LES ELEMENS

D'EUCLIDE

DU R.P. DECHALLES.

LES ELEMENS D'EUCLIDE

DU R.P. DECHALLES.

Démontrés d'une maniere nouvelle & facile,

Par M. OZANAM *de l'Academie des Sciences.*

NOUVELLE EDITION.

Revue, corrigée & augmentée d'un grand nombre de Propositions & d'Usages,

Par M. AUDIERNE, *Maître de Mathematique.*

A PARIS, QUAY DES AUGUSTINS,
Chez CH. ANT. JOMBERT, Libraire du Roy pour l'Artillerie & le Génie, au coin de la rue Gille-Cœur, à l'Image Nôtre-Dame.

M. DCC. XLVI.
Avec Approbation & Privilege du Roy.

PRE'FACE.

Le Nil qui chaque année étend ses eaux sur toute l'Egypte, enleve les bornes des terres de cette Contrée, de maniere que les Propriétaires sont souvent obligés, lorsque ce Fleuve est rentré dans son lit, à rechercher la quantité du terrain qu'ils possedoient avant l'inondation. Cette nécessité fit inventer aux premiers Egyptiens les moyens de mesurer l'étendue que peut avoir un certain espace; & ils donnerent à cet Art le nom de Géométrie, *qui en notre langue signifie* Mesure de la Terre. *Mais cette Science qui dans son origine n'avoit eu que cet objet assez simple, sortit bientôt du limon du Nil où elle avoit pris naissance, & devint, pour me servir de l'expression de Platon, une des aîles avec lesquelles l'Homme s'éleva jusques à ces Globes immenses qui roulent sur sa tête.*

Alors les Machines furent inventées ; les Edifices les plus hardis furent élevés ; les Périodes des Astres furent déterminées ; les courses, les distances, les grandeurs des Planetes furent mesurées ; enfin on construisit les Vaisseaux, & la Mer ne fut plus une barriere entre les Nations les plus éloignées.

On a donné plusieurs Traités d'une Science dont on a retiré de si grands avantages, & qui en procure tous les jours de nouveaux ; mais la plus grande partie de ces ouvrages n'a pas toute la perfection que l'on pourroit souhaiter. Les uns trop secs & trop obscurs, sont la cause que l'on se dégoute de la Géométrie avant que de la connoître ; & les autres au contraire trop dénués du stile qui est propre & particulier à cette Science, n'ont ni l'ordre ni le génie qui lui convient ; & loin de donner à l'esprit l'étendue & la justesse qui sont les principaux fruits que l'on doit recueillir de ce genre d'étude, ils font penser que la Géométrie est aussi problématique que la Physique ; & comme ces deux

Sçiences ne sont pas également séduisantes, on va quelquefois jusqu'à accuser la premiere de manquer de sens commun; elle qui est le chef-d'œuvre du bon sens.

L'Abrégé des Elémens d'Euclide du P. Dechalles n'a point le premier de ces défauts. Cet habile Mathématicien en y simplifiant les Démonstrations, met la Géométrie à la portée des personnes qui veulent s'instruire de cette Sçience; & en joignant des Usages à plusieurs Propositions, il prévient le dégoût que l'ignorance de l'utilité de ces mêmes Propositions pourroit causer: mais comme il étoit trop Géometre pour s'imaginer que l'on recevroit un jour des preuves purement Physiques, pour des Démonstrations géométriques, il n'est pas toujours attentif à démontrer en rigueur; & à prévenir par-là un défaut qui depuis quelque tems ne fait que trop de progrès dans la Géométrie.

C'est le desir de remedier à ce défaut qui m'a fait entreprendre cette nouvelle traduction des Elemens d'Euclide, dans laquelle j'ai été plus attentif à donner *l'esprit de ce Géometre, qu'à conserver l'ordre ou le nombre des Mots dont son Commentateur Proclus s'est servi, & à me mettre à la portée de toutes les personnes, qui par goût ou par état veulent s'appliquer à ce genre d'étude, qu'à dire peu de paroles. Ainsi si quelques personnes trouvent que j'ai employé plus de mots que beaucoup d'autres Auteurs, pour démontrer quelques Propositions, je supplie ces personnes de ne mesurer mes Démonstrations que par la durée du tems qu'elles employeront à les comprendre, de faire attention que j'ai toujours démontré en rigueur, & que si elles m'entendent sans peine, & si je n'ai laissé aucun voile sur les vérités que je voulois découvrir, j'ai fait ce que je devois faire.*

A l'égard d'Euclide qui est l'Auteur de ces Elemens; il étoit de la Ville de Megare, vivoit sous le premier des Ptolomées, environ 400 ans avant la Naissance de J. C. & l'on peut dire qu'il n'y a eu de Géometres depuis lui, que ceux qu'il a formés.

AVERTISSEMENT.

LEs Mathématiciens nomment *Théorêmes*, les Propoſitions qui ne ſont qu'expoſer une vérité : *Problêmes*, celles qui propoſent quelque choſe à faire : *Corollaires*, celles qui ſont des conſéquences d'autres Propoſitions ; & enfin *Scholies*, celles qui ne ſont que des remarques.

Ils nomment *Hypoteſe*, les conditions auſquelles ils diſent qu'une choſe doit être ; & *Conſéquence*, ce qui ſuit de l'hypoteſe & qu'il faut démontrer.

Dans cette Propoſition : ſi un triangle eſt équilatéral, ſes trois angles ſeront égaux entr'eux ; *cette partie*, ſi un Triangle eſt équilatéral, *eſt* l'hypoteſe ; *& celle-ci* ſes trois angles ſeront égaux entr'eux, *eſt* la conſéquence *qu'il faut démontrer.*

C'eſt l'uſage de terminer toujours

la démonſtration d'une Propoſition par la répétition de l'hypoteſe & de la conſéquence de cette Propoſition : mais pour abreger on déſigne l'une & l'autre par ces quatre lettres C. Q. F. D. s'il s'agit d'un Théorême, & par ces quatre lettres C. Q. F. F. s'il eſt queſtion d'un Problême. Les quatre premieres ſignifient *ce qu'il falloit démontrer*, & les quatre autres, *ce qu'il falloit faire.*

APPROBATION.

J'AI lû par ordre de Monſeigneur le Chancelier, les Oeuvres de M. Ozanam, contenans *le Dictionnaire, le Cours & les Récréations Mathématiques, un Traité d'Arpentage, la Géométrie-Pratique, l'Uſage du Compas de proportion, la Méthode pour lever les Plans, & les Elemens d'Euclides.*

Les Ouvrages de M. Ozanam ayant ſervi juſqu'ici d'Ecole à preſque tous ceux qui ſe ſont appliqués aux Mathématiques depuis qu'elles ont été regardées en Europe comme la baſe de toutes les Sçiences; il y a apparence que cette nouvelle édition de ſes Oeuvres ſera auſſi-bien reçue du Public que l'ont été les précédentes. A Paris le 24 Février 1746.

BELIDOR.

Le Privilege de cet Ouvrage & des autres de M. Ozanam, ſe trouvera à la fin du Traité d'Arpentage de cet Auteur.

LES ELEMENS D'EUCLIDE.

LIVRE PREMIER.

EUCLIDE commence ce Livre par définir les termes qui sont propres à la Géométrie. Il pose ensuite les Principes sur lesquels il doit fonder les Démonstrations des Propositions qu'il va avancer, & après avoir déduit de quelques-uns les Pratiques les plus simples de la Géométrie, il considere les Triangles ; examine quelles conditions sont suffisantes pour conclure l'égalité de leurs angles, de leurs côtés, & de leurs surfaces, & à mesure qu'il établit une nouvelle verité, il en conclut les Pratiques qu'il est nécessaire de savoir, pour aller aux Propositions suivantes. Il passe aux Lignes paralleles, démontre les conditions aux-

quelles on peut connoître ſi des lignes le ſont, conſidere les propriétés de ces lignes, en déduit une des plus conſidérables des Triangles, & naturellement conduit aux Parallelogrammes qui ſont des figures formées par ces lignes, il en démontre auſſi pluſieurs proprietés, enſeigne quelques-unes des conditions auxquelles ils ſont egaux entr'eux, & donne des Regles pour transformer en Parallelogramme une figure rectiligne quelconque. Il termine enfin ce Livre par la fameuſe Propoſition du Quarré de l'Hypotenuſe, l'une des plus belles & des plus utiles de la Géométrie, & pour la découverte de laquelle, on dit que Pytagore offrit aux Muſes un ſacrifice de cent Bœufs, en action de grace de la faveur qu'il s'imaginoit avoir reçu d'elles.

DEFINITIONS.

N°. 1. LA *Géométrie* eſt une Science qui conſidere l'*Etendue*.

2. Ce qui eſt étendu peut être conſideré premierement, comme ne l'étant qu'en un ſens, & ce ſens ſe nomme alors *Longueur*: Secondement, comme ne l'étant qu'en deux ſens, & l'un à volonté, ſe nomme alors *Longueur*, & l'autre *Largeur*: Troiſiéme-

ment, comme l'étant en trois ſens, & l'un à volonté, ſe nomme alors *Longueur*, l'autre à volonté auſſi, *Largeur*, & le troiſiéme, *Epaiſſeur*.

3. La Longueur, la Largeur, & l'Epaiſſeur ſe nomment chacune *Dimenſion*.

I.

4. On nomme *Point* ce qui conſideré dans l'étendue, n'a aucune partie.

Liſez le N°. 6.

II.

5. On nomme *Ligne* ce qui n'eſt étendu qu'en longueur.

Liſez le n°. 10.

III.

COROLLAIRE.

6. *Il ſuit de cette Définition que* les extrémités d'une Ligne ſont des Points.

Démonſtration. *Premierement, les extrémités d'une ligne ne ſont étendues ni en largeur ni en épaiſſeur; puiſque les lignes ne le ſont qu'en un ſens* (n). N. 2. & 5.

Secondement, elles ne le ſont point en longueur; puiſque ſi elles l'etoient, elles ſeroient des lignes (n) *: or ſi les extrémités A & B d'une ligne AB* étoient des lignes, par exemple AC & BD, ces lignes auroient des extrémités A & C, B & D; & par conſequent elles ne ſe-* N. 5. Fig. 1.

roient point celles de la ligne AB, mais ce seroit leurs extrémités A & B qui le seroient.

Les extrémités d'une ligne ne sont donc étendues ni en longueur, ni en largeur, ni en épaisseur; elles n'ont donc aucune partie;
N. 4. *elles sont donc des points* (n).

I V.

7. La *Ligne-droite* est celle qui va directement d'un point à un autre.

Fig. 1. *La ligne AB* est une* Ligne-droite.

8. La *Ligne-courbe* est celle qui ne va directement d'un point à un autre en aucune de ses parties.

Fig. 2. *La ligne CD* est une* Ligne-courbe.

Euclide ne considere que les lignes-droites.

V.

9. On nomme *Surface* § ce qui n'est étendu qu'en longueur & en largeur.

VI.

COROLLAIRE.

10. *Il suit de cette Définition que* les extrémités d'une surface sont des lignes.

Démonst. *Premierement les extrémités d'une surface ne sont point étendues en*

§ *Le nom Grec que nous rendons par celui de Surface, donne une idée très-juste de cette étendue : il signifie dans son sens propre* Ce qui paroît.

épaiſſeur ; puiſque les ſurfaces ne le ſont qu'en deux ſens (n). N. 2. & 9.

Secondement, elles ne le ſont point en longueur & en largeur ; puiſque ſi elles l'étoient, elles ſeroient des ſurfaces (n) *: or ſi* N. 9. *les extrémités AD & BC, &c. d'une ſurface ABCD * étoient des ſurfaces, par* Fig. 3. *exemple AEFD, & BGHC, &c. ces ſurfaces auroient des extrémités AD & EF, BC & GH, &c. & par conſéquent elles ne ſeroient point celles de la ſurface ABCD, mais ce ſeroit leurs extrémités AD & BC qui le ſeroient.*

Troiſiémement, elles ſont étendues ; car puiſque les ſurfaces le ſont en deux ſens (n), N. 9. *il faut néceſſairement que ce qui termine l'un, ſoit étendu en l'autre.*

Les extrémités d'une ſurface ne ſont donc étendues ni en épaiſſeur, ni en longueur & largeur ; elles ſont cependant etendues ; elles ne le ſont donc qu'en longueur (n) ; N. 2. *elles ſont donc des lignes* (n). N. 5.

VII.

11. La *Surface-plane* eſt celle que tous les points d'une ligne-droite toucheroient au même inſtant, en quelque ſens qu'on poſât cette ligne ſur cette ſurface.

La Surface-plane ſe nomme auſſi Plan.

12. La *Surface-courbe* eſt celle que tous les points d'une ligne-droite ne toucheroient point au même inſtant, ſi l'on poſoit cette ligne ſur cette ſurface en un certain ſens.

Euclide ne conſidere que les ſurfaces-planes.

VIII.

13. On nomme *Angle* l'ouverture formée par deux lignes qui ont un point commun entr'elles.

L'ouverture formée par les lignes BA &
Fig. 4. *BC * qui ont le point B commun entr'elles eſt un* Angle.

Cet angle ſe nomme Angle-plan, *pour le diſtinguer d'un angle d'un autre genre, dont il n'eſt parlé qu'au* 11^e^ Livre.

IX.

14. Les *Côtés* d'un angle ſont les deux lignes qui le forment.

Lig. 4. *Les lignes BA & BC * ſont les* Côtés *de l'angle B.*

15. Le *Sommet* d'un angle eſt le point commun à ſes côtés.

Fig. 4. *Le point B * commun aux lignes BA & BC eſt le* Sommet *de l'angle B.*

SCHOLIE I.

16. *Lorſque pluſieurs angles ont le même ſommet, on les indique par leurs côtés, parce que la Lettre qui eſt à leur ſommet n'en indiqueroit aucun en particulier. Ainſi*

*pour indiquer l'angle qui est à la droite de la ligne AB**, *on dit* l'angle formé par les lignes BA & BC, *ou seulement* l'angle A BC : *mais lorsqu'on se sert de cette expression abregée, on met pour seconde Lettre celle qui est à l'extrémité commune des côtés de l'angle que l'on veut indiquer.* Fig. 5.

On dit de même l'angle formé par les lignes BA & BD, *ou seulement* l'angle ABD *pour indiquer celui qui est à la gauche de la ligne AB.*

SCHOLIE II.

17. *Si l'on faisoit tourner la ligne CB** *autour du point* B, *de maniere que ce point fut toujours l'extrémité commune des lignes BA & BC, plus le point C s'eloigneroit du point A, plus l'ouverture formée par ces lignes seroit grande, & plus il s'en approcheroit, moins elle le seroit; la grandeur de cette ouverture dépend donc de la position respective des lignes qui la forment : or cette ouverture est un angle dont ces lignes sont les côtés* (n) ; *la grandeur d'un angle dépend donc de la position respective de ses côtés; & par conséquent quelqu'augmentation ou diminution que l'on fasse aux côtés d'un angle, on n'augmente ni ne diminue cet angle, puisque ni cette augmentation ni cette diminution ne chan-* Fig. 4. N. 13. & 14.

gent la position respective de ses côtés.

X.

18. On nomme réciproquement *Lignes-perpendiculaires* deux lignes qui se rencontrent de maniere que l'une forme avec l'autre, prolongée s'il est nécessaire, deux angles égaux entr'eux.

Fig. 6. *La ligne AB * qui forme avec la ligne DC deux angles ABC & ABD égaux entr'eux, est* perpendiculaire *à cette ligne DC.*

19. On nomme réciproquement *Lignes-obliques* deux lignes qui se rencontrent de maniere que l'une forme avec l'autre, prolongée s'il est nécessaire, deux angles inégaux entr'eux.

Fig. 5. *La ligne AB * qui forme avec la ligne DC deux angles ABC & ABD inégaux entr'eux, est* oblique *à cette ligne DC.*

20. On nomme *Angle-droit* celui dont un des côtés est perpendiculaire à l'autre.

Fig. 7. *L'angle A * est* droit.

XI.

21. On nomme *Angle-obtus*, celui qui est plus grand, c'est-à-dire plus ouvert qu'un angle droit.

Fig. 8. *L'angle B* est* obtus.

XII.

22. On nomme *Angle-aigu*, celui qui est moins grand, c'est-à-dire moins ouvert qu'un angle droit.

*L'angle C * est* aigu. Fig. 9.

XIII.

23. On nomme *Terme* l'extrémité d'une étendue.

XIV.

24. On nomme *Figure* une étendue terminée de tous côtés.

25. On nomme *Figures-égales* entr'elles, celles dont les surfaces sont égales entr'elles.

XV.

26. On nomme *Cercle* une figure-plane terminée par une seule ligne, dont tous les points sont également éloignés d'un certain point de cette figure.

*La figure X * est un* Cercle. Fig. 10.

27. La *Circonference* d'un cercle est la ligne qui le termine.

*La ligne ABDE * est la* Circonférence *du cercle X.* Fig. 10.

28. Un *Arc* de cercle est une partie de la circonférence d'un cercle.

XVI.

29. Le *Centre* d'un cercle est le point de ce cercle également éloigné de tous les points de sa circonférence.

*Le point C * est le* Centre *du cercle X.* Fig. 10.

XVII.

30. Le *Diametre* d'un cercle est une ligne droite quelconque qui passe par le

centre de ce cercle, & eſt terminée de part & d'autre par ſa circonférence.

Fig. 10. *La ligne AD * eſt un* Diametre *du cercle X.*

31. Le *Rayon* d'un cercle eſt une ligne droite quelconque tirée du centre de ce cercle à ſa circonférence.

Fig. 10 *La ligne CB * eſt un* Rayon *du cercle X.*

COROLLAIRE.

32. *Il ſuit des No. 26. 29, 30 & 31. Premierement : Que* le Rayon d'un cercle eſt la moitié de ſon diametre. *Secondement : Qu'*une ligne droite égale au rayon d'un cercle, & qui a l'une de ſes extrémités au centre de ce cercle, a ſon autre extrémité ſur ſa circonférence.

XVIII.

33. Le *Demi-cercle* eſt une figure plane terminée par la moitié de la circonférence d'un cercle & par ſon diametre.

Fig. 11. *La figure Y * eſt un* Demi-cercle.

34. On nomme *Dégré* un arc de cercle qui eſt la 360^e^ partie de ſa circonférence : *Minute premiere*, un arc qui eſt la 60^e^ partie d'un Dégré : *Minute ſeconde*, un arc qui eſt la 60^e^ partie d'une Minute premiere ; & ainſi de ſuite.

35. On nomme auſſi *Dégré* une partie d'un cercle compriſe entre deux lignes droi-

tes tirées du centre de ce cercle à sa circonférence, & qui est la 360e partie de ce cercle : *Minute premiere*, la 60e partie d'un Dégré, &c.

SCHOLIE.

36. Si du sommet B d'un angle B pris pour centre, on décrit un cercle quelconque, plus cet angle sera grand, plus la partie DBE de ce cercle comprise entre les côtés de cet angle sera grande ; & par consequent plus la partie DBE de ce cercle comprise entre les côtés d'un angle ABC sera grande, plus cet angle sera grand : or plus une partie d'un cercle est grande, plus elle contient de dégrés de ce cercle ; donc plus un angle contient entre ses côtés de dégrés d'un cercle quelconque décrit de son sommet, plus cet angle est grand. La grandeur d'un angle ABC est donc déterminée par le nombre de dégrés contenus dans la partie DBE d'un cercle quelconque décrit du sommet de cet angle, comprise entre les cotés de ce même angle ; donc les dégrés d'un cercle quelconque décrit du sommet d'un angle, sont les mesures de cet angle, & le nombre de ces mesures comprises entre les côtés de cet angle, est sa valeur.* * Fig. 12.

Pour mesurer un angle, on mesure l'arc *de cercle compris entre ses côtés ; parce que la partie d'un cercle comprise entre les cotés d'un angle, contient autant de degrés de ce cercle que l'arc qui la termine contient de degrés de la circonférence de ce méme cercle.*

COROLLAIRE.

37. *Il suit de cette Scholie qu'*un angle droit est de 90 dégrés.

Demonst. *Lorsqu'un angle est droit, la partie de cercle comprise entre ses côtés est un quart de cercle : or un quart de cer-*
N. 34. *cle contient* 90 *dégrés* (n); *donc un angle droit est de* 90 *degres.*

XX.

On nomme *Figure-rectiligne*, celle qui n'est terminée que par des lignes droites.

Euclide ne considere que les figures-rectilignes.

On tire la dénomination des figures rectilignes du nombre de leurs côtés, ou de celui de leurs angles.

Lorsque l'on tire la dénomination d'une figure du nombre de ses cotés ....

XXI. XXII & XXIII.

39. On nomme *Trilatere*, une figure qui a trois côtés : *Quadrilatere*, celle qui en a quatre : *Figure de vingt côtés*, celle qui en a vingt, de *cent côtés*, celle qui en a

cent ; & en général *Multilatere*, celle qui en a plusieurs.

Et lorsque l'on tire la dénomination d'une figure du nombre de ses angles, ...

40. On nomme *Trigone* ou *Triangle*, une figure qui a trois angles : *Tétragone*, celle qui en a quatre : *Pentagone*, celle qui en a cinq : *Exagone*, celle qui en a six : *Eptagone*, celle qui en a sept : *Octogone*, celle qui en a huit : *Ennéagone*, celle qui en a neuf: *Décagone*, celle qui en a dix : *Endecagone*, celle qui en a onze : *Dodécagone*, celle qui en a douze : *Pentédécagone*, celle qui en a quinze, & en général *Polygone*, celle qui en a plusieurs.

On tire aussi la dénomination des triangles de leurs côtés, & de leurs angles.

Lorsque l'on tire la dénomination d'un triangle de ses côtés, on nomme ....

XXIV.

41. *Triangle-équilateral*, celui dont tous les côtés sont égaux entr'eux.

Le Triangle A * *est* équilateral. Fig. 13.

XXV.

42. *Triangle-isocele*, celui dont deux côtés sont égaux entr'eux.

Le Triangle B * *est* isocele. Fig. 14.

XXVI.

43. *Triangle-scalêne*, celui dont tous les côtés sont inégaux entr'eux.

Fig. 15. *Le Triangle C* est* ſcalêne.

Lorſque l'on tire la denomination d'un Triangle de ſes angles, on nomme....

XXVII.

44. *Triangle-rectangle*, celui dont un des angles eſt droit.

Fig. 16. *Le Triangle A* eſt* rectangle.

XXVIII.

45. *Triangle-obtuſangle*, celui dont un des angles eſt obtus.

Fig. 17. *Le Triangle B* eſt* obtuſangle.

XXIX.

46. *Triangle-acutangle*, celui dont tous les angles ſont aigus.

Fig. 18. *Le Triangle C* eſt* acutangle.

47. On nomme *Hypotenuſe*, le côté d'un triangle rectangle, oppoſé à l'angle droit de ce triangle.

48. L'angle *exterieur* d'un triangle, eſt un angle formé par le prolongement de l'un des côtés de ce triangle.

Fig. 19. *L'angle ABC* eſt l'angle* exterieur *du triangle DAB.*

La denomination des Quadrilateres dépend tout à la fois de leurs angles & de leurs côtes; ainſi l'on nomme.....

XXX.

49. *Quarré*, un Quadrilatere dont tous les côtés ſont égaux entr'eux, & dont tous les angles ſont droits.

*La figure A * est un* Quarré. Fig. 20.

XXXI.

50. *Quarré-long*, un Quadrilatere dont les seuls côtés opposés sont égaux entr'eux, & dont tous les angles sont droits.

*La figure B * est un* Quarré-long. Fig. 21.

51. Le Quarré & le Quarré-long se nomment aussi *Rectangles*, parce que tous leurs angles sont droits.

XXXII.

52 *Rhombe* ou *Lozange*, un Quadrilatere dont tous les côtés sont égaux entr'eux, & dont les angles ne sont pas droits.

*La figure C * est un* Rhombe. Fig. 22.

XXXIII.

53. *Rhomboïde*, un Quadrilatere dont les seuls côtés opposés sont égaux entr'eux, & dont les angles ne sont pas droits.

*La figure D * est un* Rhomboïde. Fig. 23.

XXXIV.

54. On nomme *Trapeze*, tout Quadrilatere différent des quatre que l'on vient de définir.

XXXV.

55. On nomme *Lignes-paralleles*, celles dont tous les points des unes sont également éloignés de tous les points correspondans des autres.

*Les lignes AB & CD * sont* paralleles. Fig. 24.

COROLLAIRE.

56. *Il ſuit de cette définition que* des lignes-paralleles ne ſe rencontrent point.

57. On nomme *Parallelogramme* un Quadrilatere dont les côtés oppoſés ſont paralleles.

Le Quarré, le Quarré-long, le Rhombe & le Rhomboïde ſont des Parallelogrammes, *parce que leurs côtés oppoſés ſont paralleles : ce qui eſt démontré* n. 125.

58. La *Diagonale* d'un Quadrilatere eſt une ligne droite tirée d'un angle quelconque d'un Quadrilatere à l'angle oppoſé de ce même Quadrilatere.

Fig. 25. *La ligne AC * eſt la* Diagonale *du Quadrilatere ABCD.*

59. Les *Complémens* d'un Parallelogramme ſont deux Parallelogrammes formés de part & d'autre de la Diagonale d'un Parallelogramme, par deux lignes paralleles à ſes côtés chacune à chacun, & qui ont un point quelconque commun entr'elles & cette même Diagonale.

*Les Parallelogrammes EFID * & GBHF ſont les* Complémens *du Parallelogramme ABCD.*

SUPPOSITIONS.

60. *On ſuppoſe qu'il eſt poſſible : Premierement,*

mierement, de tirer une ligne droite d'un point quelconque, à quelqu'autre point que l'on veuille; *& par conſequent* de prolonger une ligne droite autant qu'on le veut.

61. *Secondement*, de décrire un cercle de quelque point que l'on veuille prendre pour centre, & avec quelque rayon que l'on veuille.

AXIOMES.

I.

62. Les quantités égales chacune à une même quantité, ſont égales entr'elles.

II.

63. Les quantités égales entr'elles ajoutées à des quantités égales entr'elles, forment des ſommes égales entr'elles.

III.

64. Les quantités égales entr'elles ôtées de quantités égales entr'elles, laiſſent des reſtes égaux entr'eux.

IV.

65. Les quantités égales entr'elles ajoutées à des quantités inégales entr'elles, forment des ſommes inégales entr'elles.

V.

36. Les quantités égales entr'elles ôtées de quantités inégales entr'elles, laiſſent des reſtes inégaux entr'eux.

VI.

67. Les quantités doubles, triples, qua-

druples, &c. de quantités égales entr'elles, ſont égales entr'elles.

VII.

68. Les quantités qui ſont les moitiés, les tiers, les quarts &c. de quantités égales entr'elles, ſont égales entr'elles.

VIII.

69. Deux lignes droites, ou deux figures planes qui étant poſées l'une ſur l'autre, ne ſe ſurpaſſent point, c'eſt-à-dire ſe couvrent réciproquement, ſont égales entre-elles.

COROLLAIRE.

70. *Il ſuit de cet Axiome : Premierement, que* deux lignes droites égales entr'elles étant poſées l'une ſur l'autre, de maniere que l'une des extrémités de la premiere ſoit ſur l'une des extrémités de la ſeconde, l'autre extrémité de la premiere ſera ſur l'autre extrémité de la ſeconde.

71. *Secondement, que* deux angles égaux entr'eux étant poſés l'un ſur l'autre de maniere que le ſommet du premier étant ſur le ſommet du ſecond, l'un des côtés du premier ſoit ſur l'un des côtés du ſecond, l'autre côté du premier ſera ſur l'autre côté du ſecond.

IX.

72. Une quantité eſt égale à la ſomme

de toutes ſes parties ; & par conſéquent plus grande qu'une de ſes parties.

COROLLAIRE.

73. *Il ſuit des Nº. 67, 68 & 72. que* la ſomme des produits de toutes les parties d'une quantité multipliées chacune par un même nombre entier ou fractionnaire, eſt égale au produit de cette quantité multipliée par ce même nombre.

X.

74. Deux lignes droites qui ont deux points communs entr'elles, ſont poſées l'une ſur l'autre, & ne font qu'une ſeule ligne droite.

COROLLAIRE.

75. *Il ſuit de cet Axiome : Premierement, que* deux lignes droites ne ſe rencontrent qu'en un point. *Secondement, qu'*elles ne ferment point un eſpace.

PROPOSITION I.

PROBLEME.

76. *Décrire un Triangle équilateral, sur une ligne droite donnée.*

Fig. 26. IL faut décrire un Triangle équilateral sur la ligne droite AB *.

Construction. Du point A pris pour centre, & avec la ligne AB prise pour rayon, décrivés un cercle DCB : du point B pris pour centre & avec la même ligne AB prise pour rayon, décrivés un cercle ACE : du point C commune-section des circonférences de ces deux cercles, tirés aux extrémités A & B de la ligne AB les lignes CA & CB : le triangle ACB qu'elles formeront sera équilateral.

Démonstration. Les lignes AB & AC sont rayons du même cercle DCB (*c*), & par conséquent elles sont égales entr'el-
N. 26. les (*n*) : les lignes AB & BC sont aussi rayons du même cercle ACE (*c*), & par conséquent elles sont aussi égales entr'elles ; ainsi les lignes AC & BC sont égales chacune à une même ligne AB ; donc les lignes AB, AC, & BC sont éga-

les entr'elles (*n*), & par conséquent le triangle ABC qu'elles forment, est équilateral (*n*); donc C. Q. F. F. N. 622 N. 411

SCHOLIE.

Il suffit de décrire des points A & B, deux arcs qui ayent chacun la ligne AB pour rayon, & qui se coupent en un point C.

USAGE.

77. *On peut se servir du triangle équilateral pour mesurer une distance inaccessible, par exemple la largeur d'une Riviere. Il faut pour cela décrire sur une planche un triangle équilateral ABC*, & s'en servir de cette maniere...* Fig. 27.

On pose horisontalement le triangle ABC, & l'on dirige son côté AC de maniere qu'il soit parallele au lit de la Riviere. En regardant d'alignement au côté AB, on observe un point D au-delà de cette Riviere, & d'alignement au côté AC, un autre point F eloigné de 5 à 6 pieds du point A. On met un Piquet en A, & un autre en F. On transporte le triangle ABC vers E, & l'on fait en sorte d'y trouver un point c *où l'on puisse poser ce triangle de maniere qu'en regardant d'alignement au côté* ca *le Pi-*

quet F empéche de voir le Piquet A, & d'alignement au côté cb *on voye le point D. Lorsque l'on sera parvenu à trouver ce point* c, *les rayons visuels AD, A*c *&* c*D formeront un triangle équilateral AD*c : *or on peut mesurer le cote A*c *de ce triangle, & par consequent rapporter ce triangle sur*
N. 112. *le papier* (n) *par le moyen d'une echelle qui sera connoitre la valeur de la perpendiculaire DG, de laquelle otant la distance GH du bord de la Riviere a la ligne A*c, *le reste HD sera la largeur de cette Riviere.*

PROPOSITION II.

PROBLEME.

78. *Tirer d'un Point donné, une ligne droite égale à une autre.*

Fig. 21. IL faut tirer du point C * une ligne droite égale à la ligne droite AB.

Const. Du point C pris pour centre, & avec un rayon égal à la ligne AB, décrivés un cercle EFD : du même point C tirés une ligne CD à un point quelconque D de la circonférence de ce cercle : cette ligne CD sera égale à la ligne AB.

Demonstr. la ligne CD est rayon du cercle EFD (*c*) : or le rayon du cercle EFD eſt égal à la ligne AB (*c*) ; donc la ligne CD eſt égale à la ligne AB ; donc C.Q.F.F.

SCHOLIE.

Il ſuffit de prendre avec un Compas la longueur de la ligne AB, de poſer l'une des pointes de ce Compas au point C, & de marquer avec l'autre un point D.

PROPOSITION III.

PROBLEME.

79. *Diviſer une ligne droite en deux parties, telles que l'une ſoit egale à une autre ligne droite moins grande que la premiere.*

IL faut diviſer la ligne droite AB* en deux parties, telles que l'une ſoit égale à une ligne droite CD moins grande que AB. Fig. 29.

Conſt. De l'une des extrémités de la ligne AB, par exemple de A priſe pour centre, & avec un rayon égal à la ligne CD, décrivés un cercle EFG : la circonférence de ce cercle diviſera la ligne AB au point F comme il eſt propoſé.

Demonſt. La partie AF de la ligne AB eſt rayon du cercle EFG (*c*) : or le rayon du cercle EFG eſt égal à la ligne CD (*c*) ; donc la partie AF de la ligne AB eſt égale à la ligne CD ; donc C. Q. F. F.

SCHOLIE.

Il ſuffit de prendre avec un Compas la longueur de la ligne CD, de poſer l'une des pointes de ce Compas à l'une des extrémités A de la ligne AB, & de marquer avec l'autre un point F ſur cette ligne.

PROPO-

PROPOSITION IV.

THEOREME.

80. *Si deux Triangles ſont tels que l'un des angles du premier ſoit égal à l'un des angles du ſecond, & que les côtés qui forment cet angle du premier ſoient egaux à ceux qui forment cet angle du ſecond, chacun à chacun :* Premierement, *l'autre côté du premier Triangle ſera egal à l'autre côté du ſecond :* Secondement, *les autres angles du premier Triangle ſeront égaux aux autres angles du ſecond, chacun à chacun :* Troiſiémement, *la ſurface du premier Triangle ſera égale à celle du ſecond.*

SI les triangles ABC & DEF * ont l'angle B égal à l'angle E, le côté BA au côté ED, & le côté BC au côté EF: *Premierement*, le côté AC ſera égal au côté DF: *Secondement*, l'angle A ſera égal à l'angle D & l'angle C à l'angle F: *Troiſiémement*, la ſurface du triangle ABC ſera égale à celle du triangle DEF. Fig. 10.

Conſt. Poſés par penſée le triangle ABC ſur le triangle DEF, de maniere que le

C

point B étant ſur le point E, le côté BA ſoit ſur le côté ED.

DEMONSTRATION.

Premierement, puiſque l'angle B eſt égal à l'angle E (*h*), & que le ſommet B du premier eſt ſur le ſommet E du ſecond & le côté BA du premier ſur le côté ED du ſecond (*c*), l'autre côté BC du premier eſt
N. 71. ſur l'autre côté EF du ſecond (*n*); & puiſque le côté BA eſt égal au côté ED & le côté BC au côté EF (*h*), & que le côté BA eſt ſur le côté ED (*c*), le côté BC ſur le côté EF (*d*), & l'extrémité commune B de ces côtés BA & BC, ſur l'extrémité commune E des côtés ED & EF (*c*), les autres extrémités A & C des côtés BA & BC ſont ſur les autres extrémités D & F des côtés ED & EF, chacune ſur cha-
N. 70. cune (*n*): or ces extrémités A & C, D & F des côtés BA & BC, ED & EF ſont auſſi celles des côtés AC & DF; donc le côté AC a auſſi ſes extrémités ſur celles du côté DF; & par conſéquent le côté
N. 69. AC eſt égal au côté DF (*n*).

Secondement, le ſommet A de l'angle A eſt ſur le ſommet D de l'angle D (*d*), & les côtés AB & AC du premier ſont ſur les côtés DE & DF du ſecond, chacun ſur chacun, puiſque AB eſt ſur DE (*c*), &

que AC eſt ſur DF (*d*) ; donc l'angle A eſt égal à l'angle D (*n*). On démontre de N. 69.
la même maniere que l'angle C eſt égal à l'angle F.

Troiſiemement, les côtés du triangle ABC ſont ſur ceux du triangle DEF, puiſque BA eſt ſur ED (*c*), & que BC eſt ſur EF & AC ſur DF (*d*) ; donc les triangles ABC & DEF ne ſe ſurpaſſent point ; & par conſéquent la ſurface du triangle ABC eſt égale à celle du triangle DEF (*n*) ; donc C. Q. F. D. N. 69.

COROLLAIRE.

81. Il ſuit de ce Théorême, *que ſi une ligne droite diviſe en deux parties égales entr'elles, un angle quelconque d'un triangle équilateral, ou l'angle formé par les côtés égaux d'un triangle iſocele, elle ſera perpendiculaire au côté de ce triangle qu'elle rencontrera, & le diviſera en deux parties égales entr'elles.*

Si la ligne BD * diviſe l'angle ABC d'un Fig. 31.
triangle équilateral ou iſocele ABC en deux parties ABD & CBD égales entr'elles, elle ſera perpendiculaire au côté AC, & le diviſera en deux parties DA & DC égales entr'elles.

Demonſt. Les triangles BDA & BDC ont l'angle ABD égal à l'angle CBD (*h*),

& les côtés BA & BD qui forment le premier, égaux aux côtés BC & BD qui forment le second, chacun à chacun, puisque BA est égal à BC (*h*), & que BD est commun à ces deux triangles ; donc l'angle BDA est égal à l'angle BDC, & le côté
N. 80. DA au côté DC (*n*) ; & par conséquent la ligne BD est perpendiculaire au côté AC
N. 18. (*n*), & le divise en deux parties DA & DC égales entr'elles ; donc C. Q. F. D.

USAGE.

82. *On peut se servir de cette Proposition de la maniere suivante ; pour*
Fig. 32. *mesurer une ligne AB* qui n'est accessible que par ses extrémités A & B.*

On choisit dans la Campagne un point C d'où l'on puisse voir les extrémités A & B de cette ligne, & aller directement à chacune. De ce point C on dirige un rayon visuel vers A & un autre vers B. On mesure l'angle C formé par ces deux rayons visuels, & l'on mesure aussi ces deux rayons visuels. On se retire ensuite en un endroit commode. On y forme un angle c *égal à l'angle C. On fait les côtés* ca *&* cb *de cet angle, égaux aux côtés CA & CB de l'angle C, chacun à chacun, & du point* a *au point* b *on tire la ligne* ab. *Cette ligne est égale à la ligne inaccessible AB ; puis-*

que les triangles ABC & abc ont l'angle C égal a l'angle c (c), *& les côtés CA & CB qui forment le premier, égaux aux côtés* ca & cb *qui forment le second, chacun à chacun* (c); *& par consequent si l'on mesure la ligne* ab *ce sera la même chose que si l'on mesuroit la ligne AB.*

Il est plus commode de rapporter le triangle ABC (n) *sur le papier par le moyen d'une Echelle, que de le rapporter sur le terrein.* N. 112.

PROPOSITION V.

THEOREME.

83. *Si deux côtés d'un Triangle sont égaux entr'eux, les angles de ce Triangle qui leurs sont opposés, le seront aussi.*

SI les côtés BA & BC du triangle ABC * sont égaux entr'eux, l'angle C sera égal à l'angle A. Fig. 31.

Const. Supposés que l'angle ABC soit divisé en deux parties égales entr'elles, par une ligne droite BD.

Demonst. Les triangles BDA & BDC ont l'angle ABD égal à l'angle CBD (*c*), & les côtés BA & BD qui forment le premier, égaux aux côtés BC & BD qui forment le second, chacun à chacun, puisque BA est égal à BC (*h*) & que BD est commun à ces deux triangles ; donc les autres angles du premier triangle sont égaux aux autres angles du second, chacun à chacun (*n*), & par conséquent l'angle C est égal à l'angle A ; donc C. Q. F. D.

N 80.

COROLLAIRE.

84. Il suit de ce Théorême, que *les angles d'un triangle équilateral sont égaux entr'eux.*

PROPOSITION VI.

THEOREME.

85. *Si deux angles d'un Triangle sont égaux entr'eux, les côtés de ce Triangle qui leurs sont opposés, le seront aussi.*

Fig. 33. SI les angles BAC & BCA du triangle ABC * sont égaux entr'eux, le côté BC sera égal au côté BA.

Const. Prolongés le côté AB vers E, jusqu'à ce que la ligne BE soit égale au côté BC : prolongés aussi le côté CB vers D, jusqu'à ce que la ligne BD soit égale au côté BA : du point E au point C tirés la ligne EC, & du point D au point A tirés la ligne DA.

Démonst. Les Triangles EAC & DCA ont l'angle EAC égal à l'angle DCA (*h*), & les côtés AE & AC qui forment le premier, égaux aux côtés CD & AC qui forment le second, chacun à chacun, puisque AE & CD sont chacun la somme de AB & de BC (*c*), & que AC est commun à ces Triangles; ainsi ces triangles ont le côté EC égal au côté DA, l'angle E égal à l'angle D, & l'angle ECA égal à l'angle DAC (*n*) : or N. 80.
puisque l'angle ECA est égal à l'angle DAC (*d*), & que l'angle BCA l'est à l'angle BAC (*h*), si l'on retranche l'angle BCA de l'un, & l'angle BAC de l'autre, les restes qui sont les angles ECB & DAB seront égaux entr'eux (*n*) ; & par consé- N. 64.
quent si l'on pose le triangle ECB sur le triangle DAB de maniere que le point C étant sur le point A, le côté CE soit sur le côté AD, le point E sera sur le point D (*n*), N. 70.
puisque ces côtés EC & DA sont égaux entr'eux (*d*) ; le côté CB sera sur la ligne AE (*n*), puisque l'angle ECB est égal à l'an- N. 71.
gle DAB (*d*), & le côté EB sera sur la ligne DC (*n*), puisque l'angle E est égal à N. 71.
l'angle D (*d*) ; ainsi le point B extrémité

commune des côtés CB & EB sera en même-tems sur la ligne AE & sur la ligne DC ; & par conséquent il sera sur un point commun à ces deux lignes : or ces deux lignes n'ont que le point B de commun en-
N. 75. tr'elles (*n*) ; donc le point B extrémité du côté CB, sera sur l'extrémité B du côté AB : mais l'autre extrémité C du côté CB est sur l'autre extrémité A du côté AB (*c*) ; donc
N. 69. le côté CB est égal au côté AB (*n*) ; donc C. Q. F. D.

COROLLAIRE.

84. Il suit de ce Théorême, que *si les angles d'un triangle sont égaux entr'eux, ce triangle est équilateral.*

USAGE.

Cette Proposition est d'un grand usage dans la Géometrie ; parce qu'il est souvent nécessaire de démontrer que deux côtés d'un triangle sont égaux entr'eux.

SCHOLIE.

Nous supprimons la septiéme Proposition, parce qu'elle est comprise dans la huitiéme.

PROPOSITION VIII.

THEOREME.

87. *Si deux Triangles ſont tels que les côtés du premier ſoient égaux a ceux du ſecond, chacun a chacun :* Premierement, *les angles du premier ſeront égaux à ceux du ſecond, chacun à chacun :* Secondement, *la ſurface du premier ſera égale à celle du ſecond.*

SI les triangles ABC & DEF * ont le côté AC égal au côté DF, le côté BA égal au côté ED, & le côté BC égal au côté EF : *Premierement* l'angle B ſera égal à l'angle E, l'angle C à l'angle F & l'angle A à l'angle D : *Secondement*, la Surface du triangle ABC ſera égale à celle du triangle DEF. Fig. 34

Conſt. Poſés le triangle ABC ſur le triangle DEF, de maniere que le point A étant ſur le point D, le côté AC ſoit ſur le côté DF.

Demonſt. L'extrémité commune A des côtés BA & AC eſt ſur l'extrémité commune D des côtés ED & DF (*c*) ; ainſi puiſque BA eſt égal à ED (*h*), l'autre ex-

trémité B de BA est sur la circonférence EG d'un cercle, qui auroit le point D pour
N. 32. centre & ED pour rayon (*n*) ; & puisque AC est égal à DF (*h*), & qu'il est sur DF (*c*), l'autre extrémité C de AC est sur l'au-
N. 70. tre extrémité F de DF (*n*) : mais C est aussi l'une des extrémités du côté BC, & F l'une de celles du côté EF ; donc l'une des extrémités C de BC est sur l'une des extrémités F de EF, & par conséquent puisque BC est égal à EF (*h*), l'autre extrémité B de BC est sur la circonférence EH d'un cercle, qui auroit le point F pour centre & EF
N. 32. pour rayon (*n*) : le point B est donc en même tems sur la circonférence EG & sur la circonférence EH ; il est donc sur un point commun à ces deux circonférences : or ces deux circonférences n'ont au-dessus de DF, que le point E de commun entr'elles ; donc le point B est sur le point E, & par consé-
N. 74. quent BA est sur ED & BC sur EF (*n*) ; ainsi les sommets A, B, & C des angles du triangle ABC, sont sur les sommets D, E & F des angles du triangle DEF, chacun sur chacun, & les côtés des premiers sont sur les côtés des derniers, chacun sur chacun, par conséquent: *Premierement*, les angles du triangle ABC sont égaux à ceux du triangle DEF, chacun
N. 69. à chacun (*n*) : *Secondement*, la surface du

triangle ABC eſt égale à celle du triangle DEF (*n*) ; donc C. Q. F. D. N. 69.

PROPOSITION IX.

PROBLEME.

88. *Diviſer un Angle en deux parties égales entr'elles.*

IL faut diviſer l'angle ABC * en deux parties égales entr'elles. Fig. 35.

Conſt. Du point B pris pour centre, & avec un rayon BD pris à volonté, décrivés deux arcs qui coupent, l'un en D & l'autre en E, les côtés BA & BC de l'angle ABC : des points D & E pris pour centres, & avec un rayon DF pris à volonté, mais plus grand que la moitié de la diſtance de D à E, décrivés deux arcs qui ſe coupent en F : du point B tirés au point F la ligne BF, elle diviſera l'angle ABC en deux angles ABF & CBF qui ſeront égaux entr'eux.

Pour la Démonſtration, tirés du point F aux points D & E les lignes FD & FE.

Demonſt. Les triangles DBF & EBF ont le côté BD égal au côté BE (*c*), le côté FD égal au côté FE (*c*) & le côté BF commun entr'eux ; ainſi les angles du premier

triangle ſont égaux à ceux du ſecond, chacun à chacun (*n*), & par conſéquent l'angle
N. 87. ABF eſt égal à l'angle CBF ; donc C.Q.F.F.

COROLLAIRE.

89. Il ſuit de ce Problême, que *pour diviſer un angle en quatre parties égales entr'elles, il faut commencer par le diviſer en deux parties égales, & diviſer enſuite chacune de ces deux parties égales, en deux autres qui le ſoient auſſi : & ainſi de ſuite pour le diviſer en 8, en 16, &c.*

SCHOLIE.

90. *Il eſt ſouvent néceſſaire de diviſer un angle en un nombre determiné de parties égales entr'elles : mais lorſque ce nombre n'eſt pas 2. 4. 8. 16. & ainſi de ſuite en doublant, ce Problême n'eſt plus du reſſort de la Géométrie-elémentaire, & il eſt démontré qu'on ne peut le réſoudre que par celle des lignes courbes. On le nomme alors* le Problême de la triſection de l'angle.

PROPOSITION X.

PROBLEME.

91. *Diviser une ligne droite en deux parties égales entr'elles.*

IL faut diviser la ligne droite AB * en deux parties égales entr'elles. Fig. 36.

Const. Des points A & B pris pour centres & avec un rayon AC pris à volonté, mais plus grand que la moitié de AB, décrivés deux arcs qui se coupent en C : des points A & B pris encore pour centres, & avec le même rayon AC, ou avec un autre AD pris à volonté, mais plus grand aussi que la moitié de AB, décrivés deux arcs qui se coupent en D : du point C tirés au point D la ligne CD, elle divisera la ligne AB au point E, en deux parties EA & EB qui seront égales entr'elles.

Pour la demonstration : tirés du point C aux points A & B, les lignes CA & CB : tirés aussi du point D aux mêmes points A & B, les lignes DA & DB.

Démonst. Les triangles ACD & BCD ont le côté CA égal au côté CB (*c*), le côté DA égal au côté DB (*c*), & le côté

CD commun entr'eux; donc les angles du premier triangle ſont égaux à ceux du ſe-
N. 87. cond, chacun à chacun (*n*), & par conſéquent l'angle ACD eſt égal à l'angle BCD, ou l'angle ACE à l'angle BCE; ainſi les triangles ACE & BCE ont l'angle ACE égal à l'angle BCE (*d*), & les côtés CA & CE qui forment le premier, égaux aux côtés CB & CE qui forment le ſecond, chacun à chacun, puiſque CA eſt égal à CB (*c*) & que CE eſt commun à ces deux triangles; donc EA troiſiéme côté du premier triangle, eſt égal à EB troiſiéme côté
N. 80. du ſecond (*n*), & par conſéquent la ligne AB eſt diviſée au point E en deux parties EA & EB égales entr'elles; donc C. Q. F. F.

PROPOSITION XI.

PROBLEME.

92. *D'un point donné ſur une ligne droite, élever une perpendiculaire à cette ligne.*

Fig. 37. IL faut du point donné C ſur la ligne droite AB *, élever une perpendiculaire à cette ligne.

Conſt. Du point C pris pour centre, &

avec un rayon CD pris à volonté, décrivés deux arcs qui coupent, l'un en D & l'autre en E, la ligne AB prolongée s'il eſt néceſſaire : des points D & E pris pour centres, & avec un rayon DF pris à volonté, mais plus grand que CD, décrivés deux arcs qui ſe coupent en F : tirés du point F au point C la ligne FC, elle ſera perpendiculaire à la ligne AB.

Pour la démonſtration : tirés du point F aux points D & E les lignes FD & FE.

Demonſt. Les triangles FCE & FCD ont le côté CD égal au côté CE (*c*), le côté FD égal au côté FE (*c*) & le côté FC commun entr'eux ; ainſi les angles du premier triangle ſont égaux à ceux du ſecond, chacun à chacun (*n*), & par conſé- N. 171
quent l'angle FCD eſt égal a l'angle FCE ; donc la ligne FC eſt perpendiculaire à la ligne AB (*n*) ; donc C. Q. F. F. N. 181

PROPOSITION XII.

PROBLEME.

93. *D'un point donné hors d'une ligne droite, abaisser une perpendiculaire à cette ligne.*

Fig. 38. IL faut abaisser du point C *, une perpendiculaire à la ligne droite AB.

Conſt. Du point C pris pour centre, & avec un rayon CD pris à volonté, mais plus grand que la diſtance du point C à la ligne AB, décrivés un arc qui coupe en deux points D & E, cette ligne prolongée s'il eſt néceſſaire : des points D & E pris pour centres, & avec le même rayon CD, ou avec un autre DF pris à volonté, mais plus grand que la moitié de DE, décrivés deux arcs qui ſe coupent en F : du point C tirés une ligne CG telle que ſi elle étoit prolongée, elle paſſât par le point F, elle ſera perpendiculaire à la ligne AB.

Pour la demonſtration : tirés du point C aux points D & E, les lignes CD & CE ; tirés auſſi du point F aux mêmes points D & E, les lignes FD & FE : prolongés CG juſqu'au point F.

Demonſt.

Démonst. Les triangles DCF & ECF ont le côté CD égal au côté CE, puisque CD & CE sont rayons d'un même arc de cercle DE (*c*), le côté FD égal au côté FE (*c*), & le côté CF commun entr'eux ; donc les angles du premier triangle sont égaux à ceux du second, chacun à chacun (*n*) ; & par conséquent l'angle DCF est N. 87.
égal à l'angle ECF, ou l'angle DCG à l'angle ECG ; ainsi les triangles DCG & ECG ont l'angle DCG égal à l'angle ECG (*d*), & les côtés CD & CG qui forment le premier, égaux aux côtés CE & CG qui forment le second, chacun à chacun, puisque CD est égal à CE (*d*) & que CG est commun à ces deux triangles ; donc les autres angles du premier triangle sont égaux aux autres angles du second, chacun à chacun (*n*) ; & par conséquent N. 80.
l'angle CGD est égal à l'angle CGE ; donc la ligne CG est perpendiculaire à la ligne AB (*n*) ; donc C. Q. F. F. N. 18.

PROPOSITION XIII.

THEOREME.

94. *Si une ligne droite qui en rencontre une autre, forme deux angles avec elle prolongée s'il est nécessaire, la somme de ces deux angles sera égale à celle de deux angles droits.*

Fig. 39. & 40. SI la ligne AB * qui rencontre la ligne CD, forme avec elle deux angles ABC & ABD, la somme de ces deux angles sera égale à celle de deux angles droits.

La ligne AB est perpendiculaire ou oblique à la ligne CD.

Fig. 39. Premier cas. *Si la ligne AB * est perpendiculaire à la ligne CD.*

Demonst. Les angles ABC & ABD

N. 18. sont droits chacun (*n*); par conséquent leur somme est égale à celle de deux angles droits.

Fig. 40. Second cas. *Si la ligne AB * est oblique à la ligne CD.*

Const. Elevés du point B la ligne BE

N. 92. perpendiculaire à la ligne CD (*n*).

Démonst. La somme des deux angles EBC & EBD est égale à celle des trois an-

gles EBC, EBA & ABD (*n*) : or celle N. 72.
de ces trois angles eſt égale à celle des deux angles ABC & ABD (*n*) ; donc la N. 72.
ſomme des deux angles EBC & EBD eſt égale à celle des deux angles ABC & ABD ; mais les angles EBC & EBD ſont droits chacun (*c*) ; donc la ſomme des deux angles ABC & ABD eſt égale à celle de deux angles droits ; donc C. Q. F. D.

COROLLAIRE.

95. Il ſuit de ce Théorême, que *la ſomme des angles formés par pluſieurs lignes droites tirées d'un même point, eſt égale à celle de quatre angles droits.*

La ſomme des angles ACB *, BCD, Fig. 41
DCE, ECF & FCA formés par les lignes CA, CB, CD, CE & CF tirées d'un même point C, eſt égale à celle de quatre angles droits.

Conſt. Prolongés s'il eſt néceſſaire l'une de ces lignes, par exemple AC, à volonté vers G.

Démonſt. La ſomme des angles ACB & BCG eſt égale à celle de deux angles droits, & celle des angles ACE & ECG l'eſt
auſſi (*n*) ; ainſi la ſomme des quatre angles N. 94.
ACB, BCG, ACE & ECG eſt égale à celle de quatre angles droits : or la ſomme des

angles ACB, BCD, &c. eſt égale à celle des quatre angles ACB, BCG, ACE & N. 72. ECG(*n*); donc la ſomme des angles ACB, BCD, &c. eſt égale à celle de quatre angles droits : donc C. Q. F. D.

USAGE.

96. *Lorſque l'on connoît la valeur de l'un des deux angles formés par deux lignes droites qui ſe rencontrent, on connoît auſſi la valeur de l'autre; car puiſque la ſomme de ces deux angles eſt égale à celle de* N. 94. *deux angles droits* (n), *& qu'un angle* N. 37. *droit eſt de 90 degrés* (n), *la ſomme de ces deux angles eſt 180 degrés; ainſi ſi* Fig. 40. *l'angle ABD* eſt par exemple de 64 degrés, en retranchant 64 de 180, le reſte 116 degrés ſera la valeur de l'angle ABC.*

PROPOSITION XIV.

THEOREME.

97. *Si deux lignes droites tirées de l'extrémité d'une autre ligne droite, forment avec elle deux angles dont la somme soit egale à celle de deux angles droits, ces deux lignes ne feront qu'une seule ligne droite.*

SI la somme des deux angles ABC & ABD * formés par la ligne AB & par les lignes BC & BD tirées de l'extrémité B de cette ligne AB, est égale à celle de deux angles droits, ces deux lignes BC & BD ne feront qu'une seule ligne droite CBD. Fig. 42.

Démonst. Si les lignes BC & BD ne faisoient point une seule ligne droite CBD, la ligne CB étant prolongée passeroit au-dessus du point D vers E, ou au-dessous. Si elle passoit au-dessus & étoit par exemple la ligne CBE, la somme des angles ABC & ABE seroit égale à celle de deux angles droits (*n*) : or la somme de ces deux angles N. 94. n'est point égale à celle de deux angles droits, puisqu'elle est moins grande de l'angle EBD, que celle des deux angles ABC & ABD qui eſt égale à celle de deux angles droits (*h*); donc la ligne CB étant prolongée ne paſſe point au-deſſus du point D. On démontre de la même maniere qu'elle ne paſſe point au-deſſous; donc étant prolongée, elle paſſe par le point D; ainſi la ligne BD eſt le prolongement de la ligne CB, & par conſéquent la ligne CBD eſt une ligne droite; donc C. Q. F. D.

PROPOSITION XV.

THEOREME.

98. *Deux lignes droites qui ſe coupent, forment quatre angles, dont chacun eſt égal à celui qui lui eſt oppoſé au ſommet.*

Fig. 43. LES angles AEC & BED * formés par les lignes droites AB & CD qui ſe coupent, ſont égaux entr'eux, & les angles CEB & AED le ſont auſſi.

Démonſt. La ligne CE rencontre la ligne AB; ainſi la ſomme des angles AEC & CEB eſt égale à celle de deux angles
N. 94. droits (*n*): la ligne BE rencontre la ligne CD; ainſi la ſomme des angles CEB &

BED l'eſt auſſi ; donc la ſomme des angles AEC & CEB eſt égale à celle des angles CEB & BED ; & par conſéquent ſi l'on retranche l'angle CEB de chacune de ces deux ſommes égales entr'elles , les reſtes qui ſeront les angles AEC & BED ſeront égaux entr'eux (*n*). On démontre de la même maniere que les angles CEB & AED le ſont auſſi ; donc C. Q. F. D. N. 64.

USAGE.

99. *On ſe ſert de cette Propoſition pour meſurer ſur le terrein un angle dans lequel on ne peut point entrer ; par exemple un angle ABC *. formé par le concours de deux murs AB & BC, & dans lequel on ſuppoſe que l'on ne peut point entrer. Pour cet effet on prolonge à volonte en D & en E l'alignement de chacun de ces deux murs, en appliquant une regle FBE à chacune de leurs faces : or ces prolongemens forment un angle DBE égal à l'angle ABC* (n) ; *ainſi ſi l'on meſure l'angle DBE , ce ſera la meme choſe que* ~~ſi~~ *l'on meſuroit l'angle ABC.* Fig. 44. N. 98.

PROPOSITION XVI.

THEOREME.

100. *L'Angle extérieur d'un Triangle est plus grand qu'aucun des angles intérieurs de ce Triangle, opposés à cet angle.*

L'Angle extérieur BCD du triangle
Fig. 45. ABC * est plus grand qu'aucun des angles intérieurs ABC & BAC opposés à cet angle BCD.

Premierement. *Pour l'angle ABC.*

Const. Divisés le côté BC en deux par-
N. 91. ties EB & EC égales entr'elles (*n*) : du point A tirés par le point E milieu du côté BC, une ligne AE prolongée vers F, jusqu'à ce que la ligne EF soit égale à la ligne AE : du point F tirés au point C la ligne FC.

Demonst. Les triangles AEB & FEC
N. 98. ont l'angle AEB égal à l'angle FEC (*n*), puisque ces angles sont opposés au sommet, & les côtés EA & EB qui forment le premier, égaux aux côtés EF & EC qui forment le second, chacun à chacun, puisque EA est égal à EF (*c*), & que EB & EC sont chacun la moitié de BC (*c*) ; ainsi les autres

autres angles du premier triangle sont égaux aux autres angles du second, chacun à chacun (n), & par conséquent l'angle N. 80.
ABE ou ABC, est égal à l'angle ECF ou BCF : or l'angle BCF est moins grand que l'angle BCD (n); donc l'angle BCD est 27. N.
plus grand que l'angle ABC.

Secondement. *Pour l'angle BAC.*

Const. Divisés le côté AC en deux parties GA & GC égales entr'elles (n) : du N. 91.
point B tirés par le point G milieu du côté AC, une ligne BG prolongée vers H, jusqu'à ce que la ligne GH soit égale à la ligne BG : du point H tirés par le point C une ligne HC, prolongée à volonté vers F.

Demonst. Par une démonstration semblable à la précédente, les triangles BGA & HGC ont l'angle BAC égal à l'angle HCG : or l'angle HCG est égal à l'angle FCD (n) qui lui est opposé au sommet ; N. 98.
donc l'angle BAC est égal à l'angle FCD : mais l'angle FCD est moins grand que l'angle BCD (n); donc l'angle BCD est N. 72.
aussi plus grand que l'angle BAC; donc C. Q. F. D.

PROPOSITION XVII.

THEOREME.

101. *La somme de deux quelconques des angles d'un Triangle, est moins grande que celle de deux angles droits.*

Fig. 46. LA somme de deux des angles, par exemple ACB & B* du triangle ABC, est moins grande que celle de deux angles droits.

Const. Prolongés le côté AC à volonté vers D.

Démonst. La somme des angles ACB & BCD est égale à celle de deux angles
N. 94. droits (*n*) : or l'angle B est moins grand
N. 100. que l'angle BCD(*n*), puisque l'angle BCD est l'angle extérieur du triangle ABC, & que l'angle B est l'un des angles intérieurs de ce triangle, opposés à cet angle extérieur; donc la somme des angles ACB & B du triangle ABC, est moins grande que celle de deux angles droits; donc C. Q. F. D.

COROLLAIRE I.

102. Il suit de ce Théorême, que *si l'un des angles d'un triangle, est droit ou*

obtus, les deux autres seront aigus.

Démonst. Si l'un des angles d'un triangle étant droit ou obtus, l'un des autres l'étoit aussi, la somme de deux des angles d'un triangle, seroit aussi grande ou plus grande, que celle de deux angles droits : or la somme de deux quelconques des angles d'un triangle, est moins grande que celle de deux angles droits (*n*) ; donc si l'un des angles &c. ; donc C. Q. F. D. N. 101.

COROLLAIRE II.

103. Il suit aussi de ce Théorême, que *d'un point hors d'une ligne, on ne peut abaisser qu'une perpendiculaire à cette ligne.*

Si la ligne CD* est perpendiculaire à la ligne AB, toute autre ligne CE tirée du même point C à cette ligne AB, ne lui sera pas perpendiculaire. Fig. 47.

Démonst. Si la ligne CD étant perpendiculaire à la ligne AB (*h*), la ligne CE l'étoit aussi, les angles D & E du triangle ECD, seroient droits chacun (*n*) ; & N. 20. par conséquent la somme de deux des angles du triangle ECD, seroit égale à celle de deux angles droits : or la somme de deux quelconques des angles d'un triangle, est moins grande que celle de deux angles droits (*n*) ; donc si l'angle D est droit, N. 101. l'angle E ne l'est point ; & par conséquent si la ligne CD est perpendiculaire à la ligne AB, la ligne CE ne l'est point; donc C. Q. F. D.

COROLLAIRE III.

104. Il suit encore de ce Théorême, que *si d'un point quelconque d'une ligne droite, oblique à une autre, on abaisse une perpendiculaire à cette autre, le point auquel cette perpendiculaire la rencontrera, sera de la partie de cette ligne, qui forme un angle aigu avec cette oblique.*

Fig. 48. Si d'un point C d'une ligne CE * oblique à la ligne AB, on abaisse une perpendiculaire CD à cette ligne AB, le point D auquel cette perpendiculaire la rencontrera, sera de la partie EB de cette ligne, qui forme avec l'oblique CE, l'angle aigu CEB.

Const. Du point C, tirés la ligne CF à un point quelconque F de la partie AE de la ligne AB, qui forme avec l'oblique CE, l'angle obtus CEA.

Démonst. Si la perpendiculaire abaissée du point C de l'oblique CE, à la ligne AB, étoit la ligne CF qui rencontre la partie AE de la ligne AB, qui forme l'angle obtus CEA, le triangle FCE auroit un angle
N. 20. droit CFE (*n*) & un angle obtus CEF (*h*); & par conséquent la somme des deux an-

gles CFE & CEF du triangle FCE, seroit plus grande que celle de deux angles droits : or la somme de deux quelconques &c.(*n*) ; N. 101.
donc &c.

COROLLAIRE III.

105. Il suit enfin de ce Théorême : Premierement, que *chacun des angles d'un triangle équilateral, est aigu.* Secondement, que *chacun des angles égaux d'un triangle isocele, l'est aussi.*

DEMONSTRATION.

Premierement, si l'un des angles d'un triangle équilateral, étoit droit ou obtus, les autres le seroient aussi, puisque les angles d'un triangle équilateral sont égaux entr'eux (*n*) ; & par conséquent la somme de N. 84.
deux des angles de ce triangle, seroit aussi grande, ou plus grande que celle de deux angles droits : or la somme de deux quelconques &c. (*n*) ; donc &c. N. 101.

Secondement, si l'un des angles égaux d'un triangle isocele, étoit droit ou obtus, ce triangle auroit deux angles droits, ou deux angles obtus ; or un triangle ne peut avoir ni deux de ses angles droits, ni deux de ses angles obtus (*n*) ; donc &c. N. 102.

PROPOSITION XVIII.

THEOREME.

106. *Si dans le même Triangle, un côté est plus grand qu'un autre, l'angle opposé à ce premier côté, sera plus grand que l'angle opposé à cet autre côté.*

Fig. 49. SI le côté BC du triangle ABC *, est plus grand que le côté AB de ce même triangle, l'angle BAC opposé au côté BC, sera plus grand que l'angle C, opposé au côté AB.

Const. Divisés le côté BC en deux parties, telles que l'une BD soit égale au côté AB (*n*), & du point A, tirés au point D,
N. 79. la ligne AD.

Démonst. L'angle BAC du triangle ABC, est plus grand que l'angle BAD du
N. 72. triangle ABD (*n*) : or l'angle BAD est
N. 83. égal à l'angle BDA (*n*), puisque ce triangle ABD a le côté BD égal au côté AB (*c*); donc l'angle BAC est plus grand que l'angle BDA : mais l'angle BDA est plus
N. 100. grand que l'angle C (*n*), puisque l'angle BDA est l'angle extérieur du triangle

ACD, & que l'angle C est l'un des angles intérieurs de ce triangle, opposés à cet angle extérieur ; donc l'angle BAC est plus grand que l'angle C ; donc C. Q. F. D.

COROLLAIRE.

107. Il suit de ce Théorême : Premierement, que *dans un triangle, le plus grand angle est opposé au plus grand côté* : Secondement, que *les angles d'un triangle scalêne, sont inégaux entr'eux.*

PROPOSITION XIX.

THEOREME.

108. *Si dans le même Triangle, un angle est plus grand qu'un autre, le côté opposé à ce premier angle, sera plus grand que le côté opposé à cet autre angle.*

SI l'angle A du triangle ABC *, est plus grand que l'angle C de ce triangle, le côté BC opposé à l'angle A, sera plus grand que le côté AB opposé à l'angle C. Fig. 50.

Démonst. Si le triangle ABC avoit le côté AB égal au côté BC, il auroit l'angle C égal à l'angle A (*n*) : or l'angle A est plus grand que l'angle C (*h*) ; donc le N. 83.

côté AB n'est point égal au côté BC : & si ce triangle avoit le côté AB plus grand que le côté BC, il auroit l'angle C plus
N. 106. grand que l'angle A (*n*) : or l'angle A est plus grand que l'angle C (*h*) ; donc le côté AB n'est point plus grand que le côté BC. Le côté AB n'est donc ni aussi grand, ni plus grand que le côté BC, il est donc moins grand que le côté BC ; & par conséquent le côté BC est plus grand que le côté AB ; donc C. Q. F. D.

COROLLAIRE.

109. Il suit de ce Théorême : Premierement, que *dans un triangle, le plus grand côté est opposé au plus grand angle* : Secondement, que *si les angles d'un triangle sont inégaux entr'eux, le triangle est scalêne.*

PROPOSITION XX.

THEOREME.

110. *Chaque côté d'un Triangle est moins grand, que la somme des deux autres côtes du même Triangle.*

LA somme des côtés, par exemple AB & BC du triangle ABC *, est plus grande que l'autre côté AC. Fig. 51.

Const. Prolongés le côté AB vers D, jusqu'à ce que la ligne BD soit égale au côté BC : du point D tirés au point C, la ligne DC.

Demonst. Le triangle DBC a le côté BC égal au côté BD (*c*) ; ainsi l'angle D est égal à l'angle BCD (*n*) : or l'angle BCD N. 83. est moins grand que l'angle ACD (*n*) ; donc N. 72. l'angle D est moins grand que l'angle ACD ; ainsi le triangle ACD à l'angle ACD plus grand que l'angle D, & par conséquent le côté ABD plus grand que le côté AC (*n*) : N. 108. mais ce côté ABD est la somme des côtés AB & BC du triangle ABC ; donc la somme des côtés AB & BC du triangle ABC, est plus grande que l'autre côté AC de ce triangle ; donc C. Q. F. D.

PROPOSITION XXI.

THEOREME.

111. *Si des extrémités de l'un des côtés d'un Triangle, on tire deux lignes droites qui ſe rencontrent dans ce Triangle :* Premierement, *leur ſomme ſera moins grande, que celle des autres côtés de ce Triangle :* Secondement, *l'angle qu'elles formeront ſera plus grand, que celui que forment ces autres côtés.*

Fig. 52. SI des extrémités, par exemple A & C, du côté AC du triangle ABC *, on tire deux lignes AD & CD, qui ſe rencontrent dans ce triangle en un point D : *Premierement*, la ſomme ADC de ces deux lignes, ſera moins grande que la ſomme ABC des autres côtés AB & BC de ce triangle : *Secondement*, l'angle ADC qu'elles formeront, ſera plus grand que l'angle B, que forment ces autres côtés AB & BC.

Conſt. Prolongés l'une de ces lignes, par exemple AD, juſqu'à ce qu'elle rencontre en E, l'un des côtés du triangle ABC.

DEMONSTRATION.

Premierement. La ſomme ABE des côtés AB & BE du triangle ABE, eſt plus grande que le troiſiéme côté AE ou ADE de ce triangle (*n*); ainſi, ſi l'on ajoute une N. 110.
même quantité EC, à ABE & à ADE, la ſomme ABEC de ABE & de EC, ſera plus grande que la ſomme ADEC de ADE & de EC (*n*) : pareillement la ſomme DEC N. 65.
des côtés DE & EC du triangle DEC, eſt plus grande que le troiſiéme côté DC de ce triangle (*n*) ; ainſi, ſi l'on ajoute une mê- N. 110.
me quantité AD, à DEC & à DC, la ſomme ADEC de AD & de DEC, ſera plus grande que la ſomme ADC de AD & de DC (*n*). Ainſi ABEC eſt plus grande N. 64.
que ADEC, & ADEC plus grande que ADC, & par conſéquent ABEC eſt plus grande que ADC : mais ABEC eſt la ſomme des côtés AB & BC du triangle ABC, & ADC eſt celle des lignes AD & CD ; donc la ſomme des côtés AB & BC du triangle ABC, eſt plus grande que celle des lignes AD & CD.

Secondément. L'angle ADC eſt l'angle exterieur du triangle EDC, & l'angle DEC eſt l'un des angles intérieurs de ce triangle, oppoſés à cet angle extérieur ; ainſi l'angle ADC eſt plus grand que l'an-

N. 100. gle DEC (*n*) : or l'angle DEC eſt plus
N. 100. grand que l'angle B (*n*), puiſque cet angle DEC eſt l'angle extérieur du triangle ABE, & que l'angle B eſt l'un des angles intérieurs de ce triangle, oppoſés à cet angle extérieur; donc l'angle ADC eſt plus grand que l'angle B; donc C. Q. F. D.

PROPOSITION XXII.

PROBLEME.

112. *Décrire un Triangle, dont les côtés ſoient égaux à trois lignes droites données, chacun à chacune; pourvu que chacune de ces lignes, ſoit moins gran-*
N. 110. *de que la ſomme des deux autres* (n).

IL faut décrire un triangle, dont les côtés
Fig. 53. ſoient égaux aux lignes A, B & C*, chacun à chacune.

Conſt. Tirés une ligne DF égale à l'une des lignes données, par exemple à la ligne A : de l'une des extrémités de cette ligne DF, par exemple de D, priſe pour centre, & avec un rayon égal à l'une des deux autres lignes données, par exemple à la ligne B, décrivés un cercle, ou ſeulement un arc de cercle EG : de l'autre extrémité

F de la ligne DF, prise pour centre, & avec un rayon égal à la ligne donnée C, décrivés un arc qui coupe le précedent en E : du point E, tirés aux extrémités D & F de la ligne DF, les lignes ED & EF : le triangle DEF qu'elles formeront, aura ses côtés égaux aux lignes données, chacun à chacune.

Demonst. Le côté DF du triangle DEF, est égal à la ligne A (*c*), le côté DE l'est à la ligne B (*n*), puisqu'il est rayon d'un cer- N. 26.
cle, dont le rayon est égal à la ligne B (*c*), le côté FE est égal à la ligne C, par une raison pareille à la précédente ; par conséquent les côtés du triangle DEF sont égaux aux lignes données, chacun à chacune ; donc C. Q. F. F.

USAGE.

113. *On peut se servir de cette Proposition, de la maniere suivante, pour lever le plan d'un terrein ABCDE*.* Fig. 54.

On divise le terrein ABCDE en triangles ABC, CAD & DAE, soit avec une corde, soit d'une autre maniere. On mesure les côtes de ces triangles. On fait une échelle F, proportionnée a la grandeur que l'on veut donner au plan de ce terrein. On décrit (n) *des triangles* abc, cad, *&* dac, N. 112.
dont chaque côté contienne autant de par-

ties de cette échelle F, *que chaque côté correspondant des triangles ABC, CAD & DAE, contient de fois la mesure dont on s'est servi pour le mesurer, & la figure* abcde *formée par les triangles* abc, cad, *&c. sera le plan du terrein ABCDE.*

114. *Lorsqu'il n'est point libre de parcourir le terrein ABCDE*, ou lorsqu'il n'est libre de le parcourir, que vers les sommets de quelques-uns de ses angles, il n'est point possible de le diviser en triangles, ni par conséquent d'en lever le plan de la maniere précedente : mais alors on le leve de la maniere suivante.*

Fig. 55.

On néglige à volonté deux angles de suite E *&* D *de ce terrein. Dans les angles que l'on peut parcourir, par exemple dans l'angle* B, *on tire avec une corde ou autrement, une ligne* IK *qui rencontre à volonté en* I *& en* K, *les côtés BA &* BC *de cet angle. On prolonge à volonté, l'un en* G *& l'autre en M, les côtés* E*A &* DC *des angles A &* C *qu'il n'est point libre de parcourir, & des points* G *& M on tire les lignes* GH *& M*L *qui rencontrent à volonté, l'une en* H *& l'autre en* L, *les autres côtés AB & CB de ces angles. On mesure ensuite les côtés du terrein ABCDE & ceux des triangles AGH,* IBK *& LMC.*

On fait une échelle F, *proportionnée à la*

grandeur que l'on veut donner au plan du terrein ABCDE. On décrit un triangle agh (n), *dont chaque côté contienne autant* N. 112.
de parties de l'échelle F, *que chaque côté correspondant du triangle AGH, contient de fois la mesure dont on s'est servi pour le mesurer. On prolonge les côtés* ah *&* ga *de ce triangle, l'un vers* b *& l'autre vers* e, *jusqu'à ce que les lignes* ab *&* ae *contiennent aussi chacune autant de parties de cette échelle, que les côtés correspondans AB & AE du terrein ABCDE, contiennent de fois chacun cette mesure. On décrit ensuite un triangle* ibk, *de la même maniere que l'on a décrit le triangle* agh, *en donnant à chacun de ses côtés, le nombre de parties de l'échelle* F *qui lui convient, on prolonge vers* c *le côté* bk *de ce triangle, jusqu'à ce que la ligne* bc *contienne autant de parties de l'échelle* F *qu'elle doit en contenir. Enfin l'on décrit le triangle* lmc, *de la même maniere que lon a décrit les précédens. On prolonge son côté* mc *vers* d, *jusqu'à ce que la ligne* cd *contienne le nombre de parties de l'échelle* F *qu'elle doit contenir. Du point* d *on tire au point* e, *la ligne* de, *& la figure* abcde *est le plan du terrein ABCDE.*

PROPOSITION XXIII.

PROBLEME.

115. *Faire un angle ſur une ligne droite donnee, qui ait un point donné de cette ligne pour ſommet, & qui ſoit égal à un angle donné.*

Fig. 56. IL faut faire un angle ſur la ligne droite AB *, qui ait le point D de cette ligne pour ſommet, & qui ſoit égal à l'angle C.

Conſt. Tirés une ligne EF qui coupe à volonté, l'un en E & l'autre en F, les côtés CE & CF de l'angle C : décrivés un triangle HDG, dont les côtés ſoient égaux à ceux
N. 112. du triangle FCE, chacun à chacun (*n*), c'eſt-à-dire, dont le côté DG, partie de la ligne donnée AB prolongée s'il eſt néceſſaire, ſoit égal au côté CE, le côté DH au côté CF, & le côté GH au côté EF, & l'angle HDG ſera égal à l'angle C.

Demonſt. Les côtés du triangle DHG, ſont égaux à ceux du triangle CFE, chacun à chacun (*c*) ; ainſi les angles du premier triangle, ſont égaux à ceux du ſecond, chacun
N. 87. à chacun (*n*) ; & par conſéquent l'angle HDG eſt égal à l'angle C; donc C. Q. F. F.

SCHOLIE.

SCHOLIE.

116. *On resoud ce Problême de la maniere suivante, lorsqu'il est libre de donner telle longueur que l'on veut, aux côtés CE & CF de l'angle C *.* Fig. 57.

Du sommet C de l'angle C, pris pour centre, & avec un rayon CE pris à volonté, on décrit un arc EF qui rencontre les côtés CE & CF de cet angle, l'un en E & l'autre en F : du point donné D, pris pour centre, & avec le même rayon CE, on décrit un arc qui rencontre en un point G, la ligne donnée AB prolongée s'il est necessaire, & l'on prolonge cet arc vers H : du point G pris pour centre, & avec un rayon égal à la distance du point E au point F, on décrit un arc qui coupe le précedent en H : du point D on tire au point H, la ligne DH, & l'angle HDG qu'elle forme avec la ligne donnée AB, est égal à l'angle C.

Pour la démonstration, on tire les lignes EF & GH qui forment les triangles FCE & HDG, tels que les côtés du premier sont égaux à ceux du dernier, chacun à chacun (c); *& par conséquent l'angle C du premier, est égal à l'angle HDG du dernier* (n). N 7.

PROPOSITION XXIV.

THEOREME.

117. *Si deux Triangles ſont tels, que l'un des angles du premier ſoit plus grand que l'un des angles du ſecond, & que les côtés qui forment cet angle du premier, ſoient égaux à ceux qui forment cet angle du ſecond, chacun à chacun, l'autre côté du premier triangle, ſera plus grand que l'autre côté du ſecond.*

Fig. 58. SI les triangles ABC & DEF *ſont tels, que l'angle B ſoit plus grand que l'angle DEF, & que le côté BA ſoit égal au côté ED, & le côté BC au côté EF, le côté AC ſera plus grand que le côté DF.

Conſt. Faites ſur le côté ED du triangle DEF, l'angle DEG qui ait l'extrémité E de ce côté pour ſommet, & qui ſoit égal à l'an-
N. 112. gle B (*n*) : faites la ligne EG égale au côté BC, & du point G, tirés aux points D & F, les lignes GD & GF.

Dem. Les triangles ABC & DEG ont l'angle B égal à DEG (*c*), & les côtés BA & BC qui forment le premier, égaux aux côtés ED & EG qui forment le ſecond, chacun à chacun, puiſque BA eſt égal à ED (*h*), & que BC l'eſt à EG (*c*) ; ainſi l'autre côté AC du premier triangle, eſt égal à l'autre côté DG du ſecond (*n*) ; & par conſéquent ſi DG eſt plus grand que DF, le côté AC ſera plus grand que le côté DF : or DG eſt plus grand que DF ; car puiſque EG eſt égal à BC (*c*), & que BC l'eſt à EF (*h*), EG eſt égal à EF ; & par conſéquent le triangle FEG à l'angle EFG, égal à l'angle EGF (*n*) ; or l'angle DFG eſt plus grand que l'angle EFG (*n*), l'angle EFG eſt égal à l'angle EGF (*d*), & l'angle EGF eſt plus grand que l'angle DGF (*n*) ; donc l'angle DFG eſt plus grand que l'angle DGF ; ainſi puiſque dans le triangle DFG, l'angle DFG eſt plus grand que l'angle DGF (*d*), le côté DG eſt plus grand que le côté DF (*n*) ; & par conſéquent le côté AC du triangle ABC, qui eſt égal à ce côté DG, eſt auſſi plus grand que le côté DF ; donc C. Q. F. D.

N. 80.
N. 83.
N. 72.
N. 72.
N. 108.

PROPOSITION XXV.

THEOREME.

118. *Si deux Triangles sont tels, que deux des côtés du premier, soient égaux à deux des côtés du second, chacun à chacun, & que l'autre côté du premier soit plus grand que l'autre côté du second, l'angle formé par ces deux côtés du premier triangle, sera plus grand que l'angle formé par ces deux côtés du second.*

Fig. 59. SI les triangles ABC & DEF *, ont le côté AB égal au côté DE, le côté BC au côté EF, & le côté AC plus grand que le côté DF, l'angle B sera plus grand que l'angle E.

Demonst. Les triangles ABC & DEF ont les côtés qui forment l'angle B, égaux à ceux qui forment l'angle E, chacun à chacun (*h*); ainsi, si l'angle B étoit moins grand que l'angle E, le côté AC seroit moins
N. 117. grand que le côté DF (*n*), & si l'angle B étoit égal à l'angle E, le côté AC seroit
N. 80. égal au côté DF (*n*): or le côté AC n'est ni moins grand, ni aussi grand que le côté DF, puisqu'il est plus grand que ce côté

(*h*) ; donc l'angle B n'eſt auſſi ni moins grand, ni auſſi grand que l'angle E ; & par conſequent il eſt plus grand que l'angle E ; donc C. Q. F. D.

PROPOSITION XXVI.

THEOREME.

119. *Si deux triangles ſont tels, que l'un des côtés du premier ſoit égal à l'un des côtés du ſecond, & que les angles qui ſont aux extrémités de ce côté du premier, ſoient égaux à ceux qui ſont aux extrémités de ce côté du ſecond, chacun à chacun,* (ou *que les angles qui ſont, l'un à l'une des extrémités de ce côté du premier, & l'autre oppoſé à ce côté, ſoient égaux à ceux qui ſont, l'un à l'une des extrémités de ce côté du ſecond, & l'autre oppoſé à ce côté,*) Premierement, *l'autre angle du premier triangle, ſera égal à l'autre angle du ſecond* : Secondement, *les autres côtés du premier triangle, ſeront égaux aux autres côtés du ſecond, chacun a chacun* : Troiſiémement, *la ſurface du premier triangle ſera égale à celle du ſecond.*

Fig. 60. SI les triangles ABC & DEF *, ont le côté AC égal au côté DF, l'angle A égal à l'angle D & l'angle C à l'angle F, (*ou* l'angle A égal à l'angle D & l'angle B

à l'angle E) : *Premierement*, (dans le premier cas) l'angle B sera égal à l'angle E, (& dans le second) l'angle C le sera à l'angle F : *Secondement*, le côté AB sera égal au côté DE, & le côté BC au côté EF : *Troisiémement*, la surface du triangle ABC sera égale à celle du triangle DEF.

Premierement, si l'angle A est égal à l'angle D, & l'angle C à l'angle F.

Const. Posés le triangle ABC sur le triangle DEF, de maniere que le point A étant sur le point D, le côté AB soit sur le côté DE.

Demonst. L'angle A est égal à l'angle D (*h*), le sommet A du premier est sur le sommet D du second, & le côté AB du premier sur le côté DE du second (*c*); donc l'autre côté AC du premier est sur l'autre côté DF du second (*n*); & par consequent N. 71. puisque le côté AC est égal au côté DF (*h*), & que A l'une de ses extrémités, est sur D l'une de celles de DF (*c*), l'autre extrémité C de AC, est sur l'autre extrémité F de DF (*n*). Ainsi l'angle C égal à l'angle F N. 70. (*h*), a son sommet C sur le sommet F de l'angle F, & AC l'un de ses côtés, sur DF l'un de ceux de l'angle F (*d*); donc l'autre côté CB de l'angle C est sur l'autre côté FE de l'angle F (*n*). Le point B est donc N. 72. en même tems sur le côté DE (*c*), & sur le

côté FE (*d*) ; il eſt donc ſur un point commun à ces deux côtés : or ces deux côtés n'ont que le point E de commun entr'eux
N. 71. (*n*) ; donc le point B eſt eſt ſur le point E ; ainſi les ſommets A, B & C des angles du triangle ABC, ſont ſur les ſommets D, E & F des angles du triangle DEF, chacun ſur chacun, & les côtés des premiers ſont ſur les côtés des derniers, chacun ſur chacun; par conſéquent : *Premierement*, l'angle B
N. 69. eſt égal à l'angle E (*n*) : *Secondement*, le côté AB eſt égal au côté DE, & le côté BC
N. 69. au côté EF (*n*) : *Troiſiémement*, la ſurface du triangle ABC eſt égale à celle du triangle DEF (*n*).
N. 69.

Fig. 61. *Secondement, ſi l'angle A* eſt égal à l'angle D, & l'angle B à l'angle DEF.*

Conſt. Prolongés à volonté, le côté DE vers H : du point F tirés aux points G & I, pris à volonté ſur la ligne DH, l'un au-deſſous du point E & l'autre au-deſſus, les lignes FG & HI, & poſés le triangle ABC ſur le triangle DEF, de maniere que le point A étant ſur le point D, le côté AB ſoit ſur la ligne DH.

Demonſt. Le ſommet A de l'angle A eſt ſur le ſommet D de l'angle D, & le côté AB du premier ſur le côté DH du ſecond (*c*) ; par conſéquent le côté AC eſt ſur le côté DF & le point C ſur le point F, par les lesmêmes raiſons que celles de la démonſtration précédente ; ainſi ſi le point B eſt ſur le point E, les ſommets A, B & C des angles du triangle ABC ſeront ſur les ſommets D, E & F des angles du triangle DEF, chacun ſur chacun ; & par conſéquent: *Premierement*, l'angle C ſera égal à l'angle F (*n*) : *Secondement*, le côté AB ſera N. 69. égal au côté DE & le côté BC au côté EF (*n*): *Troiſiémement*, la ſurface du trian- N. 69. gle ABC ſera égale à celle du triangle DEF (*n*). Or le point B eſt ſur le point E ; car ſi N. 69. le point B étoit ſur un point de la ligne DH, au-deſſous du point E, par exemple ſur G, les triangles ABC & DGF auroient l'angle A égal à l'angle D (*h*), & les côtés AB & AC qui forment le premier, égaux aux côtés DG & DF qui forment le dernier, chacun à chacun, puiſque AB ſeroit égal à DG (*c*) & que AC l'eſt à DF (*h*) ; ainſi l'angle DGF ſeroit égal à l'angle B (*n*), & par conſéquent à l'angle DEF qui N. 80. l'eſt à l'angle B (*h*) : mais l'angle DGF n'eſt point égal à l'angle DEF (*n*), puiſque N. 100. l'angle DGF eſt l'angle extérieur du triangle GEF, & que l'angle DEF eſt l'un des angles intérieurs de ce triangle, oppoſés à cet angle extérieur ; donc le point B n'eſt point ſur un point G de la ligne DH, au-deſſous du point E. On démontre de la même maniere que le point B n'eſt point ſur un point I de la ligne DH, au-deſſus du point E; ainſi le point B eſt ſur le point E; & par conſéquent: *Premierement*, l'angle C eſt égal, &c. donc C. Q. F. D.

USAGE.

On peut ſe ſervir de cette Propoſition pour meſurer telle diſtance inacceſſible que ce puiſſe être, pourvû que l'on puiſſe voir ſes extrémités; mais comme une diſtance inacceſſible peut être acceſſible par l'une de ſes extrémités, ou être entierement inacceſſible, ce Problême à deux Cas.

PREMIER CAS.

Fig. 62. 120. Si la diſtance inacceſſible AB * que l'on veut méſurer, eſt acceſſible par l'une de ſes extrémités A.

On met un Piquet en un point quelconque C d'où l'on puiſſe aller au point A. De ce point on dirige un rayon viſuel vers A, & un autre vers B, & l'on meſure l'angle C formé par ces rayons-viſuels, la diſtance CA du point C au point A, & l'angle A formé par le rayon-viſuel AC & par la diſtance inacceſſible AB. On ſe retire enſuite en un endroit commode. On y tire une ligne ac *qui ſoit égale à la diſtance AC. On fait ſur cette ligne un angle* a, *qui ait l'extrémité*

a *de cette ligne pour sommet & qui soit égal à l'angle A* (n). *On fait encore sur cette li-* N. 115.
gne un angle c,*qui ait l'autre extrémité* c *de cette ligne pour sommet, & qui soit egal à l'angle C* (n), *& les côtés* ab *&* cb *de ces* N. 115.
angles a *&* c,*forment avec cette ligne* ac *un triangle* abc,*dont le côté* ab *est égal à la ligne inaccessible AB* (n), *puisque les* N. 119.
triangles ABC & abc *ont le côté AC égal au côté* ac (c), *& que les angles A & C qui sont aux extrémités de ce côté AC du premier triangle, sont égaux* (c) *aux angles* a *&* c *qui sont aux extrémités* a *&* c *de ce côté* ac *du dernier, chacun à chacun; ainsi si l'on mesure la ligne* ab, *ce sera la même chose que si l'on mesuroit la distance inaccessible AB.*

121. *Il est plus commode de rapporter le triangle ABC sur le papier, de la maniere suivante.*

On fait une Echelle G proportionnée à la grandeur que l'on veut donner au plan du triangle ABC. On tire une ligne DF qui contienne autant de parties de l'échelle G, que la distance AC contient de fois la mesure dont on s'est servi pour la mesurer. On fait sur cette ligne un angle D qui ait l'extrémité D de cette ligne pour sommet, &
qui soit égal à l'angle A (n). *On fait enco-* N. 115.
re sur cette même ligne un angle F,qui ait

l'extrémité F de cette ligne pour sommet,
N. 115. *& qui soit égal à l'angle C* (n), *& les côtés DE & FE de ces angles D & F, forment avec cette ligne DF un triangle DEF, dont le côté DE contient autant de parties de l'échelle G, que la distance inaccessible AB contient de fois la mesure dont on s'est servi pour mesurer la distance AC.*

SECOND CAS.

Fig. 63. 122. Si la distance AB * que l'on veut mesurer, est entierement inaccessible.

On met un Piquet en un point quelconque C. De ce point on dirige un rayon visuel vers A & un autre vers B. On mesure l'angle C formé par ces rayons-visuels,
N. 120. *& l'on mesure aussi* (n) *ces rayons-visuels, qui sont des distances CA & CB accessibles par l'une de leurs extrémités C. On se retire ensuite en un endroit commode. On y forme*
N. 115. *me un angle* c *égal à l'angle C* (n). *On fait les côtés* ca *&* cb *de cet angle égaux aux distances CA & CB, chacun à chacune. Enfin du point* a *on tire au point* b *une ligne* ab, *& cette ligne est égale à la distan-*
N 80. *ce inaccessible AB* (n); *puisque les triangles ABC &* abc *ont l'angle C égal à l'angle* c (c̄), *& les côtés CA & CB qui forment le premier, égaux aux côtés* ca *&* cb *qui forment le second, chacun à chacun*

A

(c) ; *& par conséquent si l'on mesure la ligne* ab,*ce sera la même chose que si l'on mesuroit la distance inaccessible AB.*

123. *Il est aussi plus commode de rapporter le triangle ABC sur le papier, de la maniere suivante.*

On fait une Echelle G proportionnée à la grandeur que l'on veut donner au plan du triangle ABC, & par le moyen de cette échelle on rapporte sur le papier (n) *les* N. 121.
triangles qui ont servi à mesurer les distances inaccessibles CA & CB, afin d'avoir la longueur que chacune de ces distances doit y avoir. On fait ensuite un angle F égal à l'angle C (n). *On fait le côté FD de* N. 115.
cet angle, egal à la longueur que la distance CA doit avoir sur le papier, & le côté FE égal à celle que la distance CB doit y avoir. Du point D on tire au point E la ligne DE, & cette ligne contient autant de parties de l'échelle G, que la distance inaccessible AB contient de fois la mesure dont on s'est servi pour mesurer le côté accessible de chacun des triangles que l'on a rapporté sur le papier.

PROPOSITION XXVII.

THEORÈME.

124. *Si deux lignes droites étant coupées par une autre ligne droite, forment avec elle des angles tels que deux des* Alternes (*c'est-à-dire des intérieurs opposés & pris de part & d'autre de la ligne coupante*) *soient égaux entr'eux, ces deux lignes seront paralleles.*

Fig. 64. SI les lignes droites AB & CD * qui sont coupées par la ligne droite EF, forment avec elle les angles alternes, par exemple AEF & DFE égaux entr'eux, ces lignes AB & CD sont paralleles.

Const. Prenés à volonté un point G sur la ligne AB, (vers A si les angles égaux par l'hypotese sont les angles AEF & DFE, & vers B si ces angles égaux sont les angles BEF & CFE): coupés de l'autre côté de la ligne EF par rapport au point G, une partie FH de la ligne CD prolongée s'il est nécessaire, égale à la ligne EG: du point F tirés au point G la ligne FG, & du point E au point H la ligne EH.

Démonst. Les points F & H de la ligne

CD correſpondent aux points G & E de la ligne AB, puiſque la ligne FH eſt égale à la ligne EG (c); ainſi ſi la diſtance du point G au point F eſt égale à celle du point E au point H, les points G & E de la ligne AB ſeront également diſtans des points correſpondans F & H de la ligne CD; & par conſéquent la ligne AB ſera parallele à la ligne CD (n): or la diſtance du point G au point F, eſt égale à celle du point E au point H; car les triangles GEF & HFE ont l'angle GEF égal à l'angle HFE (h), & les côtés EG & EF qui forment le premier, égaux aux côtés FH & EF qui forment le dernier, chacun à chacun, puiſque le côté EG eſt égal au côté FH (c), & que le côté EF eſt commun à ces deux triangles; ainſi le côté FG du premier eſt égal au côté EH du dernier (n); & par conſéquent la diſtance du point G au point F eſt égale à celle du point E au point H; donc la ligne AB eſt parallele à la ligne CD; donc C. Q. F. D. N. 55. N. 80.

COROLLAIRE.

125. Il ſuit de ce Théorême, que *les côtes oppoſés d'un Quarré A*, d'un Quarré-long B, d'un Rhombe C, & d'un Rhomboïde D ſont paralleles, chacun à chacun.* Fig. 65.

Conſt. Tirés la Diagonale EG du Quadrilatere EFGH.

Démonst. Les côtés du triangle EGF font égaux à ceux du triangle GEH, chacun à chacun, puisque le côté EF est égal au cô-
Ns. 49. 50. 52. & 53. té GH & le côté EH au côté FG (*ns.*), & que le côté EG est commun à ces deux triangles ; ainsi les angles du premier sont égaux
N. 87. à ceux du dernier, chacun à chacun (*n*) ; & par conséquent l'angle FEG est égal à l'angle HGE, & l'angle FGE à l'angle HEG : or puisque les angles FEG & HGE qui sont alternes, sont égaux entr'eux (*d*), les côtés EF & GH du quadrilatere EFGH, qui les forment avec la Diagonale EG, sont paral-
N. 124. leles (*n*) ; & puisque les angles FGE & HEG qui sont aussi alternes, sont aussi égaux entr'eux, les côtés EH & FG du même Quadrilatere EFGH, qui les forment avec la même diagonale EG, sont aussi paralleles
N. 124. (*n*) ; donc C. Q. F. D.

PROPOSITION XXVIII.

THEOREME.

126. *Si deux lignes droites étant coupées par une autre ligne droite, forment avec elle des angles tels que l'un quelconque des extérieurs soit égal à celui des intérieurs qui lui est opposé, (ou que la somme de deux quelconques des intérieurs pris chacun du même côté de la ligne coupante, soit égale à celle de deux angles droits), ces deux lignes seront paralleles.*

Premierement. SI les lignes droites AB & CD *, qui sont cou- Fig. 65.
pées par la ligne droite EF, forment avec elle l'un des angles extérieurs, par exemple l'angle BGE égal à l'angle intérieur DHE qui lui est opposé, ces lignes AB & CD seront paralleles entr'elles.

Démonst. L'angle DHE est égal à l'angle BGE (*h*), & l'angle BGE l'est à l'angle AGF (*n*) qui lui est opposé au sommet; N. 95.
ainsi l'angle DHE est égal à l'angle AGF: or puisque les angles DHE & AGF qui sont alternes, sont égaux entr'eux, les lignes AB & CD qui les forment avec la li-

N. 124. gne EF, ſont paralleles (*n*).

Secondement, ſi les lignes droites AB & CD qui ſont coupées par la ligne droite EF, forment avec elle des angles tels que la ſomme de deux des intérieurs, par exemple DHE & FGB pris chacun du même côté de la ligne EF, ſoit égale à celle de deux angles droits, ces lignes AB & CD ſeront paralleles.

Démonſt. Puiſque la ſomme des angles DHE & FGB eſt égale à celle de deux angles droits (*h*), & que celle des angles
N. 94. AGF & FGB lui eſt auſſi égale (*n*), la ſomme des angles DHE & FGB eſt égale à
N. 62. celle des angles AGF & FGB (*n*); ainſi ſi l'on retranche l'angle FGB de chacune de ces deux dernieres ſommes, les reſtes qui ſeront les angles DHE & AGF ſeront égaux entr'eux : or puiſque les angles DHE & AGF qui ſont alternes, ſont égaux entr'eux, les lignes AB & CD qui les for-
N. 124. ment avec la ligne EF, ſont paralleles (*n*); donc C. Q. F. D.

PROPOSITION XXIX.

THEOREME.

127. *Si deux lignes droites & paralleles ſont coupées par une autre ligne-droite, elles formeront avec elle des angles tels:* Premierement, *que les alternes ſeront égaux entr'eux :* Secondement, *que chacun des extérieurs ſera égal à celui des intérieurs qui lui eſt oppoſé :* Troiſiémement, *que la ſomme de deux quelconques des intérieurs pris chacun du même côté de la ligne coupante, ſera égale à celle de deux angles droits.*

SI les lignes droites AB & CD * qui ſont coupées par la ligne droite EF, ſont paralleles : *Premierement*, les angles alternes, par exemple AIF & DKE, ſeront égaux entr'eux : *Secondement*, chacun des angles extérieurs, par exemple l'angle BIE, ſera égal à l'angle DKE, celui des intérieurs qui lui eſt oppoſé: *Troiſiémement*, la ſomme de deux des intérieurs, par exemple DKE & BIF pris chacun du même côté de la ligne EF, ſera égale à celle de deux angles droits.

Fig. 67.

Conſt. Prenés à volonté ſur la ligne AB un point G, (vers A, ſi vous voulés démontrer l'égalité des angles AIF & DKE, & vers B, ſi vous voulés démontrer celle des angles BIF & CKE) : coupés de l'autre côté de la ligne EF par rapport au point G, une partie KH de la ligne CD prolongée s'il eſt néceſſaire, égale à la ligne IG : du point K tirés au point G la ligne KG, & du point I au point H, la ligne IH.

DEMONSTRATION.

Premierement, les côtés du triangle GIK ſont égaux à ceux du triangle HKI, chacun à chacun ; puiſque le côté IK eſt commun à ces deux triangles, que le côté IG eſt égal au côté KH (*c*) & que les points G & I, K & H, étant (*c*) des points correſpondans de deux paralleles AB & CD (*h*), les lignes GK & IH tirées l'une du point G au point K & l'autre du point I au point H,
N. 55. ſont égales entr'elles (*n*) ; ainſi les angles du premier triangle ſont égaux à ceux du
N. 87. dernier, chacun à chacun (*n*), & par conſéquent l'angle GIK eſt égal à l'angle HKI: or ces angles GIK & HKI ſont des angles alternes formés par les deux paralleles AB & CD, & par la ligne coupante EF ; donc ſi deux lignes droites & paralleles ſont coupées par une autre ligne droite, elles for-

ment avec elle des angles dont les alternes ſont égaux entr'eux.

Secondement. L'angle DKE eſt égal à l'angle AIF (*d*), puiſque ces angles ſont alternes : or l'angle AIF eſt égal à l'angle BIE (*n*) qui lui eſt oppoſé au ſommet ; donc N. 98. l'angle BIE, extérieur, eſt égal à l'angle DKE, intérieur qui lui eſt oppoſé.

Troiſiémement. La ſomme des angles DKE & EKC eſt égale à celle de deux angles droits (*n*) : or l'angle EKC eſt égal à N. 94. l'angle BIF (*d*), puiſque ces angles ſont alternes; donc la ſomme des angles DKE & BIF, intérieurs pris chacun du même côté de la ligne coupante EF, eſt égale à celle de deux angles droits ; donc C. Q. F. D.

COROLLAIRE.

128. Il ſuit de ce Théorême, que *ſi une ligne droite eſt perpendiculaire à l'une de deux lignes droites qui ſont paralleles entr'elles, elle ſera auſſi perpendiculaire à l'autre.*

PROPOSITION XXX.

THEOREME.

129. *Si deux lignes-droites ſont paralleles chacune à une même ligne, elles ſeront auſſi paralleles entr'elles.*

Fig. 68. SI les lignes droites AB & CD *, ſont paralleles chacune à la ligne EF, la ligne AB ſera parallele à la ligne CD.

Conſt. Tirés une ligne droite quelconque GH, qui coupe à volonté les lignes AB, CD, & EF.

Démonſt. L'angle extérieur EKH, eſt égal à l'angle intérieur AIH qui lui eſt op-
N. 127. poſé (*n*), puiſque les lignes AB & EF qui forment ces angles avec la ligne GH, ſont paralleles (*h*) : le même angle EKH eſt
N. 127. auſſi égal à l'angle DLG (*n*), puiſque ces angles ſont alternes, & que les lignes EF & CD qui les forment avec la ligne GH, ſont auſſi paralleles (*h*) ; donc l'angle AIH eſt égal à l'angle DLG: or puiſque ces angles AIH & DLG qui ſont alternes, ſont égaux entr'eux, les lignes AB & CD qui les forment avec la ligne GH, ſont paralleles
N. 124. entr'elles (*n*) ; donc C. Q. F. D.

PROPOSITION XXXI.

PROBLEME.

130. *Par un Point donné hors d'une ligne droite, tirer une parallele à cette ligne.*

IL faut tirer par le point F *, une parallele à la ligne droite AB. Fig. 69.

Conſt. Prenés à volonté un point E ſur la ligne AB : du point E tirés au point F la ligne EF : tirés par le point F une ligne CD, qui forme avec cette ligne EF, un angle EFD égal à l'angle FEA (*n*), & cette ligne CD ſera parallele à la ligne AB. N. 115.

Démonſt. Les angles alternes FEA & EFD ſont égaux entr'eux (*c*); ainſi les li- AB & CD qui les forment avec la ligne EF, ſont paralleles (*n*) ; dont C. Q. F. F. N. 124.

USAGE.

131. *On peut ſe ſervir de cette Propoſition de la maniere ſuivante, pour tirer par un point quelconque F*, une parallele à une ligne droite inacceſſible AB.* Fig. 70.

Du point F, on obſerve deux points quelconques H & G de cette ligne AB. On me-

N. 120. *sure* (n) *la distance FH, la distance FG & l'angle HFG formé par ces distances. On*
N. 122. *rapporte ensuite sur le terrein* (n) *ou sur le*
N. 123. *papier* (n), *le triangle HFG formé par ces distances & par la partie HG de la ligne AB, & l'on y mesure l'angle FGH. Enfin on tire par le point F une ligne CD, qui forme avec la distance FG, un angle GFD egal à l'an-*
N. 115. *gle FGH* (n), *& cette ligne CD est paralle-*
N. 124. *le à la ligne inaccessible AB* (n), *puisque les angles alternes FGH & GFD formés par ces lignes & par la distance FG, sont égaux entr'eux* (c).

---

* PROPOSITION XXXII.

THEOREME.

132. *L'angle extérieur d'un Triangle, est égal à la somme des deux angles intérieurs de ce même Triangle, qui lui sont opposés.*

Fig. 71. L'Angle extérieur BCD du triangle ABC*, est égal à la somme des angles intérieurs B & A qui lui sont opposés.

Const. Tirés par le point C une ligne
N. 130. CE parallele au côté AB (*n*).

Démonst. Les lignes AB & CE sont paralleles

ralleles (*c*) ; ainsi les angles BCE & B qu'elles forment avec la ligne BC sont égaux entr'eux (*n*), puisqu'ils sont alternes, N. 127.
& les angles ECD & A qu'elles forment avec la ligne AD sont aussi égaux entr'eux (*n*), puisque l'un ECD est extérieur, & N. 127.
que l'autre A est l'intérieur qui lui est opposé ; & par conséquent la somme des angles BCE & ECD est égale à celle des angles B & A : or la somme des angles BCE & ECD est égale à l'angle BCD (*n*) ; donc N. 72.
l'angle BCD est égal à la somme des angles B & A ; donc C. Q. F. D.

COROLLAIRE I.

133. Il suit de ce Théorême, que *la somme de tous les angles d'un triangle, est égale à celle de deux angles droits.*

La somme des angles BCA, A & B du triangle ABC*, est égale à celle de deux Fig. 71.
angles droits.

Démonst. La somme des angles BCA & BCD est égale à celle de deux angles droits (*n*) : or l'angle BCD est égal à la somme des N. 94.
angles B & A (*n*) ; donc la somme des an- N. 132.
gles BCA, B & A est égale à celle de deux angles droits ; donc C. Q. F. D.

COROLLAIRE II.

134. Il suit de ce Corollaire, que *la*

somme de tous les angles d'un triangle, est égale à celle de tous les angles d'un autre triangle.

La somme des angles A, B & C du trian-
Fig. 72. gle ABC *, est égale à celle des angles D, E & F du triangle DEF.

Démonst. La somme des angles A, B & C du triangle ABC, & celle des angles D, E & F du triangle DEF, sont égales chacune à la somme de deux angles droits
N. 133. (*n*); par conséquent elles sont égales entr'elles; donc C. Q. F. D.

COROLLAIRE III.

135. Il suit de ce Corollaire, que *si la somme de deux quelconques des angles d'un triangle, est égale à celle de deux quelconques des angles d'un autre triangle, l'autre angle du premier triangle sera égal à l'autre angle du dernier.*

Si la somme des angles, par exemple A
Fig. 72. & B du triangle ABC *, est égale à celle des angles D & E du triangle DEF, l'autre angle C du premier triangle sera égal à l'autre angle F du dernier.

Démonst. Si de la somme de deux angles droits, on retranche celle des angles A & B, ou celle des angles D & E, le reste sera le même, puisque ces deux dernieres sommes sont égales entr'elles (*h*) : or ce reste sera

l'angle C (*n*), si c'est la somme des angles N. 133.
A & B que l'on retranche, & l'angle F (*n*), N. 133.
si c'est celle des angles D & E ; donc l'angle C est égal à l'angle F ; donc C. Q. F. D.

COROLLAIRE IV.

136. Il suit aussi du premier Corollaire, que *si l'angle formé par les côtés égaux d'un triangle isocele, est droit ; chacun des autres angles de ce triangle, sera égal à la moitié d'un angle droit.*

Si l'angle B*, formé par les côtés égaux Fig. 73.
BA & BC du triangle isocele ABC est droit, chacun des autres angles A & C de ce triangle, sera égal à la moitié d'un angle droit.

Démonst. La somme des angles A, B & C, est égale à celle de deux angles droits (*n*) : or l'angle B est droit (*h*) ; donc la N. 133.
somme des angles A & C est aussi égale à un angle droit : mais ces angles A & C sont égaux entr'eux (*n*) ; donc ils sont égaux N. 83.
chacun à la moitié d'un angle droit ; donc C. Q. F. D.

COROLLAIRE. V.

137. Il suit encore du premier Corollaire, que *chaque angle d'un triangle équilateral, est egal aux deux tiers d'un angle droit.*

Démonst. La somme de tous les angles d'un triangle est égale à celle de deux angles
N. 133. droits (*n*) : or les angles d'un triangle équilateral sont égaux entr'eux ; donc ils sont égaux chacun au tiers de la somme de deux angles droits ; & par conséquent aux deux tiers d'un angle droit ; donc C. Q. F. D.

COROLLAIRE VI.

138. Il suit enfin du premier Corollaire, que *la somme de tous les angles d'une figure rectiligne quelconque, est égale à la somme d'autant de fois deux angles droits moins quatre, que cette figure a de côtés.*

La somme de tous les angles, par exem-
Fig. 74. ple d'un Pentagone ABCDE *, est égale à celle de cinq fois deux angles droits, moins quatre, c'est-à-dire à celle de six angles droits.

Const. D'un point F, pris à volonté dans le Pentagone ABCDE, tirés aux extrémités A, B, C, D & E de chacun de ses côtés, les lignes FA, FB, FC, FD & FE.

Démonst. Puisque le Polygone ABCDE a cinq côtés (*h*), les lignes FA, FB, FC &c. le divisent en cinq triangles FAB, FBC, FCD, &c : or la somme de tous les angles d'un triangle est égale à celle de deux
N. 133. angles droits (*n*) ; donc la somme de tous les angles des cinq triangles FAB, FBC,

FCD, &c. eſt égale à celle de cinq fois deux angles droits : mais la ſomme des angles de ces cinq triangles, ſurpaſſe celle de tous les angles du Polygone ABCDE, de la ſomme des angles qui ont leur ſommet au point F, qui eſt égale à celle de quatre angles droits (*n*); donc ſi de la ſomme de cinq fois deux angles droits, on retranche celle de quatre angles droits, le reſte qui eſt la ſomme de ſix angles droits, ſera égal à celle de tous les angles du Pentagone ABCDE; donc C.Q.F.D. N. 95.

USAGE.

139. *On ſe ſert de ce premier Corollaire, de la maniere ſuivante, pour connoître la valeur de l'un des angles B d'un triangle ABC*, dont on connoît celle de ſes deux autres angles A & C.* Fig. 75.

De 180 *dégrés, ſomme de deux angles droits* (n), *on retranche celle des angles connus A & C, & le reſte eſt la valeur de l'angle B* (n). *Ainſi ſi l'angle A eſt, par exemple de* 50 *dégrés, & l'angle C de* 75, *on retranche* 125, *ſomme des dégres des angles connus A & C, de* 180, *& le reſte* 55 *dégrés eſt la valeur de l'angle B.* N. 37. N. 133.

PROPOSITION XXXIII.

THEOREME.

140. *Si deux des côtés d'un Quadrilatere ſont égaux & paralleles entr'eux, ſes deux autres le ſeront auſſi.*

Fig. 76. SI les côtés AB & DC du Quadrilatere ABCD *, ſont égaux & paralleles entr'eux, ſes autres côtés AD & BC le ſeront auſſi.

Conſt. Tirés la Diagonale AC de ce Quadrilatere.

Démonſt. Puiſque les côtés AB & DC ſont paralleles entr'eux (*h*), les angles alternes BAC & DCA qu'ils forment avec la
N. 127. Diagonale AC ſont égaux entr'eux (*n*); ainſi les triangles BAC & DCA ont l'angle BAC égal à l'angle DCA (*i*), & les côtés AB & AC qui forment le premier, égaux aux côtés DC & AC qui forment le dernier, chacun à chacun, puiſque AB eſt égal à DC (*h*), & que AC eſt commun à ces deux triangles; donc l'autre côté BC du premier triangle, eſt égal à l'autre côté AD du dernier, & l'angle ACB l'eſt à l'an-
N. 80. gle CAD (*n*): or puiſque ces angles ACB

& CAD qui sont alternes, sont égaux entr'eux, les côtés BC & AD qui les forment avec la Diagonale AC sont paralleles entr'eux (n); donc les côtés AD & BC du Quadrilatere ABCD, sont égaux & paralleles entr'eux; donc C. Q. F. D. N. 124.

PROPOSITION XXXIV.

THEOREME.

141. *Les côtés opposés d'un Parallelogramme, sont égaux entr'eux.*

LEs côtés AB & DC du Parallelogramme ABCD * sont égaux entr'eux, & ses côtés AD & BC le sont aussi. Fig. 76.

Const. Tirés la Diagonale AC de ce Parallelogramme.

Demonst. Les angles BAC & DCA, sont égaux entr'eux (n), puisqu'ils sont alternes, & que les cotés AB & DC qui les forment avec la Diagonale AC, sont paralleles (h): les angles BCA & DAC sont aussi égaux entr'eux (n), puisqu'ils sont aussi alternes, & que les côtés BC & AD, qui les forment avec la Diagonale AC, sont paralleles (h); ainsi les triangles ABC & CDA ont le côté AC commun entr'eux, N. 127. N. 127.

& les angles BAC & BCA qui ſont aux extrémités de ce côté AC du premier triangle , ſont égaux aux angles DCA & DAC, qui ſont aux extrémités de ce même côté AC du dernier; donc les autres côtés AB & BC du premier triangle, ſont égaux aux autres côtés DC & AD du der-
N. 119. nier , chacun à chacun (*n*) ; & par conſéquent le côté AB eſt égal au côté DC, & le côté AD au côté BC; donc C. Q. F. D.

COROLLAIRE I.

142. Il ſuit de la Démonſtration de ce Théorême, que *les angles oppoſés d'un Parallelogramme , ſont égaux entr'eux.*

Les angles DAB & BCD du Parallelo-
Fig. 76. gramme ABCD *, ſont égaux entr'eux, & ſes angles B & D le ſont auſſi.

DEMONSTRATION.

Premierement. L'angle DAB eſt la ſomme des angles BAC & DAC, & l'angle BCD eſt celle des angles DCA & BCA : or l'angle BAC eſt égal à l'angle DCA, & l'angle DAC l'eſt à l'angle BCA (*d*) ; donc les parties de l'angle DAB ſont égales à celles de l'angle BCD , chacune à chacune; & par conſéquent l'angle DAB eſt égal à l'angle BCD.

Secondement. Les triangles ABC & CDA

CDA ont le côté AC commun entr'eux, & les angles BAC & BCA qui sont aux extrémités de ce côté AC du premier triangle, sont égaux aux angles DCA & DAC, qui sont aux extrémités de ce même côté AC du dernier (*d*) ; donc l'autre angle B du premier triangle, est égal à l'autre angle D du dernier (*n*) ; donc C. Q. F. D. N. 119.

COROLLAIRE II.

143. Il suit encore de la démonstration de ce Théorême, que *la Diagonale d'un Parallelogramme, le divise en deux parties égales entr'elles.*

La Diagonale AC du Parallelogramme ABCD *, le divise en deux parties ABC Fig. 76. & CDA, qui sont égales entr'elles.

Démonst. Les parties ABC & CDA du Parallelogramme ABCD, sont les triangles ABC & CDA: or les surfaces de ces triangles sont égales entr'elles (*n*), puisque N. 119. ces triangles ont un côté AC commun entr'eux, & que les angles BAC, &c, donc C. Q. F. D.

PROPOSITION XXXV.

THEOREME.

144. *Les Surfaces des Parallelogrammes qui ont une même* Base, § *& sont renfermés entre les mêmes paralleles, sont égales entr'elles.*

Fig. 77. LEs surfaces des Parallelogrammes ABCD & EFCD *, qui ont une même base DC, & sont renfermés entre les mêmes paralleles DC & AF, sont égales entr'elles.

Démonst. Les lignes AB & DC sont
N. 141. égales entr'elles (*n*), puisqu'elles sont côtés opposés du Parallelogramme ABCD: or les lignes DC & EF sont aussi égales en-
N. 141. tr'elles (*n*), puisqu'elles sont côtés opposés du Parallelogramme EFCD; donc les lignes AB & EF sont égales entr'elles; & par conséquent si l'on ajoute la ligne BE à l'une & à l'autre, la somme ABE de AB & de BE, sera égale à la somme BEF de
N. 63. BE & de EF (*n*). Les lignes AD & BC
N. 141. sont aussi égales entr'elles (*n*), puisqu'elles

§ La Base d'une figure, est le côté de cette figure, sur lequel on suppose qu'elle est posée.

ſont côtés oppoſés du Parallelogramme ABCD ; & les lignes DE & CF ſont égales entr'elles (*n*), puiſqu'elles ſont côtés oppoſés du Parallelogramme EFCD. Or puiſque la ligne ABE eſt égale à la ligne BEF (*d*), que la ligne AD l'eſt à la ligne BC (*d*), & que la ligne DE l'eſt àla ligne CF (*d*), les côtés du triangle DAE ſont égaux à ceux du triangle CBF, chacun à chacun ; & par conſéquent le triangle DAE eſt égal au triangle CBF (*n*) ; ainſi, ſi de chacun de ces triangles on retranche le triangle GBE qui leur eſt commun, les reſtes qui ſeront les Trapeſes DABG & CGEF, ſeront égaux entr'eux (*n*) ; & par conſéquent ſi l'on ajoute le triangle DGC à chacun de ces Trapeſes, les ſommes qui ſeront les ſurfaces des Parallelogrames AB-CD & EFCD, ſeront égales entr'elles (*n*) ; donc C. Q. F. D.

N. 141. N. 87. N. 64. N. 63.

SCHOLIE.

145. *Comme la maniere de meſurer la ſurface d'un Parallelogramme, & par conſequent celle d'une figure quelconque, dont le rapport a la ſurface d'un Parallelogramme eſt connu, eſt fondée ſur ce Théorême, il eſt à propos d'expliquer ce que l'on doit entendre par* Meſure, *& la maniere*

de s'en servir, avant que de donner l'usage de cette Proposition.

Des Mesures.

Mesurer une étendue, *C'est considerer en combien on peut la diviser de parties, égales chacune à une certaine étendue de convention, que l'on nomme en général* Mesure: *or comme chaque partie d'une étendue, ne peut être égale qu'à une étendue de même genre qu'elle, il doit y avoir trois genres de mesures, puisqu'il y a trois genres d'étendues.*

Le premier genre des Mesures renferme celles qui servent à mesurer les lignes. Ces mesures sont des lignes, puisque chaque partie d'une ligne, ne peut être égale qu'à une ligne, & elles sont droites, parce que l'on ne mesure immédiatement que les lignes droites. Il y en a de differentes grandeurs, & elles ont chacune un nom different: mais on les nomme en général, Mesures-courantes, *ou* Mesures-linéaires.

Le second genre des Mesures renferme celles qui servent à mesurer les surfaces. Ces Mesures sont des surfaces, puisque chaque partie d'une surface, ne peut être égale qu'à une surface; elles sont des Plans, parce que l'on ne mesure immédiatement que *les surfaces-planes ; & elles sont quarrées, parce que la longueur & la largeur d'un Quarré étant egales entr'elles, cette figure mesure également & en même tems les deux dimensions d'une surface. Enfin il y en a de differentes grandeurs, & elles ont chacune un nom particulier : mais on les nomme en général*, Mesures-quarrées, *ou* Mesures-superficieles.

Le dernier genre des Mesures renferme celles qui servent à mesurer les solides. Ces mesures sont des solides, puisque chaque partie d'un solide, ne peut étre égale qu'à un solide ; elles sont Cubiques, parce que la longueur, la largeur & l'épaisseur d'un Cube § *étant égales entr'elles, cette figure mesure egalement & en même tems les trois dimensions d'un solide. Enfin il y en a de differentes grandeurs, & elles ont chacune un nom en particulier : mais on les nomme en générale*, Mesures-cubiques, *ou* Mesures-solides.

DU MESURAGE *ou* DE LA MANIERE de se servir des Mesures.

Il n'y a que la ligne droite qui puisse se diviser en lignes droites, le Rectangle en Quarrés, & un certain solide nommé Pa-

§ Le *Cube* est un solide qui a la figure d'un *Dez* à joüer : il en est traité au onziéme Livre.

rallelepipede-rectangle, *dont il est parlé au* 11^e^ *Livre, en Cubes ; ainsi puisque la Mesure des lignes est une ligne droite, celle des surfaces un Quarré, & celle des solides un Cube, lorsqu'il s'agit d'un mesurage actuel, on ne peut operer immédiatement que sur ces trois especes d'etendues ; & par conséquent on ne peut connoître la valeur des autres que par le rapport qu'elles ont à quelques-unes de ces premieres. C'est pourquoi la Géométrie dont la fin principale est de mesurer l'étendue, ne s'occupe qu'à chercher le rapport qu'une ligne-courbe peut avoir à une certaine ligne droite, celui qu'une surface peut avoir à celle d'un Rectangle, ou à celle d'une figure dont le rapport à la surface d'un Rectangle est connu, & celui qu'un solide peut avoir à un Parallelepipede-rectangle, ou à un solide dont le rapport à ce Parallelepipede est aussi connu ; & lorsqu'elle a trouvé ce rapport, elle l'annonce en disant que telle courbe est* rectifiée, *que telle surface est* quarrée, *& que tel solide est* cubé.

Puisque l'on ne mesure immédiatement que la ligne droite, le Rectangle, & le Parallelepipede, on saura la maniere de se servir des Mesures, lorsque l'on saura celle de mesurer ces trois differentes étendues ; ainsi .....

Premierement. *Pour mesurer une ligne-droite, c'est-à-dire considerer combien de fois une ligne-droite en contient une autre que l'on prend pour Mesure, on applique successivement cette Mesure sur cette ligne, & autant de fois que l'on peut l'y appliquer, autant de fois cette ligne contient cette Mesure; puisque cette ligne peut être divisée en autant de parties égales entr'elles, que cette Mesure peut lui être appliquée de fois.*

Secondement. *Pour mesurer un Rectangle, c'est-à-dire considerer combien de fois il contient un certain Quarré que l'on prend pour Mesure, il faudroit appliquer successivement ce Quarré sur ce Rectangle, & autant de fois que l'on pourroit l'y appliquer, autant de fois ce Rectangle contiendroit cette Mesure; puisque l'on pourroit le diviser en autant de parties egales entr'elles, que cette Mesure pourroit lui être appliquée de fois: mais il n'est point praticable de porter facilement une surface quarrée, ni de l'appliquer successivement sur toute celle d'un rectangle; ainsi il faut résoudre ce Problême, sans se servir d'une surface pour Mesure actuele. Or voici la maniere de le faire.*

Supposés que l'on veuille mesurer la surface du Rectangle ABCD, & que le Quarré M soit la Mesure dont on veut se servir.* Fig. 78.

On commence par considerer en combien de Rectangles on pourroit diviser le Rectangle ABCD, tels qu'ils ayent chacun une largeur égale à celle de la Mesure M. Or pour le savoir, on prend une Mesure courante égale au côté NO de cette Mesure M, & l'on considere combien de fois cette Mesure courante est contenue dans la largeur DC de ce Rectangle ABCD; car il est évident que ce Rectangle peut être divisé en autant de Rectangles qui ayent chacun une largeur égale à cette Mesure, que cette Mesure est contenue de fois dans la largeur DC de ce Rectangle; & qu'ainsi si cette Mesure y est contenue, par exemple trois fois, on peut diviser ce Rectangle en trois Rectangles AEFD, EGHF & GBCH qui auront chacun une largeur égale à cette Mesure courante, & par conséquent à la largeur de la Mesure M.

Tous ces Rectangles en lesquels on peut diviser le Rectangle ABCD selon la largeur, ont chacun la même que la Mesure M; ainsi il ne s'agit plus que de considerer en combien d'autres Rectangles qui ayent chacun une même longueur que cette mesure M, on peut les diviser. Or pour le savoir, on considere combien de fois la Mesure courante égale à un côté NO de cette mesure M, est contenue dans la longueur

DA du Rectangle ABCD; car il eſt évident que chacun de ces Rectangles dans leſquels on peut diviſer le Rectangle ABCD, ſelon la largeur, peut être diviſé lui-même en autant de Rectangles qui ayent chacun une longeur égale à cette Meſure courante, que cette Meſure eſt contenue de fois dans la longueur DA du Rectangle ABCD; & qu'ainſi ſi cette Meſure y eſt contenue, par exemple quatre fois, on peut diviſer chacun des Rectangles AEFD; EGHF & GBCH en quatre Rectangles ILFD, &c. qui auront chacun une longueur égale à cette Meſure courante, & par conſéquent à la longueur de la Meſure M.

Ainſi, puiſqu'en meſurant la largeur DC d'un Rectangle ABCD, avec une Meſure courante égale à un côté NO d'une Meſure-quarrée quelconque M, on ſait combien ce Rectangle contient d'autres Rectangles qui ont chacun une largeur égale à cette Meſure M, & qu'en meſurant la longueur de ce même Rectangle ABCD, avec cette même Meſure courante, on ſait combien chacun de ces rectangles qu'il contient, en contiennent d'autres, qui ayant chacun la même largeur que la Meſure M, ont auſſi la même longueur, on connoît le nombre de parties égales chacune à la Meſure M que contient le Rectangle ABCD; & par con-

séquent ce Rectangle est mesuré.

On peut donc poser la Regle suivante, pour celle du mesurage des Rectangles.

Prenés une Mesure courante égale au côté de la Mesure quarrée dont vous voulés vous servir : considérés combien de fois cette Mesure courante est contenue dans la largeur du Rectangle que vous voulés mesurer, & combien de fois elle l'est dans sa longueur : multipliés le nombre qui exprime combien de fois cette Mesure est contenue dans cette largeur, par celui qui exprime combien de fois elle l'est dans cette longueur & le produit exprimera combien de fois la Mesure quarrée dont vous vous servés, est contenue dans ce Rectangle.

Pour expliquer plus facilement la maniere de mesurer un Rectangle, on a supposé que la Mesure-courante dont on se servoit, étoit contenue précisement dans sa longueur & dans sa largeur : mais si elle ne l'étoit pas, il est facile de voir que la regle seroit toujours la même, puisqu'il ne s'agiroit que d'operer sur des nombres fractionnaires, au lieu d'operer sur des nombres entiers.

Troisiémement. *A l'égard de la maniere de mesurer un Parallelepipede, on n'en parlera qu'au onziéme Livre, où l'on considere ce solide.*

USAGES.

146. Premierement. *On se sert de ce Théorême de la maniere suivante, pour faire un Rectangle égal à un Parallelogramme quelconque ABCD *.* Fig. 79.

De chaque extrémité de l'un des côtés de ce Parallelogramme, par exemple des extrémités D & C de son côté DC, on éleve des perpendiculaires DE & CF à ce côté (n). *On prolonge le côté AB de ce Parallelogramme, opposé au côté DC, jusqu'à ce qu'il rencontre, l'une en E & l'autre en F, les perpendiculaires DE & CF prolongées aussi s'il est nécessaire, & le Quadrilatere EFCD que ces perpendiculaires forment avec le côté DC du Parallelogramme ABCD, & le prolongement EF de son côté AB, est rectangle, & égal à ce Parallelogramme.* N. 92.

Démonst. *Les côtés opposés EF & DC du Quadrilatere EFCD sont paralleles, puisque le côté EF est le prolongement du côté AB qui est parallele au côté DC* (n) *: les autres côtés opposés ED & FC de ce même Quadrilatere sont aussi paralleles* (n), *car puisqu'ils sont perpendiculaires chacun au côté DC, ils forment avec lui, & du même côté, des angles intérieurs EDC & FCD dont la somme est égale à celle de* N. 57. N. 126.

N. 20. *deux angles droits* (n). *Ainsi puisque les côtés opposés du Quadrilatere EFCD sont paralleles, ce Quadrilatere est un Parallelogramme* (n) ; *&* par conséquent il est rec-
N. 57.
N. 51. *tangle* (n), *puisque ces angles EDC & FCD étant droits chacun* (c), *ses autres angles EFC & DEF qui leurs sont opposés, chacun à chacun, sont aussi droits chacun*
N. 142. (n) ; *& il est égal au Parallelogramme*
N. 144. *ABCD* (n), *puisque l'un & l'autre ont une même base DC, & sont renfermés entre les mêmes paralleles EB & DC* (c) ; *donc C.Q.F.F.*

147. Secondement. *On se sert de ce Théoréme & de cette Scholie, de la maniere suivante, pour mesurer la surface d'un Parallelogramme quelconque.*

Le Parallelogramme qu'il faut mesurer est rectangle, ou ne l'est pas. S'il est rectangle, comme l'est par exemple le Parallelo-
Fig. 78. *gramme ABCD*, on le mesure de la maniere que cette Scholie enseigne à le faire. S'il n'est pas rectangle, comme ne l'est point*
Fig. 79. *par exemple le Parallelogramme ABCD*, alors de l'une des extrémités de l'un de ses côtés, par exemple de l'extrémité C de son côté DC, on éleve une perpendiculaire CF*
N. 92. *à ce côté* (n), *& l'on prolonge cette perpendiculaire, jusqu'à ce qu'elle rencontre en un point F le côté AB de ce Parallelo-*

gramme, opposé au côté BC, & prolongé aussi s'il est nécessaire; afin d'avoir par cette perpendiculaire, la longueur CF du Parallelogramme EFCD, rectangle (c) & égal au Parallelogramme ABCD (n), puis- N. 144. *que l'un & l'autre ont la même base DC, & sont renfermés entre les mêmes paralleles DC & EB. Or puisque le Rectangle EFCD est égal au Parallelogramme ABCD, si l'on multiplie le nombre de Mesures que contient la longueur CF de ce Rectangle, par le nombre de Mesures que contient sa largeur DC, le produit qui sera la valeur de la surface de ce Rectangle, comme cette Scholie la démontré, sera également la valeur de la surface du Parallelogramme ABCD; & par conséquent ce Parallelogramme est mesuré.*

PROPOSITION XXXVI.

THEOREME.

148. *Les Surfaces des Parallelogrammes qui ont des bases égales entr'elles, & sont renfermés entre les mêmes paralleles, sont égales entr'elles.*

LEs surfaces des Parallelogrammes
Fig. 10. ABCD & EFGH * qui ont des bases DC & HG égales entr'elles, & sont renfermés entre les mêmes paralleles AF & DG, sont égales entr'elles.

Const. Du point D tirés au point E la ligne DE, & du point C au point F, la ligne CF.

Démonst. Les côtés EF & DC du Qua-
N. 62. drilatere EFDC sont égaux entr'eux (*n*), puisque les côtés EF & HG qui sont côtés opposés du Parallelogramme EFGH, sont
N. 141. égaux entr'eux (*n*), & que le côté HG est égal au côté DC (*h*). Ces côtés EF & DC sont aussi paralleles, puisque les lignes AF & DG dont ils sont des parties, chacun de chacune, sont paralleles (*h*). Ainsi puisque les côtés EF & DC du quadrilatere EFCD sont égaux & paralleles entr'eux, ses autres
N. 140. côtés ED & FC sont aussi paralleles (*n*); &

par conséquent ce Quadrilatere est un Parallelogramme (n). Or puisque ce Quadrilatere EFCD est un Parallelogramme, le Parallelogramme ABCD lui est égal (n), puisque l'un & l'autre ont la même base DC, & sont renfermés entre les mêmes paralleles AF & DG; & le Parallelogramme EFGH lui est aussi égal (n), puisque l'un & l'autre ont aussi la même base EF, & sont aussi renfermés entre les mêmes paralleles AF & DG; ainsi les Parallelogrammes ABCD & EFGH sont égaux chacun au même Parallelogramme EFCD, & par conséquent ils sont égaux entr'eux (n); donc C. Q. F. D.

N. 57. N. 144. N. 144. N. 62.

PROPOSITION XXXVII.

THEOREME.

149. *Les Surfaces des Triangles qui ont la même base, & sont renfermés entre les mêmes paralleles, sont égales entr'elles.*

LEs surfaces des triangles ABC & ADC *, qui ont la même base AC, & sont renfermés entre les mêmes paralleles AC & EF, sont égales entr'elles. Fig. 81.

Const. Tirés par le point A, une parallele AE au côté CB du triangle ABC, ou

N. 130. au côté CD du triangle ADC (*n*), (ce qui est à volonté) : tirés par le point C, une parallele CF au côté AD du triangle ADC,
N. 130. ou au côté AB du triangle ABC (*n*), suivant que vous aurés tiré la ligne précédente AE, parallele à CB ou à CD : prolongés la ligne BD, s'il est nécessaire, jusqu'à ce qu'elle rencontre les lignes AE & CF, l'une en E & l'autre en F.

Démonst. Le Quadrilatere EBCA est un
N. 57. Parallelogramme (*n*), puisque ses côtés EB & AC sont paralleles (*h*), & que ses autres côtés EA & BC le sont aussi (*c*) : le Quadrilatere DFCA est aussi un Parallelogram-
N. 57. me (*n*), puisque ses côtés DF & AC sont paralleles (*h*), & que ses côtés DA & FC le sont aussi (*c*) : or puisque ces Quadrilateres EBCA & DFCA sont des Parallelogrammes (*d*), ont la même base AC (*c*), & sont renfermés entre les mêmes paralleles AC & EF (*h*), ils sont égaux entr'eux
N. 144. (*n*) ; & par conséquent les triangles ABC & ADC qui sont chacun la moitié de l'un
N. 143. de ces Parallelogrammes (*n*), sont égaux entr'eux ; donc C. Q. F. D.

USAGES.

150. Premierement. *On se sert de cette Proposition de la maniere suivante, pour faire*

*faire un Triangle-rectangle égal à un Triangle quelconque ABC **. Fig. 82.

Par le sommet de l'un des angles de ce triangle, par exemple par le sommet B *de l'angle* B *on tire une parallele BD au côté AC de ce triangle, qui est opposé à cet angle B* (n). *De l'une des extrémités de ce côté* N. 130. *AC, par exemple de son extrémité A, on éleve à ce côté* (n) *une perpendiculaire AD,* N. 92. *qui rencontre en un point D, la parallele BD prolongée s'il est nécessaire. Du point D on tire au point C la ligne DC, & le triangle ADC qu'elle forme avec la perpendiculaire AD & le côté AC du triangle ABC, est rectangle en A* (c), *& égal au triangle ABC* (n), *puisque l'un & l'autre* N. 149. *ont la même base AC* (c), *& sont renfermés entre les mêmes paralleles AC & DB* (c); *donc C.Q.F.F.*

151. Secondement. *On se sert de cette Proposition, de la maniere suivante, pour faire un triangle égal à un autre triangle quelconque ABC *, & qui soit renfermé* Fig. 83. *entre deux paralleles quelconques AC &* & 84. *EF.*

Du point D auquel l'un des côtés du triangle ABC, par exemple le côté AB prolongé s'il est nécessaire, rencontre la parallele EF, on tire à l'extrémité C de l'autre côté BC de ce triangle, une ligne DC. Par le

K

sommet B de l'angle B formé par ces deux côtés AB & BC, on tire une ligne BG pa-
N. 130. *rallele à cette ligne DC* (n), *& qui rencontre en un point G le côté AC de ce même triangle, prolongé s'il est nécessaire. Enfin du point D au point G on tire une ligne DG, & le triangle ADG qui est renfermé entre les paralleles AC & EF* (c), *est égal au triangle ABC.*

Dém. 1°. *Lorsque la ligne EF ne coupe que le prolongement des côtés du triangle*
Fig. 83. *ABC *. Les triangles GBD & GBC sont*
N. 149. *égaux entr'eux* (n), *puisqu'ils ont la même base BG, & sont renfermés entre les mêmes paralleles BG & DC* (c); *ainsi si l'on ajoute le même triangle ABG au triangle GBD & au triangle GBC, la somme des triangles ABG & GBD, sera égale à celle des*
N. 63. *triangles ABG & GBC* (n): *or le triangle ADG est la somme des triangles ABG & GBD, & le triangle ABC est celle des triangles ABG & GBC; donc le triangle ADG est égal au triangle ABC.*

2°. *Lorsque la ligne EF coupe les côtés du*
Fig. 84. *triangle ABC *. Les triangles CDB &*
N. 149. *CDG sont égaux entr'eux* (n), *puisqu'ils ont la même base CD, & sont renfermés entre les mêmes paralleles DC & BG* (c); *ainsi, si l'on ajoute le même triangle ADC au triangle CDB & au triangle CDG, la*

somme des triangles ADC & CDB, sera égale à celle des triangles ADC & CDG (n) *: or le triangle ADG est la somme des triangles ADC & CDG, & le triangle ABC est celle des triangles ADC & CDB; donc le triangle ADG est égal au triangle ABC; donc C. Q. F. F.* N. 63.

PROPOSITION XXXVIII.

THEOREME.

152. *Les Surfaces des Triangles qui ont des bases egales entr'elles, & sont renfermés entre les mémes paralleles, sont égales entr'elles.*

Les surfaces des triangles ABC & DEF* qui ont des bases AC & DF égales entr'elles, & qui sont renfermés entre les mêmes paralleles GH & AF, sont égales entr'elles. Fig. 85.

Const. Tirés par le point A, une parallele AG au côté CB du triangle ABC, & par le point F, un parallele FH au côté DE du triangle DEF (*n*) : prolongés la ligne GH, s'il est nécessaire, jusqu'à ce qu'elle rencontre les lignes AG & FH, l'une en G & l'autre en H. N. 150.

Démonst. Le Quadrilatere GBCA est un
N. 57. Parallelogramme (*n*), puisque ses côtés GB & AC sont paralleles (*h*), & que ses côtés GA & BC le sont aussi (*c*) : le Quadrilate-
N. 57. re EHFD est aussi un Parallelogramme (*n*), puisque ses côtés EH & DF sont paralleles (*h*), & que ses côtés ED & HF le sont aussi (*c*) : or puisque ces Quadrilateres GBCA & EHFD sont des Parallelogrammes (*d*), ont des bases AC & DF égales entr'elles (*h*) & sont renfermés entre les mêmes paralleles GH & AF (*h*), ils sont
N. 148. égaux entr'eux (*n*) ; & par conséquent les triangles ABC & DEF qui sont chacun la moitié de l'un de ces Parallalelogrammes
N. 143. (*n*), sont aussi égaux entr'eux (*n*) ; donc
N. 68. C. Q. F. D.

SCHOLIE.

Il est indifférent de tirer par le point A, la ligne AG parallele à CB, ou de la tirer par le point C, parallele à AB. Il en est de même de la ligne FH.

PROPOSITION XXXIX.

THEOREME.

153. *Les triangles qui ont la même base, dont les angles opposés à cette base sont chacun vers un même côté par rapport à elle, & dont les surfaces sont égales entr'elles, sont renfermés entre les mêmes paralleles.*

SI les surfaces des triangles ABC & ADC*, qui ont la même base AC, & dont les angles B & D qui lui sont opposés sont vers le même côté par rapport à elle, sont égales entr'elles, la ligne droite BD tirée par les sommets B & D de ces angles, sera parallele à la base AC de ces triangles. Fig. 16.

Const. Prolongés à volonté vers E l'un des côtés du triangle ADC, par exemple son côté AD : du point B, tirés aux points F & E pris à volonté sur la ligne AE, l'un au-dessous du point D & l'autre au-dessus, les lignes BF & BE : du point C tirés aux mêmes points F & E, les lignes CF & CE.

Démonst. Si la ligne BD qui passe par

les points B & D, n'étoit point parallele au côté AC, la ligne qui ſeroit tirée par le point B parallelement à ce côté, paſſeroit au-deſſous du point D vers F, ou au-deſſus vers E. Or ſi elle paſſoit au-deſſous, & étoit par exemple la ligne BF, les ſurfaces des triangles ABC & AFC ſeroient
N. 149. égales entr'elles (n), puiſque ces triangles qui ont la même baſe AC, ſeroient renfermés entre les mêmes paralleles AC & BF (h): mais les ſurfaces de ces triangles ne ſont point égales entr'elles, puiſque celles des triangles ABC & ADC le ſont (h), & que le triangle AFC eſt moins grand que
N. 72. le triangle ADC (n) : donc les lignes AC & BF ne ſont point paralleles; & par conſéquent la ligne tirée par le point B parallelement au côté AC ne paſſe point au-deſſous du point D. On démontre de la même maniere qu'elle ne paſſe point au-deſſus; donc elle paſſe par le point D; & par conſéquent la ligne BD tirée par les points B & D, eſt parallele au côté AC; donc C. Q. F. D.

PROPOSITION XL.

THEOREME.

154. *Les Triangles qui ont leurs bases égales entr'elles, & posées chacune sur une même ligne droite, dont les angles opposés à ces bases, chacun à chacune, sont chacun vers un même côté par rapport à elles, & dont les surfaces sont aussi égales entr'elles, sont renfermés entre les mêmes paralleles.*

SI les surfaces des triangles ABC & DEF * qui ont leurs bases AC & DE égales entr'elles & posées chacune sur la même ligne AF, & les angles B & E opposés à ces bases, chacun à chacune, dirigés chacun vers un même côté par rapport à elles, si dis-je, les surfaces de ces triangles sont égales entr'elles, la ligne droite BE tirée par les sommets B & E de ces angles, sera parallele à cette ligne AF sur laquelle les bases de ces triangles sont posées. Fig. 27.

Const. Prolongés à volonté vers H l'un des côtés du triangle DEF, par exemple son côté DE : du point B, tirés aux points G & H pris à volonté sur la ligne DH, l'un au-dessous du point E & l'autre au-dessus; les lignes BG & BH : du point F tirés aux mêmes points G & H les lignes FG & FH.

Démonst. Si la ligne BE qui passe par les points B & E n'étoit point parallele à la ligne AF, celle qui seroit tirée par le point B parallelement à cette ligne, passeroit au-dessous du point E vers G, ou au-dessus vers H. Or si elle passoit au-dessous, & étoit par exemple la ligne BG, les surfaces des triangles ABC & DGF seroient égales
N. 152. entr'elles (*n*), puisque ces triangles qui ont leurs bases AC & DF égales entr'elles (*h*), seroient renfermés entre les mêmes paralleles AF & BG (*h*): mais les surfaces de ces triangles ne sont point égales entr'elles, puisque celles des triangles ABC & DEF le sont (*h*), & que le triangle DGF est
N. 72. moins grand que le triangle DEF (*n*); donc les lignes AF & BG ne sont point paralleles; & par conséquent la ligne tirée par le point B parallelement à la ligne AF, ne passe point au-dessous du point E. On démontre de la même maniere qu'elle ne passe point au-dessus; donc elle passe par le point E; & par conséquent la ligne BE qui passe par les points B & E est parallele à la ligne AF; donc C. Q. F. D.

PROPOSI-

PROPOSITION XLI.

THEOREME.

155. *Si un Parallelogramme & un Triangle ont une même base, & sont renfermés entre les mêmes paralleles, la surface du Parallelogramme sera double de celle du Triangle.*

LA surface du Parallelogramme ABCD * qui a la même base DC, & est renfermé entre les mêmes paralleles AE & DC que le triangle DEC, est double de celle de ce triangle. Fig. 88.

Const. Tirés une Diagonale quelconque AC de ce Parallelogramme.

Démonst. La surface du Parallelogramme ABCD est double de celle du triangle DAC (*n*), puisque ce triangle est une des parties de ce Parallelogramme divisé par sa diagonale AC: or la surface du triangle DAC est égale à celle du triangle DEC (*n*), puisque ces triangles ont la même base DC & sont renfermés entre les mêmes paralleles DC & AE (*h*); donc la surface du Parallelogramme ABCD est double de celle du triangle DEC; donc C.Q.F.D.

N. 143.

N. 148.

USAGE.

156. *On se sert de cette Proposition de la maniere suivante, pour mesurer la sur-*
Fig. 89. *face d'un triangle quelconque ABC*.*

On prolonge s'il est nécessaire un des côtés de ce triangle, par exemple son côté AC. Du sommet B de l'angle opposé à ce côté, on lui abaisse une perpendiculaire
N. 93. *BD* (n); *afin d'avoir par cette perpendiculaire, la longueur du Parallelogramme BEFD, rectangle* (c), *&* *égal au Paral-*
N. 144. *lelogramme BECA* (n) *dont la surface est*
N. 155. *double de celle de ce triangle* (n). *On mesure cette perpendiculaire BD. On mesure aussi le côté AC qu'elle rencontre, afin d'avoir aussi la largeur BE de ce même rectangle BEFD, qui est égale à ce côté AC*
N. 141. (n), *puisque les lignes AC & BE sont côtés opposés du Parallelogramme BECA. On multiplie le nombre de mesures que contient cette perpendiculaire BD, par le nombre de mesures que contient ce côté AC, & le produit qui est la valeur de la surface du*
N. 145. *rectangle BEFD* (n), *égale à celle du Pa-*
N. 144. *rallelogramme BECA* (n), *est double de la valeur de la surface du triangle ABC*
N. 155. (n); *& par consequent la moitie de ce produit, est la valeur de cette surface. Ainsi la*

Regle du mesurage des triangles est la suivante.

157. Prolongés s'il est nécessaire un des côtés du triangle qu'il faut mesurer. De l'angle opposé à ce côté abaissés-lui une perpendiculaire. Mesurés cette perpendiculaire, mesurés aussi ce côté. Multipliés le nombre de mesures que contient cette perpendiculaire, par le nombre de mesures que contient ce côté. Prenés la moitié du produit qui resulte de cette multiplication, & cette moitié sera la valeur de la surface du triangle qu'il falloit mesurer.

SCHOLIE.

158. *Lorsque l'on sait la maniere de mesurer la surface d'un triangle, on sait aussi la maniere de mesurer celle d'une figure rectiligne quelconque ABCDE*; puisqu'il n'y a qu'à réduire cette figure en triangles DAB, DBC, & DEA, par des lignes DA & DB tirées de quelques-uns des angles de cette figure à chacun de ses autres angles : mesurer séparément la surface de chacun de ces triangles, & additionner les valeurs de ces surfaces ; & que la somme sera la valeur de la surface de cette figure.* Fig. 90.

PROPOSITION XLII.

PROBLEME.

159. *Décrire un Parallelograme dont la surface soit égale à celle d'un triangle donné, & qui ait un angle égal à un angle donné.*

IL faut décrire un Parallelogramme dont la surface soit égale à celle du triangle ABC *, & qui ait un angle égal à l'angle
Fig. 91. D.

Const. Par le sommet B de l'un des angles du triangle ABC, tirés une parallele BE au côté AC de ce triangle, qui est oppo-
N. 130. sé à cet angle (*n*) : de l'une des extrémités de ce côté, par exemple de son extrémité C, tirés une ligne CE qui forme avec ce
N. 115. côté un angle ECA égal à l'angle D (*n*), & qui rencontre en un point E la parallele BE : divisés ce côté en deux parties FA &
N. 91. & FC égales entr'elles (*n*) : par le point F, milieu de ce côté tirés une ligne FG parallele à la ligne CE & qui rencontre aussi en un point G la parallele BE. Le quadrilatere GECF sera un Parallelogramme égal au triangle ABC, & ce Parallelogramme aura un angle ECF égal à l'angle D.

Pour la démonstration. Tirés du point B au point F la ligne BF.

Démonst. Le Quadrilatere GECF est un Parallelogramme (*n*), puisque ses côtés N. 57.
GE & FC sont paralleles (*c*), & que ses côtés GF & EC le sont aussi (*c*); ainsi il est double du triangle FBC (*n*), puisque N. 155.
l'un & l'autre ont la même base FC, & sont renfermés entre les mêmes paralleles AC & BE (*c*): or le triangle ABC est aussi double du même triangle FBC, puisque les triangles ABF & FBC qui ont des bases AF & FC égales entr'elles (*c*), & sont renfermés entre les mêmes paralleles AC & BE (*c*), sont égaux entr'eux (*n*), N. 148.
& que le triangle ABC est la somme de ces triangles ; donc le Quadrilatere GECF est égal au triangle ABC (*n*). Ainsi N. 67.
le Quadrilatere GECF est un Parallelogramme (*d*), sa surface est égale à celle du triangle ABC (*d*), & il a l'angle ECF égal à l'angle D (*c*); donc C. Q. F. F.

SCHOLIE.

160. *Si au contraire il faut décrire un triangle tel que sa surface soit égale à celle d'un Parallelogramme ABCD * & que l'un* Fig. 92.
de ses angles soit égal à un angle G : alors on prolonge l'un des côtés de ce Parallelo-

gramme, par exemple le côté DC, jusqu'à ce que son prolongement CF lui soit égal : de l'une des extrémités de la ligne DF, par exemple de son extrémité D, on tire une ligne DE qui forme avec cette ligne DF un angle
N. 115. *EDF égal à l'angle G* (n), *& rencontre en un point E le côté AB opposé à cette même ligne DF, prolongé autant qu'il est nécessaire : du point E on tire au point F la ligne EF, & la surface du triangle DEF formé par les lignes DE, EF & DF, & dont l'angle EDF est égal à l'angle G* (c), *est égale à celle du Parallelogramme ABCD; puisque si l'on tire du point E au point C la ligne EC, on démontrera de la même maniere qu'on la fait ci-dessus, que le Parallelogramme ABCD & le triangle DEF sont chacun doubles du triangle DEC,*
N. 67. *& par consequent égaux entr'eux* (n).

PROPOSITION XLIII.

THEOREME.

161. *Les Surfaces des Complémens d'un Parallelogramme sont égales entr'elles.*

Fig. 93. LEs surfaces des complémens EFID & GBHF * du Parallelogramme

ABCD, sont égales entr'elles.

Démonst. Les triangles DAC & CAB sont égaux entr'eux, puisqu'ils sont chacun la moitié du Parallelogramme ABCD (*n*), & les triangles EAF & FAG N. 143. sont aussi égaux entr'eux, puisqu'ils sont aussi chacun la moitié du Parallelogramme AGFE (*n*); ainsi si l'on retranche N. 143. le triangle EAF du triangle DAC, & le triangle FAG du triangle CAB, les restes qui seront les trapeses EFCD & GBCF, seront égaux entr'eux (*n*): or N. 64. les triangles IFC & CFH sont aussi égaux entr'eux puisqu'ils sont chacun la moitié du Parallelogramme FHCI (*n*); N. 143. donc si l'on retranche le triangle IFC du trapese EFCD, & le triangle CFH du trapese GBCF, les restes qui seront les complémens EFID & GBHF du Parallelogramme ABCD, seront égaux entr'eux (*n*); donc C. Q. F. D. N. 64.

PROPOSITION XLIV.

PROBLEME.

162. *Décrire sur une ligne droite donnée, un Parallelogramme tel que sa surface soit égale à celle d'un triangle donné, & que l'un de ses angles soit égal à un angle donné.*

Fig. 94. IL faut décrire sur la ligne AB * un Parallelogramme tel que sa surface soit égale à celle du triangle C, & que l'un de ses angles soit égal à l'angle D.

Const. Prolongés la ligne AB jusqu'à ce que son prolongement BE soit égal à l'un des côtés du triangle C : décrivés sur ce prolongement un triangle BFE qui ait ses côtés égaux à ceux de ce triangle C, cha-
N. 112. cun à chacun (*n*) : décrivés un Parallelogramme GHIB dont la surface soit égale à celle du triangle BFE, & dont l'angle
N. 159. GBI soit égal à l'angle D (*n*) : prolongés indéfiniment vers K le côté GH de ce Parallelogramme, & vers N & L ses côtés GB & HI : par l'extrémité A de la ligne AB tirés une ligne indéfinie KM parallele
N. 130. à la ligne GN (*n*), & qui rencontre en un

point K la ligne KH : de ce point K tirés par le point B, une ligne KL qui rencontre en un point L la ligne HL : enfin par ce point L tirés une ligne ML parallele à la ligne AI (n), & qui rencontre l'une en M N. 130.
& l'autre en N, les lignes KM & GN. Le Quadrilatere ABNM formé par les intersections des lignes AI, ML, KM & GN sera un parallelogramme : sa surface sera égale à celle du triangle C : la ligne AB sera l'un de ses côtés, & il aura un angle ABN égal à l'angle D.

DEMONSTRATION.

Premierement. Les côtés AB & MN du quadrilatere ABNM sont paralleles, puisqu'ils sont des parties, l'un de la ligne AI & l'autre de la ligne ML qui sont paralleles (c) : ses côtés AM & BN sont aussi paralleles, puisqu'ils sont aussi des parties, l'un de la ligne KM & l'autre de la ligne GN qui sont paralleles (c) ; donc ce quadrilatere est un parallelogramme (n). N. 57.

Secondement. Les côtés KH & ML du quadrilatere KHLM sont paralleles (n), N. 129.
puisque les lignes KH & AI, dont les parties GH de l'une & BI de l'autre, sont côtés opposés du parallelogramme GHIB, sont paralleles (n), & que les lignes AI & N. 58.
ML le sont aussi (c) : les côtés KM & HL

de ce même quadrilatere ſont auſſi paralle-
Ns. 129. les (*n*), puiſque les lignes KM & GN ſont
paralleles (*c*), & que les lignes GN & HL
dont les parties GB de l'une & HI de l'au-
tre, ſont côtés oppoſés du parallelogram-
N. 57. me GHIB, ſont auſſi paralleles (*n*); donc
ce quadrilatere KHLM eſt un parallelo-
N. 57. gramme(*n*). Or puiſque le quadrilatereKH-
LM eſt un parallelogramme, que les lignes
AI & GN ont le point B commun entr'el-
les & ſa diagonale KL, & qu'elles ſont pa-
ralleles l'une à ſon côté ML (*c*), & l'autre
à ſon côté HL (*d*), les parallelogrammes
ABNM & GHIB que ces lignes forment
avec ces côtés ML & HL de ce parallelo-
N. 59. gramme, ſont ſes complémens (*n*), & par
conſéquent le parallelogramme ABNM eſt
N. 161. égal au parallelogramme GHIB (*n*): or le
parallelogramme GHIB eſt égal au triangle
BFE (*c*), & le triangle BFE l'eſt au
N. 87. triangle C (*n*), puiſque les côtés du pre-
mier ſont égaux à ceux du dernier, cha-
cun à chacun (*c*); donc le parallelogram-
me ABNM eſt égal au triangle C.

Troiſiémement. Enfin la ligne AB eſt l'un
des côtés du parallelogramme ABNM (*c*);
& l'angle ABN de ce parallelogramme eſt
égal à l'angle D, puiſque l'angle D eſt égal
N. 98. à l'angle GBI (*c*), & que (*n*) l'angle GBI
l'eſt à cet angle ABN qui lui eſt oppoſé au

ſommet (*c*) ; donc C. Q. F. F.

PROPOSITION XLV.

PROBLEME.

163. *Décrire un Parallelogramme dont la ſurface ſoit égale à celle d'une figure rectiligne quelconque, & qui ait un angle egal à un angle donné.*

IL faut décrire un parallélogramme dont la ſurface ſoit égale à celle de la figure rectiligne ABCD*, & qui ait un angle égal à l'angle E. Fig. 95.

Conſt. Diviſés la figure ABCD en triangles par la ligne AC tirée de l'un de ſes angles A à l'angle C qui lui eſt oppoſé : décrivés un parallelogramme FGHI, dont la ſurface ſoit égale à celle de l'un de ces triangles, par exemple au triangle ABC & qui ait l'angle I égal à l'angle E (*n*). Sur N. 159. l'un des côtés de ce parallelogramme, par exemple ſur ſon côté GH, décrivés un parallelogramme GKLH dont la ſurface ſoit égale à celle du triangle ACD, & qui ait l'angle GHL égal à l'angle I qui lui eſt oppoſé (*n*) : la figure rectiligne FGKLHI N. 162. formée par ces parallelogrammes FGHI

& GKLH sera un parallelogramme : sa surface sera égale à celle de la figure rectiligne ABCD, & elle aura l'angle I égal à l'angle E.

DEMONSTRATION.

Premierement. Les lignes FI & GH
N. 57. sont paralleles (*n*), puisqu'elles sont côtés opposés du parallelogramme FGHI; ainsi puisque les angles I & GHI quelles forment avec la ligne IH, sont des angles intérieurs pris chacun du même côté de cette ligne, leur somme est égale à celle de deux
N. 127. angles droits (*n*) : or l'angle GHL est égal à l'angle I (*c*); donc la somme des angles GHI & GHL, est aussi égale à celle de deux angles droits; & par conséquent les lignes HI & HL, tirées chacune de l'extrémité H de la ligne GH avec laquelle elles forment ces angles, ne font qu'une seule li-
N. 97. gne droite IHL (*n*). Les lignes GK &
N. 57. HL sont aussi paralleles (*n*), puisqu'elles sont côtés opposés du parallelogramme GKLH; ainsi puisque les angles KGH & GHL qu'elles forment avec la ligne GH, sont des angles intérieurs pris chacun du même côté de cette ligne, leur somme est
N. 127. égale à celle de deux angles droits (*n*) : or l'angle FGH est égal à l'angle GHL, puisque l'angle GHL est égal à l'angle I (*c*),

& que les angles FGH & I, qui sont des angles opposés du parallelogramme FGHI, sont égaux entr'eux (*n*) : donc la somme des N. 142.
angles FGH & KGH est aussi égale à celle de deux angles droits ; & par conséquent les lignes GF & GK tirées chacune de l'extrémité G de la ligne GH avec laquelle elles forment ces angles, ne font qu'une seule ligne droite FGK (*n*). Ainsi puisque les li- N. 97.
gnes FGK & IHL ne sont chacune qu'une seule ligne droite, la figure FGKLHI est un quadrilatere ; & puisque ces mêmes lignes sont des lignes droites, & que les parties GK de l'une & HL de l'autre sont paralleles (*d*), les côtés FGK & IHL de ce quadrilatere sont paralleles : or les autres côtés FI & KL de ce même quadrilatere sont aussi paralleles (*n*), puisque les lignes N. 129.
FI & GH le sont (*d*), & que les lignes GH & KL qui sont côtés opposés du Parallelogramme GKLH sont aussi paralleles (*n*) ; donc le quadrilatere FGKLHI est un N. 57.
parallelogramme (*n*). N. 57.

Secondement. La surface du parallelogramme FGHI est égale à celle du triangle ABC (*c*), & celle du parallelogramme GKLH l'est à celle du triangle ACD (*c*) ; ainsi la surface de chaque partie du parallelogramme FGKLHI est égale à la surface de chaque partie correspondante de la figure ABCD; & par conséquent la surface du parallelogramme FGKLHI est égale à celle de la figure ABCD.

Enfin l'angle I de ce parallelogramme est égal à l'angle E (c); donc C.Q.F.F.

SCHOLIE.

Fig. 95. 164. *Si la figure rectiligne ABCD* avoit plus de quatre côtés, & qu'il fallût la diviser par exemple en trois triangles par des lignes tirées de quelques-uns de ses angles à chacun de ses autres angles; alors après avoir décrit un parallelogramme FGKLHI égal aux deux premiers triangles ABC & ACD, de la maniere que ce problême enseigne à le faire, on décriroit sur le côté KL de ce parallelogramme un parallelogramme égal au troisiéme triangle, de la même maniere que l'on a décrit sur le côté GH le parallelogramme GKLH égal au triangle ACD; & ainsi de suite, si la figure proposée se divisoit en un plus grand nombre de triangles.*

USAGE.

165. *On peut se servir de cette Proposition, de la maniere suivante, pour trouver la différence de deux figures rectili-*
Fig. 96. *gnes quelconques A & B*.*

On fait un parallelogramme CDEF égal

à la figure rectiligne A, & qui ait un angle F à volonté. Sur une ligne droite GK égale à l'un des côtés CF de ce parallelogramme, on fait aussi un parallelogramme GHIK égal à la figure rectiligne B & qui ait un angle K égal à l'angle F. On divise le côté FE du plus grand de ces deux parallelogrammes en deux parties telles que l'une FM soit égale au côté KI du moins grand. Par le point M on tire la ligne ML parallele au côté DE de ce plus grand parallelogramme (n), & le parallelogramme LDEM est la différence de la figure B à la figure A, puisque le parallelogramme CLMF est égal au parallelogramme GHIK, comme il est facile de le démontrer, en faisant voir que si l'on pose ces deux parallelogrammes l'un sur l'autre, ils ne se surpasseront point. N. 130.

PROPOSITION XLVI.

PROBLEME.

166. *Décrire un Quarré sur une ligne droite donnée.*

IL faut décrire un quarré sur la ligne droite AB*. Fig. 97

Conſt. Du point A élevés une perpendi-
N. 92. culaire AD à la ligne AB (*n*) : du point B élevés encore une perpendiculaire BC à
N. 92. cette même ligne (*n*) : faites ces perpendiculaires égales chacune à la ligne AB : du point D tirés au point C la ligne DC : le quadrilatere ABCD que ces lignes formeront ſera un Quarré.

Démonſt. Puiſque les côtés AD & BC du quadrilatere ABCD ſont perpendiculaires chacun à la ligne AB (*c*), les angles intérieurs A & B qu'ils forment avec cette
N 20. ligne ſont droits chacun (*n*) ; ainſi leur ſomme eſt égale à celle de deux angles droits, & par conſéquent ces côtés ſont pa-
N. 129. ralleles (*n*). Ces mêmes côtés AD & BC ſont auſſi égaux entr'eux (*c*) ; ainſi les côtés AD & BC du quadrilatere ABCD ſont égaux & paralleles entr'eux, & par conſéquent ſes autres côtés CD & AB le ſont
N. 140. auſſi (*n*). Or puiſque les côtés CD & AB ſont égaux entr'eux, & que les côtés AD & BC ſont égaux chacun à ce même côté AB (*c*), les côtés AB, BC, CD, & AD, ſont égaux entr'eux ; & puiſque les côtés CD & AB ſont paralleles, les côtés AD & BC qui ſont perpendiculaires chacun au côté AB (*c*), le ſont auſſi chacun
N. 128. au côté CD (*n*), & par conſéquent les angles D & C qu'ils forment avec ce côté, ſont

ſont droits chacun (*n*). Ainſi tous les côtés AB, BC, CD & AD du quadrilatere ABCD ſont égaux entr'eux, & tous ſes angles A, B, C & D ſont droits, & par conſéquent ce quadrilatere eſt un quarré (*n*); donc C. Q. F. F. N. 20. N. 49.

SCHOLIE.

167. *On peut auſſi réſoudre ce Problême, de la maniere ſuivante. Du point A * on éleve une perpendiculaire AD à la ligne AB* (n) *: on fait cette perpendiculaire égale à cette ligne AB : des points D & B pris pour centres, & avec la ligne AB priſe pour rayon, on décrit deux arcs qui ſe coupent en un point C : de ce point C on tire aux points D & B, les lignes CD & CB, & le quadrilatere ABCD que ces lignes forment eſt un Quarré.* Fig. 98. N. 92.

Pour la démonſtration on tire la diagonale DB de ce quadrilatere.

DEMONSTRATION.

Premierement. *Tous les côtés du quadrilatere ABCD ſont égaux entr'eux* (c).

Secondement. *Les côtés du triangle BAD ſont égaux à ceux du triangle BCD, chacun à chacun, puiſque le côté DB eſt commun à ces deux triangles, & que les côtés AB, AD, CB & CD ſont égaux en-*

tr'eux (c); ainsi les angles du premier triangle sont égaux à ceux du second,
N. 87. *chacun à chacun* (n), *& par conséquent puisque l'angle A est droit* (c), *l'angle C l'est aussi. Or puisque l'angle A du triangle BAD est droit* (c), *& que ce triangle est isocele* (c), *ses autres angles ABD & ADB sont égaux chacun à la moitié d'un*
N. 136. *angle droit* (n); *& puisque l'angle C du triangle BCD est droit* (d), *& que ce triangle est aussi isocele* (c), *ses autres angles CBD & CDB sont aussi égaux chacun à la*
N. 136. *moitié d'un angle droit* (n); *ainsi l'angle ABC qui est la somme des angles ABD & CBD est celle de deux moitiés d'un angle droit; & l'angle ADC qui est la somme des angles ADB & CDB, est aussi celle de deux moitiés d'un angle droit: or deux moitiés d'un angle droit font un angle droit; donc l'angle ABC est droit, & l'angle ADC l'est aussi. Ainsi tous les côtés du quadrilatere ABCD sont égaux entr'eux, & tous ses angles sont droits; par conséquent ce quadrilatere est un Quarré* (n); *donc C. Q. F. F.*

PROPOSITION XLVII.

THEOREME.

168. *Le Quarré de l'hypoténuse d'un triangle rectangle, est égal à la somme des Quarrés de chacun des deux autres côtés de ce triangle.*

LE Quarré ACDE * de l'hypoténuse AC du triangle rectangle ABC, est égal à la somme des quarrés AFGB & CBHI de chacun des deux autres côté AB & BC de ce triangle. Fig. 94.

Const. Par le sommet de l'angle droit B du triangle rectangle ABC, tirés une parallele BL au côté AE du quarré ACDE (*n*) : du même point B tirés aux points E & D, les lignes BE & BD : du point F tirés au point C, la ligne FC, & du point A au point I, la ligne AI. N. 130.

Démonst. L'angle FAB est droit (*n*), puisqu'il est un des angles du quarré AFGB. L'angle EAC est aussi droit (*n*); puisqu'il est un des angles du quarré ACDE; par conséquent, si l'on ajoute le même angle BAC à chacun de ces angles, l'angle FAC qui sera la somme des angles FAB & BAC, sera égal à l'angle EAB qui sera celle des angles EAC N. 49. N. 49.

N. 63. & BAC (*n*). Ainsi les triangles ACF & ABE ont l'angle FAC égal à l'angle EAB (*d*), & les côtés AF & AC qui forment le premier, égaux aux côtés AB & AE qui forment le dernier, chacun à cha-
N. 49. cun (*n*), puisque les côtés AF & AB sont côtés du quarré AFGB, & que les côtés AC & AE sont côtés du quarré ACDE; & par conséquent le triangle ACF est égal
N. 80. au triangle ABE (*n*). Or le quarré AF-
N. 155. GB est double du triangle ACF (*n*), puisque l'un & l'autre ont la même base AF, & sont renfermés entre les mêmes paralleles AF, & CBG; & le parallelogramme AKLE est double du
N. 155. triangle ABE (*n*), puisque l'un & l'autre ont aussi la même base AE, & sont renfermés entre les mêmes paralleles AE & BKL; donc le quarré AFGB & le parallelogramme AKLE sont doubles chacun de quantités égales entr'elles, & par conséquent le quarré AFGB est égal au
N. 67. parallelogramme AKLE (*n*). On démontre de la même maniere que le triangle CAI est égal au triangle DBC; que le quarré CBHI, & le parallelogramme KCDL sont doubles, l'un du triangle CAI, & l'autre du triangle DBC; & par conséquent, que le quarré CBHI est
N. 67. égal au parallelogramme KCDL (*n*). Ain-

ſi puiſque le quarré AFGB eſt égal au parallelogramme AKLE (*d*), & que le quarré CBHI l'eſt au parallelogramme KCDL, la ſomme des parallelogrammes AKLE & KCDL eſt égale à celle des quarrés AFGB & CBHI : or le quarré ACDE eſt la ſomme de ces parallelogrammes (*n*) ; donc le quarré ACDE eſt égal à la ſomme des quarrés AFGB & CBHI ; donc C. Q. F. D. N. 72.

COROLLAIRE I.

169. Il ſuit de ce Théorême, que *de toutes les lignes que l'on peut tirer d'un même point à une même ligne droite, celle qui lui eſt perpendiculaire eſt la moins grande.*

La ligne CD *, perpendiculaire à la ligne droite AB eſt la moins grande de toutes les lignes que l'on peut tirer du point C à cette ligne. F. 100.

Conſt. Du point C tirés à un point quelconque E de la ligne AB, l'oblique CE.

Démonſt. Quelque près que le point E ſoit du point D, la perpendiculaire CD, l'oblique CE, & la partie ED de la ligne AB, compriſe entre les points E & D de cette ligne, forment un triangle EDC qui eſt rectangle en D, puiſque la ligne CD eſt perpendiculaire à la ligne AB (*h*), &

dont par conséquent l'oblique CE qui est opposée à cet angle D, est l'hypoténuse. Or puisque l'oblique CE est l'hypoténuse du triangle rectangle EDC, il faut ajouter le quarré de la partie ED à celui de la perpendiculaire CD, pour rendre le quarré de cette perpendiculaire égal à celui de cette oblique CE, puisque le quarré de CE est égal à la somme des quarrés de CD & de
N. 168. ED (*n*); donc le quarré de la perpendiculaire CD est moins grand que celui de l'oblique CE, & par consequent la perpendiculaire CD est moins grande que l'oblique CE; donc C. Q. F. D.

COROLLAIRE II.

170. Il suit encore de ce Théorême que, *de toutes les lignes droites tirées d'un même point à une même ligne droite, celle qui la rencontre au point le plus éloigné de celui auquel la perpendiculaire tirée du même point que ces lignes droites la rencontreroit, est la plus grande.*

Fig. 101. Si le point F * pris sur la ligne droite AB, est plus éloigné que le point E, de celui auquel la perpendiculaire tirée du point C à cette ligne la rencontreroit, la ligne droite CF tirée de ce point C au point F, sera plus grande que la ligne droite CE tirée du même point C au point E.

Conſt. Du point C abaiſſés la perpendiculaire CD à la ligne AB (*n*). N. 93.

Démonſt. Le quarré de la ligne CF eſt égal à la ſomme des quarrés des lignes CD & FD (*n*), puiſque le triangle FDC eſt N. 168. rectangle en D (*c*) ; & le quarré de la ligne CE eſt égal à la ſomme des quarrés des lignes CD & ED (*n*), puiſque le triangle N. 168. EDC eſt auſſi rectangle en D (*c*) : or la ſomme des quarrés des lignes CD & FD eſt plus grande que celle des quarrés des lignes CD & ED, puiſque la ligne FD eſt plus grande que la ligne ED (*h*) ; donc le quarré de la ligne CF eſt plus grand que celui de la ligne CE, & par conſéquent la ligne CF eſt plus grande que la ligne CE ; donc C. Q. F. D.

USAGE.

171. *On ſe ſert de cette Propoſition de la maniere ſuivante, pour reſoudre ce Problême.*

La longueur d'une échelle AB eſt de dix pieds, & cette échelle étant poſée droite contre un mur D, elle eſt de même hauteur que ce mur. Si en appuyant le haut de cette échelle contre ce mur, on éloigne ſon pied de celui de ce mur de ſix pieds, de combien s'en faudra-t-il que la hauteur de cette échelle ainſi inclinée* Fig. 102.

ne soit égale à celle de ce mur ?

Le quarré de la longueur AB de l'échelle est égal à la somme des quarrés de la hauteur AC de cette échelle, & de la distance CB de son pied à celui
N. 168. *du mur* (n), *puisque cette longueur AB cette hauteur AC, & cette distance CB, forment un triangle ACB rectangle en C. Ainsi, si de cent pieds, quarré de la longueur de l'échelle* (h), *on retranche trente-six pieds, quarré de la distance du pied de l'échelle au pied du mur* (h), *le reste soixante-quatre pieds sera le quarré de la hauteur de l'échelle. Or puisque le quarré de la hauteur de l'échelle est de soixante-quatre pieds, cette hauteur est de huit pieds, & par conséquent si l'on retranche huit pieds de la hauteur du mur qui est de dix pieds* (h), *le reste deux pieds, sera la différence de la hauteur de l'échelle AB à celle du mur D.*

PROPO-

PROPOSITION XLVIII.

THEOREME.

172. *Si le Quarré de l'un des côtés d'un Triangle, est égal à la somme des Quarrés de chacun des autres côtés de ce triangle, ce triangle sera rectangle.*

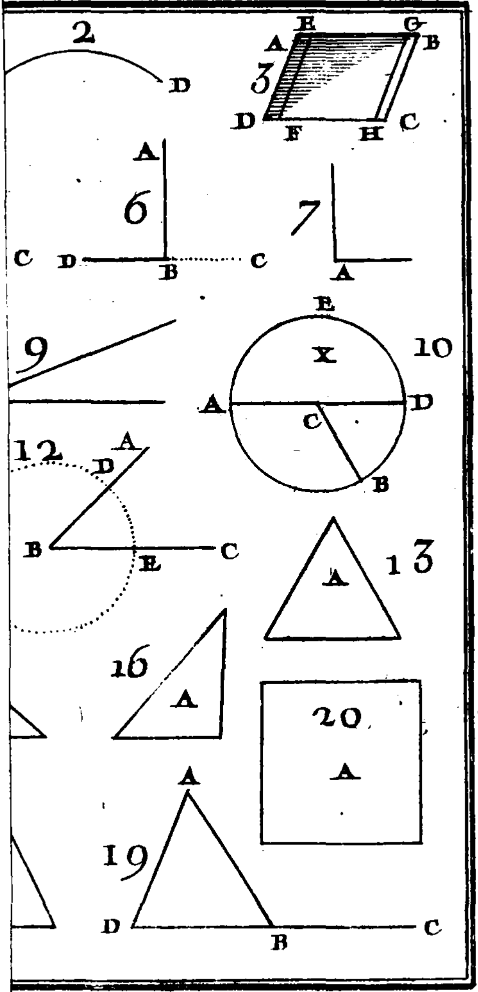
SI le quarré du côté AC du triangle ABC * est égal à la somme des quarrés des côtés AB & BC de ce triangle, ce triangle ABC sera rectangle. Fig.103.

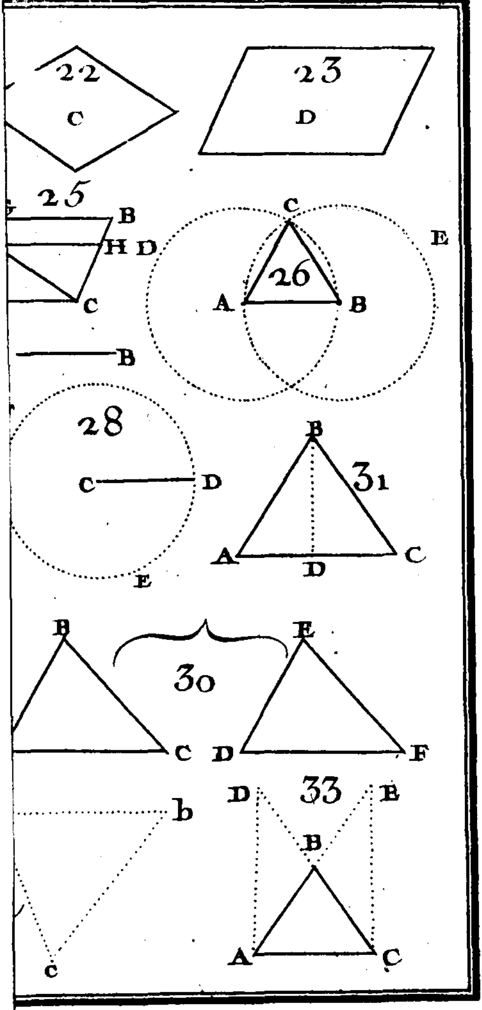
Const. De l'extrémité de l'un des côtés dont la somme est égale à celle du troisiéme, par exemple de l'extrémité C du côté BC, élevés une perpendiculaire CD à ce côté (*n*) : faites cette perpendiculaire égale à l'autre côté AB : du point B tirés au point D, la ligne BD. N. 92.

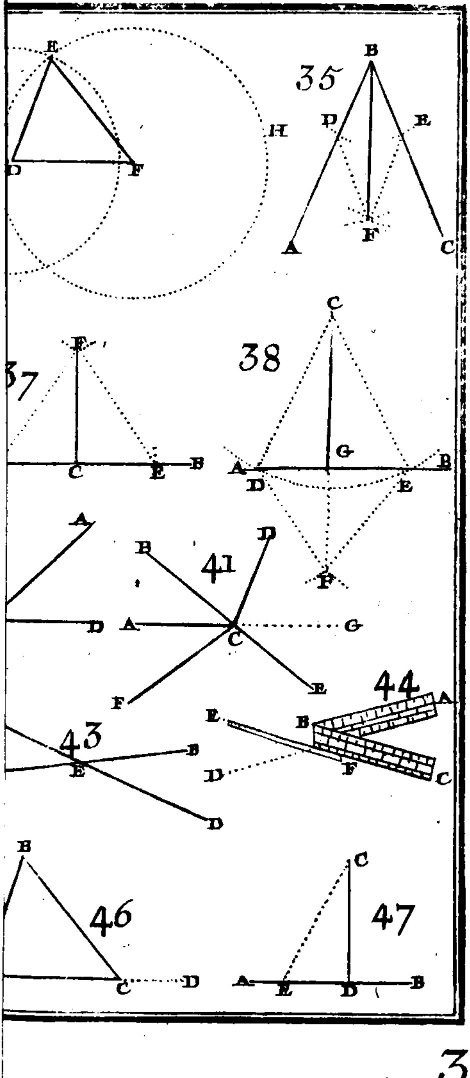
Démonst. Le quarré du côté BD est égal à la somme des quarrés des côtés BC & CD (*n*), puisque le triangle DCB est rectangle en C (*c*) ; & le quarré du côté AC est égal à la somme des quarrés des côtés AB & BC (*h*) : or la somme des quarrés des côtés BC & CD est égale à celle N. 168.

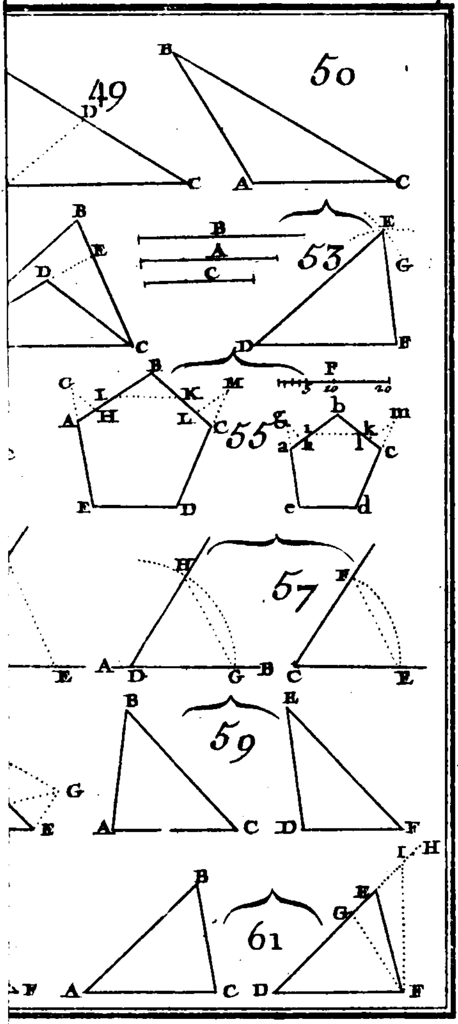
des quarrés des côtés AB & BC, puiſque CD eſt égal à AB (*c*) : donc le quarré de BD eſt égal au quarré de AC ; & par conſéquent le côté BD eſt égal au côté AC. Ainſi les côtés du triangle DCB ſont égaux à ceux du triangle ABC, chacun à chacun, puiſque CD eſt égal à AB (*c*), que BD l'eſt à AC (*d*), & que BC eſt commun à ces deux triangles ; donc les angles du premier ſont égaux à ceux du ſecond, cha-
N. 87. cun à chacun (*n*), & par conſéquent puiſque l'angle BCD du triangle DCB eſt droit (*c*), l'angle ABC du triangle ABC eſt auſſi droit ; donc C. Q. F. D.

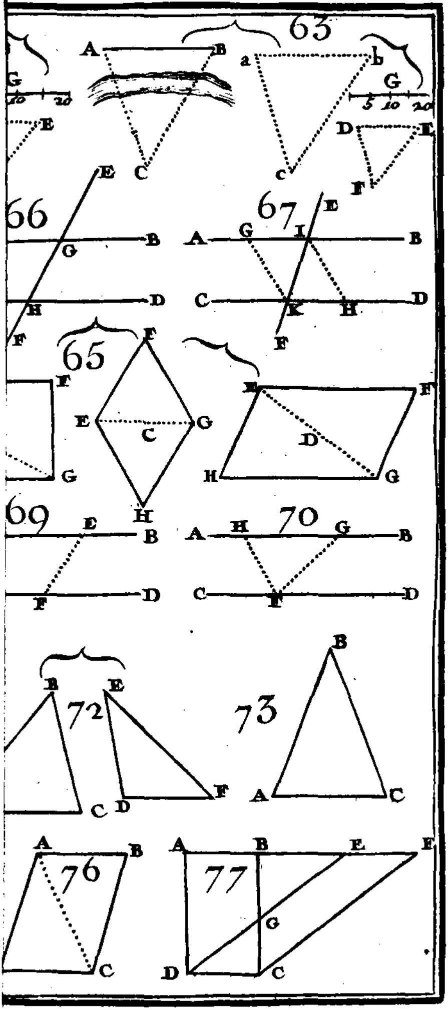
Fin du premier Livre.

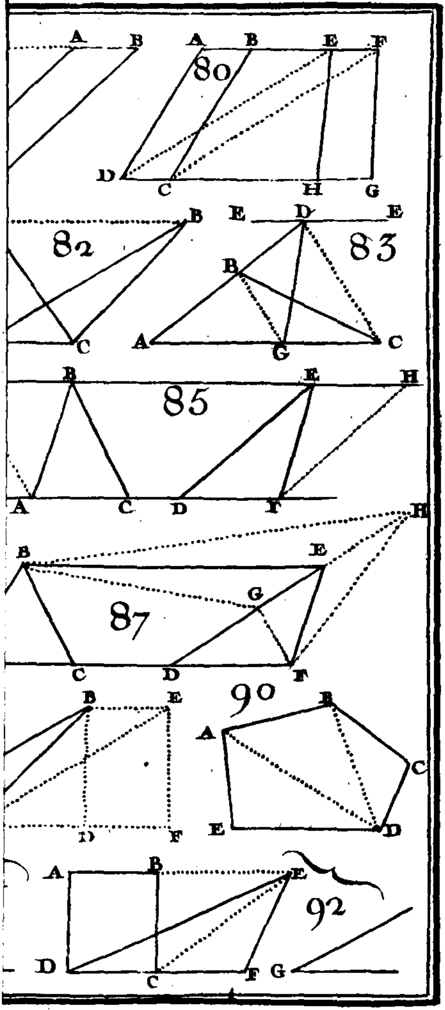

2
D
E
G
A
B
3
D
F
H
C
A
6
7
C
D
B
C
A
E
9
X
10
A
D
C
12
A
D
B
B
C
E
A
13
16
A
20
A
A
19
D
B
C

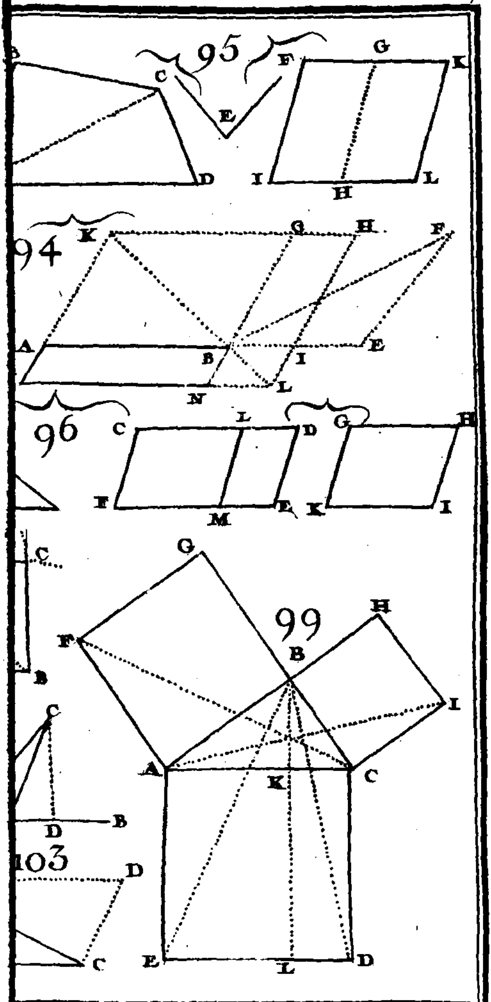

22
C
23
D
25
B
H D
C
B
C
E
26
A
B
28
C
D
E
B
31
A
C
D
B
30
E
C
D
F
33
D
E
b
B
A
C
c


35
38
41
43
44
46
47


49
50
53
55
57
59
61


63
66
67
65
69
70
72
73
76
77


A B
A B E F
80
D C H G
B
82
C
E D E
83
B
A G C
B E H
85
A C D F
H
B E
G
87
C D F
B E
90
B
A
C
E D
D F
A B E
92
D C F G


95
C
E
D
F
G
K
I
H
L
94
K
G
H
F
A
B
I
E
N
L
96
C
L
D
G
H
F
M
E
K
I
C
G
99
H
F
B
I
A
K
C
E
L
D
C
D
B
103
D
C

LES ELEMENS D'EUCLIDE.

LIVRE SECOND.

Quoique ce Livre ne contienne que quatorze Propositions, & que l'on n'apperçoive pas d'abord leurs usages, il est cependant très-considérable; puisque c'est par les principes qui y sont établis, que l'on démontre les propriétés des lignes courbes, & que l'on resoud les Problêmes qui en dépendent, d'une maniere un peu plus longue à la vérité, que si l'on se servoit de l'Algebre pour le faire, mais beaucoup plus satisfaisante, parce qu'elle est plus lumineuse. Euclide y considere dans les premieres Propositions les différens Rectangles que l'on peut former des parties d'une même ligne droite différemment divisee, & détermine de combien les uns different des autres. Il ensei-

gne ensuite à diviser une ligne droite suivant de certaines conditions ; ce qui est un Problême dont l'usage est très-fréquent dans la Géométrie ; & après avoir démontré de combien le Quarré du côté opposé à l'angle obtus d'un triangle, surpasse la somme des Quarrés des deux autres côtés de ce triangle, & de combien celui du côté opposé a un angle aigu differe de cette somme, il termine ce Livre par la maniere de faire un Quarré qui soit égal à une figure rectiligne quelconque.

DEFINITIONS.

I.

173. ON dit *le Rectangle fait de telles lignes*, ou seulement, *le Rectangle de telles lignes*, pour exprimer la surface d'un parallelogramme rectangle, dont l'une de ces lignes est la longueur, & l'autre la largeur.

On dit, le Rectangle des lignes AB & BC, *pour exprimer la surface du parallelogramme rectangle ABCD *, dont la ligne AB est la longueur, & la ligne BC la largeur.*

Fig. 1.

II.

174. On nomme *Gnomon*, une figure

rectiligne composée des complémens d'un parallelogramme, & de l'un des parallelogrammes dont la diagonale est une partie de celle du premier.

La figure ABCDEF est un* Gnomon. Fig. 2.

SCHOLIE PRE'LIMINAIRE.

175. Premierement. *Si la longueur AB d'un rectangle ABCD * est égale à sa* Fig. 3. *largeur AD, tous les côtés de ce rectangle seront égaux entr'eux, puisque les côtés opposés d'un parallelogramme le sont* (n); N. 141. *& par consequent ce rectangle est un quarré* (n). N. 49.

Secondement. *Si un parallelogramme ABCD * a l'un de ses angles droit, par* Fig. 1. *exemple l'angle A, tous les autres angles de ce parallelogramme seront droits, puisque l'angle C qui est opposé à cet angle A sera droit* (n), *que l'angle* B, *intérieur pris* N. 142 *du même côté de la ligne AB que l'angle A, sera droit* (n) *& que l'angle D qui lui* N. 127. *est opposé le sera aussi* (n); *& par consequent ce parallelogramme sera rectangle.* N. 142.

Troisiémement. *Lorsque deux lignes AB & CD sont égales entr'elles, on peut* Fig. 4. *prendre indifferemment l'une ou l'autre, & dire la ligne CD au lieu de la ligne AB, & la ligne AB au lieu de la ligne*

CD ; ce qui est très-ordinaire dans la Géométrie.

PROPOSITION I.

THEOREME.

176. *Si de deux lignes droites, l'une est divisée en plusieurs parties, le rectangle de ces deux lignes sera égal à la somme des rectangles faits de celle de ces lignes qui n'est point divisée, & de chacune des parties de celle qui est divisée.*

Fig. 5. LE rectangle des lignes AB & AD*, dont l'une AB est divisée, par exemple en trois parties AE, EF & FB, est égal à la somme des rectangles faits l'un de la ligne AD & de la partie AE, un autre de la même ligne AD & de la partie EF, & un autre enfin de la même ligne AD & de la partie FB.

Const. Faites un rectangle ABCD dont la ligne AB soit l'un des côtés, & la ligne AD l'autre : par chaque point de division E & F de la ligne AB, tirés les
N. 130. paralleles EG & FH à la ligne AD (*n*).

Démonst. Chacun des parallelogrammes AEGD, EFHG & FBCH eſt rectangle (*n*), puiſque la ligne AD eſt perpendiculaire à la ligne AB (*c*), & que par conſéquent les lignes EG & FH qui ſont paralleles chacune à cette perpendiculaire (*c*), ſont auſſi perpendiculaires à la même ligne AB (*n*): & ces lignes EG & FH ſont égales chacune à la ligne AD (*n*); puiſque les lignes AD & EG ſont côtés oppoſés du Parallelogramme AEGD, & que les lignes EG & FH le ſont du parallelogramme EFHG. Ainſi le parallelogramme AEGD eſt le rectangle de la ligne AD & de la partie AE (*c*); le parallelogramme EFHG eſt le rectangle de la même ligne AD & de la partie EF (*c*), & le parallelogramme FBCH eſt le rectangle de la même ligne AD & de la partie FB (*c*): or le rectangle ABCD qui eſt celui des lignes AB & AD (*c*), eſt la ſomme de tous ces rectangles (*n*); donc le rectangle des lignes AB & AD eſt égal à la ſomme des rectangles faits de la ligne AD, & de chacune des parties AE, EF, & FB de la ligne AB; donc C. Q. F. D.

N. 175. N. 127. N. 141. N. 72.

PROPOSITION II.

THEOREME.

177. *Si une ligne droite est divisée en plusieurs parties, le quarré de cette ligne sera égal à la somme des rectangles faits de cette même ligne, & de chacune de ces parties.*

Fig. 6. LE quarré de la ligne AB * qui est divisée, par exemple en trois parties AE, EF & FB, est égal à la somme des rectangles faits l'un de cette ligne AB & de sa partie AE, un autre de cette même ligne AB & de sa partie EF, & un autre enfin de cette même ligne AB & de sa partie FB.

Const. Décrivés un quarré ABCD sur la
N. 166. ligne AB (*n*) : par chaque point de division E & F de cette ligne, tirés les paralleles EG & FH au côté AD de ce
N. 130. quarré (*n*).

Démonst. On démontre de la même maniere que dans la proposition précédente, que chacun des parallelogrammes AEGD, EFHG, & FBCH est rectangle ; & que les lignes EG & FH sont égales chacune à la la ligne AD, & par conséquent à la ligne AB, puisque les lignes AD & AB sont égales entr'elles (c). Ainsi le parallelogramme AEGD est le rectangle de la ligne AB & de sa partie AE (c), le parallelogramme EFHG est le rectangle de la même ligne AB & de sa partie EF (c), & le parallelogramme FBCH est le rectangle de la même ligne AB & de sa partie FB (c). Or le quarré ABCD qui est le quarré de la ligne AB (c), est la sommé de tous ces rectangles (n); donc le quarré de N. 72. la ligne AB est égal à la somme des rectangles faits de cette ligne AB, & de chacune des parties AE, EF & FB de cette même ligne; donc C. Q. F. D.

PROPOSITION III.

THEOREME.

178. *Si une ligne droite est divisée en deux parties, le rectangle de cette ligne & de l'une de ces parties, sera égal à la somme du quarré de cette partie, & du rectangle des deux parties de cette ligne.*

LE rectangle de la ligne AB qui est divisée en deux parties AE & EB, & Fig. 21 de l'une des parties de cette ligne, par exemple de sa partie AE, est égal à la somme du quarré de cette partie AE, & du rectangle des deux parties AE & EB de cette ligne.

Const. Faites un rectangle ABCD dont la ligne AB soit l'un des côtés, & dont l'autre côté soit une ligne AD égale à la partie AE de cette ligne AB : par le point de division E de la ligne AB, tirés la pa-
N. 130. rallele EF à la ligne AD (*n*).

Démonst. On démontre de la même maniere que dans la premiere Proposition de ce Livre, que chacun des parallelogrammes AEFD, & EBCF est rectangle ; & que la ligne EF est égale à la ligne AD, & par conséquent à la partie AE de la ligne AB, puisque la ligne AD & cette partie AE sont égales entr'elles (*c*). Ainsi le parallelogramme AEFD est le quarré de la
N. 175. partie AE (*n*), & le parallelogramme EBCF est le rectangle des parties AE & EB : or le rectangle ABCD, qui est celui de la ligne AB & de sa partie AE (*c*), est la somme du quarré AEFD, & du rectangle
N. 72. EBCF (*n*) ; donc le rectangle de la ligne AB & de sa partie AE est égal à la somme du quarré de cette partie AE, & du rectangle des deux parties AE & EB de cette même ligne AB ; donc C.Q.F.D.

PROPOSITION IV.

THEOREME.

179. *Si une ligne droite est divisée en deux parties, la somme des quarrés de chacune de ces parties, & de deux rectangles faits chacun de ces mêmes parties, sera égale au quarré de cette ligne.*

SI la ligne AB * est divisée en deux parties AE & EB, la somme des quarrés de chacune de ces parties AE & EB, & de deux rectangles faits chacun de ces mêmes parties, sera égale au quarré de cette ligne. Fig. 8.

Const. Décrivés un quarré ABCD, sur la ligne AB (*n*) : tirés la diagonale AC N. 166. de ce quarré : par le point de division E de la ligne AB, tirés la parallele EF à la ligne AD (*n*) : par le point G auquel cet- N. 130. te parallele EF rencontre la diagonale AC, tirés la parallele HI à la ligne AB (*n*). N. 130.

Démonst. Les quadrilateres AEGH, EBIG, GICF & HGFD sont des parallelogrammes (*n*), puisqu'ils ont chacun N. 57.

leurs côtés opposés paralleles(*c*); ainsi puisqu'ils ont aussi chacun un angle commun avec le quarré ABCD, ils sont rectangles
N. 175. (*n*); & par conséquent si quelques-uns de ces quadrilateres ont leur longueur égale à leur largeur, ceux dont la longueur sera
N. 175. égale à la largeur, seront des quarrés (*n*). Or la longueur du quadrilatere AEGH est égale à sa largeur; car puisque le parallelogramme ABCD est un quarré (*c*), les côtés BC & BA du triangle ABC, sont égaux entr'eux, & par conséquent l'angle BAC, ou l'angle EAG du triangle AEG,
N. 83. est égal à l'angle BCA (*n*): & puisque les lignes EG & BC sont paralleles (*c*), elles forment avec la diagonale AC l'angle extérieur EGA, qui est aussi un des angles du triangle AEG, égal à l'angle intérieur
N. 127. BCA qui lui est opposé (*n*). Or puisque les angles EAG & EGA du triangle AEG sont égaux chacun au même angle BCA, ils le sont entr'eux; donc les côtés AE & EG de ce triangle, qui sont l'un la longueur du quadrilatere AEGH & l'autre sa
N. 85. largeur, sont aussi égaux entr'eux (*n*); & par conséquent ce quadrilatere est un quarré. On démontre aussi de la même maniere, en comparant l'angle IGC à l'angle BAC, que la longueur GI du quadrilatere GICF est égale à sa largeur IC; &

par conséquent ce quadrilatere est aussi un quarré. Ainsi puisque le quadrilatere AEGH est un quarré (*d*), & que la partie AE de la ligne AB, est un de ses côtés, ce quadrilatere est le quarré de cette partie : puisque le quadrilatere GIGF est aussi un quarré (*d*), & que la ligne GI, côté de ce quadrilatere & la partie EB de la ligne AB, sont côtés opposés du parallelogramme EBIG, ce quadrilatere est le quarré de cette partie EB (*n*) : puisque le quadrila- N. 141.
tere EBIG est rectangle (*d*), que la partie EB est sa longueur, & que sa largeur EG est égale à la partie AE (*d*), ce quadrilatere est le rectangle des parties AE & EB: enfin puisque le quadrilatere HGFD est rectangle (*d*), que sa longueur HG est égale à la partie AE (*d*), & que sa largeur FG est égale à la ligne GI (*d*) qui l'est à la partie EB (*d*), ce quadrilatere est aussi le rectangle des parties AE & EB. Or le quarré ABCD qui est celui de la ligne AB (*c*), est la somme de ces deux quarrés & de ces deux rectangles (*n*); donc la N. 72.
somme des quarrés de chacune des parties AE & EB de la ligne AB, & de deux rectangles faits chacun de ces mêmes parties, est égale au quarré de cette ligne ; donc C. Q. F. D.

COROLLAIRE I.

180. Il ſuit de ce Théorême, que *le quarré d'une ligne eſt quadruple de celui de la moitié de cette ligne.*

Fig. 9. Le quarré de la ligne AB * eſt quadruple de celui de la moitié de cette ligne.

Conſt. Diviſés la ligne AB en deux par-
N. 91. ties AC & CB égales entr'elles (*n*).

Démonſt. Puiſque les parties AC & CB ſont égales entr'elles (*c*), leur rectangle
N. 175. eſt le quarré de la partie AC (*n*), & le quarré de cette partie eſt égal à celui de la partie CB; ainſi la ſomme des quarrés de ces parties AC & CB & de deux rectangles faits chacun de ces deux parties, eſt égale à quatre fois le quarré de la partie AC : or cette ſomme eſt auſſi égale au
N. 179. quarré de la ligne AB (*n*), puiſque cette ligne eſt diviſée en ces deux parties AC & CB; donc le quarré de la ligne AB eſt égal à quatre fois le quarré de la partie AC qui eſt la moitié de cette ligne (*c*); & par conſéquent le quarré de la ligne AB eſt quadruple de celui de ſa moitié AC; donc C. Q. F. D.

COROLLAIRE II.

181. Il ſuit de la démonſtration de ce Théorême, qu'*un parallelogramme qui a*

un angle commun avec un quarré, & dont la diagonale est une partie de celle de ce quarré, est un quarre.

Le parallelogramme AEGH * qui a l'angle HAE commun avec le quarré ABCD, & dont la diagonale AG est une partie de la diagonale AC de ce quarré, est un quarré. Fig. 82

Démonst. Le parallelogramme AEGH est rectangle (*n*), puisqu'il a un angle commun avec le quarré ABCD (*h*); & sa longueur AE est égale à sa largeur EG (*n*), puisque le quadrilatere ABCD étant un quarré (*h*), & la ligne EG étant parallele à la ligne BC (*h*), les angles AGE & EAG du triangle AEG sont égaux entr'eux (*d*); donc ce parallelogramme est un quarré (*n*); donc C.Q.F.D.

N. 175. N. 85. N. 175.

PROPOSITION V.

THEOREME.

182. *Si une ligne droite est divisée en deux parties, la somme du rectangle de ces deux parties, & du quarré de la moitié de leur difference, sera égale au quarré de la moitié de cette ligne.*

Fig. 10. SI la ligne AB * est divisée en deux parties AE & EB, la somme du rectangle de ces deux parties AE & EB, & du quarré de la moitié de leur différence, sera égale au quarré de la moitié de cette ligne.

Const. Divisés la ligne AB en deux par-
N. 91. ties AK & KB égales entr'elles (*n*) : décrivés un quarré KBCD sur la moitié KB
N. 166. de cette ligne (*n*) : tirés la diagonale DB de ce quarré : par le point de division E de la ligne AB, tirés la parallele EF à la li-
N. 130. gne KD (*n*) : par le point G auquel cette parallele EF rencontre la diagonale DB,
N. 130. tirés la parallele HL à la ligne AB : enfin par l'extrémité A de cette ligne, tirés la li-
N. 130. gne AH parallele à la ligne KD (*n*), & qui rencontre en un point H la parallele HL prolongée s'il est nécessaire.

Démonst.

Démonst. Les quadrilateres AEGH, AKIH, KBLI, KEGI, EBLG, GLCF, & IGFD, sont des parallelogrammes, puisqu'ils ont chacun leurs côtés opposés paralleles (*c*) ; par conséquent les quadrilateres EBLG & IGFD sont des quarrés (*n*), puisqu'ils ont chacun un an- N. 181.
gle commun avec le quarré KBCD, & que les diagonales BG du premier, & GD du dernier sont chacune une partie de la diagonale de ce quarré (*c*) : les quadrilateres AKIH & KBLI sont égaux entr'eux (*n*), puisqu'ils ont des bases AK & KB N. 148.
égales entr'elles (*c*), & qu'ils sont renfermés entre les mêmes paralleles AB & HL (*c*) : les quadrilateres KEGI & GLCF sont aussi égaux entr'eux (*n*), puisqu'ils sont les N. 161.
complémens du parallelogramme KBCD (*c*) : le quadrilatere AEGH est réctangle (*n*), puisque les lignes KD & AH qui sont N. 175.
paralleles (*c*), forment avec la ligne AB l'angle extérieur DKB, qui est un angle du quarré KBCD, égal à l'angle intérieur HAE qui est opposé à cet angle DKB (*n*) : N. 127.
la ligne KE est la moitié de la différence des parties AE & EB de la ligne AB, puisque la ligne AK est la moitié de cette ligne (*c*) : & enfin les lignes KE & IG sont égales entr'elles (*n*), puisqu'elles sont côtés op- N. 141.
posés du parallelogramme KEGI. Ainsi le

quadrilatere IGFD eſt le quarré de la moitié de la différence des parties AE & EB, puiſque ce quadrilatere eſt un quarré (*d*), que l'un de ſes côtés IG eſt égal à la ligne KE (*d*), & que cette ligne KE eſt la moitié de la différence de ces parties: le quadrilatere AEGH eſt le rectangle des parties AE & EB, puiſque ce quadrilatere eſt rectangle (*d*), que la partie AE eſt l'un de ſes côtés, & qu'il a un autre côté EG égal à la partie EB (*d*): & enfin la ſomme des quadrilateres AKIH & KEGI, c'eſt-à-dire
N. 72. le rectangle AEGH (*n*), eſt égale à celle des quadrilateres KBLI & GLCF, c'eſt-à-
N. 72. dire au Gnomon GIKBCF (*n*), puiſque les quadrilateres AKIH & KBLI ſont égaux entr'eux (*d*), & qne les quadrilateres KEGI & GLCF le ſont auſſi (*d*). Or le quarré KBCD qui eſt celui de la moitié KB de la ligne AB (*c*), eſt la ſomme du Gnomon
N. 72. GIKBCF & du quarré IGFD (*n*); donc il eſt égal à la ſomme du rectangle AEGH, & du quarré IGFD; & par conſéquent la ſomme du rectangle des parties AE & EB de la ligne AB, & du quarré de la moitié KE de leur difference, eſt égale au quarré de la moitié KB de cette ligne; donc C. Q. F. D.

USAGE.

183. *On peut se servir de cette Proposition de la maniere suivante, pour resoudre ce Problême.*

Un rectangle ABCD a 112 pieds de surface & 44 pieds de circonférence : quel est le nombre de pieds que contient la longueur AB de ce rectangle, & celui que contient sa largeur BC ?* Fig. 113

On considere la longueur AB de ce rectangle & sa largeur BC comme si elles étoient deux parties AB & BE d'une ligne droite ABE. Ainsi puisque la ligne ABE est divisée en deux parties, le quarré de la moitié de cette ligne est égal à la somme du rectangle ABCD de ces deux parties, & du quarré de la moitié de leur différence (n) ; *donc si de* 121 *pieds, quarré de la moitié de cette ligne, puisque la circonférence entiere du rectangle ABCD est de* N. 182. 44 *pieds* (h), *on retranche* 112 *pieds, surface de ce rectangle* (h), *le reste* 9 *pieds sera le quarré de la moitié de la différence de ces deux parties AB & BE, c'est-à-dire des côtés AB & BC du rectangle ABCD, & par conséquent la moitié de leur différence sera de* 3 *pieds. Or puisque la moitié de la somme des côtés AB & BC est* 11 *pieds* (h), *& que la moitié de leur différence est* 3 *pieds, le plus grand* *côté AB est de 14 pieds, & le moins grand BC est de 8 pieds; donc C. Q. F. F.*

PROPOSITION VI.

THEOREME.

184. *Si une ligne droite est divisée en deux parties, la somme du Rectangle de cette Ligne & de l'une de ces parties, & du Quarré de la moitié de l'autre, sera égale au Quarré d'une partie de cette même Ligne, qui seroit composée de cette premiere partie, & de la moitié de cette autre partie.*

Fig. 12. SI la ligne AB * est divisée en deux parties AE & EB, la somme du rectangle de cette ligne & de l'une de ces parties, par exemple EB, & du quarré de la moitié de l'autre partie AE, sera égale au quarré d'une partie de cette même ligne, qui seroit composée de cette premiere partie EB & de la moitié de cette autre partie AE.

Const. Divisés la partie AE en deux par-
N. 91. ties AK & KE égales entr'elles (*n*) : décrivés un quarré KBCD sur la partie KB de
N. 166. la ligne AB (*n*) : tirés la diagonale DB de ce quarré : par le point de division E de *la*

ligne AB tirés la parallele EF à la ligne KD (*n*) : par le point G auquel cette parallele EF rencontre la diagonale DB, tirés la parallele HL à la ligne AB (*n*) : enfin par l'extrémité A de cette ligne, tirés la ligne AH parallele à la ligne KD (*n*), & qui rencontre en un point H la parallele HL prolongée s'il est nécessaire. N. 130. N. 130. N. 130.

Démonst. Les quadrilateres ABLH, AKIH, KEGI, EBLG, GLCF, & IGFD sont des parallelogrammes, puisqu'ils ont chacun leurs côtés opposés paralleles (*c*); par conséquent les quadrilateres EBLG & IGFD sont des quarrés (*n*), puisqu'ils ont chacun un angle commun avec le quarré KBCD, & que les diagonales BG du premier, & GD du dernier, sont chacune une partie de la diagonale de ce quarré (*c*) : les quadrilateres AKIH & KEGI sont égaux entr'eux (*n*), puisqu'ils ont des bases AK & KE égales entr'elles (*c*), & qu'ils sont renfermés entre les mêmes paralleles AB & HL (*c*) : les quadrilateres KEGI & GLCF sont aussi égaux entr'eux (*n*), puisqu'ils sont les complémens du parallelogramme KBCD (*c*) : le quadrilatere ABLH est rectangle (*n*), puisqu'il a un angle commun avec le quarré KBCD : & enfin les lignes IG & KE sont égales entr'elles (*n*), puisqu'elles sont côtés op- N. 181. N. 148. N. 161. N. 175. N. 141.

posés du parallelogramme KEGI. Ainsi le quadrilatere IGFD est le quarré de la moitié de la partie AE, puisque ce quadrilatere est un quarré (*d*), que l'un de ses côtés IG est égal à la ligne KE (*d*), & que cette ligne est la moitié de cette partie AE (*c*) : le quadrilatere ABLH est le rectangle de la ligne AB & de la partie EB, puisque ce quadrilatere est rectangle (*d*), que cette ligne AB est l'un de ses côtés (*c*), & qu'il a un autre côté BL égal à cette partie EB (*d*) : & enfin la somme des quadrilateres AKIH & KBLI, c'est-à-dire le rec-
N. 72. tangle ABLH (*n*), est égale à celle des quadrilateres GLCF & KBLI, c'est-à-
N. 72. dire au Gnomon GIKBCF (*n*), puisque les quadrilateres AKIH & GLCF qui sont égaux chacun au même quadrilatere KEGI (*d*), le sont entr'eux. Or le quarré KBCD qui est celui de la partie KB de la ligne AB (*c*), est la somme du Gnomon
N. 72. GIKBCF, & du quarré IGFD (*n*); donc il est égal à la somme du rectangle ABLH & du quarré IGFD; & par conséquent la somme du rectangle de la ligne AB & de sa partie EB, & du quarré de la moitié KE de son autre partie AE, est égale au quarré de la partie KB qui est composée de cette premiere partie EB & de la moitié KE de l'autre partie AE; donc C. Q. F. D.

USAGE.

185. *On peut se servir de cette Proposition de la maniere suivante, pour résoudre ce Problême.*

*Un rectangle ABCD * a 216 pieds de surface, & la différence de sa largeur à sa longueur est de 6 pieds : quel est le nombre de pieds que contient la longueur de ce rectangle, & celui que contient sa largeur.* Fig. 133.

On considere la longueur AB de ce rectangle ABCD comme si elle étoit divisée en deux parties, dont l'une EB seroit égale à sa largeur BC, & dont l'autre AE seroit par consequent la différence de sa largeur à sa longueur. Ainsi puisque la ligne AB est divisée en deux parties AE & EB, la somme du rectangle ABCD de cette ligne, & de sa partie EB, & du quarré de la moitié de son autre partie AE, est égale au quarré d'une partie de cette même ligne qui seroit composée de cette premiere partie EB & de la moitié de cette autre partie AE (n), *c'est-à-dire du côté BC du rectangle ABCD* (c), *& de la moitié de la différence de son coté BC à son côté AB ; donc si à 216 pieds, surface de ce rectangle* (h) *on ajoute 9 pieds, quarré de la moitié de cette difference* (h), *la somme 225* N. 184.

pieds sera le quarré d'une partie de la ligne AB, composée du côté BC & de la moitié de sa difference au côté AB; & par conséquent cette partie sera de 15 pieds. Or puisque cette partie est de 15 pieds, qu'elle est composée du côté BC & de la moitié de sa difference au côté AB, & que la moitié de cette difference est de 3 pieds (h), *le côté BC est de 12 pieds; & par consequent puisque la difference de ce côté au côté AB est 6 pieds* (h), *le côté AB est de 18 pieds; donc C. Q. F. F.*

PROPOSITION VII.

THEOREME.

186. *Si une ligne droite est divisée en deux parties, la somme du Quarré de cette Ligne, & de celui de l'une de ces parties, sera égale à celle de deux Rectangles faits chacun de cette même Ligne & de cette même partie, & du Quarré de l'autre partie.*

Fig. 14. LA somme du quarré de la ligne AB * qui est divisée en deux parties AE & EB, & de celui de l'une de ces parties, par exemple AE, est égale à celle de deux rectangles

rectangles faits chacun de cette même ligne AB & de cette partie AE, & du quarré de l'autre partie EB.

Conſt. Décrivés un quarré ABCD ſur la ligne AB (*n*) : tirés la diagonale BD de ce quarré : par le point de diviſion E de la ligne AB, tirés la parallele EF à la ligne AD (*n*) : par le point G auquel cette parallele coupe la diagonale BD, tirés la parallele HI à la ligne AB (*n*) : prolongés la parallele EF vers L jusqu'à ce que ſon prolongement EL ſoit égal à la partie AE de la ligne AB : par le point L tirés la ligne LK parallele à cette ligne AB, & qui rencontre en un point K la ligne AD prolongée. N. 166. N. 130. N. 130.

Dém. Les quadrilateres KLEA, ABIH, AEGH, EBIG, HGFD, KLGH, & HICD ſont des parallelogrammes, puiſqu'ils ont chacun leurs côtés oppoſés paralleles (*c*) ; par conſéquent les quadrilateres EBIG & HGFD ſont des quarrés (*n*), puiſqu'ils ont chacun un angle commun avec le quarré ABCD, & que les diagonales BG du premier & GD du dernier ſont chacune une partie de la diagonale de ce quarré (*c*) : le quadrilatere KLEA eſt auſſi un quarré (*n*), puiſqu'il a le côté EL égal au côté AE (*c*), & que l'angle AEL de ce quadrilatere & l'angle GEB du quarré EBIG qui ſont oppoſés au ſommet, ſont égaux N. 181. N. 175.

N. 98. entr'eux (*n*) : les quadrilateres HICD & N. 175. KLGH sont rectangles (*n*), puisque l'un a l'angle HDC commun avec le quarré AB-CD, & que l'autre a l'angle K commun avec le quarré KLEA : les lignes AE & N. 141. HG sont égales entr'elles (*n*), puisqu'elles sont côtés opposés du parallelogramme AEGH : & enfin les lignes AB & HI sont N. 141. aussi égales entr'elles (*n*), puisqu'elles sont côtés opposés du parallelogramme ABIH. Ainsi le quadrilatere KLEA est le quarré de la partie AE de la ligne AB, puisque ce quadrilatere est un quarré (*d*), & que cette partie est l'un de ses côtés (*c*) : le quadrilatere EBIG est le quarré de la partie EB, puisque ce quadrilatere est aussi un quarré (*d*), & que cette partie est l'un de ses côtés: le quadrilatere HICD est le rectangle de la ligne AB & de la partie AE, puisque ce quadrilatere est rectangle (*d*), qu'il a un côté HI égal à cette ligne AB (*d*), & un autre côté HD égal à la ligne HG (*d*), qui est égale à cette partie AE (*d*) : enfin le quadrilatere KLGH est aussi le rectangle de la ligne AB & de la partie AE, puisque ce quadrilatere est aussi rectangle (*d*), qu'il a aussi un côté HG égal à cette partie AE (*d*), & un autre côté GL dont l'une des parties EG est égale à l'une des parties EB de la ligne AB (*d*), & dont l'autre partie

EL est égale à l'autre partie AE de cette même ligne (*c*). Or la figure KLEBCD qui est la somme du quarré ABCD, & du quarré KLEA (*n*), est aussi celle des rectangles HICD & KLGH & du quarré EBIG (*n*); donc la somme du quarré ABCD qui est celui de la ligne AB (*c*), & du quarré KLEA, est égale à celle des rectangles HICD & KLGH, & du quarré EBIG; & par conséquent la somme du quarré de la ligne AB & de celui de la partie AE, est égale à celle de deux rectangles faits chacun de cette même ligne AB & de cette partie AE, & du quarré de l'autre partie EB; donc C.Q.F.D.

N. 72.
N. 72.

USAGE.

187. *On peut se servir de cette Proposition de la maniere suivante, pour résoudre ce Problême.*

*Un rectangle ABCD * a 432 pieds de surface, & sa diagonale AC est de 30 pieds: quel est le nombre de pieds que contient la longueur de ce rectangle, & celui que contient sa largeur?* Fig. 15.

On considere la longueur AB de ce rectangle ABCD comme si elle étoit divisee en deux parties, dont l'une EB seroit égale à sa largeur BC, & dont l'autre AE seroit par conséquent la différence de sa largeur à

ſa longueur. Ainſi puiſque la ligne AB eſt diviſée en deux parties AE & EB, la ſomme du quarré de cette ligne & de celui de la partie EB, ou du côté BC, ſera égale à celle de deux rectangles faits chacun de cette même ligne AB & de cette partie EB,
N. 186. *& du quarré de la partie AE* (n), *c'eſt-à-dire à la ſomme de deux rectangles tels chacun que le rectangle ABCD, & du quarré de la partie AE; donc ſi de 900 pieds, quarré de la diagonale AC* (h), *qui eſt égal à la ſomme de celui de la ligne AB & de*
N. 168. *celui du côté BC* (h), *puiſque le triangle ABC eſt rectangle en C* (h), *on retranche 864 pieds, double de la ſurface du rectangle ABCD* (h), *le reſte 36 pieds ſera le quarré de la partie AE qui eſt la différence de la largeur BC de ce rectangle à ſa longueur AB; & par conſéquent cette différence ſera de 6 pieds. Or puiſque la ſurface du rectangle ABCD eſt de 432 pieds* (h), *& que la différence de ſa largeur à ſa longueur eſt de 6 pieds* (d), *on trouvera*
N. 185. (n) *que cette longueur contient 24 pieds, & que cette largeur en contient 12; donc C.Q.F.F.*

PROPOSITION VIII.

THEOREME.

188. *Si une ligne droite est divisée en deux parties, la somme du Quarré de la différence de ces deux parties, & de quatre Rectangles faits chacun de ces deux mêmes parties, sera égale au Quarré de cette ligne.*

SI la ligne droite AB * est divisée en deux parties AC & CB, la somme du quarré de la différence de ces deux parties, & de quatre rectangles faits chacun de ces mêmes parties AC & CB, sera égale au quarré de cette ligne AB. Fig. 16.

Démonst. Puisque la ligne AB est divisée en deux parties AC & CB, le quarré de sa moitié est égal à la somme du rectangle de ces deux parties, & du quarré de la moitié de leur différence (*n*). Or le quarré de la ligne AB est quadruple de celui de la moitié de cette ligne (*n*), donc il est égal à la somme du quadruple du rectangle des parties AC & CB, & du quadruple de la moitié de leur différence; & par conséquent puisque le quadruple du rectangle des parties

N. 179.

N. 180.

AC & CB est égal à la somme de quatre rectangles faits chacun de ces deux parties, & que le quadruple du quarré de la moitié de la différence de ces parties, est égal au
N. 180. quarré de leur différence (n), le quarré de la ligne AB est égal à la somme du quarré de la différence des parties AC & CB, & de quatre rectangles faits chacun de ces mêmes parties; donc C. Q. F. D.

PROPOSITION IX.

THEOREME.

189. *Si une ligne droite est divisée en deux parties, la somme des Quarrés de chacune de ces parties sera double de la somme du Quarré de la moitié de cette ligne, & de celui de la moitié de la différence de ces mêmes parties.*

Fig. 17. SI la ligne droite AB * est divisée en deux parties AC & CB, la somme des quarrés de chacune de ces parties AC & CB, sera double de celle du quarré de la moitié de cette ligne AB, & de celui de la moitié de la différence de ces mêmes parties.

Const. Divisés la ligne AB en deux par-

ties AD & DB égales entr'elles (*n*) : du N. 91.
point D élevés une perpendiculaire DE à
cette ligne : faites cette perpendiculaire N. 98.
égale à la partie AD : du point E tirés aux
points A & B les lignes EA & EB : par le
point de division C de la ligne AB tirés la
ligne CF parallele à la perpendiculaire DE
(*n*), & qui rencontre en un point F la li- N. 130.
gne EB : par ce point F tirés la parallele
GF à la ligne AB (*n*) : du point A tirés à N. 130.
ce même point F la ligne AF.

Démonst. L'angle AED du triangle
ADE est la moitié d'un angle droit (*n*), N. 136.
puisque les côtés AD & DE de ce triangle sont égaux entr'eux (*c*), & que l'angle
ADE qu'ils forment est droit (*c*) ; & par
des raisons pareilles, les angles BED &
DBE du triangle BDE sont aussi chacun
la moitié d'un angle droit. L'angle EGF
du triangle EGF est droit (*n*), puisque cet N. 127.
angle est extérieur, que l'angle intérieur
EDB qui lui est opposé est droit (*c*), & que
les lignes GF & AB qui forment ces angles
avec la ligne ED, sont paralleles (*c*) ; &
l'on démontre de la même maniere que
l'angle FCB du triangle FCB est aussi un
angle droit. Enfin la ligne DC est la moitié de la différence des parties AC & CB
de la ligne AB, puisque la ligne AD est la
moitié de cette ligne ; & les lignes DC &

N. 141. GF sont égales entr'elles (*n*), puisqu'elles sont côtés opposés du quadrilatere GFCD qui est un parallelogramme (*c*). Ainsi l'angle AEF du triangle AEF est droit, puisqu'il est la somme des angles AED & BED qui sont chacun la moitié d'un angle droit (*d*) : les côtés EG & GF du triangle EGF
N. 85. sont égaux entr'eux (*n*), puisque l'angle EGF de ce triangle étant droit (*d*), & l'angle BED étant la moitié d'un angle droit (*d*), l'angle EFG est aussi la moitié d'un
N. 133. angle droit (*n*) ; & par des raisons pareilles les côtés CF & CB du triangle FCB sont aussi égaux entr'eux : enfin le quarré du côté AE, qui est égal à la somme des quarrés
N. 168. de chacun des côtés AD & DE (*n*), puisque le triangle ADE est rectangle en D (*c*), est double du quarré du côté AD, puisque ces côtés AD & DE sont égaux entr'eux (*c*) ; & par une démonstration pareille, le quarré du côté EF du triangle EGF est double de celui du côté GF, c'est-à-dire du quarré de la ligne DC, puisque cette ligne est égale à ce côté (*d*). Or puisque le triangle ACF est rectangle en C (*d*), la somme du quarré de la partie AC & de celui du côté CF, c'est-à-dire de la partie CB qui est égale à ce côté (*d*), est égale au quarré
N. 168. du côté AF (*n*) ; & puisque le triangle AEF est aussi rectangle en E (*d*), le quarré de ce

même côté AF est aussi égal à la somme du quarré du côté AE & de celui du côté EF (n) ; donc la somme des quarrés de chacune des parties AC & CB est égale à la somme du quarré du côté AE, & de celui du côté EF ; & par conséquent puisque le quarré du côté AE est double de celui de la moitié AD de la ligne AB (d), & que le quarré du côté EF est aussi double de celui de la moitié DC de la différence des parties AC & CB (d), la somme des quarrés de chacune des parties AC & CB de la ligne AB, est double de la somme du quarré de la moitié AD de cette ligne, & de celui de la moitié DC de la différence de ces parties AC & CB ; donc C. Q. F. D.

N. 168.

USAGE.

190. *On peut se servir de cette Proposition de la maniere suivante, pour résoudre ce Problême.*

*Un rectangle ABCD * a 70 pieds de circonference, & sa diagonale est de 25 pieds : quel est le nombre de pieds que contient la longueur de ce rectangle, & celui que contient sa largeur ?*

Fig. 18.

On considere la longueur AB & la largeur BC de ce rectangle ABCD comme si elles étoient deux parties AB & BE d'une même ligne droite ABE. Ainsi puisque la ligne ABE est divisée en deux parties, la

somme des quarrés de chacune de ces parties AB & BE est double de la somme du quarré de la moitié de cette ligne & de celui de la moitié de la différence de ces mêmes
N. 189. *mes parties* (n) ; *& puisque le triangle ABC est rectangle en B* (h), *& que son côté BC est égal à la partie BE* (c), *le quarré de la diagonale AC est égal à la somme des quarrés de chacune de ces parties AB & BE*
N. 168. (n) ; *donc si l'on prend la moitié de 625 pieds, quarré de cette diagonale AC* (n), *& si de cette moitié on retranche 306 $\frac{1}{4}$ pieds, quarré de la moitié de la ligne ABE, puisque la circonférence du rectangle ABCD est de 70 pieds* (h), *le reste 6 $\frac{1}{4}$ pieds sera le quarré de la moitié de la différence des parties AB & BE, c'est-à-dire des côtés AB & BC du rectangle ABCD ; & par conséquent la moitié de cette différence sera de 2 $\frac{1}{2}$ pieds. Or puisque la moitié de la somme des côtés AB & BC est 17 $\frac{1}{2}$ pieds, & que la moitié de leur différence est 2 $\frac{1}{2}$ pieds, le plus grand côté AB est de 20 pieds, & le moins grand BC est de 15 pieds ; donc C. Q. F. F.*

PROPOSITION X.

THEOREME.

191. *Si une ligne droite eſt diviſée en deux parties, la ſomme du Quarré de cette ligne, & de celui de l'une de ces parties, ſera double de la ſomme du quarré de la moitié de l'autre partie de cette ligne, & de celui d'une partie de cette même ligne, qui ſeroit compoſée de cette premiere partie, & de la moitié de cette autre partie.*

LA ſomme du quarré de la ligne droite AB * qui eſt diviſée en deux parties AC & CB, & de celui de l'une de ces parties, par exemple CB, eſt double de la ſomme du quarré de la moitié de l'autre partie AC, & de celui d'une partie de cette même ligne AB, qui feroit compoſée de cette premiere partie CB, & de la moitié de cette autre partie AC. Fig. 19.

Conſt. Diviſés la partie AC en deux parties AD & DC égales entr'elles (*n*) : du point D élevés une perpendiculaire DE à cette ligne (*n*) : faites cette perpendiculaire égale à la partie AD : par le point B ti- N. 91. N. 92.

rés une parallele indéfinie FBG à la ligne
N. 130. DE (*n*) : par le point E tirés une ligne EF parallele à la ligne AB & qui rencontre en
N. 130. un point F la parallele FBG (*n*) : du même point E tirés par le point C la ligne ECG qui rencontre aussi en un point G la parallele FBG : du point A tirés aux points E & G les lignes AE & AG.

Démonst. L'angle AED du triangle
N. 136. ADE est la moitié d'un angle droit (*n*), puisque les côtés AD & DE de ce triangle sont égaux entr'eux (*c*), & que l'angle ADE qu'ils forment est droit (*c*) ; & par des raisons pareilles, l'angle CED du triangle CDE est aussi la moitié d'un angle droit.
N. 142. L'angle F du triangle EFG est droit (*n*), puisque cet angle & l'angle EDB sont des angles opposés du quadrilatere EFBD qui est un parallelogramme (*c*), & que l'un de ces angles, sçavoir l'angle EDB, est droit (*c*). L'angle ABG du triangle ABG est
N. 127. aussi droit (*n*), puisque cet angle & l'angle EDB sont des angles alternes, que les lignes ED & FBG qui les forment avec la ligne AB sont paralleles (*c*), & que l'un de ces angles, sçavoir l'angle EDB, est droit (*c*). Enfin la partie DCB de la ligne AB & la ligne EF sont égales entr'elles
N. 141. (*n*), puisqu'elles sont côtés opposés du quadrilatere EFBD qui est un parallelogram-

me (*c*). Ainſi l'angle AEG du triangle AEG
eſt droit, puiſqu'il eſt la ſomme des angles
AED & CED qui ſont chacun la moitié
d'un angle droit (*d*) : l'angle EGF du trian-
gle EFG eſt la moitié d'un angle droit (*n*), N. 127.
puiſque cet angle & l'angle CED ſont des
angles alternes, que les lignes ED & FBG
qui les forment avec la ligne EG ſont pa-
ralleles (*c*), & que l'un de ces angles, ſça-
voir l'angle CED, eſt la moitié d'un angle
droit (*d*); & les côtés EF & FBG de ce
même triangle ſont égaux entr'eux (*n*), puiſ- N. 85.
que l'angle F de ce triangle étant droit (*d*),
& l'angle EGF étant la moitié d'un angle
droit (*d*), l'angle FEG eſt auſſi la moitié
d'un angle droit (*n*); & par une démonſtra- N. 133
tion pareille, les côtés CB & BG du trian-
gle CBG ſont auſſi égaux entr'eux : enfin le
quarré du côté AE, qui eſt égal à la ſomme
des quarrés de chacun des côtés AD &
DE (*n*), puiſque le triangle ADE eſt rec- N. 162.
tangle en D (*c*) eſt double du quarré du cô-
té AD, puiſque ces côtés AD & DE ſont
égaux entr'eux (*c*); & par des raiſons pa-
reilles, le quarré du côté EG eſt double
de celui du côté EF, c'eſt-à-dire du quarré
de la partie DCB, puiſque cette partie eſt
égale à ce côté (*d*). Or puiſque le triangle
ABG eſt rectangle en B (*d*), la ſomme du
quarré de la ligne AB, & de celui du côté

BG, c'eſt-à-dire de la partie CB qui eſt égale à ce côté (*d*), eſt égale au quarré du côté
N. 168. AG (*n*); & puiſque le triangle AEG eſt auſſi rectangle en E (*d*), le quarré de ce même côté AG eſt auſſi égal à la ſomme du quarré du côté AE & de celui du côté EG
N. 168. (*n*); donc la ſomme du quarré de la ligne AB & de celui de la partie CB, eſt égale à la ſomme du quarré du côté AE & de celui du côté EG; & par conſéquent puiſque le quarré du côté AE eſt double de celui de la moitié AD de la partie AC (*d*), & que le quarré du côté EG eſt auſſi double (*d*) de celui de la partie DCB compoſée de la partie CB & de la moitié DC de cette autre partie AC, la ſomme du quarré de la ligne AB & de celui de la partie CB, eſt double de la ſomme du quarré de la moitié AD de l'autre partie AC, & de celui de la partie DCB qui eſt compoſée de cette premiere partie CB & de la moitié DC de cette autre partie AC; donc C. Q. F. D.

USAGE.

192. *On peut ſe ſervir de cette Propoſition de la maniere ſuivante, pour réſoudre ce Problême.*

La diagonale AC d'un rectangle AB-
Fig. 20. *CD * eſt de 35 pieds, & la difference de la largeur à la longueur de ce rectangle eſt*

de 7 pieds : quel est le nombre de pieds que contient cette longueur, & celui que contient cette largeur ?

On considere la longueur AB de ce rectangle ABCD comme si elle étoit divisée en deux parties, dont l'une EB seroit égale à sa largeur BC, & dont l'autre AE seroit par conséquent la différence de sa largeur à sa longueur. Ainsi puisque la ligne AB est divisée en deux parties AE & EB, la somme du quarré de cette ligne & de celui de sa partie EB, est double de la somme du quarré de la moitié de son autre partie AE & de celui d'une partie de cette même ligne, qui seroit composée de cette premiere partie EB & de la moitié de cette autre partie AE (n), *c'est-à-dire du côté BC du* N. 191.
rectangle ABCD (c), *& de la moitié de la différence du côté BC au côté AB ; & puisque le triangle ABC est rectangle en B* (h), *& que son côté BC est égal à la partie EB* (c), *le quarré de la diagonale AC est égal à la somme du quarré du côté AB & de celui de la partie EB* (n) *; donc si l'on prend* N. 168.
la moitié de 1225 pieds, quarré de la diagonale AC (h), *& si de cette moitié l'on retranche $12\frac{1}{4}$ pieds, quarré de la moitié de la différence du côté BC au côté AB* (h), *le reste $600\frac{1}{4}$ pieds sera le quarré d'une partie de la ligne AB, composée du côté BC*

& de la moitié de sa différence au côté AB, & par conséquent cette partie sera de 24$\frac{1}{2}$ pieds. Or puisque cette partie est de 24$\frac{1}{2}$ pieds, qu'elle est composée du côté BC & de la moitié de sa différence au côté AB, & que la moitié de cette différence est de 3$\frac{1}{2}$ pieds, le côté BC est de 21 pieds, & le côté AB est de 28 pieds; donc C. Q. F. F.

PROPOSITION XI.

PROBLEME.

193. *Diviser une ligne droite en deux parties, telles que le Rectangle de cette ligne & de la moins grande de ces parties, soit égal au Quarré de la plus grande.*

Fig. 21. IL faut diviser la ligne AB * en deux parties, telles que le rectangle de cette ligne & de la moins grande de ces parties, soit égal au quarré de la plus grande.

Const. Du point A élevés une perpendi-
N. 92. culaire AD à la ligne AB (*n*): faites cette perpendiculaire égale à cette ligne, & divisés-la en deux parties DE & EA égales en-
N. 91. tr'elles (*n*): prolongés la partie EA vers F, jusqu'à ce que la ligne EAF soit égale à

à la diſtance du point E au point B : diviſés la ligne AB en deux parties telles que l'une AH ſoit égale au prolongement AF de la partie EA. le rectangle de la ligne AB & de la partie HB ſera égal au quarré de la partie AH.

Pour la démonſtration : tirés par les points D & F les paralleles DC & FG à la ligne AB (*n*) : tirés auſſi par les points B & N. 130.
H les paralleles BC & GHI à la ligne AD (*n*) : du point E tirés au point B la ligne N. 130.
EB.

Démonſt. Les quadrilateres ABCD, FGID, FGHA & HBCI ſont des parallelogrammes, puiſqu'ils ont chacun leurs côtés oppoſés paralleles (*c*): ainſi le quadrilatere ABCD eſt le quarré de la ligne AB (*n*) ; puiſqu'il a un angle droit DAB (*c*), N. 175.
que ſa longueur AB & ſa largeur AD ſont égales entr'elles (*c*), & que la ligne AB eſt l'un de ſes côtés : le quadrilatere FGID eſt le rectangle de la ligne DF & de ſa partie AF (*n*), puiſqu'il a un angle D commun N. 175.
avec le quarré ABCD, que la ligne DF eſt ſa longueur, que ſa largeur FG & la partie AH qui ſont côtés oppoſés du parallelogramme FGHA, ſont égales entr'elles (*n*), N. 141.
& que les parties AH & AF le ſont auſſi (*c*) : le quadrilatere FGHA eſt le quarré de la partie AH (*n*), puiſqu'il a un angle F N. 175.

commun avec le rectangle FGID, que sa longueur AH & sa largeur AF sont égales entr'elles (c), & que la partie AH est l'un de ses côtés : enfin le quadrilatere HBCI est le rectangle de la ligne AB & de sa partie
N. 175. HB (n), puisqu'il a un angle B commun avec le quarré ABCD, que sa longueur CB & la ligne AB sont égales entr'elles (d), & que la partie HB est sa largeur. Or la somme du quarré ABCD de la ligne AB, & de celui de la partie EA, est égale au
N. 168. quarré de la ligne EB (n) ; puisque le triangle EAB est rectangle en A (c) ; le quarré de la ligne EB est égal à celui de la ligne EAF, puisque ces lignes sont égales entr'elles (c) ; & le quarré de la ligne EAF est égal à la somme du quarré de cette même partie EA, & du rectangle FGID de
N. 184. la ligne DF & de la partie AF (n), puisque la ligne EAF est une partie de la ligne DF, composée de sa partie AF & de la moitié EA de son autre partie DA (c) ; donc la somme du quarré ABCD & de celui de la partie EA, est égale à la somme du quarré de cette même partie EA & du rectangle
N. 62. FGID (n), & par conséquent si l'on retranche le quarré de EA de chacune de ces sommes, les restes qui sont le quarré ABCD & le rectangle FGID seront égaux en-
N. 64. tr'eux (n). Or puisque le Quarré ABCD

& le rectangle FGID sont égaux entr'eux, si l'on retranche de chacun le quadrilatere AHID qui leur est commun, les restes qui sont le rectangle HBCI de la ligne AB & de la partie HB, & le quarré FGHA de la partie AH, seront aussi égaux entr'eux (*n*); donc C. Q. F. F. N. 64.

PROPOSITION XII.

THEOREME.

194. *Le Quarré du côté opposé à l'angle obtus d'un Triangle obtus angle, est égal à la somme des Quarrés de chacun des autres côtés de ce Triangle, & de deux Rectangles faits chacun de l'un de ces autres côtés, & de son prolongement jusqu'au point auquel la perpendiculaire qui lui seroit abaissée du sommet de l'angle qui lui est opposé, le rencontreroit.*

LE quarré du côté AB du triangle ABC * obtus angle en C, est égal à la N. 22. somme des quarrés de chacun des autres côtés AC & CB de ce triangle, & de deux rectangles faits chacun de l'un de ces autres côtés, par exemple AC, & de son prolongement jusqu'au point auquel la perpendiculaire qui lui feroit abaiſſée du ſommet de l'angle B, le rencontreroit.

Conſt. Prolongés le côté AC vers D, & du point B abaiſſés-lui la perpendiculaire
N. 93. BD (*n*).

Démonſt. Le quarré de la ligne AD eſt égal à la ſomme des quarrés des parties AC & CD de cette ligne, & de deux rectangles
N. 179. faits chacun de ces mêmes parties (*n*), puiſque cette ligne eſt diviſée en ces deux parties au point C ; ainſi ſi l'on ajoute le quarré de DB à ce quarré & à cette ſomme, la ſomme du quarré de DB & de celui de AD ſera égale à celle des quarrés de AC, de CD & de DB, & de deux rectangles faits chacun du côté AC & de ſon prolongement
N. 63. CD (*n*). Or la ſomme du quarré de DB & de celui de AD eſt égale au quarré du
N. 168. côté AB (*n*), puiſque le triangle ADB eſt rectangle en D (*c*) ; & la ſomme du quarré de CD & de celui de DB eſt égale au quar-
N. 168. ré du côté CB (*n*) ; puiſque le triangle CDB eſt auſſi rectangle en D (*c*) ; donc le quarré du côté AB eſt égal à la ſomme du quarré du côté AC & de celui du côté CB, & de deux rectangles faits chacun du côté AC & de ſon prolongement CD ; donc C. Q. F. D.

USAGE.

195. *On peut se servir de cette Proposition de la maniere suivante, pour résoudre ce Problême.*

*Le côté AB d'un triangle obtus-angle ABC * est de 20 pieds, le côté CB de 13, & le côté AC de 11 : combien la perpendiculaire BD qui seroit abaissée du sommet de l'un des angles de ce triangle au prolongement de l'un des côtés qui forment l'angle obtus, contiendroit-elle de pieds ?* Fig. 22.

Le quarré du côté AB est égal à la somme des quarrés des côtés AC & CB & de deux rectangles faits chacun du côté AC, & de son prolongement CD (n); *donc si de* N. 194. *400 pieds, quarré du côté AB* (h), *on retranche 290 pieds, somme des quarrés des côtés AC & CB* (h), *le reste 110 pieds sera le double de la surface du rectangle du côté AC & du prolongement CD; & par consequent la surface de ce rectangle sera de 55 pieds. Or puisque la surface du rectangle de AC & de CD est de 55 pieds, & que AC est de 11 pieds* (h), *55 pieds sont le produit de CD multiplié par 11* (n); *& par consequent CD* N. 145. *est de 5 pieds. Ainsi puisque le prolongement CD est de 5 pieds* (d), *que le côté CB est de 13 pieds* (h), *& que le triangle CDB*

est rectangle en D (c) ; *si de 169 pieds, quarré du côté CB, on retranche 25 pieds, quarré du prolongement CD, le reste 144 pieds sera le quarré de la perpendiculaire*
N. 168. *BD* (n), *& par conséquent cette perpendiculaire est de 12 pieds ; donc C. Q. F. F.*

PROPOSITION XIII.

THEOREME.

196. *La somme du Quarré du côté opposé à l'un des angles aigus d'un Triangle acutangle, & de deux Rectangles faits chacun de l'un des autres côtés de ce Triangle, & de la partie de cet autre côté qui est comprise entre cet angle aigu & le point auquel la perpendiculaire qui seroit abaissée à ce même côté du sommet de l'angle qui lui est opposé, le rencontreroit, est égale à la somme des Quarrés de chacun des autres côtés de ce Triangle.*

Fig. 23. LA somme du quarré du côté AB * qui est opposé à un angle aigu C du triangle acutangle ABC, & de deux rectangles faits chacun de l'un des autres côtés de ce triangle, par exemple AC, & de la partie de cet autre côté AC qui est comprise entre cet angle aigu C, & le point auquel la

perpendiculaire qui feroit abaiſſée du ſommet de l'angle B à ce même côté, le rencontreroit, eſt égale à la ſomme des quarrés de chacun des autres côtés AC & CB de ce triangle.

Conſt. Du ſommet de l'angle B, abaiſſés une perpendiculaire BD au côté AC (*n*). N. 93.

Dém. La ſomme du quarré de la ligne AC & de celui de la partie DC eſt égale à la ſomme de deux rectangles faits chacun de cette même ligne AC & de cette même partie DC, & du quarré de l'autre partie AD (*n*), N. 186.
puiſque cette ligne eſt diviſée en ces deux parties au point D; ainſi ſi l'on ajoute le quarré de BD à chacune de ces ſommes, la ſomme des quarrés de AC, de DC & de BD ſera égale à celle de deux rectangles faits chacun de la ligne AC & de la partie DC, & des quarrés de AD & de BD (*n*). N. 63.
Or la ſomme des quarrés de DC & de BD eſt égale au quarré de CB (*n*), puiſque le N. 169.
triangle BDC eſt rectangle en D (*c*); & la ſomme des quarrés de AD & de BD eſt égale au quarré de AB (*n*), puiſque le triangle N. 168.
BDA eſt auſſi rectangle en D (*c*); donc la ſomme des quarrés des côtés AC & CB eſt égale à celle du quarré du côté AB & de deux rectangles faits chacun du côté AC & de ſa partie DC; donc C. Q. F. D.

SCHOLIE.

197. *Ce qui est dit dans ce Théorême du quarré du côté opposé à l'un des angles aigus d'un triangle acutangle, est aussi vrai du quarré opposé à l'un des angles aigus d'un triangle-rectangle, ou d'un triangle-obtus-angle; pourvu que l'on prenne pour l'un des côtés du Rectangle, celui qui est opposé à l'angle droit, s'il s'agit d'un triangle rectangle, & celui qui est opposé à l'angle obtus, s'il est question d'un triangle obtus-angle. La démonstration est la même que celle de ce Théorême.*

USAGE.

198. *On peut se servir de cette Proposition de la maniere suivante, pour résoudre ce Probléme.*

Le côté AB d'un triangle acutangle
Fig. 23. *ABC * est de 40 pieds, le côté CB de 30, & le côté AC de 50: combien la perpendiculaire BD qui seroit abaissée de l'angle B de ce triangle à son côté AC, contiendroit-elle de pieds?*

La somme des quarrés des côtés AC & CB de ce triangle est égale à celle du quarré du côté AB, & de deux rectangles faits
N. 196. *chacun du côté AC & de sa partie DC* (n); *donc si de 3400 pieds, somme des quarrés*

rés des côtés AC & CB (h), *on retranche* 1600 *pieds, quarré du côté AB* (h), *le reste* 1800 *pieds sera le double de la surface du rectangle fait du côté AC & de sa partie DC; & par consequent la surface de ce rectangle sera de* 900 *pieds. Or puisque la surface du rectangle de AC & de DC est de* 900 *pieds, & que AC est de* 50 *pieds* (h), 900 *est le produit de DC multiplié par* 50 (n); *& par conséquent* N. 145.
DC est de 18 *pieds. Ainsi puisque la partie DC est de* 18 *pieds* (d), *que le côté CB est de* 30 *pieds* (h), *& que le triangle BDC est rectangle en D* (c), *si de* 900 *pieds, quarré du côté CB, on retranche* 324 *pieds, quarré de la partie DC, le reste* 576 *pieds sera le quarré de la perpendiculaire BD* (n); *& par consequent cette perpendiculai-* N. 168.
re est de 24 *pieds; donc C. Q. F. F.*

SCHOLIE.

199. *L'usage de cette Proposition & celui de la précédente sont très-fréquens dans le Mesurage; parce qu'il est beaucoup plus facile dans la pratique de mesurer les trois côtés d'un triangle, que d'abaisser une perpendiculaire de l'un de ses angles à l'un de ses côtés.*

PROPOSITION XIV.

PROBLEME.

200. *Décrire un Quarré tel que sa surface soit égale à celle d'une figure rectiligne donnée.*

IL faut décrire un quarré tel que sa surface soit égale à celle d'une figure rectiligne A *. Fig. 24.

Const. Décrivés un parallelogramme rectangle BCDE dont la surface soit égale à
N. 163. celle de la figure rectiligne A (*n*) : prolongés l'un des côtés de ce rectangle, par exemple son côté BC, vers F, jusqu'à ce que son prolongement CF soit égal à l'autre côté CD : divisés la ligne BF en deux par-
N. 91. ties BG & GF égales entr'elles (*n*) : du point G pris pour centre, & avec la partie GF prise pour rayon, décrivés un demi-cercle BHF : prolongés le côté DC vers H, jusqu'à ce qu'il rencontre en un point H la circonférence de ce demi-cercle : le prolongement CH sera le côté du quarré dont la surface sera égale à celle de la figure rectiligne A.

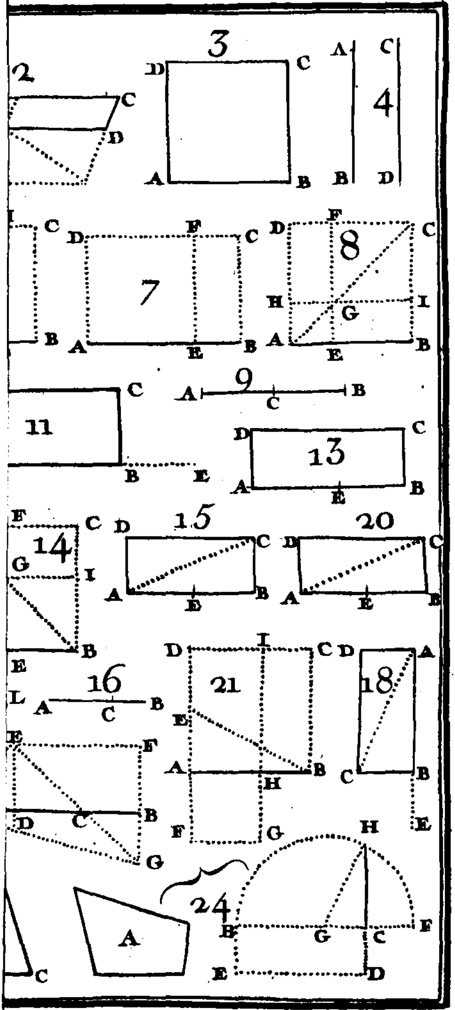
Pour la démonstration : tirés du point

e sur-
re

a sur-
recti-

e rec-
le à
lon-
par
que
utre
par-
: du
par-
de-
DC
n un
cer-
é du
celle

oint



G au point H la ligne GH :

Démonſtration. La ſomme des quarrés des côtés CH & GC du triangle GCH eſt égale au quarré du côté GH (*n*), puiſque ce triangle eſt rectangle en C (*c*) ; le quarré du côté GH eſt égal à celui de la ligne GF, puiſque ce côté & cette ligne ſont rayons du même demi-cercle BHF (*c*), & le quarré de la ligne GF eſt égal à la ſomme du rectangle des parties BC & CF de la ligne BF, & du quarré de la ligne GC (*n*); puiſque la ligne GF étant la moitié de la ligne BF (*c*), la ligne GC eſt la moitié de la différence des parties BC & CF de cette ligne BF ; donc la ſomme du quarré du côté CH & de celui du côté GC eſt égale à la ſomme du rectangle des parties BC & CF, & du quarré de la partie GC (*n*); & par conſéquent ſi l'on retranche le quarré de GC de chacune de ces ſommes, les reſtes qui ſont le quarré du côté CH & le rectangle des parties BC & CF, ſeront égaux entr'eux (*n*). Or le rectangle BCDE, eſt celui des parties BC & CF, puiſque BC eſt l'un de ſes côtés, & qu'il a un autre côté CD égal à CF (*c*) ; & il eſt égal à la figure rectiligne A (*c*) ; donc le quarré du côté CH eſt égal à la figure rectiligne A ; donc C. Q. F. F.

N. 168.

N. 182.

N. 62.

N. 64.

Fin du ſecond Livre.

LES ELEMENS D'EUCLIDE.

LIVRE TROISIE'ME.

EUCLIDE après avoir posé les fondemens de la Géométrie dans les Livres précédens, considere dans celui-ci les propriétés des Lignes droites qui ont quelques points communs avec la circonférence d'un Cercle, & examine aussi la maniere dont les circonférences des cercles peuvent se toucher, ou se couper. Il détermine ensuite la mesure des différens angles formés par des Lignes-droites tirées chacune d'un même point de quelques-unes de ces circonferenees ; & après avoir résolu quelques Problêmes qui concernent le Cercle, il démontre dans les dernieres Propositions de ce Livre, les propriétés fondamentales & caractéristiques de cette figure.

DEFINITIONS.

I.

201. ON nomme Cercles *égaux* entr'eux, ceux dont les diametres, ou dont les rayons ſont égaux entr'eux.

II.

202. On dit qu'une Ligne-droite *touche* un cercle, lorſqu'elle a un point commun avec la circonférence de ce cercle, & qu'étant prolongée de part & d'autre, tous ſes autres points ſont hors de cette figure.

La Ligne AB * touche *le Cercle X.* Fig. 1.

203. On nomme *Tangente* d'un cercle, une ligne droite qui touche un cercle.

La Ligne AB * *eſt une* Tangente *du* Fig. 1.
cercle X.

204. On nomme *Sécante* d'un cercle, une ligne droite qui étant prolongée s'il eſt néceſſaire, a plus d'un point commun avec la circonférence d'un cercle.

La Ligne CD * *eſt une* Sécante *du* Fig. 1.
cercle X.

III.

205. On dit que des Cercles ſe *tou-*

chent, lorſque leurs circonférences ayant un point commun entr'elles, ne ſe coupent point.

IV.

206. On dit que des Lignes-droites ſont *également éloignées* du centre d'un cercle, lorſque les perpendiculaires tirées du centre de ce cercle à chacune de ces lignes, ſont égales entr'elles.

Fig. 2. *Les Lignes AB & CD * ſont* également éloignées *du centre K du cercle X, ſi les perpendiculaires KG & KH ſont égales entr'elles.*

207. On dit qu'une Ligne-droite eſt *plus éloignée* qu'une autre du centre d'un cercle, lorſque la perpendiculaire tirée du centre de ce cercle à cette ligne, eſt plus grande que la perpendiculaire tirée de ce même centre à cette autre ligne.

Fig. 2. *La Ligne EF eſt* plus éloignée *que la ligne AB du centre K du cercle X *, ſi la perpendiculaire KI eſt plus grande que la perpendiculaire KG.*

208. On nomme *Corde* d'un Arc, une ligne-droite tirée de l'une des extrémités de cet Arc à ſon autre extrémité.

Fig. 1. *La Ligne AC eſt la* Corde *de l'Arc ABC *.*

209. On dit qu'une Corde *ſous-tend* l'Arc, des extrémités duquel elle eſt tirée.

La Corde AC ſous-tend *l'Arc ABC* *. Fig. 3.

V.

210. On nomme *Segment* d'un cercle, une figure plane terminée par un Arc de cercle, & par une ligne-droite.

La figure ABC * *eſt un* Segment *de cercle.* Fig. 3.

VI.

211. On nomme *Angle d'un Segment*, un angle formé par la Corde qui ſous-tend l'Arc de ce Segment, & par une Tangente à cet Arc tirée de l'une des extrémités de cette Corde.

L'Angle ABC * *eſt l'Angle* du *Segment CDB.* Fig. 4.

VII.

212. On nomme *Angle dans un Segment*, ou *Angle inſcrit dans un Segment*, un angle dont le ſommet eſt un point de l'Arc de ce Segment, & dont les côtés paſſent par les extrémités de cet Arc.

L'Angle E * *eſt un Angle* dans *le Segment CEB.* Fig. 4.

VIII.

213. On dit qu'un angle dont le ſommet eſt un point de la circonférence d'un cercle, *s'appuye* ſur l'Arc de ce cercle, qui eſt compris entre ſes côtés.

L'Angle B * s'appuye *ſur l'Arc ADC.* Fig. 5.

IX.

214. On nomme *Secteur* de cercle une figure-plane terminée par un Arc de cercle, & par deux lignes droites tirées du centre de ce cercle aux extrémités de cet Arc.

Fig. 6. *Les figures ABCD & AECB * sont chacune un* Secteur *de cercle.*

X.

215. On dit que des Segmens de cercles sont *semblables*, lorsque les angles inscrits dans chacun de ces Segmens, sont égaux entr'eux.

Fig. 7. *Les Segmens ABC & DEF * sont* semblables, *si les angles B & E inscrits chacun dans chacun de ces Segmens, sont égaux entr'eux.*

PROPOSITION I.

PROBLEME.

216. *Trouver le centre d'un cercle donné.*

Fig. 8. IL faut trouver le centre du cercle X *.
Const. Tirés à volonté une ligne droite AB, qui se termine de part & d'autre à la circonférence du cercle X: divisés cette ligne en deux parties AE & EB égales en-

tr'elles (*n*) : du point E milieu de cette li- N. 91.
gne, élevés-lui une perpendiculaire CD
(*n*) qui ſe termine auſſi de part & d'autre à N. 92.
cette circonférence : diviſés auſſi cette per-
pendiculaire en deux parties CF & FD éga-
les entr'elles (*n*) ; & le point F milieu de N. 91.
cette perpendiculaire, ſera le centre du
cercle X.

Pour la démonſtration : d'un point G
pris à volonté hors de la perpendiculaire
CD, tirés aux points A, E & B les lignes
GA, GE & GB.

Démonſt. Le centre du cercle X eſt dans
la perpendiculaire CD, ou hors de cette
perpendiculaire. Or s'il étoit par exemple
un point G hors de la perpendiculaire CD,
les triangles AGE & BGE auroient le cô-
té GA égal au côté GB, puiſque ces côtés
ſeroient rayons du même cercle X (*h*), le
côté AE égal au côté EB (*c*), & le côté
GE commun entr'eux ; ainſi les angles du
premier triangle ſeroient égaux à ceux du
ſecond, chacun à chacun (*n*) ; donc l'an- N. 87.
gle GEA ſeroit égal à l'angle GEB ; & par
conſéquent la ligne GE ſeroit perpendicu-
laire à la ligne AB (*n*) : mais la ligne GE N. 18.
n'eſt point perpendiculaire à la ligne AB(*n*), N. 20.
puiſque l'angle GEB n'eſt qu'une partie
de l'angle CEB qui eſt droit (*c*) ; donc le
centre du cercle X n'eſt point hors de la

perpendiculaire CD ; & par conféquent il eft dans cette perpendiculaire. Or puifque le centre du cercle X eft dans la perpendiculaire CD, que le centre d'un cercle eft également éloigné de tous les points de la circonférence de ce cercle, & que le point F eft le feul point de la ligne CD également éloigné des points C & D de la circonférence du cercle X (*c*), le point F eft le centre de ce cercle ; donc C. Q. F. F.

COROLLAIRE.

217. Il fuit de la démonftration de ce Problême, que *fi une ligne droite terminée de part & d'autre à la circonference d'un cercle, coupe perpendiculairement & par le milieu une autre ligne droite terminée auffi de part & d'autre à la circonference de ce même cercle, cette premiere ligne eft le diametre de ce cercle.*

PROPOSITION II.

THEOREME.

218. *Une ligne droite qui a plus d'un point commun avec la circonférence d'un cercle, passe dans ce cercle.*

LA ligne AB * qui a les points A & B communs avec la circonférence du cercle X, passe dans ce cercle. Fig. 9.

Const. Prenés sur la ligne AB un point D, à volonté, entre les points A & B : du centre C du cercle X, tirés aux points A, D & B les lignes CA, CD & CB.

Démonst. Les côtés CA & CB du triangle ACB sont égaux entr'eux, puisqu'ils sont rayons du même cercle X (*c*) ; ainsi l'angle B est égal à l'angle A (*n*) : or l'an- N. 83.
gle CDA est plus grand que l'angle B (*n*), N. 100.
puisque l'angle CDA est l'angle extérieur du triangle CDB, & que l'angle B est l'un des angles intérieurs de ce triangle, opposés à cet angle extérieur ; donc l'angle CDA est plus grand que l'angle A ; & par conséquent le côté CA du triangle CDA, est plus grand que le côté CD de ce même triangle (*n*). Or puisque le côté CA est plus N. 108.

grand que le côté CD, le point D de la ligne AB est dans le cercle X; & par conséquent cette ligne passe dans ce cercle; donc C. Q. F. D.

PROPOSITION III.

THEOREME.

219. Premierement. *Si une ligne droite qui passe par le centre d'un cercle, divise en deux parties égales entr'elles une autre ligne droite, qui ne passant point par le centre de ce même cercle, est terminée de part & d'autre à sa circonférence, elle sera perpendiculaire à cette autre ligne.* Secondement, *si elle lui est perpendiculaire, elle la divisera en deux parties égales entr'elles.*

Fig. 10. *Premierement.* SI la ligne CD *qui passe par le centre F du cercle X, divise la ligne AB en deux parties AE & EB égales entr'elles, la ligne CD sera perpendiculaire à la ligne AB. *Secondement.* Si cette ligne CD est perpendiculaire à la ligne AB, elle la divisera en deux parties AE & EB égales entr'elles.

Const. Du centre F du cercle X tirés

aux points A & B les lignes FA & FB.

Premierement. *Si la ligne CD divise la ligne AB en deux parties AE & EB égales entr'elles.*

Démonst. Les triangles AFE & BFE ont le côté FA égal au côté FB, puisque ces côtés sont rayons du même cercle X (*c*), le côté AE égal au côté EB (*h*), & le côté FE commun entr'eux ; ainsi les angles du premier triangle sont égaux à ceux du second, chacun à chacun (*n*) ; donc l'angle FEA est égal à l'angle FEB, & par conséquent la ligne CD est perpendiculaire à la ligne AB (*n*). N. 87. N. 18.

Secondement. *Si la ligne CD est perpendiculaire à la ligne AB.*

Démonst. La somme des quarrés de chacun des côtés AE & EF du triangle AEF est égale au quarré du côté AF (*n*), puisque ce triangle est rectangle en E (*h*) ; le quarré du côté AF est égal à celui du côté FB, puisque ces côtés AF & FB sont rayons du même cercle X(*c*);& le quarré du côté FB est égal à la somme des quarrés de chacun des côtés EB & EF du triangle FEB (*n*), puisque ce triangle est aussi rectangle en E (*h*) ; donc la somme des quarrés de chacun des côtés AE & EF est égale à celle de chacun des côtés EB & EF (*n*); & par conséquent si de chacune de ces som- N. 168. N. 168. N. 62.

mes on retranche le quarré de EF, les restes qui seront le quarré de AE & celui de
N. 64. EB, seront égaux entr'eux (*n*). Or puisque le quarré de la partie AE est égal à celui de la partie EB, ces parties AE & EB de la ligne AB sont égales entr'elles; & par conséquent cette ligne est divisée en deux parties égales entr'elles; donc C. Q. F. D.

PROPOSITION IV.

THEOREME.

220. *Si deux lignes droites qui se coupent & sont terminées chacune de part & d'autre à la circonference d'un cercle, ne passent point toutes deux par le centre de ce cercle, elles ne se diviseront point chacune en deux parties égales entr'elles.*

Fig. 11. LEs lignes droites AB & CD * qui se coupent au point F, sont terminées chacune à la circonférence du cercle X, & ne passent point toutes deux par le centre E de ce cercle, ne se divisent point chacune en deux parties égales entr'elles.

Const. Du centre E du cercle X tirés au point F auquel les lignes AB & CD se coupent, la ligne EF.

Démonst. Si le point F étoit le milieu de chacune des lignes AB & CD, la ligne EF qui passe par le centre E du cercle X & par ce point F, seroit perpendiculaire à chacune de ces lignes (*n*); ainsi l'angle EFD N. 219.
seroit droit, & l'angle EFB le seroit aussi (*n*); & par conséquent ces angles seroient N. 20.
égaux entr'eux. Or les angles EFD & EFB ne sont point égaux entr'eux (*n*), N. 72.
puisque l'un est une partie de l'autre; donc le point F n'est point le milieu de chacune des lignes AB & CD; & par conséquent ces lignes ne se divisent point chacune en deux parties égales entr'elles; donc C. Q. F. D.

PROPOSITION V.

THEOREME.

221. *Les cercles dont les circonférences se coupent, n'ont point le même centre.*

LEs cercles ABC & BDC * dont les Fig. 12.
circonférences se coupent aux points B & C, n'ont point le même centre.

Démonst. Toutes les lignes droites qui sont tirées du centre d'un cercle à sa circonférence sont égales entr'elles (*n*); ainsi les N. 26.

circonférences des cercles qui ont le même centre, ont tous leurs points correſpondans également éloignés les uns des autres ; & par conſéquent elles ne ſe coupent point : or les circonférences des cercles ABC & BDC ſe coupent aux points B & C (*h*) ; donc ces cercles n'ont point le même centre ; donc C. Q. F. D.

PROPOSITION VI.

THEOREME.

222. *Les cercles dont les circonférences ſe touchent, n'ont point le même centre.*

Fig. 13. LEs cercles ABC & DBE* dont les circonférences ſe touchent au point B, n'ont point le même centre.

Démonſt. Toutes les lignes droites qui ſont tirées du centre d'un cercle à ſa circon-
N. 26. férence, ſont égales entr'elles (*n*) ; ainſi les circonférences des cercles qui ont le même centre, ont tous leurs points correſpondans également éloignés les uns des autres ; & par conſéquent elles ne ſe touchent point : or les circonférences des cercles ABC & DBE ſe touchent au point B (*h*) ; donc ces cercles n'ont point le même centre ; donc C. Q. F. D.

PROPO-

PROPOSITION VII.

THEOREME.

223. *Si des lignes droites sont tirées d'un point d'un cercle, mais qui n'en est pas le centre, à la circonférence de ce cercle:* Premierement, *celle qui passe par le centre est la plus grande, & celle qui y passeroit si elle etoit prolongée, est la moins grande:* Secondement, *celles qui sont plus près de la ligne qui passe par le centre, sont plus grandes que celles qui en sont plus éloignées:* Troisiémement, *il peut y en avoir deux égales entr'elles, & il ne peut y en avoir plus de deux.*

PREMIEREMENT. LA ligne AEB * qui passe par le centre E du cercle X, est la plus grande de toutes les lignes droites qu'il est possible de tirer du point A qui n'est pas le centre de ce cercle, à sa circonférence; & la ligne AC qui passeroit par ce centre E si elle étoit prolongée, est la moins grande. Fig. 14.

Const. Du point D pris à volonté sur la circonférence du cercle X, tirés au centre

E de ce cercle, & au point A, les lignes DE & DA.

DEMONSTRATION.

Premierement. La ſomme des côtés AE & ED du triangle AED, eſt plus grande
N. 110. que le côté AD de ce triangle (*n*) : or la ligne AEB eſt égale à la ſomme de ces côtés AE & ED, puiſque les lignes EB & ED qui ſont rayons du même cercle X (*c*), ſont égales entr'elles ; donc la ligne AEB eſt plus grande que la ligne AD ; & par conſéquent puiſque la même démonſtration ſubſiſteroit, à quelque point de la circonférence du cercle X que l'on prît le point D, la ligne AEB eſt la plus grande de toutes les lignes droites qu'il eſt poſſible de tirer du point A à cette circonférence.

Secondement. La ſomme des côtés AD & AE du triangle AED, eſt plus grande
N. 110. que le côté ED de ce triangle (*n*) : or la ligne EAC eſt égale au côté ED, puiſque cette ligne & ce côté ſont rayons du même cercle X (*c*) ; donc la ſomme des côtés AD & AE eſt plus grande que la ligne EAC ; & par conſéquent ſi de cette ſomme & de cette ligne, on retranche la ligne AE, le reſte AD de cette ſomme ſera plus grand que le reſte AC de cette ligne. Or la même démonſtration ſubſiſteroit, à quelque point

de la circonférence du cercle X que l'on prît le point D ; donc la ligne AC est la moins grande de toutes les lignes droites qu'il est possible de tirer du point A à cette circonférence.

SECONDEMENT. La ligne AC * qui est plus près de la ligne AEB qui passe par le centre E du cercle X, est plus grande que la ligne AD qui en est plus éloignée. Fig. 15.

Const. Du centre E du cercle X tirés aux points C & D, les lignes EC & ED.

Démonst. L'angle AEC du triangle ACE est plus grand que l'angle AED du triangle ADE (*n*), & les côtés EC & EA N. 72. qui forment cet angle AEC du premier triangle, sont égaux aux côtés ED & EA qui forment cet angle AED du second, chacun à chacun ; puisque EC & ED sont rayons du même cercle X (*c*), & que EA est commun à ces deux triangles ; donc le côté AC du premier triangle est plus grand que le côté AD du dernier (*n*); & par con- N. 117. séquent la ligne AC qui est plus près de la ligne AEB qui passe par le centre E, est plus grande que la ligne AD qui en est plus éloignée.

TROISIE'MEMENT. Du point A * on Fig. 16. peut tirer à la circonférence du cercle X, deux lignes droites égales entr'elles ; & l'on ne peut en tirer plus de deux.

Conſt. Du point A tirés par le centre E du cercle X, la ligne AEB : du point C pris à volonté ſur la circonférence de ce cercle, tirés aux points A & E, les lignes CA & CE : faites ſur la ligne AEB un angle AED qui ait le point E de cette ligne pour ſommet, & qui ſoit égal à l'angle
N. 115. AEC (*n*) : du point A tirés au point D auquel le côté AD de l'angle AED rencontre la circonférence du cercle X, la ligne AD.

DEMONSTRATION.

Premierement. Les triangles CEA & DEA ont l'angle AEC égal à l'angle AED (*c*), & les côtés EC & EA qui forment le premier, égaux aux côtés ED & EA qui forment le ſecond, chacun à chacun ; puiſque EC & ED ſont rayons du même cercle X (*c*), & que EA eſt commun à ces deux triangles ; donc l'autre côté AC du premier triangle eſt égal à l'autre côté AD
N. 10. du ſecond (*n*) ; & par conſéquent du point A on peut tirer à la circonférence du cercle X, deux lignes droites AC & AD égales entr'elles.

Secondement. La ligne AD eſt égale à la ligne AC (*d*) : or une ligne droite tirée du point A à la circonférence du cercle X, qui ſeroit plus près de la ligne AEB que la ligne AD, ſeroit plus grande que cette li-

ligne AD (*d*) ; & une ligne droite tirée de ce même point à cette même circonférence, qui feroit plus éloignée de la ligne AEB que la ligne AD, feroit moins grande que cette ligne AD (*d*) ; donc aucune ligne droite autre que la ligne AD, qui feroit tirée du point A à la circonférence du cercle X, ne feroit égale à la ligne AC ; & par conféquent du point A on ne peut tirer à la circonférence du cercle X, plus de deux lignes droites AC & AD égales entr'elles ; donc C. Q. F. D.

PROPOSITION VIII.

THEOREME.

224. *Si des lignes droites sont tirées d'un point hors d'un cercle, à la circonférence de ce cercle :* Premierement, *celle qui passe par le centre est la plus grande ; & celle qui y passeroit si elle etoit prolongée, est la moins grande :* Secondement, *si elles traversent le cercle, celles qui sont plus près de la ligne qui passe par le centre, sont plus grandes que celles qui en sont plus eloignees ; & si elles n'entrent point dans le cercle, celles qui sont plus près de la ligne qui passeroit par le centre si elle etoit prolongee, sont moins grandes que celles qui en sont plus eloignées :* Troisiémement, *deux de celles qui traversent le cercle peuvent être égales entr'elles, deux de celles qui n'y entrent point, peuvent l'etre aussi ; & dans l'un & l'autre cas, il ne peut y en avoir plus de deux.*

Fig. 17. PREMIEREMENT. LA ligne AEC* qui passe par le centre E du cercle X, est la plus grande de toutes

les lignes droites qu'il eſt poſſible de tirer du point A hors de ce cercle, à ſa circonférence ; & la ligne AB qui paſſeroit par ce centre E ſi elle étoit prolongée, eſt la moins grande.

Conſt. Du point D pris à volonté ſur la circonférence du cercle X, tirés au centre E de ce cercle & au point A, les lignes DE & DA.

DEMONSTRATION.

Premierement. La ſomme des côtés AE & ED du triangle AED, eſt plus grande que le côté AD de ce triangle (*n*) : or la ligne AEC eſt égale à la ſomme de ces côtés AE & ED ; puiſque les lignes EC & ED qui ſont rayons du même cercle X (*c*), ſont égales entr'elles ; donc la ligne AEC eſt plus grande que la ligne AD ; & par conſéquent puiſque la même démonſtration ſubſiſteroit, à quelque point de la circonférence du cercle X que l'on prît le point D, la ligne AEC eſt la plus grande de toutes les lignes droites qu'il eſt poſſible de tirer du point A à cette circonférence. N. 110.

Secondement. La ſomme des côtés AD & DE du triangle AED eſt plus grande que le côté ABE de ce triangle (*n*), & les lignes DE & BE ſont égales entr'elles, puiſqu'elles ſont rayons du même cercle X (*c*) ; N. 110.

donc si l'on retranche la ligne DE, de cette somme, & la ligne BE de ce côté, le reste AD de cette somme, sera plus grand que le reste AB de ce côté; & par conséquent puisque la même démonstration subsisteroit, à quelque point de la circonférence du cercle X que l'on prît le point D, la ligne AB est la moins grande de toutes les lignes droites qu'il est possible de tirer du point A à cette circonférence.

SECONDEMENT. Lorsque les lignes AD
Fig. 18. & AF * qui sont tirées du point A à la circonférence du cercle X traversent ce cercle, la ligne AF qui est plus près de la ligne AEC qui passe par le centre E, est plus grande que la ligne AD qui en est plus éloi-
Fig. 19. gnée; & lorsque ces lignes AD & AF * n'entrent point dans ce cercle, la ligne AD qui est plus près de la ligne AB qui passeroit par le centre E si elle étoit prolongée, est moins grande que la ligne AF qui en est plus éloignée.

Fig. 18. & 19. *Const.* Du centre E du cercle X * tirés aux points D & F, les lignes ED & EF.

Démonst. L'angle AEF du triangle AFE est plus grand que l'angle AED du
n. 72. triangle ADE (*n*), & les côtés EA & EF qui forment cet angle AEF du premier triangle, sont égaux aux côtés EA & ED qui forment cet angle AED du second, cha-

cun

cun à chacun, puiſque EF & ED ſont rayons du même cercle X (*c*), & que EA eſt commun à ces deux triangles; donc le côté AF du premier triangle eſt plus grand que le côté AD du ſecond (*n*); & par conſéquent, N. 117.
dans le premier Cas, la ligne AF * qui eſt Fig. 18.
plus près de la ligne AEC qui paſſe par le centre E, eſt plus grande que la ligne AD qui en eſt plus éloignée; &, *dans le ſecond Cas*, la ligne AD * qui eſt plus près de la Fig. 19.
ligne AB qui paſſeroit par le centre E ſi elle étoit prolongée, eſt moins grande que la ligne AF qui en eſt plus éloignée.

TROISIE'MEMENT. Du point A * on Fig. 20.
peut tirer à la circonférence du cercle X, & 21.
deux lignes droites égales entr'elles, qui traverſent ce cercle; deux autres auſſi égales entr'elles qui n'y entrent point; & *dans l'un & l'autre Cas*, on ne peut en tirer plus de deux.

Conſt. Du point A tirés au centre E du cercle X, la ligne AE : du point C pris à volonté ſur la circonférence de ce cercle, tirés aux points A & E, les lignes CA & CE : faites ſur la ligne AE un angle AED qui ait le poiut E de cette ligne pour ſommet, & qui ſoit égal à l'angle AEC (*n*) : N. 115.
du point A tirés au point D, auquel le côté ED de l'angle AED rencontre la circonférence du cercle X, la ligne AD.

T

DEMONSTRATION.

Premierement. Les triangles CEA & DEA ont l'angle AEC égal à l'angle AED (*c*), & les côtés EC & EA qui forment le premier, égaux aux côtés ED & EA qui forment le ſecond, chacun à chacun; puiſque EC & ED ſont rayons du même cercle X (*c*), & que EA eſt commun à ces deux triangles; donc l'autre côté AC du premier triangle, eſt égal à l'autre côté
N. 10. AD du ſecond (*n*); & par conſéquent du point A on peut tirer à la circonférence du
Fig. 20. cercle X, deux lignes droites AC & AD * égales entr'elles, qui traverſent ce cercle;
Fig. 21. & deux autres lignes droites AC & AD * égales auſſi entr'elles, & qui n'entrent point dans ce cercle.

Secondement. Dans l'un & dans l'au-
Fig. 20. & 21. *tre Cas*, la ligne AD * eſt égale à la ligne AC (*d*): or une ligne droite tirée du point A à la circonférence du cercle X, qui ſeroit plus près de la ligne AE que la ligne AD, ſeroit plus grande que cette ligne AD, *dans le premier Cas*, & moins grande *dans le ſecond* (d); & une ligne droite tirée de ce même point à cette même circonférence, qui ſeroit plus éloignée de la ligne AE que la ligne AD, ſeroit moins grande que cette ligne AD, *dans le premier Cas*, &

plus grande *dans le ſecond* (d) ; donc aucune ligne droite autre que la ligne AD, qui ſeroit tirée du poiut A à la circonférence du cercle X, ne ſeroit égale à la ligne AC ; & par conſéquent *dans l'un & dans l'autre Cas*, du point A on ne peut tirer à la circonférence du cercle X, plus de deux lignes droites AC & AD égales entr'elles ; donc C. Q. F. D.

PROPOSITION IX.

THEOREME.

225. *Un point duquel on peut tirer à la circonférence d'un cercle plus de deux lignes droites égales entr'elles, eſt le centre de ce cercle.*

SI les lignes droites AB, AC, & AD* qui ſont tirées chacune du point A à la circonférence du cercle X ſont égales entr'elles, ce point ſera le centre de ce cercle. *Fig. 22.

Conſt. Du point C tirés aux points B & D les lignes CB & CD : diviſés chacune de ces lignes en deux parties égales entr'elles (*n*) : du point A tirés au milieu de chacune de ces lignes, les lignes AE & AF. N. 91.

Démonst. Les côtés du triangle AEB sont égaux à ceux du triangle AEC, chacun à chacun ; puisque AE est commun à ces deux triangles, que AB est égal à AC (*h*), & que EB l'est à EC (*c*) ; ainsi les angles du premier triangle sont égaux à ceux
N. 87. du second, chacun à chacun (*n*) ; & par conséquent l'angle AEB est égal à l'angle AEC. Or puisque l'angle AEB est égal à l'angle AEC, la ligne AE est perpendicu-
N. 18. laire à la ligne CB (*n*), & par conséquent puisqu'elle passe par le milieu E de cette ligne (*c*) qui est terminée de part & d'autre à la circonférence du cercle X (*c*), elle
N. 219. passe par le centre de ce cercle (*n*). On démontre de la même maniere que la ligne AF passe aussi par ce même centre. Ainsi puisque les lignes AE & AF passent chacune par le centre du cercle X, le centre de ce cercle est un point commun à ces deux lignes : or ces deux lignes n'ont que le point
N. 75. A commun entr'elles (*n*) ; donc le point A est le centre du cercle X ; donc C.Q.F.D.

PROPOSITION X.

THEOREME.

226. *La circonférence d'un cercle ne peut couper en plus de deux points, celle d'un autre cercle.*

LA circonférence du cercle ABC * qui coupe aux points B & C celle du cercle BDC, ne peut pas la couper encore en un autre point. Fig. 231

Démonst. Si la circonférence du cercle ABC pouvoit couper en trois points celle du cercle BDC, les circonférences de ces cercles pourroient avoir trois points communs entr'elles ; & par conséquent du point E qui, s'il est le centre du cercle ABC, n'est point celui du cercle BDC (*n*), puis- N. 221.
que les circonférences de ces cercles se coupent (*h*), on pourroit tirer à la circonférence du cercle BDC, trois lignes droites qui seroient égales entr'elles, puisqu'elles seroient chacune un rayon de ce cercle : or d'un point qui n'est pas le centre d'un cercle, on ne peut tirer à la circonférence de ce cercle, plus de deux lignes droites égales entr'elles (*n*) ; donc la circonférence du N. 223.

cercle ABC ne peut couper en plus de deux points, celle du cercle BDC; donc C. Q. F. D.

PROPOSITION XI.

THEOREME.

227. *Si la circonférence d'un cercle touche intérieurement celle d'un autre cercle, le point auquel ces circonférences se touchent, & les centres de ces cercles seront chacun dans une même ligne droite.*

Fig. 24. LE point B auquel la circonférence du cercle DBE * touche intérieurement celle du cercle ABC, le centre H du cercle ABC, & le centre du cercle DBE, sont chacun dans une même ligne droite.

Const. Du centre H du cercle ABC, tirés au point B, auquel la circonférence du cercle DBE touche celle de ce cercle ABC, la ligne HB : du même point H tirés au point C pris à volonté sur la circonférence du même cercle ABC, la ligne HEC : du point I pris aussi à volonté sur la partie de cette ligne HEC qui est dans le cercle DBE, tirés au point B, la ligne IB.

Démonst. Si le centre H du cercle ABC, le centre du cercle DBE, & le point B auquel les circonférences de ces cercles se touchent, n'étoient point chacun dans une même ligne droite, le centre du cercle DBE seroit hors de la ligne droite HB, puisque le centre H & le point B sont chacun dans cette ligne (*c*). Or si le centre du cercle DBE étoit par exemple un point I, hors de la ligne HB, les lignes IB & IE seroient égales entr'elles, puisqu'elles seroient rayons du même cercle DBE; mais ces lignes IB & IE ne sont point égales entr'elles; car la somme des côtés HI & IB du triangle HIB est plus grande que le côté HB de ce triangle (*n*); or le côté HB est N. 110.
égal à la ligne HEC, puisque ce côté & cette ligne sont rayons du même cercle ABC (*c*); donc la somme de ces côtés HI & IB est plus grande que la ligne HEC; & par conséquent si de cette somme & de cette ligne, on retranche la ligne HI, le reste IB de cette somme sera plus grand que le reste IEC de cette ligne. Ainsi puisque la ligne IB est plus grande que la ligne IEC, & que cette ligne IEC est plus grande que la ligne IE (*n*), la ligne IB est plus grande N. 72.
que la ligne IE; donc un point I hors de la ligne HB n'est point le centre du cercle DBE; & par conséquent le centre de ce

cercle est dans cette ligne HB ; donc C. Q. F. D.

PROPOSITION XII.

THEOREME.

228. *Si les circonférences de deux cercles se touchent extérieurement, le point auquel elles se touchent, & les centres de ces cercles, seront chacun dans une même ligne droite.*

Fig. 25. LE point C * auquel les circonférences des cercles X & Y se touchent extérieurement, le centre A du cercle X, & le centre du cercle Y, sont chacun dans une même ligne droite.

Const. Du centre A du cercle X tirés au point C auquel les circonférences des cercles X & Y se touchent, une ligne AC : prolongés cette ligne vers B : du point D pris à volonté dans le cercle Y, hors de la ligne ACB, tirés aux points A & C, les lignes DA & DC.

Démonst. Si le centre A du cercle X, le centre du cercle Y, & le point C auquel les circonférences de ces cercles se touchent, n'étoient point chacun dans une même li-

gne droite, le centre du cercle Y seroit hors de la ligne droite ACB, puisque le centre A & le point C sont chacun dans cette ligne (*c*). Or si le centre du cercle Y étoit par exemple un point D hors de la ligne ACB, la ligne DC & la partie DF de la ligne DA seroient égales entr'elles, puisque cette ligne & cette partie seroient rayons du même cercle Y; donc puisque la ligne CA & la partie EA de la ligne DA, qui sont rayons du même cercle X, sont aussi égales entr'elles, la somme des lignes DC & CA seroit égale à la somme des parties DF & EA; & par conséquent puisque la somme de ces parties est moins grande que la ligne DA de la partie FE, la somme des lignes DC & CA seroit moins grande que cette ligne DA; mais la somme des lignes DC & CA n'est point moins grande que la ligne DA (*n*), (elle ne seroit même N. 110.
point aussi grande que cette ligne, quand on prétendroit que les points F & E ne seroient qu'un même point (*n*),) puisque N. 110.
ces lignes DC, CA & DA, sont les côtés du triangle ADC; donc un point D hors de la ligne ACB, n'est point le centre du cercle Y; & par conséquent le centre de ce cercle est dans cette ligne ACB; donc C. Q. F. D.

PROPOSITION XIII.

THEOREME.

229. *Si la circonférence d'un cercle touche celle d'un autre cercle intérieurement, ou extérieurement, elle ne la touche qu'à un seul point.*

Fig. 26. PREMIEREMENT. LA circonférence du cercle FDG * qui touche intérieurement au point D celle du cercle EDB, ne la touche qu'à ce point.

Conſt. Du centre A du cercle EDB, tirés au centre C du cercle FDG, la ligne AC : prolongés cette ligne vers D, juſqu'à ce qu'elle rencontre au point D, la circonférence du cercle EDB : du point B pris à volonté ſur la circonférence de ce cercle, tirés aux centres A & C les lignes BA & BC.

Démonſt. Si la circonférence du cercle FDG qui touche au point D celle du cercle EDB (*h*), la touchoit auſſi, par exemple au point B, les lignes BC & DC ſeroient égales entr'elles, puiſqu'elles ſeroient rayons du même cercle FDG ; ainſi ſi l'on ajoutoit la ligne CA à chacune de ces lignes, la ſomme des lignes BC & CA ſeroit égale à la ligne DCA qui eſt la ſomme des lignes DC & CA ; & par conſéquent puiſque les lignes DCA & BA qui ſont rayons du même cercle EDB, ſont égales entr'elles, la ſomme des lignes BC & CA ſeroit égale à la ligne BA. Mais la ſomme des lignes BC & CA n'eſt point égale à la ligne BA (*n*), puiſque ces lignes BC, CA N. 110. & BA ſont les côtés du triangle CBA ; donc la circonférence du cercle FDG ne touche point au point B celle du cercle EDB ; & par conſéquent, puiſque la même démonſtration ſubſiſteroit à quelque point de la circonférence du cercle EDB que l'on prît le point B, la circonférence du cercle FDG ne touche qu'au point D celle du cercle EDB ; donc C. Q. F. D.

SECONDEMENT. Les circonférences des cercles X & Y * qui ſe touchent extérieurement au point D, ne ſe touchent qu'à ce point. Fig. 27.

Conſt. Du centre A du cercle X tirés au centre C du cercle Y, la ligne ADC : du point B pris à volonté ſur la circonférence de l'un ou de l'autre de ces cercles, tirés aux centres A & C, les lignes BA & BC.

Démonſt. Si les circonférences des cercles X & Y qui ſe touchent au point D (*h*), ſe touchoient auſſi, par exemple au point

B, le point B seroit un point de la circonférence du cercle X; ainsi les lignes BA & DA seroient chacune un rayon de ce cercle; & par conséquent elles seroient égales entr'elles: le même point B seroit aussi un point de la circonférence du cercle Y; ainsi les lignes BC & DC seroient aussi chacune un rayon de ce cercle, & par conséquent elles seroient aussi égales entr'elles. Or puisque les lignes BA & DA seroient égales entr'elles, & que les lignes BC & DC le seroient aussi, la somme des lignes BA & BC seroit égale à la ligne ADC qui est la somme des lignes DA & DC. Mais la somme des lignes BA & BC n'est point
N. 110. égale à la ligne ADC (*n*), puisque ces lignes BA, BC, & ADC sont les côtés du triangle ABC; donc les circonférences des cercles X & Y ne se touchent point au point B; & par conséquent, puisque la même démonstration subsisteroit à quelque point de la circonférence de l'un ou de l'autre de ces cercles que l'on prît le point B, les circonférences de ces cercles ne se touchent qu'au point D; donc C. Q. F. D.

PROPOSITION XIV.

THEOREME.

230. *Si deux lignes droites ſont terminées chacune de part & d'autre à la circonférence d'un cercle :* Premierement, *elles ſeront égales entr'elles, ſi elles ſont également éloignées du centre de ce cercle :* Secondement, *elles ſeront également éloignées du centre de ce cercle, ſi elles ſont égales entr'elles.*

Premierement. LEs lignes AB & CD * ſont égales entr'elles, ſi elles ſont également éloignées du centre E du cercle X : *Secondement*, ces lignes ſont également éloignées du centre de ce cercle, ſi elles ſont égales entr'elles. Fig. 21

Conſt. Du centre E du cercle X abaiſſés à la ligne AB, la perpendiculaire EF, & à la ligne CD, la perpendiculaire EG (*n*) : du même centre E tirés aux points A & C, les lignes EA & EC. N. 93.

Premierement. Si les lignes AB & CD ſont également éloignées du centre E.

Démonſt. La ligne AB eſt terminée de part & d'autre à la circonférence du cercle

X (*h*) ; donc puiſque la ligne EF qui paſſe par le centre E de ce cercle (*c*), eſt perpendiculaire à cette ligne (*c*), elle la diviſe en deux parties AF & FB égales entr'elles
N. 219. (*n*) ; & par des raiſons pareilles, la ligne EG diviſe la ligne CD en deux parties CG & GD égales auſſi entr'elles ; ainſi ſi les parties AF & CG ſont égales entr'elles, les lignes AB & CD le ſeront auſſi. Or les parties AF & CG ſont égales entr'elles ; car la ſomme du quarré de AF & de celui
N. 168. de EF eſt égale au quarré de EA (*n*), puiſque le triangle FAE eſt rectangle en F (*c*): le quarré de EA eſt égal à celui de EC, puiſque EA & EC qui ſont rayons du même cercle X (*c*), ſont égaux entr'eux ; & le quarré de EC eſt égal à la ſomme du
N. 168. quarré de CG & de celui de EG (*n*), puiſque le triangle GCE eſt rectangle en G (*c*) ; donc la ſomme du quarré de AF & de celui de EF eſt égale à celle du quarré de CG & de celui de EG ; & par conſéquent ſi de la premiere, on retranche le quarré de EF, & de la ſeconde, le quarré de EG qui eſt égal à celui de EF, puiſque les lignes EF & EG qui ſont les diſtances du centre E aux lignes AB & CD (*c*), ſont égales entr'elles (*h*), les reſtes qui ſont le quarré de AF & celui de CG feront égaux entr'eux ; donc puiſque le quarré de AF eſt

égal au quarré de CG, la partie AF eſt égale à la partie CG, & par conſéquent la ligne AB eſt égale à la ligne CD.

Secondement. Si les lignes AB & CD ſont égales entr'elles.

Démonſt. Par une démonſtration pareille à la précédente la ſomme du quarré de AF & de celui de EF eſt égale à celle du quarré de CG & de celui de EG : or le quarré de AF eſt égal à celui de CG, puiſque les lignes AF & CG ſont les moitiés des lignes AB & CD (*d*), qui ſont égales entr'elles (*h*) ; donc ſi de la premiere de ces ſommes, on retranche le quarré de AF, & de la ſeconde, la quarré de CG, les reſtes qui ſont le quarré de EF & celui de EG, ſeront égaux entr'eux ; & par conſéquent la ligne EF eſt égale à la ligne EG ; ainſi puiſque les lignes EF & EG ſont égales entr'elles (*d*), & qu'elles ſont les diſtances du centre E aux lignes AB & CD (*c*), les lignes AB & CD ſont également éloignées du centre E ; donc C. Q. F. D.

PROPOSITION XV.

THEOREME.

231. *Si des lignes droites sont terminées chacune de part & d'autre à la circonférence d'un cercle :* Premierement, *celle qui passe par le centre de ce cercle, est la plus grande de toutes ces lignes droites :* Secondement, *celles qui sont plus près de ce centre, sont plus grandes que celles qui en sont plus eloignees.*

Fig. 29. PREMIEREMENT. LA ligne AB * qui passe par le centre C du cercle X, est plus grande que la ligne DE qui n'y passe point.

Const. Du centre C du cercle X tirés aux points D & E, les lignes CD & CE.

Démonst. La ligne AB est égale à la somme des lignes CD & CE, puisque la ligne AB est un diametre du cercle X (*h*), & que les lignes CD & CE sont deux rayons de ce cercle (*c*) : or la somme des lignes CD & CE est plus grande que la li-
N. 110. gne DE (*n*), puisque ces lignes CD, CE & DE sont les côtés du triangle CDE ; donc la ligne AB est plus grande que la ligne DE.

SECON-

SECONDEMENT. La ligne AB * qui eſt plus près du centre C du cercle X que la ligne DE, eſt plus grande que cette ligne. Fig. 10.

Conſt. Du centre C du cercle X tirés aux points A, D, E & B, les lignes CA, CD, CE & CB.

Démonſt. L'angle ACB du triangle CAB eſt plus grand que l'angle DCE du triangle CDE (*n*), & les côtés CA & CB N. 72. qui forment cet angle ACB du premier triangle, ſont égaux aux côtés CD & CE qui forment cet angle DCE du ſecond, chacun à chacun ; puiſque tous ces côtés ſont rayons du même cercle X (*c*) ; donc l'autre côté AB du premier triangle eſt plus grand que l'autre côté DE du ſecond (*n*) ; N. 117. donc C. Q. F. D.

PROPOSITION XVI.

THEOREME.

232. *Si une ligne droite est perpendiculaire à l'extrémité du diametre d'un cercle* : Premierement, *elle n'aura de point commun avec la circonférence de ce cercle, que celui auquel elle rencontre ce diametre* : Secondement, *elle sera de toutes les lignes droites qu'il est possible de tirer hors d'un cercle, celle qui est le plus près de cette figure.*

Fig. 31. PREMIEREMENT. LA ligne BC * qui est perpendiculaire à l'extrémité B du diametre AB du cercle X, n'a que ce point B commun avec la circonférence de ce cercle.

Conft. Du centre D du cercle X tirés au point E pris à volonté sur la ligne BC, la ligne DE.

Démonft. L'angle B du triangle DEB est droit (*h*) ; donc les autres angles BDE
N. 102. & BED de ce triangle sont aigus (*n*) ; & par conséquent l'angle B est plus grand
N. 22. qu'aucun de ces autres angles (*n*). Ainsi puisque l'angle B du triangle DEB est plus

grand que l'angle BED de ce triangle, le côté DE oppôſé à l'angle B, eſt plus grand que le côté DB oppoſé à l'angle BED (*n*); N. 108.
& par conſéquent puiſque ce côté DB eſt un rayon du cercle X (*h*), le côté DE eſt plus grand que le rayon de ce cercle. Or puiſque le côté DE eſt plus grand que le rayon du cercle X (*d*), & que l'une de ſes extrémités D eſt au centre D de ce cercle (*c*), ſon autre extrémité E eſt hors de ce même cercle (*n*); donc puiſque ce point E N. 32.
eſt auſſi un point de la perpendiculaire BC (*c*), le point E de cette perpendiculaire eſt hors de ce cercle X; & par conſéquent puiſque la même démonſtration ſubſiſteroit, à quelque point de la perpendiculaire BC différent du point B, que l'on prît le point E, cette perpendiculaire n'a que ce point B commun avec la circonférence du cercle X.

SECONDEMENT. La ligne BF * tirée à Fig. 32.
volonté du ſommet B de l'angle droit ABC, entre les côtés BA & BC de cet angle, paſſe dans le cercle X.

Conſt. Du centre D du cercle X abaiſſés la perpendiculaire DE à la ligne BF (*n*). N. 93.

Démonſt. L'angle DEB du triangle DEB eſt droit (*c*); donc les autres angles EDB & EBD de ce triangle ſont aigus (*n*); & par conſéquent l'angle DEB eſt N. 102.

plus grand qu'aucun de ces autres angles
N. 22. (*n*). Ainsi puisque l'angle DEB du triangle DEB est plus grand que l'angle EBD de ce triangle, le côté DB opposé à l'angle DEB, est plus grand que le côté DE op-
N. 108. posé à l'angle EBD (*n*); & par conséquent, puisque ce côté DB est un rayon du cercle X, le côté DE est moins grand que le rayon de ce cercle. Or puisque le côté DE est moins grand que le rayon du cercle X (*d*), & que l'une de ses extrémités D est au centre D de ce cercle (*c*), son autre ex-
N. 32. trémité E est dans ce même cercle (*n*); donc puisque ce point E est aussi un point de la ligne BF (*c*), le point E de cette ligne est dans ce cercle X; & par conséquent puisque la même démonstration subsisteroit, quelque près de la perpendiculaire BC que l'on tirât la ligne BF, cette ligne BF passe dans le cercle X; donc C. Q. F. D.

COROLLAIRE I.

233. Il suit de la premiere partie de ce Théorême, qu'*une ligne droite perpendiculaire à l'extrémité du diametre d'un cercle, est tangente à ce cercle.*

COROLLAIRE II.

234. Il suit de ce Corollaire, que *pour tirer une tangente à un cercle, d'un point*

donné sur la circonférence de ce cercle, il faut de ce même point tirer un diametre à ce cercle, & élever une perpendiculaire à ce diametre.

SCHOLIE.

235. *L'angle formé par une tangente AB * & par un arc AC se nomme un an-* Fig. 33.
gle de Contingence. *Il ne peut être divisé par aucune ligne droite* (n); *mais il peut* N. 232.
l'être en une infinité de parties par des arcs AD, AE, &c. (n), *& ces deux proprié-* N. 229.
tés opposées ont donné lieu à beaucoup de raisonnemens métaphisiques dont aucun n'est satisfaisant.

Celui de tous ces raisonnemens qui paroit avoir été le moins mal reçu, pretend que ces arcs AD, AE, &c. ne divisent point l'angle CAB, & qu'ils ne font que toucher la ligne AB en un point d'autant plus long, que les diametres des cercles dont ils sont des arcs sont plus grands. Mais ces points plus longs les uns que les autres, sont-ils bien géométriques? & conçoit-on bien clairement une chose qui n'a aucune longueur (n), *plus longue qu'une chose pareille qui* N. 4.
n'a de même aucune longueur?

Aucune ligne droite ne peut diviser un angle de contingence; une ligne droite peut diviser un angle rectiligne; donc un angle de contingence eſt moins grand qu'aucun angle rectiligne. *Cette conſequence eſt-elle juſte, & celle-ci ne ſeroit-elle pas plus éxacte ?* donc un angle de contingence & un angle rectiligne ne ſont point de même genre.

PROPOSITION XVII.

PROBLEME.

236. *D'un point donné hors d'un cercle, tirer une tangente à ce cercle.*

Fig. 34. IL faut du point A *hors du cercle BD, tirer une tangente à ce cercle.

Conſt. Du point A tirés au centre C du cercle BD, la ligne AC : de ce centre C & avec cette ligne AC priſe pour rayon, décrivés un cercle AE : du point B auquel la circonférence du cercle BD coupe la ligne AC, élevés une perpendiculaire BE
n. 92. à cette ligne (*n*) : du point E auquel cette perpendiculaire rencontre la circonférence du cercle AE, tirés au centre C, la ligne EC ; enfin du point A tirés au point D auquel cette ligne EC rencontre la circonférence du cercle BD, la ligne AD, & cette ligne AD ſera tangente à ce cercle.

Démonst. Les triangles EBC & ADC ont l'angle C commun entr'eux, & les côtés CB & CE qui forment cet angle C du premier triangle, égaux aux côtés CD & CA qui forment ce même angle C du second, chacun à chacun ; puisque CB & CD sont rayons du même cercle BD, & que CE & CA sont aussi rayons du même cercle AE (*c*) ; donc les angles du premier triangle sont égaux à ceux du second, chacun à chacun (*n*) ; & par conséquent l'angle ADC est égal à l'angle EBC : or l'angle EBC est droit (*c*) ; donc l'angle ADC l'est aussi ; ainsi la ligne AD est perpendiculaire à l'extrémité du rayon CD du cercle BD (*n*) ; & par conséquent elle est tangente à ce cercle (*n*) ; donc C. Q. F. D. N. 80. N. 20. N. 233.

PROPOSITION XVIII.

THEOREME.

237. *Une ligne droite qui est tirée du centre d'un cercle au point auquel une autre ligne droite touche ce cercle, est perpendiculaire à cette autre ligne.*

LA ligne AB * qui est tirée du centre A du cercle X au point B auquel la li- Fig. 35.

gne CD touche ce cercle, eſt perpendiculaire à cette ligne.

Conſt. Du point A tirés au point E pris à volonté ſur la ligne CD, une ligne AE.

Démonſt. Si la ligne AB tirée du centre A du cercle X au point B de la ligne CD, n'étoit point perpendiculaire à cette ligne, une perpendiculaire abaiſſée de ce même centre à cette même ligne, la rencontreroit en un point différent du point B. Or ſi elle la rencontroit par exemple au point E, & étoit par conſéquent la ligne AE, l'angle BEA du triangle ABE ſeroit droit ; ainſi les autres angles EAB & ABE
N. 102. de ce triangle ſeroient aigus (*n*) ; & par conſéquent l'angle BEA ſeroit plus grand
N. 22. qu'aucun de ces autres angles (*n*) : or ſi l'angle BEA du triangle ABE étoit plus grand que l'angle ABE de ce triangle, le côté AB oppoſé à l'angle BEA ſeroit plus grand
N. 108. que le côté AE oppoſé à l'angle ABE (*n*) ; & par conſéquent la ligne AF qui eſt égale à ce côté AB, puiſque cette ligne & ce côté ſont rayons du même cercle X, ſeroit plus grande que le côté AE. Mais la ligne AF n'eſt point plus grande que le côté AE
N. 72. (*n*), puiſqu'elle en eſt une partie ; donc la perpendiculaire abaiſſée du centre A du cercle X à la ligne CD ne la rencontre point à un point différent du point B ; donc elle

elle la rencontre au point B, & par conséquent la ligne AB tirée du centre A du cercle X au point B auquel la ligne CD touche ce cercle, est perpendiculaire à cette ligne; donc C. Q. F. D.

PROPOSITION XIX.

THEOREME.

238. *Si du point auquel une ligne droite touche un cercle, on éleve une perpendiculaire à cette ligne, cette perpendiculaire passera par le centre de ce cercle.*

LA perpendiculaire AB * élevée à la ligne CD, du point A auquel cette ligne CD touche le cercle X, passe par le centre de ce cercle. Fig. 36.

Const. Du point E pris à volonté dans le cercle X tirés au point A, la ligne EA.

Démonst. Si le centre du cercle X étoit par exemple le point E hors de la perpendiculaire AB, la ligne EA tirée du point E au point A auquel la ligne CD touche le cercle X (*h*), seroit perpendiculaire à cette ligne (*n*); ainsi l'angle EAD seroit droit N. 237.
(*n*); & par conséquent égal à l'angle BAD N. 20.
qui est droit aussi (*n*), puisque la ligne AB N. 20.

eſt perpendiculaire à la ligne CD (*h*). Mais l'angle EAD n'eſt point égal à l'angle
N. 72. BAD (*n*), puiſqu'il en eſt une partie ; donc le centre du cercle X n'eſt point un point E hors de la perpendiculaire AB ; & par conſéquent cette perpendiculaire paſſe par le centre de ce cercle ; donc C. Q. F. D.

PROPOSITION XX.

THEOREME.

239 *Un angle dont le ſommet eſt un point de la circonférence d'un cercle, a pour meſure la moitié de l'arc de ce cercle, ſur lequel il s'appuye.*

Fig. 37. & 38. L'Angle ABC * dont le ſommet B eſt un point de la circonférence du cercle X, a pour meſure la moitié de l'arc AC ſur lequel il s'appuye.

Conſt. Du ſommet B de l'angle ABC tirés par le centre E du cercle X, la ligne BED : de ce centre E tirés aux points A & C, les lignes EA & EC.

Demonſt. L'angle AEC a pour meſure
N. 36. l'arc AC (*n*), puiſque le ſommet E de cet angle eſt le centre de cet arc (*c*) ; ainſi ſi l'angle ABC eſt la moitié de l'angle AEC,

il aura pour mesure la moitié de l'arc AC. Or l'angle ABC est la moitié de l'angle AEC; car puisque l'angle AED est l'angle extérieur du triangle ABE, il est égal à la somme des deux angles intérieurs ABE & EAB qui lui sont opposés (*n*); or ces angles ABE & EAB sont égaux entr'eux (*n*), N. 132. N. 83.
puisque les côtés EA & EB de ce triangle ABE qui sont rayons du même cercle X (*c*) sont égaux entr'eux; donc l'angle AED est double de l'angle ABE; & par conséquent l'angle ABE est la moitié de l'angle AED. On démontre de la même maniere que l'angle EBC est la moitié de l'angle DEC; donc l'angle ABC qui est la somme des angles ABE & EBC (*Fig.* 37), ou la différence de ces angles (*Fig.* 38), est la moitié de l'angle AEC qui est la somme des angles AED & DEC (*Fig.* 37), ou la différence de ces angles (*Fig.* 38); & par conséquent il a pour mesure la moitié de l'arc AC; donc C. Q. F. D.

COROLLAIRE.

240. Il suit de la démonstration de ce Théorême, qu'*un angle dont le sommet est le centre d'un cercle, est double d'un angle dont le sommet est un point de la circonférence de ce même cercle, si ces angles s'appuyent chacun sur une même partie de cette circonférence.*

PROPOSITION XXI.

THEOREME.

241. *Les angles qui ſont dans le même ſegment de cercle, ſont égaux entr'eux.*

Fig. 39. LEs angles B & D * qui ſont dans le même ſegment ABDC du cercle X, ſont égaux entr'eux.

Démonſt. Les angles B & D ont chacun pour ſommet un point de la circonférence
N. 212. du cercle X (*n*); ainſi ils ont chacun pour meſure la moitié de l'arc de ce cercle, ſur
N. 239. lequel ils s'appuyent (*n*) : or ils s'appuyent
Ns. 212. chacun ſur le même arc AEC (*n*), puiſqu'ils ſont chacun dans le même ſegment ABDC (*h*); donc ils ont chacun pour meſure la moitié du même arc; & par conſéquent ils ſont égaux entr'eux; donc C. Q. F. D.

PROPOSITION XXII.

THEOREME.

242. *Si les angles d'un Quadrilatere ſont chacun un point de la circonférence d'un même cercle, la ſomme de deux quelconques des oppoſés, ſera égale à celle de deux angles droits.*

LA ſomme des angles oppoſés, par exemple A & C du quadrilatere ABCD *, dont chacun des angles A, B, C & D eſt un point de la circonférence du cercle X, eſt égale à la ſomme de deux angles droits. Fig. 40.

Démonſt. L'angle A a pour ſommet un point de la circonférence du cercle X (*h*); ainſi puiſqu'il s'appuye ſur l'arc BCD de ce cercle, il a la moitié de cet arc pour meſure (*n*). L'angle C a auſſi pour ſommet un point de la circonférence du même cercle X (*h*); ainſi puiſqu'il s'appuye ſur l'arc BAD de ce même cercle, il a la moitié de cet arc pour meſure (*n*): or la ſomme de la moitié de l'arc BCD & de la moitié de l'arc BAD, eſt égale à la moitié de la circonférence du cercle X, puiſque la circon-

N. 239.

N. 239.

férence de ce cercle eſt la ſomme de ces deux arcs ; donc la ſomme des angles A & C a pour meſure la moitié de la circonférence du cercle X ; & par conſéquent puiſque la moitié de la circonférence d'un cercle eſt
N. 37. la meſure de deux angles droits (*n*), la ſomme des angles A & C eſt égale à celle de deux angles droits. On démontre de la même maniere que la ſomme des angles B & D eſt auſſi égale à celle de deux angles droits ; donc C. Q. F. D.

PROPOSITION XXIII.

THEOREME.

243. *Deux ſegmens de cercles, qui ſont chacun ſur une même corde, & vers un même côté par rapport à elle, ne ſont point ſemblables.*

F. 41. LEs ſegmens de cercles ABC & ADC* qui ſont chacun ſur la même corde AC, & vers un même côté par rapport à elle, ne ſont point ſemblables.

Conſt. Du point B pris à volonté ſur l'arc du plus grand ſegment, tirés aux points A & C, les lignes BA & BC : du point D auquel la ligne BC coupe l'arc du moins grand segment, tirés au point A, la ligne DA.

Démonst. Si les segmens ABC & ADC étoient semblables, les angles ABC & ADC inscrits chacun dans chacun de ces segmens (*c*), seroient égaux entr'eux (*n*). Or ces angles ne sont point égaux entr'eux, puisque l'un ADC est un angle extérieur du triangle ABD, que l'autre ABC est l'un des angles intérieurs de ce triangle, opposés à cet angle extérieur, & que l'angle extérieur d'un triangle est plus grand qu'aucun des angles intérieurs de ce triangle, opposés à cet angle (*n*); donc les segmens ABC & ADC ne sont point semblables; donc C. Q. F. D. N. 215. N. 100.

PROPOSITION XXIV.

THEOREME.

244. *Si des segmens de cercles, qui sont sur des cordes égales entr'elles sont semblables, ils seront égaux entr'eux.*

SI les segmens ABC & DEF * qui sont sur les cordes AC & DF égales entr'elles, sont semblables, ils seront égaux entr'eux. Fig. 42.

Conſt. Poſés par penſée le ſegment ABC ſur le ſegment DEF de maniere que le point A étant ſur le point D, la corde AC ſoit ſur la corde DF.

Démonſt. La corde AC eſt égale à la corde DF (*h*), elle eſt poſée ſur DF (*c*), & l'une de ſes extrémités A eſt ſur l'une des extrémités D de DF (*c*) ; donc ſon autre extrémité C eſt ſur l'autre extrémité F
N. 70. de DF (*n*) ; & par conſéquent ces deux cordes AC & DF ne font qu'une ſeule corde DF. Or puiſque les cordes AC & DF ne font qu'une ſeule corde DF, ſi l'arc ABC n'étoit point ſur l'arc DEF, deux ſegmens ſemblables ABC & DEF (*h*) pourroient être ſur une même corde DF (*d*), & vers un même côté par rapport à elle ; mais deux ſegmens de cercles qui ſont ſur une même corde, & vers un même côté par rapport à elle, ne ſont
N. 243. point ſemblables (*n*) ; donc l'arc ABC eſt ſur l'arc DEF ; donc les ſegmens ABC & DEF ſe couvrent réciproquement ; & par
N. 69. conſéquent ils ſont égaux entr'eux (*n*) ; donc C. Q. F. D.

PROPOSITION XXV.

PROBLEME.

245. *Trouver le centre d'un arc de cercle donné.*

IL faut trouver le centre de l'arc de cercle CBD *. Fig. 43.

Conſt. Du point B pris à volonté ſur l'arc de cercle CBD, tirés aux points C & D pris auſſi chacun à volonté ſur ce même arc, les lignes BC & BD : diviſés chacune de ces lignes en deux parties égales entr'elles (*n*) : du point E milieu de la ligne BC N. 91. (*c*), élevés à cette ligne la perpendiculaire EA, & du point F milieu de la ligne BD (*c*), élevés auſſi à cette ligne la perpendiculaire FA (*n*). Le point A auquel ces perpendiculaires ſe rencontrent, ſera le centre N. 92. du cercle CBD.

Pour la démonſtration : du point A tirés aux points C, B & D, les lignes AC, AB & AD.

Démonſt. Les triangles AEC & AEB ont l'angle AEC égal à l'angle AEB (*n*), N. 18. puiſque la ligne EA eſt perpendiculaire à la ligne BC (*c*) ; & les côtés EC & EA qui

forment le premier, égaux aux côtés EB & EA qui forment le second, chacun à chacun; puisque EC est égal à EB (*c*), & que EA est commun à ces deux triangles; ainsi l'autre côté AC du premier est égal à
N. 80. l'autre côté AB du second (*n*); & par conséquent, puisqu'en comparant le triangle AFB au triangle AFD, on démontre de la même maniere que le côté AB est égal au côté AD, les trois lignes AC, AB & AD sont égales entr'elles. Or puisque les trois lignes AC, AB & AD qui sont tirées chacune du point A à l'arc de cercle CBD sont égales entr'elles, ce point est le centre
N. 225. de cet arc (*n*); donc C. Q. F. D.

PROPOSITION XXVI.

THEOREME.

246. *Si des cercles sont égaux entr'eux, & si des angles qui ont pour sommets des points des circonférences de ces cercles, le sont aussi, les arcs de ces mêmes cercles, sur lesquels ces angles s'appuyent, seront égaux entr'eux.*

Fig. 44. SI les cercles G & H * sont égaux entr'eux, & si les angles B & E le sont

auſſi, les arcs AIC & DKF ſeront auſſi égaux entr'eux

Conſt. Tirés du centre G du cercle G aux points A & C, les lignes GA & GC; du point A au point C, la ligne AC; du centre H du cercle H, aux points D & F, les lignes HD & HF; & du point D au point F, la ligne DF.

Démonſt. L'angle G eſt double de l'angle B (*n*), puiſque le ſommet de l'angle G N. 240.
eſt le centre du cercle G (*c*), que le ſommet de l'angle B eſt un point de la circonférence de ce même cercle (*h*), & que ces deux angles s'appuyent chacun ſur le même arc AIC de ce cercle: or on démontre de la même maniere que l'angle H eſt double de l'angle E; & par conſéquent puiſque les angles B & E ſont égaux entr'eux (*h*), les angles G & H le ſont auſſi (*n*). Ainſi les N. 67.
triangles AGC & DHF ont l'angle G égal à l'angle H (*d*), & les côtés GA & GC qui forment le premier, égaux aux côtés HD & HF qui forment le ſecond, chacun à chacun; puiſque GA & HD ſont (*c*) rayons de cercles égaux entr'eux (*h*), & que GC & HF le ſont auſſi (*c*); donc l'autre côté AC du premier triangle eſt égal à l'autre côté DF du ſecond (*n*); & par conſéquent N. 80.
les ſegmens de cercles ABC & DEF ſont poſés ſur des cordes AC & DF égales en-

tr'elles : or ces mêmes ſegmens ſont ſem-
N. 215. blables (*n*), puiſque les angles B & E inſ-
crits chacun dans chacun de ces ſegmens,
ſont égaux entr'eux (*h*) ; donc ces ſegmens
N. 244. ſont auſſi égaux entr'eux (*n*); & par con-
ſéquent, puiſque les cercles G & H le ſont
auſſi (*h*), ſi du premier cercle on retranche
le ſegment ABC, & du ſecond, le ſegment
DEF, les reſtes qni ſont les ſegmens AIC
& DKF ſeront égaux entr'eux. Enfin puiſ-
que les ſegmens AIC & DKF ſont égaux
entr'eux, & que les cordes AC & DF ſur
leſquelles ils ſont poſés, chacun ſur chacu-
ne, ſont égales entr'elles (*d*), les arcs AIC
& DKF de ces ſegmens, qui ſont les arcs
ſur leſquels les angles B & E s'appuyent,
N. 244. ſont égaux entr'eux (*n*) ; donc C. Q. F. D.

COROLLAIRE.

247. Il ſuit de la démonſtration de ce Théorême, que *les arcs de cercles égaux entr'eux, ſur leſquels s'appuyent des angles qui le ſont auſſi, & dont les ſommets ſont les centres de ces cercles, ſont égaux entr'eux.*

PROPOSITION XXVII.

THEOREME.

248. *Si des cercles sont égaux entr'eux ; & si les arcs de ces cercles, sur lesquels des angles dont les sommets sont des points des circonférences de ces mêmes cercles s'appuyent, le sont aussi, ces angles seront égaux entr'eux.*

SI les cercles G & H* sont égaux entr'eux, & si les arcs AIC & DKF le sont aussi, les angles B & E seront égaux entr'eux. Fig. 44.

Démonst. La moitié de l'arc AIC, est la mesure de l'angle B (*n*), & la moitié de N. 239. l'arc DKF est celle de l'angle E : or ces arcs AIC & DKF sont égaux entr'eux (*h*) ; donc la mesure de l'angle B est égale à celle de l'angle E ; & par conséquent ces angles sont égaux entr'eux ; donc C. Q. F. D.

COROLLAIRE.

249. Il suit de la démonstration de ce Théorême, que *si des cercles sont égaux entr'eux, & si les arcs de ces cercles sur lesquels des angles dont les sommets sont les*

centres de ces mêmes cercles s'appuyent, le sont aussi, ces angles seront egaux entr'eux.

PROPOSITION XXVIII.

THEOREME.

250. *Les arcs de cercles égaux entr'eux, qui sont soustendus par des cordes égales entr'elles, sont égaux entr'eux.*

Fig. 45. SI les cercles B & E * sont égaux entr'eux, & si les cordes AC & DF sont égales entr'elles, les arcs AGC & DHF seront égaux entr'eux.

Const. Tirés du centre B du cercle B, aux points A & C, les lignes BA & BC; & du centre E du cercle E, aux points D & F, les lignes ED & EF.

Démonst. Les côtés du triangle ABC sont égaux à ceux du triangle DEF, chacun à chacun; puisque les côtés BA & ED sont (*c*) rayons de cercles égaux entr'eux (*h*), que les côtés BC & EF le sont aussi (*c*); & que le côté AC est égal au côté DF (*h*); donc l'angle B du triangle ABC est
N. 87. égal à l'angle E du triangle DEF (*n*); & par conséquent l'arc AGC est égal à l'arc
N. 247. DHF; donc C. Q. F. D.

PROPOSITION XXIX.

THEOREME.

251. *Les cordes qui soustendent des arcs égaux entr'eux, de cercles qui le sont aussi, sont égales entr'elles.*

SI les cercles B & E * sont égaux entr'eux, & si les arcs AGC & DHF, le sont aussi, les cordes AC & DF seront égales entr'elles. Fig. 45.

Const. La même que la précédente.

Démonst. Les triangles ABC & DEF ont l'angle B égal à l'angle E (*n*), puisque l'arc AGC est égal à l'arc DHF (*h*); & les côtés BA & BC qui forment cet angle du premier triangle, égaux aux côtés ED & EF qui forment cet angle du second, chacun à chacun; puisque BA & ED sont (*c*) rayons de cercles égaux entr'eux (*h*), & que BC & EF le sont aussi (*c*); donc l'autre côté AC du premier triangle est égal à l'autre côté DF du second (*n*); & par conséquent puisque ces côtés sont les cordes des arcs AGC & DHF, les cordes AC & DF de ces arcs sont égales entr'elles; donc C. Q. F. D.

N. 249. N. 80.

PROPOSITION XXX.

PROBLEME.

252. *Diviser un arc de cercle en deux parties égales entr'elles.*

Fig. 46. IL faut diviser l'arc ABC * en deux parties égales entr'elles.

Const. De l'une des extrémités A de l'arc ABC, tirés à son autre extrémité C, la ligne AC : divisés cette ligne en deux
N. 91. parties DA & DC égales entr'elles (*n*) : du point D milieu de cette même ligne, éle-
N. 92. vés-lui la perpendiculaire DB (*n*). Cette perpendiculaire divisera l'arc ABC en deux parties BA & BC égales entr'elles.

Pour la démonstration : du point B tirés aux points A & C, les lignes BA & BC.

Démonst. Les triangles ADB & CDB
N. 18. ont l'angle BDA égal à l'angle BDC (*n*), puisque la ligne DB est perpendiculaire à la ligne AC (*c*) ; & les côtés DA & DB qui forment le premier, égaux aux côtés DC & DB qui forment le second, chacun à chacun ; puisque DA est égal à DC (*c*), & que DB est commun à ces deux triangles; donc l'autre côté BA du premier est égal à

l'autre

l'autre côté BC du second (*n*) : or puisque N. 80.
les côtés BA & BC sont égaux entr'eux (*d*), & cordes d'un même cercle, les arcs BA & BC qu'ils soustendent, sont égaux entr'eux (*n*) ; donc C. Q. F. F. N. 250.

PROPOSITION XXXI.

THEOREME.

253. Premierement, *un angle inscrit dans un demi cercle, est droit :* Secondement, *un angle inscrit dans un segment plus grand qu'un demi-cercle, est aigu.* Troisiémement, *enfin un angle inscrit dans un segment moins grand qu'un demi cercle, est obtus.*

Premierement. L'Angle *B* * inscrit dans Fig. 47.
le demi cercle ABC, est droit. *Secondement*, l'angle F inscrit dans le segment EFG plus grand qu'un demi-cercle, est aigu. *Troisiémement*, enfin l'angle K inscrit dans le segment IKL moins grand qu'un demi-cercle, est obtus.

Const. Trouvés les centres des arcs des segmens dans lesquels ces angles sont inscrits (*n*), & achevés les cercles dont ces N. 245.
segmens sont des parties.

Démonst. Chacun des angles B, F & K a pour sommet un point de la circonférence d'un cercle; ainsi chacun de ces angles a pour mesure la moitié de l'arc de ce cercle,
N. 239. sur lequel il s'appuye (*n*): or, *premierement*, l'arc ADC sur lequel l'angle B s'appuye est la moitié de la circonférence ABCD (*h*); donc l'angle B a pour mesure le quart de cette circonférence, & par conséquent, puisque le quart de la circonférence d'un
N. 37. cercle est la mesure d'un angle droit (*n*), l'angle B est droit. *Secondement*, l'arc EHG sur lequel l'angle F s'appuye est moins grand que la moitié de la circonférence EFGH (*h*); donc l'angle F a pour mesure moins que le quart de cette circonférence; & par conséquent, puisque le quart de la circonférence d'un cercle est la mesure d'un angle
N. 37. droit (*n*), l'angle F est aigu. *Troisiémement*, enfin l'arc IML sur lequel l'angle K s'appuye est plus grand que la moitié de la circonférence IKLM (*h*); donc l'angle F a pour mesure plus que le quart de cette circonférence; & par conséquent, puisque le quart de la circonférence d'un cercle est la mesu-
N. 37. re d'un angle droit (*n*), l'angle K est obtus; donc C. Q. F. D.

PROPOSITION XXXII.

THEOREME.

254. *Si un cercle est divisé en deux segmens par une ligne droite tirée du point auquel une autre ligne droite le touche, les angles de ces segmens & les angles dans ces segmens, seront alternativement égaux entr'eux.*

SI le cercle H * est divisé en deux segmens DFC & DEC par une ligne DC, l'angle DCB du segment DEC, sera égal à l'angle F dans le segment DFC; & l'angle ACD du segment DFC, sera égal à l'angle E dans le segment DEC. Fig. 48.

Const. Du point C auquel la ligne AB touche le cercle H, tirés par le centre H de ce cercle, la ligne CG: du point D tirés au point G, la ligne DG.

DEMONSTRATION.

Premierement. L'angle ACG est droit (*n*) puisque la ligne CG passe par le centre N. 237.
du cercle H (*c*); ainsi la somme des angles ACD & DCG est égale à un angle droit (*n*): la somme des angles G & DCG du N. 72.

triangle CDG eſt auſſi égale à un angle droit
N. 133. (*n*), puiſque l'angle CDG de cē triangle, qui eſt inſcrit dans le demi cercle GDFC,
N. 253. eſt droit (*n*), donc la ſomme des angles ACD & DCG eſt égale à celle des angles G & DCG; & par conſéquent ſi de chacune de ces ſommes on retranche l'angle DCG, les reſtes qui ſont l'angle ACD & l'angle G, feront égaux entr'eux. Or la ſomme des angles ACD & DCB eſt égale à celle de deux
N. 94. angles droits (*n*), puiſque la ligne DC qui rencontre la ligne AB, forme ces deux angles avec cette ligne; & la ſomme des angles G & F eſt auſſi égale à celle de deux
N. 242. angles droits (*n*) puiſque la figure FDGC eſt un quadrilatere dont chaque angle eſt un point de la circonférence du cercle H, & que ces angles G & F ſont des angles oppoſés de ce quadrilatere; donc la ſomme des angles ACD & DCB eſt égale à celle des angles G & F; & par conſéquent puiſque l'angle ACD eſt égal à l'angle G (*d*), l'angle DCB l'eſt à l'angle F.

Secondement. La ſomme des angles ACD & DCB eſt égale à celle de deux angles droits (*d*); la ſomme des angles E & F eſt auſſi égale à celle de deux angles droits
N. 242. (*n*), puiſque la figure FDEC eſt un quadrilatere dont chaque angle eſt un point de la circonférence du cercle H, & que ces an-

gles E & F sont des angles opposés de ce quadrilatere ; donc la somme des angles ACD & DCB est égale à celle des angles E & F ; & par conséquent, puisque l'angle DCB est égal à l'angle F (*d*), l'angle ACD l'est à l'angle E ; donc C. Q. F. D.

PROPOSITION XXXIII.

PROBLEME.

255. *Décrire sur une ligne droite donnée, un segment de cercle, capable d'un angle donné.*

IL faut décrire sur la ligne droite AB * un segment de cercle, capable de l'angle E. Fig. 49.

Const. Faites sous la ligne AB un angle BAD qui ait le point A de cette ligne pour sommet, & qui soit égal à l'angle C (*n*). N. 115.
Divisés la ligne AB en deux parties AF & FB égales entr'elles (*n*) : du point F milieu N. 91.
de cette ligne, élevés-lui une perpendiculaire FE (*n*) : du point A élevés la ligne N. 92.
AE perpendiculaire à la ligne AD (*n*), & N. 92.
qui rencontre en un point E la perpendiculaire FE : du point E pris pour centre, & avec la perpendiculaire AE prise pour

rayon, décrivés le ſegment de cercle AGB. Les angles inſcrits dans ce ſegment ſeront égaux chacun à l'angle C.

Pour la démonſtration : achevés le cercle AGBH.

Démonſt. La ligne AD eſt perpendiculaire (*c*) à l'extrémité du rayon AE du cercle AGBH (*c*) ; ainſi elle touche ce cercle
N. 233. au point A (*). Or ce cercle eſt diviſé en deux ſegmens AGB & AHB, par la ligne AB tirée de ce point A ; donc l'angle BAD du ſegment AHB, eſt égal à un angle quel-
N. 254. conque dans le ſegment AGB (*n*), & par conſéquent puiſque l'angle BAD eſt égal à l'angle C (*c*), un angle quelconque dans le ſegment AGB, eſt égal à l'angle C ; donc C. Q. F. F.

PROPOSITION XXXIV.

PROBLEME.

256. *Diviſer un cercle en deux ſegmens, dont l'un ſoit capable d'un angle donné.*

Fig. 50. IL faut diviſer le cercle X * en deux ſegmens, dont l'un ſoit capable de l'angle E.

Conſt. Du point C pris à volonté ſur la circonférence du cercle X, tirés une tangente AB à ce cercle (*n*) : faites ſur cette N. 234. tangente un angle DCB égal à l'angle E, & qui ait le point C de cette tangente pour ſommet (*n*) : le côté CD de cet angle diviſera le cercle X en deux ſegmens, dont N. 115. l'un CFD ſera capable de l'angle E.

Démonſt. La ligne ACB touche le cercle X au point C (*c*) ; or ce cercle eſt diviſé en deux ſegmens CFD & CGD par la ligne CD tirée de ce point C (*c*) ; donc l'angle DCB du ſegment CGB eſt égal à un angle quelconque dans le ſegment CFD (*n*) ; & par conſéquent, puiſque l'angle N. 254. DCB eſt égal à l'angle E (*c*), un angle quelconque dans le ſegment CFD eſt égal à l'angle E ; donc C. Q. F. F.

PROPOSITION XXXV.

THEOREME.

257. *Si deux lignes droites qui sont terminées chacune de part & d'autre à la circonférence d'un cercle, se coupent, le rectangle fait des parties de l'une sera égal au rectangle fait des parties de l'autre.*

LE rectangle fait des parties AF & FB de la ligne AB qui est terminée de part
Fig. 51. & d'autre à la circonférence du cercle X *,
52. 53. est égal au rectangle fait des parties CF &
& 54. FD de la ligne CD, qui est aussi terminée de part & d'autre à la circonférence du même cercle.

Les lignes AB & CD passent chacune par le centre du cercle X, ou une seule y passe, ou enfin aucune n'y passe.

Fig. 51. Premier Cas. *Si les lignes AB & CD * passent chacune par le centre du cercle X.*

Démonst. Les parties AF & FB de la ligne AB sont égales aux parties CF & FD
N. 26. de la ligne CD (*n*), puisque toutes ces parties sont rayons du même cercle X ; ainsi le rectangle fait des parties AF & FB est égal

au

au rectangle fait des parties CF & FD.

Second Cas. *Si une seule des lignes AB & CD *, par exemple la ligne AB, passe par le centre du cercle X, elle est perpendiculaire ou oblique à la ligne CD.* Fig. 52 & 53.

Premierement. Si la ligne AB est perpendiculaire à la ligne CD *. Fig. 52.

Const. Du centre E du cercle X, tirés au point C, la ligne EC.

Démonst. La somme des quarrés de chacun des côtés CF & FE du triangle CFE, est égale au quarré du côté CE (*n*), puisque ce N. 158. triangle est rectangle en F (*h*); le quarré du côté CE est égal à celui de la ligne EB, puisque ce côté & cette ligne sont rayons du même cercle X; & le quarré de la ligne EB est égal à la somme du rectangle des parties AF & FB de la ligne AB, & du quarré de la ligne FE (*n*); puisque la ligne EB N. 182. étant la moitié de la ligne AB (*n*), la ligne N. 32. FE est la moitié de la différence des parties AF & FB de cette ligne AB; donc la somme du quarré du côté CF & de celui du côté FE, est égale à la somme du rectangle des parties AF & FB, & du quarré de la ligne FE (*n*); & par conséquent si de cha- N. 62. cune de ces sommes on retranche le quarré de la ligne FE, les restes qui sont le quarré de la partie CF & le rectangle des parties AF & FB, seront égaux entr'eux (*n*). Or N. 64.

le quarré de la partie CF est le rectangle des parties CF & FD de la ligne CD, puisque la ligne AB qui passe par le centre E du cercle X (h), & est perpendiculaire à cette ligne CD (h), la divise en ces deux parties
N. 219. CF & FD égales entr'elles (n); donc le rectangle des parties AF & FB de la ligne AB est égal à celui des parties CF & FD de la ligne CD.

Secondement. Si la ligne AB est oblique
Fig. 53. à la ligne CD *.

Const. Du centre E du cercle X abaissés
N. 93. la perpendiculaire EG à la ligne CD (n), & tirés au point D, la ligne ED.

Démonst. La somme du rectangle des parties AF & FB de la ligne AB, & du quarré de la ligne FE, est égale au quarré
N. 182. de la ligne EB (n), puisque la ligne EB
N. 32. étant la moitié de la ligne AB (n), la ligne FE est la moitié de la différence des parties AF & FB de la ligne AB; le quarré de la ligne EB est égal à celui de la ligne ED, puisque ces lignes sont rayons du même cercle X; & le quarré de la ligne ED est égal à la somme des quarrés des lignes EG &
N. 168. GD (n), puisque le triangle EGD est rectangle en G (c); donc la somme du rectangle des parties AF & FB, & du quarré de la ligne FE, est égale à la somme des quar-
N. 62. rés des lignes EG & GD (n); & par con-

séquent si à chacune de ces sommes on ajoute le quarré de la ligne GF, la somme du rectangle des parties AF & FB, & des quarrés des lignes FE & GF, sera égale à celle des quarrés des lignes EG, GD & GF (*n*). Or le quarré de la ligne FE est N. 65
égal à la somme des quarrés des lignes EG & GF (*n*), puisque le triangle EGF est N. 168.
rectangle en G (*c*); donc si de la premiere de ces deux dernieres sommes égales entr'elles, on retranche le quarré de la ligne FE, & de la seconde, la somme des quarrés des lignes EG & GF, les restes qui sont la somme du rectangle des parties AF & FB, & du quarré de la ligne GF, & le quarré de la ligne GD, seront égaux entr'eux (*n*). Enfin le quarré de la ligne GD est N. 64.
égal à la somme du rectangle des parties CF & FD de la ligne CD, & du quarré de la ligne GF (*n*), puisque la ligne CD étant N. 182.
divisée en deux parties CG & GD égales entr'elles (*n*) par la ligne EG qui lui est per- N. 219.
pendiculaire (*c*) & passe par le centre E du cercle X, cette ligne GF est la moitié de la différence des parties CF & FD; donc la somme du rectangle des parties AF & FB, & du quarré de la ligne GF, est égale à celle du rectangle des parties CF & F D, & du quarré de la ligne GF (*n*); & par conséquent N. 62.
si de chacune de ces sommes on retranche

le quarré de la ligne GF, les restes qui sont le rectangle des parties AF & FB de la ligne AB, & celui des parties CF & FD
N. 64. de la ligne CD, seront égaux entr'eux (*n*).

Troisiéme Cas. *Si aucune des lignes*
Fig. 54. *AB & CD * ne passe par le centre du cercle X.*

Const. Par le point F & le centre E du cercle X, tirés la ligne GH.

Démonst. Puisque la ligne GH passe par le centre E du cercle X (*c*), le rectangle des parties GF & FH de cette ligne, est égal à celui des parties AF & FB de la ligne AB (*d*); ce même rectangle est aussi égal à celui des parties CF & FD de la ligne CD (*d*); donc le rectangle des parties AF & FB est égal à celui des parties
N 61. CF & FD (*n*); donc C. Q. F. D.

PROPOSITION XXXVI.

THEOREME.

258. *Si deux lignes droites dont l'une touche un cercle, & dont l'autre le traverse, sont tirées d'un même point hors de cette figure à sa circonference, le rectangle fait de celle qui traverse ce cercle & de sa partie extérieure à ce cercle, sera égal au quarré de celle qui le touche.*

LE rectangle fait de la ligne AC qui traverse le cercle X * & de sa partie Fig. 55. & 56.
AD extérieure à ce cercle, est égal au quarré de la ligne AB qui touche ce même cercle au point B.

La ligne AC passe par le centre E du cercle X, ou elle n'y passe point.

Premier Cas. *Si la ligne AC * passe par le centre E du cercle X.* Fig. 55.

Const. Du centre E du cercle X, tirés au point B, la ligne EB.

Démonst. La ligne EB est perpendiculaire à la ligne AB (*n*), puisqu'elle est tirée du centre E du cercle X au point B auquel cette ligne AB le touche (*c*); ainsi le trian- N. 237.

gle ABE est rectangle en B ; & par conséquent la somme du quarré de la ligne AB & de celui de la ligne EB, est égale au quar-
N. 168. ré de la partie AE de la ligne AC (*n*) : or le quarré de cette partie AE est égal à la somme du quarré de la ligne ED, & du rectangle fait de la ligne AC & de sa partie
N. 184. AD (*n*), puisque cette partie AE est composée de la partie AD de la ligne AC, & de la moitié ED de son autre partie DC
N. 37. (*n*) ; donc la somme du quarré de la ligne AB, & de celui de la ligne EB, est égale à celle du quarré de la ligne ED, & du rectangle fait de la ligne AC & de sa partie AD
N. 62. (*n*) ; & par conséquent si de la premiere de ces sommes on retranche le quarré de EB, & de la seconde, le quarré de ED qui est égal à celui de EB, puisque les lignes EB & ED qui sont rayons du même cercle X (*c*) sont égales entr'elles, les restes qui sont le quarré de la ligne AB, & le rectangle fait de la ligne AC & de sa partie AD, seront égaux entr'eux (*n*),
N. 64.

Fig. 56. Second Cas. *Si la ligne AC * ne passe point par le centre du cercle X.*

Const. Du centre E du cercle X abaissés
N. 93. la perpendiculaire EF à la ligne DC (*n*) & tirés aux points A, D & B, les lignes EA, ED & EB.

Démonst. Puisque la ligne EF passe par le

centre E du cercle X (*c*), & eſt perpendiculaire à la ligne DC qui eſt terminée de part & d'autre à la circonférence de ce cercle (*c*) ; elle diviſe cette ligne en deux parties DF & FC égales entr'elles (*n*) ; donc la N. 219.
partie AF de la ligne AC eſt compoſée de l'une des parties AD de cette ligne, & de la moitié DF de ſon autre partie DC ; & par conſéquent la ſomme du quarré de la partie DF & du rectangle fait de la ligne AC & de ſa partie AD, eſt égale au quarré de la partie AF (*n*). Or puiſque la ſomme N. 134.
du quarré de la partie DF & du rectangle fait de la ligne AC & de ſa partie AD, eſt égale au quarré de la partie AF, ſi à cette ſomme & au quarré de cette partie AF on ajoute le quarré de la ligne EF, la ſomme des quarrés des lignes EF & DF, & du rectangle fait de la ligne AC & de ſa partie AD, ſera égale à la ſomme des quarrés des lignes EF & AF (*n*) : mais la ſomme des N. 63.
quarrés des lignes EF & AF eſt égale au quarré de la ligne EA (*n*), puiſque le trian- N. 168.
gle AFE eſt rectangle en F (*c*) ; & le quarré de la ligne EA eſt égal à la ſomme des quarrés des lignes AB & EB (*n*), puiſque N. 168.
le triangle ABE dont le côté EB eſt une ligne tirée du centre E du cercle X au point B auquel le côté AB touche ce cercle (*h*), eſt rectangle en B (*n*) ; donc la ſomme des N. 237.

quarrés des lignes EF & DF, & du rectangle fait de la ligne AC & de sa partie AD, est égale à la somme des quarrés des lignes
N. 62. AB & EB (*n*); & par conséquent, puisque la somme des quarrés des lignes EF & DF qui sont côtés du triangle DFE, rectangle en F (*c*), est égale au quarré de la ligne ED
N. 168. (*n*), la somme du quarré de la ligne ED & du rectangle fait de la ligne AC & de sa partie AD, est égale à la somme des quarrés des lignes AB & EB. Enfin puisque la somme du quarré de la ligne ED & du rectangle fait de la ligne AC & de sa partie AD, est égale à la somme des quarrés des lignes AB & EB, si de la premiere de ces sommes on retranche le quarré de ED, & de la seconde, le quarré de EB qui est égal à celui de ED, puisque les lignes ED & EB qui sont rayons du même cercle X (*c*), sont égales entr'elles, les restes qui sont le rectangle de la ligne AC & de sa partie AD, & le quarré de la ligne AB, seront égaux en-
N. 64. tr'eux (*n*); donc C. Q. F. D.

COROLLAIRE I.

259. Il suit de ce Théorême, que *si deux lignes droites qui traversent un cercle, sont tirées d'un même point hors de cette figure à sa circonférence, le rectangle fait de l'une de ces lignes & de sa partie extérieure à ce cercle, sera égal au rectangle*

fait de l'autre de ces lignes, & de sa partie extérieure à ce même cercle.

Le rectangle fait de la ligne AB * & de sa partie AE, est égal à celui de la ligne AC & de sa partie AF. Fig. 57.

Const. Du point A tirés au cercle X, la tangente AD (*n*). N. 236.

Démonst. Le rectangle de la ligne AB & de sa partie AE, est égal au quarré de la ligne AD (*n*); le rectangle de la ligne AC & de sa partie AF, est aussi égal au quarré de la même ligne AD (*n*); donc le rectangle de la ligne AB & de sa partie AE, est égal au rectangle de la ligne AC & de sa partie AF (*n*); donc C. Q. F. D. N. 258. N. 258. Fig. 62.

COROLLAIRE II.

260. Il suit aussi de ce Théorême, que *les tangentes tirées à un cercle d'un même point hors de cette figure, sont égales entr'elles.*

Les tangentes AB & AC * tirées du même point A au cercle X, sont égales entr'elles. Fig. 58.

Const. Du point A tirés à la circonférence du cercle X; une ligne droite quelconque AD qui traverse ce cercle.

Démonst. Le rectangle de la ligne AD & de sa partie AE, est égal au quarré de la tangente AB (*n*); le même rectangle est aussi égal au quarré de la tangente AC (*n*); N. 258. N. 258.

donc le quarré de la tangente AB est égal
N. 62. à celui de la tangente AC (*n*) ; & par conséquent ces tangentes AB & AC sont égales entr'elles ; donc C. Q. F. D.

COROLLAIRE III.

261. Il suit de ce Corollaire, que *d'un même point on ne peut tirer à un cercle plus*
Fig. 58. *de deux tangentes.*

Du point A * on ne peut tirer au cercle X plus de deux tangentes AB & AC.

Démonst. Les tangentes tirées à un cercle, d'un même point hors de cette figure,
N. 260. sont égales entr'elles (*n*) : or d'un même point hors d'un cercle, on ne peut tirer à ce cercle plus de deux lignes droites égales
N. 224 entr'elles (*n*) : donc d'un même point hors d'un cercle, on ne peut tirer à ce cercle plus de deux tangentes ; donc C. Q. F. D.

USAGE.

262. *On peut se servir de ce Théorême*
Fig. 59. *de la maniere suivante, pour mesurer le diametre d'un cercle X* dans lequel on ne peut point entrer.*

Du poins A pris à volonté hors du cercle X; on tire à ce cercle, soit avec des cordes, soit autrement, deux tangentes AB & AC. On divise l'angle BAC formé par ces cordes, en deux parties BAD &
N. 81. *CAD égales entr'elles* (n). *On mesure*

l'une de ces tangentes ; on mesure aussi la ligne AD qui, si elle étoit prolongée, passeroit par le centre du cercle X (n), *puisqu'elle est également éloignée des tangentes* N. 224.
AB & AC qui sont égales entr'elles (n). N. 260.
On multiplie par lui-même le nombre de mesures que contient l'une de ces tangentes. On divise le produit par le nombre de mesures que contient la ligne AD, & le quotient est le nombre de mesures que contient la ligne AE ; puisque le quarré de AB ou celui de AC, est égal au rectangle de AE & de AD (n). *Or puisque ce quotient est* N. 258.
le nombre de mesures que contient la ligne AE ; si de ce nombre, on retranche le nombre de mesures que contient la ligne AD, le reste sera le nombre de mesures que contient le diametre DE du cercle X ; donc C. Q. F. F.

PROPOSITION XXXVII.

THEOREME.

263. *Si deux lignes droites qui sont tirées d'un même point hors d'un cercle à la circonférence de ce cercle, sont telles que le quarré de l'une soit égal au rectangle fait de l'autre & de de sa partie exterieure à ce cercle, celle dont le quarré est égal au rectangle fait de l'autre & de sa partie extérieure, est tangente à ce cercle.*

Fig. 60. SI le quarré de la ligne AB * qui est tirée du point A à la circonférence du cercle X, est égal au rectangle de la ligne AC & de sa partie AD, cette ligne AB est tangente au cercle X.

Const. Du point A tirés au cercle X, la N. 236. tangente AF (*n*) : du centre E de ce même cercle, tirés aux points B & F, les lignes EB & EF.

Démonst. Puisque la ligne AF est tangente au cercle X (*c*), le quarré de cette ligne est égal au rectangle de la ligne AC N. 258. & de sa partie AD (*n*) : or le quarré de la ligne AB est aussi égal à ce même rectan-

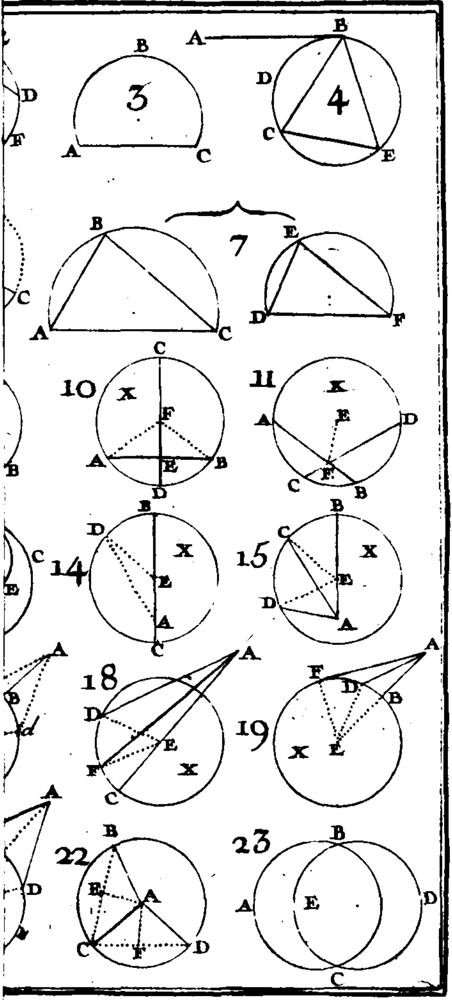
VII.

tirées
à la
telles
u rec-
partie
quar-
re &
nte à

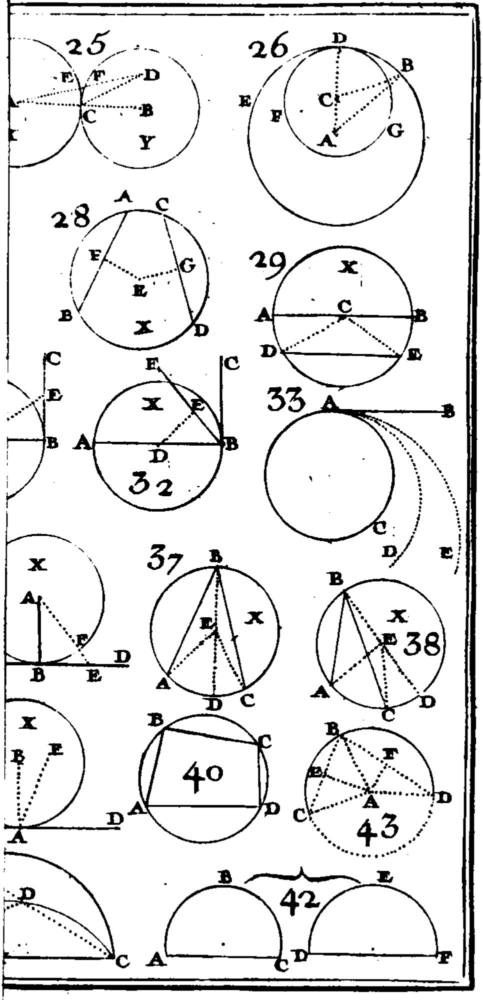
ſt ti-
e du
AC
tan-

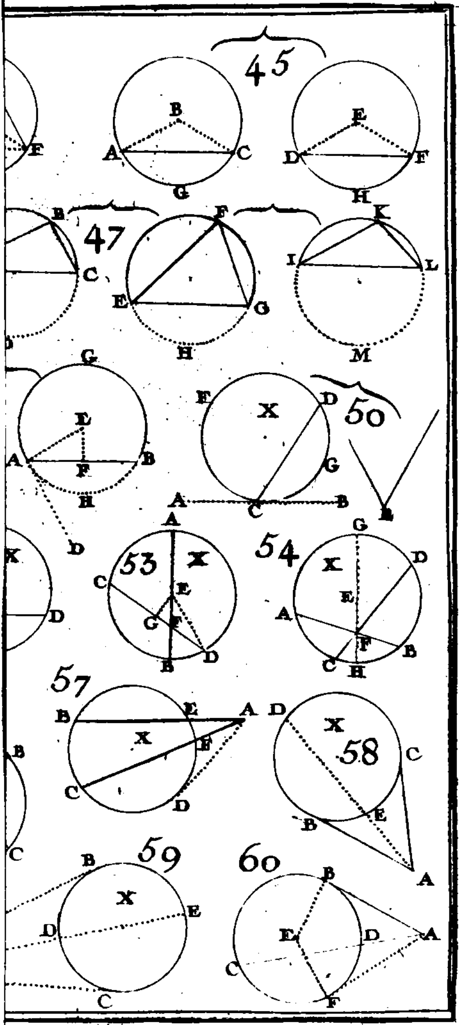
, la
mê-
nes

in-
rte
C
la
n-



9


25
E
F
D
A
C
B
Y
26
D
B
E
C
F
A
G
28
A
C
F
G
E
B
X
D
29
X
A
C
B
D
E
C
E
B
E
C
X
E
A
B
D
32
33
A
B
C
D
E
X
A
F
D
B
E
37
B
E
X
A
D
C
B
X
E
38
A
D
C
X
B
F
A
D
B
C
40
A
D
B
F
E
A
D
C
43
D
C
A
B
42
E
C
D
F


45
B
A
C
G
E
D
F
H
47
B
C
F
E
G
H
K
I
L
M
G
E
A
F
B
H
D
E
X
D
G
A
C
B
50
53
A
X
C
E
G
F
D
B
54
G
X
D
E
A
F
B
C
H
57
B
E
A
X
F
C
D
D
X
58
C
E
B
A
B
C
59
B
X
E
D
C
60
B
E
D
A
C
F

gle (*h*) ; donc le quarré de la ligne AF & celui de la ligne AB sont égaux entr'eux (*n*); N. 524.
& par conséquent les lignes AF & AB sont égales entr'elles. Ainsi les triangles AFE & ABE ont le côté AE commun entr'eux, le côté AF égal au côté AB (*d*), & le côté EF égal au côté EB, puisque EF & EB sont rayons du même cercle X (*c*) ; donc les angles du premier triangle sont égaux à ceux du second, chacun à chacun (*n*) ; & par conséquent puisque l'angle F N. 87.
que la ligne AF forme avec la ligne EF qui est tirée du centre E du cercle X, au point F auquel cette ligne AF touche ce cercle, est droit (*n*), l'angle B l'est aussi. N. 237.
Or puisque l'angle B est droit, la ligne AB est perpendiculaire à l'extrémité du rayon EB du cercle X (*n*) ; & par conséquent N. 20.
elle est tangente à ce cercle (*n*) ; donc C. N. 233.
Q. F. D.

Fin du troisiéme Livre.

LES ELEMENS D'EUCLIDE.

LIVRE QUATRIE'ME.

Euclide commençe ce Livre comme il a fait les précédens; c'est-à-dire par définir quelques termes dont il doit se servir. Il enseigne ensuite la maniere d'inscrire dans un cercle differens Polygones, & celle de les circonscrire à cette figure; & c'est tout ce que contient ce Livre.

DEFINITIONS.

I.

264. Une figure rectiligne est *inscrite* dans une autre, lorsque chaque angle de cette figure a pour sommet un point de la circonférence de cette autre.

Fig. 1. *La figure ABCD * est* inscrite *dans la figure EFGH.*

I I.

265. Une figure rectiligne eſt *circonſcrite* à un autre, lorſque chaque côté de cette figure a un point commun avec le ſommet de chaque angle de cette autre.

*La figure EFGH * eſt* circonſcrite *à la figure ABCD.* Fig. 1.

III.

266. Une figure rectiligne eſt *inſcrite* dans un cercle, lorſque le ſommet de chaque angle de cette figure, eſt un point de la circonférence de ce cercle.

*La figure ABCD * eſt* inſcrite *dans le cercle X.* Fig. 2.

I V.

267. Une figure rectiligne eſt *circonſcrite* à un cercle, lorſque chaque côté de cette figure touche la circonférence de ce cercle.

*La figure ABCD * eſt* circonſcrite *au cercle X.* Fig. 3.

V.

268. Un cercle eſt *inſcrit* dans une figure rectiligne, lorſque chaque côté de cette figure touche la circonférence de ce cercle.

*Le cercle X * eſt* inſcrit *dans la figure ABCD.* Fig. 4.

V I.

269. Un cercle eſt *circonſcrit* à une figure rectiligne, lorſque le ſommet de cha-

que angle de cette figure est un point de la circonférence de ce cercle.

Fig. 2. *Le cercle X* est* circonscrit *à la figure ABCD.*

VII.

270. Une ligne droite est *inscrite* dans un cercle, lorsqu'elle est terminée de part & d'autre à la circonférence de ce cercle.

PROPOSITION I.

PROBLEME.

271. *Dans un cercle donné, inscrire une ligne droite égale à une autre, pourvu qu'elle soit moins grande que le diametre de ce cercle* (n).

N. 231.

Fig. 14. Il faut inscrire dans le cercle X*, une ligne droite égale à la ligne droite A.

Const. Tirés un diametre quelconque BC de ce cercle : divisés ce diametre en deux parties BD & DC, telles que l'une BD soit
N. 79. égale à la ligne A : du point B pris pour centre, & avec la partie BD prise pour rayon, décrivés un cercle GEDF : du point B tirés à l'un ou à l'autre des points E & F, ausquels la circonférence du cercle GEDF coupe celle du cercle X, une ligne

BE

BE ou BF, cette ligne sera égale à la ligne A, & inscrite dans le cercle X.

Démonst. La ligne BE est égale à la partie BD, puisque cette ligne & cette partie sont rayons du même cercle GEDF (*c*); or la partie BD est égale à la ligne A (*c*); donc la ligne BE est égale à la ligne A. Ainsi la ligne BE est égale à la ligne A (*d*); & elle est inscrite dans le cercle X (*n*), puisqu'elle est terminée de part & d'au- N. 270.
tre à la circonférence de ce cercle (*c*); donc C. Q. F. F.

PROPOSITION II.

PROBLEME.

272. *Dans un cercle donné, inscrire un triangle équiangle à un autre.*

IL faut inscrire dans le cercle GEH*, un Fig. 5.
triangle équiangle au triangle ABC.

Const. D'un point E pris à volonté sur la circonférence de ce cercle, tirés à ce cercle une tangente DEF (*n*): faites sur cette tan- N. 234.
gente un angle HEF, qui ait le point E de cette tangente pour sommet, & qui soit égal à un angle quelconque C du triangle ABC (*n*): N. 115.
faites aussi sur cette même tangente un au-

gle GED, qui ait auſſi le point E de cette tangente pour ſommet, & qui ſoit égal à un autre angle quelconque A du même trian-
N. 115. gle ABC (*n*) : du point G auquel le côté EG rencontre la circonférence du cercle GEH, tirés au point H auquel le côté EH rencontre cette même circonférence, la ligne GH. Le triangle GEH ſera équiangle au triangle ABC, eſt inſcrit dans le cercle GEH.

Démonſt. L'angle G dans le ſegment EGH eſt égal à l'angle HEF du ſegment
N. 254. HIE (*n*) ; & l'angle HEF eſt égal à l'angle C (*c*) ; donc l'angle G eſt égal à l'angle C ; & par une démonſtration pareille, l'angle H eſt égal à l'angle A. Or puiſque les triangles GEH & ABC ont l'angle G égal à l'angle C, & l'angle H égal à l'angle A, l'autre angle E du premier triangle, eſt égal
N. 135. à l'autre angle B du ſecond (*n*) ; & par conſéquent ces triangles ſont équiangles. Ainſi le triangle GEH eſt équiangle au triangle ABC (*d*) ; & il eſt inſcrit dans le cercle
N. 166. GEH (*n*), puiſque chaque angle de ce triangle eſt un point de la circonférence de ce cercle (*c*) ; donc C. Q. F. F.

PROPOSITION III.

PROBLEME.

273. *Circonscrire à un cercle donné, un triangle équiangle à un autre.*

IL faut circonscrire au cercle DEF *, un triangle équiangle au triangle ABC. Fig. 6.

Const. Prolongés de part & d'autre à volonté, un des côtés du triangle ABC : tirés un rayon quelconque GF du cercle DEF : faites sur ce rayon GF un angle FGE, qui ait le point G de ce rayon pour sommet, & soit égal à l'un des angles extérieurs BCM du triangle ABC (*n*) : faites encore sur le N. 116. même rayon GF un angle FGD, qui ait aussi le point G de ce rayon pour sommet, & soit égal à l'autre angle extérieur BAL du même triangle ABC (*n*) : des points F, E & D N. 115. auxquels les rayons GF, GE & GD rencontrent la circonférence du cercle DEF, tirés à ce cercle les tangentes HFK, KEI & HDI (*n*) : prolongés ces tangentes jus- N. 234. qu'à ce qu'elles se rencontrent ; & le triangle HIK qu'elles formeront sera équiangle au triangle ABC, & circonscrit au cercle DEF.

Démonst. La somme des angles GFK, GEK, FGE & K de la figure FGEK, est
N. 138. égale à celle de quatre angles droits (*n*), puisque cette figure a quatre côtés: or la somme des angles GFK & GEK est égale à celle de deux angles droits, puisque chacun de ces angles qui est formé par une ligne tirée du centre G du cercle DEF au point auquel une ligne droite le touche (*c*), est
N. 237. droit (*n*) ; donc si de la somme des angles GFK, GEK, FGE & K, on retranche celle des angles GFK & GEK, le reste qui est la somme des angles FGE & K, sera égale à celle de deux angles droits. Ainsi, puisque la somme des angles FGE & K est égale à celle de deux angles droits, & que celle des angles BCM & BCA est aussi éga-
N. 94. le à celle de deux angles droits (*n*), la somme des angles FGE & K, est égale à celle
N. 62. des angles BCM & BCA (*n*); & par conséquent puisque l'angle FGE est égal à l'angle BCM (*c*), l'angle K l'est à l'angle BCA : or par une démonstration pareille, l'angle H est égal à l'angle BAC; donc puisque les triangles HIK & ABC ont l'angle H égal à l'angle BAC, & l'angle K égal à l'angle BCA, l'autre angle I du premier triangle
N. 135. est égal à l'autre angle B du second (*n*); & par conséquent ces triangles sont équiangles. Ainsi le triangle HIK est équiangle au trian-

gle ABC (*d*), & il eſt circonſcrit au cercle DEF(*n*), puiſque chaque côté de ce triangle N. 267. touche la circonférence de ce cercle (*c*); donc C. Q. F. F.

PROPOSITION IV.

PROBLEME.

274. *Inſcrire un cercle dans un triangle, donné.*

IL faut inſcrire un cercle dans le triangle ABC *. Fig. 79.

Conſt. Diviſés l'un des angles du triangle ABC, par exemple l'angle BAC, en deux parties BAD & CAD égales entr'elles (*n*): N. 88. diviſés auſſi un autre angle de ce même triangle, par exemple l'angle BCA, en deux parties BCD & ACD égales entr'elles (*n*): du point D auquel les lignes AD N. 88. & CD ſe rencontrent, abaiſſés à l'un des côtés de ce triangle, par exemple au côté AC, la perpendiculaire DG(*n*): du point D N. 93. pris pour centre, & avec cette perpendiculaire DG priſe pour rayon, décrivés un cercle EFG : ce cercle EFG ſera inſcrit dans le triangle ABC.

Pour la démonſtration : du point D à

abaissés au côté BC la perpendiculaire DF ;
N. 21. & au côté AB la perpendiculaire DE (*n*).

Démonst. Les triangles ADE & ADG ont le côté AD commun entr'eux, & les angles DAE & AED qui sont, l'un à l'extrémité de ce côté AD du premier triangle, & l'autre opposé à ce côté, égaux aux angles DAG & AGD qui sont, l'un à l'extrémité de ce même côté AD du second triangle, & l'autre opposé à ce côté ; puisque l'angle DAE est égal à l'angle DAG (*c*), & que les angles AED & AGD sont droits
N. 20. chacun (*n*) ; ainsi les autres côtés du premier triangle sont égaux aux autres côtés du se-
N. 119. cond, chacun à chacun (*n*) ; & par conséquent le côté DE est égal au côté DG : or on démontre de la même maniere, en comparant le triangle DGC au triangle DFC, que le côté DG est égal au côté DF ; donc les côtés DG, DE & DF sont égaux entr'eux ; & par conséquent puisque le cercle EGF est décrit du point D commun à ces côtés, pris pour centre, & avec la perpendiculaire DG qui est l'un de ces côtés, prise pour rayon, les autres côtés DF & DE sont aussi rayons
N. 32. de ce même cercle (*n*). Ainsi puisque les côtés DE, DF & DG sont rayons du cercle EFG, & que les côtés AB, BC & AC, du triangle ABC sont perpendiculaires aux extrémités de ces rayons (*c*), les

côtés du triangle ABC touchent chacun la circonférence du cercle EFG (*n*); & par N. 233. conséquent ce cercle est inscrit dans ce triangle (*n*); donc C. Q. F. F. N. 268.

PROPOSITION V.

PROBLEME.

275. *Circonscrire un cercle à un triangle donné.*

IL faut circonscrire un cercle au triangle ABC*. Fig. 91.

Const. Divisés deux côtés du triangle ABC, par exemple le côté AB & le côté AC, chacun en deux parties égales entr'-elles (*n*): du point D milieu du côté AB N. 91. (*c*) élevés à ce côté la perpendiculaire DF, & du point E milieu du côté AC (*c*), élevés aussi à ce côté la perpendiculaire EF (*n*): du point F auquel ces perpendiculaires se rencontrent, tirés au sommet de l'un N. 92. des angles du triangle ABC, par exemple au sommet de l'angle A, la ligne FA: du point F pris pour centre, & avec cette ligne FA prise pour rayon, décrivés un cercle ABC, ce cercle sera circonscrit au triangle ABC.

Pour la démonstration : du point F tirés aux sommets des angles B & C, les lignes FB & FC.

Démonst. Les triangles AFE & CFE
N. 18. ont l'angle AEF égal à l'angle CEF (*n*), puisque la ligne EF est perpendiculaire à la ligne AC (*c*) ; & les côtés EA & EF qui forment le premier, égaux aux côtés EC & EF qui forment le second, chacun à chacun, puisque EA est égal à EC (*c*), & que EF est commun à ces deux triangles ; ainsi l'autre côté FA du premier est égal à l'autre
N. 80. côté FC du second (*n*) ; & par conséquent, puisqu'en comparant le triangle ADF au triangle BDF, on démontre de la même maniere que le côté FA est aussi égal au côté FB, les trois lignes FA, FB & FC sont égales entr'elles. Or puisque les lignes FA, FB & FC sont égales entr'elles, & que le cercle ABC est décrit de l'extrémité commune F de ces lignes, prise pour centre (*c*), & avec la ligne FA qui est l'une de ces lignes, prise pour rayon (*c*), ce cercle passe par les autres extrémités A, B & C de ces
N. 32. mêmes lignes (*n*) ; donc puisque ces extrémités A, B & C, sont les sommets des angles du triangle ABC (*c*), les sommets des angles de ce triangle sont des points de la circonférence du cercle ABC ; & par conséquent ce cercle est circonscrit à ce triangle

gle (*n*); donc C. Q. F. F. N. 269.

PROPOSITION VI.

PROBLEME.

276. *Inscrire un quarré dans un cercle donné.*

IL faut inscrire un quarré dans le cercle ABCD * Fig. 9.

Const. Tirés un diametre queleonque AC du cercle ABCD : tirés un autre diametre BD de ce même cercle, qui soit perpendiculaire au diametre AC (*n*) : du point B ti- N. 92.
rés aux points A & C, les lignes BA & BC: du point D tirés aux mêmes points A & C les lignes DA & DC. Le quadrilatere AB-CD que ces lignes forment, sera un quarré inscrit dans le cercle ABCD.

Démonst. Les quatre angles qui ont chacun le centre E du cercle ABCD pour sommet, sont égaux entr'eux (*n*), puisque les N. 18.
lignes AC & BD qui forment ces angles, sont réciproquement perpendiculaires (*c*); ainsi les arcs AB, BC, CD & DA sur lesquels ces angles s'appuyent, sont égaux entr'eux (*n*); & par conséquent les cordes AB, N. 247.
BC, CD & DA de ces arcs sont égales en-

N. 251. tr'elles (*n*) : or ces cordes ſont les côtés du quadrilatere ABCD ; donc les côtés de ce quadrilatere ſont égaux entr'eux ; & par conſéquent puiſque les angles de ce même quadrilatere qui ſont inſcrits chacun dans un
N. 253. demi cercle, ſont droits (*n*), ce quadrila-
N. 49. tere eſt un quarré (*n*) ; & il eſt inſcrit dans le
N. 266 cercle ABCD (*n*), puiſque les ſommets de ſes angles ſont des points de la circonférence de ce cercle (*c*) ; donc C. Q. F. F.

PROPOSITION VII.

PROBLEME.

277. *Circonſcrire un quarré à un cercle donné.*

Fig. 10. IL faut circonſcrire un quarré au cercle ABCD *.

Conſt. Tirés un diametre quelconque AC du cercle ABCD : tirés un autre diametre BD de ce même cercle, qui ſoit per-
N. 92. pendiculaire au diametre AC (*n*) : par les points B & D, tirés les paralleles EF & HG au diametre AC ; & par les points A & C
N. 130. les paralleles EH & FG au diametre BD (*n*). Le quadrilatere EFGH que ces paralleles forment, ſera un quarré circonſcrit au cercle ABCD.

Dém. Les lignes EF & AC ſont égales

entr'elles(*n*),puiſqu'elles ſont côtés oppoſés N. 141.
du quadrilatere EFCA qui eſt un parallelogramme (*c*) ; les lignes AC & BD ſont égales entr'elles, puiſqu'elles ſont diametres du même cercle ABCD (*c*) ; & les lignes BD & EH ſont égales entr'elles (*n*), puiſqu'elles ſont côtés oppoſés du quadrilatere EBDH qui eſt un parallelogramme (*c*) ; donc la ligne EF eſt égale à la ligne EH(*n*):or la N. 62.
ligne HG eſt égale à la ligne EF, & la ligne FGl'eſt à la ligneEH(*n*),puiſque le quadrilatere EFGHeſt un parallelogramme(*c*);donc les côtés EF, EH, HG & FG de ce quadrilatere ſont égaux entr'eux (*n*); & par N. 62.
conſéquent ſi ſes angles ſont droits, il ſera un quarré (*n*). Or ſes angles ſont droits;car N. 49.
l'angle AIB eſt droit (*c*), & l'angle E eſt égal à cet angle AIB (*n*), puiſque ces an- N. 142.
gles ſont les angles oppoſés du quadrilatere EBIA qui eſt un parallelogramme (*c*) ; & par des raiſons pareilles, les angles F, G & H ſont auſſi droits chacun; donc le quadrilatere EFGH eſt un quarré. Enfin l'angle IBF eſt droit (*n*), puiſqu'il eſt un angle ex- N. 127.
térieur, que l'angle intérieur E qui lui eſt oppoſé eſt droit (*d*), & que les lignes BD & EH qui forment ces angles avec le côté EF, ſont paralleles (*c*) ; donc le côté EF eſt perpendiculaire à l'extrémité du diametre BD du cercle ABCD ; & par conſé-

N. 233. quent ce côté touche ce cercle (*n*). On démontre de la même maniere que les autres côtés du quarré EFGH touchent aussi chacun le cercle ABCD; ainsi ce quarré est
N. 267. circonscrit à ce cercle (*n*); donc C.Q.F.F.

PROPOSITION VIII.

PROBLEME.

278. *Inscrire un cercle dans un quarré.*

Fig. 10. IL faut inscrire un cercle dans le quarré EFGH *.

Const. Divisés chaque côté du quarré EFGH en deux parties égales entr'elles
N. 91. (*n*) : du milieu B du côté EF, tirés au milieu D du côté qui lui est opposé, la ligne BD : du milieu A du côté EH, tirés de même au milieu C du côté qui lui est opposé, la ligne AC : du point I auquel ces deux lignes se coupent, pris pour centre, & avec une des parties de l'une de ces lignes, par exemple avec la partie AI, prise pour rayon, décrivés un cercle ABCD; ce cercle sera inscrit dans le quarré EFGH.

Démonst. Les côtés opposés EB & HD du quadrilatere EBDH sont égaux & paralleles entr'eux, puisqu'ils sont (*c*) les moi-

tiés des côtés opposés EF & HG du quarré EFGH ; donc les autres côtés EH & BD de ce quadrilatere EBDH sont aussi égaux & paralleles entr'eux (n) ; & par des N. 140.
raisons pareilles les côtés AC & EF du quadrilatere EFCA sont aussi égaux & paralleles entr'eux ; ainsi les quadrilateres EBIA, BFCI, AIDH, & ICGD sont des parallelogrammes ; & par conséquent leurs côtés opposés AE & IB, EB & AI, BF & IC, AH & ID, &c. sont égaux entr'eux (n) ; or AE est égal à EB, puisqu'ils N. 141.
sont (c) les moitiés des côtés EH & EF du quarré EFGH ; donc les côtés AI & IB sont égaux entr'eux, & par des raisons pareilles les côtés IB, IC & ID le sont aussi ; & par conséquent puisque le cercle ABCD est décrit de l'extrémité commune I de ces côtés, prise pour centre, & avec la partie AI qui est l'un de ces côtés, prise pour rayon, ce cercle passe par les autres extrémités A, B, C & D de ces côtés (n). En- N. 32.
fin l'angle IBF est droit (n), puisqu'il est un N. 127.
angle extérieur, que l'angle intérieur E qui lui est opposé est droit (h), & que les lignes BD & EH qui forment ces angles avec le côté EF, sont paralleles (d) ; donc le côté EF est perpendiculaire à l'extrémité du diametre BD du cercle ABCD ; & par conséquent ce côté touche ce cercle (n). Or on dé- N. 233.

montre de la même maniere, que les autres côtés du quarré EFGH touchent aussi chacun le cercle ABCD; ainsi ce cercle est
N. 268. inscrit dans ce quarré (*n*); donc C.Q.F.F.

PROPOSITION IX.

PROBLEME.

279. *Circonscrire un cercle à un quarré.*

Fig. 9. IL faut circonscrire un cercle au quarré ABCD *

Const. Tirés les diagonales AC & BD du quarré ABCD : du point E auquel ces diagonales se coupent, pris pour centre, & avec une des parties de l'une de ces diagonales, par exemple avec la partie EA prise pour rayon, décrivés un cercle ABCD; ce cercle sera circonscrit au quarré ABCD.

Démonst. Les côtés AB & AD du triangle BAD sont égaux entr'eux, puisqu'ils sont côtés du quarré ABCD, & par conséquent puisque l'angle BAD de ce triangle est droit(*h*), les angles ABD & ADB sont
N. 136. chacun la moitié d'un angle droit (*n*); & par des raisons pareilles, les angles BAC & BCA du triangle ABC sont aussi chacun la

moitié d'un angle droit : or puiſque les angles ABD & BAC qui ſont les mêmes que les angles ABE & BAE du triangle AEB, ſont chacun la moitié d'un angle droit, ces angles ſont égaux entr'eux ; & par conſéquent les côtés EA & EB de ce triangle ſont auſſi égaux entr'eux (*n*). On démontre de la même maniere, que les côtés EB, EC,&ED ſont auſſi égaux entr'eux; donc le cercle ABCD décrit de l'extrémité commune E de ces côtés, priſe pour centre, & avec la partie EA qui eſt l'un de ces côtés, priſe pour rayon, paſſe par les autres extrémités A, B, C & D de ces côtés (*n*) ; ainſi puiſque ces extrémités A, B, C & D ſont les ſommets des angles du quarré ABCD (*c*), les ſommets des angles de ce quarré, ſont des points de la circonférence du cercle ABCD ; & par conſéquent ce cercle eſt circonſcrit à ce quarré (*n*) ; donc C. Q. F. F.

N. 85. N. 32. N. 269.

PROPOSITION X.

PROBLEME.

280. *Décrire ſur une ligne droite donnée, un triangle iſocele, tel que l'angle formé par les côtes égaux de ce triangle, ſoit la moitié de chacun de ſes autres angles.*

Fig. 11. IL faut décrire ſur la ligne droite AB * un triangle iſocele, tel que l'angle formé par cette ligne & par le côté de ce triangle, qui ſera égal à cette ligne, ſoit la moitié de chacun des autres angles de ce même triangle.

Conſt. Diviſés la ligne AB en deux parties AC & CB, telles que le rectangle fait de cette ligne & de la moins grande CB de ces parties, ſoit égal au quarré de la plus
N. 193. grande AC (*n*) : de l'extrémité A de cette ligne AB, priſe pour centre, & avec cette même ligne priſe pour rayon, décrivés un cercle BDG : du point B inſcrivés dans ce cercle une ligne BD égale à la plus grande
N. 271. partie AC de cette ligne AB (*n*) : du point A tirés au point D, la ligne AD. Le triangle BAD formé par les lignes AB, AD & BD,

ſera iſocele, & l'angle A ſera la moitié de chacun des autres angles B & ADB.

Pour la demonſtration : du point C tirés au point D, la ligne CD ; & circonſcrivés un cercle ACDE au triangle ACD (*n*). N. 275.

DEMONSTRATION.

Premierement. Le triangle BAD eſt iſocele (*n*), puiſque ſes côtés AB & AD qui N. 42.
ſont rayons du même cercle BDG (*c*), ſont égaux entr'eux. *Secondement.* Le rectangle fait de la ligne AB & de ſa partie CB eſt égal au quarré de la partie AC (*c*) ; or la ligne BD eſt égale à la partie AC (*c*) ; donc le rectangle fait de la ligne AB & de ſa partie CB, eſt égal au quarré de la ligne BD ; & par conſéquent, puiſque ces lignes AB & BD ſont tirées chacune du même point B, à la circonférence du cercle ACDE, la ligne BD touche ce cercle au point D (*n*) ; donc puiſque la ligne DC qui diviſe N. 263.
ce cercle en deux ſegmens CAED & CFD, eſt tirée de ce point D, l'angle A dans le ſegment CAED, eſt égal à l'angle BDC du ſegment CFD (*n*) ; & par conſéquent ſi ce N. 254.
même angle A eſt auſſi égal à l'angle CDA, il ſera la moitié de l'angle ADB. Or l'angle A eſt égal à l'angle CDA ; car puiſque l'angle BCD eſt l'angle extérieur du triangle ACD, & que les angles A & CDA

sont les angles intérieurs de ce même triangle, opposés à cet angle extérieur, cet angle BCD est égal à la somme des angles A
N. 132. & CDA (*n*); & par conséquent, puisque l'angle A est égal à l'angle BDC (*d*), l'angle BCD l'est à l'angle BDA qui est la somme des angles BDC & CDA: or l'angle
N. 83. BDA est égal à l'angle B (*n*), puisque les côtés AB & AD du triangle BAD sont égaux entr'eux (*c*); donc l'angle BCD est égal à l'angle B; & par conséquent les côtés BD & CD du triangle BDC sont égaux
N. 85. entr'eux (*n*). Enfin puisque le côté BD est égal au côté CD, & qu'il l'est aussi au côté AC (*c*), les côtés AC & CD du triangle
N. 62. ACD sont égaux entr'eux (*n*); ainsi l'angle
N. 83. CDA est égal à l'angle A (*n*); & par conséquent l'angle A est la moitié de l'angle ADB; & puisque l'angle B est égal à l'angle ADB (*d*), l'angle A est aussi la moitié de l'angle B; donc C. Q. F. F.

COROLLAIRE.

281. Il suit de ce Problême, que *si l'angle formé par les côtés égaux d'un triangle isocele, est la moitié de chacun des autres angles de ce triangle, il sera la cinquiéme partie de deux angles droits.*

Fig. 12. L'angle A * qui est la moitié de chacun des angles ABC & ACB du triangle iso-

cele BAC, eſt la cinquiéme partie de deux angles droits.

Conſt. Diviſés chacun des angles ABC & ACB du triangle BAC, en deux parties égales entr'elles (*n*). N. 88.

Démonſt. La ſomme des cinq angles A, ABD, DBC, BCE & ACE eſt égale à celle de tous les angles du triangle BAC (*n*) : or la ſomme de tous les angles d'un N. 72. triangle, eſt égale à celle de deux angles droits (*n*) ; donc la ſomme des cinq angles N. 133. A, ABD, DBC, BCE & ACE, eſt égale à celle de deux angles droits ; & par conſéquent, puiſque ces angles ſont égaux entr'eux (*n*), ils ſont chacun la cinquiéme par- N. 280. tie de deux angles droits ; donc C. Q. F. D.

PROPOSITION XI.

PROBLEME.

282. *Inſcrire dans un cercle donné, un Pentagone régulier.* §

IL faut inſcrire dans le cercle ABCDE* Fig. 133. un Pentagone régulier.

§ On nomme *Figure reguliere*, une figure dont tous les côtés ſont égaux entr'eux, & dont tous les angles le ſont auſſi.

Conſt. Décrivés un triangle iſocele FGH, dont l'angle G ſoit la moitié de chacun des
N. 280. autres angles F & H de ce triangle (*n*) : inſcrivés dans le cercle ABCDE un triangle
N. 272. EBD équiangle à ce triangle (*n*) : diviſés chacun des angles BED & BDE du triangle EBD, en deux parties égales entr'elles
N. 88. (*n*). du point B tirés aux points A & C auxquels les lignes DA & EC rencontrent la circonférence du cercle ABCDE, les lignes BA & BC : du point A tirés au point E, la ligne AE : du point C tirés au point D la ligne CD. Le pentagone ABCDE formé par ces lignes BA, BC, AE & CD, & par le côté ED du triangle EBD, ſera régulier, & inſcrit dans le cercle ABCDE.

Démonſtration. Les angles EBD, BEC, CED, BDA & ADE, ont chacun pour ſommet un point de la circonférence du cercle ABCDE (*c*), & ſont égaux entr'eux; puiſque l'angle EBD eſt la moitié de chacun des angles BED & BDE (*c*), que les angles BEC & CED ſont chacun la moitié de l'angle BED (*c*), & que les angles BDA & ADE ſont chacun la moitié de l'angle BDE (*c*); ainſi les arcs ED, BC, CD, BA & AE de ce cercle, ſur leſquels ces
N. 246. angles s'appuyent, ſont égaux entr'eux (*n*); & par conſéquent les côtés ED, BC, CD, BA & AE du pentagone ABCDE qui ſont

les cordes de ces arcs, font égaux entr'eux (*n*). Or les angles de ce pentagone font N. 251.
auffi égaux entr'eux(*n*),puifqu'ils s'appuyent N. 248.
chacun fur trois de ces arcs égaux entr'eux ; donc le pentagone ABCDE eft régulier. Enfin le fommet de chaque angle de ce pentagone eft un point de la circonférence du cercle ABCDE(*c*), ainfi ce pentagone eft infcrit dans ce cercle(*n*);donc C.Q.F.F. N. 266.

COROLLAIRE.

283. Il fuit de la démonftration de ce Problême, que *chaque angle formé par deux des côtés d'un pentagone, eft les trois cinquiémes de deux angles droits.*

PROPOSITION XII.

PROBLEME.

284. *Circonfcrire à un cercle donné, un Pentagone régulier.*

IL faut circonfcrire un Pentagone régulier, au cercle ABCDE *. Fig. 14.

Conft. Infcrivés dans le cercle ABCDE, un pentagone régulier ABCDE (*n*) : du N. 282.
centre L de ce cercle tirés aux fommets des angles de ce pentagone, les lignes LA,

LB, LC, LD & LE : des extrémités A, B, C, D & E de ces lignes, élevés à ces lignes les perpendiculaires KAF, FBG,
N. 92. GCH, HDI & IEK (n) : prolongés, s'il eſt néceſſaire, ces perpendiculaires juſqu'à ce qu'elles ſe rencontrent. Le pentagone KFGHI que ces perpendiculaires forment, ſera régulier, & circonſcrit au cercle ABCDE.

Pour la démonſtration : du centre L du cercle ABCDE tirés aux ſommets des angles du pentagone KFGHI, les lignes LK, LF, LG, LH, & LI.

Démonſt. La ſomme des quarrés des côtés LA & FA du triangle LAF, eſt égale
N. 168. au quarré du côté LF (n), puiſque ce triangle eſt rectangle en A (c) ; & le quarré de ce côté LF eſt égal à la ſomme des quarrés
N. 168. des côtés LB & FB du triangle LBF (n), puiſque ce triangle eſt auſſi rectangle en B (c) ; donc la ſomme des quarrés des côtés LA & FA eſt égale à celle des quarrés des
N. 62. côtés LB & FB (n) ; & par conſéquent, ſi de la premiere on retranche le quarré de LA, & de la ſeconde le quarré de LB qui eſt égal à celui de LA, puiſque les lignes LA & LB qui ſont rayons du même cercle ABCDE (c), ſont égales entr'elles, les reſtes qui ſont le quarré de FA & celui de FB ſe-
N. 64. ront égaux entr'eux (n). Les triangles FAL

& FBL ont donc le côté FA égal au côté
FB, puisque les quarrés de ces côtés sont
égaux entr'eux (*d*) ; le côté LA égal au cô-
té LB, puisque ces côtés sont rayons du
même cercle ABCDE (*c*), & le côté FL
commun entr'eux ; ainsi les angles du pre-
mier de ces triangles, sont égaux à ceux du
second, chacun à chacun (*n*) ; donc l'angle N. 17.
ALF est égal à l'angle BLF ; & par con-
séquent, puisque l'angle ALB est la somme
de ces deux angles, il est double de l'angle
BLF. Or on démontre de la même manie-
re que l'angle CLB est double de l'angle
BLG ; donc puisque les angles ALB &
CLB qui s'appuyent sur des arcs AB & BC
égaux entr'eux (*c*), & ont chacun pour som-
met le centre F de ces arcs, sont égaux en-
tr'eux (*n*), les angles BLF & BLG le sont N. 249.
aussi (*n*). Ainsi les triangles LBF & LBG N. 68.
qui ont le côté LB commun entr'eux, & les
angles LBF & LBG qui sont à l'une des
extrémités de ce côté commun, égaux en-
tr'eux (*n*), puisque ce côté est perpendicu- N. 18.
laire à la ligne FBG (*c*), ont aussi les an-
gles BLF & BLG qui sont à l'autre extré-
mité de ce même côté commun, égaux en-
tr'eux ; donc les autres côtés du premier de
ces triangles, sont égaux aux autres côtés
du second, chacun à chacun (*n*) ; & par N. 119.
conséquent le côté FB est égal au côté GB.

Or on démontre que le côté GC est égal au côté GB, de la même maniere que l'on a démontré que le côté FA l'est au côté FB; on démontre aussi que le côté HC est égal au côté GC, de la même maniere que l'on a démontré que le côté FB l'est au côté GB, & ainsi de suite; donc les côtés FB, GB,
N. 62. GC, HC, &c. sont égaux entr'eux (*n*); & par conséquent, puisque chaque côté du pentagone KFGHI est la somme de deux de ces côtés égaux, les côtés de ce pentagone sont égaux entr'eux. Les angles KFG, FGH, &c. formés chacun par deux des côtés de ce même pentagone sont aussi égaux entr'eux; car puisque les côtés du triangle LAF sont égaux à ceux du triangle LBF, chacun à chacun (*d*), les angles du premier de ces triangles, sont égaux à ceux du second,
N. 87. chacun à chacun (*n*); ainsi l'angle LFA est égal à l'angle LFB; & puisque les triangles LBF & LBG ont le côté LB commun entr'eux, & que les angles BLF & LBF qui sont aux extrémités de ce côté LB du premier de ces triangles, sont égaux aux angles BLG & LBG qui sont aux extrémités de ce même côté LB du second (*d*), l'autre angle LFB de ce premier triangle, est égal à
N. 119. l'autre angle LGB du second (*n*). Or on démontre que l'angle LGC est égal à l'angle LGB, de la même maniere que l'on a démontré

montré que l'angle LFA l'est à l'angle LFB; l'on démontre aussi que l'angle LHC est égal à l'angle LGC, de la même maniere que l'on a démontré que l'angle LFB l'est à l'angle LGB, & ainsi de suite; donc les angles LFA, LFB, LGB, LGC, LHC, &c. sont égaux entr'eux (n); & par consé- N. 624
quent puisque chaque angle formé par deux des côtés du pentagone KFGHI, est la somme de deux de ces angles égaux, les angles formés chacun par deux des côtés de ce pentagone, sont égaux entr'eux. Ainsi puisque les côtés du pentagone KFGHI sont égaux entr'eux (d), & que ses angles le sont aussi (d), ce pentagone est régulier; & puisque ses côtés qui sont perpendiculaires aux extrémités des rayons du cercle ABCDE (c), touchent ce cercle (n), il est circonf- N. 235.
crit à ce même cercle (n); donc C. Q.F.F. N. 267.

PROPOSITION XIII.

PROBLEME.

285. *Inscrire un cercle dans un Pentagone régulier.*

IL faut inscrire un cercle dans le Pentagone ABCDE*. Fig. 145.

Conſt. Diviſés deux des angles du pentagone ABCDE, par exemple les angles EAB & ABC, chacun en deux parties égales entr'elles (*n*) : du point F auquel les lignes AF & BF qui diviſent ces angles, ſe rencontrent, abaiſſés à l'un des côtés de ce pentagone, par exemple au côté AB, la perpendiculaire FG (*n*) : de ce même point F, pris pour centre, & avec cette perpendiculaire FG, priſe pour rayon, décrivés un cercle GHIKL, ce cercle ſera inſcrit dans le pentagone ABCDE.

N. 88.

N. 93.

Pour la démonſtration : du point F abaiſſés aux côtés BC, CD, DE & EA, les perpendiculaires FH, FI, FK & FL (*n*) : du même point F, tirés aux ſommets des angles C, D & E, les lignes FC, FD & FE.

N. 93.

Démonſt. Les triangles FAL & FAG ont le côté FA commun entr'eux, les angles FAL & FAG qui ſont à l'une des extrémités de ce côté commun, égaux entr'eux (*c*), & les angles FLA & FGA qui ſont oppoſés chacun à ce même côté commun, égaux entr'eux, puiſque ces angles ſont droits chacun (*c*) ; ainſi les autres côtés du premier de ces triangles, ſont égaux aux autres côtés du ſecond, chacun à chacun (*n*) ; & par conſéquent le côté FL eſt égal au côté FG. Or on démontre de la même ma-

N. 119.

niere, que le côté FG est égal au côté FH, & ainsi de suite; donc les côtés FL, FG, FH, &c. sont égaux entr'eux (n); & par N. 62. conséquent, puisque le cercle GHIKL est décrit de l'extrémité commune F de ces côtés, prise pour centre (c), & avec la ligne FG qui est l'un de ces côtés, prise pour rayon (c), ces autres côtés FL, FH, FI, &c. sont aussi rayons de ce même cercle (n). N. 32. Ainsi puisque les côtés FL, FG, FH, &c. sont rayons du cercle GHIKL, & que les côtés du pentagone ABCDE sont perpendiculaires aux extrémités de ces rayons (c), les côtés de ce pentagone touchent chacun la circonférence de ce cercle (n); & par N. 233. conséquent ce cercle est inscrit dans ce pen- N. 268. tagone (n); donc C. Q. F. F.

PROPOSITION XIV.

PROBLEME.

286. *Circonscrire un cercle à un Pentagone régulier.*

IL faut circonscrire un cercle au Pentagone ABCDE*. Fig. 16.

Const. Divisés deux des angles du pentagone ABCDE, par exemple les angles

EAB & ABC, chacun en deux parties éga-
N. 88. les entr'elles (*n*) : du point F auquel les lignes AF & BF qui divisent ces angles, se rencontrent, pris pour centre, & avec l'une de ces lignes, par exemple la ligne FA prise pour rayon, décrivés un cercle ABCDE : ce cercle sera circonscrit au pentagone ABCDE.

Pour la démonstration : du point F tirés aux sommets des angles C, D & E, les lignes FC, FD & FE.

Démonst. Les angles FAB & FBA du triangle AFB sont égaux entr'eux, puisqu'ils sont (*c*) les moitiés des angles EAB & ABC d'un polygone régulier (*h*) ; ainsi les côtés FB & FA de ce triangle sont
N. 85. égaux entr'eux (*n*). Or on démontre de la même maniere que le côté FB est égal au côté FC, & ainsi de suite ; donc les côtés FA, FB, FC, &c. sont égaux entr'eux
N. 61. (*n*) ; & par conséquent puisque le cercle ABCDE est décrit de l'extrémité commune F de ces côtés, prise pour centre (*c*), & avec la ligne FA qui est l'un de ces côtés, prise pour rayon (*c*), ce cercle passe par les autres extrémités A, B, C, D & E de ces mê-
N. 32. mes côtés (*n*) ; or ces extrémités A, B, C, D & E sont les sommets des angles du pentagone ABCDE (*c*) ; donc les sommets des angles de ce Pentagone, sont chacun un

point de la circonférence du cercle ABC-DE ; & par conséquent ce cercle est circonscrit à ce pentagone (*n*) ; donc C. Q. F. F. N. 269.

PROPOSITION XV.

PROBLEME.

287. *Inscrire dans un cercle donné, un Exagone régulier.*

IL faut inscrire un Exagone régulier dans le cercle G *. Fig. 17.

Const. Du point A pris à volonté pour centre sur la circonférence du cercle G, & avec un rayon égal à celui de ce cercle, décrivés deux arcs qui coupent, l'un en B & & l'autre en F, la circonférence de ce même même cercle : des points B,A & F tirés par le centre G de ce même cercle, les lignes BGE, AGD & FGC : tirés du point A, aux points B & F, les lignes AB & AF ; du point C aux points B & D, les lignes CB & CD ; & du point E aux points F & D, les lignes EF & ED : l'éxagone AB-CDEF que ces lignes AB, AF, CB, &c. forment, sera régulier, & inscrit dans le cercle G.

Démonst. Le triangle ABG est équila-
N. 41. téral (*n*), puisque les côtés GA & GB de ce triangle, qui sont rayons du même cercle G (*c*), sont égaux entr'eux, & que le côté AB est égal au rayon de ce même cercle (*c*) ; ainsi puisque chaque angle d'un triangle équilateral est égal aux deux tiers d'un
N. 137. angle droit (*n*), & par conséquent à la sixiéme partie de quatre angles droits, l'angle AGB est la sixiéme partie de quatre angles droits. Par une démonstration pareille le triangle AGF est aussi équilateral, & par conséquent l'angle AGF est aussi la sixiéme partie de quatre angles droits. Or l'angle DGE est égal à l'angle AGB qui lui est op-
N. 98. posé au sommet (*n*) ; & par une raison pareille, l'angle DGC est égal à l'angle AGF ; donc ces angles DGE & DGC sont aussi chacun la sixiéme partie de quatre angles droits ; & par conséquent la somme des angles AGB, AGF, DGE & DGC est égale aux quatre sixiémes de quatre angles droits : or la somme de tous les angles qui sont formés par les lignes droites tirées du même point G, est égale à celle de quatre
N. 95. angles droits (*n*) ; donc la somme des angles BGC & FGE est égale aux deux sixiéme de quatre angles droits ; & par conséquent, puisque l'angle BGC est égal à l'an-
N. 98. gle FGE qui lui est opposé au sommet (*n*),

ces angles ſont auſſi chacun la ſixiéme partie de quatre angles droits. Tous les angles qui ont leur ſommet au point G, ſont donc chacun la ſixiéme partie de quatre angles droits (*d*) ; tous ces angles ſont donc égaux entr'eux ; ainſi puiſqu'ils ont chacun pour ſommet le centre G du cercle G (*c*), les arcs de ce cercle ſur leſquels ils s'appuyent, ſont égaux entr'eux (*n*) ; & par conſéquent N. 247. les côtés AB, BC, CD, &c. de l'éxagone ABCDEF qui ſont les cordes de ces arcs, ſont égaux entr'eux (*n*): or les angles ABC, N. 251. BCD, CDE, &c. formés chacun par deux des côtés de cet éxagone, ſont auſſi égaux entr'eux (*n*), puiſque les arcs du cercle G, N. 249. ſur leſquels ces angles s'appuyent, ſont chacun les quatre ſixiémes de la circonférence de ce cercle (*d*) ; donc cet éxagone eſt régulier. Enfin cet éxagone eſt inſcrit dans le cercle G (*n*), puiſque les ſommets N. 266. de ſes angles, ſont chacun un point de la circonférence de ce cercle (*c*) ; donc C. Q. F. F.

COROLLAIRE.

288. Il ſuit de la démonſtration de ce Problême, que *le rayon d'un cercle eſt égal au côté de l'éxagone inſcrit dans ce même cercle.*

PROPOSITION XVI.

PROBLEME.

289. *Inscrire dans un cercle donné, un Penté-décagone régulier.*

Fig. 18. IL faut inscrire un Penté-décagone dans le cercle G *.

Const. Inscrivés dans le cercle G un trian-
N. 272. gle équilateral ABC (*n*) : inscrivés aussi dans ce même cercle un pentagone régulier DB-
N. 282. EFG (*n*), de maniere qu'il ait le sommet de l'un de ses angles, par exemple de l'angle B commun avec le sommet de l'un des angles du triangle ABC : l'arc AG sera la quinziéme partie de la circonférence du cercle X.

Démonst. Les arcs BD & DG sont chacun la cinquiéme partie de la circonférence du cercle X (*c*) ; ainsi l'arc BDG est les deux cinquiémes, ou ce qui est la même chose, les six quinziémes de cette circonférence: or l'arc BDA est le tiers, ou ce qui est la même chose, les cinq quinziémes de cette même circonférence (*c*) ; donc si de l'arc BDG on retranche l'arc BDA, le reste qui est l'arc AG, sera la quinziéme partie de cette circonférence ; donc C. Q. F. F.

Fin du quatriéme Livre.

LES

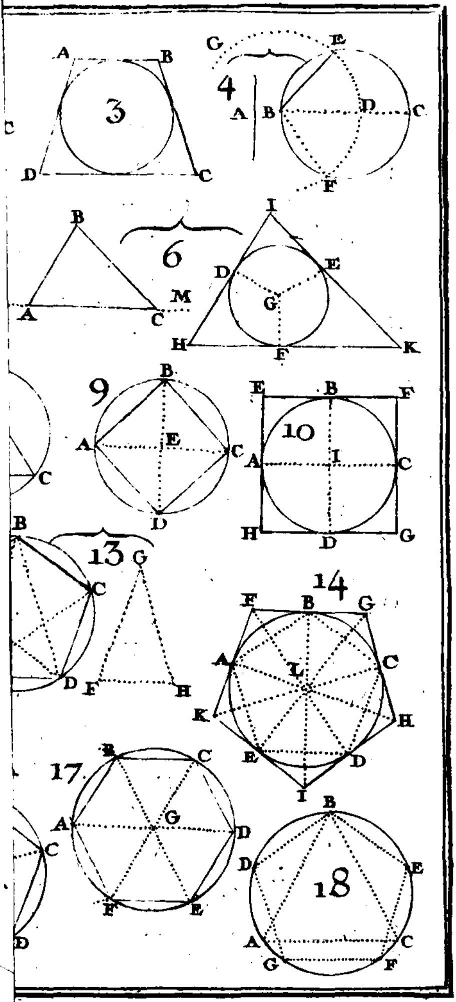
é, un

dans

trian-
dans
DB
et de
ngle
s an-
ra la
cer-

cha-
ence
les
cho-
ren-
ft la
ette
l'arc
qui.
ette

ES



LES ELEMENS D'EUCLIDE.

LIVRE CINQUIE'ME.

JUSQU'ICI on n'a considéré les lignes & les surfaces qu'en elles-mêmes ; il s'agit à present de comparer entr'elles les premieres, de faire la même chose à l'égard des dernieres, & de déterminer les rapports qui resultent de ces comparaisons. Mais il est nécessaire d'avoir auparavant une connoissance éxacte des rapports en général, & c'est à la donner, cette connoissance, qu'Euclide employe ce cinquiéme Livre. Il le commence par les Définitions des termes relatifs qui sont d'usage dans les comparaisons, établit ensuite les principes des Rapports, compare ces Rapports les uns aux autres, donne des regles pour connoître leur égalité ou leurs différentes sortes d'inégalités, & démontre les proprié-

tés de ceux qui sont égaux entr'eux. Ce Livre est une Logique excellente, & la matiere qui y est traitée, est l'Ame de la Géométrie.

DEFINITIONS.

I.

290. UNE Quantité qui prise plus d'une fois devient égale à une autre, se nomme *Partie* de cette autre.

Si A multiplié par un nombre entier ou fractionnaire plus grand que l'unité, devient égal à B, A est Partie *de B.*

II.

291. Une Quantité qui est égale à une autre, prise plus d'une fois, se nomme *Multiple* de cette autre.

Si A multiplié par un nombre entier ou fractionnaire plus grand que l'unité, devient égal à B, B est multiple *de A.*

292. Une Quantité qui est égale à une autre prise moins d'une fois, se nomme *sous-multiple* de cette autre.

Si A multiplié par un nombre fractionnaire moins grand que l'unité, devient égal à B, B est sous-multiple *de A.*

SCHOLIE I.

293. *Euclide ne nomme une Quantité ſoit* Partie, *ſoit* Multiple *d'une autre, que lorſque le Multiplicateur qui lui fait donner ces noms eſt un nombre entier: mais comme il ſuffit qu'une quantité puiſſe être conſidérée comme retranchée d'une autre, pour qu'elle en ſoit une* partie, *& comme produite par la multiplication d'une moins grande qu'elle, pour qu'elle en ſoit* multiple; *nous nommons une Quantité ſoit* Partie, *ſoit* Multiple *d'une autre, quelque ſoit le Multiplicateur qui lui fait donner ces noms, pourvu qu'il ſoit plus grand que l'unité.*

SCHOLIE II.

294. *Une Quantité contient les quantités qui étant multipliées lui deviennent égales, & ne contient qu'elles: mais differemment, ſelon qu'elle eſt plus ou moins grande par rapport à elles. Or pour exprimer facilement les differentes manieres dont des quantités en contiennent d'autres, nous diſons .....*

295. Premierement. *Qu'une Quantité A contient* plus de fois *une quantite B, qu'une quantite C ne contient de* fois *une quantite D, lorſque le quotient de A diviſe par B, eſt plus grand que celui de C diviſe par*

D; soit que ces quotiens soient des nombres entiers, soit qu'ils soient des nombres fractionnaires plus ou moins grands que l'unité, ou égaux l'un ou l'autre à l'unité.

296. Secondement. *Qu'une Quantité A est* autant de fois *une quantité B, qu'une quantité C* est de fois *une quantité D, ou qu'une quantité A est* multiple *d'une autre B, de* la même maniere *qu'une quantité C l'est d'une autre D, ou enfin que deux quantités A & C sont* équi-multiples *de deux autres B & D, lorsque les quotiens de A divisé par B & de C divisé par D, sont égaux entr'eux, ou, ce qui revient au même, lorsque les nombres par lesquels il faudroit multiplier B & D pour les rendre égaux, l'un à A & l'autre à C, le sont; soit que ces Quotiens ou ces Multiplicateurs soient des nombres entiers, soit qu'ils soient des nombres fractionnaires plus grands, aussi grands, ou moins grands que l'unité.*

297. Troisiémement. *Enfin qu'une Quantité A est* même partie *d'une autre B, qu'une quantité C l'est d'une autre D, lorsque A & C étant des parties de même nom de B & de D, les Numerateurs de ces parties sont égaux entr'eux, quoiqu'ils soient moins grands, aussi grands, ou plus grands que leurs Dénominateurs.*

III.

298. On nomme *Rapport* ou *Raiſon* d'une quantité à une autre, la maniere d'être de l'une à l'égard de l'autre ; c'eſt-à-dire la maniere dont celle que l'on compare, contient celle à laquelle on la compare.

La maniere dont A contient B eſt le Rapport *de A à B; & celle dont B contient A eſt celui de B à A.*

299. On nomme la Quantité que l'on compare *Quantité antécedente*, ou *Terme antécedent*, & celle à laquelle on la compare, *Quantité conſequente*, ou *Terme conſéquent.*

*A eſt l'*Antécedent *du Rapport de A à B, & B en eſt le* conſéquent.

SCHOLIE.

300. *Le Rapport d'une Quantité à une autre, eſt la maniere dont l'une contient l'autre* (n) *: or la maniere dont une quantité en contient une autre, eſt exprimée par le quotient de cette quantité diviſée par cette autre ; donc le quotient de la quantité que l'on compare, diviſée par celle à laquelle on la compare, c'eſt-à-dire de l'antécedent d'un Rapport, diviſé par ſon Conſéquent, exprime ce Rapport.* N. 298.

301. On nomme *Expoſant* d'un Rapport, la quantité qui exprime ce Rapport.

*Si A contient B par exemple 3 fois ; l'*Exposant *du Rapport de A à B est 3 & 1, qui s'écrit ainsi* $\frac{3}{1}$ *; & celui du Rapport de B à A est 1 & 3, qui s'écrit ainsi* $\frac{1}{3}$.

IV.

302. On nomme *Proportion* l'égalité de plusieurs Rapports.

Si le Rapport de A à B est égal à celui de C à D, l'égalité de ces deux Rapports forme une Proportion.

V.

COROLLAIRE I.

303. *Il suit des N. 294. & 298. qu'*il ne peut y avoir de Rapport, qu'entre des Quantités qui étant multipliées, peuvent devenir égales les unes aux autres.

Démonst. *Le rapport d'une quantité à une autre, est la maniere dont l'une contient*
N. 298. *l'autre* (n) *: or une quantité ne contient que des quantités, qui étant multipliées peuvent*
N. 294. *lui devenir égales* (n) *; donc il ne peut, &c.*

VI.

COROLLAIRE II.

304. *Il suit du N. 298 que* des Rapports sont *égaux* entr'eux, *ou qu'*un Rapport est *le même* qu'un autre, lorsque les antécédens de ces Rapports, contiennent pareillement leurs conséquens.

Si A contient B de la même maniere que C contient D, le rapport de A à B est le même *que celui de C à D, où A a* même rapport *à B, que C à D.*

Démonst. *Le Rapport d'une Quantité à une autre, est la maniere dont l'une contient l'autre* (n); *donc si des quantités en contiennent d'autres, chacune de la même maniere, les rapports de chacune de ces quantités à chacune de ces autres, sont les mêmes.* N. 298

SCHOLIE.

305. *Pour marquer que des Rapports A : B; C : D; E : F; &c. sont égaux entr'eux, on les sépare par quatre Points rangés en quarré, de cette maniere, A : B :: C : D :: E : F :: &c. & pour l'exprimer on dit que* A est à B, comme C est à D, comme E est à F, &c.

VII.

306. Les Quantités qui forment des Rapports égaux entr'eux, se nomment *Quantités-proportionnelles.*

Si A : B :: C : D, ces Quantités sont proportionnelles.

COROLLAIRE.

307. *Il suit des N. 296. 304. & 306. Premierement*, que si des Quantités sont équi-multiples d'autres quantités, les

unes & les autres seront proportionnelles.

Démonst. *Si A & C sont équi-multiples de B & de D, A contient autant de fois B*
N. 296. *que C contient de fois D* (n) ; *donc le rapport de A à B est le même que celui de C à*
N. 304. *D* (n); *& par conséquent A, B, C, & D*
N. 306. *sont proportionelles* (n) ; *donc C. Q. F. D.*

308. *Secondement :* que les Antécédentes des Quantités proportionelles, sont équi-multiples des conséquentes.

Démonst. *Si le Rapport de A à B est égal à celui de C à D, A contient B de la*
N. 304. *même maniere que C contient D* (n) ; *& par consequent A & C sont équi-multiples de B*
N. 296. *& de D* (n) ; *donc C. Q. F. D.*

309. On dit que deux Rapport sont *réciproques* l'un à l'autre, lorsqu'ils sont tels, qu'en renversant l'ordre des termes de l'un ou de l'autre, ils deviennent égaux entr'eux.

Si le Rapport de A à B & celui de C à D sont tels, que celui de A à B soit égal à celui de D à C, ou que celui de B à A soit égal à celui de C à D, le rapport de A à B est réciproque *à celui de C à D, & celui-ci de même au premier.*

310. Les quatre Quantités qui forment deux Rapports réciproques, se nomment *Quantités réciproquement proportionnelles.*

Si le Rapport de A à B est égal à celui de D à C, les Quantités A, B, C & D *ſont* réciproquement proportionnelles.

311. On nomme *Rapport d'égalité*, celui dont l'antécedent eſt égal au conſéquent.

Le Rapport de A à A eſt un Rapport d'égalité

312. On nomme *Rapport d'inégalité* celui dont l'antécedent eſt inégal au conſéquent.

Le Rapport de A à B eſt un Rapport d'inégalité.

313. Si l'antécedent d'un Rapport d'inégalité, eſt plus grand que ſon conſéquent, on nomme ce Rapport, *Rapport-multiple*, ou d'*inégalité-majeure*

Si A eſt plus grand que B, le Rapport de A à B eſt un Rapport-multiple.

314. Si l'antécedent d'un Rapport d'inégalité, eſt moins grand que ſon conſéquent, on nomme ce Rapport, *Rapport-ſous-multiple*; ou d'*inégalité-mineure*.

Si A eſt moins grand que B, le Rapport de A à B eſt un Rapport-ſous-multiple.

VIII.

315. On dit qu'un Rapport eſt *plus grand* qu'un autre, lorſque ſon antécedent contient plus de fois ſon conſéquent, que l'antécédent de l'autre ne contient de fois le ſien.

Si A contient plus de fois B, que C ne contient de fois D; on dit que le Rapport de

A à B est plus grand *que celui de C à D*, *ou que A a* un plus grand rapport *à B*, *que C à D*.

IX.

COROLLAIRE.

316. *Il suit des N. 302. & 298. qu'*une Proportion ne peut point avoir moins de trois termes.

Démonst. *Il faut deux Rapports pour*
N. 302. *former une Proportion* (n), *& deux Quan-*
N. 298. *tités pour former un Rapport* (n) *: or on ne peut point former deux Rapports égaux en-tr'eux, avec moins de trois Quantités ; puisqu'après avoir formé un Rapport en comparant une Quantité à une autre, il faut nécessairement comparer l'une de ces deux Quantités à une troisiéme, pour en former un second égal au premier ; donc il faut au moins trois Quantités pour former une Proportion.*

317. Le premier & le dernier terme d'une Proportion se nomment les termes *extrêmes*, & les autres les termes *moyens*.

318. Une Proportion dont chaque conséquent sert d'antécedent au terme qui le suit immédiatement, se nomme *Proportion continue*, ou *Progression*.

Si A : B : : B : C : : C : D : : D : E, &c. On dit que ces Quantités A, B, C, *D*, *E*, *&c. sont en* Proportion continue, *ou en* Progreſſion, *ou* continuement proportionnelles.

SCHOLIE.

319. *Pour marquer que des Quantités A, B, C, D, E, &c. ſont en Progreſſion, on met au commencement de ces Quantités, une ligne entre quatre points de cette maniere* ∺ *A : B : C : D : E : &c.*

X.

320. Le Rapport du produit des antécedens de plusieurs Rapports, au produit des conſéquens des mêmes Rapports, ſe nomme *Rapport-composé* de tous ces Rapports.

Le Rapport du produit ACE de tous les antécedens des Rapports de A à B, de C à D, de E à F, &c. au produit BDF de tous leurs conſequens, eſt un Rapport-composé *des Rapports de A à B, de C à D, & de E à F.*

321. Un Rapport composé de deux Rapports égaux entr'eux, ſe nomme *Rapport doublé* de l'un ou de l'autre de ces Rapports.

Si le Rapport de A à B eſt égal à celui de C à D, le Rapport du produit AC des antécedens de ces deux Rapports, au produit BD de leurs conſéquens, eſt doublé *de celui de A à B, ou de celui de C à D.*

322. Un Rapport composé de trois Rapports égaux entr'eux, se nomme *Rapport-triplé* de l'un de ces trois Rapports. Un Rapport composé de quatre Rapports égaux entr'eux, se nomme *Rapport-quadruplé*, &c, & ainsi de suite.

X I.

323. On nomme *Quantités-Homologues*, celles qui ont le même nom.

Les antécedens & les antécedens sont Homologues ; *les conséquens & les conséquens, le sont aussi.*

XII.

324. *Echanger* deux Rapports, c'est prendre l'antécedent de l'un de ces Rapports, pour en faire le conséquent de l'autre ; & le conséquent de cet autre, pour en faire l'antécedent du premier ; & les deux Rapports formés par cet échange, & les deux premiers, se nomment respectivement *Rapports-alternes.*

Les Rapports de A à C & de B à D sont alternes *à l'égard de ceux de A à B & de C à D.*

XIII.

325. *Renverser* un Rapport, c'est prendre l'antécedent de ce Rapport, pour en faire le conséquent d'un autre, & le conséquent pour en faire l'antécedent ; & le pre-

mier Rapport, & celui qui est formé par ce renversement, se nomment respectivement *Rapports-inverses.*

Le Rapport de B à A est inverse *à l'égard de celui de A à B, & celui-ci de même à l'égard du premier.*

XIV.

326. *Composer* un Rapport, c'est ajouter le conséquent de ce Rapport à son antécedent, pour comparer leur somme à ce même conséquent.

Le Rapport de la somme AB de A & de B, à B, est formé par composition, *de celui de A à B.*

XV.

327. *Diviser* un Rapport, c'est retrancher le conséquent de ce Rapport de son antécédent, pour comparer l'excès de cet antécedent sur son conséquent, à ce même conséquent.

Le Rapport de ce qui reste de A, après en avoir retranché B, à B, est formé par division, *de celui de A à B.*

XVI.

328. *Retourner* un Rapport, c'est ajouter le conséquent de ce Rapport à son antécedent, pour comparer leur somme à ce même antécedent.

Le Rapport de la somme AB de A & de B, à A, est formé par conversion, *de celui de A à B.*

XVII.

329. Si plusieurs Quantités d'une part & autant d'une autre sont telles, que celles de la premiere part, étant comparées chacune à chacune, forment des Rapports égaux chacun à chacun de ceux que forment celles de la seconde part, comparées aussi chacune à chacune, l'égalité de ces Rapports se nomme *Proportion-d'égalité.*

Si les Rapports $\begin{matrix} A : B : C : D : \&c. \\ E : F : G : H : \&c. \end{matrix}$ *sont tels, que* $A : B :: E : F$, $B : C :: F : G$, $C : D :: G : H$ *&c. ces Quantités forment une* Proportion d'égalité.

XVIII.

330. Si les Rapports qui forment une Proportion d'égalité, sont rangés de maniere que le premier de la premiere part soit égal au premier de la seconde; le second de la premiere, au second de la seconde; le troisiéme &c. au troisiéme &c. & ainsi de suite, cette Proportion se nomme *Proportion d'égalité ordonnée, ou bien rangée.*

La Proportion d'egalité du N. 329. est une Proportion d'égalité ordonnée.

XIX.

331. Si les Rapports qui forment une Proportion d'égalité, sont rangés de maniere que le premier de la premiere part soit égal au dernier de la seconde, le se-

cond de la premiere, au pénultiéme de la seconde ; le troisiéme, &c. à l'anté-pénultiéme &c. & ainsi de suite, jusqu'à ce qu'on vienne à comparer le dernier Rapport de la premiere part, au premier de la seconde ; cette Proportion se nomme *Proportion d'égalité troublée*, ou *mal-rangée*.

Si les Rapports $\begin{matrix} A:B:C:D: \&c. \\ E:F:G:H: \&c. \end{matrix}$ *sont tels, que* $A:B::G:H$, $B:C::F:G$, $C:D::E:F$ *&c. ces Quantités forment une* Proportion d'égalité troublée.

PROPOSITION I.

THEOREME.

332. *Si des Quantités sont équi-multiples d'autant d'autres Quantités, chacune de chacune, la somme des antécedentes sera multiple de celle des conséquentes, de la même maniere que l'une des antécedentes quelconque, l'est de sa conséquente.*

SI AB & BC * sont équi-multiples de DE & de EF, la somme ABC des antécedentes AB & BC, sera multiple de la somme DEF des conséquentes DE & Fig. 1.

EF, de la même maniere que l'une des antécedentes quelconque AB, l'est de sa conséquente DE.

Const. Joignés AB & BC en une seule ligne ABC : joignés de même DE & EF en une seule ligne DEF.

Dém. Puisque AB & BC sont équi-multiples de DE & de EF (*h*), AB est autant
N. 296. de fois DE que BC est de fois EF (*n*); ainsi chaque partie de ABC est autant de fois chaque partie corespondante de DEF, que AB est de fois DE; donc ABC est autant de fois DEF que AB est de fois DE
N. 73. (*n*); & par conséquent ABC est multiple de DEF, de la même maniere que AB l'est de DE; donc C. Q. F. D.

PROPO-

PROPOSITION II.

THEOREME.

333. *Si six Quantités sont telles, que la 1re. & la 3e. soient équi-multiples de la 2e. & de la 4e, & que la 5e. & la 6e. le soient aussi; la somme de la 1re. & de la 5e., sera multiple de la 2e Quantité, de la même maniere que la somme de la 3e. & de la 6e., l'est de la 4e.*

SI AB & DE * sont équi-multiples de G & de H, & si BC & EF le sont aussi, la somme ABC de la premiere quantité AB & de la cinquiéme BC, sera multiple de G, de la même maniere que la somme DEF de la troisiéme quantité DE & de la sixiéme EF, l'est de H. Fig. 1.

Const. Joignés AB & BC en une seule ligne ABC : joignés de même DE & EF en une seule ligne DEF.

Démonst. AB & DE sont équi-multiples de G & de H (*h*); ainsi AB est autant de fois G que DE est de fois H (*n*); or BC est N. 296. aussi autant de fois G que EF est de fois H, puisque BC & EF sont aussi équi-multiples de G & de H (*h*); donc chaque partie

Ee

de ABC est autant de fois G, que chaque partie correspondante de DEF est de fois H ; donc ABC est autant de fois G, que
N. 73. DEF est de fois H (*n*) ; & par conséquent ABC est multiple de G, de la même manie-
N. 296. re que DEF l'est de H(*n*); donc C.Q.F.D.

PROPOSITION III.

THEOREME.

334. *Si quatre Quantités sont telles que la 1re. & la 3e. soient équi-multiples de la 2e & de la 4e., deux autres Quantités quelconques équi-multiples de la 1re & de la 3e, le seront aussi de la 2e & de la 4e.*

Fig. 3. SI A & C* sont équi-multiples de B & de D, & si E & F deux autres quantités quelconques, le sont de A & de C, E & F le feront aussi de B & de D.

Démonst. E & F sont équi-multiples de A & de C (*h*) ; ainsi E est autant de fois A
N. 296. que F est de fois C (*n*) : or A est autant de fois B que C est de fois D, puisque A & C sont aussi équi-multiples de B & de D (*h*) ; donc E est autant de fois B que F est de fois D ; & par conséquent E & F sont

équi-multiples de B & de D(*n*);donc C.Q.F.D. N. 296.

PROPOSITION IV.

THEOREME.

335. *Si quatre Quantités sont telles, que la 1re & la 3e soient équi-multiples de la 2e & de la 4e, deux Quantités quelconques équi-multiples de la 1re & de la 3e, le seront aussi de deux autres Quantités quelconques équi-multiples de la 2e & de la 4e.*

SI A & C * sont équi-multiples de B & de D, & si E & F le sont de A & de C, & G & H de B & de D, E & F le seront aussi de G & de H. Fig. 4.

Démonst. E & F sont équi-multiples de A & de C (*h*), & A & C le sont de B & de D (*h*); ainsi E & F le sont aussi de B & de D (*n*); & par conséquent E est autant de fois B que F est de fois D (*n*): or B est même partie de G, que D l'est de H; puisque G & H étant équi-multiples de B & de D (*h*), G est autant de fois B que H est de fois D; donc E est autant de fois une certaine partie de G, que F est de fois une partie pareille N. 334. N. 296.

de H ; & par conséquent E & F sont équi-
N. 296. multiples de G & de H(*n*);donc C.Q.F.D.

PROPOSITION V.

THEOREME.

336. *Si deux Quantités sont divisées chacune en deux parties, de maniere que la premiere Quantité & l'une de ses parties, soient équi-multiples de la 2^e & de l'une de ses parties, la 1^re Quantité & son autre partie, le seront aussi de la 2^e & de son autre partie.*

Fig. 5. SI ABC & AB * sont équi-multiples de DEF & de DE, ABC & BC le seront aussi de DEF & de EF.

Démonst. Si BC étoit plus ou moins de fois EF que AB n'est de fois DE, ABC ne seroit point autant de fois DEF, que AB
N. 332. est de fois DE (*n*) : or ABC est autant de
N. 296. fois DEF que AB est de fois DE (*n*) ; puisque ABC & AB sont équi-multiples de DEF & de DE (*h*) ; donc BC n'est ni plus ni moins de fois EF que AB est de fois DE, ou que ABC est de fois DEF ; & par conséquent ABC & BC sont équi-multiples de
N. 296. DEF & de EF (*n*) ; donc C. Q. F. D.

PROPOSITION VI.

THEOREME.

337. *Si deux Quantités équi-multiples de deux autres, sont divisées chacune en deux parties, de maniere que l'une des parties de la 1re. & l'une de celles de la 2e soient aussi équi-multiples de ces deux autres Quantités, l'autre partie de la 1re. & l'autre partie de la 2e, le seront aussi.*

SI ABC & DEF * sont équi-multiples de G & de H, & si AB & DE le sont aussi, BC & EF le seront aussi. Fig. 64

Démonst. ABC & DEF sont équi-multiples de G & de H (*h*); ainsi ABC est autant de fois G que DEF est de fois H (*n*) : or AB est autant de fois G que DE est de fois H, puisque AB & DE sont aussi équi-multiples de G & de H (*h*); donc si l'on retranche AB de ABC, & DE de DEF, on retranchera autant de fois G de ABC, que de fois H de DEF; ainsi il restera autant de fois G dans BC, que de fois H dans EF; & par conséquent BC & EF sont équi-multiples de G & de H (*n*); donc C. Q. F. D. N. 296.

N. 296.

PROPOSITION VII.

THEOREME.

338. *Si deux Quantités sont égales entr'elles :* Premierement, *elles auront chacune le même rapport à une même quantité :* Secondement, *une même Quantité aura le même rapport à chacune d'elles.*

Fig. 7. SI A * est égal à B : *Premierement*, le rapport de A à C sera le même que celui de B à C: *Secondement*, le rapport de C à A sera le même que celui de C à B.

DEMONSTRATION.

Premierement. A est égal à B (*h*) ; ainsi A contient C, de la même maniere que B le contient ; & par conséquent le rapport de A à C est le même que celui de B à C
N. 304. (*n*). *Secondement*, A est égal à B (*h*) ; ainsi C contient A, de la même maniere qu'il contient B ; & par conséquent le rapport de
N. 304. C à A est le même que celui de C à B (*n*) ; donc C. Q. F. D.

PROPOSITION VIII.

THEOREME.

339. *Si deux Quantités sont inégales entr'elles :* Premierement, *la plus grande aura un plus grand rapport à une même Quantité, que la moins grande.* Secondement, *une même Quantité aura un plus grand rapport à la moins grande, qu'à la plus grande.*

SI A * est plus grand que B : *Premierement*, le rapport de A à C sera plus grand que celui de B à C. *Secondement*, le rapport de C à B sera plus grand que celui de C à A. Fig 8.

DEMONSTRATION.

Premierement. A est plus grand que B (*h*); ainsi A contient plus de fois C que B ne le contient de fois ; & par conséquent le rapport de A à C, est plus grand que celui de B à C (*n*). *Secondement.* A est plus grand que B (*h*) ; ainsi C contient plus de fois B qu'il ne contient de fois A ; & par conséquent le rapport de C à B est plus grand que celui de C à A (*n*) ; donc C. Q. F. D. N. 315. N. 315.

PROPOSITION IX.

THEOREME.

o.P remierement. *Si deux Quantités ont chacune le même rapport à une même Quantité, elles seront égales entr'elles.* Secondement. *Si une même Quantité a le même rapport à chacune de ces deux Quantités, elles le seront aussi.*

Fig. 7. *Premierement.* SI le rapport de A à C * est le même que celui de B à C, A sera égal à B. *Secondement.* Si le rapport de C à A est le même que celui de C à B, A sera aussi égal à B.

DEMONSTRATION.

Premierement. Si A & B ne contenoient point C chacun de la même maniere, le rapport de A à C ne seroit point le même
N. 304. que celui de B à C (*n*) : or le rapport de A à C est le même que celui de B à C (*h*); donc A & B contiennent C chacun de la même maniere; & par conséquent A est égal à B. *Secondement.* Si C ne contenoit point A & B chacun de la même maniere, le rapport de C à A ne seroit point le même

me que celui de C à B (*n*) : or le rapport de N. 304.
C à A eſt le même que celui de C à B (*h*) ; donc C contient A & B chacun de la même maniere ; & par conſéquent A eſt égal à B ; donc C. Q. F. D.

PROPOSITION X.

THEOREME.

341. Premierement, *Si de deux Quantités, l'une a un plus grand rapport que l'autre à une même Quantité, celle qui a le plus grand rapport, ſera la plus grande.* Secondement. *Si une même Quantité a un plus grand rapport à l'une de deux Quantités qu'à l'autre, celle à laquelle elle a le plus grand rapport, ſera la moins grande.*

Premierement. SI le rapport de A à C * Fig. 8.
eſt plus grand que celui de B à C, A ſera plus grand que B. *Secondement.* Si le rapport de C à B eſt plus grand que celui de C à A, B ſera moins grand que A.

DEMONSTRATION.

Premierement. Si A n'étoit pas plus grand

que B, A ne contiendroit pas C plus de fois que B ne le contient de fois; & par conséquent le rapport de A à C ne feroit
N. 315. pas plus grand que celui de B à C (*n*): or le rapport de A à C est plus grand que celui de B à C (*h*); donc A contient C plus de fois que B ne le contient de fois; & par conséquent A est plus grand que B. *Secondement.* Si B n'étoit pas moins grand que A, C ne contiendroit pas plus de fois B qu'il ne contient de fois A; & par conséquent le rapport de C à B ne feroit pas plus
N. 315. grand que celui de C à A (*n*): or le rapport de C à B est plus grand que celui de C à A (*h*); donc C contient plus de fois B qu'il ne contient de fois A; & par conséquent B est moins grand que A; donc C. Q. F. D.

PROPOSITION XI.

THEOREME.

342. *Les Rapports égaux chacun à un même Rapport, le sont aussi entr'eux.*

Fig. 9. SI le Rapport de A à B * est le même que celui de E à F,, & si celui de C à D est aussi le même que celui de E à F, le rapport de A à B fera le même que celui de C à D.

Démonst. Si la maniere dont A contient B n'étoit point la même que celle dont E contient F, le rapport de A à B ne seroit point le même que celui de E à F (*n*) : or le rapport de A à B est le même que celui de E à F (*h*) ; donc la maniere dont A contient B, est la même que celle dont E contient F. Par la même raison, la maniere dont C contient D est aussi la même que celle dont E contient F ; donc la maniere dont A contient B est la même que celle dont C contient D ; & par conséquent le rapport de A à B est le même que celui de C à D (*n*) ; donc C. Q. F. D. N. 304. N. 304.

PROPOSITION XII.

THEOREME.

343. *La somme des Antécedentes des Quantités proportionnelles est à celle des Conséquentes, comme l'une des Antécedentes quelconque est à sa conséquente.*

SI A* : B : : C : D :: E : F, &c. la somme des antécedentes A, C & E, sera à celle des conséquentes B, D & F comme A est à B, ou comme C est à D, ou &c. Fig. 9.

Démonst. Puisque les Quantités A, B, C &c. sont proportionnelles (*h*), les antécedentes sont équi-multiples des consé-
N. 308. quentes (*n*) ; ainsi la somme des antécedentes est multiple de celle des conséquentes de la même maniere que l'une des antécedentes quelconque l'est de sa conséquente
N. 332. (*n*) ; & par conséquent la somme des antécedentes est à celle des conséquentes, comme l'une des antécedentes quelconque est à
N. 307. sa conséquente (*n*) ; donc C. Q. F. D.

PROPOSITION XIII.

Theoreme.

344. *Si de deux Rapports égaux entr'eux, l'un est plus grand qu'un troisiéme, l'autre le sera aussi.*

Fig. 9. Si le Rapport de A à B * est le même que celui de C à D, & si celui de C à D est plus grand que celui de E à F, celui de A à B le sera aussi.

Démonst. Le Rapport de C à D est plus grand que celui de E à F (*h*) ; ainsi C contient plus de fois D, que E ne contient de
N. 315. fois F (*n*) : or A contient autant de fois B
N. 304. que C contient de fois D (*n*) ; puisque le rap-

port de A à B est le même que celui de C à D (*h*) ; donc A contient plus de fois B que E ne contient de fois F ; & par conséquent le rapport de A à B est plus grand que celui de E à F (*n*) ; donc C. Q. F. D. N. 315.

PROPOSITION XIV.

THEOREME.

345. *Si le 1er terme d'une Proportion est moins grand, aussi grand, ou plus grand que le 3e, le second sera aussi moins grand, aussi grand, ou plus grand que le 4e.*

SI A:B::C:D, *Premierement.* Si A* est moins grand que C, B sera moins grand que D. *Secondement.* Si A * est égal à C, B sera égal à D. *Troisiémement.* Si A * est plus grand que C, B sera plus grand que D. Fig. 10. Fig. 11. Fig. 12.

DEMONSTRATION.

Premierement. A * est moins grand que C (*h*) ; ainsi le rapport de C à B est plus grand que celui de A à B (*n*) : or le rapport de A à B est le même que celui de C à D (*h*) ; donc le rapport de C à B est plus Fig. 10. N. 339.

N. 344. grand que celui de C à D (*n*) ; & par conséquent B est moins grand que D (*n*). N. 341.

Fig. 11. *Secondement.* A * est égal à C (*h*) ; ainsi le rapport de C à B est le même que celui de A à B (*n*) : or le rapport de A à B est le même que celui de C à D (*h*) ; donc le rapport de C à B est le même que celui de C à D (*n*) ; & par conséquent B est égal à D (*n*). N. 338. N. 342. N. 340.

Fig. 12. *Troisiémement.* A * est plus grand que C (*h*) ; ainsi le rapport de C à B est moins grand que celui de A à B (*n*) : or le rapport de A à B est le même que celui de C à D (*h*) ; donc le rapport de C à B est moins grand que celui de C à D (*n*) ; & par conséquent B est plus grand que D (*n*) ; donc C. Q. F. D. N. 339. N. 344. N. 341.

USAGE.

346. *On connoît par cette Proposition, si les termes d'une Proportion sont rangés dans l'ordre qu'ils doivent l'être, & par conséquent si une Regle de Trois est* directe *ou* inverse.

PROPOSITION XV.

THEOREME.

347. *Les Quantités qui sont équi-multiples d'autres Quantités, ont entr'elles le même rapport que ces dernieres.*

SI A & B * sont équi-multiples de C & de D, le rapport de A à B sera le même que celui de C & de D. Fig. 13. 14 & 15.

Démonst. A & B sont équi-multiples de C & de D (*h*), ainsi A & B sont les produits, l'un de C & l'autre de D multipliés chacun par le même nombre entier, ou par le même nombre fractionnaire dont le Numérateur est l'unité, ou par le même nombre fractionnaire dont le Numérateur est plus grand que l'unité (*n*) : or, *Premierement*, Si A & B * sont les produits, l'un de C & l'autre de D multipliés chacun par un même nombre entier. Si l'on divise A & B chacun en autant de parties égales entr'elles, qu'il y a d'unités dans ce nombre entier, chaque partie de A sera égale à C, & chaque partie de B le sera à D; ainsi le rapport de C à D est égal à celui de l'une quelconque de ces parties de A, à l'une de celle N. 296. Fig. 13.

de B : or le rapport de A à B l'eſt auſſi ; car puiſque les parties de A ſont égales entr'elles (*c*), & que celles de B le ſont auſſi (*c*), les parties de A ſont proportionnelles à celles de B ; & par conſéquent le rapport de la ſomme A des antécedentes, à la ſomme B des conſéquentes, eſt égal à celui de l'une quelconque de ces parties de A, antécedente, à l'une de celles de B, conſéquen-
N. 343. te (*n*) ; donc le rapport de A à B, & celui de C à D ſont égaux chacun à un même rapport ; & par conſéquent le rapport de A à
N. 342. B eſt le même que celui de C à D (*n*).

Fig. 14. *Secondement.* Si A & B * ſont les produits, l'un de C & l'autre de D multipliés chacun par le même nombre fractionnaire, dont le Numérateur eſt l'unité. Si l'on diviſe C & D chacun en autant de parties égales entr'elles qu'il y a d'unités dans le Dénominateur de ce nombre fractionnaire, chaque partie de C ſera égale à A, & chaque partie de D le ſera à B ; ainſi le rapport de A à B eſt égal à celui de l'une quelconque de ces parties de C, à l'une de celles de D : or le rapport de C à D l'eſt auſſi ; car puiſque les parties de C ſont égales entr'elles (*c*), & que celles de D le ſont auſſi (*c*), les parties de C ſont proportionnelles à celles de D ; & par conſéquent le rapport de la ſomme C des antécedentes, à la ſom-

me D des conséquentes, est égal à celui de l'une quelconque de ces parties de C, antécedente, à l'une de celles de D, conséquente (*n*); donc le rapport de A à B & celui de C à D, sont égaux chacun à un même rapport; & par conséquent le rapport de A à B est le même que celui de C à D (*n*). N. 343. N. 342.

Troisiémement. Si A & B * sont les produits, l'un de C & l'autre de D multipliés chacun par le même nombre fractionnaire, dont le Numérateur est plus grand que l'unité. Si l'on divise A & B chacun en autant de parties égales entr'elles, qu'il y a d'unités dans le Numérateur de ce nombre fractionnaire, & C & D chacun en autant de parties égales entr'elles, qu'il y a d'unités dans le Dénominateur de ce même nombre, chaque partie de A sera égale à chaque partie de C, & chaque partie de B le sera à chaque partie de D; ainsi le rapport de l'une quelconque de ces parties de A à l'une de celles de B, est égal à celui de l'une quelconque de ces parties de C, à l'une de celles de D : or le rapport de C à D l'est aussi, comme il a été démontré dans la seconde partie; donc le rapport de C à D, & celui de l'une quelconque de ces parties de A à l'une de celles de B, sont égaux chacun à un même rapport; & par conséquent ils le Fig. 15.

N. 342. sont entr'eux (*n*) : or le rapport de A à B est aussi égal à celui de l'une quelconque de ces parties de A, à l'une de celles de B ; comme il a été démontré dans la premiere partie ; donc le rapport de C à D & celui de A à B, sont égaux chacun à un même rapport ; & par conséquent le rapport de A
N. 342. à B est le même que celui de C à D (*n*) ; donc C. Q. F. D.

COROLLAIRE.

348. Il suit de cette Proposition, que *dans une Progression*, Premierement, *le rapport du 1er terme au 3e, est doublé de celui du 1er au 2e, ou de celui du 2e au 3e:* Secondement, *que le rapport du 1er terme au 4e, est triplé de celui du 1er au 2e, ou de celui &c. & ainsi de suite.*

Si ∺ A : B : C : D : E : &c. *Premierement* : le rapport de A à C, sera doublé de celui de A à B : *Secondement* ; celui de A à D, sera triplé de celui de A à B : &c.

DEMONSTRATION.

Premierem. Les rapports de A à B & de B à C sont égaux entr'eux (*h*) ; ainsi le rapport du produit AB de A & B, au produit BC
N. 321. de B & C, est doublé de celui de A à B (*n*): or le rapport de A à C est égal à celui du
N. 347. produit AB, au produit BC (*n*) ; car AB & BC sont équi-multiples de A & de C ;

puisqu'ils sont les produits de A & de C, multipliés chacun par B ; donc le rapport de A à C est doublé de celui de A à B.

Secondement. Les rapports de A à B, de B à C & de C à D sont égaux entr'eux (*h*) ; ainsi le rapport du produit ABC de A, B & C, au produit BCD de B, C & D, est triplé de celui de A à B (*n*) : or le N. 322.
rapport de A à D est égal à celui du produit ABC, au produit BCD (*n*) ; car ABC & N. 347.
BCD, sont équi-multiples de A & de D ; puisqu'ils sont les produits de A & de D, multipliés chacun par le produit BC ; donc le rapport de A à D, est triplé de celui de celui de A à B ; donc C. Q. F. D.

PROPOSITION XVI.

THEOREME.

349. *Quatre Quantités de même genre & proportionnelles, sont aussi proportionnelles étant échangées.*

SI A : B : : C : D *, le rapport de A à Fig. 161
C, sera le même que celui de B à D.

Démonst. Le rapport de A à B est le même que celui de C à D (*h*) ; ainsi A & C sont équi-multiples de B & de D (*n*) : or N. 308.
les quantités qui sont équi-multiples d'au-

tres, ont entr'elles le même rapport que ces
N. 347. autres (*n*); donc le rapport de A à C est le même que celui de B à D; donc C. Q. F. D.

SCHOLIE.

350. *Pour échanger des rapports, il faut que les quantités qui les forment soient de même genre; puisque si A étant une ligne, C étoit par exemple une surface, il*
N. 303. *n'y auroit aucun rapport de A à C* (n).

COROLLAIRE.

351. Il suit de cette Proposition, que *quatre quantités proportionnelles, le sont aussi étant renversées.*
Fig. 16. Si A : B : : C : D *, le rapport de B à A, sera le même que celui de D à C.

Démonst. Le rapport de A à B est le même que celui de C à D (*h*); ainsi en
N. 349. échangeant, A : C : : B : D(*n*), ou B : D : :
N. 349. A : C; or en échangeant B : A : : D : C(*n*)
donc C. Q. F. D.

PROPOSITION XVII.

THEOREME.

352. *Quatre Quantités proportionnelles, le sont aussi étant divisées.*

SI ABC : BC : : DEF : EF *, le rapport de AB à BC, sera le même que celui de DE à EF. Fig. 17.

Démonst. Si l'on retranche BC de ABC, le reste AB contiendra BC une fois de moins que ABC ne le contient de fois ; & si l'on retranche EF de DEF, le reste DE contiendra EF une fois de moins que DEF ne le contient de fois : or ABC contient autant de fois BC que DEF contient de fois EF (*n*) ; puisque ABC : BC : : DEF : N. 304.
EF (*h*) ; donc AB contient autant de fois BC, que DE contient de fois EF ; & par conséquent le rapport de AB à BC, est le même que celui de DE à EF (*n*) ; donc N. 304.
C. Q. F. D.

PROPOSITION XVIII.

THEOREME.

353. *Quatre Quantités proportionnelles, le sont aussi étant composées.*

Fig. 17. SI AB : BC :: DE : EF *, le rapport de ABC à BC, sera le même que celui de DEF à EF.

Démonst. Si l'on ajoute BC à AB, la somme ABC contiendra BC une fois de plus que AB ne le contient de fois ; & si l'on ajoute EF à DE, la somme DEF contiendra EF une fois de plus que DE ne le contient de fois : or AB contient autant de fois BC que DE contient de fois EF
N. 304. (*n*) ; puisque AB : BC :: DE : EF (*h*) ; donc ABC contient autant de fois BC, que DEF contient de fois EF ; & par conséquent le rapport de ABC à BC est le même
N. 304. que celui de DEF à EF (*n*) ; donc C. Q. F. D.

COROLLAIRE.

354. Il suit de cette Proposition, que *quatre Quantités proportionnelles, le sont aussi étant retournées.*

Si AB : BC : : DE : EF *, le rapport de ABC à AB, sera le même que celui de DEF à DE. Fig. 17.

Démonst. Le rapport de AB à BC est le même que celui de DE à EF(*h*); ainsi en renversant, BC : AB : : EF : DE (*n*) : or N. 351.
en composant, ABC somme de AB & de BC : AB : : DEF somme de DE & de EF : DE (*n*) ; donc C. Q. F. D. N. 350.

PROPOSITION XIX.

THEOREME.

355. *La différence des antécedentes de quatre Quantités proportionnelles, est à celle des conséquentes, comme l'une des antécedentes quelconque est à sa conséquente.*

SI ABC : DEF : : BC : EF *, le rapport de AB à DE sera le même que celui de ABC à DEF, ou que celui de BC à EF. Fig. 17.

Démonst. Le rapport de ABC à DEF est le même que celui de BC à EF (*h*) ; ainsi en échangeant, ABC : BC : : DEF :
DE (*n*) ; en divisant, AB : BC : : DE : N. 349.
EF (*n*);& en échangeant AB : DE : : BC : N. 352.

N. 349. EF (*n*); or BC : EF :: ABC : DEF (*h*);
N. 342. donc AB : DE :: ABC : DEF (*n*); donc C. Q. F. D.

PROPOSITION XX.

THEOREME.

356. *Si le premier terme du 1er rang d'une Proportion d'égalité ordonnée, est moins grand, aussi grand, ou plus grand que le dernier, le premier terme du 2 rang sera aussi moins grand, aussi grand, ou plus grand que le dernier.*

Fig. 18. SI les quantités A, B, C & D, E, F * forment une Proportion d'égalité ordonnée : *Premierement*, si A est moins grand que C, D sera moins grand que F : *Secondement*. Si A est égal à C, D sera égal à F : *Troisiémement*, si A est plus grand que C, D sera plus grand que F.

DEMONSTRATION.

Premierement. A est moins grand que C (*h*); ainsi le rapport de C à B est plus
N. 339. grand que celui de A à B (*n*) : or le rapport de A à B est le même que celui de D à E (*h*); donc le rapport de C à B est plus grand que

que celui de D à E (*n*) : mais le rapport de F à E est égal à celui de C à B ; puisque B : C : : E : F (*h*),& qu'en renversant C : B : : F:E(*n*) ; donc le rapport de F à E, est plus grand que celui de D à E (*n*) ; & par conséquent D est moins grand que F (*n*). N. 344. N. 351. N. 344. N. 341.

Secondement. A est égal à C (*h*) ; ainsi le rapport de C à B est le même que celui de A à B (*n*) : or le rapport de A à B est le même que celui de D à E (*h*) ; donc le rapport de C à B est le même que celui de de D à E (*n*) : mais le rapport de F à E est égal à celui de C à B ; puisque B : C : : E : F (*h*), & qu'en renversant C : B : : F : E (*n*) ; donc le rapport de F à E est le même que celui de D à E (*n*) ; & par conséquent D est égal à F (*n*). N. 338. N. 342. N. 351. N. 342. N. 340.

Troisiémement. A est plus grand que C (*h*) ; ainsi le rapport de C à B est moins grand que celui de A à B (*n*) : or le rapport de A à B est le même que celui de D à E (*h*) ; donc le rapport de C à B est moins grand que celui de D à E (*n*) : mais le rapport de F à E est égal à celui de C à B ; puisque B : C : : E : F (*h*), & qu'en renversant C : B : : F : E (*n*) ; donc le rapport de F à E est moins grand que celui de D à E (*n*) ; & par conséquent D est plus grand que F (*n*) ; donc C. Q. F. D. N. 339. N. 344. N. 351. N. 344. N. 341.

PROPOSITION XXI.

THEOREME.

357. *Si le premier terme du 1er rang d'une Proportion d'égalité troublée, est moins grand, aussi grand, ou plus grand que le dernier, le premier terme du 2e rang sera aussi moins grand, aussi grand, ou plus grand que le dernier.*

SI les quantités A, B, C, & D, E,
Fig. 19. F * forment une Proportion d'égalité troublée : *Premierement.* Si A est moins grand que C, D sera moins grand que F : *Secondement.* Si A est égal à C, D sera égal à F : *Troisiémement.* Si A est plus grand que C, D sera plus grand que F.

DEMONSTRATION.

Premierement. A est moins grand que C (*h*) ; ainsi le rapport de C à B est plus grand
N. 339. que celui de A à B (*n*) : or le rapport de A à B est le même que celui de E à F (*h*) ; donc le rapport de C à B est plus grand que
N. 344. celui de E à F (*n*) : mais le rapport de E à D est égal à celui de C à B ; puisque B : C : : D : E (*h*), & qu'en renversant C : B : :

E : D (*n*) ; donc le rapport de E à D est plus grand que celui de E à F (*n*) ; & par conséquent D est moins grand que F (*n*). N. 351. N. 344. N. 341.

Secondement. On démontre par un semblable raisonnement, que si A est égal à C, D est égal à F, & que si A est plus grand que C, D est plus grand que F ; donc C. Q. F. D.

PROPOSITION XXII.

THEOREME.

358. *Le premier & le dernier terme du 1er rang d'une Proportion d'égalité ordonnée, & le premier & le dernier terme du 2e rang, sont proportionnels.*

SI les quantités A, B, C & D, E, F* Fig. 18. forment une Proportion d'égalité ordonnée, le rapport de A à C, sera le même que celui de D à F.

Dém. Le rapport de A à B, est le même que celui de D à E (*h*) ; ainsi A est autant de fois B que D est de fois E (*n*) : or N. 304. B est autant de fois C que E est de fois F (*n*) ; puisque B : C : : E : F (*h*) ; donc A N. 304. est autant de fois C que D est de fois F ; & par conséquent le rapport de A à C est le

N. 304. même que celui de D à F (*n*) ; donc C. Q. D.

SCHOLIE.

359. *Cette Proposition est la même que la troisiéme de ce Livre, exceptés que le nombre des termes n'y est point déterminé à six : Euclide ne la repete cependant ici, que parcequ'il n'a pas donné à* équi-multiples,*une signification aussi générale que celle que nous lui donnons.*

PROPOSITION XXIII.

THEOREME.

360. *Le premier & le dernier terme du 1^er^ rang d'une Proportion d'égalité troublée, & le premier & le dernier terme du 2^e^ rang, sont proportionnels.*

Fig. 19. SI les quantités A, B, C & D, E, F* forment une proportion d'égalité troublée, le rapport de A à C, sera le même que celui de D à F.

Démonst. Si l'on multiplie E & F chacun par D, & D & E chacun par F : *Premierement*, le rapport du produit ED au produit FD, sera le même que celui de E

à F (*n*) : or celui de E à F eſt le même que N. 347.
celui de A à B (*h*) ; donc celui de A à B
ſera le même que celui du produit ED au
produit FD (*n*);& par conſéquent en échan- N. 342.
geant, le rapport de A au produit ED, ſera
égal à celui de B au produit FD (*n*). *Seconde-* N. 349.
ment, le rapport du produit FD au pro-
duit FE, ſera le même que celui de D à E
(*n*); or celui de D à E eſt le même que celui N. 347.
de B à C (*h*) ; donc celui de B à C ſera le
même que celui du produit FD au produit
FE (*n*) ; & par conſéquent en renverſant, N. 342.
le rapport de C à B, ſera le même que celui
du produit FE au produit FD (*n*) ; & en N. 351.
échangeant, celui de C au produit FE, ſe-
ra égal à celui de B au produit FD (*n*). Le N. 349.
rapport de A au produit ED, & celui de
C au produit FE, ſeront donc égaux cha-
cun à celui de B au produit FD, ils le ſe-
ront donc entr'eux(*n*); & par conſéquent en N. 342.
échangeant, le rapport de A à C, ſera le mê-
me que celui du produit ED au produit FE:
or celui du produit ED au produit FE, eſt
le même que celui de D à F (*n*) ; donc celui N. 347.
de A à C, eſt le même que celui de D à F N. 342.
(*n*) ; donc C. Q. F. D.

PROPOSITION XXIV.

THEOREME.

361. *Si six Quantités sont telles, que les quatre premieres soient proportionnelles, & que la 5e, la 2e, la 6e & la 4e le soient aussi, la somme de la 1re & de la 5e quantité sera à la 2e, comme la somme de la 3e & de la 6e est à la 4e.*

Fig. 2. SI AB : G : : DE : H*, & si BC, G : : EF : H, le rapport de ABC somme de la 1re & de la 5e quantité, à G, sera le même que celui de DEF, somme de la 3e & de la 6e, à H.

Démonst. Le rapport de AB à G est le même que celui de DE à H (*h*), & celui de BC à G est aussi le même que celui de EF à H (*h*); ainsi AB & DE, 1re & 3e quantités, sont équi-multiples de G & de H 2e
N. 308. & 4e (*n*), & BC & EF 5e & 6e le sont aussi
N. 308. (*n*); donc la somme ABC de la 1re & de la 5e quantité, est multiple de la 2e G, de la même maniere que la somme DEF de la 3e
N. 333. & de la 6e, l'est de la 4e H (*n*); & par conséquent le rapport de ABC à G est le même
N. 307. que celui de DEF à H (*n*); donc C.Q.F.D.

PROPOSITION XXV.

THEOREME.

362. *La somme de la plus grande & de la moins grande de quatre Quantités proportionnelles, est plus grande que celle des deux autres.*

SI ABC : DEF :: *ab* : *de**, & si ABC est la plus grande, & *de* la moins grande de ces quatre quantités, la somme de ABC & de *de* sera plus grande, que celle de DEF & de *ab*. Fig. 204.

Const. Divisés ABC en deux parties, telles que l'une AB soit égale à *ab* (*n*) : divisés aussi DEF en deux parties, telles que l'une DE soit égale à *de* (*n*). N. 79. N. 79.

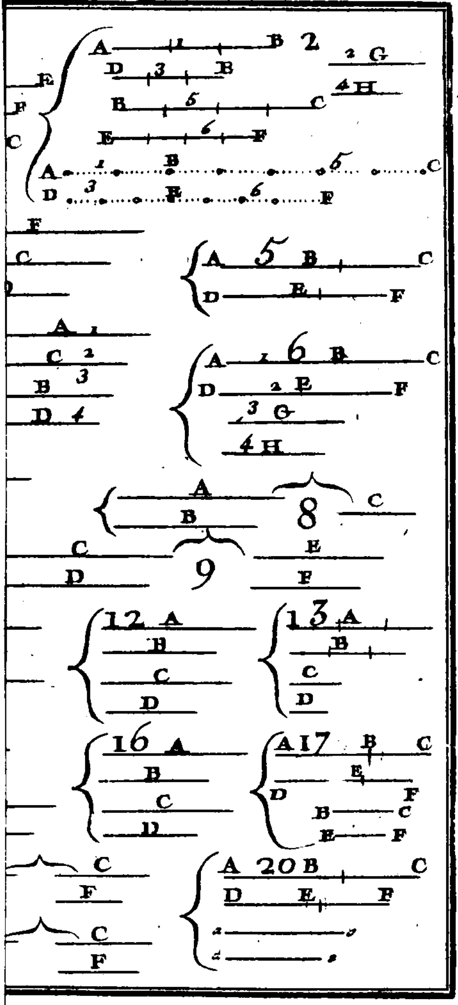
Démonst. Puisque AB est égal à *ab* (*c*), & que DE l'est à *de* (*c*), la somme de AB & de *de*, est égale à celle de DE & de *ab*; ainsi si BC est plus grand que EF, en ajoutant BC à la somme de AB & de *de*, & EF à celle de DE & de *ab*, ABC & *de*, somme de la plus grande & de la moins grande quantité, sera plus grande que DEF & *ab*, somme des deux autres. Or BC est plus grand que EF; car puisque les quantités

ABC, DEF, *ab* & *de* sont proportionnelles (*h*), & que BC est la différence des antécedentes (*c*), & EF celle des conséquentes (*c*), le rapport de ABC à DEF, est
N. 353. le même que celui de BC à EF (*n*), & en
N. 349. échangeant, ABC : BC : : DEF : EF (*n*); donc puisque ABC est plus grand que DEF
N. 345. (*h*), BC est plus grand que EF (*n*); & par conséquent ABC & *de*, somme de la plus grande & de la moins grande quantité, est plus grande que DEF & *ab*, somme des deux autres; donc C. Q. F. D.

Fin du cinquiéme Livre.

on-
des
infé-
, est
& en
n);
DEF
par
plus
, est
deux

LES



LES ELEMENS D'EUCLIDE.

LIVRE SIXIE'ME.

Dans le Livre précédent on a exposé la Doctrine des Rapports en géneral; dans celui-ci on applique cette Doctrine aux Lignes-droites, aux Surfaces-planes, & aux Angles. On le commence par y démontrer quels sont les Rapports des Surfaces des Parallelogrammes dont les hauteurs sont égales entr'elles, & l'on en conclut ceux des surfaces des Triangles qui sont dans le même cas. On éxamine ensuite quelles conditions suffisent pour rendre des Triangles semblables entr'eux, & après avoir déduit des principes établis dans ces premieres Propositions, plusieurs Problêmes qui concernent les Lignes proportionnelles, on démontre les propriétés de ces Lignes. On détermine ensuite les Rapports que les figures semblables ont entr'elles; on enseigne la ma-

niere de décrire une figure ſemblable à une autre, & l'on finit enfin ce Livre par démontrer quels ſont auſſi les Rapports que les angles ont entr'eux.

DEFINITIONS.

I.

363. ON nomme Figures *ſemblables* entr'elles, celles dont les angles ſont égaux, chacun à chacun, & dont les côtés qui forment ces angles égaux, ſont proportionnels.

Fig. 1. *Les figures ABC & DEF* ſont* ſemblables *entr'elles, ſi l'angle A eſt égal à l'angle D, l'angle B à l'angle E, l'angle C à l'angle F, & ſi AB : AC : : DE : DF; AB : BC : : DE : EF; & AC : CB : : DF : FE.*

II.

364. On dit que deux figures ſont *réciproques*, lorſque les dimenſions de l'une ſont les extrêmes d'une Proportion, dont les dimenſions de l'autre ſont les moyens.

Fig. 2. *Les figures ABCD & EFGH* ſont* réciproques, *ſi AB : EF : : EH : AD.*

III.

365. On dit qu'une ligne droite eſt diviſée en *moyenne & extrême raiſon*, lorſ-

qu'elle eſt diviſée en deux parties telles, que toute cette ligne eſt à la plus grande partie, comme cette plus grande partie eſt à la moins grande.

*La ligne AB * eſt diviſée au point C en moyenne & extrême raiſon, ſi AB : AC : : AC : CB.* Fig. 3.

IV.

366. La *hauteur* d'une figure, eſt la perpendiculaire abaiſſée du ſommet de cette figure, au côté qui lui eſt oppoſé, prolongé s'il eſt néceſſaire.

La hauteur *de la figure ABCD * eſt la perpendiculaire FE abaiſſée du ſommet DC de cette figure, au côté AB qui lui eſt oppoſé.* Fig. 4.

PROPOSITION I.

THEOREME.

367. *Les Rapports des surfaces des Parallelogrammes dont les hauteurs sont égales entr'elles, sont les mêmes que ceux des bases de ces Parallelogrammes.*

Fig. 5. SI les hauteurs des Parallelogrammes ABCD & EFGH * sont égales entr'elles, le rapport de la surface du parallelogramme ABCD à celle du parallelogramme EFGH, sera égal à celui de la base AB à la base EF.

Const. Divisés la base AB en autant de parties AI, IL, &c. égales entr'elles, que le premier terme de l'exposant du rapport de cette base AB à la base EF, contient d'unités : divisés aussi la base EF en autant de parties EP, PR, &c. égales entr'elles, que le second terme de ce même exposant contient d'unités : par chaque point de division I, L, &c. tirés des paralleles IK,
N. 130. LM, &c. au côté AD (*n*); & par chaque point de division P, R, &c. tirés des pa-
N. 130. ralleles PQ, RS, &c. au côté EH (*n*).

Démonst. Les parallelogrammes ABCD & EFGH sont divisés, l'un en autant de parallelogrammes AIKD, ILMK, &c. que la base AB est divisée de parties AI, IL, &c. (*c*), & l'autre en autant de parallelogrammes EPQH, PRSQ, &c. que la base EF est divisée de parties EP, PR, &c. (*c*); ces parties AI, IL, &c. EP, PR, &c. sont égales entr'elles (*c*); & ces parallelogrammes AIKD, ILMK, &c. EPQH, PRSQ, &c. sont égaux entr'eux (*n*), puis- N. 148.
qu'ils ont chacun pour base, une de ces parties égales (*c*), & que leurs hauteurs étant égales entr'elles (*h*), ils pourroient être renfermés entre les mêmes paralleles. Ainsi le parallelogramme AIKD est une fois le parallelogramme EPQH, de même que la partie AI est une fois la partie EP; & par conséquent le parallelogramme AIKD & la partie AI, sont équi-multiples du parallelogramme EPQH & de la partie EP (*n*): le parallelogramme N. 296.
ABCD est autant de fois le parallelogramme AIKD, que la base AB est de fois la partie AI; & par conséquent le parallelogramme ABCD & la base AB, sont équi-multiples du parallelogramme AIKD & de la partie AI (*n*): enfin le parallelogramme N. 296.
EFGH est autant de fois le parallelogramme EPQH, que la base EF est de fois la

partie EP ; & par conséquent le parallelogramme EFGH & la base EF , sont équimultiples du parallelogramme EPQH & de
N. 296. la partie EP (*n*). Or puisque le parallelogramme AIKD & la partie AI, sont équimultiples du parallelogramme EPQH & de la partie EP (*d*) ; que le parallelogramme ABCD & la base AB , le sont du parallelogramme AIKD & de la base AI (*d*) ; & qu'enfin le parallelogramme EFGH & la base EF, le sont du parallelogramme EPQH & de la partie EP (*d*) , le parallelogramme ABCD & la base AB sont équimultiples du parallelogramme EFGH & de la base EF
N. 335. (*n*); & par conséquent , le parallelogramme ABCD est au parallelogramme EFGH ,
N. 307. comme la base AB est à la base EF (*n*); donc C. Q. F. D.

COROLLAIRE I.

368. Il suit de ce Théorême , que *les rapports des surfaces des triangles dont les hauteurs sont égales entr'elles , sont les mêmes que ceux des bases de ces triangles.*

Si les hauteurs des triangles ABC &
Fig. 6. DEF * sont égales entr'elles , le rapport de la surface du triangle ABC à celle du triangle DEF , sera égal à celui de la base AC à la base DF.

Const. Par le point A , tirés la parallele AG au côté CB , & par le point B , la pa-

rallele BG au côté AC (*n*) par le point F, N. 130.
tirés la parallele FH au côté DE, & par le
point E, la parallele EH au côté DF (*n*). N. 130.

Démonst. Les triangles ABC & DEF sont les moitiés, l'un du quadrilatere ACBG, & l'autre du quadrilatere DFHE (*n*), N. 155. puisque ces quadrilateres sont des parallelogrammes (*c*); ainsi ces triangles sont équimultiples de ces parallelogrammes (*n*); or N. 296. ces Parallelogrammes sont entr'eux comme la base AC est à la base DF (*n*), puisque N. 367. leurs hauteurs sont les mêmes que celles des triangles ABC & DEF (*c*), & que celles de ces triangles sont égales entr'elles (*h*); donc les surfaces des triangles ABC & DEF sont aussi entr'elles, comme la base AC est à la base DF (*n*); donc C. Q. F. D. N. 347.

COROLLAIRE II.

369. Il suit de ce Corollaire, que *la surface d'un Polygone régulier, est égale à celle d'un triangle dont la base est égale à la circonférence de ce Polygone, & dont la hauteur l'est à une perpendiculaire abaissée du centre de ce même Polygone, à l'un de ses côtés.*

Si la base FH du triangle FGH*, est Fig. 7. égale à la circonférence du polygone ABCDE, & si la hauteur de ce triangle l'est à la perpendiculaire IK, abaissée du centre I de ce polygone à l'un de ses côtés, la surface du polygone ABCDE sera égale à celle du triangle FGH.

Conſt. Du centre I du polygone ABCDE, tirés à chacun de ses angles, les lignes IA, IB, IC, &c.

Démonſt. La surface du triangle FGH est autant de fois celle du triangle EID, que
N. 361. la base FH est de fois la base ED (*n*), puisque les hauteurs de ces triangles sont égales entr'elles (*h*); & la surface du polygone ABCDE, est aussi autant de fois celle de ce même triangle EID, que la circonférence de ce polygone est de fois cette même base ED, puisque la surface de ce polygone est composée d'autant de triangles entierement égaux au triangle EID, que ce polygone a de côtés. Or la base FH, & la circonférence du polygone ABCDE, sont chacune un même nombre de fois la base ED, puisque cette base FH & cette circonférence sont égales entr'elles (*h*); donc la surface du triangle FGH, & celle du polygone ABCDE sont chacune un même nombre de fois la surface du triangle EID; & par conséquent la surface de ce polygone & celle de ce triangle FGH, sont égales
N. 67. les entr'elles (*n*); donc C. Q. F. D.

COROLLAIRE III.

370. Il suit de ce Corollaire, que *la*

ſurface d'un cercle, eſt égale à celle d'un triangle dont la baſe eſt égale à la circonférence de ce cercle, & dont la hauteur l'eſt au rayon de ce même cercle.

Démonſt. Plus le nombre des côtés d'un polygone régulier eſt grand, moins la circonférence de ce polygone differe de celle du cercle dans lequel il eſt inſcrit ; & quelque grand que ſoit le nombre de ces côtés, on peut encore concevoir un autre polygone qui en ait un plus grand nombre, & dont par conſéquent la circonférence differe encore moins de celle de ce cercle. Or ſi l'on s'imagine un polygone d'un ſi grand nombre de côtés, que ſa circonférence ne differe plus de celle du cercle dans lequel il ſeroit inſcrit, alors la perpendiculaire abaiſſée du centre de ce polygone à l'un de ſes côtés, ne differera plus du rayon de ce cercle ; & par conſéquent il n'y aura plus de différence entre la ſurface de ce polygone & celle de ce cercle : mais la ſurface de ce polygone eſt égale à celle d'un triangle, dont la baſe eſt égale à la circonférence de ce polygone, & dont la hauteur l'eſt à la perpendiculaire abaiſſée du centre de ce même polygone à l'un de ſes côtés (*n*) ; donc puiſ- N. 365.
que ni cette circonférence, ni cette perpendiculaire ne different plus, l'une de la circonférence de ce cercle, & l'autre de ſon

rayon, la surface de ce cercle est égale à celle d'un triangle dont la base est égale à la circonférence de ce cercle, & dont la hauteur l'est à son rayon; donc C. Q. F. D.

PROPOSITION II.

THEOREME.

371. *Lorsqu'une ligne droite coupe deux côtés d'un triangle*; Premierement: *elle les coupera proportionnellement, si elle est parallele à l'autre côté*: Secondement, *elle sera parallele à l'autre côté, si elle les coupe proportionnellement.*

Premierement. SI la ligne DE est parallele au côté AC du trian-
Fig. 1. gle ABC *, BD : DA :: BE : EC. *Secondement*, si BD : DA :: BE : EC, la ligne DE est parallele au côté AC.

Const. Du point D tirés au point C, la ligne DC; & du point E au point A, la ligne EA.

DEMONSTRATION.

Premierement. Le rapport de la ligne BD à la ligne DA, est égal à celui du trian-
N. 368. gle BED au triangle DEA (*n*), puisque

les hauteurs de ces triangles qui ont chacun le même point E pour ſommet (*c*), & dont les baſes BD & DA ſont chacune ſur la même ligne BA (*c*), ſont égales entr'elles : or le rapport du triangle BED au triangle DEA, eſt égal à celui du même triangle BED au triangle EDC (*n*), puiſque les N. 337.
triangles DEA & EDC qui ont la même baſe DE (*c*), & ſont renfermés entre les mêmes paralleles DE & AC (*h*), ſont égaux entr'eux (*n*); & le rapport du triangle BED N. 149.
au triangle EDC, eſt égal à celui de la ligne BE à la ligne EC (*n*), puiſque les hauteurs N. 368.
de ces triangles qui ont chacun le même point D pour ſommet (*c*), & dont les baſes BE & EC ſont chacune ſur la même ligne BC (*c*), ſont égales entr'elles ; donc le rapport de la ligne BD à la ligne DA, eſt égal à celui de la ligne BE à la ligne EC (*n*); N. 342.
& par conſéquent BD : DA : : BE : EC.

Secondement. Le rapport du triangle BED au triangle DEA, eſt égal à celui de la ligne BD à la ligne DA (*n*), puiſque les N. 368.
hauteurs de ces triangles ſont égales entr'elles (*d*) : or le rapport de la ligne BD à la ligne DA, eſt égal à celui de la ligne BE à la ligne EC (*h*); & celui de la ligne BE à la ligne EC eſt égal à celui du triangle BED au triangle EDC (*n*), puiſque les hauteurs N. 368.
de ces triangles ſont égales entr'elles (*d*) ;

donc le rapport du triangle BED au triangle DEA, eſt égal à celui du même triangle
N. 342. BED au triangle EDC (*n*); & par conſéquent les triangles DEA & EDC ſont
N. 340. égaux entr'eux (*n*) : or puiſque ces triangles DEA & EDC ſont égaux entr'eux, & qu'ils ont la même baſe DE (*c*), les lignes DE & AC entre leſquelles ils ſont renfer-
N. 153. més, ſont paralleles entr'elles (*n*); donc C. Q. F. D.

PROPOSITION III.

THEOREME.

372. *Lorsqu'une ligne droite est tirée du sommet de l'un des angles d'un triangle, au côté opposé à cet angle;* Premierement, *si elle divise cet angle en deux parties égales entr'elles, elle divisera ce côté en deux parties proportionnelles aux autres côtés de ce même triangle :* Secondement, *si elle divise ce côté en deux parties proportionnelles aux autres côtés de ce même triangle, elle divisera cet angle en deux parties égales entr'elles.*

Premierement. SI la ligne BD * divise l'angle ABC du triangle ABC en deux parties ABD & DBC égales entr'elles, AD : DC : : AB : BC : *Secondement*, si AD : DC : : AB : BC, la ligne BD divisera l'angle ABC en deux parties ABD & DBC égales entr'elles. Fig. 9.

Const. Prolongés l'un des côtés AB ou BC du triangle ABC, par exemple le côté AB vers E, jusqu'à ce que son prolongement BE soit égal à l'autre côté BC : du point E tirés au point C, la ligne EC.

DEMONSTRATION.

Premierement. L'angle ABC est l'angle extérieur du triangle BEC (*c*); ainsi il est égal à la somme des angles intérieurs E &
N. 132. ECB qui lui sont opposés (*n*): or ces an-
N. 13. gles E & ECB sont égaux entr'eux (*n*), puisque les côtés BC & BE du triangle BEC sont égaux entr'eux (*c*) ; donc l'angle ABC est double de chacun de ces angles ; ainsi puisqu'il est aussi double de l'angle DBC (*h*), les angles
N. 61. DBC & ECB sont égaux entr'eux (*n*) ; & par conséquent puisqu'ils sont alternes, les lignes BD & EC qui les forment avec la
N. 124. ligne BC, sont paralleles (*n*). Or puisque la ligne BD qui coupe les côtés AC & AE du triangle AEC, est parallele à l'autre côté EC de ce triangle, elle divise ces côtés
N. 371. en parties proportionnelles (*n*) ; & par conséquent AD : DC : : AB : BE, qui est égal à BC (*c*).

Secondement. (Par une démonstration semblable à la précédente, l'angle ABC est double de l'angle ECB : or l'angle
N. 127. ECB est égal à langle DBC (*n*) ; car ces angles sont alternes, & les lignes EC & BD qui les forment avec la ligne

BC, sont paralleles (*n*), puisque la ligne N. 371.
BD divise les côtés AC & AE du triangle AEC, de maniere que AD : DC :: AB : BC (*h*) qui est égal à BE (*c*) ; donc l'angle ABC est double de l'angle DBC ; & par conséquent puisque cet angle ABC est la somme des angles ABD & DBC (*n*) ; N. 72.
ces angles ADB & DBC sont égaux entr'eux ; donc C. Q. F. D.

PROPOSITION IV.

THEOREME.

373. *Les côtés opposés aux angles égaux des triangles équiangles, sont proportionnels.*

SI les triangles ABC & CDE * sont Fig. 10.
équiangles, AB : CD :: AC : CE :: CB : ED.

Const. Posés les triangles ABC & CDE sur une même ligne droite ACE, de maniere qu'ils soient chacun vers un même côté par rapport à elle, & que celui des angles du triangle ABC, qui est égal à l'angle E, & celui des angles du triangle CDE, qui égal à l'angle A, ayent chacun leur sommet sur un même point C de cette ligne : prolongés les côtés AB & ED, jusqu'à ce qu'ils se rencontrent en un point F.

Démonst. L'angle extérieur DCE est égal à l'angle intérieur FAE qui lui est opposé (*h*) ; ainsi les lignes DC & FA qui forment ces angles avec la ligne AB, sont
N. 126. paralleles (*n*) ; or en comparant l'angle BCA à l'angle FEA, on démontre de la même maniere que les lignes BC & FE sont aussi paralleles ; donc le quadrilatere BFDC que ces lignes forment, est un pa-
N. 57. rallelogramme (*n*) ; & par conséquent ses côtés BF & CD sont égaux entr'eux, & ses
N. 141. côtés DF & CB le sont aussi (*n*). Mais puisque la ligne BC qui coupe les cô-côtés AF & AE du triangle AFE, est parallele à l'autre côté FE de ce triangle (*d*), elle divise ces côtés en parties proportion-
N. 371. nelles (*n*) ; & par conséquent AB : BF, qui égal à CD (*d*) : : AC : CE ; & puisque la ligne DC qui coupe les côtés EA & EF de ce même triangle, est parallele au côté FA (*d*), elle divise aussi ces côtés en parties
N. 371. proportionnelles (*n*) ; & par conséquent CE : AC : : ED : DF qui est égal à CB (*d*) ; & en renversant, AC : CE : : CB :
N. 351. ED (*n*) ; donc C. Q. F. D.

USAGE.

374. *Lorsque l'on a deux triangles équiangles*

équiangles, dont on ſçait le nombre de meſures que contiennent chacun des trois côtés de l'un, & l'un des côtés de l'autre, on ſe ſert de cette Propoſition de la maniere ſuivante, pour connoître le nombre de meſures que contient chacun des deux autres côtés.

*AC * : DF : : AB : DE : : CB : FE* Fig. 11. (n); *ainſi, puiſque dans l'exemple que* N. 373. *nous propoſons, AC contient 9 meſures, AB 5, CB 6, & DF 27, ſi l'on fait deux regles de trois, dont 9 & 27 ſoient les deux premiers termes, 5 le 3^e terme de l'une, & 6 le 3^e terme de l'autre, le quatriéme terme 15 de la premiere, ſera le nombre de meſures que contient DE, & le quatriéme terme 18 de la ſeconde, ſera le nombre de meſures que contient FE.*

PROPOSITION V.

THEOREME.

375. *Les triangles qui ont leurs côtés proportionnels, sont équiangles.*

Fig. 12. SI les triangles ABC & DEF * sont tels que AC : DF : : AB : DE : : CB : FE, les angles B & E seront égaux entr'eux, les angles C & EFD le seront aussi; enfin les angles A & EDF le seront aussi.

Const. Faites sous la ligne DF un angle FDG qui ait le point D de cette ligne pour
N. 115. sommet, & qui soit égal à l'angle A (*n*) : faites aussi sous la même ligne, un angle DFG qui ait le point F pour sommet, &
N. 115. qui soit égal à l'angle C (*n*).

Démonst. Les triangles ABC & DGF ont l'angle A égal à l'angle FDG (*c*), & l'angle C égal à l'angle DFG (*c*);
N. 135. ainsi ils sont équiangles (*n*); & par conséquent AC : DF : : AB : DG : : CB : FG
N. 373. (*n*) : or AC : DF : : AB : DE : : CB : FE (*h*); donc AB : DG : : AB : DE, & CB :
N. 342. FG : : CB : FE (*n*); & par conséquent
N. 340. DG est égal à DE, & FG l'est à FE (*n*). Ainsi les triangles DGF & DEF, qui ont le côté DF commun entr'eux, ont le côté

DG égal au côté DE (*d*), & le côté FG égal au côté FE (*d*) ; donc ces triangles sont équiangles (*n*) ; & par conséquent puisque le triangle DGF est équiangle au triangle ABC (*d*), les triangles ABC & DEF sont aussi équiangles ; donc C. Q. F. D.

N. 47.

PROPOSITION VI.

THEOREME.

376. *Si deux Triangles sont tels, que l'un des angles du premier, soit égal à l'un des angles du second, & que les côtés qui forment cet angle du premier, & ceux qui forment cet angle du second soient proportionnels, ces triangles seront équiangles.*

Les triangles ABC & DEF * seront équiangles, si l'angle A étant égal à l'angle EDF, AC : DF : : AB : DE. Fig. 12

Const. La même que la précédente.

Demonst. Les triangles ABC & DGF ont l'angle A égal à l'angle FDG (*c*), & l'angle C égal à l'angle DFG (*c*) ; ainsi ils sont équiangles (*n*) ; & par conséquent AC : DF : : AB : DG (*n*) : or AC : DF : : AB : DE (*h*) ; donc AB : DG : : AB : DE N. 375 N. 373.

N. 342. (*n*); & par conséquent DG est égal à DE
N. 340. (*n*). Ainsi les triangles DGF & DEF, qui
N. 62. ont l'angle FDG égal à l'angle EDF (*n*), puisque cet angle EDF est égal à l'angle A (*h*), & que l'angle A l'est à l'angle FDG (*c*), ont aussi les côtés DF & DG qui forment cet angle FDG du premier, égaux aux côtés DF & DE qui forment cet angle EDF du second, chacun à chacun, puisque DF est commun à ces deux triangles, & que DG est égal à DE (*d*); donc ces trian-
N. 80. gles sont équiangles (*n*); & par conséquent puisque le triangle DGF est équiangle au triangle ABC (*d*), les triangles ABC & DEF sont aussi équiangles; donc C. Q. F. D.

PROPOSITION VII.

THEOREME.

377. *Si deux triangles sont tels, que l'un des angles du premier, soit égal à l'un des angles du second; que les côtés qui forment un des autres angles du premier, & ceux qui forment un des autres angles du second, soient proportionnels; & que le troisiéme angle du premier, soit de même espece que le troisiéme angle du second, ces triangles seront équiangles.*

Les triangles ABC & DEF * seront équiangles, si l'angle B étant égal à l'angle E, & AB : DE :: AC : DF, les angles C & DFE sont de même espece. Fig. 13.

Const. Prolongés le côté EF à volonté vers G : du sommet D de l'angle D, tirés à un point quelconque G, pris à volonté sur la ligne EG, au-dessus ou au-dessous du point F, la ligne DG.

Démonst. Si l'angle A n'étoit point égal à l'angle EDF, il seroit égal à un certain angle EDG, plus ou moins grand que l'angle EDF. Or si l'angle A étoit égal à l'an-

gle EDG, les triangles ABC & DEG qui ont l'angle B égal à l'angle E (h), auroient aussi l'angle A égal à l'angle EDG (h); ain-
N. 135. si ils seroient équiangles (n); & par consé-
N. 373. quent AB : DE :: AC : DG (n) : or AB : DE :: AC : DF (h); donc AC :
N. 342. DG :: AC : DF (n); & par conséquent
N. 340. DG seroit égal à DF (n). Ainsi le triangle FDG auroit le côté DG égal au côté DF, donc l'angle DFG seroit égal à l'angle
N. 83. DGF (n); & par conséquent: *Premierement*, si l'angle DFG est droit ou obtus, l'angle DGE le seroit aussi. Mais si l'angle DFG est droit ou obtus, l'angle DGF n'est ni l'un ni l'autre; puisque si l'un des angles d'un triangle est droit ou ob-
N. 102. tus, les deux autres sont aigus (n); donc si l'angle DFG est droit ou obtus, l'angle A n'est point égal à l'angle EDG: *Secondement*, si l'angle DFG est aigu, l'angle DGF le seroit aussi; & si l'angle DGF étoit aigu, l'angle C le seroit, puisque les triangles ABC & DEG sont supposés équiangles (d); & l'angle DFE seroit aussi aigu, puisque les angles C & DFE sont de même espece (h). Mais si l'angle DFG est
N. 94. aigu, l'angle DFE est obtus (n); donc si l'angle DFG est aigu, l'angle A n'est point égal à l'angle EDG. Or puisque l'angle A n'est égal dans aucun cas, à un angle EDG

plus ou moins grand que l'angle EDF, il est égal à l'angle EDF ; donc les triangles ABC & DEF qui ont l'angle B égal à l'angle E (*h*), ont aussi l'angle A égal à l'angle EDF (*d*) ; & par conséquent ces triangles sont équiangles (*n*); donc C. Q. F. D. N. 135.

COROLLAIRE.

378. Il suit des N. 363, 373, 375, 376, & 377, que *les triangles sont semblables* : Premierement, *lorsque leurs côtés sont proportionnels* : Secondement, *dans tous les cas auxquels ils sont équiangles.*

PROPOSITION VIII.

THEOREME.

379. *Une perpendiculaire abaissée de l'angle droit d'un triangle rectangle, au côté qui est opposé à cet angle, divise ce triangle en deux autres triangles qui lui sont semblables.*

LA perpendiculaire BD * abaissée de l'angle droit B du triangle rectangle ABC, au côté AC, divise ce triangle en deux autres triangles ABD & CBD qui sont semblables au triangle ABC. Fig. 14.

Démonst. Les triangles ABC & ABD ont l'angle A commun entr'eux, & l'angle

ABC égal à l'angle ADB, puisque l'angle ABC est droit (*h*),& que l'angle ADB l'est aussi (*h*);donc ces triangles sont équian-
N. 135. gles (*n*); & par conséquent ils sont sem-
N. 378. blables (*n*). Or les triangles ABC & CBD ont aussi l'angle C commun entr'eux, & l'angle ABC égal à l'angle CDB, puisque l'angle ABC est droit (*h*), & que l'angle CDB l'est aussi (*h*); donc ces triangles sont
N. 135. aussi équiangles (*n*); & par conséquent ils
N. 378. sont aussi semblables (*n*); donc C. Q. F. D.

Corollaire.

380. Il suit de ce Théorême, que *la perpendiculaire abaissee de l'angle droit d'un triangle rectangle, au côté qui est opposé à cet angle, est moyenne proportionnelle entre les parties, en lesquelles elle divise ce côté.*

Fig. 14. AD : DB : : DB : DC *.

Démonst. Les triangles ABD & CBD sont équiangles entr'eux, puisqu'ils le sont
N. 379. chacun au même triangle ABC (*n*); ainsi
N. 373. (*n*) le côté AD du triangle ABD, opposé à l'angle ABD, est au côté DB du triangle CBD, opposé à l'angle C qui égal à l'angle
N. 379. ABD (*n*); comme le côté DB du triangle ABD, opposé à l'angle A, est au côté DC du triangle CBD, opposé à l'angle DBC
N. 379. qui est égal à l'angle A (*n*); donc C.Q.F.D.

PROPO-

PROPOSITION IX.

PROBLEME.

381. *Couper d'une ligne droite donnée, telle partie que l'on voudra.*

IL faut couper, par exemple, les trois cinquiémes de la ligne droite AB *. Fig. 15.

Conſt. De l'une des extrémités de la ligne AB, par exemple de ſon extrémité A, tirés à volonté une ligne droite AH, qui forme avec cette ligne AB un angle quelconque HAB : prenés ſur la ligne AH en commençant au point A, autant de parties AC, CD, DE, &c. à volonté, mais égales entr'elles, que le Dénominateur de la partie que vous voulés couper de la ligne AB, contient d'unités ; c'eſt-à-dire 5, dans cet exemple : du point G auquel ſe termine la derniere de ces parties, tirés au point B, la ligne GB : comptés en commençant vers le point A, autant de ces parties, que le Numérateur de cette partie que vous voulés couper de la ligne AB, contient d'unités ; c'eſt-à-dire 3, dans cet exemple : par le point E auquel ſe termine la derniere de ces parties, tirés

N. 130. une parallele EI à la ligne GB (*n*) : cette parallele coupera la ligne AB en un point I, tel que la partie AI sera les trois cinquiémes de cette ligne.

Démonst. Les triangles AGB & AEI, ont l'angle A commun entr'eux, & l'angle
N. 127. AIE égal à l'angle ABG (*n*), puisque l'angle AIE est un angle extérieur, que l'angle ABG est l'angle intérieur qui lui est opposé, & que les lignes EI & GB qui forment ces angles avec la ligne AB, sont paralleles (*c*) ; ainsi ces triangles sont équian-
N. 135. gles (*n*) ; donc AG : AE :: AB : AI (*n*) ;
N. 373. & par conséquent, puisque AE est les trois cinquiémes de AG (*c*), AI est les trois
N. 308. cinquiémes de AB (*n*) ; donc C. Q. F. F.

PROPOSITION X.

PROBLEME.

382. *Diviser une ligne droite, de la même maniere qu'une autre ligne droite est divisée.*

Fig. 16. IL faut diviser la ligne CD *, de la même maniere que la ligne AB est divisée.

Const. De l'une des extrémités de la ligne AB ; par exemple de son extrémité

A, tirés une ligne AI égale à la ligne CD, & qui forme avec la ligne AB, un angle quelconque BAI: du point B tirés au point I, la ligne BI: par les points de division E & F de la ligne AB, tirés les paralleles EG & FH à la ligne BI (*n*). N. 130.

Démonst. La ligne EG qui coupe les côtés AF & AH du triangle AFH, est parallele à l'autre côté FH de ce triangle (*n*), N. 129.
puisque cette ligne EG & ce côté FH sont paralleles l'une & l'autre à une même ligne BI (*c*); ainsi AE : EF : : AG : GH (*n*); N. 371.
donc en composant, AEF : EF : : AGH : GH (*n*); & par conséquent en échangeant, N. 353.
AEF : AGH : : EF : GH (*n*). Or AEF N. 349.
: FB : : AGH : HI (*n*); puisque la ligne N. 371.
FH qui coupe les côtés AB & AI du triangle ABI, est parallele à l'autre côté BI de ce triangle (*c*); donc en échangeant, AEF : AGH : : FB : HI (*n*); & par conséquent, N. 349.
puisque AEF : AGH : : EF : GH (*d*), EF : GH : : FB : HI (*n*), & en échangeant, N. 342.
EF : FB : : GH : HI (*n*). Ainsi puisque N. 349.
AE : EF : : AG : GH (*d*), & que EF : FB : : GH : HI (*d*), les parties de la ligne AI & celles de la ligne AB sont proportionnelles; & par conséquent, si l'on divise la ligne CD qui est égale à la ligne AI (*c*), en parties CK, KL & LD égales aux parties AG, GH & HI de cette ligne AI

N. 79. (*n*), la ligne CD ſera diviſée de la même maniere que la ligne AB eſt diviſée; donc C. Q. F. F.

PROPOSITION XI.

PROBLEME.

383. *Trouver une troiſiéme proportionnelle à deux lignes droites données.*

IL faut trouver une troiſiéme proportionnelle aux deux lignes droites A &
Fig. 17. B*

Conſt. Faites un angle quelconque CDE: prenés ſur l'un des côtés de cet angle, par exemple ſur le côté DE, deux parties DF & FG égales, l'une à la ligne A, & l'autre à la ligne B: prenés auſſi ſur l'autre côté DC de ce même angle, une partie DH égale à cette même ligne B: du point F tirés au point H, la ligne FH: par le point G ti-
N. 130. rés une parallele GI à cette ligne FH(*n*): la partie HI du côté DC, ſera troiſiéme proportionnelle aux lignes A & B.

Démonſt. La ligne FH qui coupe les côtés DG & DI du triangle DIG, eſt parallele à l'autre côté GI de ce triangle (*c*);
N. 371. ainſi DF : FG : : DH : HI (*n*); & par con-

ſéquent, puiſque DF eſt égal à A (*c*), & que FG & DH ſont égaux chacun à B (*c*), A : B :: B : HI; donc C. Q. F. F.

PROPOSITION XII.

PROBLEME.

384. *Trouver une quatriéme proportionnelle à trois lignes droites données.*

IL faut trouver une quatriéme proportionnelle aux trois lignes droites A, B & C*. Fig. 15.

Conſt. Faites un angle quelconque DEF: prenés ſur l'un des côtés de cet angle, par exemple ſur le côté EF, deux parties EG & GH égales, l'une à la ligne A, & l'autre à la ligne B: prenés auſſi ſur l'autre côté ED de ce même angle, une partie EI égale à la ligne C: du point G au point I, tirés la ligne GI: par le point H, tirés une parallele HK à cette ligne GI (*n*): la partie N. 130.
IK du côté ED, ſera quatriéme proportionnelle aux lignes A, B & C.

Démonſt. La ligne GI qui coupe les côtés EH & EK du triangle EKH, eſt parallele à l'autre côté HK de ce triangle (*c*); ainſi EG : GH :: EI : IK (*n*); & par con- N. 371.

séquent puisque EG est égal à A (*c*), GH à B (*c*), & EI à C (*c*), A:B::C:IK; donc C. Q. F. F.

PROPOSITION XIII.

PROBLEME.

385. *Trouver une moyenne proportionnelle entre deux lignes droites données.*

Fig. 19. IL faut trouver une moyenne proportionnelle entre les lignes droites A & B *.

Const. Tirés une ligne droite CD, à volonté : prenés sur cette ligne deux parties CE & EF égales, l'une à la ligne A, & l'autre à la ligne B : divisés la ligne CEF en deux parties CG & GF égales entr'elles
N. 91. (*n*) : du point G pris pour centre, & avec l'une de ces parties CG ou GF prise pour rayon, décrivés un demi cercle CHF : du point E, élevés une perpendiculaire EH à
N. 92. la ligne CD (*n*) : cette perpendiculaire sera moyenne proportionnelle entre les lignes A & B.

Pour la démonstration : du point H tirés aux points C & F, les lignes HC & HF.

Dém. Le triangle CHF est rectangle en H
N. 253. (*n*), puisque l'angle H est inscrit dans un de-

mi-cercle CHF (*c*). Or la ligne EH est une perpendiculaire abaissée de l'angle droit H de ce triangle, au côté CF qui est opposé à cet angle (*c*) ; donc CE : EH : : EH : EF (*n*) ; & par conséquent, puisque CE est égal à A (*c*), & que EF l'est à B (*c*), A : EH : : EH : B ; donc C. Q. F. F. N. 380.

PROPOSITION XIV.

THEOREME.

386. *Lorsque des Parallelogrammes sont équiangles :* Premierement, *si leurs surfaces sont égales entr'elles, leurs côtés seront réciproquement proportionnels :* Secondement, *si leurs côtés sont réciproquement proportionnels, leurs surfaces seront égales entr'elles.*

SI les Parallelogrammes ABCD & CEFG * sont équiangles : *Premierement*, si leurs surfaces sont égales entr'elles, leurs côtés DC, CE, CB & CG seront réciproquement proportionnels : *Secondement*, si leurs côtés DC, CE, CB & CG sont réciproquement proportionnels, leurs surfaces seront égales entr'elles. Fig. 20.

Conſt. Posés les parallelogrammes AB-

CD & CEFG, de maniere que deux de leurs angles égaux entr'eux, par exemple les angles DCB & GCE, deviennent des angles opposés au sommet : prolongés les côtés AB & FE, jusqu'à ce qu'ils se rencontrent en un point H.

DEMONSTRATION.

Premierement. Le rapport du côté DC au côté CE, est égal à celui du parallelogramme ABCD, au parallelogramme BH-
N. 367. EC (*n*), puisque les hauteurs de ces parallelogrammes sont égales entr'elles (*c*) : or le rapport du parallelogramme ABCD au parallelogramme BHEC, est égal à celui du parallelogramme CEFG au même pa-
N. 338. rallelogramme BHEC (*n*), puisque les parallelogrammes ABCD & CEFG sont égaux entr'eux (*h*) ; & le rapport du parallelogramme CEFG au parallelogramme BHEC, est égal à celui du côté CG au cô-
N. 367. té CB (*n*), puisque les hauteurs de ces parallelogrammes sont égales entr'elles (*c*) ; donc le rapport du côté DC au côté CE,
N. 342. est égal à celui du côté CG au côté CB (*n*) ; & par conséquent ces côtés DC, CE, CB & CG sont réciproquement proportionnels
N. 310. (*n*).

Secondement. Le rapport du parallelogramme ABCD au parallelogramme BH-

EC, eſt égal à celui du côté DC au côté CE (*n*), puiſque les hauteurs de ces paral- N. 367.
lelogrammes ſont égales entr'elles (*c*) : or le rapport du côté DC au côté CE, eſt égal à celui du côté CG au côté CB (*n*), N. 310.
puiſque ces côtés ſont réciproquement proportionnels (*h*) ; & le rapport du côté CG au côté CB, eſt égal à celui du parallelogramme CEFG au parallelogramme BHEC (*n*), puiſque les hauteurs de ces paral- N. 367.
lelogrammes ſont égales entr'elles (*c*) ; donc le rapport du parallelogramme ABCD au parallelogramme BHEC, eſt égal à celui du parallelogramme CEFG au même parallelogramme BHEC (*n*) ; & par N. 342.
conſéquent les parallelogrammes ABCD & CEFG ſont égaux entr'eux (*n*) ; donc N. 340.
C. Q. F. D.

PROPOSITION XV.

THEOREME.

387. *Lorsque deux Triangles sont tels, que l'un des angles du premier est égal à l'un des angles du second :* Premierement, *si les surfaces de ces triangles sont égales entr'elles, les côtés qui forment ces angles, seront réciproquement proportionnels :* Secondement, *si les côtés qui forment ces angles, sont réciproquement proportionnels, les surfaces de ces triangles seront égales entr'elles.*

Fig. 21. SI les triangles ABC & CDE * ont l'angle ACB égal à l'angle ECD : *Premierement,* si leurs surfaces sont égales entr'elles, les côtés AC, CD, CB & CE seront réciproquement proportionnels : *Secondement,* si les côtés AC, CD, CB & CE qui forment ces angles, sont réciproquement proportionnels, les surfaces de ces triangles seront égales entr'elles.

Const. Posés les triangles ABC & CDE, de maniere que leurs angles ACB & ECD égaux entr'eux, deviennent des angles opposés au sommet : du sommet B de l'angle

B, tirés au sommet D de l'angle D, la ligne BD.

DEMONSTRATION.

Premierement. Le rapport du côté AC au côté CD, est égal à celui du triangle ABC au triangle CBD (*n*), puisque les N. 368.
hauteurs de ces triangles sont égales entr'elles (*c*) : or le rapport du triangle ABC au triangle CBD, est égal à celui du triangle CDE au même triangle CBD (*n*), puis- N. 338.
que les triangles ABC & CDE sont égaux entr'eux (*h*) ; & le rapport du triangle CDE au triangle CBD, est égal à celui du côté CE au côté CB (*n*), puisque les hau- N. 368.
teurs de ces triangles sont égales entr'elles (*c*) ; donc le rapport du côté AC au côté CD, est égal à celui du côté CE au côté CB (*n*) ; & par conséquent ces côtés AC, N. 342.
CD, CB & CE sont réciproquement proportionnels (*n*). N. 310.

Secondement. Le rapport du triangle ABC au triangle CBD, est égal à celui du côté AC au côté CD (*n*), puisque les hau- N. 368.
teurs de ces triangles sont égales entr'elles (*c*) : or le rapport du côté AC au côté CD, est égal à celui du côté CE au côté CB (*n*), N. 310.
puisque ces côtés sont réciproquement proportionnels (*h*) ; & le rapport du côté CE au côté CB, est égal à celui du triangle

N. 368. CDE au triangle CBD (*n*), puisque les hauteurs de ces triangles sont égales entr'elles (*c*); donc le rapport du triangle ABC au triangle CBD, est égal à celui du triangle CDE au même triangle CBD (*n*); &
N. 342. par conséquent les triangles ABC & CDE
N. 340. sont égaux entr'eux (*n*); donc C. Q. F. D.

PROPOSITION XVI.

THEOREME.

388. Premierement. *Si quatre lignes droites sont proportionnelles, la surface du rectangle fait de la premiere & de la quatriéme, sera égale à celle du rectangle fait de la seconde & de la troisiéme :* Secondement. *Si quatre lignes droites sont telles, que la surface du rectangle fait de la premiere & de la quatriéme, soit égale à celle du rectangle fait de la seconde & de la troisiéme, ces quatre lignes seront proportionnelles.*

Premierement. SI AB : EF :: EH : AD
Fig. 22. *, la surface du rectangle fait de AB & de AD, sera égale à celle du rectangle fait de EF & de EH : *Secondement.* Si la surface du rectangle fait de

AB & de AD, eſt égale à celle du rectangle fait de EF & de EH, les quatre lignes AB, EF, EH & AD ſeront proportionnelles.

Conſt. Faites un rectangle ABCD, qui ait la ligne AB pour longueur, & la ligne AD pour largeur : faites auſſi un rectangle EFGH, qui ait la ligne EF pour longueur, & la ligne EH pour largeur.

DEMONSTRATION.

Premierement. Les parallelogrammes ABCD & EFGH ſont équiangles, puiſqu'ils ſont rectangles (*c*), & ils ont leurs côtés réciproquement proportionnels, puiſque AB : EF : : EH : AD (*h*) ; donc les ſurfaces de ces parallelogrammes ſont égales entr'elles(*n*);& par conſéquent, puiſque ces parallelogrammes ſont les rectangles, l'un des lignes AB & AD (*c*), & l'autre des lignes EF & EH (*c*), la ſurface du rectangle fait des des lignes AB & AD, eſt égale à celle du rectangle fait des lignes EF & EH. N. 386.

Secondement. Les parallelogrammes ABCD & EFGH ſont équiangles, puiſqu'ils ſont rectangles (*c*), & leurs ſurfaces ſont égales entr'elles (*h*); donc leurs côtés AB, EF, AD & EH ſont réciproquement proportionnels (*n*); & par conſéquent AB : EF : : EH : AD ; donc C. Q. F. D. N. 386. N. 310.

PROPOSITION XVII.

THEOREME.

389. Premierement. *Si trois lignes droites sont continuement proportionnelles, la surface du rectangle fait de la premiere & de la troisiéme, sera égale à celle du quarré fait de la seconde:* Secondement. *Si trois lignes droites sont telles, que la surface du rectangle fait de la premiere & de la troisiéme, soit égale à celle du quarré fait de la seconde, ces trois lignes seront continuement proportionnelles.*

Fig. 23. *Premierement.* SI ∺ AB : EF : AD*, la surface du rectangle fait de AB & de AD, sera égale à celle du quarré de EF : *Secondement.* Si la surface du rectangle fait de AB & de AD, est égale à celle du quarré fait de EF, les trois lignes AB, EF & AD seront continuement proportionnelles.

Const. Faites un rectangle ABCD qui ait la ligne AB pour longueur, & la ligne AD pour largeur : faites aussi un quarré EFGH qui ait la ligne EF pour l'un de ses côtés.

DEMONSTRATION.

Premierement. Les parallelogrammes ABCD & EFGH ſont équiangles, puiſqu'ils ſont rectangles (*c*), & ils ont leurs côtés réciproquement proportionnels, puiſque AB : EF : : EH qui eſt égale à EF (*c*) : AD (*h*) ; donc les ſurfaces de ces parallelogrammes ſont égales entr'elles (*n*) ; N. 386.
& par conſéquent, puiſque ces parallelogrammes ſont, l'un le rectangle des lignes AB & AD (*c*), & l'autre le quarré de la ligne EF (*c*), la ſurface du rectangle fait des lignes AB & AD, eſt égale à celle du quarré de la ligne EF.

Secondement. Les parallelogrammes ABCD & EFGH ſont équiangles, puiſqu'ils ſont rectangles (*c*), & leurs ſurfaces ſont égales entr'elles (*h*) ; donc leurs côtés AB, EF, AD & EH ſont réciproquement proportionnels (*n*) ; & par conſéquent AB N. 386.
:EF: :EH:AD (*n*): or EF eſt égal à EH N. 310.
(*n*) ; puiſque le quadrilatere EFGH eſt un N. 49.
quarré (*c*) ; donc ∺ AB : EF : AD ; donc C. Q. F. D.

PROPOSITION XVIII.

PROBLEME.

390. *Décrire sur une ligne droite donnée, un Polygone semblable à un autre.*

Fig. 24. Il faut décrire sur la ligne droite EF *, un Polygone semblable au Polygone ABCD.

Const. Divisés le polygone ABCD en triangles, par une ligne AC tirée de l'un de ses angles A, à l'angle C qui lui est opposé: faites sur la ligne EF, des angles GEF & F égaux, l'un à l'angle CAB, l'autre à l'angle B, & qui aient pour sommets, l'un le point E de cette ligne, & l'autre le point
N. 115. F (*n*) : faites aussi sur la ligne EG, des angles HEG & HGE égaux, l'un à l'angle DAC, l'autre à l'angle DCA, & qui aient pour sommets, l'un le point E de cette li-
N. 115. gne, & l'autre le point G (*n*). Le polygone EFGH que les côtés FG, GH & HE de ces angles, forment avec la ligne EF, sera semblable au polygone ABCD.

Démonst. Les angles des polygones EFGH & ABCD sont égaux, chacun à chacun; car puisque les angles HEG & GEF,

&

& les angles DAC & CAB ſont égaux, chacun à chacun (*c*), l'angle HEF qui eſt la ſomme des deux premiers, eſt égal à l'angle DAB, qui eſt celle des deux derniers: l'angle F eſt égal à l'angle B (*c*): l'angle FGH eſt égal à l'angle BCD; puiſque l'un eſt la ſomme des angles HGE & EGF, & l'autre celle des angles DCA & ACB; que l'angle HGE eſt égal à l'angle DCA (*c*); & que les angles GEF & F du triangle EGF, étant égaux aux angles CAB & B du triangle ACB (*c*), l'autre angle EGF du premier triangle, eſt égal à l'autre angle
ACB du ſecond (*n*): & enfin l'angle H eſt N. 135.
égal à l'angle D, par des raiſons pareilles à celles par leſquelles l'angle EGF l'eſt à l'angle ACB. Or les côtés de ces polygones, qui forment ces angles égaux, ſont proportionnels; car puiſque les triangles EGF & ACB ſont équiangles (*d*), EG : AC : : EF
: AB : : FG : BC (*n*); & puiſque les trian- N. 373.
gles EHG & ADC ſont auſſi équiangles (*d*), EG : AC : : EH : AD : : HG : DC
(*n*); donc EF : AB : : FG : BC : : EH : N. 373
AD : : HG : DC (*n*); & par conſéquent, en N. 342.
échangeant les premier & troiſiéme rap-
ports, EF : EH : : AB : AD (*n*), en N. 349.
échangeant les deux premiers, EF : FG
: : AB : BC (*n*); en échangeant les ſecond N. 349.
& quatriéme, FG : HG : : BC : DC (*n*); N. 349.

& enfin en échangeant les troisiéme & qua-
N. 349. triéme, EH : HG :: AD : DC (*n*). Donc puisque les angles des polygones EFGH & ABCD sont égaux, chacun à chacun (*d*); & que les côtés de ces polygones, qui forment ces angles égaux, sont proportionnels (*d*), ces polygones sont semblables entr'-
N. 363. eux (*n*); donc C. Q. F. F.

USAGE.

391. *On peut se servir de cette Proposition, pour lever le plan d'une Ville, d'un Batiment, d'un Champ, ou d'une Forét, & méme celui d'un Païs; puisque les figures de toutes ces etendues, sont des polygones; & que par conséquent, lever le plan de l'une de ces etendues, c'est décrire un polygone semblable à celui que forment les côtés de cette étendue.*

PROPOSITION XIX.

THEOREME.

392. *Les rapports des ſurfaces des triangles ſemblables entr'eux, ſont doublés de ceux des côtés homologues* § *de ces triangles.*

SI les triangles ABC & DEF * ſont ſemblables entr'eux, le rapport du triangle ABC au triangle DEF, ſera doublé de celui du côté AC au côté DF. Fig. 25.

Conſt. Trouvés une troiſiéme proportionnelle aux côtés AC & DF (*n*) : diviſés le côté AC en deux parties AG & GC, telles que l'une AG ſoit égale à cette troiſiéme proportionnelle (*n*) : du point B tirés au point G, la ligne BG. N. 383. N. 79.

Démonſt. Le rapport du côté AC à la partie AG, eſt doublé de celui du côté AC au côté DF (*n*), puiſque ÷ AC : DF : AG (*c*) ; ainſi, ſi le rapport du triangle ABC au triangle DEF, eſt égal à celui du côté AC à la partie AG, le rapport de ces deux triangles ſera doublé de celui du côté N. 348.

§ On nomme *Côtés homologues*, les côtés des figures ſemblables, qui ſont oppoſés à des angles égaux entr'eux.

AC au côté DF. Or le rapport du triangle ABC au triangle DEF, eſt égal à celui du côté AC à la partie AG; car AB : DE : :
N. 373. AC : DF (*n*), puiſque les triangles ABC & DEF ſont ſemblables entr'eux (*h*); & AC : DF : : DF : AG (*c*); donc AB : DE
N. 342. : : DF : AG (*n*); & par conſéquent les côtés AB, DE, AG & DF ſont réciproquement proportionnels. Ainſi les triangles ABG & DEF qui ont l'angle A égal à l'angle D (*h*), ont auſſi les côtés AB, DE, AG & DF qui forment ces angles, réciproquement proportionnels (*d*); donc ces trian-
N. 387. gles ſont égaux entr'eux (*n*); & par conſéquent le triangle ABC a le même rapport à
N. 338. chacun de ces triangles (*n*): or le rapport du triangle ABC au triangle ABG, eſt égal
N. 368. à celui du côté AC à la partie AG (*n*); donc le rapport du triangle ABC au triangle DEF, eſt auſſi égal à celui de ce côté AC à cette partie AG; & par conſéquent le rapport du triangle ABC au triangle DEF, eſt doublé de celui du côté AC au côté DF; donc C. Q. F. D.

PROPOSITION XX.

THEOREME.

393. *Si deux Polygones sont semblables entr'eux :* Premierement. *On pourra les diviser l'un & l'autre, en un pareil nombre de triangles semblables, chacun à chacun :* Secondement. *Ces deux Polygones, & deux quelconques de ces triangles, correspondans l'un à l'autre, seront proportionnels :* Troisiémement. *Enfin le rapport des surfaces de ces deux Polygones, sera doublé de celui de leurs côtés homologues.*

SI les Polygones ABCDE & FGHIK * sont semblables entr'eux : *Premierement.* On pourra les diviser l'un & l'autre, en un pareil nombre de triangles semblables, chacun à chacun : *Secondement.* Deux quelconques de ces triangles, correspondans l'un à l'autre, seront des parties pareilles de ces polygones, chacun de chacun : *Troisiémement.* Enfin le rapport du polygone ABCDE au polygone FGHIK, sera doublé de celui du côté AB au côté FG ; ou de celui du côté AE au côté FK ; ou &c. Fig. 26.

Conſt. Diviſés le polygone ABCDE en triangles, par des lignes AC & AD tirées de l'un quelconque A de ſes angles, à chacun de ſes autres angles C & D oppoſés à cet angle A : diviſés auſſi le polygone FGHIK en triangles, par des lignes FH & FI tirées de l'angle F de ce polygone, qui correſpond à l'angle A, à chacun de ſes autres angles H & I oppoſés à cet angle F.

DEMONSTRATION.

Premierement. Les polygones ABCDE & FGHIK ſont diviſés en triangles, l'un par des lignes tirées de l'angle A, à chacun des angles oppoſés à cet angle A ; & l'autre par des lignes tirées de l'angle F qui correſpond à l'angle A, à chacun des angles oppoſés à cet angle F (*c*) : or le nombre des angles oppoſés à l'angle A, eſt égal à celui des angles oppoſés à l'angle F, puiſque ces polygones ſont ſemblables entr'eux (*h*) ; donc ces polygones ſont diviſés l'un & l'autre en triangles, par un pareil nombre de lignes ; & par conſéquent ils ſont auſſi diviſés l'un & l'autre en un pareil nombre de triangles. Or ces triangles
n. 378. ſont ſemblables chacun à chacun (*n*) ; car puiſque les polygones ABCDE & FGHIK ſont ſemblables entr'eux (*h*), les triangles ABC & FGH ont les angles B & G

qui font des angles correſpondans de ces polygones, égaux entr'eux, & les côtés BA & BC, GF & GH qui forment ces angles, proportionnels (*n*); & par conſéquent N. 363. ces triangles ſont équiangles (*n*); par des N. 376. raiſons pareilles, les triangles AED & FKI ſont auſſi équiangles; & enfin, puiſque les triangles ABC & FGH ſont équiangles (*d*), AC : FH : : AB : FG (*n*); puiſ- N. 373. que les polygones ABCDE & FGHIK ſont ſemblables entr'eux (*h*), AB : FG : : CD : HI : : AE ; FK (*n*); & puiſque les N. 363. triangles AED & FKI ſont équiangles (*d*), AE : FK : : AD : FI (*n*); donc AC : FH N. 373. : : CD : HI : : AD : FI (*n*); & par con- N. 342. ſéquent puiſque les triangles ACD & FHI ſont formés par ces côtés proportionnels AC, CD & AD, FH, HI & FI, ils ſont auſſi équiangles (*n*). Donc les polygones N. 375. ABCDE & FGHIK ſemblables entr'eux; ſont diviſés l'un & l'autre, en un pareil nombre de triangles ſemblables, chacun à chacun.

Secondement. Le rapport du triangle ABC au triangle FGH, eſt doublé de celui du côté AC au côté FH (*n*), puiſque N. 392. ces triangles ſont ſemblables entr'eux (*d*) : or le rapport du côté AC au côté FH, eſt égal à celui du côté AD au côté FI (*n*), N. 373. puiſque les triangles ACD & FHI ſont équiangles (*d*); donc le rapport du trian-

gle ABC au triangle FGH, eſt doublé
N 342. de celui du côté AD au côté FI (*n*); & par conſéquent, puiſque le rapport du triangle ACD au triangle FHI ſemſemblable à ce triangle ACD (*d*), eſt auſſi doublé de celui du côté AD au côté FI
N. 392. (*n*); & que celui du triangle AED au triangle FKI ſemblable à ce triangle AED (*d*), eſt auſſi doublé de ce même côté AD à ce
N. 392. même côté FI (*n*), le rapport du triangle ABC au triangle FGH, celui du triangle ACD au triangle FHI, & celui du triangle AED au triangle FKI, ſont égaux en-
N. 342. tr'eux (*n*). Or puiſque le rapport du triangle ABC au triangle FGH, celui du triangle ACD au triangle FHI, & celui du triangle AED au triangle FKI, ſont égaux entr'eux (*d*), ces triangles ſont proportionnels; & par conſéquent le polygone ABCDE qui eſt la ſomme des triangles antécedens
N. 72. ABC, ACD & AED (*n*), eſt au polygone FGHIK qui eſt celle des triangles
N. 72. conſéquens FGH, FHI & FKI (*n*); comme l'un quelconque ABC des triangles antécedens, eſt au triangle conſéquent FGH
N. 343. qui correſpond à ce triangle antécedent (*n*).

Troiſiémement. Enfin le rapport du polygone ABCDE au polygone FGHIK, eſt égal à celui du triangle ABC au triangle FGH (*d*); or le rapport du triangle ABC

au

au triangle FGH eſt doublé de celui du côté AB au côté FG (*n*), puiſque ces triangles ſont ſemblables entr'eux (*d*) ; donc le rapport du polygone ABCDE au polygone FGHIK, eſt auſſi doublé de celui du côté AB au côté FG(*n*); donc C. Q. F. D. N. 392. N. 342.

COROLLAIRE.

394. Il ſuit de ce Théorême, que *ſi trois lignes droites ſont continuement proportionnelles, le polygone décrit ſur la premiere, ſera à un polygone ſemblable, décrit ſur la ſeconde, & ſemblablement poſé ſur elle ; comme la premiere de ces lignes eſt à la troiſiéme.*

Si les lignes droites A, B & C * ſont continuement proportionnelles, le rapport du polygone décrit ſur la ligne A, à un polygone ſemblable décrit ſur la ligne B, & ſemblablement poſé ſur elle, ſera égal au rapport de la ligne A à la ligne C. Fig. 27.

Démonſt. Le rapport du polygone décrit ſur la ligne A au polygone ſemblable décrit ſur la ligne B, eſt doublé du rapport de la ligne A à la ligne B (*n*) : or le rapport de la ligne A à la ligne C, eſt auſſi doublé de celui de la ligne A à la ligne B (*n*); donc le rapport du polygone décrit ſur la ligne A au polygone ſemblable décrit ſur la ligne B, N. 393. N. 348.

est égal au rapport de la ligne A à la ligne
N. 342. C (*n*); donc C. Q. F. D.

USAGE.

395. *On se sert de cette Proposition de la maniere suivante :* Premierement. *Pour connoître le rapport de deux figures semblables entr'elles :* Secondement, *pour décrire une figure semblable à une autre, & qui ait à cette autre, un rapport donné.*

Premierement. *Pour connoître le rapport du polygone ABCDE au polygone FGH-*
Fig. 26. *IK *.*

On trouve une troisiéme proportionnelle à deux côtés homologues quelconques de ces polygones, par exemple aux côtés ED
N. 383. *&* KI (n); *& le polygone ABCDE, est au polygone* FGHIK, *comme le côté* ED *est à*
N. 394. *cette troisiéme proportionnelle* (n).

Secondement, *pour décrire un polygone*
Fig. 26. *semblable au polygone ABCDE *, & qui en soit, par exemple les deux tiers.*

On tire une ligne qui soit égale aux deux tiers de l'un quelconque des côtés du polygone ABCDE, par exemple du côté ED: on trouve une moyenne proportionnelle KI, entre ce côté ED *& cette ligne qui est les*
385. *deux tiers de ce côté* (n) *: on décrit sur cette moyenne proportionnelle un polygone FG-*
390. *HIK semblable au polygone ABCDE (n);*

& ce polygone FGHIK est les deux tiers du polygone ABCDE.

Démonst. *Le polygone ABCDE décrit sur ED, est au polygone semblable FGHIK décrit sur KI; comme ED est à une troisiéme proportionnelle à ED & KI* (n): N. 394.
or cette troisiéme proportionnelle à ED & KI, est les deux tiers de ED (c); *donc le polygone ABCDE est au polygone FGHIK; comme ED est aux deux tiers de ED; & par conséquent le polygone FGHIK est les deux tiers du polygone ABCDE; donc C. Q. F. F.*

PROPOSITION XXI.

THEOREME.

396. *Les figures rectilignes semblables chacune à une même figure, sont aussi semblables entr'elles.*

SI les figures A & B * sont semblables chacune à la figure C, ces figures A & B seront semblables entr'elles. Fig. 28.

Démonst. Les angles des figures A & C sont égaux, chacun à chacun; & les côtés qui forment ces angles égaux, sont proportionnels (*n*), puisque ces figures sont sem- N. 363.

blables entr'elles (*h*) : or les angles des figures C & B sont aussi égaux, chacun à chacun, & les côtés qui forment ces angles
N. 363. égaux, proportionnels (*n*), puisque ces figures sont aussi semblables entr'elles (*h*); donc les angles des figures A & B sont
N. 62. égaux, chacun à chacun (*n*), & les côtés qui forment ces angles égaux, proportion-
N. 342. nels (*n*); & par conséquent ces figures A
N. 363. & B sont semblables entr'elles (*n*); donc C. Q. F. D.

PROPOSITION XXII.

THEOREME.

397. Premierement, *si quatre lignes droites sont proportionnelles, deux Polygones semblables entr'eux, & semblablement posés sur les deux premieres, & deux autres Polygones semblables aussi entr'eux, & semblablement posés sur les deux dernieres, seront proportionnels :* Secondement, *si deux Polygones semblables entr'eux, & deux autres Polygones semblables aussi entr'eux sont proportionnels, les côtés homologues des deux premiers, & les côtés homologues des deux derniers, seront aussi proportionnels.*

Premierement. SI les lignes droites AB, CD, EF & GH * sont proportionnelles, les polygones AIB & CKD semblables entr'eux, & semblablement posés sur les deux premieres, & les polygones EFML & GHON, semblables aussi entr'eux, & semblablement posés sur les deux dernieres, seront proportionnels : *Secondement*, si les Fig. 291

polygones AIB & CKD ſemblables entr'eux, & les polygones EFML & GHON ſemblables auſſi entr'eux, ſont proportionnels, les côtés homologues AB & CD des deux premiers, & les côtés homologues EF & GH des deux derniers, ſeront auſſi proportionnels.

DEMONSTRATION.

Premierement. Le rapport du polygone AIB au polygone CKD, eſt doublé de ce-
N. 393. lui de la ligne AB à la ligne CD (*n*), puiſque ces polygones ſont ſemblables entr'eux (*h*) : or le rapport de la ligne AB à la ligne CD, eſt égal à celui de la ligne EF à la ligne FH (*h*) ; donc le rapport du polygone AIB au polygone CKD, eſt doublé de ce-
N. 342. lui de la ligne EF à la ligne GH (*n*) ; & par conſéquent, puiſque le rapport du polygone EFML au polygone GHON qui eſt ſemblable au polygone EFML (*h*), eſt auſſi doublé de celui de cette ligne EF à cette
N. 393. ligne GH (*n*), le rapport du polygone AIB au polygone CKD, eſt égal à celui du po-
N. 342. lygone EFML au polygone GHON (*n*).

Secondement. Le rapport du polygone AIB au polygone CKD, eſt doublé de ce-
N. 393. lui de la ligne AB à la ligne CD (*n*), puiſque ces polygones ſont ſemblables entr'eux (*h*) ; & par une raiſon pareille, le rapport

du polygone EFML au polygone GHON, eſt doublé de celui de la ligne EF à la ligne GH: or le rapport du polygone AIB au polygone CKD, eſt égal à celui du polygone EFML au polygone GHON (*h*); donc le rapport doublé de celui de la ligne AB à la ligne CD, eſt égal au rapport doublé de celui de la ligne EF à la ligne GH; & par conſéquent, le rapport de la ligne AB à la ligne CD, eſt égal à celui de la ligne EF à la ligne GH; donc C. Q. F. D.

PROPOSITION XXIII.

THEOREME.

398. *Lorſque des Parallelogrammes ſont équiangles, les rapports de leu ſurfaces ſont compoſés de ceux de leurs côtés.*

SI les parallelogrammes ABCD & BEFG * ſont équiangles, le rapport de la ſurface du premier à celle du dernier, ſera compoſé du rapport du côté AB au côté BE, & de celui du côté BC au côté BG. Fig. 30.

Conſt. Poſés les parallelogrammes ABCD & BEFG, de maniere que deux quelconques de leurs angles égaux entr'eux, par exemple les angles ABC & GBE, deviennent des angles oppoſés au ſommet: décrivés sur le côté AB, un rectangle ABIK dont la hauteur BI soit égale au côté BC : décrivés aussi sur le côté BE, un rectangle BELM, dont la hauteur BM soit égale au côté BG : prolongés les côtés DC & FE, jusqu'à ce qu'ils se rencontrent en un point H ; & les côtés KI & LE, jusqu'à ce qu'ils se rencontrent en un point N.

Démonst. Le rapport de la surface du rectangle ABIK à celle du rectangle BELM, est composé des rapports de AB à
120. BE, & de BC à BG (*n*), puisque le produit de AB multiplié par BI qui est égal à BC (*c*), est la valeur de la surface du rec-
N. 145. tangle ABIK (*n*) ; que le produit de BE multiplié par BM qui est égal à BG (*c*) est
N. 145. celle de la surface du rectangle BELM (*n*) ; que les produisans AB & BC de cette premiere surface, sont les antécedens des rapports de AB à BE, & de BC à BG ; & qu'enfin les produisans BE & BG de cette derniere surface, sont les conséquens de ces mêmes rapports. Ainsi, si le rapport du parallelogramme ABCD au parallelogramme BEFG, est égal à celui du rectangle ABIK au rectangle BELM, le rapport du parallelogramme ABCD au parallelogramme BEFG, sera composé des rapports de AB à BE & de BC à BG. Or le rapport du parallelogramme ABCD au parallelo-

gramme BEFG, eſt égal à celui du rectangle ABIK au rectangle BELM; car puiſque le rapport du parallelogramme ABCD au parallelogramme BEHC, eſt égal à celui du côté AB au côté BE (n); & que le N. 367.
rapport du côté AB au côté BE eſt égal à celui du rectangle ABIK, au rectangle BENI (n); le rapport du parallelogramme N. 367.
ABCD au parallelogramme BEHC, eſt égal à celui du rectangle ABIK au rectangle BENI (n): & puiſque le rapport du paral- N. 342.
lelogramme BEHC au parallelogramme BEFG, eſt égal à celui du côté BC au côté BG (n); que le côté BC eſt égal au côté N. 367.
BI (c), & le côté BG au côté BM (c), & que le rapport du côté BI au côté BM, eſt égal à celui du rectangle BENI au rectangle BELM (n); le rapport du parallelo- N. 367.
gramme BEHC au parallelogramme BEFG, eſt égal à celui du rectangle BENI au rectangle BELM (n); ainſi les trois parallelo- N. 342.
logrammes ABCD, BEHC & BEFG, & les trois rectangles ABIK, BENI & BELM forment une proportion d'égalité ordonnée (n); donc le rapport du parallelo- N. 330.
logramme ABCD au parallelogramme BEFG, eſt égal à celui du rectangle ABIK au rectangle BELM (n); & par conſéquent le N. 358.
rapport du parallelogramme ABCD au parallelogramme BEFG, eſt compoſé des rap-

ports du côté AB au côté BE, & du côté BC au côté BG; donc C. Q. F. D.

PROPOSITION XXIV.

THEOREME.

399. *Si deux Parallelogrammes sont tels, qu'ils aient un angle commun entr'eux, & que la Diagonale de l'un soit une partie de celle de l'autre, ces deux Parallelogrammes seront semblables entr'eux.*

Fig. 31. LEs parallelogrammes ABCD & AEFG * qui sont tels que l'angle A leur est commun, & que la diagonale AF de l'un, est une partie de la diagonale AC de l'autre, sont semblables entr'eux.

Démonst. Les angles du parallelogramme ABCD, sont égaux à ceux du parallelogramme AEFG, chacun à chacun; car l'angle A est commun à ces deux parallelogrammes: l'angle DCB est égal à l'an-
N. 62. gle GFE (*n*), puisque les angles DCB & A, qui sont des angles opposés du parallelogramme ABCD, sont égaux entr'eux
N. 142. (*n*); & que les angles GFE & A, qui sont des angles opposés du parallelogramme

AEFG, sont aussi égaux entr'eux : l'angle B est égal à l'angle AEF (*n*), puisque l'angle AEF est un angle extérieur, que l'angle B est l'angle intérieur opposé à cet angle extérieur, & que les lignes EF & BC qui forment ces angles avec la ligne AB, étant paralleles chacune à une même ligne AD (*h*), elles sont aussi paralleles entr'elles (*n*): & enfin l'angle D est égal à l'angle AGF (*n*) ; puisque les angles D & B, qui sont des angles opposés du parallelogramme ABCD, sont égaux entr'eux (*n*) ; que les angles AGF & AEF, qui sont des angles opposés du parallelogramme AEFG, sont égaux entr'eux (*n*) ; & que les angles B & AEF sont aussi égaux entr'eux (*d*). Or les côtés de ces parallelogrammes ABCD & AEFG, qui forment ces angles égaux, sont proportionnels ; car puisque les triangles ABC & AEF qui ont l'angle en A commun entr'eux, & l'angle B égal à l'angle AEF (*d*), sont équiangles (*n*), AB : BC : : AE : EF (*n*) ; & par des raisons pareilles AD : DC : : AG : GF ; donc ces parallelogrammes ABCD & AEFG sont semblables entr'eux (*n*) ; donc C. Q. F. D.

N. 127. N. 129. N. 62. N. 142. N. 142. N. 135. N. 373. N. 363.

PROPOSITION XXV.

PROBLEME.

400. *Décrire un Polygone semblable à un autre Polygone, & égal à un troisiéme.*

IL faut décrire un polygone semblable au
Fig. 32. polygone BCD *, & égal au polygone A.

Const. Sur l'un des côtés du polygone BCD, par exemple sur son côté BD, décrivés un rectangle BDEF égal à ce poly-
N. 163. gone (*n*); sur le côté DE de ce rectangle, décrivés aussi un rectangle DGHE égal au
N. 163. polygone A (*n*) : trouvés une moyenne proportionnelle DI entre les côtés BD &
N. 385. DG (*n*) : sur cette moyenne proportionnelle DI, décrivés un polygone DIK sem-
N. 390. blable au polygone BCD (*n*) : il sera égal au polygone A.

Démonst. Le rapport du polygone BCD au polygone DIK est égal à celui du côté
N. 394. BD au côté DG (*n*), puisque ces polygones sont semblables entr'eux (*c*), & que les côtés BD, DI & DG sont continuement proportionnels (*c*) : or le rapport du côté

BD au côté DG, eſt égal à celui du rectangle BDEF au rectangle DGHE (*n*), puiſ- N. 367.
que ces rectangles ont la même hauteur DE (*c*) ; & le rapport du rectangle BDEF au rectangle DGHE, eſt égal à celui du polygone BCD au polygone A, puiſque le rectangle BDEF eſt égal au polygone BCD (*c*), & que le rectangle DGHE l'eſt au polygone A (*c*) ; donc le rapport du polygone BCD au polygone DIK, eſt égal à celui du même polygone BCD au polygone A (*n*) ; & par conſéquent le polygone N. 342.
DIK eſt égal au polygone A. Ainſi le poly- N. 340.
gone DIK eſt ſemblable au polygone BCD (*c*), & égal au polygone A (*d*) ; donc C. Q. F. F.

SCHOLIE.

Nous ſupprimons les Propoſitions 26, 27, 28 & 29ᵉ, parce qu'elles ſont inutiles.

PROPOSITION XXX.

PROBLEME.

401. *Diviser en moyenne & extrême raison, une ligne droite donnée.*

Fig. 33. IL faut diviser la ligne droite AB*, en moyenne & extrême raison.

Conft. Divisés la ligne AB en deux parties AC & CB, telles que le rectangle fait de cette ligne AB & de la moins grande CB de ces parties, soit égal au quarré de
N. 193. la plus grande AC(*n*).

Démonft. Puisque le rectangle fait des lignes AB & CB est égal au quarré de la li-
N. 389. gne AC (*c*); $\because$ AB : AC : CB (*n*); & par conséquent la ligne AB est divisée en
N. 365. moyenne & extrême raison au point C (*n*); donc C. Q. F. F.

PROPOSITION XXXI.

THEOREME.

402. *Si des Polygones décrits ſur les côtés d'un triangle rectangle, ſont ſemblables entr'eux, & ſemblablement poſés ſur ces côtés; la ſurface de celui qui eſt décrit ſur l'hypotenuſe, ſera égale à la ſomme des ſurfaces de ceux qui ſont décrits ſur les deux autres côtés.*

SI les polygones X, Y & Z* ſont ſemblables entr'eux, & ſemblablement poſés ſur les côtés du triangle rectangle ABC; la ſurface du polygone X, ſera égale à la ſomme des ſurfaces des polygones Y & Z. Fig. 34.

Conſt. Du ſommet B de l'angle droit ABC, abaiſſés la perpendiculaire BD au côté AC (*n*). N. 93.

Démonſt. Les triangles ABC & ADB ſont ſemblables entr'eux (*n*); ainſi les côtés N. 379. AC, AB & AD ſont continuement proportionnels (*n*); & par conſéquent, puiſ- N. 373. que les polygones X & Y décrits l'un ſur AC, & l'autre ſur AB, ſont ſemblables entr'eux (*h*), le polygone X eſt au polygone Y, comme le côté AC eſt au côté AD (*n*); N. 394.

& en renversant, le polygone Y est au polygone X, comme le côté AD est au côté
N. 351. AC (*n*). Or en comparant le triangle ABC au triangle CBD, on démontre de la même maniere, que le polygone X est au polygone Z, comme le côté AC est au côté DC ; & par conséquent, en renversant, que le polygone Z est au polygone X, comme
N. 351. le côté DC est au côté AC (*n*) : donc les six quantités Y, X, AD, AC, Z & DC sont telles, que les quatre premieres Y, X, AD & AC sont proportionnelles ; & que la 5^e^ Z & la 2^e^ X, la 6^e^ DC & la 4^e^ AC le sont aussi ; & par conséquent la somme de la 1^re^ Y & de la 5^e^ Z, est à la seconde quantité X ; comme la somme de la 3^e^ AD & de la
N. 361. 6^e^ DC, est à la 4^e^ AC (*n*). Or la somme ADC de la 3^e^ & 6^e^ quantités, est égale à la 4^e^ quantité AC (*c*) ; donc la somme Y & Z de la 1^re^ & 5^e^ quantités, est égale à la
N. 308. 2^e^ quantité X (*n*) ; donc C. Q. F. D.

SCHOLIE.

Nous supprimons la 32^e^ Proposition ; parce qu'elle est inutile.

PROPO-

PROPOSITION XXXIII.

THEOREME.

403. *Si des Cercles ſont égaux entr'eux, les angles dont les ſommets ſont les centres de ces cercles, ſeront entr'eux comme les arcs de ces mêmes cercles, ſur leſquels ils s'appuyent.*

SI les cercles B & E* ſont égaux entr'-eux, l'angle ABC ſera à l'angle DEF, comme l'arc AC eſt à l'arc DF. Fig. 15.

Conſt. Diviſés l'arc AC en autant de parties AG, GH, &c. égales entr'elles, que le premier terme de l'expoſant du rapport de cet arc à l'arc DF, contient d'unités; diviſés auſſi l'arc DF en autant de parties DK, KL, &c. égales entr'elles, que le ſecond terme de ce même expoſant, contient d'unités: du point B tirés aux points de diviſions G, H, &c. les lignes BG, BH, &c.; & du point E aux points de diviſions K, L, &c. les lignes EK, EL, &c.

Démonſt. Les cercles B & E ſont égaux entr'eux (*h*); & les arcs AG, GH, &c. DK, KL, &c. le ſont auſſi (*c*); ainſi les angles ABG, GBH, &c. DEK, KEL,

N. 449. &c. font auffi égaux entr'eux (n). Or puifque les arcs AG, GH, &c. DK, KL, &c. font égaux entr'eux, & que les angles ABG, GBH, &c. DEK, KEL, &c. le font auffi, l'angle ABG & l'arc AG, font équi-multi-
N. 296. ples de l'angle DEK & de l'arc DK (n): l'angle ABC & l'arc AC, font équi-multi-
N. 296. ples de l'angle ABG & de l'arc AG (n): & enfin l'angle DEF & l'arc DF, font équi-multiples de l'angle DEK & de l'arc DK
N. 296. (n); donc l'angle ABC & l'arc AC, font équi-multiples de l'angle DEF & de l'arc
N. 335. DF (n); & par conféquent l'angle ABC eft à l'angle DEF, comme l'arc AC eft à
N. 307. l'arc DF (n); donc C.Q.F.D.

COROLLAIRE I.

404. Il fuit de ce Théorême, que *fi des cercles fout égaux entr'eux, les angles dont les fommets font des points des circonférences de ces cercles, feront entr'eux, comme les arcs de ces mêmes cercles, fur lefquels ils s'appuyent.*

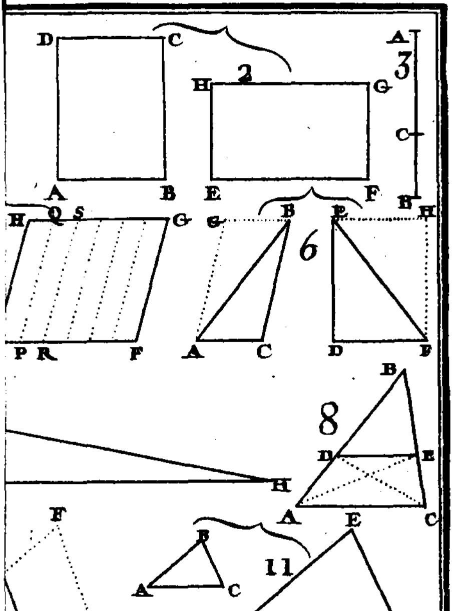
Démonft. Les angles dont les fommets font des points de circonférences de cercles, font les moitiés de ceux dont les fommets font les centres de ces mêmes cercles, fi les uns & les autres s'appuyent fur les
N. 240. mêmes arcs de ces cercles (n); ainfi les premiers font équi-multiples des derniers

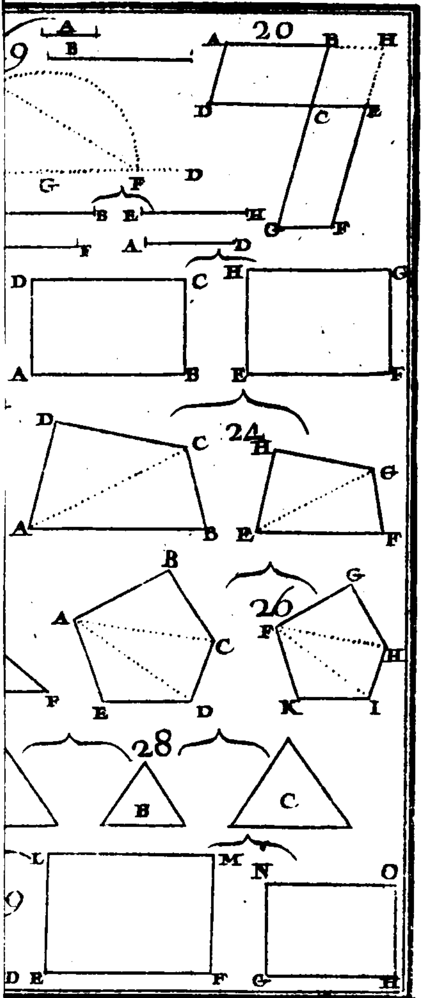
IDE,
). Or puiſ-
, KL, &c.
gles ABG,
le ſont auſſi,
équi-multi-
rc DK (n):
t équi-multi-
rc AG (n):
F, ſont équi-
de l'arc DK
c AC, ſont
F & de l'arc
'angle ABC
'arc AC eſt à
. D.

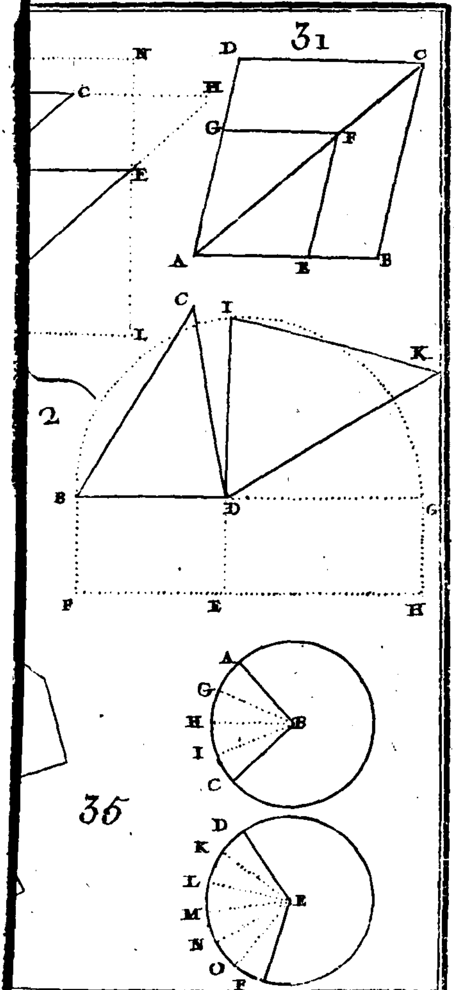
I.

ne, que ſi des
, les angles
oints des cir-
eront entr'eux,
es cercles, ſur

nt les ſommets
érences de cer-
ux dont les ſom-
s mêmes cercles,
appuyent ſur les
s (n); ainſi les
ples des derniers




20
24
26
28


31
D C N H G F E A B
C I K L
2
B D G F E H
A G H B I C
35
D K L E M N O F

(*n*) ; & par conséquent ils ont entr'eux le même rapport que ces derniers (*n*) : or ces derniers ont entr'eux le même rapport que les arcs sur lesquels ils s'appuyent (*n*);donc les premiers ont aussi le même rapport que ces arcs ; donc C. Q. F. D. N. 296. N. 347. N. 403.

COROLLAIRE II.

405. Il suit aussi de ce Théorême ; Premierement, que *les secteurs de cercles égaux entr'eux, sont entr'eux comme les arcs de ces secteurs.* Secondement, qu'*un cercle est à un secteur de ce cercle ; comme la circonférence de ce même cercle, est à l'arc de ce secteur.*

Fin du sixiéme Livre.

Nous supprimons les 7, 8 & 9e Livres, parce qu'ils ne considerent que la Quantité discrete, c'est-à-dire les Nombres ; & que nous nous sommes proposé de ne traiter que de la Quantité continue. Nous supprimons aussi le 10e Livre, parce qu'il ne considere les Quantités continues, que pour déterminer celles qui relativement à d'autres, ne peuvent point être rendues discretes.

LES ELEMENS D'EUCLIDE.

LIVRE ONZIE'ME.

ON a traité dans les Livres précédens, des lignes qui sont dans un même Plan ; mais avant que de passer aux solides, il est nécessaire de considerer aussi celles qui sont dans des Plans differens, & les différentes positions respectives de ces Plans. Cet objet étoit celui du onziéme Livre des Elemens d'Euclide ; mais ceux qui ont rassemblé les Ouvrages de ce Géometre, ont joint le onziéme Livre au douziéme qui traite des solides, de maniere que de 14 Livres d'Elemens, ils n'en ont fait que 13. Cette faute est irréparable, à cause du grand nombre de Mathématiciens qui citent cet Ouvrage ; ainsi tout ce que j'ai pû faire, a été de diviser ce Livre en deux Parties, sans interrompre l'ordre des Propositions.

La premiere Partie qui fait le onziéme Livre, traite des Plans. Euclide y détermine les conditions ausquelles une ligne droite est perpendiculaire à un Plan; y établit des principes pour connoître si des lignes sont dans un même Plan; y enseigne la maniere de tirer des perpendiculaires à des Plans; & y prescrit les conditions auxquelles on peut conclure que des Plans sont paralleles entr'eux. Toutes connoissances absolument nécessaires à la coupe des pierres, à l'Astronomie, à la Gnomonique, &c.

La seconde Partie qui devroit faire le douziéme Livre, traite des solides. Euclide y établit les premiers principes des solides; y détermine les conditions auxquelles certains sont égaux entr'eux; y considere les rapports de quelques autres; & y pose dans toutes ces Propositions les premiers fondemens du mesurage des corps.

DEFINITIONS.

I.

406. ON nomme *Corps* ou *Solide*, ce qui est étendu en longueur, largeur & épaisseur.

COROLLAIRE.

407. *Il ſuit de cette Définition, que* les extrémités d'un Corps ſont des Surfaces.

DEMONSTRATION.

Premierement. *Les extrémités d'un Corps ne ſont point étendues en longueur, largeur & épaiſſeur, puiſque ſi elles l'étoient, elles*
N. 406. *ſeroient des Corps* (n) *: or ſi les extrémités d'un Corps étoient des Corps, elles auroient des extrémités ; & par conſequent elles ne ſeroient point celles de ce Corps, mais ce ſeroit leurs extrémités qui le ſeroient.*

Secondement. *Elles ne ſont point étendues ſeulement en longueur ; car puiſque*
N. 406. *les Corps ſont étendus en trois ſens* (n), *il faut néceſſairement que ce qui termine les Corps, termine deux de ces ſens : or ce qui n'eſt etendu qu'en un ſens, ne peut point en terminer deux ; donc les extrémités d'un Corps ne ſont point étendues ſeulement en longueur.*

Les extrémités d'un Corps ne ſont donc point étendues en longueur, largeur & épaiſſeur ; elles ne le ſont point non plus en longueur ſeulement ; elles ne ſont donc éten-
N. 2. *dues qu'en longueur & largeur* (n) *; elles*
N. 9. *ſont donc des ſurfaces* (n).

408. On dit qu'une ligne *eſt tirée* dans

un Plan, ou *est* dans un Plan, lorsque toutes ses parties touchent ce Plan prolongé, s'il est nécessaire.

Les Lignes CD & EF * sont *dans le Plan X.* Fig. 1.

409. On dit que plusieurs Plans *sont dans un même Plan*, lorsqu'étant prolongés, ils se rencontrent de maniere qu'ils ne forment plus qu'un seul Plan.

II.

410. On dit qu'une ligne *est perpendiculaire à un Plan*, lorsqu'elle est perpendiculaire à toutes les lignes de ce plan, avec lesquelles elle a un point commun.

La Ligne AB * *est* perpendiculaire au Plan X, *si elle l'est aux lignes CD, EF, &c. qu'elle rencontre au point B, & qui sont dans ce Plan.* Fig. 2

411. On nomme *commune section de deux Plans*, une ligne qui est commune à ces deux Plans.

La Ligne AB * *qui est en même tems dans le Plan X & dans le Plan Y, est la* commune section *de ces deux Plans.* Fig. 2.

III.

412. On dit que deux Plans sont réciproquement *perpendiculaires* l'un à l'autre, lorsque les lignes droites tirées dans l'un de ces Plans, & perpendiculaires à leur commune section, sont perpendiculaires à l'autre

Fig. 2. *Le Plan Y* est* perpendiculaire *au Plan X, si les lignes CD, EF &c. tirées dans le Plan Y, & perpendiculaires à sa commune section AB avec le Plan X, sont perpendiculaires à ce Plan X.*

IV.

413. L'*inclinaison* d'une ligne droite à un Plan, est l'angle aigu formé par cette ligne, & par une autre ligne droite tirée dans ce Plan, du point auquel cette premiere ligne le rencontre, à celui auquel une perpendiculaire abaissée d'un point quelconque de cette même premiere ligne à ce même Plan, le rencontreroit.

Fig. 3. *L'angle ABC* formé par la ligne AB, & par la ligne BC tirée dans le Plan X, du point B au point C auquel la perpendiculaire AC rencontre ce Plan, est* l'inclinaison *de la ligne AB à ce Plan X.*

V.

414. Un Plan *incliné* à un autre, est un Plan disposé à l'égard de cet autre, de maniere que deux lignes droites tirées chacune dans chacun de ces Plans, d'un même point de leur commune section, & perpendiculaires à leur commune section, forment un angle aigu.

Fig. 4. *Le Plan Y* est* incliné *au Plan X, si l'angle ABC formé par les perpendiculaires BA & BC à la commune section DE de*

tes

ces Plans, & tirées l'une dans le Plan Y, & l'autre dans le Plan X, est un angle aigu.

415. *L'inclinaison* d'un Plan à un autre, est l'angle aigu formé par deux lignes droites, tirées chacune dans chacun de ces Plans, d'un même point de leur commune section, & perpendiculaires à leur commune section.

L'angle aigu ABC formé par les perpendiculaires BA & BC à la commune section DE des Plans Y & X, & tirées l'une dans le Plan Y, & l'autre dans le Plan X, est l'*inclinaison *du Plan Y au Plan X.* Fig. 4.

416. *L'angle d'inclinaison* d'un Plan à un autre, est la différence qu'il y a de l'inclinaison de ces Plans, à un angle droit.

L'angle ABF est* l'angle d'inclinaison *du Plan Y au Plan X.* Fig. 4.

VI.

417. Les Plans *également* ou *semblablement inclinés* à d'autres Plans, chacun à chacun, sont ceux dont les inclinaisons sont égales entr'elles; ou dont les angles d'inclinaison sont égaux entr'eux.

VII.

418. Les *Plans paralleles*, sont ceux dont tous les points des uns sont également éloignés de tous les points correspondans des autres.

COROLLAIRE.

419. *Il suit de cette Définition, que* des Plans paralleles ne se rencontrent point.

VIII.

420. Les solides *semblables* entr'eux, sont ceux qui sont terminés par un pareil nombre de surfaces semblables chacune à chacune.

IX.

421. Les solides *égaux & semblables* entr'eux, sont ceux qui sont terminés par un pareil nombre de surfaces égales & semblables chacune à chacune.

422. On nomme figures solides *égales entr'elles*, celles dont les solidités sont égales entr'elles.

X.

423. Un *angle solide*, est un angle formé par plus de deux angles plans, qui ont un même point pour sommet, & qui ne sont point dans un même Plan.

Fig. 5. *L'angle A * formé par les angles plans EAD, DAC, CAB & BAE, qui ont le même point A pour sommet, & qui ne sont point dans un même Plan, est un* angle solide.

XI.

424. La *Pyramide* est un solide terminé par plus de deux Plans triangulaires,

qui ont un point commun entr'eux, & les côtés opposés à ce point, chacun dans un même Plan.

*Le solide ABCD * terminé par les Plans triangulaires ABD, DBC, CBA qui ont le point B commun entr'eux, & les côtés AD, DC & AC chacun dans le même Plan ADC, est une* Pyramide. Fig. 6.

425. La *base* d'un solide, est celui des Plans qui le terminent, sur lequel on suppose qu'il est posé.

*Le Plan ADC * est la* base *de la Pyramide ABCD.* Fig. 6.

426. On nomme *Pyramides triangulaires*, celles dont les bases sont des triangles : *Quadrangulaires*, celles dont les bases sont des quadrilateres : *Pentagonales*, celles dont les bases sont des pentagones : &c.

XII.

427. Le *Prisme* est un solide terminé par deux Plans quelconques égaux, semblables & paralleles entr'eux, & par des parallelogrammes.

*Le solide X * terminé par les deux Plans ALMKIH & BCDEFG égaux, semblables & paralleles entr'eux, & par les Parallelogrammes ABGH, HGFI, &c. est un* Prisme. Fig. 7.

428. On nomme *Prismes triangulai-*

res, ceux dont les bases sont des triangles : *Quadrangulaires*, ceux dont les bases sont des quadrilateres : *Pentagones*, ceux dont les bases sont des pentagones, &c.

429. Le Prisme quadrangulaire dont les plans opposés sont paralleles, se nomme *Parallelepipede*.

XIII.

430. La *Sphere* est un solide terminé par une surface, dont tous les points sont également éloignés d'un certain point de ce solide.

Fig. 8. *Le Solide X * est une* Sphere.

XIV.

431. Le *centre* d'une Sphere, est le point de cette Sphere, également éloigné de tous les points de sa surface.

Fig 8. *Le point C * est le* centre *de la Sphere X.*

XV.

432. Le *Diametre* d'une Sphere, est une ligne droite quelconque qui passe par le centre de cette Sphere, & est terminée de part & d'autre à sa surface.

Fig. 8. *La ligne AB * est le* Diametre *de la Sphere X.*

433. Le *Rayon* d'une Sphere, est une ligne droite quelconque tirée du centre de cette Sphere à sa surface.

Fig. 8. *La ligne CB * est un* Rayon *de la Sphere X.*

XVI.

434. L'*axe* d'une Sphere est un Diametre fixe de cette Sphere, sur lequel elle tourne.

Le Diametre AB * *est l'*axe *de la Sphere X, si ce Diametre étant immobile par rapport à cette Sphere, elle tourne sur lui.* Fig. 8.

XVII.

435. Le *Cone* est un solide terminé d'un côté par un point, d'un autre côté par un cercle, & de chaque autre côté par une surface qui toucheroit tous les points d'une ligne droite, qui seroit tirée de ce point à un point quelconque de la circonférence de ce cercle.

Le solide ABCD *, *terminé d'un côté par le point B, d'un autre côté par le cercle ADC, & de chaque autre côté par une surface qui toucheroit tous les points d'une ligne droite BA, tirée de ce point B à un point quelconque A de cette circonférence, est un* Cône. Fig. 9.

XVIII.

436. La *base* d'un Cône est le cercle qui le termine par l'un de ses côtés.

XIX.

437. L'*axe* d'un Cône, est une ligne droite tirée du sommet de ce Cône au centre de sa base.

La ligne BE * *est l'*axe *du Cône ABCD.* Fig. 9.

XX.

438. Le *Cylindre* eſt un ſolide terminé par deux cercles égaux & paralleles entr'eux, & par une ſurface qui toucheroit tous les points d'une ligne droite, tirée d'un point quelconque de la circonférence de l'un de ces cercles, au point correſpondant de la circonférence de l'autre.

Fig. 10. *La figure X * terminée par les deux cercles ABC & DEF égaux & paralleles entr'eux, & par une ſurface qui toucheroit tous les points d'une ligne droite AD, tirée d'un point quelconque A de la circonférence du cercle ABC, au point correſpondant D de la circonférence du cercle DEF, eſt un* Cylindre.

XXI.

439. L'*axe* d'un Cylindre, eſt une ligne droite tirée du centre de l'un des cercles qui terminent ce Cylindre, au centre de l'autre cercle.

Fig. 10. *La ligne GH * eſt l'*axe *du Cylindre X.*

XXII.

440. La *baſe* d'un Cylindre, eſt l'un quelconque des cercles qui le terminent.

Fig. 10. *Le cercle ABC * eſt la* baſe *du Cylindre X.*

XXIII.

441. On nomme *Cônes ſemblables* entr'eux, ceux dont les axes & les Diametres

de leurs bases, sont proportionnels. Il en est de même des Cylindres.

XXIV.

442. L'*Exaëdre* ou le *Cube*, est un solide terminé par six quarrés.

XXV.

443. Le *Tétraèdre* est un solide terminé par quatre triangles équilatéraux, & égaux entr'eux.

XXVI.

444. L'*Octaëdre* est un solide terminé par huit triangles équilatéraux, & égaux entr'eux.

XXVII.

445. Le *Dodécaëdre* est un solide terminé par douze pentagones réguliers, & égaux entr'eux.

XXVIII.

446. L'*Icosaëdre* est un solide terminé par vingt triangles équilatéraux, & égaux entr'eux.

XXIX.

447. On dit que des lignes *sont dans un même Plan*, lorsque l'on peut concevoir un Plan tel, que toutes les parties de ces lignes le toucheroient au même instant.

XXX.

448. On dit qu'un solide est *inscrit* dans un autre, lorsque chaque angle de ce so-

lide a pour sommet un point de la surface de cet autre.

XXXI.

449. On dit qu'un solide est *circonscrit* à un autre, lorsque chaque côté de ce solide a un point commun avec le sommet de chaque angle de cet autre.

PREMIERE PARTIE.

DES PLANS.

PROPOSITION I.

THEOREME.

450. *Toutes les parties d'une ligne droite sont dans un même Plan.*

Fig. 11. UNe ligne droite AB * dans un Plan X, & une ligne droite BC hors de ce plan, ne sont point une seule ligne droite ABC.

Const. Du point B de la ligne AB, élevés dans le plan X, la perpendiculaire BE
N. 92. à cette ligne AB (*n*) : du point B de la ligne BE, élevés aussi dans le même plan X, la
N. 92. perpendiculaire BD à cette ligne BE (*n*).

Démonst. La somme des angles ABE &

DBE formés par la ligne BE, & par les lignes AB & BD tirées chacune de l'extrémité B de cette ligne BE, est égale à celle de deux angles droits, puisque l'angle ABE est droit (c), & que l'angle DBE l'est aussi (c); donc les lignes AB & BD ne sont qu'une seule ligne droite ABD (n); & par N. 97.
conséquent les lignes AB & BC ne sont point une seule ligne droite ABC; donc N. 7.
C. Q. F. D.

PROPOSITION II.

THEOREME.

451. *Deux lignes droites qui ont un point commun entr'elles, sont dans un même Plan.*

LEs lignes droites AB & CD * qui ont Fig. 12.
le point E commun entr'elles, sont dans un même plan.

Conſt. De l'extrémité de l'une des lignes AB & CD, par exemple de l'extrémité A de la ligne AB, tirés à l'une des extrémités D de la ligne CD, la ligne AD.

Démonſt. On ne peut point concevoir qu'il soit impossible aux lignes AB & CD d'être dans un même plan, que l'on n'ad-

mette en même tems que la surface du triangle AED peut être dans différens plans. Or la surface du triangle AED ne peut
N. 450. point être dans différens plans (*n*), puisque si elle y étoit, toutes les parties de quelqu'une des lignes droites AB & CD, ne seroient point dans un même plan; donc on ne conçoit point qu'il soit impossible aux lignes AB & CD d'être dans un même plan; ainsi on conçoit qu'il leur est possible
N. 447. d'y être; & par conséquent elles y sont (*n*); donc C. Q. F. D.

COROLLAIRE.

452. Il suit de la démonstration de ce Théorême, que *toutes les parties d'un triangle sont dans un même plan.*

PROPOSITION III.

THEOREME.

453. *La commune section de deux Plans, est une ligne droite.*

Fig. 13. LA commune section AB * des plans CD & EF, est une ligne droite.

Démonst. La commune section de deux plans doit être en même tems dans chacun de ces plans (*n*). Or si la commune section AB des plans CD & EF, n'alloit pas directement du point A au point B, elle ne seroit pas en même tems dans le plan CD & dans le plan EF; puisque si elle se courboit vers C ou vers D, elle ne seroit plus dans le plan EF; que si elle se courboit vers E ou vers F, elle ne seroit plus dans le plan CD; & que si elle se courboit vers tout autre point, elle ne seroit plus dans aucun de ces plans; donc la commune section AB des plans CD & EF, va directement du point A au point B; & par conséquent elle est une ligne droite (*n*); donc C. Q. F. D. N. 411. N. 7.

PROPOSITION IV.

THEOREME.

454. *Si une ligne droite est perpendiculaire à deux autres lignes droites avec lesquelles elle a un point commun, elle sera aussi perpendiculaire au Plan de ces deux autres lignes.*

SI la ligne AB * est perpendiculaire à chacune des lignes CD & EF avec lesquelles elle a le point B commun, elle sera aussi perpendiculaire au plan X de ces lignes. Fig. 14.

Const. Du point B pris pour centre, &

avec un rayon BC pris à volonté, décrivés des arcs qui coupent, l'un en C, un autre en E, un autre en D & le dernier en F, les lignes CD & EF: du point E tirés au point C la ligne EC; & du point F au point D, la ligne FD; par le point B tirés dans le plan X, une ligne droite quelconque GH, qui rencontre les lignes EC & FD, l'une en G & l'autre en H: du point A tirés aux points C, G, E, D, H & F, les lignes AC, AG, AE, AD, AH & AF.

DEMONSTRATION.

1°. Les triangles ABC, ABE, ABD & ABF ont les angles ABC, ABE, ABD & ABF égaux entr'eux, puisque ces angles sont droits (*h*); & les côtés qui forment ces angles, sont aussi égaux entr'eux, puisque le côté BA leur est commun, & que les côtés BC, BE, BD & BF sont égaux entr'eux (*c*); ainsi les autres côtés AC, AE, AD & AF de ces triangles sont aussi égaux
N. 80. entr'eux (*n*).

2°. Les triangles EBC & DBF ont l'an-
N. 98. gle EBC égal à l'angle DBF (*n*), puisque ces angles sont opposés au sommet; & les côtés BE & BC qui forment le premier, égaux aux côtés BD & BF qui forment le dernier, puisque ces côtés BE, BC, BD &

BF ſont égaux entr'eux (*c*) ; ainſi l'autre
côté EC du premier triangle eſt égal à l'au-
tre côté DF du ſecond (*n*), & l'angle BCE N. 80.
du premier l'eſt à l'angle BDF du ſecond,
puiſque tous les angles de ces deux trian-
gles ſont auſſi égaux chacun à chacun (*n*). N. 80.

3°. Les triangles GBC & HBD ſont
tels, que le côté BC du premier eſt égal au
côté BD du ſecond (*c*), & que les angles
BCG & GBC qui ſont aux extrémités de
ce côté BC du premier, ſont égaux aux an-
gles BDH & HBD qui ſont aux extrémi-
tés de ce côté BD du ſecond, puiſque les
angles BCG & BDH, ou BCE & BDF
ſont égaux entr'eux (*d*), & que les angles
GBC & HBD qui ſont oppoſés au ſommet,
ſont auſſi égaux entr'eux (*n*) ; ainſi les au- N. 98.
tres côtés CG & BG du premier triangle,
ſont égaux aux autres côtés DH & BH du
ſecond, chacun à chacun (*n*). N. 119.

4°. Les triangles ACE & ADF ſont
tels, que les côtés du premier ſont égaux à
ceux du ſecond, chacun à chacun, puiſque
AC, AE, AD & AF ſont égaux entr'eux
(*d*), & que EC & DF le ſont auſſi (*d*) ;
ainſi les angles du premier de ces triangles,
ſont égaux à ceux du ſecond, chacun à cha-
cun (*n*) ; & par conſéquent l'angle ACG N. 87.
eſt égal à l'angle ADH.

5°. Les triangles ACG & ADH ont

l'angle ACG égal à l'angle ADH (*d*), & les côtés AC & CG qui forment le premier, égaux aux côtés AD & DH qui forment le second, chacun à chacun, puisque AC est égal à AD(*d*),& queCGl'est à DH(*d*);ainsi l'autre côté AG du premier triangle, est
N. 80. égal à l'autre côté AH du second (*n*).

6°. Enfin les triangles ABG & ABH sont tels, que les côtés du premier sont égaux à ceux du second, chacun à chacun, puisque AB est commun à ces deux triangles, que BG est égal à BH (*d*), & que AG l'est à AH (*d*); ainsi les angles du premier de ces triangles, sont égaux à ceux du
N. 87. second, chacun à chacun (*n*); & par conséquent l'angle ABG est égal à l'angleABH. Or puisque l'angle ABG est égal à l'angle ABH, la ligne AB est perpendiculaire à la
N. 18. ligne GH (*n*); & puisque la même démonstration subsisteroit, en quelqu'endroit du plan X que fût tirée la ligne GH, pourvu qu'elle passât par le point B, la ligne AB est perpendiculaire à toutes les lignes du plan X, avec lesquelles elle a un point commun; & par conséquent elle est perpen-
N. 410. diculaire à ce plan (*n*); donc C. Q. F. D.

PROPOSITION V.

THEOREME.

455. *Si une ligne droite est perpendiculaire à trois autres lignes droites avec lesquelles elle a un point commun, ces trois lignes seront dans un même Plan.*

SI la ligne AB * est perpendiculaire à chacune des lignes BC, BD & BE avec lesquelles elle a le point B commun, ces trois lignes BC, BD & BE seront dans un même plan. Fig. 19.

Démonst. Les lignes BC & BD sont dans un même plan X (*n*), puisqu'elles ont un point B commun entr'elles (*h*); ainsi si la ligne BE est la commune section d'un plan quelconque & du plan X, les trois lignes BC, BD & BE seront dans un même plan, puisque cette ligne BE sera aussi dans ce plan X (*n*). Or la ligne BE est la commune section d'un plan Y & du plan X; car puisque les lignes BA & BE ont un point B commun entr'elles (*h*), elles sont dans un même plan Y (*n*); ainsi si la commune section des plans Y & X passoit au-dessus

N. 451. N. 411. N. 451.

du point E vers F, ou au-dessous vers G, & étoit par exemple la ligne BF ou la ligne BG, l'angle ABF ou ABG formé par la ligne AB & par cette commune section BF ou BG, seroit moins grand ou plus grand
N. 72. que l'angle ABE (*n*); & par conséquent il ne seroit point droit, puisque l'angle ABE l'est (*h*). Mais l'angle formé par la ligne AB, & par la commune section des plans Y & X est droit, puisque la ligne AB qui est perpendiculaire aux lignes BC & BD (*h*), l'est aussi au plan X de ces lignes
N. 454. (*n*), & par conséquent à toutes les lignes de ce plan, avec lesquelles elle a un point
N. 410. commun (*n*); donc la commune section des plans Y & X ne passe ni au-dessus ni au-dessous du point E; & par conséquent elle passe par le point E. Or puisque cette commune section passe par le point E, elle est la ligne BE; & par conséquent les trois lignes BC, BD & BE sont dans un même plan; donc C. Q. F. D.

PRO-

PROPOSITION VI.

THEOREME.

456. *Si deux lignes droites ſont perpendiculaires à un même Plan, elles ſeront paralleles entr'elles.*

SI les lignes AB & CD * ſont perpendiculaires chacune au plan X, elles ſeront paralleles entr'elles. Fig. 16.

Conſt. Du point B au point D, tirés dans le plan X, la ligne BD : du point D élevés dans le même plan, une perpendiculaire DE à cette ligne BD (*n*) : faites cette perpendiculaire égale à la ligne AB : du point B tirés au point E, la ligne BE : du point A tirés aux points E & D, les lignes AE & AD. N. 92.

Démonſt. La ſomme des angles intérieurs ABD & CDB que les lignes AB & CD forment avec la ligne BD, eſt égale à celle de deux angles droits, puiſque ces lignes AB & CD étant perpendiculaires au plan X (*h*), elles le ſont auſſi (*n*) à la ligne BD qui eſt tirée dans ce plan (*c*); ainſi ſi ces lignes AB & CD ſont dans un même plan, elles ſeront paralleles entr'elles (*n*). Or les N. 410. N. 126.

lignes AB & CD sont dans un même plan ; car les triangles ABD & BDE ont l'angle ABD égal à l'angle BDE, puisque l'angle ABD est droit (*d*), & que l'angle BDE l'est aussi (*c*) ; & les côtés BD & BA qui forment le premier, sont égaux aux côtés BD & DE qui forment le second, chacun à chacun ; puisque BD est commun à ces deux triangles, & que BA est égal à DE (*c*) ; ainsi l'autre côté AD du premier, est
N. 10. égal à l'autre côté BE du second (*n*) ; & par conséquent les triangles ADE & ABE qui ont le côté AE commun entr'eux, & le côté DE égal au côté AB (*c*), ont aussi le côté AD égal au côté BE. Or puisque les côtés du triangle ADE sont égaux à ceux du triangle ABE, chacun à chacun, les angles du premier sont aussi égaux à ceux du
N. 17. second, chacun à chacun (*n*) ; donc l'angle ADE est égal à l'angle ABE ; & par conséquent, puisque l'angle ABE qui est formé par une ligne AB perpendiculaire au plan X, (*h*) & par une ligne BE tirée dans ce plan,
N. 410. est droit (*n*), l'angle ADE l'est aussi. Ainsi la ligne CD est perpendiculaire à la ligne
N. 410. DE (*n*), puisqu'elle est perpendiculaire au plan X (*h*), & que la ligne DE est tirée dans ce plan (*c*) ; la ligne AD est aussi perpendiculaire à cette même ligne DE (*d*) ; & enfin la ligne BD l'est aussi (*c*) ; donc les trois

lignes CD, AD & BD sont dans un même plan(*n*); or la ligne AB qui est l'un des côtés N. 455.
du triangle ABD, est dans le même plan que les lignes AD & BD qui sont les autres côtés de ce triangle (*n*); donc les lignes N. 452.
AB & CD sont dans un même plan; & par conséquent elles sont paralleles entr'elles; donc C. Q. F. D.

COROLLAIRE.

457. Il suit de la démonstration de ce Théorême, que *deux lignes paralleles sont dans un même Plan.*

PROPOSITION VII.

THEOREME.

458. *Une ligne droite qui est tirée d'une parallele a une autre, est dans le même Plan que ces paralleles.*

LA ligne droite EF * qui est tirée de la Fig. 17.
parallele AB à la parallele CD, & ces paralleles sont dans un même plan.

Démonst. Si la ligne droite EF n'étoit point dans le même plan que les paralleles AB & CD, la commune section du plan de ces paralleles, & d'un autre plan quelcon-

que qui passeroit par les points E & F, seroit une ligne droite différente de la ligne EF, puisque cette commune section est
N. 411. dans le plan de ces paralleles (*n*); & cependant cette ligne droite auroit les points E & F communs avec la ligne EF, puisque cet autre plan quelconque passe par ces points E & F. Mais deux lignes droites qui ont deux points communs entr'elles, ne forment point deux lignes droites différen-
N. 74. tes (*n*); donc la commune section du plan des paralleles AB & CD, & d'un autre plan quelconque qui passe par les points E & F, n'est point une ligne droite différente de la ligne EF; & par conséquent la ligne droite EF est dans le même plan que les paralleles AB & CD; donc C. Q. F. D.

PROPOSITION VIII.

THEOREME.

459. *Si de deux lignes droites paralleles entr'elles, l'une est perpendiculaire à un Plan, l'autre le sera aussi.*

Fig. 16. SI les lignes AB & CD * sont paralleles entr'elles, & si l'une de ces lignes, par exemple la ligne AB, est perpendiculaire

au plan X, l'autre CD le sera aussi.

Const. La même que celle de la 6^{e}. Proposition de ce Livre.

Démonst. On démontre de la même maniere qu'on la fait dans la 6^{c} Proposition de ce Livre, que l'angle ADE est droit; ainsi la ligne DE qui est perpendiculaire à la ligne BD (*c*), l'est aussi à la ligne AD (*d*); donc elle est perpendiculaire au plan de ces lignes (*n*); & par conséquent, puisque la N. 454.
ligne CD qui est parallele à la ligne AB (*h*), est dans le même plan que ces lignes BD & AD (*n*) qui sont tirées de l'une de ces pa- N. 458.
ralleles à l'autre, cette même ligne DE est aussi perpendiculaire à la ligne CD (*n*). Or N. 410.
cette ligne CD est perpendiculaire à la ligne BD, puisqu'elle est parallele à la ligne AB (*h*); & que par conséquent l'un des angles intérieurs ABD étant droit (*h*), l'autre CDB l'est aussi (*n*); donc cette ligne CD N. 127.
est perpendiculaire aux lignes BD & DE; & par conséquent elle l'est aussi au plan X de ces lignes (*n*); donc C. Q. F. D. N. 454.

PROPOSITION IX.

THEOREME.

460. *Si deux lignes droites sont paralleles chacune à une même ligne, elles seront aussi paralleles entr'elles ; quand même cette ligne ne seroit point dans le même Plan que ces deux premieres.*

Fig. 18. SI les lignes AB & CD * sont paralleles chacune à une ligne EF qui n'est point dans le même plan qu'elles, la ligne AB sera parallele à la ligne CD.

Const. Du point G pris à volonté sur la ligne EF, abaissés une perpendiculaire GH à la ligne AB ; & une perpendiculaire GI à
N. 93. la ligne CD (*n*).

Démonst. Les lignes AB & EF sont paralleles entr'elles (*h*), & la ligne GH est perpendiculaire à l'une AB de ces paralleles (*c*) ; donc l'autre parallele EF est per-
N. 128. pendiculaire à cette ligne GH (*n*) ; & par conséquent, puisque par des raisons pareilles, elle l'est aussi à la ligne GI, elle est perpendiculaire au plan HGI de ces lignes
N. 454. (*n*). Or puisque la ligne EF est perpendiculaire au plan HGI, la ligne AB qui est

parallele à cette ligne EF (*h*), est aussi perpendiculaire à ce même plan (*n*), & par une raison pareille, la ligne CD lui est aussi perpendiculaire; donc les lignes AB & CD sont perpendiculaires à un même plan; & par conséquent elles sont paralleles entr'elles; donc C. Q. F. D.

N. 459.
N. 456.

PROPOSITION X.

THEOREME.

461. *Si deux angles ont leurs côtés paralleles, chacun à chacun, & dirigés vers un même côté, ces deux angles seront égaux entr'eux; quand même ils ne seroient point dans un même Plan.*

SI les angles ABC & DEF * ont leurs côtés BA & BC, ED & EF paralleles chacun à chacun, & dirigés vers un même côté, ces angles seront égaux entr'eux.

Fig. 19.

Const. Prenés sur les côtés des angles ABC & DEF des parties BA & ED égales entr'elles, & des parties BC & EF aussi égales entr'elles: tirés du point A au point D, la ligne AD; du point B au point E, la ligne BE; du point C au point F, la ligne CF; du point A au point C, la ligne AC; & du point D au point F, la ligne DF.

Démonst. Les côtés BA & ED du quadrilatere ABED sont égaux entr'eux (*c*), & paralleles (*h*); ainsi les autres côtés AD & BE de ce même quadrilatere, sont aussi
N. 140. égaux & paralleles entr'eux (*n*); or par des raisons pareilles, les côtés BE & CF du quadrilatere BCFE sont aussi égaux & paralleles entr'eux; donc les côtés AD & CF
N. 62. du quadrilatere ACFD sont égaux & pa-
& 129. ralleles entr'eux (*n*); & par conséquent ses
N. 140. autres côtés AC & DF le sont aussi (*n*). Ainsi puisque le côté AC est égal au côté DF, les triangles ABC & DEF qui ont le côté BA égal au côté ED, & le côté BC égal au côté EF (*c*), ont aussi le côté AC égal au côté DF (*d*); donc les angles du premier de ces triangles, sont égaux à ceux
N. 87. du second, chacun à chacun (*n*); & par conséquent l'angle ABC est égal à l'angle DEF; donc C. Q. F. D.

PROPO-

PROPOSITION XI.

PROBLEME.

462. *D'un point donné hors d'un Plan, abaisser une perpendiculaire à ce Plan.*

DU point A * hors du plan X, il faut abaisser une perpendiculaire à ce plan. Fig. 20.

Const. Tirés à volonté dans le plan X, une ligne droite BC : du point A abaissés une perpendiculaire AD à cette ligne (*n*) : N. 93.
du point D auquel cette perpendiculaire rencontre la ligne BC, élevés une perpendiculaire DE à cette ligne BC (*n*) : du N. 92.
point A, abaissés une perpendiculaire AE à cette ligne DE (*n*) : cette ligne AE sera N. 93.
perpendiculaire au plan X.

Pour la démonstration : Par le point E, tirés une parallele FG à la ligne BC (*n*). N. 130.

Démonst. La ligne BC est perpendiculaire aux lignes AD & DE (*c*) ; donc elle est perpendiculaire au plan ADE de ces lignes (*n*) ; & par conséquent, puisque la li- N. 454.
gne FG est parallelle à cette ligne BC (*c*), elle est aussi perpendiculaire à ce même

N. 459. plan (*n*). Or puisque la ligne FG est perpendiculaire au plan ADE, elle l'est aussi à la ligne AE de ce plan, avec laquelle
N. 410 elle a le point E commun (*n*); donc la ligne AE qui est perpendiculaire à la ligne DE (*c*), l'est aussi à la ligne FG (*d*); & par conséquent elle est perpendiculaire au
N 454. plan X de ces lignes (*n*); donc C. Q. F. F.

PROPOSITION XII.

PROBLEME.

463. *D'un point donné dans un Plan, élever une perpendiculaire à ce Plan.*

Fig. 21. DU point A * dans le plan X, il faut élever une perpendiculaire à ce plan.

Const. D'un point B pris à volonté hors du plan X, abaissés une perpendiculaire
N. 462. BC à ce plan (*n*): *si cette perpendiculaire ne rencontre point le Plan X au point A*, par le point A, tirés une parallele AD à
N. 130. cette ligne BC (*n*); cette parallele sera perpendiculaire au plan X.

Démonst. La ligne AD est parallele à la ligne BC (*c*) : or la ligne BC est perpendiculaire au plan X (*c*); donc la ligne AD est
N. 459. aussi perpendiculaire à ce plan (*n*); donc C. Q. F. F.

PROPOSITION XIII.

THEOREME.

464. Premierement. *D'un point dans un Plan, on ne peut élever qu'une perpendiculaire à ce Plan:* Secondement, *d'un point hors d'un Plan, on ne peut abaisser qu'une perpendiculaire à ce Plan.*

Premierement. DU point A *, on ne peut élever qu'une perpendiculaire AB au plan X: *Secondement*, du point B, on ne peut abaisser qu'une perpendiculaire BA au plan X. Fig. 22.

Conſt. Du point A élevés sur le plan X, une ligne droite quelconque AC: du point B tirés à un point quelconque D du plan X, une ligne droite BD.

DEMONSTRATION.

Premierement. La ligne AB est perpendiculaire au plan X (*h*); ainsi, si la ligne AC étoit aussi perpendiculaire à ce plan, elle seroit parallele à la ligne AB (*n*). N. 456.
Or la ligne AC n'est point parallele à la ligne AB (*n*), puisque ces lignes ont N. 56.
un point A commun entr'elles (*h*); donc

si la ligne AB est perpendiculaire au plan X, la ligne AD ne l'est point.

Secondement. La ligne BA est perpendiculaire au plan X (*h*); ainsi si la ligne BD étoit aussi perpendiculaire à ce plan, elle seroit
N. 456. parallele à la ligne BA (*n*). Or la ligne BD
N. 56. n'est point parallele à la ligne BA (*n*), puisque ces lignes ont un point B commun entr'elles; donc &c. donc C. Q. F. D.

COROLLAIRE.

465. Il suit de ce Théorême, que *si deux Plans sont perpendiculaires l'un à l'autre, une perpendiculaire abaissee d'un point quelconque de l'un de ces Plans à l'autre, passera par leur commune section.*

Si le plan Y est perpendiculaire au plan
Fig. 23. X *, une perpendiculaire abaissée d'un point quelconque A du plan Y, au plan X, passera par la commune section CD de ces plans.

Const. Du point A, abaissés une perpendiculaire AB a la commune section CD
N. 93. (*n*).

Démonst. La ligne AB tirée dans le plan Y, & perpendiculaire à la commune section CD de ce plan & du plan X (*c*),
N. 412. est perpendiculaire au plan X (*n*), puisque le plan Y l'est aussi (*h*). Or du point A, on ne peut abaisser au plan X que la perpendi-

culaire AB (*n*) ; donc puiſque cette per- N. 464.
pendiculaire paſſe par la commune ſection CD, toute ligne droite tirée du point A, qui ne paſſera point par cette commune ſection, ne ſera point perpendiculaire au plan X ; & par conſéquent ſi une ligne droite qui eſt tirée de ce point, eſt perpendiculaire à ce plan, elle paſſe par cette commune ſection ; donc C. Q. F. D.

PROPOSITION XIV.

THEOREME.

466. *Si une même ligne droite eſt perpendiculaire à deux Plans, ces Plans ſeront paralleles.*

SI la ligne AB * eſt perpendiculaire aux Fig. 24.
plans AD & BC, ces plans ſeront paralleles.

Conſt. Par un point D pris à volonté dans le plan AD, tirés une parallele DC à la ligne AB (*n*) : du point A tirés au N. 130.
point D la ligne AD ; & du point C auquel la ligne DC rencontre le plan BC, la ligne BC.

Démonſt. Les lignes AB, DC, AD & BC ſont dans un même plan (*n*), puiſque N. 458.

les lignes AB & DC sont paralleles (*c*) & que les lignes AD & BC sont tirées chacune de l'une de ces paralleles à l'autre (*c*); ainsi, puisque l'angle intérieur DAB formé par la ligne AD & par la ligne AB qui est perpendiculaire au plan AD (*h*), est
N. 410. droit (*n*), & que par des raisons pareilles, l'autre angle intérieur CBA est aussi droit, les lignes AD & BC qui forment ces an-
N. 126. gles avec cette ligne AB, sont paralleles (*n*); donc puisque les lignes AB & DC le sont aussi (*c*), le quadrilatere ABCD est un pa-
N. 57. rallelogramme (*n*) ; & par conséquent le
N. 141. côté DC est égal au côté AB (*n*). Or puisque la même démonstration subsisteroit, à quelque point du plan AD que l'on prit le point D, tous les points de ce plan sont également éloignés des points correspondans du plan BC ; & par conséquent ces
N. 411. plans sont paralleles (*n*) ; donc C. Q. F. D.

PROPOSITION XV.

THEOREME.

467. *Si deux angles qui ne sont point dans un même Plan sont tels, que les côtés de l'un soient paralleles aux côtés de l'autre, chacun à chacun, les Plans de ces angles seront aussi paralleles.*

SI les angles ABC & DEF * qui ne sont point dans un même plan, sont tels que les côtés BA & ED soient paralleles, & que les côtés BC & EF le soient aussi, le plan X de l'angle ABC, sera parallele au plan Y de l'angle DEF. Fig. 25.

Const. Du point B abaissés une perpendiculaire BG au plan Y (*n*) : par le point G auquel cette perpendiculaire rencontre ce plan, tirés une parallele GI au côté EF ; & une parallele GH au côté ED (*n*). N. 462. N. 130.

Démonst. La ligne GI est parallele à la ligne EF (*c*), & la ligne EF l'est à la ligne BC (*h*) ; ainsi la ligne GI est parallele à la ligne BC (*n*) ; & par des raisons pareilles, la ligne GH l'est à la ligne BA. Or puisque les lignes GI & BC sont paralleles, la somme des angles intérieurs BGI & GBC N. 460.

N. 127. est égale à celle de deux angles droits (*n*) ; donc puisque l'angle intérieur BGI formé par la ligne GI, & par la ligne BG qui est
N. 410. perpendiculaire au plan Y (*c*), est droit (*n*), l'autre angle intérieur GBC l'est aussi; & par conséquent puisque par des raisons pareilles, l'angle GBA l'est aussi, la ligne BG est
N. 454. perpendiculaire au plan X (*n*). Or puisque la ligne BG est perpendiculaire au plan Y (*c*), & au plan X (*d*), elle est perpendiculaire à chacun de ces plans; & par conséquent ces
N. 466. plans sont paralleles (*n*) ; donc C. Q. F. D.

PROPOSITION XVI.

THEOREME.

468. *Si deux Plans paralleles sont coupés par un autre Plan, leurs communes sections seront paralleles.*

Fig. 26. SI les plans X & Y * sont paralleles, leurs communes sections AB & CD avec le plan Z, seront paralleles.

Démonst. Les communes sections AB
N. 411. & CD sont dans un même plan Z (*n*) ; ainsi si elles n'étoient point paralleles, étant prolongées autant qu'il le seroit nécessaire,

elles se rencontreroient. Or étant prolongées autant qu'on le voudra, elles ne se rencontrent point, puisque l'une est dans le plan X, l'autre dans le plan Y (n), & N. 411. que ces deux plans qui sont paralleles (h), ne se rencontrent point (n); donc les com- N. 419. munes sections AB & CD sont paralleles; donc C. Q. F. D.

PROPOSITION XVII.

THEOREME.

469. *Si plusieurs Plans paralleles coupent deux lignes droites, les parties de ces lignes, qui seront comprises entre ces Plans, seront proportionnelles.*

SI les plans X, Y & Z * qui coupent Fig. 27. les lignes AB & CD, sont paralleles, AE : EB :: CF :: FD.

Const. Du point A tirés au point D, la ligne AD.

Démonst. Les communes sections EG & BD du plan des lignes AB & AD, & des plans Y & Z, sont paralleles (n), puisque N. 468. les plans Y & Z sont paralleles (h); ainsi les côtés AB & AD du triangle BAD, sont divisés par une ligne EG parallele à l'autre

côté BD de ce triangle ; & par conséquent
N. 371. AE : EB : : AG : GD (*n*) : or par des raisons pareilles aux précédentes, AG : GD : : CF : FD ; donc AE : EB : : CF : FD
N. 342. (*n*) ; donc C. Q. F. D.

PROPOSITION XVIII.

THEOREME.

470. *Si une ligne droite est perpendiculaire à un Plan, tous les Plans dans lesquels cette perpendiculaire se trouvera, seront aussi perpendiculaires à ce même Plan.*

Fig. 28. SI la ligne AB * est perpendiculaire au plan X, un plan quelconque Y dans lequel cette ligne AB se trouvera, sera aussi perpendiculaire au plan X.

Const. Par un point quelconque E du plan Y, tirés une parallele EF à la ligne
N. 130. AB (*n*).

Démonst. La ligne EF est parallele à la ligne AB (*c*) : or la ligne AB est perpendiculaire au plan X (*h*) ; donc la ligne EF
N. 459. est aussi perpendiculaire à ce plan (*n*), & par conséquent elle l'est aussi à la commune
N. 410. section CD de ce plan & du plan Y (*n*). Or

puiſque la même démonſtration ſubſiſteroit à quelque point du plan Y que l'on prit le point E, toutes les lignes tirées dans le plan Y parallelement à la ligne AB, ſont perpendiculaires au plan X; & par conſéquent le plan Y lui eſt auſſi perpendiculaire (*n*); donc C. Q. F. D. N. 412.

PROPOSITION XIX.

THEOREME.

471. *Si deux Plans qui ſe coupent ſont perpendiculaires à un autre Plan, leur commune ſection lui ſera auſſi perpendiculaire.*

SI les plans Y & Z * ſont perpendiculaires au plan X, leur commune ſection AB, lui ſera auſſi perpendiculaire. Fig. 29.

Démonſt. La commune ſection AB des plans Y & Z eſt dans ces deux plans (*n*): N. 411. or ſi cette commune ſection AB inclinoit vers C ou vers D, elle ne ſeroit point dans le plan Z, puiſque ce plan eſt perpendiculaire au plan X (*h*); ſi elle inclinoit vers E ou vers F, elle ne ſeroit point dans le plan Y, puiſque ce plan eſt auſſi perpendiculaire au plan X; & enfin par les mêmes raiſons,

si elle inclinoit vers un point quelconque différent des précédens, elle ne seroit ni dans le plan Y ni dans le plan Z ; donc la commune section AB des plans Y & Z, n'incline vers aucun côté du plan X ; & par conséquent, elle est perpendiculaire à ce
N. 410. plan (n) ; donc C. Q. F. D.

SECONDE PARTIE.

DES SOLIDES.

PROPOSITION XX.

THEOREME.

472. *Si trois angles plans forment un angle solide, chacun de ces angles sera moins grand que la somme des deux autres.*

CHacun des angles plans BAC, CAD
Fig. 30. & BAD * qui forment l'angle solide A, est moins grand que la somme des deux autres.

Const. Sur l'un des côtés AB du plus grand de ces angles, faites un angle BAE qui ait le point A de ce côté pour sommet, & qui
N. 115. soit égal à l'angle BAC (n) : sur les côtés

AC & AE, prenés à volonté les parties AC & AE égales entr'elles : d'un point quelconque B du côté AB, tirés au point C, la ligne BC, & par le point E, la ligne BED : du point C tirés au point D, la ligne CD.

Démonst. Les triangles BAC & BAE ont l'angle BAC égal à l'angle BAE (*c*), & les côtés AB & AC qui forment le premier, égaux aux côtés AB & AE qui forment le second, chacun à chacun ; puisque AB est commun à ces deux triangles, & que AC est égal à AE (*c*) ; donc l'autre côté BC du premier, est égal à l'autre côté BE du second (*n*) ; & par conséquent, N. 10.
puisque la somme des côtés BC & CD du triangle BCD, est plus grande que l'autre côté BED de ce triangle (*n*), si de cette N. 110.
somme on retranche BC, & si de ce côté on retranche BE, le reste CD de cette somme sera plus grand que le reste ED de ce côté. Or puisque CD est plus grand que ED, les triangles CAD & EAD sont tels que le côté AC est égal au côté AE (*c*) que le côté AD leur est commun, & que le côté CD est plus grand que le côté ED (*d*) ; donc l'angle CAD est plus grand que l'angle EAD (*n*) ; & par conséquent, puisque l'angle N. 118.
BAC est égal à l'angle BAE (*c*), la somme des angles BAC & CAD est plus grande

que l'angle BAD, qui eſt celle des angles BAE & EAD; donc C. Q. F. D.

PROPOSITION XXI.

THEOREME.

473. *La ſomme de tous les angles plans qui forment un angle ſolide, eſt moins grande que celle de quatre angles droits.*

Fig. 31. LA ſomme de tous les angles plans BAC * CAD & BAD qui forment l'angle ſolide A, eſt moins grande que celle de quatre angles droits.

Démonſt. La ſomme des neuf angles des trois triangles BAC, CAD & DAB eſt
N. 133. égale à celle de ſix angles droits (*n*): or la ſomme des ſix angles ACB, ACD, ABC, ABD, ADC & ADB de ces trois triangles, eſt plus grande que celle de deux angles droits, puiſque la ſomme des angles ACB & ACD qui forment l'angle ſolide C avec l'angle BCD, eſt plus grande
N. 472. que cet angle BCD (*n*); que celle des angles ABC & ABD, eſt plus grande que
N. 472. l'angle CBD (*n*); que celle des angles ADC & ADB, eſt plus grande que l'angle

BDC (*n*) ; & qu'enfin celle de ces angles N. 472.
BCD, CBD & BDC, est égale à celle de deux angles droits (*n*) ; donc la somme N. 133.
des trois autres angles BAB, CAD & DAB de ces trois triangles, est moins grande que celle de quatre angles droits ; & par conséquent, puisque ces trois angles forment l'angle solide A ; la somme de tous les angles qui forment cet angle solide, est moins grande que celle de quatre angles droits ; donc C. Q, F. D.

COROLLAIRE.

474. Il suit de ce Théorême, que *les figures régulieres avec les angles desquelles on peut former des angles solides, ne sont que les triangles équilateraux, les quarrés & les pentagones.*

SCHOLIE.

Nous supprimons les 22 & 23e. Propositions, parce qu'elles sont inutiles.

PROPOSITION XXIV.

THEOREME.

475. *Si les Plans qui terminent un ſolide ſont paralleles, chacun à chacun :* Premierement, *ils ſeront des parallelogrammes :* Secondement, *les oppoſés ſeront ſemblables & égaux entr'eux.*

Fig. 32. SI les plans AC*, EG, AH, BG, &c. qui terminent le ſolide X, ſont paralleles, chacun à chacun ; *Premierement*, ils ſeront des parallelogrammes ; *Secondement*, les oppoſés AC & EG ſeront égaux & ſemblables entr'eux ; & il en ſera de même des autres AH & BG, AF & DG.

DEMONSTRATION.

Premierement. Les communes ſections AD & BC des plans AH & BG & du plan N. 468. AC ſont paralleles (*n*), puiſque ces plans AH & BG ſont paralleles (*h*) : or par une raiſon pareille, les communes ſections AB & DC des plans AF & DG & du même plan AC, ſont auſſi paralleles ; donc puiſque ce plan AC eſt terminé par ces communes ſections, il eſt un parallelogramme (*n*) ;

(*n*). On démontre de la même maniere N. 57.
que les plans EG, AH, BG, AF & DG,
ſont auſſi des parallelogrammes.

Secondement. Les côtés AB & EF des angles ABC & EFG, ſont paralleles (*n*), N. 57
puiſque le plan AF eſt un parallelogramme (*d*); & par une raiſon pareille, les autres côtés BC & FG de ces mêmes angles, ſont auſſi paralleles; donc ces angles ſont égaux entr'eux (*n*); & par conſéquent, puiſque N. 461.
l'on démontre de la même maniere, que les angles DAB & HEF, ſont auſſi égaux entr'eux, tous les angles des parallelogrammes oppoſés AC & EG ſont égaux, chacun à chacun (*n*). Or les côtés de ces mê- N. 142.
mes parallelogrammes, ſont auſſi égaux, chacun à chacun (*n*); puiſque le plan BG N. 141.
étant un parallelogramme (*d*), les côtés BC & FG ſont égaux entr'eux (*n*); & que par N. 141.
une raiſon pareille, les côtés AB & EF le ſont auſſi; donc les parallelogrammes oppoſés AC & EG ſont égaux & ſemblables entr'eux. Or on démontre de la même maniere que le plan AH eſt égal & ſemblable au plan BG; & que le plan AF l'eſt au plan DG; donc C. Q. F. D.

SCHOLIE.

Nous ſupprimons la 25^e Propoſition, parce qu'elle eſt compriſe dans la 32^e; &

les 26 & 27ᵉ Propositions, parce qu'elles sont inutiles.

PROPOSITION XXVIII.

THEOREME.

476. *Si un Parallelepipede est coupé par un Plan, qui passe par les diagonales de deux des Plans opposés de ce solide, il sera divisé en deux parties égales entr'elles.*

Fig. 33. LE plan ABGH * qui passe par les diagonales AH & BG des plans opposés ADHE & BCGF du parallelepipede X, divise ce solide en deux parties ABGFEH & HGBCDA égales entr'elles.

Démonst. Les triangles FBG & BGC
N. 143. sont semblables & égaux entreux (*n*), puisque le parallelogramme BCGF est divisé en ces deux triangles, par sa diagonale BG ; & par une raison pareille, les triangles EAH & AHD sont aussi semblables & égaux entr'eux : les plans AC & EG sont semblables
N. 475. & égaux entr'eux (*n*), puisqu'ils sont plans opposés d'un parallelepipede ; & par une raison pareille, les plans AF & DG sont aussi semblables & égaux entr'eux : enfin le

plan ABGH eſt commun aux parties ABGFEH & HGBCDA ; donc ces parties ſont terminées par des plans ſemblables & égaux, chacun à chacun ; & par conſéquent elles ſont égales entr'elles (*n*) ; donc C. Q. F. D. N. 421.

PROPOSITION XXIX.

THEOREME.

477. *Les Parallelepipedes qui ont la même baſe, & dont les Plans paralleles à cette baſe ſont dans un même Plan, ſont égaux entr'eux.*

LEs parallelepipedes X & Y * qui ont la même baſe ABCD, & dont les plans EG & IL paralleles à cette baſe, ſont dans un même plan EL, ſont égaux entr'eux. Fig. 34.

Les lignes EF & IK étant prolongées, ne ſont qu'une ſeule ligne droite EK, & les lignes HG & ML, qu'une ſeule ligne droite HL, ou ces lignes ſont différentes lignes droites.

PREMIER CAS.

Si les lignes EF & IK ne ſont qu'une

seule ligne droite, &c.

Const. Prolongés la ligne EF jusqu'en I; & la ligne HG jusqu'en M.

Démonst. Le plan EG est semblable &
N. 475. égal au plan AC (*n*) puisque ces plans sont des plans opposés du parallelepipede X: or le plan AC est semblable & égal au plan IL, puisque ces plans sont des plans opposés du parallelepipede Y; donc le plan
N. 62. EG est semblable & égal au plan IL (*n*); & par conséquent si l'on ajoute le plan FM à chacun de ces plans, les plans EM & FL qui en sont les sommes, seront semblables
N. 63. & égaux entr'eux (*n*). Les plans EB &
N. 475. FC sont semblables & égaux entr'eux (*n*), puisqu'ils sont plans opposés du parallelepipede X: les plans AIMB & DKLC,
N. 475. sont semblables & égaux entr'eux (*n*), puisqu'ils sont plans opposés du parallelepipede Y; & enfin l'on démontre de la même maniere qu'on la fait dans la 35[e] Proposition du premier Livre, que les plans triangulaires AEI & DFK sont semblables & égaux entr'eux; & que les plans triangulaires BHM & CGL le sont aussi. Or puisque les prismes triangulaires AEIMHB & DFKLGC sont terminés par ces
N. 421. plans, ils sont égaux entr'eux (*n*); ainsi si de chacun de ces prismes, on retranche le prisme triangulaire NFIMGO qui leur est

commun, les restes qui sont les solides AEFNOGHB & DNIKLMOC, seront égaux entr'eux (n); & par conséquent, si l'on ajoute le prisme triangulaire ANDCOB à chacun de ces solides, les sommes qui sont les parallelepipedes X & Y, seront égales entr'elles (n). N. 64. N. 63.

SECOND CAS.

*Si les lignes EF & IK * sont différentes lignes droites.* Fig. 35.

Const. Prolongés vers Z les lignes MI & LK; & les lignes HG & EF, jusqu'à ce qu'elles rencontrent la ligne LO: des points A, B, C & D tirés aux points N, O, P & Q, les lignes AN, BO, CP & DQ.

Démonst. Les côtés du plan NOPQ sont les prolongemens de ceux des plans EG & IL (c); or les côtés de ces plans sont paralleles à ceux du plan ABCD, chacun à chacun; & ces plans sont semblables & égaux à ce plan ABCD (d); donc les plans NOPQ & ABCD sont des parallelogrammes semblables & égaux entr'eux, & par conséquent le solide Z formé par ces plans & par les plans AO, DP, AQ & BP, est un parallelepipede (n). Or N. 428. puisque le solide Z est un parallelepipede (d), & que les lignes EF & NO ne sont qu'une ſeule ligne droite *(c)*, par une démonſtration pareille à celle du premier Cas, ce parallelepipede eſt égal au parallelepipede X, & puiſque les lignes MI & QN ne ſont auſſi qu'une ſeule ligne droite *(c)*, par une démonſtration pareille, il eſt auſſi égal au parallelepipede Y ; donc les parallelepipedes X & Y ſont égaux entr'eux ; donc C. Q. F. D.

SCHOLIE.

478. *Ce ſecond Cas eſt la 30e Propoſition de ce Livre; & nous ſupprimons la 31e qui démontre que* les parallelepipedes qui ont des baſes égales entr'elles, & dont les plans paralleles à ces baſes ſont dans un même plan, ſont égaux entr'eux ; *parce que l'égalité des parallelepipedes qui ont des baſes égales entr'elles, ſuit de celle de ceux qui ont la même baſe ; de même que l'égalité des parallelogrammes qui ont des baſes égales entr'elles, ſuit de l'égalité de ceux qui ont la même baſe* (n).

N. 148.

USAGE.

479. *Nous avons dit* (n) *que nous parlerions de la maniere de meſurer un parallelepipede, lorſque nous conſidererions ce Solide ; ainſi comme cette maniere eſt fondée ſur cette Propoſition, nous allons l'expoſer.*

N. 145.

Premierement. *Si le parallelepipede X* *Fig. 364
qu'il faut mesurer est rectangle; & que le Cube M soit la mesure dont on veut se servir.

Mesurer un solide quelconque X i, c'est considérer en combien on peut le diviser de parties, égales chacune à un certain cube M que l'on prend pour Mesure. Or il est évident que le parallelepipede X peut être divisé en autant de parallelepipedes KLNGFHB, IKHFE*A*, *&c. dont les bases* HG, *AF*, *&c. sont égales chacune à celle du cube M, que l'un ABCD des Plans qui terminent ce parallelepipede, peut être divisé de quarrés, égaux chacun à l'un de ceux qui terminent ce cube M; ainsi si l'on prend une Mesure courante égale à l'une des dimensions du cube M, & si après avoir consideré combien de fois cette Mesure courante est contenue dans la longueur AB, & dans la largeur BC du plan ABCD, on multiplie l'un par l'autre les nombres qui l'expriment, le produit indiquera combien le parallelepipede X contient de ces parallelepipedes* KLNGFHB, *&c. dont les bases sont égales chacune à celle du cube M. Mais chacun de ces parallelepipedes peut être divisé en autant de cubes* OPQGFHB, *&c. égaux chacun au cube M, que la hauteur* BL *de ces parallelepipedes, peut* *être divisée de parties égales chacune à la hauteur de ce cube M; donc si l'on multiplie le nombre qui exprime combien le parallelepipede X contient de ces parallelepipedes KLNGFHB, &c. par celui qui exprime combien de fois la hauteur BL de ces parallelepipedes, contient celle du cube M, le produit indiquera combien le parallelepipede X contient de cubes égaux chacun au cube M; & par consequent ce parallelepipede sera mesuré.*

Fig. 37. Secondement. *Si le parallelepipede X* qu'il faut mesurer n'est pas rectangle.*

Le parallelepipede X est égal à un parallepipede Y dont la hauteur EF est égale
N. 478. *à la hauteur CD du premier* (n). *Or pour mesurer le parallelepipede Y, il faut multiplier la valeur de la surface AB de sa base, par le nombre de Mesures que contient sa hauteur EF* (d); *donc puisque le parallelepipede X est egal au parallelepipede Y; que la base AB est commune à l'un & à l'autre; & que la perpendiculaire CD abaissée du sommet du parallelepipede X à la base de ce parallelepipede, prolongée s'il est nécessaire, est égale à la hauteur du parallelepipede Y, si l'on multiplie la valeur de la base AB du parallelepipede X, par le nombre de Mesures courantes que contient cette perpendiculaire CD, le produit sera*

la valeur de ce parallelepipede X.

Ainsi la regle du Mesurage des parallelepipedes est la suivante.

480. Prenés une Mesure courante égale au côté de la mesure cubique dont vous voulés vous servir : considerés combien de fois cette mesure courante est contenue dans la longueur, dans la largeur, & dans l'épaisseur du parallelepipede que vous voulés mesurer : multipliés les uns par les autres les nombres qui l'expriment, & le produit indiquera combien de fois la Mesure cubique dont vous vous servés, est contenue dans ce parallelepipede.

PROPOSITION XXXII.

THEOREME.

481. *Les Rapports des Parallelepipedes dont les hauteurs sont égales entr'elles, sont les mêmes que ceux des bases de ces Parallelepipedes.*

SI les hauteurs des parallelepipedes AL & MX * sont égales entr'elles, le rapport du parallelepipede AL au parallelepipede MX, sera égal à celui de la base AC à la base MO. Fig. 183

Ss

Conſt. Diviſés la baſe AC en autant de parallelelogrammes AF, EH, &c. que le premier terme de l'expoſant du rapport de la baſe AC à la baſe MO, contient d'unités : diviſés auſſi la baſe MO en autant de parallelogrammes MR, PS, &c. que le ſecond terme de ce même expoſant contient d'unités : coupés le parallelepipede AL par des plans EI, GK, &c. paralleles au plan BL, & qui paſſent par les lignes de diviſion EF, GH, &c. coupés de même le parallelepipede MX par des plans PT, QV, &c. paralleles au plan NX, & qui paſſent par les lignes de diviſion PR, QS, &c.

Démonſt. Les parallelepipedes AL & MX ſont diviſés, l'un en autant de parallelepipedes AI, EK, &c. que la baſe AC eſt diviſée de parallelogrammes AF, EH, &c. & l'autre en autant de parallelepipedes MT, PV, &c. que la baſe MO eſt diviſée de parallelogrammes MR, PS, &c. (*c*) : ces parallelogrammes AF, EH, &c. MR, PS, &c. ſont égaux entr'eux (*c*) ; & ces parallelepipedes AI, EK, &c. MT,
N. 478. PV, &c. le ſont auſſi (*n*), puiſqu'ils ont chacun pour baſe, un de ces parallelogrammes égaux (*c*), & que leurs hauteurs ſont égales entr'elles (*h*). Ainſi le parallelepipede AI & ſa baſe AF ſont équimultiples

du parallelepipede MT & de sa base MR (n); le parallelepipede AL & sa base AC, N. 296.
le sont du parallelepipede AI & de sa base AF (n); & enfin le parallelepipede MX N. 296.
& sa base MO, le sont du parallelepipede MT & de sa base MR (n); donc le paralle- N. 296.
lepipede AL & sa base AC, sont aussi équimultiples du parallelepipede MX & de sa base MO (n); & par conséquent le paral- N. 335.
lelepipede AL est au parallelepipede MX, comme la base AC est à la base MO (n); N. 307.
donc C. Q. F. D.

PROPOSITION XXXIII.

THEOREME.

482. *Les rapports des Parallelepipedes semblables entr'eux, sont triplés de ceux des côtés homologues de ces parallelepipedes.*

SI les parallelepipedes AD & EC * sont Fig. 39.
semblables entr'eux, le rapport du parallelepipede AD au parallelepipede EC, sera triplé de celui du côté AB au côté BC.

Const. Posés les parallelepipedes AD & EC de maniere qu'étant l'un au-dessus de l'autre, deux des angles égaux ABF & GBC des plans ſemblables AF & GC qui terminent ces Solides, deviennent des angles oppoſés au ſommet : prolongés le Solide AD, juſqu'à ce que les plans MC & CK ſoient dans un même plan MK : prolongés auſſi le Solide EC, juſqu'à ce que les plans LH & HK ſoient dans un même plan LD.

Démonſt. Le rapport du parallelepipede AD au parallelepipede BK, eſt égal à celui
N. 481. de la baſe AF à la baſe BN (*n*), puiſque les hauteurs de ces parallelepipedes ſont égales entr'elles (*c*) : or le rapport de la baſe AF à la baſe BN, eſt égal à celui du
N. 367. côté AB au côté BC (*n*) ; puiſque ces baſes
N. 475. ſont des parallelogrammes (*n*), & que les hauteurs de ces parallelogrammes ſont égales entr'elles (*c*) ; donc le rapport du parallelepipede AD au parallelepipede BK,
N. 342. eſt égal à celui du côté AB au côté BC (*n*); & par conſéquent ſi le rapport du parallelepipede AD au parallelepipede EC, eſt triplé de celui du parallelepipede AD au parallelepipede BK ; le rapport du parallelepipede AD au parallelepipede EC, ſera tri-
N. 342. ple de celui du côté AB au côté BC (*n*). Or le rapport du parallelepipede AD au parallelepipede EC, eſt triplé de celui du parallelepipede AD au parallelepipede BK ; car le rapport du parallelepipede AD au

parallelepipede BK, est égal à celui du côté AB au côté BC (*d*); le rapport du côté AB au côté BC, est égal à celui du côté BF au côté BG, puisque ces côtés sont côtés homologues des Solides semblables AD & EC (*h*); le rapport du côté BF au côté BG, est égal à celui de la base BN la base CG (*n*), puisque ces bases sont des parallelogrammes (*n*), & que les hauteurs de ces parallelogrammes sont égales entr'elles (*c*); & enfin le rapport de la base BN à la base CG, est égal à celui du parallelepipede BK au parallelepipede BL (*n*), puisque ces bases sont celles de ces parallelepipedes (*c*), & que les hauteurs de ces parallelepipedes sont égales entr'elles (*c*); donc le rapport du parallelepipede AD au parallelepipede BK, est égal à celui de ce même parallelepipede BK, au parallelepipede BL (*n*). Mais le rapport du parallelepipede BK au parallelepipede BL, est égal à celui du côté BF au côté BG (*d*); le rapport du côté BF au côté BG est égal à celui du côté BH au côté BI, puisque ces côtés sont côtés homologues des Solides semblables AD & EC (*h*); le rapport du côté BH au côté BI, est égal à celui de la base CH à la base CI (*n*), puisque ces bases sont des parallelogrammes (*n*), & que les hauteurs de ces parallelogrammes sont éga-

N. 367. N. 475. N. 481. N. 342. N. 367. N. 475.

les entr'elles (*c*); & enfin le rapport de la base CH à la base CI, est égal à celui du parallelepipede BL au parallelepipede EC
N. 481. (*n*); puisque ces bases sont celles de ces parallelepipedes (*c*), & que les hauteurs de ces parallelepipedes sont égales entr'elles (*c*); donc le rapport du parallelepipede BK au parallelepipede BL est aussi égal à celui du parallelepipede BL, au parallelepipede EC
N. 342. (*n*). Ainsi les parallelepipedes AD, BK,
N. 318. BL & EC forment une progression (*n*); donc le rapport du premier parallelepipede AD au quatriéme EC, est triplé de celui du même premier parallelepipede AD au se-
N. 348. cond BK (*n*); & par conséquent le rapport du parallelepipede AD au parallelepipede EC, est triplé de celui du côté AB au côté BC; donc C. Q. F. D.

COROLLAIRE.

483. Il suit de ce Théorême, que *si quatre lignes sont continuement proportionnelles; le parallelepipede décrit sur la premiere, est à un parallelepipede semblable décrit sur la seconde, & semblablement posé sur elle, comme la premiere de ces lignes est à la quatriéme.*

PROPOSITION XXXIV.

THEOREME.

484. Premierement. *Si deux Parallelepipedes ſont égaux entr'eux, leurs baſes & leurs hauteurs ſeront réciproquement proportionnelles.* Secondement. *Si les baſes & les hauteurs de deux parallelepipedes, ſont réciproquement proportionnelles, ces parallelepipedes ſeront égaux entr'eux.*

Premierement. SI les parallelepipedes X & Y * ſont égaux entr'eux, leurs baſes AB & CD, & leurs hauteurs AE & CG ſeront réciproquement proportionnelles : *Secondement*, ſi les parallelepipedes X & Y ſont tels, que leurs baſes AB& CD,& leurs hauteur AE & CG ſoient réciproquement proportionnelles, ces parallelepipedes ſeront égaux entr'eux. Fig. 40.

Conſt. Diviſés la hauteur CG en deux parties CF & FG, telles que l'une CF ſoit égale à la hauteur AE : coupés le Solide Y par un plan FH parallele à ſa baſe CD, & qui paſſe par le point F.

DEMONSTRATION.

Premierement. Le rapport de la base AB à la base CD, est égal à celui du paral-
N. 481. lelepipede X au parallelepipede CH (*n*), puisque les hauteurs AE & CF de ces parallelepipedes sont égales entr'elles (*c*): or le rapport du parallelepipede X au parallelepipede CH, est égal à celui du parallele-
N. 338. pipede Y au même parallelepipede CH (*n*), puisque les parallelepipedes X & Y sont égaux entr'eux (*h*); le rapport du parallelepipede Y au parallelepipede CH, est égal à celui du parallelogramme CK au paralle-
N. 481. logramme CI (*n*), puisque l'on peut aussi prendre ces parallelogrammes pour les bases de ces parallelelepipedes qui auront alors une hauteur commune FL; & enfin le rapport du parallelogramme CK au parallelogramme CI, est égal à celui de la ligne
N. 367. CG à la ligne CF (*n*); donc le rapport de la base AB à la base CD, est égal à celui de
N. 342. la ligne CG à la ligne CF (*n*) qui est égale à la hauteur AE (*c*); & par conséquent les bases AB & CD, & les hauteurs AE & CG sont réciproquement proportionnelles
N. 310. (*n*).

Secondement. Le rapport du parallelepipede X au parallelepipede CH, est égal à celui de la base AB à la base CD (*d*): or

le rapport de la base AB à la base CD, est égal à celui de la hauteur CG à la hauteur AE (n), puisque les bases AB & CD, & N. 309.
les hauteurs AE & CG sont réciproquement proportionnelles (h) ; & le rapport de la hauteur CG à la hauteur AE qui est égale à CF (c), est égal à celui du parallelepipede Y au parallelepipede CH (d) ; donc le rapport du parallelepipede X au parallelepipede CH, est égal à celui du parallelepipede Y au même parallelepipede CH (n) ; & par conséquent les parallelepipedes N. 341.
X & Y sont égaux entr'eux (n) ; donc C. N. 340.
Q. F. D.

SCHOLIE.

485. *Nous avons supposé que les parallelepipedes X & Y * étoient rectangles ;* Fig. 40.
mais s'ils ne l'étoient pas, il faudroit prendre les hauteurs AE, CG & CF sur des perpendiculaires abaissées des sommets de ces Solides, aux Plans de leurs bases prolongées s'il étoit nécessaire.

Nous supprimons la 35^e Proposition, parce qu'elle est inutile.

PROPOSITION XXXVI.

THEOREME.

486. *Si trois lignes droites sont continuement proportionnelles, deux parallelepipedes équiangles qui auront pour côtés, l'un ces trois lignes, & l'autre celle de ces trois lignes qui est moyenne proportionnelle entre les deux autres, seront égaux entr'eux.*

Fig. 41. SI les parallelepipedes X & Y * sont équiangles, & tels que les côtés AB, AC & AD du premier, soient continuement proportionnels, & que les côtés EF, EG & EH du second, soient égaux chacun au terme moyen AC, ces parallelepipedes X & Y seront égaux entr'eux.

Const. Du point C abaissés une perpendiculaire CI au côté AB; & du point G une
n. 91. perpendiculaire GK, au côté EF (*n*).

Démonst. Les lignes AB, AC & AD sont continuement proportionnelles (*h*), & les lignes EF & EH sont égales chacune à la ligne AC (*h*); donc les côtés AB, EF, AD & EH des parallelogrammes DB & HF qui sont les bases des parallelepipedes

X & Y, ſont réciproquement proportionnels (*n*); & par conſéquent, puiſque ces N. 309. parallelogrammes ſont équiangles (*h*), ces baſes ſont égales entr'elles (*n*). Or les hau- N. 386. teurs CI & GK de ces mêmes parallelepipedes ſont auſſi égales entr'elles; car puiſque ces parallelepipedes ſont équiangles (*h*), l'angle CAI eſt égal à l'angle GEK; & puiſque les lignes CI & GK ſont perpendiculaires, l'une à la ligne AB, & l'autre à la ligne EF (*c*), l'angle CIA eſt égal à l'angle GKE; ainſi les triangles ACI & EGK qui ont le côté AC égal au côté EG (*h*), ont auſſi les angles CAI & CIA qui ſont, l'un à l'une A des extrémités de ce côté AC du premier triangle, & l'autre oppoſé à ce côté; & les angles GEK & GKE qui ſont, l'un à l'une E des extrémités de ce côté EG du ſecond triangle, & l'autre oppoſé à ce côté, égaux chacun à chacun; donc les autres côtés du premier triangle ſont égaux aux autres côtés du ſecond, chacun à chacun (*n*); & par conſéquent le côté CI eſt N. 119. égal au côté GK. Ainſi les parallelepipedes X & Y ont leurs baſes DB & HF égales entr'elles (*d*) & leurs hauteurs CI & GK égales auſſi entr'elles (*d*); & par conſéquent ces parallelepipedes ſont égaux entr'eux (*n*); N. 478. donc C. Q. F. D.

PROPOSITION XXXVII.

THEOREME.

487. Premierement. *Si quatre lignes droites sont proportionnelles, deux parallelepipedes semblables entr'eux, & semblablement posés sur les deux premieres, & deux autres parallelepipedes semblables aussi entr'eux, & semblablement posés sur les deux dernieres, seront proportionnels :* Secondement, *si deux parallelepipedes semblables entr'eux, & deux autres parallelepipedes semblables aussi entr'eux sont proportionnels, les côtés homologues des deux premiers, & les côtés homologues des deux derniers, seront aussi proportionnels.*

Fig. 42. *Premierement.* SI les lignes AB, CD, EF & GH * sont proportionnelles, les parallelepipedes V & X semblables entr'eux, & semblablement posés sur les deux premieres, & les parallelepipedes Y & Z semblables aussi entr'eux, & semblablement posés sur les deux dernieres, seront proportionnels : *Secondement.* Si les parallelepipedes V & X sem-

blables entr'eux, & les parallelepipedes Y & Z semblables aussi entr'eux, sont proportionnels, les côtés homologues AB & CD des deux premiers, & les côtés homologues EF & GH des deux derniers, seront proportionnels.

DEMONSTRATION.

Premierement. Le rapport du parallelepipede V au parallelepipede X, est triplé de celui de la ligne AB à la ligne CD (*n*), N. 482. puisque ces parallelepipedes sont semblables entr'eux (*h*): or le rapport de la ligne AB à la ligne CD, est égal à celui de la ligne EF à la ligne GH (*h*); donc le rapport du parallelepipede V au parallelepipede X, est triplé de celui de la ligne EF à la ligne GH (*n*); & par conséquent puisque N. 342. le rapport du parallelepipede Y au parallelepipede Z, qui est semblable au parallelepipede Y (*h*), est aussi triplé de celui de la ligne EF à la ligne GH (*n*), le rapport N. 482. du parallelepipede V au parallelepipede X, est égal à celui du parallelepipede Y au parallelepipede Z (*n*). N. 342.

Secondement. Le rapport du parallelepipede V au parallelepipede X, est triplé de celui de la ligne AB à la ligne CD (*n*), N. 482. puisque ces parallelepipedes sont semblables entr'eux (*h*); & par une raison pareille, le rapport du parallelepipede Y au parallelepipede Z, est triplé de celui de la ligne EF à la ligne GH : or le rapport du parallelepipede V au parallelepipede X, est égal à celui du parallelepipede Y au parallelepipede Z (*h*) ; donc le rapport triplé de celui de la ligne AB à la ligne CD, est égal au rapport triplé de celui de la ligne EF à la ligne GH ; & par conséquent le rapport de la ligne AB à la ligne CD, est égal à celui de la ligne EF à la ligne GH ; donc C. Q. F. D.

SCHOLIE.

488. *Ce que nous avons démontré des parallelepipedes, dans cette Proposition & dans les précédentes, doit aussi s'entendre des Prismes en général.*

La 38e Proposition de ce Livre est déplacée & doit suivre immédiatement la 13e; ainsi pour remedier à ce derangement, nous en avons fait un Corollaire de cette 13e. Proposition, N. 465. & nous supprimons la 39e parce qu'elle n'est pas fort considérable.

PROPOSITION XL.

Theoreme.

489. *Si deux Prismes dont les hauteurs sont égales entr'elles, sont tels que la base de l'un soit un triangle, & que celle de l'autre soit un parallelogramme double de ce triangle, ces deux Prismes seront égaux entr'eux.*

SI les hauteurs des Prismes ABCDEF * & GHIKLM sont égales entr'elles, & si le triangle EDF qui est la base du premier, est la moitié du parallelogramme LI qui est celle du second, ces Prismes seront égaux entr'eux. Fig. 41.

Démonst. Les Prismes ABCDEF & GHIKLM sont les moitiés, l'un du parallelepipede EN, & l'autre du parallelepipede LO (n); or ces parallelepipedes EN & LO sont égaux entr'eux (n); puisque leurs hauteurs sont égales entr'elles (h), & que le triangle EDF n'étant que la moitié du parallelogramme LI (h), les parallelogrammes EP & LI qui sont les bases de ces mêmes parallele- N. 476. N. 478.

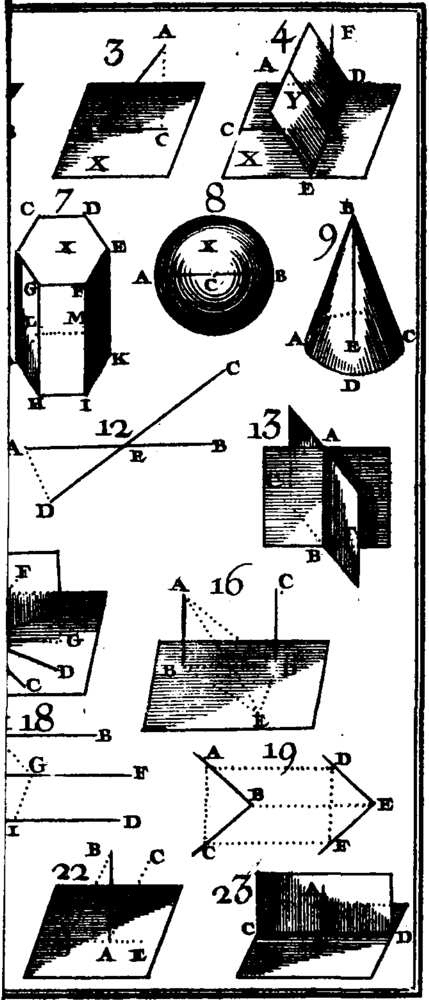
lepipedes, sont aussi égaux entr'eux
n. 143. (n); donc les prismes ABCDEF & GHI-
n. 68. KLM sont égaux entr'eux (n); donc C.
Q. F. D.

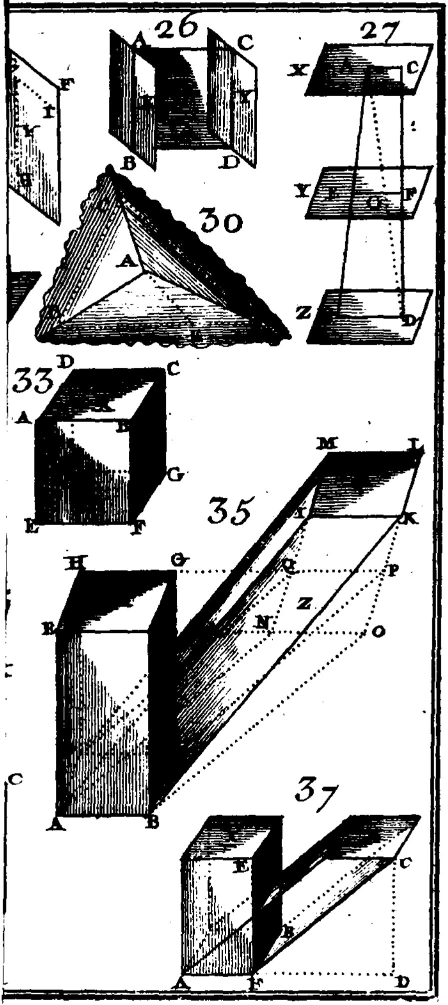
Fin du onziéme Livre.

LES

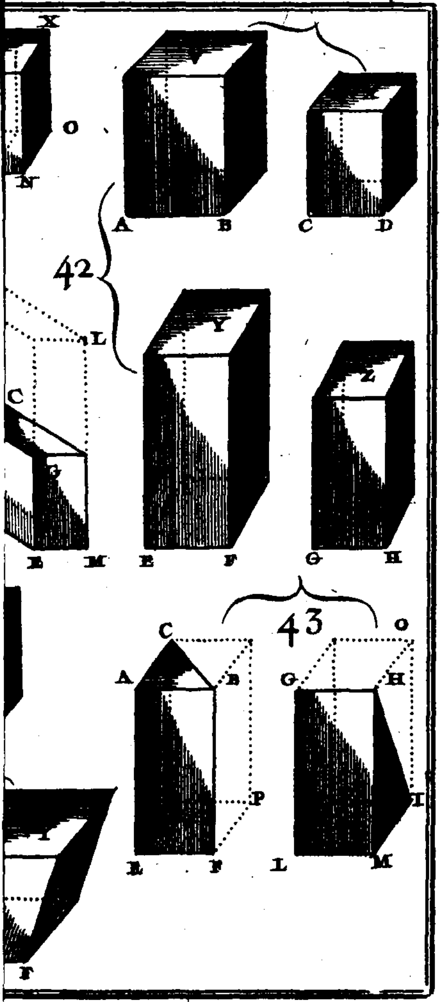
,
tr'eux
GHI-
c C.

ES




26
A
C
B
D
27
X
C
Y
F
Z
D
30
A
33
D
C
A
B
G
E
F
35
M
L
I
K
H
G
Q
P
Z
E
N
O
C
A
B
37
E
C
A
F
D

ns d'Euclide. Pl 3



LES ELEMENS D'EUCLIDE.

LIVRE DOUZIE'ME.

CE Livre est le dernier de ceux des Elemens d'Euclide qui sont nécessaires. On y considere les propriétés des Pyramides ; on y démontre ensuite celles des Cylindres & des Cônes, en faisant voir que les uns sont des especes de Prismes, & les autres des especes de Pyramides ; & l'on finit enfin ce Livre par y déterminer quels sont les rapports que les Spheres ont entr'elles.

PROPOSITION I.

THEOREME.

490 *Les Polygones ſemblables inſcrits dans des cercles, ſont entr'eux comme les quarrés des diametres de ces cercles.*

Fig. 1. SI les polygones ABCDE & FGHIK * inſcrits l'un dans le cercle X & l'autre dans le cercle Y, ſont ſemblables entr'eux, le rapport du polygone ABCDE au polygone FGHIK, ſera le même que celui du quarré du diametre BL au quarré du diametre GM.

Conſt. Tirés du point B au point D, la ligne BD; du point C au point L la ligne CL; du point G au point I, la ligne GI; & du point H au point M, la ligne HM.

Démonſt. Les angles BCD & GHI ſont égaux entr'eux, & les côtés CB, CD, HG & HI qui les forment, ſont proportionels
N. 363. (*n*), puiſque les polygones ABCDE & FGHIK ſont ſemblables entr'eux (*h*); donc les triangles BCD & GHI ſont
N. 374. équiangles (*n*); & par conſéquent l'angle

BDC est égal à l'angle GIH : or l'angle BLC est égal à l'angle BDG (*n*), puisque N. 241
ces angles sont inscrits chacun dans le même segment BAEDC (*c*) ; & par une raison pareille, l'angle GMH est égal à l'angle GIH ; donc les angles BLC & GMH sont égaux entr'eux (*n*) ; & par conséquent, N. 62.
puisque les angles BCL & GHM qui sont inscrits chacun dans un demi cercle (*c*), sont aussi égaux entr'eux (*n*), les triangles BCL N. 258.
& GHM sont équiangles (*n*). Ainsi le rap- N. 135.
port du polygone ABCDE au polygone FGHIK, est doublé de celui du côté BC au côté GH (*n*), puisque ces polygones N. 393.
sont semblables entr'eux (*h*) ; & le rapport du côté BC au côté GH, est égal à celui du diametre BL au diametre GM (*n*), puis- N. 371.
que les triangles BCL & GHM sont équiangles (*d*) ; donc le rapport du polygone ABCDE au polygone FGHIK, est doublé de celui du diametre BL au diametre GM (*n*) ; & par conséquent, puisque le rap- N. 148.
port du quarré du diametre BL à celui du diametre GM, est aussi doublé de celui de ces deux mêmes diametres (*n*), le rapport N. 393
de ces deux polygones, & celui de ces deux quarrés, sont égaux entr'eux (*n*) ; N. 148.
donc C. Q. F. D.

PROPOSITION II.

THEOREME.

491. *Les Cercles sont entr'eux comme les quarrés de leurs diametres.*

Fig. 2. LE cercle X * est au cercle Y, comme le quarré du diametre AB est à celui du diametre CD.

N. 370. *Démonst.* On a démontré (*n*) que les cercles sont des polygones réguliers d'un nombre infini de côtés; ainsi ils suivent la même loi que les polygones: or les polygones semblables inscrits, l'un dans le cercle X & l'autre dans le cercle Y, sont entr'eux comme les quarrés des diametres AB & CD de ces cercles, quelque grand que soit le nombre des côtés de chacun de ces
N. 490. polygones (*n*); donc les cercles X & Y sont aussi entr'eux, comme les quarrés de ces mêmes diametres; donc C. Q. F. D.

COROLLAIRE.

492. Il suit de la démonstration de ce Théorême, que *les cercles sont entr'eux, comme les polygones semblables qui sont inscrits dans ces mêmes cercles.*

SCHOLIE.

Nous ſupprimons les 3ᵉ & 4ᵉ Propoſitions, parce qu'elles ne ſervent qu'à démontrer la 5ᵉ; & que ſuivant la maniere dont nous le faiſons, elles deviennent inutiles.

PROPOSITION V.

THEOREME.

493. *Si une Pyramide triangulaire eſt coupée par un Plan qui paſſe par ſon ſommet & par l'un de ſes côtes, elle ſera diviſée en deux autres Pyramides, dont chacune ſera à cette premiere, comme ſa baſe eſt à celle de cette même premiere.*

SI la pyramide triangulaire ABDC * eſt coupée par un plan EAD qui paſſe par ſon ſommet A, & par l'un de ſes côtés AD, elle ſera diviſée en deux pyramides ABDE & AEDC, dont chacune ſera à la pyramide ABDC, comme ſa baſe eſt à la baſe BDC de cette premiere pyramide. * Fig. 3.

Conſt. Coupés à volonté la pyramide ABDC, par un plan FHG parallele à ſa baſe BDC.

Démonst. La pyramide AEDC sera même
me partie de la pyramide ABDC, que la ba-
se EDC l'est de la base BDC, si à quelque
point que l'on coupe la pyramide ABDC
par un plan FHG parallele à sa base BDC,
la section IHG est même partie de la section
FHG, que la base EDC l'est de la base
BDC. Or la section IHG est même partie
de la section FHG, que la base EDC l'est
de la base BDC; car puisque les plans
FHG & BDC sont paralleles (*c*), les com-
munes sections FG & BC de ces plans &
N. 468. du plan BAC, sont paralleles (*n*); donc
puisque l'un AGF des angles AGF & ACB
que ces communes sections forment avec le
côté AC, est un angle extérieur, & que l'au-
tre ACB, est l'angle intérieur qui est op-
posé à cet angle extérieur, ces angles sont
N. 127. égaux entr'eux (*n*); & par conséquent les
triangles FAG & BAC qui ont un angle en
N. 135. A commun entr'eux, sont équiangles (*n*);
& par la même raison, les triangles IAG
& EAC le sont aussi. Or puisque les trian-
gles FAG & BAC sont équiangles (*d*)
N. 373. FG : BC : : AG : AC (*n*); & puisque les
triangles IAG & EAC le sont aussi (*d*), AG
N. 373. : AC : : IG : EC (*n*); donc FG : BC : :
N. 342. IG : EC (*n*); & par conséquent en échan-
N. 349. geant, FG : IG : : BC : EC (*n*). Ainsi le
rapport du triangle FHG au triangle IHG,

eſt égal à celui du côté FG au côté IG (*n*), N. 36[illegible]
puiſque les hauteurs de ces triangles ſont égales entr'elles (*c*) ; le rapport du côté FG au côté IG, eſt égal à celui du côté BC au côté EC (*d*) ; & le rapport du côté BC au côté EC eſt égal à celui du triangle BDC au triangle EDC (*n*), puiſque les N. 368
hauteurs de ces triangles ſont égales entr'elles (*c*) ; donc le rapport de la ſection FHG à la ſection IHG, eſt égal à celui de la baſe BDC à la baſe EDC (*n*) ; & par N. 34[illegible]
conſéquent la pyramide AEDC eſt même partie de la pyramide ABDC, que la baſe EDC l'eſt de la baſe BDC ; donc C. Q. F. D.

COROLLAIRE.

494. Il ſuit de ce Théorême, que *ſi des pyramides triangulaires qui ont leurs baſes égales entr'elles, & dans un même plan, ont auſſi un même point pour ſommet, ces pyramides ſeront égales entr'elles.*

SCHOLIE.

Nous avons tranſpoſé la 6e Propoſition, pour en faire le 3e. Corollaire de la ſuivante, parce qu'il eſt alors plus facile de la démontrer.

PROPOSITION VII.

THEOREME.

495. *Un Prisme triangulaire quelconque peut être divisé en trois pyramides égales entr'elles.*

Fig. 4. Le prisme triangulaire ABCDEF * peut être divisé en trois pyramides égales entr'elles.

Const. Tirés les diagonales AD, FD & FB des parallelogrammes ABDE, EF-CD & ABCF.

Démonst. Les pyramides FAED & FA-BD ont un même point F pour sommet, & leurs bases AED & ABD sont égales en-
N. 143. tr'elles (*n*), & dans un même plan, puisqu'elles sont les deux parties d'un parallelogramme ABDE divisé par sa diagonale AD (*c*); ainsi ces pyramides sont égales
N. 494. entr'elles (*n*): or les pyramides FABD &
N. 494. FBCD le sont aussi (*n*), puisqu'elles ont un même point D pour sommet, & que leurs bases ABF & BFC qui sont les deux parties d'un parallelogramme ABCF divisé par sa diagonale FB (*c*), sont égales en-
N. 143. tr'elles (*n*), & dans un même plan; donc les

les trois pyramides FAED, FABD & FBCD sont égales entr'elles (n); & par consequent puisqu'elles sont les parties du prisme ABCDEF (c), ce prisme peut être divisé en trois pyramides égales entr'elles; donc C. Q. F. D. N. 62.

COROLLAIRE I.

495. Il suit de ce Théorême, que *si une pyramide & un prisme triangulaire, ont une même base & une même hauteur, cette pyramide sera la troisiéme partie de ce prisme.*

COROLLAIRE II.

496. Il suit de ce Corollaire, que *si une pyramide & un prisme quelconque ont une même base, & une même hauteur, cette pyramide sera la troisiéme partie de ce prisme.*

Constr. Si le prisme proposé n'est point triangulaire, divisés-le en prismes triangulaires; & divisés la pyramide proposée en autant de pyramides triangulaires.

Démonst. Chacune des pyramides triangulaires en lesquelles on a divisé la pyramide proposée, est le tiers de chacun des prismes triangulaires en lesquels on a divisé le prisme proposé (n): ainsi la pyramide N. 495. proposée qui est la somme de toutes ces pyramides triangulaires (*c*), eſt le tiers du priſme propoſé, qui eſt la ſomme de tous ces priſmes triangulaires; donc C. Q. F. D.

COROLLAIRE III.

497. Il ſuit de ce Corollaire, que *les rapports des pyramides dont les hauteurs ſont égales entr'elles, ſont les mêmes que ceux des baſes de ces pyramides.*

Si les hauteurs des pyramides ABCD
Fig. 5. & EFGHIKL * ſont égales entr'elles, le rapport de la pyramide ABCD à la pyramide EFGHIKL, ſera égal à celui de la baſe BCD à la baſe FGHIKL.

Démonſt. Les pyramides ABCD & EFGHIKL ſont les tiers, l'une du priſme BM, & l'autre du priſme FN (*n*); puiſqu'elles ont les mêmes baſes & les mêmes hauteurs que ces priſmes; ainſi ces pyrami-
& 296. des ſont équimultiples de ces priſmes (*n*): or ces priſmes ſont entr'eux comme la baſe
N. 487. BCD eſt à la baſe FGHIKL (*n*), puiſque leurs hauteurs ſont égales entr'elles (*h*); donc les pyramides ABCD & EFGHIKL ſont auſſi entr'elles comme la baſe BCD eſt
N. 347. eſt à la baſe FGHIKL (*n*); donc C. Q. F. D.

USAGE.

498. *On ſe ſert de cette Propoſition*

pour mesurer la solidité d'une pyramide quelconque. Car puisqu'une pyramide est le tiers d'un prisme de même base & de même hauteur qu'elle (n); *& que pour mesurer la solidité d'un prisme, il faut multiplier la valeur de la surface de la base de ce prisme, par le nombre de mesures que contient sa hauteur perpendiculaire* (n); *pour mesurer la solidité d'une pyramide quelconque, il faut multiplier la valeur de la surface de la base de cette pyramide par le tiers du nombre de mesures que contient sa hauteur perpendiculaire.*

N. 496.

N. 487.

PROPOSITION VIII.

THEOREME.

499. *Les rapports des Pyramides semblables entr'elles, sont triplés de ceux des côtés homologues de ces solides.*

SI les pyramides ABCD & EFGH * sont semblables entr'elles, le rapport de la pyramide ABCD à la pyramide EFGH, sera triplé de celui du côté BC au côté FG.

Fig. 6.

Démonst. Les prismes BI & FK sont semblables entr'eux, puisque chacun de

ces priſmes a la même baſe & la même hauteur que celle des pyramides ABCD & EFGH dans laquelle il eſt inſcrit, & que ces pyramides ſont ſemblables entr'elles (*h*); ainſi le rapport du priſme BI au priſme FK, eſt triplé de celui du côté BC au
N. 487. côté FG (*n*) : or ces pyramides ABCD & EFGH ſont équimultiples de ces priſ-
N. 296. mes (*n*), puiſque chacune de ces pyramides ayant la même baſe & la même hauteur que celui de ces priſmes dans lequel elle eſt inſcrite, elle eſt le tiers de
N. 496. ce priſme (*n*) ; donc le rapport de la pyramide ABCD à la pyramide EFGH, eſt auſſi triplé de celui du côté BC au côté FG ; donc C. Q. F. D.

PROPOSITION IX.

THEOREME.

500. Premierement. *Si des Pyramides sont égales entr'elles, leurs bases & leurs hauteurs seront réciproquement proportionnelles :* Secondement, *si des Pyramides sont telles que leurs bases & leurs hauteurs soient reciproquement proportionnelles, ces Pyramides seront égales entr'elles.*

Premierement. SI les pyramides ABCD & EFGH * sont égales entr'elles, leurs bases BCD & FGH, & leurs hauteurs AC & EG seront réciproquement proportionnelles : *Secondement*, si les pyramides ABCD & EFGH sont telles que leurs bases BCD & FGH &, leurs hauteurs AC & EG, soient réciproquement proportionnelles, ces pyramides seront égales entr'elles. Fig. 7.

DEMONSTRATION.

Premierement. La pyramide ABCD est le tiers du prisme BI de même base & de même hauteur qu'elle (*n*) ; & la pyramide N. 494.

EFGH eſt le tiers du priſme FK de même
N. 496. baſe & de même hauteur qu'elle (*n*) ; ainſi
puiſque ces pyramides ſont égales entr'elles
N. 67. (*h*), ces priſmes ſont égaux entr'eux (*n*) ;
& par conſéquent leurs baſes BCD & FGH
& leurs hauteurs AC & EG ſont récipro-
N. 487. quement proportionnelles (*n*) ; or ces baſes
BCD & FGH, & ces hauteurs AC & EG
ſont auſſi les baſes & les hauteurs des pyra-
mides ABCD & EFGH ; donc les baſes
& les hauteurs de ces pyramides, ſont ré-
ciproquement proportionnelles.

Secondement. Les baſes BCD & FGH
des pyramides ABCD & EFGH, & les
hauteurs AC & EG de ces mêmes pyrami-
des, ſont réciproquement proportionnelles
(*h*) ; or ces baſes BCD & FGH, & ces hau-
teurs AC & EG ſont auſſi les baſes & les
hauteurs des priſmes BI & FK ; donc les
baſes & les hauteurs de ces priſmes, ſont
réciproquement proportionnelles ; ainſi ces
N. 487. priſmes ſont égaux entr'eux (*n*) ; & par
conſéquent, puiſque la pyramide ABCD
eſt le tiers du priſme BI de même baſe &
N. 496. de même hauteur qu'elle (*n*) ; & que la py-
ramide EFGH eſt le tiers du priſme FK de
N. 496. même baſe & de même hauteur qu'elle (*n*) ;
N. 68. ces pyramides ſont égales entr'elles (*n*) ;
donc C. Q. F. D.

PROPOSITION X.

THEOREME.

501. *Si un Cône & un Cylindre ont une même base & une même hauteur, ce Cône sera la troisiéme partie de ce Cylindre.*

LE cône ABC * qui a la même base AC & la même hauteur BF, que le cylindre ADEC, est la troisiéme partie de ce cylindre. Fig. 8.

Démonst. Un prisme est terminé par autant de parallelogrammes, & une pyramide par autant de triangles que le polygone qui est la base de l'un ou de l'autre de ces solides, a de côtés ; ainsi lorsque le nombre des côtés de ce polygone est infini, celui des parallelogrammes qui terminent ce prisme est infini, & pareillement celui des triangles qui terminent cette pyramide l'est aussi ; & par conséquent on démontre qu'un cylindre est un prisme dont la base est un cercle, & qu'un cône est une pyramide dont la base est aussi un cercle, de la même maniere que l'on a démontré qu'un cercle est un polygone régulier d'un nom-

N. 370. bre infini de côtés (*n*). Or puiſqu'un cylindre eſt un priſme, & qu'un cône eſt une pyramide, les cilindres & les cônes ſuivent la même loi que les priſmes & les pyramides; & par conſéquent, puiſqu'une pyramide eſt la troiſiéme partie d'un priſme qui a la même baſe & la même hauteur qu'elle, un cône eſt auſſi la troiſiéme partie d'un cylindre qui a la même baſe & la même hauteur que lui; donc C. Q. F. D.

USAGE.

502. *Ce qui eſt démontré dans cette Propoſition fait voir que pour meſurer un cylindre, il faut multiplier la valeur de ſa baſe par le nombre de meſures que contient ſa hauteur; & que pour meſurer un cône, il faut multiplier la valeur de ſa baſe par le tiers du nombre de meſures que contient ſa hauteur.*

PROPOSITION XI.

THEOREME.

503. Premierement. *Les rapports des Cylindres dont les hauteurs ſont égales entr'elles, ſont les mêmes que ceux des baſes de ces Cylindres:* Secondement, *il en eſt de même des Cônes.*

DEMONSTRATION.

Premierement. LEs cylindres ſont des priſmes (*n*) : or les rap- N. 502.
ports des priſmes dont les hauteurs ſont égales entr'elles, ſont les mêmes que ceux des baſes de ces priſmes (*n*); donc les rap- N. 497.
ports des cylindres dont les hauteurs ſont égales entr'elles, ſont auſſi les mêmes que ceux des baſes de ces cylindres.

Secondement. Les cônes ſont des pyramides (*n*) : or les rapports des pyramides N. 501.
dont les hauteurs ſont, &c. donc C. Q. F. D.

PROPOSITION XII.

THEOREME.

504. Premierement. *Les rapports des cylindres ſemblables entr'eux, ſont triplés de ceux des diametres des baſes de ces cylindres:* Secondement, *il en eſt de même des cônes.*

DEMONSTRATION.

Premierement. LEs cylindres ſont des
n. 501. priſmes (*n*) : or les rapports des priſmes ſemblables entr'eux, ſont triplés de ceux des côtés homologues de
n. 487. ces priſmes (*n*); donc les rapports des cylindres ſemblables entr'eux, ſont auſſi triplés de ceux des côtés homologues de ces cylindres; & par conſéquent, puiſque les diametres des baſes des cylindres ſemblables, ſont les côtés homologues de ces ſolides, les rapports des cylindres ſemblables entr'eux, ſont triplés de ceux des diametres des baſes de ces cylindres.

Secondement. Les cônes ſont des pyra-
n. 501. mides (*n*) : or les rapports des pyramides ſemblables entr'elles, ſont &c. donc C. Q. F. D.

PROPOSITION XIII.

THEOREME.

505. *Si un Cylindre est coupé par des Plans paralleles à sa base, les parties de ce cylindre & celles de son axe, seront proportionnelles.*

SI un cylindre ABCD * est coupé par un plan EF parallele à sa base DC, les parties DF & EB de ce cylindre seront entr'elles, comme les parties GI & IH de son axe GH. Fig. 9.

Const. Divisés la partie GI de l'axe GH en autant de parties GK, KL, &c. égales entr'elles, que le premier terme de l'exposant du rapport de cette partie GI à la partie IH, contient d'unités: divisés aussi la partie IH du même axe, en autant de parties IM, MH égales entr'elles, que le second terme de ce même exposant contient d'unités: coupés le cylindre ABCD par des plans PQ, RS, &c. paralleles à sa base DC, & qui passent par chaque point de division K, L, &c.

Démonst. Les parties DF & EB du cylindre ABCD sont divisées, l'une en autant

de cylindres DQ, PS, &c. que la partie GI de l'axe GH est divisée de parties GK, KL, &c. & l'autre en autant de cylindres EO, NB, que la partie IH de ce même axe contient de parties IM, MH (*c*); ces parties GK, KL, &c. & IM, MH, sont égales entr'elles (*c*); & ces cylindres DQ, PS, &c. EO
N. 503. & NB sont égaux entr'eux (*n*); puisque leurs hauteurs GK, KL &c. IM & MH sont égales entr'elles (*c*), & que leurs bases DC, PQ, &c. EF, NO, le sont aussi (*c*). Ainsi le cylindre DQ & la partie GK sont équimultiples du cylindre EO & de la partie
N. 296. IM (*n*); le cylindre DF & la partie GI, sont équimultiples du cylindre DQ & de la
N. 296. partie GK (*n*); & enfin le cylindre EB & la partie IH, sont équimultiples du cylindre
N. 296. EO & de la partie IM (*n*); donc le cylindre DF & la partie GI, sont équimultiples
N. 335. du cylindre EB & de la partie IH (*n*); & par conséquent le cylindre DF est au cylindre EB, comme la partie GI de l'axe GH
N. 307. est à la partie IH du même axe (*n*); donc C. Q. F. D.

PROPOSITION XIV.

THEOREME.

506. Premierement. *Les rapports des Cylindres dont les bases sont égales entr'elles, sont les mêmes que ceux des hauteurs de ces Cylindres.* Secondement, *il en est de même des Cônes.*

Premierement. SI les bases NO & HG* des cylindres ABON & EFGH, sont égales entr'elles, ces cylindres seront entr'eux comme la hauteur PK du premier, est à la hauteur LM du second. *Secondement.* Il en est de même des cônes. Fig. 16.

Const. Prolongés le cylindre ABON, jusqu'à ce que la hauteur IP de son prolongement DNOC soit égale à la hauteur du cylindre EFGH.

DEMONSTRATION.

Premierement. Le cylindre ABON est au cylindre DNOC, comme la hauteur PK est à la hauteur IP (*n*) : or les cylindres DN- N. 505.
OC & EFGH sont égaux entr'eux (*n*), puis- N. 503.
que leurs hauteurs IP & LM sont égales entr'elles (*c*), & que leurs bases DC & HG le sont aussi (*h*) : donc le cylindre ABON est au cylindre EFGH comme la hauteur PK est à la hauteur IP qui est égale

à LM (c) ; donc C. Q. F. D.

Secondement. Les cônes ſont les tiers des cylindres de même baſes & de même
N. 501 hauteur qu'eux (n);or &c. donc C.Q.F.D.

PROPOSITION XV.

THEOREME.

507. Premierement. *Si des Cylindres ſont égaux entr'eux, leurs baſes & leurs hauteurs ſeront réciproquement proportionnelles.* Secondement. *Si des Cylindres ſont tels, que leurs baſes & leurs hauteurs ſoient réciproquement proportionnels, ces cylindres ſeront égaux entr'eux.* Troiſiémement. *Il en eſt de même des Cônes.*

DEMONSTRATION.

Premierement. LEs cylindres ſont des
N. 501. priſmes (n) : or les baſes & les hauteurs des priſmes égaux entr'eux,
N. 487. ſont réciproquement proportionnelles (n) ; donc les baſes & les hauteurs des cylindres égaux entr'eux, ſont auſſi réciproquement proportionnelles.

Secondement. Les cylindres ſont des priſ-
N. 501. mes (n) : or les priſmes dont les baſes & les hauteurs ſont réciproquement proportion-
N. 487. nelles, ſont égaux entr'eux (n) ; donc les cy-

lindres dont les bases & les hauteurs sont réciproquement proportionnelles, sont aussi égaux entr'eux.

Troisiémement. Les cônes sont des pyramides (*n*) : or les pyramides &c. donc &c. donc C. Q. F. D. N. 501.

SCHOLIE.

Nous supprimons les 16^e. & 17^e. Propositions, parce qu'elles sont inutiles.

PROPOSITION XVIII.

THEOREME.

508. *Les rapports des Spheres sont triplés de ceux des diametres de ces Spheres.*

LE rapport de la Sphere X à la Sphere Y * est triplé de celui du diametre AB de la premiere, au diametre CD de la seconde. Fig. 112.

Démonst. Le rapport du cercle dont AB est le diametre, au cercle dont CD est le diametre, est doublé de celui de AB à CD, puisque les cercles sont entr'eux comme les quarrés de leurs diametres (*n*) : or puisque les Spheres sont des solides semblables entr'eux, si pour avoir la solidité de la Sphere X il faut multiplier la valeur du cercle dont AB est le diametre, par une certaine partie N. 490.

de ce diametre, pour avoir la solidité de la Sphere Y, il faudra multiplier la valeur du cercle dont CD est le diametre, par une partie de ce diametre CD, pareille à cette certaine partie du diametre AB ; donc le rapport par les termes duquel il faut multiplier ceux du rapport doublé de AB à CD, pour avoir les solidités des Spheres X & Y, est le même que celui de AB à CD; ainsi les solidités de ces Spheres sont les produits des termes homologues de trois rapports égaux chacun à celui de AB à CD ; & par conséquent le rapport de ces Spheres est triplé de
n. 322. celui de AB à CD (*n*) ; donc C. Q. F. D.

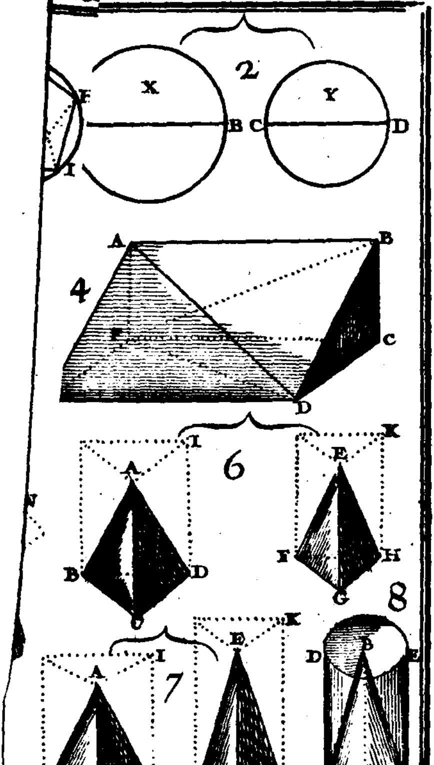
SCHOLIE.

509. *Archimede a démontré que le rapport du diametre d'un cercle à la circonférence de ce même cercle, est à peu près égal à celui de 7 à 22 : que la surface d'une Sphere est égale à celle d'un cylindre dans lequel cette Sphere est inscrite, c'est-à-dire à celle d'un cylindre qui auroit pour base un cercle dont le diametre seroit égal à celui de cette Sphere, & dont la hauteur seroit aussi égale à ce même diametre ; & enfin que la solidité de cette Sphere, est les deux tiers de celle de ce même cylindre.*

Fin des Elemens d'Euclide.

de la
ur du
r une
cette
onc le
nulti-
CD,
& Y,
si les
s des
gaux
onse-
lé de
F. D.

rap-
onse-
egal
l'une
dans
dire
e un
i de
ussi
e la
de



LIVRES qui se trouvent dans la même Boutique.

Ouvrages de M. BELIDOR, *ancien Professeur Royal des Mathématiques, &c.*

NOuveau Cours de Mathématique à l'usage de l'Artillerie & du Génie, où l'on applique les parties les plus utiles de cette Science à la théorie & à la pratique des différens sujets qui peuvent avoir rapport à la Guerre, *in-quarto*, avec 34 planches. 15 l.

La science des Ingenieurs dans la conduite des travaux de fortification, & d'Architecture civile; où il est traité de la poussée des terres contre les revêtemens: de la mécanique des voutes: du détail des matériaux: de la construction des édifices qui se font dans une Place de Guerre: de la décoration, & des cinq Ordres; & du Devis des Ouvrages qui ont rapport aux fortifications, gros *in-quarto*, grand papier, enrichi de plus de 50 planches. 24 l.

Le Bombarbier François, ou nouvelle méthode pour jetter les Bombes avec précision, avec un traité des Feux d'Artifice, *in-quarto*, avec figures. 12 l.

Architecture hydraulique, ou l'Art de conduire, d'élever, & de menager les eaux pour tous les besoins de la vie. *Première Partie*, divisée en quatre Livres. Le premier qui sert d'Introduction à tout l'ouvrage, contient les principes de la Mécanique, la maniere de calculer le frottement dans les machines, les regles de l'hydraulique & du mouvement des eaux. On donne dans le second Livre la description de différentes sortes de Moulins, leur calcul, & le moyen de les perfectionner. Le troisiéme Livre traite des proprietés de l'Air, de la théorie des Pompes, & de la maniere de les mouvoir. Le quatriéme Livre comprend la description & l'Analyse des plus belles machines de l'Europe qui servent à mouvoir des Pompes de toute espece. La conduite & distribution des eaux dans une Ville, & plusieurs desseins de Fontaines publiques: en deux volumes *in-quarto*, grand papier, enrichis de cent grandes planches très-bien gravées. 40 l.

On donnera au Public l'année prochaine la *seconde Partie* de l'Architecture hydraulique, où l'on traitera de la maniere de rendre les Rivieres navigables, & d'en faciliter la communication par les canaux. De la construction des Ponts, Aqueducs, Ecluses, Bassins, Carenes, Quays, Jettées, Risbans, Fanaux, &c. & autres Ouvrages qui se construisent dans l'Eau, ou aux Places Maritimes: en deux volumes *in-quarto*, grand papier, accompagnés de cent grandes Planches.

Ouvrages de M. l'Abbé DEIDIER, *Professeur Royal des Mathématiques aux Ecoles d'Artillerie de la Fére.*

Arithmétique des Geométres, ou nouveaux Elemens de Mathématique, contenant la théorie & la pratique de l'Arithmétique. Une Introduction à l'Algebre & à l'Analyse; avec la résolution des Equations du second & du troisiéme dégré, les raisons, proportions, & progressions Arithmétiques & Geométriques: les combinaisons, l'Arithmétique des Infinis; les Logarithmes, les Fractions Décimales, &c. *in-quarto*, 1739. 12 l.

La Science du Géométre, ou la théorie & la pratique de la Géométrie, qui contient les Elemens d'Euclides, la Trigonométrie, la Longimétrie, l'Altimétrie, le Nivellement, la Planimétrie, la Géodésie, la méthode des Indivisibles, les Sections Coniques, la Stéréométrie, le Jaugeage, la mesure des onglets, des corps annulaires & cylindriques, &c. Enfin tout ce qui peut concerner la mesure des corps & de leurs surfaces, *in-quarto*, enrichi de près de 50 planches 1739. 15 l.

La Mesure des surfaces & des solides par la connoissance des centres de Gravité, & par l'Arithmétique des Infinis. On trouvera dans ce Traité grand nombre de proprietés des figures Géometriques très-curieuses, & fort recherchees, *in quarto*, avec beaucoup de figures 1740. 12 l.

Le Calcul Différentiel & le Calcul intégral, expliqués & appliqués à la Géométrie: avec un Traité préliminaire touchant la résolution des Equations en général: la nature des courbes, les lieux Géométriques, la construction des Equations, & la résolution des problêmes Géométriques déterminés & indéterminés, *in-quarto*, avec quantité de figures, 15 l.

Mécanique générale pour servir d'Introduction aux Sciences Physico-Mathématiques: qui renferme la Statique, l'Airométrie, l'Hydrostatique & l'Hydraulique, *in-quarto*, avec trente planches, 1741. 15 l.

Le Parfait Ingenieur François, ou la Fortification suivant le systême de M. le Maréchal de Vauban, & des autres Auteurs qui ont écrit ſur cette Science : avec l'attaque & défenſe des Places : nouvelle édition, augmentée du Plan & de la deſcription de Luxembourg, de la rélation & des Plans du ſiége de Lille, & du ſiége de Namur, *in quarto*, enrichi de 50 planches, 1742. 15 l.

Lettres d'un Mathématicien à un Abbé, où l'on prouve que la matiere n'eſt point diviſible à l'Infini, *in-douze*, avec figures. 2 l.

Lettre de M. de Mairan à Madame la M. D. C. avec la Diſſertation de M. de Mairan ſur l'eſtimation & la meſure des forces motrices des corps, & la réfutation des forces vives, *in-douze*, 1741. 3 l.

Elémens généraux des parties des Mathématiques les plus néceſſaires à l'Artillerie & au Génie, contenant les Elémens de l'Arithmétique, de l'Algébre, de l'Analyſe, des raiſons proportions & progreſſions Arithmétiques & Géométriques, avec un petit Traité des Logarithmes. Les Elémens de la Géométrie, de la Trigonométrie, du Nivellement, de la Planimétrie, de la Stereométrie, des Sections Coniques, le Toiſé de la Maçonnerie, & le Toiſé des Bois. Les Elémens de l'Arithmétique des Infinis, la Mécanique générale, c'eſt-àdire la Science du mouvement, la Statique, l'Hydroſtatique, l'Airométrie & l'Hydraulique, avec un traité de Perſpective, en deux volumes *in-quarto*, enrichis de plus de 60 planches, 24 l.

Ouvrages de M. Ozanam, de l'Académie des Sciences.

Cours de Mathématique, qui comprend les parties de cette Science les plus utiles à un homme de guerre, en cinq vol. *in-octavo*, avec plus de 200 planches ; contenant les Traités ſuivans:

qui se vendent séparement. Le prix du Cours entier est de 40 li

L'Introduction aux Mathématiques, qui contient les Définitions, un Traité d'Algébre, la résolution de l'Arithmétique par l'Analyse, & les pratiques de Géométrie, *in-octavo*, avec quatre planches. 3 l.

Les Elémens d'Euclides expliqués & démontrés d'une maniere courte & facile, avec l'usage de chaque proposition, *in-octavo*, avec 17 planches. 6 li

L'Arithmétique, où toutes les opérations de cette Science sont démontrées par une Méthode fort simple : le tout appliqué à la Guerre, aux Finances, & à la Marchandise, *in-octavo*. 2 l.

La Trigonométrie rectiligne & sphérique, qui traite de la construction & de l'usage des Tables des Sinus & des Logarithmes; avec les Tables des Sinus, Tangentes & Sécantes, & des Logarithmes, calculées sur un rayon de 10000000 parties. Par Ad. Wlacq, *in-octavo*, avec quatre planches. 4. l. 10 s.

La Géométrie théorique & pratique, qui contient la Géodésie, la Longimétrie, la Planimétrie, & la Stéréométrie, avec son usage pour la Jauge & le Toisé, *in-octavo*, avec 28 planches. 6 l.

La Fortification réguliere & irréguliere, qui comprend la construction, l'attaque & la défense des Places selon les plus célebres Auteurs, avec le calcul des lignes & des angles de chacune de ces méthodes, *in-octavo*. enrichi de 44 planches. 6 l.

La Mécanique, où il est traité des machines simples & composées, de la descente des corps pesans, du centre de gravité, de l'hydrostatique,

&c. *in-octavo*, avec 28 planches. 6 l.

La Perspective théorique & pratique, où l'on enseigne la maniere de mettre toutes sortes d'objets en Perspective, & d'en représenter les ombres causées par le Soleil & d'autres lumieres, *in-octavo*, enrichi de 36 planches. 6 l.

La Geographie & Cosmographie qui traite de la Sphére, des corps célestes, des différens systêmes du monde, du Globe & de ses usages, *in-octavo*, avec 14 planches. 6 l.

La Gnomonique, où l'on donne par un principe général la maniere de faire des cadrans sur toutes sortes de surfaces, & d'y tracer les heures Astronomiques, Babyloniennes, Italiques, & tous les cercles de la Sphére, *in-octavo*, avec 30. planches. 6 l.

Les Recréations Mathématiques & Physiques, où l'on trouve plusieurs Problêmes curieux & utiles sur l'Arithmétique, la Géométrie, la Mécanique, l'Optique, la Gnomonique, & la Physique; avec un Traité des Horloges Elémentaires, des Lampes perpétuelles, & des Phosphores naturels & artificiels, & la description des Tours de Gibeciere & de Gobelets, en quatre volumes *in-octavo*, avec plus de 120 planches. 20 l.

Usage du Compas de proportion, avec un Traité de la division des champs, *in-octavo*. 2 l.

Les Elémens d'Euclide expliqués, avec l'usage de chaque proposition pour toutes les parties des Mathématiques. Par le R. P. Deschalles, avec 18 planches; nouvelle édition augmentée. 3 l.

Méthode facile pour arpenter & mesurer toutes sortes de Superficies, avec le toisé des bois de charpente, *in-douze*, fig. 2 l. 10 s.

La Géométrie pratique, contenant la Trigonométrie, la Longimétrie, la Planimétrie & la Stéréométrie, avec un traité de l'Arithmétique par Géométrie, *in-12*, fig. 2 l. 10 s.

Méthode pour lever les Plans & les Cartes de Terre & de Mer, avec instrumens & sans instrumens, *in-douze*, figures. 2 l.

Ouvrages de M. LE BLOND, *Maître de Mathématiques des Pages du Roy.*

Abregé de Géométrie à l'usage des jeunes Militaires, où l'on trouve les Elémens de cette Science nécessaires à ceux qui veulent apprendre les Fortifications, *in-douze*, avec figures.

Nouveaux Elémens de Fortification, contenans ce qu'il y a de plus essentiel à observer dans une Place forte, pour initier avec facilité les jeunes Militaires dans l'étude de cette Science, *in-douze*, avec figures. nouv. édition. 3 l.

Elémens de la Guerre des Siéges à l'usage des jeunes Militaires, où il est traité de l'Artillerie, ou des Armes & Machines en usage à la Guerre depuis l'invention de la poudre: de l'attaque des Places, où l'on trouve fort en détail tout ce qui concerne les travaux & les opérations d'un Siége Royal, ou d'une Ville fortifiée; & de la défense des Places, avec un Mémoire contenant plusieurs observations sur la visite des Places, & un Dictionnaire des termes les plus en usage & les plus nécessaires pour l'intelligence de la Guerre des Siéges, en trois volumes *in-octavo*, enrichis de vignettes & de 32 planches fort bien gravées, 15 l.

Ouvrages de M. CHRETIEN WOLFIUS, *Vice-Chancelier & Professeur de Mathématique & de Philosophie dans l'Université de Hall, des Académies des Sciences de France, d'Angleterre, de Prusse & de Moscovie, &c.*

Nouveau Dictionnaire de Mathématique & de Physique & de toutes les parties qui en dépendent; où l'on donne l'origine, les progrès & les principes des Sciences, & la Méthode d'en acquerir en peu de tems une connoissance assez étendue pour en raisonner exactement, & en faire une juste application. Avec l'Histoire des Auteurs les plus célébres qui en ont traité, & des remarques instructives pour faciliter l'intelligence & le choix de leurs Ouvrages, traduit de l'Allemand de M. Wolfius & augmenté considérablement, *in-folio*, avec beaucoup de figures, *sous presse*.

Abregé du Cours de Mathématique de M. Wolfius traduit en François, contenant l'Arithmétique, l'Algebre, les Elémens de Géométrie, l'Analyse, la Trigonométrie, la Fortification, l'Architecture civile, la Mécanique, l'Hydrostatique, la Pésanteur de l'Air, l'Hydraulique, l'Optique, la Catoptrique, la Dioptrique, la Perspective, l'Astronomie, la Géographie, la Gnomonique, la Chronologie, la Pyrotechnie & la Fortification, en deux volumes *in-octavo*, enrichis de figures, *sous presse*.

Elémens de Physique-Mathématique, ou Introduction à la Philosophie de Newton, par M. 's Gravesande, traduits en François par M. Roland de Virloys, en deux volumes *in-octavo*, enrichis de 50 planches, *sous presse*.

FIN.