

Notes du mont Royal

www.notesdumontroyal.com

Cette œuvre est hébergée sur « *Notes du mont Royal* » dans le cadre d'un exposé gratuit sur la littérature.

SOURCE DES IMAGES
Google Livres

LES ELEMENS
D'EUCLIDE

DU R. P. DECHALLES.



LES ELEME^NS D'EUCLIDE

DU R.P. DECHALLES.

Démontrés d'une manière nouvelle
& facile ,

Par M. OZANAM de l'Académie des Sciences.

NOUVELLE EDITION.

Revue , corrigée & augmentée d'un grand nom-
bre de Propositions & d'Usages ,

Par M. AUDIERNE, Maître de Mathématique.



A PARIS, QUAY DES AUGUSTINS,

Chez CH. ANT. JOMBERT, Libraire du Roy pour
l'Artillerie & le Génie, au coin de la rue Gille-Cœur,
à l'Image Nôtre-Dame.

M. DCC. XLVI.

Avec Approbation & Privilège du Roy.





P R E' F A C E.

LE Nil qui chaque année étend ses eaux sur toute l'Egypte , enleve les bornes des terres de cette Contrée , de maniere que les Propriétaires sont souvent obligés , lorsque ce Fleuve est rentré dans son lit , à rechercher la quantité du terrain qu'ils possédoient avant l'inondation. Cette nécessité fit inventer aux premiers Egyptiens les moyens de mesurer l'étendue que peut avoir un certain espace ; & ils donnerent à cet Art le nom de Géométrie , qui en notre langue signifie Mesure de la Terre. Mais cette Science qui dans son origine n'avoit eu que cet objet assez simple , sortit bientôt du limon du Nil où elle avoit pris naissance , & devint , pour me servir de l'expression de Platon , une des aîles avec lesquelles l'Homme s'éleva jusques à ces Globes immenses qui roulent sur sa tête.

vj P R E F A C E.

Alors les Machines furent inventées ; les Edifices les plus hardis furent élevés ; les Périodes des Astres furent déterminées ; les courses, les distances, les grandeurs des Planetes furent mesurées ; enfin on construisit les Vaisseaux , & la Mer ne fut plus une barriere entre les Nations les plus éloignées.

On a donné plusieurs Traités d'une Science dont on a retiré de si grands avantages , & qui en procure tous les jours de nouveaux ; mais la plus grande partie de ces ouvrages n'a pas toute la perfection que l'on pourroit souhaiter. Les uns trop secs & trop obscurs, sont la cause que l'on se dégoûte de la Géométrie avant que de la connoître ; & les autres au contraire trop dénués du stile qui est propre & particulier à cette Science , n'ont ni l'ordre ni le génie qui lui convient ; & loin de donner à l'esprit l'étendue & la justesse qui sont les principaux fruits que l'on doit recueillir de ce genre d'étude , ils font penser que la Géométrie est aussi problématique que la Physique ; & comme ces deux

P R E F A C E. vii

Sciences ne sont pas également séduisantes , on va quelquefois jusqu'à accuser la première de manquer de sens commun ; elle qui est le chef-d'œuvre du bon sens.

L' Abrégé des Elémens d'Euclide du P. Dechalles n'a point le premier de ces défauts. Cet habile Mathématicien en y simplifiant les Démonstrations , met la Géométrie à la portée des personnes qui veulent s'instruire de cette Science ; & en joignant des Usages à plusieurs Propositions , il prévient le dégoût que l'ignorance de l'utilité de ces mêmes Propositions pourroit causer : mais comme il étoit trop Géometre pour s'imaginer que l'on recevroit un jour des preuves purement Physiques , pour des Démonstrations géométriques , il n'est pas toujours attentif à démontrer en rigueur ; & à prévenir par-là un défaut qui depuis quelque tems ne fait que trop de progrès dans la Géométrie.

C'est le desir de remedier à ce défaut qui m'a fait entreprendre cette nouvelle traduction des Elemens d'Euclide , dans laquelle j'ai été plus attentif à donner

viii P R E' F A C E.

l'esprit de ce Géometre , qu'à conserver l'ordre ou le nombre des Mots dont son Commentateur Proclus s'est servi , & à me mettre à la portée de toutes les personnes , qui par goût ou par état veulent s'appliquer à ce genre d'étude qu'à dire peu de paroles. Ainsi si quelques personnes trouvent que j'ai employé plus de mots que beaucoup d'autres Auteurs , pour démontrer quelques Propositions , je supplie ces personnes de ne mesurer mes Démonstrations que par la durée du tems qu'elles employeront à les comprendre , de faire attention que j'ai toujours démontré en rigueur , & que si elles m'entendent sans peine , & si je n'ai laissé aucun voile sur les vérités que je voulois découvrir , j'ai fait ce que je devois faire.

A l'égard d'Euclide qui est l'Auteur de ces Elemens ; il étoit de la Ville de Megare , vivoit sous le premier des Ptolomées , environ 400 ans avant la Naissance de J. C. & l'on peut dire qu'il n'y a eu de Géometres depuis lui , que ceux qu'il a formés.

AVERTISSEMENT.

LEs Mathématiciens nomment *Théorèmes*, les Propositions qui ne font qu'exposer une vérité : *Problèmes*, celles qui proposent quelque chose à faire : *Corollaires*, celles qui sont des conséquences d'autres Propositions ; & enfin *Scholies*, celles qui ne sont que des remarques.

Ils nomment *Hypothèse*, les conditions auxquelles ils disent qu'une chose doit être ; & *Conséquence*, ce qui suit de l'hypothèse & qu'il faut démontrer.

Dans cette Proposition : si un triangle est équilatéral, ses trois angles seront égaux entr'eux ; *cette partie*, si un Triangle est équilatéral, est l'hypothèse ; & *celle-ci* les trois angles seront égaux entr'eux, est la conséquence qu'il faut démontrer.

C'est l'usage de terminer toujours

x
la démonstration d'une Proposition
par la répétition de l'hypothese & de
la conséquence de cette Proposition :
mais pour abreger on désigne l'une
& l'autre par ces quatre lettres
C. Q. F. D. s'il s'agit d'un Théorê-
me , & par ces quatre lettres C. Q.
F. F. s'il est question d'un Problème.
Les quatre premieres signifient *ce*
qu'il falloit démontrer , & les quatre
autres , *ce qu'il falloit faire*.



A P P R O B A T I O N.

J'AI lû par ordre de Monseigneur le Chancelier , les Oeuves de M. Ozanam , contenant le *Dictionnaire* , le *Cours* & les *Récréations Mathématiques*, un *Traité d'Arpentage* , la *Géométrie-Pratique* , l'*Usage du Compas de proportion* , la *Méthode pour lever les Plans* , & les *Elemens d'Euclides*.

Les Ouvrages de M. Ozanam ayant servi jusqu'ici d'Ecole à presque tous ceux qui se sont appliqués aux Mathématiques depuis qu'elles ont été regardées en Europe comme la base de toutes les Sciences ; il y a apparence que cette nouvelle édition de ses Oeuves fera aussi-bien reçue du Public que l'ont été les précédentes. A Paris le 24 Février 1746.

BELIDOR.

Le Privilege de cet Ouvrage & des autres de M. Ozanam , se trouvera à la fin du Traité d'Arpentage de cet Auteur.



LES ELE MENS D'EUC LIDE.

LIVRE P R E M I E R.

EUCLIDE commence ce Livre par définir les termes qui sont propres à la Géométrie. Il pose ensuite les Principes sur lesquels il doit fonder les Démonstrations des Propositions qu'il va avancer, & après avoir deduit de quelques-uns les Pratiques les plus simples de la Géométrie, il considère les Triangles ; examine quelles conditions sont suffisantes pour conclure l'égalité de leurs angles, de leurs côtés, & de leurs surfaces, & à mesure qu'il établit une nouvelle vérité, il en conclut les Pratiques qu'il est nécessaire de savoir, pour aller aux Propositions suivantes. Il passe aux Lignes paralleles, démontre les conditions aux-

2 LES ELEMENS D'EUCLIDE.

quelles on peut connoître si des lignes sont, considère les propriétés de ces lignes en déduit une des plus considérables des Triangles, & naturellement conduit aux Parallelogrammes qui sont des figures formées par ces lignes, il en démontre aux plusieurs propriétés, enseigne quelques-unes des conditions auxquelles ils sont égaux entr'eux, & donne des Regles pour transformer en Parallelogramme une figure rectiligne quelconque. Il termine enfin ce Livre par la fameuse Proposition du Carré de l'Hypotenuse, l'une des plus belles & des plus utiles de la Géométrie, & pour la decouverte de laquelle, on dit que Pythagore offrit aux Muses un sacrifice de cent Bœufs, en action de grace de la faveur qu'il s'imaginait avoir reçu d'elles.

DEFINITIONS.

N^o. 1. **L**A Géométrie est une Science qui considère l'Etendue.

2. Ce qui est étendu peut être considéré premierement, comme ne l'étant qu'en un sens, & ce sens se nomme alors *Longueur* : Secondement, comme ne l'étant qu'en deux sens, & l'un à volonté, se nomme alors *Longueur*, & l'autre *Largeur* : Troisième-

LIVRE PREMIER. 3

ment, comme l'étant en trois sens, & l'un à volonté, se nomme alors *Longueur*, l'autre à volonté aussi, *Largeur*, & le troisième, *Épaisseur*.

3. La *Longueur*, la *Largeur*, & l'*Épaisseur* se nomment chacune *Dimension*.

I.

4. On nomme *Point* ce qui considéré dans l'étendue, n'a aucune partie.

Lisez le N^o. 6.

II.

5. On nomme *Ligne* ce qui n'est étendu qu'en longueur.

Lisez le n^o. 10.

III.

COROLLAIRE.

6. Il suit de cette Définition que les extrémités d'une Ligne sont des Points.

Démonstration. Premièrement, les extrémités d'une ligne ne sont étendues ni en largeur ni en épaisseur; puisque les lignes ne le sont qu'en un sens (n).

N. 2. &

Secondement, elles ne le sont point en longueur; puisque si elles l'étoient, elles seroient des lignes (n): or si les extrémités A & B d'une ligne AB* étoient des lignes, par exemple AC & BD, ces lignes auroient des extrémités A & C, B & D; & par conséquent elles ne se-

N. 5.

Fig. 1.

2 LES ELEMENS D'EUCLIDE.

quelles on peut connoître si, des lignes le sont, considère les propriétés de ces lignes, en déduit une des plus considérables des Triangles, & naturellement conduit aux Parallelogrammes qui sont des figures formées par ces lignes, il en démontre aussi plusieurs propriétés, enseigne quelques-unes des conditions auxquelles ils sont égaux entr'eux, & donne des Regles pour transformer en Parallelogramme une figure rectiligne quelconque. Il termine enfin ce Livre par la fameuse Proposition du Quarré de l'Hypotenuse, l'une des plus belles & des plus utiles de la Géométrie, & pour la decouverte de laquelle, on dit que Pythagore offrit aux Musés un sacrifice de cent Bœufs, en action de grace de la faveur qu'il s'imaginoit avoir reçu d'elles.

DEFINITIONS.

Nº. 1. **L**A Géométrie est une Science qui considère l'Etendue.

2. Ce qui est étendu peut être considéré premierement, comme ne l'étant qu'en un sens, & ce sens se nomme alors *Longueur* : Secondement, comme ne l'étant qu'en deux sens, & l'un à volonté, se nomme alors *Longueur*, & l'autre *Largeur* : Troisième-

LIVRE PREMIER. 3

ment, comme l'étant en trois sens, & l'un à volonté, se nomme alors *Longueur*, l'autre à volonté aussi, *Largeur*, & le troisième, *Epaisseur*.

3. La *Longueur*, la *Largeur*, & l'*Epaisseur* se nomment chacune *Dimension*.

I.

4. On nomme *Point* ce qui considéré dans l'étendue, n'a aucune partie.

Lisez le N°. 6.

II.

5. On nomme *Ligne* ce qui n'est étendu qu'en longueur.

Lisez le n°. 10.

III.

COROLLAIRE.

6. Il suit de cette Définition que les extrémités d'une *Ligne* sont des *Points*.

Démonstration. Premièrement, les extrémités d'une ligne ne sont étendues ni en largeur ni en épaisseur; puisque les lignes ne le sont qu'en un sens (n).

N. 2. &

Secondement, elles ne le sont point en

longueur; puisque si elles l'étoient, elles seroient des lignes (n): or si les extré-

N. 5.

mités A & B d'une ligne AB* étoient

Fig. 1.

des lignes, par exemple AC & BD,

ces lignes auroient des extrémités A &

C, B & D; & par conséquent elles ne se-

4 LES ELEMENS D'EUCLIDE ;
*roient point celles de la ligne AB, mais ce
 seroit leurs extrémités A & B qui le se-
 roient.*

*Les extrémités d'une ligne ne sont donc
 étendues ni en longueur, ni en largeur, ni
 en épaisseur ; elles n'ont donc aucune partie ;*
 N. 4. *elles sont donc des points (n).*

I V.

7. La Ligne-droite est celle qui va direc-
 tement d'un point à un autre.

Fig. 1. *La ligne AB* est une Ligne-droite.*

8. La Ligne-courbe est celle qui ne va
 directement d'un point à un autre en aucu-
 ne de ses parties.

Fig. 2. *La ligne CD* est une Ligne-courbe.*
*Euclide ne considère que les lignes-droi-
 tes.*

V.

9. On nomme Surface § ce qui n'est
 étendu qu'en longueur & en largeur.

V I.

C O R O L L A I R E.

10. Il suit de cette Définition que les
 extrémités d'une surface sont des lignes.

Démonst. Premièrement les extrémités
 d'une surface ne sont point étendues en

§ Le nom Grec que nous rendons par celui de Surface ;
 donne une idée très-juste de cette étendue : il signifie dans
 son sens propre Ce qui paioit.

LIVRE PREMIER.

épaisseur ; puisque les surfaces ne le sont qu'en deux sens (n).

N. 2. &

Secondement, elles ne le sont point en^{9.} longueur & en largeur ; puisque si elles l'étoient, elles seroient des surfaces (n) : or si^{N. 9.} les extrémités AD & BC, &c. d'une surface ABCD * étoient des surfaces, par^{Fig. 34} exemple AEFD, & BGHC, &c. ces surfaces auroient des extrémités AD & EF, BC & GH, &c. & par conséquent elles ne seroient point celles de la surface ABCD, mais ce seroit leurs extrémités AD & BC qui le seroient.

Troisièmement, elles sont étendues ; car puisque les surfaces le sont en deux sens (n),^{N. 9.} il faut nécessairement que ce qui termine l'un, soit étendu en l'autre.

Les extrémités d'une surface ne sont donc étendues ni en épaisseur, ni en longueur & largeur ; elles sont cependant étendues ; elles ne le sont donc qu'en longueur (n) ;^{N. 2.} elles sont donc des lignes (n).^{N. 5.}

VII.

11. La Surface-plane est celle que tous les points d'une ligne-droite toucheroient au même instant, en quelque sens qu'on posât cette ligne sur cette surface.

La Surface-plane se nomme aussi Plan.

12. La Surface-courbe est celle que tous les points d'une ligne-droite ne touche-

6. LES ELEMENS D'EUCLIDE ;
roient point au même instant , si l'on posoit
cette ligne sur cette surface en un certain
sens.

*Euclide ne considere que les surfaces-
planes.*

VIII.

13. On nomme *Angle* l'ouverture for-
mée par deux lignes qui ont un point com-
mun entr'elles.

*L'ouverture formée par les lignes BA &
Fig. 4. BC* qui ont le point B commun entr'elles
est un Angle.*

*Cet angle se nomme Angle-plan , pour le
distinguer d'un angle d'un autre genre, dont
il n'est parlé qu'au 11^e Livre.*

IX.

14. Les *Côtés* d'un angle sont les deux
lignes qui le forment.

Les lignes BA & BC sont les Côtés
Lig. 4. de l'angle B.*

15. Le *Sommet* d'un angle est le point
commun à ses côtés.

Le point B commun aux lignes BA &
Fig. 4. BC est le Sommet de l'angle B.*

SCHOLIE I.

16. Lorsque plusieurs angles ont le mê-
me sommet , on les indique par leurs côtés ,
parce que la Lettre qui est à leur sommet
n'en indiqueroit aucun en particulier. Ainsi

LIVRE PREMIER. 7

pour indiquer l'angle qui est à la droite de la ligne AB^* , on dit l'angle formé par les lignes BA & BC , ou seulement l'angle A Fig. 5.
 BC : mais lorsqu'on se sert de cette expression abrégée, on met pour seconde Lettre celle qui est à l'extrémité commune des côtés de l'angle que l'on veut indiquer.

On dit de même l'angle formé par les lignes BA & BD , ou seulement l'angle ABD pour indiquer celui qui est à la gauche de la ligne AB .

SCHOLIE II.

17. Si l'on faisoit tourner la ligne CB^* autour du point B , de maniere que ce point fût toujours l'extrémité commune des lignes BA & BC , plus le point C s'éloigneroit du point A , plus l'ouverture formée par ces lignes seroit grande, & plus il s'en approcheroit, moins elle le seroit ; la grandeur de cette ouverture dépend donc de la position respective des lignes qui la forment : or cette ouverture est un angle dont ces lignes sont les côtés (n) ; la grandeur d'un angle dépend donc de la position respective de ses côtés ; & par conséquent quelque augmentation ou diminution que l'on fasse aux côtés d'un angle, on n'augmente ni ne diminue cet angle, puisque ni cette augmentation ni cette diminution ne chan-

8 LES ELEMENS D'EUCLIDE ;
gent la position respective de ses côtés.

X.

18. On nomme réciproquement *Lignes-perpendiculaires* deux lignes qui se rencontrent de manière que l'une forme avec l'autre , prolongée s'il est nécessaire , deux angles égaux entr'eux.

Fig. 6. La ligne AB^* qui forme avec la ligne DC deux angles ABC & ABD égaux entr'eux , est perpendiculaire à cette ligne DC .

19. On nomme réciproquement *Lignes-obliques* deux lignes qui se rencontrent de manière que l'une forme avec l'autre , prolongée s'il est nécessaire , deux angles inégaux entr'eux.

Fig. 5. La ligne AB^* qui forme avec la ligne DC deux angles ABC & ABD inégaux entr'eux , est oblique à cette ligne DC .

20. On nomme *Angle-droit* celui dont un des côtés est perpendiculaire à l'autre.

Fig. 7. L'angle A^* est droit.

XI.

21. On nomme *Angle-obtus* , celui qui est plus grand ; c'est-à-dire plus ouvert qu'un angle droit.

Fig. 8. L'angle B^* est obtus.

XII.

22. On nomme *Angle-aigu* , celui qui est moins grand , c'est-à-dire moins ouvert qu'un angle droit.

*L'angle C * est aigu.*

Fig. 9.

XIII.

23. On nomme *Terme* l'extrémité d'une étendue.

XIV.

24. On nomme *Figure* une étendue terminée de tous côtés.

25. On nomme *Figures-égales* entr'elles, celles dont les surfaces sont égales entr'elles.

XV.

26. On nomme *Cercle* une figure-plane terminée par une seule ligne, dont tous les points sont également éloignés d'un certain point de cette figure.

*La figure X * est un Cercle.*

Fig. 102

27. La *Circonférence* d'un cercle est la ligne qui le termine.

*La ligne ABDE * est la Circonférence du cercle X.*

Fig. 103

28. Un *Arc* de cercle est une partie de la circonférence d'un cercle.

XVI.

29. Le *Centre* d'un cercle est le point de ce cercle également éloigné de tous les points de sa circonférence.

*Le point C * est le Centre du cercle X.*

Fig. 104

XVII.

30. Le *Diametre* d'un cercle est une ligne droite quelconque qui passe par le

10 LES ELEMENS D'EUCLIDE ;
centre de ce cercle, & est terminée de par
& d'autre par sa circonférence.

Fig. 10. *La ligne AD* est un Diametre du cercle X.*

31. Le Rayon d'un cercle est une ligne droite quelconque tirée du centre de ce cercle à sa circonférence.

Fig. 10 *La ligne CB* est un Rayon du cercle X.*

COROLLAIRE.

32. Il suit des N^o. 26. 29, 30 & 31.
Premierement : Que le Rayon d'un cercle est la moitié de son diametre. Secondement : Qu'une ligne droite égale au rayon d'un cercle, & qui a l'une de ses extrémités au centre de ce cercle, a son autre extrémité sur sa circonférence.

XVIII.

33. Le Demi-cercle est une figure plane terminée par la moitié de la circonférence d'un cercle & par son diametre.

Fig. 11. *La figure Y* est un Demi-cercle.*

34. On nomme Degré un arc de cercle qui est la 360^e partie de sa circonférence : Minute premiere, un arc qui est la 60^e partie d'un Degré : Minute seconde, un arc qui est la 60^e partie d'une Minute premiere ; & ainsi de suite.

35. On nomme aussi Degré une partie d'un cercle comprise entre deux lignes droi-

Les tirées du centre de ce cercle à sa circonférence, & qui est la 360° partie de ce cercle : *Minute première*, la 60° partie d'un Degré, &c.

SCHOLIE.

36. Si du sommet B d'un angle B* Fig. 12. pris pour centre, on décrit un cercle quelconque, plus cet angle sera grand, plus la partie DBE de ce cercle comprise entre les côtés de cet angle sera grande; & par conséquent plus la partie DBE de ce cercle comprise entre les côtés d'un angle ABC sera grande, plus cet angle sera grand: or plus une partie d'un cercle est grande, plus elle contient de degrés de ce cercle; donc plus un angle contient entre ses côtés de degrés d'un cercle quelconque décrit de son sommet, plus cet angle est grand. La grandeur d'un angle AEC est donc déterminée par le nombre de degrés contenus dans la partie DBE d'un cercle quelconque décrit du sommet de cet angle, comprise entre les côtés de ce même angle; donc les degrés d'un cercle quelconque décrit du sommet d'un angle, sont les mesures de cet angle, & le nombre de ces mesures comprises entre les côtés de cet angle, est sa valeur.

Pour mesurer un angle, on mesure l'arc

12 LES ELEMENS D'EUCLIDE ;

de cercle compris entre ses côtés ; parce que la partie d'un cercle comprise entre les côtés d'un angle , contient autant de degrés de ce cercle que l'arc qui la termine contient de degrés de la circonférence de ce même cercle.

COROLLAIRE.

37. Il suit de cette Scholie qu'un angle droit est de 90 degrés.

Demonst. Lorsqu'un angle est droit , la partie de cercle comprise entre ses côtés est un quart de cercle : or un quart de cer-
 N. 34. *cle contient 90 degrés (n) ; donc un angle droit est de 90 degrés.*

XX.

On nomme *Figure-rectiligne* , celle qui n'est terminée que par des lignes droites.

Euclide ne considère que les figures-rectilignes.

On tire la dénomination des figures rectilignes du nombre de leurs côtés , ou de celui de leurs angles.

Lorsque l'on tire la dénomination d'une figure du nombre de ses côtés

XXI. XXII & XXIII.

39. On nomme *Trilatere* , une figure qui a trois côtés : *Quadrilatere* , celle qui en a quatre : *Figure de vingt côtés* , celle qui en a vingt , *de cent côtés* , celle qui en a

cent; & en général *Multilatere*, celle qui en a plusieurs.

Et lorsque l'on tire la dénomination d'une figure du nombre de ses angles, ...

40. On nomme *Trigone* ou *Triangle*, une figure qui a trois angles : *Tétragone*, celle qui en a quatre : *Pentagone*, celle qui en a cinq : *Exagone*, celle qui en a six : *Eptagone*, celle qui en a sept : *Octogone*, celle qui en a huit : *Ennéagone*, celle qui en a neuf : *Décagone*, celle qui en a dix : *Endecagone*, celle qui en a onze : *Dodécagone*, celle qui en a douze : *Pentédécagone*, celle qui en a quinze, & en général *Polygone*, celle qui en a plusieurs.

On tire aussi la dénomination des triangles de leurs côtés, & de leurs angles.

Lorsque l'on tire la dénomination d'un triangle de ses côtés, on nomme

XXIV.

41. *Triangle-équilateral*, celui dont tous les côtés sont égaux entr'eux.

Le Triangle A* est équilateral.

Fig. 13.

XXV.

42. *Triangle-isocèle*, celui dont deux côtés sont égaux entr'eux.

Le Triangle B* est isocèle.

Fig. 14.

XXVI.

43. *Triangle-scalène*, celui dont tous les côtés sont inégaux entr'eux.

14 LES ÉLEMENS D'EUCLIDE,

Fig. 15. Le Triangle C* est scalène.

Lorsque l'on tire la denomination d'un Triangle de ses angles, on nomme

XXVII.

44. Triangle-rectangle, celui dont un des angles est droit.

Fig. 16. Le Triangle A* est rectangle.

XXVIII.

45. Triangle-obtusangle, celui dont un des angles est obtus.

Fig. 17. Le Triangle B* est obtusangle.

XXIX.

46. Triangle-acutangle, celui dont tous les angles sont aigus.

Fig. 18. Le Triangle C* est acutangle.

47. On nomme Hypoténuse, le côté d'un triangle rectangle, opposé à l'angle droit de ce triangle.

48. L'angle extérieur d'un triangle, est un angle formé par le prolongement de l'un des côtés de ce triangle.

Fig. 19. L'angle ABC* est l'angle extérieur du triangle DAB.

La dénomination des Quadrilateres dépend tout à la fois de leurs angles & de leurs côtés; ainsi l'on nomme

XXX.

49. Quarré, un Quadrilatere dont tous les côtés sont égaux entr'eux, & dont tous les angles sont droits.

La figure *A** est un Quarré.

Fig. 224

XXXI.

50. *Quarré-long*, un Quadrilatere dont les seuls côtés opposés sont égaux entr'eux, & dont tous les angles sont droits.

La figure *B** est un Quarré-long.

Fig. 225

51. Le Quarré & le Quarré-long se nomment aussi *Rectangles*, parce que tous leurs angles sont droits.

XXXII.

52. *Rhombe* ou *Lozange*, un Quadrilatere dont tous les côtés sont égaux entr'eux, & dont les angles ne sont pas droits.

La figure *C** est un Rhombe.

Fig. 226

XXXIII.

53. *Rhomboïde*, un Quadrilatere dont les seuls côtés opposés sont égaux entr'eux, & dont les angles ne sont pas droits.

La figure *D** est un Rhomboïde:

Fig. 227

XXXIV.

54. On nomme *Trapeze*, tout Quadrilatere différent des quatre que l'on vient de définir.

XXXV.

55. On nomme *Lignes-paralleles*, celles dont tous les points des unes sont également éloignés de tous les points correspondans des autres.

Les lignes *AB* & *CD** sont paralleles. Fig. 228

COROLLAIRE.

56. Il suit de cette définition que des lignes-paralleles ne se rencontrent point.

57. On nomme *Parallelogramme* un Quadrilatere dont les côtés opposés sont paralleles.

Le *Quarré*, le *Quarré-long*, le *Rhombe* & le *Rhomboïde* sont des *Parallelogrammes*, parce que leurs côtés opposés sont *paralleles* : ce qui est démontré n. 125.

58. La *Diagonale* d'un Quadrilatere est une ligne droite tirée d'un angle quelconque d'un Quadrilatere à l'angle opposé de ce même Quadrilatere.

Fig. 25. La ligne AC^* est la *Diagonale* du Quadrilatere $ABCD$.

59. Les *Complémens* d'un *Parallelogramme* sont deux *Parallelogrammes* formés de part & d'autre de la *Diagonale* d'un *Parallelogramme*, par deux lignes paralleles à ses côtés chacune à chacun, & qui ont un point quelconque commun entr'elles & cette même *Diagonale*.

Les *Parallelogrammes* $EFID^*$ & $GBHF$ sont les *Complémens* du *Parallelogramme* $ABCD$.

SUPPOSITIONS.

60. On suppose qu'il est possible : Premièrement,

LIVRE PREMIER. 17

mièrement, de tirer une ligne droite d'un point quelconque, à quelque'autre point que l'on veuille ; & *par conséquent* de prolonger une ligne droite autant qu'on le veut.

61. *Secondement*, de décrire un cercle de quelque point que l'on veuille prendre pour centre, & avec quelque rayon que l'on veuille.

AXIOMES.

I.

62. Les quantités égales chacune à une même quantité, sont égales entr'elles.

II.

63. Les quantités égales entr'elles ajoutées à des quantités égales entr'elles, forment des sommes égales entr'elles.

III.

64. Les quantités égales entr'elles ôtées de quantités égales entr'elles, laissent des restes égaux entr'eux.

IV.

65. Les quantités égales entr'elles ajoutées à des quantités inégales entr'elles, forment des sommes inégales entr'elles.

V.

36. Les quantités égales entr'elles ôtées de quantités inégales entr'elles, laissent des restes inégaux entr'eux.

VI.

67. Les quantités doubles, triples, qua-

18 LES ELEMENS D'EUCLIDE ;
druples , &c. de quantités égales entr'elles , sont égales entr'elles.

VII.

68. Les quantités qui sont les moitiés ; les tiers , les quarts &c. de quantités égales entr'elles , sont égales entr'elles.

VIII.

69. Deux lignes droites , ou deux figures planes qui étant posées l'une sur l'autre , ne se surpassent point , c'est-à-dire se couvrent réciproquement , sont égales entre-elles.

COROLLAIRE.

70. *Il suit de cet Axiome : Premièrement , que deux lignes droites égales entr'elles étant posées l'une sur l'autre , de maniere que l'une des extrémités de la premiere soit sur l'une des extrémités de la seconde , l'autre extrémité de la premiere sera sur l'autre extrémité de la seconde.*

71. *Secondement , que deux angles égaux entr'eux étant posés l'un sur l'autre de maniere que le sommet du premier étant sur le sommet du second , l'un des côtés du premier soit sur l'un des côtés du second , l'autre côté du premier sera sur l'autre côté du second.*

IX.

72. Une quantité est égale à la somme

LIVRE PREMIER; 19
de routes ses parties ; & par conséquent
plus grande qu'une de ses parties.

COROLLAIRE.

73. *Il suit des N^o. 67 , 68 & 72.*
que la somme des produits de toutes les
parties d'une quantité multipliées chacune
par un même nombre entier ou fraction-
naire, est égale au produit de cette quanti-
té multipliée par ce même nombre.

X.

74. Deux lignes droites qui ont deux
points communs entr'elles, sont posées l'une
sur l'autre , & ne font qu'une seule ligne
droite.

COROLLAIRE.

75. *Il suit de cet Axiome : Premiere-*
ment , que deux lignes droites ne se ren-
contrent qu'en un point. Secondement ,
qu'elles ne ferment point un espace.



PROPOSITION I.

PROBLEME.

76. *Décrire un Triangle équilatéral, sur une ligne droite donnée.*

Fig. 26. **I**L faut décrire un Triangle équilatéral sur la ligne droite AB*.

Construction. Du point A pris pour centre, & avec la ligne AB prise pour rayon, décrivés un cercle DCB: du point B pris pour centre & avec la même ligne AB prise pour rayon, décrivés un cercle ACE: du point C commune-section des circonférences de ces deux cercles, tirés aux extrémités A & B de la ligne AB les lignes CA & CB: le triangle ACB qu'elles formeront sera équilatéral.

N. 26. *Démonstration.* Les lignes AB & AC sont rayons du même cercle DCB (c), & par conséquent elles sont égales entr'elles (n): les lignes AB & BC sont aussi rayons du même cercle ACE (c), & par conséquent elles sont aussi égales entr'elles; ainsi les lignes AC & BC sont égales chacune à une même ligne AB; donc les lignes AB, AC, & BC sont éga-

les entr'elles (n), & par conséquent le triangle ABC qu'elles forment, est équilateral (n) ; donc C. Q. F. F. N. 623
N. 411

S C H O L I E.

Il suffit de décrire des points A & B, deux arcs qui ayent chacun la ligne AB pour rayon, & qui se coupent en un point C.

U S A G E.

77. *On peut se servir du triangle équilateral pour mesurer une distance inaccessible, par exemple la largeur d'une Riviere. Il faut pour cela décrire sur une planche un triangle équilateral ABC*, & Fig. 27. s'en servir de cette maniere...*

On pose horizontalement le triangle ABC, & l'on dirige son côté AC de maniere qu'il soit parallele au lit de la Riviere. En regardant d'alignement au côté AB, on observe un point D au-delà de cette Riviere, & d'alignement au côté AC, un autre point F éloigné de 5 à 6 pieds du point A. On met un Piquet en A, & un autre en F. On transporte le triangle ABC vers E, & l'on fait en sorte d'y trouver un point C où l'on puisse poser ce triangle de maniere qu'en regardant d'alignement au côté ca le Pi-

22 LES ELEMENS D'EUCLIDE ;

quet Fempêche de voir le Piquet *A*, & d'a
lignement au côté *cb* on voye le point *D*
Lorsque l'on sera parvenu à trouver ce
point *c*, les rayons visuels *AD*, *Ac* & *cI*
formeront un triangle équilatéral *ADc* ;
or on peut mesurer le côté *Ac* de ce triangle,
& par conséquent rapporter ce triangle sur
N. 112. le papier (11) par le moyen d'une échelle qui
fera connoître la valeur de la perpendicu-
laire *DG*, de laquelle ôtant la distance *GH*
du bord de la Riviere à la ligne *Ac*, le
reste *HD* sera la largeur de cette Riviere.

PROPOSITION II.

PROBLEME.

78. Tirer d'un Point donné, une ligne
droite égale à une autre.

Fig. 28. **I**L faut tirer du point *C* * une ligne droite
égale à la ligne droite *AB*.

Const. Du point *C* pris pour centre, &
avec un rayon égal à la ligne *AB*, décrivés
un cercle *EFD* : du même point *C* tirés une
ligne *CD* à un point quelconque *D* de la
circonférence de ce cercle : cette ligne *CD*
sera égale à la ligne *AB*.

Demonstr. la ligne *CD* est rayon du cer-

de EFD (c) : or le rayon du cercle EFD est égal à la ligne AB (c) ; donc la ligne CD est égale à la ligne AB ; donc C. Q. F. F.

SCHOLIE.

Il suffit de prendre avec un Compas la longueur de la ligne AB, de poser l'une des pointes de ce Compas au point C, & de marquer avec l'autre un point D.

PROPOSITION III.

PROBLEME.

79. *Diviser une ligne droite en deux parties, telles que l'une soit égale à une autre ligne droite moins grande que la première.*

IL faut diviser la ligne droite AB* en Fig. 29. deux parties, telles que l'une soit égale à une ligne droite CD moins grande que AB.

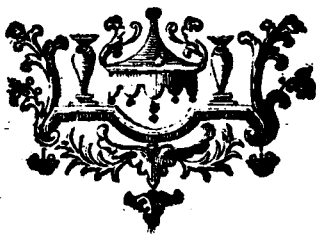
Const. De l'une des extrémités de la ligne AB, par exemple de A prise pour centre, & avec un rayon égal à la ligne CD, décrivés un cercle EFG : la circonférence de ce cercle divisera la ligne AB au

24 LES ELEMENS D'EUCLIDE ;
point F comme il est proposé.

Demonst. La partie AF de la ligne AB est rayon du cercle EFG (c) : or le rayon du cercle EFG est égal à la ligne CD (c) ; donc la partie AF de la ligne AB est égal à la ligne CD ; donc C. Q. F. F.

SCHOLIE.

Il suffit de prendre avec un Compas la longueur de la ligne CD , de poser l'une des pointes de ce Compas à l'une des extrémités A de la ligne AB , & de marquer avec l'autre un point F sur cette ligne.



PROPO-

PROPOSITION IV.

THEOREME.

80. Si deux Triangles sont tels que l'un des angles du premier soit égal à l'un des angles du second, & que les côtes qui forment cet angle du premier soient égaux à ceux qui forment cet angle du second, chacun à chacun : Premièrement, l'autre côté du premier Triangle sera égal à l'autre côté du second : Secondement, les autres angles du premier Triangle seront égaux aux autres angles du second, chacun à chacun : Troisièmement, la surface du premier Triangle sera égale à celle du second.

Si les triangles ABC & DEF * ont l'angle B égal à l'angle E, le côté BA au côté ED, & le côté BC au côté EF: Premièrement, le côté AC sera égal au côté DF: Secondement, l'angle A sera égal à l'angle D & l'angle C à l'angle F: Troisièmement, la surface du triangle ABC sera égale à celle du triangle DEF. Fig. 303

Const. Posés par pensée le triangle ABC sur le triangle DEF, de maniere que le

C

26 LES ELEMENS D'EUCLIDE ,
point B étant sur le point E , le côté **BA**
soit sur le côté ED.

DEMONSTRATION.

Premierement , puisque l'angle B est égal
à l'angle E (*h*) , & que le sommet B du
premier est sur le sommet E du second &
le côté BA du premier sur le côté ED du
second (*c*) , l'autre côté BC du premier est
N. 71. sur l'autre côté EF du second (*n*) ; & puis-
que le côté BA est égal au côté ED & le
côté BC au côté EF (*h*) , & que le côté
BA est sur le côté ED (*c*) , le côté BC
sur le côté EF (*d*) , & l'extrémité commu-
ne B de ces côtés BA & BC, sur l'extré-
mité commune E des côtés ED & EF
(*c*) , les autres extrémités A & C des côtés
BA & BC sont sur les autres extrémités D
& F des côtés ED & EF, chacune sur cha-
cune (*n*) : or ces extrémités A & C , D
N. 70. & F des côtés BA & BC, ED & EF sont
aussi celles des côtés AC & DF ; donc le
côté AC a aussi ses extrémités sur celles
du côté DF ; & par conséquent le côté
N. 69. AC est égal au côté DF (*n*).

Secondement , le sommet A de l'angle
A est sur le sommet D de l'angle D (*d*) , &
les côtés AB & AC du premier sont sur les
côtés DE & DF du second , chacun sur
chacun , puisque AB est sur DE (*c*) , &

que AC est sur DF (d) ; donc l'angle A est égal à l'angle D (n). On démontre de la même manière que l'angle C est égal à l'angle F. N. 69.

Troisièmement , les côtés du triangle ABC sont sur ceux du triangle DEF, puisque BA est sur ED (c), & que BC est sur EF & AC sur DF (d) ; donc les triangles ABC & DEF ne se surpassent point ; & par conséquent la surface du triangle ABC est égale à celle du triangle DEF (n) ; donc C. Q. F. D.

N. 69.

COROLLAIRE.

81. Il suit de ce Théorème , que si une ligne droite divise en deux parties égales entr'elles, un angle quelconque d'un triangle équilatéral , ou l'angle formé par les côtés égaux d'un triangle isocèle , elle sera perpendiculaire au côté de ce triangle qu'elle rencontrera , & le divisera en deux parties égales entr'elles.

Si la ligne BD* divise l'angle ABC d'un triangle équilatéral ou isocèle ABC en deux parties ABD & CBD égales entr'elles , elle sera perpendiculaire au côté AC , & le divisera en deux parties DA & DC égales entr'elles.

Fig. 31.

Demonst. Les triangles BDA & BDC ont l'angle ABD égal à l'angle CBD (h),

C ij

28 LES ELEMENTS D'EUCLIDE ,

& les côtés BA & BD qui forment le premier , égaux aux côtés BC & BD qui forment le second , chacun à chacun , puisque BA est égal à BC (*h*), & que BD est commun à ces deux triangles ; donc l'angle BDA est égal à l'angle BDC , & le côté DA au côté DC (*n*) ; & par conséquent la ligne BD est perpendiculaire au côté AC (*n*) , & le divise en deux parties DA & DC égales entr'elles ; donc C. Q. F. D.

U S A G E .

82. On peut se servir de cette Proposition de la maniere suivante ; pour Fig. 32. mesurer une ligne AB* qui n'est accessible que par ses extrémités A & B.

On choisit dans la Campagne un point C d'où l'on puisse voir les extrémités A & B de cette ligne , & aller directement à chacune. De ce point C on dirige un rayon visuel vers A & un autre vers B. On mesure l'angle C formé par ces deux rayons visuels , & l'on mesure aussi ces deux rayons visuels. On se retire ensuite en un endroit commode. On y forme un angle c égal à l'angle C. On fait les côtés ca & cb de cet angle , égaux aux côtés CA & CB de l'angle C, chacun à chacun , & du point a au point b on tire la ligne ab. Cette ligne est égale à la ligne inaccessible AB ; puis-

que les triangles ABC & abc ont l'angle C égal à l'angle c (c), & les côtés CA & CB qui forment le premier, égaux aux côtés ca & cb qui forment le second, chacun à chacun (c); & par conséquent si l'on mesure la ligne ab ce sera la même chose que si l'on mesuroit la ligne AB .

Il est plus commode de rapporter le triangle ABC (n) sur le papier par le moyen N. 112. d'une Echelle, que de le rapporter sur le terrain.

PROPOSITION V.

THEOREME.

83. Si deux côtés d'un Triangle sont égaux entr'eux, les angles de ce Triangle qui leurs sont opposés, le seront aussi.

SI les côtés BA & BC du triangle ABC * sont égaux entr'eux, l'angle C Fig. 31. sera égal à l'angle A .

Const. Supposés que l'angle ABC soit divisé en deux parties égales entr'elles, par une ligne droite BD .

Demonst. Les triangles BDA & BDC ont l'angle ABD égal à l'angle CBD (c), & les côtés BA & BD qui forment le pre-

30 LES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE ;

N 30. mier , égaux aux côtés BC & BD qui forment le second , chacun à chacun , puisque BA est égal à BC (*h*) & que BD est commun à ces deux triangles ; donc les autres angles du premier triangle sont égaux aux autres angles du second , chacun à chacun (*n*) , & par conséquent l'angle C est égal à l'angle A ; donc C. Q. F. D.

COROLLAIRE.

84. Il suit de ce Théorème , que les angles d'un triangle équilatéral sont égaux entr'eux.

PROPOSITION VI.

THEOREME.

85. Si deux angles d'un Triangle sont égaux entr'eux , les côtes de ce Triangle qui leurs sont opposés , le seront aussi.

Fig. 33. **S**I les angles BAC & BCA du triangle ABC * sont égaux entr'eux , le côté BC sera égal au côté BA.

Const. Prolongés le côté AB vers E, jusqu'à ce que la ligne BE soit égale au côté BC : prolongés aussi le côté CB vers D, jus-

qu'à ce que la ligne BD soit égale au côté BA : du point E au point C tirés la ligne EC, & du point D au point A tirés la ligne DA.

Démonst. Les Triangles EAC & DCA ont l'angle EAC égal à l'angle DCA (*h*), & les côtés AE & AC qui forment le premier, égaux aux côtés CD & AC qui forment le second, chacun à chacun, puisque AE & CD sont chacun la somme de AB & de BC (*c*), & que AC est commun à ces Triangles; ainsi ces triangles ont le côté EC égal au côté DA, l'angle E égal à l'angle D, & l'angle ECA égal à l'angle DAC (*n*): or N. 10. puisque l'angle ECA est égal à l'angle DAC (*d*), & que l'angle BCA l'est à l'angle BAC (*h*), si l'on retranche l'angle BCA de l'un, & l'angle BAC de l'autre, les restes qui sont les angles ECB & DAB seront égaux entr'eux (*n*); & par consé- N. 64. quent si l'on pose le triangle ECB sur le triangle DAB de maniere que le point C étant sur le point A, le côté CE soit sur le côté AD, le point E sera sur le point D (*n*), N. 70. puisque ces côtés EC & DA sont égaux entr'eux (*d*); le côté CB sera sur la ligne AE (*n*), puisque l'angle ECB est égal à l'an- N. 71. gle DAB (*d*), & le côté EB sera sur la ligne DC (*n*), puisque l'angle E est égal à N. 71. l'angle D (*d*); ainsi le point B extrémité

32 LES ELEMENS D'EUCLIDE ;
 commune des côtés CB & EB fera en
 même-tems sur la ligne AE & sur la ligne
 DC ; & par conséquent il fera sur un point
 commun à ces deux lignes : or ces deux li-
 gnes n'ont que le point B de commun en-
 tr'elles (n) ; donc le point B extrémité du
 côté CB, fera sur l'extrémité B du côté AB :
 mais l'autre extrémité C du côté CB est sur
 l'autre extrémité A du côté AB (c) ; donc
 le côté CB est égal au côté AB (n) ; donc
 C. Q. F. D.

N. 75.

N. 69.

COROLLAIRE.

84. Il suit de ce Théorème , que si les
 angles d'un triangle sont égaux entr'eux ,
 ce triangle est équilateral.

U S A G E.

Cette Proposition est d'un grand usage
 dans la Géometrie ; parce qu'il est souvent
 nécessaire de démontrer que deux côtés d'un
 triangle sont égaux entr'eux.

SCHOLIE.

Nous supprimons la septième Proposition,
 parce qu'elle est comprise dans la huitième.



PROPOSITION VIII.

THEOREME.

87. *Si deux Triangles sont tels que les côtés du premier soient égaux à ceux du second, chacun à chacun : Premièrement, les angles du premier seront égaux à ceux du second, chacun à chacun : Secondement, la surface du premier sera égale à celle du second.*

SI les triangles ABC & DEF* ont le Fig. 343
côté AC égal au côté DF, le côté BA égal au côté ED, & le côté BC égal au côté EF : Premièrement l'angle B sera égal à l'angle E, l'angle C à l'angle F & l'angle A à l'angle D : Secondement, la Surface du triangle ABC sera égale à celle du triangle DEF.

Const. Posés le triangle ABC sur le triangle DEF, de maniere que le point A étant sur le point D, le côté AC soit sur le côté DF.

Demonst. L'extrémité commune A des côtés BA & AC est sur l'extrémité commune D des côtés ED & DF (*c*) ; ainsi puisque BA est égal à ED (*h*), l'autre ex-

34 LES ELEMENS D'EUCLIDE ;

trémité B de BA est sur la circonférenc
EG d'un cercle, qui auroit le point D pou

N. 32. centre & ED pour rayon (n) ; & puisque
AC est égal à DF (h) , & qu'il est sur DF
(c) , l'autre extrémité C de AC est sur l'au-

N. 70. tre extrémité F de DF (n) : mais C est aussi
l'une des extrémités du côté BC, & F l'une
de celles du côté EF ; donc l'une des ex-
trémités C de BC est sur l'une des extré-
mités F de EF , & par conséquent puisque
BC est égal à EF (h) , l'autre extrémité B
de BC est sur la circonférence EH d'un cer-

N. 32. cle, qui auroit le point F pour centre & EF
pour rayon (n) : le point B est donc en mê-
me tems sur la circonférence EG & sur la
circonférence EH ; il est donc sur un point
commun à ces deux circonférences : or ces
deux circonférences n'ont au-dessus de DF,
que le point E de commun entr'elles ; donc
le point B est sur le point E , & par consé-

N. 74. quent BA est sur ED & BC sur EF (n) ;
ainsi les sommets A , B , & C des angles
du triangle ABC , sont sur les sommets
D , E & F des angles du triangle
DEF , chacun sur chacun , & les cô-
tés des premiers sont sur les côtés des
derniers, chacun sur chacun, par conséquent:
Premierement , les angles du triangle ABC
sont égaux à ceux du triangle DEF, chacun

N. 69. à chacun (n) : *Secondement* , la surface du

triangle ABC est égale à celle du triangle DEF (n) ; donc C. Q. F. D. N. 69.

PROPOSITION IX.

PROBLEME.

88. *Diviser un Angle en deux parties égales entr'elles.*

IL faut diviser l'angle ABC * en deux parties égales entr'elles. Fig. 15.

Const. Du point B pris pour centre , & avec un rayon BD pris à volonté , décrivés deux arcs qui coupent, l'un en D & l'autre en E, les côtés BA & BC de l'angle ABC : des points D & E pris pour centres , & avec un rayon DF pris à volonté , mais plus grand que la moitié de la distance de D à E, décrivés deux arcs qui se coupent en F : du point B tirés au point F la ligne BF , elle divisera l'angle ABC en deux angles ABF & CBF qui seront égaux entr'eux.

Pour la Demonstration , tirés du point F aux points D & E les lignes FD & FE.

Demonst. Les triangles DBF & EBF ont le côté BD égal au côté BE (c) , le côté FD égal au côté FE (c) & le côté BF commun entr'eux ; ainsi les angles du premier

36 LES ELEMENS D'EUCLIDE ;

N. 87.

triangle sont égaux à ceux du second , chacun à chacun (n) , & par conséquent l'angle ABF est égal à l'angle CBF ; donc C. Q. F. F.

C O R O L L A I R E.

89. Il suit de ce Problème , que *pour diviser un angle en quatre parties égales entr'elles , il faut commencer par le diviser en deux parties égales , & diviser ensuite chacune de ces deux parties égales , en deux autres qui le soient aussi : & ainsi de suite pour le diviser en 8 , en 16 , &c.*

S C H O L I E.

90. Il est souvent nécessaire de diviser un angle en un nombre déterminé de parties égales entr'elles : mais lorsque ce nombre n'est pas 2. 4. 8. 16. & ainsi de suite en doublant , ce Problème n'est plus du ressort de la Géométrie-elementaire , & il est démontré qu'on ne peut le résoudre que par celle des lignes courbes. On le nomme alors le Problème de la trisection de l'angle.



PROPOSITION X,

PROBLEME.

91. *Diviser une ligne droite en deux parties égales entr'elles.*

IL faut diviser la ligne droite AB * en deux parties égales entr'elles. Fig. 36.

Const. Des points A & B pris pour centres & avec un rayon AC pris à volonté, mais plus grand que la moitié de AB , décrits deux arcs qui se coupent en C : des points A & B pris encore pour centres, & avec le même rayon AC , ou avec un autre AD pris à volonté, mais plus grand aussi que la moitié de AB , décrits deux arcs qui se coupent en D : du point C tirés au point D la ligne CD , elle divisera la ligne AB au point E , en deux parties EA & EB qui seront égales entr'elles.

Pour la démonstration : tirés du point C aux points A & B , les lignes CA & CB : tirés aussi du point D aux mêmes points A & B , les lignes DA & DB .

Démonst. Les triangles ACD & BCD ont le côté CA égal au côté CB (c), le côté DA égal au côté DB (c), & le côté

38 LES ELEMENS D'EUCLIDE ,

- CD commun entr'eux ; donc les angles d premier triangle font égaux à ceux du se
 N. 27. cond, chacun à chacun (n) , & par consé
 quent l'angle ACD est égal à l'angle BCD
 ou l'angle ACE à l'angle BCE ; ainsi le
 triangles ACE & BCE ont l'angle ACI
 égal à l'angle BCE (d) , & les côtés CA
 & CE qui forment le premier, égaux aux cô
 tés CB & CE qui forment le second , cha
 cun à chacun , puisque CA est égal à CE
 (c) & que CE est commun à ces deux
 triangles ; donc EA troisième côté du pre
 mier triangle , est égal à EB troisième côté
 N. 30. du second (n) , & par conséquent la ligne
 AB est divisée au point E en deux par
 ties EA & EB égales entr'elles ; donc
 C. Q. F. F.

PROPOSITION XI.

PROBLEME.

92. *D'un point donné sur une ligne droite,
 élever une perpendiculaire à cette ligne.*

Fig. 37. **I**L faut du point donné C sur la ligne
 droite AB *, élever une perpendiculaire
 à cette ligne.

Const. Du point C pris pour centre , &

avec un rayon CD pris à volonté, décrivés deux arcs qui coupent, l'un en D & l'autre en E , la ligne AB prolongée s'il est nécessaire : des points D & E pris pour centres, & avec un rayon DF pris à volonté, mais plus grand que CD , décrivés deux arcs qui se coupent en F : tirés du point F au point C la ligne FC , elle sera perpendiculaire à la ligne AB .

Pour la démonstration : tirés du point F aux points D & E les lignes FD & FE .

Demonst. Les triangles FCE & FCD ont le côté CD égal au côté CE (c), le côté FD égal au côté FE (c) & le côté FC commun entr'eux ; ainsi les angles du premier triangle sont égaux à ceux du second, chacun à chacun (n), & par conséquent l'angle FCD est égal à l'angle FCE ; donc la ligne FC est perpendiculaire à la ligne AB (n) ; donc C. Q. F. F. N. 370

N. 381



PROPOSITION XII.

PROBLEME.

93. *D'un point donné hors d'une ligne droite, abaisser une perpendiculaire à cette ligne.*

Fig. 28. **I**L faut abaisser du point C*, une perpendiculaire à la ligne droite AB.

Const. Du point C pris pour centre , & avec un rayon CD pris à volonté, mais plus grand que la distance du point C à la ligne AB , décrivés un arc qui coupe en deux points D & E , cette ligne prolongée s'il est nécessaire : des points D & E pris pour centres , & avec le même rayon CD , ou avec un autre DF pris à volonté , mais plus grand que la moitié de DE , décrivés deux arcs qui se coupent en F : du point C tirés une ligne CG telle que si elle étoit prolongée , elle passât par le point F , elle sera perpendiculaire à la ligne AB.

Pour la démonstration : tirés du point C aux points D & E, les lignes CD & CE ; tirés aussi du point F aux mêmes points D & E, les lignes FD & FE : prolongés CG jusqu'au point F.

Demonst.

LIVRE PREMIER. 41

Démonst. Les triangles DCF & ECF ont le côté CD égal au côté CE , puisque CD & CE sont rayons d'un même arc de cercle DE (*c*), le côté FD égal au côté FE (*c*), & le côté CF commun entr'eux ; donc les angles du premier triangle sont égaux à ceux du second , chacun à chacun (*n*) ; & par conséquent l'angle DCF est N. 37. égal à l'angle ECF , ou l'angle DCG à l'angle ECG ; ainsi les triangles DCG & ECG ont l'angle DCG égal à l'angle ECG (*d*), & les côtés CD & CG qui forment le premier , égaux aux côtés CE & CG qui forment le second , chacun à chacun , puisque CD est égal à CE (*d*) & que CG est commun à ces deux triangles ; donc les autres angles du premier triangle sont égaux aux autres angles du second , chacun à chacun (*n*) ; & par conséquent N. 38. l'angle CGD est égal à l'angle CGE ; donc la ligne CG est perpendiculaire à la ligne AB (*n*) ; donc C. Q. F. F.

N. 18.



PROPOSITION XIII.

THEOREME.

94. Si une ligne droite qui en rencontre une autre, forme deux angles avec elle prolongée s'il est nécessaire, la somme de ces deux angles sera égale à celle de deux angles droits.

Fig. 39. & 40. **S**I la ligne AB^* qui rencontre la ligne CD , forme avec elle deux angles ABC & ABD , la somme de ces deux angles sera égale à celle de deux angles droits.

La ligne AB est perpendiculaire ou oblique à la ligne CD .

Fig. 39. Premier cas. Si la ligne AB^* est perpendiculaire à la ligne CD .

N. 18. *Démonst.* Les angles ABC & ABD sont droits chacun (n); par conséquent leur somme est égale à celle de deux angles droits.

Fig. 40. Second cas. Si la ligne AB^* est oblique à la ligne CD .

N. 92. *Const.* Élevés du point B la ligne BE perpendiculaire à la ligne CD (n).

Démonst. La somme des deux angles EBC & EBD est égale à celle des trois an-

gles EBC , EBA & ABD (n): or celle N. 72.
 de ces trois angles est égale à celle des
 deux angles ABC & ABD (n); donc la N. 72.
 somme des deux angles EBC & EBD est
 égale à celle des deux angles ABC &
 ABD : mais les angles EBC & EBD sont
 droits chacun (c); donc la somme des
 deux angles ABC & ABD est égale
 à celle de deux angles droits; donc C .
 Q. F. D.

COROLLAIRE.

95. Il suit de ce Théorème, que la
 somme des angles formés par plusieurs li-
 gnes droites tirées d'un même point, est
 égale à celle de quatre angles droits.

La somme des angles ACB^* , BCD , Fig. 41
 DCE , ECF & FCA formés par les li-
 gnes CA , CB , CD , CE & CF tirées
 d'un même point C , est égale à celle de
 quatre angles droits.

Const. Prolongés s'il est nécessaire l'une
 de ces lignes, par exemple AC , à volonté
 vers G .

Démonst. La somme des angles ACB &
 BCG est égale à celle de deux angles droits,
 & celle des angles ACE & ECG l'est
 aussi (n); ainsi la somme des quatre angles N. 94.
 ACB , BCG , ACE & ECG est égale à celle
 de quatre angles droits: or la somme des

44 LES ELEMENS D'EUCLIDE ;

angles ACB , BCD , &c. est égale à celle des quatre angles ACB , BCG , ACE & ECG(*n*); donc la somme des angles ACB , BCD , &c. est égale à celle de quatre angles droits : donc C. Q. F. D.

U S A G E .

96. Lorsque l'on connoît la valeur de l'un des deux angles formés par deux lignes droites qui se rencontrent , on connoît aussi la valeur de l'autre ; car puisque la somme de ces deux angles est égale à celle de deux angles droits (*n*) , & qu'un angle droit est de 90 degrés (*n*) , la somme de ces deux angles est 180 degrés ; ainsi si l'angle ABD* est par exemple de 64 degrés , en retranchant 64 de 180 , le reste 116 degrés sera la valeur de l'angle ABC.



PROPOSITION XIV.

THEOREME.

97. *Si deux lignes droites tirées de l'extrémité d'une autre ligne droite, forment avec elle deux angles dont la somme soit égale à celle de deux angles droits, ces deux lignes ne feront qu'une seule ligne droite.*

SI la somme des deux angles ABC & ABD * formés par la ligne AB & par Fig. 42. les lignes BC & BD tirées de l'extrémité B de cette ligne AB , est égale à celle de deux angles droits, ces deux lignes BC & BD ne feront qu'une seule ligne droite CBD .

Démonst. Si les lignes BC & BD ne faisoient point une seule ligne droite CBD , la ligne CB étant prolongée passeroit au-dessus du point D vers E , ou au-dessous. Si elle passoit au-dessus & étoit par exemple la ligne CBE , la somme des angles ABC & ABE feroit égale à celle de deux angles droits (n) : or la somme de ces deux angles N. 94. n'est point égale à celle de deux angles droits, puisqu'elle est moins grande de

46 LES ELEMEENS D'EUCLIDE ;
 l'angle EBD, que celle des deux angle
 ABC & ABD qui est égale à celle de deux
 angles droits (*h*) ; donc la ligne CB étant
 prolongée ne passe point au-dessus du point
 D. On démontre de la même maniere qu'elle
 ne passe point au-dessous ; donc étant
 prolongée, elle passe par le point D ; ainsi
 la ligne BD est le prolongement de la ligne
 CB, & par conséquent la ligne CBD est
 une ligne droite ; donc C. Q. F. D.

PROPOSITION XV.

THEOREME.

98. Deux lignes droites qui se coupent ;
 forment quatre angles, dont chacun est
 égal à celui qui lui est opposé au som-
 met.

Fig. 43. **L** Es angles AEC & BED * formés par
 les lignes droites AB & CD qui se
 coupent, sont égaux entr'eux, & les angles
 CEB & AED le sont aussi.

Démonst. La ligne CE rencontre la ligne
 AB ; ainsi la somme des angles AEC &
 CEB est égale à celle de deux angles
 droits (*n*) : la ligne BE rencontre la ligne
 CD ; ainsi la somme des angles CEB &

BED l'est aussi ; donc la somme des angles AEC & CEB est égale à celle des angles CEB & BED ; & par conséquent si l'on retranche l'angle CEB de chacune de ces deux sommes égales entr'elles , les restes qui seront les angles AEC & BED seront égaux entr'eux (n). On démontre de la même manière que les angles CEB & AED le sont aussi ; donc C. Q. F. D. N. 64.

U S A G E.

99. On se sert de cette Proposition pour mesurer sur le terrain un angle dans lequel on ne peut point entrer ; par exemple un angle ABC * formé par le concours de deux murs AB & BC, & dans lequel on suppose que l'on ne peut point entrer. Pour cet effet on prolonge à volonté en D & en E l'alignement de chacun de ces deux murs, en appliquant une règle FBE à chacune de leurs faces : or ces prolongemens forment un angle DBE égal à l'angle ABC (n) ; ainsi si l'on mesure l'angle DBE , ce sera la même chose que si l'on mesuroit l'angle ABC. Fig. 44. N. 99.



PROPOSITION XVI.

THEOREME.

100. L'Angle extérieur d'un Triangle est plus grand qu'aucun des angles intérieurs de ce Triangle, opposés à cet angle.

Fig. 45. **L'**Angle extérieur BCD du triangle ABC * est plus grand qu'aucun des angles intérieurs ABC & BAC opposés à cet angle BCD.

Premierement. Pour l'angle ABC.

N. 97. *Const.* Divisés le côté BC en deux parties EB & EC égales entr'elles (n) : du point A tirés par le point E milieu du côté BC, une ligne AE prolongée vers F, jusqu'à ce que la ligne EF soit égale à la ligne AE : du point F tirés au point C la ligne FC.

N. 98. *Demonst.* Les triangles AEB & FEC ont l'angle AEB égal à l'angle FEC (n), puisque ces angles sont opposés au sommet, & les côtés EA & EB qui forment le premier, égaux aux côtés EF & EC qui forment le second, chacun à chacun, puisque EA est égal à EF (c), & que EB & EC sont chacun la moitié de BC (c) ; ainsi les autres

autres angles du premier triangle sont égaux aux autres angles du second, chacun à chacun (n), & par conséquent l'angle ABE ou ABC, est égal à l'angle ECF ou BCF : or l'angle BCF est moins grand que l'angle BCD (n); donc l'angle BCD est plus grand que l'angle ABC. N. 80.
27. N.

Secondement. Pour l'angle BAC.

Const. Divisés le côté AC en deux parties GA & CC égales entr'elles (n): du point B tirés par le point G milieu du côté AC, une ligne BG prolongée vers H, jusqu'à ce que la ligne GH soit égale à la ligne BG : du point H tirés par le point C une ligne HC, prolongée à volonté vers F.

Demonst. Par une démonstration semblable à la précédente, les triangles BGA & HGC ont l'angle BAC égal à l'angle HCG : or l'angle HCG est égal à l'angle FCD (n) qui lui est opposé au sommet ; donc l'angle BAC est égal à l'angle FCD : mais l'angle FCD est moins grand que l'angle BCD (n); donc l'angle BCD est aussi plus grand que l'angle BAC; donc C. Q. F. D. N. 98.
N. 72.



PROPOSITION XVII.

THEOREME.

101. *La somme de deux quelconques des angles d'un Triangle, est moins grande que celle de deux angles droits.*

Fig. 46. **L**A somme de deux des angles, par exemple ACB & B* du triangle ABC, est moins grande que celle de deux angles droits.

Const. Prolongés le côté AC à volonté vers D.

N. 94. *Démonst.* La somme des angles ACB & BCD est égale à celle de deux angles droits (n) : or l'angle B est moins grand
N. 100. que l'angle BCD(n), puisque l'angle BCD est l'angle extérieur du triangle ABC, & que l'angle B est l'un des angles intérieurs de ce triangle, opposés à cet angle extérieur; donc la somme des angles ACB & B du triangle ABC, est moins grande que celle de deux angles droits ; donc C. Q. F. D.

COROLLAIRE I.

102. Il suit de ce Théorème, que si l'un des angles d'un triangle, est droit ou

obtus , les deux autres seront aigus.

Démonst. Si l'un des angles d'un triangle étant droit ou obtus , l'un des autres l'étoit aussi , la somme de deux des angles d'un triangle , seroit aussi grande ou plus grande , que celle de deux angles droits : or la somme de deux quelconques des angles d'un triangle , est moins grande que celle de deux angles droits (*n*) ; donc si l'un des angles &c. ; donc C. Q. F. D. N. 101.

COROLLAIRE II.

103. Il suit aussi de ce Théorème , que d'un point hors d'une ligne , on ne peut abaisser qu'une perpendiculaire à cette ligne.

Si la ligne CD* est perpendiculaire à la ligne AB , toute autre ligne CE tirée du même point C à cette ligne AB , ne lui sera pas perpendiculaire. Fig. 47.

Démonst. Si la ligne CD étant perpendiculaire à la ligne AB (*h*) , la ligne CE l'étoit aussi , les angles D & E du triangle ECD , seroient droits chacun (*n*) ; & par conséquent la somme de deux des angles du triangle ECD , seroit égale à celle de deux angles droits : or la somme de deux quelconques des angles d'un triangle , est moins grande que celle de deux angles droits (*n*) ; donc si l'angle D est droit , l'angle E ne l'est point ; & par conséquent E ij N. 101.

52 LES ELEMENTS D'EUCLIDE,
 si la ligne CD est perpendiculaire à la ligne
 AB, la ligne CE ne l'est point ; donc C.
 Q. F. D.

COROLLAIRE III.

104. Il suit encore de ce Théorème ,
 que si d'un point quelconque d'une ligne
 droite, oblique à une autre, on abaisse une
 perpendiculaire à cette autre, le point au-
 quel cette perpendiculaire la rencontrera ,
 sera de la partie de cette ligne, qui forme
 un angle aigu avec cette oblique.

Fig. 48. Si d'un point C d'une ligne CE * oblique
 à la ligne AB, on abaisse une perpendi-
 culaire CD à cette ligne AB, le point D
 auquel cette perpendiculaire la rencontre-
 ra, sera de la partie EB de cette ligne, qui
 forme avec l'oblique CE, l'angle aigu
 CEB.

Const. Du point C, tirés la ligne CF à un
 point quelconque F de la partie AE de la
 ligne AB, qui forme avec l'oblique CE, l'an-
 gle obtus CEA.

Démonst. Si la perpendiculaire abaissée
 du point C de l'oblique CE, à la ligne AB,
 étoit la ligne CF qui rencontre la partie
 AE de la ligne AB, qui forme l'angle ob-
 tus CEA, le triangle FCE auroit un angle
 droit CFE (n) & un angle obtus CEF (h) ;
 & par conséquent la somme des deux an-

LIVRE PREMIER: 53

gles CFE & CEF du triangle FCE, seroit plus grande que celle de deux angles droits : or la somme de deux quelconques &c. (n) ; N. 101 donc &c.

COROLLAIRE III.

105. Il suit enfin de ce Théorème : Premièrement , que *chacun des angles d'un triangle équilatéral, est aigu*. Secondement, que *chacun des angles égaux d'un triangle isocèle, l'est aussi*.

DEMONSTRATION.

Premièrement , si l'un des angles d'un triangle équilatéral , étoit droit ou obtus , les autres le seroient aussi, puisque les angles d'un triangle équilatéral sont égaux entr'eux (n) ; & par conséquent la somme de deux des angles de ce triangle, seroit aussi grande, ou plus grande que celle de deux angles droits : or la somme de deux quelconques &c. (n) ; donc &c. N. 84. N. 101.

Secondement , si l'un des angles égaux d'un triangle isocèle, étoit droit ou obtus , ce triangle auroit deux angles droits , ou deux angles obtus ; or un triangle ne peut avoir ni deux de ses angles droits , ni deux de ses angles obtus (n) ; donc &c. N. 102.

PROPOSITION XVIII.

THEOREME.

106. Si dans le même Triangle , un côté est plus grand qu'un autre , l'angle opposé à ce premier côté , sera plus grand que l'angle opposé à cet autre côté.

Fig. 49. **S** I le côté BC du triangle ABC *, est plus grand que le côté AB de ce même triangle, l'angle BAC opposé au côté BC, sera plus grand que l'angle C, opposé au côté AB.

N. 79. *Const.* Divisés le côté BC en deux parties, telles que l'une BD soit égale au côté AB (n), & du point A, tirés au point D, la ligne AD.

.. *Démonst.* L'angle BAC du triangle ABC, est plus grand que l'angle BAD du triangle ABD (n) : or l'angle BAD est égal à l'angle BDA (n), puisque ce triangle ABD a le côté BD égal au côté AB (c) ; donc l'angle BAC est plus grand que l'angle BDA : mais l'angle BDA est plus grand que l'angle C (n), puisque l'angle BDA est l'angle extérieur du triangle

N. 72.
N. 83.
N. 100.

ACD, & que l'angle C est l'un des angles intérieurs de ce triangle, opposés à cet angle extérieur ; donc l'angle BAC est plus grand que l'angle C ; donc C. Q. F. D.

COROLLAIRE.

107. Il suit de ce Théorème : Premièrement, que *dans un triangle, le plus grand angle est opposé au plus grand côté* : Secondement, que *les angles d'un triangle scalène, sont inégaux entr'eux.*

PROPOSITION XIX.

THEOREME.

108. Si dans le même Triangle, un angle est plus grand qu'un autre, le côté opposé à ce premier angle, sera plus grand que le côté opposé à cet autre angle.

SI l'angle A du triangle ABC *, est plus grand que l'angle C de ce triangle, le côté BC opposé à l'angle A, sera plus grand que le côté AB opposé à l'angle C. Fig. 50.

Démonst. Si le triangle ABC avoit le côté AB égal au côté BC, il auroit l'angle C égal à l'angle A (n) : or l'angle A est plus grand que l'angle C (h) ; donc le

56 LES ELEMENS D'EUCLIDE ,
 côté AB n'est point égal au côté BC : &
 si ce triangle avoit le côté AB plus grand
 que le côté BC , il auroit l'angle C plus
 grand que l'angle A (n) : or l'angle A est
 plus grand que l'angle C (h) ; donc le côté
 AB n'est point plus grand que le côté
 BC. Le côté AB n'est donc ni aussi grand ,
 ni plus grand que le côté BC, il est donc
 moins grand que le côté BC ; & par con-
 séquent le côté BC est plus grand que le
 côté AB ; donc C. Q. F. D.

N. 106.

COROLLAIRE.

109. Il suit de ce Théorème : Premie-
 rement , que *dans un triangle , le plus
 grand côté est opposé au plus grand angle :*
 Secondement , que *si les angles d'un trian-
 gle sont inégaux entr'eux , le triangle est
 scalène.*



PROPOSITION XX.

THEOREME.

110. *Chaque côté d'un Triangle est moins grand, que la somme des deux autres cotes du même Triangle.*

LA somme des côtés, par exemple AB & BC du triangle ABC *, est plus grande que l'autre côté AC. Fig. 51.

Const. Prolongés le côté AB vers D, jusqu'à ce que la ligne BD soit égale au côté BC : du point D tirés au point C, la ligne DC.

Demonst. Le triangle DBC a le côté BC égal au côté BD (c) ; ainsi l'angle D est égal à l'angle BCD (n) : or l'angle BCD N. 83. est moins grand que l'angle ACD (n) ; donc N. 72. l'angle D est moins grand que l'angle ACD ; ainsi le triangle ACD à l'angle ACD plus grand que l'angle D, & par conséquent le côté ABD plus grand que le côté AC (n) : N. 106. mais ce côté ABD est la somme des côtés AB & BC du triangle ABC ; donc la somme des côtés AB & BC du triangle ABC, est plus grande que l'autre côté AC de ce triangle ; donc C. Q. F. D.

PROPOSITION XXI.

THEOREME.

111. Si des extrémités de l'un des côtés d'un Triangle, on tire deux lignes droites qui se rencontrent dans ce Triangle : Premièrement , leur somme sera moins grande, que celle des autres côtés de ce Triangle : Secondement , l'angle qu'elles formeront sera plus grand, que celui que forment ces autres côtés.

Fig. 52. **S** I des extrémités , par exemple A & C, du côté AC du triangle ABC *, on tire deux lignes AD & CD, qui se rencontrent dans ce triangle en un point D : *Premièrement* , la somme ADC de ces deux lignes , sera moins grande que la somme ABC des autres côtés AB & BC de ce triangle : *Secondement* , l'angle ADC qu'elles formeront, sera plus grand que l'angle B, que forment ces autres côtés AB & BC.

Const. Prolongés l'une de ces lignes , par exemple AD, jusqu'à ce qu'elle rencontre en E, l'un des côtés du triangle ABC.

DEMONSTRATION.

Premierement. La somme ABE des côtés AB & BE du triangle ABE, est plus grande que le troisième côté AE ou ADE de ce triangle (*n*); ainsi, si l'on ajoute une même quantité EC, à ABE & à ADE, la somme ABEC de ABE & de EC, sera plus grande que la somme ADEC de ADE & de EC (*n*): pareillement la somme DEC des côtés DE & EC du triangle DEC, est plus grande que le troisième côté DC de ce triangle (*n*); ainsi, si l'on ajoute une même quantité AD, à DEC & à DC, la somme ADEC de AD & de DEC, sera plus grande que la somme ADC de AD & de DC (*n*). Ainsi ABEC est plus grande que ADEC, & ADEC plus grande que ADC, & par conséquent ABEC est plus grande que ADC: mais ABEC est la somme des côtés AB & BC du triangle ABC, & ADC est celle des lignes AD & CD; donc la somme des côtés AB & BC du triangle ABC, est plus grande que celle des lignes AD & CD.

Secondement. L'angle ADC est l'angle extérieur du triangle EDC, & l'angle DEC est l'un des angles intérieurs de ce triangle, opposés à cet angle extérieur; ainsi l'angle ADC est plus grand que l'an-

N. 100. gle DEC (n) : or l'angle DEC est pl
 N. 100. grand que l'angle B (n), puisque cet ang
 DEC est l'angle extérieur du triangle A B I
 & que l'angle B est l'un des angles int
 rieurs de ce triangle, opposés à cet angl
 extérieur; donc l'angle ADC est plus gran
 que l'angle B; donc C. Q. F. D.

PROPOSITION XXII.

PROBLEME.

112. *Décrire un Triangle, dont les côtés
 soient égaux à trois lignes droites don-
 nées, chacun à chacune; pourvu que
 chacune de ces lignes, soit moins gran-
 de que la somme des deux autres (n).*

Fig. 53. I L faut décrire un triangle, dont les côtés
 soient égaux aux lignes A, B & C*,
 chacun à chacune.

Const. Tirés une ligne DF égale à l'une
 des lignes données, par exemple à la ligne
 A : de l'une des extrémités de cette ligne
 DF, par exemple de D, prise pour centre,
 & avec un rayon égal à l'une des deux au-
 tres lignes données, par exemple à la li-
 gne B, décrivés un cercle, ou seulement
 un arc de cercle EG : de l'autre extrémité

F de la ligne DF , prise pour centre, & avec un rayon égal à la ligne donnée C , décrivent un arc qui coupe le précédent en E : du point E , tirés aux extrémités D & F de la ligne DF , les lignes ED & EF : le triangle DEF qu'elles formeront, aura ses côtés égaux aux lignes données, chacun à chacune.

Demonst. Le côté DF du triangle DEF , est égal à la ligne A (c), le côté DE l'est à la ligne B (n), puisqu'il est rayon d'un cer- N. 26.
cle, dont le rayon est égal à la ligne B (c), le côté FE est égal à la ligne C , par une raison pareille à la précédente; par conséquent les côtés du triangle DEF sont égaux aux lignes données, chacun à chacune; donc C. Q. F. F.

U S A G E.

113. On peut se servir de cette Proposition, de la manière suivante, pour lever le plan d'un terrain $ABCDE$ *.

Fig. 59.

On divise le terrain $ABCDE$ en triangles ABC , CAD & DAE , soit avec une corde, soit d'une autre manière. On mesure les côtés de ces triangles. On fait une échelle F , proportionnée à la grandeur que l'on veut donner au plan de ce terrain. On décrit (n) des triangles abc , cad , & dae , N. 112.
dont chaque côté contienne autant de par-

ties de cette échelle F , que chaque côté correspondant des triangles ABC , CAD & DAE , contient de fois la mesure dont on s'est servi pour le mesurer, & la figure $abcde$ formée par les triangles abc , cad &c. sera le plan du terrain $ABCDE$.

Fig. 11. 114. Lorsqu'il n'est point libre de parcourir le terrain $ABCDE$ *, ou lorsqu'il n'est libre de le parcourir, que vers les sommets de quelques-uns de ses angles, il n'est point possible de le diviser en triangles, ni par conséquent d'en lever le plan de la manière précédente : mais alors on le leve de la manière suivante.

On néglige à volonté deux angles de suite E & D de ce terrain. Dans les angles que l'on peut parcourir, par exemple dans l'angle B , on tire avec une corde ou autrement, une ligne IK qui rencontre à volonté en I & en K , les côtés BA & BC de cet angle. On prolonge à volonté, l'un en G & l'autre en M , les côtés EA & DC des angles A & C qu'il n'est point libre de parcourir, & des points G & M on tire les lignes GH & ML qui rencontrent à volonté, l'une en H & l'autre en L , les autres côtés AB & CB de ces angles. On mesure ensuite les côtés du terrain $ABCDE$ & ceux des triangles AGH , IBK & LMC .

On fait une échelle F , proportionnée à la

grandeur que l'on veut donner au plan du terrain *ABCDE*. On décrit un triangle *agh* (n), dont chaque côté contienne autant de parties de l'échelle *F*, que chaque côté correspondant du triangle *AGH*, contient de fois la mesure dont on s'est servi pour le mesurer. On prolonge les côtés *ah* & *ga* de ce triangle, l'un vers *b* & l'autre vers *e*, jusqu'à ce que les lignes *ab* & *ae* contiennent aussi chacune autant de parties de cette échelle, que les côtés correspondans *AB* & *AE* du terrain *ABCDE*, contiennent de fois chacun cette mesure. On décrit ensuite un triangle *ibk*, de la même manière que l'on a décrit le triangle *agh*, en donnant à chacun de ses côtés, le nombre de parties de l'échelle *F* qui lui convient, on prolonge vers *c* le côté *bk* de ce triangle, jusqu'à ce que la ligne *bc* contienne autant de parties de l'échelle *F* qu'elle doit en contenir. Enfin l'on décrit le triangle *lmc*, de la même manière que l'on a décrit les précédens. On prolonge son côté *mc* vers *d*, jusqu'à ce que la ligne *cd* contienne le nombre de parties de l'échelle *F* qu'elle doit contenir. Du point *d* on tire au point *e*, la ligne *de*, & la figure *abcde* est le plan du terrain *ABCDE*. N. 112.

PROPOSITION XXIII.

PROBLEME.

II 5. *Faire un angle sur une ligne droite donnée, qui ait un point donné de cette ligne pour sommet, & qui soit égal à un angle donné.*

Fig. 56. **I** L faut faire un angle sur la ligne droite AB^* , qui ait le point D de cette ligne pour sommet, & qui soit égal à l'angle C .

Const. Tirés une ligne EF qui coupe à volonté, l'un en E & l'autre en F , les côtés CE & CF de l'angle C : décrivés un triangle HDG , dont les côtés soient égaux à ceux du triangle FCE , chacun à chacun (n), c'est-à-dire, dont le côté DG , partie de la ligne donnée AB prolongée s'il est nécessaire, soit égal au côté CE , le côté DH au côté CF , & le côté GH au côté EF , & l'angle HDG sera égal à l'angle C .

Démonst. Les côtés du triangle DHG , sont égaux à ceux du triangle CFE , chacun à chacun (c); ainsi les angles du premier triangle, sont égaux à ceux du second, chacun à chacun (n); & par conséquent l'angle HDG est égal à l'angle C ; donc $C. Q. F. F.$

SCHOLIE,

SCHOLIE.

116. On résoud ce Problème de la manière suivante, lorsqu'il est libre de donner telle longueur que l'on veut, aux côtés CE & CF de l'angle C*.

Fig. 57.

Du sommet C de l'angle C, pris pour centre, & avec un rayon CE pris à volonté, on décrit un arc EF qui rencontre les côtés CE & CF de cet angle, l'un en E & l'autre en F : du point donné D, pris pour centre, & avec le même rayon CE, on décrit un arc qui rencontre en un point G, la ligne donnée AB prolongée s'il est nécessaire, & l'on prolonge cet arc vers H : du point G pris pour centre, & avec un rayon égal à la distance du point E au point F, on décrit un arc qui coupe le précédent en H : du point D on tire au point H, la ligne DH, & l'angle HDG qu'elle forme avec la ligne donnée AB, est égal à l'angle C.

Pour la démonstration, on tire les lignes EF & GH qui forment les triangles FCE & HDG, tels que les côtés du premier sont égaux à ceux du dernier, chacun à chacun (c); & par conséquent l'angle C du premier, est égal à l'angle HDG du dernier (n).

N° 7.

PROPOSITION XXIV.

THEOREME.

117. Si deux Triangles sont tels, que l'un des angles du premier soit plus grand que l'un des angles du second, & que les côtés qui forment cet angle du premier, soient égaux à ceux qui forment cet angle du second, chacun à chacun, l'autre côté du premier triangle, sera plus grand que l'autre côté du second.

Fig. 53. SI les triangles ABC & DEF *sont tels, que l'angle B soit plus grand que l'angle DEF, & que le côté BA soit égal au côté ED, & le côté BC au côté EF, le côté AC sera plus grand que le côté DF.

Const. Faites sur le côté ED du triangle DEF, l'angle DEG qui ait l'extrémité E de ce côté pour sommet, & qui soit égal à l'angle B (n) : faites la ligne EG égale au côté BC, & du point G, tirés aux points D & F, les lignes GD & GF.

Dem. Les triangles ABC & DEG ont l'angle B égal à DEG (c), & les côtés BA & BC qui forment le premier, égaux aux côtés ED & EG qui forment le second, chacun à

chacun , puisque BA est égal à ED (*h*) , &
 que BC l'est à EG (*c*) ; ainsi l'autre côté
 AC du premier triangle, est égal à l'autre côté
 DG du second (*n*) ; & par conséquent si N. 30.
 DG est plus grand que DF , le côté AC se-
 ra plus grand que le côté DF : or DG est
 plus grand que DF ; car puisque EG est
 égal à BC (*c*) , & que BC l'est à EF (*h*) ,
 EG est égal à EF ; & par conséquent le trian-
 gle FEG à l'angle EFG, égal à l'angle EGF
 (*n*) : or l'angle DFG est plus grand que N. 33.
 l'angle EFG (*n*) , l'angle EFG est égal à N. 72.
 l'angle EGF (*d*) , & l'angle EGF est plus
 grand que l'angle DGF (*n*) ; donc l'angle N. 72.
 DFG est plus grand que l'angle DGF ; ain-
 si puisque dans le triangle DFG, l'angle
 DFG est plus grand que l'angle DGF (*d*) ,
 le côté DG est plus grand que le côté DF
 (*n*) ; & par conséquent le côté AC du trian- N. 108.
 gle ABC, qui est égal à ce côté DG, est aussi
 plus grand que le côté DF ; donc C. Q.
 F. D.



PROPOSITION XXV.

THEOREME.

118. Si deux Triangles sont tels, que deux des côtés du premier, soient égaux à deux des côtés du second, chacun à chacun, & que l'autre côté du premier soit plus grand que l'autre côté du second, l'angle formé par ces deux côtés du premier triangle, sera plus grand que l'angle formé par ces deux côtés du second.

Fig. 59a. **S**I les triangles ABC & DEF *, ont le côté AB égal au côté DE , le côté BC au côté EF , & le côté AC plus grand que le côté DF , l'angle B sera plus grand que l'angle E .

Demonst. Les triangles ABC & DEF ont les côtés qui forment l'angle B , égaux à ceux qui forment l'angle E , chacun à chacun (h); ainsi, si l'angle B étoit moins grand que l'angle E , le côté AC seroit moins grand que le côté DF (n), & si l'angle B étoit égal à l'angle E , le côté AC seroit égal au côté DF (n): or le côté AC n'est ni moins grand, ni aussi grand que le côté DF , puisqu'il est plus grand que ce côté

(h); donc l'angle B n'est aussi ni moins grand, ni aussi grand que l'angle E ; & par consequent il est plus grand que l'angle E ; donc C. Q. F. D.



PROPOSITION XXVI.

THEOREME.

119. Si deux triangles sont tels, que l'un des côtés du premier soit égal à l'un des côtés du second, & que les angles qui sont aux extrémités de ce côté du premier soient égaux à ceux qui sont aux extrémités de ce côté du second, chacun à chacun, (ou que les angles qui sont, l'un l'une des extrémités de ce côté du premier, & l'autre opposé à ce côté, soient égaux à ceux qui sont, l'un à l'une des extrémités de ce côté du second, & l'autre opposé à ce côté,) Premièrement, l'autre angle du premier triangle, sera égal à l'autre angle du second: Secondement, les autres côtés du premier triangle, seront égaux aux autres côtés du second, chacun à chacun: Troisièmement, la surface du premier triangle sera égale à celle du second.

Fig. 60. SI les triangles ABC & DEF *, ont le côté AC égal au côté DF, l'angle A égal à l'angle D & l'angle C à l'angle F, (ou l'angle A égal à l'angle D & l'angle B

à l'angle E) : *Premierement*, (dans le premier cas) l'angle B sera égal à l'angle E ; (& dans le second) l'angle C le sera à l'angle F : *Secondement*, le côté AB sera égal au côté DE, & le côté BC au côté EF : *Troisièmement*, la surface du triangle ABC sera égale à celle du triangle DEF.

Premierement, si l'angle A est égal à l'angle D, & l'angle C à l'angle F.

Const. Posés le triangle ABC sur le triangle DEF, de manière que le point A étant sur le point D, le côté AB soit sur le côté DE.

Demonst. L'angle A est égal à l'angle D (h), le sommet A du premier est sur le sommet D du second, & le côté AB du premier sur le côté DE du second (c); donc l'autre côté AC du premier est sur l'autre côté DF du second (n); & par conséquent N. 71. puisque le côté AC est égal au côté DF (h), & que A l'une de ses extrémités, est sur D l'une de celles de DF (c), l'autre extrémité C de AC, est sur l'autre extrémité F de DF (n). Ainsi l'angle C égal à l'angle F N. 70. (h), a son sommet C sur le sommet F de l'angle F, & AC l'un de ses côtés, sur DF l'un de ceux de l'angle F (d); donc l'autre côté CB de l'angle C est sur l'autre côté FE de l'angle F (n). Le point B est donc N. 71. en même tems sur le côté DE (c), & sur le

72 LES ELEMENS D'EUCLIDE ,

côté FE (*d*) ; il est donc sur un point commun à ces deux côtés : or ces deux côtés n'ont que le point E de commun entr'eux

N. 75. (*n*) ; donc le point B est sur le point E ainsi les sommets A, B & C des angles du triangle ABC, sont sur les sommets D, E & F des angles du triangle DEF, chacun sur chacun, & les côtés des premiers sont sur les côtés des derniers, chacun sur chacun par conséquent : *Premièrement*, l'angle A

N. 69. est égal à l'angle E (*n*) : *Secondement*, le côté AB est égal au côté DE, & le côté BC

N. 69. au côté EF (*n*) : *Troisièmement*, la surface du triangle ABC est égale à celle du triangle DEF (*n*).

N. 69. Fig. 61. *Secondement*, si l'angle A* est égal à l'angle D, & l'angle B à l'angle DEF.

Const. Prolongés à volonté, le côté DE vers H : du point F tirés aux points G & I, pris à volonté sur la ligne DH, l'un au-dessous du point E & l'autre au-dessus, les lignes FG & HI, & posés le triangle ABC sur le triangle DEF, de manière que le point A étant sur le point D, le côté AB soit sur la ligne DH.

Demonst. Le sommet A de l'angle A est sur le sommet D de l'angle D, & le côté AB du premier sur le côté DH du second (*c*) ; par conséquent le côté AC est sur le côté DE & le point C sur le point F, par les

les mêmes raisons que celles de la démonstration précédente ; ainsi si le point B est sur le point E , les sommets A , B & C des angles du triangle ABC seront sur les sommets D , E & F des angles du triangle DEF, chacun sur chacun ; & par conséquent : *Premièrement* , l'angle C sera égal à l'angle F (n) : *Secondement* , le côté AB sera N. 69. égal au côté DE & le côté BC au côté EF (n) : *Troisièmement* , la surface du triangle ABC sera égale à celle du triangle DEF (n). Or le point B est sur le point E ; car si N. 69. le point B étoit sur un point de la ligne DH, au-dessous du point E , par exemple sur G , les triangles ABC & DGF auroient l'angle A égal à l'angle D (h), & les côtés AB & AC qui forment le premier , égaux aux côtés DG & DF qui forment le dernier, chacun à chacun , puisque AB seroit égal à DG (c) & que AC l'est à DF (h) ; ainsi l'angle DGF seroit égal à l'angle B (n), & par conséquent à l'angle DEF qui N. 80. l'est à l'angle B (h) : mais l'angle DGF n'est point égal à l'angle DEF (n), puisque N. 100. l'angle DGF est l'angle extérieur du triangle GEF, & que l'angle DEF est l'un des angles intérieurs de ce triangle, opposés à cet angle extérieur ; donc le point B n'est point sur un point G de la ligne DH , au-dessous du point E. On démontre de la

74 LES ELEMENS D'EUCLIDE,
 même maniere que le point B n'est point sur
 un point I de la ligne DH, au-dessus du point
 E; ainsi le point B est sur le point E; &
 par conséquent : *Premierement*, l'angle C
 est égal, &c. donc C. Q. F. D.

U S A G E.

*On peut se servir de cette Proposition
 pour mesurer telle distance inaccessible que
 ce puisse être, pourvu que l'on puisse voir ses
 extrémités; mais comme une distance inac-
 cessible peut être accessible par l'une de ses
 extrémités, ou être entièrement inaccessible,
 ce Problème à deux Cas.*

P R E M I E R C A S.

Fig. 62. 120. Si la distance inaccessible AB *
 que l'on veut mesurer, est accessible par l'u-
 ne de ses extrémités A.

*On met un Piquet en un point quelconque
 C d'où l'on puisse aller au point A. De ce
 point on dirige un rayon visuel vers A, &
 un autre vers B, & l'on mesure l'angle C
 formé par ces rayons-visuels, la distance
 CA du point C au point A, & l'angle A for-
 mé par le rayon-visuel AC & par la distan-
 ce inaccessible AB. On se retire ensuite en
 un endroit commode. On y tire une ligne
 ac qui soit égale à la distance AC. On fait
 sur cette ligne un angle a, qui ait l'extrémité*

a de cette ligne pour sommet & qui soit égal
 à l'angle A (n). On fait encore sur cette li- N. 113.
 gne un angle c , qui ait l'autre extrémité c de
 cette ligne pour sommet, & qui soit égal à
 l'angle C (n), & les côtés ab & cb de ces N. 115.
 angles a & c , forment avec cette ligne ac
 un triangle abc , dont le côté ab est égal à la
 ligne inaccessible AB (n), puisque les N. 119.
 triangles ABC & abc ont le côté AC égal
 au côté ac (c), & que les angles A & C
 qui sont aux extrémités de ce côté AC du
 premier triangle, sont égaux (c) aux an-
 gles a & c qui sont aux extrémités a & c de
 ce côté ac du dernier, chacun à chacun ;
 ainsi si l'on mesure la ligne ab , ce sera la
 même chose que si l'on mesuroit la distance
 inaccessible AB .

121. Il est plus commode de rapporter
 le triangle ABC sur le papier, de la manie-
 re suivante.

On fait une Echelle G proportionnée à la
 grandeur que l'on veut donner au plan du
 triangle ABC . On tire une ligne DF qui
 contienne autant de parties de l'échelle G ,
 que la distance AC contient de fois la me-
 sure dont on s'est servi pour la mesurer. On
 fait sur cette ligne un angle D qui ait l'ex-
 trémité D de cette ligne pour sommet, &
 qui soit égal à l'angle A (n). On fait enco- N. 115.
 re sur cette même ligne un angle F , qui ait

G ij

- N. 115. l'extrémité F de cette ligne pour sommet ,
 & qui soit égal à l'angle C (n) , & les côtés DE & FE de ces angles D & F , forment avec cette ligne DF un triangle DEF , dont le côté DE contient autant de parties de l'échelle G , que la distance inaccessible AB contient de fois la mesure dont on s'est servi pour mesurer la distance AC .

SECOND CAS.

- Fig. 63. 122. Si la distance AB^* que l'on veut mesurer , est entièrement inaccessible.

- On met un Piquet en un point quelconque C . De ce point on dirige un rayon visuel vers A & un autre vers B . On mesure l'angle C formé par ces rayons-visuels ,
 N. 120. & l'on mesure aussi (n) ces rayons-visuels , qui sont des distances CA & CB accessibles par l'une de leurs extrémités C . On se retire ensuite en un endroit commode. On y forme
 N. 115. un angle c égal à l'angle C (n). On fait les côtés ca & cb de cet angle égaux aux distances CA & CB , chacun à chacune. Enfin du point a on tire au point b une ligne ab , & cette ligne est égale à la distance inaccessible AB (n) ; puisque les triangles ABC & abc ont l'angle C égal à l'angle c (c), & les côtés CA & CB qui forment le premier , égaux aux côtés ca & cb qui forment le second , chacun à chacun
 N 80.

(c); & par conséquent si l'on mesure la ligne ab , ce sera la même chose que si l'on mesurait la distance inaccessible AB .

123. Il est aussi plus commode de rapporter le triangle ABC sur le papier, de la manière suivante.

On fait une Echelle G proportionnée à la grandeur que l'on veut donner au plan du triangle ABC , & par le moyen de cette échelle on rapporte sur le papier (n) les triangles qui ont servi à mesurer les distances inaccessibles CA & CB , afin d'avoir la longueur que chacune de ces distances doit y avoir. On fait ensuite un angle F égal à l'angle C (n). On fait le côté FD de cet angle, égal à la longueur que la distance CA doit avoir sur le papier, & le côté FE égal à celle que la distance CB doit y avoir. Du point D on tire au point E la ligne DE , & cette ligne contient autant de parties de l'échelle G , que la distance inaccessible AB contient de fois la mesure dont on s'est servi pour mesurer le côté, accessible de chacun des triangles que l'on a rapporté sur le papier.



PROPOSITION XXVII.

THEOREME.

124. *Si deux lignes droites étant coupées par une autre ligne droite, forment avec elle des angles tels que deux des Alternes (c'est-à-dire des intérieurs opposés & pris de part & d'autre de la ligne coupante) soient égaux entr'eux, ces deux lignes seront parallèles.*

Fig. 64. **S**I les lignes droites AB & CD* qui sont coupées par la ligne droite EF, forment avec elle les angles alternes, par exemple AEF & DFE égaux entr'eux, ces lignes AB & CD sont parallèles.

Const. Prenés à volonté un point G sur la ligne AB, (vers A si les angles égaux par l'hypothèse sont les angles AEF & DFE, & vers B si ces angles égaux sont les angles BEF & CFE): coupés de l'autre côté de la ligne EF par rapport au point G, une partie FH de la ligne CD prolongée s'il est nécessaire, égale à la ligne EG: du point F tirés au point G la ligne FG, & du point E au point H la ligne EH.

Démonst. Les points F & H de la ligne

CD correspondent aux points G & E de la ligne AB, puisque la ligne FH est égale à la ligne EG (*c*); ainsi si la distance du point G au point F est égale à celle du point E au point H, les points G & E de la ligne AB seront également distans des points correspondans F & H de la ligne CD; & par conséquent la ligne AB sera parallele à la ligne CD (*n*): or la distance du point G au point F, est égale à celle du point E au point H; car les triangles GEF & HFE ont l'angle GEF égal à l'angle HFE (*h*), & les côtés EG & EF qui forment le premier; égaux aux côtés FH & EF qui forment le dernier, chacun à chacun, puisque le côté EG est égal au côté FH (*c*), & que le côté EF est commun à ces deux triangles; ainsi le côté FG du premier est égal au côté EH du dernier (*n*); & par conséquent la distance du point G au point F est égale à celle du point E au point H; donc la ligne AB est parallele à la ligne CD; donc C. Q. F. D.

COROLLAIRE.

125. Il suit de ce Théorème, que les côtés opposés d'un Quarré A*, d'un Quar- Fig. 65.
 ré-long B, d'un Rhombe C, & d'un Rhom-
 boïde D sont paralleles, chacun à chacun.

Const. Tirés la Diagonale EG du Qua-
 drilatere EFGH.

80 LES ELEMENS D'EUCLIDE ;

Démonst. Les côtés du triangle **EGF** sont égaux à ceux du triangle **GEH**, chacun à chacun, puisque le côté **EF** est égal au côté **GH** & le côté **EH** au côté **FG** (*ns.*), & que le côté **EG** est commun à ces deux triangles ; ainsi les angles du premier sont égaux à ceux du dernier, chacun à chacun (*n*) ; & par conséquent l'angle **FEG** est égal à l'angle **HGE**, & l'angle **FGE** à l'angle **HEG** : or puisque les angles **FEG** & **HGE** qui sont alternes, sont égaux entr'eux (*d*), les côtés **EF** & **GH** du quadrilatere **EFGH**, qui les forment avec la Diagonale **EG**, sont parallèles (*n*) ; & puisque les angles **FGE** & **HEG** qui sont aussi alternes, sont aussi égaux entr'eux, les côtés **EH** & **FG** du même Quadrilatere **EFGH**, qui les forment avec la même diagonale **EG**, sont aussi parallèles (*n*) ; donc **C. Q. F. D.**



PROPOSITION XXVIII.

THEOREME.

126. *Si deux lignes droites étant coupées par une autre ligne droite, forment avec elle des angles tels que l'un quelconque des extérieurs soit égal à celui des intérieurs qui lui est opposé, (ou que la somme de deux quelconques des intérieurs pris chacun du même côté de la ligne coupante, soit égale à celle de deux angles droits), ces deux lignes seront parallèles.*

Premierement. **S**I les lignes droites AB & CD*, qui sont cou- Fig. 66.
pées par la ligne droite EF, forment avec elle l'un des angles extérieurs, par exemple l'angle BGE égal à l'angle intérieur DHE qui lui est opposé, ces lignes AB & CD seront parallèles entr'elles.

Démonst. L'angle DHE est égal à l'angle BGE (*h*), & l'angle BGE l'est à l'angle AGF (*n*) qui lui est opposé au sommet; N. 98.
ainsi l'angle DHE est égal à l'angle AGF :
or puisque les angles DHE & AGF qui sont alternes, sont égaux entr'eux, les lignes AB & CD qui les forment avec la li-

82 LES ELEMENS D'EUCLIDE ,

N. 124. gne EF , sont paralleles (n).

Secondement , si les lignes droites A & CD qui sont coupées par la ligne droite EF, forment avec elle des angles tels que la somme de deux des intérieurs , par exemple DHE & FGB pris chacun du même côté de la ligne EF , soit égale à celle de deux angles droits , ces lignes AB & CD seront paralleles.

Démonst. Puisque la somme des angles DHE & FGB est égale à celle de deux angles droits (h) , & que celle des angles AGF & FGB lui est aussi égale (n) , la somme des angles DHE & FGB est égale à celle des angles AGF & FGB (n); ainsi si l'on retranche l'angle FGB de chacune de ces deux dernieres sommes , les restes qui seront les angles DHE & AGF seront égaux entr'eux : or puisque les angles DHE & AGF qui sont alternes , sont égaux entr'eux , les lignes AB & CD qui les forment avec la ligne EF , sont paralleles (n); donc C. Q. F. D.



PROPOSITION XXIX.

THEOREME.

127. *Si deux lignes droites & paralleles sont coupées par une autre ligne-droite, elles formeront avec elle des angles tels: Premièrement, que les alternes seront égaux entr'eux: Secondement, que chacun des extérieurs sera égal à celui des intérieurs qui lui est opposé: Troisièmement, que la somme de deux quelconques des intérieurs pris chacun du même côté de la ligne coupante, sera égale à celle de deux angles droits.*

SI les lignes droites AB & CD * qui Fig. 67. sont coupées par la ligne droite EF, sont paralleles: Premièrement, les angles alternes, par exemple AIF & DKE, seront égaux entr'eux: Secondement, chacun des angles extérieurs, par exemple l'angle BIE, sera égal à l'angle DKE, celui des intérieurs qui lui est opposé: Troisièmement, la somme de deux des intérieurs, par exemple DKE & BIF pris chacun du même côté de la ligne EF, sera égale à celle de deux angles droits.

84 LES ELEMENS D'EUCLIDE ;

Const. Prenés à volonté sur la ligne **A** un point **G**, (vers **A**, si vous voulés démontrer l'égalité des angles **AIF** & **DKE** & vers **B**, si vous voulés démontrer cell des angles **BIF** & **CKE**) : coupés de l'autre côté de la ligne **EF** par rapport au point **G**, une partie **KH** de la ligne **CD** prolongée s'il est nécessaire, égale à la ligne **IG**. du point **K** tirés au point **G** la ligne **KG**, & du point **I** au point **H**, la ligne **IH**.

DEMONSTRATION.

Premierement, les côtés du triangle **GIK** sont égaux à ceux du triangle **HKI**, chacun à chacun ; puisque le côté **IK** est commun à ces deux triangles, que le côté **IG** est égal au côté **KH** (*c*) & que les points **G** & **I**, **K** & **H**, étant (*c*) des points correspondans de deux paralleles **AB** & **CD** (*h*), les lignes **GK** & **IH** tirées l'une du point **G** au point **K** & l'autre du point **I** au point **H**,
N. 33. sont égales entr'elles (*n*) ; ainsi les angles du premier triangle sont égaux à ceux du
N. 37. dernier, chacun à chacun (*n*), & par conséquent l'angle **GIK** est égal à l'angle **HKI**: or ces angles **GIK** & **HKI** sont des angles alternes formés par les deux paralleles **AB** & **CD**, & par la ligne coupante **EF**; donc si deux lignes droites & paralleles sont coupées par une autre ligne droite, elles for-

ment avec elle des angles dont les alternes sont égaux entr'eux.

Secondement. L'angle DKE est égal à l'angle AIF (d), puisque ces angles sont alternes : or l'angle AIF est égal à l'angle BIE (n) qui lui est opposé au sommet ; donc ^{N. 93.} l'angle BIE , extérieur, est égal à l'angle DKE , intérieur qui lui est opposé.

Troisièmement. La somme des angles DKE & EKC est égale à celle de deux angles droits (n) : or l'angle EKC est égal à ^{N. 94.} l'angle BIF (d), puisque ces angles sont alternes ; donc la somme des angles DKE & BIF , intérieurs pris chacun du même côté de la ligne coupante EF , est égale à celle de deux angles droits ; donc C. Q. F. D.

COROLLAIRE.

128. Il suit de ce Théorème, que si une ligne droite est perpendiculaire à l'une de deux lignes droites qui sont parallèles entr'elles, elle sera aussi perpendiculaire à l'autre.



PROPOSITION XXX.

THEOREME.

129. *Si deux lignes-droites sont parallèles chacune à une même ligne, elles seront aussi parallèles entr'elles.*

Fig. 68. **S**I les lignes droites AB & CD *, sont parallèles chacune à la ligne EF, la ligne AB fera parallèle à la ligne CD.

Const. Tirés une ligne droite quelconque GH, qui coupe à volonté les lignes AB, CD, & EF.

Démonst. L'angle extérieur EKH, est égal à l'angle intérieur AIH qui lui est opposé (n), puisque les lignes AB & EF qui forment ces angles avec la ligne GH, sont parallèles (h) : le même angle EKH est aussi égal à l'angle DLG (n), puisque ces angles sont alternes, & que les lignes EF & CD qui les forment avec la ligne GH, sont aussi parallèles (h) ; donc l'angle AIH est égal à l'angle DLG : or puisque ces angles AIH & DLG qui sont alternes, sont égaux entr'eux, les lignes AB & CD qui les forment avec la ligne GH, sont parallèles entr'elles (n) ; donc C. Q. F. D.

PROPOSITION XXXI.

PROBLEME.

130. *Par un Point donné hors d'une ligne droite, tirer une parallèle à cette ligne.*

IL faut tirer par le point F^* , une paral- Fig. 69.
lele à la ligne droite AB .

Const. Prenés à volonté un point E sur la ligne AB : du point E tirés au point F la ligne EF : tirés par le point F une ligne CD , qui forme avec cette ligne EF , un angle EFD égal à l'angle FEA (n), & cet- N. 115.
te ligne CD sera parallèle à la ligne AB .

Démonst. Les angles alternes FEA & EFD sont égaux entr'eux (c); ainsi les li-
 AB & CD qui les forment avec la ligne
 EF , sont parallèles (n); dont C. Q. F. F. N. 124.

USAGE.

131. *On peut se servir de cette Proposi-
tion de la maniere suivante, pour tirer par
un point quelconque F^* , une parallèle à une Fig. 70.
ligne droite inaccessible AB .*

Du point F , on observe deux points quel-
conques H & G de cette ligne AB . On me-

- N. 120. sure (n) la distance FH , la distance FG & l'angle HFG formé par ces distances. O
- N. 122. rapporte ensuite sur le terrain (n) ou sur
- N. 123. papier (n) , le triangle HFG forme par ces distances & par la partie HG de la ligne AB & l'on y mesure l'angle FGH. Enfin on tire par le point F une ligne CD , qui forme avec la distance FG , un angle GFD égal à l'angle FGH (n), & cette ligne CD est parallèle à la ligne inaccessible AB (n) , puis-que les angles alternes FGH & GFD formés par ces lignes & par la distance FG , sont égaux entr'eux (c).

PROPOSITION XXXII.

THEOREME.

132. L'angle extérieur d'un Triangle , est égal à la somme des deux angles intérieurs de ce même Triangle , qui lui sont opposés.

Fig. 71. **L'**Angle extérieur BCD du triangle ABC* , est égal à la somme des angles intérieurs B & A qui lui sont opposés.

Const. Tirés par le point C une ligne

N. 130. CE parallèle au côté AB (n).

Démonst. Les lignes AB & CE sont parallèles

ralleles (c) ; ainsi les angles BCE & B
 qu'elles forment avec la ligne BC sont
 égaux entr'eux (n), puisqu'ils sont alternes, N. 127.
 & les angles ECD & A qu'elles forment
 avec la ligne AD sont aussi égaux entr'eux
 (n), puisque l'un ECD est extérieur, & N. 127,
 que l'autre A est l'intérieur qui lui est oppo-
 sé ; & par conséquent la somme des angles
 BCE & ECD est égale à celle des angles
 B & A : or la somme des angles BCE &
 ECD est égale à l'angle BCD (n) ; donc N. 72.
 l'angle BCD est égal à la somme des angles
 B & A ; donc C. Q. F. D.

COROLLAIRE I.

133. Il suit de ce Théorème, que *la*
somme de tous les angles d'un triangle,
est égale à celle de deux angles droits.

La somme des angles BCA, A & B du
 triangle ABC*, est égale à celle de deux Fig. 71.
 angles droits.

Démonst. La somme des angles BCA &
 BCD est égale à celle de deux angles droits
 (n) : or l'angle BCD est égal à la somme des N. 94.
 angles B & A (n) ; donc la somme des an- N. 132.
 gles BCA, B & A est égale à celle de deux
 angles droits ; donc C. Q. F. D.

COROLLAIRE II.

134. Il suit de ce Corollaire, que *la*
 H

90 LES ELEMENTS D'EUCLIDE ;

somme de tous les angles d'un triangle , est égale à celle de tous les angles d'un autre triangle.

Fig. 72. La somme des angles A , B & C du triangle ABC * , est égale à celle des angles D , E & F du triangle DEF.

Démonst. La somme des angles A , B & C du triangle ABC , & celle des angles D , E & F du triangle DEF , sont égales chacune à la somme de deux angles droits (n) ; par conséquent elles sont égales entr'elles ; donc C. Q. F. D.

COROLLAIRE III.

135. Il suit de ce Corollaire , que *si la somme de deux quelconques des angles d'un triangle , est égale à celle de deux quelconques des angles d'un autre triangle , l'autre angle du premier triangle sera égal à l'autre angle du dernier.*

Fig. 72. Si la somme des angles , par exemple A & B du triangle ABC * , est égale à celle des angles D & E du triangle DEF , l'autre angle C du premier triangle sera égal à l'autre angle F du dernier.

Démonst. Si de la somme de deux angles droits, on retranche celle des angles A & B, ou celle des angles D & E, le reste sera le même , puisque ces deux dernières sommes sont égales entr'elles (h) : or ce reste sera

l'angle C (n), si c'est la somme des angles N. 133.
 A & B que l'on retranche, & l'angle F (n), N. 133.
 si c'est celle des angles D & E; donc l'an-
 gle C est égal à l'angle F; donc C. Q.
 F. D.

COROLLAIRE IV.

136. Il suit aussi du premier Corollaire, que si l'angle formé par les côtés égaux d'un triangle isocèle, est droit; chacun des autres angles de ce triangle, sera égal à la moitié d'un angle droit.

Si l'angle B*, formé par les côtés égaux Fig. 73.
 BA & BC du triangle isocèle ABC est
 droit, chacun des autres angles A & C de
 ce triangle, sera égal à la moitié d'un angle
 droit.

Démonst. La somme des angles A, B & C, est égale à celle de deux angles droits (n): or l'angle B est droit (h); donc la N. 133.
 somme des angles A & C est aussi égale à un
 angle droit: mais ces angles A & C sont
 égaux entr'eux (n); donc ils sont égaux N. 83.
 chacun à la moitié d'un angle droit; donc
 C. Q. F. D.

COROLLAIRE V.

137. Il suit encore du premier Corol-
 laire, que chaque angle d'un triangle équi-
 lateral, est égal aux deux tiers d'un angle
 droit.

92 LES ELEMENS D'EUCLIDE ;

Démonst. La somme de tous les angles d'un triangle est égale à celle de deux angles droits (n) : or les angles d'un triangle équilatéral sont égaux entr'eux ; donc ils sont égaux chacun au tiers de la somme de deux angles droits ; & par conséquent aux deux tiers d'un angle droit ; donc C. Q. F. D.

COROLLAIRE VI.

138. Il suit enfin du premier Corollaire, que la somme de tous les angles d'une figure rectiligne quelconque, est égale à la somme d'autant de fois deux angles droits moins quatre, que cette figure a de côtés.

Fig. 74. La somme de tous les angles, par exemple d'un Pentagone ABCDE *, est égale à celle de cinq fois deux angles droits, moins quatre, c'est-à-dire à celle de six angles droits.

Const. D'un point F, pris à volonté dans le Pentagone ABCDE, tirés aux extrémités A, B, C, D & E de chacun de ses côtés, les lignes FA, FB, FC, FD & FE.

Démonst. Puisque le Polygone ABCDE a cinq côtés (h), les lignes FA, FB, FC &c. le divisent en cinq triangles FAB, FBC, FCD, &c : or la somme de tous les angles d'un triangle est égale à celle de deux angles droits (n) ; donc la somme de tous les angles des cinq triangles FAB, FBC,

FCD , &c. est égale à celle de cinq fois deux angles droits : mais la somme des angles de ces cinq triangles , surpasse celle de tous les angles du Polygone ABCDE, de la somme des angles qui ont leur sommet au point F , qui est égale à celle de quatre angles droits (n) ; donc si de la somme de N. 95. cinq fois deux angles droits , on retranche celle de quatre angles droits , le reste qui est la somme de six angles droits , sera égal à celle de tous les angles du Pentagone ABCDE ; donc C. Q. F. D.

U S A G E.

139. *On se sert de ce premier Corollaire, de la maniere suivante , pour connoître la valeur de l'un des angles B d'un triangle ABC* , dont on connoît celle de ses deux autres angles A & C.* Fig. 75.

De 180 degrés , somme de deux angles droits (n) , on retranche celle des angles connus A & C , & le reste est la valeur de l'angle B (n). Ainsi si l'angle A est , par exemple de 50 degrés , & l'angle C de 75 , on retranche 125 , somme des degrés des angles connus A & C , de 180 , & le reste 55 degrés est la valeur de l'angle B.



PROPOSITION XXXIII.

THEOREME.

140. Si deux des côtés d'un Quadrilatere sont égaux & paralleles entr'eux , ses deux autres le seront aussi.

Fig. 76. **S**I les côtés AB & DC du Quadrilatere ABCD *, sont égaux & paralleles entr'eux , ses autres côtés AD & BC le seront aussi.

Const. Tirés la Diagonale AC de ce Quadrilatere.

Demonst. Puisque les côtés AB & DC sont paralleles entr'eux (h) , les angles alternes BAC & DCA qu'ils forment avec la Diagonale AC sont égaux entr'eux (n) ; ainsi les triangles BAC & DCA ont l'angle BAC égal à l'angle DCA (d) , & les côtés AB & AC qui forment le premier , égaux aux côtés DC & AC qui forment le dernier , chacun à chacun , puisque AB est égal à DC (h) , & que AC est commun à ces deux triangles ; donc l'autre côté BC du premier triangle , est égal à l'autre côté AD du dernier , & l'angle ACB l'est à l'angle CAD (n) : or puisque ces angles ACB

N. 127.

N. 80.

& CAD qui sont alternes, sont égaux entr'eux, les côtés BC & AD qui les forment avec la Diagonale AC sont paralleles entr'eux (*n*); donc les côtés AD & BC du Quadrilatere ABCD, sont égaux & paralleles entr'eux; donc C. Q. F. D. N. 124

PROPOSITION XXXIV.

THEOREME.

141. *Les côtés opposés d'un Parallelogramme, sont égaux entr'eux.*

L Es côtés AB & DC du Parallelogramme ABCD * sont égaux entr'eux, & Fig. 74.
les côtés AD & BC le sont aussi.

Const. Tirés la Diagonale AC de ce Parallelogramme.

Demonst. Les angles BAC & DCA, sont égaux entr'eux (*n*), puisqu'ils sont alternes, & que les côtés AB & DC qui les forment avec la Diagonale AC, sont paralleles (*h*): les angles BCA & DAC sont aussi égaux entr'eux (*n*), puisqu'ils sont aussi N. 127.
alternes, & que les côtés BC & AD, qui les forment avec la Diagonale AC, sont paralleles (*h*); ainsi les triangles ABC & CDA ont le côté AC commun entr'eux,

96 LES ELEMENTS D'EUCLIDE.

& les angles BAC & BCA qui sont aux extrémités de ce côté AC du premier triangle, sont égaux aux angles DCA & DAC, qui sont aux extrémités de ce même côté AC du dernier; donc les autres côtés AB & BC du premier triangle, sont égaux aux autres côtés DC & AD du dernier, chacun à chacun (*n*); & par conséquent le côté AB est égal au côté DC, & le côté AD au côté BC; donc C. Q. F. D.

N. 119.

COROLLAIRE I.

142. Il suit de la Démonstration de ce Théorème, que les angles opposés d'un Parallelogramme, sont égaux entr'eux.

Fig. 76. Les angles DAB & BCD du Parallelogramme ABCD*, sont égaux entr'eux, & les angles B & D le sont aussi.

DEMONSTRATION.

Premierement. L'angle DAB est la somme des angles BAC & DAC, & l'angle BCD est celle des angles DCA & BCA: or l'angle BAC est égal à l'angle DCA, & l'angle DAC l'est à l'angle BCA (*d*); donc les parties de l'angle DAB sont égales à celles de l'angle BCD, chacune à chacune; & par conséquent l'angle DAB est égal à l'angle BCD.

Secondement. Les triangles ABC & CDA

CDA ont le côté AC commun entr'eux, & les angles BAC & BCA qui sont aux extrémités de ce côté AC du premier triangle, sont égaux aux angles DCA & DAC, qui sont aux extrémités de ce même côté AC du dernier (*d*) ; donc l'autre angle B du premier triangle, est égal à l'autre angle D du dernier (*n*) ; donc C. Q. F. D. N. 119.

COROLLAIRE II.

143. Il suit encore de la démonstration de ce Théorème, que *la Diagonale d'un Parallelogramme, le divise en deux parties égales entr'elles.*

La Diagonale AC du Parallelogramme ABCD *, le divise en deux parties ABC Fig. 76. & CDA, qui sont égales entr'elles.

Démonst. Les parties ABC & CDA du Parallelogramme ABCD, sont les triangles ABC & CDA : or les surfaces de ces triangles sont égales entr'elles (*n*), puis- N. 119. que ces triangles ont un côté AC commun entr'eux, & que les angles BAC, &c, donc C. Q. F. D.



PROPOSITION XXXV.

THEOREME.

144. Les Surfaces des Parallelogrammes qui ont une même Base , § & sont renfermés entre les mêmes paralleles , sont égales entr'elles.

Fig. 77. **L** Es surfaces des Parallelogrammes ABCD & EFCD* , qui ont une même base DC , & sont renfermés entre les mêmes paralleles DC & AF , sont égales entr'elles.

Démonst. Les lignes AB & DC sont
 N. 141. égales entr'elles (n) , puisqu'elles sont côtés opposés du Parallelogramme ABCD : or les lignes DC & EF sont aussi égales en-
 N. 141. tr'elles (n) , puisqu'elles sont côtés opposés du Parallelogramme EFCD ; donc les lignes AB & EF sont égales entr'elles ; & par conséquent si l'on ajoute la ligne BE à l'une & à l'autre , la somme ABE de AB & de BE , sera égale à la somme BEF de
 N. 63. BE & de EF (n) . Les lignes AD & BC
 N. 141. sont aussi égales entr'elles (n) , puisqu'elles

§ La Base d'une figure , est le côté de cette figure , sur lequel on suppose qu'elle est posée ,

sont côtés opposés du Parallelogramme ABCD ; & les lignes DE & CF sont égales entr'elles (n), puisqu'elles sont côtés opposés du Parallelogramme EFCD. Or puisque la ligne ABE est égale à la ligne BEF (d), que la ligne AD l'est à la ligne BC (d), & que la ligne DE l'est à la ligne CF (d), les côtés du triangle DAE sont égaux à ceux du triangle CBF, chacun à chacun ; & par conséquent le triangle DAE est égal au triangle CBF (n) ; ainsi, N. 37. si de chacun de ces triangles on retranche le triangle GBE qui leur est commun, les restes qui seront les Trapezes DABG & CGEF, seront égaux entr'eux (n) ; & par conséquent si l'on ajoute le triangle DGC à chacun de ces Trapezes, les sommes qui seront les surfaces des Parallelogrammes ABCD & EFCD, seront égales entr'elles (n) ; donc C. Q. F. D. N. 63.

S C H O L I E.

145. Comme la maniere de mesurer la surface d'un Parallelogramme, & par conséquent celle d'une figure quelconque, dont le rapport à la surface d'un Parallelogramme est connu, est fondée sur ce Théorème, il est à propos d'expliquer ce que l'on doit entendre par Mesure, & la maniere

de s'en servir , avant que de donner l'usage de cette Proposition.

DES MESURES.

Mesurer une étendue , C'est considérer en combien on peut la diviser de parties , égales chacune à une certaine étendue de convention , que l'on nomme en général Mesure : or comme chaque partie d'une étendue , ne peut être égale qu'à une étendue de même genre qu'elle , il doit y avoir trois genres de mesures , puisqu'il y a trois genres d'étendues.

Le premier genre des Mesures renferme celles qui servent à mesurer les lignes. Ces mesures sont des lignes , puisque chaque partie d'une ligne , ne peut être égale qu'à une ligne ; & elles sont droites , parce que l'on ne mesure immédiatement que les lignes droites. Il y en a de différentes grandeurs , & elles ont chacune un nom différent : mais on les nomme en général , Mesures-courantes , ou Mesures-linéaires.

Le second genre des Mesures renferme celles qui servent à mesurer les surfaces. Ces Mesures sont des surfaces , puisque chaque partie d'une surface , ne peut être égale qu'à une surface ; elles sont des Plans , parce que l'on ne mesure immédiatement que

des surfaces-planes ; & elles sont quarrées , parce que la longueur & la largeur d'un Quarré étant égales entr'elles , cette figure mesure également & en même tems les deux dimensions d'une surface. Enfin il y en a de différentes grandeurs , & elles ont chacune un nom particulier : mais on les nomme en general , Mesures-quarrées , ou Mesures-superficielles.

Le dernier genre des Mesures renferme celles qui servent à mesurer les solides. Ces mesures sont des solides , puisque chaque partie d'un solide , ne peut être égale qu'à un solide ; elles sont Cubiques , parce que la longueur , la largeur & l'épaisseur d'un Cube § étant égales entr'elles , cette figure mesure également & en même tems les trois dimensions d'un solide. Enfin il y en a de différentes grandeurs , & elles ont chacune un nom en particulier : mais on les nomme en générale , Mesures-cubiques , ou Mesures-solides.

DU MESURAGE ou DE LA MANIERE de se servir des Mesures.

Il n'y a que la ligne droite qui puisse se diviser en lignes droites , le Rectangle en Quarrés , & un certain solide nommé Pa-

§ Le Cube est un solide qui a la figure d'un Dez à joier : il en est traité au onzième Livre.

rallelepipedes-rectangle , dont il est parlé
 au 11^e Livre , en Cubes ; ainsi puisque la
 Mesure des lignes est une ligne droite ,
 celle des surfaces un Quarré , & celle des
 solides un Cube , lorsqu'il s'agit d'un mesu-
 rage actuel , on ne peut operer immédiate-
 ment que sur ces trois especes d'étendues ;
 & par conséquent on ne peut connoître la
 valeur des autres que par le rapport qu'elles
 ont à quelques-unes de ces premières. C'est
 pourquoi la Géométrie dont la fin principale
 est de mesurer l'étendue , ne s'occupe qu'à
 chercher le rapport qu'une ligne-courbe peut
 avoir à une certaine ligne droite , celui
 qu'une surface peut avoir à celle d'un Rec-
 tangle , ou à celle d'une figure dont le rap-
 port à la surface d'un Rectangle est connu ,
 & celui qu'un solide peut avoir à un Pa-
 rallelepipedes-rectangle , ou à un solide dont
 le rapport à ce Parallelepipedes est aussi con-
 nu ; & lorsqu'elle a trouvé ce rapport , elle
 l'annonce en disant que telle courbe est rec-
 tifiée , que telle surface est quarrée , & que
 tel solide est cubé.

Puisque l'on ne mesure immédiatement
 que la ligne droite , le Rectangle , & le Pa-
 rallelepipedes , on saura la maniere de se ser-
 vir des Mesures , lorsque l'on saura celle de
 mesurer ces trois différentes étendues ;
 ainsi

Premierement. Pour mesurer une ligne-droite, c'est-à-dire considerer combien de fois une ligne-droite en contient une autre que l'on prend pour Mesure, on applique successivement cette Mesure sur cette ligne, & autant de fois que l'on peut l'y appliquer, autant de fois cette ligne contient cette Mesure; puisque cette ligne peut être divisée en autant de parties égales entr'elles, que cette Mesure peut lui être appliquée de fois.

Secondement. Pour mesurer un Rectangle, c'est-à-dire considerer combien de fois il contient un certain Quarré que l'on prend pour Mesure, il faudroit appliquer successivement ce Quarré sur ce Rectangle, & autant de fois que l'on pourroit l'y appliquer, autant de fois ce Rectangle contiendrait cette Mesure; puisque l'on pourroit le diviser en autant de parties égales entr'elles, que cette Mesure pourroit lui être appliquée de fois: mais il n'est point praticable de porter facilement une surface quarrée, ni de l'appliquer successivement sur toute celle d'un rectangle; ainsi il faut résoudre ce Problème, sans se servir d'une surface pour Mesure actuelle. Or voici la maniere de le faire.

Supposés que l'on veuille mesurer la surface du Rectangle ABCD*, & que le Quarré M soit la Mesure dont on veut se servir.

Fig. 78.

104 LES ELEMENS D'EUCLIDE ;

On commence par considerer en combien de Rectangles on pourroit diviser le Rectangle $ABCD$, tels qu'ils ayent chacun une largeur égale à celle de la Mesure M . Or pour le savoir, on prend une Mesure courante égale au côté NO de cette Mesure M , & l'on considere combien de fois cette Mesure courante est contenue dans la largeur DC de ce Rectangle $ABCD$; car il est évident que ce Rectangle peut être divisé en autant de Rectangles qui ayent chacun une largeur égale à cette Mesure, que cette Mesure est contenue de fois dans la largeur DC de ce Rectangle; & qu'ainsi si cette Mesure y est contenue, par exemple trois fois, on peut diviser ce Rectangle en trois Rectangles $AEFD$, $EGHF$ & $GBCH$ qui auront chacun une largeur égale à cette Mesure courante, & par conséquent à la largeur de la Mesure M .

Tous ces Rectangles en lesquels on peut diviser le Rectangle $ABCD$ selon la largeur, ont chacun la même que la Mesure M ; ainsi il ne s'agit plus que de considerer en combien d'autres Rectangles qui ayent chacun une même longueur que cette mesure M , on peut les diviser. Or pour le savoir, on considere combien de fois la Mesure courante égale à un côté NO de cette mesure M , est contenue dans la longueur

DA du Rectangle *ABCD*; car il est évident que chacun de ces Rectangles dans lesquels on peut diviser le Rectangle *ABCD*, selon la largeur, peut être divisé lui-même en autant de Rectangles qui ayent chacun une longueur égale à cette Mesure courante, que cette Mesure est contenue de fois dans la longueur *DA* du Rectangle *ABCD*; & qu'ainsi si cette Mesure y est contenue, par exemple quatre fois, on peut diviser chacun des Rectangles *AEFD*; *EGHF* & *GBCH* en quatre Rectangles *ILFD*, &c. qui auront chacun une longueur égale à cette Mesure courante, & par conséquent à la longueur de la Mesure *M*.

Ainsi, puisqu'en mesurant la largeur *DC* d'un Rectangle *ABCD*, avec une Mesure courante égale à un côté *NO* d'une Mesure-quarrée quelconque *M*, on sait combien ce Rectangle contient d'autres Rectangles qui ont chacun une largeur égale à cette Mesure *M*, & qu'en mesurant la longueur de ce même Rectangle *ABCD*, avec cette même Mesure courante, on sait combien chacun de ces rectangles qu'il contient, en contiennent d'autres, qui ayant chacun la même largeur que la Mesure *M*, ont aussi la même longueur, on connoît le nombre de parties égales chacune à la Mesure *M* que contient le Rectangle *ABCD*; & par con-

106. LES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE ;
séquent ce Rectangle est mesuré.

On peut donc poser la Règle suivante pour celle du mesurage des Rectangles.

Prenés une Mesure courante égale au côté de la Mesure quarrée dont vous voulés vous servir : considérés combien de fois cette Mesure courante est contenue dans la largeur du Rectangle que vous voulés mesurer , & combien de fois elle l'est dans sa longueur : multipliés le nombre qui exprime combien de fois cette Mesure est contenue dans cette largeur , par celui qui exprime combien de fois elle l'est dans cette longueur & le produit exprimera combien de fois la Mesure quarrée dont vous vous servés , est contenue dans ce Rectangle.

Pour expliquer plus facilement la maniere de mesurer un Rectangle , on a supposé que la Mesure-courante dont on se servoit , étoit contenue précisément dans sa longueur & dans sa largeur : mais si elle ne l'étoit pas, il est facile de voir que la règle seroit toujours la même , puisqu'il ne s'agiroit que d'operer sur des nombres fractionnaires , au lieu d'operer sur des nombres entiers.

Troisièmement. *A l'égard de la maniere de mesurer un Parallelepipedé , on n'en parlera qu'au onzième Livre , où l'on considère ce solide.*

USAGES.

146. Premièrement. On se sert de ce Théorème de la manière suivante, pour faire un Rectangle égal à un Parallelogramme quelconque $ABCD$ *.

Fig. 792

De chaque extrémité de l'un des côtés de ce Parallelogramme, par exemple des extrémités D & C de son côté DC , on élève des perpendiculaires DE & CF à ce côté (n). On prolonge le côté AB de ce Parallelogramme, oppose au côté DC , jusqu'à ce qu'il rencontre, l'une en E & l'autre en F , les perpendiculaires DE & CF prolongées aussi s'il est nécessaire, & le Quadrilatere $EFCD$ que ces perpendiculaires forment avec le côté DC du Parallelogramme $ABCD$, & le prolongement EF de son côté AB , est rectangle, & égal à ce Parallelogramme. N. 92.

Démonst. Les côtés opposés EF & DC du Quadrilatere $EFCD$ sont paralleles, puisque le côté EF est le prolongement du côté AB qui est parallele au côté DC (n) : N. 57. les autres côtés opposés ED & FC de ce même Quadrilatere sont aussi paralleles (n), N. 1263 car puisqu'ils sont perpendiculaires chacun au côté DC , ils forment avec lui, & du même côté, des angles intérieurs EDC & FCD dont la somme est égale à celle de

- N. 20. deux angles droits (n). Ainsi puisque les côtés opposés du Quadrilatère EFCD sont parallèles, ce Quadrilatère est un Parallelogramme (n); & par conséquent il est rectangle (n), puisque ces angles EDC & FCD étant droits chacun (c), ses autres angles EFC & DEF qui leurs sont opposés chacun à chacun, sont aussi droits chacun (n); & il est égal au Parallelogramme ABCD (n), puisque l'un & l'autre ont une même base DC, & sont renfermés entre les mêmes parallèles EB & DC (c); donc C. Q. F. F.

147. Secondement. On se sert de ce Théorème & de cette Scholie, de la manière suivante, pour mesurer la surface d'un Parallelogramme quelconque.

Le Parallelogramme qu'il faut mesurer est rectangle, ou ne l'est pas. S'il est rectangle, comme l'est par exemple le Parallelogramme ABCD*, on le mesure de la manière que cette Scholie enseigne à le faire.

S'il n'est pas rectangle, comme ne l'est point par exemple le Parallelogramme ABCD*, alors de l'une des extrémités de l'un de ses côtés, par exemple de l'extrémité C de son côté DC, on élève une perpendiculaire CF à ce côté (n), & l'on prolonge cette perpendiculaire, jusqu'à ce qu'elle rencontre en un point F le côté AB de ce Parallelo-

gramme , opposé au côté BC , & prolongé aussi s'il est nécessaire ; afin d'avoir par cette perpendiculaire , la longueur CF du Parallelogramme $EFCD$, rectangle (c) & égal au Parallelogramme $ABCD$ (n), puis-
 que l'un & l'autre ont la même base DC ,
 & sont renfermés entre les mêmes parallèles DC & EB . Or puisque le Rectangle $EFCD$ est égal au Parallelogramme $ABCD$; si l'on multiplie le nombre de Mesures que contient la longueur CF de ce Rectangle , par le nombre de Mesures que contient sa largeur DC , le produit qui sera la valeur de la surface de ce Rectangle , comme cette Scholie la démontré , sera également la valeur de la surface du Parallelogramme $ABCD$; & par conséquent ce Parallelogramme est mesuré. N. 144.



PROPOSITION XXXVI.

THEOREME.

148. Les Surfaces des Parallelogrammes qui ont des bases égales entr'elles & sont renfermés entre les mêmes paralleles, sont égales entr'elles.

Fig. 10. **L** Es surfaces des Parallelogrammes ABCD & EFGH * qui ont des bases DC & HG égales entr'elles, & sont renfermés entre les mêmes paralleles AF & DG, sont égales entr'elles.

Const. Du point D tirés au point E la ligne DE, & du point C au point F, la ligne CF.

N. 62. Démonst. Les côtés EF & DC du Quadrilatre EFDC sont égaux entr'eux (n), puisque les côtés EF & HG qui sont côtés opposés du Parallelogramme EFGH, sont
N. 141. égaux entr'eux (n), & que le côté HG est égal au côté DC (h). Ces côtés EF & DC sont aussi paralleles, puisque les lignes AF & DG dont ils sont des parties, chacun de chacune, sont paralleles (h). Ainsi puisque les côtés EF & DC du quadrilatre EFCD sont égaux & paralleles entr'eux, ses autres
N. 140. côtés ED & FC sont aussi paralleles (n); &

par conséquent ce Quadrilatere est un Parallelogramme (n). Or puisque ce Quadrilatere EFCD est un Parallelogramme, le Parallelogramme ABCD lui est égal (n), puisque l'un & l'autre ont la même base DC, & sont renfermés entre les mêmes paralleles AF & DG ; & le Parallelogramme EFGH lui est aussi égal (n), puisque l'un & l'autre ont aussi la même base EF, & sont aussi renfermés entre les mêmes paralleles AF & DG ; ainsi les Parallelogrammes ABCD & EFGH sont égaux chacun au même Parallelogramme EFCD, & par conséquent ils sont égaux entr'eux (n) ; donc C. Q. F. D.

PROPOSITION XXXVII.

THEOREME.

149. Les Surfaces des Triangles qui ont la même base, & sont renfermés entre les mêmes paralleles, sont égales entr'elles.

Les surfaces des triangles ABC & ADC *, qui ont la même base AC, & sont renfermés entre les mêmes paralleles AC & EF, sont égales entr'elles. Fig. 81.

Const. Tirés par le point A, une parallele AE au côté CB du triangle ABC, ou

112 LES ELEMENTS D'EUCLIDE,

- N. 130. au côté CD du triangle ADC (*n*), (ce qui est à volonté) : tirés par le point C, un parallèle CF au côté AD du triangle ADC
 N. 130. ou au côté AB du triangle ABC (*n*), suivant que vous aurez tiré la ligne précédente AE, parallèle à CB ou à CD : prolongés la ligne BD, s'il est nécessaire, jusqu'à ce qu'elle rencontre les lignes AE & CF, l'une en E & l'autre en F.

- Démonst.* Le Quadrilatere EBCA est un
 N. 57. Parallelogramme (*n*), puisque ses côtés EB & AC sont parallèles (*h*), & que ses autres côtés EA & BC le sont aussi (*c*) : le Quadrilatere DFCA est aussi un Parallelogramme (*n*), puisque ses côtés DF & AC sont parallèles (*h*), & que ses côtés DA & FC le sont aussi (*c*) : or puisque ces Quadrilatères EBCA & DFCA sont des Parallelogrammes (*d*), ont la même base AC (*c*), & sont renfermés entre les mêmes parallèles AC & EF (*h*), ils sont égaux entr'eux
 N. 144. (*n*) ; & par conséquent les triangles ABC & ADC qui sont chacun la moitié de l'un
 N. 143. de ces Parallelogrammes (*n*), sont égaux entr'eux ; donc C. Q. F. D.

U S A G E S.

150. Premièrement. On se sert de cette Proposition de la manière suivante, pour faire

faire un Triangle-rectangle égal à un Triangle quelconque ABC^* .

Fig. 82.

Par le sommet de l'un des angles de ce triangle, par exemple par le sommet B de l'angle B on tire une parallèle BD au côté AC de ce triangle, qui est opposé à cet angle B (n). De l'une des extrémités de ce côté AC , par exemple de son extrémité A , on leve à ce côté (n) une perpendiculaire AD , qui rencontre en un point D , la parallèle BD prolongée s'il est nécessaire. Du point D on tire au point C la ligne DC , & le triangle ADC qu'elle forme avec la perpendiculaire AD & le côté AC du triangle ABC , est rectangle en A (c), & égal au triangle ABC (n), puisque l'un & l'autre ont la même base AC (c), & sont renfermés entre les mêmes parallèles AC & DB (c); donc $C. Q. F. F.$

N. 130.

N. 97.

N. 149.

LD. 36

151. Secondement. On se sert de cette Proposition, de la manière suivante, pour faire un triangle égal à un autre triangle quelconque ABC^* , & qui soit renfermé entre deux parallèles quelconques AC & EF .

Fig. 83.

& 84.

LD. 37

Du point D auquel l'un des côtés du triangle ABC , par exemple le côté AB prolongé s'il est nécessaire, rencontre la parallèle EF , on tire à l'extrémité C de l'autre côté BC de ce triangle, une ligne DC . Par le

K

114 LES ELEMENS D'EUCLIDE ;

sommet B de l'angle B formé par ces deux côtés AB & BC, on tire une ligne BG pa-

- N. 130. rallele à cette ligne DC (n), & qui rencontre en un point G le côté AC de ce même triangle, prolongé s'il est nécessaire. Enfin du point D au point G on tire une ligne DG, & le triangle ADG qui est renfermé entre les paralleles AC & EF (c), est égal au triangle ABC.

Dém. 1°. Lorsque la ligne EF ne coupe que le prolongement des côtés du triangle

Fig. 33. ABC *. Les triangles GBD & GBC sont

- N. 149. égaux entr'eux (n), puisqu'ils ont la même base BG, & sont renfermés entre les mêmes paralleles BG & DC (c); ainsi si l'on ajoute le même triangle ABG au triangle GBD & au triangle GBC, la somme des triangles ABG & GBD, sera égale à celle des triangles ABG & GBC (n): or le triangle ADG est la somme des triangles ABG & GBD, & le triangle ABC est celle des triangles ABG & GBC; donc le triangle ADG est égal au triangle ABC.

M. 63.

2°. Lorsque la ligne EF coupe les côtés du triangle ABC *. Les triangles CDB &

- Fig. 34. CDG sont égaux entr'eux (n), puisqu'ils ont la même base CD, & sont renfermés entre les mêmes paralleles DC & BG (c); ainsi, si l'on ajoute le même triangle ADG au triangle CDB & au triangle CDG, la

N. 149.

somme des triangles ADC & CDB , sera égale à celle des triangles ADC & CDG (n) : or le triangle ADG est la somme des triangles ADC & CDG , & le triangle ABC est celle des triangles ADC & CDB ; donc le triangle ADG est égal au triangle ABC ; donc C. Q. F. F.

PROPOSITION XXXVIII.

THEOREME.

152. Les Surfaces des Triangles qui ont des bases égales entr'elles, & sont renfermés entre les mêmes parallèles, sont égales entr'elles.

Les surfaces des triangles ABC & DEF * qui ont des bases AC & DF Fig. 85+ égales entr'elles, & qui sont renfermés entre les mêmes parallèles GH & AF , sont égales entr'elles.

Const. Tirés par le point A , une parallèle AG au côté CB du triangle ABC , & par le point F , un parallèle FH au côté DE du triangle DEF (n) : prolongés la ligne GH , s'il est nécessaire, jusqu'à ce qu'elle rencontre les lignes AG & FH , l'une en G & l'autre en H . N. 130.

116 LES ELEMENTS D'EUCLIDE ;

Démonst. Le Quadrilatere $GBCA$ est

- N. 57. Parallelogramme (n), puisque ses côtés G
& AC sont paralleles (h), & que ses côtés
 GA & BC le sont aussi (c) : le Quadrilate
N. 57. re $EHFD$ est aussi un Parallelogramme (n)
puisque ses côtés EH & DF sont paralleles
(h), & que ses côtés ED & HF le sont
aussi (c) : or puisque ces Quadrilateres
 $GBCA$ & $EHFD$ sont des Parallelogram
mes (d), ont des bases AC & DF égales
entr'elles (h) & sont renfermés entre les
mêmes paralleles GH & AF (h), ils sont
N. 148. égaux entr'eux (n) ; & par conséquent les
triangles ABC & DEF qui sont chacun la
moitié de l'un de ces Parallelogrammes
N. 143. (n), sont aussi égaux entr'eux (n) ; donc
N. 68. C. Q. F. D.

SCHOLIE.

*Il est indifférent de tirer par le point A ,
la ligne AG parallele à CB , ou de la tirer
par le point C , parallele à AB . Il en est de
même de la ligne FH .*



PROPOSITION XXXIX.

THEOREME.

153. *Les triangles qui ont la même base , dont les angles opposés à cette base sont chacun vers un même côté par rapport à elle , & dont les surfaces sont égales entr'elles , sont renfermés entre les mêmes parallèles.*

SI les surfaces des triangles ABC & ADC*, qui ont la même base AC , & dont les angles B & D qui lui sont opposés sont vers le même côté par rapport à elle , sont égales entr'elles , la ligne droite BD tirée par les sommets B & D de ces angles , fera parallèle à la base AC de ces triangles. Fig. 28.

Const. Prolongés à volonté vers E l'un des côtés du triangle ADC , par exemple son côté AD : du point B , tirés aux points F & E pris à volonté sur la ligne AE , l'un au-dessous du point D & l'autre au-dessus , les lignes BF & BE : du point C tirés aux mêmes points F & E , les lignes CF & CE.

Démonst. Si la ligne BD qui passe par

118 LES ELEMENS D'EUCLIDE ;

les points B & D, n'étoit point parallèle au côté AC, la ligne qui seroit tirée par le point B parallèlement à ce côté, passeroit au-dessous du point D vers F, ou au-dessus vers E. Or si elle passoit au-dessous & étoit par exemple la ligne BF, les surfaces des triangles ABC & AFC seroient égales entr'elles (n), puisque ces triangles qui ont la même base AC, seroient renfermés entre les mêmes parallèles AC & BF (h) : mais les surfaces de ces triangles ne sont point égales entr'elles, puisque celles des triangles ABC & ADC le sont (h), & que le triangle AFC est moins grand que le triangle ADC (n) : donc les lignes AC & BF ne sont point parallèles ; & par conséquent la ligne tirée par le point B parallèlement au côté AC ne passe point au-dessous du point D. On démontre de la même manière qu'elle ne passe point au-dessus ; donc elle passe par le point D ; & par conséquent la ligne BD tirée par les points B & D, est parallèle au côté AC ; donc C. Q. F. D.



PROPOSITION XL.

THEOREME.

154. Les Triangles qui ont leurs bases égales entr'elles, & posées chacune sur une même ligne droite, dont les angles opposés à ces bases, chacun à chacune, sont chacun vers un même côté par rapport à elles, & dont les surfaces sont aussi égales entr'elles, sont renfermées entre les mêmes parallèles.

SI les surfaces des triangles ABC & DEF * qui ont leurs bases AC & DF Fig. 87. égales entr'elles & posées chacune sur la même ligne AF, & les angles B & E opposés à ces bases, chacun à chacune, dirigés chacun vers un même côté par rapport à elles, si dis-je, les surfaces de ces triangles sont égales entr'elles, la ligne droite BE tirée par les sommets B & E de ces angles, sera parallèle à cette ligne AF sur laquelle les bases de ces triangles sont posées.

Cons. Prolongés à volonté vers H l'un des côtés du triangle DEF; par exemple son côté DE: du point B, tirés aux points G & H pris à volonté sur la ligne DH, l'un

120 LES ELEMENS D'EUCLIDE ;

au-deffous du point E & l'autre au-deffus les lignes BG & BH : du point F tirés aux mêmes points G & H les lignes FG & FH.

Démonst. Si la ligne BE qui passe par le points B & E n'étoit point parallele à la ligne AF, celle qui seroit tirée par le point B parallelement à cette ligne, passeroit au-deffous du point E vers G, ou au-deffus vers H. Or si elle passoit au-deffous, & étoit par exemple la ligne BG, les surfaces des triangles ABC & DGF seroient égales

N. 152. entr'elles (*n*), puisque ces triangles qui ont leurs bases AC & DF égales entr'elles (*h*), seroient renfermés entre les mêmes paralleles AF & BG (*h*): mais les surfaces de ces triangles ne sont point égales entr'elles, puisque celles des triangles ABC & DEF le sont (*h*), & que le triangle DGF est

N. 72. moins grand que le triangle DEF (*n*); donc les lignes AF & BG ne sont point paralleles; & par conséquent la ligne tirée par le point B parallelement à la ligne AF, ne passe point au-deffous du point E. On démontre de la même maniere qu'elle ne passe point au-deffus; donc elle passe par le point E; & par conséquent la ligne BE qui passe par les points B & E est parallele à la ligne AF; donc C. Q. F. D.

PROPOS.

PROPOSITION XLI.

THEOREME.

155. Si un Parallelogramme & un Triangle ont une même base , & sont renfermés entre les mêmes paralleles , la surface du Parallelogramme sera double de celle du Triangle.

LA surface du Parallelogramme ABCD* qui a la même base DC, & est renfermé entre les mêmes paralleles AE & DC que le triangle DEC, est double de celle de ce triangle. Fig. 22.

Const. Tirés une Diagonale quelconque AC de ce Parallelogramme.

Démonst. La surface du Parallelogramme ABCD est double de celle du triangle DAC (*n*), puisque ce triangle est une des parties de ce Parallelogramme divisé par sa diagonale AC: or la surface du triangle DAC est égale à celle du triangle DEC (*n*), puisque ces triangles ont la même base DC & sont renfermés entre les mêmes paralleles DC & AE (*h*); donc la surface du Parallelogramme ABCD est double de celle du triangle DEC; donc C.Q.F.D.

L

USAGE.

156. On se sert de cette Proposition de la manière suivante , pour mesurer la surface d'un triangle quelconque *ABC* *.

- Fig. 89. On prolonge s'il est nécessaire un des côtés de ce triangle , par exemple son côté *AC*. Du sommet *B* de l'angle opposé à ce côté , on lui abaisse une perpendiculaire *BD* (n) ; afin d'avoir par cette perpendiculaire , la longueur du Parallelogramme *BEFD* , rectangle (c) , & égal au Parallelogramme *BECA* (n) dont la surface est double de celle de ce triangle (n). On mesure cette perpendiculaire *BD*. On mesure aussi le côté *AC* qu'elle rencontre , afin d'avoir aussi la largeur *BE* de ce même rectangle *BEFD* , qui est égale à ce côté *AC* (n) , puisque les lignes *AC* & *BE* sont côtés opposés du Parallelogramme *BECA*. On multiplie le nombre de mesures que contient cette perpendiculaire *BD* , par le nombre de mesures que contient ce côté *AC* , & le produit qui est la valeur de la surface du rectangle *BEFD* (n) , égale à celle du Parallelogramme *BECA* (n) , est double de la valeur de la surface du triangle *ABC* (n) ; & par conséquent la moitié de ce produit , est la valeur de cette surface. Ainsi la

Règle du mesurage des triangles est la suivante.

157. Prolongés s'il est nécessaire un des côtés du triangle qu'il faut mesurer. De l'angle opposé à ce côté abaissez-lui une perpendiculaire. Mesurez cette perpendiculaire, mesurez aussi ce côté. Multipliez le nombre de mesures que contient cette perpendiculaire, par le nombre de mesures que contient ce côté. Prenez la moitié du produit qui résulte de cette multiplication, & cette moitié sera la valeur de la surface du triangle qu'il falloit mesurer.

SCHOLIE.

158. Lorsque l'on fait la manière de mesurer la surface d'un triangle, on sait aussi la manière de mesurer celle d'une figure rectiligne quelconque *ABCDE**; puisqu'il n'y a qu'à réduire cette figure en triangles *DAB*, *DBC*, & *DEA*, par des lignes *DA* & *DB* tirées de quelques-uns des angles de cette figure à chacun de ses autres angles: mesurer séparément la surface de chacun de ces triangles, & additionner les valeurs de ces surfaces; & que la somme sera la valeur de la surface de cette figure.

Fig. 90.

PROPOSITION XLII.

PROBLEME.

159. *Décrire un Parallelogramme dont la surface soit égale à celle d'un triangle donné, & qui ait un angle égal à un angle donné.*

IL faut décrire un Parallelogramme dont la surface soit égale à celle du triangle ABC *, & qui ait un angle égal à l'angle

Fig. 91. D.

Const. Par le sommet B de l'un des angles du triangle ABC, tirés une parallèle BE au côté AC de ce triangle, qui est opposé à cet angle (n) : de l'une des extrémités de ce côté, par exemple de son extrémité C, tirés une ligne CE qui forme avec ce côté un angle ECA égal à l'angle D (n), & qui rencontre en un point E la parallèle BE : divisez ce côté en deux parties FA & FC égales entr'elles (n) : par le point F milieu de ce côté tirés une ligne FG parallèle à la ligne CE & qui rencontre aussi en un point G la parallèle BE. Le quadrilatere GE CF fera un Parallelogramme égal au triangle ABC, & ce Parallelogramme aura un angle ECF égal à l'angle D.

Pour la démonstration. Tirés du point
B au point F la ligne BF.

Démonst. Le Quadrilatere GE^{CF} est un
Parallelogramme (*n*) , puisque ses côtés N. 57.
GE & FC sont paralleles (*c*) , & que ses
côtés GF & EC le sont aussi (*c*) ; ainsi il
est double du triangle FBC (*n*) , puisque N. 155.
l'un & l'autre ont la même base FC , & sont
renfermés entre les mêmes paralleles AC
& BE (*c*) : or le triangle ABC est aussi
double du même triangle FBC , puisque
les triangles ABF & FBC qui ont des
bases AF & FC égales entr'elles (*c*) , &
sont renfermés entre les mêmes paralleles
AC & BE (*c*) , sont égaux entr'eux (*n*) , N. 148.
& que le triangle ABC est la somme de
ces triangles ; donc le Quadrilatere GE-
CF est égal au triangle ABC (*n*). Ainsi N. 67.
le Quadrilatere GE^{CF} est un Parallelo-
gramme (*d*) , sa surface est égale à cel-
le du triangle ABC (*d*) , & il a l'angle
ECF égal à l'angle D (*c*) ; donc C. Q.
F. F.

SCHOLIE.

160. Si au contraire il faut décrire un
triangle tel que sa surface soit égale à celle
d'un Parallelogramme ABCD * & que l'un Fig. 92.
de ses angles soit égal à un angle G : alors
on prolonge l'un des côtés de ce Parallelo-

126 LES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE,

gramme, par exemple le côté DC, jusqu'à ce que son prolongement CF lui soit égal : de l'une des extrémités de la ligne DF, par exemple de son extrémité D, on tire une ligne DE qui forme avec cette ligne DF un angle EDF égal à l'angle G (n), & rencontre en un point E le côté AB opposé à cette même ligne DF, prolongé autant qu'il est nécessaire : du point E on tire au point F la ligne EF, & la surface du triangle DEF formé par les lignes DE, EF & DF, & dont l'angle EDF est égal à l'angle G (c), est égale à celle du Parallelogramme ABCD ; puisque si l'on tire du point E au point C la ligne EC, on démontrera de la même manière qu'on la fait ci-dessus, que le Parallelogramme ABCD & le triangle DEF sont chacun doubles du triangle DEC, & par conséquent égaux entr'eux (n).

N. 115.

N. 67.

PROPOSITION XLIII.

THEOREME.

161. Les Surfaces des Complémens d'un Parallelogramme sont égales entr'elles.

Fig. 93. **L** Es surfaces des complémens EFID & GBHF * du Parallelogramme

ABCD , sont égales entr'elles.

Démonst. Les triangles DAC & CAB sont égaux entr'eux , puisqu'ils sont chacun la moitié du Parallelogramme ABCD (n) , & les triangles EAF & FAG ^{N. 1436} sont aussi égaux entr'eux , puisqu'ils sont aussi chacun la moitié du Parallelogramme AGFE (n) ; ainsi si l'on retranche ^{N. 1434} le triangle EAF du triangle DAC , & le triangle FAG du triangle CAB , les restes qui seront les trapezes EFCD & GBCF , seront égaux entr'eux (n) : or ^{N. 641} les triangles IFC & CFH sont aussi égaux entr'eux puisqu'ils sont chacun la moitié du Parallelogramme FHCI (n) ; ^{N. 1431} donc si l'on retranche le triangle IFC du trapeze EFCD , & le triangle CFH du trapeze GBCF , les restes qui seront les complémens EFID & GBHF du Parallelogramme ABCD , seront égaux entr'eux (n) ; donc C. Q. F. D. ^{N. 641}



PROPOSITION XLIV.

PROBLEME.

162. *Décrire sur une ligne droite donnée , un Parallelogramme tel que sa surface soit égale à celle d'un triangle donné , & que l'un de ses angles soit égal à un angle donné.*

Fig. 94. **I**L faut décrire sur la ligne AB* un Parallelogramme tel que sa surface soit égale à celle du triangle C , & que l'un de ses angles soit égal à l'angle D.

Const. Prolongés la ligne AB jusqu'à ce que son prolongement BE soit égal à l'un des côtés du triangle C : décrivés sur ce prolongement un triangle BFE qui ait ses côtés égaux à ceux de ce triangle C , cha-

N. 112. cun à chacun (*n*) : décrivés un Parallelogramme GHIB dont la surface soit égale à celle du triangle BFE , & dont l'angle

N. 119. GBI soit égal à l'angle D (*n*) : prolongés indéfiniment vers K le côté GH de ce Parallelogramme , & vers N & L ses côtés GB & HI : par l'extrémité A de la ligne AB tirés une ligne indéfinie KM parallele

N. 130. à la ligne GN (*n*) , & qui rencontre en un

point **K** la ligne **KH** : de ce point **K** tirés par le point **B**, une ligne **KL** qui rencontre en un point **L** la ligne **HL** : enfin par ce point **L** tirés une ligne **ML** parallele à la ligne **AI** (*n*), & qui rencontre l'une en **M** N. 130; & l'autre en **N**, les lignes **KM** & **GN**. Le Quadrilatere **ABNM** formé par les intersections des lignes **AI**, **ML**, **KM** & **GN** fera un parallelogramme : sa surface sera égale à celle du triangle **C** : la ligne **AB** fera l'un de ses côtés, & il aura un angle **ABN** égal à l'angle **D**.

DEMONSTRATION.

Premierement. Les côtés **AB** & **MN** du quadrilatere **ABNM** sont paralleles, puisqu'ils sont des parties, l'un de la ligne **AI** & l'autre de la ligne **ML** qui sont paralleles (*c*) : ses côtés **AM** & **BN** sont aussi paralleles, puisqu'ils sont aussi des parties, l'un de la ligne **KM** & l'autre de la ligne **GN** qui sont paralleles (*c*) ; donc ce quadrilatere est un parallelogramme (*n*). N. 574

Secondement. Les côtés **KH** & **ML** du quadrilatere **KHLM** sont paralleles (*n*), N. 129. puisque les lignes **KH** & **AI**, dont les parties **GH** de l'une & **BI** de l'autre, sont côtés opposés du parallelogramme **GHIB**, sont paralleles (*n*), & que les lignes **AI** & **ML** le sont aussi (*c*) : les côtés **KM** & **HL**

130 LES ELEMENTS D'EUCLIDE ;

- de ce même quadrilatere sont aussi parallèles (n), puisque les lignes KM & GN sont parallèles (c), & que les lignes GN & HI dont les parties GB de l'une & HI de l'autre, sont côtés opposés du parallélogramme GHIB, sont aussi parallèles (n) ; donc ce quadrilatere KHLM est un parallélogramme (n). Or puisque le quadrilatere KHLM est un parallélogramme, que les lignes AI & GN ont le point B commun entr'elles & sa diagonale KL, & qu'elles sont parallèles l'une à son côté ML (c), & l'autre à son côté HL (d), les parallélogrammes ABNM & GHIB que ces lignes forment avec ces côtés ML & HL de ce parallélogramme, sont les complémens (n), & par conséquent le parallélogramme ABNM est égal au parallélogramme GHIB (n) : or le parallélogramme GHIB est égal au triangle BFE (c), & le triangle BFE l'est au triangle C (n), puisque les côtés du premier sont égaux à ceux du dernier, chacun à chacun (c) ; donc le parallélogramme ABNM est égal au triangle C.

Troisièmement. Enfin la ligne AB est l'un des côtés du parallélogramme ABNM (c) ; & l'angle ABN de ce parallélogramme est égal à l'angle D, puisque l'angle D est égal à l'angle GBI (c), & que (n) l'angle GBI l'est à cet angle ABN qui lui est opposé au

PROPOSITION XLV.

PROBLEME.

163. *Décrire un Parallelogramme dont la surface soit égale à celle d'une figure rectiligne quelconque, & qui ait un angle égal à un angle donné.*

IL faut décrire un parallélogramme dont la surface soit égale à celle de la figure rectiligne ABCD *, & qui ait un angle égal Fig. 95 : à l'angle E.

Const. Divisés la figure ABCD en triangles par la ligne AC tirée de l'un de ses angles A à l'angle C qui lui est opposé : décrivés un parallelogramme FGHI, dont la surface soit égale à celle de l'un de ces triangles, par exemple au triangle ABC & qui ait l'angle I égal à l'angle E (n). Sur N. 159 : l'un des côtés de ce parallelogramme, par exemple sur son côté GH, décrivés un parallelogramme GKLH dont la surface soit égale à celle du triangle ACD, & qui ait l'angle GHL égal à l'angle I qui lui est opposé (n) : la figure rectiligne FGKLHI N. 1624 formée par ces parallelogrammes FGHI

132 LES ELEMENS D'EUCLIDE ;
 & GKLH sera un parallelogramme : sa surface sera égale à celle de la figure rectiligne ABCD , & elle aura l'angle I égal à l'angle E.

DEMONSTRATION.

- Premierement.* Les lignes FI & GH
- N. 57. sont paralleles (n) , puisqu'elles sont côtés opposés du parallelogramme FGHI ; ainsi puisque les angles I & GHI qu'elles forment avec la ligne IH , sont des angles intérieurs pris chacun du même côté de cette ligne , leur somme est égale à celle de deux
- N. 127. angles droits (n) : or l'angle GHL est égal à l'angle I (c) ; donc la somme des angles GHI & GHL , est aussi égale à celle de deux angles droits ; & par conséquent les lignes HI & HL , tirées chacune de l'extrémité H de la ligne GH avec laquelle elles forment ces angles , ne font qu'une seule ligne droite IHL (n). Les lignes GK &
- N. 97.
 N. 57. HL sont aussi paralleles (n) , puisqu'elles sont côtés opposés du parallelogramme GKLH ; ainsi puisque les angles KGH & GHL qu'elles forment avec la ligne GH , sont des angles intérieurs pris chacun du même côté de cette ligne , leur somme est
- N. 127. égale à celle de deux angles droits (n) : or l'angle FGH est égal à l'angle GHL , puisque l'angle GHL est égal à l'angle I (c) ,

& que les angles FGH & I , qui sont des angles opposés du parallélogramme $FGHI$, sont égaux entr'eux (n) : donc la somme des angles FGH & KGH est aussi égale à celle de deux angles droits ; & par conséquent les lignes GF & GK tirées chacune de l'extrémité G de la ligne GH avec laquelle elles forment ces angles , ne font qu'une seule ligne droite FGK (n). Ainsi puisque les lignes FGK & IHL ne sont chacune qu'une seule ligne droite , la figure $FGKLHI$ est un quadrilatere ; & puisque ces mêmes lignes sont des lignes droites , & que les parties GK de l'une & HL de l'autre sont parallèles (d) , les côtés FGK & IHL de ce quadrilatere sont parallèles : or les autres côtés FI & KL de ce même quadrilatere sont aussi parallèles (n) , puisque les lignes FI & GH le sont (d) , & que les lignes GH & KL qui sont côtés opposés du Parallélogramme $GKLH$ sont aussi parallèles (n) ; donc le quadrilatere $FGKLHI$ est un parallélogramme (n).

N. 142.

N. 97.

N. 129.

N. 57.

N. 57.

Secondement. La surface du parallélogramme $FGHI$ est égale à celle du triangle ABC (c) , & celle du parallélogramme $GKLH$ l'est à celle du triangle ACD (c) ; ainsi la surface de chaque partie du parallélogramme $FGKLHI$ est égale à la surface de chaque partie correspondante de la

134 LES ELEMENS D'EUCLIDE ,
figure ABCD ; & par conséquent la surface
du parallélogramme FGKLHI est égale
celle de la figure ABCD.

Enfin l'angle I de ce parallélogramme est
égal à l'angle E (c) ; donc C. Q. F. F.

S C H O L I E.

Fig. 95. 164. Si la figure rectiligne ABCD* avoit
plus de quatre côtés , & qu'il fallût la di-
viser par exemple en trois triangles par des
lignes tirées de quelques-uns de ses angles
à chacun de ses autres angles ; alors après
avoir décrit un parallélogramme FGK-
LHI égal aux deux premiers triangles
ABC & ACD , de la manière que ce pro-
blème enseigne à le faire , on décriroit sur
le côté KL de ce parallélogramme un pa-
rallélogramme égal au troisième triangle ,
de la même manière que l'on a décrit sur
le côté GH le parallélogramme GKLH égal
au triangle ACD ; & ainsi de suite , si la
figure proposée se divisoit en un plus grand
nombre de triangles.

U S A G E.

165. On peut se servir de cette Proposi-
tion , de la manière suivante , pour trou-
ver la différence de deux figures rectili-

Fig. 96. gnes quelconques A & B*.

On fait un parallélogramme CDEF égal

à la figure rectiligne *A*, & qui ait un angle *F* à volonté. Sur une ligne droite *GK* égale à l'un des côtés *CF* de ce parallélogramme, on fait aussi un parallélogramme *GHIK* égal à la figure rectiligne *B* & qui ait un angle *K* égal à l'angle *F*. On divise le côté *FE* du plus grand de ces deux parallélogrammes en deux parties telles que l'une *FM* soit égale au côté *KI* du moins grand. Par le point *M* on tire la ligne *ML* parallèle au côté *DE* de ce plus grand parallélogramme (n), & le paral- N. 130.
 lelogramme *LDEM* est la différence de la figure *B* à la figure *A*, puisque le parallélogramme *CLMF* est égal au parallélogramme *GHIK*, comme il est facile de le démontrer, en faisant voir que si l'on pose ces deux parallélogrammes l'un sur l'autre, ils ne se surpasseront point.

PROPOSITION XLVI.

PROBLEME.

166. Décrire un Quarré sur une ligne droite donnée.

IL faut décrire un quarré sur la ligne droite *AB* *.

Fig. 97

- Const.* Du point A élevés une perpendiculaire AD à la ligne AB (*n*) : du point A élevés encore une perpendiculaire BC à cette même ligne (*n*) : faites ces perpendiculaires égales chacune à la ligne AB : du point D tirés au point C la ligne DC : le quadrilatere ABCD que ces lignes formeront sera un Quarré.

- Démonst.* Puisque les côtés AD & BC du quadrilatere ABCD sont perpendiculaires chacun à la ligne AB (*c*), les angles intérieurs A & B qu'ils forment avec cette ligne sont droits chacun (*n*) ; ainsi leur somme est égale à celle de deux angles droits, & par conséquent ces côtés sont parallèles (*n*). Ces mêmes côtés AD & BC sont aussi égaux entr'eux (*c*) ; ainsi les côtés AD & BC du quadrilatere ABCD sont égaux & parallèles entr'eux, & par conséquent les autres côtés CD & AB le sont aussi (*n*). Or puisque les côtés CD & AB sont égaux entr'eux, & que les côtés AD & BC sont égaux chacun à ce même côté AB (*c*), les côtés AB, BC, CD, & AD, sont égaux entr'eux ; & puisque les côtés CD & AB sont parallèles, les côtés AD & BC qui sont perpendiculaires chacun au côté AB (*c*), le sont aussi chacun au côté CD (*n*), & par conséquent les angles D & C qu'ils forment avec ce côté, sont

sont droits chacun (n). Ainsi tous les côtés N. 20.
 AB, BC, CD & AD du quadrilatere
 ABCD sont égaux entr'eux, & tous ses
 angles A, B, C & D sont droits, & par
 conséquent ce quadrilatere est un quarré
 (n); donc C. Q. F. F. N. 49.

SCHOLIE.

167. On peut aussi résoudre ce Problème, de la maniere suivante. Du point A * on eleve une perpendiculaire AD à la ligne AB (n) : on fait cette perpendiculaire égale à cette ligne AB : des points D & B pris pour centres, & avec la ligne AB prise pour rayon, on décrit deux arcs qui se coupent en un point C : de ce point C on tire aux points D & B, les lignes CD & CB, & le quadrilatere ABCD que ces lignes forment est un Quarré. Fig. 91.
N. 92.

Pour la démonstration on tire la diagonale DB de ce quadrilatere.

DEMONSTRATION.

Premierement. Tous les côtés du quadrilatere ABCD sont égaux entr'eux (c).

Secondement. Les côtés du triangle BAD sont égaux à ceux du triangle BCD, chacun à chacun, puisque le côté DB est commun à ces deux triangles, & que les côtés AB, AD, CB & CD sont égaux en-

138 LES ELEMENTS D'EUCLIDE ,

entr'eux (c) ; ainsi les angles du premier triangle sont égaux à ceux du second :

N. 137. chacun à chacun (n) , & par conséquent puisque l'angle A est droit (c) , l'angle C l'est aussi. Or puisque l'angle A du triangle BAD est droit (c) , & que ce triangle est isocèle (c) , ses autres angles ABD & ADB sont égaux chacun à la moitié d'un

N. 136. angle droit (n) ; & puisque l'angle C du triangle BCD est droit (d) , & que ce triangle est aussi isocèle (c) , ses autres angles CBD & CDB sont aussi égaux chacun à la

N. 136. moitié d'un angle droit (n) ; ainsi l'angle ABC qui est la somme des angles ABD & CBD est celle de deux moitiés d'un angle droit ; & l'angle ADC qui est la somme des angles ADB & CDB , est aussi celle de deux moitiés d'un angle droit : or deux moitiés d'un angle droit font un angle droit ; donc l'angle ABC est droit , & l'angle ADC l'est aussi. Ainsi tous les côtés du quadrilatere ABCD sont égaux entr'eux , & tous ses angles sont droits ; par conséquent ce quadrilatere est un Carré (n) ; donc C. Q. F. F.



PROPOSITION XLVII.

THEOREME.

168. Le Quarré de l'hypoténuse d'un triangle rectangle, est égal à la somme des Quarrés de chacun des deux autres côtés de ce triangle.

LE Quarré ACDE * de l'hypoténuse Fig. 99.
AC du triangle rectangle ABC, est
égal à la somme des quarrés AFGB &
CBHI de chacun des deux autres côté AB
& BC de ce triangle.

Const. Par le sommet de l'angle droit B
du triangle rectangle ABC, tirés une pa-
rallele BL au côté AE du quarré ACDE
(n): du même point B tirés aux points E N. 130.
& D, les lignes BE & BD: du point F
tirés au point C, la ligne FC, & du point
A au point I, la ligne AI.

Démonst. L'angle FAB est droit (n), N. 49.
puisque'il est un des angles du quarré AF-
GB. L'angle EAC est aussi droit (n), N. 49.
puisque'il est un des angles du quarré
ACDE; par conséquent, si l'on ajoute
le même angle BAC à chacun de ces an-
gles, l'angle FAC qui sera la somme des
angles FAB & BAC, sera égal à l'an-
gle EAB qui sera celle des angles EAC

- N. 63. & BAC (n). Ainsi les triangles ACF & ABE ont l'angle FAC égal à l'angle EAB (d), & les côtés AF & AC qui forment le premier, égaux aux côtés AB & AE qui forment le dernier, chacun à chacun (n), puisque les côtés AF & AB sont côtés du quarré AFGB, & que les côtés AC & AE sont côtés du quarré ACDE & par conséquent le triangle ACF est égal au triangle ABE (n). Or le quarré AFGB est double du triangle ACF (n), puisque l'un & l'autre ont la même base AF, & sont renfermés entre les mêmes parallèles AF, & CBG; & le parallelogramme AKLE est double du triangle ABE (n), puisque l'un & l'autre ont aussi la même base AE, & sont renfermés entre les mêmes parallèles AE & BKL; donc le quarré AFGB & le parallelogramme AKLE sont doubles chacun de quantités égales entr'elles, & par conséquent le quarré AFGB est égal au parallelogramme AKLE (n). On démontre de la même maniere que le triangle CAI est égal au triangle DBC; que le quarré CBHI, & le parallelogramme KCDL sont doubles, l'un du triangle CAI, & l'autre du triangle DBC; & par conséquent, que le quarré CBHI est égal au parallelogramme KCDL (n). Ain-
- N. 49.
- N. 30.
- N. 155.
- N. 155.
- N. 67.
- N. 67.

puisque le carré $AFGB$ est égal au parallélogramme $AKLE$ (d), & que le carré $CBHI$ l'est au parallélogramme $KCDL$, la somme des parallélogrammes $AKLE$ & $KCDL$ est égale à celle des carrés $AFGB$ & $CBHI$: or le carré $ACDE$ est la somme de ces parallélogrammes (n) ; donc N. 72. le carré $ACDE$ est égal à la somme des carrés $AFGB$ & $CBHI$; donc C. Q. F. D.

COROLLAIRE I.

169. Il suit de ce Théorème, que de toutes les lignes que l'on peut tirer d'un même point à une même ligne droite, celle qui lui est perpendiculaire est la moins grande.

La ligne CD *, perpendiculaire à la ligne droite AB est la moins grande de toutes les lignes que l'on peut tirer du point C à cette ligne. F. 100.

Const. Du point C tirés à un point quelconque E de la ligne AB ; l'oblique CE .

Démonst. Quelque près que le point E soit du point D , la perpendiculaire CD , l'oblique CE , & la partie ED de la ligne AB , comprise entre les points E & D de cette ligne, forment un triangle EDC qui est rectangle en D , puisque la ligne CD est perpendiculaire à la ligne AB (b), &

142 LES ELEMENS D'EUCLIDE ,

dont par conséquent l'oblique CE qui est opposée à cet angle D , est l'hypoténuse . Or puisque l'oblique CE est l'hypoténuse du triangle rectangle EDC , il faut ajouter le carré de la partie ED à celui de la perpendiculaire CD , pour rendre le carré de l'oblique CE égal à celui de cette perpendiculaire égal à celui de l'oblique CE , puisque le carré de CE est égal à la somme des carrés de CD & de ED (n) ; donc le carré de la perpendiculaire CD est moins grand que celui de l'oblique CE , & par conséquent la perpendiculaire CD est moins grande que l'oblique CE ; donc C. Q. F. D.

n. 168.

COROLLAIRE II.

170. Il suit encore de ce Théorème que , de toutes les lignes droites tirées d'un même point à une même ligne droite , celle qui la rencontre au point le plus éloigné de celui auquel la perpendiculaire tirée du même point que ces lignes droites la rencontreroit , est la plus grande.

Fig. 101.

Si le point F * pris sur la ligne droite AB , est plus éloigné que le point E , de celui auquel la perpendiculaire tirée du point C à cette ligne la rencontreroit , la ligne droite CF tirée de ce point C au point F , sera plus grande que la ligne droite CE tirée du même point C au point E.

Const. Du point C abaissés la perpendiculaire CD à la ligne AB (n). N. 932

Démonst. Le quarré de la ligne CF est égal à la somme des quarrés des lignes CD & FD (n), puisque le triangle FDC est rectangle en D (c); & le quarré de la ligne CE est égal à la somme des quarrés des lignes GD & ED (n), puisque le triangle EDC est aussi rectangle en D (c): or la somme des quarrés des lignes CD & FD est plus grande que celle des quarrés des lignes CD & ED, puisque la ligne FD est plus grande que la ligne ED (h); donc le quarré de la ligne CF est plus grand que celui de la ligne CE, & par conséquent la ligne CF est plus grande que la ligne CE; donc C. Q. F. D. N. 1682

USAGE.

171. On se sert de cette Proposition de la manière suivante, pour résoudre ce Problème.

La longueur d'une échelle AB* est de dix pieds, & cette échelle étant posée droite contre un mur D, elle est de même hauteur que ce mur. Si en appuyant le haut de cette échelle contre ce mur, on éloigne son pied de celui de ce mur de six pieds, de combien s'en faudra-t-il que la hauteur de cette échelle ainsi inclinée Fig. 102.

144 LES ELEMENS D'EUCLIDE ;
ne soit égale à celle de ce mur ?

N. 168. Le quarré de la longueur AB de l'échelle est égal à la somme des quarrés de la hauteur AC de cette échelle , & de la distance CB de son pied à celui du mur (n) , puisque cette longueur AB , cette hauteur AC , & cette distance CB forment un triangle ACB rectangle en C . Ainsi , si de cent pieds , quarré de la longueur de l'échelle (h) , on retranche trente-six pieds , quarré de la distance du pied de l'échelle au pied du mur (n) , le reste soixante-quatre pieds sera le quarré de la hauteur de l'échelle. Or puisque le quarré de la hauteur de l'échelle est de soixante-quatre pieds , cette hauteur est de huit pieds , & par conséquent si l'on retranche huit pieds de la hauteur du mur qui est de dix pieds (h) , le reste deux pieds , sera la différence de la hauteur de l'échelle AB à celle du mur D .



PROPOSITION XLVIII.

THEOREME.

172. Si le Quarré de l'un des côtés d'un Triangle , est égal à la somme des Quarrés de chacun des autres côtés de ce triangle , ce triangle sera rectangle.

SI le quarré du côté AC du triangle ABC * est égal à la somme des quarrés des côtés AB & BC de ce triangle , ce triangle ABC sera rectangle. Fig. 103.

Const. De l'extrémité de l'un des côtés dont la somme est égale à celle du troisiéme , par exemple de l'extrémité C du côté BC , élevés une perpendiculaire CD à ce côté (n) : faites cette perpendiculaire égale à l'autre côté AB : du point B tirés au point D , la ligne BD. N. 92.

Démonst. Le quarré du côté BD est égal à la somme des quarrés des côtés BC & CD (n) , puisque le triangle DCB est rectangle en C (c) ; & le quarré du côté AC est égal à la somme des quarrés des côtés AB & BC (h) : or la somme des quarrés des côtés BC & CD est égale à celle
N

146 LES ELEMENS D'EUCL

des quarrés des côtés AB & BC

CD est égal à AB (c) : donc le

BD est égal au quarré de AC ; &

séquent le côté BD est égal au

Ainsi les côtés du triangle DCB so.

à ceux du triangle ABC , chacun

cun , puisque CD est égal à AB (c)

BD l'est à AC (d), & que BC est c

à ces deux triangles ; donc les ang

premier sont égaux à ceux du second

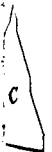
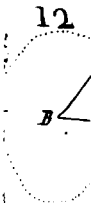
N. 17. cun à chacun (n), & par conséquent

que l'angle BCD du triangle DC

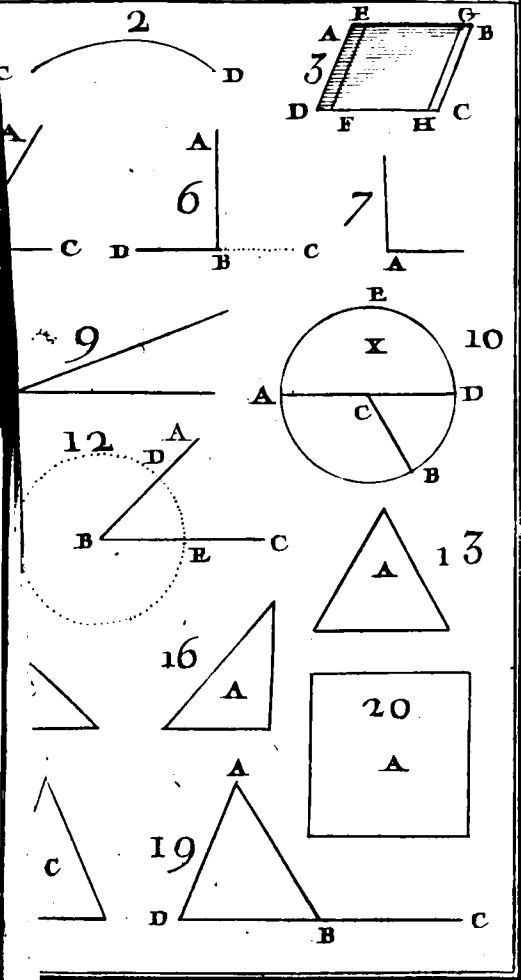
droit (c), l'angle ABC du triangle

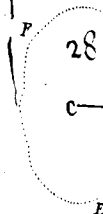
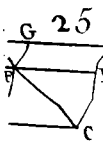
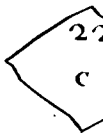
est aussi droit ; donc C. Q. F. D.

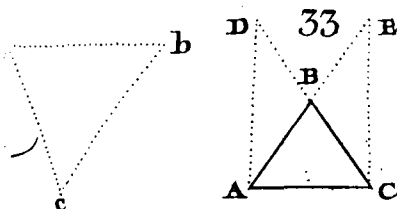
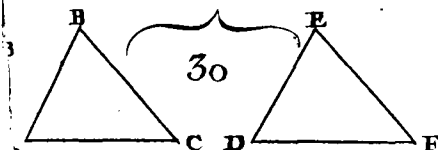
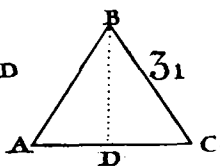
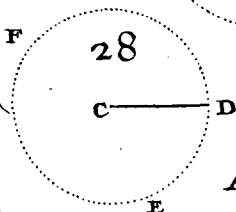
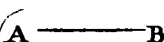
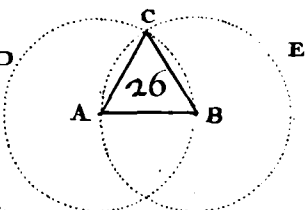
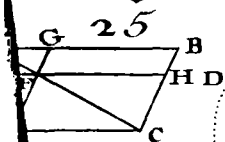
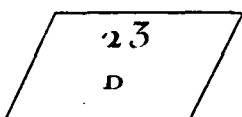
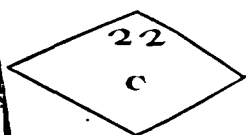
Fin du premier Livre.



IDE,
C, puis
e quarré
& par co
côté A
font éga
cun à ch
B (c), q
est comm
angles
ond, ch
quent pu
DCB
angle AB
D.







7

1

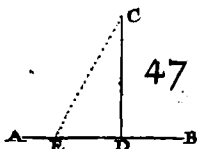
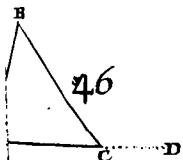
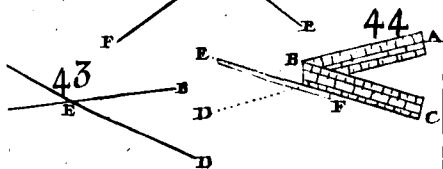
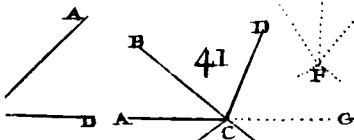
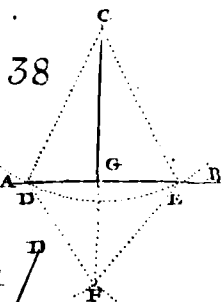
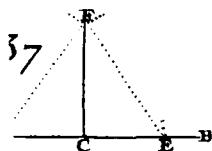
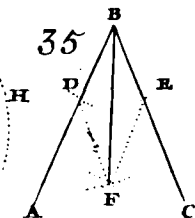
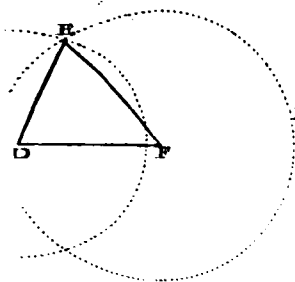
1

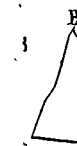
1

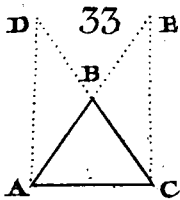
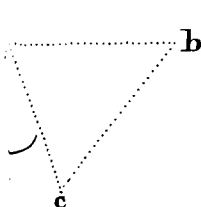
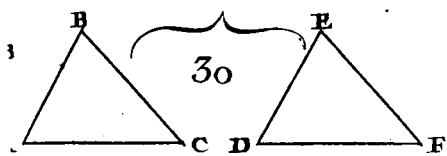
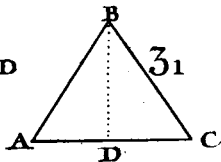
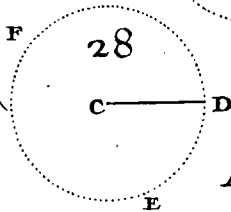
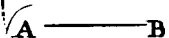
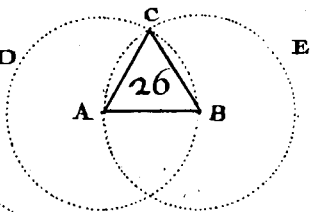
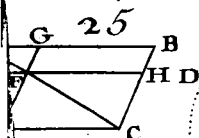
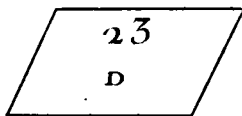
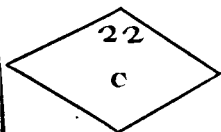
1

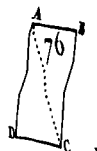
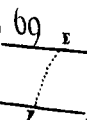
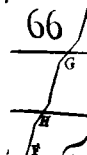
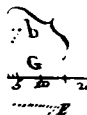
8

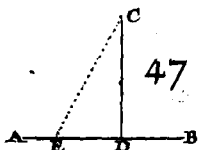
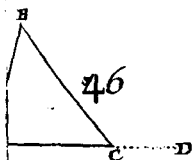
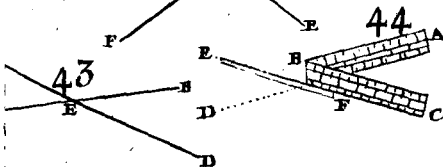
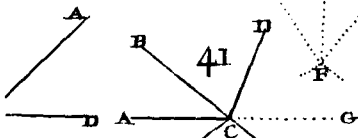
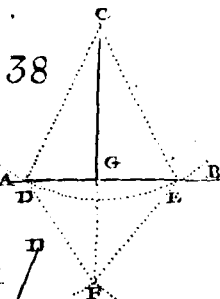
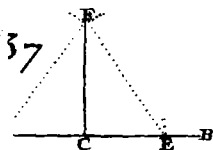
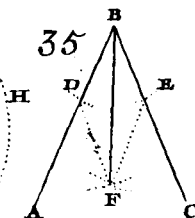
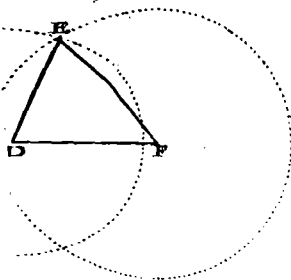
1







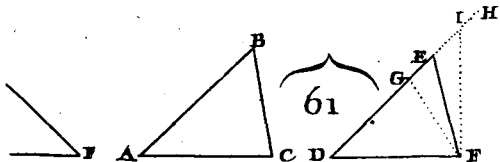
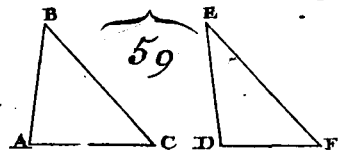
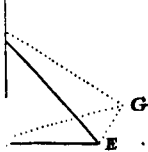
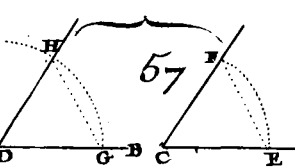
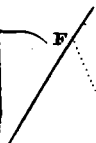
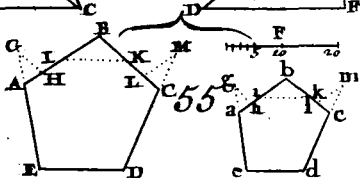
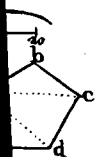
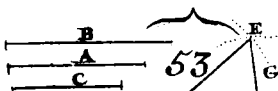
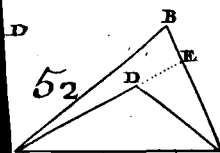
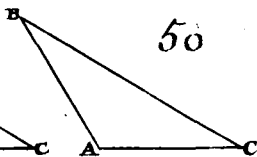
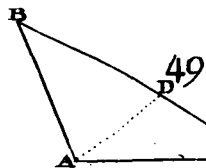




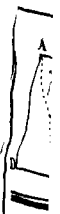


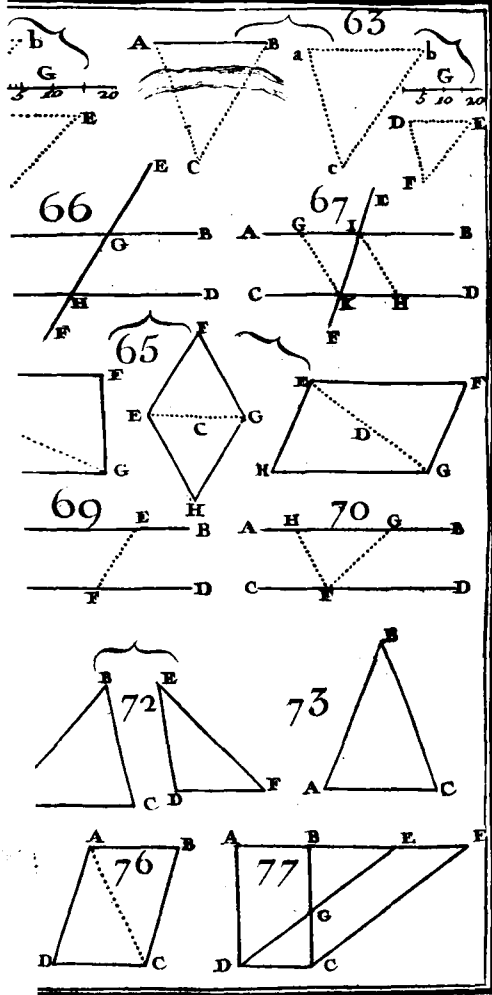
D



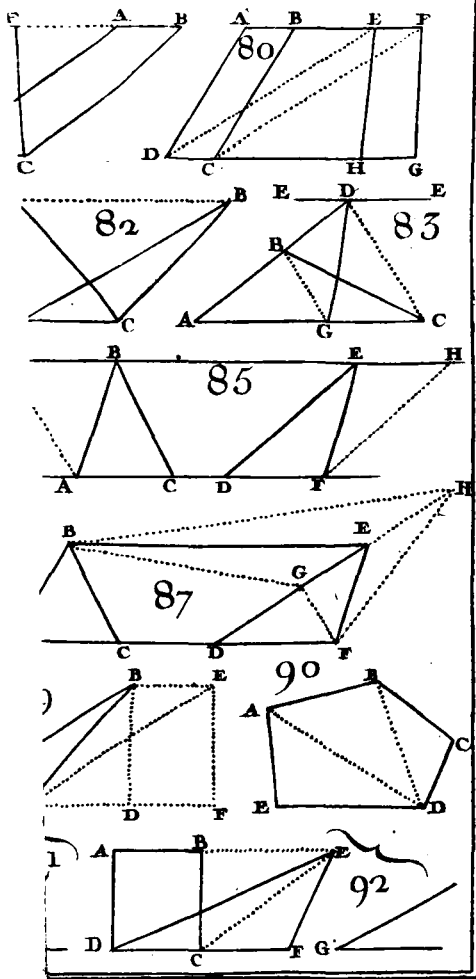


60









B

94

A

96

C

F

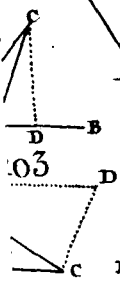
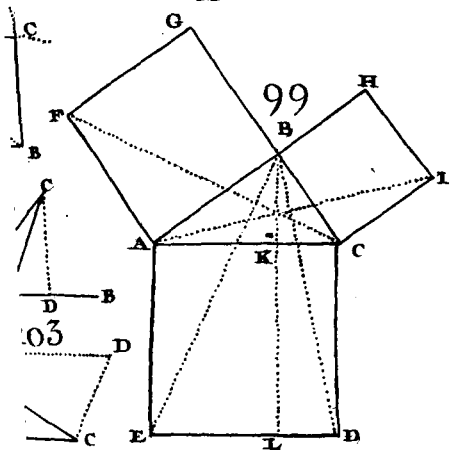
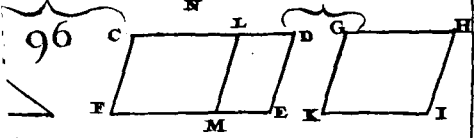
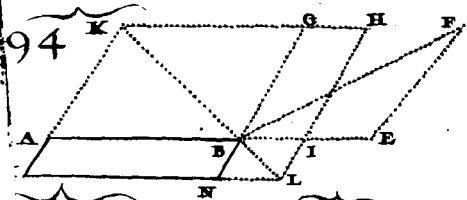
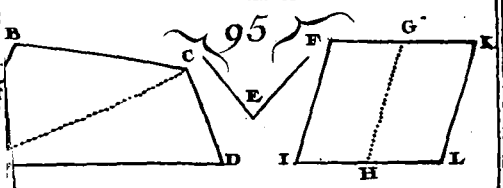
C

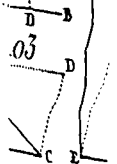
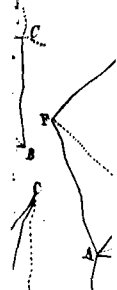
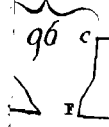
D

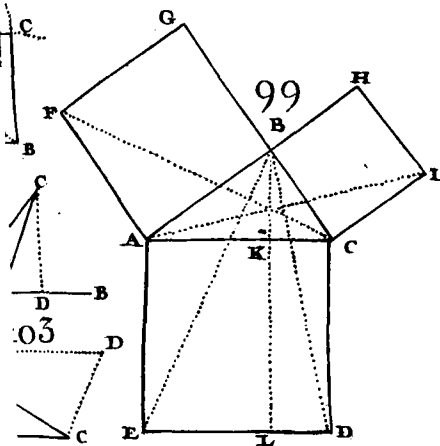
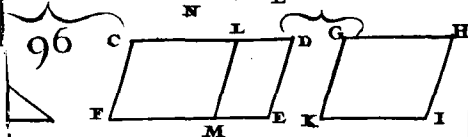
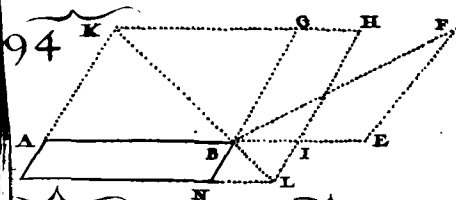
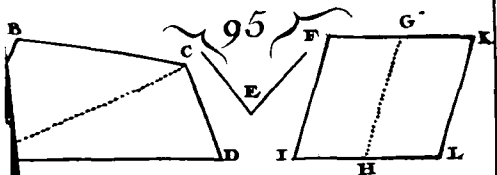
I

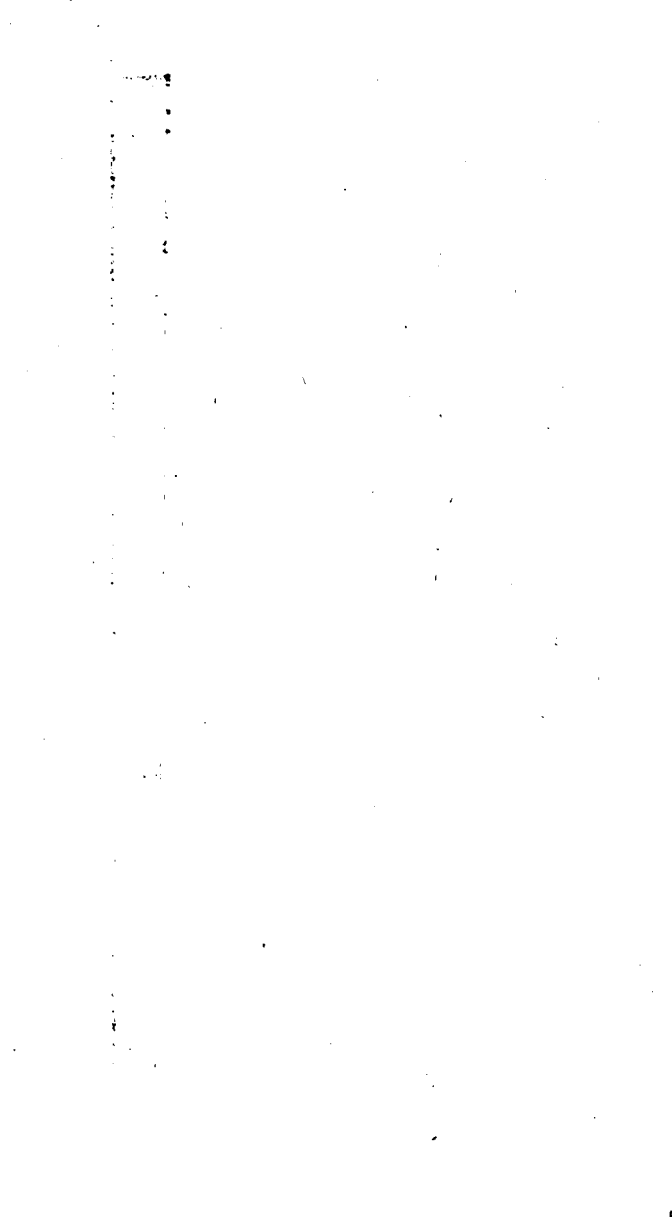
C

E











LES ELEMENS D'EUCLIDE.

LIVRE SECOND.

QUOIQUE ce Livre ne contienne que quatorze Propositions, & que l'on n'apperçoive pas d'abord leurs usages, il est cependant très-considérable ; puisque c'est par les principes qui y sont établis, que l'on démontre les propriétés des lignes courbes, & que l'on resoud les Problèmes qui en dépendent, d'une manière un peu plus longue à la vérité, que si l'on se servoit de l'Algebre pour le faire, mais beaucoup plus satisfaisante, parce qu'elle est plus lumineuse. Euclide y considère dans les premières Propositions les différens Rectangles que l'on peut former des parties d'une même ligne droite différemment divisée, & détermine de combien les uns différent des autres. Il ensei-

148 LES ELEMENS D'EUCLIDE,
*gne ensuite à diviser une ligne droite sui-
 vant de certaines conditions ; ce qui est
 un Problème dont l'usage est très-fré-
 quent dans la Géométrie ; & après avoir
 démontré de combien le Quarré du côté
 opposé à l'angle obtus d'un triangle , sur-
 passe la somme des Quarrés des deux au-
 tres côtés de ce triangle , & de combien
 celui du côté opposé à un angle aigu dif-
 fère de cette somme , il termine ce Livre
 par la maniere de faire un Quarré qui soit
 égal à une figure rectiligne quelconque.*

DEFINITIONS.

I.

173. **O**N dit le Rectangle fait de
*telles lignes , ou seulement ,
 le Rectangle de telles lignes , pour expri-
 mer la surface d'un parallelogramme rectan-
 gle , dont l'une de ces lignes est la lon-
 gueur , & l'autre la largeur.*

*On dit , le Rectangle des lignes AB &
 BC , pour exprimer la surface du paralle-
 logramme rectangle ABCD * , dont la li-
 gne AB est la longueur , & la ligne BC
 la largeur.*

Fig. 1.

II.

174. On nomme Gnomon , une figure

rectiligne composée des complémens d'un parallélogramme, & de l'un des parallélogrammes dont la diagonale est une partie de celle du premier.

La figure ABCDEF est un Gnomon.* Fig. 2.

SCHOLIE PRE' LIMINAIRE.

175. Premièrement. Si la longueur AB d'un rectangle ABCD * est égale à sa Fig. 3.
largeur AD, tous les côtés de ce rectangle seront égaux entr'eux, puisque les côtés opposés d'un parallélogramme le sont (n); N. 141.
& par conséquent ce rectangle est un carré (n). N. 49.

Secondement. Si un parallélogramme ABCD * a l'un de ses angles droit, par Fig. 1.
exemple l'angle A, tous les autres angles de ce parallélogramme seront droits, puisque l'angle C qui est opposé à cet angle A sera droit (n), que l'angle B, intérieur pris N. 142
du même côté de la ligne AB que l'angle A, sera droit (n) & que l'angle D qui lui N. 127.
est opposé le sera aussi (n); & par consè- N. 142.
quent ce parallélogramme sera rectangle.

Troisièmement. Lorsque deux lignes AB & CD sont égales entr'elles, on peut Fig. 4.
prendre indifféremment l'une ou l'autre, & dire la ligne CD au lieu de la ligne AB, & la ligne AB au lieu de la ligne

150 LES ELEMENTS D'EUCLIDE ;
CD ; ce qui est très-ordinaire dans la
Géométrie.

PROPOSITION I.

THEOREME.

176. Si de deux lignes droites , l'une est divisée en plusieurs parties , le rectangle de ces deux lignes sera égal à la somme des rectangles faits de celle de ces lignes qui n'est point divisée , & de chacune des parties de celle qui est divisée.

Fig. 5. **L**E rectangle des lignes AB & AD * ; dont l'une AB est divisée , par exemple en trois parties AE , EF & FB , est égal à la somme des rectangles faits l'un de la ligne AD & de la partie AE, un autre de la même ligne AD & de la partie EF , & un autre enfin de la même ligne AD & de la partie FB.

Const. Faites un rectangle ABCD dont la ligne AB soit l'un des côtés , & la ligne AD l'autre : par chaque point de division E & F de la ligne AB , tirés les
N. 130. parallèles EG & FH à la ligne AD (n).

Démonst. Chacun des parallelogram-

mes AEGD , EFHG & FBCH est rectangle (n) , puisque la ligne AD est perpendiculaire à la ligne AB (c) , & que par conséquent les lignes EG & FH qui sont parallèles chacune à cette perpendiculaire (c) , sont aussi perpendiculaires à la même ligne AB (n) : & ces lignes EG & FH sont égales chacune à la ligne AD (n) ; puisque les lignes AD & EG sont côtés opposés du Parallelogramme AEGD , & que les lignes EG & FH le sont du parallelogramme EFHG. Ainsi le parallelogramme AEGD est le rectangle de la ligne AD & de la partie AE (c) ; le parallelogramme EFHG est le rectangle de la même ligne AD & de la partie EF (c) , & le parallelogramme FBCH est le rectangle de la même ligne AD & de la partie FB (c) : or le rectangle ABCD qui est celui des lignes AB & AD (c) , est la somme de tous ces rectangles (n) ; donc le rectangle des lignes AB & AD est égal à la somme des rectangles faits de la ligne AD , & de chacune des parties AE , EF , & FB de la ligne AB ; donc C. Q. F. D.



PROPOSITION II.

THEOREME.

177. Si une ligne droite est divisée en plusieurs parties, le quarré de cette ligne sera égal à la somme des rectangles faits de cette même ligne, & de chacune de ces parties.

Fig. 6. **L**E quarré de la ligne AB * qui est divisée, par exemple en trois parties AE, EF & FB, est égal à la somme des rectangles faits l'un de cette ligne AB & de sa partie AE, un autre de cette même ligne AB & de sa partie EF, & un autre enfin de cette même ligne AB & de sa partie FB.

N. 166. *Const.* Décrivés un quarré ABCD sur la ligne AB (*n*) : par chaque point de division E & F de cette ligne, tirés les paralleles EG & FH au côté AD de ce quarré (*n*).

N. 130. *Démonst.* On démontre de la même manière que dans la proposition précédente, que chacun des parallelogrammes AEGD, EFHG, & FBCH est rectangle; & que les lignes EG & FH sont égales chacune à la ligne AD, & par conséquent à la

ligne AB , puisque les lignes AD & AB sont égales entr'elles (c). Ainsi le parallélogramme $AEGD$ est le rectangle de la ligne AB & de sa partie AE (c), le parallélogramme $EFHG$ est le rectangle de la même ligne AB & de sa partie EF (c), & le parallélogramme $FBCH$ est le rectangle de la même ligne AB & de sa partie FB (c). Or le quarré $ABCD$ qui est le quarré de la ligne AB (c), est la somme de tous ces rectangles (n); donc le quarré de la ligne AB est égal à la somme des rectangles faits de cette ligne AB , & de chacune des parties AE , EF & FB de cette même ligne; donc $C. Q. F. D.$

PROPOSITION III.

THEOREME.

178. *Si une ligne droite est divisée en deux parties, le rectangle de cette ligne & de l'une de ces parties, sera égal à la somme du quarré de cette partie, & du rectangle des deux parties de cette ligne.*

LE rectangle de la ligne AB qui est divisée en deux parties AE & EB , & de l'une des parties de cette ligne, par Fig. 21

154 LES ELEMENS D'EUCLIDE ;
 exemple de sa partie AE , est égal à la
 somme du quarré de cette partie AE , &
 du rectangle des deux parties AE & EB de
 cette ligne.

N. 130. *Const.* Faites un rectangle ABCD dont
 la ligne AB soit l'un des côtés , & dont
 l'autre côté soit une ligne AD égale à la
 partie AE de cette ligne AB : par le point
 de division E de la ligne AB , tirés la pa-
 rallele EF à la ligne AD (n).

Démonst. On démontre de la même ma-
 niere que dans la premiere Proposition de
 ce Livre , que chacun des parallelogram-
 mes AEFD , & EBCF est rectangle ; &
 que la ligne EF est égale à la ligne AD ,
 & par conséquent à la partie AE de la li-
 gne AB , puisque la ligne AD & cette par-
 tie AE sont égales entr'elles (c). Ainsi le
 parallelogramme AEFD est le quarré de la
 N. 175. partie AE (n) , & le parallelogramme EB-
 CF est le rectangle des parties AE & EB :
 or le rectangle ABCD , qui est celui de la
 ligne AB & de sa partie AE (c) , est la
 somme du quarré AEFD , & du rectangle
 N. 72. EBCF (n) ; donc le rectangle de la ligne
 AB & de sa partie AE est égal à la somme
 du quarré de cette partie AE , & du rectan-
 gle des deux parties AE & EB de cette
 même ligne AB ; donc C. Q. F. D.

PROPOSITION IV.

THEOREME.

179. Si une ligne droite est divisée en deux parties, la somme des quarrés de chacune de ces parties, & de deux rectangles faits chacun de ces mêmes parties, sera égale au quarré de cette ligne.

Si la ligne AB * est divisée en deux parties AE & EB, la somme des quarrés de chacune de ces parties AE & EB, & de deux rectangles faits chacun de ces mêmes parties, sera égale au quarré de cette ligne. Fig. 8.

Const. Décrivés un quarré ABCD, sur la ligne AB (n) : tirés la diagonale AC N. 166 de ce quarré : par le point de division E de la ligne AB, tirés la parallele EF à la ligne AD (n) : par le point G auquel cette parallele EF rencontre la diagonale AC, tirés la parallele HI à la ligne AB (n). N. 130.

Démonst. Les quadrilateres AEGH, EBIG, GICF & HGFD sont des parallelogrammes (n), puisqu'ils ont chacun N. 57.

156 LES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE ;

leurs côtés opposés parallèles(c); ainsi puisqu'ils ont aussi chacun un angle commun avec le carré ABCD , ils sont rectangles

N. 175. (n) ; & par conséquent si quelques-uns de ces quadrilatères ont leur longueur égale à leur largeur , ceux dont la longueur sera

N. 175. égale à la largeur , seront des carrés (n). Or la longueur du quadrilatère AEGH est égale à sa largeur ; car puisque le parallélogramme ABCD est un carré (c) , les côtés BC & BA du triangle ABC , sont

égaux entr'eux , & par conséquent l'angle BAC , ou l'angle EAG du triangle AEG , est égal à l'angle BCA (n) : & puisque les lignes EG & BC sont parallèles (c) , elles forment avec la diagonale AC l'angle extérieur EGA , qui est aussi un des angles du triangle AEG , égal à l'angle intérieur

N. 127. BCA qui lui est opposé (n). Or puisque les angles EAG & EGA du triangle AEG sont égaux chacun au même angle BCA , ils le sont entr'eux ; donc les côtés AE & EG de ce triangle , qui sont l'un la longueur du quadrilatère AEGH & l'autre sa

N. 35. largeur , sont aussi égaux entr'eux (n) ; & par conséquent ce quadrilatère est un carré. On démontre aussi de la même manière , en comparant l'angle IGC à l'angle BAC , que la longueur GI du quadrilatère GICF est égale à sa largeur IC ; &

par conséquent ce quadrilatere est aussi un quarré. Ainsi puisque le quadrilatere AE-GH est un quarré (*d*) , & que la partie AE de la ligne AB , est un de ses côtés , ce quadrilatere est le quarré de cette partie : puisque le quadrilatere GIGF est aussi un quarré (*d*) , & que la ligne GI , côté de ce quadrilatere & la partie EB de la ligne AB , sont côtés opposés du parallelogramme EBIG , ce quadrilatere est le quarré de cette partie EB (*n*) : puisque le quadrilatere EBIG est rectangle (*d*) , que la partie EB est sa longueur , & que sa largeur EG est égale à la partie AE (*d*) , ce quadrilatere est le rectangle des parties AE & EB : enfin puisque le quadrilatere HGFD est rectangle (*d*) , que sa longueur HG est égale à la partie AE (*d*) , & que sa largeur FG est égale à la ligne GI (*d*) qui l'est à la partie EB (*d*) , ce quadrilatere est aussi le rectangle des parties AE & EB. Or le quarré ABCD qui est celui de la ligne AB (*c*) , est la somme de ces deux quarrés & de ces deux rectangles (*n*) ; donc la somme des quarrés de chacune des parties AE & EB de la ligne AB , & de deux rectangles faits chacun de ces mêmes parties , est égale au quarré de cette ligne ; donc C. Q. F. D.

N. 145.

N. 72.

COROLLAIRE I.

180. Il suit de ce Théorème, que *Le quarré d'une ligne est quadruple de celui de la moitié de cette ligne.*

Fig. 9. Le quarré de la ligne AB * est quadruple de celui de la moitié de cette ligne.

Const. Divisés la ligne AB en deux parties AC & CB égales entr'elles (n).

Démonst. Puisque les parties AC & CB sont égales entr'elles (c), leur rectangle est le quarré de la partie AC (n), & le quarré de cette partie est égal à celui de la partie CB; ainsi la somme des quarrés de ces parties AC & CB & de deux rectangles faits chacun de ces deux parties, est égale à quatre fois le quarré de la partie AC : or cette somme est aussi égale au quarré de la ligne AB (n), puisque cette ligne est divisée en ces deux parties AC & CB; donc le quarré de la ligne AB est égal à quatre fois le quarré de la partie AC qui est la moitié de cette ligne (c); & par conséquent le quarré de la ligne AB est quadruple de celui de sa moitié AC; donc C. Q. F. D.

COROLLAIRE II.

181. Il suit de la démonstration de ce Théorème, qu'un parallélogramme qui a

un angle commun avec un quarré, & dont la diagonale est une partie de celle de ce quarré, est un quarré.

Le parallelogramme AEGH * qui a Fig. 86
l'angle HAE commun avec le quarré ABCD, & dont la diagonale AG est une partie de la diagonale AC de ce quarré, est un quarré.

Démonst. Le parallelogramme AEGH est rectangle (n), puisqu'il a un angle N. 175 commun avec le quarré ABCD (h); & sa longueur AE est égale à sa largeur EG (n), puisque le quadrilatere ABCD étant N. 85. un quarré (h), & la ligne EG étant parallele à la ligne BC (h), les angles AGE & EAG du triangle AEG sont égaux entr'eux (d); donc ce parallelogramme est un quarré (n); donc C. Q. F. D. N. 175.



PROPOSITION V.

THEOREME.

182. Si une ligne droite est divisée en deux parties, la somme du rectangle de ces deux parties, & du quarré de la moitié de leur différence, sera égale au quarré de la moitié de cette ligne.

Fig. 10. **S**I la ligne AB * est divisée en deux parties AE & EB, la somme du rectangle de ces deux parties AE & EB, & du quarré de la moitié de leur différence, sera égale au quarré de la moitié de cette ligne.

Const. Divisés la ligne AB en deux parties AK & KB égales entr'elles (n) : décrits un quarré KBCD sur la moitié KB de cette ligne (n) : tirés la diagonale DB de ce quarré : par le point de division E de la ligne AB, tirés la parallele EF à la ligne KD (n) : par le point G auquel cette parallele EF rencontre la diagonale DB, tirés la parallele HL à la ligne AB : enfin par l'extrémité A de cette ligne, tirés la ligne AH parallele à la ligne KD (n), & qui rencontre en un point H la parallele HL prolongée s'il est nécessaire.

Démonst.

LIVRE SECOND. 161

Démonst. Les quadrilateres AEGH , AKIH , KBLI , KEGI , EBLG , GLCF , & IGFD , sont des parallelogrammes , puisqu'ils ont chacun leurs côtés opposés paralleles (c) ; par conséquent les quadrilateres EBLG & IGFD sont des quarrés (n) , puisqu'ils ont chacun un angle commun avec le quarré KBCD , & que les diagonales BG du premier , & GD du dernier sont chacune une partie de la diagonale de ce quarré (c) : les quadrilateres AKIH & KBLI sont égaux entr'eux (n) , puisqu'ils ont des bases AK & KB égales entr'elles (c) , & qu'ils sont renfermés entre les mêmes paralleles AB & HL (c) : les quadrilateres KEGI & GLCF sont aussi égaux entr'eux (n) , puisqu'ils sont les complémens du parallelogramme KBCD (c) : le quadrilatere AEGH est rectangle (n) , puisque les lignes KD & AH qui sont paralleles (c) , forment avec la ligne AB l'angle extérieur DKB , qui est un angle du quarré KBCD , égal à l'angle intérieur HAE qui est opposé à cet angle DKB : la ligne KE est la moitié de la différence des parties AE & EB de la ligne AB , puisque la ligne AK est la moitié de cette ligne (c) : & enfin les lignes KE & IG sont égales entr'elles (n) , puisqu'elles sont côtés opposés du parallelogramme KEGI. Ainsi le

162 LES ELEMENS D'EUCLIDE ;

- quadrilatere IGFD est le quarré de la moitié de la différence des parties AE & EB , puisque ce quadrilatere est un quarré (*d*) , que l'un de ses côtés IG est égal à la ligne KE (*d*) , & que cette ligne KE est la moitié de la différence de ces parties : le quadrilatere AEGH est le rectangle des parties AE & EB , puisque ce quadrilatere est rectangle (*d*) , que la partie AE est l'un de ses côtés , & qu'il a un autre côté EG égal à la partie EB (*d*) : & enfin la somme des quadrilateres AKIH & KEGI, c'est-à-dire
- N. 72. le rectangle AEGH (*n*) , est égale à celle des quadrilateres KBLI & GLCF, c'est-à-dire au Gnomon GIKBCF (*n*) , puisque les quadrilateres AKIH & KBLI sont égaux entr'eux (*d*) , & que les quadrilateres KEGI & GLCF le sont aussi (*d*). Or le quarré KBCD qui est celui de la moitié KB de la ligne AB (*c*) , est la somme du Gnomon
- N. 72. GIKBCF & du quarré IGFD (*n*) ; donc il est égal à la somme du rectangle AEGH, & du quarré IGFD ; & par conséquent la somme du rectangle des parties AE & EB de la ligne AB , & du quarré de la moitié KE de leur difference , est égale au quarré de la moitié KB de cette ligne ; donc C. Q. F. D.

183. On peut se servir de cette Proposition de la manière suivante, pour résoudre ce Problème.

Un rectangle $ABCD^*$ a 112 pieds de surface & 44 pieds de circonférence : Fig. 111
quel est le nombre de pieds que contient la longueur AB de ce rectangle, & celui que contient sa largeur BC ?

On considère la longueur AB de ce rectangle & sa largeur BC comme si elles étoient deux parties AB & BE d'une ligne droite ABE . Ainsi puisque la ligne ABE est divisée en deux parties, le quarré de la moitié de cette ligne est égal à la somme du rectangle $ABCD$ de ces deux parties, & du quarré de la moitié de leur différence (n) ; donc si de 121 pieds, quarré de la moitié de cette ligne, puisque la circonfé- No. 112.
rence entière du rectangle $ABCD$ est de 44 pieds (h), on retranche 112 pieds, surface de ce rectangle (h), le reste 9 pieds sera le quarré de la moitié de la différence de ces deux parties AB & BE , c'est-à-dire des côtés AB & BC du rectangle $ABCD$, & par conséquent la moitié de leur différence sera de 3 pieds. Or puisque la moitié de la somme des côtés AB & BC est 11 pieds (h), & que la moitié de leur différence est 3 pieds, le plus grand

164 LES ELEMENS D'EUCLIDE ,
côté AB est de 14 pieds , & le moins grand
BC est de 8 pieds ; donc C. Q. F. F.

PROPOSITION VI.

THEOREME.

184. *Si une ligne droite est divisée en deux parties , la somme du Rectangle de cette Ligne & de l'une de ces parties , & du Quarré de la moitié de l'autre , sera égale au Quarré d'une partie de cette même Ligne , qui seroit composée de cette premiere partie , & de la moitié de cette autre partie.*

Fig. 12. **S**I la ligne AB * est divisée en deux parties AE & EB , la somme du rectangle de cette ligne & de l'une de ces parties , par exemple EB , & du quarré de la moitié de l'autre partie AE , sera égale au quarré d'une partie de cette même ligne , qui seroit composée de cette premiere partie EB & de la moitié de cette autre partie AE.

Const. Divisés la partie AE en deux parties AK & KE égales entr'elles (n) : décrivés un quarré KBCD sur la partie KB de la ligne AB (n) : tirés la diagonale DB de ce quarré : par le point de division E de la

ligne AB tirés la parallele EF à la ligne
 KD (*n*) : par le point G auquel cette paral- N. 130.
 lele EF rencontre la diagonale DB, tirés
 la parallele HL à la ligne AB (*n*) : enfin N. 130.
 par l'extrémité A de cette ligne, tirés la li-
 gne AH parallele à la ligne KD (*n*), & N. 130.
 qui rencontre en un point H la parallele
 HL prolongée s'il est nécessaire.

Démonst. Les quadrilateres ABLH,
 AKIH, KEGI, EBLG, GLCF, &
 IGFD sont des parallelogrammes, puis-
 qu'ils ont chacun leurs côtés opposés paral-
 leles (*c*) ; par conséquent les quadrilateres
 EBLG & IGFD sont des quarrés (*n*), puis- N. 130.
 qu'ils ont chacun un angle commun avec le
 quarré KBCD, & que les diagonales BG
 du premier, & GD du dernier, sont cha-
 cune une partie de la diagonale de ce quar-
 ré (*c*) : les quadrilateres AKIH & KEGI
 sont égaux entr'eux (*n*), puisqu'ils ont des N. 148.
 bases AK & KE égales entr'elles (*c*), &
 qu'ils sont renfermés entre les mêmes pa-
 ralleles AB & HL (*c*) : les quadrilateres
 KEGI & GLCF sont aussi égaux entr'eux
 (*n*), puisqu'ils sont les complémens du N. 161.
 parallelogramme KBCD (*c*) : le quadrila-
 tere ABLH est rectangle (*n*), puisqu'il a N. 173.
 un angle commun avec le quarré KBCD :
 & enfin les lignes IG & KE sont égales
 entr'elles (*n*), puisqu'elles sont côtés op- N. 141.

166^o LES ELEMENS D'EUCLIDE ,
posés du parallelogramme KEGI. Ainsi le
quadrilatere IGFD est le quarré de la moi-
tié de la partie AE , puisque ce quadrila-
tere est un quarré (*d*) , que l'un de ses cô-
tés IG est égal à la ligne KE (*d*) , & que
cette ligne est la moitié de cette partie AE
(*c*) : le quadrilatere ABLH est le rectan-
gle de la ligne AB & de la partie EB , puis-
que ce quadrilatere est rectangle (*d*) , que
cette ligne AB est l'un de ses côtés (*c*) , &
qu'il a un autre côté BL égal à cette partie
EB (*d*) : & enfin la somme des quadrila-
teres AKIH & KBLI, c'est-à-dire le rec-
N. 72. tangle ABLH (*n*) , est égale à celle des
quadrilateres GLCF & KBLI, c'est-à-
N. 72. dire au Gnomon GIKBCF (*n*) , puisque
les quadrilateres AKIH & GLCF qui sont
égaux chacun au même quadrilatere KE-
GI (*d*) , le sont entr'eux. Or le quarré
KBCD qui est celui de la partie KB de la
ligne AB (*c*) , est la somme du Gnomon
N. 72. GIKBCF , & du quarré IGFD (*n*) ; donc
il est égal à la somme du rectangle ABLH
& du quarré IGFD ; & par conséquent la
somme du rectangle de la ligne AB & de
sa partie EB , & du quarré de la moitié
KE de son autre partie AE , est égale au
quarré de la partie KB qui est composée
de cette premiere partie EB & de la moitié
KE de l'autre partie AE ; donc C. Q. F. D.

U S A G E.

185. On peut se servir de cette Proposition de la maniere suivante , pour résoudre ce Problème.

Un rectangle $ABCD$ * a 216 pieds de surface , & la différence de sa largeur à sa longueur est de 6 pieds : quel est le nombre de pieds que contient la longueur de ce rectangle , & celui que contient sa largeur. Fig. 134

On considère la longueur AB de ce rectangle $ABCD$ comme si elle étoit divisée en deux parties , dont l'une EB seroit égale à sa largeur BC , & dont l'autre AE seroit par conséquent la différence de sa largeur à sa longueur. Ainsi puisque la ligne AB est divisée en deux parties AE & EB , la somme du rectangle $ABCD$ de cette ligne , & de sa partie EB , & du carré de la moitié de son autre partie AE , est égale au carré d'une partie de cette même ligne qui seroit composée de cette première partie EB & de la moitié de cette autre partie AE (n) , c'est-à-dire du côté BC du rectangle $ABCD$ (c) , & de la moitié de la différence de son côté BC à son côté AB ; donc si à 216 pieds , surface de ce rectangle (h) on ajoute 9 pieds , carré de la moitié de cette différence (h) , la somme 225

168 LES ELEMENS D'EUCLIDE;
 pieds sera le quarré d'une partie de la ligne
 AB, composée du côté BC & de la moitié
 de sa différence au côté AB; & par consé-
 quent cette partie sera de 15 pieds. Or
 puisque cette partie est de 15 pieds, qu'elle
 est composée du côté BC & de la moitié de
 sa différence au côté AB, & que la moitié
 de cette différence est de 3 pieds (h), le
 côté BC est de 12 pieds; & par conséquent
 puisque la différence de ce côté au côté AB
 est 6 pieds (h), le côté AB est de 18 pieds;
 donc C. Q. F. F.

PROPOSITION VII.

THEOREME.

186. Si une ligne droite est divisée en
 deux parties, la somme du Quarré de
 cette Ligne, & de celui de l'une de ces
 parties, sera égale à celle de deux Rec-
 tangles faits chacun de cette même Li-
 gne & de cette même partie, & du
 Quarré de l'autre partie.

Fig. 14. **L**A somme du quarré de la ligne AB *
 qui est divisée en deux parties AE &
 EB, & de celui de l'une de ces parties,
 par exemple AE, est égale à celle de deux
 rectangles

rectangles faits chacun de cette même ligne AB & de cette partie AE, & du quarré de l'autre partie EB.

Const. Décrivés un quarré ABCD sur la ligne AB (*n*) : tirés la diagonale BD de ce quarré : par le point de division E de la ligne AB, tirés la parallele EF à la ligne AD (*n*) : par le point G auquel cette parallele coupe la diagonale BD, tirés la parallele HI à la ligne AB (*n*) : prolongés la parallele EF vers L jusqu'à ce que son prolongement EL soit égal à la partie AE de la ligne AB : par le point L tirés la ligne LK parallele à cette ligne AB, & qui rencontre en un point K la ligne AD prolongée. N. 166. N. 130. N. 130.

Dém. Les quadrilatères KLEA, ABIH, AEGH, EBIG, HGFD, KLGH, & HICD sont des parallelogrammes, puisqu'ils ont chacun leurs côtés opposés paralleles (*c*) ; par conséquent les quadrilatères EBIG & HGFD sont des quarrés (*n*), puisqu'ils ont chacun un angle commun avec le quarré ABCD, & que les diagonales BG du premier & GD du dernier sont chacune une partie de la diagonale de ce quarré (*c*) : le quadrilatere KLEA est aussi un quarré (*n*), puisqu'il a le côté EL égal au côté AE (*c*), & que l'angle AEL de ce quadrilatere & l'angle GEB du quarré EBIG qui sont opposés au sommet, sont égaux

170 LES ELEMENS D'EUCLIDE,

- N. 98. entr'eux (n) : les quadrilateres $HICD$ &
 N. 175. $KLGH$ sont rectangles (n), puisque l'un a
 l'angle HDC commun avec le quarré $AB-$
 CD , & que l'autre a l'angle K commun
 avec le quarré $KLEA$: les lignes AE &
 N. 141. HG sont égales entr'elles (n), puisqu'el-
 les sont côtés opposés du parallelogramme
 $AEGH$: & enfin les lignes AB & HI sont
 N. 141. aussi égales entr'elles (n), puisqu'elles sont
 côtés opposés du parallelogramme $ABIH$.
 Ainsi le quadrilatre $KLEA$ est le quarré de
 la partie AE de la ligne AB , puisque ce
 quadrilatre est un quarré (d), & que cet-
 te partie est l'un de ses côtés (c) : le quadri-
 latre $EBIG$ est le quarré de la partie EB ,
 puisque ce quadrilatre est aussi un quarré
 (d), & que cette partie est l'un de ses côtés :
 le quadrilatre $HICD$ est le rectangle de
 la ligne AB & de la partie AE , puisque ce
 quadrilatre est rectangle (d), qu'il a un cô-
 té HI égal à cette ligne AB (d), & un au-
 tre côté HD égal à la ligne HG (d), qui
 est égale à cette partie AE (d) : enfin le
 quadrilatre $KLGH$ est aussi le rectangle de
 la ligne AB & de la partie AE , puisque
 ce quadrilatre est aussi rectangle (d), qu'il
 a aussi un côté HG égal à cette partie AE
 (d), & un autre côté GL dont l'une des
 parties EG est égale à l'une des parties EB
 de la ligne AB (d), & dont l'autre partie

EL est égale à l'autre partie AE de cette même ligne (c). Or la figure KLEBCD qui est la somme du quarré ABCD, & du quarré KLEA (n), est aussi celle des rec- N. 72: tangles HICD & KLGH & du quarré EBIG (n); donc la somme du quarré AB- N. 72: CD qui est celui de la ligne AB (c), & du quarré KLEA, est égale à celle des rectan- gles HICD & KLGH, & du quarré EB- IG; & par conséquent la somme du quarré de la ligne AB & de celui de la partie AE, est égale à celle de deux rectangles faits cha- cun de cette même ligne AB & de cette partie AE, & du quarré de l'autre partie EB; donc C. Q. F. D.

U S A G E.

187. On peut se servir de cette Proposi- tion de la maniere suivante, pour résoudre ce Problème.

Un rectangle ABCD * a 432 pieds de surface, & sa diagonale AC est de 30 pieds : quel est le nombre de pieds que con- tient la longueur de ce rectangle, & celui que contient sa largeur ? Fig. 15.

On considere la longueur AB de ce rec- tangle ABCD comme si elle étoit divisée en deux parties, dont l'une EB seroit égale à sa largeur BC, & dont l'autre AE seroit par conséquent la différence de sa largeur à

172 LES ELEMENS D'EUCLIDE ,

sa longueur. Ainsi puisque la ligne AB est divisée en deux parties AE & EB , la somme du quarré de cette ligne & de celui de la partie EB , ou du côté BC , sera égale à celle de deux rectangles faits chacun de cette même ligne AB & de cette partie EB ,

N. 136. & du quarré de la partie AE (n), c'est-à-dire à la somme de deux rectangles tels chacun que le rectangle $ABCD$, & du quarré de la partie AE ; donc si de 900 pieds, quarré de la diagonale AC (h), qui est égal à la somme de celui de la ligne AB & de

N. 137. celui du côté BC (h), puisque le triangle ABC est rectangle en C (h), on retranche 864 pieds, double de la surface du rectangle $ABCD$ (h), le reste 36 pieds sera le quarré de la partie AE qui est la différence de la largeur BC de ce rectangle à sa longueur AB ; & par conséquent cette différence sera de 6 pieds. Or puisque la surface du rectangle $ABCD$ est de 432 pieds (h), & que la différence de sa largeur à sa longueur est de 6 pieds (d), on trouvera

N. 138. (n) que cette longueur contient 24 pieds, & que cette largeur en contient 12; donc
C. Q. F. F.



PROPOSITION VIII.

THEOREME.

188. Si une ligne droite est divisée en deux parties, la somme du Quarré de la différence de ces deux parties, & de quatre Rectangles faits chacun de ces deux mêmes parties, sera égale au Quarré de cette ligne.

SI la ligne droite AB* est divisée en Fig. 16.
deux parties AC & CB, la somme du quarré de la différence de ces deux parties, & de quatre rectangles faits chacun de ces mêmes parties AC & CB, sera égale au quarré de cette ligne AB.

Démonst. Puisque la ligne AB est divisée en deux parties AC & CB, le quarré de sa moitié est égal à la somme du rectangle de ces deux parties, & du quarré de la moitié de leur différence (n). Or le quarré de la ligne AB est quadruple de celui de la moitié de cette ligne (n), donc il est égal à la somme du quadruple du rectangle des parties AC & CB, & du quadruple de la moitié de leur différence; & par conséquent puisque le quadruple du rectangle des parties

174 LES ELEMENS D'EUCLIDE;
 AC & CB est égal à la somme de quatre
 rectangles faits chacun de ces deux parties,
 & que le quadruple du quarré de la moitié
 de la différence de ces parties, est égal au
 N. 180. quarré de leur différence (n), le quarré de
 la ligne AB est égal à la somme du quarré
 de la différence des parties AC & CB, &
 de quatre rectangles faits chacun de ces mê-
 mes parties ; donc C. Q. F. D.

PROPOSITION IX.

THEOREME.

189. *Si une ligne droite est divisée en deux parties, la somme des Quarrés de chacune de ces parties sera double de la somme du Quarré de la moitié de cette ligne, & de celui de la moitié de la différence de ces mêmes parties.*

Fig. 17. **S**I la ligne droite AB * est divisée en deux parties AC & CB, la somme des quarrés de chacune de ces parties AC & CB, sera double de celle du quarré de la moitié de cette ligne AB, & de celui de la moitié de la différence de ces mêmes parties.

Const. Divisés la ligne AB en deux par-

ties AD & DB égales entr'elles (n) : du N. 91.
 point D élevés une perpendiculaire DE à
 cette ligne : faites cette perpendiculaire N. 92.
 égale à la partie AD : du point E tirés aux
 points A & B les lignes EA & EB : par le
 point de division C de la ligne AB tirés la
 ligne CF parallèle à la perpendiculaire DE
 (n), & qui rencontre en un point F la li- N. 130.
 gne EB : par ce point F tirés la parallèle
 GF à la ligne AB (n) : du point A tirés à N. 130.
 ce même point F la ligne AF.

Démonst. L'angle AED du triangle
 ADE est la moitié d'un angle droit (n), N. 136.
 puisque les côtés AD & DE de ce trian-
 gle sont égaux entr'eux (c), & que l'angle
 ADE qu'ils forment est droit (c) ; & par
 des raisons pareilles, les angles BED &
 DBE du triangle BDE sont aussi chacun
 la moitié d'un angle droit. L'angle EGF
 du triangle EGF est droit (n), puisque cet N. 127.
 angle est extérieur, que l'angle intérieur
 EDB qui lui est opposé est droit (c), & que
 les lignes GF & AB qui forment ces angles
 avec la ligne ED, sont parallèles (c) ; &
 l'on démontre de la même manière que
 l'angle FCB du triangle FCB est aussi un
 angle droit. Enfin la ligne DC est la moi-
 tié de la différence des parties AC & CB
 de la ligne AB, puisque la ligne AD est la
 moitié de cette ligne ; & les lignes DC &

176 LES ELEMENS D'EUCLIDE ;

- N. 141.** GF sont égales entr'elles (n) , puisqu'elles sont côtés opposés du quadrilatere GF CD qui est un parallelogramme (c). Ainsi l'angle AEF du triangle AEF est droit , puisqu'il est la somme des angles AED & BED qui sont chacun la moitié d'un angle droit (d) : les côtés EG & GF du triangle EGF sont égaux entr'eux (n) , puisque l'angle EGF de ce triangle étant droit (d) , & l'angle BED étant la moitié d'un angle droit (d) , l'angle EFG est aussi la moitié d'un angle droit (n) ; & par des raisons pareilles les côtés CF & CB du triangle FCB sont aussi égaux entr'eux : enfin le quarré du côté AE , qui est égal à la somme des quarrés
- N. 163.** de chacun des côtés AD & DE (n) , puisque le triangle ADE est rectangle en D (c) , est double du quarré du côté AD , puisque ces côtés AD & DE sont égaux entr'eux (c) ; & par une démonstration pareille , le quarré du côté EF du triangle EGF est double de celui du côté GF , c'est-à-dire du quarré de la ligne DC , puisque cette ligne est égale à ce côté (d). Or puisque le triangle ACF est rectangle en C (d) , la somme du quarré de la partie AC & de celui du côté CF , c'est-à-dire de la partie CB qui est égale à ce côté (d) , est égale au quarré
- N. 168.** du côté AF (n) ; & puisque le triangle AEF est aussi rectangle en E (d) , le quarré de ce

même côté AF est aussi égal à la somme du
 quarré du côté AE & de celui du côté EF
 (n) ; donc la somme des quarrés de cha- N. 168.
 cune des parties AC & CB est égale à la
 somme du quarré du côté AE, & de celui
 du côté EF ; & par conséquent puisque le
 quarré du côté AE est double de celui de la
 moitié AD de la ligne AB (d), & que le
 quarré du côté EF est aussi double de celui
 de la moitié DC de la différence des parties
 AC & CB (d), la somme des quarrés de
 chacune des parties AC & CB de la ligne
 AB, est double de la somme du quarré de
 la moitié AD de cette ligne, & de celui de
 la moitié DC de la différence de ces par-
 ties AC & CB ; donc C. Q. F. D.

U S A G E.

190. On peut se servir de cette Proposi-
 tion de la maniere suivante, pour résoudre
 ce Problème.

Un rectangle ABCD * a 70 pieds de Fig. 18.
 circonférence, & sa diagonale est de 25
 pieds : quel est le nombre de pieds que con-
 tient la longueur de ce rectangle, & celui
 que contient sa largeur ?

On considere la longueur AB & la lar-
 geur BC de ce rectangle ABCD comme si
 elles étoient deux parties AB & BE d'une
 même ligne droite ABE. Ainsi puisque la li-
 gne ABE est divisée en deux parties, la

178 LES ELEMENS D'EUCLIDE ;

somme des quarrés de chacune de ces parties AB & BE est double de la somme du quarré de la moitié de cette ligne & de celui de la moitié de la différence de ces mé-

N. 159. mes parties (n) ; & puisque le triangle ABC est rectangle en B (h) , & que son côté BC est égal à la partie BE (c) , le quarré de la diagonale AC est égal à la somme des quarrés de chacune de ces parties AB & BE

N. 168. (n) ; donc si l'on prend la moitié de 625 pieds, quarré de cette diagonale AC (n) , & si de cette moitié on retranche 306 $\frac{1}{4}$ pieds, quarré de la moitié de la ligne ABE , puisque la circonférence du rectangle ABCD est de 70 pieds (h) , le reste 6 $\frac{1}{4}$ pieds sera le quarré de la moitié de la différence des parties AB & BE , c'est-à-dire des côtés AB & BC du rectangle ABCD ; & par conséquent la moitié de cette différence sera de 2 $\frac{1}{2}$ pieds. Or puisque la moitié de la somme des côtés AB & BC est 17 $\frac{1}{2}$ pieds , & que la moitié de leur différence est 2 $\frac{1}{2}$ pieds, le plus grand côté AB est de 20 pieds , & le moins grand BC est de 15 pieds ; donc C. Q. F. F.



PROPOSITION X.

THEOREME.

191. Si une ligne droite est divisée en deux parties, la somme du Quarré de cette ligne, & de celui de l'une de ces parties, sera double de la somme du quarré de la moitié de l'autre partie de cette ligne, & de celui d'une partie de cette même ligne, qui seroit composée de cette première partie, & de la moitié de cette autre partie.

LA somme du quarré de la ligne droite AB^* qui est divisée en deux parties Fig. 191 AC & CB , & de celui de l'une de ces parties, par exemple CB , est double de la somme du quarré de la moitié de l'autre partie AC , & de celui d'une partie de cette même ligne AB , qui seroit composée de cette première partie CB , & de la moitié de cette autre partie AC .

Const. Divisés la partie AC en deux parties AD & DC égales entr'elles (n): du N. 91: point D élevés une perpendiculaire DE à cette ligne (n): faites cette perpendiculai- N. 92: re égale à la partie AD : par le point B ti-

180 LES ELEMENS D'EUCLIDE ;

rés une parallele indéfinie FBG à la ligne

N. 130. DE (n) : par le point E tirés une ligne EF
parallele à la ligne AB & qui rencontre en

N. 130. un point F la parallele FBG (n) : du même
point E tirés par le point C la ligne ECG
qui rencontre aussi en un point G la paralle-
le FBG : du point A tirés aux points E &
G les lignes AE & AG.

Démonst. L'angle AED du triangle

N. 136. ADE est la moitié d'un angle droit (n) ,
puisque les côtés AD & DE de ce triangle
sont égaux entr'eux (c) , & que l'angle
ADE qu'ils forment est droit (c) ; & par
des raisons pareilles , l'angle CED du trian-
gle CDE est aussi la moitié d'un angle droit.

N. 142. L'angle F du triangle EFG est droit (n) ,
puisque cet angle & l'angle EDB sont des
angles opposés du quadrilatere EFBD qui
est un parallelogramme (c) , & que l'un de
ces angles, sçavoir l'angle EDB , est droit
(c). L'angle ABG du triangle ABG est

N. 127. aussi droit (n) , puisque cet angle & l'angle
EDB sont des angles alternes , que les li-
gnes ED & FBG qui les forment avec la
ligne AB sont paralleles (c) , & que l'un
de ces angles , sçavoir l'angle EDB , est
droit (c). Enfin la partie DCB de la ligne
AB & la ligne EF sont égales entr'elles

N. 141. (n) , puisqu'elles sont côtés opposés du qua-
drilatere EFBD qui est un parallelogram-

me (*c*). Ainsi l'angle AEG du triangle AEG est droit, puisqu'il est la somme des angles AED & CED qui sont chacun la moitié d'un angle droit (*d*) : l'angle EGF du triangle EFG est la moitié d'un angle droit (*n*), N. 137; puisque cet angle & l'angle CED sont des angles alternes, que les lignes ED & FBG qui les forment avec la ligne EG sont parallèles (*c*), & que l'un de ces angles, savoir l'angle CED, est la moitié d'un angle droit (*d*); & les côtés EF & FBG de ce même triangle sont égaux entr'eux (*n*), puis- N. 138. que l'angle F de ce triangle étant droit (*d*), & l'angle EGF étant la moitié d'un angle droit (*d*), l'angle FEG est aussi la moitié d'un angle droit (*n*); & par une démonstration pareille, les côtés CB & BG du triangle CBG sont aussi égaux entr'eux : enfin le quarré du côté AE, qui est égal à la somme des quarrés de chacun des côtés AD & DE (*n*), puisque le triangle ADE est rec- N. 139. tangle en D (*c*) est double du quarré du côté AD, puisque ces côtés AD & DE sont égaux entr'eux (*c*); & par des raisons pareilles, le quarré du côté EG est double de celui du côté EF, c'est-à-dire du quarré de la partie DCB, puisque cette partie est égale à ce côté (*d*). Or puisque le triangle ABG est rectangle en B (*d*), la somme du quarré de la ligne AB, & de celui du côté

182 LES ELEMENS D'EUCLIDE,

- BG, c'est-à-dire de la partie CB qui est égale à ce côté (d), est égale au quarré du côté
- N. 168. AG (n) ; & puisque le triangle AEG est aussi rectangle en E (d), le quarré de ce même côté AG est aussi égal à la somme du quarré du côté AE & de celui du côté EG
- N. 168. (n) ; donc la somme du quarré de la ligne AB & de celui de la partie CB, est égale à la somme du quarré du côté AE & de celui du côté EG ; & par conséquent puisque le quarré du côté AE est double de celui de la moitié AD de la partie AC (d), & que le quarré du côté EG est aussi double (d) de celui de la partie DCB composée de la partie CB & de la moitié DC de cette autre partie AC, la somme du quarré de la ligne AB & de celui de la partie CB, est double de la somme du quarré de la moitié AD de l'autre partie AC, & de celui de la partie DCB qui est composée de cette première partie CB & de la moitié DC de cette autre partie AC ; donc C. Q. F. D.

U S A G E.

192. On peut se servir de cette Proposition de la maniere suivante, pour résoudre ce Problème.

Fig. 20. La diagonale AC d'un rectangle AB-CD * est de 35 pieds, & la différence de la largeur à la longueur de ce rectangle est

de 7 pieds : quel est le nombre de pieds que contient cette longueur , & celui que contient cette largeur ?

On considère la longueur AB de ce rectangle $ABCD$ comme si elle étoit divisée en deux parties , dont l'une EB seroit égale à sa largeur BC , & dont l'autre AE seroit par conséquent la différence de sa largeur à sa longueur. Ainsi puisque la ligne AB est divisée en deux parties AE & EB , la somme du carré de cette ligne & de celui de sa partie EB , est double de la somme du carré de la moitié de son autre partie AE & de celui d'une partie de cette même ligne , qui seroit composée de cette première partie EB & de la moitié de cette autre partie AE (n) , c'est-à-dire du côté BC du N. 191. rectangle $ABCD$ (c) , & de la moitié de la différence du côté BC au côté AB ; & puisque le triangle ABC est rectangle en B (h) , & que son côté BC est égal à la partie EB (c) , le carré de la diagonale AC est égal à la somme du carré du côté AB & de celui de la partie EB (n) ; donc si l'on prend N. 168. la moitié de 1225 pieds , carré de la diagonale AC (h) , & si de cette moitié l'on retranche $12\frac{1}{4}$ pieds , carré de la moitié de la différence du côté BC au côté AB (h) , le reste $600\frac{1}{4}$ pieds sera le carré d'une partie de la ligne AB , composée du côté BC

184 LES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE,
 & de la moitié de sa différence au côté AB,
 & par conséquent cette partie sera de $24\frac{1}{2}$
 pieds. Or puisque cette partie est de $24\frac{1}{2}$
 pieds, qu'elle est composée du côté BC & de
 la moitié de sa différence au côté AB, &
 que la moitié de cette différence est de $3\frac{1}{2}$
 pieds, le côté BC est de 21 pieds, & le
 côté AB est de 28 pieds; donc C. Q. F. F.

PROPOSITION XL

PROBLÈME.

193. Diviser une ligne droite en deux parties, telles que le Rectangle de cette ligne & de la moins grande de ces parties, soit égal au Carré de la plus grande.

Fig. 21. **I**L faut diviser la ligne AB* en deux parties, telles que le rectangle de cette ligne & de la moins grande de ces parties, soit égal au carré de la plus grande.

Const. Du point A élevés une perpendiculaire AD à la ligne AB (n) : faites cette perpendiculaire égale à cette ligne, & divisez-la en deux parties DE & EA égales entr'elles (n) : prolongés la partie EA vers F, jusqu'à ce que la ligne EAF soit égale à

à la distance du point E au point B : divisés la ligne AB en deux parties telles que l'une AH soit égale au prolongement AF de la partie EA. le rectangle de la ligne AB & de la partie HB sera égal au quarré de la partie AH.

Pour la démonstration : tirés par les points D & F les paralleles DC & FG à la ligne AB (n) : tirés aussi par les points B & H les paralleles BC & GHI à la ligne AD (n) : du point E tirés au point B la ligne EB. N. 130.

Démonst. Les quadrilateres ABCD, FGID, FGHA & HBCI sont des parallelogrammes, puisqu'ils ont chacun leurs côtés opposés paralleles (c) : ainsi le quadrilatre ABCD est le quarré de la ligne AB (n) ; puisqu'il a un angle droit DAB (c), N. 175. que sa longueur AB & sa largeur AD sont égales entr'elles (c), & que la ligne AB est l'un de ses côtés : le quadrilatre FGID est le rectangle de la ligne DF & de sa partie AF (n), puisqu'il a un angle D commun N. 175. avec le quarré ABCD, que la ligne DF est sa longueur, que sa largeur FG & la partie AH qui sont côtés opposés du parallelogramme FGHA, sont égales entr'elles (n), N. 141. & que les parties AH & AF le sont aussi (c) : le quadrilatre FGHA est le quarré de la partie AH (n), puisqu'il a un angle F N. 175.

186 LES ELEMENTS D'EUCLIDE ;

commun avec le rectangle FGID, que sa longueur AH & sa largeur AF sont égales entr'elles (c), & que la partie AH est l'un de ses côtés : enfin le quadrilatere HBCI est le rectangle de la ligne AB & de sa partie

N. 175. HB (n), puisqu'il a un angle B commun avec le quarré ABCD, que sa longueur CB & la ligne AB sont égales entr'elles (d), & que la partie HB est sa largeur. Or la somme du quarré ABCD de la ligne AB, & de celui de la partie EA, est égale au

N. 168. quarré de la ligne EB (n); puisque le triangle EAB est rectangle en A (c); le quarré de la ligne EB est égal à celui de la ligne EAF, puisque ces lignes sont égales entr'elles (c); & le quarré de la ligne EAF est égal à la somme du quarré de cette même partie EA, & du rectangle FGID de

N. 194. la ligne DF & de la partie AF (n), puisque la ligne EAF est une partie de la ligne DF, composée de sa partie AF & de la moitié EA de son autre partie DA (c); donc la somme du quarré ABCD & de celui de la partie EA, est égale à la somme du quarré de cette même partie EA & du rectangle

N. 62. FGID (n), & par conséquent si l'on retranche le quarré de EA de chacune de ces sommes, les restes qui sont le quarré ABCD & le rectangle FGID seront égaux en-

N. 64. tr'eux (n). Or puisque le Quarré ABCD

& le rectangle FGID sont égaux entr'eux, si l'on retranche de chacun le quadrilatere AHID qui leur est commun, les restes qui sont le rectangle HBCI de la ligne AB & de la partie HB, & le quarré FGHA de la partie AH, seront aussi égaux entr'eux (n); donc C. Q. F. F.

N. 64^m

PROPOSITION XII.

THEOREME.

194. *Le Quarré du côté opposé à l'angle obtus d'un Triangle obtus angle, est égal à la somme des Quarrés de chacun des autres côtés de ce Triangle, & de deux Rectangles faits chacun de l'un de ces autres côtés, & de son prolongement jusqu'au point auquel la perpendiculaire qui lui seroit abaissée du sommet de l'angle qui lui est opposé, le rencontreroit.*

LE quarré du côté AB du triangle ABC * obtus angle en C, est égal à la N. 22.
somme des quarrés de chacun des autres côtés AC & CB de ce triangle, & de deux rectangles faits chacun de l'un de ces autres côtés, par exemple AC, & de son prolongement jusqu'au point auquel la perpendi-

Q ij

188 LES ELEMENS D'EUCLIDE ;
culaire qui lui seroit abaissée du sommet de
l'angle B , le rencontreroit.

Const. Prolongés le côté AC vers D , &
du point B abaissés-lui la perpendiculaire

N. 93. BD (n).

Démonst. Le quarré de la ligne AD est
égal à la somme des quarrés des parties AC
& CD de cette ligne , & de deux rectangles

N. 179. faits chacun de ces mêmes parties (n) , puis-

que cette ligne est divisée en ces deux par-
ties au point C ; ainsi si l'on ajoute le quar-
ré de DB à ce quarré & à cette somme , la
somme du quarré de DB & de celui de AD
fera égale à celle des quarrés de AC , de
CD & de DB , & de deux rectangles faits
chacun du côté AC & de son prolongement

N. 63. CD (n). Or la somme du quarré de DB
& de celui de AD est égale au quarré du

N. 168. côté AB (n) , puisque le triangle ADB est
rectangle en D (c) ; & la somme du quarré
de CD & de celui de DB est égale au quar-

N. 168. ré du côté CB (n) ; puisque le triangle
CDB est aussi rectangle en D (c) ; donc le
quarré du côté AB est égal à la somme du
quarré du côté AC & de celui du côté CB ,
& de deux rectangles faits chacun du côté
AC & de son prolongement CD ; donc C.
Q. F. D.

USAGE.

195. On peut se servir de cette Proposition de la manière suivante, pour résoudre ce Problème.

Le côté AB d'un triangle obtus-angle ABC^* est de 20 pieds, le côté CB de 13, Fig. 122 & le côté AC de 11 : combien la perpendiculaire BD qui seroit abaissée du sommet de l'un des angles de ce triangle au prolongement de l'un des côtés qui forment l'angle obtus, contiendrait-elle de pieds ?

Le carré du côté AB est égal à la somme des carrés des côtés AC & CB & de deux rectangles faits chacun du côté AC , & de son prolongement CD (n) ; donc si de N. 194. 400 pieds, carré du côté AB (h), on retranche 290 pieds, somme des carrés des côtés AC & CB (h), le reste 110 pieds sera le double de la surface du rectangle du côté AC & du prolongement CD ; & par conséquent la surface de ce rectangle sera de 55 pieds. Or puisque la surface du rectangle de AC & de CD est de 55 pieds, & que AC est de 11 pieds (h), 55 pieds sont le produit de CD multiplié par 11 (n) ; & par conséquent CD N. 143. est de 5 pieds. Ainsi puisque le prolongement CD est de 5 pieds (d), que le côté CB est de 13 pieds (b), & que le triangle CDB

190 LES ELEMENS D'EUCLIDE,

est rectangle en D (c) ; si de 169 pieds
quarré du côté CB , on retranche 25 pieds
quarré du prolongement CD , le reste 144
pieds sera le quarré de la perpendiculaire

N. 168. BD (n), & par conséquent cette perpendiculaire est de 12 pieds ; donc C. Q. F. F.

PROPOSITION XIII.

THEOREME.

196. La somme du Quarré du côté opposé
à l'un des angles aigus d'un Triangle
acutangle, & de deux Rectangles faits
chacun de l'un des autres côtés de ce
Triangle, & de la partie de cet autre côté
qui est comprise entre cet angle aigu
& le point auquel la perpendiculaire qui
seroit abaissée à ce même côté du sommet
de l'angle qui lui est opposé, le rencontre-
roit, est égale à la somme des Quarrés
de chacun des autres côtés de ce Trian-
gle.

Fig. 23. **L**A somme du quarré du côté AB * qui
est opposé à un angle aigu C du trian-
gle acutangle ABC , & de deux rectangles
faits chacun de l'un des autres côtés de ce
triangle, par exemple AC , & de la partie
de cet autre côté AC qui est comprise en-
tre cet angle aigu C , & le point auquel la

perpendiculaire qui seroit abaissée du sommet de l'angle B à ce même côté, le rencontreroit, est égale à la somme des quarrés de chacun des autres côtés AC & CB de ce triangle.

Const. Du sommet de l'angle B, abaissés une perpendiculaire BD au côté AC (n). N. 93.

Dém. La somme du quarré de la ligne AC & de celui de la partie DC est égale à la somme de deux rectangles faits chacun de cette même ligne AC & de cette même partie DC, & du quarré de l'autre partie AD (n), N. 186. puisque cette ligne est divisée en ces deux parties au point D; ainsi si l'on ajoute le quarré de BD à chacune de ces sommes, la somme des quarrés de AC, de DC & de BD sera égale à celle de deux rectangles faits chacun de la ligne AC & de la partie DC, & des quarrés de AD & de BD (n). N. 69. Or la somme des quarrés de DC & de BD est égale au quarré de CB (n), puisque le triangle BDC est rectangle en D (c); & la somme des quarrés de AD & de BD est égale au quarré de AB (n), puisque le triangle BDA est aussi rectangle en D (c); donc la somme des quarrés des côtés AC & CB est égale à celle du quarré du côté AB & de deux rectangles faits chacun du côté AC & de la partie DC; donc C. Q. F. D. N. 168.

SCHOLIE.

197. Ce qui est dit dans ce Théorème du quarré du côté opposé à l'un des angles aigus d'un triangle acutangle, est aussi vrai du quarré opposé à l'un des angles aigus d'un triangle-rectangle, ou d'un triangle-obtus-angle; pourvu que l'on prenne pour l'un des côtés du Rectangle, celui qui est opposé à l'angle droit, s'il s'agit d'un triangle rectangle, & celui qui est opposé à l'angle obtus, s'il est question d'un triangle obtus-angle. La démonstration est la même que celle de ce Théorème.

USAGE.

198. On peut se servir de cette Proposition de la manière suivante, pour résoudre ce Problème.

Le côté AB d'un triangle acutangle
 Fig. 23. ABC^* est de 40 pieds, le côté CB de 30,
 & le côté AC de 50: combien la perpendi-
 culaire BD qui seroit abaissée de l'angle B
 de ce triangle à son côté AC , contiendrait-
 elle de pieds?

La somme des quarrés des côtés AC &
 CB de ce triangle est égale à celle du quar-
 ré du côté AB , & de deux rectangles faits
 N. 196. chacun du côté AC & de sa partie DC (n);
 donc si de 3400 pieds, somme des quar-
 rés

rés des côtés AC & CB (h), on retranche 1600 pieds, quarré du côté AB (h), le reste 1800 pieds sera le double de la surface du rectangle fait du côté AC & de sa partie DC ; & par conséquent la surface de ce rectangle sera de 900 pieds. Or puisque la surface du rectangle de AC & de DC est de 900 pieds, & que AC est de 50 pieds (h), 900 est le produit de DC multiplié par 50 (n); & par conséquent N. 145. DC est de 18 pieds. Ainsi puisque la partie DC est de 18 pieds (d), que le côté CB est de 30 pieds (h), & que le triangle BDC est rectangle en D (c), si de 900 pieds, quarré du côté CB , on retranche 324 pieds, quarré de la partie DC , le reste 576 pieds sera le quarré de la perpendiculaire BD (n); & par conséquent cette perpendiculai- N. 168. re est de 24 pieds; donc C. Q. F. F.

SCHOLIE.

199. L'usage de cette Proposition & celui de la précédente sont très-fréquens dans le Mesurage; parce qu'il est beaucoup plus facile dans la pratique de mesurer les trois côtés d'un triangle, que d'abaisser une perpendiculaire de l'un de ses angles à l'un de ses côtés.

PROPOSITION XI

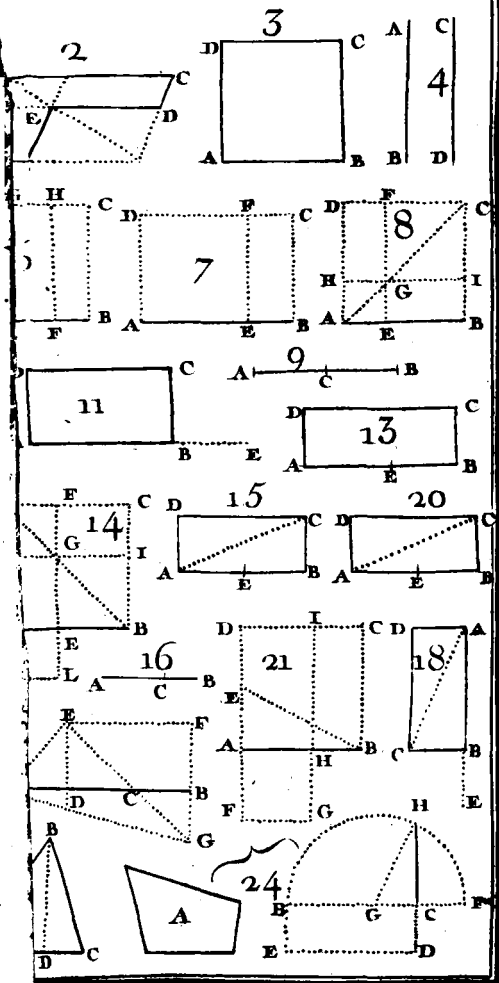
PROBLEME.

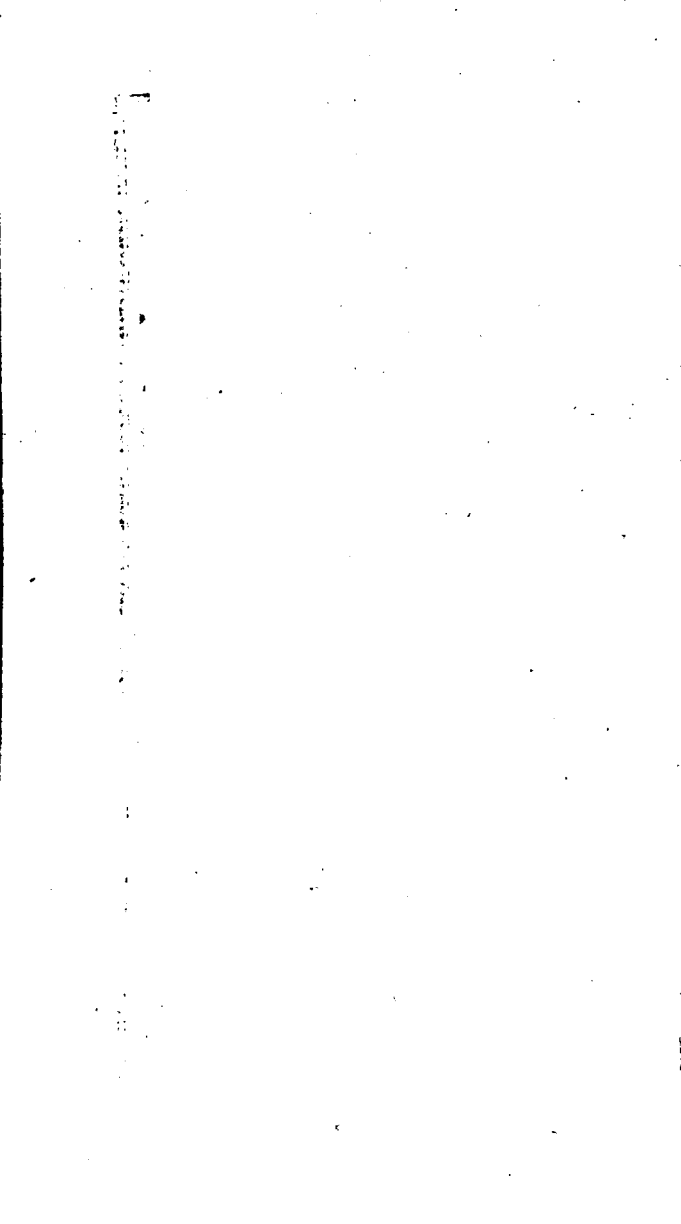
200. Décrire un Quarré tel que sa face soit égale à celle d'une figure rectiligne donnée.

IL faut décrire un quarré tel que sa face soit égale à celle d'une figure rectiligne A *.

Const. Décrivés un parallelogramme rectangle BCDE dont la surface soit égale à celle de la figure rectiligne A (n) : prolongés l'un des côtés de ce rectangle, par exemple son côté BC, vers F, jusqu'à ce que son prolongement CF soit égal à l'autre côté CD : divisés la ligne BF en deux parties BG & GF égales entr'elles (n) : du point G pris pour centre, & avec la partie GF prise pour rayon, décrivés un demi-cercle BHF : prolongés le côté DC vers H, jusqu'à ce qu'il rencontre en un point H la circonférence de ce demi-cercle : le prolongement CH sera le côté du quarré dont la surface sera égale à celle de la figure rectiligne A.

Pour la démonstration : tirés du point





G au point H la ligne GH :

Démonstration. La somme des quarrés des côtés CH & GC du triangle GCH est égale au quarré du côté GH (n), puis- N. 168.
que ce triangle est rectangle en C (c) ; le quarré du côté GH est égal à celui de la ligne GF, puisque ce côté & cette ligne sont rayons du même demi-cercle BHF (c), & le quarré de la ligne GF est égal à la somme du rectangle des parties BC & CF de la ligne BF, & du quarré de la ligne GC (n) ; puisque la ligne GF étant la moi- N. 182.
tié de la ligne BF (c), la ligne GC est la moitié de la différence des parties BC & CF de cette ligne BF ; donc la somme du quarré du côté CH & de celui du côté GC est égale à la somme du rectangle des parties BC & CF, & du quarré de la partie GC (n) ; & par conséquent si l'on retran- N. 62.
che le quarré de GC de chacune de ces sommes, les restes qui sont le quarré du côté CH & le rectangle des parties BC & CF, seront égaux entr'eux (n). Or le rectangle N. 64.
BCDE, est celui des parties BC & CF, puisque BC est l'un de ses côtés, & qu'il a un autre côté CD égal à CF (c) ; & il est égal à la figure rectiligne A (c) ; donc le quarré du côté CH est égal à la figure rectiligne A ; donc C. Q. F. F.

Fin du second Livre.



LES ELEMENS D'EUCLIDE.

LIVRE TROISIE'ME.

EUCLIDE après avoir posé les fondemens de la Géométrie dans les Livres précédens, considère dans celui-ci les propriétés des Lignes droites qui ont quelques points communs avec la circonférence d'un Cercle, & examine aussi la manière dont les circonférences des cercles peuvent se toucher, ou se couper. Il détermine ensuite la mesure des différens angles formés par des Lignes-droites tirées chacune d'un même point de quelques-unes de ces circonférences ; & après avoir résolu quelques Problèmes qui concernent le Cercle, il démontre dans les dernières Propositions de ce Livre, les propriétés fondamentales & caractéristiques de cette figure.

DEFINITIONS.

I.

201. **O**N nomme Cercles égaux entr'eux, ceux dont les diamètres, ou dont les rayons sont égaux entr'eux.

II.

202. On dit qu'une Ligne-droite *touche* un cercle, lorsqu'elle a un point commun avec la circonférence de ce cercle, & qu'étant prolongée de part & d'autre, tous les autres points sont hors de cette figure.

La Ligne AB touche le Cercle X.* Fig. 1.

203. On nomme *Tangente* d'un cercle, une ligne droite qui touche un cercle.

La Ligne AB est une Tangente du cercle X.* Fig. 1.

204. On nomme *Sécante* d'un cercle, une ligne droite qui étant prolongée s'il est nécessaire, a plus d'un point commun avec la circonférence d'un cercle.

La Ligne CD est une Sécante du cercle X.* Fig. 1.

III.

205. On dit que des Cercles se tou-

198 LES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE,
chent, lorsque leurs circonférences ayant
 un point commun entr'elles, ne se coupent
 point.

IV.

206. On dit que des Lignes-droites
sont également éloignées du centre d'un
 cercle, lorsque les perpendiculaires tirées
 du centre de ce cercle à chacune de ces li-
 gnes, sont égales entr'elles.

Fig. 2. Les Lignes AB & CD * sont également
 éloignées du centre K du cercle X , si les
 perpendiculaires KG & KH sont égales
 entr'elles.

207. On dit qu'une Ligne-droite est
plus éloignée qu'une autre du centre d'un
 cercle, lorsque la perpendiculaire tirée
 du centre de ce cercle à cette ligne, est
 plus grande que la perpendiculaire tirée de
 ce même centre à cette autre ligne.

Fig. 2. La Ligne EF est plus éloignée que la
 ligne AB du centre K du cercle X *, si
 la perpendiculaire KI est plus grande que
 la perpendiculaire KG .

208. On nomme *Corde* d'un Arc, une
 ligne-droite tirée de l'une des extrémités
 de cet Arc à son autre extrémité.

La Ligne AC est la Corde de l'Arc
 Fig. 1. ABC *.

209. On dit qu'une Corde *sous-tend*
 l'Arc, des extrémités duquel elle est tirée.

La Corde AC sous-tend l'Arc ABC *. Fig. 3.

V.

210. On nomme *Segment* d'un cercle, une figure plane terminée par un Arc de cercle, & par une ligne-droite.

La figure ABC * est un Segment de Fig. 3.
cercle.

VI.

211. On nomme *Angle d'un Segment*, un angle formé par la Corde qui sous-tend l'Arc de ce Segment, & par une Tangente à cet Arc tirée de l'une des extrémités de cette Corde.

L'Angle ABC * est l'Angle du Segment Fig. 4.
CDB.

VII.

212. On nomme *Angle dans un Segment*, ou *Angle inscrit dans un Segment*, un angle dont le sommet est un point de l'Arc de ce Segment, & dont les côtés passent par les extrémités de cet Arc.

L'Angle E * est un Angle dans le Seg- Fig. 4.
ment CEB.

VIII.

213. On dit qu'un angle dont le sommet est un point de la circonférence d'un cercle, s'appuye sur l'Arc de ce cercle, qui est compris entre ses côtés.

L'Angle B * s'appuye sur l'Arc ADC. Fig. 5.

214. On nomme *Secteur* de cercle une figure-plane terminée par un Arc de cercle, & par deux lignes droites tirées du centre de ce cercle aux extrémités de cet Arc.

Fig. 6. Les figures *ABCD* & *AECB* * sont chacune un Secteur de cercle.

X.

215. On dit que des Segmens de cercles sont *semblables*, lorsque les angles inscrits dans chacun de ces Segmens, sont égaux entr'eux.

Fig. 7. Les Segmens *ABC* & *DEF* * sont semblables, si les angles *B* & *E* inscrits chacun dans chacun de ces Segmens, sont égaux entr'eux.

PROPOSITION I.

PROBLEME.

216. Trouver le centre d'un cercle donné.

Fig. 8. **I**L faut trouver le centre du cercle *X* *.
Const. Tirés à volonté une ligne droite *AB*, qui se termine de part & d'autre à la circonférence du cercle *X*: divisés cette ligne en deux parties *AE* & *EB* égales en-

tr'elles (*n*) : du point E milieu de cette li- N. 91.
gne , élevés-lui une perpendiculaire CD
(*n*) qui se termine aussi de part & d'autre à N. 92.
cette circonférence : divisés aussi cette per-
pendiculaire en deux parties CF & FD éga-
les entr'elles (*n*) ; & le point F milieu de N. 93.
cette perpendiculaire , fera le centre du
cercle X.

Pour la démonstration : d'un point G
pris à volonté hors de la perpendiculaire
CD , tirés aux points A , E & B les lignes
GA , GE & GB.

Démonst. Le centre du cercle X est dans
la perpendiculaire CD , ou hors de cette
perpendiculaire. Or s'il étoit par exemple
un point G hors de la perpendiculaire CD ,
les triangles AGE & BGE auroient le cô-
té GA égal au côté GB , puisque ces côtés
seroient rayons du même cercle X (*h*) , le
côté AE égal au côté EB (*c*) , & le côté
GE commun entr'eux ; ainsi les angles du
premier triangle seroient égaux à ceux du
second , chacun à chacun (*n*) ; donc l'an- N. 87.
gle GEA seroit égal à l'angle GEB ; & par
conséquent la ligne GE seroit perpendicu-
laire à la ligne AB (*n*) : mais la ligne GE N. 18.
n'est point perpendiculaire à la ligne AB (*n*) , N. 20.
puisque l'angle GEB n'est qu'une partie
de l'angle CEB qui est droit (*c*) ; donc le
centre du cercle X n'est point hors de la

202 LES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE,
perpendiculaire CD ; & par conséquent il
est dans cette perpendiculaire. Or puisque
le centre du cercle X est dans la perpendi-
culaire CD , que le centre d'un cercle est
également éloigné de tous les points de la
circonférence de ce cercle , & que le point
F est le seul point de la ligne CD également
éloigné des points C & D de la circonfé-
rence du cercle X (c) , le point F est le
centre de ce cercle ; donc C. Q. F. F.

COROLLAIRE.

217. Il suit de la démonstration de ce
Problème , que si une ligne droite terminée
de part & d'autre à la circonférence d'un
cercle , coupe perpendiculairement & par
le milieu une autre ligne droite terminée
aussi de part & d'autre à la circonférence
de ce même cercle , cette première ligne est
le diamètre de ce cercle.



PROPOSITION II.

THEOREME.

218. Une ligne droite qui a plus d'un point commun avec la circonférence d'un cercle, passe dans ce cercle.

LA ligne AB * qui a les points A & B Fig. 2. communs avec la circonférence du cercle X, passe dans ce cercle.

Const. Prenés sur la ligne AB un point D, à volonté, entre les points A & B : du centre C du cercle X, tirés aux points A, D & B les lignes CA, CD & CB.

Démonst. Les côtés CA & CB du triangle ACB sont égaux entr'eux, puisqu'ils sont rayons du même cercle X (c) ; ainsi l'angle B est égal à l'angle A (n) : or l'angle CDA est plus grand que l'angle B (n), N. 100. puisque l'angle CDA est l'angle extérieur du triangle CDB, & que l'angle B est l'un des angles intérieurs de ce triangle, opposés à cet angle extérieur ; donc l'angle CDA est plus grand que l'angle A ; & par conséquent le côté CA du triangle CDA, est plus grand que le côté CD de ce même triangle (n). Or puisque le côté CA est plus N. 102.

204 LES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE ,
 grand que le côté CD, le point D de la li-
 gne AB est dans le cercle X ; & par consé-
 quent cette ligne passe dans ce cercle ; donc
 C. Q. F. D.

PROPOSITION III.

THEOREME.

219. Premièrement. Si une ligne droite
 qui passe par le centre d'un cercle , divi-
 se en deux parties égales entr'elles une
 autre ligne droite , qui ne passant point
 par le centre de ce même cercle , est ter-
 minée de part & d'autre à sa circonfé-
 rence , elle sera perpendiculaire à cette
 autre ligne. Secondement , si elle lui est
 perpendiculaire , elle la divisera en deux
 parties égales entr'elles.

Fig. 10. Premièrement. **S**I la ligne CD* qui passe
 par le centre F du cer-
 cle X , divise la ligne AB en deux parties
 AE & EB égales entr'elles , la ligne CD
 sera perpendiculaire à la ligne AB. *Secon-*
dement. Si cette ligne CD est perpendicu-
 laire à la ligne AB , elle la divisera en deux
 parties AE & EB égales entr'elles.

Const. Du centre F du cercle X tirés

aux points A & B les lignes FA & FB.

Premierement. Si la ligne CD divise la ligne AB en deux parties AE & EB égales entr'elles.

Démonst. Les triangles AFE & BFE ont le côté FA égal au côté FB, puisque ces côtés sont rayons du même cercle X (c), le côté AE égal au côté EB (h), & le côté FE commun entr'eux; ainsi les angles du premier triangle sont égaux à ceux du second, chacun à chacun (n); donc l'an- N. 37.
gle FEA est égal à l'angle FEB, & par conséquent la ligne CD est perpendiculaire à la ligne AB (n).

Secondement. Si la ligne CD est perpen- N. 18.
diculaire à la ligne AB.

Démonst. La somme des quarrés de chacun des côtés AE & EF du triangle AEF est égale au quarré du côté AF (n), puis- N. 168.
que ce triangle est rectangle en E (h); le quarré du côté AF est égal à celui du côté FB, puisque ces côtés AF & FB sont rayons du même cercle X(c); & le quarré du côté FB est égal à la somme des quarrés de chacun des côtés EB & EF du triangle FEB (n), puisque ce triangle est aussi rec- N. 168.
tangle en E (h); donc la somme des quarrés de chacun des côtés AE & EF est égale à celle de chacun des côtés EB & EF (n); N. 62.
& par conséquent si de chacune de ces som-

206 LES ELEMENS D'EUCLIDE ,
 mes on retranche le quarré de EF , les res-
 tes qui seront le quarré de AE & celui de
 n. 64. EB , seront égaux entr'eux (n). Or puisque
 le quarré de la partie AE est égal à celui de
 la partie EB , ces parties AE & EB de la
 ligne AB sont égales entr'elles ; & par con-
 séquent cette ligne est divisée en deux par-
 ties égales entr'elles ; donc C. Q. F. D.

PROPOSITION IV.

THEOREME.

220. Si deux lignes droites qui se cou-
 pent & sont terminées chacune de part
 & d'autre à la circonférence d'un cercle,
 ne passent point toutes deux par le centre
 de ce cercle , elles ne se diviseront point
 chacune en deux parties égales en-
 tr'elles.

Fig. 11. **L** Es lignes droites AB & CD * qui se
 coupent au point F , sont terminées
 chacune à la circonférence du cercle X , &
 ne passent point toutes deux par le centre E
 de ce cercle , ne se divisent point chacune
 en deux parties égales entr'elles.

Const. Du centre E du cercle X tirés au
 point F auquel les lignes AB & CD se cou-
 pent , la ligne EF.

Démonst. Si le point F étoit le milieu de chacune des lignes AB & CD, la ligne EF qui passe par le centre E du cercle X & par ce point F, seroit perpendiculaire à chacune de ces lignes (n); ainsi l'angle EFD N. 219. seroit droit, & l'angle EFB le seroit aussi (n); & par conséquent ces angles seroient N. 20. égaux entr'eux. Or les angles EFD & EFB ne sont point égaux entr'eux (n), N. 72. puisque l'un est une partie de l'autre; donc le point F n'est point le milieu de chacune des lignes AB & CD; & par conséquent ces lignes ne se divisent point chacune en deux parties égales entr'elles; donc C. Q. F. D.

PROPOSITION V.

THEOREME.

221. *Les cercles dont les circonférences se coupent, n'ont point le même centre.*

Les cercles ABC & BDC * dont les Fig. 12. circonférences se coupent aux points B & C, n'ont point le même centre.

Démonst. Toutes les lignes droites qui sont tirées du centre d'un cercle à sa circonférence sont égales entr'elles (n); ainsi les N. 26.

208 LES ELEMENS D'EUCLIDE,
 circonférences des cercles qui ont le même
 centre, ont tous leurs points correspondans
 également éloignés les uns des autres ; &
 par conséquent elles ne se coupent point :
 or les circonférences des cercles ABC &
 BDC se coupent aux points B & C (*h*) ;
 donc ces cercles n'ont point le même cen-
 tre ; donc C. Q. F. D.

PROPOSITION VI.

THEOREME.

222. *Les cercles dont les circonférences
 se touchent, n'ont point le même centre.*

Fig. 13. **L** Es cercles ABC & DBE* dont les
 circonférences se touchent au point B,
 n'ont point le même centre.

Démonst. Toutes les lignes droites qui
 sont tirées du centre d'un cercle à sa circon-
 férence, sont égales entr'elles (*n*) ; ainsi les
 circonférences des cercles qui ont le même
 centre, ont tous leurs points correspon-
 dans également éloignés les uns des autres ;
 & par conséquent elles ne se touchent point :
 or les circonférences des cercles ABC &
 DBE se touchent au point B (*h*) ; donc
 ces cercles n'ont point le même centre ;
 donc C. Q. F. D.

PROPO-

PROPOSITION VII.

THEOREME.

223. *Si des lignes droites sont tirées d'un point d'un cercle, mais qui n'en est pas le centre, à la circonférence de ce cercle : Premièrement, celle qui passe par le centre est la plus grande, & celle qui y passeroit si elle étoit prolongée, est la moins grande : Secondement, celles qui sont plus près de la ligne qui passe par le centre, sont plus grandes que celles qui en sont plus éloignées : Troisièmement, il peut y en avoir deux égales entr'elles, & il ne peut y en avoir plus de deux.*

PREMIEREMENT. **L**A ligne AEB* qui Fig. 140 passe par le centre E du cercle X, est la plus grande de toutes les lignes droites qu'il est possible de tirer du point A qui n'est pas le centre de ce cercle, à sa circonférence; & la ligne AC qui passeroit par ce centre E si elle étoit prolongée, est la moins grande.

Const. Du point D pris à volonté sur la circonférence du cercle X, tirés au centre
S

210 LES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE,
E de ce cercle , & au point A , les lignes
DE & DA.

DEMONSTRATION.

Premierement. La somme des côtés AE
& ED du triangle AED , est plus grande
N. 110. que le côté AD de ce triangle (n) : or la li-
gne AEB est égale à la somme de ces côtés
AE & ED , puisque les lignes EB & ED
qui sont rayons du même cercle X (c), sont
égales entr'elles ; donc la ligne AEB est
plus grande que la ligne AD ; & par con-
séquent puisque la même démonstration sub-
sisteroit , à quelque point de la circonféren-
ce du cercle X que l'on prit le point D , la
ligne AEB est la plus grande de toutes les
lignes droites qu'il est possible de tirer du
point A à cette circonférence.

Secondement. La somme des côtés AD
& AE du triangle AED , est plus grande
N. 110. que le côté ED de ce triangle (n) : or la li-
gne EAC est égale au côté ED , puisque
cette ligne & ce côté sont rayons du même
cercle X (c) ; donc la somme des côtés AD
& AE est plus grande que la ligne EAC ;
& par conséquent si de cette somme & de
cette ligne , on retranche la ligne AE , le
reste AD de cette somme sera plus grand
que le reste AC de cette ligne. Or la même
démonstration subsisteroit , à quelque point

de la circonférence du cercle X que l'on prit le point D ; donc la ligne AC est la moins grande de toutes les lignes droites qu'il est possible de tirer du point A à cette circonférence.

SECONDEMENT. La ligne AC * qui est Fig. 15. plus près de la ligne AEB qui passe par le centre E du cercle X, est plus grande que la ligne AD qui en est plus éloignée.

Const. Du centre E du cercle X tirés aux points C & D, les lignes EC & ED.

Démonst. L'angle AEC du triangle ACE est plus grand que l'angle AED du triangle ADE (n), & les côtés EC & EA n. 72. qui forment cet angle AEC du premier triangle, sont égaux aux côtés ED & EA qui forment cet angle AED du second, chacun à chacun ; puisque EC & ED sont rayons du même cercle X (c), & que EA est commun à ces deux triangles ; donc le côté AC du premier triangle est plus grand que le côté AD du dernier (n) ; & par con- n. 117. séquent la ligne AC qui est plus près de la ligne AEB qui passe par le centre E, est plus grande que la ligne AD qui en est plus éloignée.

TROISIÈMEMENT. Du point A * on Fig. 16. peut tirer à la circonférence du cercle X, deux lignes droites égales entr'elles ; & l'on ne peut en tirer plus de deux.

212 LES ELEMENS D'EUCLIDE ,

Const. Du point A tirés par le centre E du cercle X, la ligne AEB : du point C pris à volonté sur la circonférence de ce cercle, tirés aux points A & E, les lignes CA & CE : faites sur la ligne AEB un angle AED qui ait le point E de cette ligne pour sommet, & qui soit égal à l'angle
 N. 115. AEC (n) : du point A tirés au point D auquel le côté AD de l'angle AED rencontre la circonférence du cercle X, la ligne AD.

DEMONSTRATION.

Premierement. Les triangles CEA & DEA ont l'angle AEC égal à l'angle AED (c), & les côtés EC & EA qui forment le premier, égaux aux côtés ED & EA qui forment le second, chacun à chacun ; puisque EC & ED sont rayons du même cercle X (c), & que EA est commun à ces deux triangles ; donc l'autre côté AC du premier triangle est égal à l'autre côté AD
 N. 116. du second (n) ; & par conséquent du point A on peut tirer à la circonférence du cercle X, deux lignes droites AC & AD égales entr'elles.

Secondement. La ligne AD est égale à la ligne AC (d) : or une ligne droite tirée du point A à la circonférence du cercle X, qui seroit plus près de la ligne AEB que la ligne AD, seroit plus grande que cette li-

ligne AD (*d*) ; & une ligne droite tirée de ce même point à cette même circonférence, qui seroit plus éloignée de la ligne AEB que la ligne AD, seroit moins grande que cette ligne AD (*d*) ; donc aucune ligne droite autre que la ligne AD, qui seroit tirée du point A à la circonférence du cercle X, ne seroit égale à la ligne AC ; & par conséquent du point A on ne peut tirer à la circonférence du cercle X, plus de deux lignes droites AC & AD égales entr'elles ; donc C. Q. F. D.



PROPOSITION VIII.

THEOREME.

224. Si des lignes droites sont tirées d'un point hors d'un cercle , à la circonférence de ce cercle : Premièrement , celle qui passe par le centre est la plus grande ; & celle qui y passeroit si elle étoit prolongée , est la moins grande : Secondement , si elles traversent le cercle , celles qui sont plus près de la ligne qui passe par le centre , sont plus grandes que celles qui en sont plus éloignées ; & si elles n'entrent point dans le cercle , celles qui sont plus près de la ligne qui passeroit par le centre si elle étoit prolongée , sont moins grandes que celles qui en sont plus éloignées : Troisièmement , deux de celles qui traversent le cercle peuvent être égales entr'elles , deux de celles qui n'y entrent point , peuvent l'être aussi ; & dans l'un & l'autre cas , il ne peut y en avoir plus de deux.

Fig. 17. PREMIEREMENT. **L**A ligne AEC* qui passe par le centre E du cercle X , est la plus grande de toutes

les lignes droites qu'il est possible de tirer du point A hors de ce cercle, à sa circonférence ; & la ligne AB qui passeroit par ce centre E si elle étoit prolongée, est la moins grande.

Const. Du point D pris à volonté sur la circonférence du cercle X, tirés au centre E de ce cercle & au point A, les lignes DE & DA.

DEMONSTRATION.

Premièrement. La somme des côtés AE & ED du triangle AED, est plus grande que le côté AD de ce triangle (n) : or la N. 110. ligne AEC est égale à la somme de ces côtés AE & ED ; puisque les lignes EC & ED qui sont rayons du même cercle X (c), sont égales entr'elles ; donc la ligne AEC est plus grande que la ligne AD ; & par conséquent puisque la même démonstration subsisteroit, à quelque point de la circonférence du cercle X que l'on prît le point D, la ligne AEC est la plus grande de toutes les lignes droites qu'il est possible de tirer du point A à cette circonférence.

Secondement. La somme des côtés AD & DE du triangle AED est plus grande que le côté ABE de ce triangle (n), & les li- N. 110. gnes DE & BE sont égales entr'elles, puisqu'elles sont rayons du même cercle X (c) ;

216 LES ELEMENS D'EUCLIDE,
 donc si l'on retranche la ligne DE, de cette somme, & la ligne BE de ce côté, le reste AD de cette somme, sera plus grand que le reste AB de ce côté; & par conséquent puisque la même démonstration subsisteroit, à quelque point de la circonférence du cercle X que l'on prit le point D, la ligne AB est la moins grande de toutes les lignes droites qu'il est possible de tirer du point A à cette circonférence.

- SECONDEMENT. Lorsque les lignes AD
 Fig. 18. & AF * qui sont tirées du point A à la circonférence du cercle X traversent ce cercle, la ligne AF qui est plus près de la ligne AEC qui passe par le centre E, est plus grande que la ligne AD qui en est plus éloignée;
 Fig. 19. & lorsque ces lignes AD & AF * n'entrent point dans ce cercle, la ligne AD qui est plus près de la ligne AB qui passeroit par le centre E si elle étoit prolongée, est moins grande que la ligne AF qui en est plus éloignée.

Fig. 18. Const. Du centre E du cercle X * tirés
 & 19. aux points D & F, les lignes ED & EF.

Démonst. L'angle AEF du triangle AFE est plus grand que l'angle AED du triangle ADE (n), & les côtés EA & EF qui forment cet angle AEF du premier triangle, sont égaux aux côtés EA & ED qui forment cet angle AED du second, chacun

cun à chacun, puis que EF & ED sont rayons
 du même cercle X (c), & que EA est com-
 mun à ces deux triangles ; donc le côté AF
 du premier triangle est plus grand que le
 côté AD du second (n) ; & par conséquent, N. 117.
dans le premier Cas, la ligne AF * qui est Fig. 18.
 plus près de la ligne AEC qui passe par le
 centre E, est plus grande que la ligne AD
 qui en est plus éloignée ; & , *dans le second*
Cas, la ligne AD * qui est plus près de la Fig. 19.
 ligne AB qui passeroit par le centre E si
 elle étoit prolongée, est moins grande que
 la ligne AF qui en est plus éloignée.

TROISIÈMEMENT. Du point A * on Fig. 10.
 peut tirer à la circonférence du cercle X, & 21.
 deux lignes droites égales entr'elles, qui
 traversent ce cercle ; deux autres aussi éga-
 les entr'elles qui n'y entrent point ; & *dans*
l'un & l'autre Cas, on ne peut en tirer
 plus de deux.

Const. Du point A tirés au centre E du
 cercle X, la ligne AE : du point C pris à
 volonté sur la circonférence de ce cercle,
 tirés aux points A & E, les lignes CA &
 CE : faites sur la ligne AE un angle AED
 qui ait le point E de cette ligne pour som-
 met, & qui soit égal à l'angle AEC (n) : N. 115.
 du point A tirés au point D, auquel le côté
 ED de l'angle AED rencontre la circonfé-
 rence du cercle X, la ligne AD.

DEMONSTRATION.

Premierement. Les triangles CEA & DEA ont l'angle AEC égal à l'angle AED (*c*) , & les côtés EC & EA qui forment le premier , égaux aux côtés ED & EA qui forment le second , chacun à chacun ; puisque EC & ED sont rayons du même cercle X (*c*) , & que EA est commun à ces deux triangles ; donc l'autre côté AC du premier triangle , est égal à l'autre côté AD du second (*n*) ; & par conséquent du point A on peut tirer à la circonférence du cercle X , deux lignes droites AC & AD* égales entr'elles , qui traversent ce cercle ;

N. 10. Fig. 20. & deux autres lignes droites AC & AD* égales aussi entr'elles , & qui n'entrent point dans ce cercle.

Fig. 21.

Secondement. Dans l'un & dans l'autre Cas , la ligne AD* est égale à la ligne AC (*d*) : or une ligne droite tirée du point A à la circonférence du cercle X , qui seroit plus près de la ligne AE que la ligne AD , seroit plus grande que cette ligne AD , dans le premier Cas , & moins grande dans le second (*d*) ; & une ligne droite tirée de ce même point à cette même circonférence , qui seroit plus éloignée de la ligne AE que la ligne AD , seroit moins grande que cette ligne AD , dans le premier Cas , &

Fig. 20. & 21.

plus grande *dans le second* (d) ; donc aucune ligne droite autre que la ligne AD, qui seroit tirée du point A à la circonférence du cercle X, ne seroit égale à la ligne AC ; & par conséquent *dans l'un & dans l'autre Cas*, du point A on ne peut tirer à la circonférence du cercle X, plus de deux lignes droites AC & AD égales entr'elles ; donc C. Q. F. D.

PROPOSITION IX.

THEOREME.

225. *Un point duquel on peut tirer à la circonférence d'un cercle plus de deux lignes droites égales entr'elles, est le centre de ce cercle.*

SI les lignes droites AB, AC, & AD* Fig. 22. qui sont tirées chacune du point A à la circonférence du cercle X sont égales entr'elles, ce point sera le centre de ce cercle.

Const. Du point C tirés aux points B & D les lignes CB & CD : divisés chacune de ces lignes en deux parties égales entr'elles (n) : du point A tirés au milieu de cha- N. 21. cune de ces lignes, les lignes AE & AF.

T ij

- Démonst.* Les côtés du triangle AEB sont égaux à ceux du triangle AEC, chacun à chacun ; puisque AE est commun à ces deux triangles, que AB est égal à AC (*h*), & que EB l'est à EC (*c*) ; ainsi les angles du premier triangle sont égaux à ceux du second, chacun à chacun (*n*) ; & par conséquent l'angle AEB est égal à l'angle AEC. Or puisque l'angle AEB est égal à l'angle AEC, la ligne AE est perpendiculaire à la ligne CB (*n*), & par conséquent puisqu'elle passe par le milieu E de cette ligne (*c*) qui est terminée de part & d'autre à la circonférence du cercle X (*c*), elle
- N. 18. passe par le centre de ce cercle (*n*). On démontre de la même manière que la ligne AF passe aussi par ce même centre. Ainsi puisque les lignes AE & AF passent chacune par le centre du cercle X, le centre de ce cercle est un point commun à ces deux lignes : or ces deux lignes n'ont que le point
- N. 219. A commun entr'elles (*n*) ; donc le point A est le centre du cercle X ; donc C.Q.F.D.
- N. 75.



PROPOSITION X.

THEOREME.

226. *La circonférence d'un cercle ne peut couper en plus de deux points, celle d'un autre cercle.*

LA circonférence du cercle ABC * qui coupe aux points B & C celle du cercle BDC, ne peut pas la couper encore en un autre point. Fig. 234

Démonst. Si la circonférence du cercle ABC pouvoit couper en trois points celle du cercle BDC, les circonférences de ces cercles pourroient avoir trois points communs entr'elles; & par conséquent du point E qui, s'il est le centre du cercle ABC, n'est point celui du cercle BDC (*n*), puisque les circonférences de ces cercles se coupent (*h*), on pourroit tirer à la circonférence du cercle BDC, trois lignes droites qui seroient égales entr'elles, puisqu'elles seroient chacune un rayon de ce cercle: or d'un point qui n'est pas le centre d'un cercle, on ne peut tirer à la circonférence de ce cercle, plus de deux lignes droites égales entr'elles (*n*); donc la circonférence du N. 221.
N. 223.

222 LES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE ;
 cercle ABC ne peut couper en plus de
 deux points, celle du cercle BDC ; donc
 C. Q. F. D.

PROPOSITION XI.

THEOREME.

227. *Si la circonférence d'un cercle touche intérieurement celle d'un autre cercle, le point auquel ces circonférences se touchent, & les centres de ces cercles seront chacun dans une même ligne droite.*

Fig. 24.

LE point B auquel la circonférence du cercle DBE * touche intérieurement celle du cercle ABC, le centre H du cercle ABC, & le centre du cercle DBE, sont chacun dans une même ligne droite.

Const. Du centre H du cercle ABC, tirés au point B, auquel la circonférence du cercle DBE touche celle de ce cercle ABC, la ligne HB : du même point H tirés au point C pris à volonté sur la circonférence du même cercle ABC, la ligne HEC : du point I pris aussi à volonté sur la partie de cette ligne HEC qui est dans le cercle DBE, tirés au point B, la ligne IB.

Démonst. Si le centre H du cercle ABC , le centre du cercle DBE , & le point B auquel les circonférences de ces cercles se touchent, n'étoient point chacun dans une même ligne droite, le centre du cercle DBE seroit hors de la ligne droite HB , puisque le centre H & le point B sont chacun dans cette ligne (c). Or si le centre du cercle DBE étoit par exemple un point I , hors de la ligne HB , les lignes IB & IE seroient égales entr'elles, puisqu'elles seroient rayons du même cercle DBE ; mais ces lignes IB & IE ne sont point égales entr'elles; car la somme des côtés HI & IB du triangle HIB est plus grande que le côté HB de ce triangle (n); or le côté HB est N. 110. égal à la ligne HEC , puisque ce côté & cette ligne sont rayons du même cercle ABC (c); donc la somme de ces côtés HI & IB est plus grande que la ligne HEC ; & par conséquent si de cette somme & de cette ligne, on retranche la ligne HI , le reste IB de cette somme sera plus grand que le reste IEC de cette ligne. Ainsi puisque la ligne IB est plus grande que la ligne IEC , & que cette ligne IEC est plus grande que la ligne IE (n), la ligne IB est plus grande N. 72. que la ligne IE ; donc un point I hors de la ligne HB n'est point le centre du cercle DBE ; & par conséquent le centre de ce

224 LES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE ;
cercle est dans cette ligne HB ; donc C .
Q. F. D.

PROPOSITION XII.

THEOREME.

228. Si les circonférences de deux cercles se touchent extérieurement, le point auquel elles se touchent, & les centres de ces cercles, seront chacun dans une même ligne droite.

Fig. 25. **L**E point C* auquel les circonférences des cercles X & Y se touchent extérieurement, le centre A du cercle X, & le centre du cercle Y, sont chacun dans une même ligne droite.

Const. Du centre A du cercle X tirés au point C auquel les circonférences des cercles X & Y se touchent, une ligne AC : prolongés cette ligne vers B : du point D pris à volonté dans le cercle Y, hors de la ligne ACB, tirés aux points A & C, les lignes DA & DC.

Démonst. Si le centre A du cercle X, le centre du cercle Y, & le point C auquel les circonférences de ces cercles se touchent, n'étoient point chacun dans une même li-

gne droite , le centre du cercle Y seroit hors de la ligne droite ACB , puisque le centre A & le point C sont chacun dans cette ligne (c). Or si le centre du cercle Y étoit par exemple un point D hors de la ligne ACB , la ligne DC & la partie DF de la ligne DA seroient égales entr'elles , puisque cette ligne & cette partie seroient rayons du même cercle Y ; donc puisque la ligne CA & la partie EA de la ligne DA , qui sont rayons du même cercle X , sont aussi égales entr'elles , la somme des lignes DC & CA seroit égale à la somme des parties DF & EA ; & par conséquent puisque la somme de ces parties est moins grande que la ligne DA de la partie FE , la somme des lignes DC & CA seroit moins grande que cette ligne DA ; mais la somme des lignes DC & CA n'est point moins grande que la ligne DA (n) , (elle ne seroit même point aussi grande que cette ligne , quand on prétendrait que les points F & E ne seroient qu'un même point (n) ,) puisque ces lignes DC , CA & DA , sont les côtés du triangle ADC ; donc un point D hors de la ligne ACB , n'est point le centre du cercle Y ; & par conséquent le centre de ce cercle est dans cette ligne ACB ; donc C. Q. F. D.

N. 110.

N. 110.

PROPOSITION XIII.

THEOREME.

229. Si la circonférence d'un cercle touche celle d'un autre cercle intérieurement, ou extérieurement, elle ne la touche qu'à un seul point.

Fig. 26.

PREMIEREMENT. **L**A circonférence du cercle FDG * qui touche intérieurement au point D celle du cercle EDB, ne la touche qu'à ce point.

Const. Du centre A du cercle EDB, tirés au centre C du cercle FDG, la ligne AC : prolongés cette ligne vers D, jusqu'à ce qu'elle rencontre au point D, la circonférence du cercle EDB : du point B pris à volonté sur la circonférence de ce cercle, tirés aux centres A & C les lignes BA & BC.

Démonst. Si la circonférence du cercle FDG qui touche au point D celle du cercle EDB (*h*), la touchoit aussi, par exemple au point B, les lignes BC & DC feroient égales entr'elles, puisqu'elles feroient rayons du même cercle FDG ; ainsi si l'on ajoutoit la ligne CA à chacune de

ces lignes, la somme des lignes BC & CA seroit égale à la ligne DCA qui est la somme des lignes DC & CA ; & par conséquent puisque les lignes DCA & BA qui sont rayons du même cercle EDB , sont égales entr'elles, la somme des lignes BC & CA seroit égale à la ligne BA . Mais la somme des lignes BC & CA n'est point égale à la ligne BA (n), puisque ces lignes BC , CA & BA sont les côtés du triangle CBA ; donc la circonférence du cercle FDG ne touche point au point B celle du cercle EDB ; & par conséquent, puisque la même démonstration subsisteroit à quelque point de la circonférence du cercle EDB que l'on prit le point B , la circonférence du cercle FDG ne touche qu'au point D celle du cercle EDB ; donc C. Q. F. D.

SECONDEMENT. Les circonférences des cercles X & Y * qui se touchent extérieurement au point D , ne se touchent qu'à ce point. Fig. 27.

Const. Du centre A du cercle X tirés au centre C du cercle Y , la ligne ADC : du point B pris à volonté sur la circonférence de l'un ou de l'autre de ces cercles, tirés aux centres A & C , les lignes BA & BC .

Démonst. Si les circonférences des cercles X & Y qui se touchent au point D (h), se touchoient aussi, par exemple au point

B, le point B seroit un point de la circonférence du cercle X ; ainsi les lignes BA & DA seroient chacune un rayon de ce cercle ; & par conséquent elles seroient égales entr'elles : le même point B seroit aussi un point de la circonférence du cercle Y ; ainsi les lignes BC & DC seroient aussi chacune un rayon de ce cercle , & par conséquent elles seroient aussi égales entr'elles. Or puisque les lignes BA & DA seroient égales entr'elles , & que les lignes BC & DC le seroient aussi , la somme des lignes BA & BC seroit égale à la ligne ADC qui est la somme des lignes DA & DC. Mais la somme des lignes BA & BC n'est point
 N. 110. égale à la ligne ADC (*n*) , puisque ces lignes BA , BC , & ADC sont les côtés du triangle ABC ; donc les circonférences des cercles X & Y ne se touchent point au point B ; & par conséquent , puisque la même démonstration subsisteroit à quelque point de la circonférence de l'un ou de l'autre de ces cercles que l'on prît le point B , les circonférences de ces cercles ne se touchent qu'au point D ; donc C. Q. F. D.



PROPOSITION XIV.

THEOREME.

230. *Si deux lignes droites sont terminées chacune de part & d'autre à la circonférence d'un cercle : Premièrement, elles seront égales entr'elles, si elles sont également éloignées du centre de ce cercle : Secondement, elles seront également éloignées du centre de ce cercle, si elles sont égales entr'elles.*

Premièrement. **L** Es lignes AB & CD * Fig. 28
sont égales entr'elles, si elles sont également éloignées du centre E du cercle X : *Secondement*, ces lignes sont également éloignées du centre de ce cercle, si elles sont égales entr'elles.

Const. Du centre E du cercle X abaissés à la ligne AB, la perpendiculaire EF, & à la ligne CD, la perpendiculaire EG (n) : N. 93. du même centre E tirés aux points A & C, les lignes EA & EC.

Premièrement. Si les lignes AB & CD sont également éloignées du centre E.

Démonst. La ligne AB est terminée de part & d'autre à la circonférence du cercle

- $X(h)$; donc puisque la ligne EF qui passe par le centre E de ce cercle (c), est perpendiculaire à cette ligne (r), elle la divise en deux parties AF & FB égales entr'elles
- N. 219. (n) ; & par des raisons pareilles, la ligne EG divise la ligne CD en deux parties CG & GD égales aussi entr'elles ; ainsi si les parties AF & CG sont égales entr'elles, les lignes AB & CD le seront aussi. Or les parties AF & CG sont égales entr'elles ; car la somme du quarré de AF & de celui
- N. 168. de EF est égale au quarré de EA (n), puisque le triangle FAE est rectangle en F (c) : le quarré de EA est égal à celui de EC, puisque EA & EC qui sont rayons du même cercle $X(c)$, sont égaux entr'eux ; & le quarré de EC est égal à la somme du
- N. 168. quarré de CG & de celui de EG (n), puisque le triangle GCE est rectangle en G (c) ; donc la somme du quarré de AF & de celui de EF est égale à celle du quarré de CG & de celui de EG ; & par conséquent si de la premiere, on retranche le quarré de EF, & de la seconde, le quarré de EG qui est égal à celui de EF, puisque les lignes EF & EG qui sont les distances du centre E aux lignes AB & CD (c), sont égales entr'elles (h), les restes qui sont le quarré de AF & celui de CG seront égaux entr'eux ; donc puisque le quarré de AF est

égal au carré de CG , la partie AF est égale à la partie CG , & par conséquent la ligne AB est égale à la ligne CD .

Secondement. Si les lignes AB & CD sont égales entr'elles.

Démonst. Par une démonstration pareille à la précédente la somme du carré de AF & de celui de EF est égale à celle du carré de CG & de celui de EG ; or le carré de AF est égal à celui de CG , puisque les lignes AF & CG sont les moitiés des lignes AB & CD (d), qui sont égales entr'elles (h); donc si de la première de ces sommes, on retranche le carré de AF , & de la seconde, le carré de CG , les restes qui sont le carré de EF & celui de EG , seront égaux entr'eux; & par conséquent la ligne EF est égale à la ligne EG ; ainsi puisque les lignes EF & EG sont égales entr'elles (d), & qu'elles sont les distances du centre E aux lignes AB & CD (c), les lignes AB & CD sont également éloignées du centre E ; donc C. Q. F. D.



PROPOSITION XV.

THEOREME.

231. *Si des lignes droites sont terminées chacune de part & d'autre à la circonférence d'un cercle : Premièrement, celle qui passe par le centre de ce cercle, est la plus grande de toutes ces lignes droites : Secondement, celles qui sont plus près de ce centre, sont plus grandes que celles qui en sont plus éloignées.*

Fig. 29. PREMIEREMENT. **L**A ligne AB * qui passe par le centre C du cercle X, est plus grande que la ligne DE qui n'y passe point.

Const. Du centre C du cercle X tirés aux points D & E, les lignes CD & CE.

Démonst. La ligne AB est égale à la somme des lignes CD & CE, puisque la ligne AB est un diamètre du cercle X (*h*), & que les lignes CD & CE sont deux rayons de ce cercle (*c*): or la somme des lignes CD & CE est plus grande que la ligne DE (*n*), puisque ces lignes CD, CE & DE sont les côtés du triangle CDE; donc la ligne AB est plus grande que la ligne DE.

SECON-

SECONDEMENT. La ligne AB * qui est Fig. 10.
plus près du centre C du cercle X que la
ligne DE, est plus grande que cette ligne.

Const. Du centre C du cercle X tirés
aux points A, D, E & B, les lignes CA,
CD, CE & CB.

- *Démonst.* L'angle ACB du triangle
CAB est plus grand que l'angle DCE du
triangle CDE (n), & les côtés CA & CB N. 72.
qui forment cet angle ACB du premier
triangle, sont égaux aux côtés CD & CE
qui forment cet angle DCE du second,
chacun à chacun; puisque tous ces côtés
sont rayons du même cercle X (c); donc
l'autre côté AB du premier triangle est plus
grand que l'autre côté DE du second (n); N. 117.
donc C. Q. F. D.



PROPOSITION XVI.

THÉOREME.

232. Si une ligne droite est perpendiculaire à l'extrémité du diamètre d'un cercle : Premièrement, elle n'aura de point commun avec la circonférence de ce cercle, que celui auquel elle rencontre ce diamètre : Secondement, elle sera de toutes les lignes droites qu'il est possible de tirer hors d'un cercle, celle qui est le plus près de cette figure.

Fig. 31. PREMIEREMENT. **L**A ligne BC * qui est perpendiculaire à l'extrémité B du diamètre AB du cercle X, n'a que ce point B commun avec la circonférence de ce cercle.

Const. Du centre D du cercle X tirés au point E pris à volonté sur la ligne BC, la ligne DE.

Démonst. L'angle B du triangle DEB est droit (*h*) ; donc les autres angles BDE & BED de ce triangle sont aigus (*n*) ; & par conséquent l'angle B est plus grand qu'aucun de ces autres angles (*n*). Ainsi puisque l'angle B du triangle DEB est plus

grand que l'angle BED de ce triangle, le côté DE opposé à l'angle B , est plus grand que le côté DB opposé à l'angle BED (n); N. 108. & par conséquent puisque ce côté DB est un rayon du cercle X (h), le côté DE est plus grand que le rayon de ce cercle. Or puisque le côté DE est plus grand que le rayon du cercle X (d), & que l'une de ses extrémités D est au centre D de ce cercle (c), son autre extrémité E est hors de ce même cercle (n); dont puisque ce point E N. 126 est aussi un point de la perpendiculaire BC (c), le point E de cette perpendiculaire est hors de ce cercle X ; & par conséquent puisque la même démonstration subsisteroit, à quelque point de la perpendiculaire BC différent du point B , que l'on prit le point E , cette perpendiculaire n'a que ce point B commun avec la circonférence du cercle X .

SECONDEMENT. La ligne BF^* tirée à volonté du sommet B de l'angle droit ABC , entre les côtés BA & BC de cet angle, passe dans le cercle X . Fig. 326

Const. Du centre D du cercle X abaissés la perpendiculaire DE à la ligne BF (n). N. 93.

Demonst. L'angle DEB du triangle DEB est droit (c); donc les autres angles EDB & EBD de ce triangle sont aigus (n); & par conséquent l'angle DEB est N. 102.

236 LES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE,

- plus grand qu'aucun de ces autres angles
 N. 22. (n). Ainsi puisque l'angle DEB du triangle DEB est plus grand que l'angle EBD de ce triangle, le côté DB opposé à l'angle DEB, est plus grand que le côté DE opposé à l'angle EBD (n); & par conséquent, puisque ce côté DB est un rayon du cercle X, le côté DE est moins grand que le rayon de ce cercle. Or puisque le côté DE est moins grand que le rayon du cercle X (d), & que l'une de ses extrémités D est au centre D de ce cercle (c), son autre extrémité E est dans ce même cercle (n);
 N. 108. donc puisque ce point E est aussi un point de la ligne BF (c), le point E de cette ligne est dans ce cercle X; & par conséquent puisque la même démonstration subsisteroit, quelque près de la perpendiculaire BC que l'on tirât la ligne BF, cette ligne BF passe dans le cercle X; donc C. Q. F. D.

COROLLAIRE I.

233. Il suit de la première partie de ce Théorème, qu'une ligne droite perpendiculaire à l'extrémité du diamètre d'un cercle, est tangente à ce cercle.

COROLLAIRE II.

234. Il suit de ce Corollaire, que pour tirer une tangente à un cercle, d'un point

donné sur la circonférence de ce cercle, il faut de ce même point tirer un diamètre à ce cercle, & élever une perpendiculaire à ce diamètre.

S C H O L I E.

235. L'angle formé par une tangente *AB* * & par un arc *AC* se nomme un an- Fig. 33.
 gle de Contingence. Il ne peut être divisé N. 232.
 par aucune ligne droite (n); mais il peut
 l'être en une infinité de parties par des arcs N. 229.
AD, *AE*, &c. (n), & ces deux proprié-
 tés opposées ont donné lieu à beaucoup de
 raisonnemens métaphisiques dont aucun
 n'est satisfaisant.

Celui de tous ces raisonnemens qui paroît avoir été le moins mal reçu, prétend que ces arcs *AD*, *AE*, &c. ne divisent point l'angle *CAB*; & qu'ils ne font que toucher la ligne *AB* en un point d'autant plus long, que les diamètres des cercles dont ils sont des arcs sont plus grands. Mais ces points plus longs les uns que les autres, sont-ils bien géométriques? & conçoit-on bien clairement une chose qui n'a aucune longueur (n), plus longue qu'une chose pareille qui N. 4.
 n'a de même aucune longueur?

Aucune ligne droite ne peut diviser un angle de contingence; une ligne droite peut diviser un angle rectiligne; donc un angle

238 LES ELEMENTS D'EUCLIDE ;
 de contingence est moins grand qu'aucun
 angle rectiligne. Cette conséquence est-elle
 juste, & celle-ci ne seroit-elle pas plus exac-
 te ? donc un angle de contingence & un
 angle rectiligne ne sont point de même
 genre.

PROPOSITION XVII.

PROBLEME.

236. D'un point donné hors d'un cercle ;
 tirer une tangente à ce cercle.

Fig. 34. **I**L faut du point A * hors du cercle BD,
 tirer une tangente à ce cercle.

Const. Du point A tirés au centre C du
 cercle BD, la ligne AC : de ce centre C
 & avec cette ligne AC prise pour rayon,
 décrivés un cercle AE : du point B auquel
 la circonférence du cercle BD coupe la li-
 gne AC, élevés une perpendiculaire BE
 à cette ligne (n) : du point E auquel cette
 perpendiculaire rencontre la circonférence
 du cercle AE, tirés au centre C, la ligne
 EC ; enfin du point A tirés au point D au-
 quel cette ligne EC rencontre la circonfé-
 rence du cercle BD, la ligne AD, & cette
 ligne AD sera tangente à ce cercle.

Démonst. Les triangles EBC & ADC ont l'angle C commun entr'eux, & les côtés CB & CE qui forment cet angle C du premier triangle, égaux aux côtés CD & CA qui forment ce même angle C du second, chacun à chacun; puisque CB & CD sont rayons du même cercle BD, & que CE & CA sont aussi rayons du même cercle AE (c); donc les angles du premier triangle sont égaux à ceux du second, chacun à chacun (n); & par conséquent l'angle ADC est égal à l'angle EBC: or l'angle EBC est droit (c); donc l'angle ADC l'est aussi; ainsi la ligne AD est perpendiculaire à l'extrémité du rayon CD du cercle BD (n); & par conséquent elle est tangente à ce cercle (n); donc C. Q. F. D.

N. 20.

N. 20.

N. 2339

PROPOSITION XVIII.

THEOREME.

237. Une ligne droite qui est tirée du centre d'un cercle au point auquel une autre ligne droite touche ce cercle, est perpendiculaire à cette autre ligne.

L A ligne AB * qui est tirée du centre Fig. 35.
A du cercle X au point B auquel la li-

240 LES ELEMENS D'EUCLIDE ;
gne CD touche ce cercle , est perpendicu-
laire à cette ligne.

Const. Du point A tirés au point E pris à
volonté sur la ligne CD , une ligne AE.

Démonst. Si la ligne AB tirée du cen-
tre A du cercle X au point B de la ligne
CD, n'étoit point perpendiculaire à cette
ligne , une perpendiculaire abaissée de ce
même centre à cette même ligne , la ren-
contreroit en un point différent du point B.
Or si elle la rencontroit par exemple au
point E , & étoit par conséquent la ligne
AE , l'angle BEA du triangle ABE seroit
droit ; ainsi les autres angles EAB & ABE
N. 102. de ce triangle seroient aigus (*n*) ; & par
N. 22. conséquent l'angle BEA seroit plus grand
qu'aucun de ces autres angles (*n*) : or si l'an-
gle BEA du triangle ABE étoit plus grand
que l'angle ABE de ce triangle , le côté
AB opposé à l'angle BEA seroit plus grand
N. 108. que le côté AE opposé à l'angle ABE (*n*) ;
& par conséquent la ligne AF qui est égale
à ce côté AB , puisque cette ligne & ce
côté sont rayons du même cercle X , seroit
plus grande que le côté AE. Mais la ligne
AF n'est point plus grande que le côté AE
N. 72. (*n*) , puisqu'elle en est une partie ; donc la
perpendiculaire abaissée du centre A du
cercle X à la ligne CD ne la rencontre
point à un point différent du point B ; donc
elle

elle la rencontre au point B, & par conséquent la ligne AB tirée du centre A du cercle X au point B auquel la ligne CD touche ce cercle, est perpendiculaire à cette ligne; donc C. Q. F. D.

PROPOSITION XIX.

THEOREME.

238. *Si du point auquel une ligne droite touche un cercle, on élève une perpendiculaire à cette ligne, cette perpendiculaire passera par le centre de ce cercle.*

LA perpendiculaire AB * élevée à la Fig. 36.
ligne CD, du point A auquel cette ligne CD touche le cercle X, passe par le centre de ce cercle.

Const. Du point E pris à volonté dans le cercle X tirés au point A, la ligne EA.

Démonst. Si le centre du cercle X étoit par exemple le point E hors de la perpendiculaire AB, la ligne EA tirée du point E au point A auquel la ligne CD touche le cercle X (h), seroit perpendiculaire à cette ligne (n); ainsi l'angle EAD seroit droit N. 237. (n); & par conséquent égal à l'angle BAD N. 20; qui est droit aussi (n), puisque la ligne AB N. 20.

X

242 LES ELEMENS D'EUCLIDE,
 est perpendiculaire à la ligne CD (*h*). Mais
 l'angle EAD n'est point égal à l'angle
 N. 72. BAD (*n*), puisqu'il en est une partie ; donc
 le centre du cercle X n'est point un point E
 hors de la perpendiculaire AB ; & par con-
 séquent cette perpendiculaire passe par le
 centre de ce cercle ; donc C. Q. F. D.

PROPOSITION XX.

THEOREME.

239. *Un angle dont le sommet est un point
 de la circonférence d'un cercle , a pour
 mesure la moitié de l'arc de ce cercle ,
 sur lequel il s'appuye.*

Fig. 37.
 & 38. **L**'Angle ABC * dont le sommet B est
 un point de la circonférence du cercle
 X , a pour mesure la moitié de l'arc AC sur
 lequel il s'appuye.

Const. Du sommet B de l'angle ABC
 tirés par le centre E du cercle X , la ligne
 BED : de ce centre E tirés aux points A
 & C, les lignes EA & EC.

Demonst. L'angle AEC a pour mesure
 N. 36. l'arc AC (*n*) , puisque le sommet E de cet
 angle est le centre de cet arc (*c*) ; ainsi si
 l'angle ABC est la moitié de l'angle AEC,

il aura pour mesure la moitié de l'arc AC. Or l'angle ABC est la moitié de l'angle AEC; car puisque l'angle AED est l'angle extérieur du triangle ABE, il est égal à la somme des deux angles intérieurs ABE & EAB qui lui sont opposés (n); or ces angles ABE & EAB sont égaux entr'eux (n), N. 132. N. 83. puisque les côtés EA & EB de ce triangle ABE qui sont rayons du même cercle X (c) sont égaux entr'eux; donc l'angle AED est double de l'angle ABE; & par conséquent l'angle ABE est la moitié de l'angle AED. On démontre de la même manière que l'angle EBC est la moitié de l'angle DEC; donc l'angle ABC qui est la somme des angles ABE & EBC (Fig. 37), ou la différence de ces angles (Fig. 38), est la moitié de l'angle AEC qui est la somme des angles AED & DEC (Fig. 37), ou la différence de ces angles (Fig. 38); & par conséquent il a pour mesure la moitié de l'arc AC; donc C. Q. F. D.

COROLLAIRE.

240. Il suit de la démonstration de ce Théorème, qu'un angle dont le sommet est le centre d'un cercle, est double d'un angle dont le sommet est un point de la circonférence de ce même cercle, si ces angles s'appuyent chacun sur une même partie de cette circonférence.

PROPOSITION XXI.

THEOREME.

241. Les angles qui sont dans le même segment de cercle, sont égaux entr'eux.

Fig. 39. **L** Es angles B & D * qui sont dans le même segment ABDC du cercle X, sont égaux entr'eux.

Démonst. Les angles B & D ont chacun pour sommet un point de la circonférence du cercle X (n) ; ainsi ils ont chacun pour mesure la moitié de l'arc de ce cercle, sur lequel ils s'appuyent (n) : or ils s'appuyent chacun sur le même arc AEC (n) , puisqu'ils sont chacun dans le même segment ABDC (h) ; donc ils ont chacun pour mesure la moitié du même arc ; & par conséquent ils sont égaux entr'eux ; donc C. Q. F. D.



PROPOSITION XXII.

THEOREME.

242. *Si les angles d'un Quadrilatere sont chacun un point de la circonférence d'un même cercle , la somme de deux quelconques des opposés , sera égale à celle de deux angles droits.*

LA somme des angles opposés , par exemple A & C du quadrilatere ABCD *, dont chacun des angles A , B , C & D est un point de la circonférence du cercle X , est égale à la somme de deux angles droits. Fig. 40.

Démonst. L'angle A a pour sommet un point de la circonférence du cercle X (*h*) ; ainsi puisqu'il s'appuye sur l'arc BCD de ce cercle , il a la moitié de cet arc pour mesure (*n*). L'angle C a aussi pour sommet un point de la circonférence du même cercle X (*h*) ; ainsi puisqu'il s'appuye sur l'arc BAD de ce même cercle , il a la moitié de cet arc pour mesure (*n*) : or la somme de la moitié de l'arc BCD & de la moitié de l'arc BAD , est égale à la moitié de la circonférence du cercle X , puisque la circon-

246 LES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE ,
 férence de ce cercle est la somme de ces
 deux arcs ; donc la somme des angles A &
 C a pour mesure la moitié de la circonféren-
 ce du cercle X ; & par conséquent puisque
 la moitié de la circonférence d'un cercle est
 N. 37. la mesure de deux angles droits (n) , la som-
 me des angles A & C est égale à celle de
 deux angles droits. On démontre de la
 même manière que la somme des angles B
 & D est aussi égale à celle de deux angles
 droits ; donc C. Q. F. D.

PROPOSITION XXIII.

THEOREME.

243. *Deux segmens de cercles , qui sont
 chacun sur une même corde , & vers un
 même côté par rapport à elle , ne sont
 point semblables.*

41. **L** Es segmens de cercles ABC & ADC*
 qui sont chacun sur la même corde
 AC , & vers un même côté par rapport à
 elle , ne sont point semblables.

Const. Du point B pris à volonté sur
 l'arc du plus grand segment , tirés aux
 points A & C , les lignes BA & BC : du
 point D auquel la ligne BC coupe l'arc du

moins grand segment, tirés au point A, la ligne DA.

Démonst. Si les segmens ABC & ADC étoient semblables, les angles ABC & ADC inscrits chacun dans chacun de ces segmens (*c*), seroient égaux entr'eux (*n*). Or ces angles ne sont point égaux N. 215. entr'eux, puisque l'un ADC est un angle extérieur du triangle ABD, que l'autre ABC est l'un des angles intérieurs de ce triangle, opposés à cet angle extérieur, & que l'angle extérieur d'un triangle est plus grand qu'aucun des angles intérieurs de ce triangle, opposés à cet angle (*n*); N. 100. donc les segmens ABC & ADC ne sont point semblables; donc C. Q. F. D.

PROPOSITION XXIV.

THEOREME.

244. *Si des segmens de cercles, qui sont sur des cordes égales entr'elles sont semblables, ils seront égaux entr'eux.*

SI les segmens ABC & DEF * qui sont Fig. 42. sur les cordes AC & DF égales entr'elles, sont semblables, ils seront égaux entr'eux.

248 LES ELEMENS D'EUCLIDE ;

Const. Posés par pensée le segment **ABC** sur le segment **DEF** de maniere que le point **A** étant sur le point **D**, la corde **AC** soit sur la corde **DF**.

Démonst. La corde **AC** est égale à la corde **DF** (*h*), elle est posée sur **DF** (*c*), & l'une de ses extrémités **A** est sur l'une des extrémités **D** de **DF** (*c*) ; donc son autre extrémité **C** est sur l'autre extrémité **F** de **DF** (*n*) ; & par conséquent ces deux cordes **AC** & **DF** ne font qu'une seule corde **DF**. Or puisque les cordes **AC** & **DF** ne font qu'une seule corde **DF**, si l'arc **ABC** n'étoit point sur l'arc **DEF**, deux segmens semblables **ABC** & **DEF** (*h*) pourroient être sur une même corde **DF** (*d*), & vers un même côté par rapport à elle ; mais deux segmens de cercles qui sont sur une même corde, & vers un même côté par rapport à elle, ne sont point semblables (*n*) ; donc l'arc **ABC** est sur l'arc **DEF** ; donc les segmens **ABC** & **DEF** se couvrent réciproquement ; & par conséquent ils sont égaux entr'eux (*n*) ; donc **C. Q. F. D.**



PROPOSITION XXV.

PROBLÈME.

245. *Trouver le centre d'un arc de cercle donné.*

IL faut trouver le centre de l'arc de cercle CBD *.

Fig. 411

Const. Du point B pris à volonté sur l'arc de cercle CBD, tirés aux points C & D pris aussi chacun à volonté sur ce même arc, les lignes BC & BD : divisées chacune de ces lignes en deux parties égales entr'elles (n) : du point E milieu de la ligne BC N. 914 (c), élevés à cette ligne la perpendiculaire EA, & du point F milieu de la ligne BD (c), élevés aussi à cette ligne la perpendiculaire FA (n). Le point A auquel ces perpendiculaires se rencontrent, sera le centre N. 921 du cercle CBD.

Pour la démonstration : du point A tirés aux points C, B & D, les lignes AC, AB & AD.

Démonst. Les triangles AEC & AEB ont l'angle AEC égal à l'angle AEB (n), N. 184 puisque la ligne EA est perpendiculaire à la ligne BC (c) ; & les côtés EC & EA qui

250 LES ELEMENS D'EUCLIDE;

forment le premier, égaux aux côtés **EB** & **EA** qui forment le second, chacun à chacun; puisque **EC** est égal à **EB** (*c*), & que **EA** est commun à ces deux triangles; ainsi l'autre côté **AC** du premier est égal à

- N. 10.** l'autre côté **AB** du second (*n*); & par conséquent, puisqu'en comparant le triangle **AFB** au triangle **AFD**, on démontre de la même manière que le côté **AB** est égal au côté **AD**, les trois lignes **AC**, **AB** & **AD** sont égales entr'elles. Or puisque les trois lignes **AC**, **AB** & **AD** qui sont tirées chacune du point **A** à l'arc de cercle **CBD** sont égales entr'elles, ce point est le centre de cet arc (*n*); donc **C. Q. F. D.**
- N. 225.**

PROPOSITION XXVI.

THEOREME.

246. *Si des cercles sont égaux entr'eux, & si des angles qui ont pour sommets des points des circonferences de ces cercles, le sont aussi, les arcs de ces mêmes cercles, sur lesquels ces angles s'appuyent, seront égaux entr'eux.*

Fig. 44. **S**I les cercles **G** & **H** * sont égaux entr'eux, & si les angles **B** & **E** le sont

aussi , les arcs AIC & DKF seront aussi égaux entr'eux

Const. Tirés du centre G du cercle G aux points A & C , les lignes GA & GC ; du point A au point C , la ligne AC ; du centre H du cercle H , aux points D & F , les lignes HD & HF ; & du point D au point F , la ligne DF.

Démonst. L'angle G est double de l'angle B (n) , puisque le sommet de l'angle G N. 240. est le centre du cercle G (c) , que le sommet de l'angle B est un point de la circonférence de ce même cercle (h) , & que ces deux angles s'appuyent chacun sur le même arc AIC de ce cercle: or on démontre de la même manière que l'angle H est double de l'angle E ; & par conséquent puisque les angles B & E sont égaux entr'eux (h) , les angles G & H le sont aussi (n). Ainsi les N. 67. triangles AGC & DHF ont l'angle G égal à l'angle H (d) , & les côtés GA & GC qui forment le premier , égaux aux côtés HD & HF qui forment le second , chacun à chacun ; puisque GA & HD sont (c) rayons de cercles égaux entr'eux (h) , & que GC & HF le sont aussi (c) ; donc l'autre côté AC du premier triangle est égal à l'autre côté DF du second (n) ; & par conséquent N. 10. les segmens de cercles ABC & DEF sont posés sur des cordes AC & DF égales en-

252 LES ELEMENS D'EUCLIDE ;

- tr'elles : or ces mêmes segmens sont sem-
 N. 215. blables (n) , puisque les angles B & E in-
 crits chacun dans chacun de ces segmens ,
 sont égaux entr'eux (h) ; donc ces segmens
 N. 244. sont aussi égaux entr'eux (n) ; & par con-
 séquent , puisque les cercles G & H le sont
 aussi (h) , si du premier cercle on retranche
 le segment ABC , & du second , le segment
 DEF , les restes qui sont les segmens AIC
 & DKF seront égaux entr'eux. Enfin puis-
 que les segmens AIC & DKF sont égaux
 entr'eux , & que les cordes AC & DF sur
 lesquelles ils sont posés , chacun sur chacu-
 ne , sont égales entr'elles (d) , les arcs AIC
 & DKF de ces segmens , qui sont les arcs
 sur lesquels les angles B & E s'appuyent ,
 N. 244. sont égaux entr'eux (n) ; donc C. Q. F. D.

COROLLAIRE.

247. Il suit de la démonstration de ce
 Théorème , que les arcs de cercles égaux
 entr'eux , sur lesquels s'appuyent des angles
 qui le sont aussi , & dont les sommets sont
 les centres de ces cercles , sont égaux en-
 tr'eux.



PROPOSITION XXVII.

THEOREME.

248. *Si des cercles sont égaux entr'eux ; & si les arcs de ces cercles , sur lesquels des angles dont les sommets sont des points des circonférences de ces mêmes cercles s'appuyent , le sont aussi , ces angles seront égaux entr'eux.*

SI les cercles G & H* sont égaux en- Fig. 44
tr'eux , & si les arcs AIC & DKF le
sont aussi , les angles B & E seront égaux
entr'eux.

Démonst. La moitié de l'arc AIC, est la
mesure de l'angle B (n) , & la moitié de N. 219
l'arc DKF est celle de l'angle E : or ces
arcs AIC & DKF sont égaux entr'eux (h) ;
donc la mesure de l'angle B est égale à celle
de l'angle E ; & par conséquent ces angles
sont égaux entr'eux ; donc C. Q. F. D.

COROLLAIRE.

249. Il suit de la démonstration de ce
Théorème , que si des cercles sont égaux
entr'eux , & si les arcs de ces cercles sur
lesquels des angles dont les sommets sont les

254 LES ELEMENS D'EUCLIDE,
centres de ces mêmes cercles s'appuyent ,
le sont aussi , ces angles seront égaux en-
tr'eux.

PROPOSITION XXVIII.

THEOREME.

250. Les arcs de cercles égaux entr'eux ,
qui sont soustendus par des cordes égales
entr'elles , sont égaux entr'eux.

Fig. 45. **S**I les cercles B & E * sont égaux en-
tr'eux , & si les cordes AC & DF sont
égales entr'elles , les arcs AGC & DHF
seront égaux entr'eux.

Const. Tirés du centre B du cercle B ,
aux points A & C , les lignes BA & BC ;
& du centre E du cercle E , aux points D
& F , les lignes ED & EF.

Démonst. Les côtés du triangle ABC
sont égaux à ceux du triangle DEF , cha-
cun à chacun ; puisque les côtés BA & ED
sont (c) rayons de cercles égaux entr'eux
(h) , que les côtés BC & EF le sont aussi
(c) ; & que le côté AC est égal au côté
DE (h) ; donc l'angle B du triangle ABC est
égal à l'angle E du triangle DEF (n) ; & par

N. 37. conséquent l'arc AGC est égal à l'arc
N. 247. DHF ; donc C. Q. E. D.

PROPOSITION XXIX.

THEOREME.

251. Les cordes qui soustendent des arcs égaux entr'eux, de cercles qui le sont aussi, sont égales entr'elles.

Si les cercles B & E * sont égaux en- Fig. 454
tr'eux, & si les arcs AGC & DHF, le
sont aussi, les cordes AC & DF seront
égales entr'elles.

Const. La même que la précédente.

Démonst. Les triangles ABC & DEF
ont l'angle B égal à l'angle E (n), puisque N. 249;
l'arc AGC est égal à l'arc DHF (h); & les
côtés BA & BC qui forment cet angle du
premier triangle, égaux aux côtés ED &
EF qui forment cet angle du second, cha-
cun à chacun; puisque BA & ED sont (c)
rayons de cercles égaux entr'eux (h), &
que BC & EF le sont aussi (c); donc l'au-
tre côté AC du premier triangle est égal à
l'autre côté DF du second (n); & par con- N. 80;
séquent puisque ces côtés sont les cordes
des arcs AGC & DHF, les cordes AC &
DF de ces arcs sont égales entr'elles; donc
C. Q. F. D.

PROPOSITION XXX.

PROBLEME.

252. *Diviser un arc de cercle en deux parties égales entr'elles.*

Fig. 46. **I**L faut diviser l'arc ABC* en deux parties égales entr'elles.

Const. De l'une des extrémités A de l'arc ABC, tirés à son autre extrémité C, la ligne AC : divisez cette ligne en deux parties DA & DC égales entr'elles (n) : du point D milieu de cette même ligne, élevés-lui la perpendiculaire DB (n). Cette perpendiculaire divisera l'arc ABC en deux parties BA & BC égales entr'elles.

Pour la démonstration : du point B tirés aux points A & C, les lignes BA & BC.

Démonst. Les triangles ADB & CDB ont l'angle BDA égal à l'angle BDC (n), puisque la ligne DB est perpendiculaire à la ligne AC (c) ; & les côtés DA & DB qui forment le premier, égaux aux côtés DC & DB qui forment le second, chacun à chacun ; puisque DA est égal à DC (c), & que DB est commun à ces deux triangles ; donc l'autre côté BA du premier est égal à l'autre

l'autre côté BC du second (n) : or puisque ^{N. 204}
 les côtés BA & BC sont égaux entr'eux
 (d), & cordes d'un même cercle, les arcs
 BA & BC qu'ils soutiennent, sont égaux
 entr'eux (n) ; donc C. Q. F. F. ^{N. 250.}

PROPOSITION XXXI.

THEOREME.

253. Premièrement, *un angle inscrit dans un demi cercle, est droit* : Secondement, *un angle inscrit dans un segment plus grand qu'un demi-cercle, est aigu*. Troisièmement, *enfin un angle inscrit dans un segment moins grand qu'un demi cercle, est obtus*.

Premièrement. **L**'Angle B * inscrit dans ^{Fig. 47.} le demi cercle ABC, est droit. Secondement, l'angle F inscrit dans le segment EFG plus grand qu'un demi-cercle, est aigu. Troisièmement, enfin l'angle K inscrit dans le segment IKL moins grand qu'un demi-cercle, est obtus.

Const. Trouvés les centres des arcs des segmens dans lesquels ces angles sont inscrits (n), & achevés les cercles dont ces ^{N. 245.} segmens sont des parties.

Y

258 LES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE,

Démonst. Chacun des angles B, F & K a pour sommet un point de la circonférence d'un cercle ; ainsi chacun de ces angles a pour mesure la moitié de l'arc de ce cercle ,

N. 239. sur lequel il s'appuye (*n*) : or , *premierement*, l'arc ADC sur lequel l'angle B s'appuye est la moitié de la circonférence ABCD (*h*) ; donc l'angle B a pour mesure le quart de cette circonférence , & par conséquent ,

N. 37. puisque le quart de la circonférence d'un cercle est la mesure d'un angle droit (*n*) , l'angle B est droit. *Secondement*, l'arc EHG sur lequel l'angle F s'appuye est moins grand que la moitié de la circonférence EFGH (*h*) ; donc l'angle F a pour mesure moins que le quart de cette circonférence ; & par conséquent , puisque le quart de la circonférence d'un cercle est la mesure d'un angle

N. 37. droit (*n*), l'angle F est aigu. *Troisièmement*, enfin l'arc IML sur lequel l'angle K s'appuye est plus grand que la moitié de la circonférence IKLM (*h*) ; donc l'angle F a pour mesure plus que le quart de cette circonférence ; & par conséquent , puisque le quart de la circonférence d'un cercle est la mesure

N. 37. d'un angle droit (*n*) , l'angle K est obtus ; donc C. Q. F. D.

PROPOSITION XXXII.

THEOREME.

254. Si un cercle est divisé en deux segments par une ligne droite tirée du point auquel une autre ligne droite le touche, les angles de ces segments & les angles dans ces segments, seront alternativement égaux entr'eux.

SI le cercle H* est divisé en deux segments DFC & DEC par une ligne DC, l'angle DCB du segment DEC, sera égal à l'angle F dans le segment DFC; & l'angle ACD du segment DFC, sera égal à l'angle E dans le segment DEC. Fig. 48.

Const. Du point C auquel la ligne AB touche le cercle H, tirés par le centre H de ce cercle, la ligne CG : du point D tirés au point G, la ligne DG.

DEMONSTRATION.

Premierement. L'angle ACG est droit (n) puisque la ligne CG passe par le centre N. 237. du cercle H (c); ainsi la somme des angles ACD & DCG est égale à un angle droit (n) : la somme des angles G & DCG du N. 72.

260 LES ELEMENS D'EUCLIDE ;

- triangle CDG est aussi égale à un angle droit
 N. 133. (n) , puisque l'angle CDG de ce triangle ;
 qui est inscrit dans le demi cercle GDFC ,
 N. 253. est droit (n) , donc la somme des angles
 ACD & DCG est égale à celle des angles
 G & DCG ; & par conséquent si de chacune
 de ces sommes on retranche l'angle DCG ,
 les restes qui sont l'angle ACD & l'angle G ,
 seront égaux entr'eux. Or la somme des an-
 gles ACD & DCB est égale à celle de deux
 N. 94. angles droits (n) , puisque la ligne DC qui
 rencontre la ligne AB , forme ces deux
 angles avec cette ligne ; & la somme des
 angles G & F est aussi égale à celle de deux
 N. 242. angles droits (n) puisque la figure FDCG
 est un quadrilatere dont chaque angle est un
 point de la circonférence du cercle H , &
 que ces angles G & F sont des angles op-
 posés de ce quadrilatere ; donc la somme
 des angles ACD & DCB est égale à celle
 des angles G & F ; & par conséquent puis-
 que l'angle ACD est égal à l'angle G (d) ,
 l'angle DCB l'est à l'angle F.

Secondement. La somme des angles
 ACD & DCB est égale à celle de deux an-
 gles droits (d) ; la somme des angles E & F
 est aussi égale à celle de deux angles droits
 N. 242. (n) , puisque la figure FDEC est un quadri-
 latere dont chaque angle est un point de la
 circonférence du cercle H , & que ces an-

gles E & F sont des angles opposés de ce quadrilatere ; donc la somme des angles ACD & DCB est égale à celle des angles E & F ; & par conséquent , puisque l'angle DCB est égal à l'angle F (d) , l'angle ACD l'est à l'angle E ; donc C. Q. F. D.

PROPOSITION XXXIII.

PROBLEME.

255. *Décrire sur une ligne droite donnée, un segment de cercle, capable d'un angle donné.*

IL faut décrire sur la ligne droite AB * Fig. 49. un segment de cercle, capable de l'angle E.

Const. Faites sous la ligne AB un angle BAD qui ait le point A de cette ligne pour sommet , & qui soit égal à l'angle C (n). N. 115. Divisez la ligne AB en deux parties AF & FB égales entr'elles (n) : du point F milieu N. 91. de cette ligne , élevés-lui une perpendiculaire FE (n) : du point A élevés la ligne N. 92. AE perpendiculaire à la ligne AD (n), & N. 92. qui rencontre en un point E la perpendiculaire FE : du point E pris pour centre , & avec la perpendiculaire AE prise pour

262 LES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE ;
 rayon, décrivent le segment de cercle AGB.
 Les angles inscrits dans ce segment seront
 égaux chacun à l'angle C.

Pour la démonstration : achevons le cercle
 AGBH.

- Démonst.* La ligne AD est perpendicu-
 laire (c) à l'extrémité du rayon AE du cer-
 cle AGBH (c) ; ainsi elle touche ce cercle
 N. 233. au point A (n). Or ce cercle est divisé en
 deux segmens AGB & AHB, par la ligne
 AB tirée de ce point A ; donc l'angle BAD
 du segment AHB, est égal à un angle quel-
 N. 254. conque dans le segment AGB (n) , & par
 conséquent puisque l'angle BAD est égal à
 l'angle C (c) , un angle quelconque dans le
 segment AGB , est égal à l'angle C ; donc
 C. Q. F. F.

PROPOSITION XXXIV.

PROBLÈME.

256. *Diviser un cercle en deux segmens ,
 dont l'un soit capable d'un angle
 donné.*

Fig. 50. **I**L faut diviser le cercle X* en deux seg-
 mens , dont l'un soit capable de l'angle
 E.

Const. Du point C pris à volonté sur la circonférence du cercle X, tirés une tangente AB à ce cercle (n): faites sur cette tangente un angle DCB égal à l'angle E, & qui ait le point C de cette tangente pour sommet (n): le côté CD de cet angle divisera le cercle X en deux segmens, dont l'un CFD sera capable de l'angle E. N. 234

Démonst. La ligne ACB touche le cercle X au point C (c); or ce cercle est divisé en deux segmens CFD & CGD par la ligne CD tirée de ce point C (c); donc l'angle DCB du segment CGB est égal à un angle quelconque dans le segment CFD (n); & par conséquent, puisque l'angle DCB est égal à l'angle E (c), un angle quelconque dans le segment CFD est égal à l'angle E; donc C. Q. F. F. N. 254



PROPOSITION XXXV.

THEOREME.

257. Si deux lignes droites qui sont terminées chacune de part & d'autre à la circonférence d'un cercle , se coupent , le rectangle fait des parties de l'une sera égal au rectangle fait des parties de l'autre.

LE rectangle fait des parties AF & FB de la ligne AB qui est terminée de part & d'autre à la circonférence du cercle X*, est égal au rectangle fait des parties CF & FD de la ligne CD, qui est aussi terminée de part & d'autre à la circonférence du même cercle.

Les lignes AB & CD passent chacune par le centre du cercle X, ou une seule y passe, ou enfin aucune n'y passe.

Fig. 51. Premier Cas. Si les lignes AB & CD* passent chacune par le centre du cercle X.

Démonst. Les parties AF & FB de la ligne AB sont égales aux parties CF & FD de la ligne CD (n), puisque toutes ces parties sont rayons du même cercle X ; ainsi le rectangle fait des parties AF & FB est égal
au

au rectangle fait des parties CF & FD.

Second Cas. Si une seule des lignes AB & CD *, par exemple la ligne AB, Fig. 524
& 530 passe par le centre du cercle X, elle est perpendiculaire ou oblique à la ligne CD.

Premierement. Si la ligne AB est perpendiculaire à la ligne CD *.

Fig. 524

Const. Du centre E du cercle X, tirés au point C, la ligne EC.

Démonst. La somme des quarrés de chacun des côtés CF & FE du triangle CFE, est égale au quarré du côté CE (n), puisque ce triangle est rectangle en F (h); le quarré du côté CE est égal à celui de la ligne EB, puisque ce côté & cette ligne sont rayons du même cercle X; & le quarré de la ligne EB est égal à la somme du rectangle des parties AF & FB de la ligne AB, & du quarré de la ligne FE (n); puisque la ligne EB N. 1584
N. 1824
N. 324 étant la moitié de la ligne AB (n), la ligne FE est la moitié de la différence des parties AF & FB de cette ligne AB; donc la somme du quarré du côté CF & de celui du côté FE, est égale à la somme du rectangle des parties AF & FB, & du quarré de la ligne FE (n); & par conséquent si de cha- N. 624 cune de ces sommes on retranche le quarré de la ligne FE, les restes qui sont le quarré de la partie CF & le rectangle des parties AF & FB, seront égaux entr'eux (n). Or N. 64. 22

266 LES ELEMEs D'EUCLIDE.

le quarré de la partie CF est le rectangle des parties CF & FD de la ligne CD, puisque la ligne AB qui passe par le centre E du cercle X (h), & est perpendiculaire à cette ligne CD (h), la divise en ces deux parties CF & FD égales entr'elles (n); donc le rectangle des parties AF & FB de la ligne AB est égal à celui des parties CF & FD de la ligne CD.

N. 119.

Secondement. Si la ligne AB est oblique à la ligne CD *.

Fig. 53.

Const. Du centre E du cercle X abaissés la perpendiculaire EG à la ligne CD (n), & tirés au point D, la ligne ED.

N. 93.

Démonst. La somme du rectangle des parties AF & FB de la ligne AB, & du quarré de la ligne FE, est égale au quarré de la ligne EB (n), puisque la ligne EB étant la moitié de la ligne AB (n), la ligne FE est la moitié de la différence des parties AF & FB de la ligne AB; le quarré de la ligne EB est égal à celui de la ligne ED, puisque ces lignes sont rayons du même cercle X; & le quarré de la ligne ED est égal à la somme des quarrés des lignes EG &

N. 182.

N. 32.

N. 168.

N. 67.

GD (n), puisque le triangle EGD est rectangle en G (c); donc la somme du rectangle des parties AF & FB, & du quarré de la ligne FE, est égale à la somme des quarrés des lignes EG & GD (n); & par con-

fréquent si à chacune de ces sommes on ajoute le carré de la ligne GF, la somme du rectangle des parties AF & FB, & des carrés des lignes FE & GF, sera égale à celle des carrés des lignes EG, GD & GF (n). Or le carré de la ligne FE est N. 63, égal à la somme des carrés des lignes EG & GF (n), puisque le triangle EGF est N. 168, rectangle en G (c); donc si de la première de ces deux dernières sommes égales entr'elles, on retranche le carré de la ligne FE, & de la seconde, la somme des carrés des lignes EG & GF, les restes qui sont la somme du rectangle des parties AF & FB, & du carré de la ligne GF, & le carré de la ligne GD, seront égaux entr'eux (n). Enfin le carré de la ligne GD est N. 64, égal à la somme du rectangle des parties CF & FD de la ligne CD, & du carré de la ligne GF (n), puisque la ligne CD étant N. 182, divisée en deux parties CG & GD égales entr'elles (n) par la ligne EG qui lui est perpendiculaire (c) & passe par le centre E du cercle X, cette ligne GF est la moitié de la différence des parties CF & FD; donc la somme du rectangle des parties AF & FB, & du carré de la ligne GF, est égale à celle du rectangle des parties CF & FD, & du carré de la ligne GF (n); & par conséquent N. 62, si de chacune de ces sommes on retranche

268 LES ELEMENS D'EUCLIDE ,

le carré de la ligne GF , les restes qui sont le rectangle des parties AF & FB de la ligne AB , & celui des parties CF & FD de la ligne CD , seront égaux entr'eux (n).

Troisième Cas. Si aucune des lignes AB & CD * ne passe par le centre du cercle X.

Const. Par le point F & le centre E du cercle X , tirés la ligne GH.

Démonst. Puisque la ligne GH passe par le centre E du cercle X (c) , le rectangle des parties GF & FH de cette ligne , est égal à celui des parties AF & FB de la ligne AB (d) ; ce même rectangle est aussi égal à celui des parties CF & FD de la ligne CD (d) ; donc le rectangle des parties AF & FB est égal à celui des parties CF & FD (n) ; donc C. Q. F. D.



PROPOSITION XXXVI.

THEOREME.

258. Si deux lignes droites dont l'une touche un cercle, & dont l'autre le traverse, sont tirées d'un même point hors de cette figure à sa circonférence, le rectangle fait de celle qui traverse ce cercle & de sa partie extérieure à ce cercle, sera égal au quarré de celle qui le touche.

LE rectangle fait de la ligne AC qui traverse le cercle X* & de sa partie AD extérieure à ce cercle, est égal au quarré de la ligne AB qui touche ce même cercle au point B. Fig. 55. & 56.

La ligne AC passe par le centre E du cercle X, ou elle n'y passe point.

Premier Cas. Si la ligne AC* passe par le centre E du cercle X. Fig. 55

Const. Du centre E du cercle X, tirés au point B, la ligne EB.

Démonst. La ligne EB est perpendiculaire à la ligne AB (n), puisqu'elle est tirée du centre E du cercle X au point B auquel cette ligne AB le touche (c); ainsi le trian-

270 LES ELEMENS D'EUCLIDE ;

- gle ABE est rectangle en B ; & par conséquent la somme du quarré de la ligne AB & de celui de la ligne EB, est égale au quarré de la partie AE de la ligne AC (n) : or le quarré de cette partie AE est égal à la somme du quarré de la ligne ED, & du rectangle fait de la ligne AC & de sa partie AD (n), puisque cette partie AE est composée de la partie AD de la ligne AC, & de la moitié ED de son autre partie DC (n) ; donc la somme du quarré de la ligne AB, & de celui de la ligne EB, est égale à celle du quarré de la ligne ED, & du rectangle fait de la ligne AC & de sa partie AD (n) ; & par conséquent si de la premiere de ces sommes on retranche le quarré de EB, & de la seconde, le quarré de ED qui est égal à celui de EB, puisque les lignes EB & ED qui sont rayons du même cercle X (c) sont égales entr'elles, les restes qui sont le quarré de la ligne AB, & le rectangle fait de la ligne AC & de sa partie AD, seront égaux entr'eux (n),
- N. 64.

Fig. 56. Second Cas. Si la ligne AC * ne passe point par le centre du cercle X.

- Const. Du centre E du cercle X abaissés la perpendiculaire EF à la ligne DC (n) & tirés aux points A, D & B, les lignes EA, ED & EB.
- N. 93.

Démonst. Puisque la ligne EF passe par le

LIVRE TROISIÈME. 271

centre E du cercle X (*c*), & est perpendiculaire à la ligne DC qui est terminée de part & d'autre à la circonférence de ce cercle (*c*); elle divise cette ligne en deux parties DF & FC égales entr'elles (*n*); donc la partie AF de la ligne AC est composée de l'une des parties AD de cette ligne, & de la moitié DF de son autre partie DC; & par conséquent la somme du quarré de la partie DF & du rectangle fait de la ligne AC & de sa partie AD, est égale au quarré de la partie AF (*n*). Or puisque la somme du quarré de la partie DF & du rectangle fait de la ligne AC & de sa partie AD, est égale au quarré de la partie AF, si à cette somme & au quarré de cette partie AF on ajoute le quarré de la ligne EF, la somme des quarrés des lignes EF & DF, & du rectangle fait de la ligne AC & de sa partie AD, sera égale à la somme des quarrés des lignes EF & AF (*n*): mais la somme des quarrés des lignes EF & AF est égale au quarré de la ligne EA (*n*), puisque le triangle AFE est rectangle en F (*c*); & le quarré de la ligne EA est égal à la somme des quarrés des lignes AB & EB (*n*), puisque le triangle ABE dont le côté EB est une ligne tirée du centre E du cercle X au point B auquel le côté AB touche ce cercle (*h*), est rectangle en B (*n*); donc la somme des

N. 219.

N. 184.

N. 632

N. 1689

N. 1682

N. 2376

272 LES ELEMENS D'EUCLIDE;

quarrés des lignes EF & DF, & du rectangle fait de la ligne AC & de sa partie AD, est égale à la somme des quarrés des lignes

N. 62. AB & EB (n); & par conséquent, puisque la somme des quarrés des lignes EF & DF qui sont côtés du triangle DFE, rectangle en F (c), est égale au carré de la ligne ED

N. 168. (n), la somme du carré de la ligne ED & du rectangle fait de la ligne AC & de sa partie AD, est égale à la somme des quarrés des lignes AB & EB. Enfin puisque la somme du carré de la ligne ED & du rectangle fait de la ligne AC & de sa partie AD, est égale à la somme des quarrés des lignes AB & EB, si de la premiere de ces sommes on retranche le carré de ED, & de la seconde, le carré de EB qui est égal à celui de ED, puisque les lignes ED & EB qui sont rayons du même cercle X (c), sont égales entr'elles, les restes qui sont le rectangle de la ligne AC & de sa partie AD, & le carré de la ligne AB, seront égaux entr'eux (n); donc C. Q. F. D.

N. 64.

COROLLAIRE I.

259. Il suit de ce Théorème, que si deux lignes droites qui traversent un cercle, sont tirées d'un même point hors de cette figure à sa circonférence, le rectangle fait de l'une de ces lignes & de sa partie extérieure à ce cercle, sera égal au rectangle

fait de l'autre de ces lignes, & de sa partie extérieure à ce même cercle.

Le rectangle fait de la ligne AB * & de sa partie AE, est égal à celui de la ligne AC & de sa partie AF. Fig. 571

Const. Du point A tirés au cercle X, la tangente AD (n). N. 2301

Démonst. Le rectangle de la ligne AB & de sa partie AE, est égal au carré de la ligne AD (n) : le rectangle de la ligne AC & de sa partie AF, est aussi égal au carré de la même ligne AD (n) ; donc le rectangle de la ligne AB & de sa partie AE, est égal au rectangle de la ligne AC & de sa partie AF (n) ; donc C. Q. F. D. N. 2581
Fig. 621

COROLLAIRE II.

260. Il suit aussi de ce Théorème, que les tangentes tirées à un cercle d'un même point hors de cette figure, sont égales entr'elles.

Les tangentes AB & AC * tirées du même point A au cercle X, sont égales entr'elles. Fig. 581

Const. Du point A tirés à la circonférence du cercle X, une ligne droite quelconque AD qui traverse ce cercle.

Démonst. Le rectangle de la ligne AD & de sa partie AE, est égal au carré de la tangente AB (n) ; le même rectangle est aussi égal au carré de la tangente AC (n) ; N. 2581
N. 2581

274 LES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE ,

N. 62. donc le quarré de la tangente AB est égal à celui de la tangente AC (n) ; & par conséquent ces tangentes AB & AC sont égales entr'elles ; donc C. Q. F. D.

COROLLAIRE III.

261. Il suit de ce Corollaire , que d'un même point on ne peut tirer à un cercle plus de deux tangentes.

Fig. 58. Du point A * on ne peut tirer au cercle X plus de deux tangentes AB & AC.

N. 260. Démonst. Les tangentes tirées à un cercle, d'un même point hors de cette figure , sont égales entr'elles (n) : or d'un même point hors d'un cercle , on ne peut tirer à ce cercle plus de deux lignes droites égales entr'elles (n) : donc d'un même point hors d'un cercle , on ne peut tirer à ce cercle plus de deux tangentes ; donc C. Q. F. D.

U S A G E.

262. On peut se servir de ce Théorème de la manière suivante , pour mesurer le diamètre d'un cercle X* dans lequel on ne peut point entrer.

Fig. 59. Du point A pris à volonté hors du cercle X ; on tire à ce cercle , soit avec des cordes , soit autrement , deux tangentes AB & AC. On divise l'angle BAC formé par ces cordes , en deux parties BAD & CAD égales entr'elles (n). On mesure

LIVRE TROISIÈME. 275

l'une de ces tangentes ; on mesure aussi la ligne AD qui , si elle étoit prolongée , passeroit par le centre du cercle X (n) , puis- N. 224.
qu'elle est également éloignée des tangentes AB & AC qui sont égales entr'elles (n). N. 260.
On multiplie par lui-même le nombre de mesures que contient l'une de ces tangentes. On divise le produit par le nombre de mesures que contient la ligne AD , & le quotient est le nombre de mesures que contient la ligne AE ; puisque le quarré de AB ou celui de AC , est égal au rectangle de AE & de AD (n). Or puisque ce quotient est N. 258.
le nombre de mesures que contient la ligne AE ; si de ce nombre , on retranche le nombre de mesures que contient la ligne AD , le reste sera le nombre de mesures que contient le diametre DE du cercle X ; donc
C. Q. F. F.



PROPOSITION XXXVI

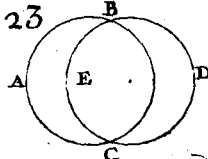
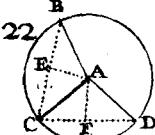
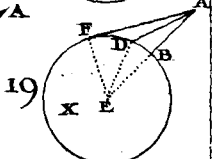
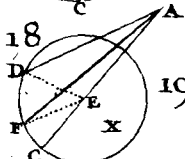
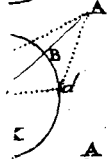
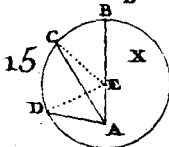
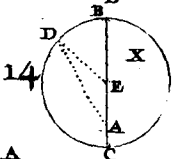
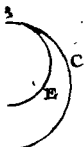
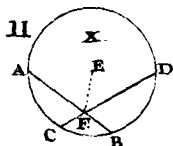
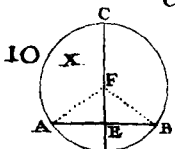
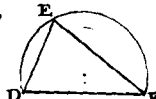
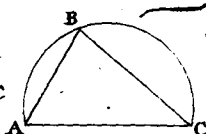
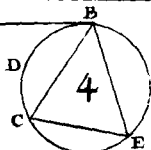
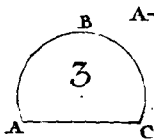
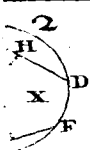
THEOREME.

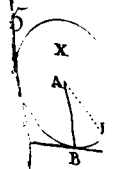
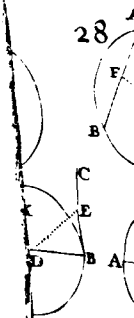
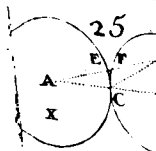
263. Si deux lignes droites qui sont tirées d'un même point hors d'un cercle à la circonférence de ce cercle, sont telles que le quarré de l'une soit égal au rectangle fait de l'autre & de sa partie extérieure à ce cercle, celle dont le quarré est égal au rectangle fait de l'autre & de sa partie extérieure, est tangente à ce cercle.

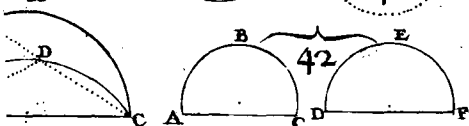
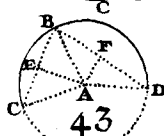
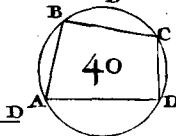
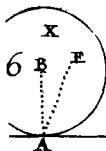
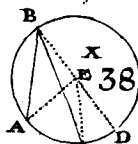
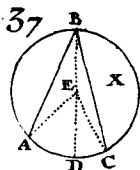
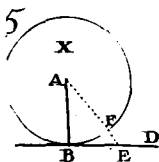
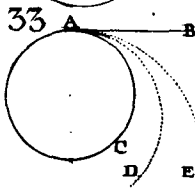
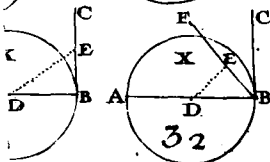
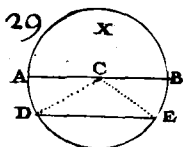
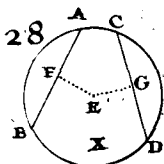
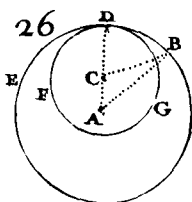
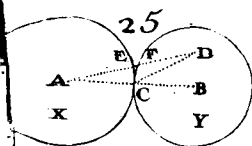
Fig. 60. **S** I le quarré de la ligne AB* qui est tirée du point A à la circonférence du cercle X, est égal au rectangle de la ligne AC & de sa partie AD, cette ligne AB est tangente au cercle X.

Const. Du point A tirés au cercle X, la tangente AF (n) : du centre E de ce même cercle, tirés aux points B & F, les lignes EB & EF.

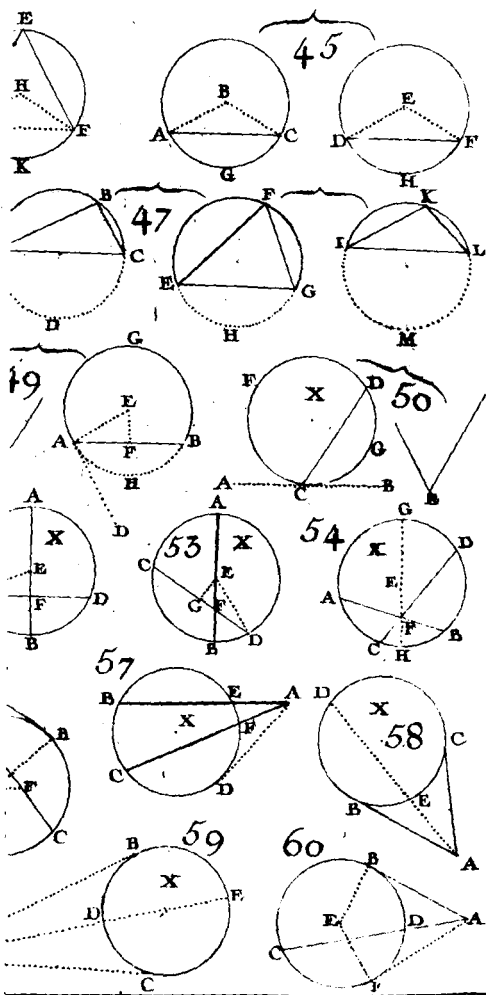
Démonst. Puisque la ligne AF est tangente au cercle X (c), le quarré de cette ligne est égal au rectangle de la ligne AC & de sa partie AD (n) : or le quarré de la ligne AB est aussi égal à ce même rectan-

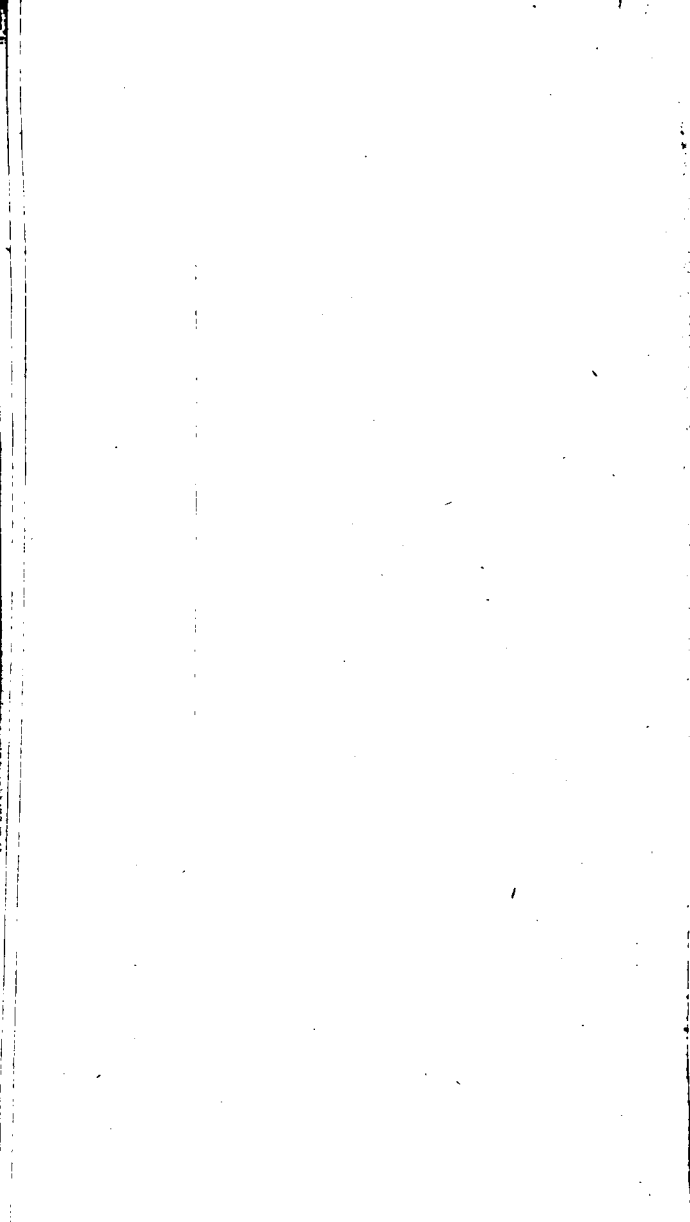












le (*h*) ; donc le quarré de la ligne AF & celui de la ligne AB sont égaux entr'eux (*n*) ; ^{N. 621}
 & par conséquent les lignes AF & AB sont égales entr'elles. Ainsi les triangles AFE & ABE ont le côté AE commun entr'eux, le côté AF égal au côté AB (*d*) , & le côté EF égal au côté EB , puisque EF & EB sont rayons du même cercle X (*c*) ; donc les angles du premier triangle sont égaux à ceux du second , chacun à chacun (*n*) ; & par conséquent puisque l'angle F ^{N. 371} que la ligne AF forme avec la ligne EF qui est tirée du centre E du cercle X , au point F auquel cette ligne AF touche ce cercle , est droit (*n*) , l'angle B l'est aussi. ^{N. 2371}
 Or puisque l'angle B est droit , la ligne AB est perpendiculaire à l'extrémité du rayon EB du cercle X (*n*) ; & par conséquent ^{N. 201} elle est tangente à ce cercle (*n*) ; donc C, ^{N. 2331}
 Q. F. D.

Fin du troisième Livre.



LES ELEME NS D'EUCLIDE.

LIVRE QUATRIEME.

EUCLIDE commence ce Livre comme il a fait les précédens ; c'est-à-dire par définir quelques termes dont il doit se servir. Il enseigne ensuite la manière d'inscrire dans un cercle differens Polygones, & celle de les circoncrire à cette figure ; & c'est tout ce que contient ce Livre.

DEFINITIONS.

I.

264. **U**N figure rectiligne est *inscrite* dans une autre , lorsque chaque angle de cette figure a pour sommet un point de la circonférence de cette autre.

Fig. 1. La figure *ABCD* * est *inscrite* dans la figure *EFGH*.

II.

265. Une figure rectiligne est *circonscrite* à un autre, lorsque chaque côté de cette figure a un point commun avec le sommet de chaque angle de cette autre.

La figure *EFGH* * est circonscrite à la Fig. 1.
figure *ABCD*.

III.

266. Une figure rectiligne est *inscrite* dans un cercle, lorsque le sommet de chaque angle de cette figure, est un point de la circonférence de ce cercle.

La figure *ABCD* * est inscrite dans le Fig. 2.
cercle *X*.

IV.

267. Une figure rectiligne est *circonscrite* à un cercle, lorsque chaque côté de cette figure touche la circonférence de ce cercle.

La figure *ABCD* * est circonscrite au Fig. 3.
cercle *X*.

V.

268. Un cercle est *inscrit* dans une figure rectiligne, lorsque chaque côté de cette figure touche la circonférence de ce cercle.

Le cercle *X* * est inscrit dans la figure Fig. 4.
ABCD.

VI.

269. Un cercle est *circonscrit* à une figure rectiligne, lorsque le sommet de cha-

280 LES ELEMENTS D'EUCLIDE;
que angle de cette figure est un point de la
circonférence de ce cercle.

Fig. 2. Le cercle X^* est circonscrit à la figure
 $ABCD$.

VII.

270. Une ligne droite est *inscrite* dans
un cercle, lorsqu'elle est terminée de part
& d'autre à la circonférence de ce cercle.

PROPOSITION I.

PROBLEME.

271. Dans un cercle donné, inscrire une
ligne droite égale à une autre, pourvu
qu'elle soit moins grande que le dia-
mètre de ce cercle (n).

Fig. 4. IL faut inscrire dans le cercle X^* , une li-
gne droite égale à la ligne droite A .

Const. Tirés un diamètre quelconque BC
de ce cercle : divisés ce diamètre en deux
parties BD & DC , telles que l'une BD soit
égale à la ligne A : du point B pris pour
centre, & avec la partie BD prise pour
rayon, décrivés un cercle $GEDF$: du
point B tirés à l'un ou à l'autre des points
 E & F , auxquels la circonférence du cercle
 $GEDF$ coupe celle du cercle X , une ligne
 BE

BE ou BF, cette ligne sera égale à la ligne A, & inscrite dans le cercle X.

Démonst. La ligne BE est égale à la partie BD, puisque cette ligne & cette partie sont rayons du même cercle GEDE (c); or la partie BD est égale à la ligne A (c); donc la ligne BE est égale à la ligne A. Ainsi la ligne BE est égale à la ligne A (d); & elle est inscrite dans le cercle X (n), puisqu'elle est terminée de part & d'autre à la circonférence de ce cercle (c); donc C. Q. F. F. N. 270

PROPOSITION II.

PROBLEME.

272. Dans un cercle donné, inscrire un triangle équiangle à un autre.

IL faut inscrire dans le cercle GEH*, un triangle équiangle au triangle ABC. Fig. 57

Const. D'un point E pris à volonté sur la circonférence de ce cercle, tirés à ce cercle une tangente DEF (n); faites sur cette tangente un angle HEF, qui ait le point E de cette tangente pour sommet, & qui soit égal à un angle quelconque C du triangle ABC (n); faites aussi sur cette même tangente un an-

282 LES ELEMENS D'EUCLIDE;

gle GED, qui ait aussi le point E de cette tangente pour sommet, & qui soit égal à un autre angle quelconque A du même triangle ABC (n): du point G auquel le côté EG rencontre la circonférence du cercle GEH, tirés au point H auquel le côté EH rencontre cette même circonférence, la ligne GH. Le triangle GEH sera équiangle au triangle ABC, est inscrit dans le cercle GEH.

Démonst. L'angle G dans le segment EGH est égal à l'angle HEF du segment HIE (n); & l'angle HEF est égal à l'angle C (c); donc l'angle G est égal à l'angle C; & par une démonstration pareille, l'angle H est égal à l'angle A. Or puisque les triangles GEH & ABC ont l'angle G égal à l'angle C, & l'angle H égal à l'angle A, l'autre angle E du premier triangle, est égal à l'autre angle B du second (n); & par conséquent ces triangles sont équiangles. Ainsi le triangle GEH est équiangle au triangle ABC (d); & il est inscrit dans le cercle GEH (n), puisque chaque angle de ce triangle est un point de la circonférence de ce cercle (c); donc C. Q. F. F.



PROPOSITION III.

PROBLEME.

273. *Circonscrire à un cercle donné, un triangle équiangle à un autre.*

IL faut circonscrire au cercle DEF *, un triangle équiangle au triangle ABC. Fig. 8.

Const. Prolongés de part & d'autre à volonté, un des côtés du triangle ABC : tirés un rayon quelconque GF du cercle DEF : faites sur ce rayon GF un angle FGE, qui ait le point G de ce rayon pour sommet, & soit égal à l'un des angles extérieurs BCM du triangle ABC (n) : faites encore sur le même rayon GF un angle FGD, qui ait aussi le point G de ce rayon pour sommet, & soit égal à l'autre angle extérieur BAL du même triangle ABC (n) : des points F, E & D auxquels les rayons GF, GE & GD rencontrent la circonférence du cercle DEF, tirés à ce cercle les tangentes HFK, KEI & HDI (n) : prolongés ces tangentes jusqu'à ce qu'elles se rencontrent ; & le triangle HIK qu'elles formeront sera équiangle au triangle ABC, & circonscrit au cercle DEF. N. 113.
N. 115.
N. 114.

284 LES ELEMENS D'EUCLIDE ;

Démonst. La somme des angles GFK ,

GEK , FGE & K de la figure FGEK, est

N. 138. égale à celle de quatre angles droits (n) ,

puisque cette figure a quatre côtés : or la

somme des angles GFK & GEK est égale à

celle de deux angles droits , puisque cha-

cun de ces angles qui est formé par une ligne

tirée du centre G du cercle DEF au point

auquel une ligne droite le touche (c) , est

N. 237. droit (n) ; donc si de la somme des angles

GFK , GEK , FGE & K , on retranche

celle des angles GFK & GEK , le reste qui

est la somme des angles FGE & K , sera

égale à celle de deux angles droits. Ainsi ,

puisque la somme des angles FGE & K est

égale à celle de deux angles droits , & que

celle des angles BCM & BCA est aussi éga-

N. 94. le à celle de deux angles droits (n) , la som-

me des angles FGE & K, est égale à celle

N. 62. des angles BCM & BCA (n) ; & par consé-

quent puisque l'angle FGE est égal à l'angle

BCM (c) , l'angle K l'est à l'angle BCA : or

par une démonstration pareille , l'angle H

est égal à l'angle BAC ; donc puisque les trian-

gles HIK & ABC ont l'angle H égal à

l'angle BAC , & l'angle K égal à l'angle

BCA , l'autre angle I du premier triangle

N. 135. est égal à l'autre angle B du second (n) ; &

par conséquent ces triangles sont équiangles.

Ainsi le triangle HIK est équiangle au trian-

gle ABC (d), & il est circonscrit au cercle DEF (n), puisque chaque côté de ce triangle N. 262
 touche la circonférence de ce cercle (c);
 donc C. Q. F. F.

PROPOSITION IV.

PROBLÈME.

274. *Inscrire un cercle dans un triangle donné.*

IL faut inscrire un cercle dans le triangle ABC *.

Fig. 79

Const. Divisés l'un des angles du triangle ABC, par exemple l'angle BAC, en deux parties BAD & CAD égales entr'elles (n): N. 284
 divisés aussi un autre angle de ce même triangle, par exemple l'angle BCA, en deux parties BCD & ACD égales entr'elles (n): du point D auquel les lignes AD N. 284
 & CD se rencontrent, abaissés à l'un des côtés de ce triangle, par exemple au côté AC, la perpendiculaire DG (n): du point D N. 284
 pris pour centre, & avec cette perpendiculaire DG prise pour rayon, décrits un cercle EFG: ce cercle EFG sera inscrit dans le triangle ABC.

Pour la démonstration: du point D

N. 31. & abaissés au côté BC la perpendiculaire DF,
& au côté AB la perpendiculaire DE (n).

Démonst. Les triangles ADE & ADG ont le côté AD commun entr'eux, & les angles DAE & AED qui sont, l'un à l'extrémité de ce côté AD du premier triangle, & l'autre opposé à ce côté, égaux aux angles DAG & AGD qui sont, l'un à l'extrémité de ce même côté AD du second triangle, & l'autre opposé à ce côté; puisque l'angle DAE est égal à l'angle DAG (c), & que les angles AED & AGD sont droits
N. 20. chacun (n); ainsi les autres côtés du premier triangle sont égaux aux autres côtés du se-
N. 119. cond, chacun à chacun (n); & par conséquent le côté DE est égal au côté DG: or on démontre de la même manière, en comparant le triangle DGC au triangle DFC, que le côté DG est égal au côté DF; donc les côtés DG, DE & DF sont égaux entr'eux; & par conséquent puisque le cercle EGF est décrit du point D commun à ces côtés, pris pour centre, & avec la perpendiculaire DG qui est l'un de ces côtés, prise pour rayon, les autres côtés DF & DE sont aussi rayons de ce même cercle (n). Ainsi puisque les
N. 32. côtés DE, DF & DG sont rayons du cercle EFG, & que les côtés AB, BC & AC, du triangle ABC sont perpendiculaires aux extrémités de ces rayons (c), les

côtés du triangle ABC touchent chacun la circonférence du cercle EFG (n) ; & par N. 233
conséquent ce cercle est inscrit dans ce triangle (n) ; donc C. Q. F. F. N. 268.

PROPOSITION V.

PROBLÈME.

275. *Circonscrire un cercle à un triangle donné.*

IL faut circonscrire un cercle au triangle ABC *.

Fig. 82

Const. Divisés deux côtés du triangle ABC , par exemple le côté AB & le côté AC , chacun en deux parties égales entr'elles (n) : du point D milieu du côté AB N. 91.
(c) élevés à ce côté la perpendiculaire DF ,
& du point E milieu du côté AC (c), élevés aussi à ce côté la perpendiculaire EF (n) : du point F auquel ces perpendiculaires se rencontrent, tirés au sommet de l'un des angles du triangle ABC , par exemple au sommet de l'angle A , la ligne FA : du point F pris pour centre, & avec cette ligne FA prise pour rayon, décrits un cercle ABC , ce cercle sera circonscrit au triangle ABC . N. 92.

Pour la démonstration : du point F tirés aux sommets des angles B & C, les lignes FB & FC.

- Démonst.* Les triangles AFE & CFE
 N. 18. ont l'angle AEF égal à l'angle CEF (n),
 puisque la ligne EF est perpendiculaire à la
 ligne AC (c); & les côtés EA & EC qui
 forment le premier, égaux aux côtés EC &
 EF qui forment le second, chacun à chacun,
 puisque EA est égal à EC (c), & que EF
 est commun à ces deux triangles; ainsi l'autre
 côté FA du premier est égal à l'autre
 N. 20. côté FC du second (n); & par conséquent,
 puisqu'en comparant le triangle ADF au
 triangle BDF, on démontre de la même
 manière que le côté FA est aussi égal au côté
 FB, les trois lignes FA, FB & FC sont
 égales entr'elles. Or puisque les lignes FA,
 FB & FC sont égales entr'elles, & que le
 cercle ABC est décrit de l'extrémité com-
 mune F de ces lignes, prise pour centre (c),
 & avec la ligne FA qui est l'une de ces li-
 gnes, prise pour rayon (c), ce cercle passe
 par les autres extrémités A, B & C de ces
 N. 22. mêmes lignes (n); donc puisque ces extré-
 mités A, B & C, sont les sommets des an-
 gles du triangle ABC (c), les sommets des
 angles de ce triangle sont des points de la
 circonférence du cercle ABC; & par con-
 séquent ce cercle est circonscrit à ce trian-
 gle

PROPOSITION VI.

PROBLEME.

276. *Inscrire un quarré dans un cercle donné.*

IL faut inscrire un quarré dans le cercle ABCD *

Fig. 9.

Const. Tirés un diametre quelconque AC du cercle ABCD : tirés un autre diametre BD de ce même cercle , qui soit perpendiculaire au diametre AC (n) : du point B tirés aux points A & C, les lignes BA & BC: du point D tirés aux mêmes points A & C les lignes DA & DC. Le quadrilatere ABCD que ces lignes forment , sera un quarré inscrit dans le cercle ABCD. N. 92.

Démonst. Les quatre angles qui ont chacun le centre E du cercle ABCD pour sommet , sont égaux entr'eux (n) , puisque les lignes AC & BD qui forment ces angles , sont réciproquement perpendiculaires (c) ; ainsi les arcs AB, BC, CD & DA sur lesquels ces angles s'appuyent , sont égaux entr'eux (n) ; & par conséquent les cordes AB , BC, CD & DA de ces arcs sont égales en- N. 18. N. 247,

Bb

290 LES ELEMENS D'EUCLIDE ,

- N. 251. tr'elles (n) : or ces cordes sont les côtés du quadrilatere ABCD ; donc les côtés de ce quadrilatere sont égaux entr'eux ; & par conséquent puisque les angles de ce même quadrilatere qui sont inscrits chacun dans un
N. 253. demi cercle , sont droits (n) , ce quadrila-
N. 49. tere est un quarré (n) ; & il est inscrit dans le
N. 266 cercle ABCD (n) , puisque les sommets de ses angles sont des points de la circonférence de ce cercle (c) ; donc C. Q. F. F.

PROPOSITION VII.

PROBLEME.

277. *Circonscrire un quarré à un cercle donné.*

Fig. 10. **I**L faut circonscrire un quarré au cercle ABCD *.

- Const.* Tirés un diametre quelconque AC du cercle ABCD : tirés un autre diametre BD de ce même cercle , qui soit perpendiculaire au diametre AC (n) : par les
N. 92. points B & D, tirés les paralleles EF & HG au diametre AC ; & par les points A & C
N. 130. les paralleles EH & FG au diametre BD (n). Le quadrilatere EFGH que ces paralleles forment , sera un quarré circonscrit au cercle ABCD.

Dém. Les lignes EF & AC sont égales

entr'elles (n), puisqu'elles sont côtés opposés du quadrilatere EFCA qui est un parallelogramme (c); les lignes AC & BD sont égales entr'elles, puisqu'elles sont diametres du même cercle ABCD (c); & les lignes BD & EH sont égales entr'elles (n), puisqu'elles sont côtés opposés du quadrilatere EB-DH qui est un parallelogramme (c); donc la ligne EF est égale à la ligne EH (n): or la ligne HG est égale à la ligne EF, & la ligne FGL'est à la ligne EH (n), puisque le quadrilatere EFGH est un parallelogramme (c); donc les côtés EF, EH, HG & FG de ce quadrilatere sont égaux entr'eux (n); & par conséquent si ses angles sont droits, il fera un quarré (n). Or ses angles sont droits; car l'angle AIB est droit (c), & l'angle E est égal à cet angle AIB (n), puisque ces angles sont les angles opposés du quadrilatere EBIA qui est un parallelogramme (c); & par des raisons pareilles, les angles F, G & H sont aussi droits chacun; donc le quadrilatere EFGH est un quarré. Enfin l'angle IBF est droit (n), puisqu'il est un angle extérieur, que l'angle intérieur E qui lui est opposé est droit (d), & que les lignes BD & EH qui forment ces angles avec le côté EF, sont paralleles (c); donc le côté EF est perpendiculaire à l'extrémité du diametre BD du cercle ABCD; & par consé-

- N. 231. 292 LES ELEMENTS D'EUCLIDE ;
 quent ce côté touche ce cercle (n). On dé-
 montre de la même manière que les autres
 côtés du carré EFGH touchent aussi cha-
 cun le cercle ABCD ; ainsi ce carré est
 N. 267. circonscrit à ce cercle (n) ; donc C.Q.F.F.

PROPOSITION VIII.

PROBLEME.

278. *Inscrire un cercle dans un carré.*

Fig. 10. **I**L faut inscrire un cercle dans le carré EFGH *.

N. 91. *Const.* Divisés chaque côté du carré EFGH en deux parties égales entr'elles (n) : du milieu B du côté EF, tirés au milieu D du côté qui lui est opposé, la ligne BD : du milieu A du côté EH, tirés de même au milieu C du côté qui lui est opposé, la ligne AC : du point I auquel ces deux lignes se coupent, pris pour centre, & avec une des parties de l'une de ces lignes, par exemple avec la partie AI, prise pour rayon, décrivés un cercle ABCD ; ce cercle sera inscrit dans le carré EFGH.

Démonst. Les côtés opposés EB & HD du quadrilatère EBDH sont égaux & parallèles entr'eux, puisqu'ils sont (c) les moi-

tiés des côtés opposés EF & HG du quar-
 ré EFGH ; donc les autres côtés EH &
 BD de ce quadrilatere EBDH sont aussi
 égaux & paralleles entr'eux (n) ; & par des N. 140.
 raisons pareilles les côtés AC & EF du qua-
 drilatere EFCA sont aussi égaux & paral-
 leles entr'eux ; ainsi les quadrilateres EB-
 IA , BFCI , AIDH , & ICGD sont des
 parallelogrammes ; & par conséquent leurs
 côtés opposés AE & IB , EB & AI , BF
 & IC , AH & ID , &c. sont égaux entr'-
 eux (n) ; or AE est égal à EB , puisqu'ils N. 141.
 sont (c) les moitiés des côtés EH & EF du
 quarré EFGH ; donc les côtés AI & IB
 sont égaux entr'eux , & par des raisons pa-
 reilles les côtés IB , IC & ID le sont aussi ;
 & par conséquent puisque le cercle ABCD
 est décrit de l'extrémité commune I de ces
 côtés , prise pour centre , & avec la partie
 AI qui est l'un de ces côtés , prise pour
 rayon , ce cercle passe par les autres extré-
 mités A , B , C & D de ces côtés (n). En- N. 32.
 fin l'angle IBF est droit (n), puisqu'il est un N. 137.
 angle extérieur , que l'angle intérieur E qui
 lui est opposé est droit (h), & que les lignes
 BD & EH qui forment ces angles avec le
 côté EF, sont paralleles (d) ; donc le côté
 EF est perpendiculaire à l'extrémité du dia-
 metre BD du cercle ABCD ; & par consé-
 quent ce côté touche ce cercle (n). Or on dé- N. 233.

294 LES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE ;

montre de la même manière, que les autres côtés du quarré EFGH touchent aussi chacun le cercle ABCD ; ainsi ce cercle est inscrit dans ce quarré (n) ; donc C.Q.F.F.

PROPOSITION IX.

PROBLÈME.

279. *Circonscrire un cercle à un quarré.*

Fig. 9. **I**L faut circonscrire un cercle au quarré ABCD *

Const. Tirés les diagonales AC & BD du quarré ABCD : du point E auquel ces diagonales se coupent, pris pour centre, & avec une des parties de l'une de ces diagonales, par exemple avec la partie EA prise pour rayon, décrivés un cercle ABCD ; ce cercle sera circonscrit au quarré ABCD.

Démonst. Les côtés AB & AD du triangle BAD sont égaux entr'eux, puisqu'ils sont côtés du quarré ABCD, & par conséquent puisque l'angle BAD de ce triangle est droit(h), les angles ABD & ADB sont chacun la moitié d'un angle droit (n) ; & par des raisons pareilles, les angles BAC & BCA du triangle ABC sont aussi chacun la

moitié d'un angle droit : or puisque les angles ABD & BAC qui sont les mêmes que les angles ABE & BAE du triangle AEB, sont chacun la moitié d'un angle droit, ces angles sont égaux entr'eux ; & par conséquent les côtés EA & EB de ce triangle sont aussi égaux entr'eux (n). On démon- N. 35.
 tre de la même manière, que les côtés EB, EC, & ED sont aussi égaux entr'eux ; donc le cercle ABCD décrit de l'extrémité commune E de ces côtés, prise pour centre, & avec la partie EA qui est l'un de ces côtés, prise pour rayon, passe par les autres extrémités A, B, C & D de ces côtés (n) ; ainsi N. 32.
 puisque ces extrémités A, B, C & D sont les sommets des angles du quarré ABCD (c), les sommets des angles de ce quarré, sont des points de la circonférence du cercle ABCD ; & par conséquent ce cercle est circonscrit à ce quarré (n) ; donc C. Q. N. 269.
 F. F.



PROPOSITION X.

PROBLEME.

280. *Décrire sur une ligne droite donnée , un triangle isocèle , tel que l'angle formé par les côtés égaux de ce triangle , soit la moitié de chacun de ses autres angles.*

Fig. 11. **I**L faut décrire sur la ligne droite AB* un triangle isocèle , tel que l'angle formé par cette ligne & par le côté de ce triangle, qui sera égal à cette ligne , soit la moitié de chacun des autres angles de ce même triangle.

Const. Divisés la ligne AB en deux parties AC & CB, telles que le rectangle fait de cette ligne & de la moins grande CB de ces parties , soit égal au quarré de la plus grande AC (n) : de l'extrémité A de cette ligne AB , prise pour centre , & avec cette même ligne prise pour rayon , décrivés un cercle BDG : du point B inscrivés dans ce cercle une ligne BD égale à la plus grande partie AC de cette ligne AB (n) : du point A tirés au point D, la ligne AD. Le triangle BAD formé par les lignes AB , AD & BD,

fera ifocele , & l'angle A fera la moitié de chacun des autres angles B & ADB.

Pour la démonstration : du point C tirés au point D, la ligne CD ; & circonscrivés un cercle ACDE au triangle ACD (n).

N. 2752

DEMONSTRATION.

Premierement. Le triangle BAD est ifocele (n) , puisque ses côtés AB & AD qui N. 424 sont rayons du même cercle BDG (c), sont égaux entr'eux. *Secondement.* Le rectangle fait de la ligne AB & de sa partie CB est égal au carré de la partie AC (c) ; or la ligne BD est égale à la partie AC (c) ; donc le rectangle fait de la ligne AB & de sa partie CB, est égal au carré de la ligne BD ; & par conséquent , puisque ces lignes AB & BD sont tirées chacune du même point B , à la circonférence du cercle ACDE , la ligne BD touche ce cercle au point D (n) ; donc puisque la ligne DC qui divise N. 2636 ce cercle en deux segmens CAED & CFD , est tirée de ce point D , l'angle A dans le segment CAED, est égal à l'angle BDC du segment CFD (n) ; & par conséquent si ce N. 2546 même angle A est aussi égal à l'angle CDA , il fera la moitié de l'angle ADB. Or l'angle A est égal à l'angle CDA ; car puisque l'angle BCD est l'angle extérieur du triangle ACD , & que les angles A & CDA

298 LES ELEMENS D'EUCLIDE ,

- font les angles intérieurs de ce même triangle , opposés à cet angle extérieur , cet angle BCD est égal à la somme des angles A & CDA (n) ; & par conséquent , puisque l'angle A est égal à l'angle BDC (d) , l'angle BCD l'est à l'angle BDA qui est la somme des angles BDC & CDA : or l'angle BDA est égal à l'angle B (n) , puisque les côtés AB & AD du triangle BAD sont égaux entr'eux (c) ; donc l'angle BCD est égal à l'angle B ; & par conséquent les côtés BD & CD du triangle BDC sont égaux entr'eux (n). Enfin puisque le côté BD est égal au côté CD , & qu'il l'est aussi au côté AC (c) , les côtés AC & CD du triangle ACD sont égaux entr'eux (n) ; ainsi l'angle CDA est égal à l'angle A (n) ; & par conséquent l'angle A est la moitié de l'angle ADB ; & puisque l'angle B est égal à l'angle ADB (d) , l'angle A est aussi la moitié de l'angle B ; donc C. Q. F. F.

C O R O L L A I R E .

281. Il suit de ce Problème , que si l'angle formé par les côtés égaux d'un triangle isocèle , est la moitié de chacun des autres angles de ce triangle , il sera la cinquième partie de deux angles droits.

Fig. 12. L'angle A * qui est la moitié de chacun des angles ABC & ACB du triangle iso-

celle BAC, est la cinquième partie de deux angles droits.

Const. Divisés chacun des angles ABC & ACB du triangle BAC, en deux parties égales entr'elles (n). N. 88.

Démonst. La somme des cinq angles A, ABD, DBC, BCE & ACE est égale à celle de tous les angles du triangle BAC (n) : or la somme de tous les angles d'un triangle, est égale à celle de deux angles droits (n) ; donc la somme des cinq angles A, ABD, DBC, BCE & ACE, est égale à celle de deux angles droits ; & par conséquent, puisque ces angles sont égaux entr'eux (n), ils sont chacun la cinquième partie de deux angles droits ; donc C. Q. F. D. N. 73.
N. 133.
N. 280.

PROPOSITION XI.

PROBLÈME.

282. *Inscrire dans un cercle donné, un Pentagone régulier. §*

IL faut inscrire dans le cercle ABCDE* un Pentagone régulier. Fig. 130

§ On nomme *Figure régulière*, une figure dont tous les côtés sont égaux entr'eux, & dont tous les angles le sont aussi.

- Const.* Décrivés un triangle isocèle FGH, dont l'angle G soit la moitié de chacun des autres angles F & H de ce triangle (n) : inscrivés dans le cercle ABCDE un triangle EBD équiangle à ce triangle (n) : divisés chacun des angles BED & BDE du triangle EBD, en deux parties égales entr'elles
- N. 280. (n). du point B tirés aux points A & C auxquels les lignes DA & EC rencontrent la circonférence du cercle ABCDE, les lignes BA & BC : du point A tirés au point E, la ligne AE : du point C tirés au point D la ligne CD. Le pentagone ABCDE formé par ces lignes BA, BC, AE & CD, & par le côté ED du triangle EBD, sera régulier, & inscrit dans le cercle ABCDE.

Démonstration. Les angles EBD, BEC, CED, BDA & ADE, ont chacun pour sommet un point de la circonférence du cercle ABCDE (c), & sont égaux entr'eux ; puisque l'angle EBD est la moitié de chacun des angles BED & BDE (c), que les angles BEC & CED sont chacun la moitié de l'angle BED (c), & que les angles BDA & ADE sont chacun la moitié de l'angle BDE (c) ; ainsi les arcs ED, BC, CD, BA & AE de ce cercle, sur lesquels ces

N. 246. angles s'appuyent, sont égaux entr'eux (n) ; & par conséquent les côtés ED, BC, CD, BA & AE du pentagone ABCDE qui sont

les cordes de ces arcs , sont égaux entr'eux (n). Or les angles de ce pentagone sont N. 2514 aussi égaux entr'eux(n), puisqu'ils s'appuyent N. 2481 chacun sur trois de ces arcs égaux entr'eux ; donc le pentagone ABCDE est régulier. Enfin le sommet de chaque angle de ce pentagone est un point de la circonférence du cercle ABCDE(c), ainsi ce pentagone est inscrit dans ce cercle(n); donc C.Q.F.F. N. 266

COROLLAIRE.

283. Il suit de la démonstration de ce Problème, que *chaque angle formé par deux des côtés d'un pentagone, est les trois cinquièmes de deux angles droits.*

PROPOSITION XII.

PROBLÈME.

284. *Circonscrire à un cercle donné, un Pentagone régulier.*

IL faut circonscrire un Pentagone régulier, au cercle ABCDE*.

Fig. 14.

Const. Inscrits dans le cercle ABCDE, un pentagone régulier ABCDE (n) : du N. 2821 centre L de ce cercle tirés aux sommets des angles de ce pentagone, les lignes LA,

- LB, LC, LD & LE : des extrémités A, B, C, D & E de ces lignes, élevés à ces lignes les perpendiculaires KAF, FBG, GCH, HDI & IEK (n) : prolongés, s'il est nécessaire, ces perpendiculaires jusqu'à ce qu'elles se rencontrent. Le pentagone KFGHI que ces perpendiculaires forment, sera régulier, & circonscrit au cercle ABCDE.

Pour la démonstration : du centre L du cercle ABCDE tirés aux sommets des angles du pentagone KFGHI, les lignes LK, LF, LG, LH, & LI.

- Démonst.* La somme des quarrés des côtés LA & FA du triangle LAF, est égale au quarré du côté LF (n), puisque ce triangle est rectangle en A (c) ; & le quarré de ce côté LF est égal à la somme des quarrés des côtés LB & FB du triangle LBF (n), puisque ce triangle est aussi rectangle en B (c) ; donc la somme des quarrés des côtés LA & FA est égale à celle des quarrés des côtés LB & FB (n) ; & par conséquent, si de la première on retranche le quarré de LA, & de la seconde le quarré de LB qui est égal à celui de LA, puisque les lignes LA & LB qui sont rayons du même cercle ABCDE (c), sont égales entr'elles, les restes qui sont le quarré de FA & celui de FB seront égaux entr'eux (n). Les triangles FAL

& FBL ont donc le côté FA égal au côté FB, puisque les quarrés de ces côtés sont égaux entr'eux (d); le côté LA égal au côté LB, puisque ces côtés sont rayons du même cercle ABCDE (c), & le côté FL commun entr'eux; ainsi les angles du premier de ces triangles, sont égaux à ceux du second, chacun à chacun (n); donc l'angle N. 17.
 ALF est égal à l'angle BLF; & par conséquent, puisque l'angle ALB est la somme de ces deux angles, il est double de l'angle BLF. Or on démontre de la même manière que l'angle CLB est double de l'angle BLG; donc puisque les angles ALB & CLB qui s'appuyent sur des arcs AB & BC égaux entr'eux (c), & ont chacun pour sommet le centre F de ces arcs, sont égaux entr'eux (n), les angles BLF & BLG le sont N. 249.
 aussi (n). Ainsi les triangles LBF & LBG N. 68.
 qui ont le côté LB commun entr'eux, & les angles LBF & LBG qui sont à l'une des extrémités de ce côté commun, égaux entr'eux (n), puisque ce côté est perpendicu- N. 181
 laire à la ligne FBG (c), ont aussi les angles BLF & BLG qui sont à l'autre extrémité de ce même côté commun, égaux entr'eux; donc les autres côtés du premier de ces triangles, sont égaux aux autres côtés du second, chacun à chacun (n); & par N. 119.
 conséquent le côté FB est égal au côté GB.

- Or on démontre que le côté GC est égal au côté GB, de la même maniere que l'on a démontré que le côté FA l'est au côté FB; on démontre aussi que le côté HC est égal au côté GC, de la même maniere que l'on a démontré que le côté FB l'est au côté GB, & ainsi de suite ; donc les côtés FB, GB, GC, HC, &c. sont égaux entr'eux (n); & par conséquent, puisque chaque côté du pentagone KFGHI est la somme de deux de ces côtés égaux, les côtés de ce pentagone sont égaux entr'eux. Les angles KFG, FGH, &c. formés chacun par deux des côtés de ce même pentagone sont aussi égaux entr'eux ; car puisque les côtés du triangle LAF sont égaux à ceux du triangle LBF, chacun à chacun (d), les angles du premier de ces triangles, sont égaux à ceux du second, chacun à chacun (n) ; ainsi l'angle LFA est égal à l'angle LFB ; & puisque les triangles LBF & LBG ont le côté LB commun entr'eux, & que les angles BLF & LBF qui sont aux extrémités de ce côté LB du premier de ces triangles, sont égaux aux angles BLG & LBG qui sont aux extrémités de ce même côté LB du second (d), l'autre angle LFB de ce premier triangle, est égal à l'autre angle LGB du second (n). Or on démontre que l'angle LGC est égal à l'angle LGB, de la même maniere que l'on a démontré

montré que l'angle LFA l'est à l'angle LFB; l'on démontre aussi que l'angle LHC est égal à l'angle LGC, de la même manière que l'on a démontré que l'angle LFB l'est à l'angle LGB, & ainsi de suite; donc les angles LFA, LFB, LGB, LGC, LHC, &c. sont égaux entr'eux (n); & par consé-
 N. 624
 quent puisque chaque angle formé par deux des côtés du pentagone KFGHI, est la somme de deux de ces angles égaux, les angles formés chacun par deux des côtés de ce pentagone, sont égaux entr'eux. Ainsi puisque les côtés du pentagone KFGHI sont égaux entr'eux (d), & que ses angles le sont aussi (d), ce pentagone est régulier; & puisque ses côtés qui sont perpendiculaires aux extrémités des rayons du cercle ABCDE (c), touchent ce cercle (n), il est circon-
 N. 237
 crit à ce même cercle (n); donc C. Q. F. F. N. 267.

PROPOSITION XIII.

PROBLÈME.

285. *Inscrire un cercle dans un Pentagone régulier.*

IL faut inscrire un cercle dans le Pentagone ABCDE*.

Fig. 15.

Cc

306 LES ELEMENS D'EUCLIDE ,

Const. Divisés deux des angles du pentagone ABCDE , par exemple les angles EAB & ABC, chacun en deux parties égales entr'elles (n) : du point F auquel les lignes AF & BF qui divisent ces angles , se rencontrent , abaissés à l'un des côtés de ce pentagone , par exemple au côté AB , la perpendiculaire FG (n) : de ce même point F, pris pour centre , & avec cette perpendiculaire FG, prise pour rayon , décrivés un cercle GHIKL , ce cercle sera inscrit dans le pentagone ABCDE.

Pour la démonstration : du point F abaissés aux côtés BC , CD , DE & EA , les perpendiculaires FH , FI , FK & FL (n) : du même point F , tirés aux sommets des angles C , D & E , les lignes FC , FD & FE.

Démonst. Les triangles FAL & FAG ont le côté FA commun entr'eux , les angles FAL & FAG qui sont à l'une des extrémités de ce côté commun, égaux entr'eux (c) , & les angles FLA & FGA qui sont opposés chacun à ce même côté commun , égaux entr'eux , puisque ces angles sont droits chacun (c) ; ainsi les autres côtés du premier de ces triangles, sont égaux aux autres côtés du second , chacun à chacun (n) ; & par conséquent le côté FL est égal au côté FG. Or on démontre de la même ma-

nière, que le côté FG est égal au côté FH , & ainsi de suite ; donc les côtés FL , FG , FH , &c. sont égaux entr'eux (n) ; & par ^{N. 62.} conséquent, puisque le cercle $GHIKL$ est décrit de l'extrémité commune F de ces côtés, prise pour centre (c), & avec la ligne FG qui est l'un de ces côtés, prise pour rayon (c), ces autres côtés FL , FH , FI , &c. sont aussi rayons de ce même cercle (n). ^{N. 32.} Ainsi puisque les côtés FL , FG , FH , &c. sont rayons du cercle $GHIKL$, & que les côtés du pentagone $ABCDE$ sont perpendiculaires aux extrémités de ces rayons (c), les côtés de ce pentagone touchent chacun la circonférence de ce cercle (n) ; & par ^{N. 213.} conséquent ce cercle est inscrit dans ce pen- ^{N. 268.} tagone (n) ; donc C. Q. F. F.

PROPOSITION XIV.

PROBLÈME.

286. *Circonscrire un cercle à un Pentagone régulier.*

IL faut circonscrire un cercle au Pentagone $ABCDE$ *.

Fig. 16

Const. Divisés deux des angles du pentagone $ABCDE$, par exemple les angles C & E ,

308 LES ELEMENS D'EUCLIDE;

N. 81. EAB & ABC, chacun en deux parties égales entr'elles (n): du point F auquel les lignes AF & BF qui divisent ces angles, se rencontrent, pris pour centre, & avec l'une de ces lignes, par exemple la ligne FA prise pour rayon, décrivés un cercle ABCDE: ce cercle sera circonscrit au pentagone ABCDE.

Pour la démonstration: du point F tirés aux sommets des angles C, D & E, les lignes FC, FD & FE.

Démonst. Les angles FAB & FBA du triangle AFB sont égaux entr'eux, puisqu'ils sont (c) les moitiés des angles EAB & ABC d'un polygone régulier (h); ainsi les côtés FB & FA de ce triangle sont
 N. 85. égaux entr'eux (n). Or on démontre de la même maniere que le côté FB est égal au côté FC, & ainsi de suite; donc les côtés FA, FB, FC, &c. sont égaux entr'eux
 N. 61. (n); & par conséquent puisque le cercle ABCDE est décrit de l'extrémité commune F de ces côtés, prise pour centre (c), & avec la ligne FA qui est l'un de ces côtés, prise pour rayon (c), ce cercle passe par les autres extrémités A, B, C, D & E de ces mêmes côtés (n); or ces extrémités A, B, C, D & E sont les sommets des angles du pentagone ABCDE (c); donc les sommets des angles de ce Pentagone, sont chacun un

point de la circonférence du cercle ABC-DE ; & par conséquent ce cercle est circonscrit à ce pentagone (n) ; donc C. Q. N. 269 ; F. F.

PROPOSITION XV.

PROBLÈME.

287. *Inscrire dans un cercle donné , un Exagone régulier.*

IL faut inscrire un Exagone régulier dans le cercle G *.

Fig. 176

Const. Du point A pris à volonté pour centre sur la circonférence du cercle G , & avec un rayon égal à celui de ce cercle , décrivés deux arcs qui coupent , l'un en B & l'autre en F , la circonférence de ce même cercle : des points B, A & F tirés par le centre G de ce même cercle , les lignes BGE , AGD & FGC : tirés du point A , aux points B & F , les lignes AB & AF ; du point C aux points B & D , les lignes CB & CD ; & du point E aux points F & D , les lignes EF & ED : l'exagone ABCDEF que ces lignes AB , AF , CB , &c. forment , sera régulier , & inscrit dans le cercle G.

310 LES ELEMENS D'EUCLIDE ;

- Démonst.* Le triangle ABG est équilateral (n), puisque les côtés GA & GB de ce triangle, qui sont rayons du même cercle G (c), sont égaux entr'eux, & que le côté AB est égal au rayon de ce même cercle (c) ; ainsi puisque chaque angle d'un triangle équilatéral est égal aux deux tiers d'un
- N. 41. angle droit (n), & par conséquent à la sixième partie de quatre angles droits, l'angle AGB est la sixième partie de quatre angles droits. Par une démonstration pareille le triangle AGF est aussi équilatéral, & par conséquent l'angle AGF est aussi la sixième partie de quatre angles droits. Or l'angle DGE est égal à l'angle AGB qui lui est opposé au sommet (n) ; & par une raison pareille, l'angle DGC est égal à l'angle AGF ; donc ces angles DGE & DGC sont aussi chacun la sixième partie de quatre angles droits ; & par conséquent la somme des angles AGB, AGF, DGE & DGC est égale aux quatre sixièmes de quatre angles droits : or la somme de tous les angles qui sont formés par les lignes droites tirées du même point G, est égale à celle de quatre
- N. 98. angles droits (n) ; donc la somme des angles BGC & FGE est égale aux deux sixièmes de quatre angles droits ; & par conséquent, puisque l'angle BGC est égal à l'an-
- N. 95. gle FGE qui lui est opposé au sommet (n),

LIVRE QUATRIÈME. 311

ces angles sont aussi chacun la sixième partie de quatre angles droits. Tous les angles qui ont leur sommet au point G , sont donc chacun la sixième partie de quatre angles droits (d) ; tous ces angles sont donc égaux entr'eux ; ainsi puisqu'ils ont chacun pour sommet le centre G du cercle $G(c)$, les arcs de ce cercle sur lesquels ils s'appuyent, sont égaux entr'eux (n) ; & par conséquent N. 247 les côtés AB , BC , CD , &c. de l'hexagone $ABCDEF$ qui sont les cordes de ces arcs, sont égaux entr'eux (n) : or les angles ABC , N. 252 BCD , CDE , &c. formés chacun par deux des côtés de cet hexagone, sont aussi égaux entr'eux (n), puisque les arcs du cercle G , N. 249 sur lesquels ces angles s'appuyent, sont chacun les quatre sixièmes de la circonférence de ce cercle (d) ; donc cet hexagone est régulier. Enfin cet hexagone est inscrit dans le cercle $G(n)$, puisque les sommets N. 266 de ses angles, sont chacun un point de la circonférence de ce cercle (c) ; donc C. Q. F. F.

COROLLAIRE.

288. Il suit de la démonstration de ce Problème, que le rayon d'un cercle est égal au côté de l'hexagone inscrit dans ce même cercle.

PROPOSITION XVI.

PROBLÈME.

289. *Inscrire dans un cercle donné, un Penté-décagone régulier.*

IL faut inscrire un Penté-décagone dans le cercle G *.

Const. Inscrivés dans le cercle G un triangle équilatéral ABC (n) : inscrivés aussi dans

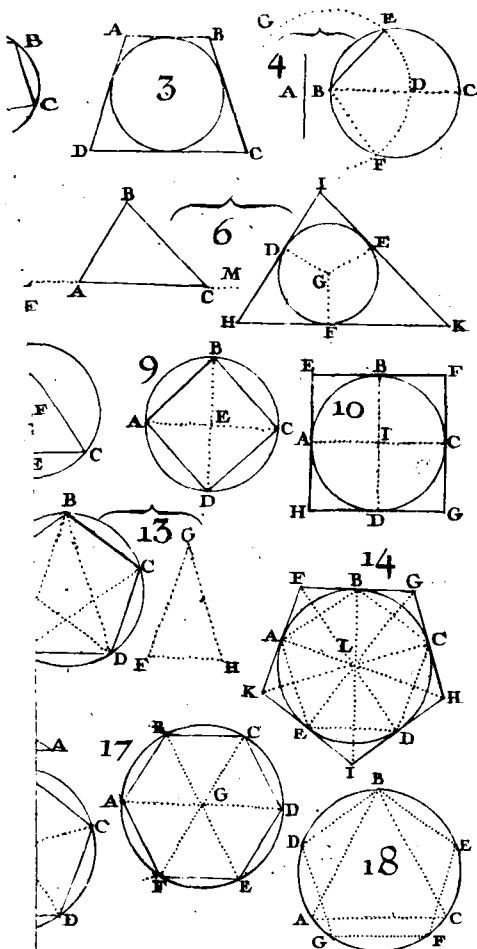
N. 272. ce même cercle un pentagone régulier DB-

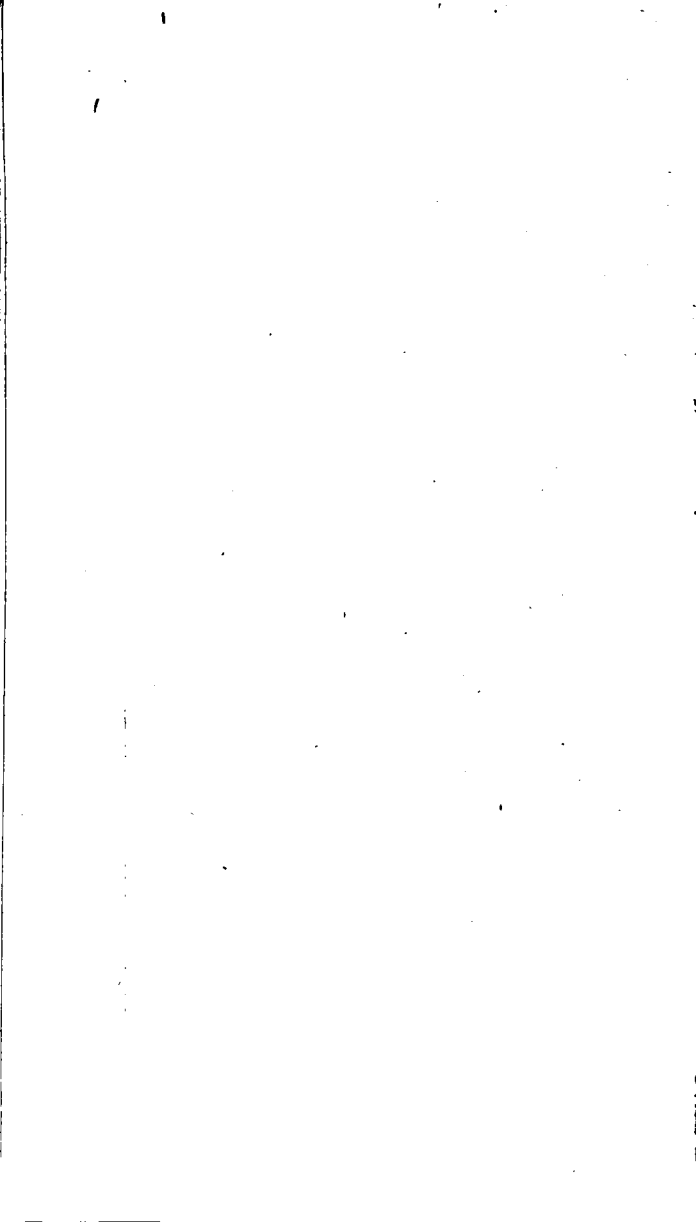
N. 282. EFG (n), de manière qu'il ait le sommet de l'un de ses angles, par exemple de l'angle B commun avec le sommet de l'un des angles du triangle ABC : l'arc AG sera la quinzième partie de la circonférence du cercle X.

Démonst. Les arcs BD & DG sont chacun la cinquième partie de la circonférence du cercle X (c) ; ainsi l'arc BDG est les deux cinquièmes, ou ce qui est la même chose, les six quinzièmes de cette circonférence : or l'arc BDA est le tiers, ou ce qui est la même chose, les cinq quinzièmes de cette même circonférence (c) ; donc si de l'arc BDG on retranche l'arc BDA, le reste qui est l'arc AG, sera la quinzième partie de cette circonférence ; donc C. Q. F. F.

Fin du quatrième Livre.

LES







LES ELEMENS D'EUCLIDE.

LIVRE CINQUIE'ME.

JUSQU'ICI on n'a considéré les lignes & les surfaces qu'en elles-mêmes ; il s'agit à présent de comparer entr'elles les premières, de faire la même chose à l'égard des dernières, & de déterminer les rapports qui resultent de ces comparaisons. Mais il est nécessaire d'avoir auparavant une connoissance exacte des rapports en général, & c'est à la donner, cette connoissance, qu'Euclide employe ce cinquième Livre. Il le commence par les Définitions des termes relatifs qui sont d'usage dans les comparaisons, établit ensuite les principes des Rapports, compare ces Rapports les uns aux autres, donne des regles pour connoître leur égalité ou leurs différentes sortes d'inégalités, & démontre les proprié-

314 LES ELEMENS D'EUCLIDE,
*tés de ceux qui sont égaux entr'eux. Ce Livre est une Logique excellente, & la matie-
re qui y est traitée, est l'Ame de la Géomé-
trie.*

DEFINITIONS.

I.

290. **U**N E Quantité qui prise plus d'une fois devient égale à une autre, se nomme *Partie* de cette autre.

Si A multiplié par un nombre entier ou fractionnaire plus grand que l'unité, devient égal à B, A est Partie de B.

II.

291. Une Quantité qui est égale à une autre, prise plus d'une fois, se nomme *Multiple* de cette autre.

Si A multiplié par un nombre entier ou fractionnaire plus grand que l'unité, devient égal à B, B est multiple de A.

292. Une Quantité qui est égale à une autre prise moins d'une fois, se nomme *sous-multiple* de cette autre.

Si A multiplié par un nombre fractionnaire moins grand que l'unité, devient égal à B, B est sous-multiple de A.

SCHOLIE I.

293. Euclide ne nomme une Quantité soit Partie, soit Multiple d'une autre, que lorsque le Multiplicateur qui lui fait donner ces noms est un nombre entier : mais comme il suffit qu'une quantité puisse être considérée comme retranchée d'une autre, pour qu'elle en soit une partie, & comme produite par la multiplication d'une moins grande qu'elle, pour qu'elle en soit multiple ; nous nommons une Quantité soit Partie, soit Multiple d'une autre, quelque soit le Multiplicateur qui lui fait donner ces noms, pourvu qu'il soit plus grand que l'unité.

SCHOLIE II.

294. Une Quantité contient les quantités qui étant multipliées lui deviennent égales, & ne contient qu'elles : mais différemment, selon qu'elle est plus ou moins grande par rapport à elles. Or pour exprimer facilement les différentes manières dont des quantités en contiennent d'autres, nous disons

295. Premièrement. Qu'une Quantité *A* contient plus de fois une quantité *B*, qu'une quantité *C* ne contient de fois une quantité *D*, lorsque le quotient de *A* divisé par *B*, est plus grand que celui de *C* divisé par *D* d ij

316 LES ELEMENS D'EUCLIDE,

D ; soit que ces quotiens soient des nombres entiers , soit qu'ils soient des nombres fractionnaires plus ou moins grands que l'unité , ou égaux l'un ou l'autre à l'unité.

296. Secondement. Qu'une Quantité *A* est autant de fois une quantité *B*, qu'une quantité *C* est de fois une quantité *D* , ou qu'une quantité *A* est multiple d'une autre *B*, de la même maniere qu'une quantité *C* l'est d'une autre *D* , ou enfin que deux quantités *A* & *C* sont équi-multiples de deux autres *B* & *D* , lorsque les quotiens de *A* divisé par *B* & de *C* divisé par *D* , sont égaux entr'eux , ou , ce qui revient au même , lorsque les nombres par lesquels il faudroit multiplier *B* & *D* pour les rendre égaux, l'un à *A* & l'autre à *C*, le sont ; soit que ces Quotiens ou ces Multiplicateurs soient des nombres entiers , soit qu'ils soient des nombres fractionnaires plus grands , aussi grands , ou moins grands que l'unité.

297. Troisièmement. Enfin qu'une Quantité *A* est même partie d'une autre *B*, qu'une quantité *C* l'est d'une autre *D* , lorsque *A* & *C* étant des parties de même nom de *B* & de *D* , les Numerateurs de ces parties sont égaux entr'eux , quoiqu'ils soient moins grands, aussi grands , ou plus grands que leurs Dénominateurs.

298. On nomme *Rapport* ou *Raison* d'une quantité à une autre, la manière d'être de l'une à l'égard de l'autre ; c'est-à-dire la manière dont celle que l'on compare, contient celle à laquelle on la compare.

La manière dont A contient B est le Rapport de A à B; & celle dont B contient A est celui de B à A.

299. On nomme la Quantité que l'on compare *Quantité antécédente*, ou *Terme antécédent*, & celle à laquelle on la compare, *Quantité conséquente*, ou *Terme conséquent*.

A est l'Antécédent du Rapport de A à B, & B en est le conséquent.

SCHOLIE.

300. Le Rapport d'une Quantité à une autre, est la manière dont l'une contient l'autre (n) : or la manière dont une quantité en N. 298. contient une autre, est exprimée par le quotient de cette quantité divisée par cette autre ; donc le quotient de la quantité que l'on compare, divisée par celle à laquelle on la compare, c'est-à-dire de l'antécédent d'un Rapport, divisé par son Conséquent, exprime ce Rapport.

301. On nomme *Exposant* d'un Rapport, la quantité qui exprime ce Rapport.

318 LES ELEMENS D'EUCLIDE;

Si *A* contient *B* par exemple 3 fois , l'Exposant du Rapport de *A* à *B* est 3 & 1, qui s'écrit ainsi $\frac{3}{1}$; & celui du Rapport de *B* à *A* est 1 & 3, qui s'écrit ainsi $\frac{1}{3}$.

IV.

302. On nomme *Proportion* l'égalité de plusieurs Rapports.

Si le Rapport de *A* à *B* est égal à celui de *C* à *D* , l'égalité de ces deux Rapports forme une *Proportion*.

V.

COROLLAIRE I.

303. Il suit des N. 294. & 298. qu'il ne peut y avoir de Rapport , qu'entre des Quantités qui étant multipliées , peuvent devenir égales les unes aux autres.

Démonst. Le rapport d'une quantité à une autre , est la manière dont l'une contient l'autre (n) : or une quantité ne contient que des quantités , qui étant multipliées peuvent lui devenir égales (n) ; donc il ne peut, &c.

VI.

COROLLAIRE II.

304. Il suit du N. 298 que des Rapports sont égaux entr'eux , ou qu'un Rapport est le même qu'un autre , lorsque les antécédens de ces Rapports, contiennent pareillement leurs conséquens.

Si *A* contient *B* de la même manière que *C* contient *D*, le rapport de *A* à *B* est le même que celui de *C* à *D*, où *A* a même rapport à *B*, que *C* à *D*.

Démonst. Le Rapport d'une Quantité à une autre, est la manière dont l'une contient l'autre (n); donc si des quantités en contiennent d'autres, chacune de la même manière, les rapports de chacune de ces quantités à chacune de ces autres, sont les mêmes. N. 2904

SCHOLIE.

305. Pour marquer que des Rapports $A : B ; C : D ; E : F ; \&c.$ sont égaux entr'eux, on les separe par quatre Points rangés en quarré, de cette manière, $A : B :: C : D :: E : F :: \&c.$ & pour l'exprimer on dit que *A* est à *B*, comme *C* est à *D*, comme *E* est à *F*, &c.

VII.

306. Les Quantités qui forment des Rapports égaux entr'eux, se nomment Quantités-proportionnelles.

Si $A : B :: C : D$, ces Quantités sont proportionnelles.

COROLLAIRE.

307. Il suit des N. 296. 304. & 306. Premièrement, que si des Quantités sont équi-multiples d'autres quantités, les
D d iij

320 LES ELEMENS D'EUCLIDE ;
mes & les autres seront proportionnelles.

Démonst. Si A & C sont équi-multiples
de B & de D , A contient autant de fois B
N. 296. que C contient de fois D (n) ; donc le rap-
port de A à B est le même que celui de C à
N. 304. D (n) ; & par conséquent A , B , C , & D
N. 306. sont proportionnelles (n) ; donc C. Q. F. D.

308. Secondement : que les Antécé-
dentes des Quantités proportionnelles , sont
équi-multiples des conséquentes.

Démonst. Si le Rapport de A à B est
égal à celui de C à D , A contient B de la
N. 304. même manière que C contient D (n) ; & par
conséquent A & C sont équi-multiples de B
N. 296. & de D (n) ; donc C. Q. F. D.

309. On dit que deux Rapport sont ré-
ciproques l'un à l'autre , lorsqu'ils sont tels ;
qu'en renversant l'ordre des termes de l'un
ou de l'autre , ils deviennent égaux entr'eux.

Si le Rapport de A à B & celui de C à
 D sont tels, que celui de A à B soit égal à
celui de D à C , ou que celui de B à A soit
égal à celui de C à D , le rapport de A à
 B est réciproque à celui de C à D , & celui-
ci de même au premier.

310. Les quatre Quantités qui forment
deux Rapports réciproques , se nomment
Quantités réciproquement proportionnelles.

Si le Rapport de A à B est égal à celui
de D à C , les Quantités A , B , C & D

sont réciproquement proportionnelles.

311. On nomme *Rapport d'égalité*, celui dont l'antécédent est égal au conséquent.

Le Rapport de A à A est un Rapport d'égalité

312. On nomme *Rapport d'inégalité* celui dont l'antécédent est inégal au conséquent.

Le Rapport de A à B est un Rapport d'inégalité.

313. Si l'antécédent d'un Rapport d'inégalité, est plus grand que son conséquent, on nomme ce Rapport, *Rapport-multiple*, ou d'*inegalité-majeure*

Si A est plus grand que B, le Rapport de A à B est un Rapport-multiple.

314. Si l'antécédent d'un Rapport d'inégalité, est moins grand que son conséquent, on nomme ce Rapport, *Rapport-sous-multiple*, ou d'*inegalité-mineure*.

Si A est moins grand que B, le Rapport de A à B est un Rapport-sous-multiple.

VIII.

315. On dit qu'un Rapport est *plus grand* qu'un autre, lorsque son antécédent contient plus de fois son conséquent, que l'antécédent de l'autre ne contient de fois le sien.

Si A contient plus de fois B, que C ne contient de fois D; on dit que le Rapport de

322 LES ELEMENS D'EUCLIDE ;
A à B est plus grand que celui de C à D, ou que A a un plus grand rapport à B, que C à D.

IX.

COROLLAIRE.

316. Il suit des N. 302. & 298. qu'une Proportion ne peut point avoir moins de trois termes.

Démonst. Il faut deux Rapports pour
 N. 302. former une Proportion (n), & deux Quan-
 N. 298. tités pour former un Rapport (n) : or on ne peut point former deux Rapports égaux entr'eux, avec moins de trois Quantités ; puisqu'après avoir formé un Rapport en comparant une Quantité à une autre , il faut nécessairement comparer l'une de ces deux Quantités à une troisième , pour en former un second égal au premier ; donc il faut au moins trois Quantités pour former une Proportion.

317. Le premier & le dernier terme d'une Proportion se nomment les termes extrêmes , & les autres les termes moyens.

318. Une Proportion dont chaque conséquent sert d'antécédent au terme qui le suit immédiatement, se nomme Proportion continue , ou Progression..

Si $A : B :: B : C :: C : D :: D : E$, &c. On dit que ces Quantités A, B, C ,

D, E, &c. sont en Proportion continue, ou en Progression, ou continuellement proportionnelles.

SCHOLIE.

319. Pour marquer que des Quantités *A, B, C, D, E, &c.* sont en Progression, on met au commencement de ces Quantités, une ligne entre quatre points de cette manière $\therefore A : B : C : D : E : &c.$

X.

320. Le Rapport du produit des antécédens de plusieurs Rapports, au produit des conséquens des mêmes Rapports, se nomme *Rapport-composé* de tous ces Rapports.

Le Rapport du produit ACE de tous les antécédens des Rapports de A à B, de C à D, de E à F, &c. au produit BDF de tous leurs conséquens, est un Rapport-composé des Rapports de A à B, de C à D, & de E à F.

321. Un Rapport composé de deux Rapports égaux entr'eux, se nomme *Rapport doublé* de l'un ou de l'autre de ces Rapports.

Si le Rapport de A à B est égal à celui de C à D, le Rapport du produit AC des antécédens de ces deux Rapports, au produit BD de leurs conséquens, est doublé

324. LES ELEMENS D'EUCLIDE.

de celui de A à B, ou de celui de C à D.

322. Un Rapport composé de trois Rapports égaux entr'eux, se nomme *Rapport-triplé* de l'un de ces trois Rapports. Un Rapport composé de quatre Rapports égaux entr'eux, se nomme *Rapport-quadruplé*, &c, & ainsi de suite.

X I.

323. On nomme *Quantités-Homologues*, celles qui ont le même nom.

Les antécédens & les antécédens sont Homologues ; les conséquens & les conséquens, le sont aussi.

X II.

324. *Echanger* deux Rapports, c'est prendre l'antécédent de l'un de ces Rapports, pour en faire le conséquent de l'autre ; & le conséquent de cet autre, pour en faire l'antécédent du premier ; & les deux Rapports formés par cet échange, & les deux premiers, se nomment respectivement *Rapports-alternes*.

Les Rapports de A à C & de B à D sont alternes à l'égard de ceux de A à B & de C à D.

X III.

325. *Renverser* un Rapport, c'est prendre l'antécédent de ce Rapport, pour en faire le conséquent d'un autre, & le conséquent pour en faire l'antécédent ; & le pre-

mier Rapport , & celui qui est formé par ce renversement , se nomment respectivement *Rapports-inverses*.

Le Rapport de B à A est inverse à l'égard de celui de A à B , & celui-ci de même à l'égard du premier.

XIV.

326. *Composer un Rapport , c'est ajouter le conséquent de ce Rapport à son antécédent , pour comparer leur somme à ce même conséquent.*

Le Rapport de la somme AB de A & de B , à B , est formé par composition , de celui de A à B.

XV.

327. *Diviser un Rapport , c'est retrancher le conséquent de ce Rapport de son antécédent , pour comparer l'excès de cet antécédent sur son conséquent , à ce même conséquent.*

Le Rapport de ce qui reste de A , après en avoir retranché B , à B , est formé par division , de celui de A à B.

XVI.

328. *Retourner un Rapport , c'est ajouter le conséquent de ce Rapport à son antécédent , pour comparer leur somme à ce même antécédent.*

Le Rapport de la somme AB de A & de B , à A , est formé par conversion , de celui de A à B.

326 LES ELEMEENS D'EUCLIDE , XVII.

329. Si plusieurs Quantités d'une part & autant d'une autre sont telles , que celles de la premiere part , étant comparées chacune à chacune , forment des Rapports égaux chacun à chacun de ceux que forment celles de la seconde part , comparées aussi chacune à chacune , l'égalité de ces Rapports se nomme *Proportion d'égalité*.

Si les Rapports $A : B : C : D : \&c.$ sont
 $E : F : G : H : \&c.$ sont
tels, que $A : B :: E : F$, $B : C :: F : G$,
 $C : D :: G : H$ &c. ces Quantités forment
une Proportion d'égalité.

XVIII.

330. Si les Rapports qui forment une Proportion d'égalité, sont rangés de maniere que le premier de la premiere part soit égal au premier de la seconde ; le second de la premiere, au second de la seconde ; le troisième &c. au troisième &c. & ainsi de suite, cette Proportion se nomme *Proportion d'égalité ordonnée, ou bien rangée*.

La Proportion d'égalité du N. 329. est
une Proportion d'égalité ordonnée.

XIX.

331. Si les Rapports qui forment une Proportion d'égalité, sont rangés de maniere que le premier de la premiere part soit égal au dernier de la seconde , le se-

cond de la première, au pénultième de la seconde ; le troisième, &c. à l'anté-pénultième &c. & ainsi de suite , jusqu'à ce qu'on vienne à comparer le dernier Rapport de la première part, au premier de la seconde ; cette Proportion se nomme *Proportion d'égalité troublée* , ou *mal-rangée*.

Si les Rapports $A : B : C : D : \&c.$ sont
 $E : F : G : H : \&c.$ sont
 tels, que $A : B :: G : H$, $B : C :: F : G$,
 $C : D :: E : F$ &c. ces Quantités forment
 une Proportion d'égalité troublée.

PROPOSITION I.

THEOREME.

332. Si des Quantités sont équi-multiples d'autant d'autres Quantités , chacune de chacune , la somme des antécédentes sera multiple de celle des conséquentes , de la même manière que l'une des antécédentes quelconque , l'est de sa conséquente.

SI AB & BC * sont équi-multiples de Fig. 1.
 DE & de EF , la somme ABC des
 antécédentes AB & BC , sera multiple de
 la somme DEF des conséquentes DE &

328 LES ELEMENS D'EUCLIDE ,
EF, de la même manière que l'une des anté-
 cedentes quelconque **AB**, l'est de sa consé-
 quente **DE**.

Const. Joignés **AB** & **BC** en une seule li-
 gne **ABC** : joignés de même **DE** & **EF** en
 une seule ligne **DEF**.

Dém. Puisque **AB** & **BC** sont équi-mul-
 tiples de **DE** & de **EF** (*h*) , **AB** est autant
 N. 296. de fois **DE** que **BC** est de fois **EF** (*n*) ;
 ainsi chaque partie de **ABC** est autant de
 fois chaque partie correspondante de **DEF**,
 que **AB** est de fois **DE** ; donc **ABC** est au-
 tant de fois **DEF** que **AB** est de fois **DE**
 N. 73. (*n*) ; & par conséquent **ABC** est multiple de
DEF, de la même manière que **AB** l'est de
DE ; donc C. Q. F. D.



PROPOSITION II.

THEOREME.

333. Si six Quantités sont telles , que la 1^{re}. & la 3^e. soient équi-multiples de la 2^e. & de la 4^e. , & que la 5^e. & la 6^e. le soient aussi ; la somme de la 1^{re}. & de la 5^e. sera multiple de la 2^e Quantité, de la même manière que la somme de la 3^e. & de la 6^e. , l'est de la 4^e.

SI AB & DE* sont équi-multiples de G Fig. 2.
& de H, & si BC & EF le sont aussi ,
la somme ABC de la première quantité AB
& de la cinquième BC , sera multiple
de G , de la même manière que la somme
DEF de la troisième quantité DE & de la
sixième EF, l'est de H.

Const. Joignons AB & BC en une seule ligne ABC : joignons de même DE & EF en une seule ligne DEF.

Démonst. AB & DE sont équi-multiples
de G & de H (*h*) ; ainsi AB est autant de
fois G que DE est de fois H (*n*) ; or BC est N. 296.
aussi autant de fois G que EF est de fois H ,
puisque BC & EF sont aussi équi-multi-
ples de G & de H (*h*) ; donc chaque partie
Ee

330 LES ELEMENS D'EUCLIDE ;

de ABC est autant de fois G , que chaque partie correspondante de DEF est de fois H ; donc ABC est autant de fois G , que DEF est de fois H (n) ; & par conséquent ABC est multiple de G, de la même manière que DEF l'est de H(n) ; donc C.Q.F.D.

PROPOSITION III.

THEOREME.

334. Si quatre Quantités sont telles que la 1^{re}. & la 3^e. soient équi-multiples de la 2^e & de la 4^e. , deux autres Quantités quelconques équi-multiples de la 1^{re} & de la 3^e. , le seront aussi de la 2^e & de la 4^e.

Fig. 3. **S**I A & C* sont équi-multiples de B & de D, & si E & F deux autres quantités quelconques, le sont de A & de C, E & F le feront aussi de B & de D.

Démonst. E & F sont équi-multiples de A & de C (h) ; ainsi E est autant de fois A que F est de fois C (n) : or A est autant de fois B que C est de fois D , puisque A & C sont aussi équi-multiples de B & de D (h) ; donc E est autant de fois B que F est de fois D ; & par conséquent E & F sont

PROPOSITION IV.

THEOREME.

335. Si quatre Quantités sont telles, que la 1^{re} & la 3^e soient équi-multiples de la 2^e & de la 4^e, deux Quantités quelconques équi-multiples de la 1^{re} & de la 3^e, le seront aussi de deux autres Quantités quelconques équi-multiples de la 2^e & de la 4^e.

SI A & C * sont équi-multiples de B & de D, & si E & F le sont de A & de C, & G & H de B & de D, E & F le seront aussi de G & de H. Fig. 4.

Démonst. E & F sont équi-multiples de A & de C (h), & A & C le sont de B & de D (h); ainsi E & F le sont aussi de B & de D (n); & par conséquent E est autant de fois B que F est de fois D (n): or B est même partie de G, que D l'est de H; puisque G & H étant équi-multiples de B & de D (h), G est autant de fois B que H est de fois D; donc E est autant de fois une certaine partie de G, que F est de fois une partie pareille N. 334
N. 296.

E e ij

332 LES ELEMENS D'EUCLIDE ;
 de H ; & par conséquent E & F sont équi-
 N. 296. multiples de G & de H(n); donc C. Q. F. D.

PROPOSITION V.

THEOREME.

336. Si deux Quantités sont divisées chacune en deux parties , de maniere que la premiere Quantite & l'une de ses parties, soient équi-multiples de la 2^e & de l'une de ses parties , la 1^e Quantite & son autre partie, le seront aussi de la 2^e & de son autre partie.

Fig. 5. SI ABC & AB * sont équi-multiples de DEF & de DE , ABC & BC le seront aussi de DEF & de EF.

Démonst. Si BC étoit plus ou moins de fois EF que AB n'est de fois DE , ABC ne seroit point autant de fois DEF, que AB est de fois DE (n) : or ABC est autant de fois DEF que AB est de fois DE (n) ; N. 332. N. 296. puisque ABC & AB sont équi-multiples de DEF & de DE (h) ; donc BC n'est ni plus ni moins de fois EF que AB est de fois DE, ou que ABC est de fois DEF ; & par conséquent ABC & BC sont équi-multiples de N. 296. DEF & de EF (n) ; donc C. Q. F. D.

PROPOSITION VI.

THEOREME.

337. Si deux Quantités équi-multiples de deux autres, sont divisées chacune en deux parties, de maniere que l'une des parties de la 1^{re}. & l'une de celles de la 2^e soient aussi équi-multiples de ces deux autres Quantités, l'autre partie de la 1^{re}. & l'autre partie de la 2^e, le seront aussi.

SI ABC & DEF * sont équi-multiples Fig. 6;
de G & de H, & si AB & DE le sont
aussi, BC & EF le seront aussi.

Démonst. ABC & DEF sont équi-multiples de G & de H (*h*) ainsi ABC est autant de fois G que DEF est de fois H (*n*): or N. 296;
AB est autant de fois G que DE est de fois H, puisque AB & DE sont aussi équi-multiples de G & de H (*h*); donc si l'on retranche AB de ABC, & DE de DEF, on retranchera autant de fois G de ABC, que de fois H de DEF; ainsi il restera autant de fois G dans BC, que de fois H dans EF; & par conséquent BC & EF sont équi-multiples de G & de H (*n*); donc C. Q. F. D. N. 296;

PROPOSITION VII.

THEOREME.

338. Si deux Quantités sont égales entr'elles : Premièrement , elles auront chacune le même rapport à une même quantité : Secondement , une même Quantité aura le même rapport à chacune d'elles.

Fig. 7. **S**I A^* est égal à B : Premièrement , le rapport de A à C fera le même que celui de B à C : Secondement , le rapport de C à A fera le même que celui de C à B .

DEMONSTRATION.

Premièrement. A est égal à B (h) ; ainsi A contient C , de la même manière que B le contient ; & par conséquent le rapport de A à C est le même que celui de B à C (n).
 N. 304. Secondement , A est égal à B (h) ; ainsi C contient A , de la même manière qu'il contient B ; & par conséquent le rapport de
 N. 304. C à A est le même que celui de C à B (n) ; donc C , Q. F. D.



PROPOSITION VIII.

THEOREME.

339. Si deux Quantités sont inégales entr'elles : Premièrement, la plus grande aura un plus grand rapport à une même Quantité, que la moins grande. Secondement, une même Quantité aura un plus grand rapport à la moins grande, qu'à la plus grande.

SI A * est plus grand que B : Première- Fig 8.
remment, le rapport de A à C sera plus grand que celui de B à C. Secondement, le rapport de C à B sera plus grand que celui de C à A.

DEMONSTRATION.

Premièrement. A est plus grand que B (h) ; ainsi A contient plus de fois C que B ne le contient de fois ; & par conséquent le rapport de A à C, est plus grand que celui de B à C (n). Secondement. A est plus grand N. 315.
que B (h) ; ainsi C contient plus de fois B qu'il ne contient de fois A ; & par conséquent le rapport de C à B est plus grand que celui de C à A (n) ; donc C. Q. F. D. N. 315.

PROPOSITION IX.

THEOREME.

c. Premièrement. Si deux Quantités ont chacune le même rapport à une même Quantité, elles seront égales entr'elles. Secondement. Si une même Quantité a le même rapport à chacune de ces deux Quantités, elles le seront aussi.

Fig. 7. Premièrement. **S**I le rapport de A à C* est le même que celui de B à C, A fera égal à B. Secondement. Si le rapport de C à A est le même que celui de C à B, A fera aussi égal à B.

DEMONSTRATION.

Premièrement. Si A & B ne contenoient point C chacun de la même maniere, le rapport de A à C ne feroit point le même que celui de B à C (n) : or le rapport de A à C est le même que celui de B à C (h); donc A & B contiennent C chacun de la même maniere; & par conséquent A est égal à B. Secondement. Si C ne contenoit point A & B chacun de la même maniere, le rapport de C à A ne feroit point le même

me que celui de C à B (n) : or le rapport de C à A est le même que celui de C à B (h) ; donc C contient A & B chacun de la même manière ; & par conséquent A est égal à B ; donc C. Q. F. D.

PROPOSITION X.

THEOREME.

341. *Premierement. Si de deux Quantités, l'une a un plus grand rapport que l'autre à une même Quantité, celle qui a le plus grand rapport, sera la plus grande. Secondement. Si une même Quantité a un plus grand rapport à l'une de deux Quantités qu'à l'autre, celle à laquelle elle a le plus grand rapport, sera la moins grande.*

Premierement. **S** I le rapport de A à C * Fig. 84 est plus grand que celui de B à C, A sera plus grand que B. *Secondement.* Si le rapport de C à B est plus grand que celui de C à A, B sera moins grand que A.

DEMONSTRATION.

Premierement. Si A n'étoit pas plus grand
F f

338 LES ELEMENS D'EUCLIDE ,

que B, A ne contiendrait pas C plus de fois que B ne le contient de fois ; & par conséquent le rapport de A à C ne serait

N. 315. pas plus grand que celui de B à C (n) : or le rapport de A à C est plus grand que celui de B à C (h) ; donc A contient C plus de fois que B ne le contient de fois ; & par conséquent A est plus grand que B. *Secondement.* Si B n'étoit pas moins grand que A, C ne contiendrait pas plus de fois B qu'il ne contient de fois A ; & par conséquent le rapport de C à B ne serait pas plus grand que celui de C à A (n) : or le rapport de C à B est plus grand que celui de C à A (h) ; donc C contient plus de fois B qu'il ne contient de fois A ; & par conséquent B est moins grand que A ; donc C. Q. F. D.

PROPOSITION XI,

THEOREME.

342. *Les Rapports égaux chacun à un même Rapport, le sont aussi entr'eux.*

Fig. 9. **S**I le Rapport de A à B* est le même que celui de E à F, , & si celui de C à D est aussi le même que celui de E à F, le rapport de A à B fera le même que celui de C à D.

Démonst. Si la maniere dont A contient B n'étoit point la même que celle dont E contient F, le rapport de A à B ne seroit point le même que celui de E à F (n): or N. 304.
le rapport de A à B est le même que celui de E à F (h); donc la maniere dont A contient B, est la même que celle dont E contient F. Par la même raison, la maniere dont C contient D est aussi la même que celle dont E contient F; donc la maniere dont A contient B est la même que celle dont C contient D; & par conséquent le rapport de A à B est le même que celui de C à D (n); donc C. Q. F. D. N. 304.

PROPOSITION XII.

THEOREME.

343. *La somme des Antécédentes des Quantités proportionnelles est à celle des Conséquentes, comme l'une des Antécédentes quelconque est à sa conséquence.*

SI $A^* : B :: C : D :: E : F$, &c. la Fig. 9,
somme des antécédentes A, C & E,
sera à celle des conséquentes B, D & F
comme A est à B, ou comme C est à D,
ou &c.

Ffij

340 LES ELEMENS D'EUCLIDE ,

- Démonst.* Puisque les Quantités A , B , C &c. sont proportionnelles (h) , les antécédentes sont équi-multiples des consé-
- N. 308. quentes (n) ; ainsi la somme des antécédentes est multiple de celle des conséquents de la même manière que l'une des antécédentes quelconque l'est de sa conséquente
- N. 332. (n) ; & par conséquent la somme des antécédentes est à celle des conséquents , comme l'une des antécédentes quelconque est à
- N. 307. sa conséquente (n) ; donc C. Q. F. D.

PROPOSITION XIII.

THEOREME,

344. Si de deux Rapports égaux entr'eux , l'un est plus grand qu'un troisième , l'autre le sera aussi.

Fig. 9. **S**I le Rapport de A à B * est le même que celui de C à D , & si celui de C à D est plus grand que celui de E à F , celui de A à B le sera aussi.

Démonst. Le Rapport de C à D est plus grand que celui de E à F (h) ; ainsi C contient plus de fois D, que E ne contient de

N. 315. fois F (n) : or A contient autant de fois B

N. 304. que C contient de fois D(n);puisque le rap-

LIVRE CINQUIÈME. 341

port de A à B est le même que celui de C à D (h) ; donc A contient plus de fois B que E ne contient de fois F ; & par conséquent le rapport de A à B est plus grand que celui de E à F (n) ; donc C. Q. F. D. N. 3156

PROPOSITION XIV.

THEOREME.

345. Si le 1^{er} terme d'une Proportion est moins grand, aussi grand, ou plus grand que le 3^e, le second sera aussi moins grand, aussi grand, ou plus grand que le 4^e.

SI $A:B::C:D$, Premièrement. Si A^* est moins grand que C, B sera Fig. 10. moins grand que D. Secondement. Si A^* est égal à C, B sera égal à D. Troisième- Fig. 11. ment. Si A^* est plus grand que C, B sera Fig. 12. plus grand que D.

DEMONSTRATION.

Premièrement. A^* est moins grand que Fig. 10. C (h) ; ainsi le rapport de C à B est plus grand que celui de A^* à B (n) : or le rap- N. 339. port de A^* à B est le même que celui de C à D (h) ; donc le rapport de C à B est plus

342 LES ELEMENS D'EUCLIDE ;

N. 344. grand que celui de C à D (n) ; & par consé-

N. 341. quent B est moins grand que D (n).

Fig. 11. *Secondement.* A * est égal à C (h) ; ain-

N. 338. si le rapport de C à B est le même que ce-

N. 342. lui de A à B (n) : or le rapport de A à B

N. 340. est le même que celui de C à D (h) ; donc

Fig. 12. *Troisièmement.* A * est plus grand que

N. 339. C (h) ; ainsi le rapport de C à B est moins

N. 344. grand que celui de A à B (n) : or le rap-

N. 341. port de A à B est le même que celui de C

à D (h) ; donc le rapport de C à B est

moins grand que celui de C à D (n) ; &

par conséquent B est plus grand que D (n) ;

donc C. Q. F. D.

U S A G E.

346. On connoît par cette Proposition, si les termes d'une Proportion sont rangés dans l'ordre qu'ils doivent l'être, & par conséquent si une Regle de Trois est directe ou inverse.



PROPOSITION XV.

THEOREME.

347. *Les Quantités qui sont équi-multiples d'autres Quantités, ont entr'elles le même rapport que ces dernières.*

S I A & B* sont équi-multiples de C & Fig. 13.
de D, le rapport de A à B sera le même 14 & 15.
me que celui de C & de D.

Démonst. A & B sont équi-multiples de C & de D (h), ainsi A & B sont les produits, l'un de C & l'autre de D multipliés chacun par le même nombre entier, ou par le même nombre fractionnaire dont le Numérateur est l'unité, ou par le même nombre fractionnaire dont le Numérateur est plus grand que l'unité (n) : or, N. 296.
Premiement, Si A & B* sont les produits, l'un Fig. 11.
de C & l'autre de D multipliés chacun par un même nombre entier. Si l'on divise A & B chacun en autant de parties égales entr'elles, qu'il y a d'unités dans ce nombre entier, chaque partie de A sera égale à C, & chaque partie de B le sera à D; ainsi le rapport de C à D est égal à celui de l'une quelconque de ces parties de A, à l'une de celle

344 LES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE,

de B : or le rapport de A à B l'est aussi ; car puisque les parties de A sont égales entr'elles (c), & que celles de B le sont aussi (c), les parties de A sont proportionnelles à celles de B ; & par conséquent le rapport de la somme A des antécédentes, à la somme B des conséquentes, est égal à celui de l'une quelconque de ces parties de A, antécédente, à l'une de celles de B, conséquente (n) ; donc le rapport de A à B, & celui de C à D sont égaux chacun à un même rapport ; & par conséquent le rapport de A à B est le même que celui de C à D (n).

N. 343.

N. 342.

Fig. 14.

Secondement. Si A & B * sont les produits, l'un de C & l'autre de D multipliés chacun par le même nombre fractionnaire ; dont le Numérateur est l'unité. Si l'on divise C & D chacun en autant de parties égales entr'elles qu'il y a d'unités dans le Dénominateur de ce nombre fractionnaire ; chaque partie de C sera égale à A, & chaque partie de D le sera à B ; ainsi le rapport de A à B est égal à celui de l'une quelconque de ces parties de C, à l'une de celles de D : or le rapport de C à D l'est aussi ; car puisque les parties de C sont égales entr'elles (c), & que celles de D le sont aussi (c), les parties de C sont proportionnelles à celles de D ; & par conséquent le rapport de la somme C des antécédentes, à la som-

me D des conséquentes , est égal à celui de l'une quelconque de ces parties de C , antécédente , à l'une de celles de D , conséquente (n) ; donc le rapport de A à B & celui de C à D , sont égaux chacun à un même rapport ; & par conséquent le rapport de A à B est le même que celui de C à D (n). N. 3432

Troisièmement. Si A & B* sont les produits , l'un de C & l'autre de D multipliés chacun par le même nombre fractionnaire , dont le Numérateur est plus grand que l'unité. Si l'on divise A & B chacun en autant de parties égales entr'elles , qu'il y a d'unités dans le Numérateur de ce nombre fractionnaire , & C & D chacun en autant de parties égales entr'elles , qu'il y a d'unités dans le Dénominateur de ce même nombre ; chaque partie de A fera égale à chaque partie de C , & chaque partie de B le sera à chaque partie de D ; ainsi le rapport de l'une quelconque de ces parties de A à l'une de celles de B , est égal à celui de l'une quelconque de ces parties de C , à l'une de celles de D : or le rapport de C à D l'est aussi , comme il a été démontré dans la seconde partie ; donc le rapport de C à D , & celui de l'une quelconque de ces parties de A à l'une de celles de B , sont égaux chacun à un même rapport ; & par conséquent ils le Fig. 154

346 LES ELEMENS D'EUCLIDE ;

- N. 342. sont entr'eux (n) : or le rapport de A à B est aussi égal à celui de l'une quelconque de ces parties de A , à l'une de celles de B , cemme il a été démontré dans la premiere partie ; donc le rapport de C à D & celui de A à B , sont égaux chacun à un même rapport ; & par conséquent le rapport de A à B est le même que celui de C à D (n) ; donc C. Q. F. D.

COROLLAIRE.

348. Il suit de cette Proposition , que dans une Progression , Premièrement , le rapport du 1^{er} terme au 3^e , est double de celui du 1^{er} au 2^e , ou de celui du 2^e au 3^e : Secondement , que le rapport du 1^{er} terme au 4^e , est triplé de celui du 1^{er} au 2^e , ou de celui &c. & ainsi de suite.

Si $\therefore A : B : C : D : E : \&c.$ Premièrement : le rapport de A à C , sera doublé de celui de A à B : Secondement : celui de A à D , sera triplé de celui de A à B : &c.

DEMONSTRATION.

- Premierem. Les rapports de A à B & de B à C sont égaux entr'eux (h) ; ainsi le rapport du produit AB de A & B , au produit BC de B & C , est doublé de celui de A à B (n) : or le rapport de A à C est égal à celui du produit AB , au produit BC (n) ; car AB & BC sont équi-multiples de A & de C ;

LIVRE CINQUIÈME. 347

puisque'ils sont les produits de A & de C, multipliés chacun par B ; donc le rapport de A à C est doublé de celui de A à B.

Secondement. Les rapports de A à B, de B à C & de C à D sont égaux entr'eux (h) ; ainsi le rapport du produit ABC de A, B & C, au produit BCD de B, C & D, est triplé de celui de A à B (n) : or le N. 322; rapport de A à D est égal à celui du produit ABC, au produit BCD (n) ; car ABC & N. 347; BCD, sont équi-multiples de A & de D ; puisque'ils sont les produits de A & de D, multipliés chacun par le produit BC ; donc le rapport de A à D, est triplé de celui de celui de A à B ; donc C. Q. F. D.

PROPOSITION XVI.

THEOREME.

349. *Quatre Quantités de même genre & proportionnelles, sont aussi proportionnelles étant échangées.*

SI $A : B :: C : D^*$, le rapport de A à Fig. 16; C, sera le même que celui de B à D.

Démonst. Le rapport de A à B est le même que celui de C à D (h) ; ainsi A & C sont équi-multiples de B & de D (n) : or N. 308; les quantités qui sont équi-multiples d'au-

348 LES ELEMENS D'EUCLIDE,

N. 347. tres, ont entr'elles le même rapport que ces autres (n) ; donc le rapport de A à C est le même que celui de B à D ; donc C. Q. F. D.

SCHOLIE.

350. Pour échanger des rapports, il faut que les quantités qui les forment soient de même genre ; puisque si A étant une ligne, C étoit par exemple une surface, il n'y auroit aucun rapport de A à C (n).

COROLLAIRE.

351. Il suit de cette Proposition, que quatre quantités proportionnelles, le sont aussi étant renversées.

Fig. 16. Si $A : B :: C : D$ *, le rapport de B à A, sera le même que celui de D à C.

Démonst. Le rapport de A à B est le même que celui de C à D (h) ; ainsi en échangeant, $A : C :: B : D$ (n), ou $B : D :: A : C$; or en échangeant $B : A :: D : C$ (n) donc C. Q. F. D.



PROPOSITION XVII.

THEOREME.

352. *Quatre Quantités proportionnelles ,
le sont aussi étant divisées.*

SI $ABC : BC :: DEF : EF$ *, le rap- Fig. 17.
port de AB à BC, sera le même que ce-
lui de DE à EF.

Démonst. Si l'on retranche BC de ABC ;
le reste AB contiendra BC une fois de
moins que ABC ne le contient de fois ; &
si l'on retranche EF de DEF, le reste DE
contiendra EF une fois de moins que DEF
ne le contient de fois : or ABC contient
autant de fois BC que DEF contient de
fois EF (n) ; puisque $ABC : BC :: DEF :$ N. 304
 EF (h) ; donc AB contient autant de fois
BC, que DE contient de fois EF ; & par
conséquent le rapport de AB à BC, est le
même que celui de DE à EF (n) ; donc N. 305
C. Q. F. D.



PROPOSITION XVIII

THEOREME.

353. *Quatre Quantités proportionnelles , le sont aussi étant composées.*

Fig. 17. **S** I $AB : BC :: DE : EF$ *, le rapport de ABC à BC , fera le même que celui de DEF à EF.

Démonst. Si l'on ajoute BC à AB , la somme ABC contiendra BC une fois de plus que AB ne le contient de fois ; & si l'on ajoute EF à DE , la somme DEF contiendra EF une fois de plus que DE ne le contient de fois ; or AB contient autant de fois BC que DE contient de fois EF

304. (n) ; puisque $AB : BC :: DE : EF$ (h) ; donc ABC contient autant de fois BC, que DEF contient de fois EF ; & par conséquent le rapport de ABC à BC est le même que celui de DEF à EF (n) ; donc C. Q. F. D.

COROLLAIRE.

354. Il suit de cette Proposition , que *quatre Quantités proportionnelles , le sont aussi étant retournées.*

Si $AB : BC :: DE : EF$ *, le rapport Fig. 17^e
de ABC à AB , sera le même que celui de
 DEF à DE .

Démonst. Le rapport de AB à BC est
le même que celui de DE à EF (h); ainsi en
renversant, $BC : AB :: EF : DE$ (n); or N. 351^a
en composant, ABC somme de AB & de
 $BC : AB :: DEF$ somme de DE & de EF :
 DE (n); donc C. Q. F. D. N. 353^b

PROPOSITION XIX.

THEOREME.

355. La différence des antécédentes de
quatre Quantités proportionnelles, est à
celle des conséquentes, comme l'une des
antécédentes quelconque est à sa consé-
quente.

SI $ABC : DEF :: BC : EF$ *, le rap- Fig. 17^e
port de AB à DE sera le même que ce-
lui de ABC à DEF , ou que celui de BC
à EF .

Démonst. Le rapport de ABC à DEF
est le même que celui de BC à EF (h);
ainsi en échangeant, $ABC : BC :: DEF :$
 DE (n); en divisant, $AB : BC :: DE :$
 EF (n); & en échangeant $AB : DE :: BC :$ N. 349.
N. 352^a

- N. 349. $EF (n)$; or $BC : EF :: ABC : DEF (h)$;
 N. 342. donc $AB : DE :: ABC : DEF (n)$; donc
 C. Q. F. D.

PROPOSITION XX.

THEOREME.

356. Si le premier terme du 1^{er} rang d'une Proportion d'égalité ordonnée, est moins grand, aussi grand, ou plus grand que le dernier, le premier terme du 2^e rang sera aussi moins grand, aussi grand, ou plus grand que le dernier.

Fig. 18. **S**I les quantités A, B, C & D, E, F * forment une Proportion d'égalité ordonnée : Premièrement, si A est moins grand que C, D sera moins grand que F : Secondement. Si A est égal à C, D sera égal à F : Troisièmement, si A est plus grand que C, D sera plus grand que F.

DEMONSTRATION.

Premièrement. A est moins grand que C (h); ainsi le rapport de C à B est plus grand que celui de A à B (n): or le rapport de A à B est le même que celui de D à E (h); donc le rapport de C à B est plus grand que

LIVRE CINQUIÈME. 353

que celui de D à E (n) : mais le rapport de N. 344.
F à E est égal à celui de C à B ; puisque B :
C :: E : F (h), & qu'en renversant C : B ::
F : E (n) ; donc le rapport de F à E , est plus N. 351.
grand que celui de D à E (n) ; & par con- N. 344.
séquent D est moins grand que F (n). N. 341.

Secondement. A est égal à C (h) ; ainsi
le rapport de C à B est le même que celui
de A à B (n) : or le rapport de A à B est le N. 338.
même que celui de D à E (h) ; donc le
rapport de C à B est le même que celui de
de D à E (n) : mais le rapport de F à E est N. 342.
égal à celui de C à B ; puisque B : C :: E :
F (h) , & qu'en renversant C : B :: F : E
(n) ; donc le rapport de F à E est le même N. 351.
que celui de D à E (n) ; & par conséquent N. 342.
D est égal à F (n). N. 340.

Troisièmement. A est plus grand que C
(h) ; ainsi le rapport de C à B est moins
grand que celui de A à B (n) : or le rap- N. 339.
port de A à B est le même que celui de D à
E (h) ; donc le rapport de C à B est moins
grand que celui de D à E (n) : mais le rap- N. 344.
port de F à E est égal à celui de C à B ;
puisque B : C :: E : F (h) , & qu'en ren-
versant C : B :: F : E (n) ; donc le rap- N. 351.
port de F à E est moins grand que celui de
D à E (n) ; & par conséquent D est plus N. 344.
grand que F (n) ; donc C. Q. F. D. N. 341.

PROPOSITION XXI

THEOREME.

357. Si le premier terme du 1^{er} rang d'une Proportion d'égalité troublée, est moins grand, aussi grand, ou plus grand que le dernier, le premier terme du 2^e rang sera aussi moins grand, aussi grand, ou plus grand que le dernier.

Fig. 19. **S**I les quantités A, B, C, & D, E, F * forment une Proportion d'égalité troublée : *Premierement.* Si A est moins grand que C, D sera moins grand que F : *Secondement.* Si A est égal à C, D sera égal à F : *Troisièmement.* Si A est plus grand que C, D sera plus grand que F.

DEMONSTRATION.

Premierement. A est moins grand que C (h) ; ainsi le rapport de C à B est plus grand
 N. 339. que celui de A à B (n) : or le rapport de A à B est le même que celui de E à F (h) ; donc le rapport de C à B est plus grand que
 N. 344. celui de E à F (n) : mais le rapport de E à D est égal à celui de C à B ; puisque B : C :: D : E (h), & qu'en renversant C : B ::

$E : D (n)$; donc le rapport de E à D est ^{N. 351.}
plus grand que celui de E à $F (n)$; & par ^{N. 344.}
conséquent D est moins grand que $F (n)$. ^{N. 341.}

Secondement. On démontre par un semblable raisonnement, que si A est égal à C , D est égal à F , & que si A est plus grand que C , D est plus grand que F ; donc C. Q. F. D.

PROPOSITION XXII.

THEOREME.

358. *Le premier & le dernier terme du 1^{er} rang d'une Proportion d'égalité ordonnée, & le premier & le dernier terme du 2^e rang, sont proportionnels.*

S I les quantités A, B, C & D, E, F * ^{Fig. 18.} forment une Proportion d'égalité ordonnée, le rapport de A à C , sera le même que celui de D à F .

Dém. Le rapport de A à B , est le même que celui de D à $E (h)$; ainsi A est autant de fois B que D est de fois $E (n)$: or ^{N. 304.}
 B est autant de fois C que E est de fois $F (n)$; puisque $B : C :: E : F (h)$; donc A ^{N. 304.}
est autant de fois C que D est de fois F ; & par conséquent le rapport de A à C est le

356 LES ÉLEMENS D'EUCLIDE ;
N. 304. même que celui de D à F (n) ; donc C. Q. D.

SCHOLIE.

359. Cette Proposition est la même que la troisième de ce Livre , exceptés que le nombre des termes n'y est point déterminé à six : Euclide ne la repete cependant ici, que parcequ'il n'a pas donné à équi-multiples, une signification aussi générale que celle que nous lui donnons.

PROPOSITION XXIII.

THEOREME.

360. Le premier & le dernier terme du 1^{er} rang d'une Proportion d'égalité troublée, & le premier & le dernier terme du 2^e rang, sont proportionnels.

Fig. 19. **S**I les quantités A, B, C & D, E, F* forment une proportion d'égalité troublée ; le rapport de A à C, sera le même que celui de D à F.

Démonst. Si l'on multiplie E & F chacun par D, & D & E chacun par F : Premièrement, le rapport du produit ED au produit FD, sera le même que celui de E

à F (n) : or celui de E à F est le même que N. 347i
 celui de A à B (h) ; donc celui de A à B
 sera le même que celui du produit ED au
 produit FD (n) ; & par conséquent en échan- N. 347i
 geant, le rapport de A au produit ED, sera
 égal à celui de B au produit FD (n). Seconde- N. 349i
 ment, le rapport du produit FD au pro-
 duit FE, sera le même que celui de D à E
 (n) : or, celui de D à E est le même que celui N. 347i
 de B à C (h) ; donc celui de B à C sera le
 même que celui du produit FD au produit
 FE (n) ; & par conséquent en renversant, N. 342i
 le rapport de C à B, sera le même que celui
 du produit FE au produit FD (n) ; & en N. 357i
 échangeant, celui de C au produit FE, se-
 ra égal à celui de B au produit FD (n). Le N. 349i
 rapport de A au produit ED, & celui de
 C au produit FE, seront donc égaux cha-
 cun à celui de B au produit FD, ils le se-
 ront donc entr'eux (n) ; & par conséquent en N. 342i
 échangeant, le rapport de A à C, sera le mê-
 me que celui du produit ED au produit FE :
 or celui du produit ED au produit FE, est
 le même que celui de D à F (n) ; donc celui N. 347i
 de A à C, est le même que celui de D à F N. 342i
 (n) ; donc C. Q. F. D.



PROPOSITION XXIV.

THEOREME.

361. Si six Quantités sont telles, que les quatre premières soient proportionnelles, & que la 5^e, la 2^e, la 6^e & la 4^e le soient aussi, la somme de la 1^{re} & de la 5^e quantité sera à la 2^e, comme la somme de la 3^e & de la 6^e est à la 4^e.

Fig. 2. **S**I $AB : G :: DE : H^*$, & si $BC, G :: EF : H$, le rapport de ABC somme de la 1^{re} & de la 5^e quantité, à G , sera le même que celui de DEF , somme de la 3^e & de la 6^e, à H .

Démonst. Le rapport de AB à G est le même que celui de DE à H (h), & celui de BC à G est aussi le même que celui de EF à H (h); ainsi AB & DE , 1^{re} & 3^e quantités, sont équi-multiples de G & de H 2^e N. 308. & 4^e (n), & BC & EF 5^e & 6^e le sont aussi N. 308. (n); donc la somme ABC de la 1^{re} & de la 5^e quantité, est multiple de la 2^e G , de la même manière que la somme DEF de la 3^e N. 333. & de la 6^e, l'est de la 4^e H (n); & par conséquent le rapport de ABC à G est le même N. 307. que celui de DEF à H (n); donc C.Q.F.D.

PROPOSITION XXV.

THEOREME.

362. *La somme de la plus grande & de la moins grande de quatre Quantités proportionnelles , est plus grande que celle des deux autres.*

SI $ABC : DEF :: ab : de^*$, & si ABC Fig. 20;
est la plus grande, & *de* la moins grande de ces quatre quantités , la somme de ABC & de *de* sera plus grande, que celle de DEF & de *ab*.

Const. Divisés ABC en deux parties ,
telles que l'une AB soit égale à ab (n) : di- N. 79;
visés aussi DEF en deux parties , telles que
l'une DE soit égale à *de* (n). N. 79;

Demonst. Puisque AB est égal à ab (c),
& que DE l'est à *de* (c), la somme de AB
& de *de* , est égale à celle de DE & de ab ;
ainsi si BC est plus grand que EF , en ajoutant BC à la somme de AB & de *de* , & EF à celle de DE & de ab , ABC & *de* , somme de la plus grande & de la moins grande quantité , sera plus grande que DEF & ab , somme des deux autres. Or BC est plus grand que EF ; car puisque les quantités

360 LES ELEMENTS D'EUCLIDE,

ABC, DEF, *ab* & *de* sont proportionnelles (*h*), & que BC est la différence des antécédentes (*c*), & EF celle des conséquentes (*c*), le rapport de ABC à DEF, est

N. 355. le même que celui de BC à EF (*n*), & en

N. 349. échangeant, $ABC : BC :: DEF : EF$ (*n*);

donc puisque ABC est plus grand que DEF

N. 345. (*h*), BC est plus grand que EF (*n*); & par

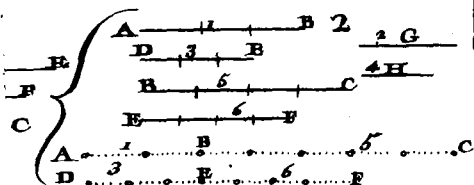
conséquent ABC & *de*, somme de la plus

grande & de la moins grande quantité, est

plus grande que DEF & *ab*, somme des deux

autres; donc C. Q. F. D.

Fin du cinquième Livre.



F

C

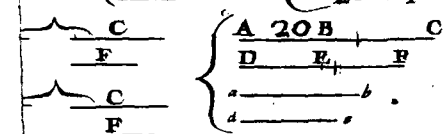
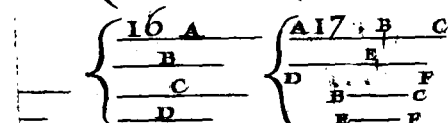
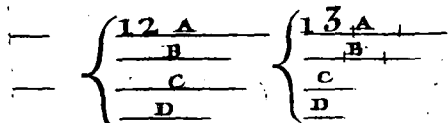
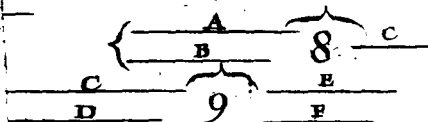
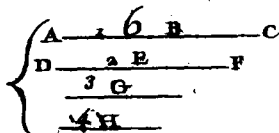
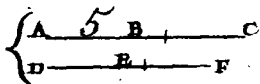
D

A

C 1

B 3

D 4







LES ELEMENS D'EUCLIDE.

LIVRE SIXIEME.

DANS le Livre précédent on a exposé la Doctrine des Rapports en général; dans celui-ci on applique cette Doctrine aux Lignes-droites, aux Surfaces-planes, & aux Angles. On le commence par y démontrer quels sont les Rapports des Surfaces des Parallelogrammes dont les hauteurs sont égales entr'elles, & l'on en conclut ceux des surfaces des Triangles qui sont dans le même cas. On examine ensuite quelles conditions fussent pour rendre des Triangles semblables entr'eux, & après avoir déduit des principes établis dans ces premières Propositions, plusieurs Problèmes qui concernent les Lignes proportionnelles, on démontre les propriétés de ces Lignes. On détermine ensuite les Rapports que les figures semblables ont entr'elles; on enseigne la ma-

Hh

362 LES ELEMENS D'EUCLIDE ,
*niere de décrire une figure semblable à une
 autre , & l'on finit enfin ce Livre par dé-
 montrer quels sont aussi les Rapports que les
 angles ont entr'eux.*

DEFINITIONS.

I.

363. **O**N nomme Figures semblables
 entr'elles , celles dont les an-
 gles sont égaux , chacun à chacun ,
 & dont les côtés qui forment ces angles
 égaux , sont proportionnels.

Fig. 1. Les figures ABC & DEF * sont sembla-
 bles entr'elles , si l'angle A est égal à l'an-
 gle D , l'angle B à l'angle E , l'angle C à
 l'angle F , & si $AB : AC :: DE : DF$;
 $AB : BC :: DE : EF$; & $AC : CB ::$
 $DF : FE$.

II.

364. On dit que deux figures sont réci-
 proques , lorsque les dimensions de l'une
 sont les extrêmes d'une Proportion , dont
 les dimensions de l'autre sont les moyens.

Fig. 2. Les figures $ABCD$ & $EFGH$ * sont
 réciproques , si $AB : EF :: EH : AD$.

III.

365. On dit qu'une ligne droite est di-
 visée en moyenne & extrême raison , lors

qu'elle est divisée en deux parties telles ,
que toute cette ligne est à la plus grande par-
tie , comme cette plus grande partie est à la
moins grande.

La ligne AB * est divisée au point C en Fig. 3.
moyenne & extrême raison , si $AB : AC ::$
 $AC : CB$.

IV.

366. La hauteur d'une figure, est la per-
pendiculaire abaissée du sommet de cette fi-
gure , au côté qui lui est opposé , prolongé
s'il est nécessaire.

La hauteur de la figure $ABCD$ * est la Fig. 4.
perpendiculaire FE abaissée du sommet
 D de cette figure , au côté AB qui lui est
opposé.



PROPOSITION I.

THEOREME,

367. *Les Rapports des surfaces des Parallelogrammes dont les hauteurs sont égales entr'elles , sont les mêmes que ceux des bases de ces Parallelogrammes.*

Fig. 5. **S**I les hauteurs des Parallelogrammes ABCD & EFGH * sont égales entr'elles , le rapport de la surface du parallelogramme ABCD à celle du parallelogramme EFGH , sera égal à celui de la base AB à la base EF.

Const. Divisés la base AB en autant de parties AI , IL , &c. égales entr'elles , que le premier terme de l'exposant du rapport de cette base AB à la base EF, contient d'unités : divisés aussi la base EF en autant de parties EP , PR , &c. égales entr'elles , que le second terme de ce même exposant contient d'unités : par chaque point de division I , L , &c. tirés des paralleles IK , LM , &c. au côté AD (n) ; & par chaque point de division P , R , &c. tirés des paralleles PQ , RS , &c. au côté EH (n).

Démonst. Les parallelogrammes ABCD & EFGH sont divisés, l'un en autant de parallelogrammes AIKD, ILMK, &c. que la base AB est divisée de parties AI, IL, &c. (c), & l'autre en autant de parallelogrammes EPQH, PRSQ, &c. que la base EF est divisée de parties EP, PR, &c. (c); ces parties AI, IL, &c. EP, PR, &c. sont égales entr'elles (c); & ces parallelogrammes AIKD, ILMK, &c. EPQH, PRSQ, &c. sont égaux entr'eux (n), puisqu'ils ont chacun pour base, une de ces parties égales (c), & que leurs hauteurs étant égales entr'elles (h), ils pourroient être renfermés entre les mêmes parallèles. Ainsi le parallelogramme AIKD est une fois le parallelogramme EPQH, de même que la partie AI est une fois la partie EP; & par conséquent le parallelogramme AIKD & la partie AI, sont équi-multiples du parallelogramme EPQH & de la partie EP (n): le parallelogramme ABCD est autant de fois le parallelogramme AIKD, que la base AB est de fois la partie AI; & par conséquent le parallelogramme ABCD & la base AB, sont équi-multiples du parallelogramme AIKD & de la partie AI (n): enfin le parallelogramme EFGH est autant de fois le parallelogramme EPQH, que la base EF est de fois la

N. 148.

N. 296.

N. 296.

366 LES ELEMENTS D'EUCLIDE ;

partie EP ; & par conséquent le parallélogramme EFGH & la base EF , sont équi-multiples du parallélogramme EPQH & de

- N. 296. la partie EP (n). Or puisque le parallélogramme AIKD & la partie AI, sont équi-multiples du parallélogramme EPQH & de la partie EP (d) ; que le parallélogramme ABCD & la base AB, le sont du parallélogramme AIKD & de la base AI (d) ; & qu'enfin le parallélogramme EFGH & la base EF, le sont du parallélogramme EPQH & de la partie EP (d) , le parallélogramme ABCD & la base AB sont équi-multiples du parallélogramme EFGH & de la base EF
- N. 335. (n) ; & par conséquent , le parallélogramme ABCD est au parallélogramme EFGH ,
- N. 307. comme la base AB est à la base EF (n) ; donc C. Q. F. D.

COROLLAIRE I.

368. Il suit de ce Théorème , que les rapports des surfaces des triangles dont les hauteurs sont égales entr'elles , sont les mêmes que ceux des bases de ces triangles.

- Fig. 6. Si les hauteurs des triangles ABC & DEF * sont égales entr'elles , le rapport de la surface du triangle ABC à celle du triangle DEF , sera égal à celui de la base AC à la base DF.

Const. Par le point A , tirés la parallèle AG au côté CB , & par le point B , la pa-

rallele BG au côté AC (*n*) : par le point F, N. 1304.
 tirés la parallele FH au côté DE, & par le
 point E, la parallele EH au côté DF (*n*). N. 130.

Démonst. Les triangles ABC & DEF
 sont les moitiés, l'un du quadrilatere AC-
 BG, & l'autre du quadrilatere DFHE (*n*), N. 155.
 puisque ces quadrilateres sont des parallelo-
 grammes (*c*); ainsi ces triangles sont équi-
 multiples de ces parallelogrammes (*n*); or N. 296.
 ces Parallelogrammes sont entr'eux comme
 la base AC est à la base DF (*n*), puisque N. 367.
 leurs hauteurs sont les mêmes que celles des
 triangles ABC & DEF (*c*), & que celles
 de ces triangles sont égales entr'elles (*h*);
 donc les surfaces des triangles ABC &
 DEF sont aussi entr'elles, comme la base
 AC est à la base DF (*n*); donc C. Q. F. D. N. 147.

COROLLAIRE II.

369. Il suit de ce Corollaire, que la
 surface d'un Polygone régulier, est égale à
 celle d'un triangle dont la base est égale
 à la circonférence de ce Polygone, & dont
 la hauteur l'est à une perpendiculaire abais-
 sée du centre de ce même Polygone, à l'un
 de ses côtés.

Si la base FH du triangle FGH*, est Fig. 7.
 égale à la circonférence du polygone AB-
 CDE, & si la hauteur de ce triangle l'est à
 la perpendiculaire IK, abaissée du centre I
 de ce polygone à l'un de ses côtés, la sur-

368 LES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE ;
face du polygone ABCDE fera égale à celle du triangle FGH.

Const. Du centre I du polygone ABCDE, tirés à chacun de ses angles, les lignes IA, IB, IC, &c.

Démonst. La surface du triangle FGH est autant de fois celle du triangle EID, que la base FH est de fois la base ED (n), puisque les hauteurs de ces triangles sont égales entr'elles (h) ; & la surface du polygone ABCDE, est aussi autant de fois celle de ce même triangle EID, que la circonférence de ce polygone est de fois cette même base ED, puisque la surface de ce polygone est composée d'autant de triangles entièrement égaux au triangle EID, que ce polygone a de côtés. Or la base FH, & la circonférence du polygone ABCDE, sont chacune un même nombre de fois la base ED, puisque cette base FH & cette circonférence sont égales entr'elles (h) ; donc la surface du triangle FGH, & celle du polygone ABCDE sont chacune un même nombre de fois la surface du triangle EID ; & par conséquent la surface de ce polygone & celle de ce triangle FGH, sont égales entr'elles (n) ; donc C. Q. F. D.

COROLLAIRE III.

370. Il suit de ce Corollaire, que la

surface d'un cercle , est égale à celle d'un triangle dont la base est égale à la circonférence de ce cercle , & dont la hauteur l'est au rayon de ce même cercle.

Démonst. Plus le nombre des côtés d'un polygone régulier est grand , moins la circonférence de ce polygone diffère de celle du cercle dans lequel il est inscrit ; & quelque grand que soit le nombre de ces côtés , on peut encore concevoir un autre polygone qui en ait un plus grand nombre , & dont par conséquent la circonférence diffère encore moins de celle de ce cercle. Or si l'on s'imagine un polygone d'un si grand nombre de côtés , que sa circonférence ne diffère plus de celle du cercle dans lequel il seroit inscrit , alors la perpendiculaire abaissée du centre de ce polygone à l'un de ses côtés , ne différera plus du rayon de ce cercle ; & par conséquent il n'y aura plus de différence entre la surface de ce polygone & celle de ce cercle : mais la surface de ce polygone est égale à celle d'un triangle, dont la base est égale à la circonférence de ce polygone , & dont la hauteur l'est à la perpendiculaire abaissée du centre de ce même polygone à l'un de ses côtés (n) ; donc puis-
 N. 3692
 que ni cette circonférence , ni cette perpendiculaire ne different plus , l'une de la circonférence de ce cercle , & l'autre de son

370 LES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE ,
 rayon , la surface de ce cercle est égale à
 celle d'un triangle dont la base est égale à
 la circonférence de ce cercle , & dont la
 hauteur l'est à son rayon ; donc C. Q. F. D.

PROPOSITION II.

THEOREME.

371. Lorsqu'une ligne droite coupe deux
 côtés d'un triangle ; Premièrement : elle
 les coupera proportionnellement , si elle
 est parallèle à l'autre côté : Secondement ,
 elle sera parallèle à l'autre côté ,
 si elle les coupe proportionnellement.

Premièrement. **S**I la ligne DE est paral-
 lele au côté AC du trian-
 gle ABC * , $BD : DA :: BE : EC$. Se-
 condement , si $BD : DA :: BE : EC$, la
 ligne DE est parallèle au côté AC.

Const. Du point D tirés au point C , la
 ligne DC ; & du point E au point A , la li-
 gne EA.

DÉMONSTRATION.

Premièrement. Le rapport de la ligne
 BD à la ligne DA , est égal à celui du trian-
 gle BED au triangle DEA (n) , puisque

les hauteurs de ces triangles qui ont chacun
 le même point E pour sommet (c), & dont
 les bases BD & DA sont chacune sur la mê-
 me ligne BA (c), sont égales entr'elles : or
 le rapport du triangle BED au triangle
 DEA, est égal à celui du même triangle
 BED au triangle EDC (n), puisque les N. 338.
 triangles DEA & EDC qui ont la même
 base DE (c), & sont renfermés entre les
 mêmes parallèles DE & AC (h), sont égaux
 entr'eux (n); & le rapport du triangle BED N. 149.
 au triangle EDC, est égal à celui de la ligne
 BE à la ligne EC (n), puisque les hauteurs N. 368.
 de ces triangles qui ont chacun le même
 point D pour sommet (c), & dont les ba-
 ses BE & EC sont chacune sur la même li-
 gne BC (c), sont égales entr'elles; donc le
 rapport de la ligne BD à la ligne DA, est
 égal à celui de la ligne BE à la ligne EC (n); N. 342.
 & par conséquent $BD : DA :: BE : EC$.

Secondement. Le rapport du triangle
 BED au triangle DEA, est égal à celui de
 la ligne BD à la ligne DA (n), puisque les N. 368.
 hauteurs de ces triangles sont égales entr'el-
 les (d): or le rapport de la ligne BD à la
 ligne DA, est égal à celui de la ligne BE à
 la ligne EC (h); & celui de la ligne BE à la li-
 gne EC est égal à celui du triangle BED
 au triangle EDC (n), puisque les hauteurs N. 368.
 de ces triangles sont égales entr'elles (d);

372 LES ÉLEMENS D'EUCLIDE ;

donc le rapport du triangle BED au triangle DEA, est égal à celui du même triangle

N. 342. BED au triangle EDC (n) ; & par conséquent les triangles DEA & EDC sont

N. 340. égaux entr'eux (n) : or puisque ces triangles DEA & EDC sont égaux entr'eux, &

qu'ils ont la même base DE (c), les lignes DE & AC entre lesquelles ils sont renfer-

N. 153. mées, sont paralleles entr'elles (n) ; donc
C. Q. F. D.



PROPOSITION III.

THEOREME.

372. Lorsqu'une ligne droite est tirée du sommet de l'un des angles d'un triangle , au côté opposé à cet angle ; Premièrement , si elle divise cet angle en deux parties égales entr'elles , elle divisera ce côté en deux parties proportionnelles aux autres côtés de ce même triangle : Secondement , si elle divise ce côté en deux parties proportionnelles aux autres côtés de ce même triangle , elle divisera cet angle en deux parties égales entr'elles.

Premièrement. **S**I la ligne BD * divise Fig. 9.
l'angle ABC du triangle ABC en deux parties ABD & DBC égales entr'elles , $AD : DC :: AB : BC$: Secondement , si $AD : DC :: AB : BC$, la ligne BD divisera l'angle ABC en deux parties ABD & DBC égales entr'elles.

Const. Prolongés l'un des côtés AB ou BC du triangle ABC , par exemple le côté AB vers E , jusqu'à ce que son prolongement BE soit égal à l'autre côté BC : du

374 LES ELEMENS D'EUCLIDE,
point E tirés au point C, la ligne EC.

DEMONSTRATION.

Premierement. L'angle ABC est l'angle extérieur du triangle BEC (c); ainsi il est égal à la somme des angles intérieurs E & ECB qui lui sont opposés (n): or ces angles E & ECB sont égaux entr'eux (n), puisque les côtés BC & BE du triangle BEC sont égaux entr'eux (c); donc l'angle ABC est double de chacun de ces angles; ainsi puisqu'il est aussi double de l'angle DBC (h), les angles DBC & ECB sont égaux entr'eux (n); & par conséquent puisqu'ils sont alternes, les lignes BD & EC qui les forment avec la ligne BC, sont parallèles (n). Or puisque la ligne BD qui coupe les côtés AC & AE du triangle AEC, est parallèle à l'autre côté EC de ce triangle, elle divise ces côtés en parties proportionnelles (n); & par conséquent $AD : DC :: AB : BE$, qui est égal à BC (c).

Secondement. Par une démonstration semblable à la précédente, l'angle ABC est double de l'angle ECB: or l'angle ECB est égal à l'angle DBC (n); car ces angles sont alternes, & les lignes EC & BD qui les forment avec la ligne

C, sont parallèles (*n*), puisque la ligne N. 371.
D divise les côtés **AC** & **AE** du triangle
EC, de manière que $AD : DC :: AB :$
EC (*k*) qui est égal à **BE** (*e*) ; donc
l'angle **ABC** est double de l'angle **DBC** ;
& par conséquent puisque cet angle **ABC**
est la somme des angles **ABD** & **DBC** (*n*) ; N. 72.
les angles **ADB** & **DBC** sont égaux en-
treux ; donc **C. Q. F. D.**

PROPOSITION IV.

THEOREME.

373. Les côtés opposés aux angles égaux
des triangles équiangles, sont pro-
portionnels.

S I les triangles **ABC** & **CDE** * sont Fig. 104
équiangles, $AB : CD :: AC : CE ::$
CB : ED.

Const. Posés les triangles **ABC** & **CDE**
sur une même ligne droite **ACE**, de ma-
nière qu'ils soient chacun vers un même cô-
té par rapport à elle, & que celui des an-
gles du triangle **ABC**, qui est égal à l'an-
gle **E**, & celui des angles du triangle **CDE**,
qui est égal à l'angle **A**, aient chacun leur
sommet sur un même point **C** de cette li-

376 LES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE,
gne : prolongés les côtés AB & ED, jusqu'à
ce qu'ils se rencontrent en un point F.

- Démonst.* L'angle extérieur DCE est
égal à l'angle intérieur FAE qui lui est op-
posé (*h*) ; ainsi les lignes DC & FA qui
forment ces angles avec la ligne AB, sont
N. 126. parallèles (*n*) ; or en comparant l'angle
BCA à l'angle FEA, on démontre de la
même manière que les lignes BC & FE
sont aussi parallèles ; donc le quadrilatère
BFDC que ces lignes forment, est un pa-
N. 37. rallelogramme (*n*) ; & par conséquent ses
côtés BF & CD sont égaux entr'eux, & ses
N. 141. côtés DF & CB le sont aussi (*n*). Mais
puisque la ligne BC qui coupe les cô-
côtés AF & AE du triangle AFE, est pa-
rallèle à l'autre côté FE de ce triangle (*d*),
elle divise ces côtés en parties proportion-
N. 371. nelles (*n*) ; & par conséquent $AB : BF$, qui
égal à CD (*d*) :: $AC : CE$; & puisque la
ligne DC qui coupe les côtés EA & EF de
ce même triangle, est parallèle au côté FA
(*d*), elle divise aussi ces côtés en parties
N. 371. proportionnelles (*n*) ; & par conséquent
 $CE : AC :: ED : DF$ qui est égal à CB
(*d*) ; & en renversant, $AC : CE :: CB :$
N. 351. ED (*n*) ; donc C. Q. F. D.

U S A G E.

374. Lorsque l'on a deux triangles
équiangles

équiangles, dont on sçait le nombre de mesures que contiennent chacun des trois côtés de l'un, & l'un des côtés de l'autre, on se sert de cette Proposition de la manière suivante, pour connoître le nombre de mesures que contient chacun des deux autres côtés.

$AC * : DF :: AB : DE :: CB : FE$ Fig. 11.
 (n) ; ainsi, puisque dans l'exemple que N. 373.
 nous proposons, AC contient 9 mesures, AB 5, CB 6, & DF 27, si l'on fait deux regles de trois, dont 9 & 27 soient les deux premiers termes, 5 le 3^e terme de l'une, & 6 le 3^e terme de l'autre, le quatrième terme 15 de la premiere, sera le nombre de mesures que contient DE , & le quatrième terme 18 de la seconde, sera le nombre de mesures que contient FE .



PROPOSITION V.

THEOREME.

375. Les triangles qui ont leurs côtés proportionnels , sont équiangles.

Fig. 12. **S**I les triangles ABC & DEF * sont tels que $AC : DF :: AB : DE :: CB : FE$, les angles B & E seront égaux entr'eux, les angles C & EFD le seront aussi; enfin les angles A & EDF le seront aussi.

Const. Faites sous la ligne DF un angle FDG qui ait le point D de cette ligne pour sommet , & qui soit égal à l'angle A (n) : faites aussi sous la même ligne , un angle DFG qui ait le point F pour sommet , & qui soit égal à l'angle C (n).

Démonst. Les triangles ABC & DGF ont l'angle A égal à l'angle FDG (c) , & l'angle C égal à l'angle DFG (c) ; ainsi ils sont équiangles (n) ; & par conséquent $AC : DF :: AB : DG :: CB : FG$ (n) : or $AC : DF :: AB : DE :: CB : FE$ (h) ; donc $AB : DG :: AB : DE$, & $CB : FG :: CB : FE$ (n) ; & par conséquent DG est égal à DE , & FG l'est à FE (n). Ainsi les triangles DGF & DEF , qui ont le côté DF commun entr'eux , ont le côté

DG égal au côté DE (d), & le côté FG égal au côté FE (d); donc ces triangles sont équiangles (n); & par conséquent puisque le triangle DGF est équiangle au triangle ABC (d), les triangles ABC & DEF sont aussi équiangles; donc C. Q. F. D. N. 67.

PROPOSITION VI.

THEOREME.

376. Si deux Triangles sont tels, que l'un des angles du premier, soit égal à l'un des angles du second, & que les côtés qui forment cet angle du premier, & ceux qui forment cet angle du second soient proportionnels, ces triangles seront équiangles.

Les triangles ABC & DEF * seront équiangles, si l'angle A étant égal à l'angle EDF, $AC:DF::AB:DE$. Fig. 12

Const. La même que la précédente.

Démonst. Les triangles ABC & DGF ont l'angle A égal à l'angle FDG (c), & l'angle C égal à l'angle DFG (c); ainsi ils sont équiangles (n); & par conséquent $AC:DF::AB:DG$ (n); or $AC:DF::AB:DE$ (h); donc $AB:DG::AB:DE$ N. 135 N. 373.

380 LES ELEMENS D'EUCLIDE ,

- N. 342. (n) ; & par conséquent DG est égal à DE
 N. 340. (n). Ainsi les triangles DGF & DEF , qui
 N. 62. ont l'angle FDG égal à l'angle EDF (n) ,
 puisque cet angle EDF est égal à l'angle A
 (h) , & que l'angle A l'est à l'angle FDG
 (c) , ont aussi les côtés DF & DG qui for-
 ment cet angle FDG du premier , égaux
 aux côtés DF & DE qui forment cet angle
 EDF du second , chacun à chacun , puisque
 DF est commun à ces deux triangles , &
 que DG est égal à DE (d) ; donc ces trian-
 N. 30. gles sont équiangles (n) ; & par conséquent
 puisque le triangle DGF est équiangle au
 triangle ABC (d) , les triangles ABC &
 DEF sont aussi équiangles ; donc C. Q.
 F. D.



PROPOSITION VII.

THEOREME.

377. Si deux triangles sont tels ; que l'un des angles du premier , soit égal à l'un des angles du second ; que les côtés qui forment un des autres angles du premier , & ceux qui forment un des autres angles du second , soient proportionnels ; & que le troisième angle du premier , soit de même espèce que le troisième angle du second , ces triangles seront équiangles.

L Es triangles ABC & DEF * seront Fig. 136 équiangles , si l'angle B étant égal à l'angle E , & $AB : DE :: AC : DF$, les angles C & DFE sont de même espèce.

Const. Prolongés le côté EF à volonté vers G : du sommet D de l'angle D , tirés à un point quelconque G , pris à volonté sur la ligne EG , au-dessus ou au-dessous du point F , la ligne DG.

Démonst. Si l'angle A n'étoit point égal à l'angle EDF , il seroit égal à un certain angle EDG , plus ou moins grand que l'angle EDF. Or si l'angle A étoit égal à l'an-

382 LES ELEMENS D'EUCLIDE.

gle EDG, les triangles ABC & DEG qui ont l'angle B égal à l'angle E (*h*), auroient aussi l'angle A égal à l'angle EDG (*h*); ain-

N. 135. si ils seroient équiangles (*n*); & par consé-

N. 373. quent $AB : DE :: AC : DG$ (*n*): or $AB : DE :: AC : DF$ (*h*); donc $AC :$

N. 342. $DG :: AC : DF$ (*n*); & par conséquent

N. 340. DG seroit égal à DF (*n*). Ainsi le triangle FDG auroit le côté DG égal au côté DF, donc l'angle DFG seroit égal à l'angle

N. 83. DGF (*n*); & par conséquent: *Premiere-*
ment, si l'angle DFG est droit ou obtus, l'angle DGE le seroit aussi. Mais si l'angle DFG est droit ou obtus, l'angle DGF n'est ni l'un ni l'autre; puisque si l'un des angles d'un triangle est droit ou ob-

N. 102. tus, les deux autres sont aigus (*n*); donc si l'angle DFG est droit ou obtus, l'angle A n'est point égal à l'angle EDG: *Seconde-*
ment, si l'angle DFG est aigu, l'angle DGF le seroit aussi; & si l'angle DGF étoit aigu, l'angle C le seroit, puisque les triangles ABC & DEG sont supposés équiangles (*d*); & l'angle DFE seroit aussi aigu, puisque les angles C & DFE sont de même espece (*h*). Mais si l'angle DFG est

N. 94. aigu, l'angle DFE est obtus (*n*); donc si l'angle DFG est aigu, l'angle A n'est point égal à l'angle EDG. Or puisque l'angle A n'est égal dans aucun cas, à un angle EDG

plus ou moins grand que l'angle EDF, il est égal à l'angle EDF; donc les triangles ABC & DEF qui ont l'angle B égal à l'angle E (*h*), ont aussi l'angle A égal à l'angle EDF (*d*); & par conséquent ces triangles sont équiangles (*n*); donc C. Q. F. D. N. 1354

COROLLAIRE.

378. Il suit des N. 363, 373, 375, 376, & 377, que les triangles sont semblables : Premièrement, lorsque leurs côtés sont proportionnels : Secondement, dans tous les cas auxquels ils sont équiangles.

PROPOSITION VIII.

THEOREME.

379. Une perpendiculaire abaissée de l'angle droit d'un triangle rectangle, au côté qui est opposé à cet angle, divise ce triangle en deux autres triangles qui lui sont semblables.

LA perpendiculaire BD * abaissée de l'angle droit B du triangle rectangle ABC, au côté AC, divise ce triangle en deux autres triangles ABD & CBD qui sont semblables au triangle ABC. Fig. 14.

Démonst. Les triangles ABC & ABD ont l'angle A commun entr'eux, & l'angle

384 LES ELEMENS D'EUCLIDE ,

ABC égal à l'angle ADB , puisque l'angle ABC est droit (*h*), & que l'angle ADB l'est aussi (*h*); donc ces triangles sont équiangles (*n*) ; & par conséquent ils sont semblables (*n*). Or les triangles ABC & CBD ont aussi l'angle C commun entr'eux , & l'angle ABC égal à l'angle CDB , puisque l'angle ABC est droit (*h*) , & que l'angle CDB l'est aussi (*h*) ; donc ces triangles sont aussi équiangles (*n*) ; & par conséquent ils sont aussi semblables (*n*) ; donc C. Q. F. D.

C O R O L L A I R E.

380. Il suit de ce Théorème , que la perpendiculaire abaissée de l'angle droit d'un triangle rectangle , au côté qui est opposé à cet angle , est moyenne proportionnelle entre les parties , en lesquelles elle divise ce côté.

Fig. 14. AD : DB :: DB : DC *.

Demonst. Les triangles ABD & CBD sont équiangles entr'eux , puisqu'ils le sont chacun au même triangle ABC (*n*) ; ainsi (*n*) le côté AD du triangle ABD , opposé à l'angle ABD , est au côté DB du triangle CBD , opposé à l'angle C qui égal à l'angle ABD (*n*) ; comme le côté DB du triangle ABD , opposé à l'angle A , est au côté DC du triangle CBD , opposé à l'angle DBC qui est égal à l'angle A (*n*) ; donc C. Q. F. D.

PROPO-

PROPOSITION IX.

PROBLÈME.

381. *Couper d'une ligne droite donnée ,
telle partie que l'on voudra.*

IL faut couper , par exemple , les trois cinquièmes de la ligne droite AB *. Fig. 15.

Const. De l'une des extrémités de la ligne AB , par exemple de son extrémité A , tirés à volonté une ligne droite AH , qui forme avec cette ligne AB un angle quelconque HAB : prenés sur la ligne AH en commençant au point A , autant de parties AC, CD, DE, &c. à volonté , mais égales entr'elles , que le Dénominateur de la partie que vous voulés couper de la ligne AB , contient d'unités ; c'est-à-dire 5 , dans cet exemple : du point G auquel se termine la dernière de ces parties , tirés au point B , la ligne GB : comptés en commençant vers le point A , autant de ces parties , que le Numérateur de cette partie que vous voulés couper de la ligne AB , contient d'unités ; c'est-à-dire 3 , dans cet exemple : par le point E auquel se termine la dernière de ces parties , tirés

K k

386 LES ELEMENTS D'EUCLIDE ;

N. 130. une parallele EI à la ligne GB (n) : cette parallele coupera la ligne AB en un point I, tel que la partie AI fera les trois cinquièmes de cette ligne.

Démonst. Les triangles AGB & AEI, ont l'angle A commun entr'eux, & l'angle
N. 127. AIE égal à l'angle ABG (n), puisque l'angle AIE est un angle extérieur, que l'angle ABG est l'angle intérieur qui lui est opposé, & que les lignes EI & GB qui forment ces angles avec la ligne AB, sont paralleles (c) ; ainsi ces triangles sont équiangles (n) ; donc $AG : AE :: AB : AI$ (n) ;
N. 135. & par conséquent, puisque AE est les trois cinquièmes de AG (c), AI est les trois
N. 373. cinquièmes de AB (n) ; donc C. Q. F. F.
N. 308.

PROPOSITION X.

PROBLEME.

382. *Diviser une ligne droite, de la même maniere qu'une autre ligne droite est divisée.*

Fig. 16. **I**L faut diviser la ligne CD *, de la même maniere que la ligne AB est divisée.
Const. De l'une des extrémités de la ligne AB ; par exemple de son extrémité

A, tirés une ligne AI égale à la ligne CD, & qui forme avec la ligne AB, un angle quelconque BAI: du point B tirés au point I, la ligne BI: par les points de division E & F de la ligne AB, tirés les paralleles EG & FH à la ligne BI (n).

N. 130.

Démonst. La ligne EG qui coupe les côtés AF & AH du triangle AFH, est parallele à l'autre côté FH de ce triangle (n), N. 129. puisque cette ligne EG & ce côté FH sont paralleles l'une & l'autre à une même ligne BI (c); ainsi $AE : EF :: AG : GH$ (n); N. 371. donc en composant, $AEF : EF :: AGH : GH$ (n); & par conséquent en échangeant, N. 353. $AEF : AGH :: EF : GH$ (n). Or AEF N. 349. : FB :: AGH : HI (n); puisque la ligne N. 371. FH qui coupe les côtés AB & AI du triangle ABI, est parallele à l'autre côté BI de ce triangle (c); donc en échangeant, AEF : AGH :: FB : HI (n); & par conséquent, N. 349. puisque $AEF : AGH :: EF : GH$ (d), $EF : GH :: FB : HI$ (n), & en échangeant, N. 342. $EF : FB :: GH : HI$ (n). Ainsi puisque N. 349. $AE : EF :: AG : GH$ (d), & que $EF : FB :: GH : HI$ (d), les parties de la ligne AI & celles de la ligne AB sont proportionnelles; & par conséquent, si l'on divise la ligne CD qui est égale à la ligne AI (c), en parties CK, KL & LD égales aux parties AG, GH & HI de cette ligne AI

388 LES ELEMENS D'EUCLIDE,
 N. 79. (n), la ligne CD sera divisée de la même
 maniere que la ligne AB est divisée; donc
 C. Q. F. F.

PROPOSITION XI.

PROBLEME.

383. *Trouver une troisième proportionnelle à deux lignes droites données.*

Fig. 17. **I**L faut trouver une troisième proportionnelle aux deux lignes droites A & B *

Const. Faites un angle quelconque CDE: prenés sur l'un des côtés de cet angle, par exemple sur le côté DE, deux parties DF & FG égales, l'une à la ligne A, & l'autre à la ligne B: prenés aussi sur l'autre côté DC de ce même angle, une partie DH égale à cette même ligne B: du point F tirés au point H, la ligne FH: par le point G tirés une parallele GI à cette ligne FH (n): la partie HI du côté DC, sera troisième proportionnelle aux lignes A & B.

Démonst. La ligne FH qui coupe les côtés DG & DI du triangle DIG, est parallele à l'autre côté GI de ce triangle (c);
 N. 371. ainsi $DF : FG :: DH : HI$ (n); & par con-

féquent, puisque DF est égal à A (c), & que FG & DH sont égaux chacun à B (c),
 $A : B :: B : HI$; donc C. Q. F. F.

PROPOSITION XII.

PROBLEME.

384. *Trouver une quatrième proportionnelle à trois lignes droites données.*

IL faut trouver une quatrième proportionnelle aux trois lignes droites A, B & C*.

Fig. 18.

Const. Faites un angle quelconque DEF: prenés sur l'un des côtés de cet angle, par exemple sur le côté EF, deux parties EG & GH égales, l'une à la ligne A, & l'autre à la ligne B: prenés aussi sur l'autre côté ED de ce même angle, une partie EI égale à la ligne C: du point G au point I, tirez la ligne GI: par le point H, tirez une parallèle HK à cette ligne GI (n): la partie N. 130.
 IK du côté ED, sera quatrième proportionnelle aux lignes A, B & C.

Démonst. La ligne GI qui coupe les côtés EH & EK du triangle EKH, est parallèle à l'autre côté HK de ce triangle (c); ainsi $EG : GH :: EI : IK$ (n); & par con- N. 131.
 K k iij

390 LES ELEMENS D'EUCLIDE ,
 fréquent puisque EG est égal à A (c), GH
 à B (c), & EI à C (c), $A:B::C:IK$;
 donc C. Q. F. F.

PROPOSITION XIII.

PROBLEME.

385. *Trouver une moyenne proportionnelle entre deux lignes droites données.*

Fig. 19. **I**L faut trouver une moyenne proportionnelle entre les lignes droites A & B*.

Const. Tirés une ligne droite CD, à volonté : prenés sur cette ligne deux parties CE & EF égales, l'une à la ligne A, & l'autre à la ligne B : divisés la ligne CEF en deux parties CG & GF égales entr'elles

N. 91. (n) : du point G pris pour centre, & avec l'une de ces parties CG ou GF prise pour rayon, décrivés un demi cercle CHF : du point E, élevés une perpendiculaire EH à la ligne CD (n) : cette perpendiculaire sera moyenne proportionnelle entre les lignes A & B.

Pour la démonstration : du point H tirés aux points C & F, les lignes HC & HF.

Dém. Le triangle CHF est rectangle en H N. 253. (n), puisque l'angle H est inscrit dans un de-

mi-cercle CHF (c). Or la ligne EH est une perpendiculaire abaissée de l'angle droit H de ce triangle, au côté CF qui est opposé à cet angle (c) ; donc $CE : EH :: EH : EF$ (n) ; & par conséquent, puisque CE est N. 380. égal à A (c), & que EF l'est à B (c), $A : EH :: EH : B$; donc C. Q. F. F.

PROPOSITION XIV.

THEOREME.

386. Lorsque des Parallelogrammes sont équiangles : Premièrement, si leurs surfaces sont égales entr'elles, leurs côtés seront réciproquement proportionnels : Secondement, si leurs côtés sont réciproquement proportionnels, leurs surfaces seront égales entr'elles.

SI les Parallelogrammes ABCD & CEFG * sont équiangles : Premièrement, Fig. 20. si leurs surfaces sont égales entr'elles, leurs côtés DC, CE, CB & CG seront réciproquement proportionnels : Secondement, si leurs côtés DC, CE, CB & CG sont réciproquement proportionnels, leurs surfaces seront égales entr'elles.

Const. Posés les parallelogrammes AB.

392 LES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE ;
 CD & CEF G , de manière que deux de
 leurs angles égaux entr'eux , par exemple
 les angles DCB & GCE , deviennent
 des angles opposés au sommet : prolongés
 les côtés AB & FE , jusqu'à ce qu'ils se
 rencontrent en un point H.

DEMONSTRATION.

Premierement. Le rapport du côté DC
 au côté CE , est égal à celui du parallélo-
 gramme ABCD , au parallélogramme BH-
 N. 367. EC (n) , puisque les hauteurs de ces paral-
 lelogrammes sont égales entr'elles (c) : or
 le rapport du parallélogramme ABCD au
 parallélogramme BHEC , est égal à celui
 du parallélogramme CEF G au même pa-
 N. 338. rallélogramme BHEC (n) , puisque les pa-
 rallélogrammes ABCD & CEF G sont
 égaux entr'eux (h) ; & le rapport du paral-
 lelogramme CEF G au parallélogramme
 BHEC , est égal à celui du côté CG au cô-
 N. 367. té CB (n) , puisque les hauteurs de ces pa-
 rallélogrammes sont égales entr'elles (c) ;
 donc le rapport du côté DC au côté CE ,
 N. 342. est égal à celui du côté CG au côté CB (n) ;
 & par conséquent ces côtés DC , CE , CB
 & CG sont réciproquement proportionnels
 N. 310. (n).

Secondement. Le rapport du parallélo-
 gramme ABCD au parallélogramme BH-

EC, est égal à celui du côté **DC** au côté **CE** (n), puisque les hauteurs de ces paral-^{N. 367.}
 lelogrammes sont égales entr'elles (c) :
 or le rapport du côté **DC** au côté **CE**, est
 égal à celui du côté **CG** au côté **CB** (n),^{N. 310.}
 puisque ces côtés sont réciproquement pro-
 portionnels (h) ; & le rapport du côté **CG**
 au côté **CB**, est égal à celui du paralle-
 logramme **CEFG** au parallelogramme **BH-**
EC (n), puisque les hauteurs de ces paral-^{N. 367.}
 lelogrammes sont égales entr'elles (c) ;
 donc le rapport du parallelogramme **AB-**
CD au parallelogramme **BHEC**, est égal
 à celui du parallelogramme **CEFG** au mê-
 me parallelogramme **BHEC** (n) ; & par^{N. 342.}
 conséquent les parallelogrammes **ABCD**
 & **CEFG** sont égaux entr'eux (n) ; donc^{N. 340.}
C. Q. F. D.



PROPOSITION XV.

THEOREME.

387. Lorsque deux Triangles sont tels, que l'un des angles du premier est égal à l'un des angles du second : Premièrement, si les surfaces de ces triangles sont égales entr'elles, les côtés qui forment ces angles, seront réciproquement proportionnels : Secondement, si les côtés qui forment ces angles, sont réciproquement proportionnels, les surfaces de ces triangles seront égales entr'elles.

Fig. 21. **S**I les triangles ABC & CDE* ont l'angle ACB égal à l'angle ECD : Premièrement, si leurs surfaces sont égales entr'elles, les côtés AC, CD, CB & CE seront réciproquement proportionnels : Secondement, si les côtés AC, CD, CB & CE qui forment ces angles, sont réciproquement proportionnels, les surfaces de ces triangles seront égales entr'elles.

Const. Posés les triangles ABC & CDE, de maniere que leurs angles ACB & ECD égaux entr'eux, deviennent des angles opposés au sommet : du sommet B de l'angle

B, tirés au sommet D de l'angle D, la ligne BD.

DEMONSTRATION.

Premierement. Le rapport du côté AC au côté CD, est égal à celui du triangle ABC au triangle CBD (*n*), puisque les hauteurs de ces triangles sont égales entr'elles (*c*): or le rapport du triangle ABC au triangle CBD, est égal à celui du triangle CDE au même triangle CBD (*n*), puisque les triangles ABC & CDE sont égaux entr'eux (*h*); & le rapport du triangle CDE au triangle CBD, est égal à celui du côté CE au côté CB (*n*), puisque les hauteurs de ces triangles sont égales entr'elles (*c*); donc le rapport du côté AC au côté CD, est égal à celui du côté CE au côté CB (*n*); & par conséquent ces côtés AC, CD, CB & CE sont réciproquement proportionnels (*n*).

Secondement. Le rapport du triangle ABC au triangle CBD, est égal à celui du côté AC au côté CD (*n*), puisque les hauteurs de ces triangles sont égales entr'elles (*c*): or le rapport du côté AC au côté CD, est égal à celui du côté CE au côté CB (*n*), puisque ces côtés sont réciproquement proportionnels (*h*); & le rapport du côté CE au côté CB, est égal à celui du triangle

- N. 368. CDE au triangle CBD (n), puisque les hauteurs de ces triangles sont égales entr'elles (c); donc le rapport du triangle ABC au triangle CBD, est égal à celui du triangle CDE au même triangle CBD (n); & par conséquent les triangles ABC & CDE
 N. 340. sont égaux entr'eux (n); donc C. Q. F. D.
-

PROPOSITION XVI.

THEOREME.

388. Premièrement. Si quatre lignes droites sont proportionnelles, la surface du rectangle fait de la première & de la quatrième, sera égale à celle du rectangle fait de la seconde & de la troisième : Secondement. Si quatre lignes droites sont telles, que la surface du rectangle fait de la première & de la quatrième, soit égale à celle du rectangle fait de la seconde & de la troisième, ces quatre lignes seront proportionnelles.

Fig. 22. Premièrement. **S** I $AB : EF :: EH : AD$ *, la surface du rectangle fait de AB & de AD , sera égale à celle du rectangle fait de EF & de EH : Secondement. Si la surface du rectangle fait de

AB & de AD, est égale à celle du rectangle fait de EF & de EH, les quatre lignes AB, EF, EH & AD seront proportionnelles.

Const. Faites un rectangle ABCD, qui ait la ligne AB pour longueur, & la ligne AD pour largeur : faites aussi un rectangle EFGH, qui ait la ligne EF pour longueur, & la ligne EH pour largeur.

DEMONSTRATION.

Premierement. Les parallelogrammes ABCD & EFGH sont équiangles, puisqu'ils sont rectangles (*c*), & ils ont leurs côtés réciproquement proportionnels, puisque $AB : EF :: EH : AD$ (*h*) ; donc les surfaces de ces parallelogrammes sont égales entr'elles (*n*) ; & par conséquent, puisque ces parallelogrammes sont les rectangles, l'un des lignes AB & AD (*c*), & l'autre des lignes EF & EH (*c*), la surface du rectangle fait des des lignes AB & AD, est égale à celle du rectangle fait des lignes EF & EH. N. 316.

Secondement. Les parallelogrammes ABCD & EFGH sont équiangles, puisqu'ils sont rectangles (*c*), & leurs surfaces sont égales entr'elles (*h*) ; donc leurs côtés AB, EF, AD & EH sont réciproquement proportionnels (*n*) ; & par conséquent $AB : EF :: EH : AD$; donc C. Q. F. D. N. 316.
N. 310.

PROPOSITION XVII.

THEOREME.

389. *Premierement. Si trois lignes droites sont continuellement proportionnelles, la surface du rectangle fait de la première & de la troisième, sera égale à celle du quarré fait de la seconde : Secondement. Si trois lignes droites sont telles, que la surface du rectangle fait de la première & de la troisième, soit égale à celle du quarré fait de la seconde, ces trois lignes seront continuellement proportionnelles.*

Fig. 23. *Premierement.* **S** I $\div \div$ AB : EF : AD*, la surface du rectangle fait de AB & de AD, sera égale à celle du quarré de EF : *Secondement.* Si la surface du rectangle fait de AB & de AD, est égale à celle du quarré fait de EF, les trois lignes AB, EF & AD seront continuellement proportionnelles.

Const. Faites un rectangle ABCD qui ait la ligne AB pour longueur, & la ligne AD pour largeur : faites aussi un quarré EFGH qui ait la ligne EF pour l'un de ses côtés.

DEMONSTRATION.

Premierement. Les parallelogrammes ABCD & EFGH sont équiangles, puisqu'ils sont rectangles (*c*), & ils ont leurs côtés réciproquement proportionnels, puisque $AB : EF :: EH$ qui est égale à EF (*c*) : AD (*h*); donc les surfaces de ces parallelogrammes sont égales entr'elles (*n*); N. 386. & par conséquent, puisque ces parallelogrammes sont, l'un le rectangle des lignes AB & AD (*c*), & l'autre le quarré de la ligne EF (*c*), la surface du rectangle fait des lignes AB & AD, est égale à celle du quarré de la ligne EF.

Secondement. Les parallelogrammes ABCD & EFGH sont équiangles, puisqu'ils sont rectangles (*c*), & leurs surfaces sont égales entr'elles (*h*); donc leurs côtés AB, EF, AD & EH sont réciproquement proportionnels (*n*); & par conséquent AB N. 386. : EF : EH : AD (*n*): or EF est égal à EH N. 310. (*n*); puisque le quadrilatere EFGH est un N. 49. quarré (*c*); donc $\therefore AB : EF : AD$; donc C. Q. F. D.



PROPOSITION XVIII.

PROBLÈME.

390. *Décrire sur une ligne droite donnée, un Polygone semblable à un autre.*

Fig. 24. **I**L faut décrire sur la ligne droite EF*, un Polygone semblable au Polygone ABCD.

Const. Divisés le polygone ABCD en triangles, par une ligne AC tirée de l'un de ses angles A, à l'angle C qui lui est opposé: faites sur la ligne EF, des angles GEF & F égaux, l'un à l'angle CAB, l'autre à l'angle B, & qui aient pour sommets, l'un le point E de cette ligne, & l'autre le point F (n): faites aussi sur la ligne EG, des angles HEG & HGE égaux, l'un à l'angle DAC, l'autre à l'angle DCA, & qui aient pour sommets, l'un le point E de cette ligne, & l'autre le point G (n). Le polygone EFGH que les côtés FG, GH & HE de ces angles, forment avec la ligne EF, sera semblable au polygone ABCD.

Démonst. Les angles des polygones EFGH & ABCD sont égaux, chacun à chacun; car puisque les angles HEG & GEF, &

& les angles DAC & CAB sont égaux ,
 chacun à chacun (*c*) , l'angle HEF qui est
 la somme des deux premiers , est égal à l'an-
 gle DAB , qui est celle des deux derniers :
 l'angle F est égal à l'angle B (*c*) : l'angle
 FGH est égal à l'angle BCD ; puisque l'un
 est la somme des angles HGE & EGF , &
 l'autre celle des angles DCA & ACB ;
 que l'angle HGE est égal à l'angle DCA (*c*) ;
 & que les angles GEF & F du triangle
 EGF , étant égaux aux angles CAB & B
 du triangle ACB (*c*) , l'autre angle EGF
 du premier triangle , est égal à l'autre angle
 ACB du second (*n*) : & enfin l'angle H est N. 135.
 égal à l'angle D , par des raisons pareilles à
 celles par lesquelles l'angle EGF l'est à l'an-
 gle ACB. Or les côtés de ces polygones ,
 qui forment ces angles égaux , sont propor-
 tionnels ; car puisque les triangles EGF &
 ACB sont équiangles (*d*) , $EG : AC :: EF$
 $: AB :: FG : BC$ (*n*) ; & puisque les trian- N. 373.
 gles EHG & ADC sont aussi équiangles
 (*d*) , $EG : AC :: EH : AD :: HG : DC$
 (*n*) ; donc $EF : AB :: FG : BC :: EH : N. 373$
 $AD :: HG : DC$ (*n*) ; & par conséquent, en N. 342.
 échangeant les premier & troisième rap-
 ports , $EF : EH :: AB : AD$ (*n*) , en N. 349.
 échangeant les deux premiers , $EF : FG$
 $:: AB : BC$ (*n*) ; en échangeant les second N. 349.
 & quatrième , $FG : HG :: BC : DC$ (*n*) ; N. 349.

402 LES ELEMENS D'EUCLIDE,

& enfin en échangeant les troisiéme & quatrième, $EH : HG :: AD : DC$ (n). Donc puisque les angles des polygones EFGH & ABCD sont égaux, chacun à chacun (d); & que les côtés de ces polygones, qui forment ces angles égaux, sont proportionnels (d), ces polygones sont semblables entr'eux (n); donc C. Q. F. F.

U S A G E.

391. On peut se servir de cette Proposition, pour lever le plan d'une Ville, d'un Bâtiment, d'un Champ, ou d'une Forêt, & même celui d'un País; puisque les figures de toutes ces étendues, sont des polygones; & que par conséquent, lever le plan de l'une de ces étendues, c'est décrire un polygone semblable à celui que forment les côtés de cette étendue.



PROPOSITION XIX.

THEOREME.

392. Les rapports des surfaces des triangles semblables entr'eux, sont doublés de ceux des côtés homologues § de ces triangles.

SI les triangles ABC & DEF * sont Fig. 25.
semblables entr'eux, le rapport du triangle ABC au triangle DEF, sera doublé de celui du côté AC au côté DF.

Const. Trouvés une troisième proportionnelle aux côtés AC & DF (n) : divisés N. 38 & le côté AC en deux parties AG & GC, telles que l'une AG soit égale à cette troisième proportionnelle (n) : du point B tirés N. 79. au point G, la ligne BG.

Démonst. Le rapport du côté AC à la partie AG, est doublé de celui du côté AC au côté DF (n), puisque $\therefore AC : DF$ N. 348. $AG (c)$; ainsi, si le rapport du triangle ABC au triangle DEF, est égal à celui du côté AC à la partie AG, le rapport de ces deux triangles sera doublé de celui du côté

§ On nomme Côtés homologues, les côtés des figures semblables, qui sont opposés à des angles égaux entr'eux.

404 LES ELEMEENS D'EUCLIDE,

AC au côté DF. Or le rapport du triangle ABC au triangle DEF, est égal à celui du côté AC à la partie AG; car $AB : DE ::$

N. 373. $AC : DF (n)$, puisque les triangles ABC & DEF sont semblables entr'eux (h) ; & $AC : DF :: DF : AG (c)$; donc $AB : DE$

N. 342. $:: DF : AG (n)$; & par conséquent les côtés AB, DE, AG & DF sont réciproquement proportionnels. Ainsi les triangles ABG & DEF qui ont l'angle A égal à l'angle D (h) , ont aussi les côtés AB, DE, AG & DF qui forment ces angles, réciproquement proportionnels (d) ; donc ces trian-

N. 387. gles sont égaux entr'eux (n) ; & par conséquent le triangle ABC a le même rapport à

N. 318. chacun de ces triangles (n) : or le rapport du triangle ABC au triangle ABG, est égal

N. 368. à celui du côté AC à la partie AG (n) ; donc le rapport du triangle ABC au triangle DEF, est aussi égal à celui de ce côté AC à cette partie AG; & par conséquent le rapport du triangle ABC au triangle DEF, est doublé de celui du côté AC au côté DF; donc C. Q. F. D.



PROPOSITION XX.

THEOREME.

393. Si deux Polygones sont semblables entr'eux : Premièrement. On pourra les diviser l'un & l'autre , en un pareil nombre de triangles semblables , chacun à chacun : Secondement. Ces deux Polygones , & deux quelconques de ces triangles , correspondans l'un à l'autre , seront proportionnels : Troisièmement. Enfin le rapport des surfaces de ces deux Polygones , sera doublé de celui de leurs côtés homologues.

SI les Polygones ABCDE & FGHIK * sont semblables entr'eux : *Pre-* Fig. 26.
mierement. On pourra les diviser l'un & l'autre , en un pareil nombre de triangles semblables , chacun à chacun : *Seconde-*
ment. Deux quelconques de ces triangles , correspondans l'un à l'autre , seront des parties pareilles de ces polygones , chacun de chacun : *Troisièmement.* Enfin le rapport du polygone ABCDE au polygone FGHIK , sera doublé de celui du côté AB au côté FG ; ou de celui du côté AE au côté FK ; ou &c.

Const. Divisés le polygone ABCDE en triangles , par des lignes AC & AD tirées de l'un quelconque A de ses angles , à chacun de ses autres angles C & D opposés à cet angle A : divisés aussi le polygone FGHIK en triangles , par des lignes FH & FI tirées de l'angle F de ce polygone , qui correspond à l'angle A , à chacun de ses autres angles H & I opposés à cet angle F.

DEMONSTRATION.

Premierement. Les polygones ABCDE & FGHIK sont divisés en triangles , l'un par des lignes tirées de l'angle A , à chacun des angles opposés à cet angle A ; & l'autre par des lignes tirées de l'angle F qui correspond à l'angle A , à chacun des angles opposés à cet angle F (*c*) : or le nombre des angles opposés à l'angle A , est égal à celui des angles opposés à l'angle F , puisque ces polygones sont semblables entr'eux (*h*) ; donc ces polygones sont divisés l'un & l'autre en triangles , par un pareil nombre de lignes ; & par conséquent ils sont aussi divisés l'un & l'autre en un pareil nombre de triangles. Or ces triangles sont semblables chacun à chacun (*n*) ; car puisque les polygones ABCDE & FGHIK sont semblables entr'eux (*h*) , les triangles ABC & FGH ont les angles B & G

qui sont des angles correspondans de ces
 polygones , égaux entr'eux , & les côtés
 BA & BC , GF & GH qui forment ces an-
 gles , proportionnels (n) ; & par conséquent N. 363
 ces triangles sont équiangles (n) ; par des N. 376
 raisons pareilles , les triangles AED &
 FKI sont aussi équiangles ; & enfin , puis-
 que les triangles ABC & FGH sont équian-
 gles (d) , $AC : FH :: AB : FG$ (n) ; puis N. 373
 que les polygones ABCDE & FGHIK
 sont semblables entr'eux (h) , $AB : FG ::$
 $CD : HI :: AE : FK$ (n) ; & puisque les N. 363
 triangles AED & FKI sont équiangles (d) ,
 $AE : FK :: AD : FI$ (n) ; donc $AC : FH$ N. 373
 $:: CD : HI :: AD : FI$ (n) ; & par con- N. 342
 séquent puisque les triangles ACD & FHI
 sont formés par ces côtés proportionnels
 AC , CD & AD , FH , HI & FI , ils sont
 aussi équiangles (n) . Donc les polygones N. 375
 ABCDE & FGHIK semblables entr'eux ;
 sont divisés l'un & l'autre , en un pareil nom-
 bre de triangles semblables , chacun à chacun .

Secondement. Le rapport du triangle
 ABC au triangle FGH , est doublé de ce-
 lui du côté AC au côté FH (n) , puisque N. 392
 ces triangles sont semblables entr'eux (d) :
 or le rapport du côté AC au côté FH , est
 égal à celui du côté AD au côté FI (n) , N. 373
 puisque les triangles ACD & FHI sont
 équiangles (d) ; donc le rapport du trian-

- gle ABC au triangle FGH, est doublé
 N. 342. de celui du côté AD au côté FI (n);
 & par conséquent, puisque le rapport du
 triangle ACD au triangle FHI sem-
 semblable à ce triangle ACD (d), est aussi
 doublé de celui du côté AD au côté FI
 N. 392. (n); & que celui du triangle AED au trian-
 gle FKI semblable à ce triangle AED (d),
 est aussi doublé de ce même côté AD à ce
 N. 392. même côté FI (n), le rapport du triangle
 ABC au triangle FGH, celui du triangle
 ACD au triangle FHI, & celui du trian-
 gle AED au triangle FKI, sont égaux en-
 N. 342. tr'eux (n). Or puisque le rapport du trian-
 gle ABC au triangle FGH, celui du trian-
 gle ACD au triangle FHI, & celui du
 triangle AED au triangle FKI, sont égaux
 entr'eux (d), ces triangles sont proportion-
 nels; & par conséquent le polygone ABCDE
 qui est la somme des triangles antécédens
 N. 72. ABC, ACD & AED (n), est au poly-
 gone FGHK qui est celle des triangles
 N. 72. conséquens FGH, FHI & FKI (n); com-
 me l'un quelconque ABC des triangles an-
 técédens, est au triangle conséquent FGH
 N. 343. qui correspond à ce triangle antécédent (n).

Troisièmement. Enfin le rapport du poly-
 gone ABCDE au polygone FGHK, est
 égal à celui du triangle ABC au triangle
 FGH (d); or le rapport du triangle ABC

au triangle FGH est doublé de celui du côté AB au côté FG (n), puisque ces triangles sont semblables entr'eux (d); donc le rapport du polygone ABCDE au polygone FGHK, est aussi doublé de celui du côté AB au côté FG(n); donc C. Q. F. D. N. 342.

COROLLAIRE.

394. Il suit de ce Théorème, que si trois lignes droites sont continuellement proportionnelles, le polygone décrit sur la première, sera à un polygone semblable, décrit sur la seconde, & semblablement posé sur elle; comme la première de ces lignes est à la troisième.

Si les lignes droites A, B & C * sont Fig. 27.
 continuellement proportionnelles, le rapport du polygone décrit sur la ligne A, à un polygone semblable décrit sur la ligne B, & semblablement posé sur elle, sera égal au rapport de la ligne A à la ligne C.

Démonst. Le rapport du polygone décrit sur la ligne A au polygone semblable décrit sur la ligne B, est doublé du rapport de la ligne A à la ligne B (n): or le rapport de la ligne A à la ligne C, est aussi doublé de celui de la ligne A à la ligne B (n); donc le rapport du polygone décrit sur la ligne A au polygone semblable décrit sur la ligne B,

M m

est égal au rapport de la ligne A à la ligne

N. 342. C (n); donc C. Q. F. D.

U S A G E.

395. On se sert de cette Proposition de la manière suivante : Premièrement. Pour connoître le rapport de deux figures semblables entr'elles : Secondement, pour décrire une figure semblable à une autre, & qui ait à cette autre, un rapport donné.

Premièrement. Pour connoître le rapport du polygone ABCDE au polygone FGH-

Fig. 26. IK *.

On trouve une troisième proportionnelle à deux côtés homologues quelconques de ces polygones, par exemple aux côtés ED

N. 383. & KI (n); & le polygone ABCDE, est au

polygone FGHIK, comme le côté ED est à

N. 394. cette troisième proportionnelle (n).

Secondement, pour décrire un polygone semblable au polygone ABCDE *, & qui en soit, par exemple les deux tiers.

Fig. 26. On tire une ligne qui soit égale aux deux

tiers de l'un quelconque des côtés du polygone ABCDE, par exemple du côté ED :

on trouve une moyenne proportionnelle KI, entre ce côté ED & cette ligne qui est les

385. deux tiers de ce côté (n) : on décrit sur cette

moyenne proportionnelle un, polygone FG-

N. 390. HIK semblable au polygone ABCDE (n);

& ce polygone $FGHIK$ est les deux tiers du polygone $ABCDE$.

Démonst. Le polygone $ABCDE$ décrit sur ED , est au polygone semblable $FGHIK$ décrit sur KI ; comme ED est à une troisième proportionnelle à ED & KI (n) : N. 394. or cette troisième proportionnelle à ED & KI , est les deux tiers de ED (c); donc le polygone $ABCDE$ est au polygone $FGHIK$; comme ED est aux deux tiers de ED ; & par conséquent le polygone $FGHIK$ est les deux tiers du polygone $ABCDE$; donc C. Q. F. F.

PROPOSITION XXI.

THEOREME.

396. Les figures rectilignes semblables chacune à une même figure, sont aussi semblables entr'elles.

SI les figures A & B * sont semblables Fig. 28. chacune à la figure C , ces figures A & B seront semblables entr'elles.

Démonst. Les angles des figures A & C sont égaux, chacun à chacun; & les côtés qui forment ces angles égaux, sont proportionnels (n), puisque ces figures sont sem- N. 363.

M m ij

412 LES ELEMEENS D'EUCLIDE ;

blables entr'elles (h) : or les angles des figures C & B sont aussi égaux, chacun à chacun, & les côtés qui forment ces angles

N. 363. égaux, proportionnels (n) ; puisque ces figures sont aussi semblables entr'elles (h) ; donc les angles des figures A & B sont

N. 62. égaux, chacun à chacun (n) , & les côtés qui forment ces angles égaux, proportion-

N. 342. nels (n) ; & par conséquent ces figures A

N. 363. & B sont semblables entr'elles (n) ; donc

C. Q. F. D.



PROPOSITION XXII.

THEOREME.

397. Premièrement, si quatre lignes droites sont proportionnelles, deux Polygones semblables entr'eux, & semblablement posés sur les deux premières, & deux autres Polygones semblables aussi entr'eux, & semblablement posés sur les deux dernières, seront proportionnels : Secondement, si deux Polygones semblables entr'eux, & deux autres Polygones semblables aussi entr'eux sont proportionnels, les côtés homologues des deux premiers, & les côtés homologues des deux derniers, seront aussi proportionnels.

Premièrement. **S**I les lignes droites AB, CD, EF & GH * sont Fig. 294
proportionnelles, les polygones AIB & CKD semblables entr'eux, & semblablement posés sur les deux premières, & les polygones EFML & GH-ON, semblables aussi entr'eux, & semblablement posés sur les deux dernières, seront proportionnels : Secondement, si les

414 LES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE,
polygones AIB & CKD semblables entr'eux, & les polygones EFML & GHON semblables aussi entr'eux, sont proportionnels, les côtés homologues AB & CD des deux premiers, & les côtés homologues EF & GH des deux derniers, seront aussi proportionnels.

DEMONSTRATION.

Premierement. Le rapport du polygone AIB au polygone CKD, est doublé de celui de la ligne AB à la ligne CD (*n*), puisque ces polygones sont semblables entr'eux (*h*): or le rapport de la ligne AB à la ligne CD, est égal à celui de la ligne EF à la ligne FH (*h*); donc le rapport du polygone AIB au polygone CKD, est doublé de celui de la ligne EF à la ligne GH (*n*); & par conséquent, puisque le rapport du polygone EFML au polygone GHON qui est semblable au polygone EFML (*h*), est aussi doublé de celui de cette ligne EF à cette ligne GH (*n*), le rapport du polygone AIB au polygone CKD, est égal à celui du polygone EFML au polygone GHON (*n*).

Secondement. Le rapport du polygone AIB au polygone CKD, est doublé de celui de la ligne AB à la ligne CD (*n*), puisque ces polygones sont semblables entr'eux (*h*); & par une raison pareille, le rapport

du polygone EFML au polygone GHON, est doublé de celui de la ligne EF à la ligne GH : or le rapport du polygone AIB au polygone CKD, est égal à celui du polygone EFML au polygone GHON (*h*) ; donc le rapport doublé de celui de la ligne AB à la ligne CD, est égal au rapport doublé de celui de la ligne EF à la ligne GH ; & par conséquent, le rapport de la ligne AB à la ligne CD, est égal à celui de la ligne EF à la ligne GH ; donc C. Q. F. D.

PROPOSITION XXIII.

THEOREME.

398. *Lorsque des Parallelogrammes sont équiangles, les rapports de leurs surfaces sont composés de ceux de leurs côtés.*

SI les parallelogrammes ABCD & BEFG * sont équiangles, le rapport de la surface du premier à celle du dernier, fera composé du rapport du côté AB au côté BE, & de celui du côté BC au côté BG. Fig. 304

Const. Posés les parallelogrammes ABCD & BEFG, de maniere que deux quelconques de leurs angles égaux entr'eux, par exemple les angles ABC & GBE, deviennent des angles opposés au sommet : décri-

416 LES ELEMENS D'EUCLIDE ,
 vés sur le côté AB , un rectangle ABIK ,
 dont la hauteur BI soit égale au côté BC :
 décrits aussi sur le côté BE , un rectangle
 BELM , dont la hauteur BM soit égale au
 côté BG : prolongés les côtés DC & FE ,
 jusqu'à ce qu'ils se rencontrent en un point
 H ; & les côtés KI & LE , jusqu'à ce qu'ils
 se rencontrent en un point N.

Démonst. Le rapport de la surface du
 rectangle ABIK à celle du rectangle BE-
 LM , est composé des rapports de AB à
 320. BE , & de BC à BG (μ) , puisque le pro-
 duit de AB multiplié par BI qui est égal à
 BC (c) , est la valeur de la surface du rec-
 N. 145. tangle ABIK (n) ; que le produit de BE
 multiplié par BM qui est égal à BG (c) est
 N. 145. celle de la surface du rectangle BELM (n) ;
 que les produisans AB & BC de cette pre-
 miere surface , sont les antécédens des rap-
 ports de AB à BE , & de BC à BG ; & qu'en-
 fin les produisans BE & BG de cette der-
 niere surface , sont les conséquens de ces
 mêmes rapports. Ainsi , si le rapport du
 parallelogramme ABCD au parallelogram-
 me BEFG , est égal à celui du rectangle
 ABIK au rectangle BELM , le rapport du
 parallelogramme ABCD au parallelogram-
 me BEFG , sera composé des rapports de
 AB à BE & de BC à BG. Or le rapport
 du parallelogramme ABCD au parallelo-

gramme BEFG, est égal à celui du rectan-
 gle ABIK au rectangle BELM; car puis-
 que le rapport du parallélogramme ABCD
 au parallélogramme BEHC, est égal à ce-
 lui du côté AB au côté BE (n); & que le N. 367.
 rapport du côté AB au côté BE est égal à
 celui du rectangle ABIK, au rectangle BE-
 NI (n); le rapport du parallélogramme N. 367.
 ABCD au parallélogramme BEHC, est
 égal à celui du rectangle ABIK au rectangle
 BENI (n): & puisque le rapport du paral- N. 342.
 lélogramme BEHC au parallélogramme
 BEFG, est égal à celui du côté BC au cô-
 té BG (n); que le côté BC est égal au côté N. 367.
 BI (c), & le côté BG au côté BM (c), &
 que le rapport du côté BI au côté BM, est
 égal à celui du rectangle BENI au rectan-
 gle BELM (n); le rapport du parallélo- N. 367.
 gramme BEHC au parallélogramme BE-
 FG, est égal à celui du rectangle BENI au
 rectangle BELM (n); ainsi les trois paralle- N. 342.
 logrammes ABCD, BEHC & BEFG,
 & les trois rectangles ABIK, BENI &
 BELM forment une proportion d'égalité
 ordonnée (n); donc le rapport du paralle- N. 330.
 logramme ABCD au parallélogramme BE-
 FG, est égal à celui du rectangle ABIK au
 rectangle BELM (n); & par conséquent le N. 352.
 rapport du parallélogramme ABCD au pa-
 rallélogramme BEFG, est composé des rap-

418 LES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE,
ports du côté AB au côté BE, & du côté
BC au côté BG; donc C. Q. F. D.

PROPOSITION XXIV.

THEOREME.

399. *Si deux Parallelogrammes sont tels, qu'ils aient un angle commun entr'eux, & que la Diagonale de l'un soit une partie de celle de l'autre, ces deux Parallelogrammes seront semblables entr'eux.*

Fig. 31. **L** Es parallelogrammes ABCD & AEF-
FG* qui sont tels que l'angle A leur
est commun, & que la diagonale AF de
l'un, est une partie de la diagonale AC de
l'autre, sont semblables entr'eux.

Démonst. Les angles du parallelo-
gramme ABCD, sont égaux à ceux du pa-
rallelogramme AEF, chacun à chacun;
car l'angle A est commun à ces deux paral-
lelogrammes: l'angle DCB est égal à l'an-
N. 62. gle GFE (n), puisque les angles DCB &
A, qui sont des angles opposés du paral-
lelogramme ABCD, sont égaux entr'eux
N. 142. (n); & que les angles GFE & A, qui sont
des angles opposés du parallelogramme

AEFG, sont aussi égaux entr'eux : l'angle B est égal à l'angle AEF (*n*), puisque l'angle AEF est un angle extérieur, que l'angle B est l'angle intérieur opposé à cet angle extérieur, & que les lignes EF & BC qui forment ces angles avec la ligne AB, étant parallèles chacune à une même ligne AD (*h*), elles sont aussi parallèles entr'elles (*n*) : N. 127. & enfin l'angle D est égal à l'angle AGF (*n*) ; puisque les angles D & B, qui sont des angles opposés du parallélogramme ABCD, sont égaux entr'eux (*n*) ; que les angles AGF & AEF, qui sont des angles opposés du parallélogramme AEFG, sont égaux entr'eux (*n*) ; & que les angles B & AEF sont aussi égaux entr'eux (*d*). Or les côtés de ces parallélogrammes ABCD & AEFG, qui forment ces angles égaux, sont proportionnels ; car puisque les triangles ABC & AEF qui ont l'angle en A commun entr'eux, & l'angle B égal à l'angle AEF (*d*), sont équiangles (*n*), $AB : BC :: AE : EF$ (*n*) ; & par des raisons pareilles $AD : DC :: AG : GF$; donc ces parallélogrammes ABCD & AEFG sont semblables entr'eux (*n*) ; donc C. Q. F. D. N. 129. N. 62. N. 142. N. 142. N. 135. N. 373. N. 363.



PROPOSITION XXV.

PROBLEME.

400. *Décrire un Polygone semblable à un autre Polygone, & égal à un troisième.*

Fig. 32. **I**L faut décrire un polygone semblable au polygone BCD *, & égal au polygone A.

Const. Sur l'un des côtés du polygone BCD, par exemple sur son côté BD, décrivés un rectangle BDEF égal à ce polygone (n); sur le côté DE de ce rectangle, décrivés aussi un rectangle DGHE égal au polygone A (n): trouvés une moyenne proportionnelle DI entre les côtés BD & DG (n): sur cette moyenne proportionnelle DI, décrivés un polygone DIK semblable au polygone BCD (n): il fera égal au polygone A.

Démonst. Le rapport du polygone BCD au polygone DIK est égal à celui du côté BD au côté DG (n), puisque ces polygones sont semblables entr'eux (c), & que les côtés BD, DI & DG sont continuellement proportionnels (c): or le rapport du côté

BD au côté **DG**, est égal à celui du rectangle **BDEF** au rectangle **DGHE** (*n*), puis- N. 367.
 que ces rectangles ont la même hauteur **DE** (*c*); & le rapport du rectangle **BDEF** au rectangle **DGHE**, est égal à celui du polygone **BCD** au polygone **A**, puisque le rectangle **BDEF** est égal au polygone **BCD** (*c*), & que le rectangle **DGHE** l'est au polygone **A** (*c*); donc le rapport du polygone **BCD** au polygone **DIK**, est égal à celui du même polygone **BCD** au polygone **A** (*n*); & par conséquent le polygone N. 342.
DIK est égal au polygone **A**. Ainsi le poly- N. 340.
 gone **DIK** est semblable au polygone **BCD** (*c*), & égal au polygone **A** (*d*); donc **C. Q. F. F.**

S C H O L I E.

Nous supprimons les Propositions 26 ; 27 , 28 & 29^e , parce qu'elles sont inutiles.



PROPOSITION XXX.

PROBLEME.

401. *Diviser en moyenne & extrême raison , une ligne droite donnée.*

Fig. 33. **I**L faut diviser la ligne droite AB^* , en moyenne & extrême raison.

Const. Divisés la ligne AB en deux parties AC & CB , telles que le rectangle fait de cette ligne AB & de la moins grande CB de ces parties , soit égal au carré de

N. 193. la plus grande $AC(n)$.

Démonst. Puisque le rectangle fait des lignes AB & CB est égal au carré de la li-

N. 389. gne $AC(c)$; $\therefore AB : AC : CB (n)$; & par conséquent la ligne AB est divisée en

N. 365. moyenne & extrême raison au point $C(n)$; donc C. Q. F. F.



PROPOSITION XXXI.

THEOREME.

402. Si des Polygones décrits sur les côtés d'un triangle rectangle, sont semblables entr'eux, & semblablement posés sur ces côtés; la surface de celui qui est décrit sur l'hypoténuse, sera égale à la somme des surfaces de ceux qui sont décrits sur les deux autres côtés.

SI les polygones X, Y & Z* sont sem- Fig. 94.
blables entr'eux, & semblablement posés sur les côtés du triangle rectangle ABC; la surface du polygone X, sera égale à la somme des surfaces des polygones Y & Z.

Const. Du sommet B de l'angle droit ABC, abaissés la perpendiculaire BD au côté AC (n).

N. 93.

Démonst. Les triangles ABC & ADB sont semblables entr'eux (n); ainsi les côtés AC, AB & AD sont continuellement proportionnels (n); & par conséquent, puisque les polygones X & Y décrits l'un sur AC, & l'autre sur AB, sont semblables entr'eux (h), le polygone X est au polygone Y, comme le côté AC est au côté AD (n); N. 379.
N. 373.
N. 394.

424 LES ELEMENS D'EUCLIDE ;

- & en renversant , le polygone Y est au polygone X , comme le côté AD est au côté AC (n). Or en comparant le triangle ABC au triangle CBD , on démontre de la même maniere , que le polygone X est au polygone Z , comme le côté AC est au côté DC ; & par conséquent , en renversant , que le polygone Z est au polygone X , comme le côté DC est au côté AC (n) : donc les six quantités Y , X , AD , AC , Z & DC sont telles , que les quatre premières Y , X , AD & AC sont proportionnelles ; & que la 5^e Z & la 2^e X , la 6^e DC & la 4^e AC le sont aussi ; & par conséquent la somme de la 1^{re} Y & de la 5^e Z , est à la seconde quantité X ; comme la somme de la 3^e AD & de la 6^e DC , est à la 4^e AC (n). Or la somme ADC de la 3^e & 6^e quantités , est égale à la 4^e quantité AC (c) ; donc la somme Y & Z de la 1^{re} & 5^e quantités , est égale à la 2^e quantité X (n) ; donc C. Q. F. D.

SCHOLIE.

Nous supprimons la 32^e Proposition ; parce qu'elle est inutile.



PROPO.

PROPOSITION XXXIII.

THEOREME.

403. Si des Cercles sont égaux entr'eux , les angles dont les sommets sont les centres de ces cercles , seront entr'eux comme les arcs de ces mêmes cercles , sur lesquels ils s'appuyent.

SI les cercles B & E* sont égaux entr'eux , l'angle ABC sera à l'angle DEF, comme l'arc AC est à l'arc DF. Fig. 35.

Const. Divisés l'arc AC en autant de parties AG, GH, &c. égales entr'elles, que le premier terme de l'exposant du rapport de cet arc à l'arc DF, contient d'unités; divisés aussi l'arc DF en autant de parties DK, KL, &c. égales entr'elles, que le second terme de ce même exposant, contient d'unités: du point B tirés aux points de divisions G, H, &c. les lignes BG, BH, &c.; & du point E aux points de divisions K, L, &c. les lignes EK, EL, &c.

Démonst. Les cercles B & E sont égaux entr'eux (h); & les arcs AG, GH, &c. DK, KL, &c. le sont aussi (c); ainsi les angles ABG, GBH, &c. DEK, KEL,

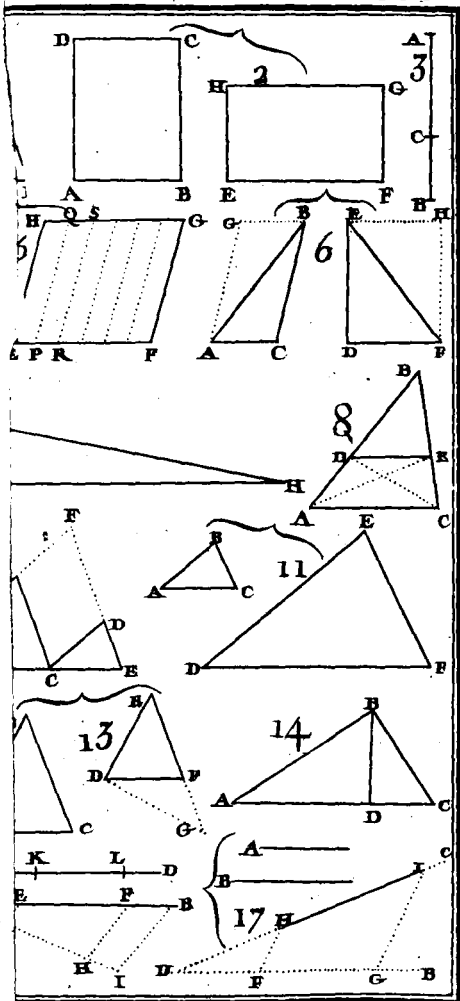
426 LES ELEMENTS D'EUCLIDE ,

- N. 449. &c. font aussi égaux entr'eux (n). Or puisque les arcs AG, GH, &c. DK, KL, &c. sont égaux entr'eux, & que les angles ABG, GBH, &c. DEK, KEL, &c. le sont aussi, l'angle ABG & l'arc AG, sont équi-multiples de l'angle DEK & de l'arc DK (n): l'angle ABC & l'arc AC, sont équi-multiples de l'angle ABG & de l'arc AG (n): & enfin l'angle DEF & l'arc DF, sont équi-multiples de l'angle DEK & de l'arc DK (n); donc l'angle ABC & l'arc AC, sont équi-multiples de l'angle DEF & de l'arc DF (n); & par conséquent l'angle ABC est à l'angle DEF, comme l'arc AC est à l'arc DF (n); donc C. Q. F. D.

COROLLAIRE I.

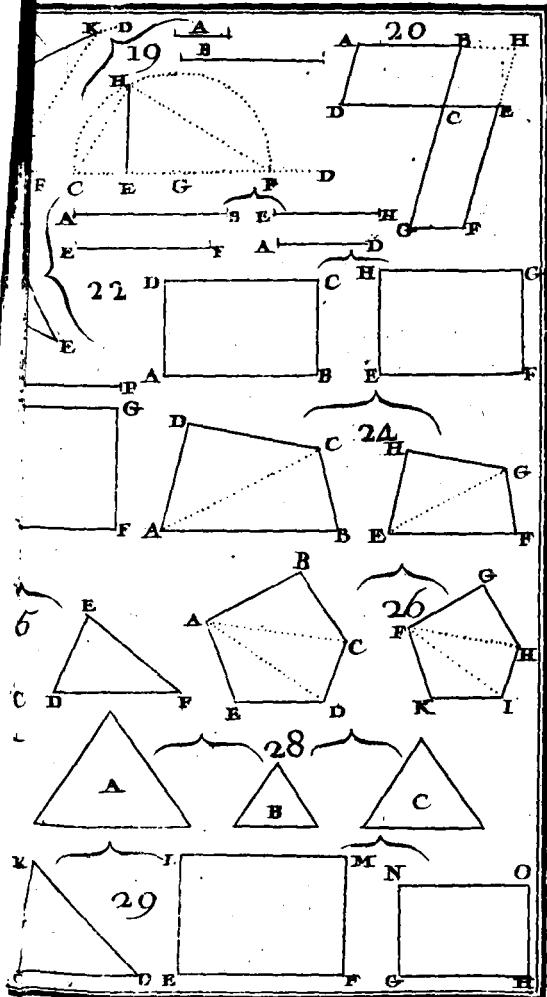
404. Il suit de ce Théorème, que si des cercles sont égaux entr'eux, les angles dont les sommets sont des points des circonférences de ces cercles, seront entr'eux, comme les arcs de ces mêmes cercles, sur lesquels ils s'appuyent.

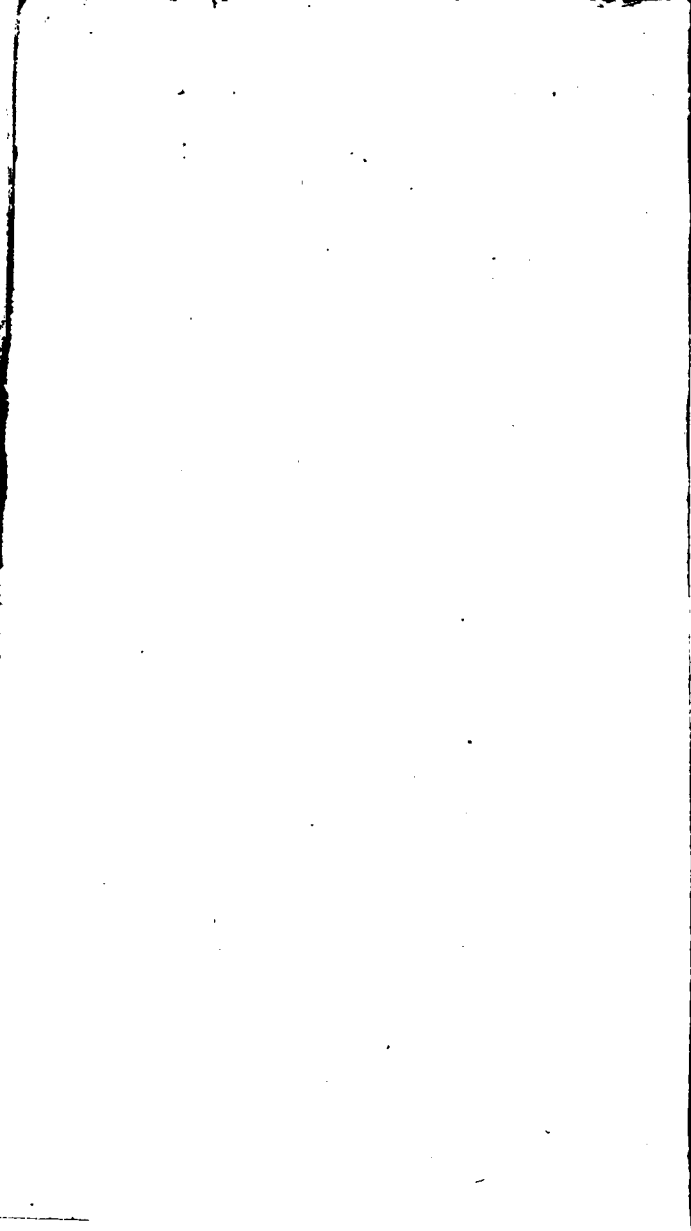
- Démonst.* Les angles dont les sommets sont des points de circonférences de cercles, sont les moitiés de ceux dont les sommets sont les centres de ces mêmes cercles, si les uns & les autres s'appuyent sur les mêmes arcs de ces cercles (n); ainsi les premiers sont équi-multiples des derniers

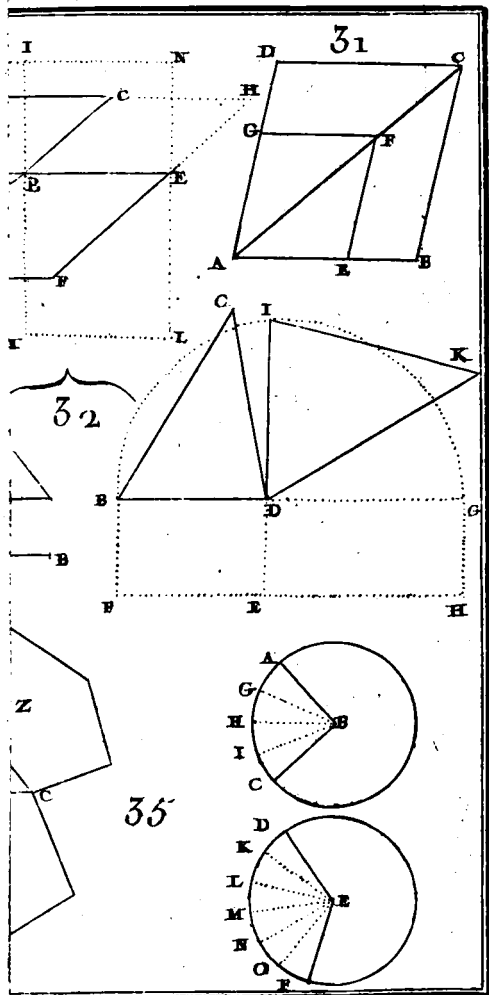


Elé

F







0
1
2
3
4
5
6
7
8
9

THE UNIVERSITY OF CHICAGO

1
 2
 3
 4
 5
 6
 7
 8

(n) ; & par conséquent ils ont entr'eux le N. 296. même rapport que ces derniers (n) : or ces N. 347. derniers ont entr'eux le même rapport que les arcs sur lesquels ils s'appuyent (n) ; donc N. 403. les premiers ont aussi le même rapport que ces arcs ; donc C. Q. F. D.

COROLLAIRE II.

405. Il suit aussi de ce Théorème ; Premièrement, que les *secteurs de cercles égaux entr'eux*, sont entr'eux comme les arcs de ces secteurs. Secondement, qu'un cercle est à un secteur de ce cercle ; comme la circonférence de ce même cercle, est à l'arc de ce secteur.

Fin du sixième Livre.

Nous supprimons les 7, 8 & 9^e Livres, parce qu'ils ne considèrent que la *Quantité discrete*, c'est-à-dire les Nombres ; & que nous nous sommes proposé de ne traiter que de la *Quantité continue*. Nous supprimons aussi le 10^e Livre, parce qu'il ne considère les *Quantités continues*, que pour déterminer celles qui relativement à d'autres, ne peuvent point être rendues *discrettes*.



LES ELEMENS D'EUCLIDE.

LIVRE ONZIEME.

ON a traité dans les Livres précédens, des lignes qui sont dans un même Plan ; mais avant que de passer aux solides , il est nécessaire de considérer aussi celles qui sont dans des Plans différens , & les différentes positions respectives de ces Plans. Cet objet étoit celui du onzième Livre des Elemens d'Euclide ; mais ceux qui ont rassemblé les Ouvrages de ce Géometre , ont joint le onzième Livre au douzième qui traite des solides , de manière que de 14 Livres d'Elemens , ils n'en ont fait que 13. Cette faute est irréparable , à cause du grand nombre de Mathématiciens qui citent cet Ouvrage ; ainsi tout ce que j'ai pû faire , a été de diviser ce Livre en deux Parties , sans interrompre l'ordre des Propositions.

La premiere Partie qui fait le onzième Livre , traite des Plans. Euclide y détermine les conditions auxquelles une ligne droite est perpendiculaire à un Plan ; y établit des principes pour connoître si des lignes sont dans un même Plan ; y enseigne la maniere de tirer des perpendiculaires à des Plans ; & y prescrit les conditions auxquelles on peut conclure que des Plans sont paralleles entr'eux. Toutes connoissances absolument nécessaires à la coupe des pierres , à l'Astronomie , à la Gnomonique , &c.

La seconde Partie qui devoit faire le douzième Livre , traite des solides. Euclide y établit les premiers principes des solides ; y détermine les conditions auxquelles certains sont égaux entr'eux ; y considere les rapports de quelques autres ; & y pose dans toutes ces Propositions les premiers fondemens du mesurage des corps.

DEFINITIONS.

I.

406. **O**N nomme Corps ou Solide , ce qui est étendu en longueur , largeur & épaisseur.

COROLLAIRE.

407. Il suit de cette Définition, que les extrémités d'un Corps sont des Surfaces.

DEMONSTRATION.

Premièrement. Les extrémités d'un Corps ne sont point étendues en longueur, largeur & épaisseur, puisque si elles l'étoient, elles
 N. 406. seroient des Corps (n) : or si les extrémités d'un Corps étoient des Corps, elles auroient des extrémités ; & par conséquent elles ne seroient point celles de ce Corps, mais ce seroit leurs extrémités qui le seroient.

Secondement. Elles ne sont point étendues seulement en longueur ; car puisque
 N. 406. les Corps sont étendus en trois sens (n), il faut nécessairement que ce qui termine les Corps, termine deux de ces sens : or ce qui n'est étendu qu'en un sens, ne peut point en terminer deux ; donc les extrémités d'un Corps ne sont point étendues seulement en longueur.

Les extrémités d'un Corps ne sont donc point étendues en longueur, largeur & épaisseur ; elles ne le sont point non plus en longueur seulement ; elles ne sont donc étendues qu'en longueur & largeur (n) ; elles
 N. 2.
 N. 9. sont donc des surfaces (n).

408. On dit qu'une ligne est tirée dans

un Plan, ou est dans un Plan, lorsque toutes ses parties touchent ce Plan prolongé, s'il est nécessaire.

Les Lignes CD & EF * sont dans le Fig. 1.
Plan X.

409. On dit que plusieurs Plans sont dans un même Plan, lorsqu'étant prolongés, ils se rencontrent de manière qu'ils ne forment plus qu'un seul Plan.

II.

410. On dit qu'une ligne est perpendiculaire à un Plan, lorsqu'elle est perpendiculaire à toutes les lignes de ce plan, avec lesquelles elle a un point commun.

La Ligne AB * est perpendiculaire au Fig. 2.
Plan X, si elle l'est aux lignes CD , EF , &c. qu'elle rencontre au point B, & qui sont dans ce Plan.

411. On nomme commune section de deux Plans, une ligne qui est commune à ces deux Plans.

La Ligne AB * qui est en même tems Fig. 2.
dans le Plan X & dans le Plan Y, est la commune section de ces deux Plans.

III.

412. On dit que deux Plans sont réciproquement perpendiculaires l'un à l'autre, lorsque les lignes droites tirées dans l'un de ces Plans, & perpendiculaires à leur commune section, sont perpendiculaires à l'autre.

432 LES ELEMENS D'EUCLIDE ,

Fig. 2. Le Plan Y^* est perpendiculaire au Plan X , si les lignes CD , EF &c. tirées dans le Plan Y , & perpendiculaires à sa commune section AB avec le Plan X , sont perpendiculaires à ce Plan X .

IV.

413. L'inclinaison d'une ligne droite à un Plan, est l'angle aigu formé par cette ligne, & par une autre ligne droite tirée dans ce Plan, du point auquel cette première ligne le rencontre, à celui auquel une perpendiculaire abaissée d'un point quelconque de cette même première ligne à ce même Plan, le rencontreroit.

Fig. 3. L'angle ABC^* formé par la ligne AB , & par la ligne BC tirée dans le Plan X , du point B au point C auquel la perpendiculaire AC rencontre ce Plan, est l'inclinaison de la ligne AB à ce Plan X .

V.

414. Un Plan incliné à un autre, est un Plan disposé à l'égard de cet autre, de manière que deux lignes droites tirées chacune dans chacun de ces Plans, d'un même point de leur commune section, & perpendiculaires à leur commune section, forment un angle aigu.

Fig. 4. Le Plan Y^* est incliné au Plan X , si l'angle ABC formé par les perpendiculaires BA & BC à la commune section DE de

ces Plans , & tirées l'une dans le Plan Y , & l'autre dans le Plan X , est un angle aigu.

415. L'inclinaison d'un Plan à un autre, est l'angle aigu formé par deux lignes droites, tirées chacune dans chacun de ces Plans , d'un même point de leur commune section , & perpendiculaires à leur commune section.

L'angle aigu ABC^* formé par les perpendiculaires BA & BC à la commune section DE des Plans Y & X , & tirées l'une dans le Plan Y , & l'autre dans le Plan X , est l'inclinaison du Plan Y au Plan X . Fig. 4.

416. L'angle d'inclinaison d'un Plan à un autre , est la différence qu'il y a de l'inclinaison de ces Plans , à un angle droit.

L'angle ABF^* est l'angle d'inclinaison du Plan Y au Plan X . Fig. 4.

V I.

417. Les Plans également ou semblablement inclinés à d'autres Plans , chacun à chacun , sont ceux dont les inclinaisons sont égales entr'elles ; ou dont les angles d'inclinaison sont égaux entr'eux.

V I I.

418. Les Plans parallèles , sont ceux dont tous les points des uns sont également éloignés de tous les points correspondans des autres.

419. Il suit de cette Définition , que des Plans paralleles ne se rencontrent point.

VIII.

420. Les solides *semblables* entr'eux , sont ceux qui sont terminés par un pareil nombre de surfaces semblables chacune à chacune.

IX.

421. Les solides *égaux & semblables* entr'eux , sont ceux qui sont terminés par un pareil nombre de surfaces égales & semblables chacune à chacune.

422. On nomme figures solides *égales entr'elles* , celles dont les solidités sont égales entr'elles.

X.

423. Un *angle solide* , est un angle formé par plus de deux angles plans , qui ont un même point pour sommet , & qui ne sont point dans un même Plan.

Fig. 5. L'angle A^* formé par les angles plans EAD , DAC , CAB & BAE , qui ont le même point A pour sommet , & qui ne sont point dans un même Plan , est un angle solide.

X I.

424. La *Pyramide* est un solide terminé par plus de deux Plans triangulaires ,

qui ont un point commun entr'eux , & les côtés opposés à ce point, chacun dans un même Plan.

Le solide *ABCD* * terminé par les Plans Fig. 6.
triangulaires *ABD* , *DBC* , *CBA* qui ont le point *B* commun entr'eux , & les côtés *AD* , *DC* & *AC* chacun dans le même Plan *ADC* , est une Pyramide.

425. La base d'un solide , est celui des Plans qui le terminent , sur lequel on suppose qu'il est posé.

Le Plan *ADC* * est la base de la Pyra- Fig. 6.
mide *ABCD*.

426. On nomme *Pyramides triangulaires* , celles dont les bases sont des triangles : *Quadrangulaires* , celles dont les bases sont des quadrilateres : *Pentagonales* , celles dont les bases sont des pentagones : &c.

XII

427. Le *Prisme* est un solide terminé par deux Plans quelconques égaux , semblables & paralleles entr'eux , & par des parallelogrammes.

Le solide *X* * terminé par les deux Plans Fig. 7.
ALMKIH & *BCDEFG* égaux , semblables & paralleles entr'eux , & par les Parallelogrammes *ABGH* , *HGFI* , &c. est un *Prisme*.

428. On nomme *Prismes triangulai-*

436 LES ELEMENS D'EUCLIDE ;
res, ceux dont les bases sont des triangles :
Quadrangulaires, ceux dont les bases sont
des quadrilateres : *Pentagones*, ceux
dont les bases sont des pentagones, &c.

429. Le Prisme quadrangulaire dont les
plans opposés sont paralleles, se nom-
me *Parallelepiped*.

XIII.

430. La *Sphere* est un solide terminé
par une surface, dont tous les points sont éga-
lement éloignés d'un certain point de ce

Fig. 3. solide.

*Le Solide X * est une Sphere.*

XIV.

431. Le *centre* d'une *Sphere*, est le
point de cette *Sphere*, également éloigné
de tous les points de sa surface.

Fig. 3. *Le point C * est le centre de la Sphere X.*

XV.

432. Le *Diametre* d'une *Sphere*, est
une ligne droite quelconque qui passe par le
centre de cette *Sphere*, & est terminée de
part & d'autre à sa surface.

Fig. 3. *La ligne AB * est le Diametre de la
Sphere X.*

433. Le *Rayon* d'une *Sphere*, est une
ligne droite quelconque tirée du centre de
cette *Sphere* à sa surface.

Fig. 3. *La ligne CB * est un Rayon de la Sphè-
re X.*

LIVRE ONZIÈME. 437
XVI.

434. L'axe d'une Sphere est un Diametre fixe de cette Sphere , sur lequel elle tourne.

Le Diametre AB est l'axe de la Sphere X, si ce Diametre étant immobile par rapport à cette Sphere, elle tourne sur lui.* Fig. 1.

XVII.

435. Le Cone est un solide terminé d'un côté par un point, d'un autre côté par un cercle, & de chaque autre côté par une surface qui toucheroit tous les points d'une ligne droite, qui seroit tirée de ce point à un point quelconque de la circonférence de ce cercle.

Le solide ABCD, terminé d'un côté par le point B, d'un autre côté par le cercle ADC, & de chaque autre côté par une surface qui toucheroit tous les points d'une ligne droite BA, tirée de ce point B à un point quelconque A de cette circonférence, est un Cône.* Fig. 2.

XVIII.

436. La base d'un Cône est le cercle qui le termine par l'un de ses côtés.

XIX.

437. L'axe d'un Cône, est une ligne droite tirée du sommet de ce Cône au centre de sa base.

La ligne BE est l'axe du Cône ABCD.* Fig. 3.

438 LES ELEMENTS D'EUCLIDE ,
X X.

438. Le *Cylindre* est un solide terminé par deux cercles égaux & parallèles entr'eux , & par une surface qui toucheroit tous les points d'une ligne droite, tirée d'un point quelconque de la circonférence de l'un de ces cercles , au point correspondant de la circonférence de l'autre.

Fig. 1c. La figure X* terminée par les deux cercles ABC & DEF égaux & parallèles entr'eux , & par une surface qui toucheroit tous les points d'une ligne droite AD, tirée d'un point quelconque A de la circonférence du cercle ABC , au point correspondant D de la circonférence du cercle DEF , est un Cylindre.

X X I.

439. L'*axe* d'un Cylindre, est une ligne droite tirée du centre de l'un des cercles qui terminent ce Cylindre, au centre de l'autre cercle.

Fig. 10. La ligne GH* est l'axe du Cylindre X.

X X I I.

440. La *base* d'un Cylindre , est l'un quelconque des cercles qui le terminent.

Fig. 10. Le cercle ABC* est la base du Cylindre X.

X X I I I.

441. On nomme *Cônes semblables* entr'eux , ceux dont les axes & les Diamètres

de leurs bases , sont proportionnels. Il en est de même des Cylindres.

XXIV.

442. L'*Exaèdre* ou le *Cube* , est un solide terminé par six carrés.

XXV.

443. Le *Tétraèdre* est un solide terminé par quatre triangles équilatéraux , & égaux entr'eux.

XXVI.

444. L'*Octaèdre* est un solide terminé par huit triangles équilatéraux , & égaux entr'eux.

XXVII.

445. Le *Dodécaèdre* est un solide terminé par douze pentagones réguliers , & égaux entr'eux.

XXVIII.

446. L'*Icosaèdre* est un solide terminé par vingt triangles équilatéraux , & égaux entr'eux.

XXIX.

447. On dit que des lignes *sont dans un même Plan* , lorsque l'on peut concevoir un Plan tel , que toutes les parties de ces lignes le toucheroient au même instant.

XXX.

448. On dit qu'un solide est *inscrit* dans un autre , lorsque chaque angle de ce so-

440 LES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE ,
 lide a pour sommet un point de la surface
 de cet autre.

XXXI.

449. On dit qu'un solide est *circonscri*
 à un autre , lorsque chaque côté de ce so-
 lide a un point commun avec le sommet
 de chaque angle de cet autre.

PREMIERE PARTIE.

DES PLANS.

PROPOSITION I.

THEOREME.

450. *Toutes les parties d'une ligne droite
 sont dans un même Plan.*

Fig. 11. **U**N ligne droite AB * dans un Plan
 X , & une ligne droite BC hors de
 ce plan , ne sont point une seule ligne droi-
 te ABC.

Const. Du point B de la ligne AB , éle-
 vés dans le plan X , la perpendiculaire BE
 N. 92. à cette ligne AB (n) : du point B de la ligne
 BE , élevés aussi dans le même plan X , la
 N. 92. perpendiculaire BD à cette ligne BE (n).

Démonst. La somme des angles ABE &

DBE formés par la ligne BE, & par les lignes AB & BD tirées chacune de l'extrémité B de cette ligne BE, est égale à celle de deux angles droits, puisque l'angle ABE est droit (c), & que l'angle DBE l'est aussi (c); donc les lignes AB & BD ne sont qu'une seule ligne droite ABD (n); & par conséquent les lignes AB & BC ne sont point une seule ligne droite ABC; donc C. Q. F. D. N. 97.
N. 7.

PROPOSITION II.

THEOREME.

451. *Deux lignes droites qui ont un point commun entr'elles, sont dans un même Plan.*

LEs lignes droites AB & CD* qui ont le point E commun entr'elles, sont dans un même plan. Fig. 124

Const. De l'extrémité de l'une des lignes AB & CD, par exemple de l'extrémité A de la ligne AB, tirés à l'une des extrémités D de la ligne CD, la ligne AD.

Démonst. On ne peut point concevoir qu'il soit impossible aux lignes AB & CD d'être dans un même plan, que l'on n'ad-

442 LES ELEMENS D'EUCLIDE ;

mette en même tems que la surface du triangle AED peut être dans différens plans.

- N. 450. Or la surface du triangle AED ne peut point être dans différens plans (n), puisque si elle y étoit, toutes les parties de quelque une des lignes droites AB & CD, ne feroient point dans un même plan ; donc on ne conçoit point qu'il soit impossible aux lignes AB & CD d'être dans un même plan ; ainsi on conçoit qu'il leur est possible d'y être ; & par conséquent elles y sont (n) ; donc C. Q. F. D.
- N. 447.

COROLLAIRE.

452. Il suit de la démonstration de ce Théorème, que toutes les parties d'un triangle sont dans un même plan.

PROPOSITION III.

THEOREME.

453. La commune section de deux Plans, est une ligne droite.

Fig. 13. **L**A commune section AB* des plans CD & EF, est une ligne droite.

Démonst. La commune section de deux plans doit être en même tems dans chacun

de ces plans (*n*). Or si la commune section N. 412.
 AB des plans CD & EF, n'alloit pas directement du point A au point B, elle ne seroit pas en même tems dans le plan CD & dans le plan EF; puisque si elle se courboit vers C ou vers D, elle ne seroit plus dans le plan EF; que si elle se courboit vers E ou vers F, elle ne seroit plus dans le plan CD; & que si elle se courboit vers tout autre point, elle ne seroit plus dans aucun de ces plans; donc la commune section AB des plans CD & EF, va directement du point A au point B; & par conséquent elle est une ligne droite (*n*); N. 7.
 donc C. Q. F. D.

PROPOSITION IV.

THEOREME.

454. *Si une ligne droite est perpendiculaire à deux autres lignes droites avec lesquelles elle a un point commun, elle sera aussi perpendiculaire au Plan de ces deux autres lignes.*

SI la ligne AB* est perpendiculaire à Fig. 14.
 chacune des lignes CD & EF avec lesquelles elle a le point B commun, elle sera aussi perpendiculaire au plan X de ces lignes.

Const. Du point B pris pour centre, &

444 LES ELEMENTS D'EUCLIDE ,
 avec un rayon BC pris à volonté , décrits des arcs qui coupent , l'un en C , un autre en E , un autre en D & le dernier en F , les lignes CD & EF : du point E tirés au point C la ligne EC ; & du point F au point D , la ligne FD ; par le point B tirés dans le plan X , une ligne droite quelconque GH , qui rencontre les lignes EC & FD , l'une en G & l'autre en H : du point A tirés aux points C , G , E , D , H & F , les lignes AC , AG , AE , AD , AH & AF.

DEMONSTRATION.

1°. Les triangles ABC, ABE, ABD & ABF ont les angles ABC, ABE, ABD & ABF égaux entr'eux, puisque ces angles sont droits (*h*); & les côtés qui forment ces angles, sont aussi égaux entr'eux, puisque le côté BA leur est commun, & que les côtés BC, BE, BD & BF sont égaux entr'eux (*c*); ainsi les autres côtés AC, AE, AD & AF de ces triangles sont aussi égaux entr'eux (*n*).

2°. Les triangles EBC & DBF ont l'angle EBC égal à l'angle DBF (*n*), puisque ces angles sont opposés au sommet; & les côtés BE & BC qui forment le premier, égaux, aux côtés BD & BF qui forment le dernier, puisque ces côtés BE, BC, BD &

BF sont égaux entr'eux (c) ; ainsi l'autre côté **EC** du premier triangle est égal à l'autre côté **DF** du second (n) , & l'angle **BCE** du premier l'est à l'angle **BDF** du second , puisque tous les angles de ces deux triangles sont aussi égaux chacun à chacun (n). N. 10.

3°. Les triangles **GBC** & **HBD** sont tels, que le côté **BC** du premier est égal au côté **BD** du second (c) , & que les angles **BCG** & **GBC** qui sont aux extrémités de ce côté **BC** du premier , sont égaux aux angles **BDH** & **HBD** qui sont aux extrémités de ce côté **BD** du second , puisque les angles **BCG** & **BDH** , ou **BCE** & **BDF** sont égaux entr'eux (d) , & que les angles **GBC** & **HBD** qui sont opposés au sommet, sont aussi égaux entr'eux (n) ; ainsi les autres côtés **CG** & **BG** du premier triangle , sont égaux aux autres côtés **DH** & **BH** du second , chacun à chacun (n). N. 98.

4°. Les triangles **ACE** & **ADF** sont tels, que les côtés du premier sont égaux à ceux du second , chacun à chacun , puisque **AC** , **AE** , **AD** & **AF** sont égaux entr'eux (d) , & que **EC** & **DF** le sont aussi (d) ; ainsi les angles du premier de ces triangles, sont égaux à ceux du second , chacun à chacun (n) ; & par conséquent l'angle **ACG** est égal à l'angle **ADH**. N. 97.

5°. Les triangles **ACG** & **ADH** ont

446 LES ELEMENTS D'EUCLIDE ,
 l'angle ACG égal à l'angle ADH (d) , &
 les côtés AC & CG qui forment le premier,
 égaux aux côtés AD & DH qui forment le
 second , chacun à chacun , puisque AC est
 égal à AD (d), & que CG l'est à DH (d); ain-
 si l'autre côté AG du premier triangle , est
 N. 30. égal à l'autre côté AH du second (n).

6°. Enfin les triangles ABG & ABH
 sont tels , que les côtés du premier sont
 égaux à ceux du second , chacun à chacun ,
 puisque AB est commun à ces deux trian-
 gles , que BG est égal à BH (d) , & que
 AG l'est à AH (d) ; ainsi les angles du pre-
 mier de ces triangles , sont égaux à ceux du
 N. 37. second, chacun à chacun (n); & par consé-
 quent l'angle ABG est égal à l'angle ABH.
 Or puisque l'angle ABG est égal à l'angle
 ABH , la ligne AB est perpendiculaire à la
 N. 12. ligne GH (n) ; & puisque la même démon-
 stration subsisteroit , en quelqu'endroit du
 plan X que fût tirée la ligne GH , pourvu
 qu'elle passât par le point B , la ligne AB
 est perpendiculaire à toutes les lignes du
 plan X , avec lesquelles elle a un point
 commun ; & par conséquent elle est perpen-
 N. 410. diculaire à ce plan (n) ; donc C. Q. F. D.



PROPOSITION V.

THEOREME.

455. Si une ligne droite est perpendiculaire à trois autres lignes droites avec lesquelles elle a un point commun, ces trois lignes seront dans un même Plan.

SI la ligne AB * est perpendiculaire à Fig. 19.
chacune des lignes BC, BD & BE avec lesquelles elle a le point B commun, ces trois lignes BC, BD & BE seront dans un même plan.

Démonst. Les lignes BC & BD sont dans un même plan X (n), puisqu'elles ont N. 451.
un point B commun entr'elles (h); ainsi si la ligne BE est la commune section d'un plan quel-conque & du plan X, les trois lignes BC, BD & BE seront dans un même plan, puisque cette ligne BE sera aussi dans ce plan X (n). Or la ligne BE est la com- N. 451.
mune section d'un plan Y & du plan X; car puisque les lignes BA & BE ont un point B commun entr'elles (h), elles sont dans un même plan Y (n); ainsi si la commune N. 451.
section des plans Y & X passoit au-dessus

du point E vers F, ou au-dessous vers G, & étoit par exemple la ligne BF ou la ligne BG, l'angle ABF ou ABG formé par la ligne AB & par cette commune section BF ou BG, seroit moins grand ou plus grand

- n. 72. que l'angle ABE (n) ; & par conséquent il ne seroit point droit, puisque l'angle ABE l'est (h). Mais l'angle formé par la ligne AB, & par la commune section des plans Y & X est droit, puisque la ligne AB qui est perpendiculaire aux lignes BC & BD (h), l'est aussi au plan X de ces lignes
- n. 454. (n), & par conséquent à toutes les lignes de ce plan, avec lesquelles elle a un point
- n. 410. commun (n) ; donc la commune section des plans Y & X ne passe ni au-dessus ni au-dessous du point E ; & par conséquent elle passe par le point E. Or puisque cette commune section passe par le point E, elle est la ligne BE ; & par conséquent les trois lignes BC, BD & BE sont dans un même plan ; donc C. Q. F. D.



PROPOSITION VI.

THEOREME.

456. Si deux lignes droites sont perpendiculaires à un même Plan, elles seront parallèles entr'elles.

SI les lignes AB & CD * sont perpendiculaires chacune au plan X, elles seront parallèles entr'elles. Fig. 16.

Const. Du point B au point D, tirés dans le plan X, la ligne BD : du point D élevés dans le même plan, une perpendiculaire DE à cette ligne BD (n) : faites cette perpendiculaire égale à la ligne AB : du point B tirés au point E, la ligne BE : du point A tirés aux points E & D, les lignes AE & AD. N. 92.

Démonst. La somme des angles intérieurs ABD & CDB que les lignes AB & CD forment avec la ligne BD, est égale à celle de deux angles droits, puisque ces lignes AB & CD étant perpendiculaires au plan X (h), elles le sont aussi (n) à la ligne BD qui est tirée dans ce plan (c); ainsi si ces lignes AB & CD sont dans un même plan, elles seront parallèles entr'elles (n). Or les N. 410.
P p N. 126.

450 LES ELEMEENS D'EUCLIDE,

lignes AB & CD sont dans un même plan; car les triangles ABD & BDE ont l'angle ABD égal à l'angle BDE, puisque l'angle ABD est droit (*d*), & que l'angle BDE l'est aussi (*c*); & les côtés BD & BA qui forment le premier, sont égaux aux côtés BD & DE qui forment le second, chacun à chacun; puisque BD est commun à ces deux triangles, & que BA est égal à DE (*c*); ainsi l'autre côté AD du premier, est
 n. 10. égal à l'autre côté BE du second (*n*); & par conséquent les triangles ADE & ABE qui ont le côté AE commun entr'eux, & le côté DE égal au côté AB (*c*), ont aussi le côté AD égal au côté BE. Or puisque les côtés du triangle ADE sont égaux à ceux du triangle ABE, chacun à chacun, les angles du premier sont aussi égaux à ceux du
 n. 17. second, chacun à chacun (*n*); donc l'angle ADE est égal à l'angle ABE; & par conséquent, puisque l'angle ABE qui est formé par une ligne AB perpendiculaire au plan X, (*h*) & par une ligne BE tirée dans ce plan,
 N. 410. est droit (*n*), l'angle ADE l'est aussi. Ainsi la ligne CD est perpendiculaire à la ligne
 N. 410. DE (*n*), puisqu'elle est perpendiculaire au plan X (*h*), & que la ligne DE est tirée dans ce plan (*c*); la ligne AD est aussi perpendiculaire à cette même ligne DE (*d*); & enfin la ligne BD l'est aussi (*c*); donc les trois

lignes CD , AD & BD sont dans un même plan (n); or la ligne AB qui est l'un des côtés ^{N. 455.} du triangle ABD , est dans le même plan que les lignes AD & BD qui sont les autres côtés de ce triangle (n); donc les lignes ^{N. 452.} AB & CD sont dans un même plan; & par conséquent elles sont parallèles entr'elles; donc C. Q. F. D.

COROLLAIRE.

457. Il suit de la démonstration de ce Théorème, que *deux lignes parallèles sont dans un même Plan.*

PROPOSITION VII.

THEOREME.

458. *Une ligne droite qui est tirée d'une parallèle à une autre, est dans le même Plan que ces parallèles.*

LA ligne droite EF * qui est tirée de la ^{Fig. 17.} parallèle AB à la parallèle CD , & ces parallèles sont dans un même plan.

Démonst. Si la ligne droite EF n'étoit point dans le même plan que les parallèles AB & CD , la commune section du plan de ces parallèles, & d'un autre plan quelcon-

452 LES ELEMENS D'EUCLIDE ;

que qui passeroit par les points E. & F, seroit une ligne droite différente de la ligne EF, puisque cette commune section est
 N. 411. dans le plan de ces paralleles (n) ; & cependant cette ligne droite auroit les points E & F communs avec la ligne EF, puisque cet autre plan quelconque passe par ces points E & F. Mais deux lignes droites qui ont deux points communs entr'elles, ne forment point deux lignes droites différentes (n) ; donc la commune section du plan des paralleles AB & CD, & d'un autre plan quelconque qui passe par les points E & F, n'est point une ligne droite différente de la ligne EF ; & par conséquent la ligne droite EF est dans le même plan que les paralleles AB & CD ; donc C. Q. F. D.

PROPOSITION VIII.

THEOREME.

459. *Si de deux lignes droites paralleles entr'elles, l'une est perpendiculaire à un Plan, l'autre le sera aussi.*

Fig. 16. **S**I les lignes AB & CD * sont paralleles entr'elles, & si l'une de ces lignes, par exemple la ligne AB, est perpendiculaire

au plan X, l'autre CD le fera aussi.

Const. La même que celle de la 6^e. Proposition. de ce Livre.

Démonst. On démontre de la même manière qu'on la fait dans la 6^e Proposition de ce Livre, que l'angle ADE est droit; ainsi la ligne DE qui est perpendiculaire à la ligne BD (*c*), l'est aussi à la ligne AD (*d*); donc elle est perpendiculaire au plan de ces lignes (*n*); & par conséquent, puisque la ligne CD qui est parallèle à la ligne AB (*h*), est dans le même plan que ces lignes BD & AD (*n*) qui sont tirées de l'une de ces parallèles à l'autre, cette même ligne DE est aussi perpendiculaire à la ligne CD (*n*). Or cette ligne CD est perpendiculaire à la ligne BD, puisqu'elle est parallèle à la ligne AB (*h*); & que par conséquent l'un des angles intérieurs ABD étant droit (*h*), l'autre CDB l'est aussi (*n*); donc cette ligne CD est perpendiculaire aux lignes BD & DE; & par conséquent elle l'est aussi au plan X de ces lignes (*n*); donc C. Q. F. D.

N. 454.



PROPOSITION IX.

THEOREME.

460. Si deux lignes droites sont parallèles chacune à une même ligne, elles seront aussi parallèles entr'elles ; quand même cette ligne ne seroit point dans le même Plan que ces deux premières.

Fig. 18. **S**I les lignes AB & CD * sont parallèles chacune à une ligne EF qui n'est point dans le même plan qu'elles, la ligne AB sera parallèle à la ligne CD.

Const. Du point G pris à volonté sur la ligne EF, abaissés une perpendiculaire GH à la ligne AB ; & une perpendiculaire GI à la ligne CD (n).

Démonst. Les lignes AB & EF sont parallèles entr'elles (h), & la ligne GH est perpendiculaire à l'une AB de ces parallèles (c) ; donc l'autre parallèle EF est perpendiculaire à cette ligne GH (n) ; & par conséquent, puisque par des raisons pareilles, elle l'est aussi à la ligne GI, elle est perpendiculaire au plan HGI de ces lignes (n). Or puisque la ligne EF est perpendiculaire au plan HGI, la ligne AB qui est

parallèle à cette ligne EF (h), est aussi perpendiculaire à ce même plan (n), & par une raison pareille, la ligne CD lui est aussi perpendiculaire; donc les lignes AB & CD sont perpendiculaires à un même plan; & par conséquent elles sont parallèles entr'elles; donc C. Q. F. D. N. 459

PROPOSITION X.

THEOREME.

461. *Si deux angles ont leurs côtés parallèles, chacun à chacun, & dirigés vers un même côté, ces deux angles seront égaux entr'eux; quand même ils ne seroient point dans un même Plan.*

SI les angles ABC & DEF * ont leurs Fig. 19.
côtés BA & BC , ED & EF parallèles
chacun à chacun, & dirigés vers un même
côté, ces angles seront égaux entr'eux.

Const. Prenés sur les côtés des angles
 ABC & DEF des parties BA & ED éga-
les entr'elles, & des parties BC & EF aus-
si égales entr'elles: tirés du point A au
point D , la ligne AD ; du point B au
point E , la ligne BE ; du point C au point
 F , la ligne CF ; du point A au point C ,

456 LES ELEMENS D'EUCLIDE ;
la ligne AC ; & du point D au point F , la
ligne DF.

Démonst. Les côtés BA & ED du qua-
drilatere ABED sont égaux entr'eux (*c*),
& paralleles (*h*) ; ainsi les autres côtés AD
& BE de ce même quadrilatere, sont aussi
N. 140. égaux & paralleles entr'eux (*n*) ; or par des
raisons pareilles , les côtés BE & CF du
quadrilatere BCFE sont aussi égaux & pa-
ralleles entr'eux ; donc les côtés AD & CF
N. 62. du quadrilatere ACFD sont égaux & pa-
& 129. ralleles entr'eux (*n*) ; & par conséquent ses
N. 140. autres côtés AC & DF le sont aussi (*n*).
Ainsi puisque le côté AC est égal au côté
DF , les triangles ABC & DEF qui ont le
côté BA égal au côté ED , & le côté BC
égal au côté EF (*c*) , ont aussi le côté AC
égal au côté DF (*d*) ; donc les angles du
premier de ces triangles , sont égaux à ceux
N. 37. du second , chacun à chacun (*n*) ; & par
conséquent l'angle ABC est égal à l'angle
DEF ; donc C. Q. F. D.



PROPO.

PROPOSITION XL

PROBLEME.

462. *D'un point donné hors d'un Plan, abaisser une perpendiculaire à ce Plan.*

DU point A * hors du plan X, il faut Fig. 20.
abaisser une perpendiculaire à ce plan.

Const. Tirés à volonté dans le plan X, une ligne droite BC : du point A abaissés une perpendiculaire AD à cette ligne (n) : N. 92. du point D auquel cette perpendiculaire rencontre la ligne BC, élevés une perpendiculaire DE à cette ligne BC (n) : du N. 92. point A, abaissés une perpendiculaire AE à cette ligne DE (n) : cette ligne AE sera N. 93. perpendiculaire au plan X.

Pour la démonstration : Par le point E, tirés une parallèle FG à la ligne BC (n). N. 130.

Démonst. La ligne BC est perpendiculaire aux lignes AD & DE (c) ; donc elle est perpendiculaire au plan ADE de ces lignes (n) ; & par conséquent, puisque la ligne FG est parallèle à cette ligne BC (c), elle est aussi perpendiculaire à ce même

458 LES ELEMEs D'EUCLIDE ,

- N. 459. plan (n). Or puisque la ligne FG est perpendiculaire au plan ADE, elle l'est aussi à la ligne AE de ce plan, avec laquelle
 N. 410. elle a le point E commun (n); donc la ligne AE qui est perpendiculaire à la ligne DE (c), l'est aussi à la ligne FG (d); & par conséquent elle est perpendiculaire au
 N. 454. plan X de ces lignes (n); donc C. Q. F. F.

PROPOSITION XII.

PROBLEME.

463. *D'un point donné dans un Plan, élever une perpendiculaire à ce Plan.*

Fig. 21. **D**U point A * dans le plan X, il faut élever une perpendiculaire à ce plan.

Const. D'un point B pris à volonté hors du plan X, abaissés une perpendiculaire
 N. 467. BC à ce plan (n): si cette perpendiculaire ne rencontre point le Plan X au point A, par le point A, tirés une parallele AD à
 N. 130. cette ligne BC (n); cette parallele sera perpendiculaire au plan X.

Démonst. La ligne AD est parallele à la ligne BC (c): or la ligne BC est perpendiculaire au plan X (c); donc la ligne AD est
 N. 459. aussi perpendiculaire à ce plan (n); donc C. Q. F. F.

PROPOSITION XIII.

THEOREME.

464. *Premierement. D'un point dans un Plan, on ne peut élever qu'une perpendiculaire à ce Plan : Secondement, d'un point hors d'un Plan, on ne peut abaisser qu'une perpendiculaire à ce Plan.*

Premierement. **D**U point A *, on ne Fig. 22. peut élever qu'une perpendiculaire AB au plan X : *Secondement*, du point B, on ne peut abaisser qu'une perpendiculaire BA au plan X.

Const. Du point A élevés sur le plan X, une ligne droite quelconque AC ; du point B tirés à un point quelconque D du plan X, une ligne droite BD.

DEMONSTRATION.

Premierement. La ligne AB est perpendiculaire au plan X (*h*) ; ainsi, si la ligne AC étoit aussi perpendiculaire à ce plan, elle seroit parallèle à la ligne AB (*n*). N. 456.
Or la ligne AC n'est point parallèle à la ligne AB (*n*), puisque ces lignes ont N. 56.
un point A commun entr'elles (*h*) ; donc

Qq ij

460 LES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE,
 si la ligne AB est perpendiculaire au plan
 X, la ligne AD ne l'est point.

Secondement. La ligne BA est perpendicu-
 laire au plan X (*h*); ainsi si la ligne BD étoit
 aussi perpendiculaire à ce plan, elle seroit
 N. 456. parallèle à la ligne BA (*n*). Or la ligne BD
 N. 56. n'est point parallèle à la ligne BA (*n*), puis-
 que ces lignes ont un point B commun en-
 tr'elles; donc &c. donc C. Q. F. D.

COROLLAIRE,

465. Il suit de ce Théorème, que si
deux Plans sont perpendiculaires l'un à
l'autre, une perpendiculaire abaissée d'un
point quelconque de l'un de ces Plans à l'autre,
passera par leur commune section,

Si le plan Y est perpendiculaire au plan
 Fig. 23. X *, une perpendiculaire abaissée d'un
 point quelconque A du plan Y, au plan X,
 passera par la commune section CD de ces
 plans.

Const. Du point A, abaissés une perpen-
 diculaire AB à la commune section CD
 N. 93. (*n*).

Démonst. La ligne AB tirée dans le
 plan Y, & perpendiculaire à la commune
 section CD de ce plan & du plan X (*c*),
 N. 412. est perpendiculaire au plan X (*n*), puisque
 le plan Y l'est aussi (*h*). Or du point A, on
 ne peut abaisser au plan X que la perpendi-

culaire $AB(n)$; donc puisque cette per- N. 464
pendiculaire passe par la commune section
 CD , toute ligne droite tirée du point A ,
qui ne passera point par cette commune sec-
tion, ne sera point perpendiculaire au plan
 X ; & par conséquent si une ligne droite qui
est tirée de ce point, est perpendiculaire à
ce plan, elle passe par cette commune sec-
tion; donc $C. Q. F. D.$

PROPOSITION XIV.

THEOREME.

466. *Si une même ligne droite est per-
pendiculaire à deux Plans, ces Plans
seront paralleles.*

S I la ligne AB * est perpendiculaire aux Fig. 24.
plans AD & BC , ces plans seront pa-
ralleles.

Const. Par un point D pris à volonté
dans le plan AD , tirés une parallele DC
à la ligne $AB(n)$: du point A tirés au N. 230.
point D la ligne AD ; & du point C au-
quel la ligne DC rencontre le plan BC ,
la ligne BC .

Démonst. Les lignes AB , DC , AD &
 BC sont dans un même plan (n) , puisque N. 458.

462 LES ELEMENTS D'EUCLIDE;

les lignes AB & DC sont paralleles (c) & que les lignes AD & BC sont tirées chacune de l'une de ces paralleles à l'autre (c); ainsi, puisque l'angle intérieur DAB formé par la ligne AD & par la ligne AB qui est perpendiculaire au plan AD (h), est droit (n), & que par des raisons pareilles, l'autre angle intérieur CBA est aussi droit, les lignes AD & BC qui forment ces angles avec cette ligne AB, sont paralleles (n); donc puisque les lignes AB & DC le sont aussi (c), le quadrilatere ABCD est un parallelogramme (n); & par conséquent le côté DC est égal au côté AB (n). Or puisque la même démonstration subsisteroit, à quelque point du plan AD que l'on prit le point D, tous les points de ce plan sont également éloignés des points correspondans du plan BC; & par conséquent ces plans sont paralleles (n); donc C. Q. F. D.



PROPOSITION XV.

THEOREME.

467. Si deux angles qui ne sont point dans un même Plan sont tels, que les côtés de l'un soient parallèles aux côtés de l'autre, chacun à chacun, les Plans de ces angles seront aussi parallèles.

SI les angles ABC & DEF * qui ne sont point dans un même plan, sont tels que les côtés BA & ED soient parallèles, & que les côtés BC & EF le soient aussi, le plan X de l'angle ABC, sera parallèle au plan Y de l'angle DEF. Fig. 15.

Const. Du point B abaissés une perpendiculaire BG au plan Y (n) : par le point G auquel cette perpendiculaire rencontre ce plan, tirés une parallèle GI au côté EF ; & une parallèle GH au côté ED (n). N. 462. N. 130.

Démonst. La ligne GI est parallèle à la ligne EF (c), & la ligne EF l'est à la ligne BC (h) ; ainsi la ligne GI est parallèle à la ligne BC (n) ; & par des raisons pareilles, la ligne GH l'est à la ligne BA. Or puisque les lignes GI & BC sont parallèles, la somme des angles intérieurs BGI & GBC N. 469.

464 LES ELEMENTS D'EUCLIDE ;

- N. 127. est égale à celle de deux angles droits (n) ;
 donc puisque l'angle intérieur BGI formé
 par la ligne GI , & par la ligne BG qui est
 N. 410. perpendiculaire au plan Y (c) , est droit (n) ,
 l'autre angle intérieur GBC l'est aussi ; & par
 conséquent puisque par des raisons pareilles ,
 l'angle GBA l'est aussi , la ligne BG est
 N. 454. perpendiculaire au plan X (n) . Or puisque
 la ligne BG est perpendiculaire au plan Y
 (c) , & au plan X (d) , elle est perpendicu-
 laire à chacun de ces plans ; & par consé-
 N. 466. quent ces plans sont parallèles (n) ; donc
 C. Q. F. D.

PROPOSITION XVI.

THEOREME.

468. *Si deux Plans paralleles sont cou-
 pés par un autre Plan , leurs communes
 sections seront paralleles.*

Fig. 26. **S**I les plans X & Y * sont paralleles ,
 leurs communes sections AB & CD
 avec le plan Z , seront paralleles.

Démonst. Les communes sections AB
 N. 411. & CD sont dans un même plan Z (n) ; ain-
 si si elles n'étoient point paralleles , étant
 prolongées autant qu'il le seroit nécessaire ,

elles se rencontreroient. Or étant prolongées autant qu'on le voudra, elles ne se rencontrent point, puisque l'une est dans le plan X, l'autre dans le plan Y (*n*), & N. 415. que ces deux plans qui sont parallèles (*h*), ne se rencontrent point (*n*); donc les communes sections AB & CD sont parallèles; donc C. Q. F. D.

PROPOSITION XVII.

THEOREME.

469. *Si plusieurs Plans parallèles coupent deux lignes droites, les parties de ces lignes, qui seront comprises entre ces Plans, seront proportionnelles.*

SI les plans X, Y & Z* qui coupent Fig. 27. les lignes AB & CD, sont parallèles, AE : EB :: CF :: FD.

Const. Du point A tirés au point D, la ligne AD.

Démonst. Les communes sections EG & BD du plan des lignes AB & AD, & des plans Y & Z, sont parallèles (*n*), puisque N. 453. les plans Y & Z sont parallèles (*h*); ainsi les côtés AB & AD du triangle BAD, sont divisés par une ligne EG parallèle à l'autre

466 LES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE ;

côté BD de ce triangle ; & par conséquent

N. 371. $AE : EB :: AG : GD (n)$: or par des raisons pareilles aux précédentes , $AG : GD$

$:: CF : FD$; donc $AE : EB :: CF : FD$

N. 342. (n) ; donc C. Q. F. D.

PROPOSITION XVIII.

THEOREME.

470. Si une ligne droite est perpendiculaire à un Plan, tous les Plans dans lesquels cette perpendiculaire se trouvera, seront aussi perpendiculaires à ce même Plan.

Fig. 18. **S**I la ligne AB* est perpendiculaire au plan X, un plan quelconque Y dans lequel cette ligne AB se trouvera, sera aussi perpendiculaire au plan X.

Const. Par un point quelconque E du plan Y, tirés une parallèle EF à la ligne

N. 130. AB (n).

Démonst. La ligne EF est parallèle à la ligne AB (c) : or la ligne AB est perpendiculaire au plan X (h) ; donc la ligne EF

N. 459. est aussi perpendiculaire à ce plan (n), & par conséquent elle l'est aussi à la commune

N. 410. section CD de ce plan & du plan Y (n). Or

puisque la même démonstration subsisteroit à quelque point du plan Y que l'on prit le point E, toutes les lignes tirées dans le plan Y parallèlement à la ligne AB, sont perpendiculaires au plan X; & par conséquent le plan Y lui est aussi perpendiculaire (n); donc C. Q. F. D.

PROPOSITION XIX.

THEOREME.

471. Si deux Plans qui se coupent sont perpendiculaires à un autre Plan, leur commune section lui sera aussi perpendiculaire.

Si les plans Y & Z * sont perpendiculaires au plan X, leur commune section AB, lui sera aussi perpendiculaire. Fig. 29.

Démonst. La commune section AB des plans Y & Z est dans ces deux plans (n): or si cette commune section AB inclinoit vers C ou vers D, elle ne seroit point dans le plan Z, puisque ce plan est perpendiculaire au plan X (h); si elle inclinoit vers E ou vers F, elle ne seroit point dans le plan Y, puisque ce plan est aussi perpendiculaire au plan X; & enfin par les mêmes raisons,

468 LES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE ;
 si elle inclinoit vers un point quelconque
 différent des précédens , elle ne seroit ni
 dans le plan Y ni dans le plan Z ; donc la
 commune section AB des plans Y & Z ,
 n'incline vers aucun côté du plan X ; & par
 conséquent , elle est perpendiculaire à ce
 plan (n) ; donc C. Q. F. D.

SECONDE PARTIE.

DES SOLIDES.

PROPOSITION XX.

THEOREME.

472. Si trois angles plans forment un
 angle solide , chacun de ces angles sera
 moins grand que la somme des deux
 autres.

Fig. 10. C Hacun des angles plans BAC, CAD
 & BAD* qui forment l'angle solide
 A , est moins grand que la somme des deux
 autres.

Const. Sur l'un des côtés AB du plus grand
 de ces angles, faites un angle BAE qui ait le
 point A de ce côté pour sommet , & qui
 n. 115. soit égal à l'angle BAC (n) : sur les côtés

AC & AE, prenés à volonté les parties AC & AE égales entr'elles : d'un point quelconque B du côté AB, tirés au point C, la ligne BC, & par le point E, la ligne BED : du point C tirés au point D, la ligne CD.

Démonst. Les triangles BAC & BAE ont l'angle BAC égal à l'angle BAE (c), & les côtés AB & AC qui forment le premier, égaux aux côtés AB & AE qui forment le second, chacun à chacun ; puisque AB est commun à ces deux triangles, & que AC est égal à AE (c) ; donc l'autre côté BC du premier, est égal à l'autre côté BE du second (n) ; & par conséquent, N. 107, puisque la somme des côtés BC & CD du triangle BCD, est plus grande que l'autre côté BED de ce triangle (n), si de cette N. 110, somme on retranche BC, & si de ce côté on retranche BE, le reste CD de cette somme sera plus grand que le reste ED de ce côté. Or puisque CD est plus grand que ED, les triangles CAD & EAD sont tels que le côté AC est égal au côté AE (c) que le côté AD leur est commun, & que le côté CD est plus grand que le côté ED (d) ; donc l'angle CAD est plus grand que l'angle EAD (n) ; & par conséquent, N. 111, puisque l'angle BAC est égal à l'angle BAE (c), la somme des angles BAC & CAD est plus grande

470. LES ELEMENS D'EUCLIDE,
que l'angle BAD, qui est celle des angles
BAE & EAD ; donc C. Q. F. D.

PROPOSITION XXI.

THEOREME.

473. *La somme de tous les angles plans
qui forment un angle solide, est moins
grande que celle de quatre angles
droits.*

Fig. 31. **L**A somme de tous les angles plans
BAC * CAD & BAD qui forment
l'angle solide A, est moins grande que celle
de quatre angles droits.

Démonst. La somme des neuf angles des
trois triangles BAC, CAD & DAB est
N. 131. égale à celle de six angles droits (n) : or la
somme des six angles ACB, ACD, ABC,
ABD, ADC & ADB de ces trois trian-
gles, est plus grande que celle de deux
angles droits, puisque la somme des an-
gles ACB & ACD qui forment l'angle so-
lide C avec l'angle BCD, est plus grande
N. 472. que cet angle BCD (n) ; que celle des an-
gles ABC & ABD, est plus grande que
N. 472. l'angle CBD (n) ; que celle des angles
ADC & ADB, est plus grande que l'angle

BDC (n) ; & qu'enfin celle de ces angles $N. 472.$
 BCD , CBD & BDC , est égale à celle
 de deux angles droits (n) ; donc la somme $N. 131.$
 des trois autres angles BAB , CAD &
 DAB de ces trois triangles , est moins gran-
 de que celle de quatre angles droits ; & par
 conséquent , puisque ces trois angles for-
 ment l'angle solide A ; la somme de tous
 les angles qui forment cet angle solide , est
 moins grande que celle de quatre angles
 droits ; donc C. Q. F. D.

COROLLAIRE.

474. Il suit de ce Théorème , que les
figures régulières avec les angles desquel-
les on peut former des angles solides , ne
sont que les triangles équilatéraux , les
quarrés & les pentagones.

SCHOLIE.

Nous supprimons les 22 & 23^e. Pro-
positions , parce qu'elles sont inutiles.



PROPOSITION XXIV.

THEOREME.

475. Si les Plans qui terminent un solide sont parallèles, chacun à chacun : Premièrement, ils seront des parallelogrammes ; Secondement, les opposés seront semblables & égaux entr'eux.

Fig. 32. SI les plans AC*, EG, AH, BG, &c. qui terminent le solide X, sont parallèles, chacun à chacun ; Premièrement, ils seront des parallelogrammes ; Secondement, les opposés AC & EG seront égaux & semblables entr'eux ; & il en sera de même des autres AH & BG, AF & DG.

DEMONSTRATION.

Premièrement. Les communes sections AD & BC des plans AH & BG & du plan AC sont parallèles (*n*), puisque ces plans AH & BG sont parallèles (*h*) : or par une raison pareille, les communes sections AB & DC des plans AF & DG & du même plan AC, sont aussi parallèles ; donc puisque ce plan AC est terminé par ces communes sections, il est un parallelogramme (*n*) ;

(*n*). On démontre de la même manière N. 57. que les plans EG, AH, BG, AF & DG, sont aussi des parallélogrammes.

Secondement. Les côtés AB & EF des angles ABC & EFG, sont parallèles (*n*), N. 57. puisque le plan AF est un parallélogramme (*d*); & par une raison pareille, les autres côtés BC & FG de ces mêmes angles, sont aussi parallèles; donc ces angles sont égaux entr'eux (*n*); & par conséquent, puisque N. 461. l'on démontre de la même manière, que les angles DAB & HEF, sont aussi égaux entr'eux, tous les angles des parallélogrammes opposés AC & EG sont égaux, chacun à chacun (*n*). Or les côtés de ces mêmes parallélogrammes, sont aussi égaux, N. 1426. chacun à chacun (*n*); puisque le plan BG N. 141. étant un parallélogramme (*d*), les côtés BC & FG sont égaux entr'eux (*n*); & que par N. 141. une raison pareille, les côtés AB & EF le sont aussi; donc les parallélogrammes opposés AC & EG sont égaux & semblables entr'eux. Or on démontre de la même manière que le plan AH est égal & semblable au plan BG; & que le plan AF l'est au plan DG; donc C. Q. F. D.

SCHOLIE.

Nous supprimons la 25^e Proposition, parce qu'elle est comprise dans la 32^e; &
Rr

474 LES ELEMENTS D'EUCLIDE ;
 les 26^e & 27^e Propositions , parce qu'elles
 sont inutiles.

PROPOSITION XXVIII.

THEOREME.

476. Si un Parallelepipede est coupé par
 un Plan, qui passe par les diagonales de
 deux des Plans opposés de ce solide ,
 il sera divisé en deux parties égales
 entr'elles.

Fig. 93. **L**E plan ABGH * qui passe par les dia-
 gonales AH & BG des plans opposés
 ADHE & BCGF du parallelepipede X,
 divise ce solide en deux parties ABGFEH
 & HGBCTA égales entr'elles.

Démonst. Les triangles FBG & BGC
 N. 143. sont semblables & égaux entreux (n), puis-
 que le parallelogramme BCGF est divisé en
 ces deux triangles, par sa diagonale BG ; &
 par une raison pareille , les triangles EAH
 & AHD sont aussi semblables & égaux en-
 tr'eux : les plans AC & EG sont semblables
 N. 475. & égaux entr'eux (n), puisqu'ils sont plans
 opposés d'un parallelepipede ; & par une
 raison pareille , les plans AF & DG sont
 aussi semblables & égaux entr'eux : enfin le

LIVRE ONZIÈME. 475
 plan ABGH est commun aux parties AB-
 GFEH & HGBCDA ; donc ces parties
 sont terminées par des plans semblables &
 égaux, chacun à chacun ; & par conséquent
 elles sont égales entr'elles (n) ; donc C. Q. N. 421.
 F. D.

PROPOSITION XXIX.

THEOREME.

477. Les Parallelepipèdes qui ont la même base, & dont les Plans parallèles à cette base sont dans un même Plan, sont égaux entr'eux.

Les parallelepipèdes X & Y* qui ont la même base ABCD, & dont les plans EG & IL parallèles à cette base, sont dans un même plan EL, sont égaux entr'eux. Fig. 34.

Les lignes EF & IK étant prolongées, ne sont qu'une seule ligne droite EK, & les lignes HG & ML, qu'une seule ligne droite HL, ou ces lignes sont différentes lignes droites.

PREMIER CAS.

Si les lignes EF & IK ne sont qu'une
 R r ij

476 LES ELEMENTS D'EUCLIDE ;
seule ligne droite , &c.

Const. Prolongés la ligne EF jusqu'en I ; & la ligne HG jusqu'en M.

Démonst. Le plan EG est semblable & égal au plan AC (n) puisque ces plans sont des plans opposés du parallélepipedé X : or le plan AC est semblable & égal au plan IL , puisque ces plans sont des plans opposés du parallélepipedé Y ; donc le plan

N. 475. EG est semblable & égal au plan IL (n) ; & par conséquent si l'on ajoute le plan FM à chacun de ces plans , les plans EM & FL qui en sont les sommes , seront semblables

N. 63. & égaux entr'eux (n). Les plans EB &

N. 475. FC sont semblables & égaux entr'eux (n) , puisqu'ils sont plans opposés du parallélepipedé X : les plans AIMB & DKLC ,

N. 475. sont semblables & égaux entr'eux (n) , puisqu'ils sont plans opposés du parallélepipedé Y ; & enfin l'on démontre de la même maniere qu'on la fait dans la 35^e Proposition du premier Livre , que les plans triangulaires AEI & DFK sont semblables & égaux entr'eux ; & que les plans triangulaires BHM & CGL le sont aussi. Or puisque les prismes triangulaires AEIMHB & DFKLGC sont terminés par ces

N. 421. plans , ils sont égaux entr'eux (n) ; ainsi si de chacun de ces prismes , on retranche le prisme triangulaire NFIMGO qui leur est

commun, les restes qui sont les solides AEFNOGHB & DNIKLMOC, seront égaux entr'eux (n); & par conséquent, si N. 649
 l'on ajoute le prisme triangulaire AND-
 COB à chacun de ces solides, les sommes qui sont les parallelepipèdes X & Y, seront égales entr'elles (n). N. 650.

SECOND CAS.

Si les lignes EF & IK * sont différen- Fig. 35.
 tes lignes droites.

Const. Prolongés vers Z les lignes MI & LK; & les lignes HG & EF, jusqu'à ce qu'elles rencontrent la ligne LO: des points A, B, C & D tirés aux points N, O, P & Q, les lignes AN, BO, CP & DQ.

Démonst. Les côtés du plan NOPQ sont les prolongemens de ceux des plans EG & IL (c); or les côtés de ces plans sont parallèles à ceux du plan ABCD, chacun à chacun; & ces plans sont semblables & égaux à ce plan ABCD (d); donc les plans NOPQ & ABCD sont des parallelogrammes semblables & égaux entr'eux, & par conséquent le solide Z formé par ces plans & par les plans AO, DP, AQ & BP, est un parallelepipède (n). Or N. 459.
 puisque le solide Z est un parallelepipède (d), & que les lignes EF & NO ne sont

478 LES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE ;

qu'une seule ligne droite (c), par une démonstration pareille à celle du premier Cas, ce parallélepède est égal au parallélepède X, & puisque les lignes MI & QN ne sont aussi qu'une seule ligne droite (c), par une démonstration pareille, il est aussi égal au parallélepède Y ; donc les parallélepipèdes X & Y sont égaux entr'eux ; donc C. Q. F. D.

SCHOLIE.

478. Ce second Cas est la 30^e Proposition de ce Livre ; & nous supprimons la 31^e qui démontre que les parallélepipèdes qui ont des bases égales entr'elles, & dont les plans parallèles à ces bases sont dans un même plan, sont égaux entr'eux ; parce que l'égalité des parallélepipèdes qui ont des bases égales entr'elles, suit de celle de ceux qui ont la même base ; de même que l'égalité des parallélogrammes qui ont des bases égales entr'elles, suit de l'égalité de ceux qui ont la même base (n).

N. 148.

USAGE.

479. Nous avons dit (n) que nous parlerions de la manière de mesurer un parallélepède, lorsque nous considérerions ce Solide ; ainsi comme cette manière est fondée sur cette Proposition, nous allons l'exposer.

N. 145.

Premierement. Si le parallelepipedes X *Fig. 16
 qu'il faut mesurer est rectangle; & que le Cu-
 be M soit la mesure dont on veut se servir.

Mesurer un solide quelconque X ,
 c'est considérer en combien on peut le di-
 viser de parties, égales chacune à un certain
 cube M que l'on prend pour Mesure. Or il
 est évident que le parallelepipedes X peut
 être divisé en autant de parallelepipedes
 $KLNGFHB$, $IKHFEA$, &c. dont les
 bases HG , AF , &c. sont égales chacune
 à celle du cube M , que l'un $ABCD$ des
 Plans qui terminent ce parallelepipedes,
 peut être divisé de quarrés, égaux cha-
 cun à l'un de ceux qui terminent ce cube
 M ; ainsi si l'on prend une Mesure cou-
 rante égale à l'une des dimensions du
 cube M , & si après avoir considéré com-
 bien de fois cette Mesure courante est con-
 tenue dans la longueur AB , & dans la
 largeur BC du plan $ABCD$, on multiplie
 l'un par l'autre les nombres qui l'expriment,
 le produit indiquera combien le parallele-
 pipedes X contient de ces parallelepipedes
 $KLNGFHB$, &c. dont les bases sont éga-
 les chacune à celle du cube M . Mais cha-
 cun de ces parallelepipedes peut être di-
 visé en autant de cubes $OPQGFHB$,
 &c. égaux chacun au cube M , que la
 hauteur BL de ces parallelepipedes, peut

480 LES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE;

être divisée de parties égales chacune à la hauteur de ce cube M ; donc si l'on multiplie le nombre qui exprime combien le parallélepiped X contient de ces parallélepipeds $KLNGFHB$, &c. par celui qui exprime combien de fois la hauteur BL de ces parallélepipeds, contient celle du cube M , le produit indiquera combien le parallélepiped X contient de cubes égaux chacun au cube M ; & par conséquent ce parallélepiped sera mesuré.

Fig. 37. Secondement. Si le parallélepiped X qu'il faut mesurer n'est pas rectangle.

Le parallélepiped X est égal à un parallélepiped Y dont la hauteur EF est égale à la hauteur CD du premier (n). Or pour mesurer le parallélepiped Y , il faut multiplier la valeur de la surface AB de sa base, par le nombre de Mesures que contient sa hauteur EF (d); donc puisque le parallélepiped X est égal au parallélepiped Y ; que la base AB est commune à l'un & à l'autre; & que la perpendiculaire CD abaissée du sommet du parallélepiped X à la base de ce parallélepiped, prolongée s'il est nécessaire, est égale à la hauteur du parallélepiped Y , si l'on multiplie la valeur de la base AB du parallélepiped X , par le nombre de Mesures courantes que contient cette perpendiculaire CD , le produit sera la

la valeur de ce parallelepède X.

Ainsi la regle du Mesurage des parallelepipèdes est la suivante.

480. Prenés une Mesure courante égale au côté de la mesure cubique dont vous voulés vous servir : considerés combien de fois cette mesure courante est contenue dans la longueur , dans la largeur , & dans l'épaisseur du parallelepède que vous voulés mesurer : multipliés les uns par les autres les nombres qui l'expriment , & le produit indiquera combien de fois la Mesure cubique dont vous vous servés , est contenue dans ce parallelepède.

PROPOSITION XXXII.

THEOREME.

481. *Les Rapports des Parallelepipedes dont les hauteurs sont égales entr'elles , sont les mêmes que ceux des bases de ces Parallelepipedes.*

SI les hauteurs des parallelepipedes AL & MX * sont égales entr'elles , le rap- Fig. 183
port du parallelepède AL au parallelepède MX , sera égal à celui de la base AC à la base MO.

Const. Divisés la base AC en autant de parallelogrammes AF, EH, &c. que le premier terme de l'exposant du rapport de la base AC à la base MO, contient d'unités : divisés aussi la base MO en autant de parallelogrammes MR, PS, &c. que le second terme de ce même exposant contient d'unités : coupés le parallelepiped AL par des plans EI, GK, &c. paralleles au plan BL, & qui passent par les lignes de division EF, GH, &c. coupés de même le parallelepiped MX par des plans PT, QV, &c. paralleles au plan NX, & qui passent par les lignes de division PR, QS, &c.

Démonst. Les parallelepipeds AL & MX sont divisés, l'un en autant de parallelepipeds AI, EK, &c. que la base AC est divisée de parallelogrammes AF, EH, &c. & l'autre en autant de parallelepipeds MT, PV, &c. que la base MO est divisée de parallelogrammes MR, PS, &c. (*c*) : ces parallelogrammes AF, EH, &c. MR, PS, &c. sont égaux entr'eux (*c*) ; & ces parallelepipeds AI, EK, &c. MT, PV, &c. le sont aussi (*n*), puisqu'ils ont chacun pour base, un de ces parallelogrammes égaux (*c*), & que leurs hauteurs sont égales entr'elles (*h*). Ainsi le parallelepiped AI & sa base AF sont équi-multiples

du parallelepiped MT & de sa base MR (n); le parallelepiped AL & sa base AC, N. 296. le font du parallelepiped AI & de sa base AF (n); & enfin le parallelepiped MX N. 296. & sa base MO, le font du parallelepiped MT & de sa base MR (n); donc le parallelepiped AL & sa base AC, sont aussi équi- N. 296. multiples du parallelepiped MX & de sa base MO (n); & par conséquent le parallelepiped AL est au parallelepiped MX, N. 335. comme la base AC est à la base MO (n); N. 307. donc C. Q. F. D.

PROPOSITION XXXIII.

THEOREME.

482. *Les rapports des Parallelepipedes semblables entr'eux, sont triplés de ceux des côtés homologues de ces parallelepipedes.*

SI les parallelepipedes AD & EC * sont Fig. 39. semblables entr'eux, le rapport du parallelepiped AD au parallelepiped EC, fera triplé de celui du côté AB au côté BC.

Const. Posés les parallelepipedes AD & EC de maniere qu'étant l'un au-dessus de

484 LES ELEMENS D'EUCLIDE,

l'autre, deux des angles égaux ABF & GBC des plans semblables AF & GC qui terminent ces Solides, deviennent des angles opposés au sommet : prolongés le Solide AD, jusqu'à ce que les plans MC & CK soient dans un même plan MK : prolongés aussi le Solide EC, jusqu'à ce que les plans LH & HK soient dans un même plan LD.

Démonst. Le rapport du parallelepipede AD au parallelepipede BK, est égal à celui
 N. 431. de la base AF à la base BN (n), puisque les hauteurs de ces parallelepipedes sont égales entr'elles (c) : or le rapport de la base AF à la base BN, est égal à celui du
 N. 367. côté AB au côté BC (n) ; puisque ces bases
 N. 475. sont des parallelogrammes (n), & que les hauteurs de ces parallelogrammes sont égales entr'elles (c) ; donc le rapport du parallelepipede AD au parallelepipede BK,
 N. 342. est égal à celui du côté AB au côté BC (n) ; & par conséquent si le rapport du parallelepipede AD au parallelepipede EC, est triplé de celui du parallelepipede AD au parallelepipede BK ; le rapport du parallelepipede AD au parallelepipede EC, sera triplé de celui du côté AB au côté BC (n).
 N. 342. Or le rapport du parallelepipede AD au parallelepipede EC, est triplé de celui du parallelepipede AD au parallelepipede BK ; car le rapport du parallelepipede AD au

parallélepède BK, est égal à celui du côté AB au côté BC (d); le rapport du côté AB au côté BC, est égal à celui du côté BF au côté BG, puisque ces côtés sont côtés homologues des Solides semblables AD & EC (h); le rapport du côté BF au côté BG, est égal à celui de la base BN la base CG (n), puisque ces bases sont des pa- N. 367.
 rallelogrammes (n), & que les hauteurs de N. 475.
 ces parallélogrammes sont égales entr'elles (c); & enfin le rapport de la base BN à la base CG, est égal à celui du parallélepède BK au parallélepède BL (n), puis- N. 481.
 que ces bases sont celles de ces parallélepipèdes (c), & que les hauteurs de ces parallélepipèdes sont égales entr'elles (c); donc le rapport du parallélepède AD au parallélepède BK, est égal à celui de ce même parallélepède BK, au parallélepède BL (n). Mais le rapport du paralléle- N. 342.
 pipède BK au parallélepède BL, est égal à celui du côté BF au côté BG (d); le rapport du côté BF au côté BG est égal à celui du côté BH au côté BI, puisque ces côtés sont côtés homologues des Solides semblables AD & EC (h); le rapport du côté BH au côté BI, est égal à celui de la base CH à la base CI (n), puisque ces bases N. 367.
 sont des parallélogrammes (n), & que les N. 475.
 hauteurs de ces parallélogrammes sont éga-

486 LES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE ;

les entr'elles (c) ; & enfin le rapport de la base CH à la base CI, est égal à celui du parallépipède BL au parallépipède EC

N. 481. (n) ; puisque ces bases sont celles de ces parallépipèdes (c) , & que les hauteurs de ces parallépipèdes sont égales entr'elles (c) ; donc le rapport du parallépipède BK au parallépipède BL est aussi égal à celui du parallépipède BL, au parallépipède EC

N. 342. (n). Ainsi les parallépipèdes AD , BK ,

N. 318. BL & EC forment une progression (n) ; donc le rapport du premier parallépipède AD au quatrième EC , est triplé de celui du même premier parallépipède AD au se-

N. 348. cond BK (n) ; & par conséquent le rapport du parallépipède AD au parallépipède EC, est triplé de celui du côté AB au côté BC ; donc C. Q. F. D.

COROLLAIRE.

483. Il suit de ce Théorème, que si quatre lignes sont continuellement proportionnelles ; le parallépipède décrit sur la première, est à un parallépipède semblable décrit sur la seconde , & semblablement posé sur elle , comme la première de ces lignes est à la quatrième.

PROPOSITION XXXIV.

THEOREME.

484. Premièrement. Si deux Parallelepipedes sont égaux entr'eux, leurs bases & leurs hauteurs seront réciproquement proportionnelles. Secondement. Si les bases & les hauteurs de deux parallelepipedes, sont réciproquement proportionnelles, ces parallelepipedes seront égaux entr'eux.

Premièrement. **S**I les parallelepipedes X & Y * sont égaux entr'eux - Fig. 40. eux, leurs bases AB & CD, & leurs hauteurs AE & CG seront réciproquement proportionnelles : Secondement, si les parallelepipedes X & Y sont tels, que leurs bases AB & CD, & leurs hauteur AE & CG soient réciproquement proportionnelles, ces parallelepipedes seront égaux entr'eux.

Const. Divisés la hauteur CG en deux parties CF & FG, telles que l'une CF soit égale à la hauteur AE : coupés le Solide Y par un plan FH parallele à sa base CD, & qui passe par le point F.

DEMONSTRATION.

- Premierement.* Le rapport de la base AB à la base CD, est égal à celui du parallépipède X au parallépipède CH (n), puisque les hauteurs AE & CF de ces parallépipèdes sont égales entr'elles (c): or le rapport du parallépipède X au parallépipède CH, est égal à celui du parallépipède Y au même parallépipède CH (n), puisque les parallépipèdes X & Y sont égaux entr'eux (h); le rapport du parallépipède Y au parallépipède CH, est égal à celui du parallélogramme CK au parallélogramme CI (n), puisque l'on peut aussi prendre ces parallélogrammes pour les bases de ces parallépipèdes qui auront alors une hauteur commune FL; & enfin le rapport du parallélogramme CK au parallélogramme CI, est égal à celui de la ligne CG à la ligne CF (n); donc le rapport de la base AB à la base CD, est égal à celui de la ligne CG à la ligne CF (n) qui est égale à la hauteur AE (c); & par conséquent les bases AB & CD, & les hauteurs AE & CG sont réciproquement proportionnelles (n).

Secondement. Le rapport du parallépipède X au parallépipède CH, est égal à celui de la base AB à la base CD (d): or

le rapport de la base AB à la base CD , est égal à celui de la hauteur CG à la hauteur AE (n), puisque les bases AB & CD , & les hauteurs AE & CG sont réciproquement proportionnelles (h); & le rapport de la hauteur CG à la hauteur AE qui est égale à CF (c), est égal à celui du parallélépipède Y au parallélépipède CH (d); donc le rapport du parallélépipède X au parallélépipède CH , est égal à celui du parallélépipède Y au même parallélépipède CH (n); & par conséquent les parallélépipèdes X & Y sont égaux entr'eux (n); donc C. N. 340. Q. F. D.

S C H O L I E.

485. Nous avons supposé que les parallélépipèdes X & Y * étoient rectangles; Fig. 40. mais s'ils ne l'étoient pas, il faudroit prendre les hauteurs AE , CG & CF sur des perpendiculaires abaissées des sommets de ces Solides, aux Plans de leurs bases prolongées s'il étoit nécessaire.

Nous supprimons la 35^e Proposition, parce qu'elle est inutile.



PROPOSITION XXXVI.

THEOREME.

486. Si trois lignes droites sont continuellement proportionnelles, deux parallelepipèdes équiangles qui auront pour côtés, l'un ces trois lignes, & l'autre celle de ces trois lignes qui est moyenne proportionnelle entre les deux autres, seront égaux entr'eux.

Fig. 41. **S**I les parallelepipèdes X & Y * sont équiangles, & tels que les côtés AB, AC & AD du premier, soient continuellement proportionnels, & que les côtés EF, EG & EH du second, soient égaux chacun au terme moyen AC, ces parallelepipèdes X & Y seront égaux entr'eux.

Const. Du point C abaissons une perpendiculaire CI au côté AB; & du point G une perpendiculaire GK, au côté EF (n).

Démonst. Les lignes AB, AC & AD sont continuellement proportionnelles (h), & les lignes EF & EH sont égales chacune à la ligne AC (h); donc les côtés AB, EF, AD & EH des parallelogrammes DB & HF qui sont les bases des parallelepipèdes

X & **Y**, sont réciproquement proportionnels (n); & par conséquent, puisque ces N. 309
 parallelogrammes sont équiangles (h), ces
 bases sont égales entr'elles (n). Or les hau- N. 316
 teurs **CI** & **GK** de ces mêmes parallelepi-
 pedes sont aussi égales entr'elles; car puisque
 ces parallelepipèdes sont équiangles (h),
 l'angle **CAI** est égal à l'angle **GEK**; &
 puisque les lignes **CI** & **GK** sont perpendi-
 culaires, l'une à la ligne **AB**, & l'autre à la
 ligne **EF** (c), l'angle **CIA** est égal à l'an-
 gle **GKE**; ainsi les triangles **ACI** & **EGK**
 qui ont le côté **AC** égal au côté **EG** (h),
 ont aussi les angles **CAI** & **CIA** qui sont,
 l'un à l'une **A** des extrémités de ce côté **AC**
 du premier triangle, & l'autre opposé à ce
 côté; & les angles **GEK** & **GKE** qui sont,
 l'un à l'une **E** des extrémités de ce côté **EG**
 du second triangle, & l'autre opposé à ce
 côté, égaux chacun à chacun; donc les au-
 tres côtés du premier triangle sont égaux
 aux autres côtés du second, chacun à cha-
 cun (n); & par conséquent le côté **CI** est N. 319
 égal au côté **GK**. Ainsi les parallelepipèdes
X & **Y** ont leurs bases **DB** & **HF** égales
 entr'elles (d) & leurs hauteurs **CI** & **GK**
 égales aussi entr'elles (d); & par conséquent
 ces parallelepipèdes sont égaux entr'eux (n); N. 472
 donc **C. Q. F. D.**

PROPOSITION XXXVII.

THEOREME.

487. *Premierement. Si quatre lignes droites sont proportionnelles, deux parallelepipedes semblables entr'eux, & semblablement poses sur les deux premieres, & deux autres parallelepipedes semblables aussi entr'eux, & semblablement poses sur les deux dernieres, seront proportionnels : Secondement, si deux parallelepipedes semblables entr'eux, & deux autres parallelepipedes semblables aussi entr'eux sont proportionnels, les côtés homologues des deux premiers, & les côtés homologues des deux derniers, seront aussi proportionnels.*

Fig. 42.

Premierement. **S**I les lignes AB, CD, EF & GH * sont proportionnelles, les parallelepipedes V & X semblables entr'eux, & semblablement posés sur les deux premieres, & les parallelepipedes Y & Z semblables aussi entr'eux, & semblablement posés sur les deux dernieres, seront proportionnels : *Secondement.* Si les parallelepipedes V & X sem-

blables entr'eux, & les parallelepipeds Y & Z semblables aussi entr'eux, sont proportionnels, les côtés homologues AB & CD des deux premiers, & les côtés homologues EF & GH des deux derniers, seront proportionnels.

DEMONSTRATION.

Premierement. Le rapport du parallelepiped V au parallelepiped X, est triplé de celui de la ligne AB à la ligne CD (n), N. 482, puisque ces parallelepipeds sont semblables entr'eux (h): or le rapport de la ligne AB à la ligne CD, est égal à celui de la ligne EF à la ligne GH (h); donc le rapport du parallelepiped V au parallelepiped X, est triplé de celui de la ligne EF à la ligne GH (n); & par conséquent puisque N. 342, le rapport du parallelepiped Y au parallelepiped Z, qui est semblable au parallelepiped Y (h), est aussi triplé de celui de la ligne EF à la ligne GH (n), le rapport du parallelepiped V au parallelepiped de X, est égal à celui du parallelepiped Y au parallelepiped Z (n). N. 482.

Secondement. Le rapport du parallelepiped V au parallelepiped X, est triplé de celui de la ligne AB à la ligne CD (n), N. 482, puisque ces parallelepipeds sont semblables entr'eux (h); & par une raison pareille, le

494 LES ELEMENS D'EUCLIDE ;
 rapport du parallelepipedes Y au parallelepi-
 pede Z , est triplé de celui de la ligne EF à
 la ligne GH : or le rapport du parallelepi-
 pede V au parallelepipedes X , est égal à ce-
 lui du parallelepipedes Y au parallelepipedes Z
 (h) ; donc le rapport triplé de celui de la
 ligne AB à la ligne CD , est égal au rapport
 triplé de celui de la ligne EF à la ligne GH ;
 & par conséquent le rapport de la ligne AB
 à la ligne CD , est égal à celui de la ligne
 EF à la ligne GH ; donc C. Q. F. D.

SCHOLIE.

488. *Ce que nous avons démontré des
 parallelepipedes , dans cette Proposition &
 dans les précédentes , doit aussi s'entendre
 des Prismes en général :*

*La 38^e Proposition de ce Livre est dé-
 placée & doit suivre immédiatement la
 13^e ; ainsi pour remédier à ce derange-
 ment , nous en avons fait un Corollaire de
 cette 13^e. Proposition , N. 465. & nous
 supprimons la 39^e parce qu'elle n'est pas
 fort considérable.*



PROPOSITION XL.

THEOREME.

489. Si deux Prismes dont les hauteurs sont égales entr'elles, sont tels que la base de l'un soit un triangle, & que celle de l'autre soit un parallélogramme double de ce triangle, ces deux Prismes seront égaux entr'eux.

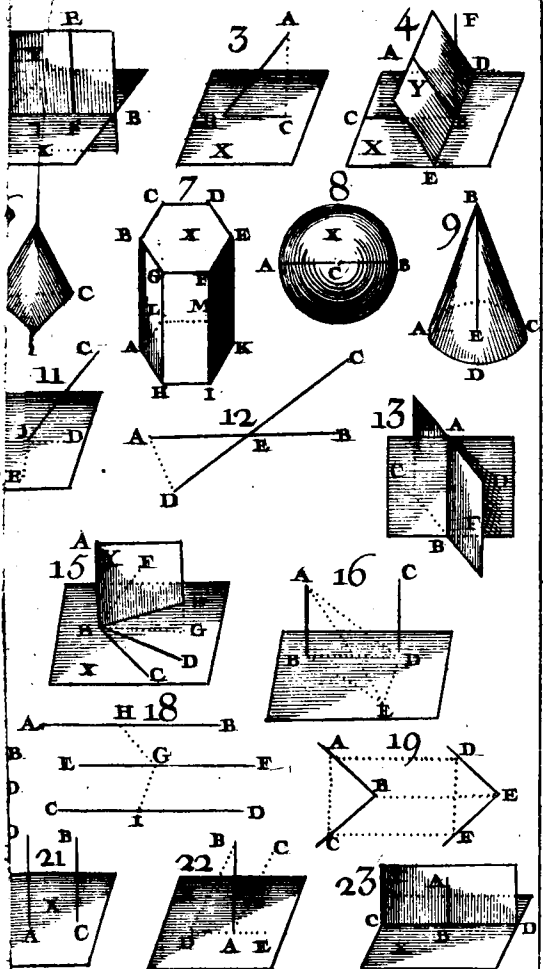
SI les hauteurs des Prismes ABCDEF * Fig. 48; & GHIKLM sont égales entr'elles, & si le triangle EDF qui est la base du premier, est la moitié du parallélogramme LI qui est celle du second, ces Prismes seront égaux entr'eux.

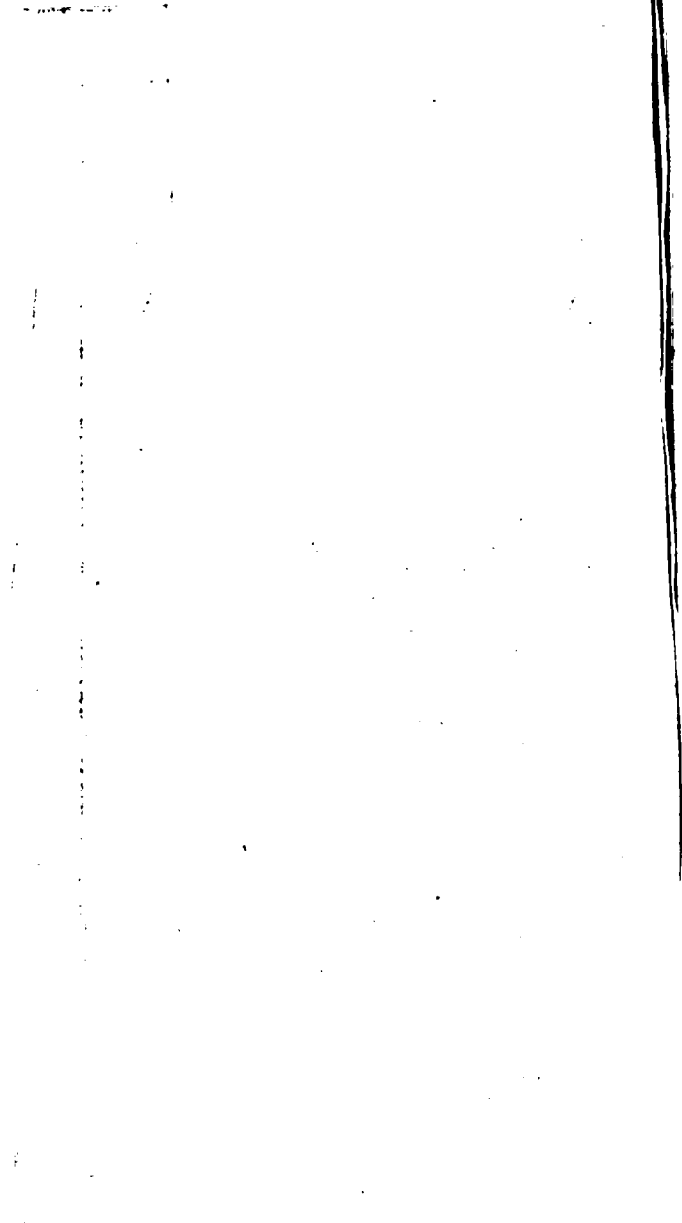
Démonst. Les Prismes ABCDEF & GHIKLM sont les moitiés, l'un du parallélepède EN, & l'autre du parallélepède LO (n); or ces parallélepipèdes N. 476. EN & LO sont égaux entr'eux (n); N. 478, puisque leurs hauteurs sont égales entr'elles (h), & que le triangle EDF n'étant que la moitié du parallélogramme LI (h), les parallélogrammes EP & LI qui sont les bases de ces mêmes paral-

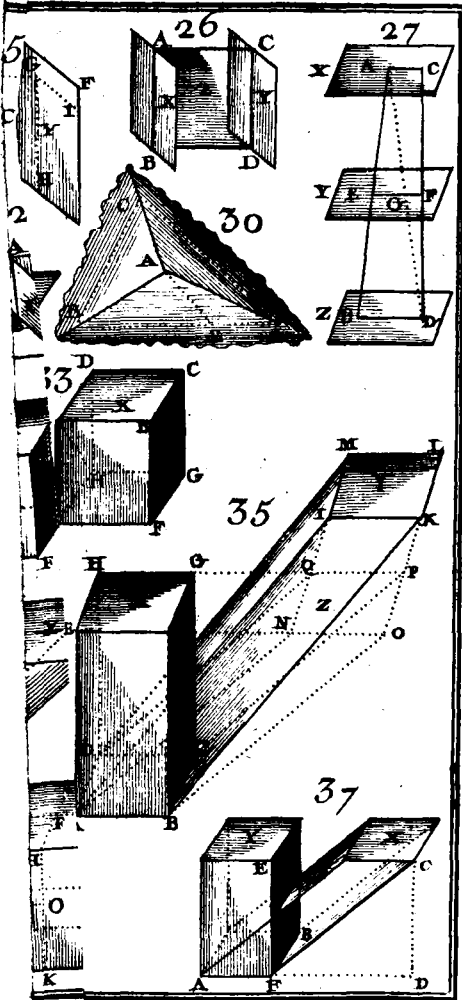
496 LES ELEMENS D'EUCLIDE,
 lesipedes , sont aussi égaux entr'eux
 N. 143. (n) ; donc les prismes ABCDEF & GHI-
 N. 68. KLM sont égaux entr'eux (n) ; donc C.
 Q. F. D.

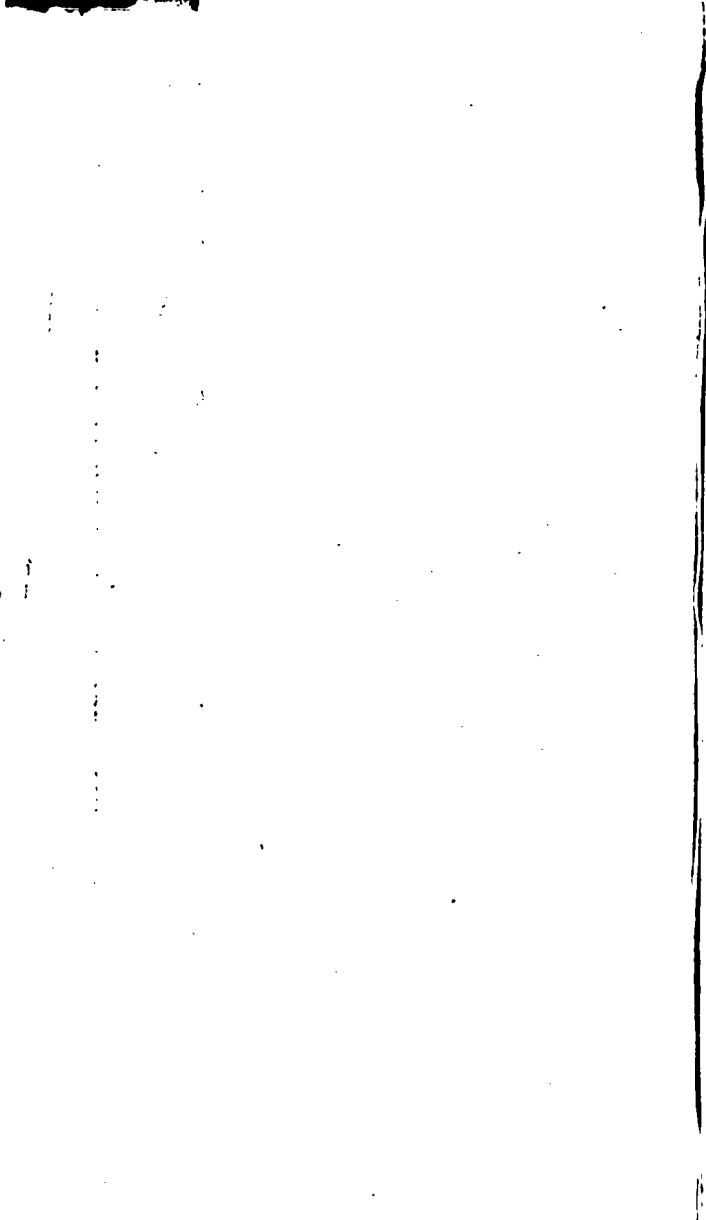
Fin du onzième Livre.

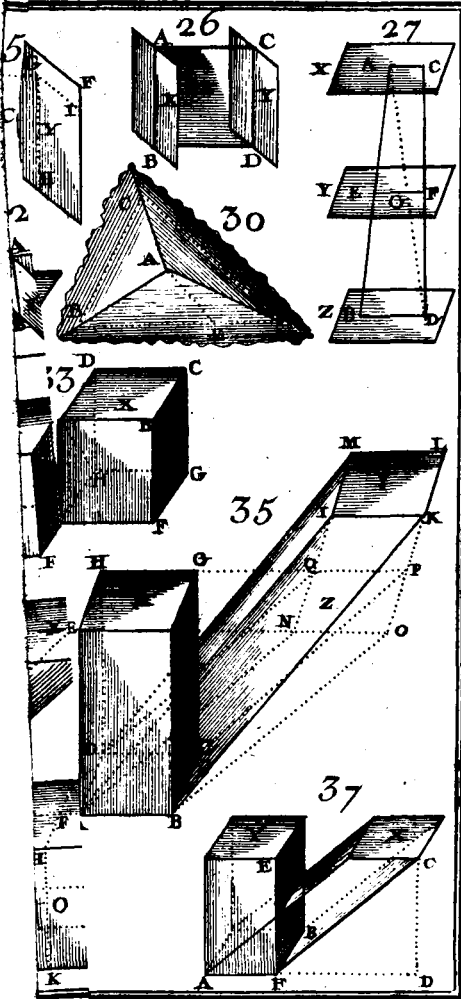
LES

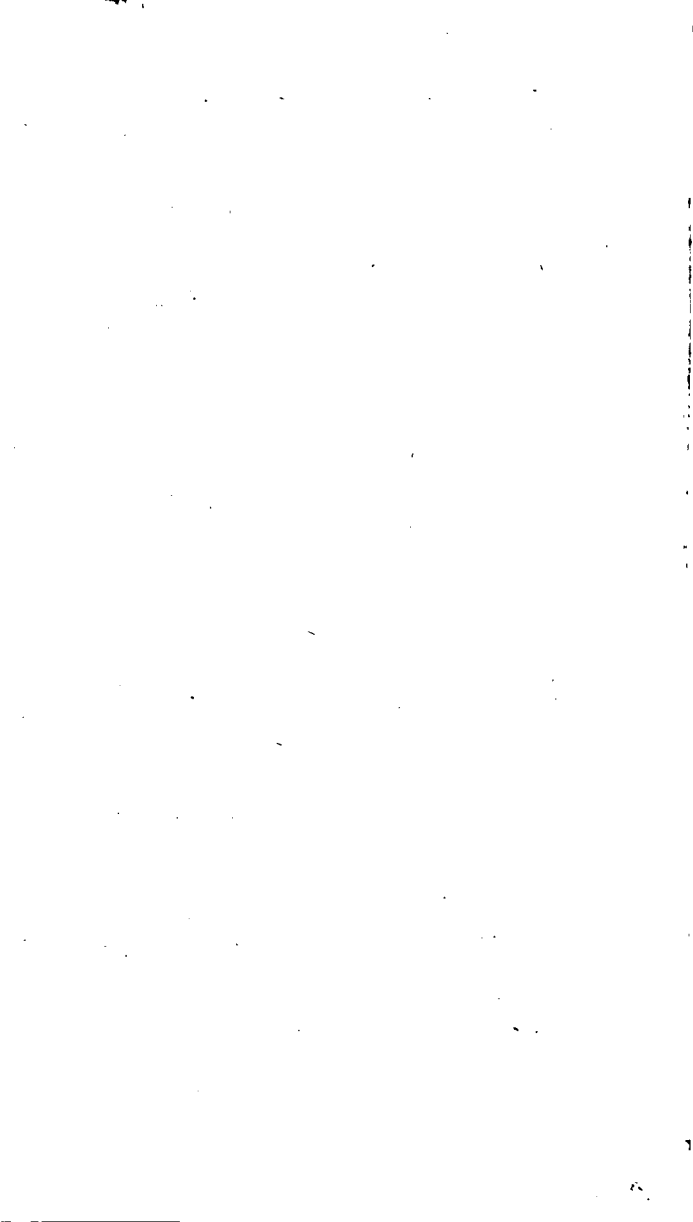


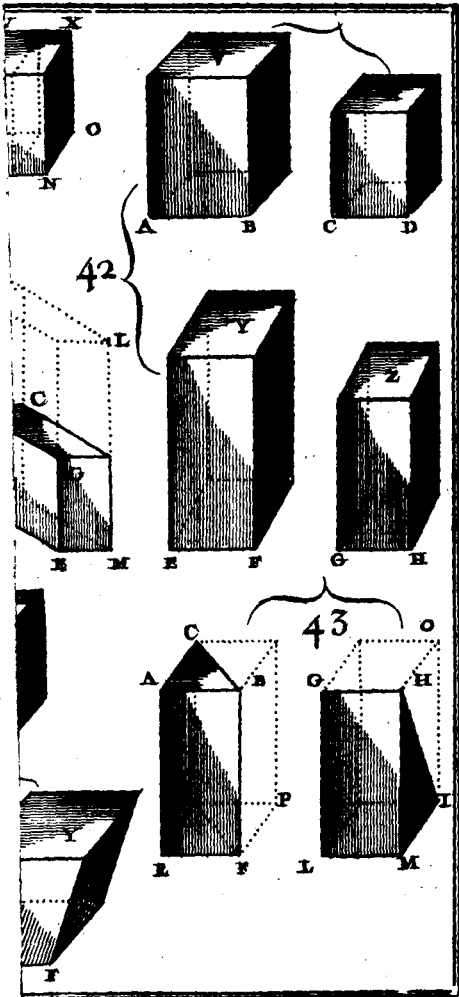
















LES ELEMENS D'EUCLIDE.

LIVRE DOUZIEME.

CE Livre est le dernier de ceux des *Elemens d'Euclide* qui sont nécessaires. On y considère les propriétés des *Pyramides* ; on y démontre ensuite celles des *Cylindres* & des *Cônes* , en faisant voir que les uns sont des especes de *Prismes* , & les autres des especes de *Pyramides* ; & l'on finit enfin ce Livre par y déterminer quels sont les rapports que les *Sphères* ont entr'elles.



PROPOSITION I.

THEOREME.

490 Les Polygones semblables inscrits dans des cercles , sont entr'eux comme les quarrés des diametres de ces cercles.

Fig. 1. **S** I les polygones ABCDE & FGHIK * inscrits l'un dans le cercle X & l'autre dans le cercle Y , sont semblables entr'eux , le rapport du polygone ABCDE au polygone FGHIK , fera le même que celui du quarré du diametre BL au quarré du diametre GM.

Const. Tirés du point B au point D , la ligne BD ; du point C au point L la ligne CL ; du point G au point I , la ligne GI ; & du point H au point M , la ligne HM.

Démonst. Les angles BCD & GHI sont égaux entr'eux , & les côtés CB , CD , HG & HI qui les forment , sont proportionels
 n. 363. (n) , puisque les polygones ABCDE & FGHIK sont semblables entr'eux (h) ;
 donc les triangles BCD & GHI sont
 n. 376. équiangles (n) ; & par conséquent l'angle

BDC est égal à l'angle GIH : or l'angle BLC est égal à l'angle BDC (n) , puisque N. 241 ces angles sont inscrits chacun dans le même segment BAEDC (c) ; & par une raison pareille , l'angle GMH est égal à l'angle GIH ; donc les angles BLC & GMH sont égaux entr'eux (n) ; & par conséquent , N. 62. puisque les angles BCL & GHM qui sont inscrits chacun dans un demi cercle (c) , sont aussi égaux entr'eux (n) , les triangles BCL N. 253. & GHM sont équiangles (n) . Ainsi le rap- N. 135. port du polygone ABCDE au polygone FGHK , est doublé de celui du côté BC au côté GH (n) , puisque ces polygones N. 393. sont semblables entr'eux (h) ; & le rapport du côté BC au côté GH , est égal à celui du diamètre BL au diamètre GM (n) , puis- N. 373. que les triangles BCL & GHM sont équiangles (d) ; donc le rapport du polygone ABCDE au polygone FGHK , est doublé de celui du diamètre BL au diamètre GM (n) ; & par conséquent , puisque le rap- N. 142. port du carré du diamètre BL à celui du diamètre GM , est aussi doublé de celui de ces deux mêmes diamètres (n) , le rapport N. 393. de ces deux polygones , & celui de ces deux carrés , sont égaux entr'eux (n) ; N. 142. donc C. Q. F. D.

PROPOSITION II.

THEOREME.

491. *Les Cercles sont entr'eux comme les quarrés de leurs diametres.*

Fig. 2. **L**E cercle X * est au cercle Y , comme le quarré du diametre AB est à celui du diametre CD.

N. 370. *Démonst.* On a démontré (n) que les cercles sont des polygones réguliers d'un nombre infini de côtés ; ainsi ils suivent la même loi que les polygones : or les polygones semblables inscrits , l'un dans le cercle X & l'autre dans le cercle Y , sont entr'eux comme les quarrés des diametres AB & CD de ces cercles , quelque grand que soit le nombre des côtés de chacun de ces polygones (n) ; donc les cercles X & Y sont aussi entr'eux, comme les quarrés de ces mêmes diametres ; donc C. Q. F. D.

COROLLAIRE.

492. Il suit de la démonstration de ce Théorème , que *les cercles sont entr'eux, comme les polygones semblables qui sont inscrits dans ces mêmes cercles.*

SCHOLIE.

Nous supprimons les 3^e & 4^e Propositions, parce qu'elles ne servent qu'à démontrer la 5^e; & que suivant la manière dont nous le faisons, elles deviennent inutiles.

PROPOSITION V.

THEOREME.

493. Si une Pyramide triangulaire est coupée par un Plan qui passe par son sommet & par l'un de ses côtés, elle sera divisée en deux autres Pyramides, dont chacune sera à cette première, comme sa base est à celle de cette même première.

SI la pyramide triangulaire $ABDC$ * Fig. 3. est coupée par un plan EAD qui passe par son sommet A , & par l'un de ses côtés AD , elle sera divisée en deux pyramides $ABDE$ & $AEDC$, dont chacune sera à la pyramide $ABDC$, comme sa base est à la base BDC de cette première pyramide.

Const. Coupés à volonté la pyramide $ABDC$, par un plan FHG parallèle à sa base BDC ,

502 LES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE ;

- Démonst.* La pyramide AEDC fera même partie de la pyramide ABDC, que la base EDC l'est de la base BDC, si à quelque point que l'on coupe la pyramide ABDC par un plan FHG parallèle à sa base BDC, la section IHG est même partie de la section FHG, que la base EDC l'est de la base BDC. Or la section IHG est même partie de la section FHG, que la base EDC l'est de la base BDC ; car puisque les plans FHG & BDC sont parallèles (*c*), les communes sections FG & BC de ces plans &
- N. 468. du plan BAC, sont parallèles (*n*) ; donc puisque l'un AGF des angles AGF & ACB que ces communes sections forment avec le côté AC, est un angle extérieur, & que l'autre ACB, est l'angle intérieur qui est opposé à cet angle extérieur, ces angles sont
- N. 127. égaux entr'eux (*n*) ; & par conséquent les triangles FAG & BAC qui ont un angle en
- N. 135. A commun entr'eux, sont équiangles (*n*) ; & par la même raison, les triangles IAG & EAC le sont aussi. Or puisque les triangles FAG & BAC sont équiangles (*d*)
- N. 373. $FG : BC :: AG : AC$ (*n*) ; & puisque les triangles IAG & EAC le sont aussi (*d*), AG
- N. 373. $: AC :: IG : EC$ (*n*) ; donc $FG : BC ::$
- N. 342. $IG : EC$ (*n*) ; & par conséquent en échangeant, $FG : IG :: BC : EC$ (*n*). Ainsi le
- N. 349. rapport du triangle FHG au triangle IHG,

est égal à celui du côté FG au côté IG (n), N. 369;
 puisque les hauteurs de ces triangles sont
 égales entr'elles (c); le rapport du côté
 FG au côté IG , est égal à celui du côté
 BC au côté EC (d); & le rapport du côté
 BC au côté EC est égal à celui du triangle
 BDC au triangle EDC (n); puisque les N. 366;
 hauteurs de ces triangles sont égales entr'-
 elles (c); donc le rapport de la section
 FHG à la section IHG , est égal à celui de
 la base BDC à la base EDC (n); & par N. 344.
 conséquent la pyramide $AEDC$ est même
 partie de la pyramide $ABDC$, que la base
 EDC l'est de la base BDC ; donc C. Q.
 F. D.

COROLLAIRE.

494. Il suit de ce Théorème, que si
*des pyramides triangulaires qui ont leurs
 bases égales entr'elles, & dans un même
 plan, ont aussi un même point pour sommet,
 ces pyramides seront égales entr'elles.*

SCHOLIE.

*Nous avons transposé la 6^e Proposition,
 pour en faire le 3^e. Corollaire de la suivan-
 te, parce qu'il est alors plus facile de la
 démontrer.*

PROPOSITION VII

THEOREME.

495. Un Prisme triangulaire quelconque peut être divisé en trois pyramides égales entr'elles.

Fig. 4. **L**E prisme triangulaire ABCDEF * peut être divisé en trois pyramides égales entr'elles.

Const. Tirés les diagonales AD, FD & FB des parallelogrammes ABDE, EFCD & ABCF.

Démonst. Les pyramides FAED & FABD ont un même point F pour sommet, & leurs bases AED & ABD sont égales entr'elles (n), & dans un même plan, puisqu'elles sont les deux parties d'un parallelogramme ABDE divisé par sa diagonale AD (c) ; ainsi ces pyramides sont égales entr'elles (n) : or les pyramides FABD & FBCD le sont aussi (n), puisqu'elles ont un même point D pour sommet, & que leurs bases ABF & BFC qui sont les deux parties d'un parallelogramme ABCF divisé par sa diagonale FB (c), sont égales entr'elles (n), & dans un même plan ; donc
les

les trois pyramides FAED, FABD & FBCD sont égales entr'elles (n) ; & par N. 62. conséquent puisqu'elles sont les parties du prisme ABCDEF (c) , ce prisme peut être divisé en trois pyramides égales entr'elles ; donc C. Q. F. D.

COROLLAIRE I.

495. Il suit de ce Théorème , que si une pyramide & un prisme triangulaire , ont une même base & une même hauteur , cette pyramide sera la troisième partie de ce prisme.

COROLLAIRE II.

496. Il suit de ce Corollaire , que si une pyramide & un prisme quelconque ont une même base , & une même hauteur , cette pyramide sera la troisième partie de ce prisme.

Constr. Si le prisme proposé n'est point triangulaire , divisez-le en prismes triangulaires ; & divisez la pyramide proposée en autant de pyramides triangulaires.

Démonst. Chacune des pyramides triangulaires en lesquelles on a divisé la pyramide proposée , est le tiers de chacun des prismes triangulaires en lesquels on a divisé le prisme proposé (n) : ainsi la pyramide N. 495. proposée qui est la somme de toutes ces py-

506 LES ELEMENTS D'EUCLIDE ;
 ramides triangulaires (*c*) , est le tiers du prisme proposé , qui est la somme de tous ces prismes triangulaires ; donc C. Q. F. D.

COROLLAIRE III.

497. Il suit de ce Corollaire, que *les rapports des pyramides dont les hauteurs sont égales entr'elles , sont les mêmes que ceux des bases de ces pyramides.*

Fig. 5. Si les hauteurs des pyramides ABCD & EFGHIKL * sont égales entr'elles , le rapport de la pyramide ABCD à la pyramide EFGHIKL, sera égal à celui de la base BCD à la base FGHIKL.

Démonst. Les pyramides ABCD & EFGHIKL sont les tiers , l'une du prisme
 N. 495. BM , & l'autre du prisme FN (*n*) ; puisqu'elles ont les mêmes bases & les mêmes hauteurs que ces prismes ; ainsi ces pyramides sont équimultiples de ces prismes (*n*) :
 & 296. or ces prismes sont entr'eux comme la base BCD est à la base FGHIKL (*n*) , puisque
 N. 487. leurs hauteurs sont égales entr'elles (*h*) ; donc les pyramides ABCD & EFGHIKL sont aussi entr'elles comme la base BCD est
 N. 347. est à la base FGHIKL (*n*) ; donc C. Q. F. D.

U S A G E.

498. On se sert de cette Proposition

pour mesurer la solidité d'une pyramide quelconque. Car puisqu'une pyramide est le tiers d'un prisme de même base & de même hauteur qu'elle (n) ; & que pour me- N. 496
surer la solidité d'un prisme , il faut multiplier la valeur de la surface de la base de ce prisme , par le nombre de mesures que contient sa hauteur perpendiculaire (n) ; N. 487.
pour mesurer la solidité d'une pyramide , quelconque , il faut multiplier la valeur de la surface de la base de cette pyramide par le tiers du nombre de mesures que contient sa hauteur perpendiculaire.

PROPOSITION VIII.

THEOREME.

499. *Les rapports des Pyramides semblables entr'elles , sont triplés de ceux des côtés homologues de ces solides.*

SI les pyramides ABCD & EFGH * Fig. 69
 sont semblables entr'elles , le rapport de la pyramide ABCD à la pyramide EFGH , sera triplé de celui du côté BC au côté FG.

Démonst. Les prismes BI & FK sont semblables entr'eux , puisque chacun de

Vu ij

508 LES ELEMENS D'EUCLIDE,

ces prismes a la même base & la même hauteur que celle des pyramides ABCD & EFGH dans laquelle il est inscrit, & que ces pyramides sont semblables entr'elles (*h*) ; ainsi le rapport du prisme BI au prisme FK, est triplé de celui du côté BC au côté FG (*n*) : or ces pyramides ABCD & EFGH sont équivariantes de ces prismes (*n*) , puisque chacune de ces pyramides ayant la même base & la même hauteur que celui de ces prismes dans lequel elle est inscrite , elle est le tiers de ce prisme (*n*) ; donc le rapport de la pyramide ABCD à la pyramide EFGH , est aussi triplé de celui du côté BC au côté FG ; donc C. Q. F. D.



PROPOSITION IX.

THEOREME.

500. *Premierement. Si des Pyramides sont égales entr'elles, leurs bases & leurs hauteurs seront réciproquement proportionnelles : Secondement, si des Pyramides sont telles que leurs bases & leurs hauteurs soient réciproquement proportionnelles, ces Pyramides seront égales entr'elles.*

Premierement. **S** I les pyramides ABCD & EFGH * sont égales Fig. 7. entr'elles, leurs bases BCD & FGH, & leurs hauteurs AC & EG seront réciproquement proportionnelles : *Secondement*, si les pyramides ABCD & EFGH sont telles que leurs bases BCD & FGH & leurs hauteurs AC & EG, soient réciproquement proportionnelles, ces pyramides seront égales entr'elles.

DEMONSTRATION.

Premierement. La pyramide ABCD est le tiers du prisme BI de même base & de même hauteur qu'elle (*n*) ; & la pyramide N. 496
V u iij]

510 LES ELEMENS D'EUCLIDE,

- EFGH est le tiers du prisme FK de même
 N. 496. base & de même hauteur qu'elle (n) ; ainsi
 puisque ces pyramides sont égales entr'elles
 N. 67. (h), ces prismes sont égaux entr'eux (n) ;
 & par conséquent leurs bases BCD & FGH
 & leurs hauteurs AC & EG sont récipro-
 N. 487. quement proportionnelles (n) ; or ces bases
 BCD & FGH, & ces hauteurs AC & EG
 sont aussi les bases & les hauteurs des pyra-
 mides ABCD & EFGH ; donc les bases
 & les hauteurs de ces pyramides , sont ré-
 ciproquement proportionnelles.

Secondement. Les bases BCD & FGH
 des pyramides ABCD & EFGH , & les
 hauteurs AC & EG de ces mêmes pyrami-
 des, sont réciproquement proportionnelles
 (h) ; or ces bases BCD & FGH, & ces hau-
 teurs AC & EG sont aussi les bases & les
 hauteurs des prismes BI & FK ; donc les
 bases & les hauteurs de ces prismes , sont
 réciproquement proportionnelles ; ainsi ces
 N. 487. prismes sont égaux entr'eux (n) ; & par
 conséquent , puisque la pyramide ABCD
 est le tiers du prisme BI de même base &
 N. 496. de même hauteur qu'elle (n) ; & que la py-
 ramide EFGH est le tiers du prisme FK de
 N. 496. même base & de même hauteur qu'elle (n) ;
 N. 68. ces pyramides sont égales entr'elles (n) ;
 donc C. Q. F. D.

PROPOSITION X.

THEOREME.

501. *Si un Cône & un Cylindre ont une même base & une même hauteur, ce Cône sera la troisième partie de ce Cylindre.*

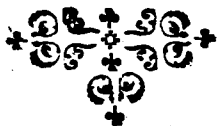
LE cône ABC * qui a la même base Fig. 2.
AC & la même hauteur BF, que le cylindre ADEC, est la troisième partie de ce cylindre.

Démonst. Un prisme est terminé par autant de parallelogrammes, & une pyramide par autant de triangles que le polygone qui est la base de l'un ou de l'autre de ces solides, a de côtés; ainsi lorsque le nombre des côtés de ce polygone est infini, celui des parallelogrammes qui terminent ce prisme est infini, & pareillement celui des triangles qui terminent cette pyramide l'est aussi; & par conséquent on démontre qu'un cylindre est un prisme dont la base est un cercle, & qu'un cône est une pyramide dont la base est aussi un cercle, de la même manière que l'on a démontré qu'un cercle est un polygone régulier d'un nom-

N. 370. bre infini de côtés (n). Or puisqu'un cylindre est un prisme, & qu'un cône est une pyramide, les cilindres & les cônes suivent la même loi que les prismes & les pyramides; & par conséquent, puisqu'une pyramide est la troisième partie d'un prisme qui a la même base & la même hauteur qu'elle, un cône est aussi la troisième partie d'un cylindre qui a la même base & la même hauteur que lui; donc C. Q. F. D.

U S A G E.

502. Ce qui est démontré dans cette Proposition fait voir que pour mesurer un cylindre, il faut multiplier la valeur de sa base par le nombre de mesures que contient sa hauteur; & que pour mesurer un cône, il faut multiplier la valeur de sa base par le tiers du nombre de mesures que contient sa hauteur.



PROPOSITION XI.

THEOREME.

503. *Premierement. Les rapports des Cylindres dont les hauteurs sont égales entr'elles, sont les mêmes que ceux des bases de ces Cylindres : Secondement, il en est de même des Cônes.*

DEMONSTRATION.

Premierement. **L** Es cylindres sont des prismes (n) : or les rap-^{N. 501}ports des prismes dont les hauteurs sont égales entr'elles, sont les mêmes que ceux des bases de ces prismes (n) ; donc les rap-^{N. 472}ports des cylindres dont les hauteurs sont égales entr'elles, sont aussi les mêmes que ceux des bases de ces cylindres.

Secondement. Les cônes sont des pyramides (n) : or les rapports des pyramides^{N. 502} dont les hauteurs sont, &c. donc C. Q. F. D.



PROPOSITION XII.

THEOREME.

504. Premièrement. *Les rapports des cylindres semblables entr'eux, sont triplés de ceux des diametres des bases de ces cylindres : Secondement, il en est de même des cônes.*

DEMONSTRATION.

Premièrement. **L** Es cylindres sont des prismes (n) : or les rapports des prismes semblables entr'eux, sont triplés de ceux des côtés homologues de ces prismes (n) ; donc les rapports des cylindres semblables entr'eux, sont aussi triplés de ceux des côtés homologues de ces cylindres ; & par conséquent, puisque les diametres des bases des cylindres semblables, sont les côtés homologues de ces solides, les rapports des cylindres semblables entr'eux, sont triplés de ceux des diametres des bases de ces cylindres.

Secondement. Les cônes sont des pyramides (n) : or les rapports des pyramides semblables entr'elles, sont &c. donc C. Q. F. D.

PROPOSITION XIII.

THEOREME.

505. Si un Cylindre est coupé par des Plans paralleles à sa base, les parties de ce cylindre & celles de son axe, seront proportionnelles.

SI un cylindre ABCD * est coupé par un plan EF parallele à sa base DC, les parties DF & EB de ce cylindre seront entr'elles, comme les parties GI & IH de son axe GH. Fig. 9.

Const. Divisés la partie GI de l'axe GH en autant de parties GK, KL, &c. égales entr'elles, que le premier terme de l'exposant du rapport de cette partie GI à la partie IH, contient d'unités : divisés aussi la partie IH du même axe, en autant de parties IM, MH égales entr'elles, que le second terme de ce même exposant contient d'unités : coupés le cylindre ABCD par des plans PQ, RS, &c. paralleles à sa base DC, & qui passent par chaque point de division K, L, &c.

Démonst. Les parties DF & EB du cylindre ABCD sont divisées, l'une en autant

316 LES ELEMENS D'EUCLIDE ;

de cylindres DQ, PS, &c. que la partie GI de l'axe GH est divisée de parties GK, KL, &c. & l'autre en autant de cylindres EO, NB, que la partie IH de ce même axe contient de parties IM, MH (*c*) ; ces parties GK, KL, &c. & IM, MH, sont égales entr'elles (*c*) ; & ces cylindres DQ, PS, &c. EO

- N. 303. & NB sont égaux entr'eux (*n*) ; puisque leurs hauteurs GK, KL &c. IM & MH sont égales entr'elles (*c*) , & que leurs bases DC, PQ, &c. EF, NO, le sont aussi (*c*). Ainsi le cylindre DQ & la partie GK sont équit multiples du cylindre EO & de la partie
- N. 296-IM (*n*) ; le cylindre DF & la partie GI, sont équit multiples du cylindre DQ & de la
- N. 296. partie GK (*n*) ; & enfin le cylindre EB & la partie IH, sont équit multiples du cylindre
- N. 296-EO & de la partie IM (*n*) ; donc le cylindre DF & la partie GI, sont équit multiples
- N. 335. du cylindre EB & de la partie IH (*n*) ; & par conséquent le cylindre DF est au cylindre EB, comme la partie GI de l'axe GH
- N. 307. est à la partie IH du même axe (*n*) ; donc
C. Q. F. D.



PROPOSITION XIV.

THEOREME.

506. Premièrement. Les rapports des Cylindres dont les bases sont égales entr'elles, sont les mêmes que ceux des hauteurs de ces Cylindres. Secondement, il en est de même des Cônes.

Premièrement. **S**I les bases NO & HG* Fig. 104
des cylindres ABON & EFGH, sont égales entr'elles, ces cylindres seront entr'eux comme la hauteur PK du premier, est à la hauteur LM du second.

Secondement. Il en est de même des cônes.

Const. Prolongés le cylindre ABON, jusqu'à ce que la hauteur IP de son prolongement DNOC soit égale à la hauteur du cylindre EFGH.

DEMONSTRATION.

Premièrement. Le cylindre ABON est au cylindre DNOC, comme la hauteur PK est à la hauteur IP (*n*): or les cylindres DN- N. 505d
OC & EFGH sont égaux entr'eux (*n*), puis- N. 503d
que leurs hauteurs IP & LM sont égales entr'elles (*c*), & que leurs bases DC & HG le sont aussi (*h*): donc le cylindre ABON est au cylindre EFGH comme la hauteur PK est à la hauteur IP qui est égale

§ 18 LES ELEMENS D'EUCLIDE,
à LM(c); donc C. Q. F. D.

Secondement. Les cônes sont les tiers
des cylindres de même bases & de même
N. 501. hauteur qu'eux (n); or &c. donc C.Q.F.D.

PROPOSITION XV.

THEOREME.

507. *Premierement. Si des Cylindres sont égaux entr'eux, leurs bases & leurs hauteurs seront réciproquement proportionnelles. Secondement. Si des Cylindres sont tels, que leurs bases & leurs hauteurs soient réciproquement proportionnels, ces cylindres seront égaux entr'eux. Troisièmement. Il en est de même des Cônes.*

DEMONSTRATION.

Premierement. **L** Es cylindres sont des
N. 501. prismes (n): or les bases
& les hauteurs des prismes égaux entr'eux;
N. 487. sont réciproquement proportionnelles (n);
donc les bases & les hauteurs des cylindres
égaux entr'eux, sont aussi réciproquement
proportionnelles.

Secondement. Les cylindres sont des pris-
N. 501. mes (n): or les prismes dont les bases & les
hauteurs sont réciproquement proportion-
N. 487. nelles, sont égaux entr'eux (n); donc les cy-

lindres dont les bases & les hauteurs sont réciproquement proportionnelles, sont aussi égaux entr'eux.

Troisièmement. Les cônes sont des pyramides (n) : or les pyramides &c. donc &c. N. 5013 donc C. Q. F. D.

SCHOLIE.

Nous supprimons les 16^e. & 17^e. Propositions, parce qu'elles sont inutiles.

PROPOSITION XVIII.

THEOREME.

508. *Les rapports des Spheres sont triplés de ceux des diametres de ces Spheres.*

LE rapport de la Sphere X à la Sphere Y* est triplé de celui du diametre AB Fig. 111 de la premiere, au diametre CD de la seconde.

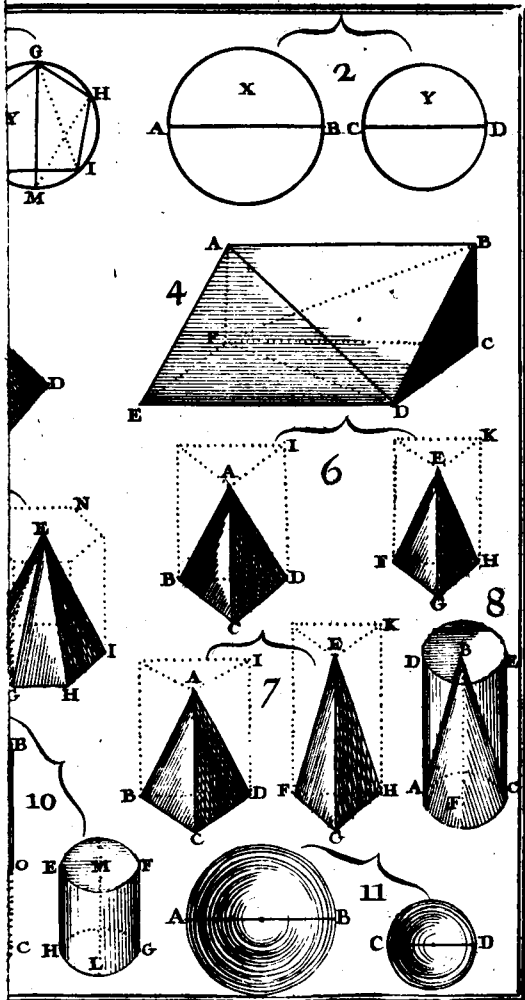
Démonst. Le rapport du cercle dont AB est le diametre, au cercle dont CD est le diametre, est doublé de celui de AB à CD, puisque les cercles sont entr'eux comme les quarrés de leurs diametres (n) : or puisque N. 490. les Spheres sont des solides semblables entr'eux, si pour avoir la solidité de la Sphere X il faut multiplier la valeur du cercle dont AB est le diametre, par une certaine partie

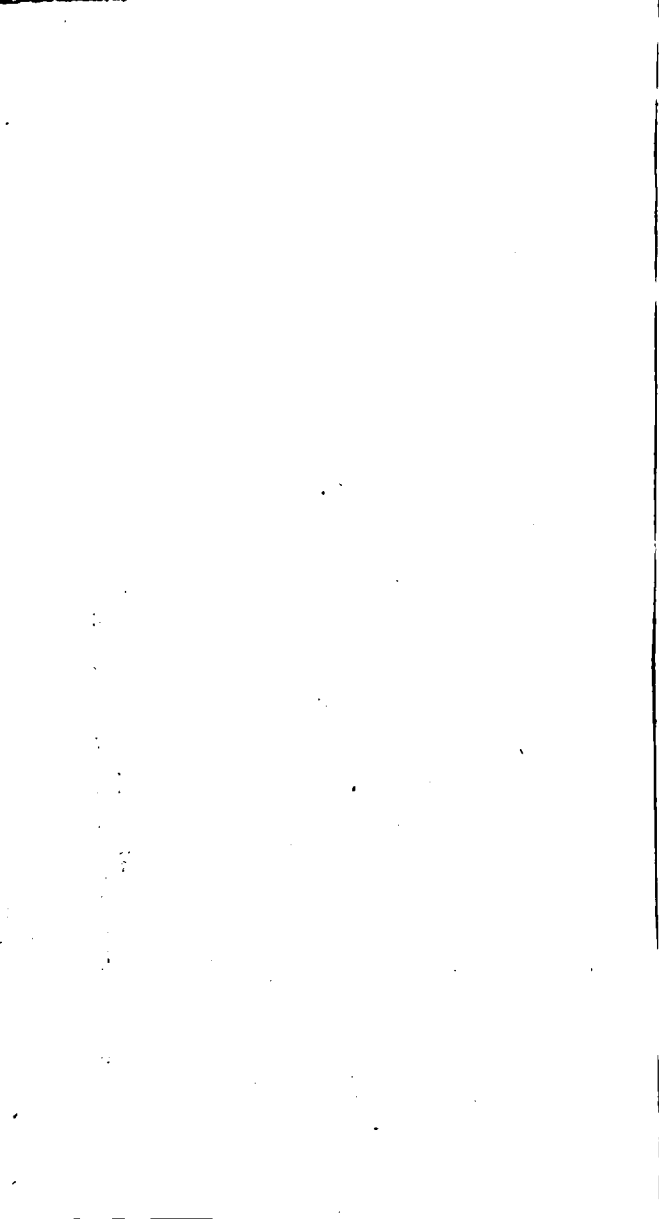
520 LES ELEMENS D'EUCLIDE ;
 de ce diametre , pour avoir la solidité de la
 Sphere Y , il faudra multiplier la valeur du
 cercle dont CD est le diametre , par une
 partie de ce diametre CD , pareille à cette
 certaine partie du diametre AB ; donc le
 rapport par les termes duquel il faut multi-
 plier ceux du rapport doublé de AB à CD ,
 pour avoir les solidités des Spheres X & Y ,
 est le même que celui de AB à CD ; ainsi les
 solidités de ces Spheres sont les produits des
 termes homologues de trois rapports égaux
 chacun à celui de AB à CD ; & par consé-
 quent le rapport de ces Spheres est triplé de
 N. 322. celui de AB à CD (n) ; donc C. Q. F. D.

SCHOLIE.

509. *Archimede a démontré que le rap-
 port du diametre d'un cercle à la circonfé-
 rence de ce même cercle , est à peu près égal
 à celui de 7 à 22 : que la surface d'une
 Sphere est égale à celle d'un cylindre dans
 lequel cette Sphere est inscrite , c'est-à-dire
 à celle d'un cylindre qui auroit pour base un
 cercle dont le diametre seroit égal à celui de
 cette Sphere, & dont la hauteur seroit aussi
 égale à ce même diametre ; & enfin que la
 solidité de cette Sphere, est les deux tiers de
 celle de ce même cylindre.*

Fin des Elemens d'Euclide.





LIVRES qui se trouvent dans la
même Boutique.

*Ouvrages de M. BELIDOR, ancien Professeur Royal
des Mathématiques, &c.*

Nouveau Cours de Mathématique à l'usage de l'Artillerie & du Génie, où l'on applique les parties les plus utiles de cette Science à la théorie & à la pratique des différens sujets qui peuvent avoir rapport à la Guerre, *in-quarto*, avec 34 planches. 15 l.

La science des Ingenieurs dans la conduite des travaux de fortification, & d'Architecture civile; où il est traité de la poussée des terres contre les revêtemens: de la mécanique des voutes: du détail des matériaux: de la construction des édifices qui se font dans une Place de Guerre: de la décoration, & des cinq Ordres; & du Devis des Ouvrages qui ont rapport aux fortifications, gros *in-quarto*, grand papier, enrichi de plus de 50 planches. 24 l.

Le Bombarbier François, ou nouvelle méthode pour jeter les Bombes avec précision, avec un traité des Feux d'Artifice, *in-quarto*, avec figures. 12 l.

Architecture hydraulique, ou l'Art de conduire, d'élever, & de menager les eaux pour tous les besoins de la vie. *Première Partie*, divisée en quatre Livres. Le premier qui sert d'Introduction à tout l'ouvrage, contient les principes de la Mécanique, la manière de calculer le frottement dans les machines, les regles de l'hydraulique & du mouvement des eaux. On

donne dans le second Livre la description de différentes sortes de Moulins, leur calcul, & le moyen de les perfectionner. Le troisième Livre traite des propriétés de l'Air, de la théorie des Pompes, & de la manière de les mouvoir. Le quatrième Livre comprend la description & l'Analyse des plus belles machines de l'Europe qui servent à mouvoir des Pompes de toute espèce. La conduite & distribution des eaux dans une Ville, & plusieurs desseins de Fontaines publiques: en deux volumes *in-quarto*, grand papier, enrichis de cent grandes planches très-bien gravées. 40 l.

On donnera au Public l'année prochaine la *seconde Partie* de l'Architecture hydraulique, où l'on traitera de la manière de rendre les Rivières navigables, & d'en faciliter la communication par les canaux. De la construction des Ponts, Aqueducs, Ecluses, Bassins, Carenes, Quays, Jettées, Risbans, Fanaux, &c. & autres Ouvrages qui se construisent dans l'Eau, ou aux Places Maritimes: en deux volumes *in-quarto*, grand papier, accompagnés de cent grandes Planches.

Ouvrages de M. l'Abbé DEIDIER, Professeur Royal des Mathématiques aux Ecoles d'Artillerie de la Fère.

Arithmétique des Geomètres, ou nouveaux Elements de Mathématique, contenant la théorie & la pratique de l'Arithmétique. Une Introduction à l'Algebre & à l'Analyse; avec la résolution des Equations du second & du troisième degré, les raisons, proportions, & progressions Arithmétiques & Geométriques: les combinaisons, l'Arithmétique des Infinis; les Lo-

garithmes, les Fractions Décimales, &c. *in-quarto*, 1739. 12 l.

La Science du Géomètre, ou la théorie & la pratique de la Géométrie, qui contient les Elémens d'Euclides, la Trigonométrie, la Longimétrie, l'Altimétrie, le Nivellement, la Planimétrie, la Géodésie, la méthode des Indivisibles, les Sections Coniques, la Stéréométrie, le Jaugeage, la mesure des onglets, des corps annulaires & cylindriques, &c. Enfin tout ce qui peut concerner la mesure des corps & de leurs surfaces, *in-quarto*, enrichi de près de 50 planches 1739. 15 l.

La Mesure des surfaces & des solides par la connoissance des centres de Gravité, & par l'Arithmétique des Infinis. On trouvera dans ce Traité grand nombre de propriétés des figures Géométriques très-curieuses, & fort recherchées, *in quarto*, avec beaucoup de figures 1740. 12 l.

Le Calcul Différentiel & le Calcul intégral, expliqués & appliqués à la Géométrie: avec un Traité préliminaire touchant la résolution des Equations en général: la nature des courbes, les lieux Géométriques, la construction des Equations, & la résolution des problèmes Géométriques déterminés & indéterminés, *in-quarto*, avec quantité de figures, 15 l.

Mécanique générale pour servir d'Introduction aux Sciences Physico-Mathématiques: qui renferme la Statique, l'Aérométrie, l'Hydrostatique & l'Hydraulique, *in-quarto*, avec trente planches, 1741. 15 l.

Le Parfait Ingenieur François, ou la Fortification suivant le système de M. le Maréchal de Vauban, & des autres Auteurs qui ont écrit

sur cette Science : avec l'attaque & défense des Places : nouvelle édition , augmentée du Plan & de la description de Luxembourg , de la relation & des Plans du siège de Lille , & du siège de Namur , *in quarto* , enrichi de 50 planches , 1742. 15 l.

Lettres d'un Mathématicien à un Abbé , où l'on prouve que la matiere n'est point divisible à l'Infini , *in-douze* , avec figures. 2 l.

Lettre de M. de Mairan à Madame la M. D. C. avec la Dissertation de M. de Mairan sur l'estimation & la mesure des forces motrices des corps , & la réfutation des forces vives , *in-douze* , 1741. 3 l.

Elémens généraux des parties des Mathématiques les plus nécessaires à l'Artillerie & au Génie , contenant les Elémens de l'Arithmétique , de l'Algèbre , de l'Analyse , des raisons proportions & progressions Arithmétiques & Géométriques , avec un petit Traité des Logarithmes. Les Elémens de la Géométrie , de la Trigonométrie , du Nivellement , de la Planimétrie , de la Stereométrie , des Sections Coniques , le Toisé de la Maçonnerie , & le Toisé des Bois. Les Elémens de l'Arithmétique des Infinis , la Mécanique générale , c'est-à-dire la Science du mouvement , la Statique , l'Hydrostatique , l'Aérométrie & l'Hydraulique , avec un traité de Perspective , en deux volumes. *in-quarto* , enrichis de plus de 60 planches , 24 l.

Ouvrages de M. OZANAM , de l'Académie des Sciences.

Cours de Mathématique , qui comprend les parties de cette Science les plus utiles à un homme de guerre , en cinq vol. *in-octavo* , avec plus de 200 planches ; contenant les Traités suivans

qui se vendent séparément. Le prix du Cours
entier est de 40 £

L'Introduction aux Mathématiques, qui contient
les Définitions, un Traité d'Algèbre, la réso-
lution de l'Arithmétique par l'Analyse, & les
pratiques de Géométrie, *in-octavo*, avec qua-
tre planches. 3 l.

Les Elémens d'Euclides expliqués & démontrés
d'une manière courte & facile, avec l'usage
de chaque proposition, *in-octavo*, avec 17
planches. 6 £

L'Arithmétique, où toutes les opérations de cet-
te Science sont démontrées par une Méthode
fort simple : le tout appliqué à la Guerre, aux
Finances, & à la Marchandise, *in-octavo*. 2 l.

La Trigonométrie rectiligne & sphérique, qui
traite de la construction & de l'usage des Ta-
bles des Sinus & des Logarithmes; avec les
Tables des Sinus, Tangentes & Sécantes, &
des Logarithmes, calculées sur un rayon de
100000 parties. Par Ad. Wlacq, *in-octavo*,
avec quatre planches. 4. l. 10 s.

La Géométrie théorique & pratique, qui con-
tient la Géodésie, la Longimétrie, la Plani-
métrie, & la Stéréométrie, avec son usage
pour la Jauge & le Toisé, *in-octavo*, avec
28 planches. 6 l.

La Fortification régulière & irrégulière; qui com-
prend la construction, l'attaque & la défense
des Places selon les plus célèbres Auteurs,
avec le calcul des lignes & des angles de cha-
cune de ces méthodes, *in-octavo*. enrichi de 44
planches. 6 l.

La Mécanique, où il est traité des machines sim-
ples & composées, de la descente des corps pe-
sants, du centre de gravité, de l'hydrostatique;

&c. *in-octavo*, avec 28 planches. 6 l.

La Perspective théorique & pratique, où l'on enseigne la maniere de mettre toutes sortes d'objets en Perspective, & d'en représenter les ombres causées par le Soleil & d'autres lumieres, *in-octavo*, enrichi de 36 planches. 6 l.

La Geographie & Cosmographie qui traite de la Sphère, des corps célestes, des différens systèmes du monde, du Globe & de ses usages, *in-octavo*, avec 14 planches. 6 l.

La Gnomonique, où l'on donne par un principe général la maniere de faire des cadrans sur toutes sortes de surfaces, & d'y tracer les heures Astronomiques, Babylonniennes, Italiques, & tous les cercles de la Sphère, *in-octavo*, avec 30 planches. 6 l.

Les Recréations Mathématiques & Physiques, où l'on trouve plusieurs Problèmes curieux & utiles sur l'Arithmétique, la Géométrie, la Mécanique, l'Optique, la Gnomonique, & la Physique; avec un Traité des Horloges Élémentaires, des Lampes perpétuelles, & des Phosphores naturels & artificiels, & la description des Tours de Gibeciere & de Gobelets, en quatre volumes *in-octavo*, avec plus de 120 planches. 20 l.

Usage du Compas de proportion, avec un Traité de la division des champs, *in-octavo*, 2 l.

Les Elémens d'Euclide expliqués, avec l'usage de chaque proposition pour toutes les parties des Mathématiques. Par le R. P. Deschalles, avec 18 planches; nouvelle édition augmentée. 3 l.

Méthode facile pour arpenter & mesurer toutes sortes de Superficies, avec le toisé des bois de charpente, *in-douze*, fig. 2 l. 10 s.

La Géométrie pratique, contenant la Trigono-

métrie, la Longimétrie, la Planimétrie & la Stéréométrie, avec un traité de l'Arithmétique par Géométrie, *in-12*, fig. 2 l. 10 f.

Méthode pour lever les Plans & les Cartes de Terre & de Mer, avec instrumens & sans instrumens, *in-douze*, figures. 2 l.

Ouvrages de M. LE BLOND, Maître de Mathématiques des Pages du Roy.

Abregé de Géométrie à l'usage des jeunes Militaires, où l'on trouve les Elémens de cette Science nécessaires à ceux qui veulent apprendre les Fortifications, *in-douze*, avec figures.

Nouveaux Elémens de Fortification, contenant ce qu'il y a de plus essentiel à observer dans une Place forte, pour initier avec facilité les jeunes Militaires dans l'étude de cette Science, *in-douze*, avec figures. nouv. édition. 3 l.

Elémens de la Guerre des Sièges à l'usage des jeunes Militaires, où il est traité de l'Artillerie, ou des Armes & Machines en usage à la Guerre depuis l'invention de la poudre : de l'attaque des Places, où l'on trouve fort en détail tout ce qui concerne les travaux & les opérations d'un Siège Royal, ou d'une Ville fortifiée ; & de la défense des Places, avec un Mémoire contenant plusieurs observations sur la visite des Places, & un Dictionnaire des termes les plus en usage & les plus nécessaires pour l'intelligence de la Guerre des Sièges, en trois volumes *in-octave*, enrichis de vignettes & de 32 planches fort bien gravées, 15 l.

Ouvrages de M. CHRETIEN WOLFUS, Vice-Chancelier & Professeur de Mathématique & de Philosophie dans l'Université de Hail, des Académies des Sciences de France, d'Angleterre, de Prusse & de Moscovie, &c.

Nouveau Dictionnaire de Mathématique & de Physique & de toutes les parties qui en dépendent ; où l'on donne l'origine , les progrès & les principes des Sciences , & la Méthode d'en acquérir en peu de tems une connoissance assez étendue pour en raisonner exactement , & en faire une juste application. Avec l'Histoire des Auteurs les plus célèbres qui en ont traité , & des remarques instructives pour faciliter l'intelligence & le choix de leurs Ouvrages, traduit de l'Allemand de M. Wolfus & augmenté considérablement , in-folio , avec beaucoup de figures , sous presse.

Abregé du Cours de Mathématique de M. Wolfus traduit en François, contenant l'Arithmétique , l'Algebre , les Elémens de Géométrie, l'Analyse, la Trigonométrie , la Fortification, l'Architecture civile , la Mécanique , l'Hydrostatique, la Pésanteur de l'Air, l'Hydraulique, l'Optique , la Catoptrique, la Dioptrique , la Perspective , l'Astronomie , la Géographie , la Gnomonique , la Chronologie , la Pyrotechnie & la Fortification , en deux volumes in-octavo , enrichis de figures , sous presse.

Elémens de Physique-Mathématique, ou Introduction à la Philosophie de Newton, par M. 's Gravesande traduits en François par M. Roland de Virloys , en deux volumes in-octave , enrichis de 50 planches , sous presse.

F I N.