ELEMENTA
EUCLIDIS,

Novâ methodô, & compendiariè olim demonstrata

PER

F. ELIAM ASTORINUM

CARMELITAM CONSENTINUM;

NUNC VERÒ

Ab ipso eodem Auctore recognita, & emendata.

NEAPOLI, MDCCI.
Ex Typographia Felicis Mosca.
Superiorum Permissu.

ILLUSTRISSIMO DOMINO

D. SERAPHINO BISCARDO,

PATRITIO CONSENTINO,

Apud Potentiſſimum Hiſpaniarum Regem Catholicum in Supremo Italiæ Senatu Regenti, Ærarii Regii Præſidi, & Fiſci Advocato.

F. ELIAS ASTORINUS.

Dolet ſanè, nihil mihi eſſe ſub manu promptum, expeditumque, quo demum obſervantia erga Te mea videri poſſit jam conteſtata, niſi hanc ſecundam Elementorum Euclidis, à me, decem abhinc annis, ad uſum Novæ Academiæ Nobilium Senenſium, novâ methodô, & compendiariè demonſtratorum, nunc verò iterum, iterumque recognitorum, atque à pluribus mendis, quæ in ea jamtum irrepſerant, expurgatorum, editionem: utpote de qua, dum illam Tibi dico, & inſcribo, non modò mihi polliceri non poſſim, me tam exiguô munuſculô vel eſſe beneficia remetiturum, vel quicquam allaturum, quod conferri queat cum tot, tantiſque ſpeciminibus, multijugâ Sapientiâ refertis, quæ ad æquam, rectamque Doctrinæ, Prudentiæque tuæ lancem expendenda undequaque afferuntur, tanquam *ad Sacra Vatum*; verùm etiam vereri debuiſſem, ne ſic potiùs me Tibi deſpiciendum propinarem, quàm ſiſterem probandum, niſi mihi uſque adeo animi tui moderatio fuiſſet perſpecta, ut minimè diffiterer, Te, quicquid eſt hoc muneris, eſſe tandem boni, pro ea, qua polles Benignitate, conſulturum. Quod ſi tam bene in poſterum verterit, ut mihi animus aliquantiſper abducatur ab hac vehementi, atque diuturna ægritudine, in quam ille conjectus eſt ex inopinabili, eheu, acerbaq; morte Franciſci Manerii Aſto-

rini

rini, dilectissimi ex Sorore Nepotis, quem mihi in studiorum meorum, & senectutis fulcimentum alueram, eòque perduxeram, ut, nondum expletô sextô supra decimum ætatis suæ annô, ad absolutiores, utilioresque Philosophiæ, nec non Juris utriusque Commentarios à minùs selectis dignoscendos, & non sine magno profectu evolvendos, nullô amplius manuductore indigeret; eò quidem totis nervis eluctabor, ut, viribus utcunque recollectis, ad instituti mei rationem, retentam quidem animo, sed præ temporum injuria intermissam, nempè ad Jura Sanctæ Matris Ecclesiæ adversus Lutheranos, Calvinianosque propugnanda, me referam, exhibeamque quod in meis ipse libris *De Potestate Sanctæ Sedis Apostolicæ*, & *De Vera Ecclesia Jesu Christi* pollicitus sum, atque à me, quantò citiùs id fieri poterit, præstitum iri, fide meâ esse jussi. Ubi quidem non potero admirandarum tuarum Virtutum non luculentiùs meminisse. Nam, cùm, ut nosti, Vir Amplissime, mecum ipse constituerim integram illam Apologiam, quæ mihi pro Fide Catholica exhibenda est, in lucem jam producere, eamque offerre Invictissimi Nostri Regis Catholicæ Majestati; eò necessariò adducar, ut tametsi vellem silentiô præterire quàm magnô Zelô exæstuas, & quàm forti adniteris conatu, solertiâque, dum quicquam Tibi pro Deo, pro Rege, pro Patria decernendum, vel exequendum est, adeo quidem, ut mirentur omnes, in Te uno jamdemum revixisse priscos illos Catones, Scævolas, Neratios, Papinianos; quî tamen possem, cùm nonnisi Tibi uni acceptum referri debeat, quod mihi nihil omnino desit eorum, quæ potuissent adjumento esse, ut quod ad Fidei Catholicæ propugnationem jam cœperam moliri, ad finem usque perduceretur? Ut nihil dicam, quod sicubi ratio postulaverit, summos Juris apices in subsidium advocari, ut magis pro comperto, exploratoque haberetur, Lutherum, cæterosque sectarios causâ penitus cecidisse; undenam, quæso, mihi perdiscenda fuisset methodus momenta rationum, ex variis, atque inter se dissitis principiis erutarum, disponendi, ut in unum, eundemque scopum collinearent, nisi ex Te potissimùm, qui Jus ip-

sum

ſum Publicum, & Privatum, atque omnigenam, quam Tibi comparaſti, eruditionem, quin & præclaram iſtam tuam, ſolidioremque, & ex Sanctis Patribus hauſtam, Sapientiam, non ſane pertrahas quò Te cunque ſtudium partium abripuerit, ſed ita cum pietate, atque rectitudine conjunxeris, ut ſolemne Tibi ſit depromere quidem ex penetralibus omnium omnino Scientiarum quicquid videbitur expedire, verùm nonniſi cùm cauſam dicier, vel ſententiam ferri oportuerit in tuendis legitimarum controverſiarum patrociniis? Sed jam, mærore aliquantulum remiſsô, cor ſalit, & Sanctiſſimi, atque vetuſtiſſimi Galliarum Reges, Filii Eccleſiæ Chriſtianæ Primogeniti, videntur mihi adeſſe, & in memoriam reducere quicquid ipſi ad Eccleſiæ Romanæ defenſionem præſtitere, atque identidem effari, non ſine magno myſterio contigiſſe, ut, cum LUDOVICUS MAGNUS totam, quanta eſt, Hiſpaniarum Monarchiam, tanquam hæreditatem ad ſe, ſuoſque multiplici ſucceſſionis vinculo devolutam, meritiſſimô quidem jure, adire potuiſſet, atque ad ſuum ipſe Imperium adjungere , tantum abfuerit, ut de illa ſibi aſſerenda cogitarit, ut potius eidem jam undique fatiſcenti ſuppetias undequaque tulerit, quoad illa ſuô potiretur jure, neque ſolùm regimine longe meliori, quàm quo hactenus per bina ſecula peractum eſt, ſibi ſecum ipſa cohæreret, vireſque reſumeret, ſed & obſequi, & gratificari voluit Clementiſſimo Hiſpaniarum Regi CAROLO SECUNDO, qui ſibi hæredem, totiuſque proinde Hiſpanicæ Monarchiæ Regem inſtituit PHILIPPUM QUINTUM, ut (quod felix, fauſtumque ſit) cùm ex ipſo jure Naturali cogatur Avus nunquam deeſſe prædilecto Nepoti ſuo, non poſſit non illi cuncta ſubminiſtrare, quibus is Hiſpaniam ſuam priſtino ſplendori reſtituat, atque in poſterum ſibi mutuò Gallia, & Hiſpania manus præbeant auxiliares. At ego exinde mihi potiſſimùm gratulor, nobis tam Magnum Regem veluti cœlitùs demiſſum fuiſſe, quia nempe, cùm is jam cœperit Magnorum Heroum, à quibus ipſe originem ducit, inſiſtere veſtigiis; ſpero fore, ut utriuſque Monarchiæ vires, illæ quidem ſibi

ſatis

ſatis futuræ ſint ad Proteſtantium hæreſes ex tota Eccleſia Occidentali radicitus evellendas. Et vel hinc erit mihi feſtinandum, ut quod hactenus à me pro Sancta Romana Eccleſia elucubratum eſt, in lucem prodeat, atque offeratur noſtro magno Regi, tanquam publicum ſpecimen ſynceræ lætitiæ, qua de tam Magni Regis auſpicatiſſima in Auguſtiſſimum Hiſpanicæ Monarchiæ Thronum aſſumptione, ego mihi gratulor, & mihi, ſibique, nec non toti Eccleſiæ Chriſtianæ gratulantur omnes omnino literatorum Ordines hujus noſtri Regni Neapolitani, quin & omnes, qui recte norunt ſibi, ſuiſque, ſervatô Juris, & Æquitatis ordine, bene velle, & qui mente non penitus exciderunt. Videri quidem potuiſſent hæc à me commemorata fuiſſe dum non erat his locus, ni facillimum eſſet cognitu, cuncta ea, quæ de Te, Vir Illuſtriſſime, de me, ſtudiiſque meis, deque Romana Eccleſia, de Rege, Regno, atque ſignanter de toto noſtrorum literatorum cœtu, nonniſi obiter, adducta ſunt, proportione pluſquam geometricâ inter ſe reſpondere. Sed jam manum de tabula.

Nam

Nam neque interim eò discriminis perducta res est, ut non mihi demum de tua Benignitate pollicear, abs Te meum hoc munusculum non æqui saltem, bonique factum iri, quando jam Te non latet, me quædam alia conari, quæ tandem illi, quam de me conceperas, expectationi, videntur esse aliquantulum satisfactura. Faxit DEUS, ut nobis hæc cedant ex voto: Teque interim obsecro, atque obtestor, ut ad Publicum hujus nostri Regni Bonum, totiusque Reipublicæ literariæ ornamentum, nec non subinde ad utilitatem omnium nostrûm, qui Tibi tanquam Mæcenati, & Magistro innitimur, cures, ut bene, atque plurimùm valeas.

REVER. ADMODUM PATRI MAGISTRO

ELIÆ ASTORINO

CARMELITÆ,

Præstantiorum Scientiarum, Artiumque Liberalium Doctori, & Professori longè Celeberrimo.

JOSEPH LUCINA.

Non usitatis ASTORINE *per magnum*
Pennis inane tolleris : nec exili
Levaris aurâ , tot Scientiis unus,
Virtutibusque nobilis super cunctos.
Seu tu Sacrorum dogmatum inclytus præco
Oratione masculâ, igneâ, invictâ
Cunctos retundis , proterisque Romanæ
Hostes Cathèdræ, Veritatis assertor
Primæque Sedis : seu libet per humanas
Cùm disciplinas , tùm Scientias ferri;
Tibi auspicatò assurgit , ac lubens plaudit
Consentientium agmen eruditorum,
Tuæque famæ livor ipse subscribit.
Quæcumque Veteres abdidere Naturæ
Tot fabularum sub recessibus Graij:
Quæcumque Samius tradidit senex olim.
Aut Democritus , aut clara stirps Aristonis
Sedens sub umbra ad defluі sonum Ilissi:
Tu cuncta calles, Pegaseio & melle

Per-

Perſuſa nobis promis . Italæ jam te
Dactore magnis edocere de rebus
Audent Camænæ : nec ſuum Agrigentinis
Nos invidemus, nec ſuum Sophum Romæ:
Quamvis matinæ moræ apis per herboſi
Flores Hymetti pervolantis , is patris
Gargettii paſcatur aureos ſenſus.
Quid nunc labores in Matheſin enarrem,
Quos Fama Cœlo conſecrat, nec ulla unquam
Delebit ætas? Quid , quod arte ſat Coi
Inſtructus es? nec Sancta te latent Juris
Arcana , Themidiſque intimum penetrale.
Adde & quod ipſe muneris Deus tanti
Autor, tibi doli neſcium dedit pectus,
Moreſque puros : nec rogare fortunam
Anceps laboras inſolentibus votis,
Illam nec unquam pertimeſcis adverſam.
Sic nempè Virtus imbuit tuum pleno
Beata cornu pectus, Entheoque altè
Senſu replevit . Jamque nunc tuo præſtans
Æternitatis nomini manet merces:
Supraque Sidera ASTORINUS *evectus,*
Fatum triumphat, & triumphat ætatem.

LI-

LIBRI PRIMI

DEFINITIONES.

1\. *Punctum* est, cujus pars nulla est.
2\. *Linea* verò longitudo latitudinis expers.
3\. Lineæ autem termini sunt puncta.

4\. *Recta* linea est, quæ ex æquo sua interjacet puncta.

5\. *Superficies* est, quæ longitudinem, latitudinemquè tantùm habet.

6\. Superficiei autem extrema sunt lineæ.

7\. *Plana* superficies est, quæ ex æquo suas interjacet lineas.

8\. Planus verò *angulus* est, duarum linearum alterius, ad alteram inclinatio.

9\. Rectilineus angulus est, qui continetur à lineis rectis.

10\. Cùm verò recta linea super rectam lineam consistens, eos qui sunt deinceps angulos, æquales inter se fecerit; *rectus* est uterque angulorum, & quæ insistit recta linea, *perpendicularis* vocatur ejus, cui insistit.

11\. *Obtusus* angulus est, qui recto major est.

12\. *Acutus* verò, qui minor est recto.

13\. *Terminus* est, quod alicujus extremũ est.

14\. *Figura* est, quæ sub aliquo, vel aliquibus terminis comprehenditur.

15\. *Circulus* est figura plana, sub una linea com-

comprehensa, quæ peripheria appellatur, ad quam ab uno puncto eorum, quæ intra figuram sunt posita, cadentes omnes rectæ lineæ inter se sunt æquales.

16. Hoc verò punctum, *centrum* circuli dicitur.

17. Recta verò, quæ per centrum ducta, bifariam circulum secat, dicitur *Diameter*.

18. *Semicirculus* est figura contenta sub diametro, & sub dimidia circuli peripheria.

19. Rectilineæ figuræ sunt, quæ sub rectis lineis continentur.

20. Trilateræ quidem, quæ sub tribus: quadrilateræ quæ sub quatuor, & sic de cæt.

21. *Triangulum*, vel consideratur quoad latera, vel quo ad angulos. Quo ad latera quidem; Si omnia latera sibi æquantur; dicitur *Æquilaterum*: Si duo tantùm; dicitur *Isosceles*: Sin verò omnia sunt inæqualia; vocatur *Scalenum*. Quo ad angulos; Triangulum dicitur *Rectangulum*, si habet unum angulum rectum: *Obtusangulum*, si unum obtusum: *Acutangulum*, si omnes anguli sunt acuti.

22. *Parallelæ* lineæ sunt, in quas si inciderit recta quæpiam linea, anguli interni ejusdem partis simul sumpti æquabuntur angulis internis alterius partis simul sumptis.

23. *Parallelogrammum* est figura quadrilatera, cujus bina opposita latera sunt sibi parallela. Ejus quatuor sunt species, nimium *Quadratum*, ubi omnia latera sunt æqualia, & omnes anguli

guli ſunt recti: *Rectangulum* altera parte longius, quod rectangulum quidem eſt, ſed non æquilaterum: *Rhombus*, ubi anguli non ſunt recti, ſed latera ſunt æqualia: *Rhomboides*, ubi neque anguli ſunt recti, neque latera ſunt æqualia.

21. Parallelogrammo opponitur *Trapezium*, quod quadrilaterum quidem eſt, ſed latera non ſunt parallela.

22. Cùm in pgro diameter ducta fuerit, duæque lineæ lateribus parallelæ ſecantes diametrum in uno, eodemquè puncto, reſultant quatuor pgra; quorum duo per quæ non tranſit diameter, dicuntur *Complementa*.

POSTULATA.

1. Poſtuletur, ut a quovis puncto in quodvis punctum, rectam lineam ducere concedatur.

2. Et rectam lineam terminatam in continuum rectà producere.

3. Item quovis centro, & intervallo circulum deſcribere.

AXIOMATA.

1. Quæ eidem æqualia, & inter ſe ſunt æqualia.

2. Et ſi æqualibus æqualia adiecta ſint, tota ſunt æqualia.

3. Et ſi ab æqualibus æqualia ablata ſint, quæ relinquuntur, ſunt æqualia.

4. Et

4. Et si inæqualibus æqualia adiecta sint, tota sunt inæqualia.

5. Et si ab inæqualibus æqualia ablata sint, reliqua sunt inæqualia.

6. Et quæ ejusdem duplicia sunt, inter se sunt ęqualia.

7. Et quæ eiusdem sunt dimidia, inter se ęqualia sunt.

8. Et quæ sibi mutuo congruunt, ea inter se sunt ęqualia.

9. Et totum sua parte majus est.

10. Item omnes anguli recti sunt inter se ęquales.

11. Duę rectę lineę spatium non comprehendunt.

12. Duę lineę rectę non habent unum, & idem segmentum commune.

13. Si ęqualibus inęqualia adijciantur, erit totorum excessus, adiunctorum excessui ęqualis.

14. Si inęqualibus ęqualia adiungantur, erit totorum excessus, excessui eorum, quę à principio erant, ęqualis.

15. Si ab ęqualibus inęqualia demantur, erit residuorum excessus, excessui ablatorum ęqualis.

16. Si ab inęqualibus ęqualia demantur, erit residuorum excessus, excessui totorum ęqualis.

17. Omne totum ęquale est omnibus suis partibus simul sumptis.

18. Si totum totius est duplum, & ablatum ablati; erit & reliquum reliqui duplum.

LIBER

LIBER PRIMUS

PROPOSITIO I.

S*Uper rectam lineam datam terminatam (AB) triangulum æquilaterum (ACB) constituere.*

Ex A per B,& ex B per A ducantur, 3. *Post.* duo circuli se mutuò secantes in puncto C, ex quo, 1.*Post.* trahantur CA, CB; dico factum. Nam, 15. *def.* linea AC æquatur lineæ AB, & hæc ipsi BC; ergo 3glum descriptum est æquilaterum. Quod erat faciendum.

SCHOLIUM. Eodem modo super datam AB fiet triangulum Isosceles, si intervalla æqualium circulorum sumantur æquè majora, vel æquè minora, quàm AB.

PROPOSITIO II.

A*D datum punctum (C) datæ rectæ lineæ (AB) æqualem rectam lineam (CF) ponere.*

Ex B per A fiat (3. *Post.*) circulus: tum, 1. *Post.* junge BC: super quam fiat, 1. 1. triangulum æquil. BDC, tum, 2. *Post.* protrahe ipsam DB usque ad punctum E, & alteram DC indefinitè: deindè ex D per E fiat major circulus, secans protractam DC in puncto F; dico factum. Nam DE æquatur, 15. *def.* ipsi DF, atque DB æquatur, *constr.* ipsi DC: ergo, demptis utrinque æqualibus DB, DC; erit, 3. *ax.* CF æqualis ipsi BE, cui, 15. *def.* æquatur data AB; adeoq; 1. *ax.* AB, & CF æquantur inter se.

Q. E. F.

PROPOSITIO III.

D*Uabus datis rectis lineis (MN, DG), de majore (DG) abscindere lineam (DO) æqualem minori (MN)*

Ad punctum D ponatur (2. 1.) recta DF æqualis ipsi MN: &, 3. *Post.* ex D per F fiat circulus abscindens lineam DG in puncto O; Dico factum. Nam DO æquatur, 15. *def.* lineæ DF, & hæc, *constr.* ipsi MN; ergo, 1. *ax.* DO, & MN æquantur sibi mutuò,

Q. E. F.

SCHOL. Poteramus cum Tacqueto intervallum MN transferre in DO, & ità etiam intervallum AB in CF; sed hoc (ut rectè monet Barrovius ex Proclo) nulli postulato respondet, ni tamen velimus tribus Euclidæis postulatis alia superaddere.

PRO-

PROPOSITIO IV.

SI duo triangula (ABC, DEF) duo latera (AB, CB) duobus lateribus (ED, EF) æqualia habuerint, utrumque utrique; habeant verò angulum (B) angulo (E) æqualem sub æqualibus rectis lineis contentum; æquabuntur quoad basim, ipsa spatia, & reliquos angulos, sub quibus æqualia latera subtenduntur.

Si punctum D puncto A applicetur, & recta DE ipsi rectæ AB superponatur; cadet punctum E in B, quandoquidem hæ duæ lineæ ponuntur æquales, & rectæ; atqui angulus E ponitur æqualis angulo B; ergo etiam latus EF lateri BC coincidet: sed & hæc duo latera ponuntur æqualia; ergo punctum F cadet supra punctum C; adeoq; 10. *ax.* ipsæ bases DF, AC congruent, ac proindè, 8. *ax.* æquabuntur, quin & æquabuntur cætera omnia, siquidem cætera omnia congruunt.

Q. E. D.

PROPOSITIO V.

IN omni triangulo Isoscele (BAC) qui ad basim sunt interni anguli (ABC, ACB) æquantur sibi mutuò: & ultra basim productis æqualibus cruribus (AB, AC), qui sub basi sunt exteriores anguli (CBD, BCE) inter se etiam sunt æquales.

Sumatur AD æqualis ipsi AE, & ducantur BE, CD: Quoniam in triangulis ABE, ACD, æquantur, *constr.* AD, & AE, & æquantur, *hyp.* AB, & AC, atq; angulus A est communis; æquabuntur, 4. 1. bases BE, & CD, uti, & anguli D, & E, atq; demum anguli ACD, & ABE. Tum, quoniam in 3glis BDC, CEB æquantur, *ut prius*, BE, & CD, & æquantur *constr. hyp. &* 3. *ax.* CE, & BD, atq; *ut prius*, æquantur anguli D, & E; erit (4. 1.) angulus BCE angulo CBD, & angulus BCD angulo CBE æqualis. Quòd si ab angulo ACD ipsum BCD, & ab angulo ABE angulum CBE demamus; relinquetur, 3. *ax.* angulus ACB æqualis angulo ABC. Q. E. D.

COROLL. Hinc omne 3glum æquilat. est etiam æquiangulum.

SCHOL. Poterat hoc Theorema alitèr, & multò quidem faciliùs demonstrari, sed præstat, se, vel in ipso Matheseos vestibulo, in arduis exercere, sed nec præterea despicatui ducenda erat demonstratio tam elegans, & celebris.

PROPOSITIO VI.

IN omni triangulo (BAC) latera (AB, AC) angulis æqualibus opposita, æquātur sibi mutuo.

Nam si dixeris, latus AC min. esse latere AB, fiat, 3. 1. FB æqual. ipsi AC, & duc. FC. Quoniam ergo in 3glis FBC, ACB, linea FB æquatur, *f. hyp.* ipsi AC, & BC est communis, atq; angulus FBC æquatur, *hyp.* angulo ACB; ipsa etiam 4. 1. 3gla æquabuntur inter se, pars toti.

Q. E. A.

CO-

COROLL. Hinc omne 3glum æquiang. est etiam æquilat.

PROPOSITIO VII.

Super eadem recta linea (AB) duabus eisdem rectis lineis (AC, BC) aliæ duæ rectæ lineæ æquales (AD, BD) non constituentur ad aliud punctum (C) atq; ad aliud (D) cum duabus initio ductis rectis lineis, habentes eosdem terminos.

1. Cadat, si f. p. punctum D in ipso latere CB; erit DB æqualis ipsi CB, pars toti. Q.E.A.

2. Cadat, si f. p., punctum D intra triangulum ACB, & protrahantur BD, BC in directum, & ducatur CD; angulus ergo ACD æquab. 5. 1. ang. ADC, qui, 9. *ax.* major est, quam EDC, qui, 5. 1. æqu. ipsi FCD, qui, 9. *ax.* maj. est, quàm ACD: adeoq; ACD major erit se ipso. Q. E. A.

3. Cadat, si f. p., punctum D extra 3glum ACB, & ducatur CD; æquatur ergo, 5. 1. ACD ipsi ADC, qui, 9. *ax.* minor est, quam BDC, cui, 5. 1. æquatur BCD, qui, 9. *ax.* min. est, quam ACD; adeoq; ang. ACD minor est se ipso. Q.E.A.

PROPOSITIO VIII.

Si duo 3gla (ABC, DEF) æquantur quoad omnia latera; æquabuntur etiam sibi mutuo quoad omnes angulos, sub quibus æqualia latera subtenduntur, & quoad ipsa spatia.

Quoniam enim, *hyp.* æquantur AC, & DF;

si hæc illi superponatur, congruent, *conv*. 8. *ax*. sed & *hyp*. æquantur AB. & ED, uti & BC, & EF; ergo, 7. 1. cadet punctum E supra B, ac proindè omnia congruent, &, 8. *ax*. æquabuntur. Q. E. D.

COROLL. Hinc triangula sibi mutuo æquilatera, etiam inter se sunt æquiangula.

PROPOSITIO IX.

Datum angulum rectilineum (FBG) bifariam secare.

Abscindantur æquales BA, BC, & ducatur AC, supra quam, 1. 1. fiat 3glum æquil. AEC, & ducatur BE. Quoniam ergo in 3glis ABE, CBE, æquantur mutuò BA, & BC, ut & EA, & EC, & BE est communis; erit, 8. 1. angulus ABE æqualis angulo CBE. Q. E. F.

PROPOSITIO X.

Datam rectam lineam (AB) bifariam secare.

Super totam AB, fac, 1. 1. 3glum aquil. ADB, tum, 9. 1. divide angulum ADB bifariam; Dico factum. Nam, *constr*. DA, & DB æquantur, uti, & anguli ADC, & BDC, & DC, est communis; ergo, 4. 1. AC, & CB æquantur sibi mutuo.

PROPOSITIO XI.

Ex puncto dato (D) in linea data (AB) lineam perpendicularem (DE) erigere.

Abscin-

Abſcindantur utrinque æquales DC, DB, & ſuper totam BC fiat, 1. 1. 3glum æquil. CEB, & ducatur DE; Dico factum. Nam, *conſtr.* æquantur lineæ DB, & DC, uti, & EC, & EB, atq; ED eſt comm; Ergo, 8. 1. æquantur anguli CDE, & BDE; adeoque, 10. *def.* linea DE perpendicularis eſt ad AB. Q. E. F.

PROPOSITIO XII.

EX puncto dato (F) extra lineam datam (AB) ducere perpendicularem (EF) in ipſam datam.

Centro F, abſcindatur utcunque ex data AB portio CD, quam, 10. 1. divide bifariam in E, & ducantur FC, FE, FD; Dico factum. Nam, *conſtr.* æquantur CE, & ED, uti, & 15. *def.* FC, & FD, atque FE eſt comm. Ergo, 8. 1. æquantur anguli CEF, & DEF; ac proindè, 10. *def.* FE perpendicularis eſt ad AB. Q. E. F.

PROPOSITIO XIII.

ANguli deinceps ſimul ſumpti (ACD pl. DCB) æquantur duobus angulis rectis.

Ex puncto C erigatur (11. 1.) perpendicularis CE; erit *conſtr.* angulus ACD, dempto ipſo ECD, æqualis ipſi recto ACE, atque DCB, addito ipſo ECD, æquatur alteri recto ECB: Ergo ACD pl. DCB æquantur duobus rectis (nam ipſe ECD, ob contrarias notas *plus*, & *minus*, non computatur) Q. E. D.

COROLL. 1. Hinc si unus angulus deinceps rectus sit, alter etiam erit rectus, & si unus acutus, alter erit obtusus.

2 Si plures rectæ ad idem punctum eidem recte insistant, anguli fient duobus rectis æquales.

3 Duæ rectæ invicem se secantes, efficiunt angulos quatuor rectis æquales.

4 Omnes anguli circa unum punctum constituti, conficiunt quatuor rectos.

PROPOSITIO XIV.

SI ad aliquam rectam lineam (DC) atque ad ejus punctum (C) duæ rectæ lineæ (AC,BC) non ad easdem partes ductæ, angulos deinceps (ACD, pl.DCB) duobus rectis æquales fecerint; in directum erunt inter se.

Nam si id negaveris; sint AC, CE sibi in directum; ergo angulus ACD pl. DCE, 13.1. æquantur duobus rectis, qui, *hyp.* æqu. angulis ACD pl. DCB: ergo, dempto communi ACD; erit, 3. *ax.* DCE æqualis ipsi DCB, pars toti. Q. E. A.

PROPOSITIO XV.

ANguli (A, B) oppositi per verticem æquantur sibi mutuo.

Nam A pl. D æqu; 13. 1. duobus rectis, uti, & ipsi B pl. D, ergo dempto communi D; angulus A, 3. *ax.*, æquabitur ipsi B. Q. E. D.

SCHOL. 1. Si ad rectam lineam, atque

ad

ad ejus datum punctum duæ rectæ lineæ non ad easdem partes sumptæ angulos ad verticem æquales fecerint; ipsæ rectæ sunt sibi in directum; quod colligitur ex tribus præcedentibus.

2 Si quatuor rectæ lineæ ex eodem puncto exeuntes angulos oppositos ad verticem æquales fecerint; erunt quælibet duæ in directum positæ.

PROPOSITIO XVI.

Cujuscumque trianguli (ABD) uno latere producto (AD); erit angulus externus (BDC) major utrolibet interno, & opposito (ABD, BAD.)

Dividantur, 10. 1. bifariam latera BD in E, & AD in F, & per puncta F, & E ex punctis B, & A ducantur rectæ, itaut FH æquetur ipsi BF, & recta EG ipsi AE, & ducantur GD, HD, & trahatur BD in directum. Quoniam ergo in 3glis BEA, GED latera BE, AE æquantur, *constr.* lateribus ED, EG, & anguli in E, 15. 1. æq. inter se; erit, 4. 1. angulus ABE æqu. ipsi EDG, qui minor est toto BDC. Deindè in triangulis AFB, DFH latera AF, BF æquantur, *constr.* lateribus DF, HF, & 15. 1. anguli in F æquantur sibi mutuo; ergo, 4. 1. angulus BAF æqu. ang. FDH, qui minor est toto ADK, qui, 15. 1. æqu. ang. BDC: ergo BAF minor est ipso externo BDC.

Q. E. D.

PRO-

PROPOSITIO XVII.

CUiuscunque trianguli (ABC) duo anguli simul sumpti, duobus rectis sunt minores omnifariam sumpti.

Siquidem ACB pl. ACD æquantur, 13. 1. 2 rectis, atqui, 16. 1. ACD major est tam ipso A, quàm ipso B; ergo neque ACB pl. A, neque ACB pl. B conficiunt duos rectos: idemque patebit de A pl. B protractis lateribus ultra B, vel A.

Q. E. D.

COROLL. 1. Hinc in omni triangulo, cujus unus angulus erit rectus, vel obtusus, reliqui erunt acuti.

2 Omnes anguli trianguli æquilateri, uti, & duo anguli, qui sunt ad basim 3gli Isosceles, acuti sunt.

PROPOSITIO XVIII.

IN omni triangulo (ABC) angulus ille major est, qui opponitur majori lateri (AC)

Fiat AF æqualis ipsi AB, & fiat CD æqualis ipsi CB, & ducantur, BD, BF: erit ergo angulus ABC maj. 9. *ax.* quàm ABF, qui æqu. 5. 1. ipsi AFB, qui, 16. 1. major est, quàm C; ergo ABC maj. est ipso C. Item ABC major est ipso DBC, qui 5. 1. æqu. ipsi BDC, qui, 16. 1. major est ipso A: ergo ABC major est, quàm A. Q.E.D.

PRO-

PROPOSITIO XIX.

IN omni triangulo (ABC) latus illud majus est, quod opponitur majori angulo (A)

Nam si AC æquaretur ipsi CB; esset, 5.1. angulus B æqualis ipsi A; contra *hyp*. Ità etiam si AC major esset ipso BC; esset, 18.1. angulus B major angulo A contra *hyp*.

PROPOSITIO XX.

IN omni triangulo (ABC) duo latera simul sumpta (AB pl. BC) tertio (AC) majora sunt.

Trahatur CB in directum, & fiat BD æqualis ipsi BA, & ducatur AD; erit, 5.1. angulus BAD æqualis D. Igitur angulus DAC, utpotè maj. quàm DAB, major etiam erit, quàm D; adeòque 19.1. DC (AB pl. BC) major erit, quàm AC. Q.E.D.

PROPOSITIO XXI.

SI super 3gli (ACB) basim (AB) in ipso ab ejus extremitatibus duæ rectæ lineæ (AD, BD) constitutæ fuerint; hæ simul sumptæ minores erunt duobus trianguli lateribus (AC pl. CB) simul sumptis, sed majorem angulum constituent.

Quoniã enim AC pl. CE, 20.1. maj. sunt, quàm AE; si addas utrique ipsam BE; erunt AC pl. CB maj. quam AE pl. EB. Item DE pl. EB maj. sunt: 20.1.

20.1.quam DB: si ergo addas utrique ipsam AD; erunt AE pl. EB maj. quàm AD pl. DB; ergo AC pl. CB longè maj.quàm AD pl. DB. Q.E.D. Tum angulus ADB. 16. 1. major est angulo AEB, qui 16.1. maj. est ipso C: ergo ADB maj.est,quàm C. Q. E. D.

PROPOSITIO XXII.

EX tribus datis lineis (A,B,C,) quarum duæ simul sumptæ majores sint, quàm tertia, triangulum efficere.

Ex linea indefinita DH sume lineam DE æqu. ipsi A, lineam EF æqu. ipsi B, & lineã FG æqu.ipsi C: Tum centro F, & intervallo FG fiat unus circulus, atque tum alter centro E, & intervallo DE. Ex puncto ergo K, ubi circuli sese mutuo secant, ducantur KF, & KE; dico factum; Nam A,*constr.* ipsi DE, & hæc, 15.*def.* ipsi EK æquatur: ità etiam æquantur C, GF, & FK sibi mutuo, atque demum ipsa B, *constr.* ipsi EF, adeoque 3glum FKE factum est ex lineis datis A, B, C. Q. E. F.

PROPOSITIO XXIII.

AD datam rectam lineam (AB), datumque in ea punctum (A) dato angulo rectilineo (E) angulum æqualem rectilineum (A) constituere.

Duc rectam FG utcunq; & fac AD æqualem ipsi EF: Tum super AD constitue, 22. 1. triangulum

gulum alteri EGF æquilaterum, itaut AC ipsi EG æquetur, & DG ipsi FG; erit, 8. 1. angulus A æqualis ipsi E. Q. E. F.

PROPOSITIO XXIV.

SI duo triangula (ACB, ACD) habeant duo latera æqualia duobus lateribus utrunque utriq; sit verò vertex unius (ACB) major alterius vertice (ACD); erit etiam illius basis (AB) major alterius basi (AD)

Disponantur ità triangula data, ut AC sit utriq; latus commune, & latus CD unius æquetur alterius lateri CB, & ducatur DB. Quoniam ergo angulus ADB, 9. *ax.* maj. est ipso CDB, qui, 5. 1. æquat. ipsi CBD, qui, 9. *ax.* maj. est ipso ABD; erit ADB maj. quàm ABD: ergo, 19. 1. linea AB maj. est, quàm AD. Q. E. D.

PROPOSITIO XXV.

SI duo triangula (ACB, ACD) habeant duo latera æqualia duobus lateribus, unius verò basis (AB) major sit alterius basi (AD); erit etiam illius vertex (ACB) major hujus vertice (ACD)

Nam si dixeris, angulum ACB æqualem esse angulo ACD, ob æqualitatem etiam laterum hos angulos intercipientium; erit, 4. 1. AB æqualis ipsi AD, contra *hyp.*

Sin verò dixeris, angulum ACD majorem

esse

esse angulo ACB; erit, 24. 1. ipsa AD maj. quàm AB contra *hyp*.

PROPOSITIO XXVI.

SI duo triangula (ABC, DEF) habeant duos angulos æquales duobus angulis (ipsum B ipsi E; & ipsum C ipsi DFE): habeant verò, & latus, æquales angulos interjacens, vel ipsis adjacens, æquale; æquabuntur reliqua quoad omnia.

1. *Hyp.* Sit latus interjacens BC æquale interjacenti EF, dico etiam latus adjacens AB æquari adjacenti DE. Nam si dixeris, ipsum DE majus esse, quàm AB, fiat HE æquale ipsi AB, & ducatur HF; ergo, 4. 1. æquabuntur triangula ABC, HEF, adeoque angulus HFE æquabitur ipsi C, qui *hyp.* æquatur ipsi DFE, ac proindè HFE æquab. ipsi DFE, pars toti. Q. E. A.

2. *Hyp.* Sit latus adjacens AB æquale adjacenti DE: dico etiam fore latus interjacens BC æquale interjacenti EF. Nam si EF majus esset, quàm BC, fiat EG æquale ipsi BC, & duc. DG: ergo, 4. 1. 3gla ABC, DEG æquabuntur, ac proindè angul. DGE æquab. ipsi C, qui, *hyp.* æquatur ipsi DFE, adeoque DGE externus æquaretur interno DFE: quòd, 16. 1. est absurdum.

PROPOSITIO XXVII.

SI in duas rectas lineas (AB, CD) recta incidens (EF) alternos angulos (AEF, DFE) æqua-

æquales fecerit; parallelæ erunt inter se ipsæ lineæ (AB, CD)

Nam si dicantur non esse parallelæ; convenient ergo ulterius productæ, ut puta in puncto G, atque tum angulus AEF tanquam externus, 16. 1. major erit interno DFE, contra *hyp.*

PROPOSITIO XXVIII.

SI in duas rectas lineas (AB, CD) recta incidens linea (EF) externum angulum (AGF) interno ad easdem partes opposito (CHG) æqualem fecerit, aut internos, & ad easdē partes (AGH, CHG) æquales duobus rectis; parallelæ erunt inter se ipsæ lineæ (AB, CD)

1. *Hyp.* Quoniam, *hyp.* angulus CHG æquatur ipsi AGF, qui, 15. 1. æquatur ipsi BGH: erunt, 27. 1. parallelæ inter se ipsæ AB, CD. Q. E. D.

2. *Hyp.* Quoniam, *hyp.* angul. AGH pl. CHG æquantur 2 rectis, qui, 13. 1. æquantur ipsis AGH pl. BGH; dempto communi AGH; erit, 3. *ax.* CHG æqualis alterno BGH; adeoque, 27. 1. AB, CD erunt parallelæ. Q. E. D.

PROPOSITIO XXIX.

IN parallelas rectas lineas (AB, CD) recta incidens linea (FE) alternos angulos sibi mutuo æquales, uti & internum, & externum ad easdem partes oppositum inter se æquales: atque demum internos ad easdē partes duobus rectis æquales faciet.

Quo-

Quoniam AB, & CD ponuntur parallelæ; iccirco anguli interni ad easdem partes (*ex nostra defin. parallelarum*) simul sumpti æquantur angulis internis ad partes oppositas simul sumptis: atqui, 13. 1. summa horum quatuor angulorum internorum æquatur quatuor rectis; ergo quilibet duo interni ad easdem partes æquantur duobus rectis: atqui etiam, 13. 1. DHG pl. CHG æquantur 2 rectis: ergo dempto communi CHG; erit, 3. *ax.* DHG æqualis ipsi AGH, qui præterea, 15. 1. æquatur ipsi BGF Q. E. D.

COROLL. Hinc omne parallelogrammum habens unum angulum rectum est rectangulum.

PROPOSITIO XXX.

QUæ rectæ lineæ (AB, EF) eidem (CD) sunt parallelæ, sunt etiam inter se parallelæ.

Quoniam enim AB est parallela ad CD; erit, 29. 1. ang. AGH æqualis ang. DHG: & quoniam CD ponitur parallela ad EF; erit, 29. 1. angulus DHG æqualis angulo FKH; adeòq; 1. *ax.* AGH æquatur ipsi FKH, atque proindè, 27. 1. ipsæ lineæ AB, EF sunt inter se parallelæ. Q. E D.

PROPOSITIO XXXI.

A Dato puncto (C) datæ rectæ lineæ (AB) parallelam rectam lineam (CD) ducere.

Ex puncto C ducatur utcunque recta CB in ip-

ipsam datam AB, &, 23. 1. fiat angul. BCD æqualis angulo ABC: igitur, 27. 1. ob angulos alternos æquales, erit CD parallela ad AB.

Q. E. F.

PROPOSITIO XXXII.

IN omni triangulo (ABC) uno latere producto (BC in D); externus angulus (ACD) æquatur duobus internis oppositis (A pl. B): atque omnes anguli simul sumpti æquantur duobus rectis.

Ex puncto C, 31. 1. duc. CE parallelam ad BA; erit, 29. 1. alternus angulus ACE æqualis alterno A, & externus ECD æqualis interno opposito B: ergo toti ACD æquantur A pl. B. Q.E.D. Tum ACD pl. ACB, 13. 1. æquantur 2 rectis: atqui (*ut prius*) ACD æquatur ipsi A pl. B: ergo ACB pl. A. pl. B æquantur duobus rectis. Q.E.D.

PROPOSITIO XXXIII.

LIneæ (AC, BD) quæ rectas (AB, CD) parallelas, & æquales claudunt; sunt, & ipsæ inter se æquales, & parallelæ.

Ducatur AD; ob AB, & CD parallelas, erit, 29. 1. angulus BAD æqualis ipsi CDA, sed, *hyp.* AB æquatur ipsi CD, & AD est communis: ergo, 4. 1. AC, & BD æquantur, & angulus CAD angulo BDA; adeoque, 27. 1. etiam AC, & BD sunt inter se parallelæ. Q. E. D.

PROPOSITIO XXXIV.

IN omni parallelogrammo diameter dividit figuram ipsam in duo triangula æqualia quoad spatia, angulos, & latera.

Siquidem ob oppositas parallelas; angulus ABC angulo DCB, & angulus ACB angulo DBC æquatur: sed & CB est communis; ergo, 26. 1. triangulum CAB æquatur triangulo CDB, latera lateribus, & anguli angulis, Q. E. D.

PROPOSITIO XXXV.

SI duo parallelogrammata (AD, AH) constituta sint super eandem basim (AB) & inter easdem parallelas (CH, AF): æquabuntur inter se.

Quoniam enim in 3glis ACG, BDH latus, 34. 1. CA ipsi DB, & latus AG lateri BH æquantur, & CG ipsi DH (nam CD, AB, & GH, 34. 1. æquantur, ac proindè etiam, 2. *ax.* CG, & DH) erunt, 8. 1. ipsa triangula æqualia inter se: ergo, dempto utrinque 3glo DKG, & addito utrique 3glo AKB; erit, 3. & 2. *ax.* AD æqu. ipsi AH. Q. E. D.

PROPOSITIO XXXVI.

SI duo parallelogrammata (AD, EH) constituta sint super æquales bases (AB, EF) & inter easdem parallelas; æquabuntur sibi mutuò.

Si-

Siquidem, 35. 1. AD, æqu. ipſi AH, quod æquatur ipſi EH: ergo & AD æqu. ipſi EH.
Q. E. D.

PROPOSITIO XXXVII.

SI duo triangula (ACB, AGB) conſtituta ſint ſuper eandem baſim (AB) & inter eaſdem parallelas, æquabuntur ſibi mutuò.

Ex eodem puncto B, 31. 1. ducatur BD parallela ad AC, & BH parallela ad AG; erit, 35. 1. AD æquale ipſi AH: atqui, 34. 1. triangulum ACB eſt dimidiū ipſius AD, & triangulum AGB dimidium ipſius AH: ergo, 7. *ax.* ACB æquatur ipſi AGB. Q. E. D.

PROPOSITIO XXXVIII.

SI duo triangula (ACB, EGF) conſtituta ſint ſuper æquales baſes (AB, EF) & inter eaſdem parallelas; æquabuntur ſibi mutuò.

Siquidem ACB, 37. 1. æqu. ipſi AGB, æqu., 34. 1. ipſi GBH, æqu., 37. 1. ipſi HFG, æqu., 34. 1. ipſi EGF: ergo & ACB ipſi EGF. Q.E.D.

PROPOSITIO XXXIX.

SI duo triangula æqualia conſtituta ſint ſuper eandem baſim (AB); erunt etiam inter eaſdem parallelas (CM, AH)

Nam ſi dixeris, verticem alterius trianguli cadere in D, vel in E, ducatur IB: erit ergo ADB, *f. hyp.* æqu. ipsi ACB, æqu. 37. 1. ipsi AIB, ergo, & ADB ipsi AIB, pars toti: vel AEB æquabitur, *f. hyp.*, ipsi ACB, quod, 37. 1. æqu. AIB, adeòque æquaretur AEB ipsi AIB, totum parti.

Q. E. A.

PROPOSITIO XL.

SI duo triangula æqualia constituta sint super æquales bases (AB, GH); erunt etiam inter easdem parallelas.

Nam si dixeris, alterius verticem cadere in E; vel in F, ducatur MG; erit etiam GFH, vel GEH, *f. hyp.*, æqu. ACB, æqu. 38. 1. ipsi GMH: adeòque totum parti, vel pars toti æquaretur.

Q. E. A.

PROPOSITIO XLI.

SI inter easdem parallelas (CE, AB) & in eadem basi, constituta sint triangulum (ACB) & parallelogrammum (AE); hoc erit duplum illius.

Ducatur BF parallela ad AC, erit ergo, 35. 1. AE æqu. ipsi AF, quod, 34. 1. duplum est trianguli ACB: Adeòque AE duplum erit ipsius ACB.

Q. E. D.

PRO-

PROPOSITIO XLII.

Dato triangulo (ACB) ; æquale parallelogrammum constituere in dato angulo rectilineo (X) .

Dividatur, 10. 1. AB bifariam in F, & ad punctum F, 23. 1. fiat ang. BFD æqu. dato X. & ducatur BE parallela ad FD: dico factum: nam parallelogrammum FE, 41. 1., duplum est trianguli FCB, quod, 38. 1. æqu. triangulo ACF: adeòque FE æqu. toti ACB. Q. E. F.

PROPOSITIO XLIII.

In omni parallelogrammo (DKLH) complementa sunt æqualia.

Siquidem, 34 1. diagonalis KH dividit singula parallelogrammata per quæ transit in duo triangula æqualia: ergo si à triangulo KDH demas 3glum KCF, & triangulum FEH, & demas à triangulo KLH 3glum KIF, & 3glum FGH: supererit, 3. *ax.* FL æqu. ipsi FD. Q. E. D.

PROPOSITIO XLIV.

Ad datam rectam lineam (AB) dato triangulo (O) æquale parallelogrammum (FL) applicare in dato angulo rectilineo (Z)

Fiat, 42. 1. FD æquale triangulo O, itaut angulus DCF æquetur angulo Z: Tum protrahatur

CF in directum, & fiat FG æqu. ipsi AB: tum per punctum G ducatur GH parallela ipsi FE donec occurrat lineæ DE protractæ in puncto H: deindè ducatur diagonalis HF donec occurrat ipsi DC protractæ in K, & ducantur cæteræ parallelæ: erit, 43. 1. complementum FL æqu. FD, æqu. *constr.* ipsi O: atque angulus LGF æquatur 29. 1. angulo DCF, æqu. *constr.* ipsi Z. Q. E. F.

PROPOSITIO XLV.

AD datam rectam lineam (CA) dato rectilineo (XZ) æquale pgrum (CE) constituere in dato angulo (M)

Resolvatur datum Rectilineum in 3gula X, & Z: & 44. 1. lineæ AC applicetur in dato angulo M pgrum CB æquale ipsi Z: tum producatur CD versus F, & ad rectam DB applicetur pgrum DE æquale ipsi X; erit, *constr.* XZ æquale ipsi CB pl. DE (CE) Q. E. F.

PROPOSITIO XLVI.

AD datam rectam lineam (AB) quadratum describere.

Super datam AB erige duas perpendiculares AC, BD; erunt, 28. 1. hæ inter se parallelæ: fiant etiam æquales; ergo, 33. 1. erunt pariter ipsæ AB, CD inter se æquales, & parallelæ: Quoniam igitur, *constr.* anguli A, B, recti sunt; erunt etiam, 29. 1. recti ipsi anguli C, D; adeòque figura descripta est quadratum. Q. E. F.

PRO-

PROPOSITIO XLVII.

IN omni triangulo rectangulo (ACB) quadratum lateris (AB) angulum rectum subtendentis æquatur quadratis reliquorum laterum simul sumptis.

Ducatur CK parallela ad BE, & trahantur, 1. *post.* cæteræ occultæ. Quoniam, *hyp.* æquantur FA, & AC, uti etiam AB, & AD, necnon, 10. & 2. *ax.* anguli FAB, (FAC pl. CAB) & DAC (DAB pl. CAB) ; ideo æquabuntur, 4. 1. 3gla FBA, & ACD : atqui, 41. 1. parallelogram. AM est duplum trianguli FBA, nam, *hyp.* & 14. 1. MB est una recta, atque pgrum AK est duplum 3gli ACD: ergo, 6. *ax.* æquantur inter se AM, & AK, & eodem prorsus modo ostendetur, æqualia esse inter se BN, & BK, adeòque totum ABq. æquatur ipsi ACq. pl. CBq. Q. E. D.

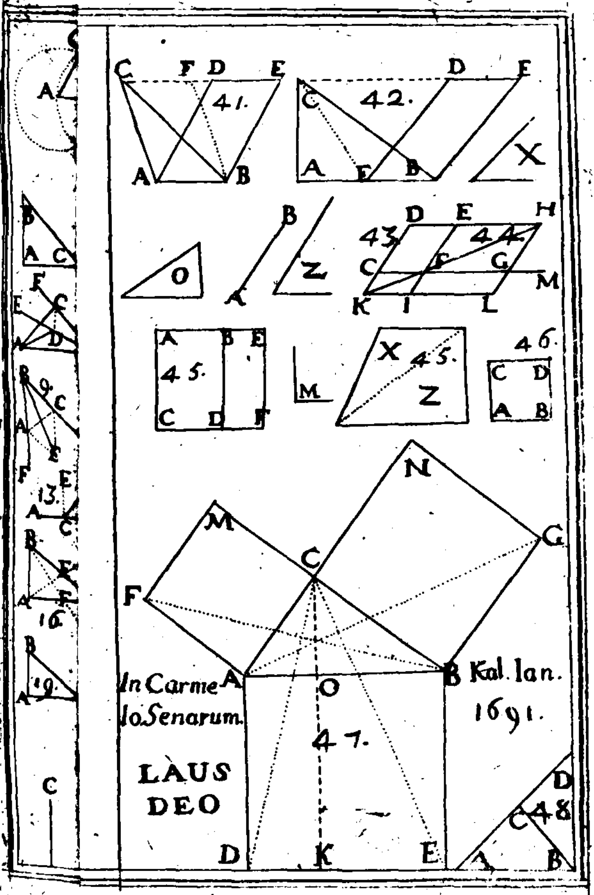
SCHOL. Nobilissimum hoc Theorema debemus antiquissimo nostro PYTHAGORÆ : atque ejus porrò beneficio perficitur figurarum rectilinearum quarumcumque additio, & subtractio, & complura alia scitu non injucunda, quæ vide apud Clavium.

PROPOSITIO XLVIII.

IN omni triangulo (ACB) angulus (ACB) cujus oppositum latus (AB) æquè potest, ac cætera latera, rectus est.

Supra CB ducatur perpendicularis CD æqualis ipsi AC, & trahatur DB; erit, *hyp.* ABq. æquale ipsis ACq. pl. CBq. æqual. CDq. pl. CBq. quibus, 47. 1. æquatur DBq. Ergo æquantur inter se AB, & DB, sed &, *constr.* æquantur AC, & DC, & CB est communis; ergo, 8. 1. angulus DCB, qui ex constructione rectus est, æquatur angulo ACB. Q. E. D.

LAUS DEO.

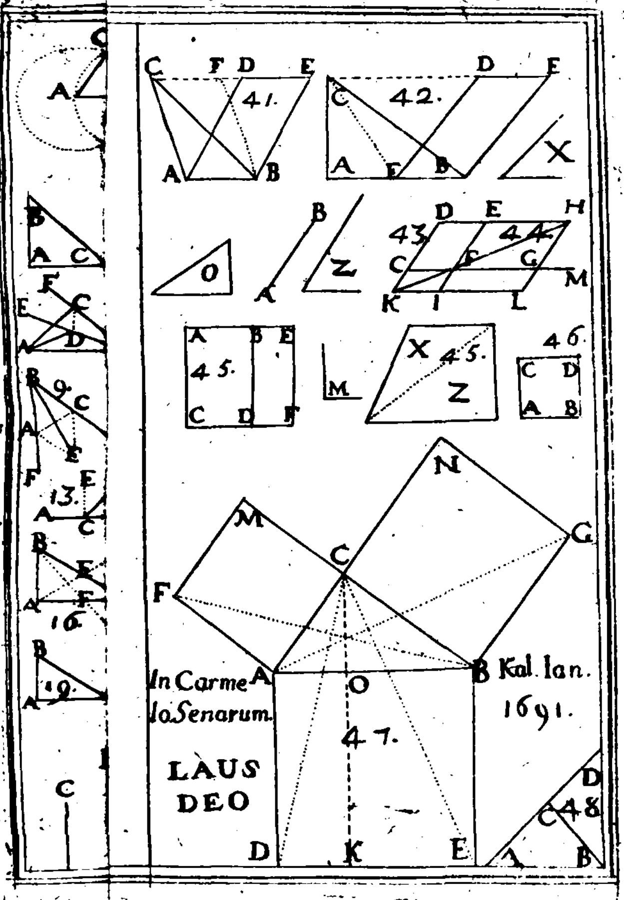

In Carme Io Senarum.
Kal. Ian. 1691.
LAUS DEO

Supra CB ducatur perpendicularis CD æqualis ipsi AC, & trahatur DB; erit, *hyp.* ABq. æquale ipsis ACq. pl. CBq. æqual. CDq. pl. CBq. quibus, 47. 1. æquatur DBq. Ergo æquantur inter se AB, & DB, sed &, *constr.* æquantur AC, & DC, & CB est communis; ergo, 8. 1. angulus DCB, qui ex constructione rectus est, æquatur angulo ACB.

Q. E. D.

LAUS DEO.

LI.


41.
42.
43
44
45.
46
47.
48
9.
13.
16.
19.
In Carme lo Senarum.
LAUS DEO
Kal. Ian. 1691.

LIBER II.

DEFINITIO.

Lineam in lineam ducere est Rectangulum sub illis efficere. Id autem non fit per multiplicationem, siquidem linea, millies sumpta, nunquam potest figuram producere, sed potiùs si intelligatur una moveri perpendiculariter juxtà longitudinem alterius.

AXIOMA.

Si longitudo æquatur longitudini, & latitudo latitudini; etiam Rectangulum equabitur Rectangulo.

POSTULATUM.

Liceat lineam ducere in lineam modo prædicto.

MO-

MONITA.

1. *PRimæ decem Propositiones valent in quantitate, tàm continua, quàm discreta, sive in numeris; reliquæ verò tantùm in Continua.*

2. *Si quis, majoris claritatis gratia, velit decem primarum Propositionum demonstrationes juxta methodum Commandini; eas videat in fine hujus libri.*

PROPOSITIO I.

SI dentur duæ rectæ lineæ (Z, X), quarum altera (X) sit integra, altera (Z) verò secta; Rectangulum (ZX) comprehensum sub duabus integris, æquatur rectangulis comprehensis sub insecta, & segmentis alterius. Demonstrantur hæ quatuor primæ per *multiplicationem speciosam* ex præcedenti axiomate,

Nam, *hyp.* Z *æqu.* a *pl.* b
X *æqu.* X.

Ergo XZ *æqu.* aX, pl.bX.
Q.E.D.

PROPOSITIO II.

SI recta (Z) secta sit utcunque; erit quadratum totius æquale rectangulis comprehensis sub tota & quolibet segmentorum.

Nam

Nam, *hyp.* Z *æqu.* a *pl.* b.
Z *æqu.* Z.

Ergo ZZ *æqu.* aZ *pl.* bZ.
Q. E. D.

PROPOSITIO III.

S*I recta (Z) secta sit utcunque; erit rectangulum sub tota, & una ipsius parte æquale quadrato ejusdem partis unà cum rectangulo comprehenso sub partibus.*

Nam, *hyp.* Z *æqu.* a pl. b.
a *æqu.* a.

Ergo aZ *æqu.* aa pl. ab.
Q. E. D

PROPOSITIO IV.

S*I recta (Z) secta sit utcunque; erit quadratum totius æquale quadratis partium, una cum binis rectangulis comprehensis sub partibus.*

Nam, *hyp.* Z *æqu.* a *pl.* b
Z *æqu.* a *pl.* b

Ergo ZZ *æqu.* aa *pl.* 2 ab *pl.* 2 bb
Q. E. D.

PROPOSITIO V.

SI recta (AB) secta sit æqualiter (in C) & inæqualiter (in D); erit quadratum dimidiæ æquale quadrato partis intermediæ unà cum rectangulo comprehenso sub partibus inæqualibus.

Dico, CBq æquari ipsis CDq pl. ADB. Nam

CBq. (4. 2.)
Æqu. haec { CDq.pl.BDq.pl. CDB.pl.CDB (3. 2.)
CDq.pl.CDB.pl. CBD (1. 2.)
CDq.pl. ADB. Q. E. D.

Nota, Quoniam AB divisa est æqualiter in C, idem esse rectangulum CBD, ac rectangulum comprehensum sub AC, & DB.

PROPOSITIO VI.

SI recta (AB) secetur bifariam (in C) & illi quæpiam (BD) adjiciatur; erit rectangulum (ADB) sub tota composita & adjecta unà cum (CBq) quadrato dimidiæ æquale ipsi (CDq) quadrato lineæ compositæ ex dimidia, & adjecta.

Dico, ADB pl. CBq æquari ipsi CDq. Nam

ADB pl.CBq. (3. 2.)
Æqu. haec { CBq.pl.BDq.pl.ABD (1. 2.)
CBq.pl.BDq.pl.2 CBD (4. 2.)
CDq. Q. E. D.

Nota, Quoniam AB divisa est bifariam in C, idem esse si duxeris lineam BD primò in AC, & deindè in CB, ac si illam bis duxeris in CB.

PRO-

PROPOSITIO VII.

Si recta (AB) secetur utcunque (in C); erit quadratum totius unà cum quadrato unius partis æquale binis rectangulis sub tota, & eadem parte unà cum quadrato alterius partis.

Dico, ABq. pl. ACq. æquari 2 BAC. pl. CBq. Nam

Æqu. hæc { ABq. pl. ACq. (4. 2.)
ACq. pl. ACq. pl. BCq. pl. 2 ACB (3. 2.)
2 BAC pl. CBq. Q.E.D.

Nota, Quoniam (3. huj.) BAC æquatur ipsi ACB pl. ACq. ideò, 2 BAC æquari 2 ACB pl. 2 ACq.

PROPOSITIO VIII.

Si recta (AB) secetur utcunque in (C); rectangulum (ABC) quater comprehensum sub tota (AB) & uno segmento (CB) unà cum (ACq.) quadrato alterius segmenti æquatur quadrato lineæ compositæ ex tota (AB) & dicto segmento [CB]

Nimirum fiat BD æqualis ipsi CB; Dico, ADq: æquari 4 ABC [ABD] pl. ACq. Nam

Æqu. hæc { ADq. [4. 2.]
ABq. pl. BDq. pl. 2 ABD [*constr.*]
ABq. pl. BCq. pl. 2 ABC [7. 2.]
2 ABC pl. 2 ABC. pl. ACq.
4 ABC pl. ACq. Q.E.D.

Nota,

Nota, Quoniam BD, & BC æquantur; idem esse BDq. ac BCq. quin & idem esse ABD, ac ABC.

PROPOSITIO IX.

SI recta (AB) secetur æqualiter (in C) & inæqualiter (in D); erunt quadrata partium inæqualium simul sumpta dupla quadratorum partis dimidiæ, & partis intermediæ.

Dico, ADq. pl. DBq æquari 2 CBq. pl. 2 CDq. Nam

Æqu. hæc
- ADq. pl. DBq. (4.2.)
- DBq. pl. ACq. pl. CDq. pl. 2 ACD (*constr.*)
- DBq. pl. CBq. pl. CDq. pl. 2 BCD (7.2.)
- CBq. pl. CDq. pl. CBq. pl. CDq.
- 2 CBq. pl. 2 CDq. Q. E. D.

Nota. Quoniam AB secta est æqualiter in C, idem esse ACq. ac CBq. quinimò idem esse ACD, ac BCD.

PROPOSITIO X.

SI recta (AB) secta sit bifariam (in C), eique quæpiam (BD) adijciatur; erunt (ADq. pl. BDq.) quadrata totius compositæ, & adjectæ simul sumpta, dupla quadratorum (CBq. pl. CDq.) quæ describuntur super dimidia, & super composita ex dimidia, & adjecta, simul sumptorum.

Di-

Dico, ADq. pl. BDq. æquari 2 CBq. pl. 2 CDq.

Fiat EA æqualis ipsi BD; Quoniam ergo, *constr.* æquantur AC, & CB, uti & EA, & BD; æquabuntur CE, & CD, uti & EB, & AD; adeòque linea ED erit secta æqualiter in C, & inæqualiter in B. Igitur (9.2.) EBq. (ADq.) pl. BDq. æquabitur 2 CBq. pl. 2 CDq. Q.E.D.

PROPOSITIO XI.

D*Atam rectam (AB) ità secare, ut rectangulum comprehensum sub tota (AB) & altero segmentorum (BG) æquetur quadrato (AGq.) reliqui segmenti.*

Super AB (46.1.) describe quadratum AC: tum, 10. 1. latus AD seca bifariam in E, tum duc EB, & ex DA producta sume EF æqualem ipsi EB, atque demum ad AF statue, 46.1. quadratum AH; dico factum; Nam.

Æqu. hæc { DFA (DH) pl. EAq. (6.2.) ; EFq. (EBq.) (47. 1.) ; ABq. pl. EAq. }

Ergo, 3. *ax.* DH æquatur ipsi ABq. (CA) adeòque dempto communi IA; erit, 3. *ax.* AH æquale ipsi IB, hoc est æquabuntur ABG, & AGq. Q. E. F.

PROPOSITIO XII.

I*N omni 3glo obtusangulo (ABC) quadratum lateris [AC] obtusum angulum subtendentis*

qua-

quadrata laterum reliquorum excedit duobus rectangulis (2 CBD) comprehensis, & ab uno[BC] laterum, quæ sunt circa obtusum angulum(ABC), in quod, cùm protractum fuerit, cadit perpendicularis [AD], & ab assumpta exterius linea [BD], angulos obtusum, & rectum interjacente.

Dico ACq. æquari ipsi CBq. pl. ABq. pl. 2 CBD. Nam

Æqu. hæc { ACq. [47. 1.] CDq.pl.ADq. [4. 2.] ADq.pl.CBq. pl.BDq.pl.2 CBD.[47.1.] CBq.pl.ABq. pl.2 CBD. Q.E.D.

PROPOSITIO XIII.

IN quocunque 3glo [ABC] quadratum lateris [AB] acutum angulum [ACB] subtendentis, à quadratis laterum reliquorum exceditur rectangulo [BCD] bis comprehenso, & ab uno laterum [BC], quæ sunt circa acutum angulum [ACB], in quod cadit perpendicularis [AD] ab opposito angulo, quem subtendit, & ipsa [DC] angulos rectum, & acutum [ACB] interjacente.

Dico, ACq.pl.BCq.æquari ipsis ABq.pl.2 BCD. Nam

Æqu. hæc { ACq. pl.BCq. [47.1. BCq.pl. ADq.pl.DCq.[7.2.] ADq.pl. BDq.pl.2 BCD [47.1.] ABq. pl.2 BCD. Q.E.D.

Nota, Non restringi hoc Theorema ad 3gla acutangula, sed locum habere in omnibus 3glis: & quam-

quamvis perpendicularis cadat extra 3glum, demonstratio tamen semper eadem est.

PROPOSITIO XIV.

D*Ato rectilineo (A) æquale quadratum constituere.*

Fac (45.1.) Rglum DB æquale ipsi A: tum latus majus DC produc, itàut CF æquetur ipsi CB, & biseca, 10.1. DF in G, atque ex G per F fiat circulus: tum producatur BC in H, & ducatur GH; Dico, CHq. æquari ipsi A. Nam

$$\text{Æqu. hæc}\left\{\begin{array}{l} \text{A } (\textit{constr.}) \\ \text{DB (DCF) } (5.2.\&\ 3.\textit{ax.}) \\ \text{GFq.}\textit{minùs}\text{ GCq. } (\textit{constr.}) \\ \text{GHq. }\textit{minùs}\text{ GCq. } (47.1.) \\ \text{CHq.} \end{array}\right.$$

APPENDIX

AD II. LIBRUM.

Alitèr ita demonstrantur Decem Primæ.

PROP. 1. DIco, sibi æquari, 18. *ax.* AF, & AG, pl. CH, pl. DF.

PROP. 2. Dico, sibi æquari, 18. *ax.* AE, & AC pl. DE.

PROP. 3. Nempè, si æquentur AC, & AE; æquabuntur, 18. *ax.* AF, (hoc est BAC) & AD, pl. CF (hoc est ACq. pl. ACB.)

PROP. 4. Dico, sibi æquari, 18. *ax.* ABq. (sivè EB) & ACq. pl. CBq. pl. 2 ACB. sivè GC, pl. DH, pl. 2 EK, nam, 43. 1. sibi æquant. EK, & KB.

PROP. 5. Dico, sibi æquari OE, pl. PL, & FC. Nam, 43. 1. & 2. *ax.* FB æquatur ipsi GC, sivè, 36. 1. ipsi LE. Quod si addas commune PC, æquabuntur, 2. *ax.* FC, & OE, pl. PL.

Q. E. D.

PROP. 6. Dico, sibi æquari EB, & HC, pl. GL; Nam, 43. 1. EQ æquatur ipsi QB, sivè, 36. 1. ipsi LC: Quod si utrique addas HB, pl. GL; æquabuntur EB, & HC, pl. GL. Q. E. D.

PRO-

PROP. 7. Dico, sibi æquari KD, pl. FC, & 2 FD, pl. HG; Nam fiat EB æquale ipsi FC; Ergo, 43. 1. & 2. *ax.* sibi æquabuntur KO, pl. EB, pl. FD, pl. HG, (sivè 2 FD, pl. HG.) & KD, pl. EB, sivè FC. Q.E.D.

PROP. 8. Dico, sibi æquari ED, & 4 BN, pl. HS: Nam, 43. & 36. 1. sibi æquantur MB, IC, TI, RP, uti & sibi PD, KN, GK, ER; ergo 4 BN pl. HS æquab. ipsis BM, pl. IC, pl. TI, pl. RP. pl. PD, pl. KN, pl. GK, pl. ER, pl. HS (hoc est toti ED. Q.E.D.

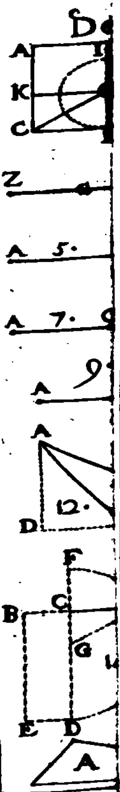
PROP. 9. Dico, sibi æquari ABq. pl. BDq. & 2 ACq. pl. 2 BCq, Fiat CM perpendicularis, & æqualis ipsi AC, & perficiatur schema; ergo, 5. & 32. 1. æquabuntur anguli CDM, CMD, CAM, CMA, & unusquisque illorum erit semirectus. Ità, quoniam, *constr.* angulus in I est rectus, & in M semirectus; erit etiam LIM semirectus; ergo sibi æquabuntur, 6. 1. LI, & LM; Ergo

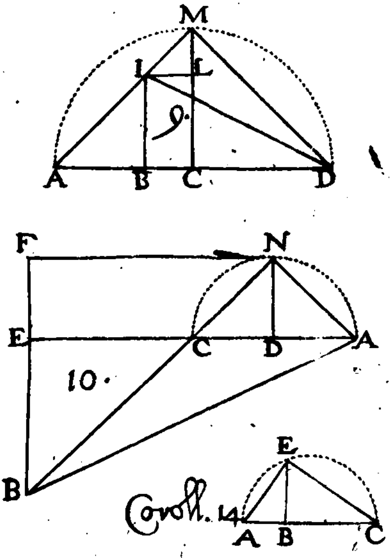
Æqu. hæc
- 2 ACq. pl. 2 BCq. (*ut prius*, & 34. 1.)
- ACq. pl CMq. pl. ILq. pl. LMq. (47. 1.)
- DMq. pl. MIq. (47. 1.)
- DIq. (47. 1.)
- BDq. pl. BIq. (6. 1.)
- ABq. pl. BDq. Q.E.D.

PROP. 10. Dico, ſibi æquari AEq. pl. CEq. & 2 ADq. pl. 2 DEq. Nam facta conſtructione, uſque dum concurrant in B lineæ protractæ;

Æqu. hæc
- AEq.pl.CEq.(6.1.)
- AEq.pl.EBq.(47.1.)
- ABq. (47.1.)
- ANq.pl.NBq.(47.1.)
- ADq.pl.DNq.pl.NFq.pl.FBq.(6.& 34.1.)
- 2 ADq.pl.2 DEq. Q.E.D.

LAUS DEO.





Senis 1691.

F. DANIEL DANIELI CARM:
ASTORINI DISCIPULUS
DELINEAVIT, ET INCIDIT

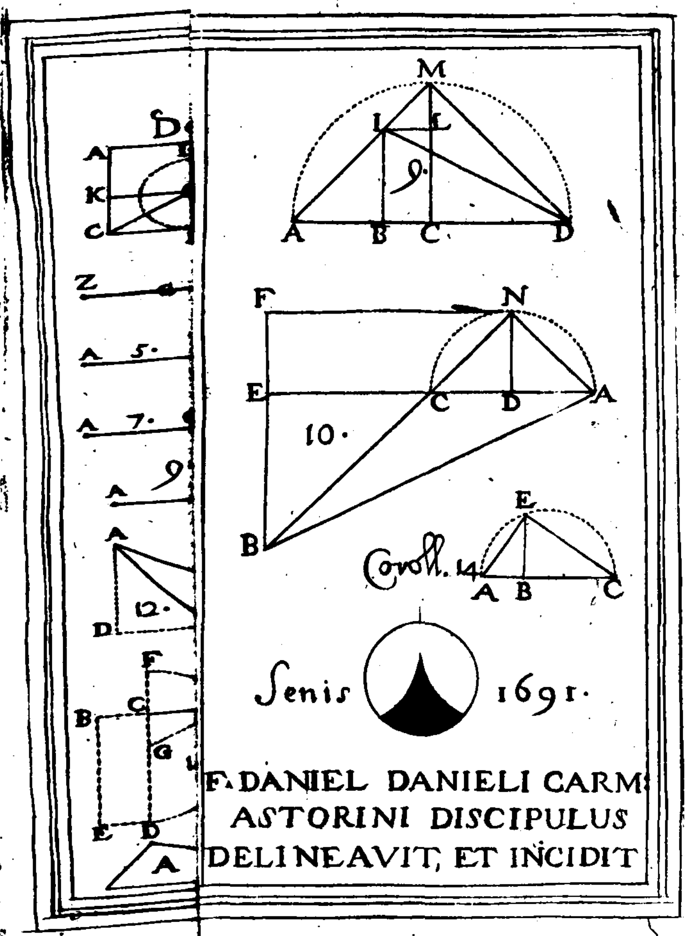
PROP. 10. Dico, sibi æquari AEq. pl. CEq. & 2 ADq. pl. 2 DEq. Nam facta constructione, usque dum concurrant in B lineæ protractæ;

Æqu. hæc
AEq.pl.CEq.(6.1.)
AEq.pl.EBq.(47.1.)
ABq. (47.1.)
ANq.pl.NBq.(47.1.)
ADq.pl.DNq.pl.NFq.pl.FBq.(6.& 34.1.)
2 ADq.pl.2 DEq. Q.E.D.

LAUS DEO.

CEq
Eta con
urrant

6.& 34



LI

LIBER III.

DEFINITIONES.

1. ÆQuales circuli ſunt, quorum diametri ſunt æquales, vel quorum, quæ ex centris rectæ lineæ, ſunt æquales.

2. Recta linea circulum tangere dicitur, quę cùm circulum tangat, ſi producatur, circulum non ſecat.

3. Circuli ſeſe mutuò tangere dicuntur, qui ſeſe mutuò tangentes, ſeſe mutuò non ſecant.

4. In circulo æqualiter diſtare à centro rectæ lineæ dicuntur, cùm perpendiculares, quæ à centro in ipſas ducuntur, ſunt æquales. Longius autem abeſſe illa dicitur, in quam major perpendicularis cadit.

5. Segmentum circuli eſt, figura quæ ſub recta linea, & circuli peripheria comprehenditur.

6. Segmenti autem angulus eſt, qui ſub recta linea, & circuli peripheria comprehenditur.

7. In ſegmento autem angulus eſt, cùm in ſegmenti peripheria ſumptum fuerit quodpiam

punctum, & ab illo in terminos rectæ ejus lineæ, quæ segmenti basis est, adjunctæ fuerint rectæ lineæ: is, inquám, angulus ab adjunctis illis lineis comprehensus.

8. Cum verò comprehendentes angulum rectæ lineæ aliquam assumunt peripheriam, illi angulus insistere dicitur.

9. Sector autem circuli est, cùm ad ipsum circuli centrum constitutus fuerit angulus, comprehensa nimirum figura, & à rectis lineis angulum continentibus, & à peripheria ab illis assumpta.

10 Similia circuli segmenta sunt, quæ angulos capiunt æquales: aut in quibus anguli inter se sunt æquales.

PROPOSITIO I.

D*ati Circuli* (*ABCD*) *Centrum invenire*.

Subtendatur AC utcunque, quam, 10. 1. bifariam seca in puncto E, per quod, 11. 1. ducatur perpendicularis BD, quam, 10. 1. bifariam seca in F; Dico, punctum F esse centrum quæsitum. Nam si dixeris, centrum esse in puncto G, ductis GA, GC, GE; æquarentur, 15. *def.* 1. GA, GC, sed &, *constr.* æquantur AE, & EC, atque GE est communis: ergo, 8. 1. æquarentur anguli GEC, & GEA, ac proindè uterque rectus esset; adeòque GEC æquaretur ipsi FEC, qui, *constr.* rectus est, pars toti. Q.E.A.

PROPOSITIO II.

SI in Circuli Peripheria duo puncta (A, B) sumantur; recta (AB) quæ puncta ejusmodi connectit, erit tota intra circulum.

Ducantur enim CA, CB, & CD utcunque. Quoniam, 16. 1. angulus CDB maj. est quàm A, cui, 5. 1. æquatur ang. B; erit proindè, 19. 1. CB maj. quàm CD; adeòque punctum D rectæ cujuslibet tractæ utcunque ex centro in ipsam AB, erit intra circulum.

Q. E. D.

PROPOSITIO III.

SI Diameter (AB) rectam quampiam (CD) extra centrum bifariam dividat; erit perpendicularis ad illam, & è converso.

1. Quoniam, æquantur, *hyp.* EC, & ED, &, 15. *def.* 1. FC, & FD, atque FE est communis; æquabuntur proindè, 8. 1. anguli CEF, & DEF: adeòque AB erit perpendicularis ad CD.

Q. E. D.

2. Quoniam æquantur, *hyp.* anguli CEF, & DEF, uti &, 5. 1. anguli C, & D, & latus CF lateri DF; æquabuntur, 26. 1. CE, & DE.

Q. E. D.

PROPOSITIO IV.

S*I duæ rectæ, (AB, CD) sè mutuo secent extra centrum; non se secabunt bifariam.*

Aliàs enim trahatur OK ex centro; erit, 3. 3. angulus OKD rectus, & rectus etiam angulus OKB; adeòque pars toti æquabitur.

Q. E. A.

PROPOSITIO V.

S*I duo Circuli se mutuo secent; non erit illorum idem centrum.*

Nam si dixeris, punctum quodpiam E esse centrum utriusque: ducta EB ad sectionem, & EDA secante utriusque peripheriam; æquabitur, 15. *def.* 1. ED ipsi EB, & hæc ipsi EA: ergo & ED ipsi EA, pars toti. Q. E. A.

PROPOSITIO VI.

S*I duo Circuli se interiùs tangant; non erit illorum idem centrum.*

Nam si dixeris, utriusqué centrum esse in puncto F: duc rectam FB ad contactum, & rectam FDA secantem utriusque peripheriam; æquabitur, 15. *def.* 1. FD ipsi FB, & hæc ipsi FA: ergo FD ipsi FA, pars toti. Q. E. A.

PRO-

PROPOSITIO VII.

In Diametro Circuli si ex puncto (G) extra centrum assumpto pertigant lineæ (GA, GC, GD, GE, GB) usque ad Circumferentiam; maxima quidem erit quæ per Centrum transibit: aliarum verò quæ magis ad maximam inclinabit, major erit: Et ex eodem puncto (G) duæ tantùm æquales duci possunt in Circumferentiam.

1. Quoniam, 15. *def.* & 2. *ax.* GA æquatur ipsis GF pl. FC, quæ, 20. 1. maj. sunt, quàm GC; erit GA maj. quàm GC.

2. Quoniam æquantur FC & FD, atque GF est comm. sed, 9. *ax.* angulus GFC maj. est quam GFD; erit, 24. 1. GC maj. quam GD: & eadem ratione GD maj. erit quam GE.

3. Quoniam FG pl. GE maj. sunt, 20. 1. quàm FE, cui æquatur FB; erunt FG pl. GE maj. quàm FB; ergo dempta utrinque communi FG; erit GE maj. quàm GB.

4. Fiat, 23. 1. ang. BFH æqualis ipsi BFE & ducatur GH: Quoniam æquantur FE, & FH, atque FG est comm. & *constr.* æquantur anguli EFG & HFG; æquabuntur, 4. 1. GE & GH, nullaque alia, *ut prius*, duci potest ad partem HA, vel EA quæ non sit maj. vel min. quàm GH.

Q. E. D.

PRO-

PROPOSITIO VIII.

SI ex puncto (A) extra Circulum data cadant lineæ in ipsum Circulum; inter eas, quæ in circuli concavum cadunt, maxima erit quæ per centrum transibit, ceteræ verò eò majores erunt, quò magis ad maximam inclinabunt: Inter eas verò, quæ in circuli convexum cadunt, minima erit quæ cum Diametro coincidit: ceteræ verò eò majores erunt quò magis à minima declinabunt: & ex eodem puncto (A) duæ tantùm æquales pertingent in convexum Circuli, totidemque etiam in Circuli concavum.

Nam ductis radijs.

1. BA æquabitur, 15. *def.* & 2. *ax.* 1. ipsis AF pl. FE, quæ, 20. 1. maj. sunt quàm AE; ergo AB maj. est quàm AE.

2. Quoniam æquantur FE & FD, & AF est comm. sed, 9. *ax.* angulus AFE maj. est quàm AFD; erit, 24. 1. AE maj. quàm AD: & eadem ratione AD maj. quàm AC.

3. Quoniam, 20. 1. AG pl. GF min. sunt quàm AH pl. HF, quæ, 21. 1. min. sunt, quàm AI pl. IF, quæ 21. 1. minores sunt quàm AK pl. KF; ergo, demptis æqualibus GF, HF, IF, KF, erit AG min. quàm AH, & hæc min. quàm AI, & hæc min. quàm AK.

4. Fiat, 23. 1. angulus AFL æqu. ipsi AFK: quoniam æquantur FL, & FK, atque FA est comm. &, *constr.* angulus AFL æquatur ipsi

AFK

AFK; æquabuntur, 4. 1. AL, & AK: hiſce verò nulla alia æquatur, ut prius oſtenſum eſt.

Q. E. D.

PROPOSITIO IX.

SI ex puncto (A) aſſumpto in Circulo tendant in peripheriam plures quàm duæ rectæ ſibi mutuò æquales; in hoc puncto erit centrum Circuli.

Nam, 7. 3. ex puncto extrà centrum non poſſunt in peripheriam duci plures, quàm duæ rectæ ſibi mutuò æquales; ergo A eſt centrum.

Q. E. D.

PROPOSITIO X.

DUo Circuli ſe mutuò non ſecant niſi in duobus punctis.

Nam ſe ſecent, ſi f. p. in pluribus punctis B, C, D, atque ex centro alterius circuli ducantur ad puncta ſectionum lineæ AB, AC, AD; ergo punctum A, 9. 3. erit centrum utriuſque circuli: Quod, 5. 3. fieri nequit.

PROPOSITIO XI.

IN Circulis ſeſe interiùs tangentibus linea, quæ centra connectit, pertingit ad punctum contactus.

Si negas; habeant, ſi f. p. centra eum ſitum, ut recta ED, quæ ad contactum non pertingit, transeat per centra E, O, & junge EA, OA. Quoniam ergo, *f. hyp.* æquantur OA, & OC; æquabuntur, 2. *ax.* EC, & EO pl. OA, quæ 20. 1. maj. sunt quàm EA, cui, 15. *def.* æquatur ipsa ED; ergo erit EC maj. quàm ED, pars quàm totum. Q. E. A.

PROPOSITIO XII.

IN Circulis sese exteriùs tangentibus, linea, quæ centra connectit, transit per contactum.

Si negas; Sint centra, si f. p. ità posita (puta in A, & B) ut recta per ipsa transiens, non pertranseat contactum C, sed circulos secet in D, & E, & jungantur AC, BC; æquabuntur, 15. *def.* DA pl. EB ipsis AC pl. CB, quæ, 20. 1. maj. sunt, quàm AB; ergo DA pl. EB maj. erunt quàm AB. Q. E. A.

PROPOSITIO XIII.

CIrculi se vel interiùs, vel exteriùs tangant, in uno tantùm puncto se tangunt.

1. Tangant se enim, si f. p. in duobus punctis D, & C; ergo, *hyp.* æquabuntur BC, & BD, adeòque, 2. *ax.* æquabuntur AC, & AB pl. BD, quæ, 20. 1. maj. sunt, quàm AD, cui, 15. *def.* æquatur ipsa AC; adeòque AC maj. erit, quàm AC. Q. E. A.

2. Tangant se, si f. p. duo circuli in duobus punctis G, & F; ergo, 12. 3. linea AE, quæ cen-

centra connectit, transibit per contactum, ac proindè aquabuntur AF pl. EF, & AE: quod (20. 1.) fieri nequit.

PROPOSITIO XIV.

IN Circulo si rectæ subtensæ (AC, BD) æquantur inter se; æqualiter etiam distant à centro: & è converso.

1. Quoniam, 4. *def.* 3. EF est perpendicularis ad AC; æquabuntur, 3. 3. AF & FC, & eadem ratione BG, & DG: atqui, *hyp.* æquantur AC, & BD; ergo, 7. *ax.* etiam æquantur AF, & BG. Igitur

Æqu. hæc { AFq. pl. FEq. (47. 1.) / AEq. (hoc est) / BEq. (47. 1.) / EGq. pl. GBq.

Atqui, *hyp.* æquantur AFq. & BGq.; ergo, 3. *ax.* æquantur FEq. & GEq. adeòque erunt sibi mutuò æquales FE, & GE. Q. E. D.

2. Quoniam, 3. 3. FE, & GE dividunt bifariam lineas AC, & BD, atque, *hyp.* æquantur FE & GE; Idcircò

Æqu. hæc { AFq. pl. FEq. (47. 1.) / AEq. (hoc est) / BEq. (47. 1.) / BGq. pl. GEq.

Atqui, *hyp.* æquantur FEq. & GEq.; ergo, 3. *ax.* AFq. ipsi BGq. adeòque, 6. *ax.* AC ipsi BD. Q. E. D.

PRO-

PROPOSITIO XV.

IN Circulo maxima quidem linea est diameter; aliarum verò quæ ipsi centro est propinquior, remotiore maj. est.

Ex distantia GC quæ, *hyp.* maj. est quàm GH sume GO æqualem ipsi GH, & per O ducatur perpendicularis KD, & ducantur radij. Quoniam AD æquatur ipsis GK pl. GD, quæ maj. sunt, 20. 1. quàm KD, cui, *hyp.* & 14. 3. æquatur ipsa FE; erit AD maj. quàm FE. Tum quoniam æquantur GK & GB, uti & GD & GH, sed angulus KGD maj. est angulo BGH; erit, 24. 1. KD (FE) maj. quàm BH. Q. E. D.

PROPOSITIO XVI.

QVæ (DO) perpendicularis est ad diametrum, tangit Circulum in puncto: Inter tangentem verò & Circulum, non potest duci linea recta.

1 Quoniam angulus OAB rectus est; erit, 32. & 10. 1. BO maj. quàm BA, quæ ad circumferentiam tantùm pertingit; ergo punctum O, quocunque cadat, semper erit extra Circulum.

2 Quoniam angulus BAD rectus est; erunt anguli BAL, & BAM acuti; igitur BA neque ad AL, neque ad AM perpendicularis est: ducatur ergo; si f. p. recta BK perpendicularis in AM; erit, 19. 1. BA maj. quàm BK, quæ maj. est,

quàm

quàm BI, cui, 15. *def.* 1. æquatur ipsa BA; ergo BA maj. erit, quàm BA. Q. E. A.

Deindè ducatur in ipsam AL perpendicularis BE; erit, 19. 1. BA, quæ tantùm ad circunferentiam pertingit, maj. quàm BE; ergo punctum E cadet intra circulum. Q. E. D.

SCHOL. Ex hac propositione innumera consequuntur paradoxa, de quibus fusè egerunt Clavius, Galilæus, Borellus, Vivianus, & Tacquetus, quos consulat, qui velit.

PROPOSITIO XVII.

EX puncto dato (A) ducere lineam, quæ Circulum tangat in puncto.

Ducatur AB, & ex B per A fiat Circulus: tum ex puncto C excitetur perpendicularis CD, & ducatur DB, atque deinde per punctum E ducatur recta AF; quàm dico esse tangentem. Nam in 3glis ABE, DBC æquantur latera AB, & DB, uti & CB, & EB, & ang. B est communis, ergo, 4. 1. angulus AEB æquatur angulo DCB, qui, *constr.* rectus est; adeoque, 16. 3. linea AEF circulum tangit in puncto. Q. E. F.

PROPOSITIO XVIII.

QVæ (CE) ex centro ducitur ad punctum contactus, perpendicularis est ad tangentem. (AB.)

Si negas; sit, si f. p. FG perpendicularis ad tan-

tangentem AB; ergo, 19. 1. FG min. eſt, quàm FE, cui æquatur ipſa FD; adeòque FG min. erit, quàm FD, totum quàm pars. Q. E. A.

PROPOSITIO XIX.

Centrum Circuli eſt in linea (EC), quæ perpendicularis eſt ad tangentem (AB.)

Si negas; ſit, ſi f. p. Centrum in puncto F; ergò, 18. 3. angulus FCB rectus eſt, ac proindè æquabitur angulo ECB, qui etiam, *hyp.* rectus eſt, pars toti. Q. E. A.

PROPOSITIO XX.

Angulus (ADC) ad centrum eſt duplus anguli ad circunferentiam, ſi uterque inſiſtat eidem arcui (AC.)

Trahantur per centrum rectæ BG, FH. Quocunque cadat vertex anguli ad circumferentiam; erit *primò* angulus ADG, 32. 1. æqual. angulis ABD pl. BAD, qui, 5. 1. æquantur ſibi mutuò; ergo ADG æquatur 2 ABD: & eadem ratione CDG æquatur 2 CBD; ac proindè totus ADC eſt duplus totius ABC. Secundò, angulus ADC æquatur, 32. 1. angulis DEC pl. DCE, qui, 5. 1. æquantur ſibi mutuò; ergo ADC eſt duplus anguli AEC. Tertiò, quoniam angulus HDC anguli HFC, uti & angulus HDA anguli HFA duplus eſt; erit etiam; 20. *ax.* reliq. ADC duplus reliqui AFC. Q. E. D.

PRO-

PROPOSITIO XXI.

ANguli, qui sunt in eodem Circuli segmento sibi mutuo æquantur.

1 Si sint in segmento maj. erit, 7. *ax*. angulus ACB, utpotè, 20.3. dimidius anguli AEB, æqualis angulo ADB, qui ejusdem AEB est dimidius.

2. Si sint in segmento min. Quoniam in 3glis AHF, BHG, æquantur, *ut prius*, anguli FAH, GBH, uti &, 15. 1. anguli AHF, BHG; æquabuntur etiam, 32. 1. anguli AFH, BGH, hoc est AFB, & BGA. Q. E. D.

PROPOSITIO XXII.

IN quadrilatero (ABCD) quod inscriptum est Circulo, anguli oppositi simul sumpti æquantur duobus rectis.

Ducantur BD, AC; quoniam in 3glo ABC, 32. 1. summa angulorum æquatur 2 rectis; & æquantur, 21. 3. BAC, & BDC, uti & BCA, & BDA; erit etiam ABC pl. BDA, pl. BDC, hoc est ABC pl. ADC. æqualis 2 rectis. Q. E. D.

COROLL. Hinc circa Rhombum, vel Rhomboidem circulus describi nequit, quia nempè anguli oppositi, vel una sunt maj. vel una min. 2 angulis rectis.

PROPOSITIO XXIII.

Segmenta inæqualia (AECB, AFDB) constituta super eadem linea (AB) non sunt similia.

Nam si dicerentur similia; æquarentur, 10. *def.* 3. anguli AFG, & AEG, nimirùm externus, & internus oppositus: quod, 16. 1. fieri nequit.

PROPOSITIO XXIV.

Segmenta similia (ACB, DGE) constituta super æqualibus lineis (AB, DE) sunt æqualia.

Quoniam, *hyp.* æquantur AB, & DE; facta superpositione congruent; ergo etiam segmenta congruent: nam aliàs, si unum segmentum caderet intra, vel extra aliud; erunt proindè, 9. *ax.* inæqualia, adeòque, 23. 3. dissimilia, *contra hyp.*: sin verò caderet unum partim intra, & partim extra aliud; se secarent Circuli in tribus punctis. Quod, 10. 3. fieri nequit.

PROPOSITIO XXV.

Dato Circuli segmento (ACDB) circulum absolvere, cujus est segmentum.

Subtendantur utcunque duæ rectæ, AC, BD, quas seca bifariam in E, & F, & ex his punctis excita perpendiculares sibi occurrentes in puncto G; di-

G; dico, in hoc puncto esse centrum: Nam (ut colligitur ex constructione primæ hujus) in his duabus perpendicularibus est Centrum; adeòque in communi puncto G: Centro autem reperto absolvatur circulus. Q. E. F.

PROPOSITIO XXVI. & XXVII.

IN eodem, vel in æqualibus Circulis anguli æquales, qui vel ad centrum, vel ad peripheriam constituti sint, insistunt arcubus æqualibus: & si arcus sunt æquales; etiam æquantur sibi mutuò anguli arcubus insistentes.

1. Quoniam æquantur BD, & FH, uti & DC, & HG, necnon, *hyp.* anguli D, & FHG; æquabuntur, 4. 1. BC, & FG; adeòque, *hyp.* 10. *def.* & 24. *huj.* segmenta BAC, FEG erunt æqualia; sed & circuli æquantur; ergo etiam, 3. *ax.* æquabuntur segmenta residua. Q. E. D.

2. Si negas, angulum D æquari angulo FHG; sit, si f. p. ipse D æqualis angulo FHI; Ergo æquaretur, 26. 3. arcus FI arcui BC, qui, *hyp.* æquatur arcui FG, adeoque, & FI ipsi FG, pars toti. Q. E. A.

PROPOSITIO XXVIII. & XXIX.

SUbtensæ æquales (BC, & FG) in Circulis æqualibus auferunt arcus æquales; & è converso.

1. Quoniam, *hyp.* æquantur BC, & FG uti

&, 15. *def.* 1. DB, & DC ipsis HF, & HG; erit, 8. 1. angulus D angulo H æqualis, ac proindè, 26. 3. æquantur arcus BC, & FG. Q. E. D.

2. Quoniam, *hyp.* æquantur arcus BC, & FG; æquabuntur, 27. 3. anguli D, & H; sed & æquantur latera hos angulos intercipientia; ergo, 4. 1. æquantut etiam subtensæ BC, & FG.

Q. E. D.

PROPOSITIO XXX.

Datam peripheriam bifariam secare.

Claudatur data peripheria per rectam AC, quam divide bifariam in D, & ex D ducatur DB perpendicularis ad AC; & trahantur rectæ AB, CB; dico factum: Nam, *constr.* æquantur AD, & DC; atque DB est communis, & æquantur etiam, *constr.* anguli ADB, & CDB; ergo, 4. 1. æquantur AB, & CB; adeòque, 28. 3. æquabuntur etiam arcus AB, & CB. Q. E. F.

PROPOSITIO XXXI.

Angulus in semicirculo rectus est: in majori segmento acutus, & in minori obtusus.

Nam

$$\text{Æqu. hi anguli.}\left\{\begin{array}{l}\text{FBC } (32.\ 1.)\\ \text{BAE pl. BCE } (5.\ 1.)\\ \text{ABE pl. CBE } (19.\ ax.)\\ \text{ABC}\end{array}\right.$$

ac proindè, 10. *def.* 1. angulus ABC rectus est:

Ergo,

Ergo, 32. 1. BAC est acutus: adeòque, 22. 3. BDC est obtusus. Q. E. D.

PROPOSITIO XXXII.

Angulus factus à subtensa, (EC), & tangente æquatur angulo facto in segmento alterno.

Dico, angulum D angulo ECB, uti & angulum F angulo ECA æquari.

Sit enim CD perpendicularis ad tangentem AB; ergo, 19. 3. CD erit diameter, adeòque, 31. 3. angulus DEC rectus erit; ergo, 32. 1. anguli D pl. DCE æquabuntur uni recto, adeoque ipsi DCB; ac proindè, dempto utrinque angulo DCE; erit, 3. *ax.* angulus D æqualis angulo ECB. Tum, quoniam, 13. 1. æqu. 2 Rectis anguli ECB pl. ECA; sicuti, 22. 3. æqu. 2. Rectis anguli D pl. F, atque, *ut prius* æquantur sibi mutuò anguli D, & ECB; ergo æquabuntur, 3. *ax.* etiam inter se anguli F, & ECA. Q. E. D.

PROPOSITIO XXXIII.

Super data recta linea (AB) describere Circuli segmentum, quod capiat angulum (AIB) æqualem angulo dato (Q).

Fiat angulus BAD æqualis ipsi Q: Tum excita AE perpendicularem ad AD, & fiat angulus ABF æqualis ipsi BAF: Tum centro F per A fiat circulus: qui utique transibit per B:

 nam,

nam, *constr.* & 6. 1. FA est æqu. ipsi FB. Demum fiat super AB angulus I in segmento alterno; Dico factum. Nam angulus I æquatur, 32. 3. angulo BAD, cui, *constr.* æquatur angulus Q. Q. E. F.

PROPOSITIO XXXIV.

A Dato Circulo segmentum abscindere, capiens angulum (B) æqualem angulo dato. (D)

Ducatur tangens AF: Tum fiat angulus CAF æqualis ipsi D, & in segmento alterno fiat utcunque angulus B: dico factum: Nam angulus B æquatur, 32. 3. angulo CAF, cui, *constr.* æquatur angulus D. Q. E. F.

PROPOSITIO XXXV.

SI in Circulo duæ rectæ (AB, CD) se mutuò secuerint; rectangulum comprehensum sub segmentis unius æquatur rectangulo facto à segmentis alterius.

1 *Casus*. Si rectæ sese secent in centro; jam patet, quadrata radiorum sibi mutuò æquari.

2 *Casus*. Si una transeat per Centrum, & alteram perpendiculariter secet extra Centrum, adeòque, 3. 3. illam secet bifariam; trahatur radius FD: Atque tum

(AEB

Æqu. hæc { AEB pl. FEq. (5. 2.)
FBq. (15. *def.* 1.)
FDq. (47. 1.)
EDq. pl. FEq.

ergo, 3. *ax.* AEB rectangulum æquatur ipsi EDq. cui, ob CE, ED æquales, æquatur Rectangulum CED. Q. E. D.

3 *Casus*. Si una sit Diameter, & alteram secet inæqualirer; trahatur FG perpendicularis ad CD, ac proindè FG secabit, 3. 3. ipsam CD bifariam, & ducatur FD: Igitur

Æqu. hæc { AEB pl. FEq. (5. 2.)
FBq. (FDq.) (47. 1.)
FGq. pl. GDq. (5. 2.)
FGq. pl. GEq. pl. CED (47. 1.)
CED pl. FEq.

ergo, 3. *ax.* AEB rectangulum æquatur rectangulo CED. Q. E. D.

4 *Casus*. Si neutra per centrum transeat, ducatur diameter GH per punctum sectionis E, ergo æquabitur, *ut prius*, AEB ipsi GEH, & hoc ipsi CED. Q. E. D.

PROPOSITIO XXXVI.

Rectangulum (ADC) comprehensum sub secante integra, & portione ipsius exteriore, æquatur (DBq.) quadrato tangentis.

1 *Casus*. Si secans transeat per centrum; erunt DBq. pl. BEq. æqualia, 47. 1. ipsi DEq. & hoc, 6. 2. ipsis CEq. pl. ADC: atque BEq. &

CEq. æquantur ſibi mutuò; ergo, 3. *ax.* æquabuntur etiam DBq. & ADC. Q. E. D.

2 *Caſus*. Si ſecans non tranſeat per Centrum; ducatur EF perpendicularis ad ſecantem, & trahantur cæteræ occultæ; Igitur

Æqu. hæc $\begin{cases} \text{DBq. pl. BEq. (47. 1.)} \\ \text{DEq. (47. 1.)} \\ \text{DFq. pl. FEq. (3. 3. \& 6. 2.)} \\ \text{FEq. pl. CFq. pl. ADC (47. 1.)} \\ \text{ADC pl. CEq.} \end{cases}$

Atqui æquantur BEq. & CEq.: Ergo, 4. *ax.* æquantur etiam DBq. & ADC rectangulum.

Q. E. D.

PROPOSITIO XXXVII.

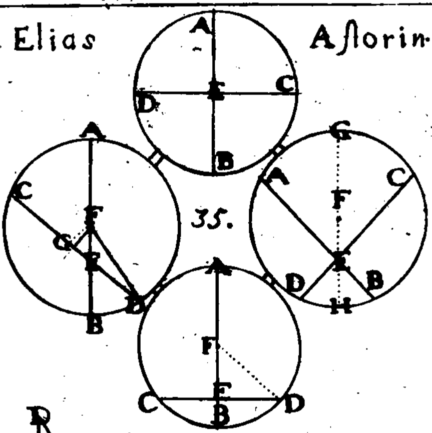
SI ex puncto (D) extra Circulum abſumpto cadant in Circulum duæ rectæ (DA, DB) itaut (DBq.) quadratum unius æquetur rectangulo (ADC) facto ex altera integra, & portione ipſius exteriori; linea illa (DB) incidens erit tangens.

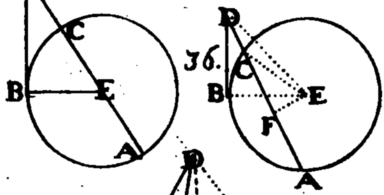
Ex puncto D ducatur, 17. 3. tangens DF, & trahantur EB, ED, EF; erit DBq. æquale, *hyp.* ipſi ADC, & hoc, 36. 3. ipſi DFq; ergo æquabuntur DB, & DF: ſed & æquantur BE, & FE, atque DE eſt communis; ergo, 8. 1. angulus DBE æquatur ipſi recto DFE; adeoque, 16. 3. linea DB eſt tangens. Q. E. D.

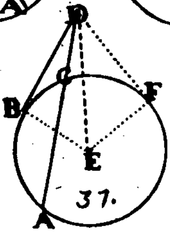
LAUS DEO.

LI-

Elias Aſtorinꝰ







3. Jan. 1691.

Laus DEO!

LIBER IV.

DEFINITIONES.

1 Figura rectilinea in figura rectilinea inscribi dicitur, cum singuli ejus figuræ, quæ inscribitur, anguli, singula latera ejus, in qua inscribitur, tangunt.

2 Similiter, & figura circum figuram describi dicitur, quum singula ejus, quæ circumscribitur, latera singulos ejus figuræ angulos tetigerint, circum quam illa describitur.

3 Figura rectilinea in circulo inscribi dicitur, quum singuli ejus figuræ, quæ inscribitur, anguli tetigerint circuli peripheriam.

4 Figura verò rectilinea circa circulum describi dicitur, quum singula latera ejus, quæ circumscribitur, circuli peripheriam tangunt.

5 Similiter, & circulus in figura rectilinea inscribi dicitur, quum circuli peripheria singula latera

tera tangit ejus figuræ, cui inscribitur;

6 Circulus autem circum figuram describi dicitur, quum circuli peripheria singulos tangit ejus figuræ, quam circumscribit, angulos.

7 Recta linea in circulo accomodari, seù coaptari dicitur, quum ejus extrema in circuli peripheria fuerint.

PROPOSITIO I.

IN dato Circulo rectam lineam (AB) accomodare, æqualem datæ rectæ lineæ, quæ circuli diametro (AC) non sit major.

Ex A, intervallo æquale ipsi lineæ datæ fiat Circulus secans datum circulum in B; erit ducta AB æqualis, 15. *def.* 1. ipsi AE, quæ sumpta est æqualis ipsi lineæ datæ. Q.E.F.

PROPOSITIO II.

DAto Circulo triangulum (BAC) inscribere dato triangulo (DEF) æquiangulum.

Ducatur, 17. 3. tangens GH, & fiant, 23. 1. angulus HAC æqualis angulo E, & angulus GAB æqualis angulo F, & ducatur BC; dico factum. Nam angulus B æquatur 32. 3. angulo HAC, & hic, *constr.* ipsi E: ità etiam æquantur anguli C, GAB, & F; ergo, 32. 1. reliquus BAC reliquo D. Q.E.F.

PRO-

PROPOSITIO III.

Dato Circulo triangulum (LNM) circumscribere dato triangulo (DEF) æquiangulum.

Protrahatur latus EF utrinque, & fiat, 23. 1. angulus AOB angulo DEG, uti & angulus COB angulo DFH æqualis, & per puncta A, B, C, ducantur tangentes LN, LM, MN: nam quòd istæ tangentes coëant, ex eo patet quia nempè, 18. 3. anguli OAL, OBL recti sunt; ergo si ducatur AB; erunt anguli ABL pl. BAL minores 2 rectis, adeòque tangentes coibunt in puncto L, atque ità porrò de cæteris: Cum autem in Quadrilatero BOAL (ut potè resolubile in duo triangula) omnes anguli simul sumpti æquentur, 32. 1., 4 angulis rectis, & anguli in B, & in A recti sint: erunt reliqui L pl. AOB æquales 2. rectis, quibus, 13. 1. æquantur DEG pl. DEF: atqui, *constr.* æquantur sibi mutuò AOB, & DEG; ergo etiam, 3. *ax.* æquabuntur L, & DEF: & eadem ratione angulus M angulo DFE; ac proindè, 32. 1. tertius N tertio D.

Q. E. F.

PROPOSITIO IV.

Dato triangulo (ABC) Circulum inscribere.

Anguli in B & C secentur, 9, 1. bifariam, & ex puncto concursus O, ducantur OE, OF, OF, OG perpendiculares ad latera trianguli; deindè ex O per E fiat Circulus; dico factum nimirum, circulum transire per reliqua puncta F & G. Nam, *constr.* anguli EBO, FBO æquantur inter se, uti & anguli recti BEO, BFO sed & BO est latus commune; ergo, 26. 1. EO & FO æquantur, & eadem ratione FO, & GO adeòque circulus transibit per puncta F & G.

Q. E. F.

PROPOSITIO V.

Dato triangulo (BAC) Circulum circumscribere.

Latera quævis duo BA, AC biseca, 10.& 11. 1. perpendicularibus DF, EF concurrentibus in F; circulus ex F per B descriptus, transibit per reliqua puncta A & C: Nam ducantur cæteræ lineæ ut in figura; Quoniam, *constr.* æquantur inter se DA & DB, uti & anguli recti ADF & BDF, & DF est communis; æquabuntur, 4. 1. sibi mutuò FB, & FA, & eadem ratione FA, & FC; ergò circulus transibit per omnia puncta B, A, C. Q. E. F.

PROPOSITIO VI.

Dato Circulo quadratum (ABCD) inscribere.

Ducantur, 11. 1. diametri AC, BD sese perpendiculariter secantes, & trahantur AB, AD, BC, C, CD; dico factum; nam quia, *constr.* 4 anguli ad centrum O sunt recti; idcircò 26; & 29. arcus & subtensæ illis oppositæ sunt æquales; ergo figura ABCD est æquilatera; sed & rectangula; nàm anguli in A, B, C, D, ut potè in semicirculis, 31. 3. recti sunt; ergo figura descripta, est quadratum.

PROPOSITIO VII.

D*Ato Circulo Quadratum (FK) circumscribere.*

Duc diametros AC, BD, se mutuò perpendiculariter secantes in centro E, & per puncta A, B, C, D ducantur tangentes concurrentes in punctis F, G, H, K; dico factum: Nam ob angulos ad A, B, C, D omnes rectos, atque ob angulos ad centrum E rectos; anguli etiam in F, G, H, K, recti erunt, nam in omnibus Quadrilateris summa angulorum æquatur 4 rectis; igitur, 28. 1. latera figuræ circumscriptæ erunt inter se parallela; sed & æqualia, quippè FA, AG; FB, BH æquantur, 34. 1. ipsis radiis BE, ED; AE, EC, ergo, 6. *ax.* æquantur sibi mutuò ipsarum FA, AG, &c. duplæ; adeòque figura circumscripta est Quadratum. Q.E.D.

PROPOSITIO VIII.

D*Ato Quadrato (BD) Circulum inscribere.*

Latera quadrati biseca, & junge HF; EG

so

se mutuò secantes in K; circulus ergo ex K per E descriptus, transibit per F, G & H. Nam quia *hyp.* & 7. *ax.* AH, & BF sunt parall. & æqu. erunt etiam AB, & HF inter se, 33. 1. æqu. & parallelæ, atque ità de cæteris; ergo, 34. 1. æquabuntur istæ lineæ EK, FK, GK, HK ipsis lineis AH, BF, AE, cæterisque, quæ, *constr.* & 7. *ax.* æquantur sibi mutuò; adeòque Circulus per E descriptus, transibit &c. Q. E. F.

PROPOSITIO IX.

D*Ato quadrato (ABCD) Circulum circumscribere.*

Ducantur Diagonales AC, BD; Circulus ex O per A descriptus, transibit etiam per reliqua puncta B, C, D; siquidem, *hyp.* æquantur BA, & BC, atque angulus ABC rectus est; ergo, 5. & 32. 1. angulus BAO, BCO sunt æqules, & semirecti, & ità etiam anguli ABO, & ADO; adeòque, 6. 1. BO, & AO æquantur, & sic de reliquis, ac proindè circulus transibit per omnia puncta A, B, C, D. Q.E.F.

PROPOSITIO X.

T*Riangulum Isoscelem (ABD) describere, itaut quilibet angulus ad Basim (BD) sit duplex anguli verticalis (A.)*

Secetur quæcunque AB (11. 2.) itaut ABC æquetur ipsi ACq. Tum fiat circulus ex A per

B, cui

B, cui (1.4.) aptetur linea BD æqualis ipsi AC, & ducantur CD, & AD: & per tria puncta A, C, D ducatur (5.4.) circulus. Quoniam ergo æquantur ABC, & ACq. (BDq.) erit, 37. 3. ipsa BD tangens Circuli minoris; adeòque (32.3.) æquantur anguli BDC, & A: Igitur

Æqu. hi anguli:
- ABD (5.1.)
- ADB (19.*ax.*)
- BDC pl. CDA (*ut prius*)
- CDA pl. A (32.1.
- BCD;

Ergo æquantur anguli ABD (CBD) & BCD; adeòque, 6.1. æquantur CD, & BD (CA); ergo, 5.1. etiam anguli CDA, & A: ac proinde, 32.1. angulus BCD (CBD) æquatur 2 A.

PROPOSITIO XI.

IN dato Circulo pentagonũ regulare (ABCDE) inscribere.

Fiat, 10.4. Triangulum FGH, itaut G, sivè H sit duplus anguli F. Tum circulo dato, 2. 4. inscribatur triangulum CAD æquiangulum ipsi GFH; deindè anguli ACD, ADC, 9. 1. secentur bifariam rectis lineis DB, CE, & ducantur AB, BC, AE, DE; dico factum; Siquidem, *constr.* æquantur isti anguli BDA, DBC, CAD, ACE, ECD; ergo æquantur, 26. 3. arcus ipsis oppositi: necnon, 29. 3. subtensæ AB, BC, CD, DE, EA; quin etiam, 27. 3. æquantur ipsius pentagoni anguli, utpotè insistentes arcubus æqualibus. Q.E.F.

PRO-

PROPOSITIO XII.

Circa datum Circulum pentagonum regulare describere.

Inſcribatur, 11.4. circulo dato Pentagonum ABCDE, ad cujus angulos ducantur lineæ ex centro, & per ipſos angulos ducantur, 17.3. tangentes, ſibi mutuò occurrentes in punctis G,H,I,K,L; dico factum: Nam, 37.3. æquantur IB, & IC, ſed & æquantur FB, & FC, atque IF eſt communis; ergo, 8.1. æquantur anguli BFI, & CFI: & eadem ratione æquantur BFH, & AFH, & ſic de cæteris; ſed & æquantur toti CFB, & BFA, ergo, 7. *ax.* etiam æquantur eorum dimidii IFB, & BFH: ſed &, *conſtr.* anguli ad B recti ſunt, & BF eſt communis; ergo, 26.1. æquantur HB & BI; adeoque, 6. *ax.* HI, & IK æquantur inter ſe, & ſic cæteris: Demum, quoniam anguli in B, & C recti ſunt, atque etiam in B, & A; erunt, 32.1. CFB, pl. CIB æquales 2 rectis, uti & ipſi BFA pl. BHA: ſed, *ut prius*, æquantur CFB & BFA: ergo, 3. *ax.* æquabuntur reliqui CIB, & BHA, & ſic de cæteris.

Q. E. F.

PROPOSITIO XIII.

In dato Pentagono Regulari circumſcribere Circulum.

Duos Pentagoni angulos A & B, 9.1. ſeca bifa-

bifariam rectis AF, BF concurrentibus in F, & ex F duc perpendiculares ad latera Pentagoni; Circulus centro F per G descriptus tanget omnia puncta H, I, K, L. Duc enim rectas ad angulos Pentagoni; quoniam *hyp.* BA, & BC æquantur, uti, & *constr.* anguli ABF, CBF, & BF est communis, æquabuntur, 4. 1. AF, & CF & ang. FAB angulo FCB qui est *costr.* dimidium totius BCD; ergo ang. FBA etiam est dimidium totius BAE; adeòque æquabuntur FAB, & FAE, & eodem modo ostendetur, omnes angulos Pentagoni divisos esse bifariam: Quoniam ergo anguli in H & G recti sunt; Et anguli in B æquantur, *ut priùs*, sibi mutuo, & BF est communis: idcirco, 26. 1. erit in triangulis FBH, FBG, ipsa FH æqualis ipsi FG, & sic porrò de cæteris; Adeòq; circulus transibit per puncta H, I, K, L.

PROPOSITIO XIV.

D*Ato Pentagono Regulari Circulum circumscribere.*

Duos Pentagoni angul. biseca rectis AO, BO, & ex O ducantur reliquæ OC, OD, OE; Circulus centro O per A descriptus, transibit per reliqua puncta B, C, D, E; Siquidem (ut colligitur ex præcedenti) Pentagoni omnes anguli secti sunt bifariam; adeòque, 6. 1. æquabuntur ipsæ OA, OB, OC, OD, OE; ergo Circulus transibit per reliqua puncta B, C, D, E.

Q. E. F.

PROPOSITIO XV.

D*Ato Circulo Hexagonum Regulare inscribere.*

Duc diametrum AD, & ex D per datum centrum O fiat circulus, qui datum circulum secet in punctis C, & E: tum protrahantur ex his punctis per centrum O diametri EB, CF, & ducantur cæteræ lineæ. Quoniam, *constr.* & 15. 1. æquantur sibi mutuò anguli COD, DOE; BOA, AOF, & unusquisque ipsorum est tertia pars 2 Rectorum; erit etiam, 13. 1. tam angulus BOC, quàm EOF tertia pars 2 Rectorum; ac proindè omnes anguli in O sibi mutuò æquabuntur; Ergo, 26. & 29. 3. etiam æquabuntur sibi mutuò arcus oppositi, & subtensæ, adeòque, & anguli figuræ inscriptæ. Q.E.F.

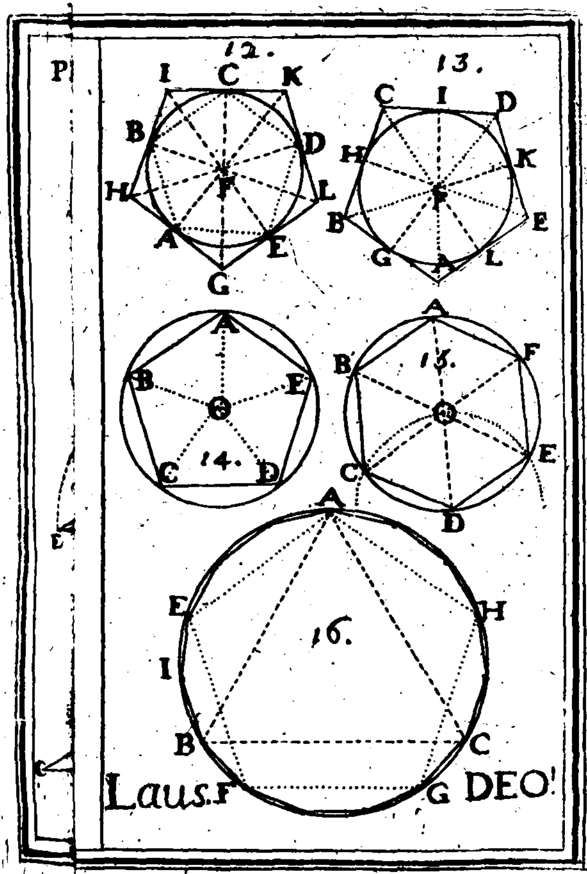
PROPOSITIO XVI.

I*N dato Circulo Quindecagonum Regulare describere.*

Inscribe prius, 11. 4. Pentagonum regulare, atque tum, 3. 4. ex eodem puncto A inscribe triangulum æquilat. ABC; erit, *constr.* arcus AF sex quintedecimæ totius circumferentiæ, & arcus AB quinque quintedecimæ ejusdem; ergo arcus FB erit una quintadecima ejusdem adeòque Quindecagonum cujus latus sit BF, erit æquilaterum; sed & æquiangulum, 27. 3. nam omnes ejus anguli insistunt æqualibus arcubus, quorum unusquisque est tredecim quintedecimæ totius circumferentiæ; adeòque Quindecagonum est regulare.

Q. E. F.

LAUS DEO.


P
12.
13.
14.
15.
16.
Laus DEO!

LIBER V.

DEFINITIONES.

1 PARS est magnitudo magnitudinis minor majoris, quum minor metitur majorem.

2 Multiplex autem est major minoris, cum minor metitur majorem.

3 Ratio, est duarum magnitudinum ejusdem generis mutua quædam secundum quantitatem habitudo.

4 Proportio verò, est rationum similitudo.

5 Rationem habere inter se magnitudines dicuntur, quæ possunt multiplicatæ sese mutuò superare.

6 In eadem ratione magnitudines dicuntur esse, prima ad secundam, & tertia ad quartam: cum primæ, & tertiæ æquè multiplicia à secundę, & quartę ęquè multiplicibus, qualiscunque sit hęc multiplicatio, utrunque ab utroque, vel unà deficiunt, vel unà æqualia sunt, vel unà excedunt, si ea sumantur, quæ inter se respondet.

7 Eandem autem habentes rationem magnitudines, proportionales vocentur.

8 Cùm verò æquè multiplicium, multiplex primę magnitudinis excesserit multiplicem secundæ,

dæ,at multiplex tertiæ non excesserit multiplicem quartæ: tunc prima ad secundam, majorem rationem habere dicetur, quàm tertia ad quartam.

9 Proportio autem in tribus terminis paucissimis consistit.

10 Cùm autem tres magnitudines proportionales fuerint, prima ad tertiam, duplicatam rationem habere dicitur ejus, quam habet ad secundam. At cùm quatuor magnitudines proportionales fuerint, prima ad quartam, triplicatam rationem habere dicitur ejus, quam habet ad secundam: & semper deinceps uno amplius, quandiù proportio extiterit.

11 Homologæ, seù similes ratione magnitudines dicuntur, antecedentes quidem antecedentibus, consequentes verò consequentibus.

12 Alterna ratio, est sumptio antecedentis comparati ad antecedentem, & consequentis ad consequentem.

13 Inversa ratio, est sumptio consequentis, ceù antecedentis, ad antecedentem velut ad consequentem.

14 Compositio rationis, est sumptio antecedentis cum consequente ceù unius, ad ipsum consequentem.

15 Divisio rationis, est sumptio excessus, quo consequentem superat antecedens ad ipsum consequentem.

16 Conversio rationis, est sumptio antecedentis ad excessum, quo superat antecedens ipsum cousequentem.

17 Ex æqualitate ratio eſt, ſi plures duabus ſint magnitudines, & his aliæ multitudine pares, quæ binæ ſumantur, & in eadem ratione: quum in primis, ſic & in ſecundis prima ad ultimam ſeſe habuerit, vel aliter ſumptio extremorum per ſubductionem mediorum.

18 Ordinata proportio eſt, cùm fuerit quemadmodum antecedens ad conſequentem: ita antecedens ad conſequentem; fuerit etiam ut conſequens ad aliud quidpiam, ità conſequens ad aliud quidpiam.

19 Perturbata autem proportio eſt, tribus poſitis magnitudinibus, & aliis, quæ ſint his multitudine pares, cùm ut in primis quidem magnitudinibus ſe habet antecedens ad conſequentem, ità in ſecundis magnitudinibus antecedens ad conſequentem: ut autem in primis magnitudinibus conſequens ad aliud quidpiam, ſic in ſecundis magnitudinibus aliud quidpiam ad antecedentem.

PROPOSITIO I.

SI ſint quotcunque magnitudines (A, C) quotcunque magnitudinum (B, D) æquimultiplices; tam multiplex erit una unius, quàm omnes omnium.

Demonſtrantur primæ iſtæ Propoſitiones æquimultiplicium facili quidem negotio per ſolam additionem, vel ſubtractionem ſpecioſam.

Additio Magnitudinum.

A *æqu.* 3 B
C *æqu.* 3 D

Ergo A pl. C *æqu.* 3 B pl. 3 D.
Q. E. D.

PROPOSITIO II.

SI prima (A) secundæ (B) æquè fuerit multiplex, ac tertia (C) quartæ (D); fuerit autem & quinta (E) ejusdem secundæ itâ multiplex, ac sexta (FG) ejusdem quartæ; erit composita ex prima, & quinta ita multiplex secundæ, ac composita ex tertia, & sexta multiplex quartæ.

Additio Mensurarum.

Toties B est in A, ac D in C.
Toties B est in E, ac D in FG

Ergo *Toties* B est in A pl. E, ac D in C pl. FG
Q. E. D.

Nota, hèic fieri additionem non magnitudinum ipsarum expositarum, sed mensurarum, sivè, (ut ajunt) *Quotientium*.

PROPOSITIO III.

SI prima (A) secundæ (B) æquè fuerit multiplex ac tertia (C) quartæ (D) fuerit autem & quinta (EI) ita multiplex ipsius primæ, ac sexta

(FM)

(*FM*) *ipsius tertiæ; erit etiam quinta secundæ ità multiplex ac sexta quartæ.*

Solvatur EI in suas partes, quarum quælibet æquatur ipsi A, atque solvatur FM in suas partes quarum quælibet ipsi C æquatur.

Additio Mensurarum.

Toties B est in EG ac D in FK
Toties B est in GH ac D in KL
Toties B est in HI ac D in LM

Ergo *Toties* B est in EG pl. GH pl. HI, ac est D in FK pl. KL pl. LM. Q. E. D.

PROPOSITIO IV.

SI *magnitudo* (*AB*) *magnitudinis* (*CD*) *ità fuerit multiplex ac ablata* (*AE*) *ablatæ* (*CM*); *erit residua* (*EB*) *ità multiplex residuæ* (*MD*) *ac est tota totius.*

Sumatur quantitas GA ita multiplex reliquæ MD ac est ablata ablatæ, sive tota totius; & fiat.

Additio Magnitudinum.

GA *æqu.* 2 MD
AE *æqu.* 2 CM

Ergo GA pl. AE (GE) *æqu.* 2 MD pl. 2 CM, hoc est, *hyp.* ipsi AB; adeòque, 6. *ax.* æquantur GE, & AB; ac proinde dempta communi AE; erit 3. *ax.* EB æqu. ipsi GA, cui, *constr.* æquantur 2 MD; ergo & EB æquatur. 2 MD. Q. E. D.

PROPOSITIO V.

SI duæ magnitudines (AB , CD) duarum magnitudinum (E , F) sint æquimultiplices , & detractæ sint ex multiplicibus earundem sub multiplicium aliæ æquimultiplices ; etiam reliquæ ipsarum sub multiplicium erunt vel æquimultiplices , vel ipsis æquales , vel æquè minores .

Subtractio Mensurarum .

Toties E est in AB , ac est F in CD
Toties E est in AG , ac est F in CH

Ergo *Toties* E est in GB , ac est F in HD.
Q. E. D.

Nota , posteriores quotientes , seù mensuras sibi mutuò æquales, quæ nempè sunt in secundo ordine, subtrahi à Quotientibus æqualibus primi ordinis .

PROPOSITIO VI.

SI prima (A) ad secundam (B) ità se habeat, ac tertia (C) ad quartam (D), & dentur quinta & sexta æquimultiplices primæ & tertiæ , necnon septima & octava æquimultiplices secundæ & quartæ , ità se habebit multiplex primæ ad multiplicem secundæ , ac multiplex tertiæ ad multiplicem quartæ .

Su-

Sumantur I & K ipsarum E & F æquimultiplices; ità etiam L & M æquimultiplices, ipsarum G & H; erunt etiam, 3. 5. I & K æquimultiplices ipsarum A & C, atque L & M erunt æquimultiplices ipsarum B & D: atqui, *hyp.* est A ad B vt C ad D; ergo, 6. *def.* 5. I & K vel sunt una majores, vel æquales, vel una minores ipsis L & M, atqui, *hyp.* I & K sunt etiam æquimultiplices ipsarum E & F, atque L & M sunt æquimultiplices ipsarum G & H; ergo 6. *def.* 5. E ad G est vt F ad H. Q. E. D.

PROPOSITIO VII.

AEquales ad eandem, eandem rationem habent, uti & eadem ad æquales.

Sumantur D & E ipsarum æqualium A & C æquimultiplices, & sumatur F utcunque multiplex ipsius B; ergo, 6. *ax.* 1. æquabuntur D & E; adeòque si D erit maj. vel min. quàm F, vel eidem æqualis; erit etiam E maj. vel min. quàm F, vel eidem æqualis; ac proindè, 6. *def.* 5. erit A ad B ut C ad B: atque eadem ratione erit B ad A ut B ad C. Q. E. D.

PROPOSITIO VIII.

INæqualium magnitudinum major (AB) ad eandem (D) habet majorem rationem quàm minor (C): & eadem ad minorem habet majorem rationem quàm ad majorem.

Ex

Ex majori AB aufer EB æqualem minori C, ſumaturque HG tam multiplex ipſius EB quàm ſit GF reliquæ AE : & multiplicetur D donec ejus multiplex K major evadat, quàm HG ſed minor quàm FH. Quoniam ergo HG ipſius EB tam multiplex eſt quàm GF ipſius AE : erit, 1. 5. HG pl. GF (HF) ipſius EB pl. AE (AB) tam multiplex quàm unà HG unius EB (C) : Atqui HF major eſt quàm K, & hæc maj. quàm HG ; ergo, 8. *def.* 5. AB ad D erit in maj. ratione quàm C ad D. Deindè, quoniam HG minor eſt quàm K, idcirco eodem modo oſtendetur eſſe D ad C in maj. ratione, quàm D ad AB. Q. E. D.

PROPOSITIO IX.

QVæ ad eandem (B) eandem rationem habent ſunt æquales inter ſe, uti & illæ ad quas eadem eandem habet rationem.

1. *Hyp.* Sit A ad B ut C ad B ; dico æquari A & C : Nam ſi A ſit maj. vel min. quam C; erit, 8. 5. A ad B in maj. vel in min. ratione quàm C ad B contra *hyp.*

2. *Hyp.* Sit B ad A ut B ad C ; dico æquari A & C ; nam ſi A maj. vel min. eſſet quàm C ; erit, 8. 5. B ad A in maj. vel in min. ratione quàm B ad C contra *hyp.*

PRO-

PROPOSITIO X.

AD eandem magnitudinem (B) rationem habentium, quæ majorem rationem habet, illa major est: Ad quàm verò eadem majorem rationem habet, illa minor est.

Sit in maj. ratione A ad B, quàm C ad B; erit A major quàm C: nam si æquarentur A & C; esset, 7. 5. A ad B ut C ad B contra *hyp.*: Sin A min. esset quàm C; erit, 8. 5. in minori ratione A ad B, quàm C ad B contra *hyp.*

Sit 2. B ad C in majori ratione quàm B ad A; erit A major quàm C: Nam si æquarentur C & A; erit, 7. 5. B ad A ut B ad C contra *hyp.*: Vel si C major sit quàm A; erit, 8. 5. B ad A in majori ratione quàm B ad C, contra *hyp.*

PROPOSITIO XI.

QVæ alicui rationi sunt similes, sunt etiam similes inter se.

Sit A ad B, ut E ad F & hæc ut C ad D; Atque sume G; I, H æquimultiplices ipsarum A, E, C, tum sume K, M, L, æquim. ipsarum B, F, D. Quoniam, *hyp.* est A ad B ut E ad F, si G est maj. vel min. quàm K, vel ipsi æqualis; erit, 6. *def.* 5. I maj. vel min. quam M vel ipsi æqualis: sed quia etiam, *hyp.* est E ad F ut C ad D; si I maj. vel min. est quàm M, vel eidem æqualis; erit etiam, 6. *def.* 5. H maj. vel min.

quàm

quàm L, vel ipsi æqualis: Ergo si G sit maj. vel min. quàm K vel illi æqualis; erit etiam H maj. vel min quàm L, vel ipsi æqualis; adeòque, 6. *def.* 5. erit A ad B ut C ad D.

Q. E. D.

PROPOSITIO XII.

SI sint quotcunque magnitudines proportionales, erunt omnes antecedentes ad omnes consequentes sicuti una antecedentium ad unam consequentium.

Sume G, H, I æquimultiplices antecedentium A, C, E, atque sume K, L, M æquimultiplices consequentium B, D, F; erit ergo, 1. 5. tam multiplex una G unius A, quàm omnes G pl. H pl. I omnium A pl. C pl. E; & tam multiplex una K unius B quã omnes K, pl. L, pl. M omnium B pl. D pl. F. Quoniam autem *hyp.* est A ad B, ut C ad D, & hæc ut E ad F; si G erit maj. vel min. quàm K, vel ipsi æqualis; erit etiam 6. *def.* 5. H maj. vel min. quàm L vel ipsi æqualis, necnon I maj. vel min. quàm M vel ipsi æqualis; ac proindè si G est maj. vel min. quàm K, vel ipsi æqualis; erunt etiam G pl. H pl. I maj. vel min. quàm K pl. L pl. M vel ipsis æquales; ergo, 6. *def.* 5. erit A ad B ut A pl. C pl. E ad B pl. D pl. F. Q. E. D.

PRO-

PROPOSITIO XIII.

SI prima (A) ad secundam (B) habuerit eandem rationem, quàm tertia (C) ad quartam (D); tertia verò ad quartam majorem rationem habeat quàm quinta (E) ad sextam (F); etiam prima ad secundam majorem rationem habebit, quàm quinta ad sextam.

Sumantur æquimultiplicia tam antecedentium, quàm consequentium: quoniam est; *hyp.* A ad B ut C ad D; si H maj. erit quàm L; erit, 6. *def.* 5. G maj. quàm K: sed quia *hyp.* est in maj. ratione C ad D quàm E ad F; fieri potest, 8. *def.* 5. ut H sit maj. quam L, & I non maj. quàm M: ergo fieri potest ut G sit major quàm K & I non maj. quàm M; ergo, 8. *def.* 5. erit in majori ratione A ad B, quam E ad F. Q. E. D.

Hinc verò patet, quòd si A ad B sit in maj.rat. quàm C ad D, & hæc in maj.rat. quàm E ad F, erit A ad B in maj.rat.quàm E ad F; Et sic de minori ratione dictum puta.

PROPOSITIO XIV.

SI prima ad secundam eandem rationem habuerit quàm tertia ad quartam, prima verò fuerit major, vel minor quàm tertia, vel eidem æqualis; erit etiam secunda major, vel minor quàm quarta, vel eidem æqualis.

Sit

Sit A major quàm C; erit, 8.5. in maj. rat. A ad B, quàm C ad B; atque si C ad B est in minori rat. quàm A ad B, & hæc in eadem rat. quàm C ad D, erit, 13.5. C ad B in minori rat. quàm C ad D; ergo, 10.5. B erit major quàm D. Tum si A minor sit quàm C; erit eodem modo B minor quàm D: Si A, & C æquentur; erit, 7.5. C ad B ut A ad B, & hæc ut C ad D: ergo, 9.5. B & D æquantur. Q. E. D.

Hinc à fortiori si A ad B sit in minori ratione quàm C ad D, atque A major sit quàm C; erit B major quàm D: atque ità de æquali, vel minori ratione cæterorum dictum puta.

PROPOSITIO XV.

Sub multiplices inter se cum æquè multiplicibus inter se etiam comparatis, sunt in eadem ratione.

Sint AG, GB partes ipsius multiplicis AB ipsi C æquale: atque HD, HE partes multiplicis DE sint æquales ipsi F: Harum partium numerus illarum partium numero æqualis ponitur. Quoniam ergo est AG ad DH, 7.5. ut C ad F, & hæc, 7.5. ut GB ad EH; erit, 11. & 12.5. AG pl. GB ad DH pl. HE, ut C ad F. Q. E. D.

PRO-

PROPOSITIO XVI.

SI quatuor magnitudines proportionales fuerint; etiam viciſſim, ſivè alternando proportionales erunt.

Sit A ad B ut C ad D: & ſumantur E & F æquimultiplices ipſarum A & B, tum ſume G & H æquimultiplices ipſarum C & D: Itaque erit E ad F; 15. 5. ut A ad B, quæ ſunt, *hyp.* ut C ad D, quæ ſunt, 15. 5. ut G ad H: ergo ſi E maj. vel min. ſit quàm G, vel ipſi æqualis: erit etiam, 14. 5. F maj. vel min. quàm H, vel ipſi æqualis; adeòque, 6. *def.* 5. erit A ad C ut B ad D. Q. E. D.

PROPOSITIO XVII.

SI compoſitæ magnitudines proportionales fuerint, hæ quoque diviſæ proportionales erunt.

Dico ſi ſit AB ad BC ut DE ad FE; fore AC ad CB ut DF ad FE.

Nam ſume GH & HL, IK & KM æquimultiplices ipſarum AC & CB, DF & FE: item ſume LN & MO æquimultiplices earundem conſequentium CB & FE. Cæterum tota GL totius AB tam multiplex eſt, 1. 5. quàm una GH unius AC, ideſt, *conſtr.* quàm una IK unius DF, ideſt, 1. 5. quàm tota IM totius DE: item HN (HL pl. LN) ipſius CB æquè multiplex eſt, 2. 5. ac KO (KM pl. MO) ipſius FE. Quoniam

igitur

igitur est, *hyp.* AB ad CB ut DE ad EF; si GL sit major, vel minor quàm HN, vel ipsi æqualis; erit, 6. *def.* 5. IM maj. vel min. quàm KO vel eidem æqualis: itaque ablatis utrinq; communibus HL; KM; si reliqua GH sit maj. vel min. quàm LN, vel ipsi æqualis erit etiam IK maj. vel min. quàm MO vel ipsi æqualis: adeòque erit, 6. *def.* 5. AC ad CB ut DF ad FE. Q. E. D.

PROPOSITIO XVIII.

SI divisæ magnitudines sint proportionales; hæ quoque compositæ proportionales erunt.

Dico si sit AB ad BC, ut DE ad EF; fore AB pl. BC ad BC, ut DE pl. EF ad EF.

Sit (si f. p. AB pl. BC ad BC, ut DG pl. GF ad GF, & minor sit ipsa GF quàm EF; ergo, 17. 5. erit AB ad BC ut DG ad GF; sed etiam est, *hyp.* AB ad BC ut DE ad EF; ergo, 11. 5. erit DG ad GF ut DE ad EF: atqui est DG major quàm DE; ergo, 14. 5. erit GF major, quàm EF pars quàm totum. Q. E. A.

PROPOSITIO XIX.

SI sit totum ad totum, quemadmodum ablatum ad ablatum; erit etiam reliquum ad reliquum, sicut totum ad totum. Deinde si ità se habeat aliquod totum ad aliquam sui partem, ac aliud totum ad aliquam sui partem; erit, Convertendo, primum antecedens ad semetipsum dempto conse-

quen-

quente ac secundum antecedens ad semetipsum, dempto consequente.

Dico 1.: Si sit AB ad DE, ut AC ad DF; fore CB ad FE ut AB ad DE. Quoniam enim, *hyp.* est AB ad DE, ut AC ad DF; erit, *altern.* AB ad AC ut DE ad DF; ergo erit, *divid.* CB ad AC ut FE ad DF; ergo iterùm, *altern.* est CB ad FE ut AC ad DF, quæ sunt, *hyp.* ut AB ad DE; ergo est, 11.5. CB ad FE ut AB ad DE. Q.E.D.

Dico 2.: Si sit AB ad CB ut DE ad FE; fore AB ad AC ut DE ad DF. Quoniam enim, *hyp.* est AB ad CB ut DE ad FE; erit, *altern.* AB ad DE ut CB ad FE; ergo erit (1. *parte huj.*) AB ad DE ut AC ad DF; atque iterum, *altern.* AB ad AC, ut DE ad DF. Q.E.D.

PROPOSITIO XX.

SI sint tres magnitudines (A, B, C,) & ipsis aliæ æquales numero (D, E, F) quæ binæ & in eadem ratione ordinata sumantur: Si primarum trium, prima erit maj. vel min. quàm tertia, vel eidem æqualis; erit pariter trium secundarum primo maj. vel min. quàm tertia, vel eidem æqualis.

Sit A maj. quàm C: itaque erit, *hyp.* & *invert.* F ad E ut C ad B, quæ sunt, *hyp* & 8. 5. in min. rat. quàm A ad B quæ sunt, *hyp* ut D ad E; ergo, 13.5. erit in min. rat. F ad E quàm D ad E adeòque, 10.5. D est maj. quàm F.

Sint deindè A & C æquales: ergo erit, *hyp.* & *invert.* F ad E ut C ad B, quæ sunt, *hyp.* & 7.5. ut

F A ad B

A ad B, quæ sunt, *hyp.* ut D ad E; ergo est, 11. 5. F ad E ut D ad E; adeòque, 9. 5. D & F æquantur. Q. E. D.

PROPOSITIO XXI.

SI sint tres magnitudines, (A, B, C,) & ipsis aliæ, (D, E, F) æquales numero, quæ binæ sumantur, & in eadem ratione perturbata, sit autem primarum prima maj. vel min. quàm tertia, vel eidem æqualis; erit etiam secundarum prima maj. vel min. quàm tertia vel eidem æqualis.

Sit A maj. quàm C. Quoniam est E ad D, *hyp. & invert.* ut C ad B: quæ sunt, *hyp.* & 8. 5. in min. rat. quàm A ad B, quæ sunt, *hyp.* ut E ad F; ergo est, 13. 5. in min. rat. E ad D quam E ad F; adeoque, 10. 5. D maj. est quàm F. Sint A & C sibi mutuò æquales; ergo erit, *hyp. & invert.* E ad D, ut C ad B, quæ sunt, *hyp.* & 7. 5. ut A ad B, quæ sunt, *Hyp.* ut E ad F; ergo est, 11. 5. E ad D ut E ad F; adeòque, 9. 5. D & F æquantur. Q. E. D.

PROPOSITIO XXII.

SI sint quotcunque magnitudines (A, B, C) & aliæ ipsis æquales numero (D, E, F) quæ binæ, & in eadem ratione ordinata sumantur; erit prima ad ultimam in primis, sicut prima ad ultimam in secundis.

Sume G & H ipsarum A & D: Tum sume

I &

I & K ipsarum B & E : atque tum sume L & M ipsarum C & F æquimultiplices. Quoniam ergo est, *hyp.* A ad B ut D ad E; erit, 6. 5. G ad I ut H ad K: & quoniam, *hyp.* est B ad C ut E ad F; erit, 6. 5. I ad L ut K ad M; ergo G, I, & L atque H, K & M erunt quoque in proportione ordinata; adeòque, 20. 5. si G maj. erit vel min. quàm L vel eidem æqualis; erit pariter H maj. vel min. quàm M vel eidem æqualis; ergo erit, 6. *def.* 5. A ad C ut D ad F. Q. E. D.

PROPOSITIO XXIII.

Si sint quotcunque magnitudines (A, B, C) & aliæ ipsis æquales numero (D, E, F) quæ binæ & in eadem ratione perturbata sumantur; erit prima ad ultimam in primis sicut prima ad ultimam in secundis.

Sume G, H, I ipsarum A, B, D, atque tum sume K, L, M ipsarum C, E, F æquimultiplices; erit G ad H, 15. 5. ut A ad B, quæ sunt, *hyp.* ut E ad F quæ sunt, 15. 5. ut L ad M: Tum quoniam est, *hyp.* B ad C ut D ad E; erit, 6. 5. H ad K ut I ad L; ergo G, H, K atque I, L, M sunt etiam in ratione perturbata, adeòque, 21. 5. si G maj. vel min. sit quàm K vel ipsi æqualis; erit etiam I maj. vel min. quàm M vel ipsi æqualis; ac proindè erit, 6. *def.* 5. A ad C sicut D ad F. Q. E. D.

PROPOSITIO XXIV.

SI prima (AB) ad secundam (C) eandem habuerit rationem, quàm tertia (DE) ad quartam (F) : & quinta (BG) ad secundam habuerit eandem rationem, quàm sexta (EH) ad quartam ; erit composita ex prima & quinta ad secundam, ut composita ex tertia & sexta ad quartam.

Quoniam est, *hyp.* AB ad C, ut DE ad F, atque est, *hyp. & invert.* C ad BG ut F ad EH ; erit, *ordin.* AB ad BG ut DE ad EH ; ergo erit, *compon.* AG ad BG ut DH ad EH : atqui est, *hyp.* BG ad C, ut EH ad F; ergo iterum, *ordin.* erit AG ad C, ut DH ad F. Q. E. D.

PROPOSITIO XXV.

SI quatuor magnitudines inæquales proportionales fuerint (AB, CD, E, F); maxima (AB) & minima (F), simul sumptæ, reliquis (CD, & E) simul sumptis majores erunt.

Fiat AG æqualis ipsi E, & fiat CH æqualis ipsi F. Quoniam ergo est, *hyp.* AB ad CD ut E ad F, quæ sunt, *constr.* & 7. 5. ut AG ad CH, erit, 19. 5. AB ad CD, ut GB ad HD : sed AB, *hyp.* major est, quàm CD ; ergo, 14. 5. GB major est, quàm HD : atqui,

constr.

constr. F pl. AG ęquantur ipsis E pl. CH; ergo si primis addideris majorem GB, & secundis minorem HD; erunt, 4. *ax.* 1. F pl. AG pl. GB majores quàm E pl. CH pl. HD.

Q. E. D.

PROPOSITIO XXVI.

SI prima (A) ad secundam (B) majorem habuerit rationem quàm tertia (C) ad quartam (D); erit invertendo secunda ad primam in minori ratione quàm quarta ad tertiam.

Concipe, se habere E ad B ut C ad D: Itaque erit A ad B, *hyp.* in maj. rat. quàm C ad D, quæ sunt, *posit.* ut E ad B; ergo, 13. 5. erit in maj. rat. A ad B, quàm E ad B; adeòque. 10. 5. A major est, quàm E; ergo, 8. 5. in min. rat. est B ad A, quàm B ad E, quæ sunt, *hyp. & invert.* ut D ad C; ergo, 13. 5. est in min. rat. B ad A quàm D ad C. Q. E. D.

PROPOSITIO XXVII.

SI prima (A) ad secundam (B) erit in majori ratione, quàm tertia (C) ad quartam (D); erit etiam alternando prima ad tertiam in majori ratione, quàm secunda ad quartam.

Concipe, se habere E ad B ut C ad D: Itaque in maj. est rat. *hyp.* A ad B quàm C ad D, quæ sunt, *posit.* ut E ad B; ergo, 13. 5. A ad B est in maj. rat. quàm E ad B; adeoquę, 10. 5. A major est quàm E; ergo, 8. 5. est in maj. rat. A ad C quàm E ad C, quæ sunt, *hyp. & altern.* ut B ad D; ergo, 13. 5. est in maj. rat. A ad C quàm B ad D. Q. E. D.

PROPOSITIO XXVIII.

SI prima (A) ad secundam (B) habuerit majorem rationem quàm tertia (C) ad quartam (D); erit quoque composita ex prima & secunda ad secundam in majori ratione quàm composita ex tertia & quarta ad quartam.

Concipe se habere E ad B ut C ad D: igitur A ad B est, *hyp.* in maj. rat. quàm C ad D quę sunt, *posit.* ut E ad B; ergo, 13. 5. A ad B est in maj. rat. quàm E ad B; adeoque 10. 5. A major est, quàm E: ergo, 4. *ax.* A pl. B maj. est quàm E pl. B; adeòque in maj. est rat. A pl. B ad B, 8. 5. quàm E pl. B ad B, quæ sunt, *hyp. & comp.* ut C pl. D ad D. ergo, 13. 5. sunt in maj. rat. A pl. B ad B, quàm C pl. D ad D. Q. E. D.

PROPOSITIO XXIX.

SI (A pl. B.) composita ex prima & secunda ad secundam (B) majorem habuerit rationem, quàm (C pl. D.) composita ex tertia & quarta ad quartam (D); habebit quoque dividendo prima ad secundam majorem rationem, quàm tertia ad quartam.

Concipe, se habere E pl. B ad B ut C pl. D ad ad D; erit ergo in maj. rat. A pl. B ad B, *hyp.* quàm C pl. D ad D, quæ sunt *posit.* ut E pl. B ad B. ergo, 13. 5. est in maj. rat. A pl. B ad B, quàm E pl. B ad B; adeòque, 10. 5. A pl. B maj. est, quàm E pl. B. ergo, 5. *ax.* A major est quàm E; adeoque, 8. 5. erit in maj. rat. A ad B, quàm E ad B, quæ sunt, *hyp. & divid.* ut C ad D. ergo, 13. 5. est in maj. rat. A ad B, quàm C ad D.

Q. E. D.

PROPOSITIO XXX.

SI (A pl. B ad B) composita ex prima & secunda ad secundam majorem habuerit rationem, quàm (C pl. D ad D) composita ex tertia & quarta ad quartam; erit convertendo composita ex prima, & secunda ad primam in min. rat. quàm composita ex tertia, & quarta ad quartam.

Quoniam est, *hyp.* in maj. rat. A pl. B ad B quàm C pl. D ad D; erit *divid.* in maj. rat. A ad B, quàm C ad D: ergo erit *invert.* in min. rat. B ad A, quàm D ad C: ergo erit *comp.* in min. rat. B pl. A ad A, quàm D pl. C ad C.

Q. E. D.

PROPOSITIO XXXI.

SI fuerit major proportio totius (A pl. B) ad totum (C pl. D) quàm ablati (A) ad ablatum (C); erit subtrahendo reliquum ad reliquum in minori ratione quàm totum ad totum.

Quoniam, *hyp.* eſt in maj. rat. A pl. B ad C pl. D, quàm A ad C; erit *altern.* A pl. B ad A, quàm C pl. D ad C; ergo erit *convert.* in min. rat. A pl. B ad B quàm C pl. D ad D; adeoque iterum, *altern.* erit in min. rat. A pl. B ad C pl. D quàm B ad D. Q. E. D.

PROPOSITIO XXXII.

SI ſint tres magnitudines (A, B, C) & aliæ ipſis æquales numero (D, E, F) ſitque major proportio primæ priorum ad ſecundam, quàm primæ poſteriorum ad ſecundam: Atque major etiam proportio ſecundæ priorum ad tertiam, quàm ſecundæ poſteriorum ad tertiam; erit etiam ordinando major proportio primæ priorum ad tertiam, quàm primæ poſteriorum ad tertiam.

Concipe ſe habere in eadem ratione ordinata ipſas H, G, ~~G~~ ac ſunt D, E, F; erit B ad C, *hyp.* in maj. rat. quàm E ad F, quæ ſunt *poſit.* ut G ad C: ergo, 13. 5. eſt in maj. rat. B ad, C, quàm G ad C: adeoque, 10. 5. B maj. eſt quàm G: ergo, 8. 5. A ad G eſt in majori ratione quàm A ad B, & hæc, *hyp.* in maj. rat. quàm D ad E; quæ ſunt *poſit.* ut H ad G; adeòque, 13. 5. eſt in maj.rat. A ad G quàm H ad G: ergo, 10. 5. A maj. eſt quàm H: Igitur, 8. 5. eſt in maj. rat. A ad C quàm H ad C quæ ſunt *poſitione & ord.* ut D ad F: ergo, 13. 5. eſt in majori rat. A ad C quàm D ad F.

Q. E. D.

PRO-

PROPOSITIO XXXIII.

SI sint tres magnitudines (A, B, C) & aliæ ipsis æquales numero (D, E, F), fueritque major proportio primæ priorum ad secundam, quàm secundæ posteriorum ad tertiam: Itemque major proportio secundæ priorum ad tertiam, quàm primæ posteriorum ad secundam; erit etiam ex æquò perturbatè major proportio primæ priorum ad tertiam, quàm primæ posteriorum ad tertiam.

Concipe se habere H, G, C in eadem ratione perturbata cum ipsis D, E, F; erit ergo, *hyp.* in majori ratione B ad C, quàm D ad E, quæ sunt *posit.* ut G ad C: ergo, 13. 5. est in majori ratione B ad C, quàm G ad C, adeòque, 10. 5. B maj. est, quàm G: ergo: 8. 5. est in majori ratione A ad G, quàm A ad B: quę sunt, *hyp.* in maj. rat. quàm E ad F quæ sunt *posit.* ut H ad G: ergo, 13. 5. est in maj. rat. A ad G quàm H ad G: adeoque, 10. 5. A maj. est quàm H: ergo, 8. 5. A ad C est in maj. ratione quàm H ad C: quæ sunt *posit.* & *perturb.* ut D ad F: ergo, 13. 5. est in maj. rat. A ad C, quàm D ad F. Q. E. D.

PROPOSITIO XXXIV.

SI sint quotcunque magnitudines (A, B, C) & aliæ ipsis æquales numero (D, E, F): sitque major ratio primæ priorum, ad primam posteriorum, quàm secundæ ad secundam: & hæc

major

major quàm tertiæ ad tertiam : & sic deinceps; habebunt omnes simul priores ad omnes simul posteriores majorem rationem quàm omnes priores, dempta prima, ad omnes posteriores, dempta prima. Contra verò; prima priorum ad primam posteriorum erit in maj. rat. quàm omnes priores ad omnes posteriores. Necnon, contra, omnes priores ad omnes posteriores erunt in maj. rat. quàm ultima priorum ad ultimam posteriorum.

1. Quoniam est, *hyp.* in maj. rat. B ad E quàm C ad F; ergo est *altern.* in maj. rat. B ad C, quàm E ad F: ergo est, *comp.* in majori rat. B pl. C ad C, quàm E pl. F ad F: ergo est *altern.* in maj. rat. B pl. C ad E pl. F quàm C ad F: ergo, *subtr.* est in majori rat. B ad E quàm B pl. C ad E pl. F; sed est, *hyp.* in maj. rat A ad D, quàm B ad E, ergo, 13. 5. est in maj. rat. A ad D quàm B pl. C ad E pl. F; ergo *altern.* est in maj. rat. A ad B pl. C quàm D ad E pl. F; ergò *compon.* est in maj. rat. A pl. B pl. C ad B pl. C quàm D pl. E pl. F ad E pl. F; ergo *altern.* est in maj. rat. A pl. B pl. C ad D pl. E pl. F, quàm B pl. C ad E pl. F. Q. E. D.

2. Ergo erit, *subtr.* in maj. rat. A ad D quàm A pl. B pl. C ad D pl. E pl. F. Q. E D.

3. Quoniam ergo est, *ut prius* in maj. rat. A pl. B pl. C ad D pl. E pl. F quàm B pl. C ad E pl. F, & hæc, *ut prius* in maj. rat. quàm C ad F; erit, 13. 5. in maj. rat. A pl. B. pl. C ad D pl. E pl. F, quàm C ad F Q. E. D.

LAUS DEO.

A	9	B.	6	C	3
D	6	E	4	F	2

XX.

A	9	B	6	C	3
D	24	E	12	F	8

XXI.

G	18	I	36	L	6
A	9	B	6	C	3
D	6	E	4	F	2
H	12	K	25	M	4

XXII.

G	18	H	12	K	9
A	9	B	6	C	3
D	12	E	6	F	4
I	24	L	18	M	12

XXIII.

Figura Prop. 26. usq. ad 31. est hec

A	B
C	D

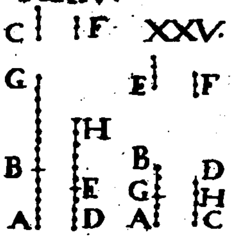
A. B. C.
D. E. F.

H. G. C.
D. E. F.

Prop. 32. 33. et. 34.

XXIV.

XXV.



Senis 2. Ian. 1691.

Laus Deo

F. Ant. Lor. M.C. Inc.

major quàm tertiæ ad tertiam: & sic deinceps; habebunt omnes simul priores ad omnes simul posteriores majorem rationem quàm omnes priores, dempta prima, ad omnes posteriores, dempta prima. Contra verò; prima priorum ad primam posteriorum erit in maj. rat. quàm omnes priores ad omnes posteriores. Necnon, contra, omnes priores ad omnes posteriores erunt in maj. rat. quàm ultima priorum ad ultimam posteriorum.

1. Quoniam est, *hyp.* in maj. rat. B ad E quàm C ad F; ergo est *altern.* in maj. rat. B ad C, quàm E ad F: ergo est, *comp.* in majori rat. B pl. C ad C, quàm E pl. F ad F: ergo est *altern.* in maj. rat. B pl. C ad E pl. F quàm C ad F: ergo, *subtr.* est in majori rat. B ad E quàm B pl. C ad E pl. F; sed est, *hyp.* in maj. rat A ad D, quàm B ad E, ergo, 13. 5. est in maj. rat. A ad D quàm B pl. C ad E pl. F; ergo *altern.* est in maj. rat. A ad B pl. C quàm D ad E pl. F; ergò *compon.* est in maj. rat. A pl. B pl. C ad B pl. C quàm D pl. E pl. F ad E pl. F; ergo *altern.* est in maj. rat. A pl. B pl. C ad D pl. E pl. F, quàm B pl. C ad E pl. F. Q. E. D.

2. Ergo erit, *subtr.* in maj. rat. A ad D quàm A pl. B pl. C ad D pl. E pl. F. Q. E. D.

3. Quoniam ergo est, *ut prius* in maj. rat. A pl. B pl. C ad D pl. E pl. F quàm B pl. C ad E pl. F, & hæc, *ut prius* in maj. rat. quàm C ad F; erit, 13. 5. in maj. rat. A pl. B. pl. C ad D pl. E pl. F, quàm C ad F Q. E. D.

LAUS DEO.

LIBER VI.

DEFINITIONES.

1 Similes figuræ rectilineæ ſunt, quæ & angulos ſingulos ſingulis æquales habent, atque etiam latera, quæ circum angulos æquales, proportionalia.

2. Reciprocæ autem figuræ ſunt, cùm in utraque figura antecedentes, & conſequentes rationum termini fuerint.

3. Secundum extremam, & mediam rationem recta linea ſecta eſſe dicitur, cùm ut tota ad majus ſegmentum, ita majus ad minus ſe habuerit.

4. Altitudo cujuſque figuræ, eſt linea perpendicularis à vertice ad baſim deducta.

5. Ratio ex rationibus componi dicitur, cùm rationum quantitates inter ſe multiplicatæ aliquam effecerint rationem.

PRO-

PROPOSITIO I.

T*Riangula (BAC , CAD) & Parallelogrammata (CE , CF) ejusdem altitudinis se habent sicuti bases (BC CD)*

Sumantur BG , GH æquales ipsi BC ; erit, 38. 1. triangulum HAC æquè triplum 3gli BAC, ac est ipsa HC ipsius BC : tum fiat DI æqualis ipsi CD ; erit etiam, 38. 1. 3glum CAI æquè duplum 3gli CAD , ac est ipsa CI ipsius CD . Quoniam ergo , 38. 1. si HC major sit , vel minor , quam CI , vel ipsi æqualis , erit etiam 3glum HAC majus , vel minus 3glo CAI , vel ipsi æquale ; idcircò , 6. *def.* 5. erit BC ad CD , ut BAC ad CAD, quæ sunt , 34. 1. & 15. 5. ut pgrum EC ad pgrum FC . Q. E. D.

COROLL. Hinc 3gla , & pgra , quorum æquales sunt bases, se habent, ut altitudines .

PROPOSITIO II.

S*I ad unum trianguli latus ducta fuerit parallela ; hæc secabit proportionaliter reliqua trianguli latera . & è converso .*

Dico , si DE sit parallela ad BC ; fore AD ad DB , ut AE ad EC ; &, si sit AD ad DB ,ut AE ad EC ; fore ipsam DE parallelam ad BC .

1. *Hyp.* Quoniam *hyp.* & 37. 1. æquantur 3gla DEB , & EDC ; idcircò

(AD

AD ad DB (1. 6.)
Æqu. hæ AED ad DEB (7. 5.)
Rationes. AED ad EDC (1. 6.)
AE ad EC.

Q. E. D.

2. *Hyp.* Quoniam

AED ad DEB (1. 6.)
Æqu. hæ AD ad DB (*hyp.*)
Rationes. AE ad EC (1. 6.)
AED ad EDC.

erit, 11. & 9. 5. ʒglum DEB æquale ipſi EDC, ſed & utrunque ipſorum eſt ſuper eadem baſi DE; ergo, 39. 1. DE parallela eſt ad BC. Q. E. D.

COROLL. Quinimò, ſi plures ad unum ʒgli latus parallelæ ductæ fuerint, erunt omnia laterum ſegmenta ſibi mutuo proportionalia.

PROPOSITIO III.

SI trianguli (BAC) angulus (in A) diviſus ſit biſariam; ſe habebunt ſegmenta lateris ſecti ſicut reliqua trianguli latera, & è converſo.

Dico, ſi æquentur anguli BAD, & DAC; fore BD ad DC, ut BA ad AC, & è converſò. In BA protracta fiat AE æqualis ipſi AC, & ducatur EC:

1. *Hyp.* Quoniam AE, & AC æquantur; idcircò

Æqu. hi anguli $\begin{cases} \text{ACE (5. 1.)} \\ \text{AEC (32. 1.)} \\ \text{dimidium BAC } (\textit{hyp.}) \\ \text{DAC;} \end{cases}$

Adeòque, 27. 1. DA est parallela ad CE; ac proindè, 2. 6. erit BD ad DC ut BA ad AE, quæ sunt, *constr.* & 7. 5. ut BA ad AC. Q. E. D.

2. *Hyp.* Quoniam est, *hyp.* BD ad DC, ut BA ad AC, quæ sunt, *constr.* & 7. 5. ut BA ad AE; erit, 2. 6. AD parallela ad EC, ac proindè

Æqu. hi anguli $\begin{cases} \text{BAD, (29. 1.)} \\ \text{AEC (5. 1.)} \\ \text{ACE (29. 1.)} \\ \text{DAC.} \end{cases}$

Q. E. D.

PROPOSITIO IV.

TRiangula æquiangula (*ABC, DCE*) *habent latera proportionalia circum æquales angulos, & homologa sunt latera, quæ equalibus angulis subtenduntur.*

Statue latus BC in directum lateri CE, & produc BA, & ED donec sibi mutuò occurrant in F. Quoniam æquantur, *hyp.* anguli B, & DCE; erit, 28. 1. BF parallela ad CD; Item, quoniam, *hyp.* æquantur anguli BCA, & E; erit etiam, 28. 1. CA parallela ad EF, figura ergo FACD est prum; adeòque AF æquatur ipsi CD, & FD ipsi AC: Itaque est, 2. 6. BA ad AF (CD) ut BC ad CE, & *altern.* BA ad BC ut CD ad CE. Tum

erit,

erit, 2. 6. BC ad CE ut FD (AC) ad DE, & *altern.* BC ad AC ut CE ad DE; adeòque erit *ordin.* BA ad AC ut CD ad DE.

Q. E. D.

COROLL. Hinc si in triangulo FBE ducatur uni lateri FE parallela AC; erit triangulum ABC simile toti FBE.

PROPOSITIO V.

SI duo triangula (ABC, EGF) habeant latera proportionalia, erunt æquiangula.

Fiat angulus DEF æqualis ipsi C, & DFE æqualis ipsi A; æquabuntur etiam, 32. 1. B, & D; adeòque erit, 4. 6, DE ad EF ut BC ad AC, quæ sunt. *hyp.* ut EG ad EF; ergo 11, & 9. 5. æquantur DE, & EG; & eodem modo ostendetur æquari FD & FG; sed & EF est communis, ergo, 8. 1. triangula GEF, DEF, adeòque & ABC sunt sibi mutuò æquiangula. Q. E. D.

PROPOSITIO VI.

SI duo triangula (ABC, EGF) habeant unum angulum (C) æqualem uni angulo (GEF) latera verò æqualem hujusmodi angulum intercipientia sint proportionalia; erunt omninò æquiangula, angulosque æquales habebunt, sub quibus homologa latera subtenduntur.

Fiat angulus DEF æqualis ipsi C, & DFE æqualis ipsi A; erit 32. 1. tertius B tertio D æqualis;

lis; adeòque erit, 4. 6. DE ad EF ut BC ad AC, quæ sunt *hyp.* ut GE ad EF; ergo, 11. & 9. 5. æquantur GE & DE, sed & EF est communis, atque *constr.* anguli in E æquantur; ergo, 4. 1. æquiangula erunt inter se triangula GEF, DEF, adeòque & ABC. Q. E. D.

PROPOSITIO VII.

SI duo triangula habeant unum angulum æqualem: Item latera secundum angulum intercipientia proportionalia sint: & habeant denique tertium angulum ejusdem speciei; erunt omninò æquiangula.

Dico, si anguli A & D æquentur, & sit AB ad BC ut DE ad EF, atque anguli C & F sint ejusdem speciei; erunt æquiangula ipsa triangula.

Si negas, æquari angulos E, & ABC; fiat ABG æqualis ipsi E: atqui, *hyp.* æquantur A & D; ergo etiam, 32. 1. æquabuntur AGB & F; adeòque, 4. 6. erit AB ad BG ut DE ad EF, quæ sunt *hyp.* ut AB ad BC; ergo, 11. & 9. 5. æquabuntur BG & BC; ac proindè, 5. 1. angulus BGC angulo C; adeòquæ, 32. 1. uterque illorum est acutus; ergo, 13. 1. angulus AGB (F) est obtusus, adeòque anguli F & C non sunt ejusdem speciei; contra hyp.

PRO-

PROPOSITIO VIII.

SI in triangulo rectangulo ab angulo recto ducta sit perpendicularis ad latus oppositum; resultabunt duo triangula similia toti & inter se.

Quoniam enim angulus B est communis in triangulis rectangulis BAC & BAD; ipsa erunt, 32.1. sibi mutuò æquiangula: ità enim angulus C communis est in 3glis rectangulis BAC, & DAC; adeòque, 32.1. sunt & ipsa inter se æquiangula: Quia ergo in triangulis rectangulis BAD & DAC angulus B æquatur, *ut prius*, angulo DAC; erunt, 32.1. etiam ipsa sibi mutuò æquiangula.

Q. E. D.

PROPOSITIO IX.

A Data recta linea (AB) imperatam partem abscindere, utputa CB, tertiam.

Ex A duc utcunque infinitam AF, in qua sume utcunque tres partes sibi mutuò æquales AH, HG, GF, & junge FB, cui duc parallelam GC; dico factum. Nam est, 2.6. AG ad GF ut AC ad CB, & *compon.* AF ad GF ut AB ad CB: atqui GF est una tertia ipsius AF; ergo CB est una tertia ipsius AB.

Q. E. F.

PROPOSITIO X.

L*Ineam rectam datam (AB) secare sicut alia (AG) secta est.*

Extremitates sectæ & insectæ, jungat recta GB, & ex punctis S, & R, duc SC, RD parallelas ipsi GB; dico factum; nam si ducatur CK parallela ad AG; erit AC ad CD, 2. 6. ut AS ad SR, & CD ad DB, 2.6. ut CO ad OK, quæ sunt, 34. 1. & 7. 5. ut SR ad RG.

Q. E. F.

COROLL. Hinc patet methodus secandi rectam datam in quotvis æquales partes.

PROPOSITIO XI.

D*Atis duabus rectis lineis (AB, AC) tertiam proportionalem (CE) invenire.*

Connectantur duæ lineæ, ut efficiant angulum A utcunque, & ducatur BC, & ex AB protracta sume BD æqualem ipsi AC, & per D ad BC duc DE parallelam, cui occurrat AC protracta in E; erit CE linea quæsita. Nam est, 2. 6. AB ad BD (AC) ut AC ad CE. Q.E.F.

PROPOSITIO XII.

D*Atis tribus rectis lineis (AB, BC, AD) quartam proportionalem (DE) invenire.*

Ducatur BD, ad quam per C duc CE parallerallelam, cui occurrat AD protracta in E; erit DE linea quæsita. Nam est, 26. AB ad BC ut AD ad DE. Q. E. F.

PROPOSITIO XIII.

Datis duabus rectis lineis (AB, BC) mediam proportionalem (BE) invenire.

Super tota AC describe semicirculum, & ex B erige perpendicularem BE, & trahantur AE, CE; ergo, 31. 3. angulus AEC erit rectus: adeòque, 8. & 4. 6. erit AB ad BE ut BE ad BC; ergo BE est quæsita media proportionalis. Q. E. F.

COROLL. Hinc linea recta, quæ in circulo à quovis puncto diametri, ipsi diametro perpendicularis ducitur ad circumferentiam usque, media est proportionalis inter duo diametri segmenta.

PROPOSITIO XIV.

Æqualium, & unum angulum æqualem habentium pgrammorum (BE, BF) reciprocè proportionalia sunt latera æqualem angulum intercipientia: & è converso.

Latera enim AB, BC circa æquales angulos faciant unam rectam; ergo etiam, *schol.* 15. 1. DB, BG in directum jacebunt: producantur jam ED, FC donec occurrant in H.

1. *Hyp.* Quoniam

Æqu. hæ Rationes. { AB ad BC (1.6.)
EB ad BH (7.5.)
FB ad BH (7.5.)
GB ad BD;

erit AB ad BC ut GB ad BD. Q.E.D.

2. *Hyp.* Quoniam

Æqu. hæ Rationes. { EB ad BH (1.6.)
AB ad BC (*hyp.*)
GB ad BD (1.6.)
FB ad BH;

Ergo, 11. & 9. 5. æquantur EB & FB. Q. E. D.

PROPOSITIO XV.

Æqualium, & unum angulum (in C) æqualem habentium triangulorũ (ACB, DCE) reciprocè proportionalia sunt latera æqualem angulum intercipientia; & è converso.

Disponantur BC, CD sibi indirectum; ergo, *schol.* 15.1. EC, CA erunt etiam sibi in directum: trahatur jam BE.

1. *Hyp.*

1. *Hyp.* Quoniam

$$\text{Æqu. hæ Rationes.}\left\{\begin{array}{lll} AC & \text{ad } CE & (1.6.) \\ ABC & \text{ad } CBE & (7.5.) \\ DEC & \text{ad } CBE & (1.6.) \\ DC & \text{ad } CB; & \end{array}\right.$$

erit, 11. 5. AC ad CE ut DC ad CB;

Q. E. D.

2. *Hyp.* Quoniam

$$\text{Æqu. hæ Rationes.}\left\{\begin{array}{lll} ABC & \text{ad } CBE & (1.6.) \\ AC & \text{ad } CE & (Hyp.) \\ DC & \text{ad } CB & (1.6.) \\ DEC & \text{ad } CEB; & \end{array}\right.$$

ergo, 11. & 9. 5. æquantur ABC & DEC.

Q. E. D.

PROPOSITIO XVI.

SI quatuor lineæ (AB, BC, DB, BE) sint proportionales; rectangulum extremarum æquatur rectangulo mediarum: & è converso.

Disponantur sibi in directum AB, & BC; ergo etiam, *schol.* 15. 1. ob angulos rectos æquales in B, erunt sibi in directum DB, & BE: perficiantur ergo rectangula FB, GB, & producantur FE, GC donec sibi occurrat in H.

1. *Hyp.* Quoniam

Æqu. hæ Rationes.	FB ad BH (1.6.) AB ad BC. (*hyp.*) DB ad BE (1. 6.) GB ad BH;

ergo, 11. & 9. 5. æquantur FB & GB. Q.E.D.

2. *Hyp.* Quoniam

Æqu. hæ Rationes.	AB ad BC (1.6.) FB ad BH (7.5.) GB ad BH (1.6.) DB ad BE;

erit, 11.5. AB ad BC, ut DB ad BE. Q.E.D.

PROPOSITIO XVII.

Si tres lineæ (AB; BC, BE) sint deinceps proportionales; rectangulum extremarum æquabitur quadrato mediæ.

Disponantur rectangulum, & quadratum juxtà methodum præcedentis;

1. *Hyp.* Quoniam

Æqu. hæ Rationes.	FB ad BH (1.6.) AB ad BC (BD) (*hyp.*) BD ad BE (1.6.) GB ad BH;

erit, 11. & 9.5. rectangulum FB æquale quadrato GB, sive BCq. Q. E. D.

2. *Hyp.*

2. *Hyp.* Quoniam

Æqu. hæ Rationes. { AB ad BC (1. 6.)
FB ad BH (*hyp.*& 7. 5.)
GB ad BH (1. 6.)
DB ad BE;

erit, 11. 5. AB ad BC, ut DB (BC) ad BE.

Q. E. D.

PROPOSITIO XVIII.

A Data recta linea (AB) dato rectilineo (CDFE) simile, similiterque positum rectilineum (ABHG) describere.

Datum rectilineum resolve in triangula: tum fac angulum B æqualem angulo D & angulum BAH æqualem angulo DCF; erit, 32. 1. reliquus reliquo æqualis: Item fac angulum HAG æqualem angulo FCE, & angulum AHG angulo CFE æqualem; erit etiam, 32. 1. reliquus reliquo æqualis; adeòque, 2. *ax.* totus angulus GHB toti EFD, uti & totus GAB toti ECD æquabitur; adeòque polygona sunt sibi mutuò æquiangula. Cæterùm proportionalitas laterum patet;

Nam, 4. 6. erit GA ad AH, ut EC ad CF & AH ad AB, ut CF ad CD; ergo, *ordin.* erit GA ad AB, ut EC ad CD. Ita etiam, 4. 6. erit GH ad HA ut EF ad FC, & HA, ad HB ut FC ad FD; ergo etiam, *ordin.* erit GH ad HB ut EF ad FD; præter id quod est, 4. 6. AG ad

GH ut CE ad EF, atque AB ad BH ut CD ad DF; ergo omnia latera ſunt ſibi proportionalia.

Q. E. F.

PROPOSITIO XIX.

TRiangula ſimilia (BAF, CDE) ſeſe habent in duplicata ratione laterum homologorum (FB, EC.)

Datis jam FB, & EC reperiatur, 11. 6. tertia proportionalis BG, quæ abſcindatur ex majori BF, & ducatur AG. Igitur erit AB ad DE, *hyp.* & 4. 6. ut BF ad EC, quæ ſunt, *conſtr.* ut EC ad GB; ergo, 11. 5. AB ad DE eſt reciprocè, ut EC ad GB, ſed & æquantur, *hyp.* anguli B & E; ergo, 15. 6. æquabuntur triangula AGB, & DEC: Igitur

Æqu. hæ Rationes.
- BAF ad ECD (7. 5.)
- BAF ad BAG (1. 6.)
- FB ad GB (*conſtr.* & 5. *def.* 6.)
- FB ad EC pl. EC ad GB (10. *def.* 5.)
- FB ad EC bis

Q. E. D.

COROLL. Hinc ſi tres lineæ proportionales fuerint; erit prima ad tertiam, ut 3glum ſuper primam deſcriptum ad ſibi ſimile 3glum ſuper ſecundam deſcriptum, atque ità etiam eſt 3glum ſuper ſecundam deſcriptum ad ſibi ſimile 3glum ſuper tertiam deſcriptum.

PROPOSITIO XX.

Similia Polygona in similia triangula resolvuntur numero æqualia, & totis proportionalia: atque polygona ipsa duplicatam habent rationem laterum homologorum.

Quoniam, *hyp.* æquantur anguli B & G; atque est BA ad BC, ut GF ad GH; erit, 6.6. 3glum BAC simimile 3glo GFH, & eadem ratione 3glũ DAE simile erit 3glo IFK: Atque, *hyp.* totus angulus BAE æquatur toti GFK; ergo residuus CAD residuo HFI æquabitur, atque ita de reliquis dictum puta. Quoniam ergo 3gla unius polygoni sunt similia 3glis alterius; idcircò,

Æqu. hæ Rationes.
- BC ad GH bis (4.6.& 12.5
- BC pl. CD pl. DE ad GH pl. HI pl. IK bis (19.6.)
- BAC pl. CAD pl. DAE ad GFH pl. HFI pl. IFK. (7.5.)
- pgon. BE ad pgon. GK.

Q. E. D.

COROLL. 1. Hinc si fuerint tres lineæ rectæ deinceps proportionales, erit prima ad tertiam, ut polygonum super primam ad polygonum super secundam, & hoc ad polygonum super tertiam sibi simile, similiterque descriptum.

2 Hinc etiam si figurarum similium homologa latera nota fuerint; proportio quoque figurarum innotescet, nempè inveniendo tertiam proportionalem.

PRO-

PROPOSITIO XXI.

Quæ eidem rectilineo (FHG) sunt similia; sunt etiam inter se similia.

Quippè, *hyp.* angulus B ipsi F, & hic ipsi I æquatur; adeòque B & I æquantur sibi mutuò, atque ità de cæteris angulis dictum puta; undè, 4. vel 20.6. emerget laterum proportionalitas, & adæquata similitudo.

Q. E. D.

PROPOSITIO XXII.

Si quatuor rectæ lineæ (AB, CD, EF, GH) proportionales fuerint; etiam rectilinea similia, similiterque ab eis descripta proportionalia erunt.

1 *Hyp.* Quoniam

Æqu. hæ Rationes. { AIB ad CKD (19.6.)
AB ad CD bis (*hyp.*)
EF ad GH bis (20.6.)
EM ad GO;

erit 3glum AIB ad 3glum CKD ut pgrum EM ad GO. Q. E. D.

2 *Hyp.* Quoniam

Æqu. hæ Rationes. { AB ad CD bis (19.6.
AIB ad CKD (*hyp.*)
EM ad GO (20.6.)
EF ad HG bis;

erit, 11.5. AB ad CD, ut EF ad GH. Q.E.D.

PRO-

PROPOSITIO XXIII.

Æquiangula parallelogrammata inter se eam rationem habent, quæ ex lateribus componitur.

Dico fore AC ad CF, ut BC ad CG. pl. DC ad CE.

Nam dispositis parallelogrammis, ut in apposito schemate;

Æqu. hæ Rationes. { AC ad CF (5.def.6.)
AC ad CH pl. CH ad CF(1.6.)
BC ad CG pl. DC ad CE.

Q. E. D.

PROPOSITIO XXIV.

IN omni parallelogrammo (BD) quæ circa diametrum sunt parallelogrammata (EG, HF) sunt, & toti, & sibi mutuò similia.

Siquidem EG & HF habent singula unum angulum cum toto communem, atque, 29.1. alternos etiam, & 15.1. oppositos ad verticem sibi mutuò æquales: ergo erunt inter se æquiangula. Item 3gla EAO, BAC, & HOC, 29.1. sunt sibi mutuò æquiangula: ergo erit, 4.6. AE ad EO, ut AB ad BC, & hæc, ut OH ad HC.

Q. E. D.

Nota mirabilem esse hanc proprietatem sectionum factarum per diagonalem, & parallelas se decussantes in parallelogrãmo, nimirùm, ut quemadmoadmodum complementa X, & Z æquantur, 43. 1. quoad magnitudinem ſpatiorum, ità etiam, 24. 6. parallelogrammata M, & N circa diametrum æquentur, quoad laterum proportiones.

PROPOSITIO XXV.

DAto rectilineo (ACB) ſimile ſimiliterque poſitum, idemque alteri dato (Z) æquale rectilineum (MNO) conſtituere.

Applicetur, 45. 1. ipſi rectæ AB parallelogrammum AF eidem figuræ ACB æquale, & protracto latere AB in infinitum; applicetur, 45. 1. lateri BF parallelogrammum BG æquale datæ figuræ Z, & inter AB, & BD, 13. 6. inveniatur media proportionalis MN, ſuper quam, 18. 6. fiat figura MON ſimilis figuræ ACB; dico factum. Nam

Æqu. hæ Rationes.	AF	ad	MON	(*conſtr.* & 7. 5.)
	ABC	ad	MON	(*conſtr.* & *coroll.* 20. 6.)
	AB	ad	BD	(1. 6.)
	AF	ad	BG	(*conſtr.* & 7. 5.)
	AF	ad	Z;	

Ergo, 11. & 9. 5. æquant. MON, & Z. Q.E.F.

PROPOSITIO XXVI.

SI à parallelogrammo (ABCD) parallelogrammum (AEFG) ablatum ſit ſimile toti, & ſimiliter poſitum; hoc circa eandem cum toto diametrum conſiſtet.

Si

Si negas, AFC esse communem diametrum, esto communis diameter AHC secans lineam EF in H, & ducatur HI parallela ad AE; igitur erit AE ad EH, 24.6. ut AD ad DC, quæ sunt, *hyp.* ut AE ad EF; ergo, 11.& 9.5. æquabuntur EH, & EF, pars toti. Q. E. A.

PROPOSITIO XXVII.

Omnium parallelogrammorum (AD, AG) secundum eandem rectam lineam (AB) applicatorum, & deficientium figuris parallelogrammis (CE, KI) similibus similiterque positis ei (AD) quòd à dimidia describitur; Maximum quidem est (AD) quòd ad dimidiam est applicatum, simile existans defectui (KI.)

Nam, 43. 1. æquantur inter se GE, & CG; ergo etiam, 2. *ax.* KE ipsi CI, & hoc, 36.1. ipsi AM æquatur; adeòq; etiam, 2.*ax.* AG æquatur gnomoni LGM, quod minus est, quàm totum CE, cui, 36. 1. æquatur ipsum AD; ergo AG minus est quàm AD. Q. E. D.

PROPOSITIO XXVIII.

Ad datam rectam lineam (AB) dato rectilineo (C) æquale parallelogrammum (AP) applicare deficiens figura parallelogramma (ZR) quæ similis sit alteri parallelogrammo dato (D). Oportet autem datum rectilineum (C), cui æquale (AP) applicandum est, non majus esse eo (AF)

quod

quod ad dimidiam applicatur, similibus existentibus defectibus, & ejus, quod ad dimidiam applicatur, & ejus cui simile deesse debet.

Biseca AB in E, & super EB, 18. 6. fac pgrum EG simile ipsi dato D: sitque EG æquale dato C pl. I: Deindè, 25. 6. fac pgrum NT æquale ipsi I, & simile dato D, sivè EG: Tum duc diametrum FB; & fac FO æqualem ipsi KN, & FQ æqualem ipsi KT, atque ductis parallelis, ut in schemate; erit pgrum AP id, quod quæritur.

Siquidem EP, 43. 1. æquatur ipsi PG; ergo, 2. *ax.* æquabuntur ZG, & ER, cui, 36. 1. æquatur AO; ergo iterum, 2. *ax.* æquabuntur AP, & gnomon EBG: Deindè quoniam EG æquatur ipsi I pl. C, sivè, *constr.* ipsis NT pl. C, sivè *constr.* ipsis OQ, pl. C; idcircò dempto communi OQ; æquabitur datum C gnomoni EBG, cui, *ut prius*, æquatur ipsum AP; ergo æquantur sibi mutuò C, & AP. Q. E. F. Deindè, *constr.* & 24. *huj.* hæc sunt similia, nempè D, NT, EG, & ZR. Q. E. F.

PROPOSITIO XXIX.

AD datam rectam lineam (AB) dato rectilineo (C) æquale Pgrum (AN) applicare, excedens pgro (OP) simile alteri dato (D)

Biseca AB in E, &, 18. 6. super EB fac pgrum EG simile dato D, atq; 25. 6. fac pgrum KZ æquale figuris EG pl. C, & simile dato D,

sivè

sivè EG; Tum duc diametrum FB in infinitum, & fac FL æqualem ipsi IZ, & FM æqualem ipsi IK, & duc cæteras parallelas; erit pgrum AN id, quod quæritur.

Quoniam enim æquatur BM, 43. 1. ipsi LB, & hoc, 36. 1. ipsi RE; addito utrique eodem LP; erit AN æquale gnomoni LNM; Igitur

Æqu. hæc { C pl. EG (*constr.*) | KZ (*constr.*) | LM (19. *ax.*) | gn.LNM pl.EG (*ut prius, & 2.ax.*) | AN pl. EG.

Ergo dempto utrinque communi EG; æquabuntur C, & AN. Q. E. F. Cœterùm, *constr.& 2.hujus*, hæc sunt similia, nempè D, EG, & OP. Q. E. F.

PROPOSITIO XXX.

P*Ropositam rectam lineam (AB) extrema, & media ratione secare.*

Seca, 11. 2. AB in G; itaut ABG æquetur ipsi AGq.; erit, 17. 6. AB ad AG, ut AG ad GB. Q. E. F.

PROPOSITIO XXXI.

I*N triangulo rectangulo (ABC) figura super hypothenusam (AC) descripta æquatur sibi similibus, similiterque positis figuris contentis sub cæteris cruribus.*

Ab

Ab angulo recto ABC demittatur BD perpendicularis in AC; erit ergo, 8. & 4. 6. & *invert.* DC ad BC, ut BC ad AC, atque erit AD ad AB, ut AB ad AC; ergo, *coroll.* 20. 6. erit DC ad AC, ut BMC ad ANC, atque erit AD ad AC, ut AOB ad ANC; ergo, 25. 5. erit AD pl. DC ad AC, ut AOB pl. BMC ad ANC; atqui æquantur AD pl. DC ipsi AC; ergo, 14. 5. æquabuntur AOB pl. BMC ipsi ANC.

Q. E. D.

PROPOSITIO XXXII.

SI duo triangula (ABC, DCE), quæ habeant duo latera duobus lateribus proportionalia (AB ad AC, ut DC ad DE) possint ita in aliquo puncto (C) connecti, ut utraque latera homologa sint sibi mutuò parallela (nempe AB ad DC, & AC ad DE); tum reliqua ipsorum triangulorum latera) BC, & CE) sibi in directum collocata reperientur.

Siquidem ob AC parallelam ad DE, æquabitur, 29. 1. angulus D alterno angulo ACD, qui quidem ob DC parallelam ad AB, æquabitur, 29. 1. etiam angulo A; ergo anguli A, & D sibi mutuò æquabuntur, sed, &, *hyp.* est AB ad AC, ut DC ad DE; ergo etiam, 6. 6. angulus B angulo DCE æquabitur, adeòque totus ACE æquabitur ipsis A pl. B: atqui ACB pl. A, pl. B, 32. 1. æquantur duobus angulis rectis; ergo ACB pl. ACE æquabuntur etiam duobus angulis rectis; adeo-

adeoque, 14. 1. BCE erit una linea recta.

PROPOSITIO XXXIII.

IN æqualibus circulis anguli eandem habent rationem cum peripheriis (BC, FG), quibus insistunt, sive ad centra, sive ad peripherias constituti sint: insuper verò, & sectores se habent in eadem ratione arcuum, quibus insistunt.

Ducantur rectæ BC, FG, & accomodetur CI æqualis ipsi BC, atque fiant GL, & LP æquales ipsi FG, & jungantur radii. Quoniam ergo æquantur, *constr.* subtensæ BC, & CI; æquabuntur etiam, 28. 3. arcus BC, & CI, adeòque, 27. 3. & anguli BDC, & CDI; ergo arcus BI æquè multiplex est dati arcus BC, ac angulus BDI anguli BDC, eademque ratione tam multiplex est arcus FP dati arcus FG, quàm angulus FHP anguli FHG: verùm si arcus BI major sit, vel minor, quàm FP, vel eidem æqualis, erit similiter, 27. 3. angulus BDI maj. vel min. quàm FHP, vel eidem æqualis; ergo erit arcus BC ad FG, 6. *def.* 5. ut ang. BDC ad FHG, qui sunt, 20. 3. & 15. 5. ut ang. A ad E. Q. E. D.

Rursus angulus BMC æquatur 27. 3. angulo CNI; ergo, 10. *def. huj.* segmenta BCM, & CIN sunt similia, sed & consistunt super æquales rectas BC, & CI; ergo, 24. 3. sunt etiam æqualia: Item æquantur inter se, 4. 1. 3gla BDC, & CDI; ergo, 2. *ax.* æquabuntur sectores BDC, & CDI, similique ratione æquabuntur sibi mutuò sectores

H FHG

FHG, GHL, & LHP. Adeòque tam multiplex est sector BDI sectoris BDC, quàm arcus BI dati arcus BC, atque tam multiplex est sector FHP sectoris FHG, quàm arcus FP dati arcus FG: Et quoniam, prout arcus BI major, vel minor erit, quàm arcus FP, vel eidem æqualis, erit similiter sector BDI maj. vel min. quàm sector FHP, vel eidem æqualis; idcircò, 6. *def.* 5. erit sector BDC ad FHG, ut arcus BC ad FG. Q. E. D.

COROLL. 1. Hinc, ut sector ad sectorem, sic angulus ad angulum.

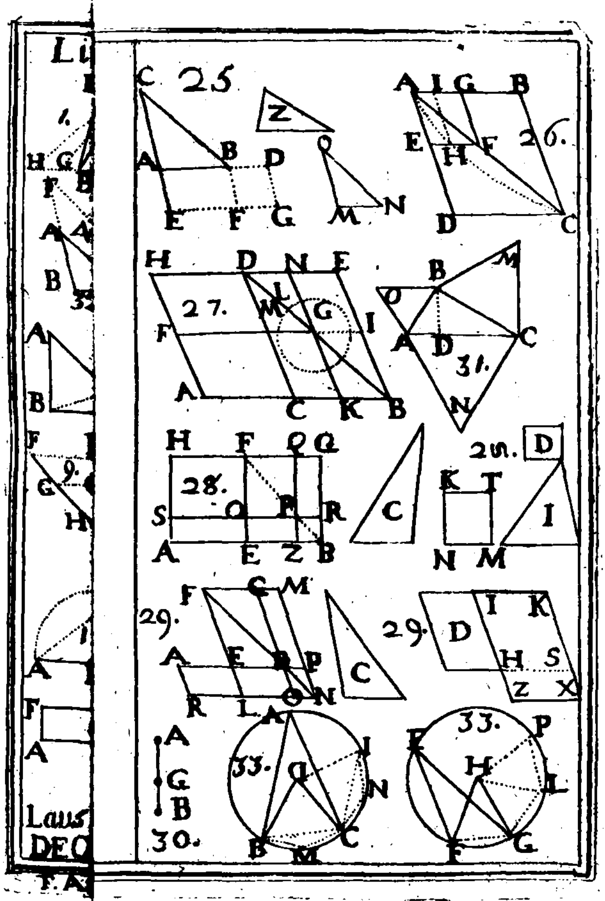
2. Angulus in centro est ad 4. rectos, ut arcus, cui insistit ad totam circumferentiam.

3. Hinc inæqualium circulorum arcus, qui æquales subtendunt angulos, sunt similes.

4. Duæ semidiametri à concentricis peripheriis auferunt similes arcus.

LAUS DEO.

LI-


25
26.
27.
28.
29.
30.
31.
33.
Laus
DEO

LIBER VII.

DEFINITIONES.

1. VNITAS est, secundũ quàm unumquodque eorum, quæ sunt, unum dicitur.

2. Numerus autem, ex unitatibus composita multitudo.

3. Pars est numerus numeri, minor majoris, cùm minor metitur majorem.

4. Partes autem, cùm non metitur.

5. Multiplex vero major minoris, cùm majorem metitur minor.

6. Par numerus est, qui bifariam dividitur.

7. Impar vero, qui bifariam non dividitur. Vel, qui unitate differt à pari.

8. Pariter par numerus est, quem par numerus metitur per numerum parem.

9. Pariter autem impar est, quem par nume-

rus metitur per numerum imparem.

10. Impariter vero impar numerus est, quem impar numerus metitur per numerum imparem.

11. Primus numerus est, quem unitas sola metitur.

12. Primi inter se numeri sunt, quos sola unitas, communis mensura, metitur.

13. Compositus numerus est, quem numerus quispiam metitur.

14. Compositi autem inter se numeri sunt, quos numerus aliquis, communis mensura, metitur.

15. Numerus numerum multiplicare dicitur, cùm toties compositus fuerit is, qui multiplicatur, quot sunt in ipso multiplicante unitates, & procreatus fuerit aliquis.

16. Cùm autem duo numeri mutuo sese multiplicantes aliquem fecerint, qui factus erit, planus appellabitur. Qui verò numeri mutuo sese multiplicarint, latera illius dicentur.

17. Cùm verò tres numeri mutuo sese multiplicantes aliquem fecerint, qui procreatus erit, solidus appellabitur: Qui autem mutuo sese multiplicarint, latera illius dicentur.

18. Quadratus numerus est, qui æqualiter æqualis. Vel, qui sub duobus æqualibus numeris continetur.

19. Cubus verò, qui æqualiter æqualis æqualiter. Vel, qui sub tribus æqualibus numeris continetur.

20. Numeri proportionales sunt, cùm primus

secun-

secundi, & tertius quarti, æque multiplex est; vel eadem pars, vel eædem partes: Vel certè, cùm primus secundum, & tertius quartum, æqualiter continet, eandemque insuper illius partem, vel easdem partes.

21. Similes plani, & solidi sunt, qui proportionalia habent latera.

22. Perfectus numerus est, qui suis ipsius partibus est æqualis.

23. Numerus numerum metiri dicitur per illum numerum, quem multiplicans, vel à quo multiplicatus, illum producit.

24. Proportio numerorum est habitudo quædam unius numeri ad alterum, secundùm, quòd illius est multiplex, vel pars, partesvè, vel certè illum continet semel, aut aliquoties, & aliquam insuper illius partem, vel partes.

25. Termini, sivè radices proportionis dicuntur duo numeri, quibus in eadem proportione minores sumi nequeunt.

26. Cùm tres numeri proportionales fuerint; Primus ad tertium duplicatam rationem habere dicitur ejus, quam habet ad secundum. At cùm quatuor numeri proportionales fuerint; Primus ad quartum, triplicatam rationem habere dicitur ejus, quàm habet ad secundum: Et semper deinceps unô amplius, quamdiu proportio extiterit.

27. Quotlibet numeris ordine positis, proportio primi ad ultimum componi dicitur ex proportionibus primi ad secundum, & secundi ad tertium, & tertii ad quartum, & ità deinceps, donec extiterit proportio.

POSTULATA, SIVE PETITIONES.

1 Postuletur, cuilibet numero quotlibet posse sumi æquales, vel multiplices.

2 Quolibet numero sumi posse majorem.

AXIOMATA, SIVE PRONUNTIATA.

1. Qui numeri æqualium numerorum, vel ejusdem æquè multiplices sunt, inter se sunt æquales.

2. Quorum idem numerus æquè multiplex est, vel æquè multiplices sunt æquales, inter se æquales sunt.

3. Qui numeri æqualium numerorum, vel ejusdem, eadem pars, vel eædem partes fuerint, æquales inter se sunt.

4. Quorum idem numerus, vel æquales, eadem pars, vel eædem partes fuerint, æquales inter se sunt.

5. Unitas omnem numerum per unitates, quæ in ipso sunt, hoc est, per ipsummet numerum metitur.

6. Omnis numerus se ipsum metitur per unitatem.

7. Si numerus numerum multiplicans, aliquem produxerit, metietur multiplicans productum per multiplicatum, multiplicatus autem eundem per multiplicantem.

8. Si numerus numerum metiatur, & ille, per

quem

quem metitur, eundem metietur per eas, quæ in metiente sunt, unitates, hoc est, per ipsum numerum metientem.

9 Si numerus numerum metiens, multiplicet eum, per quem metitur, vel ab eo multiplicetur; illum, quem metitur, producet.

10 Numerus quotcunque numeros metiens, compositum quoque ex ipsis metitur.

11 Numerus quemcunque numerum metiens, metitur quoque omnem numerum, quem ille metitur.

12 Numerus metiens totum, & ablatum, metitur & reliquum.

PROPOSITIO I.

SI duobus numeris inæqualibus (AB, CD) propositis, detrahatur semper minor (CD) de majore (AB), & reliquus (EB) de minore (CD) alterna quadam subtractione, neque reliquus unquam præcedentem metiatur, donec assumpta fuerit unitas (GB); Qui à principio propositi sunt numeri (AB, CD) erunt inter se primi.

Figuram vide in Tabulâ.

Nam si negas, numeros AB, CD esse primos inter se, habeant hi communem mensuram H: Numerus ergo H, metiens numerum CD, metietur etiam, 11. *ax.* 7. numerum AE; quandoquidem, *hyp.* numerus AE, vel est multiplex numeri CD, vel ipsi æqualis: sed idem numerus H metiebatur, f. *hyp.* totum AB; ergo, 12. *ax.* 7. & reliquum EB metietur: Cùm autem, *hyp.* numerus EB metiatur numerum CF, nam, vel est ipsi æqualis, vel ejus pars; idcircò, 11. *ax.* 7. numerum CF metietur: Sed &, f. *hyp.* metiebatur totum CD; ergo, 12. *ax.* 7. metietur etiam residuum FD: Hic autem metitur numerum EG, nam, vel est ejus pars, vel eidem æqualis; ergo, 11. *ax.* 7. numerus H metietur numerum EG: sed & totum, *ut prius*, EB metiebatur; Ergo, 12. *ax.* 7. & residuum GB metietur, nempè numerus unitatem. Q. E. A.

PROPOSITIO II.

Duobus numeris datis (AB, CD) non primis inter se, maximam eorum communem mensuram (FD) reperire.

Fig. vide in Tab.

Subtrahe minorem CD ex majori AB, quoties potest (hoc est divide majorem per minorem): Si nihil relinquitur, patet, ipsum CD esse mensuram, seù partem numeri AB, nimirùm partem denominatam à quotiente: sed & ipse numerus CD metitur, 6. *ax.* 7. semetipsum per unitatem; ergo erit communis mensura utriusque numeri dati. Quòd, si post subtractionem numeri CD à numero AB, aliquid relinquitur, utputa EB, deme hunc residuum EB ex minori dato CD, & reliquum FD ex EB, & sic deinceps,

do-

donec aliquis numerus FD præcedentem EB metiatur, id enim fiet antequam ad unitatem perveneris (aliàs enim, 1. 7. numeri dati essent inter se primi.) Erit ergo FD communis mensura quæsita. Nam FD, *constr.* metitur numerum EB, atque hic numerum CF; ergo, 11. *ax.* 7. FD metitur numerum CF: sed &, 6. *ax.* 7. semetipsum metitur; ergo etiam, 10. *ax.* 7. totum numerum CD metietur: atque hic, *constr.* metitur numerum AE; ergo, 11. *ax.* 7. numerus FD metitur numerum AE: sed, *constr.* metiebatur numerum EB; ergo &, 10. *ax.* 7. totum AB metietur: adeòque inventa est FD communis mensura numerorum datorum. Quod autem sit maxima, ex eo patet, quia nempè, si dixeris, alium quendam numerum G, majorem numero FD, esse maximam numerorum datorum mensuram; quoniam, f. *hyp.* numerus G assumptus metitur numerum CD, metietur, 11. *ax.* 7. numerum AE: sed, f. *hyp.* totum etiam AB metitur: Ergo &, 12. *ax.* 7. numerum EB residuum metietur, imò etiam, *constr.* &, 11. *ax.* 7. ipsum CF, sed metiebatur totum CD; Ergo, 12. *ax.* 7. & reliquum FD metietur, major nempè minorem.

Q. E. A.

COROLL. Hinc patet, numerum metientem duos numeros metiri quoque maximam eorum communem mensuram.

PRO-

PROPOSITIO III.

Tribus numeris datis (A, B, C,) non primis inter se, maximam eorum mensuram (E) reperire.

1. *Cas.*	A,	16.	2. *Cas.*	A,	12.
	B,	12.		B,	8.
	C,	8.		C,	6.
	D,4. G, 5.			D,4. E,2. F.3.	

Inveniatur, 2. 7. numerus D maxima communis mensura duorum datorum A, B. Jam si (ut in 1. casu) numerus D metitur quoque tertium C, liquet ipsum D esse numerum quæsitum: Quod autem sit maxima datorum numerorum mensura, patet; Nam si illa esset G major ipso D, ergo numerus G metiens singulos datos, metiretur, *coroll.* 2. 7. numerum D maximam communem mensuram primorum datorum A, B, nempè numerum D seipso minorem. Q.E.A.

Sin verò (ut in 2. Casu) numerus D non metitur numerum C; erunt saltèm D, C, inter se compositi; Nam (*hyp.*) A, B, C sunt inter se Compositi; ergo aliqua mensura communis eos metitur, quæ propterea, *coroll.* 2.7. ipsum D metietur; adeòque C, D, erunt inter se Compositi. Jam verò ipsorum D, C, inveniantur, 2.7. maxima mensura E; erit E numerus quæsitus: Nam E, *constr.* metitur numeros C, D, atqui D metitur, *constr.* ipsos A, B; ergo, 11.*ax.*7. numerus E metitur singulos A, B, C. Quod autem non

major

major aliquis numerus, ut puta F eos metiatur, indè quidem patet, quia nempè si F metiretur numeros A, B, eorum etiam, *coroll.* 2.7. maximam communem mensuram D metietur: atqui si jam F metitur numeros D, C; eorum pariter maximam mensuram E metietur, major minorem. Q. E. A.

COROLL. 1. Hinc numerus metiens tres numeros, eorum quoque maximam communem mensuram metitur.

2. Eodem artificio invenies maximam communem mensuram quatuor, vel plurium numerorum datorum.

PROPOSITIO IV.

Omnis numerus (A) omnis numeri (B) minor majoris, aut pars est, aut partes.

1. *Cas.* A, 6.		2. *Cas.* A, 5.
B, 7.		B, 10.

3. *Cas.* A, 9.
B, 12.

1. *Casus.* Si A, & B primi sunt inter se; erit, 4. *def.* 7. A tot partes numeri B, quot sunt in A unitates, nimirum sex septimæ.

2. *Cas.* Si A metiatur numerum B; liquet, 4. *def.* 7. esse A partem ipsius B denominatam à quotiente, qui resultat ex divisione numeri B per numerum A, nimirùm dimidium.

3. *Cas.* Denique si A, & B aliter compositi

siti inter se fuerint; inveniatur, 2. 7. maxima eorum communis mensura, quæ quidem determinabit quotnam partes numeri B contineat numerus A, si nempè viderimus quoties communis mensura contineatur in A, & quoties in B; undè in hoc casu A est tres quartæ ipsius B.

Schol. Hinc autem patet, quidnam sit fractio numeralis; nihil sanè, nisi numerus minor consideratus tanquam pars, vel partes numeri majoris: Quota verò pars, vel quotnam, & quotæ partes sit illius, patebit si invenIremus utriusque numeri dati maximam communem mensuram, & per eam utrunque numerum datum diviserimus; prodibunt enim ex divisione duo numeri, *Quotientes* vocari soliti, quorum alter erit fractionis *Numerator*, alter verò *Denominator*.

PROPOSITIO V.

SI numerus (A) numeri (Z) eadem pars fuerit, quæ alter (B) alterius (X); & simul uterque (A pl. B) utriusque simul (Z pl. X) eadem pars erit, quæ unus unius.

A, 3. Z, 9.
B, 4. X, 12.

Quippè per *Additionem speciosam*.

A æqu. uni tertiæ X.
B æqu. uni tertiæ Z.

Ergo A pl. B æqu. duabus tertiis Z, pl. X.
Q. E. D.

PRO-

PROPOSITIO VI.

SI numerus (A) numeri (Z) partes fuerit, & alter (B) alterius (X) eædem partes; & simul uterque utriusq; eædem partes erit, quæ unus unius.

A, 6. Z, 6.
B, 4. X, 9.

Quippè per *Additionem speciosam*.

A æqu. duab. tertiis Z.
B æqu. duab. tertiis X.

Ergo A pl. B æqu. duab. tertiis Z pl. X.
Q. E. D.

SCHOL. Hæc propositio, uti & præcedens reddi potest universalior, & eadem methodo demonstrari, si nēpè dixerimus, quòd; *Si primus numerus secundi eadem pars; vel partes fuerit, quæ tertius quarti, quintus sexti, atque ità deinceps; erit compositus ex primo, tertio, & quinto eadem pars, vel partes compositi ex secundo, quarto, & sexto, quæ primus secundi.*

PROPOSITIO VII.

SI numerus (AB) numeri (CD) eadem pars fuerit, quæ ablatus (AE) ablati (CF); etiam reliquus (EB) reliqui (FD) eadem pars erit, quæ totus totius.

Fig. vide in Tab.

Siquidem AE pl EB æquantur, *hyp.* dimi-

dio

dio CF pl. FD, quod æquatur, *hyp.* dimidio CF pl. dimidio FD; atqui, *hyp.* AE æquatur dimidio CF; ergo, 3. *ax.* EB æquatur dimidio FD. Q. E. D.

PROPOSITIO VIII.

SI numerus (AB) numeri (CD) eædem partes fuerit quales ablatus (AE) ablati (CF); reliquus etiam (EB) reliqui (FD) eædem partes erit quales totus totius.

Fig. vid. in Tab.

Siquidem, *hyp.* EA pl. EB æquatur duab. tertiis CF pl. duab. tertiis FD; atqui, *hyp.* AE æquat. duab tertiis CF; ergo, 3. *ax.* 1. EB æquatur duab. tertiis FD. Q. E. D.

PROPOSITIO IX.

SI numerus (A) numeri (BC) pars fuerit, & alter (D) alterius (EF) eadem pars; ità vicissim, quæ pars est, vel partes primus tertii, eadem etiam pars, vel eædem partes erit secundus quarti.

Fig. vide in Tab.

Sit A dimidium BC, & D dimidium EF, & solvatur bifariam numerus BC in suas partes BG, GC, uti, & numerus EF in suas partes EH, HF: Tum quoniam BG, (hoc est A) eadem est pars, 1. *ax.* 7. vel partes numeri EH (hoc est D) quæ numerus GC numeri HF; erit, 5. vel 6. 7. numerus

rus A numeri D eadem pars, vel partes, quę totus BC totius EF. Q. E. D.

PROPOSITIO X.

SI numerus (AB) numeri (C) partes fuerit, & alter (DE) alterius (F) eædem partes; etiam vicissim, quæ pars est, aut partes primus tertii, eadem pars, vel eædem partes erit secundus quarti.

Fig. vid. in Tab.

Sit numerus AB duæ tertiæ numeri C, uti & numerus DE duæ tertiæ numeri F, & concipiantur AG, GB partes numeri C, atque DH, HE partes numeri F. Igitur, *hyp.* numerus AG numeri C eadem est pars, quæ ipse DH ipsius F; ergo, 9. 7. *alternando*, erit AG ipsius DH eademque ratione GB ipsius HE, atque proindè conjunctim, 5. & 6. 7. totus AB totius DE eadem pars, vel partes, quæ numerus C numeri F.

PROPOSITIO XI.

SI fuerit, ut totus (AB) ad totum (CD), ita ablatus (AE) ad ablatum (CF); erit & reliquus (EB) ad reliquum (FD), ut totus ad totum.

Fig. vide in Tab.

1. *Cas.* Sit primò AB minor quàm CD; ergo, 4. 7. AB, vel pars est, vel partes ipsius CD, necnon, *hyp.* & 2. *def.* 7. eadem pars est, vel eadem partes ipse AE ipsius CF, quæ numerus AB numeri CD; ergo, 7. vel 8. 7. reliquus EB reli-

reliqui FD eadem pars eſt, vel partes, quæ totius AB totius CD; adeòque, 20. *def*.7. erit AB ad CD, ut EB ad FD.

Q. E. D.

2. *Caſ*. Sin fuerit AB major, quàm CD; eodem modo oſtendetur eſſe CD ad AB, ut FD ad EB, & *invert*. AB ad CD, ut EB ad FD.

Q. E. D.

PROPOSITIO XII.

SI ſint quotcunque numeri proportionales (A ad B, ut C ad D, atque hi, ut E ad F); Erit quemadmodum unus antecedentium ad unum conſequentium, ità omnes ſimul antecedentes ad omnes ſimul conſequentes.

A 4.	C 2.	E 3.
B 8.	D 4.	F 6.

Sint primò A, C, E minores ipſis B, D, F; ergo, ob æqualitatem rationum, erit, 20. *def*.7. A eadem pars, vel partes ipſius B, quæ C ipſius D, & quæ E ipſius F; ergo, *ſchol*.6.7. A pl. C pl. E eſt eadem pars, vel partes numeri B pl. D pl. F, quæ unus A unius B; ac proindè, 20. *def*. 7., erit A pl. C pl. E ad B pl. D pl. F, ut A ad B.

Q. E. D.

Sin A, C, E ipſis B, D, F majores ponantur; idem oſtendetur *invertendo*.

PRO-

PROPOSITIO XIII.

SI sint quotcunque numeri proportionales (A ad B, ut C ad D); etiam vicissim, sivè alternando proportionales erunt.

A	3.	C	4.
B	9.	D	12.

Sint primo A, & C minores ipsis B, & D, atque A sit minoris quàm C, ergo, ob rationum æqualitatem, erit, 20. *def. 7.* A eadem pars, vel partes ipsius B, quæ numerus C numeri D; ergo, 9, vel 10. 7. *vicissim, sivè alternando*, erit A ipsius C eadem pars, vel partes, quæ B ipsius D; adeòque, 20. *def.* 7. erit A ad C ut B ad D, Q. E. D.

Sin A major sit quàm C, atque A & C majores statuantur quàm B & D; idipsum probabitur *invertendo*.

SUPPLEMENTUM

EX CLAVIO.

THEOREMA I.

SI compositi numeri proportionales sint; hi quoque divisi proportionales erunt. (Si sit AB ad CB ut DE ad FE; dico fore AC ad CB, ut DF ad FE.

I Fig.

Fig. vide in Tab.

Quoniam AB ad CB est, *hyp.* ut DE ad FE; erit, 13. 7. *altern.* AB ad DE, ut CB ad I E; ergo, 11. 7. reliquus AC ad reliquum DF est, ut totus AB ad totum DE, qui, *hyp.* est, ut CB ad FE, & rursus *alternan.* est AC ad CB, ut DF ad FE. Q. E. D.

THEOREMA II.

SI divisi numeri porportionales sint; hi quoque compositi proportionales erunt. (si sit AC ad CB, ut DF ad FE; dico fore AB ad CB, ut DE ad FE.)

Fig. vid. in Tab.

Quoniam est AC ad CB, ut DF ad FE; erit, *altern.* AC ad DF, ut CB ad FE; adeòque erit, 12. 7. AB ad DE, ut CB ad FE; & rursus *altern.* erit AB ad CB, ut DE ad FE.

Q. E. D.

THEOREMA III.

SI quatuor numeri sint proportionales; hi quoque convertendo proportionales erunt. (Si sit AB ad CB, ut DE ad FE; dico fore AC ad AB, ut DF ad DF: vel si mavis AB ad AC, ut DE ad DF.)

Fig. v. in Tab.

Quoniam est, *hyp.* AB ad CB, ut DE ad FE; erit, *altern.* AB ad DE, ut CB ad FE; ergo erit,

erit, 11. 7. reliquus AC ad reliquum DF, ut totus AB ad totum DE, & rursus, *altern.* erit AC ad AB, ut DF ad DE, & si lubet, *invert.* AB ad AC, ut DE ad DF. Q. E. D.

PROPOSITIO XIV.

SI sint quotcunque numeri (A, B C) & alii totidem (D, E, F) illis æquales multitudine, qui bini sumantur, & in eadem ratione ordinata; erit ex æquo primus ad ultimum in prioribus, ut primus ad ultimum in posterioribus.

A 9. B 6. C 3.
D 6. E 4. F 2.

Quoniam est, *Hyp.* A ad B, ut D ad E, & B ad C, ut E ad F; erit, *altern.* A ad D, ut B ad E, atque hi, ut C ad F; ergo A ad D, ut C ad F; & rursus, *altern.* A ad C, ut D ad F. Q. E. D.

PROPOSITIO XV.

SI unitas numerum quempiam (2) metiatur æquè ac alter numerus (3) alterum (6); etiam alternando unitas tertium metietur æquè ac secundus quartum.

1, 2,
3, 6,

Quoniam, *Hyp.* unitas est eadem pars ipsius 2, quæ ipse 3, ipsius 6; erit, 9. 7. *altern.* unitas eadem pars ipsius 3, quæ ipse 2. ipsius 6.

Q. E. D.

PROPOSITIO XVI.

SI duo numeri (A, & B) sese mutuò multiplicantes fecerint aliquos (AB, BA), geniti ex multiplicatione æquales inter se erunt.

B, 4.	A, 3.
A, 3.	B, 4.
AB, 12.	BA, 12.

Quoniam AB idem est atque A ductum in B; erit, 15. *def.* 7. unitas ad A, ut B ad AB, & *altern.* unitas ad B, ut A ad AB. Tum quoniam BA idem est atque B ductum in A; erit, 15. *def.* 7. unitas ad B, ut A ad BA; ergo A ad AB est, ut A ad BA; adeòque; AB & BA æquantur.

Q. E. D.

PROPOSITIO XVII.

SI numerus (A) duos numeros (B, C) multiplicans, fecerit aliquos (AB, AC); geniti ex ipsis eandem rationem habebunt quàm multiplicati.

A, 3.

B, 2.	C, 4.
AB, 6.	AC, 12.

Quoniam enim AB idem est atque A ductum in B; & AC idem est atque A ductum in C; erit, 15. *def.* 7. unitas ad A, ut B ad AB, & unitas ad A, ut C ad AC; ergo erit B ad AB, ut C ad AC, atque

atque, *altern.* B ad C, ut AB ad AC. Q. E. D.

PROPOSITIO XVIII.

SI duo numeri (A & B) numerum quempiam (C) multiplicantes, fecerint aliquos (AC, BC); geniti ex ipsis eandem rationem habebunt quàm multiplicantes.

C, 5.

A, 3. B, 9.

AC, 15. BC, 45.

Quoniam enim, 16. 7. AC & CA sibi æquantur mutuò, uti & sibi BC & CB; erit, 17. 7. & 1. *ax.* 7. CA (hoc est AC) ad CB (hoc est BC) ut A ad B. Q. E. D.

PROPOSITIO XIX.

SI quatuor numeri proportionales fuerint (A ad B, ut C ad D); Qui ex primo & quarto fit numerus, æquatur ei, qui fit ex secundo, & tertio: & è converso.

A, 4. B, 6. C, 8, D, 12.

AD, 48. BC, 48.

Quoniam est AC ad AD, 17. 7. ut C ad D, qui sunt, *Hyp.* ut A ad B, qui sunt 18. 7. ut AC ad BC; erit AC ad AD, ut AC ad BC; ergo AC & BC æquantur. Q. E. D.

Tum quoniam AD & BC æquantur; erit A ad B, 18. 7. ut AC ad BC qui sunt, 1. *ax.* 7. ut

AC ad AD, qui sunt 17. 7. ut C ad D; ergo erit A ad B, ut C ad D. Q. E. D.

PROPOSITIO XX.

SI tres numeri (A, B, C) continuè proportionales fuerint; qui sub extremis continetur, æqualis est ei qui efficitur à medio: & è conversò.

A, 4. B, 6. C, 9.
D, 6.
AC, 36. BB, 36.
DB, 36.

Concipe numerum D æqualem ipsi B; erit ergo D ad C, 1. *ax.* 7. ut B ad C, qui sunt, *hyp.* ut A ad B; ergo erit D ad C, ut A ad B; adeòque, 19. 7. AC æquabitur ipsi BD, (hoc est ipsi BB) Q. E. D.

Tum quoniam AC æquatur ipsi BB (hóc est BD); erit, 19. 7. A ad B, ut D (hoc est B) ad C. Q. E. D.

PROPOSITIO XXI.

NUmeri (AB, CD) minimi omnium, eandem cum eis rationem habentium (E, F) metiuntur æquè ipsos numeros eandem cum eis rationem habentes, major quidem (AB) majorem (E), minor verò (CD) minorem (F).

Fig. v. in Tabula.

Nam est AB ad CD, *hyp.* ut E ad F: & *altern.* AB ad E, ut CD ad F. Ergo, 20. *def.* 7. AB

eadem

eadem pars est, vel partes ipsius E, quæ CD ipsius F. Non partes; Sint enim (si fieri potest) AG, GB partes numeri E, necnon CH, HD partes numeri F: ergo, 20. *def.* 7. AG est ad E, ut CH ad F: & *altern.* AG ad CH, ut E ad F, qui sunt, *hyp.* ut AB ad CD. Ergo AB, CD non sunt minimi in eadem ratione, *contra hyp.*

PROPOSITIO XXII.

SI fuerint tres numeri (A, B, C) & alii ipsis multitudine æquales (D, E, F) qui bini sumantur, & in eadem ratione perturbata; etiam ex æquo erit primus ad ultimum in primis, ut primus ad ultimum in secundis.

A 4. B 3. C 2.
D 12. E 8. F 6.

Quoniam est, *hyp.* A ad B, ut E ad F; erit, 19. 7. AF æqu. ipsi BE: sed quoniam est, *hyp.* B ad C, ut D ad E; erit, 19. 7. BE æqu. ipsi CD. Ergo, 1. *ax.* 1. AF æqu. ipsi CD: adeòque, 19. 7. est A ad C, ut D ad F. Q. E. D.

PROPOSITIO XXIII.

PRimi inter se numeri (A, B) minimi sunt omnium eandem cum eis rationem habentium.

A 9. B 4.
C 5. D 3.
E 2.

Sint, si fieri potest, C, D minores ipsis A

B, atque in eadem ratione. Ergo, 21. 7. C metitur ipsum A, æquè ac D metitur ipsum B, ut puta per eundem numerum E. Ergo, 23. & 20. *def.* 7. est 1. ad E, ut C ad A, & *alternè* 1. ad C, ut E ad A, atque eadem ratione erit 1. ad D, ut E ad B: atqui 1. metitur ipsos C, & D: Ergo, 20. *def.* 7. E metitur ipsos A, & B: adeoque A, B, non sunt inter se primi, *contra hyp.*

PROPOSITIO XXIV.

Numeri A, B minimi omnium eandem cum eis rationem habentium, primi sunt inter se.

A 9. B 4.
D C E.

Habeant (si fieri potest) ipsi A, B, communem mensuram C, & is metiatur ipsum A per D, & ipsum B per E; Ergo, 9. *ax.* 7. CD æqu. ipsi A, & CE æqu. ipsi B. adeoque erit, 1. *ax.* 7. A ad B, ut CD ad CE, qui sunt, 17. 7. ut D ad E: sed D & E minores sunt quàm A, & B, utpotè eorum partes: Ergo A, B non sunt minimi in sua ratione, *contra hyp.*

PROPOSITIO XXV.

Si duo numeri (A, B) primi inter se fuerint; qui eorum unum (A) metitur numerus (C) ad reliquum (B) primus erit.

A 9. B 4.
C 3. D.

Nam

Nam si dixeris, aliquem numerum puta D, numeros B, C metiri; Ergo, 11. *ax*. 7. D metiens numerum C, metietur numerum A: sed metitur etiam numerum B: Ergo A, B non sunt inter se primi, *contra Hyp.*

PROPOSITIO XXVI.

S*I duo numeri (A, B) ad quempiam (C) primi fuerint; etiam ex illis genitus (AB) ad eundem C primus erit.*

A 5. B 3. AB 15.
C 8. E. F

Sit (si fieri potest) ipsorum AB, C, communis mensura numerus E, & E metiatur ipsum AB per F: Ergo, 9. *ax*. 7. EF æqu. ipsi AB: adeòque, 19.7. est E ad A, ut B ad F. Quoniam verò ipse A primus est respectu ipsius C, & ipsū C metitur numerus E: erunt proindè, 25.7. E, A, primi inter se, adeòque, 23, 7. in sua ratione minimi; Ergo, 21.7. numerus E æquè metitur numerum B, atque ipse A ipsum F: atqui E metitur ipsum etiam C; ergo B, C non sunt inter se primi, *contra hyp.*

PROPOSITIO XXVII.

S*I duo numeri (A, B) primi inter se fuerint; quadratum etiam alterutrius ad reliquum primus erit.*

PRO-

A 4. B 5.
Aq. 16. D 4.

Concipe numerum D æquari numero A: erunt, 1.*ax*.7. proinde ſinguli D, A primi ad numerum B: ergo, 26.7. AD (Aq.) ad B primus erit. Q. E. D.

PROPOSITIO XXVIII.

SI duo numeri (A, B) ad duos numeros, (C, D) uterque ad utrunque primi fuerint; & qui ex ipſis gignentur (AB, CD) primi inter ſe erunt.

A 5. C 4.
B 3. D 2.

AB 15. CD 8.

Quoniam enim, *hyp.* A, B, primi ſunt ad C; etiam, 26.7. AB ad ipſum C primus erit. Et quoniam A, B, primi ſunt ad D; erit, 26. 7. etiam AB primus ad D: Cùm igitur C, D ad AB primi ſint; etiam, 26.7. CD ad AB primus erit.

PROPOSITIO XXIX.

SI duo numeri (A, B) primi inter ſe fuerint; etiã eorum Quadrata, uti & Cubi primi inter ſe erunt.

A 3. B 2.
Aq. 9. Bq. 4.
Ac. 27. Bc. 8.

Quoniam enim A primus, *Hyp.* eſt ad B; erit

erit etiam, 27.7. Aq. primus ad B: & quia Aq. primus est ad B; erit, 27.7. etiam idem Aq. primus ad Bq. Rursus, quia tam A ad B, & Bq., quàm Aq. ad eosdem B, & Bq. primi sunt; erit, 28.7. A ductum in Aq. ideſt Ac. ad B ductum ib Bq. ideſt ad Bc. primus. Q.E.D.

PROPOSITIO XXX.

SI duo numeri (AB,BC) primi inter se fuerint; etiam uterque simul (AC) ad quemlibet eorum primus erit: Et si uterque simul (AC) ad unum aliquem (AB) illorum primus erit; etiam qui in principio numeri dabantur (AB, BC) primi inter se erunt. Fig. vide in Tab.

1. *Hyp.* Nam si AC, AB compositos dicas; sit D communis eorum mensura. Ergo, 12. *ax.* 7. numerus D reliquum BC metietur: sed metiebatur ipsum AB: Ergo AB, BC non sunt inter se primi, *contra hyp.*

2. *Hyp.* Positis AC, AB inter se primis, si velis numerum D esse ipsorum AB, BC communem mensuram; is propterea, 10.*ax.*7. totum AC metietur: sed metiebatur ipsum AB; ergo AB, AC non sunt inter se primi, *contra hyp.*

PROPOSITIO XXXI.

OMnis primus numerus (A) ad omnem numerum (B) quem non metitur, primus est.

A 5. B 8. C 3.

Nam

Nam si communis aliqua mensura metiatur utrunque A, B, ut puta numerus C; Ergo C non erit idem atque A, quippè A non ponitur metiri ipsum B. Quia igitur numerum A alius C metitur; non erit A primus, *contra hyp.*

PROPOSITIO XXXII.

SI duo numeri (A, B) se mutuò multiplicantes fecerint aliquem (AB), genitum autem (AB) metiatur aliquis primus numerus D; is etiam unum datorum, vel A, vel B metietur.

A 4. AB 24. B 6.
D 3. E.

Pone, numerum D non esse mensuram numeri A, & ex divisione numeri AB per D resultare numerum E: Ergo, 9. *ax.* 7. DE æqu. ipsi AB: adeòque, 19. 7. erit D ad A, ut B ad E; sed, *hyp.* & 31. 7. D est primus ad A: Ergo, 23. 7. D, & A minimi sunt in sua ratione: adeòque, 21. 7. D metitur numerum B æquè, ac ipse A metitur numerum E: adeòque numerus D jam metitur unum B. Q. E. D.

PROPOSITIO XXXIII.

OMnem compositum numerum (A) aliquis primus (B) metitur.

A 12. B 2.

Unus, vel plures numeri metiantur numerum A, quorum minimus sit B; is primus erit: nam si dica-

dicatur compositus; eum, 13. *def.* 7. minor aliquis metietur: qui proindè, 11. *ax.* 7. ipsum A metietur: Ergo B non est minimus eorum, qui ipsum A metiuntur, *contra hyp.*

PROPOSITIO XXXIV.

O*Mnis numerus (A) aut primus est, aut certè aliquis primus eum metietur.*

Quippè A vel primus est, vel compositus: si primus; id quidem asserimus: si compositus; Ergo, 33.7. eum aliquis primus metietur.

Q. E. D.

PROPOSITIO XXXV.

N*Umeris datis quotcunque (A,B,C) reperire minimos omnium (E, F, G) eandem rationem cum eis habentium*

A 6.	B 4.	C 8.
	D 2.	
E 3.	F 2.	G 4.
H,	I,	K.
	L.	

Si A, B, C primi sint inter se; ipsi, 23.7. in sua ratione minimi erunt: si compositi sunt; inveniatur, 3.7. eorum maxima mensura D, qui ipsos metiatur per E, F, G; hi minimi erunt in ratione data numerorum A, B, C. Nam, 9. *ax.* 7. D du-

ctus

ctus in E æqu. ipſi A, & D ductus in F æqu. ipſi B, atque D ductus in G æqu. ipſi C: Ergo, 1.*ax*.7. A ad B erit, ut ED ad FD, qui ſunt, 18.7. ut E ad F, atque erit B ad C, 1. *ax*. 7. ut FD ad GD, qui ſunt, 18.7. ut F ad G. Jam ſi negas, numeros E, F, G eſſe minimos in ratione data; pone numeros H, I, K eſſe minimos in ratione data; hi propterea, 21. 7. æquè metientur numeros A, B, C, nimirum per eamdem menſuram L. Ergo, 9. *ax*.7. HL æqu. ipſi A, cui æqu. ED: & IL æqu. ipſi B, cui æqu. FD: atque KL æqu. ipſi C, cui æqu. GD, adeòque ED æqu. ipſi KL, & ſic de cæteris: proindeque, 19.7. erit E ad H, ut L ad D; ſed E eſt maj. quàm H: ergo, 20. *def*.7. L eſt maj. quàm D: adeòque D non eſt maxima menſura datorum A, B, C. *contra hyp*.

COROLL. Hinc maxima communis menſura quotlibet numerorum, metitur ipſos per numeros, qui minimi ſunt omnium eandem rationem cum ipſis habentium.

PROPOSITIO XXXVI.

Duobus numeris datis (A, B) reperire quem illi minimum metiantur numerum.

A 5.	AB 20	B 4.
E,	D,	F,

1. *Caſ.* Si A, B primi inter ſe fuerint; erit AB numerus quæſitus: nam liquet, numeros A, B, metiri productum AB: ſed ſi fieri poſſet metian-

tiantur numeri A B aliquem D min. ipso AB, puta per E, & F: Ergo, 9. *ax.* 7. AE æq. ipsi D, cui æqu. BF: adeòque, 19.7. erit A ad B, ut F ad E. Quia verò, *hyp.* A, B primi sunt inter se; adeòque, 23.7. minimi in sua ratione; metientur, 21.7. propterea æquè ipsi A, B ipsos E, F: ergo 20. *def.* 7. erit A ad F, ut B ad E, qui sunt, 17. 7. ut AB ad AE, qui sunt, *ut prius*, & 1. *ax.* 7., ut AB ad D: ergo erit A ad F, ut AB ad D: adeòque, 20. *def.* 7. etiam numerus AB metietur numerum D seipso minorem.

Q. E. A.

A	6.		B	4.	
C	3.		D	2.	
AD	12.		BC	12.	
G,		F,	H,		

2. *Cas.* Sin A, B inter se compositi fuerint; reperiantur, 35.7. C, D minimi in eadem ratione, itàut sit A ad B, ut C ad D: Ergo, 19. 7. AD æqu. ipsi BC; adeòque AD, vel BC erit numerus quæsitus: Nam liquet, 7. *ax.* 7. numeros A, B ipsum AD, vel BC metiri. Jam verò si velis, quod A, B metiantur etiam numerum F minorem ipso D, & metiatur ipse A per G, & ipse B per H; ergo 9. *ax.* 7. AG æqu. ipsi F, cui æqu. BH; adeòque, 19. 7. erit A ad B, ut H ad G. Atqui C, D, *constr.* sunt minimi in data ratione; ergo, 21. 7. numerus C metietur numerum H, & ipse D ipsum G: atqui est D ad G, 17. 7.

ut

ut AD ad AG, qui sunt, 1. *ax.* 7. ut AD ad F. Ergo, 20. *def.* 7. AD metietur numerum F, seipso minorem. Q. E. A.

COROLL. Hinc, si duo numeri minimos multiplicent, eandem cum ipsis rationem habentes, major minorem, & minor majorem, producetur numerus minimus, quem illi metiuntur.

PROPOSITIO XXXVII.

SI duo numeri (A, B) numerum quempiam (CD) metiantur; etiam minimus (E) quem illi metiuntur, eundem (CD) metitur.

Fig. vide in Tab.

Si negas; aufer E ex CD quoties potes, & relinquatur FD: Cùm igitur numerus E non metiatur numerum CD, facta subtractione, necessariò relinquetur aliquis numerus FD minor ipso E: Jam verò, quoniam A, & B, *hyp.* metiuntur numerum E, & ipse E, *constr.* ipsum CF; etiam, 11. *ax.* 7. A, & B ipsum CF metientur: metiebantur autem, *hyp.* totum CD: ergo, 12. *ax.* 7. & reliquum FD metiuntur: adeòque E non est minimus, quem A, & B metiuntur, *contra hyp.*

PROPOSITIO XXXVIII.

TRibus numeris datis (A, B, C,) reperire minimum, quem illi metiuntur.

1. *Cas.*

A 3.
B 4. D 12.
C 6.

2. *Cas.*

A 2. B 3. C 4.
D 6. E 12. F.

Reperi, 36.7. numerum D minimum eorum, quem A, B metiuntur: Quem si tertius C metiatur; patet, D esse numerum quæsitum. Si verò tertius C non metiatur ipsum D, sit E minimus, quem D, C metiuntur; erit E numerus quæsitus: Quippè constat, 11. *ax.* 7. singulos A, B, C metiri numerum E: Quod verò nullum alium F minorem metiantur, ex eo patet, quia nempè, si numeri A, B, C metirentur quempiam F minorem ipso E: Ergo, cùm numerus D, *constr.* sit minimus eorum, quos A, B metiuntur; metietur etiam, 37. 7. numerus D numerum F: sed E, *constr.* est minimus omnium, quos D, & C metiuntur; ergo etiam, 37. 7. numerus E metitur numerum F, major minorem.

Q. E. A.

COROLL. Hinc si tres numeri numerum quempiam metiantur, etiam minimus, quem illi metiuntur, eundem metietur.

PROPOSITIO XXXIX.

SI numerum (A) quispiam numerus (B) metiatur; ille (A) quem (B) metitur, habebit partem (C) à metiente (B) denominatam.

A 27. B 9. C. 3.

Quoniam enim numerum A metitur ipse B per C; etiam, 9. *ax.* 7. numerus C metietur ipsum A per B, hoc est ipse C toties sumptus quot sunt unitates in B, faciet ipsum A: ergo C est pars ipsius A à metiente B denominatam.

Q. E. D.

PROPOSITIO LX.

SI numerus (A) partem habuerit (B); metietur ipsum (A) numerus (E) à quo pars (B) denominatur.

A 24. B. 6. E. 4.

Quoniam enim B est pars numeri A denominata ab E; ergo B metitur ipsum A per E: adeòque vicissim, 9. *ax.* 7. numerus E metitur ipsum A per B. Q. E. D.

PROPOSITIO XLI.

NUmerum reperire (G) qui, minimus cum sit, habeat datas partes (Dimidiam, Tertiam, Quartam.)

1. A C	27. A. D.....C.......B
2. A C	28) A3. B4. AB12. | 29) A3. B5. AB15.
7. A C	30. A3, B24, C8, D12, E4.
8. A C	31. A, 5. B, 8. C, 16. D....
9. A B	32. A, 2. B, 4. C, 8. D, 16.
10. A C	33. A, 30. B, 15. D....E..
11. A C	34. A ....
A....	Laus Deo.
21. A...	fr. Daniel Danieli Carm.
30. A	Astorini discipul.
37. A C	delineavit, et incidit.

PROPOSITIO XXXIX.

Si numerum (A) quispiam numerus (B) metiatur ; ille (A) quem (B) metitur , habebit partem (C) à metiente (B) denominatam.

A 27. B 9. C. 3.

Quoniam enim numerum A metitur ipse B per C ; etiam , 9. *ax.* 7. numerus C metietur ipsum A per B , hoc est ipse C toties sumptus quot sunt unitates in B , faciet ipsum A : ergo C est pars ipsius A à metiente B denominatam .

Q. E. D.

PROPOSITIO LX.

Si numerus (A) partem habuerit (B) ; metietur ipsum (A) numerus (E) à quo pars (B) denominatur .

A 24. B. 6. E. 4.

Quoniam enim B est pars numeri A denominata ab E ; ergo B metitur ipsum A per E : adeòque vicissim , 9. *ax.* 7. numerus E metitur ipsum A per B . Q. E. D.

PROPOSITIO XLI.

Numerum reperire (G) qui, minimus cum sit, habeat datas partes (Dimidiam, Tertiam, Quartam .)

1· A C
2· A C
7· A C
8· A C
9· A B
10· A C
11· A C
A....
A...
21·
30· A
37· A C

27· A. D.....C.......B

28) A3. B4. AB12. | 29) A3. B5. AB15.

30· A3, B24, C8, D12, E4·

31· A, 5· B, 8· C, 16· D...

32· A, 2· B, 4· C, 8· D, 16·

33· A, 30· B, 15· D....E..

34· A ....

Laus Deo.

fr. Daniel Danieli Carm. Astorini discipul.⁹ delineavit, et incidit.

G 12.

Dimidia, Tertia, Quarta.

H.

Inveniatur, 38. 7. G minimus, quem denominatores 2, 3, 4, metiantur, liquet, 39. 7. numerum G habere partes Dimidiam, Tertiam, Quartam &c. Tum, si fieri potest, quidam H minor ipso G habeat easdem partes; ergo numeri 2, 3. 4. metiuntur ipsum H, ac proindè G non est minimus quem numeri 2. 3. 4. metiuntur, *contra hyp.*

LAUS DEO.

LIBER VIII.

PROPOSITIO I.

SI fuerint quotcunque numeri (A, B, C, D) deinceps proportionales, extremi verò ipsorum (A, D) primi inter se fuerint; ipsi (A, B, C, D) minimi erunt omnium eandem cum eis rationem habentium.

A 8. B 12. C 18. D 27.
E. F. G. H.

Nam (si fieri potest) sint alii totidem E, F, G, H minores in eadem data ratione; ergo, 14. 7. erit, *ex æquo ordin.* A ad D, ut E ad H; atqui, *hyp.* A, & D, sunt inter se primi; adeòque, 23. 7. minimi in sua ratione; ergo, 21. 7. ipsi æquè metiuntur numeros E, & H seipsis minores. Q. E. A.

PROPOSITIO II.

NUmeros reperire deinceps proportionales; quotcunque jusserit quispiam in data ratione *ne (M ad N, ut puta 2. ad 3.)*

I.

M, N.

MM, MN, NN.

MMM, MMN, MNN, NNN.

Sint M 2, & N 3, minimi in data ratione. Jam si vis tres minimos proportionales; multiplicandus est M quadraticè, tum ducendus est M in N, ac demum multiplicandus est N quadraticè; nam erunt MM 4, MN 6, NN 9, tres minimi proportionales in data ratione M 2, ad N 3. Siquidem est, 17. 7. MM ad MN, ut M ad N, qui sunt, 18. 7. ut MN ad NN. Quoniam autem, *hyp.* M, & N sunt minimi in data ratione; erunt, 24. 7. primi inter se; proindèque, 1. 8. MM, MN, NN, sunt minimi proportionales in data ratione M ad N. Q. E. F.

Quòd si vis quatuor minimos proportionales; multiplica ipsum M cubicè, tum ducito MM in N, deindè duc MN in N, ac demum multiplica ipsum N cubicè, atque prodibunt MMM, MMN, MNN, NNN minimi proportionales; nam, 17. & 18. 7.

Æqu. hæ Rationes { MMM ad MMN (17. 7.)
M ad N (17. 7.)
MMN ad MNN (17. 7.)
M ad N (18. 7.)
MNN ad NNN.

Ergo MMM, MMN, MNN, NNN sunt deinceps proportionales in ratione M ad N. Quòd autem in hac ratione sint minimi, ex eo liquet, quia nempè M & N tanquam minimi in sua ratione, sunt, 24. 7. primi inter se; ergo etiam, 29. 7. ipsorum cubi erunt primi inter se: qui præterea, quoniam sunt extremi inventorum proportionalium, erunt, 1. 8. proindè inventi quatuor minimi numeri deinceps proportionales in ratione data. Q. E. F.

COROLL. 1. Hinc si tres numeri sunt minimi deinceps proportionales; extremi erunt quadrati: Si quatuor; cubi: atque ità porrò deinceps.

2. Minimorum deinceps proportionalium extremi sunt inter se primi.

3. Duo numeri minimi in data ratione metiuntur omnes medios quotcunque minimorum in eadem ratione.

PROPOSITIO III.

SI sint quotcunque numeri (A, B, C, D) deinceps proportionales minimi omnium eandem cum eis rationem habentium; ipsorum extremi sunt inter se primi.

A, 8, B 12. C 18. D 27.

Quoniam enim, 35. 7. cujuscunque proportionis datæ reperiri possunt radices, sivè minimi termini, qui proindè, 24. 7. erunt primi inter se, uti

uti &, 29. 7. ipsorum *Quadrati*, *Cubi*, cæteræque *Algebraicæ*, ut vocant, *Potestates*, quæ nempè gignuntur ex progressione Geometrica, & quoniam numeri dati, vel hi duo, vel tres, vel quatuor sint; semper, 1. *corol.* 2. 8. quidem habent extremos vel Radices, vel Quadratos, vel Cubos, & sic de cæteris; jam patet, ex genesi minimorum proportionalium, eorum extremos esse primos inter se. Q. E. D.

PROPOSITIO IV.

R*Ationibus datis quotcunque in minimis terminis* (*A ad B*, & *C ad D*) *reperire numeros deinceps minimos in datis rationibus*.

	A 6.	B 5.	C 4.	D 3.
(Z)	F 24.	E 20.	G 15.	(X)
	I,	K,	L.	

Constructio. Reperi, 36. 7. minimum E, quem B, & C metiuntur, &, 3. *post.* 7. sicut ipse B ipsum E metitur, ità numerus A metiatur alterum F, ut puta per Z, atque ità etiam numerus D metiatur alterum G, sicut numerus C eundem E, ut puta per X; erunt F, E, G minimi in datis rationibus.

Demonstratio. Siquidem, 9. *ax.* 7. æquantur AZ, & F, uti & BZ, & E; ergo erit, 1. *ax.* 7. F ad E, ut AZ ad BZ, qui sunt, 18. 7. ut A ad B: Similiter, 9. *ax.* 7. æquantur CX, & E, uti & DX, & G; ergo, 1. *ax.* 7. erit E ad G, ut CX, ad DX, qui sunt, 18. 7. ut C ad D. Adeòque E, F, G sunt deinceps proportionales in datis rationibus. Quòd verò sint minimi ità ostendetur; Nam puta alios I, K, L minimos esse; ergo, 21. 7. A, & B ipsos I, & K; pariterque C, & D ipsos K, & L metiuntur; adeòque B, & C eundem K metiuntur, ac proindè, 37. 7. etiam ipse E eundem K metietur, seipso minorem.

Q. E. A.

A 6. B 5. C 4. D 3. E 5. F 7.
H 24. G 20. I 15. K 21.

Datis verò tribus rationibus A ad B: C ad D, & E ad F; reperi, *ut prius*, tres H, G, I minimos deinceps in rationibus A ad B, & C ad D: Tunc, si numerus E numerum I metiatur; sume, 3. *post.* 7. alterum K, quem F æquè metiatur; erunt quatuor H, G, I, K deinceps minimi in datis rationibus: Quod ostendetur, ut in priori parte factum est; Si nempè assumpserimus communem mensuram, qua ipse A metitur ipsum H æquè ac ipse B ipsum G, atque ità in reliquis perrexerimus, sicuti jam modò factum est, notando benè, quot totidem debent esse variæ mensuræ quot sunt datæ rationes variæ.

A 6. B 5. C 4. D 3. E 2. F 7.
H 24. G 20, I 15.
M 48. L 40. K 30. N 105.

Sin autem E non metiatur I; sit K minimus, quem E, & I metiuntur, & quoties I ipsum K, toties G ipsum L, & H ipsum M metiatur: Quoties verò E ipsum K, toties F ipsum N metiatur; erunt M, L, K, N minimi deinceps in datis rationibus. Demonstratur, ut prius.

PRO-

PROPOSITIO V.

PLani numeri (CD , EF) rationem habent ex lateribus compositam , (id est CD ad EF est , ut C ad E pl. D ad F .)

C 4. E 3.
D 6. F 16.

CD 24. EF 48.
ED 18.

Quippè est, 18. 7. CD ad ED, ut C ad E, &, 17. 7. ED ad EF, ut D ad F. atque, 27. *def.* 7. est CD ad EF, ut CD ad ED pl. ED ad EF. ergo est CD ad EF, ut C ad E, pl. D ad F.

Q. E. D.

PROPOSITIO VI.

SI sint quotcunque numeri deinceps proportionales (A , B , C , D , E) primus autem (A) secundum (B) non metiatur, neque alius quispiam ullum metietur.

A 16. B 24. C 36. D 54. E 81.
F 4. G 6. H 9.

Quoniam A non metitur B, neque, 20. *def.* 7. etiam ipse B proximè sequentem C, aut ipse C ipsum D, aut D ipsum E metietur, siquidem dati numeri sunt deinceps proportionales. Igitur tribus A, B, C inveniantur tres proportionales minimi F, G, H; Quoniam autem ipse A non metitur

tur ipſum B; neque, 20. *def.* 7. ipſe F ipſum G: adeòque, 5. *ax.* 7. F non eſt unitas: ſed, 24. 7. F & H inter ſe primi ſunt; ergo, cùm ſit, 14. 7. ex æquo *ordinando*, A ad C, ut F ad H, & ipſe F non metiatur ipſum H; neque, 20. *def.* 7. ipſe A ipſum C, nec proindè ipſe B ipſum D, vel ipſe C ipſum E; nam eſt, *hyp. & ordin.* A ad C, ut B ad D, atque hi, ut C, ad E. Eodem modo ſi ſumas quatuor minimos numeros proportionales numeris datis A, B, C, D, oſtendetur quod A ipſum D non metiatur, nec ipſe B ipſum E: atque ſi demum ſumas quinque proportionales minimos, patebit eodem modo numerum A non eſſe menſuram numeri E. Q. E. D.

PROPOSITIO VII.

SI ſint quotcunque numeri deinceps proportionales (A, B, C, D, E) primus autem (A) extremum (E) metiatur; is etiam ſecundum (B) metietur.

A 3. B 6. C 12. D 24. E 48.

Si negas, quòd A metiatur numerum B. ergo, 26. 7. nec ipſum E metitur; *contra hyp.*

PROPOSITIO VIII.

SI inter duos numeros (A, B) ceciderint medii continuè proportionales (C, D); quot inter eos ejuſmodi cadunt medii, tot etiam inter alios (E, F) eandem cum illis rationem habentes,

cadent

cadent medii continuè proportionales (L, M)

A 24. C 36. D 54. B 81.
G 8. H 12. I 18. K 27.
E 32. L 48. M 72. F 108.
Z 4.

Sume G, H, I, K minimos, 35. 7. proportionales ipsis A, C, D, B; erit, 14. 7. ex æquo *ordinando*, G ad K, ut A ad B, atque hi, ut E ad F. atqui G, & K, 3. 8. primi sunt inter se. Ergo, 22. 7. ipse G æquè metietur ipsum E, ac ipse K ipsum F, nimirum per aliquem numerum Z: per hunc ergo Z multiplicentur H, & I; atque gignentur L, & M; quos probo esse medios proportionales inter E, & F: Nam æquantur GZ, & E; HZ, & L; IZ, & M; KZ, & F: atqui est G ad H, 18. 7. ut GZ ad HZ, qui sunt, 1. *ax.* 7. ut E ad L: ergo est G ad H, ut E ad L: & eadem ratione patebit se habere H ad I, ut L ad M, necnon I ad K, ut M ad F: atqui, *constr*, G, H, I, K sunt deinceps proportionales numeris A, C, D, B: ergo his etiam erunt deinceps proportionales numeri E, L, M, F: in quibus quoniam multitudo mediorum æquatur multitudini mediorum datorum; ostensum jam superest, quòd si &c.

Q. E. D.

PROPOSITIO IX.

SI duo numeri (A, B) sint inter se primi, & inter eos medii continua proportione ceciderint numeri (C, D) quot inter eos medii ceciderint, totidem (E, G, & F, I) inter utrunque eorum, ac *ac unitatem medii continua proportione cadent.*

1.

E 2. F 3.

G 4. H 6. I 9

A 8. C 12. D 18. B 27.

Siquidem, ex 2. 8. conſtat, 1, E, G, A eſſe totidem continuè proportionales, quot 1, F, I, B, & quot A, C, D, B. Q. E. D.

PROPOSITIO X.

SI inter duos numeros (A, B) & unitatem continuè proportionales ceciderint numeri (E, D, & F, G); quot inter utrunque ipſorum, & unitatem deinceps medii continua proportione cadunt; totidem & inter ipſos (A, B) cadent medii continuè proportionales (L, K)

A 8, L 12. K 18. B 27.

E 4. DF 6. G 9.

D 2, F 3.

1.

Siquidem, 2. 8. E, DF, G: DDD (A), DDF (L), DG (K), FFF (B) ſunt continuè proportionales. Q. E. D.

PROPOSITIO XI.

DUorum quadratorum numerorum (Aq, Bq,) unus medius proportionalis eſt numerus (AB): & quadratus ad quadratum duplicatam habet lateris (A) ad latus (B) rationem.

AAA,

AAA, AAB, ABB, BBB
27, 36, 48, 64.
AA, AB, BB
9. 12. 16,
A, B,
3, 4.

Liquet enim, 17. & 18. 7. AA, AB, BB esse continuè proportionales; proindèque erit, 27. *def.* 7. AA ad BB, ut A ad B bis.

Q. E. D.

PROPOSITIO XII.

DUorum Cuborum numerorum Ac., Bc. duo medii proportionales sunt numeri (AAB, ABB): Et Cubus ad Cubum triplicatam habet lateris (A) ad latus (B) rationem.

Vide fig. præcedentem.

Siquidem, *ex constr.* 2. 8. AAA; AAB, ABB, BBB, sunt in continua proportione numeri A ad B: ergo, 27. *def.* 7. Ac. ad Bc. est, ut A ad B ter. Q. E. D.

PROPOSITIO XIII.

SI sint quotlibet numeri proportionales (A, B, C) & multiplicans quisque seipsum, faciat aliquos; qui ab illis producti fuerint (Aq. Bq. Cq.) proportionales erunt; imò & datorum A, B, C, Cubi, quadrato quadrati, & sic deinceps continuò proportionales erunt.

A. B. C.

A. B. C.
2. 4. 8.
AA, AB, BB, BC, CC.
4. 8. 16. 32. 64.
AAA, AAB, ABB, BBB, BBC, BCC, CCC,
8. 16. 32. 64. 128. 256. 512.

Siquidem, *ex constr.* 2. 8. AA, AB, BB, BC, CC sunt continuè proportionales: ergo, 14. 7. erit, *ex æquo ordinando*, AA ad BB, ut BB ad CC. Eademque ratione Ac. Bc. Cc. sunt continuè proportionales, & sic porrò de cæteris.

Q. E. D.

PROPOSITIO XIV.

SI quadratus numerus (RR) quadratum numerum (SS) metiatur; metietur etiam unius latus (R) alterius latus (S): & si unius quadrati latus metiatur latus alterius; etiam quadratus (RR) metietur quadratum (SS)

R 2. S. 6.
RR 4. RS 12. SS 36.

1. *Hyp.* Quoniam est RR ad RS, 2. & 11. 8. ut RS ad SS, & *hyp.* quadratus numerus RR metitur quadratum SS; metietur, 7. 8. etiam primus RR secundum RS: atqui est RR ad RS, 17. 7. ut R ad S; ergo, 20. *def.* 7. etiam ipse R metietur ipsum S. Q. E. D.

2. *Hyp.* Quoniam R metitur ipsum S, & est de cætero RR ad RS, 2. 8. ut RS ad SS, qui sunt 18. 7. ut R ad S; etiam ipse RR ipsum RS, 20. *def.* 7. me-

7. metietur, æquè ac ipse RS ipsum SS: ac proindè, 11. *ax.* 7. numerus quadratus RR quadratum SS metietur. Q. E. D.

PROPOSITIO XV.

SI Cubus numerus (MMM) Cubum numerum (NNN) metiatur; etiam latus unius metietur latus altertus, & è converso.

	M,	N	
	2.	6.	
MMM,	MMN,	MNN,	NNN.
8.	24.	72.	216.

1. *Hyp.* Quoniam, 2. & 12. 8. MMM, MMN, MNN NNN sunt continuè proportionales; ergo MMM, metiens Cubum extremum NNN, metietur etiam, 7. 8. secundum MMN: atqui MMM ad MMN est, 17. 7. ut M ad N; ergo etiam, 20. *def.* 7. ipse M metietur ipsum N. Q. E. D.

2. *Hyp.* Quoniam numerus M metitur numerum N; & sunt, *ut prius*, MMM; MMN, MNN, NNN in continua proportione ipsius M ad ipsum N; etiam in his primus secundum, is tertium, & tertius quartum, 20. *def.* 7. metietur; ergo etiam, 11. *ax.* 7. primus MMM quartum NNN. Q. E. D.

PROPOSITIO XVI.

SI quadratus numerus (AA) quadratum numerum (BB) non metiatur; neque latus unius

unius metietur latus alterius: & è converso.

A 4. B 9.
AA 16. BB 81.

1. *Hyp.* Nam, si A metiretur ipsum B; etiam, 14. 8. ipse AA ipsum BB metietur; *contra hyp.*

2. *Hyp.* Si AA metiretur ipsum BB; etiam, 41. 8. ipse A ipsum B metietur; *contra hyp.*

PROPOSITIO XVII.

SI *Cubus numerus (Ac.) cubũ numerum (Bc.) non metiatur; neque unius latus metietur latus alterius; & è converso.*

A, 2. B, 3.
Ac. 8. Bc. 27

1. *Hyp.* Nam si ipse A metietur ipsum B; etiam 15.8. ipse Ac., metiretur ipsũ Bc.; *contra hyp.*

2. *Hyp.* Si ipse Ac. metiretur ipsum Bc.; etiam, 15.8. ipse A ipsum B metiretur; *contra hyp.*

PROPOSITIO XVIII.

D*Vorum similium planorum numerorum (CD, EF) unus medius proportionalis est numerus (DE): & planus (CD) ad planum (EF) similem, duplicatam habet lateris (C) ad homologum latus (E) rationem.*

C 6. D 2.
CD 12. DE 18. EF 27.
E 9. F 3

Quoniam, *hyp.* & 21. *def.* 7. est C ad D, ut

E ad

E ad F; erit, 13. 7. *altern.* C ad E, ut D ad F. Igitur

Æqu. hæ Rationes.
- CD ad ED (DE) (18. 7.)
- C ad E. (*ut prius*)
- D ad F (18. 7.)
- DE ad FE (EF)

Ergo CD, DE, EF sunt continuè proportionales: ergo, 27. *def.* 7. ratio ipsius CD ad EF duplicata est rationis CD ad DE, hoc est C ad E.

Q. E. D.

COROLL. Hinc patet, medium numerum proportionalem duorum numerorum planorum similium esse in ratione laterum homologorum.

PROPOSITIO XIX.

Duorum similium solidorum (ABC, DEF) duo medii proportionales sunt numeri (BCD, CDE) & numerus solidus ad solidum similem est in triplicata ratione laterum homologorum.

ABC,	BCD,	CDE,	DEF
30.	60.	120.	240.

A 2. B 3. C 5.
D 4. E 6. F 10.

Quoniam, *hyp.* & 22. *def.* 7. est A ad B, ut D ad E, & B ad C, ut E ad F; erit *altern.* A ad D, ut B ad E, ut C ad F. Igitur

Æqu. hæ Rationes. { ABC ad BCD (17.7.)
A ad D (*ut prius*)
B ad E (17.7.)
BCD ad CDE (*ut prius*)
B ad E (*ut prius*)
C ad F (17.7.)
CDE ad DEF.

Ergo ABC, BCD, CDE, DEF sunt cont. proportionales: & proindè ratio ABC ad DEF triplicata est rationis ABC ad BCD (A ad D)

Q. E. D.

COROLL. Hinc medii proportionales similium solidorum sunt in ratione homologorum laterum.

PROPOSITIO XX.

SI inter duos numeros (A, B) unius medius proportionalis cadat numerus (C); similes plani erunt illi numeri.

A 12. C 18. B 27.
D 2. E 3.
F 6. G 9.

Sume, 35.7. D & E minimos in ratione A ad C, sivè C ad B: ergo, 21.7. ipse D æquè metitur ipsum A, ac ipse E ipsum C, puta per eundem F: item ipse D æquè metitur ipsum C, ac ipse E ipsum B, puta per eundem G; ergo, 9. *ax.* 7. æquantur DF, & A, uti & EG, & B, adeòque, 16. *def.* 7. A, & B plani sunt numeri: quoniam verò, 9. *ax.* 7. æquantur EF, C, DG; erit, 19.7. D ad E, ad E, ut F ad G, & *altern*. D ad F, ut E ad G: ergo, 21. *def.* 7. plani numeri A, & B, hoc est DF, & EG similes sunt.

Q. E. D.

PROPOSITIO XXI.

SI inter duos numeros (A, B) duo medii proportionales cadant numeri (C, D); similes solidi erunt ipsi (A, B)

A 16. C 24. D 36. B 54.
E 4. F 6. G 9.
H 2. P 2. K 3. L 3.
M 4. N 6.

Sume, 2. 8. E F, G, minimos proportionales in ratione A ad C: ergo, 20. 8. E, & G sunt numeri plani similes: numeri proindè E latera sint H, & P, numeri verò G latera sint K, & L: ergo 22. *def.* 7. erit H ad K, ut P ad L, qui sunt *cor.* 18. 8. ut E ad F: atqui, 21. 7. E, F, G ipsos A, C, D æquè metiuntur, puta per eundem M: iidemque ipsos C, D, B, æquè metiuntur, puta per eundem N: Ergo, 9. *ax.* 7. æquantur A, EM, & HPM, uti & B, GN, & KLN: quare A, & B solidi sunt numeri. Quoniam verò, 9. *ax.* 7. C æqu. ipsi EM, & D æqu. ipsi FN;

Idcircò

Æqu. hæ Rationes { M ad N (17.7.)
FM ad FN (1. *ax.* 7.)
C ad D (*constr.*)
E ad F (*ut prius*)
H ad K (*ut prius*)
P ad L.

ergo, 22. *def.* 7. A, & B sunt numeri solidi similes.

Q. E. D.

PROPOSITIO XXII.

SI tres numeri (A, B, C) sint deinceps proportionales, primus autem (A) sit quadratus, etiam tertius (C) quadratus erit.

A 4. B 6. C 9.

Quoniam inter A, & C cadit unus medius proportionalis; ergo, 20. 8. A, & C sunt similes plani: quoniam verò, *hyp.* A est quadratus; etiam C quadratus erit. Q. E. D.

PROPOSITIO XXIII.

SI quatuor numeri (A, B, C, D) sint deinceps proportionales, primus autem (A) sit cubus; etiam quartus (D) cubus erit.

A 8. B 12. C 18. D 27.

Quoniam inter A, & D cadunt duo medii proportionales; ergo, 21. 8. ipsi sunt solidi similes, & quoniam, *hyp.* A est cubus; etiam D cubus erit. Q. E. D.

PRO-

PROPOSITIO XXIV.

SI duo numeri (A, B) rationem habeant inter se, quàm quadratus numerus (C) ad quadratum numerum (D); primus autem (A) sit quadratus; etiam secundus (B) quadratus erit.

A 16. 24. B 36.
C 4. 6. D 9

Quoniam, 11.8. inter C, & D numeros quadratos, adeòque, 8.8. etiam inter A, & B, eandem cum illis rationem habentes, cadit B unus medius proportionalis: & quoniam, *hyp.* A quadratus est; etiam, 22.8. B quadratus erit.

Q. E. D.

COROLL. 1. Hinc si fuerint duo numeri similes, primus autem sit quadratus, etiam secundus quadratus erit.

2. Liquet etiam ex his, proportionem numeri quadrati ad non quadratum exhiberi non posse in numeris quadratis.

PROPOSITIO XXV.

SI duo numeri (A, B) rationem inter se habeant quàm Cubus numerus (C) ad cubum numerum (D), primus autem (A) sit cubus; etiam secundus (B) cubus erit.

C 64. 96. 144. D 216.
A 8. 12. 18. B 27.

Quoniam, 12. 8. inter C, & D cubos, adeòque, 8. 8. inter A, & B eandem rationem habentes, cadunt duo medii proportionales: & quoniam, *Hyp.* A cubus est; etiam, 23. 8. B cubus erit.

Q. E. D.

COROLL. 1. Hinc si fuerint duo numeri similes, & primus sit cubus, etiam secundus erit cubus.

2. Patet, Proportionem cubi ad non cubum exhiberi non posse per numeros cubos.

PROPOSITIO XXVI.

Similes plani numeri (A, B) rationem inter se habent quàm quadratus numerus ad quadratum numerum.

A 20.	C 30.	B 45.
D 4.	E 6.	F 9.

Quoniam, 18. 8. inter A & B cadit unus medius proportionalis C; sume, 2. 8. tres minimos D, E, F deinceps proportionales in ratione A ad C; ergo, 1. *corol.* 2. 8. extremi D, F quadrati erunt: atqui, *hyp.* & *ordin.* A ad B est, ut D ad F: ergo A est ad B, ut quadratus numerus ad quadratum.

Q. E. D.

PROPOSITIO XXVII.

Similes solidi numeri (A, B) sunt inter se, ut Cubus ad cubum.

A 16. C 24 D 36. B 54.
E 8. F 12. G 18. H 27.

Quoniam, 19. 8. inter A, & B cadunt duo medii proportionales C, & D; ſume, 2. 8. quatuor E, F, G, H minimos proportionales in ratione A ad C: ergo, 1. *Cor.* 2. 8. extremi E, H cubi ſunt: atqui, *Hyp. & ordin.* eſt A ad B, ut E ad H, hoc eſt, ut cubus ad cubum.

Q. E. D.

LAUS DEO.

LIBER IX.

PROPOSITIO I.

S*I duo similes plani (A, B) se mutuo multiplicantes, faciant quendam; productus quadratus erit.*

A 6. B 54

Aq. 36. 108. AB, 324.

Est enim, 17. 7. A ad B, ut AA ad AB: atqui inter primum, & secundum tanquam similes planos cadit, 18. 8. unus medius proportionalis: ergo, 8. 8. unus etiam medius proportionalis inter tertium, & quartum cadet: quoniam autem tertius est quadratus; nam producitur ex A ducto in A; quartus, 22. 8. etiam quadratus erit.

Q. E. D.

PROPOSITIO II.

Si duo numeri (A, B) se mutuò multiplicantes faciant quendam quadratum; similes plani erunt.

A 6. B 54.
Aq. 36. AB, 324.

Nam est A ad B, 17. 7. ut AA ad AB, atqui, 11. 8. inter tertium, & quartum, quippè inter duos numeros quadratos cadit unus medius proportionalis: ergo, 8. 8. etiam unus medius proportionalis inter primum, & secundum cadet; qui propterea, 20. 8. sunt similes plani.

Q. E. D.

PROPOSITIO III.

Si Cubus numerus (Ac) seipsum multiplicans, fecerit aliquem; productus (Acc) cubus erit.

A 2. Ac, 8. Acc, 64.

Quoniam est 1. ad A, 15. *def.* 7. ut A ad AA qui sunt, 17. 7. ut Aq. ad Ac. Ergo inter 1. & Ac. cadunt duo medii proportionales: sed, 15. *def.* 7. est 1. ad Ac, ut Ac ad Acc; Ergo, cùm duo medii proportionales cadant inter primum, & secundum; totidem, 8. 8. inter tertium, & quartum cadent: Cùm autem tertius sit cubus; etiam quartus, 23. 8. cubus erit.

Q. E. D.

PRO-

PROPOSITIO IV.

SI numerus (Ac) cubus numerum (Bc) cubum multiplicaverit; productus (AcBc) cubus erit.

Ac, 8. Bc, 27.
Acc, 64. AcBc, 216.

Nam est Ac ad Bc, ut Acc ad AcBc: sed, 18. 8, inter primum, & secundum cadunt duo medii proportionales: ergo totidem medii, 8. 8. inter tertium, & quartum cadent: quoniam autem, 3. 9. tertius est cubus; quartus etiam, 23. 8. cubus erit. Q. E. D.

PROPOSITIO V.

SI Cubus numerus (Ac) numerum quempiam (B) multiplicans, fecerit cubum; ipse etiam multiplicatus (B) cubus erit.

Ac, 8. Bc, 27.
Acc, 64. AcBc, 216.

Siquidem, 17. 7. est Acc, ad AcB, ut Ac ad B: atqui, 12. 8. inter primum, & secundum cadunt duo medii proportionales; ergo, 8. 8. totidem inter tertium, & quartum cadent; cùm autem, *hyp.* tertius sit Cubus; etiam, 23. 8. quartus Cubus erit.

Q. E. D.

PRO-

PROPOSITIO VI.

SI numerus (Z) seipsum multiplicans faciat cubum, & ipse cubus erit.

Z 8. Zq, 64. Zc, 512.

Quoniam, *hyp.* Z ductus in Z producit cubum, & 19. *def.* 7. ZZZ est cubus; erit, 5. 9. ipse Z numerus cubus. Q. E. D.

PROPOSITIO VII.

SI Compositus numerus (Z) numerum quempiam (X) multiplicaverit; productus (ZX) solidus erit.

Z 6. X 11. XZ, 66.

A 2. B 3.

Quoniam enim Z compositus est; metitur idcircò, 13. *def.* 7. eum aliquis A, puta per B; ergo, 9. *ax.* 7. Z æqu. ipsi AB: adeòque 17. *def.* 7. ABX (ZX) solidus erit. Q. E. D.

PROPOSITIO VIII.

SI ab unitate quotcunque numeri deinceps proportionales erunt; Primus numerus ab unitate RADIX vocetur Progressionis Geometricæ; Cæteri verò QVADRATI, CVBI, QVADRATO-QVADRATI, SVRDESOLIDI, CVBO-QVADRATI, SVRDESVRDESOLIDI. QVADRATO-QVADRATO-QVADRATI,

DRATI , CVBICVBI , & sic de reliquis Potestatibus Algebraicis). Potestates autem, quæ numeris paribus exponuntur , sunt numeri QVADRATI : Potestates , quarum exponens est vel ternarius , vel numerus , quem ternarius metitur, sunt numeri CVBI : Potestates verò , quarum Exponentes mensurantur à binario simul , ac ternario, sunt numeri CVBI QVADRATI.

Fig. vide in Tab.

Nota . Solent Mathematici Progressiones Geometricas computare numeris vulgaribus , ab unitate Arithmeticè crescentibus , nimirùm per numeros 1. 2. 3. 4. 5. 6. 7. 8. 9. 10., quos propterea vocant exponentes , quippè quibus exponitur , quotnam Progressionibus ab unitate unaquæque Potestas generetur . Consule appositam Tabellam.

Exp.

Exp.	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Pot.	1	3	9	27	81	243	729	2187	6561	19683
Char.	U	R	Q	C	Qq.	Ss.	Cq.	Sss.	Qqq.	Cc.
Nomina.	Unitas	Radix	Quadratum.	Cubus	Quadratoquadratũ.	Surdesolidũ.	Cubiquadratũ.	Surdesurdesolidũ.	Quad. quad. quadratũ.	Cubicubus.

DEMONSTR. Quoniam, *hyp.* est 1. ad A, ut A ad AA; erit, 20. 7. AA æqualis ipsi A ducto in A, cui æqu. 18. *def.* 7. Aq. Deindè quoniam, *hyp.* Aq. Ac. Aqq. sunt continuè proportionales, & primus Aq. quadratus est; tertius, 22. 7. etiam Aqq. quadratus erit: atque eadem ratione quadrati erunt numeri A^6, A^8, A^{10}, quorum exponentes sunt numeri pares.

Tum quoniam, *hyp.* est 1. ad A, ut A^2, ad A^3 erit, 20. 7. Ac. æqu. ipsi AA duct. in A, cui æqu. 20. *def.* 7. Ac. Deindè, quoniam A^3 A^4 A^5 A^6 sunt proportionales, primus autem est cubus; etiam, 23. 8. quartus A^6 cubus erit: atque eadem ratione cubi erunt ipsi A^9 A^{12}, A^{15}, uti & reliquæ Potestates, quarum Exponentes metitur ternarius.

Adeòque jam patet ex prima, & secunda parte hujus demonstrationis, numeros A^6, A^{12}, A^{18}, A^{24}, esse cubos simul, & quadratos; siquidem eorum Exponentes mensurantur à binario simul, & ternario. Igitur si ab unitate, &c.

Q. E. D.

PROPOSITIO IX.

SI in serie continuè proportionalium ab unitate numerorum primus sit quadratus; reliqui omnes quadrati erunt: si verò primus sit Cubus; reliqui etiam erunt cubi.

Fig. vide in Tab.

1 *Hyp.* Quoniam, 8. 9. A^2, A^4, A^6, A^8, qua-

quadrati sunt, & quoniam A ponitur quadratus; erit, 22. 8. A^3, quadratus: & eadem ratione A^5, A^7, A^9, quadrati erunt.

2. *Hyp.* Quoniam A ponitur cubus; erit 23. 8. A^4, cubus, & eadem ratione A^7, A^{10}, A^{13}, cubi erunt; atque, 8. 9. A^3, A^6, A^9, sunt etiam cubi: tandem verò, quoniam est 1. ad A, ut A ad AA; erit, 20. 7. AA æqual. ipsi A ducto in A: atqui, *hyp.* A est cubus; ergo, 3. 9. AA cubus erit; adeòque 23. 8. etiam cubi erunt ipsi A^5, A^8, A^{11}; adeòque si ab unitate &c. Q. E. D.

PROPOSITIO X.

Si ab unitate quotcunque numeri deinceps proportionales fuerint, qui verò post unitatem non sit quadratus, neque ullus alius quadratus erit præter eos, quorum exponentes sunt numeri pares. Et si qui post unitatem non sit cubus; neque ullus alius cubus erit, præter eos quorum exponentes ternarius metitur.

Fig. vide. in Tab.

1. *Hyp.* Nam, si fieri potest. Sit D^5, quadratus: quoniam ergo est, *hyp.* D ad D^2, ut D^4 ad D^5, & *invertendo*, D^5 ad D^4, ut D^2, ad D; suntque, *f. hyp.* & 8. 9. ipsi D^5, D^4, D^2, numeri quadrati; erit, 24. 8. etiam D numerus quadratus; *contra hyp.*

2. *Hyp.* Sit, si fieri potest, D^4, cubus. Quoniam igitur, *hyp.* & *ex æquo ordin.* est D^4, ad D^6, ut D ad D^3, nec non *f. hyp.* & 8. 9. D^6, D^3,

D^3

D^3, sunt cubi ; erit, 25. 8. etiam cubus ipse D; *contra hyp.*

PROPOSITIO XI.

SI ab unitate quotcunque numeri proportionales fuerint; minor majorem metietur per aliquem eorum, qui in serie proportionalium est numerus.

Fig. vide in Tab.

Quoniam enim, *hyp.* est 1. ad D, ut D ad DD; erit, 5. *ax.* 7. DD divis. per D æqualis ipsi D, cui æqu. D^3, divis. per D^2, Ità etiam quia est, *hyp. & ordin.* 1. ad D^2, ut D ad D^3, erit, 5 *ax.* 7. D^3, divis. per D æqu. D^2, cui æqu. D^4, divis. per D^2, cui æqu. D^5, divis. per D^3, &c. Denique, Quia est, *hyp. & ordin.* 1. ad D^3, ut D ad D^4, erit, 9. *ax.* 7. D^4, divis. per D æqu. D^3, cui æqu. D^6, divis. per D^3, &c. Ergo si ab unitate &c.

Q. E. D.

COROLL. Hinc si numerus, qui metitur aliquem ex proportionalibus non sit unus proportionalium; neque numerus per quem metitur, erit aliquis ex proportionalibus.

PROPOSITIO XII.

SI ab unitate quotcunque numeri deinceps proportionales fuerint (1. *D*, D^2, D^3, D^4,); *quicunque primorum numerorum* (*B*) *ultimum proportionalium* (D^4,) *metiuntur, iidem & eum* (*D*) *qui unitati proximus est metiuntur.*

Fig.

Fig. vide in Tab.

Nam si B non metiretur ipsum D; ergo, 31. 7. B ad D primus erit; adeòque, 27. 7. erit etiam primus ad D 3, & proindè, 26. 7. primus etiam ad D 4, quem metiebatur. Q. E. A.

COROLL. 1. Itaque omnis numerus primus ultimum metiens, metitur quoque omnes alios ultimum præcedentes.

2. Si aliquis numerus non metiens proximum unitati, metiatur ultimum, erit numerus compositus.

3. Si proximus unitati sit primus numerus, nullus alius primus numerus ultimum metietur.

PROPOSITIO XIII.

SI ab unitate quotcunque numeri deinceps proportionales fuerint, qui verò post unitatem primus erit; maximum nullus alius metietur præter eos qui sunt in data serie numerorum proportionalium.

Fig. vide in Tab.

Si fieri potest, alius quispiam B metiatur A 4, nempè per F; erit, *Cor.* 11. 9. F alius extrà seriem proportionalium: quia verò E metiens numerum A 4, non metitur ipsum A, hic enim ponitur primus; idcircò, 2. *Cor.* 12. 9. erit E numerus compositus. Ergo, 33. 7. eum aliquis primus metitur: qui proindè, 11. *ax.* 7. ipsum A 4 metietur: neque, 3. *Cor.* 12. 9. is alius esse poterit quàm A; Igitur numerus A metitur numerum E. Quoniam autem viceversa ipse F metitur ipsum A 4 per E; eadem propterea ratione, *ac prius*, ostendetur, numerum F esse compositum, ipsumque proindè mensurari ab aliquo primo, atque hunc alium esse non posse præter A. Itaque quoniam, 9. *ax*. 7. EF æqu. ipsi A 4, cui æqu. A duct. in A 3; erit, 19. 7. A ad E, ut F ad A 3, Quoniam autem (ut ostensum est) ipse A metitur ipsum E; æquè etiam, 20. *def*. 7. ipse F metietur ipsum A 3, puta per eundem G: Nec, *corol*. 11. 9. tamen ipse G erit ex data serie proportionalium; Quo circa (iuxtà rationes jam modò adductas) numerus G est compositus, quem proindè, 37. 7. aliquis primus metitur, neque, 3. *corol*. 12. 9. is alius esse poterit, quàm ipse A. Cùm igitur FG æqu., 9. *ax*. 7. ipsi A 3, cui æquatur A duct. in A 2,; erit, 19. 7. A ad F, ut G ad A 2, Et quoniam, *ut prius*, ipse A metitur numerum F; æquè 20. *def*. 7. etiam ipse G metietur numerum A 2, scilicet per eundem H: Neque, *corol*. 11. 9. is tamen erit ex data serie proportionalium: adeoque (ut jam modò ostensum est de E, de F, & de G) ipse H erit numerus compositus, eumque, 37. 7. proindè metitur aliquis primus, neque, 3. *corol*. 12. 9. is alius esse poterit quàm A. Itaque, quoniam GH æqu., 9. *ax* 7. ipsi A 2, cui æqu. A duct. in A; erit, 20. 7. A ad G, ut H ad A: atqui, *ut prius*, ipse A metitur ipsum G; ergo, 20. *def*. 7. numerus H metietur numerum A primum.

Q. E. A.

PRO-

PROPOSITIO XIV.

Minimum numerum (A) quem primi numeri (B , C , D) metiuntur , nullus alius primus præter datos metitur .

A 30.

B 2. C 3. D 5.

E. F.

Metiatur (si fieri potest) minimum A alius quispiam primus E per F , ergo E duct. in F æqu. ipsi A . Quoniam ergo B , C , D metiuntur ipsum A (EF); metientur , 32. 7. quoque alterutrum E , vel F: Non ipsum E , quippè qui (ex suppos.) primus est ; ergo reliquum F ; sed F minor est, quàm A , siquidem FE , *ut prius* , æqu. ipsi A ; ergo A non est minimus , quem B , C , D, metiuntur , *contra hyp.*

PROPOSITIO XV.

Si fuerint tres proportionales in sua ratione minimi (AA , AB , BB) ; duo quilibet compositi ad reliquum primi erunt .

A 3 B 4.

AA 9. AB 12. BB 16.

Sume , 35. 7. minimos A , B in ratione data. Quoniam . 24. 7. A ad B primus est ; erit , 30. 7. A pl. B primus ad singulos A , & B : ergo , 26. 7. numerus factus ex A ducto in A pl. B, nimirum AA pl. AB primus est ad B, adeòque , 27. 7. etiam

 ad

ad BB : & eadem ratione BB pl. AB primus eſt ad AA. Deindè, quoniam, 24. 7. A, & B primi ſunt, ac proindè, 30. 7. A, & B ad A pl. B primi ſunt; adeòque, 26. 7. AB primus eſt ad A pl. B; erit, 27. 7. etiam AB primus ad eum, qui fit ex A pl. B ductо in ſemetipſum, nimirum ad AA, pl. BB, pl. 2 AB : ac proindè (*ex 2. parte* 30. 7.) primus erit ad differentiam AA, pl. BB, pl. AB, atque demum (*ex eadem 2. parte* 30. 7.) erit ipſe AB primus ad differentiam AA pl. BB.

Q. E. D.

PROPOSITIO XVI.

SI duo numeri (A, B) primi inter ſe fuerint, non erit ut primus (A) ad ſecundum (B) ità ſecundus (B) ad alium quempiam (C).

A 3. B 5. C 4.

Sit enim (ſi fieri poſſit) A ad B, ut B ad C; ergo, cum, *hyp.* & 23. 7. A, & B in ſua ratione minimi ſint, idcircò, 21. 7. ipſe A metietur ipſum B æquè ac ipſe B ipſum C; atqui, 6. *ax.* 7. A ſeipſum metitur; ergo A, & B non ſunt inter ſe primi, *contra hyp.*

PROPOSITIO XVII.

SI fuerint quotcunque numeri deinceps proportionales (A, B, C, D) extremi autem ipſorum (A, D) primi inter ſe ſint; non erit, ut primus (A) ad ſecundum (B) ità ultimus (D) ad alium quempiam (E).

A 8.

A 8. B 12. C 18. D 27. E.

Sit (si fieri possit) A ad B, ut D ad E; ergo erit, *alternando*, A ad D, ut B ad E; quoniam autem, *hyp.* & 23. 7. A & D in sua ratione minimi sunt; idcircò, 21. 7. ipse A metietur ipsum B, adeòque, 20. *def.* 7. ipse B ipsum C, & hic sequentem D metietur, ac proindè, 11. *ax.* 7. idem A metietur ipsum D: ergo A, & D non sunt inter se primi, *contra hyp.*

PROPOSITIO XVIII.

D*Vobus numeris datis (A, B) considerare, possit nè ipsis tertius proportionalis inveniri.*

A 4. B 6. C 9.

Bq. 36.

Si A metiatur Bq. per aliquem C; erit, 9. *ax.* 7. AC æquale ipsi Bq. (BB); adeòque 20. 7. erit A ad B, ut B ad C; ergo C erit tertius proportionalis. Q. E. F.

Sin verò A non metiatur ipsum Bq. non erit aliquis tertius proportionalis: Sit enim (si fieri potest) A ad B, ut B ad C; ergo, 20. 7. AC æqu. ipsi BB; ac proindè, 7. *ax.* 7. BB divisus per A dabit ipsum C; adeòque A metiretur ipsum BB *contra hyp.*

PROPOSITIO XIX.

T*Ribus numeris datis (A, B, C) considerare possit nè ipsis quartus proportionalis inveniri.*

 A 8.

A 8. B 12. C 18. D 27.
BC 216.

Si A metiatur ipſum BC per aliquem D; erit, 9. *ax.* 7. AD æqualis ipſi BC; adeòque 19. 7. erit A ad B, ut C ad D: ergo D erit quartus proportionalis. Q. E. F.

Sin A non metitur ipſum BC, non datur quartus proportionalis: quod oſtendetur, ut in præcedenti.

PROPOSITIO XX.

Primi numeri plures ſunt omni propoſita multitudine primorum numerorum (*A*, *B*, *C*.)

A 2. B 3. C 5.
D 30.
G.

Inveniatur, 38. 7. D minimus, quem A,B,C metiuntur; ſi jam D pl. 1. primus ſit, res patet: Si Compoſitus; ergo, 33. 7. aliquis primus puta G metitur ipſos D pl. 1. nec tamen is eſt aliquis ex tribus A, B, C; nam aliàs ipſe G, metiens, *ſupp.* ipſum totum D pl. 1. & *conſtr.* ipſum D ablatum (ſi nempè G idem eſſet ac A, vel B, vel C); metietur, 12. *ax.* 7. quoque unitatem reſiduam. Q. E. A. Ergo propoſitorum primorum numerorum multitudo aucta eſt per D pl. 1. vel ſaltem per G; adeòque primi numeri, &c.

Q. E. D.

PRO-

PROPOSITIO XXI.

S*I pares numeri (AB , BC , CD) componantur totus compositus (AD) erit par .*
vide fig. in Tab.

Sumantur , 6. *def.* 7. EB dimidius ipsius AB , & FC dimidius ipsius BC , & GD dimidius ipsius CD ; erit 12. 7. EB pl. FC pl. GD dimidius ipsius AD ; adeòque, 6. *ax.* 7. AD par erit . Q.E.D.

PROPOSITIO XXII.

I*Mpares numeri quotcunque (AB , BC , CD, DE) si componantur ; multitudo autem ipsorum sit par ; totus (AE) par erit .* vide &c.

Detracta enim unitate ex singulis imparibus; manebunt , 7. *def.* 7. AF, BG, CH, DL numeri pares ; & proindè , 21. 9. Compositus ex ipsis erit par ; quibus si reddas parem numerum conflatum ex jam modo subtractis unitatibus ; totus , 21. 9. idcircò AE par erit . Q. E. D.

PROPOSITIO XXIII.

I*Mpares numeri quotcunque (AB , BC , CD) si componantur , multitudo autem ipsorum sit impar ; totus etiam AD impar erit.* vide , &c.

Nam dempto CD uno imparium , reliquorum , 22. 9. aggregatum AC erit par numerus ; cui si addideris numerum CD , dempta ipsi unitate;

tate; totus, 21. 9. etiam AE erit par; adeòque reſtituta demum unitate, totus, 7. *def.* 7. AD impar erit. Q. E. D.

PROPOSITIO XXIV.

SI à pari numero (AC) par (AB) detrahatur; reliquus etiam (BC) par erit. Vide.

Nam ſi BD, hoc eſt BC *minùs* 1. impar fuerit; erit, 7. *def.* 7. BC, hoc eſt BD pl. 1. par. Q. E. D.

Sin BD parem dixeris; propter AB, *hyp.* parem; erit, 21. 9. AD par; ideòque, 7. *def.* 7. AC, hoc eſt AD pl. 1. impar, contra *hyp.*

PROPOSITIO XXV.

A pari numero (AB) ſi impar (AC) detrahatur; reliquus etiam (BC) impar erit. vide &c.

Siquidem AD (AC min. 1.) 7. *def.* 7. eſt par: ergo, 24. 9. DB eſt par: adeòque, 7. *def.* 7. CB (DB min. 1. eſt impar. Q. E. D.

PROPOSITIO XXVI.

AB impari numero (AB) ſi impar (CB) detrahatur; reliquus (AC) impar erit. vide, &c.

Nam, 7. *def.* 7. AB min. 1. hoc eſt AD, & CB min. 1. hoc eſt CD ſunt pares: ergo, 24. 9.

AD

AD min. CD hoc eſt AC, eſt par. Q. E. D.

PROPOSITIO XXVII.

AB impari numero (AB) ſi par (CB) detrahatur; reliquus (AC) impar erit. vide, &c.

Nam, 7. *def.* 7. AB min. 1. hoc eſt DB, eſt par, & CB ponitur par; ergo, 24. 9. reliquus CD par eſt: adeòque 7. *ax.* 7. CD pl. 1. hoc eſt CA eſt impar. Q. E. D.

PROPOSITIO XXVIII.

IMpar numerus (A) ſi parem numerum (B) multiplicans, fecerit aliquem (AB) factus (AB) par erit. vide, &c.

Nam, *hyp.* & 15. *def.* 7. AB componitur ex impari A toties accepto, quoties unitas continetur in B pari: ergo, 21. 9. AB eſt par numerus. Q. E. D.

SCHOL. Eodem modo ſi A ſit numerus par, erit AB par.

PROPOSITIO XXIX.

IMpar numerus (A) ſi imparem numerum (B) multiplicans fecerit aliquem (AB); factus (AB) impar erit. vide &c.

Nam, 15. *def.* 7. AB componitur ex B impari numero toties accepto, quoties unitas continetur

netur in A etiam impari; ergo, 23.9. AB est impar. Q. E. D.

SCHOL. 1. Numerus impar 3., numerum 12. parem metiens, per numerum parem 4., eum metitur.

2. Numerus impar 3., numerum imparem 15. metiens, per numerum imparem 5. eum metitur.

3. Omnis numerus 3., vel 5, metiens numerum imparem, 15., est impar.

PROPOSITIO XXX.

Impar numerus (A) si parem numerum (B) metiatur; metietur etiam illius dimidium (D). vide, &c.

Metiatur ipse A ipsum B per C; ergo, 1. *Schol.* 19. 9. C est numerus par: Sit igitur E dimidius ipsius C; erit, *hyp.* & 9. *ax.* 7. B æqualis ipsi CA, cui æqu. *hyp.* 2 EA (quoniam enim C æqu. E pl. E; facta tam ipsius C, quàm ipsorum E pl. E multiplicatione per eundem numerum A, erit CA æqual. 2 EA) ergo 2 EA æqu. ipsi B, cui æqu. *hyp.* 2 D, adeòque EA æqu. ipsi D; ac proindè, 7. *ax.* 7. numerus A metitur ipsum D per E.

Q. E. D.

PROPOSITIO XXXI.

Si impar numerus (A) ad aliquem numerum (B) primus sit; & ad illius duplum (C) primus erit. vide, &c.

Si

Si fieri potest, aliquis D metiatur ipsos A, & C; ergo ipse D metiens imparem A, impar (3. *Schol.* 29. 9.) erit; adeòque, 30. 9. metietur etiam ipsum B semissem ipsius paris C: ergo A, & B non sunt primi inter se, *contra hyp.*

PROPOSITIO XXXII.

NUmerorum (A, B, C, D, &c.) à binario duplorum unusquisque pariter par est tantùm. vide, &c.

Siquidem constat, 6. *def.* 7. omnes A, B, C, D pares esse, imò, 20. *def.* 7. & proportionales, nimirum, *hyp.* in ratione dupla, & 11. 9. proindè ab unoquoque minori mensurari majorem per aliquem ex illis: Igitur, 8. *def.* 7. omnes sunt pariter pares: sed quoniam A primus est: idcircò, 13. 9. nullus extra eos aliquem eorum metietur. Ergo pariter pares sunt tantùm.

Q. E. D.

PROPOSITIO XXXIII.

SI numerus (A) dimidium (B) habeat imparem; (A) pariter impar est tantùm. vide, &c.

Quoniam enim impar numerus B metitur, *hyp.* ipsum A per 2. parem, erit, 9. *def.* 7. ipse B pariter impar: Quòd si pariter etiam parem illum dixeris; ergo, 8. *def.* 7. eum par aliquis D per parem E metitur: adeòque, 9. *ax.* 7. 2 B æqu. A

æqu.

æqu. DE; adeòque, 19. 7. erit 2 ad E, ut D ad B: atqui 16. *def.* 7. ipse 2, metitur parem E; ergo, 20. *def.* 7. ipse D par imparem B metitur.

Q. F. N.

PROPOSITIO XXXIV.

SI par numerus (A) neque à binario duplus sit, neque dimidium habeat imparem; pariter par est, & pariter impar. vide, &c.

Patet primò esse A pariter parem, quia dimidium imparem non habet: quoniam verò si A dividatur bifariam, & rursus ejus dimidium dividatur bifariam, & hoc semper fiat: tandem 7. *def.* 7. incidemus in aliquem imparem (non enim in binarium, nam A non ponitur duplus à binario); is ergo pariter impar metietur ipsum A per parem numerum: quippè aliàs, 1. *Schol.* 29. 9. ipse A impar esset *contra hyp.*): Ergo etiam ipse A est pariter impar. Q. E. D.

PROPOSITIO XXXV.

SI sint quotcunque numeri deinceps proportionales (MMM, MMN, MNN, NNN), detrahantur autem à secundo, & ab ultimo numeri, quorum quilibet æquetur ipsi primo; erit ut secundi excessus ad primum, ità ultimi excessus supra primum ad omnes antecedentes.

MMM,

MMM,	MMN,	MNN,	NNN
8.	12.	18.	27.
A,	B,	C,	D,
8.	4.	6.	9.

Quoniam ergo æquantur A pl. B, & MMN, uti & A, & MMM, sit C excessus numeri MNN supra MMN, & sit D excessus numeri NNN supra numerum MNN; Igitur, *hyp.* & 9. *ax.* 7.

Æqu. hæ Rationes { A pl. B pl. C pl. D ad A pl. B pl. C
A pl. B pl. C ad A pl. B
A pl. B ad A.

Ergo, *dividendo*,

Æqu. hæ Rationes { D ad A pl. B pl. C
C ad A pl. B
B ad A.

ergo, 12. 7. erit D pl. C pl. B, hoc est excessus ultimi supra primum ad A pl. B pl. C: pl. A pl. B: pl. A. hoc est ad MNN pl. MMN pl. MMM, ut B ad A. Q. E. D.

PROPOSITIO XXXVI.

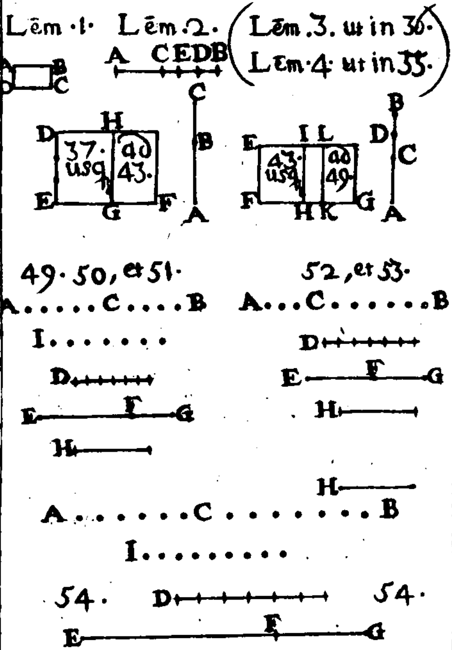
S*I ab unitate quotcunque numeri deinceps exponantur in proportione dupla, quo ad totus compositus (E) fiat primus, & totus hic in ultimum*

mum (D) multiplicatus faciat aliquem (Z); totus hic productus perfectus erit.

	1.	A,	B,	C,	D
		2,	4,	8,	16,
(Q)		E,	G	H	L (P)
		31.	62	124.	248.
			M,	Z	N
			31.	496.	465.

Sume totidem E, G, H, L etiam deinceps in proportione dupla; ergo, 14. 7. erit, *ex æquo ordin.* A ad D, ut E ad L; adeòque 19. 7. æquabuntur AL, & DE, sivè Z; ergo L metietur ipsum Z per A binarium; ac proindè omnes hi numeri E, G, H, L, Z sunt deinceps proportionales in rat. dupla. Sit autem M excessus numeri G supra E, &, sit N excessus numeri Z supra E; erit 35. 9. M ad E, ut N ad E pl. G pl. H pl. L: atqui, *hyp.* M idem est ac E; ergo N idem erit, ac E pl. G pl. H pl. L; adeòq; Z idem erit ac 1. pl. A. pl. B pl. C pl. D, pl. E pl. G pl. H, pl. L. qui idem sunt ac E pl. N. Quin etiam quia, 7. *ax.* 7. ipse D metitur ipsum DE, sivè Z; etiam, 11. *ax.* 7. singuli 1, A, B, C, metientes ipsum D, necnon propterea, 11. 9. ipsos E, G, H, L, metientur ipsum Z. Cæterùm nullus alius eundem Z metitur: Nam sit aliquis P, qui metiatur ipsum Z per Q; ergo, 9. *ax.* 7. æquabuntur PQ, & Z, seu DE; ergo, 19. 7. erit E ad Q ut P ad D; ergo, quia A primus metitur ipsum D, & proindè, 13. 9. nullus alius P eundem D metitur; neque, 20. *def.* 7. ipse E metietur ipsum Q. quarè, cùm E primus

1. (1.C
(2.C
(3.C
2.
3.
4.
5. (1
6. (
7. 8. et
10. et
Lem.
11.
12.
13. et 14
16.
17.



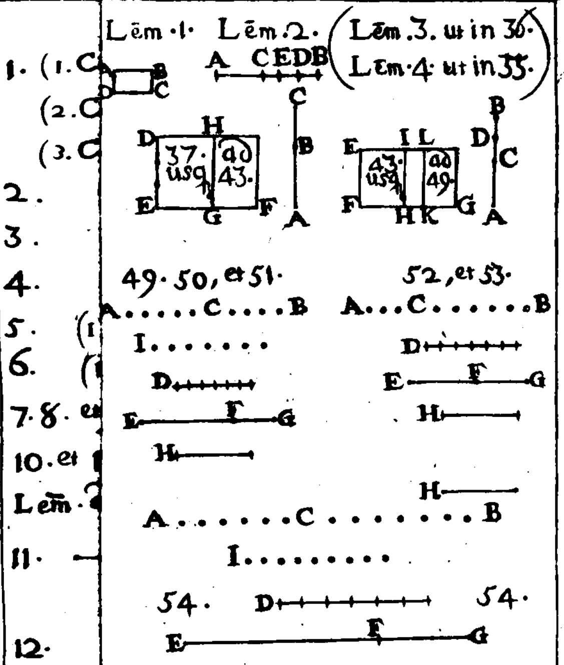
LAUS DEO.

F. DANIEL DANIELI CARM:
ASTORINI DISCIPULUS
DELINEAVIT, ET INCIDIT

mum (D) multiplicatus faciat aliquem (Z); totus hic productus perfectus erit.

1.	A,	B,	C,	D	
	2,	4,	8,	16,	
(Q)	E,	G	H	L	(P)
	31.	62	124.	248.	
		M,	Z	N	
		31.	496.	465.	

Sume totidem E, G, H, L etiam deinceps in proportione dupla; ergo, 14. 7. erit, *ex æquo ordin.* A ad D, ut E ad L; adeòque 19. 7. æquabuntur AL, & DE, sivè Z; ergo L metietur ipsum Z per A binarium; ac proindè omnes hi numeri E, G, H, L, Z sunt deinceps proportionales in rat. dupla. Sit autem M excessus numeri G supra E, &, sit N excessus numeri Z supra E; erit 35. 9. M ad E, ut N ad E pl. G pl. H pl. L: atqui, *hyp.* M idem est ac E; ergo N idem erit, ac E pl. G pl. H pl. L; adeòq; Z idem erit ac 1. pl. A. pl. B pl. C pl. D, pl. E pl. G pl. H, pl. L. qui idem sunt ac E pl. N. Quin etiam quia, 7. *ax.* 7. ipse D metitur ipsum DE, sivè Z; etiam, 11. *ax.* 7. singuli 1, A, B, C, metientes ipsum D, necnon propterea, 11. 9. ipsos E, G, H, L, metientur ipsum Z. Cæterùm nullus alius eundem Z metitur: Nam sit aliquis P, qui metiatur ipsum Z per Q; ergo, 9. *ax.* 7. æquabuntur PQ, & Z, seu DE; ergo, 19. 7. erit E ad Q ut P ad D; ergo, quia A primus metitur ipsum D, & proindè, 13. 9. nullus alius P eundem D metitur; neque, 20. *def.* 7, ipse E metietur ipsum Q. quarè, cùm E primus



LAUS DEO.

F. DANIEL DANIELI CARM:
ASTORINI DISCIPULUS
DELINEAVIT, ET INCIDIT

mus ponatur ; idem , 31.7. ad Q primus erit; adeòque, 23.7. E & Q in sua ratione sunt minimi; ergo, 21.7. E ipsum P æquè metitur ac ipse Q ipsum D; adeòque, 13.7. Q est aliquis ipsorum A, B, C. Sit igitur Q idem ac B; ergo, quoniam , *ex æquo ordin.* est B ad D, ut E ad H; ideòque, 19.7. æquantur BH & DE, sivè Z, sivè PQ; erit Q ad B, ut H ad P, atqui Q & B ponuntur æquales ; ergo etiam æquabuntur H, & P, adeòque P erit etiam aliquis ipsorum A, B, C &c. *contra hyp.* Ergo nullus alius præter numeros prædictos eundem Z metietur ; ac proindè , 22.*def.* 7, ipse Z est numerus perfectus.

Q. E. D.

LAUS DEO.

LIBER X.

DEFINITIONES.

1 Commenſurabiles magnitudines dicuntur, quas eadem menſura metitur.

2. Incommenſurabiles autem, quarum nullam communem menſuram contingit reperiri.

3. Rectæ lineæ potentia commenſurabiles ſunt, cum quadrata earum idem ſpatium metitur.

4. Incommenſurabiles autem, cum quadratis earum nullum ſpatium, quod ſit communis eorum menſura contingit reperiri.

5. His poſitis, oſtenditur, cuicunque rectæ lineæ propoſitæ rectas lineas multitudine infinitas, & commenſurabiles eſſe, & incommenſurabiles: alias quidem lôngitudine, & potentia; alias verò potentia ſolùm. Vocetur autem propoſita recta linea, Rationalis.

6. Et huic commenſurabiles ſivè longitudine, & po-

& potentia, sivè potentia tantùm, Rationales.

7. Huic verò incommensurabiles, Irrationales vocentur.

8. Et quadratum, quod à proposita recta fit, dicatur Rationale.

9. Et huic commensurabilia quidem, Rationalia.

10. Huic verò incommensurabilia, Irrationalia dicantur.

11. Et rectæ, quæ ipsa possunt, Irrationales: si quidem ea quadrata sint, ipsa latera; si verò alia quæpiam rectilinea, rectæ, quæ spatijs incommensurabilibus æqualia quadrata describunt.

POSTULATUM, sivè PETITIO.

POstuletur, quamlibet magnitudinem toties posse multiplicari, donec quamlibet magnitudinem ejusdem generis excedat.

AXIOMATA, sivè PRONUNCIATA.

1. MAgnitudo quotcunque magnitudines metiens, compositam quoque ex ipsis metitur.

2. Magnitudo quamcunque magnitudinem metiens, metitur quoque omnem magnitudinem,

quam illa metitur.

3. Magnitudo metiens totam magnitudinem, & ablatam, metitur, & reliquam.

DE COMMENSURABILIBUS, & INCOMMENSURABILIBUS, *in Genere.*

PROPOSITIO I.

Duabus magnitudinibus inæqualibus propositis (AB, & C), si à majori (AB) auferatur majus, quàm dimidium, & ab eo, quod reliquum est, rursus detrahatur majus, quàm dimidium, & hoc semper fiat; relinquetur tandem quædam magnitudo, quæ minor sit, quàm proposita minor magnitudo (C).

Datæ sint magnitudines AB, & C: Tum sume C toties, donec ejus multiplex Z proximè excedat datam AB; deindè resolve ipsam Z in partes suas, quarum, *constr.* cuilibet æquatur ipsa C: atque tum juxtà hypothesim, deme ex AB plusquam dimidium, & (si opus est) à residuo plusquam dimidium, atque ità deinceps, donec partes inæquales magnitudinis AB multitudine æquentur æqualibus partibus magnitudinis Z. Hinc infiniti sunt casus in hac propositione, prout nempè bis, vel ter, vel quater &c. sumpta ipsa C, proximè excesserit datam AB; tres tamen, & non plures exposuimus casus in apposito schemate, & in se-in sequenti demonstratione; Nimirum.

1. *Casus.* C æquatur, *constr.* dimidio Z, & hæc *hyp.* maj. est, quàm dimidium AB & hæc, *hyp.* maj. est, quàm DB; Ergo C major est, quàm DB,

2. *Casus.* C æquatur, *constr.* dimidio. Z, & hæc, *hyp.* maj. est, quàm dimidium. AB, & hæc, *hyp.* maj. est, quàm EB; ergo C maj. est, quàm EB.

3. *Casus.* C æquatur, *constr.* dimidio. Z, & hæc, *hyp.* maj. est, quàm dimidium AB, & hæc, *hyp.* major est, quàm FB; ergo C major est, quàm FB. Q. E. D.

SCHOL. Monet *Clavius*, duas magnitudines inæquales, in hoc Theoremate propositas, debere esse tales, ut minor multiplicata possit tandem majorem superare. Atque monet etiam *Dibuadius*, Euclidem in hoc Theoremate respexisse ad numeros surdos, quos non semper licet bifariam dividere.

PROPOSITIO II.

SI duabus magnitudinibus inæqualibus propositis (AB, CD) detrahatur semper minor (AB) de majori (CD) & residuum (FD) de minori (AB) alterna quadam detractione, atque ità deinceps, nec tamen reliqua præcedentem metiatur; incommensurabiles erunt ipsæ magnitudines datæ.

Habeant enim, si fieri potest, hæ magnitudines comm. mensuram E: Quoniam ergo AB detracta ex CD, quoties fieri potuit, reliquit, *hyp.* aliquam FD seipsa minorem, & FD detracta ex AB, reliquit GB seipsa minorem, & sic deinceps; tandem, 1. 10. relinquetur aliqua GB minor, quàm E. Magnitudo ergo E metiens, *f. hyp.* datam AB; metietur, 2. *ax.* 10. ipsam CF, quam metiebatur data AB: sed eadem E metitur, *f. hyp.* totam CD; ergo, 3. *ax.* 10. & reliquam FD metietur; ac proindè, 2. *ax.* 10. ipsam etiam AG, quippè quam, *hyp.* metitur ipsa FD: atqui, *ut prius*, eadem E metiebatur totam AB; ergo, 3. *ax.* 10. metietur reliquam GB, major minorem.

Q. E. A.

PROPOSITIO III.

Duabus magnitudinibus commensurabilibus datis (AB, CD); maximam earum communem mensuram reperire.

Deme, quoties potes, minorem AB ex majori CD, & reliquam ED ex AB, ut & reliquam FB ex ED, donec residua magnitudo FB præcedentem ED metiatur, hoc est donec facta quadam alterna subtractione, nullum supersit residuum: (nam id fiet, aliàs enim, 2. 10. AB, & CD essent incommensurabiles contra hypothesim) Dico, FB esse mensuram quæsitam.

Nam FB, *constr.* metitur ipsam ED, adeòque, 2. *ax.* 10. ipsam AF: sed & semetipsam metitur; ergo, 1. *ax.* 10. & totam AB; adeòque, 2. *ax.* 10. ipsam CE; sed metiebatur ipsam ED; ergo.

go, 1. *ax.* 10. & totam CD metietur; Erit igitur FB communis mensura datarum AB, CD.

Quod autem sit maxima; indè quidem patet, quia nempè si daretur alia comm. mensura G major, quàm FB; ergo G metiens datas AB, & CD, metietur, 2. *ax.* 10. & ipsam CE; ergo, 3. *ax.* 10. & reliquam ED; adeòque etiam, 2. *ax.* 10. ipsam AF: sed metiebatur totam AB; ergo, 3. *ax.* 10. & reliquam FB metietur, major minorem.

Q. E. A.

COROLL. Hinc magnitudo metiens duas magnitudines, metitur & maximam earum communem mensuram.

PROPOSITIO IV.

Tribus magnitudinibus commensurabilibus datis (A, B, C) maximam earum communem mensuram reperire.

Inveniatur, 3. 10. D maxima communis mensura duarum quarumcunque A, B: item, (si prima inventa D non metiatur tertiam datam C) reperiatur, 3. 10. E maxima comm. mensura ipsarum D, C; erit E mensura quæsita. Quoniam enim E metitur ipsas C, & D, atque D metitur duas alias A, & B; metietur proindè, *constr.* & 2. *ax.* 10. eadem E datas A, B, C.

Quod autem non detur alia mensura F major, quàm E; indè quidem patet, quia nempè si F metiretur ipsas A, & B; metiretur etiam, *cor.* 3. 10. maximam ipsarum mensuram D: quod si etiam metiatur tertiam C; metietur propterea, *cor.* 3. 10. earundem D, C maximam comm. mensuram E, major minorem. Q. E. A.

COROLL. Hinc quoque, magnitudo metiens tres magnitudines, metitur maximam earum comm. mensuram.

PROPOSITIO V.

Commensurabiles magnitudines (A, & B) inter se rationem habent, quam numerus ad numerum.

Inveniatur, 3. 10. C maxima mensura datarum A, & B, & metiatur reperta C datam A per 3. & datam B per 2. Ergo erit unitas ad 3. ut C ad A, & *invert.* erit 3. ad 1. ut A ad C: ità etiam erit 1. ad 2. ut C ad B; ergo erit, *ex æquo ordin.* A ad B, ut 3. ad 2. qui sunt, ut numerus ad numerum. Q. E. D.

PROPOSITIO VI.

Si duæ magnitudines (A, & B) inter se proportionem habeant, quam numerus ad numerum (5 ad 3); commensurabiles erunt ipsæ magnitudines (A, & B).

Quoties 1, continetur in numero 5; in tot æquales partes, (10. 6.) dividatur magnitudo A, itaut C sit pars ipsius A, qualis est 1, ipsius numeri 5. Quoniam igitur, *constr.* est C ad A, ut 1 ad 5: atque, *hyp.* est A ad B, ut 5, ad 3; erit, *ex æquo ordin.*

ordine C ad B, ut 1 ad 3. atqui (5. *ax.* 7.) 1, metitur numerum 3. Ergo etiam C metitur ipsam B: sed &, *constr.* metiebatur ipsam A; ergo (1. *def.* 10.) A, & B sunt commensurabiles.

Q. E. D.

PROPOSITIO VII.

IN commensurabiles magnitudines (A, & B) inter se proportionem non habent, quam numerus ad numerum.

Nam si dixeris, se habere A ad B, ut se habet numerus E ad numerum F; ergo, 6. 10. A, & B essent commensurabiles, contra hypothesim.

PROPOSITIO VIII.

SI duæ magnitudines (A, & B) inter se proportionem non habeant, quam numerus ad numerum; incommensurabiles erunt ipsæ magnitudines.

Nam si dixeris, A, & B esse commensurabiles; ergo, 5. 10. erit A ad B, ut numerus ad numerum, ut puta E ad F. contra hypoth.

PROPOSITIO IX.

QVæ à rectis lineis longitudine commensurabilibus fiunt Quadrata; inter se proportionem habent, quam quadratus numerus ad quadratum numerum: Et quadrata inter se ra-

tionem habentia, quam quadratus numerus ad quadratum numerum, latera habent longitudine commensurabilia. Quæ verò à rectis lineis longitudine incommensurabilibus fiunt quadrata; inter se proportionem non habent, quam quadratus numerus ad quadratum numerum. Et quadrata inter se proportionem non habentia, quam quadratus numerus ad quadratum numerum, neque latera habent longitudine commensurabilia.

1. *Hyp.* Si A & B sunt longitudine commensurabiles; dico fore Aq. ad Bq. ut quad. num. ad quad. num.

Quoniam enim est, *hyp.* & 5. 10. A ad B, ut num. ad num. v. g. ut E ad F; idcircò.

Æqu. hæ Rationes {
Aq. ad Bq. (20. 6.)
A ad B bis (*Hyp.*)
E ad F bis (11. 8.)
Eq. ad Fq. (*constr.*)
Num. quad. ad num. quad.

Q. E. D.

2. *Hyp.* Si sit Aq. ad Bq. ut num. quad. ad num. quad.; dico, A & B esse longitudine commensurabiles: Nam

Æqu. hæ Rationes {
A ad B bis (20. 6.)
Aq. ad Bq. (*Hyp.*)
Eq. ad Fq. (11. 8.)
E ad F bis.

ergo, 6. 10. A & B sunt longitudine commensurabiles. Q. E. D.

3. *Hyp.* Si A & B sunt longitudine incommensurabiles; dico, non fore Aq. ad Bq. ut num.

quad.

quad. ad num. quad. aliàs enim, *ut prius*, A & B essent longitudine commensurabiles, contra hyp.

4. *Hyp.* Si non sit Aq. ad Bq. ut num. quad. ad num. quad.; dico, A & B esse longitudine incommensurabiles; aliàs enim, *ut prius*, esset A ad B, ut num. ad numerum, contra hyp.

COROLL. Lineæ longitudine commensurabiles, sunt etiam potentiâ commensurabiles; sed non contra. Sed lineæ longitudine incommensurabiles non sunt idcircò potentiâ incommensurabiles. Lineæ verò potentiâ incommensurabiles sunt etiam longitudine incommensurabiles:

PROPOSITIO X.

SI quatuor magnitudines (A, B, C, D) proportionales fuerint; prima verò (A) secundæ (B) fuerit commensurabilis; erit etiam tertia quartæ commensurabilis: Et si prima secundæ fuerit incommensurabilis, ità etiam erit tertia quartæ.

Si A, & B erunt commensurabiles; ergo, 5. 10. erit numerus ad numerum, ut A ad B, quæ sunt, *hyp.* ut C ad D; adeòque, 6. 10. C, & D erunt sibi longit. commensurabiles. Sin A, & B sint sibi long. incommensurabiles, ergo, 7. 10. non erit num. ad num. ut A ad B, quæ sunt, *hyp.* ut C ad D; adeòque, 8. 10. C & D erunt sibi long. incommensurabiles. Q. E. D.

SCHOL. Quòd si quatuor propositæ magnitudines fuerint lineæ; prima verò secundæ,

vel

vel longitudine, vel tantùm potentiâ fuerit commensurabilis: erit pariter tertia quartæ, vel longitudine, vel potentiâ tantùm commensurabilis. Si verò duæ priores fuerint lineæ, reliquæ verò superficies, vel solida, & fuerint primæ longitudine sibi incommensurabiles, quamvis potentiâ sint commensurabiles; non erit earum proportio, quæ numeri ad numerum; igitur nec reliquarum eandem cum ipsis rationem habentium, proportio erit, quæ numeri ad numerum; quare & illæ incommensurabiles erunt.

LEMMA 1. *Duos numeros planos invenire, qui proportionem non habeant, quam quadratus numerus ad quadratum numerum.*

Huic lemmati satisfacient duo quilibet numeri plani non similes, vel duo quivis numeri primi.

2. *Invenire lineam (HR), ad quam data linea (KM) sit in ratione datorum numerorum (B, C).*

Reperiantur minimi termini 5, & 3, in data ratione B ad C: atque, 10. 6. divide datam KM in partes æquales æquè multas unitatibus numeri 5: quarum partium tot, quot sunt unitates in numero 3, componant rectam HR; liquet esse, *constr.* KM ad HR ut 5, ad 3, qui sunt, ut B ad C.

Q. E. F.

3. *Invenire lineam (D), ad cujus quadratum sit quadratum datæ rectæ (KM) ut numerus (B) ad numerum (C).*

Datis jam numeris B, C, atque datâ etiam linea neâ KM; fiat, 2. *lemm. præced.* ut B ad C, ità KM ad HR, inter quas, 13. 6. reperi mediam proportionalem D; dico factum; nam, *Coroll.* 20. 6. erit KMq. ad Dq. ut KM ad HR, quæ sunt, *constr.* ut B ad C. Q. E. F.

PROPOSITIO XI.

Invenire duas rectas lineas alicui propositæ rectæ lineæ (A) incommensurabiles, alteram quidem (D) longitudine, alteram verò (E) etiam potentiâ.

1. Sume, 1. *lemm. præc.* duos numeros non quadratos B, C, & data jam linea A, proindèque dato Aq. fiat, 3. *lemm. præc.* ut B ad C, ità Aq. ad Dq. Ergo, *ex quarta parte* 9. *huius*, A, & D sunt sibi longit. incommensurabiles: Quia tamen est, *constr.* Aq. ad Dq. ut B ad C; erunt A, & D potentia tantùm sibi commensurabiles.

Q. E. F.

2. Inventâ jam lineâ D, quæ sit ipsi A longit. tantùm incommensurabilis, reperiatur, 13. 6. inter datam A, & inventam D, media proportionalis E; Dico factum; siquidem, *cor.* 20. 6. est Aq. ad Eq. ut A ad D. atqui, *ut prius*, A, & D sunt sibi long. incommensurabiles, ergo, *Schol.* 10. 10. Aq. & Eq. erunt sibi incommensurabilia.

Q. E. F.

PRO-

PROPOSITIO XII.

QUæ eidem magnitudini (C) sunt commensurabiles (A, B) sunt etiam inter se commensurabiles.

Quoniam, *hyp.* A est commensurabilis ipsi C, & hæc ipsi B; erit, 5. 10. A ad C, ut numerus ad num. ut puta D ad E, & erit C ad B, ut num. ad num. ut puta F ad G. Sumantur jam, 4. 8. tres numeri H, I, K, minimi proportionales in rationibus D ad E, & F ad G; erit, *hyp. & constr.* A ad C, ut D ad E, quæ sunt, ut H ad I, atque erit C ad B, ut F ad G, quæ sunt, ut I ad K; adeòque hinc A, C, B, & illinc H, I, K sunt in proportione ordinata; ergo erit, *ex æquo ordin.* A ad B, ut numerus H ad numerum K, adeòque, 6. 10. A, & B sunt sibi commensurabiles. Q. E. D.

SCHOL. Hinc omnis recta linea rationali lineæ commensurabilis, est quoque rationalis. Et omnes rectæ Rationales sunt inter se commensurabiles saltèm potentia: Item omne spatium rationali spatio commensurabile, est quoque rationale, & omnia spatia rationalia, inter se commensurabilia sunt: Magnitudines verò, quarum altera est rationalis, altera irrationalis, sunt inter se incommensurabiles.

PRO-

PROPOSITIO XIII.

SI sint duæ magnitudines (A, & B) & altera quidem (A) cuipiam tertiæ (C) sit commensurabilis, altera verò (B) sit etiam tertiæ incommensurabilis; incommensurabiles erunt sibi mutuò prima (A) & secunda (B).

Quippè, si B & A essent sibi mutuò commensurabiles; quoniam, *hyp.* C commensurabilis est ipsi A, atque, f. *hyp.* B commensurabilis est eidem A; erunt, 12. 10. C & B sibi mutuò commensurabiles, *contra hyp.*

PROPOSITIO XIV.

SI sint duæ magnitudines commensurabiles (A, & B) & altera quidem (A) tertiæ cuipiam (C) incommensurabilis fuerit; reliqua etiam (B) eidem (C) incommensurabilis erit.

Nam, si dicantur B, & C sibi mutuò commensurabiles; Quoniam, *hyp.* B, commensurabilis est ipsi A, atque, f. *hyp.* B commensurabilis est ipsi C; erunt, 12. 10. A, & C sibi mutuò commensurabiles, *contra hyp.*

PROPOSITIO XV.

SI quatuor rectæ lineæ proportionales fuerint (B ad A, ut D ad C) prima verò (B) tanto plus possit supra secundam (A) quantùm est quadratum

dratum cujuspiam rectæ lineæ (E) sibi longitudine commensurabilis , & tertia (D) tanto plus possit , supra quartam (C) , quantùm est quadratum cujuspiam rectæ lineæ (F) ; Erit etiam hæc (F) longitudine commensurabilis ipsi tertiæ (D): Quòd si illæ (B, & E) sint sibi longitudine incommensurabiles ; etiam & istæ (D, & F) incommensurabiles sibi erunt longitudine .

Quoniam, *hyp.* est B ad A, ut D ad C; erit 22. 6. Bq. ad Aq. ut Dq. ad Cq. Igitur

Æqu: hæ Rationes ⎧ Aq. pl. Eq. ad Aq. (*hyp.* & 7. 5.)
⎨ Bq. ad Aq. (*hyp.* & 22. 6.)
⎨ Dq. ad Cq. (*hyp.* & 7. 5.
⎩ Cq. pl. Fq. ad Cq.

Ergo , *divid.* erit Eq. ad Aq. ut Fq. ad Cq. adeòque , 22. 6. erit E ad A, ut F ad C, & *invert.* A ad E, ut C ad F; sed , *hyp.* erat B ad A, ut D ad C; ergo, *ex æquo ordin.* erit B ad E, ut D ad F: ergo, si B sit commensurabilis , vel incommensurabilis ipsi E; erit , 10. 10. etiam D commensurabilis , vel incommensurabilis ipsi F. Q. E. D.

PROPOSITIO XVI.

SI duæ commens. magnitudines (AB , BC) componantur ; tota etiam magnitudo (AC) utrique ipsarum commensurabilis erit . Quòd si tota magnitudo (AC) uni ipsarum partium commensurabilis fuerit ; erunt etiam sibi mutuò commensurabiles ipsæ partes .

1. *Hyp.* Inveniatur , 3. 10. ipsarum AB, BC

com-

communis mensura D; Ergo D metiens ipsas AB, BC; metietur, 1. *ax.* 10. totam AC; ac proindè, 1. *def.* 10. AB, & AC, & BC commensurabiles sibi mutuò erunt.

2. *Hyp.* Inveniatur, 3. 10. ipsarum AC, AB comm. mensura D; ergo D metiens ipsas AC, & AB; metietur, 3. *ax.* 10. reliquam BC; ac proindè, 1. *def.* 10. AB, & AC erunt sibi commensurabiles. Q. E. D.

COROLL. Hinc si tota magnitudo ex duabus composita, commensurabilis sit alteri ipsarum; eadem & reliquæ commensurabilis erit.

PROPOSITIO XVII.

SI duæ magnitudines incommensurabiles (AB, BC) componantur; tota etiam magnitudo (AC) utrique ipsarum incommensurabilis erit. Quòd si tota magnitudo (AC) uni ipsarum (AB) incommensurabilis fuerit; incommensurabiles etiam erunt ipsæ partes.

1. *Hyp.* Sint, si f. p. AC, & AB commensurabiles; ergo, 16. 10. etiam erunt sibi commensurabiles AB, & BC, *contra hyp.*

2. *Hyp.* Sint, si f. p. AB, & BC commensurabiles; ergo, 16. 10. etiam erunt sibi commensurabiles AC, & AB, *contra hyp.*

COROLL. Hinc etiam si tota magnitudo ex duabus composita incommensurabilis sit alteri ipsarum; eadem & reliquæ erit incommensurabilis.

PRO-

PROPOSITIO XVIII. & XIX.

SI fuerint duæ rectæ lineæ inæquales (AB, GK), quartæ autem parti quadrati quod fit à minori (GK) æquale parallelogrammum (ADB) ad majorem (AB) applicetur, deficiens figurâ quadratâ. 1. Si parallelogrammum applicatum dividat majorem (AB) in partes AD, DB, longitudine inter se commensurabiles; ipsa major (AB) tantò plus poterit, quàm minor (GK) quantum est quadratum rectæ cujusdam lineæ (FD) sibi etiam longitudine commensurabilis. 2. Quòd si major (AB) tantò plus possit, quàm minor (GK) quantùm est quadratum rectæ lineæ (FD) sibi longitudine commensurabilis, quartæ autem parti quadrati, quod fit à minori (GK) æquale parallelogrammum (ADB) ad majorem (AB) applicetur, deficiens figurâ quadratâ; in partes (AD, DB) longitudine inter se commensurabiles ipsam (AB) dividet. 3. Sin verò applicatum parallelogrammum in partes (AD, DB) incommensurabiles, ipsam (AB) majorem dividat; tanto plus poterit major (AB) quàm minor (GK) quantùm est quadratum rectæ lineæ (FD) sibi longitudine incommensurabilis. 4. Quòd si major (AB) tanto plus possit quàm minor (GK) quantum est quadratum rectæ lineæ (FD) sibi longitudine incommensurabilis, quartæ autem parti quadrati, quod fit à minori (GK) æquale parallelogrammum (ADB) ad majorem (AB) applice-

plice-

plicetur deficiens figurâ quadratâ; in partes longitudine incommensurabiles (AD, DB) ipsam (AB) dividet.

Bisecetur GK in H; erit (4. 2.) GKq. æquale 4 GHq.: Tum super AB applicetur, 28. 6. rectangulum ADB æquale ipsi GHq. deficiensque figurâ quadratâ DBq.: Tum ex AD abscindatur AF æqualis ipsi DB, & concipiatur AB tanquam AD pl. AF. Ità ergo

$$\text{Æqu. hæc}\begin{cases}\text{ABq. (8. 2.)}\\ \text{4 DAF, pl. FDq. (\textit{constr.})}\\ \text{4 ADB, pl. FDq. (\textit{constr.})}\\ \text{4 GHq. pl. FDq. (4. 2.)}\\ \text{GKq. pl. FDq.}\end{cases}$$

Ergo FDq. est excessus, quo ABq. superat ipsum GKq. His præmissis;

Dico 1. (*juxtà primam hyp.* 18. *hujus*) Si AD, & DB sunt commensurabiles; fore etiam AB, & FD commensurabiles. Quoniam enim, *hyp.* AD, & DB sunt commensurabiles; erunt, 16. 10. AB, & DB commens. Ergo etiam AB, & 2 DB, hoc est AB, & AB, *minus* FD; adeòque, *cor.* 16. 10. etiam AB, & FD. Q. E. D.

Dico 2. (*juxtà secundam hyp.* 18. *hujus*) Si AB, & FD sunt commensurabiles; fore etiam AD, & DB commensurabiles: Quoniam enim AB, & FD sunt comm.; erunt, 16. 10. AB, & AB *minus* FD, hoc est AB, & 2 DB, commensurabiles; adeòque, 16. 10. AD, & DB erunt commensurabiles. Q. E. D.

Dico 3. (*juxtà primam hyp.* 19. *hujus*) Si

AD, & DB sunt incommensurabiles; fore etiã AB, & FD incommensurabiles: Quoniam enim AD, & DB sunt incomm.; erunt, 16. 10. etiam AB, & DB incomm. adeòque etiam AB, & 2 DB, hoc est AB, & AB, *minus* FD. adeòque, *cor.* 17. 10. etiam AB, & FD. Q. E. D.

Dico 4. (*juxtà secundam hyp.* 19. *hujus*) Si AB, & FD sunt incommens. fore etiam AD, & DB incommens. Quoniam enim AB, & FD sunt incomm. erunt, 17. 10. etiam AB, & AB *minus* FD, hoc est AB, & 2 DB incommens. adeòque, 17. 10. AD & DB erunt incommensurabiles.

Q. E. D.

DE RATIONALIBUS, & IRRATIONALIBUS. in Genere.

LEMMA TRia sunt genera linearum *Rationalium* inter se commensurabilium. Aut enim duarum linearum rationalium, longitudine inter se commensurabilium, altera æqualis est *Expositæ Rationali*: aut illi neutra æqualis est, longitudine tamen est utraque ipsi commensurabilis: aut denique utraque ipsi est potentiâ solùm commensurabilis. Atque hi sunt modi, quos innuit sequens Theorema.

PRO-

PROPOSITIO XX.

Quod sub rationalibus longitudine commensurabilibus rectis lineis (BC, CD) secundùm aliquem prædictorum modorum continetur rectangulum; RATIONALE est.

Exponatur A *Rationalis*, respectu cujus lineæ BC, CD rationales dicuntur, & describatur ex BC quadratum BE. Quoniam ergo, *hyp.* A est Rationalis: erit etiam, 8. *def.* 10. rationale ipsum Aq. Et quoniam BC, saltèm potentiâ, commensurabilis est ipsi A; erunt, 3. *def.* 10. commensurabilia BE, & Aq. Quoniam verò, 1. 6. est DC ad CE, hoc est ad CB, ut DB ad BE, & sunt, *hyp.* sibi mutuò commensurabiles DC & CE; erit etiam, 10. 10. ipsum DB commensurabile ipsi BE, quod, *ut prius*, est commensurabile ipsi Aq. adeòque, 12. 10. DB & Aq. sunt sibi mutuò commensurabilia, ac proindé, 9. *def.* 10. DB est *Rationale*. Q. E. D.

PROPOSITIO XXI.

Si Rationale (DB) ad Rationalem (DC) applicetur; longitudinem (CB) efficiet Rationalem, & ei (DC), ad quam applicatum est (DB), longitudine commensurabilem.

Exponatur G rationalis, respectu cujus linea DC rationalis dicitur, & ex DC fiat quadratum DA: Quoniam ergo, *hyp.* & 8. *def.* 10. ipsum Gq.

est Rationale, atque, *hyp.* & 3. *def.* 10. ipsi est commensurabile quadratum DA; erit, 9. *def.* 10. rationale ipsum DA: Quoniam verò, 1. 6. est BD ad DA, ut BC ad CA, atque, *ut prius*, & *hyp.* BD, & DA sunt rationalia, adeòque, 9. *def.* 10. commensurabilia ipsi Gq. ac propterea, 12. 10. inter se etiam commensurabilia; erunt pariter, 10. 10. commensurabiles sibi mutuò BC, & CA, hoc est DC, quæ, *hyp.* est rationalis; ergo, *Schol.* 12. 10. erit etiam rationalis ipsa CB.

Q. E. D.

LEMMA. Duas rectas rationales potentia solum commensurabiles invenire.

Sit A exposita rationalis, atque, 11. 10. sume lineam B, potentia tantùm commensurabilem ipsi A, & sume lineam C potentia tantùm commensurabilem ipsi B: quoniam ergo tam A, quàm C, sunt, *constr.* commensurabiles ipsi B; erunt, 12. 10. etiam ipsæ sibi mutuò commensurabiles; adeòque 6. *def.* 10. tam B, quàm C est Rationalis.

Q. E. F.

PROPOSITIO XXII.

Quòd sub Rationalibus potentiâ solùm commensurabilibus rectis lineis (DC, CB) continetur rectangulum (DB) est irrationale, & recta linea (H) ipsum potens, irrationalis est linea, quæ vocatur MEDIA.

Exposita rationalis sit A, & fiat quadratum DE, fiatque Hq. æquale ipsi DB: Quoniam ergo,

1. 6.

1. 6. est BC ad CE, hoc est CD, ut DB ad DE; atque, *hyp.* BC, & CE sunt sibi longit. incommensurabiles; erit, 10. 10. etiam DB, hoc est Hq. incommensurabile ipsi DE, quod, *hyp.* est commensurabile ipsi Aq. adeòque, 13. 10. Hq. & Aq. erunt sibi mutuò incommensurabilia, ac proindè, 10. *def.* 10. Hq. sivè BD est irrationale, atque idcircò, 11. *def.* 10. linea H est irrationalis. Q. E. D.

Vocetur autem hæc H ipsum BD potens MEDIA; Propterea quod 17. 6. est media proportionalis inter BC & CD rationales, potentia tantùm inter se commensurabiles: Vndè ejusmodi MEDIAM citò definiemus si dixerimus, eam esse *lineam irrationalem, quæ medio loco proportionalis est inter duas rationales potentia tantùm sibi mutuo commensurabiles.*

SCHOL. Atque hinc rationem reddit Campanus, cur ipsum idem Hq. dicatur *Medium*; quippè si tres lineæ sint continuè proportionales quales sunt BC, *Media* H, & CD; erunt quoque, 22. 6. rectilinea similia, cujusmodi sunt quadrata, super ipsas descripta, deinceps proportionalia, adeòque Hq. erit medium proportionale inter BCq. & CDq.: Itaque omne rectangulum, sub duabus rationalibus potentia tantùm commensurabilibus contentum, *Medium* est; At verò non omne spatium medium sub duabus rationalibus potentia solùm commensurabilibus continetur, siquidem potest spatium medium contineri sub duabus Irrationalibus, nempè Mediis, longitudine, vel potentia tantùm inter ſe commenſurabilibus; ut ex 25. & 26. hujus conſtabit. Vniversè tamen, ut rectè monet *Clavius*, omne ſpatium Medium æquale eſt alteri cuipiam Medio ſub duabus rationalibus potentiâ tantùm commenſurabilibus contento; nam aliàs recta ipſum potens non eſſet dicenda *Media* proportionalis inter duas Rationales potentia ſibi commenſurabiles.

PROPOSITIO XXIII.

Quod (BD) à media (A) fit, ad rationalem (BC) applicatum, latitudinem (CD) rationalem efficit, & ei (BC) ad quam applicatum eſt (BD), longitudine incommenſurabilem.

Quoniam A eſt media; erit, *Schol.* 22. 10. Aq. æquale alicui rectangulo EG contento ſub EF, & FG rationalibus potentia tantùm commenſurabilibus, adeòque longitudine incommenſurabilibus; ergo ſibi mutuò æquabuntur BD, & EG; ac proindè erit, 14. 6. BC ad EF, ut FG ad CD; adeòque etiam, 22. 6. erit BCq. ad EFq. ut FGq. ad CDq.: atqui ſibi mutuò ſunt commenſurabilia BCq. & EFq. (rectæ enim BC & EF ponuntur Rationales; adeòque inter ſe ſaltem potentia commenſurabiles): ergo, 10. 10. FGq. & CDq. ſunt ſibi commenſurabilia, ac proindè FG eſt commenſurabilis ſaltem potentia ipſi CD: atqui FG eſt Rationalis; ergo etiam, *Schol.* 12. 10. CD eſt Rationalis.

Cæte-

Cæterùm, quoniam eſt, 1. 6. EF ad FG, ut EFq. ad EG, hoc eſt ad BD: atqui ſunt, *hyp.* longitudine ſibi incommenſurabiles EF & FG; erunt etiam, 10. 10. ſibi mutuò incommenſurabilia EFq. & BD: atqui, *Schol.* 12. 10. idem EFq. eſt commenſurabile ipſi CDq. (ob id nempè quod EF & CD rationales ſunt, adeòque inter ſe potentia ſaltem commenſurabiles); ergo, 18. 10. BD erit incommenſurabile ipſi CDq.: Quoniam autem eſt, 1. 6. CDq. ad BD, ut CD ad BC: atque, *ut prius* CDq. eſt incommenſurabile ipſi BD; erit etiam, 10. 10. CD incommenſ. ipſi BC. Q. E. D.

SCHOL. Hinc faciliùs, quàm ex 45. 1. applicabimus ad BC rectangulum, quadrato ex A, æquale, ſi, 11. 6. ipſis BC, & A ſumatur tertia proportionalis pro latere CD; ſiquidem, 17. 6. æquabuntur BD, & Aq.

PROPOSITIO XXIV.

Mediæ (A) commenſurabilis (B) media eſt.

Ad CD expoſitam rationalem applicetur, *Schol.* 23. 10. rectangulum DE æquale ipſi Aq. & rectangulum DF æquale ipſi Bq. Quoniam ergo Aq. hoc eſt DE Medium eſt, & applicatum eſt rationali CD; erit, 23. 10. rationalis ipſa CE, & long. tantùm incommenſ. ipſi CD. Quia verò, 1. 6. eſt DE ad DF, ut CE ad CF, & DE, hoc eſt Aq. commenſurabile eſt ipſi DF, hoc eſt ipſi Bq.

 (po-

(ponuntur enim A, & B inter se commensurabiles); erit, 10. 10. etiam CE commensurabilis ipsi CF; atqui, *ut prius*, CE est rationalis; ergo, *Sch.* 12. 10. CF rationalis erit. Quoniam igitur, *ut prius*, CF commens. est ipsi CE, & hæc, *ut prius*, pot. tantùm est commens. ipsi CD; erit, 13. 10. CF potentia tantùm commens. ipsi CD; adeòque, 22. 10. rectangulum DF est irrationale, atque linea B ipsum potens est Irrationalis, quæ vocatur Media. Q. E. D.

COROLL. Hinc liquet, spatium spatio Medio commensurabile Medium esse.

PROPOSITIO XXV.

QVod (AD) sub mediis (AC, CD) longitudine commensurabilibus rectis lineis continetur rectangulum, Medium est.

Super DC fiat quadratum DB, quod erit Medium: & quoniam 1. 6. est AC ad CB, ut AD ad DB; sunt autem, *hyp.* AC, & CB, hoc est AC, & CD: sibi long. commens; erunt, 10. 10. etiam sibi commens. AD, & DB; ergo, *Coroll. præced.* AD est Medium. Q. E. D.

PROPOSITIO XXVI.

QVòd sub Mediis pot: tantùm commens: rectis lineis (AB, BC) continetur rectangulum (AC), vel rationale est, vel Medium.

Super datas AB, BC fiant quadrata AD, CE, atque

atque exponatur FG *rationalis* , cui nempè ſint datæ AB , BC commenſurabiles ; rationali verò expoſitæ applicetur FH æquale ipſi AD , & IK æquale ipſi AC, & LM æquale ipſi CE. Quoniam igitur , *hyp.* AB, & BC ſunt Mediæ , & ſibi pot. commenſ; erunt etiam Media , & ſibi mutuò commenſurabilia ipſarum quadrata AD, & CE, hoc eſt rectangula FH, & LM, ſed & applicata ſunt ad rationalem FG; Ergo , 23, 10. efficiunt rationales ipſas latitud. GH, & KM, atq; long. incommenſ. ipſi expoſitæ FG; atqui , 1. 6. eſt FH ad LM, ut GH ad KM ; ergo , quoniam , *ut prius*, FH, & LM ſunt ſibi commenſ; erunt , 10. 10. etiam ſibi commenſ. GH, & KM ; adeòque , 20. 10. GH duct. in KM, rationale erit . Tum verò

Æqu. hæ Rationes
- GH ad KH (1. 6.)
- FH ad IK (7. 5.)
- AD ad AC (1. 6.)
- BD ad BC (7. 5.)
- AB ad BE (1. 6.)
- AC ad CE (7. 5.)
- IK ad LM (1. 6.)
- HK ad KM

Ergo , 11. 5. eſt GH ad HK , ut HK ad KM; adeòque , 17. 6. GH duct. in KM, quòd , *ut prius*, Rationale eſt , æquatur ipſi HKq. adeòque HK eſt rationalis , atque proindè , 6. *def.* 10. vel long. vel ſaltem pot. commenſ. eſt ipſi expoſitæ FG, ſivè HI. Si longitudine ; Ergo , 20. 10. IK, hoc eſt AC rationale erit . Sin pot. tantùm ; Ergo , 22. 10. AC Medium erit ; adeòque; vel rationale vel Medium . Q. E. D. PRO-

PROPOSITIO XXVII.

M*Edium* (*AB*) *non superat medium* (*AC*) *rationali* (*DB*).

Sit enim, si f. p. DB rationale: atque ad expositam rationalem EF applicetur EG æquale ipsi AB, & applicetur EH æquale ipsi AC; ergo æquabuntur sibi mutuò reliqua DB, & HI. Erunt ergo EG, & EH Media, utpotè Mediis æqualia, atverò HI erit rationale; Ergo, 23. 10. FG, & FH erunt ration. & long. incomm. ipsi EF; adeòque 14. 10. FH, & HG erunt sibi long. incomm.: atqui, 1. 6. est FH ad HG, ut FHq. ad FHG; ergo, 10. 10. FHG est incomm. ipsi FHq. cui commens. est ipsum HGq. (nam FH, & HG sunt rationales) Ergo, 16. 10. FHq. pl. HGq. commens. est ipsi HGq. cui, *ut prius*, incomm. est ipsum FHG, cui commens. sunt 2 FHG; Ergo, 17. 10. FHq. pl. HGq. pl. 2 FHG, hoc est (4. 2.) totum FGq. incommens. est ipsi FHq. pl. HGq. Rationali; adeòque, 10. *def.* 10. FGq. erit Irrationale, ac proindè, 11. *def.* 10. recta FG erit irrationalis, quæ tamen, *ut prius*, ostensa est rationalis; adeòque simul erit rationalis, & irrationalis.

Q. E. A.

SCHOL. 1. *Rationale* (*AE*) *superat rationale* (*AD*) *rationali* (*CE*).

Nam, *hyp.* AD, & CE sunt sibi commens. ergo, *Corol.* 16. 10. AE, & CE sunt sibi commens. adeòque, *Schol.* 12. 10. CE est Rationale.

Q. E. D.

2. *Ra-*

2. *Rationale (AD) cum rationali (CE) facit rationale (AE).*

Nam, *Hyp.* AD, & CE ſunt ſibi commenſ. ergo, 16. 10. AE, & AD erunt ſibi commenſ.; adeòque, *Schol.* 12. 10. AE eſt rationale.

Q. E. D.

LEMMATA. 1. *Invenire duos numeros planos ſibi ſimiles, vel diſſimiles.*

A	6.	C	12.
B	4.	D	8.
AB	24.	CD	96.

A	6.	C	5.
B	4.	D	8.
AB	24.	CD	40.

Sume quoſcunque quatuor numeros proportionales A ad B, ut C ad D; liquet AB, & CD eſſe ſimiles: quòd ſi non adſit laterum proportionalitas; erunt diſſimiles plani.

2. *Duos numeros quadratos (DEq. & CDq.) invenire, itàut compoſitus ex ipſis (CEq.) ſit etiam quadratus.*

Sume AD, DB nnmeros planos ſimiles (quorum ambo pares ſint, vel ambo impares) nimirùm AD 24. & DB 6. Horum ſumma AB eſt 30. differentia verò FD eſt 18, cujus ſemiſſis CD eſt 9. Habent verò plani ſimiles AD, DB unum medium proportionalem DE, hoc eſt 12. adeòque CE, CD, DE ſunt rationales numeri. Eſt ergo,

47. 1. CEq. æquale ipsis CDq. pl. DEq. Nimirùm quadratus numerus 225. cujus radix est CE, ideſt 15. æquabitur ipsis numeris quadratis 81. pl. 144. Q. E. F.

3. *Atque hinc facile erit invenire duos numeros quadratos, quorum exceſſus ſit quadratus; vel non quadratus; Nempè ex eadem conſtructione, erit CEq. minùs CDq. æquale ipſi DEq.*

Quòd ſi AD, & DB ſint numeri plani diſſimiles, non erit DE, media proportionalis, numerus rationalis; proindèque quadratorum exceſſus non erit numerus quadratus.

4. *Duos numeros quadratos (B, C) invenire, itaut compoſitus ex ipſis (D) non ſit quadratus.*

A 3. B 9. C 36. D 45.

Sume numerum quemlibet quadratum B, ſitque C æqualis 4. B, & ſit D æqualis ipſis B pl. C. Dico factum: Nam, *conſtr.* B eſt quadratus; atqui *conſtr.* eſt B ad C, ut 1 ad 4. nempè ut quadratus ad quadr. Ergo, (24. 8.) C eſt etiam quadratus. Sed quoniam eſt B pl. C ad C, hoc eſt D ad C, ut 5 ad 4, qui non ſunt, ut num: quadr. ad quadr.; idcircò non erit D numerus quadratus.

Q. E. D.

5. *Quadratum numerum (A) dividere in duos numeros (B, C) non quadratos,*

A 36. B 24. C 12.
D 3. E 2. F 1.

Sit

Sit A numerus quivis quadratus. Accipe D, E. F. numeros planos dissimiles. Sitque D æqualis E pl. F. & fac. ut D ad E, ità A ad B, atque, ut D ad F ità A ad C; dico factum. Nam, *constr.* est D ad E, ut A ad B, atque D ad F, ut A ad C; ergo, *invert.* & 24. 5. *& invert.* est D ad E pl. F, ut A ad B pl. C. atqui D, & E pl. F æquantur sibi mutuò; Ergo, 14. 5. æquabuntur sibi A, & B pl. C. Iam si dixeris B esse quadratum; ergo, 21. *def.* 7. A, & B, ac proindè, 26. 8. D, & E sunt numeri plani similes, contra, *hyp.* idemque absurdum sequetur, si C dicatur quadratus; adeòque B, C non sunt quadrati. Q. E. F.

INVENTIO LINEARUM,

Ex quarum compositione vel divisione oriuntur omnes Irrationales.

PROPOSITIO XXVIII.

INvenire Medias (C, D) potentia tantùm commensurabiles, quæ Rationale (CD) contineant.

Exponantur, *lemm. ad* 22. 10. duæ rationales A, B, potentia tantùm commensurabiles, & fiat, 13. 6. ut A ad C, ità C ad B, atque tum fiat, 12. 6. ut A ad B, ità C ad D; Dico factum.

Quoniam enim A, B, sunt Rationales pot. solùm commensf., erit, 22. 10. AB, Irrationale Medium; quod, quia, 17. 6. potest linea C; erit C, C, Media. Quoniam verò est, *constr.* A ad B, ut C, ad D, & A, B, sunt pot. tantùm commens., erunt quoque, 10. 10, C, D, pot. tantùm commens.: atqui, *ut prius*, C, Media est; ergo, 24. 10. etiam D, Media erit. Demum, quoniam, *constr.* & *invert*, est B, ad A, ut D, ad C; erit, *altern.* B, ad D, ut A, ad C, quæ sunt, *constr.* ut C, ad B; adeòque C ad B, ut B ad A; ergo, 17, 6. Bq. (quod, ut potè factum à rationali B, Rationale est) æquabitur ipsi CD; ac proindè Mediæ C, D, Rationale comprehendent. Q. E. F.

PROPOSITIO XXIX.

INvenire Medias (D, E) potentia tantùm commensurabiles, quæ Medium (DE) contineant.

Exponantur, *lemm.* ad 22. 10. tres rationales A, B, C, pot. tantùm commens. tum fiat, 13. 6. A ad D, ut D ad B, atque tum, 12. 6. fiat, ut B, ad C, ità D, ad E; Dico factum.

Nam, *constr.* & 22. 10. AB, est Irrationale Medium: atqui 17. 6. æquantur AB, & Dq. ergo D, Media est: Sed est, *constr.* B, ad C, ut D, ad E, atque, *constr.* B, C sunt rationales pot. tantùm commens. ergo, 10. 10. erunt etiam D, E pot. solùm commens. atqui *ut prius*, D est Media; ergo etiam, 24. 10. ipsa E media est. Demum, quoniam, *hyp.* & *invert.* est C ad B, ut E ad D; erit, *altern.* C ad E, ut B ad D; quæ sunt, *constr.* & *invert.* ut D ad A; ergo erit, 11. 5. D ad A, ut C

ad E;

ad E; adeòque, 16. 6. æquabuntur DE, & AC: atqui 22. 10. AC, utpotè contentum sub rationalibus pot. tantùm commenſ. eſt Irrationale Medium; ergò & DE, Medium erit.

Q. E. F.

PROPOSITIO XXX.

Invenire duas Rationales (AB, AF) potentia tantùm commenſurabiles, ita ut major (AB) plus poſſit, quam minor (AF) quadrato rectæ lineæ(BF)longitudine ſibi commenſurabilis.

Exponatur Rationalis AB, tum, 3. *lemm. ad Praxim hanc*, ſume CD, CE, numeros quadratos, ita ut CD, *minùs* CE, non ſit quadratus: tum, 3. *lemm.* ad 11. 10. fiat, ut CD ad DE, ità ABq. ad AFq. atque in circulo, cujus Diameter ſit AB aptetur AF, ducaturque BF; Dico factum.

Nam, *conſtr.* eſt ABq. ad AFq. ut CD ad CE; ergo, 6. 10. ABq. & AFq. ſunt ſibi mutuò commenſurabilia: ſed ABq. factum ex rationali, Rationale eſt; ergo etiam, *Schol.* 12. 10. AFq. eſt Rationale, ac proindè AF eſt Rationalis: Atqui ABq. ad AFq. eſt, *conſtr.* ut CD numerus quadratus ad CE non quadratum; ergo, 9. 10. AB, & AF ſunt longit. incommenſ. quamvis ſint pot. commenſ. & Rnles. Cæterùm, 31. 3. & 47. 1. ABq. æquatur ipſis AFq. pl. BFq. atqui, *conſtr.* eſt ABq. ad AFq. ut CD ad ED; ergo erit, *convert.* ABq. ad BFq. ut CD ad CE, nempè ut numerus quadratus ad quadratum: adeòque, 9. 10. AB, & BF, BF, ſunt ſibi longit. commenſurabiles.

Q. E. F.

PROPOSITIO XXXI.

Invenire duas Rationales (AB, AF) potentia tantùm commenſurabiles, ita ut major (AB) plus poſſit quam minor (AF) quadrato rectæ lineę (BF) ſibi longitudine incommenſurabilis.

Exponatur AB, Rationalis, tum, 4. *lemm. ad Praxim hanc*, ſume numeros CE, ED, quadratos, itaut ex ipſis compoſitus CD ſit non quadratus : fiatque in reliquis, ut in præcedenti ; Dico factum.

Quippè eadem erit hìc demonſtratio, quæ in præcedenti ; adeoque AB, AF erunt rationales, pot. ſolùm commenſ. Itemque erit, *convert.* ABq. ad BFq. ut CD ad ED: quoniam ergo CD eſt numerus non quadratus ; erunt proinde 9. 10. AB, BF, longit. ſibi incommenſurabiles :

Q. E. F.

PROPOSITIO XXXII.

Invenire duas Medias (C, D) potentia tantùm commenſurabiles, quæ Rationale (CD) contineant, ita ut major (C) plus poſſit quàm minor (D) quadratò rectæ lineæ, ſibi longitudine commenſurabilis.

Inveniantur, 30. 10. duæ Rationales A, B, pot. tantùm ſibi commenſurabiles, itaùt A major

plus

plus possit, quàm B minor, quadrato lineæ, long. sibi commens. fiatque, 13. 6. A ad C, ut C ad B, atque tum fiat, 12. 6. ut A ad B, ita C ad D; Dico factum.

Nam, *constr.* A, B, sunt rationales pot. tantùm commensurabiles; adeòque, 22. 10. AB Irrationale est, & recta C, quæ, *constr.* & 17. 6. ipsum potest, Media est: atqui, *constr.* est A ad B, ut C ad D, atque A, & B sunt sibi pot. tantùm commens. ergo etiam, 10. 10. C & D erunt sibi pot. tantùm commens.: atqui C, *ut prius*, Media est; ergo, 24. 10. etiam D Media erit. Deindè, quoniam, *constr.* & *invert.* est B ad A, ut D ad C, &, *altern.* B ad D, ut A ad C, quæ sunt *constr.* ut C ad B; ergo, 11. 5. erit C ad B, ut B ad D; adeòque, 17. 6. CD æquatur ipsi Bq. quòd, utpotè contentum sub B rationali, Rationale est; ergo etiam CD rationale erit. Demum, quoniam, *constr.* est A ad B, ut C ad D, atque potest A plusquam B, quadratô lineæ, long. sibi commens. poterit etiam, 15. 10. C plusquam D, quadratô lineæ, long. sibi commensurab. Q. E. F.

PROPOSITIO XXXIII.

INvenire duas Medias (D, E) potentia solùm commensurabiles, quæ Medium (DE) contineant, ita ut major (D) plus possit, quàm minor (E) quadratô rectæ lineæ sibi longitudine commensurabilis.

Inveniantur, 30. 10. duæ rationales A, C, pot. tantùm commenſ. itàut A plus poſſit, quàm C quadrato *li*neæ, ſibi long. commenſ: tum, *lemm.* ad 22. 10. inveniatur alia B, utrique A, & C pot. ſolùm commenſ. tum fiat, 13. 6. A ad D, ut D ad B, fiatque tandem, 12. 6. ut D ad B, ità C ad E; Dico factum.

Quoniam enim, *conſtr.* A, & C ſunt rationales, atque B commenſurabilis eſt pot. ipſis A, & C; erit, *Schol.* 12. 10. *B* rationalis: atqui A, & C ſunt, *conſtr.* pot. tantùm commenſurabiles, ergo 22. 10. AC, hoc eſt, *conſtr.* & 16. 6. Dq. erit Medium, ac proindè linea D media erit. Quia verò, *conſtr.* & *altern.* eſt A ad C, ut D ad E, atque, *ut prius*, A, & C ſunt pot. tantùm commenſ. erunt, 10. 10. etiam D, & E pot. tantùm commenſ. atqui, *ut prius*, D media eſt; ergo, 24. 10. etiam E media erit. Porrò quoniam, *ut prius*, B commenſurabilis eſt pot. ipſis A, & C rationalibus, adeòque, 22. 10. BC medium eſt; erit etiam medium ipſum DE, quippè cui, *conſtr.* & 16. 6. æquatur ipſum BC, (ſiquidem, *ut prius*, eſt A ad C, ut D ad E). Demum, quoniam, *ut prius*, eſt A ad C, ut D ad E, poteſt autem, *conſtr.* A pluſquam C quadrato lineæ ſibi long. commenſ., poterit etiam, 15. 10. D pluſquam E quadrato lineæ ſibi long. comm.. Q. E. F.

SCHOL.. Sin verò inveniendæ ſint duæ D, E pot. tantùm commenſ. quæ medium contineant, itaut D plus poſſit, quàm E quadrato lineæ long. ſibi *Incommenſurabilis*; reperiantur, 31, 10. A, & C rationales pot. tantùm commenſ. itaut A plus

poſſit

poſſit quàm C quadrato lineæ ſibi long. incomm. Atque tum, *lemm.* ad 22. 10. inveniatur alia B, utrique A, C, pot. tantùm commenſ. & de reliquo tam in conſtruendo, quàm in demonſtrando fiat, ut prius.

PROPOSITIO XXXIV.

I*Nvenire duas rectas lineas* (*AG*, *BG*) *potentia incommenſurabiles, quæ faciant compoſitum quidem ex ipſarum quadratis Rationale, rectangulum verò ſub ipſis contentum, Medium.*

Reperiantur, 31. 10. AB, CD rationales pot. tantùm commenſ. itaut AB plus poſſit quàm CD quadrato lineæ ſibi long. incomm. tum biſeca CD in E, & applica, 28. 6. ſuper AB rectang. AFB deficiens fig. FBq. tum ſuper AB diametrum fiat ſemicirculus, & erige perpendicul. FG, & ducantur AG, BG; Dico factum.

Quoniam enim, 8. & 16. 6. æquantur ſibi mutuò BAF, & AGq. uti, & ABF, & GBq; idcircò erit AGq. ad GBq., 7. 5. ut BAF ad ABF, quæ ſunt, 1. 6. ut AF ad FB: atqui, *conſtr.* & 19. 10. AF, & FB ſunt ſibi long. incommenſurabiles; ergo etiam, 10. 10. incommenſurabilia ſibi mutuò erunt AGq. & GBq. adeòque, 4. *def.* 10. AG, & GB ſunt ſibi pot. incommenſ. Quoniam verò ABq. quod, utpotè ex rationali AB, rationale eſt, æquatur, 31. 3. & 47. 1. ipſis AGq. plus GBq; idcircò Compoſitum AGq. pl. GBq. Rationale erit. Demum, quoniam, 31. 3. *atque* 8. & 17. 6. FGq.

æquatur ipsi AFB, cui, *constr.* æquatur ipsum CEq. ideò æquantur GF, & CE; adeòque rectangulum sub tota CD, & AB, (quod, *constr.* & 22. 10. Medium est) æquatur duobus rectangulis sub FG, & AB, hoc est, 8. & 16. 6. duobus rectangulis sub AG & GB; adeòque, *cor.* 24. 10. rectangulum sub AG, & GB medium est.

Q. E. F.

PROPOSITIO XXXV.

Invenire duas rectas lineas (AG GB) potentia incommensurabiles, quæ faciant compositum quidem ex ipsarum quadratis Medium, rectangulum verò, sub ipsis contentum, Rationale.

Reperi, 32. 10. duas Medias AB, CD pot. tantùm commensf. quæ Rationale contineant, ita ut AB plus possit, quàm CD, quadrato lineæ sibi long. incommensf. fiantque reliqua, ut in præcedenti; Dico factum.

Quippè erunt similiter, *ut prius*, AG, & GB potentia incommensf. Quinimò compositum AGq. pl. GBq. Medium erit, utpotè, 31. 3. & 47. 1. æquale ipsi ABq. quod, tanquam ex Media AB, medium est. Ità similiter ostendemus rectangulum sub AB, & CD, quod, ex *constr.* rationale est, duplum esse rectanguli sub AB, & FG. hoc est rectanguli sub AG, & GB; adeòque, & hoc Rationale esse.

Q. E. F.

PRO-

PROPOSITIO XXXVI.

Invenire duas rectas lineas (AG, GB) potentia incommensurabiles, quæ faciant, & Compositum ex ipsarum quadratis Medium, & rectangulum sub ipsis contentum, Medium, incommensurabileque composito ex ipsarum quadratis.

Reperiantur, 33. 10. duæ mediæ AB, CD, quæ Medium contineant, potentia tantùm commensurabiles, itàut AB plus possit, quàm CD quadrato lineæ sibi long. incomm. & reliqua fiant, ut in 34. *hujus*; Dico factum.

Quippè erunt similiter AG, GB potentia sibi incommensurabiles, similiterque, *ut prius*, compositum AGq. pl. GBq. Medium erit. Ità pariter ostendemus, rectangulum sub AB, CD, quod, ex *constr.* Medium est, duplum esse rectanguli sub AB, & FG, hoc est rectanguli sub AG, & GB; adeòque, & hoc Medium esse. Demum, quoniam *constr.* AB est long. incommens. ipsi CD, quæ, utpotè dupla ipsius CE, est ipsi long. commens. idcircò, 13. 10. AB, & CE erunt sibi long. incommens. atqui, *ut in* 34. *huj.* æquantur CE, & FG; Ergo

Æqu. hæ Rationes { AB ad CE (1. 2.)
ABq. ad AB ductum in CE (*ut prius*, & 7. 5.)
ABq. ad AB ductum in FG (*ut prius* & 7. 5.)
ABq. ad AG ductum in GB.

atqui, *ut prius*, AB, & CE ſunt ſibi long. incomm. Ergo, 13. 10. etiam ABq. incommenſurabile eſt rectangulo ſub AG, & GB.

Q. E. F.

SCHOL. *Invenire duas Medias longitudine, & potentia incommenſurabiles.*

Sume, *ut in præcedenti*, rectam AB quæ poſſit compoſitum AGq. pl. GBq. ſitque hoc compoſitum Medium, & rectangulum ſub AG, & GB ſit quoque medium, & incommenſ. ipſi AGq. pl. GBq. ſumaturque media proportionalis inter AG, & GB, nimirum linea potens hoc rectangulum; dico factum. Nam ſi linea potens compoſitum AGq. pl. GBq. eſſet commenſurabilis potentiâ lineæ potenti rectangulum ſub AG, & GB; eſſent ſibi commenſurabilia compoſitum ex quadratis, & rectangulum, contra *conſtr.* Ergo hæ duæ rectæ, potentes media, mediæ ſunt, & ſibi pot. incommenſ.

Q. E. F.

LEMMATA.

1. LEMMA (*ad* 39. *hujus*). Quod ſub linea rationali (AB) & irrationali (BC) continetur rectangulum (BD), eſt Irrationale.

Nam ſi eſſet rationale, faceret, 21. 10. ad rationalem AB applicatum, latitudinem BC rationalem, *contr. hyp.*.

2. LEMM. (*ad* 43. *hujus*). Si recta (AB) ſecetur æqualiter (in C) & inæqualiter (in D) atque tum aliter dividatur inæqualiter (in E) propiùs puncto biſectionis; Dico

Dico 1. AEB majus esse, quàm ADB. Nam, 5. 2. AEB æquatur ipsi CBq. *minùs* CEq. sicuti ADB æquatur ipsi CBq. *minùs* CDq. atqui CDq. majus est, quàm CEq. Ergo AEB majus est, quàm ADB. Q. E. D.

Dico 2. Esse ADq. pl. DBq. majus, quàm AEq. pl. EBq. Nam, 4. 2. compositum ADq. pl. DBq. pl. 2 ADB æquatur ipsi ABq. Cui æquatur compositum AEq. pl. EBq. pl. 2 AEB. atqui, *ut prius*, 2 AEB maj. sunt, quàm 2 ADB. Ergo compositum ADq. pl. DBq. majus est quàm AEq. pl. EBq. Q. E. D.

Dico 3. Excessum quo Compositum ADq. pl. DBq. superat Compositum AEq. pl. EBq. æquari excessui, quo duo AEB superant 2 ADB. quæ quidem patent ex 4. 2.

3. LEMMA (*ad proximè sequens lemma*) vide figur. prop. præcedentis.

Si recta linea (AB) secta sit utcunque (in F) rectangulum sub partibus conten tum est medium proportionale inter earum quadrata. Item rectangulum sub tota, & una parte, est medium proportionale inter quadratum totius, & quadratum ejusdem partis.

Nam, 8. & 4. 6. est AF ad FG, ut FG ad FB; Ergo, 22. 6. est AFq. ad FGq. ut FGq. ad FBq. hoc est, 17. 6. & 7. 5. erit ABq. ad BAF. ut BAF. ad AFq. Q. E. D.

4. LEMMA (*ad 55. hujus*).

Sit (AD) rectangulum, cujus unum la-

tus (AC) secetur inaequaliter (in E); bisectumque sit segmentum minus (EC in F) atque ad majus segmentum (AE) fiat rectangulum AGE aequale ipsi EFq. perque G, E, F, ducantur ad AB parallelae GH, EI, FK: Fiat autem quadratum LM aequale rectangulo AH, atque ad OMP productam fiat quadratum MN aequale rectangulo GI, rectaque LOS, LQT, NRS, NPT producantur.

Dico primò MS, MT esse rectangula: nam ob quadratorum angulos OMQ, RMP rectos; erit, *Schol.* 15. 1. QMR recta linea; ergo, 13. 1. anguli RMO, QMP recti sunt; adeoque pgrata, MS, & MT sunt rectangula.

2. Hinc, 2. *ax.* 1. LS, & LT aequantur, adeoque LN est quadratum.

3. Hinc etiam rectangula SM, MT, EK, FD aequalia sunt: Nam, quia AGE, *constr.* aequatur ipsi EFq, erit, 17. 6. AG ad EF, ut EF ad GE, adeoque, 1. 6. erit AH ad EK, ut EK ad GI, ac proindè, *constr.* & 7. 5. erit LM ad EK, ut EK ad MN: atqui, *lemm. praeced.* est LM ad SM, ut SM ad MN; ergo, 9. 5. EK, adeòque, 36. 1. ipsum FD, aequatur ipsi SM, cui, 43. 1. aequatur ipsum MT.

4. Hinc, 2. *ax.* 1. LN aequatur toti AD.

5. Hinc, quia EC bisecta est in F; erunt, 16. 10. EF, FC, EC sibi long. commensurabiles.

6. Hinc demum, si AE, & EC sint pot. sibi commens. & AE plus possit quàm EC quadrato

lineae

lineæ sibi long. commensurabilis; erunt AG, GE, AE sibi longitud. commens. quippè quartæ parti ipsius ECq. hoc est ipsi EFq. æquale pgrum AGE applicatum est, deficiens figura quadrata; adeoque, 18. 10. AG, & GE, ac proindè, 16. 10. AG, GE, AE sunt sibi long. commens. Quia verò est, 1. 6. AG ad GE, ut AH ad GI; erunt, 10. 10. etiam AH, & GI, hoc est LM, & MN sibi commensurabilia. Sin verò AE plus possit, quàm EC quadrato lineæ sibi long. incommens. ostendetur similiter ex 19. & 17. 10. AG, GE, & AE esse sibi long. incomm. atque LM, & MN esse sibi incommensurabilia,

GENESIS LINEARUM

IRRATIONALIUM

Per Compositionem.

PROPOSITIO XXXVII.

SI duæ rationales (AB, BC) potentia tantùm commensurabiles componantur; tota (AC) Irrationalis est, quæ vocatur Binomium.

Nam, 1. 6. est AB ad BC, ut ABC, ad BCq. atque, *hyp.* AB, & BC sunt sibi long. incommensurabiles; Ergo, 10. 10. etiam BCq. est incommensurabile ipsi ABC, adeoque, & duobus ABC: sed sunt aliàs, *hyp.* sibi commensurabilia ABq. & BCq. adeoque, 16. 10. ABq. pl. BCq. commensu-

rabile

rabile est ipsi BCq.; Ergo, 17. 10. ABq. pl. BCq. incommens. est toti ABq. pl. BCq. pl. 2 ABC, hoc est (4. 2.) ipsi ACq. atqui ABq. pl. BCq. rationale est, utpotè commens. ipsi ABq. rationali; Ergo, 10. *def.* 10. ACq. rationale erit; atque adeò recta AC erit Irrationalis.

Q. E. D.

PROPOSITIO XXXVIII.

SI duæ Mediæ (AB, BC) potentia tantùm commensurabiles componantur; quæ rationale contineant, tota (AC) Irrationalis est; Vocetur autem prima ex binis mediis, sivè prima Bimedialis.

Nam, 1. 6. est AB ad BC, ut ABC ad BCq. atque, *hyp.* AB, & BC sunt sibi long. incommensurabiles; ergo, 10. 10. etiam BCq. est incommensurabile ipsi ABC, adeoque, & duobus ABC: sed sunt aliàs, *hyp.* sibi commensurabilia ABq. & BCq. adeoque, 16. 10. ABq. pl. BCq. commensurabile est ipsi BCq. Ergo, 17. 10. totum ABq. pl. BCq. pl. 2 ABC, hoc est, 4. 2. ipsum ACq. incommens. est duobus ABC, adeoque, 13. 10. & uni ABC: atqui, *hyp.* ABC rationale est; ergo, 10. *def.* 10. ACq. irrationale erit; atque adeò recta AC erit irrationalis.

Q. E. D.

PRO-

PROPOSITIO XXXIX.

SI duæ Mediæ (AB, BC) potentia tantùm commensurabiles componantur, quæ medium contineant; tota (AC) Irrationalis est; Vocetur autem secunda Bimedialis.

Ad expositam rationalem DE applicetur rectangulum DF æquale ipsi ACq. & rectangulum DG æquale ipsis ABq. pl. BCq. erit, 4. 2. & 3. *ax.* 1. HF æquale 2 ABC. Quoniam ergo, *Hyp.* ABq. & BCq. sunt sibi commensurabilia; erit, 16. 10. ABq. commensurabile toti ABq. pl. BCq. hoc est ipsi DG; atqui ABq. *hyp.* medium est; ergo, 24. 10. DG medium erit: Ità etiam, quoniam, *hyp.* ABC Medium est; erit, 24. 10. etiam medium ejus duplum, nempè 2 ABC, hoc est, *ut prius*, HF. Quia ergo Media DG, & HF applicantur ad rationalem DE; idcircò, 23. 10. eorum latitudines EG, GF, erunt rationales; & long. incommens. ipsi DE. Rursus, quoniam, 1. 6. est AB ad BC, ut ABq. ad ABC: atque, *hyp.* AB, & BC sunt sibi long. incommensurabiles; erunt etiam, 10. 10. sibi incommensurabilia ABq. & ABC: atqui, *ut prius*, ABq. commens. est ipsi DG, uti & ABC ipsius duplo HF; ergo, 13. 10. incommensurabilia sibi erunt DG, & HF; adeoque etiam, 10. 10. EG, & GF; quippè, 1. 6. est DG ad HF, ut EG ad GF; Atqui, *ut prius*, EG, & GF, sunt rationales; ergo, 37. 10. tota EF Irrationalis est; adeoque, 1. *lemm. præced.* totum DF,

utpotè

utpotè contentum ſub rationali DE, & Irrationali EF eſt irrationale; ac proindè recta AC, ipſum potens, eſt Irrationalis. Q. E. D.

PROPOSITIO XXXX.

SI duæ rectæ lineæ (AB, BC) potentia incommenſurabiles componantur, quæ faciant compoſitum quidem ex ipſarum quadratis rationale, quod autem ſub ipſis continetur, Medium; tota recta (AC) Irrationalis eſt; Vocetur autem Major.

Quoniam, *hyp.* ABC medium eſt; ergo, *cor.* 24. 10. etiam ejus duplum, hoc eſt, 2 ABC medium erit, adeoque irrationale, atqui, *hyp.* ABq. pl. BCq. eſt rationale; Ergo, 10. *def.* 10. totum ABq. pl. BCq. incommenſ. eſt ipſis, 2 ABC; adeòque, 17. 10. totum compoſitum ABq. pl. BCq. pl. 2 ABC, hoc eſt, 4. 2. ipſum ACq. incommenſurabile eſt ipſi ABq. pl. BCq. quod, *ut priùs*, eſt rationale; ac proindè, 10. *def.* 10. ACq. eſt irrationale, adeoque recta AC ipſum potens eſt Irrationalis. Q. E. D.

PROPOSITIO XXXXI.

SI duæ rectæ lineæ (AB, BC) potentia incommenſurabiles componantur, quæ faciant compoſitum quidem ex ipſarum quadratis medium, quod autem ſub ipſis continetur, Rationale; tota recta linea (AC) Irrationalis erit; vocetur autem rationale, ac medium potens.

Nam,

Nam, ut priùs ostensum est, totum ABq. pl. CBq. quod, *hyp.* Medium est, ac proindè irrationale, incommensurabile est uni ABC, quod, *Hyp.* Rationale est; atqui, *hyp.* & 16.10. ABq. commens. est toti ABq. pl. BCq. quod, *ut priùs* incommens. est uni ABC, quod, 16. 1. commens. est duobus ABC, quæ, *hyp.* simul sumpta Rationale constituunt; Ergo, 17.10. & 11. *def.* 10. ACq. est Irrationale, adeoque AC Irrationalis erit.

PROPOSITIO XXXXII.

SI duæ rectæ lineæ (AB, BC) potentia incommensurabiles componantur, quæ faciant & compositum ex ipsarum quadratis Medium, & quod sub ipsis continetur, Medium, incommensurabileque composito ex quadratis ipsarum; tota recta linea (AC) Irrationalis est; Vocetur autem bina media potens.

Ad expositam rationalem DE applicetur rectangulum DF æquale ipsi ACq. & rectangulum DG æquale ipsis ABq. pl. BCq. erit, 4. 2. & 3. *ax.* 1. HF æquale 2 ABC. Quoniam ergo tam ABq. pl. BCq. hoc est DG, quàm 2 ABC, hoc est HF, Medium est; Si applicentur ad DE rationalem; facient, 23.10. latitudines EG, GF rationales, & long. incommensurabiles ipsi DE. Rursus, quoniam, *hyp.* DG est incommensurabile ipsi HF, & 1.6. est DG ad HF, ut EC ad GE; erunt, 10. 10. etiam EG, GF sibi longit. incommensurabiles, quæ tamen

sunt

sunt ostensæ rationales; adeoque sibi saltem pot. commensurabiles; Ergo, 37.10. tota EF est Irrationalis; adeoque, 1. *lem. præced.* rectangulum DF contentum sub rationali DE, & irrationali EF, est irrationale; adeoque ACq. quod ipsi DF æquatur, est irrationale, ac proindè recta AC, quæ ipsum potest, est Irrationalis. Q. E. D.

DE SECTIONE LINEARUM IRRATIONALIUM,

Genitarum per compositionem.

PROPOSITIO XXXXIII.

Binominum (AB) ad unum dumtaxat punctum dividitur in nomina.

Secetur, si fieri potest, Binomium AB tam in C, quàm in D: ergo utrobique secabitur inæqualiter; siquidem, 37.10. nomina AC, & CB sunt sibi long. incommensurabilia, sicuti & ipsa AD, DB: atqui, 4.2. totum ACq. pl. BCq. pl. 2 ACB æquatur ipsi ABq. cui æquatur totum ADq. pl. DBq. pl. 2 ADB; Ergo, 2. *lemm. præced.* excessus, quo quadrata ACq. pl. CBq. minora sunt quadratis ADq. pl. DBq. æquatur excessui, quo rectangula 2 ADB minora sunt, quàm 2 ACB: Quoniam verò quadratorum excessus rationalis est (nam, 37.10. ipsæ AC, CB, AD, DB rationales esse debent, adeoque & rationalia ipsa

ACq.

ACq. CBq. ADq. DBq. ac proindè etiam rationalia ipſa ACq. pl. CBq. & ADq. pl. DBq.: rationale verò ſuperat rationale rationali;) ergo etiam exceſſus rectangulorum eſſet rationalis; quod fieri nequit; ſiquidem, 37. 10. tam AC, & CB, quàm AB, & DB ſunt ſibi long. incommenſ. adeoqne, 22. 10. tam ACB, quàm ADB Medium eſt; Medium verò, 27. 10. non ſuperat medium rationali. Ergo Binomium ad unum dumtaxat punctum dividitur in nomina.

Q. E. D.

PROPOSITIO XXXXIV.

B*imedialis prima* (*AB*) *ad unum dumtaxat punctum* (*C*) *dividitur in nomina*.

Puta AB dividi in alia nomina AD, DB: Quoniam ergo, 38. 10. quadrata ACq. pl. CBq. uti & ADq. pl. DBq. ſunt media, & rectangula ACB, ADB, adeoque, & ipſorum dupla 2 ACB, 2 ADB ſunt rationalia, ac proindè eorum exceſſus eſt rationalis, atque, *ut priùs*, exceſſus quo 2 ADB minora ſunt, quàm 2 ACB, æquatur exceſſui, quo ACq. pl. CBq. minora ſunt, quàm ADq. pl. DBq. ergo eſſet etiam rationalis exceſſus quadratorum. Quod, 27. 10. fieri nequit. Ergo Bimedialis prima ad unum dumtaxat punctum, &c. Q. E. D.

PROPOSITIO XXXXV.

B*imedialis secunda (AB) ad unum dumtaxat punctum dividitur in nomina.*

Puta AB dividi in alia nomina AD, DB: atque ad expositam rationalem EF fiat rectangulum EG æquale toti ABq. & fiat EH æquale ipsi ACq. pl. CBq. atque tum fiat EK æquale ipsis ADq. pl. DBq. ergo, 4.2. æqabuntur 2 ACB, & IG, uti & 2 ADB, & LG. Quoniam ergo, 39. 10. ACq. & CBq. sunt media; erit, 16. & 24. 10. etiam Medium totum ACq. pl. CBq. hoc est EH; ergo, 23. 10. latitudo FH erit rationalis, & long. incommensurabilis ipsi EF; Ita etiam, 39. 10. rectangulum ACB medium est, adeoque, 24. 10. medium etiam est ejus duplum, nempè 2 ACB, hoc est IG, ac proindè, 23. 10. ipsa etiam HG est rationalis, & long. incommens. ipsi EF. Atqui, 1. 6. est EH ad IG, ut FH ad HG, atque EH, & IG sunt sibi incommensurabilia; (nam, 39. 10. AC, & CB sunt sibi long. incommens. atque, 1. 6. est AC ad CB, ut ACq. ad ACB, adeoque 10. 10. ACq. & ACB sunt sibi etiam incommensurabilia; at verò, 39. 10. AC, & CB sunt sibi saltem pot. commensurabiles, adeoque CBq. commensurabile est ipsi ACq. ac proindè, 16. 10. totum ACq. pl. CBq. commens. est uni ACq. cui, *ut priùs*, est incommens. ipsum ACB, adeoque etiam ipsius duplum, nempè 2 ACB; ac proindè ACq. pl. CBq. & 2 ACB, nimirum EH,

& IG

& IG sunt sibi incommensurabilia) Ergo, 10. 10. FH, & HG, quæ sunt ostensæ rationales, sunt sibi long. incommens. adeoque, 37. 10. FH. pl. HG, erit Binomium: similique ratione FK pl. KG erit Binomium. Quod, 43. 10. fieri nequit. Ergo Bimedialis secunda ad unum dumtaxat punctum, &c. Q. E. D.

PROPOSITIO XXXXVI.

Major (AB) ad unum dumtaxat punctum (C) dividitur in nomina.

Dividatur, si fieri potest, AB in alia nomina AD, DB: ergo, 40. 10. tam 2 ACB, quàm 2 ADB erunt media, atq; tam ACq. pl. CBq. quàm ADq. pl. DBq. erunt rationalia; adeoque, ut in 43. & 44. hujus ostensum est, excessus, quo 2 ADB majora sunt, quàm 2 ACB, erit rationalis: quod, 27. 10. fieri nequit.

PROPOSITIO XXXXVII.

Rationale, ac Medium potens (AB) ad unum dumtaxat punctum (C) dividitur in nomina.

Dic, in alia nomina AD, DB divisum esse; ergo, 41. 10. tam ADq. pl. DBq. quàm ACq. pl. CBq. sunt media, atque rectangula ACB, ADB sunt rationalia; æquatur verò, *ut priùs*, excessus rectangulorum excessui quadratorum; Ergo etiam quadratorum excessus esset rationalis: quod, 27. 10. fieri nequit.

Q PRO-

PROPOSITIO XXXXVIII.

Bina media potens (*AB*) *ad unum dumtaxat punctum* (*C*) *dividitur in nomina.*

Dividatur, si f. p. etiam in D: atque ad exp. rationalem EF fiat rectangulum EG æquale ipsi ABq. & fiat EH æquale ipsis ACq. pl. CBq. & fiat EK æquale ipsis ADq. pl. DBq. Quoniam ergo, 42. 10. ACq. pl. CBq. sive EH, est medium; erit, 23. 10. latitudo FH rationalis: item quia, 42. 10. 2 ACB, hoc est (4. 2. & 3. *ax.* 1.) IG est medium; erit, 23. 10. etiam HG rationalis: quia ergo, 42. 10. ACq. pl. CBq. & ACB sunt sibi incommensurabilia; erunt etiam sibi incommens. ACq. pl. CBq. & 2 ACB, hoc est, *constr.* EH, & IG: atqui, 1. 6. est EH ad IG, ut FH ad HG; ergo, 10. 10. etiam FH, & HG sibi incommensurabiles, quæ tamen sunt ostensæ rationales; ergo, 37. 10. FHG est Binomium, eodemque modo ostendetur, esse Binomium ipsum FKG, contra 43. hujus. Ergo bina media potens, &c.

Q. E. D.

DEFINITIONES

Secundæ.

Exposita Rationali, & quæ ex binis nominibus, divisa in nomina, cujus majus nomen plus possit quàm minus, quadrato rectæ lineæ sibi longitudine commensurabilis.

1. Si-

1. Siquidem majus nomen expositæ Rationali commensurabile sit longitudine; Vocetur tota ex binis nominibus prima.

2. Si verò minus nomen expositæ Rationali longitudine sit commensurabile; Vocetur ex binis nominibus secunda.

3. Quod si neutrum ipsorum nominum sit longitudine commensurabile expositæ Rationali; Vocetur ex binis nominibus tertia.

Rursus si majus nomen plus possit, quàm minus, quadrato rectæ lineæ sibi longitudine incommensurabilis.

4. Siquidem majus nomen expositæ Rationali commensurabile sit longitudine; Vocetur ex binis nominibus quarta.

5. Si verò minus nomen; Vocetur quinta.

6. Quòd si neutrum ipsorum nominum, Vocetur sexta.

INVENTIO BINOMIORUM

PROPOSITIO XXXXIX.

INvenire ex binis nominibus primam (*EG*).

Sume, 3. *lemm.* ad 28. 10. duos numeros quadratos AB, CB, quorum excessus AC non sit quadratus, & exponatur quæpiam D rationalis cui sumatur quæcunque long. commensurabilis, EF, quæ proindè, 6. *def.* 10. erit rationalis: Tum, 3, *lemm. ad* 11. 10. fiat ut AB, ad AC, ità EFq. ad

 FGq.

FGq.; dico, EG esse primum Binomium.

Nam, *constr.* & 6.10. EFq. & FGq. sunt sibi commensurabilia; ergo etiam ipsæ EF, & FG saltem pot. commens. erunt: atqui, *ut priùs*, EF est rationalis; ergo & FG rationalis erit. Quia verò, *constr.* est EFq. ad FGq. ut AB ad AC, quæ non sunt, ut num. quadr. ad quadr.; ideò, 9. 10. ipsæ EF, FG, quæ sunt ostensæ rationales, sunt sibi long. incommensurabiles; adeoque, 37. 10. tota EG est Binomium. Dico autem, eam esse primam ex Binomiis; Quoniam enim, *constr.* est AB ad AC, ut EFq. ad FGq. & AB major est, quàm AC; erit etiam, 14.5. EFq. majus quàm FGq., ut puta quadrato lineæ H. Sed quia est AB ad AC, ut EFq. ad FGq., erit, *convert.* EFq. ad Hq., ut AB ad CB, num. quadr. ad quadr.; ergo, 9. 10. EF, & H sunt sibi long. commensurabiles: atqui, *ut priùs*, EF majus Binomii nomen, est long. commensurabile expositæ rationali D; ergo, 1. *def. ex secundis*, EG est primum Binomium. Q. E. F.

PROPOSITIO L.

INvenire (EG) *secundam ex binis nominibus.*

Sume, 3. *lemm. ad* 28. 10. duos numeros quadratos AB, CB, quorum excessus AC non sit quadratus, & exponatur quæpiam D rationalis, cui sumatur quæcunque long. commensnrabilis FG, quæ proindè, 6. *def.* 10. erit Rationalis: tum,

3. *lemm.*

3.*lemm. ad* 11.10. fiat, ut AC ad AB, ità FGq. ad EFq. Dico, EG esse secundum Binomium.

Nam, *constr.* & 6. 10. FGq. & EFq. sunt sibi commensurabilia, ergo etiam ipsæ FG, & EF saltem pot. commensurabiles erunt, atqui, *ut priùs*, FG est rationalis, ergo & EF rationalis erit. Quia verò, *constr.* est FGq. ad EFq. ut AC numerus non quadratus ad AB quadratum; ideò, 9. 10. ipsæ GF, & EF, quæ sunt ostensæ rationales, sunt sibi long. incommensurabiles; adeoque, 37. 10. tota EG est Binomium. Dico autem, eam esse secundum ex Binomiis: Quoniam enim, *constr. & invert.* est AB ad AC, ut EFq. ad FGq. & AB maj. est, quam AC; erit etiam, 14. 5. EFq. majus quàm FGq. ut puta quadrato lineæ H. Sed quia est, *ut priùs*, AB ad AC, ut EFq. ad FGq. erit, *convert.* EFq. ad Hq. ut AB ad CB, numerus quadratus ad quadratum; Ergo, 9. 10. EF, & H sunt sibi long. commensurabiles: atqui, *ut ostendimus*, GF, minus Binomii nomen, est long. commens. expositæ rationali D; ergo, 2. *def. ex secundis*, EG est secundum Binomium.

Q. E. F.

PROPOSITIO LI.

I*Nvenire* (EG) *tertiam ex binis nominibus.*

Sume, 3. *lemm.* ad 28. 10. duos numeros quadratos AB, CB, quorum excessus AC non sit quadratus:tū ſumatur I numerus non quadratus,proximè major, quàm CB, nempè unitate, vel binario, & exponatur quæpiam D Rationalis, atque 3. *lemm.* ad 11. 10. fiat ut I ad AB, ità Dq. ad EFq. & ut AB, ad AC, ita EFq. ad GFq. Ergo. 6. 10. erunt ſibi commenſurabilia Dq. & EFq. & GFq. at verò, 9. 10. ipſæ lineæ D, & EF, uti & ipſæ EF, & FG erunt ſibi pot. tantùm commenſ. atqui EF, ut potè ipſi D expoſitæ Rationali commenſurabilis, eſt Rationalis; ergo etiam FG rationalis erit; adeòque, 37. 10. tota EG eſt Binomium. Dico autem, eam eſſe tertiam ex Binomiis. Nam, *conſtr.* eſt Dq. ad EFq. ut I ad AB, & EFq. ad GFq. ut AB ad AC; ergo eſt, *ex æquo ordin.* Dq. ad GFq. ut I ad AC, qui non ſunt ut num. quadr. ad quadr. adeoque, 9. 10. lineæ D, & GF ſunt ſibi long. incomm. Atqui, *ut prius*, eſt AB ad AC, ut EFq. ad GFq. & AB maj. eſt, quàm AC; ergo, 14. 5. EFq. maj. eſt, quàm GFq, utpotè quadrato lineæ H. Cæterùm, *ut prius*, eſt AB ad AC, ut EFq. ad GFq. ergo, eſt, *convert.* EFq. ad Hq. ut AB ad CB, num. quadr. ad quadr. Ergo, 9. 10. EF, & H ſunt ſibi long. comm. Atqui, *ut prius*, neutrum Binomii nominum EF, GF eſt long. comm. ipſi D; ergo, 3. *def. ex ſecundis*, EG eſt tertium Binomium.

Q. E. F.

PROPOSITIO LII.

I*Nvenire (EG) quartam ex binis nominibus.*

Su-

Sume, 5. *lemm.* ad 28. 10. quemvis numerum quadratum AB, quem divide in AC, CB non quadratos, & exponatur quæpiam D rationalis, cui ſumatur recta quæcunque longitudine commenſurabilis EF, quæ proindè, 6. *def.* 10. erit rationalis: tum, 3. *lemm. ad* 11. 10. fiat, ut AB ad AC, ità EFq. ad FGq. Dico, EG eſſe quartum Binomium.

Nam, retexendo ordinem præced. demonſtrationum, erit EFq. majus quàm FGq. ut puta quadrato lineæ H. atque ſimiliter, *convertendo*, erit EF, ad Hq. ut AB ad CB, qui, *conſtr.* non ſunt, ut num. quadr. ad quadr. adeoque, 9. 10. EF, & H ſunt ſibi long. incommenſurabiles: atqui, *conſtr.* EF, majus Binomii nomen, eſt long. commenſurabile expoſitæ rationali D; ergo, 4. *def.* 10. *ex ſecundis*, EG eſt quartum Binomium.

Q. E. F.

PROPOSITIO LIII.

INvenire (EG) quintam ex binis nominibus.

Sume, 5. *lemm. ad* 28. 10. quemvis numerum quadratum AB, cujus ſegmenta AC, CB non ſint numeri quadrati, & exponatur quæpiam D rationalis, cui ſumatur quæcunque long. commenſurabilis FG, quæ proindè, 6. *def.* 10. erit rationalis: tum, 3. *lemm. ad* 11. 10. fiat, ut AC ad AB, ità FGq. ad EFq. Dico, EG eſſe quintum Binomium.

Nam, ut in 50. hujus, oſtendetur, EG eſſe Binomium: ſed quia, *conſtr. & invert.* eſt AB ad AC, ut EFq. ad FGq. & AB major eſt, quàm AC; ergo, 14. 5. EFq. maj. eſt quàm FGq. ut puta quadrato lineæ H. Rurſus, quoniam, *ut prius*, eſt EFq. ad FGq. ut AB ad AC; ideò, *convert.* erit EFq. ad Hq. ut AB ad CB, qui non ſunt, ut num. quadr. ad quadr. adeoque, 9. 10. EF, & H, ſunt ſibi long. incommenſurabiles: atqui, *ut prius*, minus Binomii nomen FG eſt long. commenſurabile expoſitæ rationali D; ergo, 5. *def. ex ſecundis*, EG eſt quintum Binomium.

Q. E. F.

PROPOSITIO LIV.

I*Nvenire* (*EG*) *ſextam ex binis nominibus.*

Sume utcunque numeros AC, CB primos inter ſe, itaut compoſitus ex ipſis non ſit quadratus, tum ſume quemvis numerum I quadratum, & exponatur quæpiam D rationalis, atque, 3. *lem. ad* 11. 10. fiat, ut I ad AB, ità Dq. ad EFq. atque, ut AB ad AC, ità EFq. ad GFq. atque, ut factum eſt in 51. hujus; oſtendetur, totam EG eſſe Binomium: Dico autem, eam eſſe ſextam ex Binomiis; nam, *conſt.* eſt Dq. ad EFq. ut I ad AB & EFq. ad GFq. ut AB ad AC; ergo eſt, *ex æquo ordin.* Dq. ad GFq. ut I ad AC, qui non ſunt, ut num. quadr. ad quadr. adeoque, 9. 10. lineæ D, & GF ſunt ſibi longitud. incommenſurabirabiles: atqui, *ut prius*, est AB ad AC, ut EFq. ad GFq. & AB major est, quàm AC; ergo, 14. 5. EFq. majus est, quàm GFq. ut puta quadrato lineæ H. Porrò erat AB ad AC, ut EFq. ad GFq. ergo, *convert.* est EFq. ad Hq. ut AB ad CB, qui non sunt, ut num. quadr. ad quadr. Ergo, 9. 10. EF, & H sunt sibi long. incommensurabiles: atqui, *ut prius*, neutrum Binomii nominum EF, GF est long. commensurabile expositæ rationali D; Ergo, 6. *def. ex secundis*, EG est sextum Binomium. Q. E. F.

DE IRRATIONALIBUS,

Quæ possunt spatia contenta sub rationali, & singulis Binomiis.

PROPOSITIO LV.

SI spatium (AD) contineatur sub Rationali (AB) & primo Binomio (AE pl. EC); recta linea (OP) spatium potens, Irrationalis est, quæ vocatur Binomium.

Siquidem adhibito 5. *lemm. præced.* linea OP potest spatium AD, atque, *Hyp. & def. trium priorum Binomiorum*, AE plus potest quàm EC quadrato lineæ sibi long. commensurabilis, tam in hac propos. quàm in duabus sequentibus; ergo, *cit. lemm.* erunt AG, GE, AE sibi long. commensurabiles: atqui, *hyp. & 1. def. ex secundis*, AE est Rationalis long. commensurabilis Rationali

nali AB, ergo, *Schol.* 12. 10. AG & GE sunt Rationales, long. commensurabiles ipsi AB; adeoque, 20. 10. rectangula AH, & GI, hoc est OMq. & MPq. sunt Rationalia, ac proindè rectæ OM & MP sunt Rationales: atqui, *hyp.* & 37. 10. AE, & EC sunt sibi pot. tantùm commens.; ergo, *cit. lemm.* OM, & MP erunt sibi potentia tantùm commens.; adeoque OP est Binomium. Q. E. D.

PROPOSITIO LVI.

SI Spatium (AD) contineatur sub Rationali (AB) & secundo binomio (AE pl. EC); recta linea (OP) spatium potens, Irrationalis est, quæ vocatur Bimedialis prima.

Nam, adhibito eodem lemm. recta OP potest spatium AD, atque AG, GE, AE sunt sibi long. commensurabiles, at verò eadem AE est pot. tantùm commens. ipsi EC, quæ, *hyp.* & 2. *def. ex secundis*, est rationalis long. commensurabilis ipsi rationali AB; ergo, *Schol.* 12. 10. AG, & GE sunt rationales pot. tantùm commens. ipsi AB; adeoque, 22. 10. rectangula AH, GI, hoc est OMq. MPq. sunt media; ergo & rectæ OM, MP sunt mediæ: atqui, *hyp.* & 38. 10. AE, & EC sunt sibi pot. tantùm commens. ergo, *cit. lemm.* OM, & MP sunt etiam sibi pot. tantùm commensurabiles: Sed, & continent rationale (Nam EF est, long. comm. ipsi EC, cujus est dimidia, & EC, *ut prius*, est long. commens.

ratio-

rationali AB, adeoque, 20. 10. EK, hoc eſt SM ſivè OMP eſt rationale), ergo, 38. 10. OP eſt prima Bimedialis. Q. E. D.

PROPOSITIO LVII.

SI ſpatium (AD) contineatur ſub rationali (AB) & tertio Binomio (AE pl. EC); recta linea OP ſpatium potens, Irrationalis eſt, quæ vocatur Bimedialis ſecunda.

Nam, adhibito eodem lemm. recta OP poteſt ſpatium AD, atque AG, GE, AE ſunt ſibi long. commenſurabiles, at verò, *hyp. & 3. def. ex ſecundis*, eadem AE eſt pot. tantùm commenſ. ipſi AB rationali; ergo, *Schol.* 12. 10. AG, & GE ſunt rationales pot. tantùm commenſ. ipſi AB; adeoque, 22. 10. rectangula AH, GI, hoc eſt OMq. MPq. ſunt media; ergo & rectæ OM, MP ſunt mediæ: atqui, *Hyp. &* 39. 10. AE & EC ſunt pot. tantùm commenſ.; ergo, *cit. lemm.* OM, & MP ſunt etiam ſibi pot. tantùm commenſurabiles: ſed & medium continent (Nam EF eſt long. commenſ. ipſi EC cujus eſt dimidia, & EC, *hyp. & 3. def. ex ſecundis*, eſt pot. tantùm commenſ. rationali AB, adeòque, 22. 10. EK hoc eſt SM, ſivè OMP eſt medium); ergo, 39. 10. OP eſt ſecunda Bimedialis.

Q. E. D.

PRO-

PROPOSITIO LVIII.

SI spatium (AD) contineatur sub rationali (AB) & quarto binomio (AE pl. EC); recta linea OP spatium potens, Irrationalis est, quæ vocatur Major.

Quippè, adhibito eodem lemm. recta OP potest spatium AD, & quoniam, *hyp. & def. trium posteriorum Binom.*, tam hìc quàm in duabus sequentibus AE plus potest quàm EC quadrato lineæ sibi long. incommensurabilis; idcircò, *cit. lemm.* erunt AG, GE sibi long. incommensurabiles: atqui, 1.6. est AG ad GE, ut AH ad GI; ergo, 10.10. AH, & GI, hoc est OMq. & MPq. erunt sibi incommensurabilia, adeoque OM, & MP erunt sibi pot. incommens., atqui, *Hyp. & 4. def. ex secundis*, AE est rationalis long. commens. rationali AB; ergo, 20. 10. AI, hoc est OMq. pl. MPq. est rationale: sed & ipsæ OM, & MP continent medium (Nam EF est long. commens. ipsi EC rationali, cujus est dimidia, & EC, *hyp. & 4. def. ex secundis*, est pot. tantùm commens. rationali AB, adeoque, 22. 10. EK, hoc est SM, sivè OMP est medium) ergo, 40. 10. OP est Major. Q. E. D.

PROPOSITIO LIX.

SI spatium (AD) contineatur sub rationali (AB) & quinto binomio (AE pl. EC); recta

recta linea OP, spatium potens, Irrationalis est, quæ vocatur Rationale ac medium potens.

Siquidem, ut in præcedenti, recta OP potest spatium AD, & AG, GE sunt sibi long. incommens., atqui, 1. 6. est AG ad GE, ut AH ad GI, ergo, 10. 10. AH & GI, hoc est OMq. & MPq. sunt sibi incommens. adeoque OM, & MP sunt sibi pot. incommens. atqui, *hyp. & 5. def. ex secundis*, AE est rationalis long. incommens. ipsi AB; ergo, 22. 10. AI, hoc est OMq. pl. MPq. est medium: sed & ipsæ OM, & MP continent rationale (Nam EF est long. commens. ipsi EC, cujus est dimidia, & EC, *hyp. & 5. def. ex secundis*, est long. commens. rationali AB, adeoque, 20. 10. EK, hoc est SM, sivè OMP est rationale); ergo, 41. 10. OP est Irrationalis, quæ rationale, ac medium potest. Q. E. D.

PROPOSITIO LX.

SI spatium (AD) contineatur sub rationali (AB) & sexto binomio (AE pl. EC); recta linea (OP) spatium potens, Irrationalis est, quæ vocatur Binamedia potens.

Quippè, *ut prius*, recta OP potest spatium AD, atque AG, & GE sunt sibi long. incommens.: atqui, 1. 6. est AG ad GE, ut AH ad GI; ergo, 10. 10. AH, & GI, hoc est OMq. & MPq. erunt sibi incommensurabilia, adeoque OM, & MP erunt sibi pot. incommens.: atqui,

hyp.

hyp. & 6. def. ex secundis, AE est rationalis long. incommens. ipsi AB; ergo, 22. 10. AI, hoc est OMq. pl. MPq. est medium: sed & ipsæ OM, & MP continent medium (Nam EF est long. commens. ipsi EC cujus est dimidia, & EC, *hyp. & 6. def. ex secundis* est long. incommens. rationali AB, adeoque, 22. 10. EK, hoc est SM, sivè OMP est medium;) ergo, 42. 10. OP est Irrationalis, quæ bina media potest. Q. E. D.

LEMMA

Ad sex proximè sequentes.

Sit recta AB inæqualiter secta in C, sitque AC majus segmentum, & cuivis DE applicentur rectangula DF, DH, IK æqualia ipsis ABq. ACq. CBq. sitque LG bisecta æqualiter in M, ducaturque MN parallela ad GF.

Dico 1. Rectang. ACB, & LN, vel MF æquari sibi mutuò. Quoniam enim, 4. 2. ABq. æquatur toti ACq. pl. CBq. pl. 2 ACB, atque, *constr.* ACq. ipsi DH, uti & CBq. ipsi IK æquatur; æquabuntur, 3. *ax.* 1. etiam 2 ACB, & LF, adeoque unum ACB, & LN, quod, *constr.* ipsius LF est dimidium.

Dico 2. Majorem esse DL, quàm LG; nam DK, hoc est ACq. pl. CBq. majus est, quàm LF, sivè 2 ACB (siquidem secta AB æqualiter in Z; erunt, 2. *lemm.* ad 37. huj.

2 AZB

2 AZB majora quàm 2 ACB, atque ACq. pl. CBq. majora sunt, quàm 2 AZB, sivè quàm AZq. pl. ZBq.) Ergo, cùm sit, 1. 6. DK ad LF, ut DL ad LG; erit, 14. 5. DL major, quàm LG.

Dico 3. Si AC, & CB sint sibi pot. commens.: fore, 16. 10. ACq. & CBq. & DK, hoc est ACq. pl. CBq. sibi commensurabilia.

Dico 4. fore DL, & LG long. sibi incommens. Nam, 1. 6. est AC ad CB, ut ACq. ad ACB. Sed, *hyp.* AC, & CB sunt sibi longit. incomm., ergo erunt, 10. 10. etiam sibi incommens. ACq. & ACB: atqui, *hyp.* AC, & CB sunt sibi pot. commens. adeoque ACq. & CBq. sunt sibi commens. ac proindè, 16. 10. ACq. pl. CB est comm. ipsi ACq. cui, *ut prius*, est incomm. ipsum ACB, cui sunt commens. 2 ACB; ergo, 13. 10. ACq. pl. CBq. & 2 ACB, hoc est DK, & LF sunt sibi incomm. adeoque, 1. 6. & 10. 10., etiam DL, & LG.

Dico 5. DL maj. esse, quàm LG quadrato lineæ sibi long. commens. Nam, 1. 6. est ACq. ad ACB, ut ACB ad CBq. hoc est, 7. 5. DH ad LN, ut LN ad IK; hoc est, 1. 6. DI ad LM, ut LM ad IL; ergo, 17. 6. DIL, & LMq. æquantur: atqui, *hyp.* sunt sibi comm. ACq. & CBq. hoc est DH, & IK, ac proindè, 1. 6. & 10. 10. etiam DI, & IL; ergo, 18. 10. DL major erit, quàm LG quadrato lineæ sibi long. commens.

Sin AC, & CB ponantur sibi pot. incommens. ostendetur, 19. 10. DL maj. esse, quàm LG quadr. lineæ sibi long. incommens.

QUAS-

QUASNAM LATITUDINES

Efficiant quadrata primarum sex Irrationalium, applicata ad Rationale.

PROPOSITIO LXI.

QUadratum binomii (*AC pl. CB*) *ad rationalem* (*DE*) *applicatum, facit latitudinem* (*DG*) *primum Binomium.*

Nam, adhibito lemm. præced. Quoniam, *hyp.* & 37. 10. AC, & CB sunt rationales sibi pot. tantùm commens. erunt ACq. & CBq. rationalia, & sibi commensurabilia; adeoque, 16. 10. & *Schol.* 12. 10. totum ACq. pl. CBq. hoc est DK est rationale, atqui applicatum est ad rationalem DE, ergo, 21. 10. facit latitudinem DL rationalem, long. commens. ipsi DE: at verò, quoniam, *hyp.* & 37. 10. rectæ AC, & CB sunt sibi pot. tantùm commens.; idcircò, 22. 10. ACB, adeoque, 24. 10. ejus duplum, hoc est LF, medium erit, ac proindè, 23. 10. latitudo LG est rationalis pot. tantùm commens. ipsi DE, ergo, 13. 10. DL, & LG sunt sibi pot. tantùm commens. Demum, *hyp.* & 37. 10. AC, & CB sunt sibi pot. tantùm commens. Ergo, *cit. lemm.* DL plus potest quàm LG quadrato lineæ sibi long. commens.; ergo, 1. *def. ex secundis*, DG est primum binomium. Q. E. D.

PRO-

PROPOSITIO LXII.

Quadratum bimedialis primæ (AC pl. CB) ad rationalem (DE) applicatum , facit latitudinem (DG) secundum binomium .

Nam adhibito eodem lemm. Quoniam , *hyp.* & 38. 10. AC, & CB sunt mediæ pot. tantùm sibi commensf. idcircò ACq. & CBq. erunt sibi commensurabilia , atque media , adeoque , 16. 10. & *Corol.* 24. 10, ACq. pl. CBq. hoc est DK erit medium . atqui applicatum est ad rationalem DE: ergo , 23. 10. faciet latitudinem DL rationalem pot. tantùm commenf. ipsi DE : at verò quoniam rectæ AC, & CB, *hyp.* & 38. 10. continent rationale ACB; idcircò , *Schol.* 12. 10. ejus duplum, hoc est LF, erit rationale ; adeoque, 21. 10. latitudo LG est rationalis long. commenf. ipsi DE; ac proindè , 13. 10. DL , & LG erunt sibi pot. tantùm commenf. Demum , *hyp.* & 38. 10. AC, & CB sunt sibi pot. tantùm commenf. ; ergo, *cit. lemm.* DL plus poterit quàm LG quadrato lineæ sibi long. commenf. ; ergo , 2. *def. ex secundis* , DG est secundum Binomium.

Q. E. D.

PROPOSITIO LXIII.

Quadratum secundæ bimedialis(AC pl. CB) ad rationalem (DE) applicatum, faciet latitudinem (DG) tertium binomium .

R Quippè,

Quippè, *ut prius*; Quoniam, *hyp.* & 39. 10. AC, & CB sunt mediæ pot. tantùm sibi commens., idcircò ACq. & CBq. erunt sibi commensurabilia, atque media, adeoque, 16. 10., & *Corol.* 24. 10. ACq. pl. CBq. hoc est DK, erit medium; atqui applicatum est ad rationalem DE; ergo, 23. 10. faciet latitudinem DL rationalem potent. tantùm commens. ipsi DE: Rursus, quoniam, *hyp.* & 39. 10. AC, & CB continent medium ACB; idcircò, 16. 10. & *cor.* 24. 10. ejus duplum, hoc est LF, erit medium; adeoque, 23. 10. latitudo LG est rationalis, pot. tantùm commens. ipsi DE, ac proindè, 13. 10. DL, & LG erunt rationales pot. tantùm sibi commens. Demum, *hyp.* & 39. 10. AC, & CB sunt sibi pot. tantùm commens.; ergo, *cit. lemm.* DL plus potest quàm LG quadratô lineæ sibi long. commens.; ergo, 3. *def. ex secundis* DG est tertium binomium. Q. E. D.

PROPOSITIO LXIV.

Quadratum Majoris (AC pl. BC) ad rationalem (DE) applicatum, facit latitudinem (DG) quartum binomium.

Adhibito *cit. lemm.* Quoniam, *hyp.* & 40. 10. ACq. pl. CBq. hoc est DK, est rationale, atque applicatum est ad DE rationalem; idcircò, 21. 10. efficiet latitudinem DL rationalem, long. commensurabilem ipsi DE: At verò, quoniam, *hyp.* & 40. 10. AC, & CB continent medium

dium ACB; idcircò, 16. 10. & *Corol.* 24. 10. ejus duplum, hoc est LF, erit medium; ac proindè, 13. 10. DL, & LG erunt sibi pot. tantùm commens. Denique, *hyp.* & 40. 10. AC, & CB sunt sibi pot. incommens.; ergo, *cit. lemm.* DL plus potest quàm LG quadratô lineæ sibi long. incommens.; ergo, 4. *def. ex secundis*, DG est quartum binomium. Q. E. D.

PROPOSITIO XLV.

Quadratum ejus (AC pl. CB), quæ rationale, ac medium potest, ad rationalem (DE) applicatum, facit latitudinem (DG) quintum binomium.

Nam adhibito *cit. lemm.* Quoniam, *hyp.* & 41. 10. ACq. pl. CBq. hoc est DK, est medium, atque applicatum est ad DE rationalem; idcircò, 23. 10. efficiet latitudinem DL rationalem, pot. tantùm commens. ipsi DE: At verò, quoniam, *hyp.* & 41. 10. AC, & CB continent rationale ACB; idcircò, 16. 10., & *Schol.* 12. 10. ejus duplum, hoc est LF erit rationale; adeoque, 21. 10. latitudo LG erit rationalis, long. commens. ipsi DE; ac proindè, 13. 10. DL, & LG erunt sibi pot. tantùm commens.: Denique, *hyp.* & 41. 10. AC, & CB sunt sibi pot. incommens., ergo, *cit. lemm.* DL plus potest quàm LG quadratô lineæ sibi long. incommensurabilis; ergo, 5. *def. ex secundis*, DG est quintum binomium. Q. E. D.

PROPOSITIO LXVI.

Quadratum ejus (AC pl. CB), quæ bina media potest, ad rationalem (DE) applicatum, facit latitudinem (DG) sextum binomium.

Rursus, adhibito *cit. lemm.* Quoniam, *hyp.* & 41. 10. ACq. pl. CBq. hoc est DK, est medium, atque applicatum est ad rationalem DE; idcircò, 23. 10. efficiet latitudinem DL rationalem, pot. tantùm commensf. ipsi DE: Item, quoniam, *hyp.* & 42. 10. AC, & CB continent medium ACB; idcircò, 16. 10. & *Corol.* 24. 10. ejus duplum, hoc est LF, erit medium; adeoque, 23. 10. latitudo LC erit rationalis pot. tantùm commensf. ipsi DE, ac proindè DL, & LG erunt rationales, pot. tantùm sibi commensf. Denique, *Hyp.* & 42. 10. AC, & CB sunt sibi pot. incommensf.; ergo, *cit. lemm.* DL plus potest quàm LG quadratô lineæ sibi long. incommensurabilis; ergo, 6. *def. ex secund.* DG est sextum binomium.

Q. E. D.

IRRA-

IRRATIONALIBUS COMMENSURABILES

Sunt ejusdem tum ipsis naturæ, & ordinis.

PROPOSITIO LXVII.

B*Inomio (AC pl. CB) recta (DE) commensurabilis; & ipsa binomium est, atque ordine idem.*

Fiat, 12. 6. ut tota AB ad totam DE, sic ablata AC ad ablatam DF; mox ergo, 19. 5. erit CB ad FE, ut AB ad DE, sivè AC ad DF; atqui, *hyp.* AB, & DE sunt sibi long. commens., ergo, 10. 10. AC, & DF, uti etiam CB, & FE erunt sibi long. commens.: Quoniam verò, *hyp.* & 37. 10. AC, & CB sunt rationales; ergo etiam DF, & FE illis commensurabiles, rationales erunt: Tum, quoniam, *ut prius*, est AC ad DF, ut CB ad FE; erit, *altern.* AC ad CB, ut DF ad FE: atqui, *hyp.* & 37. 10. AC; & CB sunt sibi pot. tantum commens. ergo, 10. 10. DF, & FE sunt etiam sibi pot. tantum commens. adeoque 37. 10. DE est Binomium. Rursus, quoniam, *ut prius*, est AC ad CB, ut DF ad FE; ergo si AC plus poterit quàm CB quadratô lineæ sibi longitudine commens., aut incommens.; ità etiam, 15. 10. DF plus poterit, quàm FE quadratô lineæ sibi, long. commens. aut incommens.: Item, si AC sit long. commens. aut incommens. rationali expositæ; erit etiam, *Sch.* 12. 10. aut, 14. 10. ipsa DF (quippè cui, *ut prius*, est commensurabilis ipsa AC) commens., vel incommens. eidem expositæ rationali: eademque ratione, si CB sit long. commens., aut incommens. expositæ rationali; erit etiam FE eidem rationali expositæ long. commens., aut incommens.: sin verò neutra AC, CB sit rationali expositæ long. commens. neutra etiam DF, FE eidem rationali expositæ commensurabilis erit; adeoque, *ex def. binomiorum*, quodcunque binomium sit AB, ejusdem etiam ordinis binomium erit DE.

Q. E. D.

PROPOSITIO LXVIII.

Bimedialis (AC pl. CB) recta (DE) commensurabilis; & ipsa bimedialis est, atque ordine eadem.

Fiat, 12. 10. ut tota AB ad totam DE, sic ablata AC ad ablatam DF; mox ergo, 19. 5. erit CB ad FE, ut AB ad DE: atqui, *hyp.* AB, & DE sunt sibi long. commens., ergo. 10. 10. etiam AC, & DF, uti etiam CB, & FE erunt sibi long. commens.: Sunt autem, *hyp.* & 38. *vel* 39. 10. AC, & CB Mediæ; ergo, 24. 10. etiam DF, & FE illis commens. Mediæ erunt, Quia verò, *ut prius*, est AC ad DF, ut CB ad FE; erit, *altern.* AC ad CB, ut DF ad FE: atqui, *hyp.* & 38. *vel* 39. 10. AC, & CB sunt sibi pot. tantùm commens., ergo, 10. 10. DF, &

FE

FE sunt sibi pot. tantùm commens., adeoque, 38. *vel* 39. 10. DE est Media : Deindè, quoniam, 1. 6. est ACq. ad ACB, ut AC ad CB, quæ sunt, *ut prius*, ut DF ad FE, quæ sunt, 1. 6. ut DFq. ad DFE; erit 11. 5., *& altern.* ACq. ad DFq. ut ACB ad DFE. atqui ACq. & DFq. sunt sibi commensurabilia (nam AC, & DF sunt sibi, *ut prius*, long. commens.), ergo, 10. 10. ACB, & DFE sunt etiam sibi commensurabilia : adeoque, si ACB sit rationale, itaut AB sit prima bimedialis; erit etiam, *Sch.* 12. 10. DFE rationale; adeoque, 38. 10. DE erit prima bimedialis : Sin verò ACB sit Medium, itàut AB sit secunda bimedialis, etiam, *Sch.* 24. 10. DFE erit medium; adeoque, 39. 10. DE erit secunda bimedialis.

Q. E. D.

PROPOSITIO LXIX.

Majori (AC pl. CB) recta commensurabilis (DE;) & ipsa Major est.

Fiat, 12. 6. ut tota AB ad totam DE, sic ablata AC ad ablatam DF; mox ergo, 19. 5. erit CB ad FE, ut AB ad DE, sivè AC ad DF: atqui, *hyp.* AB, & DE sunt sibi commens.; ergo, 10. 10. etiam AC, & DF, uti etiam CB, & FE erunt sibi commens.: Quia verò, *ut prius*, *& alt.* est AC ad CB, ut DF ad FE; idcircò, 22. 6. erit ACq. ad CBq; ut DFq. ad FEq. *& compon.* erit ACq. pl. CBq. ad CBq. ut DFq. pl. FEq. ad FEq. *& invert. atque altern.* erit CBq.

R 4 ad

ad FEq. ut ACq. pl. CBq. ad DFq. pl. FEq. Atqui CBq. & FEq. ſunt ſibi commenſ. (nam CB, & FE ſunt oſtenſæ commenſ.), ergo 10. 10. etiam ſibi commenſ. erunt ACq. pl. CBq. & DFq. pl. FEq. Atqui etiam, *hyp.* & 40. 10. ACq. pl. CBq. eſt rationale; ergo etiam, *ſcol.* 12. 10. DFq. pl. FEq. eſt rationale. Deindè, quoniam, 1. 6. eſt ACq. ad ACB, ut AC ad CB, quæ ſunt, *ut prius*, ut DF ad FE, quæ ſunt, 1. 6. ut DFq. ad DFE; ergo, 11. 5. *& altern.* erit ACq. ad DFq. ut ACB ad DFE: atqui ACq. & DFq. ſunt ſibi commenſurabilia (nam AC, & DF ſunt ſibi, *ut prius*, commenſ.); ergo, 10. 10. DFE eſt commenſurabile ipſi ACB, quod, *hyp.* & 40. 10. Medium eſt; adeoque, *Corol.* 24. 10. DFE Medium quoque eſt. Demum, quoniam, *ut prius*, eſt AC ad CB, ut DF ad FE, atque, *hyp.* & 40. 10. AC, & CB ſunt ſibi pot. incommenſ. ergo, 10. 10. DF, & FE erunt ſibi pot. incommenſ.; adeoque, 40. 10. DE Major erit.

Q. E. D.

PROPOSITIO LXX.

Rationale, ac medium potenti (AC pl. CB) commenſurabilis (DE); & ipſa rationale ac medium potens eſt.

Iterum, 12. 6. fiat, ut tota AB ad totam DE, ſic ablata AC ad ablatam DF; mox ergo, 19. 5. erit CB ad FE, ut AB ad DE, ſivè AC ad DF; atqui, *hyp.* AB, & DE ſunt ſibi commenſ.

mensf. ergo 10. 10. etiam AC, & DF, uti & CB, & FE erunt sibi commensf. Quia verò, *ut prius*, & *altern.* est AC ad CE, ut DF ad FE; idcircò, 22. 6. erit ACq. ad CBq. ut DFq. ad FEq. & *compon.* erit ACq. pl. CBq. ad CBq. ut DFq. pl. FEq. ad FEq. & *invert. atque altern.* erit CBq. ad FEq. ut ACq. pl. CBq. ad DFq. pl. FEq. Atqui CBq. & FEq. sunt sibi commensurabilia (nam CB, & FE sunt ostensæ commensurabiles); ergo, 10. 10., etiam sibi commensurabilia erunt ACq. pl. CBq. & DFq. pl. FEq: Atqui, *hyp.* & 41. 10. ACq. pl. CBq. est Medium; ergo, *coroll.* 24. 10. etiam DFq. pl. FEq. Medium erit. Deindè, quoniam, 1. 6. est ACq. ad ACB, ut AC ad CB, quæ sunt, *ut prius*, ut DF ad FE, quæ sunt, 1. 6. ut DFq. ad DFE; ergo, 11. 5. & *altern.* erit ACq. ad DFq. ut ACB ad DFE; atqui ACq. & DFq. sunt sibi commensurabilia (nam AC, & DF sunt sibi, *ut prius*, commensf.); ergo, 10. 10. DFE est commensurabile ipsi ACB; quod, *hyp.* & 41. 10. est rationale, ergo, *Schol.* 12. 10. DFE est rationale. Demum, quoniam, *ut prius*, est AC ad CB, ut DF ad FE, atque, *hyp.* & 41. 10. AC, & CB sunt sibi pot. incommensf. ergo, 10. 10. DF, & FE erunt sibi pot. incommensf. adeoque, 41. 10. DE est ea, quæ Rationale ac Medium potest.

Q. E. D.

PROPOSITIO LXXI.

Bina media potenti (AC pl. CB) recta commensurabilis (DE); & ipsa bina media potens est.

Quippè retexendo ordinem præcedentium demonstrationum : Quoniam, *hyp.* & 42. 10. ACq. pl. CBq. est Medium; ergo, *coroll.* 24. 10. DFq. pl. FEq. Medium etiam erit. Deindè, quoniam DFE est commensurabile ipsi ACB, quod, *hyp.* & 42. 10. Medium est; ergo, 24. 10. ipsum etiam DFE Medium erit. Demum, quoniam, *ut prius*, est AC ad CB, ut DF ad FE, atque, *hyp.* & 42. 10. AC, & CB sunt sibi pot. incommens. ergo, 10. 10. DF, & FE erunt sibi pot. incommens. adeoque, 42. 10. DE erit ea, quæ bina media potest. Q. E. D.

IRRATIONALES,

Quarum Quadrata æquantur duobus mediis, vel composito ex rationali, & medio.

PROPOSITIO LXXII.

Si rationale (A) & medium (B) componantur, una ex quatuor rationalibus fit; nempè vel binomium, vel prima bimedialis, vel major, vel ea, quæ rationale ac medium potest.

Nimirum, si Hq. sit æquale toti A pl. B; erit

erit linea H una ex quatuor irrationalibus, quas innuit Theorema. Fiat enim ad CD expositam, rationalem rectangulum CE æquale ipsi A, & rectangulum FI æquale ipsi B: ergo totum CI æquabitur toti A pl. B, quod, *hyp.* æquatur ipsi Hq. Quoniam ergo, *hyp.* A est rationale, erit, *Schol.* 12. 10. etiam CE rationale; adeoque, 21. 10. latitudo CF est rationalis, long. commens. ipsi CD. Quoniam verò, *hyp.* B est medium; erit, *corol.* 24. 10. etiam FI medium, adeoque, 23. 10. latitudo FK est rationalis, long. incommens. ipsi CD; adeòque, 13. 10. CF, & FK sunt rationales, long. sibi incommens. ac proindè 37. 10. CF pl. FK est binomium. Atqui, 1. 6. est CF ad FK, ut CE ad FI, hoc est, ut A ad B; ergo, 14. 5. si A majus, vel minus sit quàm B, erit CF major, vel minor quàm FK.

Igitur si CF plus potest, quàm FK quadratô lineæ sibi long. commens. erit, 1. *def. ex secundis*, CK primum binomium; ac proindè, 55. 10. linea H est binomium.

Si CF plus potest quàm FK quadratô lineæ sibi long. incommens. erit, 4. *def. ex. sec.* CK quartum binomium; ac proindè, 58. 10. linea H est Major.

Sin verò A minus sit quàm B; erit, 1. 6. & 14. 5. CF minor, quàm FK: adeoque si FK plus potest, quàm CF quadratô lineæ sibi long. commens. erit, 2. *def. ex sec.* CK secundum binomium; ac proindè, 56. 10. linea H est secunda bimedialis.

Si

Si FK plus poteſt, quàm CF quadratô lineæ ſibi long. incommenſ. erit, 5. *def. ex sec.* CK quintum binomium; ac proindè, 59. 10. linea H erit ea, quæ rationale ac medium poteſt.

Q. E. D.

PROPOSITIO LXXIII.

SI duo media (A, & B) inter ſe incommenſurabilia componantur, una duarum irrationalium ſit, nempè vel ſecunda bimedialis, vel bina media potens.

Nimirum ſi Hq. ſit æquale toti A pl. B; erit linea H una irrationalium, quas innuit Theorema. Fiat enim conſtructio, ut in præcedenti. Quoniam, *hyp.* A, & B hoc eſt CE, & FI ſunt media; erunt, 23. 10. latitudines CF, & FK rationales, long. incommenſ. ipſi CD. Deindè quoniam, *hyp.* CE, & FI ſunt ſibi incommenſurabilia, atque, 1. 6. eſt CE ad FI, ut CF ad FK; ergo, 10. 10. CF, & FK erunt etiam ſibi incommenſ. ac propterea, 37. 10. CF pl. FK eſt binomium. Atqui, *ut prius*, eſt CF ad FK, ut CE ad FI, hoc eſt, ut A ad B; ergo, 14. 5. ſi A majus, vel minus ſit quàm B, erit CF major, vel minor, quàm FK.

Itaque ſi CF plus poſſit quàm FK quadratô lineæ ſibi long. commenſ. erit, 3. *def. ex ſec.* CK tertium binomium; ac proindè, 57. 10. linea H eſt ſecunda bimedialis.

Si CF plus poſſit, quàm FK quadratô lineæ

ſibi

sibi long. incommens. , erit , 6. *def. ex sec.* CK sextum binomium ; ac proindè , 60. 10. linea H erit ea , quæ bina media potest.

Q. E. D.

GENESIS LINEARUM

per subtractionem.

PROPOSITIO LXXIV.

SI à rationali (AB) rationalis (AC) auferatur, potentià tantùm commensurabilis existens toti; reliqua (BC) irrationalis est. Vocetur autem Apotome.

Quippè, 1. 6. est AB ad AC, ut ABq. ad ABC, sed, *hyp.* AB, & AC sunt sibi long. incommens., ergo, 10. 10. ABq. & BAC sunt sibi incommens. Quoniam verò AB, & AC ponuntur rationales, ac proindè ABq. & ACq. sunt sibi commens.; idcircò, 16. 10. compositum ABq. pl. ACq. (hoc est 7. 2. duo BAC pl. BCq.) erit commens. ipsi ABq. cui, *ut prius*, est incommens. ipsum BAC, cui est commens. ipsius duplum, nempè 2 BAC: ergo 2 BAC pl. BCq. & 2 BAC sunt sibi incommens. adeoque, *Cor.* 17. 10. BCq. incommens. est ipsi composito 2 BAC pl. BCq. hoc est, *ut prius*, ipsi composito ABq. pl. ACq. quod, utpotè ipsi ABq. rationali commensurabile, est rationale; ac proindè BCq. est irrationale, & recta BC ipsum potens est irrationalis. Q. E. D.

CO-

COROLL. Hinc si à majori nomine *Binomii* minus nomen auferatur; reliqua est *Apotome*: Quippè AB, & AC ponuntur rationales sibi pot. tantùm commens. ergo, 37. 10. AB pl. AC est binomium, cujus majus nomen AB, & minus AC.

PROPOSITIO LXXV.

SI à Media (AB) auferatur Media (AC) potentia tantùm commensurabilis existens toti, quæ cum tota rationale contineat, reliqua irrationalis est. Vocetur autem Apotome prima mediæ.

Quoniam enim, *hyp.* AB, & AC sunt sibi pot. commens. erunt sibi commens. ABq. & ACq. adeoq; etiam, 16. 10. ABq.& ABq.pl.ACq. atqui, *Hyp.* ACq. utpotè factum à media, est irrationale ac medium; ergo, *Corol.* 24. 10. ABq. pl. ACq. irrationale erit ac medium. Quoniam verò BAC. ponitur rationale; erit etiam rationale ejus duplum; adeoque 2 BAC incommens. erit ipsi irrationali ABq. pl. ACq. hoc est, 7. 2. ipsi 2 BAC; adeoque, 17. 10. BCq. incommens. est ipsi 2 BAC rationali, ac proindè BCq. est irrationale, rectaquè BC ipsum potens irrationalis.

Q. E. D.

COROLL. Hinc si à majori nomine *Primæ Bimedialis* minus nomen auferatur; reliqua est *Apotome prima mediæ*: Quippè AB, & AC ponuntur Mediæ sibi pot. tantùm commens. & quæ rationale BAC contineant; ergo, 38. 10. AB pl. AC est prima bimedialis, cujus majus nomen AB, & minus AC.

PRO-

PROPOSITIO LXXVI.

SI à Media (AB) auferatur media (AC) potentia tantùm commensurabilis existens toti, quæ cum tota Medium contineat; reliqua irrationalis est. Vocetur autem Apotome secunda mediæ.

Quoniam enim, *hyp.* AB, & AC sunt sibi pot. commens., erunt sibi commens. ABq. & ACq., adeoque, 16. 10. etiam ABq. & ABq. pl. ACq. atqui tam ABq. quàm ACq. est Medium (Nam AB, & AC ponuntur mediæ); ergo, *cor.* 24. 10. etiam ABq. pl. ACq. est medium: Atqui BAC ponitur medium, ergo, *cor.* 24. 10. Medium quoque est ejus duplum, sivè 2 BAC: atqui, 7. 2. æquantur ABq. pl. ACq. & 2 BAC pl. BCq. ergo BCq. est excessus unius Medii supra alterum, adeoque, 27. 10. BCq. est irrationale, & recta BC ipsum potens irrationalis.

Q. E. D.

COROLL. Hinc si à majori nomine *secundæ bimedialis* minus nomen auferatur; reliqua est *Apotome secunda mediæ*. Quippè AB, & AC ponuntur mediæ sibi pot. tantùm commens. & quæ medium BAC contineant; ergo, 39. 10. AB pl. AC est secunda bimedialis, cujus majus nomen AB, & minus AC.

PRO-

PROPOSITIO LXXVII.

SI à recta (AB) auferatur recta (AC) potentia incommensurabilis existens toti, quæ cum tota faciat compositum quidem ex ipsarum quadratis Rationale, quod verò sub ipsis continetur, Medium; reliqua irrationalis est. Vocetur autem Minor.

Nam ABq. pl. ACq. ponitur Rationale; contra verò BAC, adeoque etiam 2 BAC ponitur Medium, ac proindè Irrationale; ergo sunt sibi incommens. ABq. pl. ACq. hoc est (7. 2.) 2 BAC pl. BCq. & 2 BAC; adeoque, 17. 10. sunt sibi incommens. 2 BAC pl. BCq. & BCq. nimirùm Rationale ABq. pl. ACq. & BCq. ac proindè BCq. est Irrationale, & recta BC ipsum potens irrationalis. Q. E. D.

COROLL. Hinc si à majori nomine *Majoris*, minus nomen auferatur; reliqua est *Minor*. Quippè AB, & AC ponuntur sibi pot. incommens. & ABq. pl. ACq. ponitur rationale, BAC verò ponitur medium; ergo, 40. 10. AB pl. AC est Major, cujus majus nomen AB, & minus AC.

PROPOSITIO LXXVIII.

SI à recta (AB) auferatur recta (AC) potentia incommensurabilis existens toti, quæ cum tota faciat compositum quidē ex ipsarum quadratis Medium, quod autem sub ipsis continetur ratio-

rationale; reliqua irrationalis est. Vocetur autem cum Rationali Medium totum efficiens.

Siquidem ABq. pl. ACq. ponitur Medium, adeoque irrationale; contra verò BAC, ac proindè etiam ejus duplum, sivè 2 BAC ponitur Rationale; ergo erunt sibi incommens. ABq. pl. ACq. hoc est (7. 2.) 2 BAC pl. BCq. & 2 BAC; adeoque, 17. 10. sunt sibi incommens. 2 BAC rationale, & BCq. ac proindè BCq. est irrationale, & recta BC ipsum potens irrationalis.

Q. E. D.

COROLL. Hinc si à majori nomine ejus, quæ *Rationale, ac Medium potest*, minus nomen auferatur; reliqua est quæ *cum Rationali Medium totum efficit*: Quippè AB, & AC ponuntur sibi pot. incommens. & AB pl. AC ponitur Medium, BAC verò ponitur Rationale; ergo, 41. 10. AB pl. AC erit ea, quæ Rationale, ac Medium potest, cujus majus nomen AB, & minus AC.

PROPOSITIO LXXIX.

SI à recta (AB) auferatur recta (AC) potentia incommensurabilis existens toti, quæ cum tota faciat, & compositum ex ipsarum quadratis medium, & quod sub ipsis continetur medium, incommensurabileque composito ex quadratis ipsarum; reliqua irrationalis est. Vocetur autem cum Medio Medium totum efficiens.

Siquidem ABq. pl. ACq. hoc est (7. 2.) 2 BAC pl. BCq. ponitur medium, ita etiam

S BAC,

BAC, adeoque etiam 2 BAC ponitur medium: atqui, 27. 10. medium non ſuperat medium rationali; ergo BCq. eſt irrationale, & recta BC ipſum potens irrationalis. Q. E D.

COROLL. Hinc ſi à majori nomine ejus, quæ *Bina Media poteſt*, minus nomen auferatur; reliqua eſt ea, quæ *cum medio medium totum efficit*. Quippe AB, & AC ponuntur ſibi pot. incommenſ. & tam ABq. pl. ACq. quàm BAC ponitur Medium; ergo AB pl. AC eſt Bina Media potens, cujus majus nomen AB, & minus AC.

LEMMA *ad ſex proximè ſequentes*.

Si idem ſit exceſſus inter primam magnitudinem (HL), & ſecundam (PL), qui inter tertiam (RS), & quartam (QS); erit viciſſim idem exceſſus inter primam, & tertiam, qui inter ſecundam, & quartam.

Quoniam enim exceſſibus æqualibus HP, LQ adjectæ ſunt inæquales PL, QS; erit exceſſus totorum (15. *ax.* 1.) æqualis exceſſui adjunctorum. Q. E. D.

QVÆNAM, ET QVOT LINEÆ Congruant.

Irrationalibus genitis per ſubtractionem?

PROPOSITIO LXXX.

APotomæ (AB) una tantùm congruit recta linea Rationalis (BC), potentia tantùm commenſurabilis exiſtens toti (AC).

Con-

Congruat enim, si fieri potest, alia BD. Quoniam ergo idem est excessus compositi ADq. pl. BDq. supra 2 ADB, ac excessus compositi ACq. pl. BCq. supra 2 ACB; (siquidem, 7. 2. idem ABq. est utrobiquè excessus) ergo, *lemm. præc.* erit vicissim idem excessus inter ADq. pl. BDq. & ACq. pl. BCq. ac inter 2 ADB, & 2 ACB. atqui, *Schol.* 27. *huj.* excessus quadratorum est rationalis; (Nam, *hyp.* totæ, & congruentes ponuntur rationales, adeoque rationalia sunt earum quadrata, quin, 16. 10. & composita ex quadratis rationalibus rationalia erunt;) ergo rectangulorum excessus erit etiam rationalis; Quòd fieri nequit: Nam, 22. 10. ista rectangula, utpotè, *hyp.* contenta sub rationalibus sibi pot. tantùm commens. Media sunt, ac proindè, *Cor.* 24. *huj.* Media quoque sunt eorum dupla; Medium verò (27. 10.) non superat Medium rationali.

PROPOSITIO LXXXI.

MEdiæ Apotomę primæ (AB) una tantùm congruit recta linea Media (BC) potentia solum commensurabilis existens toti, & cum tota rationale continens.

Congruat enim, si f. p. alia BD. Quoniam, ut in præcedenti, excessus inter ADq. pl. BDq. & ACq. pl. BCq. æquatur excessui inter 2 ADB, & 2 ACB, atque excessus quadratorum est Medium (Nam, *hyp.* totæ, & congruentes ponuntur Mediæ, adeoque, & media ſunt earum quadrata, quin, *Corol.* 24. *huj.* & compoſita ex quadratis Mediis ſunt Media;) Ergo rectangulorum exceſſus eſſet etiam Medium; Quod fieri nequit: tam enim ACB, quàm ADB ponitur rationale, ac proindè rationalia quoque ſunt eorum dupla; rationale verò ſuperat rationale rationali.

PROPOSITIO LXXXII.

Mediæ Apotomæ ſecundæ (AB) una tantùm congruit recta linea (BG) potentia ſolùm commenſurabilis exiſtens toti, & cum tota medium continens.

Congruat enim, ſi f. p. alia BD: atque ad expoſitam rationalem EF, fiat EG æquale ipſi ACq. pl. BCq. atque tum fiat EL æquale ipſi ADq. pl. BDq. atque demum fiat EI æquale ipſi ABq. Igitur, 7. 2. æquabuntur 2 ACB, & KG, uti & 2 ADB, & KL. Cæterùm, *hyp.* & *cor.* 24. *huj.* ACq. pl. BCq. hoc eſt EG, eſt Medium; Ergo, 23. 10. latitudo EH eſt rationalis long. incommenſ. ipſi EF: Quoniam etiam, *hyp.* & *cor.* 24. *huj.* Medium eſt ipſum 2 ACB, hoc eſt KG; erit quoque, 23. *huj.* KH rationalis long. incommenſurabilis ipſi EF. Quoniam verò, 1. 6. eſt AC ad BC, ut ACq. ad ACB, atque, *hyp.* AC, & BC ſunt ſibi long. incommenſ. ergo, 10. 10. erunt etiam ſibi incommenſ. ACq. & ACB: igitur, *Hyp.* & 16. 10. ACq. pl. CBq. commenſ. eſt ipſi ACq. cui, *ut priùs*, eſt incommenſ. ipſum ACB,

ACB, cui eſt commenſ. ejus duplum, ſivè 2 ACB; adeoque ſunt ſibi incommenſ. ACq. pl. CBq. & 2 ACB, hoc eſt EG, & KG: Atqui, 1. 6. eſt EG ad KG, ut EH ad KH; ergo, 10. 10. EH, & KH ſunt etiam ſibi incommenſ. quæ tamen ſunt oſtenſæ rationales; adeoque, 74. *huj.* EK eſt apotome, & illi congruens KH: eademque ratione oſtendemus, EK apotomen eſſe, & illi congruentem KM: Quod, 80. *huj.* fieri nequit.

PROPOSITIO LXXXIII.

Minori (AB) una tantùm congruit recta linea (BC) commenſurabilis exiſtens toti, & cum tota faciens compoſitum quidem ex ipſarum quadratis Rationale, quod autem ſub ipſis continetur, Medium.

Si fieri poteſt, congruat alia BD. Quoniam ergo, ut in 80. *huj.* oſtenſum eſt, exceſſus inter ADq. pl. BDq., & ACq. pl. BCq. æquatur exceſſui inter 2 ACB, & 2 ADB: atqui, *hyp.* compoſita ex quadratis ſunt rationalia, adeoque, & rationalis ipſorum exceſſus, at verò rectangula ponuntur media; ergo etiam mediorum exceſſus eſſet rationalis; quod, 27. *huj.* fieri nequit.

PROPOSITIO LXXXIV.

Ei (AB), quæ cum Rationali Medium totum facit, una tantùm congruit recta linea (BC) potentia incommenſurabilis exiſtens toti, & cum *tota faciens compositum quidem ex ipsarum quadratis Medium, quod autem sub ipsis continetur, Rationale.*

Si fieri potest, congruat alia BD. Quoniam ergo, *ut prius*, excessus quadratorum æquatur excessui rectangulorum, atque rectangula ponuntur rationalia, quadrata verò ponuntur media; excessus etiam mediorum esset rationalis: Quod, 27. *huj.* fieri nequit.

PROPOSITIO LXXXV.

E*I (AB), quæ cum Medio Medium totum facit, una tantùm congruit recta linea (BC) potentia incommensurabilis existens toti, & cum tota faciens tam compositum ex ipsarum quadratis, quàm, quod sub ipsis continetur, Medium, & incommensurabile composito ex ipsarum quadratis.*

Si fieri potest, congruat alia BD: sitque schema, & constructio, ut in 82. hujus. Et quoniam, *hyp.* ACq. pl. BCq. hoc est EG, medium est; ergo, 23. *huj.* latitudo EH est rationalis, long. incommens. rationali EF: Ita etiam quoniam, *hyp.* & 24. *huj.* 2 ACB, hoc est KG, medium est; erit pariter latitudo KH rationalis, long. incommens. rationali EF: atqui KG, hoc est 2 ACB, commens. est uni ACB, cui, *hyp.* incommens. est ipsum ACq. pl. CBq. sivè EG; ergo, 13. 10. & 1. 6. & 10. 10. EH, & KH sunt etiam sibi incommens. sed sunt ostensæ rationales, adeoque saltem pot. commens. ergo, 74. *huj.* EK est

apo-

apotome, & ipsi congruens KH, eodemque modo ostendemus, EK esse apotomen, & ipsi congruentem KM: quod, 80. 10. est absurdum.

DEFINITIONES

Tertiæ.

EXposita Rationali, & Apotoma; si tota plus possit, quàm congruens, quadrato rectæ lineę sibi longitudine commensurabilis.

1. Siquidem tota expositæ Rationali sit longitudine commensurabilis; Vocetur Apotome prima.

2. Si verò congruens expositæ Rationali sit longitudine commensurabilis; Vocetur Apotome secunda.

3. Quòd si neque tota, neque congruens expositæ Rationali sit longitudine commensurabilis; Vocetur Apotome tertia.

Rursus si tota plus possit, quàm congruens, quadrato rectæ lineæ sibi longitudine incommensurabilis.

4. Siquidem tota expositæ Rationali sit longitudine commensurabilis; Vocetur Apotome quarta.

5. Si verò congruens expositæ Rationali sit longitudine commensurabilis; Vocetur Apotome quinta.

6. Quòd si neque tota, neque congruens expositæ Rationali sit longitudine commensurabilis; Vocetur Apotome sexta.

INVENTIO APOTOMARUM PROPOSITIONES 86, 87, 88, 89, 90, 91.

Invenire primam, secundam, tertiam, quartam, quintam, & sextam Apotomen.

Apotomæ invenientur facillimè, inventis Binomiis ordine ipsis corrispondentibus, subductisque minoribus nominibus ex majoribus: Quippè majus nomen idem omninò est ac linea *Tota*, & minus nomen linea *Congruens*, adeoque residuum est *Apotoma*: & revera in primo, secundo, & tertio binomio majus nomen plus potest quàm minus quadrato lineæ sibi long. commens. non aliter ac in prima, secunda, & tertia apotoma, linea tota plus potest quàm congruens quadrato lineæ sibi long. commens. Secus verò tam in quarto, quinto, & sexto binomio minus nomen à majori, quàm in quarta, quinta, & sexta apotoma linea congruens à tota exceditur quadrato lineæ long. incommens. ipsi majori nomini, quemadmodum, & ipsi toti: atque ità in reliquis omnia sibi corrispondent, ut de his plura repetere non sit necesse.

IRRA-

IRRATIONALES,

Quæ possunt spatia contenta sub rationali, & singulis Apotomis.

PROPOSITIO XCII.

SI spatium (AC) contineatur sub rationali (AB), & apotoma prima (AD, sivè AE minus DE); recta linea (LN) potens spatium (AC) Apotoma est.

Secetur DE bifariam in F, & ad AE applicetur pgrum AGE æquale ipsi FEq. hoc est, (4. 2.) quadranti ipsius DEq. deficiensque quadrato, nempè ipso GEq. Et quia, *hyp. & def. trium priorum Apotomarum*, tota AE plus potest, quàm congruens DE quadrato rectæ sibi long. commens., idcircò, 18. 10. AG, & GE sunt sibi long. commens. adeoque, 16. 10. utraque AG, & GE est commens. toti AE, quæ, *hyp.* 1. *def. ex tertiis*, rationali AB long. commens. est; Ergo, utraque AG, GE rationali AB long. commens. est, ac proindè, 20. *huj.* AH, & GI sunt rationalia. Cæterùm DF, & FE sunt long. commens. ipsi DE, cujus sunt dimidiæ, atque ipsa DE est long. incommens. rationali AB (Nam si DE esset long. commens. ipsi AB, cui, *hyp.* est long. commens. ipsa AE; essent AE, & DE, nimirum Tota, & Congruens, sibi long. commens. quod destruit hypothesim;) ergo DE, & FE sunt long. incommens. rationali AB, sunt tamen

tamen rationales, utpotè commensurabiles rationali DE, cujus sunt dimidiæ; Ergo, 22. 10. DK, & FI sunt Media.

Iam verò ipsi AH fiat æquale LPq. & fiat ipsi GI æquale NPq. habens cum toto angulum communem in P; ergo, 26. 6. LPq. & NPq. erunt circa eandem diametrum: tum perficiatur Schema. Et quoniam, *constr.* æquantur AGE, & FEq. adeoque, 17. 6. est AG ad FE, ut FE ad GE, hoc est, 1. 6. est AH, sivè LPq. ad FI, ut FI ad GI, sivè ad NPq. atque pariter 3. *lem. ad* 37. *huj.* est LPq. ad LPN, sivè ad LO, ut LO ad NPq. Ergo FI, sivè, *constr.* & 38. 1. ipsum DK æquatur ipsi LO, sivè (43. 1. & 1. *ax.* 1.) ipsi NM; adeoque æquantur DI, & gnomon VPX pl. NPq. atqui, *constr.* æquantur AI, & LPq. pl. NPq. ergo subductis, hinc gnomone VPX, & illinc pgro DI; æquabuntur, 3. *ax.* 1. AC, & LNq. ac propterea recta LN potest spatium AC.

Dico autem, ipsam LN esse Apotomen. Nam, *ut prius*, AH, & GI sunt rationalia, ergo etiam LPq. & NPq. ipsis æqualia, sunt rationalia, adeoque LP, & NP sunt rationales. Contra verò, *ut prius*, FI, sivè LO est Medium, adeoque Irrationale, ac proindè NPq., sivè NO, & LO sunt sibi incommens. quippè alterum est Rationale, alterum verò Irrationale; Ergo, 1. 6. & 10. 10. etiam LP, & NP sunt sibi incommens. quæ tamen sunt ostensæ Rationales; Ergo, 74. *huj.* LN est Apotome. Q. E. D.

PRO-

PROPOSITIO XCIII.

Si spatium (AC) contineatur sub rationali (AB), & apotome secunda (AD, sivè AE minus DE); recta linea (LN) spatium (AC) potens, est Apotome prima Mediæ.

Siquidem, ut in præcedenti, cujus adhibeatur constructio, utraque AG, GE est long. commensf. toti AE, quæ long. incommensf. est rationali AB (Nam si toti AE esset long. commensf. rationalis AB, cui, *hyp. & 2. def. ex tertiis*, ponitur long. commensf. congruens DE: essent tota, & congruens sibi long. commensf. contra hyp.); ergo utraque AG, GE est long. incommensf. rationali AB: sunt tamen rationales, utpotè, *ut prius*, long. commensf. toti AE rationali; ergo, 22. 10. AH, & GI sunt Media. Cæterùm DF, & FE sunt long. commensf. ipsi DE, cujus sunt dimidiæ, atque DE, utpotè congruens, est long. commensf. ipsi AB; ergo, 20. 10. DK, & FI sunt rationalia. Rursus, *ut prius*, LN potest spatium AC.

Dico autem, ipsam LN esse Apotomen primam Med. Nam, *ut prius*, AH, & GI, hoc est LPq. & NPq. sunt Media, adeoque LP, & NP sunt Mediæ: Contra verò, *ut prius*, FI, sivè LO est rationale, adeoque NPq. sivè NO, & LO sunt sibi incommensf., quippè alterum est Medium, ac proindè Irrationale, alterum verò Rationale; ergo, 1. 6. & 10. 10. LP, & NP sunt

sibi

sibi incommens. Quæ tamen sunt sibi saltem pot. commens. Nam AG, & GE, & AE (ut in 92. *huj*. ostensum est) sunt sibi long. commens. adeoque , 1. 6. & 10. *huj*. AH, & GI, sivè LPq. & NP sunt sibi pot. commens. sed, & continent ipsum LO, quod, *ut prius*, est Rationale; ergo, 75. *huj*. LN est Apotome prima Mediæ.

Q. E. D.

PROPOSITIO XCIV.

Si spatium (AC,) contineatur sub rationali (AB), & apotoma tertia (AD, hoc est AE minus DE); recta linea (LN) spatium (AC) potens, est secunda Apotome Mediæ,

Quippè, quoniam, *hyp. & 3. def. ex tertiis*, neque tota AE, neque congruens DE ponitur long. commens. rationali AB; idcircò, retexendo ordinem præcedentium demonstrationum, erunt tam AH, & GI, quàm DK, & FI Media: Rursus, *ut prius*, LN potest spatium AC. Dico autem, LN esse secundam apotomen mediæ: Nam, *ut prius*, AH, & GI, hoc est LPq. & NPq. Media sunt, ac proindè & rectæ LP, & NP sunt mediæ, quæ tamen sunt sibi pot. tantùm commens. Nam, ut in 92. *huj*. ostensum est, AG & GE, & AE sunt sibi long. commens. adeoque 1. 6. & 10. 10. AH, & GI, hoc est LPq. & NPq. sunt sibi commensurabilia, ac proindè LP, & NP sunt sibi pot. commens.: At verò, *ut prius*, GE est long. commens. ipsi AE,

cui,

i, *hyp.* & 76. *huj.* est long. incomm. ipsa DE, æ long. commens. est ipsi FE, adeoque GE, FE sunt sibi long. incommens., undè, 1. 6. & . *huj.* etiam FI, & GI, hoc est LO, & NO, proindè demum LP, & NP sunt sibi long. commens. Quoniam igitur LP, & NP sunt tensæ pot. tantùm sibi commens. & continent sum LO, hoc est FI, quod ostensum est medium; erit, 76. *huj.* LN Apotomæ secunda Mediæ. Q. E. D.

PROPOSITIO XCV.

SI spatium (AC) contineatur sub rationali (AB), & apotoma quarta (AD, hoc est AE minùs DE); recta linea (LN) spatium AC) potens, est Minor.

Nam adhibita eadem constructione: Quoniam, *def. trium poster. apotomarum*, AE plus poest quàm DE quadrato lineæ sibi long. incommens.; idcircò, 19. *huj.* AG, & GE sunt sibi long. incommens. Quoniam verò, *hyp.* & 4. *def.* x *tertijs*, tota AE rationalis est ipsi AB rationali long. commens; erit, 20. *huj.* ipsum AI, sivè LPq. pl. NPq. Rationale: Rursus, quia congruens DE rationalis est, long. incommens. ipsi AB; erit, 22. 10. DI, adeoque eius dimidium FI, sivè LO Medium: Deindè, quoniam, *ut prius*, AG, & GE sunt sibi long. incommens. erunt etiam (1. 6. & 10. 10.) sibi incommensurabilia AH, & GI, sivè LPq. & NPq. adeo-

que

que LP, & NP sunt sibi pot. incommens. Demum ostendemus etiam, ut in præcedentibus, rectam LN posse spatium AC; adeoque, 77. 10. linea LN est Minor. Q. E. D.

PROPOSITIO XCVI.

SI spatium (AC) contineatur sub rationali (AB) & apotoma quinta (AD, hoc est AE minus DE); recta linea LN spatium (AC) potens, est ea, quæ cum Rationali Medium totum efficit.

Quoniam enim, ut in præcedenti, AG, & GE sunt sibi long. incommens. & quia, *hyp. & 5. def. ex tertiis*, AE rationalis rationali AB est long. incommens., erit, 22. 10. AI, sivè LPq. pl. NPq. Medium: Quoniam verò congruens DE rationalis rationali AB est long. commens. erit, 20. *huj.* DI, adeoque ejus dimidium FI, sivè LO rationale. Rursus, ut in præcedenti, AH, & GI, sivè LPq. & NPq. sunt sibi incommens. adeoque LP, & NP sunt sibi pot. incommens. & recta LN potest spatium AC; ergo, 78. *huj.* LN est ea, quæ cum Rationali Medium totum efficit. Q. E. D.

PROPOSITIO XCVII.

SI spatium (AC) contineatur sub rationali (AB) & apotoma sexta (AD, hoc est AE minus DE); recta linea LN, spatium AC potens, est, *l, quæ cùm Medio Medium totum efficit.*

Quoniam, ut in præcedentibus, AG, & E sunt sibi long. incommens. & quia, *hyp. & 6. f. ex tertiis*, utraque AE, DE est rationalis ng. incommens. rationali AB; erit, 22. 10. tam l, adeoque ejus dimidium FI, sivè LO, quàm I, sivè LPq. pl. NPq. Medium: Rursus, ut n præcedentibus, AH, & GI, sivè LPq. & IPq. sunt sibi incommens. adeoque LP, & NP int sibi pot. incommens. & recta LN potest spaum AC; Ergo, 79. *huj.* LN est ea, quæ cum ledio, Medium totum efficit.

Q. E. D.

QVASNAM LATITUDINES

Efficiant quadrata sex primarum Irrationalium genitarum per subtractionem applicata ad Rationalem.

PROPOSITIO XCVIII.

Quadratum apotomæ (AB) ad rationalem (DE) applicatum, latitudinem (DG) facit apotomen primam.

Expositæ rationali DE, cui, *hyp.* applicatum est DF æquale ipsi ABq. fiat etiam DH ipsi AC, & demum fiat IK ipsi BCq. æquale; æquabuntur (7. 2.) pariter 2 ACB, & GK, atque divisa GL bifariam in M, æquabitur GN, vel MK uni ACB: Quoniam ergo, *hyp.* & 74. *huj.* tota AC, & congruens BC rationales sunt; erunt

ACq.

ACq. & BCq. rationalia, adeoque sibi commensurabilia; quinetiam (16. 10.) ACq. pl. BCq. hoc est totum DK, utpotè utrique ipsorum commensurabile, rationale erit; ergo, 21. 10. efficiet latitudinem DL rationalem ipsi DE long. commensurabilem: At verò, quoniam AC, & BC rationales sunt sibi tantùm pot. commensf. erit, 22. *buj.* ACB, adeoque & ejus duplum, sivè GK, Medium; ergo, 23. *buj.* efficiet latitudinem GL rationalem, ipsi DE long. incommensf. ergo GL, & DL erunt rationales sibi pot. tantùm commensf. adeoque, 74. *buj.* DG est Apotome.

Dico autem, DG esse Apotomen ordine primam. Quoniam enim, 3. *lem. ad* 37. *buj.* est ACq. ad ACB, ut ACB ad BCq. erit, (7. 5.) etiam DH ad MK, ut MK, ad IK, adeoque (1. 6.) erit DI ad ML, ut ML ad IL, adeoque, 17. 6. DIL æquabitur ipsi MLq. hoc est (4. 2.) quadranti ipsius GLq. Atqui, *ut prius*, ACq. & BCq. hoc est DH, & IK, sunt sibi commensf. ergo, 1. 6. *&* 10. 10. sunt sibi long. commensf. DI, & IL; adeoque, 18. 10. tota DL plus potest, quàm congruens GL quadrato lineæ sibi long. commensf. Atque, *ut prius*, eadem tota DL est long. eommensf. rationali DE; ergo, 1. *def. ex tertiis*, DG est Apotome prima.

Q. E. D.

PRO-

PROPOSITIO XCIX.

Quadratum Apotomæ primæ Mediæ (AB) ad rationalem (DE) applicatam, latitudinem (DG) facit Apotomen secundam.

Adhibita enim præcedenti constructione. Quoniam, *hyp.* & 75. *huj.* tota AC, & congruens BC sunt mediæ pot. tantùm sibi commens., erunt ACq. & BCq. Media sibi commens. Quin & totum ACq. pl. BCq. hoc est DK, utrique illorum erit commens., & Medium; adeoque, 23. 10. efficiet latitudinem DL rationalem, ipsi DE long. incommens. At verò, quoniam, *Hyp.* & 75. 10. ACB, sivè MK, adeoque & GK rationale ponitur; erit, 21. 10. GL rationalis, long. commens. ipsi DE; ergo DL, & GL sunt rationales, sibi pot. tantùm commens. Rursus, ut in præced. ostendetur, totam DL plus posse, quàm congruentem GL, quæ jam ostensa est long. commens. rationali DE, quadrato lineæ sibi long. commens., ergo, 2. *def. ex tertiis*, DG est Apotome secunda. Q. E. D.

PROPOSITIO C.

Quadratum Apotomæ secundæ Mediæ (AB) ad rationalem (DE) applicatum, latitudinem (DG) facit Apotomen tertiam.

Nam ostendetur, *ut prius*, DK Medium esse, & rectam DL Rationalem, long. incommens. ipsi DE: Rursus, quoniam etiam, *hyp.* & 76.*huj.* ACB, sivè MK; adeoque, & GK Medium est; erit, 23.*huj.* GL rationalis, long. incommens. rationali DE: Quoniam verò est, 1. 6. AC ad BC, ut ACq. ad ACB, atque, *hyp.* AC, & BC sunt sibi long. incommens. erunt etiam sibi incommens. ACq. & ACB: Atqui DK, sivè ACq. pl. BCq. est commens. ipsi ACq. (Nam AC, & BC ponuntur sibi pot. saltèm commens.) & ACq. *ut prius*, incommens. ipsi ACB, adeoque, & ejus duplo, sivè ipsi GK; ergo DK, & GK, adeoque, 1. 6. & 10. 10. etiam DL, & GL sunt sibi incommes. quæ tamen sunt ostensæ rationales: Quarum cum neutra sit long. commens. rationali DE, & ostendi possit, ut in 98. *huj.* totam DL plus posse, quàm congruentem GL quadrato lineæ sibi long. commens. idcircò, 3. *def. ex tertiis*, erit DG Apotome tertia.

Q. E. D.

PROPOSITIO CI.

Quadratum Minoris (AB) ad rationalem (DE) applicatum, facit latitudinem (DG) quartam Apotomen.

Nam adhibita eadem const. Quoniam, *hyp.* & 77. *huj.* ACq. pl. BCq. sivè DK est rationale; erit, 21. 10. ipsa DL rationalis, long. commens. rationali DE: Contra verò, ACB, adeoque ejus duplum GK Medium est; ergo 23. *huj.* GL est rationalis long. incommens. rationa-

-tionali DE; ergo DL, & GL sunt rationales sibi pot. tantùm commensf. Cæterùm, *hyp.* & 77. *huj.* ACq. & CBq. hoc est DH, & IK, sunt sibi incommensf.; adeoque 1. 6. & 10. *huj.* DI, & IL sunt sibi long. incommensf. atqui, ut in 98. *huj.* ostensum est, æquantur DIL, & quadrans ipsius GLq. Ergo, 19. *huj.* DL plus potest, quàm GL quadrato lineæ sibi long. incommensf. adeoque, 4. *def. ex tertiis*, erit DG Apotome quarta.

Q. E. D.

PROPOSITIO CII.

Quadratum eius (AB), quæ cum Rationali Medium totum efficit, ad rationalem (DE) applicatum, latitudinem (DG) facit Apotomen quintam.

Nam posita eadem constr. Quoniam, *hyp.* & 74. *huj.* ACq. pl. BCq. sivè DK, est Medium: erit, 23. *huj.* DL rationalis long. incommensf. rationali DE: Contra verò, ACB, adeoque ejus duplum GK, est rationale, ac proinde 21. 10. GL est rationalis, long. commensf. rationali DE, undè DL, & GL sunt rationales sibi pot. tantùm commensf. & quoniam deindè, ut in præced. DL plus potest, quàm GL quadrato lineæ sibi long. incommensf., ergo DG est Apotome quinta.

Q. E. D.

PROPOSITIO CIII.

Quadratum ejus (AB) quæ cum Medio, Medium totum efficit, ad rationalem(DE) applicatum, latitudinem (DG) efficit Apotomen sextam.

Nam, *ut prius*, Quoniam, *hyp. & 79. huj.* tam ACq. pl. BCq. sivè DK, quàm ACB, adeoque eius duplum GK, Medium est; idcircò, 23. *huj.* tam tota DL, quàm congruens GL, est rationalis, long. incommens. rationali DE: Rursus, ut in præced. DL plus potest, quàm GL quadrato lineæ sibi long. incommens. atque demum, *hyp.* & 79. *huj.* ACq. plus BCq. & ACB, sivè DK, & GK, sunt sibi incommens. ergo, 1. 6. & 10. 10. sunt etiam sibi incommens. DL, & GL, quæ tamen sunt ostensæ rationales; Ergo, 6. *def. ex tertiis*, DG ex sexta Apotoma.

Q. E. D.

PROPOSITIO CIV.

Recta linea (DE) Apotomæ (AB, sivè AC minùs BC) longitudine commensurabilis; & ipsa Apotome est, atque ordine eadem.

Nam si fieret, ut AB ad DE, ità AC ad DF, & sit AB long. commens. ipsi DE; erit etiam AC pl. BC, long. commens. ipsi DF pl. FE; siquidem erit, *hyp. & 19. 5.* AC ad DF, ut BC ad EF, & *altern.* AC ad BC, ut DF

ad EF,

ad EF, & *compon.* AC pl. BC ad BC, ut DF pl. EF, ad EF, atque iterum *altern.* AC pl. BC, ad DF pl. EF, ut BC ad EF, atqui, *hyp.* BC, & EF ſunt ſibi long. commenſ. nam ſe habent, ut AB ad DE, quæ *hyp.* ſunt ſibi long. commenſ. ergo etiam AC pl. BC, & DF pl. EF ſunt ſibi long. commenſ.

Fiat ergo, ut AB ad DE, ità AC ad DF; ergo, *ut prius*, AC pl. BC, & DF pl. EF erunt ſibi long. commenſ. : atqui AC pl. BC, *hyp.* & 37. 10. eſt Binomium; ergo, 67. 10. DF pl. EF ejuſdem ordinis Binomium erit, adeoque DF *minus* EF ejuſdem ord. erit Apot. cujus AC, minus BC. Q. E. D.

PROPOSITIO CV.

Recta linea (DE) Apotomæ Mediæ (AB, hoc eſt AC minus BC) commenſurabilis, & ipſa Apotome Mediæ eſt, atque ordine eadem.

Fiat etiam, ut AB ad DE, ſic AC ad DF; ergo, *ut prius*, AC pl. BC, & DF pl. EF ſunt ſibi long. commenſ.; adeoque, 68. 10. DF pl. EF ejuſdem ordinis erit Bimedialis, cujus AC pl. BC, ac proindè DF pl. EF ejuſdem ordinis erit Apotome Mediæ, cujus AC minus BC. Q. E. D.

PROPOSITIO CVI.

Recta linea (DE) Minori (AB, hoc est AC minus BC) commensurabilis , & ipsa Minor est .

Nam fiat, ut AB ad DE, ſic AC ad DF; etiam , *ut prius* , AC pl. BC, & DF pl. EF erunt ſibi long. commenſ. atqui, *hyp.* AC pl. BC eſt Major ; ergo , 69. 10. DF pl. EF Major etiam eſt ; ac proindè DF , minus EF Minor erit. Q. E. D.

PROPOSITIO CVII.

Recta linea (DE) commensurabilis ei (AB, hoc est AC minus BC), quæ cum rationali medium totum efficit ; & ipsa cum rationali medium totum efficiens est .

Quippè, *ut prius* , AC pl. BC eſt rationale, ac medium potens , ergo , 70. 10. DF pl. EF erit rationale, ac medium potens ; adeoque DF minus EF erit ea , quæ cum rationali medium totum efficit . Q. E. D.

PROPOSITIO CVIII.

Recta linea(DE)commensurabilis ei (AB, hoc est AC minus BC), quæ cum medio medium totum efficit ; & ipsa cum medio , medium totum efficiens est .

Nam

Nam AC pl. BC, & DF pl. EF sunt sibi long. commens., atqui, *hyp.* AC pl. BC est bina media potens; ergo, 71. 10. DF pl. EF bina media potens erit; adeoque DF *minus* EF erit ea, quæ cum medio medium totum efficit. Q. E. D.

IRRATIONALES,

Quarum quadrata æquantur residuo post subtractionem medii à Rationali, vel rationalis à medio, vel medii à Medio.

PROPOSITIO CIX.

Medio (B) à rationali (A pl. B) detracto, recta linea (H), quæ reliquum spatium potest, una ex duabus irrationalibus est, nimirum vel Apotome, vel Minor.

Ad CD expositam rationalem fiat rectangulum CI æquale composito rationali A pl. B, atque tum fiat FI æquale ipsi B Medio; ergo CE æquabitur ipsi A, sivè ipsi Hq. Quoniam ergo CI est rationale; erit, 21. 10. CK rationalis long. commens. rationali CD: sed quoniam FI est medium; erit, 23. 10. FK rationalis long. incommens. rationali CD; adeoque, 13. 10. CK, & FK erunt rationales sibi pot. tantùm commens. ac proinde, 74. 10. CF est Apotome. Si igitur tota CK pl. poterit quàm congruens FK quadrato lineæ sibi long. commensf. erit 1. *def. ex tert.* CF apotome prima; adeoque, 92. 10. linea H erit Apotome. Sin CK pl. poterit quàm FK quadrato lineæ sibi long. incommensf. erit, 4. *def. ex tert.* CF Apotome quarta; ac proindè, 95. 10. linea H erit Minor. Q. E. D.

PROPOSITIO CX.

Rationali (B) à medio (A pl. B) detracto; recta linea (H), quæ reliquum spatium potest, erit vel Apotome prima mediæ, vel ea, quæ cum rationali medium totum efficit.

Ad CD expositam rationalem fiat rectangulum CI æquale composito medio A pl. B, atque tum fiat FI æquale ipsi B rationali; ergo CE æquabitur ipsi A, sive ipsi Hq. Quoniam ergo CI est medium; erit, 23. 10. CK rationalis long. incommensf. rationali CD: sed quia FI est rationale; erit, 21. 10. CK rationalis, long. commensf. rationali CD; adeoque, 13. 10. CK, & FK erunt rationales sibi pot. tantùm commensf. ac proindè, 74. 10. CF est Apotome. Si igitur tota CK pl. poterit quàm congruens FK quadrato lineæ sibi long. commensf. erit, 2. *def. ex tert.* CF Apotome secunda; adeoque, 93. *buj.* linea H erit Apotome prima mediæ. Sin CK pl. poterit quàm FK quadrato lineæ sibi long. incommensf. erit, 5. *def. ex tertiis*, CF Apotome quinta; ac proindè, 96. *buj.* linea H erit ea, quæ cum rationali medium totum efficit. Q. E. D.

PRO-

PROPOSITIO CXI.

MEdio (B) à medio (A pl. B) detracto, quod sit incommensurabile toti (A pl. B); recta linea (H), quæ reliquum spatium potest, erit vel Apotome secunda mediæ, vel ea, quæ cum medio medium totum efficit.

Ad CD expositam rationalem fiat rectangulum CI æquale composito medio A pl. B, atque tum fiat FI æquale ipsi medio B; ergo CE æquabitur ipsi A, sivè ipsi Hq. atque, 23. 10. tam CK quàm FK erit rationalis long. incommens. rationali CD; ergo CK, & FK erunt rationales sibi pot. tantùm commens. adeoque 74. 10. CF est Apotome. Si tota CK pl. poterit quàm congruens FK quadrato lineæ sibi long. commens. erit 3. *def. ex tert.* CF apotome tertia; adeoque, 94. *huj.* linea H erit Apotome prima mediæ. Sin verò CK pl. poterit quàm FK quadrato lineæ sibi long. incommens., erit, 6. *def. ex tertiis*, CF Apotome sexta; ac proindè, 67. *huj.* linea H erit ea, quæ cum medio, medium totum efficit.

Q. E. D.

PROPOSITIO CXII.

APotome (A) non est eadem ac Binomium.

Ad expositam rationalem BC fiat rectangulum CD æquale ipsi Aq. ergo, 94. 10. erit BD

Apo-

Apotome prima: Sit autem DE ejus congruens; ergo, 74. 10. BE, & DE sunt ration. sibi pot. tantùm comm. & 1. *def. ex tert.* BE est long. commens. rationali BC. Iam si fieri potest, sit A Binomium, ergo, 61. 10. BD est primum Binomium, cujus majus nomen sit BF, minus verò FD; erunt, 37. 10. BF, & FD rationales sibi pot. tantùm commens., sed, 1. *def. ex sec.* erit BF long. commens. ipsi BC, cui, *ut prius*, est long. commens. ipsa FE; ergo BE ipsi BF, adeoque, *Corol.* 16. 10. etiam BE ipsi FE erit long. commens. adeoque FE erit rationalis. At verò, *ut prius*, BE, & DE sunt rationales sibi pot. tantùm commens. ergo etiam FE, & DE sunt rationales sibi pot. tantùm commens. adeoque, 74. 10. FD est Apotome, nempè irration. cum tamen ostensa sit ration. Q. E. A.

IRRATIONALES

Genitæ ex applicatione Quadrati Rationalis ad Binomium, vèl ad Apotomen.

PROPOSITIO CXIII.

QVadratum rationalis (A) applicatum ad Binomium (BC, sive BD pl. DC) latitudinem facit Apotomen (EC, sive EH minùs CH) ejusdem ordinis: cujus nomina, nempe tota, & congruens, commensurabilia, & proportionaliæ sunt nominibus Binomii.

Ad DC minus Binomij nomen fiat DF

æquale

æquale ipsi Aq. sive ipsi BE; ergo, 14. 6. erit BC ad CD, ut FC ad CE, & *divid.* erit BD ad DC, ut FE ad EC: atqui, *hyp.* BD major est, quàm DC; ergo, 14. 5. erit FE major quàm, EC.

Sumatur ergo EG æqualis ipsi EC, & fiat, ut FG ad GE ita EC ad CH; erunt EH, & CH tota, & congruens, sive nomina Apotomæ EC, quibus conveniunt ea, quæ in Theoremate proponuntur.

Quoniam enim est, *constr.* FG ad GE, ut EC ad CH; erit, *compon.* FE ad GE, sive ad CE, ut EH ad CH; ergo, 12. 5. erit FH ad EH, ut EH ad CH: igitur.

Æqu. hæ Rationes $\left\{\begin{array}{l}\text{FH ad EH (}\textit{ut prius}\text{)}\\ \text{EH ad CH (}\textit{ut prius}\text{)}\\ \text{FE ad EC (}\textit{ut prius}\text{)}\\ \text{BD ad DC}\end{array}\right.$

Atqui, *hyp.* BD, & DC sunt sibi pot. commens. ergo, 10. *huj.* EH, & CH sunt etiam sibi pot. commens. Atqui, *ut prius*, FH, EH, & CH sunt continuè proportionales; ergo, *Corol.* 20. 6. erit FHq. ad EHq. ut FH ad CH, sed FHq. & EHq. sunt sibi commens. (Nam FH, & EH sunt ostensæ sibi pot. commens.) ergo, 10. 10. FH, & CH erunt sibi long. commens. adeoque 16. 10. etiam FC, & CH. Cæterùm, *hyp.* & 37. 10. CD est rationalis, & DF, sivè Aq. est rationale; ergo, 21. 10. CF est rationalis, long. commens. ipsi CD; ergo etiam CH (cui, *ut prius*, ipsa CF est long. commens.) est rationa-

lis

lis long. commens. ipsi CD: atqui, *ut prius*, EH & CH sunt ostensæ sibi pot. commens. ergo etiam EH est rationalis; adeoque, 74. *huj.* EC est Apotome, cui congruit CH. Quod primò erat demonstrandum.

Porrò, *ut prius*, est EH ad CH, ut BD ad DC, *& altern.* EH ad BD, ut CH ad DC. Quod secundò erat demonstrandum.

Deindè, quoniam, *ut prius*, CH, & DC sunt sibi long. commens. ergo, 10. *huj.* etiam EH, & BD sunt sibi long. commens. adeoque 15. 10. ità poterit BD plusquam DC, ac EH plusquam CH quadrato lineæ sibi long. commens. vel incommens. Item si sit BD, erit etiam EH, sin verò sit DC, erit etiam CH rationali expositæ long. commensurabilis: quod si nec BD, nec DC; ità etiam neque EH, neque CH eidem rationali long. commensurabilis erit; adeoque, *ex secundis, & tert. def.* qualecunque Binomium sit BC, ejusdem ordinis Apotome erit EC. Quod demum E. D.

PROPOSITIO CXIV.

Quadratum Rationalis (A) ad Apotomen (BC, sivè BD minùs CD) applicatum, latitudinem facit (BE) Binomium, cujus nomina (BH, HE) sunt long. commensurabilia, & proportionalia datæ Apotomæ nominibus (BD, CD); Binomiumque ejusdem est ordinis, ac Apotome.

Ad

Ad BD totam applicetur BF æquale ipsi Aq. sivè ipsi CE; ergo, 14. 6. erit reciprocè BE ad BG, ut BD ad BC, & *convert.* erit BE ad GE, ut BD ad CD. Tum fiat, ut composita BE ad compositam GE, sic ablata HE ad ablatam GH; ergo, 19. 5. erit residua BG ad residuam HE, ut tota BE ad totam GE, quæ *constr.* sunt, ut HE ad GH; ergo erit BH ad HE, ut HE ad GH; adeoque, *Corol.* 20. 6. erit BHq. ad HEq. ut BH ad GH: Atqui BHq. & HEq. sunt sibi commens. (Nam, *ut prius*, est BD ad CD, ut BE ad GE, quæ sunt, *ut prius*, ut BH ad HE, atque BD, & CD, utpotè nomina Apotomæ, sunt rationales sibi pot. tantùm commens. adeoque, 10. 10. BH, & HE sunt etiam sibi pot. tantùm commens.) Ergo, 10. 10. BH, & GH sunt sibi long. commens. adeoque, cor. 16. 10. etiam BH, & BG sunt sibi long. commens. Quoniam verò Aq. sivè BF, rationale applicatum ad rationalem BD, facit, 21. 10. latitudinem BG rationalem, long. commens. ipsi BD; idcircò etiam BH (quippè quæ ostensa est long. commens. ipsi BG) erit rationalis, eidem BD long. commens. Atqui HE ostensa est pot. tantùm commens. ipsi BH rationali; Ergo BH, & HE sunt rationales sibi pot. tantùm commens. adeoque, 37. 10. BH pl. HE est Binomium. Quod primò erat demonstrandum.

Tum, quoniam, *ut prius*, est BH ad HE, ut BD ad CD; ergo, *altern.* erit BH ad BD, ut HE ad CD: atqui, *ut prius*, BH, & BD

sunt

sunt sibi long. commens. Ergo, 10. 10. etiam HE & CD erunt sibi long. commens. Adeoquè Binomii nomina sunt proportionalia, & long. commensurabilia nominibus Apotomæ. Quod erat deindè ostendendum.

Postremò, 15. 10. eodem modo BH plus, quam HE, ac BD plus, quàm CD poterit quadrato lineæ sibi long. commens. vel incommens. Eodemque, 10. *huj.* pariter modo erit BH, ac BD, vel erit similiter HE, ac CD long. commens. expositæ rationali, & si illorum nominum neutrum, horum etiam, neutrum. Adeoque, *ex secundis, & tertiis def.* Binomium BH pl. HE ejusdem erit ordinis, ac Apotome BD minùs CD. Quod demum erat demonstrandum.

PROPOSITIO CXV.

SI spatium (AB) contineatur sub Apotoma (AC, sivè CE minùs AE), & Binomio (CD pl. BD) cujus nomina sint proportionalia, & long. commensurabilia nominibus Apotomæ; recta linea (F) spatium (AB) potens, est Rationalis.

Sit G quævis rationalis, & fiat CH æquale ipsi Gq. Ergo, 113. *huj.* erit BH (sivè HI minùs IB) Apotome, atque erunt sibi long. commens. HI, & CD, uti & IB, & DB, quin erit HI ad BI, ut CD ad DB, quæ sunt, *hyp.* ut CE ad EH; ergo, 11. 5. & *altern.* erit, ut tota HI ad totam CE, sic ablata BI ad ablatam

EA;

EA; ergo, 19.5. erit residua BH ad residuam AC, ut tota HI ad totam CE, sivè, ut ablata BI ad ablatam EA: Atqui, 12.10. GI, & CE sunt sibi long. commens. (quippè tam CE, *hyp.* quàm HI, *ut prius*, est long. commens. eidem CD) Ergo, 10.10. BH, & AC sunt etiam sibi long. commens. adeoque, 1.6. & 10.10. etiam HC, & BA sunt sibi commens. Sed HC, hoc est Gq. est Rationale; ergo BA, sivè Fq. erit rationale, ac proindè linea F est rationalis.

Q. E. D.

COROLL. Hinc fieri potest, ut spatium rationale contineatur sub duabus rectis irrationalibus.

PROPOSITIO CXVI.

A Media (– AB) fiunt infinitæ Irrationales (BE, EF &c.) & nulla alicui antecedentium est eadem.

Sit AC exposita rationalis, ad quam applicatum sit spatium AD; ergo, 1. *lemm. ad* 38. *huj.* AD est Irrationale: Tum in AB protracta sumatur BE, quæ possit spatium AD; ergo, 11. *def. huj.* BE est Irrationalis, nulli antecedentium conveniens; nullum enim quadratum alicujus hucusque explicatarum irrationalium applicatum ad rationalem, latitudinem efficit Mediam: Perficiatur deindè rectangulum DE; ergo, *cit. lemm.* DE est irrationale; & proindè, *cit. def.* recta EF, quæ ipsum potest est irrationalis, & nulli prio-

priorum eadem; nullum enim hucuſque demonſtratarum irrationalium quadratum ad rationalem applicatum latitudinem efficit ipſam BE; & ſic porrò deinceps infinitæ invenientur irrationales, & earum nulli antecedentium erit eadem.

Q. E. D.

PROPOSITIO CXVII.

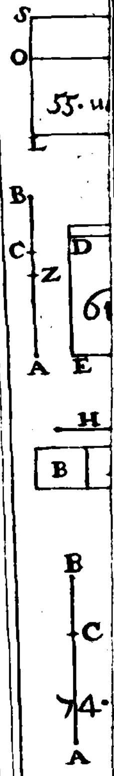
P*Ropoſitum ſit nobis oſtendere, in quadratis figuris* (*BD*) *diametrum* (*AC*) *lateri* (*AB*) *incommenſurabilem eſſe*.

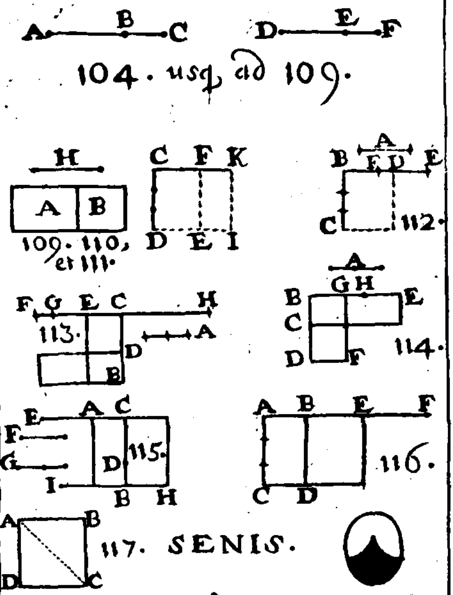
Siquidem, 47. 1. eſt ACq. ad ABq. ut 2. ad 1. quæ non ſunt, ut numerus quadratus ad numerum quadratum; ergo, 9. *huj.* AC eſt long. incommenſurabilis ipſi AB. Q. E. D.

SCHOL. Celebratiſſimum (ut ait *Barrovvius*) eſt hoc Theorema apud veteres philoſophos, adeout qui hoc neſciret, eum magnus PLATO non hominem, ſed pecudem diceret.

LAUS DEO.

LIBER





LAUS DEO.

F. DANIEL DANIELI CAR:
ASTORINI DISCIPULUS
DELINEAVIT, ET INCIDIT

priorum eadem; nullum enim hucusque demonstratarum irrationalium quadratum ad rationalem applicatum latitudinem efficit ipsam BE; & sic porrò deinceps infinitæ invenientur irrationales, & earum nulli antecedentium erit eadem.

Q. E. D.

PROPOSITIO CXVII.

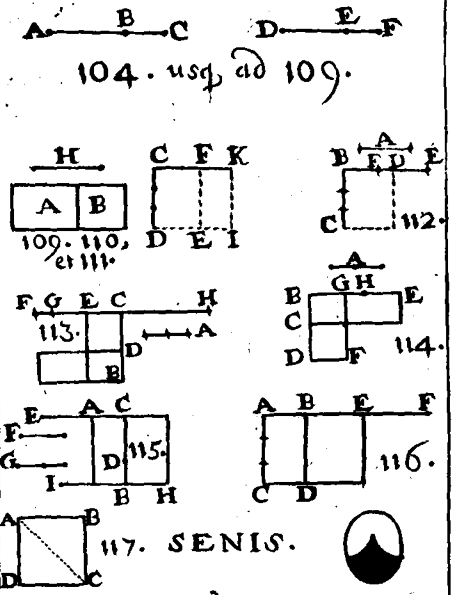
P*Ropositum sit nobis ostendere, in quadratis figuris (BD) diametrum (AC) lateri (AB) incommensurabilem esse.*

Siquidem, 47. 1. est ACq. ad ABq. ut 2. ad 1. quæ non sunt, ut numerus quadratus ad numerum quadratum; ergo, 9. *huj.* AC est long. incommensurabilis ipsi AB. Q. E. D.

SCHOL. Celebratissimum (ut ait *Barrowvius*) est hoc Theorema apud veteres philosophos, adeout qui hoc nesciret, eum magnus PLATO non hominem, sed pecudem diceret.

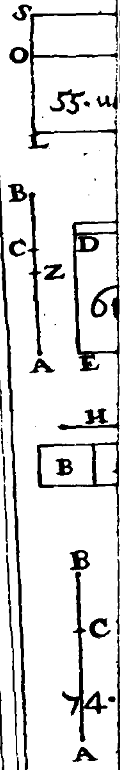
LAUS DEO.

LIBER



LAUS DEO.

F. DANIEL DANIELI CAR: ASTORINI DISCIPULUS DELINEAVIT, ET INCIDIT



LIBER XI.

DEFINITIONES.

1. Solidum est, quod longitudinem, latitudinem, & crassitudinem habet.

2. Solidi autem extremum est superficies.

3. Linea recta est ad planum recta, cum ad rectas omnes lineas, à quibus illa tangitur, quæque in proposito sunt plano, rectos angulos efficit.

4. Planum ad planum rectum est, cùm rectæ lineæ, quæ communi planorum sectioni ad rectos angulos in uno planorum ducuntur, alteri plano ad rectos sunt angulos.

5. Rectæ lineæ ad planum inclinatio, est, cùm à sublimi termino rectæ illius lineæ ad planum deducta fuerit perpendicularis, atque à puncto, quod perpendicularis in ipso plano fecerit, ad propositæ illius lineæ extremum, quod in eodem est plano, altera recta linea fuerit adjun-

cta; est, inquam, angulus acutus ipsa insistente linea, & adjuncta comprehensus.

6. Plani ad planum inclinatio, est angulus acutus rectis lineis contentus, quæ in utroque planorum ad idem communis sectionis punctum ductæ, rectos cum sectione angulos efficiunt.

7. Planum ad planum similiter inclinatum esse dicitur, atque alterum ad alterum, cum dicti inclinationum anguli inter se fuerint æquales.

8. Parallela plana sunt, quæ æqualibus semper distant intervallis.

9. Similes solidæ figuræ sunt, quæ similibus planis continentur, multitudine æqualibus.

10. Æquales, & similes solidæ figuræ sunt, quæ similibus planis, multitudine, & magnitudine æqualibus continentur.

11. Solidus angulus est plurium, quàm duarum linearum, quæ se mutuo contingant, nec in eadem sint superficie, ad omnes lineas inclinatio.

ALITER.

Solidus angulus est, qui pluribus, quàm duobus planis angulis, in eodem non consistentibus plano, sed ad unum punctum constitutis, continetur.

12. Pyramis est figura solida, quæ planis continetur, ab uno plano ad unum punctum constituta.

13. Prisma est figura solida, quæ planis continetur, quorum adversa duo sunt, & æqualia, & similia, & parallela; alia verò parallelogramma.

14. Sphæra est, quando, semicirculi manen-

te

te diametro, circumductus semicirculus in se ipsum rursus revolvitur, undè moveri cæperat, circumassumpta figura.

15. Axis autem sphæræ, est quiescens illa recta linea, circum quam semicirculus convertitur.

16. Centrum sphæræ est idem, quod, & semicirculi.

17. Diameter autem sphæræ, est recta quædam linea per centrum ducta, & utrinque à sphæræ superficie terminata.

18. Conus est, quando rectanguli trianguli manente uno latere eorum, quæ circa rectum angulum, circunductum triangulum in se ipsum rursus revolvitur, undè moveri cęperat, circumassumpta figura.

Atque, si quiescens recta linea æqualis sit reliquæ, quæ circa rectum angulum convertitur, Orthogonius erit conns: Si verò minor, Amblygonius: Si verò major, Oxygonius.

19. Axis autem coni, est quiescens illa linea, circum quam triangulum vertitur.

20. Basis verò coni est circulus, qui à circumducta linea recta describitur.

21. Cylindrus est, quando rectanguli parallelogrammi manente uno latere eorum, quæ circa rectum angulum, circunductum parallelogrammum in se ipsum rursus revolvitur, undè cæperat moveri, circumassumpta figura.

22. Axis autem cylindri, est quiescens illa recta linea, circum quam parallelogrammum convertitur.

 23. Ba-

23. Bases verò cylindri sunt circuli à duobus adversis lateribus, quæ circumaguntur, descrpti.

24. Similes coni, & cylindri sunt, quorum, & axes, & basium diametri proportionales sunt.

25. Cubus est figura solida, sub sex quadratis æqualibus contenta.

26. Tetraedrum est figura solida, sub quatuor triangulis æqualibus, & æquilateris contenta.

27. Octaedrum est figura solida, sub octo triangulis æqualibus, & æquilateris contenta.

28. Dodecaedrum est figura solida, sub duodecim pentagonis æqualibus, & æquilateris, & æquiangulis contenta.

29. Icosaedrum est figura solida, sub viginti triangulis æqualibus, & æquilateris contenta.

30. Parallelepipedum est figura solida, sex figuris quadrilateris, quarum, quæ ex adverso, parallelæ sunt, contenta.

31. Solida figura in solida figura dicitur inscribi, quando omnes anguli figuræ inscriptæ constituuntur vel in angulis, vel in lateribus, vel denique in planis figuræ, cui inscribitur.

32. Solida figura solidæ figuræ vicissim circumscribi dicitur, quando vel anguli, vel latera, vel denique plana figuræ circumscriptæ tangunt omnes angulos figuræ, circum quam describitur.

PROPOSITIO I.

Rectæ lineæ pars quædam (AC) non est in subjecto plano (DE), quædam verò (BC) in sublimi.

In

In subjecto plano DE producatur AC in directum usque ad F. Si jam vis, rectam BC esse etiam in directum ipsi AC; habebunt duæ rectæ lineæ ACB, & ACF commune segmentum AC: quod, 10. *ax.* 1. fieri nequit.

PROPOSITIO II.

Si duæ rectæ lineæ (AB, & CD) se mutuò secent; in unò sunt plano: atque omne triangulum (DOB) in uno est plano.

Sit enim, si f. p. 3gli DOB pars quædam OFG in uno plano, pars verò FDBG in altero; ergo ipsius rectæ OD pars OF est in subjecto plano, pars verò FD in sublimi: quod, 1. 11. fieri nequit; adeoque 3glum ODB in uno est plano, proindequè & rectæ OD, & OB; ergo, 1. 11. etiam totæ AB, & CD in eodem sunt plano. Q. E. D.

PROPOSITIO III.

Si duo plana (AB, & CD) se mutuò secent; communis eorum sectio (EF) est recta linea.

Nam si communis sectio EF non credatur esse recta linea; ducatur in plano AB recta EHF, & in plano CD recta EGF; ergo hæ duæ rectæ, quoniam eosdem habent terminos E, & F, spatium claudent: quod, 14. *ax.* 1. fieri nequit.

PROPOSITIO IV.

SI recta linea (KO) duabus rectis lineis (AB, CD) se mutuò secantibus in communi sectione (K) perpendiculariter insistat; illa ducto etiam per ipsas (AC, BD) plano ad angulos rectos erit.

In subjecto plano duc utcunque rectas AB, & CD se decussantes in puncto K, & sint rectæ KA, KB, KC, KD sibi mutuò æquales, & junge rectas AD, DB, BC, CA, & per K ducatur quævis recta GI, atque jungantur è puncto sublimi O rectæ OA, OG, OD, OB, OI, OC. Quoniam ergo, *constr.* æquantur KA, & KB, uti & KD, & KC, & 15. 1. angulus AKD angulo BKC, erit, 4. 1. AD æqualis ipsi BC, necnon angulus KAG angulo KBI: atqui, 15. 1. etiam anguli AKG, & BKI æquantur; uti &, *constr.* rectæ KA, & KB; ergo, 26. 1. æquab. AG, & BI, uti & KG, & KI: Deindè in 3glis OKA, OKB, OKC, & OKD æquantur, *constr.* sibi mutuò KA, KB, KC, & KD, atque KO est communis, necnon, *hyp.* anguli in K recti sunt; ergo, 4. 1. æquantur bases OA, OB, OC, & OD: Triangula igitur AOD, & BOC sibi mutuo æquilatera sunt; adeoque, 8. 1. angulus DAO æquatur angulo CBO; ergo, 4. 1. in 3glis AOG, & BOI æquantur sibi mutuo OG, & OI, ac proindè etiam 3gla OKG, & OKI sibi mutuò æquilatera sunt; ergo, go, 8. 1. anguli OKG, & OKI sunt sibi æquales, ac proindè, 10. *def.* 1. uterque rectus est: eademque ratione ostendetur, lineam OK cum omnibus in subjecto plano ductis rectis lineis angulos rectos constituere, adeoque, 3. *def.* 11. ad planum rectam esse. Q. E. D.

PROPOSITIO V.

SI recta linea (AB) tribus rectis lineis (AO, AD, AK) se mutuò tangentibus in communi sectione ad rectos angulos insistat; illæ tres rectæ in uno sunt plano.

Nam AO, & AD, 2. 11. sunt in uno plano, item, 2. 11. AD, & AK debent esse in uno plano: Iam si vis, hæc plana esse diversa; sit, 3. 11. communis eorum sectio recta AC: Igitur, *hyp.* BA perpendicularis est rectis AO, & AD; ergo, 4. 11. eadem BA perpendicularis est plano EC; adeoque, 3. *def.* 11. ipsi rectæ AC perpendicularis est: atqui, 2. 11. BA est in eodem plano cum AC, & AK; ergo anguli BAC, & BAK erunt in eodem plano, & ambo recti, & proindè pares, pars toti. Q. E. A.

PROPOSITIO VI.

SI duæ rectæ lineæ, (AB, DO) eidem plano (EF) ad rectos sint angulos; parallelæ erunt inter se.

Ducatur AD, cui in plano EF perpendiculacularis fiat DC æqualis ipſi AB, junganturque BD, BC, & AC. Iam verò, *conſtr.* in 3glis BAD, & ADC anguli in A, & D recti ſunt, & BA, & DC æquantur, atque AD eſt communis, ergo, 4. 1. æquabuntur BD, & AC, adeoque, 8. 1. in 3glis BAC, & BDC ſibi mutuò æquilateris angulus BAC, qui, *hyp.* rectus eſt, æquatur angulo BDC, ſed etiam, *conſtr.* angulus CDA rectus eſt, & angulus CDO rectus ponitur; ergo recta CD perpendicularis eſt tribus rectis, nempè DO, DB, & DA, quæ proindè, 5. 11. in uno eodemque ſunt plano, in quo, 2. 11. etiam AB ſita eſt: quoniam ergo AB, & DO in eodem ſunt plano, &, *hyp.* anguli interni BAD, & ODA recti ſunt; erunt, 28. 1. AB, & OD ſibi mutuò parallelæ. Q. E. D.

PROPOSITIO VII.

SI duæ ſint parallelæ rectæ lineæ (AB, CD) in quarum utraque ſumpta ſint quælibet puncta (F, E); illa linea (EF), quæ ad hæc puncta adjungitur, in eodem eſt cum parallelis plano (ABCD).

Planum, in quo ſunt AB, CD ſecet aliud planum per puncta E, F; ſi jam EF non eſt in plano, in quo ſunt AB, CD; illa communis ſectio non erit; ſit ergo utriuſque plani communis ſectio linea EGF; hæc utique, 3. 11. recta erit; adeoque duæ rectæ ſpatium comprehendent.

Q. E. A.

PRO-

PROPOSITIO VIII.

SI duæ ſint paralellæ rectæ lineæ (AB, DO) quarum altera (AB) perpendiculariter cuidam plano (EF) inſiſtat; etiam reliqua eidem plano ad angulos rectos erit.

Adhibita conſtructione, & demonſtratione ſextæ hujus; anguli CDA, & CDB recti ſunt; ergo, 4. 11. CD recta eſt plano per AD, DB (in quo propterea, 7. 11. erunt, & ipſæ AB, DO); ergo, 3. *def.* 11. CD ipſi DO perpendicularis eſt, atqui, *hyp.* & 29. 1. angulus ODA etiam rectus eſt; ergo, 4. 11. OD recta eſt plano EF. Q. E. D.

PROPOSITIO IX.

QUæ (BA, & DC) eidem rectæ lineæ (EF) ſunt parallelæ, ſed non in eodem plano; ſunt quoque inter ſe parallelæ.

In plano parallelarum AB, EF ducatur IK perpendicularis ad EF, & ex puncto K ducatur in plano parallelarum EF, CD recta KO perpendicularis ad ipſam EF; ergo, 4. 11. recta KE, ſivè EF perpendicularis eſt plano KIO, atqui AB, & EF, *hyp.* ſunt ſibi parallelæ, & *ut prius*, EF recta eſt plano IKO; ergo, 8. 11. etiam AB eidem plano recta eſt; ità etiam quoniam, *hyp.* EF, & DC ſunt ſibi parallelæ, atqui, *ut prius*, EF eſt recta plano IKO; erit etiam

DC

DC recta eidem plano; adeoque, 6. 11. AB, & CD sunt sibi parallelæ. Q. E. D.

PROPOSITIO X.

SI duæ rectæ lineæ (HC, HB) se mutuò tangentes, ad duas alias se mutuò tangentes (OM, ON) sint parallelæ, non autem in eodem plano; illæ angulos æquales (CHB, NOM) comprehendent.

Fiant HC, HB, OM, ON sibi æquales, & ducantur BM, MN, NC, CB, HO. Quoniam ergo, *hyp. & constr.* HC, & ON sunt sibi parallelæ, & æquales; erunt, 33. 1. sibi parallelæ, & æquales, ipsæ NC, & HO; ità etiam, quoniam HB, & OM sunt sibi parallelæ, & æquales; erunt etiam HO, & BM sibi parallelæ, & æquales; adeoque, 9. 11. NC, & BM sunt sibi parallelæ, & 1. *ax.* 1. sibi æquales: adeoque, 33. 1. CB, & MN sunt etiam sibi æquales: ergo, 8. 1. in 3glis æquilateris CHB, & NOM anguli in H, & O sibi mutuò æquantur. Q. E. D.

PROPOSITIO XI.

A Dato puncto (A) in sublimi ad subjectum planum (BC) perpendicularem rectam lineam (AK) ducere.

In plano subjecto ducatur utcunque linea BD, ad quàm, 12. 1. ex puncto A demittatur

per-

perpendicularis AL, atque in eodem plano subjecto per punctum L ducatur, 11. 1. perpendicularis ILF indefinita: Tum, 12. 1. ad lineam ILF ducatur ex puncto A perpendicularis AK; dico factum. Nam per K ducatur in plano subjecto linea OKE parallela ad BLD: & quoniam, *constr.* BD perpendicularis est ad AL, LK; erit etiam, 4. 11. perpendicularis ad planum AKL; adeoque, & linea OE, quæ, *constr.* parallela est lineæ BD; erit, 8. 11. recta eidem plano AKL: Quoniam verò, 2. 11. AK in eodem est plano cum rectis KL, & AL, & tangit rectam OK in K; erit, 3. *def.* 11. angulus AKO rectus, adeoque AK ipsi KO, (uti &, *constr.* ipsi KL perpendicularis erit), ac proindè, 4. 11. recta erit subjecto plano. Q. E. F.

PROPOSITIO XII.

DAto plano (*BC*) *à puncto* (*A*) *quod in illo datum est, perpendicularem* (*AE*) *excitare.*

A quovis extra planum puncto F sublimi duc, 11. 11. perpendicularem FD plano BC, & jungatur AD, & fiat, 31. 1. AE parallela ipsi DF; dico factum. Quoniam enim, *constr.* FD perpendicularis est plano BC, & EA parallela est ipsi FD; erit etiam, 8. 11. ipsa EA perpendicularis eidem plano. Q. E. F.

PRO-

PROPOSITIO XIII.

D*Ato plano (AB) à puncto (C) quod in illo datum est, non excitabuntur ad easdem partes duæ perpendiculares (CD, CE).*

Quoniam enim hæ duæ lineæ se mutuò secant, idcircò sunt in eodem plano; quòd si utraque dicatur esse perpendicularis plano subjecto; essent, 6. 11. sibi mutuò parallelæ, cùm tamen existant in eodem plano, & conveniant in eodem puncto C: quæ quidem se mutuò elidunt.

PROPOSITIO XIV.

S*I eadem linea recta (AC) ad duo plana (EF, GH) perpendicularis sit; hæc plana erunt sibi mutuò parallela.*

Sumatur in planorum alterutro EF quodvis punctum B, ad quod ducatur AB; erunt, 2. 11. AC, & AB in eodem plano; Tum, 31. 1. ducatur ex puncto B linea BD parallela ad AC; erit etiam, 8. 11. BD perpendicularis utrique plano; quòd si jungatur linea CD· erunt, 3. *def.* 11. anguli ABD, CDB recti; ergo, 38. 1. AB, & CD sunt sibi parallelæ; adeoque figura ABDC est parallelogrammum, ac proindè, 34. 1. BD, quæ ostensa est utrique plano perpendicularis, æquatur ipsi AC; eodemque modo ostendetur, omnes utrique plano perpendiculares, æquales esse; ac proindè plana erunt inter se parallela,

quan-

quandoquidem iisdem semper distant intervallis.

PROPOSITIO XV.

SI duæ rectæ lineæ (AB, AC) se mutuò tangentes ad duas rectas lineas (DE, DF) non in eodem consistentes plano, & se etiam mutuò tangentes, sint parallelæ; parallela sunt quæ per ipsas ducuntur plana.

Ex A, 11. 11. duc AG rectam plano EF, & 31. 1. in eodem plano EF fiant GH, GI parallelæ ipsis DE, DF; erunt etiam, 9. 11. GH, GI parallelæ ad AB, AC. Quoniam igitur, *constr. & 3. def.* 11. anguli IGA, HGA recti sunt; erunt etiam, 29. 1. anguli CAG, BAG recti; ergo, 4. 11. linea GA recta est plano BC; atqui eadem AG, *constr.* recta est plano EF; ergo, 14. 11. ipsa plana sunt sibi parallela.

Q. E. D.

PROPOSITIO XVI.

SI duo plana parallela (AB, CD) plano quopiam (HEOGF) secentur; communes sectiones (EH, GF) erunt etiam sibi parallelæ.

Nam si dicantur non esse parallelæ, cùm sint in eodem plano secante, convenient alicubi, ut puta in O: Atqui, 2. 11. totæ HEO, FGO sunt in planis AB, CD productis; ergo ipsa etiam plana convenient in puncto O; contra hyp.

PRO-

PROPOSITIO XVII.

SI duæ rectæ lineæ (ACE, BDF) parallelis planis (IH, LK, NM) secentur; in eadem ratione secabuntur (hoc est AC ad CE, ut ad BD ad DF.)

Ducantur lineæ AB, CD, EF, & jungatur AF. Quoniam ergo, *hyp.* plana sunt parallela; erunt etiam, *16. 11.* sibi parallelæ communes sectiones AB, CD, EF; ergo, 2. 6. erit BD ad DF, ut AO ad OF, atque hæ, ut AC ad CE; ergo, 11. 5. erit BD ad DF, ut AC ad CE. Q. E. D.

PROPOSITIO XVIII.

SI recta linea (AB) plano cuipiam (CD) sit perpendicularis; etiam omnia, quæ per ipsam (AB) ducuntur, plana (EG &c.) eidem plano (CD) perpendicularia erunt.

Ductum sit per AB planum quodpiam EG faciens cum plano CD sectionem FG rectam lineam, è cujus aliquo puncto H ducatur, 31. 1. linea HI parallela ipsi AB; erit, 8. 11. HI etiam recta plano CD, rectæque etiam erunt eidem plano omnes perpendiculariter ductæ ad sectionem GF; ergo, 4. *def.* 11. planum EG rectum est plano CD, eademque ratione ipsi plano CD recta erunt omnia plana ducta per AB. Q. E. D.

PRO-

PROPOSITIO XIX.

SI duo plana (AB, CD) se mutuò secantia plano cuipiam (GM) ad rectos sint angulos: communis etiam eorum sectio (EF) eidem plano (GM) ad rectos angulos erit.

Quoniam enim plana AB, CD ponuntur recta plano GM; ergo, 4. *def.* 11. ex puncto F sumpto in utroque plano AB, CD duci poterit perpendicularis ipsi plano GM, quæ tamen, 13. 11. unica erit, & propterea eorundem planorum communis sectio. Q. E. D.

PROPOSITIO XX.

SI solidus angulus (OBCD) tribus planis angulis (BOD, DOC, BOC) contineatur; ex his duo quilibet, ut ut assumpti, reliquo sunt majores.

Nam si tres anguli sunt æquales; res est clara: sin verò inæquales, maximus esto BOC, ex quo auferatur BOA æqualis ipsi BOD, & fiat OD æqualis ipsi OA: ducanturque BAC, BD, DC.

Quoniam latus BO commune est, & OD æquatur, *constr.* ipsi OA, & angulus BOA, angulo BOD; erit, 4. 1. linea BA æqualis lineæ BD: sed, 20. 1. BD pl. DC maj. sunt quàm BC; ergo, subductis æqualibus BA, & BD; erit, 5. *ax.* 1. DC major, quàm AC: atqui,

atqui, *constr.* OD æquatur ipsi OA, & latus OC commune est, at verò, *ut prius*, basis DC major est quàm AC; ergo erit, 25. 1. angulus COD major quàm AOC; adeoque, 4. *ax.* 1. BOD pl. COD maj. sunt quàm BOC.

Q. E. D.

PROPOSITIO XXI.

O*Mnis solidus angulus sub minoribus, quàm quatuor rectis angulis planis, continetur.*

Esto solidus angulus O, & planis angulis ipsum componentibus subtendantur rectæ BC, CD, DE, EA, AB in uno plano existentes. Quo facto constituitur Pyramis, cujus basis est Polygonum BCDEA, vertex O, totque cincta triangulis, quot plani anguli componunt solidum O. Iamverò, quia, 20. 11. duo anguli OBA, OBC majores sunt unô ABC, & duo OAB, OAE majores sunt unô ABC, & duo OAB, OAE majores sunt tertiô BAE, & sic deinceps; erunt triangulorum COB, BOA, AOE, EOD, DOC circa basim anguli simul sumpti majores omnibus simul sumptis angulis basis pyramidalis BCDEA: sed, *Schol.* 32. 1. anguli baseos unà cum quatuor rectis faciunt bis tot rectos, quot sunt latera, sive quot triangula; ergo, 4. *ax.* 1. omnes triangulorum circa basim anguli una cum quatuor rectis conficiunt amplius quàm bis tot rectos, quot sunt triangula; ergo subductis, hinc, atque illinc angulis, circa puncta A, B, C, D, E; erunt an-

guli

guli solidum angulum componentes minores 4. angulis rectis. Q. E. D.

PROPOSITIO XXII.

SI fuerint tres anguli plani (A, B, HCI) quorum duo utlibet assumpti reliquo sint majores, comprehendant autem illos æquales rectæ lineæ (AD, AE, BF, BG, CH, CI); fieri potest, ut ex rectis lineis æquales illas rectas connectentibus (DE, FG, HI) triangulum constituatur.

Fiat enim angulus HCK æqualis angulo B, & linea CK lineæ CH, ducanturque KH, & KI; Igitur, 4. 1. æquabuntur KH, & FG, & quoniam, *hyp.* angulus ICK major est angulo A, & latera hos angulos comprehendentia sunt æqualia; erit, 24. 1. DE minor quàm KI, quæ, 20. 1. minor est, quàm HI pl. HK, hoc est, *ut prius*, quàm HI plus FG: similique ratione ostendentur quævis duæ reliquâ majores esse; ac proinde, 22. 1. ex his 3glum constitui potest.

Q. E. D.

PROPOSITIO XXIII.

EX tribus angulis planis (A, B, C) qui simul sumpti quatuor angulis rectis sint minores, & quorum duo quomodocunque assumpti reliquo sint majores, solidum angulum (OLIK) constituere,

X Fac

Fac AD, AE, BF, BG, CM, CN æquales inter ſe, & 22. 11. ex ſubtenſis DE, FG, MN, vel ex totidem ipſis æqualibus fiat triangulum LKI, circa quod, 5. 4. deſcribatur circulus.

Oſtendendum autem hic primò eſt, majorem eſſe AD, quàm LR ſemidiametrum; Nam aliàs AD, vel eſſet minor quàm LR, vel ipſi æqualis. Si æqualis; ergo æquabuntur etiam LR, & RK tam ipſi AD, quàm cæteris AE, BF &c.; atqui, *conſtr.* DE, & LI æquantur; ergo, 8. 1. angulus A angulo LRI æquabitur, ſimiliquè ratione angulus B angulo LRK, & angulus C angulo IRK: atqui, *hyp.* A pl. B pl. C minores ſunt quatuor angulis rectis; ergo etiam tres anguli circa idem punctum R minores erunt quatuor angulis rectis. Q. E. A.

Sin verò dicatur AD minor quàm LR, fiant RV, & RP æquales ipſis AD, & AE, & ducatur PV. Quoniam ergo, 7. 5. eſt RI ad RP, ut RL ad RV; erit, 2. 6. PV parallela ad IL; adeoque, 29. 1. 3gla PRV, & IRL erunt ſibi æquiangula; ergo, 4. 6. erit RI ad IL, ut RP ad PV, atqui RI major eſt quàm RP; ergo IL, hoc eſt DE, major erit quàm PV: Igitur quoniam, f. *hyp.* AD, & AE æquantur ipſis RP, & RV, & baſis DE major eſt, *ut prius*, quàm PV; erit, 25. 1. angulus A major quàm PRV: eademque ratione oſtendetur angulus B major, quàm LRK, & angulus C major, quàm IRK; Quod eſt abſurdum: Nam tres anguli dati plani minores ſunt quatuor rectis, anguli verò circa

pun-

punctum R sunt quatuor rectis æquales ; ergo AD major est quàm LR: Quòd & simili ratione ostendetur in cæteris casibus ; quando nempè centrum circuli est extra 3glum LKI, vel in uno ex lateribus ipsius.

Inveniatur ergo excessus ORq. quo ADq. majus est quàm LRq. & 12. 11. ex centro circuli erigatur OR recta plano ejusdem circuli, & ducantur OL, OK, OI. Quoniam ergo, *constr.* & 3. *def.* 11. angulus LRO rectus est; erit, 47. 1. OLq. æquale ipsi composito ORq. pl. RLq., cui, *constr.* æquatur ipsum ADq. ergo æquabuntur OL, & AD: sed, & æquantur, 15. *def.* & 2. *ax.* 1. OR pl. RL, & OR pl. RI, & OR pl. RX; ergo æquabuntur OL, OI, OK tam inter se, quàm ipsis AD, AE, &c.: sed & æquantur, *constr.* bases DE, FG, & MN lateribus 3gli inscripti ; ergo, 8. 1. æquabuntur anguli A, & LOI: B, & LOK: C, & IOK ; adeoque factus est angulus solidus ad O ex tribus angulis planis datis. Q. E. F.

PROPOSITIO XXIV.

SI solidum (AB) parallelis planis contineatur ; adversa illius plana sunt pgra similia, & æqualia.

Quoniam planum AC, secans plana parallela facit, 16. 11. sectiones AH, DC parallelas, & secans plana parallela AE, BH, facit sectiones parallelas AD, CH; ideo ADCH est pgrum, similiquè ratione raliqua Pppi plana sunt pgra. Quia ergo AF ad HG, & AD ad HC sunt parallelæ; erit, 10. 11. angulus DAF æqualis angulo CHG; sed, 34. 1. æquantur AF, & HG; HC, & AD; adeoque, 7. 5. est AF ad AD, ut HG ad HC; ergo 3gla FAD, GHC similia sunt, & æqualia; ac proinde, 34. 1. & 6. *ax.* 1. pgra AE, & BH sunt similia, & æqualia, idemque de reliquis oppositis planis ostensum puta. Q. E. D.

PROPOSITIO XXV.

S*I solidum parallelepipedum (ABCD) plano (EF) secetur, adversis planis (AD, CB) parallelo; erit quemadmodum basis (AH) ad basim (BH), ita solidum (DE) ad solidum (CE).*

Concipiatur parallelepipedum ABCD produci utrinque, & sume AT, & BK æquales ipsis AE, & BE, & ponantur plana TQ, KP planis AD, BC parallela; Igitur, 36. 1. & 1. *def.* 6. & 24. 11. parallelogrammata LM, & GH, uti & DL, & FG, necnon TQ, & AD &c. similia, & æqualia sunt; adeoque, 10. *def.* 11. æquantur Pppa AQ, & AF, uti & BP, & BF; ergo solida TF, FK ita multiplicia sunt solidorum DE, BF, ac bases TH, & KH basium AH, & BH. Quòd si basis TH major, vel minor sit quàm KH, vel ipsis æqualis; erit, 24. 11. & 9. *def.* 11. similiter solidum TF, majus,

vel

vel minus quàm ſolidum KF, vel ipſi æquale; adeoque erit, *6. def. 5.* AH ad BH, ut DE ad CE. Q. E. D.

PROPOSITIO XXVI.

AD datam rectam lineam (AB) ejuſque punctum (A) conſtituere angulum ſolidum (ABIO) æqualem ſolido angulo dato (CDFL).

Demittatur, 11. 11. utcunque recta LG perpendicularis plano DCF, & per G ducatur utcunque in plano DCF recta DF ſubtendens angulum planum DCF, atque tum ducantur LD, & LF: deindè fiat AB æqualis ipſi CD, & angulus BAI angulo DCF, & ſumatur BK æqualis ipſi DG, atque ex puncto K, 12. 11. erigatur perpendicularis KO æqualis ipſi GL, atque ducantur cæteræ lineæ; dico factum; quòd jam ex ipſa conſtructione patet.

PROPOSITIO XXVII.

AD data recta linea (AB) dato parallelepipedo (MD) ſimile ſimiliterque poſitum parallelepipedum (AK) conſtituere.

Ex angulis planis BAQ, QAI, BAI, qui ſint æquales angulis planis HMN, NMO, HMO fiat, 26. 11. angulus ſolidus A æqualis angulo ſolido M: atque tum fiat BA ad AQ, ut HM ad MN, atque deindè fiat AQ ad AI, ut MN ad

MO, & perficiatur parallelepipedum AK duĉtis planis parallelis; dico factum. Nam, *constr.* & 1. *def.* 6. parallelogrammata BQ, & NH sunt similia; uti & IQ, & ON, necnon IB, & OH; ergo, 24. 11. ficut in datis parallelogrammis opposita oppositis, ità etiam in constructis opposita oppositis sunt similia; adeoque, 9. *def.* 11. ipsa solida sibi mutuò similia sunt.

Q. E. F.

PROPOSITIO XXVIII.

SI *solidum parallelepipedum* (*AB*) *plano* (*DCGF*) *secetur per Diagonios* (*DF*, *CG*) *adversorum planorum* (*AE*, *BH*); *bifariam secabitur solidum* (*AB*) *ab ipso plano* (*DCGF*)

Nam quia, 24. 11. DC, & FG sunt sibi æquales, & parallelæ; idcircò, 33. 1. planum DCGF est pgrum, & quoniam, 24. 11. pgra AE, & BH sunt sibi æqualia, ac similia; erunt etiam, 34. 1. 3gla AFD, HGC, DFE, CGB sibi æqualia, & similia, atqui etiam, 24. 11. AC, & AG ipsis BF, & BD æqualia sunt, & similia; ergo prismatis DAFCHG omnia plana æqualia sũt, & similia omnibus planis prismatis DEFCBG; ac proindè, 9. *def.* 11. hoc prisma illi æquatur.

Q. E. D.

PRO-

PROPOSITIO XXIX.

Solida parallelepipeda (AQBHFEDC, AQBHNSRK) super eandem basim (AQBH) & inter eadem parallela plana, constituta, quorum insistentes lineæ (AF, AN) collocentur inter easdem lineas (AQ, FS); sunt sibi mutuò æqualia.

Siquidem, *hyp.* & 10. *def.* 11. prismata AFNHCK, QESBDR sibi mutuò æquantur; Si ergo ab utroque auferas commune prisma MENODK, & utrique addas commune prisma AMQHOB; æquabuntur, 3, & 2. *ax.* 1. ipsa data Pppa. Q. E. D.

PROPOSITIO XXX.

Solida parallelepipeda (CEOAXDKB, CEOAMNGF) super eandem basim (CEOA), & inter eadem parallela plana constituta, quorum insistentes lineæ (CX, CM) non collocentur inter easdem lineas (CE, XV) sibi mutuò æquantur.

Fiat enim productis lineis XDV, BKL, FMR, GNV Pppum CEOARVLI, cujus insistens linea CR collocetur inter easdem CE, XV; æquabitur ergo, *ex præcedenti*, Pppum constructum utrique dato, adeoque, & illa inter se. Q. E. D.

PROPOSITIO XXXI.

SI Pppa (EHGFCDBA, OeNMLaKI) constituantur super æquales bases (EHGF, OeNM) & in eadem altitudine; æquabuntur sibi mutuò.

Si Pppa habeant latera ad bases recta ; ad latus O*e* productum fiat pgrum *ehgf* æquale, & simile Pgro EHGF; adeoque, 24. 11. *&* 10. *def.* 11. Pppa *ebgfcdba*, EHGFCDBA sunt sibi æqualia, & similia : Tum perficiantur reliqua Pppa *efQNabPK*, *RSfemnba* ; Quibus positis ;

Æqu. hæ Rationes,

OeNMLaKI ad *ofQNabPK* (24. 11.)
OeNM ad *efQN* (*hyp. &* 7. 5.)
EHGF ad *efQN* (*constr. &* 7. 5.)
ehgf ad *efQN* (35. 1. *&* 7. 5.)
eRSf ad *efQN* (25. 11.)
eRSfmnba ad *efQNabPK* (29. 11. *&* 7. 5.)
ebgfcdba ad *efQNabPK*

Ergo, 9. 5. æquantur sibi mutuò Pppa *Oe*NMLaKI, & *ebgfcdba*. sive EHGFCDBA.

Q. E. D.

Quòd si Pppa HB, & OK habeant latera basibus obliqua ; ponantur super easdem bases, & in eadem altitudine parallelepipeda, quorum latera basibus sint recta ; erunt, 31. & 29. 11. ipsa inter se, & obliquis æqualia ; ac proindè, 1. *ax.* 1. obliqua etiam inter se. Q. E. D.

PRO-

PROPOSITIO XXXII.

Solida Pppa (ABCD, FIMN) sub eadem altitudine, inter se sunt, ut bases (AB, FI)

Producatur IHE, & fiat, 45. 1. Pgrum FE æquale ipsi AB, & compleatur Pppum EFML; erit ergo AB ad IF, 7. 5. ut EF ad FI, quæ sunt, 25. 11. ut Pppum EFML ad Pppum FIMN, quæ sunt, *ut prius*, & 7. 5. ut Pppum ABCD ast Pppum FIMN; adeoque, 11. 5. erit AB ad IF, ut ABCD ad FIMN.

Q. E. D.

PROPOSITIO XXXIII.

Similia solida Pppa (gdbh, *OQRT*) *inter se sunt in triplicata ratione homologorum laterum*(gm, *MO*)

Producantur rectæ *gmo*, *hmn*, *dmq*, & fiant *mo*, *mn*, *mq* æquales ipsis MO, MN, MQ; adeoque, 17. 11. Pppum *oqrt* æquale, & simile erit Pppo OQRT: tum perficiantur reliqua Pppa *doay*, *dofr*: Itaquè Pppum *gdbb* ad Pppum *oqrt*, hoc est ad Pppum OQRT se habet, ut Pppum *gdbb* ad *doay*, pl. *doay* ad *dofr*, pl. *dofr* ad *oqrt*: hoc est (32. 11.) ut Pgrum *cm* ad *do*, pl. *cm* ad *dn*, pl. *dn* ad *nq*: hoc est (1. 6.) ut linea *gm* ad *mo*, pl. *hm* ad *mn*, pl. *dm* ad *mq*: hoc est (*hyp.* & 10. *def.* 5.) ut *gm* ad *mo*, (sivè ad MO) ter.

Q. E. D.

CO-

COROLL. Hinc si fuerint quatuor lineæ rectæ continuè proportionales; erit prima ad quartam, ut Pppum super primam descriptum ad Pppum simile, similiterquè descriptum super secundam.

PROPOSITIO XXXIV.

AEqualium solidorum parallelepipedorum (ADCB, EHGF) bases, & altitudines sunt in reciproca proportione: & è conversò.

Nam si sint latera CA, GE ad bases recta, & æquentur non modò altitudines inter se, sed & bases; res est clara. Sin verò altitudines sint inæquales; à majori EG abscindatur EI æqualis ipsi AC, & per I ducatur planum IK parallelum basi EH. Igitur; In 1. *hyp.*

Æqu. hæ Rationes
- AD ad EH (32. 11.)
- Ppp. ADCB ad Ppp. EHIk (7. 5.
- Ppp. EHGF ad Ppp. EHIk (32. 11.)
- GX ad IX (1. 6.)
- GE ad IE (7. 5.)
- GE ad AC.

Q. E. D.

In 2. *hyp.*

Æqu. hæ Rationes
- Ppp ADCB ad Ppp. EHIk (32. 11.)
- AD ad EH (*hyp.*)
- GE ad AC (7. 5.)
- GE ad IE (1. 6.)
- GX ad IX (32. 11.)
- Ppp. EHGF ad Ppp. EHIk.

Ergo,

Ergo, 11. & 9. 5. æquantur Pppa ADCB, & EHGF. Q. E. D.

Quòd si latera ad bases sint obliqua; erigantur super iisdem basibus, & in eadem altitudine Pppa recta; erunt obliqua rectis æqualia; adeoque etiam obliqua erunt in reciproca proportione basium, & altitudinum. Q. E. D.

COROLL. Quæ de Pppis demonstrata sunt à Propos. 29. usque ad hanc, conveniunt etiam Prismatibus triangularibus, quippè, quæ sunt Ppporum dimidia.

PROPOSITIO XXXV.

Si fuerint duo plani anguli (EDF, BAC) æquales, quorum verticibus (D, & A) sublimes rectæ lineæ (DG, AL) insistant, quæ cum lineis primò positis angulos contineant æquales (GDE ipsi LAB, & GDF ipsi LAC); in sublimibus autem lineis (DG, AL) quælibet sumpta fuerint puncta (G, & L) & ab his ad plana, in quibus consistunt anguli primùm positi (EDF, BAC) ductæ fuerint perpendiculares (GH, & LM; à punctis verò (H, & M) quæ in planis à perpendicularibus fiunt, ad angulos primùm positos adjunctæ fuerint rectæ lineæ HD, & MA; hæ cum sublimibus (DG, AL) æquales angulos (HDG, MAL) comprehendent.

Fiant DI, & AL æquales, atque tum fiat IK parallela ad GH, & fiant deindè kF ad DF, uti & kE ad DE, necnon MC ad AC, atque de-

demum MB ad AB perpendiculares, & ducantur rectæ FE, & CB: IF, LC: IE, & LB. Quoniam ergo, *constr.* IK parallela est ad GH, quæ, *hyp.* perpendicularis est plano subjecto; erit etiam, 8. 11. IK perpendicularis eidem plano; adeoque, 3. *def.* 11. anguli IkF, IkD, IkE recti sunt, eademque ratione recti sunt anguli LMC, LMA, LMB. Igitur (*ex* 47. 1.)

Æqu. hæc { DIq. / IKq. pl. KDq. / IKq. pl. KFq. pl. FDq. / IFq. pl. FDq.

Ergo; 48. 1. angulus IFD rectus est. Ità etiam

Æqu. hæc { DIq. / IKq. pl. KDq. / IKq. pl. KEq. pl. EDq. / EDq. pl. IEq.

Ergo, 48. 1. angulus IED rectus est. Ità etiam

Æqu. hæc { ALq. / LMq. pl. MAq. / LMq. pl. MCq. pl. CAq. / CAq. pl. LCq.

Ergo, 48. 1. angulus LCA rectus est. Ità demum.

Æqu. hæc { LAq. / LMq. pl. MAq. / LMq. MBq. pl. BAq. / LBq. pl. BAq.

Ergo; 48. 1. angulus LBA rectus est: sed &, *hyp.* anguli IDE, & LAB æquantur sibi mutuò, &, *constr.* ID æquatur ipsi LA; ergo, 26. 1. æquabuntur DE, & AB: eademque ratione DF, & AC:

AC: IE, & LB: IF, & LC; adeoque, 47. 1. æquabuntur AM, & DK, ac proindè si ex DIq. auferatur DKq. atque ex LAq. auferatur AMq; æquabuntur IKq. & LMq. adeoque, & lineæ IK, & LM. Ergo 3gla IDK, LAM sibi mutuò æquilatera sunt; ac proindè, 8. 1. angulus IDK æquabitur angulo LAM. Q. E. D.

COROLL. Itàquè, si fuerint duo anguli plani æquales, quorum verticibus sublimes rectæ lineæ æquales insistant, quæ cum lineis primò positis angulos contineant æquales, utrumque utrique; erunt à punctis extremis linearum sublimium ad plana angulorum primò positorum demissæ perpendiculares, inter se æquales.

PROPOSITIO XXXVI.

SI tres rectæ lineæ (DE, DG, DF) proportionales fuerint; quod ex his tribus fit solidum Pppum (DH) æquale est descripto à media proportionali DG solido Pppo, quòd æquilaterum quidem sit, æquiangulum verò ei, quod describitur à tribus.

Quoniam enim, *hyp.* est DE ad DG, sivè ad IK, ut DG sivè IL ad DF, idcircò, 14. 6. æquabuntur Pgra FE, & LK, sed, & *hyp.* æquantur altitudines GD, & IM, necnon anguli solidi ad D, & I; ergo, 31. 11. æquantur sibi mutuò Pppa FEGH, & LKMN. Q. E. D.

PRO-

PROPOSITIO XXXVII.

SI quatuor rectæ lineæ (A, B, C, D,) proportionales fuerint; solida Pppa sibi similia, similiterque super illis posita, erunt etiam inter se proportionalia: & è conversò.

Nam sint super A, B, C, D descripta solida similia, similiterque posita, ut puta cubi: ergo

1. *Hyp.*

Æqu. hæ Rationes {
Ac. ad Bc. (33. 11.)
A ad B ter (*hyp.*)
C ad D ter (33. 11.)
Cc. ad Dc.

Q. E. D.

2. *Hyp.*

Æqu. hæ Rationes {
A ad B ter (33. 11.)
Ac. ac Bc. (*hyp.*)
Cc. ad Dc. (33. 11.)
C ad D ter.

Q. E. D.

PROPOSITIO XXXVIII.

SI planum (AB) ad planum (AC) rectum fuerit, & ab aliquo puncto (E) eorum, quæ sunt in uno planorum (AB) ad alterum planum (AC) perpendicularis (EF) ducta fuerit; hæc in planorum communem sectionem (AD) cadet.

Nam, si f. p. cadat EF extra communem sectionem AD. Tum in plano AC ducatur FG

per-

perpendicularis ad AD, jungaturque FG; ergo in 3glo EFG sunt duo anguli recti. Q. E. A.

PROPOSITIO XXXIX.

SI solidi Pppi (AB) eorum, quæ ex adversò planorum (AL, BÆ) latera (AE, FL, LH, HA, & ÆF, FB, BV, VÆ) bifariam secta sint; per sectiones autem plana (MNTR, DOXZ) sint extensa; planorum communis sectio (CK) & Pppi diameter (AB) bifariam se mutuò secabunt.

Ducantur rectæ CA, CL, & KÆ, KB. Quoniam, 34. 1. & 7. *ax.* 1. latera ÆX, & ÆR æquantur lateribus BZ, ZK, &, 29. 1. angulus ÆXk alterno angulo BZK; hinc, 4. 1. æquabuntur ÆK, & BK, & anguli ÆKX, BKZ; adeoque, *Schol.* 15. 1. ÆKB est una recta linea, eademque ratione ACL est una recta linea. Cæterùm, *hyp.* tam AÆ, & HV, quàm HV, & LB sunt parallelæ, & æqu. adeoque, 9. 11. AÆ, & LB sunt sibi parallelæ, & æquales; ac proindè, 33. 1. AL, & ÆB sunt etiam sibi parallelæ, & æquales; adeoque, 7. 11. tam AB, quàm CK sunt in eodem plano AÆBL. Quoniam ergo æquantur sibi mutuò anguli ad verticem ASC, & BSK, uti & alterni ACS, & BKS, & æquantur AC, & BK; erit, 26. 1. AS æqualis ipsi BS, uti & CS æqualis ipsi KS. Q. E. D.

COROLL. Hinc in omni Pppo Diametri se mutuò bisecant in puncto S.

PRO-

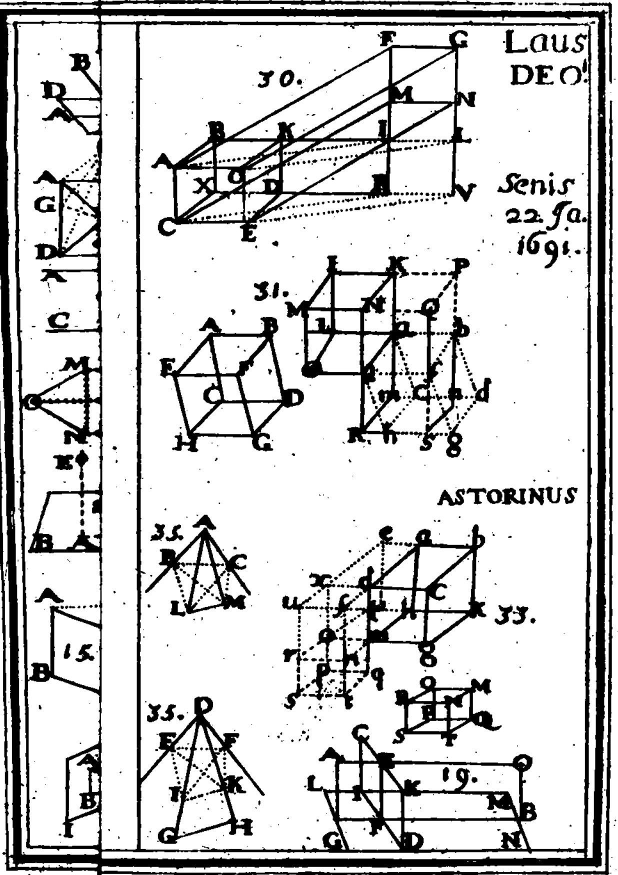
PROPOSITIO XXXX.

SI fuerint duo Prismata ejusdem altitudinis, quorum alterum habeat basim (MNQP) Pgrum, alterum verò basim (BCD) 3glum, atque pgrum duplum sit 3gli ; æquabuntur sibi mutuò ipsa Prismata.

Quippè si perficiantur Pppa BA, & MI, erunt hæc ob basim, & altitudinum æqualitatem, sibi mutuò æqualia ; adeoque, 7. *ax.* 1. æquabuntur etiam inter se ipsa Prismata, utpote, 28. 11. Ppporum dimidia.

Q. E. D.

L A U S D E O.



Laus DEO!
30.
Senis 22 Ja. 1691.
31.
ASTORINUS
35.
33.
35.
19.
15.

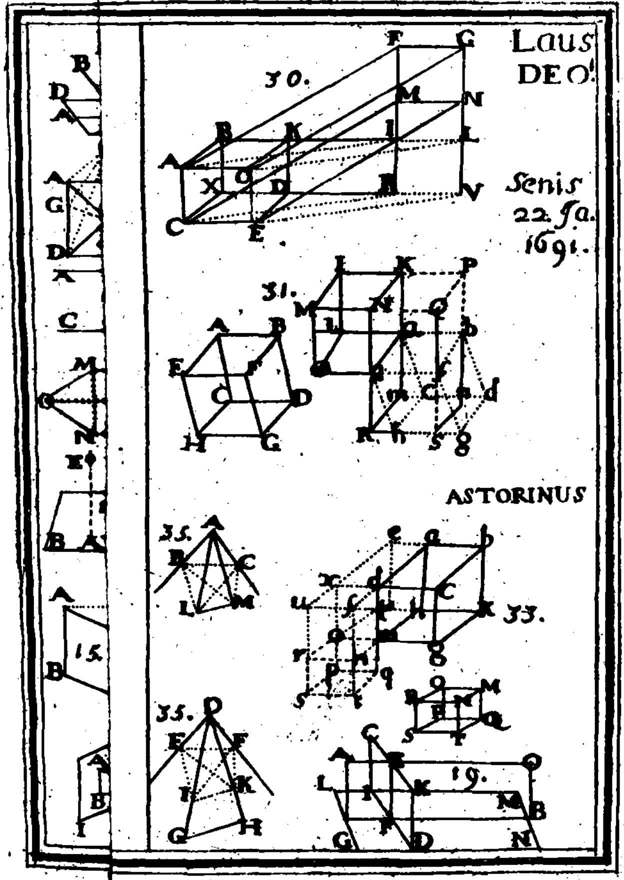
PROPOSITIO XXXX.

SI fuerint duo Prismata ejusdem altitudinis, quorum alterum habeat basim (MNQP) Pgrum, alterum verò basim (BCD) 3glum, atque pgrum duplum sit 3gli ; æquabuntur sibi mutuò ipsa Prismata.

Quippè si perficiantur Pppa BA, & Ml, erunt hæc ob basim, & altitudinum æqualitatem, sibi mutuò æqualia ; adeoque, 7. *ax.* 1. æquabuntur etiam inter se ipsa Prismata, utpote, 28. 11. Ppporum dimidia.

Q. E. D.

L A U S D E O.



Laus DEO!

Senis 22. Ja. 1691.

ASTORINUS

def.
que
6. c
21.
3. a
AB
que
pro
FG.

circ
Qui
pl.

LIBER XII.

PROPOSITIO I.

QUæ sunt in circulis polygona similia (ABCDE, FGHIK) inter se sunt, ut quadrata diametrorum (AL, FM).

Ducantur AC, BL; FH, GM. Quoniam ergo, *hyp.* & 1. *def.* 6. angulus ABC æquatur angulo FGH, atque est AB ad BC, ut FG ad GH; idcircò, 6. 6. æquantur anguli ACB, & FHG; adeoque, 21. 3. etiam anguli ALB, & FMG: atqui, 31. 3. anguli ABL, & FGM recti sunt; ergo 3gla ABL, & FGM sibi mutuò sunt æquiangula; adeoque, 4. 6. est AB ad FG, ut AL ad FM; ac proindè, 22. 6. est polyg. ABCDE ad polyg. FGHIK, ut ALq. ad FMq. Q. E. D.

COROLL. Hinc polygonorum similium circulo inscriptorum ambitus sunt, ut diametri: Quippè, *hyp.* & 12. 5. est AB pl. BC pl. CD pl. DE pl. EA ad FG pl. GH pl. HI, pl. IK pl. KF, ut AB ad FG, quæ sunt, *ut prius*, ut AL ad FM.

PROPOSITIO II.

Circuli inter se sunt quemadmodum quadrata diametrorum.

Nempè si sit circulus CEQF ad magnitudinem quampiam X, ut CFq. ad ÆTq., Dico æquari sibi mutuò magnitudinem X, & circulum TMNÆ.

Nam, si f. p. sit X minor, quàm circulus TMNÆ, sitque excessus magnitudo Z, ipsi verò circulo inscribatur quadratum SI, quod utpotè dimidium circumscripti quadrati, quòd majus est circulo, majus quidem erit quàm semicirculus. Bisecentur jam arcus *m*S, SM, M*n*, *mn*, & trahantur eorum subtensæ, atque per Æ ducatur tangens *ab*: & quoniam *ab* parallela est ad *mn*; erit, 41. 1. 3glum *m*Æ*n* dimidium pgri *abmn*, adeoque majus quàm dimidium segmenti *m*Æn; eademque ratione reliqua 3gla majora sunt, quàm dimidia reliquorum segmentorum. Quod si iterum bisecentur arcus *m*Æ, Æ*n*, &c. & trahantur subtensæ; erunt semper 3gla majora quàm segmentorum dimidia; adeoque, si è circulo TMNÆ detrahatur quadratum SI, & è reliquis segmentis detrahantur 3gla, & hoc fiat deinceps; tandem, 1. 10. relinquetur aliqua magnitudo minor quàm Z. Perventum ergo sit ad segmenta *m*Æ, Æ*n* &c., quæ simul sumpta minora sint quàm Z:
ergo

ergo erit X (sive circulus TMNÆ *minùs* Z) minor quàm polygonum Æ*m*PSTMN*n*Æ (sive, quàm circulus TMNÆ *minùs* segment. *m*Æ pl. Æ*n* &c. Concipiatur ergo alteri circulo inscribi simile polygonum: Tum, quoniam est, 1. 12. polyg. ACDEQFGHA ad polyg. Æ*m*PSTM-N*ne*, ut CFq. ad ÆTq. quæ sunt, *hyp.* ut circulus TMNÆ ad X, atque primum polygonum minus est circumscripto circulo; ergo, 14. 5. etiam alterum polygonum minus erit quàm X; cùm tamen ostensum fuerit majus; Quæ repugnant.

Sit deinde, si f. p. X major quàm circulus TMNÆ, & concipiatur esse X ad circulum CEQF, ut circul. TMNÆ ad Z; ergo, *f. hyp.* & 14. 5. erit circulus CEQF, major, quàm Z: atqui, *hyp.* & *invert.* est ÆTq. ad CF, ut X ad circulum CEQF, quæ sunt, *hyp.* ut circul. TMNÆ ad magnitudinem Z, quæ minor est, *ut prius*, quàm circulus CEQF: Quæ, *ex p. parte hujus*, repugnant.

Corol. Hinc, ut circulus ad circulum, ita polygonum in illo descriptum ad simile polygonum in hoc descriptum.

PROPOSITIO III.

Omnis Pyramis (ABCO) triangularem habens basim, dividitur in duas pyramides (ADEH, HMNO) æquales inter se, similesque tam sibi, quàm toti, & in duo prismata æqua *lia (HMNDBF, FCNDEH), quæ simul sumpta majora sunt dimidiô totius Pyramidis (ABCO).*

Bisecentur latera pyramidis in punctis, D, F, E, H, M, N, & jungantur rectæ DF, FE &c. Quoniam ergo latera pyramidis sunt secta proportionaliter; iccirco, 2. 6. erit HM ad AB: MN ad BC: FN ad OB &c. parallela; adeoque, 9. 11. DF ad HN, uti & NF ad HD erit parallela; ergo, 29. 1. 3gla, quæ totam comprehendunt pyramidem, erunt similia 3glis, quæ emergunt ex laterum bisectione: hæc verò inter se non modò similia, sed & æqualia erunt: quinimmò, 10. & 15. 11. 3glum HMN parallelum erit ad 3glum DBF, uti & 3glum FCN ad 3glum DEH: undè perspicuum est, pyramides ADEH, HMNO sibi mutuò æquari, & non modò sibi sed, & toti pyramidi ABCO similes esse: deindè solida HMNDBF, FCNDEH esse prismata sita inter parallela plana ABC, HMN, pgrum verò DFCE, quod unius prismatis est basis duplum esse 3gli DBF, quod basis est alterius prismatis; adeoque, 40. 11. ipsa prismata sibi æquari, quorum alterum HMNDBF, utpotè totum sua parte, majus est pyramide DBFM, cui, *constr.* æquatur pyramis ADEH; ac proindè duo prismata simul sumpta majora esse duabus pyramidibus simul sumptis; adeoque majora esse dimidio totius pyramidis ABCO.

Q. E. D

PRO-

PROPOSITIO IV.

SI fuerint duæ Pyramides(BACO,KLMN) ejusdem altitudinis, triangulares habentes bases (BAC, KLM), sit autem illarum utraque divisa, & in duas pyramides (BEDH, HGIO: & KPQT, TSVN) æquales inter se, & similes toti, & in duo prismata æqualia HGIEAF, FCIEDH: TSVPLR, RMVPQT), ac eodem modo divisa sit utraque pyramidum, quæ ex superiore divisione natæ sunt, idque semper fiat; erit, ut unius pyramidis basis ad alterius pyramidis basim, ità & omnia, quæ in una pyramide prismata ad omnia, quæ in alteræ pyramide prismata, multitudine æqualia.

Siquidem (adhibendo constructionem præcedentis) est, 15.5. AC ad AF, ut LM ad LR; ergo, 22.6. est 3glum BAC ad EAF, ut KLM ad PLR: atque, *altern.* BAC ad KLM ut EAF ad PLR, quæ sunt, *Schol.* 34. 11.) ut Prisma HGIEAF ad TSVPLR, quæ sunt, *constr.* & 7. 5. ut Prisma FCIEDH ad RMVPQT; ergo, 11. & 12. 5. erit 3glum BAC ad KLM, ut Prism. HGIEAF pl. FCIEDH ad Prism. TSVPLR pl. RMVPQT. Q. E. D.

Quòd si dividantur eodem modo pyramides ex prima divisione genitæ; erunt quatuor nova prismata hinc effecta ad quatuor illinc producta, ut bases HGI, & BED ad bases TSV, & KPQ, hoc est, 4.6. & 11. 5. ut BAC ad KLM. Q. E. D.

PROPOSITIO V.

S*Vb eadem altitudine existentes pyramides (BACO, KLMN) triangulares, habentes bases (BAC, KLM); inter se sunt, ut bases.*

Nempè, si sit 3glum BAC ad kLM, ut pyramis BACO ad solidum quodpiam Z; dico æquari Z, & pyramidem kLMN;

Nam, si fieri potest, sit Z minus, quàm pyramis kLMN magnitudine X, & dividatur pyramis KLMN in prismata, & pyramides, ut in præcedentibus, donec, 1. 10. relictæ pyramides sint minores, quàm X. Quoniam igitur, ſ. *hyp.* tota pyramis KLMN æquatur ipsi composito Z pl. X. atque, *constr.* relictæ pyramides simul sumptæ minores sunt, quàm X; ergò relicta prismata simul sumpta majora sunt, quàm Z. Iam verò alteram pyramidem BACO totidem, similibusque divisionibus resolutam concipe, ac pyramis kLMN divisa est; ergo, 4. 12. erunt omnia prismata pyramidis BACO ad omnia prismata pyramidis kLMN, ut basis BAC ad basim kLM, quæ, *hyp.* sunt, ut pyramis BACO ad Z; atqui, 9. *ax.* 1. omnia prismata pyramidis BACO minora sunt, quàm ipsa tota pyramis BACO; ergo, 14. 5. omnia prismata pyramidis kLMN minora sunt, quàm Z; cùm tamen ostensa fuerint majora: Quæ repugnant.

Sit deindè, si fieri potest, Z majus, quàm pyramis kLMN, & concipiatur esse pyramis

kLMN

kLMN ad X, ut Z ad pyr. BACO, quæ, *hyp. & invert.* ſunt, ut 3glum kLM ad 3glum BAC: Quoniam ergo, *ſ. hyp.* pyramis KLMN minor eſt, quàm Z; erit, 14. 5. magnitudo X minor, quàm pyramis BACO. Quod fieri nequit; quippè oſtenſum eſt in prima parte hujus, *Fieri non poſſe, ut ſit baſis ad baſim, ut pyramis ad ſolidum altera pyramide minus*. Reliquum ergo eſt, ut pyramis KLMN æquætur ipſi Z.

Q. E. D.

PROPOSITIO VI.

Sub eadem altitudine exiſtentes pyramides (ABCDEF, OPLMNK) & polygonas habentes baſes, inter ſe ſunt, ut baſes.

Nam reſolutis polygonis in triangula; Erit, 5. 12. *alternan.* & 12. 5. Pyram. ABCF pl. ACDF pl. ADEF ad triangulum ABC pl. ACD pl. ADE, ut pyram. ABCF ad triangulum ABC, quæ ſunt, 5. 12. *& altern.* ut pyram. OPLK ad triangulum OPL, quæ ſunt, 5. 12. *alternan. &* 12. 5. ut pyram. OPLK pl. OLMK, pl. OMNK ad triangulum OPL, pl. OLM, pl. OMN; adeoque, 11. 5. *& alternan.* eſt tota Pyramis ABCDEF ad totam pyramidẽ OPLMNK, ut polygonum ABCDE ad polygonum OPLMN.

Q. E. D.

Idipſum porrò demonſtrabitur ſi pyramidum baſes non habeant latera æquè multa; Quippè oſtenſum eſt, eſſe totam Pyr. ABCDEF ad polyg. ABCDE, ut pyram. ABCF ad 3gl. ABC; atque,*altern.* erit Pyramis ad Pyramidem, ut poligonum ad 3glum. Q. E. D.

PROPOSITIO VII.

OMne Prisma (ABFDCE) triangularem habens basim, dividitur in tres pyramides (ABCF, ADCF, FEDC) æquales inter se, triangulares etiam bases habentes.

Nam ductis pgrorum diametris FC, FD, AC: æquabuntur, 34. 1. triangula ABC, & ADB; ergo, 5. 12. sibi mutuò æquabuntur æquè altæ pyramides, ABCF, & ADCF: eademquè ratione æquantur sibi pyramides FEDC, & FADC, quæ eadem est ac ADCF.

Q. E. D.

COROLL. Hinc quælibet pyramis tertia pars est prismatis eandem cum illa habẽtis basim, & altitudinem. Nam resoluto prismate polygono in prismata trigona, & pyramide poligona in pyramides trigonas; erunt, 7. 12. singulæ partes prismatis triplæ singularum partium pyramidis; adeoque, 1. 5. erit totum prisma polygonum totius pyramidis polygonæ triplum. Q. E. D.

PROPOSITIO VIII.

SImiles Pyramides ABCD, FOGH) quæ triangulares habent bases, in triplicata sunt ratione homologorum laterum (BC, OG)

Nam

Nam ſi perficiantur Pppa BAICDMKL, OFNGHQEP; hæc, 9. *def.* 11. ſimilia erunt, & datarum pyramidum (28. 11. & 7. 12.) ſextupla; ergo, 15. 5. erit Pyramis ad ſibi ſimilem Pyramidem, ut Pppum ad ſibi ſimile Pppum, nimirum, 33. 11. in triplicata ratione laterum homologorum. Q. E. D.

COROLL. Hinc, ſimiles polygonæ pyramides ſunt etiam in triplicata ratione laterum homologorum, utpotè reſolubiles in trigonas pyramides.

PROPOSITIO IX.

Æqualium Pyramidum, & triangulares baſes habentium, baſes ſunt in reciproca proportione altitudinum: & è converſò.

1. *Hyp.* Nam ſi perficiantur Pppa; erunt hæc (28. 11. & 7. 12.) æqualium pyramidum, utrunque utriuſque ſextupla, adeoque, 6. *ax.* 1. ſibi mutuò æqualia; Adeoque, 34. 11. ipſorum altitudines (quæ datarum etiam pyramidum ſunt altitudines) ſunt in reciproca proportione baſium, ſeù pgrorum, quæ baſium pyramidalium dupla ſunt, atque 15. 5. in eadem cum illis ratione.

Q. E. D.

2. *Hyp.* Facta eadem conſtr. Quoniam, *hyp.* Ppporum baſes ſunt in reciproca proportione altitudinum; idcircò, 34. 11. æquantur ipſa Pppa ſibi mutuò; adeoque, 7. *ax.* 1. etiam ſibi æquantur pyramides, utpotè Ppporum ſubſextuplæ.

Q. E. D.

CO-

COROLL. Quæ de Pyramidibus demonstrata sunt tribus prop. præcedentibus, conveniunt etiam prismatibus, quandoquidem hæc tripla sunt pyramidum eandem basim, & altitudinem habentium.

PROPOSITIO X.

Omnis conus tertia pars est cylindri, habentis eandem cum ipso basim (CABD), & altitudinem æqualem.

Si negas: Sit primus Cylindrus major quàm tres coni, magnitudine Z. Quoniam ergo quadratum circulo circumscriptum est duplum inscripti, adeoque prisma super quadratum CABD circulo inscriptum est dimidium prismatis super quadratum eidem circulo circumscriptum in eadem altitudine positi, ac est inscriptum prisma, & cylindrus (nam prismata eiusdem altitudinis se habent, ut bases), & quoniam, 9. *ax.* 1. prisma circumscriptum majus est cylindro; idcircò prisma inscriptum majus est quàm dimidium cylindri: eademquè ratione prisma super basim AEB descriptum, cylindro æquè altum, majus est dimidio segmenti cylindrici AEB. Continuetur ergo bisectio arcuum, & subtrahantur prismata, donec, 1. 10. segmenta cylindrica residua minora sint, quàm Z: hisquè positis;

Quoniam, f. *hyp.* 3 Coni pl. Z. æquantur Prismati polygono pl. segment. cylindr. atqui, *constr.* Z majus est quàm segment. cylindr. Ergo o 3 Coni minores sunt prismate polygono, quod, 12. æquatur 3 Pyramidibus; adeoque unus co-us minor est una pyramide ejusdem altitudinis l basim CABD: Quod, 9. *ax.* 1. est absurdum.

Sin conus tertia parte cylindri major dica-ur, magnitudine Z. Quoniam, *f. hyp.* unater-a cylindri pl. Z. æquatur pyramidi polygonæ l. segment. conic. atqui, *constr.* Z majus est, uàm segmenta conica; ergo unatertia cylindri nin. est Pyramide polygona, cui, 7. 12. æquatur natertia Prismatis polygoni; adeoque cylindrus ninor est prismate ejusdem altitudinis ad basim CABD: Quod, 9. *ax.* 1. est absurdum.

PROPOSITIO XI.

SVb eadem altitudine existentes cylindri, & coni (ADQGO, mSMnK) inter se sunt, ut bases.

Nempe, si sit circulus ADQG ad circulum *mSMn*, ut conus ADQGO ad magnitudinem quampiam X; Dico æquari X, & conum *mSMnK*.

Nam, si fieri potest, sit conus *mSMnK* minor, quàm X magnitudine Z, & facta constructione juxtà primam Decimi, ut in præcedenti, itàut Z majus sit residuis segm. conicis. Quoniam, f. *hyp.* X, pl. Z æqu. Pyramidi *mSMnK* pl. segm. conic. atque, *constr.* Z maj. est segmentis conicis; Ergo X min. est pyramide *mSMnK*; atque facta simili construct. & præpa-

ratio-

ratione in cono ADQGO; Erit prima Pyramis ad secundam Pyramidem, *6. 12.* ut primum polygonum ad secundum polygonum, quæ sunt, *cor. 2. 12.* ut primus circulus ad secundum circulum, qui sunt, *hyp.* ut primus conus ad X: atqui prima pyramis, *9. ax. 1.* minor est primo cono; ergo, *14. 5.* secunda pyramis minor est, quàm Z; cum tamen ostensa fuerit major.

Deindè, si fieri potest, sit X maj. quàm secundus conus, & concipiatur esse secund. conus ad Z, ut X ad primum conum, hoc est, *hyp. & invert.* ut secundus circulus ad primum: Atqui, *f. hyp.* secundus conus minor est, quàm X; ergo, *14. 5.* Z min. est quàm primus conus; quod repugnat primæ parti hujus, quippè in qua ostensum est, quod *esse nequit circulus ad circulum, ut conus ad solidum altero cono minus*. Ergo reliquum est æquari conum *mSMnK*, & X.

Q. E. D.

PROPOSITIO XII.

S*Imiles coni, & cylindri (ADQGO,* mSMnK) *sunt in triplicata ratione diametrorum (CF, ÆT) quæ in basibus.*

Nempè CF ad ÆT ter sit, ut primus Conus ad magnitudinem quampiam X; dico æquari X, & alterum Conum.

Nam, si fieri potest, sit alter conus minor quàm X, magnitudine Z: & facta constructione, ut in præcedentibus, donec Z majus sit

resi-

residuis segmentis conicis; erit, *ut prius*, pyramis *mSMnK* major quàm X. Ducantur jam axes conorum, & cæteræ rectæ: Quoniam, *Hyp.* coni sunt similes; ideò, 24. *def.* 11. est EB ad BO, ut MR ad RK, atque, *hyp.* anguli EBO, MRK sunt æquales, ergo, 6. 6. 3gla EBO, MRK sunt similia, ergo, 4. 6. erit EO ad MK, ut EB ad MR, quæ sunt (ob angulos EBQ, MRN æqualibus arcubus insistentes, æquales, & 7. 5. ob latera circum hos angulos proportionalia) ut EQ ad MN, quæ sunt, simili ratione, ut QO ad NK; ergo, 5. 6. 3gla EOQ, MKN sunt similia, eademque ratione reliqua unius pyramidis latera reliquis alterius pyramidis lateribus similia sunt; adeòque, 9. *def.* 11. etiam ipsæ pyramides sunt sibi similes; quæ proindè, *cor.* 8. *huj.* sunt, ut EQ ad MN, sivè, *ut prius*, ut EB ad MR, sivè, 7. 5. & 15. 5. ut CF ad ÆT ter, quæ sunt, *hyp.* ut primus conus ad X; ergo, 11. 5. prima pyramis ad secundam pyramidem est, ut primus Conus ad X: atqui prima pyramis minor est primo Cono, quippè cui inscribitur; ergo, 14. 5. secunda pyramis minor est quàm X; cùm tamen ostensa fuerit major; quæ repugnant.

Sin verò X majus ponatur quàm sec. Conus; sit sec. Conus ad Z, ut X ad primum Conum, quæ sunt, *ut prius*, & *invert.* ut sec. Pyramis ad primam, quæ sunt, 8. *hujus*, ut EQ ad MN ter, quæ sunt, *ut prius*, ut CF ad ÆT ter: atqui, *s. hyp.* X maj. est sec. Cono; ergo,

14. 5.

14. 5. primus Conus major est quàm Z, quæ repugnant: Nam ostensum est in prima parte hujus quod *esse nequit diameter ad diametrum in basibus Conorum, ut Conus ad magnitudinem altero cono minorem*.

Quoniam verò Cylindri utpotè conorum tripli, se habent, ut coni; erunt & ipsi in triplicata ratione diametrorum in basibus.

PROPOSITIO XIII.

SI *Cylindrus (MNGH) secetur plano (IL) adversis planis (MN, GH) parallelo; erit, ut cylindrus (ML) ad cylindrum (IH) ità axis (CD) ad axem (CO).*

Producatur axis utrinque, itàut constructis cylindris HE, FR æqualibus ipsi IH, & facto cylindro NS æquali ipsi ML; sit, 11. *buj*. totus cylindrus LR, ità multiplex cylindri IH, ac est axis CA multiplex ipsius CO: & ex altera parte cylindrus LS ità multiplex cylindri ML, ac est axis CK ipsius CD. Quod si CA major, vel minor sit quàm CK, vel ipsi æqualis; erit etiam, 11. *buj*. cylindrus LR maj. vel min. cylindro LS, vel ipsi æqualis; ergo, 6. *def*. 5. erit cyl. ML ad cyl. IH, ut CD ad axem CO.

Q. E. D.

PRO-

PROPOSITIO XIV.

Super æqualibus Basibus (AC, PQ) existentes Coni, & Cylindri inter se sunt, ut ltitudines (HO, & BK).

Producto enim axe BK in D, itaut kD equetur ipsi HO; erit, 11. *buj.* cylindrus PN æqualis ipsi EC: atqui est, 7. 5. cyl. PN ad cyl. ABC, ut cyl. EC ad cyl. ABC, qui sunt, 13. *buj.* ut axis Dk, sivè HO ad kB.

Q. E. D.

Idem de conis, ut potè cylindrorum subtriplis, dictum puta.

PROPOSITIO XV.

Æqualium conorum (MHN, RBS) & cylindrorum (ML, RD) altitudines sunt in reciproca basium proportione: Et si adsit hæc proportio reciproca; æquabuntur sibi coni, ut & cylindri.

Si altitudines æquantur; æquabuntur etiam bases; & res clara est. Sin altitudo OB maj. sit quàm Hk: fiat OG æqualis ipsi Hk; erit ergo, 14. *buj.* OB ad OG, sivè ad HK, ut cyl. RD (sivè cyl. ML) ad cyl. RF, quæ sunt, 11. *buj.* ut basis MN ad RS. Q. E. D.

Atque è converso: erit, 11. *buj.* cyl. ML ad cyl. RF, ut basis MN ad RS, quæ sunt, *hyp.* ut altitudo OB ad Hk, sivè ad OG, quæ sunt,

11. *buj.*

11. *huj.* ut cyl. RD ad RF; adeoque, 9. 5. æquantur Cylindri ML, & RD. Q. E. D.

Porrò simili demonstratione utimur in Conis.

PROPOSITIO XVI.

D*Vobus circulis circa idem centrum* (*K*) *existentibus; in majori circulo polygonum æquilaterum, & parium laterum inscribere, quod non tangat minorem circulum.*

Secet Diameter AC minorem circulum in D, ex quo erige perpendicularem EF. Tum biseca semicirculum ABC, ejusquè semissem BC, donec arcus IC minor evadat arcu EC, & ab I dimitte perpendicularem IL. Liquet primò, arcum IC totam majoris circuli circumferentiam metiri, numerumque arcuum esse parem, adeoque subtensam IC esse latus polygoni inscriptibilis, quod interiorem circulum non continget; Nam, 16. 3. EF tangit interiorem circulum, ipsi verò EF, 28. 1. parallela est IL, quæ propterea circulum non tangit, neque proindè CI, CL circulum interiorem tangunt. Q. E. F.

COROLL. Hinc recta IL circulum non tangit.

PROPOSITIO XVII.

D*Vabus sphæris circa idem centrum existentibus; in majori sphæra solidum poliedrum inscribere, quod non tangat superficiem minoris sphæræ.*

Con-

Constructio. Secentur ambæ sphæræ plano transeunte per centrum, & constituente circulum EFGH in minori sphæra, & ABCV in majori. In plano autem horum circulorum ducantur duæ diametri se mutuò perpendiculariter secantes AC, BV: In circulo ABCV, 16. 12. inscribatur Polygonum æquilaterum VMLZC &c. circulum minorem non tangens. Tum ducatur in eodem plano ex angulo Z per centrum commune D diameter Zh, & 12. 11. erigatur DO in sublimi, recta ad subjectum planum ABCV: per DO, sivè juxtà DO lineam insistentem, perquè diametros AC, Zh duci concipiantur plana; quæ proindè, 18. 11. eidem subjecto plano ABCV recta erunt; adeóque, 33. 6. in superficie majoris sphærę quadrantes DOC, DOZ, efficient. In his autem quadrantibus, 1. 4. aptentur rectæ CP, PQ, QR, RO: OS, ST, TX, XZ, ipsis CZ, ZL, LM, MV, æquales, & æquè multæ. Quod si idem feceris in reliquis quadrantibus OL, OM &c. tam supra, quàm infra horizontem ABCV, atque inter lineolas CP, ZX &c. plana duxeris; dico factum.

Demonstratio Primæ Partis. A punctis P, & X ad subjectum planum ABCV ducantur, 12. 11. perpendiculares Pd, XY, quæ, 38. 11. in communes sectiones AC, Zh cadent. Quoniam igitur tam anguli recti PdC, XYZ, quàm PCd, XZY, 27. 3. sunt æquales; idcircò, 32. 1. 3gla PdC, XYZ sunt æquiangula: sed &, *constr*. æquantur PC, & XZ; ergo, 26. 1. æqua-

Z bun-

buntur Pd, & XY, uti & Cd, & ZY; adeoque, 15. *def.* & 3. *ax.* 1. æquabuntur Dd, & DY; ergo, 7. 5. erit Dd ad dC, ut DY ad YZ; adeoque, 2. 6. dY, & CZ sunt parall. Quia verò, *ut prius*, sibi æquantur Pd, & XY, & ipsi plano subjecto sunt perpendiculares, adeoque, 6. 11. sibi parallelæ; erunt etiam, 33. 1. PX, & dY sibi æquales, & parallelæ; adeoque, 9. 11. PX, & CZ erunt etiam sibi parallelæ; ergo, 7. 11. CPXZ, eademque ratione PQTX, & QRST, & 3glum ROS totidem sunt plana. Quod si eadem constructio continuetur in tota sphæra, constructum erit Polyedrum.

Demonstratio secundæ Partis. Ex centro D ducatur Dc recta plano PCZX, & jungantur cP, cZ, cX, cC. Quoniam ergo, 4. 6. DZ ad ZC est, ut DY ad Yd, atque DZ major est, quàm DY; erit etiam, 14. 5. CZ major quàm Yd, sivè, 33. 1. quàm PX, pariterquè PX major erit, quàm QT, & QT major quàm RS. Et quia, *constr.* anguli DcC, DcP, DcZ, DcX recti sunt; latera verò DC, DP, DZ, DX, utpotè radii, sibi æquantur; & Dc est commune; idcircò, 47. 1. sibi æquantur rectæ cP, cZ, cX, cC; ac proindè, 15. *def.* 1. circa quadrilaterum CPXZ describi potest circulus: in quo ob ZX, CP, & CZ, & ob CZ majorem quàm PX: idcircò, 28. 3. CZ plusquàm quadrantem subtendit, ergo, 33. 6. angulus CcZ ad centrum est obtusus; adeoque, 12. 2. CZq. major est, quàm 2 *cCq.* sivè quàm cCq. pl. cZq. Sit jam Zm perpendicularis ad

AC;

AC; quoniam angulus ADZ (hoc eſt, 32. 1. DZC pl. DCZ) eſt obtuſus; erit DCZ, ſivè dimidius ipſius ADZ major dimidio recti; adeoque eò minor eſt *CZm* reliquus è recto angulo; adeoque, 19. 1. *Zm* major eſt quàm *Cm*; ac proindè CZq. (ſivè *m*Cq. pl. *mZq*.) minus eſt quàm 2 *m*Zq. adeoque mZ major eſt quàm *cC*; ac proindè, 47. 1. *cD* major eſt, quàm *Dm*: Atqui punctum *m* eſt extrà interiorem ſphæram; ergo magis extrà ipſam erit punctum *c*; adeoque planum CPXZ, (inter cujus puncta, id quod propinquius eſt centro ſphæræ, eſt *c*) interiorem ſphæram non continget. Et ſi ad planum PQTX, demittatur perpendicularis *Da*; adhuc punctum *a* è centro D ulteriùs elongatur, & ſic deinceps; Ergo polyedrum majori ſphæræ inſcriptum, minorem non tangit. Q. E. F.

COROLL. Hinc, *Si in qualibet alia Sphæra deſcribatur Polyedrum, ſimile prædicto Polyedro, Proportio Polyedri in una ſphæra ad polyedrum in altera, eſt triplicata ejus, quàm habent ſphærarum diametri.*

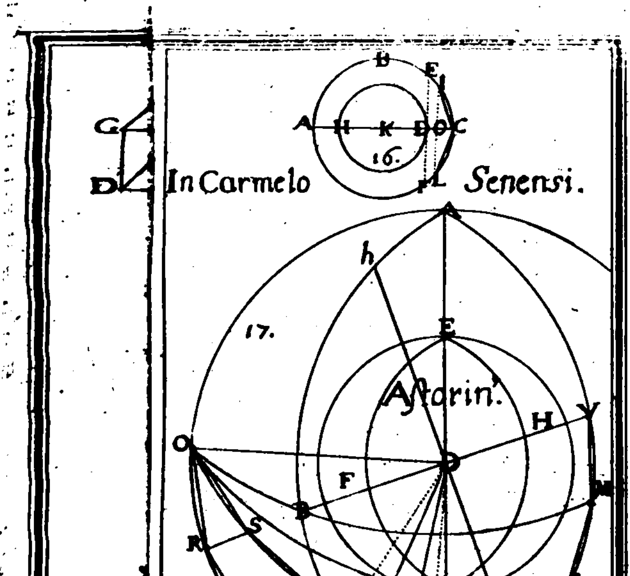
Nam, ſi ex centris ſphærarum ad omnes angulos baſium dictorum polyedrorum rectæ lineæ ducantur; diſtribuentur polyedra in pyramides numero æquales, & ſimiles, quarum homologa latera ſunt ſemidiametri ſphærarum. Vt conſtat, ſi concipiatur harum ſphærarum minor intra majorem circa idem centrum deſcripta; congruent enim ſibi mutuò lineæ rectæ ductæ à centro ſphæræ ad baſium angulos, ob ſimilitudinem baſium, ac propterea pyramides efficientur similes. Quare, cùm singulæ pyramides in una sphæra ad similes pyramides illis similes in altera habeant (8. 12.) proportionem triplicatam laterum homologorum, hoc est, semidiametrorum sphærarum; sint autem (12. 5.) ut una pyramis ad unam pyramidem, ità omnes pyramides, sivè solidum polyedrum ex ipsis compositum, ad omnes pyramides, sivè ad solidum polyedrum ex illis constitutum; habebit quoque polyedrum unius sphæræ ad polyedrum alterius sphæræ propòrtionem triplicatam semidiametrorum, atque adeò (15. 5.) diametrorum. Q. E. D.

PROPOSITIO XVIII.

Sphæræ (BAC, EDF) sunt in triplicata ratione suarum diametrorum (BC, EF).

Nempè, si sit sphæra BAC ad sphæram K in triplicata ratione diametri BC ad diametrum EF; Dico sibi æquari K, & EDF.

Sit enim, si fieri potest, K minor, quàm EDF, & concipe sphæram K concentricam esse ipsi EDF, cui, 17. 12. inscribatur polyedrum, sphæram K non tangens, sphæræquè BAC simile polyedrum; Hæc quidem polyedra, *cor.* 17. 12. sunt in triplicata ratione diametrorum BC, EF, adeoque, *hyp.* se habent, ut sphæra BAC ad K; atqui polyedrum ipsi sphæræ BAC inscriptum, 9. *ax.* 1. minus est quàm sphæra ABC; ergo, 14. 5. polyedrum alteri sphære EDF inscriptum


16.
In Carmelo Senensi.
17.
Astorin.
Laus
DEO!
18.
4

otum minus eſt quàm interior ſphæra K; proindèque totum minus erit ſua parte.

Q. E. A.

Sin verò ſphæra K major dicatur, quàm ſpæra EDF, & concipiatur eſſe ſphæra EDF ad quampiam aliam H, ut ſphæra K ad BAC, hoc eſt, *hyp. & invert.* in triplicata ratione diametri EF ad BC; atqui, *ſ. hyp.* EDF minor ponitur, quàm K; ergo, 14. 5. ſphæra H minor erit, quàm ABG: Quod repugnat primæ parti hujus; quippè in qua oſtenſum eſt, quod *eſſe nequit diameter ad diametrum ter, ut ſphæra ad magnitudinem quandam alterâ ſphærâ, cujus eſt altera diameter, minorem.*

Ergo reliquum eſt, ſibi æquari K, & EDF.

Q. E. D.

COROLL. Hinc, erit ut ſphæra ad ſphæram, ità polyedrum in una deſcriptum ad ſimile polyedrum deſcriptum in altera.

LAUS DEO.

LIBER XIII.

PROPOSITIO I.

Si recta linea (AB) secundum extremam, & mediam rationem secetur. Majus segmentum (AC) assumens lineam (AD) dimidiam totius (AB) quintuplum potest ejus, quod à dimidia totius describitur, quadrati.

Nam

Æqu. hæc:
- DCq. (4. 2.)
- DAq. pl. ACq. pl. 2 DAC (*hyp.* & 1. 2.)
- DAq. pl. ABC pl. BAC (2. 2.)
- DAq. pl. ABq. (4. 2.)
- DAq. pl. 4 DAq.
- 5 DAq.

Q. E. D.

PROPOSITIO II.

SI recta linea (DC) sui ipsius segmenti (DA) quintuplum possit; prædicti segmenti (DA) duplæ (AB) extrema, ac media ratione sectæ majus segmentum est (AC) reliqua pars ejus, quæ à principio rectæ (DC).

Nam

Æqu.hæc
- DAq. pl. BAC, pl. ABC (2. 2.)
- DAq. pl. ABq. (4. 2.)
- DAq. pl. 4 DAq. (*hyp.*)
- DCq. (4. 2.)
- DAq. pl. ACq. pl. 2 DAC (1. 2.)
- DAq. pl. BAC, pl. ACq.

Ergo æquantur ABC, & ADq. Q. E. D.

PROPOSITIO III.

SI recta linea (AB) secundum extremam, ac mediam rationem secetur; minus segmentum (CB) assumens lineam (DC) dimidiam majoris segmenti (AC), quintuplum potest ejus, quod à (DC) dimidia majoris segmenti (AC) describitur, quadrati.

Nam

Æqu.hæc
- DBq. (6. 2.)
- ABC, pl. DCq. (*hyp.*)
- DCq. pl. ACq. (*hyp.* & 4. 2.)
- 4 DCq. pl. DCq.
- 5 DCq. Q. E. D.

PROPOSITIO IV.

SI recta linea (AB) secundum extremam, ac mediam rationem secetur; quod à tota(AB), quodque à minori segmento (CB) utraque simul quadrata, tripla sunt ejus, quod à majori segmento (AC) describitur, quadrati.

Nam

$$\text{Æqu.hæc}\left\{\begin{array}{l} \text{ABq. pl. CBq. (7. 2.)} \\ \text{2 ABC, pl. ACq. (}\textit{hyp.}\text{)} \\ \text{2 ACq. pl. ACq.} \\ \text{3 ACq.} \end{array}\right.$$

Q. E. D.

PROPOSITIO V.

SI recta linea (AB) secundum extremam, ac mediam rationem secetur (in C), apponaturque ei linea (AD) æqualis majori segmento (AC); tota recta linea (DB) secundum extremam, ac mediam rationem secabitur, & majus segmentum est, quæ à principio recta linea(AB).

Nam est, *hyp.* AB ad AD (sivè ad AC) ut AC ad CB, &, *invert.* est AD ad AB, ut CB ad AC, &, *compon.* erit DB ad AB, ut AB ad AC (sivè ad AD). Q. E. D.

SCHOL. Quòd si fuerit DB ad AB, ut AB ad AD; erit AB ad AD; ut AD ad CB; nimirum linea AB secundum extremam, ac mediam rationem secabitur.

Quoniam enim, *hyp.* est DB ad AB, ut AB

B ad AD; ergo, *divid.* est AD ad AB, ut B ad AD; ergo, *invert.* erit AB ad AD, ut D ad CB. Q. E. D.

PROPOSITIO VI.

S*I recta linea Rationalis (AB) extrema, ac media ratione secetur (in C); utrunque segmentorum (AC, CB) Irrationalis est linea, quæ catur Apotome.*

Nam si maiori segmento AC addas AD qualem ipsi dimidio AB; mox, 1. 13. æquabuntur DCq. & 5 ADq.; adeoque 6. 10. DCq. & Dq. sunt sibi commensurabilia: atque, *hyp.* B, adeoque etiam ejus dimidia AD est rationalis; ergo etiam DC est rationalis: Quia verò on est 5 ad 1, ut num. quadr. ad num. quadr; idcircò, 9. 10. DC, & AD sunt rationales, sibi ntùm pot. commens. adeoque, 74. 10. AC, ivè DC minus AD) est Apotome. Rursus, uia, *hyp.* & 17. 6. æquantur ACq. & ABC, ABC applicatur ipsi AB rationali; idcircò, 3. 10. BC est Apotome. Q. E. D.

PROPOSITIO VII.

S*I Pentagoni æquilateri (ACDEB) tres anguli, sivè qui deinceps, sivè qui non deinceps int, æquales fuerint; æquiangulum erit ipsum entagonum.*

Quoniam, *hyp.* æquantur non modò latera BA, BA, AC, CD, DE, EB, sed & anguli ab iis comprehensi; erunt, 4. 1. sibi etiam æquales bases CB, AD, CE, quin & anguli ABC & CDA, uti & anguli CAF, & ACF; adeoque, 6. 1. æquantur AF, & CF, ac proindè etiam residuæ FB, & FD; ergo 3gla FBE, FDE, quibus latus FE est commune, sunt sibi æquilatera; ergo æquantur anguli FBE, & FDE, sed, *ut prius*, æquantur anguli ABC & CDA; ergo æquabuntur toti CDE, & ABE. Tum, ob latera, & angulos interceptos æquales, æquantur, 4. 1. anguli DEC, & ABC, necnon, *ut prius*, *&* 5. 1. æquantur anguli CBE, & CEB; ergo æquabuntur toti DEB, & ABE.

Quòd si anguli CAB, CDE, DEB, qui non sunt deinceps, ponantur æquales; mox, 4. 1. æquabuntur anguli ABC, & DEC, quin & bases CB, & CE, adeoque, 5. 1. & anguli CEB, & CBE, adeoque toti DEB, & ABE; ac proindè, ob angulos in A, & E sibi deinceps æquales; erit, *ut prius*, æquiangulum ipsum Pentagonum. Q. E. D.

PROPOSITIO VIII.

SI Pentagoni æquilateri, & æquianguli (ABCDE) duos angulos (BCD, CDE) qui deinceps sunt, subtendant rectæ lineæ (BD, CE); hæ extrema, ac media ratione se mutuò secant, & majora ipsarum segmenta (BF, vel EF) sunt pentagoni latera.

De-

Describatur circulus circa Pentagonum; ergo, 28. 3. æquabuntur arcus ED, & BC, adeoque, 27. 3. & anguli FCD, & FDC; ergo angulus BFC, qui, 20. 3. duplus est ipsius FDC, duplus etiam erit ipsius FCD: atqui etiam arcus BAE bis continet arcum ED, adeoque, 33. 6. angulus BCF est duplus ejusdem anguli FCD; ergo, 6. *ax.* 1. æquabuntur anguli BCF, & BFC; adeoque, 6. 1. æquabuntur BC, & BF. Tum, quoniam, 27. 3. triangula BCD, & CFD sunt sibi æquiangula; erit, 4. 6. BD ad CD, ut CD ad FD, hoc est, *ut prius*, & 7. 5. erit BD ad BF, ut BF ad FD: eademque ratione erit EC ad EF ut EF ad CF. Q. E. D.

PROPOSITIO IX.

SI Hexagoni latus (BE) & Decagoni latus (AB) in eodem circulo descriptorum componantur; tota recta linea (AE) extr. ac media ratione secabitur, majusque segmentum erit Hexagoni latus.

Ducatur Diameter ADC, & junge rectas DB, DE. Ergo, quoniam arcus AB est decima pars totius circumferentiæ; idcircò

Æqu. hi Anguli
- 4 BDA (*hyp.* & 27. 3.)
- BDC (32. 1.)
- BAD, pl. ABD (5. 1.)
- 2 ABD (32. 1.)
- 2 BED, pl. 2 BDE (5. 1.)
- 4 BDE.

Ergo,

Ergo, 32. 1. *&* 2. *ax.* 1. æquantur anguli ADE, & ABD; adeoque 3gla ADE, & ABD (nam habent ipsa etiam angulum communem in A) sunt æquiangula; ergo, 4. 6. erit AE ad AD, ut AD ad AB, hoc est, 15. 4. & 7. 5. AE ad EB, ut EB ad AB. Q. E. D.

COROLL. Hinc, 1. Si latus hexagoni alicujus circuli secetur extrema, ac media ratione; majus illius segmentum erit latus decagoni ejusdem circuli.

2. Hinc etiam, *ut prius*, 5. *&* 6. 1. æquabuntur rectæ AE, & DE, & quoniam BE, utpotè latus hexagoni, æquatur radio DF; æquabuntur, 3. *ax.* 1. etiam AB, & EF; adeoque etiam EF erit latus decagoni; ac proindè, *ut prius*, etiam erit DE ad DF, ut DF ad FE.

PROPOSITIO X.

SI in circulo (ABCDE) pentagonum æquilaterum (ABCDE) describatur; Pentagoni latus (AB) potest Hexagoni latus (FB) & Decagoni latus (AH), in eodem circulo descriptorum.

Ducatur diameter AG: biseca arcum AH in K, & ducantur FK, FH, FB, BH, HM. Quoniam semicirculus ABCG *minùs* arcus AC æquatur, *hyp.* *&* 3. *ax.* 1. semicirculo AEDG *minùs* AD; ideò erit arcus CD bifariam sectus in G; ergo æquabuntur arc. CG, GD, BH, HA. Quoniam ergo, *hyp.* *&* *constr.* arcus HK est dimid.

ipsius

ipsius HA, & BH est dimidium ipsius BA; erit BK dimidium ipsius BG; adeoque, 33. 6. angulus BFK est dimidium ipsius BFG, cui, 20. 3. æquatur angulus BAG, sivè BAF; ac proindè æquantur anguli BFK, & BAF, sed & angulus in B est communis, ergo 3gla BFM, & BAF sunt sibi æquiangula; adeoque, 4. 6. est AB ad BF, ut BF ad BM; ergo, 17. 6. æquabuntur ABM, & BFq. Rursus, *constr. &* 27. 3. æquantur anguli AFK, & HFK, uti & radii FA, & FH, & FO est communis; ergo, 4. 1. æquantur AO, & HO, atque anguli AOF, & HOF, qui proindè recti sunt, & MO est communis; ergo etiam, 4. 1. æquantur anguli OHM, sivè AHM, & OAM, cui, 27. 3. æquatur angulus HBA; ergo 3gla AHB, & AMH, in quibus, *ut prius*, æquantur anguli AHM, & HBA, atque angulus in A est communis, sunt, sibi æquiangula; adeoque, 4. 6. est AB ad AH, ut AH ad AM; ac proindè, 17. 6. AHq. æquatur ipsi BAM: Atqui, 2. 2. ABq. æquatur composito ABM pl. BAM; ergo ABq. æquatur ipsi composito BFq. pl. AHq. Q. E. D.

COROLL. 1. Hinc linea recta FK, quæ ex centro arcum quempiam HA bisecat, etiam rectam HA illi arcuì subtensam bisecat ad angulos rectos.

2. Diameter AG ex angulo quovis A pentagoni ducta, bisecat, & arcum CD, quem latus pentagoni CD subtendit, & ipsum etiam latus CD, ad angulos rectos.

SCHOL.

SCHOL. 1. Hinc faciliùs quàm ex 11.4 pentagonum regulare inſcribemus circulo. Ducatur enim diameter AB, cui ex centro erigatur perpendicularis CD: Tum biſecetur CB in E, & fiat EF æqualis ipſi ED; erit DF latus pentagoni; Nam

Æqu.hæc { BFC, pl. ECq. (6. 2.) / EFq. (*conſtr.*) / EDq. (47. 1.) / DCq. pl. ECq.

Ergo, 3. *ax.* 1. æquantur BFC, & DCq. ſivè BCq.; adeoque, 17. 6. erit BF ad BC, ut BC ad FC: quoniam ergo BC eſt latus Exagoni; erit, 9. 13. FC latus Decagoni; ac proinde, 10. 3. DF eſt latus Pentagoni. Q. E. F.

2. Et hinc facilè demonſtratur, rectam eſſe Pentagoni conſtructionem illam, ubi ſecta bifariam CB in E abſcinditur EO æqualis ipſi EC, & ex D per O fit circulus, ſecans priorem circulum in M, & N, atque ducitur MN, quæ dicitur eſſe latus pentagoni. Quippè, *Sch. præcedenti* æquantur DE, & EF, atque, *conſtr.* æquantur EC, & EO; ergo FC, quod, *Sch. præced.* eſt latus decagoni, æquabitur ipſi DO, ſivè, 15. *def.* 1. ipſis DM, DN; adeoque DM, & DN ſunt latera decagoni, ac proindè MN eſt latus Pentagoni. Q. E. D.

PRO-

PROPOSITIO XI.

I in Circulo rationalem habente Diametrum
) (AG) pentagonum æquilaterũ (ABCDH)
ribatur; pentagoni latus (AB) irrationalis
inea, quæ vocatur Minor.

Duc Diametrum BLO, & fiat LK qua-
ns radii LO, & CQ quadrans lineæ CA.
oniam ergo, *cor.* 10. 13. anguli AFL, AIC
i sunt, & angulus in A est communis; idcir-
32. 1. 3gla AFL, AIC sunt sibi æquiangula;
o, 4. 6. est CI ad FL, ut CA ad LA, sivè
LO, quæ sunt, *constr.* & 15. 5. ut CQ ad
; ergo, *alter.* est FL ad LK, ut CI ad CQ,
e sunt, 15. 5. ut CD ad CF, (nimirùm, *cor.*
hujus ut 2 CI ad 2 CQ); ergo, *compon.* est
ad LK, ut CD pl. CF ac CF; ergo, 22.
est FKq. ad LKq. ut quadratum factum sub
) pl. CF (hoc est, 1. *huj.* 5 CFq.) ad CFq.
go FKq. est 5 LKq. Itaque si Rationalis BO
natur 8; LO erit 4: LK erit 1; adeoque LKq.
t 1: BK erit 5; adeoque BKq. erit 25. & FKq.
t 5 (Nam, *ut prius* est FKq. ad LKq. ut 5
1.) Vndè patet, BK, & FK esse Rationales
i pot. tantum commens.; adeoque, 74. 10. BF
e Apotomen, cujus congruens est FK: Quo-
am verò, *ut prius*, BKq. *minùs* FKq. est 20.
circò, 9. 10. BK, est long. incommens. lineæ
otenti quadratum sub BK minus FK; adeoque
4. *def. ex tertiis* 10.) BF est Apotome Quarta.

Quo-

Quoniam verò, 8. & 17. 6. æquantur ABq. rectangulum sub BO, & BF; idcircò, 95. AB erit Minor. Q. E. D.

PROPOSITIO XII.

SI in circulo triangulum æquilaterum (ABC) describatur; trianguli latus (AB) potentia triplum est ejus (AO), quæ ex centro circuli ducitur.

Quoniam, *cor.* 10. 13. æquantur arcus BE & EC; ideò arcus BE est sextans totius circumferentiæ; ergo, 15. 4. æquantur lineæ BE, & OE; adeoque.

Æqu. hæc { 4 BEq. (*ut prius*) ; 4 OEq. (4. 2.) ; AEq. (47. 1.) ; ABq. pl. BEq.

Ergo, 3. *ax.* 1. æquantur ABq. & 3 BEq.

Q. E. D.

COROLL. 1. AEq. ad ABq. est ut 4 ad 3. Tum ABq. ad AFq. est etiam ut 4 ad 3. (Nam est AE ad AB, ut AB ad AF)

2. Æquantur OF, & FE; nam 3glum EBO est æquilaterum, & BF ad EO perpendicularis; ergo EO secatur bifariam in F. Atque hinc demùm æquantur AF, & OE pl. OF, 3 OF.

PRO-

PROPOSITIO XIII.

Pyramidem (GEFO) constituere, & data sphæra complecti; & demonstrare quod sphæræ diameter (AB) sit sexquialtera in potentia lateris (EF) ipsius Pyramidis.

Circa datam AB fiat semicirculus AEB, atque, 10. 6. DB sit dimidium ipsius AD, & expuncto D erige perpendicularem DE, & trahantur BE, AE. Tum ad intervallum ipsius GI æqualis ipsi DE fiat circulus, cui inscribatur 3glum æquilaterum EFG, & 12. 11. ex centro I erigatur normalis IO æqualis ipsi AD, & producatur OI in oppositam partem, itàut tota OK æquetur diametro AB, & jungantur recta OE, OF, OG; dico solidum GEFO esse Pyramidem expetitam.

Si quidem, *constr.* anguli ADE, OIE, OIF, OIG recti sunt, atque DE, IE, IF, IG sibi æquantur, nec non IO æquatur ipsi DA; ergo, 4. 1. sibi æquantur AE, OE, OF, OG. Quoniam verò, 8. *& cor.* 20. 6. AD, sive 2 DB ad DB est, ut ADq. ad DEq. erit etiam ADq. duplum ipsius DEq.; Igitur

$$\text{Æqu. hæc}\left\{\begin{array}{l}\text{AEq. (47. 1.)}\\ \text{ADq. pl. DEq. (}\textit{ut prius, \&}\text{ 7. 5.)}\\ \text{3 DEq. (}\textit{constr.}\text{)}\\ \text{3 IEq. (12. 13.)}\\ \text{EFq.}\end{array}\right.$$

Ergo sibi æquantur AE, EF, OE, OF, OG, adeoque Pyramis GEFO est æquilatera. Quod si punctum D puncto I applicetur, & linea AD lineæ IO superponatur; congruent etiam lineæ AB, & OK utpotè æquales; adeoque semicirculus AEB axi AB, vel OK circumductus transibit per puncta E, F, G; adeoque Pyramis GEFO inscripta est sphæræ cujus diameter est data AB. Q. E. F.

Quinimò est, 8. & *cor.* 20. 6. ABq. ad AEq. ut AB ad AE, quæ sunt, *constr.* ut 3. & 2.
Q. E. D.

COROLL. 1. Hinc ABq. ad IEq. est ut 9. ad 2. Nam si ABq. erit 9; erit AEq. sive EFq. 6; ac proinde, 12. 13. IEq. erit 2.

2. Si C sit centrum sphæræ; erit AB ad CD, ut 6. ad 1. Nam si AB ponatur 6; erit AC, 3; ac proinde, *constr.* AD erit 4; adeoque CD erit 1; Hinc

3. Est AB ad IO, ut 6. ad 4. quæ sunt, ut 3. ad 2; adeoque

4. Erit ABq. ad ICq. ut 9. ad 4.

PROPOSITIO XIV.

Octaedrum (KEFDGL) constituere, & data sphæra complecti: & demonstrare, quod sphæræ diameter (AB) potentiâ sit dupla lateris ipsius Octaedri.

Super AB describe semicirculum AIB, & ex centro C erige perpendicularem CI, & ducantur AI, & BI. Tum super ED, cui æqualis sit ipsi AI, fiat quadratum EDGF, cujus diametri

tri DF, EG se mutuò secent in centro O, & ex O, 12. 11. duc normalem IL æqualem ipsi AC, & producatur LO ad oppositam partem, itàut OK æquetur ipsi OL, & connectantur cæteræ lineæ, ut in schemate; erit KEFDGL Octaedrum quæsitum.

Siquidem AC, CB, FO, OE &c. æqualium quadratorum semidiametri sibi mutuò æquantur; adeoque, 4. 1. in 3glis rectãgulis LOE, LOF, FOE, &c. bases LF, FE, EK &c. æquantur; ac proindè octo 3gla LEF, LFG, LGD, LDE, KEF, KFG, KGD, KDE sunt æquilatera, adeoque Octaedrum constituent: Quod quidem sphæræ cujus centrum O, & radius OL sivè AC inscribi potest; (Siquidem, *constr.* AC, OL, OF, OD, OE, OG, OK sunt æquales) Q. E. F.

Cæterùm, 47. 1. ABq. sivè LKq. est duplum ipsius ACq. sivè LDq. Q. E. D.

COROLL. Hinc in Octaedro tres diametri EG, FD, LK se mutuò secant in centro sphæræ ad angulos rectos.

2. Item tria plana EFGD, FLDK, ELDK sunt quadrata se mutuo ad angulos rectos secantia.

3. Octaedrum dividitur in duas Pyramides similes, & æquales EDGFL, & EDGFK, quarum basis communis est quadratum EDGF.

4. Tandem bases Octaedri oppositæ sunt sibi mutuò parallelæ.

PROPOSITIO XV.

Cubum (EFLIPQVH) constituere, & sphærâ complecti: & demonstrare quòd sphæræ diameter(AB) potentiâ sit tripla lateris(EF) ipsius Cubi.

Super AB fiat semicirculus AOB, & 10. 6. fiat AB tripla ipsius DB, & erigatur perpendicularis DO, & ducantur AO, & BO. Tum super EF, cui æquetur ipsa BO, fiat quadratum EFLI, cujus plano insistant rectæ EP, FQ, IH, LV, ipsi EF æquales, & connectantur rectis HV, PQ, HP, VQ; erit solidum EFLIPQVH Cubus expetitus.

Cæterùm in Quadratis oppositis EFQP, ILVH ducantur diametri EQ, PF, se secantes in R, & IV, HL se secantes in O, & ducantur OR, & HF; ergo recta OR, *cor.* 39. 11. bisecabit diametros Cubi in puncto K centro ipsius Cubi; adeoque K erit centrum spheræ per angulos Cubi transeuntis.

Tum

$$\text{Æqu.hæc}\left\{\begin{array}{l}\text{EVq. (47. 1.)}\\ \text{EQq. pl. QVq. (47. 1.)}\\ \text{EFq. pl. FQq. pl. QVq. (}\textit{constr.}\text{)}\\ \text{3 QVq. (}\textit{constr.}\text{)}\\ \text{3 BOq.}\end{array}\right.$$

Atqui est, 8. 6. & *cor.* 20. 6. ABq. ad BOq. ut AB ad BD, quæ sunt, *constr.* ut 3. ad 1; ergo sibi æquantur AB, & EV, quandoquidem utraque

tripla

tripla est ipsius QV sivè BO; adeoque inscriptus est Cubus &c. Q. E. F.

COROLL. 1. Hinc omnes diametri cubi sibi æquantur, sequè mutuò secant in centro sphæræ, uti & rectæ, quæ quadratorum oppositorum centra coniungunt.

2. Hinc diameter sphæræ potest latus Tetraedri, & cubi, siquidem, 47. 1. ABq. æquatur ipsi AOq. (quod, 13. 13. est latus Tetraedri) plus BOq. (quod, 15. huj. est latus Cubi.

PROPOSITIO XVI.

Icosaedrum constituere, & sphærâ complecti: & demonstrare quod Icosaedri latus (AC) irrationalis est linea, quæ vocatur Minor.

CONSTR. Super diametrum MN describe semicirculum MZN, &, 10. 6. fit PN una quinta ipsius MN, tum ex P erige perpendicul. PZ, & duc ZM, ZN: deindè ad intervallum AF, cui æquetur ipsa NZ, fiat circulus AHÆD, cui, 11. 4. inscribe pentag. reg. AIGEC, cujus etiam circuli biseca arcus AI, IG &c. & connecte rectis AL, LI &c. quæ erunt latera decagoni: tum, 12. 11. erige tam ex centro F, quàm ex punctis L, H, Æ, D, B, ipsi radio AF æquales normales lineas FQ, LR, HS, ÆT, DV, BX, & duc rectas RS, ST, TV, VX, XR: AR, RI, IS, SG, GT, TE, EV, VC, CX, XA: atque producta normali FQ, fiant QO, & FY æquales ipsi AB, & concipiantur duci rectæ ex puncto Y ad puncta I, G, E, C, A, atque ex puncto O ad puncta X, R, S, T, V; Dico factum.

Demonstr. Primæ Partis. Nam, ob lineas QF, LR, HS, ÆT, DV, BX non modò, *constr.* rectas plano circuli, adeoque, 6. 11. sibi parallelas, sed & sibi æquales; etiam, 33. 1. quæ illas conjungunt binę, atque binæ lineæ FL, & QR, FH, & QS: FÆ, & QT: FD, & QV: FB, & QX, sunt sibi parall. & æquales: atqui FL, FH, FÆ, FD, FB, utpotè semidiametri, sibi omnes æquantur; ergo etiam sibi æquantur omnes QR, QS, QT, QV, QX: Ità etiam si connecterentur LH, HÆ, ÆD, DB, BL, quæ omnes, 29. 3. sibi æquantur; æquarentur, 31. 1. etiam sibi omnes RS, ST, TV, VX, XR, siquidem tam hæ in sublimi, quàm illæ in plano subjecto conjungunt normales parallelas, & æquales LR, HS, ÆT, DV, BX; ergo circulus per sublimia puncta R, S, T, V, X, ex puncto sublimi Q ductus, æqualis, & parallelus erit subjecto circulo, & sublime pentagonum RSTVX erit parallelum, & æquale ipsi subjecto pentagono AIGEC. Deindè concipiantur duci FA, FC, FE, FG, FI in subjecto plano, atque tum in sublimi duci QX, QV, QT, QS. QR; Igitur,

$$\text{Æqu. hæc} \begin{cases} \text{AXq. } (47.\ 1.) \\ \text{ABq. pl. BXq. } (\textit{constr.}) \\ \text{ABq. pl. AFq. } (10.\ 13.) \\ \text{ACq.} \end{cases}$$

Ergo sibi æquantur AX, & AC, eademque ratione

tione AC, & CX, atque ità de cæteris; adeoque 10. triangula XAC, XAR &c. sunt sibi æquilatera, & proindè æqualia. Rursus, quoniam angulus XOC rectus est, atque OX, utpotè radius, est latus hexagoni, necnon OC latus decagoni; idcircò etiam

$$\text{Æqu.hæc}\begin{cases}\text{CXq. (47. 1.)}\\ \text{OCq. pl. OXq. (10. 13.)}\\ \text{VXq. (\textit{ut prius})}\\ \text{ACq.}\end{cases}$$

Ergo CX, VX, eademque ratione CX, CV, EV &c. æquantur tam inter se, quàm dictis AC, AX, CX &c. Ergo alia 10 triangula æquantur tam sibi mutuò, quàm 10 prioribus, adeoque factum est Icosaedrum.

Demonstr. Secundæ Partis. Iamverò bisecetur FQ in K, & duc rectas KA, KX, KV, & quoniam, 15. *def.* 1. æquantur QX, & QV, atque KQ est communis, necnon anguli KQX, KQV recti sunt; ergo, 4. 1. æquabuntur KX, & KV, eademque ratione æquantur omnes KX, KR, KS, KT, KV, KA, KC, KE, KG, KI. Quoniam autem, 9. 13. est YQ ad QF, ut QF ad YF; idcircò

$$\text{Æqu.hæc}\begin{cases}\text{YKq. (3. 13.)}\\ \text{5 FKq. (4. 2. \& 2. \textit{ax}. 1.)}\\ \text{FQq. pl. FKq. (\textit{Constr.})}\\ \text{FAq. pl. FKq. (47. 1.)}\\ \text{KAq.}\end{cases}$$

Ergo æquantur YK, & AK; eademque ratione OK, & AK; adeoque sphæra, cujus centrum est

 K, &

K, & radius KA, transibit per 12 angulos Icosaedri. Deindè, quoniam, 15.5. est YK, ad KF, ut YO ad QF, adeoque, 22.6. est YKq. ad KFq. ut YOq. ad QFq. atque, *ut prius*, æquantur YKq. & 5 KFq. ergo etiam æquabuntur YOq. & 5 QFq. sivè 5 ZNq. atqui etiam est, 8.6. MNq. ad ZNq. ut MN ad NP, quæ sunt, *Constr.* ut 5 ad 1. Ergo, 6. *ax.* 1. æquabuntur YO, & MN. Q. E. F.

Demonstr. Tertiæ Partis. Demùm, quoniam, *ut prius*, æquantur MNq. & 5 ZNq. sivè 5 AFq. atque MN ponitur rationalis; ergo, 6. & 12. 10. etiam semidiameter AF est rationalis, adeoque tota Diameter Circuli, cujus radius AF, est rationalis; ac proindè, 11. 13. AC latus pentagoni, hoc est latus Icosaedri, Irrationalis est linea, quæ vocatur *Minor*. Q. E. D.

COROLL. 1. Hinc patet, sphæræ diametrum esse pot. quintuplam semidiametri circuli, pentagonum Icosaedri ambientis.

2. Sphæræ diametrum esse compositam ex latere hexagoni, hoc est ex radio, & ex duobus lateribus decagoni circuli, ambientis pentagonum Icosaedri.

3. Icosaedri opposita latera, qualia sunt RX, GE; esse parallela; Nam, 6. 11. & 31. 1. RX parallela est ipsi LB, quæ parallela est ipsi GE (ob arcuum nempè quos subtendunt æqualitatem); ergo, 9. 11. RX, & GE sunt parallelæ.

PRO-

PROPOSITIO XVII.

Dodecaedrum constituere, & datâ sphærâ complecti, & demonstrare, Dodecaedri latus Irrationalem esse lineam, quæ vocatur Apotome.

Exponantur cubi in eadem sphæra descripti duo plana BF, BD normaliter se secantes, seceturquè unumquodque ipsorum laterum bifariam ductis lineis MH, NX, HL, GK: tum fit, 30. 6. NO ad OR, ut OR ad NR: OX ad OS, ut OS ad SX: HP ad PT, ut PT ad HT, atque, 12. 11. à punctis R, S, T ducantur ad exteriores partes cubi, ipsius Cubi planis perpendiculares, & ipsis RO, OS, PT æquales, rectæ RY, SV, TQ, & duc. YB, BQ, QC, CV, VY; Dico, pentagonum YBQCV esse æquilat. in eodem plano, & æquiang. Iungantur enim RB, SB, VB: atque tum

Æqu. hæc $\left\{\begin{array}{l} \text{BYq. (47. 1.)} \\ \text{BRq. pl. RYq. (47. 1.)} \\ \text{BNq. pl. NRq. pl. RYq. (\textit{constr.} \& 4. 13.)} \\ \text{3 ORq. pl. RYq. (\textit{constr.})} \\ \text{4 RYq.} \end{array}\right.$

Ergo, 4. 2. BY dupla est ipsius RY, atqui etiam, *constr.* RS (hoc est, 6. 11. & 33. 1. VY) ipsius RO, sivè RY, dupla est; ergo, 6. *ax.* 1. sibi æquantur VY, & BY, atque ità similiter ostendetur de cæteris, BQ, QC, CV, eas nempè

æqua-

æquari ipsi BY; ergo pentag. est æquilaterum. Deindè ducatur OZ parallela ipsis RY, SV, & trahe ZH, HQ; Dico ZHQ esse unam rectam: Nam, *constr.* est HP ad PT, ut PT ad HT, hoc est, *constr.* & 7. 5. HO ad OZ, ut QT ad HT, atque, *constr.* & 6. 11. HO parallela est ad QT, uti & HT ad OZ, ergo, 32. 6. ZH est in directum ipsi HQ: adeoque, 1. 11. pentagonum YBQCV in eodem est plano: Tum, *constr.* & 5. 13. est NO pl. OR ad NO, ut NO ad OR, hoc est, *constr.* & 7. 5. est NS ad NO, ut NO ad OS; ergo, 4. 13. sibi æquantur NSq. pl. OSq. & 3 NOq. Igitur

Æqu. hæc { 4 NBq. (*constr.*)
4 NOq. (4. 13. & 2. *ax.* 1.)
NSq. pl. OSq. pl. NOq. (*constr.* & 7. 5.)
NSq. pl. SVq. pl. NBq. (47. 1.)
SBq. pl. SVq. (47. 1.)
BVq. }

Ergo, 4. 2. BV dupla est ipsius NB, adeoque, 6. *ax.* 1. sibi æquantur BV, & BC, atqui, ob pentagonum æquilaterum, BY, YV æquantur ipsis BQ, QC; ergo, 8. 1. æquantur anguli BYV, & BQC, eademquè ratione patebit æquari angulos BQC, & YVC; adeoque, 7. 13. pentagonum YBQCV est æquiangulum: atqui est hoc pentagonum in cubi latere BC; ergo, si idem fiat in unoquoque 12 laterum Cubi; Constituetur solidum 12 pentagonis contentum, nempè *Dodecaedrum*.

Deindè

Deindè, producatur ZO in interiores partes cubi, usque dum, 39. 11. occurrat diametro cubi, & se mutuò bifariam secent, ut puta in *a*; ergo *a* erit centrum sphæræ cubum complectentis, & O*a* erit dimidium lateris cubi. Ducatur jam *a*Y; ergo, *ut prius*, æquantur NSq. pl. OSq. & 3 NOq. hoc est, *constr.* & 1. *ax.* 1. sibi æquantur 3 NOq. & *a*Zq. pl. ZY (hoc est, 47. 1. *a*Yq.) Ergo, 15. 13. *a*Y est sphæræ, Cubum Complectentis, semidiameter: adeoque punctum Y est in superficie sphæræ: quod ostensum puta de reliquis Dodecaedri angulis; ac proindè Dodecaedrum ipsi sphæræ inscriptum est.

Q. E. F.

Postremò: Quoniam, *constr.* est NO ad OR, ut OR ad NR; idcircò, 15. 5. erit NX ad RS, ut RS ad NR pl. SX: atqui NX major est, quàm RS; ergo, 14. 5. RS major est, quàm NR pl. SX; adeoque NX secta est extr. ac med. rat. & majus segmentum est RS, sivè, *ut prius*, YV: atqui NX, latus cubi, est rationale, ut potè pot. subtriplum rationalis Diametri sphæræ; Ergo, 6. 13. YV est Apotome.

Q. E. D.

COROLL. 1. Hinc, si latus cubi secetur extr. ac med. ratione; majus segmentum erit latus dodecaedri in eadem sphæra descripti.

2. Si rectæ lineæ, sectæ extr. ac med. ratione minus segmentum sit latus dodecaedri; majus segmentum erit latus cubi ejusdem sphæræ.

3. Patet etiam, latus cubi æquale esse lineæ

rectæ ſubtendenti angulum pentagoni dodeca:
in eadem ſphæra deſcripti.

PROPOSITIO XVIII.

Latera quinque corporum Platonicorum e ponere, & inter ſe comparare.

Nempè, ſi ſit AB diameter ſphæræ, & AB ſemicirculus, ſitquè AC dimidium ipſius AB, & AD una tertia ipſius AB, & erigatur perpendiculariter BO, æqualis ipſi AB: ducanturque cæteræ perpendiculares, ut in ſchemate, facta primùm CK æquali ipſi CI, fiatquè, 30. 6. AF ad AX, ut AX, ad XF.

Erit igitur, *conſtr.* 2 ad 1, ut AB ad BD, quæ ſunt, ut ABq. ad BFq. hoc eſt, 13. 13. ad latus *Tetraedri*.

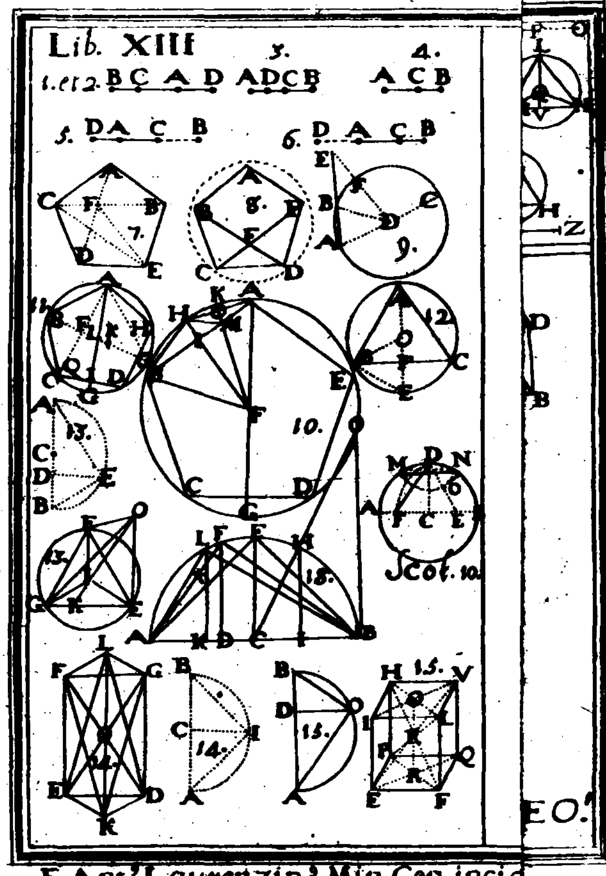
Item erit, *conſtr.* 2 ad 1, ut AB ad AC, quæ ſunt, ut ABq. ad BEq. hoc eſt, 14. 13. ad latus *Octaedri*.

Item erit, *conſtr.* 3 ad 1, ut AB ad AD, quæ ſunt, ut ABq. ad AFq. hoc eſt, 15. 13. ad latus *Hexaedri*.

Item erit, 17. *huj.* AX latus *Dodecaedri*; Siquidem, *conſtr.* eſt AF ad AX, ut AX ad XF.

Demum, quoniam, 4. 6. eſt BO (ſivè 2 BC) ad BC, ut HI ad IC; ergo æquabuntur HI, & 2 IC, hoc eſt KI; ergo, 4. 2. æquabuntur Hk & 4 ICq. ac proindè, 47. 1. & 2. *ax.* 1. æquab. CHq. & 5 ICq. atqui AB eſt dupla ipſius CH uti & KI, vel HI eſt dupla ipſius IC; ergo æquab.

ABq.



F. Ant.' Laurenzin.' Min. Con. incid

ABq. & 5 Klq.; adeoque, *cor.* 16. *huj.* KL vel HI est radius circuli ambientis pentag. *Icosaedri*, & AK, vel IB, 2. *cor.* 16. *huj.* est latus decag. eidem circulo inscripti; ergo, 10. *huj.* AL est latus pentagoni, necnon, 16. *huj.* erit idem AL latus Icosaedri.

Undè patet, latera Tetraedri, Octaedri, & Hexaedri esse sibi pot. commens. & rationalia: contrà verò esse Irrationalia, & sibi pot. incommens. latera Icosaedri, & Dodecaedri.

Item patet, latus Tetraedri majus esse, quàm latus Octaedri, & hoc quàm Hexaedri, & hoc quàm Icosaedri, & hoc quàm Dodecaedri.

SCHOL. Quod autem præter dicta quinque Corpora regularia, quæ nempè figuris planis ordinatis, & æqualibus continentur, nullum aliud dari possit; Indè quidem patet, quia ad formandum angulum solidum requiruntur ad minimum tres anguli plani, qui, 21. 11. simul sumpti minores esse debent, quàm 4 recti: Atque 6 anguli trianguli æquilateri, 4 quadratici, & 3 hexagonici, sigillatim quatuor rectos exæquant: 4 verò pentagonici, 3 heptagonici, 3 octagonici &c. 4 rectos excedunt; ergo tantùm ex 3, 4, vel 5 trigonis æquilateris, ex 3 quadratis, vel 3 pentagonis efficì potest angulus solidus; adeoque preter quinque exposita, nulla alia corpora regularia dari possunt. Q. E. D.

L A U S D E O.

LIBER

LIBER XIV.

PROPOSITIO I.

QVæ ex (H) centro circuli cujuſpiam in pentagoni eidem circulo inſcripti latus (CD) ducitur perpendicularis (HO), dimidia eſt utriuſque lineæ ſimul (HK, & KD) nimirum lateris Hexagoni, & lateris Decagoni eidem circulo inſcripti.

Sumatur BO æqualis ipſi Ok, & ducatur CB, ergo, 4. 1. æquabuntur CK, & CB; ergo, 5. 1. æquabuntur anguli CBK, CKB, HCK; ergo

Æqu. hi anguli:
- KCB (*ut prius, &* 32. 1.)
- KHC (*hyp.* & 33. 6.)
- quadrans ipſius CHR (32. 1.)
- dimidium ipſius CKH (5. 1. & 7. *ax.* 1.)
- dimidium ipſius KCH.

Ergo angulus KCB eſt dimidium anguli KCH; adeoque æquabuntur anguli HCB, KCB, KHC, ſivè BHC; ergo, 6. 1. æquabuntur lineæ HB, & CB,

. *CB*, sivè CK: quod si ipsi HB addas lineam O, atqui ipsi CK addas lineam OK (quæ fa- a est æqualis ipsi BO); erit HB pl. BO, hoc t tota HO) æqualis ipsi compositæ CK pl. O: ergo si omnes simul addas; erit HO pl.)K pl. CK, hoc est HK pl. Ck, dupla ipsius O. Q. E. D.

PROPOSITIO II.

SI binæ rectæ lineæ (AL, IF) extremâ, & mediâ ratione secentur; ipsæ in eadem pro- rtione secabuntur.

Sumatur LD æqualis ipsi CL, atque tum O æqualis ipsi EF: Æquabuntur ergo, *hyp.* & *7. 6.* ALC (sivè ALD), & ACq. uti & IFE sivè IFO), & IEq. adeoque, 8. 2. æquabun- r ADq. & 5 ACq. uti & IOq. & 5 IEq. er- o, 22. 6. erit AD ad AC, ut IO ad IE: & *mpon.* AD pl. AC ad AC, ut IO pl. IE ad E: hoc est, *Constr.* 2 AL ad AC, ut 2 IF ad ; ac proindè, 15. & 11. 5. AL ad AC, ut ad IE: & *diuid. atque invert.* AC ad CL *IE* ad EF. Q. E. D.

PROPOSITIO III.

Dem circulus comprehendit, & Dodecaedri pentagonum (ABCEF) & Icosaedri trian- m (RSV) eidem sphæræ inscriptorum.

Ducantur diameter AD, & rectæ AC, CD: sit

ſit autem Z diameter ſphæræ, & fiat Zq. ad QPq. ut 1 ad 5. atque, 30. 6. fiat QP ad QM, ut QM ad MP. Igitur

Æqu. hæc
ABq. pl. ACq. pl. CDq. (31. 3. & 47. 1.)
ABq. pl. ADq. (4. 2.)
ABq. pl. 4 GDq. (10. 13.)
5 GDq. pl. CDq.

Ergo, 3. *ax.* 1. æquantur ſibi ABq. pl. ACq. & 5 GDq. Quoniam verò, *hyp.* & 8. 13. eſt AC ad AB, ut AB ad AC *min.* AB, atque, *Conſtr.* etiam eſt QP ad QM, ut QM ad QP, *min.* QM; ergo, 2. 14. & *altern.* erit AC ad QP, ut AB ad QM. ergo, 22. 6. erit 3 ACq. ad 5 QPq. ut 3 ABq. ad 5 QMq. atqui (15. 13.) æquantur Zq. & 3 ACq. uti, &, *conſtr.* Zq. & 5 QPq. Ergo, 1. *ax.* 1. æquabuntur 3 ACq. & 5 QPq. uti &, 14. 5. 3 ABq. & 5 QMq. atqui in circulo, cujus diameter QP, eſt, 1. *cor.* 16. 13. RS latus pentagoni; Ergo

Æqu. hæc
15 OSq. (12. 13.)
5 RSq. (10. & *cor.* 9. 13.)
5 QPq. pl. 5 QMq. (*ut prius*)
3 ACq. pl. 3 ABq. (*ut prius*)
15 GDq.

Ergo circulus, cujus diameter eſt OS, æquatur circulo, cujus diameter eſt GD.

Q. E. D.

PRO-

PROPOSITIO IV.

Si ex (K) centro circuli, pentagonum dodecaedri (ABCDO) circumscribentis, ducatur perpendicularis (KR) ad unum pentagoni latus (CD); erit rectangulum sub dicto latere (CD) & perpendiculari (KR) trigesies sumptum, Dodecaedri superficiei æquale. Item

Si ex centro (Q) circuli triangulum Icosaedri (LHN) circumscribentis, perpendicularis (QV) ducatur ad trianguli unum latus (HN); erit quod sub dicto latere (HN), & perpendiculari (QV) comprehenditur rectangulum, trigesies sumptum, icosaedri superficiei æquale.

1. Ducantur cæteræ lineæ ex centris: Erunt ergo, 8. 1. 3gla CKD, DKO, OKA, AKB sibi æqualia: atqui, 41. 1. 3glum CKD erit dimidium rectanguli sub CD, & KR: ergo 30 hujusmodi rectangula erunt 60 3gla CKD; hoc est 12 pentagona ABCDO; hoc est, 17. 13. superficies dodecaedri. Q. E. D.

2. Ducantur cæteræ rectæ ex centro Q; ergo, 41. 1. 3glum HQN est dimidium rectanguli sub HN, & QM; 3gla verò HQL, HQN, LQN, 8. 1. sibi æquantur, ergo 30 rectangula sub HN, & QV sunt 60 3gla HQN, hoc est 20 3gla HLN, hoc est, 16. 13. superficies icosaedri. Q. L. D.

COROLL. Hinc rectang. sub CD, & KR ad rectang. sub HN, & QM est, ut superficies

Dodecaedri ad superficiem Icosaedri.

PROPOSITIO V.

Superficies Dodecaedri ad superficiem Icosaedri in eadem sphæra descripti, est, ut (H) latus Cubi ad (AD) latus Icosaedri.

In circulo, cui, 3. 14. inscriptum sit tam Dodecaedri pentagonum, quàm Icosaedri 3glum, quorum latera BD, AD, demittantur ex centro Q ad hæc latera perpendiculares QK, & QO, quæ producatur usque ad C, & connectatur CD. Igitur

Æqu. hæ Rationes:
- QO ad QK (1. 14. & *cor.* 12. 13.)
- dimidium QC pl CD ad dimidium QC (15. 5.)
- QC pl. CD ad QC (9. 13.)
- QC ad CD (15. 5.)
- dimidium QC ad dimidium CD (*cor.* 12. 13.)
- QK ad QO *min.* QK

Atqui etiam, *cor.* 17. 13. est H ad BD, ut BD ad H *min.* BD; ergo, 2. 14. erit QO ad QK, ut H ad BD; ac proindè, 16. 6. rectang. sub QO, & BD æquatur rectangulo sub H, & QK: atqui, 1. 6. est H ad AD, ut rectang. sub H, & QK ad rectang. sub AD, & Qk, quæ sunt, *ut prius*, & 7. 5. ut rectang. sub QO, & BD ad rectang. sub AD, & QK, quæ, *cor.* 4. 14. sunt ut superficies Dodecaedri ad superf. Icosaedri.

Q. E. D.

PRO-

PROPOSITIO VI.

SI recta (AB) secetur extrema, ac media ratione; erit, ut recta (BF) potens id quod à tota (AB) & id quod à majori segmento (AC) ad rectam (Z) potentem id quod à tota (AB) & id quod à minori segmento (BC), ut (BG) latus Cubi ad (BK) latus Icosaedri eidem sphæræ cum cubo inscripti.

Siquidem, 12. 13. erit BKq. triplum ipsius ABq. atque, 4. 13. erit Zq. triplum ipsius ACq. Ergo, 15. 5. erit BKq. ad Zq. ut ABq. ad ACq. quæ sunt, 1. *Cor.* 17. 13. & 2. 14. ut BGq. ad BFq. atque, *altern.* erit BGq. ad BKq. ut BFq. ad Zq. adeoque, 22. 6. erit BG ad BK, ut BF ad Z. Q. E. D.

PROPOSITIO VII.

DOdecaedrum est ad Icosaedrum, ut latus cubi ad latus Icosaedri in una, eademque sphęra inscripti.

Quoniam enim, 3. 14. idem circulus continet dodecaedri pentagonum, & icosaedri 3glum, atque omnes anguli tam pentagonici, quàm tetragonici superficiem sphæræ tangunt; idcircò, 47. 1. perpendiculares, ductæ à centro sphæræ ad centra 12. pentagonorum dodecadri, & 30 triangulorum icosaedri, sibi æquabuntur; adeoque si concipiantur dodecaedrum, & icosaedrum resolvi in pyramides; erunt hæ ejusdem altitudinis; adeoque erunt (5. & 6. 12) inter se, ut ipsarum bases, nimirùm erunt 12 pyramides pentagonicæ (sivè dodecaedrum) ad 20 pyramides trigonicas (sivè ad icosiedrum), ut 12 pentagona ad 20 triangula, sivè ut superficies dodecaedri ad superf. icosaedri, quæ sunt (5. 14) ut latus cubi ad latus icosaedri. Q. E. *D.*

PROPOSITIO VIII.

IDem circulus comprehendit, & cubi quadratum (BCKO) & octaedri 3glum (AGH) ejusdem sphæræ.

Sit Z diameter sphæræ. Quoniam ergo, 15. 13. & 47. 1. sibi æquantur Zq. 3 BCq. & 6 BDq. uti & (14. & 12. 13) Zq. 2 AGq. & 6 AQq. idcircò sibi æquabuntur BD, & AQ, adeoque, & ipsi circuli. Q. E. D.

LAUS DEO.

LIBER

LIBER XV.

PROPOSITIO I.

D*Escribere in dato Cubo (ABDCGK-EF) Pyramidem.*

Ab angulo C duc diametros CA, CF, CD, easquè connecte diametris AD, FD, FA; dico factum; Quippè hæ omnes sibi æquantur, 47. 1. utpotè æqualium quadratorum diametri; ergo 3gla CAD, CDF, CFA, FAD sibi æquantur utpotè æquilatera; ergo ADFC est pyramis, quæ Cubi angulis insistit.

Q. E. F.

PROPOSITIO II.

I*N data Pyramide (ABCO) Octaedrum describere.*

Bisecentur latera pyramidis in punctis E, G, F, H, K, I; quæ connectantur duodecim rectis; dico factum: Siquidem, 4. 1. hæ omnes sibi mutuò æquantur; ac proindè octo 3gla EHk,

 EFH,

EFH, &c. ſunt æquilatera, & æqualia; adeoque, 27. & 31. *def.* 11. conſtituunt octaedrum in data pyramide deſcriptum.

Q. E. F.

PROPOSITIO III.

IN dato Cubo (LQKOCDBA) Octaedrum deſcribere.

Connectantur quadratorum centra duodecim lineis rectis; quæ proindè, 4. 1. ęquabuntur ſibi mutuò; adeoque octo 3gla efficiunt æquilatera, & æqualia; ac proindè, 31. & 27. *def.* 11. inſcriptum eſt cubo octaedrum.

Q. E. F.

PROPOSITIO IV.

IN dato Octaedro (AZ) Cubum inſcribere.

Coniungantur centra triangulorum duodecim rectis; quæ, 4. 1. æquales ſunt, & 2. 6. ſibi reſpectivè parallelæ (ſi nempè triangulorum centra inveniantur ductis ex ipſorum angulis lineis ad baſes perpendicularibus; Nam tunc hæ perpendiculares lineę ſecabuntur proportionaliter à lineis centra connectentibus); ergo reſultabunt ſex quadrata ſibi ſimilia, & ęqualia; quę proindè, 31. *def.* 11. in octaedro cubum conſtituent.

Q. E. F.

PRO-

PROPOSITIO V.

IN dato Icoſaedro Dodecaedrum inſcribere.

Connectantur 20 triangulorum centra totidem rectis; quæ proindè,(4. 1) æquabuntur ſibi mutuo; proindequè 12 pentagona conſtituent ſibi æquilatera, & æquiangula, ac proindè inſcriptum erit Icoſaedro Dodecaedrum.

Q. E. F.

LAUS DEO.

De ordine Eminentissimi reimprimatur 10. Julii 1701.

JO: ANDREAS SILIQUINUS VIC. GEN.

D. Petrus Marcus Giptius Can. Deput.

Reimprimatur die 30. mensis Junii 1701.

ANDREAS REG.

Casabona.

TUMULUS
FRANCISCI MANERII
ASTORINI
ADOLESCENTIS OPTIMI,

Qui Neapoli, dum Legum ſtudiis operam daret, adornante ejus avunculô ſuos in Euclidis Elementa, & in Sectiones Conicas Apollonii Pergæi Commentarios, obiit primis Kalendis Februariis hujus ineuntis Seculi Decimioctavi, annum ætatis agens XVI.

Phœbi deliciæ, Muſarum gaudia, Amicis
Percarus, culto nobilis ingenio,
Hic tumulatus adeſt, teneris FRANCISCUS *in annis*
Ereptus, ceu flos imbre cadente cadit.

Joannes Guidelli.

DE

DE MUSARUM LUCTU,

FRANCISCI MANERII ASTORINI,

Acerbum Obitum Collachrymantium.

EPIGRAMMA.

Heu FRANCISCE! *jaces primo sub flore juventa*
Ereptus Charitum, Thespiadumque choro.
Nam colis impense dum Musas, occidis, eheu!
Ceu flos incauto pressus ab agricola.
Ni mirum doleat juvenum si docta caterva
Te extincto, numquam sat doluisse potest.

Alexander Guidelli.

Aliud

A L I U D.

S*Parge rosis tumulum, violasque, & lilia plenâ*
Funde manu, innocuos continet hic cineres;
Neu lacrymis parcas, lacrymas effundere tristes
Cum Musis visa est docta Minerva simul:
Unanimesque sui perculsæ funere Alumni
Signarunt mœstis Marmora carminibus.
Decepta hunc rapuit Lachesis florentibus annis,
Nam tuita ingenium, credidit esse senem.

Bartholomæus Interius.

JO-

JOSEPH LUCINÆ
AD ELIAM ASTORINUM.

QVid nunc assiduo, ASTORINE, lecta
Confectum ad numeros, levesque rursus
Me nugas revocas, tuasque tristes
Ob mortem pueri optimi, optimaque
Rapti sorte adigis levare curas?
Infelix quasi ferre nunc tibi ipse
Possem suppetias egens Homeri
Nepenthe, atque Epidaurijs medelis:
Caræ namque oculis imago semper
Hæret semianimis cruenta natæ,
Et lapsus miseræ ambulacro ab alto.
Qualis flos rigui caducus horti
Nondum puniceam comam recludens:
Aut arbuscula Cypridis venusta
Ventorum rapidis humi procellis
Decumbit: neque tum parens jacentem
Tellus erigere est potis, nec ullam
Inspirare animam. Queruntur ipsæ
Adstantes Dryades, chorusque circùm
Nympharum, & madidis rigare frustra
Certatìm miseram student ocellis.
Sic carum mihi pignus, alteramque
Partem cordis acerba surpuere
Fata, heu, quùm roseo tenella flore

Pri-

Primum ver ageret: manensque dulce
Jamtùm conjugium parens puellæ
Speraret sibi blandulos nepotes,
Queis cum ludere, sicut ipse, posset.
O spes irrita! o dies acerbo
Nobis commemoranda sæpè luctù!
Jamnunc me invalidum pudet fateri,
Et sævo pudet obsequi dolori:
Sed te cum video, ASTORINE, post tot
Exactos sapientiæ labores
Tam triste ex animo dolere, vitè
Tunc vanas sophiæ vocare cogor
Curas, succubuisse si ruenti
Fortunæ sapiens potest. Inani
Sic ævum teritur labore sæpè
Inter somnia cæca; quum supremo
Sit tantum solida in Deo voluptas.

IN

IN EXCESSU
FRANCISCI MANERII
ASTORINI

Adolescentis optumi.

Non mî viscera ferrea obtigere:
Non mî dogmata saxei Magistri
Sunt cordi: neqveo rigente ocello
Funus cernere, lacrumas videre.
Ingentis juvenem spei, suæqve
Matris delicium, decusqve dulce,
Quî lento videam jacere corde?
Num patris gemitus, avunculiqve,
Dolentis sine fine, num sororis
Auscultem illacrimabilis querelas?
Non hæc, non hominem decent: ferinos
Hæc mores sapiunt. Fluant perenni
Fletu lumina; lugeant amicum,
Qvem Musæ, & Charites sinu puellum
Fovere: & latices bibisse sacros
Ferant balbicalis adhuc labellis.

Agnellus. Alexius Blasius.

EXI.

EXITIALE MORTIS

Στρατήγημα

Um teneros doctis exercens artibus annos,
Ingenij Juvenis signa stupenda daret.
pexit, doluit, simul heu, Mors invida dixit;
Heu mihi, quàm solers hic mea damna parat.
rtute, ac ævo Hic crescens, per sæcula nomen
Mortali exemptus conditione feret.
uin etiam æternum contempto ut funere vivant,
Carmine Mæonio tollet ad astra Viros.
n tantos efferre ausus impunè licebit?
An sperni patiar Numen inulta meum?
æc ait; & jaculum furiata intorsit ab arcu,
Quo languens Animam nobile pectus agit.
ic dum fatales, MANERI, frangere leges
Tu properas; properè te mala fata premunt.

Joannes Bortonus.