube. d 1. 15. e 2. 15.

COROLLAIRE.

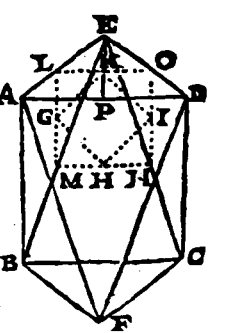
Or d'autant que les diametres de l'octaedre inscrits au cube, NQ, RO (s'ils estoient menez) [f] se couppent l'vne l'autre à angles droits, & conioignent les centres des bases du cube opposees; Il est manifeste, que les li- f coro. 1. 14 13.

gnes droictes qui conioignent les centres des baſes oppoſees du cube, ſe diuiſent non ſeulement en 2. egalement, g comme il eſt monſtré: mais auſſi à angles droicts, comme nous monſtrons icy.

g 15. 15.

iv PROBLEME 4. PROP. 4.

En vn octaedre donné inſcrire vn cube.



Soit ABCDEF, l'octaedre donné, où il faut inſcrire vn cube. D'autant que 6. pyramides quadriangles sõt contenues en l'octaedre, dont les ſommets ſont les 6. angles de l'octaedre, & chaque 2. conſtituent vn octaedre: Soit vne d'icelles, ſçauoir la pyramide ABCD E, dont la baſe eſt le quarré ABCD; & les triangles equilateres ABE, EBC, CED, DEA, dont les centres ſont G, H, I, K, par leſquels ſoient menees LM, MN, NO, OL paralleles à AB, BC, CD, DA, les triangles LME, EMN, NEO, OEL, ſeront equilateres, a eſtant ſemblables aux triangles equilateres ſuſdicts. Et partant egaux entr'eux, ayant les coſtez communs, & les baſes LM, MN, NO, par conſequent egales. Et ſi de E, par le centre K, eſt menee EP, elle diuiſera l'angle à E, en 2. egalement, donc LK, ſera egale à KO, c'eſt à dire, que LO, eſt diuiſee en 2. egalement par K, centre; Et ſemblablement LM, MN, NO, ſeront

a coro. 4. 6.

couppees chacune en 2. egalement par les centres G, H, I. Partant les quatre triangles GLk, KOI, GMH, HNI, ſont Iſoſceles (b les angles GLK, KOI, INH, HMG, eſtant egaux aux angles droicts du q. GKIH,) Donc les baſes Gk, kI, IH, HG, ſeront egales & contiendront angles droicts : parquoy GHIK, eſt quarré. Que ſi en la meſme maniere aux autres cinq pyramides de l'octaedre, les centres des triangles ſont conioincts par des lignes droictes, on deſcrira ſemblablement 5. quarrez, leſquels ſeront egaux entr'eux ayant les coſtez communs. Parquoy 6. tels quarrez compoſeront vn cube c lequel ſera deſcrit en l'octaedre, puis que les huict angles d'iceluy touchent les 8. baſes de l'octaedre à leurs centres. Partant en l'octaedre donné nous auons deſcrit vn cube. Ce qu'il falloit faire.

b 10. 11.

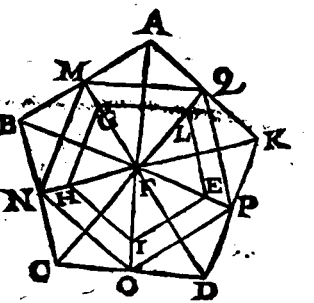
c 31. d. 11.

PROBLEME 5. PROP. 5. V

Dedans vn Icoſaedre donné inſcrire vn Dodecaedre.

Soit vne des 12. pyramides de l'Icoſaedre, dont les baſes ſont pentagones ABCDEF, & la baſe le pentagone ABCDE, & les triangles equilateres ABF, BCF, CDF, DEF, EAF, & leurs centres G, H, I, K, L, conioincts par GH, HI, IK, kL, LG. Derechef du ſommet F, par les centres des triangles ſoient menees FM, FN, FO, FP, FQ ; couppans a AB, BC, CD, DE, EA, à M, N, O, P, Q, en ſorte que MA, MB, NB, NC, OC, OD, PD, PE, QE, QA,

a coro. 10. 13.



ſoient egales, & comprenant angles egaux, ſçauoir du
b 4. 1. pentagone, [b] MN, NO, OP, PQ, QM, conioignant les poincts M, N, O, P, Q, ſont auſſi egales;
c 8 1. [c] partant les angles MFN, NFO, OFP, PFQ, QFM ſont egaux, les coſtez FM, FN, FO, FP, FQ eſtant egaux, ſçauoir perpendiculaires des angles des triangles equilateres menees aux baſes oppoſees.

Car FB, BM, du triangle FBM, eſtant egaux à FB, BN, du triangle FBN, & contenant an-
d 4. 1. gles egaux, ſçauoir de triangles equilateres; [d] les baſes, FN, FM ſeront egales, & ainſi des autres. Mais d'autant que FG, FH, FI, FK, FL, demi diametres des cercles egaux, circonſcriuans les triangles equilateres, ſont egales, & contiennent angles egaux, comme il eſt demonſtré;
e 4. 1. [e] GH, HI, IK, KL, LG, ſeront egales. [f] Et
f 13. 1. puis que tant AMQ, QMN, MNB, que BNM, NMO, ONC, ſont egaux à 2. droicts.
g 4. 1. [g] Mais AMQ, NMB, ſont egaux à BNM, ONC, les reſtans QMN, MNO ſeront egaux. Par meſme raiſon les autres angles NOP, OPQ, PQM, ſeront egaux entr'eux & à ceux cy: parquoy le pentagone MNOPQ, ſera equilatere & equiangle, au plan du pentagone ABCDE. Finalement FM, FN, FO, FP, FQ egales eſtant couppees proportionellement à G, H, I, K, L, d'autant auſſi que FG, FH, FI, Fk, FL, ſont

eſt à BC : Car les rectangles AC , EG, eſtant egaux ; Comme AB, ſera à EF, ainſi FG, à BC: b 16. 6.
c Mais comme FG, à BC, ainſi EF, egale à icelle FG, eſt à la meſme BC : Partant comme AB, à EF, ainſi EF, à BC. Donc ſi 3. lignes droictes, &c. Ce qu'il falloit demonſtter. c 7. 5.

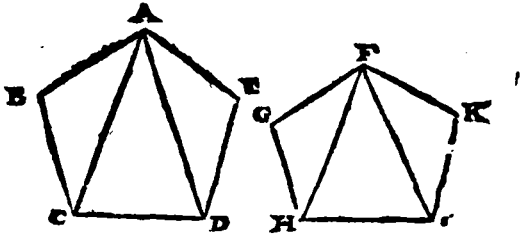
COROLLAIRE.

De la derniere partie de ce theoreme, il s'enſuit que toute ligne droicte eſt moyẽne proportionelle entre deux autres quelconques lignes droictes, qui contiennent vn rectangle egal au quarré d'icelles : car de ce que les droictes lignes AB, BC, contiennent vn rectangle egal au q. de la droicte ligne EF, il a eſté monſtré que comme AB, eſt à EF, ainſi EF, eſt à BC. Parquoy EF eſt moyenne proportionelle entre AB, BC.

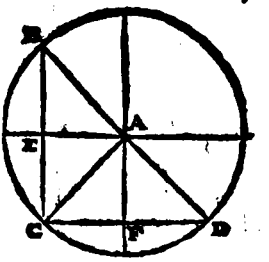
PROBLEME 6. PROP. 18. xix

Sur vne ligne droicte dõnee, deſcrire vne figure rectiligne ſemblable, & sẽblablemẽt poſee à vne figure rectiligne dõnee.

Soit la ligne droicte donnee CD, ſur laquelle il faut deſcrire vne figure rectiligne ſemblable, & ſemblablement poſee à la figure rectiligne HIKFG. De quel angle qu'on voudra comme de F, ſoient menees à chacun des angles oppoſez, les lignes droictes FH, FI, leſquelles diuiſent le rectiligne en 3. triangles FGH, FHI, FIK. Puis ſoit faict l'angle DCA, egal à l'angle IHF : & l'angle CDA, egal à HIF : Or AC, AD, ſe ren-



contreront à A, eſtant les angles ACD, ADC, moindres que 2. droicts, eſtant faicts egaux à F
a 17. 1. HI, FIH, a (qui ſont moindres que 2. droicts)
b 32. 1. b & l'autre CAD, ſera egal à l'autre HFI, & le triangle, CAD, equiangle au triangle HFI. Derechef l'angle ADE, ſoit fait egal à FIK; & DAE, egal à IFK. c D'autant que les 2. angles KIF,
c 17. 1. KFI, ſont moindres que 2. droicts, les 2. EAD, EDA, egaux à iceux ſeront pareillement moindres que 2. droicts. Et partant AE, DE, ſe rencontreront au poinct E, & le triangle AED, ſera equiangle au triangle FKI, par la meſme raiſon. D'auantage ſoit faict le triangle ABC, equiangle au triangle, FGH, par meſme raiſon; & ainſi des autres, s'il y a d'auantage de triangles. Ie dis que le rectiligne ABCDE, eſt ſemblable & ſemblablement poſé au rectiligne FGHIK: Car puis que l'angle ACD, eſt faict egal à FHI, & ACB, à FHG, le tout BCD, ſera egal à GHI: Et par meſme raiſon CDE, eſt egal a HIK, & les autres egaux aux autres comme il appert par la conſtruction, puis que chacune partie de l'vn eſt faite egale à chacune des parties de l'autre: partant le rectiligne ABCDE, ſera equiangle à FGHIK:
d 4. 6. d Or d'autant que comme CD, eſt à DA, ainſi
f 22. 5. HI, à IF, & comme AD, à DE, ainſi IF, à IK, f en



Car soient conioinctes les lignes droictes BC, CD, lesquelles soiẽt coupees en deux egalement, par les poincts E, & F, & par le poinct A, soiẽt menees les droictes lignes AE, AF, & prolõgees de part & d'autre en la circõference. D'autant donc que EB, est egale à EC, & EA, commune, les deux costez AE, BE, du triangle AEB, sont egaux aux 2. AE, EC, du tri an. AEC, & la base AB, est egale à la base AC: par l'hypothese, a l'angle AEB, sera egal à l'angle AEC, b & partant l'vn & l'autre droict. Par mesme raison l'on mõstrera que les angles au point F, sont droicts. Partant puis que les droictes lignes AE, AF, diuisent les droictes BC, CD, en 2. egalement & à angles droicts en chacune d'icelles couppantes AE, AF, sera le cẽtre du c cercle, estant prolongees à la circonference. Donc le poinct A, par lequel elles s'entre couppent sera le centre du cercle, ne pouuant estre ailleurs qu'au poinct commun où elles s'entre couppẽt, estant en l'vne & en l'autre. Donc si dedans le cercle l'on prend, &c. Ce qu'il falloit demõstrer.

a 8. 1.
b 10. d.
c coroll. 1. 3.

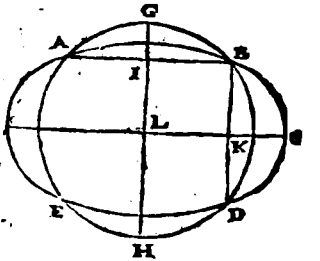
THEOREME 9. PROP. 10.

Vn cercle ne couppe pas vn cercle, à plus de deux poincts.

Que le cercle ABCDEF, couppe le cercle AGBDHE, en plus de deux points s'il est possible A, B, & D, & ayant conioint les lignes droi-

a 10. 1. ctes AB, BD, soient diuisees icelles en deux egalement aux poincts I, & K, & par iceux poincts

b 11. 1. soient b menees IL, KL, à angles droits aux lignes AB, BD, & soient prolõgees de part & d'autre à la circonference.



D'autant que les droictes lignes IL, & KL, couppẽt les droictes lignes AB, BD, en deux egalement & à angles droicts, au cercle AGBDHE, l'vne & l'autre passera c par le centre d'iceluy, partant le poinct L, par lequel elles se couppent sera le cõtre dudit cercle. En la mesme maniere nous demõstrerõs que le poinct L, est le centre du cercle ABCDEF. Donc deux cercles se couppans l'vn l'autre auront mesme centre : d ce qui est impossible. Donc vn cercle, &c.

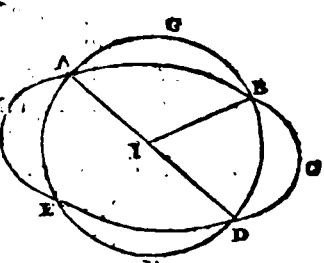
c 1. coro. 3.

d 5. troi

AVTREMENT.

Que les mesmes cercles se coupẽt si faire se peut à plus de 2. poincts A, B, & D, *& soit trouué* I, *centre du cercle* AGBDHE, *duquel soient menees* IA, IB, ID :

e 1. 3.



lesquelles seront egales entr'elles par la def. du cercle. Disant donc qu'au cercle ABCDEF, *l'on a prins le poinct* I, *duquel tombent plus de deux lignes droictes*

egales menees du centre. h GH, HI, IK, KL, LG, feront paralleles à MN, NO, OP, PQ, QM, i & partant les angles LGH, GHI, HIK, IKL, KLG, egaux aux egaux QMN, MNO, NOP, OPQ, PQM, donc auſſi egaux entr'eux. k Et les plans menez par GH, HI, & HI, IK, eſtant paralleles au plan du pentagone MNOPQ, mené par MN, NO, OP, & ſe rencontrans à HI, feront l vn ſeul plan. Semblablement on monſtrera que les plans par IK, KL, & KL, LG, & LG, GE, feront vn meſme plan auec le plan mené par GH, HI, IK; Parquoy GHIKL, eſt pentagone equilatere & equiangle, ayant les angles & les coſtez egaux. Que ſi en la meſme maniere, aux autres 11. pyramides de l'Icoſaedre, on conioinct des lignes droictes aux centres des triangles, on deſcrira ſemblablement des triangles equilateres & equiangles : leſquels ayant les coſtez cõmuns ſeront egaux entr'eux. Parquoy 12. tels pentagones conſtitueront vn dodecaedre, lequel m ſera inſcrit en l'Icoſaedre, les 20. angles du dodecaedre eſtans conſtituez aux centres des 20. baſes de l'Icoſaedre. Donc en l'Icoſaedre donné nous auons inſcrit vn Dodecaedre. Ce qu'il falloit faire.

h 2. 6.
i 10. 11.
k 15. 11.
l lemm. 26. 13.
m 31. d. 11

Fin du quinzieſme & dernier liure des Elements d'Euclide.

FIN.

utes commiſes en l'impreſſion qu'il faut corriger, où F ſignifie la page le nombre deuant la p. demonſtre quantieſme page c'eſt & le nombre d'apres denote quantieſme ligne, l. ſignifie lis, a. ſignifie adiouſte, o. ſignifie oſte, m. ſignifie marge.

Premierement en la 30. p. 16. pour A, lis B, & pour B, lis A. 52. p. 2. pour CE, lis CB. 59. p. 6. pour BC, l. AC. 60. p. 17. AB, l. AC. 20. BC, l. BD. 64. p. 17. AE chac. l. AF chac. 72. p. 7. & 8. angles droicts l. angles. 74. p. 11. l. AEC, CEB. 79. p. 14 l'angle eſt, l. l'angle C, eſt. 80. p. 22. l'angle C, l. l'angle B. 88. p. 6. DF, l. EF. 89. p. 2. EF, l. DF. 4. petite l. petit. 90. p. 12. o. poſt. 101. p. 12. AC, l. BC. 118. p. 19. DG, GB, l. DI, IB, & 119. p. 3. auſſi DI, IB. 124. p. 27. m. l. 24. l. 131. p. 24. CD, l. BC. 136. p. probl. l. theor. 146. p. 29. double l. quadruple. 178. p. 17. adiouſt. l. rencontrant. 181. p. m. l. 47. l. 224. p. 18. moindre l. plus grande. 274. p. 9. a. ED, & 13. FE, l. FC. 247. p. 13. lignes l. lignes egales. 258. p. 14. l. DG, DF, DE. 300. p. 18. homolog. l. analog. 325. p. 14. CF, l. F. 417. p. 12. rectangles l. equiangles. 451. p. 22. impairs l. pairs. 461. p. 15. eſtre en l. eſtre au 4. en. 480. p. 19. o. parties Ceſte figure à la 7. prop. du 7. li.