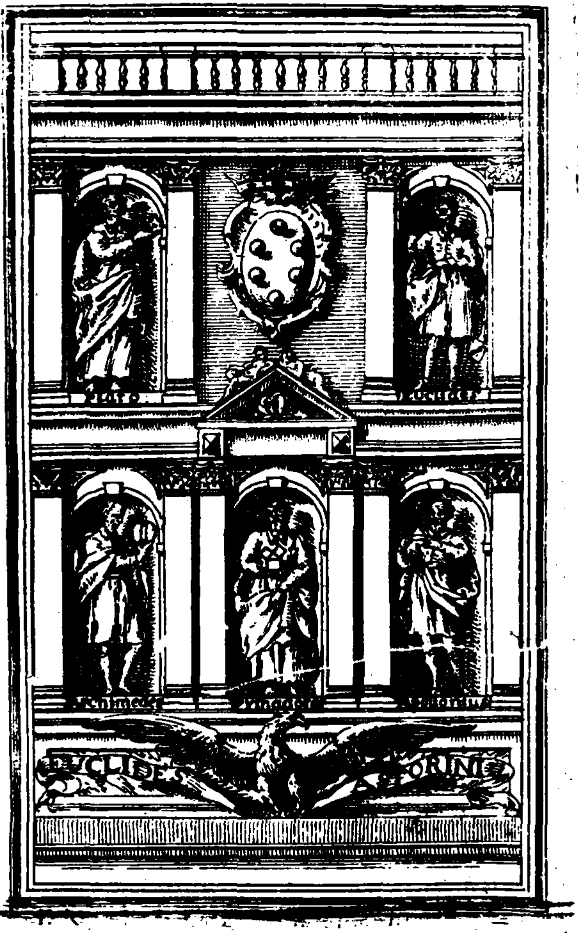
Notes du mont Royal
www.notesdumontroyal.com

Cette œuvre est hébergée sur « *Notes du mont Royal* » dans le cadre d'un exposé gratuit sur la littérature.

SOURCE DES IMAGES
Google Livres

11



59.263

III 5 9 268

ELEMENTA EVCLIDIS

Ad uſum

NOVÆ ACADEMIÆ

NOBILIVM SENENSIVM

Nova Methodo, & ſuccinctè demonſtrata

Per

FR. ELIAM ASTORINVM,

Carmelitam Conſentinum.

AD SER.mum PRINCIPEM

IOANNEM

GASTONEM

AB ETRVRIA.

1265

SENIS

Apud Bonettos Typis Publici MDCXCI.

SVPERIORVM PERMISSV.

4

SERENISSIME PRINCEPS,

QVominùs ego, qui mihi tenuitatis meæ conſcius sũ, frãgar animo, dum ad pedes Sereniſſimæ Celſitudinis Tuæ meam hanc Elementorum Euclidæorum editionem ſiſto, eo quidem ſuffulcior, quod nempè non tam

6

ad Opera ipsa, quàm ad animum, quo Opera nuncupantur respiciant Magni Principes; neque enim ultra syncerum, benevolumque animum haberet quispiam, quo magis de alio posset promereri: Me verò nihil omninò traxit, ut, hoc munusculo, observantiæ erga Te meæ publicum quoddam specimen ederē, nisi Heróicæ Virtutes Tuæ, & nominatim Magnanimitas, Prudentiæ, Studiumquè illud, quod Regiæ Domus Tuæ proprium est, nimirum bonas Artes, Scientiasquè nobiliores promovendi: Neq; porrò mihi quicquam magis ex voto cesserit, quàm si primitias hascè meas Mathematicas, quas Serenissimo Nomini

Tuo

Tuo ſignanter dico, vultu hilari exceperis, atq; ità robur mihi, vi- reſquè addideris, ut nouam quo- que omnium, quæ extant, Apol- lonii, & Archimedis editionem, quam jam paro, & quam etiam Tibi dedicandam cenſui, ad fi- nem perducam, quoad luculen- tior mihi detur locus teſtandi, quàm impensè raras ego ſubli- meſquè Animi Tui Dotes reve- rear. Interea verò, ut Summus Rerum Arbiter DEVS Te diù Magnarum Virtutum, Litera- rumquè Bonarum incremento ſervet, humili, atque devoto corde voveo.

SERENISSIMÆ CELS. TVÆ

Humillimus, atq; Addictiſſimus Servus
Fr. Elias Aſtorinus Carm.

FR. PAVLVS A S. IGNATIO
Sac.Theol.Mag.ac humilis Prior Generalis Totius Ord. FF. B.V.M. de Monte Carmelo antiquæ Obseru. Regul.

CVm P.Elias Astorini nostræ Prouinciæ Calabriæ Professus Sacerdos in Academia Senarum Mathematicæ publicus Professor, in lucem edere percupiat Opus à se elucubratum, cuius Titulus est *Elementa Euclidis, &c.* Auctorit. nostra harum serie licentiam illi impertimur dictũ Opus Typis mãdandi, dummodò prius examinetur, & approbetur à Reu.P.Mag.Thoma de Paulis, & P.Bac.Cyrillo Spalluto nostri Conu.Senar. Regente; Quorum cognitioni cõmittimus, seruatis alias seruandis. Horum fide &c.

Dat. Romæ 23. Decembris 1690.
Fr.Paulus à S. Ignatio Gener. Carm.

Fr.Claudius Maria Soccorsi Profec.

EX cõmmissione Reuerẽdiss.nostri P.Generalis perlegimus opus hoc cui titulus Elemẽta Euclid.&c. *& in eo nihil reperimus contra fidẽ, vel bonos mores. In quorũ fidẽ &c. Dat.Senis die 18. Febru.* 1691.

Fr.Thomas Pauli S.T.Mag.
Fr.Cyrillus Spalluto S.T.Regẽs.

Imprimatur
F.Io:Pereg.Galassius Vic.Gener.S.Off.Sen.

Imprimatur
Horatius Picolomineus Arag. Vic.Gener.

Imprimatur
Leonardus de Astudillo Carillo Aud.Gen.

(*PRAEFATIO*)

ILLVSTRISSIMO DOMINO D. FRANCISCO REDI Patritio Aretino

S. P. D.

FR. ELIAS ASTORINVS.

Q*VOD Tibi, præ cæteris, ò* Magne REDI, *præfando edisseram, quorsum nam ego direxerim conatus meos in hac Elementorum Euclidæorum editione, & quid in illa præstiterim; id quidem nemo mihi verterit vitio, ubi probè norit, me nonnisi tuo consilio, tuaquè suffultum clientela, id oneris subiisse, meq; proin debere Tibi opera impensa, studiorumquè meŏrum rationem referre. Sed en paucis accipe, quid à me actum, factumquè sit, & quid velim.*

Tametsi ad animos excutiendos, exacuendosquè plurimum conferat Mathematica;

ca; difficilior tamen ipsa visa est, quam quæ possit juvenibus, Philosophiam conantibus attingere non jejunam, & captiosam, sed quæ plus afferat frugis, quàm verborum, præsto adesse, & facem præferre. Et reverà, quis animum, statim ac se ad Geometriam appulit, non desponderet, cogitando quàm longa, & ardua sint illa ipsa, quæ dici solent Matheseos prima Elemẽta: & quod, si tandem licuerit, sese ex Irrationalibus *Elementi Decimi, & ex* Corporum Platonicorum *salebris extricare; sibi mox animus in Conicas Apollonii sectiones, ex quibus perpauci hactenus evasere, sit implicandus, atque tùm (ut parum interim sit Sereni Cylindricam, atque Theodosii sphæricam rectè perpendisse) Magnum Archimedem superesse, quem (teste* Tacqueto) plures laudant, quàm legant, admirantur plures quàm intelligant? *Verum enimverò, si quis hic primo aspectu deterreatur, si parum proficiat; id non tam ipsius ejusdem scientiæ asperitati, quàm interpretum; vel prolixitati nimiæ, vel methodo, plusquam par est, compendiariæ, adscribendum puto. Nam, si quis unquam velit quicquam moliri ex* Clavii, *vel* Richardi *Commentariis; ipsum quidem animus, viresque*

longè

longè prius deficient, quàm ut possit prima studia sua Mathematica ad metam usque perducere; tantùm abest, ut detur locus experiendi, quanto nam cæteris disciplinis adjumento sit Mathesis, & quicquam lucri ex tot, tantisque exantlatis laboribus reportandi: Contra verò BARROVIUS *tam est laconicus, & præsertim in Decimo Euclidis, & in Apollonio, ut libros ipse suos non nisi Rerum Mathematicarum Consultis destinasse videatur. Neque tamen eorum ego judicio subscribam, qui ut citò se expediant, has, vel illas Propositiones, vel tanquam minus necessarias ablegant, vel tanquam per se notas in axiomatum censum referunt, vel, quod deterius, Euclidem nobis exhibent larvatum, atque ad extremam redactum egestatem, vel demum numerum, ordinemque librorum perturbant. De cætero, quamvis optimè de re Mathematica promeriti sint in Euclide restituendo* Borellius, *atque* Mydorgius, & de la Hire *in Elementis Conicis promovendis; ipsi tamen fontes, ex quibus recentiorum inventa dimanarunt, sunt prius degustandi, quàm ut novam quecumque moliri Elementorum Syntaxim, præterquamquod se omnes, cùm propositiones allegandæ sunt, ad antiquum ipsarum ordinem,*

17

numerumque consueverunt referre.

Quandoquidem ergo, ad usum hujus nostræ Academiæ, Elementa Mathematica recudenda erant; facile in animum induxi, è re mea fore, si novam horum Elementorum editionem adornarem, qua Nobilissimæ huic Iuventuti Euclidem exhiberem non mutilum, non perturbatum, sed integrum, & incolumem; perspicuo tamen, eoque brevi, & succincto donatum habitu, adeò quidem ut non modò totum Secundum, & complures reliquorum librorum Propositiones, verum etiam Proportiones ipsas, quarum nimis longa est series, redigerem ad AEquationes, more Analystarum, quorum tamen non nisi modum, ordinemque scribendi placuit imitari, à rigore interim Geometrico, nec per latum unguem discedens: Siquidem satis hucusque, superque, comperi, quòd quemadmodum nihil æquè ad Theorematum quorumcunque genium, atque vires clarè, citoque dignoscendum, conducibilius, quam si per ejusmodi AEquationes, unico intuitu, vel magnitudinum, vel Proportionum connexionem omnem inspexerimus; ita nihilo magis in Mathesi proficere, quotquot rigori Geometrico se subduxerunt, quàm ut post Elementa se totos dent Polemicæ, vel ex-

trahant

trahant ex alienis Ephemeridibus Calendaria, vanasque prædictiones.

Atque me satis hactenus arbitror exposuisse instituti, consiliisque mei rationem, & quid à me in hac Elementorum editione præstitum sit: Nunc de Matheseos præstantia, & utilitate superesset dicendum; sed quantum illa momenti habeat ad scientias naturales plane omnes promovendum, id, ante cæteras nationes, ipsi Etruriæ datum est experiri, ubi quidem, statim ac Magnus GALILAEVS *naturam motus, atque adeo* Philosophiæ portam primam *aperuit, naturæ vicissitudines, regulis non nisi Geometricis perpensurus; innumera quidem, atque jucundissima, hominumque societati perutilia, subsecuta sunt inventa. Et sane, cui nisi Mathematicæ acceptum feremus, detectum jam esse, statim ac cæpit Philosophia juxta methodum Galilaïcam principiis Geometricis inniti, quibus nam legibus mechanicis animantia incedant, & ferantur projecta, quantinam pondo sit momentum gravitatis, & virtus elastica in aere, & quænam sit organi auditus, & oculorum, fibrarumque spiralium cordis, & musculorum omnium structura? Sed, quid hæc Tibi commemoro, Illustrissime Vir, si nihil ferè in* *hoc philosophandi genere dictum, compertumque est, cujus Tu non fueris, vel Auctor, vel Motor, vel non ad id* consilio *saltem*, aut re juveris: *Neque enim Tibi Medicina solùm debet, quod animantium ortum traxeris ex ovo, & venenorum indolem patefeceris, atque detraxeris larvam fucatis nonnullorum experimentis; verum etiam abs Te fluxit quam maximè, quod Arabum, cæterorumque sectariorum tricæ pessum omnino abierint, & postliminio revocata sit in philosophando Methodus illius Magni Viri, qui (teste* Petronio Arbitro) ætatem inter experimenta consumpsit. *Et quamvis Munificentiæ* MAGNORVM DVCVM *Etruriæ tribuendum est, quod opera, studioque* Marsilij Ficini *revixerit* PLATO: *quod novos Planetas, atque Solis maculas detexerit* Galilæus, *jeceritque non Hydrostatices modò, sed totius Philosophiæ Naturalis prima fundamenta: quod deinde in lucem revocarint Archimedem* Torricellius, *& Pereximius* Vivianus *Apollonium Pergæum: quod in Pisana Vniversitate Mechanicam, Solidorumque doctrinam egregiè promoverit* Alexander Marchettus, *atque totam Medicinam illustraverit, innumerisque*

merisque auxerit experimentis Bellinus: *quod æqua lance naturam Calidi, & Frigidi, atque tum Humidi, & Sicci perpenderit* Ioseph del Papa : *& quod demum, ut cætera prætermittam, Eruditionis Antiquæ tantum profluat ex uno* Magliabecho, *ut ad ipsum consulendum confluant Galli, Germani, Angli, Dani, & si qui sunt literati ultra Mare Balticum; pre cæteris tamen id Tu, Magne Vir ex una parte, atque* Magnus MALPIGHIVS *ex altera totis viribus agitastis, & effecistis, ut ne dum in Italia, sed & in tota Europa nobiles, utilesque scientiæ, tam altas agerent radices, quas nec invidia posset unquam convellere, nec tempus edax.*

Porrò autem quicquid bŏni erit in hac mea ŏpella, quantulumcunque illud esse videbitur, non nisi Te suasore prodit in lucem; quin & hoc Tibi me debere fateor, quod tanti roboris, & efficaciæ fuerint Documenta illa Tua, quibus istìc fr. Danielem Danieli ad nobiliora studia excitasti, ut tantumdem ille hactenus è studiis suis ceperit emolumenti, quantum magistro ipse suo jam potuerit in hac Elementorum editione haud mediocriter adminiculari, neque interim luserit eam, ad quam ego ipsum manuduxi ope-

ram

12

ram impendendam in pervolvendis Sancto-rum Patrum, utiliumque Philosophorum libris. Sed, ò utinam eam, ò doctissime REDI, *quam omnes Tibi clientuli tui precamur, vitam in plures alios annos protraheres, nobisque diù patrocinareris, quo ad passim passimque meliora conaremur, quàm quæ hactenus in lucem protulimus. Interea verò ignosce mihi, si non potuerim lucubrationum mearum Tibi rationem reddere, quin de Te, deque Tuis Egregiis Virtutibus quicquam commemorarem; & Vale.*

LIBRI PRIMI

DEFINITIONES.

1. PVnctum est, cujus pars nulla est.

2. Linea verò longitudo latitudinis expers.

3. Lineæ autem termini sunt puncta.

4. Recta linea est, quæ ex æquo sua interjacet puncta.

5. Superficies est, quæ longitudinem, latitudinemquè tantùm habet.

6. Superficiei autem extrema sunt lineæ.

7. Plana superficies est, quæ ex æquo suas interjacet lineas.

8. Planus verò angulus est, duarum linearum alterius, ad alteram inclinatio.

9. Rectilineus angulus est, qui continetur à lineis rectis.

10. Cùm verò recta linea super rectam lineam consistens, eos qui sunt deinceps angulos, æquales inter se fecerit; rectus est uterq;angulorum,& quæ insistit recta linea, perpendicularis vocatur ejus, cui insistit.

11. Obtusus angulus est, qui recto major est.

12. Acutus verò, qui minor est recto.

13. Terminus est, quod alicujus extremum est.

14. Figura est, quæ sub aliquo, vel aliquibus terminis comprehenditur.

15. Cir-

15. Circulus eſt figura plana, ſub una linea comprehenſa, quæ peripheria appellatur, ad quam ab uno puncto eorum, quæ intra figuram ſunt poſita, cadentes omnes rectæ lineæ inter ſe ſunt æquales.

16. Hoc verò punctum, centrum circuli dicitur.

17. Recta verò, quæ per centrum ducta, bifariam circulum ſecat, dicitur Diameter.

18. Semicirculus eſt figura contenta ſub diametro, & ſub dimidia circuli peripheria.

19. Rectilineæ figuræ ſunt, quæ ſub rectis lineis continentur.

20. Trilateræ quidem, quæ ſub tribus; quadrilateræ quæ ſub quatuor, & ſic de cæt.

21. Triangulum, vel conſideratur quoad latera, vel quo ad angulos. Quo ad latera quidem; Si omnia latera ſibi æquantur; dicitur *AEquilaterum*: Si duo tantum; dicitur *Iſoſceles*: Sin verò omnia ſunt inæqualia; vocatur *Scalenum*. Quo ad angulos; Triangulum dicitur *Rectangulum*, ſi habet unũ angulum rectum: *Obtuſangulum*, ſi unum obtuſum: *Acutangulum*; ſi omnes anguli ſunt acuti.

22. Parallelæ lineæ ſunt, quæ cùm in eodem ſint plano, & ex utraquè parte in infinitum producantur; nunquam ſibi mutuò incidunt. Vel rectiùs, *Quæ ubique æqualibus inter ſe diſtant intervallis*.

21. Parallelogrammum eſt figura quadrilatera, cujus bina oppoſita latera ſunt ſibi parallela. Ejus quatuor ſunt ſpecies, nimirũ *Quadratum*, ubi omnia latera ſunt æqualia,

lia, & omnes anguli sunt recti: *Rectangulum* altera parte longius, quod rectangulum quidem est, sed non æquilaterum: *Rhombus*, ubi anguli non sunt recti, sed latera sunt æqualia: *Rhomboides*, ubi neque anguli sunt recti, neque latera sunt æqualia.

21. Parallelogrammo opponitur *Trapezium*, quod quadrilaterum quidem est, sed latera non sunt parallela.

22. Cùm in pgro diameter ducta fuerit, quæq; lineæ lateribus parallelæ secantes diametrum in uno, eodemquè puncto, resultant quatuor pgra; quorum duo per quæ non trãsit diameter, dicuntur *Complementa*.

POSTVLATA.

1. POstuletur, ut a quovis puncto in quoduis punctum, rectam lineam ducere concedatur.

2. Et rectam linea terminatam in continuum recta producere.

3. Item quovis centro, & intervallo circulum describere.

AXIOMATA.

1. QVæ eidem æqualia, & inter se sunt æqualia.

2. Et si æqualibus æqualia adiecta sint, tota sunt æqualia.

3. Et si ab æqualibus æqualia ablata sint, quæ relinquuntur, sunt æqualia.

4. Et si inæqualibus æqualia adiecta sint, tota sunt inæqualia.

5. Et si ab inæqualibus æqualia ablata sint, reliqua sunt inæqualia.

6. Et

6. Et quæ eiusdem duplicia sunt, inter se sunt æqualia.

7. Et quæ eiusdem sunt dimidia, inter se æqualia sunt.

8. Et quæ sibi mutuo congruunt, ea inter se sunt æqualia.

9. Et totum sua parte majus est.

10. Item omnes anguli recti sunt inter se æquales.

11. Et si in duas rectas lineas altera recta incidens, internos ad easdemq; partes angulos duobus rectis minores faciat; duæ illæ rectæ lineæ in infinitum productæ sibi mutuo incident ad eas partes, ubi sunt anguli duobus rectis minores.

12. Duæ rectæ lineæ spatium non comprehendunt.

13. Duæ lineæ rectæ non habent unum & idem segmentum commune.

14. Si æqualibus inæqualia adijciātur, erit totorū excessus, adiunctorū excessui æqualis.

15. Si inæqualibus æqualia adiungantur, erit totorum excessus, excessui eorum, quæ a principio erant, æqualis.

16. Si ab æqualibus inæqualia demantur, erit residuorum excessus, excessui ablatorum æqualis.

17. Si ab inæqualibus æqualia demantur, erit residuorum excessus, excessui totorum æqualis.

18. Omne totum æquale est omnibus suis partibus simul sumptis.

19. Si totum totius est duplum, & ablatum ablati; erit & reliquum reliqui duplum.

LIBRI

LIBER PRIMVS

PROPOSITIO I.

SVper rectam lineam datam terminatam (AB) triangulum æquilaterum (ACB) constituere.

Ex A per B, & ex B per A ducantur 3. *Post.* duo circuli se mutuò secantes in puncto C. ex quo, 1. *Post.* trahantur CA, CB; dico factum. Nam, 15. *def.* linea AC æquatur lineæ AB, & hæc ipsi BC; ergo 3glum descriptum est æquilaterum. Quod erat faciendum.

SCHOLIVM. Eodem modo super datam AB fiet triangulum Isosceles, si intervalla æqualium circulorum sumantur æquè majora, vel æquè minora, quàm AB.

PROPOSITIO II.

AD datum punctum (C) datæ rectæ lineæ (AB) æqualem rectam lineam (GF) ponere.

Ex B per A fiat (3. *Post.*) circulus: tum 1. *Post.* iunge BC, super quam fiat, 1. 1. triangulum æquil. BDC: tum, 2. *Post.* protrahe ipsam DB usq; ad punctum E, & alteram DC indefinitè: deindè ex D per E fiat major circulus, secans protractam DC in puncto F; dico factum. Nam DE æquatur, 15. *def.* ipsi DF, atq; DB æq[illegible]r, *constr.* ipsi DC: ergo, demptis utrinque æqualibus DB, DC; erit, 3. *ax.* CF æqualis ipsi BE, cui, 15. *def.* æquatur data AB: adeoq; 1. *ax.* AB, & CF æquantur inter se. Q. E. F.

PROPOSITIO III.

Duabus datis rectis lineis (MN, DG) de majore DG abscindere lineam (DO) æqualem minori (MN).

Ad punctum D ponatur (2.1.) recta DF æqualis ipsi MN: &, 3. *post.* ex D per F fiat circulus abscindēs lineam DG in puncto O; Dico factum. Nam DO æquatur, 15. *def.* lineæ DF, & hæc *constr.* ipsi MN: ergo 1. *ax.* DO, & MN æquantur sibi mutuò. Q. E. F.

SCHOL. Poteramus cum Tacqueto intervallum MN transferre in DO, & ità etiā intervallum AB in CF; sed hoc (vt rectè monet Barrovius ex Proclo) nulli postulato respondet, ni tamen velimus tribus Euclidæis postulatis alia superaddere.

PROPOSITIO IV.

Si duo triangula (ABC, DEF) duo latera (AB. CB) duobus lateribus (ED, EF) æqualia habuerint utrūq; utriq; habeant verò angulum (B) angulo (E) æqualem sub æqualibus rectis lineis contentum; æquabuntur quoad basim, ipsa spatia, & reliquos angulos, sub quibus æqualia latera subtenduntur.

Si punctum D puncto A applicetur, & recta

recta DE ipsi rectæ AB superponatur; cadet punctum E in B, quandoquidem hæ duæ lineæ ponuntur æquales, & rectæ: atqui angulus E ponitur æqualis angulo B; ergo etiam latus EF lateri BC coincidet: sed & hæc duo latera ponuntur æqualia; ergo punctum F cadet supra punctum C; adeoq; 10. *ax*. ipsæ bases DF, AC congruent, ac proindè, 8. *ax*. æquabuntur, quin & æquabuntur cætera omnia, siquidem cætera omnia congruunt. Q. E. D.

PROPOSITIO V.

IN òmni Triangulo Isoscelè (BAC) qui ad basim sunt interni anguli (ABC, ACB) æquantur sibi mutuò: & ultra basim productis æqualib' cruribus (AB, AC); qui sub basi sunt exteriores anguli (CBD, BCE) inter se etiam sunt æquales.

Sumatur AD æqualis ipsi AE, & ducantur BE, CD: Quoniam in ȝglis ABE, ACD, æquantur *constr.* AD, & AE, & æquantur *hyp.* AB, & AC, atq; angulus A est communis; æquabuntur, 4. 1. bases BE, & CD, uti & anguli D, & E, atq; demum anguli ACD, & ABE. Tum, quoniam in ȝglis BDC, CEB æquãtur, *ut prius*, BE, & CD, & æquantur *constr. hyp.* & 3. *ax.* CE, & BD, atq; *ut prius*, æquantur anguli D, & E; erit (4. 1.) angulus BCE angulo CBD, & angulus BCD angulo CBE æqualis. Quòd si ab angulo ACD ipsum BCD, & ab angulo ABE angulum CBE demamus; relinquetur, 3. *ax.* angulus ACB æqualis

 angulo

angulo ABC. Q. E. D.

COROLL. Hinc omne 3glum æquilaterum est etiam æquiangulum.

SCHOL. Poterat hoc Theorema aliter & multò quidem faciliùs demonstrari, sed præstat, se, vel in ipso Matheseos vestibulo, in arduis exercere, sed nec prætérea despicatui ducenda erat demonstratio tam elegans, & celebris.

PROPOSITIO VI.

IN omni triangulo (BAC) latera (AB, AC(angulis æqualibus opposita æquantur sibi mutuo.

Nam si dixeris, latus AC mai. esse latere AB, fiat, 3. 1. FB æqual. ipsi AC. & duc. FC, Quoniam ergo in 3glis FBC, ACB, linea FB æquatur, *f. hyp.*, ipsi AC, & BC est cõmunis, atq; angulus FBC æquatur, *hyp.*, angulo ACB; ipsa etiam, 4. 1. 3gla æquabuntur inter se, pars toti. Q. E. A.

COROLL. Hinc omne 3glum æquiang. est etiam æquilat.

PROPOSITIO VII.

SVper eadem recta linea (AB) duabus eisdem rectis lineis (AC, BC) aliæ duæ rectæ lineæ æquales (AD, BD) non constituentur ad aliud punctum (C) atq; ad aliud (D) cum duabus initio ductis rectis lineis habentes eosdem terminos.

1. Cadat, si f. p. punctum D in ipso latere CB; erit DB æqualis ipsi CB, pars toti Q. E. A. 2. Ca-

2. Cadat, si f. p., punctum D intra 3glũ ACB, & protrahantur BD, BC in directũ, & ducatur CD; angulus ergo ACD æquab. 5. 1. ang. ADC, qui *9. ax.* major est, quã EDC, qui, 5. 1. æqu. ipsi FCD, qui *9. ax.* maj. est quàm ACD; adeoq; ACD major erit se ipso. Q. E. A.

3. Cadat, si f. p., punctum D extra 3glũ ACD, & ducatur CD; æquatur ergo 5. 1. ACD ipsi ADC, qui *9. ax.* minor est, quã BDC, cui, 5. 1. æquatur BCD, qui *9. ax.* min. est, quam ACD; adeoq; angulus ACD minor est se ipso. Q. E. A.

PROPOSITIO VIII.

SI duo 3gla (ABC, DEF) æquantur quoad omnia latera; æquabuntur etiã sibi mutuo quoad omnes angulos, sub quibus æqualia latera subtenduntur, & quoad ipsa spatia.

Quoniã enim *hyp.* æquantur AC, & DF; si hæc illi superponatur, congruent, *conv.* 8. *ax.* sed & *hyp.* æquantur AB, & ED. vti & BC, & EF; ergo, 7. 1. cadet punctũ E supra B, ac proindè omnia congruent, &, 8. *ax.*, æquabuntur, Q. E. D.

COROLL. Hinc triangula sibi mutuo æquilatera, etiam inter se sunt æquiangula.

PROPOSITIO IX.

DAtum angulum rectilineum (FBG) bifariam secare.

Abscindantur æquales BA, BC, & ducatur

tur AC, fupra quã, 1. 1. fiat 3glum æquil. AEC, & ducatur BE. Quoniam ergo in 3glis ABE, CBE, æquant. mutuò BA, & BC, vt & EA, & EC, & BE eſt communis; erit, 8. 1. angulus ABE æqualis angulo CBE. Q. E. F.

PROPOSITIO X.

Datam rectam lineam (AB) bifariã ſecare.

Super totã AB, fac, 1. 1. 3glum æquil. ADB, tum, 9. 1. divide angulũ ADB bifariam; Dico factum. Nam conſtr. DA, & DB æquantur, uti & anguli ADC, & BDC, & DC eſt communis; ergo, 4. 1. AC, & CB æquantur ſibi mutuo. Q.E.F.

PROPOSITIO XI.

Ex puncto dato (D) in linea data (AB) lineam perpendicularẽ (DE) erigere.

Abſcindantur utrinq; æquales DC, DB, & ſuper totam CB fiat, 1. 1. 3glum æquil. CEB, & ducatur DE; Dico factum. Nã conſtr. æquantur lineæ DB, & DC, uti & EC, & EB, atq; ED eſt comm: Ergo, 8. 1. æquantur anguli CDE, & BDE; adeoq; 10. def. linea DE perpẽdicularis eſt ad AB. Q. E. F.

PROPOSITIO XII.

Ex puncto dato (F) extra lineam datam (AB) ducere perpendicularem (EF) in ipſam datam.

Centro

Centro F, abſcindatur utcunq; ex datâ AB portio CD, quam, 10.1. divide bifariâ in E, & ducantur FC, FE, FD; Dico factũ. Nã *conſtr.* æquant. CE, & ED, uti &, 15. *def.* FC, & FD, atq; FE eſt comm. Ergo, 8.1. æquant. anguli CEF, & DEF; ac proindè, 10. *def.* FE perpẽdicularis eſt ad AB. Q.E.F.

PROPOSITIO XIII.

ANguli deinceps ſimul ſumpti (ACD pl. DCB) æquantur duobus angulis rectis.

Ex puncto C erigatur (11.1.) perpendicularis CE; erit *conſtr.* angulus ACD, dẽpto ipſo ECD, æqualis ipſi recto ACE, atq; DCB, addito ipſo ECD, æquatur ipſi recto ECB: Ergo ACD pl. DCB æquantur duobus rectis [nam ipſe ECD, ob contrarias notas *plus*, & *minus* non cõputatur] Q.E.D.

COROLL. 1. Hinc ſi unus angulus deinceps rectus ſit, alter etiam erit rectus, & ſi unus acutus, alter erit obtuſus.

2. Si plures rectæ ad idem punctum eidẽ rectæ inſiſtant, anguli fient duobus rectis æquales.

3. Duæ rectæ invicem ſe ſecantes efficiunt angulos quatuor rectis æquales.

4. Omnes anguli circa unum punctum conſtituti, conficiunt quatuor rectos.

PROPOSITIO XIV.

SI ad aliquam rectam lineam (DC) atq; ad eius punctum (C) duæ rectæ lineæ (AC, BC) non ad eaſdem partes ductæ, *angulos deinceps (ACD, pl. DCB) duobus rectis æquales fecerint; indirectum erunt inter se.*

Nam si id negaueris; sint AC, CE sibi in directum; ergo angulus ACD pl. DCE, 13. 1. æquantur duobus rectis, qui *hyp.* æqu. angulis ACD pl. DCB: ergo, dempto communi ACD; erit, 3 *ax.*, DCE æqualis ipsi DCB, pars toti Q. E. A.

PROPOSITIO XV.

Anguli (A, B) oppositi per verticem æquantur sibi mutuo.

Nam A pl. D æqu. 13. 1. duobus rectis, uti & ipsi B pl. D, ergo dempto communi D; ipse angulus A, 3 *ax.*, æquabitur ipsi B. Q. E. D.

SCHOL. 1. Si ad rectam lineam, atque ad eius datum punctum duæ rectæ lineæ nō ad easdem partes sumptæ angulos ad verticem æquales fecerint; ipsæ rectæ sunt sibi in directum; quod colligitur ex tribus præcedentibus.

2. Si quatuor rectæ lineæ ex eodem puncto exeūtes angulos oppositos ad verticem æquales fecerint; erunt quælibet duæ in directum positæ.

PROPOSITIO XVI.

Cuiuscunque trianguli (ABD) uno latere producto (AD); erit angulus externus (BDC) major utrolibet interno, & opposito (ABD, BAD).

Di-

Dividantur, 10. 1. bifariam latera BD in E, & AD in F, & per puncta F, & E ex punctis B, & A ducantur rectæ, itaut FH æquetur ipsi BF, & recta EG ipsi AE, & ducantur GD, HD, & trahatur BD in directum. Quoniā ergo in 3glis BEA, GED latera BE, AE æquantur *constr.* lateribus ED, EG, & anguli in E, 15. 1. æq. inter se; erit, 4. 1. angulus ABE æqu. ipsi EDG, qui minor est toto BDC. Deindè in triāgulis AFB, DFH latera AF, BF æquantur *constr.* lateribus DF, HF, &, 15. 1. anguli in F æquantur sibi mutuo; ergo, 4. 1. angulus BAF æqu. ang. FDH, qui minor est toto ADK, qui, 15. 1. æqu. ang. BDC: ergo BAF minor est ipso externo BDC. Q. E. D.

PROPOSITIO XVII.

CVjuscunque trianguli (ABC) duo anguli simul sumpti, duobus rectis sunt minores omnifariam sumpti.

Siquidē ACB pl. ACD æquantur, 13. 1. 2. rectis, atqui, 16. 1. ACD major est tam ipso A, quàm ipso B; ergo neq, ACB pl. A, neq; ACB pl. B conficiunt duos rectos: idemq; patebit de A pl. B protractis lateribus ultra B, vel A. Q. E. D.

COROLL. 1. Hinc in omni triangulo cujus unus angulus erit rectus, vel obtusus reliqui erunt acuti.

2. Omnes anguli trianguli æquilateri, uti & duo anguli qui sunt ad basim Isosceles acuti sunt.

PROPOSITIO XVIII.

In omni triangulo (ABC) angulus ille major est qui opponitur majori lateri (AC)

Fiat AF æqualis ipsi AB, & fiat CD æqualis ipsi CB, & ducantur, BD, BF: erit ergo angulus ABC maj. *9. ax.* quàm ABF, æqu. 5. 1. ipsi AFB, qui, 16. 1. major quàm C; ergo ABC maj. est ipso C. Item ABC major est ipso DBC, qui, 5. 1. æqu. ipsi BDC, qui, 16. 1. major est ipso A: ergo ABC major est quàm A. Q. E. D.

PROPOSITIO XIX.

In omni triangulo (ABC) latus illud majus est, quod opponitur majori angulo (A)

Nam si AC æquaretur ipsi CB; esset, 5. 1. angulus B æqualis ipsi A; contra *hyp.* Ità etiam si AC major esset ipso BC; esset, 18. 1. angulus B major angulo A contra *hyp.*

PROPOSITIO XX.

In omni triangulo (ABC) duo latera simul sumpta (AB pl. BC) tertio (AC) majora sunt.

Trahatur CB in directum, & fiat BD æqualis ipsi BA, & ducatur AD; erit, 5. 1. angulus BAD æqualis ipsi D. Igitur angulus DAC utpotè maj. quàm DAB, major etiam erit quàm D; adeòq; 19. 1. DC [AB pl. BC] major erit quã AC. Q. E. D.

PRO-

PROPOSITIO XXI.

SI super trianguli (ACB) basim (AB) ab ejus extremitatibus duæ rectæ lineæ (AD, BD) constitutæ fuerint; hæ simul sumptæ minores erunt duobus trianguli lateribus (AC pl. CB) simul sumptis, sed majorem angulum constituent.

Quoniam enim AC pl. CE, 20. 1. maj. sunt quàm AE; si addas utriq; ipsam BE; erunt AC pl. CB maj. quàm AE pl. EB. Item DE pl. EB maj. sunt, 20. 1. quã DB: si ergo addas utriq; ipsam AD; erunt AE pl. EB maj. quàm AD pl. DB; ergo AC pl. CB longè maj. quàm AD pl. DB. Q. E. D. Tum angulus ADB, 16. 1. major est angulo AEB, qui, 16. 1. maj. est ipso C: ergo ADB maj. est quàm C. Q. E. D.

PROPOSITIO XXII.

EX tribus datis lineis (A, B, C,) quarum duæ simul sumptæ majores sint quàm tertia, triangulum efficere.

Ex linea indefinita DH sume lineã DE æqu. ipsi A, lineam EF æqu. ipsi B, & lineã FG æqu. ipsi C: Tũ centro F, & intervallo FG fiat unus circulus, atq; tum alter cẽtro E, & intervallo DE. Ex puncto ergo K ubi circuli sese mutuo secant ducantur KF, & KE; dico factũ; Nam A *constr.* ipsi DE, & hæc, 15. *def.* ipsi EK æquatur: ità etiam æquantur C, GF, & FK sibi mutuo, atque demum ipsa B *constr.* ipsi EF, a deoq; ãgulum FKE factũ est ex lineis datis A, B, C, Q. E. F.

PRO-

PROPOSITIO XXIII.

AD datam rectam lineam (AB) datumq; in ea punctum (A) dato angulo rectilineo (E) angulum æqualem rectilineum (A) constituere.

Duc rectam FG utcunq; & fac AD æqualem ipsi EF: Tū super AD cōstitue, 22.1. triangulum alteri EGF æquilaterum, itaut AC ipsi EG æquetur, & DC ipsi FG; erit, 8.1. angulus A æqualis ipsi E. Q.E.F.

PROPOSITIO XXIV.

SI duo triangula (ACB, ACD) habeant duo latera æqualia duobus lateribus utrunq; utriq;: sit verò vertex unius (ACB) maior alterius vertice (ACD) erit etiam illius basis (AB) maior alterius basi (AD)

Disponātur ità triangula data, ut AC sit utriq; latus commune, & latus CD unius æquetur alterius lateri CB, & ducatur DB. Quoniā ergo angulus ADB, 9.*ax.* maj. est ipso CDB, qui, 5.1. æquat. ipsi CBD qui, 9.*ax.* mai. est ipso ABD; erit ADB mai. quàm ABD; ergo, 19.1. linea AB mai. est quàm AD. Q.E.D.

PROPOSITIO XXV.

SI duo triangula (ACB, ACD) habeant duo latera æqualia duobus lateribus, unius verò basis (AB) major sit alterius

rius basi (AD); erit etiam illius vertex (ACB) major huius vertice (ACD)

Nam si dixeris angulum ACB æqualē esse angulo ACD, ob æqualitatem etiam laterum hos angulos intercipientium; erit, 4. 1. AB æqualis ipsi AD, contra *hyp.*

Sin verò dixeris angulum ACD maiorē esse angulo ACB; erit, 24. 1. ipsa AD maj. quam AB contra *hyp.*

PROPOSITIO XXVI.

SI duo triangula (ABC, DEF) habeāt duos angulos æquales duobus angulis (ipsum B ipsi E, & ipsum C ipsi DFE) habeant verò, & latus æquales angulos interjacens, vel ipsis adjacens æquale; æquabuntur quoad reliqua omnia.

1. *Hyp.* sit latus interjacens BC æquale interjacenti EF, dico etiam latus adjacens AB æquari adjacenti DE. Nam si dixeris ipsum DE majus esse quàm AB, fiat HE æquale ipsi AB, & ducatur HF; ergo, 4. 1. æquabuntur triangula ABC, HEF, adeoq; angulus HFE æquabitur ipsi C, qui *hyp.* æquatur ipsi DFE, ac proindè HFE æquab. ipsi DFE, pars toti. Q. E. A.

2. *Hyp.* Sit latus adjacens AB æquale adjacenti DE: dico etiam fore latus interjacens BC æquale interjacenti EF. Nā si EF majus esset quàm BC, fiat EG æquale ipsi BC, & duc. DG: ergo, 4. 1. ▵gla ABC, DEG æquabitur, ac proindè angul. DGE æquab. ipsi C, qui *hyp.* æquatur ipsi DFE,

adeoq;

adeoq; DGE externus æquaretur interno DFE: quòd, 16. 1. E. A.

PROPOSITIO XXVII.

SI in duas rectas lineas (AB, CD) recta incidēs (EF) alternos angulos (AEF, DFE) æquales fecerit; parallelæ erunt inter se ipsæ lineæ (AB, CD).

Nam si dicantur non esse parellæ; convenient ergo ulterius productæ, ut puta in puncto G, atq; tum angulus AEF tanquā externus, 16. 1. major erit interno DFE, contra *hyp*.

PROPOSITIO XXVIII.

SI in duas rectas lineas (AB, CD) recta incidens linea (EF) externum angulum (AGF) interno ad easdem partes opposito CHG æqualem fecerit, aut internos & ad easdem partes (AGH, CHG) æquales duobus rectis; parallelæ erunt inter se ipsæ lineæ (AB, CD).

1. *Hyp*. Quoniam *hyp*. angulus CHG æquatur ipsi AGF, qui, 15. 1. æquatur ipsi BGH; erunt, 27. 1. parallelæ inter se ipsæ AB, CD. Q. E. D.

2. *Hyp*. Quoniam *hyp*. angul. AGH pl. CHG æquātur 2. rectis, qui, 13. 1. æquātur ipsis AGH pl. BGH: dempto cōmuni AGH; erit 3. *ax*. CHG æqualis alterno BGH: adeoq; 27. 1. AB, CD erunt parallelæ. Q. E. D.

PRO-

PROPOSITIO XXIX.

IN parallelas rectas lineas (AB, CD) recta incidens linea (FE) alternos angulos sibi mutuo æquales, uti & internum, & externum ad easdem partes oppositum inter se æquales: atque demum internos ad easdem partes duobus rectis æquales faciet.

Quoniam AB, & CD ponuntur parallelæ; vult Evclides, angulos internos ad easdem partes AGH pl. CHG æquari duobus rectis. Sed &, 13. 1. DHG pl. CHG æquantur 2. rectis: ergo dempto communi CHG; erit 3. *ax.* DHG æqualis ipsi AGH, qui præterea, 15. 1. æquatur ipsi BGF. Q. E. D.

COROLL. Hinc omne parallelogrammum habens unum angulum rectum est rectangulum.

PROPOSITIO XXX.

QVæ rectæ lineæ (AB, EF) eidem CD sunt parallelæ, sunt etiam inter se parallelæ.

Quoniã enim AB est parallela ad CD; erit, 29. 1. ang. AGH æqualis ang. DHG: & quoniam CD ponitur parallela ad EF; erit, 29. 1. angulus DHG æqualis angulo FKH: adeòq; 1. *ax.* AGH æquatur ipsi FKH atque proindè, 27. 1. ipsæ lineæ AB, EF sunt inter se parallelæ. Q. E. D.

PRO-

PROPOSITIO XXXI.

A *dato puncto (C) datæ rectæ lineæ (AB) parallelam rectam lineam (CD) ducere.*

Ex puncto C ducatur utcunq; recta CB in ipsam datam AB, & , 23. 1. fiat angul. BCD æqualis angulo ABC: igitur , 27. 1. ob angulos alternos æquales , erit CD parallela ad AB . Q. E. F.

PROPOSITIO XXXII.

I*N omni triangulo (ABC) uno latere producto (BC in D) externus angulus (ACD) æquatur duobus internis oppositis (A pl B) atque omnes anguli simul sumpti æquantur duobus rectis.*

Ex puncto C, 31. 1. duc CE parallelam ad BA : erit , 29. 1. alternus angulus ACE æqualis alterno A ,& externus ECD æqualis interno opposito B : ergo totus ACD æquatur A pl.B. Q. E. D. Tum ACD pl. ACB , 13. 1. æquatur 2. rectis : atqui (*ut prius*) ACD æquatur ipsis A pl.B : ergo ACB pl. A. pl.B æquantur duobus rectis. Q. E. D.

PROPOSITIO XXXIII.

L*ineæ (AC, BD) quæ rectas (AB, CD) parallelas & æquales claudunt; sunt & ipsæ inter se æquales, & parallelæ.*

Duca-

Ducatur AD; ob AB, & CD parallelas, erit, 29. 1. angulus BAD æqualis ipsi CDA, sed *hyp.* AB æquatur ipsi CD, & AD est communis: ergo, 4. 1. AC, & BD æquantur, & angulus CAD angulo BDA; adeoq; 27. 1. etiam AC, & BD sunt inter se parallelæ. Q. E. D.

PROPOSITIO XXXIV.

IN omni parallelogrammo diameter dividit figuram ipsam in duo triangula æqualia quoad spatia, angulos, & latera.

Siquidem ob oppositas parallelas; angulus ABC angulo DCB, & angulus ACB angulo DBC æquatur: sed & CB est communis: ergo, 26. 1. triangulum CAB æquatur triangulo CDB, latera lateribus, & anguli angulis. Q. E. D.

PROPOSITIO XXXV.

SI duo parallelogrammata (AD, AH) constituta sint super eandem basim (AB) & inter easdem parallelas GH, (AF): æquabuntur inter se.

Quoniam enim in 3glis ACG, BDH latus, 34. 1. CA ipsi DB & latus AG lateri BH æquantur, & CG ipsi DH (nam CD, AB, & GH, 34. 1. æquantur, ac proindè etiam 2. *ax.* CG, & DH) erunt, 8. 1. ipsa triangula æqualia inter se: ergo dempto utrinque 3glo DKG, & addito utriq; 3glo AKB: erit, 3. & 2. *ax.* AD æqu. ipsi AH. Q. E. D.

PRO-

PROPOSITIO XXXVI.

SI duo parallelogrammata (AD, EH) constituta sint super aequales bases (AB, EF) & inter easdem parallelas; aequabuntur sibi mutuò.

Siquidem, 35. 1. AD, æqu. ipsi AH, quod æquatur ipsi EH: ergo & AD æqu. ipsi EH. Q. E. D.

PROPOSITIO XXXVII.

SI duo triangula (ACB, AGB) constituta sint super eandem basim (AB) & inter easdem parallelas; aequabuntur sibi mutuò.

Ex eodem puncto B, 31. 1. ducantur BD parallela ad AC, & BH parallela ad AG; erit, 35. 1. AD æquale ipsi AH: atqui, 34. 1. triangulum ACB est $\frac{1}{2}$. ipsius AD, & triangulũ AGB $\frac{1}{2}$. ipsius AH: ergo, 7. *ax.* ACB æquatur ipsi AGB. Q. E. D.

PROPOSITIO XXXVIII.

SI duo triangula (ACB, EGF) constituta sint super aequales bases (AB, EF) & inter easdem parallelas; aequabuntur sibi mutuò.

Siquidem ACB, 37. 1. æqu. ipsi AGB, æqu., 34. 1. ipsi GBH, æqu., 37. 1. ipsi HFG, æqu., 34. 1. ipsi EGF: ergo & ACB ipsi EGF. Q. E. D.

PRO-

PROPOSITIO XXXIX.

SI duo triangula æqualia constituta sint super eandem basim (AB); erunt etiã inter easdem parallelas (CM, AH).

Nam si dixeris, verticem alterius trianguli cadere in D, vel in E, ducatur IB: erit ergo ADB *f. hyp.* æqu. ipsi ACB, æqu. 37.1. ipsi AIB, ergo, & ADB ipsi AIB, pars toti: vel AEB æquabitur, *f. hyp.*, ipsi ACB, quod, 37.1. æqu. AIB, adeóq; æquaretur AEB ipsi AIB, totũ parti. Q. E. A.

PROPOSITIO XL.

SI duo triangula æqualia constituta sint super æquales bases (AB, GH); erunt etiam inter easdem parallelas.

Nam si dixeris, alterius verticem cadere in E, vel in F, ducatur MG; erit etiam GFH, vel GEH, *f. hyp.*, æqu. ACB, æqu. 38.1., ipsi GMH: adeoq: totum parti, vel pars toti æquaretur. Q. E. A.

PROPOSITIO XLI.

SI inter easdem parallelas [CE, AB] & in eadem basi constituta sint triangulum [ACB] & parallogramũ [AE]; hoc erit du-plum illius.

Ducatur BF parallela ad AC, erit ergo, 35.1. AE æqu. ipsi AF, quod, 34.1. duplum est trianguli ACB: adeoq; AE duplum erit ipsius ACB. Q. E. D.

PRO-

PROPOSITIO XLII.

D*Ato triangulo [ACB] æquale parallelogrammum constituere in dato angulo rectilineo [X]*

Dividatur, 10. 1. AB bifariam in F, & ad punctum F, 23. 1. fiat ang. *B*FD æqu. dato X. & ducatur *B*E parallela ad FD: dico factum: nam parallelogrammum FE, 41. 1., duplum est trianguli FC*B*, quod 38. 1. æqu. triangulo ACF: adeoq; FE æqu. toti AC*B*. Q. E. F.

PROPOSITIO XLIII.

I*N omni parallelogrammo [DKLH] complementa sunt æqualia.*

Siquidem, 34. 1. diagonalis KH dividit singula parallelogrammata per quæ trãsit in duo triangula æqualia: ergo si à triãgulo KDH demas 3glum KCF, & 3glum FEH, & demas à triangulo KLH 3glum KIF, & 3glum FGH: supererit, 3. *ax*, FL æqu. ipsi FD. Q. E. D.

PROPOSITIO XLIV.

A*D datam rectam lineam [AB] dato triangulo [O] æquale parallelogrammum FL applicare in dato angulo rectilineo [Z]*

Fiat, 42. 1. FD æquale triangulo O, itaut angulus DCF æquetur angulo Z: Tũ protrahatur CF in directũ, & fiat FG æqu. ipsi *AB*: tum per punctum G ducatur GH

paral-

parallela ipsi FE donec occurrat lineæ DE protractæ in puncto H: deindè ducatur diagonalis HF donec occurrat ipsi DC protractæ in K, & ducantur cæteræ parallelæ; erit, 43. 1. complementum FL æqu. FD, æqu. *constr.* ipsi O: atq; angulus LGF 29. 1. angulo DCF, æqu. *constr.* ipsi Z. Q.E.F.

PROPOSITIO XLV.

Ad datam rectam lineam (CA) dato rectilineo (XZ) æquale pgrum (CE) constituere in dato angulo (M)

Resolvatur datum Rectilineum in 3gula X, & Z: &, 44. 1. lineæ AC applicetur in dato angulo M pgrum CB æquale ipsi Z: tum producatur CD versus F, & ad rectam DB applicetur pgrum DE æquale ipsi X; erit *constr.* XZ æquale CB pl. DE (CE)

PROPOSITIO XLVI.

A Data recta linea (AB) quadratum describere.

Super datam AB erige duas perpendiculares AC, BD; erunt, 28. 1. hæ inter se parallelæ: fiant etiam æquales; ergo, 33. 1. erunt pariter ipsæ AB, CD inter se æquales, & parallelæ: Quoniam igitur *constr.* anguli A, B recti sunt; erunt etiam, 29. 1. recti ipsi anguli C, D; adeòq; figura descripta est quadratum. Q.E.F.

PRO-

PROPOSITIO XLVII.

IN omni triangulo rectangulo (ACB) quadratum lateris (AB) angulum rectum subtendentis æquatur quadratis reliquorum laterum simul sumptis.

Ducatur CK parallela ad BE, & trahantur 1. *post.* cæteræ occultæ. Quoniam *hyp.* æquantur FA, & AC, uti etiam AB, & AD, necnon, 10. & 2. *ax.* anguli FAB, (FAC pl. CAB) & DAC (DAB pl. CAB); æquabuntur, 4. 1. 3gla FBA, & ACD: atqui, 41. 1. parallelogrammum AM est duplum trianguli FBA, nam, *hyp.* & 14. 1. MB est una recta, atque pgrum AK est duplum 3gli ACD: ergo, 6. *ax.* æquantur inter se AM, & AK, & eodem prorsus modo ostendetur, æqualia esse inter se BN, & BK, adeòque totum ABq., æquatur ACq. pl. CBq. Q. E. D.

SCHOL. Nobilissimum hoc Theorema debemus antiquissimo nostro PYTHAGORÆ: atq; ejus porrò beneficio perficitur figuratum rectilinearum quarumcunq; additio, & subtractio, & complura alia scitu non injucunda, quæ vide apud Clavium.

PROPOSITIO XLVIII.

IN omni triangulo (ACB) angulus (ACB) cuius oppositum latus (AB) æquè potest, ac cætera latera, rectus est.

Supra CB ducatur perpendicularis CD æqua-

æqualis ipſi AC; & trahatur DB; erit, *hyp.* ABq. æquale ipſis ACq. pl. CBq. æqual. CDq. pl. CBq. quibus 47. 1. æquatur DBq. Ergo æquantur inter ſe AB, & DB, ſed & *conſtr.* æquantur AC, & DC, & CB eſt communis; ergo, 8. 1. angulus DCB, qui ex conſtructione rectus eſt, æquatur angulo ACB. Q. E. D.

LAUS DEO.

LIBER II.

DEFINITIO.

LIneam in lineam ducere, est Rectangulum sub illis efficere. Id autem non fit per multiplicationem, siquidem linea, millies sumpta, nunquam potest figuram producere, sed potiùs si intelligatur una moveri perpendiculariter juxtà longitudinem alterius.

AXIOMA.

SI longitudo æquatur longitudini, & latitudo latitudini; etiam Rectangulum æquabitur Rectangulo.

POSTVLATVM.

LIceat lineam ducere in lineam.

MONITA.

1 *PRima decem Propositiones valent in quantitate, tàm continua, quàm discreta, sivè in numeris; reliquæ verò tantùm in Continua.*

2. *Si quis, majoris claritatis gratia, velit decem primarum Propositionum demonstrationes juxta methodum Commandini; eas videat in Appendice post Lib. XV.*

PRO-

PROPOSITIO I.

Sidentur duæ rectæ lineæ (Z, X), quarum altera (X) sit integra altera (Z) verò secta; Rectangulum (ZX) comprehensum sub duabus integris, æquatur rectãgulis comprehensis sub insecta, & segmẽtis alterius. Demonstrantur hæc quatuor primæ per *multiplicationem speciosam* ex præcedenti axiomate.

Nam, *hyp.* Z *aequ.* a *pl.* b.
X *aequ.* X.

Ergo XZ *aequ.* aX, *pl.* bX.
Q. E. D.

PROPOSITIO II.

SI recta (Z) secta sit utcunque; erit quadratum totius æquale rectangulis comprehensis sub tota & quolibet segmentorum.

Nam, *hyp.* Z *aequ.* a *pl.* b.
Z *aequ.* Z.

Ergo ZZ *aequ.* aZ *pl.* bZ.
Q. E. D.

PROPOSITIO. III.

SI recta (Z) secta sit utcunque; erit rectangulum sub tota, & una ipsius parte, æquale quadrato ejusdem partis, unà cum rectangulo comprehenso sub partibus.

Nam, Hyp. Z æqu. a pl. b.
a æqu. a.

Ergo aZ æqu. aa pl. ab.
Q. E. D.

PROPOSITIO IV.

SI recta (Z) secta sit utcunque: erit quadratum totius æquale quadratis partium unà cum binis rectangulis comprehensis sub partibus.

Nam, Hyp. Z æqu. a pl. b
Z æqu. a pl. b

Ergo ZZ æqu. aa pl. 2. ab pl. bb
Q. E. D.

PROPOSITIO V.

SI recta (AB) secta sit æqualiter (in C) & inæqualiter (in D); erit quadratum dimidiæ æquale quadrato partis intermediæ unà cum rectangulo comprehenso sub partibus inæqualibus.

Dico, CBq æquari ipsis CDq. pl. ADB.
Nam

$$\text{Æqu. hæc} \left\{ \begin{array}{ll} \text{CBq. [4.2.]} & \text{2.)} \\ \text{CDq.pl.BDq.pl.CDB } pl. \text{ CDB} & \text{(3.} \\ \text{CDq. pl. CDB pl. CBD} & \text{[1.2]} \\ \text{CDq. pl. ADB.} & \text{Q. E. D.} \end{array} \right.$$

Nota,

Nota, Quoniam AB divisa est æqualiter in C, idem esse rectangulum CBD, ac rectangulum comprehensum sub AC, & DB.

PROPOSITIO VI.

SI recta (AB) secetur bifariam (in C) & illi quæpiam (BD) adjiciatur; erit rectangulum (ADB) sub tota composita & adjecta unà cum (CBq) quadrato dimidiæ æquale ipsi (CDq) quadrato lineæ compositæ ex dimidia, & adjecta.

Dico, ADB pl. CBq æquari ipsi CDq. Nam

Æqu. hæc { ADB pl. CBq. (3.2.)
CBq. pl. BDq. pl. ABD (1. 2.)
CBq. pl. BDq. pl. 2. CBD (4. 2.)
CDq. Q. E. D.

Nota, Quoniam AB divisa est bifariam in C idem esse si duxeris lineā BD primò in AC, & deindè in CB, ac si illam bis duxeris in CB.

PROPOSITIO VII.

SI recta (AB) secetur utcunq; (in C); erit quadratum totius unà cum quadrato unius partis æquale binis rectangulis sub tota, & eadem parte unà cum quadrato alterius partis.

Dico, ABq. pl. ACq. æquari 2. BAC pl. CBq. Nam

Æqu. hæc { ABq. pl. ACq. (4.2.)
ACq. ACq. pl. CBq. pl. 2. ACB (3.2.
2. BAC pl. CBq. Q. E. D.

Nota, Quoniam [3. huj.] BAC æquatur ipsi ACB pl. ACq. ideò, 2. BAC æquari 2. ACB pl. 2 ACq.

PROPOSITIO VIII.

Si recta (AB) secetur utcunq; in (C); rectangulum (ABC) quater comprehensum sub tota (AB) & uno segmento (CB) unà cum (ACq.) quadrato alterius segmenti æquatur quadrato lineæ composita ex tota (AB) & dicto segmento (CB).

Nimirum sit BD æqualis ipsi CB; Dico, ADq. æquari 4. ABC (ABD) pl. ACq. Nam

Æquatur { ADq. (4.2.)
ABq. pl. BDq. pl. 2. ABD (*constr.*)
ABq. pl. BCq. pl. 2. ABC (7.2.)
2. ABC. pl. 2. ABC pl. ACq.
4. ABC pl. ACq. Q. E. D.

Nota, Quoniam BD, & BC æquantur; idem esse BDq. ac BCq. quin & idem esse ABD, ac ABC.

PROPOSITIO IX.

Si recta (AB) secetur æqualiter (in C) & inæqualiter (in D); erunt quadrata partium inæqualium simul sumpta dupla quadratorum partis dimidiæ, & partis intermediæ.

Dico, ADq. pl. DBq. æquari 2. CBq. pl. 2. CDq. Nam

ADq.

Æq. haec { ADq. pl. DBq. (4.2.) | DBq. pl. ACq. pl. CDq. pl. 2. ACD (constr.) | DBq. pl. CBq. pl. CDq. pl. 2. BCD [7.2 | CBq. pl. CDq. pl. CBq. pl. CDq. | 2. CBq. pl. 2. CDq. Q. E. D.

Nota, Quoniam AB secta est æqualiter in C, idem esse ACq. ac CBq. quinimò idem esse ACD, ac BCD.

PROPOSITIO X.

SI recta (AB) secta sit bifariam (in C), eique quæpiam (BD) adjiciatur; erũt (ADq. pl. BDq.) quadrata totius compositæ, & adjectæ simul sumpta, dupla quadratorum (CBq. pl. CDq.) quæ describuntur super dimidia, & super composita ex dimidia, & adjecta, simul sumptorum.

Dico, ADq. pl. BDq. æquari 2. CBq. pl. 2. CDq.

Fiat EA æqualis ipsi BD; Quoniã ergo, *cõstr.* æquantur AC, & CB, vti & EA, & BD; æquabuntur CE, & CD, vti & EB, & AD; adeòq; linea ED erit secta æqualiter in C, & inæqualiter in B. Igitur (9.2.) EBq. (ADq.) pl. BDq. æquabitur 2. CBq. pl. 2. CDq. Q. E. D.

PROPOSITIO XI.

DAtam rectam (AB) ità secare, ut rectangulum comprehensum sub tota (AB) & altero segmentorum (BG) æquetur quadrato (AGq.) reliqui segmenti.

Super AB (46.1.) describe quadratum AC: tum, 10.1. latus AD seca bifariam in E, tum duc EB, & ex DA producta sume EF æqualem ipsi EB, atq; demum ad AF statue, 46.1. quadratum AH; dico factum; Nam

Æqu. hæc { DFA (DH) pl. EAq. [6.2.]
EFq. (EBq.) [47.1.]
ABq. pl. EAq.

Ergo, 3. *ax.* DH æquatur ipsi ABq. (CA) ad òq; demto communi IA; erit, 3. *ax.* AH æquale ipsi IB, hoc est æquabuntur ABG, & AGq. Q. E. F.

PROPOSITIO XII.

IN omni 3glo obtusangulo (ABC) quadratum lateris (AC) obtusum angulũ subtendentis quadrata laterum reliquorum excedit duobus rectangulis (2. CBD) cõprehensis & ab uno (BC) laterum, quæ sũt circa obtusum angulum (ABC), in quod, cùm protractum fuerit, cadit perpendicularis (AD) & ab assumpta exterius linea (BD), angulos obtusum, & rectum interjacente.

Dico ACq æquari ipsis CBq. pl. ABq. pl. 2. CBD. Nam

Æqu. hæc { ACq. (47.1.)
CDq. pl. ADq. [4.2.]
ADq. pl. CBq. pl. BDq. pl. 2. CBD [47. 1.]
CBq. pl. ABq. pl. 2. CBD. Q. E. D.

PRO-

PROPOSITIO XIII.

IN quocunque 3glo (ABC) quadratum lateris (AB) acutum angulum (ACB) subtendentis, à quadratis laterum reliquorum exceditur rectangulo (BCD) bis comprehenso, & ab uno laterum (BC), quæ sunt circa acutum angulum (ACB), in quod cadit perpendicularis (AD) ab opposito angulo, quem subtendit, & ipsa (DC) angulos rectum, & acutum (ACB) interjacente.

Dico, ACq. pl. BCq. æquari ipsis ABq. pl. 2 BCD. Nam

Æqu. hæc { ACq. pl. BCq. (47.1.)
BCq. pl. ADq. pl. DCq. (7.2.)
ADq. pl. BDq. pl. 2. BCD (47.1.)
ABq. pl. 2. BCD. Q. E. D.

Nota, Non restringi hoc Theorema ad 3gla acutangula, sed locum habere in omnibus 3glis: & quamvis perpendicularis cadat extra 3glum, demonstratio tamen semper eadem est.

PROPOSITIO XIV.

DAto rectilineo (A) æquale quadratum constituere.

Fac (45.1.) Rglum DB æquale ipsi A: tum latus majus DC produc, ita ut CF æquetur ipsi CB, & biseca, 10.1. DF in

G, atque ex G per F fiat circulus: tum producatur BC in H, & ducatur GH; Dico CHq. æquari ipsi A. Nam

Æqu. hæc
- A (*constr.*)
- DB [DCF] (5.2. & 3.*ax.*)
- GFq. *minus* GCq. [*constr.*]
- GHq. *minus* GCq. (47.1.)
- CHq.

LAVS DEO.

LIBER

LIBER III.

DEFINITIONES.

1. AEquales circuli, sunt quorum diametri sunt æquales, vel quorum, quæ ex centris rectæ lineæ, sunt æquales.

2. Recta linea circulum tangere dicitur, quæ cùm circulum tangat, si producatur, circulum non secat.

3. Circuli sese mutuò tangere dicuntur, qui sese mutuò tangentes, sese mutuò non secant.

4. In circulo æqualiter distare à centro rectæ lineæ dicuntur, cùm perpendiculares, quæ à centro in ipsas ducuntur, sunt æquales. Longius autem abesse illa dicitur, in quam major perpendicularis cadit.

5. Segmentum circuli est, figura quæ sub recta linea & circuli peripheria comprehenditur.

6. Segmenti autem angulus est, qui sub recta linea & circuli peripheria comprehenditur.

7. In segmento autem angulus est, cùm in segmenti peripheria sumptum fuerit quodpiam punctum, & ab illo in terminos rectæ ejus lineæ, quæ segmenti basis est, adiunctæ fuerint rectæ lineæ: is, inquam, angulus ab adiunctis illis lineis comprehensus.

8. Cùm verò comprehendentes angulum rectæ lineæ aliquam assumunt peri-

pheriam, illi angulus insistere dicitur.

9. Sector autem circuli est, cùm ad ipsius circuli centrum constitutus fuerit angulus, comprehensa nimirum figura, & à rectis lineis angulum continentibus, & à peripheria ab illis assumpta.

10. Similia circuli segmenta sunt, quæ angulos capiunt æquales: aut in quibus anguli inter se sunt æquales.

PROPOSITIO I.

D*ati Circuli (ABCD) Centrum invenire.*

Subtendatur AC utcurque, quam, 10.1. bifariam seca in puncto E, per quod, 11.1. ducatur perpendicularis BD, quam, 10.1. bifariam seca in F; Dico, punctum F esse centrum quæsitum. Nam si dixeris, centrum esse in puncto G, ductis GA, GC, GE; æquarentur, 15.*def*.1. GA, & GC, sed &, *constr*. æquantur AE, & EC, atque GE est communis: ergo.8.1. æquarentur anguli GEC, & GEA, ac proindè uterque rectus esset; adeoque GEC æquaretur ipsi FEC, qui, *constr*. rectus est, pars toti. Q.E.A.

PROPOSITIO II.

S*I in Circuli Peripheria duo puncta (A,B) sumantur; recta (AB) quæ puncta ejusmodi conectit, erit tota intra circulum.*

Ducantur enim CA, CB, & CD utcunque. Quoniam, 16.1. angulus CDB major

est.

est quàm A, cui, 5 1. æquatur ang. B; erit proindè, 19. 1. CB maj. quàm CD; adeóq; punctum D recta cujuslibet tractæ utcunque ex centro in ipsam AB, erit intra circulum. Q. E. D.

PROPOSITIO III.

SI Diameter (AB) rectam quampiam (CD) extra centrum bifariam dividat; erit perpendicularis ad illam; & è converso.

1. Quoniã æquantur, *hyp.* EC, & ED, &, 15. *def.* 1. FC, & FD, atque FE est communis; æquabuntur proindè, 8. 1. anguli CEF, & DEF: adeòque AB erit perpendicularis ad CD. Q. E. D.

2. Quoniã æquantur, *hyp.* anguli CEF, & DEF, uti &, 5. 1. anguli C, & D, & latus CF lateri DF: æquabuntur, 26. 1. CE, & DE. Q. E. D.

PROPOSITIO IV.

SI duæ rectæ, (AB, CD) sè mutuo secent extra centrum; non se secabunt bifariam.

Aliàs enim trahatur OK ex centro; erit, 3. 3. angulus OKD rectus, & rectus etiam angulus OKB; adeòque pars toti æquabitur. Q. E. A.

PROPOSITIO V.

SI duo Circuli se mutuo secent; non erit illorum idem centrum.

 Nam.

Nam si dixeris, punctum quodpiam E esse centrum utriusque, ducta EB ad sectionem, & EDA secante utriusque peripheriam; æquabitur, 15.*def*.1. ED ipsi EB, & hæc ipsi EA: ergo & ED ipsi EA, pars toti. Q. E. A.

PROPOSITIO VI.

SI duo Circuli se interius tangant; non erit illorum idem centrum.

Nam si dixeris, utriusque centrum esse in puncto F: duc rectā FB ad contactum, & rectā FDA secantē utriusque peripheriam; æquabitur, 15. 1. *def*. FD ipsi FB, & hæc ipsi FA: ergo & FD ipsi FA, pars toti. Q. E. A.

PROPOSITIO VII.

IN Diametro Circuli si ex puncto (G) extra Centrum assumpto pertingant lineæ (GA, GC, GD, GE, GB) usque ad Circumferentiam; maxima quidem erit quæ per Centrum transibit: aliarum verò quæ magis ad maxima inclinabit, major erit: Et ex eodem puncto (G) duæ tantùm æquales duci possunt in Circumferentiam.

1. Quoniam, 15. *def*. & 2. *ax*. 1. GA æquatur ipsis GF pl. FC, quæ, 20. 1. maj. sunt quàm GC; erit GA maj. quàm GC.

2. Quoniam æquantur FC & FD, atque GF est comm. sed, 9. *ax*. angulus GFC maj. est quā GFD; erit, 24. 1. GC maj. quā GD: & eadē ratione GD maj. erit quā GE.

3. Quo-

3. Quoniam FG pl. GE maj. sunt, 20.1. quàm FE, cui æquatur FB; erunt FG pl. GE maj. quàm FB; ergo dempta utrinque communi FG; erit GE maj. quàm GB.

4. Fiat, 23.1. ang. BFH æqualis ipsi BFE & ducatur GH: Quoniam æquantur FE & FH, atque FG est comm. & *constr.* æquantur anguli EFG & HFG; æquabuntur, 4.1. GE & GH, nullaque alia, *ut prius* duci potest ad partem HA, vel EA quæ non sit maj. vel min. quàm GH. Q. E. D.

PROPOSITIO VIII.

SI ex puncto (A) extra Circulum dato cadant lineæ in ipsum Circulum; inter eas quæ in circuli concavum cadunt maxima erit quæ per centrum transibit, cæteræ verò eò majores erunt, quò magis ad maximam inclinabunt: Inter eas verò quæ in circuli convexum cadunt minima erit quæ cum Diametro coincidit; cæteræ verò eò majores erunt quò magis à minima declinabunt: & ex eodem puncto (A) duæ tantùm æquales pertingent in convexum Circuli (totidemque etiam in Circuli concavum.

Nam ductis radijs.

1. BA æquabitur, 15.*def.* & 2.*ax.*1. ipsis AF pl. FE, quæ, 20.1. maj. sunt quàm AE; ergo AB maj. est quàm AE.

2. Quoniam æquantur FE & FD, & AF est comm. sed, 9.*ax.* angulus AFE maj. est quàm AFD; erit, 24.1. AE maj. quàm AD:

&

& eadem ratione AD maj. quàm AG.

3. Quoniam, 20. 1. AG pl. GF min. sunt quàm AH pl. HF, quæ, 21. 1. min. sunt, quàm AI pl. IF, quæ 21. 1. minores sunt quàm AK pl. KF; ergo demptis æqualibus GF, HF, IF. KF, erit AG min. quam AH, & hæc min. quàm AI; & hæc min. quàm AK.

4. Fiat 23. 1. angulus AFL æqu. ipsi AFK: quoniam æquantur FL & FK, atque FA est commu. &, *constr.* angulus AFL æquatur ipsi AFK, æquabuntur, 4. 1. AL, & AK; hisce verò nulla alia æquatur, ut prius ostensum est. Q. E. D.

PROPOSITIO IX.

SI ex puncto (A) assumpto in Circulo tendant in peripheriam plures quàm duæ rectæ sibi mutuò æquales; in hoc puncto erit centrum Circuli.

Nam, 7. 3. ex puncto extra centrum non possunt in peripheriam duci plures quàm duæ rectæ sibi mutuò æquales; ergo A est centrum. Q. E. D.

PROPOSITIO X.

DUo Circuli se mutuò non secant nisi in duobus punctis.

Nam se secent, si f. p. in pluribus punctis B, C, D, atque ex centro alterius circuli ducantur ad puncta sectionum lineæ AB, AC, AD; ergo punctum A, 9. 3. erit centrum utriusque circuli: Quod, 5. 3. fieri nequit.

PRO-

PROPOSITIO XI.

IN Circulis sese interius tangentibus linea, quæ centra connectit pertingit ad punctum contactus.

Si negas; habeant, si f. p. centra eum situm, ut recta ED, quæ ad contactum non pertingit, transeat per centra E, O, & junge EA, OA. Quoniam ergo, *f. hyp.* æquantur OA, & OC; æquabuntur, 2. *ax.* EC, & EO pl. OA, quæ 20. 1. maj. sunt quàm EA, cui, 15. *def.* æquatur ipsa ED; ergo erit EC maj. quàm ED, pars quàm totum. Q. E. A.

PROPOSITIO XII.

IN Circulis sese exterius tangentibus linea, quæ centra connectit transit per contactum.

Si negas; Sint centra, si f. p. ità posita (puta in A, & B) ut recta per ipsa transiens, non pertranseat contactum C, sed circulos secet in D, & E, & jungantur AC, BC. æquabuntur, 15. *def.* DA pl. EB ipsis AC pl. CB, quæ, 20. 1. maj. sunt, quàm AB; ergo DA pl. EB maj. erunt quàm AB. Q. E. A.

PROPOSITIO XIII.

CIrculi se vel interius, vel exterius tangant, in uno tantum puncto se tangunt.

1. Tan-

1. Tangant se enim, si f. p. in duobus punctis D. & C; ergo, *f. hyp.* æquabuntur BC, & BD, adeòque, 2. *ax.* æquabuntur AC, & AB pl. BD, quæ, 20. 1. maj. sunt, quàm AD, cui, 15. *def.* æquatur ipsa AC; adeòque AC maj. erit, quàm AC, Q. E. A.

2. Tangāt se, si f. p. duo circuli in duobus punctis G, & F; ergo, 12. 3. linea AE, quæ centra connectit, transibit per contactum, ac proindè æquabuntur AF pl. EF, & AE: quod (20. 1.) fieri nequit.

PROPOSITIO XIV.

IN Circulo si rectæ subtensæ (AC, BD) æquantur inter se, æqualiter etiam distant à centro: & è converso.

1. Quoniam, 4. *def.* 3. EF est perpendicularis ad AC; æquabūtur, 3. 3. AF & FC, & eadem ratione BG, & DG: atqui *hyp.* æquantur AC, & BD; ergo, 7. *ax.* 1. etiam æquantur AF, & BG. Igitur

Æqu. hæc $\begin{cases} \text{AFq. pl. FEq. [47. 1.]} \\ \text{AEq.} \\ \text{BEq. (47. 1.)} \\ \text{BGq. pl. GEq.} \end{cases}$

Atqui, *hyp.* æquantur AFq. & BGq.; ergo 3. *ax.* æquantur FEq. & GEq. adeòq; erunt sibi mutuò æquales FE, & GE. Q. E. D.

2. Quoniam, 3. 3. FE, & GE dividunt bifariam lineas AC, & BD, atq; *hyp.* æquātur FE & GE; Idcircò

Æqu. hæc $\begin{cases} \text{AFq. pl. FEq. (47. 1.)} \\ \text{AEq.} \\ \text{BEq. (47. 1.]} \\ \text{BGq. pl. GEq.} \end{cases}$

Atqui

tqui *hyp.* æquantur FEq.& GEq.; ergo,
x. AFq. ipſi BGq. adeoq; 6.*ax.* 1. AC
*B*D. Q.E.D.

PROPOSITIO XV.

N Circulo maxima quidem linea eſt diameter; aliarum verò quæ ipſi cen- ſt propinquior, remotiore maj. eſt.

x diſtantia GC quæ *hyp.* maj. eſt quàm
l ſume GO æqualem ipſi GH, & per O
atur perpendicularis KD, & ducantur
i). Quoniam AD æquatur ipſis GK pl.
), quæ maj. ſunt, 20.1. quàm KD, cui,
& 14.3. æquatur ipſa FE; erit AD maj.
m FE. Tum quoniam æquantur GK
GB uti & GD & GH, ſed angulus KGD
eſt angulo BGH; erit, 24.1. KD (FE)
quàm BH. Q.E.D.

PROPOSITIO XVI.

Q Va (DO) perpendicularis eſt ad diametrum, tangit Circulum in puncto: Inter tangentem verò & Circulum, poteſt duci linea recta.

. Quoniam angulus OAB rectus eſt;
32. & 19.1. BO maj. quàm BA quæ ad
umferentiam tantùm pertingit; ergo
ctum O quocunque cadat ſemper erit
a Circulum.

. Quoniam angulus BAD rectus eſt;
it anguli BAL, & BAM acuti; igitur
neque ad AL, neque ad AM perpendi-
aris eſt: ducatur ergo, ſi f. p. recta BK
pendicularis in AM; erit, 19.1. BA

maj.

maj. quàm BK quæ maj. est quàm BI cui, 15. *def.* 1. æquatur ipsa BA; ergo BA maj. erit quàm BA. Q. E. A.

Deindè ducatur in ipsam AL perpendicularis BE; erit, 19. 1. BA, quæ tantùm ad circumferentiam pertingit, maj. quàm BE; ergo punctum E cadet intra circulum. Q. E. D.

SCHOL. Ex hac propositione innumera consequuntur paradoxa de quibus fusè egerunt Clavius, Galilæus, Borellus, Vivianus, & Tacquetus, quin & nos nonnulla super adjiciemus pro coronide planimetriæ elementaris.

PROPOSITIO XVII.

EX puncto dato (A) ducere lineam, quæ Circulum tangat in puncto.

Ducatur AB, & ex B per A fiat Circulus: tum ex puncto C excitetur perpendicularis CD & ducatur DB, atque demum per punctum E ducatur recta AF; quam dico esse tangentem. Nam in ▽glis ABE, DBC æquatur latera AB, & DB, uti & CB, & EB, & ang. B est communis, ergo, 4. 1. angulus AEB æquatur angulo DCB, qui *constr.* rectus est; adeoquè, 16. 3. linea AEF circulum tangit in puncto. Q.E.F.

PROPOSITIO. XVIII.

QVæ (CE), ex centro ducitur ad punctum contactus perpendicularis est ad tangentem (AB.)

Si negas; sit, si f. p. FG perpendicularis ad ad tangentem AB ; ergo , 19. 1. FG min. est quam FE, cui æquatur ipsa FD ; adeoq; FG min. erit quàm FD, totum quàm pars. Q. E. A.

PROPOSITIO XIX.

Centrum Circuli est in linea (EC) quæ perpendicularis est ad tangem (AB .)

Si negas, sit, si f. p. Centrum in puncto F; ergo, 18.3. angulus FCB rectus est, ac proindè æquabitur angulo ECB, qui etiam, *hyp.* rectus est, pars toti. Q. E. A.

PROPOSITIO XX.

Angulus (ADC) ad centrum est duplus anguli ad circumferentiam, si uterque insistat eidem arcui, (AC .)

Trahantur per Centrum rectæ BG, FH. Quocunque cadat vertex anguli ad Circumferentiam ; erit *primò* angulus ADG, 32. 1. æqu. angulis ABD pl. BAD. qui, 5. 1. æquantur sibi mutuò ; ergo ADG æquatur 2. ABD : & eadem ratione CDG æquatur 2. CBD; ac proindè totus ADC est duplus totius ABC. 2. angulus ADC æquatur 32. 1. angulis DEC pl. DCE qui, 5. 1. æquātur sibi mutuò ; ergo ADC est duplus anguli AEC : 3. quoniam angulus HDC anguli HFC, uti & angulus HDA anguli HFA duplus est ; erit etiam 20. *ax.* 1. reliq. ADC duplus reliqui AFC. Q. E. D.

PRO-

PROPOSITIO XXI.

Anguli, qui sunt in eodem Circuli segmento sibi mutuò æquantur.

1. Si sint in segmento maj.; erit, 7. *ax.* angulus ACB utpotè, 20.3. dimidius anguli AEB, æqualis angulo ADB, qui ejusdem AEB est dimidius.

2. Si sint in segmento min.; Quoniam in 3glis AHF, BHG æquantur, *ut prius* anguli FAH, GBH, uti &, 15.1. anguli AHF, BHG; æquabuntur etiam, 32.1. anguli AFH, BGH, hoc est AFB, & BGA. Q.E.D.

PROPOSITIO XXII.

In quadrilatero (ABCD) quod inscriptum est Circulo, anguli oppositi simul sumpti æquantur duobus rectis.

Ducantur BD, AC; quoniam in 3glo ABC, 32.1. Summa angulorum æquatur 2. rectis; & æquantur, 21.3. BAC, & BDC, uti & BCA, & BDA; erit etiam ABC pl. BDA pl. BDC, hoc est ABC pl. ADC æqualis 2. rectis. Q.E.D.

COROLL. Hinc circa Rhombum, vel Rhomboidem Circulus describi nequit, quia nempè anguli oppositi vel una sunt maj. vel una min. 2. angulis rectis.

PROPOSITIO XXIII.

Segmenta inæqualia (AECB, AFDB) constituta super eadem linea AB non sunt similia.

Nam

Nam si dicerentur similia; æquarentur, 10. *def.* 3. anguli AFG, & AEG, nimirùm externus, & internus oppositus: quod, 16. 1. fieri nequit.

PROPOSITIO XXIV.

Segmenta similia (ACB, DGE) constituta super æqualibus lineis (AB, DE) sunt æqualia.

Quoniam, *hyp.* æquantur AB, & DE; facta superpositione congruent; ergo etiã segmenta congruent: nam aliàs, si unum segmentum caderet intra, vel extra aliud; erunt proindè, 9 *ax.* inæqualia, adeòque, 23. 3. dissimilia *contra hyp.*: sin verò caderet unum partim intra, & partim extra aliud; se secarent Circuli in tribus punctis. Quod, 10. 3. fieri nequit.

PROPOSITIO XXV.

Dato Circuli segmento (ACDB) circulum absolvere, cujus est segmentũ.

Subtendantur utcunque duæ rectæ, AC, BD, quas seca bifariam in E, & F, & ex his punctis excita perpendiculares sibi occurrentes in puncto G; dico in hoc puncto esse centrum: Nam (ut colligitur ex constructione primæ huius) in his duabus perpendicularibus est Centrum; adeòque in communi puncto G: Centro autem reperto absoluatur circulus. Q. E. F.

PRO-

PROPOSITIO XXVI. & XXVII.

IN eodem vel in æqualibus Circulis anguli æquales, vel ad centrum, vel ad peripheriam constituti sint; insistunt arcubus æqualibus: & si arcus sunt æquales; etiam æquantur sibi mutuò anguli arcubus insistentes.

1. Quoniam æquantur BD, & FH, uti & DC, & HG, necnon, *hyp.* anguli D, & FHG; æquabũtur, 4.1. BC, & FG; adeòq; *hyp.* 10.*def.* & 24.*hui.* segmẽta BAC, FEG erunt æqualia; sed & circuli æquantur; ergo etiam, 3.*ax.*1. æquabuntur segmenta residua. Q. E. D.

2. Si negas, angulum D æquari angulo FHG; sit, si f. p. ipse D æqualis angulo FHI; Ergo æquaretur, 26. 3. arcus FI arcui BC, qui, *hyp.* æquatur arcui FG, adeoq; & FI ipsi FG, pars toti.
Q. E. A.

PROPOSITIO XXVIII. & XXIX.

SVbtensæ æquales (BC, & FG) in Circulis æqualibus auferunt arcus æquales: & è converso.

1. Quoniam, *hyp.* æquantur BC, & FG vti &, 15.*def.*1. DB & DC ipsis HF & HG; erit 8.1., angulus D angulo H æqualis, ac proindè, 26.3. æquantur arcus BC, & FG. Q. E. D.

2. Quoniam, *hyp.* æquantur arcus BC, &

& FG; æquabuntur 27. 3. anguli D & H; sed & æquantur latera hos angulos intercipientia; ergo, 4. 1. æquantur etiam subtensæ BC, & FG. Q. E. D.

PROPOSITIO. XXX.

DATAM *peripheriam bifariam secare.*

Claudatur data peripheria per rectam AC, quam divide bifariam in D, & ex D ducatur DB perpendicularis ad AC, & trahantur rectæ AB, CB; dico factum: Nam, *constr.* æquantur AD & DC; atque DB est communis, & æquatur etiã, *constr.* anguli ADB, & CDB; ergo, 4. 1. æquantur AB, & CB; adeòque, 28. 3. æquabuntur etiam arcus AB, & CB. Q. E. F.

PROPOSITIO XXXI.

ANGULUS *in semicirculo rectus est: in majori segmento acutus, & in minori obtusus.*

Nam

$$\text{Æqu. hi anguli.}\left\{\begin{array}{l}\text{FBC (32. 1.)}\\ \text{BAE pl. BCE (5. 1.)}\\ \text{ABE pl. CBE (19. } ax. \text{ 1.)}\\ \text{ABC}\end{array}\right.$$

ac proindè, 10. *def.* 1. angulus ABC rectus est: Ergo, 32. 1. BAC est acutus: adeòq; 22. 3. BDC est obtusus. Q. E. D.

PRO-

PROPOSITIO XXXII.

Angulus factus à subtensa (EC) & tangente æquatur angulo facto in segmento alterno.

Dico angul. D & EC*B*, uti & F, & ECA æquari.

Sit enim CD perpendicularis ad tangentem AB; ergo, 19.3. CD erit diameter, adeòque, 31.3. angulus DEC rectus erit; ergo, 32.1. anguli D pl. DCE æquabuntur uni recto, adeoque ipsi DCB; ac proindè, dempto utrinq; angulo DCE, erit, 3.*ax*. 1. angulus D æqualis angulo ECB. Tum, quoniam, 13.1. æqu. 2. Rectis anguli EC*B* pl. ECA, sicuti, 22. 3. æqu. 2. Rectis anguli D pl. F, atque *ut prius* æquantur sibi mutuò anguli D, & ECB; ergo æquabuntur, 3. *ax*. etiam inter se anguli F, & ECA. Q. E. D.

PROPOSITIO XXXIII.

Super data recta linea (AB) describere Circuli segmentum, quod capiat angulum (AIB) æqualem angulo dato (Q).

Fiat angulus BAD æqualis ipsi Q: Tum excita AE perpendicularem ad AD, & fiat angulus ABF æqualis ipsi BAF: Tum centro F per A fiat circulus: qui utique transibit per *B*: nam, *constr.*, & 6. 1. FA est æqu. ipsi F*B*. Demum fiat super A*B* angulus I in segmento alterno; Dico factum. Nam angulus I æquatur, 32.3. angulo *B*AD, cui, *constr.* æquatur angulus Q. Q. E. F.

PRO-

PROPOSITIO XXXIV.

A *Dato Circulo segmentum abscindere, capiens angulum (B) æqualem angulo dato (D)*

Ducatur tangens AF: Tum fiat angulus CAF æqualis ipsi D, & in segmento alterno fiat utcunque angulus B; dico factum: Nã angulus B æquatur, 32.3. angulo CAF, cui, *constr.* æquatur angulus D. Q. E. F.

PROPOSITIO XXXV.

S*I in Circulo duæ rectæ (AB, CD) se mutuò secuerint; rectangulum comprehensum sub segmentis unius æquatur rectangulo facto à segmentis alterius.*

1. *Casus*. Si rectæ sese secent in centro; jam patet, quadrata radiorum sibi mutuò æquari.

2. *Casus*. Si una transeat per Centrum, & alteram perpendiculariter secet extra Centrum, adeòque, 3.3. illam secet bifariam; trahatur radius FD: Atque tum

Æqu. hæc $\left\{\begin{array}{l}\text{AEB pl. FEq. (5.2.)}\\ \text{FBq. (15. } def. \text{ 1.)}\\ \text{FDq. (47. 1.)}\\ \text{EDq. pl. FEq.}\end{array}\right.$

ergo, 3.*ax*. 1. AEB rectangulum æquatur ipsi EDq., cui, ob CE, ED æquales, æquatur Rectangulum CED. Q. E. D.

3. *Casus*. Si una sit Diameter, & alterã secet inæqualiter; trahatur FG perpendicularis ad CD, ac proindè FG secabit, 3.3. ipsam CD bifariam, & ducatur FD: Igitur

C AEB

Æqu. hæc { AEB pl. FEq. (5.2.)
FBq. (FDq.) (47.1.)
FGq. pl. GDq. (5.2.)
FGq. pl. GEq. pl. CED (47. 1.)
CED pl. FEq. }

ergo, 3.*ax.* 1. AEB rectangulum æquatur rectangulo CED. Q.E.D.

4. *Casus*. Si neutra per centrum transeat, ducatur diameter GH per punctum sectionis E, ergo æquabitur, *ut prius*, AEB ipsi GEH, & hoc ipsi CED. Q.E.D.

PROPOSITIO XXXVI.

Rectangulum (ADC) comprehensum sub secante integra & portione ipsius exteriore, æquatur (DBq.) quadrato tangentis.

1. *Casus*. Si secans transeat per centrũ; erunt DBq. pl. BEq. æqualia, 47. 1. ipsi DEq. & hoc, 6.2. ipsis CEq. pl. ADC: atque BEq. & CEq. æquantur sibi mutuò; ergo 3. *ax*. 1. æquabuntur etiam DBq. & ADC. Q.E.D.

2. *Casus*. Si secans non transeat per Cẽtrum; ducatur EF perpendicularis ad secantem, & trahantur cæteræ occultæ; Igitur

Æqu. hæc { DBq. pl. BEq. (47.1.)
DEq. [47.1.]
DFq. pl. FEq. (3.3. & 6.2.)
FEq. pl. CFq. pl. ADC (47.1.)
ADC pl. CEq. }

Atqui æquantur BEq. & CEq.; Ergo, 3. *ax*. æquantur etiam DBq. & ADC rectangulum. Q.E.D.

PRO-

PROPOSITIO XXXVII.

SI ex puncto (D) extra Circulum abſumpto cadant in Circulum duæ rectæ (DA, DB) itáut (DBq.) quadratum unius æquetur rectangulo (ADC) facto ex altera integra, & portione ipſius exteriori; linea illa (DB) incidens erit tangens.

Ex puncto D ducatur, 17.3. tangens DF, & trahantur EB, ED, EF: erit DBq. æquale, *hyp.* ipſi ADC, & hoc, 36. 3. ipſi DFq.; ergo æquabuntur DB, & DF: ſed & æquãtur BE, & FE, atque DE eſt communis; ergo, 8.1. angulus DBE æquatur ipſi recto DFE; adeòque, 16.3. linea DB eſt tangens. Q. E. D.

LAVS DEO.

LIBER

LIBER IV.

DEFINITIONES.

1. Figura rectilinea in figura rectilinea inscribi dicitur, cùm singuli eius figuræ quæ inscribitur, anguli singula latera eius, in qua inscribitur, tangunt.

2. Similiter, & figura circum figuram describi dicitur, quum singula eius quæ circumscribitur, latera singulos eius figuræ angulos tetigerint, circum quam illa describitur.

3. Figura rectilinea in circulo inscribi dicitur, quum singuli eius figuræ quæ inscribitur, anguli tetigerint circuli peripheriam.

4. Figura verò rectilinea circa circulum describi dicitur, quum singula latera eius, quæ circumscribitur, circuli peripheriam tangunt.

5. Similiter & circulus in figura rectilinea inscribi dicitur, quum circuli peripheria singula latera tangit eius figuræ, cui inscribitur.

6. Circulus autem circum figuram describi dicitur, quum circuli peripheria singulos tangit eius figuræ, quam circumscribit angulos.

7. Recta linea in circulo accomodari, seù coaptari dicitur, quum eius extrema in circuli peripheria fuerint.

PRO-

PROPOSITIO I.

IN dato Circulo rectam lineam (AB) accomodare, æqualem datæ rectæ lineæ, quæ circuli diametro (AC) non sit major.

Ex A, intervallo æquale ipsi lineæ datæ fiat Circulus secans datum circulum in B; erit ducta AB æqualis, 15.*def.* 1. ipsi AE, quæ sumpta est æqualis ipsi lineæ datæ. Q. E. F.

PROPOSITIO II.

DAto Circulo triangulum (BAC) inscribere dato triangulo (DEF) æquiangulum.

Ducatur, 17.3. trangens GH, & fiant, 23.1. angulus HAC æqualis angulo E, & angulus GAB æqualis angulo F, & ducatur BC; dico factum. Nam angulus B æquatur, 32.3. angulo HAC, & hic *constr.* ipsi E: ità etiã æquantur anguli C, GAB, & F; ergo 32.1. reliquus BAC reliquo D. Q. E. F.

PROPOSITIO III.

DAto Circulo triangulum (LNM) circũscribere dato triãgulo (DEF) æquiangulum.

Protrahatur latus EF utrinque, & fiat, 23.1. angulus AOB angulo DEG, uti & angulus COB angulo DFH æqualis, & per puncta A, B, C, ducantur tangentes LN, LM, MN: nam quòd istæ tangentes coëant, ex eo patet quia nempè, 18.3. anguli OAL, OBL recti sunt ; ergo si ducatur AB ; erunt anguli ABL pl. BAL minores 2. rectis, adeòq; tangentes coibunt in puncto L, atque ità porrò de cæteris. Cùm autem in Quadrilatero BOAL (vt potè resolubile in duo triangula) omnes anguli simul sumpti æquentur, 32. 1., 4. angulis rectis, & anguli in B, & in A recti sint ; erunt reliqui L pl. AOB æquales 2. rectis, quibus, 13. 1. æquantur DEG pl. DEF ; atqui, *constr.* æquantur sibi mutuò AOB, & DEG ; ergo etiam, 3. *ax.* 1. æquabuntur L, & DEF : & eadem ratione angulus M angulo DFE ; ac proindè, 32. 1. tertius N tertio D. Q.E.F.

PROPOSITIO IV.

DAtò triangulo (ABC) Circulum inscribere.

Anguli in B & C secentur, 9. 1. bifariã, & ex puncto concursus O, ducantur OE, OF, OG perpendiculares ad latera trianguli : deindè ex O per E fiat Circulus ; dico factum, nimirum, circulum transire per reliqua puncta F & G. Nam, *constr.* anguli EBO, FBO æquantur inter se, uti & anguli recti BEO, BFO, sed & BO est latus commune ; ergo, 26. 1. EO, & FO æquantur, & eadem ratione FO, & GO, adeòque circulus transibit per puncta F & G. Q.E.F.

PRO-

PROPOSITIO V.

D*Ato triangulo (BAC) Circulum circumscribere.*

Latera quævis duo BA, AC biseca, 10. & 11. 1. perpendicularibus DF, EF concurrentibus in F; circulus ex F per B descriptus, transibit per reliqua pūcta A & C: Nam ducantur cæteræ lineæ ut in figura; Quoniam *constr.* æquantur inter se DA & DB, uti & anguli recti ADF & BDF, & DF est communis; æquabuntur, 4.1. sibi mutuò FB, & FA, & eadem ratione FA, & FC; ergo circulus transibit per omnia puncta, B, A, C. Q.E.F.

PROPOSITIO VI.

D*Ato Circulo quadratum (ABCD) inscribere.*

Ducantur, 11.1. diametri AC, BD sese perpendiculariter secantes; & trahantur AB, AD, BC, CD; dico factum; nam quia, *constr.* 4. anguli ad centrum O sunt recti; idcircò 26. & 29. 3. arcus & subtensæ illis oppositæ sunt æquales; ergo figura ABCD est æquilatera; sed & rectangula; nam anguli in A, B, C, D, ut pote in semicirculis, 31. 3. recti sunt; ergo figura descripta, est quadratum.

PROPOSITIO VII.

D*Ato Circulo Quadratum (FK) circumscribere.*

Duc diametros AC, BD, se mutuò perpendiculariter secantes in centro E, & per puncta A, B, C, D ducantur tangentes cōcurrentes in punctis F, G, H, K; dico factum: Nam ob angulos ad A, B, C, D omnes rectos, atque ob angulos ad centrū E rectos; anguli etiam in F, G, H, K, recti erunt, nam in omnibus Quadrilateris summa angulorum æquatur 4. rectis; igitur, 28. 1. latera figuræ circumscriptæ erunt inter se parallela; sed & æqualia, quippè FA, AG, FB, BH æquantur, 34.1. ipsis radijs BE, ED, AE, EC, ergo, *6.ax.*1. æquantur sibi mutuò ipsarum FA, AG, &c. duplæ; adeòque figura circumscripta est Quadratum. Q. E. D.

PROPOSITIO VIII.

Dato Quadrato (BD) Circulum inscribere.

Latera quadrati biseca, & junge HF, EG se mutuò secantes in K; circulus ergo ex K per E descriptus, transibit per F, G & H. Nam quia *hyp.* & *7.ax.*1. AH, & BF sunt parall. & æqu. erunt etiam AB, & HF inter se, 33.1. æqu. & parallelæ, atque ità de cæteris; ergo, 34.1. æquabuntur istæ lineæ EK, FK, GK, HK ipsis lineis AH, BF, AE, cæterisque, quæ, *constr.* & *7.ax.*1. æquātur sibi mutuò; adeòque Circulus per E descriptus, transibit &c. Q. E. F.

PRO-

PROPOSITIO IX.

D*Ato quadrato (ABCD) Circulum circumscribere.*

Ducantur Diagonales AC, BD; Circulus ex O per A descriptus, transibit etiã per reliqua puncta B, C, D; siquidem, *hyp.* æquantur BA, & BC, atque angulus ABC rectus est; ergo, 5. & 32. 1. anguli BAO, BCO sunt æquales, & semirecti, & ità etiã anguli ABO & ADO; adeòque, 6. 1. BO, & AO æquantur, & sic de reliquis, ac proindè circulus transibit per omnia puncta A, B, C, D. Q. E. F.

PROPOSITIO X.

T*Riangulum Isoscelem (ABD) describere, itaut quilibet angulus ad Basim (BD) sit duplus anguli verticalis (A.)*

Secetur quæcunque AB (11.2.) itàut ABC æquetur ipsi ACq. Tum fiat circulus ex A per B, cui (1.4.) aptetur linea BD æqualis ipsi AC, & ducãtur CD, & AD: & per tria puncta A, C, D ducatur (5.4.) Circulus. Quoniam ergo æquantur ABC, & ACq. (BDq.) erit, 37. 3. ipsa BD tangẽs Circuli minoris; adeòque (32.3.) æquantur anguli BDC, & A: Igitur

Æqu. hi anguli $\begin{cases} \text{ABD (5.1.)} \\ \text{ADB [19.}\mathit{ax.}\text{]} \\ \text{BDC pl. CDA (}\mathit{ut\ prius}\text{)} \\ \text{CDA pl. A (32.1.)} \\ \text{BCD;} \end{cases}$

Ergo æquant. anguli ABD [CBD] & BCD:

 adeòque

adeoq;6.1. æquãtur CD,& BD(CA);ergo, 5.1. etiam anguli CDA, & A: ac proinde, 32.1. angulus BCD(CBD) æquatur 2. A.

PROPOSITIO XI.

IN dato Circulo pentagonum regulare (ABCDE) inscribere.

Fiat, 10.4. Triangulum FGH, itaut G sivè H sit duplus anguli F. Tum circulo dato, 2.4. inscribatur triangulum CAD æquiangulum ipsi GFH: deindè anguli ACD, ADC, 9.1. secentur bifariam rectis lineis DB, CE, & ducantur AB, BC, AE, DE; dico factum; Siquidem *constr.* æquãtur isti anguli BDA, BDC, CAD, ACE, ECD; ergo æquantur, 26.3. arcus ipsi oppositi; necnon, 29.3. subtensæ AB, BC, CD, DE, EA; quin etiam, 27.3. æquantur ipsius pentagoni anguli, utpotè insistentes arcubus æqualibus. Q.E.F.

PROPOSITIO XII.

CIrca datum Circulum pentagonum regulare describere.

Inscribatur, 11.4. circulo dato Pentagonum ABCDE, ad cuius angulos ducantur lineæ ex Centro, & per ipsos angulos ducantur, 17.3. tangentes sibi mutuò occurrentes in punctis G,H,I,K,L; dico factum: Nam, 37.3. æquantur IB, & IC sed & æquãtur FB, & FC, atque IF est communis; ergo, 8.1. æquantur anguli BFI, & CFI: & eadem ratione æquantur BFH, & AFH, & sic de cæteris; sed & æquãtur toti CFB,

&

& BFA, ergo, 7. *ax*. etiam æquantur eorum dimidii IFB, & FFH: sed & *constr.* anguli ad B recti sunt, & BF est communis; ergo, 26. 1. æquantur HB & BI; adeoque, 6. *ax*. 1. HI, & IK æquantur inter se, & sic cæteris: Demum, quoniam anguli in B, & C recti sunt, atque etiam in B, & A; erunt, 32. 1. CFB, pl. CIB æquales 2. rectis, uti & ipsi BFA pl. BHA: sed, *ut prius*, æquant. CFB & BFA: ergo, 3. *ax*. 1. æquabuntur reliqui CIB, & BHA, & sic de cæteris. Q.E.F.

PROPOSITIO XIII.

IN *dato Pentagono Regulari circumscribere Circulum.*

Duos Pentagoni angulos A & B, 9. 1. seca bifariam rectis AF, BF concurrentibus in F, & ex F duc perpendiculares ad latera Pentagoni; Circulus centro F per G descriptus tanget omnia puncta H, I, K, L. Duc enim rectas ad angulos Pentagoni; quoniam, *hyp.* BA, & BC æquantur, uti & *cõstr.* anguli ABF, CBF & BF est communis, æquabuntur, 4. 1. AF, & CF & ang. FAB angulo FCB qui est *cõstr.* $\frac{1}{2}$. totius BCD; ergo ang. FAB etiam est $\frac{1}{2}$. totius BAE; adeòque æquabuntur FAB, & FAE, & eodem modo ostendetur, omnes angulos Pentagoni divisos esse bifariam: Quoniam ergo anguli in H & G recti sunt; Et anguli in B æquantur, *ut prius*, sibi mutuo, & BF est communis: idcirco, 26. 1. erit in triangulis FBH, FBG ipsa FH æqualis ipsi FG, & sic porrò de cæteris; Adeoq; circulus transibit per puncta H, I, K, L.

PROPOSITIO XIV.

D*Ato Pentagono Regulari Circulum circumscribere.*

Duos Pẽtagoni angul. biseca rectis AO, EO, & ex O ducantur reliquæ OC, OD, OE; Circulus centro O per A descriptus, transibit per reliqua puncta B, C, D, E; Siquidem (ut colligitur ex præcedenti) Pentagoni omnes anguli secti sunt bifariã; adeoque, *6.1.* æquabuntur ipsæ OA, OB, OC, OD, OE; ergo Circulus transibit per reliqua puncta B, C, D, E. Q.E.F.

PROPOSITIO XV.

D*Ato Circulo Hexagonum Regulare inscribere.*

Duc diametrum AD, & ex D per datũ centrum O fiat circulus, qui datum circulum secet in punctis C, & E: tum protrahantur ex his punctis per centrum O diametri EB, CF, & ducantur cæteræ lineæ. Quoniam, *constr.* & 15. 1. æquantur sibi mutuo anguli COD, DOE, BOA, AOF, & unusquisque ipsorum est $\frac{1}{3}$. 2. Rectorum; erit etiam, 13.1. tam angulus BOC, quàm EOF $\frac{2}{3}$. 2. Rectorum; ac proindè omnes anguli in O sibi mutuo æquabuntur; Ergo, 26. & 29. 3. etiam æquabuntur sibi mutuò arcus oppositi, & subtensæ, adeòque, & anguli figuræ inscriptæ. Q.E.F.

PRO-

PROPOSITIO XVI.

IN dato Circulo Quindecagonum Regulare deſcribere.

Inſcribe prius, 11.4. Pentagonum regulare, atque tum, 3. 4. ex eodem puncto A inſcribe triangulum æquilat. ABC; erit *conſtr.* arcus AF $\frac{6}{15}$. totius circumferentiæ & arcus AB erit $\frac{5}{15}$. ejuſdem: ergo arcus FB erit $\frac{1}{15}$ eiuſdē adeòque Quindecagonū cujus latus ſit BF, erit æquilaterum; ſed & æquiangulum, 27.3. nam omnes ejus anguli inſiſtunt æqualibus arcubus quorum unuſquiſque eſt $\frac{1}{15}$. totius circumferentiæ; adeòque Quindecagonum eſt regulare.

Q. E. F.

LAVS DEO.

LIBER V.

DEFINITIONES.

1. PArs est magnitudo magnitudinis minor majoris, quum minor metitur majorem.

2. Multiplex autem est major minoris, cum minor metitur majorem.

3. Ratio, est duarum magnitudinum ejusdem generis mutua quædam secundùm quantitatem habitudo.

4. Proportio verò, est rationum similitudo.

5. Rationem habere inter se magnitudines dicuntur, quæ possunt multiplicatæ sese mutuò superare.

6. In eadem ratione magnitudines dicuntur esse, prima ad secundam, & tertia ad quartam: cùm primæ & tertiæ æquè multiplicia à secundæ & quartæ æquè multiplicibus, qualiscunque sit hæc multiplicatio, utrunque ab utroque, vel unà deficiunt, vel unà æqualia sunt, vel unà excedunt, si ea sumãtur, quæ inter se respondẽt.

7. Eandem autem habentes rationem magnitudines, proportionales vocentur.

8. Cùm verò æquè multiplicium, multiplex primæ magnitudinis excesserit multiplicem secundæ, at multiplex tertiæ non excesserit multiplicem quartæ: tunc prima ad secundam, majorem rationem habere dicetur, quàm tertia ad quartam.

9. Pro-

9. Proportio autem in tribus terminis paucissimis consistit.

10. Cùm autem tres magnitudines proportionales fuerint, prima ad tertiam, duplicatam rationem habere dicitur eius, quā habet ad secundam. At cum quatuor magnitudines proportionales fuerint, prima ad quartam, triplicatam rationem habere dicitur eius, quam habet ad secundam: & semper deinceps uno amplius, quandiu proportio extiterit.

11. Homologæ, seù similes ratione magnitudines dicuntur, antecedentes quidem antecedentibus, consequentes vero consequentibus.

12. Alterna ratio, est sumptio antecedentis comparati ad antecedentem, & consequentis ad consequentem.

13. Inversa ratio, est sumptio consequētis, ceù antecedentis, ad antecedentem velut ad consequentem.

14. Compositio rationis, est sumptio antecedentis cum consequente ceu unius, ad ipsum consequentem.

15. Divisio rationis, est sumptio excessus quo consequentem superat antecedens ad ipsum consequentem.

16. Conversio rationis, est sumptio antecedentis ad excessum, quo superat antecedens ipsum consequentem.

17. Ex æqualitate ratio est, si plures duabus sint magnitudines, & his aliæ multitudine pares quæ binæ sumantur, & in eadem ratione: quum ut in primis, sic & in secundis prima ad ultimam sese habuerit, vel aliter sumptio extremorum per subductionem

nem

nem mediorum.

18. Ordinata proportio eſt, cùm fuerit quemadmodum antecedens ad conſequentem: ita antecedens ad conſequentem; fuerit etiam ut conſequens ad aliud quidpiam ità conſequens ad aliud quidpiam.

19. Perturbata autem proportio eſt, tribus poſitis magnitudinibus, & alijs, quæ ſint his multitudine pares, cùm ut in primis quidem magnitudinibus ſe habet antecedens ad conſequentem, ità in ſecundis magnitudinibus antecedens ad conſequentem: ut autem in primis magnitudinibus conſequens ad aliud quidpiam, ſic in ſecundis magnitudinibus aliud quidpiam ad antecedentem.

PROPOSITIO I.

SI ſint quotcunque magnitudines (A, C) quotcunque magnitudinum (B, D) æquimultiplices; tam multiplex erit una unius, quàm omnes omnium.

Demonſtrantur primæ iſtæ Propoſitiones æquimultiplicium facili quidem negotio per ſolam additionem, vel ſubtractionem ſpecioſam.

Additio Magnitudinum.

A *æqu.* 3. B
C *æqu.* 3. D

Ergo A pl. C *æqu.* 3. B pl. 3. D
Q. E. D.

PRO-

PROPOSITIO II.

SI prima (A) secundæ (B) æquè fuerit multiplex, ac tertia (C) quartæ (D); fuerit autem & quinta (E) ejusdem secundæ ità multiplex ac sexta (FG) ejusdem quartæ; erit composita ex prima, & quinta ita multiplex secundæ, ac composita ex tertia & sexta multiplex quartæ.

Additio Mensurarum.

Toties B est in A, ac D in C.
Toties B est in E, ac D in FG

Ergo *Toties* B est in A pl. E ac D in C pl. FG
Q. E. D.

Nota, heic fieri additionem non magnitudinum ipsarum expositarum, sed mensurarum sivè, (ut aiunt) *Quotientium*.

PROPOSITIO III.

SI prima (A) secundæ (B). æquè fuerit multiplex ac tertia (C) quartæ (D) fuerit autem & quinta (EI) ita multiplex ipsius primæ, ac sexta (FM) ipsius tertiæ erit etiam quinta secundæ ità multiplex ac sexta quartæ.

Solvatur EI in suas partes, quarum quælibet æquatur ipsi A, atque solvatur FM in suas partes quarum quælibet ipsi C æquatur.

Additio

Additio Mensurarum.

Toties B est in EG ac D in FK
Toties B est in GH ac D in KL
Toties B est in HI ac D in LM

Ergo *Toties* B est in EG pl. GH pl. HI, ac est D in FK pl. KL pl. LM. Q. E. D.

PROPOSITIO IV.

SI magnitudo (AB) magnitudinis (CD) ità fuerit multiplex ac ablata (AE) ablata (CM); erit residua (EB) ità multiplex residua (MD) ac est tota totius.

Sumatur quantitas GA ita multiplex reliquæ MD ac est ablata ablatæ, sive tota totius; & fiat.

Additio Magnitudinum.

GA *æqu.* 2. MD
AE *æqu.* 2. CM

Ergo GA pl. AE (GE) *æqu.* 2. MD pl. 2. CM, hoc est, *hyp.* ipsi AB; adeòque, *6. ax.* æquantur GE, & AB; ac proinde dempta communi AE; erit 3. *ax.* EB æqu. ipsi GA, cui, *constr.* æquantur 2. MD; ergo & EB æquatur 2. MD. Q. E. D.

PROPOSITIO V.

SI duæ magnitudines (AB, CD) duarum magnitudinum (E, F) sint æquimultiplices, & detracta sint ex multiplicibus earundem submultiplicium aliæ æquimultiplices; etiam reliquæ ipsarum submulti-

multiplicium erunt vel æquimultiplices, vel ipsis æquales,~~vel æquè numeros~~.

Subtractio Mensurarum.

Toties E est in AB, ac est F in CD
Toties E est in AG, ac est F in CH

Ergo *Toties* E est in GB, ac est F in HD.
Q. E. D.

Nota, posteriores quotientes, seù mensuras sibi mutuò æquales, quæ nempè sunt in secundo ordine subtrahi à Quotientibus æqualibus primi ordinis.

PROPOSITIO VI.

SI prima (A) ad secundam (B) ità se habeat, ac tertia (C) ad quartam (D), & dentur quinta & sexta æquimultiplices primæ & tertiæ, necnon septima & octaua æquimultiplices secundæ & quartæ, ità se habebit multiplex primæ ad multiplicem secundæ, ac multiplex tertiæ ad multiplicem quartæ.

Sumantur I & K ipsarum E & F æquimultiplices, ità etiam L & M æquimultiplices, ipsarum G & H; erunt etiam, 3. 5. I & K æquimultiplices ipsarum A & C, atque L & M erunt æquimultiplices ipsarum B & D: atqui, *hyp.* est A ad B vt C ad D; ergo, *6. def.* 5. I & K vel sunt una majores, vel æquales, vel una minores ipsis L & M; atqui, *hyp.* I & K sunt etiam æquimultiplices ipsarum E & F, atque L & M sunt æqui-

æquimultiplices ipsarum G & H; ergo 6. *def.* 5. E ad G est vt F ad H. Q. E. D.

PROPOSITIO VII.

AEquales ad eandem, eandem rationem habent, uti & eadem ad æquales.

Sumantur D & E ipsarum æqualium A & C æquimultiplices, & sumatur F utcunque multiplex ipsius B; ergo, 6. *ax.* 1. æquabuntur D & E; adeòque si D erit maj. vel min. quàm F, vel eidem æqualis; erit etiã E maj. vel min. quàm F, vel eidem æqualis: ac proindè, 6. *def.* 5. erit A ad B ut C ad B: atque eadem ratione erit B ad A ut B ad C. Q. E. D.

PROPOSITIO VIII.

INæqualium magnitudinũ majór (AB) ad eandem (D) habet majorem rationem quàm minor (C): & eadem ad minorem habet majorem rationem quàm ad majorem.

Ex majori AB aufer EB æqualem minori C, sumaturque HG tam multiplex ipsius EB quàm sit GF reliquæ AE: & multiplicetur D donec ejus multiplex K major evadat, quàm HG sed minor quàm FH. Quoniam ergo HG ipsius EB tam multiplex est quàm GF ipsius AE; erit, 1. 5. HG pl. GF (HF) ipsius EB pl. AE [AB] tam multiplex quàm unà HG unius EB (C): Atqui HF major est quàm K, & hæc maj. quàm HG; ergo, 8. *def.* 5. AB ad D erit in maj.

ratione

rationę quàm C ad D. Deindè, quoniam HG minor eſt quàm K, idcircò eodem modo oſtendetur eſſe D ad C in maj. ratione, quàm D ad AB. Q. E. D.

PROPOSITIO IX.

QVæ ad eandem (B) eandem rationem habent ſunt æquales inter ſe!, uti & illæ ad quas eadem eandem habet rationem.

1. *Hyp.* Sit A ad B ut C ad B; dico æquari A & C: Nam ſi A ſit maj. vel min. quã C; erit, 8. 5. A ad B in maj. vel in min. ratione quàm C ad B contra *hyp.*

2. *Hyp.* Sit B ad A ut B ad C; dico æquari A & C; nam ſi A maj. vel min. eſſet quàm C; erit, 8. 5. B ad A in maj. vel in min. ratione quàm B ad C contra *hyp.*

PROPOSITIO X.

AD eandem magnitudinem (B) rationem habentium, quæ majorem rationem habet, illa major eſt: Ad quàm verò eadem majorem rationem habet, illa minor eſt.

Sit in maj. ratione A ad B, quàm C ad B; erit A major quàm C: nam ſi æquarentur A & C; eſſet, 7. 5. A ad B ut C ad B contra *hyp.*: Sin A min. eſſet quàm C; erit, 8. 5. in minori ratione A ad B, quàm C ad B contra *hyp.*

Sit 2. B ad C in majori ratione quàm B ad A; erit A major quàm C: Nam ſi æqua-

rentur

rentur C & A; erit, 7.5. B ad A ut B ad C contra *hyp.*: Vel si C major sit quàm A; erit, 8.5. B ad A in majori ratione quàm B ad C, contra *hyp.*

PROPOSITIO XI.

QUæ alicui rationi sunt similes, sunt etiam similes inter se.

Sit A ad B, ut E ad F & hæc ut C ad D; Atq; sume G, I, H æquimultiplices ipsarũ A, E, C, tum sume K, M, L, æquim. ipsarum B, F, D. Quoniam, *hyp.* est A ad B ut E ad F, si G est maj. vel min. quàm K, vel ipsi æqualis; erit, *6.def.*5. I maj. vel min. quã M vel ipsi æqualis: sed quia etiam, *hyp.* est E ad F ut C ad D; si I maj. vel min. est quàm M, vel eidem æqualis; erit etiam, *6.def.*5. H maj. vel min. quàm L, vel ipsi æqualis: Ergo si G sit maj. vel min. quàm K vel illi æqualis; erit etiam H maj. vel min. quàm L, vel ipsi æqualis; adeòque, *6.def.*5. erit A ad B ut C ad D. Q. E. D.

PROPOSITIO XII.

SI sint quotcunque magnitudines proportionales; erunt omnes antecedentes ad omnes consequentes sicuti una antecedentium ad unam consequentium.

Sume G, H, I æquimultiplices antecedentium A, C, E, atque sume K, L, M æquimultiplices consequentium B, D, F; erit ergo, 1.5. tam multiplex una G unius A, quàm omnes G pl. H pl. I omnium A pl.

C

C pl. E: & tam multiplex una K unius B quàm omnes K pl. L pl. M omnium B pl. D pl. F. Quoniam autem, *hyp.* est A ad B, vt C ad D, & hæc vt E ad F; si G erit maj. vel min. quàm K, vel ipsi æqualis; erit etiam *6.def.*5. H maj. vel min. quàm L vel ipsi æqualis, necnon I maj. vel min. quàm M vel ipsi æqualis; ac proindè si G est maj. vel min. quàm K, vel ipsi æqualis; erunt etiam G pl. H pl. I. maj. vel min. quàm K pl. L pl. M vel ipsis æquales; ergo, *6.def.*5. erit A ad B vt A pl. C pl. E ad B pl. D pl. F. Q. E. D.

PROPOSITIO XIII.

SI prima (A) ad secundam (B) habuerit eandem rationem, quàm tertia (C) ad quartam (D); tertia verò ad quartam majorem rationẽ habeat quàm quinta (E) ad sextam (F); etiam prima ad secundam majorem rationem habebit, quàm quinta ad sextam.

Sumantur æquimultiplicia tam antecedentium, quàm consequentium: quoniam est, *hyp.* A ad B ut C ad D; si H maj. erit quàm L; erit, *6.def.*5. G maj. quàm K: sed quia *hyp.* est in maj. ratione C ad D quàm E ad F; fieri potest *8.def.*5. ut H sit maj. quã L, & I non maj. quàm M: ergo fieri potest ut G sit major quàm K & I non maj. quàm M: ergo, *8.def.*5. erit in majori ratione A ad B, quàm E ad F. Q. E. D.

Hinc verò patet, quòd si A ad B sit in maj. rat. quàm C ad D, & hæc in maj. rat. quàm

quàm C ad D, & hæc in maj. rat. quàm E ad F, erit A ad B in maj. rat. quàm E ad F. Et sic de minori ratione dictum puta.

PROPOSITIO XIV.

SI prima ad secundam eandem rationem habuerit quàm tertia ad quartam, prima verò fuerit major, vel minor quàm tertia, vel eidem æqualis; erit etiam secunda major, vel minor quàm quarta, vel eidem æqualis.

Sit A major quàm C; erit, 8.5. in maj. rat. A ad B, quàm C ac B; atque si C ad B est in minori rat. quàm A ad B, & hæc in eadem rat. quàm C ad D, erit, 13. 5. C ad B in minori rat. quàm C ad D; ergo, 10.5. B erit maj. quàm D. Tum si A minor sit quàm C; erit eodem modo B minor quàm D: Si A, & C æquentur; erit, 7.5. C ad B ut A ad B, & hæc ut C ad D: ergo, 9.5. B & D æquantur. Q. E. D.

Hinc à fortiori si A ad B sit in minori ratione quàm C ad D, atque A major sit quàm C; erit B major quàm D: atque ità de æquali, vel minori ratione cæterorum dictum puta.

PROPOSITIO XV.

SVb multiplices inter se cum æquè multiplicibus inter se etiam comparatis, sunt in eadem ratione.

Sint AG, GB partes ipsius multiplicis AB ipsi C æquales: atque DH, HE partes

tes multiplicis DE sint æquales ipsi F: Harum partium numerus illarum partiũ numero æqualis ponitur. Quoniam ergo est AG ad DH, 7.5. vt C ad F, & hæc, 7.5. ut GB ad EH; erit, 11. & 12. 5. AG pl. GB ad DH pl. HE, vt C ad F. Q.E.D.

PROPOSITIO XVI.

SI quatuor magnitudines proportionales fuerint; etiam viciſſim, sivè alternãdo proportionales erunt.

Sit A ad B vt C ad D: & sumantur E & F æquimultiplices ipsarum A & B, tum sume G & H æquimultiplices ipsarum C & D: Itaque erit E ad F, 15.5. vt A ad B, quæ sunt, *hyp.* vt C ad D, quæ sunt, 15.5. vt G ad H: ergo si E maj. vel min. sit quã G, vel ipsi æqualis; erit etiam, 14.5. F maj. vel min. quàm H, vel ipsi æqualis; adeòq; *6. def.*5. erit A ad C vt B ad D. Q.E.D.

PROPOSITIO XVII.

SI compositæ magnitudines proportionales fuerunt, hæ quoque diviſæ proporportionales erunt.

Dico si sit AB ad CB vt DE ad FE; fore AC ad CB vt DF ad FE.

Nam sume GH & HL, IK & KM æquimultiplices ipsarum AC & CB, DF & FE: itèm sume LN & MO æquimultiplices earundem consequentium CB & FE. Cæterum tota GL totius AB tam multiplex est, 1.5. quàm una GH unius AC, idest, *constr.* quàm una IK unius DF, idest, 1.5. quãm tota IM totius DE: item HN (HL pl. LN) ipsius CB æquè multiplex est, 2.5. ac KO (KM pl. MO) ipsius FE. Quoniam igitur est, *hyp.* AB ad CB vt DE ad EF; si GL sit major, vel minor quàm HN, vel ipsi æqualis; erit, *6.def.5.* IM maj. vel min. quã KO vel eidem æqualis: itaq; ablatis utrinque communibus HL, KM; si reliqua GH sit maj. vel min. quàm LN, vel ipsi æqualis erit etiam IK maj. vel min. quàm MO vel ipsi æqualis: adeòque erit, *6.def.5.* AC ad CB vt DF ad FE. Q.E.D.

PROPOSITIO XVIII.

SI divisæ magnitudines sint proportionales; hæ quoque Composita proportionales erunt.

Dico si sit AB ad BC, vt DE ad EF; fore AB pl. BC ad BC, ut DE pl. EF ad EF.

Sit (si f. p.) AB pl. BC ad BC, ut DG pl. GF ad GF, & minor sit ipsa GF quàm EF; ergo, 17.5. erit AB ad BC vt DG ad GF; sed etiam est, *hyp.* AB ad BC ut DE ad EF; ergo, 11.5. erit DG ad GF ut DE ad EF: atqui est DG major quàm DE; ergo, 14.5. erit GF major, quàm EF pars quàm totum. Q.E.A.

PROPOSITIO XIX.

SI sit tòtum ad tótum, quemadmodum ablatum ad ablatum; erit etiam reliqum ad reliqum, sicut totum ad totum. Deindè si ità se habeat aliquod totum ad

ali-

aliquam sui partem, ac ad aliud totum ad aliquam sui partem; erit, Convertendo primum antecedens ad semetipsum dempto consequente ac secundum antecedens ad semetipsum dempto consequente.

Dico 1.: Si sit AB ad DE vt AC ad DF; fore CB ad FE vt AB ad DE. Quoniam enim, *hyp.* est AB ad DE vt AC ad DF; erit, *altern.* AB ad AC vt DE ad DF; ergo erit, *Divid.* CB ad AC vt FE ad DF; ergo iterùm, *altern.* est CB ad FE ut AC ad DF, quæ sunt, *hyp.* vt AB ad DE; ergo est, 11.5. CB ad FE vt AB ad DE.

Q.E.D.

Dico 2.: Si sit AB ad CB vt DE ad FE; fore AB ad AC vt DE ad DF. Quoniã enim *hyp.* est AB ad CB vt DE ad FE; erit, *altern.* AB ad DE ut CB ad FE; ergo erit, (1. *parte huj.*) AB ad DE ut AC ad DF; atque iterùm, *altern*, AB ad AC, ut DE ad DF. Q.E.D.

PROPOSITIO XX.

SI sint tres magnitudines (A, B, C) & ipsis aliæ æquales numero (D, E, F) quæ binæ & in eadem ratione ordinata sumantur: Si primarum trium, prima erit maj. vel min. quàm tertia, vel eidem æqualis; erit pariter trium secundarum prima maj. vel min. quàm tertia, vel eidem æqualis.

Sit A maj. quàm C: itaque erit, *hyp. & invert.* F ad E ut C ad B, quæ sunt, *hyp.*

& 8. 5. in min. rat. quàm A ad B quæ sunt *hyp.* ut D ad E; ergo, 13.5. erit in min. rat. F ad E quàm D ad E; adeòque, 10.5. D est maj. quàm F.

Sint deindè A & C æquales: ergo erit, *hyp. & invert.* F ad E ut C ad B, quæ sunt *hyp.* & 7.5. ut A ad B, quæ sunt, *hyp.* ut D ad E; ergo est, 11.5. F ad E ut D ad E; adeòque, 9.5. D & F æquantur. Q.E.D.

PROPOSITIO XXI.

SI sint tres magnitudines, (A, B, C) & & ipsis aliæ (D, E, F) æquales numero, quæ binæ sumantur, & in eadem ratione perturbata, sit autem primarum prima maj. vel min. quàm tertia, vel eidem æqualis; erit etiam secundarum prima maj. vel min. quàm tertia, vel eidem æqualis.

Sit A maj. quàm C. Quoniam est E ad D, *hyp. & invert.* ut C ad B: quæ sunt, *hyp.* & 8.5. in min. rat. quàm A ad B, quæ sunt, *hyp.* ut E ad F; ergo est, 13.5. in min. rat. E ad D quã E ad F; adeoque, 10.5. D maj. est quàm F. Sint A & C sibi mutuò æquales; ergo erit, *hyp. & invert.* E ad D ut C ad B, quæ sunt, *hyp.* & 7.5. ut A ad B, quæ sunt *Hyp.* ut E ad F; ergo est, 11.5. E ad D ut E ad F; adeòque, 9.5. D & F æquantur. Q.E.D.

PROPOSITIO XXII.

SI sint quotcunq; magnitudines (A, B, C) & aliæ ipsis æquales numero (D, E, F)

quæ

quæ bina, & in eadem ratione ordinata sumantur; erit prima ad ultimam in primis, sicut prima ad ultimam in secundis.

Sume G & H ipsarum A & D: Tum sume I & K ipsarum B & E: atque tum sume L & M ipsarum C & F æquimultiplices. Quoniam ergo est, *hyp.* A ad B ut D ad E; erit, 6.5. G ad I ut H ad K: & quoniam, *Hyp.* est B ad C ut E ad F; erit, 6.5. I ad L ut K ad M; ergo G, I, & L atque H, K & M erunt quoque in proportione ordinata; adeòque, 20.5. si G maj. erit vel min. quàm L vel eidem æqualis; erit pariter H maj. vel min. quàm M vel eidem æqualis; ergo erit, 6. *def.* 5. A ad C ut D ad F. Q.E.D.

PROPOSITIO XXIII.

SI sint quotcunque magnitudines (A, B, C) & aliæ ipsis æquales numero (D, E, F) quæ bina & in eadem ratione perturbata sumantur; erit prima ad ultimam in primis sicut prima ad ultimam in secundis.

Sume G, H, I ipsarum A, B, D, atque tum sume K, L, M ipsarum C, E, F æquimultiplices; erit G ad H, 15.5. ut A ad B, quæ sunt, *hyp.* ut E ad F quæ sunt, 15.5. ut L ad M: Tum quoniam est, *hyp.* B ad C ut D ad E; erit, 6.5. H ad K ut I ad L: ergo G, H, K atque I, L, M sunt etiam in ratione perturbata, adeòque, 21.5. si G maj. vel min. sit quàm K vel ipsi æqualis; erit etiam I maj. vel min. quàm M vel ipsi æqualis; ac proindè

indè erit, 6. *def.* 5. A ad C ſicut D ad F. Q.E.D.

PROPOSITIO XXIV.

SI prima (AB) ad ſecundam (C) eandem habuerit rationem quàm tertia (DE) ad quartam (F) : & quinta BG ad ſecundam habuerit eandem rationem quàm ſexta (EH) ad quartam ; erit compoſita ex prima & quinta ad ſecundam ut compoſita ex tertia & ſexta ad quartam.

Quoniam eſt, *hyp.* AB ad C, ut DE ad F, atque eſt, *hyp.* & *invert.* C ad BG ut F ad EH; erit, *ordin.* AB ad BG ut DE ad EH; ergo erit *compon.* AG ad BG ut DH ad EH: atqui eſt, *hyp.* BG ad C ut EH ad F; ergo iterum, *ordin.* erit AG ad C ut DH ad F. Q.E.D.

PROPOSITIO XXV.

SI quatuor magnitudines inæquales proportionales fuerint (AB, CD, E, F); maxima (AB) & minima (F) ſimul ſumptæ reliquis (CD, & E) ſimul ſumptis majores erunt.

Fiat AG æqualis ipſi *E*, & fiat CH æqualis ipſi F. Quoniam ergo eſt, *hyp.* AB ad CD ut E ad F, quæ ſunt, *conſtr.* & 7. 5. ut AG ad CH; erit, 19. 5. AB ad CD ut GB ad HD: ſed AB, *hyp.* major eſt quàm CD; ergo, 14. 5. GB major eſt quàm HD: atqui *conſtr.* F pl. AG æquantur ipſis E pl. CH; ergo ſi primis addideris

ma-

majorem GB, & secundis minorem HD; erunt, 4. *ax.* 1. F pl. AG pl. GB majores quàm E pl. CH pl. HD. Q. E. D.

PROPOSITIO XXVI.

SI prima (A) ad secundam (B) majorē habuerit rationem quàm tertia (C) ad quartam (D); erit invertendo secunda ad primam in minori ratione quàm quarta ad tertiam.

Concipe, se habere E ad B ut C ad D: Itáque erit A ad B, *hyp.* in maj. rat. quàm C ad D, quæ sunt, *posit.* ut E ad B; ergo, 13.5. erit in ma. rat. A ad B quàm E ad B; adeòque, 10.5. A major est quàm E; ergo, 8.5. in min. rat. est B ad A, quàm B ad E, quæ sũt, *hyp.* & *invert.* ut D ad C; ergo, 13.5. est in min. rat. B ad A quàm D ad C. Q. E. D.

PROPOSITIO XXVII.

SI prima (A) ad secundam (B) erit in majori ratione quàm tertia (C) ad quartam (D); erit etiam alternando prima ad tertiam in majori ratione quàm secunda ad quartam.

Concipe, se habere E ad B ut C ad D: Itaque in maj. est rat. *hyp.* A ad B quàm C ad C ad D, quæ sunt *posit.* ut E ad B; ergo, 13.5. A ad B est in maj. rat. quàm E ad B; adeoque, 10.5. A major est quàm E; ergo, 8.5. est in maj. rat. A ad C quàm E ad C, quæ sunt, *hyp* & *altern.* ut B ad D ; ergo, 13.5. est in maj. rat. A ad C quàm B ad D. Q. E. D.

PROPOSITIO XXVIII.

Si prima (A) ad secundam (B) habuerit majorem rationem quàm tertia (C) ad quartam (D); erit quoque composita ex prima & secunda ad secundam in majori ratione quàm composita ex tertia & quarta ad quartam.

Concipe se habere E ad B ut C ad D: igitur A ad B est, *hyp.* in maj. rat. quàm C ad D quæ sunt, *posit.* ut E ad B; ergo, 13.5. A ad B est in maj. rat. quam E ad B; adeoq; 10.5. A major est, quàm E : ergo 4. *ax.* A pl. B maj. est quàm E pl. B ; adeòq; in maj. est rat. A pl. B ad B, 8.5. quàm E pl. B ad B, quæ sunt *hyp.* & *comp.* ut C pl. D ad D. ergo, 13.5. sunt in maj. rat. A pl. B ad B, quàm C pl. D ad D. Q. E. D.

PROPOSITIO XXIX.

Si (A pl. B) composita ex prima & secunda ad secundam (B) majorem habuerit rationem, quàm (C pl. D) composita ex tertia & quarta ad quartam (D); habebit quoq; dividendo prima ad secundã maiorem rationem, quàm tertia ad quartam.

Concipe, se habere E pl. B ad B ut C pl. D ad D; erit ergo in maj. rat. A pl. B ad B, *hyp.* quàm C pl. D ad D, quæ sunt *posit.* ut E pl. B pl. B ad B. ergo, 13.5. est in maj.rat. A pl. B ad B, quàm E pl. B ad B; adeòque, 10.5. A pl. B maj.est, quàm E pl. B. ergo, 5.*ax.* A major est quàm E; adeoque, 8.5. erit in maj.rat. A ad B, quàm E ad B, quæ sunt, *hyp.* & *divid.* ut C ad D. ergo, 13.5. est in maj.rat. A ad B, quàm C ad D. Q. E. D.

PROPOSITIO XXX.

SI (A pl. B ad B) composita ex prima & secunda ad secundam majorem habuerit rationem, quàm (C pl. D ad D) composita ex tertia & quarta ad quartam; erit convertendo composita ex prima, & secunda ad primam in min.rat. quàm composita ex tertia, & quarta ad quartam.

Quoniam est, *hyp.* in maj. rat. A pl. B ad B quàm C pl. D ad D; erit *divid.* in maj. rat. A ad B, quàm C ad D: ergo erit *invert.* in min.rat. B ad A, quàm D ad C: ergo erit *comp.* in min.rat. B pl. A ad A, quàm D pl. C ad C. Q. E. D.

PROPOSITIO XXXI.

SI fuerit major proportio totius (A pl. B) ad totum (C pl. D) quàm ablati (A) ad ablatum (C); erit subtrahendo reliquum ad reliquum in minori ratione quàm totum ad totum.

Quoniam, *hyp.* est in maj.rat. A pl. B ad C pl. D, quàm A ad C; erit *altern.* A pl. B ad A, quàm C pl. D ad C; ergo erit *convert.*

in min.rat. A pl.B ad B quàm C pl.D ad D; adeoq; iterum, *altern.* erit in min.rat. A pl. B ad C pl. D quàm B ad D. Q. E. D.

PROPOSITIO XXXII.

SI sint tres magnitudines (A, B, C) & alia ipsis æquales numero (D, E, F) sitque major proportio primæ priorum ad secundam, quàm prima posteriorum ad secundam: Atque major etiam proportio secundæ priorum ad tertiam, quàm secundæ posteriorum ad tertiam; erit etiam ordinando major proportio primæ priorum ad tertiam, quàm primæ posteriorum ad tertiā.

Concipe se habere in eadem ratione ordinata ipsas H, G, C ac sunt D, E, F; erit B ad C, *hyp.* in maj.rat. quàm E ad F, quæ sunt *posit.* ut G ad C: ergo, 13.5. est in maj. rat. B ad C, quàm G ad C: adeoque, 10.5. B maj. est quàm G: ergo, 8.5. A ad G est in majori ratione quàm A ad B, & hæc, *hyp.* in maj.rat. quàm D ad E; quæ sunt *posit.* ut H ad G; adeòque, 13.5. est in maj. rat. A ad G quàm H ad G: ergo, 10.5. A maj. est quàm H: Igitur, 8.5. est in maj. rat. A ad C quàm H ad C quæ sunt *positione & ordi.* ut D ad F: ergo, 13.5. est in majori rat. A ad C quàm D ad F. Q. E. D.

PROPOSITIO XXXIII.

SI sint tres magnitudines (A, B, C) & alia ipsis æquales numero (D, E, F), fueritque major proportio primæ priorum

ad

ad secundam, quàm secunda posteriorum ad tertiam: Itemque major proportio secundæ priorum ad tertiam, quàm primæ posteriorũ ad secundam; erit etiam ex æquò perturbatè major proportio primæ priorum ad tertiam quàm primæ posteriorum ad tertiam.

Concipe se habere H, G, C in eadem ratione perturbata cum ipsis D, E, F; erit ergo, *hyp.* in majori ratione B ad C, quàm D ad E, quæ sunt *posit.* ut G ad C: ergo, 13.5. est in majori ratione B ad C quàm G ad C, adeòque, 10. 5. B maj. est quàm G: ergo: 8.5. est in majori ratione A ad G quàm A ad B, quæ sunt, *hyp.* in maj. rat. quàm E ad F quæ sunt *posit.* ut H ad G: ergo, 13.5. est in maj. rat. A ad G quàm H ad G: adeoque, 10.5. A maj. est quàm H: ergo, 8.5. A ad C est in maj. ratione quàm H ad C; quæ sunt *posit. & perturb.* ut D ad F: ergo, 13.5. est in maj. rat. A ad C, quàm D ad F. Q.E.D.

PROPOSITIO XXXIV.

SI sint quotcumq; magnitudines (A, B, C) & aliæ ipsis æquales numero (D, E, F): sitque major ratio primæ priorum, ad primam posteriorum, quàm secundæ ad secundam: & hæc major quàm tertiæ ad tertiã: & sic deinceps; habebũt omnes simul priores ad omnes simul posteriores majorem rationem quàm omnes priores, dempta prima, ad omnes posteriores, dempta prima. Contra verò; prima priorum ad primam

poste-

posteriorum erit in maj. rat. quàm omnes priores ad omnes posteriores. Necnon, contra, omnes priores ad omnes posteriores erũt in maj. rat. quàm ultima priorum ad ultimam posteriorum.

1. Quoniam est, *hyp.* in maj. rat. B ad E quàm C ad F; ergo est *altern.* in maj. rat. B ad C, quàm E ad F: ergo est, *comp.* in majori rat. B pl. C ad C, quàm E pl. F ad F: ergo est *alt.* in maj. rat. B pl. C ad E pl. F quàm C ad F: ergo, *subtr.* est in majori rat. B ad E quàm B pl. C ad E pl. F; sed est, *hyp.* in maj. rat. A ad D, quàm B ad E; ergo, 13. 5. est in maj. rat. A ad D quàm B pl. C ad E pl. F; ergo *altern.* est in maj. rat. A ad B pl. C quàm D ad E pl. F; ergo *compon.* est in maj. rat. A pl. B pl. C ad B pl. C quàm D pl. E pl. F ad E pl. F; ergo *altern.* est in maj. rat. A pl. B pl. C ad D pl. E pl. F, quàm B pl. C ad E pl. F. Q. E. D.

2. Ergo erit *subtr.* in maj. rat. A ad D quàm A pl. B pl. C ad D pl. E pl. F. Q. E. D.

3. Quoniam ergo est, *ut prius* in maj. rat. A pl. B pl. C ad D pl. E pl. F quàm B pl. C ad E pl. F, & hæc, *ut prius* in maj. rat. quàm C ad F; erit, 13. 5. in maj. rat. A pl. B. pl. C ad D pl. E pl. F, quàm C ad F. Q. E. D.

LAVS DEO.

LIBER

LIBER VI.

DEFINITIONES.

1. SImiles figuræ rectilineæ sunt, quæ & angulos singulos singulis æquales habent, atque etiam latera, quæ circum angulos æquales, proportionalia.

2. Reciprocæ autem figuræ sunt, cùm in utraque figura antecedentes, & consequentes rationum termini fuerint.

3. Secundum extremam, & mediam rationem recta linea secta esse dicitur, cùm ut tota ad majus segmentum, ita majus ad minus se habuerit.

4. Altitudo cujusque figuræ, est linea perpēdicularis à vertice ad basim deducta.

5. Ratio ex rationibus componi dicitur, cùm rationum quantitates inter se multiplicatæ aliquam effecerint rationem.

PROPOSITIO I.

TRiangula (BAC, CAD) & Parallelogrammata (CE, CF) ejusdem altitudinis se habent sicuti bases (BC CD).

Sumantur BG, GH æquales ipsi BC; erit, 38.1. triangulum HAC æquè triplum ▵li BAC, ac est ipsa HC ipsius BC: tum fiat DI æqualis ipsi CD; erit etiam, 38.1. ▵lū CAI æquè duplum ▵li CAD, ac est ipsa CI ipsius CD. Quoniam ergo, 38.1. si HC major sit, vel minor, ipsā CI, vel ipsi æqualis,

lis, erit etiam 3glum HAC majus, vel minus 3glo CAI, vel ipsi æquale; idcircò, *6.def.5.* erit BC ad CD, ut BAC ad CAD, quæ sunt, 34. 1. & 15. 5. ut pgrum EC ad pgrum FC. Q. E. D.

COROLL. Hinc 3gla, & pgra, quorum æquales sunt bases, se habent ut altitudines.

PROPOSITIO II.

SI ad unum trianguli latus ducta fuerit parallela; hæc secabit proportionaliter reliqua trianguli latera: & è converso.

Dico, si DE sit parallela ad BC; fore AD ad DB, ut AE ad EC; &, si sit AD ad DB, ut AE ad EC; fore ipsam DE parallelam ad BC.

1. *Hyp.* Quoniam *hyp.* & 37. 1. æquantur 3gla DEB, & EDC; idcirco

Æqu. hæ Rationes.
- AD ad DB [1.6.]
- AED ad DEB (7.5.)
- AED ad EDC (1.6.)
- AE ad EC.

Q. E. D.

2. *Hyp.* Quoniam

Æqu. hæ Rationes.
- AED ad DEB (1.6.)
- AD ad DB (*hyp.*)
- AE ad EB (1.6.)
- AED ad EDB.

erit, 11. & 9. 5. 3glum DEB æquale ipsi EDC, sed & utrunque ipsorum est super eadem basi DE; ergo, 39. 1. DE parallela est ad BC. Q. E. D.

COROLL. Quinimò, si plures ad unum 3gli latus parallelæ ductæ fuerint, erunt

omnia

omnia laterum segmenta sibi mutuò proportionalia.

PROPOSITIO III.

SI trianguli (BAC) angulus (in A) divisus sit bifariam; se habebunt segmenta lateris secti sicut reliqua trianguli latera, & è converso.

Dico, si æquētur anguli BAD, & DAC; fore BD ad DC, ut BA ad AC, & è conversò. In BA protracta fiat AE æqualis ipsi AC, & ducatur EC.

1. *Hyp.* Quoniam AE, & AC æquantur; idcircò

Æqu. hi anguli { ACE (5.1.) AEC (32.1.) ½. BAC (*hyp.*) DAC;

Adeòque, 27.1. DA est parallela ad CE; ac proindè, 2.6. erit BD ad DC ut BA ad AE, quæ sunt, *constr.* & 7.5. ut BA ad AC. Q. E. D.

2. *Hyp.* Quoniam est, *hyp.* BD ad DC, ut BA ad AC, quæ sunt, *constr.* & 7.5. ut BA ad AE; erit, 2.6. AD parallela ad EC, ac proindè

Æqu. hi anguli { BAD, (29.1.) AEC (5.1.) ACE [29.1.] DAC. Q. E. D.

PROPOSITIO IV.

TRiangula æquiangula (ABC, DCE) habent latera proportionalia circum æquales angulos, & homologa sunt latera,

quæ

quæ æqualibus angulis subtenduntur.

Statue latus BC in directum lateri CE, & produc BA, & ED donec sibi mutuò occurrant in F. Quoniam æquantur, *hyp.* anguli B, & DCE; erit, 28. 1. BF parallela ad CD: Item, quoniam, *hyp.* æquantur anguli BCA, & E; erit etiam, 28. 1. CA parallela ad EF; figura ergo FACD est parũ; adeòque AF æquatur ipsi CD, & FD ipsi AC: Itaque est, 2.6. BA ad AF (CD) ut BC ad CE, & *altern.* BA ad BC ut CD ad CE. Tũ erit, 2.6. BC ad CE ut FD (AC) ad DE, & *altern.* BC ad AC ut CE ad DE; adeòque erit *ordin.* BA ad AC ut CD ad DE. Q. E. D.

COROLL. Hinc si in triangulo FBE ducatur uni lateri FE parallela AC; erit triangulum ABC simile toti FBE.

PROPOSITIO V.

SI duo triangula (ABC, EGF) habeant latera proportionalia, erunt æquiangula.

Fiat angulus DEF æqualis ipsi C, & DFE æqualis ipsi A; æquabuntur etiam, 32. 1. B, & D; adeòq, erit, 4.6. DE ad EF ut BC ad AC, quæ sunt, *hyp.* ut EG ad EF; ergo 11. & 9.5. æquantur DE, & EG: & eodem modo ostendetur æquari FD & FG; sed & EF est communis; ergo, 8. 1. triangula GEF, DEF, adeòque & ABC sunt sibi mutuò æquiangula. Q. E. D.

PRO-

PROPOSITIO VI.

SI duo triangula (ABC, EGF) habeant unum angulum (C) æqualem uni angulo (GEF) latera verò æqualem hujusmodi angulum intercipientia sint proportionalia; erunt omninò æquiangula, angulosque æquales habebunt, sub quibus homologa latera subtenduntur.

Fiat angulus DEF æqualis ipsi C, & DFE æqualis ipsi A; erit, 32. 1. tertius B tertio D æqualis; adeòque erit, 4. 6. DE ad EF ut BC ad AC, quæ sunt *hyp.* ut GE ad EF; ergo, 11. & 9. 5. æquantur GE & DE, sed & EF est communis, atque *constr.* anguli in E æquantur; ergo, 4. 1. æquiangula erunt inter se triangula GEF, DEF, adeòque & ABC. Q. E. D.

PROPOSITIO VII.

SI duo triangula habeant unum angulũ æqualem: Item latera secundum angulum intercipientia proportionalia sint: & habeant denique tertium angulum ejusdem speciei; erunt omninò æquiangula.

Dico, si anguli A & D æquentur, & sit AB ad BC ut DE ad EF, atque anguli C & F sint ejusdem speciei; erunt æquiangula ipsa triangula.

Si negas, æquari angulos E, & ABC; fiat ABG æqualis ipsi E: atqui, *hyp.* æquãtur A & D; ergo etiam, 32. 1. æquabuntur

AGB

AGB & F; adeòque, 4.6. erit AB ad BG ut DE ad EF, quæ sunt *hyp.* ut AB ad BC; ergo, 11. & 9.5. æquabuntur BG & BC, ac proindè, 5.1. angulus BGC angulo C; adeòque, 32.1. uterque illorum est acutus; ergo, 13.1. angulus AGB (F) est obtusus; adeòque anguli F & C non sunt ejusdem speciei; contra hyp.

PROPOSITIO VIII.

SI in triangulo rectangulo ab angulo recto ducta sit perpendicularis ad latus oppositum; resultabunt duo triangula similia toti & inter se.

Quoniam enim angulus B est cõmunis in triangulis rectangulis BAC & BAD; ipsa erunt, 32.1. sibi mutuò æquiangula: ità etiam angulus C communis est in 3glis rectangulis BAC, & DAC; adeòque, 32.1. sunt & ipsa inter se æquiangula: Quia ergo in triangulis rectangulis BAD & DAC angulus B æquatur, *ut prius*, angulo DAC; erunt, 32.1. etiam ipsa sibi mutuo æquiangula. Q.E.D.

PROPOSITIO IX.

A Data recta linea (AB) imperatam partem ($\frac{1}{3}$) abscindere.

Ex A duc utcunque infinitam AF, in qua sume utcunque tres partes sibi mutuo æquales AH, HG, GF, & junge FB, cui duc parallelam GC; dico factum. Nam est, 2.6. AG ad GF ut AC ad CB & *compon.* AF ad GF ut AB ad CB: atqui GF est $\frac{1}{3}$. ipsius

sius AF; ergo CB est $\frac{1}{3}$. ipsius AB. Q. E. F.

PROPOSITIO X.

Lineam rectam datam (AB) secare sicut alia (AG) secta est.

Extremitates sectæ & insectæ, jungat recta GB & ex punctis S & R duc SC, RD parallelas ipsi GB; dico factum; nam si ducatur CK parallela ad AG; erit AC ad CD, 2.6. ut AS ad SR, & CD ad DB, 2.6. ut CO ad OK, quæ sunt, 34. 1. & 7. 5. ut SR ad RG. Q. E. F.

COROLL. Hinc patet methodus secandi rectam datam in quotvis æquales partes.

PROPOSITIO XI.

Datis duabus rectis lineis (AB, AC) tertiam proportionalem (CE) invenire.

Connectantur datæ lineæ ut efficiant angulum A utcunque, & ducatur BC, & ex AB protracta sume *BD* æqualem ipsi AC & per D ad *B*C duc DE parallelam, cui occurrat AC protracta in *E*; erit C*E* linea quæsita. Nam est, 2.6. A*B* ad *B*D (AC) ut AC ad C*E*. Q. *E*. F.

PROPOSITIO XII.

Datis tribus rectis lineis (AB, BC, AD) quartam proportionalem (DE) invenire.

Ducatur *BD*, ad quam per C duc C*E* parallelam,

rallelam, cui occurrat AD protracta in E; erit DE linea quæsita. Nam est, 2.6. AB ad BC ut AD ad DE. Q.E.F.

PROPOSITIO XIII.

Datis duabus rectis lineis (AB, BC) mediam proportionalem (BE) invenire.

Super tota AC describe semicirculum, & ex *B* erige perpendicularem *BE*, & trahantur AE, *CE*; erit ergo, 31.3. rectus angulus AEC; ergo, 8. & 4. 6. erit A*B* ad *BE* ut *BE* ad *BC*, adeòque *BE* est quæsita media proportionalis. Q.E.F.

COROLL. Hinc linea recta, quæ in circulo à quovis puncto diametri, ipsi diametro perpendicularis ducitur ad circumferentiam usque, media est proportionalis inter duo diametri segmenta.

PROPOSITIO XIV.

Æqualium, & unum angulum æqualem habentium parallelogrammorum (BE, BF) reciprocè proportionalia sunt latera æqualem angulum intercipientia: & è conversò.

Latera enim AB, *BC* circa æquales angulos faciant unam rectam; ergo etiam, *Schol.* 15.1. D*B*, *B*G in directum jacebunt: producantur jam ED, FC donec occurrant in H.

1. *Hyp.* Quoniam

$$\begin{array}{l}\text{Æqu. hæ}\\ \text{Rationes.}\end{array}\left\{\begin{array}{l} AB \text{ ad } BC \ (1.6.) \\ EB \text{ ad } BH \ (7.5.) \\ FB \text{ ad } BH \ (1.6.) \\ GB \text{ ad } BD; \end{array}\right.$$

erit AB ad BC ut GB ad BD. Q.E.D.

2. *Hyp.* Quoniam

$$\begin{array}{l}\text{Æqu. hæ}\\ \text{Rationes.}\end{array}\left\{\begin{array}{l} EB \text{ ad } BH \ (1.6.) \\ AB \text{ ad } BC \ (hyp.) \\ GB \text{ ad } BD \ (1.6.) \\ FB \text{ ad } BH; \end{array}\right.$$

ergo, 11. & 9. 5. æquantur *EB* & *FB*. Q.*E*.D.

PROPOSITIO XV.

Æqualium, & unum angulum (in C) æqualem habentium triangulorum (ACB, DCE) reciprocè proportionalia sunt latera æqualem angulum intercipientia: & è converso.

Disponantur *BC*, *CD* sibi in directum; ergo *Schol.* 15.1. *EC*, *CA* erunt etiam sibi in directum: trahatur jam *BE*.

1. *Hyp.* Quoniam

$$\begin{array}{l}\text{Æqu. hæ}\\ \text{Rationes.}\end{array}\left\{\begin{array}{l} AC \text{ ad } CE \ (1.6.) \\ ABC \text{ ad } CBE \ [7.5.] \\ DEC \text{ ad } CBE \ (1.6.) \\ DC \text{ ad } CB; \end{array}\right.$$

erit, 11. 5. AC ad *CE* ut DC ad CB. Q.*E*.D.

2. *Hyp.*

2. *Hyp.* Quoniam

Æqu. hæ Rationes. { ABC ad CBE (1.6.)
AC ad CE [Hyp.]
DC ad CB (1.6.)
DEC ad CEB;

erit, 11. & 9. 5. æquantur ABC & DEC. Q. E. D.

PROPOSITIO XVI.

SI quatuor lineæ (AB, BC, DB, BE) sint proportionales; rectangulum extremarum æquatur rectangulo mediarum: & è converso.

Disponantur sibi in directum AB, & BC; ergo etiam *Schol.* 15. 1. ob angulos rectos æquales in B, erunt sibi in directum DB, & BE: perficiantur ergo rectangula FB, GB, & producantur FE, GC donec sibi occurrant in H.

1. *Hyp.* Quoniam

Æqu. hæ Rationes. { FB ad BH (1.6.)
AB ad BC (hyp.)
DB ad BE (1.6.)
GB ad BH;

erit, 11. & 9. 5. æquātur FB & GB. Q.E.D.

2. *Hyp.* Quoniam

Æqu. hæ Rationes. { AB ad BC (1.6.)
FB ad BH (7.5.)
GB ad BH (1.6.)
DB ad BE;

ergo, 11. 5. AB ad BC ut DB ad BE. Q.E.D.

PRO-

PROPOSITIO XVII.

SI tres lineæ (AB, BC, BE) sint deinceps proportionales; rectangulum extremarum æquabitur quadrato mediæ.

Disponantur rectangulum & quadratum juxtà methodum præcedentis;

1. *Hyp.* Quoniam

Æqu. hæ Rationes. { FB ad BH (1.6.) / AB ad BC (BD) (*hyp.*) / BD ad BE (1.6.) / GB ad BH;

erit, 11. & 9. 5. rectangulum FB æquale quadrato GB, sivè BCq. Q. E. D.

2. *Hyp.* Quoniam

Æqu. hæ Rationes. { AB ad BC (1.6.) / FB ad BH (*hyp.* & 7.5.) / GB ad BH (1.6.) / DB ad BE;

erit, 11.5. AB ad BC ut DB [BC] ad BE. Q. E. D.

PROPOSITIO XVIII.

A Data recta linea (AB) dato rectilineo (CDFE) simile similiterque positum rectilineum (ABHG) describere.

Datum rectilineum resolve in triangula: tum fac angulum B æqualem angulo D & angulum BAH æqualem angulo DCF;

erit,

erit, 32.1. reliquus reliquo æqualis : Item fac angulum HAG æqualem angulo FCE, & angulum AHG angulo *CFE* æqualem ; erit etiam, 32.1. reliquus reliquo æqualis; adeòque, 2. *ax.* 1. totus angulus GHB toti *Æ*FD, uti & totus GAB toti *ECD* æquabitur ; adeòque polygona sunt sibi mutuò æquiangula . Cæterùm proportionalitas laterum patet ;

Nam, 4.6. erit GA ad AH ut *EC* ad *CF* & AH ad AB ut *CF* ad *CD* ; ergo *ordin.* erit GA ad AB ut *EC* ad *CD* . Ita etiam . 4.6. erit GH ad HA ut *Æ*F ad F*C* , & HA, ad HB ut F*C* ad FD ; ergo etiam *ordin.* erit GH ad HB ut *EF* ad FD : præter id quod est , 4. 6. AG ad GH ut *CE* ad *E*F , atque AB ad BH ut *C*D ad DF ; ergo omnia latera sunt sibi proportionalia . Q. *E*. D.

PROPOSITIO XIX.

Triangula similia (BAF, CDE) se se habent in duplicata ratione laterum homologorum (FB, EC).

Datis jam FB & *EC* reperiatur, 11.6. tertia proportionalis BG , quæ abscindatur ex majori BF, & ducatur AG . Igitur erit AB ad D*E* , *hyp.* & 4.6. ut BF ad *EC* , quæ sunt *constr.* ut *EC* ad GB ; ergo, 11.5. AB ad D*E* sunt reciprocè ut *EC* ad GB , sed & æquantur, *hyp.* anguli B & E ; ergo, 15.6. æquabuntur triangula AGB, & DEC : Igitur

Æqu.

Æquabitur Rationes.
- BAF ad ECD (2.5.)
- BAF ad BAG (1.6.)
- FB ad GB constr. & 5. def. 6.
- FB ad EC pl. EC ad GB [10. def. 5.)
- FB ad EC bis

Q.E.D.

COROLL. Hinc si tres lineæ proportionales fuerint; erit prima ad tertiam ut 3glum super primam descriptum ad sibi simile 3glum super secundam descriptum, atque ità etiam est 3glum super secundam descriptum ad sibi simile 3glum super tertiam descriptum.

PROPOSITIO XX.

Similia Polygona in similia triangula resolvuntur numero æqualia, & totis proportionalia: atque polygona ipsa duplicatam habent rationem laterum homologorum.

Quoniam, hyp. æquantur anguli B & G, atque est BA ad BC ut GF ad GH; erit, 6.6. 3glum BAC simile 3glo GFH, & eadē ratione 3glum DAE simile erit 3glo IFK: Atque, hyp. totus angulus BAE æquatur toti GFK; ergo residuus CAD residuo HFI æquabitur, atque ita de reliquis dictum puta. Quoniam ergo 3gla unius polygoni sunt similia 3glis alterius; idcircò,

Æqu. hæ Rationes.
BC ad GH bis (4. 6. & 12. 5.)
BC pl. CD pl. DE ad GH pl. HI pl. IK bis (19. 6.)
BAC pl. CAD pl. DAE ad GFH pl. HFI pl. IFK (15.)
pgon BE ad pgon GK.

Q. E. D.

COROLL. 1. Hinc si fuerint tres lineæ rectæ deinceps proportionales; erit prima ad tertiam ut polygonum super primam ad polygonum super secundam ad polygonum super tertiam sibi simile, similiterque descriptum.

2. Hinc etiam si figurarum similium homologa latera nota fuerint; proportio quoque figurarum innotescet, nempè inveniẽdo tertiam proportionalem.

PROPOSITIO XXI.

Quæ eidem rectilineo (FHG) sunt similia; sunt etiam inter se similia.

Quippè *hyp.* angulus B ipsi F, & hic ipsi I æquatur; adeòque B & I æquantur sibi mutuò atque ità de cæteris angulis dictum puta; undè, 4. vel 20. 6. emerget laterum proportionalitas, & adæquata similitudó.

Q. E. D.

PROPOSITIO XXII.

Si quatuor rectæ lineæ (AB, CD, EF, GH) proportionales fuerint; etiam rectilinea similia, similiterque ab eis de-

scripta

scripta proportionalia erunt;

1. *Hyp.* Quoniam

Æqu. hæ Rationes. { AIB ad CKD (19.6.)
AB ad CD bis [*Hyp.*]
EF ad GH bis (20.6.)
EM ad GO;

erit 3glum AIB ad 3glum CKD ut pgrum EM ad GO. Q. E. D.

2. *Hyp.* Quoniam

Æqu. hæ Rationes. { AB ad CD bis (19.6.)
AIB ad CKD (*hyp.*)
EM ad GO (20.6.)
EF ad GH bis;

erit, 11.5. AB ad CD ut EF ad GH. Q. E. D.

PROPOSITIO XXIII.

AEquiangula parallelogrammata inter se eam rationem habent, quæ ex lateribus componitur.

Dico fore AC ad CF ut BC ad CG pl. DC ad CE.

Nam dispositis parallelogrammis ut in apposito schemate;

Æqu. hæ Rationes { AC ad CF [5. *def.6.*]
AC ad CH pl. CH ad CF (1.6)
BC ad CG pl. DC ad CE.

Q. E. D.

PROPOSITIO XXIV.

IN omni parallelogrammo (BD) quæ circa diametrum sunt parallelogrammata (EG, HF) sunt, & toti, & sibi mutuò similia.

Siquidem EG & HF habent singula unũ angulum cum toto communẽ, atque, 29.1. alternos etiam, &, 15.1. oppositos ad verticem sibi mutuò æquales: ergo erunt inter se æquiangula. Item ʒgla EAO, BAC, & HOC, 29.1. sunt sibi mutuò æquiangula; ergo erit, 4.6. AE, ad EO ut AB ad BC, & hæc ut OH ad HC. Q. E. D.

Nota mirabilem esse hanc proprietatem sectionum factarum per diagonalem & parallelas se decussantes in parallelogrammo, nimirùm, ut quemadmodum complementa X & Z æquantur, 43.1. quoad magnitudinem spatiorum, ità etiam, 24.6. parallelogrammata M & N circa diametrũ æquentur quo ad laterum proportiones.

PROPOSITIO XXV.

DAto rectilineo (ACB) simile similiterque positum, idemque alteri dato (Z) æquale rectilineum (MON) constituere.

Applicetur, 45.1. ipsi rectæ AB parallelogrammum AF eidem figuræ ACB æquale, & protracto latere AB in infinitum; applicetur, 45.1. lateri BF parallelogrammum, BG æquale datæ figuræ Z & inter AB & BD, 13.6. inveniatur media proportionalis

tionalis MN, super quam, 18.6. fiat figura MON similis figuræ ACB; dico factum. Nam

Æqu. hæ Rationes. { AF ad MON (*constr.* & 7.5.) ABC ad MON [*constr.* & *coroll.* 20.6.] AB ad BD (1.6.) AF ad BG, (*constr.* & 7.5.) AF ad Z;

Ergo, 11. & 9. 5. æquant. MON, & Z.

PROPOSITIO XXVI.

SI à paralellogrammo (ABCD) paralellogrammum (AEFG) ablatum sit simile toti, & similiter positum; hoc circa eandem cum toto diametrum consistet.

Si negas, AFC esse communē diametrū, esto communis diameter AHC secans lineam EF in H & ducatur HI parallela ad AE; igitur erit AE ad EH, 24.6. ut AD ad DC, quæ sunt *hyp.* ut AE ad EF; ergo, 11. & 9.5. æquabuntur EH & EF, pars toti, Q. E. A.

PROPOSITIO XXVII.

OMnium paralellogrammorum (AD, AG) secundum eandem rectam lineam (AB) applicatorum, & deficientium figuris paralellogrammis (CE, KI) similibus similiterque positis ei (AD) quòd à dimidia destribitur; Maximum quidem est (AD) quòd ad dimidiam est applicatum, simile existens defectui (KI)

Nam, 43.1. æquantur inter se GE, & CG; ergo etiã, 2.ax.1. KE ipsi CI, & hoc, 36.1. ipsi AM æquatur; adeòque etiã, 2.ax.1. AG æquatur gnomoni LGM, quód minus est quàm totum CE, cui, 36.1. æquatur ipsum AD; ergo AG minus est quàm AD. Q. E. D.

PROPOSITIO XXVIII.

AD datam rectam lineam (AB) dato rectilineo (C) æquale parallelogrammum (AP) applicare deficiens figura parallelogramma (ZR) quæ similis sit alteri parallelogrammo dato (D). Oportet autem datum rectilineum (C), cui æquale (AP) applicandum est, non majus esse eo (AF) quod ad dimidiam applicatur, similibus existentibus defectibus, & ejus quod ad dimidiam applicatur, & ejus cui simile deesse debet.

Biseca AB in E, & super EB, 18.6. fac pgrum EG simile ipsi dato D; sitque EG æquale dato C pl. I: Deindè, 25.6. fac pgrum NT æquale ipsi I, & simile dato D, sivè EG: Tum duc diametrum FB, & fac FO æqualem ipsi KN, & FQ æqualem ipsi KT, atque ductis parallelis ut in schemate; erit pgrum AP id quod quæritur.

Siquidem EP, 43.1. æquatur ipsi PG; ergo, 2.ax.1. æquabuntur ZG & ER, cui, 36.1. æquatur AO; ergo iterum, 2.ax.1. æquabuntur AP & gnomon EBG: Deindè quoniam EG æquatur ipsis I pl. C sivè,

constr.

constr. ipsis NT pl. C, sivè *constr.* ipsis OQ. pl.C; idcircò dempto communi OQ; æquabitur datum C gnomoni EBG, cui, *ut prius* æquatur ipsum AP; ergo æquantur sibi mutuò C & AP. Q. E. F. Deindè, *constr.* & 24. *hujus* hæc sunt similia, nempè D, NT, EG, & ZR. Q. E. F.

PROPOSITIO XXIX.

AD datam rectam lineam (AB), dato rectilineo (C) æquale Pgrum (AN) applicare, excedens pgro (OP) simile alteri dato (D).

Biseca AB in E, &, 18.6. super EB fac pgrum EG simile dato D, atque, 25.6. fac pgrum KZ æquale figuris EG pl. C & simile dato D, sivè EG: Tum duc diametrū FB in infinitum, & fac FL æqualem ipsi IZ, & FM æqualem ipsi IK & duc cæteras parallelas; erit pgrum AN id quod quæritur.

Quoniam enim æquatur BM, 43.1. ipsi LB, & hoc, 36.1. ipsi RE; addito utrique eodē LP; erit AN æquale gnomoni LNM; Igitur

Æqu. hæc { C pl. EG (*constr.*)
KZ (*constr.*)
LM [19. *ax.* 1.]
gn. LNM pl. EG (*ut prius*, & 2. *ax.* 1.)
AN pl. EG.

ergo dempto utrinque communi EG; æquabuntur C & AN. Q. E. F.

Cæterùm, *constr.* & 2. *hujus* hæc sunt similia, nempè D, EG & OP. Q. E. F.

PROPOSITIO XXX.

PRopositam rectam lineam (AB) extrema, & media ratione secare.

Seca, 11.2. AB in G; itaut ABG æquetur ipsi AGq.; erit, 17.6. AB ad AG; ut AG ad GB. Q.E.F.

PROPOSITIO XXXI.

IN triangulo rectangulo (ABC) figura super hypothenusam (AC) descripta æquatur sibi similibus similiterque positis figuris contentis sub cæteris cruribus.

Ab angulo recto ABC demittatur BD perpendicularis in AC; erit ergo, 8.& 4.6. & *invert.* DC ad BC ut BC ad AC, atque erit AD ad AB ut AB ad AC; ergo, *coroll.* 20.6. erit DC ad AC ut BMC ad ANC, atq; erit AD ad AC ut AOB ad ANC; ergo, 24. 5. erit AD pl. DC ad AC ut AOB pl. BMC ad ANC; atqui æquantur AD pl. DC ipsi AC; ergo, 14.5. æquabuntur AOB pl. BMC ipsi ANC. Q.E.D.

PROPOSITIO XXXII.

SI duo triangula (ABC, DCE) quæ habeant duo latera duobus lateribus proportionalia (AB ad AC ut DC ad DE) possint ita in aliquo puncto (C) connecti, ut utraque latera homologa sint sibi mutuò parallela (nempe AB ad DC & AC ad DE); tum reliqua ipsorum triangulorum latera (BC & CE) sibi in directum collocata reperientur.

Siqui-

Siquidem ob AC parallelam ad DE, æquabitur, 29.1. angulus D alterno angulo ACD, qui quidem ob DC parallelam ad AB, æquabitur, 29.1. etiam angulo A; ergo anguli A & D sibi mutuò æquabuntur, sed &, *Hyp.* est AB ad AC ut DC ad DE; ergo etiam, 6.6. angulus B angulo DCE æquabitur, adeòque totus ACE æquabitur ipsis A pl. B: atqui ACB pl. A, pl. B, 32.1. æquantur duobus angulis rectis; ergo ACB pl. ACE æquabuntur etiam duobus angulis rectis, adeòq; 14.1. BCE erit una linea recta. Q.E.D.

PROPOSITIO XXXIII.

IN æqualibus circulis anguli eandem habēt rationem cum peripheriis (BC, FG) quibus insistunt; sive ad centra, sive ad peripherias cōstituti sint: insuper verò & sectores se habent in eadem ratione arcuum, quibus insistunt.

Ducantur rectæ BC, FG, & accomodetur CI æqualis ipsi BC, atque fiant GL & LP æquales ipsi FG & jungantur radii. Quoniam ergo æquantur, *constr.* subtensæ BC & CI; æquabuntur etiam, 28.3. arcus BC & CI, adeòque, 27.3. & anguli BDC & CDI; ergo arcus BI æquè multiplex est dati arcus BC ac angulus BDI anguli BDC, eademque ratione tam multiplex est arcus FP dati arcus FG quàm angulus FHP anguli FHG: verùm si arcus BI major sit vel minor quàm FP vel eidem æqualis, erit similiter, 27.3. angulus BDI maj. vel min. quàm FHP vel eidem æqualis;

ergo erit arcus BC ad FG, *6.def.* 5. ut ang. BDC ad FHG, qui sunt 20. 3. & 15. 5. ut ang. A ad E. Q. E. D.

Rursus angulus BMC æquatur 27.3. angulo CNI; ergo, 10.*def.*3. segmenta BGM, & CIN sunt similia, sed & consistũt super æquales rectas BC & CI; ergo, 24. 3. sunt etiam æqualia: Item æquantur inter se, 4. 1. âgla BDC & CDI; ergo, 2. *ax.* 1. æquabuntur sectores BDC & CDI, similique ratione æquabuntur sibi mutuò sectores FHG, GHL & LHP. Adeòque tam multiplex est sector BDI sectoris BDC, quàm arcus BI dati arcus BC, atque tam multiplex est sector FHP sectoris FHG quàm arcus FP dati arcus FG. Et quoniam prout arcus BI major vel minor erit quàm arcus FP vel eidem æqualis, erit similiter sector BDI maj. vel min. quàm sector FHP vel eidem æqualis; idcircò, *6.def.*5. erit sector BDC ad FHG ut arcus BC ad FG. Q.E.D.

COROLL. 1. Hinc ut sector ad sectorem sic angulus ad angulum,

4. Angulus in centro est ad 4. rectos ut arcus cui insistit ad totam circumferentiã.

3. Hinc inæqualium circulorum arcus, qui equales subtẽdunt angulos sunt similes.

4. Duæ semidiametri à concentricis peripheriis auferunt similes arcus.

LAVS DEO.

LIBER

LIBER VII.

DEFINITIONES.

1. VNITAS est, secundum quam unumquodque eorum, quæ sunt, unum dicitur.

2. Numerus autem, ex unitatibus composita multitudo.

3. Pars est numerus numeri, minor majoris, cum minor metitur majorem.

4. Partes autem, cum non metitur.

5. Multiplex vero major minoris, cum majorem metitur minor.

6. Par numerus est, qui bifariam dividitur.

7. Impar vero, qui bifariam non diuiditur. Vel, qui unitate differt à pari.

8. Pariter par numerus est, quem par numerus metitur per numerum parem.

9. Pariter autem impar est, quem par numerus metitur per numerum imparem.

10. Impariter vero impar numerus est, quem impar numerus metitur per numerum imparem.

11. Primus numerus est, quem unitas sola metitur.

12. Primi inter se numeri sunt, quos sola unitas, communis mensura, metitur.

13. Compositus numerus est, quem numerus quispiam metitur.

14. Compositi autem inter se numeri sunt, quos numerus aliquis, communis mensura, metitur.

15. Nu-

15. Numerus numerum multiplicare dicitur, cùm toties compositus fuerit is, qui multiplicatur, quot sunt in ipso multiplicante unitates, & procreatus fuerit aliquis.

16. Cùm autem duo numeri mutuo sese multiplicantes aliquem fecerint, qui factus erit, planus appellabitur. Qui verò numeri mutuo sese multiplicarint, latera illius dicentur.

17. Cùm verò tres numeri mutuo sese multiplicantes aliquem fecerint, qui procreatus erit, solidus appellabitur: Qui autem numeri mutuo sese multiplicarint, latera illius dicentur.

18. Quadratus numerus est, qui æqualiter æqualis. Vel qui sub duobus æqualibus numeris continetur.

19. Cubus verò, qui æqualiter æqualis æqualiter. Vel, qui sub tribus æqualibus numeris continetur.

20. Numeri proportionales sunt, cùm primus secundi, & tertius quarti, æque multiplex est; vel eadem pars; vel eædem partes: Vel certè, cùm primus secundum, & tertius quartum, æqualiter continet, eandemque insuper illius partem, vel easdem partes.

21. Similes plani, & solidi sunt, qui proportionalia habent latera.

22. Perfectus numerus est, qui suis ipsius partibus est æqualis.

23. Numerus numerum metiri dicitur per illum numerum, quem multiplicans, vel à quo multiplicatus, illum producit.

24. Proportio numerorum est habitudo quædam

quædam unius numeri ad alterum, secundùm quòd illius est multiplex, vel pars, partesvè; vel certè illum continet semel, aut aliquoties, & aliquam insuper illius partem, vel partes.

25. Termini, sivè radices proportionis dicuntur duo numeri, quibus in eadem proportione minores sumi nequeunt.

26. Cùm tres numeri proportionales fuerint; Primus ad tertium, duplicatam rationem habere dicitur ejus, quam habet ad secundum. At cùm quatuor numeri proportionales fuerint; Primus ad quartum, triplicatam rationem habere dicitur ejus, quàm habet ad secundum: Et semper deinceps uno amplius, quamdiu proportio extiterit.

27. Quotlibet numeris ordine positis, proportio primi ad ultimum componi dicitur ex proportionibus primi, ad secundum, & secundi ad tertium, & tertii ad quartum, & ità deinceps, donec extiterit proportio.

POSTVLATA, SIVE PETITIONES.

1. Postuletur, cuilibet numero quotlibet posse sumi æquales, vel multiplices.

2. Quolibet numero sumi posse majorem.

AXIOMATA, SIVE PRONVNTIATA.

1. Qui numeri æqualium numerorum, vel ejusdem æquè multiplices sunt, inter se sunt æquales.

2. Quo-

2. Quorum idem numerus æquè multiplex est, vel æquè multiplices sunt æquales, inter se æquales sunt.

3. Qui numeri æqualium numerorum, vel ejusdem, eadem pars, vel eædem partes fuerint, æquales inter se sunt.

4. Quorum idem numerus, vel æquales, eadem pars, vel eædem partes fuerint, æquales inter se sunt.

5. Vnitas omnem numerum per unitates, quæ in ipso sunt, hoc est, per ipsummet numerum metitur.

6. Omnis numerus se ipsum metitur per unitatem.

7. Si numerus numerum multiplicans, aliquem produxerit, metietur multiplicans productum per multiplicatum, multiplicatus autem eundem per multiplicantem.

8. Si numerus numerum metiatur, & ille, per quem metitur, eũdem metietur per eas, quæ in metiente sunt, vnitates, hoc est, per ipsum numerum metientem.

9. Si numerus numerum metiens, multiplicet eum, per quem metitur, vel ab eo multiplicetur, illum quem metitur, producet.

10. Numerus quotcunque numeros metiens, compositum quoque ex ipsis metitur.

11. Numerus quemcunque numerum metiens, metitur quoque omnem numerum, quem ille metitur.

12. Numerus metiens totum, & ablatum, metitur, & reliquum.

PRO-

PROPOSITIO I.

SI duobus numeris inæqualibus (AB, CD) propositis, detrahatur semper minor (CD) de majore (AB) & reliquus (EB) de minore (CD) alterna quadam subtractione, neque reliquus unquam præcedentem metiatur donec assumpta fuerit unitas (GB); Qui à principio propositi sunt numeri (AB, CD), erunt inter se primi.

Figuram vide in Tabula.

Nam si negas, numeros AB, CD esse primos inter se, habeant hi communē mēsuram H: Numerus ergo H, metiens numerum CD, metietur etiam, 11. *ax.* 7. numerum AE; quandoquidem *hyp.* numerus AE vel est multiplex numeri CD, vel ipsi æqualis: sed idem numerus H metiebatur f. *Hyp.* totum AB; ergo, 12. *ax.* 7. & reliquum EB metietur: Cùm autem *Hyp.* numerus EB metiatur numerum CF, nam vel est ipsi æqualis, vel ejus pars; idcircò, 11. *ax.* 7. numerus H numerum CF metietur: Sed & f. *hyp.* metiebatur totum CD; ergo, 12. *ax.* 7. metietur etiam residuum FD: Hic autem metitur numerum EG, nam vel est ejus pars, vel eidem æqualis; ergo 11. *ax.* 7. numerus H metietur numerum EG: sed & totum *ut prius* EB metiebatur; Ergo, 12. *ax.* 7. & residuum GB metietur, nempe numerus unitatem. Q. E. A.

PROPOSITIO II.

D*Vobus numeris datis* (*AB, CD*) *non primis inter se, maximam eorũ communem mensuram* (*FD*) *reperire*.

Fig. vide in Tab.

Subtrahe minorem CD ex majori AB, quoties potest (hoc est divide majorem per minorem): Si nihil relinquitur, patet, ipsum CD esse mensuram, seu partem numeri AB, nimirùm partem denominatam à quotiente: sed & ipse numerus CD metitur, *6.ax.7.* semetipsum per unitatem; ergo erit communis mensura utriusque numeri dati. Quòd si post subtractionem numeri CD à numero AB aliquid relinquitur, ut puta EB, deme hunc residuum EB ex minori dato CD, & reliquum FD ex EB, & sic deinceps, donec aliquis numerus FD præcedentem EB metiatur, id enim fiet antequam ad unitatem perveneris, aliàs enim, 1.7. numeri dati essent inter se primi.)

Erit ergo FD communis mensura quæsita. Nam FD, *constr.* metitur numerum EB, atque hic numerum CF; ergo, *11.ax.7.* FD metitur numerum CF: sed &, *6.ax.7.* semetipsum metitur; ergo etiam, *10.ax.7.* totum numerum CD metietur: atque hic *constr.* metitur numerum AE; ergo, *11.ax.7.* numerus FD metitur numerum AE: sed *constr.* metiebatur numerum FB; ergo &, *10.ax.7.* totum AB metietur: adeòque inventa est FD communis mensura numerorum datorum. Quod autem sit maxima, ex eo patet, quia nempè, si dixeris, alium quendam numerum G majorem numero

FD

FD esse maximam numerorum datorum mensuram; quoniam, f. *hyp.* numerus G assumptus metitur numerum CD, metietur, 11.*ax*.7. numerum AE: sed, f.*hyp.* totum etiam AB metitur; Ergo,&, 12.*ax*.7. numerum EB residuum metietur, imò etiã, *constr.* & 11. *ax*.7. ipsum CF, sed metiebatur totum CD; Ergo, 12.*ax*.7. & reliquũ FD metietur, major nempè minorem. Q. E. A.

COROLL. Hinc patet, numerum metientem duos numeros metiri quoque maximam eorum communem mensuram.

PROPOSITIO III.

Tribus numeris datis (A, B, C,) non primis inter se maximam eorum mensuram (E) reperire.

1. *Cas.*	A, 16.		2. *Cas.*	A,	12.
	B, 12.			B,	8.
	C, 8.			C,	6.
	D,4. G, 5.			D,4,E,2.F,3.	

Inveniatur, 2.7. numerus D maxima cõmunis mensura duorum datorum A, B. Iam si [ut in 1. casu) numerus D metitur quoque tertium C, liquet ipsum D esse numerum quæsitum: Quod autem sit maxima datorum numerorum mensura, patet; Nam si illa esset G major ipso D, ergo numerus G metiens singulos datos, metiretur *coroll.* 2. 7. numerum D maximam communem mensuram primorum duorũ A, B, nempè numerum D seipso minorẽ. Q.E.A.

Sin verò (ut in 2. Casu) numerus D non meti-

metitur numerum C; erunt saltèm D, C, inter se Compositi; Nam (*hyp.*) A, B, C sunt inter se Compositi; ergo aliqua mensura communis eos metitur, quæ propterea, *coroll.* 2.7. ipsum D metietur, adeòq; C, D erunt inter se Compositi. Iam verò ipsorum D, C, inueniatur, 2.7. maxima mensura E; erit E numerus quæsitus; Nam E, *constr.* metitur numeros C, D, atqui D metitur, *constr.* ipsos A, B; ergo, 11.*ax*.7. numerus E metitur singulos A, B, C. Quod autem non major aliquis numerus, ut puta F eos metiatur, indè quidem patet, quia nempè si F metiretur numeros A, B, eorum etiam, *corol.* 2.7. maximam communem mensuram D metietur: atqui si jam F metitur numeros D, C; eorum pariter maximam mensuram E metietur, major minorè. Q. E. A.

COROLL. I. Hinc numerus metiens tres numeros, eorum quoque maximam communem mensuram metitur.

2. Eodem artificio invenies maximam communem mensuram quatuor, vel plurium numerorum datorum.

PROPOSITIO IV.

O*Mnis numerus (A) omnis numeri (B) minor majoris, aut pars est, aut partes.*

1. *Cas.* A, 6. B, 7.	2. *Cas.* A, 5. B, 10.

3. *Cas.* A, 9. B, 12.

1. *Ca-*

1. *Casus*. Si A & B primi sunt inter se; erit, 4. *def.* 7. A tot partes numeri B, quot sunt in A unitates, nimirum $\frac{6}{7}$.

2. *Cas.* Si A metiatur numerum B; liquet, 4. *def.* 7. esse A partem ipsius B denominatam à quotiente, qui resultat ex divisione numeri B per numerum A, nimirùm $\frac{1}{2}$.

3. *Cas.* Denique si A & B aliter compositi inter se fuerint; inveniatur, 2. 7. maxima eorum communis mensura, quæ quidem determinabit quotnam partes numeri B contineat numerus A, si nēpè viderimus quoties communis mensura contineatur in A & quoties in B; undè in hoc casu A est $\frac{1}{4}$. ipsius B.

Schol. Hinc autem patet, quidnam sit fractio numeralis; nihil sanè, nisi numerus minor consideratus tanquam pars vel partes numeri majoris: Quota verò pars vel quotnam, & quotæ partes sit illius, patebit si inveniremus utriusque numeri dati maximam communem mensuram, & per eam utrunque numerum datum diviserimus; prodibunt enim ex divisione duo numeri, *Quotientes* vocari soliti quorum alter erit fractionis *Numerator*, alter verò *Denominator*.

PROPOSITIO V.

SI numerus (A) numeri (Z) eadem pars fuerit quæ alter (B) alterius (X); & simul uterque (A pl. B) utriusque simul (Z pl. X) eadem pars erit, quæ unus unius.

A, 3.

A, 3. Z, 9.
B, 4. X, 12.

Quippè per *Additionem speciosam*.

A æqu. $\frac{1}{3}$. Z.
B æqu. $\frac{1}{3}$. X.

Ergo A pl. B æqu. $\frac{1}{3}$. Z, pl. X.
Q.E.D.

PROPOSITIO VI.

SI numerus (A) numeri (Z) partes fuerit & alter (B) alterius (X) eadem partes; & simul uterque utriusque eadem pars erit quæ unus unius.

A, 6. Z, 9.
B, 4. X, 6.

Quippè per *Additionem speciosam*.

A æqu. $\frac{2}{3}$. Z
B æqu. $\frac{2}{3}$. X

Ergo A pl. B æqu. $\frac{2}{3}$. Z pl. X.
Q.E.D.

SCHOL. Hæc propositio, uti & præcedens reddi potest universalior, & eadem methodo demõstrari, si nempè dixerimus, quòd: *Si primus numerus secundi eadem pars vel partes fuerit, quæ tertius quarti, quintus sexti atque ita deinceps; erit compositus ex primo, tertio, & quinto eadem pars, vel partes compositi ex secundo, quarto & sexto, quæ primus secundi.*

PRO-

PROPOSITIO VII.

SI numerus (AB) numeri (CD) eadem pars fuerit quæ ablatus (AE) ablati (CF); etiam reliquus (EB) reliqui (FD) eadem pars erit quæ totus totius.

Fig. vide in Tab.

Siquidem AE pl. EB æquantur, *hyp.* $\frac{1}{2}$. CF pl. FD quod æquatur, *hyp.* $\frac{1}{2}$. CF pl. $\frac{1}{2}$. FD: atqui, *hyp.* AE æquatur $\frac{1}{2}$. CF; ergo, 3. *ax.* 1. EB æquatur $\frac{1}{2}$. FD.

Q. E. D.

PROPOSITIO VIII.

SI numerus (AB) numeri (CD) eadem partes fuerit, quales ablatus (AE) ablati (CF); reliquus etiam (EB) reliqui (FD) eadem partes erit quales totus totius. Fig. vide in Tab.

Siquidem, *hyp.* AE pl. EB æquantur $\frac{2}{3}$. CF pl. $\frac{2}{3}$. FD: atqui, *hyp.* AE æquat. $\frac{2}{3}$. CF; ergo, 3. *ax.* 1. EB æquantur $\frac{2}{3}$. FD.

Q. E. D.

PROPOSITIO IX.

SI numerus (A) numeri (BC) pars fuerit & alter (D) alterius (EF) eadē pars; ità vicissim quæ pars est, vel partes primus tertii, eadem etiam pars vel eadem partes erit secundus quarti.

Fig. vide in Tab.

Sit

Sit A $\frac{1}{2}$ BC & D $\frac{1}{2}$ EF & solvatur bifariam numerus BC in suas partes BG, GC, uti & numerus EF in suas partes EH, HF: Tum quoniam BG, (hoc est A) eadem est pars, 1.*ax*.7. vel partes numeri EH (hoc est D) quæ numerus GC numeri HF; erit, 5. vel 6.7. numerus A numeri D eadem pars, vel partes quæ totus BC totius EF.

Q.E.D.

PROPOSITIO X.

SI numerus (AB) numeri (C) partes fuerit, & alter (DE) alterius (F) eadem partes; etiam vicissim, quæ pars est aut partes primus tertii, eadem pars, vel eadem partes erit secundus quarti.

Fig. vide in Tab.

Sit numerus AB duæ tertiæ numeri C, uti & numerus DE duæ tertiæ numeri F, & concipiantur AG, GB partes numeri C, atque DH, HE partes numeri F. Igitur, *hyp*. numerus AG numeri C eadem est pars quæ ipse DH ipsius F; ergo, 9.7. *alternando* erit AG ipsius DH eadéque ratione GB ipsius HE, atque proindè coniunctim, 5. & 6.7. totus AB totius DE eadem pars vel partes, quæ numerus C numeri F.

PROPOSITIO XI.

SI fuerit ut totus (AB) ad totum (CD) ita ablatus (AE) ad ablatum (CF); erit & reliquus (EB) ad reliquum (FD) ut totus ad totum. Fig. vide in Tab.

1. *Cas.*

1. *Cas.* Sit primò AB minor quàm CD; ergo, 4. 7. AB, vel pars est, vel partes ipsius CD, necnon *hyp.* & 2. *def.* 7. eadem pars est vel eædem partes ipse AE ipsius CF, quæ numerus AB numeri CD; ergo, 7, vel 8. 7. reliquus EB reliqui FD eadem pars est vel partes quæ totus AB totius CD; adeòq; 20. *def.* 7. erit AB ad CD ùt EB ad FD. Q. E. D.

2. *Cas.* Sin fuerit AB major quàm CD; eodem modo ostendetur esse CD ad AB ut FD ad EB, & *invert.* AB ad CD ut EB ad FD. Q. E. D.

PROPOSITIO XII.

SI sint quotcunque numeri proportionales (A ad B ut C ad D, atque hi ut E ad F); erit quemadmodum unus antecedentium ad unum consequentium, itâ omnes simul antecedentes ad omnes simul consequentes.

A 4.	C 2.	E 3.
B 8.	D 4.	F 6.

Sint primò A, C, E minores ipsis B, D, F; ergo, ob æqualitatem rationum, erit, 20. *def.* 7. A eadem pars, vel partes ipsius B, quæ C ipsius D & quæ E ipsius F; ergo, *Schol.* 6. 7. A pl. C pl. E est eadem pars vel partes numeri B pl. D pl. F, quæ unus A unius B; ac proindè, 20. *def.* 7., erit A pl. C pl. E ad B pl. D pl. F ut A ad B. Q. E. D.

Sin A, C, E ipsis B, D, F majores ponantur; idem ostendetur *invertendo*.

PRO-

PROPOSITIONE XIII.

SI sint quotcunque numeri proportionales (A ad B, ut C ad D); etiam vicissim, sivè alternando proportionales erunt.

A	3.	C	4.
B	9.	D	12.

Sint primo A & C minores ipsis B & D, atque A sit minor quàm C, ergo, ob rationum æqualitatem, erit, 20.*def.*7. A eadem pars, vel partes ipsius B quæ numerus C numeri D; ergo, 9, vel 10. 7. *vicissim, sivè alternando*, erit A ipsius C eadem pars, vel partes, quæ B ipsius D; adeòque, 20.*def.* 7. erit A ad C ut B ad D. Q. E. D.

Sin A major sit quàm C, atq; A & C majores statuantur quàm B & D; idipsum probabitur *invertendo*.

SVPPLEMENTVM

EX CLAVIO.

THEOREMA I.

SI compositi numeri proportionales sint; hi quoque divisi proportionales erunt. (Si sit AB ad CB ut DE ad FE; dico fore AC ad CB ad DF ad FE.

Fig. vide in Tab.

Quoniam AB ad CB est, *hyp.* ut DE ad FE; erit, 13.7. *altern.* AB ad DE, ut CB ad FE; ergo, 11. 7. reliquus AC ad reliquum

DF

DF est ut totus AB ad totum DE, qui, *hyp.* est, ut CB ad FE, & rursus *alternan.* est AC ad CB, ut DF ad FE. Q. E. D.

THEOREMA II.

SI divisi numeri proportionales sint; hi quoque compositi proportionales erunt. (*si sit AB ad BC ut DE ad EF; dico fore AC ad BC ut DE ad EF.*)

Fig. v. in Tab.

Quoniam est AB ad BC, *hyp.* ut DE ad EF; erit, *altern.* AB ad DE ut BC ad EF; adeòque erit, 12.7. AC ad DF ut BC ad EF, & rursus *altern.* AC ad BC ut DF ad EF. Q. E. D.

THEOREMA III.

SI quatuor numeri sint proportionales; hi quoq; convertendo proportionales erũt. (*Si sit AB ad CB ut DE ad FE; dico fore AC ad AB ut DF ad DF: vel si mavis AB ad AC ut DE ad DF.*)

Fig. v. in Tab.

Quoniam est, *hyp.* AB ad CB ut DE ad FE; erit, *altern.* AB ad DE ut CB ad FE; ergo erit, 11.7. reliquus AC ad reliquum DF, ut totus AB ad totum DE, & rursus *altern.* erit AC ad AB ut DF ad DE, & si lubet *invert.* AB ad AC ut DE ad DF. Q. E. D.

PROPOSITIO XIV.

SI sint quotcunque numeri (A, B, C) & alii totidem (D, E, F) illis æquales multitudine, qui bini sumantur, & in eadem ratione ordinata; erit ex æquo primus ad ultimum in prioribus, ut primus ad ultimum in posterioribus.

A 9. B 6. C 3.
D 6. E 4. F 2.

Quoniam est, *Hyp.* A ad B, ut D ad E & B ad C ut E ad F; erit *altern.* A ad D ut B ad E atque hi ut C ad F; ergo A ad D ut C ad F; & rursus *altern.* A ad C ut D ad F. Q. E. D.

PROPOSITIO XV.

SI unitas numerum quempiam (2) metiatur æquè ac alter numerus (3) alterum (6); etiam alternando unitas tertium metietur æquè ac secundus quartum.

1, 2,
3, 6,

Quoniam, *Hyp.* unitas est eadem pars ipsius 2, quæ ipse 3, ipsius 6; erit, 9. 7. *altern.* unitas eadem pars ipsius 3, quæ ipse 2. ipsius 6. Q. E. D.

PROPOSITIO XVI.

SI duo numeri (A, & B) sese mutuò multiplicantes fecerint aliquos (AB,

BA

BA); *geniti ex multiplicatione æquales inter se erunt.*

B, 4.	A, 3.
A, 3.	B, 4.
AB, 12.	BA, 12.

Quoniam AB idem est atque A ductum in B; erit, 15.*def.*7. unitas ad A ut B ad AB, & *altern.* unitas ad B ut A ad AB. Tum quoniam BA idem est atque B ductum in A; erit, 15.*def.*7. unitas ad B ut A ad BA; ergo A ad AB est ut A ad BA; adeòq; AB & BA æquantur. Q. E. D.

PROPOSITIO XVII.

SI numerus (*A*) *duos numeros* (*B, C*) *multiplicans, fecerit aliquos* (*AB, AC*); *geniti ex ipsis eandem rationem habebunt quàm multiplicati.*

A, 3.

B, 2.	C, 4.
AB, 6.	AC, 12.

Quoniam enim AB idem est atque A ductum in B, & AC idem est atque A ductum in C; erit, 15.*def.*7. unitas ad A ut B ad AB, & unitas ad A ut C ad AC; ergo erit B ad AB ut C ad AC, atque *altern.* B ad C ut AB ad AC. Q. E. D.

PROPOSITIO XVIII.

SI duo numeri (*A & B*) *numerum quempiam* (*C*) *multiplicantes fecerint ali-*

quos (AC, BC); geniti ex ipsis eandem rationem habebunt quàm multiplicantes.

C, 5.

A, 3.	B, 9.
AC, 15.	BC, 45.

Quoniam enim, 16. 7. AC & CA sibi æquantur mutuò, uti & sibi BC & CB; erit, 17. 7. & 1. *ax*. 7. CA (hoc est AC) ad CB (hoc est BC) ut A ad B. Q. E. D.

PROPOSITIO XIX.

SI quatuor numeri proportionales fuerint (A ad B ut C ad D); Qui ex primo & quarto fit numerus æquatur ei qui fit ex secundo, & tertio: & è converso.

A, 4. B, 6. C, 8. D, 12.
AD, 48. BC, 48.

Quoniam est AC ad AD, 17. 7. ut C ad D, qui sunt *Hyp*. ut A ad B, qui sunt 18. 7. ut AC ad BC; erit AC ad AD ut AC ad BC; ergo AC & BC æquantur. Q. E. D. Tum quoniam AD & BC æquantur; erit A ad B, 18. 7. ut AC ad BC qui sunt, 1. *ax*. 7. ut AC ad AD, qui sunt 17. 7. ut C ad D; ergo erit A ad B ut C ad D. Q. E. D.

PROPOSITIO XX.

SI tres numeri (A, B, C) continuè proportionales fuerint; qui sub extremis continetur, æqualis est ei qui efficitur à medio: & è converso.

A,

A, 4. B, 6. C, 9.
D, 6.
AC, 36. BB, 36.
DB, 36.

Concipe numerum D æqualem ipsi B; erit ergo D ad C, 1. *ax.* 7. ut B ad C, qui sunt *hyp.* ut A ad B; ergo erit D ad C ut A ad B; adeòque, 19. 7. AC æquabitur ipsi BD, (hoc est ipsi BB) Q. E. D. Tum quoniã AC æquatur ipsi BB (hoc est BD); erit, 19.7. A ad B, ut D (hoc est B) ad C. Q. E. D.

PROPOSITIO XXI.

NUmeri (AB, CD) minimi omnium, eandem cum eis rationem habentiũ (E, F) metiuntur æquè ipsos numeros eandem cum eis rationem habentes major quidem (AB) majorem (E) minor verò (CD) minorem (F). Fig. v. in Tabula.

Nam est AB ad CD, *hyp.* ut E ad F: & *altern.* AB ad E, ut CD ad F. Ergo, 20. *def.* 7. AB eadem pars est, vel partes ipsius E, quæ CD ipsius F. Non partes; Sint enim (si fieri potest) AG, GB partes numeri E, necnon CH, HD partes numeri F: ergo, 20. *def.* 7. AG est ad E, ut CH ad F: & *altern.* AG ad CH ut E ad F qui sunt, *hyp.* ut AB ad CD. Ergo AB, CD non sunt minimi in eadem ratione, *contra hyp.*

PROPOSITIO XXII.

SI fuerint tres numeri (A, B, C) & alii ipsis multitudine æquales (D, E, F) qui bini sumantur, & in eadem ratione perturbata; etiam ex æquo erit primus ad ultimum in primis, ut primus ad ultimum in secundis.

A 4.	B 3.	C 2.
D 12.	E 8.	F 6.

Quoniam est *hyp.* A ad B ut E ad F; erit, 19. 7. AF æqu. ipsi BE: sed quoniam est *hyp.* B ad C, ut D ad E; erit, 19.7. BE æqu. ipsi CD. Ergo, 1. *ax.* 1. AF æqu. ipsi CD: adeòque, 19. 7. est A ad C ut D ad F. Q. E. D.

PROPOSITIO XXIII.

PRimi inter se numeri (A, B) minimi sunt omnium eandem cum eis rationē habentium.

A 9.	B 4.
C 5.	D 3.
E 2.	

Sint, si fieri potest, C, D minores ipsis A, B, atque in eadem ratione. Ergo, 21. 7. C metitur ipsum A, æquè ac D metitur ipsum B, ut puta per eundem numerum E. Ergo, 23. & 20. *def.* 7. est 1. ad E ut C ad A, & *altern.* 1. ad C ut E ad A, atq; eadē ratione erit 1. ad D ut E ad B: atqui 1. metitur ipsos C, & D: Ergo, 20. *def.* 7. E metitur ipsos A, & B: adeoq; A, B, non sunt inter se primi, *contra hyp.*

PRO-

PROPOSITIO XXIV.

NVmeri A, B minimi omnium eandē cum eis rationem habentium, primi sunt inter se.

A 9. B 4.
D C E.

Habeant (si fieri potest) ipsi A, B, communem mensuram C, & is metiatur ipsum A per D, & ipsum B per E: Ergo, *9. ax. 7.* CD æqu. ipsi A, & CE æqu. ipsi B. adeoq; erit, *1. ax. 7.* A ad B ut CD ad CE qui sunt, 17. 7. ut D ad E: sed D & E minores sunt quàm A, & B, utpotè eorum partes: Ergo A, B non sunt minimi in sua ratione, *contra hyp.*

PROPOSITIO XXV.

SI duo numeri (A, B) primi inter se fuerint; qui eorum unum (A) metitur numerus (C), ad reliquum (B) primus erit.

A 9. B 4.
C 3. D .

Nam si dixeris, aliquem numerum, puta D, numeros B, C metiri: Ergo, *11. ax. 7.* D metiens numerum C, metietur numerū A: sed metitur etiam numerum B: Ergo A, B non sunt inter se primi, *contra Hyp.*

PROPOSITIO XXVI.

SI duo numeri (A, B) ad quempiam (C) primi fuerint; etiam ex illis genitus (AB) ad eundem C primus erit.

E 4. A 5.

A 5. B 3. AB 15.
C 8. E. F

Sit (si fieri potest) ipsorum AB, C, communis mensura numerus E, & E metiatur ipsum AB per F: Ergo, 9.*ax*.7. EF æqu. ipsi AB: adeoque, 19.7. est E ad A ut B ad F. Quoniam verò ipse A primus est respectu ipsius C, & ipsum C metitur numerus E: erunt proindè, 25.7. E, A, primi inter se, adeòque, 23.7. in sua ratione minimi: Ergo 21.7. numerus E æquè metitur numerum B atque ipse A ipsum F: atqui E metitur ipsum etiam C: ergo B, C non sunt inter se primi, *contra hyp.*

PROPOSITIO XXVII.

SI duo numeri (A, B) primi inter se fuerint; quadratum etiam alterutrius ad reliquum primus erit.

A 4. B 5.
Aq. 16. D 4.

Concipe numerum D æquari numero A: erunt, 1.*ax*.7. proindè singuli D, A primi ad numerum B: ergo, 26.7. AD (Aq.) ad B primus erit. Q. E. D.

PROPOSITIO XXVIII.

SI duo numeri (A, B) ad duos numeros, (C, D) uterq; ad utrunque primi fuerint; & qui ex ipsis gignentur (AB, CD) primi inter se erunt.

A 5. C 4.
B 3. D 2.

AB 15. CD 8.

Quo-

Quoniam enim, *hyp.* A,B, primi sunt ad C; etiam, 26. 7. AB ad ipsum C primus erit. Et quoniam A, B, primi sunt ad D; erit, 26. 7. etiam AB primus ad D: Cum igitur C, D ad AB primi sint; etiam, 26.7. CD ad AB primus erit.

PROPOSITIO XXIX.

SI duo numeri (A, B) primi inter se fuerint; etiam eorum Quadrata, uti & Cubi primi inter se erunt.

A.	3.	B	2.
Aq.	9.	Bq.	4.
Ac.	27.	Bc.	8.

Quoniam enim A primus, *Hyp.* est ad B; erit etiam, 27. 7. Aq. primus ad B: & quia Aq. primus est ad B; erit, 27. 7. etiam idem Aq. primus ad Bq. Rursus quia tam A ad B, & Bq., quàm Aq. ad eosdem B & Bq. primi sunt; erit, 28. 7. A ductum in Aq. idest Ac. ad B ductũ in Bq. idest ad Bc. primus. Q. E. D.

PROPOSITIO XXX.

SI duo numeri (AB, BC) primi inter se fuerint; etiam uterque simul (AC) ad quẽlibet eorum primus erit: Et si uterq; simul (AC) ad unum aliquem (AB) illorum primus erit; etiam qui in principio numeri dabantur (AB, BC) primi inter se erunt. Fig. vide in Tab.

1. *Hyp.* Nam si AC, AB compositos dicas; sit D communis eorum mensura: Ergo, 12. *ax.* 7. numerus D reliquum BC

 metie-

metietur: ſed metiebatur ipſum AB: Ergo AB, BC non ſunt inter ſe primi, *contra hyp.*

2. *Hyp.* Poſitis AC, AB inter ſe primis, ſi velis numerum D eſſe ipſorum AB, BC communem menſuram; is propterea, 10. *ax.*7. totum AC metietur: ſed metiebatur ipſum AB; ergo AB, AC non ſunt inter ſe primi, *contra hyp.*

PROPOSITIO XXXI.

Omnis primus numerus (A) ad omnem numerum (B) quem non metitur, primus eſt.

A 5. B 8. C 3.

Nam ſi communis aliqua menſura metiatur utrunque A, B, ut puta numerus C; Ergo C non erit idem atque A, quippè A non ponitur metiri ipſum B. Quia igitur numerum A alius C metitur; non erit A primus, *contra hyp.*

PROPOSITIO XXXII.

Si duo numeri (A; B) ſe mutuò multiplicantes fecerint aliquem (AB), genitum autem (AB) metiatur aliquis primus numerus D; is etiam unum datorum, vel A, vel B metietur.

A 4. AB 24. B 6.
D 3. E.

Pone,

Pone, numerum D non esse mensuram numeri A, & ex divisione numeri AB per D resultare numerum E: Ergo, *9. ax. 7.* DE æqu. ipsi AB: adeòque, 19. 7. erit D ad A, ut B ad E: sed, *hyp.* & 31. 7. D est primus ad A: Ergo, 23. 7. D, & A minimi sunt in sua ratione: adeòque, 21. 7. D metitur numerum B æquè ac ipse A metitur numerum E: adeòq; numerus D jam metitur unum B. Q. E. D.

PROPOSITIO XXXIII.

OMnem compositum numerum (A) aliquis primus (B) metitur.

A. 12. B. 2.

Vnus, vel plures numeri metiantur numerum A, quorum minimus sit B; is primus erit; nam si dicatur compositus; eum, 13. *def.* 7. minor aliquis metietur: qui proindè, 11. *ax.* 7. ipsum A metietur: Ergo B non est minimus eorum, qui ipsum A metiuntur, *contra hyp.*

PROPOSITIO XXXIV.

OMnis numerus (A) aut primus est, aut certè aliquis primus eum metitur.

Quippè A vel primus est, vel compositus: si primus; id quidem asserimus: si compositus; Ergo, 33. 7. eum aliquis primus metietur. Q. E. D.

PROPOSITIO XXXV.

NUmeris datis quotcunq; (A, B, C) reperire minimos omnium (E, F, G) eandem rationem cum eis habentium.

A 6.	B 4.	C 8.
	D 2.	
E 3.	F 2.	G 4.
H,	I,	K,
	L.	

Si A, B, C primi sunt inter se; ipsi, 23.7. in sua ratione minimi erunt: Si compositi sunt; inveniatur 3.7. eorum maxima mensura D, qui ipsos metiatur per E, F, G; hi minimi erunt in ratione data numerorum A, B, C: Nam, 9.*ax*.7. D ductus in E æqu. ipsi A, & D ductus in F æqu. ipsi B, atque D ductus in G æqu. ipsi C: Ergo, 1.*ax*.7. A ad B erit ut ED ad FD, qui sunt 18.7. ut E ad F, atq; erit B ad C, 1.*ax*.7. ut FD ad GD, qui sunt 18.7. ut E ad G. Iã si negas numeros A, B, C esse minimos in ratione data; pone numeros H, I, K esse minimos in eadem ratione; hi propterea, 21.7. æquè metientur numeros A, B, C, nimirùm per eãdem mensuram L. Ergo, 9.*ax*.7, HL æqu. ipsi A cui æqu. ED: & IL æqu. ipsi B, cui æqu. FD: atq; KL æqu. ipsi C, cui æqu. GD. adeòq; ED æqu. ipsi HL, & sic de cæteris: proindèq; 19.7. erit E ad H, ut L ad D; sed est maj. quàm H: Ergo, 20.*def*. 7. L est maj. quàm D: adeòq; D non est maxima mensura datorum A, B, C. *contra hyp.*

CO-

COROLL. Hinc maxima communis mensura quotlibet numerorum metitur ipsos per numeros, qui minimi sunt omnium eandem rationem cum ipsis habentium.

PROPOSITIO XXXVI.

Duobus numeris datis (A, B) reperire quem illi minimum metiuntur numerum.

A 5.	AB 20.	B 4.
E,	D,	F,

1. *Cas.* Si A, B primi inter se fuerint; erit AB numerus quæsitus: nam liquet, numeros A, B, metiri productum AB: sed si fieri posset metiantur numeri A B aliquem D min. ipso AB, puta per E, & F: Ergo, 9.*ax*.7. AE æqu. ipsi D, cui æqu. BF: adeòq; 19.7. erit A ad B ut F ad E. Quia verò, *hyp*. A, B primi sunt inter se; adeòq; 23.7. minimi in sua ratione; metientur, 21.7. propterea æquè ipsi A, B ipsos E, F: ergo, 20.*def*.7. erit A ad F, ut B ad E qui sunt 17.7. ut AB ad AE qui sunt *ut prius*, & 1.*ax*.7. ut AB ad D: ergo erit A ad F ut AB ad D: adeòque, 20.*def*.7. etiam numerus AB metietur numerum D seipso minorem. Q. E. A.

A 6.		B 4.
C 3.		D 2.
AD 12.		BC 12.
G,	F,	H,

2. *Cas.* Sin A, B inter se compositi fuerint; reperiantur, 35.7. C, D minimi in eadem

eadem ratione, itàut sit A ad B; ut C ad D: Ergo, 19.7. AD æqu. ipsi BC, adeòq; AD, vel BC erit numerus quæsitus: Nam liquet, 7.*ax*.7. numeros A, B ipsum AD vel BC metiri. Iam verò si velis, quòd A, B metiantur etiam numerum F minorem ipso D, & metiatur ipse A per G, & ipse B per H; ergo, 9.*ax*.7. AG æqu. ipsi F; cui æqu. BH; adeòque, 19.7. erit A ad B ut H ad G. Atqui C, D, *constr.* sunt minimi: in data ratione; ergo, 21.7. numerus C metietur numerum H, & ipse D ipsum G: atqui est D ad G, 17.7. ut AD ad AG, qui sunt, 1.*ax*.7. ut AD ad F. ergo, 20.*def*.7. AD metietur numerum F, seipso minorem. Q. E. A.

COROLL. Hinc, si duo numeri minimos multiplicent, eandem cum ipsis rationem habentes, major minorem, & minor majorem, producetur numerus minimus, quem illi metiuntur.

PROPOSITIO XXXVII.

SI duo numeri (A, B) numerum quempiam (CD) metiantur; etiam minimus (E) quem illi metiuntur, eundem (CD) metitur. Fig. v. in Tab.

Si negas; aufer E ex CD quoties potes, & relinquatur FD: Cùm igitur numerus E non metiatur numerum CD, facta subtractione, necessariò relinquetur aliquis numerus FD minor ipso E: Iam verò, quoniam A, & B, *hyp.* metiuntur numerum E, & ipse E, *constr.* ipsum CF; etiam

etiam, 11. *ax*. 7. A, & B ipsum CF metientur: metiebantur autem, *hyp.* totum CD: ergo, 12. *ax*. 7. & reliquum FD metiuntur; adeòque E non est minimus, quem A, & B metiuntur, *contra hyp.*

PROPOSITIO XXXVIII.

Tribus numeris datis (A, B, C) reperire minimum, quem illi metiuntur.

1. *Cas.*

A 3.		
B 4.		D 12.
C 6.		

2. *Cas.*

A 2.	B 3.	C 4.
D 6.	E 12.	F.

Reperi, 36. 7. numerũ D minimum eorum, quem A, B metiuntur: Quem si tertius C metiatur; patet, D esse numerum quæsitum. Si verò tertius C non metiatur ipsum D, sit E minimus, quem D, C metiuntur; erit E numerus quæsitus: Quippè constat, 11 *ax*. 7. singulos A, B, C metiri numerum E: Quod verò nullum aliũ F minorem metiantur, ex eo patet, quia nempè, si numeri A, B, C metirentur quẽpiam F minorem ipsi E: Ergo, cùm numerus D, *constr.* sit minimus eorum, quos A, B metiuntur; metietur etiam, 37. 7. numerus D numerum F: sed E, *constr.* est minimus omnium, quos D, & C metiuntur;

tur; ergo etiam, 37. 7. numerus E metitur numerum F major minorem. Q. E. A.

COROLL. Hinc si tres numeri numerum quempiam metiantur etiam minimus, quem illi metiuntur, eundem metietur.

PROPOSITIO XXXIX.

SI numerum (A) quispiam numerus (B) metiatur; ille (A) quem (B) metitur, habebit partem (C) à metiente (B) denominatam.

A 27. B 9. C 3.

Quoniam enim numerum A metitur ipse B per C; etiam, 9.*ax*.7. numerus C metietur ipsum A per B, hoc est ipse C toties sumptus quot sunt unitates in B, faciet ipsum A: ergo C est pars ipsius A à metiente B denominatam. Q. E. D.

PROPOSITIO LX.

SI numerus (A) partem habuerit (B); metietur ipsum (A) numerus (E) à à quo pars (B) denominatur.

A 24. B 6. E 4.

Quoniam enim B est pars numeri A denominata ab E; ergo B metitur ipsum A per E: adeòque vicissim, 9.*ax*.7. numerus E metitur ipsum A per B. Q. E. D.

PROPOSITIO XLI.

NUmerum reperire (G) qui minimus cum sit, habeat datas partes ($\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$).

G. 12.

G 12.

$\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$.

H.

Inveniatur, 38.7. G minimus, quem denominatores 2, 3, 4, metiantur, liquet, 39.7. numerum G habere partes $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$. Tum, si fieri potest, quidam H minor ipso G habeat easdem partes: ergo numeri 2, 3.4. metiuntur ipsum H, ac proindè G non est minimus quem numeri 2. 3. 4. metiuntur, *contra hyp.*

LAVS DEO.

LIBER VIII.

PROPOSITIO I.

SI fuerint quotcunque numeri (A, B, C, D) deinceps proportionales, extremi verò ipsorum (A, D) primi inter se fuerint; ipsi (A, B, C, D) minimi erunt omnium eandem cum eis rationem habentium.

A 8. B 12. C 18. D 27.
E. F. G. H.

Nam (si fieri potest) sint alii totidem E, F, G, H minores in eadem data ratione; ergo, 14.7. erit ex æquo *ordin.* A ad D, ut E ad H; atqui, *hyp.* A, & D sunt inter se primi; adeòque, 23.7. minimi in sua ratione; ergo, 21.7. ipsi æquè metiuntur numeros E, & H seipsis minores. Q.E.A.

PROPOSITIO II.

NUmeros reperire deinceps proportionales, quotcunque jusserit quispiã in data ratione (M ad N, ut puta 2. ad 3.).

I.

M, N.
MM, MN, NN.
MMM, MMN, MNN, NNN.

Sint M 2, & N 3, minimi in data ratione.

ne. Iam si vis tres minimos proportionales; multiplicandus est M quadraticè, tum ducendus est M in N, ac demum multiplicandus est N quadraticè; nam erũt MM 4, MN 6, NN 9 tres minimi proportionales in data ratione M 2, ad N 3. Siquidem est, 17. 7. MM ad MN, ut M ad N, qui sunt, 18.7. ut MN ad NN. Quoniam autem, *hyp.* M, & N sunt minimi in data ratione; erunt, 24.7. primi inter se; proindèq;, 1.8. MM, MN, NN, sunt minimi proportionales in data ratione M ad N. Q.E.F.

Quòd si vis quatuor minimos proportionales; multiplica ipsum M cubicè, tum ducito MM in N, deindè duc MN in N, ac demum multiplica ipsum N cubicè, atq; prodibunt MMM, MMN, MNN, NNN minimi proportionales; nam, 17. & 18.7.

Æqu. hæ Rationes { MMM ad MMN (17.7.)
M ad N (17.7.)
MMN ad MNN [17.7.]
M ad N (18.7.)
MNN ad NNN.

Ergo MMM, MMN, MNN, NNN sunt deinceps proportionales in ratione M ad N. Quòd autem in hac ratione sint minimi ex eo liquet, quia nempè M & N tãquam minimi in sua ratione, sunt, 24.7. primi inter se; ergo etiam, 29. 7. ipsorum cubi erunt primi inter se: qui præterea, quoniam sunt extremi inventorum proportionalium; erunt, 1. 8. proindè inventi quatuor minimi numeri deinceps proportionales in ratione data. Q.E.F.

CO-

COROLL. 1. Hinc si tres numeri sunt minimi deinceps proportionales; extremi erunt quadrati: Si quatuor; cubi: atque ità porrò deinceps.

2. Minimorum deinceps proportionalium extremi sunt inter se primi.

3. Duo numeri minimi in data ratione metiuntur omnes medios quotcunque minimorum in eadem ratione.

PROPOSITIO III.

SI sint quotcunque numeri (A,B,C,D) deinceps proportionales minimi omnium eandem cum eis rationem habentium; ipsorum extremi sunt inter se primi.

A, 8. B 12. C 18. D 27.

Quoniam enim, 35.7. cujuscunque proportionis datæ reperiri possunt radices, sivè minimi termini, qui proindè, 24. 7. erunt primi inter se; uti &, 29.7. ipsorum *Quadrati, Cubi*, cæteræq; *Algebraicæ*, ut vocant, *Potestates*, quæ nempè gignuntur ex progressione Geometrica, & quoniam numeri dati, vel hi duo, vel tres, vel quatuor sint; semper, 1. *coroll.* 2.8. quidem habent extremos vel Radices, vel Quadratos, vel Cubos, & sic de cæteris; jam patet, ex genesi minimorum proportionalium, eorum extremos esse primos inter se. Q. E. D.

PRO-

PROPOSITIO IV.

Rationibus datis quotcunque in minimis terminis (A ad B. & C ad D) reperire numeros deinceps minimos in datis rationibus.

A 6. B 5. C 4. D 3.
(Z) F 24. E 20. G 15. (X)
I, K, L.

Constructio. Reperi, 36.7. minimum E, quem B, & C metiuntur, &, 3.*post*.7. sicut ipse B ipsum E metitur, ità numerus A metiatur alterum F, ut puta per Z, atque ità etiam numerus D metiatur alterum G, ac numerus C eundem E, ut puta per X; erunt F, E, G minimi in datis rationibus.

Demonstratio. Siquidem, 9.*ax*.7. æquantur AZ, & F, uti & BZ, & E; ergo erit, 1.*ax*.7. F ad E, ut AZ ad BZ, qui sunt, 18.7. ut A ad B: Similiter, 9.*ax*.7. æquantur CX, & E, uti & DX, & G; ergo, 1.*ax*. 7. erit E ad G, ut CX, ad DX, qui sunt, 18.7. ut C ad D. Adeòque E, F, G sunt deinceps proportionales in datis rationibus. Quòd verò sint minimi ità ostendetur; Nam puta alios I, K, L minimos esse; ergo, 21.7. A, & B ipsos I, & K, pariterque C, & D ipsos K, & L metiuntur; adeòque B, & C eundem K metiuntur, ac proindè, 37. 7. etiam ipse E eundem K metietur, seipso minorem. Q. E. A.

A 6. B 5. C 4. D 3. E 5. F 7.
H 24. G 20. I 15. K 21.

Datis verò tribus rationibus A ad B; C ad D; & E ad F; reperi, *ut prius*, tres H, G I

minimos

minimos deinceps in rationibus A ad B, & C ad D: Tunc, si numerus E numerum I metiatur; sume, 3. *post.* 7. alterum K, quem F æquè metiatur; erunt quatuor H, G, I, K deinceps minimi in datis rationibus: Quod ostẽdetur, ut in priori parte factum est; Si nempè assumpserimus communem mensuram, qua ipse A metitur ipsum H æquè ac ipse B ipsum G, atque ità in reliquis perrexerimus, sicuti jam modò factum est, notando benè, quot totidem debent esse variæ mensuræ quot sunt datæ rationes variæ.

A 6. B 5. C 4. D 3. E 2. F 7.
H 24. G 29. I 15.
M 48. L 40. K 30. N 105.

Sin autem E non metiatur I; sit K minimus, quem E, & I metiuntur, & quoties I ipsum K, toties G ipsum L, & H ipsum M metiatur: Quoties verò E ipsum K toties F ipsum N metiatur; erunt M, L, K, N minimi deinceps in datis rationibus. Demonstratur, ut prius.

PROPOSITIO V.

Plani numeri (CD, EF) rationem habent ex lateribus compositam, (id est CD ad EF est, ut C ad E pl. D ad F.)

C 4. E 3.
D 6. F 16.

CD 24. EF 48.
ED 18.

Quippè est, 18. 7. CD ad ED, ut C ad E, &, 17. 7. ED ad EF ut D ad F. atque, 27. *def.* 7. est CD ad EF, ut CD ad ED pl.
ED

ED ad EF. ergo est CD ad EF ut C ad E pl. D ad F. Q. E. D.

PROPOSITIO VI.

SI sint quotcunque numeri deinceps proportionales (A, B, C, D, E) primus autem (A) secundum (B) non metiatur, neque alius quispiam ullum metietur.

A 16. B 24. C 36. D 54. E 81.
F 4. G 6. H 9.

Quoniam A non metitur B, neque, 20. *def.* 7. etiam ipse B proximè sequentem C, aut ipse C ipsum D, aut D ipsum E metietur, siquidem dati numeri sunt deinceps proportionales. Igitur tribus A, B, C inveniantur tres proportionales minimi F, G, H; Quoniam autem ipse A non metitur ipsum B; neque, 20. *def.* 7. ipse F ipsum G: adeòque, 5. *ax.* 7. F non est unitas: sed, 24. 7. F & H inter se primi sunt; ergo, cùm sit 14. 7. ex æquo *ordinando* A ad C ut F ad H, & ipse F non metiatur ipsum H; neque, 20. *def.* 7. ipse A ipsum C, nec proindè ipse B ipsum D, vel ipse C ipsum E; nam est, *hyp.* & *ordin.* A ad C, ut B ad D, atque hi ut C ad E. Eodem modo si sumas quatuor minimos numeros proportionales numeris datis A, B, C, D, ostendetur quod A ipsum D non metiatur, nec ipse B ipsum E: atque si demum sumas quinque proportionales minimos, patebit eodem modo numerum A nõ esse mensuram numeri E. Q. E. D.

PRO

PROPOSITIO VII.

SI sint quotcunque numeri deinceps proportionales (A, B, C, D, E) primus autem (A) extremum (E) metiatur; is etiam secundum (B) metietur.

A 3. B 6. C 12. D 24. E 48.

Si negas, quòd A metiatur numerum B; ergo, 26.7. nec ipsum E metitur, *contra hyp*

PROPOSITIO VIII.

SI inter duos numeros (A, B) ceciderint medii continuè proportionales (C, D); quot inter eos ejusmodi cadunt medii, tot, etiam inter alios (E, F) eandem cum illis rationem habentes, cadent medii continuè proportionales (L, M)

A 24.	C 36.	D 54.	B 81.
G 8.	H 12.	I 18.	K 27.
E 32.	L 48.	M 72.	F 108.
		Z 4.	

Sume G, H, I, K minimos 35.7. proportionales ipsis A, C, D, B; erit, 14. 7. ex æquo *ordinando* G ad K, ut A ad B, atque hi ut E ad F. atqui G, & K, 3. 8. primi sunt inter se. Ergo, 22. 7. ipse G æquè metietur ipsum E, ac ipse K ipsum F, nimirum per aliquem numerum Z: per hunc ergo Z multiplicentur H, & I; atque gignentur L, & M: quos probo esse medios proportionales inter E, & F: Nam æquantur GZ, & E; HZ, & L; IZ, & M; KZ, & F: atqui est

est G ad H, 18.7. ut CZ ad HZ), qui sunt, 1.*ax*.7. ut E ad L; ergo est G ad H ut E ad L: & eadem ratione patebit se habere H ad I ut L ad M, necnon I ad K, ut M ad F: atqui, *constr.* G, H, I, K sunt deinceps proportionales numeris A, C, D, B: ergo his etiam erunt deinceps proportionales numeri E, L, M, F: in quibus quoniam multitudo mediorum æquatur multitudini mediorum datorum; ostensum jam superest, quod si &c. Q.E.D.

PROPOSITIO IX.

SI duo numeri (A, B) sint inter se primi, & inter eos medii continua proportione ceciderint numeri (C, D) quot inter eos medii ceciderint, totidem (E, G, & F, I) inter utrunque eorum, ac unitatem medii continua proportione cadent.

1.
E 2. F 3.
G 4. H 6. I 9.
A 8. C 12. D 18. B 27.

Siquidem, ex 2. 8. constat 1. E, G, A esse totidem continuè proportionales quot 1. F, I, B, & quot A, C, D, B. Q.E.D.

PROPOSITIO X.

SI inter duos numeros (A, B) & unitatem continuè proportionales ceciderint numeri (B, D, & F, G); quot inter utrumque ipsorum, & unitatem deinceps medii continua proportione cadunt; totidem &

inter ipsos (A,B,) cadent medii continuè proportionales (L, K)

A 8, L 12. K 18. B 27.
E 4. DF 6. G 9.
D 2, F 3.
1.

Siquidem, 2.8. E, DF, G : DDD (A), DDF [L], DG [k], FFF(B) sunt continuè proportionales. Q. E. D.

PROPOSITIO XI.

Duorum quadratorum numerorũ (Aq, Bq.) unus medius proportionalis est numerus (AB) : & quadratus ad quadratum duplicatam habet lateris (A) ad latus (B) rationem.

AAA, AAB, ABB, BBB
27, 36, 48, 64.
AA, AB, BB
9. 12. 16,
A, B,
3, 4.

Liquet enim, 17. & 18.7. AA, AB, BB esse continuè proportionales; proindèque erit, 27. *def.* 7. AA ad BB, ut A ad B bis. Q. E. D.

PROPOSITIO XII.

Duorum Cuborum numerorum Ac, Bc duo medii proportionales sunt numeri (AAB, ABB) : Et Cubus ad Cubum triplicatam habet lateris (A) ad latus

(B)

(B) rationem. Vide fig. præcedentem.

Siquidem, *ex constr.* 2.8. AAA, AAB, ABB, BBB sunt in continua proportione numeri A ad B: ergo, 27 *def.* 7. Ac ad Bc est, ut A ad B ter. Q.E.D.

PROPOSITIO XIII.

SI sint quotlibet numeri proportionales (A, B, C) & multiplicans quisque seipsum faciat aliquos; qui ab illis producti fuerint (Aq. Bq. Cq) proportionales erunt; imò & datorum A, B, C, Cubi, quadrato quadrati, & sic deinceps continuè proportionales erunt.

A. B. C.

2. 4. 8.

AA, AB, BB, BC, CC.

4. 8. 16. 32. 64.

AAA, AAB, ABB, BBB, BBC, BCC, CCC,

8. 16. 32. 64. 128. 256. 512.

Siquidem, *ex constr.* 2.8. AA, AB, BB, BC, CC sunt continuè proportionales: ergo, 14.7. erit ex æquo ordinandò AA ad BB, ut BB ad CC. Eademque ratione Ac, Bc, Cc. sunt continuè proportionales, & sic porrò de cæteris. Q.E.D.

PROPOSITIO XIV.

SI quadratus numerus (RR) quadratum numerũ (SS) metiatur; metietur etiã unius latus (R) alterius latus (S): & si unius quadrati latus metiatur latus alterius;

etiam quadratus (RR) metietur quadratum (SS)

R 2. S. 6.

RR 4. RS 12. SS 36.

1. *Hyp.* Quoniam est RR ad RS, 2. & 11. 8. ut RS ad SS, &, *hyp.* quadratus numerus RR metitur quadratum SS; metietur, 7. 8. etiam primus RR secundum RS: atqui est RR ad RS, 17. 7. ut R ad S; ergo, 20. *def.* 7. etiam ipse R metietur ipsam S.

Q. E. D.

2. *Hyp.* Quoniam R metitur ipsum S, & est de cætero RR ad RS, 2. 8. ut RS ad SS, qui sunt, 18. 7. ut R ad S; etiam ipse RR ipsum RS, 20. *def.* 7. metietur, æquè ac ipse RS ipsum SS: ac proindè, 11. *ax.* 7. numerus quadratus RR quadratum SS metietur.

Q. E. D.

PROPOSITIO XV.

SI Cubus numerus (MMM) Cubum numerum (NNN) metiatur; etiam latus unius metietur latus alterius, & è converso.

M. N

2. 6.

MMM, MMN, MNN, NNN,

8. 24. 72. 216.

1. *Hyp.* Quoniam 2. & 12. 8. MMM, MMN, MNN, NNN sunt continuè proportionales; ergo MMM, metiens Cubum extremum NNN, metietur etiam, 7. 8. secundum MMN: atqui MMM ad MMN est

est, 17.7. ut M ad N : ergo etiam, 20.*def*.7. ipse M metietur ipsum N. Q.E.D.

2. *Hyp*. Quoniam numerus M metitur numerum N; & sunt, *ut prius*, MMM, MMN, MNN, NNN in continua proportione ipsius M ad ipsum N; etiam in his primus secundum, is tertium, & tertius quartum, 20.*def*.7. metietur; ergo, etiam, 11.*ax*.7. primus MMM quartum NNN. Q.E.D.

PROPOSITIO XVI.

SI quadratus numerus (AA) quadratum numerum (BB) non metiatur; neque latus unius metietur latus alterius; & è converso.

A 4. B 9.
AA 16. BB 81.

1. *Hyp*. Nam, si A metiretur ipsum B; etiam, 14.8. ipse AA ipsum BB metietur; *contra hyp*.

2. *Hyp*. Si AA metiretur ipsum BB; etiam, 14.8. ipse A ipsum B metietur; *contra hyp*.

PROPOSITIO XVII.

SI Cubus numerus (Ac) cubum numerum Bc non metiatur; neque unius latus metietur latus alterius; & è converso.

A, 2. B, 3.
Ac, 8. Bc, 27.

1. *Hyp*. Nam si ipse A metietur ipsum B; etiam 15.8. ipse Ac, metiretur ipsum Bc; *contra hyp*.

2. *Hyp.* Si ipse Ac metiretur ipsum Bc; etiam, 15. 8. ipse A ipsum B metiretur; *contra hyp.*

PROPOSITIO XVIII.

D*Vorum similium planorum numerorum (CD, EF) unus medius proportionalis est numerus (DE): & planus CD ad planum (EF) similem, duplicatā habet lateris (C) ad homologum latus (E) rationem.*

C 6. D 2.
CD 12. DE 18. EF 27.
E 9. F 3.

Quoniam, *hyp.* & 21. *def.* 7. est C ad D ut E ad F; erit, 13.7. *altern.* C ad E, ut D ad F. Igitur

Æqu. hæ Rationes. { CD ad ED (DE) (18.7.)
C ad E (*ut prius*).
D ad F (18.7.)
DE ad FE (EF)

Ergo CD, DE, EF sunt continuè proportionales: ergo, 27. *def.* 7. ratio ipsius CD ad EF duplicata est rationis CD ad DE, hoc est C ad E. Q. E. D.

COROLL. Hinc patet, medium numerum proportionalem duorum numerorum planorum similium esse in ratione laterum homologorum.

PROPOSITIO XIX.

D*Vorum similium solidorum (ABC, DEF) duo medii proportionales*

sunt

sunt numeri (BCD, CDE) & numerus solidus ad solidum similem est in triplicata ratione laterum homologorum.

ABC,	BCD,	CDE,	DEF
30.	60.	120.	240.

A 2. B 3. C 5.
D 4. E 6. F 10.

Quoniam, *hyp.* & 22. *def.* 7. est A ad B, ut D ad E, & B ad C ut E ad F; erit *altern.* A ad D, ut B ad E, ut C ad F. Igitur

Æqu. hæ Rationes.
- ABC ad BCD [17.7.]
- A ad D (*ut prius*)
- B ad E (17.7.)
- BCD ad CDE [*ut prius*]
- B ad E (*ut prius*)
- C ad F (17.7.)
- CDE ad DEF.

Ergo ABC, BCD, CDE, DEF sunt cont. proportionales: & proindè ratio ABC ad DEF triplicata est rationis ABC ad BCD (A ad D) Q. E. D.

COROLL. Hinc medii proportionales similium solidorum sunt in ratione homologorum laterum.

PROPOSITIO XX.

SI inter duos numeros (A, B) unus medius proportionalis cadat numerus (C); similes plani erunt illi numeri.

A 12. C 18. B 27.
D 2. E 3.
F 6. G 9.

Sume, 35.7. D & E minimos in ratione A ad C, sivè C ad B: ergo, 21.7. ipse D

æquè metitur ipsum A, ac ipse E ipsum C, puta per eundē F: item ipse D æquè metitur ipsum C, ac ipse E ipsum B, puta per eundē G: ergo, 9.*ax*.7. æquantur DF, & A, uti & EG, & B, adeòque, 16.*def*.7. A, & B plani sunt numeri: quoniam verò, 9.*ax*.7. æquantur EF, C, DG; erit, 19.7. D ad E, ut F ad G, & *altern*. D ad F, ut E ad G: ergo, 21.*def*.7. plani numeri A, & B, hoc est DF, & EG similes sunt.
Q. E. D.

PROPOSITIO XXI.

SI inter duos numeros (*A*, *B*) *duo medii proportionales cadant numeri* (*C*, *D*); *similes solidi erunt ipsi* (*A*, *B*)

A 16.	C 24.	D 36.	B 54.
E 4.	F. 6.	G 9.	
H 2.	P 2.	K 3.	L 3.
M 4.	N 6.		

Sume, 2.8. E F, G, minimos proportionales in ratione A ad C: ergo, 20.8. E, & G sunt numeri plani similes: numeri proindè E latera sint H, & P, numeri verò G latera sint K, & L: ergo 22.*def*.7. erit H ad K, ut P ad L, qui sunt *cor*. 18.8. ut E ad F: atqui, 21.7. E, F, G ipsos A, C, D æquè metiuntur, puta per eundem M: iidemque ipsos C, D, B, æquè metiuntur, puta per eundem N. Ergo, 9.*ax*. 7. æquantur A, EM, & HPM, uti & B, GN, & KLN: quare A, & B solidi sunt numeri. Quoniã verò, 9.*ax*.7. C æqu. ipsi FM, & D æqu. ipsi FN;
Idcircò

Idcircò

Æqu. hæ Rationes
- M ad N (17.7.)
- FM ad FN (1.*ax*.7.)
- C ad D (*constr.*)
- E ad F (*ut prius*)
- H ad K [*ut prius*]
- P ad L.

ergo, 21.*def*.7. A, & B sunt numeri solidi similes. Q.E.D.

PROPOSITIO XXII.

SI tres numeri (A, B, C) sint deinceps proportionales, primus autem (A) sit quadratus; etiam tertius (C) quadratus erit.

A 4. B 6. C 9.

Quoniam inter A, & C cadit unus medius proportionalis; ergo, 20.8. A, & C sunt similes plani: quoniam verò, *hyp*. A est quadratus; etiā C quadratus erit. Q.E.D.

PROPOSITIO XXIX.

SI quatuor numeri (A, B, C, D) sint deinceps proportionales, primus autem (A) sit cubus; etiam quartus (D) cubus erit.

A 8. B 12. C 18. D 27.

Quoniam inter A, & D cadunt duo medii proportionales; ergo, 21.8. ipsi sunt solidi similes, & quoniam, *hyp*, A est cubus; etiam D cubus erit. Q.E.D.

PROPOSITIO XXIV.

SI duo numeri (A, B) rationem habeant inter se, quàm quadratus numerus (C)

 ad

ad quadratum numerum (D); primus autem (A) sit quadratus; etiam secundus (B) quadratus erit.

A 16.	24.	B 36.
C 4.	6.	D 9.

Quoniam, 11.8. inter C, & D numeros quadratos, adeòque, 8.8 etiam inter A, & B, eandem cum illis rationem habentes cadit B unus medius proportionalis: & quoniam, *hyp.* A quadratus est; etiam, 22.8. B quadratus erit. Q.E.D.

COROLL. 1. Hinc si fuerint duo numeri similes, primus autem sit quadratus, etiam secundus quadratus erit.

2. Liquet etiam ex his proportionē numeri quadrati ad non quadratum exhiberi non posse in numeris quadratis.

PROPOSITIO XXV.

SI duo numeri (A, B) rationem inter se habeant quàm Cubus numerus (C) ad cubum numerum (D), primus autem (A) sit cubus; etiam secundus (B) cubus erit.

C 64.	96.	144.	D 216.
A 8.	12.	18.	B 27.

Quoniam, 12.8. inter C, & D cubos, adeòque, 8.8. inter A, & B eandem rationem habentes cadunt duo medii proportionales: & quoniam, *Hyp.* A cubus est; etiam, 23.8. B cubus erit. Q.E.D.

COROLL. 1. Hinc si fuerint duo numeri similes, & primus sit cubus, etiam secundus erit cubus.

2. P...

2. Patet Proportionẽ cubi ad non cubũ exhiberi posse per numeros cubos.

PROPOSITIO XXVI.

SImiles plani numeri (A, B) rationem inter se habent quàm quadratus numerus ad quadratum numerum.

A 20. C 30. B 45.
D 4. E 6. F 9.

Quoniam, 18.8. inter A & B cadit unus medius proportionalis C; sume, 2.8. tres minimos D, E, F deinceps proportionales in ratione A ad C; ergo, 1. *corol.* 2.8. extremi D, F quadrati erũt: atqui *hyp.* & *ordin.* A ad B est, ut D ad F: ergo A est ad B ut quadratus numerus ad quadratũ. Q.E.D.

PROPOSITIO XXVII.

SImiles solidi numeri (A, B) sunt inter se, ut Cubus ad cubum.

A 16. C 24. D 36. B 54.
E 8. F 12. G 18. H 27.

Quoniam; 19.8. inter A, & B cadunt duo medii proportionales C, & D; sume, 2.8. quatuor E, F, G, H minimos proportionales in ratione A ad C: ergo, 1. *Cor.* 2.8. extremi E, H cubi sunt: atqui, *Hyp.* & *ordin.* est A ad B ut E ad H, hoc est ut cubus ad cubum. Q.E.D.

LAVS DEO.

LIBER IX.

PROPOSITIO I.

SI duo similes plani (A, B) se mutuo multiplicantes, faciãt quendam; productus quadratus erit.

A 6. B 54

Aq. 36. 108. AB, 324.

Est enim, 17.7. A ad B ut AA ad AB: atqui inter primum, & secundum tanquam similes planos cadit, 18.8. unus medius proportionalis: ergo, 8.8. unus etiam medius proportionalis inter tertium, & quartum cadet: quoniam autem tertius est quadratus; nam producitur ex A ducto in A; quartus, 22. 8. etiam quadratus erit. Q. E. D.

PROPOSITIO II.

SI duo numeri (A, B) se mutuò multiplicantes faciant quendam quadratum: similes plani erunt.

A 6. B 54.

Aq. 36. AB, 324.

Nam est A ad B, 17. 7. ut AA ad AB, atqui, 11. 8. inter tertium, & quartum, quippè inter duos numeros quadratos cadit unus medius proportionalis: ergo, 8.8. etiam unus medius proportionails inter primum, & secundum cadet; qui propterea, 20.8. sunt similes plani. Q. E. D.

PRO-

PROPOSITIO III.

SI Cubus numerus (Ac) seipsum multiplicans fecerit aliquem; productus (Acc) cubus erit.

A 2. Ac, 8. Acc, 64.

Quoniam est 1. ad A, 15. *def.* 7. ut A ad AA qui sunt, 17. 7. ut Aq. ad Ac. Ergo inter 1. & Ac. cadunt duo medii proportionales: sed, 15. *def.* 7. est 1. ad Ac ut Ac ad Acc; Ergo, cùm duo medii proportionales cadant inter primum, & secundum; totidem, 8.8. inter tertium, & quartum cadent: Cùm autem tertius sit cubus; etiam quartus, 23.8. cubus erit. Q. E. D.

PROPOSITIO IV.

SI numerus (Ac) cubus numerum (Bc) cubum multiplicaverit; productus (Ac Bc) cubus erit.

Ac, 8. Bc, 27.
Acc, 64. AcBc, 216.

Nam est Ac ad Bc, ut Acc ad AcBc: sed, 18. 8. inter primum & secundum cadunt duo medii proportionales: ergo totidem medii, 8.8. inter tertium, & quartum cadent: quoniam autem, 3. 9. tertius est cubus; quartus etiam, 23.8. cubus erit. Q. E. D.

PRO-

PROPOSITIO V.

SI Cubus numerus (Ac) numerum quempiam (B) multiplicans, fecerit cubum; ipse etiam multiplicatus (B) cubus erit.

Ac, 8. Bc, 27.

Acc, 64. AcBc, 216.

Siquidem, 17.7. est Acc, ad Ac B ut Ac ad B: atqui, 12.8. inter primum, & secundum cadunt duo medii proportionales; ergo, 8.8. totidem inter tertium, & quartum cadent; cùm autem, *hyp.* tertius sit Cubus; etiam, 23.8. quartus Cubus erit.

Q. E. D.

PROPOSITIO VI.

SI numerus (Z) seipsum multiplicans faciat cubum, & ipse cubus erit.

Z 8. Zq, 64. Zc, 512.

Quoniam, *hyp.* Z ductus in Z producit cubum, &, 19.*def.*7. ZZZ est cubus; erit, 5.9. ipse Z numerus cubus. Q. E. D.

PROPOSITIO VII.

SI Compositus numerus (Z) numerum quempiam (X) multiplicaverit; productus (ZX) solidus erit.

Z 6. X 11. XZ, 66.

A 2. B 3.

Quoniam enim Z compositus est; metitur idcireò, 13.*def.*7. cum aliquis A, puta per B; ergo, 9.*ax.*7. Z æqu. ipsi AB: adeoq; 17.*def.*7. ABX (ZX) solidus erit. Q. E. D.

PRO-

PROPOSITIO VIII.

SI ab unitate quotcunq; numeri deinceps proportionales erunt; Primus numerus ab unitate RADIX vocetur Progressionis Geometricæ; Cæteri verò QVADRATI, CVBI, QVADRATO-QVADRATI, SVRDESOLIDI, CVBI QVADRATI, SVRDESVRDESOLIDI, QVADRATO-QVADRATO-QVADRATI, CVBICVBI, & sic de reliquis Potestatibus Algebraicis). Potestates autem, quæ numeris paribus exponuntur, sunt numeri QVADRATI: Potestates, quarum exponens est vel ternarius, vel numerus, quem ternarius metitur, sunt numeri CVBI: Potestates verò, quarum Exponentes mensurantur à binario simul, ac ternario, sunt numeri CVBI QVADRATI.

Fig. vide in Tab.

Nota. Solent Mathematici Progressiones Geometricas computare numeris vulgaribus, ab unitate Arithmeticè crescentibus, nimirùm per numeros 1. 2. 3. 4. 5. 6. 7. 8. 9. 10., quos propterea vocant exponentes, quippè quibus exponitur, quotnam Progressionibus ab unitate unaquæque Potestas generetur. Consule appositam Tabellam.

Exp.

Exp.	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Pot.	1	3	9	27	81	243	729	2187	6561	19683
Char.	V	R	Q	C	Qq.	Ss.	Cq.	Sss.	Qqq.	Cc.
Nomina.	Vnitas	Radix	Quadratum.	Cubus	Quadrato quadratũ.	Surde solidũ	Cubi quadratũ.	Surde surde solidũ	Quad. quad. quadratũ	Cubi cubus

DEMONST. Quoniam, *hyp.* est 1. ad A, ut A ad AA; erit, 20. 7. AA æqualis ipsi A ducto in A, cui æqu. 18. *def.* 7. Aq. Deindè quoniam, *hyp.* Aq. Ac. Aqq. sunt continuè proportionales, & primus Aq. quadratus est; tertius, 22. 7. etiam Aqq. quadratus erit: atque eadem ratione quadrati eruut numeri A^{6}. A^{8}. A^{10}. quorũ exponentes sunt numeri pares.

Tum quoniam, *hyp.* est 1. ad A, ut A^{2}. ad A^{3}. erit, 20.7. Ac. æqu. ipsi AA duct. in A, cui æqu. 20. *def.* 7. Ac. Deindè, quoniam A^{3}. A^{4}. A^{5}. A^{6}. sunt proportionales, primus autem est cubus; etiam, 23.8. quartus A^{6}. cubus erit: atque eadem ratione cubi erunt ipsi A^{9}. A^{12}. A^{15}. uti & reliquæ Potestates, quarum Exponentes metitur ternarius.

Adeòq; jam patet ex prima, & secunda parte hujus demonstrationis, numeros A^{6}. A^{12}. A^{18}. A^{24}. esse cubos simul & quadratos; siquidem eorum Exponentes mensurantur à binario simul & ternario. Igitur si ab unitate, &c. Q. E. D.

PROPOSITIO IX.

SI in serie continuè proportionalium ab unitate numerorum primus sit quadratus; reliqui omnes quadrati erunt: si verò primus sit Cubus; reliqui etiam erunt cubi.

Fig. vide in Tab.

1. *Hyp.* Quoniam, 8. 9. A^{2}. A^{4}. A^{6}. A^{8}. quadrati sunt, & quoniam A ponitur quadratus; erit, 22.8. A^{3}. quadratus: & eadem

eadem ratione A^{5}. A^{7}. A^{9}. quadrati erunt.

2. *Hyp.* Quoniam A ponitur cubus; erit 23.8. A^{4}. cubus, & eadem ratione A^{7}. A^{10}. A^{13}. cubi erunt: atque 1.8.9. A^{3}. A^{6}. A^{9}. ſunt etiam cubi : tandem verò, quoniam eſt 1.ad A, ut A ad AA; erit, 20.7. AA æqual. ipſi A ducto in A : atqui, *hyp.* A eſt cubus; ergo, 3.9. AA cubus erit; adeòq; 23.8. etiam cubi erunt ipſi A^{5}. A^{8}. A^{11}; adeòque ſi ab unittate &c. Q. E. D.

PROPOSITIO X.

SI ab unitate quotcunque numeri deinceps proportionales fuerint, qui verò poſt unitatem non ſit quadratus, neq; ullus alius quadratus erit præter eos, quorum exponentes ſunt numeri pares. Et ſi qui poſt unitatem non ſit cubus; neque ullus alius cubus erit, præter eos quorum exponentes ternarius metitur. Fig. vid. in Tab.

1. *Hyp.* Nam, ſi fieri poteſt. Sit D^{5}. quadratus : quoniam ergo eſt, *hyp.* D ad D^{2}. ut D^{4}. ad D^{5}. & *invertendo* D^{5} ad D^{4}. ut D^{2}. ad D; ſuntque, *ſ. hyp.* & 8. 9. ipſi D^{5}. D^{4}. D^{2}. numeri quadrati; erit, 24. 8. etiam D numerus quadratus; *contra hyp.*

2. *Hyp.* Si, ſi fieri poteſt, D^{4}. cubus. Quoniam igitur, *hyp. & ex æquo ordin.* eſt D^{4}. ad D^{9}. ut D ad D^{3}. nec non *ſ. hyp.* & 8.9. D^{6}. D^{4}. D^{3}. ſunt cubi; erit, 25. 8. etiam cubus ipſe D; *contra hyp.*

PRO-

PROPOSITIO XI.

SI ab unitate quotcunque numeri proportionales fuerint; minor majorem metietur per aliquem eorum, qui in serie proportionalium est numerus.

Fig. vid. in Tab.

Quoniam enim, *hyp.* est 1. ad D, ut D ad DD; erit, 5. *ax.* 7. DD divis. per D æqualis ipsi D, cui æqu. D^3. divis. per D^2. Ità etiam quia est, *hyp.* & *ordin.* 1. ad D^2. ut D ad D^3. erit, 5. *ax.* 7. D^3. divis. per D æqu. D^2. cui æqu. D^4. divis. per D^2. cui æqu. D^5. divis. per D^3. &c. Denique, Quia est, *hyp.* & *ordin.* 1. ad D^3. ut D ad D^4. erit, 9. *ax.* 7. D^4. divis. per D æqu. D^3. cui æqu. D^6. divis. per D^3. &c. Ergo si ab unitate &c. Q. E. D.

COROLL. Hinc si numerus qui metitur aliquem ex proportionalibus non sit unus proportionalium; neque numerus per quem metitur, erit aliquis ex proportionalibus.

PROPOSITIO XII.

SI ab unitate quotcunque numeri deinceps proportionales fuerint (*1. D, D^2. D^3. D^4.*); *quicunque primorum numerorum* (*B*) *ultimum proportionalium* (*D^4*) *metiuntur, iidem & eum* (*D*) *qui unitati proximus est metiuntur.*

Fig. vide in Tab.

Nam

Nam si B non metiretur ipsum D; ergo, 31.7. B ad D primus erit; adeòque, 27.7. erit etiam primus ad $D^{\underline{2}}$. & proindè, 26.7. primus etiam ad $D^{\underline{4}}$. quem metiebatur. Q. E. A.

COROLL. 1. Itaque omnis numerus primus ultimum metiens, metitur quoq; omnes alios ultimum præcedentes.

2. Si aliquis numerus non metiens proximum unitati, metiatur ultimum, erit numerus compositus.

3. Si proximus unitati sit primus numerus nullus alius primus numerus ultimum metietur.

PROPOSITIO XIII.

SI ab unitate quotcunq; numeri deinceps proportionales fuerint, qui verò post unitatem primus erit; maximum nullus alius metietur præter eos qui sunt in data serie numerorum proportionalium.

Fig. vide in Tab.

Si fieri potest, alius quispiam E metiatur $A^{\underline{4}}$. nempè per F; erit, *Cor.* 11.9. F alius extrà seriem proportionalem; quia verò E metiens numerum $A^{\underline{4}}$. non metitur ipsum A; hic enim ponitur primus; idcircò, 2. *Cor.* 12. 9. erit E numerus compositus. Ergo, 33.7. cum aliquis primus metitur; qui proindè, 11. ax. 7. ipsum $A^{\underline{4}}$. metietur: neq; 3. Cor. 12. 9. E alius esse poterit quàm A: Igitur numerus A metitur numerum E. Quoniam autem viceversa ipse F metitur ipsum $A^{\underline{4}}$. per E; eadem propterea ratione, ne, *ac prius*, ostendetur, numerum F esse compositum, ipsumque proindè mensurari ab aliquo primo, atque hunc alium esse nō posse præter A. Itaque quoniam, 9. *ax*. 7. EF æqu. ipsi A^{2}. cui æqu. A duct. in A^{2}; erit, 19.7. A ad E, ut F ad A^{2}. Quoniam autem (ut ostensum est) ipse A metitur ipsum E; æquè etiam, 20. *def*. 7. ipse F metietur ipsum A^{2}. puta per eundem G: Nec, *corol*. 11.9 tamen ipse G erit ex data serie proportionalium; Quocirca (juxtà rationes jam modò adductas) numerus G est compositus, quem proindè, 37.7, aliquis primus metitur, neque, 3. *corol*. 12. 9. is alius esse poterit, quàm ipse A. Cùm igitur FG æqu., 9. *ax*. 7. ipsi A^{2}. cui æquatur A duct. in A^{2}.; erit, 19.7. A ad F, ut G ad A^{2}. Et quoniam, *ut prius*, ipse A metitur numerum F; æquè 20. *def*. 7. etiam ipse G metietur numerum A^{2}. scilicèt per eundem H: Neque, *corol*. 11. 9. is tamen erit ex data serie proportionalium: adeoq; (ut jam modò ostensum est de E, de F, & de G) ipse H erit numerus compositus, eumque, 37.7. proindè metitur aliquis primus, neque, 3. *corol*. 12.9. is alius esse poterit quàm A. Itaque, quoniam GH æqu., 9. *ax*. 7. ipsi A^{2}. cui æqu. A duct. in A; erit, 20.7. A ad G, ut H ad A: atqui, *ut prius*, ipse A metitur ipsum G; ergo, 20. *def*. 7. numerus H metietur numerum A primum.

Q. E. *A*.

PRO-

PROPOSITIO XIV.

Minimum numerum (A) quem primi numeri (B,C,D) metiuntur, nullus alius primus præter datos metitur.

A 30.
B 2. C 3. D 5.
E. F.

Metiatur (si fieri potest) minimum A alius quispiam primus E per F; ergo E duct. in F æqu. ipsi A. Quoniam ergo B, C, D metiuntur ipsum A (EF); metientur, 32.7. quoque alterutrum E, vel F: Non ipsum E, quippè qui (ex suppofit.) primus est; ergo reliquum F; sed F minor est, quàm A, siquidem FE, *ut prius*, æqu. ipsi A; ergo A non est minimus, quem B, C, D, metiuntur, *contra hyp.*

PROPOSITIO XV.

Si fuerint tres proportionales in sua ratione minimi (AA, AB, BB); duo quilibet compositi ad reliquum primi erunt.

A 3. B 4.
AAq 9. AB 12. BB 16.

Sume, 35.7. minimos A, B in ratione dati: Quoniam, 24.7. A ad B primus est; erit, 30.7. A pl. B primus ad singulos A, & B: ergo, 26.7. numerus factus ex A ducto in A pl. B, nimirum AA pl. AB primus est ad B, adeòque, 27.7. etiam ad BB: & eadem

dem ratione BB pl. AB primus est ad AA. Deindè, quoniam, 24.7. A, & B primi sunt, ac proindè, 30.7. A, & B ad A pl. B primi sunt; adeòque, 26.7. AB primus est ad A pl. B; erit, 27.7. etiam AB primus ad eum, qui fit ex A pl. B ducto in semetipsum, nimirum ad AA, pl. BB, pl. 2. AB: ac proindè (*ex 2. parte* 30.7.) primus erit ad differentiam AA, pl. BB, pl. AB, atque demum (*ex eadem 2. parte* 30.7.) erit ipse AB primus ad differentiam AA pl. BB. Q. E. D.

PROPOSITIO XVI.

SI duo numeri (A, B) primi inter se fuerint, non erit ut primus (A) ad secundum (B) ità secundus (B) ad alium quempiam (C).

A 3. B 5. C 4.

Sit enim (si fieri possit) A ad B ut B ad C; ergo, cum, *hyp.* & 23.7. A, & B in sua ratione minimi sint, idcircò, 21 7. ipse A metietur ipsum B æquè ac ipse B ipsum C; atqui, *6.ax.*7. A seipsum metitur; ergo A, & B non sunt inter se primi, *contra hyp.*

PROPOSITIO XVII.

SI fuerint quotcunque numeri deinceps proportionales (A.B,C,D) extremi autem ipsorum (A, D) primi inter se sint; non erit ut primus (A) ad secundum (B) ità ultimus D ad alium quempiam (E).

A 8.

A 8. B 12. C 18. D 27. E

Sit [si fieri possit] A ad B ut D ad E; ergo erit, *alternando*, A ad D, ut B ad E; quoniam autem, *hyp.* & 23.7. A & D in sua ratione minimi sunt; idcircò, 21.7. ipse A metietur ipsum B, adeóque, 20. *def.* 7. ipse B ipsum C, & hic sequentem D metietur, ac proindè, 11. *ax.* 7. idem A metietur ipsum D: ergo A, & D non sunt inter se primi, *contra hyp.*

PROPOSITIO XVIII.

Duobus numeris datis (A, B) considerare, possit nè ipsis tertius proportionalis inveniri.

A 4. B 6. C 9.
Bq. 24.

Si A metiatur Bq. per aliquem C; erit, 9. *ax.* 7. AC æquale ipsi Bq. (BB); adeòq; 20.7. erit A ad B ut B ad C; ergo C erit tertius proportionalis. Q. E. F.

Sin verò A non metiatur ipsum Bq; non erit aliquis tertius proportionalis: Sit enim (si fieri potest) A ad B ut B ad C; ergo, 20.7. AC æqu. ipsi BB; ac proindè, 7. *ax.* 7. BB divisus per A dabit ipsum C; adeóque A metiretur ipsum BB *contra hyp.*

PROPOSITIO XIX.

Tribus numeris datis (A, B, C) considerare possit nè ipsis quartus proportionalis inveniri.

A 8.

A 8. B 12. C 18. D 27.
BC 216.

Si A metiatur ipsum BC per aliquem D; erit, 9. ax. 7. AD æqualis ipsi BC; adeóq; 19. 7. erit A ad B, ut C ad D: ergo D erit quartus proportionalis. Q. E. F.

Sin A non metitur ipsum BC, non datur quartus proportionalis: quod ostendetur, ut in præcedenti.

PROPOSITIO XX.

Primi numeri plures sunt omni proposita multitudine primorum numerorum (A, B, C.)

A 2. B 3. C 5.
D 30.
G.

Inveniatur, 38. 7. D minimus, quem A, B, C metiuntur; si jam D pl. 1. primus sit, res patet: Si Compositus; ergo, 33. 7. aliquis primus puta G metitur ipsos D pl. 1. nec tamen is est aliquis ex tribus A, B, C; nam aliàs ipse G, metiens, *supp.* ipsum totum D pl. 1. & *constr.* ipsum D ablatum (si nempè G idem esset ac A, vel B, vel C); metietur, 12. *ax.* 7. quoque unitatem residuam. Q. E. A. Ergo propositorum primorum numerorũ multitudo aucta est per D pl. 1. vel saltem per G; adeóque primi numeri, &c. Q. E. D.

PROPOSITIO XXI.

SI pares numeri (AB, BC, CD) componantur, totus compositus (AD) erit par. vide fig. in Tab.

Sumantur, 6. *def.* 7. EB $\frac{1}{2}$. AB, & FC $\frac{1}{2}$. BC, & GD $\frac{1}{2}$. CD; erit 12.7. EB pl. FC pl. GD $\frac{1}{2}$. AD; adeòq; 6. *ax.* 7. AD par erit. Q. E. D.

PROPOSITIO XXII.

IMpares numeri quotcunque (AB, BC, CD, DE) si componantur; multitudo autem ipsorum sit par; totus (AE) par erit. vide &c.

Detracta enim unitate ex singulis imparibus, manebunt, 7. *def.* 7. AF, BG, CH, DL numeri pares; & proinde, 21.9. Compositus ex ipsis erit par: quibus si reddas parem numerum conflatum ex jam modo subtractis unitatibus; totus, 21.9. idcircò AE par erit. Q. E. D.

PROPOSITIO XXIII.

IMpares numeri quotcunque (AB, BC, CD) si componantur, multitudo autem ipsorum sit impar; totus etiam AD impar erit. vide, &c.

Nam

Nam dempto CD uno imparium, reliquorum, 22.9. aggregatum AC erit par numerus; cui si addideris numerum CD, dempta ipsi unitate; totus, 21.9. etiam AE erit par; adeòq; restituta demum unitate, totus, 7.*def.* 7. AD impar erit. Q. E. D.

PROPOSITIO XXIV.

SI à pari numero (AC) par (AB) detrahatur; reliquus etiam (BC) par erit.

Nam si BD, hoc est BC *minùs* 1. impar fuerit; erit, 7.*def.* 7. BC, hoc est BD pl. 1. par. Q. E. D. Sin BD parem dixeris; propter AB, *hyp.* parem; erit, 21.9. AD par; ideòque, 7.*def.* 7. AC, hoc est AD pl. 1. impar contra *hyp.*

PROPOSITIO XXV.

A pari numero (AB) si impar (AC) detrahatur; reliquus etiam (BC) impar erit. vide &c.

Siquidem AD (AC min. 1.) 7. *def.* 7. est par: ergo, 24. 9. DB est par: adeòque, 7. *def.* 7. CB (DB min. 1.) est impar, Q. E. D.

PROPOSITIO XXVI.

AB impari numero (AB) si impar CB) detrahatur; reliquus AC impar erit. vide, &c.

Nam, 7. def. 7. AB min. 1. hoc est AD, & CB min. 1. hoc est CD sunt pares: ergo, 24. 9. AD min. CD hoc est AC, est par. Q. E. D.

PROPOSITIO XXVII.

AB impari numero (AB) si par (CB) detrahatur; reliquus (AC) impar erit. vide, &c.

Nam, 7. def. 7. AB min. 1. hoc est DB, est par, & CB ponitur par; ergo, 24. 9. reliquus CD par est; adeoq; 7. ax. 7. CD pl. 1. hoc est CA est impar. Q. E. D.

PROPOSITIO XXVIII.

IMpar numerus (A) si parem numerum (B) multiplicans, fecerit aliquem (AB) factus (AB) par erit. vide, &c.

Nam, hyp. & 15. def. 7. AB componitur ex impari A toties accepto, quoties unitas continetur in B pari: ergo, 21. 9. AB est par numerus. Q. E. D.

SCHOL. Eodem modo si A sit numerus par, erit AB par.

PROPOSITIO XXIX.

IMpar numerus (A) si imparem numerum (B) multiplicans fecerit aliquem (AB(; factus (AB) impar erit. vide &c.

Nam

Nam, 15. *def.* 7. AB componitur ex B impari numero toties accepto, quoties unitas continetur in A etiam impari; ergo, 23.9. AB est impar. Q. E. D.

SCHOL. 1. Numerus impar, 3., numerum, 12., parem metiens per numerum parem, 4., eum metitur.

2. Numerus impar, 3., numerum imparem, 15. metiens, per numerum imparem, 5. eum metitur.

3. Omnis numerus, 3., vel 5., metiens numerum imparem, 15., est impar.

PROPOSITIO XXX.

IMpar numerus (*A*) *si parem numerum* (*B*) *metiatur; metietur etiam illius dimidium* (*D*). vide, &c.

Metiatur ipse A ipsum B per C; ergo, 1. *Schol.* 19.9. C est numerus par: Sit igitur E æqu. $\frac{1}{2}$. C; erit, *hyp.* & 9. *ax.* 7. B æqualis ipsi CA, cui æqu. *hyp.* 2. EA (quoniam enim C æqu. E pl. E; facta tam ipsius C, quàm ipsorum E pl. E multiplicatione per eundem numerum A, erit CA æqual. 2. EA) ergo 2. EA æqu. ipsi B, cui æqu. *hyp.* 2. D, adeòque EA æqu. ipsi D; ac proindè, 7. *ax.* 7. numerus A metitur ipsum D per E. Q. E. D.

PROPOSITIO XXXI.

SI impar numerus (A) ad aliquem numerum (B) primus sit; & ad illius duplum (I) primus erit. vide, &c.

Si fieri potest, aliquis D metiatur ipsos A, & C; ergo ipse D metiens imparem A impar, 3. *Schol.* 29. 9. erit; adeòque, 30. 9. metietur etiam ipsum B semissem ipsius paris C: ergo A, & B non sunt primi inter se, *contra hyp.*

PROPOSITIO XXXII.

NUmerorum A, B, C, D, &c. à binario duplorum unusquisque pariter par est tantùm. vide, &c.

Siquidem constat, 6. *def.* 7. omnes 1, A, B, C, D pares esse, imò, 20. *def.* 7. & proportionales, nimirum, *hyp.* in ratione dupla, & 11. 9. proindè ab unoquoque minori mensurari majorem per aliquem ex illis: Igitur, 8. *def.* 7. omnes sunt pariter pares: sed quoniam A primus est, idcircò, 13. 9. nullus extra eos aliquem eorum metietur. Ergo pariter pares sunt tantùm. Q. E. D.

PROPOSITIO XXXIII.

SI numerus (A) dimidium (B) habeat imparem; (A) pariter impar est tantùm. vide, &c. Quo-

Quoniam enim impar numerus B metitur, *hyp.* ipsum A per 2. parem; erit, 9. *def.* 7. ipse B pariter impar: Quòd si pariter etiam parem illum dixeris; ergo, 8. *def.* 7. eum par aliquis D per parem E metitur: adeòque, 9. *ax.* 7. 2. B æqu. A æqu. DE; adeòque, 19. 7. erit 2. ad E, ut D ad B: atqui 16. *def.* 7. ipse 2, metitur parem E; ergo, 20. *def.* 7. ipse D par imparem B metitur. Q. F. N.

PROPOSITIO XXXIV.

SI par numerus (A) neque à binario duplus sit, neq; dimidium habeat imparem; pariter par est, & pariter impar. vide, &c.

Patet primò esse A pariter parem, quia dimidium imparem non habet: quoniam verò si A dividatur bifariam, & rursus ejus dimidium dividatur bifariam, & hoc semper fiat: tandem 7. *def.* 7. incidemus in aliquem imparem (non enim in binarium, nam A non ponitur duplus à binario); is ergo pariter impar metietur ipsum A per parem numerum: quippè aliàs, 1. *Schol.* 29. 9. ipse A impar esset *contra hyp.*): Ergo etiam ipse A est pariter impar. Q. E. D.

PROPOSITIO XXXV.

SI sint quotcunque numeri deinceps proportionales (MMM, MMN, MNN, NNN),

NNN), *detrahantur autem à secundo, & ab ultimo numeri* (*A*, *A*), *quorum quilibet æquetur ipsi primo; erit ut secundi excessus* (*B*) *ad primum, ita ultimi excessus ad ipsum omnes antecedentes.*

MMM,	MMN,	MNN,	NNN
8.	12.	18.	27.
A,	B,	C,	D.
8.	4.	6.	9.

Quoniam ergo æquantur A pl. B, & MMN, uti & A, & MMM; sit C excessus numeri MNN supra MMN, & sit D excessus numeri NNN supra numerum MNN; Igitur, *hyp.* & 9. *ax.* 7.

Æqu. hæ Rationes { A pl. B pl. C pl. D ad A pl. B pl. C
A pl. B pl. C ad A pl. B
A pl. B ad A.

Ergo, *dividendo*;

Æqu. hæ Rationes { D ad A pl. B pl. C
C ad A pl. B
B ad A.

ergo, 12. 7. erit D pl. C pl. B, hoc est excessus ultimi supra primum ad A pl. B pl. C: pl. A pl. B 7. pl. A. Hoc est ad MNN pl. MMN pl. MMM ut B ad A. Q. E. D.

PROPOSITIO XXXVI.

SI ab unitate quotcunq; numeri deinceps exponantur in proportione dupla, quoad totus compositus (E) fiat primus, & totus hic in ultimũ (D) multiplicatus faciat aliquẽ (Z); totus hic productus perfectus erit.

	1.	A,	B,	C,	D
		2.	4.	8.	16
(Q)		E,	G	H	L (P)
		31.	62	124.	248.
		M,	Z	N	
		31.	496.	465.	

Sume totidem E, G, H, L etiam deinceps in proportione dupla; ergo 14.7. erit, *ex æquo ordin.* A ad D, ut E ad L; adeoq; 19.7. æquabuntur AL, & DE, sivè Z; ergo E metietur ipsum Z per A binariũ; ac proindè omnes hi numeri E, G, H, L, Z sunt deinceps proportionales in rat. dupla. Sit autem M excessus numeri G supra E, & sit N excessus numeri Z supra E; erit 35.9. M ad E, ut N ad E pl. G pl. H pl. L: atqui, *hyp.* M idem est ac E; ergo N idem erit, ac E pl. G pl. H pl. L; adeoque Z idẽ erit ac 1. pl. B pl. C pl. D pl. E pl. G pl. H, pl. L. qui idem sũt ac E pl. N. Quin etiam quia, 7.*ax*.7. ipse D metitur ipsum DE, sivè Z; etiam, 11.*ax*.7. singuli 1, A, B, C, metientes ipsum D, necnon propterea, 11.9. ipsos E, G, H, L, metientur ipsum Z. Cæterùm nullus alius eundem Z metitur: Nam sit aliquis P, qui metiatur ipsum Z per Q; ergo, 9.ax.7. æquabuntur PQ, & Z, seu DE; ergo, 19.7. erit E ad Q ut P ad D; ergo, quia A primus metitur ipsum D, & proindè, 13.9. nullus alius P eundem D metitur; neque, 20.def.7. ipse E metietur ipsum Q. quare, cùm E primus ponatur; idem, 31.7. ad Q primus erit; adeòque, 23.7. E & Q in sua ratione sunt minimi; ergo, 21.7. E ipsum P æquè metitur ac ipse Q ipsum D; adeòque, 13.7. Q est aliquis ipsorũ A, B, C. Sit igitur Q idem ac B; ergo, quoniam, *ex æquo ordin.* est B ad D ut E ad H, ideòque, 19.7. æquantur BH & DE, sive Z, sive PQ; erit Q ad B ut H ad P, atqui Q & B ponuntur æquales; ergo etiam æquabuntur H, & P; adeòque P erit etiam aliquis ipsorum A, B, C &c. *contra hyp.* Ergo nullus alius præter numeros prædictos eundem Z metitur; ac proindè, 20. *def.* 7. ipse Z est numerus perfectus. Q. E. D.

LAVS DEO.

LIBER X.

DEFINITIONES.

1. Commensurabiles magnitudines dicuntur, quas eadem mensura metitur.

2. Incommensurabiles autem, quarum nullam communem mensuram contingit reperiri.

3. Rectæ lineæ potentia commensurabiles sunt, cum quadrata earum idem spacium metitur.

4. Incommensurabiles autem, cum quadratis earum nullum spatium, quod sit cõmunis eorum mensura, contingit reperiri.

5. His positis, ostenditur, cuicunq; rectæ lineæ propositæ rectas lineas multitudine infinitas, & commensurabiles esse, & incommensurabiles: alias quidem longitudine, & potentia; alias verò potentia solùm. Vocetur autem proposita recta linea, Rationalis.

6. Et huic commensurabiles, sivè longitudine, & potentia, sivè potentia tantùm, Rationales.

7. Huic verò incommensurabiles, Irrationales vocentur.

8. Et quadratum, quod à proposita recta fit, dicatur Rationale.

9. Et

9. Et huic commensurabilia quidem, Rationalia.

10. Huic verò incommensurabilia, Irrationalia dicantur.

11. Et rectæ, quæ ipsa possunt, Irrationales: si quidem ea quadrata sint, ipsa latera; si verò alia quæpiam rectilinea, rectæ; quæ spatiis incommensurabilibus æqualia quadrata describunt.

POSTVLATVM, siuè PETITIO.

Postuletur, quamlibet magnitudinem toties posse multiplicari, donec quamlibet magnitudinem eiusdem generis excedat.

AXIOMATA, siuè PRONVNCIATA.

1. Magnitudo quotcunque magnitudines metiens, compositam quoque ex ipsis metitur.

2. Magnitudo quamcunque magnitudinem metiens, metitur quoque omnem magnitudinem, quam illa metitur.

3. Magnitudo metiens totam magnitudinem, & ablatam, metitur & reliquam.

DE COMMENSVRALIBVS, & INCOMMENSVRALIBVS in Genere.

PROPOSITIO I.

DVabus magnitudinibus inequalibus propositis (AB, & C), si à majori (AB) auferatur maius, quàm dimidium, & ab eo quod reliquum est rursus detrahatur maius quàm dimidium, & hoc semper fiat; relinquetur tandem quadam magnitudo, quæ minor sit, quàm proposita minor magnitudo (C).

Datæ sint magnitudines AB, & C: Tum sume C toties, donec ejus multiplex Z proximè excedat datam AB; deindè resolve ipsam Z in partes suas, quarum, *constr.* quilibet æquatur ipsa C: atque tum juxtà hypothesim, deme ex AB plusquam dimidium, & (si opus est) à residuo plusquam dimidium; atque ità deinceps, donec partes inæquales magnitudinis AB multitudine æquentur æqualibus partibus magnitudinis Z. Hinc infiniti sunt casus in hac propositione, prout nempè bis, vel ter, vel quater &c. sumpta ipsa C, proximè excesserit datam AB; tres tamen, & non plures exposuimus casus in apposito schemate, & in sequenti demonstratione; Nimirum

1. *Casus.*

1. *Casus*. C æquatur, *constr.* $\frac{1}{2}$. Z, & hæc *hyp.* maj. est, quàm $\frac{1}{2}$. AB & hæc, *hyp.* maj. est, quàm DB; Ergo C major est, quàm DB.

2. *Casus*. C æquatur, *constr.* $\frac{1}{3}$. Z, & hæc, *hyp.* maj. est, quàm $\frac{1}{3}$. AB, & hæc, *hyp.* maj. est, quàm EB; ergo C maj. est, quàm EB.

3. *Casus*. C æquatur, *constr.* $\frac{1}{4}$. Z, & hæc, *hyp.* maj. est, quàm $\frac{1}{4}$. AB, & hæc *hyp.* major est, quàm FB; ergo C major est, quàm FB. Q. E. D.

SCHOL. Monet Clavius, duas magnitudines inæquales, in hoc Theoremate propositas, debere esse tales, vt minor multiplicata possit tandem majorem superare. Atque monet etiam Dibuadius, Euclidem in hoc Theoremate respexisse ad numeros surdos, quos non semper licet bifariam dividere.

PROPOSITIO II.

SI duabus magnitudinibus inæqualibus propositis (AB, CD) detrahatur semper minor (AB) de majori (CD) & residuum (FD) de minori (AB) alterna quadam detractione, atque ità deinceps, nec tamen reliqua præcedentem metiatur; incommensurabiles erunt ipsæ magnitudines datæ.

Habeant enim, si fieri potest, hæ magnitudines cõmunem mensuram E: Quoniam ergo AB

AB detracta ex CD, quoties fieri potuit, reliquit *hyp.* aliquam FD seipsa minorem, & FD detracta ex AB, reliquit GB seipsa minorem, & sic deinceps; tandem, 1.10. relinquetur aliqua GB minor, quàm E. Magnitudo ergo E metiens, *f. hyp.* datam AB; metietur, 2.*ax.* 10. ipsam CF, quam metiebatur data AB: sed eadem E metitur, *f. hyp.* totam CD; ergo, 3.*ax.* 10. & reliquã FD metietur; ac proindè, 2.*ax.* 10. ipsam etiam AG, quippè quam, *hyp.* metitur ipsa FD: atqui, *ut prius*, eadem E metiebatur totam AB; ergo, 3.*ax.* 10. metietur reliquam GB, major minorem. Q.E.A.

PROPOSITIO III.

D*Vabus magnitudinibus commensurabilibus datis (AB, CD); maximam earum communem mensuram reperire.*

Deme, quoties potes, minorem AB ex majori CD, & reliquam ED ex AB, ut & reliquam FB ex ED, donec residua magnitudo FB præcedentem ED metiatur, hoc est donec facta quadam alterna subtractione, nullum supersit residuum; (nam id fiet, aliàs enim, 2.10. AB, & CD essent incommensurabiles contra hypothesim) Dico, FB esse mensuram quæsitam.

Nam FB, *constr.* metitur ipsam ED, adeòque, 2.*ax* 10. ipsam AF: sed & semetipsam metitur; ergo, 1. *ax.* 10. & totam AB; adeòque, 2. *ax.* 10. ipsam CE: sed

me-

metiebatur ipsam ED; ergo, 1. *ax.* 10. & totam CD metietur; Erit igitur FB communis mensura datarum AB, CD.

Quod autem sit maxima, indè quidem patet, quia nempè si daretur alia comm. mensura G major, quàm FB; ergo G metiens datas AB, & CD, metietur, 2. *ax.* 10. & ipsam CE; ergo, 3. *ax.* 10. & reliquam ED, adeòque etiam, 2. *ax.* 10. ipsam AF: sed metiebatur totam AB; ergo, 3. *ax.* 10. & reliquam FB metietur, major minorem. Q. E. A.

COROLL. Hinc magnitudo metiens duas magnitudines, metitur & maximam earum communem mensuram.

PROPOSITIO IV.

TRibus magnitudinibus commensurabilibus datis (A, B, C) maximam earum communem mensuram reperire.

Inveniatur, 3. 10. D maxima communis mensura duarum quarumcunque A, B; item, (si prima inventa D non metiatur tertiam datam C) reperiatur, 3. 10. E maxima comm. mensura ipsarum D, C; erit E mensura quæsita. Quoniam enim E metitur ipsas C, & D, atque D metitur duas alias A, & B; metietur proindè, *constr.* & 2. *ax.* 10. eadem E datas A, B, C.

Quod autem non detur alia mensura F major, quàm E; indè quidem patet, quia nempè si F metiretur ipsas A, & B; metietur

tur etiam, cor. 3. 10. maximam ipsarum mē-
suram D: quod si etiam metiatur tertiam C; metietur propterea, cor. 3. 10. earundē D, C maximam comm. mensuram E, major minorem. Q. E. A.

COROLL. Hinc quoque, magnitudo metiens tres magnitudines, metitur maximam earum comm. mensuram.

PROPOSITIO V.

Commensurabiles magnitudines (A, & B) inter se rationem habent quàm numerus ad numerum.

Inveniatur, 3. 10. C maxima mensura datarum A, & B, & metiatur reperta C datā A per 3. & datam B per 2. Ergo erit unitas ad 3. ut C ad A, & *invert.* erit 3. ad 1. ut A ad C: ità etiam erit 1. ad 2. ut C ad B; ergo erit, *ex æquo ordin.* A ad B, ut 3. ad 2. qui sunt, ut numerus ad numerum. Q. E. D.

PROPOSITIO VI.

Si duæ magnitudines (A, & B) inter se proportionem habeant quàm numerus ad numerum (5. ad 3.) commensurabiles erunt ipsæ magnitudines (A, & B).

Quoties 1, continetur in numero 5, in tot æquales partes, 10. 6. dividatur magnitudo A, itaut C sit pars ipsius A, qualis est

1.

3, ipsius numeri 5, 6. Quoniam igitur, *constr.* est C ad A, ut 1 ad 5; atque, *hyp.* est A ad B, ut 5 ad 3; erit, *ex æquo ordin.* C ad B, ut 1 ad 3; atqui, 5 *ax.* 7. 1, metitur numerum 3. Ergo etiam C metitur ipsam B: sed & , *constr.* metiebatur ipsam A; ergo, 1. *def.* 10. A, & B sunt commensurabiles.

Q. E. D.

PROPOSITIO VII.

In commensurabiles magnitudines (A, & B) inter se proportionem non habent quàm numerus ad numerum.

Nam si dixeris, se habere A ad B ut se habet numerus E ad numerum F; ergo, 6. 10. A, & B essent commensurabiles, contra hypothesim.

PROPOSITIO VIII.

Si duæ magnitudines (A, & B) inter se proportionem non habeant quàm numerus ad numerum; incommensurabiles erunt ipsæ magnitudines.

Nam si dixeris, A, & B esse commensurabiles; ergo, 5. 10. erit A ad B ut numerus ad numerum, ut puta E ad F, contra hypoth.

PRO-

PROPOSITIO IX.

QVæ à rectis lineis longitudine commensuralibus fiunt Quadrata; inter se proportionem habent, quam quadratus numerus ad quadratum numerum: Et quadrata inter se rationem habentia, quam quadratus numerus ad quadratum numerum; latera habent longitudine commensurabilia. Quæ verò à rectis lineis longitudine incommensurabilibus fiunt quadrata; inter se proportionem non habent, quam quadratus numerus ad quadratum numerum. Et quadrata inter se proportionem non habentia, quam quadratus numerus ad quadratum numerum; neque latera habent longitudine commensurabilia.

1. *Hyp.* Si A & B sunt longitudine commensurabiles; dico fore Aq. ad Bq. ut quad. num. ad quad. num.

Quoniam enim est, *hyp.* & 5. 10. A ad B ut num. ad num. v.g. ut E ad F; idcircò

Æqu. hæ Rationes $\begin{cases} \text{Aq. ad Bq. [20.6.]} \\ \text{A ad B bis } (\textit{Hyp.}) \\ \text{E ad F bis (11. 8.)} \\ \text{Eq. ad Fq. } (\textit{constr.}) \\ \text{Num. quad. ad num. quad.} \end{cases}$

Q. E. D.

2. *Hyp.*

2. *Hyp.* Si sit Aq. ad Bq. ut num. quad. ad num. quad.; dico A & B esse longitudine commensurabiles: Nam

Æqu. hæ Rationes { A ad B bis (20.6.) Aq. ad Bq. (*Hyp.*) Eq. ad Fq. (11.8.) E ad F bis.

ergo, 6. 10. A & B sunt longitudine commensurabiles. Q. E. D.

3. *Hyp.* Si A & B sint longitudine incommensurabiles; dico non fore Aq. ad Bq. ut num. quad. ad num. quad.; aliàs enim, *ut prius* A & B essent longitudine commensurabiles, contra hyp.

4. *Hyp.* Si non sit Aq. ad Bq. ut num. quad. ad num. quad.; dico A & B esse longitudine incommensurabiles; aliàs enim, *ut prius* foret A ad B ut num. ad numerum, contra hyp.

COROLL. Lineæ longitudine commensurabiles, sunt etiam potentia commensurabiles; sed non contra. Sed lineæ longitudine incommensurabiles non sunt idcircò potentia incommensurabiles. Lineæ verò, potentia incommensurabiles sunt etiã longitudine incommensurabiles.

PROPOSITIO X.

SI quatuor magnitudines (A, B, C, D) proportionales fuerint; prima verò (A) secundæ (B) fuerit commensurabilis; erit etiam tertia quartæ commensurabilis:

Et

Et si prima secundæ fuerit incommensurabilis, ita etiam erit tertia quartæ.

Si A,& B erunt commensurabiles; ergo, 5.10. erit numerus ad numerum ut A ad B, quæ sunt, *hyp.* ut C ad D; adeòque, 6.10. C, & D erunt sibi longit. commensurabiles. Sin A, & B sint sibi long. incommensurabiles; ergo, 7.10. non erit num. ad num. ut A ad B, quæ sunt, *hyp.* ut C ad D; adeòq; 8.10. C & D erunt sibi long. incommensurabiles. Q.E.D.

SCHOL. Quòd si quatuor propositæ magnitudines fuerint lineæ; prima verò secundæ, vel longitudine, vel tantùm potentia fuerit commensurabilis; erit pariter tertia quartæ, vel longitudine, vel potentia tantùm commensurabilis. Si verò duæ priores fuerint lineæ, reliquæ verò superficies, vel solida, & fuerint primæ longitudine sibi incommensurabiles, quāvis potentia sint commensurabiles; non erit earum proportio, quæ numeri ad numerum; igitur nec reliquarum eandem cum ipsis rationem habētis, proportio erit, quæ numeri ad numerum; quare & illæ incommensurabiles erunt.

LEMMA 1. *Duos numeros planos invenire, qui proportionem non habeant quàm quadratus numerus ad quadratum numerum.*

Huic lemmati satisfacient duo quilibet numeri plani non similes, vel duo quivis numeri primi.

2. *In*

2. *Invenire lineam (HR) ad quam data linea (KM) sit in ratione datorum numerum (B, C)*

Reperiantur minimi termini 5. & 3. in data ratione B ad C: atque, 10. 6. divide datam KM in partes æquales æquè multas unitatibus numeri 5; quarum partium tot quot sunt unitates in numero 3, componāt rectam HR; liquet esse, *constr.* KM ad HR ut 5. ad 3. qui sunt, ut B ad C. Q. E. F.

3. *Invenire lineam (D) ad cujus quadratum sit quadratum datæ rectæ (KM) ut numerus (B) ad numerum (C)*

Datis jam numeris B, C, atque data etiā linea KM; fiat, *2. lemm. præced.* ut B ad C, ità KM ad HR, inter quas, 13. 6. reperi mediam proportionalem D; dico factum; nam, *Coroll.* 20. 6. erit KMq. ad Dq. ut KM ad HR, quæ sunt, *constr.* ut B ad C. Q. E. F.

PROPOSITIO XI.

INvenire duas rectas lineas alicui propositæ rectæ lineæ (A) incommensurabiles, alteram quidem (D) longitudine, alteram verò (E) etiam potentia.

1. Sume, *1. lemm. præc.* duos numeros non quadratos B, C, & data jam linea A, proindèque dato Aq. fiat, *3. lemm. præc.* ut B ad C, ità Aq. ad Dq. Ergo, *ex quarta parte*

porism. huius, A, & D sunt sibi longit. incommensurabiles: Quia tamen est, *constr.* Aq. ad Dq. ut B ad C, erunt A, & D potentia tantùm sibi commensurabiles. Q. E. F.

2. Inventa jam linea D, quæ sit ipsi A longit. tantùm incommensurabilis, reperiatur, 13.6. inter datam A, & inventam D, media proportionalis E. Dico factum; siquidem, *cor.* 20.6. est Aq. ad Eq. ut A ad D. atqui, *ut prius*, A, & D sunt sibi long. incommensurabiles; ergo & *schol.* 10. 10. Aq. & Eq. erunt sibi incommensurabilia. Q. E. F.

PROPOSITIO XII.

QVa eidem magnitudini (C) sunt commensurabiles (A, B) sunt etiam inter se commensurabiles.

Quoniam, *hyp.* A est commensurabilis ipsi C, & hæc ipsi B; erit, 5. 10. A ad C, ut numerus ad num. ut puta D ad E, & erit C ad B, ut num. ad num. ut puta F ad G. Sumantur jam, 4.8. tres numeri H, I, K, minimi proportionales in rationibus D ad E, & F ad G; erit, *hyp. & constr.* A ad C, ut D ad E, quæ sunt, ut H ad I, atque erit C ad B, ut F ad G, quæ sunt, ut I ad K; adeòq; hinc A, C, B, & illinc H, I, K sunt in proportione ordinata; ergo erit, *ex æquo ordin.* A ad B ut numerus H ad numerum K; adeòque, 6. 10. A, & B sunt sibi commensurabiles. Q. E. D.

SCHOL.

SCHOL. Hinc omnis recta linea rationali linea commensurabilis, est quoque rationalis. Et omnes rectæ Rationales sunt inter se commensurabiles saltem potentia: Item omne spatium rationali spatio commensurabile est quoque rationale; & omnia spatia rationalia inter se commensurabilia sunt: Magnitudines verò quarum altera est rationalis, altera irrationalis, sunt inter se incommensurabiles.

PROPOSITIO XIII.

SI sint duæ magnitudines (A, & B) & altera quidem (A) cuipiam tertiæ (C) sit commensurabilis; altera verò (B) sit etiam tertiæ incommensurabilis; incommensurabiles erunt sibi mutuò prima (A) & secunda (B).

Quippe si B & A essent sibi mutuò commensurabiles; quoniam, *hyp.* C commensurabilis est ipsi A atque, *s. hyp.* B commensurabilis est eidem A; erunt, 12. 10. C & B sibi mutuò commensurabiles; *contra hyp.*

PROPOSITIO XIV.

SI sint duæ magnitudines commensurabiles (A, & B) & altera quidem (A) tertiæ cuipiã (C) incommensurabilis fuerit; reliqua etiam (B) eidem (C) incommensurabilis erit.

Nam

Nam, si dicantur B, & C sibi mutuò commensurabiles; Quoniam, *hyp*. B, commensurabilis est ipsi A, atque, f. *Hyp*. B, commensurabilis est ipsi C; erunt, 12. 10. A, & C sibi mutuò commensurabiles, *contra hyp*.

PROPOSITIO XV.

SI quatuor rectæ lineæ proportionales fuerint (B ad A, ut D ad C) prima verò (B) tanto plus possit supra secundam (A) quantum est quadratum cujuspiam rectæ lineæ (E) sibi longitudine commensurabilis, & tertia (D) tanto plus possit, supra quartam (C) quantum est quadratum cujuspiam rectæ lineæ (F); Erit etiam hæc (F) longitudine commensurabilis ipsi tertiæ (D): Quòd si illæ (B, & E) sint sibi longitudine incommensurabiles; etiam & istæ (D & F) incommensurabiles sibi erunt longitudine.

Quoniam *hyp*. est B ad A, ut D ad C; erit, 22. 6. Bq. ad Aq. ut Dq. ad Cq. Igitur.

Æqu. hæ Rationes { Aq. pl. Eq. ad Aq. (*hyp*. & 7. 5.)
Bq. ad Aq. (*hyp*. & 22. 6.)
Dq. ad Cq. (*hyp*. & 7. 5.)
Cq. pl. Fq. ad Cq.

Ergo, *divid*. erit Eq. ad Aq. ut Fq. ad Cq. adeoque, 22. 6. erit E ad A, ut F ad C,

&, *invert.* A ad E, ut C ad F: sed, *hyp.* erat B ad A, ut D ad C; ergo, *ex æquo ordin.* erit B ad E, ut D ad F: ergo, si B sit commensurabilis, vel incommensurabilis ipsi E; erit, 10. 10. etiam D commensurabilis, vel incommensurabilis ipsi F. Q. E. D.

PROPOSITIO XVI.

SI duæ commens. magnitudines (AB, BC) componantur; tota etiam magnitudo (AC) utrique ipsarum commensurabilis erit. Quòd si tota magnitudo (AC) uni ipsarum partium commensurabilis fuerit; erunt etiam sibi mutuò commensurabiles ipsæ partes.

1. *Hyp.* Inveniatur, 3. 10. ipsarum AB, BC communis mensura D; Ergo D metiens ipsas AB, BC; metietur, 1. *ax.* 10. totam AC; ac proindè, 1. *def.* 10. AB, & AC, & BC commensurabiles sibi mutuò erunt.

2. *Hyp.* Inveniatur, 3. 10. ipsarum AC, AB, comm. mensura D; ergo D metiens ipsas AC, & AB; metietur, 3. *ax.* 10. reliquam BC; ac proindè, 1. *def.* 10. AB, & AC erunt sibi commensurabiles.

Q. E. D.

COROLL. Hinc si tota magnitudo ex duabus composita commensurabilis sit alteri ipsarum; eadem & reliquæ commensurabilis erit.

PRO-

PROPOSITIO XVII.

SI duæ magnitudines incommensurabiles (AB, BC) componantur; tota etiam magnitudo (AC) utrique ipsarum incommensurabilis erit. Quòd si tota magnitudo (AC) uni ipsarum (AB) incommensurabilis fuerit; incommensurabiles etiam erunt ipsæ partes.

1. *Hyp.* Sint, si f.p. AC, & AB commẽsurabiles; ergo, 16. 10. etiam erunt sibi cõmensurabiles AB, & BC, *contra hyp.*

2. *Hyp.* Sint, si f.p. AB, & BC commensurabiles; ergo, 16. 10. etiam erunt sibi commensurabiles AC, & AB, *contra hyp.*

COROLL. Hinc etiam si tota magnitudo ex duabus composita incommensurabilis sit alteri ipsarum; eadem & reliquæ erit incommensurabilis.

PROPOSITIO XVIII. & XIX.

SI fuerint duæ rectæ lineæ inæquales (AB, GK) quartæ autem parti quadrati quod fit à minori (GK) æquale parallelogrammum (ADB) ad majorẽ (AB) applicetur deficiens figura quadrata. 1. Si parallelogrammũ applicatum dividat majorẽ (AB) in partes AD, DB, longitudine inter se commensurabiles; ipsa major

(AB) tantò plus poterit, quàm minor (GK) quantum est quadratum rectæ cujusdam lineæ (FD) sibi etiam longitudine commensurabilis. 2. Quòd si major (AB) tantò plus possit, quàm minor (GK) quantum est quadratum rectæ lineæ (FD) sibi longitudine commensurabilis, quartæ autem parti quadrati, quod fit à minori (GK) æquale parallelogrammum (ADB) ad majorem (AB) applicetur deficiens figura quadrata; in partes (AD, DB) longitudine inter se commensurabiles ipsam (AB) dividet. 3. Sin verò applicatum parallelogrammum in partes (AD, DB) incommensurabiles ipsam (AB) majorem dividat; tanto plus poterit major (AB) quàm minor (GK) quantum est quadratum rectæ lineæ (FD) sibi longitudine incommensurabilis. 4. Quòd si major (AB) tanto plus possit quàm minor (GK) quantum est quadratum rectæ lineæ (FD) sibi longitudine incommensurabilis, quartæ autem parti quadrati quod fit à minori (GK) æquale parallelogrammum (ADB) ad majorem (AB) applicetur deficiens figura quadrata; in partes longitudine incommensurabiles (AD, DB) ipsam (AB) dividet.

Bise-

Bisecetur GK in H; erit, 4. 2. GKq. æquale 4. GHq.: Tum super AB applicetur, 28. 6. rectangulum ADB æquale ipsi GHq. deficiensque figura quadrata DBq.: Tum ex AD abscindatur AF æqualis ipsi DB, & cõcipiatur AB tanquam AD pl. AF. Ità ergo.

Æqu. hæc {
ABq. (8. 2.
4. DAF, pl. FDq. [*constr.*)
4. ADB, pl. FDq. [*constr.*]
4. GHq. pl. FDq. (4. 2.
GKq. pl. FDq.
}

Ergo FDq. est excessus, quo ABq. superat ipsum GKq. His præmissis;

Dico 1. (*iuxtà primam hyp.* 18. *huius*) Si AD, & DB sunt commensurabiles; fore etiam AB, & FD commensurabiles. Quoniam enim, *hyp.* AD, & DB sunt commensurabiles; erunt, 16. 10. AB, & DB commens. Ergo etiam AB, & 2. DB, hoc est AB, & AB, *minùs* FD; adeòque, *cor.* 16. 10. etiam AB, & FD. Q. E. D.

Dico 2. (*iuxtà secundam hyp.* 18. *huius*) Si AB, & FD sunt commensurabiles; fore etiam AD, & DB cõmensurabiles: Quoniam enim AB, & FD sunt comm.; erunt, 16. 10. AB, & AB *minus* FD, hoc est AB, & 2. DB, commensurabiles; adeòque, 16. 10. AD, & DB erunt commensurabiles. Q. E. D.

Dico 3. (*iuxtà primam hyp.* 19. *huius*) Si AD, & DB sunt incommensurabiles; fore etiam AB, & FD incommensurabiles: Quoniam enim AD, & DB sunt incomm.;

erunt, 16. 10. etiam AB, & DB incomm. adeòque etiam AB, & 2. DB, hoc eſt AB, & AB, *minus* FD. adeòque, *cor.* 17. 10. etiam AB, & FD. Q. E. D.

Dico 4. (*iuxtà ſecundam hyp.* 19. *huius*) Si AB, & FD ſunt incommenſ. fore etiam AD, & DB incommenſ. Quoniam enim AB, & FD ſunt incommu. erunt, 17. 10. etiã AB, & AB *minus* FD, hoc eſt AB, & 2. DB incommenſ. adeòque, 17. 10. AD & DB erunt incommenſurabiles. Q. E. D.

DE RATIONALIBVS, & IRRATIONALIBVS. in Genere.

LEMMA TRia ſunt genera linearum *Rationalium* inter ſe commenſurabilium. Aut enim duarum linearum rationalium longitudine inter ſe cõmenſurabilium altera æqualis eſt *Expoſitæ Rationali*, aut illi neutra æqualis eſt, longitudine tamen eſt utraque ipſi commenſurabilis, aut denique uttaque ipſi eſt potentia ſolùm commenſurabilis. Atque hi ſunt modi quos innuit ſequens Theorema.

PROPOSITIO XX.

QVod ſub rationalibus longitudine cõmenſuralibus rectis lineis (BC, CD) ſecundùm aliquem prædictorum modorum continetur rectangulum; RATIONALE eſt.

Ex-

Exponatur A Rationalis, reſpectu cujus lineæ BC, CD rationales dicuntur, & deſcribatur ex BC quadratum BE. Quoniam ergo, *hyp.* A eſt Rationalis: erit etiam, 8. *def.* 10. rationale ipſum Aq. Et quoniam BC, ſaltèm potentia, commenſurabilis eſt ipſi A; erunt, 3. *def.* 10. commenſurabilia BE, & Aq. Quoniam verò, 1. 6. eſt DC ad CE, hoc eſt ad CB, ut DB ad BE, & ſunt, *hyp.* ſibi mutuò commenſurabiles DC & CE; erit etiam, 10. 10. ipſum DB cõmenſurabile ipſi BE, quod, *ut prius*, eſt commenſurabile ipſi Aq. adeòque, 12. 10. DB & Aq. ſunt ſibi mutuò commenſurabilia, ac proindè, 9. *def.* 10. DB eſt Rationale. Q. E. D.

PROPOSITIO XXI.

SI Rationale (DB) ad Rationalem (DC) applicetur; longitudinem (CB) efficiet Rationalem, & ei (DC) ad quam applicatum eſt (DB) longitudine commenſurabilem.

Exponatur G rationalis, reſpectu cujus linea DC rationalis dicitur, & ex DC fiat quadratum DA: Quoniam ergo, *hyp.* & 8. *def.* 10. ipſum Gq. eſt Rationale, atque, *hyp.* & 3. *def.* 10. ipſi eſt commenſurabile quadratum DA; erit, 9. *def.* 10. rationale ipſum DA: Quoniam verò, 1. 6. eſt BD ad DA, ut BC ad CA, atque, *ut prius*, & *hyp.* BD, & DA ſunt rationalia, adeòque, 9.*def.*10. commensurabilia ipsi Gq. ac propterea, 12.10. inter se etiam commensurabilia; erunt pariter, 10.10. commensurabiles sibi mutuò BC, & CA, hoc est DC, quæ *hyp.* est rationalis; ergo, *Schol.* 12.10. erit etiam rationalis ipsa CB. Q.E.D.

LEMMA. Duas rectas rationales potentia solum commensurabiles invenire.

Sit A exposita rationalis, atque, 11.10. sume lineam B, potentia tantùm commensurabilem ipsi A, & sume lineam C potentia tantùm commensurabilem ipsi B: quoniam ergo tam A, quàm C, sunt, *constr.* cōmensurabiles ipsi B; erunt, 12.10. etiam ipsæ sibi mutuò commensurabiles; adeòq; 6.*def.* 10. tam B, quàm C est Rationalis. Q.E.F.

PROPOSITIO XXII.

QVòd sub Rationalibus potentia solùm cōmensurabilibus rectis lineis (DC, CB) continetur rectāgulum (DB) est irrationale, & recta linea (H) ipsū potēs irrationalis est linea quæ vocatur MEDIA.

Exposita rationalis sit A, & fiat quadratum DE, fiatque Hq. æquale ipsi DB: Quoniam ergo, 1.6. est BC ad CE, hoc est CD, ut DB ad DE, atque, *hyp.* BC, & CE sunt sibi longit. incommensurabiles; erit, 10.10. etiam DB, hoc est Hq. incommensurabile ipsi DE, quod, *hyp.* est commensurabile ipsi Aq. adeòque, 13.10. Hq. &

Aq.

Aq. erunt sibi mutuò incommensurabilia, ac proindè, 10.*def.* 10. Hq. sivè BD est irrationale, atque idcircò, 11. *def.* 10. linea H est irrationalis. Q. E. D.

Vocetur autem hæc H ipsum BD potens: MEDIA; Propterea quod, 17.6. est media proportionalis inter BC & CD rationales, potentia tantùm inter se commensurabiles: Vndè ejusmodi MEDIAM citò definiemus si dixerimus eam esse *lineam irrationalem, quæ medio loco proportionalis est inter duas rationales potentia tantùm sibi mutuo commensurabiles.*

SCHOL. Atque hinc rationem reddit Campanus, cur ipsum idem Hq. dicatur *Medium*; quippè si tres lineæ sint continuè proportionales quales sunt BC; *Media* H, & CD; erunt quoque, 22. 6. rectilinea similia, cujusmodi sunt quadrata super ipsas descripta, deinceps proportionalia, adeòque Hq. erit medium proportionale inter BCq. & CDq. Itaque omne rectangulum sub duabus rationalibus potentia tantùm commensurabilibus contentũ medium est; At verò non omne spatium medium sub duabus rationalibus potentia solùm commensurabilibus continetur, siquidem potest spatium medium contineri sub duabus Irrationalibus, nempè Mediis, longitudine, vel potentia tantùm inter se commensurabilibus, ut ex 25. & 26. hujus constabit. Vniuersè tamen, ut rectè monet *Clavius*, omne spatium Medium æquale est alteri cuipiam Medio sub duabus rationalibus potentia tantùm commensurabilibus contento; nam aliàs recta ipsum potens nō esset dicenda *Media* proportionalis inter duas Rationales potentia sibi commensurabiles.

PROPOSITIO XXIII.

Quod (BD) à media (A) fit ad rationalem (BC) applicatum, latitudinem (CD) rationalem efficit & ei (BC) ad quam applicatum est (BD) longitudine incommensurabilem.

Quoniam A est media; erit *Schol.* 22. 10. Aq. æquale alicui rectangulo EG contento sub EF, & FG rationalibus potentia tãtùm commensurabilibus, adeòque longitudine incommensurabilibus; ergo sibi mutuò æquabuntur BD, & EG; ac proindè erit, 14. 6. BC ad EF ut FG ad CD; adeòque etiam, 22. 6. erit BCq. ad EFq. ut FGq. ad CDq.: atqui sibi mutuò sunt commensurabilia BCq. & EFq. (rectæ enim BC & EF ponuntur Rationales; adeòque inter se saltem potentia commensurabiles]: ergo, 10. 10. FGq. & CDq. sunt sibi commensurabilia, ac proindè FG est commensurabilis saltem potentia ipsi CD: atqui FG est Rationalis; ergo etiam, *Schol.* 12. 10. CD est Rationalis.

Cæterùm quoniam est, 1. 6. EF ad FG, ut EFq. ad EG, hoc est ad BD: atqui sunt, *hyp.* longitudine sibi incommensurabiles,

EF

EF & FG; erunt etiam, 10. 10. sibi mutuò incommensurabilia EFq. & BD: atqui *Schol.* 12. 10. idem EFq. est commensurabile ipsi CDq. (ob id nempè quod EF & CD rationales sunt, adeòque inter se potentia saltem commensurabiles) ergo, 18. 10. BD erit incommensurabile ipsi CDq. Quoniam autem est, 1. 6. CDq. ad BD ut CD ad BC: atque, *ut prius* CDq. est incommensurabile ipsi BD; erit etiam, 10. 10. CD incommens. ipsi BC. Q. E. D.

SCHOL. Hinc faciliùs, quàm ex 45. 1. applicabimus ad BC rectangulum quadrato ex A, æquale, si, 11. 6. ipsis BC, & A sumatur tertia proportionalis pro latere CD; siquidem, 17. 6. æquabuntur BD, & Aq.

PROPOSITIO XXIV.

Media (A) commensurabilis (B) media est.

Ad CD expositam rationalem applicetur, *Schol.* 23. 10. rectangulum DE æquale ipsi Aq. & rectangulum DF æquale ipsi Bq. Quoniam ergo Aq, hoc est DE: Medium est, & applicatum est rationali CD, erit, 23. 10. rationalis ipsa CE, & long. tantùm incommens. ipsi CD. Quia verò, 1. 6. est DE ad DF, ut CE ad CF, & DE, hoc est Aq. commensurabile est ipsi DF, hoc est ipsi Bq. (ponuntur enim A, & B inter se commensurabiles) erit, 10. 10. etiam CE commensurabilis ipsi CF; atqui, *ut prius*, CE est rationalis; ergo, *Sch.* 12. 10.

CF

CF rationalis erit. Quoniā igitur, *ut prius*, CF commens. est ipsi CE, & hæc, *ut prius*, pot. tantùm est commens. ipsi CD; erit, 13. 10. CF potentia tantùm commens. ipsi CD; adeòque, 22. 10. rectangulum DF est irrationale, atque linea B ipsum potens est Irrationalis, quæ vocatur Media. Q. E. D.

COROLL. Hinc liquet spatium spatio Medio commensurabile Medium esse.

PROPOSITIO XXV.

QVod (AD) sub mediis (AC, CD) longitudine commensuralibus rectis lineis continetur rectangulum, Medium est.

Super DC fiat quadratum DB, quod erit Medium: & quoniam, 1. 6. est AC ac CB, ut AD ad DB; sunt autem, *hyp.* AC, & CB, hoc est AC, & CD sibi long. commens. erunt, 10. 10. etiam sibi commens. AD, & DB; ergo, *Coroll. præced.* AD est Medium. Q. E. D.

PROPOSITIO XXVI.

QVòd sub Mediis pot. tantùm commens. rectis lineis (AB, BC) continetur rectangulum (AC) vel rationale est, vel Medium.

Super datas AB, BC fiant quadrata AD, CE, atque exponatur FG rationalis, cui nempè

nempè sint datæ AB, BC commensurabiles; rationali verò expositæ applicetur FH æquale ipsi AD, & IK æquale ipsi AC, & LM æquale ipsi CE. Quoniam igitur, *hyp.* AB, & BC sunt Mediæ, & sibi pot. cõmens. erunt etiam Media, & sibi mutuò commẽsurabilia ipsarũ quadrata AD, & CE, hoc est rectangula FH, & LM, sed & applicata sunt ad rationalem FG; Ergo, 23.10. efficiunt rationales ipsas latitud. GH, & KM, atq long. incõmens. ipsi expositæ FG. atqui, 1.6. est FH ad LM, ut GH ad KM; ergo, quoniã, *ut prius*, FH, & LM sunt sibi cõmẽs; erunt, 10.10. etiam sibi cõmens. GH, & KM; adeòque, 20.10. GH duct. in KM rationale erit. Tum verò

Æqu. hæ Rationes	GH ad KH (1.6.)
	FH ad IK (7.5)
	AD ad AC (1.6.)
	BD ad BC (7.5.)
	AB ad BE [1.6.]
	AC ad CE (7.5.)
	IK ad LM (1.6.)
	HK ad KM

Ergo, 11.5. est GH ad HK, ut HK ad KM; adeòque, 17.6. GH duct. in KM, quòd, *ut prius*, Rationale est, æquatur ipsi HKq, adeòque HK est rationalis, atque proindè, 6.*def*.10. vel long. vel saltem pot. cõmens. est ipsi expositæ FG, sivè HI. Si longitudine; Ergo, 20. 10. IK, hoc est AC rationale erit. Sin pot. tantùm; Ergo, 22.10. AC Medium erit; adeòque vel rationale, vel Medium. Q. E. D.

PRO-

PROPOSITIO XXVII.

Medium (AB) non superat medium (AC) rationali (DB)

Sit enim, si f.p. DB rationale: atque ad expositam rationalem EF applicetur EG æquale ipsi AB, & applicetur EH æquale ipsi AC; ergo æquabūtur sibi mutuò reliqua DB, & HI. Erunt ergo EG, & EH Media, utpotè Mediis æqualia, at verò HI erit rationale; Ergo, 23.10. FG, & FH erunt ration. & long. incōm. ipsi EF; adeòq; 14.10. FH, & HG erunt sibi long. incōm.: atqui, 1.6. est FH ad HG, ut FHq. ad FHG; ergo, 10.10. FHG est incōm. ipsi FHq. cui commēs. est ipsum HGq. (nam FH, & HG sunt rationales) Ergo, 16. 10. FHq. pl. HGq. commens. est ipsi HGq. cui, *ut prius*, incōm. est ipsum FHG, cui cōmens. sunt 2. FHG; Ergo, 17. 10. FHq. pl. HGq. pl. 2. FHG, hoc est (4.2.) totum FGq. incommens. est ipsi FHq. pl. HGq. Rationali; adeòque, 10. *def.* 10. FGq. erit Irrationale, ac proindè, 11. *def.* 10. recta FG erit irrationalis, quæ tamen, *ut prius*, ostensa est rationalis; adeòque simul erit rationalis, & irrationalis. Q. E. A.

SCHOL. 1. *Rationale (AE) superat rationale (AD) rationali (CE).*

Nam, *hyp.* AD, & CE sunt sibi commēs. ergo, *Corol.* 16. 10. AE, & CE sunt sibi cōmens. adeòque, *Schol.* 12. 10. CE est rationale. Q. E. D.

2. Ra-

2. *Rationale (AD) cum rationali (CE) facit rationale (AE)*

Nam, *Hyp.* AD, & CE sunt sibi commẽs. ergo, 16.10.. AE, & AD erunt sibi commens.; adeòqne, *Schol.* 12. 10. AE est rationale. Q. E. D.

LEMMATA. 1. *Invenire duos numeros planos sibi similes, vel dissimiles.*

A	6.	C	12.
B	4.	D	8.
AB	24.	CD	96.

A	6.	C	5.
B	4.	D	8.
AB	24.	CD	40.

Sume quoscunque quatuor numeros proportionales A ad B, ut C ad D; liquet AB, & CD esse similes: quòd si non adsit laterum proportionalitas; erunt dissimiles plani.

2. *Duos numeros quadratos (DEq. & CDq.) invenire, itaut compositus ex ipsis (CEq.) sit etiam quadratus.*

Sume AD, DB numeros planos similes (quorum ambo pares sint, vel ambo impares) nimirùm AD 24. & DB 6. Horum summa AB est 30. differentia verò FD est 18, cujus semissis CD est 9. Habent verò plani similes AD, DB unum medium pro-

proportionalem DE, hoc est 12. adeóque CE, CD, DE sunt rationales numeri. Est ergo, 47. 1. CEq. æquale ipsis CDq. pl. DEq. Nimirùm quadratus numerus 225. cujus radix est CE, idest 15. æquabitur ipsis numeris quadratis 81. pl. 144.

Q. E. F.

3. *Atque hinc facile erit invenire duos numeros quadratos, quorum excessus sit quadratus, vel non quadratus: Nempè ex eadem constructione, erit CEq. minùs CDq. æquale ipsi DEq.*

Quòd si AD, & DB sint numeri plani dissimiles, non erit DE, media proportionalis, numerus rationalis; proindèque, quadratorum excessus non erit numerus quadratus.

4. *Duos numeros quadratos (B, C) invenire, ita ut compositus ex ipsis (D) non sit quadratus.*

A 3. B 9. C 36. D 45.

Sume numerum quemlibet quadratum B, sitque C æqualis 4. B, & sit D æqualis ipsis B pl. C. Dico factum: Nam, *constr.* B est quadratus; atqui, *constr.* est B ad C, ut 1. ad 4. nempè ut quadratus ad quadr. Ergo, (24. 8.) C est etiam quadratus. Sed quoniam est B pl. C ad C, hoc est D ad C, ut 5. ad 4. qui non sunt, ut num. quadr. ad quadr.; idcircò non erit D numerus quadratus. Q. E. D.

5. Qua-

5. *Quadratum numerum (A) dividere in duos numeros (B, C) non quadratos.*

A 36. B 24. C 12.
D 3. E 2. F 1.

Sit A numerus quivis quadratus. Accipe D. E. F. numeros planos dissimiles. Sitque D æqualis E pl. F. & fac, ut D ad E, ità A ad B, atque ut D ad F ità A ad C; dico factum. Nam, *constr.* est D ad E, ut A ad B, atque D ad F ut A ad C; ergo, *invert.* & 24. 5. *&* *invert.* est D ad E pl.F, ut A ad B pl. C. atqui D, & E pl. F æquãtur sibi mutuò; Ergo, 14. 5. æquabuntur sibi A, & B pl. C. Iam si dixeris B esse quadratum; ergo, 21. *def.* 7. A, & B, ac proindè, 26. 8. D, & E sunt numeri plani similes, contra *hyp.* idemque absurdum sequetur, si C dicatur quadratus; adeòque B, C non sunt quadrati. Q. E. F.

INVENTIO LINEARVM,
Ex quarum compositione vel divisione oriuntur omnes Irrationales.

PROPOSITIO XXVIII.

INvenire Medias (C, D) potentia tantùm commensurabiles, quæ Rationale (CD) contineant.

Exponantur, *lemm. ad* 22. 10. duæ rationales A, B, potentia tantùm commensurabiles.

biles, & fiat 13.6. ut A ad C, ità C ad D, atque tum fiat, 12.6. ut A ad B, ità C ad D; Dico factum.

Quoniam enim A, B, sunt Rationales pot. solùm commenſ., erit, 22.10. AB, Irrationale Medium: quod, quia, 17.6. potest linea C; erit C, Media. Quoniam verò est, *constr.* A ad B, ut C, ad D, & A, B, sunt pot. tantùm commenſ., erunt quoque, 10.10. C, D, pot. tantùm commenſ.: atqui, *ut prius*, C, Media est; ergo, 24.10. etiam D, Media erit. Demum, quoniam, *constr.* & *invert.* est B, ad A, ut D, ad C; erit, *altern.* B, ad D, ut A, ad C, quæ sunt, *constr.* ut C, ad B; adeòq; C ad B, ut B ad A; ergo, 17.6. Bq. (quod, ut potè factum à rationali B, Rationale est) æquabitur ipsi CD; ac proindè Mediæ C, D, Rationale comprehendent. Q. E. F.

PROPOSITIO XXIX.

Invenire Medias (D, E) potentia tantùm commensurabiles, quæ Medium (DE) contineant.

Exponantur, *lemm.* ad 22. 10. tres rationales A, B, C, pot. tantùm commenſ. tum fiat, 13.6. A ad D, ut D ad B, atque tum, 12.6. fiat, ut B, ad C, ità D, ad E; Dico factum.

Nam, *constr.* & 22. 10. AB, est Irrationale Medium: atqui, 17.6. æquantur AB, & Dq. ergo D, Media est: Sed est, *constr.*

B,

B, ad C, ut D, ad E, atque, *constr.* B, C, sunt rationales pot. tantùm cōmens. ergo, 10. 10. erunt etiam D, E pot. solùm commens. atqui, *ut prius*, D est Media; ergo etiam, 24. 10. ipsa E media est. Demum, quoniam, *hyp. & invert.* est C ad B, ut E ad D; erit, *altern.* C ad E, ut B ad D, quæ sunt, *constr. & invert.* ut D ad A; ergo erit, 11. 5. D ad A, ut C ad E; adeòque, 16. 6. æquabuntur DE, & AC: atqui, 22. 10. AC, utpotè contentum sub rationalibus pot. tantùm commens. est Irrationale Medium; ergò & DE, Medium erit.
Q. E. F.

PROPOSITIO XXX.

INvenire duas Rationales (AB, AF) potentia tantùm commensurabiles, ita ut major (AB) plus possit, quam minor (AF) quadrato rectæ lineæ (BF) longitudine sibi commensurabilis.

Exponatur Rationalis AB, tum, 3. *lemm. ad Praxim hanc*, sume CD, CE, numeros quadratos, ita ut CD, *minùs* CE, non sit quadratus: tum, 2. *lemm.* ad 11. 10. fiat, ut CD ad DE, ità ABq. ad AFq. atque in circulo, cujus Diameter sit AB aptetur AF, ducaturq; BF; Dico factum.

Nam, *constr.* est ABq. ad AFq. ut CD ad CE; ergo, 6. 10. ABq. & AFq. sunt sibi mutuò commensurabilia: sed ABq. factū ex rationali, Rationale est; ergo etiam,

Schol.

Schol. 12.10. AFq. est Rationale, ac proinde AF est Rationalis: Atqui ABq. ad AFq. est, *constr.* ut CD numerus quadratus ad CE non quadratum; ergo, 9. 10. AB, & AF sunt longit. incommens. quamvis sint pot. commens. & Rnles. Cæterùm, 31. 3. & 47. 1. ABq. æquatur ipsis AFq. pl. BFq. atqui, *constr.* est ABq. ad AFq. ut CD ad ED; ergo erit, *convert.* ABq. ad BFq. ut CD ad CE, nempè ut numerus quadratus ad quadratum: adeòque, 9. 10. AB, & BF, sunt sibi longit. commensurabiles. Q. E. F.

PROPOSITIO XXXI.

INvenire duas Rationales (AB, AF) potentia tantùm commensurabiles, ita ut major (AB) plus possit quam minor (AF) quadrato rectæ lineæ (BF) sibi longitudine incommensurabilis.

Exponatur AB, Rationalis, tum, 4. *lemm. ad Praxim hanc*, sume numeros CE, ED, quadratos, itaut ex ipsis compositus CD sit non quadratus: fiatque in reliquis, ut in præcedenti; Dico factum.

Quippè eadem erit hìc demonstratio, quæ in præcedenti; adeoq; AB, AF erunt rationales, pot. solùm commens. Itēq; erit, *convert.* ABq. ad BFq. ut CD ad ED: quoniam ergo CD est numerus non quadratus; erunt proinde 9. 10. AB, BF, longit. sibi incommensurabiles. Q. E. F.

PRO-

PROPOSITIO XXXII.

INvenire duas Medias (C, D) potentia tantùm commensurabiles quæ Rationale (CD) contineant, ita ut major (C) plus possit quàm minor (D) quadrato rectæ lineæ, sibi longitudine commensurabilis.

Inueniantur, 30. 10. duæ Rationales A, B, pot. tantùm sibi commensurabiles, itàut A major plus possit, quàm B minor, quadrato lineæ, long. sibi commens. fiatque, 13. 6. A ad C ut C ad B, atque tum fiat, 12. 6. ut A ad B, ita C ad D; Dico factum.

Nam, *constr.* A, B, sunt rationales pot. tantùm commensurabiles; adeòque, 22. 10. AB Irrationale est, & recta C, quæ, *constr.* & 17. 6. ipsum potest, Media est: atqui, *constr.* est A ad B, ut C ad D, atque A, & B sunt sibi pot. tantùm commens. ergo etiã, 10. 10. C & D erunt sibi pot. tantùm commens.: atqui C, *ut prius*, Media est; ergo, 24. 10. etiam D Media erit. Deindè, quoniam, *constr. & invert.* est B ad A, ut D ad C, &, *altern.* B ad D, ut A ad C, quæ sunt *constr.* ut C ad B; ergo, 11. 5. erit C ad B, ut B ad D; adeòque, 17. 6. CD æquatur ipsi, Bq. quòd utpotè contentum sub B rationali Rationale est; ergo etiam CD rationale erit. Demum, quoniam, *constr.* est A ad B, ut C ad D, atque potest A plusquam B, quadrato lineæ, long. sibi commens. poterit etiam, 15. 10. C plusquam D, quadrato

drato lineæ, long. sibi commensurab. Q. E. F.

PROPOSITIO XXXIII.

Invenire duas Medias (D, E) potentiâ solùm commensurabiles, quæ Medium (DE) contineant, ita ut major (D) plus possit, quàm minor (E) quadrato rectæ lineæ sibi longitudine commensurabilis.

Inveniantur, 30. 10. duæ rationales A, C, pot. tantùm commensf. itàut A plus possit, quàm C quadrato lineæ, sibi long. commenf: tum, *lemm.* ad 22. 10. inveniatur alia B, utrique A, & C pot. solùm commensf. tum fiat, 13. 6. A ad D, ut D ad B, fiatque tandem, 12. 6. ut D ad B, ità C ad E; Dico factum.

Quoniam enim, *constr.* A, & C sunt rationales, atque B commensurabilis est pot. ipsis A, & C; erit, *Schol.* 12. 10. B rationalis: atqui A, & C sunt, *constr.* pot. tantùm commensurabiles, ergo 22. 10. AC, hoc est, *constr. &* 16. 6. Dq. erit Medium, ac proindè linea D media erit. Quia verò, *constr. & altern.* est A ad C, ut D ad E, atque, *ut prius*, A, & C sunt pot. tantùm commensf. erunt, 10. 10. etiam D, & E pot. tantùm commensf. atqui, *ut prius*, D media est; ergo, 24. 10. etiam E media erit. Porrò quoniam, *ut prius*, B commensurabilis est pot. ipsis A, & C rationalibus, adeòq; 22. 10. BC medium est; erit etiam medium ipsum

DE,

DE, quippè cui, *constr.* & 16. 6. æquatur ipsum BC, (siquidem, *ut prius*, est A ad C, ut D ad E). Demum, quoniam, *ut prius*, est A ad C, ut D ad E, potest autem, *constr.* A plusquam C quadrato lineæ sibi long. cōmens., poterit etiam, 15. 10. D plusquam E quadrato lineæ sibi long. comm. Q.E.F. ☞ SCHOL. Sin verò inveniendæ sint duæ D, E pot. tantùm commens. quæ medium cōtineant, itaut D plus possit, quàm E quadrato lineæ long. sibi *Incommensurabilis*; reperiantur, 31. 10. A, & C rationales pot. tantùm commens. itaut A plus possit quàm C quadrato lineæ sibi long. incomm. Atq; tum, *lemm.* ad 22. 10. inveniatur alia B, utrique A, C pot. tantùm commens. & de reliquo tam in construendo, quàm in demonstrando fiat ut prius.

PROPOSITIO XXXIV.

INvenire duas rectas lineas (AG, BG) potentia incommensurabiles, quæ faciant compositum quidem ex ipsarum quadratis Rationale, rectangulum verò sub ipsis contentum, Medium.

Reperiantur, 31. 10. AB, CD rationalis pot. tantùm commens. itaut AB plus possit quàm CD quadrato lineæ sibi long. incomm. tū biseca CD in E, & applica, 28. 6. super AB rectang. AFB deficiens fig. FBq. tum super AB diametrum fiat semicirculus, & erige perpendicul. FG, & ducantur AG, BG; Dico factum. Quo-

Quoniam enim, 8. & 16.6. æquantur sibi mutuò BAF, & AGq. uti & ABF, & GBq; idcircò erit AGq. ad GBq., 7. 5. ut BAF ad ABF, quæ sunt, 1.6. ut AF ad FB: atqui, *constr.* & 19. 10. AF, & FB sunt sibi long. incommensurabiles; ergo etiam, 10. 10. incommensurabilia sibi mutuò erunt AGq. & GBq. adeòque, 4. *def.* 10. AG, & GB sunt sibi pot. incommensf. Quoniam verò ABq. quod, utpotè ex rationali AB, rationale est, æquatur, 31. 3. & 47. 1. ipsis AGq. plus GBq; idcircò Compositũ AGq. pl. GBq. Rationale erit. Demum, quoniam, 31. 3. *atque* 8. & 17.6. FGq. æquatur ipsi AFB, cui, *constr.* æquatur ipsum CEq. ideò æquantur GF, & CE; adeòque rectangulum sub tota CD, & AB, (quod, *constr.* & 22. 10. Medium est) æquatur duobus rectangulis sub FG, & AB, hoc est, 8. & 16. 6. duobus rectangulis sub AG & GB; adeòque, *cor.* 24. 10. rectangulum sub AG, & GB medium est. Q. E. F.

PROPOSITIO XXXV.

INvenire duas rectas lineas [*AG GB*] *potentia incommensurabiles, quæ faciant compositum quidem ex ipsarum quadratis Medium, rectangulum verò, sub ipsis contentum, Rationale.*

Reperi, 32. 10. duas Medias AB, CD pot. tantùm commensf. quæ Rationale continent, itaut AB plus possit, quàm CD, quadrato

drato lineæ sibi long. incommens. fiantq; reliqua ut in præcedenti; Dico factum.

Quippè erunt similiter, *ut prius*, AG, & GB potentia incommens. Quinimò compositum AGq. pl. GBq. Medium erit, utpotè, 21.3. & 47.1. æquale ipsi ABq. quod, tanquam ex Media AB, medium est. Ità similiter ostendemus rectangulum sub AB, & CD, quod, ex *constr.* rationale est, duplum esse rectanguli sub AB, & FG, hoc est rectanguli sub AG, & GB; adeóque & hoc Rationale esse. Q.E.F.

PROPOSITIO XXXVI.

INvenire duas rectas lineas (AG, GB) potentia incommensurabiles quæ faciant, & Compositum ex ipsarum quadratis Medium, & rectangulum sub ipsis contentum, Medium, incommensurabileque composito ex ipsarum quadratis.

Reperiantur, 33. 10. duæ Mediæ AB, CD, quæ Medium contineant, potentia tãtùm commensurabiles, itàut AB plus possit quàm CD quadrato lineæ sibi long. incomm. & reliqua fiant, ut in 34. *huius*; Dico factum.

Quippè erunt similiter AG, GB potentia sibi incommensurabiles, similiterque, *ut prius*, compositum AGq. pl. GBq. Medium erit. Ità pariter ostendemus, rectangulum sub AB, CD, quod, ex *constr.* Medium est, duplum esse rectanguli sub

K AB,

AB, & FG, hoc eſt rectanguli ſub AG, & GB; adeòque & hoc Medium eſſe. Demum, quoniam, *conſtr.* AB eſt long. incōmenſ. ipſi CD, quæ, utpotè dupla ipſius CE, eſt ipſi long. commenſ. idcircò, 13.10. AB, & CE erunt ſibi long. incommenſ. atqui, *ut in* 34. *huj.* æquantur CE, & FG; Ergo

Æqu. hæ Rationes $\begin{cases} \text{AB ad CE [1.2.]} \\ \text{ABq. ad AB ductum in CE(}\textit{ut prius}\text{, \& 7.5.)} \\ \text{ABq. ad AB ductum in FG (}\textit{ut prius}\text{, \& 7.5.)} \\ \text{ABq. ad AG ductum in GB.} \end{cases}$

atqui, *ut prius*, AB, & CE ſunt ſibi long. incomm. Ergo, 13.10. etiam ABq. incōmenſurabile eſt rectangulo ſub AG, & GB. Q.E.F.

SCHOL. *Invenire duas Medias longitudine, & potentia incommenſurabiles.*

Sume, *ut in præcedenti*, rectam AB quæ poſſit compoſitum AGq. pl. GBq. ſitque hoc compoſitum Medium, & rectangulum ſub AG, & GB ſit quoque medium, & incommenſ. ipſi AGq. pl. GBq. ſumaturque media proportionalis inter AG, & GB, nimirum linea potens hoc rectangulum; dicto factum. Nam ſi linea potens compoſitum AGq. pl. GBq. eſſet commenſurabilis potentia lineæ potenti rectangulū ſub AG, & GB; eſſent ſibi commenſurabilia compoſitum ex quadratis, & rectangulum, cōtra *conſtr.* Ergo hæ duæ rectæ, potentes media,

media, mediæ fiunt, & sibi pot. incommẽſ. Q. E. F.

LEMMATA.

1. LEMMA (*ad 29. bujus*) Quod sub linea rationali (AB) & irrationali (BC) continetur rectangulum (BD) est Irrationale.

Nam si esset rationale, faceret, 21. 10. ad rationalem AB applicatum latitudinem BC rationalem, *contr. byp.*

2. LEMM. (*ad 43. bujus*). Si recta (AB) secetur æqualiter (in C) & inæqualiter (in D) atque tum aliter dividatur inæqualiter (in E) propiùs puncto bisectionis;

Dico 1. AEB majus esse, quàm ADB. Nam, 5. 2. AEB æquatur ipsi CBq. *minus* CEq. sicuti ADB æquatur ipsi CBq. *minus* CDq. atqui CDq. majus est, quàm CEq. Ergo AEB majus est, quàm ADB. Q. E D.

Dico 2. Esse ADq. pl. DBq. majus, quàm AEq. pl. EBq. Nam, 4. 2. compositum ADq. pl. DBq. pl. 2. ADB æquatur ipsi ABq. Cui æquatur compositum AEq. pl. EBq. pl. 2. AEB. atqui, *ut prius*, 2. AEB maj. sunt, quàm 2. ADB. Ergo compositum ADq. pl. DBq. majus est quàm AEq. pl. EBq. Q. E. D.

Dico 3. Excessum quo Compositum ADq. pl. DBq. superat Compositum AEq. pl. EBq. æquari excessui quo duo AEB superant 2. ADB. quæ quidem patent ex 4. 2.

3. LEMMA (*ad proximè sequens lemma*) vide figur. prop. præcedentis.

Si recta linea (AB) secta sit utcunque (in F) rectangulum sub partibus contentũ est medium proportionale inter earum quadrata. Item rectangulum sub tota, & una parte est medium proportionale inter quadratum totius, & quadratum ejusdem parti.

Nam, 8. & 4.6. est AF ad FG, ut FG ad FB; Ergo, 22. 6. est AFq. ad FGq. ut FGq. ad FBq. hoc est, 17.6. & 7.5. erit ABq. ad BAF. ut BAF. ad AFq. Q.E.D.

4. LEMMA (*ad* 55. *hujus*).

Sit (AD) rectangulum, cujus unum latus (AC) secetur inæqualiter (in E); bisectumque sit segmentum minus (EC in F) atque ad majus segmentum (AE) fiat rectangulum AGE æquale ipsi EFq. perque G, E, F ducantur ad AB parallela GH, EI, FK: Fiat autem quadratum LM æquale rectangulo AH, atque ad OMP productam fiat quadratum MN æquale rectangulo GI, rectaque LOS, LQT, NRS, NPT producantur.

Dico primò MS, MT esse rectangula: nam ob quadratorũ angulos OMQ, RMP rectos; erit, *Schol.* 15.1. QMR recta linea; ergo, 13.1. anguli RMO, QMP recti sunt, adeoquè adeòque pgra MS, & MT sunt rectangula.

2. Hinc, 2. *ax.* 1. LS, & LT æquantur; adeòque LN. est quadratum.

3. Hinc etiam rectangula SM, MT, EK, FD æqualia sunt: Nam, quia AGE, *constr.* æquatur ipsi EFq. erit, 17.6. AG ad EF, ut EF ad GE, adeoquè, 1. 6. erit AH ad EK, ut EK ad GI; ac proindè, *constr.* & 7. 5. erit LM ad EK, ut EK ad MN: atqui *lemm. præced.* est LM ad SM, ut SM ad MN; ergo, 9. 5. EK, adeoquè, 36. 1. ipsum FD æquatur ipsi SM, cui, 43. 1. æquatur ipsum MT.

4. Hinc, 2. *ax.* 1. LN æquatur toti AD.

5. Hinc, quia EC bisecta est in F; erunt, 16. 10. EF, FC, EC sibi long. commensurabiles.

6. Hinc deinum, si AE, & EC sint pot. sibi commensf. & AE plus possit quàm EC quadrato lineæ sibi long. commensurabilis; erunt AG, GE, AE sibi longitud. commensf. (quippè quartæ parti ipsius ECq. hoc est ipsi EFq. æquale pgrum AGE applicatum est, deficiens figura quadrata; adeoquè, 18. 10. AG, & GE, ac proindè, 16. 10. AG, GE, AE sunt sibi long. commensf. Quia verò est, 1. 6. AG ad GE, ut AH ad GI; erunt, 10. 10. etiam AH, & GI, hoc est LM, & MN sibi commensurabilia. Sin verò AE plus possit, quàm EC quadrato lineæ sibi long. incommensf. ostendetur similiter ex 19. & 17. 10. AG, GE, & AE esse sibi long. incomm. atq; LM, & MN esse sibi incommensurabilia.

GENESIS LINEARVM IRRATIONALIVM
Per Compositionem.
PROPOSITIO XXXVII.

SI duæ rationales (AB, BC) potentia tantùm commensurabiles componantur; tota (AC) Irrationalis est, quæ vocatur Binomium.

Nam, 1.6. est AB ad BC, ut ABC, ad BCq. atque, *hyp.* AB, & BC sunt sibi long. incommensurabiles; Ergo, 10.10. etiam BCq. est incommensurabile ipsi ABC, adeòque & duobus ABC: sed sunt aliàs, *hyp.* sibi commensurabilia ABq. & BCq. adeoquè, 16.10. ABq. pl. BCq. commensurabile est ipsi BCq.; Ergo, 17.10. ABq. pl.BCq. incommensf.est toti ABq. pl.BCq. pl.2. ABC, hoc est (4.2.) ipsi ACq. atqui ABq. pl. BCq. rationale est, utpotè commensf.ipsi ABq. rationali; Ergo, 10.*def.*10. ACq. rationale erit; atque adeò recta AC erit Irrationalis. Q. E. D.

PROPOSITIO XXXVIII.

SI duæ Mediæ (AB, BC) potentia tantùm commensurabiles componantur, quæ rationale contineant, tota (AC) Irrationalis est; Vocetur autem prima ex binis mediis, sivè prima Bimedialis.

Nam,

Nam, 1.6. eſt AB ad BC, ut ABC ad BCq. atque, *hyp.* AB,& BC ſunt ſibi long. incommenſurabiles; Ergo, 10. 10. etiam BCq. eſt incommenſurabile ipſi ABC, adeòque & duobus ABC: ſed ſunt aliàs, *hyp.* ſibi commenſurabilia ABq. & BCq. adeòque, 16.10. ABq. pl. BCq. commenſurabile eſt ipſi BCq. Ergo, 17. 10. totum ABq. pl. BCq. pl. 2. ABC, hoc eſt, 4. 2. ipſum ACq. incommenſ. eſt duobus ABC, adeoquè, 13.10. & uni ABC: atqui, *hyp.* ABC rationale eſt; ergo, 10.*def.*10. ACq. irrationale erit; atque adeò recta AC erit irrationalis. Q. E. D.

PROPOSITIO XXXIX.

SI duæ Mediæ (AB, BC) potentia tantùm commenſurabiles componantur, quæ medium contineant; tota (AC) Irrationalis eſt; Vocetur autem ſecunda Bimedialis.

Ad expoſitam rationalem DE applicetur rectangulum DF æquale ipſi ACq. & rectangulũ DG æquale ipſis ABq. pl. BCq. erit, 4.2. & 3.*ax.* 1. HF æquale 2. ABC. Quoniam ergo, *Hyp.* ABq. & BCq. ſunt ſibi commenſurabilia; erit, 16.10. ABq. commenſurabile toti ABq. pl. BCq. hoc eſt ipſi DG; atqui ABq.*hyp.* medium eſt; ergo, 24. 10. DG medium erit: Ità etiam, quoniam, *hyp.* ABC Medium eſt; erit 24. 10. etiam medium ejus duplum, nempè 2.

ABC, hoc est, *ut prius*, HF. Quia ergo Media DG, & HF applicantur ad rationalem DE; idcircò, 23.10. eorum latitudines EG, GF, erunt rationales, & long. incommens. ipsi DE. Rursus, quoniam, 1.6. est AB ad BC, ut ABq. ad ABC: atque, *hyp.* AB, & BC sunt sibi long. incommensurabiles; erunt etiam, 10.10. sibi incommensurabilia ABq. & ABC: atqui, *ut prius*, ABq. commens. est ipsi DG, uti & ABC ipsius duplo HF; ergo, 13.10. incommensurabilia sibi erunt DG, & HF; adeòque etiam, 10.10. EG, & GF; quippè, 1.6. est DG ad HF, ut EG ad GF: Atqui, *ut prius*, EG, & GF, sunt rationales; ergo, 37.10. tota EF Irrationalis est; adeoquè, 1. *lemm. praced.* totum DF, utpotè contentum sub rationali DE, & Irrationali EF est irrationale; ac proindè recta AC ipsum potens est Irrationalis. Q. E. D.

PROPOSITIO XXXX.

SI duæ rectæ lineæ (AB, BC) potentia incommensurabiles componantur quæ faciant compositum quidem ex ipsarum quadratis rationale, quod autem sub ipsis continetur, Medium; tota recta (AC) Irrationalis est; Vocetur autem Major.

Quoniam, *hyp.* ABC medium est; ergo, *cor.* 24. 10. etiam ejus duplum, hoc est 2. ABC medium erit, adeòq; irrationale, atqui, *hyp.* ABq. pl. BCq. est rationale; Ergo, go, 10. *def.* 10. totum ABq. pl. BCq. incommens. est ipsis 2. ABC; adeòquè, 17. 10. totum compositum ABq. pl. BCq. pl. 2. ABC, hoc est, 4. 2. ipsum ACq. incommensurabile est ipsi ABq. pl. BCq. quod, *ut prius*, est rationale; ac proindè, 10. *def.* 10. ACq. est irrationale, adeòq; recta AC ipsum potens est Irrationalis. Q. E. D.

PROPOSITIO XXXXI.

SI duæ rectæ lineæ (AB, BC) potentia incommensurabiles componantur, quæ faciant compositum quidem ex ipsarum quadratis medium, quod autem sub ipsis continetur, Rationale; tota recta linea (AC) Irrationalis erit; vocetur autem rationale, ac medium potens.

Nam, ut priùs ostensum est, totū ABq. pl. CBq. quod, *hyp.* Medium est, ac proindè irrationale, incommensurabile est uni ABC, quod, *Hyp.* Rationale est; atqui, *hyp.* & 16. 10. ABq. commens. est toti ABq. pl. BCq. quod, *ut prius* incommens. est uni ABC, quod, 16. 1. commens. est duobus ABC, quæ, *hyp.* simul sumpta Rationale constituunt; Ergo, 17. 10. & 11. *def.* 10. ACq. est Irrationale, adeòque AC Irrationalis erit. Q. E. D.

PROPOSITIO XXXXII.

SI duæ rectæ lineæ (AB, BC) potentia incommensurabiles componantur, quæ faciant & compositum ex ipsarum quadratis Medium, & quod sub ipsis continetur, Medium, incommensurabileque composito ex quadratis ipsarum ; tota recta linea (AC) Irrationalis est ; Vocetur autem bina media potens.

Ad expositam rationalem DE applicetur rectangulum DF æquale ipsi ACq. & rectangulū DG æquale ipsis ABq. pl. BCq. erit, 4.2. & 3.*ax*.1. HF æquale 2. ABC. Quoniam ergo tam ABq. pl. BCq. hoc est DG, quàm 2 ABC, hoc est HF, Medium est ; Si applicentur ad DE rationalem ; facient, 23.10. latitudines EG, GF rationales, & long. incommensurabiles ipsi DE. Rursus, quoniam, *hyp*. DG est incommensurabile ipsi HF, & 1.6. est DG ad HF, ut EG ad GE ; erunt, 10.10. etiam EG, GF sibi long. incommensurabiles, quæ tamen sunt ostensæ rationales ; adeoquè sibi saltem pot. commensurabiles ; Ergo, 37.10. tota EF est Irrationalis ; adeòque, 1. *lem. præced.* rectangulum DF contentum sub rationali DE, & irrationali EF, est irrationale ; adeoq; ACq. quod ipsi DF æquatur, est irrationale, ac proindè recta AC, quæ ipsum potest, est Irrationalis. Q. E. D.

DE

DE SECTIONE LINEARVM IRRATIONALIVM, *Genitarum per Compositionem*.

PROPOSITIO XXXXIII.

B*Inomium* (*AB*) *ad unum dumtaxat punctum dividitur in nomina*.

Secetur, si fieri potest, Binomium AB tam in C, quàm in D; ergo utrobique secabitur inæqualiter; siquidem, 37.10. nomina AC, & CB sunt sibi long. incommensurabilia, sicuti & ipsa AD, DB: atqui, 4.2. totum ACq. pl. CBq. pl.2. ACB æquatur ipsi ABq. cui æquatur totum ADq. pl. DBq. pl.2. ADB; Ergo, 2.*lemm.præced.* excessus, quo quadrata ACq. pl. CBq. minora sunt quadratis ADq. pl. DBq. æquatur excessui, quo rectangula 2. ADB minora sunt, quàm 2. ACB: Quoniam verò quadratorum excessus rationalis est (nam, 37.10. ipsæ AC, CB, AD, DB rationales esse debent, adeòque & rationalia ipsa ACq. CBq. ADq. DBq. ac proindè etiam rationalia ipsa ACq. pl. CBq. & ADq. pl. DBq.; rationale verò superat rationale rationali;) ergo etiam excessus rectangulorum esset rationalis; quod fieri nequit; siquidem, 37. 10. tam AC, & CB, quàm AB, & DB sunt sibi long. incommens. adeòque, 22. 10. tam ACB, quàm ADB Medium est; Medium verò, 27. 10. non superat medium rationali. Ergo Binomiū ad unum dumtaxat punctum dividitur in nomina. Q. E. D.

PROPOSITIO XXXXIV.

Bimedialis prima (AB) ad unum dumtaxat punctum (C) dividitur in nomina.

Puta AB dividi in alia nomina AD, DB: Quoniam ergo, 28. 10. quadrata ACq. pl. CBq. uti & ADq. pl. DBq. sunt media, & rectangula ACB, ADB, adeoque, & ipsorum dupla 2. ACB, 2. ADB sunt rationalia, ac proindè eorum excessus est rationalis, atque, *ut prius*, excessus quo 2. ADB minora sunt, quàm 2. ACB, æquatur excessui, quo ACq. pl. CBq. minora sunt, quàm ADq pl. DBq. ergo esset etiam rationalis excessus quadratorum. Quod, 27. 10. fieri nequit. Ergo Bimedialis prima ad unum dumtaxat punctum, &c. Q. E. D.

PROPOSITIO XXXXV.

Bimedialis secunda (AB) ad unum dumtaxat punctum dividitur in nomina.

Puta AB dividi in alia nomina AD, DB: atque ad expositam rationalem EF fiat rectangulum EG æquale toti ABq. & fiat EH

æquale

æquale ipsis ACq. pl. CBq. atque tum fiat EK æquale ipsis ADq. pl. DBq. ergo, 4. 2. æquabuntur 2. ACB, & IG, uti & 2. ADB & LG. Quoniam ergo, 39. 10. ACq. & CBq. sunt media; erit, 16. & 24. 10. etiã Medium totum ACq, pl. CBq. hoc est EH; ergo, 23. 10. latitudo FH erit rationalis, & long. incommensurabilis ipsi EF: Ita etiam, 39. 10. rectangulum ACB medium est, adeòque, 24. 10. medium etiam est ejus duplum, nempè 2. ACB, hoc est IG, ac proindè, 23. 10. ipsa etiam HG est rationalis, & long. incommens. ipsi EF. Atqui, 1. 6. est EH ad IG, ut FH ad HG, atque, EH, & IG sunt sibi incommensurabilia; (nam, 39. 10. AC, & CB sunt sibi long. incommens. atque, 1. 6. est AC ad CB ut ACq. ad ACB, adeoquè, 10. 10. ACq. & ACB sunt sibi etiam incommensurabilia; at verò, 39. 10. AC, & CB sunt sibi saltem pot. commensurabiles, adeòq; CBq. commensurabile est ipsi ACq. ac proindè, 16. 10. totum ACq. pl. CBq. commens. est uni ACq. cui, *ut prius*, est incommens. ipsum ACB, adeòque etiam ipsius duplum, nempè 2. ACB; ac proindè ACq. pl. CBq. & 2. ACB, nimirum EH, & IG sunt sibi incommensurabilia) Ergo, 10. 10. FH, & HG, quæ sunt ostensæ rationales, sunt sibi long. incommens. adeoque, 37. 10. FH pl. HG, erit Binomium: similique ratione FK pl. KG erit Binomiũ. Quod, 43. 10. fieri nequit. Ergo Bimedialis secunda ad unum dumtaxat punctũ &c. Q. E. D.

PRO-

PROPOSITIO XXXXVI.

Major (AB) ad unum dumtaxat punctum (C) dividitur in nomina.

Dividatur, si fieri potest, AB in alia nomina AD, DB: ergo, 40. 10. tam 2. ACB, quàm 2. ADB erunt media, atq; tam ACq. pl. CBq. quàm ADq. pl. DBq. erunt rationalia; adeoquè, ut in 43. & 44. hujus ostēsum est, excessus, quo 2. ADB majora sunt, quàm 2. ACB, erit rationalis: quod, 27. 10. fieri nequit.

PROPOSITIO XXXXVII.

Rationale, ac Medium potens (AB) ad unum dumtaxat punctum (C) dividitur in nomina.

Dic in alia nomina AD, DB divisum esse; ergo, 41. 10. tam ADq. pl. DBq. quàm ACq. pl. CBq. sunt media, atque rectangula ACB, ADB sunt rationalia; æquatur verò, *ut prius*, excessus rectangulorum excessui quadratorum; Ergo etiam quadratorum excessus esset rationalis: quod, 27. 10. fieri nequit.

PROPOSITIO XXXXVIII.

Bina media potens (AB) ad unum dumtaxat punctum (C) dividitur in nomina.

Divi-

Dividatur, si f. p. etiam in D: atque ad exp. rationalem EF fiat rectangulum EG æquale ipsi ABq. & fiat EH æquale ipsis ACq.pl.CBq. & fiat EK æquale ipsis ADq. pl. DBq. Quoniam ergo, 42. 10. ACq. pl. CBq. sive EH est medium; erit, 23.10. latitudo FH rationalis: item quia, 42. 10. 2. ACB, hoc est (4. 2. & 3. *ax*. 1.) IG est medium; erit, 23. 10. etiam HG rationalis: quia ergo, 42. 10. ACq. pl. CBq. & ACB sunt sibi incommensurabilia; erunt etiam sibi incommens. ACq. pl. CBq. & 2. ACB, hoc est, *constr.* EH, & IG: atqui, 1. 6. est EH ad IG, ut FH ad HG; ergo, 10. 10. etiam FH, & HG sibi incommensurabiles, quæ tamen sunt ostensæ rationales; ergo, 37. 10. FHG est Binomium, eodemque modo ostendetur esse Binomium ipsum FKG, contra 43. hujus. Ergo bina media potens, &c. Q. E. D.

DEFINITIONES

Secundæ.

EXposita Rationali, & quæ ex binis nominibus, divisa in nomina, cujus majus nomen plus possit quàm minus, quadrato rectæ lineæ, sibi longitudine commensurabilis.

1. Siquidem majus nomen expositæ Rationali commensurabile sit longitudine; Vocetur tota ex binis nominibus prima.

2. Si

2. Si verò minus nomen expositæ Rationali longitudine sit commensurabile; Vocetur ex binis nominibus secunda.

3. Quod si neutrum ipsorum nominum sit longitudine commensurabile expositæ Rationali; Vocetur ex binis nominibus tertia.

Rursus si majus nomen plus possit, quàm minus, quadrato rectæ lineæ sibi longitudine incommensurabilis.

4. Siquidem majus nomen expositæ Rationali commensurabile sit longitudine; Vocetur ex binis nominibus quarta.

5. Si verò minus nomen; Vocetur quinta.

6. Quòd si neutrum ipsorum nominum; Vocetur sexta.

INVENTIO BINOMIORUM

PROPOSITIO XXXXIX.

I*Nvenire ex binis nominibus primam* (*EG*)

Sume, 3. *lemm.* ad 28. 10. duos numeros quadratos AB, CB, quorum excessus AC non sit quadratus, & exponatur quæpiam D rationalis, cui sumatur quæcunque long. commensurabilis EF, quæ proindè, 6. *def.* 10. erit rationalis: Tum, 3. *lemm. ad* 11. 10. fiat ut AB, ad AC, ità EFq. FGq.; dico, EG esse primum *B*inominum.

Nam, *constr.* & 6. 10. EFq. & FGq. sunt sibi commensurabilia; ergo etiam ipsæ EF

&

& FG saltem pot. commens. erunt : atqui, *ut prius* EF est rationalis ; ergo & FG rationalis erit. Quia verò, *constr.* est EFq. ad FGq. ut A*B* ad AC, qui non sunt ut num. quadr. ad quadr.; ideò, *9.* 10. ipsæ EF, FG quæ sunt ostensæ rationales, sunt sibi long. incommensurabiles ; adeòque, 37. 10. tota EG est *Binomium*. Dico autem eam esse primam ex *Binomiis* ; Quoniam enim, *constr.* est A*B* ad AC ut EFq. ad FGq. & A*B* major est, quàm AC; erit etiã, 14. 5. EFq. majus quàm FGq., ut puta quadrato lineæ H. Sed quia est A*B* ad AC ut EFq. ad FGq., erit, *convert.* EF ad Hq. ut A*B* ad C*B* num. quadr. ad quadr.; ergo, *9.* 10. EF & H sunt sibi long. commensurabiles: atqui, *ut prius* EF majus *Binomii* nomen est long. commensurabile expositæ rationali D ; ergo, 1. *def. ex secundis* EG est primum *Binomium*. Q. E. F.

PROPOSITIO L.

Invenire (EG) secundam ex binis nominibus.

Sume, *3. lemm. ad* 28. 10. duos numeros quadratos A*B*, C*B*, quorum excessus AC non sit quadratus, & exponatur quæpiam D rationalis, cui sumatur quæcunq; long. commensurabilis FG, quæ proindè, *6. def.* 10. erit Rationalis : tum, *3. lemm. ad* 11. 10. fiat ut AC ad A*B*, ità FGq. ad EFq. Dico EG esse secundum Binomium.

Nam, *constr.* & *6.* 10. FGq. & EFq. sunt sibi

sibi commensurabilia, ergo etiam ipsæ FG, & EF saltem pot. commensurabiles erunt, atqui, *ut prius*, FG est rationalis, ergo & EF rationalis erit. Quia verò, *constr.* est FGq, ad EFq. ut AC numerus non quadratus ad AB quadratum; ideò, 9. 10. ipsæ GF, & EF, quæ sunt ostensæ rationales, sunt sibi long. incõmensurabiles; adeoquè, 37. 10. tota EG est Binomium. Dico autem eam esse secundum ex Binomijs: Quoniã enim, *constr. & invert.* est AB ad AC, ut EFq. ad FGq. & AB maj. est, quã AC; erit etiã 14. 5. EFq. majus quàm FGq. ut puta quadrato lineæ H. Sed quia est, *ut prius* AB ad AC, ut EFq. ad FGq. erit, *convert.* EFq. ad Hq. ut AB ad CB, numerus quadratus ad quadratum; Ergo, 9. 10. EF, & H sunt sibi long. commensurabiles: atqui, *ut ostendimus*, GF minus Binomii nomen est long. commens. expositæ rationali D; ergo, 2. *def. ex secundis*, EG est secundum Binomium. Q. E. F.

PROPOSITIO LI.

INvenire (*EG*) *tertiam ex binis nõminibus.*

Sume, 3. *lemm.* ad 28. 10. duos numeros quadratos AB, CB, quorum excessus AC non sit quadratus: tum sumatur I numerus non quadratus proximè major, quàm CB, nempè unitate, vel binario, & exponatur quæpiam D Rationalis, atque 3. *lemm.* ad 11. 10. fiat ut I ad AB, ità Dq. ad EFq. &

ut

ut AB ad AC,ita EFq. ad GFq. Ergo,6. .. erunt sibi commensurabilia Dq. & EFq.& GFq. at verò, 9.10. ipsæ lineæ D., & EF., uti & ipsæ EF, & FG erunt sibi pot.tantùm commens. atqui EF, ut potè ipsi D expositæ Rationali commensurabilis,est Rationalis; ergo etiam FG rationalis erit; adeòque, 37.10. tota EG est Binomium. Dico autem, eam esse tertiam ex Binomiis. Nam, *constr.* est Dq. ad EFq. ut I ad AB, & EFq. ad GFq. ut AB ad AC; ergo est, *ex æquo ordin.* Dq. ad GFq. ut I ad AC, qui nō sunt ut num.quadr. ad quadr. adeòque,9.10. lineæ D, & GF sunt sibi long.incōm. Atqui, *ut prius*, est AB ad AC, ut EFq. ad GFq. & AB maj.est,quàm AC; ergo, 14.5. EFq. maj.est, quàm GFq. utpotè quadrato lineæ H. Cæterùm, *ut prius*, est AB ad AC, ut EFq. ad GFq. ergo, est, *convert.* EFq. ad Hq. ut AB ad CB, num. quadr. ad quadr. Ergo, 9.10. EF, & H sunt sibi long.comm. Atqui, *ut prius*, neutrum Binomii nominū EF,GF est long.comm. ipsi D; ergo,3.*def. ex secundis*, EG est tertiū Binomiū. Q.E.D.

PROPOSITIO LII.

INvenire (EG) quartam ex binis nominibus.

Sume, 5. *lemm.* ad 28.10. quemvis numerum quadratum AB, quem divide in AC, CB non quadratos, & exponatur quæpiam D rationalis, cui sumatur recta quæcunque longitudine commensurabilis

EF,

EF, quæ proindè, *6.def.*10. erit rationalis: tum, *3. lemm. ad* 11.10. fiat, ut A*B* ad AC, ità EFq. ad FGq. Dico EG esse quartum *Binomium*.

Nam, retexendo ordinem præced. demonstrationum, erit EFq. majus quàm FGq. ut puta quadrato lineæ H. atque similiter, *convertendo*, erit EF, ad Hq. ut A*B* ac C*B*, qui, *constr.* non sunt ut num. quadr. ad quadr. adeoquè, 9.10. EF, & H sunt sibi long. incommensurabiles: atqui, *constr.* EF majus *Binomii* nomen est long. commensurabile expositæ rationali D; ergo, 4.*def.* 10. *ex secundis*, EG est quartum *Binomii*. Q.E.F.

PROPOSITIO LIII.

I*Nvenire* (*EG*) *quintam ex binis nominibus*.

Sume 5. *lemm. ad* 28. 10. quemvis numerum quadratum A*B*, cujus segmenta AC, C*B* non sint numeri quadrati, & exponatur quæpiam D rationalis, cui sumatur quæcunque long. commensurabilis FG, quæ proindè, 6.*def.* 10. erit rationalis: tum, 3. *lemm. ad* 11.10. fiat, ut AC ad A*B*, ità FGq. ad EFq. Dico, EG esse quintum *Binonium*.

Nam, ut in 50. hujus, ostendetur EG esse *Binomium*: sed quia, *constr.* & *invert.* est A*B* ad AC ut EFq. ad FGq. & A*B* major est, quàm AC; ergo, 14.5. EFq. maj. est quàm FGq. ut puta quadrato lineæ H.

Rursus,

Rursus, quoniam, *ut prius*, est EFq. ad FGq. ut *AB* ad *AC*; ideò, *convert.* erit EFq. ad Hq. ut A*B* ad C*B*, qui non sunt ut num. quadr. ad quadr. adeoquè, 9. 10. EF, & H, sunt sibi long. incommensurabiles: atqui, *ut prius*, minus *B*inomii nomen FG est long. commensurabile expositæ rationali D; ergo, 5. *def. ex secundis*, EG est quintum *Binomium*. Q. E. F.

PROPOSITIO LIV.

Invenire (EG) sextam ex binis nominibus.

Sume utcunque numeros AC, C*B* primos inter se, itaut compositus ex ipsis non sit quadratus, tum sume quemvis numerum I quadratum, & exponatur quæpiam D rationalis, atque, 3. *lem. ad* 31. 10. fiat ut I ad A*B*, ità Dq. ad EFq. atque, ut A*B* ad AC, ità EFq. ad GFq. atque, ut factum est in 52. hujus, ostendetur totam EG esse *Binomium*: Dico autem, eam esse sextam ex *Binomiis*; nam, *constr.* est Dq. ad EFq. ut I ad AB & EFq. ad GFq. ut *AB* ad AC; ergo est, *ex æquo ordin.* Dq. ad GFq. ut I ad AC, qui non sunt, ut num. quadr. ad quadr. adeoquè, 9. 10. lineæ D, & GF sunt sibi longitud. incommensurabiles; atqui, *ut prius*, est AB ad AC, ut EFq. ad GFq. & AB major est, quàm AC; ergo, 14. 5. EFq. majus est, quàm GFq. ut puta quadrato lineæ H. Porrò erat AB ad AC, ut EFq. ad GFq. ergo, *convert.* est EFq. ad Hq. ut AB ad CB, qui

non

non sunt, ut num. quadr. ad quadr. Ergo, 9.10. EF, & H sunt sibi long. incommensurabile: atqui, *ut prius*, neutrum Binomii nominum EF, GF est long. commensurabile expositæ rationali D; Ergo, *6. def. ex secundis*, EG est sextum Binomium. Q. E. F.

DE IRRATIONALIBVS,
Quæ possunt spatia cõtenta sub rationali, & singulis Binomiis.

PROPOSITIO LV.

SI spatium (AD) contineatur sub Rationali (AB) & primo Binomio (AE pl. EC); recta linea (OP) spatium potens, Irrationalis est, quæ vocatur Binomium.

Siquidem adhibito 5. *lemm. præced.* linea OP potest spatium AD, atque, *Hyp. & def. trium priorum Binomiorum*, AE plus potest quàm EC quadrato lineæ sibi long. commensurabilis, tam in hac propos. quàm in duabus sequentibus; ergo, *cit. lemm.* erunt AG, GE, AE sibi long. commensurabiles: atqui, *hyp. & 1. def. ex secundis*, AE est Rationalis long. commensurabilis Rationali AB; ergo, *Schol.* 12. 10. AG & GE sunt Rationales, long. commensurabiles ipsi AB; ideoque, 20. 10. rectangula AH, & GI, hoc est OMq. & MPq. sunt Rationalia, ac proindè rectæ OM & MP sunt Rationales;

tionales: atqui, *hyp. & 37. 10.* AE, & EC sunt sibi pot. tantùm commensf.; ergo, *cit. lemm.* OM, & MP erunt sibi potentia tantùm commensf.; adeòque OP est Binomiũ. Q.E.D.

PROPOSITIO LVI.

SI Spatium (AD) contineatur sub Rationali (AB) & secundo binomio (AE pl. EC); recta linea (OP) spatium potens, Irrationalis est, quæ vocatur Bimedialis prima.

Nam, adhibito eodem lemm. recta OP potest spatiũ AD, atque AG, GE, AE sunt sibi long. commensurabiles, at verò eadẽ AE est pot. tantùm commensf. ipsi EC, quæ, *hyp. & 2. def. ex secundis,* st rationalis long. commensurabilis ipsi rationali AB; ergo, *Schol.* 12. 10. AG, & GE sunt rationales pot. tantùm commensf. ipsi AB; adeòque, 22. 10. rectangula AH, GI, hoc est OMq. MPq. sunt media; ergo & rectæ OM, MP sunt mediæ: atqui, *hyp.* & 38. 10. AE, & EC sunt sibi pot. tantùm commensf., ergo, *cit. lemm.* OM & MP sunt etiam sibi pot. tantùm commensurabiles: Sed & continent rationale (Nam EF est, long. comm. ipsi EC, cujus est dimidia, & EC, *ut prius* est long. commensf. rationali AB, adeoquè, 20. 10. EK, hoc est SM sivè OMP est rationale), ergo, 38. 10. OP est prima Bimedialis. Q.E.D.

PRO-

PROPOSITIO LVII.

SI spatium (AD) contineatur sub rationali (AB) & tertio Binomio (AE pl. EC); recta linea OP spatium potens, Irrationalis est, quæ vocatur Bimedialis secunda.

Nam, adhibito eodem lemm. recta OP potest spatium AD, atque AG, GE, AE sunt sibi long. commensurabiles, at verò, *hyp. & 3. def. ex secundis*, eadem AE est pot. tantùm commens. ipsi AB rationali; ergo, *Schol.* 12. 10. AG & GE sunt rationales pot. tantùm cōmens. ipsi AB; adeoq; 22. 10. rectangula AH, GI, hoc est OMq. MPq. sunt media; ergo & rectæ OM, MP sunt mediæ: atqui, *Hyp. &* 39. 10. AE & EC sunt pot. tantùm commens.; ergo, *cit. lemm.* OM, & MP sunt etiam sibi pot. tantùm commensurabiles: sed & medium continent (Nam EF est long. commens. ipsi EC cujus est dimidia, & EC, *hyp. & 3. def. ex secundis* est pot. tantùm commens. rationali AB, adeòque, 22. 10. EK hoc est SM, sive OMP est medium); ergo, 39. 10. OP est secunda Bimedialis. Q. E. D.

PRO-

PROPOSITIO LVIII.

SI spatium (AD) contineatur sub rationali (AB) & quarto binomio (AE pl. EC); recta linea OP spatium potens, Irrationalis est, quæ vocatur Major.

Quippè, adhibito eodē lemm. recta OP potest spatium AD, & quoniam, *hyp. & def. triū posteriorum Binom.*, tam hic quàm in duabus sequentibus AE plus potest quàm EC quadrato lineæ sibi long. incommensurabilis; idcircò, *cit. lemm.* erunt AG, GE sibi long. incommensurabiles: atqui, 1. 6. est AG ad GE ut AH ad GI; ergo, 10. 10. AH, & GI, hoc est OMq. & MPq. erunt sibi incommensurabilia, adeòque OM & MP erunt sibi pot. incommens.; atqui, *Hyp. & 4. def. ex secundis* AE est rationalis long. commens. rationali AB; ergo 20. 10. AI, hoc est OMq. pl. MPq. est rationale: sed & ipsæ OM, MP continent medium (Nam EF est long. commens. ipsi EC rationali, cujus est dimidia, & EC, *hyp. & 4. def. ex secundis* est pot. tantum commens. rationali AB, adeoquè, 22. 10. EK, hoc est SM, sivè OMP est medium) ergo, 40. 10. OP est Major. Q. E. D.

PROPOSITIO LIX.

SI spatium (AD) contineatur sub rationali (AB) & quinto binomio (AE *pl. EC); recta linea OP, spatium potens, Irrationalis est, quæ vocatur Rationale ac medium potens.*

Siquidem, ut in præcedenti, recta OP potest spatium AD, & AG, GE sunt sibi long. incõmens., atqui, 1.6. est AG ad GE ut AH ad GI, ergo, 10. 10. AH & GI, hoc est OMq. & MPq. sunt sibi incommens. adeòque OM, & MP sunt sibi pot. incõmens. atqui, *hyp. & 5.def. ex secundis*, AE est rationalis long. incommens. ipsi AB; ergo, 22. 10. AI, hoc est OMq. pl. MPq. est medium: sed & ipsæ OM, & MP concontinent rationale (Nam EF est long. cõmens. ipsi EC cujus est dimidia, & EC, *hyp. & 5.def. ex secundis* est long. commens. rationali AB, adeòque, 20. 10. EK, hoc est SM, sivè OMP est rationale; ergo, 41. 10. OP est Irrationalis, quæ rationale, ac medium potest. Q. E. D.

PROPOSITIO LX.

SI spatium (AD) contineatur sub rationali (AB) & sexto binomio (AE pl. EC(; recta linea (OP) spatium potens, Irrationalis est, quæ vocatur Bina-media potens.

Quippè, *ut prius*, recta OP potest spatium AD, atque AG & GE sunt sibi long. incõmens.: atqui, 1.6. est AG ad GE ut AH ad GI; ergo, 10. 10. AH & GI, hoc est OMq. & MPq. erunt sibi incommensurabilia,

bilia, adeòque OM, & MP erunt sibi pot. incommens.: atqui, *hyp. & 6.def. ex secundis*, AE est rationalis long. incommens. ipsi AB; ergo, 22. 10. AI, hoc est OMq. pl. MPq. est medium: sed & ipsæ OM & MP continent medium (Nam EF est long. cõmens. ipsi EC cujus est dimidia, & EC, *hyp. & 6. def. ex secundis* est long. incommens. rationali AB, adeoquè, 22. 10. EK, hoc est SM, sivè OMP est medium; ergo, 42. 10. OP est Irrationalis, quæ bina media potest. Q. E. D.

LEMMA
Ad sex proximè sequentes.

Sit recta AB inæqualiter secta in C, sitq; AC majus segmentum, & cuivis DE applicentur rectangula DF, DH, IK æqualia ipsis ABq. ACq. CBq. sitque LG bisecta æqualiter in M, ducaturque MN parallela ad GF.

Dico 1. Rectang. ACB, & LN, vel MF æquari sibi mutuò; Quoniam enim 4. 2. ABq. æquatur toti ACq. pl. CBq. pl. 2 ACB, atque, *constr.* ACq. ipsi DH, uti & CBq. ipsi IK æquatur; æquabuntur, 3. *ax.* 1. etiã 2 ACB, & LF, adeoquè unum ACB, & LN, quod, *constr.* ipsius LF est dimidium.

Dico 2. Majorem esse DL, quàm LG; nam DK, hoc est ACq. pl. CBq. majus est, quàm LF, sivè 2 ACB (siquidem secta AB æqualiter in Z; erunt, 2. *lemm.* ad 37. huj. 2 AZB majora quàm 2 ACB, atque ACq.

pl. CBq. majora sunt, quàm 2 AZB, sivè quàm AZq. pl. ZBq.) Ergo, cùm sit, 1.6. DK ad LF ut DL ad LG; erit, 14.5. DL major, quàm LG.

Dico 3. Si AC, & CB sint sibi pot. commens.; fore, 16. 10. ACq. & CBq. & DK, hoc est ACq. pl. CBq. sibi commensurabilia.

Dico 4. fore DL, & LG long. sibi incommens. Nam, 1.6. est AC ad CB, ut ACq. ad ACB. Sed, *hyp.* AC, & CB sunt sibi longit. incomm., ergo erunt, 10. 10. etiam sibi incommens. ACq. & ACB: atqui, *hyp.* AC, & CB sunt sibi pot. commēs. adeoquè ACq. & CBq. sunt sibi commens. ac proindè, 16. 10. ACq. pl. CB est comm. ipsi ACq. cui, *ut prius*, est incomm. ipsum ACB, cui sunt commens. 2 ACB; ergo, 13. 10. ACq. pl. CBq. & 2 ACB, hoc est DK, & LF sunt sibi incomm. adeoquè, 1.6. & 10. 10., etiam DL, & LG.

Dico 5. DL maj. esse, quàm LG quadrato lineæ sibi long. commens. Nam, 1.6. est ACq. ad ACB, ut ACB ad CBq. hoc est, 7.5. DH ad LN, ut LN ad IK; hoc est, 1.6. DI ad LM, ut LM ad IL; ergo, 17.6. DIL, & LMq. æquantur: atqui, *hyp.* sunt sibi comm. ACq. & CBq. hoc est DH, & IK, ac proindè, 1.6. & 10.10. etiam DI, & IL; ergo, 18.10. DL major erit, quàm LG quadrato lineæ sibi long. commens.

Sin AC, & CB ponantur sibi pot. incommens. ostendetur, 19. 10. DL maj. esse, quā LG quadr. lineæ sibi long. incommens.

QVAS-

QVASNAM LATITVDINES
Efficiant quadrata primarum sex Irrationalium, applicata ad Rationale.

PROPOSITIO LXI.

Quadratum binomii (AC pl. CB) ad rationalem (DE) applicatum, facit latitudinem (DG) primum Binomium.

Nam, adhibito lemm. præced. Quoniã, *hyp.* & 37. 10. AC & CB sunt rationales sibi pot. tantùm commens. erunt ACq. & CBq. rationalia, & sibi commensurabilia; adeoquè, 16. 10. & *Schol.* 12. 10. totũ ACq. pl. CBq. hoc est DK est rationale, atqui applicatum est ad rationalem DE; ergo, 21. 10. facit latitudinem DL rationalem long. commens. ipsi DE: at verò, quoniã, *hyp.* & 37. 10. rectæ AC & CB sunt sibi pot. tantùm commens.; idcircò, 22. 10. ACB, adeoquè 24. 10. ejus duplũ, hoc est LF medium erit, ac proindè, 23. 10. latitudo LG, est rationalis pot. tantùm commens. ipsi, DE, ergo, 13. 10. DL, & LG sunt sibi pot. tantùm commens. Demum, *hyp.* & 37. 10. AC, & CB sunt sibi pot. tantùm commens. Ergo, *cit. lemm.* DL plus potest quàm LG quadrato lineæ sibi long. commens.; ergo, 1. *def. ex secundis*, DG est primum binomium. Q. E. D.

PROPOSITIO LXII.

Quadratum bimedialis primæ (AC pl. CB) ad rationalem(DE) applicatum, facit latitudinem (DG) secundum binomium.

Nam adhibito eodem lemm. Quoniam, *hyp.* & 38. 10. AC & CB sunt mediæ pot. tantùm sibi commens.; idcircò ACq. & CBq. erunt sibi commensurabilia, atque media; adeòque, 16. 10. & *Corol.* 24. 10; ACq. pl. CBq. hoc est DK erit medium. atqui applicatum est ad rationalem DE: ergo, 23. 10. faciet latitudinem DL rationalem pot. tantùm commens. ipsi DE: at verò quoniam rectæ AC, & CB, *hyp.* & 38. 10. continent rationale ACB; idcircò, *Schol.* 12. 10. ejus duplum, hoc est LF erit rationale; adeoquè, 21. 10. latitudo LG est rationalis long. commens. ipsi DE; ac proindè, 13. 10. DL & LG erunt sibi pot. tantùm commens. Demum, *hyp.* & 38. 10. AC & CB sunt sibi pot. tantùm commens.; ergo, *cit. lemm.* DL plus poterit quàm LG quadrato lineæ sibi long. commens; ergo, 2. *def. ex secundis*, DG est secundum Binomium. Q. E. D.

PROPOSITIO LXIII.

Quadratum secundæ bimedialis (AC pl. CB) ad rationalem (DE) applicatum, faciet latitudinem (DG) tertium binomium.

Quippe,

Quippè, *ut prius*: Quoniam, *hyp.* & 39. 10. AC & CB sunt mediæ pot. tantùm sibi commens., idcircò ACq. & CBq. erunt sibi commensurabilia atq; media, adeòque, 16. 10., & *Corol.* 24. 10. ACq. pl. CBq. hoc est DK erit medium: atqui applicatum est ad rationalem DE; ergo, 23. 10. faciet latitudinem DL rationalem potent. tantùm commens. ipsi DE: Rursus, quoniam, *hyp.* & 39. 10. AC, & CB continent medium ACB; idcircò, 16. 10. & *cor.* 24. 10. ejus duplum, hoc est LF erit medium; adeòq; 23. 10. latitudo LG est rationalis, pot. tantùm commens. ipsi DE, ac proindè, 13. 10. DL, & LG erunt rationales pot. tantùm sibi commens. Demum, *hyp.* & 39. 10. AC & CB sunt sibi pot. tantùm commens.; ergo, *cit. lemm.* DL plus potest quàm LG quadrato lineæ sibi long. commens.; ergo, 3. *def. ex secundis* DG est tertium binomium. Q. E. D.

PROPOSITIO LXIV.

Quadratum Majoris (AC pl. BC) ad rationalem (DE) applicatum, facit latitudinem (DG) quartum binomium.

Adhibito, *cit. lemm.* Quoniam, *hyp.* & 40. 10. ACq. pl. CBq. hoc est DK est rationale, atque applicatum est ad DE rationalem; idcircò, 21. 10. efficiet latitudinem DL rationalem, long. commensurabilem ipsi DE; At verò, quoniam, *hyp.* & 40. 10. AC & CB continent medium, ACB; idcircò, 16. 10. & *Corol.* 24. 1. ejus duplum hoc est LF erit medium; ac proinde, 13. 10. DL, & LG erunt sibi pot. tantùm commens. Denique, *hyp.* & 40. 10. AC & CB sunt sibi pot. incommens.; ergo, *cit. lemm.* DL plus potest quàm LG quadrato lineæ sibi long. incommens.; ergo, 4. *def. ex secundis* DG est quartum binomium. Q. E. D.

PROPOSITIO XLV.

QVadratum ejus (*AC pl. CB*) quæ rationale, ac medium potest ad rationalem (*DE*) applicatum, facit latitudinem (*DG*) quintum binomium.

Nam adhibito, *cit. lemm.* Quoniam, *hyp.* & 41. 10. ACq. pl. CBq. hoc est DK est medium, atque applicatum est ad DE rationalem; idcircò, 23. 10. efficiet latitudinē DL rationalem, pot. tantùm cōmens. ipsi DE: At verò, quoniam, *hyp.* & 41. 10. AC & CB continent rationale ACB; idcircò, 16. 10., & *Schol.* 12. 10. ejus duplum, hoc est LF erit rationale; adeoquè, 21. 10. latitudo LG erit rationalis, long. commens. ipsi DE; ac proindè, 13. 10. DL & LG erunt sibi pot. tantùm commens.: Denique, *hyp.* & 41. 10. AC & CB sunt sibi pot. incommens., ergo, *cit. lemm.* DL plus potest quàm LG quadrato lineæ sibi long.

in-

incommensurabilis; ergo, 5. *def. ex secundis*, DG est quintum binomium.

Q. E. D.

PROPOSITIO LXVI.

Quadratum ejus (AC pl. CB) quæ bina media potest ad rationalem (DE) applicatum, facit latitudinem (DG) sextum binomium.

Rursus, adhibito *cit. lemm.* Quoniam, *hyp.* & 41. 10. ACq. pl. CBq. hoc est DK est medium, atque applicatum est ad rationalem DE; idcircò, 23. 10. efficiet latitudinem DL rationalem, pot. tantùm commens. ipsi DE; Item, quoniam, *hyp.* & 42. 10. AC & CB continent medium ACB; idcircò, 16. 10. & *Coroll.* 24. 10. ejus duplũ, hoc est LF erit medium; adeòque, 23. 10. latitudo LG erit rationalis pot. tantùm commens. ipsi DE, ac proindè DL, & LG erunt rationales, pot. tantùm sibi commẽs. Denique, *Hyp.* & 42. 10. AC, & CB sunt sibi pot. incommens.; ergo, *cit. lemm.* DL plus potest quàm LG quadrato lineæ sibi long. incommensurabilis; ergo, 6. *def. ex secund.* DG est sextum binomium.

Q. E. D.

IRRATIONALIBVS COMMENSV-
RABILES
Sunt ejusdem cũ ipsis naturæ, & ordinis.

PROPOSITIO LXVII.

B*Inomio (AC pl CB) recta (DE) commensurabilis; & ipsa binomium est atque ordine idem.*

Fiat, 12. 6. ut tota AB ad totam DE, sic ablata AC ad ablatam DF; mox ergo, 19. 6. erit CB ad FE ut AB ad DE, sivè AC ad DF; atqui, *hyp.* AB & DE sunt sibi lõg. commens., ergo, 10. 10. AC & DF, uti etiã CB & FE erunt sibi long. commens.: Quoniam verò, *hyp.* & 37. 10. AC & CB sunt rationales; ergo etiam DF, & FE illis cõmensurabiles, rationales erunt: Tum, quoniam, *ut prius* est AC ad DF ut CB ad FE; erit, *altern.* AC ad CB ut DF ad FE: atqui, *hyp.* & 37. 10. AC & CB sunt sibi pot. tũ commens. ergo, 10. 10. DF & FE sunt etiã sibi pot. tũ cõmens. adeòq; 37. 10. DE est Binomiũ. Rursus, quoniam, *ut prius*, est AC ad CB ut DF ad FE; ergo si AC plus poterit quàm CB quadrato lineæ sibi longitudine commens., aut incommens.; ità etiam, 15. 10. DF plus poterit, quàm FE quadrato lineæ sibi, long. commens. aut incommens.: Item, si AC sit long. commens. aut incommens. rationali expositæ; erit etiam, *Sch.* 12. 10. aut, 14. 10. ipsa DF (quippè cui, *ut prius*, est commensurabilis ipsa.

ipsa AC] commens., vel incommens. eidẽ expositæ rationali: eademque ratione, si CB sit long. commens., aut incommens. expositæ rationali; erit etiam FE eidem rationali expositæ long. commens., aut incommens.: sin verò neutra AC, CB sit rationali expositæ long. commens. neutra etiã DF, FE eidem rationali expositæ cõmensurabilis erit; adeòque, *ex def. binomiorum*, quodcunque binomium sit AB, ejusdẽ etiã ordinis binomium erit DE. Q. E. D.

PROPOSITIO LXVIII.

Bimediali (AC pl. CB) recta (DE) commensurabilis; & ipsa bimedialis est, atque ordine eadem.

Fiat, 12.10. ut tota AB ad totam DE sit ablata AC ad ablatam DF; mox ergo, 19.6. erit CB ad FE, ut AB ad DE: atqui, *hyp.* AB, & DE sunt sibi long. commens., ergo, 10.10. etiam AC & DF, uti etiam CB & FE erunt sibi long. commens.: Sunt autem, *hyp.* & 38. *vel* 39.10. AC & CB Mediæ; ergo, 24.10. etiam DF, & FE illis commens. Mediæ erunt: Quia verò, *ut prius* est AC ad DF, ut CB ad FE; erit, *altern.* AC ad CB ut DF ad FE: atqui, *hyp.* & 38. *vel* 39. 10. AC & CB sunt sibi pot. tantùm commens., ergo, 10.10. DF & FE sunt sibi pot. tantùm commens., adeoquè, 38. *vel* 39.10. DE est Media: Deindè, quoniam, 1.6. est ACq. ad ACB, ut AC ad CB, quæ sunt, *ut prius* ut DF ad FE, quæ sunt, 1.6. ut DFq.

ad DFE; erit 11.5., *& altern.* ACq ad DFq: ut ACB ad DFE: atqui ACq, & DFq. sunt sibi commensurabilia [nam AC, & DF sunt sibi, *ut prius* long. commens.), ergo, 10.10. ACB, & DFE sunt etiam sibi commensurabilia: adeòque, si ACB sit rationale, itaut AB sit prima bimedialis; erit etiam, *Sch.* 12.10. DFE rationale; adeòq; 38.10. DE erit prima bimedialis: Sin verò ACB sit Medium, itaut AB sit secunda bimedialis, etiam, *Sch.* 24.10. DFE erit medium; adeoquè, 39.10. DE erit secunda bimedialis. Q. E. D.

PROPOSITIO LXIX.

M*Ajori (AC pl. CB) recta commensurabilis (DE;) & ipsa major est.*

Fiat, 12.6. ut tota AB ad totam DE, sic ablata AC ad ablatam DF; mox ergo, 19. 6. erit CB ad FE, ut AB ad DE, sive AC ad DF: atqui, *hyp.* AB, & DE sunt sibi commens.; ergo, 10.10. etiam AC, & DF uti etiam CB & FE erunt sibi commens.: Quia verò, *ut prius*, *& alt.* est AC ad CB ut DF ad FE; idcircò, 22.6. erit ACq. ad CBq. ut DFq. ad FEq. *& compon.* erit ACq. pl. CBq. ad CBq. ut DFq. pl. FEq. ad FEq. *& invert. atque altern.* erit CBq. ad FEq. ut ACq. pl. CBq. ad DFq. pl. FEq. Atqui CBq. & FEq. sunt sibi commens. (nam CB, & FE sunt ostensæ commens.); ergo, 10. 10.

etiam

etiam sibi commens. erunt ACq. pl. CBq. & DFq. pl. FEq. Atqui etiam, *hyp.* & 40. 10. ACq. pl. CBq. est rationale; ergo etiã, *schol.* 12. 10. DFq. pl. FEq. est rationale. Deindè, quoniam, 1.6. est ACq. ad ACB, ut AC ad CB, quæ sunt, *ut prius*, ut DF ad FE, quæ sunt, 1.6. ut DFq. ad DFE; ergo, 11.5. & *altern.* erit ACq. ad DFq. ut ACB ad DFE: atqui ACq. & DFq. sunt sibi commensurabilia (nam AC & DF sunt sibi, *ut prius*, commens.); ergo, 10. 10. DFE est commensurabile ipsi ACB, quod, *hyp.* & 40. 10. Medium est; adeòque, *Corol.* 24. 10. DFE Medium quoque est. Demum, quoniam, *ut prius*, est AC ad CB ut DF ad FE, atque, *hyp.* & 40. 10. AC, & CB sunt sibi pot. incommens. ergo, 10. 10. DF, & FE erunt sibi pot. incommens.; adeoquè, 40. 10. DE Major erit. Q. E. D.

PROPOSITIO LXX.

R*ationale, ac medium potenti (AC pl. CB) commensurabilis (DE); & ipsa rationale ac medium potens est.*

Iterum, 12. 6. fiat ut tota AB ad totam DE sic ablata AC ad ablatam DF; mox ergo, 19. 6. erit CB ad FE ut AB ad DE, sivè AC ad DF; atqui, *hyp.* AB & DE sunt sibi commens. ergo, 10. 10. etiam AC, & DF, uti & CB, & FE erunt sibi commens. Quia verò, *ut prius*, & *altern.* est AC ad CB ut DF ad FE; idcircò, 22. 6. erit ACq

ad

ad CBq. ut DFq. ad FEq. & *compon.* erit ACq. pl. CBq. ad CBq. ut DFq. pl. FEq. ad FEq. & *invert. atque altern.* erit CBq. ad FEq. ut ACq. pl. CBq. ad DFq. pl. FEq. Atqui CBq. & FEq. sunt sibi commensurabilia (nam CB, & FE sunt ostensæ commensurabiles); ergo, 10.10., etiam sibi commensurabilia erunt ACq. pl. CBq. & DFq. pl. FEq. Atqui, *hyp.* & 41. 10. ACq. pl. CBq. est Medium; ergo, *coroll.* 24. 10. etiam DFq. pl. FEq. Medium erit. Deindè, quoniam, 1.6. est ACq. ad ACB ut AC ad CB, quæ sunt, *ut prius*, ut DF ad FE, quæ sunt, 1. 6. ut DFq. ad DFE; ergo, 11.5. & *altern.* erit ACq. ad DFq. ut ACB ad DFE: atqui ACq. & DFq. sunt sibi commensurabilia (nam AC, & DF sunt sibi, *ut prius* commens.); ergo, 10.10. DFE est commensurabile ipsi ACB, quod, *hyp.* & 41. 10. est rationale, ergo, *Schol.* 12.10. DFE est rationale. Demum, quoniam, *ut prius*, est AC ad CB ut DF ad FE, atque, *hyp.* & 41.10. AC & CB sunt sibi pot. incōmens. ergo, 10. 10. DF, & FE erunt sibi pot. incommens. adeòque, 41. 10. DE est ea, quæ Rationale ac Medium potest.
Q. E. D.

PROPOSITIO LXXI.

Bina media potenti (AC pl. CB) recta commensurabilis (DE); & ipsa bina media potens est.

Quippè

Quippè retexendo ordinem præcedentium demonstrationum: Quoniam, *hyp.* & 42. 10. ACq. pl. CBq. est Medium; ergo, *coroll.* 24. 10. DFq. pl. FEq. Medium etiã erit. Deindè, quoniam DFE est commẽsurabile ipsi ACB, quod, *hyp.* & 42. 10. Medium est; ergo, 24. 10. ipsum etiam DFE Medium erit. Demum, quoniam, *ut prius*, est AC ad CB ut DF ad FE, atq; *hyp.* & 42. 10. AC, & CB sunt sibi pot. incommens. ergo, 10. 10. DF, & FE erunt sibi pot. incommens. adeoquè, 42. 10. DE erit ea, quæ bina media potest. Q. E. D.

IRRATIONALES

Quarum Quadrata æquantur duobus mediis, vel cõposito ex rationali, & medio.

PROPOSITIO LXXII.

SI rationale (A) & medium (B) componantur, una ex quatuor rationalibus fit; nempè vel binomium, vel prima bimedialis, vel major, vel ea, quæ rationale ac medium potest.

Nimirum, si Hq. sit æquale toti A pl. B; erit linea H una ex quatuor irrationalibus, quas innuit Theorema. Fiat enim ad CD expositam rationalem rectangulum CE æquale ipsi A & rectangulum FI æquale ipsi B; ergo totum CI æquabitur toti A pl. B, quod, *hyp.* æquatur ipsi Hq. Quoniam ergo, *hyp.* A est rationale; erit, *Schol.* 12. 10.

etiam

etiam GE rationale; adeoque, 21. 10. latitudo CF est rationalis, long. commens. ipsi CD. Quoniam verò, *hyp.* B est medium; erit, *corol.* 24. 10. etiam FI medium; adeoquè, 23. 10. latitudo FK est rationalis, long. incommens. ipsi CD; adeoque, 13. 10. CF & FK sunt rationales; long. sibi incommēs. ac proindè, 37. 10. CF pl. FK est binomiū. Atqui, 1. 6. est CF ad FK ut CE ad FI, hoc est ut A ad B; ergo, 14. 5. si A majus, vel minus sit quàm B, erit CF major, vel minor quàm FK.

Igitur si CF plus potest quàm FK quadrato lineæ sibi long. commens. erit, 1. *def. ex secundis*, CK primum binomium; ac proindè, 55. 10. linea H est binomium.

Si CF plus potest quàm FK quadrato lineæ sibi long. incōmens. erit, 4. *def. ex sec.* CK quartum binomium; ac proindè, 58. 10. linea H est major.

Sin verò A minus sit quàm B; erit, 1. 6. & 14. 5. CF minor, quàm FK: adeoquè si FK plus potest quàm CE quadrato lineæ sibi long. commens. erit, 2. *def. ex sec.* CK secundum binomium; ac proindè, 56. 10. linea H est secunda bimedialis.

Si FK plus potest quàm CF quadrato lineæ sibi long. incommens. erit, 5. *def. ex sec.* CK quintum binomium; ac proindè, 59. 10. linea H erit ea, quæ rationale ac medium potest. Q. E. D.

PROPOSITIO LXXIII.

SI duo media (A, & B) inter se incommensurabilia componantur, una duarum irrationalium fit, nempè vel secunda bimedialis, vel bina media potens.

Nimirum si Hq. sit æquale toti A pl. B; erit linea H una irrationalium, quas innuit Theorema. Fiat enim constructio ut in præcedenti. Quoniam, *hyp.* A, & B hoc est CE, & FI sunt media; erunt, 23. 10. latitudines CF & FK rationales, long. incommens. ipsi CD. Deindè quoniam, *hyp.* CE, & FI sunt sibi incommensurabilia, atque, 1. 6. est CE ad FI ut CF ad FK; ergo, 10. 10. CF, & FK erunt etiam sibi incommens. ac propterea, 37. 10. CF pl. FK est binomium. Atqui, *ut prius*, est CF ad FK ut CE ad FI, hoc est ut A ad B; ergo, 14. 5. si A majus, vel minus sit quàm B, erit CF major, vel minor, quàm FK.

Itaque si CF plus possit quàm FK quadrato lineæ sibi long. commens. erit, 3. *def. ex sec.* CK tertium binomium; ac proindè, 57. 10. linea H est secunda bimedialis.

Si CF plus possit quàm FK quadrato lineæ sibi long. incommens., erit, 6. *def. ex sec.* CK sextum binomium; ac proindè, 60. 10. linea H erit ea, quæ bina media potest.

Q. E. D.

GE-

GENESIS LINEARVM
per subtractionem.

PROPOSITIO LXXIV.

SI à rationali (AB) rationalis (AC) auferatur potentia tantùm commensurabilis existens toti; reliqua (BC) irrationalis est. Vocetur autem Apotome.

Quippè, 1. *6*: est AB ad AC ut ABq. ad ABC, sed, *hyp.* AB, & AC sunt sibi long. incommens., ergo, 10. 10. ABq. & BAC sunt sibi incommens. Quoniam verò AB, & AC ponuntur rationales, ac proindè ABq. & ACq. sunt sibi commens.; idcircò, 16. 10. compositum ABq. pl. ACq. (hoc est 7. 2. duo *B*AC pl. BCq.) erit commens. ipsi ABq. cui, *ut prius*, est incommens. ipsum BAC, cui est commens. ipsius duplū, nempè 2 BAC; ergo 2 BAC pl. BCq. & 2 BAC sunt sibi incommens. adeoquè, *Cor.* 17. 11. BCq. incommens. est ipsi composito 2 BAC pl. BCq. hoc est, *ut prius*, ipsi composito ABq. pl. ACq. quod, utpotè ipsi ABq. rationali commensurabile, est rationale; ac proindè BCq. est irrationale, & recta BC ipsum potens est irrationalis. Q. E. D.

COROLL. Hinc si à majori nomine *Binomii* minus nomen auferatur; reliqua est *Apotome*: Quippè AB, & AC ponuntur rationales sibi pot. tantùm commens. ergo,

37. 10. AB pl. AC est binomium, cujus majus nomen AB, & minus AC.

PROPOSITIO LXXV.

SI à Media (AB) auferatur Media (AC) potentia tantùm commensurabilis existens toti, quæ cum tota rationale contineat; reliqua irrationalis est. Vocetur autem Apotome prima media.

Quoniam enim, *hyp.* AB, & AC sunt sibi pot. commens. erunt sibi cõmens. ABq. & ACq. adeoquè, 16. 10. ABq. & ABq. pl. ACq. atqui, *Hyp.* ACq. utpotè factum à media, est irrationale ac medium; ergo, *Corol.* 24. 10. ABq. pl. ACq. irrationale erit ac medium. Quoniam verò BAC ponitur rationale; erit etiam rationale ejus duplũ; adeoquè 2 BAC incommens. erit ipsi irrationali ABq. pl. ACq. hoc est 7. 2. ipsi 2. BAC; adeoquè, 17. 10. BCq. incommens. est ipsi 2 BAC rationali, ac proindè BCq. est irrationale, rectaquè BC ipsum potens irrationalis. Q. E. D.

COROLL. Hinc si à majori nomine *Primæ Bimedialis* minus nomen auferatur; reliqua est *Apotome prima media*: Quippè AB, & AC ponuntur Mediæ sibi pot. tantùm commens. & quæ rationale BAC contineant; ergo, 38. 10. AB pl. AC est prima bimedialis, cujus majus nomen AB, & minus AC.

PRO-

PROPOSITIO LXXVI.

SI à Media (AB) auferatur media (AC) potentia tantùm commensurabilis existens toti; quæ cum tota Medium contineat; reliqua irrationalis est. Vocetur autem Apotome secunda mediæ.

Quoniam enim, *hyp.* AB, & AC sunt sibi pot. commensurabiles, erunt sibi commens. ABq. & ACq., adeoquè, 16. 10. etiam ABq. & AB pl. ACq. atqui tam ABq. quàm ACq. est Medium (Nam AB, & AC ponuntur mediæ); ergo, *cor.* 24. 10. etiam AB pl. ACq. est medium: Atqui BAC ponitur mediũ, ergo, *cor.* 24. 10. Medium quoque est ejus duplum, sive 2 BAC: atqui, 7. 2. æquãtur ABq. pl. ACq. & 2 BAC pl. BCq. ergo BCq. est excessus unius Medii supra alterũ, adeòque, 27. 10. BCq. est irrationale, & recta BC ipsum potens irrationalis. Q. E. D.

COROLL. Hinc si à majori nomine *secundæ bimedialis* minus nomen auferatur; reliqua est *Apotome secunda mediæ*. Quippè AB, & AC ponuntur mediæ sibi pot. tantùm commens. & quæ medium BAC continent; ergo, 39. 10. AB pl. AC est secũda bimedialis, cujus majus nomen AB & minus AC.

PRO-

PROPOSITIO LXXVII.

SI à recta (AB) auferatur recta (AC) potentia incommensurabilis existens toti, quæ cum tota faciat compositum quidem ex ipsarum quadratis Rationale, quod verò sub ipsis continetur, Medium; reliqua irrationalis est. Vocetur autem Minor.

Nam ABq. pl. ACq. ponitur Rationale; contra verò BAC, adeoquè etiam 2 BAC ponitur Medium, ac proindè Irrationale; ergo sunt sibi incommens. ABq. pl. ACq. hoc est (7.2.) 2 BAC pl. BCq. & 2 BAC; adeoquè, 17. 10. sunt sibi incommens. 2 BAC pl. BCq. & BCq. nimirùm Rationale ABq. pl. AC, & BCq. ac proindè BCq. est Irrationale; & recta BC ipsum potens irrationalis. Q. E. D.

COROLL. Hinc si à majori nomine *Majoris*, minus nomen auferatur; reliqua est *Minor*. Quippè AB, & AC ponuntur sibi pot. incommens. & ABq. pl. AC ponitur rationale, BAC verò ponitur medium; ergo, 40. 10. AB pl. AC est Major, cujus majus nomen AB, & minus AC.

PROPOSITIO LXXVIII.

SI à recta (AB) auferatur recta (AC) potentia incommensurabilis existens toti, quæ cum tota faciat compositum quidem

dem ipsarum quadratis Medium, quod autem sub ipsis continetur rationale; reliqua irrationalis est. Vocetur autem cum Rationali Medium totum efficiens.

Siquidem ABq. pl. ACq. ponitur Medium, adeoquè irrationale; contra verò BAC, ac proindè etiam ejus duplum, sivè 2 BAC ponitur Rationale; ergo erunt sibi incommens. ABq. pl. ACq. hoc est (7.2.) 2 BAC pl. BCq. & 2 BAC; adeoquè, 17. 10. sunt sibi incommens. 2 BAC rationale, & BCq. ac proindè BCq. est irrationale, & recta BC ipsum potens irrationalis. Q. E. D.

COROLL. Hinc si à majori nomine ejus, quæ *Rationale, ac Medium potest*, minus nomen auferatur; reliqua est quæ *cum Rationali Medium totum efficit*: Quippe AB, & AC ponuntur sibi pot. incommens. & AB pl. AC ponitur Medium, BAC verò ponitur Rationale; ergo, 41. 10. AB pl. AC erit ea quæ Rationale, ac Medium potest, cujus majus nomen AB, & minus AC.

PROPOSITIO LXXIX.

SI à recta (AB) auferatur recta (AC) potentia incommensurabilis existens toti, quæ cum tota faciat & compositum ex ipsarum quadratis medium, & quod sub ipsis continetur medium, incommensurabileque composito ex quadratis ipsarum; reliqua

liqua irrationalis est. Vocetur autem cum Medio Medium totum efficiens.

Siquidem AB pl. ACq. hoc est (7. 2.) 2 BAC pl. BCq. ponitur medium, ita etiam BAC, adeoque etiam 2 BAC ponitur medium: atqui, 27. 10. medium non superat medium rationali; ergo BCq. est irrationale, & recta BC ipsum potens irrationalis. Q. E. D.

COROLL. Hinc si à majori nomine ejus, quæ *Bina Media potest* minus nomen auferatur; reliqua est ea, quæ *cum medio medium totum efficit*. Quippe AB, & AC ponuntur sibi pot. incommens. & tam ABq. pl. ACq. quàm BAC ponitur Medium; ergo AB pl. AC est Bina Media potens, cujus majus nomen AB, & minus AC.

LEMMA *ad sex proximè sequentes.*

Si idem sit excessus inter primam magnitudinem (HL); & secundam (PL) qui inter tertiam (RS), & quartam (QS); erit vicissim idem excessus inter primam, & tertiam, qui inter secundam, & quartam.

Quoniam enim excessibus æqualibus HP, LQ adjectæ sunt inæquales PL, QS; erit excessus totorum (15. *ax.* 1.) æqualis excessui adjunctorum. Q. E. D.

QVÆNAM

QVÆNAM, ET QVOT LINEÆ Congruant *Irrationalibus genitis per subtractionem?*

PROPOSITIO LXXX.

A *Potomæ (AB) una tantùm congruit recta linea Rationalis (BC) potentia tantùm commensurabilis existens toti (AC).*

Congruat enim, si fieri potest, alia BD. Quoniam ergo idem est excessus compositi ADq. pl. BDq. supra 2 ADB, ac excessus compositi ACq. pl. BCq. supra 2 ACB; (siquidem, 7.2. idem ABq. est utrobique excessus) ergo, *lemm. præc.* erit vicissim idẽ excessus inter ADq. pl. BDq. & ACq. pl. BCq. ac inter 2 ADB, & 2 ACB. atqui, *Schol.* 27. *huj.* excessus quadratorum est rationalis; (Nam, *hyp.* totæ, & congruentes ponuntur rationales, adeoquè rationalia sunt earum quadrata, quin, 16. 10. & composita ex quadratis rationalibus rationalia erunt;) ergo rectangulorum excessus erit etiam rationalis; Quòd fieri nequit: Nã, 22. 10. ista rectangula, utpotè, *hyp.* contenta sub rationalibus sibi pot. tantùm commens. Media sunt, ac proindè, *Cor.* 24. *huj.* Media quoque sunt eorum dupla; Medium verò (27. 10.) non superat Medium rationali.

PRO-

PROPOSITIO LXXXI.

Media Apotoma primæ (AB) una tantùm congruit recta linea Media (BC) potentia solùm commensurabilis existens toti, & cum tota rationale continens.

Congruat enim, si f. p. alia BD. Quoniam, ut in præcedēti, excessus inter ADq. pl. BDq. & ACq. pl. BCq. æquatur excessui inter 2 ADB, & 2 ACB, atque excessus quadratorum est Medium (Nam, *hyp.* totæ, & congruentes ponuntur Mediæ, adeoque & media sunt earum quadrata, quin, *Corol.* 24. *huj.* & composita ex quadratis Mediis sunt Media;) Ergo rectangulorum excessus esset etiam Medium; Quod fieri nequit: tam enim ACB, quàm ADB ponitur rationale, ac proindè rationalia quoque sunt eorum dupla; rationale verò superat rationale rationali.

PROPOSITIO LXXXII.

Mediæ Apotomæ secundæ (AB) una tantùm congruit recta linea (BC) potentia solùm commensurabilis existens toti, & cum tota medium continens.

Congruat enim, si f. p. alia BD: atque ad expositam rationalem EF fiat EG æquale ipsi ACq. pl. BCq. atq; tū fiat EL æquale ipsi ADq. pl. BDq. atque demum fiat EI

M æquale

æquale ipsi ABq. Igitur, 7.2. æquabuntur 2 ACB, & KG, uti & 2 ADB, & KL. Cæterùm, *hyp. & cor.* 24.*huj.* ACq. pl. BCq. hoc est EG est Medium; Ergo, 23.10. latitudo EH est rationalis long. incommens. ipsi EF: Quoniam etiam, *hyp. & cor.* 24.*huj.* Medium est ipsum 2 ACB, hoc est KG; erit quoque, 23.*huj.* KH rationalis long. incommensurabilis ipsi EF. Quoniam verò, 1.6. est AC ad BC, ut ACq. ad ACB, atq; *hyp.* AC, & BC sunt sibi long. incommens. ergo, 10. 10. erunt etiam sibi incommens. ACq. & ACB: igitur, *Hyp.* & 16.10. ACq. pl. CBq. commens. est ipsi ACq. cui, *ut prius* est incommens. ipsum ACB, cui est commens. eius duplũ, sivè 2 ACB; adeòq; sunt sibi incommens. ACq. pl. CBq. & 2 ACB, hoc est EG, & KG: Atqui, 1.6. est EG ad KG ut EH ad KH; ergo, 10.10. EH, & KH sunt etiam sibi incommens. quæ tamẽ sunt ostensæ rationales; adeoquè, 74.*huj.* EK est apotome, & illi congruens KH: eademq; ratione ostendemus, EK apotomen esse & illi congruentem KM: Quod, 80.*huj.* fieri nequit.

PROPOSITIO LXXXIII.

Minori (AB) una tantùm congruit recta linea (BC) commensurabilis existens toti, & cum tota faciens compositum quidem ex ipsarum quadratis Rationale, quod autẽ sub ipsis continetur, Mediũ.

Si

Si fieri poteſt, congruat alia BD. Quoniam ergo, ut in 80. *huj.* oſtenſum eſt, exceſſus inter ADq. pl. BDq., & ACq. pl. BCq. æquatur exceſſui inter 2 ACB, & 2 ADB: atqui, *hyp.* compoſita ex quadratis ſunt rationalia, adeoquè & rationalis ipſorum exceſſus, at verò rectangula ponuntur media; ergo etiam mediorum exceſſus eſſet rationalis; quod, 27. *huj.* fieri nequit.

PROPOSITIO LXXXIV.

EI (AB), quæ cum Rationali Medium totum facit, una tantùm congruit recta linea (BC) potentia incommenſurabilis exiſtens toti, & cum tota faciens compoſitum quidem ex ipſarum quadratis Mediũ, quod autem ſub ipſis continetur, Rationale.

Si fieri poteſt, congruat alia BD. Quoniam ergo, *ut prius*, exceſſus quadratorum æquatur exceſſui rectangulorum, atque rectangula ponuntur rationalia, quadrata verò ponuntur media; exceſſus etiam mediorum eſſet rationalis: Quod, 27. *huj.* fieri nequit.

PROPOSITIO LXXXV.

EI (AB), quæ cum Medio Medium totum facit, una tantùm congruit recta linea (BC) potentia incommenſurabilis exiſtens toti, & cum tota faciens tam com-

positum ex ipsarum quadratis, quàm, quod sub ipsis continetur, Medium, & incommensurabile composito ex ipsarum quadratis.

Si fieri potest, congruat alia BD: sitque schema & constructio ut in 82. hujus. Et quoniam, *hyp.* ACq. pl. BCq. hoc est EG medium est; ergo, 23.*huj.* latitudo EH est rationalis, long. incommensf. rationali EF: Ita etiam quoniam, *hyp.* & 24.*huj.* 2 ACB, hoc est KG medium est; erit pariter latitudo KH rationalis, long. incommenf. rationali EF: atqui KG, hoc est 2 ACB, commenf. est uni ACB, cui, *hyp.* incommenf. est ipsum ACq. pl. CBq. sivè EG; ergo, 13. 10. & 1.6. & 10.10. EH, & KH sunt etiam sibi incommenf. sed sunt ostensæ rationales, adeoquè saltem pot. commēf. ergo, 74.*huj.* EK est apotome, & ipsi congruens KH, eodemque modo ostendemus, EK esse apotomen, & ipsi congruentē KM: quod, 80.10. est absurdum.

DEFINITIONES

Tertiæ.

E*Xposita Rationali, & Apotoma; si tota plus possit, quàm congruens, quadrato rectæ lineæ sibi longitudine commensurabilis.*

1. Si

1. Siquidem tota expositæ Rationali sit longitudine commensurabilis; Vocetur Apotome prima.

2. Si verò congruens expositæ Rationali sit longitudine commensurabilis, Vocetur Apotome secunda.

3. Quòd si neque tota, neque congruens expositæ Rationali sit longitudine commensurabilis; Vocetur Apotome tertia.

Rursus si tota plus possit, quàm congruens, quadrato rectæ lineæ sibi longitudine incommensurabilis.

4. Siquidem tota expositæ Rationali sit longitudine commensurabilis; Vocetur Apotome quarta.

5. Si verò congruens expositæ Rationali sit longitudine commensurabilis; Vocetur Apotome quinta.

6. Quòd si neque tota, neque congruens expositæ Rationali sit longitudine commensurabilis; Vocetur Apotome sexta.

INVENTIO APOTOMARVM

PROPOSITIONES

86, 87, 88, 89, 90, 91.

INvenire primam, secundam, tertiam, quartam, quintam, & sextam Apotomen.

Apotomæ inuenientur facillimè, inventis Binomiis ordine ipsis corrispődentibus, subductisque minoribus nominibus ex majoribus: Quippè majus nomen idem omninò est ac linea *Tota*, & minus nomen linea *Congruens*, adeòque residuum est *Apotoma*: & revera in primo, secundo, & tertio binomio majus nomen plus potest quàm minus quadrato lineæ sibi long. commens. non aliter ac in prima, secunda, & tertia apotoma, linea tota plus potest quàm congruens quadrato lineæ sibi long. commens. Secus verò tam in quarto, quinto, & sexto binomio minus nomen à majori, quàm in quarta, quinta, & sexta apotoma linea congruens à tota exceditur quadrato lineæ lőg. incommens. ipsi majori nomini, quemadmodum, & ipsi toti: atque ità in reliquis omnia sibi corrispondent, ut de his plura repetere non sit necesse.

IRRATIONALES,

Quæ possunt spatia contenta sub rationali, & singulis Apotomis.

PROPOSITIO XCII.

SI *spatium* (*AC*) *contineatur sub rationali* (*AB*) *& apotoma prima* (*AD*, *sivè AE minus DE*) *recta linea* (*LN*) *potens spatium* (*AC*), *Apotoma est*.

Sece-

Secetur DE bifariã in F, & ad AE applicetur pgrum AGE æquale ipsi FEq. hoc est, (4.2.) ipsi $\frac{1}{4}$. DE, deficiensq; quadrato, nẽpè ipso GEq. Et quia, *hyp. & def. trium priorum Apotomarum*, tota AE plus potest, quàm congruens DE quadrato rectæ sibi long. commens., idcircò, 18.10. AG, & GE sunt sibi long. commens. adeòque, 16.10. utraq; AG, & GE est commens. toti AE, quæ, *hyp.* 1. *def. ex tertiis*, rationali AB long. cõmens. est; Ergo, utraq; AG, GE rationali AB long. commens. est, ac proindè, 20. *huj.* AH, & GI sunt rationalia. Cæterùm DF, & FE sunt long. commens. ipsi DE, cujus sunt dimidiæ, atq; ipsa DE est long. incommens. rationali AB (Nam si DE esset long. commens. ipsi AB, cui, *hyp.* est long. commens. ipsa AE; essent AE, & DE, nimirum Tota, & Congruens, sibi long. cõmens. quod destruit hypothesim;) ergo DE, & FE sunt long. incommens. rationali AB, sunt tamen rationales, utpotè commensurabiles rationali DE, cujus sunt dimidiæ; Ergo, 22.10. DK, & FI sunt Media.

Iam verò ipsi AH fiat æquale LPq. & fiat ipsi GI æquale NPq. habens cum toto angulum communem in P; ergo, 26.6. LPq. & NPq. erunt circa eandem diametrum: tum perficiatur Schema. Et quoniã, *constr.* æquantur AGE, & FEq. adeobuè, 17.6. est AG ad FE, ut FE ad GE, hoc est, 1.6. est AH, sivè LPq. ad FI, ut FI ad GI, sivè ad NPq. atque pariter 3. *lem. ad* 37. *huj.* est

LPq. ad LPN, sivè ad LO, ut LO ad NPq. Ergo FI, sivè, *constr.* & 38. 1. ipsum DK æquatur ipsi LO, sivè (43. 1. & 1. *ax.* 1.) ipsi NM; adeoquè æquantur DI, & gnomon VPX pl. NPq. atqui, *constr.* æquantur AI, & LPq. pl. NPq. ergo subductis, hinc gnomone VPX, & illinc pgro DI; æquabuntur, 3. *ax.* 1. AC, & LNq. ac proptereà recta LN potest spatium AC.

Dico autem, ipsam LN esse Apotomen. Nam, *ut prius*, AH, & GI sunt rationalia, ergo etiam LPq. & NPq. ipsis æqualia, sunt rationalia, adeoquè LP, & NP sunt rationales. Contra verò, *ut prius*, FI, sivè LO est Medium, adeoquè Irrationale, ac proindè NPq., sivè NO, & LO sunt sibi incommens. quippè alterum est Rationale, alterum verò Irrationale; Ergo, 1. 6. & 10. 10. etiam LP, & NP sunt sibi incommens. quæ tamen sunt ostensæ Rationales; Ergo, 74. *huj.* LN est Apotome.

Q. E. D.

PROPOSITIO XCIII.

SI spatium (AC) contineatur sub rationali (AB), & apotome secunda (AD, sivè AE minus DE); recta linea (LN) spatium (AC) potens est Apotome prima Media.

Siquidem, ut in præcedenti, cujus adhibeatur constructio, utraque AG, GE est long. commens. toti AE, quæ long. incommens.

mens. est rationali AB (Nam si toti AE esset long. commens. rationalis AB, cui, *hyp. & 2. def. ex tertiis*, ponitur long. commens. congruens DE, essent tota, & congruens sibi long. commens. contra hyp.); ergo utraque AG, GE est long. incommés. rationali AB: sunt tamen rationales, utpotè, *ut prius*, long. commens. toti AE rationali; ergo, 22. 10. AH, & GI sunt Media. Cæterùm DF, & FE sunt long. commens. ipsi DE, cujus sunt dimidiæ, atque DE, utrotè congruens, est long. commens. ipsi AB; ergo, 20. 10. DK, & FI sunt rationalia. Rursus, *ut prius*, LN potest spatium AC.

Dico autem, ipsam LN esse Apotomen primam Mediæ. Nam, *ut prius*, AH, & GI, hoc est LPq. & NPq. sunt Media, adeòque LP, & NP sunt Mediæ: Contra verò, *ut prius*, FI, sivè LO est rationale, adeòquè NPq. sivè NO, & LO sunt sibi incommens., quippè alterum est Medium, ac proindè Irrationale, alterum verò Rationale; ergo, 1. 6. & 10. 10. LP, & NP sunt sibi incommens. Quæ tamen sunt sibi saltem pot. commens. Nam AG, & GE, & AE (ut in 92. *huj.* ostensum est) sunt sibi long. commens. adeòque, 1. 6. & 10. *huj.* AH, & GI, sivè LPq. & NP sunt sibi pot. commens. sed & continét ipsum LO, quod, *ut prius*, est Rationale; ergo, 75. *huj.* LN est Apotome prima Mediæ. Q. E. D.

PROPOSITIO XCIV.

SI spatium (AC) contineatur sub rationali (AB), & apotoma tertia (AD, hoc est AE minus DE); recta linea (LN) spatium (AC) potens est secunda Apotome Mediæ.

Quippè, quoniam, *hyp. & 3. def. ex tertiis* neque tota AE, neque congruens DE ponitur long. commensf. rationali AB; idcircò, retexendo ordinem præcedentium demonstrationum, erunt tam AH, & GI, quàm DK, & FI Media: Rursus, *ut prius*, LN potest spatium AC. Dico autem, LN esse secundam apotomen mediæ: Nam, *ut prius*, AH, & GI, hoc est LPq. & NPq. Mediæ sunt, ac proindè & rectæ LP, & NP sunt mediæ, quæ tamen sunt sibi pot. tantùm cōmensf. Nam, ut in 92. *huj.* ostensum est, AG & GE, & AE sunt sibi long. cōmensf. adeoq; 1. 6. & 10. 10. AH, & GI, hoc est LPq. & NPq. sunt sibi commensurabilia, ac proindè LP, & NP sunt sibi pot. commensf.: At verò, *ut prius*, GE est long. commensf. ipsi AE, cui, *hyp.* & 76. *huj.* est long. incomm. ipsa DE, quæ long. commensf. est ipsi FE, adeòque GE, & FE sunt sibi long. incommensf., undè, 1. 6. & 10. *huj.* etiam FI & GI, hoc est LO, & NO, ac proindè demum LP & NP sunt sibi long. incommensf. Quoniā igitur LP, & NP sunt ostensæ pot. tantùm sibi commensf. & continent ipsum LO, hoc

est

est FI quod ostẽsum est mediũ; erit 76.*huj.* LN Apotomæ secunda Mediæ. Q.E.D.

PROPOSITIO XCV.

SI spatium (AC) contineatur sub rationali (AB) & apotoma quarta (AD, hoc est AE minùs DE); recta linea (LN) spatium (AC) potens est Minor.

Nam adhibita eadem constructione: Quoniam, *def. trium poster. apotomarum*, AE plus potest quàm DE quadrato lineæ sibi long. incommens.; idcircò, 19.*huj.* AG & GE sunt sibi long. incommens. Quoniã verò, *hyp.* & 4. *def. ex tertiis* tota AE rationalis est ipsi AB rationali long. cõmens. erit, 20. *huj.* ipsum AI, sivè LPq. pl. NPq. Rationale: Rursus, quia congruens DE rationalis est, long. incommens. ipsi AB; erit, 22. 10. D, adeòq; eius dimidium FI, sivè LQ Medium: Deindè, quoniam, *ut prius*, AG, & GE sunt sibi long. incõmens. erunt etiã (1.6. & 10.10.) sibi incommensurabilia AH & GI, sivè LPq. & NPq. adeòq; LP, & NP sunt sibi pot. incõmens. Demum ostendemus etiam, ut in præcedẽtibus, rectam LN posse spatiũ AC; adeoq; 77. 10. lineam LN est Minor. Q. E. D.

PROPOSITIO XCVI.

SI spatium (AC) contineatur sub rationali (AB) & apotoma quinta (AD, hoc est AE minùs DE); recta linea LN *spatium (AC) potens, est ea, quæ cum Rationali Medium totum efficit.*

Quoniam enim, ut in præcedenti, AG, & GE sunt sibi long. incommens. & quia, *hyp. & 5. def. ex tertiis*, AE rationalis rationali AB est long. incommens., erit, 22. 10. AI, sivè LPq. pl. NPq. Medium: Quoniam verò congruens DE rationalis rationali AB est long. commens. erit, 20. *huj.* DI, adeòque ejus dimidium FI, sivè LO rationale. Rursus, ut in præcedenti AH, & GI, sivè LPq. & NPq. sunt sibi incommens. adeoquè LP, & NP sunt sibi pot. incommens. & recta LN potest spatium AC; ergo, 78. *huj.* LN est ea, quæ cum Rationali Medium totum efficit. Q. E. D.

PROPOSITIO XCVII.

SI spatium (AC) contineatur sub rationali (AB) & apotoma sexta (AD, hoc est AE minus DE); recta linea LN, spatium AC potens, est, quæ cum Medio Medium totum efficit.

Quoniam ut in præcedentibus, AG, & GE sunt sibi long. incommens. & quia, *hyp. & 6. def. ex tertiis*, utraque AE, DE est rationalis long. incommens. rationali AB; erit, 22. 10. tam DI, adeoquè ejus dimidium FI, sivè LO, quàm AI, sivè LPq. pl. NPq. Medium: Rursus, ut in præcedentibus, AH, & GI, sivè LPq. & NPq.

sunt

sunt sibi incommens. adeoquè LP, & NP sunt sibi pot. incommens. & recta LN potest spatium AC; Ergo 79. *huj.* LN est ea, quæ cum Medio, Medium totum efficit. Q. E. D.

QVASNAM LATITVDINES

Efficiant quadrata sex primarum Irrationalium genitarum per subtractionem applicata ad Rationalem.

PROPOSITIO XCVIII.

Quadratum apotomæ (AB) ad rationalem (DE) applicatum, latitudinem (DG) facit apotomen primã.

Expositæ rationali DE, cui, *hyp.* applicatum est DF æquale ipsi ABq. fiat etiam DH ipsi AC, & demum fiat IK ipsi BCq. æquale; æquabuntur (7.2.) pariter 2 ACB, & GK, atque divisa GL bifariam in M, æquabitur GN, vel MK uni ACB: Quoniam ergo, *hyp.* & 74. *huj.* tota AC & congruens BC rationales sunt; erunt ACq. & BCq. rationalia, adeoquè sibi commensurabilia; quin etiam (16.10.) ACq. pl. BCq. hoc est totum DK, utpotè utrique ipsorum commensurabile, rationale erit; ergo, 21. 10. efficiet latitudinem DL rationalem ipsi DE long. commensurabilem: At verò, quoniam AC, & BC rationales sunt sibi tãtùm pot. commens. erit, 22. *huj.* ACB, adeo-

què,

què & ejus duplum, sivè GK, Medium; ergo, 23. *huj.* efficiet latitudinem GL rationalem, ipsi DE long. incommens. ergo GL, & DL erunt rationales sibi pot. tantùm commens. adeòque, 74. *huj.* DG est Apotome.

Dico autem, DG esse Apotomen ordinē primā. Quoniam enim, 13. *lem. ad* 37. *huj.* est ACq. ad ACB, ut ACB ad BCq. erit, (7. 5.) etiam DH ad MK, ut MK, ad IK, adeòq; (1. 6.) erit DI ad ML ut ML ad IL; adeoq; 17. 6. DIL æquabitur ipsi MLq. hoc est (4. 2.) ipsi $\frac{1}{4}$. GLq. Atqui, *ut prius*, ACq. & BCq. hoc est DH, & IK sunt sibi commens. ergo, 1. 6. & 10. 10. sunt sibi long. commens. DI, & IL; adeòque, 18. 10. tota DL plus potest quàm congruens GL quadrato lineæ sibi long. commens. Atque, *ut prius*, eadem tota DL est long. commens. rationali DE; ergo, 1. *def. ex tertiis* DG est Apotome prima. Q. E. D.

PROPOSITIO XCIX.

Quadratum Apotomæ primæ Mediæ (AB) ad rationalem (DE) applicatum, latitudinem (DG) facit Apotomen secundam.

Adhibita enim præcedenti constructione. Quoniam, *hyp.* & 75. *huj.* tota AC, & congruens BC sunt mediæ pot. tantùm sibi commens., erunt ACq. & BCq. Media sibi commens. Quin & totum ACq. pl. BCq.

hoc

hoc eſt DK utrique illorum erit commenſ. & Medium; adeòque 23.10. efficiet latitudinem DL rationalem, ipſi DE long. incommenſ. At verò, quoniam, *Hyp.* & 75. 10. ACB, ſivè MK, adeòque & GK rationale ponitur; erit, 21. 10. GL rationalis, long. commenſ. ipſi DE; ergo DL, & GL ſunt rationales, ſibi pot. tantùm commenſ. Rurſus, ut in præced. oſtendetur totam DE plus poſſe quàm congruentem GL, quæ jam oſtenſa eſt long. commenſ. rationali DE, quadrato lineæ ſibi long. commenſ., ergo, 2.*def. ex tertiis* DG eſt Apotome ſecunda. Q.E.D.

PROPOSITIO C.

Quadratum Apotomæ ſecundæ Mediæ (AB) ad rationalem (DE) applicatum latitudinem (DG) facit Apotomen tertiam.

Nam oſtendetur *ut prius* DK Medium eſſe, & rectam DL Rationalem, long. incommenſ. ipſi DE: Rurſus, quoniam etiã, *hyp.* & 76. *huj.* ACB, ſivè MK, adeoquè & GK Medium eſt; erit, 23.*huj.* GL rationalis, long. incommenſ. rationali DE: Quoniam verò eſt, 16. AC ad BC ut ACq. ad ACB, atque, *hyp.* AC, & BC ſunt ſibi long. incommenſ. erunt etiam ſibi incommenſ. ACq. & ACB: Atqui DK, ſivè ACq. pl. BCq. eſt commenſ. ipſi ACq. (Nam AC, & BC ponuntur ſibi pot. ſaltèm commenſ.)

&

& ACq. *ut prius*, incommens. ipsi ACB, adeoquè & ejus duplo, sivè ipsi GK; ergo DK, & GK, adeoquè, 1.6. & 10.10. etiam DL, & GL sunt sibi incommens. quæ tamē sunt ostensæ rationales: Quarum cum neutra sit long. commens. rationali DE, & ostendi possit, ut in 98. *huj.* totam DL plus posse quàm congruentem GL quadrato lineæ sibi long. commens. idcircò, 3. *def. ex tertiis*, erit DG Apotome tertia. Q. E. D.

PROPOSITIO CI.

Quadratum Minoris (AB) ad rationalem (DE) applicatum facit latitudinem (DG) quartam Apotomen.

Nam adhibita eadem const. Quoniam, *hyp.* & 77. *huj.* ACq. pl. BCq. sivè DK est rationale; erit, 21.10. ipsa DL rationalis, long. commens. rationali DE: Contra verò, ACB, adeòque ejus duplum GK Mediū est; ergo, 23. *huj.* GL est rationalis long. incommens. rationali DE; ergo DL & GL sunt rationales sibi pot. tantùm commens. Cæterùm, *hyp.* & 77. *huj.* ACq. & CBq. hoc est DH, & IK sunt sibi incommens.; adeoq; 1.6. & 10. *huj.* DI, & IL sunt sibi long. incommens. atqui, ut in 98. *huj.* ostensum est æquantur DIL & $\frac{1}{4}$. GLq. Ergo, 19. *huj.* DL plus potest quàm GL quadrato lineæ sibi long. incommens. adeoquè, 4. *def. ex tertiis*, erit DG Apotome quarta.

Q. E. D.

PRO-

PROPOSITIO CII.

Q*Vadratum ejus* (*AB*) *quæ cum Rationali Medium totum efficit, ad rationalem* (*DE*) *applicatum, latitudinem* (*DG*) *facit Apotomen quintam.*

Nam posita eadem constr. Quoniam, *hyp.* & 74.*huj.* ACq. pl. BCq. sivè DK est Medium; erit, 23.*huj.* DL rationalis long. incommens. rationali DE: Contra verò, ACB, adeoquè ejus duplum GK est rationale, ac proindè 21. 10. GL est rationalis, long. commens. rationali DE, undè DL & GL sunt rationales sibi pot. tantùm commens. & quoniam deindè, ut in præced. DL plus potest quàm GL quadrato lineæ sibi long. incommens., ergo DG est Apotome quinta. Q. E. D.

PROPOSITIO CIII.

Q*Vadratum ejus* (*AB*) *quæ cum Medio, Medium totum efficit, ad rationalem* (*DE*) *applicatum, latitudinem* (*DG*) *efficit Apotomen sextam.*

Nam, *ut prius*, Quoniam, *hyp.* & 79.*huj.* tam ACq. pl. BCq. sivè DK, quàm ACB, adeòque ejus duplum GK Medium est; idcircò, 23. *huj.* tam tota DL, quàm congruens GL est rationalis, long. incommens. rationali DE; Rursus ut in præced. DL plus potest

test quàm GL quadrato lineæ sibi long. incommens. atq; demum, *hyp.* & 79. *huj.* ACq. plus BCq. & ACB, sivè DK, & GK sunt sibi incommens. ergo, 1. 6. & 10. 10. sunt etiam sibi incommens. DL & GL, quæ tamen sunt ostensæ rationales; Ergo, 6. *def. ex tert.* DG est sexta Apotoma. Q. E. D.

PROPOSITIO CIV.

R*ecta linea (DE) Apotomæ (AB; sivè AC minùs BC) longitudine cōmensurabilis; & ipsa Apotome est, atque ordine eadem.*

Nam si fieret, ut AB ad DE, ità AC ad DF, & sit AB long. commens. ipsi DE; erit etiam AC pl. BC long. commens. ipsi DF pl. FE; siquidem erit, *hyp.* & 19. 5. AC ad DF, ut BC ad EF, & *altern.* AC ad BC ut DF ad EF, & *compon.* AC pl. BC ad BC, ut DF pl. EF ad EF, atque iterum *altern.* AC pl. BC ad DF pl. EF ut BC ad EF: atqui, *hyp.* BC, & EF sunt sibi long. commēs. nam se habent ut AB ad DE, quæ *hyp.* sunt sibi long. commens. ergo etiam AC pl. BC, & DF pl. EF sunt sibi long. commens.

Fiat ergo, ut AB ad DE, ità AC ad DF; ergo, *ut prius*, AC pl. BC, & DF pl. EF erunt sibi long. commens.; atqui AC pl. BC, *hyp.* & 37. 10. est Binomium; ergo, 67. 10. DF pl. EF ejusdem ordinis Binomium erit, adeòq; DF *minus* EF ejusdē ord. erit Apot. cujus AC, minus BC. Q. E. D.

PRO-

PROPOSITIO CV.

Recta linea (DE) Apotomæ Mediæ (AB, hoc est AC minus BC) commensurabilis, & ipsa Apotomé Mediæ est, atque ordine eadem.

Fiat etiam, ut AB ad DE, sic AC ad DF; ergo, *ut prius*, AC pl. BC & DF pl. EF sunt sibi long. commens.; adeòque, 68. 10. DF pl. EF ejusdem ordinis erit Bimedialis, cujus AC pl. BC, ac proindè DF pl. EF ejusdem ordinis erit Apotome Mediæ, cujus AC minus BC. Q. E. D.

PROPOSITIO CVI.

Recta linea (DE) Minori (AB, hoc est AC minus BC) commensurabilis, & ipsa Minor est.

Nam fiat ut AB ad DE, sic AC ad DF; etiam, *ut prius*, AC pl. BC, & DF pl. EF erunt sibi long. commens. atqui, *hyp.* AC pl. BC est major; ergo. 69. 10. DF pl. EF major etiam est, ac proindè DF, minus EF Minor erit. Q. E. D.

PROPOSITIO CVII.

Recta linea (DE) commensurabilis ei (AB, hoc est AC minus BC), quæ cum rationali medium totum efficit; & ipsa cum rationali medium totum efficiens est.

Quippè

Quippè, *ut prius*, AC pl. BC est rationale, ac medium potens, ergo, 70. 10. DF pl. EF erit rationale, ac mediū potens; adeoq; DF minus EF erit ea, quæ cum rationali medium totum efficit. Q. E. D.

PROPOSITIO CVIII.

***R**Ecta linea (DE) commensurabilis ei (AB, hoc est AC minus BC), quæ cum medio medium totum efficit; & ipsa cum medio, medium totum efficiens est.*

Nam AC pl. BC, & DF pl. EF sunt sibi long. commenſ., atqui, *hyp.* AC pl. BC est bina media potens; ergo, 71. 10. DF pl. EF bina media potens erit; adeòque DF *minus* EF erit ea, quæ cum medio medium totum efficit. Q. E. D.

IRRATIONALES

Quarum quadrata æquantur residuo post subtractionem medii à Rationali, vel rationalis à medio, vel medii à Medio.

PROPOSITIO CIX.

***M**Edio (B) à rationali (A pl. B) detracto, recta linea (H), quæ reliquum spatium potest, una ex duabus irrationalibus est, nimirum vel Apotome, vel Minor.*

Ad

Ad CD expositam rationalem fiat rectãgulum CI æquale cõposito rationali A pl. B, atque tum fiat FI æquale ipsi B Medio; ergo CE æquabitur ipsi A, sivè ipsi Hq. Quoniam ergo CI est rationale; erit, 21. 10. CK rationalis long. commensf. rationali CD: sed quoniam FI est medium; erit, 23. 10. FK rationalis long. incommensf. rationali CD; adeoquè, 13. 10. CK, & FK erunt rationales sibi pot. tantùm commensf. ac proindè, 74. 10. CF est Apotome. Si igitur tota CK pl. poterit quàm congruens FK quadrato lineæ sibi long. commensf. erit 1. *def. ex tert.* CF apotome prima; adeoq; 92. 10. linea H erit Apotome. Sin CK pl. poterit quàm FK quadrato lineæ sibi long. incommensf. erit, 4 *def. ex tert.* CF Apotome quarta; ac proindè, 95. 10. linea H erit Minor. Q. E. D.

PROPOSITIO CX.

R*ationali (B) à medio (A pl. B) detracto; recta linea (H), quæ reliquum spatium potest erit vel Apotome prima mediæ, vel ea, quæ cum rationali medium totum efficit.*

Ad CD expositam rationalem fiat rectangulum CI æquale composito medio A pl. B, atque tum fiat FI æquale ipsi B rationali; ergo CE æquabitur ipsi A, sive ipsi Hq. Quoniam ergo CI est medium; erit, 23. 10. CK rationalis long. incommensf.

ratio-

rationali CD : sed quia FI est rationale; erit, 21.10. CK rationalis, long. commens. rationali CD; adeòque, 13.10. CK, & FK erunt rationales sibi pot. tantùm commēs. ac proindè, 74.10. CF est Apotome. Si Si igitur tota CK pl. poterit quàm congruēs FK quadrato lineæ sibi long. commens. erit, 2.*def. ex tert.* CF Apotome secunda; adeòque, 93.*huj.* linea H erit Apotome prima mediæ. Sin CK pl. poterit quàm FK quadrato lineæ sibi long. incōmens. erit, 5.*def. ex tertiis* CF Apotome quinta; ac proindè, 96.*huj.* linea H erit ea, quæ cum rationali medium totum efficit. Q. E. D.

PROPOSITIO CXI.

Medio (B) à medio (A pl. B) detracto, quod sit incommensurabile toti (A pl. B); recta linea (H) quæ reliquū spatium potest erit vel Apotome secunda mediæ, vel ea, quæ cum medio, medium totum efficit.

Ad CD expositam rationalem fiat rectāgulum CI æquale composito medio A pl. B, atq; tum fiat FI æquale ipsi medio B; ergo CE æquabitur ipsi A, sivè ipsi Hq. atque, 23.10. tā CK quàm FK erit rationalis lōg. incommens. rationali CD; ergo CK, & FK erunt rationales sibi pot. tantùm commens. adeòque 74.10. CF est Apotome, Si tota CK pl. poterit quàm congruens FK quadrato lineæ sibi long. commens. erit,

3.

3.*def. ex tert.* CF apotome tertia; adeoque 94.*huj*. linea H erit Apotome prima mediæ. Sin verò CK pl. poterit quàm FK quadrato lineæ sibi long. incommensf.; erit, 6.*def. ex tertiis*, CF Apotome sexta; ac proindè, 97.*huj*. linea H erit ea, quæ cum medio, medium totum efficit. Q.E.D.

PROPOSITIO CXII.

A*Potome (A) non est eadem ac Binomium.*

Ad expositam rationalem BC fiat rectãgulum CD æquale ipsi Aq. ergo 94.10. erit BD Apotome prima: Sit autem DE ejus congruens; ergo, 74.10. BE, & DE sunt ration. sibi pot. tantum cõm. & 1.*def. ex tert.* BE est long. commensf. rationali BC. Iam si fieri potest, sit A Binomium, ergo, 61. 10. BD est primum Binomium, cujus majus nomen sit BF, minus verò FD; erunt, 37.10. BF, & FD rationales sibi pot. tantùm commensf., sed, 1.*def. ex sec.* erit BF long. commensf. ipsi BC, cui, *ut prius*, est long. commensf. ipsa BE; ergo BE ipsi BF, adeòq; *Corol.* 16. 10. etiam BE ipsi FE erit long. commensf. adeòque FE erit rationalis. At verò, *ut prius*, BE, & DE sunt rationales sibi pot. tantùm commensf. ergo etiam FE, & DE sunt rationales sibi pot. tantùm cõmensf. adeòque, 74. 10. FD est Apotome, nempè irration. cũ tamẽ ostensa sit ration. Q.E.A.

IRRATIONALES.

Genita ex applicatione Quadrati Rationalis ad Binomium, vel ad Apotomen.

PROPOSITIO CXIII.

QVadratum rationalis (A) applicatum ad Binomium (BC, sive BD pl. DC) latitudinem facit Apotomen (EC, sive EH minùs CH) ejusdem ordinis: cujus nomina, nempe tota & congruens, commensurabilia, & proportionalia sunt nominibus Binomii.

Ad DC minus Binomij nomens fiat DF æquale ipsi Aq. sive ipsi BE; ergo, 14.6. erit BC ad CD vt FC ad CE, & *divid.* erit BD ad DC vt FE ad EC: atqui *hyp.* BD major est quam DC; ergo, 14. 5. erit FE major quam EC.

Sumatur ergo EG æqualis ipsi EC, & fiat vt FG ad GE ita EC ad CH; erunt EH, & CH tota, & congruens, sive nomina Apotomæ EC, quibus conveniunt ea, quæ in Theoremate proponuntur.

Quoniam enim est, *constr.* FG ad GE ut EC ad CH; erit, *compon.* FE ad GE, sive ad CE vt EH ad CH; ergo, 12. 5. erit FH ad EH ut EH ad CH: igitur.

Æqu. hæ Rationes	FH ad EH	(*ut prius*)
	EH ad CH	(*ut prius*)
	FE ad EC	(*ut prius*)
	BD ad DC	

Atqui,

Atqui, *hyp.* BD & DC sunt sibi pot.commens. ergo 10.*huj.* EH; & CH sunt etiam sibi pot. commens. Atqui, *ut prius*, FH, EH, & CH sunt continuè proportionales; ergo, *Corol.* 20.6. erit FHq. ad EHq. ut FH ad CH, sed FHq. & EHq. sunt sibi cōmens. (Nam FH, & EH sunt ostensæ sibi pot. cōmens.) ergo, 10.10. FH, & CH erunt sibi long. commens. adeoquè 16.10. etiam FC & CH. Cæterùm, *hyp.* & 37.10. CD est rationalis, & DF, sivè Aq. est rationale; ergo, 21.10. CF est rationalis, long. commens. ipsi CD; ergo etiā CH (cui, *ut prius*, ipsa CF est long. commens.) est rationalis long. commens. ipsi CD: atqui, *ut prius*, EH, & CH sunt ostensæ sibi pot. commens. ergo etiam EH est rationalis; adeòque, 74. *huj.* EC est Apotome, cui congruit CH. Quod primò erat demonstrandum.

Porrò, *ut prius* est EH ad CH ut BD ad DC, & *altern.* EH ad BD ut CH ad DC. Quod secundò erat demonstrandum.

Deindè, quoniam, *ut prius* CH, & DC sunt sibi long. commens. ergo, 10.*huj.* etiā EH, & BD sunt sibi long. commens. adeòq; 15.10. ità poterit BD plusquam DC, ac EH plusquam CH quadrato lineæ sibi long. cōmens. vel incommens. Item si si BD, erit etiam EH, sin verò sit DC, erit etiam CH rationali expositæ long. commensurabilis: quod si nec BD, nec DC; ità etiam neque EH, neque CH eidem rationali long. commensurabilis erit; adeòque, *ex secundis*, & *tert. def.* qualecunque Binomium sit BC,

N ejusdem

ejusdem ordinis Apotome erit EC. Quod demum E. D.

PROPOSITIO CXIV.

Quadratum Rationalis (A) ad Apotomen (BC, sivè BD minùs CD) applicatum latitudinem facit (BE) Binomium, cujus nomina (BH, HE) sunt long. commensurabilia, & proportionalia datæ Apotomæ nominibus (BD, CD): Binomiumque ejusdem est ordinis, ac Apotome.

Ad BD totam applicetur BF æquale ipsi Aq. sivè ipsi CE; ergo, 14.6. erit reciprocè BE ad BG, ut BD ad BC, & *convert.* erit BE ad GE, ut BD ad CD. Tum fiat ut composita BE ad compositam GE sic ablata HE ad ablatam GH; ergo, 19. 5. erit residua BG ad residuam HE, ut tota BE ad totam GE, quæ *constr.* sunt, ut HE ad GH; ergo erit BH ad HE, ut HE ad GH; adeòq; *Corol.* 26. 6. erit BHq. ad HEq. ut BH ad GH: Atqui BHq. & HEq. sunt sibi commens. (Nam, *ut prius*, est BD ad CD, ut BE ad GE, quæ sunt, *ut prius*, ut BH ad HE, atque BD, & CD, utpotè nomina Apotomæ, sunt rationales sibi pot. tantùm commens. adeoquè 10. 10. BH, & HE sunt etiã sibi pot. tantùm commens.) Ergo, 10. 10. BH, & GH sunt sibi long. commens. adeoq; *cor.* 16. 10. etiam BH, & BG sunt sibi long. commens. Quoniam verò Aq. sivè BF rationale

tionale applicatum ad rationalem BD, facit, 21. 10. latitudinem BG rationalem, long. commenſ. ipſi BD; idcircò etiã BH (quippè quæ oſtenſa eſt long. cõmenſ. ipſi BG) erit rationalis, eidem BD long. commenſ. Atqui HE oſtenſa eſt pot. tantùm commenſ. ipſi BH rationali; Ergo BH, & HE ſunt rationales ſibi pot. tantùm commenſ. adeòque, 37. 10. BH pl. HE eſt Binomium. Quod primò erat demonſtrandum.

Tum, quoniam, *ut prius*, eſt BH ad HE, ut BD ad CD; ergo, *altern.* erit BH ad BD, ut HE ad CD: atqui, *ut prius*, BH, & BD ſunt ſibi long. commenſ. Ergo, 10. 10. etiam HE, & CD erunt ſibi long. cõmenſ. Adeoquè Binomii nomina ſunt proportionalia, & long. commenſurabilia nominibus Apotomæ. Quod erat deindè oſtendendum.

Poſtremò, 15. 10. eodem modo BH pluſquam HE, ac BD plus quàm CD poterit quadrato lineæ ſibi long. commenſ. vel incommenſ. Eodemque, 10. *huj.* pariter modò erit BH, ac BD, vel erit ſimiliter HE, ac CD long. commenſ. expoſitæ rationali, & ſi illorum nominum neutrum, horum etiam, neutrum. Adeòquè, *ex ſecundis, & tertiis def.* Binomium BH pl. HE ejuſdem erit ordinis, ac Apotome BD minùs CD. Quod demum erat demonſtrandum.

PROPOSITIO CXV.

SI spatium (AB) contineatur sub Apotoma (AC, sivè CE minùs AE) & Binomio (CD pl BD) cujus nomina sint proportionalia, & long. commensurabilia nominibus Apotomæ; recta linea (F) spatium (AB) potens, est Rationalis.

Sit G quævis rationalis, & fiat CH æquale ipsi Gq. Ergo, 113. *huj.* erit BH (sivè HI minùs IB) Apotome, atque erunt sibi long. cõmens. HI & CD, uti & IB, & DB, quin erit HI ad BI, ut CD ad DB, quæ sunt, *hyp.* ut CE ad EH; ergo, 11.5. & *altern.* erit, ut tota HI ad totam CE, sic ablata BI ad ablatam EA; ergo, 19.5. erit residua BH ad residuam AC, ut tota HI ad totam CE, sivè ut ablata BI ad ablatam EA: Atqui, 12.10. GI, & CE sunt sibi long. commens. (quippè tam CE ex *hyp.* quàm HI, *ut prius* est long. commens. eidem CD) Ergo, 10.10. BH, & AC sunt etiam sibi long. commens. adeòque, 1.6. & 10.10. etiam HC, & BA sunt sibi commens. Sed HC, hoc est Gq. est Rationale; ergo BA, sivè Fq. erit rationale, ac proindè linea F est rationalis. Q. E. D.

COROLL. Hinc fieri potest, ut spatium rationale contineatur sub duabus rectis irrationalibus.

PRO-

PROPOSITIO CXVI.

A *Media (AB) fiunt infinita Irrationales (BE, EF &c.) & nulla alicui antecedentium est eadem.*

Sit AC expoſita rationalis, ad quam applicatum ſit ſpatium AD; ergo, 1. *lemm. ad* 38. *buj.* AD eſt Irrationale: Tum in AB protracta ſumatur BE, quæ poſſit ſpatium AD; ergo, 11. *def. buj.* BE eſt Irrationalis, nulli antecedentium conveniens; nullum enim quadratum alicujus hucuſque explicatarum irrationaliũ applicatum ad rationalem, latitudinem efficit Mediam: Perficiatur deindè rectangulum DE; ergo, *cit. lemm.* DE eſt irrationale; & proindè, *cit. def.* recta EF, quæ ipſum poteſt eſt irrationalis, & nulli priorum eadem; nullum enim hucuſque demonſtratarum irrationalium quadratum ad rationalem applicatum latitudinem efficit ipſam BE; & ſic porrò deinceps infinitæ invenientur irrationales, & earum nulli antecedentium erit eadem. Q. E. D.

PROPOSITIO CXVII.

P*Ropoſitum ſit nobis oſtendere, in quadratis figuris (BD) diametrum (AC) lateri (AB) incommenſurabilem eſſe.*

Siquidem, 47. 1. eſt ACq. ad ABq. ut 2. ad 1. quæ non ſunt ut numerus quadratus ad numerum quadratum; ergo, 9. *huj*. AC est long. incommensurabilis ipsi AB. Q. E. D.

SCHOL. Celebrarissimum (ut ait *Barrowius*) est hoc Theorema apud veteres philosophos, adeout qui hoc nesciret, eum magnus PLATO non hominem, sed pecudem diceret.

LAVS DEO.

LIBER XI.

DEFINITIONES.

1. Solidum est, quod longitudinem, latitudinem, & crassitudinem habet.

2. Solidi autem extremum est superficies.

3. Linea recta est ad planum recta, cum ad rectas omnes lineas, à quibus illa tangitur, quæque in proposito sunt plano, rectos angulos efficit.

4. Planum ad planum rectum est, cùm rectæ lineæ, quæ communi planorum sectioni ad rectos angulos in uno planorum ducuntur, alteri plano ad rectos sunt angulos.

5. Rectæ lineæ ad planum inclinatio est, cùm à sublimi termino rectæ illius lineæ ad planum deducta fuerit perpendicularis, atque à puncto, quod perpendicularis in ipso plano fecerit, ad propositæ illius lineæ extremum, quod in eodem est plano, altera recta linea fuerit adjuncta; est, inquam, angulus acutus ipsâ insistente linea, & adjuncta comprehensus.

6. Plani ad planum inclinatio, est angulus acutus rectis lineis contentus, quæ in utroque planorum ad idem communis sectionis punctum ductæ, rectos cum sectione angulos efficiunt.

7. Planum ad planum similiter inclinatum esse dicitur, atque alterum ad alterum, cum dicti inclinationum anguli inter se fuerint æquales.

8. Parallela plana sunt, quæ æqualibus semper distant intervallis.

9. Similes solidæ figuræ sunt, quæ similibus planis continentur, multitudine æqualibus.

10. Æquales, & similes solidæ figuræ sunt, quæ similibus planis, multitudine, & magnitudine æqualibus continentur.

11. Solidus angulus est plurium, quàm duarum linearum, quæ se mutuo contingant, nec in eadem sint superficie, ad omnes lineas inclinatio.

ALITER.

Solidus angulus est, qui pluribus, quàm duobus planis angulis, in eodem non consistentibus plano, sed ad unum punctum constitutis, continetur.

12. Pyramis est figura solida, quæ planis continetur, ab uno plano ad unum punctum constituta.

13. Prisma est figura solida, quæ planis continetur, quorum adversa duo sunt & æqualia, & similia, & parallela; alia verò parallelogramma.

14 Sphæra est, quando, semicirculi manente diametro, circumductus semicirculus in se ipsum rursus revolvitur, undè moveri cæperat, circumassumpta figura.

15. Axis autem sphæræ, est quiescens illa recta linea, circum quam semicirculus convertitur. 16. Cen-

16. Centrum sphæræ est idem, quod & semicirculi.

17. Diameter autem sphæræ, est recta quædam linea per centrum ducta, & utrinque à sphæræ superficie terminata.

18. Conus est, quando rectanguli trianguli manente uno latere eorum, quæ circa rectum angulum, circunductum triangulum in se ipsum rursus revolvitur, undè moveri cæperat, circumassumpta figura.

Atque si quiescens recta linea æqualis sit reliquæ, quæ circa rectum angulum convertitur, Orthogonius erit conus: Si verò minor Amblygonius: Si verò major, Oxygonius.

19. Axis autem coni, est quiescens illa linea, circum quam triangulum vertitur.

20. Basis verò coni est circulus, qui à circumducta linea recta describitur.

21. Cylindrus est, quando rectanguli parallelogrammi manente uno latere eorum, quæ circa rectum angulum, circunductum parallelogrammum in se ipsum rursus revolvitur, undè cæperat moveri, circumassumpta figura.

22. Axis autem cylindri, est quiescens illa recta linea, circum quam parallelogrammum convertitur.

23. Bases verò cylindri sunt circuli à duobus adversis lateribus, quæ circumaguntur, descripti.

24. Similes coni & cylindri sunt, quorũ & axes, & basium diametri proportionales sunt.

 25. Cubus

25. Cubus est figura solida sub sex quadratis æqualibus contenta.

26. Tetraedrũ est figura solida sub quatuor triangulis æqualibus, & æquilateris contenta.

27. Octaedrúm est figura solida sub octo triangulis æqualibus, & æquilateris contenta.

28. Dodecaedrum est figura solida sub duodecim pentagonis æqualibus, & æquilateris, & æquiangulis contenta.

29. Icosaedrúm est figura solida sub viginti triangulis æqualibus, & æquilateris contenta.

30. Parallelepipedum est figura solida sex figuris quadrilateris, quarum, quæ ex aduerso, parallelæ sunt, contenta.

31. Solida figura in solida figura dicitur inscribi, quando omnes anguli figuræ inscriptæ constituuntur vel in angulis, vel in lateribus, vel denique in planis figuræ, cui inscribitur.

32. Solida figura solidæ figuræ vicissim circumscribi dicitur, quando vel anguli, vel latera, vel denique plana figuræ circumscriptæ tangunt omnes angulos figuræ, circum quam describitur.

PROPOSITIO I.

Recta lineæ pars quædam (AC) non est in subiecto plano (DE), quædam verò (BC) in sublimi.

In subjecto plano DE producatur AC in directum usque ad F. Si jam vis, rectam BC esse etiam in directum ipsi AC; habebunt duæ rectæ lineæ ACB, & ACF commune segmentum AC; quod, 10. *ax.* 1. fieri nequit.

PROPOSITIO II.

SI duæ rectæ lineæ (AB, & CD) se mutuò secent; in unò sunt plano: atque omne triangulum (DOB) in uno est plano.

Sit enim, si f. p. 3gli DOB pars quædam OFG in uno plano, pars verò FDBG in altero; ergo ipsius rectæ OD pars OF est in subjecto plano, pars verò FD in sublimi: quod, 1. 11. fieri nequit; adeòque 3glum ODB in uno est plano, proindequè & rectæ OD & OB; ergo 1. 11. etiam totæ AB & CD in eodem sunt plano. Q. E. D.

PROPOSITIO III.

SI duo plana (AB, & CD) se mutuò secent; communis eorum sectio (EF) est recta linea.

Nam si communis sectio EF non credatur esse recta linea; ducatur in plano AB recta EHF, & in plano CD recta EGF; ergo hæ duæ rectæ, quoniam eosdem habent terminos E & F, spatium claudent: quod, 14. *ax.* 1. fieri nequit.

PROPOSITIO IV.

SI recta linea (KO) duabus rectis lineis (AB, CD) se mutuò secantibus in communi sectione (K) perpendiculariter insistat; illa ducto etiam per ipsas (AC, BD) plano ad angulos rectos erit.

In subjecto plano duc utcunque rectas AB & CD se decussantes in puncto K, & sint rectæ KA, KB, KC, KD sibi mutuò æquales, & junge rectas AD, DB, BC, CA, & per K ducatur quævis recta GI, atque jungantur è puncto sublimi O rectæ OA, OG, OD, OB, OI, OC. Quoniam ergo, *constr.* æquantur KA, & KB, uti & KD, & KC, & 15.1. angulus AKD angulo BKC: erit, 4.1. AD æqualis ipsi BC, necnò angulus KAG angulo KBI: atqui, 15. 1. etiam anguli AKG & BKI æquãtur; uti &, *constr.* rectæ KA & KB; ergo, 26.1. æquab. AG, & BI, uti & KG, & KI: Deindè in 3glis OKA, OKB, OKC, & OKD æquãtur, *constr.* sibi mutuò KA, KB, KC & KD, atq; KO est cõmunis, necnon, *hyp.* anguli in K recti sunt; ergo, 4.1. æquãtur bases OA, OB, OC, & OD: Triãgula igitur AOD, & BOC sibi mutuo æquilatera sunt; adeoq; 8.1. angulus DAO æquatur angulo CBO; ergo, 4.1. in 3glis AOG & BOI æquantur sibi mutuo OG, & OI, ac proindè etiam 3gla OKG & OKI sibi mutuò æquilatera sũt; ergo, 8.1. anguli OKG & OKI sunt sibi æquales; ac

proin-

proindè, 10. *def.* 1. uterq; rectus est: eademq; ratione ostendetur, lineam OK cũ omnibus in subjecto plano ductis rectis lineis angulos rectos constituere, adeoquè, 3. *def.* 11. ad planum rectam esse. Q. E. D.

PROPOSITIO V.

SI recta linea (AB) tribus rectis lineis (AO, AD, AK) se mutuò tangentibus in communi sectione ad rectos angulos insistat; illa tres rectæ in uno sunt plano.

Nam AO, & AD, 2. 11. sunt in uno plano; item, 2. 11. AD & AK debent esse in uno plano: Iam si vis hæc plana esse diuersa; sit, 3. 11. communis eorum sectio recta AC: Igitur, *hyp.* BA perpendicularis est rectis AO, & AD; ergo, 4. 11. eadem BA perpendicularis est plano EC: adeoquè, 3. *def.* 11. ipsi rectæ AC perpendicularis est: atqui, 2. 11. BA est in eodem plano cum AC & AK; ergo anguli BAC & BAK erũt in eodem plano, & ambo recti, & proindè pares, pars toti. Q. E. A.

PROPOSITIO VI.

SI duæ rectæ lineæ, (AB, DO) eidem plano (EF) ad rectos sint angulos; parallelæ erunt inter se.

Ducatur AD, cui in plano EF perpendicularis fiat DC æqualis ipsi AB, junganturque BD, BC, & AC. Iam verò, *constr.* in 3glis BAD & ADC anguli in A & D recti

recti sunt & BA, & DC æquantur, atque AD est communis, ergo, 4. 1. æquabuntur BD, & AC; adeoque, 8. 1. in 3glis BAC & BDC sibi mutuò æquilateris angulus BAC qui, *hyp.* rectus est, æquatur angulo BDC, sed etiam, *constr.* angulus CDA rectus est & angulus CDO rectus ponitur; ergo recta CD perpendicularis est tribus rectis, nempè DO, DB, & DA, quæ proindè, 5. 11. in uno eodemque sunt plano, in quo, 2. 11. etiam AB sita est: quoniã ergo AB & DO in eodem sunt plano, &, *hyp.* anguli interni BAD, & ODA recti sunt; erunt, 28. 1. AB, & OD sibi mutuò parallelę. Q. E. D.

PROPOSITIO VII.

SI duæ sint parallelæ rectæ lineæ (AB, CD) in quarum utraque sumpta sint qualibet puncta, (F, E); illa linea (EF) quæ ad hæc puncta adjungitur, in eodem est cum parallelis plano (ABCD).

Planum, in quo sunt AB, CD secet aliud planum per puncta E, F; si jam EF non est in plano in quo sunt AB, CD; illa communis sectio non erit; sit ergo utriusque plani communis sectio linea EGF; hæc utique, 3. 11. recta erit; adeoquè duæ rectæ spatium comprehendent. Q. E. A.

PRO-

PROPOSITIO VIII.

SI duæ ſint paralellæ rectæ lineæ (AB, DO) quarum altera (AB) perpendiculariter cuidam plano (EF) inſiſtat; etiam reliqua eidem plano ad angulos rectos erit.

Adhibita conſtructione, & demonſtratione ſextæ hujus; anguli CDA, & CDB recti ſunt: ergo, 4. 11. CD recta eſt plano per AD, DB (in quo propterea, 7. 11. erũt & ipſæ AB, DO); ergo, 3. *def.* 11. CD ipſi DO perpendicularis eſt, atqui, *hyp.* & 29. 1. angulus ODA etiam rectus eſt; ergo, 4. 11. OD recta eſt plano EF. Q. E. D.

PROPOSITIO IX.

QVæ (BA, & DC) eidem rectæ lineæ EF) ſunt parallelæ, ſed non in eodem plano; ſunt quoque inter ſe parallelæ.

In plano parallelarum AB, EF ducatur IK perpendicularis ad EF, & ex puncto K ducatur in plano parallelarum EF, CD recta KO perpendicularis ad ipſam EF; ergo, 4. 11. recta KE, ſivè EF perpendicularis eſt plano KIO, atqui AB & EF, *hyp.* ſunt ſibi parallelæ, & *ut prius* EF recta eſt plano IKO; ergo, 8. 11. etiam AB eidem plano recta eſt; ità etiam quoniam, *hyp.* EF, & DC

DC sunt sibi parallelæ, atqui, *ut prius* EF est recta plano IKO; erit etiam DC recta eidem plano; adeoquè, 6. 11. AB & CD sunt sibi parallelæ. Q. E. D.

PROPOSITIO X.

Si duæ rectæ lineæ (HC, HB) se mutuò tangentes, ad duas alias se mutuò tangentes (OM, ON) sint parallelæ, non autem in eodem plano; illæ angulos æquales (CHB, NOM) comprehendent.

Fiant HC, HB, OM, ON sibi æquales; & ducantur BM, MN, NC, CB, HO. Quoniam ergo, *hyp. & constr.* HC & ON sunt sibi parallelæ & æquales; erunt, 33. 1. sibi parallelæ, & æquales ipsæ NC, & HO; ità etiam, quoniam HB & OM sunt sibi parallelæ, & æquales; erunt etiam HO & BM sibi parallelæ & æquales; adeoquè, 9. 11. NC, & BM sunt sibi parallelæ, & 1. *ax.* 1. sibi æquales; adeoquè, 33. 1. CB & MN sunt etiam sibi æquales; ergo, 8. 1. in 3glis æquilateris CHB & NOM anguli in H & O sibi mutuò æquantur. Q. E. D.

PROPOSITIO XI.

A Dato punctò (A) in sublimi ad subjectum planum (BC) perpendicularem rectam lineam (AK) ducere.

In plano subjecto ducatur utcunque linea BD, ad quam, 12. 1. ex puncto A demittatur

mittatur perpendicularis AL, atque in eodem plano subjecto per punctum L ducatur 11. 1. perpendicularis ILF indefinita: Tum, 12. 1. ad lineam ILF ducatur ex puncto A perpendicularis AK; dico factum. Nam per K ducatur in plano subjecto linea OKE parallela ad BLD: & quoniam, *constr.* BD perpendicularis est ad AL, LK; erit etiam, 4. 11. perpendicularis ad planum AKL; adeoquè & linea OE, quæ, *constr.* parallela est lineæ BD; erit, 8. 11. recta eidem plano AKL: Quoniam verò, 2. 11. AK in eodem est plano cum rectis KL & AL, & tangit rectam OK in K; erit, 3. *def.* 11. angulus AKO rectus, adeoquè AK ipsi KO, (uti &, *constr.* ipsi KL perpendicularis erit), ac proindè, 4. 11. recta erit subjecto plano. Q.E.F.

PROPOSITIO XII.

Dato plano (BC) à puncto (A) quod in illo datum est, perpendicularem (AE) excitare.

A' quovis extra planum puncto F sublimi duc, 11. 11. perpendicularem FD plano BC, & jungatur AD, & fiat, 31. 1. AE parallela ipsi DF; dico factum. Quoniam enim, *constr.* FD perpendicularis est plano BC, & EA parallela est ipsi FD; erit etiã, 8. 11. ipsa EA perpendicularis eidem plano. Q.E.F.

PRO-

PROPOSITIO XII.

D*Ato plano (AB) à puncto (C) quod in illo datum est, non excitabuntur ad easdem partes duæ perpẽdiculares (CD, CE).*

Quoniam enim hæ duæ lineæ se mutuò secant, idcircò sunt in eodem plano; quòd si utraque dicatur esse perpendicularis plano subjecto; essent, 6.11. sibi mutuò parallelæ, cùm tamen existant in eodem plano, & conveniant in eodem puncto C: quæ quidem se mutuò elidunt.

PROPOSITIO XIV.

S*I eadem linea recta (AC) ad duo plana (EF, GH) perpendicularis sit; hæc plana erunt sibi mutuò parallela.*

Sumatur in planorũ alterutro EF quodvis punctum B, ad quod ducatur AB; erunt 2.11. AC, & AB in eodem plano; Tum, 31.1. ducatur ex puncto B linea BD parallela ad AC; erit etiam, 8.11. BD perpendicularis utrique plano; quòd si jungatur linea CD; erunt, 3.*def*. 11. anguli ABD, CDB recti; ergo 38.1. AB & CD sunt sibi parallelæ; adeoquè figura ABDC est parallelogrammum, ac proindè, 34.1. BD quæ ostensa est utrique plano perpendicularis, æquatur ipsi AC; eodemque modo ostendetur omnes utrique plano perpendiculares,

culares, æquales esse; ac proindè plana erunt inter se parallela, quandoquidem iisdem semper distant intervallis.

PROPOSITIO XV.

SI duæ rectæ lineæ (AB, AC) se mutuò tangentes ad duas rectas lineas (DE, DF) non in eodem consistentes plano, & se etiam mutuò tangentes, sint parallelæ; parallela sunt quæ per ipsas ducuntur plana.

Ex A, 11.11. duc AG rectam plano EF, &, 31.1. in eodem plano EF fiant GH, GI parallelæ ipsis DE, DF: erunt etiam, 9.11. GH, GI parallelæ ad AB, AC. Quoniam igitur, *constr.* & 3.*def.* 11. anguli IGA, HGA recti sunt; erunt etiam, 29.1. anguli CAG, BAG recti; ergo, 4.11. linea GA recta est plano BC; atqui eadem AG, *constr.* recta est plano EF; ergo 14.11. ipsa plana sunt sibi parallela. Q. E. D.

PROPOSITIO XVI.

SI duo plana parallela (AB, CD) plano quopiam (HEOGF) secentur; communes sectiones (EH, GF) erunt etiã sibi parallelæ.

Nam si dicantur non esse parallelæ, cùm sint in eodem plano secante, convenient alicubi, ut puta in O: Atqui, 2.11. totæ HEO, FGO sunt in planis AB, CD productis; ergo ipsa etiam plana convenient in puncto O; contra hyp. PRO-

PROPOSITIO XVII.

SI duæ rectæ lineæ (ACE, BDF) parallelis planis (IH , LK , NM) secentur ; in eadem ratione secabuntur. (hoc est AC ad CE ut ad BD ad DF .)

Ducantur lineæ AB, CD, EF, & jungatur AF . Quoniam ergo, *hyp.* plana sunt parallela ; erunt etiam, 16.11. sibi parallelæ communes sectiones AB , CD , EF ; ergo , 2.6. erit BD, ad DF ut AO ad OF, atq; hæ ut AC ad CE ; ergo, 11.5. erit BD ad DF ut AC ad CE . Q. E. D.

PROPOSITIO XVIII.

SI recta linea (AB) plano cuipiam (CD) sit perpendicularis; etiam omnia, quæ per ipsam(AB) ducuntur, plana (EG &c.) eidem plano (CD) perpendicularia erunt .

Ductum sit per AB planum quodpiam EG faciens cum plano CD sectionem FG rectam lineam, è cujus aliquo pūcto H ducatur , 31.1. linea HI parallela ipsi AB ; erit, 8.11. HI etiam recta plano CD, rectæque etiem erunt eidem plano omnes perpendiculariter ductæ ad sectionem GF ; ergo, 4.def. 11. planum EG rectum est plano CD, eademque ratione ipsi plano CD recta erunt omnia plana ducta per AB . Q.E.D.

PRO-

PROPOSITIO XIX.

SI duo plana (AB, CD) semutuò secantia plano cuipiam (GM) ad rectos sint angulos; communis etiam eorum sectio (EF) eidem plano (GM) ad rectos angulos erit.

Quoniam enim plana AB, CD ponuntur recta plano GM; ergo, 4.*def*.11. ex puncto F sumpto in utroque plano AB, CD duci poterit perpẽdicularis ipsi plano GM, quæ tamen, 13.11. unica erit, & propterea eorundem planorum communis sectio. Q. E. D.

PROPOSITIO XX.

SI solidus angulus (OBCD) tribus planis angulis (BOD, DOC, BOC) contineatur; ex his duo quilibet, ut ut assumpti, reliquo sunt majores.

Nam si tres anguli sunt æquales; res est clara: sin verò inæquales, maximus esto BOC, ex quo auferatur BOA æqualis ipsi BOD, & fiat OD æqualis ipsi OA: ducanturque BAC, BD, DC.

Quoniam latus BO commune est, & OD æquatur, *constr.* ipsi OA, & angulus BOA, angulo BOD; erit, 4. 1. linea BA æqualis lineæ BD: sed, 20.1. BD pl. DC maj. sunt

quàm

quàm BC; ergo, subductis æqualibus BA, & BD; erit, 5. *ax.* 1. DC major, quàm AC: atqui, *constr.* OD æquatur ipsi, OA, & latus OC commune est, at verò, *ut prius*, basis DC major est quàm AC; ergo erit, 25. 1. angulus COD major quàm AOC; adeòq; 4. *ax.* 1. BOD pl. COD maj. sunt quàm BOC. Q.E.D.

PROPOSITIO XXI.

Omnis solidus angulus sub minoribus, quàm quatuor rectis angulis planis, continetur.

Esto solidus angulus O, & planis angulis ipsum componentibus subtendantur rectæ BC, CD, DE, EA, AB in uno plano existentes. Quo facto constituitur Pyramis, cujus basis est Polygonum BCDEA, vertex O, totque cincta triangulis, quot plani anguli componunt solidum O. Iamverò, quia, 20. 11. duo anguli OBA, OBC majores sunt uno ABC, & duo OAB, OAE majores sunt uno ABC, & duo OAB, OAE majores sunt tertio BAE, & sic deinceps; erunt triangulorum COB, BOA, AOE, EOD, DOC circa basim anguli simul sumpti majores omnibus simul sumptis angulis basis pyramidalis BCDEA: sed, *Schol.* 32. 1. anguli baseos unà cum quatuor rectis faciunt bis tot rectos, quot sunt latera, sive quot triangula; ergo, 4. *ax.* 1. omnes triangulorum circa basim anguli una cum quatuor

tuor rectis conficiunt amplius quam bis tot rectos, quot sunt triangula; ergo subductis, hinc, atque illinc angulis circa puncta A, B, C, D, E; erunt anguli solidum angulum componentes minores 4. angulis rectis. Q. E. D.

PROPOSITIO XXII.

SI fuerint tres anguli plani (A, B, HCI) quorum duo utlibet assumpti reliquo sunt majores, comprehendant autem illos æquales recta lineæ (AD, AE, BF, BG, CH, CI) fieri potest ut ex rectis lineis æquales illas rectas connectentibus (DE, FG, HI) triangulum constituatur.

Fiat enim angulus HCK æqualis angulo B, & linea CK lineæ CH, ducanturque KH, & KI; Igitur, 4. 1. æquabuntur KH, & FG, & quoniam *hyp.* angulus ICK major est angulo A, & latera hos angulos comprehendentia sunt æqualia; erit, 24. 1. DE minor quam KI, quæ, 20. 1. minor est quam HI pl. HK, hoc est, *ut prius*, quam HI plus FG: similique ratione ostendentur quævis duæ reliqua majores esse; ac proinde, 22. 1. ex his 3glum constitui potest. Q. E. D.

PROPOSITIO XXIII.

EX tribus angulis planis (A, B, C) qui simul sumpti quatuor angulis rectis sint minores, & quorum duo quomodocun-

que

que assumpti reliquò sint majores solidum angulum (OLIK) constituere,

Fac AD, AE, BF, BG, CM, CN æquales inter se, & 22. 11. ex subtensis DE, FG, MN, vel ex totidem ipsis æqualibus fiat triangulum LKI, circa quod, 5. 4. describatur circulus.

Ostendendum autem hic primò est majorem esse AD quàm LR semidiametrum; Nam aliàs AD, vel esset minor quàm LR, vel ipsi æqualis. Si æqualis; ergo æquabuntur etiam LR, & RK tam ipsi AD, quàm cæteris AE, BF &c.; atqui, *constr.* DE, & LI æquantur; ergo, 8. 1. angulus A angulo LRI æquabitur, similiquè ratione angulus B angulo LRK, & angulus C angulo IRK: atqui, *hyp.* A pl. B pl. C minores sunt quatuor angulis rectis: ergo etiā tres anguli circa idem punctum R minores erunt quatuor angulis rectis. Q. E. A. Sin verò dicatur AD minor quàm LR, fiant RV, & RP æquales ipsis AD, & AE, & ducatur PV. Quoniam ergo, 7. 5. est RI ad RP ut RL ad RV; erit, 2. 6. PV parallela ad IL; adeoquè, 29. 1. 3gla PRV, & IRL erunt sibi æquiangula; ergo, 4. 6. erit RI ad IL ut RP ad PV, atqui RI major est quàm RP; ergo IL, hoc est DE major erit quàm PV: Igitur quoniam, f. *hyp.* AD, & AE æquantur ipsis RP, & RV & basis DE major est, *ut prius* quàm PV; erit, 25. 1. angulus A major quàm PRV; eademq; ratione ostendetur angulus B major

jor, quàm LRK, & angulus C major quàm IRK; Quod est absurdum: Nam tres anguli dati plani minores sunt quatuor rectis, anguli verò circa punctum R sunt quatuor rectis æquales; ergo AD major est quàm LR: Quòd & simili ratione ostendetur in cæteris casibus; quando nempè centrum circuli est extra 3glum LKI, vel in uno ex lateribus ipsius.

Inveniatur ergo excessus ORq. quo ADq. majus est quàm LRq. & 12. 11. ex centro circuli erigatur OR recta plano ejusdē circuli, & ducantur OL, OK, OI. Quoniā ergo, *constr.* & 3.*def.* 11. angulus LRO rectus est; erit, 47.1. OLq. æquale ipsi composito ORq. pl. RLq., cui *constr.* æquatur ipsum ADq. ergo æquabuntur OL, & AD: sed & æquantur, 15.*def.* & 2.*ax.* 1. OR pl. RL, & OR pl. RI, & OR pl. RK; ergo æquabuntur OL, OI, OK tam inter se, quā ipsis AD, AE, &c.: sed & æquantur, *constr.* bases DE, FG, & MN lateribus 3gli inscripti; ergo, 8.1. æquabūtur anguli A, & LOI: B, & LOK: C, & IOK; adeoquè factus est angulus solidus ad O ex tribus angulis planis datis. Q. E. F.

PROPOSITIO XXIV.

SI solidum (AB) parallelis planis contineatur; adversa illius plana sunt pgra similia, & æqualia.

Quoniam planum AC, secans plana parallela facit, 16.11. sectiones AH, DC parallelas,

rallelas, & secans plana parallela AE, BH, facit sectiones parallelas AD, CH; ideo ADCH est pgrum, similiquè ratione reliqua P·pi plana sunt pgra. Quia ergo AF ad HG, & AD ad HC sunt parallelæ; erit, 10. 11. angulus DAF æqualis angulo CHG: sed, 34. 1. æquantur AF, & HG; HC, & AD, adeoque, 7. 5. est AF ad AD, ut HG ad HC: ergo 3gla FAD, GHC similia sunt, & æqualia, ac proinde, 24. 1. & 6. ax. 1. pgrà AE, & BH sunt similia, & æqualia, idemque de reliquis oppositis planis ostensum puta. Q. E. D.

PROPOSITIO XXV.

SI solidum parallelepipedum (ABCD) plano (EF) secetur, adversis planis (AD, CB) parallelo; erit quemadmodum basis (AH) ad basim (BH); ita solidum (DE) ad solidum (CE).

Concipiatur parallelepipedum ABCD produci utrinque, & sume AT, & BK æquales ipsis AE, & BE, & ponantur plana TQ, KP planis AD, BC parallela; Igitur, 36. 1. & 1. *def.* 6 & 24. 11. parallelogrammata LM, & GH, uti & DL, & IG, necnon TQ, & AD &c. similia, & æqualia sunt; adeoque, 10. *def.* 11. æquantur Pppa AQ, & AF, uti & BP, & BF; ergo solida TF, IK ita multiplicia sunt solidorum DE, BF, ac bases TH, & KH basium AH, & BH. Quòd si basis TH major, vel minor sit quàm KH, vel ipsis æqualis; erit, 24. 11., & 9. *def.* 11.

similiter

similiter solidum TF majus, vel minus quàm solidum KF, vel ipsi æquale; adeoquè erit, *6. def. 5.* AH ad BH ut DE ad CE. Q.E.D.

PROPOSITIO XXVI.

AD datam rectam lineam (AB) ejusq; punctum (A) constituere angulum solidum (ABIO) æqualem solido angulo dato (CDFL).

Demittatur, 11. 11. utcunque recta LG perpendicularis plano DCF, & per G ducatur utcunq; in plano DCF recta DF subtendens angulum planum DCF, atq; tùm ducantur LD, & LF: deindè fiat AB æqualis ipsi CD, & angulus BAI angulo DCF, & sumatur BK æqualis ipsi DG, atque ex puncto K, 12. 11. erigatur perpendicularis KO æqualis ipsi GL, atque ducantur cæteræ lineæ; dico factum; quòd jam ex ipsa constructione patet.

PROPOSITIO XXVII.

A Data recta linea (AB) dato parallelepipedo (MD) simile similiterque positum parallepipedum (AK) constituere.

Ex angulis planis BAQ, QAI, BAI, qui sint æquales angulis planis HMN, NMO, HMO fiat 26. 11. angulus solidus A æqualis

lis angulo solido M: atque tum fiat BA ad AQ, ut HM ad MN, atque deindè fiat AQ ad AI, ut MN ad MO, & perficiatur parallepipedum AK ductis planis parallelis; & dico factum. Nam, *constr. & 1. def. 6.* parallelogrammata BQ, & NH sunt similia; uti & IQ, & ON, necnon IB, & OH; ergo; ergo 24. 11. sicut in datis parallelogrammis opposita oppositis, ità etiam in constructis opposita oppositis sunt similia; adeoquè, *9. def.* 11. ipsa solida sibi mutuò similia sunt. Q. E. F.

PROPOSITIO XXVIII.

Si solidum parallelepipedum (AB) plano (DCGF) secetur per Diagonios (DF, CG) adversorum planorum (AE, BH); bifariam secabitur solidum (AB) ab ipso plano (DCGF)

Nam quia, 24. 11. DC, & FG sunt sibi æquales, & parallelæ; idcircò, 33. 1. planum DCGF est pgrum, & quoniam, 24. 11. pgra AE, & BH sunt sibi æqualia, ac similia; erunt etiam, 34. 1. 3gla AFD, HGC, DFE, CGB sibi æqualia, & similia, atqui etiam, 24. 11. AC & AG ipsis BF, & BD æqualia sunt, & similia; ergo prismatis DAFCHG omnia plana æqualia sunt, & similia omnibus planis prismatis DEFCBG; ac proindè, *9. def.* 11. hoc prisma illi æquatur. Q. E. D.

PRO-

PROPOSITIO XXIX.

Solida parallelepipeda (AQBHFEDC, AQBHNSRK) super eandem basim (AQBH) & inter eadem parallela plana, constituta, quorum insistentes lineæ (AF, AN) collocentur inter easdem lineas (AQ, FS); sunt sibi mutuò æqualia.

Siquidem, *hyp.* & 10. *def.* 11. prismata AFNHCK, QESBDR sibi mutuò æquantur: Si ergo ab utroque auferas commune prisma MENODK, & utrique addas commune prisma AMQHOB; æquabuntur, 3, & 2. *ax.* 1. ipsa data Pppa. Q. E. D.

PROPOSITIO XXX.

Solida parallelepipeda (CEOAXDKB, CEOAMNGF) super eandem basim (CEOA), & inter eadem parallela plana constituta, quorum insistentes lineæ (CX, CM) non collocentur inter easdem lineas (CE, XV) sibi mutuò æquantur.

Fiat enim productis lineis XDV, BKL, FMR, GNV) Pppum CEOARVLI, cujus insistens linea CR collocetur inter easdē CE, XV; æquabitur ergo, *ex præcedenti*, Pppum constructum utroque dato, adeòq; & illa inter se. Q. E. D.

PROPOSITIO XXXI.

SI Pppa (EHGFCDBA, OeNMLaKI) constituantur super æquales bases (EHGF, OeNM) & in eadem altitudine æquabuntur sibi mutuò.

Si Pppa habeant latera ad bases recta; ad latus Oe productum fiat pgrum *ebgf* æquale & simile Pgro EHGF; adeoquè, 24.11. & 10. *def*. 11, Pppa *ebgfcdba*, EHGFCDBA sunt sibi æqualia, & similia: Tum perficiātur reliqua Pppa *efQNabPK*, *RSfemnba*; Quibus positis;

Æqu. hæ Rationes
- *OeNMLaKI* ad *efQNabPK* (25.11.)
- *OeNM* ad *efQN* (*hyp*. & 7.5.)
- *EHGF* ad *efQN* (*constr*. & 7.5.)
- *ebgf* ad *efQN* (35.1. & 7.5.)
- *eRSf* ad *efQN* (25.11.
- *eRSfmnba* ad *efQNabPK* (29. 11. & 7.5.
- *ebgfcdba* ad *efQNabPK*.

Ergo, 9.5. æquantur sibi mutuò Pppa OeNMLaKI, & *ebgfcdba*, sive EHGFCDBA. Q. E. D.

Quòd si Pppa HB, & OK habeant latera basibus obliqua, ponantur super easdē bases, & in eadē altitudine parallelepipeda, quorum latera basibus sint recta; erunt 31. & 29. 11. ipsa inter se, & obliquis æqualia; ac proindè, 1. *ax*. 1. obliqua etiam inter se. Q. E. D.

PRO-

PROPOSITIO XXXII.

Solida Pppa (ABCD, FIMN) sub eadem altitudine, inter se sunt, ut bases (AB, FI)

Producatur IHE, & fiat, 45.1. Pgrum FE æquale ipsi AB, & compleatur Pppum EFML; erit ergo AB ad IF, 7.5. ut EF ad FI, quæ sunt, 25.11. ut Pppum EFML ad Pppum FIMN, quæ sunt, *ut prius*, & 7.5. ut Pppum ABCD ad Pppum FIMN: adeòquè, 11.5. erit AB ad IF ut ABCD ad FIMN. Q.E.D.

PROPOSITIO XXXIII.

Similia solida Pppa (gdbh, *OQRT*) *inter se sunt in triplicata ratione homologorum laterum* gm, *MO*)

Producantur rectæ *gmo*, *bmn*, *dmq*, & fiãt *mo*, *mn*, *mq* æquales ipsis MO, MN, MQ; adeoquè, 17.11. Pppum *oqrt* æquale, & simile erit Pppo OQRT: tum perficiantur reliqua Pppa *doay*, *dofr*: Itaquè Pppum *gdbb* ad Pppum *oqrt*, hoc est ad Pppum OQRT se habet, ut Pppum *gdbb* ad *doay*, pl. *doay* ad *dofr*, pl. *dofr* ad *oqrt*: hoc est (32.11.) ut Pgrum *cm* ad *do*, pl. *am* ad *dn*, pl. *dn* ad *nq*: hoc est (1.6.) ut linea *gm* ad *mo*, pl. *bm* ad *mn*, pl. *dm* ad *mq*: hoc est (*hyp.* & 10. *def.* 5.) ut *gm* ad *mo*, (sivè ad MO) ter. Q.E.D.

COROLL. Hinc si fuerint quatuor lineæ rectæ cōtinuè proportionales; erit prima ad quartam ut Pppum super primam descriptum ad Pppum simile, similiterquè descriptum super secundam.

PROPOSITIO XXXIV.

Æqualium solidorum parallelepipedorum (ADCB, EHGF) bases, & altitudines sunt in reciproca proportione: & è converso.

Nam si sint latera CA, GE ad bases recta, & æquentur non modò altitudines inter se, sed & bases; res est clara. Sin verò altitudines sint inæquales; à majori EG abscindatur EI æqualis ipsi AC, & per I ducatur planum IK parallelum basi EH. Igitur; In 1. *hyp.*

Æqu. hæ Rationes:
- AD ad EH (32. 11.)
- Ppp. ADCB ad Ppp. EHIk (7. 5.)
- Ppp. EHGF ad Ppp. EHIk (32. 11.)
- GX ad IX (1. 6.)
- GE ad IE (7. 5.)
- GE ad AC. Q.E.D.

In 2. *hyp.*

Æqu. hæ Rationes:
- Ppp ADCB ad Ppp. EHIk (32. 11.)
- AD ad EH [*hyp.*]
- GE ad AC (7. 5.)
- GE ad IE (1. 6.)
- GX ad IX (32. 11)
- Ppp. EHGF ad Ppp. EHIk.

Ergo,

Ergo, 11. & 9.5. æquantur Pppa ADCB, & EHGF. Q. E. D.

Quòd si latera ad bases sint obliqua; erigantur super iisdem basibus, & in eadem altitudine Pppa recta; erunt obliqua rectis æqualia; adeòque etiam obliqua erunt in reciproca proportione basium, & altitudinum. Q. E. D.

COROLL. Quæ de Pppis demonstrata sunt à Propos. 29. usque ad hanc conveniũt etiam Prismatibus triangularibus, quippèquæ sunt Ppporum dimidia.

PROPOSITIO XXXV.

SI fuerint duo plani anguli (EDF, BAC) æquales, quorum verticibus (D. & A) sublimes rectæ lineæ (DG, AL) insistant, quæ cum lineis primò positis angulos contineant æquales (GDE ipsi LAB & GDF ipsi LAC); in sublimibus autem lineis (DG, AL) quælibet sumpta fuerint puncta (G & L) & ab his ad plana, in quibus consistunt anguli primùm positi (EDF, BAC) ductæ fuerint perpendiculares (GH, & LM; à punctis verò H, & M) quæ in planis à perpendicularibus fiunt, ad angulos primùm positos adjũctæ fuerint rectæ lineæ HD, & MA; hæ cum sublimibus (DG, AL) æquales angulos (HDG, MAL) comprehendent.

Fiant DI, & AL æquales, atque tum fiat IK parallela ad GH, & fiant deindè kF ad DF, uti& kE ad DE, necnon MC ad AC, atque demum MB ad AB perpendiculares, & ducantur rectæ FE & CB ; IF, LC : IE, & LB. Quoniam ergo, *constr.* IK parallela est ad GH, quæ, *hyp.* perpendicularis est plano subjecto; erit etiam, 8. 11. IK perpendicularis eidem plano ; adeoquè, 3. *def.* 11, anguli IkF, IkD, IkE recti sunt, eadẽque ratione recti sunt anguli LMC, LMA, LMB. Igitur ;

$$\text{Æqu. hæc (47. 1.)} \begin{cases} DIq. \\ IKq. \text{ pl. } KDq. \\ IKq. \text{ pl. } KFq. \text{ pl. } FDq. \\ IFq. \text{ pl. } FDq. \end{cases}$$

Ergo, 48. 1 angulus IFD rectus est. Ità etiam

$$\text{Æqu. hæc [47. 1.]} \begin{cases} DIq. \\ IKq. \text{ pl. } KDq. \\ IKq. \text{ pl. } KEq. \text{ pl. } EDq. \\ EDq. \text{ pl. } IEq. \end{cases}$$

Ergo, 48. 1. angulus IED rectus est. Ità etiam

$$\text{Æqu. hæc (47. 1.)} \begin{cases} ALq. \\ LMq. \text{ pl. } MAq. \\ LMq. \text{ pl. } MCq. \text{ pl. } CAq. \\ CAq. \text{ pl. } LCq. \end{cases}$$

Ergo, 48. 1. angulus LCA rectus est. Ità demum

$$\text{Æqu. hæc (47. 1.)} \begin{cases} LAq. \\ LMq. \text{ pl. } MAq. \\ LMq. \text{ MBq. pl. } BAq. \\ LBq. \text{ pl. } BAq. \end{cases}$$

Ergo,

Ergò, 48.1. angulus LBA rectus est: sed &, *hyp.* anguli IDE, & LAB æquantur sibi mutuò, &, *constr.* ID æquatur ipsi LA; ergo, 26.1. æquabuntur DE, & AB: eademq; ratione DF, & AC: IE, & LB: IF, & LC; adeoquè, 47.1. æquabuntur AM, & DK, ac proindè si ex DIq. auferatur DKq. atque ex LAq. auferatur AMq; æquabuntur IKq. & LMq. adeoquè & lineæ IK, & LM. Ergo 3gla IDK, LAM sibi mutuò æquilatera sunt; ac proindè, 8.1. angulus IDK æquabitur angulo LAM. Q. E. D.

COROLL. Itàquè, si fuerint duo anguli plani æquales, quorum verticibus sublimes rectæ lineæ æquales insistant, quæ cum lineis primò positis angulos contineant æquales, utrumque utrique; erunt à punctis extremis linearum sublimium ad plana angulorum primò positorum demissæ, perpendiculares inter se æquales.

PROPOSITIO XXXVI.

SI tres rectæ lineæ (DE, DG, DF) proportionales fuerint; quod ex his tribus fit solidum Pppum (DH) æquale est descripto à media proportionali DG solido Pppo, quòd æquilaterum quidem sit, æquiangulum verò ei, quod describitur à tribus.

Quoniam enim, *hyp.* est DE ad DG, sivè ad IK, ut DG sivè IL ad DF; idcircò, 14.6. æquabuntur Pgra FE, & LK, sed

&

& *hyp.* æquantur altitudines GD, & IM, necnon anguli solidi ad D, & I; ergo 31. 11. æquantur sibi mutuò Pppa FEGH, & LKMN. Q. E. D.

PROPOSITIO XXXVII.

SI quatuor rectæ lineæ (A, B, C, D) proportionales fuerint; quòd ab extremis describitur parallelepipedum æquale est ei, quod ipsi simile, similiterque positum describitur à mediis, & è converso.

Nam sint super A, B, C, D descripta solida similia, similiterque posita, ut puta cubi: ergo

1. *Hyp.*

Æqu. hæ Rationes $\begin{cases} \text{Ac. ad Bc.} & (33.11.) \\ \text{A ad B ter} & (hyp.) \\ \text{C ad D ter} & (33.11.) \\ \text{Cc. ad Bc.} & \text{Q. E. D.} \end{cases}$

2. *Hyp.*

Æqu. hæ Rationes $\begin{cases} \text{A ad B ter} & (33.11.) \\ \text{Ac. ad Bc.} & (hyp.) \\ \text{Cc. ad Bc.} & (33.11.) \\ \text{C ad D ter.} & \text{Q. E. D.} \end{cases}$

PRO-

PROPOSITIO XXXVIII.

SI planum (AB) ad planum (AC) rectum fuerit, & ab aliquo puncto (B) eorum quæ sunt in uno planorum (AB) ad alterum planum (AC) perpendicularis (EF) ducta fuerit; hæc in planorum communem sectionem (AD) cadet.

Nam, si f.p. cadat EF extra communem sectionem AD. Tum in plano AC ducatur FG perpendicularis ad AD, jungaturque FG; ergo in 3glo EFG sunt duo anguli recti. Q. E. A.

PROPOSITIO XXXIX.

SI solidi Pppi (AB) eorum, quæ ex adversò planorum (AL, BÆ) latera (AE, EL, LH, HA, & ÆF, FB, BV, VÆ) bifariam secta sint; per sectiones autem plana (MNTR, DOXZ) sint extensa; planorum communis sectio (CK) & Pppi diameter (AB) bifariam se mutuò secabunt.

Ducantur rectæ CA, CL, & KÆ, KB. Quoniam 34.1. & 7. ax. 1. latera ÆX, & ÆR æquantur lateribus BZ, ZK, &, 29.1. angulus ÆXk alterno angulo BZK; ergo, 4. 1. æquabuntur ÆK, & BK, & anguli ÆKX, BKZ; adeoquè, Schol. 15. 1. ÆKB est

est una recta linea, eademq; ratione ACL est una recta linea. Cæterùm, *hyp.* tam AÆ, & HV, quàm HV, & LB sũt parallelæ, & æqu. adeòque, 9. 11. AÆ, & LB sunt sibi parallelæ, & æquales; ac proindè, 33. 1. AL, & ÆB sunt etiam sibi parallelæ, & æquales; adeoquè, 7. 11. tam AB, quàm CK sunt in eodem plano AÆBL. Quoniam ergo æquantur sibi mutuò anguli ad verticem ASC, & BSK, uti & alterni ACS, & BKS, & æquantur AC, & BK; erit, 26. 1. AS æqualis ipsi BS, uti & CS æqualis ipsi KS. Q. E. D.

COROLL. Hinc in omni Pppo Diametri se mutuò bisecant in puncto S.

PROPOSITIO XXXX.

S*I fuerint duo Prismata ejusdem altitudinis, quorum alterum habeat basim (MNQP) Pgrum, alterum verò basim (BCD) 3glum, atque pgrum duplum sit 3gli; æquabuntur sibi mutuò ipsa Prismata.*

Quippè si perficiantur Pppa BA, & ML erunt hæc ob basim, & altitudinum æqualitatem, sibi mutuò æqualia; adeoquè, 7. *ax.* 1. æquabuntur etiam inter se ipsa Prismata, utpote, 28. 11. Ppporum dimidia. Q. E. D.

LAVS DEO.

LIBER XII.

PROPOSITIO I.

Quæ sunt in circulis polygona similia (ABCDE, FGHIK) inter se sunt ut quadrata diametrum (AL, FM).

Ducantur AC, BL, FH, GM. Quoniam ergo, *hyp. & 1. def. 6.* angulus ABC æquatur angulo FGH, atque est AB ad BC ut FG ad GH; idcircò, 6.6. æquantur anguli ACB, & FHG; adeòque, 21. 3. etiam anguli ALB, & FMG: atqui, 31.3. anguli ABL, & FGM recti sunt; ergo 3gla ABL & FGM sibi mutuò sunt æquiãgula; adeoquè, 4.6. est AB ad FG, ut AL ad FM; ac proindè, 22.6. est polyg. ABCDE ad polyg. FGHIK, ut ALq. ad FMq. Q.E.D.

COROLL. Hinc polygonorum similiũ circulo inscriptorum ambitus sunt ut diametri: Quippè, *hyp. & 12. 5.* est AB pl. BC pl. CD pl. DE pl. EA ad FG pl. GH pl. HI, pl. IK pl. KF ut AB ad FG, quæ sunt, *ut prius*, ut AL ad FM.

PROPOSITIO II.

Circuli inter se sunt quemadmõdum quadrata diametrorum.

Nempè si sit circulus CEQF ad magnitudinem

tudinem quampiam X ut CFq, ad ÆTq. 5. Dico æquari sibi mutuò magnitudinem X, & circulum TMNÆ.

Nam, si f. p. sit X minor, quàm circulus TMNÆ, sitque excessus magnitudo Z, ipsi verò circulo inscribatur quadratum SI, quod utpotè dimidium circumscripti quadrati, quòd majus est circulo, majus quidē erit quàm semicirculus. Bisecentur jam arcus *m* S, SM, M*n*, *mn*, & trahantur eorū subtensæ, atque per Æ ducatur tangens *ab*: & quoniam *ab* parallela est ad *mn*; erit 41. 1. 3glum *m* Æ *n* dimidiū pgri *abmn*, adeoq; majus quàm dimidium segmenti *m*Æ*n*; eademque ratione reliqua 3gla majora sunt, quàm dimidia reliquorum segmentorum. Quòd si iterum bisecentur arcus *m*Æ, Æ*n*, &c. & trahantur subtensæ; erunt semper 3gla majora quàm segmentorum dimidia; adeoque, si è circulo TMNÆ detrahatur quadratum SI, & è reliquis segmentis detrahantur 3gla, & hoc fiat deinceps; tandem, 1. 10. relinquetur aliqua magnitudo minor quàm Z. Perventum ergo sit ad segmenta *m*Æ, Æ*n* &c., quæ simul sumpta minora sint quam Z; ergo erit X (sive circulus TMMÆ *minùs* Z) minor quam polygonum Æ*m* PSTMN*n*Æ (sive, quàm circulus TMNÆ *minùs* segment. *m* Æ pl. Æ*n* &c. Concipiatur ergo alteri circulo inscribi simile polygonum: Tum, quoniam est, 1. 12. polyg. ACDEQFGHA ad polyg. Æ*m* PSTMN*ne*, ut CFq. ad ÆTq. quæ sunt, *hyp.* ut circulus TMNÆ ad X, atque primum

poly-

polygonum minus est circumscripto circulo; ergo, 14. 5. etiam alterum polygonum minus erit quam X; cùm tamen ostensum fuerit majus; Quæ repugnant.

Sit deinde si f. p. X major quam circulus TMNÆ & concipiatur esse, X ad circulum CEQF ut circul. TMNÆ ad Z; ergo *f. hyp. & 14. 5.* erit circulus CEQF major quam Z: atqui, *hyp. & invert.* est ÆTq. ad CF, ut X ad circulum CEQF, quæ sunt, *hyp.* ut circul. TMNÆ ad magnitudinem Z, quæ minor est, *ut prius* quam circulus CEQF: Quæ, *ex p. parte hujus* repugnant.

Corol. Hinc ut circulus ad circulum, ita polygonum in illo descriptum ad simile polygonum in hoc descriptum.

PROPOSITIO III.

Omnis Pyramis (ABCO) triangularem habens basim, dividitur in duas pyramides (ADEH, HMNO) æquales inter se, similesque tam sibi quam toti, & in duo prismata æqualia (HMNDBF, FCNDEH), quæ simul sumpta majora sunt dimidio totius Pyramidis (ABCO).

Bisecentur latera pyramidis in punctis, D, F, E, H, M, N, & jungantur rectæ DF, FE &c. Quoniam ergo latera pyramidis sunt secta proportionaliter; iccirco, 2. 6. erit HM ad AB: MN ad BC: FN ad OB &c. parallela; adeoque, 9. 11. DF ad HN uti & NF ad HD erit parallela, ergo, 29. 1.

3gla

3gla quæ, totam comprehendunt pyramidem, erunt similia 3glis, quæ emergunt ex laterum bisectione: hæc verò inter se non modò similia, sed & æqualia erunt: quinimmò 10. & 15. 11. 3glum HMN parallelum erit ad 3glum DBF, uti & 3glum FCN ad 3glum DEH: vndè perspicuum est, pyramides ADEH, HMNO sibi mutuò æquari, & non modò sibi sed & toti pyramidi ABCO similes esse: deindè solida HMNDBF, FCNDEH esse prismata sita inter parallela plana ABC, HMN, pgrum verò DFCE, quod unius prismatis est basis, duplum esse 3gli DBF quod basis est alterius prismatis; adeòque, 40. 11. ipsa prismata sibi æquari, quorum alterum HMNDBF, utpotè totum sua parte, majus est pyramide DBFM, cui, *constr.* æquatur pyramis ADEH; ac proindè duo prismata simul sumpta majora esse duabus pyramidibus simul sumptis; adeoque majora esse dimidio totius pyramidis ABCO. Q. E. D.

PROPOSITIO IV.

SI fuerint duæ Pyramides (BACO, KLMN) ejusdem altitudinis, triangulares habentes bases (BAC, KLM), sit autem illarum utraque divisa, & in duas pyramides (BEDH, HGIO : & KPQT, TSVN) æquales inter se, & similes toti, & in duo prismata æqualia HGIEAF, FCIEDH : TSVPLR,

RM-

RMVPQT), ac eodem modo divisa sit utraque pyramidum, quæ ex superiore divisione natæ sunt, idque semper fiat; erit, ut unius pyramidis basis ad alterius pyramidis basim, ità & omnia, quæ in una pyramide prismata ad omnia, quæ in altera pyramide prismata, multitudine æqualia.

Siquidem (adhibendo constructionem præcedentis) est, 15.5. AC ad AF, ut LM ad LR: ergo, 22.6. est 3glū BAC ad EAF, ut KLM ad PLR: atq; *altern.* BAC ad KLM ut EAF ad PLR, quæ sunt *Schol.* 34.11.) ut Prisma HGIEAF ad TSVPLR, quæ sunt *constr.* & 7.5. ut Prisma FCIEDH ad RMVPQT; ergo, 11. & 12.5. erit 3glum BAC ad KLM, ut Prism. HGIEAF pl. FCIEDH ad Prism. TSVPLR pl. RMVPQT. Q. E. D.

Quòd si dividantur eodem modo pyramides ex prima divisione genitæ; erunt quatuor nova prismata hinc effecta ad quatuor illinc producta ut bases HGI, & BED ad bases TSV, & KPQ, hoc est, 4.6. & 11. 5. ut BAC ad KLM. Q. E. D.

PROPOSITIO V.

SVb eadem altitudine existentes pyramides (BACO, KLMN) triangulares habentes bases (BAC, KLM); inter se sunt ut bases.

Nam

Nempè, si sit 3glum BAC ad kLM, ut pyramis BACO ad solidum quodpiam Z; dico æquari Z, & pyramidem kLMN.

Nam, si fieri potest, sit Z minus, quàm pyramis kLMN magnitudine X, & dividatur pyramis KLMN in prismata, & pyramides, ut in præcedentibus, donec, 1. 10. relictæ pyramides sint minores, quàm X. Quoniã igitur, f. *hyp.* tota pyramis KLMN æquatur ipsi composito Z pl. X. atque, *constr.* relictæ pyramides simul sumptæ minores sunt, quàm X; ergo relicta prismata simul sumpta majora sunt, quàm Z. Iam verò alteram pyramidem BACO totidem, similibusque divisionibus resolutam concipe, ac pyramis kLMN divisa est; ergo, 4. 12. erunt omnia prismata pyramidis BACO ad omnia prismata pyramidis kLMN, ut basis BAC ad basim kLM, quæ, *hyp.* sunt, ut pyramis BACO ad Z; atqui, 9. *ax.* 1. omnia prismata pyramidis BACO minora sunt, quàm ipsa tota pyramis BACO; ergo, 14. 5. omnia prismata pyramidis kLMN minora sunt, quàm Z; cùm tamen ostensa fuerint majora: Quæ repugnant.

Sit deindè, si fieri potest, Z majus, quàm pyramis kLMN, & concipiatur esse pyramidem kLMN ad X, ut Z ad pyr. BACO, quæ *hyp.* & *invert.* sunt, ut 3glum kLM ad 3glum BAC: Quoniam ergo, *f. hyp.* pyramis

ramis KLMN minor est, quàm Z; erit, 14. 5. magnitudo X minor, quàm praymis BACO. Quod fieri nequit; quippè ostensum est in prima parte hujus, quod *esse nequit, ut basis ad basim ità pyramis ad solidum altera pyramide minus*. Reliquum ergo est, ut pyramis KLMN æquætur ipsi Z.

Q. E. D.

PROPOSITIO VI.

SVb eadem altitudine existentes pyramides (ABCDEF, OPLMNK) & polygonas habentes bases, inter se sunt, ut bases.

Nam resolutis polygonis in triangula; Erit, 5. 12. *alternan.* & 12. 5. Pyram. ABCF pl. ACDF pl. ADEF ad triangulum ABC pl. ACD pl. ADE, ut pyram. ABCF ad triangulum ABC, quæ sunt, 5. 12. & *alternan.* ut pyram. OPLK ad ad triangulum OPL, quæ sunt, 5. 12. *alternan.* & 12. 5. ut pyram. OPLK pl. OLMK, pl. OMNK ad triangulum OPL, pl. OLM, pl. OMN; adeòque 11. 5. & *alternan.* est tota Pyramis ABCDEF ad totam pyramidem OPLMNK, ut polygonum ABCDE ad polygonum OPLMN.

Q. E. D.

Idipsum

Idipsum porrò demonstrabitur si pyramidum bases non habeant latera æquè multa; Quippè ostensum est, esse totam Pyr. ABCDEF ad polig. ABCDE, ut pyram. ABCF ad 3gl. ABC; atque *altern.* erit Pyramis ad Pyramidem, ut poligonum ad 3glum. Q.E.D.

PROPOSITIO VII.

Omne Prisma (ABFDCE) triangularem habens basim dividitur in tres pyramides (ABCF, ADCF, FEDC) æquales inter se, triangulares etiam bases habentes.

Nam ductis pgrorum diametris FC, FD, AC: æquabuntur, 34.1. triangula ABC, & ADB; ergo, 5.12. sibi mutuò æquabuntur æquè altæ pyramides, ABCF, & ADCF: eademquè ratione æquantur sibi pyramides FEDC, & FADC, quæ eadem est ac ADCF. Q.E.D.

COROLL. Hinc quælibet pyramis tertia pars est prismatis eandem cum illa habentis basim, & altitudinem. Nam resoluto prismate polygonó in prismata trigona, & pyramide poligona in pyramides trigonas; erunt, 7.12. singulæ partes prismatis triplæ singularum partium pyramidis: adeòque, 1.5. erit totum prisma polygonũ totius pyramidis polygonæ triplum. Q.E.D.

PROPOSITIO VIII.

SImiles Pyramides *ABCD, FOGH*) *quæ triangulares habent bases; in triplicata sunt ratione homologorum laterum* (*BC, OG*)

Nam si perficiantur Pppa BAICDMKL, OFNGHQEP; hæc, 9. *def*. 11. similia erũt, & datarum pyramidum (28. 11. & 7. 12.) sextupla; ergo, 15. 5. erit Pyramis ad sibi similem Pyramidem, ut Pppum ad sibi simile Pppum, nimirum, 33. 11. in triplicata ratione laterum homologorum.

Q. E. D.

COROLL. Hinc, similes polygonæ pyramides sunt etiam in triplicata ratione laterum homologorum, utpotè resolubiles in trigonas pyramides.

PROPOSITIO IX.

AEqualium Pyramidum, & triangulares bases habentium, bases sunt in reciproca proportione altitudinem: & è converso.

1. *Hyp*. Nam si perficiatur Ppa; erunt hæc (28. 11. & 7. 12.) æqualium pyramidum, utrunq; utriusq; sextupla, adeoquè, 6. *ax*. 1. sibi mutuò æqualia; Adeòq; 34. 11. ipsorum altitudines (quæ datarum etiam pyramidum sunt altitudines) sunt in reciproca

proca proportione basium, seù pgrorum, quæ basium pyramidalium dupla sunt, atq; 15. 5. in eadem cum illis ratione.

Q. E. D.

2. *Hyp.* Facta eadem constr. Quoniam, *hyp.* Ppporum bases sunt in reciproca proportione altitudinum; idcircò, 34. 11. æquantur ipsa Pppa sibi mutuò; adeòque, 7. *ax.* 1. etiam sibi æquantur pyramides, utpotè Ppporum subsextuplæ.

Q. E. D.

COROLL. Quæ de Pyramidibus demonstrata sunt tribus prop. præcedentibus, conveniunt etiam prismatibus, quandoquidem hæc tripla sunt pyramidum eandem basim, & altitudinem habentium.

PROPOSITIO X.

Omnis conus tertia pars est cylindri, habentis eandem cum ipso basim (CABD), & altitudinem æqualem.

Si negas: Sit primus Cylindrus major quàm tres coni, magnitudine Z. Quoniã ergo quadratum circulo circumscriptum est duplum inscripti, adeòque prisma super quadratum CABD circulo inscriptum est dimidium prismatis super quadratum eidẽ circulo circumscriptum in eadem altitudine positi, ac est inscriptum prisma, & cylindrus (nam prismata ejusdem altitudinis se habent, ut bases), & quoniam, 9. *ax.* 1. prisma circumscriptum majus est cylindro; idcircò

idcircò prisma inscriptum majus est quàm dimidium cylindri: eademquè ratione prisma super basim AEB descriptum, cylindro æquè altum, majus est dimidio segmenti cylindrici AEB. Continuetur ergo bisectio arcuum, & subtrahantur prismata, donec, 1.10. segmenta cylindrica residua minora sint, quàm Z: hisquè positis;

Quoniam, *f.hyp.* 3 Coni pl. Z. æquantur Prismati polygono pl. segment. cylindr. atqui, *constr.* Z majus est quàm segment. cylindr. Ergo 3 Coni minores sunt prismate polygono, quod, 7.12. æquatur 3 Pyramidibus; adeòque unus conus minor est una pyramide ejusdem altitudinis ad basim CABD: Quod, 9.*ax*.1. est absurdum.

Sin conus tertia parte cylindri major dicatur, magnitudine Z. Quoniam, *f.hyp.* $\frac{1}{3}$ cylindri pl. Z. æquatur pyramidi polygonæ pl. segment. conic. atqui, *constr.* Z majus est, quàm segmenta conica; ergo $\frac{1}{3}$ cylindri min. est Pyramide polygona, cui, 7.12. æquatur $\frac{1}{3}$ Prismatis polygoni; adeoquè cylindrus minor est prismate ejusdem altitudinis ab basim CABD; Quod, 9.*ax*.1. est absurdum.

PROPOSITIO XI.

SUb eadem altitudine existentes cylindri, & coni (ADQGO, mSMnK) inter se sunt, ut bases.

Nempe, si sit circulus ADQG ad circulum *mSMn*, ut conus ADQGO ad magnitedinem quempiam X; Dico æquari X, & nouum *mSMnK*.

Nam, si fieri potest, sit conus *mSMnK* minor, quàm X magnitudine Z, & facta constructione juxtà primam Decimi, ut in præcedenti, itàut Z majus sit residuis segm. conicis. Quoniam, *f. hyp.* X pl. Z æqu. Pyramidi *mSMnK* pl. segm. conic. atque, *constr.* Z maj. est segmentis conicis; Ergo X min. est pyramide *mSMnK*: atq; facta simili construct. & præparatione in cono ADQGO; Erit prima Pyramis ad secundam Pyramidem, *6.12.* ut primum polygonum ad secũdum polygonum, quæ sunt *cor.* 2.12. ut primus circulus ad secundum circulum, qui sunt *hyp.* ut primus conus ad X: atqui prima pyramis, *9. ax. 1.* minor est primo cono; ergo, 14.5. secunda pyramis minor est, quã Z; cum tamen ostensa fuerit major.

Deindè, si fieri potest, sit X maj. quàm secundus conus, & concipiatur esse secund. conus ad Z, ut X ad primum conũ, hoc est, *hyp. & invert.* ut secundus circulus ad primum: Atqui, *f. hyp.* secundus conus minor est, quàm X; ergo, 14.5. Z min. est quàm primus conus; quod repugnat primæ parti hujus, quippè in qua ostensum est, quod *esse nequit circulus ad circulum, ut conus ad solidum altero cono minus*. Ergo reliquum est æquari conum *mSMnK*, & X. Q. E. D.

PROPOSITIO XII.

S*Imiles coni, & cylindri* (*ADQGO*, mSMnK) *sunt in triplicata ratione dia-*

diametrorum (CF, ÆT) quæ in basibus.

Nempè CF ad ÆT ter sit ut primus Conus ad magnitudinem quampiam X; dico æquari X, & alterum Conum.

Nam, si fieri potest, sit alter conus minor quàm X, magnitudine Z: & facta constructione, ut in præcedentibus, donec Z majus sit residuis segmentis conicis; erit, *ut prius*, pyramis *mSMnK* major quàm X. Ducantur jam axes conorum, & cæteræ rectæ: Quoniam, *Hyp.* coni sunt similes; ideò, 24.*def.* 11. est EB ad BO, ut MR ad RK, atque, *hyp.* anguli EBO, MRK sunt æquales, ergo, 6.6. 3gla EBO, MRK sunt similia, ergo, 4.6. erit EO ad MK ut EB ad MR, quæ sunt (ob angulos EBQ, MRN æqualibus arcubus insistentes, æquales, & 7.5. ob latera circum hos angulos proportionalia) ut EQ ad MN, quæ sunt, simili ratione ut QO ad NK; ergo 5.6. 3gla EOQ, MKN sunt similia, eademque ratione reliqua unius pyramidis latera reliquis alterius pyramidis lateribus similia sunt; adeoquè, 9. *def.* 11. etiam ipsæ pyramides sunt sibi similes; quæ proindè, *cor.* 8. *huj.* sunt ut EQ ad MN, sivè, *ut prius*, ut EB ad MR, sivè, 7.5. & 15.5. ut CF ad ÆT ter, quæ sunt, *hyp.* ut primus conus ad X; ergò, 11.5. prima pyramis ad secundam pyramidem est ut primus Conus ad X: atqui prima pyramis minor est primo Cono, quippè cui inscribitur; ergo, 14.5. secunda pyramis minor est quàm X; cùm tamen ostensa fuerit major; quæ repugnant.

Sin verò X majus ponatur quàm sec. Conus; sit sec. Conus ad Z ut X ad primum Conum, quæ sunt, *ut prius*, & *invert.* ut sec. Pyramis ad primam, quæ sunt, 8. *bujus* ut EQ ad MN ter, quæ sunt, *ut prius*, ut CF ad ÆT ter: atqui, f. *hyp.* X majest sec. Cono; ergo, 14. 5. primus Conus major est quàm Z, quæ repugnant: Nã ostensum est in prima parte hujus, quod *esse nequit diameter ad diametrum in basibus Conorum ut Conus ad magnitudinem altero cono minorem*.

Quoniam verò Cylindri utpotè conorũ tripli, se habent ut coni; erunt & ipsi in triplicata ratione diametrorum in basibus.

PROPOSITIO XIII.

SI Cylindrus (MNGH) secetur plano (IL) adversis planis (MN, GH) parallelo; erit ut cylindrus (ML) ad cylindrum (IH) ità axis (CD) ad axem (CO).

Producatur axis utrinque, itàut constructis cylindris HE, FR æqualibus ipsi IH, & facto cylindro NS æquali ipsi ML; sit 11. *buj.* totus cylindrus LR, ità multiplex cylindri IH ac est axis CA multiplex ipsius CO: & ex altera parte cylindrus LS ità multiplex cylindri ML, ac est axis CK ipsius CD. Quod si CA major, vel minor sit quàm CK, vel ipsi æqualis; erit etiam 11. *buj.* cylindrus LR maj. vel min. cylindro LS, vel ipsi æqualis; ergo, 6. *def.* 5. erit cyl. ML ad cyl. IH ut CD ad axem CO. Q. E. D.

PRO-

ergo, *alter.* est FL ad LK ut CI ad CQ, quæ sunt, 15.5. ut CD ad CF, (nimirùm, *cor.* 10. *hujus* ut 2 CI ad 2 CQ); ergo, *compon.* est FK ad LK ut CD pl. CF ad CF; ergo, 22.6. est FKq. ad LKq. ut quadratum factum sub CD pl. CF [hoc est, 1. *buj.* 5 CFq.] ad CFq. ergo FKq. est 5 LKq. Itaque si Rationalis BO ponatur 8; LO erit 4: LK erit 1; adeòque LKq. erit 1. BK erit 5; adeoquè BKq. erit 25. & FKq. erit 5 [Nam, *ut prius* est FKq ad LKq. ut 5. ad 1.] Vndè patet, BK, & FK esse Rationales sibi pot. tantum commens.; adeòque 74. 10. BF esse Apotomen, cujus congruens est FK: Quoniam verò, *ut prius* BKq. *minùs* FKq. est 20. idcircò, 9. 10. BK, est long. incommens. lineæ potenti quadratum sub Bk minus FK; adeoquè (4. *def. ex tertiis* 10.) BF est Apotome Quarta. Quoniam verò, 8. & 17.6. æquantur ABq. & rectangulum sub BO, & BF; idcircò, 95. 10. AB erit Minor. Q. E. D.

PROPOSITIO XII.

SI in circulo triangulum æquilaterum (ABC) describatur; trianguli latus (AB) potentia triplum est ejus (AO), quæ ex centro circuli ducitur.

Quoniam, *cor.* 10. 13. æquantur arcus BE, & EC; ideò arcus BE est $\frac{1}{6}$ totius circunferentiæ; ergo, 15. 4. æquantur lineæ BE, & OE; adeoquè

Æqu.

Æqu. hæc $\begin{cases} 4 \text{ BEq. } (\textit{ut prius}) \\ 4 \text{ OEq. } (4.2.) \\ \text{AEq. } (47.1.) \\ \text{ABq. pl. BEq.} \end{cases}$

Ergo, 3. *ax.* 1. æquantur ABq. & 3 BEq. Q. E. D.

COROLL. 1. AEq. ad ABq. eſt ut 4. ad 3. Tum ABq. ad AFq. eſt etiam ut 4. ad 3. (Nam eſt AE ad AB ut AB ad AF)

2. Æquantur OF, & FE; nam 3glum EBO eſt æquilaterum, & BF ad EO perpendicularis; ergo EO ſecatur bifariam in F. Atque hinc demùm æquantur AF, & OE pl. OF, & 3 OF.

PROPOSITIO XIII.

P*Yramidem (GEFO) conſtituere, & data ſphæra complecti; & demonſtrare quod ſpæræ diameter (AB) ſit ſexquialtera in potentia lateris (EF) ipſius Pyramidis.*

Circa datam AB fiat ſemicirculus AEB, atque 10. 6. DB ſit $\frac{1}{2}$ ipſius AD, & ex puncto D erige perpendicularem DE, & trahantur BE, AE. Tum ad intervallum ipſius GI æqualis ipſi DE fiat circulus, cui inſcribatur 3glum æquilaterum EFG, & 12. 11. ex centro I erigatur normalis IO æqualis ipſi AD, & producatur OI in oppoſitam partem, ità ut recta OK æquetur diametro AB, & junganur rectæ OE, OF, OG; dico ſolidum GEFO eſſe Pyramidem expetitam.

Si

PROPOSITIO XIV.

SVper æqualibus Basibus (AC, P Q) existentes Coni, & Cylindri inter se sunt ut altitudines (HO, & BK).

Producto enim axe BK in D, ita ut kD æquetur ipsi HO; erit, 11. *huj.* cylindrus PN æqualis psi EC: atqui est, 7.5. cyl. PN ad cyl. ABC ut cyl. EC ad cyl. ABC, qui sunt, 13. *huj.* ut axis Dk, sive HO ad kB. Q. E.D. Idem de conis ut pote cylindrorum sub triplis dictum puta.

PROPOSITIO XV.

AEqualium conorum (MHN, RBS) & cylindrorum (ML, RD) altitudines sunt in reciproca basium proportione: Et si adsit hæc proportio reciproca; æquabuntur sibi coni, ut & cylindri.

Si altitudines æquantur; æquabuntur etiã bases; & res clara est. Sin altitudo OB maj. sit quàm Hk: fiat OG æqualis ipsi Hk; er t ergo, 14. *huj.* OB ad OG, sivè ad HK ut cyl. RD (sivè cyl. ML) ad cyl. RF, quæ sunt, 11. *huj.* ut basis MN ad RS.

Q. E. D.

Atque è converso: erit, 11. *huj.* cyl. ML ad cyl. RF, ut basis MN ad RS, quæ sunt, *hyp.* ut altitudo OB ad Hk, sivè ad OG, quæ sunt, 11. *huj.* ut cyl. RD ad RF; adeóq; 9.5.

æquan-

æquantur Cylindri ML, & RD. Q.E.D.

Porrò simili demonstratione utimur in Conis.

PROPOSITIO XVI.

DVobus circulis circa idem centrum (K) existentibus; in majori circulo polygonum æquilaterum, & parium laterum inscribere, quod non tangat minorem circulum.

Secet Diameter AC minorem circulum in D, ex quo erige perpendicularem EF. Tum biseca semicirculum ABC, ejusquè semissem BC, donec arcus IC minor evadat arcu EC, & ab I dimitte perpendicularem IL. Liquet primò, arcum IC totam majoris circuli circumferentiam metiri, numerumq; arcuum esse parem, adeoòq; subtensam IC esse latus polygoni inscriptibilis, quod interiorem circulum non continget; Nam, 16.3. EF tangit interiorem circulum, ipsi verò EF, 28.1. parallela est IL, quæ propterea circulum non tangit, neque proindè CI, CL circulum interiorem tangunt. Q.E.F.

COROLL. Hinc recta IL circulum non tangit.

PROPOSITIO XVII.

DVabus sphæris circa idem cẽtrum existentibus; in majori sphæra solidum polie-

poliedrum inscribere quod nõ tangat superficiem minoris sphæræ.

Constructio. Secentur ambæ sphæræ plano transeunte per centrum, & constituente circulum EFGH in minori sphæra, & ABCV in majori. In plano autem horum circulorum ducantur duæ diametri se mutuò perpendiculariter secanter AC, BV: In circulo ABCV, 16.12. inscribatur Polygonum æquilaterum VMLZC &c. circulum minorem non tangens. Tum ducatur in eodem plano ex angulo Z per centrum commune D diameter Zh, & 12. 11. erigatur DO in sublimi, recta ad subjectum planum ABCV: per DO, sivè juxtà DO lineam insistentem, perquè diametros AC, Zh duci concipiantur plana; quæ proindè, 18.11. eidem subjecto plano ABCV recta erunt; adeòque, 33.6. in superficie majoris sphæræ quadrantes DOC, DOZ, efficient. In his autem quadrantibus 1.4. aptentur rectæ CP, PQ, QR, RO: OS, ST, TX, XZ, ipsis CZ, ZL, LM, MV, æquales, & æquè multæ. Quod si idẽ feceris in reliquis quadrantibus OL, OM &c. tam supra, quàm infra horizontem ABCV, atque inter lineolas CP, ZX &c. plàna duxeris; dico factum.

Demonstratio Primæ Partis. A punctis P, & X ad subjectum planum ABCV ducãtur, 12.11. perpendiculares Pd, XY, quæ 38.11. in communes sectiones AC, Zh cadent. Quoniam igitur tã anguli recti PdC, XYZ, quàm PCd, XZY, 27.3. sunt æquales; idcircò,

circò, 32.1. ∆gla PdC, XYZ sunt æquiangula: sed &, *constr.* æquantur PC, & XZ; ergo, 26.1. æquabuntur Pd, & XY uti & Cd, & ZY; adeòque, 15. *def.* & 3.*ax.* 1. æquabuntur Dd, & DY; ergo, 7.5. erit Dd, ad dC, ut DY ad YZ; adeòque, 2.6. dY, & CZ sunt parall. Quia verò, *ut prius*, sibi æquãtur Pd, & XY, & ipsi plano subjecto sunt perpẽdiculares, adeòq; 6.11. sibi parallelæ; erunt etiam, 33.1. PX, & dY sibi æquales, & parallelæ; adeòque, 9.11. PX, & CZ erunt etiam sibi [redacted] parallelæ; ergo, 7.11. CPXZ, eademq; ratione PQTX, & QRST, & ∆glum ROS tridem sunt plana. Quod si eadem constructio continuetur in tota sphæra; constructum erit Polyedrum.

Demonstratio secundæ Partis. Ex centro D ducatur Dc recta plano PCZX, & jungantur cP, cZ, cX, cC. Quoniam ergo, 4.6. DZ ad ZC est ut DY ad Yd; atque DZ major est quàm DY; erit etiam, 14.5. CZ major quàm Yd, sivè, 33.1. quàm PX, pariterquè PX major erit quàm QT, & QT major quàm RS. Et quia, *constr.* anguli DcC, DcP, DcZ, DcX recti sunt; latera verò DC, DP, DZ, DX utpotè radii sibi æquantur; & Dc est commune; idcircò, 47.1. sibi æquãtur rectæ cP, cZ, cX, cC; ac proindè 15. *def.* 1. circa quadrilaterum CPXZ describi potest circulus: in quo ob ZX, CP, & CZ, & ob CZ majorem quàm PX; idcircò, 28.3. CZ plusquàm quadrantem subtendit, ergo, 33.6. angulus *CcZ* ad centrum est obtusus; adeòque, 10.2. CZq. majus est quàm 2 *cCq*,

sivè

sivè quàm cCq. pl. cZq. . Sit jam *Zm* perpendicularis ad AC; quoniã angulus ADZ (hoc est 32.1. DZC pl. DGZ) est obtusus; erit DCZ, sivè dimidius ipsius ADZ major dimidio recti; adeòque eò minor est *CZm* reliquus è recto angulo; adeòque, 19.1. *Zm* major est quàm *Cm*; ac proindè CZq. (sivè *mCq*. pl. *mZq*.) minus est quàm 2 *mZq*. adeòque mZ major est quàm *cC*; ac proindè 47.1. *cD* major est, quàm *Dm*: Atqui punctum *m* est extrà interiorem sphæram; ergo magis extrà ipsam erit punctum *c*; adeòque planum GPXZ, (inter cujus pũcta, id quod propinquius est centro sphæræ, est *c*) interiorem sphæram non continget. Et si ad planum PQTX. demittatur perpendicularis D*a*; adhuc punctum *a* è centro D ulterius elongatur, & sic deinceps; Ergo polyedrum majori sphæræ inscriptum, minorem non tangit. Q. E. F.

COROLL. Hinc, *Si in qualibet alia Sphæra describatur Polyedrum, simile prędicto Polyedro, Proportio Polyedri in una sphæra ad polyedrum in altera, est triplicata ejus, quam habent sphærarum diametri.*

Nam, si ex centris sphærarum ad omnes angulos basium dictorum polyedrorum rectæ lineæ ducantur; distribuentur polyedra in pyramides numero æquales, & similes, quarum homologa latera sunt semidiametri sphærarum. Vt constat, si concipiatur harum sphærarum minor intra majorem circa idem centrum descripta; congruent enim sibi mutuò lineæ rectæ ductæ à centro sphæ-

ræ

ræ ad basium angulos, ob similitudinem basium, ac propterea pyramides efficientur similes. Quare, cùm singulæ pyramides in una sphæra ad similes pyramides illis similes in altera habeant (8. 12.) proportionem triplicatam laterum homologorum, hoc est, semidiametrorum sphærarum; sint autem (12.5.) ut una pyramis ad unam pyramidē, ità omnes pyramides, sivè solidum polyedrum ex ipsis compositum, ad omnes pyramides, sivè ad solidum polyedrum ex illis constitutum; habebit quoque polyedrum unius sphæræ ad polyedrum alterius sphæræ proportionem triplicatam semidiametrorū, atque adeò (15.5.] diametrorum. Q.E.D.

PROPOSITIO XVIII.

Sphæræ (BAC, EDF) sunt in triplicata ratione suarum diametrorum (BG, EF).

Nempè, si sit sphæra BAC ad sphæram K in triplicata ratione diametri BC ad diametrum EF; Dico sibi æquari K, & EDF.

Sit enim, si fieri potest, K minor, quàm EDF, & concipe sphæram K concentricam esse ipsi EDF, cui 17.12. inscribatur polyedrum, sphæram K non tangens, sphæræquè BAC simile polyedrum; Hæc quidem polyedra, *cor.* 17. 12. sunt in triplicata ratione diametrorum BC, EF, adeòque, *hyp.* se habent ut sphæra BAC ad K; atqui polyedrū ipsi sphæræ BAC inscriptum, 9. *ax.* 1. minus est quàm sphæra ABC; ergo 14.5. polyedrū

alteri

alteri ſphære EDF inſcriptũ minus eſt quàm interior ſphæra K; proindèque totum minus erit ſua parte. Q. E. A.

Sin verò ſphæra K major dicatur, quàm ſphæra EDF, & concipiatur eſſe ſphæra EDF ad quampiam aliam H, ut ſphæra K ad BAC, hoc eſt, *hyp. & invert.* in triplicata ratione diametri EF ad BC; atqui, *ſ.hyp.* EDF minor ponitur, quàm K; ergo, 14.5. ſphæra H minor erit, quàm ABC: Quod repugnat primæ parti hujus; quippè in qua oſtenſum eſt, quod *eſſe nequit diameter ad diametrum ter, ut ſphæra ad magnitudinem quandam altera ſphæra, cujus eſt altera diameter minorem.* Ergo reliquum eſt, ſibi æquari K, & EDF. Q. E. D.

COROLL. Hinc, erit ut ſphæra ad ſphæram, ità polyedrum in una deſcriptum ad ſimile polyedrum deſcriptum in altera.

LAVS DEO.

LIBER

LIBER XIII.

PROPOSITIO I.

SI recta linea (AB) secundum extremam, & mediam rationem secetur. Majus segmentum (AC) assumens lineam (AD) dimidiam totius (AB) quintuplum potest ejus, quod à dimidia totius describitur, quadrati:

Nam

$$\text{Æqu.hæc}\begin{cases}\text{DCq. (4.2.)}\\ \text{DAq. pl. ACq. pl. 2 DAC}\\ \quad (\textit{hyp. \& } 1.2.)\\ \text{DAq.pl.ABC pl.BAC (2.2.)}\\ \text{DAq. pl. ABq. (4.2.)}\\ \text{DAq. pl. 4 DAq.}\\ \text{5 DAq.} \quad \text{Q. E. D.}\end{cases}$$

PROPOSITIO II.

SI recta linea (DC) sui ipsius segmenti (DA) quintuplum possit; prædicti segmenti (DA) dupla (AB) extrema, ac media ratione secta majus segmentum est (AC) reliqua pars ejus, quæ à principio rectæ (DC).

Nam

DAq.

Æqu.hæc $\begin{cases} \text{DAq.pl.BAC, pl.ABC (2.2.)} \\ \text{DAq. pl.ABq. (4.2.)} \\ \text{DAq. pl.4 DAq. (}hyp.\text{)} \\ \text{DCq. (4.2.)} \\ \text{DAq.pl.ACq. pl.2 DAC (1.2.)} \\ \text{DAq. pl.BAC, pl. ACq.} \end{cases}$

Ergo æquantur ABC, & ADq. Q.E.D.

PROPOSITIO III.

SI recta linea (AB) secundum extremam, ac mediam rationem secetur; minus segmentum (CB) assumens lineam (DC) dimidiam majoris segmenti (AC), quintuplum potest ejus, quod à (DC) dimidia majoris segmenti (AC) describitur, quadrati.

Nam

Æqu.hæc $\begin{cases} \text{DBq. (6.2.)} \\ \text{ABC, pl.DCq. (}hyp.\text{)} \\ \text{DCq. pl.ACq. (}hyp.\text{ \& 4.2.]} \\ \text{4 DCq. pl.DCq.} \\ \text{5 DCq.} \end{cases}$ Q.E.D.

PROPOSITIO IV.

SI recta linea (AB) secundum extremam, ac mediam rationem secetur; quod à tota (AB), quodque à minori segmento (CB), utraque simul quadrata, tripla sunt ejus, quod à majori segmento (AC) describitur, quadrati. Nam

Nam

Æqu. hæc $\begin{cases} \text{ABq. pl. CBq. (7.2.)} \\ \text{2 ABC, pl. ACq. } (\textit{hyp.}) \\ \text{2 ACq. pl. ACq.} \\ \text{3 ACq.} \quad \text{Q. E. D.} \end{cases}$

PROPOSITIO V.

SI recta linea (AB) secundùm extremam, ac mediam rationem secetur (in C), apponaturque ei linea (AD) æqualis majori segmento (AC); tota recta linea (DB) secundum extremam, ac mediam rationem secabitur, & majus segmentum est, quæ à principio recta linea (AB).

Nam est, *hyp.* AB ad AD (sivè ad AC) ut AC ad CB, &, *invert.* est AD ad AB, ut CB ad AC, &, *compon.* erit DB ad AB, ut AB ad AC (sivè ad AD). Q. E. D.

SCHOL. Quòd si fuerit DB ad AB, ut AB ad AD; erit AB ad AD, ut AD ad CB, nimirum linea AB secundùm extremam, ac mediam rationem secabitur.

Quoniam enim, *hyp.* est DB ad AB, ut AB ad AD; ergo, *divid.* est AD ad AB, ut CB ad AD; ergo, *invert.* erit AB ad AD, ut AD ad CB. Q. E. D.

PROPOSITIO VI.

SI recta linea Rationalis (AB) extrema, ac media ratione secetur (in C); utrumque

que segmentorum (AC, CB) Irrationalis est linea, quæ vocatur Apotome.

Nam si majori segmento AC addas AD æqualem ipsi ½ AB; mox, 1.13. æquabuntur DCq. & 5 ADq.; adeòq; 6.10. DCq. & ADq. sunt sibi commensurabilia: atque, *hyp.* AB, adeòque etiam ejus dimidia AD est rationalis; ergo etiã DC est rationalis: Quia verò non est 5 ad 1, ut num. quadr. ad num. quadr; idcircò, 9. 10. DC, & AD sunt rationales, sibi tantùm pot. commens. adeòq; 74.10. AC, (sivè DC minus AD) est Apotome. Rursus, quia, *hyp.* & 17.6. æquantur ACq. & ABC, & ABC applicatur ipsi AB rationali; idcircò, 98.10. BC est Apotome. Q.E.D.

PROPOSITIO VII.

SI Pentagoni æquilateri (ACDEB) tres anguli, sivè qui deinceps, sivè qui non deinceps sunt, æquales fuerint; æquiangulum erit ipsum Pentagonum.

Quoniam *hyp.* æquantur non modò latera BA, AC, CD, DE, EB, sed & anguli ab illis comprehensi; erunt, 4.1. sibi etiam æquales bases CB, AD, CE, quin & anguli ABC & CDA, uti & anguli CAF, & ACF; adeòquè, 6.1. æquantur AF, & CF, ac proindè etiam residuæ FB, & FD; ergo 3gla FBE, FDE, quibus latus FE est commune, sunt sibi æquilatera; ergo æquantur anguli FBE,

&

& FDE, sed, *ut prius*, æquantur anguli ABC & CDA ; ergo æquabuntur toti GDE, & ABE. Tum ob latera & angulos intercepros æquales æquantur, 4. 1. anguli DEC, & ABC, necnon, *ut prius*, & 5. 1. æquantur anguli CBE, & CEB ; ergo æquabuntur toti DEB, & ABE.

Quòd si anguli CAB, CDE, DEB, qui non sunt deinceps, ponantur æquales; mox, 4. 1. æquabuntur anguli ABC, & DEC, quin & bases CB, & CE, adeoquè, 5. 1. & anguli CEB, & CBE, adeoquè toti DEB, & ABE; ac proindè, ob angulos in A, & E sibi deinceps æquales; erit, *ut prius*, æquiangulum ipsum Pentagonum. Q. E. D.

PROPOSITIO VIII.

SI Pentagoni æquilateri, & æquianguli (ABCDE) duos angulos (BCD, CDE) qui deinceps sunt, subtendant rectæ lineæ (BD. CE); hæ extrema, ac media ratione se mutuò secant, & majora ipsarum segmenta (BF, vel EF) sunt pentagoni latera.

Describatur circulus circa Pentagonum; ergo, 28. 3. æquabunt arcus ED & BC, adeòq; 27. 3. & anguli FCD, & FDC; ergo angulus BFC, qui, 20. 3. duplus est ipsius FDC, duplus etiam erit ipsius FCD: atqui etiam arcus BAE bis continet arcum ED, adeòq; 33. 6. angulus BCF est duplus ejusdem anguli FCD; ergo, 6. ax. 1. æquabuntur anguli

guli BCF, & BFC; adeòque 6.1. æquabuntur BC, & BF. Tum, quoniam, 27.3. triangula BCD, & CFD sunt sibi æquiangula; erit, 4.6. BD ad CD, ut CD ad FD, hoc est *ut prius, &* 7.5. erit BD ad BF, ut BF ad FD: eademquè ratione erit EC ad EF, ut EF ad CF. Q.E.D.

PROPOSITIO IX.

SI Hexagoni latus (BE) & Decagoni latus (AB) in eodem circulo descriptorum componantur; tota recta linea (AE) extr. ac media ratione secabitur, majusquè segmentum erit Hexagoni latus.

Ducatur Diameter ADC, & junge rectas DB, DE. Ergo, quoniam arcus AB est decima pars totius circumferentiæ; idcircò

Æqu. hi Anguli { 4 BDA (*hyp.* & 27. 3.
BDC (32.1.)
BAD, pl. ABD (5.1.)
2 ABD (32.1.)
2 BED, pl. 2 BDE (5.1.)
4 BDE.

Ergo, 32.1. & 2. *ax.* 1. æquatur anguli ADE, & ABD; adeòque ᴣgla ADE, & ABD (nã habent ipsa etiam angulum communem in A) sunt æquiangula; ergo, 4.6. erit AE ad AD ut AD ad AB, hoc est, 15.4. & 7.5. AE ad EB, ut EB ad AB. Q. E. D.

COROLL. Hinc, 1. Si latus hexagoni alicujus circuli secetur extrema, ac media ratione ; majus illius segmentum erit latus decagoni ejusdem circuli.

2. Hinc etiam, *ut prius*, 5. & 6. 1. æquabuntur rectæ AE, & DE, & quoniam BE, utpotè latus hexagoni, æquatur radio DF; æquabuntur, 1. ax. 1. etiã AB, & EF; adeòq; etiam EF erit latus decagoni ; ac proindè, *ut prius*, etiam erit DE ad DF, ut DF ad FE.

PROPOSITIO X.

SI in circulo (ABCDE) pentagonum æquilaterum (ABCDE) describatur; Pẽtagoni latus (AB) potest Hexagoni latus (FB) & Decagoni latus (AH), in eodem circulo descriptorum.

Ducatur diameter AG : biseca arcum AH in K, & ducantur FK, FH, FB, BH, HM. Quoniam semicirculus ABCG *minùs* arcus AC æquatur, *hyp.* & 3. *ax.* 1. semicirculo AEDG *minùs* AD; ideò erit arcus CD bifariam sectus in G; ergo æquabuntur arc. CG, GD; BH, HA. Quoniam ergo, *hyp.* & *constr.* arcus HK est $\frac{1}{2}$ ipsius HA, & BH est $\frac{1}{2}$ ipsius BA; erit BK $\frac{1}{2}$ ipsius BG; adeoquè, 33.6. angulus BFK est $\frac{1}{2}$ ipsius BFG, cui, 20.3. æquatur angulus BAG, sivè BAF; ac proindè æquantur anguli BFK, & BAF, sed & angulus in B est cõmunis, ergo 3gla BFM, & BAF sunt sibi æquiangula ; adeòq; 4.6. est AB ad BF ut BF ad BM; ergo, 17.6. æquabuntur ABM; & BFq. Rursus, *constr.*

&

& 27. 3. æquantur anguli AFK, & HFK, uti & radii FA, & FH, & FO est communis; ergo, 4.1. æquantur AO, & HO, atque anguli AOF, & HOF, qui proindè recti sunt, & MO est cõmunis; ergo etiam, 4.1. æquãtur anguli OHM, sivè AHM, & OAM, cui, 27.3. æquatur angulus HBA; ergo 3gla AHB, & AMH, in quibus, *ut prius*, æquantur anguli AHM, & HBA, atque angulus in A est communis, sunt sibi æquiangula; adeòque, 4.6. est AB ad AH, ut AH ad AM; ac proindè, 17.6. AHq. æquatur ipsi BAM: Atqui, 2.2. ABq. æquatur composito ABM pl. BAM; ergo ABq. æquatur ipsi composito BFq. pl. AHq. Q. E. D.

COROLL. 1. Hinc linea recta FK, quæ ex centro arcum quemviam HA bisecat, etiã rectam HA illi arcui subtensam bisecat ad angulos rectos.

2. Diameter AG ex angulo quovis A pẽtagoni ducta, bisecat, & arcum CD, quem latus pentagoni CD subtendit, & ipsum etiã latus CD, ad angulos rectos.

SCHOL. 1. Hinc faciliùs quàm ex 11.4. pentagonum regulare inscribemus circulo: Ducatur enim diameter AB, cui ex centro erigatur perpendicularis CD: Tum bisecetur CB in E, & fiat EF æqualis ipsi ED; erit DF latus pentagoni; Nam

$$\text{Æqu. hæc} \begin{cases} \text{BFC, pl. ECq. } (6.2.) \\ \text{EFq. } (\textit{constr.}) \\ \text{EDq. } (47.1.) \\ \text{DCq, pl. ECq.} \end{cases}$$

Ergo,

Ergo, 3.ax.1. æquantur BFC, & DCq. sivè BCq.; adeoquè, 17.6. erit BF ad BC ut BC ad FC: quoniam ergo BC est latus Exagoni; erit, 9.13. FC latus Decagoni; ac proindè, 10.3. DF est latus Pentagoni. Q. E. F.

2. Et hinc facilè demonstratur, rectam esse Pentagoni constructionem illam, ubi secta bifariã CB in E abscinditur EO æqualis ipsi EC, & ex D per O fit circulus, secans priorem circulum in M, & N, atque ducitur MN, quæ dicitur esse latus pentagoni. Quippè, *Sch. præcedent.* æquantur DE, & EF, atque, *constr.* æquantur EC, & EO; ergo FC, quod *Sch. præced.* est latus decagoni, æquabitur ipsi DO sivè, 15. *def.* 1. ipsis DM, DN; adeòque DM & DN sunt latera decagoni ac proindè MN est latus Pentagoni. Q. E. D.

PROPOSITIO XI.

SI in Circulo rationalem habente Diametrum (AG) pentagonum æquilaterum (ABCDH) describatur; pentagoni latus (AB) irrationalis est linea, quæ vocatur Minor,

Duc Diametrum BEO; & fiat LK $\frac{1}{4}$ radii EO; & CQ $\frac{1}{4}$ lineæ CA. Quoniam ergo, *cor.* 10.13. anguli AFL, AIC recti sunt, & angulus in A est communis; idcircò, 32.1. ▵gla AFL, AIC sunt sibi æquiangula, ergo, 4.6. est CI ad FL ut CA ad LA, sivè ad LO, quæ sunt, *constr.* & 15. 5. ut CQ ad LK; ergo, Si quidē, *constr.* anguli ADE, OIE, OIF, OIG recti sunt, atque DE, IE, IF, IG sibi æquātur, nec nō IO æquatur ipsi DA; ergo, 4. 1. sibi æquantur AE, OE, OF, OG. Quoniam verò 8. & *cor.* 20. 6. AD, sive 2 DB ad DB est ut ADq. ad DEq. erit etiam ADq. duplum ipsius DEq.; Igitur

Æqu. hæc { AEq. (47. 1.)
ADq. pl. DEq. (*ut prius, & 7. 5.*)
3 DEq. (*constr.*)
3 IEq. (12. 13.)
EFq. }

Ergo sibi æquantur AE, EF, OE, OF, OG; adeoque Pyramidis GEFO est æquilatera. Quod si punctum D puncto I applicetur, & linea AD lineæ IO superponatur; congruēt etiam lineæ AB, & OK utpote æquales; adeòq; semicirculus AEB axi AB, vel OK circumductus transibit per puncta E, F, G; adeòque Pyramis GEFO inscripta est sphæræ cujus diameter est data AB. Q. E. F. Quinimò est, 8. & *cor.* 20. 6. ABq. ad AEq. ut AB ad AE, quæ sunt, *constr.* ut 3. & 2. Q. E. D.

COROLL. 1. Hinc ABq. ad IEq. est ut 9. ad 2. Nam si ABq. erit 9; erit AEq. sive EFq. 6; ac proinde, 12. 13. IEq. erit 2.

2. Si C sit centrum sphæræ; erit AB ad CD ut 6. ad 1. Nam si AB ponatur 6; erit AC, 3: ac proinde, *constr.* AD erit 4; adeòque CD erit 1; Hinc

3. Est AB ad IO ut 6. ad 4. quæ sunt ut 3. ad 2; adeoque

4. Erit ABq. ad IOq, ut 9. ad 4.

PRO-

PROPOSITIO XIV.

Octaedrum (KEFDGL) constituere, & data sphæra complecti: & demõstrare, quod sphæræ diameter (AB) potentia sit dupla lateris ipsius Octaedri.

Super AB describe semicirculum AIB, & ex centro *C* erige perpendicularem *CI*, & ducantur AI, & *BI*. Tum super ED, cui æqualis sit ipsa AI fiat quadratum EDGF, cujus diametri DF, EG se mutuò secent in centro O, & ex O, 12.11. duc normalem LL æqualem ipsi A*C*, & producatur LO ad oppositam partem, itaut OK æquetur ipsi OL, & connectantur cæteræ lineæ ut in schemate; erit KEFDGL Octaedrum quæsitum.

Siquidem A*C*, *CB*, FO, OE &c. æqualiũ quadratorũ semidiametri sibi mutuò æquantur; adeoquè, 4.1. in ʒglis rectãgolis LOE, LOF, FOE &c. bases *LF*, *FE*, *EK* &c. æquãtur; ac proindè octo ʒgla LEF, LFG, LGD, LDE, KEF, KFG, KGD, KDE sunt æquilatera, adeoquè Octaedrum constituent: Quod quidem sphæræ cujus centrum O & radius OL sivè AC inscribi potest; (Siquidem, *constr.* AC, OL, OF, OD, OE, OG, OK sunt æquales) Q. E. F. Cæterùm, 47.1. ABq. sivè LKq. est duplum ipsius ACq. sivè LDq. Q. E. D.

COROLL. Hinc in Octaedro tres diametri EG, FD, LK se mutuò secant in centro sphæræ ad angulos rectos.

2. Item tria plana EFGD, FLDK, ELDK sunt quadrata & mutuo ad angulos rectos secantia.

3 Octaedrum dividitur in duas Pyramides similes, & æquales EDGFL, & EDGFK quarum basis communis est quadratum EDGF.

4. Tandem bases Octaedri oppositæ sunt sibi mutuò parallelæ.

PROPOSITIO XV.

CVbum (EFLIPQVH) constituere, & sphæra complecti: & demonstrare quòd sphæræ diameter (AB) potentia sit tripla lateris (EF) ipsius Cubi.

Super AB fiat semicirculus AOB, & 10.6. fiat AB tripla ipsius DB, & erigatur perpendicularis DO, & ducantur AO, & BO. Tum sumpta EF, cui æquetur ipsa BO fiat quadratum EFLI, cujus plano insistāt rectæ EP, FQ, IH, LV, ipsi EF æquales, & connectātur rectis HV, PQ, HP, VQ; erit solidum EFLIPQVH Cubus expetitus.

Cæterùm in Quadratis oppositis EFQP, ILVH ducantur diametri EQ, PF se secantes in R, & IV, HL se secantes in O, & ducātur OR, & HF; ergo recta OR, *cor.* 39. 11. bisecabit diametros Cubi in puncto K centro ipsius Cubi; adeòq; K erit centrum sphæræ per angulos Cubi transeuntis.

Tum

Æqu. hæc { EVq. (47. 1.)
EQq. pl. QVq. (47. 1.)
EFq. pl. FQq. pl. QVq. (*constr.*)
3. QVq. (*constr.*)
3. BOq.

Atqui est, 8. 6. & *cor.* 20. 6. ABq. ad BOq. ut AB ad BD, quæ sunt *constr.* ut 3. ad 1; ergo sibi æquantur AB, & EV, quandoquidem utraq; tripla est ipsius QV sivè BO; adeòq; inscriptus est Cubus &c. Q. E. F.

COROLL. 1. Hinc omnes diametri cubi sibi æquantur, sequè mutuò secant in centro sphæræ, uti & rectæ, quæ quadratorum oppositorum centra coniungunt.

2. Hinc diameter sphæræ potest latus Tetraedri, & cubi, siquidem, 47. 1. ABq. æquatur ipsi AOq. (quod, 13. 13. est latus Tetraedri) plus BOq. (quod, 15. huj. est latus Cubi.

PROPOSITIO XVI.

Icosaedrum constituere, & sphæra complecti: & demonstrare quod Icosaedri latus (AC) Irrationalis est linea, quæ vocatur Minor.

CONSTR. Super diametrum MN describe semicirculum MZN, &, 10. 6. fit PN $\frac{1}{5}$. MN, tum ex P erige perpendicul. PZ, & duc ZM, ZN: deindè ad intervallum AF, cui æquetur ipsa NZ fiat circulus AHÆD, cui, 11. 4. inscribe pentag. reg. AIGEC, cujus etiam circuli biseca arcus AI, IG &c. & cō-

necte

necte rectis AL,LI &c. quæ erunt latera decagoni : tum, 12.11. erige tam ex centro F, quàm ex punctis L, H, Æ, D, B , ipsi radio AF æquales normales lineas FQ, LR , HS, ÆT, DV, BX , & duc rectas RS, ST, TV, VX, XR : AR, RI, IS, SG, GT, TE, EV, VC, CX, XA: atque producta normali FQ, fiant QO, & FY æquales ipsi AB , & concipiantur duci rectæ ex puncto Y ad puncta I, G, E, C, A, atque ex puncto O ad puncta X, R, S, T, V ; Dico factum .

Demonstr. Primæ Partis . Nam, ob lineas QF,LR,HS,ÆT,DV,BX non modò, *constr.* rectas plano circuli , adeòque, 6.11. sibi parallelas, sed & sibi æquales ; etiam, 33.1. quæ illas conjungunt binæ, atque binæ lineæ FL, & QR : FH, & QS : FÆ, & QT : FD , & QV : FB, & QX, sunt sibi parall. & æquales: atqui FL, FH, FÆ, FD, FB, utpotè semidiametri, sibi omnes æquantur ; ergo etiam sibi æquantur omnes QR, QS, QT, QV, QX : Ità etiam si connecterentur LH, HÆ, ÆD, DB, BL , quæ omnes , 29. 3. sibi æquantur ; æquarentur, 31.1. etiam sibi omnes RS, ST, TV, VX, XR , siquidem tam hæ in sublimi, quàm illæ in plano subjecto conjungunt normales parallelas, & æquales LR , HS, ÆT, DV, BX; ergo circulus per sublimia puncta R, S, T, V, X ex puncto sublimi Q ductus , æqualis , & parallelus erit subjecto circulo, & sublime pentagonum RSTVX erit parallelum , & æquale ipsi subjecto pentagono AIGEC . Deindè concipiantur duci FA , FÆ, FE, FG, FI in subjecto plano, atq; tum in sublimi duci QX, QV, QT, QS, QR; Igitur,

Æqu. hæc { AXq. (47.1.) / ABq. pl. BXq. (*constr.*) / ABq. pl. AFq. (10.13.) / ACq.

Ergo sibi æquantur AX, & AC, eademque ratione AC, & CX, atque ità de cæteris; adeòque 10. triangula XAC, XAR &c. sunt sibi æquilatera, & proindè æqualia. Rursus, quoniam angulus XOC rectus est, atq; OX, utpotè radius, est latus hexagoni, necnon OC latus decagoni; idcircò etiam

Æqu. hæc { CXq. (47.1.) / OCq. pl. OXq. (10.13. / VXq. (*ut prius*) / ACq.

Ergo CX, VX, eademque ratione CX, CV, EV &c. æquantur tam inter se, quàm dictis AC, AX, CX &c. Ergo alia 10. triangula æquantur tam sibi mutuò, quàm 10. prioribus, adeòquè factum est Icosaedrum.

Demonstr. Secundæ Partis. Iamverò bisecetur FQ in K, & duc rectas KA, KX, KV, & quoniam, 15. *def.* 1. æquantur QX, & QV, atque KQ est communis, necnon anguli KQX, KQV recti sunt; ergo, 4. 1. æquabuntur KX, & KV, eademq; ratione æquantur omnes KX, KR, KS, KT, KV, KA, KC, KE, KG, KI. Quoniam autem, 9. 13. est YQ ad QF, ut QF ad YF; idcircò

Æqu.

Æqu. hæc $\begin{cases} \text{YKq. (3.13.)} \\ \text{5 FKq. (4.2. \& 2. ax. 1.)} \\ \text{FQq. pl. FKq. (Constr.)} \\ \text{FAq. pl. FKq. (47.1.)} \\ \text{KAq.} \end{cases}$

Ergo æquantur YK, & AK; eademquè ratione OK & AK; adeòquè sphæra cujus centrum est K, & radius KA, transibit per 12. angulos Icosaedri. Deindè, quoniam, 15.5. est YK, ad KF, ut YO ad QF, adeòq; 22.6. est YKq. ad KFq. ut YOq. ad QFq. atq; *ut prius*, æquantur YKq. & 5 KFq. ergo etiã æquabuntur YOq. & 5. QFq. sivè 5 ZNq. atqui etiam est, 8.6. MNq. ad ZNq. ut MN ad NP, quæ sunt, *Constr.* ut 5. ad 1. Ergo, 6. *ax.* 1. æquabuntur YO, & MN. Q.E.F.

Demonstr. Tertiæ Partis. Demùm quoniã, *ut prius* æquãtur MNq. & 5 ZNq. sivè 5 AFq. atque MN ponitur rationalis; ergo 6. & 12. 10. etiam semidiameter AF est rationalis, adeòque tota Diameter Circuli, cujus radius AF, est rationalis; ac proindè, 11.13. AC latus pentagoni, hoc est latus Icosaedri Irrationalis est linea; quæ vocatur *Minor*.

Q. E. D.

COROLL. 1. Hinc patet sphæræ diametrum esse pot. quintuplam semidiametri circuli, pentagonum Icosaedri ambientis.

2. Sphæræ diametrum esse compositam ex latere hexagoni, hoc est ex radio, & ex duobus lateribus decagoni circuli; ambientis pentagonum Icosaedri.

3. Icosaedri opposita latera, qualia sunt RX, GE esse parallela; Nam, 6.11. & 31.1.

RX parallela est ipsi LB, quæ parallela est ipsi GE [ob arcuum nempè quos subtendunt æqualitatem]; ergo, 9.11. RX, & GE sunt parallelæ.

PROPOSITIO XVII.

Dodecaedrum constituere, & data sphæra complecti, & demonstrare, Dodecaedri latus Irrationalem esse lineam, quæ vocatur Apotome.

Exponantur cubi in eadem sphæra descripti duo plana BF, BD normaliter se secantes, seceturquè unumquodque ipsorum laterum bifariam ductis lineis MH, NX, HL, GK: tum fit, 30.6. NO ad OR, ut OR ad NR: OX ad OS, ut OS ad SX: HP ad PT, ut PT ad HT: atque, 12.11. à punctis R, S, T ducantur ad exteriores partes cubi, ipsius Cubi planis perpendiculares, & ipsis RO, OS, PT æquales, rectæ RY, SV, TQ, & duc. YB, BQ, QC, CV, VY; Dico, pentagonum YBQCV esse æquilat. in eodẽ plano, & æquiang. Iungantur enim RB, SB, VB: atque tũ

Æqu. hæc $\left\{\begin{array}{l} \text{BYq. (47.1.)} \\ \text{BRq. pl.RYq. (47.1.)} \\ \text{BNq. pl.NRq. pl.RYq. } \textit{constr.} \text{ \& 4.13.} \\ \text{3 ORq. pl.RYq. [} \textit{constr.} \text{]} \\ \text{4 RYq.} \end{array}\right.$

Ergo, 4.2. BY dupla est ipsius RY, atqui etiam, *Constr.* RS (hoc est, 6.11. & 33.1. VY) ipsius RO, sivè RY, dupla est; ergo, 6.*ax*.1.

sibi

ſibi æquantur VY, & BY, atque ità ſimiliter oſtendetur de cæteris, BQ, QC, CV, eas nempè æquari ipſi BY; ergo pentag. eſt æquilaterum. Deindè ducatur OZ parallela ipſis RY, SV, & trahe ZH, HQ; Dico ZHQ eſſe unam rectam: Nam, *conſtr.* eſt HP ad PT, ut PT ad HT, hoc eſt, *conſtr.* & 7.5. HO ad OZ, ut QT ad HT, atque, *conſtr.* & 6.11. HO parallela eſt ad QT, uti & HT ad OZ; ergo, 32.6. ZH eſt in directum ipſi HQ: adeòque, 1.11. pentagonum YBQCV in eodem eſt plano. Tum, *conſtr.* & 5. 13. eſt NO pl. OR ad NO, ut NO ad OR, hoc eſt, *conſtr.* & 7.5. eſt NS ad NO, ut NO ad OS; ergo, 4.13. ſibi æquantur NSq. pl. OSq. & 3 NOq. Igitur

Æqu. hæc
- 4 NBq. (*conſtr.*)
- 4 NOq. (4.13. & 2.*ax*.1.)
- NSq. pl. OSq. pl. NOq. (*conſtr.* & 7.5.)
- NSq. pl. SVq. pl. NBq. (47.1.)
- SBq. pl. SVq. (47.1.)
- BVq.

Ergo, 4.2. BV dupla eſt ipſius NB, adeòquè, 6.*ax*.1. ſibi æquantur BV, & BC, atqui, ob pentagonum æquilaterum, BY, YV æquãtur ipſis BQ, QC; ergo, 8. 1. æquantur anguli BYV, & BQC, eademquè ratione patebit æquari angulos BQC, & YVC; adeòque, 7.13. pentagonum YBQCV eſt æquiangulũ: atqui eſt hoc pentagonum in cubi latere BC; ergo, ſi idem fiat in unoquoque 12. laterum Cubi; Conſtituetur ſolidum 12 pentagonis contentum, nempè *Dodecaedrum*.

Deindè, producatur ZO in interiores partes cubi, usque dum, 39. 11. occurrat diametro cubi, & se mutuò bifariam secent, ut puta in *a*; ergo *a* erit centrum sphæræ cubũ complectentis; & O*a* erit $\frac{1}{2}$. lateris cubi. Ducatur jam *a*Y; ergo, *ut prius*, æquantur NSq. pl. OSq. & 3 NOq. hoc est, *constr*. & 1. *ax*. 1. sibi æquantur 3 NOq. & *a*Zq. pl. ZY (hoc est, 47. 1. *a*Yq.) Ergo, 15. 13. *a*Y est sphæræ, Cubum Complectentis, semidiameter; adeòque punctum Y est in superficie sphæræ: quod ostensum puta de reliquis Dodecaedri angulis; ac proindè Dodecaedrũ ipsi sphæræ inscriptum est. Q. E. F.

Postremò: Quoniam, *constr*. est NO ad OR, ut OR ad NR; idcircò, 15.5. erit NX ad RS, ut RS ad NR pl. SX: atqui NX major est, quàm RS; ergo, 14.5. RS major est, quàm NR pl. SX; adeòq; NX secta est extr. ac med. rat. & majus segmentum est RS, sivè, *ut prius*, YV: atqui NX, latus cubi, est rationale, ut potè pot. subtriplum rationalis Diametri sphæræ; Ergo, 6. 13. YV est Apotome. Q. E. D.

COROLL. 1. Hinc, si latus cubi secetur extr. ac med. ratione; majus segmentum erit latus dodecaedri in eadem sphæra descripti.

2. Si rectæ lineæ, sectæ extr. ac med. ratione minus segmentum sit latus dodecaedri; majus segmentum erit latus cubi ejusdem sphæræ.

3. Patet etiam, latus cubi æquale esse lineæ rectæ subtendenti angulum pentagoni dodecadri in eadem sphæra descripti.

PRO-

PROPOSITIO XVIII.

Latera quinque corporum Platonicorum exponere, & inter se comparare.

Nempè, si sit AB diameter sphæræ, & AEB semicirculus, sitquè AC $\frac{1}{2}$ AB, & AD $\frac{1}{3}$ AB, & erigatur perpendiculariter BO æqualis ipsi AB: ducanturquè cæteræ perpendiculares, ut in schemate, facta primùm CK æquali ipsi CI, fiatquè, 30.6. AF ad AX, ut AX, ad XF.

Erit igitur, *constr.* 3 ad 2, ut AB ad BD, quæ sunt, ut ABq. ad BFq. hoc est, 13. 13. ad latus *Tetraedri*.

Item erit, *constr.* 2 ad 1, ut AB ad AC, quæ sunt, ut ABq. ad BEq. hoc est, 14. 13. ad latus *Octaedri*.

Item erit, *constr.* 3 ad 1, ut AB ad AD, quæ sunt, ut ABq. ad AFq. hoc est, 15. 13. ad latus *Hexaedri*.

Item erit, 17. huj. AX latus *Dodecaedri*; Siquidem, *constr.* est AF ad AX, ut AX ad XF.

Demum, quoniam, 4.6. est BO (sivè 2 BC) ad BC, ut HI ad IC; ergo æquabuntur HI, & 2 IC, hoc est KI; ergo, 4.2. æquabuntur HIq. & 4 ICq. ac proindè, 47.1. & 2. *ax*. 1. æquab. CHq. & 5 ICq. atqui AB est dupla ipsius CH, uti & KI, vel HI est dupla ipsius IC; ergo æquab. ABq. & 5 KI; adeoquè, *cor*. 16. *huj*. KL vel HI est radius circuli ambientis pentag. *Icosaedri*, & AK, vel IB, 10. *huj*. est latus decagoni eidem circulo inscripti ; ergo, 10. *huj.* AL est latus pentagoni, necnon, 16. *huj.* erit idẽ AL latus Icosaedri.

Vadè patet latera Tetraedri, Octaedri, & Hexaedri esse sibi pot. commens. & rationalia: contrà verò esse Irrationalia, & sibi pot. incommens. latera Icosaedri, & Dodecaedri.

Item patet, latus Tetraedri majus esse, quàm latus Octaedri, & hoc quàm Hexaedri, & hoc quàm Icosaedri, & hoc quàm Dodecaedri.

SCHOL. Quod autem præter dicta quinque Corpora regularia, quæ nempè figuris planis ordinatis, & æqualibus continentur, nullum aliud dari possit. Indè quidem patet, quia ad formandum angulum solidum requiruntur ad minimum tres anguli plani, qui, 21.11. simul sumpti minores esse debẽt, quàm 4 recti: Atque 6 anguli trianguli æquilateri, 4 quadratici, & 3 hexagonici, sigillatim quatuor rectos exæquant: 4 verò pẽtagonici, 3 heptagonici, 3 octagonici &c. 4 rectos excedunt; ergo tantùm ex 3, 4, vel 5 trigonis æquilateris, ex 3 quadratis, vel 3 pentagonis effici potest angulus solidus; adeòque præter quinque exposita, nulla alia corpora regularia dari possunt. Q. E. D.

LAVS DEO.

LIBER

LIBER XIV.

PROPOSITIO I.

QVæ ex (H) centro circuli cujuspiam in pentagoni eidem circulo inscripti latus (CD) ducitur perpendicularis (HO), dimidia est utriusque lineæ simul (HK, & KD) nimirum lateris Hexagoni, & lateris Decagoni eidem circulo inscripti.

Sumatur BO æqualis ipsi Ok, & ducatur CB; ergo, 4.1. æquabuntur CK, & CB; ergo, 5.1. æquabuntur anguli CBK, CKB, HCK; ergo

Æqu. hi anguli
- KCB [*ut prius*]
- KHC [*hyp.* & 33.6.]
- $\frac{1}{2}$ CHR (32.1.)
- $\frac{1}{2}$ CKH [5 1. & 7.*ax.*1.]
- $\frac{1}{2}$ KCH.

Ergo angulus KCB est $\frac{1}{2}$ anguli KCH; adeòque æquabuntur anguli HCB, KCB, KHC, sivè BHC; ergo, 6.1. æquabuntur lineæ HB, & CB, sivè CK: quod si ipsi HB addas lineam BO, atqui ipsi CK addas lineã OK [quæ facta est æqualis ipsi BO]; erit HB pl.BO, hoc est tota HO) æqualis ipsi compositæ CK pl.KO: ergo si omnes simul addas; erit HO pl. OK pl.CK, hoc est HK pl.Ck, dupla ipsius HO. Q. E. D.

PRO-

PROPOSITIO II.

SI binæ rectæ lineæ (AL, IF) extrema, & media ratione secentur; ipsæ in eadem proportione secabuntur.

Sumatur LD æqualis ipsi CL, atque tum FO æqualis ipsi EF: Æquabuntur ergo, *hyp.* & 17.6. ALC (sive ALD), & ACq. uti & IFE (sive IFO), & IEq. adeoque, 8.2. æquabuntur ADq. & 5 ACq. uti & IOq. & 5 IEq. ergo 22.6. erit AD ad AC ut IO ad IE: & *compon.* AD pl. AC ad AC ut IO pl. IE ad IE: hoc est, *Constr.* 2 AL ad AC ut 2 IF ad IE; ac proindè, 15. & 11.5. 5 AL ad AC ut IF ad IE: & *diuid. atque invert.* AC ad CL ut IE ad EF. Q. E D.

PROPOSITIO III.

IDem circulus comprehendit & Dodecaedri pentagonum (ABCEF) & Icosaedri triangulum (RSV) eidem sphæræ inscriptorum.

Ducantur diameter AD, & rectæ AC, CD; sit autem Z diameter sphæræ, & fiat Zq. ad OPq. ut 1. ad 5. atque, 30.6. fiat QP ad QM, ut QM ad MP. Igitur

Æqu. hæc $\begin{cases} \text{ABq. pl. ACq. pl. CDq. (31. 3. \& 47. 1.)} \\ \text{ABq. pl. ADq. (4. 2.)} \\ \text{ABq. pl. 4 GDq. [10. 3.)} \\ \text{5 GDq. pl. ÆCDq.} \end{cases}$

Ergo,

Ergo, 3. *ax.* 1. æquantur sibi ABq. pl. ACq. & 5 GDq. Quoniam verò, *hyp.* & 8. 13. est AC ad AB, ut AB ad AC *min.* AB, atque, *constr.* etiam est QP ad QM, ut QM ad QP, *min.* QM; ergo, 2. 13. & *altern.* erit AC ad QP, ut AB ad QM. ergo, 22. 6. erit 3 ACq. ad 5 QPq. ut 3 ABq. ad 5 QMq. atqui [15. 13] æquantur Zq. & 3 ACq. uti, &, *constr.* Zq. & 5 QPq. Ergo, 1. *ax.* 1. æquabũtur 3 ACq. & 5 QPq. uti &, 14. 5. 3 ABq. & 5 QMq. atqui in circulo, cujus diameter QP, est, 1. *cor.* 16. 13. RS latus pentagoni; Ergo

Æqu. hæc { 15 OSq. [12. 13.]
5 RSq. [10. *et cor.* 9. 13.]
5 QPq. pl. 5 QMq. [*ut prius*]
3 ACq. pl. 3 ABq.
15 GDq.

Ergo circulus, cujus diameter est OS æquatur circulo, cujus diameter est GD.
Q. E. D.

PROPOSITIO IV.

SI ex (K) centro circuli pentagonum dodecaedri (ABCDO) circumscribentis ducatur perpendicularis (KR) ad unum pentagoni latus (CD); erit rectangulum sub dicto latere (CD) & perpendiculari (KR) trigesies sumptum, Dodecaedri superficiei æquale. Item

Si ex centro (Q) circuli triangulum Icosaedri (LHN) circumscribentis, perpendicu-

dicularis (QM) ducatur ad trianguli unum latus (HN); erit quod sub dicto latere (HN), & perpendiculari (QM) comprehenditur rectangulum, trigesies sumptũ, icosaedri superficiei æquale.

1. Ducantur cæteræ lineæ ex centris: Erunt ergo, 8.1. 3gla CKD, DKO, OKA, AKB sibi æqualia: atqui, 41.1. 3glum CKD erit $\frac{1}{2}$ rectanguli sub CD, & KR: ergo 30 hujusmodi rectangula erunt 60 3gla CKD; hoc est 12 pentagona ABCDO; hoc est, 17. 13. superficies dodecaedri. Q.E.D.

2. Ducantur cæteræ rectæ ex centro Q; ergo, 41. 1. 3glum HQN est $\frac{1}{2}$ rectanguli sub HN, & QM: 3gla verò HQL, HQN, LQN, 8. 1. sibi æquantur, ergo 30 rectangula sub HN, & QM sunt 60 3gla HQN, hoc est 20 3gla HLN, hoc est, 16.13. superficies icosaedri. Q. E. D.

COROLL. Hinc rectang. sub CD, & KR ad rectang. sub HN, & QM est, ut superficies Dodecaedri ad superficiem Icosaedri.

PROPOSITIO V.

SVperficies Dodecaedri ad superficiem Icosaedri in eadem sphæra descripti, est, ut (H) latus Cubi ad (AD) latus Icosaedri.

In circulo, cui, 3. 14. inscriptum sit tam Dodecaedri pentagonum, quàm Icosaedri 3glum, quorum latera BD, AD, demittantur ex centro Q ad hæc latera perpendiculares

QK,

QK, & QO, quæ producatur usque ad C, & connectatur CD. Igitur

Æqu. hæ { QO ad QK [1.14. *et cor.* 12.13.]
$\frac{1}{2}$ QC pl. CD ad $\frac{1}{2}$ QC [15.5.]
QC pl. CD ad QC [9.13.]
QC ad CD [15.5.]
$\frac{1}{2}$ QC ad $\frac{1}{2}$ CD [*cor.* 12.13.]
QK ad QO *min.* QK

Atqui etiam, *cor.* 17.13. est H ad BD, ut BD B ad H *min.* D; ergo, 2.14. erit QO ad QK, ut H ad BD; ac proindè, 16.6. rectang. sub QO, & BD æquatur rectãgulo sub H, & QK: atqui, 1.6. est H ad AD, ut rectang. sub H, & QK ad rectang. sub AD, & Qk, quæ sunt, *ut prius*, & 7.5. ut rectang. sub QO, & BD ad rectang. sub AD, & QK, quæ, *cor.* 4.14. sunt, ut superficies Dodecaedri ad superf. Icosaedri. Q. E. D.

PROPOSITIO VI.

SI recta (AB) secetur extrema, ac media ratione; erit, ut recta (BF) potens id quod à tota (AB) & id quod à majori segmento (AC) ad rectam (Z) potentem id quod à tota (AB) & id quod à minori segmento (BC) ut (BG) latus Cubi ad (BK) latus Icosaedri eidem sphæræ cum cubo inscripti.

Siquidem, 12.13. erit BKq. triplum ipsius ABq. atque, 4.13. erit Zq. triplum ipsius. ACq. Ergo, 15.5. erit BKq. ad Zq. ut ABq. ad ACq. quæ sunt, 1. *Cor.* 17.13. & 2.14. ut BGq. ad BFq. atq; *altern.* erit BGq. ad BKq.

ut

ut FFq. ad Zq. adeoque, 22. 6. erit BG ad ad. k, ut EF ad Z. Q. E. D.

PROPOSITIO VII.

Dodecaedrum est ad Icosaedrum, ut latus cubi ad latus Icosaedri in una, eademque sphæra inscripti.

Quoniam enim, 3. 14. idem circulus continet dodecaedri pentagonum, & icosaedri 3glum, atq; omnes anguli tam pentagonici, quàm tetragonici superficiem sphæræ tangũt; idcircò, 47. 1. perpendiculares, ductæ à centro sphæræ ad centra 12. pentagonorum dodecadri, & 20. triangulorum icosaedri, sibi æquabuntur; adeòq; si concipiantur dodecaedrum, & icosaedrum resolvi in pyramides; erunt hæ ejusdem altitudinis; adeòq; erunt, 5. & 6. 12. inter se, ut ipsarum bases, nimirùm erunt 12 pyramides pentagonicæ [sivè dodecaedrum] ad 20 pyramides trigonicas [sivè ad icosiedrum], ut 12. pentagona ad 20 triangula, sivè ut superficies dodecaedri ad superf. icosaedri, quæ sunt, 5. 14. ut latus cubi ad latus icosaedri. Q. E. D.

PROPOSITIO VIII.

Idem circulus comprehendit & cubi quadratum (BCKO) & octaedri 3glum (AGH) ejusdem sphæræ.

Sit Z diameter sphæræ. Quoniam ergo, 15. 13. & 47. 1. sibi æquantur Zq. 3 BCq. & 6. BDq; uti &, 14. & 12. 13. Zq. 2 AGq. & 6 AQq. idcircò sibi æquabuntur BD, & AQ; adeòque & ipsi circuli. Q. E. D.

L. A. V S D E O.

LIBER XV.

PROPOSITIO I.

D*Escribere in dato Cubo (AB DCGKEF) Pyramidem.*

Ab angulo C duc diametros CA, CF, CD, easque connecte diametris AD, FD, FA; dico factum: Quippè hæ omnes sibi æquantur, 47. 1. utpotè æqualium quadratorũ diametri; ergo 3gla CAD, CDF, CFA, FAD sibi æquãtur utpote æquilatera; ergo ADFC est pyramis, quæ Cubi angulis insistit. Q. E. F.

PROPOSITIO II.

I*N data Pyramide (ABCO) Octaedrum describere.*

Bisecentur latera pyramidis in punctis E, G, F, H, K, I; quæ connectantur duodecim rectis; dico factum: Siquidem, 4. 1. hæ omnes sibi mutuò æquantur; ac proindè octo 3gla EHk, EFH &c. sunt æquilatera, & æqualia; adeòque, 27. & 31. *def.* 11. constituunt octaedrum in data pyramide descriptum. Q. E. F.

PROPOSITIO III.

I*N dato Cubo (LQKOCDBA) Octaedrum describere.*

Conne-

Connectantur quadratorum centra duodecim lineis rectis; quæ proindè, 4. 1. æquabuntur sibi mutuò; adeoquè octo 3gla efficiunt æquilatera, & æqualia; ac proindè, 31. & 27. *def.* 11. inscriptum est cubo octaedrum. Q. E. F.

PROPOSITIO IV.

IN dato Octaedro (AZ) Cubum inscribere.

Coniungantur centra triangulorum duodecim rectis; quæ, 4. 1. æquales sunt, & 2. 6. sibi respectivè parallelæ (si nempè triangulorum centra inveniantur ductis ex ipsorum angulis lineis ad bases perpendicularibus; Nam tunc hæ perpendiculares lineæ secabuntur proportionaliter à lineis centra connectentibus); ergo resultabunt sex quadrata sibi similia, & æqualia; quæ proindè, 31. *def.* 11. in octaedro cubum constituent. Q. E. F.

PROPOSITIO V.

IN dato Icosaedro Dodecaedrum inscribere.

Connectantur 20 triangulorū centra totidem rectis; quæ proindè, 4. 1. æquabuntur sibi mutuò; proindequè 12 pentagona constituent sibi æquilatera, & æquiangula, ac proindè inscriptum erit Icosaedro Dodicaedrum. Q. E. F.

LAVS DEO.

APPEN-

APPENDIX

AD. II. LIBRVM.

PROP. I. Dico sibi æquari, 18. *ax*. 1. AF, & AG, pl. CH, pl. DF.

PROP. 2. Dico sibi æquari, 18. *ax*. 1. AE, & AC, pl. DE.

PROP. 3. Nempè, si æquentur AC, & AE; æquabuntur, 18. *ax*. 1. AF, [hoc est BAC] & AD, pl. CF (hoc est ACq. pl. ACB]

PROP. 4. Dico sibi æquari, 18. *ax*. 1. ABq, (sivè EB] & ACq pl. CBq. pl. 2. ACB, sivè GC, pl. DH, pl. 2 Ek, nam, 43. 1. sibi æquāt. Ek, & kB.

PROP. 5. Dico sibi æquari OE, pl. PL, & FC. Nam, 43. 1. & 2. *ax*. 1. FB æquatur ipsi GG, sivè, 36. 1. ipsi LE. Quod si addas commune PC, æquabuntur, 2. *ax*. 1. FC, & OE, pl. PL. Q. E. D.

PROP. 6. Dico sibi æquari EB, & HC, pl. GL; Nam, 43. 1. EQ æquatur ipsi QB, sivè, 36. 1. ipsi LC: Quod si utrique addas HB, pl. GL; æquabuntur EB, & HC, pl. GL. Q. E. D.

PROP. 7. Dico, sibi æquari kD, pl. FC, & 2. FD, pl. HG; Nam fiat EB æquale ipsi FC; Ergo, 43. 1. & 2. *ax*. 1. sibi æquabuntur kO, pl. EB, pl. FD, pl. HG, [sivè 2. FD, pl. HG] & KD pl. FC. Q. E. D.

PROP. 8. Dico, sibi æquari ED, & 4 BN, pl. HS: Nam, 43. & 36. 1. sibi æquantur MB, IC, ΓI, RP, uti & sibi PD, KN Gk, ER; ergo 4 BN pl. HS æquab. ipsis MB, pl. IC, pl. TI, pl. RP, pl. PD, pl. kN, pl. Gk, pl. ER, pl. HS [hoc est toti ED. Q. E. D.

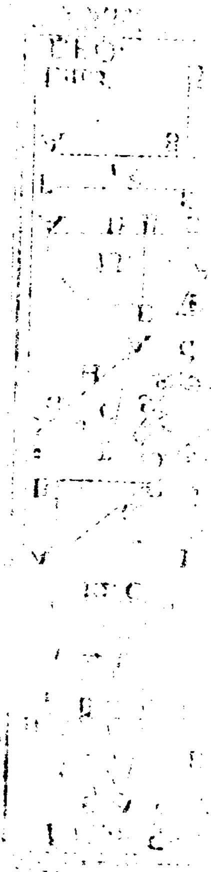
PROP. 9. Dico, sibi æquari ABq. pl. BDq. & 2 ACq. pl. 2 BCq. Fiat CM perpendicularis, & æqualis ipsi AC, & perficiatur schema; ergo, 5, & 32. 1. æquabuntur anguli CDM, CMD, CAM, CMA, & unusquisq; illorum erit semirectus. Ità, quoniam, *Constr.* angulus in I. est rectus, & in M semirectus; erit etiam LIM semirectus; ergo sibi æquabūtur, *6.* 1. LI, & LM; Ergo

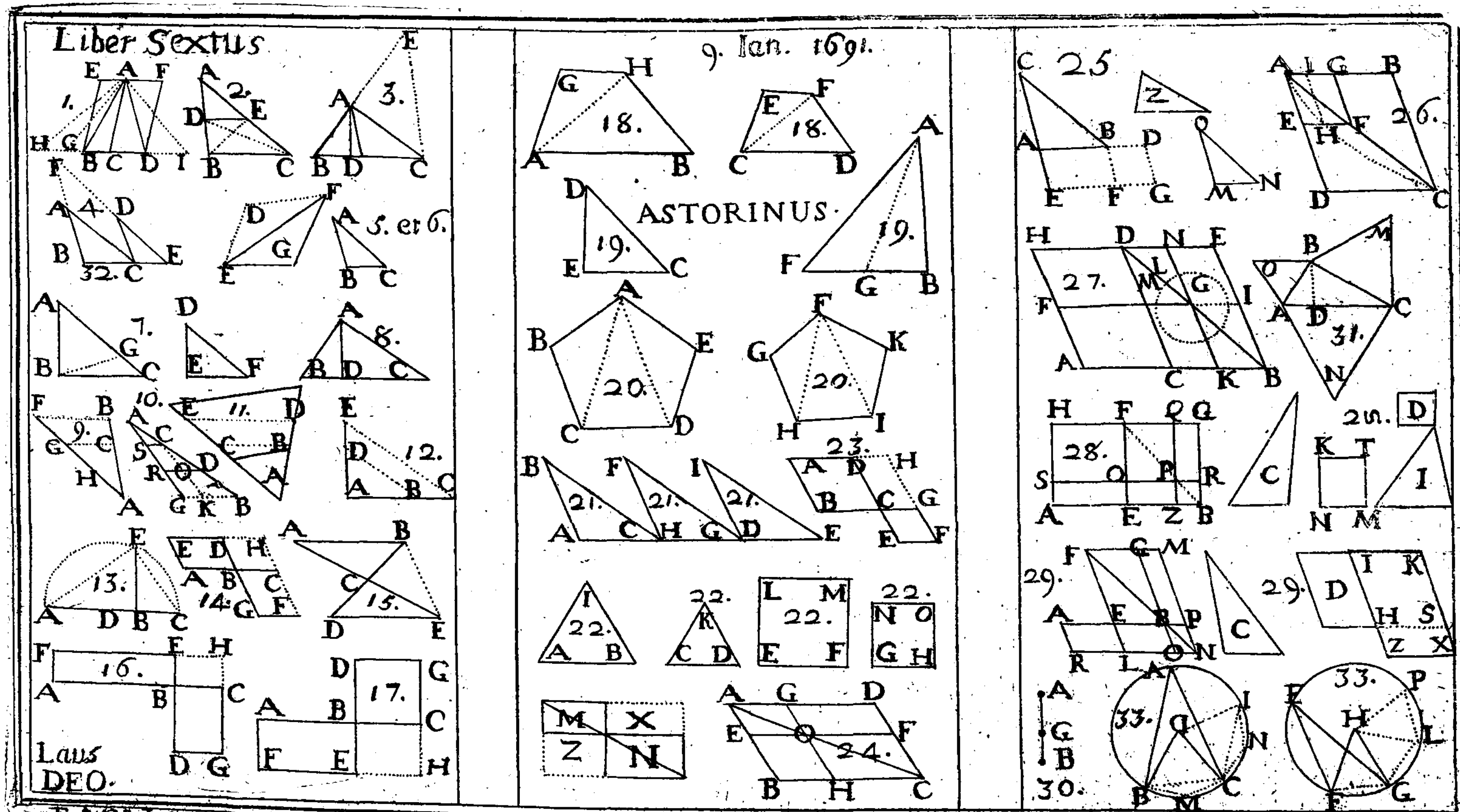
Æqu. hæc {
2 ACq. pl. 2 BCq. (*ut prius*, & 34. 1.)
ACq. pl. CMq. pl. ILq. pl. LMq. (47. 1.)
DMq. pl. MIq. (47. 1.)
DIq. (47. 1.)
BDq. pl. BIq. (*6.* 1.)
ABq. pl. BDq. Q. E. D.

PROP. 10. Dico, sibi æquari AEq. pl. CEq. & 2 ADq. pl. 2 DEq. Nam facta constructione, usque dum concurrant in B lineæ protractæ;

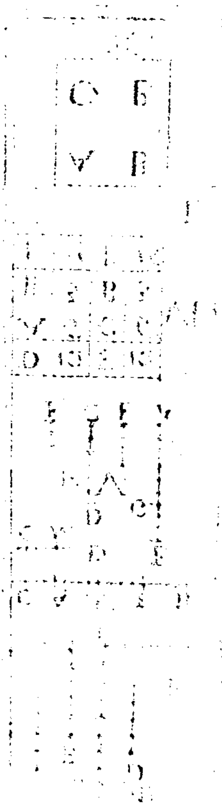
Æqu. hæc {
AEq. pl. CEq. [*6.* 1.]
AEq. pl. EBq. [47. 1.]
ABq. [47. 1.]
ANq. pl. NBq. (47. 1.)
ADq. pl. DNq. pl. NFq. pl. FBq. *6.* & (34. 1.)
2. ADq. pl. 2. DEq. Q. E. D.

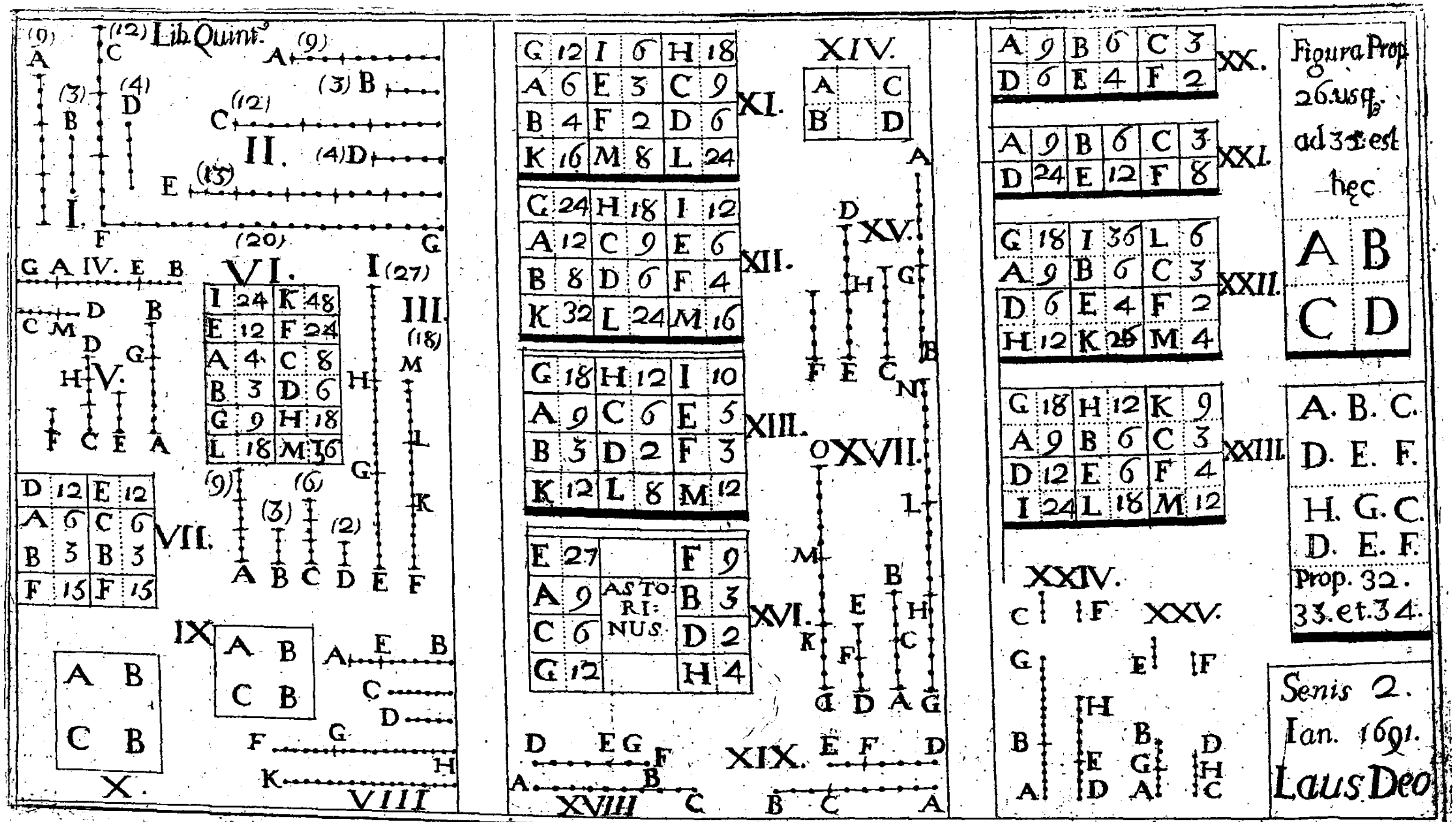
LAVS DEO.



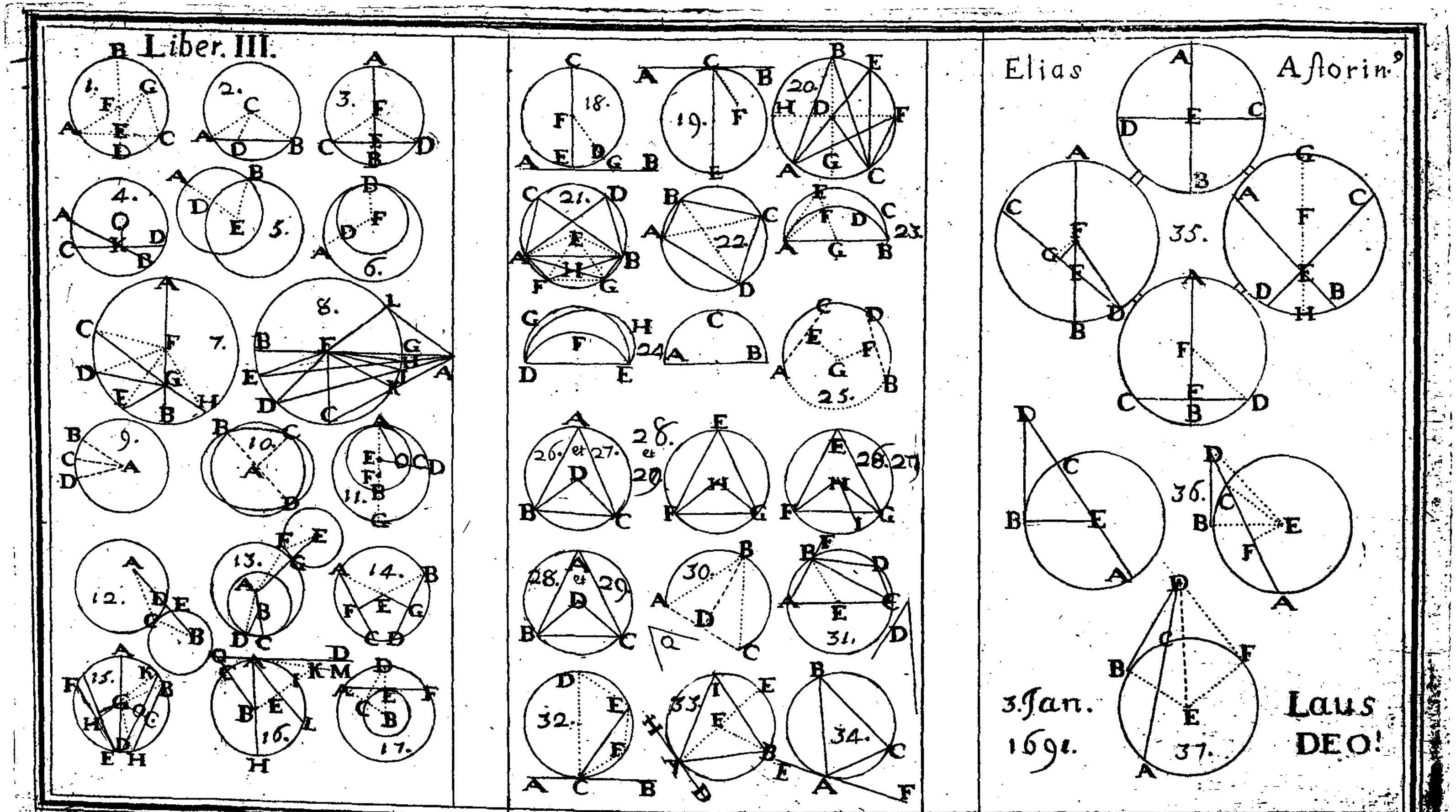


F. Ant. Lor. M.C. Inc.

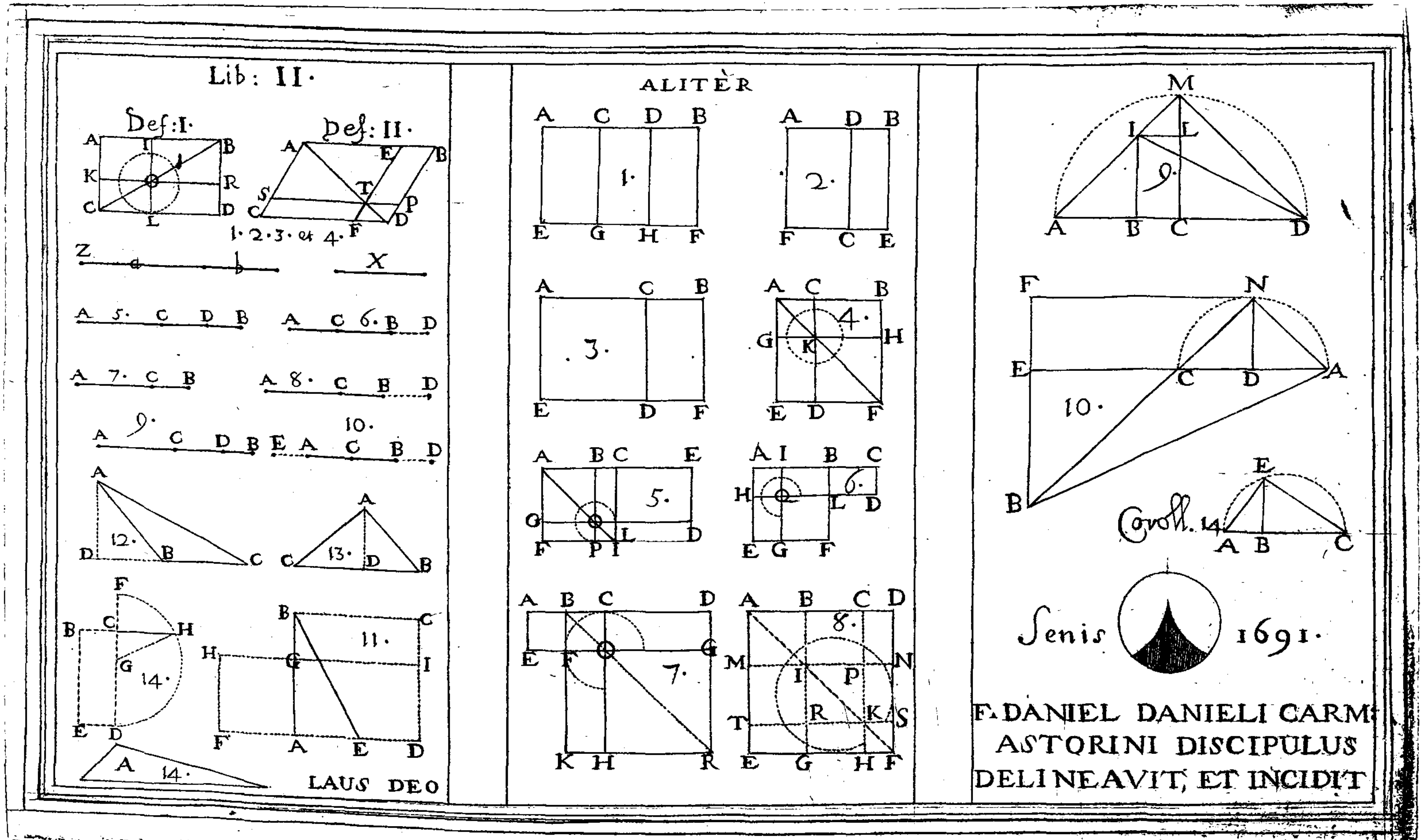


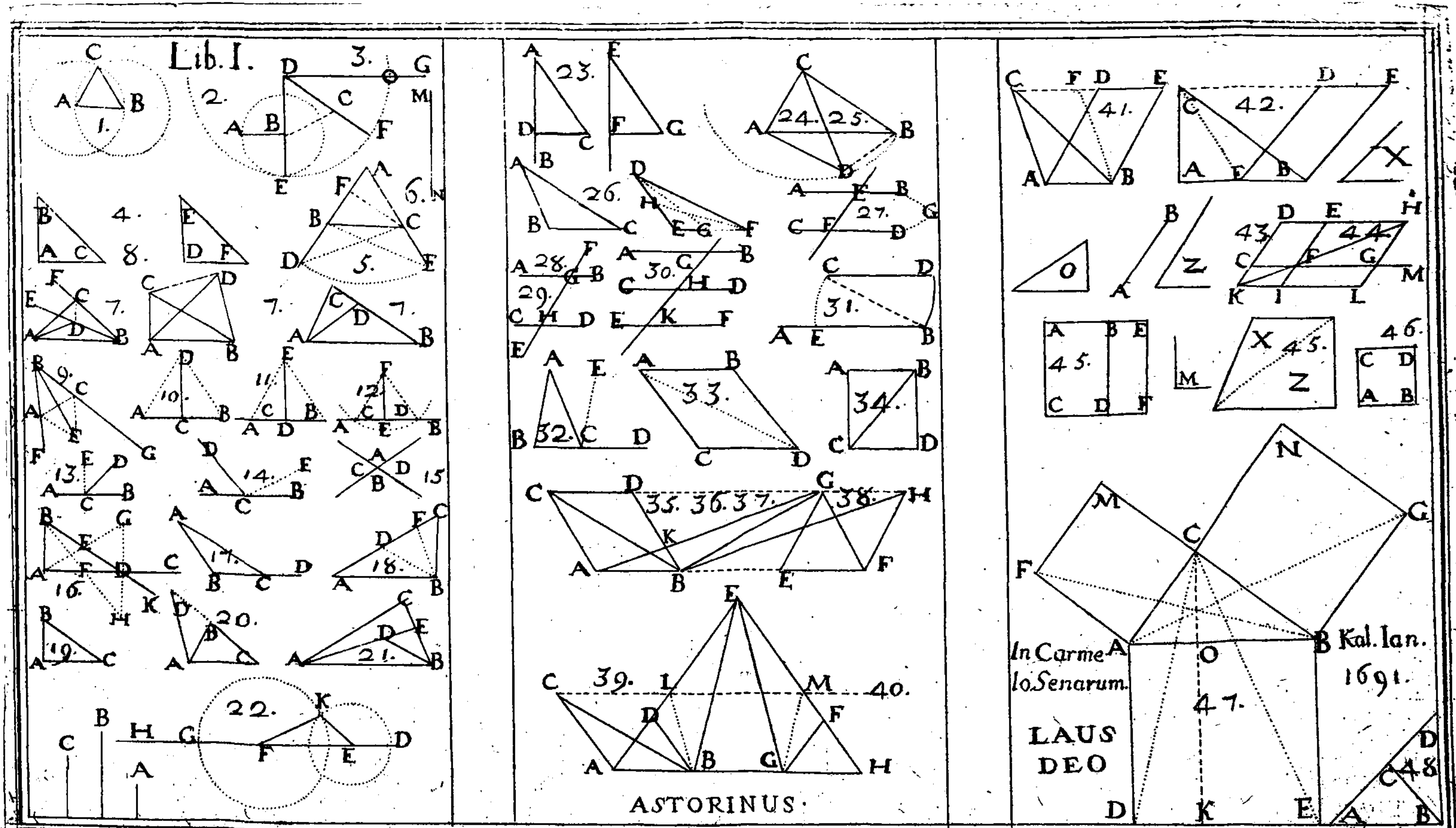


F. Ant. Lor. M.C. Inc.

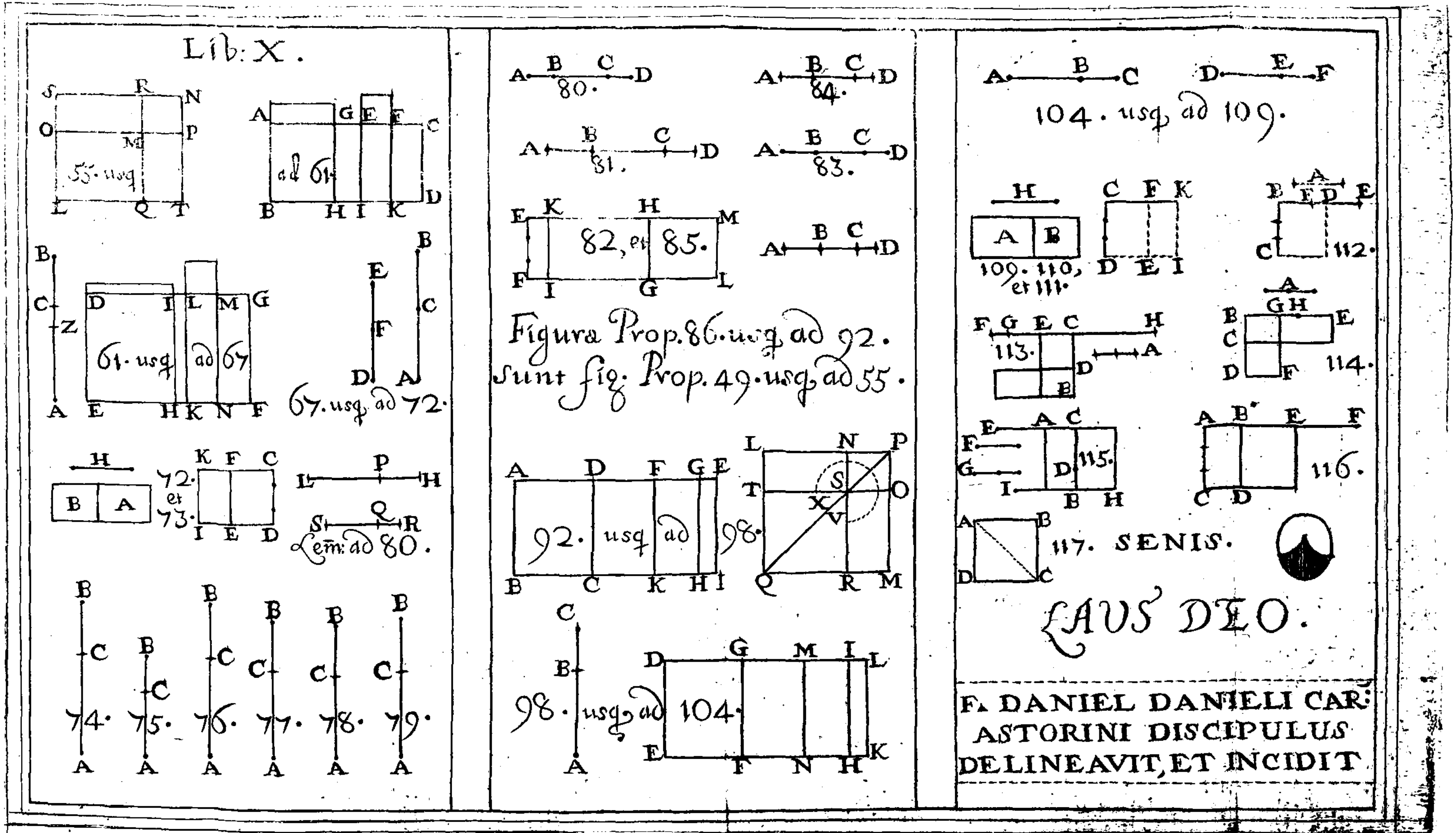


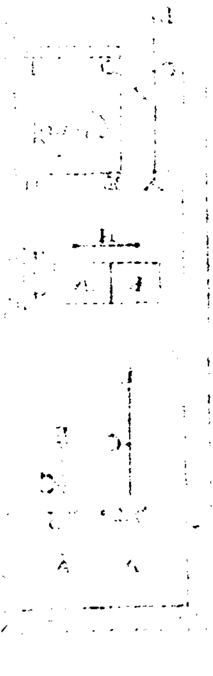
F. Ant. Lor. M.C. Inc.

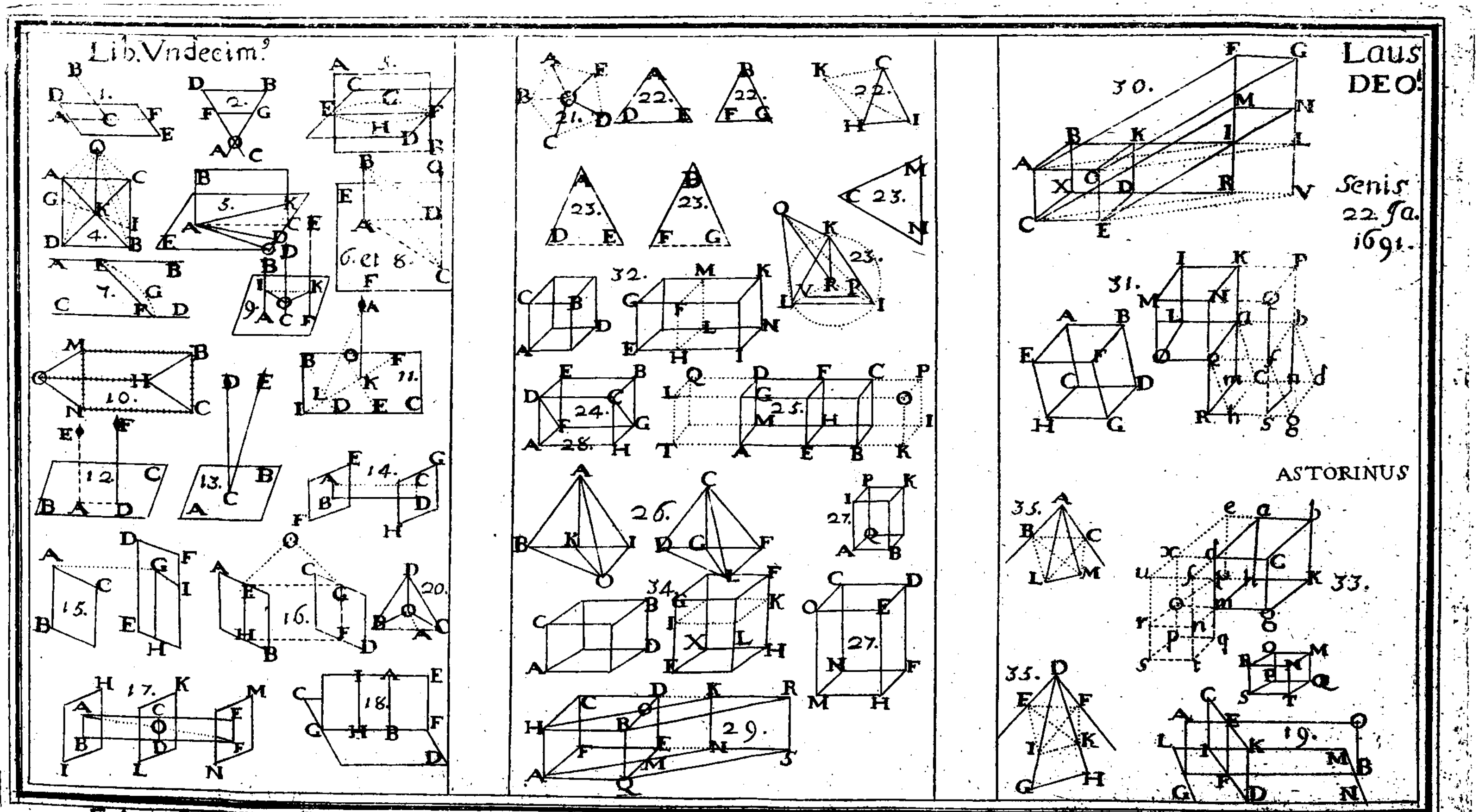

Lib: II.
Def: I.
Def: II.
ALITÈR
Coroll. 14
Senis 1691.
F. DANIEL DANIELI CARM:
ASTORINI DISCIPULUS
DELINEAVIT, ET INCIDIT
LAUS DEO



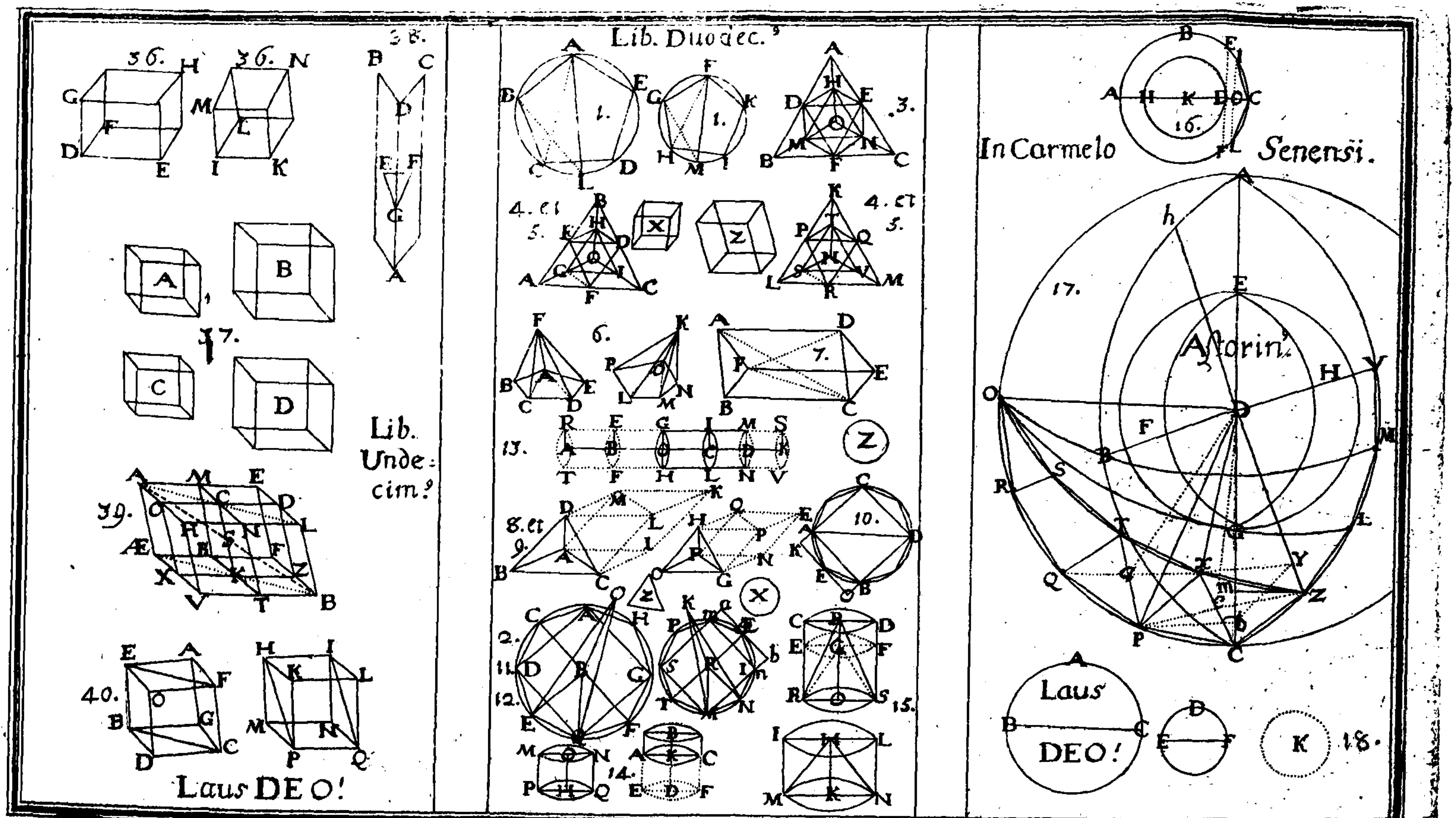
F. Ant. Lorenzini M.C. Incise


Lib: X.
55. usq
ad 61.
61. usq ad 67
67. usq ad 72.
72. et 73.
Lem: ad 80.
74. 75. 76. 77. 78. 79.
80. 81. 82, et 85. 83. 84.
Figura Prop. 86. usq. ad 92.
Sunt fig. Prop. 49. usq. ad 55.
92. usq ad 98.
98. usq ad 104.
104. usq ad 109.
109. 110, et 111.
112. 113. 114. 115. 116.
117. SENIS.
LAUS DEO.
F. DANIEL DANIELI CAR: ASTORINI DISCIPULUS DELINEAVIT, ET INCIDIT

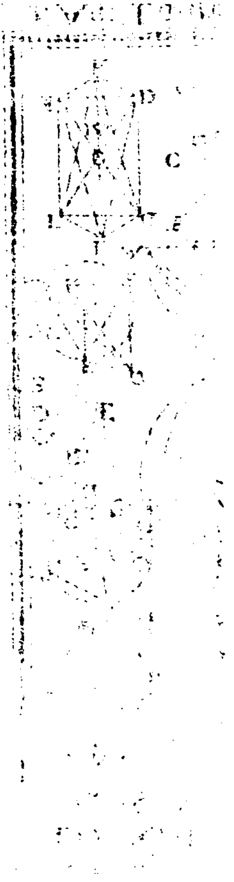


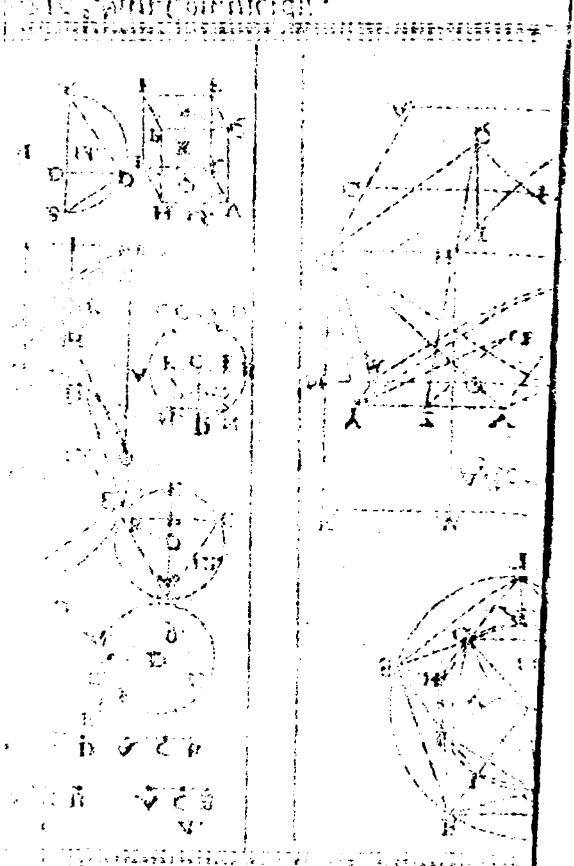


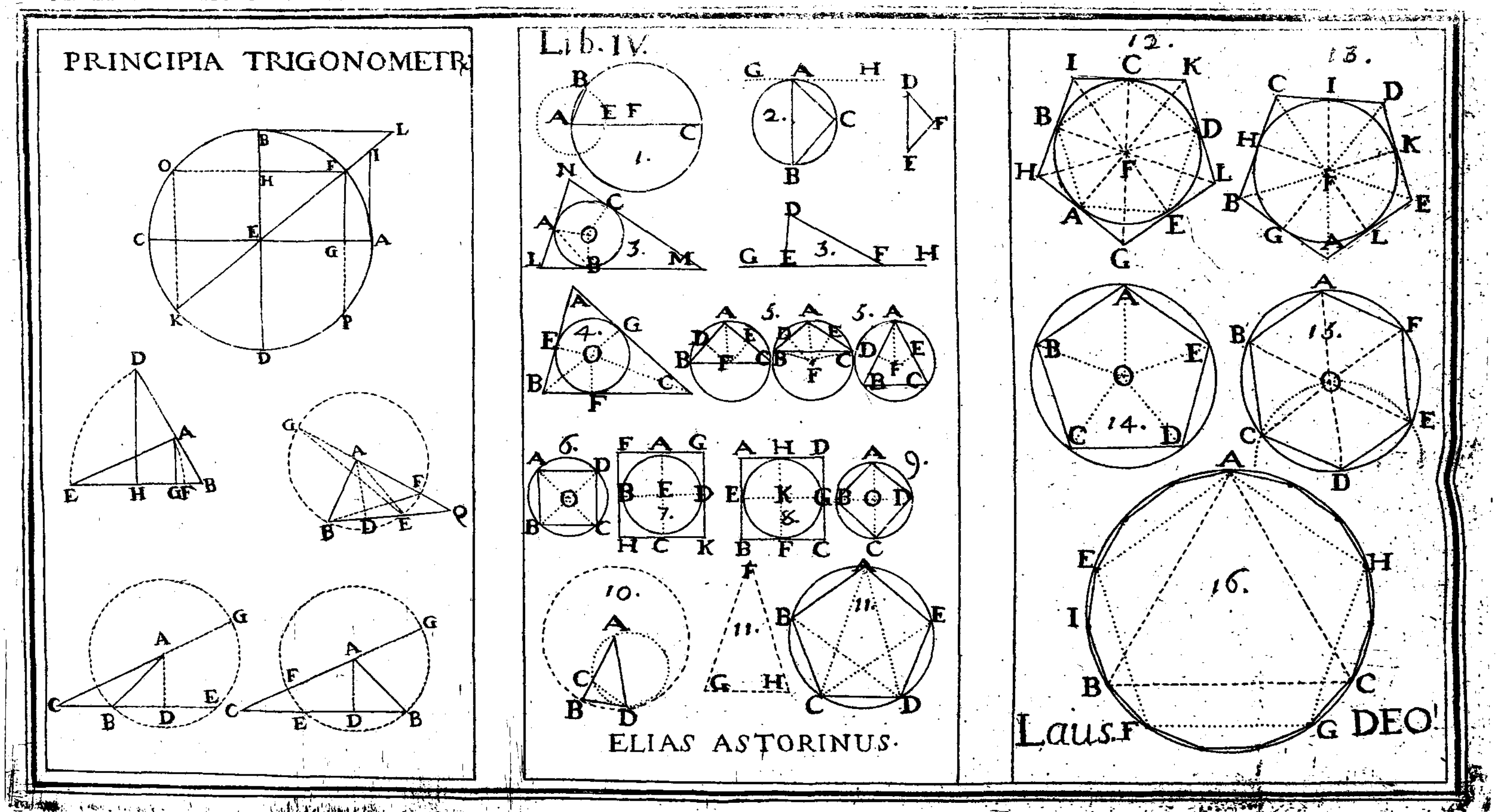
F. Ant. Lor. M. C. Inc.

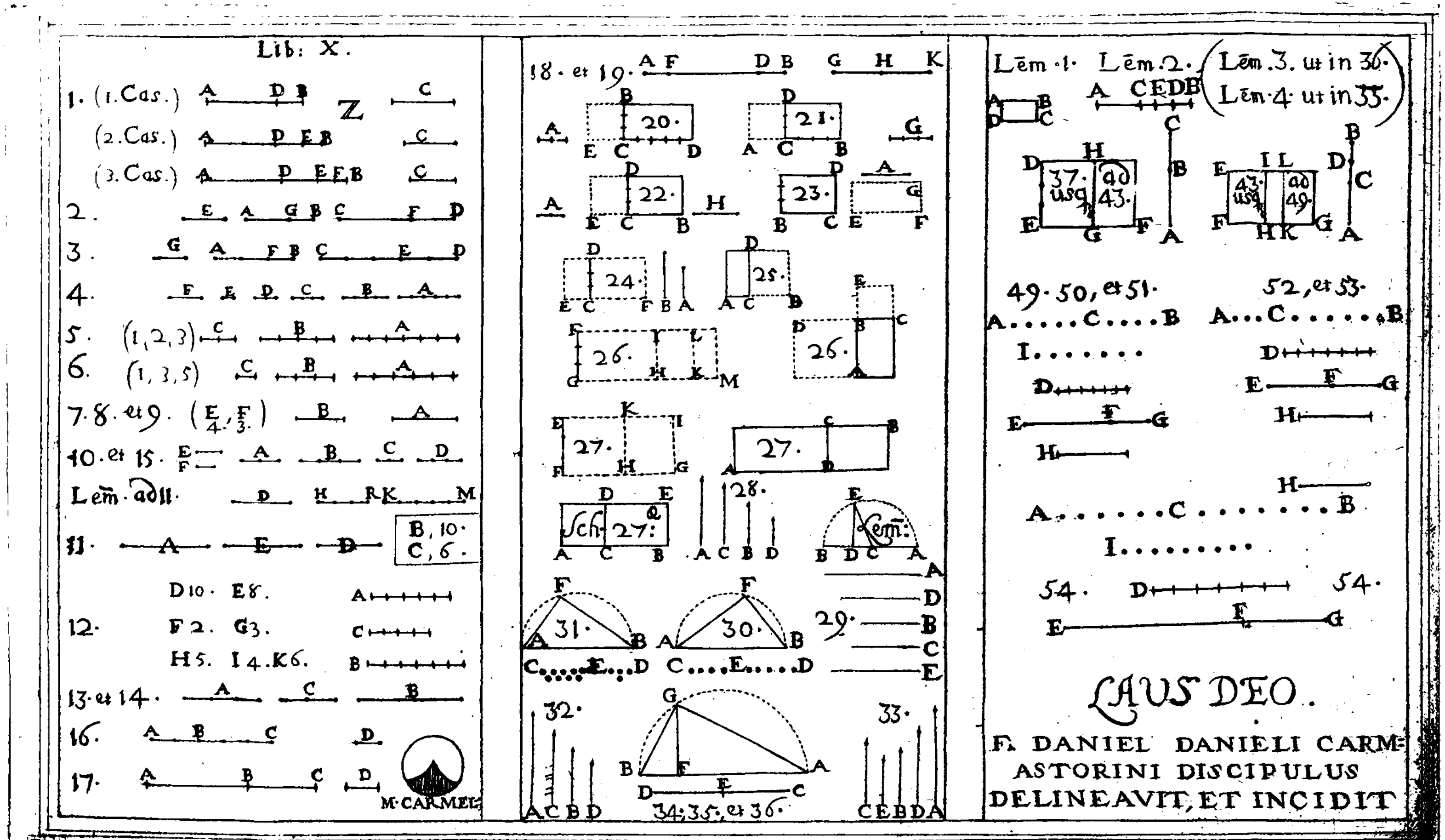


F. Ant. Laurenzin. Min. Con. incidit.






PRINCIPIA TRIGONOMETR
Lib. IV.
ELIAS ASTORINUS.
Laus DEO!


Lib: X.
LAUS DEO.
F. DANIEL DANIELI CARM:
ASTORINI DISCIPULUS
DELINEAVIT, ET INCIDIT
M·CARMEL: